

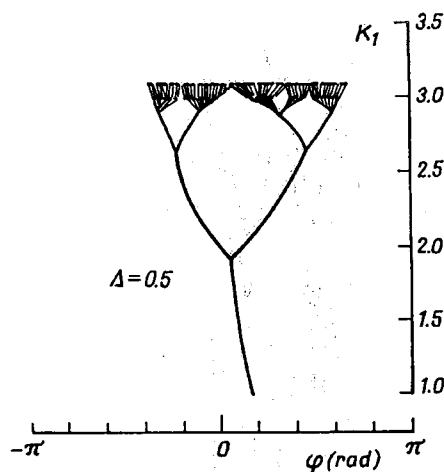


Fig. 12. Bifurcation diagram of 1-order DPLL

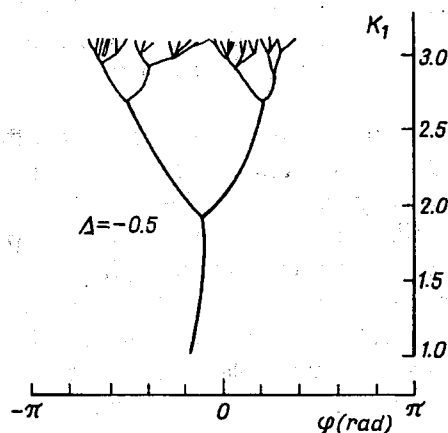


Fig. 13. Bifurcation diagram of 1-order DPLL

$\mathcal{N}:1$ phase entrainment followed by the cascade of doubling period bifurcations until ergodic properties appear. These bifurcations can be characterized by Sharkowskii's theorem of appendix 5 [3,10]. The boundary curve 3 of fig. 3 is the frontier of no cycle slipping phenomenon region considered in [6] carefully. One can notice (see fig. 9) that the sequence of left frontiers of $\mathcal{N}:\mathcal{M}$ frequency regions approaches this curve while $(\mathcal{N}/\mathcal{M}) \bmod 2\pi < 1/2$ and $\mathcal{M}$ increases. One can see by applying the approach of [6] for instance that this corresponds to the existence of oscillatory motions of different periods while this overlapping of the frequency regions of different periodic points occurs. Note that the similar phenomenon takes place while the frequency region of $(\mathcal{N}/\mathcal{M}) \bmod 2\pi = 1/2$ is approached. Also in this case the sequence of bifurcations should be expected but with periods doubled in comparison to the previous one while

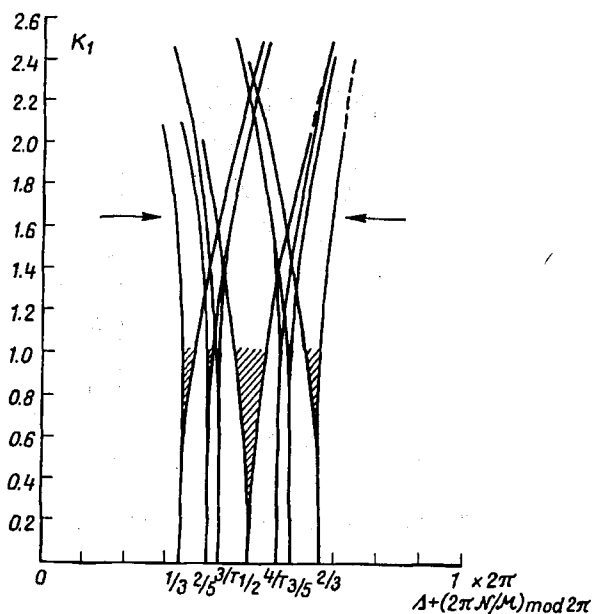


Fig. 14. The frequency region of $N:M$, $(N/M) \bmod 2\pi = 1/2$, phase entrainment. The approximation of no cycle slipping phenomenon region

K_1 increases. One should expect that this observation after proper modification while taking N and M into account is also valid for any frequency region associated with $N:M$ phase entrainment. The lines 2 and 1 of fig. 3 determine the region of local stability of the fixed point of perturbed in frequency $N:1$ phase entrainment which can occur even though the cycle slipping phenomenon coexists. Similar phenomena should be expected in $N:M$ case. However the size of the regions of local stability decrease quickly while the deviation from homeomorphic mapping takes place. Now it is not surprising in view of presented results that the $N:1$ phase entrainment is of practical interest most of all. Moreover while proceeding with the problems previously marked the perturbed $N:1$ phase entrainment will be considered by using the approach of Part I and Part II.

3. THE PERTURBED $N:1$ PHASE ENTRAINMENT ON S^1 CIRCLE MANIFOLD IN THE CASE OF LOOP OF ANY ORDER

The subsequent notions are in aim to consider time variable DPLL-s within the framework of previous parts of this paper. The functional discrete-time nonlinear equation on S^1 circle manifold while describing new cases will be studied to obtain different estimates in respect to suitable metric functions of physical meaning. The existence of these estimates is equivalent to the existence of the acquisition process of the required properties in perturbed $N:1$ phase entrainment case. Let $\{X\}$ stand for the

space of sequences $\{x\}$ which elements are from space X . The operation of projection on 1 circle manifold is given by

$$\pi : R \rightarrow S^1$$

$x \rightarrow \pi(x) = \arg e^{jx} \in < -\pi, \pi >$ closed interval with equivalent end points, R stands for the line of reals.

The equivalent notations for $\pi(x)$ are: $[x]$, $x(\bmod 2\pi)$ or $x \bmod 2\pi$. Let $\{[X]\}$ stand for the space of the sequences $\{[x]\}$ which elements are from $[X]$ space. In the considered case $X = R^1 = R$ and $[X] = [R] = S^1$. Moreover the following holds true for all x, y, α from R :

$$|[x]| = |x| \quad (4a)$$

$$|[\alpha x]| \leq |\alpha| |x| \quad (4b)$$

$$|[x] + [y]| \leq |x| + |y| \quad (4c)$$

$|\cdot|$ stands for the operation of absolute value. Next the function with properties concerning the space $\{[X]\}$ can be defined:

$$\rho : \{X\} \rightarrow R_+ \quad (\text{the set of nonnegative reals})$$

$$\{x\} \rightarrow \rho(\{x\}) < \infty$$

The required and further used properties of ρ are:

$$\rho(\{[x]\}) = 0 \Leftrightarrow \{[x]\} = 0 \quad (5a)$$

Last 0 stands for zero element of $(\{[X]\}, \rho)$ space.

$$\rho(\{[\alpha \{x\}]\}) \leq |\alpha| \rho(\{[x]\}) \quad (5b)$$

$$\rho(\{[x] + [y]\}) \leq \rho(\{[x]\}) + \rho(\{[y]\}) \quad (5c)$$

$(\{[X]\}, \rho)$ stands for the space $\{[X]\}$ with ρ well defined for every $\{[x]\} \in \{[X]\}$. The operations of addition, multiplication and projection while concerning the vectors are performed the coordinate point by the coordinate point and the properties stated in lines (4) are followed. Now the different cases of $(\{[X]\}, \rho)$ space can be listed.

a) The $(\{[X]\}, \rho_1)$ space of the sequences of finite pseudoenergy.

$$\rho_1 : \{[X]\} \rightarrow R_+$$

$$\{[x]\} \rightarrow \rho_1(\{[x]\}) = \sqrt{\sum_{m=0}^{\infty} x(m)^2 r_0^{-2m}} \quad (6a)$$

$$r_0 \in < 0, 1 > \subset R.$$

b) The $(\{[X]\}, \rho_2)$ space of the sequences with asymptotic metric

$$\rho_2 : \{[X]\} \rightarrow R_+$$

$$\{[x]\} \rightarrow \rho_2(\{[x]\}) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{m > M} |[x(m)]|. \quad (6b)$$

c) The $(\{[X]\}, \rho_3)$ space of the sequences of finite pseudopower

$$\begin{aligned} \rho_3 : \{[X]\} &\rightarrow R_+ \\ \{[x]\} \rightarrow \rho_3(\{[x]\}) &= \overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=0}^M |[x(m)]|^2} \end{aligned} \quad (6c)$$

d) The $(\{[X]\}, \rho_4)$ space of the sequences with finite peak value

$$\begin{aligned} \rho_4 : \{[X]\} &\rightarrow R_+ \\ \{[x]\} \rightarrow \rho_4(\{[x]\}) &= \sup_{m \geq 0} |[x(m)]|. \end{aligned} \quad (6d)$$

Now, the next step is to give the estimates concerning the operator of convolution and the nonlinearity of the DPLL. The operator of convolution is used while modelling the dynamics of DPLL.

Let

$$A_{\lambda,1}\{k, u\} \triangleq \sum_{l=0}^k k_{\lambda,1}(k-l)u(l). \quad (7a)$$

Suppose

$$\forall_{k \in \{u\}} \forall_{\{u\} \in \{R\}} \rho(\{[A_{\lambda,1}\{k, u\}]\}) \leq \alpha_1 \rho(\{u\}) \quad (7b)$$

and

$$0 \leq \alpha_1 < \infty.$$

Then there is operator

$$\begin{aligned} A_{\lambda,1} : \{R\} &\rightarrow (\{S^1\}, \rho) \\ \forall_{\{u\} \in \{R\}} &\rightarrow \{[A_{\lambda,1}\{u\}]\} \in (\{S^1\}, \rho) \end{aligned} \quad (7c)$$

and

$$\forall_{\{u\} \in \{R\}} \rho(\{[A_{\lambda,1}\{u\}]\}) \leq \alpha_1 \rho(\{u\}). \quad (7d)$$

After the estimate of the operator of convolution has been given in terms of ρ metric the following constraint concerning the nonlinearity of the loop can be introduced

$$\begin{aligned} \forall_{\{R\} \in \{u\}} \rho(\{u\}) &\leq \alpha_2 \rho(\{[x]\}) + a \\ \alpha_2 \geq 0, \quad a &\geq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

It is given in terms of ρ metric either. The sequence $\{u\}$ of (8) while exhibition nonlinear dependence on $\{x\}$ will be specified further. The idea of studying the perturbed $N:1$ phase entrainment relies on the concept of $(\{[X]\}, \rho)$ space together with the nonlinear discrete-time functional equation of the loop of convolutional form. By using the

estimate of (7) and (8) new estimates concerning the phase error process can be obtained this way. This has resulted in the theorems of previous parts [1]. Just that approach is being extended in this part to deal with the response of DPLL due to the ramp signal in frequency first. Then the DPLL with variable filter in the presence of noise is considered.

5. THE STABILITY OF SECOND AND THIRD ORDER DPLL-s IN THE FREQUENCY RAMP SIGNAL CASE

The equations of the DPLL-s of second and third order are derived in the frequency ramp signal case in Appendix 7. Let us consider the case of the loop of second-order while one is referred to the previous parts of this paper to see new elements of the model in terms of equation of convolutional form. The equation of this loop is (see Appendix 7)

$$\begin{aligned}
 x(k) = & \sum_{l=0}^{k-1} k_{\lambda,1} (k-l) ((\tilde{\omega}(l+1, l+2) \tilde{X}'_l - \lambda x(l))) K_1 + \\
 & - K_1 r_l (\tilde{\omega}(l+1, l+2) \tilde{X}'_{l+1} - \lambda x(l+1)) + \\
 & + \sum_{l=0}^{k-1} k_{\lambda,1} (k-l) \in(l, l+1, l+2) (x(l+1) - x(l)) + \\
 & + x_\lambda(k) + \sum_{l=0}^k k_{\lambda,1} (k-l) d(l)
 \end{aligned} \quad (9a)$$

The upper index in the operation of convolution can be set to $k-1$ due to the delay which occurs in the digital circuitry of the loop. Respectively x stands for the phase error process in the loop which represents the deviation from the state of phase entrainment, $k_{\lambda,1}$ for the unit pulse response of the linear part of loop's model, while K_1 , r_l are the coefficients resulting from the parameters of the loop's filter. Whereas $\tilde{X}'_k$ stands for the signal to the loop's filter input. The frequency ramp signal is

$$\begin{aligned}
 \theta(t) &= \theta_0 + \Omega_0 t + \Omega_1 t^2 \\
 \omega &\triangleq \omega_0 + \Omega_0 : \omega_0 \triangleq 2\pi/T : K_1 = \omega G_1 : K_2 = \omega G_2 :
 \end{aligned} \quad (9b)$$

$$r_l = \frac{G_2}{G_1} + 1 : G_1, G_2 \text{ are the coefficients of the loop's filter of second order.}$$

Moreover (see Appendix 7)

$$\begin{aligned}
 A(k, k+1) &\triangleq T\Omega(k, k+1) \\
 \Omega(k, k+1) &\triangleq \Omega_0 + \Omega_1(t_{k+1} + t_k) \\
 \omega(k, k+1) &\triangleq \omega_0 + \Omega(k, k+1) \\
 \tilde{\omega}(k, k+1) &\triangleq \omega(k+1, k+2)/\omega \\
 \in(k, k+1, k+2) &\triangleq \frac{\omega(k+1, k+2)}{\omega(k, k+1)} - 1, \quad k = 0, 1, \dots
 \end{aligned} \quad (9c)$$

The discrete-time waveform $x(k)$ of (9a) while including initial conditions is the response due to the linear part of the loop's model. Whereas $d(k)$ of (9) is given in terms of variable frequency offset:

$$d(k) = \tilde{A}(k, k+1, k+2) = A(k+1, k+2) - \frac{\omega(k+1, k+2)}{\omega(k, k+1)} A(k, k+1) \quad (9d)$$

$$k = 0, 1, \dots$$

First of all the following observations are valid while (9a) is of concern;

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_\lambda(k) = 0 \quad (10a)$$

$$\sup_{k \geq 0} |d(k)| \leq \epsilon_1 \approx 0 \quad (10b)$$

$$\sup_{k \geq 0} |\epsilon(k, k+1, k+2)| \leq \epsilon_2 \approx 0. \quad (10c)$$

Secondly let (9a) be considered in respect to S^1 circle manifold. Then in view of ρ metric properties

$$\begin{aligned} \rho(\{[x]\}) \leq & \rho\left(\left\{\left[\sum_{l=0}^{k-1} k_{\lambda,1}(k-l)(\tilde{\omega}(l+1, l+2)\tilde{x}_1 - \lambda x(l)K_1 + \right.\right.\right. \\ & \left.\left.\left. - K_1 r_l(\tilde{\omega}(l+1, l+2)X'_{l+1} - \lambda x(l+1))\right]\right\}\right) + \\ & + \rho\left(\left\{\left[\sum_{l=0}^{k-1} k_{\lambda,1}(k-l)\left(\epsilon(l, l+1, l+2)x(l+1) - \epsilon(l, l+1, l+2)x(l)\right)\right]\right\}\right) + \\ & + \rho(\{[x_\lambda(k)]\}) + \rho\left(\left\{\left[\sum_{l=0}^k k_{\lambda,1}(k-l)d(l)\right]\right\}\right). \end{aligned} \quad (11a)$$

Moreover the constraints on loop's nonlinearity should be specified next. Let

$$\tilde{\omega}(l+1, l+2)\tilde{X}'_l - \lambda x(l) = \tilde{\omega}(l+1, l+2)\tilde{X}'_{ol} - \lambda x(l) + \tilde{N}_{ef}(l) \quad (11b)$$

while $\tilde{X}'_{ol}$ stands for the effective deterministic part of $\tilde{X}'_l$ and $\tilde{N}_{ef}$ for the effective noise component of it, $l=0,1,\dots$. The example of such a decomposition are given in the previous parts of this paper in details. If the loop's nonlinearity is given in terms of the graph of fig. 15 then

$$\begin{aligned} |u(l)| & \leq R |[x(l)]| + a, \quad a \geq 0, \\ u(l) & \triangleq \tilde{\omega}(l+1, l+2)\tilde{X}'_{ol} - \lambda x(l) \text{ for all } l \text{ integer.} \end{aligned} \quad (12)$$

The particular constraints of (8) form can be obtained while following (12) ($\alpha_2=R$ of fig. 15). Now, let us consider some special cases only.

Case 1

Suppose

A1. The noise and quantization effects are negligible.

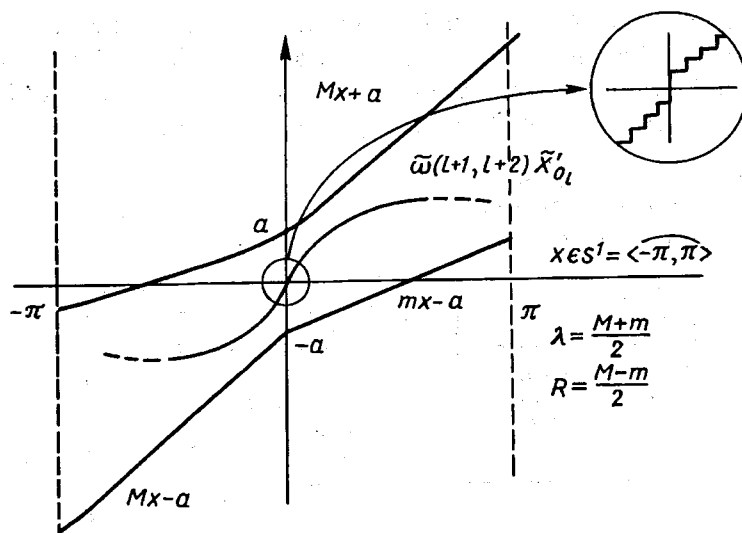


Fig. 15. The illustration of the constraint (8) concerning the nonlinearity of the loop

A2. The initial state of the loop is very close to the state of phase entrainment i.e

$$\sup_{k \geq 0} |[x_i(k)]| = \rho_4(\{[x_i]\})$$

A3.

$$\lim_{l \rightarrow \infty} |k_{i,1}(l)| = 0.$$

A4. Relations (10) are valid.

Then in view of (10), (11) and (12) and ρ_4 metric used

$$\begin{aligned} \rho_4(\{[x]\}) &= \sup_{k \geq 0} |[x(k)]| \leq \alpha'_1 K_1 R (1 + r_l) \rho_4(\{[x]\}) + \\ &+ 2\alpha'_1 \epsilon_2 \rho_4(\{[x]\}) + \epsilon_1 \alpha'_1 + \rho_4(\{[x_i]\}) = \\ &= (\alpha_1 R + \epsilon_0) \rho_4(\{[x]\}) + \epsilon + \rho_4(\{[x_i]\}) \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\alpha'_1 \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{l=0}^{\infty} |k_{i,1}(l)| \quad (13b)$$

$$\alpha_1 \stackrel{\text{df}}{=} \alpha'_1 K_1 (1 + r_l) \quad (13c)$$

$$\epsilon_0 \stackrel{\text{df}}{=} 2\alpha'_1 \epsilon_2 \quad (13d)$$

$$\epsilon \stackrel{\text{df}}{=} \epsilon_1 \alpha'_1. \quad (13e)$$

That is why if $R \simeq 0$ then $\alpha_1 R \ll 1$ and

$$\rho_4(\{[x]\}) \leq \frac{\rho_4(\{[x]\}) + \epsilon}{1 - (\alpha_1 R + \epsilon_0)} \leq \epsilon' \simeq 0. \quad (13f)$$

The meaning of last inequality is that the phase entrainment is maintained if the value of parameter R is small enough. However $\tilde{\omega}(l, l+1)$, $l=0,1,\dots$ (see fig. 15) which can be

given the interpretation of the normalized instantaneous frequency of the incoming waveform (see 9c) increases in time. That is why the gain of the loop should be controlled in order to assure that the constraint of fig. 15 holds true with R small. The modified DPLL considered by Chie first [8] is shown in fig. 16. Moreover

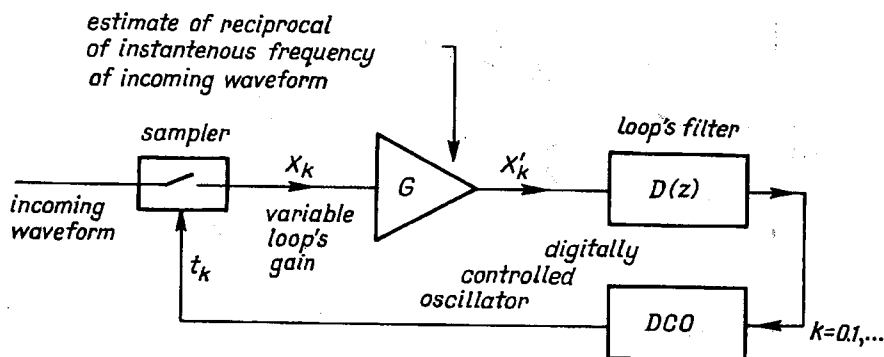


Fig. 16. Controlled DPLL for tracking the frequency ramp signal

$$X'_k = X_k \cdot G(k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (14a)$$

whereas variable $G(k)$ should be an estimate satisfying

$$G(k) \simeq \frac{1}{\tilde{\omega}(k+1, k+2)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (14b)$$

If (14b) holds true then the conditions assuring the stability of the loop are fulfilled.

Case 2

Suppose

A1. The noise is negligible

A2. $\lim_{k \rightarrow \infty} |k_{\lambda,1}(k)| = 0$

A3. The constraint (12) is valid for all $x \in S^1 = \langle -\pi, \pi \rangle$.

A4. Relations (10) are valid.

Then one can prove by using ρ_2 asymptotic metric that the perturbed state of $\mathcal{N}$:1 phase entrainment can be acquired for all $x \in S^1$ in this case. First if

$$y(k) = \sum_{l=0}^k k_{\lambda,1}(k-l) u(l) \quad (15a)$$

then

$$\rho_2(\{[y]\}) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{k > M} |[y(k)]| \leq \lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{k > M} |y(k)| = \rho_2(\{y\}) \quad (15b)$$

But

$$\begin{aligned}
\rho_2(\{[y]\}) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{k > 2M} \left| \sum_{l=0}^k k_{\lambda,1}(l) u(k-l) \right| \leq \\
&\leq \lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{k > 2M} \left| \sum_{l=0}^M k_{\lambda,1}(l) u(k-1) \right| + \lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{k > 2M} \left| \sum_{l=M+1}^k k_{\lambda,1}(l) u(k-l) \right| \leq \\
&\leq \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^M |k_{\lambda,1}(l)| \sup_{k > M} |u(k)| + \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{l=M+1}^{\infty} |k_{\lambda,1}(l)| \sup_{k > M} |u(k)| \leq \\
&\leq \sum_{l=0}^{\infty} |k_{\lambda,1}(l)| \rho_2(\{u\}). \tag{15c}
\end{aligned}$$

Secondly if the constraint (12) holds true then

$$\begin{aligned}
\rho_2(\{u\}) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{k > M} |u(k)| \leq \lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{k > M} |R[x(k)] + a| = \\
&= R \rho_2(\{[x]\}) + a. \tag{15d}
\end{aligned}$$

Finally one gets in view of (11)

$$\begin{aligned}
\rho_2(\{[x]\}) &\leq \alpha'_1 K_1 R \rho_2(\{[x]\}) + \alpha'_1 K_1 a + \alpha'_1 K_1 r_l R \rho_2(\{[x]\}) + \\
&+ \alpha'_1 K_1 r_l a + 2\epsilon_2 \alpha'_1 \rho_2(\{[x]\}) + \alpha'_1 \epsilon_1 = \\
&= (\alpha_1 R + \epsilon_0) \rho_2(\{[x]\}) + \alpha_1 a + \epsilon. \tag{16a}
\end{aligned}$$

$$\alpha'_1 \triangleq \sum_{l=0}^{\infty} |k_{\lambda,1}(l)| \tag{16b}$$

$$\alpha_1 \triangleq \alpha'_1 K_1 (1 + r_l) \tag{16c}$$

$$\epsilon_0 \triangleq 2\alpha'_1 \epsilon_2 \tag{16d}$$

$$\epsilon \triangleq \epsilon_1 \alpha'_1. \tag{16e}$$

But the meaning of last inequality is that

$$\rho_2(\{[x]\}) \leq \frac{\alpha_1 a + \epsilon}{1 - (\alpha_1 R + \epsilon_0)}. \tag{17a}$$

Moreover if $R \ll 1$, $a \simeq 0$ and $\epsilon \simeq 0$ then

$$\rho_2(\{[x]\}) \simeq 0 \tag{17b}$$

and the phase-lock is acquired.

Note that ϵ_1 and ϵ_2 may be smaller than in (10) in this case because their asymptotic values are of interest only. However the gain of the loop should be controlled in this case either. Moreover the characteristic of the phase detector (loop's nonlinearity) should be shaped in order to meet condition A3.

Case 3

Suppose

A1. The constraint (12) is valid

A2. Relation (10) are valid

A3. The effective noise to the loop's input $N_{ef}(l)$ can be described in terms of its power density function

$$\bar{P}_N(e^{j\omega}) \triangleq \overline{\lim_{M \rightarrow \infty}} \left| \frac{\mathcal{Z}\{N_{ef_M}(l)\}}{M} \right|^2 \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$N_{ef_M}(l) \triangleq \begin{cases} N_{ef}(l) & l \leq M \\ 0 & l > M \end{cases}$$

$\mathcal{Z}$ stands for $\mathcal{Z}$ – Laurent transform. Now it can be shown by using ρ_3 metric that the perturbed $\mathcal{N}$:1 phase entrainment can be acquired. Namely, if

$$y_M(k) \triangleq \sum_{l=0}^k k_{\lambda,1}(k-l) u_M(l) \quad (18a)$$

and

$$u_M(l) = \begin{cases} u(l) & l \leq M \\ 0 & l > M \end{cases} \quad (18b)$$

then

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} |y_M(l)|^2 &\leq \sum_{l=0}^{\infty} |y_M(l)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |Y_M(e^{j\omega})|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_{\lambda,1}(e^{j\omega})|^2 |U_M(e^{j\omega})|^2 d\omega \leq \\ &\leq \sup_{\omega \in (-\pi, \pi)} |K_{\lambda,1}(e^{j\omega})|^2 \sum_{l=0}^{\infty} u_M^2(l) \end{aligned} \quad (19a)$$

$$Y_M(e^{j\omega}) = \mathcal{Z}\{y_M(l)\} \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (19b)$$

$$K_{\lambda,1}(e^{j\omega}) = \mathcal{Z}\{k_{\lambda,1}\} \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (19c)$$

$$U_M(e^{j\omega}) = \mathcal{Z}\{u_M(l)\} \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (19d)$$

That is why

$$\rho_3(\{[y]\}) = \overline{\lim_{M \rightarrow \infty}} \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{l=0}^M [y(l)]^2} \leq \alpha'_1 \rho_3(\{u\}) \quad (20a)$$

and

$$\alpha'_1 = \sup_{< -\pi, \pi >} |K_{\lambda,1}(e^{j\omega})|. \quad (20b)$$

Also if

$$|u| \leq R|x| + a \quad (a > 0), \quad (21a)$$

then by Cauchy — Schwartz inequality

$$\rho_3(\{u\}) \leq R \cdot \rho_3(\{x\}) + a. \quad (21b)$$

Now, by taking (10) and (11) into account

$$\begin{aligned} \rho_3(\{x\}) &\leq \alpha'_1 K_1 R \rho_3(\{x\}) + \alpha'_1 K_1 a + \alpha'_1 K_1 R r_l \rho_3(\{x\}) + \\ &+ \alpha'_1 K_1 r_l a + 2\epsilon_2 \alpha'_1 \cdot \rho_3(\{x\}) + \alpha'_1 \epsilon_1 + \epsilon + \sigma_N = \\ &= (\alpha'_1 R + \epsilon_0) \rho_3(\{x\}) + \alpha'_1 a + \epsilon + \sigma_N \end{aligned} \quad (22a)$$

$$\alpha'_1 \triangleq \alpha'_1 K_1 (1 + r_l) \quad (22b)$$

$$\alpha'_1 \triangleq \sup_{\omega \in < -\pi, \pi >} |K_{\lambda,1}(e^{j\omega})| \quad (22c)$$

$$\epsilon_0 \triangleq 2\alpha'_1 \cdot \epsilon_2 \quad (22d)$$

$$\epsilon \triangleq \alpha'_1 \cdot \epsilon_1 \quad (22e)$$

The parameter σ_N of (22a) stands for the mean squared value of the effective noise in the loop's bandwidth and can be estimated in the following way. The noise component enters the estimation of (22a) as (see (10) and (11))

$$z(l) = \sum_{i=0}^{k-1} k_{\lambda,1}(k-i)(K_1 \tilde{N}_{ef}(l) - K_1 r_l \tilde{N}_{ef}(l+1)) \quad (23a)$$

While

$$k_{\lambda,2}(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{K_{\lambda,2}(z)\}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (23b)$$

and

$$K_{\lambda,2}(z) = K_{\lambda,1}(z) K_1 (1 - r_l z) \quad (23c)$$

the effect of noise is given by

$$z(l) = \sum_{i=0}^{k-1} k_{\lambda,2}(k-i) N_{ef}(l) \quad (23d)$$

up to the component which disappears while the discrete time k tends to infinity. That is why

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_{\lambda,2}(e^{j\omega})|^2 \bar{P}(e^{j\omega}) d\omega} \quad (24a)$$

and

$$\bar{P}_N(e^{j\omega}) \triangleq \overline{\lim_{M \rightarrow \infty}} \frac{|\mathcal{Z}\{\tilde{N}_{ef}(l)\}|}{M} \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (24b)$$

is the power density function of the effective noise $N_{ef}(l)$ which enters the loop. Further estimates concerning (24a) are possible [1,5]. Next from (22a)

$$\rho_3(\{[x]\}) \leq \frac{\alpha_1 a + \epsilon + \sigma_N}{1 - (\alpha_1 R + \epsilon_0)}. \quad (25)$$

That is why the mean squared value of oscillations is small if the right hand side of (25) is small. The gain of the loop should be controlled either. Furthermore the equation of the loop of third order has been derived in Appendix 7. Though being more complex it can be considered just the same way like the one of second order is. Next the case of DPLL with variable coefficients of the loop's filter is of concern.

6. THE DPLL WITH VARIABLE COEFFICIENTS OF THE LOOP'S FILTER

One can improve the acquisition of the nonuniform sampling DPLL in the presence of noise disturbances by using time-variable filter [9]. The scope of introducing such a filter is to reduce the effects of noise on the loop's performance subsequently while assuring this way the reasonable capabilities of acquisition on the first stage and small variance of the phase error process in the tracking mode. The equations of the DPLL-s with filter which coefficients undergo variation in time are given in appendix 6. Let us consider these loops while the incoming waveform is detuned in phase and frequency from the local reference. The evolution of the phase error process $x(k)$ in the I - order DPLL is described by the following equation

$$\begin{aligned} x(k) = & x(0)k_{\lambda,1}(k) - \sum_{l=0}^{k-1} k_{\lambda,2}(k-l) \cdot \\ & \left(\frac{G(l)}{G_\infty} g_{ef}(x(l) + \varphi_s) - g_{ef}(\varphi_s) - \lambda x(l) \right) + \\ & + \sum_{l=0}^{k-1} k_{\lambda,2}(k-l) \frac{G_1(l)}{G_\infty} \tilde{N}_{ef}(l). \end{aligned} \quad (26)$$

The time varying gain $G_1(k)$ changes from G_0 to G_∞ , $k=0,1,\dots$. Moreover g_{ef} stands for the effective nonlinearity of the loop whereas N_{ef} for the effective noise to the loop's input. The parameter stands for the steady state error in the absence of disturbing noise. Suppose

$$A1. k_{\lambda,1}(l) \rightarrow 0 \text{ while } l \rightarrow \infty$$

and

$$k_{\lambda,2}(l) \rightarrow 0 \text{ while } l \rightarrow \infty$$

$$A2. \left| \frac{G(l)}{G} g_{ef}(x + \varphi_s) - g(\varphi_s) - \lambda x \right| \leq R|x| + a(l)$$

for all $l \geq 0$ and $\lim_{l \rightarrow \infty} a(l) = 0$.

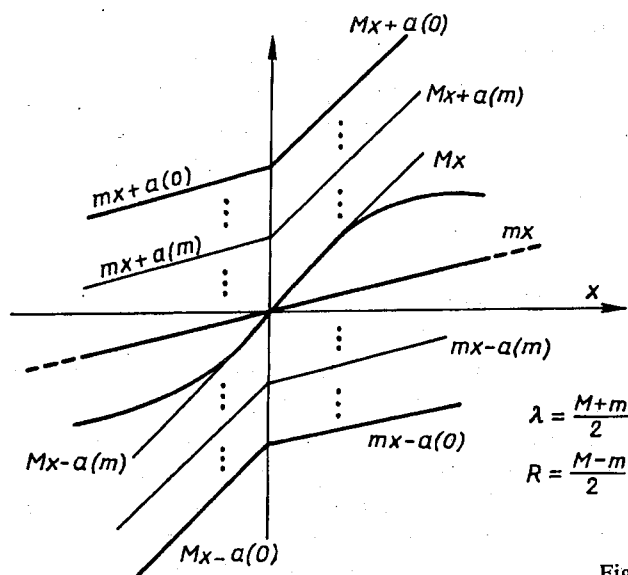


Fig. 17: The illustration of assumption A2

A3. The quantization effects are negligible.

Only few $a(l)$, $l=0,1,\dots$ can be different from zero in practice and only few $G(l)$ are different from G_∞ in practical circuit either. Moreover one can easily find that the mean trajectory of the phase error process $\check{x}(k)$ satisfy the following estimation (see A1 and A2) whereas the mean trajectory is obtained after the operation of expectation on both sides of (26):

$$|[\check{x}(k)]| \leq |[\check{x}(0)]| k_{\lambda,1}(k) + \sum_{l=0}^k k_{\lambda,2}(k-l) (R |[\check{x}(l)]| + |a(l)|) \quad (27a)$$

That is why (see A2 and (15c))

$$\begin{aligned} \rho_2(\{[\check{x}]\}) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{k > M} |[\check{x}(k)]| \leq \lim_{M \rightarrow \infty} \alpha_1 R \sup_{k > M} |[\check{x}(k)]| = \\ &= \alpha_1 R \rho_2(\{[\check{x}]\}) \end{aligned}$$

and

$$\alpha_1 = \sum_{l=0}^{\infty} |k_{\lambda,2}(l)|. \quad (27b)$$

Now the straightforward conclusion from (27) is that the mean trajectory $\check{x}(k)$ of the phase error tends to zero on S^1 if $\alpha_1 R < 1$. Furthermore one can notice that the effect of noise on the loop is subsequently reduced while gaining its final power σ_∞^2

$$\sigma_\infty^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_{\lambda,2}(e^{j\omega})|^2 \bar{P}_N(e^{j\omega}) d\omega. \quad (28)$$

Moreover $\bar{P}_N(e^{j\omega})$ stands for the power density function of the input noise $N_{ef}(l)$, $l=0,1,\dots$. The optimal gain sequence $G_1(l)$ $l=0,1,\dots$ can be designed by using the filtering theory based approach [4]. The equation of the loop of second-order with variable parameters of the loop's filter is given in Appendix 6 also. It can be considered just the same way. The optimal gain sequences $G_1(l)$, $G_2(l)$, $l=0,1,\dots$ can be designed by using the filtering theory approach either.

FINAL REMARKS

The stability of time-varying DPLL has been being considered while the approach of the previous parts of this paper has been extended [1]. The model of the digital phase-locked loop in terms of discrete-time functional equation on S^1 — circle manifold was of concern. The chosen examples of time varying DPLL-s are of practical interest: frequency ramp signal to loop's input and the case of subsequently reduced effect of noise to make the trade off between the tracking and acquisition capabilities of the DPLL as good as possible. The aim was to get insight into the different aspects of DPLL's dynamics within one unified approach. The results can be used on designing stage or as first step to very detailed computer modelling based approach.

REFERENCES

1. M. Żółtowski: *New stability criteria for the nonuniform sampling digital phase-locked loop, Part I and Part II*, (this issue)
2. W. Szlenk: *Wstęp do teorii gładkich układów dynamicznych*, W — wa 1982
3. V. N. Belykh, L. V. Lebedeva: *Investigation of a particular mapping of a circle*. PMM U.S.S.R vol. 46, No 5, pp. 616—620, 1983
4. M. Żółtowski: *Cyfrowe pętle z niejednostajnym próbkowaniem*, Rozprawa doktorska, Gdańsk 1983
5. A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer: *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów*, Warszawa: WKŁ, 1979
6. M. Żółtowski: *On the acquisition behaviour of a first-order digital phase-locked loop with negligible and binary quantization effects*. Rozprawy Elektrotechniczne, 1984, 30, z. 2, pp. 401—412
7. H. C. Osborn: *Stability analysis of N^{th} power digital phase-locked loop — Part I: First-order DPLL*. IEEE Trans. Commun., vol. COM—28, no 8, pp. 1355—1364, August 1980
8. C. M. Chie: *Second-order frequency-aided digital phase-locked loop for Doppler rate tracking*. IEEE Trans. COM—28, no 8, pp. 1431—1436, August 1980
9. L. F. Rocha: *Simulation of discrete PLL with Variable Parameters*. Proceedings of the IEEE, vol. 67, no 3, pp. 440—442, March 1979
10. J. Guckenheimer, P. Holmes: *Nonlinear oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer—Verlag, 1983
11. W. I. Arnold: *Teoria równań różniczkowych*, Warszawa: PWN, 1983

APPENDIX 1

THE MATHEMATICAL MODEL OF THE NONUNIFORM SAMPLING DIGITAL PHASE-LOCKED LOOP

This is the derivation of the extended model of the nonuniform sampling DPLL while taking into account $\mathcal{N}:\mathcal{M}$ phase entrainment with $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ being integers. DPLL is not a zero crossing device in this extended case. The model of the DPLL is shown in fig. 1. The $\mathcal{N}:1$ phase entrainment has been considered previously. Now the $\mathcal{N}:\mathcal{M}$ phase entrainment is of interest. It occurs when there is stable time alignment between incoming waveform of ω_0 radian frequency and the sampling one of ω_s but not only. Also ω_0 and ω_s should be related each to the other according to

$$\begin{aligned}\frac{\omega_0}{\omega_s} &= \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{M}} = \frac{T}{T_0} \\ \omega_0 &= \frac{2\pi}{T_0}, \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}\end{aligned}\quad (\text{A1-1})$$

Now in view of the derivation of Part I one arrives at the following equation while concerning the noise free part of the waveform

$$\begin{aligned}S_{k+1} &= Ag(\omega_0 t_{k+1} + \theta_{k+1}) = Ag\left(\omega_0\left((k+1)T - \sum_{i=0}^k Y_i\right) + \theta_{k+1}\right) = \\ &= Ag\left(2\pi(k+1)\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{M}} - \omega_0 \sum_{i=0}^k Y_i + \theta_{k+1}\right).\end{aligned}\quad (\text{A1-2})$$

The following extended definition of the instantaneous phase error φ_k (phase error shortly) is used next, $k = 0, 1, \dots$

$$\varphi_k \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} \theta_0 \bmod 2\pi, & k = 0 \\ \theta_k - \omega_0 \sum_{i=0}^{k-1} Y_i + \left(2\pi k \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{M}}\right) \bmod 2\pi, & k > 0. \end{cases}\quad (\text{A1-3})$$

The periodicity of g is taken into account by this definition partly. Besides, the phase error characterizes the deviation of the sampling instants from the zero-crossing ones of the incoming waveform. Moreover

$$(\alpha)_{\bmod 2\pi} \stackrel{\text{df}}{=} \arg\{e^{j\alpha}\} \in \langle -\pi, \pi \rangle = S^1 \quad (\text{A1-4a})$$

while S^1 stands for the circle manifold being equivalent to the $\langle -\pi, \pi \rangle$ closed interval with equivalent end points. That is why

$$((\alpha)_{\bmod 2\pi} \pm (\beta)_{\bmod 2\pi}) = (\alpha \pm \beta)_{\bmod 2\pi} \quad (\text{A1-4b})$$

for any α, β from R (the set of reals)

Next from (A1-2) and (A1-3)

$$S_k = A g(\varphi_k) \quad (\text{A1-5})$$

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k + \theta_{k+1} - \theta_k - \omega_0 Y_k + (2\pi \mathcal{N}/\mathcal{M}) \bmod 2\pi \quad (\text{A1-6a})$$

$$t_{k+1} = t_k + \frac{2\pi \mathcal{N}}{\omega_0 \mathcal{M}} - Y_k \quad (\text{A1-6b})$$

$$k = 0, 1, \dots$$

If the initial conditions of the loop's filter are nonzero then there is modulation due to which these nonzero initial conditions have occurred. That is why zero initial conditions of the loop's filter are assumed while the nonzero ones can be taken into good account in terms of prior additional modulation if necessary. Besides any nonzero state can be easily cancelled within the digital circuitry of the DPLL at any time instant. Suppose the output samples from the loop's filter are given in terms of $\mathcal{Z}$ - Laurent transform by

$$\mathcal{Z}\{Y_k\} = \mathcal{Z}\{Q(Ag(\varphi_k) + N_k)\} D(z). \quad (\text{A1-7})$$

Then the baseband model of fig. 2 is valid in respect to $\mathcal{N}/\mathcal{M}$ phase entrainment (see A1-5 - A1-7), while $D(z)$ is the z - domain main transfer function of the loop's filter. The model of fig. 2 can be given in time domain also by using the operation of convolution while acting on the discrete-time waveform to the input of the loop's filter:

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1} = \varphi_k + \theta_{k+1} - \theta_k - \omega_0 \sum_{i=0}^k Q(Ag(\varphi_i) + N_i) d_{k-i} + \\ + \left(2\pi \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{M}}\right) \bmod 2\pi \end{aligned} \quad (\text{A1-8a})$$

and

$$t_{k+1} = t_k + \frac{2\pi \mathcal{N}}{\omega_0 \mathcal{M}} - \sum_{i=0}^k Q(Ag(\varphi_i) + N_i) d_{k-i} \quad (\text{A1-8b})$$

Moreover $\{d_k\}$ is the discrete-time impulse response of the loop's filter:

$$\{d_k\} = \mathcal{Z}^{-1}\{D(z)\}.$$

Let special and important case be considered while the incoming waveform is detuned in phase and frequency in respect to the reference generated by DCO. Namely

$$\theta(t) = \theta_0 + \Omega_0 t \quad (\text{A1-9a})$$

$$\theta_k = \theta_0 + \Omega_0 t_k, \quad (\text{A1-9b})$$

Ω_0 is the radian frequency while θ_0 the phase of detuning.

Moreover frequency and phase offsets can occur as steps. The equation (A1-8a) takes form in this case:

$$\begin{aligned}\varphi_{k+1} = \varphi_k - (\omega_0 + \Omega_0) \sum_{i=0}^k Q(Ag(\varphi_i) + N_i) d_{k-i} + \\ + 2\pi \frac{\mathcal{N} \Omega_0}{\mathcal{M} \omega_0} + \left(2\pi \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{M}} \right) \bmod 2\pi.\end{aligned}\quad (\text{A1-10})$$

APPENDIX 2

SIMPLIFIED MATHEMATICAL MODEL OF THE FIRST-ORDER DPLL IN RESPECT TO $\mathcal{N}\mathcal{M}$ PHASE ENTRAINMENT WITH NEGLIGIBLE QUANTIZATION EFFECTS AND NO NOISE

The aim of introducing simplified model is to get maximum information concerning possible behaviour of the loop within reasonable analytical efforts. More complex situation can be always considered as disturbed case of simpler one and computer can be used to proceed. The required equation in view of (A1-10) is

$$\begin{aligned}\varphi_{k+1} = \varphi_k - GAg(\varphi_k) + 2\pi \frac{\mathcal{N} \Omega_0}{\mathcal{M} \omega_0} + \left(2\pi \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{M}} \right) \bmod 2\pi \quad (\text{A2-1a}) \\ k = 0, 1, \dots\end{aligned}$$

Also in respect to (A1-10)

$$\omega \triangleq \omega_0 + \Omega_0, \quad Q(x) = x, \quad N_k = 0, \quad d_k = G\delta_k \quad (\text{A2-1b})$$

whereas

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0. \end{cases}$$

Equation (A2-1) can be given a short form also

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k - K_1 g(\varphi_k) + \Delta + \left(2\pi \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{M}} \right) \bmod 2\pi \quad (\text{A2-2a})$$

while

$$K_1 \triangleq \omega GA$$

and

$$\Delta \triangleq 2\pi \frac{\mathcal{N} \Omega_0}{\mathcal{M} \omega_0} \quad (\text{A2-2b})$$

Also, see (A1-8b)

$$t_{k+1} = t_k + \frac{2\pi \mathcal{N}}{\omega_0 \mathcal{M}} - \frac{K_1}{\omega} g(\varphi_k). \quad (\text{A2-2c})$$

Now the following observations can be done

- 1) It is enough to consider $\mathcal{N} \leq \mathcal{M}$ while $\mathcal{N}$ and $\mathcal{M}$ have no divisors in common
- 2) The cases

$$\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{M}} \quad \text{and} \quad \frac{\mathcal{N}'}{\mathcal{M}'} = \frac{\mathcal{M} - \mathcal{N}}{\mathcal{M}}$$

exhibit symmetry due to the property;

$$\left(2\pi \frac{\mathcal{M} - \mathcal{N}}{\mathcal{M}}\right) \bmod 2\pi = \left(-2\pi \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{M}}\right) \bmod 2\pi$$

- 3) The function

$h: S^1 \rightarrow S^1$, $S^1 \triangleq \langle -\pi, \pi \rangle$ closed interval with equivalent ends

$$h(\varphi) \triangleq \varphi - K_1 g(\varphi) + \Lambda + \left(2\pi \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{M}}\right) \bmod 2\pi$$

is increasing and reversible while

$$1 - K_1 g'(\varphi) > 0 \quad (g' \text{ derivative of } g)$$

for all $\varphi \in S^1$. If $h(\varphi^*)^p = \varphi^*$ for certain integer $p \geq 1$ then φ^* is a periodic point of h of period p . It is stable if

$$\left. \frac{d h^p}{d \varphi^p} \right|_{\varphi=\varphi^*} < 1. \quad (h^p \text{ stands for the concatenation of } h \text{ } p \text{ times in this case}).$$

4) If the mapping h has a stable periodic or fixed point ($p=1$) then there is stable time alignment between the incoming waveform from the DCO (see A2-2c). Similar statement holds true for the loop of any order.

5) If h has a stable fixed point of period $\mathcal{M}$ on S^1 then there is $\mathcal{N}:\mathcal{M}$ phase entrainment. Similar statement holds true for the loop of any order.

Proof

One gets from (A2-2a) and (A2-2c) while not disturbed ($\Lambda=0$) $\mathcal{N}:\mathcal{M}$ phase entrainment is considered:

$$\begin{aligned} \varphi_{k+\mathcal{M}} &= h \mathcal{M}(\varphi_k) = \varphi_k - \sum_{m=k}^{k+\mathcal{M}-1} K_1 g(\varphi_m) + \mathcal{M} \left(\frac{2\pi \mathcal{N}}{\mathcal{M}} \right) \bmod 2\pi = \\ &= \varphi_k - \sum_{m=k}^{k+\mathcal{M}-1} K_1 g(\varphi_m) \end{aligned} \quad (\text{A2-3a})$$

and

$$t_{k+\mathcal{M}} = t_k + \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{\mathcal{N}\mathcal{M}}{\mathcal{M}} - \frac{1}{\omega_0} \sum_{m=k}^{k+\mathcal{M}-1} g(\varphi_k). \quad (\text{A2-3b})$$

That is why if

$$\varphi_{k+\mathcal{M}}^* = \varphi_k^* = h^{\mathcal{M}}(\varphi_k^*)$$

then

$$\sum_{m=k}^{k+\mathcal{M}-1} K_1 g(\varphi_m^*) = 0 \quad (\text{A2-3c})$$

and

$$t_{k+\mathcal{M}} = t_k + \frac{2\pi \mathcal{N}}{\omega_0}. \quad (\text{A2-3d})$$

It means that there are exactly $\mathcal{M}$ sampling instants at every $\mathcal{N}$ periods of the incoming waveform while

$$\frac{\omega_0}{\omega_s} = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{M}}.$$

Furthermore the time alignment while described in terms of (A2-3d) is stable. The sequence $\{t_k\}$ of (A2-3d) is a periodic cycle of $\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{M}}$ order [3].

APPENDIX 3

SOME PROPERTIES OF THE SIMPLIFIED MODEL OF THE DPLL OF FIRST-ORDER

The mapping h of equation (2) while lifted to R space [2] is:

$$h_l : R \rightarrow R, \quad R \text{ is the set of reals}$$

while

$$h_l(\varphi) = \varphi - K_1 g(\varphi) + \Delta + 2\pi \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{M}} \quad (\text{A3-1a})$$

and l of (A3-1a) stands for the operation in lifting. Alternatively

$$h_l = \varphi + f(\varphi) \quad (\text{A3-1b})$$

$$f(\varphi) = -K_1 g(\varphi) + \Delta + 2\pi \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{M}} \quad (\text{A3-1c})$$

and

$$\Delta = 2\pi \frac{\mathcal{N}\Omega_0}{\mathcal{M}\omega_0} \ll 1. \quad (\text{A3-1d})$$

Let h_l is one to one, continuous and order preserving (increases on R). Respectively $h : S^1 \rightarrow S^1$ is order preserving homeomorphism of S^1 — circle in this case. The function f of (A3-1) is the angle increment function. Moreover

$$f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi) \quad (\text{A3-2})$$

while

$$h_l(\varphi + 2\pi) = h_l(\varphi) + 2\pi. \quad (\text{A3-3})$$

Now Poincare rotation number r_n is

$$\begin{aligned} r_n &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_l^n(\varphi)}{n} = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi + f(\varphi) + \dots + f(h_l^{n-1}(\varphi))}{n} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi + f_n(\varphi)}{n} = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(\varphi)}{n}. \end{aligned} \quad (\text{A3-4})$$

The function f_n of (A3-4) is the angle increment function after n iterations. Namely

$$f_n = h_l^n(\varphi) - \varphi = f(\varphi) + f(h_l(\varphi)) + \dots + f(h_l^{n-1}(\varphi)) \quad (\text{A3-5})$$

Also, the following theorem holds true [2,11].

Theorem

Let h be order preserving homeomorphism of circle of (A3-1), (A3-2) and (A3-3). Then the rotation number r_n exists regardless of the initial condition φ . It is rational if and only if there is a periodic point of h .

Proof

1. The distance between any φ_1 and φ_2 changes after n iterations of h_l by the amount

$$\Delta_n = |f_n(\varphi_1) - f_n(\varphi_2)|.$$

Surley, let $\varphi_1 < \varphi_2$ for instance. Then $h_l^n(\varphi_1) < h_l^n(\varphi_2)$ because h is order preserving. That is why

$$\begin{aligned} \Delta_n &= |h_l^n(\varphi_1) - h_l^n(\varphi_2)| - |\varphi_1 - \varphi_2| = \\ &= |h_l^n(\varphi_2) - h_l^n(\varphi_1) - (\varphi_2 - \varphi_1)| = \\ &= |h_l^n(\varphi_2) - \varphi_2 - h_l^n(\varphi_1) + \varphi_1| = |f_n(\varphi_2) - f_n(\varphi_1)|. \end{aligned}$$

Remember that $\varphi_{\text{mod } 2\pi} = \arg e^{j\varphi} \in S^1 = <-\pi, \pi>$ closed interval with equivalent end points.

2. The following inequality holds true

$$|f_n(\varphi_2) - f_n(\varphi_1)| \leq 2\pi \quad (\text{A3-6})$$

For any φ_1, φ_2 from R . Surely h^n as homeomorphism maps every interval of 2π length exactly onto interval of 2π length. That is why the distance between and two points from $S^1 = <-\pi, \pi>$ cannot be greater than 2π after n iterations of h_l^n .

But for any $\varphi \in R$:

$$\varphi_{\text{mod } 2\pi} \in S^1$$

and

$$f_n(\varphi) = f_n(\varphi_{\text{mod } 2\pi}).$$

That is why (A3-6) holds true for any φ_1, φ_2 from R .

3. Let n_m be such an integer that

$$2\pi n_m \leq f_m(\varphi_0) < 2\pi(n_m + 1) \quad (\text{A3-7})$$

for any integer m and certain $\varphi_0 \in R$. Then

$$\frac{n_m}{m} - \frac{2}{m} < \frac{f_{ml}(\varphi)}{2\pi ml} < \frac{n_m}{m} + \frac{2}{m} \quad (\text{A3-8})$$

for any integer l and any $\varphi \in R$. First from (A3-6)

$$f_m(\varphi_0) - 2\pi < f_m(\varphi_0) + 2\pi.$$

That is why from (A3-7)

$$2\pi n_m - 4\pi < 2\pi n_m - 2\pi < f_m(\varphi) < 2\pi n_m + 4\pi$$

and

$$\frac{n_m}{m} - \frac{2}{m} < \frac{f_m(\varphi)}{2\pi m} < \frac{n_m}{m} + \frac{2}{m}. \quad (\text{A3-9})$$

But

$$f_{ml}(\varphi) = \sum_{i=0}^{l-1} f_m(\varphi^i),$$

while

$$\varphi^i \stackrel{\text{df}}{=} h_l^{mi}(\varphi).$$

That is why (A3-8) holds true.

4. Now let a_m stands for $\langle \frac{n_m}{m} - \frac{2}{m}, \frac{n_m}{m} + \frac{2}{m} \rangle$ closed interval of (A3-9). It has just been proved that $a_{ml} \subset a_m$. Surely $a_{ml} \subset a_l$ as well because the previous derivation is also valid while the integers m, l are interchanged. That is why $a_m \cap a_l \neq \emptyset$ ($\emptyset$ — empty set), while a_m and a_l are closed intersecting each other intervals. That is why the distance between any two points $x, y : x \in a_m, y \in a_l$ is

$$|x - y| \leq \frac{4}{m} + \frac{4}{l} \quad (\text{A3-10})$$

and also

$$\left| \frac{f_m(\varphi)}{2\pi m} - \frac{f_l(\varphi)}{2\pi l} \right| \leq \frac{4}{m} + \frac{4}{l}. \quad (\text{A3-11})$$

Finally

$$\forall \exists \forall \forall : m > n_0, \quad l > n_0 \\ \in > 0 \quad n_0 \quad \varphi \quad (m, l)$$

$$\left| \frac{f_m(\varphi)}{2\pi m} - \frac{f_l(\varphi)}{2\pi l} \right| < \epsilon \quad (\text{A3-12})$$

The last inequality holds true if $n_0 > 8/\epsilon$.

5. $\left\{ \frac{f_n(\varphi)}{2\pi n} \right\}$ is a Cauchy sequence in view of (A3-12) and the rotation number r_n is a limit of it.

6. Now if the fixed point φ^* of $h^{\mathcal{M}}$ exists then

$$h^{\mathcal{M}}_l(\varphi^*) = \varphi^* + 2\mathcal{N}\pi \quad (\text{A3-13a})$$

and

$$f_\mu(\varphi^*) = 2\mathcal{N}\pi \quad (\text{A3-13b})$$

That is why

$$f_{\mathcal{M}}(\varphi^*) = 2\mathcal{N}l\pi \quad (\text{A3-13c})$$

and

$$\lim_{n=\mathcal{M}l \rightarrow \infty} \frac{f_{\mathcal{M}}(\varphi^*)}{\mathcal{M}l} = 2\pi \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{M}} \quad (\text{A3-13d})$$

Note that (A3-13d) holds true for all $\varphi = h^m(\varphi^*)$, $M=0,1,\dots,\mathcal{M}-1$,

7. On contrary if

$$r_n = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{M}} \quad \text{and} \quad f_M(\varphi) < 2\pi \mathcal{N} \quad \text{for all } \varphi \text{ then}$$

$$f_M(\varphi) < 2\pi \mathcal{N} - \epsilon \text{ for certain } \epsilon > 0 \text{ and } r_n < \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{M}}.$$

Or if $f_M(\varphi) > 2\pi \mathcal{N}$ for all then $f_M(\varphi) > 2\pi \mathcal{N} + \epsilon$ and $r_n > \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{M}}$ ($\epsilon > 0$). That is why while avoiding contradiction there exists φ^* and

$$f_M(\varphi^*) = 2\pi \mathcal{N}.$$

APPENDIX 4

SOME PROPERTIES OF THE HOMEOMORPHISM h OF THE CIRCLE $S^1 = \langle -\pi, \pi \rangle$
WHILE $H(S^1)$ IS THE SET OF ALL HOMEOMORPHISMS $h: S^1 \rightarrow S^1$ [2,11]

1. Let $h \in \text{Diff}(S^1)$ [2,11] be the orientation preserving without periodic points and h' (derivative of h) is of finite variation. Then the minimal set A of h is equivalent to S^1 (A — minimal set if closed, invariant under h , $h(A)=A$, without any nontrivial subset being minimal).

2. The rotation number of $h: S^1 \rightarrow S^1$ is

$$r_h = r_n \bmod 1 \in [0, 1) \text{ and } r_n \text{ is the rotation number of } h_n.$$

3. Every $h \in H(S^1) : S^1 \rightarrow S^1$ while orientation preserving with $A = S^1$ is topologically conjugated with angle rotation by $2\pi r_h$ radians.

4. Homeomorphism $h \in \text{Diff}^r(S^1)$ is structurally stable if and only if

1) Then set of periodic points of h is not empty

2) $\frac{dh^p(x_0)}{dx^p} \neq 1$ for every periodic point of period p

5. The topological invariants of structurally stable $h \in \text{Diff}^r(S^1)$ (shortly $h \in \sigma^r(S^1)$) are

1) the number of periodic points

2) the period of periodic points

3) rotation number r_h

Set $\sigma^r(S^1)$ is dense in $\text{Diff}^r(S^1)$

6. The function

$$f: H(S^1) \rightarrow R$$

$$h \rightarrow f(h) = r_h$$

is continuous.

7. If $h: S^1 \rightarrow S^1$ has no periodic points then it is uniquely ergodic: there is exactly one probabilistic invariant measure on S^1 associated with h .

8. The topological entropy of every $h \in H(S^1)$ is equal zero. Other details are available in [2,10,11].

APPENDIX 5

THEOREM OF SHARCOVSKI [3]

1. Let $I = [0, 1]$ be a closed interval and $F: I \rightarrow I$ the set of continuous mappings of I onto itself dependent on parameter α

$$x \in I \rightarrow x \rightarrow F(x, \alpha) \in I$$

2. Let every $F(x, \alpha)$ satisfy Sharkovskii's conditions;

$$Sh: \alpha \in L = [\alpha_1, \alpha_3] \text{ and}$$

$F(x, \alpha_1)$ has a fixed point that attracts all points of I while

$F(x, \alpha_3)$ has a periodic point of period 3.

3. Let α_k^* stand for the bifurcational value of parameter α such that there are no periodic points of period k if $\alpha < \alpha_k^*$ and $F(x, \alpha_k^*)$ has a periodic point of period k .

Then the sequence of bifurcations of mapping $F(x, \alpha)$ appears according to the following order

$$3 < 5 < 7 < \dots < 3 \cdot 2 < 5 \cdot 2 < 7 \cdot 2 < \dots < 2^2 < 2 < 1$$

If

$$k_1 < k_2 \text{ then } \alpha_{k_2}^* \leq \alpha_{k_1}^*.$$

APPENDIX 6

MATHEMATICAL MODEL OF NONUNIFORM SAMPLING DPLL WITH VARIABLE PARAMETERS. THE INPUT WAVEFORM IS DETUNED IN PHASE AND FREQUENCY FROM THE LOCAL REFERENCE

1. First order DPLL

In this case

$$\theta(t) = \theta_0 + \Omega_0 t \quad (\text{A6-1})$$

and the loop's equations are

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k + \theta_{k+1} - \theta_k - \omega_0 Y_k \quad (\text{A6-2a})$$

$$t_{k+1} = t_k + T - Y_k \quad (\text{A6-2b})$$

$$k = 0, 1, \dots$$

That is why the equation of the first-order loop is

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k - \omega Y_k + A \quad (\text{A6-3a})$$

$$\omega \triangleq \omega_0 + \Omega_0 \quad (\text{A6-3b})$$

$$T = 2\pi/\omega_0 \quad (\text{A6-3c})$$

Let also

$$Y_k = G(k) X'_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (\text{A6-4a})$$

and

$$\max_k G(k) \triangleq G_0 > 0 \quad (\text{A6-4b})$$

$$\min_k G(k) \triangleq G_\infty > 0 \quad (\text{A6-4c})$$

In view (A6-4) and (A6-3)

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k - \omega G(k) X'_k + A \quad (\text{A6-5})$$

while X'_k $k=0,1,\dots$ is the waveform to the loop's filter. This last equation can be transformed subsequently

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k - K_1 \frac{G(k)}{G_\infty} X'_k + A \quad (\text{A6-6a})$$

$$k = 0, 1, \dots$$

$$K_1 \triangleq \omega G_\infty A > 0 \quad (\text{A6-6b})$$

$$\tilde{X}'_k \triangleq X'_k / A \quad (\text{A6-6c})$$

Let

$$\tilde{X}'_k = g_{ef}(\varphi_k) + \tilde{N}_{efk} \quad (A6-7)$$

$$k = 0, 1, \dots$$

whereas g_{ef} stands for the effective nonlinearity of the loop while N_{ef} for the effective noise, $k = 0, 1, \dots$, $\tilde{N}_{ef} = N_{ef}/A$. Let the steady state phase error φ_s exist at the absence of noise. It satisfies

$$\varphi_s = g_{ef}^{-1}(A/K_1). \quad (A6-8)$$

After the transformation

$$\varphi_k = \varphi'_k + \varphi_s, \quad k = 0, 1, \dots \quad (A6-9)$$

the equation (A6-6) takes form

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1}' &= \varphi'_k - K_1 \frac{G(k)}{G_\infty} \left(g_{ef}(\varphi'_k + \varphi_s) - g_{ef}(\varphi_s) \right) + \\ &+ K_1 \frac{G(k)}{G_\infty} \tilde{N}_{efk}, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (A6-10)$$

Furthermore if $\varphi'_k = x_k = x(k)$ then after $\mathcal{Z}$ - Laurent transformation

$$\begin{aligned} zX(z) - zx_0 + K_1 \lambda X(z) &= X(z) - K_1 \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(k)}{G_\infty} g_{ef}(x(k) + \varphi_s) - g_{ef}(\varphi_s) - \lambda x(k) \right\} + \\ &+ \mathcal{Z} \left\{ K_1 \frac{G(k)}{G_\infty} \tilde{N}_{efk} \right\} \end{aligned} \quad (A6-11a)$$

and

$$X(z) = \mathcal{Z} \{ x(k) \}. \quad (A6-11b)$$

Thar is why

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{zx(0)}{z - (1 - K_1 \lambda)} - \frac{K_1}{z - (K_1 \lambda)} \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(k)}{G_\infty} g_{ef}(x(k) + \varphi_s) - g_{ef}(\varphi_s) - \lambda x(k) \right\} + \\ &+ \frac{K_1 \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_1(k)}{G_\infty} \tilde{N}_{efk} \right\}}{z - (1 - K_1 \lambda)}. \end{aligned} \quad (A6-11c)$$

Furthermore after the inverse $\mathcal{Z}$ - Laurent transformations one gets

$$\begin{aligned} x(k) &= x(0)k_{\lambda,1}(k) - \sum_{l=0}^{k-1} k_{\lambda,2}(k-l) \cdot \\ &\cdot \left(\frac{G(l)}{G_\infty} g_{ef}(x(l) + \varphi_s) - g_{ef}(\varphi_s) - \lambda x(l) \right) + \\ &+ \sum_{l=0}^{k-1} k_{\lambda,2}(k-l) \frac{G_1(l)}{G_\infty} \tilde{N}_{efl}, \end{aligned} \quad (A6-12a)$$

$$\{k_{\lambda,1}(k)\} = \mathcal{Z}^{-1}\{K_{\lambda,1}(z)\}, \quad (\text{A6-12b})$$

$$K_{\lambda,1}(z) = \frac{z}{z - (1 - K_1 \lambda)}, \quad (\text{A6-12c})$$

$$\{k_{\lambda,2}(k)\} = \mathcal{Z}^{-1}\{K_{\lambda,2}(z)\}, \quad (\text{A6-12d})$$

$$K_{\lambda,2}(z) = \frac{K_1}{z - (1 - K_1 \lambda)}. \quad (\text{A6-12e})$$

The last equation is the required one of convolutional form.

2. Second-order DPLL

$$Y_k = G_1(k)X'_k + G_2(k) \sum_{i=0}^k X'_i, \quad (\text{A6-13})$$

$k = 0, 1, \dots$, in this case.

From (A6-13)

$$Y_{k+1} = G_1(k+1)X'_{k+1} + G_2(k+1)X'_{k+1} + Y_k - G_1(k)X'_k. \quad (\text{A6-14})$$

That is why the equation of the loop is

$$\begin{aligned} \varphi_{k+2} - 2\varphi_{k+1} + \varphi_k &= \omega G_1(k)X'_k + \\ &- \omega G_1(k+1) \left(1 + \frac{G_2(k+1)}{G_1(k+1)}\right) X'_{k+1}, \end{aligned} \quad (\text{A6-15a})$$

or

$$\begin{aligned} \varphi_{k+2} - 2\varphi_{k+1} + \varphi_k &= K_1 \frac{G_1(k)}{G_\infty} X'_k + \\ &- K_1 r_l \frac{G_1(k+1)}{G_\infty} \frac{r_l(k+1)}{r_l} \tilde{X}'_{k+1} \end{aligned} \quad (\text{A6-15b})$$

$$K_1 = \omega G_\infty A, \quad G_\infty = \min_{k \geq 0} G(k) > 0 \quad (\text{A6-15c})$$

$$r_l(k+1) = 1 + \frac{G_2(k+1)}{G_1(k+1)} \quad (\text{A6-15d})$$

$$r_l = \min_{k \geq 0} r_l(k) > 0, \quad \tilde{X}'_k = X'_k / A \quad (\text{A6-15e})$$

$k = 0, 1, \dots$ and

$$\begin{aligned} &\varphi_{k+2} - (2 - \lambda K_1 r_l) \varphi_{k+1} + (1 - \lambda K_1) \varphi_k = \\ &= K_1 \left(\frac{G_1(k)}{G_\infty} \tilde{X}'_k - \lambda \varphi_k \right) - K_1 r_l \left(\frac{G_1(k+1)}{G_\infty} \frac{r_l(k+1)}{r_l} \tilde{X}'_{k+1} - \lambda \varphi_k \right). \end{aligned} \quad (\text{A6-16a})$$

Furthermore after $\mathcal{Z}$ – Laurent transformation

$$\Phi(z) = \frac{z^2 \varphi_0 + z \varphi_1 - z(2 - \lambda K_1 r_l) \varphi_0 + z K_1 r_l \left(\frac{G_1(0) r_l(0)}{G_\infty r_l} \tilde{X}'_0 - \lambda \varphi_0 \right)}{z^2 - (2 - \lambda K_1 r_l) z + 1 - K_1 \lambda} +$$

$$+ \frac{K_1 \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_1(k)}{G_\infty} \tilde{X}'_k - \lambda \varphi_k \right\}}{z^2 - (2 - \lambda K_1 r_l) z + 1 - K_1 \lambda} - \frac{K_1 r_l z \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_1(k)}{G_\infty} \frac{r_l(k)}{r_l} \tilde{X}'_{k+1} - \lambda \varphi_k \right\}}{z^2 - (2 - \lambda K_1 r_l) z + 1 - K_1 \lambda} \quad (\text{A6-16b})$$

and

$$\Phi(z) = \mathcal{Z} \{ \varphi_k \}.$$

That is why after $\mathcal{Z}$ – Laurent inverse transformation the equation of the loop is

$$x(k) = x_\lambda(k) + \sum_{l=0}^{k-1} k_{\lambda 1}(k-l) \left(\frac{G_1(l)}{G_\infty} \tilde{X}'_l - \lambda x(l) \right) +$$

$$+ \sum_{l=0}^{k-1} k_{\lambda 2}(k-l) \left(\frac{G_1(l) r_l(l)}{G_\infty \cdot r_l} \tilde{X}'_l - \lambda x(l) \right) \quad (\text{A6-17a})$$

$$x(k) = \varphi_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (\text{A6-17b})$$

$$x_\lambda(k) = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z^2 x_0 + z x_1 - z(2 - \lambda K_1 r_l) x_0 + z K_1 r_l \left(\frac{G_1(0) r_l(0)}{G_\infty \cdot r_l} \tilde{X}'_0 - \lambda x_0 \right)}{z^2 - (2 - \lambda K_1 r_l) z + 1 - K_1 \lambda} \right\} \quad (\text{A6-17c})$$

$$\{k_{\lambda 1}(k)\} = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{K_1}{z^2 - (2 - \lambda K_1 r_l) z + 1 - K_1 \lambda} \right\} \quad (\text{A6-17d})$$

$$\{k_{\lambda 2}(k)\} = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{-K_1 r_l z}{z^2 - (2 - \lambda K_1 r_l) z + 1 - K_1 \lambda} \right\}. \quad (\text{A6-17e})$$

In addition

$$\tilde{X}'_k = g_{\text{ef}}(x_k) + N_{\text{ef}k}/A \quad (\text{A6-17f})$$

$k=0,1,\dots$, while g_{ef} is the effective nonlinearity of the loop and N_{ef} the effective noise to the loop's input. The equation (A6-17) is the required one of convolutional form.

APPENDIX 7

THE MATHEMATICAL MODEL OF THE NONUNIFORM SAMPLING DPLL IN THE FREQUENCY RAMP SIGNAL CASE AND $N:1$ PHASE ENTRAINMENT

The modulation of phase is in this case

$$\theta(t) = \theta_0 + \Omega_0 t + \Omega_1 t^2 \quad (\text{A7-1})$$

and the loop's equations are

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k + \theta_{k+1} - \theta_k - \omega_0 Y_k \quad (\text{A7-2a})$$

and

$$t_{k+1} = t_k + T - Y_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (\text{A7-2b})$$

That is why

$$\begin{aligned} \theta_{k+1} - \theta_k &= \Omega_0(t_{k+1} - t_k) + \Omega_1(t_{k+1}^2 - t_k^2) = \\ &= (T - Y_k)(\Omega_0 + \Omega_1(t_{k+1} + t_k)) = \Delta(k, k+1) - \Omega(k, k+1) Y_k \end{aligned} \quad (\text{A7-3a})$$

and

$$\Delta(k, k+1) \triangleq T \Omega(k, k+1) \quad (\text{A7-3b})$$

$$\Omega(k, k+1) \triangleq \Omega_0 + \Omega_1(t_{k+1} + t_k). \quad (\text{A7-3c})$$

From (A7-2a) and (A7-3) the equation of the loop is

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k - \omega(k, k+1) Y_k + \Delta(k, k+1) \quad (\text{A7-4a})$$

while

$$\omega(k, k+1) \triangleq \omega_0 + \Omega(k, k+1). \quad (\text{A7-4b})$$

1). Let the transfer function of the loop's filter be

$$D(z) = G_1 + \frac{G_2}{1 - z^{-1}} \quad (\text{A7-4c})$$

and X'_k stand for the sampled and quantized waveform to the input of the loop's filter. That is why

$$Y_k = G_1 X'_k + G_2 \sum_{i=0}^k X'_i, \quad k = 0, 1, \dots \quad (\text{A7-4d})$$

and zero initial conditions are assumed according to the discussion of appendix. 1. The following equations are obtained from (A7-4a) and (A7-4d)

$$\varphi_{k+2} = \varphi_{k+1} - \tilde{\omega}(k+1, k+2) \left(K_1 \tilde{X}'_{k+1} + K_2 \sum_{i=0}^{k+1} \tilde{X}'_i \right) + \Delta(k+1, k+2). \quad (\text{A7-5a})$$

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k - \tilde{\omega}(k, k+1) \left(K_1 \tilde{X}'_k + K_2 \sum_{i=0}^k \tilde{X}'_i \right) + \Delta(k, k+1). \quad (\text{A7-5b})$$

$$\begin{aligned} K_1 &\triangleq \omega G_1 A \\ K_2 &\triangleq \omega G_2 A \\ \omega &\triangleq \omega_0 + \Omega_0 \end{aligned}$$

$$\tilde{\omega}(k, k+1) = \omega(k, k+1) / \omega$$

$$\tilde{X}'_k = X'_k / A, \quad k = 0, 1, \dots \quad (\text{A7-5c})$$

From (A7-5a)

$$\begin{aligned} \varphi_{k+2} &= \varphi_{k+1} - \tilde{\omega}(k+1, k+2) K_1 r_l \tilde{X}'_{k+1} + \\ &- \tilde{\omega}(k+1, k+2) K_2 \sum_{i=0}^k \tilde{X}'_i + \Lambda(k+1, k+2) \quad (\text{A7-6a}) \\ r_l &\triangleq 1 + K_2 / K_1 = 1 + G_2 / G_1. \end{aligned}$$

While (see (A7-5b))

$$-K_2 \sum_{i=0}^k \tilde{X}'_i = \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k - \Lambda(k, k+1)}{\tilde{\omega}(k, k+1)} + K_1 \tilde{X}'_k. \quad (\text{A7-6b})$$

The base equation of the loop is obtained from (A7-6a) and (A7-6b) in this case next

$$\begin{aligned} \varphi_{k+2} - 2\varphi_{k+1} + \varphi_k &= \tilde{\omega}(k+1, k+2) K_1 \tilde{X}'_k + \\ &- \tilde{\omega}(k+1, k+2) K_1 r_l \tilde{X}'_{k+1} + \\ &+ \left(\Lambda(k+1, k+2) - \frac{\tilde{\omega}(k+1, k+2)}{\tilde{\omega}(k, k+1)} \Lambda(k, k+1) \right) + \\ &+ \left(\frac{\tilde{\omega}(k+1, k+2)}{\tilde{\omega}(k, k+1)} - 1 \right) \varphi_{k+1} + \\ &+ \left(1 - \frac{\tilde{\omega}(k+1, k+2)}{\tilde{\omega}(k, k+1)} \right) \varphi_k. \quad (\text{A7-7}) \end{aligned}$$

The equivalent form of (A7-7) is

$$\begin{aligned} \varphi_{k+2} - (2 - \lambda K_1 r_l) \varphi_{k+1} + (1 - \lambda K_1) \varphi_k &= \\ &= \tilde{\omega}(k+1, k+2) K_1 \tilde{X}'_k - \lambda K_1 \varphi_k + \\ &- (\tilde{\omega}(k+1, k+2) K_1 r_l \tilde{X}'_{k+1} - \lambda K_1 r_l \varphi_{k+1}) + \\ &+ \tilde{A}(k, k+1, k+2) + \epsilon(k, k+1, k+2) \varphi_{k+1} + \\ &- \epsilon(k, k+1, k+2) \varphi_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (\text{A7-8a}) \end{aligned}$$

$$\tilde{A}(k, k+1, k+2) \triangleq \Lambda(k+1, k+2) - \frac{\tilde{\omega}(k+1, k+2)}{\tilde{\omega}(k, k+1)} \Lambda(k, k+1) \quad (\text{A7-8b})$$

$$\epsilon(k, k+1, k+2) \triangleq \frac{\tilde{\omega}(k+1, k+2)}{\tilde{\omega}(k, k+1)} - 1. \quad (\text{A7-8c})$$

Furthermore, by using $\mathcal{Z}$ - Laurent transformation one obtains

$$\begin{aligned} z^2 \Phi(z) - z\varphi_1 - z^2 \varphi_0 - (2 - \lambda K_1 r_l) z \Phi(z) + z(2 - \lambda K_1 r_l) \varphi_0 + \\ + (1 - \lambda K_1) \Phi(z) &= \mathcal{Z} \{ \tilde{\omega}(k+1, k+2) K_1 \tilde{X}'_k - \lambda K_1 \varphi_k \} + \\ - \mathcal{Z} \{ \tilde{\omega}(k+1, k+2) K_1 r_l \tilde{X}'_{k+1} - \lambda K_1 r_l \varphi_{k+1} \} &+ \mathcal{Z} \{ \tilde{A}(k, k+1, k+2) \} + \\ + \mathcal{Z} \{ \epsilon(k, k+1, k+2) \varphi_{k+1} \} - \mathcal{Z} \{ \epsilon(k, k+1, k+2) \varphi_k \} \quad (\text{A7-9a}) \end{aligned}$$

Or equivalently while

$$\mathcal{Z}\{\varphi_k\} = \Phi(z) = X(z) = \mathcal{Z}\{x_k\}, \varphi_k = x_k = x(k), k = 0, 1, \dots$$

$$\begin{aligned} X(z) = & \frac{z^2 x_0 + z x_1 - z(2 - \lambda K_1 r_l) x_0}{z^2 - (2 - \lambda K_1 r_l)z + 1 - \lambda K_1} + \\ & + \frac{\mathcal{Z}\{\tilde{\omega}(k+1, k+2) K_1 \tilde{X}'_k - \lambda K_1 x_k\}}{z^2 - (2 - \lambda K_1 r_l)z + 1 - \lambda K_1} + \\ & - \frac{\mathcal{Z}\{\tilde{\omega}(k+1, k+2) K_1 r_l \tilde{X}'_{k+1} - \lambda K_1 r_l x_{k+1}\}}{z^2 - (2 - \lambda K_1 r_l)z + 1 - \lambda K_1} + \\ & + \frac{\mathcal{Z}\{\tilde{A}(k, k+1, k+2)\}}{z^2 - (2 - \lambda K_1 r_l)z + 1 - \lambda K_1} + \\ & + \frac{\mathcal{Z}\{\epsilon(k, k+1, k+2) x_{k+1}\}}{z^2 - (2 - \lambda K_1 r_l)z + 1 - \lambda K_1} + \\ & - \frac{\mathcal{Z}\{\epsilon(k, k+1, k+2) x_k\}}{z^2 - (2 - \lambda K_1 r_l)z + 1 - \lambda K_1}. \end{aligned} \quad (\text{A7-10})$$

Furthermore after $\mathcal{Z}$ - Laurent inverse transformation

$$\begin{aligned} x(k) = & \sum_{l=0}^k k_{\lambda,1}(k-l) \{(\tilde{\omega}(l+1, l+2) \tilde{X}'_l - \lambda x(l)) K_1 + \\ & - K_1 r_l (\tilde{\omega}(l+1, l+2) \tilde{X}'_{l+1} - \lambda x(l+1))\} + x_\lambda(k) + \\ & + \sum_{l=0}^k k_{\lambda,1}(k-l) \{\epsilon(l, l+1, l+2) x(l+1) - \epsilon(l, l+1, l+2) x(l)\} + \\ & + \sum_{l=0}^k k_{\lambda,1}(k-l) d(l), \end{aligned} \quad (\text{A7-11a})$$

$$x(k) = x_k = \varphi_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$\{k_{\lambda,1}(l)\} \triangleq \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1}{z^2 - (2 - \lambda K_1 r_l)z + 1 - \lambda K_1} \right\} \quad (\text{A7-11b})$$

$$x_\lambda(l) \triangleq \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z^2 x_0 - z x_1 - z(2 - \lambda K_1 r_l) x_0}{z^2 - (2 - \lambda K_1 r_l)z + 1 - \lambda K_1} \right\} \quad (\text{A7-11c})$$

$$d(l) \triangleq \tilde{A}(l, l+1, l+2), \quad l = 0, 1, \dots \quad (\text{A7-11d})$$

2) Now, let the transfer function of the loop's filter be

$$D(z) = G_1 + \frac{G_2}{1 - z^{-1}} + \frac{G_3}{(1 - z^{-1})^2}. \quad (\text{A7-12})$$

The equation of the loop is

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1} = & \varphi_k - \omega(k, k+1) Y_k + \Delta(k, k+1) \\ & k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (\text{A7-4a})$$

If $Y(z) = \mathcal{Z}\{Y_k\}$ and $\tilde{X}'(z) = \mathcal{Z}\{\tilde{X}'_k\}$ then from (A7-12) while

$$Y(z)/X'(z) = D(z) \quad (\text{A7-13})$$

one gets

$$Y_{k+2} - 2Y_{k+1} + Y_k = \frac{1}{\omega} K_1 p \tilde{X}'_{k+2} + \frac{K_1}{\omega} \tilde{X}'_k - \frac{K_1}{\omega} (1 + r_l) \tilde{X}'_{k+1} \quad (\text{A7-14})$$

$k = 0, 1, \dots$

$$K_1 \triangleq \omega G_1 A, p \triangleq 1 + \frac{G_2}{G_1} + \frac{G_3}{G_1}, r_l = 1 + G_2/G_1, \tilde{X}'_k \triangleq X'_k/A.$$

Furthermore from (A7-14) and (A7-4) the equation of the loop is

$$\begin{aligned} \varphi_{k+3} - 3\varphi_{k+2} + 3\varphi_{k+1} - \varphi_k = & -\tilde{\omega}(k+2, k+3) K_1 p \tilde{X}'_{k+2} + \\ & -\tilde{\omega}(k+2, k+3) K_1 \tilde{X}'_k + \tilde{\omega}(k+2, k+3) (1 + r_l) K_1 \tilde{X}'_{k+1} + \\ & + \epsilon_1(k+1, k+2, k+3) \varphi_{k+2} + \epsilon_2(k, k+1, k+2, k+3) \varphi_{k+1} + \\ & + \epsilon_3(k, k+1, k+2, k+3) \varphi_k + \tilde{A}(k, k+1, k+2, k+3), \end{aligned} \quad (\text{A7-15a})$$

$$\tilde{\omega}(k+2, k+3) \triangleq \frac{\omega(k+2, k+3)}{\omega}, \quad (\text{A7-15b})$$

$$\epsilon_1(k+1, k+2, k+3) \triangleq 2 \left(\frac{\omega(k+2, k+3)}{\omega(k+1, k+2)} - 1 \right), \quad (\text{A7-15c})$$

$$\epsilon_2(k, k+1, k+2, k+3) \triangleq 3 - 2 \frac{\omega(k+2, k+3)}{\omega(k+1, k+2)} - \frac{\omega(k+2, k+3)}{\omega(k, k+1)}, \quad (\text{A7-15d})$$

$$\epsilon_3(k, k+1, k+2, k+3) \triangleq \frac{\omega(k+2, k+3)}{\omega(k, k+1)} - 1, \quad (\text{A7-15e})$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}(k, k+1, k+2, k+3) = & A(k+2, k+3) - 2A(k+1, k+2) \frac{\omega(k+2, k+3)}{\omega(k+1, k+2)} + \\ & + \frac{\omega(k+2, k+3)}{\omega(k, k+1)} A(k, k+1) \end{aligned} \quad (\text{A7-15f})$$

$$\omega(k, k+1) \triangleq \omega_0 + \Omega(k, k+1) \quad (\text{A7-15g})$$

$$\Omega(k, k+1) \triangleq \Omega_0 + \Omega_1(t_k + t_{k+1}), \quad \omega \triangleq \omega_0 + \Omega_0. \quad (\text{A7-15h})$$

Now the equivalent form of (A7-15a) while $\varphi_k = x_k = x(k)$, $k=0, 1, \dots$ is

$$\begin{aligned} x_{k+3} - (3 - pK_1\lambda)x_{k+2} + (3 - K_1(1 + r_l)\lambda)x_{k+1} + (K_1\lambda - 1)x_k = \\ = -pK_1(\tilde{\omega}(k+2, k+3)\tilde{X}'_{k+2} - \lambda x_{k+2}) + K_1(1 + r_l)(\tilde{\omega}(k+2, k+3)\tilde{X}'_{k+1} - \\ - \lambda x_k - \lambda x_{k+1}) + -K_1(\tilde{\omega}(k+2, k+3)\tilde{X}'_k - \lambda x_k) + \epsilon_1(k+1, k+2, k+3)x_{k+2} + \\ + \epsilon_2(k, k+1, k+2, k+3)x_{k+1} + \epsilon_3(k, k+1, k+2, k+3)x_k + \\ + \tilde{A}(k, k+1, k+2, k+3) \end{aligned} \quad (\text{A7-16})$$

Furthermore the last equation takes the following form after $\mathcal{Z}$ - Laurent transformation

$$\begin{aligned} & (z^3 - z^2(3 - pK_1\lambda) + z(3 - K_1(1 + r_l)\lambda) + K_1\lambda - 1)X(z) = \\ & = z^3x_0 + z^2(x_1 - (3 - pK_1\lambda)x_0) + z((3 - K_1(1 + r_l)\lambda)x_0 + \\ & + x_2 - (3 - pK_1\lambda)x_1) - pK_1\mathcal{Z}\{\tilde{\omega}(k+2, k+3)\tilde{X}'_{k+1} - \lambda x_{k+2}\} + \\ & + K_1(1 + r_l)\mathcal{Z}\{\tilde{\omega}(k+2, k+3)\tilde{X}'_{k+1} - \lambda x_{k+1}\} + \\ & - K_1\mathcal{Z}\{\tilde{\omega}(k+2, k+3)\tilde{X}'_{k+1} - \lambda x_k\} + \\ & + \mathcal{Z}\{\epsilon_1(k+1, k+2, k+3)x_{k+2}\} + \mathcal{Z}\{\epsilon_2(k, k+1, k+2, k+3)x_{k+1}\} + \\ & + \mathcal{Z}\{\epsilon_3(k, k+1, k+2, k+3)x_k\} + \mathcal{Z}\{\tilde{A}(k, k+1, k+2, k+3)\}. \quad (A7-17) \end{aligned}$$

Next, after $\mathcal{Z}$ - Laurent inverse transformation

$$\begin{aligned} x(k) = & \sum_{l=0}^k k_{\lambda, l}(k-l)(-pK_1(\tilde{\omega}(l+2, l+3)\tilde{X}'_{l+2} - \lambda x(l+2)) + \\ & + K_1(1 + r_l)(\tilde{\omega}(l+2, l+3)\tilde{X}'_{l+1} - \lambda x(l+1)) + \\ & - K_1(\tilde{\omega}(l+2, l+3)\tilde{X}'_l - \lambda x(l))) + x_\lambda(k) + \sum_{l=0}^k k_{\lambda, l}(k-l) \cdot \\ & \cdot (\epsilon_1(l+1, l+2, l+3)x(l+2) + \epsilon_2(l, l+1, l+2, l+3)x(l+1) + \\ & + \epsilon_3(l, l+1, l+2, l+3)x(l)) + \sum_{l=0}^k k_{\lambda, l}(k-l)d(l) \quad (A7-18a) \end{aligned}$$

$$k = 0, 1, \dots, \quad X(z) = \mathcal{Z}\{x_k\},$$

$$\{k_{\lambda, l}(k)\} \triangleq \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1}{z^3 - z^2(3 - pK_1\lambda) + z(3 - K_1(1 + r_l)\lambda) + K_1\lambda - 1} \right\} \quad (A7-18b)$$

$$\{x_\lambda(k)\} \triangleq \mathcal{Z}^{-1} \times$$

$$\times \left\{ \frac{z^3x_0 + z^2(x_1 - (3 - pK_1\lambda)x_0) + z((3 - K_1(1 + r_l)\lambda)x_0 + x_2 - (3 - pK_1\lambda)x_1)}{z^3 - z^2(3 - pK_1\lambda) + z(3 - K_1(1 + r_l)\lambda) + K_1\lambda - 1} \right\} \quad (A7-18c)$$

$$d(k) \triangleq \tilde{A}(k, k+1, k+2, k+3), \quad k = 0, 1, \dots \quad (A7-18d)$$

Eventually, the discrete time functional equation of the nonuniform sampling DPLL-s of second and third order have been obtained in the frequency ramp signal case.

M. ŻÓŁTOWSKI

NOWE KRYTERIA STABILNOŚCI DLA CYFROWYCH PĘTLI FAZOWYCH Z
NIEJEDNOSTAJNYM PRÓBKOWANIEM DOWOLNEGO RZĘDU ŚLEDZĄCYCH PRZEJŚCIA
PRZEZ POZIOM ZEROWY. CZĘŚĆ III

Streszczenie

Artykuł zawiera trzecią część rozważań dotyczących nowych kryteriów stabilności dla cyfrowych pętli fazowych z niejednostajnym próbkowaniem. Do modelowania dynamiki pętli użyto funkcjonalne równanie z czasem dyskretnym dotyczące rozmaitości S^1 — okręgu. Pokazano jak jednolita teoria z poprzednich części może być rozszerzona by uwzględnić cyfrową pętlę fazową o zmiennych parametrach w różnych sytuacjach o praktycznym znaczeniu. Konkretnie poddano rozważeniu pętlę cyfrową do śledzenia obiektu poprzez efekt Dopplera i pętlę z filtrem o zmiennych parametrach w celu zwiększenia szybkości procesu synchronizacji w obecności szumu.

Sensitivity of network function to the parasitics in analog IC design

KRZYSZTOF WAWRYN

Instytut Elektroniki, Wyższa Szkoła Inżynierska w Koszalinie

Received 1991.02.08

Authorized 1991.05.17

Presented paper describes an original approach to analog circuit design with parasitics included. The approach contains an analysis of the network function sensitivity to the parasitic zeros and poles. Results of the calculations indicate how to neglect unimportant parasitic elements in an effective network function containing ideal elements and significant parasitics only. The methodology has been developed for an automation of an analog OTA-C filter design. A design example is presented and network function sensitivity expressions to the parasitic OTA-C zeros and poles are derived.

1. INTRODUCTION

The analysis and design of analog circuits is aided by the use of network (or transfer) functions. Designers often employ analytical techniques which require a knowledge of the network function and their variation with changing circuit parameters of passive elements and active element parasitics (zeros and poles). Determining the network function with the associated parasitic zeros and poles is a complicated process for many analog circuits due to complexity of the circuit and nonlinearity of active elements. The design of a network usually begins with a study in which all the parasitic elements are neglected. Later, the network is resimulated with the parasitic elements and its behaviour compared with the original design. Simulation of the nonideal elements requires the solution of a considerably larger network than the original one and the various responses are difficult to compare.

Current approaches to design involve the solution of a system of equations obtained from the circuit elements and topology [1-5]. Although the algorithms for computing the network function are reasonably fast, an unnecessary large system of equations is solved. In addition, these algorithms must be an integral part of a circuit simulation program in a fully automated design system. Many of the large circuits encountered can be accurately characterized with a network function of only few significant parasitic zeros and poles included.

Presented approach estimates an influence of every parasitic zero and pole on voltage transfer function in the sensitivity calculations and neglects unimportant elements in the effective voltage transfer function. The Prolog program performs symbolic equation transformations to obtain proper effective transfer function and sensitivities expressions of the filter. Next, expressions are computed in numerical Pascal procedures which can be linked with Prolog program. The calculations are developed to estimate the performance of the multiloop FLF and IFLF [6–8] analog integrated OTA–C [9] (operational transconductance amplifier and capacitor) filters fabricated on one chip in CMOS technology.

2. SENSITIVITY OF NETWORK FUNCTION TO THE ELEMENTS AND PARASITICS

Parasitic behaviour of active filter circuits is mainly due to the nonidealities of active elements. Parasitic poles and zeros, finite input and output impedances of the OTA have meaningful influence on frequency performance of OTA–C filter. Parasitics which values ideally tend to infinity (i.e. poles of transconductance gain g_m) are replaced by their reciprocals which have zero value ideally in sensitivity calculations.

Sensitivity calculations are based on logarithmic and semilogarithmic measures introduced in [10]. Let F denote an arbitrary network function which can, for instance be the transfer function (K), the pole (p), the zero (z), the Q and the ω_0 of any pole or zero and so on. Denote by h the vector of all elements and parasitics in the network. The function F may or not depend on the complex frequency s and is described as follows:

$$F = F(h, s) \quad (1)$$

The variation of such a function is expressed by

$$\Delta F = \sum_{i=1}^{n_{ep}} \frac{\partial F}{\partial h_i} \Delta h_i \quad (2)$$

where: $n_{ep} = n_e + n_p$,

n_e is the number of elements, and

n_p is the number of parasitics.

and the normalized variation is expressed in the form

$$\frac{\Delta F}{F} = \sum_{i=1}^{n_{ep}} \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial h_i} \Delta h_i \quad (3)$$

Let us partition the vector h into

$$h = (u, v)^T \quad (4)$$

where the vector u refers to all network elements having nonzero values and the vector v to parasitics (nonidealities of active elements) having zero values ideally. The normalized variation can be now written in the form

$$\frac{\Delta F}{F} = \sum_{i=1}^{n_e} \left(\frac{\partial F}{\partial u_i} \frac{u_i}{F} \right) \frac{\Delta u_i}{u_i} + \sum_{i=1}^{n_p} \left(\frac{\partial F}{\partial v_i} \frac{1}{F} \right) \Delta v_i. \quad (5)$$

Let us introduce two sensitivity measures: the usual logarithmic sensitivity

$$S_u^F = \frac{\partial \ln F}{\partial \ln u} = \frac{\partial F}{F} \frac{u}{\Delta u} \quad (6)$$

and semilogarithmic sensitivity of the form

$$S_v^F = \frac{\partial \ln F}{\partial v} = \frac{\partial F}{F} \frac{1}{\Delta v}. \quad (7)$$

The logarithmic sensitivity is a natural measure for the actual physical elements and relates fractional changes in these elements to fractional changes in the response. For the parasitic elements, the logarithmic sensitivity is zero and the variation is not defined. Thus the semilogarithmic sensitivity, rather than the logarithmic, is a natural measure. The semilogarithmic sensitivity relates absolute changes in parasitics (which are ideally zero) to fractional changes in the response. Then, the normalized variation can be rewritten as

$$\frac{\Delta F}{F} = \sum_{i=1}^{n_e} S_{u_i}^F \frac{\Delta u_i}{u_i} + \sum_{i=1}^{n_p} S_{v_i}^F \Delta v_i \quad (8)$$

Here $\Delta u_i/u_i$ is the relative change of the element values. Since the design values of parasitics are zero, Δv_i represents the actual value of the parasitic element.

For a given technology, the ratio $\Delta u_i/u_i$ is generally specified and cannot be influenced by the topology, similarly Δv_i depends on the value of parasitic element. For instance, if p_i is the parasitic pole of the transconductance

$$g_m(s) = \frac{g_m}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (9)$$

then for the ideal case

$$v_i = \frac{1}{p_i} \quad (10)$$

in zero and

$$\Delta v_i = -\frac{1}{p_i} \quad (11)$$

Let the topology of the network be given. In order to minimize the variation $\Delta F/F$ we must minimize not only the sensitivities $S_{u_i}^F$ to ideal network elements but the sensitivities $S_{v_i}^F$ to parasitics as well. The sensitivities to ideal elements are no interest of this paper and are described in literature in detail.

3. MULTILoop FILTER STRUCTURES

Proposed sensitivity calculations have been developed for an active filter described by the voltage transfer function

$$T(s) = U_o / U_i = N(s) / D(s) \quad (12)$$

where U_i, U_o are input and output voltages and $N(s)$ and $D(s)$ are any degree polynomials of complex frequency variable s with real coefficients.

The basic filter structures are based on generalized follow the leader feedback (FLF) and generalized inverse follow the leader feedback (IFLF) topologies [11], shown in Fig. 1. The topology is specified as an interconnection of circuit building blocks.

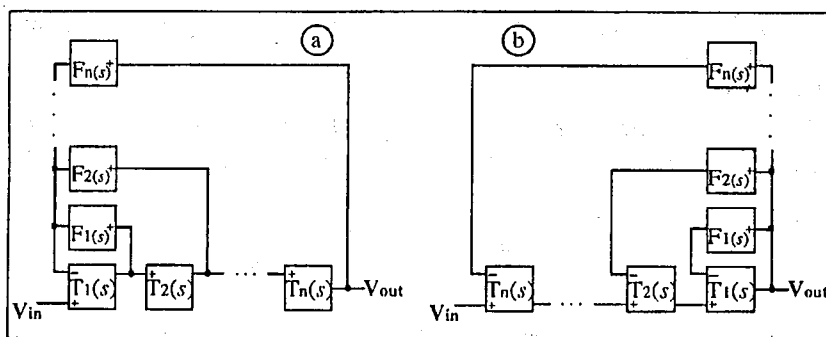


Fig. 1. Two basic filter functional block structures

The denominator and numerator of equation (1) for structures from Fig. 1 can be written as

$$D(s) = 1 + \sum_{i=1}^n F_i \prod_{j=1}^i T_j \quad (13)$$

$$N(s) = \prod_{j=1}^n T_j \quad (14)$$

where: T_j and $F_j, j=1, \dots, n$ are voltage transfer functions of forward and feedback circuits (parametrized circuit building blocks), respectively.

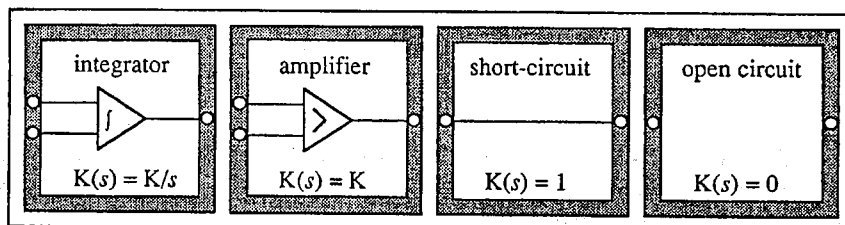


Fig. 2. Basic circuit building-blocks

Every circuit building block can be one of four different circuits: integrator, amplifier, short-circuit, and open circuit shown in Fig. 2. Thus such a general topology represents family of 4^{2n} different structures.

Realization of integrator and amplifier depends on design technique. The technique which employs OTAs and capacitors only has been chosen, and taken into considerations.

4. OPERATIONAL TRANSCONDUCTANCE AMPLIFIERS AND CAPACITANCE (OTA – C) STRUCTURES

Basic circuit building-blocks for integrator and amplifier structures using operational transconductance amplifiers and capacitor can be derived as shown in Fig. 3

The integrator and amplifier structures with differential input serve as basic circuit building-blocks for structures with only one input terminal „+” or „-”. These circuits differ only in changing the sign of the g_m and g_b coefficients in any equation derived for the original circuit.

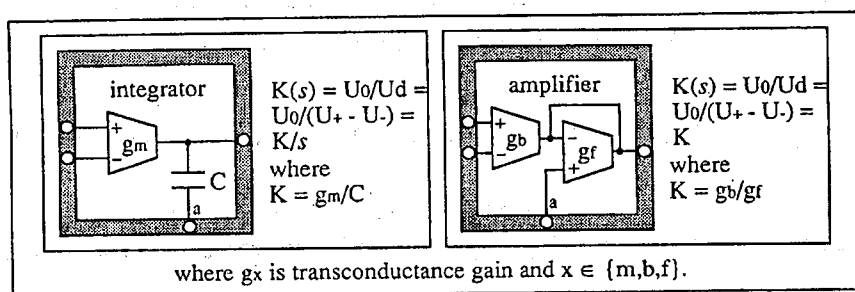


Fig. 3. OTA – C circuit building-blocks for integrator and amplifier

Taking structure shown on Fig. 3 into account the IFLF topology of filter from Fig. 1b can be rearranged to the multiport structure shown on Fig. 4 where denominator $D(s)$ is expressed by equation (2) and for the numerator $N(s)$ it can be derived following equation

$$N(s)U_i = U_{+0} + \sum_{i=1}^n (U_{+i} - U_{ai} + F_i U_{-i}) \prod_{j=1}^i T_j \quad (15)$$

where

$$U_{xj} = k_{xj} U_i, j = 1, \dots, n, x \in \{+, a, -\},$$

$$U_{+0} = k_{+0} U_i,$$

U_i is the input voltage, k_{+0} and each k_{xj} is zero or one.

5. BASIC MODEL OF OTA—C STRUCTURES OF SMALL SIGNAL CALCULATIONS

Obtained these network structures are composed of ideal elements in which all the parasitics are neglected. In practical designs, parasitics cannot be neglected, especially for high frequencies, because they not only effect the sensitivity but also introduce errors in the design realizations.

Let assume an OTA is characterized by a transconductante gain g_m which can be approximated by

$$g_m(s) = g_m \frac{\left(1 + \frac{s}{z}\right)}{\left(1 + \frac{s}{p_1}\right)\left(1 + \frac{s}{p_2}\right)}, \quad (16)$$

where g_m is the low frequency transconductante gain of the OTA, z, p_1, p_2 are zero and poles of the transductance gain g_m adequate to small signal analysis of the amplifier and correspond to inserting parasitic capacitance (pole) and inductance (zero) to ideal model of OTA. The expressions for integrator and amplifier from Fig. 6. can be shown as follows

$$K(s) = \frac{g_m}{sC} \frac{\left(1 + \frac{s}{z_m}\right)}{\left(1 + \frac{s}{p_{1m}}\right)\left(1 + \frac{s}{p_{2m}}\right)} \quad (17)$$

for integrator and

$$K(s) = \frac{g_b}{g_f} \frac{\left(1 + \frac{s}{z_b}\right)\left(1 + \frac{s}{p_{1f}}\right)\left(1 + \frac{s}{p_{2f}}\right)}{\left(1 + \frac{s}{p_{1b}}\right)\left(1 + \frac{s}{p_{2b}}\right)\left(1 + \frac{s}{z_f}\right)} \quad (18)$$

for amplifier,

where: indices m, b, f of poles and zeros correspond to the transconductance gain notation g_m, g_b and g_f .

If the circuit building blocks $T_j, F_j, j=1, \dots, n$ are evaluated to integrators or amplifiers at least one parasitic zero and pole are entered. As the same derivations can be made for each zero and pole so let assume that exactly one dominant zero and one dominant pole are entered. Then the voltage transfer functions for T_j and $F_j, j=1, \dots, n$ can be expressed as follows

$$T_j(s) = T_j \frac{\left(1 + \frac{s}{z_{jt}}\right)}{\left(1 + \frac{s}{p_{jt}}\right)}, \quad (19)$$

$$F_j(s) = F_j \frac{\left(1 + \frac{s}{z_{jf}}\right)}{\left(1 + \frac{s}{p_{jf}}\right)}, \quad (20)$$

where: $j=1, \dots, n$, indices t and f denote zero or pole of T_j and F_j , respectively. Taking into account equations (19) and (20) finally equations (13) and (15) can be rearranged as follows

$$D(s) = \sum_{i=0}^n F_i p_{if}(s + z_{if}) \prod_{k=0}^i T_k p_{kt}(s + z_{kt}) \prod_{l=i+1}^n (s + p_{lt}) z_{lt} \prod_{j=1}^{i-1} (s + p_{jf}) z_{jf} \prod_{j=i+1}^n (s + p_{jf}) z_{jf} \quad (21)$$

$$N(s) = \sum_{i=0}^n A_i p_{if}(s + z_{if}) \prod_{k=0}^i T_k p_{kt}(s + z_{kt}) \prod_{l=i+1}^n (s + p_{lt}) z_{lt} \prod_{j=1}^{i-1} (s + p_{jf}) z_{jf} \prod_{j=i+1}^n (s + p_{jf}) z_{jf} \quad (22)$$

Table 1

Sensitivities of numerator $N(s)$ and denominator $D(s)$ for additional transconductance poles and zeros

$g_m(s) = \frac{g_m}{1 + \frac{s}{p}}$	$g_m(s) = g_m \left(1 + \frac{s}{z}\right)$
$T_j(s) = \frac{T_j}{1 + \frac{s}{p_j}}$	$T_j(s) = T_j \left(1 + \frac{s}{z_j}\right)$
$S_{p_j}^{N(s)} = \frac{N(s)p_j}{\left(k_{+0} + \sum_{i=1}^{j-1} A_i \prod_{k=1}^i T_k\right)s + N(s)p_j}$	$S_{z_j}^{N(s)} = \frac{N(s)z_j}{s \sum_{i=j}^n A_i \prod_{k=1}^i T_k + N(s)z_j}$
$S_{p_j}^{D(s)} = \frac{D(s)p_j}{\left(1 + \sum_{i=1}^{j-1} F_i \prod_{k=1}^i T_k\right)s + D(s)p_j}$	$S_{z_j}^{D(s)} = \frac{D(s)z_j}{s \sum_{i=j}^n F_i \prod_{k=1}^i T_k + D(s)z_j}$
$F_i(s) = \frac{F_i}{1 + \frac{s}{p_i}}$	$F_i(s) = F_i \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)$
$S_{p_i}^{N(s)} = \frac{N(s)p_i}{N(s)(p_i + s) - s k_{-i} F_i \prod_{j=1}^i T_j}$	$S_{z_i}^{N(s)} = \frac{N(s)z_i}{s F_i \prod_{j=1}^i T_k + N(s)z_i}$
$S_{p_i}^{D(s)} = \frac{D(s)p_i}{D(s)(p_i + s) - s F_i \prod_{j=1}^i T_j}$	$S_{z_i}^{D(s)} = \frac{D(s)z_i}{s F_i \prod_{k=1}^i T_k + D(s)z_i}$

where: $A_0 = k_{+0}$, $T_0 = 1$, $p_0 = 1$, $z_0 = 1$,
 $A_i = k_{+i} - k_{ai} + F_i k_{-i}$, $i = 1, \dots, n$.

The sensitivities of $K(s)$ for parasitic zeros z and poles p can be expressed as follows

$$S_z^{K(s)} = \frac{\partial K(s)}{\partial z} \frac{z}{K(s)} = S_z^{N(s)} - S_z^{D(s)} \quad (23)$$

$$S_p^{K(s)} = \frac{\partial K(s)}{\partial p} \frac{p}{K(s)} = S_p^{N(s)} - S_p^{D(s)}, \quad (24)$$

where: $S_p^{K(s)}$, $S_p^{D(s)}$, $S_p^{N(s)}$, $S_z^{K(s)}$, $S_z^{D(s)}$, and $S_z^{N(s)}$ are logarithmic sensitivities of voltage transfer function $K(s)$, denominator $D(s)$ and numerator $N(s)$ on parasitic zero z and pole p , respectively.

It is easy to prove dependence between logarithmic and semilogarithmic sensitivities as

$$S_v^{K(s)} = -S_p^{K(s)} p, \quad (25)$$

where

$$v = \frac{1}{p} \quad (26)$$

The logarithmic sensitivity expressions of numerator $N(s)$ and denominator $D(s)$ on particular parasitic zeros and poles are shown on Table 1. Computed values give informations which circuit building block (T_j , F_j , $j=1, \dots, n$) must be designed with a great care.

Additionally sensitivity expressions for the most popular biquad filter structures have been derived and shown in appendix.

6. FILTER DESIGN PROGRAM

A filter design program based on artificial intelligence methods has been written in Turbo Prolog and implemented on IBM PC AT computer. Detailed considerations about the filter design system architecture, circuit representation and inference mechanisms can be met in [12]. A design process is executed in a Prolog searching program based on backward chaining strategy to transform input specifications into an appropriate filter structure. The design method based on direct search in a space of structurally different circuits provides all reasonable size structures and selects these which satisfy desired performance characteristics with constraints. The search starts with the simplest two functional building blocks ($T_1(s)$ and $F_1(s)$) of FLF or IFLF topology. During the Prolog based execution, all functional building blocks are successively evaluated to integrator, amplifier, short-circuit and open circuit, and all symbolic expressions for desired parameters and coefficients of transfer function and sensitivity polynomials are obtained. Expressions for particular functional topology are then computed by numerical Pascal procedures, which are linked with the Prolog program. Computed values give informations whether the input specifications are satisfied by this topology. The execution procedure continues recursively and at the same time Prolog interpreter backtracks and selects evaluated topologies with respect

to imposed constraints. If the backtracking procedure exhausts all possible evaluations and does not reach the desired solution, then the FLF or IFLF topology is extended by adding one forward and one feedback functional building block to obtain $(T_1(s), T_2(s), F_1(s)$ and $F_2(s))$ topologies and the above execution procedure is repeated. The successive extension of FLF or IFLF topology by one forward and one feedback functional building block are continued until suitable constraints are satisfied or stops when the size of the obtained structure becomes unreasonable large.

7. EXAMPLE

A prototype Prolog program has been tested for OTA – C filters. A biquad cell of notch tuned filter of the transfer function expressed by following equation

$$K(s) = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

is chosen as an example. The following set of rules is derived,

- 1) $N(s)$ should not have terms in s ,
- 2) $D(s)$ should have term in s ,
- 3) the ratio K between the coefficients in s^0 in $N(s)$ and $D(s)$ should be equal 1,
- 4) the ratio K between the coefficients in s^2 in $N(s)$ and $D(s)$ should be equal 1,
- 5) all of the coefficients should have the same sign,
- 6) maximum power of $N(s)$ and $D(s)$ is 2, under additional constraints

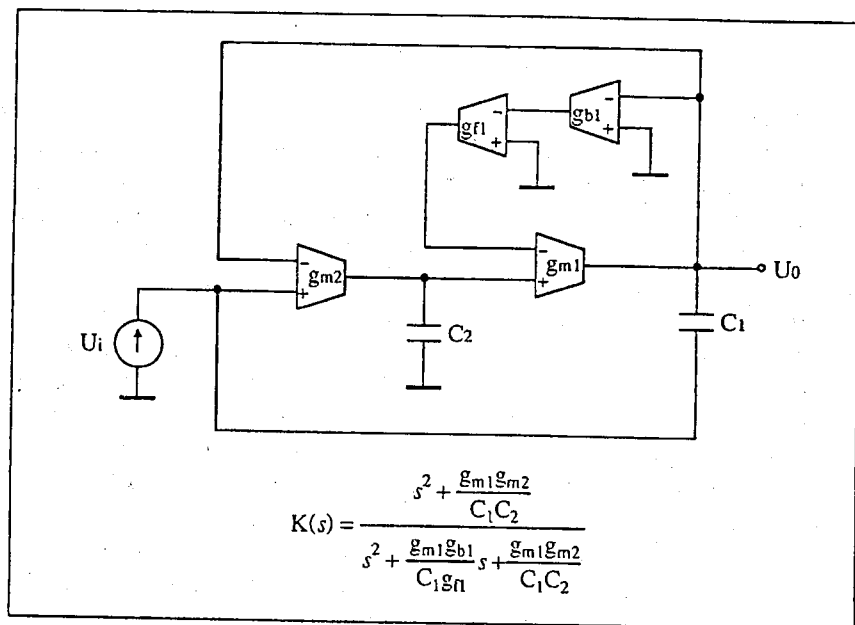


Fig. 5. Notch filter

- 7) there are only two capacitors,
- 8) ω_0 and Q should be tuned independently,
- 9) all transconductance gains in integrator structures are tuned simultaneously i.e. $g_{mi} = k_i$, $i \in C$, $k_i \in R$.

Minimal number of circuit building blocks necessary to build this filter is two forward circuit building blocks T_1 , T_2 , and two feedback building blocks F_1 and F_2 . The structure and its voltage transfer function $K(s)$ are shown on Fig. 5 and the expressions for the frequency ω_0 and the quality factor Q are given by

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g_{m1} g_{m2}}{C_1 C_2}} \quad Q = \frac{g_{f1}}{g_{b1}} \sqrt{\frac{g_{m2} C_1}{g_{m1} C_2}}.$$

The potential for independent tuning ω_0 and Q to any desired value is apparent. The frequency ω_0 can be tuned via adjustment of the transconductance gain $g_m = g_{m1} = g_{m2}$ and the quality factor Q via adjustment of transconductance gain g_{b1} or g_{f1} .

The sensitivity expressions for parasitic elements $v_1 = 1/p_1$ and $v_2 = 1/p_2$ are given by

$$S_{v_1}^{K_N(s)} \Big|_{v_1=0} = \frac{s^2}{s^2 + \omega_0^2} \frac{\frac{\omega_{0s}}{Q} s^2}{s^2 + \frac{\omega_{0s}}{Q} + \omega_0^2}$$

$$S_{v_2}^{K_N(s)} \Big|_{v_2=0} = \frac{s^2}{s^2 + \omega_0^2} \frac{\frac{\omega_{0s}^3}{Q}}{s^2 + \frac{\omega_{0s}}{Q} + \omega_0^2}$$

Magnitudes of sensitivities of $K(j\omega)$ for parasitic elements $v_1 = 1/p_1$ and $v_2 = 1/p_2$ of transconductance active elements for obtained structure has been calculated as a function of frequency for several values of Q factor. Results are shown in Table 2.

Table 2

Magnitudes of sensitivities $K(j\omega)$ for parstic elements

$\frac{\omega}{\omega_0}$	$ S_{v_1}^{K_N(j\omega)} _{v_1=0}$			$ S_{v_2}^{K_N(j\omega)} _{v_2=0}$		
	$Q=0.707$	$Q=1$	$Q=10$	$Q=0.707$	$Q=1$	$Q=10$
0.2	0.00236	0.00170	0.00017	0.05889	0.04249	0.00434
0.4	0.04256	0.03276	0.000362	0.26602	0.20473	0.02265
0.6	0.26946	0.23083	0.03150	0.74851	0.64119	0.08751
0.8	1.35528	1.29696	0.30852	2.11763	2.02649	0.48207
1.0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2.0	1.82946	1.47920	0.17738	0.45737	0.36980	0.04435
4.0	1.50576	1.09936	0.11374	0.09411	0.06871	0.00711
6.0	1.45427	1.04275	0.10578	0.04040	0.02897	0.00294
8.0	1.43670	1.01514	0.10319	0.02245	0.01600	0.00102
10.0	1.42964	1.00376	0.10203	0.01429	0.01015	0.00102

Detailed analysis of calculated results and sensitivity expressions gives following observations:

1. Infinite sensitivity of module $|K(j\omega)|$ for parasitic elements v_1 and v_2 in ω_0 is due to the pair of complex conjugate zeros $\pm j\omega$ of $D(s)$ on the imaginary axis in the s -plane.

2. If $Q \rightarrow \infty$ then the pair of complex conjugate poles of $K(s)$ compensates the pair of complex conjugate zeros of $K(s)$. It results in relatively smaller values of $S_{v_1}^{K_N(s)}$ and $S_{v_2}^{K_N(s)}$ for greater Q factor.

3. If $\omega \rightarrow \infty$ then $S_{v_1}^{K_N(s)} \rightarrow \omega_0/Q$ and $S_{v_2}^{K_N(s)} \rightarrow 0$, respectively.

4. The ratio $|S_{v_1}^{K_N(j\omega)}|/|S_{v_2}^{K_N(j\omega)}|$ which equals $(\omega_0/\omega)^2$ shows that more critical constraint must be set on transconductance pole p_2 for frequencies $\omega < \omega_0$ and transconductance pole p_1 for frequencies $\omega > \omega_0$ respectively. Critical pole p should be pushed to higher frequency resulting in smaller Δv value.

5. Optimization of $\Delta K(\omega)/K(\omega) = S_{v_1}^K(\omega)\Delta v_1 + S_{v_2}^K(\omega)\Delta v_2$ for a given ω results in minimal p_1 and p_2 values where the influence of poles on frequency characteristics of designed filter structure can be neglected.

6. If the frequency range $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ is any designer — specified band then general sensitivity measures introduced in [13] may be employed.

For T_1 , T_2 , F_1 and F_2 circuit building blocks there are additional four structures which satisfy imposed constraints, and for T_1 , T_2 , T_3 , F_1 , F_2 and F_3 circuit building blocks number of useful structures increases to 54. Time consumption is about 2 minutes.

8. CONCLUSIONS

This paper presents an original approach to an analog circuit design. A circuit performance is approximated by the use of sensitivity calculations. The calculations determine all the sensitivities of network function to the parasitic poles and zeros of transconductance amplifiers. The computed sensitivity values are used to optimize network function variations with respect to parasitic elements. Advantages of the methodology are the ability to estimate the significant parasitic elements which should be inserted into the original network to simulate the effective network function, and the meaningful reduction of a number of system equations. This approach is especially suited for a knowledge base systems to interpret sensitivity results and to make proper optimizations within the circuit until the detailed circuit simulation is processed. The knowledge base approaches are preferred because, the results interpretation and design optimization strategies are generally heuristic and require symbolic derivations to obtain the transfer function expression. A knowledge base approach to the OTA — C filter design is presented by the author in [12] and to CMOS op amps in [14].

Another possible approach to the network function optimization is to compensate parasitics influence of network function F by elements variations. Consider that all sensitivities have been computed. The values Δv_i correspond to the parasitic nominal values or nonideal active element parameters are assumed known. We wish to find the

required variations $\Delta u_i/u_i$ in the elements to compensate for the variation produced by the Δv_i . We thus require

$$\sum_{i=1}^{n_u} S_{u_i}^F \frac{\Delta u_i}{u_i} = - \sum_{i=1}^{n_v} S_{v_i}^F \Delta v_i. \quad (27)$$

Presented approach has been developed for the design of the IC OTA – C filter, but it can be easily adopted to filter structures composed of elements other than OTAs.

APPENDIX

BIQUAD SENSITIVITY EXPRESSIONS

General biquad structure can be described as follows

$$K(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}.$$

The voltage transfer function and sensitivities for parasitics of particular biquad structures are expressed as follows.

1. Low-pass filter

$$K_{LP}(s) = \frac{\omega_0^2}{D(s)} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

$$S_{p_1}^{K_{LP}(s)} = \frac{s^3}{s^3 + p_1 D(s)} = \frac{s^3}{s^3 + p_1 \left(s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2 \right)}$$

$$S_{p_2}^{K_{LP}(s)} = \frac{s^3 + \frac{\omega_0}{Q}s^2}{s^3 + \frac{\omega_0}{Q}s^2 + p_2 D(s)} = \frac{s^3 + \frac{\omega_0}{Q}s^2}{s^3 + \frac{\omega_0}{Q}s^2 + p_2 \left(s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2 \right)}$$

$$S_{v_1}^{K_{LP}(s)} \Big|_{v_1=0} = \frac{s^3}{D(s)} = \frac{s^3}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

$$S_{p_2}^{K_{LP}(s)} \Big|_{v_2=0} = \frac{s^3 + \frac{\omega_0}{Q}s^2}{D(s)} = \frac{s^3 + \frac{\omega_0}{Q}s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}.$$

2. Band-pass filter

$$K_{BP}(s) = \frac{\omega_0 s}{D(s)} = \frac{\omega_0 s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

$$S_{p_1}^{K_{BP}(s)} = \frac{s^3}{s^3 + p_1 D(s)} = \frac{s^3}{s^3 + p_1 \left(s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2 \right)}$$

$$S_{p_2}^{K_{BP}(s)} = -\frac{p_2}{s + p_2} \frac{\omega_0^2 s}{s^3 + \frac{\omega_0}{Q}s^2 + p_2 D(s)} = -\frac{p_2}{s + p_2} \frac{\omega_0^2 s}{s^3 + \frac{\omega_0}{Q}s^2 + p_2 \left(s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2 \right)}$$

$$S_{v_1}^{K_{BP}(s)} \Big|_{v_1=0} = \frac{s^3}{D(s)} = \frac{s^3}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

$$S_{v_2}^{K_{BP}(s)} \Big|_{v_2=0} = -\frac{\omega_0^2 s}{D(s)} = -\frac{\omega_0^2 s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

3. High-pass filter

$$K_{HP}(s) = \frac{s^2}{D(s)} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

$$S_{p_1}^{K_{HP}(s)} = -\frac{p_1}{s + p_1} \frac{\frac{\omega_0}{Q}s^2 + \omega_0^2 s}{s^3 + p_1 D(s)} = -\frac{p_1}{s + p_1} \frac{\frac{\omega_0}{Q}s^2 + \omega_0^2 s}{s^3 + p_1 \left(s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2 \right)}$$

$$S_{p_2}^{K_{HP}(s)} = -\frac{p_2}{s + p_2} \frac{\omega_0^2 s}{s^3 + \frac{\omega_0}{Q}s^2 + p_2 D(s)} = -\frac{p_2}{s + p_2} \frac{\omega_0^2 s}{s^3 + \frac{\omega_0}{Q}s^2 + p_2 \left(s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2 \right)}$$

$$S_{v_1}^{K_{HP}(s)} \Big|_{v_1=0} = \frac{\frac{\omega_0}{Q}s^2 + \omega_0^2 s}{D(s)} = \frac{\frac{\omega_0}{Q}s^2 + \omega_0^2 s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

$$S_{v_2}^{K_{HP}(s)} \Big|_{v_2=0} = -\frac{\omega_0^2 s}{D(s)} = -\frac{\omega_0^2 s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

4. Notch filter

$$\begin{aligned}
 K_N(s) &= \frac{s^2 + \omega_0^2}{D(s)} = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \\
 S_{p_1}^{K_N(s)} &= -\frac{p_1 s^2}{s^3 + (s^2 + \omega_0^2)p_1 s^3 + p_1 D(s)} = \\
 &= -\frac{p_1 s^2}{s^3 + (s^2 + \omega_0^2)p_1 s^3 + p_1 \left(s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2\right)} \frac{\frac{\omega_0}{Q}s^2}{\frac{\omega_0^3}{Q}} \\
 S_{p_2}^{K_N(s)} &= \frac{p_2 s^2}{s^3 + (s^2 + \omega_0^2)p_2 s^3 + \frac{\omega_0}{Q}s^2 + p_2 D(s)} \frac{\frac{\omega_0^3}{Q}}{\frac{\omega_0}{Q}} \\
 &= \frac{p_2 s^2}{s^3 + (s^2 + \omega_0^2)p_2 s^3 + \frac{\omega_0}{Q}s^2 + p_2 \left(s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2\right)} \frac{\frac{\omega_0^3}{Q}}{\frac{\omega_0}{Q}} \\
 S_{v_1=0}^{K_N(s)} &= -\frac{s^2}{s^2 + \omega_0^2} \frac{\frac{\omega_0}{Q}s^2}{D(s)} = -\frac{s^2}{s^2 + \omega_0^2} \frac{\frac{\omega_0}{Q}s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \\
 S_{v_2=0}^{K_N(s)} &= \frac{s^2}{s^2 + \omega_0^2} \frac{\frac{\omega_0^3}{Q}}{D(s)} = \frac{s^2}{s^2 + \omega_0^2} \frac{\frac{\omega_0^3}{Q}}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}
 \end{aligned}$$

Additionally, magnitudes of sensitivity for parasitic poles and the phases can be expressed by

$$\begin{aligned}
 \left| S_{p_1}^{K_{LP}(j\omega)} \right| &= \left| \frac{\omega^3}{D_1} \right| & \varphi_{LP,p_1} &= -\frac{\pi}{2} - \varphi_1 \\
 \left| S_{p_2}^{K_{LP}(j\omega)} \right| &= \frac{\omega^2 \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 + \omega^2}}{|D_2|} & \varphi_{LP,p_2} &= \operatorname{arctg} \frac{\omega_0}{Q\omega} - \varphi_1 \\
 \left| S_{p_1}^{K_{BP}(j\omega)} \right| &= \left| \frac{\omega^3}{D_1} \right| & \varphi_{BP,p_1} &= -\frac{\pi}{2} - \varphi_1
 \end{aligned}$$

$$\left| S_{p_2}^{K_{BP}(j\omega)} \right| = |K_1(j\omega, p_2)| \left| \frac{\omega \omega_0^2}{D_2} \right| \quad \varphi_{BP, p_2} = \pi - \varphi_{k1} - \varphi_2$$

$$\left| S_{p_1}^{K_{HP}(j\omega)} \right| = |K_1(j\omega, p_1)| \frac{|\omega \omega_0| \sqrt{\left(\frac{\omega}{Q}\right)^2 + \omega_0^2}}{|D_1|} \quad \varphi_{HP, p_1} = -\pi - \varphi_{k1} + \operatorname{arctg} \frac{\omega}{Q\omega_0} - \varphi_1$$

$$\left| S_{p_2}^{K_{HP}(j\omega)} \right| = |K_1(j\omega, p_2)| \left| \frac{\omega \omega_0^2}{D_2} \right| \quad \varphi_{HP, p_2} = \pi - \varphi_{k1} - \varphi_2$$

$$\left| S_{p_1}^{K_N(j\omega)} \right| = |K_2(j\omega, p_1)| \left| \frac{\omega^2 \omega_0}{Q D_1} \right| \quad \varphi_{N, p_1} = -\pi + \varphi_{k2} - \varphi_1$$

$$\left| S_{p_1}^{K_N(j\omega)} \right| = |K_2(j\omega, p_2)| \left| \frac{\omega_0^3}{Q D_2} \right| \quad \varphi_{N, p_2} = \pi + \varphi_{k2} - \varphi_2,$$

where

$$|D_1| = \sqrt{p_1^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \left(\frac{\omega_0 p_1}{Q} - \omega^2 \right)^2}$$

$$|D_2| = \sqrt{\left[p_2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \frac{\omega_0 \omega^2}{Q} \right]^2 + \omega^2 \left(\frac{p_2 \omega_0}{Q} - \omega^2 \right)^2}$$

$$|K_1(j\omega, p)| = \sqrt{\frac{p^2}{p^2 + \omega^2}}$$

$$|K_2(j\omega, p)| = \sqrt{\frac{p^2 \omega^4}{\omega^6 + p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{\omega \left(\frac{\omega_0 p_1}{Q} - \omega^2 \right)}{p_1 (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{\omega \left(\frac{\omega_0 p_2}{Q} - \omega^2 \right)}{p_2 (\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{\omega_0 \omega^2}{Q}}$$

$$\varphi_{k1}(j\omega, p) = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{p}$$

$$\varphi_{k2}(j\omega, p) = \operatorname{arctg} \frac{p (\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega^3}.$$

REFERENCES

1. I. K a u f m a n: *On Poles and Zeros of Linear Systems*. IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT–20, pp. 93–101, 1973
2. W. J. M c C a l l a, D. O. P e d e r s o n: *Elements of Computer–Aided Circuit Analysis*. IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT–18, pp. 14–26, 1971
3. M. A. J e n k i n s: *Zeros of a Real Polynomial*. ACM Trans. Math. Softw., vol. 1, pp. 178–189, 1975
4. P. R. G r a y, R. G. M e y e r: *Analysis and Design of Analog Integrated Circuits*. New York, Wiley, 1977
5. L. P. H u e l s m a n, P. E. A l l e n: *Introduction to the Theory and Design of Active Filters*. pp. 208–209, New York, McGraw Hill, 1980
6. K. R. L a k e r, R. S c h a u m a n n, M. S. G h a u s i: *Multiple-Loop Feedback Topologies for the Design of Low-Sensitivity Active Filters*. Invited paper, IEEE Trans. on CAS, ol. CAS–26, pp. 1–21, Jan. 1979
7. K. R. L a k e r, M. S. G h a u s i: *Synthesis of a Low Sensitivity Multi-Loop Feedback Active RC Filter*. IEEE Trans. on CAS, vol. CAS–21, pp. 252–259, Mar. 1974
8. K. R. L a k e r, M. S. G h a u s i: *Minimum Sensitivity Multiple Loop Feedback Bandpass Active Filters*. Proc. IEEE Int. Symp. on CAS, pp. 458–461, Apr. 1977
9. R. L. G e i g e r, E. S a n c h e z - S i n e n c i o: *Active Filter Design Using Operational Transconductance Amplifiers*. A Tutorial, IEEE CDM, pp. 20–32, March 1985
10. K. S i n g h a l, J. V l a c h, F. E l - T u r k y: *Sensitivity of Network to Operational Amplifiers and Parasitic Elements*. Proc. IEEE Symp. on CAS, pp. 1074–1078, 1978
11. K. W a w r y n: *PROLOG Based Active Filter Synthesis*. 9th European Conference on Circuit Theory and Design, Brighton, United Kingdom, 1989, pp. 609–612
12. K. W a w r y n: *An Artificial Intelligence Approach to Active Filter Synthesis*. Int. J. on Analog Integrated Circuits and Signal Processing, 1991 (accepted for publication)
13. A. L. R o s e n b l u m, M. S. G h a u s i: *Multiparameter Sensitivity in Active RC Networks*. IEEE Trans. on Circuit Theory, vol. CT–15, pp. 592–599, Nov. 1971
14. K. W a w r y n: *An Artificial Intelligence Approach to Analog Circuit Design*. Int. J. of Circuits, Systems and Computers, vol. 1, no 2, 1991, p.p. 149–176

K. WAWRYN

WRAŻLIWOŚĆ FUNKCJI UKŁADOWEJ NA ELEMENTY PASOŻYTNICZE
W PROJEKTOWANIU ANALOGOWYCH UKŁADÓW SCALONYCH

Streszczenie

W artykule opisano metodę projektowania układów analogowych z uwzględnieniem elementów pasożytniczych. Metoda ta jest oparta na analizie wrażliwości funkcji układowej na pasożytnicze zera i bieguny elementów aktywnych. Rezultaty tej analizy pokazują jak wyznaczyć rzeczywistą funkcję układową, na którą mają wpływ idealne elementy układu i tylko istotne elementy pasożytnicze. Tak wyznaczona rzeczywista funkcja układowa została zastosowana w automatyzacji projektowania filtrów aktywne–C. W pracy przedstawiono przykład projektu filtru oraz zostały wyprowadzone wyrażenia wrażliwości transmitancji napięciowej na pasożytnicze zera i bieguny elementów aktywnych.

Tłumienności pasmowe o logarytmnormalnym rozkładzie wagi i ich punktowe aproksymaty

ZBIGNIEW KOWALSKI (HABDANK)

Instytut Łączności, Warszawa

Otrzymano 1990.09.03

Autoryzowano do druku 1991.02.22

Artykuł zawiera wyprowadzenie analitycznych zależności między współczynnikami wagowymi punktowych aproksymat tłumienności pasmowej a funkcją gęstości wagi, charakteryzującej tę tłumienność w przypadku logarytmnormalnego rozkładu wagi. Podany przykład obliczeniowy dotyczy naturalnego pasma telefonicznego.

1. TŁUMIENNOŚCI PASMOWE

Klasyczna teoria czwórników elektrycznych [15, roz. 3] dotyczy obiektów linearnych, których właściwości transmisyjne nie ulegają zmianom w czasie. Z energetycznego punktu widzenia te właściwości są charakteryzowane dla dowolnych ale ustalonych częstotliwości f tłumiennością A rozważanego czwórnika¹⁾. Z reguły ta punktowa tłumienność czwórnika jest funkcją częstotliwości, tzn.:

$$A = \psi(f).$$

W celu skalarnej scharakteryzowania właściwości transmisyjnych czwórników w pasmie przesyłowym o częstotliwościach granicznych: dolnej f_f i górnej f_g w [8] wprowadzono pojęcie tłumienności pasmowej, określonej następująco:

$$\bar{A} = \int_{f_f}^{f_g} \psi(f) g(f) df, \quad (1)$$

gdzie $g(f)$ jest funkcją gęstości wagi, unormowaną w pasmie przesyłowym $[f_f, f_g]$, tzn. spełniającą warunek:

¹⁾ W tym artykule będziemy abstrahować od rodzaju tłumienności, ponieważ nie ma to wpływu na wyniki prezentowanych rozważań.

$$\int_{f_d}^{f_g} g(f) df = 1.$$

W dalszym ciągu tego artykułu określoną wzorem (1) wielkość $\bar{A}$ będziemy nazywali tłumiennością pasmową w wąskim sensie, w odróżnieniu od wprowadzonej przez CCITT [2] wielkości:

$$\bar{A}(c) = -10/c \cdot \lg \int_{f_d}^{f_g} 10^{-\psi(f) \cdot c/10} g(f) df, \quad (2)$$

którą będziemy nazywać tłumiennością pasmową w szerokim sensie²⁾.

Należy zwrócić uwagę, że w przypadku gdy wartość występującego we wzorze (2) współczynnika c dąży do zera, zachodzi związek (patrz Dodatek 1):

$$\bar{A} = \lim_{c \rightarrow 0} \{\bar{A}(c)\}$$

W wydanej w 1984 roku publikacji [12] autor zaproponował metodę wyznaczania kolejnych przybliżeń funkcji wagi $g(f)$ w postaci wielomianowej; propozycja ta jednak nie została wykorzystana. W wydanej w 1989 roku Niebieskiej Księdze CCITT [2, t. V, D. 19, pkt 4] dokonano zestawienia wyników przeprowadzonych w różnych krajach badań eksperymentalnych rozkładu wagi. Wyznaczono empiryczne dystrybuanty rozkładu wagi i sporządzono wykresy tych funkcji na siatkach laplaso-regularnych (patrz Dodatek 2) o liniowej skali odciętych: $X = \ln(f/f_0)$, gdzie f_0 jest stałą (częstotliwość odniesienia). Ze względu na to, że uzyskane wykresy można przybliżyć liniami prostymi (patrz rys. 4–2 w [2, t. V, D. 19]), więc istnieje podstawa do przyjęcia założenia o logarytmnormalnym rozkładzie wagi.

Jak wyprowadzono w Dodatku 3, funkcja gęstości wagi o rozkładzie logarytmnormalnym, po dwustronnym ucięciu i unormowaniu w przedziale $[f_d, f_g]$ wynosi:

$$g(f) = \frac{\exp(-y^2/2)}{f \cdot \sigma \sqrt{2\pi} \cdot [\Phi(y_g) - \Phi(y_d)]}, \quad (3)$$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} y &= [\ln(f/f_0) - \mu] / \sigma \\ y_g &= [\ln(f_g/f_0) - \mu] / \sigma \\ y_d &= [\ln(f_d/f_0) - \mu] / \sigma \end{aligned} \right\} \quad (3')$$

przy czym: μ i σ są parametrami rozkładu wagi.

²⁾ W dokumentach CCITT wielkość $\bar{A}(c)$ jest nazywana tłumiennością głośności, a jej argument: c — współczynnikiem wzrostu głośności.

2. PUNKTOWE APROKSYMATY

W praktyce pomiarowej tłumienności pasmowe są szacowane na podstawie wyników punktowych pomiarów tłumienności czwórników przy częstotliwościach $f_k \in [f_d, f_g]$, (gdzie $k=1, \dots, p$):

$$A_k = \psi(f_k)$$

jako średnie ważone tych tłumienności, a więc:

$$\bar{A} \approx \sum_{k=1}^p G_k \cdot A_k \equiv \tilde{A} \quad (4)$$

oraz:

$$\bar{A}(c) \approx -10/c \cdot \lg \sum_{k=1}^p G_k \cdot 10^{-A_k \cdot c/10} \equiv \tilde{A}(c), \quad (5)$$

gdzie G_k ($k=1, \dots, p$) są unormowanymi współczynnikami wagowymi, tzn. spełniającymi warunek:

$$\sum_{k=1}^p G_k = 1.$$

Określone wzorami (4) i (5) wielkości $\tilde{A}$ oraz $\tilde{A}(c)$ będziemy nazywać punktowymi aproksymatami tłumienności pasmowej (odpowiednio: $\bar{A}$ oraz $\bar{A}(c)$). Jak wykazano w [11], występujące w tych wzorach współczynniki wagowe G_k są jednoznacznie określone przez częstotliwości f_k wyznaczania tłumienności punktowych A_k ($k=1, \dots, p$), a mianowicie:

$$G_k = \frac{\sum_{n=0}^{p-1} F_{n/k} \cdot m_{p-n-1}}{\sum_{n=0}^{p-1} F_{n/k} \cdot f_k^{p-n-1}} \quad (6)$$

gdzie współczynniki:

$$F_{n/k} = (-1)^n \sum_{P_n^{-1}} \bigcap_{i=1}^n f_{j_i} \quad (7)$$

$j_i = \{1, \dots, p\} / k$

są sumami $\binom{p-1}{n}$ iloczynów, stanowiących kombinację bez powtórzeń n elementów z $(p-1)$ -elementowego zbioru częstotliwości $\{f_j\}$, gdzie $j \neq k$, przyjmując wszystkie pozostałe wartości $j=1, \dots, p$.

Występujące we wzorze (6) wielkości:

$$m_r = \int_{f_d}^{f_g} f^r g(f) df \quad (8)$$

są momentami zwyczajnymi rzędu r ($=p-n-1$) rozkładu wagi, unormowanego w pasmie $[f_d, f_g]$. Należy zwrócić uwagę, że ze względu na związek (8), współczynniki wagowe G_k są funkcjonalami wielkości $g(f)$.

Jak to wyprowadzono w Dodatku 3, dla funkcji gęstości wagi $g(f)$ o rozkładzie logarytmnormalnym, określone wzorem (8) momenty zwyczajne wynoszą:

$$m_r = \frac{\Phi(y_g - r\sigma) - \Phi(y_d - r\sigma)}{\Phi(y_g) - \Phi(y_d)} \cdot m_{\infty r}, \quad (9)$$

gdzie:

$$m_{\infty r} = f_0^r \cdot \exp[r\mu + (r\sigma)^2/2] \quad (10)$$

jest momentem zwyczajnym rzędu r nieuciętego rozkładu logarytmnormalnego o parametrach μ i σ , natomiast $\Phi(y)$ jest wartością dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego, określoną w punkcie y (patrz wzory (3')).

3. PRZYKŁADY OBLICZENIOWE. WNIOSKI

Przyjmijmy, że są dane wartości: częstotliwości granicznych pasma przemysłowego: $f_d = 300$ i $f_g = 3400$ Hz, częstotliwości odniesienia $f_0 = 1000$ Hz oraz parametrów logarytmnormalnego rozkładu wagi, a mianowicie: $\mu = 0$ i $\sigma = 1,15^3$. Należy obliczyć wartości współczynników wagowych dla p -punktowych aproksymat tłumienności pasmowych przy częstotliwościach zalecanych przez CCITT [3, rozdz. 4] zgodnie z ustaleniami ISO⁴, w przypadku, gdy $p = 3, = 5$ i 11 .

Pierwsza faza obliczeń polega na wyznaczaniu momentów zwyczajnych rzędu $r = 1, \dots, 10$ rozkładu wagi na podstawie wzoru (9); przy obliczeniach numerycznych wykorzystano algorytm przedstawiony w Dodatku 5.

W przypadku, gdy $p = 3$ przyjęto częstotliwości f_k podane w rubryce 2 tablicy 1, a na podstawie wzoru (6) obliczono wartości współczynników G_k podane w rubryce 3 tej tablicy.

W przypadku, gdy $p = 5$ przyjęto częstotliwości f_k podane w rubryce 2 tablicy 2, a na podstawie wzoru (6) obliczono wartości współczynników G_k podane w rubryce 3 tej tablicy.

W przypadku, gdy $p = 11$ przyjęto częstotliwości f_k podane w rubryce 2 tablicy 3, a na podstawie wzoru (6) obliczono wartości współczynników G_k podane w rubryce 3 tej tablicy.

³ Z danych zawartych w pkt 4 Suplementu nr 19 do tomu V „Niebieskiej Księgi” CCITT [2] wynika, że w zależności od kraju, w którym były przeprowadzone badania, uzyskano oszacowania wartości parametru μ zawarte w przedziale od $-0,2$ do $+0,1$, natomiast wartości parametru σ — prawie jednakowe i wynoszące około 1,15.

⁴ Pełny wykaz tych częstotliwości dla zakresu naturalnego pasma telefonicznego podano w tabl. 3.

Tablica 1

1	2	3
k	f_k [Hz]	G_k
1	400	0,2549713
2	1000	0,4865412
3	2500	0,2584875
$ 1 - \Sigma G_k $	—	$5,6 \cdot 10^{-17}$
$1/\Sigma G_k $	—	1
W_0	—	0,607082

Tablica 2

1	2	3
k	f_k [Hz]	G_k
1	315	0,0997010
2	630	0,3115507
3	1000	0,2474707
4	2000	0,2742865
5	3150	0,0669911
$ 1 - \Sigma G_k $	—	$4,9 \cdot 10^{-16}$
$1/\Sigma G_k $	—	1
W_0	—	0,4979626

Tablica 3

1	2	3
k	f_k [Hz]	G_k
1	315	60,4105
2	400	—289,2923
3	500	558,8660
4	630	—600,6391
5	800	430,1884
6	1000	—215,5100
7	1250	68,0821
8	1600	—13,3984
9	2000	2,3790
10	2500	—0,1529
11	3150	0,0669
$ 1 - \Sigma G_k $	—	$6,4 \cdot 10^{-10}$
$1/\Sigma G_k $	—	$4,5 \cdot 10^{-04}$
W_0	—	998,38

W dolnych częściach tablic zestawiono również wartości parametrów, charakteryzujących jakość wyznaczonych aproksymat tłumienności pasmowej. Parametr $(|1 - \Sigma G_k|)$ charakteryzuje niedokładność obliczeń numerycznych przy wyznaczaniu wartości współczynników G_k . Parametr $(1/\Sigma|G_k|)$ stanowi miarę zbieżności sumy, którą przedstawia aproksymata, do całości, którą reprezentuje tłumienność pasmowa.

Natomiast parametr W_0 charakteryzuje wrażliwość wyznaczonej aproksymaty na błędy losowe tłumienności punktowych. Parametr ten został określony w [13] jako stosunek: błędu standardowego niepewności wyniku obliczeń wielkości $\tilde{A}$ do błędu standardowego niepewności wyników pomiarów wielkości A_k ($k=1, \dots, p$; wchodzących jako dane wejściowe do wzoru (4)). Jak to wyprowadzono w [13]⁹⁾, zachodzi związek:

$$W = \left[\sum_{k=1}^p G_k^2 \right]^{1/2}, \quad (11)$$

przy czym G_k jest określone wzorem (6).

Porównując wartości parametru $(1 - \Sigma G_k)$, występujące w poszczególnych tablicach widać, że wraz ze wzrostem liczby p maleje dokładność obliczeń współczynników wagowych G_k . Ten spadek dokładności obliczeń numerycznych jest wywołany głównie bardzo szybkim wzrostem złożoności obliczeniowej współczynników wagowych G_k przy wzroście liczby p punktów aproksymacji (patrz [11, pkt 3]). W celu zapobieżenia nadmiernemu spadkowi dokładności obliczeń współczynników wagowych dla liczby punktów $p > 11$ zachodzi zatem konieczność stosowania specjalnych technik kompensacji błędów obliczeń numerycznych (np. algorytmu Gilla-Möllera [7]).

Porównując wartości parametru $(1/\Sigma |G_k|)$, występujące w poszczególnych tablicach widać, że w pierwszych dwóch przypadkach (dla $p=3$ i dla $p=5$), gdy wszystkie współczynniki wagowe są dodatnie, wartość tego parametru jest równa jedności. Natomiast w ostatnim przypadku (dla $p=11$), gdy występują zarówno dodatnie jak i ujemne współczynniki wagowe, miara zbieżności $(1/\Sigma |G_k|)$ jest bliska zeru. Oznacza to możliwość występowania bardzo dużych rozbieżności między wartością tłumienności pasmowej a wartością jej punktowej aproksymaty dla niektórych funkcji $\psi(f)$, charakteryzujących czwórniki, mierzone punktowo przy częstotliwościach f_k .

Porównując wartości parametru W_0 , występujące w poszczególnych tablicach widać, że w pierwszych dwóch przypadkach (dla $p=3$ i dla $p=5$), wartość wrażliwości jest mniejsza od jedności. Natomiast w ostatnim przypadku (dla $p=11$), wartość tego parametru jest bardzo duża, bliska liczbie 1000. Oznacza to, że w tym przypadku błąd standardowy wielkości $\tilde{A}$ jest około 1000 razy większy (!) od błędu standardowego wyników pomiarów tłumienności punktowych A_k , będących podstawą do obliczeń wartości $\tilde{A}$. Dlatego 11-punktowa aproksymata tłumienności pasmowej o logarytm-normalnym rozkładzie wagi (gdy: $\mu=0$, $\sigma=1,15$), obliczana na podstawie punktowych tłumienności A_k , wyznaczanych dla jedenastu częstotliwości przez ISO w naturalnym pasmie telefonicznym (patrz rubr. 2 w Tabl. 3) jest zła!

Powstaje zatem pytanie, w jaki sposób wyznaczać punktowe aproksymaty tłumienności pasmowej, aproksymaty charakteryzujące się minimalną wrażliwością na losowe błędy tłumienności punktowych. W przypadku małej liczby punktów aproksymacji (dla $p < 4$) zadowalające rozwiązanie tego problemu zostało już przedstawione przez autora w opublikowanym w 1985 roku artykule [11].

⁹⁾ patrz również [16]

Okazuje się, że dla dużej liczby punktów aproksymacji też istnieje możliwość zadowalającego rozwiązania problemu optymalizacji aproksymat, bez stosowania sugerowanych w [11] metod iteracyjnych, które — jak tego dowiodła dotychczasowa praktyka — wykazują istotne wady i nie powinny być stosowane w tym celu. Autor ma zamiar zaprezentowania nowej metody optymalizacji wielopunktowych aproksymat tłumienności pasmowej w następnym artykule ([14]).

BIBLIOGRAFIA

1. J. Aitchison, J. Brown: *The Lognormal Distribution*. Cambridge, Academic Press, 1957
2. CCITT: *Blue Book*. ITU, Geneva, 1989
3. CCITT: *Handbook on Telephony*. ITU, Geneva, 1987
4. Sz. Firko w i c z: *Statystyczne badanie wyrobów*. WNT, 1970
5. M. F i s z: *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*. PWN, 1969
6. P. van H a l e n: *Accurate analytical approximations for error function and its integral*. Electronics Letters, Vol. 25, No 9. 1989
7. J. i M. J a n k o w s c y: *Przegląd metod i algorytmów numerycznych; część 1*. WNT, 1981
8. Z. K o w a l s k i: *Band transmission loss of telecommunication two-ports*. Archiwum Elektrotechniki, 1980, zesz. 2
9. Z. K o w a l s k i: *Pasmowe tłumienności czwórników i ortotelefoniczna tłumienność odniesienia*. Rozprawy Elektrotechniczne. 1982, zesz. 3/4
10. Z. K o w a l s k i: *Zasady określania tłumienności pasmowej na podstawie danych punktowych*. Rozprawy Elektrotechniczne. 1983, zesz. 1
11. Z. K o w a l s k i: *Punktowe aproksymaty tłumienności pasmowej*. Rozprawy Elektrotechniczne, 1984, zesz. 2
12. Z. K o w a l s k i: *Metoda kompensacyjna wyznaczania funkcji wagi dla tłumienności pasmowej*. Archiwum Elektrotechniki, 1983, zesz. 1/2
13. Z. K o w a l s k i: *Błędy wyznaczania zmodyfikowanej tłumienności odniesienia*. Referaty Problemowe Instytutu Łączności, 1988, zesz. 92
14. Z. K o w a l s k i: *Algebraiczna metoda wyznaczania najefektywniejszych aproksymat tłumienności pasmowej*. Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji, 1991, 37, s. 671-685
15. W. N o w i c k i: *Podstawy teletransmisji*, tom 1. WKiŁ, 1971
16. I. M. R y ż y k, I. S. G r a d s z t e j n: *Tabelle cątek, sum, szeregów i iloczynów*. PWN, 1964 w opracowaniu:

DODATEK 1

PRZEJŚCIE GRANICZNE $\bar{A}(c) \rightarrow \bar{A}$

W dokumentach CCITT [2] wprowadzono wielkość nazwaną tam tłumiennością głośności, która została określona wzorem (2), t.j.:

$$\bar{A}(c) = -10/c \cdot \lg \int_{f_d}^{f_g} 10^{-\psi(f) \cdot c/10} g(f) df. \quad (D. 1-1)$$

W przypadku, gdy wartość parametru $c=0$, wzór (D. 1-1) przybiera postać nieoznaczoną typu: „0/0” i z tego względu, dla wyznaczenia granicy funkcji $\bar{A}(c)$, gdy argument c dąży do zera, trzeba zastosować regułę de l'Hospital'a.

Podstawiając:

$$10^{-\psi(f) \cdot c/10} = \exp\{-\psi(f) \cdot \ln(10) \cdot c/10\}$$

oraz: $\ln(10) \cdot c/10 = q$
otrzymujemy:

$$\bar{A}(c) = -1/q \cdot \ln \int_{f_d}^{f_g} \exp\{-\psi(f) \cdot q\} g(f) df. \quad (D. 1-2)$$

W przypadku, gdy $c \rightarrow 0$, zachodzi:

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 0} \bar{A}(c) &= \lim_{q \rightarrow 0} \bar{A}(c) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dq} \left[\ln \int_{f_d}^{f_g} \exp\{-\psi(f) \cdot q\} g(f) df \right]}{-\frac{d}{dq} q} = \\ &= \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\int_{f_d}^{f_g} -\psi(f) \exp\{-\psi(f) \cdot q\} g(f) df}{-\int_{f_d}^{f_g} \exp\{-\psi(f) \cdot q\} g(f) df}. \end{aligned} \quad (D. 1-3)$$

Ale ponieważ:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \{\exp[-\psi(f) \cdot q]\} = \exp(0) = 1. \quad (D. 1-4)$$

więc:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \bar{A}(c) = \frac{- \int_{f_d}^{f_g} \psi(f) \cdot g(f) df}{- \int_{f_d}^{f_g} g(f) df} \quad (\text{D. 1-5})$$

Ze względu na unormowanie funkcji gęstości wagi, zachodzi:

$$\int_{f_d}^{f_g} g(f) df = 1 \quad (\text{D. 1-6})$$

a więc:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \bar{A}(c) = \lim_{c \rightarrow 0} \bar{A}(c) = \int_{f_d}^{f_g} \psi(f) g(f) df. \quad (\text{D. 1-7})$$

DODATEK 2

CHARAKTERYSTYKA ROZKŁADU NORMALNEGO

Ciągła cecha mierzalna x ma rozkład normalny, jeśli jej gęstość wyraża się wzorem [5, pkt 5.7]:

$$h(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp \{ -[(x - \mu)/\sigma]^2/2 \}, \quad (\text{D. 2-1})$$

gdzie (μ, σ) są parametrami tego rozkładu, przy czym:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x h(x) dx \quad (\text{D. 2-2})$$

jest wartością średnią, natomiast:

$$\sigma = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 h(x) dx \right]^{1/2} \quad (\text{D. 2-3})$$

– odchyleniem standardowym rozkładu zmiennej x .

Dystrybuenta tego rozkładu jest określona wzorem:

$$D(x) \equiv D(x; \mu, \sigma) = \int_{-\infty}^x h(x') dx' \quad (\text{D. 2-4})$$

przy czym, dla uniknięcia niejednoznaczności, zastosowano zmianę oznaczeń zmiennych przez podstawienie: $x' \equiv x$, a więc $h(x')$ jest określone wzorem (D. 2-1).

Gęstość zmiennej standaryzowanej:

$$y = (x - \mu) / \sigma \quad (\text{D. 2-5})$$

jest związana z gęstością zmiennej x zależnością:

$$\varphi(y) = |dx/dy| \cdot h(x(y)). \quad (\text{D. 2-6})$$

Ponieważ:

$$x(y) = \mu + \sigma \cdot y \quad (\text{D. 2-7})$$

oraz:

$$dx/dy = \sigma \quad (\text{D. 2-8})$$

więc gęstość standaryzowanego rozkładu normalnego wynosi:

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp(-y^2/2) \quad (\text{D. 2-9})$$

a jego dystrybuanta:

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= \int_{-\infty}^y \varphi(y') dy' = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\{ -[(x' - \mu)/\sigma]^2/2 \} dx' = \\ &= \int_{-\infty}^x h(x') dx' = D(x; \mu, \sigma). \end{aligned} \quad (\text{D. 2-10})$$

Dystrybuanta rozkładu ciągłego jest ściśle monotoniczną (rosnącą) funkcją argumentu, a więc istnieje funkcja odwrotna (t.zw. antydystrybuanta), która dla standaryzowanej zmiennej normalnej wynosi:

$$y = \Phi^{-1}(r) \quad (\text{D. 2-11})$$

gdzie:

$$r = \int_{-\infty}^y \varphi(y') dy'. \quad (\text{D. 2-12})$$

Wartość występującej we wzorze (D. 2-11) zmiennej y , nazywamy kwantylem rzędu r standaryzowanego rozkładu normalnego, natomiast odpowiadającą wartość zmiennej:

$$x = \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(r) \quad (\text{D. 2-13})$$

— kwantylem rzędu r rozkładu normalnego o parametrach (μ, σ) .

Siatkę funkcyjną rozkładu normalnego o dystrybuancie $D(x; \mu, \sigma)$ (albo krócej: siatką laplaso-regularną) nazwano układ współrzędnych ortogonalnych o liniowych

skalach: odciętych X i rzędnych Y , w których wykres każdej dystrybuanty $D(x)$ rozkładu normalnego jest linią prostą o równaniu:

$$Y = (X - \mu) / \sigma. \quad (\text{D. 2-14})$$

W celu uzyskania transformacji krzywoliniowej funkcji $D(x; \mu, \sigma)$ w prostą określoną równaniem (D. 2-14) zastosowano anamorficzne przekształcenie skal, a mianowicie odciętej:

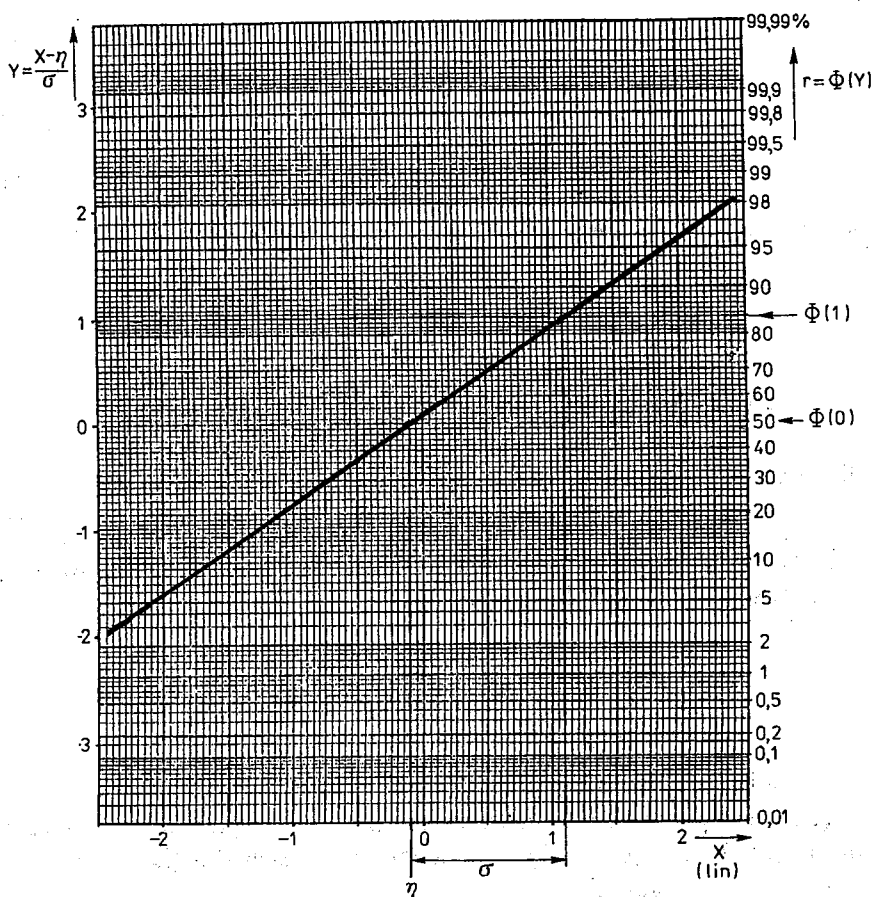
$$X = x \quad (\text{D. 2-15})$$

oraz rzędnej:

$$Y = \Phi^{-1}(r), \quad (\text{D. 2-16})$$

przy czym na skali rzędnych są nanoszone wartości dystrybuanty:

$$r = \Phi(Y). \quad (\text{D. 2-17})$$



Rys. 1. Siatka laplaso-regularna

Na rysunku przedstawiono ideę graficznej metody szacowania wartości parametrów (μ, σ) rozkładu normalnego zmiennej $x = \ln(f/f_0)$. Linia prosta aproksymuje empiryczną dystrybuantę rozkładu wagi. Szczegółowy opis metody podano w [4, pkt. 6.7].

Siatkę laplaso-regularną przedstawiono na rysunku 1, który również ilustruje graficzną metodę szacowania parametrów (μ, σ) rozkładu z wykresu dystrybuanty $D(x; \mu, \sigma)$. Metoda ta jest oparta na odwróceniu następujących związków:

1) gdy $X = \mu$ to $Y = 0$, a wówczas:

$$D(\mu) = \Phi(0) = 0,5 \quad (\text{D. 2-18})$$

2) gdy $X = \mu + \sigma$ to $Y = 1$, a wówczas:

$$D(\mu + \sigma) = \Phi(1) = 0,84134... \quad (\text{D. 2-19})$$

Przy danym wykresie dystrybuanty $D(x)$ rozkładu normalnego powyższe związki umożliwiają wyznaczenie (dokładny opis metody podano w [4, pkt 6.7]) z rysunku ocen parametrów (μ, σ) tego rozkładu na podstawie zależności odwrotnych, tzn.:

$$\mu = \Phi^{-1}(0,5) \quad (\text{D. 2-20})$$

oraz

$$\mu + \sigma \approx \Phi^{-1}(0,84134) \quad (\text{D. 2-21})$$

skąd

$$\sigma \approx \Phi^{-1}(0,84134) - \Phi^{-1}(0,5) \quad (\text{D. 2-22})$$

gdzie $\Phi^{-1}(r)$ oznacza kwantyl rzędu r standaryzowanego rozkładu normalnego.

DODATEK 3

CHARAKTERYSTYKA ROZKŁADU LOGARYTMONORMALNEGO

Jeśli zachodzi związek:

$$x = \ln(v) \quad (\text{D. 3-1})$$

oraz jeśli zmienna x ma rozkład normalny, to zmienna v też ma rozkład logarytmonormalny o gęstości (określonej dla $v > 0$):

$$\begin{aligned} g_0(v) &= |dx/dv| \cdot h(x(v)) = \\ &= \frac{1}{v\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-[(\ln(v) - \mu)/\sigma]^2/2\right\} \end{aligned} \quad (\text{D. 3-2})$$

przy czym dla $v \leq 0$ zachodzi: $g_0(v) \equiv 0$.

Występujące w powyższym wzorze parametry (μ, σ) rozkładu zmiennej v wyrażają się wzorami (D. 2-2) i (D. 2-3) z uwzględnieniem związku (D. 3-1).

Wprowadzając oznaczenie:

$$y = [\ln(v) - \mu]/\sigma \quad (\text{D. 3-3})$$

dystrybuantę rozkładu logarytmonormalnego zmiennej v o parametrach (μ, σ) , rozkładu oznaczanego dalej skrótowo: $\text{LN}(v; \mu, \sigma)$, można wyrazić za pomocą dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego, a mianowicie:

$$D(v; \mu, \sigma) = \int_0^v g_0(v') dv' = \int_{-\infty}^y \varphi(y') dy' = \Phi(y). \quad (\text{D. 3-4})$$

Momenty zwyczajne rzędu r rozkładu $\text{LN}(v; \mu, \sigma)$ wynoszą:

$$\begin{aligned} M_{or} &= \int_0^{\infty} v^r g_0(v) dv = \int_0^{\infty} \exp[r \cdot \ln(v)] g_0(v) dv = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(rx) h(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{rx - [(x - \mu)/\sigma]^2/2\} dx. \end{aligned}$$

Uwzględniając, że powyższą całkę można wyrazić w sposób podany w [15, pkt 3.213–4], mamy ostatecznie:

$$M_{or} = \exp[r\mu + (r\sigma)^2/2]. \quad (\text{D. 3-5})$$

W przypadku obustronnego ucięcia rozkładu $\text{LN}(v; \mu, \sigma)$ w punktach: v_1 i v_2 zachodzi związek:

$$\int_{v_1}^{v_2} g_0(v) dv = D(v_2; \mu, \sigma) - D(v_1; \mu, \sigma), \quad (\text{D. 3-6})$$

a więc dla unormowania rozkładu w przedziale $[v_1, v_2]$, tj. spełnienia warunku:

$$\int_{v_1}^{v_2} g(v) dv = 1 \quad (\text{D. 3-7})$$

trzeba, aby:

$$g(v) = \frac{g_0(v)}{D(v_2; \mu, \sigma) - D(v_1; \mu, \sigma)} = \frac{g_0(v)}{\Phi(y_2) - \Phi(y_1)}, \quad (\text{D. 3-8})$$

gdzie: $y_1 = [\ln(v_1) - \mu]/\sigma$; $y_2 = [\ln(v_2) - \mu]/\sigma$.

W przypadku, gdy rozkład $\text{LN}(v; \mu, \sigma)$ zostaje obustronnie ucięty i unormowany w przedziale $[v_1, v_2]$, jego momenty zwyczajne wynoszą:

$$\begin{aligned} M_r &= \int_{v_1}^{v_2} v^r g(v) dv = \int_{v_1}^{v_2} \frac{v^r g_0(v) dv}{\Phi(y_2) - \Phi(y_1)} = \\ &= \frac{1}{\Phi(y_2) - \Phi(y_1)} \cdot \left[\int_0^{v_2} v^r g_0(v) dv - \int_0^{v_1} v^r g_0(v) dv \right]. \end{aligned} \quad (\text{D. 3-9})$$

Jak wykazano w [1, pkt 2.5] (patrz Dodatek 4), zachodzi związek:

$$\int_0^{v_z} v^r g_0(v) dv = M_{or} \cdot D(v_z; \mu + r\sigma^2, \sigma) \quad (\text{D. 3-10})$$

przy czym:

$$\begin{aligned} D(v_z; \mu + r\sigma^2, \sigma) &= \Phi\{[\ln(v_z) - (\mu + r\sigma^2)]/\sigma\} = \\ &= \Phi\{[\ln(v_z) - \mu]/\sigma - r\sigma\} = \Phi(y_z - r\sigma). \end{aligned} \quad (\text{D. 3-11})$$

Uwzględniając (D. 3-10) i (D. 3-11) w (D. 3-9) otrzymujemy następującą postać momentów zwyczajnych rozkładu $\text{LN}(v; \mu, \sigma)$ obustronnie uciętego i unormowanego w przedziale $[v_1, v_2]$:

$$M_r = \frac{\Phi(y_2 - r\sigma) - \Phi(y_1 - r\sigma)}{\Phi(y_2) - \Phi(y_1)} \cdot M_{\infty r} \quad (\text{D. 3-12})$$

przy czym $M_{\infty r}$ jest określone wzorem (D. 3-5).

Jeśli zachodzi związek:

$$v = f/f_0 \quad (\text{D. 3-13})$$

gdzie $f_0 = \text{const.}$, oraz jeśli zmienna v ma rozkład logarytmonormalny, to zmienna f też ma rozkład logarytmonormalny o gęstości (określonej dla $f > 0$):

$$\begin{aligned} g_0(f) &= |dv/df| \cdot h(v(f)) = 1/f_0 \cdot h(v(f)) = \\ &= 1/f\sigma \sqrt{2\pi} \cdot \exp\{-[(\ln(f/f_0) - \mu)/\sigma]^2/2\} \end{aligned} \quad (\text{D. 3-14})$$

przy czym dla $f \leq 0$ zachodzi: $g_0 \equiv 0$.

Dystrybuanta rozkładu $\text{LN}(f; \mu, \sigma)$ wynosi:

$$D(f; \mu, \sigma) = \int_0^f g_0(f') df' = \Phi(y), \quad (\text{D. 3-15})$$

gdzie:

$$y = [\ln(f/f_0) - \mu]/\sigma. \quad (\text{D. 3-16})$$

Momenty zwyczajne rzędu r nieograniczonego rozkładu $\text{LN}(f; \mu, \sigma)$ wynoszą:

$$\begin{aligned} m_{\infty r} &= \int_0^\infty f^r g_0(f) df = \int_0^\infty (f_0 \cdot v)^r (1/f_0) g_0(v) f_0 dv = \\ &= f_0^r \cdot \int_0^\infty v^r g_0(v) dv = f_0^r \cdot \exp[r\mu + (r\sigma)^2/2] \end{aligned} \quad (\text{D. 3-17})$$

Gęstość rozkładu $\text{LN}(f; \mu, \sigma)$, po dwustronnym ucięciu i unormowaniu w przedziale $[f_d, f_g]$, wynosi:

$$g(f) = g_0(f) / [\Phi(y_g) - \Phi(y_d)], \quad (\text{D. 3-18})$$

gdzie:

$$y_g = [\ln(f_g/f_0) - \mu] / \sigma \quad (\text{D. 3-19})$$

oraz:

$$y_d = [\ln(f_d/f_0) - \mu] / \sigma. \quad (\text{D. 3-20})$$

Momenty zwyczajne rzędu r rozkładu $\text{LN}(f; \mu, \sigma)$ dwustronnie uciętego i unormowanego w przedziale $[f_d, f_g]$ wynoszą zatem:

$$m_r = \frac{\Phi(y_g - r\sigma) - \Phi(y_d - r\sigma)}{\Phi(y_g) - \Phi(y_d)} \cdot m_{0r}, \quad (\text{D. 3-21})$$

gdzie m_{0r} jest określone wzorem (D. 3-17).

DODATEK 4

DYSTRYBUANTA ROZKŁADU MOMENTÓW ZWYCZAJNYCH RZĘDU r

WYPROWADZENIE WZORU (D. 3-10)

W [1, pkt 2.5] wykazano, że:

$$\begin{aligned} & \frac{\int_0^{v_z} v^r g_0(v) dv}{\int_0^\infty v^r g_0(v) dv} = \\ &= \frac{\int_0^{v_z} \exp\{\ln(v) \cdot r\} \cdot 1/(v\sigma\sqrt{2\pi}) \cdot \exp\{-(\ln(v) - \mu)/\sigma\}^2\} dv}{\exp\{r\mu + (r\sigma)^2/2\}} = \\ &= \int_0^{v_z} 1/(v\sigma\sqrt{2\pi}) \cdot \exp\{r \cdot \ln(v) - r \cdot \mu - (r\sigma)^2/2 - [(\ln(v) - \mu)/\sigma]^2/2\} dv = \\ &= \int_0^{v_z} 1/(v\sigma\sqrt{2\pi}) \cdot \exp\{-(\ln(v) - \mu - r\sigma^2)/\sigma\}^2/2\} dv = \\ &= \int_0^{v_z} g_0(v; \mu + r\sigma^2, \sigma) dv = D(v_z; \mu + r\sigma^2, \sigma). \quad (\text{D. 4-1}) \end{aligned}$$

DODATEK 5

DOKŁADNA APROKSYMACJA FUNKCJI $\Phi(y)$

W [6] opublikowano proste wyrażenie arytmetyczne, które umożliwia aproksymację dystrybuanty $\Phi(y)$ standaryzowanego rozkładu normalnego z niedokładnością $< \pm 10^{-9}$ w zakresie $|y| \leq 2$ oraz $< \pm 10^{-10}$ w zakresie $|y| > 2$, a mianowicie:

$$\Phi(y) \approx \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \exp\{w(y)\} & \text{dla } y \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2} \cdot \exp\{w(y)\} & \text{dla } y > 0 \end{cases} \quad (\text{D. 5-1})$$

gdzie $w(y)$ jest wielomianem stopnia n ($=10$) o postaci:

$$w(y) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot |y|^k \quad (\text{D. 5-2})$$

przy czym a_k są stałymi współczynnikami (patrz [6]).

Algebraiczna metoda optymalizacji częstotliwości wyznaczania punktowych aproksymat tłumienności pasmowej

ZBIGNIEW KOWALSKI (HABDANK)

Instytut Łączności, Warszawa

Otrzymano 1991.04.03

Autoryzowano do druku 1991.05.12

Tłumienność pasmowa $\bar{A}$ jest skalarną wielkością, której definicja matematyczna ma postać całki oznaczonej w pasmie częstotliwości akustycznych. W praktyce ta wielkość jest aproksymowana za pomocą średniej ważonej tłumienności punktowych, tzn. wyznaczanych przy ustalonych częstotliwościach pasma przesyłowego.

W artykule przedstawiono metodę określania takich częstotliwości pasma, dla których ocena wielkości $\bar{A}$, uzyskana na podstawie średniej ważonej, jest najmniej wrażliwa na losowe błędy wyznaczania tłumienności punktowych. Ogólną metodę (dla dowolnej postaci funkcji wagi, charakteryzującej tłumienność pasmową) zilustrowano szczególnym przypadkiem, gdy funkcja wagi ma postać logarytmnormalną. Z matematycznego punktu widzenia zaprezentowana metoda stanowi rozwiązanie problemu, występującego przy całkowaniu numerycznym, który dotyczy konstrukcji tzw. kwadratury złożonej o jednakowych współczynnikach wagowych.

1. WPROWADZENIE

W klasycznej teorii czwórników elektrycznych [6, rozdz. 3] używane jest pojęcie tłumienności¹⁾:

$$A = \psi(f) \quad (1)$$

punktowo charakteryzującej właściwości transmisyjne linearnego czwórnika dla mocy pozornej sygnału sinusoidalnego o dowolnej, ale ustalonej częstotliwości f .

W celu skalarnej scharakteryzowania właściwości transmisyjnych tego czwórnika w przedziale (pasmie) częstotliwości $[f_d, f_g]$ zostało wprowadzone w [3] pojęcie tłumienności pasmowej:

¹⁾ będziemy abstrahować od rodzaju tłumienności, ponieważ to nie ma znaczenia dla dalszych rozważań.

$$\bar{A} = \int_{f_d}^{f_g} \psi(f) g(f) df \quad (2)$$

gdzie $g(f)$ jest dodatnio określoną i unormowaną w pasmie $[f_d, f_g]$ funkcją gęstości wagi, tzn. spełniającą 2 warunki:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & g(f) > 0 \quad \text{dla} \quad f \in [f_d, f_g] \\ \text{(II)} \quad & \int_{f_d}^{f_g} g(f) df = 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Przypomnijmy, iż wielkość (2) jest szacowana na podstawie wyników punktowych pomiarów tłumienności dla p częstotliwości $f_k \in [f_d, f_g]$, gdzie: $k = 1, \dots, p$. Załóżmy przy tym, że te wyniki pomiarów są obarczone tylko błędami losowymi o odchyleniu standardowym β , którego wartość nie zależy od częstotliwości, przy czym wartości błędów, występujących przy kolejnych pomiarach są wzajemnie niezależne; ponadto przyjmijmy, że nie występują błędy systematyczne. Powyższe założenia umożliwiają traktowanie wyników punktowych pomiarów tłumienności A_k jako zmiennych losowych, spełniających następujące 3 postulaty:

$$E\{A_k\} = \tau(f_k); \quad V = \{A_k\} = \beta^2; \quad \text{Cov}\{A_k, A_k\} = 0,$$

gdzie symbole: $E\{\cdot\}$, $V\{\cdot\}$ i $\text{Cov}\{\cdot, \cdot\}$ oznaczają: wartość oczekiwaną, wariancję i kowariancję odpowiednich zmiennych losowych.

Autor postawił sobie zadanie znalezienia takich częstotliwości f_k , $k = 1, \dots, p$, dla których punktowa aproksymata tłumienności pasmowej:

$$\tilde{A} = \sum_{k=1}^p G_k \cdot A_k, \quad (4)$$

(gdzie G_k są unormowanymi współczynnikami wagowymi, tzn. $\sum G_k = 1$) wykazuje minimum wrażliwości W na losowe błędy wyznaczania tłumienności punktowych, przy czym z definicji:

$$W = \frac{\sqrt{V\{\tilde{A}\}}}{\beta} = \left[\sum_{k=1}^p G_k^2 \right]^{1/2} \quad (5)$$

2. OPTIMALIZACJA JEDNOZAKRESOWA

Ponieważ, jak wykazano w [3, pkt 3] (patrz Dodatek D1), wzory na współczynniki wagowe p -punktowych aproksymat są zależne jedynie od częstotliwości f_k oraz od wielkości m_r , tzn.:

$$G_k \equiv G_k(f_1, \dots, f_p; m_1, \dots, m_{p-1}) \quad (6)$$

gdzie:

$$m_r = \int_{f_d}^{f_g} f^r g(f) df \quad (7)$$

są momentami zwyczajnymi rzędu r rozkładu wagi w pasmie $[f_d, f_g]$, więc przy dowolnej funkcji wagi $g(f)$ i dla dowolnej liczby p punktów aproksymacji istnieje możliwość znalezienia takich częstotliwości $f_1, \dots, f_p$, dla których występuje minimum wrażliwości W .

Warto zauważyć, iż wzór (5) można sprowadzić do postaci:

$$W^2 = \sum_{k=1}^p G_k^2 = \frac{1}{p} + S^2 \quad (8)$$

gdzie:

$$S^2 = \sum_{k=1}^p \left(G_k - \frac{1}{p} \right)^2. \quad (9)$$

Ze wzoru (8) widać, że dla dowolnej ustalonej liczby p punktów aproksymacji minimum wrażliwości W zachodzi wówczas, gdy występuje minimum wielkości S^2 . Należy przy tym wyróżnić dwie możliwości: I – gdy $S^2 = 0$ oraz II – gdy $S^2 > 0$.

Przypadek I może wystąpić wtedy, gdy dla każdego $k=1, \dots, p$ jednocześnie zachodzi równość:

$$G_k = \frac{1}{p} \quad (10)$$

W tym przypadku wartości optymalnych częstotliwości f_k można wyznaczyć dla liczby punktów aproksymacji: $p \leq 4$ metodami algebraicznymi podanymi w [3] (patrz Dodatki: 1 i 2). Uzyskuje się przy tym następującą ogólną postać wzorów, określających te optymalne częstotliwości:

$$\left. \begin{aligned} - \text{dla } p=2: f_k &\equiv f_k(m_1); k=1, 2 \\ - \text{dla } p=3: f_k &\equiv f_k(m_1, m_2); k=1, 2, 3 \\ - \text{dla } p=4: f_k &\equiv f_k(m_1, m_2, m_3); k=1, 2, 3, 4 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

przy czym m_r (dla $r=1,2,3$) jest określone wzorem (7).

Dla tych częstotliwości p -punktowa aproksymata tłumienności pasmowej ma postać:

$$\tilde{A} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p A_k \quad (12)$$

a jej wrażliwość wynosi:

$$W = \frac{1}{\sqrt{p}} \quad (13)$$

Rozważmy obecnie przypadek II²⁾. Ponieważ wielkość:

$$S^2 \equiv S^2(f_1, f_2, \dots, f_p; m_1, \dots, m_{p-1}) \quad (14)$$

jest ciągłą funkcją p argumentów $\{f_k\}$, więc minimum tej wielkości może wystąpić tylko w takim punkcie p -wymiarowej przestrzeni, w którym dla każdego wymiaru $k = 1, \dots, p$ jest spełniony warunek:

$$\partial S^2 / \partial f_k = 0 \quad (15)$$

Niestety, układu p równań o postaci (15) nie umiemy rozwiązać; jak dotychczas istnieje jedynie możliwość poszukiwania częstotliwości optymalnych $\{f_k\}$ iteracyjnymi metodami numerycznymi, znajdującymi minimum wielkości S^2 . Okazało się jednak, że w tym konkretnym zastosowaniu metody minimalizacyjne wykazują istotne wady, na skutek czego nie powinny być w ogóle stosowane.

3. OPTYMALIZACJA WIELOZAKRESOWA

Z drugiej strony przedstawioną w [3] (patrz: Dodatek 2) algebraiczną metodę wyznaczania optymalnych częstotliwości $\{f_k\}$ przy małej liczbie p (≤ 4) punktów aproksymacji można zastosować w dowolnym przedziale, a więc również w każdym z n zakresów, na które można podzielić pasmo przesyłowe $[f_d, f_g]$. Jednakże dla uzyskania w całym pasmie jednakowych współczynników wagowych:

$$G_k = \frac{1}{np} \quad (16)$$

konieczne jest zastosowanie takiego podziału pasma $[f_d, f_g]$ na zakresy, aby w każdym j -tym zakresie: $[f_{jd}, f_{jg}]$ (gdzie $j = 1, \dots, n$) był spełniony warunek (porównaj ze wzorem (3)):

$$\int_{f_{jd}}^{f_{jg}} g(f) df = \frac{1}{n} \quad (17)$$

albo inaczej:

$$D(f_{jg}) - D(f_{jd}) = \frac{1}{n} \quad (18)$$

gdzie $D(f_r)$ oznacza wartość dystrybuanty rozkładu wagi w punkcie f_r :

$$D(f_r) = \int_{f_d}^{f_r} g(f) df = r, \quad (19)$$

przy czym dla $f_r \leq f_d$ jest $r \equiv 0$, a dla $f_r \geq f_g$ $r \equiv 1$.

²⁾ Należy zwrócić uwagę, że przy wzroście sumy kwadratów S^2 wrażliwość W aproksymaty wzrasta, a gdy: $S^2 > 1 - 1/p$ staje się większa od jedności. W takim przypadku wartość błędu standardowego aproksymaty A jest większa (niekiedy nawet znacznie patrz: [5, Tabl. 3]) od wartości błędu standardowego β tłumienności punktowych A_k .

Ponieważ dla ciągłego rozkładu wagi dystrybuanta $D(f_r)$ jest ściśle monotoniczną funkcją argumentu f_r , więc istnieje funkcja odwrotna (antydystrybuanta):

$$D^{-1}(r) = f_r \quad (20)$$

umożliwiająca wyznaczenie częstotliwości podziałowych całego pasma $[f_d, f_g]$ na n zakresów o równych wagach (patrz Rys. 1):

$$\left. \begin{aligned} f_{1g} &= D^{-1}(1/n) \\ f_{2g} &= D^{-1}(2/n) \\ f_{3g} &= D^{-1}(3/n) \\ &\dots\dots\dots \\ f_{jg} &= D^{-1}(j/n) \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Oznacza to, że częstotliwości podziałowe f_{jg} muszą być równe kwantylom rzędu $r=j/n$ (gdzie $j=1, \dots, n-1$) rozkładu wagi.

Oczywiście ponadto muszą być spełnione następujące warunki dla $j=2, \dots, n$:

$$\text{oraz: } \left. \begin{aligned} f_{jd} &= f_{(j-1)g} \\ f_{1d} &= f_d; f_{ng} = f_g \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Przy spełnieniu tych wszystkich warunków n -zakresowa, p -punktowa aproksymata tłumienności pasmowej ma postać:

$$\bar{A} = (1/np) \cdot \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p A_{jk}, \quad (23)$$

a jej wrażliwość wynosi:

$$W = \frac{1}{\sqrt{np}}. \quad (24)$$

Przy założeniu, że wrażliwość stosowanej aproksymaty nie powinna być większa od wartości W_m , otrzymuje się wymaganie, aby liczba zakresów spełniała warunek:

$$n \geq \frac{1}{pW_m^2} \quad (25)$$

gdzie: $p=3$, albo $p=4^3$.

³⁾ Wybór liczby $p=4$ jest korzystniejszy ze względu na wyższy rząd dokładności aproksymaty (patrz Dodatki 1 i 2); wybór liczby $p=3$ jest korzystniejszy ze względu na mniejszą ostrość minimum wrażliwości W , co umożliwia łatwiejszy wybór częstotliwości suboptymalnych, preferowanych ze względów technicznych (patrz przykład, podany w pkt 5).

4. PRZYPADEK LOGARYTMONORMALNEGO ROZKŁADU WAGI

W przypadku, gdy rozkład wagi jest logarytmnormalny (patrz [5]), zachodzi związek:

$$D(f_r) = \Phi(y_r) \quad (26)$$

gdzie $\Phi(y_r)$ jest dystrybuantą standaryzowanego rozkładu normalnego o argumentcie:

$$y_r = [\ln(f_r/f_0) - \mu] / \sigma, \quad (27)$$

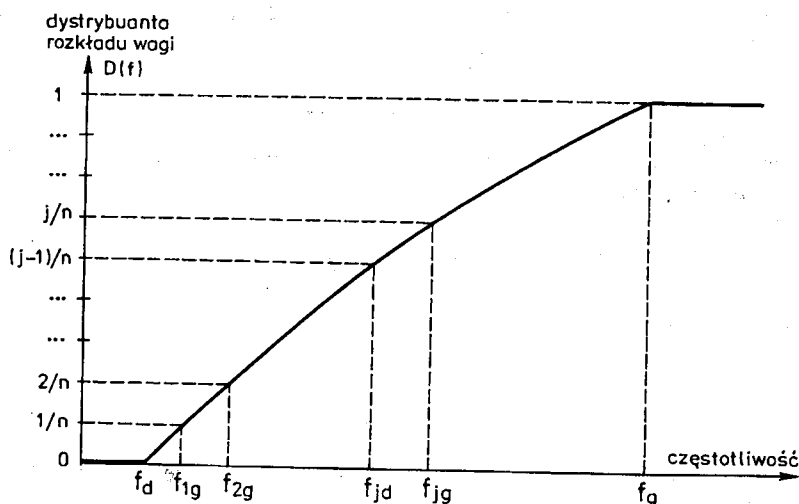
przy czym f_0 jest częstotliwością odniesienia, zaś μ i σ są parametrami tego rozkładu.

W przypadku, gdy logarytmnormalny rozkład wagi jest obustronnie ucięty w punktach: f_d i f_g i unormowany w przedziale $[f_d, f_g]$, dystrybuanta tego rozkładu (rys. 1) wyraża się następująco [5]:

$$D(f_r) = \frac{\Phi(y_r) - \Phi(y_d)}{\Phi(y_g) - \Phi(y_d)} \quad (28)$$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} y_d &= [\ln(f_d/f_0) - \mu] / \sigma \\ y_g &= [\ln(f_g/f_0) - \mu] / \sigma \end{aligned} \right\} \quad (29)$$



Rys. 1.

W przypadku dwustronnie uciętego rozkładu logarytmnormalnego wartości częstotliwości podziałowych f , można wyznaczyć, podstawiając (28) do (19), skąd mamy:

$$\Phi(y_r) = r \cdot \Phi(y_g) + (1 - r) \cdot \Phi(y_d)$$

a więc:

$$y_r = \Phi^{-1}[r \cdot \Phi(y_g) + (1 - r) \cdot \Phi(y_d)] \quad (30)$$

przy czym $\Phi^{-1}[\cdot]$ jest antydystrybuantą standaryzowanego rozkładu normalnego. Ponieważ z (27) mamy:

$$\ln(f_r/f_0) = \mu + \sigma y_r,$$

więc ostatecznie:

$$f_r = f_0 \cdot \exp(\mu + \sigma y_r). \quad (31)$$

Przy podziale pasma częstotliwości $[f_d, f_g]$ na n zakresów, optymalne częstotliwości f_{jk} wyznaczania tłumienności punktowych dla każdego j -tego zakresu ($j=1, \dots, n$) można określić na podstawie wzorów analogicznych do (11) o ogólnej postaci:

$$\tilde{f}_{jk} \equiv \tilde{f}_{jk}(m_{j1}, \dots, m_{jq}), \quad (32)$$

gdzie: $k=1, \dots, p$; $q=p-1$ ($p \leq 4$), natomiast:

$$m_{jr} = \int_{f_{jd}}^{f_{jg}} f^r g(f) df \quad (33)$$

są momentami zwyczajnymi rzędu $r=1, \dots, p-1$ rozkładu wagi w j -tym zakresie o częstotliwościach granicznych $[f_{jd}, f_{jg}]$, przy czym f_{jg} jest określone wzorem (31), gdzie $r=j/n$, $j=1, \dots, n$; $f_{jd}=f_{(j-1)g}$ oraz: $f_{1d}=f_d$; $f_{ng}=f_g$.

W przypadku, gdy funkcja wagi ma rozkład logarytmnormalny o parametrach (μ, σ) , obustronnie ucięty w punktach: f_d i f_g , to w j -tym zakresie momenty zwyczajne rzędu r tego rozkładu wynoszą [5, Dodatek 2]:

$$m_{jr} = m_{\infty r} \cdot \frac{\Phi(y_{jg} - r\sigma) - \Phi(y_{jd} - r\sigma)}{\Phi(y_g) - \Phi(y_d)} \quad (34)$$

gdzie:

$$m_{\infty r} = f_0^r \cdot \exp[r\mu + 1/2(r\sigma)^2] \quad (35)$$

są momentami zwyczajnymi rzędu r rozkładu nieuciętego, natomiast

$$\text{oraz: } \left. \begin{aligned} y_{jd} &= [\ln(f_{jd}/f_0) - \mu] / \sigma \\ y_{jg} &= [\ln(f_{jg}/f_0) - \mu] / \sigma \end{aligned} \right\}. \quad (36)$$

5. PRZYKŁADOWE WYNIKI OPTYMALIZACJI

W tablicy 1 zestawiono wyniki optymalizacji częstotliwości wyznaczania 3-zakresowych, 3-punktowych aproksymat tłumienności pasmowej o logarytmnormalnym rozkładzie wagi z parametrami: $\mu=0$ i $\sigma=1,15$.

Charakteryzujące te aproksymaty wartości optymalnych częstotliwości $\{f_k\}$ i odpowiadające tym częstotliwościom wartości współczynników wagowych $\{\hat{G}_k\}$ podano w rubrykach 2 i 3. Natomiast w rubrykach 4 i 5 podano wartości subnormalnych

częstotliwości $\{f_k\}$ oraz współczynników wagowych $\{G_k\}$, przy założeniu, że wartości częstotliwości $\{f_k\}$ są wielokrotnością kwantu $q = 10$ Hz.

T a b l i c a 1

Zestawienie wartości parametrów np-punktowych aproksymat tłumienności pasmowej o logarytmnormalnym rozkładzie wagi w pasmie telefonii naturalnej ($f_d = 300$; $f_g = 3400$ [Hz] gdy: liczba zakresów $n=3$, a liczba punktów w zakresie $p=3$

1	2	3	4	5
$j; k$	f_{jk} [Hz] (gdy $q \rightarrow 0$)	G_{jk} ($\equiv 1/9$)	f_{jk} [Hz] (gdy $q = 10$)	G_{jk}
1;1	351,9905...	0,1111111..	350	0,1104944
1;2	486,8044...	0,1111111..	490	0,1125235
1;3	640,9081...	0,1111111..	640	0,1103155
2;1	779,7318...	0,1111111..	780	0,1101375
2;2	1021,091.....	0,1111111..	1020	0,1142455
2;3	1267,224.....	0,1111111..	1280	0,1089503
3;1	1535,663.....	0,1111111..	1540	0,1124246
3;2	2139,438.....	0,1111111..	2140	0,1093353
3;3	2880,885.....	0,1111111..	2880	0,1115735
$ 1 - \Sigma G_{jk} $	—	0	—	$\leq 2,9 \cdot 10^{-16}$
W	—	0,3333334	—	0,333369

Z porównania dolnych części rubryk: 3 i 5 widać, że zastosowanie w rozważanych aproksymatach „zaokrąglonych” częstotliwości bardzo nieznacznie wpływa na wzrost wrażliwości W aproksymat (o $3,6 \cdot 10^{-5}$). Oczywiście przy zastosowaniu subop-
tymalnych częstotliwości f_{jk} , rozważane aproksymaty mają postać określoną wzorem nie (23) lecz:

$$\tilde{A} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p G_{jk} A_{jk}, \quad (37)$$

gdzie: $A_{jk} \equiv E\{A(f_{jk})\}$, a ich wrażliwość jest określona wzorem:

$$W = \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p G_{jk}^2 \right]^{1/2}. \quad (38)$$

Należy dodać, że występujący w dolnej części Tabl. 1 parametr $|1 - \Sigma G_k|$ charakteryzuje dokładność obliczeń numerycznych przy wyznaczaniu wartości współ-
czynników G_k .

6. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

W artykule przedstawiono metodę wyznaczania optymalnych oszacowań tłumien-
ności pasmowej $\tilde{A}$ czwórników na podstawie wyników punktowych pomiarów
tłumienności A_k , tzn. przeprowadzanych przy ustalonych częstotliwościach f_k pasma

przesyłowego. Te oszacowania charakteryzują się minimalną wrażliwością W na losowe błędy niepewności danych pomiarowych A_k .

Algorytm określania liczby i wartości tych optymalnych częstotliwości f_k jest następujący:

1 – ustalenie założeń: wartości dopuszczalnej, górnej granicy W_m wrażliwości (charakteryzującej wymagane oszacowania wielkości $\bar{A}$), wartości dolnej i górnej granicy pasma przesyłowego $[f_d, f_g]$ oraz wartość wymaganego kwantu q (charakteryzującego zbiór dopuszczalnych wartości częstotliwości pomiarowych f_k), a także wartości parametrów rozkładu wagi $g(f)$ (charakteryzującej wielkość $\bar{A}$; w przypadku rozkładu logarytmnormalnego – parametrów: μ i σ);

2 – wyznaczenie liczby n zakresów aproksymacji ze wzoru (25);

3 – jeśli $n=1$, to obliczenie wartości optymalnych częstotliwości pomiarowych na podstawie ogólnego wzoru (11), z wykorzystaniem wzorów szczegółowych, zawartych w Dodatku 2; – jeśli $n>1$, to obliczenie wartości częstotliwości podziałowych na podstawie wzoru (21), (w przypadku rozkładu logarytmnormalnego – na podstawie szczegółowego wzoru (31), a następnie obliczenie (w każdym z zakresów) wartości optymalnych częstotliwości pomiarowych f_k na podstawie ogólnego wzoru (32), z wykorzystaniem wzorów szczegółowych, zawartych w Dodatku 2 (oraz – w przypadku rozkładu logarytmnormalnego – na podstawie szczegółowego wzoru (34));

4 – przyjęcie suboptymalnych częstotliwości pomiarowych (których wartości stanowią wielokrotność założonego kwantu q) oraz wyznaczenie odpowiadających tym częstotliwościom wartości współczynników wagowych, określonych wzorami podanymi w Dodatku 1;

5 – sprawdzenie, czy otrzymana ze wzoru (38) wartość wrażliwości W nie przekracza założonej wartości dopuszczalnej W_m ; w przypadku przekroczeń konieczne jest powtórzenie obliczeń dla zwiększonej liczby n zakresów aproksymacji (lub większej liczby p punktów aproksymacji w każdym z zakresów).

Wiadomo, że n -zakresowa, p -punktowa aproksymata tłumienności pasmowej ma dokładność rzędu p , identycznie jak aproksymata jednozakresowa o takiej samej liczbie punktów w zakresie. Jednakże nie jest znane obciążenie takiej n -zakresowej aproksymaty; należałoby zatem wyprowadzić wzory, charakteryzujące to obciążenie.

BIBLIOGRAFIA

1. P. D a v i s, P. R a b i n o w i t z: *Methods of numerical integration*. Orlando, Academic Press, 1984
2. Z. K ó w a l s k i: *Pasmowe tłumienności czwórników i ortotelefoniczna tłumienność odniesienia*. Rozprawy Elektrotechniczne, zeszyt 3/4, 1982
3. Z. K ó w a l s k i: *Punktowe aproksymaty tłumienności pasmowej*. Rozprawy Elektrotechniczne, zeszyt 2, 1984
4. Z. K ó w a l s k i: *Metoda wyznaczania 3-punktowych aproksymat tłumienności pasmowej*. Referaty Problemowe II, zeszyt 48, 1981
5. Z. K ó w a l s k i: *Tłumienności pasmowe o logarytmnormalnym rozkładzie wagi i ich punktowe aproksymaty*. Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji, 1991, 37, zesz. 3,4, s. 653-668
6. W. N o w i c k i: *Podstawy teletransmisji*, t. 1. WKiŁ, Warszawa, 1971
7. R. Z u b e r: *Metody numeryczne i programowanie*. WSiP, Warszawa, 1975

DODATEK 1

JAWNA POSTAĆ WZORÓW OKREŚLAJĄCYCH WSPÓŁCZYNNIKI WAGOWE
ORAZ OBCIĄŻENIE PUNKTOWYCH APROKSYMAT TŁUMIENNOŚCI PASMOWEJ

W przypadku p -punktowej aproksymacji tłumienności pasmowej (określonej w zakresie częstotliwości $[f_d, f_g]$), przy założonych wartościach $f_1 \dots f_p$ częstotliwości wyznaczania tłumienności punktowej, współczynniki wagowe (wyprowadzone z zastosowaniem metody interpolacyjnej) wynoszą [3]:

$$G_k = \frac{J_{p/k}}{I_{p/k}} \quad (D1-1)$$

gdzie:

$$I_{p/k} = \sum_{n=0}^{p-1} F_{n/k} \cdot f^{p-n-k} \quad (D1-2)$$

natomiast:

$$J_{p/k} = \sum_{n=0}^{p-1} F_{n/k} \cdot m_{p-n-1} \quad (D1-3)$$

Występujące w powyższych wzorach wielkości:

$$m_r = \int_{f_d}^{f_g} f^r g(f) df \quad (D1-4)$$

są momentami zwyczajnymi rzędu r rozkładu wagi o gęstości $g(f)$, a współczynniki:

$$F_{n/k} = (-1)^n \sum_{P_n^{-1}} \prod_{i=1}^n f_{j_i} \quad (D1-5)$$

$j_i = \{1, \dots, p\} \neq k$

są sumami $\binom{p-1}{n}$ iloczynów, stanowiących kombinacje bez powtórzeń n elementów z $(p-1)$ -elementowego zbioru $\{f_j\}$, gdzie $j \neq k$, przyjmując wszystkie pozostałe wartości $j=1, \dots, p$.

Gdy $p=2$, to przy założonych wartościach częstotliwości f_1, f_2 otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= \frac{m_1 - f_2}{f_1 - f_2} \\ G_2 &= \frac{m_1 - f_1}{f_2 - f_1} \end{aligned} \right\} \quad (D1-6)$$

Gdy $p=3$, to przy założonych wartościach częstotliwości f_1, f_2, f_3 otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= \frac{m_2 - m_1(f_2 + f_3) + f_2 f_3}{f_1^2 - f_1(f_2 + f_3) + f_2 f_3} \\ G_2 &= \frac{m_2 - m_1(f_1 + f_3) + f_1 f_3}{f_2^2 - f_2(f_1 + f_3) + f_1 f_3} \\ G_3 &= \frac{m_2 - m_1(f_1 + f_2) + f_1 f_2}{f_3^2 - f_3(f_1 + f_2) + f_1 f_2} \end{aligned} \right\} \quad (D1-7)$$

Gdy $p=4$, to przy założonych wartościach częstotliwości f_1, f_2, f_3, f_4 otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= \frac{m_3 - m_2(f_2 + f_3 + f_4) + m_1(f_2 f_3 + f_3 f_4 + f_2 f_4) - f_2 f_3 f_4}{f_1^3 - f_1^2(f_2 + f_3 + f_4) + f_1(f_2 f_3 + f_3 f_4 + f_2 f_4) - f_2 f_3 f_4} \\ G_2 &= \frac{m_3 - m_2(f_1 + f_3 + f_4) + m_1(f_1 f_3 + f_3 f_4 + f_1 f_4) - f_1 f_3 f_4}{f_2^3 - f_2^2(f_1 + f_3 + f_4) + f_2(f_1 f_3 + f_3 f_4 + f_1 f_4) - f_1 f_3 f_4} \\ G_3 &= \frac{m_3 - m_2(f_1 + f_2 + f_4) + m_1(f_1 f_2 + f_2 f_4 + f_1 f_4) - f_1 f_2 f_4}{f_3^3 - f_3^2(f_1 + f_2 + f_4) + f_3(f_1 f_2 + f_2 f_4 + f_1 f_4) - f_1 f_2 f_4} \\ G_4 &= \frac{m_3 - m_2(f_1 + f_2 + f_3) + m_1(f_1 f_2 + f_2 f_3 + f_1 f_3) - f_1 f_2 f_3}{f_4^3 - f_4^2(f_1 + f_2 + f_3) + f_4(f_1 f_2 + f_2 f_3 + f_1 f_3) - f_1 f_2 f_3} \end{aligned} \right\} \quad (D1-8)$$

Jak wyprowadzono w [3], obciążenie (błąd poprawności) p -punktowej aproksymaty wynosi:

$$b_p = E\{\tilde{A}\} - \bar{A} = -\psi_x^{(p)} \cdot J_p / p! \quad (D1-9)$$

gdzie:

$$\psi_x^{(p)} \equiv \psi^{(p)}(f_x) \quad (D1-10)$$

jest pochodną rzędu p częstotliwościowej charakterystyki tłumienności $\psi(f)$, wyznaczoną w punkcie f_x , przy czym wiadomo tylko, że: $f_x \in [f_d, f_g]$, natomiast wartość f_x nie jest znana. Z tego względu wprowadza się wielkość:

$$M_p = \sup_{f \in [f_d, f_g]} \{ \psi^{(p)}(f) \} \quad (D1-11)$$

a wówczas moduł błędu poprawności nie przekracza górnej granicy określonej następująco:

$$|b_p| \leq M_p \cdot |J_p| / p! \quad (D1-12)$$

Występująca we wzorach (D1-9) i (D1-12) wielkość J_p (którą nazwiemy współczynnikiem niepoprawności) wynosi:

$$J_p = \sum_{n=0}^p F_n \cdot m_{p-n} \quad (D1-13)$$

przy czym współczynniki:

$$F_n = (-1)^n \sum_{p \atop n} \bigcap_{\substack{i=1 \\ j_i=1, \dots, p}}^n f_{ji} \quad (\text{D1-14})$$

są sumami $\binom{p}{n}$ iloczynów, stanowiących kombinacje bez powtórzeń n elementów z p -elementowego zbioru $\{f_j\}$, gdzie $j=1, \dots, p$.

Jak widać ze wzorów (D1-9) i (D1-12) obciążenie (błąd poprawności) p -punktowej aproksymaty tłumienności pasmowej zależy od wartości pochodnej rzędu p częstotliwościowej charakterystyki tłumienności rozważanego czwórnika. Dlatego mówimy, że p -punktowa aproksymata tłumienności pasmowej ma dokładność rzędu p .

Dla $p=2$, przy danych wartościach f_1 i f_2 , mamy ze wzoru (D1-13):

$$J_2 = m_2 - m_1(f_1 + f_2) + f_1 f_2 \quad (\text{D1-15})$$

Dla $p=3$, przy danych wartościach f_1, f_2 i f_3 , mamy:

$$J_3 = m_3 - m_2(f_1 + f_2 + f_3) + m_1(f_1 f_2 + f_1 f_3 + f_2 f_3) - f_1 f_2 f_3 \quad (\text{D1-16})$$

Dla $p=4$, przy danych wartościach f_1, f_2, f_3 i f_4 , mamy:

$$\begin{aligned} J_4 = & m_4 - m_3(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) + \\ & + m_2(f_1 f_2 + f_1 f_3 + f_1 f_4 + f_2 f_3 + f_2 f_4 + f_3 f_4) + \\ & - m_1(f_1 f_2 f_3 + f_1 f_2 f_4 + f_1 f_3 f_4 + f_2 f_3 f_4) + \\ & + f_1 f_2 f_3 f_4. \end{aligned} \quad (\text{D1-17})$$

DODATEK 2

METODA ALGEBRAICZNA WYZNACZANIA CZĘSTOTLIWOŚCI, DLA KTÓRYCH PUNKTOWE APROKSYMATY TŁUMIENNOŚCI PASMOWEJ MAJĄ DOKŁADNIĘ JEDNAKOWE WSPÓŁCZYNNIKI WAGOWE

Metoda wyznaczania aproksymat o jednakowych współczynnikach wagowych polega na rozwiązaniu względem niewiadomych: $f_1, \dots, f_p \in [f_d, f_g]$ układu równań:

$$G_k = \frac{1}{p}; \quad k = 1, \dots, p \quad (\text{D2-1})$$

gdzie G_k jest określone wzorami od (D1-1) do (D1-8).

W przypadku gdy $p=2$, z (D1-6) otrzymujemy warunek [3]:

$$\check{f}_2 = 2m_1 - \check{f}_1, \quad (\text{D2-2})$$

przy którym współczynniki wagowe są jednakowe i równe $G_k=1/2$.

Z powyższego warunku wynika, że przy dwupunktowej aproksymacie tłumienności pasmowej o jednakowych współczynnikach wagowych można przyjąć dowolną wartość częstotliwości f_1 z przedziału określonej nierównością:

$$f_d \leq \dot{f}_1 < m_1 \quad (\text{D2-3})$$

i wyznaczyć optymalną wartość częstotliwości $\dot{f}_2$ ze wzoru (D2-2), albo też przyjmą dowolną wartość częstotliwości $\dot{f}_2$ z przedziału określonego nierównością:

$$m_1 < \dot{f}_2 \leq f_g \quad (\text{D2-4})$$

i wyznaczyć optymalną wartość częstotliwości $\dot{f}_1$ ze wzoru (D2-2).

Wyżej podana dwupunktowa aproksymata tłumienności pasmowej o dokładności rzędu 1 ma zatem jeden stopień swobody przy określaniu częstotliwości $\dot{f}_1$ i $\dot{f}_2$ wyznaczania tłumienności punktowych.

Współczynnik niepoprawności J_p , warunkujący obciążenie (wartość błędu poprawnności) aproksymaty wynosi w tym przypadku [3]:

$$J_2 = \Theta^2 - [(\dot{f}_2 - \dot{f}_1)/2]^2, \quad (\text{D2-5})$$

gdzie:

$$\Theta^2 = m_2 - m_1^2 \quad (\text{D2-6})$$

przy czym Θ jest odchyleniem standardowym rozkładu wagi w pasmie $[f_d, f_g]$.

Z reguły wartość $J_2 \neq 0$, a więc dokładność takiej aproksymaty jest rzędu 1. Wyjątek stanowi szczególny przypadek, gdy zachodzi równość: $J_2 = 0$, tzn. gdy jednocześnie są spełnione warunki:

$$\text{oraz} \quad \left. \begin{aligned} \dot{f}_1 &= m_1 - \Theta \\ \dot{f}_2 &= m_1 + \Theta, \end{aligned} \right\} \quad (\text{D2-7})$$

a wówczas dokładność takiej aproksymaty jest rzędu 2.

Jak wynika z rozważań podanych w [4], w przypadku gdy $p=3$, aproksymaty tłumienności pasmowej o jednakowych współczynnikach wagowych $G_k=1/3$ istnieją tylko wówczas, gdy jest spełniony warunek:

$$\Theta^2 \leq (2/3) \cdot (f_g^2 + f_g f_d + f_d^2) - 2m_1 \cdot (f_g - m_1 + f_d), \quad (\text{D2-8})$$

przy czym te aproksymaty mają jeden stopień swobody przy określaniu częstotliwości $\dot{f}_1, \dot{f}_2, \dot{f}_3$ wyznaczania tłumienności punktowych. Częstotliwości te można określić na podstawie związków (D1-6).

Zazwyczaj najdogodniejsze jest założenie dowolnej wartości częstotliwości $\dot{f}_2$ z przedziału określonego nierównością:

$$m_1 - w_g \cdot \frac{\Theta}{\sqrt{2}} < \dot{f}_2 < m_1 + w_d \cdot \frac{\Theta}{\sqrt{2}} \quad (\text{D2-9})$$

gdzie

$$w_g = \begin{cases} 1 & \text{gdy } s_g \geq \sqrt{2} \\ \cos(\beta_g/3) - \operatorname{sgn}(\beta_g) \cdot \sqrt{3} \cdot \sin(\beta_g/3), & \text{gdy } s_g < \sqrt{2} \end{cases} \quad (\text{D2-10})$$

przy czym

$$\beta_g = \arccos \left[\sqrt{2} \cdot s_g \cdot (s_g^2 - \frac{3}{2}) \right] \quad (\text{D2-11})$$

zaś

$$s_g = (f_g - m_1)/\Theta, \quad (\text{D2-12})$$

natomiast

$$w_d = \begin{cases} 1 & \text{gdy } s_d \geq -\sqrt{2} \\ \cos(\beta_d/3) - \operatorname{sgn}(\beta_d) \cdot \sqrt{3} \cdot \sin(\beta_d/3), & \text{gdy } s_d < -\sqrt{2} \end{cases} \quad (\text{D2-13})$$

przy czym

$$\beta_d = \arccos[\sqrt{2} \cdot s_d \cdot (s_d^2 - \frac{3}{2})] \quad (\text{D2-14})$$

zaś

$$s_d = (f_d - m_1)/\Theta. \quad (\text{D2-15})$$

Optymalną wartość częstotliwości f_1 można wyznaczyć ze wzoru

$$f_1 = m_1 - w_2 \cdot \frac{\Theta}{\sqrt{2}} \quad (\text{D2-16})$$

gdzie

$$w_2 = \operatorname{sgn}(\beta_2) \cdot \sqrt{3} \cdot \sin(\beta_2/3) + \cos(\beta_2/3), \quad (\text{D2-17})$$

przy czym

$$\beta_2 = \arccos[\sqrt{2} \cdot s_2 \cdot (s_2^2 - \frac{3}{2})] \quad (\text{D2-18})$$

zaś

$$s_2 = (f_2 - m_1)/\Theta. \quad (\text{D2-19})$$

Optymalną wartość częstotliwości f_3 można wyznaczyć ze wzoru

$$f_3 = m_1 + \sqrt{2} \cdot \Theta \cdot \cos(\beta_2/3). \quad (\text{D2-20})$$

Współczynnik niepoprawności takiej aproksymaty wynosi:

$$J_3 = \delta_3 - [\Theta^3 \cdot \cos(\beta_2)]/\sqrt{2}, \quad (\text{D2-21})$$

gdzie

$$\delta_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3 \quad (\text{D2-22})$$

jest trzecim momentem centralnym rozkładu wagi w pasmie $[f_d, f_g]$.

Z reguły wartość $J_3 \neq 0$, z czego wynika, że najefektywniejsza trzypunktowa aproksymata tłumienności pasmowej, tworzona przy częstotliwościach f_1 , f_2 i f_3 określonych wzorami (D2-9), (D2-16) i (D2-20) ma dokładność rzędu 2.

Jednakże istnieje szczególny przypadek, w którym dokładność aproksymaty jest rzędu 3 (gdy zachodzi równość: $J_3 = 0$), ale tylko wtedy, gdy jednocześnie są spełnione następujące dwa warunki [4]:

$$(I) \quad \Theta \leq \frac{\min \{m_1 - f_d, f_g - m_1\}}{\sqrt{2} \cdot \cos(\beta/3)} \quad (D2-23)$$

$$(II) \quad \delta_3/\Theta^3 < 1/\sqrt{2} \quad (D2-24)$$

gdzie:

$$\beta = \arccos(\sqrt{2} \cdot \delta_3/\Theta^3). \quad (D2-25)$$

W tym szczególnym przypadku dokładność aproksymaty jest rzędu 3, jeśli tylko $J_3=0$, a to zachodzi wówczas, gdy częstotliwości wyznaczania tłumienności punktowych wynoszą [3]:

$$\dot{f}_1 = m_1 + \sqrt{2} \cdot \Theta \cdot \cos[(\beta - 2t)/3] \quad (D2-26)$$

$$\dot{f}_2 = m_1 + \sqrt{2} \cdot \Theta \cdot \cos[(\beta - t)/3] \quad (D2-27)$$

$$\dot{f}_3 = m_1 + \sqrt{2} \cdot \Theta \cdot \cos[\beta/3] \quad (D2-28)$$

gdzie:

$$t = 2\pi \operatorname{sgn}(\beta) \quad (D2-29)$$

W przypadku gdy $p=4$, określenie optymalnych częstotliwości $\dot{f}_1, \dot{f}_2, \dot{f}_3, \dot{f}_4$ wyznaczania tłumienności punktowych może być dokonane za pomocą algorytmu Warmusa [7, Alg. 5.1]; w tym miejscu warto zwrócić uwagę, że podany w [3] wzór (2-26) jest błędny.

Z. KOWALSKI (HABDANK)

THE ALGEBRAIC METHOD FOR OPTIMIZING THE FREQUENCIES USED BY DETERMINATION OF THE BAND LOSS

S u m m a r y

The band loss $\bar{A}$ is a scalar quantity defined mathematically as an integral designed on an acoustical frequency band. In practice the quantity is determined on the basis of the weighted average of the point loss values, i.e. the values obtained for the fixed frequencies chosen from the transmission band.

In the paper the method is given for determination of such frequency values for which the value of $\bar{A}$ (obtained on the basis of the weighted average) is optimal from the point of view of sensibility to the random errors occurring during the determination of the point loss values. The general method (for any shape of the weight density function specific for the band loss) is illustrated by a particular case when the weight density function is logarithmic normal.

From the mathematical point of view the presented method is a solution of the problem occurring when determining the numeric integral and concerning the construction of the so-called complex quadrature with equal weight coefficients.

Defektoskop wiroprowodowy o dwuwymiarowej prezentacji sygnałów przetworników do kontroli rur nieferromagnetycznych

ANNA LEWIŃSKA-ROMICKA, STANISŁAW PISKORSKI, JAROSŁAW PAPIS

*Centrum Uczelniano-Przemysłowe Metrologii i Systemów Pomiarowych
Politechnika Warszawska*

Otrzymano 1991.01.18

Autoryzowano do druku 1991.04.30

Opisano defektoskop umożliwiający prezentację trajektorii zmian napięcia przetworników wiroprowodowych przelotowych, przeznaczonych do kontroli rur wykonanych z materiałów nieferromagnetycznych. Trajektorie zawierają informację o wielkości i położeniu wad w ścianie rur. Defektoskop realizuje dwuwymiarową analizę fazoczułą sygnałów przetworników, na przykład różnicowych. Napięcia z wyjść układów fazoczułych podlegają akwizycji i przetwarzaniu w mikrokomputerze klasy IBM PC.

1. WSTĘP

Obserwowane w latach osiemdziesiątych trendy rozwoju defektoskopii wiroprowodowej polegały na odmiennym w stosunku do dotychczasowego podejściu i sposobie prezentacji sygnałów przetworników wiroprowodowych zarówno przelotowych, jak i stykowych; w układzie tak różnicowym, jak i bezwzględny [2,3,5,7,9–11,15,18,19,22–27]. Nowy sposób prezentacji sygnałów (napięcia lub impedancji) przetworników polega na przedstawieniu tych sygnałów na płaszczyźnie zmiennej zespolonej, niezależnie od ich fazy i amplitudy podczas, gdy poprzednio prezentowana była najczęściej amplituda sygnałów o określonej fazie, a czasem – amplituda sygnałów [8,11–14,17]. „Całkowite” napięcie (impedancja) przetworników przedstawiane są na ekranach pamiętających lamp oscyloskopowych, monitorów oraz display’ów ciekłokrystalicznych. Sygnały te, dla różnych wad obiektów, prezentowane są w postaci trajektorii (ang. phasor plots). Podkreślić należy, że próbki sygnałów przetworników przelotowych (solenoidalnych), na podstawie których przedstawiane są trajektorie, muszą być zebrane podczas przesuwu odcinków obiektów

(rury, pręty, druty) z wadami poprzez przetworniki zewnętrzne lub podczas przesuwu przetworników wewnętrznych poprzez rury, a w odniesieniu do przetworników stykowych — podczas przesuwu przetworników nad miejscami obiektów, w których znajdują się wady. Poprzedni sposób podejścia do sygnałów przetworników wirowych umożliwiał otrzymanie informacji o występowaniu wad nawet w stanie statycznym obiektu (przy uprzedniej kompensacji defektoskopu dla miejsca obiektu pozbawionego wad).

Trajektorie zmian sygnałów przetworników przelotowych, dla określonej częstotliwości pracy, mają różny kształt w zależności od rodzaju wad obiektów. I tak na przykład w przypadku badania rur wykonanych z materiałów nieferromagnetycznych kształt trajektorii jest różny dla wad w postaci pęknięć i dla wad w postaci zmian rozmiarów. Położenie fazowe trajektorii zależy od głębokości defektów, a w krańcowym przypadku — od położenia defektów od strony odpowiednio zewnętrznej i wewnętrznej ścianki rur [11,15,19].

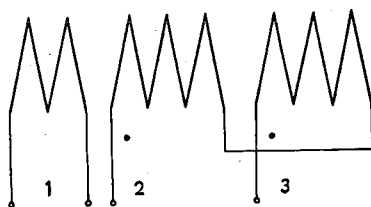
Trajektorie zmian sygnałów przetworników stykowych dla określonej częstotliwości pracy odznaczają się różnym kształtem i położeniem fazowym na płaszczyźnie zmiennej zespolonej — dla różnych wad obiektów np. obecności korozji w poszczególnych warstwach kadłuba samolotów, czy też pęknięć biorących swój początek od otworów w poszyciu [7].

Znane autorom niniejszego artykułu, defektoskopy najnowszej generacji, w tym znajdujące się obecnie w kraju (współpracujące z przetwornikami stykowymi). Defectoscop S.2830 i C.2836 (Instytut Dr Förster, RFN), Elotest B2 (Rohmann GmbH, RFN) i Nortec Mini Eddyscope (Staveley Instruments, Wlk. Brytania — Kanada) [10] umożliwiają uzyskanie, dla poszczególnych częstotliwości pracy przetworników o różnych konfiguracjach (tj. bezwzględnych i różnicowych), trajektorii zmian ich sygnałów — jako jedyne go wyniku kontroli. Podkreślić należy, że rozróżnienie niektórych wad badanych elementów konstrukcji np. lotniczych przeprowadzane jest wizualnie — przez mającego odpowiednie doświadczenie, dysponującego określonym zbiorem przykładowych trajektorii dla wad sztucznych, operatora.

W odniesieniu do badania rur tworzące trajektorie zbiory próbek sygnałów przetworników przelotowych pozwalają na przeprowadzenie różnych „operacji elektrycznych”, takich, jak wzmacnianie, przesuwanie w fazie i na koniec — mieszanie [3,22]. Pozwala to w efekcie końcowym na wykrywanie niewielkich wad rur, np. korozji, zamontowanych w wymiennikach ciepła rur, w szczególności w siłowniach jądrowych — na tle czynników zakłócających, takich, jak obecność płyt mocujących.

Metodykę rozróżniania, na podstawie trajektorii zmian napięcia niektórych wad rur, wykonanych z materiałów nieferromagnetycznych, zaproponowała A. Lewińska-Romicka [11,15,26 — etap IV]. S. S. Udpa i W. Lord zaproponowali analizę trajektorii w oparciu o rozkład opisujących je funkcji — w szereg Fouriera [27].

W artykule niniejszym opisano opracowany przez autorów, współpracujący z mikrokomputerem klasy IBM PC, defektoskop wirowy umożliwiający dwuwymiarową fazoczułą prezentację sygnałów przetworników przeznaczonych do wykrywania wad rur wykonanych z materiałów nieferromagnetycznych [11,18,25,26 — etap V]. Jest to pierwszy krajowy przyrząd o najnowszej organizacji sygnałów



Rys. 1. Schemat elektryczny różnicowego generacyjnego przetwornika wiroprowodowego, 1 – uzwojenie wejściowe, 2–3 – uzwojenia wyjściowe

przetworników wiroprowodowych. Defektoskop został opracowany z przeznaczeniem do wykrywania wad w rurach wykonanych przy wykorzystaniu dowolnych technologii. W związku z tym zastosowano zewnętrzny generacyjny wiroprowodowy przelotowy przetwornik – o konfiguracji różnicowej (rys. 1) [8,11,12,14]. Rury przesuwane są poprzez przetwornik. Opis i przykłady wad naturalnych występujących w rurach znajdzie Czytelnik w [11,12,16,21].

2. UKŁAD DEFEKTOSKOPU

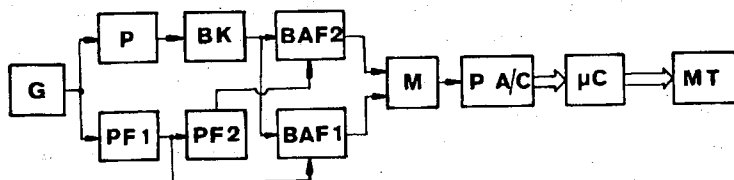
Schemat blokowy defektoskopu wiroprowodowego, model DWT – 620 umożliwiającego prezentację trajektorii zmian napięcia przetworników przelotowych przeznaczonych do kontroli rur o średnicach zawierających się w zakresie od 6 mm do 20 mm przedstawiono na rys. 2 [11,25,26 – etap V]. Układ defektoskopu jest przedmiotem zgłoszenia patentowego [18].

W celu otrzymania próbek sygnałów dla prezentacji trajektorii zmian napięcia przetwornika niezbędne jest wyodrębnienie z tego napięcia:

- 1) składowej rzeczywistej, względnie składowej będącej w fazie z napięciem generatora zasilającego przetwornik,
- 2) składowej urojonej, względnie składowej przesuniętej w fazie o kąt $\pi/2$ w stosunku do napięcia generatora.

Składowa rzeczywista napięcia wyjściowego przetwornika odkładana jest bowiem na osi odciętych, a składowa urojona – na osi rzędnych wykresów przedstawiających trajektorie.

W opisywanym defektoskopie powyższe składowe wyodrębniane są w dwu układach analizy fazoczułej.



Rys. 2. Schemat blokowy defektoskopu wiroprowodowego o fazoczułej dwuwymiarowej prezentacji sygnałów przetworników przelotowych

Przetwornik wiroprowodowy P zasilany jest z generatora G o częstotliwości 15 kHz. Zagadnienia związane z wyborem częstotliwości pracy defektoskopów wiroprowodowych opisano w [8,11,14].

Napięcie wyjściowe przetwornika P podawane jest do bloku wstępnej kompensacji BK napięcia niezrównoważenia przetwornika.

Napięcie generatora doprowadzone jest także do dwu łańcuchowo połączonych przesuwników fazowych PF1 i PF2. Przesuwnik fazowy PF1 umożliwia płynną zmianę fazy podawanych do niego sygnałów w zakresie do około $\pi/2$ dla ewentualnego obrotu trajektorii. Przesuwnik fazowy PF2 przesuwfa fazę doprowadzonego do niego sygnału o kąt $\pi/2$.

Napięcie z wyjścia bloku kompensacji BK doprowadzane jest do bloków analizy fazoczułej BAF1 i BAF2, przy czym do obu tych bloków doprowadzono sygnały odniesienia odpowiednio z przesuwników fazowych PF1 oraz połączonych PF1 i PF2. Na wyjściu bloków BAF1 i BAF2 uzyskiwane są składowe napięcia wyjściowego przetwornika P zawierające informację o wadach rur w R.

Dodać należy, że odpowiednie dla uzyskania trajektorii składowe napięć przetworników wiroprowodowych mogą być wyodrębnione przy użyciu woltomierzy wektorowych, np. typu 1253 Gain-Phase Analyser firmy Solartron – Schlumberger, tak jak to zrobiła A. Lewińska-Romicka [11,15,26 – etap IV] lub Transfer Function Analyzer, type 272 firmy Unipan tak, jak to zrobili autorzy artykułu [26 – etap V].

W celu uzyskania trajektorii, sygnały z wyjść obu bloków analizy fazoczułej BAF1 i BAF2 doprowadzane są do mikrokomputera μC klasy IBM PC, np. AT poprzez 16 – wejściową kartę FPC – 010 zawierającą multiplekser M i 12 – bitowy przetwornik analogowo-cyfrowy (i cyfrowo-analogowy) PA/C o nominalnym czasie przetwarzania wynoszącym 80 μs . Zbierane podczas przesuwu rur poprzez przetwornik próbki napięć przetwornika wiroprowodowego P oraz trajektorie zmian napięcia tego przetwornika dla odcinków rur zawierających wady, prezentowane są na monitorze MT.

W prezentowanym defektoskopie mikrokomputer zbiera i gromadzi dużą liczbę danych (na jedną trajektorię może przypadać od kilkudziesięciu do kilkuset próbek sygnałów przetwornika), przetwarza zebrane dane i prowadzi dialog z operatorem. Defektoskop może opcjonalnie (w stosunku do układu z rys. 2) zawierać układy hardware'owej selekcji sygnałów, wywołanych przez wady rur [11,18]. Wówczas może pracować samodzielnie – bez mikrokomputera.

W niektórych defektoskopach, oferowanych przez czołowe firmy zachodnie, trajektorie są linearyzowane – w odniesieniu do amplitudy (rozpiętość ramion) i fazy reprezentowanych przez nie sygnałów i wyodrębniane są odpowiednie „okna fazowe” – sektory fazowe płaszczyzny zmiennej zespolonej. W przypadku pojawienia się sygnałów zawartych w odpowiednich sektorach płaszczyzny zmiennej zespolonej podawana jest informacja do urządzeń wykonawczych (sortujących, znakujących) sterowanych z defektoskopu [10,11,25].

3. ORGANIZACJA OPROGRAMOWANIA APLIKACYJNEGO

Z wyjść defektoskopu, model DWT – 620 pobierane są dwa sygnały napięciowe analogowe będące odzwierciedleniem jakości badanych rur. Sygnały te mogą być uzupełnione sygnałem cyfrowym zawierającym informację o lokalizacji badanego miejsca rury.

Dla opisywanego defektoskopu został napisany program wykorzystujący oprogramowanie podstawowe, tj. sterownik umożliwiający obsługę sygnałów przetwornika analogowo-cyfrowego poprzez system operacyjny DOS i wykorzystującą sterownik procedurę obsługi danych odczytywanych z przetwornika analogowo-cyfrowego w celu dostępności danych z poziomu języka wysokiego poziomu, np. Pascal.

Zadaniem opracowanego oprogramowania aplikacyjnego jest połączenie następujących warstw oprogramowania:

- sterownika przetwornika analogowo-cyfrowego,
- procedur pomocniczych odczytu i przesyłania sygnałów z i do przetwornika analogowo-cyfrowego,
- programu poziomu języka Pascal obsługującego eksperyment,
- procedury bibliotecznej pakietu Turbo Graphics Toolbox realizującej aproksymację – rekonstrukcję krzywej wielomianami Beziiera [1,20].

Opracowane oprogramowanie uwzględnia specyfikę eksperymentu. Zapewnia ono:

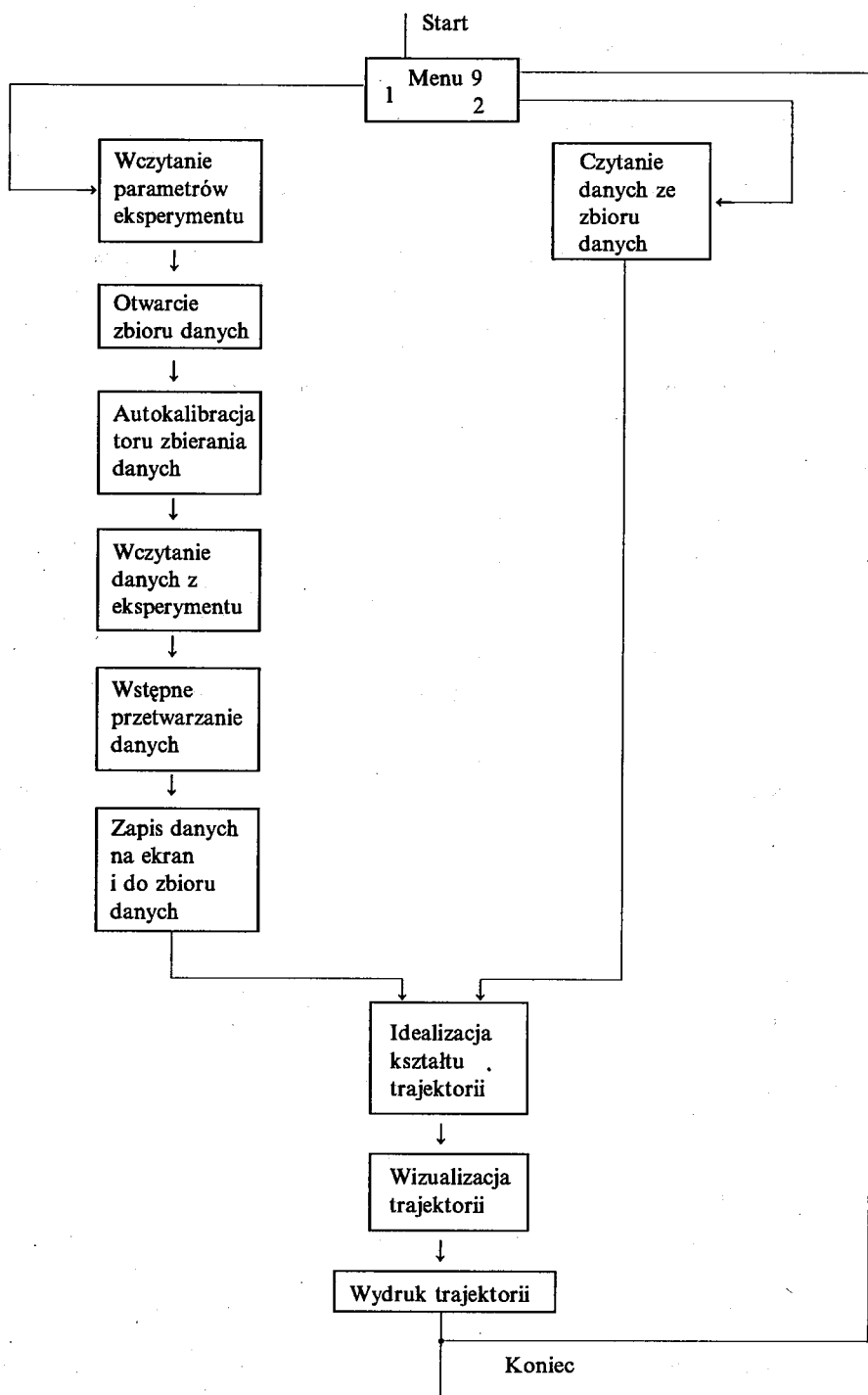
1. parametryczne ustalanie poziomów analizowanych napięć,
2. automatyczną rejestrację napięć uzyskiwanych z defektoskopu, odpowiadających ustalonym poziomom,
3. umieszczanie danych z eksperymentu w sposób ciągły, w zbiorze dyskowym, przy wybranym kroku, przy czym postać tych danych jest zgodna z wymaganiami procedury „Bezier”.

Procedura „Bezier” umożliwia modelowanie krzywych na podstawie zbioru punktów, tzw. punktów wiodących. Jest stosowana przy realizacji grafiki komputerowej. Istotnym elementem opisywanej aplikacji jest napisany w języku Pascal, program o nazwie DWT – 620, obsługujący eksperyment. Sieć działań tego programu przedstawiono na rys. 3. Po wywołaniu programu DWT – 620 na ekranie monitora ukazuje się winieta tytułowa.

Dalej następuje prezentacja menu o następującej treści:

Procedura kontroli	... 1
Przetwarzanie danych ze zbioru dyskowego	... 2
Zakończenie pracy	... 9
Wybór:	

Użytkownik może dokonać wyboru jednej z podanych trzech możliwości. Przy wyborze opcji 1 (Procedura kontroli) następuje wczytanie metryki – danych o eksperymentcie, takich, jak dane o materiale, średnicy ścianki rury, częstotliwości



Rys 3. Sieć działań programu DWT-620

pracy defektoskopu i w drugim kroku – danych odnośnie wady (wad) badanej rury. W trzecim kroku następuje otwarcie zbioru dyskowego dla przechowywania danych, tj. składowej rzeczywistej i składowej urojonej napięcia przetwornika, wyodrębnionych w układzie defektoskopu, model DWT – 620.

Następnie przeprowadzana jest autokalibracja toru zbierania danych polega na zapamiętaniu wartości napięć dla miejsca obiektu pozbawionego wad.

W następnym kroku wczytywane są próbki napięcia przetwornika (dane z eksperymentu). Zebrane próbki napięcia podlegają wstępnemu przetwarzaniu. W pierwszym kroku tego przetwarzania odejmowana zostaje składowa stała napięcia, dodana na wyjściu defektoskopu dla celów akwizycji próbek napięcia w czterech ćwiartkach płaszczyzny zmiennej zespolonej. Następnie przeprowadzane jest „wzorcowanie” toru zbierania danych, a mianowicie mnożenie wczytanych próbek przez stałą wynikającą z zakresu $(0 \div +9 \text{ V})$ zastosowanego przetwornika analogowo-cyfrowego. W trzecim kroku wstępnego przetwarzania danych następuje odtwarzanie wartości próbek napięcia

$$\begin{aligned} P'_2 &= Re u_{t+\Delta t} \\ P''_2 &= Im u_{t+\Delta t} \end{aligned}$$

na podstawie próbek zebranych w trzypunktowej procedurze próbkowania

$$\begin{aligned} P'_1 &= Re u_t \\ P''_2 &= Im u_{t+\Delta t} \\ P'_3 &= Re u_{t+2\Delta t} \end{aligned}$$

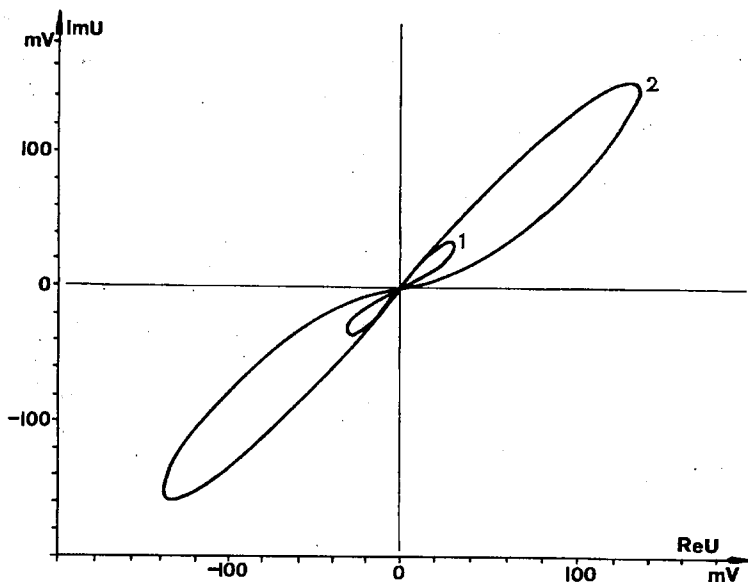
zastosowanej w związku z kolejnym próbkowaniem składowej rzeczywistej i urojonej napięcia.

Zebrane i odtworzone w powyższy sposób dane przedstawiane są na ekranie monitora i są zapisywane do uprzednio wybranego zbioru dyskowego. Następny krok powoduje modelowanie („idealizację”) trajektorii na podstawie zbioru zarejestrowanych próbek. W efekcie końcowym na ekranie monitora prezentowana jest trajektoria (trajektorie) zmian napięcia przetwornika i ewentualnie wydruk trajektorii. Na tym eksperymencie się kończy i system jest gotowy do dalszej pracy.

Przy wyborze opcji 2 następuje czytanie danych – próbek napięcia zarejestrowanych w wybranym przez użytkownika zbiorze dyskowym, a dalej następuje modelowanie i prezentacja trajektorii. Przy wyborze opcji 9 następuje powrót do systemu operacyjnego.

4. PRZYKŁADOWE TRAJEKTORIE

Na rys. 4 przedstawiono trajektorie zmian napięcia przetwornika różnicowego zawierającego rurę miedzianą o średnicy 16 mm i grubości ścianki 0,6 mm. Tajektoria 1 dotyczy przypadku, gdy w przetworniku znajdował się odcinek rury z wadą w postaci otworu o średnicy 3 mm, wykonanego przez jedną ściankę rury. Tajektoria 2 została otrzymana dla wady w postaci pierścienia wykonanego od strony zewnętrznej ścianki rury. Szerokość pierścienia wynosiła 1,7 mm, a głębokość 0,4 mm.



Rys. 4. Trajektorie zmian napięcia przetwornika różnicowego zawierającego rurę miedzianą z wadami sztucznymi w postaci: 1 — otworu, 2 — pierścienia zewnętrznego (opis w tekście)

ZAKOŃCZENIE

Opisany współpracujący z mikrokomputerem klasy IBM PC defektoskop wiroprowodowy model DWT — 620 przeznaczony jest do nieniszczącego wykrywania wad rur wykonanych z materiałów nieferromagnetycznych. W defektoskopie zastosowano układ dwuwymiarowej fazoczułej analizy sygnałów przetworników umożliwiającą prezentację trajektorii zmian ich napięcia — dla różnych wad rur. W ten sposób nawiązano do światowych trendów, jakie można obserwować w odniesieniu do defektoskopii wiroprowodowej. Na podstawie informacji zawartej w trajektoriach mogą być rozróżniane niektóre wady rur [4,6,11,15,27].

BIBLIOGRAFIA

1. P. B e z i e r: *Numerical Control*, Wiley, New York, 1972
2. D. J. B r o w n, Q. V. L e: *Application of the Remote Field Eddy Current Technique to the In-Service Inspection of Ferromagnetic Heat-Exchanger Tubing*. *Material Evaluation*, 1989, 47, 1, p. 47—53
3. T. J. D a v i s: *Multifrequency Eddy Current Inspection with Continuous Wave Methods*, *Materials Evaluation*, 1980, 38, 1, p. 62—68
4. R. O. D u d a, P. E. H a r t: *Pattern Classification and Scene Analysis*. Wiley & Sons, New York—London—Sydney—Toronto, 1973
5. M. G r a m z, K. M. G a w r y ł c z y k, S. G r a t k o w s k i, R. S i k o r a, M. Z i ó ł k o w s k i: *A Crack Element Concept for a FEM Analysis of Eddy Current Distribution in a Long Cylindrical Bar with*

- a Crack*. Proceedings of the 12th World Conference on Non-Destructive Testing, Amsterdam, Elsevier Science Publishers, Amsterdam—Oxford—New York—Tokyo, 1989, V. 2, p. 1167—1172
6. G. H. Granlund: *Fourier Preprocessing for Handprint Character Recognition*. IEEE Trans. on Computers, 1972, 21, 2, 195—201
7. D. J. Hagemaier: *Application of Eddy Current Impedance Plane Testing*. Materials Evaluation, 1984, 42, 6, p. 1035—1040
8. H. Heptner, H. Stroppe: *Magnetyczne i indukcyjne badania metali*. Wyd. Śląsk, Katowice 1972
9. N. Ida, R. Palanisamy, W. Lord: *Eddy Current Probe Design Using Finite Element Analysis*. Materials Evaluation, 1983, 41, 12, p. 1389—1394
10. Karty katalogowe defektoskopów wiroprowodowych Elotest UL3 i Elotest B² (Rohmann GmbH), Eddycheck (Prüftechnik GmbH), Nortec 23ST (Staveley Instruments), MIZ12, MIZ17, MIZ18, (Zetec), Selector Classifier (Sandvik), Defectoscop S.2830 i Defectometer C.2836 (Institut Dr Förster), Phasec D6 (Hocking Electronics)
11. A. Lewińska-Romicka: *Badania nieniszczące rur metalowych metodą prądów wirowych*. Warszawa: PWN 1991
12. A. Lewińska-Romicka: *Defektoskopia wiroprowodowa rur nieferromagnetycznych spawanych*. Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji, 1990, 36, 1, str. 175—206
13. A. Lewińska-Romicka: *Problemy nieniszczących badań rur niemagnetycznych metodą prądów wirowych*. Rozprawy Elektrotechniczne, 1986, 32, 3, str. 801—812
14. A. Lewińska-Romicka: *Przetworniki wiroprowodowe do nieniszczących badań rur niemagnetycznych metodą prądów wirowych*. Rozprawy Elektrotechniczne, 1988, 34, 3, str. 863—897
15. A. Lewińska-Romicka: *Trajektorie napięcia przetworników wiroprowodowych samoporównawczych*. Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji, 1990, 36, 3
16. A. Lewińska-Romicka: *Wady złączy rur spawanych wykonanych z metali nieżelaznych*. Rudy i metale nieżelazne, 1990, 35, 10—11, str. 281—283
17. A. Lewińska-Romicka, S. Piskorski: *Defektoskop do badania rur metodą indukcyjną*. Patent tymczasowy Nr 150449, zgł. 1988 r.
18. A. Lewińska-Romicka, S. Piskorski, J. Papis: *Defektoskop wiroprowodowy o dwuwymiarowej analizie sygnałów*. Zgłoszenie patentowe Nr P287751 z dnia 90. 11. 14
19. P. Neumaier, W. Stumm: *Grundlagenuntersuchungen zur Entstehung Komplexer Wirbelstromsignalfiguren in der Impedanzebene bei zusammengestellten Spulen und Anwendung optimierter Spulenanordnungen bei der Heissbrammenprüfung*. Proceedings of the 3rd European Conference on Nondestructive Testing, Firenze, 1984, V. 3. p. 1—13
20. J. Papis: *Rekonstrukcja trajektorii napięcia przetwornika wiroprowodowego w skomputeryzowanym defektoskopie do kontroli rur*. Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji, 1991, z. 3—4 pp.
21. D. Roach: *Defects and Damage in Cast Heater Tubes*. Materials Evaluation, 1972, 30, 11, pp. 229—235
22. R. S.aglio, R. Levy: *Eddy Current Testing*. Proceedings of the 11th World Conference on NDT, Las Vegas, 1985, t. 1, p. 108—114
23. S. W. Schwartz, W. Lord: *Effects of Temperature on Eddy Current Probe Response*. Materials Evaluation, 1983, 41, 12, p. 1395—1398
24. G. P. Singh, S. Udupa: *The role of Digital Signal Processing in NDT*. NDT International, 1986, 19, 3, pp. 125—132
25. W. Solnica, A. Lewińska-Romicka, S. Piskorski, J. Papis: *Nieniszczące wiroprowodowe wykrywanie wad rur*. Metrologia i Systemy Pomiarowe, 1990, 7, str. 185—194
26. W. Solnica, A. Lewińska-Romicka, S. Piskorski, J. Papis: *Raporty z etapu IV (1989) i etapu V (1990) pracy CPBP 02.20, temat nr VII.03 pt. „Problemy badań nieniszczących obiektów metalowych metodą prądów wirowych”*
27. S. S. Udupa, W. Lord: *A Fourier Description Classification Scheme for Differential Probe Signals*. Materials Evaluation, 1984, 42, 9, pp. 1136—1141

A. LEWIŃSKA-ROMICKA, S. PISKORSKI, J. PAPIS

**EDDY-CURRENT DEFECTOSCOPE FOR NONMAGNETIC TUBES INSPECTION
WITH 2-D TRANSDUCERS SIGNAL PRESENTATION****S u m m a r y**

Defectoscope, that makes possible voltage plane trajectories presentation of the eddy-current encircling-coil transducers, is described. The transducers are destined to the inspection of nonmagnetic materials. The trajectories contain the information about the defect magnitude location in the tube wall. In the defectoscope two-dimensional phase-sensitive signal analysis of the transducer e.g. differential one is applied. Voltage signals, taken from the phase-sensitive circuits are sampled and processed in the microcomputer IBM PC.

Modelowanie trajektorii zmian napięcia przetwornika wiroprowadowego w skomputeryzowanym defektoskopie do kontroli rur

JAROSŁAW PAPIS

*Centrum Uczelniano-Przemysłowe Metrologii i Systemów Pomiarowych
Politechnika Warszawska*

Otrzymano 1991.01.18

Autoryzowano do druku 1991.05.02

Opisano procedurę modelowania trajektorii na podstawie próbek napięcia przetwornika wiroprowadowego, różnicowego, przelotowego, zewnętrznego uzyskiwanych podczas przemieszczania kontrolowanego obiektu z wadami przez przetwornik. Modelowanie przeprowadzone jest przy wykorzystaniu wielomianów Beziera. Algorytm znalazł zastosowanie w skomputeryzowanym defektoskopie wiroprowadowym przeznaczonym do kontroli rur nieferromagnetycznych.

1. WSTĘP

Od połowy lat osiemdziesiątych w defektoskopii wiroprowadowej obserwuje się tendencje do prezentacji sygnałów, wywołanych przez wady obiektów badanych, na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Trend ten daje się zauważyć zarówno w odniesieniu do przetworników różnicowych przelotowych wewnętrznych i zewnętrznych, jak i przetworników stykowych. Sygnały przetworników przedstawiane są w postaci trajektorii. W taki sposób prezentowane są sygnały przetworników wiroprowadowych w systemach stacjonarnych, przeznaczonych do kontroli obiektów w procesie wytwarzania oraz w przenośnych urządzeniach służących głównie do celów serwisowych [6]. W trajektoriach zmian napięcia (impedancji) przetworników wiroprowadowych zawarta jest informacja o wielkości, rodzaju i położeniu wad w badanym obiekcie [7,8,17,18,20]. Mimo tak istotnych cech trajektorii syntetyczne metody jej opisu, umożliwiające wykorzystanie tych informacji w systemach kontroli nie zostały w pełni opracowane.

Znana jest metoda opisu trajektorii wykorzystująca aproksymację trajektorii za pomocą szeregu Fouriera, zaproponowana do zastosowania przy analizie sygnałów otrzymanych podczas kontroli rur nieferromagnetycznych [15,20]. W metodzie tej zakłada się, że:

1) trajektoria opisana jest zespolonym sygnałem napięciowym przetwornika $u(l)$, gdzie l jest parametrem określającym położenie punktu u na trajektorii,

2) $u(l) = u(l + L)$, gdzie L jest długością trajektorii; trajektoria napięcia jest krzywą zamkniętą, a zatem założenie to jest zawsze spełnione.

Przy tych założeniach napięcie $u(l)$ można aproksymować za pomocą szeregu Fouriera:

$$u(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{j2\pi nl}{L}\right), \quad (1)$$

gdzie:

$$c_n = \frac{1}{L} \int_0^L u(l) \exp\left(\frac{-j2\pi nl}{L}\right) dl. \quad (2)$$

W celu uzyskania informacji zawartej w trajektorii o rodzaju wady badanego obiektu definiowane są funkcje współczynników szeregu Fouriera c_n niezależne od skalowania, przesunięcia, rotacji i wyboru punktu startowego. Tworzą one wektor cech, według którego za pomocą metod rozpoznawania obrazów podjęto próbę określenia rodzaju wady [20]. Metoda ta przedtem była już stosowana do automatycznego odczytywania rękopisów [4,12,14,22]. Dotychczas pełny algorytm określający związek pomiędzy współczynnikami Fouriera, a poszczególnymi rodzajami wad obiektów nie został wyznaczony m.in. z dwóch powodów:

1) niejednoznaczności w opisie trajektorii przez współczynniki Fouriera sygnałów wywołanych przez wady naturalne,

2) nie posiadania atlasu wad rur i odpowiadających im trajektorii.

Podejmowane są próby stosowania metod cyfrowej analizy sygnałów do rozpoznawania i klasyfikacji wad obiektów — na podstawie zarejestrowanej trajektorii zmian napięcia. W tych przypadkach obiektem analizy jest trajektoria o charakterystycznym kształcie odpowiadającym poszczególnemu rodzajowi wady obiektu. Pojawiła się zatem konieczność modelowania kształtu trajektorii w systemach pomiarowych stosowanych do kontroli jakości obiektów. Celem przedstawionej procedury modelowania jest prezentacja trajektorii zmian napięcia w postaci ciągłych, gładkich krzywych zamkniętych o charakterystycznych kształtach dla poszczególnych rodzajów wad obiektów. Procedura modelowania wykorzystuje wartości próbek napięcia przetwornika wiroprowodowego.

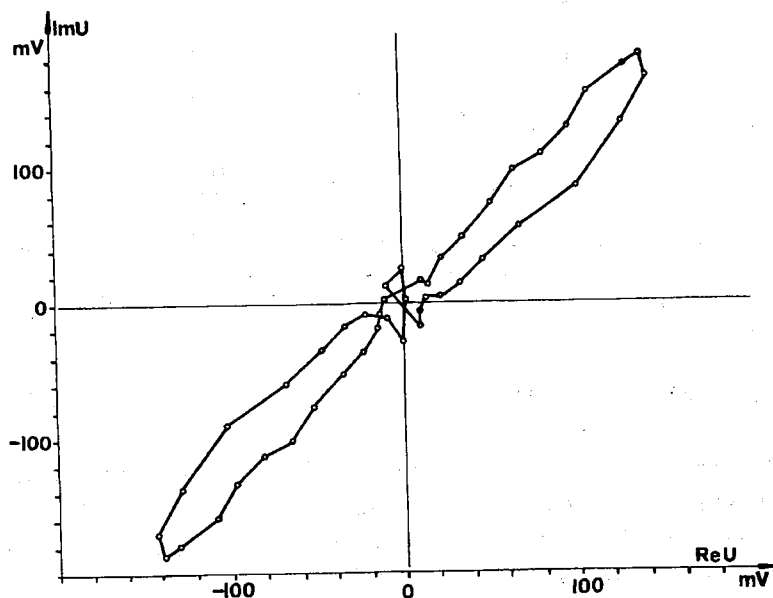
Zarówno proces rejestracji jak i procedury uzyskiwania trajektorii z próbek napięcia są źródłem błędów. W punkcie drugim omówiono rodzaje błędów i ich wpływ na kształt trajektorii. Następnie rozważono zagadnienie wyboru metodyki modelowania trajektorii zmian napięcia przetworników wiroprowodowych i opisano wybraną metodykę. W punkcie piątym przeprowadzono próbę jej weryfikacji w odniesieniu do wad rury nieferromagnetycznej.

Zastosowanie opisanej w artykule metodyki modelowania trajektorii zmian napięcia przetworników wiroprowodowych umożliwia prezentację sygnałów otrzymywanych w skomputeryzowanym defektoskopie przeznaczonym do kontroli rur [7,9,10].

2. BŁĘDY TRAJEKTORII ZMIAN NAPIĘCIA W SYSTEMACH KONTROLI RUR

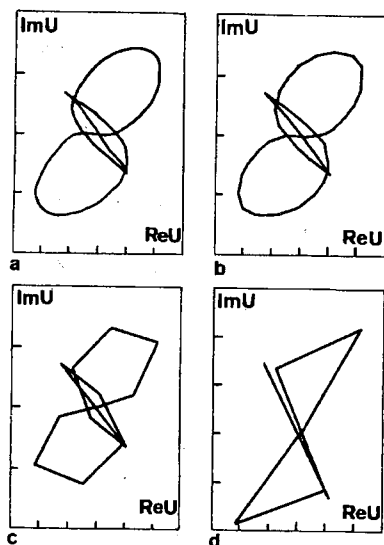
W systemach kontroli wiropądowej umożliwiających prezentację i analizę trajektorii zmian napięcia przetworników – do oceny jakości obiektów, sygnały tworzące trajektorie obciążone są błędami dwojakiego rodzaju, a mianowicie:

- błędami „analogowymi” powstającymi podczas zbierania danych,
- błędami „cyfrowymi” powstającymi podczas syntezy przez mikrokomputer trajektorii z zarejestrowanych próbek napięcia.



Rys. 1. Przebieg napięcia przetwornika wiropądowego różnicowego w postaci trajektorii, wywołanej przez wadę obiektu badanego

Przykład takiej trajektorii pokazano na rys. 1. Wyraźnie uwidaczniają się w niej oba rodzaje błędów. Błędy analogowe mają dwie przyczyny występowania. Zbiór próbek wokół początku układu współrzędnych jest wynikiem wpływu zmian mikrogeometrii powierzchni na sygnał przetwornika. W tym obszarze znajdują się również próbki sygnałów wywołanych przez drobne wady powierzchniowe. Błędy cyfrowe uwidaczniają się w postaci zniekształceń trajektorii. Zniekształcenia trajektorii wynikają ze zbyt małej częstotliwości próbkowania. Wpływ częstotliwości próbkowania na kształt trajektorii, znany z doniesień literaturowych [15], przedstawiono na rys. 2. Błędy wynikające ze zbyt małej częstotliwości próbkowania mogą prowadzić do fałszywej diagnozy w przypadku rozpoznawania wad na podstawie analizy trajektorii.



Rys. 2. Wpływ częstotliwości próbkowania f_p na kształt trajektorii zmian napięcia przetwornika wiroprowadowego różnicowego [15]:

a) $f_p = 2$ kHz, b) $f_p = 666$ Hz, c) $f_p = 300$ Hz, d) $f_p = 150$ Hz

3. WYBÓR METODYKI MODELOWANIA TRAJEKTORII

Przedstawiona w artykule metodyka modelowania trajektorii zmian napięcia przetworników przelotowych wywołanych przez wady rur umożliwia:

- uzyskanie trajektorii zmian napięcia w postaci ciągłych gładkich krzywych zamkniętych o charakterystycznych kształtach, wywołanych przez poszczególne wady materiałowe rur – na podstawie zarejestrowanych w procesie kontroli zbiorów danych,

- zmniejszenie wpływu błędów analogowych i cyfrowych na kształt trajektorii,
- prezentację trajektorii na płaszczyźnie zmiennej zespolonej.

Modelowanie przebiegu krzywej względem punktów danego zbioru na płaszczyźnie należy do klasy zagadnień aproksymacji. W klasycznych procedurach aproksymacji jako funkcje aproksymujące stosowane są:

- standardowe funkcje matematyczne o parametrach obliczanych przy wykorzystaniu metody najmniejszych kwadratów,
- ortogonalne szeregi funkcyjne, głównie trygonometryczne.

Zastosowanie podanych funkcji do modelowania przebiegu trajektorii zmian napięcia przetworników wiroprowadowych ma charakter ograniczony. W przypadku modelowania trajektorii przy wykorzystaniu metody najmniejszych kwadratów zasadniczym zagadnieniem jest wybór rodzaju funkcji aproksymującej. Trudności z doбором funkcji aproksymującej pojawiają się wtedy, gdy w wyniku badania obiektu z wadami otrzymujemy trajektorie o skomplikowanych kształtach [7,8], których nie można przybliżyć prostymi zależnościami funkcyjnymi.

Odmiernym podejściem do metod analizy trajektorii jest jej aproksymacja za pomocą szeregu Fouriera, przedstawiona we wstępie do niniejszego artykułu. Wynikiem aproksymacji jest zbiór współczynników szeregu Fouriera opisujących analizowaną trajektorię. W celu jej prezentacji, w postaci krzywej zamkniętej, konieczne jest stosowanie procedury resyntezy trajektorii przy wykorzystaniu odwrotnej transformacji Fouriera funkcji danej jako ciąg obliczonych uprzednio współczynników. Procedura ta wprowadza błędy przebiegu krzywej wynikające ze skończonej liczby współczynników przyjętych do resyntezy [20].

W tych zastosowaniach, w których istotne jest modelowanie przebiegu fragmentów krzywej, do aproksymacji wykorzystuje się funkcje (wielomiany) sklepane [13]. Mankamentem metodyki wykorzystującej funkcje sklepane do modelowania trajektorii zmian napięcia jest konieczność określenia a priori punktów załamania wyznaczających podprzedziały aproksymacji. Rozwiązaniem tego problemu byłby wybór wartości próbek napięcia jako współrzędnych punktów załamania. Jest to rozwiązanie nieoptymalne, ponieważ modelowana trajektoria przebiega przez punkty o współrzędnych równych wartościom zarejestrowanych próbek. Trajektoria zmian napięcia obciążona jest wówczas błędami rejestracji próbek.

Obecnie, w zagadnieniach modelowania przebiegu krzywej, coraz większą rolę odgrywają wielomiany opracowane przez francuskiego matematyka P. Beziera na przełomie lat sześćdziesiątych i siedemdziesiątych, zastosowane po raz pierwszy do modelowania kształtu nadwozia samochodu [2]. Wielomiany Beziera są wykorzystywane do modelowania krzywych na podstawie zbioru punktów wiodących dając w wyniku ich stosowania:

- 1) opis matematyczny krzywej modelowanej w postaci stosunkowo prostych zależności analitycznych, również w przypadku krzywych o skomplikowanych kształtach,
- 2) krzywą charakterystyczną, nawet w przypadku niewielkiej liczby punktów wiodących,
- 3) zmniejszenie wartości błędów, którymi obciążone są punkty wiodące.

Stosowanie aproksymacji krzywych wielomianami Beziera wymaga stosunkowo niewielkich nakładów obliczeniowych. Wielomiany Beziera zostały wykorzystane do modelowania trajektorii zmian napięcia przetworników wirowych według przedstawionej poniżej metodyki.

4. MODELOWANIE PRZEBIEGU KRZYWYCH PRZY WYKORZYSTANIU WIELOMIANÓW BEZIERA

Wielomiany Beziera są zdefiniowane w postaci parametrycznej następującymi równaniami:

$$x = p_x(t) = \sum_{i=0}^m C_i^m t^i (1-t)^{m-i} x_i \quad (3a)$$

$$y = p_y(t) = \sum_{i=0}^m C_i^m t^i (1-t)^{m-i} y_i, \quad (3b)$$

gdzie:

$t \in [0, 1]$

$\{(x_i, y_i); i = 0, \dots, m\}$ – zbiór punktów wiodących

C_i^m – symbol Newtona.

Równania (3a) i (3b) wygodnie jest przedstawić w zapisie wektorowym:

$$P(t) = \sum_{i=0}^m C_i^m t^i (1-t)^{m-i} P_i, \quad (4)$$

gdzie:

$P(t) = (p_x(t), p_y(t))$

$P_i = (x_i, y_i)$

Właściwościami wielomianów Beziera są następujące:

- 1) $P(t)$ są funkcjami gładkimi,
- 2) $P(0) = P_0, P(1) = P_m$,
- 3) wielomian Beziera leży wewnątrz wypukłego obszaru wyznaczonego przez punkty wiodące.

Dowód tez 1) ÷ 3) można znaleźć w [13].

Do komputerowych obliczeń wartości wielomianów Beziera stosowane są dwa algorytmy rekurencyjne: algorytm geometryczny i algorytm Hornera. Częściej stosowanym algorytmem jest algorytm Hornera ze względu na mniejsze nakłady obliczeniowe przy liczbie punktów wiodących większej od 10. Pewnym mankamentem tego algorytmu jest nieco większa złożoność obliczeniowa niż algorytmu geometrycznego. Przykładową realizację algorytmu Hornera napisaną w języku Turbo Pascal przedstawia procedura „bezier” zawarta w pakiecie programowym Turbo Graphics Toolbox jako procedura biblioteczna [19]. Umożliwia ona obliczanie wartości wielomianów Beziera na podstawie punktów wiodących zawartych w tablicy A. Liczbę punktów przyjętych do obliczeń określa zmienna MaxIntPoints. Wartości wielomianów umieszczane są w tablicy B. Maksymalna liczba punktów wiodących jest stałą w programie o nazwie MaxControlPoints i wynosi 25. Wartość stałej MaxControlPoints może być zmieniona przez nowe przypisanie.

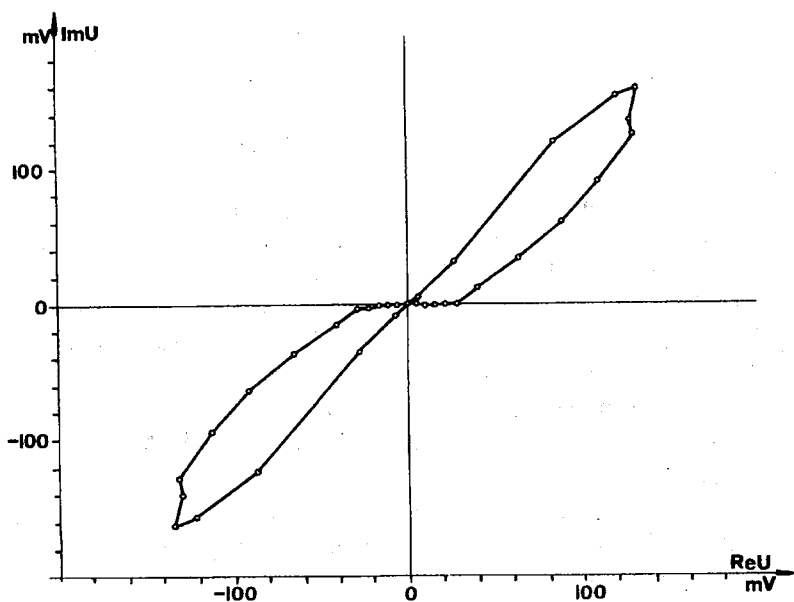
5. PROCEDURA MODELOWANIA

W opisywanej procedurze modelowania wykorzystano następujące cechy trajektorii zmian napięcia przetworników wiroprowodowych przelotowych [7,8]:

- trajektoria napięcia jest krzywą zamkniętą,
- trajektorie idealnego przetwornika różnicowego zawierają punkt $u_0(0,0)$.

Przykład trajektorii z wyeliminowanym wpływem niesymetrii przetwornika przedstawia rys. 3. Współrzędne punktów oznaczonych „0” są równe wartościom próbek napięcia. Z obrazu trajektorii usunięto zbiór próbek zgrupowanych wokół punktu

$u_0(0,0)$ wywołanych przez wady mikroteometrii powierzchni obiektu. Zabieg ten jest przeprowadzany w celu odtworzenia przebiegu trajektorii w pobliżu środka układu współrzędnych.



Rys. 3. Trajektoria zmian napięcia przetwornika różnicowego, nieobarczona wpływem niesymetrii przetwornika

5.1. ZBIERANIE DANYCH

W trybie zbierania danych sygnał napięciowy przetwornika wiroprowadowego po rozdzieleniu go na składowe: rzeczywistą i urojoną jest próbkowany przez mikrokomputer wyposażony w przetwornik analogowo-cyfrowy z multipleksowymi wejściami. Wykorzystanie takiego układu do kolejnego próbkowania składowej rzeczywistej i urojonej napięcia jest przyczyną powstania błędu wynikającego z niejednoznaczności próbkowania. Chwile próbkowania obu składowych są wówczas przesunięte względem siebie o wartość czasu przyjęcia próbki Δt . Opisane zjawisko wprowadza błąd próbkowania proporcjonalny do zmiany wartości niepróbkowanej składowej napięcia w czasie przyjęcia próbki. Błąd ten można zmniejszyć stosując trzypunktową procedurę próbkowania. W tej procedurze zarejestrowane wartości próbek w punktach $P_1(p'_1, p''_1)$, $P_2(p'_2, p''_2)$, $P_3(p'_3, p''_3)$ odpowiadającym chwilom czasowym: t_1 , $t_2 = t_1 + \Delta t$, $t_3 = t_1 + 2\Delta t$ wynoszą (dla przyjętego cyklu pomiarowego) odpowiednio:

$$\begin{aligned} p'_1 &= \operatorname{Re} u_t \\ p''_2 &= \operatorname{Im} u_{t+\Delta t} \\ p'_3 &= \operatorname{Re} u_{t+2\Delta t} \end{aligned} \quad (5)$$

Wartości próbek p''_1 , p'_2 , p''_3 są nie rejestrowane.

Zakładając liniowe zmiany napięcia u w odstępie czasu Δt obliczamy wartość próbki $p'_2 = 0,5(p'_1 + p'_3)$ i przyjmujemy ją za wartość składowej rzeczywitej napięcia w punkcie P_2 . Rezultatem działania procedury są wartości dwóch próbek napięcia w chwili t_2 :

$$\begin{aligned} p'_2 &= \operatorname{Re} u_{t+\Delta t} \\ p''_2 &= \operatorname{Im} u_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (6)$$

5.2. WYZNACZANIE PUNKTÓW WIODĄCYCH

Zasadniczym zagadnieniem modelowania jest wyznaczenie punktów wiodących trajektorii zmian napięcia z dwuwymiarowego ciągu próbek $P_0 \dots P_n$. W ciągu znajdują się zarówno próbki napięcia przetwornika wywołane przez wady obiektu jak i próbki wywołane przez zakłócenia. Próbki wywołane przez zakłócenia tworzą zbiór punktów zgrupowanych wokół początku układu współrzędnych lub objawiają się w postaci impulsów, sugerując istnienie trajektorii wywołanej przez wadę obiektu. Wyznaczenia punktów wiodących do modelowania trajektorii można dokonać przy wykorzystaniu zmodyfikowanej metody przekraczania poziomu i zliczania. W tej metodzie, poprzez zastosowanie histerezy wartości progowej, eliminowane są próbki napięcia wywołane przez zakłócenia (rys. 4). Ciąg instrukcji realizujący algorytm wyznaczania punktów wiodących pojedynczej trajektorii zmian napięcia przetwornika przelotowego przedstawia się wówczas następująco:

```

For i = 1 to n do
  begin
    if  $|\vec{OP}_i| > r_1$  then
      zapamiętaj wszystkie kolejne punkty  $P_i$  dopóki  $|\vec{OP}_i| > r_2$ 
  end

```

Wynikiem zastosowania algorytmu są współrzędne punktów P_k trajektorii zawarte w wektorze T .

Uzyskany w wyniku zastosowania metody przekraczania poziomu i zliczania wektor danych zawiera zazwyczaj zbyt małą liczbę punktów wiodących trajektorii; w szczególności dotyczy to punktów opisujących trajektorię wokół początku układu współrzędnych. Wynika to z konieczności przyjmowania stosunkowo dużej wartości progowej r_1 . Mankamentu tego można uniknąć poprzez dołączenie *ex post* do wektora T kilku punktów (wartości próbek napięcia) poprzedzających pierwszy zapamiętany w wektorze punkt. Do wektora T dołączane są ponadto dwa punkty o współrzędnych $(0,0)$ na jego początku i końcu. Zabieg ten ma na celu:

uzyskanie zamkniętej trajektorii,

- eliminację translacji trajektorii spowodowanej przez napięcie niezerównoważenia w torze pomiarowym defektoskopu.

Wektor T zawiera wówczas następujące wartości próbek:

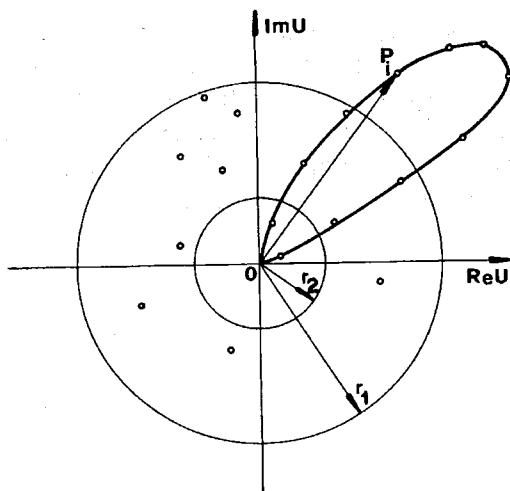
$$(0,0), P_{i-k}, \dots, P_{i-l}, \dots, P_{i+l}, (0,0) \quad (7)$$

gdzie:

$P_{i-k}, \dots, P_{i-1}$ – dołączone punkty wiodące,

P_i – pierwszy punkt wiodący trajektorii przekraczający wartość progową r_1 ,

P_{i+l} – ostatni punkt wiodący trajektorii przekraczający wartość progową r_2 .



Rys. 4. Metoda wyznaczania punktów wiodących trajektorii zmian napięcia

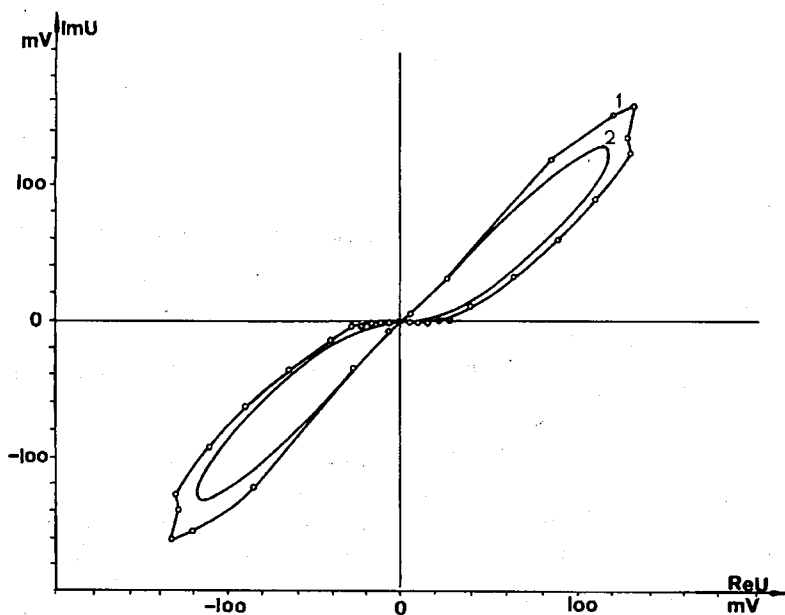
5.3. OBLICZANIE WARTOŚCI WIELOMIANÓW BEZIERA NA PODSTAWIE WYZNACZONYCH PUNKTÓW WIODĄCYCH TRAJEKTORII ZMIAN NAPIĘCIA PRZETWORNIKA PRZELOTOWEGO

Do obliczania współrzędnych punktów trajektorii zmian napięcia przetwornika wirowprądowego przelotowego wykorzystana jest procedura „bezier” zawarta w zbiorze „bezier.hgh” pakietu programowego Turbo Graphics Toolbox, opisana w punkcie 4. Stanowi ona część oprogramowania defektoskopu, model DWT – 620, przeznaczonego do kontroli rur nieferromagnetycznych [7,9]. Jako punkty wiodące przyjmuje się punkty zawarte w wektorze T . W wyniku działania tej procedury otrzymuje się wartości wielomianu Beziera $P(t)$ w punktach $t_i = i/n$; $i = 0, 1, \dots, n$. Punkty $P(t_i)$ są punktami trajektorii zmian napięcia przetwornika wirowprądowego przelotowego i jako wynik badania są przedstawiane na monitorze ekranowym przy użyciu procedur graficznych.

6. WERYFIKACJA METODYKI MODELOWANIA – NA PRZYKŁADZIE TRAJEKTORII WYWOŁANEJ PRZEZ WADĘ RURY NIEFERROMAGNETYCZNEJ

Na rys. 5. przedstawiono przykładową trajektorię napięcia przetwornika wirowprądowego różnicowego, przelotowego zewnętrznego, uzyskaną dla wady rury nieferromagnetycznej (krzywa 1). Na jej tle przedstawiono trajektorię otrzymaną

w wyniku zastosowania opisanej procedury modelowania (krzywa 2). W przebiegu krzywej 1 widoczny jest wyraźnie wpływ zakłóceń na przebieg trajektorii niepoddawanej cyfrowej analizie próbek napięcia. Zakłócenia uwidaczniają się zarówno w kształcie trajektorii (błędy w postaci niegładkości), jak i w jej przebiegu w pobliżu początku układu współrzędnych. Widoczna idealizacja kształtu trajektorii modelowanej jest wynikiem zastosowania do modelowania wielomianów Beziera. Wpływ próbek napięcia wywołanych przez zakłócenia na kształt trajektorii jest eliminowany wskutek wprowadzenia histerezy wartości progowej. Na skuteczność tej eliminacji wskazuje „nie przyklejanie” trajektorii modelowanej do prostej $Im U=0$, jak ma to miejsce w przypadku trajektorii nie poddawanej procedurze modelowania.



Rys. 5. Trajektorie zmian napięcia przetwornika wirowprądowego różnicowego:

1 — opisana przez zarejestrowane próbki, 2 — uzyskana przy wykorzystaniu procedury modelowania

Przedstawiona na rys. 5. trajektoria modelowana ma nieco mniejszą rozpiętość ramion niż trajektoria nie poddawana procedurze modelowania. Jest to cecha każdej trajektorii wynikająca wprost z właściwości wielomianów Beziera [por. wł. 3), p. 4]. Jeżeli przyjmujemy, że względne zmniejszenie rozpiętości ramion trajektorii modelowanej przy wykorzystaniu wielomianów Beziera, jest wielkością stałą lub mało zmieniającą się (w założonych granicach błędu) [18], to wpływ tego zjawiska na informację o wielkości wady, zawartą w trajektorii, można pominąć. Założenie to wydaje się być słusznym w świetle przeprowadzonego cyklu badań, lecz jego potwierdzenie wymaga przeprowadzenia głębszych analiz teoretycznych.

PODSUMOWANIE

Opisano metodykę modelowania trajektorii zmian napięcia przetwornika wirowego, różnicowego, przelotowego, zewnętrznego uzyskiwanych podczas przemieszczania obiektów z wadami przez przetwornik. Modelowanie trajektorii przeprowadzane jest przy wykorzystaniu wielomianów Beziera obliczanych na podstawie punktów wiodących trajektorii zawartych w zmodyfikowanym wektorze danych. Zastosowana procedura modelowania umożliwia idealizację kształtu trajektorii poprzez eliminację błędów wywołanych zarówno przez zakłócenia pojawiające się w torze zbierania danych, jak wynikające z niewielkiej liczby zarejestrowanych próbek. Wynikiem działania opisanej procedury jest trajektoria o kształcie charakterystycznym dla danego rodzaju wady obiektu.

Przedstawioną metodykę modelowania zastosowano w postaci procedur programowych w programie sterującym pracą skomputeryzowanego defektoskopu wirowego, model DWT-620 przeznaczonego do kontroli rur nieferromagnetycznych [7,9].

BIBLIOGRAFIA

1. K. G. Beauchamp: *Przetwarzanie sygnałów metodami analogowymi i cyfrowymi*. Warszawa: WNT, 1972
2. P. Bezier: *Numerical Control*. New York, J. Wiley 1972
3. J. Bielecki: *Turbo Pascal wersja 3.0*. Warszawa: WNT, 1987
4. G. H. Granlund: *Fourier Preprocessing for Hand-Print Character Recognition*. IEEE Trans. on Computers, 1972, vol. 21, no 2
5. H. Heptner, H. Stroppe: *Magnetyczne i indukcyjne badania metali*. Wyd. Śląsk, Katowice 1972
6. *Karty katalogowe defektoskopów wirowych*: Elotest UL3 i B2 (Rohman GmbH), Eddycheck 3 (Prüftechnik GmbH), Nortec 23ST (Staveley Instr.), Alcoprobe S (Inspection Instr. NDT), i inne
7. A. Lewińska-Romicka: *Badania nieniszczące rur metalowych metodą prądów wirowych*. Warszawa: PWN 1991
8. A. Lewińska-Romicka: *Trajektorie napięcia przetworników wirowych samoporównawczych*. Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji PAN, 1990, nr 3-4
9. A. Lewińska-Romicka, S. Piskorski, J. Papis: *Defektoskop wirowy o dwuwymiarowej prezentacji sygnałów przetworników do kontroli rur nieferromagnetycznych*. Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji, PAN, 1991, z. 3-4
10. A. Lewińska-Romicka, S. Piskorski, J. Papis: *Defektoskop wirowy o dwuwymiarowej analizie sygnałów*. Zgłoszenie patentowe nr P287751, z dn. 1990.11.14
11. V. Oppenheim, R. F. Schaffer: *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów*. Warszawa: WNT, 1979
12. T. Pavlidis: *Algorithms for Shape Analysis of Contours and Waveforms*. IEEE Trans. on PAMI, 1980, vol. 2, no 4
13. T. Pavlidis: *Grafika i przetwarzanie obrazów*. Warszawa: WNT, 1987
14. E. Persoon, K. S. Fu: *Shape Discrimination Using Fourier Descriptors*. IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, 1977, vol. 7, nr 3
15. G. P. Singh, S. Udupa: *The Role of Digital Signal Processing in NDT*. NDT International 4th ECNDT Supplement, 1987
16. W. Solnica, A. Lewińska-Romicka, S. Piskorski, J. Papis: *Analiza sygnałów z defektoskopu wirowego wspomagana komputerowo*. Metrologia i Systemy Pomiarowe, 1990, nr 5

17. W. Solnica, A. Lewińska-Romicka, S. Piskorski, J. Papis: *Nieniszczące wiroprądowe wykrywanie wad rur*. Metrologia i Systemy Pomiarowe, 1990, nr 7
18. W. Solnica, A. Lewińska-Romicka, S. Piskorski, J. Papis: *Raporty roczne z etapu IV (1989) i etapu V (1990) pracy CPBP 02.20, temat nr VII.03: „Problemy badań nieniszczących obiektów metalowych metodą prądów wirowych”*
19. Turbo Graphics Toolbox v. 1.0, ed. Borland International Inc., Scotts Valley, Ca, 1985
20. S. S. U d p a, W. L o r d: *A Fourier Descriptor Classification Scheme For Differential Probe Signals*. Materials Evaluation, 1984, vol. 42, no 9
21. F. M. W a h l: *Digital Image Signal Processing*. Artech House Inc., Norwood, Ma, 1987
22. Ch. T. Z a h n, R. Z. R o s k i e s: *Fourier Descriptors For Plane Closed Curves*. IEEE Trans. on Computers, 1972, vol. 21, no 3

J. P A P I S

VOLTAGE PLANE TRAJECTORY MODELLING IN COMPUTERIZED DEFECTOSCOPE FOR TUBES INSPECTION

S u m m a r y

In the article voltage plane trajectory modeling procedure is described. To modeling, the complex voltage of eddy-current differential encircling-coil transducer is used. The signal, as a samples series is obtained while the tube is displacing inside the transducer. Modeling is carried out by the use of Bezier Polynomials. The algorithm is applied in the computerized eddy-current defectoskope for nonmagnetic tubes inspection.

Czebyszewska aproksymacja charakterystyki amplitudowej dolnoprzepustowego filtra cyfrowego SOI o liniowej fazie

FELICJA WYSOCKA-SCHILLAK

Wyższa Szkoła Pedagogiczna, Bydgoszcz

Otrzymano 1991.01.23

Autoryzowano do druku 1991.05.07

W pracy przedstawiono metodę rozwiązywania zadania czebyszewskiej aproksymacji charakterystyki amplitudowej dolnoprzepustowego filtra cyfrowego SOI o liniowej charakterystyce fazowej. Zadanie to jest przekształcane w odpowiednie zadanie programowania nieliniowego z ograniczeniami, które jest następnie rozwiązywane przy użyciu metody przesuwanej funkcji kary. Praca zawiera ponadto opis opracowanego programu FSOI oraz przykład obliczeniowy ilustrujący działanie tego programu.

1. WSTĘP

Ważnym etapem projektowania liniowego, stacjonarnego i przyczynowego filtra cyfrowego o skończonym czasie trwania odpowiedzi impulsowej (w skrócie SOI¹⁾) jest aproksymacja zadanej charakterystyki amplitudowej. Filtry SOI, oprócz realizacji określonej charakterystyki amplitudowej, umożliwiają również realizację liniowej charakterystyki fazowej, co w pewnych zastosowaniach, np. przy transmisji danych, jest szczególnie istotne.

Istnieją różne metody przeprowadzania aproksymacji charakterystyki amplitudowej filtra SOI o liniowej charakterystyce fazowej. Do najczęściej stosowanych należą: metoda próbkowania w dziedzinie częstotliwości [3,12,17], aproksymacja za pomocą sum częściowych szeregu Fouriera [2,5,17], aproksymacja za pomocą sum częściowych szeregu Fouriera z wykorzystaniem różnych funkcji okien [2,3,12,17], metoda minimalizacji błędu średniokwadratowego [1,5,16,17] oraz aproksymacja czebyszewska (minimaks) [3,5,6,12,14,17]. Filtry zaprojektowane z zastosowaniem aproksymacji czebyszewskiej nazywane są w literaturze filtrami optymalnymi.

¹⁾ W literaturze stosowany jest niekiedy również skrót FIR pochodzący od angielskiego terminu „finite impulses response”.

Zadanie czebyszewowskiej aproksymacji charakterystyki amplitudowej filtru SOI o liniowej fazie może być rozwiązywane różnymi metodami. W ogólnym przypadku nie istnieją jednak analityczne metody rozwiązywania tego zadania, a do jego rozwiązywania wykorzystywane są różne metody numeryczne [7,8,11–15]. Metody te wykazują jednak szereg ograniczeń [3,14]. W niniejszej pracy zaproponowano sposób rozwiązania zadania czebyszewowskiej aproksymacji charakterystyki amplitudowej idealnego filtru dolnoprzepustowego charakterystyką amplitudową filtru SOI o liniowej charakterystyce fazowej. Zadanie to jest przekształcane w odpowiednie zadanie programowania nieliniowego z ograniczeniami, które jest następnie rozwiązywane przy użyciu metody przesuwanej funkcji kary. Praca zawiera ponadto opis opracowanego programu FSOI oraz przykład obliczeniowy ilustrujący działanie tego programu.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Rozpatrzmy liniowy, stacjonarny i przyczynowy filtr cyfrowy o skończonym czasie trwania odpowiedzi impulsowej. Transmittancja $D(z)$ takiego filtru jest wielomianem stopnia $N-1$ zmiennej zespolonej z^{-1} [17]

$$D(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_{N-1} z^{-(N-1)}, \quad (1)$$

gdzie: $z = \exp(j2\pi F)$;

$F = f\Delta t$ – częstotliwość unormowana względem częstotliwości próbkowania $f_p = 1/\Delta t$,
($F \in <0; 0,5>$);

Δt – okres próbkowania;

f – częstotliwość kosinusoidalnego sygnału wymuszającego;

$h_n, n=0, 1, \dots, N-1$ – współczynniki.

Współczynniki h_n występujące we wzorze (1) określają odpowiedź impulsową $d(n)$ układu, tzn. $d(n) = h_n$ dla $n=0,1,\dots,N-1$ i $d(n)=0$ dla pozostałych n .

Charakterystyką amplitudowo-fazową układu nazywamy funkcję

$$D(e^{j\omega}) = D(z)|_{z=e^{j\omega}}, \quad (2)$$

gdzie: $\omega = 2\pi F$ – pulsacja unormowana względem częstotliwości próbkowania f_p ,
($\omega \in <0; \pi>$).

Charakterystyka amplitudowa $A(\omega)$ oraz fazowa $\varphi(\omega)$ układu są określone następująco

$$A(\omega) = |D(e^{j\omega})|, \quad (3)$$

$$\varphi(\omega) = \arg D(e^{j\omega}). \quad (4)$$

Charakterystyka amplitudowo-fazowa filtru SOI o liniowej fazie może być przedstawiona w następującej postaci [11]:

$$D(e^{j\omega}) = G(\omega) \exp\left(j\left(\frac{L\pi}{2} - \left(\frac{N-1}{2}\omega\right)\right)\right), \quad (5)$$

przy czym

$$L = \begin{cases} 0 & \text{– gdy odpowiedź impulsowa filtru} \\ & \text{jest symetryczna, tzn., gdy} \\ & d(n) = d(N-1-n), n=0,1,\dots,N-1; \\ 1 & \text{– gdy odpowiedź impulsowa filtru} \\ & \text{jest antysymetryczna, tzn., gdy} \\ & d(n) = -d(N-1-n), n=0,1,\dots,N-1. \end{cases}$$

Zależnie od wartości N oraz od charakteru odpowiedzi impulsowej filtru, funkcja $G(\omega)$ przyjmuje odpowiednio jedną z czterech postaci [11,14]:

Postać 1: N nieparzyste, odpowiedź impulsowa symetryczna

$$G(\omega) = \sum_{k=0}^M a_k \cos(\omega k), \quad (6)$$

gdzie: $M = (N-1)/2$,

$$a_0 = h_M,$$

$$a_k = 2h_{M-k}, k = 1, 2, \dots, M.$$

Postać 2: N parzyste, odpowiedź impulsowa symetryczna

$$G(\omega) = \sum_{k=1}^M b_k \cos(\omega(k - \frac{1}{2})), \quad (7)$$

gdzie: $M = N/2$,

$$b_k = 2h_{M-k}, k = 1, 2, \dots, M.$$

Postać 3: N nieparzyste, odpowiedź impulsowa antysymetryczna

$$G(\omega) = \sum_{k=1}^M c_k \sin(\omega k), \quad (8)$$

gdzie: $M = (N-1)/2$,

$$c_k = 2h_{M-k}, k = 1, 2, \dots, M,$$

$$h_M = 0.$$

Postać 4: N parzyste, odpowiedź impulsowa antysymetryczna

$$G(\omega) = \sum_{k=1}^M d_k \sin(\omega(k - \frac{1}{2})), \quad (9)$$

gdzie: $M = N/2$,

$$d_k = 2h_{M-k}, k = 1, 2, \dots, M.$$

Ponieważ występujący we wzorze (5) człon $\exp(j(\frac{L\pi}{2} - (\frac{N-1}{2})\omega))$ nie ma wpływu na charakterystykę amplitudową filtru, kształt tej charakterystyki zależy jedynie od wartości funkcji $G(\omega)$. Zadanie aproksymacji określonej charakterystyki amplitudowej sprowadza się więc do wyznaczenia odpowiednich wartości współczynników funkcji $G(\omega)$. W dalszej części pracy rozpatrywać będziemy jedynie funkcję

$G(\omega)$ o postaci 1 określonej wzorem (6). Nie zmniejsza to ogólności rozważań, gdyż funkcję $G(\omega)$ o postaciach 2,3 i 4 można po zastosowaniu odpowiednich przekształceń [3,11,13] sprowadzić do postaci 1 i dalej stosować podobne algorytmy obliczeniowe jak w przypadku funkcji $G(\omega)$ o postaci 1.

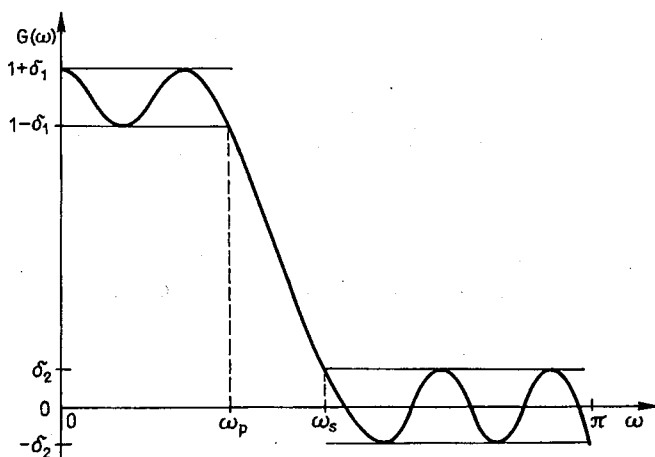
Niech $A_0(\omega)$ będzie charakterystyką amplitudową idealnego filtra dolnoprzepustowego określoną zależnością

$$A_0(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{w pasmie przepustowym } P = \langle 0; \omega_p \rangle, \\ 0 & \text{w pasmie zaporowym } S = \langle \omega_s; \pi \rangle, \end{cases} \quad (10)$$

gdzie: ω_p i ω_s — unormowane pulsacje krańcowe odpowiednio pasma przepustowego i zaporowego.

Zadanie czebyszewowskiej aproksymacji charakterystyki $A_0(\omega)$ jest równoważne zadaniu czebyszewowskiej aproksymacji funkcji $G_0(\omega)$ określonej następująco

$$G_0(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{w pasmie przepustowym,} \\ 0 & \text{w pasmie zaporowym.} \end{cases} \quad (11)$$



Rys. 1. Przebieg funkcji $G(\omega)$ aproksymowanej w sensie Czebyszewa funkcję $G_0(\omega)$ określoną zależnością (11)

Funkcja $G(\omega)$ otrzymana w wyniku takiej aproksymacji ma postać pokazaną na rysunku 1. Występujące na rysunku wielkości δ_1 i δ_2 są maksymalnymi odchyłkami funkcji $G(\omega)$ od aproksymowanej funkcji $G_0(\omega)$. Zauważmy, że pomiędzy przedziałami P i S , w których funkcja $G(\omega)$ ma ściśle określony przebieg, występuje przedział pulsacji $(\omega_p; \omega_s)$, w którym wymagania odnośnie przebiegu funkcji $G(\omega)$ nie są sprecyzowane.

Niech $Y = [y_1, y_2, \dots, y_{M+1}]^T$ będzie wektorem parametrów zdefiniowanych następująco:

$$y = a_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, M+1; \quad (12)$$

gdzie a_i są współczynnikami występującymi we wzorze (6).

Ponadto niech $G(\omega, Y)$, i $A(\omega, Y)$ oznaczają odpowiednio funkcję G oraz charakterystykę amplitudową A otrzymane przy przyjęciu we wzorze (6) współczynników o wartościach określonych przez wektor Y .

Zadanie aproksymacji sformułujemy w sposób następujący:

Znaleźć wektor $Y = [y_1, y_2, \dots, y_{M+1}]^T$, który minimalizuje

$$\max_{\omega \in P \cup S} W(\omega) |G_0(\omega) - G(\omega, Y)|, \quad (13)$$

gdzie $W(\omega)$ jest funkcją wagi określoną następująco

$$W(\omega) = \begin{cases} \delta_1/\delta_2 & \text{dla } \omega \in P \\ 1 & \text{dla } \omega \in S. \end{cases} \quad (14)$$

3. SPOSÓB ROZWIĄZANIA ZADANIA APROKSYMACJI

Rozwiązanie zadania aproksymacji rozpoczniemy od podzielenia przedziałów P i S na podprzedziały θ_i , $i=1, 2, \dots, M-1$, określone następująco:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \langle 0; \omega_1 \rangle, \\ \theta_l &= \langle \omega_{l-1}; \omega_l \rangle, \quad l = 2, 3, \dots, L, \\ \theta_{L+1} &= \langle \omega_L; \omega_p \rangle, \\ \theta_{L+2} &= \langle \omega_s; \omega_{L+1} \rangle, \\ \theta_k &= \langle \omega_{k-2}; \omega_{k-1} \rangle, \quad k = L+3, L+4, \dots, M-2, \\ \theta_{M-1} &= \langle \omega_{M-3}; \pi \rangle, \end{aligned} \quad (15)$$

gdzie: $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{M-3}$ ($\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{M-3}$) są unormowanymi pulsacjami, dla których spełnione są warunki:

$$(-1)^{n+m} \left. \frac{dG(\omega, Y)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_n} > 0, \quad n = 1, 2, \dots, L \quad (16)$$

$$(-1)^k \left. \frac{dG(\omega, Y)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_k} > 0, \quad k = L+1, L+2, \dots, M-3 \quad (17)$$

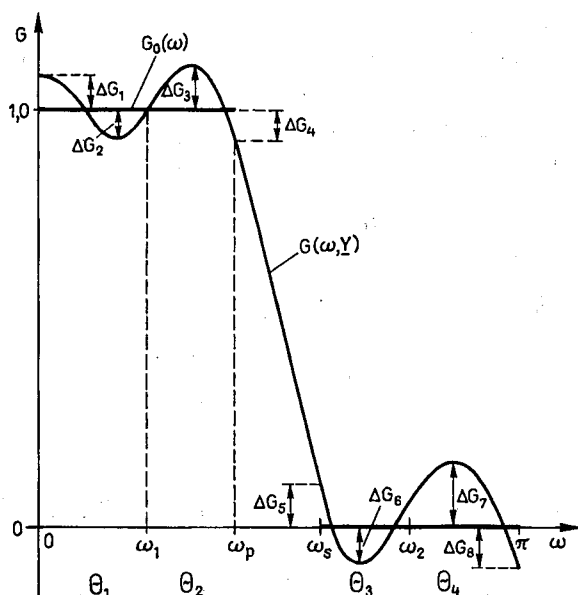
przy czym

$$m = \begin{cases} 0 & \text{dla } M \text{ parzystego,} \\ 1 & \text{dla } M \text{ nieparzystego,} \end{cases}$$

a L jest liczbą pulsacji ω_i występujących w pasmie przepustowym.

Określimy ponadto wartości największych odległości $\Delta G_i(Y)$, $i=1, 2, \dots, M+3$, pomiędzy funkcjami $G_0(\omega)$ i $G(\omega, Y)$, czyli ekstremów funkcji błędu, w sposób następujący (rys. 2):

— w przypadku M nieparzystego



Rys. 2. Sposób wyznaczania wartości $\Delta G_i(Y)$, $i = 1, 2, \dots, 8$, ($M = 5$)

$$\Delta G_1(Y) = G(0, Y) - G_0(0), \quad (18)$$

$$\Delta G_1(Y) = \max_{\omega \in \theta_{l-1}} (G_0(\omega) - G(\omega, Y)), \quad l = 2, 4, \dots, L+2, \quad (19)$$

$$\Delta G_1(Y) = \max_{\omega \in \theta_{l-1}} (G(\omega, Y) - G_0(\omega)), \quad l = 3, 5, \dots, L+2, \quad (20)$$

$$\Delta G_{L+3}(Y) = G_0(\omega_p) - G(\omega_p, Y), \quad (21)$$

$$\Delta G_{L+4}(Y) = G(\omega_s, Y) - G_0(\omega_s), \quad (22)$$

$$\Delta G_k(Y) = \max_{\omega \in \theta_{k-3}} (G_0(\omega) - G(\omega, Y)), \quad k = L+5, L+7, \dots, M+2, \quad (23)$$

$$\Delta G_k(Y) = \max_{\omega \in \theta_{k-3}} (G(\omega, Y) - G_0(\omega)), \quad k = L+6, L+8, \dots, M+2, \quad (24)$$

$$\Delta G_{M+3}(Y) = G_0(\pi) - G(\omega, \pi); \quad (25)$$

— w przypadku M parzystego

$$\Delta G_1(Y) = G_0(0) - G(0, Y), \quad (26)$$

$$\Delta G_l(Y) = \max_{\omega \in \theta_{l-1}} (G(\omega, Y) - G_0(\omega)), \quad l = 2, 4, \dots, L+2, \quad (27)$$

$$\Delta G_l(Y) = \max_{\omega \in \theta_{l-1}} (G_0(\omega) - G(\omega, Y)), \quad l = 3, 5, \dots, L+2, \quad (28)$$

przy czym $\Delta G_{L+3}(Y) \div \Delta G_{M+3}(Y)$ są zdefiniowane odpowiednio wzorami (21–25).

Z literatury [12,14] wiadomo, że o ile dla zadanych wartości M , ω_p , ω_s oraz dla danego stosunku δ_1/δ_2 zadanie czebyszewowskiej aproksymacji charakterystyki $G_0(\omega)$, a tym samym $A_0(\omega)$ ma rozwiązanie, to zachodzi jeden z poniższych przypadków:

1. W otrzymanym rozwiązaniu $G(\omega, Y)$ wszystkie odległości $\Delta G_i(Y)$, $i=1,2,\dots,M+3$, są sobie równe. Jest to tzw. przypadek „ponadrównomiernie falisty” [14], określany w literaturze anglojęzycznej terminem „extraripple solution” lub „maximal ripple solution”.

2. W otrzymanym rozwiązaniu $G(\omega, Y)$ uzyskuje się $M+2$ równe odległości $\Delta G_i(Y)$; odległość $\Delta G_1(Y)$ lub $\Delta G_{M+3}(Y)$ ma wartość mniejszą od pozostałych odległości (ang. *scaled extraripple solution*).

3. W otrzymanym rozwiązaniu $G(\omega, Y)$ występują tylko $M+2$ odległości $\Delta G_i(Y)$, $i=1,2,\dots,M+2$, które są sobie równe; odległość $\Delta G_{M+2}(Y)$, zdefiniowana wzorem (24), jest określona dla pulsacji $\omega=\pi$, w związku z czym jest ona identyczna z odległością $\Delta G_{M+3}(Y)$ zdefiniowaną wzorem (25) (ang. *equiripple solution*). Rozwiązanie zadania aproksymacji sformułowanego zależnością (13) sprowadza się więc do znalezienia takiego wektora $Y=[y_1, y_2, \dots, y_{M+1}]^T$, dla którego spełniony jest warunek

$$\Delta G_k(Y) = \Delta G_l(Y), \quad (29)$$

przy czym

$$k, l = \begin{cases} 1, 2, \dots, M+2 & \text{— gdy wyrównane są odległości} \\ & \Delta G_1(Y) \div \Delta G_{M+2}(Y), \\ 2, 3, \dots, M+3 & \text{— gdy wyrównane są odległości} \\ & \Delta G_2(Y) \div \Delta G_{M+3}(Y). \end{cases}$$

Należy zauważyć, że ponieważ w zadaniu występuje tylko $M+1$ niewiadomych, tzn. współrzędnych wektora Y , możemy żądać wyrównania jedynie $M+2$ odległości.

Aby wyznaczyć wektor Y , dla którego spełniony jest warunek (29), przekształcamy rozpatrywane zadanie aproksymacji w odpowiednie zadanie programowania nieliniowego z ograniczeniami. W tym celu określamy taką funkcję $X(Y)$, która przy spełnieniu warunku (29) osiąga minimum globalne równe zero. Przyjmujemy, że funkcja ta ma następującą postać:

$$X(Y) = \sum_{i=I}^J \left[\Delta G_i(Y) - \frac{\sum_{k=I}^J \Delta G_k(Y)}{M+1} \right]^2, \quad (30)$$

gdzie:

$$I = \begin{cases} 1 & \text{— gdy wyrównywane są odległości} \\ & \Delta G_1(Y) \div \Delta G_{M+2}(Y), \\ 2 & \text{— gdy wyrównywane są odległości} \\ & \Delta G_2(Y) \div \Delta G_{M+3}(Y), \end{cases}$$

$$J = I + M + 1.$$

Można wykazać, że przy spełnieniu warunku (29) funkcja $X(Y)$ osiąga minimum globalne równe zero. Rozpatrywane zadanie aproksymacji, sformułowane zależnością (13), można

więc przekształcić w następujące równoważne zadanie programowania nieliniowego z ograniczeniami: Znaleźć wektor $Y = [y_1, y_2, \dots, y_{M+1}]^T$, który minimalizuje funkcję celu²⁾ $X(Y)$ określoną wzorem (30) przy następujących warunkach ograniczających:

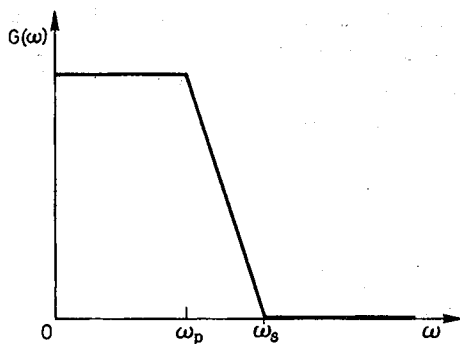
$$\Delta G_i(Y) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, M+3 \quad (31)$$

$$\hat{\omega} \in (\omega_p, \omega_s) \quad G(\omega, Y) < 1. \quad (32)$$

Sformułowane powyżej zadanie programowania nieliniowego można rozwiązać jedną z metod poszukiwania minimum z ograniczeniami. Z podanych w literaturze [4,9] metod, do rozwiązywania rozpatrywanego zadania zastosowano metodę przesuwanej funkcji kary. Metoda ta uważana jest bowiem za jedną z najbardziej efektywnych metod poszukiwania minimum z ograniczeniami [4]. Umożliwia ona sprowadzenie zadania z ograniczeniami do ciągu zadań bez ograniczeń poprzez odpowiednią modyfikację funkcji celu. Zadania programowania nieliniowego bez ograniczeń rozwiązywano metodą gradientu sprzężonego Polaka-Ribieri [4,9].

Początkowe wartości współrzędnych wektora Y , służące jako punkt startowy w rozwiązywaniu zadania programowania nieliniowego, wyznaczono przybliżając aproksymowaną funkcję $G_0(\omega)$ sumą częściową szeregu Fouriera. Współczynniki tego szeregu wyznaczano jedna nie dla funkcji $G_0(\omega)$ określonej zależnością (11), lecz dla charakterystyki $\tilde{G}_0(\omega)$ danej wzorem

$$\tilde{G}_0(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leq \omega \leq \omega_p, \\ \frac{\omega - \omega_s}{\omega_p - \omega_s} & \text{dla } \omega_p < \omega < \omega_s, \\ 0 & \text{dla } \omega_p \leq \omega \leq \pi, \end{cases} \quad (33)$$



Rys. 3. Przebieg funkcji $G_0(\omega)$ określonej zależnością (33)

o przebiegu pokazanym na rysunku 3. Współczynniki te są wyrażone w sposób następujący:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \tilde{G}_0(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} (\omega_p + \omega_s), \quad (34)$$

²⁾ Funkcją celu nazywamy funkcję, której poszukujemy [4,9].

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \tilde{G}_0(\omega) \cos(k\omega) d\omega = \\
 &= \frac{2}{k\pi} [(1 - \beta) \sin(k\omega_p) + \beta \sin(k\omega_s)] + \\
 &\quad + \frac{\alpha}{k\pi^2} [\omega_s \sin(k\omega_s) - \omega_p \sin(k\omega_p)] + \\
 &\quad + \frac{\alpha}{k^2 \pi^2} [\cos(k\omega_s) - \cos(k\omega_p)], \quad k = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned} \tag{35}$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{-2\pi}{\omega_s - \omega_p}, \tag{36}$$

$$\beta = \frac{\omega_s}{\omega_s - \omega_p}. \tag{37}$$

Przyjęcie takich współczynników spowodowało wyraźne zmniejszenie amplitud oscylacji funkcji $G(\omega, Y)$ w pobliżu pulsacji ω_p i ω_s w porównaniu z przypadkiem zastosowania współczynników szeregu Fouriera aproksymującego funkcję $G_0(\omega)$ daną wzorem (11). Tak określony punkt startowy jest więc bliższy poszukiwanego rozwiązania, a jego użycie w procedurze minimalizacyjnej powoduje skrócenie czasu wykonywania obliczeń.

Do określenia wartości funkcji $X(Y)$ niezbędna jest znajomość maksymalnych odległości $\Delta G_i(Y)$ pomiędzy funkcjami $G_0(\omega)$ i $G(\omega, Y)$. Wartości tych odległości w przedziałach $\theta_l, l=2,3,\dots,L$ oraz $\theta_k, k=L+3, L+4, \dots, M-2$, wyznaczono posługując się metodą złotego podziału [4,9].

4. OPIS PROGRAMU FSOI

Przedstawiony sposób aproksymacji posłużył do opracowania programu FSOI umożliwiającego czybyszewowską (równomiernie falistą) aproksymację charakterystyki amplitudowej idealnego filtra dolnoprzepustowego charakterystyką amplitudową filtra cyfrowego o skończonym czasie trwania odpowiedzi impulsowej. Program ten został napisany w języku Fortran dla mikrokomputera IBM PC/AT. Do kompilacji wykorzystano optymalizujący kompilator Fortranu firmy Microsoft (wersja 4.01).

Danymi wejściowymi dla programu są:

- liczba N ,
- wartość $w = \delta_2/\delta_1$,
- wartość unormowanych częstotliwości $F_p = \omega_p/2\pi$ i $F_s = \omega_s/2\pi$,
- wartość parametru IW informującego, czy chcemy otrzymać wydruki kolejnych współrzędnych wyznaczonej charakterystyki amplitudowej $A(\omega, Y)$ (IW=0), czy też nie (IW=1),

– wartość parametru EPS, zwanego kryterium zakończenia procedury minimalizacji bez ograniczeń [9] (procedura ta kończy swoje działanie, gdy norma gradientu funkcji celu $\|\nabla X(Y)\| \leq \text{EPS}$).

W programie FSOI do rozwiązywania otrzymanych zadań programowania nieliniowego z ograniczeniami zastosowano odpowiednio zmodyfikowaną procedurę GSPR1E opracowaną w Instytucie Automatyki Politechniki Warszawskiej [9]. Procedura ta umożliwia rozwiązywanie zadań programowania nieliniowego bez ograniczeń metodą gradientu sprzężonego Polaka-Ribiery, przy czym gradient funkcji celu jest estymowany numerycznie.

Tablica 1

Wyniki obliczeń dla danych: $N=21$; $w=1$;
 $F_p=0,160$; $F_s=0,240$

DOLNOPRZEPUSTOWY OPTYMALNY FILTR CYFROWY SOI
 O LINIOWEJ FAZIE

DANE:

liczba $N = 21$
 waga $w = 1$

pasmo przepustowe	.000000	.160000
pasmo zaporowe	.240000	.500000

Wartosci wspolczynnikow

H(0) =	.23439570E-02
H(1) =	-.20758560E-01
H(2) =	-.13258950E-01
H(3) =	.16646900E-01
H(4) =	.36137710E-01
H(5) =	.11537750E-03
H(6) =	-.65470110E-01
H(7) =	-.57648300E-01
H(8) =	.90181770E-01
H(9) =	.30010720E+00
H(10) =	.40013170E+00

Czestotliwosci ekstremow	Wartosci amplitudy	Wartosci odleglosci delta A
.00000000	.97692580	.02307415
.05134160	1.02307700	.02307713
.10027420	.97692350	.02307647
.14140800	1.02307700	.02307689
.16000000	.97692380	.02307624
.24000000	.02307533	.02307533
.25836950	.02307503	.02307503
.29888440	.02307512	.02307512
.34677650	.02307670	.02307670
.39713270	.02307499	.02307499
.44840430	.02307553	.02307553
.50000000	.02307520	.02307520

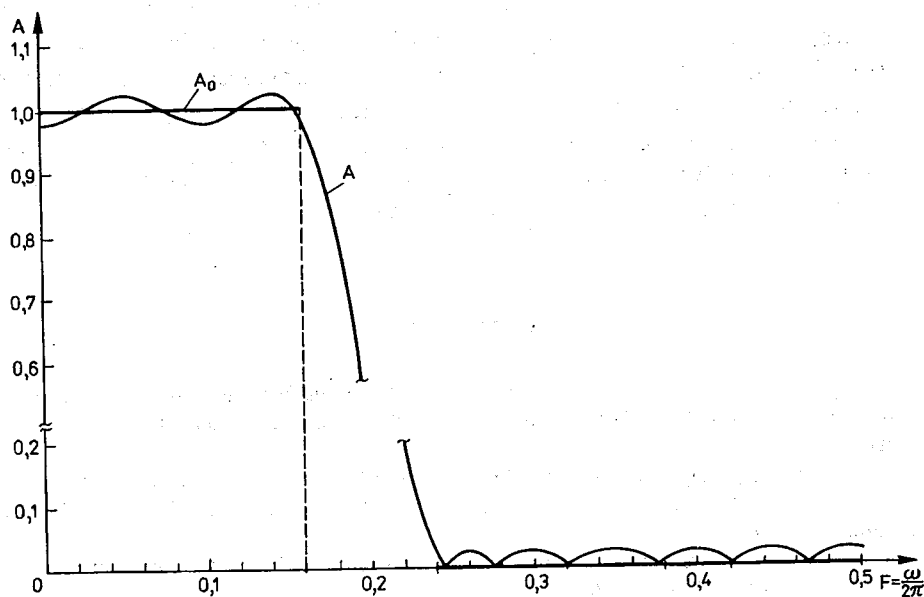
Po przeprowadzeniu obliczeń przy użyciu program FSOI otrzymujemy następujące wyniki końcowe:

- wartości współczynników h_i , $i=0,1,2,\dots,M$, występujących we wzorze (1),
- wartości współrzędnych ekstremów wyznaczonej funkcji $A(\omega, Y)$ oraz wartości największych odległości $\Delta A_i(Y)$, $i=1,2,\dots,M+2$, pomiędzy funkcjami $A_0(\omega)$ i $A(\omega, Y)$.

Istnieje ponadto możliwość drukowania kolejnych wartości współrzędnych $F=\omega/2\pi$ i $A(\omega, Y)$ wyznaczonej funkcji aproksymującej.

Przy użyciu programu FSOI przeprowadzono aproksymację szeregu charakterystyk amplitudowych idealnego filtra dolnoprzepustowego charakterystykami amplitudowymi cyfrowych filtrów SOI. Obliczenia wykonywano dla $N \leq 30$ przy użyciu mikrokomputera IBM PC/AT z zegarem 12 MHz, bez komprocesora. Czas wykonywania obliczeń wahał się od kilkunastu do kilkadziesiąt minut, przy czym czas ten wyraźnie zwiększał się w miarę wzrostu liczby N oraz w miarę zmniejszania się wartości parametru EPS.

Przykładowe wyniki aproksymacji charakterystyki amplitudowej idealnego filtra dolnoprzepustowego charakterystyką amplitudową cyfrowego filtra SOI są podane w tablicy 1. Do obliczeń przyjęto wartość parametru $\text{EPS}=0,00001$. Przebiegi charakterystyk aproksymowanej $A_0(\omega)$ oraz otrzymanej w wyniku aproksymacji $A(\omega, Y)$ są pokazane na rysunku 4.



Rys. 4. Przebiegi charakterystyk aproksymowanej $A_0(\omega)$ i otrzymanej w wyniku aproksymacji $A(\omega, Y)$ dla danych: $N = 21$; $w = 1$; $F_p = 0,160$; $F_s = 0,240$

5. ZAKOŃCZENIE

W pracy przedstawiono metodę rozwiązywania zadania czebyszewowskiej aproksymacji charakterystyki amplitudowej dolnoprzepustowego filtra cyfrowego SOI o liniowej fazie w drodze rozwiązania odpowiedniego zadania programowania nieliniowego z ograniczeniami. W porównaniu z metodami rozwiązywania rozpatrywanego zadania aproksymacji opisanymi w literaturze zaproponowana metoda wykazuje wiele zalet.

Metody przedstawione w pracach [7,8] umożliwiają jedynie otrzymanie rozwiązań o liczbie ekstremów funkcji błędu (czyli największych odległości pomiędzy funkcjami aproksymującą i aproksymowaną) równej $M + 3$ [14]. W przypadku zaproponowanej metody, podobnie jak w przypadku metody McClellana i Parka [11,13], możliwe jest uzyskanie wszystkich trzech typów rozwiązań.

Inną niedogodnością metod przedstawionych w pracach [7,8] jest fakt, że częstotliwości krańcowe F_p i F_s nie są określone z góry. Ich wartości są ustalone w trakcie wykonywania obliczeń. W przypadku zaproponowanej metody oraz metody opisanej w [11,13] częstotliwości te są ustalone z góry.

Zaproponowana metoda, aczkolwiek nie tak szybka jak metoda McClellana i Parka, posiada w porównaniu z tą metodą pewne zalety. W metodzie McClellana i Parka nie jest możliwe kontrolowanie przebiegu funkcji aproksymującej w przedziale częstotliwości (F_s, F_p), w wyniku czego funkcja ta, spełniająca wszystkie założenia w przedziałach aproksymacji, może w przedziale (F_s, F_p) przyjmować wartości większe od $1 + \delta_2$ [3]. W zaproponowanej metodzie, w celu uniknięcia takich przypadków, w zadaniu programowania nieliniowego wprowadzono ograniczenie (32). W metodzie McClellana i Parka nie ma ponadto możliwości uwzględnienia jakichkolwiek dodatkowych ograniczeń czy warunków dotyczących np. wartości współczynników h_i , $i=0,1,2,\dots,N-1$, lub też przebiegu odpowiedzi impulsowej filtra. W przypadku zaproponowanej metody warunki te można łatwo uwzględnić w postaci dodatkowych ograniczeń w zadaniu programowania nieliniowego.

BIBLIOGRAFIA

1. V. R. Alga zi, M. Suk, C. S. Rim: *Design of almost minimax FIR filters in one and two dimensions by WLS techniques*. IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS-33, No 6, June 1986, ss. 590-596
2. A. Antonio u: *Cifrowyje filtry - analiz i projektirowaniye*. Moskwa: Izd. Radio i Swiaż, 1983
3. V. Capp elini, A. G. Constant inides, P. E milia ni: *Cifrowyje filtry i ich primienieniye*. Energoatomizad. Moskwa 1983
4. W. Finde isen, J. Szyman owski, A. Wierz bicki: *Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji*. Warszawa: PWN, 1980
5. L. M. Golden berg (red): *Cifrowyje filtry w elektroswiazi i radiotechnikie*. Izd. Radio i Swiaż, Moskwa 1983
6. H. D. Helmes: *Digital filters with equiripple or minimax responses*. IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol. AU-19, No 1, March 1971, ss. 87-93

7. O. H e r r m a n n: *Design of nonrecursive digital filters with linear phase*. Electron Lett., vol. 6, No 11, 1970, ss. 328—329
8. E. H o f f s t e t t e r, A. O p p e n h e i m, J. S i e g e l: *A new technique for the design of nonrecursive digital filters*. Proc. 5-th Annual Princeton Conf. Information Sciences and Systems, 1971, ss. 64—72
9. T. K r ę g l e w s k i, T. R o g o w s k i, A. R u s z c z y ń s k i, J. S z y m a n o w s k i: *Metody optymalizacji w języku FORTRAN*. PWN, Warszawa 1984
10. M. T. M c C a l l i g, B. J. L e o n: *Constrained ripple design of FIR digital filters*. IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS—25, No 11, Nov. 1978, ss. 893—902
11. J. H. M c C l e l l a n, T. W. P a r k, L. R. R a b i n e r: *A computer program for designing optimum FIR linear phase digital filters*. IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol. AU—21, No 6, Dec. 1973, ss. 506—526
12. A. V. O p p e n h e i m, R. W. S c h a f f e r: *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów*. Warszawa: WKŁ, 1979
13. T. W. P a r k, J. H. M c C l e l l a n: *Chebyshev approximation for nonrecursive digital filters with linear phase*. IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT—19, No 2, March 1972, ss. 189—194
14. L. R. R a b i n e r, J. H. M c C l e l l a n, T. W. P a r k: *FIR digital filters design techniques using weighted Chebyshev approximation*. Proc. IEEE, vol. 64, No 4, April 1975, ss. 596—610
15. L. R. R a b i n e r: *Linear program design of finite impulse response (FIR) digital filters*. IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol. AU—20, No 4, Oct. 1972, ss. 280—288
16. D. W. T u f t s, J. F. F r a n c i s: *Designing digital low-pass filters — comparison of some methods and criteria*. IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol. AU—18, No 4, Dec. 1970, ss. 487—494
17. A. W o j t k i e w i c z: *Elementy syntezy filtrów cyfrowych*. Warszawa: WNT, 1984

F. WYSOCKA-SCHILLAK

Chebyshev Approximation of the Amplitude Characteristic of a Linear Phase Low-Pass Digital FIR Filter

S u m m a r y

The paper presents a method of solving of the problem of the Chebyshev approximation of the amplitude characteristic of a linear phase low-pass digital FIR filter. The approximation problem is transformed into an equivalent constrained minimization problem, which is solved using a penalty function shifting method. A description of the computer program FSOI with a numerical example is included.

SPIS TREŚCI

W. Niemiec: O konstytutywnym rozłożonym parametrycznie modelowaniu pola elektromagnetycznego. Cz. I. Konstytutywny rozłożony parametrycznie matematyczny model pola elektromagnetycznego	351
W. Niemiec: O konstytutywnym rozłożonym parametrycznie modelowaniu pola elektromagnetycznego. Cz. II. Rozwiązanie modelowych równań różniczkowych cząstkowych konstytutywnych stanu pola elektromagnetycznego	369
H. Budzisz: Przetwarzanie wiedzy o układach elektronicznych. Cz. 1. Unifikacja i reguły przetwarzania. Cz. 2. Wnioskowanie wstępujące. Cz. 3. Wnioskowanie zstępujące	393
H. Budzisz: Reprezentacja wiedzy o układach elektronicznych. Cz. II. Sieci semantyczne ..	423
S. Kucypera, J. Skorek: Modelowe badanie wpływu zewnętrznych parametrów eksploatacyjnych i szczelin montażowych na rozkład temperatury w obszarze czynnym układów scalonych	435
T. Ostrowski, P. Bajkowski, K. Wiciński, R. Musiał: O pewnych metodach detekcji cech w obrazie opartych na koncepcji zmiennej skali filtracji i ortonormalnej przestrzenno-częstotliwościowej dekompozycji sygnału	449
M. Żółtowski: O cyfrowych pętlach fazowych z niejednostajnym próbkowaniem w obecności zakłóceń losowych Cz. I, Cz. II	475
M. Żółtowski: Nowe kryteria stabilności dla cyfrowych pętli fazowych z niejednostajnym próbkowaniem dowolnego rzędu, śledzących przejścia przez poziom zerowy. Cz. I.	533
M. Żółtowski: Nowe kryteria stabilności dla cyfrowych pętli fazowych z niejednostajnym próbkowaniem dowolnego rzędu, śledzących przejścia przez poziom zerowy. Cz. II	573
M. Żółtowski: Nowe kryteria stabilności dla cyfrowych pętli fazowych z niejednostajnym próbkowaniem dowolnego rzędu, śledzących przejścia przez poziom zerowy. Cz. III	593
K. Wawryn: Wrażliwość funkcji układowej na elementy pasożytnicze w projektowaniu analogowych układów scalonych	635
Z. Kowalski: Tłumienności pasmowe o logarytmnonormalnym rozkładzie wagi i ich punktowe aproksymaty	653
Z. Kowalski: Algebraiczna metoda optymalizacji częstotliwości wyznaczania punktowych aproksymat tłumienności paskowej	669
A. Lewińska-Romicka, S. Piskorski, J. Papis: Defektoskop wiroprowodowy od dwuwymiarowej prezentacji sygnałów przetworników do kontroli rur nieferromagnetycznych	685
J. Papis: Rekonstrukcja trajektorii napięcia przetwornika wiroprowodowego w skomputeryzowanym defektoskopie do kontroli rur	695
F. Wysocka-Schillak: Czebyszewska aproksymacja charakterystyki amplitudowej dolnoprzepustowego filtra cyfrowego SOI o liniowej fazie	707

CONTENTS

W. Niemiec: On the constitutive distributed parameter modelling of the electromagnetic field. Part I. The constitutive distributed parameter mathematical model of the electromagnetic field	351
W. Niemiec: On the constitutive distributed parameter modelling of the electromagnetic field. Part II. The solution of the model partial differential constitutive state equation of the electromagnetic field	369
H. Budzisz: Knowledge processing in the domain of electronic circuits. Part 1. Unification and knowledge processing rules. Part 2. Forward reasoning. Part 3. Backward reasoning	393

H. B u d z i s z: Knowledge representation in the domain of electronic circuits. Part. II: Semantic networks and frame representation	423
S. K u c y p e r a, J. S k o r e k: Numerical analysis of influence of external cooling conditions and assembling gaps on thermal behaviour of integrated circuits	435
T. O s t r o w s k i, P. B a j k o w s k i, K. W i c y Ń s k i, R. M u s i a ł: Feature detection in digital pictures using image processing system VIPS	449
M. Ż ó ł t o w s k i: On the digital nonuniform sampling phase-locked loops in the presence of noise Part. I, Part. II	473
M. Ż ó ł t o w s k i: New stability criteria for the nonuniform sampling zero-crossing digital phase-locked loops of any order. Part I	535
M. Ż ó ł t o w s k i: New stability criteria for the nonuniform sampling zero-crossing digital phase-locked loops of any order. Part II	575
M. Ż ó ł t o w s k i: New stability criteria for the nonuniform sampling zero-crossing digital phase-locked loops of any order. Part III	595
K. W a w r y n: Sensitivity of network function to the parasitics in analog IC design	637
Z. K o w a l s k i (H a b d a n k): The band loss with the logarithmic — normal factoring-weight and their point approximates	655
Z. K o w a l s k i (H a b d a n k): The algebraic method for optimizing the frequencies used by determination of the band loss	671
A. L e w i Ń s k a - R o m i c k a, S. P i s k o r s k i, J. P a p i s: Eddy-current defectoscope for nonmagnetic tubes inspection with 2—D transducers signal presentation	685
J. P a p i s: Voltage plane trajectory modelling in computerized defectoscope for tubes inspection	697
F. W y s o c k a - S c h i l l a k: Chebyshev approximation of the amplitude characteristic of a linear phase low-pass digital FIR filter	709

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

KWARTALNIK
ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

ELECTRONICS AND
TELECOMMUNICATIONS
QUARTERLY

SPIS TREŚCI DO TOMU XXXVII – 1991

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
WARSZAWA 1991

Nr 1–2

J. B a l i c k i: Polioptymalizacja sprzętowej struktury sieci komputerowej	3
M. K o w a l s k i, S. B e k: Analiza stabilności liniowych obwodów aktywnych zawierających oporniki o okresowo przełączanych rezystancjach	13
H. B u d z i s z: Reprezentacja wiedzy o układach elektronicznych. Część I: Reprezentacja w języku klauzul	23
Z. W r ó b e l: Funkcje strukturalne grafów układów dwójnikowych i czwórników składających się z dwóch rodzajów elementów	35
Z. W r ó b e l: Homeomorfizm grafów układów dwójnikowych i czwórników składających się z dwóch rodzajów elementów	53
Z. W r ó b e l: Synteza struktur kanonicznych bi-grafów dwójników składających się z dwóch rodzajów elementów. Część I. Metoda przeglądu bezpośredniego	67
Z. W r ó b e l: Synteza struktur kanonicznych bi-grafów dwójników składających się z dwóch rodzajów elementów. Część II. Metoda przeglądu hierarchicznego	85
T. W y s o c k i, L. J. W e i s s, F. W y s o c k a - S c h i l l a k: Aproksymacja statycznej charakterystyki wyjściowej tranzystora bipolarnego za pomocą funkcji wykładniczej	99
A. J a w o r e k, Wpływ parametrów wzmacniacza pomiarowego na pomiar składowych immitancji dwójników za pomocą detektorów fazoczułych	117
Z. L i s i k: Modelowanie generacji ciepła w przyrządach półprzewodnikowych. Część I: Bilans energetyczny struktury półprzewodnikowej	139
Z. L i s i k: Modelowanie generacji ciepła w przyrządach półprzewodnikowych. Część II: Funkcje rozpraszania ciepła	165
Z. L i s i k: Modelowanie generacji ciepła w przyrządach półprzewodnikowych. Część III: Wkład efektów termoelektrycznych do bilansu energetycznego przyrządu półprzewodnikowego	187
A. M a t e r k a, W. G ó r n i s i e w i c z, M. K u k u ł a: Skalowanie i korekcja zniekształceń geometrycznych w systemie cyfrowego przetwarzania obrazów z kamerą widikonową	209
N. K i m S a c h: Cyfrowe odtwarzanie i uwydatnianie krawędzi dwuwymiarowych obrazów zasumionych	229
K. A. K a s s e m, P. D y m a r s k i: Kwantyzer adaptacyjne w modulacji DPCM	237
A. C y s e w s k a - S o b u s i a k: Model czujnika fotoelektrycznego jako fotodetektora w układzie otwartego łąca optycznego	251
N. K i m S a c h: Możliwości poprawy jakości cyfrowych obrazów telewizyjnych w czasie rzeczywistym	265
T. A d a m s k i: Układy systoliczne do obliczania mediany i ich zastosowanie w korektach jitteru momentu próbkowania	271
J. K i s i l e w i c z: Eliminacja interferencji międzykanałowej	281
A. C z e m p l i k: Organizacja zadania wizualizacji w komputerowych systemach automatyki	291
M. W c i ś l i k: Moc bierna w obwodzie z odbiornikiem nieliniowym	303
J. Ł y s k a n o w s k i: Zabezpieczenie procesów elektromedycznych przed zagrożeniami elektrycznymi	315
R. D r a h o k a u p i l, J. S t a n i s ł a w s k i, C z. M i c h a l i k: Rotatory cyfrowe – teoria i zastosowanie	335

W. N i e m i e c: O konstytutywnym rozłożonym parametrycznie modelowaniu pola elektromagnetycznego. Cz. I. Konstytutywny rozłożony parametrycznie matematyczny model pola elektromagnetycznego	351
W. N i e m i e c: O konstytutywnym rozłożonym parametrycznie modelowaniu pola elektromagnetycznego. Cz. II. Rozwiązanie modelowych równań różniczkowych cząstkowych konstytutywnych stanu pola elektromagnetycznego	369
H. B u d z i s z: Przetwarzanie wiedzy o układach elektronicznych. Cz. 1. Unifikacja i reguły przetwarzania. Cz. 2. Wnioskowanie wstępujące. Cz. 3. Wnioskowanie zstępujące	393
H. B u d z i s z: Reprezentacja wiedzy o układach elektronicznych. Cz. II. Sieci semantyczne ..	423
S. K u c y p e r a, J. S k o r e k: Modelowe badanie wpływu zewnętrznych parametrów eksploatacyjnych i szczelin montażowych na rozkład temperatury w obszarze czynnym układów scalonych	435
T. O s t r o w s k i, P. B a j k o w s k i, K. W i c y Ń s k i, R. M u s i a ł: O pewnych metodach detekcji cech w obrazie opartych na koncepcji zmiennej skali filtracji i ortonormalnej przestrzenno-częstotliwościowej dekompozycji sygnału	449
M. Ż ó ł t o w s k i: O cyfrowych pętach fazowych z niejednostajnym próbkowaniem w obecności zakłóceń losowych	475
M. Ż ó ł t o w s k i: Nowe kryteria stabilności dla cyfrowych pętli fazowych z niejednostajnym próbkowaniem dowolnego rzędu, śledzących przejścia przez poziom zerowy. Cz. I.	533
M. Ż ó ł t o w s k i: Nowe kryteria stabilności dla cyfrowych pętli fazowych z niejednostajnym próbkowaniem dowolnego rzędu, śledzących przejścia przez poziom zerowy. Cz. II.	573
M. Ż ó ł t o w s k i: Nowe kryteria stabilności dla cyfrowych pętli fazowych z niejednostajnym próbkowaniem dowolnego rzędu, śledzących przejścia przez poziom zerowy. Cz. III.	593
K. W a w r y n: Wrażliwość funkcji układowej na elementy pasożytnicze w projektowaniu analogowych układów scalonych	635
Z. K o w a l s k i (H a b d a n k): Tłumienności pasmowe o logarytmnormalnym rozkładzie wagi i ich punktowe aproksymaty	653
Z. K o w a l s k i (H a b d a n k): Algebraiczna metoda optymalizacji częstotliwości wyznaczania punktowych aproksymat tłumienności paskowej	669
A. L e w i Ń s k a - R o m i c k a, S. P i s k o r s k i, J. P a p i s: Defektoskop wiroprowodowy o dwuwymiarowej prezentacji sygnałów przetworników do kontroli rur nieferromagnetycznych	685
J. P a p i s: Rekonstrukcja trajektorii napięcia przetwornika wiroprowodowego w skomputeryzowanym defektoskopie do kontroli rur	695
F. W y s o c k a - S c h i l l a k: Czebyszewska aproksymacja charakterystyki amplitudowej dolnoprzepustowego filtra cyfrowego SOI o liniowej fazie	707

CONTENTS

Nr 1-2

J. B a l i c k i: The vector optimalization of the hardware structure of computer networks ...	3
M. K o w a l s k i, S. B e k: Stability analysis of linear active circuits containing periodically switched resistores	13
H. B u d z i s z: Knowledge representation in the domain of electronic circuits. Part I: Representation in the clause language	23
Z. W r ó b e l: Structural functions of graphs of one-port and two-port circuits which consist of two kinds of elements	35
Z. W r ó b e l: Homeomorphism of graphs of one-port and two-port circuits consisting of two kinds of elements	53
Z. W r ó b e l: Synthesis of canonical structures of bi-graphs one-port circuits consisting of two kinds of elements. Part I: Direct reviewing method	67

Z. Wróbel: Synthesis of canonical structures of bi-graphs one-port circuits consisting of two kinds of elements. Part II: Hierarchical reviewing method	85
T. Wysocki, L. J. Weiss, F. Wysocka-Schillak: The exponential approximation of bipolar transistor static output characteristics	99
A. Jaworek: Operational amplifier parameters influence on results of measurement of a two-terminal immittance components by means of phase-sensitive detectors	117
Z. Lisik: Modelling of heat generation in semiconductor devices. Part I: Energy balance of semiconductor structure	139
Z. Lisik: Modelling of heat generation in semiconductor devices. Part II: Functions of heat generation	165
Z. Lisik: Modelling of heat generation in semiconductor devices. Part III: The contribution of thermoelectric effect to the energy balance of semiconductor device	187
A. Materka, W. Górniewicz, M. Kukuła: Calibration and geometric distortion correction in a digital image processing system with a vidicon camera	209
N. Kim Sack: Digital 2-D picture restoration and enhancement	229
K. A. Kassem, P. Dymarski: Adaptive quantizers in DPCM codes	237
A. Cysewska-Sobuska: Model of the photoelectric sensor as the photodetector in the system of the open optical coupler	251
N. Kim Sack: Possibilities of digital TV picture processing in real time	265
T. Adamski: Systolic circuits for fast median computation with application to sampling time jitter correctors	271
J. Kisilewicz: Interchannel interference elimination	281
A. Czemplik: Visualization task in industrial computer control system	291
M. Wcislik: Reactive power in a circuit with a nonlinear load	303
J. Łyskowski: Protection of electromedical process against electrical hazards	315
R. Drahokoupil, J. Stanislawski, Cz. Michalik: Digital rotators — theory and application	335

Nr 3—4

W. Niemiec: On the constitutive distributed parameter modelling of the electromagnetic field. Part I. The constitutive distributed parameter mathematical model of the electromagnetic field	351
W. Niemiec: On the constitutive distributed parameter modelling of the electromagnetic field. Part II. The solution of the model partial differential constitutive state equation of the electromagnetic field	369
H. Budzisz: Knowledge processing in the domain of electronic circuits. Part I. Unification and knowledge processing rules. Part 2. Forward reasoning. Part 3. Backward reasoning	393
H. Budzisz: Knowledge representation in the domain of electronic circuits. Part. II: Semantic networks and frame representation	423
S. Kucypera, J. Skorek: Numerical analysis of influence of external cooling conditions and assembling gaps on thermal behaviour of integrated circuits	435
T. Ostrowski, P. Bajkowski, K. Wiczyński, R. Musiał: Feature detection in digital pictures using image processing system VIPS	449
M. Żółtowski: On the digital nonuniform sampling phase-locked loops in the presence of noise	475
M. Żółtowski: New stability criteria for the nonuniform sampling zero-crossing digital phase-locked loops of any order. Part I	533
M. Żółtowski: New stability criteria for the nonuniform sampling zero-crossing digital phase-locked loops of any order. Part II	573
M. Żółtowski: New stability criteria for the nonuniform sampling zero-crossing digital phase-locked loops of any order. Part III	593
K. Wawryn: Sensitivity of network function to the parasitics in analog IC design	635
Z. Kowalski (Habdank): The band loss with the logarithmic — normal factoring-weight and their point approximates	651

Z. K o w a l s k i (H a b d a n k) : The algebraic method for optimizing the frequencies used by determination of the band loos	669
A. L e w i ń s k a - R o m i c k a , S. P i s k o r s k i , J. P a p i s : Eddy-current defectoscope for nonmagnetic tubes inspection with 2-D transduces signal presentation	685
J. P a p i s : Voltage plane trajectory modelling in computerized defectoscope for tubes inspection	695
F. W y s o c k a - S c h i l l a k : Chebyshev approximation of the amplitude characteristic of a linear phase low-pass digital FIR filter	707

Cena zł

24 000.-

Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji

Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są na okresy kwartalne:

- na terenie kraju — jednostki kolportażowe „Ruch” i urzędy pocztowe właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora,
- na zagranicę — Zakład Kolportażu Prasy i Wydawnictw,
00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział
Warszawa 370044-1195-139-11.

Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100 % wyższa od krajowej.

Dostawa zamówionej prasy następuje:

- przez jednostki kolportażowe „Ruch” — w sposób uzgodniony z zamawiającym,
- przez urzędy pocztowe — pocztą zwykłą na wskazany adres, w ramach opłaconej prenumeraty z wyjątkiem zlecenia dostawy za granicę pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.

Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę:

- krajową i zagraniczną — do 20.XI. na I kw. roku następnego
do 20.II. na II kw.
do 20.V. na III kw.
do 20.VIII. na IV kw.

Bieżące numery można nabyć w Księgarni Wydawnictwa Naukowego PWN Sp. z o.o. ul. Miodowa 10. Również można je nabyć, a także zamówić (przesyłka za zaliczeniem pocztowym) we Wzorcowni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN, Pałac Kultury i Nauki, 00-901 Warszawa.

Subscription orders for all the magazines published in Poland available through the local press distributors or directly through the

Foreign Trade Enterprise

ARS POLONIA

00-068 Warszawa, Krakowskie Przedmieście 7, Poland
our bankers:

BANK HANDLOWY S.A. 201061-710-13100