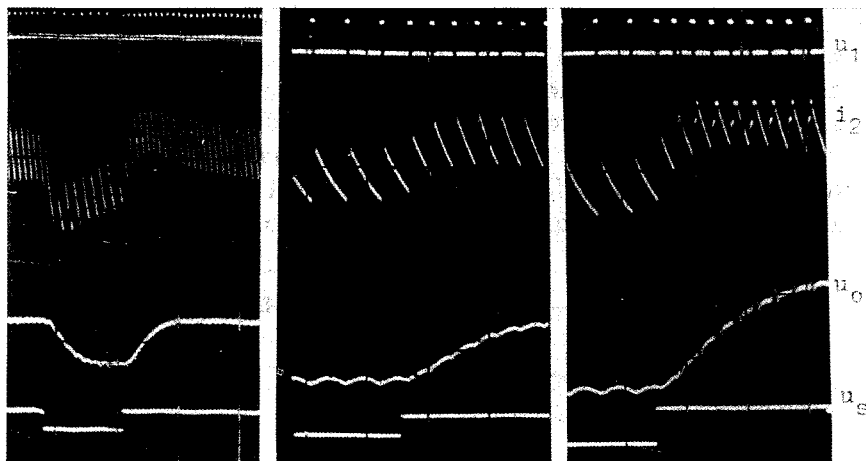




Rys. 3. Przebiegi napięć i prądów w filtrze wstrzykującym przy oddzielnym sterowaniu przekształtnika i filtru

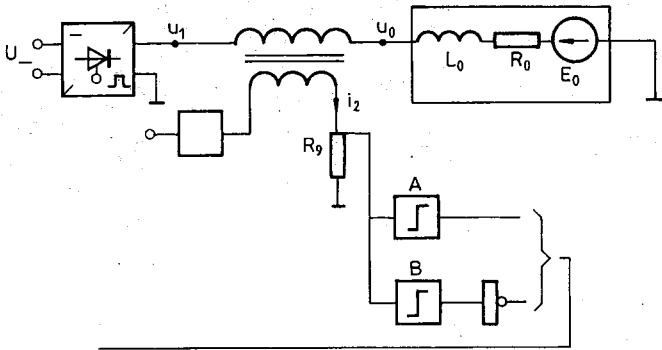
sterowania filtru zawierał sprzężenie zwrotne od prądu i_2 . Sygnał sterujący, którego wartość maksymalna w tym wzmacniaczu wynosiła 10 V przyjmował w zarejestrowanej sytuacji wartości 1,1 V i 1,8 V, czyli zmieniał się o około 7% wartości maksymalnej. Przy tej zmianie pojawiała się składowa przejściowa prądu i_2 o wartości około 80% międzyszczytowej amplitudy zmian prądu i_2 w stanie ustalonym. Fragment oscylogramu rys. 3a. przedstawiono na rys. 3b. w zmienionej skali czasu dla porównania z oscylogramem rys. 3c. przedstawiającym dodatkowe pogorszenie filtracji przy większym wzroście sygnału sterującego, gdy w przebiegu napięcia na odbiorniku pojawiają się duże zakłócenia w postaci „szpilek” spowodowane tym, że prąd i_2 osiągnął granicę wydajności prądowej źródła prądowego zasilającego uzwojenie dodatkowe dławika w filtrze wstrzykującym.

Drugie ograniczenie wykorzystania zalet filtru wstrzykującego we współpracy z przekształtnikiem wynika z faktu, że ten sam sygnał sterujący jest podawany do przekształtnika (w którym decyduje o średniej wartości napięcia wyjściowego) i do filtru (w którym decyduje o chwilowej wartości napięcia wyjściowego). Efektem tego stanu jest skłonność układu do wzbudzania powolnych oscylacji napięcia za filtrem. Środki które trzeba przedsięwziąć w celu stłumienia tych oscylacji powodują dalsze pogorszenie filtracji.

4. STEROWANIE PRZEKSZTAŁTNIKA

Wylimitowanie przedstawionych ograniczeń autor uzyskał we wzmacniaczu, składającym się z przekształtnika o komutacji wewnętrznej i aktywnego filtru wstrzykującego, przez podporządkowanie przekształtnika układowi sterowania filtru [5] [6]. Sposób ten można zastosować w wielu rodzajach przekształtników, lecz najłatwiej można go zrealizować w przerywaczu prądu stałego i w falowniku z PWM (z

modulacją szerokości impulsów). Idea sposobu sterowania przekształtnika jest przedstawiona w schemacie na rys. 4. Istota rozwiązania polega na tym, że do wyznaczania momentów włączania i wyłączania tyrystorów w przekształtniku wykorzystuje się przebieg napięcia proporcjonalnego do prądu w dodatkowym uzwojeniu dławika. Napięcie z bocznika R_0 (rys. 4) jest podawane do wejść dwóch dyskryminatorów napięcia A i B. Jeden z nich – A – ma napięcie progowe dodatnie, drugi – B – ujemne o takiej samej wartości bezwzględnej.

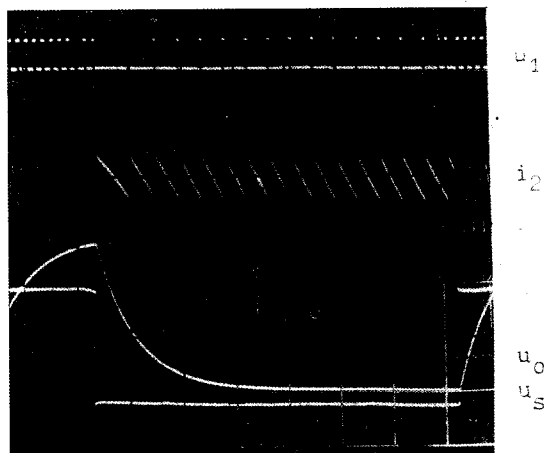


Rys. 4. Schemat układu realizującego sterowanie przekształtnika w funkcji stanu filtru

W czasie gdy na wyjściu przekształtnika trwa dodatni impuls napięcia u_1 , prąd i_2 rośnie, a wraz z nim rośnie spadek napięcia na boczniku R_0 . Gdy napięcie to osiągnie wartość napięcia progowego dyskryminatora A, na wyjściu dyskryminatora pojawia się impuls, który podany do układu sterowania przekształtnika powoduje zakończenie impulsu napięcia u_1 (jeśli przekształtnikiem jest przerywacz napięcia stałego, lub falownik z 1-biegunową PWM), lub zmianę znaku napięcia u_1 (jeśli przekształtnikiem jest falownik z 2-biegunową PWM). Od tej chwili prąd i_2 maleje. Gdy prąd i_2 osiągnie taką ujemną wartość przy której spadek napięcia na boczniku jest równy napięciu progowemu dyskryminatora B, na wyjściu dyskryminatora pojawia się stan niski (lub napięcie ujemne, zależnie od rodzaju stosowanych elementów), który odwrócony w inwerterze i podany do odpowiedniego wejścia układu sterowania przekształtnika powoduje rozpoczęcie kolejnego dodatniego impulsu napięcia u_1 . Przy takim sposobie sterowania prąd i_2 zmienia się między dwiema wartościami niezależnie od zmian sygnału sterującego i napięcia na odbiorniku. Ilustruje to oscylogram rys. 5. wykonany w tym samym wzmacniaczu i w taki sam sposób jak oscylogramy rys. 3., jedynie układ sterowania przekształtnika jest tu zrealizowany zgodnie z przedstawionym sposobem. Niewielkie zmiany granic zmian prądu i_2 są spowodowane opóźnieniami związanymi z procesami komutacji tyrystorów.

Przyczyną występowania przejściowej składowej prądu i_2 we wzmacniaczu składającym się z przekształtnika i filtru sterowanych niezależnie jest to, że skokowa zmiana sygnału sterującego powoduje również skokową zmianę współczynnika wypełnienia impulsów przekształtnika od razu do wartości odpowiadającej w stanie ustalonym nowej wartości sygnału sterującego. Ponieważ układ sterowania filtru

wymusza stałą czasową przebiegu przejściowego zgodnie z zależnościami r-e (2) i r-e (3) krótszą od stałej czasowej dla układu z filtrem biernym o tej samej indukcyjności L_1 , to energię potrzebną do przyspieszenia procesu przejściowego musi w całości dostarczyć filtr aktywny. Dlatego w stanie przejściowym musi w prądzie i_2 wystąpić składowa przejściowa o wartości zależnej od wartości przyrostu sygnału sterującego. We wzmacniaczu w którym przekształtnik jest sterowany zależnie od stanu filtru, całą energię potrzebną do przyspieszenia procesu przejściowego dostarcza przekształtnik przez odpowiednie modyfikowanie wartości współczynnika wypełnienia impulsów. Dzięki temu składowa przejściowa prądu i_2 nie występuje, prąd i_2 zmienia się w określonych granicach i nie ma potrzeby wprowadzania w układzie sterowania filtru sprzężenia zwrotnego od wartości prądu i_2 . W efekcie można wykorzystać pełną zdolność filtru do wygładzania napięcia.



Rys. 5. Przebiegi napięć i prądów w filtrze wstrzykującym przy sterowaniu przekształtnika w funkcji stanu filtru

We wzmacniaczu tyrystorowym z jednobiegunową PWM układ sterowania falownika oprócz zmiany współczynnika wypełnienia impulsów powinien również powodować zmianę biegunowości impulsów przy zmianie znaku sygnału sterującego. Funkcję tę zrealizowano w sposób podobny do przedstawionego na rys. 4. bliżej opisany w [5,7]. Przy tej zmianie prąd i_2 wzrasta ponad wartości graniczne wyznaczone przez dyskryminatory A i B.

Przy przedstawionym sposobie sterowania przekształtnika uzyskuje się nadążną modulację szerokości impulsów charakteryzującą się tym, że częstotliwość impulsów jest zmienna. Największą wartość osiąga przy współczynniku wypełnienia impulsów $\tau/T=0,5$, a maleje gdy wartość tego współczynnika zdąża do 0 lub 1. Gdy współczynnik wypełnienia impulsów zdąża do zera, czas trwania impulsów nie zdąża do zera, lecz do wartości równej połowie czasu trwania impulsu przy $\tau/T=0,5$. W przerywaczach napięcia stałego i w falownikach z jednobiegunową PWM przy stałej częstotliwości nie można uzyskać dowolnie małych wartości napięcia wyjściowego, gdyż czas trwania impulsu nie może być zmniejszany poniżej czasu odzyskiwania

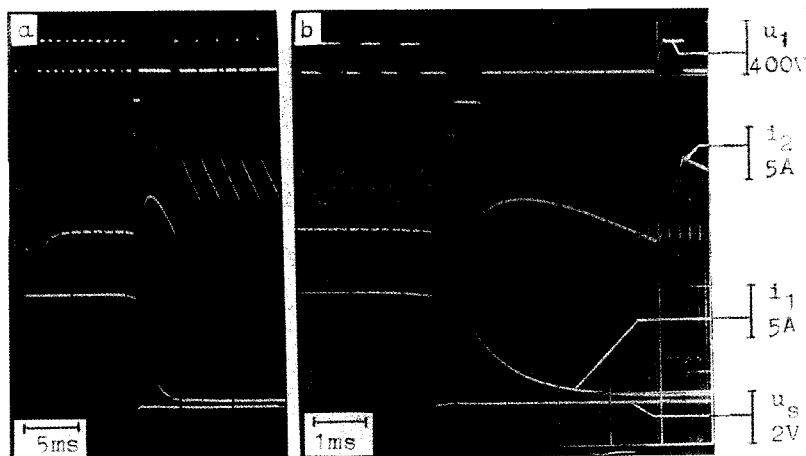
zdolności zaporowych tyrystorów komutacyjnych. Natomiast przy modulacji nadążnej zakres regulacji napięcia wyjściowego w dół jest nieograniczony. Jednak zaletę tę można wykorzystać w pełni tylko wtedy, gdy przekształtnik współpracuje z filtrem wstrzykującym: Przy współczynniku wypełnienia impulsów zdążającym do zera, przerwy między impulsami wydłużają się tak bardzo, że przez długie okresy brak na wyjściu przekształtnika informacji decydującej o wartości napięcia na odbiorniku. Wadę tę eliminuje obecność filtru wstrzykującego, który jest źródłem SEM regulowanej w sposób analogowy w zależności od aktualnej chwilowej wartości sygnału sterującego. Dzięki temu napięcie na odbiorniku, lub prąd odbiornika mogą być dokładnie regulowane, nawet przy bardzo małej częstotliwości impulsów napięcia na wyjściu przekształtnika: W zrealizowanym praktycznie wzmacniaczu prądowym z jednobiegunową modulacją szerokości impulsów o maksymalnym prądzie wyjściowym 100 A uzyskano możliwość nastawiania minimalnego, nie zawierającego istotnej składowej zmiennej, prądu stałego o wartości 10 mA, czyli uzyskano zakres regulacji 1:10.000.

4. STEROWANIE WZMACNIACZA

Z zależności (2) i (3) wynika, że stosując odpowiednią konfigurację układu sterowania filtru wstrzykującego można uzyskać całkowite uniezależnienie chwilowej wartości napięcia na odbiorniku, lub prądu odbiornika, od chwilowej wartości napięcia na wyjściu przekształtnika. Oznacza to, że układ sterowania filtru wstrzykującego zawsze wymusi w głównym uzwojeniu dławika SEM e_1 o takiej wartości, aby niezależnie od chwilowej wartości napięcia na wyjściu przekształtnika u_1 , napięcie na odbiorniku miało wartość zgodną z równaniem (2), lub aby prąd odbiornika miał wartość zgodną z równaniem (3). Będzie się tak działo również niezależnie od współczynnika wypełnienia impulsów napięcia u_1 (przynajmniej w krótkim przedziale czasu, zależnym od mocy źródła prądowego zasilającego dodatkowe uzwojenie dławika filtru). Dostosowanie współczynnika wypełnienia impulsów do wartości napięcia na odbiorniku następuje dzięki temu, że w układzie sterowania przekształtnika momenty początków i końców impulsów są wyznaczane w zależności od chwilowej wartości prądu i_2 . Oznacza to, że we wzmacniaczu tyrystorowym zbudowanym według przedstawionej koncepcji nastąpiło odwrócenie związku przyczynowego w stosunku do znacznych układów zawierających przekształtnik i filtr bierny, lub czynny. W układach tych wartość średnia napięcia na odbiorniku ustalała się zależnie od współczynnika wypełnienia impulsów napięcia na wyjściu przekształtnika. W przedstawionym wzmacniaczu o wartości napięcia na odbiorniku decyduje filtr aktywny, a współczynnik wypełnienia impulsów napięcia u_1 dostosowuje się automatycznie do wartości napięcia na odbiorniku wymuszonej przez filtr aktywny. Sygnał sterujący podaje się tylko na wejście układu sterowania filtru aktywnego, filtr jest głównym członem wzmacniacza, a przekształtnik staje się członem podporządkowanym. Wypełnienie impulsów napięcia u_1 w stanach dynamicznych nie jest proporcjonalne do sygnału sterującego (widać to na oscylogramach rys. 6. i 7.).

Właściwości wzmacniacza zrealizowanego według przedstawionych koncepcji ilustrują oscylogramy rys. 6. i 7. Oscylogramy wykonano podczas badania wzmac-

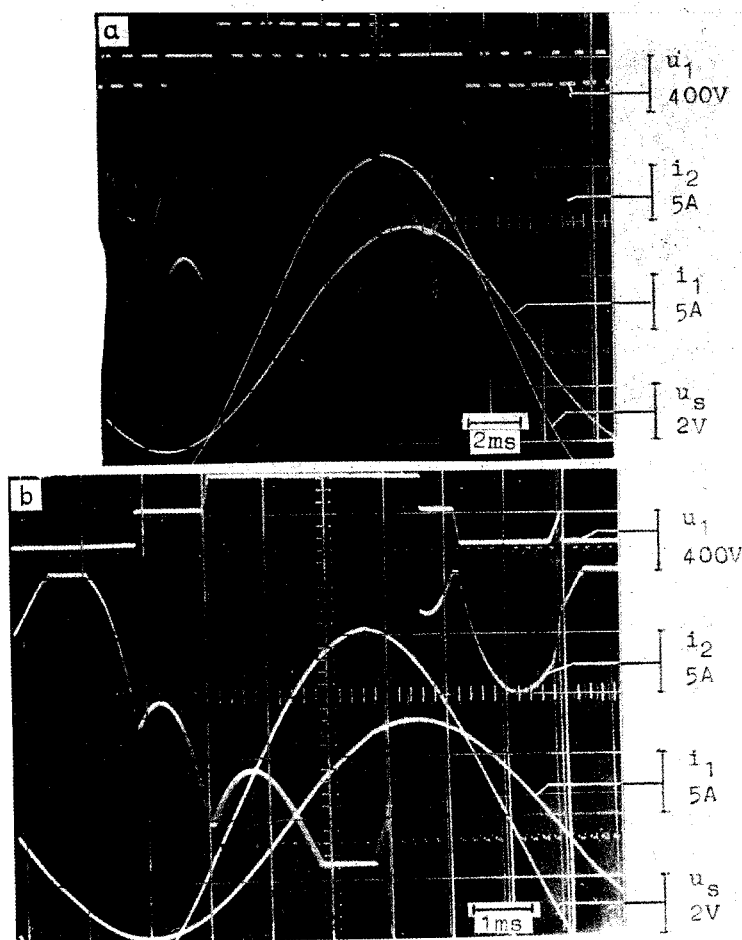
niacza prądu o danych znamionowych: $u_{on}=230\text{ V}$ $i_{1n}=40\text{ A}$. Wzmacniacz składał się z falownika napięcia z jednobiegunową PWM w układzie mostkowym i aktywnego filtra wstrzykującego. Indukcyjność głównego uzwojenia dławika miała wartość $L_1=47\text{ mH}$. Wzmacniacz obciążono opornikiem o rezystancji $12\text{ }\Omega$. W celu wyznaczenia stałej



Rys. 6. Przebiegi napięć i prądów we wzmacniaczu prądowym przy skokowej zmianie sygnału sterującego

czasowej wzmacniacza podano sygnał prostokątny o częstotliwości i współczynniku wypełnienia dobranych tak, żeby przynajmniej w jednym przedziale czasu prąd odbiornika osiągał wartość którą można uznać za ustaloną. Jeden okres działania wzmacniacza przedstawia oscylogram rys. 6a., jego fragment zapisano na rys. 6b. w zmienionej skali czasu w celu lepszego pokazania stałej czasowej odpowiedzi wzmacniacza na skokową zmianę sygnału sterującego. Wartość tej stałej wynosi $T=1\text{ ms}$ czyli jest około czterokrotnie mniejsza od ilorazu L_1/R_0 . Na oscylogramie widać, że wzmacniacz zrealizował to przez forsowanie szybkości zmian prądu odbiornika polegające na tym, że po skokowej zmianie sygnału sterującego do mniejszej wartości, mimo że sygnał jest nadal dodatni, na wyjściu falownika pojawia się ujemny impuls napięcia. Przy tym zmiana wartości prądu odbiornika zaczyna się natychmiast po zmianie wartości sygnału sterującego, wymuszona przez natychmiastową zmianę wartości i kierunku SEM e_1 , mimo że odpowiedni impuls napięcia na wyjściu falownika może pojawić się dopiero z pewnym opóźnieniem. Wydaje się, że jest to nowa cecha nie występująca w znanych dotychczas układach tyrystorowych. Działanie wzmacniacza przy przenoszeniu sygnałów o częstotliwości 55 Hz i 110 Hz przedstawiają oscylogramy rys. 7. Wzmacniacz został zaprojektowany z przeznaczeniem do wymuszania w odbiorniku prądów przemiennych o częstotliwości poniżej 1 Hz. Mimo to przenosi częstotliwość rzędu 100 Hz. Pierwsze nieprawidłowości można stwierdzić na oscylogramie rys. 7b. Polegają one na tym, że układ zasilania uzwojenia dodatkowego osiąga w pewnych momentach stan nasycenia i przebieg prądu i_2 zostaje ograniczony. W tym czasie w przebiegu prądu i_1 można stwierdzić deformację wyglądającą jak odcinek prostej wtrącony do sinusoidy. W rzeczywistości jest to fragment krzywej wykładniczej. Zjawisko to wystąpiło dopiero przy częstotliwości 110 Hz, jednak

oscyllogramy zostały wykonane przy prądzie i znacznie mniejszym od znamionowego. Przy znamionowej wartości prądu i_1 zjawisko to występuje przy mniejszej częstotliwości. Istnieje jednoznaczna zależność między mocą źródła zasilającego dodatkowe uzwojenie dławika a amplitudą najwyższej przenoszanej przez wzmacniacz harmonicznej składowej sygnału sterującego.



Rys. 7. Przebiegi napięć i prądów we wzmacniaczu prądowym przy sinusoidalnym sygnale sterującym o częstotliwości: a. 55 Hz, b. 110 Hz

Stała czasowa wzmacniacza może mieć bardzo małą wartość, lecz z ograniczeniem wynikającym z faktu, że suma napięcia na odbiorniku i spadku napięcia na indukcyjności głównego uzwojenia dławika wywołanego pochodną prądu odbiornika di_1/dt nie może przekraczać wartości sumy napięcia na wyjściu przekształtnika i SEM e_1 indukowanej w uzwojeniu głównym filtru przez zmiany prądu i_2 . Możliwa do uzyskania wartość SEM e_1 zależy od stosunku liczby zwojów obu uzwojeń dławika i od maksymalnego napięcia źródła prądowego zasilającego uzwojenie dodatkowe. W oszczędnie zaprojektowanym filtrze SEM e_1 niewiele przekracza wartość napięcia

na wyjściu przekształtnika u_1 , a czas jej trwania jest ograniczony i zależy od mocy źródła prądowego. W efekcie istnieje zależność między mocą źródła prądowego zasilającego dodatkowe uzwojenie dławika filtru wstrzykującego, a amplitudą najwyższej przenoszanej przez wzmacniacz składowej harmonicznej sygnału sterującego.

6. WNIOSKI

Podstawową zaletą wzmacniacza działającego z wykorzystaniem przedstawionych rozwiązań jest możliwość optymalnej współpracy przekształtnika z filtrem wstrzykującym. Uzyskuje się możliwość bardzo skutecznej filtracji zakłóceń napięcia wyjściowego bez znacznego wydłużania stałej czasowej układu. Filtr pozwala wytłumić w paśmie od zera do kilkudziesięciu kHz wszystkie zmienne składowe napięcia, które nie są wymuszone zmianami sygnału sterującego, a jednocześnie przepuścić bez stłumienia w paśmie od zera do kilkudziesięciu kHz zmienne składowe napięcia proporcjonalne do chwilowych wartości sygnału sterującego.

Zaletą przedstawionego sposobu sterowania przekształtnika z PWM jest uzyskanie w bardzo prostym układzie optymalnej dla danego przebiegu sygnału sterującego regulacji współczynnika wypełniania impulsów napięcia na wyjściu przekształtnika. Uzyskuje się najmniejszą możliwą liczbę impulsów przy założonej ilości energii gromadzonej w filtrze. Występuje przy tym modulacja nadążna charakteryzująca się tym, że ani czas trwania impulsu ani czas przerwy między impulsami nie maleją poniżej $1/4$ okresu przy największej częstotliwości (czyli przy $t/T=0,5$). Dzięki temu przekształtnik można projektować w taki sposób, że częstotliwość maksymalna ma dużą wartość. Wystarczy, jeśli okres impulsów przy maksymalnej częstotliwości jest tylko o jeden rząd wartości dłuższy od czasu wyłączania tyrystorów.

Zalety przedsatwionego układu mogą być wykorzystane w tych zastosowaniach w których ważny jest kształt napięcia wyjściowego, a nie tylko wartość średnia. Układ może spełniać rolę wzmacniacza napięciowego, lub prądowego, albo źródła regulowanego napięcia stałego, lub zmiennego, w tym również sinusoidalnego nieodkształconego o regulowanej częstotliwości i amplitudzie.

BIBLIOGRAFIA

1. R. P r a j o u x, G. J u a n e l: *Étude d'un filtre actif à transistors associé à un redresseur polyphasé de grand puissance fonctionnant en régime d'impulsions*. Revue de Physique Appliquée. 1970 t. 5 n 4
2. M. K o s i c k i: *Filtry aktywne w układach zasilających prądu stałego*. Przegląd elektrotechniczny 1974/11
3. J. N. S z u w a j e w: *Tranzistornyje sglaziwajuszczyje ustrojstwa s posledowatelnyj i paralelnyj wkluczeniem kompensirujuszczego transformatora*. Elektronnaja tehnika w awtomatike 1980 nr 11
4. P. H e m p o w i c z: *Filtr aktywny wstrzykujący w zastosowaniu do wygładzania napięcia wyjściowego przekształtników tyrystorowych*. Kwart. Elektr. i Telekom. 1992, t. 38, z. 1
5. P. H e m p o w i c z: *Tyrystorowy układ zasilania uzwojeń kompensujących zmienne pola magnetyczne*. Rozprawa doktorska, Gdańsk 1983 r.
6. P. H e m p o w i c z: *Sposób sterowania falownika z dwubiegunową modulacją szerokości impulsów współpracującego z aktywnym dławikiem wygładzającym*. Pat. PRL 123192

7. P. H e m p o w i c z: *Sposób sterowania falownika z jednobiegunową modulacją szerokości impulsów współpracującego z aktywnym dławikiem wygładzającym*. Pat. PRL P-246624

DODATEK

Wyprowadzenie zależności (4)

Działanie wzmacniacza przedstawionego na rys. 1b. jest opisane następującymi zależnościami między transformatami prądów i napięć (oznaczenia w równaniach są zgodne z oznaczeniami na rys. 1., dla uproszczenia przyjęto zerowe warunki początkowe).

$$u_1(s) = \frac{-1}{sC} \left[\frac{u_1(s)}{R_4} + \frac{i_1(s)R_b}{R_5} - \frac{u_s(s)}{R_3} \right] \quad (A1)$$

$$i_2(s) = -u_2(s) \frac{R_7}{R_6 R_8} \quad (A2)$$

$$e_1(s) = i_2(s) \cdot s \cdot M \quad (A3)$$

$$u_1(s) = e_1(s) + i_1(s) [R_1 + R_0 + s(L_1 + L_0)] \quad (A4)$$

$$u_0(s) = i_s(s)(R_0 + sL_0) = u_1(s) - e_1(s) - i_1(s)(R_1 + sL_1) \quad (A5)$$

po podstawieniu (A1) do (A2) i (A2) do (A3) otrzymamy

$$e_1(s) = \frac{MR_7}{CR_3 R_6 R_8} \left[u_1(s) \frac{R_3}{R_4} + i_1(s) \frac{R_b R_3}{R_5} - u_s(s) \frac{R_3}{R_3} \right] \quad (A6)$$

po wprowadzeniu następujących oznaczeń:

$$k = \frac{MR_7}{CR_3 R_6 R_8} \quad \beta_1 = \frac{R_b R_3}{R_5} \quad \beta_2 = \frac{R_3}{R_4} \quad (A7)$$

$$e_1(s) = k[u_1(s)\beta_2 + i_1(s)\beta_1 - u_s(s)] \quad (A8)$$

podstawiamy (A8) do (A4)

$$i_1(s)(R_0 + R_1 + sL_0 + sL_1) = u_1(s) - u_1(s)k\beta_2 - i_1(s)k\beta_1 + u_s(s)k \quad (A9)$$

$$i_s(s)(k\beta_1 + R_0 + R_1 sL_0 + sL_1) = u_1(s)(1 - k\beta_2) + u_s(s)k \quad (A10)$$

$$i_1(s) = u_s(s) \frac{k}{(k\beta_1 + R_0 + R_1) \left(1 + s \frac{L_0 + L_1}{k\beta_1 + R_0 + R_1} \right)} + \\ + u_1(s) \frac{1 - k\beta_2}{(k\beta_1 + R_0 + R_1) \left(1 + s \frac{L_0 + L_1}{k\beta_1 + R_0 + R_1} \right)} \quad (A11)$$

po wprowadzeniu oznaczeń (3), pod warunkiem że $k\beta_2 = 1$ otrzymamy zależność (4).

P. HEMPOWICZ

HIGH POWER THYRISTOR AMPLIFIER OF LOW DISTORTIONS

S u m m a r y

A new original solution to a thyristor circuit of a particular good features thanks to integration of thyristor converter and highly efficient active filter is presented. The circuit has output voltage of negligible distortions and short time constant as well. Output voltage practically does not comprise distortions caused by pulse character of conduction of the thyristor. The circuit can be made as a DC or AC voltage or current amplifier, DC or AC voltage or current source (including sinusoidal) of controlled frequency and/or amplitude. Results of practical realization are presented.

Czebyszewowska aproksymacja charakterystyki amplitudowej dolnoprzepustowego filtra cyfrowego SOI o liniowej fazie

FELICJA WYSOCKA-SCHILLAK

Wyższa Szkoła Pedagogiczna – Bydgoszcz

Otrzymano 1991.01.18

Autoryzowano do druku 1991.05.07

W pracy przedstawiono metodę rozwiązania zadania czebyszewowskiej-aproksymacji charakterystyki amplitudowej dolnoprzepustowego filtra cyfrowego SOI o liniowej charakterystyce fazowej. Zadanie to jest przekształcane w odpowiednie zadanie programowania nieliniowego z ograniczeniami, które jest następnie rozwiązywane przy użyciu metody przesuwanej funkcji kary. Praca zawiera ponadto opis opracowanego programu FSOI oraz przykład obliczeniowy ilustrujący działanie tego programu.

1. WSTĘP

Ważnym etapem projektowania liniowego, stacjonarnego i przyczynowego filtra cyfrowego o skończonym czasie trwania odpowiedzi impulsowej (w skrócie SOI¹) jest aproksymacja zadanej charakterystyki amplitudowej. Filtry SOI, oprócz realizacji określonej charakterystyki amplitudowej, umożliwiają również realizację liniowej charakterystyki fazowej, co w pewnych zastosowaniach, np. przy transmisji danych, jest szczególnie istotne.

Istnieją różne metody przeprowadzania aproksymacji charakterystyki amplitudowej filtra SOI o liniowej charakterystyce fazowej. Do najczęściej stosowanych należą: metoda próbkowania w dziedzinie częstotliwości [3,12,17], aproksymacja za pomocą sum częściowych szeregu Fouriera [2,5,17], aproksymacja za pomocą sum częściowych szeregu Fouriera z wykorzystaniem różnych funkcji okien [2,3,12,17], metoda minimalizacji błędu średniokwadratowego [1,5,16,17] oraz aproksymacja czebyszewowska (minimaks) [3,5,6,12,14,17]. Filtry zaprojektowane z zastosowaniem aproksymacji czebyszewowskiej nazywane są w literaturze filtrami optymalnymi.

¹ W literaturze stosowany jest niekiedy również skrót FIR pochodzący od angielskiego terminu „finite impuls response”.

Zadanie czebyszewowskiej aproksymacji charakterystyki amplitudowej filtru SOI o liniowej fazie może być rozwiązywane różnymi metodami. W ogólnym przypadku nie istnieją jednak analityczne metody rozwiązywania tego zadania, a do jego rozwiązywania wykorzystywane są różne metody numeryczne [7,8,11–15]. Metody te wykazują jednak szereg ograniczeń [3,14].

W niniejszej pracy zaproponowano sposób rozwiązywania zadania czebyszewowskiej aproksymacji charakterystyki amplitudowej idealnego filtru dolnoprzepustowego charakterystyką amplitudową filtru SOI o liniowej charakterystyce fazowej. Zadanie to jest przekształcane w odpowiednie zadanie programowania nieliniowego z ograniczeniami, które jest następnie rozwiązywane przy użyciu metody przesuwanej funkcji kary. Praca zawiera ponadto opis opracowanego programu FSOI oraz przykład obliczeniowy ilustrujący działanie tego programu.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Rozpatrzmy liniowy, stacjonarny i przyczynowy filtr cyfrowy o skończonym czasie trwania odpowiedzi impulsowej. Transmitancja $D(z)$ takiego filtru jest wielomianem stopnia $N-1$ zmiennej zespolonej z^{-1} [17].

$$D(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_{N-1} z^{-(N-1)}. \quad (1)$$

gdzie: $z = \exp(j 2\pi F)$;

$F = f\Delta t$ – częstotliwość unormowana względem częstotliwości próbkowania $f_p = 1/\Delta t$. ($F \in <0, 0,5>$);

Δt – okres próbkowania;

f – częstotliwość kosinusoidalnego sygnału wymuszającego;

$h_n, n=0,1,\dots,N-1$ – współczynniki.

Współczynniki h_n występujące we wzorze (1) określają odpowiedź impulsową układu, tzn. $d(n)=h_n$ dla $n=0,1,\dots,N-1$ i $d(n)=0$ dla pozostałych n .

Charakterystyką amplitudowo-fazową układu nazywamy funkcję

$$D(e^{j\omega}) = D(z)|_{z=e^{j\omega}}, \quad (2)$$

gdzie: $\omega = 2\pi F$ – pulsacja unormowana względem częstotliwości próbkowania f_p , ($\omega \in <0; \pi>$).

Charakterystyka amplitudowa $A(\omega)$ oraz fazowa $\varphi(\omega)$ układu są określone następująco

$$A(\omega) = |D(e^{j\omega})|, \quad (3)$$

$$\varphi(\omega) = \arg D(e^{j\omega}). \quad (4)$$

Charakterystyka amplitudowo-fazowa filtru SOI o liniowej fazie może być przedstawiona w następującej postaci [11]:

$$D(e^{j\omega}) = G(\omega) \exp\left(j\left(\frac{L\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega\right)\right), \quad (5)$$

przy czym

$$L = \begin{cases} 0 & \text{gdy odpowiedź impulsowa filtru} \\ & \text{jest symetryczna, tzn. gdy} \\ & d(n) = d(N-1-n), n = 0, 1, \dots, N-1; \\ 1 & \text{gdy odpowiedź impulsowa filtru} \\ & \text{jest antysymetryczna, tzn. gdy} \\ & d(n) = -d(N-1-n), n = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

Zależnie od wartości N oraz od charakteru odpowiedzi impulsowej filtru, funkcja $G(\omega)$ przyjmuje odpowiednio jedną z czterech postaci [11,14]:

Postać 1: N nieparzyste, odpowiedź impulsowa symetryczna

$$G(\omega) = \sum_{k=0}^M a_k \cos(\omega k), \quad (6)$$

gdzie: $M = (N-1)/2$,

$$a_0 = h_M,$$

$$a_k = 2h_{M-k}, k = 1, 2, \dots, M.$$

Postać 2: N parzyste, odpowiedź impulsowa symetryczna

$$G(\omega) = \sum_{k=1}^M b_k \cos(\omega(k - \frac{1}{2})), \quad (7)$$

gdzie: $M = N/2$,

$$b_k = 2h_{M-k}, k = 1, 2, \dots, M.$$

Postać 3: N nieparzyste, odpowiedź impulsowa antysymetryczna

$$G(\omega) = \sum_{k=1}^M c_k \sin(\omega k), \quad (8)$$

gdzie: $M = (N-1)/2$,

$$c_k = 2h_{M-k}, k = 1, 2, \dots, M,$$

$$h_M = 0.$$

Postać 4: N parzyste, odpowiedź impulsowa antysymetryczna

$$G(\omega) = \sum_{k=1}^M d_k \sin(\omega(k - \frac{1}{2})), \quad (9)$$

gdzie: $M = N/2$,

$$d_k = 2h_{M-k}, k = 1, 2, \dots, M.$$

Ponieważ występujący we wzorze (5) człon $\exp(j(\frac{L\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega))$ nie ma wpływu na charakterystykę amplitudową filtru, kształt tej charakterystyki zależy jedynie od wartości funkcji $G(\omega)$. Zadanie aproksymacji określonej charakterystyki amplitudowej sprowadza się więc do wyznaczenia odpowiednich wartości współczynników

funkcji $G(\omega)$. W dalszej części pracy rozpatrywać będziemy jedynie funkcję $G(\omega)$ o postaci 1 określonej wzorem (6). Nie zmniejsza to ogólności rozważań, gdyż funkcję $G(\omega)$ o postaciach 2,3 i 4 można po zastosowaniu odpowiednich przekształceń [3,11,13] sprowadzić do postaci zbliżonej do postaci 1 i dalej stosować podobne algorytmy obliczeniowe jak w przypadku funkcji $G(\omega)$ o postaci 1.

Niech $A_0(\omega)$ będzie charakterystyką amplitudową idealnego filtra dolnoprzepustowego określoną zależnością

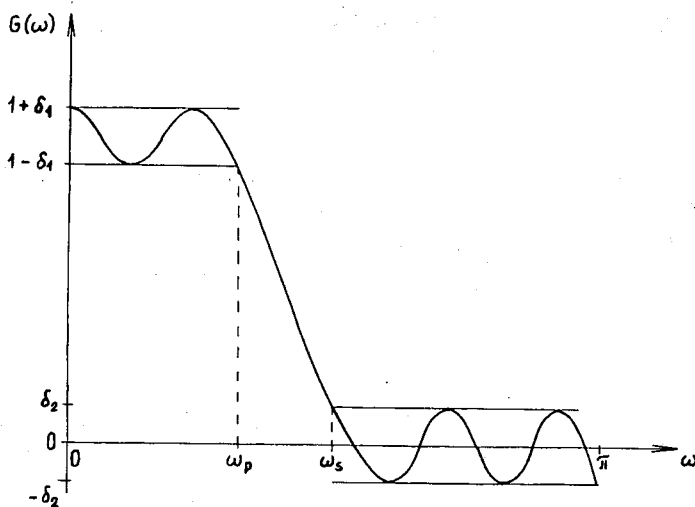
$$A_0(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{w pasmie przepustowym } P = \langle 0; \omega_p \rangle, \\ 0 & \text{w pasmie zaporowym } S = \langle \omega_s; \pi \rangle, \end{cases} \quad (10)$$

gdzie: ω_p i ω_s – unormowane pulsacje krańcowe odpowiednio pasma przepustowego i zaporowego.

Zadanie czebyszewowskiej aproksymacji charakterystyki $A_0(\omega)$ jest równoważne zadaniu czebyszewowskiej aproksymacji funkcji $G_0(\omega)$ określonej następująco

$$G_0(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{w pasmie przepustowym,} \\ 0 & \text{w pasmie zaporowym.} \end{cases} \quad (11)$$

Funkcja $G(\omega)$ otrzymana w wyniku takiej aproksymacji ma postać pokazaną na rysunku 1.



Rys. 1. Przebieg funkcji $G(\omega)$ aproksymującej w sensie Czebyszewa funkcję $G_0(\omega)$ określoną zależnością (11)

Występujące na rysunku wielkości δ_1 i δ_2 są maksymalnymi odchyłkami funkcji $G(\omega)$ od aproksymowanej funkcji $G_0(\omega)$. Zauważmy, że pomiędzy przedziałami P i S , w których funkcja $G(\omega)$ ma ściśle określony przebieg, występuje przedział pulsacji $(\omega_p; \omega_s)$, w którym wymagania odnośnie przebiegu funkcji $G(\omega)$ nie są sprecyzowane.

Niech $Y = [y_1, y_2, \dots, y_{M+1}]^T$ będzie wektorem parametrów zdefiniowanych następująco:

$$y_i = a_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, M+1; \quad (12)$$

gdzie a_i są współczynnikami występującymi we wzorze (6). Ponadto niech $G(\omega, Y)$ i $A(\omega, Y)$ oznaczają odpowiednio funkcję G oraz charakterystykę amplitudową A otrzymane przy przyjęciu we wzorze (6) współczynników o wartościach określonych przez wektor Y .

Zadanie aproksymacji sformułujemy w sposób następujący: Znaleźć wektor $Y = [y_1, y_2, \dots, y_{M+1}]^T$, który minimalizuje

$$\max_{\omega \in P \cup S} W(\omega) |G_0(\omega) - G(\omega, Y)|, \quad (13)$$

gdzie $W(\omega)$ jest funkcją wagi określoną następująco

$$W(\omega) = \begin{cases} \delta_1/\delta_2 & \text{dla } \omega \in P \\ 1 & \text{dla } \omega \in S. \end{cases} \quad (14)$$

3. SPOSÓB ROZWIĄZANIA ZADANIA APROKSYMACJI

Rozwiązanie zadania aproksymacji rozpoczniemy od podzielenia przedziałów P i S na podprzedziały θ_i , $i = 1, 2, \dots, M-1$, określone następująco:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= <0; \omega_1>, \\ \theta_l &= <\omega_{l-1}; \omega_l>, \quad l = 2, 3, \dots, L, \\ \theta_{L+1} &= <\omega_L; \omega_p>, \\ \theta_{L+2} &= <\omega_s; \omega_{L+1}>, \\ \theta_k &= <\omega_{k-2}; \omega_{k-1}>, \quad k = L+3, L+4, \dots, M-2, \\ \theta_{M-1} &= <\omega_{M-3}; \pi>, \end{aligned} \quad (15)$$

gdzie: $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{M-3}$ ($\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{M-3}$) są unormowanymi pulsacjami, dla których spełnione są warunki:

$$(-1)^{n+m} \frac{dG(\omega, Y)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_n} > 0, \quad n = 1, 2, \dots, L \quad (16)$$

$$(-1)^k \frac{dG(\omega, Y)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_k} > 0, \quad k = L+3, L+4, \dots, M-2 \quad (17)$$

przy czym

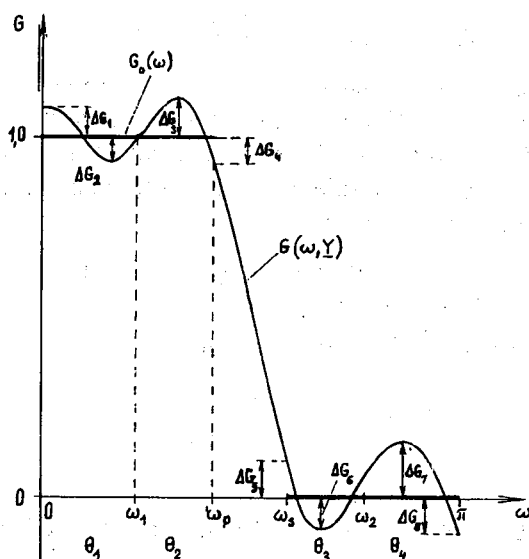
$$m = \begin{cases} 0 & \text{dla } M \text{ parzystego,} \\ 1 & \text{dla } M \text{ nieparzystego,} \end{cases}$$

a L jest liczbą pulsacji ω_i występujących w pasmie przepustowym.

Określimy ponadto wartości największych odległości $\Delta G_1(Y)$, $k = 1, 2, \dots, M+3$, pomiędzy funkcjami $G_0(\omega)$ i $G(\omega, Y)$, czyli ekstremów funkcji błędu, w sposób następujący (rys.2):

– w przypadku M nieparzystego

$$\Delta G_1(Y) = G(0, Y) - G_0(0), \quad (18)$$



Rys. 2. Sposób wyznaczania wartości $\Delta G_i(Y)$, $i=1,2,\dots,8$, ($M=5$)

$$\Delta G_l(Y) = \max_{\omega \in \theta_{l-1}} (G_0(\omega) - G(\omega, Y)), \quad l = 2, 4, \dots, L+2, \quad (19)$$

$$\Delta G_l(Y) = \max_{\omega \in \theta_{l-1}} (G(\omega, Y) - G_0(\omega)), \quad l = 3, 5, \dots, L+2, \quad (20)$$

$$\Delta G_{L+3}(Y) = G_0(\omega_p) - G(\omega_p, Y), \quad (21)$$

$$\Delta G_{L+4}(Y) = G(\omega_s, Y) - G_0(\omega_s), \quad (22)$$

$$\Delta G_k(Y) = \max_{\omega \in \theta_{k-3}} (G_0(\omega) - G(\omega, Y)), \quad k = L+5, L+7, \dots, M+2, \quad (23)$$

$$\Delta G_k(Y) = \max_{\omega \in \theta_{k-3}} (G(\omega, Y) - G_0(\omega)), \quad k = L+6, L+8, \dots, M+2, \quad (24)$$

$$\Delta G_{M+3}(Y) = G_0(\pi) - G(\pi, Y); \quad (25)$$

— w przypadku M parzystego

$$\Delta G_1(Y) = G_0(0) - G(0, Y), \quad (26)$$

$$\Delta G_l(Y) = \max_{\omega \in \theta_{l-1}} (G(\omega, Y) - G_0(\omega)), \quad l = 2, 4, \dots, L+2, \quad (27)$$

$$\Delta G_l(Y) = \max_{\omega \in \theta_{l-1}} (G_0(\omega) - G(\omega, Y)), \quad l = 3, 5, \dots, L+2, \quad (28)$$

przy czym $\Delta G_{L+3}(Y) \div \Delta G_{M+3}(Y)$ są zdefiniowane odpowiednio wzorami (21–25).

Z literatury [12,14] wiadomo, że o ile dla zadanych wartości M, ω_p, ω_s oraz dla danego stosunku δ_1/δ_2 zadanie czebyszewowskiej aproksymacji charakterystyki $G_0(\omega)$, a tym samym $A_0(\omega)$ ma rozwiązanie, to zachodzi jeden z poniższych przypadków:

1. W otrzymanym rozwiązaniu $G(\omega, Y)$ wszystkie odległości $\Delta G_i(Y)$, $i=1,2,\dots, M+3$, są sobie równe. Jest to tzw. przypadek „*ponadrównomiernie falisty*” [14], określany w literaturze anglojęzycznej terminem „*extraripple solution*” lub „*maximal ripple solution*”.

2. W otrzymanym rozwiązaniu $G(\omega, Y)$ uzyskuje się $M+2$ równe odległości $\Delta G_i(Y)$; odległość $\Delta G_1(Y)$ lub $\Delta G_{M+3}(Y)$ ma wartość mniejszą od pozostałych odległości (ang. *scaled extraripple solution*).

3. W otrzymanym rozwiązaniu $G(\omega, Y)$ występują tylko $M+2$ odległości $\Delta G_i(Y)$, $i=1,2,\dots, M+2$, które są sobie równe; odległość $\Delta G_{M+2}(Y)$, zdefiniowana wzorem (24), jest określona dla pulsacji $\omega=\pi$, w związku z czym jest ona identyczna z odległością $\Delta G_{M+3}(Y)$ zdefiniowaną wzorem (25) (ang. *equiripple solution*).

Rozwiązanie zadania aproksymacji sformułowanego zależnością (13) sprowadza się więc do znalezienia takiego wektora $Y=[y_1, y_2, \dots, y_{M+1}]^T$, dla którego spełniony jest warunek

$$\Delta G_k(Y) = \Delta G_l(Y), \quad (29)$$

przy czym

$$k, l = \begin{cases} 1, 2, \dots, M+2 & \text{— gdy wyrównywane są odległości} \\ & \Delta G_1(Y) \div \Delta G_{M+2}(Y), \\ 2, 3, \dots, M+3 & \text{— gdy wyrównywane są odległości} \\ & \Delta G_2(Y) \div \Delta G_{M+3}(Y). \end{cases}$$

Należy zauważyć, że ponieważ w zadaniu występuje tylko $M+1$ niewiadomych, tzn. współrzędnych wektora Y , możemy żądać wyrównania jedynie $M+2$ odległości.

Aby wyznaczyć wektor Y , dla którego spełniony jest warunek (29), przekształcamy rozpatrywane zadanie aproksymacji w odpowiednie zadanie programowania nieliniowego z ograniczeniami. W tym celu określamy taką funkcję $X(Y)$, która przy spełnieniu warunku (29) osiąga minimum globalne równe zeru. Przyjmujemy, że funkcja ta ma następującą postać:

$$X(Y) = \sum_{i=I}^J \left[\Delta G_i(Y) - \frac{\sum_{k=I}^J \Delta G_k(Y)}{M+1} \right]^2 \quad (30)$$

gdzie:

$$I = \begin{cases} 1 & \text{— gdy wyrównywane są odległości} \\ & \Delta G_1(Y) \div \Delta G_{M+2}(Y), \\ 2 & \text{— gdy wyrównywane są odległości} \\ & \Delta G_2(Y) \div \Delta G_{M+3}(Y), \end{cases}$$

$$J = I + M + 1.$$

Można wykazać, że przy spełnieniu warunku (29) funkcja $X(\mathbf{Y})$ osiąga minimum globalne równe zero. Rozpatrywane zadanie aproksymacji, sformułowane zależnością (13), można więc przekształcić w następujące równoważne zadanie programowania nieliniowego z ograniczeniami: Znaleźć wektor $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_{M+1}]^T$, który minimalizuje funkcję celu² $X(\mathbf{Y})$ określoną wzorem (30) przy następujących warunkach ograniczających:

$$\Delta G_i(\mathbf{Y}) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, M+3 \quad (31)$$

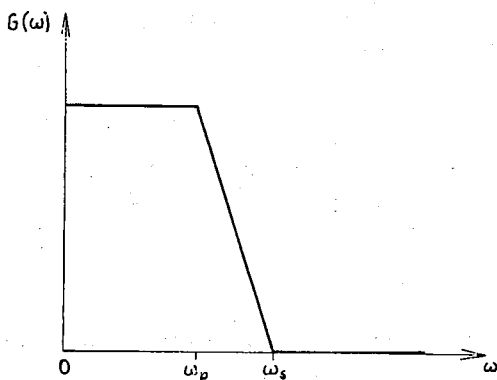
$$\omega \in (\omega_p, \omega_s) \quad G(\omega, \mathbf{Y}) - 1 < 0 \quad (32)$$

Sformułowane powyżej zadanie programowania nieliniowego można rozwiązać jedną z metod poszukiwania minimum z ograniczeniami. Z podanych w literaturze [4,9] metod, do rozwiązywania rozpatrywanego zadania zastosowano metodę przesuwanej funkcji kary. Metoda ta uważana jest bowiem za jedną z najbardziej efektywnych metod poszukiwania minimum z ograniczeniami [4]. Umożliwia ona sprowadzenie zadania z ograniczeniami do ciągu zadań bez ograniczeń poprzez odpowiednią modyfikację funkcji celu. Zadania programowania nieliniowego bez ograniczeń rozwiązywano metodą gradientu sprzężonego Polaka – Ribieri [4,9].

Początkowe wartości współrzędnych wektora $\mathbf{Y}$, służące jako punkt startowy w rozwiązywaniu zadania programowania nieliniowego, wyznaczono przybliżając aproksymowaną funkcję $G_0(\omega)$ sumą częściową szeregu Fouriera. Współczynniki tego szeregu wyznaczono jednak nie dla funkcji $G_0(\omega)$ określonej zależnością (11), lecz dla charakterystyki $\tilde{G}_0(\omega)$ danej wzorem

$$\tilde{G}_0(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leq \omega \leq \omega_p, \\ \frac{\omega - \omega_s}{\omega_p - \omega_s} & \text{dla } \omega_p < \omega < \omega_s, \\ 0 & \text{dla } \omega_p \leq \omega \leq \pi, \end{cases} \quad (33)$$

o przebiegu pokazanym na rysunku 3. Współczynniki te są wyrażone w sposób następujący:



Rys. 3. Przebieg funkcji $G_0(\omega)$ określonej zależnością (33)

² Funkcją celu nazywamy funkcję, której minimum poszukujemy [4,9].

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \tilde{G}_0(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} (\omega_p + \omega_s), \quad (34)$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \tilde{G}_0(\omega) \cos(k\omega) d\omega = \frac{2}{k\pi} [(1 - \beta) \sin(k\omega_p) + \beta \sin(k\omega_s)] + \\ + \frac{\alpha}{k\pi^2} [\omega_s \sin(k\omega_s) - \omega_p \sin(k\omega_p)] + \frac{\alpha}{k^2 \pi^2} [\cos(k\omega_s) - \cos(k\omega_p)], k = 1, 2, 3, \dots \quad (35)$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{-2\pi}{\omega_s - \omega_p}, \quad (36)$$

$$\beta = \frac{\omega_s}{\omega_s - \omega_p}. \quad (37)$$

Przyjęcie takich współczynników spowodowało wyraźne zmniejszenie amplitud oscylacji funkcji $G(\omega, Y)$ w pobliżu pulsacji ω_p i ω_s w porównaniu z przypadkiem zastosowania współczynników szeregu Fouriera aproksymującego funkcję $G_0(\omega)$ daną wzorem (11). Tak określony punkt startowy jest więc bliższy poszukiwanego rozwiązania, a jego użycie w procedurze minimalizacyjnej powoduje skrócenie czasu wykonywania obliczeń.

Do określenia wartości funkcji $X(Y)$ niezbędna jest znajomość maksymalnych odległości $\Delta G_i(Y)$ pomiędzy funkcjami $G_0(\omega)$ i $G(\omega, Y)$. Wartości tych odległości w przedziałach θ_l , $l=2, 3, \dots, L$ oraz θ_k , $k=L+3, L+4, \dots, M-2$, wyznaczano posługując się metodą złotego podziału [4, 9].

4. OPIS PROGRAMU FSOI

Przedstawiony sposób aproksymacji posłużył do opracowania programu FSOI umożliwiającego czebyszewowską (równomiernie falistą) aproksymację charakterystyki amplitudowej idealnego filtra dolnoprzepustowego charakterystyką amplitudową filtra cyfrowego o skończonym czasie trwania odpowiedzi impulsowej. Program ten został napisany w języku Fortran dla mikrokomputera IBM PC/AT.

Danymi wejściowymi dla programu są:

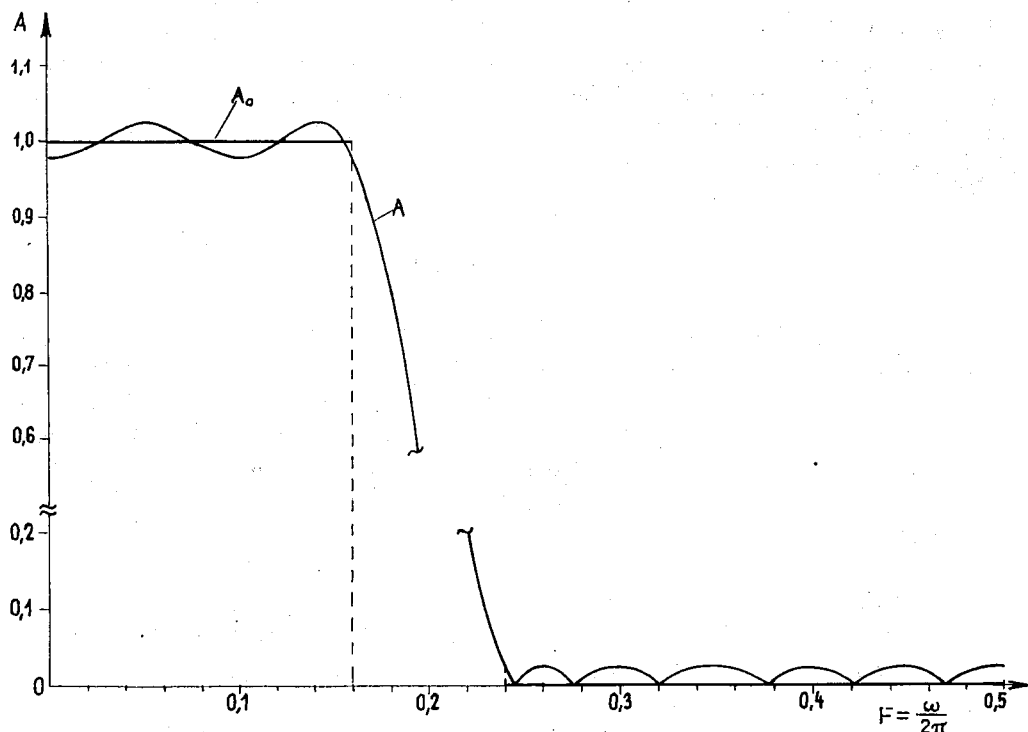
- liczba N ,
- wartości $w = \delta_2 / \delta_1$,
- wartość unormowanych częstotliwości $F_p = \omega_p / 2\pi$ i $F_s = \omega_s / 2\pi$,
- wartość parametru IW informującego, czy chcemy otrzymać wydruki kolejnych współrzędnych wyznaczonej charakterystyki amplitudowej $A(\omega, Y)$ (IW=0), czy też nie (IW=1),
- wartość parametru EPS, zwanego kryterium zakończenia procedury minimalizacji bez ograniczeń [9] (procedura ta kończy swoje działanie, gdy norma gradientu funkcji celu $\|\nabla X(Y)\| \leq \text{EPS}$).

W programie FSOI do rozwiązywania otrzymanych zadań programowania nieliniowego zastosowano odpowiednio zmodyfikowaną procedurę GSPR1E opracowaną w Instytucie Automatyki Politechniki Warszawskiej [9]. Procedura ta umożliwia rozwiązywanie zadań programowania nieliniowego bez ograniczeń metodą gradientu sprzężonego Polaka–Ribieri, przy czym gradient funkcji celu jest estymowany numerycznie.

Po przeprowadzeniu obliczeń przy użyciu programu FSOI otrzymujemy następujące wyniki końcowe:

- wartości współczynników h_i , $i=0,1,2,\dots,M$, występujących we wzorze (1),
 - wartości współrzędnych ekstremów wyznaczonej funkcji $A(\omega, Y)$ oraz wartości największych odległości $\Delta A_i(Y)$, $i=1,2,\dots,M+2$, pomiędzy funkcjami $A_0(\omega)$ i $A(\omega, Y)$.
- Istnieje ponadto możliwość drukowania kolejnych wartości współrzędnych $F=\omega/2\pi$ i $A(\omega, Y)$ wyznaczonej funkcji aproksymującej.

Przy użyciu programu FSOI przeprowadzono aproksymację szeregu charakterystyk amplitudowych idealnego filtra dolnoprzepustowego charakterystykami amplitudowymi cyfrowych filtrów SOI. Obliczenia wykonywano dla $N \leq 30$ przy użyciu mikrokomputera IBM PC/AT z zegarem 15 MHz, bez koprocesora. Czas wykonywania obliczeń wahał się od kilkunastu do kilkudziesięciu minut, przy czym czas ten wyraźnie zwiększał się w miarę wzrostu liczby N oraz w miarę zmniejszania się wartości parametru EPS.



Rys. 4. Przebiegi charakterystyk aproksymowanej $A_0(\omega)$ i otrzymanej w wyniku aproksymacji $A(\omega, Y)$ dla danych: $N=21$; $w=1$; $F_p=0,160$; $F_s=0,240$

Wyniki obliczeń dla danych: $N=21$; $w=1$, $L=5$; $f_p=\omega_p/2\pi=0,070$; $f_s=\omega_s/2\pi=0,130$

DOLNOPRZEPUSTOWY INTERPOLACYJNY FILTR CYFROWY SOI
O LINIOWEJ FAZIE

DANE:

liczba $N=21$
waga $w=1$

pasmo przepustowe	.000000	.160000
pasmo zaporowe	.240000	.500000

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

Wartości współczynników

$H(0) = .23439570E-02$
 $H(1) = .20758560E-01$
 $H(2) = .13258950E-01$
 $H(3) = .16646900E-01$
 $H(4) = .36137710E-01$
 $H(5) = .11537750E-03$
 $H(6) = -.65470110E-03$
 $H(7) = -.57648300E-01$
 $H(8) = -.90181770E-01$
 $H(9) = -.30010720E+00$
 $H(10) = .40013170E+00$

Częstotliwości ekstremów	Wartości amplitudy	Wartości odległości delta A
.00000000	.97692580	.02307415
.05134160	1.02307700	.02307713
.10027420	.97692350	.02307647
.14140800	1.02307700	.02307689
.16000000	.97692380	.02307624
.24000000	.02307533	.02307533
.25836950	.02307503	.02307503
.29888440	.02307512	.02307512
.34677650	.02307670	.02307670
.39713270	.02307499	.02307499
.44840430	.02307553	.02307553
.50000000	.02307520	.02307520

Przykładowe wyniki aproksymacji charakterystyki amplitudowej idealnego filtra dolnoprzepustowego charakterystyką amplitudową cyfrowego filtra SOI są podane w tablicy 1. Do obliczeń przyjęto wartość parametru $\text{EPS}=0,00001$. Przebiegi charakterystyk aproksymowanej $A(\omega)$ oraz otrzymanej w wyniku aproksymacji $A(\omega, Y)$ są pokazane na rysunku 4.

5. ZAKOŃCZENIE

W pracy przedstawiono metodę rozwiązania zadania czebyszewowskiej aproksymacji charakterystyki amplitudowej dolnoprzepustowego filtra SOI o liniowej fazie w drodze rozwiązania odpowiedniego zadania programowania nieliniowego z ograniczeniami. W porównaniu z metodami rozwiązania rozpatrywanego zadania aproksymacji opisanymi w literaturze zaproponowana metoda wykazuje wiele zalet.

Metody przedstawione w pracach [7,8] umożliwiają jedynie otrzymanie rozwiązań o liczbie ekstremów funkcji błędu (czyli największych odległości pomiędzy funkcjami aproksymującą i aproksymowaną) równej $M+3$ [14]. W przypadku zaproponowanej metody, podobnie jak w przypadku metody McClellana i Parka [11,13], możliwe jest uzyskanie wszystkich trzech typów rozwiązań.

Inną niedogodnością metod przedstawionych w pracach [7,8] jest fakt, że częstotliwości krańcowe F_p i F_s nie są określone z góry. Ich wartości są ustalone w trakcie wykonywania obliczeń. W przypadku zaproponowanej metody oraz metody opisanej w [11,13] częstotliwości te są ustalone z góry.

Zaproponowana metoda, aczkolwiek nie tak szybka jak metoda McClellana i Parka, posiada w porównaniu z tą metodą pewne zalety. W metodzie McClellana i Parka nie jest możliwe kontrolowanie przebiegu funkcji aproksymującej w przedziale częstotliwości $(F_s; F_p)$, w wyniku czego funkcja ta, spełniająca wszystkie założenia w przedziałach aproksymacji, może w przedziale $(F_s; F_p)$ przyjmować wartości większe od $1+\delta_2$ [3]. W zaproponowanej metodzie, w celu uniknięcia takich przypadków, w zadaniu programowania nieliniowego wprowadzono ograniczenie (32). W metodzie McClellana i Parka nie ma ponadto możliwości uwzględnienia jakichkolwiek dodatkowych ograniczeń czy warunków dotyczących np. wartości współczynników h_i , $i=0,1,2,\dots,N-1$, lub też przebiegu odpowiedzi impulsowej filtra. W przypadku zaproponowanej metody warunki te można łatwo uwzględnić w postaci dodatkowych ograniczeń w zadaniu programowania nieliniowego.

BIBLIOGRAFIA

1. V. R. Algäzi, M. Suk, C. S. Rim: *Design of almost minimax FIR filters in one and two dimensions by WLS techniques*. IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS-33, No 6, June 1986, ss. 590-596
2. A. Antoniou: *Cyfrowe filtry: analiz i projektowanie*. Izd. Radio i Świat, Moskwa 1983
3. V. Cappellini, A. G. Constantinides, P. Emiliani: *Cyfrowe filtry i ich primienienie*. Energoatomizdat, Moskwa 1983

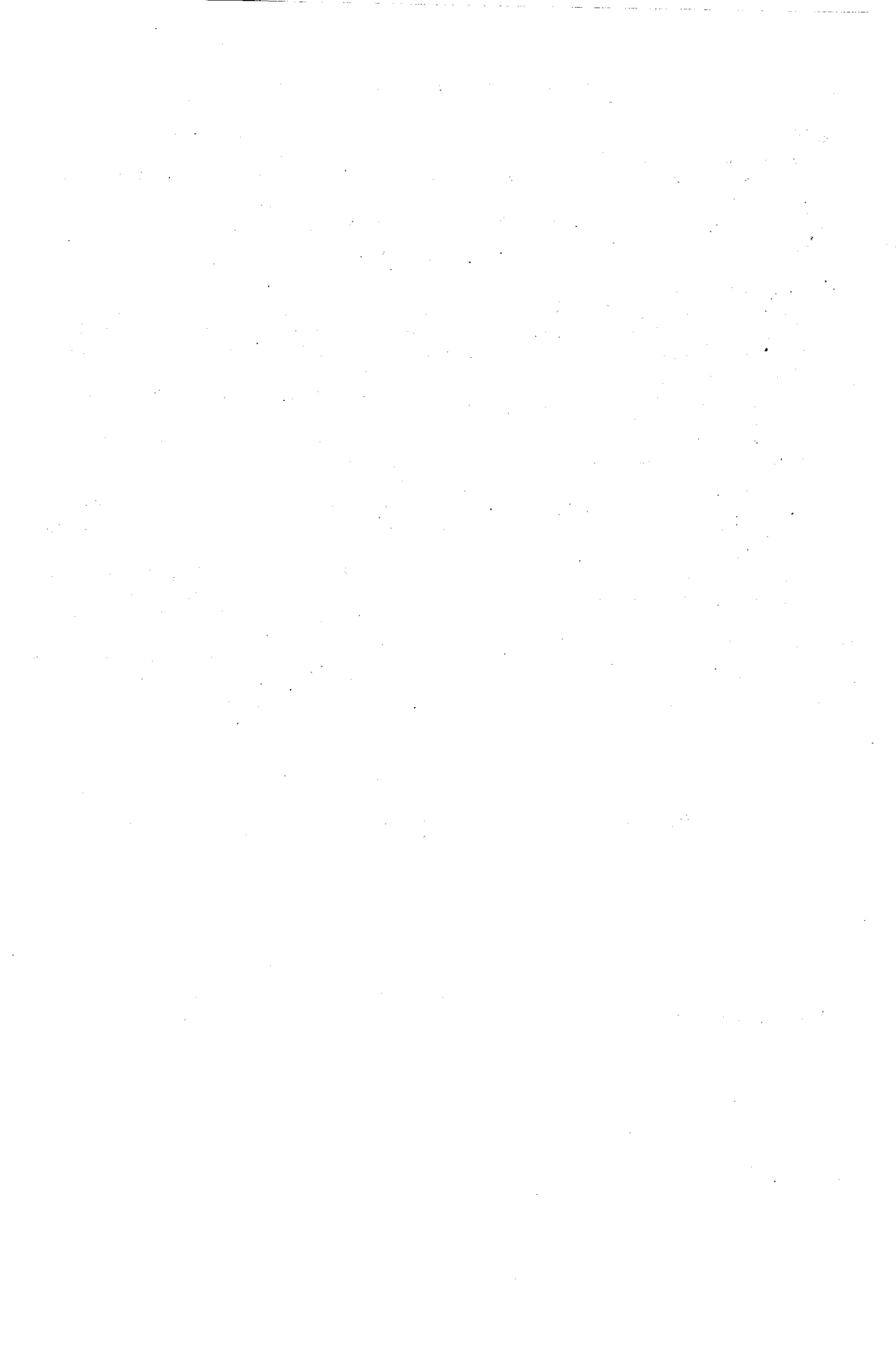
4. W. Findeisen, J. Szymanowski, A. Wierzbiński: *Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji*. Warszawa: PWN, 1980
5. L. M. Goldenberg (red): *Cyfrowe filtry w elektroswiazi i radiotechnikie*. Izd. Radio i Swiaz, Moskwa 1983
6. H. D. Helms: *Digital filters with equiripple or minimax responses*. IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol. AU-19, No 1, March 1971, ss. 87-93
7. O. Herrmann: *Design of nonrecursive digital filters with linear phase*. Electron. Lett., vol. 6, No 11, 1970, ss. 328-329
8. E. Hoffstetter, A. Oppenheim, J. Siegel: *A new technique for the design of nonrecursive digital filters*. Proc. 5-th Annual Princeton Conf. Information Sciences and Systems, 1971, ss. 64-72
9. T. Kręglewski, T. Rogowski, A. Ruszczyński, J. Szymanowski: *Metody optymalizacji w języku FORTRAN*, Warszawa: PWN, 1984
10. M. T. McCaig, B. J. Leon: *Constrained ripple design of FIR digital filters*. IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS-25, No 11, Nov. 1978, ss. 893-902
11. J. H. McClellan, T. W. Park, L. R. Rabiner: *A computer program for designing optimum FIR linear phase digital filters*. IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol. AU-21, No 6, Dec. 1973, ss. 506-526
12. A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer: *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów*. Warszawa: WKŁ, 1979
13. T. W. Park, J. H. McClellan: *Chebyshev approximation for nonrecursive digital filters with linear phase*. IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-19, No 2, March 1972, ss. 189-194
14. L. R. Rabiner, J. H. McClellan, T. W. Park: *FIR digital filters design techniques using weighted Chebyshev approximation*. Proc. IEEE, vol. 64, No 4, April 1975, ss. 596-610
15. L. R. Rabiner: *Linear program design of finite impulse response (FIR) digital filters*. IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol. AU-20, No 4, Oct. 1972, ss. 280-288
16. D. W. Tufts, J. F. Francis: *Designing digital low-pass filters — comparison of some methods and criteria*. IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol. AU-18, No 4, Dec. 1970, ss. 487-494
17. A. Wojtkiewicz: *Elementy syntezy filtrów cyfrowych*. Warszawa: WNT, 1984

F. WYSOCKA-SCHILLAK

Chebyshev Approximation of the Amplitude Characteristic of a Linear Phase Low-Pass Digital FIR Filter

Summary

The paper presents a method of solving of the problem of the Chebyshev approximation of the amplitude characteristic of a linear phase low-pass digital FIR filter. The approximation problem is transformed into an equivalent constrained minimization problem, which is solved using a penalty function shifting method. A description of the computer program FSOI with a numerical example is included.



Czebyszewowska aproksymacja charakterystyki częstotliwościowej dolnoprzepustowego filtru interpolacyjnego

FELICJA WYSOCKA-SCHILLAK

Wyższa Szkoła Pedagogiczna, Bydgoszcz

Otrzymano 1991.03.19

Autoryzowano do druku 1991.05.07

W pracy przedstawiono metodę rozwiązania zadania czebyszewowskiej aproksymacji charakterystyki częstotliwościowej idealnego dolnoprzepustowego filtru interpolacyjnego z uwzględnieniem warunków dotyczących odpowiedzi impulsowej filtru. Zadanie to jest przekształcane w odpowiednie zadanie programowania nieliniowego z ograniczeniami, które jest następnie rozwiązywane przy użyciu metody przesuwanej funkcji kary. Praca zawiera ponadto opis opracowanego programu FINT oraz przykład obliczeniowy ilustrujący działanie tego programu.

1. WSTĘP

Rozpatrzmy sygnał analogowy $x_a(t)$ ciągły w czasie t , $-\infty < t < \infty$. Sygnał dyskretny $x(n)$ o wyrazach $x(n) = x_a(nT)$, $-\infty < n < \infty$, otrzymuje się z sygnału $x_a(t)$ przez okresowe próbkowanie z okresem T . W wielu praktycznie stosowanych systemach cyfrowego przetwarzania sygnałów częstotliwość próbkowania $F = 1/T$ ulega zmianie. Jeżeli nowa częstotliwość próbkowania F' jest większa niż początkowa częstotliwość próbkowania F ($T' < T$), to taki proces zmiany częstotliwości próbkowania nazywamy interpolacją (ang. interpolation). Jeżeli natomiast nowa częstotliwość próbkowania F' jest mniejsza od częstotliwości początkowej F ($T' > T$), to taki proces zmiany częstotliwości jest określany w literaturze anglojęzycznej terminem „dziesiątkowanie” (ang. decimation).

Zarówno w procesie interpolacji jak i w procesie dziesiątkowania niezbędne jest stosowanie odpowiednich filtrów. Filtry te realizowane są z reguły jako filtry cyfrowe o skończonym czasie trwania odpowiedzi impulsowej (w skrócie SOI) [3, 6, 8, 11, 17, 18], dzięki czemu możliwe jest uzyskanie liniowej charakterystyki fazowej. W dalszej części pracy zajmować się będziemy jedynie filtrami interpolacyjnymi, czyli filtrami stosowanymi w procesie interpolacji.

Charakterystyki częstotliwościowe (amplitudowo-tężowe) filtrów interpolacyjnych aproksymują charakterystykę częstotliwościową odpowiedniego idealnego filtra dolnoprzepustowego lub środkowoprzepustowego. Aproksymacja zadanej charakterystyki filtra idealnego charakterystyką częstotliwościową filtra interpolacyjnego SOI może być przeprowadzana różnymi metodami. Do najczęściej stosowanych należą: aproksymacja z wykorzystaniem różnych funkcji okien [1–3, 13, 19], metoda minimalizacji błędu średniokwadratowego [3, 12] oraz aproksymacja czebyszewowska (równomiernie falista, minimaks) [3, 18]. Filtry zaprojektowane z zastosowaniem aproksymacji czebyszewowskiej nazywane są w literaturze filtrami optymalnymi.

W ogólnym przypadku zadanie czebyszewowskiej aproksymacji charakterystyki częstotliwościowej filtra idealnego charakterystyką częstotliwościową filtra interpolacyjnego SOI o liniowej fazie nie ma rozwiązania analitycznego, a do jego rozwiązywania wykorzystywane są różne metody numeryczne [7, 8, 10, 14–16, 18]. Metody te wykazują jednak szereg niedogodności, a ponadto część z tych metod nie uwzględnia warunków dotyczących odpowiedzi impulsowej filtra [3].

W niniejszej pracy zaproponowano sposób rozwiązania zadania czebyszewowskiej aproksymacji charakterystyki częstotliwościowej idealnego filtra dolnoprzepustowego charakterystyką częstotliwościową filtra interpolacyjnego SOI o liniowej fazie, z uwzględnieniem warunków dotyczących odpowiedzi impulsowej filtra. Zadanie to jest przekształcane w odpowiednie zadanie programowania nieliniowego z ograniczeniami, które jest następnie rozwiązywane przy użyciu metody przesuwanej funkcji kary. Praca zawiera ponadto opis opracowanego programu FINT oraz przykład obliczeniowy ilustrujący działanie tego programu.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Rozpatrzmy sygnał dyskretny $x(n)$, $-\infty < n < \infty$, otrzymany z sygnału analogowego $x_a(t)$, $-\infty < t < \infty$, przez okresowe próbkowanie z okresem T . Oznaczmy przez $X(z)$ transformatę $\mathcal{Z}$ sygnału $x(n)$. Załóżmy, że częstotliwość próbkowania zwiększa się L razy, gdzie L jest liczbą całkowitą, tzn. że $F' = LF$. Nowy okres próbkowania wynosi wówczas $T' = T/L$. Przy częstotliwości próbkowania zwiększonej L razy wejściowy sygnał dyskretny $x(n)$ dostarcza nam próbek odległych od siebie o L pozycji. Pomiedzy każdą parą próbek sygnału $x(n)$ należy więc umieścić dodatkowo $L-1$ próbek.

Jeżeli w wejściowym sygnale $x(n)$ pomiędzy każdą parą próbek umieścimy $L-1$ próbek o wartości 0, dostaniemy sygnał

$$w(m) = \begin{cases} x(m/L), & m=0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & \text{dla pozostałych wartości } m. \end{cases} \quad (1)$$

Transformata $\mathcal{Z}$ sygnału $w(m)$ jest zdefiniowana zależnością

$$W(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(m) z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m/L) z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) z^{-mL} = X(z^L) \quad (2)$$

gdzie: $z = e^{j\omega'}$,

$\omega' = 2\pi f_w T'$ – pulsacja unormowana względem częstotliwości próbkowania F' ,

f_w – częstotliwość kosinusoidalnego sygnału wymuszającego.

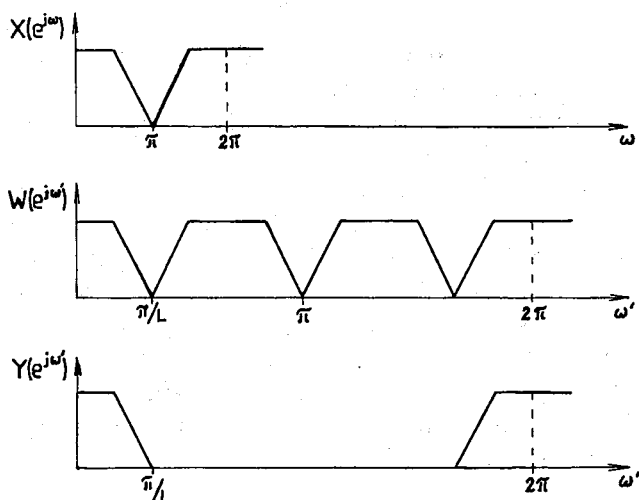
Transformata Fouriera sygnału $w(m)$ jest określona następująco

$$W(e^{j\omega'}) = X(e^{j\omega'L}) = X(e^{j\omega}), \quad (3)$$

gdzie: $\omega = 2\pi f T$,

$X(e^{j\omega})$ – transformata Fouriera sygnału $x(n)$.

Widmo sygnału $w(m)$ zawiera oprócz pożądanych składowych o pulsacjach z przedziału $<\pi/L; \pi/L>$ również składowe o wyższych pulsacjach symetrycznie rozmieszczone wokół pulsacji $\pm 2\pi/L, \pm 4\pi/L, \dots$ (rys. 1). Aby uzyskać pożądany sygnał i wyeliminować niepożądane składowe o wyższych pulsacjach należy zastosować odpowiedni filtr dolnoprzepustowy o charakterystyce częstotliwościowej $H(e^{j\omega'})$ aproksymującej charakterystykę częstotliwościową $\tilde{H}(e^{j\omega'})$ idealnego filtra dolnoprzepustowego o postaci [3,18]



Rys. 1. Transformaty Fouriera sygnałów $x(n)$, $w(m)$ i $y(m)$ dla $L=3$

$$\tilde{H}(e^{j\omega'}) = \begin{cases} L & \text{dla } |\omega'| \leq \pi/L \\ 0 & \text{dla pozostałych wartości } \omega'. \end{cases} \quad (4)$$

Transformata Fouriera $Y(e^{j\omega'})$ sygnału $y(m)$ na wyjściu tego filtra jest wyrażona następująco

$$Y(e^{j\omega'}) = H(e^{j\omega'}) W(e^{j\omega'}) = H(e^{j\omega'}) X(e^{j\omega'L}), \quad (5)$$

a sygnał $y(m)$ jest określony zależnością

$$y(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(m-k) x(k/L) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(m-rL) x(r), \quad (6)$$

gdzie $h(m)$ jest odpowiedzią impulsową filtru interpolacyjnego o charakterystyce $H(e^{j\omega})$.

Aby wyznaczyć własności filtru interpolacyjnego w dziedzinie czasu, należy obliczyć odwrotną transformatę Fouriera idealnej charakterystyki danej wzorem (4). Dostajemy odpowiedź impulsową o postaci

$$\tilde{h}(k) = \frac{\sin(\pi k/L)}{(\pi k/L)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7)$$

Odpowiedź ta jest symetryczna względem zera, tzn.

$$\tilde{h}(k) = \tilde{h}(-k). \quad (8)$$

Ze wzoru (7) wynikają ponadto następujące warunki, jakie spełnia odpowiedź impulsowa idealnego filtru interpolacyjnego

$$\tilde{h}(k) = \begin{cases} 1 & \text{dla } k=0 \\ 0 & \text{dla } k=rL, r=\pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (9)$$

Jeżeli w rzeczywistym systemie przetwarzania sygnałów warunki te są spełnione, to błąd interpolacji w chwilach próbkowania $m=0, \pm L, \pm 2L, \dots$ może być równy zeru [3]. W związku z powyższym warunki (9) powinny być uwzględniane w procesie projektowania filtru interpolacyjnego.

Przyjmijmy zgodnie z zaleceniami podanymi w literaturze, że rozpatrywany filtr interpolacyjny jest filtrem SOI o liniowej charakterystyce fazowej. Przy projektowaniu filtrów interpolacyjnych tego typu przyjmuje się z reguły nieparzystą długość odpowiedzi impulsowej N filtru [18]. W przypadku, gdy początkowy okres próbkowania jest taki, że najwyższa pulsacja w widmie sygnału wejściowego $X(e^{j\omega})$ jest bliska π , filtry interpolacyjne projektowane są jako filtry dolnoprzepustowe [3,18].

Charakterystyka częstotliwościowa (amplitudowo-fazowa) $H(e^{j\omega})$ dolnoprzepustowego filtru SOI o liniowej charakterystyce fazowej, symetrycznej odpowiedzi impulsowej i N nieparzystym może być wyrażona następująco [13,18].

$$H(e^{j\omega}) = h(0) + 2 \sum_{n=1}^M h(n) \cos(\omega'n), \quad (10)$$

gdzie: $M=(N-1)/2$.

Pomiędzy charakterystyką częstotliwościową a charakterystykami amplitudową $A(\omega')$ i fazową $\varphi(\omega')$ układu zachodzi zależność

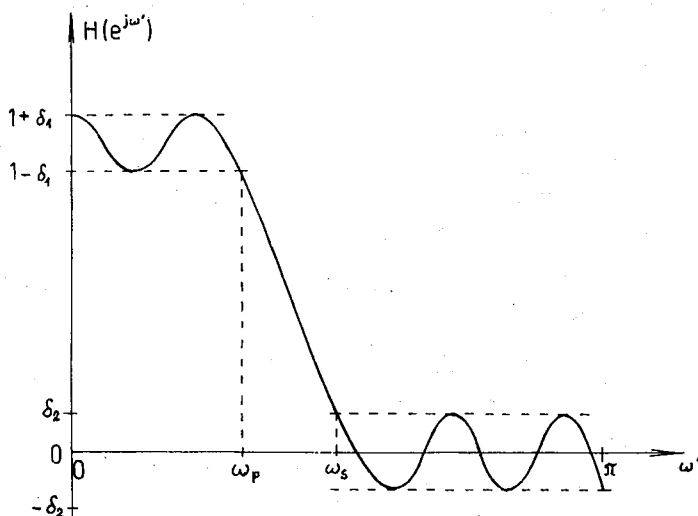
$$A(\omega') = |H(e^{j\omega'})|, \quad (11)$$

$$\varphi(\omega') = \arg H(e^{j\omega'}). \quad (12)$$

Zadanie aproksymacji charakterystyki częstotliwościowej idealnego dolnoprzepustowego filtru interpolacyjnego sprowadza się do wyznaczenia odpowiednich wartości współczynników $h(i)$, $i=0,1,2,\dots,M$. W zadaniu tym jako funkcję aproksymowaną przyjmuje się zwykle nie funkcję określoną wzorem (4), lecz funkcję o postaci ([13,18]):

$$H_0(e^{j\omega'}) = G_0(\omega') = \begin{cases} 1 & \text{w pasmie przepustowym } P = \langle 0; \omega_p \rangle, \\ 0 & \text{w pasmie zaporowym } S = \langle \omega_s; \pi \rangle. \end{cases} \quad (13)$$

W celu otrzymania charakterystyki aproksymującej funkcję daną wzorem (4), należy pomnożyć otrzymane wartości współczynników $h(i)$, $i=0,1,\dots,M$, przez L . W przypadku czebyszewskiej aproksymacji idealnej charakterystyki częstotliwościowej filtru dolnoprzepustowego funkcja aproksymująca $H(e^{j\omega'})$ ma przebieg pokazany na rysunku 2. Występujące na rysunku wielkości δ_1 i δ_2 są maksymalnymi odchyłkami funkcji $H(e^{j\omega'})$ od aproksymowanej funkcji $G_0(\omega)$ odpowiednio w pasmie przepustowym $P = \langle 0; \omega_p \rangle$ i zaporowym $S = \langle \omega_s; \pi \rangle$.



Rys. 2. Przebieg funkcji $H(e^{j\omega'})$ aproksymującej w sensie Czebyszewa funkcję $G_0(\omega)$ określoną zależnością (13)

Oznaczamy przez $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_{M+1}]^T$ wektor parametrów zdefiniowanych następująco:

$$y_i = h(i-1), \quad i = 1, 2, \dots, M+1; \quad (14)$$

a przez $G(\omega', \mathbf{Y})$ charakterystykę częstotliwościową otrzymaną przy przyjęciu we wzorze (10) współczynników o wartościach określonych przez wektor $\mathbf{Y}$.

Zadanie aproksymacji sformułujemy w sposób następujący: Dla zadanych wartości N , L , ω_p i ω_s znaleźć wektor $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_{M+1}]^T$, który minimalizuje

$$\max_{\omega' \in P \cup S} U(\omega') |G_0(\omega') - G(\omega', \mathbf{Y})|, \quad (15)$$

przy następujących warunkach ograniczających

$$\begin{aligned} y_1 &= 1/L, \\ y_{k+1} &= 0, \quad k = L, 2L, \dots, E(M/L)L, \end{aligned} \quad (16)$$

gdzie: $E(M/L)$ – część całkowita (entier) liczby M/L , a $U(\omega')$ jest funkcją wagi określoną następująco

$$U(\omega') = \begin{cases} \delta_1/\delta_2 & \text{dla } \omega' \in P \\ 1 & \text{dla } \omega' \in S. \end{cases} \quad (17)$$

3. SPOSÓB ROZWIĄZANIA ZADANIA APROKSYMACJI

Rozwiązanie zadania aproksymacji rozpoczniemy od podzielenia przedziałów P i S na podprzedziały Θ_i , $i=1,2,\dots,J+K+2$, określone następująco:

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \langle 0; \omega_1 \rangle, \\ \Theta_j &= \langle \omega_{j-1}; \omega_j \rangle, \quad j = 2, 3, \dots, J, \\ \Theta_{J+1} &= \langle \omega_J; \omega_p \rangle, \\ \Theta_{J+2} &= \langle \omega_s; \omega_{J+1} \rangle, \\ \Theta_k &= \langle \omega_{k-2}; \omega_{k-1} \rangle, \quad k = J+3, J+4, \dots, J+K+1, \\ \Theta_{J+K+2} &= \langle \omega_{J+K}; \pi \rangle, \end{aligned} \quad (18)$$

gdzie: $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{J+K}$ ($\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{J+K}$) są unormowanymi pulsacjami, dla których spełnione są warunki:

$$(-1)^{n+m} \frac{dG(\omega', Y)}{d\omega'} \Big|_{\omega'=\omega_n} > 0, \quad n = 1, 2, \dots, J \quad (19)$$

$$(-1)^k \frac{dH(\omega', Y)}{d\omega'} \Big|_{\omega'=\omega_k} > 0, \quad k = J+1, J+2, \dots, J+K \quad (20)$$

przy czym

$$m = \begin{cases} 0 & \text{dla } J \text{ parzystego,} \\ 1 & \text{dla } J \text{ nieparzystego,} \end{cases}$$

a J i K są liczbami pulsacji ω_i występujących odpowiednio w pasmie przepustowym i zaporowym.

Określmy ponadto wartości największych odległości $\Delta G_i(Y)$, $i=1,2,\dots,r$, $r=J+K+6$, pomiędzy funkcjami $G_0(\omega')$ i $G(\omega', Y)$ w sposób następujący (rys. 3):

– w pasmie przepustowym w przypadku J nieparzystego

$$\Delta G_1(Y) = G(0, Y) - G_0(0), \quad (21)$$

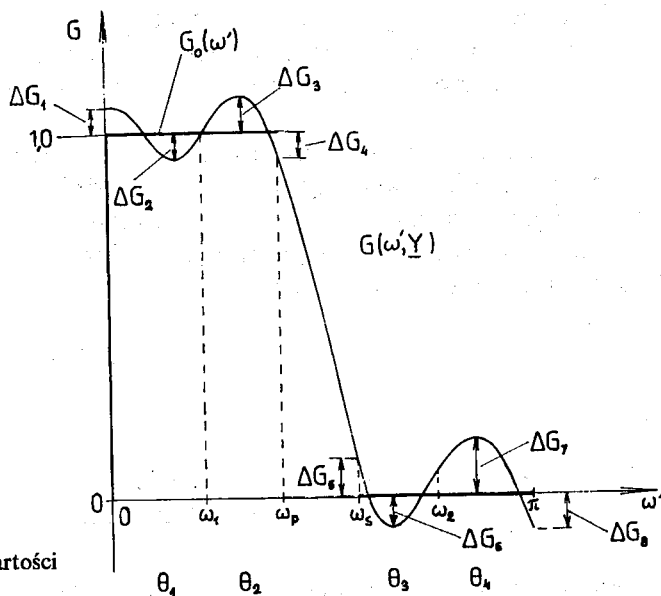
$$\Delta G_l(Y) = \max_{\omega' \in \Theta_{l-1}} (G_0(\omega') - G(\omega', Y)), \quad l = 2, 4, \dots, J+2, \quad (22)$$

$$\Delta G_l(Y) = \max_{\omega' \in \Theta_{l-1}} (G(\omega', Y) - G_0(\omega')), \quad l = 3, 5, \dots, J+2, \quad (23)$$

$$\Delta G_{J+3}(Y) = G_0(\omega_p) - G(\omega_p, Y), \quad (24)$$

– w pasmie przepustowym w przypadku J parzystego

$$\Delta G_1(Y) = G_0(0) - G(0, Y), \quad (25)$$



Rys. 3. Sposób wyznaczania wartości $\Delta G_i(\mathbf{Y})$, $i=1,2,\dots,8$, ($M=5$)

$$\Delta G_l(\mathbf{Y}) = \max_{\omega' \in \theta_{l-1}} (G(\omega', \mathbf{Y}) - G_0(\omega')), \quad l = 2, 4, \dots, J+2, \quad (26)$$

$$\Delta G_l(\mathbf{Y}) = \max_{\omega' \in \theta_{l-1}} (G_0(\omega') - G(\omega', \mathbf{Y})), \quad l = 3, 5, \dots, J+2, \quad (27)$$

$$\Delta G_{J+3}(\mathbf{Y}) = G_0(\omega_p) - G(\omega_p, \mathbf{Y}) \quad (28)$$

— w pasmie zaporowym

$$\Delta G_{J+4}(\mathbf{Y}) = G(\omega_s, \mathbf{Y}) - G_0(\omega_s), \quad (29)$$

$$\Delta G_k(\mathbf{Y}) = \max_{\omega' \in \theta_{k-3}} (G_0(\omega') - G(\omega', \mathbf{Y})), \quad k = J+5, J+7, \dots, r-1, \quad (30)$$

$$\Delta G_k(\mathbf{Y}) = \max_{\omega' \in \theta_{k3}} (G(\omega', \mathbf{Y}) - G_0(\omega')), \quad k = J+6, J+8, \dots, r-1, \quad (31)$$

$$\Delta G_r(\mathbf{Y}) = G_0(\pi) - G(\pi, \mathbf{Y}); \quad (32)$$

Rozwiązanie zadania aproksymacji sformułowanego zależnością (15) sprowadza się do znalezienia takiego wektora $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_{M+1}]^T$, dla którego spełniony jest warunek

$$\Delta G_k(\mathbf{Y}) = \Delta G_l(\mathbf{Y}), \quad k, l = 1, 2, \dots, p+1, \quad (33)$$

przy następujących ograniczeniach

$$y_1 = 1/L, \\ y_{k+1} = 0, \quad k = L, 2L, \dots, E(M/L)L, \quad (34)$$

gdzie: $p = M - E(M/L)$.

Należy zauważyć, że ponieważ w zadaniu występuje tylko p niewiadomych, tzn. współrzędnych wektora $\mathbf{Y}$, możemy żądać wyrównania jedynie $p+1$ z r odległości. W naszych rozważaniach przyjmujemy, że wyrównujemy odległości $\Delta G_i(\mathbf{Y})$, $i=1, 2, \dots, p+1$.

Aby wyznaczyć wektor $\mathbf{Y}$ dla którego spełniony jest warunek (33), przekształcamy rozpatrywane zadanie aproksymacji w odpowiednie zadanie programowania nieliniowego z ograniczeniami. W tym celu określamy taką funkcję $X(\mathbf{Y})$, która przy spełnieniu warunku (33) osiąga minimum globalne równe zero. Przyjmujemy, że funkcja ta ma następującą postać:

$$X(\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^{p+1} (\Delta G_i(\mathbf{Y}) - \tilde{S})^2 \quad (35)$$

gdzie:

$$\tilde{S} = \frac{\sum_{k=1}^{p+1} \Delta G_i(\mathbf{Y})}{p+1} \quad (36)$$

Można wykazać, że przy spełnieniu warunku (33) funkcja $X(\mathbf{Y})$ osiąga minimum globalne równe zero. Rozpatrywane zadanie aproksymacji, określone zależnością (15), można więc przekształcić w następujące równoważne zadanie programowania nieliniowego z ograniczeniami: Znaleźć wektor $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_{M+1}]^T$, który minimalizuje funkcję celu¹ $X(\mathbf{Y})$ określoną wzorem (35) przy następujących warunkach ograniczających:

$$y_1 = 1/L, \quad (37)$$

$$y_{k+1} = 0, \quad k = L, 2L, \dots, E(M/L)L, \quad (38)$$

$$\Delta G_i(\mathbf{Y}) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, M+3, \quad (39)$$

$$\Delta G_i(\mathbf{Y}) - \tilde{S} < 0, \quad i = p+2, p+3, \dots, r, \quad (40)$$

$$\bigwedge_{\omega' \in (\omega_p, \omega_s)} G(\omega', \mathbf{Y}) - 1 < 0. \quad (41)$$

Należy zauważyć, że spełnienie ograniczeń (40) zapewnia, że w otrzymanym rozwiązaniu wartość odległości $\Delta G_{p+2}(\mathbf{Y})$ i następnych będzie mniejsza od pozostałych $p+1$ równych odległości.

Sformułowane powyżej zadanie programowania nieliniowego można rozwiązać jedną z metod poszukiwania minimum z ograniczeniami. Z podanych w literaturze [4,9] metod, do rozwiązywania rozpatrywanego zadania zastosowano metodę przesuwanej funkcji kary. Metoda ta uważana jest bowiem za jedną z najbardziej efektywnych metod poszukiwania minimum z ograniczeniami [4]. Umożliwia ona sprowadzenie zadania z ograniczeniami do ciągu zadań bez ograniczeń poprzez odpowiednią modyfikację funkcji celu. Zadania programowania nieliniowego bez ograniczeń rozwiązywano metodą gradientu sprzężonego Polaka – Ribiera [4,9].

¹ Funkcją celu nazywamy funkcję, której minimum poszukujemy [4,9].

Początkowe wartości współrzędnych wektora Y , służące jako punkt startowy w rozwiązywaniu zadania programowania nieliniowego, wyznaczono przybliżając aproksymowaną funkcję $G_0(\omega)$ sumą częściową szeregu Fouriera. Współczynniki tego szeregu wyznaczano jednak nie dla funkcji $G_0(\omega')$ określonej zależnością (16), lecz dla charakterystyki $\tilde{G}_0(\omega')$ danej wzorem

$$\tilde{G}_0(\omega') = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leq \omega' \leq \omega_p, \\ \frac{\omega' - \omega_s}{\omega_p - \omega_s} & \text{dla } \omega_p < \omega' < \omega_s, \\ 0 & \text{dla } \omega_p \leq \omega' \leq \pi. \end{cases} \quad (42)$$

Współczynniki te są wyrażone w sposób następujący:

$$h_0 = h(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \tilde{G}_0(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} (\omega_p + \omega_s), \quad (43)$$

$$\begin{aligned} h_k = h(k) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \tilde{G}_0(\omega) \cos(k\omega) d\omega = \\ &= \frac{-4}{k^2\pi(\omega_s - \omega_p)} \sin\left(k \frac{\omega_s + \omega_p}{2}\right) \sin\left(k \frac{\omega_s - \omega_p}{2}\right), \quad (44) \\ &k = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

Przyjęcie takich współczynników spowodowało wyraźne zmniejszenie amplitud oscylacji funkcji $G(\omega', Y)$ w pobliżu pulsacji ω_p i ω_s w porównaniu z przypadkiem zastosowania współczynników szeregu Fouriera aproksymującego funkcję $G_0(\omega')$ daną wzorem (13). Tak określony punkt startowy jest więc bliższy poszukiwanego rozwiązania, a jego użycie w procedurze minimalizacyjnej powoduje skrócenie czasu wykonywania obliczeń.

Do określenia wartości funkcji $X(Y)$ niezbędna jest znajomość maksymalnych odległości $\Delta G_i(Y)$ pomiędzy funkcjami $G_0(\omega')$ i $G(\omega', Y)$. Wartości tych odległości w przedziałach θ_l , $l=2,3,\dots, J$ oraz θ_k , $k=J+3, J+4,\dots, J+K+2$, wyznaczano posługując się metodą złotego podziału [4,9].

4. OPIS PROGRAMU FINT

Przedstawiony sposób aproksymacji posłużył do opracowania programu FINT umożliwiającego czebyszewowską (równomiernie falistą) aproksymację charakterystyki częstotliwościowej idealnego filtra dolnoprzepustowego charakterystyką częstotliwościową filtra cyfrowego SOI z uwzględnieniem warunków dotyczących odpowiedzi impulsowej filtra. Program ten został napisany w języku Fortran dla mikrokomputera IBM PC/AT. Do kompilacji wykorzystano optymalizujący kompilator Fortranu firmy Microsoft (wersja 4.01).

Danymi wejściowymi dla programu są:

- liczba N ,
- liczba L ,
- wartość $w = \delta_2/\delta_1$,
- wartość unormowanych częstotliwości $f_p = \omega_p/2\pi$ i $f_s = \omega_s/2\pi$,
- wartość parametru IW informującego, czy chcemy otrzymać wydruki kolejnych współrzędnych wyznaczonej charakterystyki $|G(\omega', Y)|$ (IW=0), czy też nie (IW=1),
- wartość parametru EPS, zwanego kryterium zakończenia procedury minimalizacji bez ograniczeń [9] (procedura ta kończy swoje działanie, gdy norma gradientu funkcji celu $\|\nabla X(Y)\| \leq \text{EPS}$).

W programie FSOI do rozwiązywania otrzymanych zadań programowania nieliniowego z ograniczeniami zastosowano odpowiednio zmodyfikowaną procedurę GSPR1E opracowaną w Instytucie Automatyki Politechniki Warszawskiej [9]. Procedura ta umożliwia rozwiązywanie zadań programowania nieliniowego bez ograniczeń metodą gradientu sprzężonego Polaka–Ribieri, przy czym gradient funkcji celu jest estymowany numerycznie.

Po przeprowadzeniu obliczeń przy użyciu programu FSOI otrzymujemy następujące wyniki końcowe:

- wartości współczynników $h(i)$, $i=0,1,2,\dots,M$, występujących we wzorze (13),
- wartości współrzędnych ekstremów wyznaczonej funkcji $|G(\omega', Y)|$ oraz wartości największych odległości $\Delta G_i(Y)$, $i=1,2,\dots,M+2$, pomiędzy funkcjami $G_0(\omega')$ i $G(\omega', Y)$. Istnieje ponadto możliwość drukowania kolejnych wartości współrzędnych $f' = \omega'/2\pi$ i $|G(\omega', Y)|$ wyznaczonej funkcji aproksymującej.

Przy użyciu programu FINT przeprowadzono aproksymację szeregu charakterystyk częstotliwościowych idealnego interpolacyjnego filtra dolnoprzepustowego charakterystykami częstotliwościowymi cyfrowych filtrów SOI z uwzględnieniem warunków dotyczących odpowiedzi impulsowej filtra. Obliczenia wykonywano dla $N \leq 30$ przy użyciu mikrokomputera IBM PC/AT z zegarem 12 MHz, bez koprocatora. Czas wykonywania obliczeń wahał się od kilkunastu do kilkudziesięciu minut, przy czym czas ten wyraźnie zwiększał się w miarę wzrostu liczby N oraz w miarę zmniejszania się wartości parametru EPS.

Przykładowe wyniki aproksymacji charakterystyki częstotliwościowej idealnego filtra dolnoprzepustowego charakterystyką częstotliwościową cyfrowego filtra SOI z uwzględnieniem warunków dotyczących odpowiedzi impulsowej filtra są podane w tablicy 1. Do obliczeń przyjęto wartość parametru $\text{EPS} = 0,00001$. Przebiegi charakterystyk aproksymowanej $G_0(\omega')$ oraz otrzymanej w wyniku aproksymacji $|G(\omega', Y)|$ są pokazane na rysunku 4.

Wyniki obliczeń dla danych: $N=29$; $w=1$, $L=5$; $f_p=\omega_p/2\pi=0,070$; $f_s=\omega_s/2\pi=0,130$

DOLNOPRZEPUSTOWY INTERPOLACYJNY FILTR CYFROWY SOI
O LINIOWEJ FAZIE

DANE:

liczba $N=29$

liczba $L=5$

waga $w=1$

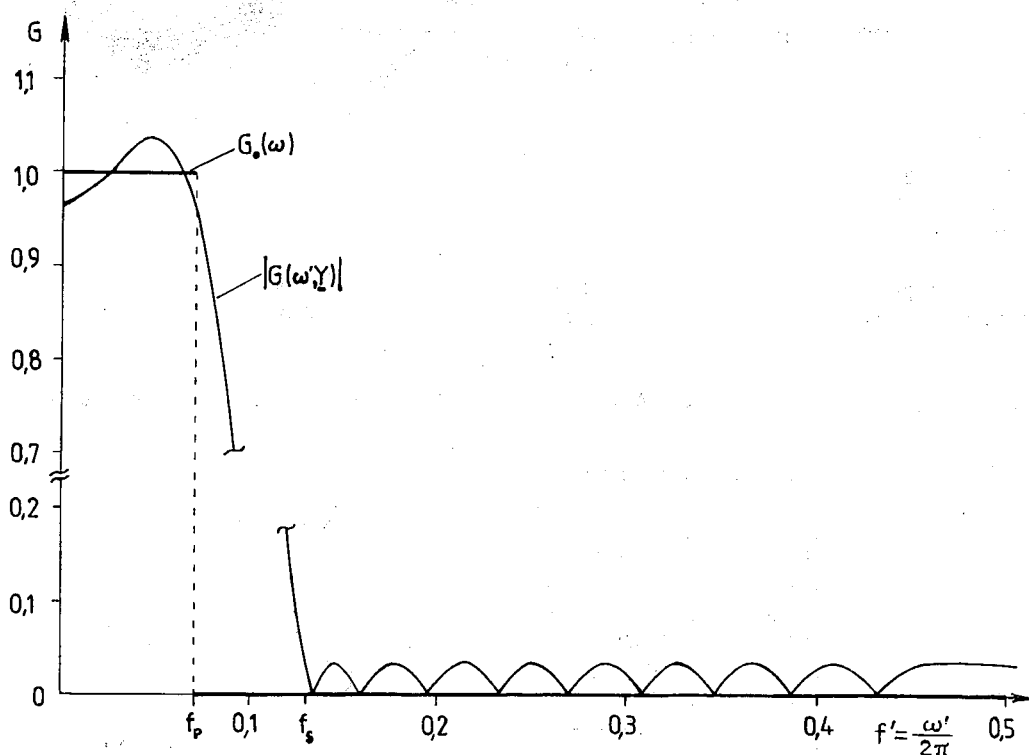
pasmo przepustowe	.000000	.070000
pasmo zaporowe	.130000	.500000

☆☆

Wartości współczynników

$H(0) =$	.20000000E+00
$H(1) =$	.19165790E+00
$H(2) =$	.14592790E+00
$H(3) =$	.98297030E-01
$H(4) =$	.37208680E-01
$H(5) =$	.00000000E+00
$H(6) =$	-.31323060E-01
$H(7) =$	-.32136890E-01
$H(8) =$	-.29259570E-01
$H(9) =$	-.12644270E-01
$H(10) =$	.00000000E+00
$H(11) =$	.41372600E-02
$H(12) =$	.17107240E-01
$H(13) =$	.44147450E-03
$H(14) =$	-.80867480E-02

Częstotliwości ekstremów	Wartości modułu G	Wartości odległości delta G
.00000000	.96265540	.03734457
.04748338	1.03738100	.03738117
.07000000	.96265310	.03734690
.13000000	.03738326	.03738326
.14588990	.03735605	.03735605
.17821010	.03738197	.03738197
.21436520	.03734368	.03734368
.25151320	.03737987	.03737987
.28915150	.03734760	.03734760
.32731550	.03738005	.03738005
.36646990	.03734549	.03734549
.40822170	.03738467	.03738467
.46514480	.03734654	.03734654
.50000000	.03635480	.03635480



Rys. 4. Przebiegi charakterystyk aproksymowanej $G_0(\omega')$ i otrzymanej w wyniku aproksymacji $|G(\omega', Y)|$ dla danych: $N=29$; $w=1$; $L=5$; $f_p=0,070$; $f_s=0,130$

ZAKOŃCZENIE

W pracy przedstawiono metodę rozwiązania zadania czebyszewowskiej aproksymacji charakterystyki częstotliwościowej idealnego dolnoprzepustowego filtra interpolacyjnego w drodze rozwiązania odpowiedniego zadania programowania nieliniowego z ograniczeniami. Zaletą zaproponowanej metody w porównaniu z metodami opisanymi w [7,10,14,15] jest fakt, że w metodzie tej możliwe jest uwzględnienie w procesie aproksymacji warunków dotyczących odpowiedzi impulsowej filtra.

BIBLIOGRAFIA

1. A. Antoniou: *Cifrowe filtry: analiz i projektowanie*. Izd. Radio i Świat, Moskwa 1983
2. V. Cappellini, A. G. Constantinides, P. Emiliani: *Cifrowe filtry i ich primienienie*. Energoatomizdat, Moskwa 1983
3. R. E. Crochiere, L. R. Rabiner: *Interpolation and decimation of signals — a tutorial review*. Proc. IEEE, vol. 69, No. 3, March 1981, ss. 300–331
4. W. Findeisen, J. Szymanowski, A. Wierzbicki: *Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji*, Warszawa: PWN, 1980

5. L. M. Goldenberg (red.): *Cyfrowe filtry w elektrosiwiaku i radiotechnice*. Izd. Radio i Świat, Moskwa 1983
6. D. J. Goodman, M. J. Carey: *Nine digital filters for decimation and interpolation*. IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Proc., vol. ASSP-25, No. 2, April 1977, ss. 121–126
7. E. Hoffstetter, A. Oppenheim, J. Siegel: *A new technique for the design of nonrecursive digital filters*. Proc. 5-th Annual Princeton Conf. Information Sciences and Systems, 1971, ss. 64–72
8. A. J. Johnson: *Optimal linear phase digital filter design by one-phase linear programming*. IEEE Trans. Circuits and Syst., vol. CAS-37, No. 4, April 1990, ss. 554–558
9. T. Kręglewski, T. Rogowski, A. Ruszczyński, J. Szymanowski: *Metody optymalizacji w języku FORTRAN*. Warszawa: PWN, 1984
10. J. H. McClellan, T. W. Parks, L. R. Rabiner: *A computer program for designing optimum FIR linear phase digital filters*. IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol. AU-21, No. 6, Dec. 1973, ss. 506–526
11. Y. Neuvo, D. Cheng – Yu, S. K. Mitra: *Interpolated finite impulse response filters*. IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Proc., vol. ASSP-32, No. 3, June 1984, ss. 563–570
12. G. Oetken, T. W. Parks, H. W. Schüssler: *New results in the design of digital interpolators*. IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Proc., vol. ASSP-23, No. 3, June 1975, ss. 301–310
13. A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer: *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów*. Warszawa: WKŁ, 1979
14. T. W. Parks, J. H. McClellan: *Chebyshev approximation for nonrecursive digital filters with linear phase*. IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-19, No. 2, March 1972, ss. 189–194
15. L. R. Rabiner, J. H. McClellan, T. W. Parks: *FIR digital filters design techniques using weighted Chebyshev approximation*. Proc. IEEE, vol. 64, No. 4, April 1975, ss. 596–610
16. L. R. Rabiner: *Linear program design of finite impulse response (FIR) digital filters*. IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol. AU-20, No. 4, Oct. 1972, ss. 280–288
17. T. Saramäki: *A class of linear-phase FIR filters for decimation, interpolation, and narrow-band filtering*. IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-32, No. 5, Oct. 1984, ss. 1023–1036
18. R. W. Schaffer, L. R. Rabiner: *A digital signal processing approach to interpolation*. Proc. IEEE, vol. 61, No. 6, June 1973, ss. 692–702
19. A. Wojtkiewicz: *Elementy syntezy filtrów cyfrowych*. Warszawa: WNT, 1984
20. F. Wysocka-Schillak: *Czebyszewowska aproksymacja charakterystyki amplitudowej dolno-przepustowego filtra SOI o liniowej fazie*. Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji, 1992, t. 38, z. 1

F. WYSOCKA-SCHILLAK

Chebyshev Approximation of the Frequency Response of a Low-Pass Interpolation Filter

Summary

In the paper the problem of the Chebyshev approximation of the frequency response of an ideal low-pass interpolation filter with regard to time-domain constraints is discussed. The approximation problem is transformed into an equivalent constrained minimization problem, which is solved using a penalty function shifting method. A description of the computer program FINT with a numerical example is included.

Obliczanie prawdopodobieństwa blokady wewnętrznej punkt-punkt w układach komutacyjnych o różnych typach grafów kanałowych

MACIEJ STASIAK

Ośrodek Badawczo-Rozwojowy Pojazdów Szynowych, Poznań

Otrzymano 1990.03.06

Autoryzowano do druku 1991.10.20

W artykule przedstawiono prostą metodę obliczeń prawdopodobieństwa blokady wewnętrznej punkt-punkt w czterosekcyjnych układach komutacyjnych, których grafy kanałowe są typu mostkowego. Podstawą dla takich obliczeń są układy komutacyjne typu szeregowo-równoległego i zdefiniowany w tym artykule współczynnik przekształcenia. Wyraża on zależność między prawdopodobieństwem blokady wewnętrznej w układzie obliczanym typu mostkowego i pomocniczym typu szeregowo-równoległego. Zostały podane dwa sposoby obliczeń tego współczynnika. Rezultaty obliczeń teoretycznych prawdopodobieństwa blokady wewnętrznej punkt-punkt w rozważanych układach komutacyjnych zostały porównane z danymi symulacji cyfrowej czterosekcyjnych układów komutacyjnych.

WPROWADZENIE

Oszacowanie prawdopodobieństwa blokady wewnętrznej w układach komutacyjnych stanowi podstawę dla określenia ich obciążalności ruchowej. Parametr ten jest niezbędny dla właściwego projektowania systemów i sieci telekomunikacyjnych.

Obliczanie prawdopodobieństwa blokady wewnętrznej punkt-punkt w układach komutacyjnych jest zagadnieniem złożonym. Metoda grafów prawdopodobieństwowych, zapoczątkowana pracami C. Y. Lee [7] i P. Le Galla [6], wielokrotnie później modyfikowana oraz ulepszana (między innymi w pracach F. K. Hwanga [3] i R. S. Kruppa [4]), mimo swej prostoty obliczeniowej w wielu wypadkach prowadzi do wyników o niedostatecznej dokładności. Wynika to z faktu, że przyjęty model, oparty na analizie grafu prawdopodobieństwowego obliczanego układu komutacyjnego nie uwzględnia wszystkich ważnych jego właściwości. Dokładniejsze rezultaty uzyskuje się stosując jedną z metod efektywnej dostępności (między innymi metody: CIRB [8], CLIGS [1], PPL [5], [9], [12], [13], [15]; PPLM [10] i metodą rozdzielonych strat MRS

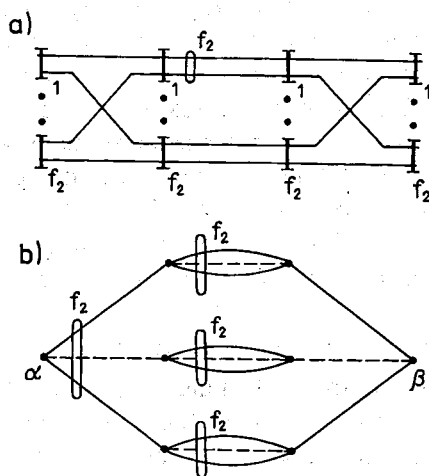
[2]). Metody te sprowadzają obliczenia prawdopodobieństwa blokad wewnętrznej w układach wielosekcyjnych do obliczeń tego prawdopodobieństwa w układzie jednosekcyjnym z odpowiednią wartością efektywnej dostępności. Metody PPL i MRS przeznaczone są do obliczeń prawdopodobieństwa blokady wewnętrznej punkt-punkt w wielosekcyjnych układach komutacyjnych. Wymagają one zastosowania złożonych procedur iteracyjnych, jednak ich zaletą jest zwiększona dokładność wyników końcowych w porównaniu z metodami opartymi wyłącznie na analizie grafów prawdopodobieństwowych obliczanych układów komutacyjnych. W [14] zaproponowano prostą metodę obliczeń prawdopodobieństwa blokady wewnętrznej punkt-punkt w wielosekcyjnych układach komutacyjnych, która nie wymaga stosowania złożonych, iteracyjnych programów i komputerowej techniki obliczeniowej. Dokładność tej metody jest natomiast porównywalna z bardziej złożonymi metodami PPL, MRS. Jednym z nielicznych wyjątków są czterosekcyjne układy komutacyjne typu mostkowego, dla których rezultaty obliczeń numerycznych znacznie odbiegają od wyników badań symulacyjnych. Omawiane układy komutacyjne są często stosowane w systemach komutacyjnych zarówno central krzyżowych jak i elektronicznych. Dlatego też w niniejszym artykule, cytowana powyżej metoda [14] została zmodyfikowana i przystosowana do obliczeń prawdopodobieństwa blokady wewnętrznej punkt-punkt w czterosekcyjnych układach komutacyjnych, których grafy są typu mostkowego. W tym celu zostanie wprowadzone pojęcie współczynnika przekształcenia. Przemnożenie przez ten współczynnik prawdopodobieństwa blokady wewnętrznej punkt-punkt w pomocniczym układzie komutacyjnym, którego graf jest typu szeregowo-równoległego, prowadzi do uzyskania prawdopodobieństwa blokady wewnętrznej punkt-punkt w obliczanym układzie komutacyjnym, którego graf jest typu mostkowego. Zostaną podane dwa sposoby określenia współczynnika przekształcenia a rezultaty obliczeń prawdopodobieństwa blokady wewnętrznej zostaną porównane z rezultatami symulacji cyfrowej czterosekcyjnych układów komutacyjnych, których grafy są typu mostkowego.

1. WSPÓŁCZYNNIK PRZEKSZTAŁCENIA

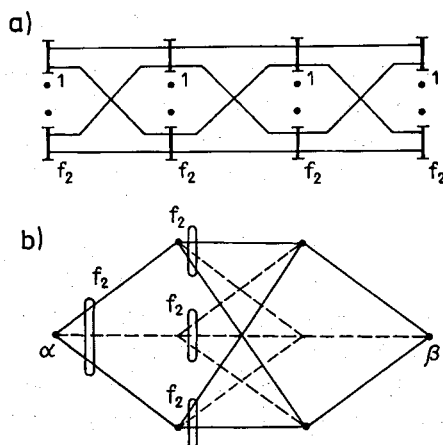
Współczynnik przekształcenia C_t określa zależność między prawdopodobieństwami bezpośredniej niedostępności w układzie komutacyjnym typu szeregowo-równoległego (rys. 1) i typu mostkowego (rys. 2). Zakłada się przy tym, że układy te mają jednakową liczbę komutatorów jak i łączy międzyselekcyjnych w każdej sekcji, a ruch załatwiany przez jedno takie łącze jest w obu układach jednakowy. Przy spełnieniu tych założeń współczynnik przekształcenia jest określony następującymi wzorami:

$$C_t = \sum_{x=0}^{m_1} C_t(x) P(x), \quad (1)$$

$$C_t(x) = \frac{\pi_{np}(x)}{\pi_p(x)} \quad (2)$$



Rys. 1. Czterosekcyjny układ komutacyjny typu szeregowo-równoległego a) struktura, b) graf prawdopodobieństwowy



Rys. 2. Czterosekcyjny układ komutacyjny typu mostkowego a) struktura, b) graf prawdopodobieństwowy

gdzie: $\pi_{np}(x)$ — prawdopodobieństwo bezpośredniej niedostępności w układzie komutacyjnym typu mostkowego przy x wolnych łączach wyjściowych określonego komutatora pierwszej sekcji. Jest to prawdopodobieństwo, że wybrany komutator ostatniej sekcji rozważanego układu komutacyjnego nie jest bezpośrednio dostępny (tj. za pośrednictwem wolnych łącz międzysekcyjnych) wybranemu komutatorowi pierwszej sekcji. Wartość parametru π wyznacza się przy założeniu, że choć jedno wyjście komutatora ostatniej sekcji jest wolne,

- $\pi_p(x)$ — prawdopodobieństwo bezpośredniej niedostępności w układzie komutacyjnym typu szeregowo-równoległego przy x wolnych łączach wyjściowych określonego komutatora pierwszej sekcji,
 $C_t(x)$ — współczynnik przekształcenia przy x wolnych łączach wyjściowych określonego komutatora pierwszej sekcji w rozważanych układach komutacyjnych typu szeregowo-równoległego i mostkowego,
 $P(x)$ — prawdopodobieństwo zdarzenia, że x łączy wyjściowych w komutatorze pierwszej sekcji jest wolnych. Jednocześnie jest to prawdopodobieństwo zajętości $(m_1 - x)$ łączy wyjściowych w tym komutatorze,
 m_1 — liczba wyjść z jednego komutatora pierwszej sekcji.

Wartość liczbowa prawdopodobieństwa niedostępności określa się w zależności od typu oferowanego ruchu i struktury układu komutacyjnego wg. metody Lee [7] lub metodą BD (metoda bezpośrednich dostępności kolejnych sekcji grafu) [14]. Wykorzystując drugą z podanych tutaj metod, wartość liczbowa współczynnika przekształcenia $C_t(x)$ dla układów z rys. 1 i rys. 2, zgodnie z Dodatkiem A wynosi:

$$C_t(x) = \begin{cases} (y_3)^{f_2(1-y_2')-x(1-y_2')} & \text{dla } f_2 > x > 0, \\ 1 & \text{dla } x=0 \text{ i } x=f_2, \end{cases} \quad (3)$$

gdzie: y_2 — średni ruch załatwiany przez jedno wyjście komutatora drugiej sekcji
 y_3 — średni ruch załatwiany przez jedno wejście komutatora czwartej sekcji, pod warunkiem że przynajmniej jedno z wyjść tego komutatora jest wolne,
 f_2 — liczba łączy w wiązce między parą komutatorów sekcji sąsiednich: drugiej i trzeciej.

Zgodnie z (1), przyjmując odpowiedni teoretyczny rozkład zajętości łączy wyjściowych w komutatorze pierwszej sekcji $P(x)$, można wyznaczyć żadaną wartość współczynnika C_t . Wartości prawdopodobieństw $\pi(x)$ są wyznaczone przy założeniu, że stany zajętości poszczególnych łączy wyjściowych są niezależne i jednakowo prawdopodobne (rozkład Bernoulli). Przyjęcie tych założeń pozwala również aproksymować $P(x)$ rozkładem Bernoulli. Taka aproksymacja została przyjęta w niniejszym opracowaniu.

Dla wartości $f_2 > 5$ procedura wyznaczania współczynnika przekształcenia C_t może zostać uproszczona bez większej szkody dla dokładności wyniku końcowego. Uproszczenie to polega na uniezależnieniu obliczeń C_t od rozkładu zajętości łączy wyjściowych w komutatorze pierwszej sekcji $P(x)$. Współczynnik przekształcenia będzie wtedy równy:

$$C_t = \pi_{np} / \pi_p, \quad (4)$$

gdzie π_{np} i π_p wyznaczono bezpośrednio na podstawie wzorów (A1)–(A6) przedstawionych w Dodatku A. Oznacza to, że bezpośrednia dostępność drugiej sekcji grafu jest wyznaczona wzorem (A3) a nie wzorem (A7).

Zmiana struktury układu komutacyjnego, z szeregowo-równoległej na mostkową pociąga za sobą zmianę wartości efektywnej dostępności. Wartość efektywnej dostępności można określić zmodyfikowanym w [14] wzorem Jerszowa [2]:

$$d_e = (1 - \pi) V + \pi \eta Y'_1 + \pi (V - \eta Y'_1) y_s \sigma_s, \quad (5)$$

gdzie: π — prawdopodobieństwo bezpośredniej niedostępności rozważanego s -sekcyjnego układu komutacyjnego,

η — ta część średniego natężenia ruchu komutatora pierwszej sekcji, która jest załatwiana przez rozpatrywany kierunek,

V — liczba łączy wyjściowych rozważanego kierunku,

Y'_1 — średni ruch załatwiany przez jeden komutator pierwszej sekcji, pod warunkiem, że przynajmniej jedno wejście tego komutatora jest wolne,

y_s — średni ruch załatwiany przez jedno wyjście komutatora ostatniej sekcji w rozpatrywanym kierunku,

σ_s — współczynnik wtórnej dostępności [14]. Określa on średnią liczbę tych dróg połączeniowych między rozpatrywanym kierunkiem i określonym komutatorem pierwszej sekcji, które są zablokowane przez wywołania (tego kierunku), pochodzące od innych komutatorów pierwszej sekcji.

Przy przyjętym na początku tego rozdziału założeniu, że układy komutacyjne, dla których jest określany współczynnik C , mają jednakową liczbę łączy międzysekcyjnych w każdym komutatorze każdej sekcji, a średni ruch obsługiwany przez jedno łącze międzysiekcyjne jest w obu układach jednakowy, różnica między efektywnymi dostępnościami układów tego typu szeregowo-równoległego i mostkowego będzie zależna od dwóch parametrów: π , σ_s (wzór (5)). Różnica między parametrami σ_s rozważanych układów jest wynikiem zmiany bezpośrednich dostępności sekcji pośrednich, od których współczynnik wtórnej dostępności σ_s zależy [14]. Obliczenia jak i badania symulacyjne odpowiednich układów komutacyjnych pozwalają stwierdzić, że zmiana wartości współczynników σ_s przy rozpatrywanym przekształceniu struktury układu jest nieznaczna i może być w obliczeniach pominięta. Można więc przyjąć, że w związek między efektywną dostępnością układu szeregowo-równoległego $d_{e,p}$ i mostkowego $d_{e,np}$ jest zależny wyłącznie od parametru π .

Zgodnie z [14], prawdopodobieństwo blokady wewnętrznej punkt-punkt w wielosekcyjnym układzie komutacyjnym może być określone następującym wzorem:

$$P_b = (V - d_e) / V. \quad (6)$$

Obliczając $d_{e,np}$ zgodnie ze wzorem (5) i podstawiając tę wartość do (6) otrzymuje się prawdopodobieństwo blokady wewnętrznej punkt-punkt w układzie komutacyjnym typu mostkowego:

$$P_{b,np} = \frac{\pi_{np} [V - \eta Y'_1 - (V - \eta Y'_1) y_s \sigma_s]}{V}. \quad (7)$$

Analogicznie, prawdopodobieństwo blokady wewnętrznej punkt-punkt w układzie komutacyjnym typu szeregowo-równoległego wyrazi się wzorem:

$$P_{b,p} = \frac{\pi_p V - \eta Y'_1 - (V - \eta Y'_1) y_s \sigma_s}{V}. \quad (8)$$

Wzory (7), (8) pokazują, że związek między prawdopodobieństwami blokady wewnętrznej punkt-punkt w rozpatrywanych układach komutacyjnych typu mostkowego i szeregowo-równoległego będzie identyczny jak określona przez współczynnik przekształcenia zależność między parametrami π_{np} i π_p . Z dostateczną dla obliczeń inżynierskich dokładnością można więc ostatecznie przyjąć, że:

$$P_{b,np} = C_t P_{b,p}. \quad (9)$$

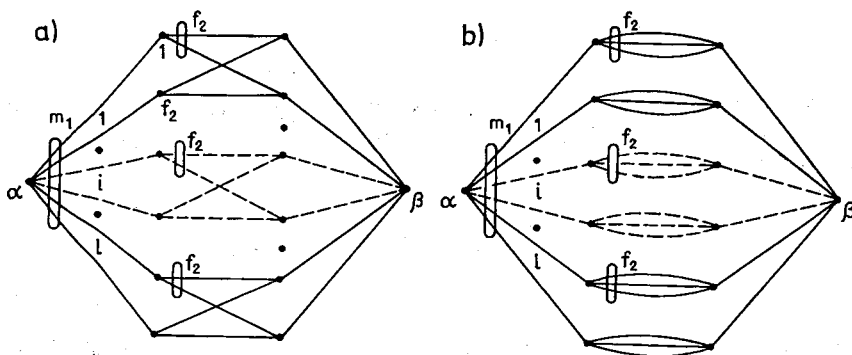
Wzór (9) określa algorytm obliczeń prawdopodobieństwa blokady wewnętrznej punkt-punkt w układach komutacyjnych, których grafy są typu mostkowego. Polega on na określeniu prawdopodobieństwa blokady wewnętrznej punkt-punkt w pomocniczym, ekwiwalentnym (ze względu na liczbę i obciążenie łączy międzysekcyjnych) układzie komutacyjnym typu szeregowo-równoległego. Następnie określa się współczynnik przekształcenia dla układów: pomocniczego i obliczanego. Przemnożenie przez siebie tych dwóch parametrów określa prawdopodobieństwo blokady wewnętrznej punkt-punkt w układzie komutacyjnym typu mostkowego.

Prawdopodobieństwo $P_{b,np}$ można oczywiście wyznaczyć bezpośrednio, metodą [14]. Bardziej dokładne rezultaty, szczególnie dla układów czterosekcyjnych, uzyskuje się przy zastosowaniu wzoru (9). Praktyka obliczeniowa pokazała bowiem, że zaproponowany w [14] i przytaczany tutaj model matematyczny pozwala w przypadku układów czterosekcyjnych bardziej dokładnie ustalić zależność między prawdopodobieństwami $P_{b,p}$ i $P_{b,np}$ niż samą wartość $P_{b,np}$. Celowe jest zatem wykorzystanie tej właściwości w obliczeniach inżynierskich.

Układy o liczbie sekcji większej od czterech ($s > 4$) można obliczyć również z zastosowaniem współczynnika przekształcenia przeprowadzając analogiczne rozważania, jak w przypadku układów czterosekcyjnych. Jednak wzory obliczeniowe, wyrażające współczynnik przekształcenia, w miarę wzrostu liczby sekcji w układach komutacyjnych typu mostkowego są coraz bardziej złożone. W związku z tym ich wykorzystanie praktyczne nie zawsze jest efektywne. Z drugiej strony przy zastosowaniu omawianej metody BD, najmniej dokładne wyniki uzyskuje się właśnie dla układów czterosekcyjnych. W miarę wzrostu liczby sekcji układów komutacyjnych typu mostkowego błąd określonego prawdopodobieństwa blokady wewnętrznej punkt-punkt maleje. W związku z tym dla liczby sekcji w układzie komutacyjnym typu mostkowego, większej od czterech ($s > 4$), zaleca się bezpośrednie stosowanie metody [14]. Prawdopodobieństwo blokady wewnętrznej punkt-punkt określone wg tej metody dla układów komutacyjnych typu mostkowego o liczbie sekcji większej od czterech może mieć wartości nieco zawyżone w stosunku do wartości rzeczywistych. Różnica tych wartości jest jednak nieznaczna i w pełni dopuszczalna z punktu widzenia obliczeń inżynierskich.

2. OBLICZANIE WSPÓŁCZYNNIKA PRZEKSZTAŁCENIA W ZŁOŻONYCH CZTEROSEKCYJNYCH UKŁADACH KOMUTACYJNYCH

Zostanie teraz rozważony układ komutacyjny typu mostkowego, którego graf prawdopodobieństwowy przedstawiono na rys. 3a. Układ składa się z $L = m_1/f_2$



Rys. 3. Grafy prawdopodobieństwowe czterosekcyjnych, złożonych układów komutacyjnych a) graf układu typu mostkowego, b) graf układu pomocniczego typu szeregowo-równoległego

równolegle połączonych podsystemów typu mostkowego, którym odpowiadają podgrafy na grafie prawdopodobieństwowym rozpatrywanego systemu. Na rys. 3b przedstawiono graf pomocniczego układu typu szeregowo-równoległego dla obliczeń współczynnika przekształcenia.

Zakłada się, że spośród m_1 łączy wychodzących z określonego komutatora pierwszej sekcji (któremu odpowiada węzeł początkowy α na grafie) x jest wolnych. Prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest równe $P(x)$. W każdym z L podsystemów może znajdować się pewna liczba wolnych łączy międzysekcyjnych, mianowicie w pierwszym podsystemie x_1 , w drugim $x_2, \dots$, w ostatnim x_L . Prawdopodobieństwo takiego rozkładu wolnych łączy międzyselekcyjnych w poszczególnych podsystemach jest prawdopodobieństwem warunkowym, ponieważ suma wszystkich x_i , gdzie $(1 \leq i \leq L)$ musi być równa liczbie wszystkich wolnych łączy międzyselekcyjnych, wychodzących z określonego komutatora pierwszej sekcji:

$$x = \sum_{i=1}^L x_i. \quad (9)$$

Rozważane prawdopodobieństwo warunkowe oznacza się symbolem $p(x_1, x_2, \dots, x_L/x)$.

Współczynnik przekształcenia i – podsystemu $(1 \leq i \leq L)$ rozważanego układu komutacyjnego, przy założeniu, że x_i łączy międzyselekcyjnych między pierwszą i drugą sekcją w tym podsystemie będzie wolnych jest określony wzorem (3), a mianowicie:

$$C_{i,i}(x_i) \begin{cases} (y_3')^{f_2(1-y_2')-x_i(1-y_2')} & \text{dla } f_2 > x_i > 0 \\ 1 & \text{dla } x_i = 0 \text{ i } x_i = f_2. \end{cases} \quad (10)$$

Na podstawie definicji współczynnika przekształcenia i metody grafów prawdopodobieństwowych można łatwo dowieść, że wartość współczynnika przekształcenia w układzie $C_i(x_1, x_2, \dots, x_L)$, w którym każdy i -podsystem ma x_i wolnych łączy międzyselekcyjnych (między pierwszą i drugą sekcją) jest równa iloczynowi współczynników przekształcenia w poszczególnych podsystemach:

$$C_t(x_1, x_2, \dots, x_L) = \prod_{i=1}^L C_{t,i}(x_i) \quad (11)$$

Zatem współczynnik przekształcenia rozważanego układu komutacyjnego przy założeniu, że x łączy wyjściowych określonego komutatora pierwszej sekcji jest wolny określi następujący wzór:

$$C_t(x) = \sum_{s=0}^S \prod_{i=1}^L C_{t,i}(x_i) p(x_1, x_2, \dots, x_L/x), \quad (12)$$

gdzie:

S – liczba wszystkich możliwych wyborów x elementów z L grup po f_2 elementów w każdej.

Współczynnik przekształcenia rozważanego układu, zgodnie z definicją (wzór (1)) jest równy:

$$C_t = \sum_{x=0}^{m_1} \left[\sum_{s=0}^S \prod_{i=1}^L C_{t,i}(x_i) p(x_1, x_2, \dots, x_L/x) \right] P(x). \quad (13)$$

Ponieważ wzór (13) jest bardzo złożony z punktu widzenia obliczeń inżynierskich, poniżej zostaną przedstawione dwa nieformalne sposoby takiego uproszczenia tego wzoru, które pozwolą na jego zastosowanie praktyczne.

2.1. WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKA PRZEKSZTAŁCENIA WG ŚREDNICH WSPÓŁCZYNNIKÓW W PODSYSTEMACH

We wzorze (13) zastępuje się każdy współczynnik przekształcenia w podsystemie $C_{t,i}(x_i)$ przy x_i zajętych łączach wyjściowych z określonego komutatora pierwszej sekcji, jego wartością średnią. Przy zastosowaniu takiej procedury wzór (13) zostanie uniezależniony od rozkładu $p(x_1, x_2, \dots, x_L/x)$ i przyjmie postać:

$$C_t = \prod_{i=1}^L C_{t,i} = (C_{t,i})^L, \quad (14)$$

gdzie:

$C_{t,i}$ – wartość średnia współczynnika przekształcenia w i -podsystemie, określona wzorami (1)–(2).

W układach z ekspansją ($m_1 > n_1$), nawet przy wszystkich zajętych n_1 łączach wejściowych w określonym komutatorze pierwszej sekcji, $(m_1 - n_1)$ jego wyjść pozostanie wolnych. Można więc nieformalnie przyjąć, że $(m_1 - n_1)/f_2$ podsystemów będzie miało wszystkie łącza międzysekcyjne (między pierwszą a drugą sekcją) wolne. Zgodnie z (10) współczynnik przekształcenia jest dla takiego przypadku równy jedności. Z uwzględnieniem powyższych uwag, wzór (14) można zapisać w następującej postaci:

$$C_t = \prod_{i=1}^Z C_{t,i} = (C_{t,i})^Z, \quad (15)$$

gdzie:

$$Z = L \text{ dla } m_1 = n_1,$$

$$Z = L - \frac{(m_1 - n_1)}{f_2} \quad \text{dla } m_1 > n_1.$$

2.2. WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKA PRZEKSZTAŁCENIA WG JEDNEGO ROZKŁADU

Sposób ten polega na zastąpieniu w (13) liczby wolnych łączy międzysekcyjnych — x , wychodzących z określonego komutatora pierwszej sekcji, wartością bezpośredniej dostępności drugiej sekcji grafu prawdopodobieństwowego tego układu M_2 , określonej wzorem (A3):

$$x = \text{const} = M_2 = (1 - y'_1) n_1 + (m_1 - n_1). \quad (16)$$

Przy takim założeniu (13) przyjmuje się następującą postać:

$$C_t = \sum_{i=1}^S \prod_{i=1}^L C_{t,i}(x_i) p(x_1, x_2, \dots, x_L / M_2). \quad (17)$$

Dalsze uproszczenie (17) polega na uniezależnieniu tego wzoru od rozkładu $p(x_1, x_2, \dots, x_L / M_2)$. W tym celu przyjęto w każdym podsystemie stałą liczbę wolnych łączy wychodzących z określonego komutatora pierwszej sekcji: $x_i = \text{const}$. Wzór (17) przyjmie teraz następującą postać:

$$C_t = \prod_{i=1}^L C_{t,i}(x_i), \quad (18)$$

gdzie:

$$\sum_{i=1}^L x_i = M_2.$$

Wartości x_i w każdym podsystemie określa przedstawiona w Dodatku B procedura heurystyczna, w wyniku działania, której otrzymuje się:

Z_1 podsystemów z x wolnymi łączyami między pierwszą i drugą sekcją,

Z_2 podsystemów z $(x-1)$ wolnymi łączyami.

Parametry Z_1, Z_2, x , zgodnie z Dodatkiem B, określa się następującymi wzorami:

$$x-1 = \left(\left\lfloor \frac{M_2}{L} \right\rfloor \right) L, \quad (19)$$

$$Z_1 = M_2 - \left(\left\lfloor \frac{M_2}{L} \right\rfloor \right) L, \quad (20)$$

$$Z_2 = L \left(1 + \left\lfloor \frac{M_2}{L} \right\rfloor \right) - M_2. \quad (21)$$

gdzie: $[A]$ oznacza część całkowitą wyrażenia zawartego w nawiasie. Po określeniu parametrów x , Z_1 , Z_2 , na podstawie (18) oblicza się współczynnik przekształcenia układu:

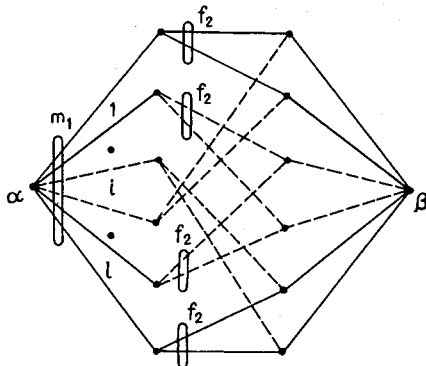
$$C_t = [C_{t,i}(x-1)]^{Z_2} [C_{t,i}(x)]^{Z_1}, \quad (22)$$

gdzie: $C_{t,i}(x)$ oblicza się wg (10).

Należy zwrócić uwagę, że wzory (20) i (21) pozwalają obliczyć żądane parametry Z_1 , Z_2 dla niecałkowitych wartości parametru M_2 . Takie podejście jest wygodne, ponieważ nie zachodzi potrzeba interpolacji wyników końcowych ze względu na ten parametr. Obliczane parametry Z_1 , Z_2 mogą również przyjmować wartości niecałkowite.

3. UKŁADY RÓWNOWAŻNE ZE WZGLĘDU NA PRAWDOPODOBIENSTWO BLOKADY WEWNĘTRZNEJ PUNKT-PUNKT

Badania symulacyjne przeprowadzone przez autora wykazały, że pewne układy komutacyjne typu mostkowego, które różnią się między sobą sposobami połączeń łączy międzysekcyjnych, są ekwiwalentne ze względu na prawdopodobieństwo blokady wewnętrznej punkt-punkt. Oznacza to, że zmiany wartości tego prawdopodobieństwa są nierozróżnialne z punktu widzenia obliczeń inżynierskich i mogą zostać pominięte. Dotyczy to między innymi układów, których grafy zostały przedstawione na rysunkach 3a i 4. W grafie na rys. 4, f_2 krawędzi wychodzących z pierwszego węzła drugiej sekcji łączy się z f_2 kolejnymi (od pierwszego do f_2) węzłami trzeciej sekcji. f_2 krawędzi wychodzących z drugiego węzła drugiej sekcji łączy się z następnymi, kolejnymi (od (f_2+1) do (f_2+f_2)) węzłami trzeciej sekcji, itd. Po połączeniu wszystkich węzłów trzeciej sekcji, procedura powtarza się, licząc od pierwszego węzła trzeciej sekcji.



Rys. 4. Graf prawdopodobieństwowy układu ekwiwalentnego układowi typu mostkowego — rys. 3 a) ze względu na prawdopodobieństwo blokady wewnętrznej punkt-punkt

Układ komutacyjny pozostanie ekwiwalentnym, jeżeli przedstawiona wyżej kolejnościowa zasada połączenia krawędzi wychodzących z węzłów drugiej sekcji zostanie naruszona. W najogólniejszym przypadku zasada połączeń między węzłami drugiej i trzeciej sekcji może być dowolna. Muszą być jednak spełnione dwa następujące warunki:

- z każdego węzła drugiej sekcji wychodzą f_2 krawędzie i w każdym węźle trzeciej sekcji zbiega się f_2 krawędzi,
- krawędzie wychodzące z dowolnego węzła drugiej sekcji są połączone z różnymi węzłami trzeciej sekcji.

Rozpatrywana wyżej ekwiwalentność układów komutacyjnych jest istotna dla obliczeń inżynierskich prawdopodobieństwa blokady wewnętrznej punkt-punkt. Pozwala bowiem sprowadzić obliczenia układów typu mostkowego o różnych sposobach włączenia łączy międzysekcyjnych do obliczeń układów o symetrycznym i regularnym sposobie włączenia (rys. 4a). Popelniony przy tym błąd jest niewielki i w obliczeniach praktycznych może być pominięty.

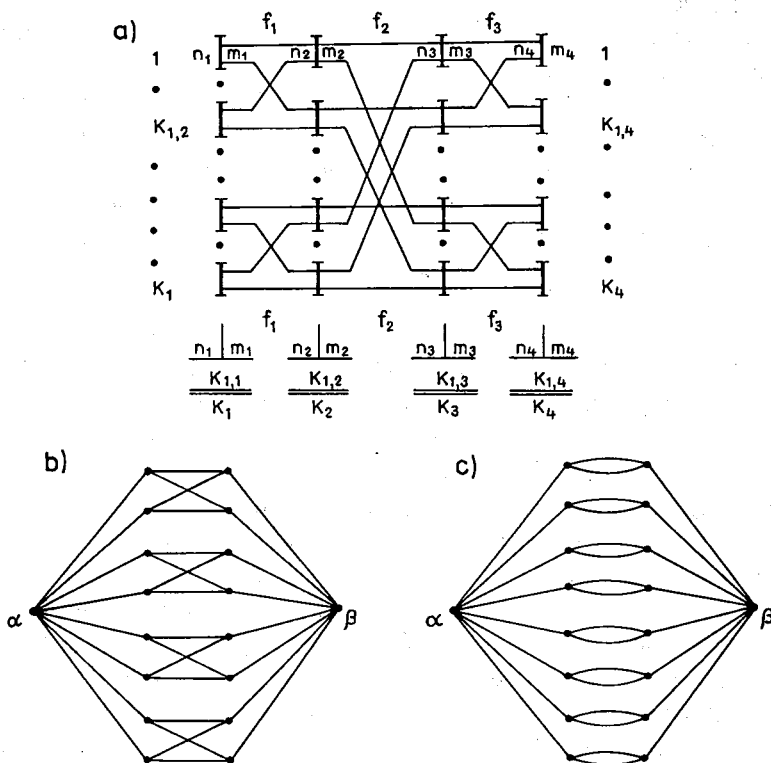
4. PORÓWNANIE REZULTATÓW OBLICZEŃ TEORETYCZNYCH PRAWDOPODOBIENSTWA BLOKADY WEWNĘTRZNEJ PUNKT-PUNKT Z DANYMI SYMULACJI CYFROWEJ

Przedstawiona metoda obliczeń prawdopodobieństwa blokady wewnętrznej punkt-punkt w czterosekcyjnych układach komutacyjnych typu mostkowego jest metodą przybliżoną. W związku z tym, dla potwierdzenia słuszności przyjętych w niej założeń, w rozdziale tym, rezultaty obliczeń teoretycznych porównano z danymi symulacji cyfrowej odpowiednich układów komutacyjnych. Do tego celu wykorzystano wyniki symulacji cyfrowej zawarte w pracy A. Lotze, A. Röder'a i G. Thierer'a [9]. Są one przedstawione na rysunkach w postaci odpowiednio oznaczonych punktów z 95% przedziałami ufności, dla przypadkowego i kolejnościowego algorytmu wyboru łączy. Oferowany układowi komutacyjnemu ruch, jest we wszystkich rozważanych przypadkach ruchem typu Erlanga, a wiązka wyjściowa ma pojemność $V = 250$.

Na rysunkach przedstawiono po dwa wykresy, które odpowiadają obliczeniom teoretycznym prawdopodobieństwa blokady wewnętrznej punkt-punkt, w zależności od ruchu załatwianego przez jedno wejście systemu y_0 . Obliczenia te wynikają z proponowanej metody. Pierwszy wykres (oznaczony cyfrą 1) jest wynikiem obliczeń, w których współczynnik przekształcenia określono wg średnich współczynników w podsystemach – rozdział 2.1. Drugi wykres (oznaczony cyfrą 2) dotyczy obliczeń, w których współczynnik przekształcenia określono wg „jednego rozkładu” – rozdział 2.2. Jednocześnie, na rysunkach przerywaną linią zaznaczono rezultaty obliczeń teoretycznych, wynikających z metody PPL [9].

Obliczenia wykonywano wg przyjętego w rozdziale 2, algorytmu, tj. najpierw określono prawdopodobieństwa blokady wewnętrznej punkt-punkt w pomocniczym układzie komutacyjnym typu równoległego. Następnie obliczono współczynnik przekształcenia i po przemnożeniu tych dwóch parametrów uzyskano prawdopo-

bieństwo blokady wewnętrznej punkt-punkt w układzie komutacyjnym typu mostkowego. Prawdopodobieństwo blokad wewnętrznych w pomocniczych układach typu równoległego zostały wyznaczone na podstawie metody prezentowanej w [14], i w tej też pracy znajdują się przykłady obliczeń takich układów. W niniejszym opracowaniu rezultaty obliczeń układów pomocniczych zostały przedstawione na oddzielnych rysunkach wraz z danymi symulacji cyfrowej.



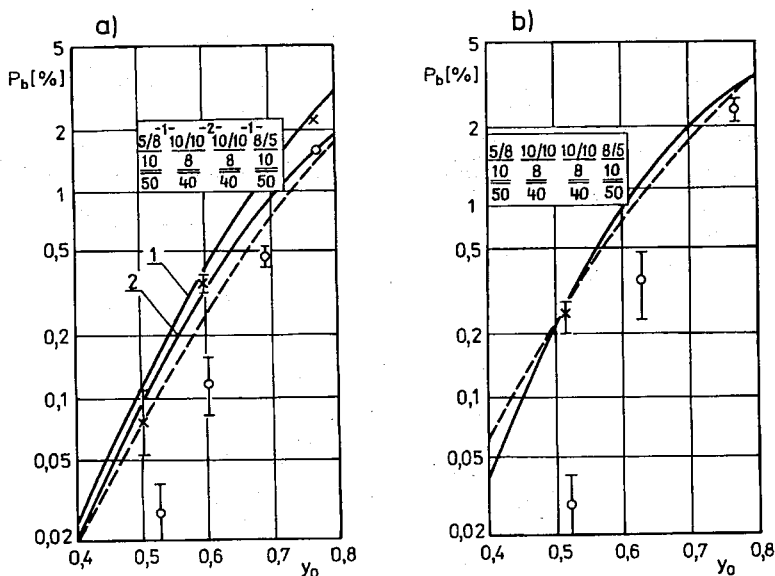
Rys. 5. Czterosekcyjny układ komutacyjny typu mostkowego z parametrami: $f_1 = f_3 = 1, f_2 = 2$. a) struktura, b) graf prawdopodobieństwowy, c) graf prawdopodobieństwowy układu pomocniczego

Na rys. 5 przedstawiono strukturę obliczanego czterosekcyjnego układu komutacyjnego typu mostkowego, jego graf prawdopodobieństwowy oraz graf prawdopodobieństwowy układu pomocniczego. Rys. 6 przedstawia rezultaty symulacji cyfrowej i obliczeń teoretycznych prawdopodobieństwa blokady wewnętrznej punkt-punkt: P_b w rozważanym i pomocniczym układzie komutacyjnym.

Średni współczynnik przekształcenia tego układu, zgodnie z wzorami (1), (2), (10), (15) jest równy:

$$C_t = \{[2y'_1(1-y'_1)](y'_3)^{(1-y_2)^2} + (y'_1)^2 + (1-y'_1)^2\}^Z,$$

gdzie:



Rys. 6. Prawdopodobieństwo blokady wewnętrznej punkt-punkt w cztero-sekcyjnych układach komutacyjnych z parametrami: $f_1 = f_3 = 1$, $f_2 = 2$.

a) w układzie typu mostkowego, b) w układzie pomocniczym typu szeregowo-równoległym symulacja:

× algorytm przypadkowy selekcji, ○ algorytm kolejnościowy selekcji,
obliczenia: --- metoda PPL, — metoda proponowana

1. współczynnik przekształcenia określony wg średnich współczynników w podsystemach, 2. współczynnik przekształcenia określony wg jednego rozkładu

$$Z = L - \frac{m_1 - n_1}{f_2}.$$

Współczynnik przekształcenia wyznaczony na podstawie „jednego rozkładu”, zgodnie z (1), (2), (10), (19)–(22) jest określany przez następujące wzory:

$$C_t = [C_t(x-1)]^{Z_2} [C_t(x)]^{Z_1},$$

gdzie:

$$x = \left\lfloor \frac{M_2}{L} \right\rfloor + 1,$$

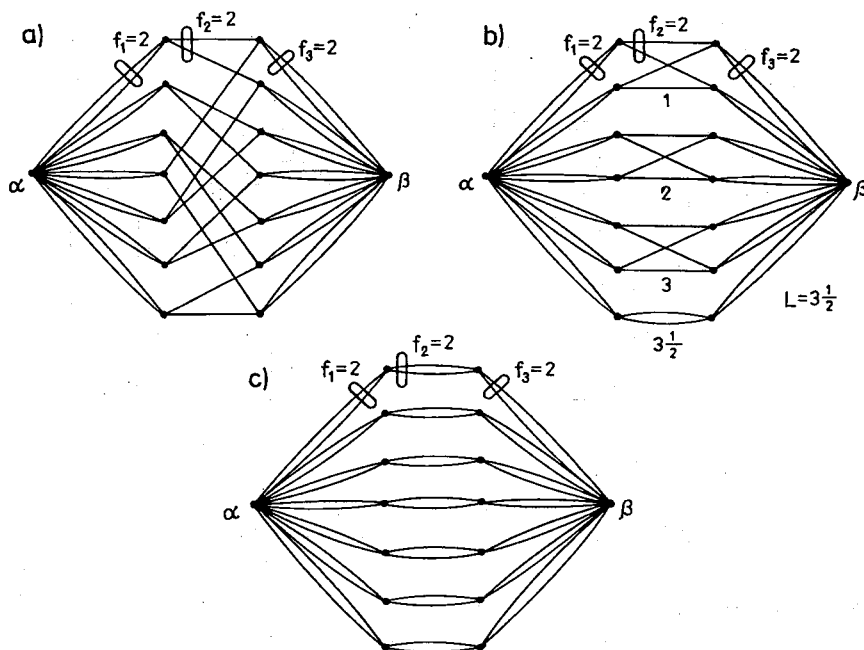
$$M_2 = (1 - y'_1)n_1 + (m_1 - n_1),$$

$$Z_1 = M_2 - \left(\left\lfloor \frac{M_2}{L} \right\rfloor \right) L, \quad (23)$$

$$Z_2 = L \left(1 + \left\lfloor \frac{M_2}{L} \right\rfloor \right) - M_2,$$

$$C_t(x) = (y'_3)^{f_2(1 - y_2^x) - x(1 - y_2^f)},$$

$$C_t(x-1) = (y'_3)^{f_2(1 - y_2^{x-1}) - (x-1)(1 - y_2^f)}.$$



Rys. 7. Czterosekcyjny układ komutacyjny typu mostkowego z parametrami: $f_1=f_2=f_3=2$
 a) graf prawdopodobieństwowy, b) graf prawdopodobieństwowy układu ekwiwalentnego ze względu na
 prawdopodobieństwo blokady wewnętrznej, c) graf prawdopodobieństwowy układu pomocniczego

Rys. 7. przedstawia graf prawdopodobieństwowy czterosekcyjnego układu komutacyjnego typu mostkowego, w którym $f_1=f_2=f_3=2$. Na rys. 7b pokazano graf układu ekwiwalentnego ze względu na prawdopodobieństwo blokady wewnętrznej (rozdział 3), a na rys. 7c graf układu pomocniczego. Rys. 8 ilustruje rezultaty porównania danych symulacji cyfrowej z obliczeniami prawdopodobieństwa blokady wewnętrznej.

Prawdopodobieństwo zajętości łączy wyjściowych z określonego komutatora pierwszej sekcji jest zgodne w każdym podsystemie z przyjętym w niniejszym opracowaniu rozkładem Bernoulli, tj.

$$P(x) = \binom{f_2}{x} [(y'_1)^{f_1}]^{(f_2-x)} [1-(y'_1)^{f_1}]^x.$$

Średni współczynnik przekształcenia wyrażony więc będzie następującym wzorem:

$$C_t = \left\{ \sum_{x=0}^{f_2} P(x) [(y'_3)^{f_3(1-y^{x_2})-x(1-y^{f_2})}]^Z \right\}^Z. \quad (24a)$$

Dla układów komutacyjnych, w których liczba łączy międzysekcyjnych między komutatorami pierwszej i drugiej sekcji jest większa od jedności ($f_1 > 1$), parametr Z jest równy:

$$Z = \frac{m_1}{f_1 \cdot f_2} - \frac{(m_1 - n_1)}{f_1 \cdot f_2}. \quad (24)$$

Współczynnik przekształcenia, wyznaczony na podstawie „jednego rozkładu” oblicza się dla rozważanego przypadku ($f_1 > 1, f_3 > 1$) wg następujących wzorów:

$$C_t = [C_t(x-1)]^{Z_2} [C_t(x)]^{Z_1}, \quad (25)$$

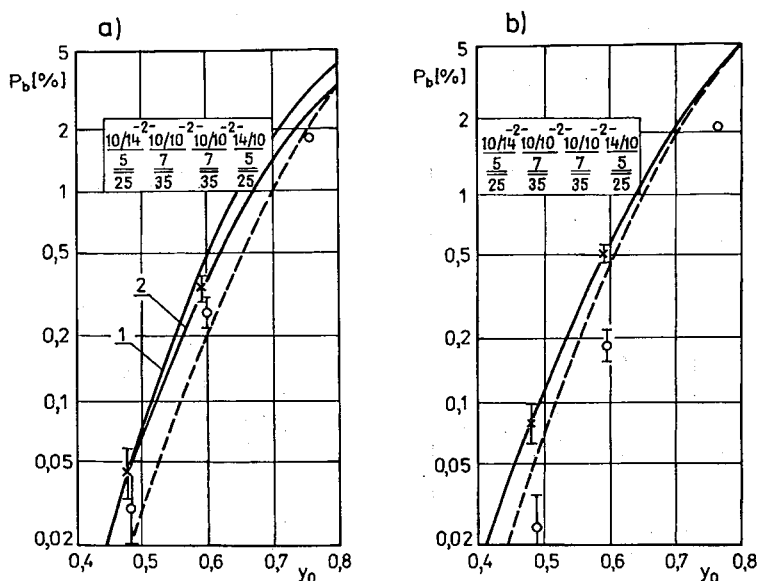
gdzie:

$$x = \left\lfloor \frac{M_2}{L} \right\rfloor + 1, \quad (26)$$

$$M_2 = [1 - (y'_1)^{f_1}] \frac{n_1}{f_1} + \frac{m_1 - n_1}{f_1}, \quad (27)$$

$$L = \frac{m_1}{f_1 f_2}, \quad (28)$$

$$Z_1 = M_2 - \left(\left\lfloor \frac{M_2}{L} \right\rfloor \right) L, \quad (29)$$



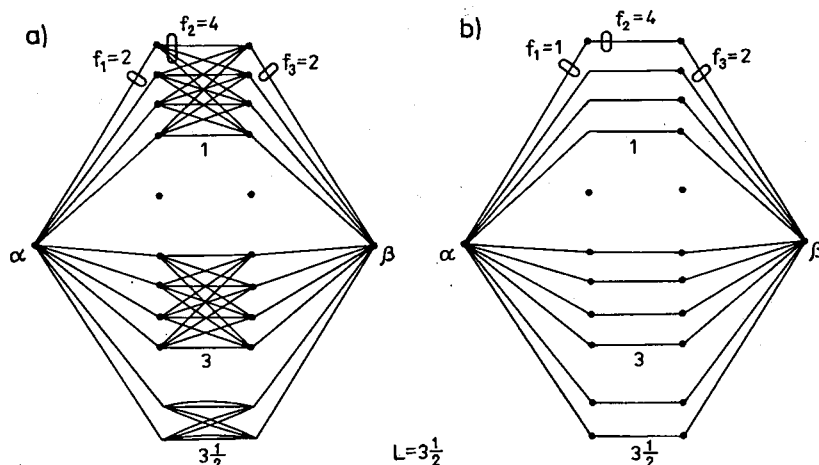
Rys. 8. Prawdopodobieństwo blokady wewnętrznej punkt-punkt w czterooskcyjnych układach komutacyjnych z parametrami $f_1 = f_2 = f_3 = 2$

a) w układzie typu mostkowego, b) w układzie typu równoległego,

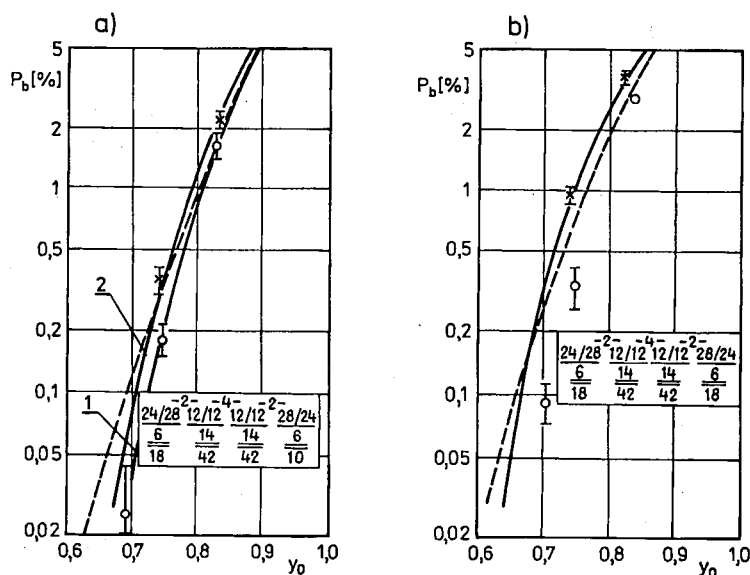
symulacja: x algorytm przypadkowy selekcji, o algorytm kolejnościowy selekcji,

obliczenia: --- metoda PPL, — metoda proponowana,

1. współczynnik przekształcenia określony wg średnich współczynników w podsystemach, 2. współczynnik przekształcenia określony wg jednego rozkładu



Rys. 9. Czterosekcyjny układ komutacyjny typu mostkowego z parametrami: $f_1=f_3=3, f_2=4$
 a) graf prawdopodobieństwowy układu ekwiwalentnego ze względu na prawdopodobieństwo blokady wewnętrznej, b) graf prawdopodobieństwowy układu pomocniczego



Rys. 10. Prawdopodobieństwo blokady wewnętrznej punkt-punkt w czterosekcyjnych układach komutacyjnych z parametrami: $f_1=f_3=2, f_2=4$

a) w układzie typu mostkowego, b) w układzie typu szeregowo-równoległego
 symulacja: $\times$ algorytm przypadkowy selekcji, $\circ$ algorytm kolejnościowy selekcji
 obliczenia: --- metoda PPL, — metoda proponowana,

1. współczynnik przekształcenia określony wg średnich współczynników w podsystemach,
2. współczynnik przekształcenia określony wg jednego rozkładu

$$Z_2 = L \left(1 + \left\lfloor \frac{M_2}{L} \right\rfloor \right) - M_2, \quad (30)$$

$$C_t(x) = (y'_3)^{f_2(1-y_2^x) - x(1-y_2^{f_2})} f_3, \quad (31)$$

$$C_t(x-1) = (y'_3)^{f_2(1-y_2^{x-1}) - (x-1)(1-y_2^{f_2})} f_3. \quad (32)$$

Rys. 9a przedstawia graf prawdopodobieństwowy ekwiwalentnego (ze względu na prawdopodobieństwo blokady wewnętrznej) czterosekcyjnego układu komutacyjnego z parametrami $f_1=f_3=2$ i $f_2=4$. Na rys. 9b pokazano graf prawdopodobieństwowy układu pomocniczego. Średni współczynnik przekształcenia dla tego układu jak i współczynnik przekształcenia wynikający z jednego rozkładu, oblicza się analogicznymi wzorami, jak w przypadku układu poprzedniego (tj. wzory od (23) do (24)). Rezultaty obliczeń teoretycznych prawdopodobieństwa blokady wewnętrznej punkt-punkt tego układu jak i symulacji cyfrowej ilustruje rys. 10.

WNIOSKI

Ze względu na wysoki stopień złożoności, obliczenia prawdopodobieństwa blokady wewnętrznej w układach komutacyjnych typu mostkowego wymagają dużego nakładu pracy. Zaprezentowana w artykule metoda pokazuje, że obliczenia takie mogą zostać przeprowadzone w sposób bardziej prosty, niż wynika to z dotychczas stosowanych metod. Uproszczenia są wynikiem wykluczenia z obliczeń złożonych procedur, w tym iteracyjnych.

Porównanie rezultatów obliczeń z danymi symulacji cyfrowej czterosekcyjnych układów komutacyjnych wskazuje, że dokładność proponowanej metody jest taka sama jak metod bardziej złożonych. Wydaje się zatem, że może ona okazać się szczególnie przydatna w praktyce inżynierskiej. Ponadto, podstawowy parametr — współczynnik przekształcenia wyraża zależność między prawdopodobieństwami blokady wewnętrznej punkt-punkt w układach komutacyjnych typu równoległego i mostkowego. W związku z tym wyprowadzone wzory mogą być również zastosowane przy wyborze struktury układów komutacyjnych jak i w pracach nad ich optymalizacją.

BIBLIOGRAFIA

1. D. B a z l e n, G. K a m p e, A. L o t z e: *On the influence of hunting mode and link wiring on the loss of link systems*. Proc. 7 th Int. Teletraffic Congress, Stockholm, 1973, pp. 232/1–12
2. E. B. J e r s z o w a, W. A. J e r s z o w: *Cyfrowe systemy raspriedielenia informacii*. Moskwa, Radio i swiaz, 1978
3. F. K. H w a n g: *Blocking probabilities for a class of spiderweb channel graphs*. IEEE Trans., Jan. 1980, vol. COM—28, n° 1, pp. 115–117
4. R. S. K r u p p: *Analysis of toll switching networks*. Bell Syst. Techn. J., July 1976, vol. 55 n. 7, pp. 843–856

5. A. J a j s z c z y k, J. K l e b a n, J. K u b a s i k: *On congestion in switching networks composed of digital switching matrices*. Proc. 12 th Int. Teletraffic Congres, Torino, 1988, paper 5.4 A. 7.1
6. P. L e G a l l: *Etude du blocage dans les systèmes de commutation téléphonique automatique utilisant des commutateurs électroniques de type Crossbar*. Ann. Télécommun., 1956, 11, n° 7–8, p. 159, n° 9, p. 180
7. C. Y. L e e: *Analysis of switching networks*. Bell Syst. Techn. J., nov. 1955, vol. 34, n° 6 pp. 1287–1315
8. A. L o t z e: *Bericht über verkehrstheoretische Untersuchungen* CIRB. Inst. für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung der Technischen Hochschule. Stuttgart, S. 1–42
9. A. L o t z e, A. R ö d e r, G. T h i e r e r: *PPL – A reliable method for the calculation of point-to-point loss in link systems*. Proc. 8 th. Int. Teletraffic Congress, Melbourne, 1976, pp. 547/1–44
10. A. L o t z e, A. R ö d e r, G. T h i e r e r: *Point-to-point loss in case of multiple marking attempts*, Institute of Switching and Data Technics, University of Stuttgart, 1976, pp. 1–24
11. A. L o t z e, K. R o t h m a i e r, R. S c h e l l e r: *PCM – charts*, Institute of Switching and Data Technics. University of Stuttgart, 1979
12. K. R o t h m a i e r, R. S c h e l l e r: *Design of economic PCM arrays with a prescribed grade of service*. IEEE Trans. Commun., aug 1981, vol. CoM–29, n° 7, pp. 925–935
13. K. R o t h m a i e r, R. S c h e l l e r: *On the traffic capacity of PCM switching arrays a function of internal traffic and path allocation modes*. Proc. 10 th Int. Teletraffic Congress. Montreal 1983, paper 5.1.8
14. M. S t a s i a k: *Blocage interne point à point dans réseaux de connexion*. Ann. Télécommun., 1988, vol. 43, n. 9–10, pp. 561–575
15. G. T h i e r e r: *The Calculation of the probability of loos in link systems with point-to-point selection*. Institute of Switching and Data Technics. University of Stuttgart, 29 th Raport on Studies in Congestion Theory, 1980

DODATEK A

WYPROWADZENIE WZORU (3) METODĄ BD

Wartość liczbowa współczynnika niedostępności określa się w zależności od typu oferowanego ruchu i struktury s -sekcyjnego układu komutacyjnego. Metoda BD [14] polega na określeniu tzw. bezpośrednich dostępności kolejnych sekcji rozważanego układu komutacyjnego. Bezpośrednia dostępność jest wartością średnią tych węzłów danej sekcji grafu, które są dostępne węzłowi początkowemu (wejściowemu) za pośrednictwem wolnych krawędzi międzysiekcyjnych. Najpierw oblicza się bezpośrednią dostępność drugiej sekcji grafu M_2 , zatem na tej podstawie wartość M_3 , itd., aż do określenia bezpośredniej dostępności przedostającej sekcji grafu M_{s-1} . Zakładając, że rozkład zajętości łączy międzysiekcyjnych jest rozkładem Bernoulli, prawdopodobieństwo niedostępności określa się wzorem:

$$\pi = (y'_{s-1})^{M_{s-1}}, \quad (A1)$$

gdzie: y'_{s-1} – średni ruch załatwiany przez jedno wejście komutatora ostatniej, s -sekcji układu komutacyjnego, pod warunkiem że choć jedno wyjście tego komutatora jest wolne.

Wartość bezpośredniej dostępności drugiej sekcji grafu określa się wzorem:

$$M_2 = (1 - y'_1) m_1, \quad (A2)$$

gdzie: m_1 – liczba wyjść z jednego komutatora pierwszej sekcji.

W układach z ekspansją liczbę bezpośrednio dostępnych węzłów drugiej sekcji grafu określa się na podstawie pewnej procedury heurystycznej [14], która może być sprowadzona do następującego wzoru:

$$M_2 = (1 - y'_1) n_1 + (m_1 - n_1), \quad (A3)$$

gdzie: n_1 – liczba wejść do jednego komutatora pierwszej sekcji.

Na podstawie M_2 oblicza się bezpośrednie dostępności kolejnych sekcji grafu. W [14] podano podstawowe zależności między bezpośrednią dostępnością j -sekcji M_j oraz $(j+1)$ -sekcji M_{j+1} dla różnych typów połączeń sąsiednich sekcji. W przypadku połączenia równoległego (np. połączenie między sekcją 2 i 3 na rys. 1) zależność ta wyraża się wzorem:

$$M_{j+1} = M_j(1 - y^f). \quad (A4)$$

W przypadku połączenia mostkowego (np. połączenie między sekcją 2 i 3 na rys. 2) rozważana zależność przyjmuje następującą postać:

$$M_{j+1} = K_{j+1} \left[1 - \left(1 - \frac{u_j}{K_{j+1}} \right)^{M_j} \right], \quad (A5)$$

gdzie: u_j – średnia liczba wolnych krawędzi wychodzących z każdego węża j -sekcji w kierunku $j+1$ sekcji:

$$u_j = (1 - y_j) m_j, \quad (A6)$$

K_{j+1} – liczba węzłów $(j+1)$ sekcji grafu.

W celu obliczenia wartości $C_i(x)$ przyjęto, że bezpośrednia dostępność drugiej sekcji grafu jest równa liczbie wolnych łączy międzysekcyjnych, wychodzących z określonego komutatora pierwszej sekcji, tj.:

$$M_2 = x, \quad (A7)$$

Wykorzystując wzór (A1) oraz wzory (A4)–(A7), prawdopodobieństwo bezpośredniej niedostępności dla układów komutacyjnych przedstawionych na rysunkach 1, 2 będzie równe:

dla układu z rys. 1:

$$\pi_p(x) = (y'_3)^{x(1 - y_2^f)}, \quad (A8)$$

dla układu z rys. 2:

$$\pi_{np}(x) = (y'_3)^{f_2(1 - y_2^f)}. \quad (A9)$$

Podstawiając teraz (A8) i (A9) do wzoru (2) otrzymuje się (3), tj. wartość współczynnika przekształcenia $C_i(x)$ dla układów z rysunku 1 i 2.

DODATEK B

PROCEDURA OKREŚLENIA ROZKŁADU WOLNYCH ŁĄCZY W PODSYSTEMACH

Wartości x_i w każdym podsystemie (rozdział 2.2) określa następująca procedura heurystyczna:

Na grafie prawdopodobieństwowym oznacza się M_2 wolnych krawędzi wychodzących z węzła początkowego α . Krawędzie te oznacza się kolejno, po jednej krawędzi w każdym podgrafie. Po oznaczeniu jednej krawędzi w każdym podgrafie, czynność tą powtarza się, oznaczając po drugiej krawędzi w każdym podgrafie itd., aż do wyczerpania się wszystkich M_2 krawędzi.

Oznaczone wg powyższej procedury krawędzie na grafie prawdopodobieństwowym odpowiadają wolnym łączom międzysekcyjnym (między pierwszą i drugą sekcją) w poszczególnych podsystemach. Po określeniu wolnych łączy międzysekcyjnych w systemie będzie Z_1 podsystemów z x wolnymi łączami międzysekcyjnymi i Z_2 podsystemów z $(x-1)$ wolnymi łączami międzysekcyjnymi. Parametry Z_1 , Z_2 , x spełniają wynikający ze struktury rozważanego układu komutacyjnego i przyjętych założeń następujący układ równań:

$$\begin{cases} Z_1 x + Z_2 (x-1) = M_2 \\ Z_1 + Z_2 = L. \end{cases} \quad (B1)$$

Z przyjętej wyżej procedury rozkładu wolnych łączy w podsystemach wynika, że:

$$(x-1) = \left\lfloor \frac{M_2}{L} \right\rfloor, \quad (B2)$$

gdzie $\lfloor A \rfloor$ oznacza część całkowitą wyrażenia zawartego w nawiasie. Uwzględniając (B2) układ równań (B1) przyjmie rozwiązanie wyrażone wzorami (20) i (21).

Przyjęcie przedstawionej wyżej procedury posiada swoje uzasadnienie teoretyczne. Procedura „dąży” do wyrównania liczby wolnych krawędzi w każdym z podsystemów. Konsekwencją natomiast wyboru rozkładu Bernoulli dla aproksymacji rozkładu zajętości łączy międzysekcyjnych są jednakowe wartości średnie wolnych łączy w każdym z podsystemów (rys. 3), równe:

$$M_{2,i} = M_2 / L. \quad (B3)$$

Wybrany sposób określenia rozkładu wolnych krawędzi prowadzi do zastąpienia zmiennej losowej x_i w każdym podsystemie, liczbami x lub $(x-1)$ wyrażonymi wzorem (19). Są to liczby całkowite, najbardziej zbliżone do wartości średniej (na ogół niecałkowitej) wolnych krawędzi w każdym podsystemie, wzór (B3). W związku z tym, w porównaniu do modelu z rozdziału 2.1, przyjęta procedura w większym stopniu przybliża rozważany model do efektów działania rzeczywistych mających miejsce w układach komutacyjnych.

M. STASIAK

POINT-TO-POINT BLOCKING CALCULATION IN SWITCHING NETWORKS WITH DIFFERENT TYPES OF PROBABILITY GRAPHS

S u m m a r y

In this paper a new method is proposed for the calculation of the probability of point-to-point blocking in switching networks which probability graphs are non-series parallel. The series-parallel switching networks and transformation coefficient defined in this paper determine the basis of this method. The transformation coefficient expresses the dependence between blocking probabilities in calculated system (of non series parallel type) and supporting system (of series parallel type). Two ways of calculation of this coefficient are given. The results of analytical calculations of blocking probability are compared with the results of digital simulation of 4-stage switching networks.

SPIS TREŚCI

K. Wawryn: Opis języka formalnego do projektowania analogowych układów CMOS	3
K. Baszczyński, A. Materka: Metoda komputerowej identyfikacji dla wybranej klasy układów nieliniowych rzędu drugiego	17
A. Majewski: Solitony w światłowodach: właściwości propagacyjne	35
B. Kalinin: Badania korelacji wzajemnej między obwiedniami sygnałów wyjściowych filtrów pasmowoprzepustowych	45
J. Modelski, A. Buchowicz: Procedura filtracji liniowej obrazu	59
J. Kisilewicz: Algorytm obliczania wielokanałowego korektora minimalizującego błąd średniokwadratowy	67
J. Hosza, T. Stachowiak: Analiza efektywności pracy sieci lokalnej z dostępem rywalizacyjnym ..	77
M. Żółtowski: Optymalne pętle cyfrowe z niejednostajnym próbkowaniem	87
M. Żółtowski: Cyfrowe pętle fazowe — wybrane problemy	121
A. Napieralski: Półprzewodnikowe układy dużej mocy — technologia, analiza, projektowanie ..	153
P. Hempowicz: Tyrystorowy wzmacniacz dużej mocy o małych zniekształceniach	181
P. Hempowicz: Filtr aktywny wstrzykujący w zastosowaniu do wygładzania napięcia wyjściowego przekształtników tyrystorowych	197
F. Wysocka-Schillak: Czebyszewska aproksymacja charakterystyki amplitudowej dolnoprzepustowego filtra cyfrowego SOI o liniowej fazie	211
F. Wysocka-Schillak: Czebyszewska aproksymacja charakterystyki częstotliwościowej dolnoprzepustowego filtra interpolacyjnego	225
M. Stasiak: Obliczanie prawdopodobieństwa blokady wewnętrznej punkt—punkt w układach komutacyjnych o różnych typach grafów kanałowych	239

CONTENS

K. Wawryn: Formal language description for CMOS analog circuit design	3
K. Baszczyński, A. Materka: A method of computer identification for selected class of second-order systems	17
A. Majewski: Solitons in optical fibers: propagation characteristics	35
B. Kalinin: Analysis of correlation between pass-band filters outputs	45
J. Modelski, A. Buchowicz: Procedure of linear image filtration	59
J. Kisilewicz: An algorithm for design multichannel equalizer giving the minimum mean-square error.	67
J. Hosza, T. Stachowiak: Performance analysis of a local area network with contention acces method	77
M. Żółtowski: Optimal nonuniform sampling zero-crossing digital phase-locked loops for tracking the offsets in phase or in phase and frequency	81
M. Żółtowski: Digital phase-locked loops — Selected topics	121
A. Napieralski: Semiconductor integrated power circuits — technology, analysis, projection ...	153
P. Hempowicz: Active power filter with monitoring input voltage of thyristor shapers	181
P. Hempowicz: Thyristor power amplifier with small distortions	197
F. Wysocka-Schillak: Chebyshev approximation of the amplitude characteristic of a linear phase low-pass digital FIR filter	209
F. Wysocka-Schillak: Chebyshev approximation of the frequency response of a low-pass interpolation filter	223
M. Stasiak: Point-to-point blocking calculation in switching networks with different types of probality graphs	239

Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji

Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są na okresy kwartalne:

- na terenie kraju — jednostki kolportażowe „Ruch” i urzędy pocztowe właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora,
- na zagranicę — Zakład Kolportażu Prasy i Wydawnictw,
00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział
Warszawa 370044-1195-139-11.

Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100 % wyższa od krajowej.

Dostawa zamówionej prasy następuje:

- przez jednostki kolportażowe „Ruch” — w sposób uzgodniony z zamawiającym,
- przez urzędy pocztowe — pocztą zwykłą na wskazany adres, w ramach opłaconej prenumeraty z wyjątkiem zlecenia dostawy za granicę pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerata.

Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę:

- krajową i zagraniczną — do 20.XI. na I kw. roku następnego
do 20.II. na II kw.
do 20.V. na III kw.
do 20.VIII. na IV kw.

Bieżące numery można nabyć w Księgarni Wydawnictwa Naukowego PWN Sp. z o.o. ul. Miodowa 10. Również można je nabyć, a także zamówić (przesyłka za zaliczeniem pocztowym) we Wzorcowni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN, Pałac Kultury i Nauki, 00-901 Warszawa.

Subscription orders for all the magazines published in Poland available through the local press distributors or directly through the

Foreign Trade Enterprise

ARS POLONIA

00-068 Warszawa, Krakowskie Przedmieście 7, Poland
our bankers:

BANK HANDLOWY S.A. 201061-710-13100

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

Nr Indeksu 363189
PL ISSN 0035-9386

KWARTALNIK
ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI
ELECTRONICS AND
TELECOMMUNICATIONS
QUARTERLY

dawniej

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XXXVII — ZESZYT 2-3

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
WARSZAWA 1992

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

**KWARTALNIK
ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI**

**ELECTRONICS AND
TELECOMMUNICATIONS
QUARTERLY**

TOM XXXVIII — ZESZYT 2-3

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN

WARSZAWA 1992

RADA REDAKCYJNA

Przewodniczący
prof. dr ADAM SMOLIŃSKI
członek rzeczywisty PAN

Członkowie

prof. dr hab. DANIEL JÓZEF BEM, prof. dr hab. MICHAŁ BIAŁKO — czł. koresp. PAN,
prof. dr hab. inż. STEFAN HAHN — czł. koresp. PAN, prof. dr inż. ANDRZEJ HAŁAS,
prof. dr inż. ZDZISŁAW KACHLICKI, prof. dr hab. inż. BOHDAN MROZIEWICZ,
prof. dr inż. JERZY OSIOWSKI, prof. dr inż. WITOLD ROSIŃSKI — czł. rzecz. PAN, prof. dr hab.
inż. STEFAN WĘGRZYN — czł. rzecz. PAN, prof. dr hab. inż. WIESŁAW WOLIŃSKI —
czł. koresp. PAN, prof. dr inż. ANDRZEJ ZIELIŃSKI, prof. dr inż. MARIAN ZIENTALSKI

REDAKCJA

Redaktor naczelny
prof. dr hab. inż. WIESŁAW WOLIŃSKI

Zastępca Redaktora Naczelnego
doc. dr inż. KRYSTYN PLEWKO

Sekretarz Odpowiedzialny
mgr KRYSTYNA LELAKOWSKA

ADRES REDAKCJI

00-665 Warszawa, ul. Nowowiejska 15/19 Politechnika,
Instytut Telekomunikacji, Gmach im. prof. JANUSZA GROSZKOWSKIEGO

Dyżury Redakcji: środy i piątki, godz. 14–16
tel. 628 89 81 21007-737

Telefony domowe: Redaktora Naczelnego: 12 17 65
Zast. Red. Naczelnego: 26 83 41
Sekretarza Odpowiedzialnego: 25 29 18

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
Warszawa, ul. Miodowa 10

Ark. wyd. 18.25. Ark. druk. 16,25	Oddano do składania marcu 1992 r.
Papier offsetowy kl. III 70 g. B-1	Druk ukończono w sierpniu 1992 r.
Skład: GP-BIT W-wa ul. Marymoncka 34. Druk i oprawa: WDN, W-wa ul. Śniadeckich 8	

Analiza symboliczna struktur czwórnikowych

HENRYK BUDZISZ

Instytut Elektroniki, Wyższa Szkoła Inżynierska w Koszalinie

Otrzymano 1991.04.10

Autoryzowano do druku 1991.12.04

W pracy przedstawiono metodę wyznaczania funkcji układowych w postaci całkowicie lub częściowo symbolicznej, w oparciu o zasady znane z teorii czwórników. Metoda daje nie tylko wynik końcowy, ale umożliwia śledzenie przebiegu obliczeń. Zdefiniowany język czwórnikowy umożliwia opis złożonych struktur czwórnikowych przy zastosowaniu niewielkiej liczby czwórników elementarnych i reguł gramatycznych. Ten formalny język oparty na gramatyce bezkontekstowej daje możliwość łatwego manipulowania strukturą i sterowania procesem analizy. Niemniej ważny okazał się właściwy wybór reprezentacji wielomianu i macierzy czwórnikowej. Kierowano się przy tym koniecznością ograniczenia możliwości powstawania wyrazów skracających i redukujących się. Wszystkie koncepcje zostały praktycznie zweryfikowane poprzez ich implementację w Prologu. Przedstawiono przykłady implementacji i analizy symbolicznej układów.

1. WPROWADZENIE

Metodom wyznaczania funkcji układowych w postaci symbolicznej poświęcono w literaturze dużo miejsca [1,5,6,7,12]. W zależności od przeznaczenia, buduje się je w postaci całkowicie symbolicznej, częściowo symbolicznej, albo jako funkcję o współczynnikach liczbowych. Metody obliczeniowe oparte są na koncepcjach:

- grafu przepływu sygnałów (reguła Masona),
- wyznaczania drzew grafu,
- wyłączania parametrów,
- numerycznej interpolacji wyników symulacji.

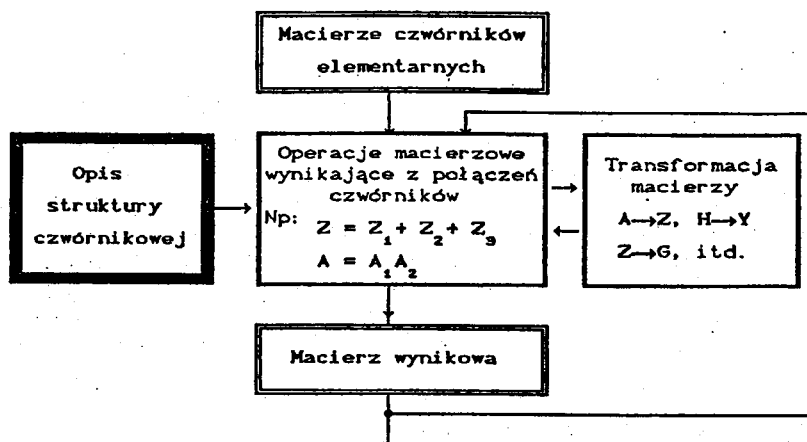
Zalety i wady tych metod były również przedmiotem dyskusji [5,11].

Z punktu widzenia użytkownika, wymienione metody mają wspólną wadę – dają gotową formułę, ale nie pokazują sposobu w jaki wynik został osiągnięty. Wyniki pośrednie, dotyczące podukładów, mają istotne znaczenie dla interpretacji formuły końcowej.

W pracy przedstawiono metodę otrzymywania funkcji układowych, opartą na naśladowaniu postępowania stosowanego przy analizie „ręcznej” układu, tzn.

wyznacza się parametry układów elementarnych, w oparciu o nie parametry podukładów, a w końcu parametry całego układu. Stosuje się przy tym zapis całkowicie lub częściowo symboliczny. Metoda jest oparta na teorii czwórników, zapewniającej niezbędny formalizm opisu struktury i właściwości układu, a jednocześnie obejmującej szeroką klasę układów.

Przy czwórnikowym traktowaniu układu, interesują nas tylko wielkości zaciskowe U_1, U_2, I_1, I_2 . Wielkości te, w zależności od wyboru pary zmiennych, związane są sześcioma parami równań [8,9]. W zapisie macierzowym, odpowiednie macierze oznaczane są przez Z, Y, A, B, H i G . O wyborze opisu decyduje sposób połączenia czwórników. Schemat postępowania przy wyznaczaniu parametrów układu pokazuje rys. 1.



Rys. 1. Schemat wyznaczania parametrów struktury czwórnikowej

Wychodząc z macierzy czwórników elementarnych, buduje się macierz czwórników złożonych, na podstawie znanych z teorii czwórników reguł [8,9]. Operacje wykonywane na macierzach, sterowane są przez opis struktury czwórnikowej.

2. JĘZYK CZWÓRNIKOWY

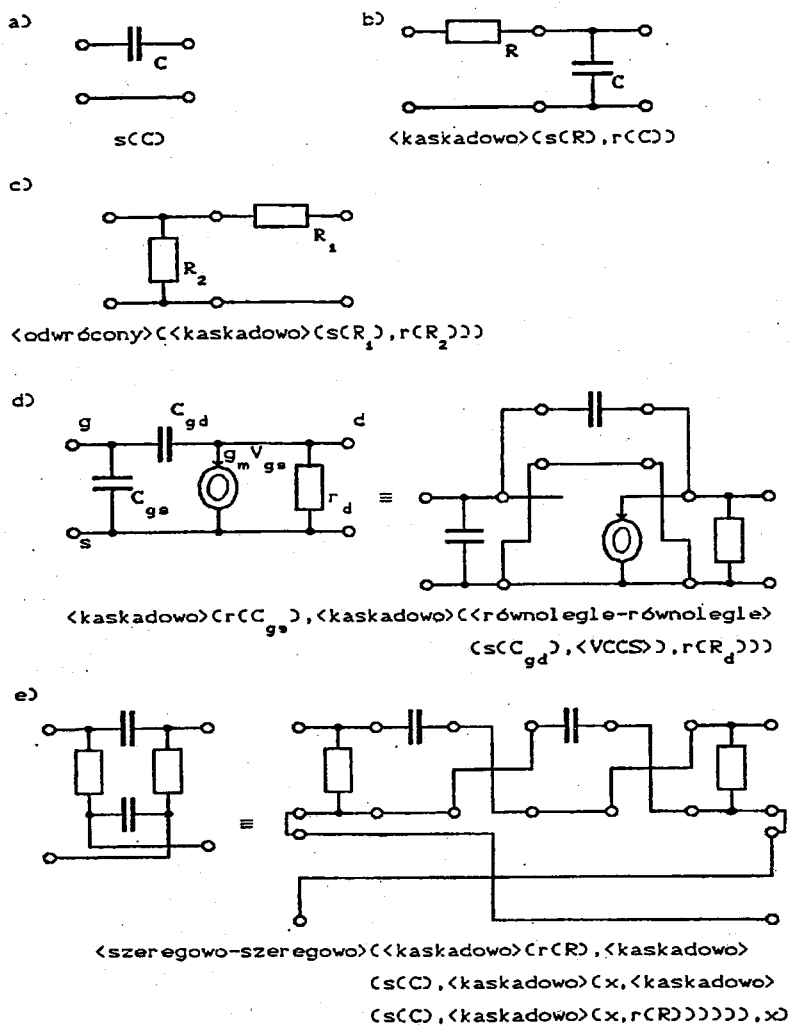
Opis struktury czwórnikowej odgrywa zasadniczą rolę w procesie wyznaczania parametrów układu. W tym celu zdefiniowany zostanie formalny język bezkontekstowy, który posłuży do opisu topologii struktury czwórnikowej.

Połączenie dwóch czwórników może być zastąpione równoważnym czwórnikiem zastępczym [8,9]. Odwracając sytuację, czwórnik można zdefiniować rekursywnie w notacji BNF, w sposób następujący:

$$\begin{aligned}
 \langle \text{czwórnik} \rangle ::= & \langle \text{czwórnik elementarny} \rangle \mid \\
 & \langle \text{połączony} \rangle (\langle \text{czwórnik} \rangle, \langle \text{czwórnik} \rangle) \mid \\
 & \langle \text{odwrócony} \rangle (\langle \text{czwórnik} \rangle) \mid
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

$\langle \text{szeregowy} \rangle (\langle \text{element} \rangle) |$
 $\langle \text{równoległy} \rangle (\langle \text{element} \rangle)$
 $\langle \text{połączony} \rangle ::= \langle \text{szeregowo-szeregowo} \rangle |$
 $\langle \text{szeregowo-równoległy} \rangle |$
 $\langle \text{równoległo-szeregowo} \rangle |$
 $\langle \text{równoległo-równoległy} \rangle |$
 $\langle \text{kaskadowo} \rangle$
 $\langle \text{element} \rangle ::= R | L | C$

Z definicji tej wynika, że każdy czwórnik, którego nie można przedstawić jako połączenia czwórników prostszych, należy uznać za czwórnik elementarny.



Rys. 2. Przykłady opisu struktur czwórnikowych

Zapis (1) może być traktowany jako definicja pewnej gramatyki bezkontekstowej [2], która z kolei pozwala na zdefiniowanie formalnego języka opisu struktur czwórnikowych, nazywanego dalej językiem czwórnikowym [4]. Formalizm języka pozwala na stwierdzenie, czy dane zdanie należy do języka czwórnikowego, tzn. czy jest to zdanie poprawne w tym języku (twierdzenie Bar – Hillela, Perlesa i Shami-ra [21]). Umożliwia więc syntaktyczną kontrolę poprawności opisu struktury. Wzajemna odpowiedniość między zdaniami w języku czwórnikowym a schematami została przedstawiona na przykładach (rys. 2).

Dla skrócenia zapisu przyjęto następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} <\text{szeregowy}> (<\text{element}>) \equiv s(<\text{element}>) \\ <\text{równoległy}> (<\text{element}>) \equiv r(<\text{element}>) \\ <\text{skrzyżowanie}> \equiv x \end{aligned}$$

Formalny opis struktury czwórnika pozwala na podobne manipulacje jak w rachunku zdań [3,4]. Zdania proste można za pomocą spójników logicznych łączyć w zdania złożone, np.:

$$<\text{dzielnik napięcia}> \equiv <\text{kaskadowo}>(s(R), r(R)(4))$$

Relacja ta utożsamia czwórnik o określonej nazwie z podaną strukturą.

Jeżeli w zdaniach dopuści się możliwość występowania zmiennych, to wyrażenia takie nazywane są funkcjami zdaniowymi lub predykatami. Zmienne w dalszym zapisie oznacza się drukiem pogrubionym. Przykłady:

1. $\text{Czw1} \equiv <\text{dzielnik napięcia}> \wedge \text{Czw2} \equiv <\text{dzielnik napięcia}> \Rightarrow <\text{kaskadowo}>(\text{Czw1}, \text{Czw2}) \equiv <\text{drabinka}>$ – definicja drabinki za pomocą wcześniej zdefiniowanego dzielnika napięcia

2. $\text{Czw1} \equiv \text{Czw2} \Rightarrow \text{Czw2} \equiv \text{Czw1}$ – prawo symetrii, które musi spełniać relacja równoważności.

3. $<\text{kaskadowo}>(\text{Czw1}, <\text{kaskadowo}>(\text{Czw2}, \text{Czw3})) \equiv <\text{kaskadowo}>(<\text{kaskadowo}>(\text{Czw1}, \text{Czw2}), \text{Czw3})$

4. $<\text{odwrócony}>(<\text{odwrócony}>(\text{Czw})) \equiv \text{Czw}$

Szczególne znaczenie praktyczne ma pierwszy przykład. Zapis taki pozwala na budowanie złożonych struktur w sposób stopniowy, na bazie wcześniej przygotowanych struktur elementarnych.

W Dodatku 1 przedstawiono przykład implementacji języka czwórnikowego w Prologu.

3. REPREZENTACJA FUNKCJI CZWÓRNIKOWYCH I REGUŁY ICH PRZETWARZANIA

Przy wyborze reprezentacji funkcji czwórnikowych wzięto pod uwagę dwa czynniki. Pierwszym było umożliwienie zapisu funkcji w dowolnej postaci, od całkowicie symbolicznej do funkcji o współczynnikach liczbowych. Drugim ważnym

czynnikiem jest powszechnie występująca przy przekształceniach symbolicznych plaga – pojawianie się wyrazów redukujących i skracających się [5,7,11].

3.1. REPREZENTACJA I PRZEKSZTAŁCENIA WIELOMIANÓW

Wielomian algebraiczny pulsacji zespolonej s

$$w(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n$$

jest zapisywany w postaci listy współczynników:

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] \quad (2)$$

Każdy współczynnik może być wyrażony w postaci sumy termów:

$$t_{i1} + t_{i2} + t_{i3} + \dots + t_{im_i}$$

zapisanych jako elementy listy:

$$[t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}, \dots, t_{im_i}] \quad (3)$$

Z kolei term jest iloczynem liczby i symboli, przedstawionych znowu jako lista:

$$[<\text{liczba}>, <\text{symbol}>, <\text{symbol}>, \dots] \quad (4)$$

W szczególnym przypadku termem może być tylko liczba.

Przyjęta reprezentacja umożliwia zapis wielomianu w postaci całkowicie symbolicznej, np.:

$$R_1 + R_2 + R_1 R_2 C s$$

przedstawia się jako:

$$\underbrace{[[[1, R_1], [1, R_2]]]}_{a_0}, \underbrace{[[[1, R_1, R_2, C]]]}_{a_1};$$

w postaci częściowo symbolicznej, np:

$$3,38 + (5,18 - g_m) s^2 \Rightarrow [[[3,38]], [[0]], [[5,18], [-1, g_m]]];$$

a także jako funkcji o współczynnikach liczbowych, np:

$$1 + 2s + 2s^2 + s^3 \Rightarrow [[[1]], [[2]], [[2]], [[1]]].$$

3.2. REPREZENTACJA I PRZEKSZTAŁCENIA MACIERZY CZWÓRNIKOWYCH

Elementy macierzy charakterystycznych czwórnika SLS są funkcjami wymiernymi zmiennej s . Mając na uwadze ograniczenie możliwości powstawania wyrażeń redukujących i skracających się, przyjęto dla macierzy następujący zapis:

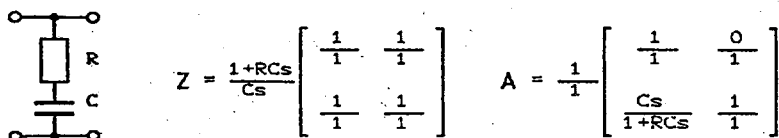
$$M_0 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (5)$$

gdzie: $M_x = \frac{M_{xn}}{M_{xd}}$, $x = 0, 11, 12, 21, 22$

M_{xn}, M_{xd} — są wielomianami zmiennej s .

W zapisie tym nie można narzucić wymiaru fizycznego elementom M_x . Właściwy wymiar, zależny od rodzaju macierzy, mają natomiast iloczyny $M_0 M_x$, $x = 11, 12, 21, 22$.

Przykładami mogą być macierze Z i A czwórnika przedstawionego na rys. 3. Zalety takiego przedstawienia macierzy czwórnikowej staną się w pełni widoczne przy omawianiu transformacji macierzy (pkt. 3.3).



Rys. 3. Przykłady zapisu macierzy czwórnika

Funkcja wymierna jest reprezentowana przez funktor:

$$\text{el}(\langle \text{wielomian licznika} \rangle, \langle \text{wielomian mianownika} \rangle)$$

a macierz (5) przez listę:

$$[\text{el}(M_{0n}, M_{0d}), \text{el}(M_{11n}, M_{11d}), \text{el}(M_{12n}, M_{12d}), \\ \text{el}(M_{21n}, M_{21d}), \text{el}(M_{22n}, M_{22d})]. \quad (6)$$

W procesie wyznaczania parametrów czwórnika (rys. 1), występują operacje mnożenia macierzy (połączenia łańcuchowe), dodawania macierzy (pozostałe połączenia) i transformacji macierzy. Dla zapisu (5) iloczyn i suma macierzy wyrażają się wzorami:

$$A \times B = \frac{A_{0n} B_{0n}}{A_{0d} B_{0d}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$A + B = \frac{1}{A_{0d} B_{0d}} \left\{ A_{0n} B_{0d} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + A_{0d} B_{0n} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \right\} \quad (8)$$

3.3. TRANSFORMACJE MACIERZY

Każdemu połączeniu czwórnika odpowiada pewna macierz charakterystyczna. Przekształcenia dokonywane na kolejnych poziomach łączenia czwórników (rys. 1) związane są z transformacją macierzy. Operacje transformacji dla macierzy zapisanych w postaci (5) przedstawione zostaną na przykładzie transformacji macierzy impedancyjnej Z na macierz transmisyjną A .

Dana jest macierz Z

$$Z = Z_0 \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_0 Z_{11} & Z_0 Z_{12} \\ Z_0 Z_{21} & Z_0 Z_{22} \end{bmatrix}$$

Korzystając ze znanych wzorów transformacji [9], otrzymuje się

$$A = \begin{bmatrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{Z_{11}Z_0Z_{22}Z_{21}Z_0Z_{12}}{Z_{21}} \\ 1 & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \\ \frac{1}{Z_0Z_{21}} & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_{21}} \begin{bmatrix} Z_{11} & \det' Z \\ 1/Z_0 & Z_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{czyli: } A_0 = \frac{1}{Z_{21}} = \frac{Z_{21d}}{Z_{21n}}$$

$$A_{11} = Z_{11}$$

$$A_{12} = \det' Z = Z_0 (Z_{11}Z_{22} - Z_{21}Z_{12})$$

$$A_{21} = \frac{1}{Z_0} = \frac{Z_{0d}}{Z_{0n}}$$

$$A_{22} = Z_{22}.$$

W podobny sposób wyprowadzone zostały pozostałe wzory transformacyjne. Na przykładzie tym widoczne są zalety zapisu macierzy w postaci (5).

Transformacje macierzy związane z operacją odwracania czwórnika, odbywają się według wzorów podanych w tabl. 1.

Przez dwukrotne zastosowanie operacji odwrócenia do tego samego czwórnika, otrzymuje się pierwotną postać czwórnika (porównaj przykład 4, pkt. 2), a więc również pierwotną macierz, co łatwo sprawdzić.

Przy transformacji macierzy, oprócz obliczania wyznacznika, występują proste operacje: zamiana elementów miejscami, zmiana znaku elementu i odwracanie funkcji wymiernej (zamiana miejscami wskaźników wielomianu licznika i mianownika). Problemowi obliczania wyznacznika

$$\det' M = M_0 (M_{11} M_{22} - M_{12} M_{21}) \quad (9)$$

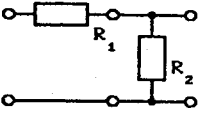
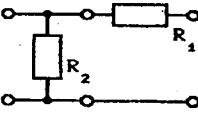
warto poświęcić szczególną uwagę, gdyż często występuje tu redukowanie i skracanie się wyrażeń. Ważnym elementem strategii obliczeń jest uwzględnienie właściwości czwórników odwracalnych, dla których zachodzi: $\det A = 1$. Przy zapisie wyznacznika w postaci (9) warunek ten przyjmuje postać: $\det' A = 1/A_0$. Pozostałe właściwości czwórników odwracalnych: $Z_{12} = Z_{21}$, $Y_{12} = Y_{21}$, $H_{12} = -H_{21}$, $G_{12} = -G_{21}$ są przenoszone w trakcie transformacji.

Transformacja macierzy wymaga więc uzupełnienia reprezentacji macierzy (6) o dodatkowe informacje:

$$[\langle \text{typ: } Z, Y, G, H, A \rangle, \langle \text{klasa czwórnika: odwracalny, nieodwracalny} \rangle, M_0, M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22}] \quad (10)$$

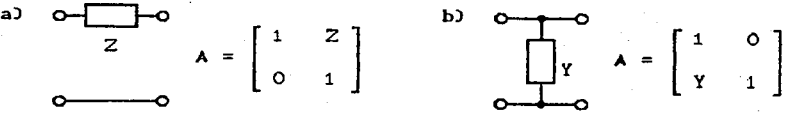
Tabela 1

Wzory transformacji macierzy związane z odwracaniem czwórnika

typ	macierz czwórnika nieodwróconego	macierz czwórnika odwróconego
Z	$Z_0 \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$	$Z_0 \begin{bmatrix} Z_{22} & Z_{21} \\ Z_{12} & Z_{11} \end{bmatrix}$
Y	$Y_0 \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$	$Y_0 \begin{bmatrix} Y_{22} & Y_{21} \\ Y_{12} & Y_{11} \end{bmatrix}$
G	$G_0 \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det' G} \begin{bmatrix} G_{11} & -G_{21} \\ -G_{12} & G_{22} \end{bmatrix}$
H	$H_0 \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det' H} \begin{bmatrix} H_{11} & -H_{21} \\ -H_{12} & H_{22} \end{bmatrix}$
A	$A_0 \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det' A} \begin{bmatrix} A_{22} & A_{12} \\ A_{21} & A_{11} \end{bmatrix}$
przykład czwórnika		

3.4. CZWÓRNIKI ELEMENTARNE

Wyróżnione czwórniki elementarne, to dwójnik włączony szeregowo lub równolegle między zaciski czwórnika. Są to czwórniki osobiwe, dla których jako podstawę do dalszych przekształceń przyjęto macierz transmisyjną A (rys. 4).

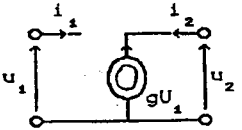
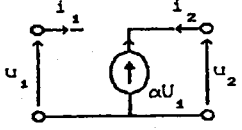
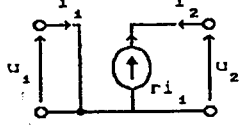
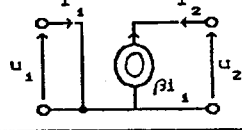
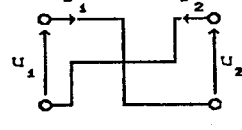


Rys. 4. Podstawowe czwórniki elementarne i ich macierze

Jako dwójnik można użyć elementu R (albo G), L lub C. Przyjęto podobnie jak w programie SPICE, że elementy te są rozróżniane według pierwszej litery identyfikatora. Na przykład rezystor można oznaczyć nazwami r_1, r_{out}, r_{in} itp. Pozostałe czwórniki elementarne są idetyfikowane przez nazwę, a każdemu z nich towarzyszy macierz charakterystyczna (tabl. 2).

Tabela 2

Przykłady czwórników elementarnych i ich opis

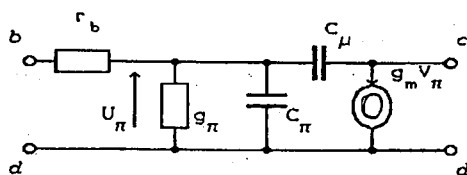
identyfikator	czwórnik	macierz A	parametr
VCCS		$\begin{bmatrix} 0 & 1/g \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	g
VCVS		$\begin{bmatrix} 1/\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	α
CCVS		$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/r & 0 \end{bmatrix}$	r
CCCS		$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/\beta \end{bmatrix}$	β
CROSS		$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	

Przy wyznaczaniu macierzy czwórników elementarnych (z wyjątkiem skrzyżowania), wymagane jest podanie wartości liczbowej lub symbolu parametru charakterystycznego dla danego czwórnika.

4. PRZYKŁADY ANALIZY SYMBOLICZNEJ

Proces wyznaczania parametrów czwórnikowych według schematu z rys. 1, zostanie przedstawiony na kilku przykładach. Jako pierwszy przykład weźmy prosty model tranzystora MOS. Jego schemat, reprezentację czwórnikową i opis przedstawiono na rys. 2d. Opis jest również zawarty w bibliotece czwórników (Dodatek 1) pod nazwą *is_a(mos_model)*. Przebieg analizy (z niewielkimi skrótami) przedstawiony został w Dodatku 2.

Jako drugi przykład rozważono małosygnałowy model „mieszane Π ” tranzystora bipolarnego (rys. 5), dla którego zostaną wyznaczone parametry w postaci częściowo



Rys. 5. Małosygnałowy model tranzystora bipolarnego

symbolicznej. Opis modelu znajduje się w bibliotece czwórników (Dodatek 1) pod nazwą *is_a(bjt_model)*.

Przyjęto następujące wartości elementów modelu: $r_b = 100 \Omega$, $g_{\pi} = 1 \text{ mS}$, $C_{\pi} = 20 \text{ pF}$, $C_{\mu} = 5 \text{ pF}$. Transkonduktancję g_m pozostawiono w postaci symbolicznej.

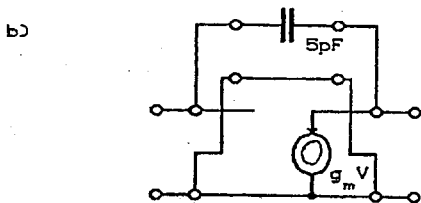
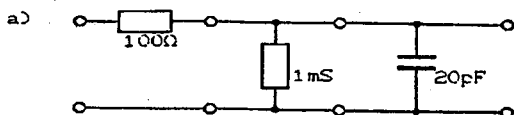
Jeżeli jako cel przyjmiemy znalezienie macierzy hybrydowej, przebieg obliczeń będzie następujący:

W pierwszej kolejności obliczana jest macierz transmisyjna połączenia kaskadowego trzech czwórników (rys. 6a).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,001 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 \cdot 10^{-11} \text{ s} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,1 + 2 \cdot 10^{-9} \text{ s} & 100 \\ 0,001 + 2 \cdot 10^{-11} \text{ s} & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Następnie obliczana jest macierz admitancyjna połączenia równoległego (rys. 6b).

$$Y = \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^{-12} \text{ s} & -5 \cdot 10^{-12} \text{ s} \\ -5 \cdot 10^{-12} \text{ s} & 5 \cdot 10^{-12} \text{ s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -g_m & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^{-12} \text{ s} & -5 \cdot 10^{-12} \text{ s} \\ -g_m - 5 \cdot 10^{-12} \text{ s} & 5 \cdot 10^{-12} \text{ s} \end{bmatrix} \quad (12)$$



Rys. 6. Fragmenty modelu tranzystora bipolarnego

Po zamianie (12) na macierz transmitancyjną:

$$A = \frac{1}{g_m + 5 \cdot 10^{-12} \text{ s}} \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^{-12} \text{ s} & 1 \\ 5 \cdot 10^{-12} g_m \text{ s} & 5 \cdot 10^{-12} \text{ s} \end{bmatrix} \quad (13)$$

macierz (11) mnoży się przez (13). Otrzymaną macierz transmisyjną zamienia się na poszukiwaną macierz hybrydową:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1,1 + 25 \cdot 10^{-10} s}{10^{-3} + 25 \cdot 10^{-12} s} & \frac{5 \cdot 10^{-12} s}{10^{-3} + 25 \cdot 10^{-12} s} \\ -\frac{g_m + 5 \cdot 10^{-12} s}{10^{-3} + 25 \cdot 10^{-12} s} & \frac{5 \cdot 10^{-12} (g_m + 10^{-3}) s + 10^{-22} s^2}{10^{-3} + 25 \cdot 10^{-12} s} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Jeżeli w (15) przyjąć $s=0$, otrzymuje się:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1,1}{10^{-3}} & 0 \\ \frac{g_m}{10^{-3}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1100 & 0 \\ -1000 g_m & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

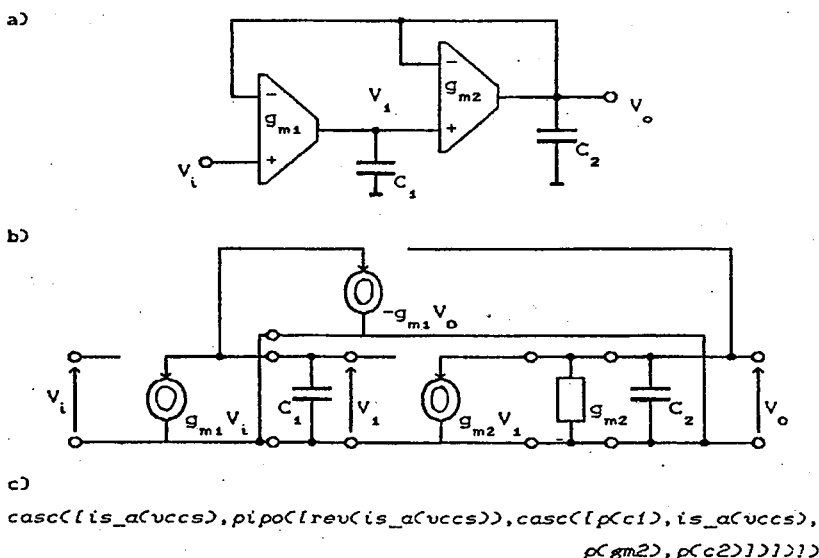
Wynik odpowiada znanym wzorom na parametry hybrydowe tranzystora bipolarnego:

$$h_{11} = r_b + \frac{1}{g_\pi} = 100 + 1000 = 1100 \Omega$$

$$g_m = \beta_0 g_\pi$$

$$h_{11} = -\beta_0 = -\frac{g_m}{g_\pi} = -1000 g_m$$

Jako następny przykład weźmy bikwad zbudowany z zastosowaniem wzmacniaczy transkonduktancyjnych [10], którego schemat i reprezentację czwórnikową przedstawiono na rys. 7.



Rys. 7. a) Schemat strukturalny bikwadu; b) schemat czwórnikowy bikwadu; c) zapis struktury bikwadu w języku czwórnikowym

Postać kilku wybranych macierzy i parametry czwórnikowe bikwadu przedstawione zostały w Dodatku 3. Wyniki są zgodne z wzorami podanymi w [10].

5. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono metodę otrzymywania funkcji układowych w oparciu o zasady znane z teorii czwórników. Funkcje układowe mogą być wyznaczone w postaci całkowicie lub częściowo symbolicznej. Metoda daje nie tylko wynik końcowy, ale umożliwia śledzenie przebiegu obliczeń. Wyniki pośrednie mogą mieć istotne znaczenie przy interpretacji wyniku końcowego.

Należy podkreślić zasadnicze znaczenie opracowania właściwej reprezentacji obiektów. Dotyczy to zarówno struktury topologicznej jak i macierzy funkcji układowych.

Przedstawiony język czwórnikowy umożliwia opis złożonych struktur czwórnikowych przy zastosowaniu niewielkiej liczby czwórników elementarnych i reguł gramatycznych. Daje możliwość opisu struktury na różnych poziomach szczegółowości poprzez wykorzystanie relacji równoważności.

Zapis schematu w języku czwórnikowym może sprawić pewne trudności, ze względu na sztywny formalizm i wielowarstwowość opisu. Przy ewentualnym szerszym zastosowaniu praktycznym, należałoby potraktować język czwórnikowy jako język wewnętrzny systemu i opracować pewnego rodzaju *interface* poprawiający komunikatywność.

Niemniej ważny okazał się właściwy wybór reprezentacji macierzy czwórnikowej. Przy wyborze reprezentacji kierowano się przede wszystkim koniecznością ograniczenia możliwości powstawania wyrazów skracających i redukujących się.

Przyjęta reprezentacja struktury wielomianu potęgowego pulsacji zespolonej s , umożliwia przedstawienie funkcji układowych w różnych postaciach symbolicznych. Wszystkie koncepcje zostały zweryfikowane poprzez ich implementację w Prologu. Implementacja ta ma charakter prototypowy i może być podstawą do zbudowania systemu użytkowego.

BIBLIOGRAFIA

1. M. Białko: *Analiza układów elektronicznych wspomagana mikrokomputerem*. Warszawa: WNT, 1989
2. A. Blükle: *Automaty i gramatyki. Wstęp do lingwistyki matematycznej*. Warszawa: PWN, 1971
3. R. T. Boute: *Systems semantics: Principles, Applications and implementations*
4. H. Budzisz: *Język czwórnikowy — syntaktyczne podejście do opisu struktury topologicznej układu*. X KK TOiUE, Gdańsk 1987, ss. 807—811
5. L. O. Chua, Pen-Min Lin: *Komputerowa analiza układów elektronicznych*. Warszawa: WNT, 1981
6. P. M. Lin: *A survey of applications of symbolic network functions*, IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT—20, pp. 732—737, Nov. 1973

7. R. R. Mielke: *A new signal flowgraph formulation of symbolic network functions*. IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS-25, pp. 334–340, June 1978
8. J. Osioński: *Zarys rachunku operatorowego*. Warszawa: WNT 1981
9. Cz. Rajski: *Teoria obwodów*. Warszawa: WNT, 1971
10. E. Sanchez-Sinencio, R. L. Gaiger, H. Nevarez-Lozano: *Generation of continuous-time two integrator loop OTA filter structures*. IS CAS 1987, pp. 325–328
11. P. Sannuti, N. N. Puri: *Symbolic Network Analysis – An Algebraic Formulation*. IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. CAS-27, No. 8, August 1980
12. K. Singal, J. Vlach: *Symbolic analysis of analog and digital circuits*. IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS-24, pp. 598–609, Nov. 1977
13. Y. P. Tsividis: *Design Consideration in Single-Channel MOS Analog Integrated Circuits – A Tutorial*. IEEE J. of Solid-State Circuits, vol. SC-13, No 3, June 1978, pp. 383–391

DODATEK 1

IMPLEMENTACJA JĘZYKA CZWÓRNIKOWEGO W PROLOGU

Przedstawioną definicję języka czwórnikowego można prawie bez zmian zapisać w Turbo Prologu. Dla skrócenia zapisu złożonych struktur, jako argument funktorów opisujących połączenia przyjęto nie dwa czwórnikiki jak w definicji, lecz listę czwórników. Jest to szczególnie użyteczne w przypadku połączeń kaskadowych. Nazwa czwórnika wprowadzana jest przy pomocy funktora *is_a(<nazwa>)*. Pokazano również sposób implementacji relacji równoważności (predykat *is_eqv*) oraz przykład biblioteki struktur czwórnikowych.

domains

```

two_port = casc (two_port_list);
            /* cascaded two_port networks */
pipo (two_port_list);
            /* parallel inputs & parallel outputs */
piso (two_port_list);
            /* parallel inputs & series outputs */
sipo (two_port_list);
            /* series inputs & parallel outputs */
siso (two_port_list);
            /* series inputs & series outputs */
rev (two_port);      /* reversed two_port */
is_a(symbol);        /* named structure */
p(two_term);         /* parallel branch */
s(two_term)          /* series branch */

two_port_list = two_port*
two_term      = symbol

predicates
is_eqv (two_port, two_port)
equal (two_port, two_port)

```

clauses

equal (Tp,Tp).

*is _ eqv(Tp1,Tp2) if bound(Tp1)
 and bound(Tp2)
 and equal(Tp1,Tp2).*

*/******

Two-port library

******/*

*is _ eqv(is _ a(mos _ model),
 casc([p(cgs),pipo([s(cgd), is _ a(vccs)]), p(gd)]))).*

*is _ eqv(is _ a(bjt _ model),
 casc([s(rbb),p(gbe),p(cbe),
 pipo([s(ccb),is _ a(vccs)]),p(gce)]))).*

*is _ eqv(is _ a("Sallen _ Key _ biguad"),
 casc([s(r1),pipo([s(c1),casc([s(r2),p(c2),
 is _ a(vccs)])))]))).*

*is _ eqv(is _ a("CMOS _ biquad"),
 casc([is _ a(vccs),
 pipo([rev(is _ a(vccs)),
 casc([p(c1), is _ a(vccs),
 p(gm2),p(c2)])))]))).*

*is _ eqv(is _ a("CMOS _ two _ stage _ ampl"),
 casc([is _ a(vccs),p(r1),p(c1),
 pipo([casc([is _ a(vccs),p(r2)]),
 casc([s(cc),s(rz)]))],
 p(c2)]))).*

DODATEK 2

PRZEBIEG ANALIZY SYMBOLICZNEJ MODELU TRANZYSTORA

To find parameters of the two-port is _ a("mos _ model")

I have to find a matrix of the two-port

casc([p("cgs"),pipo([s("cgd"),is _ a("vccs")]),p("gd")])

I have to find a matrix of the two-port p("cgs")

**** give me the value of capacitance cgs in [nF]*

or press ENTER, if no value ↵

**** give me then symbolic denotation: Cgs*

Two-port p("cgs")

has matrix: type(a) class(reciprocal)

1 0

*+ Cgs*s 1*

I have to find a matrix of the two-port

pipo([s("cgd"),is _ a("vccs")])

.....

```

Two-port pipo([s("cgd"),is_a("vccs")])
has matrix: type(y) class(no_reciprocal)
+ Cgd*s      - Cgd*s
+ gm - Cgd*s + Cgd*s
and matrix: type(a) class(no_reciprocal)
[- Cgd*s]/[+ gm - Cgd*s]   [- I]/[+ gm - Cgd*s]
[- Cgd*gm*s]/[+ gm - Cgd*s] [- Cgd*s]/[+ gm - Cgd*s]
I have to find a matrix of the two-port p("gd")
*** give me the value of conductance gd in [mS]
    or press ENTER, if no value ←
*** give me then symbolic denotation: Gd
Two-port p("gd")
has matrix: type(a) class(reciprocal)
    1      0
+ Gd      1
Two-port is_a("mos_model")
has matrix: type(a) class(no_reciprocal)
[- Gd - Cgd*s]/[+ gm - Cgd*s]   [- I]/[+ gm - Cgd*s]
[+ (- Cgd*Gd - Cgd*gm - Cgs*Gd)*s - Cgs*Cgd*s2]/[+ gm - Cgd*s]
                                   [+ (- Cgd - Cgs)*s]/[+ gm - Cgd*s]
and finally I have found parameters of the given two-port
voltage gain [V2/V1, open-output]
    [+ gm - Cgd*s]/[- Gd - Cgd*s]
current gain [I2/I1, short-output]
    [+ gm - Cgd*s]/[+ (- Cgd - Cgs)*s]
voltage-current transfer function [I2/V1, short-output]
    [+ gm - Cgd*s]/[- I]
current-voltage transfer function [V2/I1, open-output]
    [+ gm - Cgd*s]/[+ (- Cgd*Gd - Cgd*gm - Cgs*Gd)*s - Cgs*Cgd*s2]

```

Pierwszych kilka wierszy zawiera komunikaty związane z analizą zstępującą struktury czwórnikowej. Po osiągnięciu czwórnika elementarnego $p(cgs)$, następuje nadanie wartości symbolicznej Cgs i wyznaczenie macierzy transmisyjnej. Dalej analizowane jest połączenie równoległe – równoległe dwóch czwórników pojemności Cgd i źródła sterowanego $VCCS$. Dla każdego z tych czwórników wyznaczana jest biblioteczna macierz transmisyjna, która następnie transformowana jest na macierz admitancyjną. Kolejnym etapem jest dodanie macierzy Y obu czwórników, przez co otrzymuje się macierz Y połączenia równoległego. Po przekształceniu macierzy admitancyjnej na transmisyjną i wyznaczeniu macierzy transmisyjnej przewodności Gd , obliczany jest iloczyn macierzy trzech czwórników połączonych kaskadowo. Jest to już wynik końcowy, który następnie przedstawiony jest w postaci funkcji przenoszenia modelu tranzystora MOS.

DODATEK 3

WYBRANE MACIERZE I PARAMETRY CZWÓRNIKOWE BIKWADU

```

Two-port rev(is_a("vccs"))
has matrix: type(y) class(no_reciprocal)
    0          [+gm1]/[-1]
    0          0
Two-port casc([p("c1"),is_a("vccs"),p("gm2"),p("c2")])
has matrix: type(a) class(no_reciprocal)
    [-gm2-C2*s]/[+gm2]    [-1]/[-gm2]
    [-C1*gm*s-C1*C2*s2]/[+gm2]    [-C1*s]/[+gm2]
and matrix: type(y) class(no_reciprocal)
    +C1*s    0
    [-gm2]/[-1]    +gm2+C2*s
Two-port pipo([rev(is_a("vccs")),casc([p("c1"),is_a("vccs"),
    p("gm2"),p("c2")])])
has matrix: type(y) class(no_reciprocal)
    +C1*s    [+gm1]/[-1]
    [-gm2]/[-1]    +gm2+C2*s
and matrix: type(a) class(no_reciprocal)
    [+gm2+C2*s]/[-gm2]    1/[-gm2]
    [+gm1*gm2+C1*gm2*s+C1*C2*s2]/[-gm2]    [+C1*s]/[-gm2]
Two-port is_a("CMOS_biquad")
has matrix: type(a) class(no_reciprocal)
    [-gm1*gm2-C1*gm*s-C1*C2*s2]/[-gm1*gm2]    [-C1*s]/[-gm1*gm2]
    0    0
and finally I have found parameters of the given two-port
voltage gain [V2/V1,open-output]
    [gm1*gm2]/[gm1*gm2+C1*gm*s+C1*C2*s2]
voltage-current transfer function [I2/V1,short-output]
    [gm1*gm2]/[C1*s]

```

Warto zwrócić uwagę na dobre właściwości redukcyjne systemu, widoczne przy zamianie macierzy transmisyjnej połączenia

$$\text{casc}([p("c1"),is_a("vccs"),p("gm2"),p(c2)])$$

na macierz admitancyjną.

H.BUDZISZ

SYMBOLIC TWO-PORT NETWORK ANALYSIS

S u m m a r y

A new and efficient method of symbolic analysis of linear analog active and passive networks is introduced. The method takes advantage of two-port network properties. A formal language based on context-free grammar has been defined, to describe network topology and control analysis process. To reduce term cancellation problem and express transfer function in fully symbolic, semi symbolic or mixed form, a polynomial and two-port matrix representation has been developed. The two-port language as well as symbol manipulation procedures has been written in logic programming language — Prolog. Some examples of implementation and analysis are also given.



Generowanie grafów sygnałowych opisujących struktury filtrów aktywnych

HENRYK BUDZISZ

Instytut Elektroniki, Wyższa Szkoła Inżynierska w Koszalinie

Otrzymano 1991.04.04

Autoryzowano do druku 1991.12.03

W pracy przedstawiono metodologię poszukiwania klas wzajemnie nieizomorficznych grafów opisujących strukturę układu o zadanej transmisji. Jako przykład wzięto filtry zbudowane z transkonduktancyjnych wzmacniaczy operacyjnych obciążonych pojemnościowo (zbudowanych ze stratnych i bezstratnych integratorów). Strategia poszukiwania oparta jest na stopniowym przechodzeniu od grafów nieskierowanych, poprzez skierowane, do grafów sygnałowych z uwzględnieniem własności grafów i ograniczeń nakładanych na transmitancję. Poszukiwanie odbywa się w warunkach eksplozji kombinatorycznej. Reguły wyboru i sterowania poszukiwaniem zapisane zostały w języku programowania logicznego

— Prolog.

1. WPROWADZENIE

Jednym z podstawowych problemów projektowania układów elektronicznych jest poszukiwanie struktur, których właściwości najlepiej spełniają określone wymagania. Względy technologiczne narzucają zwykle zbiór elementów z których struktury te można budować, a także zakres parametrów elementów i ich tolerancje.

Przy automatyzacji procesu projektowania występują dwa zasadniczo różne podejścia:

- projektowanie rutynowe, polegające na doborze spośród znanych topologii rozwiązania, które najlepiej spełnia zadane specyfikacje. Na tej zasadzie oparta jest budowa wszystkich dotychczas zrealizowanych systemów ekspertowych. Dla niektórych klas układów, dla których znane są setki rozwiązań układowych (np. dla filtrów aktywnych), a wiele spośród nich zaleca się jako najlepsze, nie jest to zadanie łatwe. Podstawowym problemem w takim przypadku jest sformułowanie i zastosowanie we właściwej kolejności odpowiednich kryteriów wyboru.
- projektowanie nowatorskie, polegające na poszukiwaniu nowych rozwiązań układowych, w oparciu o wiedzę eksperta i właściwości elementów dopuszczalnych przez technologię. Jest to znacznie trudniejsze zadanie, ze względu na dużą

przestrzeń możliwych rozwiązań, a skuteczność poszukiwań zależy w dużym stopniu od intuicji i doświadczenia projektanta.

W praktyce projektowania, pierwsze podejście pozwala na realizację większości projektów. Często jednak, pewne fragmenty wymagają indywidualnego, oryginalnego podejścia. Ciągłe też poszukuje się nowych topologii, o lepszych właściwościach od znanych rozwiązań układowych.

Niedawno zwrócono uwagę na możliwość poszukiwania struktur filtrów aktywnych wychodząc z pewnej struktury uogólnionej [2,6,11]. Uwzględnia się przy tym szereg kryteriów podstawowych zapewniających realizowalność transmitancji i potencjalną stabilność, jak również inne kryteria będące funkcją struktury topologicznej — np.: sekwencję niezależnego strojenia. Przestrzeń poszukiwania jest zwykle bardzo duża, a skuteczność poszukiwań zależy silnie od przyjętej strategii.

W niniejszej pracy przedstawiono koncepcję poszukiwania struktur filtrów TAC (Transconductance Amplifiers and Capacitors) [1,12–15], zbudowanych z operacyjnych wzmacniaczy transkonduktancyjnych (OWT) i pojemności. Filtry te są przedmiotem intensywnych badań w związku z możliwością ich realizacji w technologii VLSI i zastosowaniami do częstotliwości nawet kilkudziesięciu MHz.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

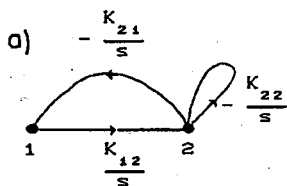
Celem końcowym jest znalezienie struktur układów realizujących zadaną transmitancję

$$T(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0}, \quad m \leq n \quad (1)$$

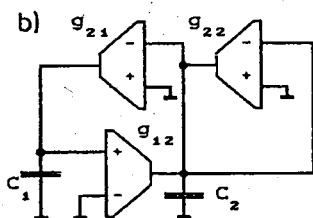
i spełniających szereg dodatkowych ograniczeń.

Wprowadzenie zer transmisyjnych nie przedstawia zwykle większych trudności. Podstawowym problemem jest znalezienie struktury realizującej mianownik $D(s)$ zależności (1).

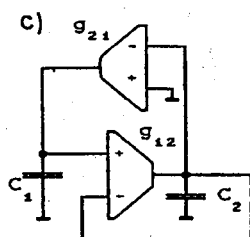
Jednym z ogólnych sposobów przedstawienia związku między transmitancją układu a jego topologią jest graf sygnałowy układu. Związek ten nie jest jednoznaczny, gdyż dopuszcza wiele różnych implementacji układowych. Rys. 1 przedstawia przykład grafu realizującego transmitancję rzędu drugiego i jego implementację w klasie elementów TWO i C. Rys. 2 przedstawia realizację idealnego integratora (rys. 2a) i układu proporcjonalnego (rys. 2b). To drugie rozwiązanie może być w praktyce zrealizowane tylko z dużym przybliżeniem, ze względu na wysokoimpedancyjny charakter obciążenia [12]. Bardziej reprezentatywnym modelem układu rzeczywistego jest układ inercyjny (rys. 2c).



$$D(s) = s^2 + K_{22}s + K_{12}K_{21}$$

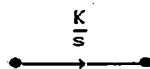
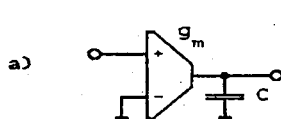


$$D(s) = s^2 + \frac{g_{m22}}{C_2} s + \frac{g_{m21}g_{m12}}{C_1C_2}$$

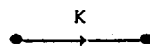
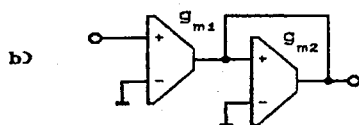


$$D(s) = s^2 + \frac{g_{m12}}{C_2} s + \frac{g_{m21}g_{m12}}{C_1C_2}$$

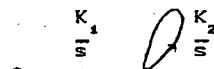
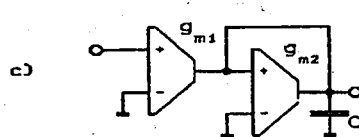
Rys. 1. Przykład grafu i jego implementacji układowych



$$T(s) = \frac{g_m}{sC} = \frac{K}{s}$$



$$T(s) = \frac{g_{m1}}{g_{m2}} = K$$



$$T(s) = \frac{g_{m1}}{sC + g_{m2}} = \frac{K_1}{s + K_2}$$

Rys. 2. Realizacja układowa gałęzi grafu

Celem dalszych rozważań jest poszukiwanie struktur grafów sygnałowych realizujących zadany mianownik $D(s)$ transmitancji filtru. Jak pokazują rys. 2a i 2c, wszystkie gałęzie takiego grafu będą integratorami o transmitancjach $+\frac{K}{s}$ lub $-\frac{K}{s}$. Graf pełny (graf skierowany zupełny z pętlami własnymi) oparty na n węzłach ma n^2 gałęzi. Przyjmując dla każdej gałęzi transmitancję $0, +\frac{K}{s}, -\frac{K}{s}$, na n węzłach można zbudować 3^{n^2} grafów sygnałowych. Liczba ta bardzo szybko rośnie ze wzrostem n (tabl. 1).

Tabela 1

Liczba zaetykietowanych grafów sygnałowych o trzech kombinacjach transmitancji

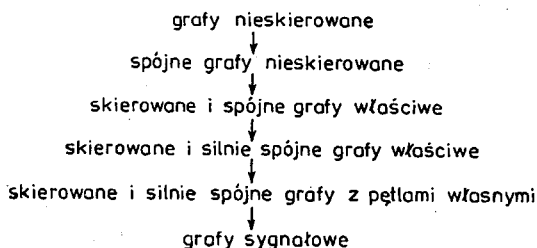
n	1	2	3	4	5
3^{n^2}	3	81	19683	43046721	847288609443

Spośród tych grafów należy odrzucić grafy izomorficzne (tzn. identyczne po przenumowaniu węzłów) oraz grafy niespójne, a dla pozostałych sformułować kryteria wyboru. Niestety nie ma żadnej ogólnej metody generowania grafów nieizomorficznych i spójnych. Można jedynie w oparciu o twierdzenie Poloya [7,10] określić ich ilość. Generowanie zaś wszystkich grafów i odrzucenie izomorficznych i niespójnych (poszukiwanie wyczerpujące) dla $n > 3$ jest nieefektywne. Przedstawiony wyżej problem jest zaliczany do zagadnienia poszukiwania w warunkach eksplozji kombinatorycznej.

3. STRATEGIA POSZUKIWANIA STRUKTUR GRAFÓW SYGNAŁOWYCH

Strategia poszukiwania oparta została na stopniowym dochodzeniu od struktur najbardziej ogólnych do grafów sygnałowych spełniających wszystkie założenia. Jest ona realizowana poprzez dwa zbiory reguł reprezentujących wiedzę dotyczącą:

- hierarchii i właściwości grafów,
- właściwości transmitancji układów i specyfikacji projektowych.



Rys. 3. Hierarchiczna transformacja grafów

Biorąc pod uwagę hierarchię grafów przedstawioną na rys. 3, niższa klasa grafów jest generowana z poprzedniej przez zastosowanie pewnego zbioru reguł transformacji.

Reguły wyboru, uwzględniające ograniczenia nakładane na transmitancję, są stosowane w procesie przekształcania grafów przemienne z regułami transformacji, na możliwie wysokim poziomie hierarchii.

3.1. GENEROWANIE GRAFÓW SYGNAŁOWYCH

Najbardziej ogólnymi strukturami grafów są grafy niezorientowane i niezaetykietowane. Liczba ich rośnie ze wzrostem n niezbyt szybko (tabl. 2).

T a b e l a 2

Liczba niezaetykietowanych grafów niezorientowanych

n	1	2	3	4	5
wszystkie	1	2	4	11	34
spójne	1	1	2	6	21

Dla przykładu, rys. 4 przedstawia wszystkie spójne niezaetykietowane grafy niezorientowane o czterech wierzchołkach.

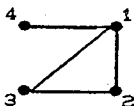


Rys. 4. Spójne niezaetykietowane grafy niezorientowane o czterech wierzchołkach

W zbiorze grafów izomorfizm jest relacją równoważności. Liczba różnych grafów niezaetykietowanych równa jest liczbie klas równoważności grafów zaetykietowanych ze względu na izomorfizm. Tak więc graf niezaetykietowany przedstawia klasę izomorficznych grafów zaetykietowanych. Graf niezaetykietowany można niestety przedstawić tylko na rysunku. Wszystkie opisowe reprezentacje struktury grafu wymagają zaetykietowania wierzchołków (lub krawędzi), a więc wybrania reprezentanta z odpowiadającej mu klasy grafów zaetykietowanych. Rys. 5 przedstawia przykład takiego grafu oraz jego ramową reprezentację [5].

Wierzchołki zostały tu ponumerowane w dowolnej kolejności. Również na liście krawędzi, kolejność wierzchołków przyległych jest dowolna (nie wskazują początku i końca krawędzi).

a)

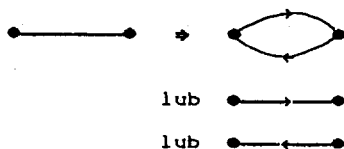


b)

```
undirected_graph(no_of_vertices(4)),  
edges([1,4,1], [1,2], [2,3], [1,3]))←.
```

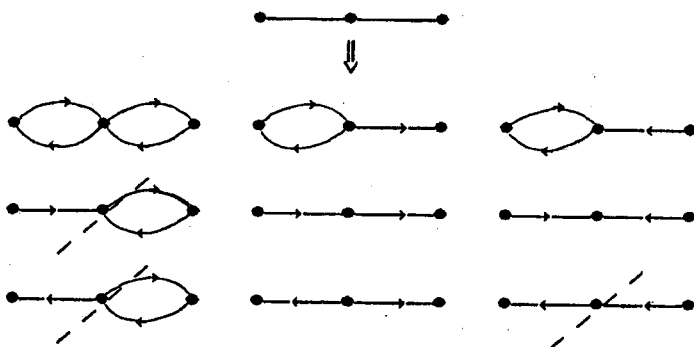
Rys. 5. Graf nieskierowany zaetykietowany i jego ramowa reprezentacja

Na bazie grafów nieorientowanych buduje się grafy zorientowane właściwe (bez pętli własnych), zastępując każdą gałąź grafu nieorientowanego przez gałęzie zorientowane. Reguła zastępowania pokazana została na rys. 6. Proces ten nazywany jest orientacją grafu.



Rys. 6. Sposób zastępowania gałęzi nieorientowanej przez zorientowane

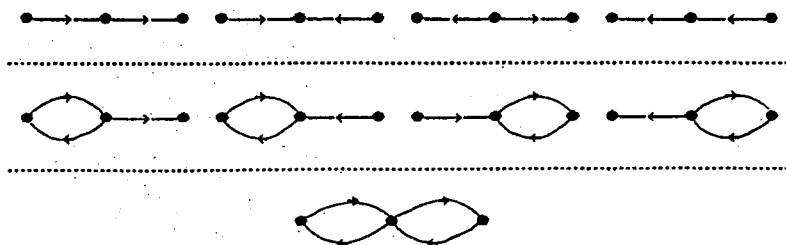
Łatwo zauważyć, że zastosowanie tej reguły prowadzi do wygenerowania z każdego grafu nieorientowanego, rodziny 3^m grafów zorientowanych (orgrafów), gdzie m jest liczbą nieorientowanych gałęzi (mocą zbioru gałęzi). Ponieważ w wyniku orientacji, podstawowa struktura grafu nie zmienia się, powstające orgrafy zachowują cechy strukturalne przodka, tj. spójność (na ogół słabą spójność), a także brak izomorfizmu między orgrafami pochodzącymi od różnych przodków. Jednak wśród orgrafów pochodzących od wspólnego przodka, izomorfizm jest dość powszechny. Przykład orientacji grafu pokazany został na rys. 7.



Rys. 7. Graf nieorientowany z dwoma gałęziami, generuje $3^2 = 9$ orgrafów — z tego 6 jest niezizomorficznych, a wśród nich z kolei jeden jest silnie spójny, a pozostałe słabo spójne

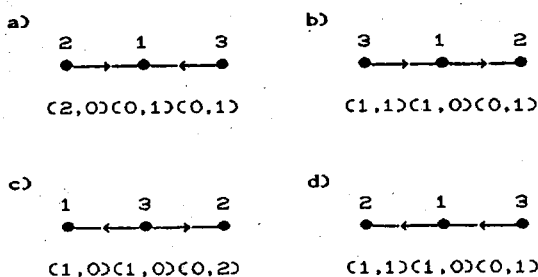
Zagadnienie izomorfizmu grafów polega na stwierdzeniu, czy istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między wierzchołkami dwóch grafów G_1 i G_2 , która zachowuje przyległość wierzchołków. Teoretycznie rzecz biorąc, zawsze można określić, czy dwa grafy G_1 i G_2 są, czy nie są izomorficzne, ustalając graf G_1 i przestawiając wierzchołki grafu G_2 , aby sprawdzić, czy staną się identyczne. Proces taki wymagałby $n!$ przestawień i porównań, gdzie n jest liczbą wierzchołków. Dlatego jest poprzedzany procedurą heurystyczną, w której próbuje się wykazać, że grafy G_1 i G_2 nie są izomorficzne.

Pierwszym elementem tej procedury jest porównanie liczby krawędzi. Tylko grafy o jednakowej liczbie krawędzi mogą być izomorficzne. To kryterium powoduje podział rodziny wygenerowanych orgrafów na oddzielne grupy (rys. 8).



Rys. 8. Podział orgrafów z rys. 7 na grupy o jednakowej liczbie krawędzi

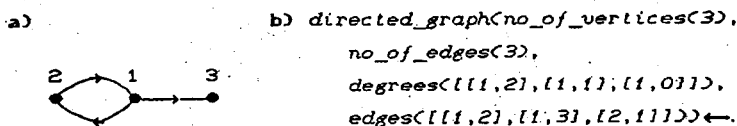
Drugim kryterium jest porównanie liczby półstopni wejściowych i wyjściowych [10]. W tym celu węzły zostają przenumerowane w taki sposób, aby półstopnie przedstawiały ciąg malejący. Rys. 9 przedstawia przykład takiego opisu orgrafów. Warto zauważyć, że tylko w przypadku b i d układ półstopni jest identyczny, co może wskazywać na izomorfizm (i tak rzeczywiście jest).



Rys. 9. Orgrafy z opisem półstopni (półstopień wejściowy, półstopień wyjściowy), w kolejności określonej przez numerację węzłów

Oba kryteria w istotny sposób ograniczają przestrzeń badania izomorfizmu. Jednak dla grafów stopnia wyższego niż czwarty, pozostaje to nadal istotnym problemem [10].

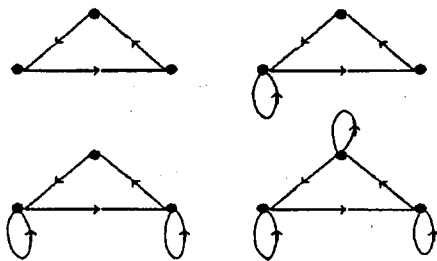
Praktyczne rozwiązanie przedstawionych problemów, wymaga znacznie bardziej rozbudowanej reprezentacji ramowej orgrafu w porównaniu z grafem niezorientowanym (porównaj rys. 5.b). Przykład takiej reprezentacji pokazany został na rys. 10.



Rys. 10. Orgraf i jego ramowa reprezentacja

W odróżnieniu od grafu nieorientowanego, pierwszy z pary wierzchołków przyległych do krawędzi wskazuje na początek, a drugi na koniec łuku.

Kolejnym etapem jest dołączenie do każdego orgrafu właściwego pętli własnych, w taki sposób aby nie powstawały grafy izomorficzne (rys. 11).



Rys. 11. Orgrafy z pętlami własnymi

Reguła orientacji przedstawiona na rys. 6. w połączeniu z dodawaniem pętli (rys. 11), prowadzi do grafów Berge'a (unigrafów skierowanych, czyli orgrafów o krotności jeden [9]). Grafy takie zawierają jedynie łuki i pętle. Graf bez pętli nazywany jest przeciwwrotnym grafem Berge'a (przykłady – rys. 7).

Ostatnim etapem jest przejście od orgrafu do grafu sygnałowego przez przypisanie gałęziom transmitancji $\frac{K}{s}$ lub $-\frac{K}{s}$. W wyniku otrzymuje się struktury, które mogą być podstawą do budowy filtrów TAC. Przykład takiej implementacji został pokazany na rys. 1. Największą zaletą hierarchizacji grafów jest dziedziczenie właściwości braku izomorfizmu pomiędzy poszczególnymi klasami generowanych grafów. Powoduje to rozbieżność całkowitej przestrzeni poszukiwań na mniejsze, a przez to w istotny sposób ulega ograniczeniu zjawisko eksplozji kombinatorycznej.

3.2. OGRANICZENIA NAKŁADANE NA TRANSMITANCJĘ

Drugi zbiór reguł jest związany z ograniczeniami i wymaganiami nakładanymi na transmitancję filtru, takimi jak:

- poprawna postać transmitancji,
- potencjalna stabilność,

a także ze specyfikacjami projektowymi, np.:

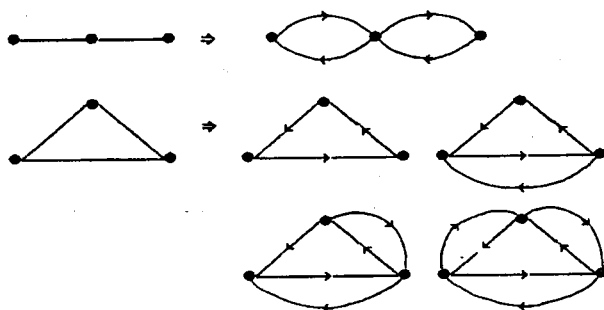
- stopień filtru,
- rodzaj filtru,
- nieinterakcyjne strojenie.

Reguły te są stosowane przemiennie z regułami generacyjnymi, na możliwie wysokim poziomie drzewa hierarchicznego, przez co dodatkowo redukuje się przestrzeń poszukiwań.

Rozważmy na początku ograniczenia związane ze stopniem filtru, który jest równy stopniowi mianownika $D(s)$ transmitancji (1). Jeżeli, jak się zakłada, każda gałąź grafu

jest integratorem, liczba wierzchołków musi być równa lub większa od stopnia filtru. Eliminuje to z poszukiwań, od samego początku wszystkie grafy z mniejszą liczbą wierzchołków.

Innym czynnikiem, który może być wykorzystany na wczesnym etapie poszukiwań są ogólne właściwości struktur filtrów. Na przykład najlepsze właściwości wrażliwościowe mają struktury z wielopętlowym sprzężeniem zwrotnym [8]. Strukturze takiej odpowiada orgraf silnie spójny. Warunkiem zachowania silnej spójności jest przestrzeganie ograniczenia, że do każdego węzła dochodzi i wychodzi przynajmniej jedna gałąź (tzn. graf nie ma źródeł ani studni). Rys. 12 przedstawia niezaetykietowane orgrafy spełniające wymienione warunki oparte na trzech węzłach oraz grafy niezorientowane, z których powstały.



Rys. 12. Wszystkie silnie spójne, nieizomorficzne grafy właściwe oparte na trzech wierzchołkach

Jedną z podstawowych koncepcji syntezy topologicznej jest "struktura potencjalnie realizująca zadaną transmitancję" [6]. Mianownik transmitancji realizowanej przez układ rzeczywisty ma postać

$$D'(s) = b_n' s^n + b_{n-1}' s^{n-1} + \dots + b_0' \quad (2)$$

gdzie:

$$b_i' = \sum b_i^+ - \sum b_i^-$$

tj. każdy współczynnik może mieć składniki dodatnie i ujemne.

Ponieważ warunkiem stabilności układu jest aby $b_i' > 0$, dla $i=0,1,\dots,n$; musi istnieć przynajmniej jedno $b_i^+ \neq 0$. Strukturę spełniającą warunek $\forall_{i \in (1,n)} \exists b_i^+ \neq 0$ będziemy

nazywać strukturą potencjalnie stabilną realizującą $D(s)$.

Kolejnym ograniczeniem nakładanym na generowane struktury, może być ograniczenie liczby gałęzi dochodzących do wierzchołka i ich znaków. Wiąże się to z łatwością późniejszej implementacji struktury w technice TAC, gdyż każda gałąź dochodząca odpowiada wejściu wzmacniacza transkonduktancyjnego.

Jeszcze innym ograniczeniem może być poszukiwanie sekwencji niezależnego strojenia filtru [2,11]. Jest to bardzo silne ograniczenie [2] i dlatego można je stosować w różnych "złagodzonych" wersjach.

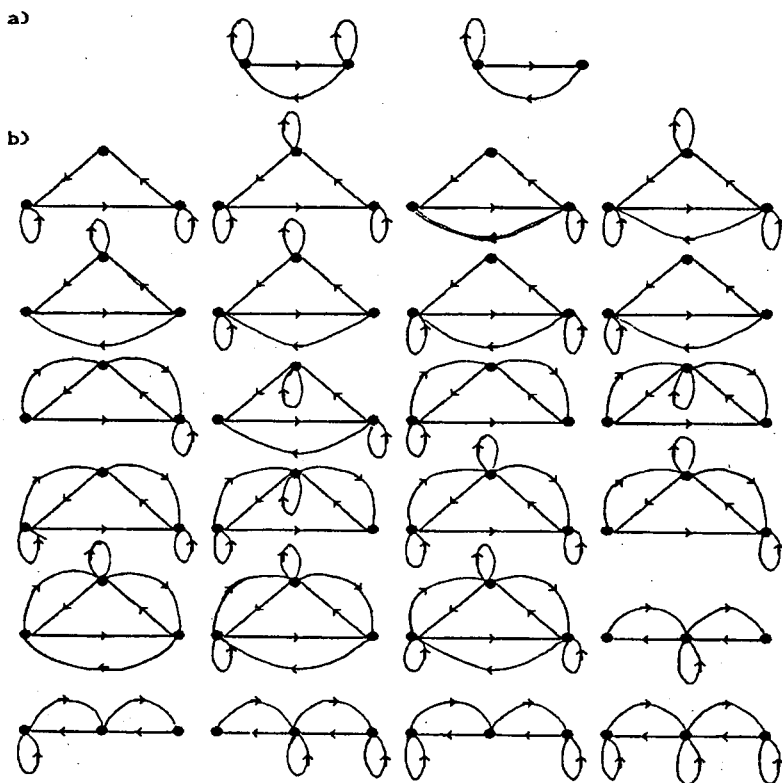
Jeżeli liczba wygenerowanych struktur jest w dalszym ciągu zbyt duża dla podjęcia decyzji o wyborze, można przyjąć dodatkowe ograniczenia.

4. PRZYKŁADY GENEROWANIA GRAFÓW

Jako pierwszy przykład, wygenerowane zostały orgrafy spełniające następujące ograniczenia:

- grafy skierowane są silnie spójne,
- struktury nie są izomorficzne,
- mianownik transmitancji (1) ma niezerowe kolejne wyrazy $b_0, b_1, \dots, b_k, k \leq n$.

Znaków transmitancji nie bierze się tu pod uwagę. Dla dwóch węzłów otrzymuje się dwie struktury spełniające te kryteria (rys. 13a), a dla trzech węzłów 24 struktury (rys. 13b). Warto zauważyć, że wszystkie grafy z rys. 13b, oparte są na strukturach z rys. 12, które są ich przodkami.

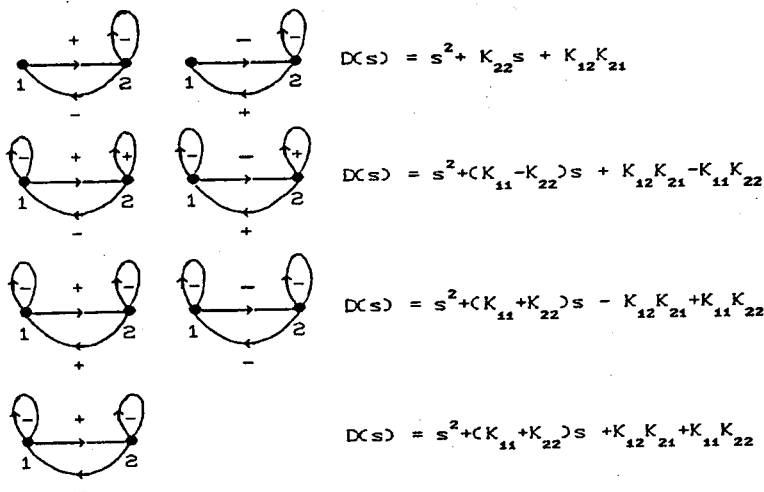


Rys. 13. Grafy spełniające wymienione wyżej kryteria

Jako drugi przykład, wygenerowane zostały grafy sygnałowe spełniające następujące ograniczenia:

- grafy skierowane są silnie spójne,
- transmitancja jest rzędu drugiego,
- struktury są potencjalnie stabilne.

Dla dwóch węzłów otrzymano 7 struktur (rys. 14) spośród 81 możliwych (tabl. 1), na bazie których można zbudować sekcje drugiego rzędu.



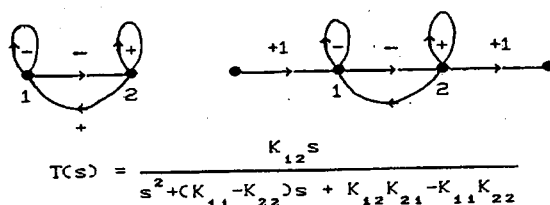
Rys. 14. Nieizomorficzne grafy sygnałowe realizujące transmitancję drugiego rzędu

Warto zauważyć, że wszystkie te grafy oparte są na strukturach z rys. 13a, co wynika ze wspólnych kryteriów wyboru.

W przypadku filtra czwartego rzędu zostało wygenerowanych kilkaset struktur, spośród prawie 20000 możliwych (tabl. 1), spełniających podobne ograniczenia.

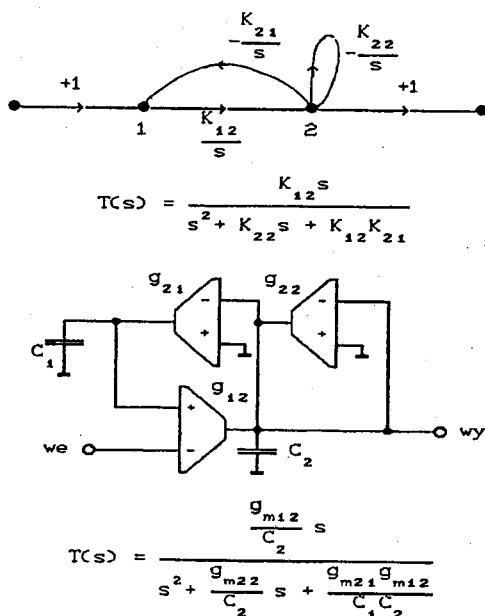
5. IMPLEMENTACJA STRUKTURY FILTRÓW W TECHNOLOGII TAC

Wprowadzenie zer transmisyjnych może być zrealizowane przez wskazanie wejścia i wyjścia (rys. 15).



Rys. 15. Przykład implementacji zer transmisyjnych

W przypadku bardziej złożonych struktur, istnieje tu szereg możliwości i można sformułować pewne reguły realizujące tę operację. Implementacja grafy sygnałowego w technologii TAC, może być również wykonana w różnych wariantach. Przykład realizacji filtra w oparciu o graf sygnałowy pokazuje rys. 16.



Rys. 16. Przykład realizacji filtra TAC w oparciu o graf sygnałowy

Przejsie od grafu sygnałowego do struktury układowej stanowi więc osobny problem, który został tu zaledwie zasygnalizowany.

6. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono koncepcję zastosowania systemu reguł do poszukiwania grafów opisujących strukturę układu o zadanej transmitancji. Zbiór elementów jest tu jedynym ograniczeniem. Nie zakłada się natomiast konieczności budowania struktury uogólnionej. Jako przykład wzięto filtry zbudowane z transkonduktancyjnych wzmacniaczy operacyjnych obciążonych pojemnościowo. Strategia poszukiwania oparta jest na stopniowym przechodzeniu od grafów nieskierowanych, poprzez skierowane, do grafów sygnałowych z uwzględnieniem własności grafów i ograniczeń nakładanych na transmitancję. Poszukiwanie odbywa się w warunkach eksplozji kombinatorycznej.

Wynikiem poszukiwań jest wykaz struktur spełniających postawione wymagania. Wykaz ten może zawierać wiele (nawet kilka tysięcy) takich struktur, w zależności od „odsiewających” właściwości ograniczeń. Ponieważ generacja przebiega od struktur najprostszych (w sensie liczby węzłów i krawędzi) w kierunku bardziej złożonych (aż do osiągnięcia grafu pełnego), proces można przerwać po znalezieniu wystarczającej liczby struktur.

Następnym etapem poszukiwania struktur optymalnych może być ich selekcja w oparciu o wybrane kryteria, np. kryteria wrażliwościowe lub związane z dynamiką

układu. Właściwości te nie są już wyłącznie funkcją struktury, ale związane są również z wartościami parametrów elementów, z których filtr jest zbudowany.

Programowa realizacja została wykonana w Prologu i składa się z trzech podstawowych części:

- bazy zawierającej struktury grafów niezorientowanych
- zespołu reguł sterujących poszukiwaniem
- zespołu reguł nakładających ograniczenia na poszukiwane struktury.

Implementacja przedstawionej koncepcji w Prologu, ma charakter prototypowy. Budowa wersji użytkowej o cechach charakterystycznych dla systemu ekspertowego wymagałaby zaangażowania znacznego zespołu wdrożeniowego.

BIBLIOGRAFIA

1. C. A c a r, M. S. G h a u s i: *Fully integrated active filter design using MOS technology and non-balanced structure*. Proc of ECCTD'87, pp. 307–313
2. H. B u d z i s z: *Poszukiwanie rozwiązań zadania kombinatorycznego na przykładzie projektowania struktury topologicznej biquadu*. X KK TOiUE, Gdańsk 1987, ss. 813–818
3. H. B u d z i s z: *Poszukiwanie struktur filtrów TAC przy użyciu systemu reguł*. XI KK TOiUE, Łódź 1988, ss. 336–341
4. H. B u d z i s z: *Searching for filter structures using rule-based system*. ECCTD'89, pp. 372–375
5. H. B u d z i s z: *Reprezentacja wiedzy o układach elektronicznych, cz. II, Sieci semantyczne i reprezentacja ramowa*, Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji, 1991, 37, z. 3–4, ss. 423–433
6. J. A. D o b o s z, E. L i n d b e r g: *Topological synthesis as a stage of RC-active filter design*. Proc. of ECCTD'87, pp. 651–656
7. N. D e o: *Teoria grafów i jej zastosowania w technice i informatyce*. Warszawa: PWN, 1980
8. M. S. G h a u s i, K. R. L a k e r: *Modern Filter Design*. Prentice-Hall, Inc. 1981
9. B. K o r z a n: *Elementy teorii grafów i sieci. Metody i zastosowania*. Warszawa: WNT, 1978
10. J. L. K u l i k o w s k i: *Zarys teorii grafów*. Warszawa: PWN, 1986
11. J. C. M a u l y, J. N e i r y n c k: *Exhaustive search of infinite Q biquad cells by a Prolog program*. 1986 IEEE IS CAS, pp. 535–538
12. K. D. P e t e r s o n, A. P. N e d u n g a d i, R. L. G a i g e r: *Amplifier design considerations for high frequency monolithic filters*. Proc. of ECCTD'87, pp. 321–325
13. E. S a n c h e z - S i n e n c i o, R. L. G a i g e r, H. N a v a r e z, L o z a n o: *Generation of continuous-time two integrator loop OTA filter structures*. IS CAS 1987, pp. 325–328
14. E. S a n c h e z - S i n e n c i o, S. Q i n, R. L. G a i g e r, K. D. P e d e r s o n: *Monolithic programmable state-variable biquadratic OTA-Capacitor (TAC) filters*. Proc of ECCTD'87, pp. 327–332
14. Y. T s i v i d i s, P. A n t o g n e t t i, eds.: *Design of MOS VLSI Circuits for telecommunications*, Prentice-Hall Inc., 1985

H. BUDZISZ

GENERATION OF SIGNAL FLOW GRAPHS DESCRIBING ACTIVE FILTER STRUCTURES

Summary

In this paper a rule-based methodology is presented to search for graphs described structures of circuits with given transfer function. TAC filters consisting of lossy and lossless integrators have been taken as an

example. The strategy of searching begins with generation of the most basic class of graphs — undirect and non-isomorphic. In the next stage undirect arcs are replaced by directed ones, generating from each undirected graph a family of directed ones. And finally the directed graphs are changed into signal graphs regarding properties of transfer function. These structures potentially realizing the given transfer function can be implemented as OTA circuits. The introduced strategy partially enables avoiding of the combinatorial explosion problem. The rules controlling search and constraints have been written in logic programming language — Prolog.

Metoda uproszczonej identyfikacji parametrów modelu Strejca na podstawie pierwszych próbek odpowiedzi skokowej

STANISŁAW SKOCZOWSKI

*Instytut Automatyki Przemysłowej, Wydział Elektryczny
Politechnika Szczecińska*

Otrzymano 1991.06.19

Autoryzowano do druku 1991.11.06

W pracy przedstawiono prostą metodę przybliżoną identyfikacji zredukowanego rzędu oraz pozostałych parametrów modelu Strejca z opóźnieniem dla obiektu liniowego. Zaletą prezentowanej metody jest szybkość identyfikacji opartej na pomiarach pierwszych próbek odpowiedzi skokowej obiektu. Metoda ta może mieć zastosowanie w algorytmach samonastrajających lub adaptacyjnych.

1. WPROWADZENIE

Zakłada się, że należy dokonać szybkiej identyfikacji przybliżonej obiektu liniowego opisanego transmitancją

$$(1) \quad G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} e^{-\sigma s}$$

$$\begin{aligned} \text{gdzie } B(s) &= b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m \\ A(s) &= a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n \\ n &> m \end{aligned}$$

na podstawie pierwszych próbek odpowiedzi skokowej tego obiektu. Przydatność praktyczna rozwiązania tak postawionego zadania jest oczywista. W przypadku braku informacji o tym, czy proces przejściowy jest periodyczny czy aperiodyczny lub czy i jakie występuje różniczkowanie, zakłada się, że w pierwszych chwilach odpowiedź skokowa identyfikowanego obiektu może być aproksymowana parabolą „zredukowanego” rzędu $n-m$, a widziany w trakcie tej uproszczonej identyfikacji model $M(s)$ przyjmuje się jako model Strejca z opóźnieniem

$$M(s) = \frac{b_{0M} e^{-\sigma_M s}}{\left(\frac{1}{T_M} + s \right)^r} = \frac{k e^{-\sigma_M s}}{(1 + s T_M)^r} \quad (2)$$

gdzie: $n-m=r$ jest „zredukowanym” rzędem modelu uproszczonego, widzianym w trakcie identyfikacji

k jest wzmocnieniem zastępczym modelu uproszczonego

T_M jest stałą czasową modelu uproszczonego

τ_M jest opóźnieniem modelu uproszczonego.

Można zauważyć, że wiele procesów fizycznych charakteryzuje się tym, że one są z natury swojej pozbawione różniczkowania i aperiodyczne. Przykładem mogą tu być procesy cieplne [2,3]. Obiekty elektrotermiczne są obiektami wieloinercyjnymi z opóźnieniem. Stąd, model (2) może być adekwatny dla szerokiej klasy procesów przemysłowych.

Zauważmy, że obejmuje on sobą także popularny model Küpfmüllera inercji I rzędu z opóźnieniem.

Odpowiedź skokowa modelu (2), przy założeniu braku opóźnienia $\tau_M=0$ jest określona wyrażeniem

$$h_M(t) = k \left\{ 1 - \exp(-t/T_M) \left[1 + \frac{t}{T_M} + \frac{(t/T_M)^2}{2!} + \dots + \frac{(t/T_M)^{r-1}}{(r-1)!} \right] \right\} \quad (3)$$

i posiada trzy charakterystyczne wartości.

Dla $t=T_M$ jest

$$h_M(T_M) = k \left\{ 1 - e^{-1} \left[1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(r-1)!} \right] \right\} = k\sigma$$

dla $t=T_M(r-1)$ — punkt przecięcia

$$h_M(T_M(r-1)) = k \left\{ 1 - e^{-(r-1)} \left[1 + (r-1) + \frac{(r-1)^2}{2!} + \dots + \frac{(r-1)^{r-1}}{(r-1)!} \right] \right\} = k\gamma$$

i dla $t=\Sigma T_M=r \cdot T_M$

$$h_M(rT_M) = k \left\{ 1 - e^{-r} \left[1 + r + \frac{r^2}{2!} + \dots + \frac{r^{r-1}}{(r-1)!} \right] \right\} = k\mu$$

wartości charakterystyczne σ , γ i μ w zależności od rzędu zredukowanego r , podano w Tablicy 1.

Tablica 1

Wartości charakterystyczne odpowiedzi skokowej modelu Strejca w zależności od rzędu r

	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$
σ	0,632	0,2642	0,0803	0,018988	0,00366
γ	—	0,264	0,3233	0,353	0,371
μ	0,632	0,594	0,577	0,567	0,560

Z modelem (2) wiąże się również znane [1] pojęcie średniej stałej czasowej $\bar{T}$, dla obiektu o transmitancji (1):

$$\bar{T} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i}} = \frac{n}{a_{n-1}} \quad (4)$$

gdzie T_i oznacza i -tą inercję w transmitancji (1).

W szczególnym przypadku, gdy wszystkie bieguny transmitancji są zbieżne w punkcie $S = -\frac{1}{\bar{T}, j0}$, co jest słuszne właśnie dla modelu Strejca (2), jest

$$\bar{T} = T_M \quad (5)$$

2. IDENTYFIKACJA RZĘDU MODELU

Jednym z najważniejszych parametrów modelu (2) jest zredukowany rząd $r=n-m$, pozwalający ocenić poprawność doboru struktury modelu. Decyduje on o początkowym przebiegu odpowiedzi skokowej obiektu, niezależnie od postaci transmitancji (1) [1].

Znając r , można od razu oszacować w przybliżeniu pozostałe parametry modelu (2). Postawione tu zadanie polega na oszacowaniu zredukowanego rzędu modelu już w pierwszych chwilach odpowiedzi skokowej obiektu.

Dzieląc wielomian $B(s)$ przez $A(s)$, transmitancję (1) można zapisać w postaci

$$G(s) = e^{-\tau} [b_m s^{-(n-m)} + (b_{m-1} - b_m a_{n-1}) s^{-(n-m)-1} + (b_{m-2} - b_{m-1} a_{n-1} + b_m (a_{n-1}^2 - a_{n-2})) s^{-(n-m)-2} + \dots] \quad (6)$$

Odpowiedź skokowa obiektu o transmitancji (6) będzie

$$h(t) = \alpha^{-1} \left[\frac{G(s)}{s} \right] = b_m \frac{(t-\tau)^{n-m}}{(n-m)!} + (b_{m-1} - b_m a_{n-1}) \frac{(t-\tau)^{n-m+1}}{(n-m+1)!} + (b_{m-2} - b_{m-1} a_{n-1} + b_m (a_{n-1}^2 - a_{n-2})) \frac{(t-\tau)^{n-m+2}}{(n-m+2)!} + \dots \quad (7)$$

Dla modelu uproszczonego $M(s)$ o transmitancji (2), będzie

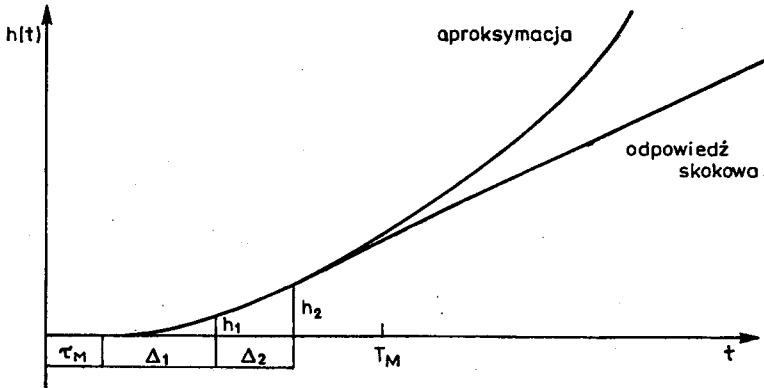
$$h_M(t) = b_{0M} \frac{(t-\tau_M)^r}{r!} - b_{0M} a_{r-1} \frac{(t-\tau_M)^{r+1}}{(r+1)!} + b_{0M} (a_{r-1}^2 - a_{r-2}) \frac{(t-\tau_M)^{r+2}}{(r+2)!} + \dots \quad (8)$$

Uwzględniając, iż dla (2), zachodzą związki

$$a_{r-1} = \frac{r}{T_M}$$

$$a_{r-2} = \frac{r(r-1)}{2 T_M^2} \quad (9)$$

oraz biorąc pod uwagę dwie próbki odpowiedzi skokowej h_1 i h_2 , jak to pokazano na Rys. 1, przy założeniu znajomości opóźnienia τ_M , można w przybliżeniu wyznaczyć stosunek h_2/h_1 , ograniczając się tylko do trzech wyrazów rozwinięcia $h_M(t)$ (8).



Rys. 1. Przebieg początku odpowiedzi skokowej i jej aproksymacji

Przy tym próbki wyznacza się odpowiednio dla czasów $t_1 = T_p$ oraz $t_2 = T_p(1 + \kappa)$, gdzie $0 < \kappa \leq 1$ a T_p jest okresem próbkowania.

$$\frac{h_2}{h_1} \simeq (1 + \kappa)^r \frac{1 - \frac{rT_p(1 + \kappa)}{(r+1)T_M} + \frac{rT_p^2(1 + \kappa)^2}{(r+2)2T_M^2}}{1 - \frac{rT_p}{(r+1)T_M} + \frac{rT_p^2}{(r+2)2T_M^2}} \quad (10)$$

Wyrażenie (10) można zapisać w postaci

$$\frac{h_2}{h_1} \approx (1 + \kappa)^r \cdot \varphi\left(r, \frac{T_p}{T_M}\right) \quad (11)$$

gdzie funkcja $\varphi(\cdot)$ jest ogólnie zależna od liczby wyrazów rozwinięcia (8), rzędu r oraz stosunku T_p/T_M .

Dla trzech wyrazów rozwinięcia jest:

$$\varphi\left(r, \frac{T_p}{T_M}\right) \approx \frac{1 - \frac{r(1 + \kappa)}{(r+1)} \frac{T_p}{T_M} + \frac{r(1 + \kappa)^2}{2(r+2)} \left(\frac{T_p}{T_M}\right)^2}{1 - \frac{r}{(r+1)} \frac{T_p}{T_M} + \frac{r}{2(r+2)} \left(\frac{T_p}{T_M}\right)^2} \quad (12)$$

W Tabelcy 2 podano wartości $\varphi\left(r, \frac{T_p}{T_M}\right)$ obliczone wg wzoru (12) dla różnych wartości r i T_p/T_M .

T a b l i c a 2

Wartości funkcji φ w zależności od rzędu modelu oraz względnej wartości okresu próbkowania, przy uwzględnieniu 3 wyrazów rozwinięcia $h(t)$. Pod kreską podano dokładne wartości funkcji φ

T_p/T_M	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$
0,1	0,952714536	0,936776491	0,928879310	0,924187725
	0,952418709		0,928272488	
0,2	0,911764706	0,882129278	0,867749420	0,859375000
	0,909365377		0,862697337	
0,3	0,878612717	0,838905775	0,820448878	0,810126582
	0,870409110		0,802727217	
0,4	0,854838710	0,810344828	0,791443850	0,781818182
	0,835160023		0,747864848	
0,5	0,842105263	0,800000000	0,785714286	0,780487805
	0,803265330		0,697657721	

Podano też dla porównania dokładną wartość $\varphi(\cdot)$, obliczoną na podstawie (3), dla $r=3$ i $r=1$. Można zauważyć, iż dla niewielkich wartości T_p/T_M , wartość funkcji $\varphi(\cdot)$ jest bliska jedności. Uwzględniając to spostrzeżenie we wzorze (11) i logarytmując otrzymuje się prostą zależność przybliżoną na oszacowanie rzędu zredukowanego r , na podstawie pierwszych próbek odpowiedzi skokowej

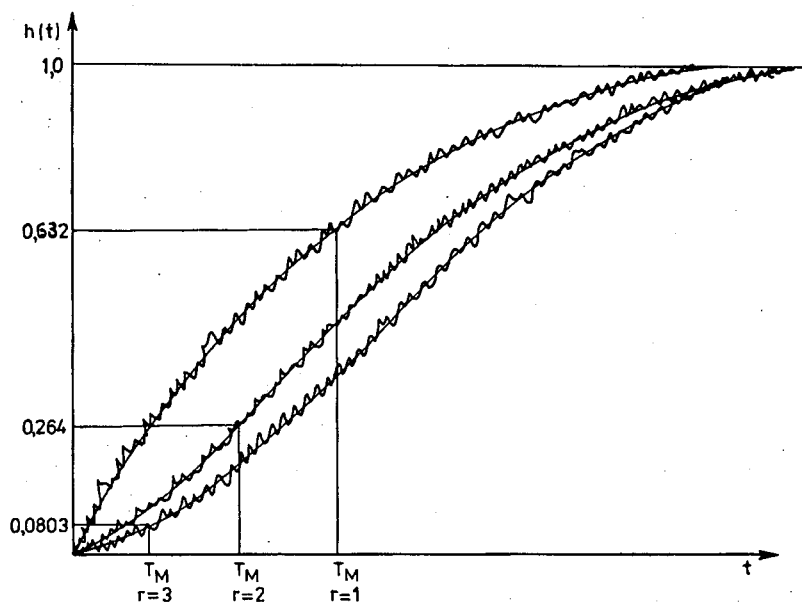
$$r \approx \frac{\ln \frac{h_2}{h_1}}{\ln(1 + \kappa)} \quad (13)$$

Szacując rząd r zredukowanego modelu (2) na podstawie równania (13), należy przyjmować wartości całkowite, zaokrąglając w górę, co wynika z charakteru funkcji $\varphi(\cdot)$. Bowiern jest

$$(1 + \kappa)^r = \frac{h_2}{h_1} \frac{1}{\varphi(\cdot)}; \quad \varphi(\cdot) < 1.$$

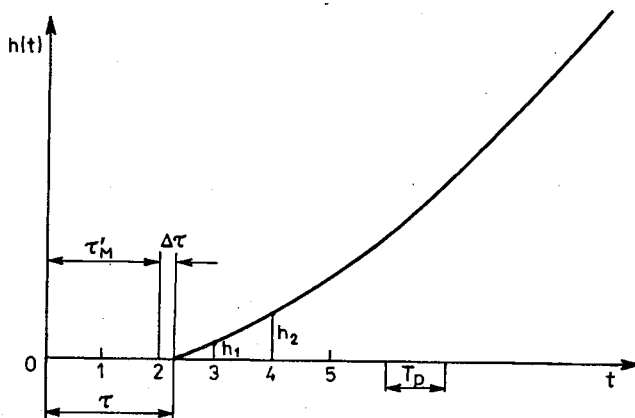
Znając r , można oszacować pozostałe parametry modelu (2). Zatem, teoretycznie, już w początkowych chwilach odpowiedzi skokowej obiektu, można znać oszacowania parametrów modelu (2) tego obiektu.

W praktyce pojawiają się błędy kwantyzacji cyfrowych przetworników pomiarowych, błędy spowodowane nakładaniem się zakłóceń losowych na mierzoną odpowiedź skokową, czy też wynikające z nieznamośności dokładnej opóźnienia τ_M . Wpływ tych błędów będzie tym silniejszy, im wyższy będzie rząd modelu (2), co ilustruje Rys. 2, z którego wynika, że im wyższy jest rząd r , tym mniejsza jest wartość próbkowanego sygnału. Na Rys. 2, zaznaczono te wartości dla $t=T_M$ i $k=1$. Sprzeczność żądań wynika z faktu, iż aby oszacowanie wg (13) rzędu r było słuszne, winien być w przybliżeniu spełniony warunek praktyczny $T_p/T_M < 0,5$.



Rys. 2. Ilustracja wpływu rzędu modelu na wartości mierzonych próbek w obecności zakłóceń

Pojawia się problem identyfikacji opóźnienia τ_M . W praktyce popełnia się również błąd $\Delta\tau$ w oszacowaniu opóźnienia modelu (2), co ilustruje Rys. 3.



Rys. 3. Ilustracja wpływu błędu w oszacowaniu opóźnienia τ_M

Błąd ten ma istotny wpływ na oszacowanie r , bowiem, próbki h_1 i h_2 są w takiej sytuacji jak pokazano na Rys. 3, niewłaściwie interpretowane. Zakładając chwilowo, że znany jest zredukowany rząd modelu (2) r i przyjmując dla uproszczenia tylko 2 wyrazy rozwinięcia $h_M(t)$ (8), można wyprowadzić prostą zależność przybliżoną

określającą błąd $\Delta\tau$, lub też odpowiednio, określającą zależność błędu w oszacowaniu r , spowodowanego przez błąd $\Delta\tau$. Dla $k=1$, na podstawie (8) będzie:

$$h_1 \approx \frac{b_{0M}}{r!} (T_p - \Delta\tau)^r \left[1 - \frac{r(T_p - \Delta\tau)}{T_M(r+1)} \right],$$

$$h_2 \approx \frac{b_{0M}}{r!} (2T_p - \Delta\tau)^r \left[1 - \frac{r(2T_p - \Delta\tau)}{T_M(r+1)} \right].$$

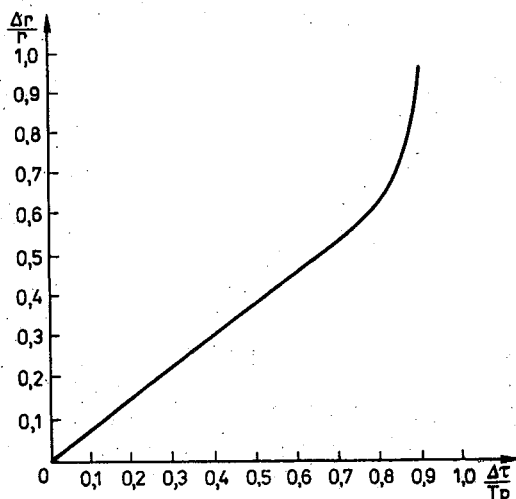
Stąd po prostych przekształceniach jest

$$\frac{\Delta\tau}{T_p} \approx \frac{1 - 2\sqrt{h_1/h_2}}{1 - \sqrt{h_1/h_2}}$$

lub

$$\frac{\Delta r}{r} \approx \frac{\ln 2 - \ln\left(2 - \frac{\Delta\tau}{T_p}\right) + \ln\left(1 - \frac{\Delta\tau}{T_p}\right)}{\ln\left(2 - \frac{\Delta\tau}{T_p}\right) - \ln\left(1 - \frac{\Delta\tau}{T_p}\right)}.$$

Zależność względnego błędu w oszacowaniu rzędu zredukowanego modelu (2) w funkcji błędu opóźnienia $\Delta\tau$ odniesionego do okresu próbkowania T_p , pokazano na Rys. 4.



Rys. 4. Przebieg przybliżonej zależności błędów względnych rzędu i opóźnienia modelu

Można zauważyć ciekawą właściwość tej zależności, polegającą na tym, że w dużej części zmian $\Delta\tau/T_p$ jest to zależność w przybliżeniu proporcjonalna. Dużą wrażliwość oszacowania r na zmiany $\frac{\Delta\tau}{T_p}$ można wykorzystać do oszacowania błędu $\Delta\tau$.

Zakładając, że model (2) jest adekwatny z rzeczywistością, można wykorzystując w czasie sukcesywanego próbkowania $h(t)$, kolejne próbki, poprawiać wynik oszacowania r .

Jeżeli, dla dostatecznie małego $\frac{\Delta\tau}{T_p}$, ustali się wartość obliczonego r , można wracając do pierwszych próbek, obliczyć błąd opóźnienia $\Delta\tau$, podstawiając do wzoru na $\Delta\tau$, ustalone r .

3. IDENTYFIKACJA POZOSTAŁYCH PARAMETRÓW MODELU STREJCA

Na podstawie (8), uwzględniając tylko 3 pierwsze wyrazy rozwinięcia, można oszacować stałą czasową T_M modelu (2), przy znajomości rzędu r .

Przyjmuje się, że pierwszy krok winien być dostatecznie duży $t_1 = T_p$, tak aby był możliwy pomiar próbki h_1 z uwzględnieniem czułości i rozdzielności przetworników.

Natomiast drugi krok $T_p(1+\kappa)$, winien być niewielki z uwagi na fakt pogorszenia się aproksymacji przebiegu $h(t)$ w miarę wzrostu argumentu. Stąd, dla celu oszacowania stałej czasowej T_M , lepiej jest operować próbkami przy $\kappa < 1$.

Na podstawie (8) można zapisać

$$h_1(T_p) \simeq b_{0M} \frac{T_p^r}{r!} \left[1 - \frac{r}{r+1} \frac{T_p}{T_M} + \frac{r}{(r+2)} \frac{1}{2} \left(\frac{T_p}{T_M} \right)^2 \right]$$

$$h_2[T_p(1+\kappa)] = b_{0M} \frac{(1+\kappa)^r}{r!} T_p^r \left[1 - \frac{r}{r+1} \frac{(1+\kappa) T_p}{T_M} + \frac{r}{(r+2)} \frac{1}{2} \left(\frac{(1+\kappa) T_p}{T_M} \right)^2 \right]$$

oznaczając

$$\frac{h_2(T_p(1+\kappa))}{h_1(T_p)} = \alpha \quad (14)$$

po przekształceniach uzyskuje się wzór przybliżony na oszacowanie stałej czasowej T_M .

$$T_M \approx \frac{r T_p [(\kappa+1)^{r+1} - \alpha]}{2(r+1)[(\kappa+1)^r - \alpha]} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{2(r+1)^2 [(\kappa+1)^r - \alpha][(\kappa+1)^{r+2} - \alpha]}{r(r+2)[(\kappa+1)^{r+1} - \alpha]^2}} \right] \quad (15)$$

Zależność (15), choć nieco skomplikowana pozwala z wyższą dokładnością niż podana w [1], oszacować stałą czasową modelu (2). Wynika to z wykorzystania trzech wyrazów wzoru (8), oraz zastosowania mniejszego kroku drugiego ($\kappa < 1$). Dokładność tego oszacowania, ma duże znaczenie, przy wyznaczaniu wzmocnienia k . W [1] zastosowano przybliżenie za pomocą 2 wyrazów $h(t)$, skąd dla modelu (2) uzyskuje się zależność przybliżoną

$$T_M \approx \frac{T_p r}{r+1} \frac{1}{1 - \frac{h_1}{h_2} 2^r}, \quad \text{przy } \kappa = 1. \quad (16)$$

Dzięki znajomości r i T_M , można bezpośrednio na podstawie (8), dysponując pomiarem, np. pierwszej próbki oszacować b_{0M} . Po prostych przekształceniach, będzie w przybliżeniu

$$b_{0M} \approx \frac{h_1 r!}{T_p^r} \frac{1}{1 - \frac{r}{r+1} \frac{T_p}{T_M} + \frac{r}{(r+2)} \frac{1}{2} \left(\frac{T_p}{T_M} \right)^2}. \quad (17)$$

Uwzględniając w (17) zależność $k = b_{0M} T_M^r$ wynikającą z (2), wzmocnienie modelu Strejca można oszacować za pomocą zależności przybliżonej

$$k \approx \frac{h_1 r! \left(\frac{T_M}{T_p} \right)^r}{1 - \frac{r}{r+1} \frac{T_p}{T_M} + \frac{r}{(r+2)} \frac{1}{2} \left(\frac{T_p}{T_M} \right)^2} \quad (18)$$

W pracy [1] podano zależność przybliżoną dla oszacowania współczynnika b_m , na podstawie pierwszych próbek h_1 i h_2 odpowiedzi skokowej. Dla modelu (2) będzie:

$$b_{0M} \approx \frac{h_1^2}{h_2} \left(\frac{1+\kappa}{T_p} \right)^r r! \quad (19)$$

jednak zależność ta daje oszacowanie mniej dokładne od uzyskanego ze wzoru (18).

Tablica 3

Wartości próbek odpowiedzi modelu Strejca dla
 $r=3, k=1, T_M=1$

Nr	t	$h(t)$
0	0	0
1	0,01	0,000000160
2	0,02	0,000001310
3	0,03	0,000004400
4	0,04	0,000010353
5	0,05	0,000020071
6	0,06	0,000034423
7	0,07	0,000054252
8	0,08	0,000080373
9	0,09	0,000113591
10	0,10	0,000154653
15	0,15	0,000502862
19	0,19	0,000992018
20	0,20	0,001148481
21	0,21	0,001319680
25	0,25	0,002161497
30	0,30	0,003599493
40	0,40	0,007926332
45	0,45	0,010879330
50	0,50	0,014387678
60	0,60	0,023115288

T a b l i c a 4

Zestawienie wyników obliczeń dla różnych względnych okresu próbkowania

Nr wzoru i porównywany param.	$T_p/T_M = 0,1$	$T_p/T_M = 0,2$	$T_p/T_M = 0,3$
13, $r, \kappa = 1$	2,892620263	2,786926405	2,682981721
13, $r, \kappa = 0,5$	2,908097041	2,817388674	2,727908355
13, $T_M, \kappa = 1$	0,990979576	0,955518002	0,851846040
15, $T_M, \kappa = 0,5$	0,994084604	0,972411978	0,922491545
16, $T_M, \kappa = 1$	0,970623881	0,942476988	0,915552676
17, b_{0M}	0,999911638	0,999258411	0,997365752
19, b_{0M}	0,999618121	0,998450689	0,996462206

Dla przykładu, można porównać oszacowania parametrów modelu Strejca, dokonane za pomocą przytoczonych zależności zakładając, że dysponuje dokładnymi wartościami próbek odpowiedzi skokowej modelu (2) o parametrach $r=3, k=1, T_M=1$. Wartość próbek podano w Tablicy 3, zaś wyniki porównania, zestawiono w Tablicy 4.

4. ZAKOŃCZENIE

Z przedstawionych rozważań wynika, iż jest praktycznie możliwe oszacowanie rzędu a co za tym idzie i pozostałych parametrów modelu Strejca z opóźnieniem, na podstawie pierwszych próbek odpowiedzi skokowej identyfikowanego obiektu.

Takie oszacowanie może być przydatne w algorytmach samonastrajających lub też adaptacyjnych, dla sterowania *on-line*. Może to być również nowy sposób uproszczonej identyfikacji obiektów dynamicznych, reagujących bardzo wolno na pobudzenie. W pracy nie dyskutowano ewentualnych błędów jakie mogą być spowodowane nieliniowością obiektu rzeczywistego, lub też istnieniem dużej rozpiętości pomiędzy inercjami T_{max} i T_{min} obiektu rzeczywistego. Wydaje się jednak, iż wstępnie oszacowane parametry obiektu, mogą być później korygowane np. w trakcie pracy układu zamkniętego. Istotny wpływ na praktyczną dokładność oszacowań, ma zastosowanie pierwszego długiego kroku przy pomiarze h_1 oraz jego skrócenie ($\kappa < 1$) przy pomiarze próbki h_2 .

Poprawia to dokładność oszacowania rzędu r oraz stałej czasowej T_M . Prowadzone tą metodą próby praktyczne identyfikacji obiektów elektrotermicznych, dały wyniki pozytywne.

BIBLIOGRAFIA

1. N. — S. XU: *Approximate evaluation of the sampled model parameters for a linear continuous-time system with relatively small sampling period*. Int. J. System Sci. 1989, 20, pp. 811 — 838
2. S. S k o c z o w s k i: *Some remarks on the approximation of plants with selfregulation*. Regelungstechnik, 1983, 7, pp. 231 — 234
3. S. S k o c z o w s k i: *Proste modele obiektów elektrotermicznych dla regulacji temperatury*. Rozprawy Elektrotechniczne 1987, 33, z. 1, s. 241 — 255

S. SKOCZOWSKI

A SIMPLE METHOD FOR IDENTIFICATION OF THE STREJC MODEL BASED ON FIRST DISCRETE SAMPLES OF STEP RESPONSES**S u m m a r y**

An approximate method for identification of the Strejc linear model is presented. The order and consequently the remaining parameters of the model are determined from the process step response initial stage approximated by a parabola.

Odpowiedź czasowa układu wzmacniacza operacyjnego na skokową zmianę wartości immitancji w jego obwodzie

ANATOL JAWOREK

Instytut Maszyn Przepływowych, Polska Akademia Nauk, Gdańsk

Otrzymano 1991.08.24

Autoryzowano do druku 1991.11.05

Wyznaczono wyrażenia opisujące stany przejściowe oraz czas zaniku stanów przejściowych, przy pobudzeniu harmonicznym, po skokowej zmianie wartości immitancji dwójnika dwuelementowego załączonego w obwodzie wzmacniacza operacyjnego. W przypadku dwójnika równoległego pojemnościowo konduktancyjnego dołączonego do wejścia inwersyjnego wzmacniacza operacyjnego stany przejściowe zanikają w czasie dużo krótszym od okresu sygnału pobudzającego. W przypadku dwójnika szeregowego pojemnościowo rezystancyjnego załączonego w pętli sprzężenia zwrotnego wzmacniacza operacyjnego stany przejściowe zanikają w czasie $10^6 - 10^7$ okresów sygnału pobudzającego.

1. WSTĘP

W układach pomiarowych dwójników biernych załączonych w obwodzie wzmacniacza operacyjnego, w szczególności w układach pomiarowych detektorów fazoczułych [1-8] mierzących wielkości zmienne w czasie, ważnym zagadnieniem jest określenie parametrów sygnału odpowiedzi układu wzmacniacza pomiarowego z załączonym dwójnikiem na pobudzenie harmoniczne oraz błędów dynamicznych wynikających ze zniekształcenia tego sygnału w stanach przejściowych po zmianie wartości składowych immitancji.

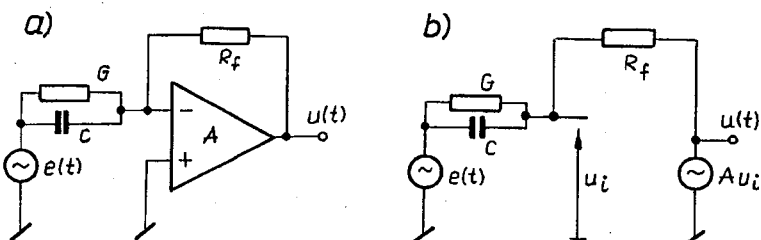
W przypadku synchronicznych detektorów fazoczułych, po skokowej zmianie jednej ze składowych mierzonej immitancji (lub obu jednocześnie) stany przejściowe w obwodzie wzmacniacza pomiarowego zanikające w czasie porównywalnym z czasem całkowania, stają się przyczyną błędu pomiaru składowych immitancji. Zjawisko to ogranicza zastosowanie detekcji fazoczułej w pomiarach wielkości dynamicznych, jeśli mierzona immitancja jest przetwornikiem pomiarowym.

Rozważania ograniczone zostaną do przypadku dwóch typów dwójników dwuelementowych: równoległego połączenia konduktancji G i pojemności C ($G \parallel C$) i szeregowo połączonych rezystancji R i pojemności C ($R + C$). Przyjęte do analizy sposoby załączenia tego typu dwójników w obwodzie wzmacniacza operacyjnego wynikają

z uzyskiwanej w detektorach fazoczułych proporcjonalności sygnału wyjściowego do wartości mierzonej immitancji [7,8]. W analizie odpowiedzi układu uwzględniono tylko skończone wzmocnienie wzmacniacza przyjmując, że jego częstotliwość graniczna jest dużo większa od częstotliwości pobudzającej ω .

2. ODPOWIEDŹ CZASOWA UKŁADU

Wyznaczono małosygnałową odpowiedź czasową układu ze wzmacniaczem operacyjnym posiadającym skończone wzmocnienie A w otwartej pętli sprzężenia zwrotnego. Wyprowadzone zależności posłużą w następnym rozdziale do wyznaczenia średniego błędu dynamicznego w stanie przejściowym po skokowej zmianie składowych immitancji.



Rys. 1. Układ wzmacniacza operacyjnego z załączonym dwójnikiem równoległym $G \parallel C$ (a), schemat zastępczy (b)

Odpowiedź układu pomiarowego dwójnika równoległego $G \parallel C$ o schemacie zastępczym przedstawionym na rys. 1, na pobudzenie harmoniczne

$$e(\omega t) = E \sin \omega t \quad (1)$$

z warunkiem początkowym $u(t=0) = U_0$ w dziedzinie zespolonej dana jest równaniem operatorowym:

$$\bar{u} = -AE \left(\frac{G}{\omega C} \frac{1}{s + \alpha} \frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2} + \frac{s}{s + \alpha} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) + \frac{AU_0}{s + \alpha} \quad (2)$$

przy czym A jest wzmocnieniem wzmacniacza operacyjnego z otwartą pętlą sprzężenia zwrotnego, a biegun transmitancji dany jest wyrażeniem:

$$\alpha = \frac{A}{R_f C} \left(1 + \frac{1}{A} (1 + R_f G) \right). \quad (3)$$

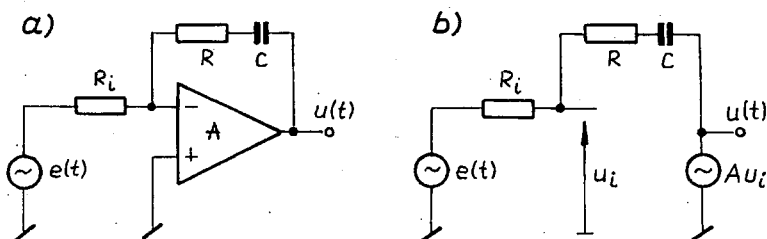
Zakładając, że siła elektromotoryczna e zostaje załączona dla kąta fazowego $\omega t = \psi$, otrzymuje się rozwiązanie w dziedzinie czasu:

$$u(t) = \frac{-AE}{1 + \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2} \left[\left(1 + \frac{G}{\omega C} \frac{\alpha}{\omega}\right) \sin \omega t + \left(\frac{\alpha}{\omega} - \frac{G}{\omega C}\right) \cos \omega t + \right. \\ \left. + \left(\frac{\alpha}{\omega} - \frac{G}{\omega C}\right) \left(\frac{\alpha}{\omega} \sin \psi - \cos \psi\right) \exp\left(-\frac{\alpha}{\omega}(\omega t - \psi)\right) \right] + AU_0 e^{-\alpha t}. \quad (4)$$

Występujące składniki z czynnikiem wykładniczym zależnym od czasu opisują stan przejściowy, natomiast funkcje trygonometryczne zmiennej ωt (dwa pierwsze składniki w nawiasie kwadratowym) opisują stan ustalony w układzie, po czasie nieskończonym od załączenia siły elektromotorycznej. Dla wzmacniacza idealnego, dla którego wzmocnienie A przyjmuje wartość nieskończoną, a również dąży do nieskończoności i odpowiedź czasowa przyjmuje uproszczoną postać:

$$u(t) = -ER_f(G \sin \omega t + \omega C \cos \omega t). \quad (5)$$

Charakterystyczny dla tego przypadku ($A \rightarrow \infty$) jest brak stanów przejściowych, które teoretycznie zanikają w czasie nieskończenie krótkim. Odpowiedź układu jest więc od razu taka jak w stanie ustalonym.



Rys. 2. Układ wzmacniacza operacyjnego z załączonym dwójnikiem szeregowym $R+C$ (a), schemat zastępczy (b)

Odpowiedź układu z dwójnikiem szeregowym $R+C$ załączonym w obwodzie sprzężenia zwrotnego wzmacniacza operacyjnego, jak na schemacie z rys. 2, na pobudzenie harmoniczne, z warunkiem początkowym $u(t=0) = U_0$ dana jest równaniem operatorowym:

$$\bar{u} = -AE \frac{\gamma}{\omega} \left(\frac{1}{s+\gamma} \frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2} + \omega CR \frac{s}{s+\gamma} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) + \frac{AU_0 CR_i \gamma}{s + \gamma} \quad (6)$$

przy czym przyjęto oznaczenie:

$$\frac{1}{\gamma} = ACR_i \left(1 + \frac{1}{A} \left(1 + \frac{R}{R_i} \right) \right). \quad (7)$$

Stosując transformatę odwrotną Laplace'a do wyrażenia (6), otrzymuje się rozwiązanie w dziedzinie czasu:

$$u(t) = -EA \frac{\frac{\gamma}{\omega}}{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2} \left[\left(\omega CR + \frac{\gamma}{\omega} \right) \sin \omega t + \left(\frac{\gamma}{\omega} \omega CR - 1 \right) \cos \omega t + \right. \\ \left. + \left(\frac{\gamma}{\omega} \omega CR - 1 \right) \left(\frac{\gamma}{\omega} \sin \psi - \cos \psi \right) \exp \left(-\frac{\gamma}{\omega} (\omega t - \psi) \right) \right] + AU_0 CR_i \gamma e^{-\gamma t} \quad (8)$$

Przechodząc z wartościami A do nieskończoności otrzymuje się wartość $\gamma=0$ i odpowiedź dla układu pomiarowego ze wzmacniaczem operacyjnym idealnym:

$$u(t) = -\frac{E}{R_i} \left(R \sin \omega t - \frac{1}{\omega C} \cos \omega t - R \sin \psi + \frac{1}{\omega C} \cos \psi \right). \quad (9)$$

Dwa ostatnie składniki w nawiasie (9) stanowią składową stałą, która wynika z warunków początkowych panujących w układzie. Składowa ta jest wartością sygnału w momencie odpowiadającym kątowi fazowemu ψ , dla którego nastąpiło załączenie siły elektromotorycznej w układzie. Napięcie wyjściowe opisane dwoma ostatnimi składnikami jest rezultatem energii zmagazynowanej w polu elektrycznym kondensatora. Jest to wartość napięcia w momencie załączenia generatora. Dla wzmacniacza idealnego ($A \rightarrow \infty$) składowa ta powinna utrzymywać się nieskończenie długo. W praktyce wzmocnienie A ma wartość skończoną i składowa stała zanika w czasie skończonym. Składowa ta przesuwa poziom składowej stałej na wyjściu wzmacniacza pomiarowego, wokół której oscyluje składowa zmienna. Wpływ składowej stałej na nastęne stopnie układu eliminuje się przez odseparowanie ich za pomocą pojemności. Jednak przy dużych amplitudach składowej zmiennej, obecność składowej stałej może prowadzić do nasycenia się wzmacniacza operacyjnego.

3. ODPOWIEDŹ CZASOWA UKŁADU PO SKOKOWEJ ZMIANIE SKŁADOWYCH IMMITANCJI DWÓJNIKA

W przypadku skokowej zmiany wartości jednej ze składowych immitancji dwójnika lub obu jednocześnie, w chwili odpowiadającej kątowi fazowemu $\omega t = \psi_0$, w równaniach operatorowych opisujących poszczególne układy należy uwzględnić warunki początkowe wyznaczone przez stan układu w momencie odpowiadającym kątowi fazowemu $\omega t = \psi_0$ poprzedzającym zmianę składowych immitancji oraz przez ładunek zgromadzony na pojemności dwójnika. Przy czym przyjęto, że w czasie poprzedzającym skokową zmianę wartości parametrów dwójnika układ znajdował się w stanie ustalonym.

Dla układu z dwójnikiem równoległym $G \parallel C$ (rys. 1) warunek początkowy w równaniu operatorowym (2) w chwili $\omega t = \psi$ ma postać:

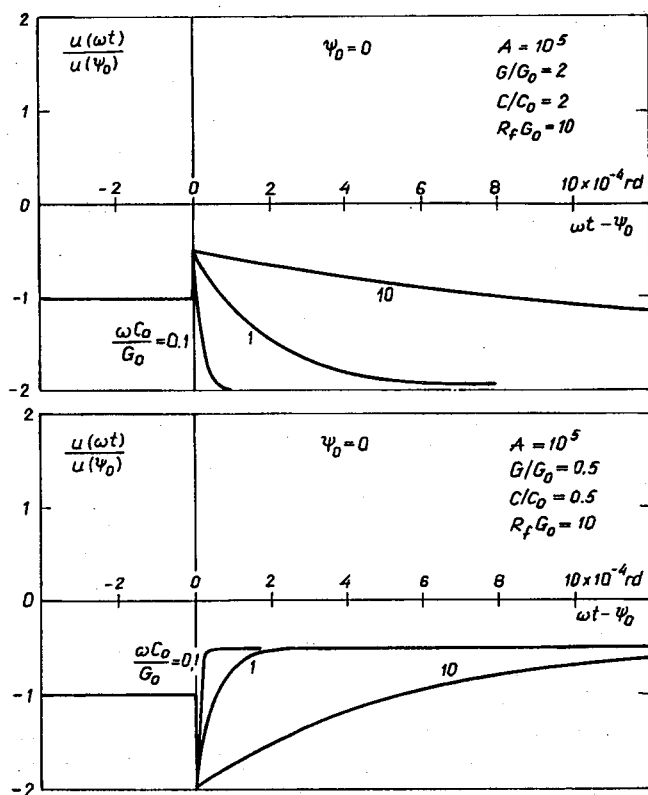
$$U_0 = E \frac{C_0}{C} \left[\sin \psi_0 - \frac{\omega^2}{\alpha^2 + \omega^2} \left(\left(1 + \frac{G_0}{\omega C_0} \frac{\alpha_0}{\omega} \right) \sin \psi_0 + \left(\frac{\alpha_0}{\omega} - \frac{G_0}{\omega C_0} \right) \cos \psi_0 \right) \right]. \quad (10)$$

Przy czym przyjęto, że składowe admitancji dwójnika równoległego $G \parallel C$ zmieniają się od wartości początkowych G_0 i C_0 do wartości G i C , a α_0 jest wartością bieguna (3) obliczoną

dla $G = G_0$ i $C = C_0$. Czynniki C_0/C uwzględnia zmianę napięcia na pojemności dwójnika po skokowej zmianie pojemności przy zastosowaniu zasady zachowania ładunku.

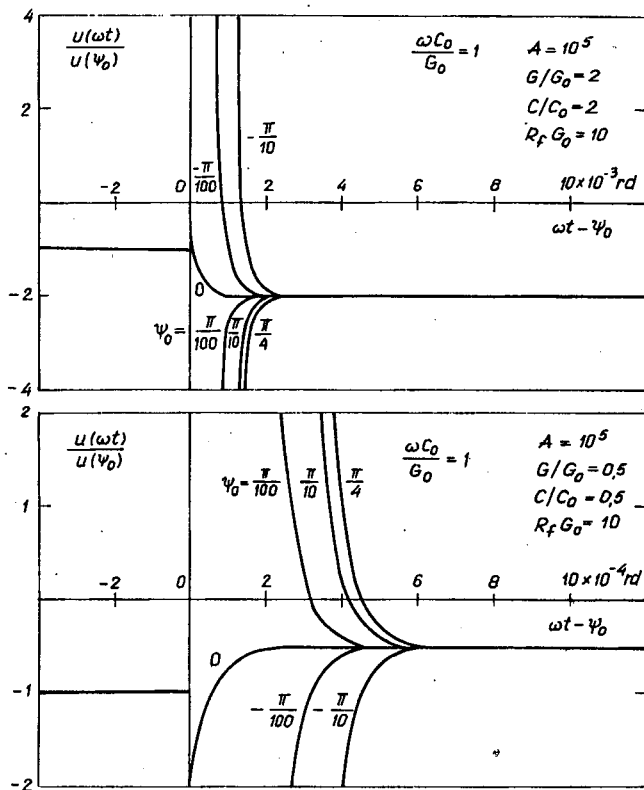
Stosując do równania (10) transformatę odwrotną Laplace'a otrzymuje się rozwiązanie w dziedzinie czasu:

$$\begin{aligned}
 u(t) = & -\frac{AE}{1 + \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2} \left[\left(1 + \frac{G}{\omega C} \frac{\alpha}{\omega}\right) \sin \omega t + \left(\frac{\alpha}{\omega} - \frac{G}{\omega C}\right) \cos \omega t + \right. \\
 & + \left(\frac{\alpha}{\omega} - \frac{G}{\omega C}\right) \left(\frac{\alpha}{\omega} \sin \psi_0 - \cos \psi_0\right) \exp\left(-\frac{\alpha}{\omega}(\omega t - \psi_0)\right) \Big] + \\
 & + AE \frac{C_0}{C} \sin \psi_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{\omega}(\omega t - \psi_0)\right) + \\
 & - \frac{AE}{1 + \left(\frac{\alpha_0}{\omega}\right)^2} \frac{C_0}{C} \left[\left(1 + \frac{G_0}{\omega C_0} \frac{\alpha_0}{\omega}\right) \sin \psi_0 + \left(\frac{\alpha_0}{\omega} - \frac{G_0}{\omega C_0}\right) \cos \psi_0 \right] \exp\left(-\frac{\alpha}{\omega}(\omega t - \psi_0)\right). \quad (11)
 \end{aligned}$$



Rys. 3. Odpowiedź czasowa wzmacniacza operacyjnego na skok imitancji dwójnika równoległego $G \parallel C$ (przy ustalonym $\psi_0 = 0$)

Przykładowe przebiegi odpowiedzi czasowej obliczone z wyrażenia (11) przedstawiono na rys. 3 dla skoku immitancji do wartości dwukrotnie większej od wartości pierwotnej i dla spadku o połowę jednocześnie obu składowych immitancji. W obliczeniach założono, że kąt fazowy $\psi_0 = 0$. Na rys. 4 podano również przykładowe zależności odpowiedzi czasowej układu dla różnych kątów fazowych ψ_0 z przedziału $-\pi, +\pi$, w którym występuje skokową zmianę immitancji.

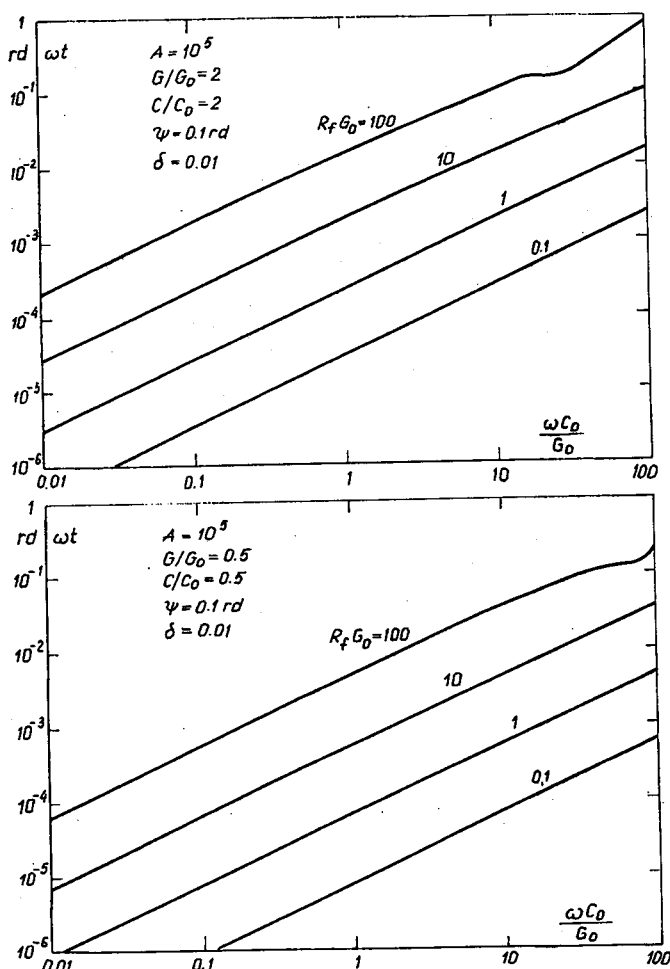


Rys. 4. Odpowiedź czasowa wzmacniacza operacyjnego na skok immitancji dwójnika równoległego $G||C$ (dla różnych wartości ψ_0)

Stany przejściowe zanikają bardzo szybko, w czasie dużo krótszym od okresu sygnału pobudzającego. Czas zaniku stanów przejściowych zdefiniowany wyrażeniem:

$$\delta_t = \frac{u(\omega t) - u_u(\omega t)}{u_u(\omega t)} \quad (12)$$

dla $\delta_t = 0.01$ mierzony w wartościach kąta fazowego ωt przedstawiony jest na rys. 5, dla różnych wartości $R_f G_0$, w zależności od stosunku składowych immitancji, przy czym $u_u(\omega t)$ jest odpowiedzią w stanie ustalonym. Czas zaniku stanów przejściowych wzrasta ze wzrostem udziału składowej reaktancyjnej w immitancji. Wartość chwilowa odpowiedzi w momencie wystąpienia skokowej zmiany immitancji może dochodzić do



Rys. 5. Czas zaniku stanów przejściowych po skokowej zmianie immitancji dwójnika równoległego $G||C$

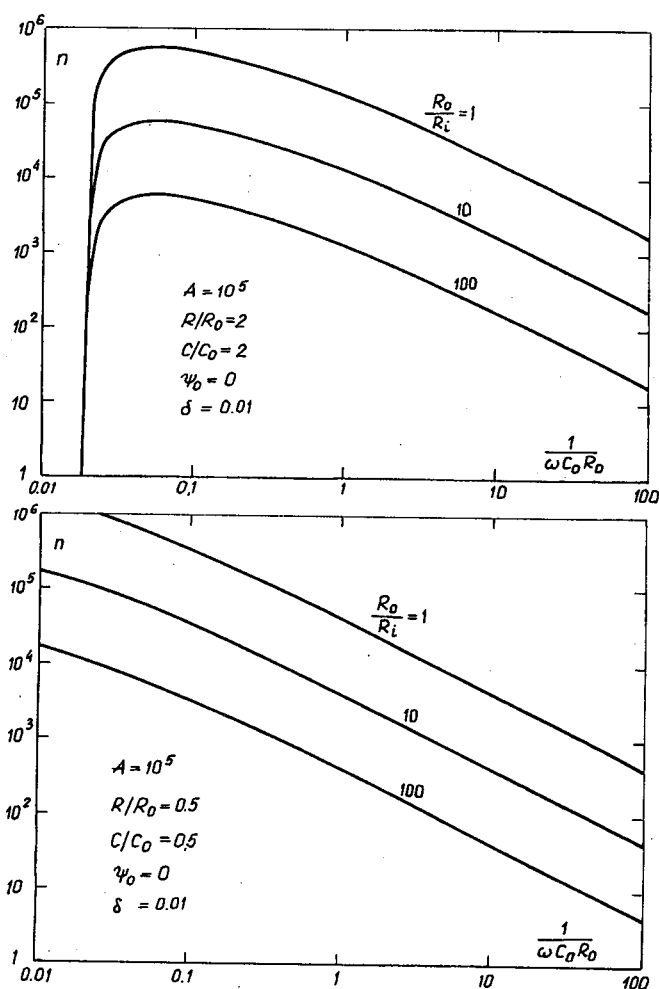
wartości rzędu A -krotnie większych od napięcia pobudzającego (jeśli pominie się ograniczenia fizyczne wynikające z nasycania się wzmacniacza).

Analogicznie uzyskuje się odpowiedź czasową dla układu zawierającego dwójnik szeregowy $R+C$ (rys. 2). W stanie ustalonym, wartości parametrów dwójnika wynosiły R_0 i C_0 . W chwili odpowiadającej kątowi fazowemu ψ_0 nastąpiła skokowa zmiana parametrów, które przyjęły wartości R i C . W równaniu operatorowym (6) warunek początkowy ma postać:

$$U_0 = E(1 + A) \frac{C_0}{C} \frac{\omega \gamma_0}{\gamma_0^2 + \omega^2} \left(\frac{\gamma_0}{\omega} \sin \psi_0 - \cos \psi_0 \right) \quad (13)$$

Wartość γ_0 wyznacza się z (7) dla $R=R_0$ i $C=C_0$. Przejście od zmiennej zespolonej do zmiennej rzeczywistej prowadzi do rozwiązania w dziedzinie czasu:

$$\begin{aligned}
 u(t) = & -EA \frac{\frac{\gamma}{\omega}}{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2} \left[\left(\omega CR + \frac{\gamma}{\omega} \right) \sin \omega t + \left(\frac{\gamma}{\omega} \omega CR - 1 \right) \cos \omega t + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{\gamma}{\omega} \omega CR - 1 \right) \left(\frac{\gamma}{\omega} \sin \psi_0 - \cos \psi_0 \right) \exp \left(-\frac{\gamma}{\omega} (\omega t - \psi_0) \right) \right] + \\
 & + EA (1+A) \frac{C_0}{C} \frac{\omega CR_i}{1 + \left(\frac{\gamma_0}{\omega}\right)^2} \frac{\gamma_0}{\omega} \frac{\gamma}{\omega} \left(\frac{\gamma_0}{\omega} \sin \psi_0 - \cos \psi_0 \right) \exp \left(-\frac{\gamma}{\omega} (\omega t - \psi_0) \right) \quad (14)
 \end{aligned}$$



Rys. 6. Liczba okresów do osiągnięcia stanu ustalonego po skokowej zmianie immitancji dwójnika szeregowego R+C

Dla wzmacniacza idealnego ($A \rightarrow \infty$) wartość $\gamma = 0$, a odpowiedź (14) ma postać:

$$u(t) = -\frac{E}{R_i} \left(R \sin \omega t - \frac{1}{\omega C} \cos \omega t + (R_0 - R) \sin \psi_0 - \left(\frac{1}{\omega C_0} - \frac{1}{\omega C} \right) \cos \psi_0 \right). \quad (15)$$

Rezultat (15) odnosi się do układu ze wzmacniaczem idealnym dla skończonych czasów t . W odpowiedzi układu pojawia się składowa stała, zależna od kąta fazowego ψ_0 , która przy $A \rightarrow \infty$ nie zanika. Składowa ta jest liniową funkcją wartości przyrostu danej składowej immitancji (np. $R - R_0$). Ponieważ w rzeczywistości $A < \infty$ więc obie składowe zanikają wykładniczo w czasie skończonym. Cechą charakterystyczną układu z dwójnikiem $R + C$, w odróżnieniu od poprzednio omawianego układu z dwójnikiem $G \parallel C$, jest to, że im lepszy wzmacniacz operacyjny (im większe wzmocnienie A) tym wolniejszy jest zanik stanów przejściowych. Układ w tej konferencji jest bowiem integratorem.

Na rys. 6 przedstawiono liczbę okresów, po której zostanie osiągnięty stan ustalony, zdefiniowany wyrażeniem (12). Przy wzroście stosunku składowej reaktancyjnej ($1/\omega C$) do składowej rezystancyjnej (R) impedancji dwójnika szeregowego $R + C$, czas zaniku stanów przejściowych spowodowany zmianami parametrów dwójnika staje się krótszy. Z drugiej strony przy bardzo dużym udziale składowej rezystancyjnej w immitancji pierwotnej ($R_0 \geq 30/\omega C_0$ dla wzrostu do wartości dwukrotnie większej od pierwotnej i $R_0 \geq 300/\omega C_0$ dla spadku o połowę) stan ustalony zostaje osiągnięty w czasie krótszym od jednego okresu sygnału pobudzającego. Nie wynika to jednak ze zmniejszenia się stałej czasowej układu, lecz z tego, że wartość bezwzględna składowej przejściowej odpowiedzi staje się mniejsza od założonej wartości $\delta = 0.01$.

4. PODSUMOWANIE

Przedstawiono teoretyczną analizę odpowiedzi układu wzmacniacza operacyjnego na skok wartości admitancji dwójnika równoległego $G \parallel C$ załączonego do wejścia inwersyjnego wzmacniacza operacyjnego oraz impedancji dwójnika szeregowego $R + C$ załączonego w pętli sprzężenia zwrotnego wzmacniacza operacyjnego. Zagadnienie to występuje w przypadku pomiaru składowych immitancji zmiennych w czasie, za pomocą synchronicznych detektorów fazoczułych. Czas zaniku stanów przejściowych wyrażono w mierze kątowej ωt , dla porównywalnego udziału składowej rzeczywistej i urojonej immitancji. Pierwszy z rozważanych układów ($G \parallel C$) ma charakterystyki czasowe zbliżone do układu różniczkującego. Czas zaniku stanów przejściowych po skokowej zmianie admitancji jest dużo krótszy od okresu sygnału pobudzającego, natomiast wartość chwilowa odpowiedzi w chwili czasowej wystąpienia skoku wartości immitancji jest rzędu wzmocnienia wzmacniacza operacyjnego z otwartą pętlą sprzężenia zwrotnego. Drugi z układów ($R + C$) ma charakterystyki podobne do układu całkującego: bardzo długi czas zaniku stanów przejściowych po skokowej zmianie impedancji ($\approx 10^6 - 10^7$ okresów), przy wartościach składowej przejściowej rzędu wartości sygnału odpowiedzi w stanie ustalonym.

BIBLIOGRAFIA

1. J. E. Sigdell: *A principle for capacitance measurement, suitable for linear evaluation of capacitance transducers*. IEEE Trans. Instrum. Meas. 1972, 21, N 1, pp. 60–4
2. L. Q. Orsini: *Conversion of immitance parameters to dc voltage*. IEEE Trans. Instrum. Meas. 1973, 21, N 3, pp. 196–8
3. J. Hoja: *Metoda pomiarowa parametrów elementów RLC wykorzystująca sygnały proporcjonalne do prądu i napięcia na elemencie mierzonym*. Rozprawy Elektrotechniczne 1984, 30, Nr 3, pp. 643–58
4. A. Jaworek: *Pomiary składowych impedancji dwójników*. PAK 1987, 33, Nr 2, s. 38–9
5. A. Jaworek: *Sposób szybkiego pomiaru składowych immitancji dwójników metodą próbkowania odpowiedzi*. PAK 1987, 33, Nr 5, ss. 102–3
6. J. Hoja: *Optymalizacja parametrów detektora fazoczułego przy niekorzystnym stosunku składowych ortogonalnych sygnału pomiarowego*. XVII Międzyuczelniana Konferencja Metrologów. Poznań, Wrzesień 1984
7. A. Jaworek: *Detektory fazoczułe w pomiarach składowych immitancji dwójników*. Kwart. Elektron. Telekom. 1990, 36, z. 3–4, s. 189–219
8. A. Jaworek: *Pomiar immitancji dwójników biernych za pomocą detektorów fazoczułych*. PAK 1990, 36, Nr 9, ss. 180–183

A. JAWOREK

TIME DOMAIN RESPONSE OF AN OPERATIONAL AMPLIFIER TO STEP CHANGES IN THE IMMITANCE IN ITS CIRCUIT

Summary

Time domain and the decay time of the transient response, by sine-wave excitation, to step changes in an immitance of a two-terminal connected in the circuit of an operational amplifier have been determined. In the case of a capacitance in parallel with a conductance connected to the inverting input of the operational amplifier, the transients decay in the time interval much shorter than the period of excitation voltage. In the case of a capacitance in series with a resistance, placed in the feed-back of the operational amplifier, the transients decay in the time of $10^6 - 10^7$ periods of the excitation voltage.

Modelowanie rezystancji w stanie włączenia wysokonapięciowych tranzystorów LDMOS metodą odwzorowań konforemnych

WŁODZIMIERZ PODMIOTKO

Instytut Technologii Elektronowej, Warszawa

Otrzymano 1991.06.19

Autoryzowano do druku 1991.11.08

W pracy przedstawiono praktyczny sposób obliczania rezystancji w stanie włączenia wysokonapięciowych tranzystorów LDMOS wykorzystujący metodę odwzorowań konforemnych.

1. WSTĘP

Wysokonapięciowe tranzystory lateralne z dwukrotną dyfuzją LDMOS (Lateral Double-diffused MOS) są obecnie powszechnie stosowane w nowoczesnych, wysokonapięciowych układach scalonych, gdzie najczęściej pełnią rolę przełącznika. Przy takim zastosowaniu jednym z najważniejszych parametrów tranzystora LDMOS jest rezystancja w stanie włączenia R_{ON} . Rezystancja R_{ON} tranzystora LDMOS jest sumą rezystancji kanału (R_{ch}) i rezystancji obszaru unoszenia drenu (R_d). Rezystancję kanału, która w tranzystorach wysokonapięciowych przy typowym wysterowaniu napięciowym bramki stanowi niewielką część całej rezystancji w stanie włączenia, można obliczyć korzystając z wyrażenia opisującego charakterystyki klasycznego tranzystora MOS.

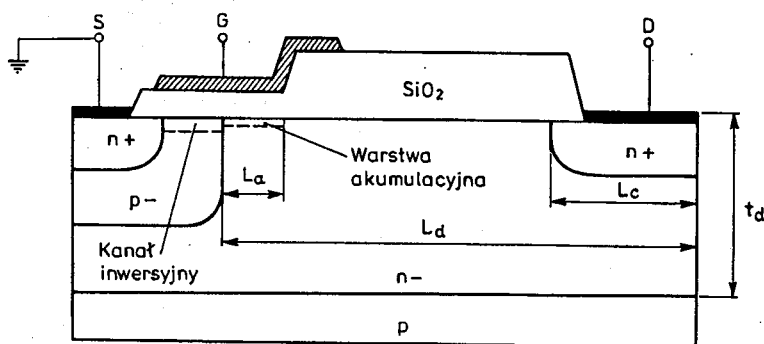
Rezystancja obszaru unoszenia drenu zależy od jego rozmiarów geometrycznych oraz rezystywności półprzewodnika. Obliczenia analityczne wartości rezystancji oparte na uproszczonym, jednowymiarowym modelu obrazów ładunku [1] nie uwzględniają skończonej grubości obszaru półprzewodnika oraz wymagają dobrania współczynników empirycznych. Zastosowanie metody odwzorowań konforemnych [2,3] pozwala na uwzględnienie efektów dwuwymiarowych i jest znacznie prostsze od obliczeń numerycznych [4].

W niniejszej pracy przedstawiono praktyczny sposób obliczania rezystancji obszaru unoszenia drenu a zatem oporności tranzystora w stanie włączenia przy

wykorzystaniu metody odwzorowań konforemnych. Przykładowe obliczenia porównano z danymi pomiarowymi oraz przedyskutowano zakres stosowania przedstawionej metody.

2. REZYSTANCJA W STANIE WŁĄCZENIA TRANZYSTORA LDMOS

Na rys. 1. przedstawiono schematycznie przekrój tranzystora LDMOS o kanale typu n . W tranzystorze LDMOS kanał inwersyjny powstaje w obszarze dyfundowanym typu p i jest on oddzielony od właściwego drenu (n^+) obszarem unoszenia (n^-) o odpowiednio dobranej rezystywności, długości i grubości. Wysokorezystywny obszar unoszenia drenu stanowiący na ogół część warstwy epitaksjalnej typu n na



Rys. 1. Przekrój tranzystora LDMOS

podłożu typu p , zapewnia odpowiednią odporność napięciową tranzystora. W stanie włączenia, gdy napięcie bramki U_{GS} jest większe od napięcia progowego, prąd płynie horyzontalnie od właściwego drenu poprzez obszar unoszenia i kanał inwersyjny do źródła. Ze wzrostem napięcia bramki rezystancja kanału zmniejsza się natomiast rezystancja związana z obszarem unoszenia pozostaje w przybliżeniu stała. Rezystancję kanału można opisać przybliżonym wyrażeniem znanym z podstawowej teorii tranzystora MOS:

$$R_{ch} = \frac{1}{\frac{W}{L} \cdot \mu_n \cdot C_{ox} \cdot (U_{GS} - U_T)} \quad (1)$$

gdzie:

- W i L — odpowiednio szerokość i długość kanału
- μ_n — ruchliwość elektronów w kanale będąca funkcją U_{GS}
- C_{ox} — pojemność bramki na jednostkę powierzchni
- U_{GS} i U_T — odpowiednio napięcie bramki i napięcie progowe.

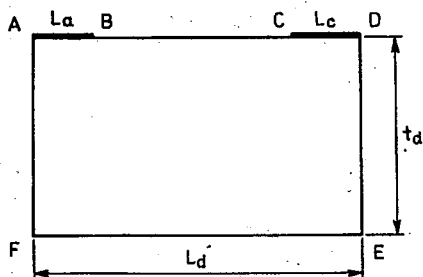
Przy dużym napięciu bramki wymaganym do właściwego wysterowania tranzystora, w części obszaru unoszenia przylegającej do kanału na którą oddziałują

bramka poprzez cienki tlenek (rys. 1) powstaje warstwa akumulacyjna n^+ . Przy małym napięciu drenu warstwę akumulacyjną można traktować jako ekwipotencjalne źródło elektronów. Przewodzenie między tym źródłem elektronów a właściwym drenem n^+ ma charakter omowy a dla uwzględnienia rozprywu można użyć metody odwzorowań konforemnych.

3. OBLICZANIE REZYSTANCJI OBSZARU UNOSZENIA R_d

Przyjmując, że przewodzenie między ekwipotencjalną warstwą akumulacyjną a właściwym drenem n^+ ma charakter omowy co odpowiada twierdzeniu, że równanie Laplace'a ($\nabla^2 \psi = 0$) jest spełnione, można użyć odwzorowania konforemnego jako generalnej metody rozwiązywania dwuwymiarowych zagadnień rezystancji [5].

Na rys. 1. zaznaczono na przekroju tranzystora LDMOS odpowiednie rozmiary geometryczne, natomiast na rys. 2. pokazano model geometryczny, który stanowi punkt wyjścia do serii odwzorowań konforemnych. Przebieg kolejnych odwzorowań przedstawiono na rys. 3.



Rys. 2. Model geometryczny obszaru unoszenia

Prostokąt ABCD w płaszczyźnie Z odwzorowuje się na prostokąt CBC'D' w płaszczyźnie W3 poprzez dwie transformacje pośrednie na płaszczyzny W1 i W2. W pierwszej transformacji odwzorowuje się wnętrze prostokąta ABCD na płaszczyźnie Z na oś rzeczywistą półpłaszczyzny W1 wykorzystując odwzorowanie Schwarza-Christoffel'a [6] zgodnie z równaniem:

$$w1 = Sn^2 \left(\frac{K}{L_d} \cdot z, \quad k^2 \right) \quad (2)$$

gdzie:

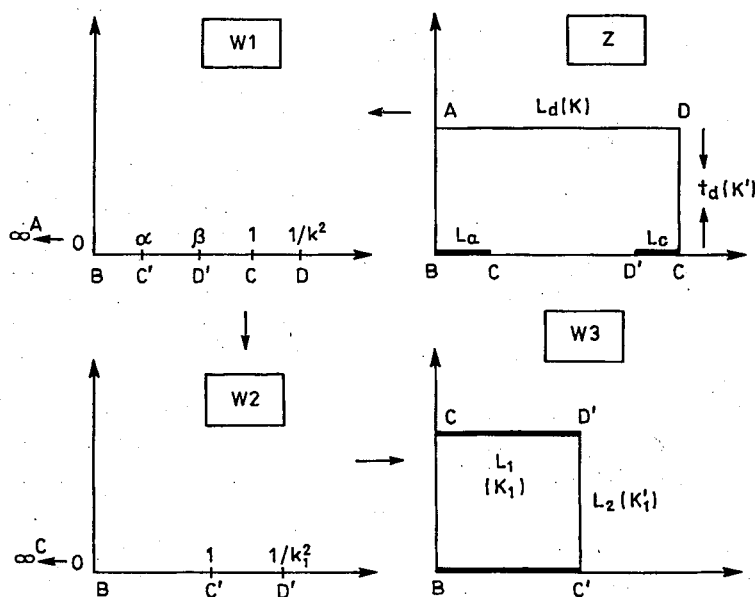
Sn — funkcja eliptyczna Jacobiego (sinus amplitudy)

K — 1/4 okresu funkcji (części rzeczywistej)

k^2 — parametr funkcji

z — zmienna zespolona.

Następnie stosujemy odwzorowanie z płaszczyzny W1 na W2 wykorzystując funkcję homograficzną zgodnie z wyrażeniem [5]:



Rys. 3. Przebieg odwzorowań konforemnych

$$w_2 = \frac{w_1 \cdot (1 - \alpha)}{(1 - w_1) \cdot \alpha} \quad (3)$$

Przy tym:

$$\alpha = \operatorname{Sn}^2 \left(\frac{K \cdot L_a}{L_d}, k^2 \right). \quad (4)$$

Końcowe odwzorowanie z górnej półpłaszczyzny W2 na płaszczyznę W3 wykorzystuje odwrotne przekształcenie Schwarz'a-Christoffela [6]:

$$w_3 = \frac{L_1}{K_1} \cdot \operatorname{Sn}^{-1}(\sqrt{w_2}, k_1^2) \quad (5)$$

gdzie:

L_1 — nowa podstawa prostokąta

K_1 — 1/4 okresu funkcji Sn o parametrze k_1^2 (część rzeczywista)

Nowy parametr k_1^2 wyznaczamy przyjmując $w_1 = \beta$, z równania (3):

$$k_1^2 = \frac{(1 - \beta) \alpha}{\beta (1 - \alpha)} \quad (6)$$

gdzie:

$$\beta = \operatorname{Sn}^2 \left[\frac{K(L_d - L_c)}{L_d}, k^2 \right]. \quad (7)$$

Rezystancję obszaru unoszenia o kształcie prostokąta CBCTD' można zatem wyrazić jako:

$$R_d = \frac{\rho_n \cdot L_2}{W \cdot L_1} \quad (8)$$

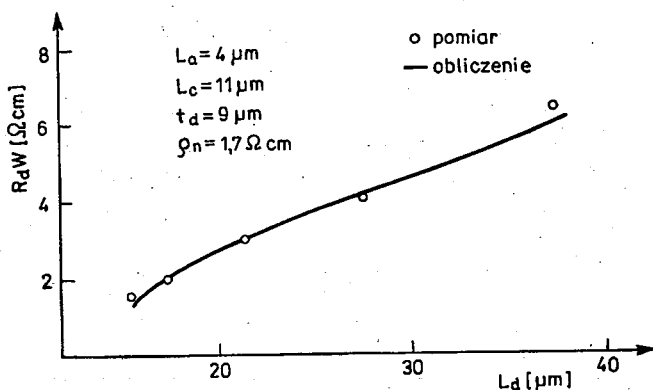
gdzie ρ_n – rezystywność półprzewodnika, W – szerokość obszaru unoszenia drenu, natomiast iloraz L_2/L_1 jest proporcjonalny do ilorazu części rzeczywistej i urojonej ćwiartek okresu funkcji eliptycznej w_3 i jest funkcją rozmiarów geometrycznych:

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{K'_1}{K_1} = f(L_a, L_c, L_d, t_d) \quad (9)$$

Sposób obliczania ilorazu K'_1 , K_1 przedstawiono w Dodatku.

4. WYNIKI OBLICZEŃ

Korzystając z procedury przedstawionej w Dodatku można w prosty sposób (n.p. przy użyciu mikrokomputera) obliczać rezystancję obszaru unoszenia drenu w funkcji jego rozmiarów i rezystywności.

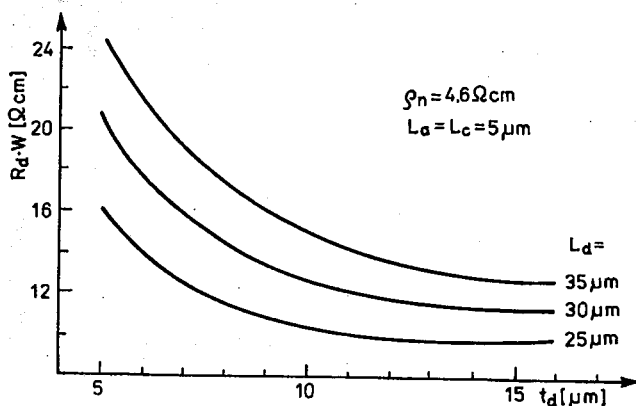


Rys. 4. Porównanie obliczeń $R_d \cdot W = f(L_d)$ z danymi pomiarowymi

Na rys. 4. przedstawiono obliczoną zależność $R_d \cdot W$ (rezystancja znormalizowana szerokością tranzystora) w funkcji długości obszaru unoszenia oraz wyniki pomiarowe dla szeregu pięciu tranzystorów o różnych wartościach L_d .

Tranzystory LDMOS zostały wykonane przy użyciu technologii CMOS-DMOS [7]. Wartości R_d wyznaczono jako różnicę między całkowitą rezystancją w stanie włączenia R_{ON} a rezystancją kanału R_{ch} . Wartość R_{ON} określono z pomiarów prądu drenu przy $U_{GS} = 40 \text{ V}$ i $U_{DS} = 50 \text{ mV}$. Rezystancję kanału oszacowano korzystając z równania (1), przyjmując odpowiednie wartości $\mu_n(U_{GS})$, C_{ox} i U_T na podstawie parametrów technologicznych bądź pomiarów innych elementów struktury próbnej.

Użyte w obliczeniach parametry takie jak t_d i ρ_n wynikają z danych technologicznych i odpowiadają grubości i rezystywności warstwy epitaksjalnej. Wartość L_a określająca długość warstwy akumulacyjnej odpowiada zachodzeniu cienkiego tlenku na obszar n^- , natomiast wartość L_c odpowiada połowie szerokości właściwego drenu n^+ .



Rys. 5. Wyniki obliczeń $R_d \cdot W = f(t_d)$

Na rys. 5. przedstawiono obliczone wartości $R_d \cdot W$ w funkcji grubości warstwy epitaksjalnej t_d dla trzech różnych długości obszaru unoszenia. Dane konstrukcyjne odpowiadają w przybliżeniu warunkom, dla których wykonano obliczenia numeryczne w pracy [4] a uzyskane krzywe mają zbliżony przebieg do przedstawionych tamże.

Przedstawiona powyżej metoda modelowania rezystancji obszaru unoszenia drenu (rezystancji w stanie włączenia) ma dwa ograniczenia. W przypadku gdy wymiary obszaru drenu nie spełniają wymagania $L_d/t_d > 3$ powstaje błąd wynikający z użycia przybliżonych wyrażeń. Jak widać to na rys. 4. błąd obliczeń jest pomijalnie mały jeszcze dla $L_d/t_d \approx 2$. W praktycznych konstrukcjach nowoczesnych tranzystorów LDMOS w których wykorzystuje się zasadę RESURF [8], która obowiązuje przy cienkich warstwach epitaksjalnych, nie mamy do czynienia z wymiarami nie spełniającymi warunku $L_d/t_d > 2$.

W przypadku tranzystorów LDMOS o bardzo długich obszarach unoszenia (o napięciu pracy $> 1000 \text{ V}$), gdy iloraz L_d/t_d przybiera wartości > 10 mogą wystąpić techniczne problemy obliczeniowe związane z tym, że parametr k^2 przybiera wartości bardzo bliskie 1. Jeśli wartość k^2 zostanie zaokrąglona do 1 w trakcie obliczeń komputerowych dalsze obliczenia tracą sens.

5. PODSUMOWANIE

Zaprezentowano metodę modelowania rezystancji w stanie włączenia R_{ON} tranzystorów wysokonapięciowych LDMOS wykorzystującą odwzorowanie konforemne do obliczania rezystancji obszaru unoszenia drenu. Przedstawiono szczegółowo praktyczny sposób przeprowadzenia obliczeń możliwy do prostego zaprogramowania na

komputerze klasy IBM/PC. Procedura obliczeniowa oparta na klasycznych przybliżeniach daje zadawalające wyniki dla praktycznych konstrukcji wysokonapięciowych tranzystorów LDMOS. Opisana metoda może być użyta dla obliczania rezystancji w stanie włączenia innych typów tranzystorów wysokonapięciowych zawierających wysokorezystywny obszar unoszenia drenu.

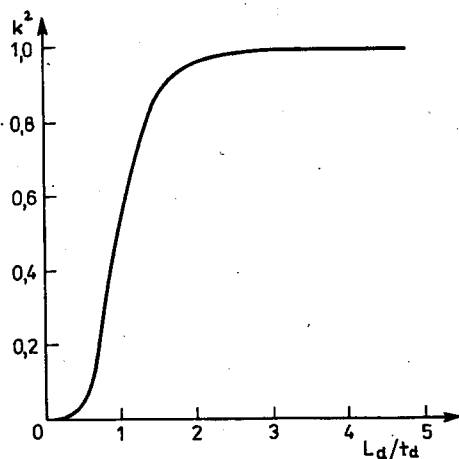
DODATEK

Punktem wyjścia do obliczeń jest znalezienie wartości ilorazu:

$$\frac{K}{K'} = \frac{L_d}{t_d} \quad (\text{D-1})$$

Parametr k^2 związany jest z K i K' równaniem:

$$1/k^2 = \operatorname{Sn}(K + jK', k^2) \quad (\text{D-2})$$



Rys. D-1. Zależność k^2 od L_d/t_d

Na rys. D-1 przedstawiono zależność k^2 od L_d/t_d obliczoną przy wykorzystaniu wyrażeń [9]:

$$k^2 = 1 - k'^2$$

gdzie

$$k'^2 = \left[\frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots} \right]^4 \quad (\text{D-3})$$

i

$$q = \exp(-\pi \cdot t_d/L_d).$$

Widać, że dla $L_d/t_d \geq 3$ wartość $1 - k^2$ jest dużo mniejsza od jedności. W takim przypadku można użyć prostszego wyrażenia dla obliczenia k^2 [9]:

$$k^2 \simeq 1 - 16 \exp \left[-\pi \frac{L_d}{t_d} \right]. \quad (\text{D-4})$$

Wartość K można obliczyć korzystając z wielomianowego przybliżenia [9]:

$$K = 1.3863 + 0.11197(1-k^2) + 0.07253(1-k^2)^2 + \\ + [0.5 + 0.12135(1-k^2) + 0.02888(1-k^2)^2 \cdot \ln[1/(1-k^2)]].$$

Parametr k_1^2 określany jest wyrażeniem (6). Wartość funkcji eliptycznej Sn można obliczyć korzystając z przybliżonego wyrażenia [9]:

$$\text{Sn}(z, k^2) = \sin z - 0.25 k^2 \cdot (z - \sin z \cos z) \cdot \cos z \quad (\text{D-6})$$

stanowiącego dobre przybliżenie dla przypadku $1-k^2 \ll 1$.

Wartość ilorazu $L_2/L_1 = K'_1/K_1$ można obliczyć stosując wyrażenie [9]:

$$\frac{K'_1}{K_1} \simeq \frac{1}{\pi} \cdot \ln \frac{1}{\left[\frac{k_1^2}{16} + 8 \left(\frac{k_1^2}{16} \right)^2 + 84 \left(\frac{k_1^2}{16} \right)^3 + 992 \left(\frac{k_1^2}{16} \right)^4 \right]} \quad (\text{D-7})$$

BIBLIOGRAFIA

1. M. D. Pocha, R. W. Dutton: *A computer-aided design model for high-voltage double-diffused MOS (DMOS) transistor*. IEEE J. of Solid-State Circuits, SC-11 (1976), 5, 718-726
2. S. Colak: *Effects of Drift Region Parameters on the Static Properties of Power LDMOST*. IEEE Trans. on E-D, ED28 (1981), 12, 1455-1466
3. K. Board, D. Byrne, M. S. Towers: *The optimisation of on-resistance in vertical DMOS power devices with linear and hexagonal surface geometries*. IEEE Trans. on E-D, ED31 (1984), 1, 75-80
4. G. Charitat, A. Nezar, P. Rossel: *High voltage RESURF LDMOS for smart power integrated circuits*. Revue de Physique Appliquee, 24 (1989), 10, 993-1000
5. F. Bowman: *Introduction to elliptic functions with applications*. Dover Publications, Inc., New York, 1961
6. P. M. Morse, H. Feshbach: *Methods of Theoretical Physics*, Mc Graw-Hill Book Comp., New York, 1953
7. W. Podmiotko, A. Bąkowski: *A mixed CMOS-DMOS-JFET technology for switching circuits with high voltage output stages*. Microelectron. Reliabil., 27 (1987), 1, 32-37
8. J. A. Appels, H. M. J. Vaes: *High voltage thin layer devices (Resurf Devices)*. IEDM Tech. Dig., 1979, 238-241
9. M. Abramowitz, I. A. Stegun: *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, Inc., New York, 1965

W. PODMIOTKO

**MODELLING OF THE ON-RESISTANCE OF THE HIGH VOLTAGE
LDMOS TRANSISTORS USING CONFORMAL MAPPING****S u m m a r y**

This paper presents the practical method of the calculation of the on-resistance of the high-voltage LDMOS transistors using conformal transformation technique.



Wrażliwość funkcji strukturalnych grafów układów dwójników i czwórników składających się z dwóch rodzajów elementów

ZYGMUNT WRÓBEL

*Instytut Problemów Techniki, Zakład Elektrotechniki
i Automatyki, Uniwersytet Śląski*

Otrzymano 1991.04.15

Autoryzowano do druku 1991.12.10

W pracy zdefiniowano wektor wrażliwości funkcji strukturalnej grafów odwzorujących układy dwójników i czwórników, pozwalający na ilościową oceny wpływu położenia danego elementu $\{e_{\alpha\beta}\}$ w strukturze topologicznej multigrafu rozpatrywanego układu, na wartości funkcji strukturalnych określających ich parametry. Wyznaczono wektor wrażliwości funkcji strukturalnej określającej parametry topologiczne struktur kanonicznych multigrafów układów dwójników wygenerowanych w pracy [11].

1. WSTĘP

Jak wiadomo jednym z podstawowych kryteriów oceny jakości układów, jest wrażliwość funkcji określającej jego parametry na zmiany wartości elementów z których jest on zbudowany.

Rozwijając koncepcje zawarte w pracach [8-11] dotyczących homeomorfizmu (strukturalnej równoważności) grafów odwzorujących układy dwójników i czwórników [8,9] oraz syntezy ich struktur kanonicznych [10,11], w niniejszej pracy przedstawiono możliwości ilościowej oceny wpływu położenia danego elementu $\{e_{\alpha\beta}\}$ w strukturze topologicznej multigrafów rozpatrywanych układów, na wartości funkcji strukturalnych określających ich parametry.

Wrażliwość wieloparametrową pierwszego rzędu (małoprzyrostową) definiuje się jako wektor [3,5,12].

$$S_{Y \cdot t}^{F(t_1, t_2)} = \frac{F(t_1, t_2)}{[S_{Y_{1i} \cdot t_1}, \dots, S_{Y_{\alpha\beta} \cdot t_\alpha}, \dots, S_{Y_{2j} \cdot t_j}]}, \quad (1)$$

gdzie:

$$Y \cdot t = (Y_{1i} \cdot t_1 \dots Y_{2j} \cdot t_j)^t \quad (2)$$

$$S_{Y_{\alpha\beta} \cdot t_{\alpha}}^{F(t_1, t_2)} = \frac{\partial F(t_1, t_2)}{\partial (Y_{\alpha\beta} \cdot t_{\alpha})} \cdot \frac{Y_{\alpha\beta} \cdot t_{\alpha}}{F(t_1, t_2)} \quad (3)$$

$F(t_1, t_2)$ — funkcja opisująca własności układu składającego się z dwóch rodzajów elementów.

$Y_{\alpha\beta} \cdot t_{\alpha}$ — wartość admitancji $\alpha\beta$ -tego elementu układu (α — numer rodzaju elementu układu, β — numer gałęzi w unigrafie układu) [8].

2. FUNKCJE STRUKTURALNE POSZCZEGÓLNYCH ELEMENTÓW $\{e_{\alpha\beta}\}$ BI-GRAFU I MULTIGRAFU UKŁADU

Parametry opisujące własności bi-grafów rozpatrywanych dwójników i czwórników zgodnie z wynikami pracy [8,9] można w ogólnym przypadku zapisać w postaci:

$$F_{ka/kb}(t_1, t_2) = \frac{H_{ka}^v(t_1, t_2)}{H_{kb}^v(t_1, t_2)} \quad (4)$$

gdzie:

$$H_k^v(t_1, t_2) = \sum_{n_{ik}=v-k}^0 \left\{ \sum_{T_k^v(n_{1k}^v, n_{2k}^v)} \left[\prod^{n_{1k}^v} (Y_{1i} t_1) \cdot \prod^{n_{2k}^v} (Y_{2j} t_2) \right] \right\}. \quad (5)$$

Jak wynika z powyższych zależności, funkcja opisująca dany parametr układu zawiera iloraz dwóch sum iloczynów admitancji poszczególnych elementów tworzących odpowiednie dendryty ka -i kb -drzewowe.

Łatwo zauważyć że poszczególne elementy $\{e_{\alpha\beta}\}$ w różnym stopniu „uczestniczą” w tworzeniu sum kolejnych iloczynów występujących we wzorze 5. Zilustrujemy to na przykładzie dwójnika przedstawionego na rysunku 1, gdzie zestawiono wartości liczb określające ile razy dany element $\{e_{\alpha\beta}\}$ występuje w danym dendrycie k -drzewowym.

Niżej zdefiniowano funkcje strukturalne elementów $\{e_{\alpha\beta}\}$ bigrafu i multigrafu układu, charakteryzujących udział poszczególnych elementów $\{e_{\alpha\beta}\}$ w tworzeniu dendrytów ka - i kb -drzewowych występujących w funkcji wymiernej $F(t_1, t_2)$, konieczne do zdefiniowania wrażliwości funkcji strukturalnej układu.

Funkcją strukturalną $F[LT_k^v(e_{\alpha\beta}; t_1, t_2)]$ elementu $\{e_{\alpha\beta}\}$ bi-grafu układu będziemy nazywali funkcję strukturalną bi-grafu układu {zdefiniowaną w pracy [8]} zawierającą tylko te dendryty k -drzewowe, w których występuje element $\{e_{\alpha\beta}\}$.

Funkcję strukturalną elementu $\{e_{\alpha\beta}\}$ bi-grafu układu składającego się z dwóch rodzajów elementów $\{t_1, t_2\}$ zapisujemy w postaci:

$$F[LT_{ka/kb}^v(e_{\alpha\beta}; t_1, t_2)] = < \frac{LT_{ka}^v(e_{\alpha\beta}; t_1^{v-ka}, t_2^0), \dots}{LT_{kb}^v(e_{\alpha\beta}; t_1^{v-kb}, t_2^0), \dots} \dots \\ \dots \frac{LT_{ka}^v(e_{\alpha\beta}; t_1^{n_{1ka}}, t_2^{n_{2ka}}), \dots, LT_{ka}^v(e_{\alpha\beta}; t_1^0, t_2^{v-ka}}{LT_{kb}^v(e_{\alpha\beta}; t_1^{n_{1kb}}, t_2^{n_{2kb}}), \dots, LT_{kb}^v(e_{\alpha\beta}; t_1^0, t_2^{v-kb}}) > \quad (6)$$

lub w skrócie

$$F[LT^v(e_{\alpha\beta}, t_1, t_2)] = < \frac{< LT_{ka}^v(e_{\alpha\beta}, t_1^{n_{1ka}}, t_2^{n_{2ka}}) >}{< LT_{kb}^v(e_{\alpha\beta}, t_1^{n_{1kb}}, t_2^{n_{2kb}}) >} > \quad (7)$$

$$\left| \begin{array}{l} n_{1ka} = v - ka \\ n_{1ka} = 0 \\ n_{1kb} = v - kb \\ n_{1kb} = 0 \end{array} \right.$$

gdzie w ogólnym przypadku:

$< LT_k^v(e_{\alpha\beta}, t_1^{n_{1k}}, t_2^{n_{2k}}) >$ $\left| \begin{array}{l} n_{1k} = v - k \\ n_{1k} = 0 \end{array} \right.$ – uporządkowany zbiór (od $n_{1k} = v - k$ do $n_{1k} = 0$) liczb dendrytów k -drzewowych składających się z n_{1k} elementów $\{e_{1i}\}$ i $n_{2k} = v - k - n_{1k}$ elementów $\{e_{2j}\}$ zawierających element $\{e_{\alpha\beta}\}$.

Sens fizyczny funkcji strukturalnej charakteryzującej dany element $\{e_{\alpha\beta}\}$ bi-grafu układu zilustrujemy na przykładzie elementu $\{e_{12}\}$ dwójnika prezentowanego na rysunku 1.

Korzystając z tabeli na rysunku 1 można zapisać:

$$Y[LT^4(e_{12}, t_1, t_2)] = < \frac{1,3,1,0}{1,2,0} >. \quad (8)$$

Pierwsza cyfra licznika oznacza że w funkcji opisującej admitancję wejściową $Y(t_1, t_2)$ prezentowanego dwójnika, element $\{e_{12}\}$ o admitancji $\{Y_{12} \cdot t_1\}$ uczestniczy w 1-dnym dendrycie 1-drzewowym $T_1^4(t_1^3, t_2^0)$, druga cyfra licznika oznacza że element $\{e_{12}\}$ o admitancji $\{Y_{12} \cdot t_1\}$ uczestniczy w 3-ch dendrytach 1-drzewowych $T_1^4(t_1^2, t_1^1)$. Pozostałe cyfry funkcji strukturalnej elementu $\{e_{12}\}$ bi-grafu układu interpretuje się analogicznie.

Funkcją strukturalną $F[LT_k^v(e_{\alpha\beta}, t_2)]$ elementu $\{e_{\alpha\beta}\}$ multigrafu układu, będziemy nazywać dwójkę uporządkowaną w postaci ułamka, którego licznik zawiera całkowitą liczbę dendrytów ka -drzewowych a mianownik całkowitą liczbę dendrytów kb -drzewowych występujących we wzorach określających funkcję strukturalną elementu $\{e_{\alpha\beta}\}$ bi-grafu układu.

Funkcję strukturalną charakteryzującą dany element $\{e_{\alpha\beta}\}$ multigrafu układu składającego się z dwóch rodzajów elementów zapisujemy w postaci:

$$F[LT^v(e_{\alpha\beta}, t_2)] = < \frac{LT_{ka}^v(e_{\alpha\beta}, t_2)}{LT_{kb}^v(e_{\alpha\beta}, t_2)} > \quad (9)$$

Łatwo zauważyć, że w ogólnym przypadku spełniona jest zależność:

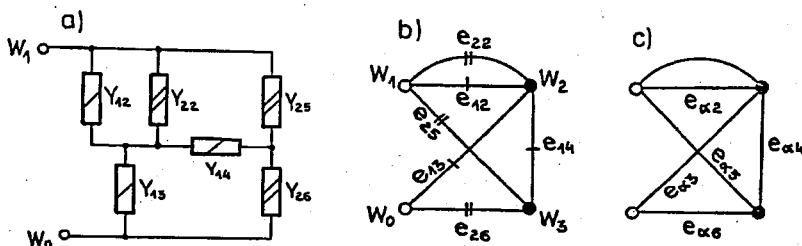
$$LT^v(e_{\alpha\beta}, t_2) = \sum_{n_{1k}=v-k}^0 LT_k^v(e_{\alpha\beta}, t_1^{n_{1k}}, t_2^{n_{2k}}). \quad (10)$$

Liczby $LT^v(e_{\alpha\beta}, t_2)$ charakteryzujące poszczególne elementy $\{e_{\alpha\beta}\}$ multigrafu układu prezentowanego na rysunku 1 zestawiono w tabeli na tym rysunku.

Sens fizyczny funkcji strukturalnej elementu $\{e_{\alpha\beta}\}$ multigrafu układu zilustrujemy na przykładzie układu pokazanego na rysunku 1. I tak na przykład funkcja strukturalna elementu $\{e_{\alpha 2}\}$ ma postać:

$$Y[LT^4(e_{\alpha 2}; t_2)] = \left\langle \frac{5}{3} \right\rangle. \quad (11)$$

Zapis ten oznacza że funkcja wymierna określająca admitancję wejściową dwójnika posiada w liczniku 5 składników sumy w postaci iloczynów admitancji elementów



struktura dendryty	$e_6 e_5 e_4 e_3 e_2 e_1$ 0 0 $t_1 t_1 t_1$ 0 $t_2 t_2$ 0 0 t_2 0	$LT^4(e_{\alpha\beta}; t_1, t_2)$						$LT^4(t_1, t_2)$	$LT^4(t_2)$
		e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{22}	e_{25}	e_{26}		
$T_1^4(t_1^3, t_2^0)$	0 0 $t_1 t_1 t_1$ 0	1	1	1	0	0	0	1	13
$T_1^4(t_1^2, t_2^1)$	0 t_2 0 $t_1 t_1$ 0 t_2 0 0 $t_1 t_1$ 0 t_2 0 t_1 0 t_1 0 0 0 $t_1 t_1 t_2$ 0 0 $t_2 t_1 t_1$ 0 0	3	4	3	1	2	2	5	
$T_1^4(t_1^1, t_2^2)$	$t_2 t_2$ 0 0 t_1 0 0 t_2 0 $t_1 t_2$ 0 t_2 0 0 $t_1 t_2$ 0 $t_2 t_2$ 0 t_1 0 0 t_2 0 t_1 0 t_2 0 $t_2 t_2 t_1$ 0 0 0	1	3	2	3	4	5	6	
$T_1^4(t_1^0, t_2^3)$	$t_2 t_2$ 0 0 t_2 0	0	0	0	1	1	1	1	
$LT^4(e_{\alpha\beta}; t_2)$		5	8	6	5	7	8		
$T_{4,0}^4(t_1^2, t_2^0)$	0 0 t_1 0 t_1 0 0 0 $t_1 t_1$ 0 0	1	1	2	0	0	0	2	
$T_{4,0}^4(t_1^1, t_2^1)$	0 t_2 0 0 t_1 0 t_2 0 0 0 t_1 0 0 t_2 0 t_1 0 0 t_2 0 0 t_1 0 0 0 0 t_1 0 t_2 0 0 $t_2 t_1$ 0 0 0 t_2 0 t_1 0 0 0	2	2	3	1	3	3	7	
$T_{4,0}^4(t_1^0, t_2^2)$	0 t_2 0 0 t_2 0 t_2 0 0 0 t_2 0	0	0	0	2	1	1	2	
$LT_{4,0}^4(e_{\alpha\beta}; t_2)$		3	3	5	3	4	4		

Rys. 1. Przykład układu dwójnika $G^4(t_1, t_2)$: a) schemat ideowy, b) jego bi-graf, c) jego multigraf; tabela — prezentacja sposobu wyznaczania poszczególnych uporządkowanych zbiorów $LT_k^4(e_{\alpha\beta}, t_1, t_2)$ i $LT_k^4(t_2)$, koniecznych do określenia parametrów strukturalnej wrażliwości poszczególnych elementów multigrafu układu

zawierających element $\{e_{\alpha\beta}\}$ tworzących dendryty 1-drzewowe $T_1^4(t_2)$, a w mianowniku 3 składniki sumy w postaci iloczynów admitancji elementów zawierających ten sam element $\{e_{\alpha\beta}\}$ i tworzących dendryty 2-drzewowe $T_{1,0}^4(t_2)$.

Algorytm obliczania poszczególnych elementów zbioru $\langle LT_k^v(e_{\alpha\beta}; t_1, t_2) \rangle$ oraz $LT_k^v(e_{\alpha\beta}; t_2)$ przedstawiono w pracy [12].

3. WRAŻLIWOŚĆ FUNKCJI STRUKTURALNEJ GRAFU UKŁADU

Ponieważ funkcja $F(t_1, t_2)$ opisująca strukturalne własności grafów odwzorujących układy dwójników i czwórników, jest funkcją wymierną stąd zgodnie z zależnością 3 wrażliwość bi-grafu układu można zapisać w postaci:

$$S_{Y_{\alpha\beta} \cdot t_{\alpha}}^{F(t_1, t_2)} = \frac{[H_{ka}^v(t_1, t_2)]' \cdot H_{kb}^v(t_1, t_2) - H_{ka}^v(t_1, t_2) \cdot [H_{kb}^v(t_1, t_2)]'}{[H_{kb}^v(t_1, t_2)]^2} \cdot \frac{Y_{\alpha\beta} \cdot t_{\alpha}}{\frac{H_{ka}^v(t_1, t_2)}{H_{kb}^v(t_1, t_2)}}, \quad (12)$$

gdzie:

$$[H_k^v(t_1, t_2)]' = \frac{\partial H(t_1, t_2)}{\partial (Y_{\alpha\beta} \cdot t_{\alpha})}. \quad (13)$$

Ponieważ występujące w wyrażeniu 5 sumy iloczynów zawierają admitancji poszczególnych elementów $\{Y_{\alpha\beta} \cdot t_{\alpha}\}$ w pierwszej potęgde, więc ich pochodne $\partial H_k^v(t_1, t_2) / \partial (Y_{\alpha\beta} \cdot t_{\alpha})$ będą zawierały sumę iloczynów tylko tych elementów tworzących dendryty k -drzewowe które we wzorze 13 zawierają daną admitancję $\{Y_{\alpha\beta} \cdot t_{\alpha}\}$, co można zapisać w postaci:

$$\frac{\partial H_k^v(t_1, t_2)}{\partial (Y_{\alpha\beta} \cdot t_{\alpha})} = \frac{H_k^v(Y_{\alpha\beta} \cdot t_{\alpha}; t_1, t_2)}{Y_{\alpha\beta} \cdot t_{\alpha}}, \quad (14)$$

gdzie:

$H_k^v(Y_{\alpha\beta} \cdot t_{\alpha}; t_1, t_2)$ — suma iloczynów admitancji tylko tych elementów tworzących dendryty k -drzewowe w rozpatrywanym układzie które we wzorze 13 zawierają daną admitancję $\{Y_{\alpha\beta} \cdot t_{\alpha}\}$.

Sens fizyczny powyższej zależności zilustrujemy to na przykładzie dwójnika pokazanego na rysunku 1. Admitancję wejściową układu korzystając z tabeli na rysunku 1 można zapisać w postaci:

$$Y(t_1, t_2) = \frac{H_1^4(t_1, t_2)}{H_{1,0}^4(t_1, t_2)}, \quad (15)$$

gdzie:

$$H_1^4(t_1, t_2) = (Y_{12} \cdot Y_{13} \cdot Y_{14}) \cdot t_1^3 + (Y_{12} \cdot Y_{13} \cdot Y_{25} + Y_{12} \cdot Y_{13} \cdot Y_{26} + Y_{12} \cdot Y_{14} \cdot Y_{26} + Y_{13} \cdot Y_{14} \cdot Y_{22} + Y_{13} \cdot Y_{24} \cdot Y_{25}) \cdot t_1^2 \cdot t_2 + (Y_{12} \cdot Y_{25} \cdot Y_{26} +$$

$$+ Y_{13} \cdot Y_{22} \cdot Y_{25} + Y_{13} \cdot Y_{22} \cdot Y_{26} + Y_{13} \cdot Y_{25} \cdot Y_{26} + Y_{14} \cdot Y_{22} \cdot Y_{26} + \\ Y_{14} \cdot Y_{25} \cdot Y_{26}) \cdot t_1^1 \cdot t_2^2 + (Y_{22} \cdot Y_{25} \cdot Y_{26}) \cdot t_2^3; \quad (16)$$

$$H_{1,0}^4(t_1, t_2) = (Y_{12} \cdot Y_{14} + Y_{13} \cdot Y_{14}) \cdot t_1^2 + (Y_{12} \cdot Y_{25} + Y_{12} \cdot Y_{26} + Y_{13} \cdot Y_{25} + \\ Y_{13} \cdot Y_{26} + Y_{14} \cdot Y_{22} + Y_{14} \cdot Y_{25} + Y_{14} \cdot Y_{26}) \cdot t_1^1 \cdot t_2^1 + (Y_{22} \cdot Y_{25} + \\ Y_{22} \cdot Y_{26}) \cdot t_2^2 \quad (17)$$

Sens fizyczny wzoru 14 zilustrujemy na przykładzie elementu $Y_{12} \cdot t_1$. I tak:

$$\frac{\partial H_1^4(t_1, t_2)}{\partial (Y_{12} \cdot t_1)} = (Y_{13} \cdot Y_{14}) \cdot t_1^2 + (Y_{13} \cdot Y_{25} + Y_{13} \cdot Y_{26} + Y_{14} \cdot Y_{26}) \cdot t_1^1 \cdot t_2^1 \\ + (Y_{25} \cdot Y_{26}) \cdot t_2^2, \quad (18)$$

$$\frac{\partial H_{1,0}^4(t_1, t_2)}{\partial (Y_{12} \cdot t_1)} = Y_{14} \cdot t_1 + (Y_{25} + Y_{26}) \cdot t_2, \quad (19)$$

natomiast:

$$H_1^4(Y_{12} \cdot t_1; t_1, t_2) = (Y_{12} \cdot Y_{13} \cdot Y_{14}) \cdot t_1^3 + (Y_{12} \cdot Y_{13} \cdot Y_{25} + Y_{12} \cdot Y_{13} \cdot Y_{26} + \\ + Y_{12} \cdot Y_{14} \cdot Y_{26}) \cdot t_1^2 \cdot t_2^1 + (Y_{12} \cdot Y_{25} \cdot Y_{26}) \cdot t_1^1 \cdot t_2^2 \quad (20)$$

$$H_{1,0}^4(Y_{12} \cdot t_1; t_1, t_2) = (Y_{12} \cdot Y_{14}) \cdot t_1^2 + (Y_{12} \cdot Y_{25} + Y_{12} \cdot Y_{26}) \cdot t_1^1 \cdot t_2^1, \quad (21)$$

Stąd:

$$\frac{H_1^4(Y_{12} \cdot t_1; t_1, t_2)}{(Y_{12} \cdot t_1)} = (Y_{13} \cdot Y_{14}) \cdot t_1^2 + (Y_{13} \cdot Y_{25} + Y_{13} \cdot Y_{26} + Y_{14} \cdot Y_{26}) \cdot t_1^1 \cdot t_2^1 \\ + (Y_{25} \cdot Y_{26}) \cdot t_2^2, \quad (22)$$

$$\frac{H_{1,0}^4(Y_{12} \cdot t_1; t_1, t_2)}{(Y_{12} \cdot t_1)} = Y_{14} \cdot t_1 + (Y_{25} + Y_{26}) \cdot t_2. \quad (23)$$

Należy zwrócić uwagę, że zależności 18 i 19 mają identyczną postać co zależności 22 i 23.

Jak wiadomo w procesie syntezy struktur kanonicznych bi-grafów układów [10,11], nie interesują nas wartości admitancji poszczególnych elementów a tylko ich rodzaj i położenie w strukturze rozpatrywanego układu.

Wrażliwością funkcji strukturalnej grafu układu będziemy nazywali wrażliwość zdefiniowaną wyrażeniem 3 przy założeniu że wartości admitancji wszystkich elementów układu są sobie równe i wynoszą $Y_{\alpha\beta} \cdot t_\alpha = 1$. Taką strukturę układu w którym wszystkie elementy mają jednakową wartość $Y_{\alpha\beta} \cdot t_\alpha = 1$ zdefiniowano w pracy [8] jako multigraf rozpatrywanego układu. Korzystając z definicji funkcji strukturalnej bi-grafu i multigrafu [8], oraz definicji funkcji strukturalnej charakteryzującej poszczególne elementy $\{e_{\alpha\beta}\}$ przedstawionych wyżej, człony występujące w zależności 12 można zapisać w postaci:

$$\bigwedge_{Y_{\alpha\beta} \cdot t_\alpha = 1} H_k^e(t_1, t_2) = H_k^e(t_2) = LT_k^e(t_2) \quad (24)$$

oraz

$$\bigwedge_{Y_{\alpha\beta} \cdot t_{\alpha}=1} \frac{H_k^v(Y_{\alpha\beta} t_{\alpha}; t_1, t_2)}{Y_{\alpha\beta} \cdot t_{\alpha}} = \frac{H_k^v(e_{\alpha\beta}; t_2)}{e_{\alpha\beta}} = LT_k^v(e_{\alpha\beta}; t_2) \quad (25)$$

Podstawiając otrzymane zależności do wzoru 12, wrażliwość funkcji strukturalnej multigrafu dwójnika lub czwórnika, można zapisać w postaci:

$$S_{e_{\alpha\beta}}^{F[LT^v(t_2)]} = \frac{LT_{ka}^v(e_{\alpha\beta}; t_2) \cdot LT_{kb}^v(t_2) - LT_{ka}^v(t_2) \cdot LT_{kb}^v(e_{\alpha\beta}; t_2)}{LT_{ka}^v(t_2) \cdot LT_{kb}^v(t_2)} \quad (26)$$

lub w postaci

$$S_{e_{\alpha\beta}}^{F[LT^v(t_2)]} = \frac{LT_{ka}^v(e_{\alpha\beta}; t_2)}{LT_{ka}^v(t_2)} - \frac{LT_{kb}^v(e_{\alpha\beta}; t_2)}{LT_{kb}^v(t_2)}. \quad (27)$$

Sposób obliczania wrażliwości funkcji strukturalnej poszczególnych elementów $\{e_{\alpha\beta}\}$ multigrafu układu zilustrujemy na przykładzie multigrafu dwójnika pokazanego na rysunku 1. W tabeli na tym rysunku zestawiono wszystkie parametry konieczne do obliczenia wrażliwości strukturalnej multigrafu rozpatrywanego dwójnika.

Korzystając z danych umieszczonych w tabeli 1 wpływ położenia poszczególnych elementów $\{e_{\alpha\beta}\}$ multigrafu na funkcję strukturalną charakteryzującą multigraf dwójnika można zapisać w postaci:

$$S_{e_{a2}}^{Y[LT(t_2)]} = \frac{5}{13} - \frac{3}{11} = \frac{16}{143} \approx 0,112$$

$$S_{e_{a3}}^{Y[LT(t_2)]} = \frac{8}{13} - \frac{3}{11} = \frac{49}{143} \approx 0,342$$

$$S_{e_{a4}}^{Y[LT(t_2)]} = \frac{6}{13} - \frac{5}{11} = \frac{1}{143} \approx 0,007$$

$$S_{e_{a2}}^{Y[LT(t_2)]} = \frac{5}{13} - \frac{3}{11} = \frac{16}{143} \approx 0,112$$

$$S_{e_{a5}}^{Y[LT(t_2)]} = \frac{7}{13} - \frac{4}{11} = \frac{25}{143} \approx 0,175$$

$$S_{e_{a6}}^{Y[LT(t_2)]} = \frac{8}{13} - \frac{4}{11} = \frac{36}{143} \approx 0,252.$$

Wypisywanie dla każdego rozpatrywanego układu wszystkich dendrytów k -drzewowych (tabela na rysunku 1) i na tej podstawie wyznaczenie odpowiednich liczb dendrytów k -drzewowych $LT_k^v(t_2)$ i $LT_k^v(e_{\alpha\beta}; t_2)$ charakteryzujących multigraf układu jest uciążliwe i mało efektywne. Procedurę wyznaczania liczb dendrytów k -drzewowych $LT_k^v(t_2)$ i $LT_k^v(e_{\alpha\beta}; t_2)$ przedstawiono w pracy [12].

Tabela 1

Wpływ położenia poszczególnych elementów $\{e_{\alpha\beta}\}$ w multigrafie układów dwójnika $G^4(t_2) = T_1^4(t) \cup T_1^4(t)$ na wrażliwość ich funkcji strukturalnych

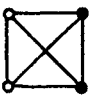
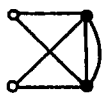
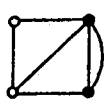
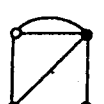
No	$G^4(t_2)$		$e_{\alpha\beta}$	$LT_1^4(e_{\alpha\beta}; t_2)$	$LT_{1,0}^4(e_{\alpha\beta}; t_2)$	$S_{e_{\alpha\beta}}^*$
	struktura $LT_1^4(t_2)$ $LT_{1,0}^4(t_2)$	model topol.				
A	B	C	D	E	F	G
1	t, t, t, t, t, t $\frac{16}{8}$		$e_{\alpha 1}$	8	0	0.500
			$e_{\alpha 2}$	8	3	0.125
			$e_{\alpha 3}$	8	3	0.125
			$e_{\alpha 4}$	8	4	0.000
			$e_{\alpha 5}$	8	3	0.125
			$e_{\alpha 6}$	8	3	0.125
2	$t, t, t, t, t_2, 0$ $\frac{13}{11}$		$e_{\alpha 2}$	5	3	0.112
			$e_{\alpha 2}$	5	3	0.112
			$e_{\alpha 3}$	8	3	0.342
			$e_{\alpha 4}$	6	5	0.007
			$e_{\alpha 5}$	7	4	0.175
			$e_{\alpha 6}$	8	4	0.252
3	$t, t, t_2, t, t, 0$ $\frac{12}{12}$		$e_{\alpha 2}$	7	4	0.250
			$e_{\alpha 3}$	7	4	0.250
			$e_{\alpha 4}$	4	4	0.000
			$e_{\alpha 4}$	4	4	0.000
			$e_{\alpha 5}$	7	4	0.250
			$e_{\alpha 6}$	7	4	0.250
4	$t, 0, t_2, t, t, t$ $\frac{13}{8}$		$e_{\alpha 1}$	8	0	0.615
			$e_{\alpha 2}$	8	3	0.240
			$e_{\alpha 3}$	6	3	0.087
			$e_{\alpha 4}$	5	3	0.010
			$e_{\alpha 4}$	5	3	0.010
			$e_{\alpha 6}$	7	4	0.038
5	$t, 0, t, t, t_2, t$ $\frac{13}{7}$		$e_{\alpha 1}$	7	0	0.538
			$e_{\alpha 2}$	5	2	0.099
			$e_{\alpha 2}$	5	2	0.099
			$e_{\alpha 3}$	6	2	0.176
			$e_{\alpha 4}$	8	4	0.044
			$e_{\alpha 6}$	8	4	0.044

Tabela 1 (ciąg dalszy)

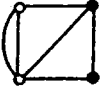
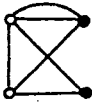
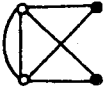
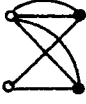
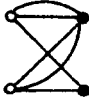
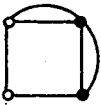
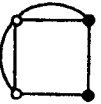
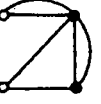
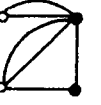
A	B	C	D	E	F	G
6	$t, 0, t, t, t, t_2$ $\frac{13}{5}$ $\langle \frac{13}{5} \rangle$		e_{a1}	5	0	0.385
			e_{a1}	5	0	0.385
			e_{a2}	7	2	0.138
			e_{a3}	6	2	0.062
			e_{a4}	8	3	0.015
			e_{a6}	8	3	0.015
7	$t, 0, t, t_2, t, t$ $\frac{12}{7}$ $\langle \frac{12}{7} \rangle$		e_{a1}	7	0	0.583
			e_{a2}	7	2	0.297
			e_{a3}	4	2	0.048
			e_{a3}	4	2	0.048
			e_{a4}	7	4	0.012
			e_{a6}	7	4	0.012
8	$t, t, 0, t_2, t$ $\frac{13}{6}$ $\langle \frac{13}{6} \rangle$		e_{a1}	6	0	0.461
			e_{a2}	5	2	0.051
			e_{a2}	5	2	0.051
			e_{a3}	7	2	0.205
			e_{a5}	8	3	0.116
			e_{a6}	8	3	0.116
9	$t, t, 0, t, t, t_2$ $\frac{12}{4}$ $\langle \frac{12}{4} \rangle$		e_{a1}	4	0	0.333
			e_{a1}	4	0	0.333
			e_{a2}	7	2	0.083
			e_{a3}	7	2	0.083
			e_{a5}	7	2	0.083
			e_{a6}	7	2	0.083
10	$t, t_2, 0, t, t_2, 0$ $\frac{12}{9}$ $\langle \frac{12}{9} \rangle$		e_{a2}	5	3	0.083
			e_{a2}	5	3	0.083
			e_{a3}	8	3	0.334
			e_{a5}	5	3	0.083
			e_{a5}	5	3	0.083
			e_{a6}	8	3	0.334
11	$t, t, 0, t_2, t_2, 0$ $\frac{12}{8}$ $\langle \frac{12}{8} \rangle$		e_{a2}	5	2	0.166
			e_{a2}	5	2	0.166
			e_{a3}	5	2	0.166
			e_{a3}	5	2	0.166
			e_{a5}	8	4	0.166
			e_{a6}	8	4	0.166

Tabela 1 (ciąg dalszy)

A	B	C	D	E	F	G
12	$t, 0, t2, 0, t2, t$ $\langle \frac{12}{8} \rangle$		e_{a1}	8	0	0.666
			e_{a2}	5	3	0.041
			e_{a2}	5	3	0.041
			e_{a4}	5	3	0.041
			e_{a4}	5	3	0.041
			e_{a6}	8	4	0.166
13	$t, 0, t, 0, t2, t2$ $\langle \frac{12}{5} \rangle$		e_{a1}	5	0	0.416
			e_{a1}	5	0	0.416
			e_{a2}	5	2	0.016
			e_{a2}	5	2	0.016
			e_{a4}	8	3	0.066
			e_{a6}	8	3	0.066
14	$t, 0, t2, t, t2, 0$ $\langle \frac{10}{11} \rangle$		e_{a2}	5	3	0.227
			e_{a2}	5	3	0.227
			e_{a3}	6	3	0.327
			e_{a4}	4	4	0.036
			e_{a4}	4	4	0.036
			e_{a6}	6	5	0.136
15	$t, 0, t, t2, t2, 0$ $\langle \frac{10}{9} \rangle$		e_{a2}	4	2	0.178
			e_{a2}	4	2	0.178
			e_{a3}	5	2	0.278
			e_{a3}	5	2	0.278
			e_{a4}	6	5	0.044
			e_{a6}	6	5	0.044
16	$t2, 0, t2, 0, t2, 0$ $\langle \frac{10}{12} \rangle$		e_{a2}	4	4	0.166
			e_{a2}	4	4	0.166
			e_{a4}	4	4	0.166
			e_{a4}	4	4	0.166
			e_{a6}	4	4	0.166
			e_{a6}	4	4	0.166

4. WRAŻLIWOŚCI FUNKCJI STRUKTURALNYCH MULTIGRAFÓW DWÓJNIKÓW

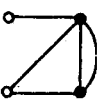
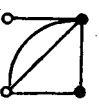
W pracy [11] wygenerowano wszystkie struktury kanoniczne bi-grafów układów dwójników o $v=4$ wierzchołkach, które zestawiono na rysunkach 2.3, 2.4, 2.5, 2.6 [11].

Tabela 2

Wpływ położenia poszczególnych elementów $\{e_{\alpha\beta}\}$ multigrafów układów dwójników $G^4(t_2) = T_1^4(t_1) \cup T_2^4(t_1)$ lub $G^4(t_2) = T_2^4(t_2) \cup T_1^4(t_2)$ na wrażliwość ich funkcji strukturalnych

No	$G^4(t_2)$		$e_{\alpha\beta}$	$LT_1^4(e_{\alpha\beta}; t_2)$	$LT_{1,0}^4(e_{\alpha\beta}; t_2)$	$S_{e_{\alpha\beta}}^*$
	struktura $\frac{LT_1^4(t_2)}{LT_{1,0}^4(t_2)}$	model topol.				
A	B	C	D	E	F	G
1	$t, t, t, t, t, 0$ $\frac{8}{\langle - \rangle}$ 8		$e_{\alpha 2}$	5	3	0.250
			$e_{\alpha 3}$	5	3	0.250
			$e_{\alpha 4}$	4	4	0.000
			$e_{\alpha 5}$	5	3	0.250
			$e_{\alpha 6}$	5	3	0.250
2	$t, 0, t, t, t, t$ $\frac{8}{\langle - \rangle}$ 5		$e_{\alpha 1}$	5	0	0.625
			$e_{\alpha 2}$	5	2	0.225
			$e_{\alpha 3}$	4	2	0.100
			$e_{\alpha 4}$	5	3	0.025
			$e_{\alpha 6}$	5	3	0.025
3	$t, t, 0, t, t, t$ $\frac{8}{\langle - \rangle}$ 4		$e_{\alpha 1}$	4	0	0.500
			$e_{\alpha 2}$	5	2	0.125
			$e_{\alpha 3}$	5	2	0.125
			$e_{\alpha 5}$	5	2	0.125
			$e_{\alpha 6}$	5	2	0.125
4	$t, t, 0, t, t, 2, 0$ $\frac{7}{\langle - \rangle}$ 6		$e_{\alpha 2}$	3	2	0.095
			$e_{\alpha 2}$	3	2	0.095
			$e_{\alpha 3}$	5	2	0.382
			$e_{\alpha 5}$	5	3	0.214
			$e_{\alpha 6}$	5	3	0.214
5	$t, 0, t, 0, t, 2, t$ $\frac{7}{\langle - \rangle}$ 5		$e_{\alpha 1}$	5	0	0.714
			$e_{\alpha 2}$	3	2	0.029
			$e_{\alpha 2}$	3	2	0.029
			$e_{\alpha 4}$	5	3	0.114
			$e_{\alpha 6}$	5	3	0.114
6	$t, 0, t, t, t, 2, 0$ $\frac{6}{\langle - \rangle}$ 7		$e_{\alpha 2}$	3	2	0.214
			$e_{\alpha 2}$	3	2	0.214
			$e_{\alpha 3}$	4	2	0.382
			$e_{\alpha 4}$	4	4	0.095
			$e_{\alpha 6}$	4	4	0.095

T a b e l a 2 (ciąg dalszy)

A	B	C	D	E	F	G
7	$t, 0, t_2, t, t, 0$ $\begin{matrix} 5 \\ \leftarrow \rightarrow \\ 8 \end{matrix}$		e_{a2}	5	3	0.625
			e_{a3}	3	3	0.225
			e_{a4}	2	3	0.025
			e_{a4}	2	3	0.025
			e_{a6}	3	4	0.100
8	$t, 0, t, t_2, t, 0$ $\begin{matrix} 5 \\ \leftarrow \rightarrow \\ 7 \end{matrix}$		e_{a2}	5	2	0.714
			e_{a3}	2	2	0.114
			e_{a3}	2	2	0.114
			e_{a4}	3	4	0.029
			e_{a6}	3	4	0.029
9	$t, 0, t_2, 0, t_2, 0$ $\begin{matrix} 4 \\ \leftarrow \rightarrow \\ 8 \end{matrix}$		e_{a2}	2	3	0.125
			e_{a2}	2	3	0.125
			e_{a4}	2	3	0.125
			e_{a4}	2	3	0.125
			e_{a6}	4	4	0.500

Na tych rysunkach (kolumna C) zestawiono również wszystkie struktury kanoniczne multigrafów układów dwójników.

Korzystając z powyższych rozważań, w tabelach 1–3 zestawiono wrażliwości funkcji strukturalnych charakteryzujące wpływ położenia poszczególnych elementów $\{e_{\alpha\beta}\}$ w strukturach multigrafów dwójników wygenerowanych w pracy [11]. Należy zwrócić uwagę, że w tabelach 1–3 poszczególne elementy $\{e_{\alpha\beta}\}$ różnią się tylko wartością parametru β – numerem gałęzi w unigrafie, natomiast parametr α określający rodzaj elementu jest nieistotny, ponieważ w multigrafie dla każdego β równoległe połączone elementy $\{t_1, t_2\}$ o jednostkowych wartościach, mają identyczny wpływ na wrażliwość strukturalną rozpatrywanych dwójników. I tak, tabela 1 ilustruje wpływ położenia poszczególnych elementów $\{e_{\alpha\beta}\}$ w multigrafach dwójników $G^4(t_2) = T_1^4(t_1) \cup T_1^4(t_2)$ (wygenerowanych w pracy [11] – rysunek 2.3), na ich admitancyjne funkcje strukturalne $Y(t_1, t_2)$.

Należy zwrócić uwagę, że multigrafy układów $G^4(t_2) = T_1^4(t_1) \cup T_2^4(t_2)$ i $G^4(t_2) = T_2^4(t_1) \cup T_1^4(t_2)$ (wygenerowanych w pracy [11] – rysunki 2.4 i 2.5), mają identyczne struktury topologiczne, dlatego też wrażliwości ich funkcji strukturalnych zestawiono w tabeli 2.

Tabela 3 natomiast ilustruje wpływ położenia poszczególnych elementów $\{e_{\alpha\beta}\}$ w multigrafach dwójników $G^4(t_2) = T_2^4(t_1) \cup T_2^4(t_2)$ (wygenerowanych w pracy [11] – rysunek 2.6) na ich admitancyjne funkcje strukturalne $Y(t_1, t_2)$.

Tabela 3

Wpływ położenia poszczególnych elementów $\{e_{\alpha\beta}\}$ multigrafów układów dwójnika $G(t_2) = T_2(t_1) \cup T_2(t_2)$ na wrażliwość ich funkcji strukturalnych

No	$G^4(t_2)$		$e_{\alpha\beta}$	$LT_1^4(e_{\alpha\beta}; t_2)$	$LT_{1,0}^4(e_{\alpha\beta}; t_2)$	$S_{e_{\alpha\beta}}^7$
	struktura $LT_1^4(t_2)$ $LT_{1,0}^4(t_2)$	model topol.				
A	B	C	D	E	F	G
1	$t, t, 0, t, t, 0$ $\begin{matrix} 4 \\ \leftarrow \rightarrow \\ 4 \end{matrix}$		$e_{\alpha 2}$	3	2	0.250
			$e_{\alpha 3}$	3	2	0.250
			$e_{\alpha 5}$	3	2	0.250
			$e_{\alpha 6}$	3	2	0.250
2	$t, 0, t, t, t, 0$ $\begin{matrix} 3 \\ \leftarrow \rightarrow \\ 5 \end{matrix}$		$e_{\alpha 2}$	2	2	0.266
			$e_{\alpha 3}$	3	2	0.600
			$e_{\alpha 4}$	2	3	0.067
			$e_{\alpha 6}$	2	3	0.067
3	$t, 0, t, 0, t, 2, 0$ $\begin{matrix} 2 \\ \leftarrow \rightarrow \\ 5 \end{matrix}$		$e_{\alpha 2}$	1	2	0.100
			$e_{\alpha 2}$	1	2	0.100
			$e_{\alpha 4}$	2	3	0.400
			$e_{\alpha 6}$	2	3	0.400

5. PODSUMOWANIE

Do najważniejszych rezultatów niniejszej pracy można zaliczyć opracowanie metody oceny wpływu położenia danego elementu $\{e_{\alpha\beta}\}$ w strukturze multigrafu układu na strukturalną wrażliwość funkcji określającej jego parametry. Wymogi stawiane układom wskazują, że rozwój metod syntezy i projektowania nowych układów powinien iść głównie w dwóch kierunkach – minimalizacji liczby elementów tworzących dany układ oraz minimalizacji wpływu poszczególnych elementów na całkowitą wrażliwość układu [2,4,5,6].

Przedstawiona w pracy [10,11] procedura syntezy topologicznej struktur kanonicznych bi-grafów umożliwia generację dwójników i czwórników, które zadaną funkcję wymierną mogą realizować przy minimalnych liczbach elementów obu typów. Zdefiniowana w niniejszej pracy wrażliwość strukturalna poszczególnych elementów multigrafu układu pozwala stwierdzić, który element $\{e_{\alpha\beta}\}$ układu ma największy wpływ na całkowitą wrażliwość, co jest bardzo istotnym parametrem przy wyborze struktury układu do praktycznej realizacji.

Możliwość oceny wpływu rozmieszczenia poszczególnych typów elementów w strukturze układu na jego całkowitą wrażliwość, pozwala szukać kompromisu

w rozwiązywaniu obydwu zagadnieniach minimalizacji, już na etapie syntezy strukturalnej — wstępnym etapie opracowania nowej konstrukcji układu. Ma to bardzo istotne znaczenie z praktycznego punktu widzenia, ponieważ jak pokazano w wielu pracach [2—7] oba te wymogi dotyczące minimalizacji są na ogół sprzeczne.

BIBLIOGRAFIA

1. J. Chocjan, L. Lasek: *Metody analizy wrażliwości układów elektronicznych*. W: Politechnika śląska Gliwice 1980
2. I. W. Guriewicz: *Sintez paramietriczeskich funkcjonalnych struktur*. Moskwa Swiaz 1977
3. J. Jaworska: *Synteza układów optymalnych mało-wrażliwych na zmiany wybranych parametrów*. Rozprawy Elektrotechniczne, 1985, t. 34, s. 95—99
4. A. A. Lanne i inni: *Optimalnaja realizacja liniowych RLC schiem*. Kijów Naukowaja dumka 1982
5. S. K. Mitra: *Analiza i synteza układów aktywnych liniowych*. Warszawa: WNT, 1974
6. M. S. Piekarski: *Wybrane zagadnienia syntezy liniowych układów mikroelektronicznych*. W: Prace naukowe Instytutu Telekomunikacji i Akustyki, nr 24, Wrocław Politechnika Wrocławska 1976
7. J. Shirkawa, T. Temma, M. Ozaki: *Synthesis of minimum sensitivity networks through some classes of equivalent transformations*. IEEE Trans. Circuit Theory, 1970, vol. CT—17, pp. 2—8
8. Z. Wróbel: *Funkcje strukturalne grafów układów dwójników i czwórników składających się z dwóch rodzajów elementów*. Kwartalnik Elektroniki i Telekom. 1991, t. XXXVII, z. 1
9. Z. Wróbel: *Homeomorfizm grafów układów dwójników i czwórników składających się z dwóch rodzajów elementów*. Rozprawy Elektrotechniczne 1991, t. XXXVII, z. 1
10. Z. Wróbel: *Synteza struktur kanonicznych bi-grafów układów dwójników składających się z dwóch rodzajów elementów. Część I: Metodą przeglądu bezpośredniego*. Kwartalnik Elektroniki i Telekom. 1991, t. XXXVII, z. 1
11. Z. Wróbel: *Synteza struktur kanonicznych bi-grafów układów dwójników składających się z dwóch rodzajów elementów. Część II: Metodą przeglądu hierarchicznego*. Kwartalnik Elektroniki i Telekom. 1991, t. XXXVII, z. 1
12. Z. Wróbel: *Synteza topologiczna struktur kanonicznych grafów układów dwójników i czwórników*. (monografia) Wyd. Uniwersytet śląski, 1991

Z. WRÓBEL

SENSITIVITY OF STRUCTURAL FUNCTION OF GRAPHS OF ONE-PORT AND TWO-PORT CONSISTING OF TWO KINDS OF ELEMENTS

Summary

The aim of this paper is presenting possibilities of qualitative evaluation of influence of position of a given element $\{e\}$ in topological structure of multigraph of one-port and two-port upon values of structural functions determining their parameters. Topological sensitivity of particular elements of the graphs representing one-port and two-port circuits was defined in the paper. Sensitivity of structural functions it was illustrated with the example of multigraphs of one-port circuit was presenting in paper [11].

Metoda optymalizacji wartości parametrów elementów składowych dużego analogowego układu elektronicznego

ANDRZEJ BOGUSZ, STANISŁAW KUTA

Instytut Elektroniki, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

Otrzymano 1991.10.04

Autoryzowano do druku 1991.12.18

Praca prezentuje opracowaną metodę optymalizacji wartości elementów składowych dużego, analogowego układu elektronicznego. Pod pojęciem „duży układ elektroniczny” jest rozumiany układ, który ze względu na długi czas obliczeń lub ograniczoną pojemność pamięci nie może być analizowany jako jedna całość na sprzęcie komputerowym danej klasy. Istotą opracowanej metody jest podział układu na podukłady reprezentowane przez małosygnałowe lub stałoprądowe schematy zastępcze. Odpowiednie połączenie tych schematów daje schemat zastępczy rozważanego układu. Optymalizacja jest prowadzona dwuetapowo. W pierwszym etapie, w oparciu o małosygnałowe lub stałoprądowe kryterium jakości odnoszące się do całego układu, są określone optymalne wartości elementów schematów zastępczych poszczególnych podukładów. W drugim etapie wszystkie podukłady są poddawane kolejno optymalizacji, polegającej na określeniu takich wartości ich elementów składowych, przy których elementy odpowiednich schematów zastępczych mają wartości jak najbardziej zbliżone do wartości optymalnych, uzyskanych w etapie pierwszym.

Praca zawiera również przykład obliczeniowy ilustrujący zastosowanie opracowanej metody. Jest nim optymalizacja wartości elementów sieci dróg rozmównych małonumerowej centrali telefonicznej stopnia abonenckiego.

UWAGI WSTĘPNE

— W celu uproszczenia nazewnictwa w artykule przyjęto traktować sformułowanie „wartość parametru elementu składowego układu elektronicznego” równoważnie ze sformułowaniem „wartość elementu układu elektronicznego”. Pod tym pojęciem jest rozumiana wartość parametru charakteryzującego dany element jako część składową układu elektronicznego.

— Pod pojęciem „duży układ elektroniczny” jest rozumiany układ, który ze względu na ilość elementów składowych nie może być analizowany bezpośrednio w całości na sprzęcie komputerowym danej klasy.

1. WPROWADZENIE

Proces projektowania dowolnego układu elektronicznego powinien zawierać następujące elementy:

- a) wybór struktury układu,
- b) obliczenie wartości elementów składowych układu, zapewniających jego prawidłowe działanie,
- c) optymalizacja wartości elementów składowych przy wskaźniku jakości reprezentującym istotne parametry projektowania urządzenia,
- d) określenie dopuszczalnych zmian wartości elementów w otoczeniu ich wartości optymalnych tak, aby wybrane parametry układu elektronicznego zawierały się w narzuconych przedziałach.

W praktyce, często optymalizacja wartości elementów jest przeprowadzona w ograniczonym zakresie, zaś projektowanie tolerancji (pkt. c) jest pomijane lub zastępowane analizą tolerancji. Analiza tolerancji, nie będąca procesem odwrotnym do projektowania tolerancji, pozwala na określenie zmian wybranych parametrów charakteryzujących układ elektroniczny wywołanych zadanymi zmianami wartości elementów tego układu. Jest to szczególnie niekorzystne w przypadku projektowania dużych układów przewidzianych do masowej produkcji, zwłaszcza jeśli wymagana jest ich wysoka niezawodność.

Podstawowym powodem zawężenia problemu projektowania układów elektronicznych (zwłaszcza analogowych), jest znaczna w przypadku układów zawierających wiele elementów komplikacja obliczeń optymalizacyjnych i brak ogólnej metody projektowania tolerancji. Zastosowanie techniki komputerowej w niewielkim stopniu ułatwia pracę projektanta na tym etapie. W zasadzie wszystkie programy specjalizowane oraz pakiety CAD w odniesieniu do dyskretnych układów elektronicznych zapewniają szerokie możliwości analizowania pracy symulowanego układu (analiza stałoprądowa, małosygnałowa, czasowa, termiczna, badanie wrażliwości i analiza tolerancji). Programy te są w pełni przydatne do określenia własności, parametrów i jakości uprzednio zaprojektowanego układu, jednakże nie umożliwiają efektywnej optymalizacji i projektowania tolerancji.

Dodatkową trudnością w pewnym wykorzystaniu bazy mikrokomputerowej w procesie projektowania układów elektronicznych jest ograniczenie od góry ilości elementów symulowanego układu, spowodowane ograniczoną pojemnością pamięci wykorzystywanego sprzętu lub niedopuszczalnie długim czasem wykonywania obliczeń. W praktyce optymalizacja układu zawierającego ponad 100 elementów biernych i aktywnych jest możliwa na dużych komputerach do których projektant w większości przypadków ma dostęp na zasadzie pracy wsadowej, względnie pracuje w systemie uciążliwych rezerwacji czasu na terminalach przy pracy on-line.

W dalszej części artykułu jest przedstawiona metoda optymalizacji wartości elementów dowolnie dużego analogowego układu elektronicznego. Optymalizacja jest dokonywana w oparciu o kryterium jakości zawierające informacje o stałoprądowych i małosygnałowych własnościach rozpatrywanego układu. Metodę tą wykorzystano w oprogramowaniu użytkowym na mikrokomputer IBM XT/AT.

Metoda projektowania tolerancji wartości elementów składowych dużego analogowego układu elektronicznego jest tematem odrębnej publikacji.

2. METODA OPTIMALIZACJI WARTOŚCI ELEMENTÓW SKŁADOWYCH DUŻEGO ANALOGOWEGO UKŁADU ELEKTRONICZNEGO

Dany jest układ elektroniczny U o zadanej strukturze, składający się z N elementów E_i o wartościach e_i ($i=1\dots N$). Zakłada się, że każdy element E_i jest opisywany jednym podstawowym parametrem: np. rezystor – rezystancją, tranzystor bipolarny – współczynnikiem wzmocnienia β . Wartości e_i są obliczone we wstępnej fazie projektowania i zapewniają poprawne, lecz nie optymalne działanie układu U . Działanie i właściwości układu U opisuje M małosygnałowych lub stałoprądowych parametrów P_j ($j=1\dots M$), które odpowiednio przyjmują wartości p_j . Układ U zostaje podzielony na K podukładów U_n ($n=1\dots K$), które są opisywane przez K małosygnałowych lub stałoprądowych schematów zastępczych, oznaczonych odpowiednio U_{zn} . Podział powinien być dokonany w taki sposób, aby interakcja między poszczególnymi podukładami U_n była minimalna. Pod pojęciem interakcji podukładów U_i oraz U_j jest rozumiany wpływ elementów składowych podukładu U_i na wartości elementów składowych schematu zastępczego U_{zj} podukładu U_j . Przykładowo powyższy warunek spełnia podział, przy którym podukłady U_n są rozdzielone galwanicznie.

Elementami schematów zastępczych U_{zn} są impedancje i admitancje (rezystancje i konduktancje) Ez_m ($m=1\dots L$) o wartościach ez_m^1 . Wartości elementów schematu zastępczego U_{zi} mogą być obliczone w wyniku analizy podukładu U_i oraz, w przypadku elementów reprezentujących interakcję między podukładami U_i i U_j , w wyniku analizy podukładu U_j . Odpowiednie połączenie ze sobą elementów Ez_m daje schemat zastępczy U_z rozpatrywanego układu U . Dokonując optymalizacji wartości elementów Ez_m ze względu na kryterium jakości związane z parametrami P_j otrzymuje się optymalne wartości ez_m^0 elementów schematu zastępczego U_z . Jeśli przez p_j^0 ($j=1\dots M$) oznaczy się zestaw najkorzystniejszych wartości parametrów P_j , to optymalizacja polega na minimalizacji funkcjonau $J(p_j)_{j=1\dots M}$

$$J(p_j)_{j=1\dots M} = \sum_{j=1}^M w_j \times (p_j^0 - p_j)^2 + \xi \quad (1)$$

gdzie w_j są współczynnikami wagi i zawierają informacje które z parametrów P_j są bardziej, a które mniej istotne. Współczynnik ξ jest obliczany zgodnie z następującą regułą

$$\begin{aligned} \xi &= 0 && \text{jeśli wszystkie } ez_m \geq 0 \quad m=1\dots L \\ \xi &\gg J^1(p_j) && \text{jeśli istnieje } ez < 0 \quad j=1\dots M \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie $J^1(p_j)$ jest wartością funkcjonau $J(p_j)$ obliczoną dla początkowych wartości ez_m^1 . Dzięki współczynnikowi ξ wartości ez_m^0 są nieujemne.

Minimalizacja może być przeprowadzona dowolną metodą, przy czym wartości funkcjonau $J(p_j)$ otrzymywane są w wyniku kolejnych analiz układu U_z . Warunki początkowe procesu optymalizacji są wyznaczone przez wartości ez_m^1 .

Elementy zastępcze Ez_m o wartościach ez_m^0 tworzą schemat zastępczy U_z układu U , składającego się z elementów E_i o wartościach optymalnych e_i^0 . Wartości e_i^0 są

obliczane w procesie optymalizacji każdego z podukładów U_n . Optymalizacja polega na minimalizacji funkcjonau $J_n(ez_r)$, dla $r=r_{n1} \dots r_{n2}$.

$$J_n(ez_r) = \sum_{r=r_{n1}}^{r_{n2}} (ez_r^0 - ez_r)^2 + \xi + \gamma \quad (3)$$

gdzie: J_n – funkcjonal minimalizowany w procesie optymalizacji wartości elementów podukładu U_n

ez_r – wartości elementów zastępczych podukładu U_n

ez_r^0 – oprymalne wartości elementów schematu zastępczego podukładu U_n

ξ – współczynnik obliczany zgodnie z regułą

$$\xi = 0 \quad \text{dla } e_{k \min} \leq e_k \leq e_{k \max}$$

$$k = k_{n1} \dots k_{n1} \quad (4)$$

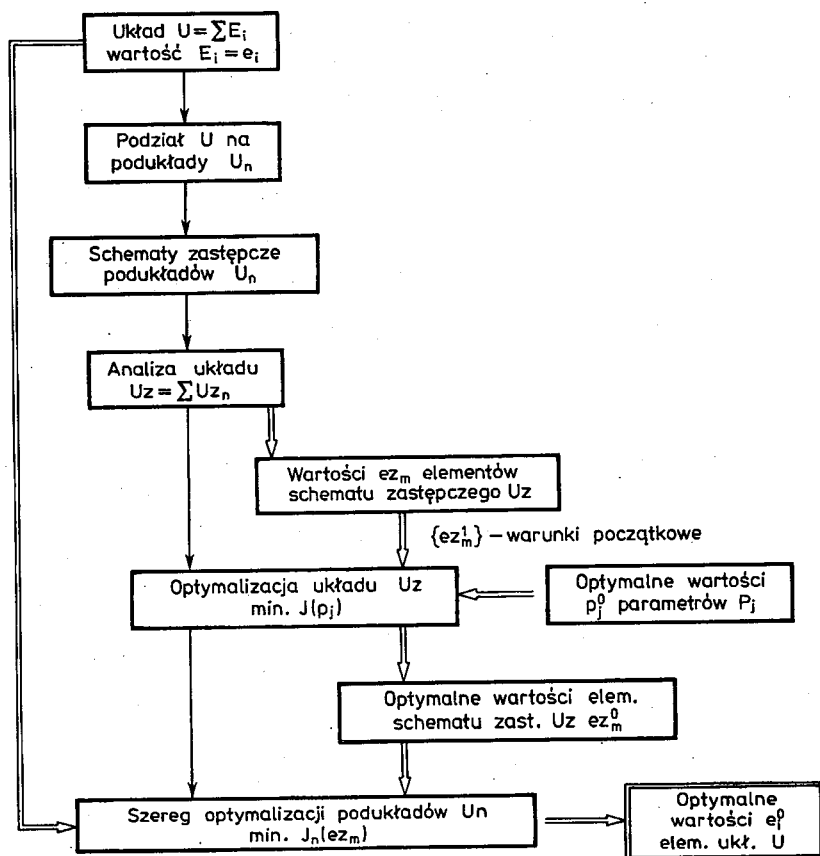
$\xi \gg J_n^1(ez_r)$ jeśli istnieje e_k nie zawarte w przedziale $\{e_{k \min}, e_{k \max}\}$, spełniający analogiczną rolę jak we wzorze (2).

γ – wyrażenie zawierające dodatkowe wymagania związane z działaniem podukładu U_n np. zależności stałoprądowe.

$J_n^1(ez_r)$ jest wartością minimalizowanego funkcjonau w pierwszym kroku optymalizacji, zaś e_k są wartościami elementów składowych podukładu U_n . Dzięki współczynnikowi ξ wartości e_k zawierają się w narzuconym przedziale $\{e_{k \min}, e_{k \max}\}$. Wartości funkcjonau $J_n(ez_r)$ są otrzymywane w wyniku kolejnych analiz podukładu U_n . Warunki początkowe procesu minimalizacji określone są przez wartości e_k^0 elementów E_k podukładu U_n . W celu otrzymania wszystkich optymalnych wartości e_k^0 elementów E_k układu U należy przeprowadzić tyle procesów optymalizacji, ile jest podukładów U_n .

Ponieważ wartości funkcjonau będącego kryterium optymalizacji są uzyskiwane na drodze analizy układu elektronicznego zawierającego elementy nieliniowe, to funkcja aproksymująca je może nie posiadać pochodnej, a nawet może być nieciągła. Z tego względu należy unikać minimalizacji metodami gradientowymi. Na rys. 1 przedstawiono schematycznie opisany proces optymalizacji wartości elementów układu elektronicznego U .

Przy traktowaniu układu U jako jednej całości, optymalizacja jego elementów składowych sprowadza się do zagadnienia minimalizacji M -wymiarowego wskaźnika jakości reprezentowanego przez funkcjonal $J(p_j)$ w przestrzeni N -wymiarowej E_1 , reprezentującej wartości elementów. Rozwiązanie tego problemu wymaga przeprowadzenia jednego, ale czasochłonnego przy dużych wartościach N procesu minimalizacji. Optymalizacja wartości elementów składowych układu U opracowaną metodą wymaga wprowadzenia $K+1$ procesów minimalizacji, jednakże ze względu na mniejszy wymiar przestrzeni, w których są one wykonywane, końcowy rezultat jest uzyskiwany szybciej.



Rys. 1. Schemat blokowy procesu optymalizacji wartości elementów składowych układu elektronicznego

3. IMPLEMENTACJA OPRACOWANEJ METODY OPTIMALIZACJI NA SPRZĘCIE MIKROKOMPUTEROWYM KLASY PC

Opracowana metoda optymalizacji wartości elementów składowych dużych, analogowych układów elektronicznych została wykorzystana w oprogramowaniu użytkowym uruchomionym na mikrokomputerze IBM XT/AT. Analiza układów i podukładów elektronicznych jest dokonywana przy pomocy programu CIRCAN, specjalnie opracowanego pod kątem optymalizacji. Linearyzacja elementów nieliniowych jest przeprowadzana zmodyfikowaną metodą Newtona. Zlinearyzowany układ elektroniczny jest analizowany zmodyfikowaną metodą potencjałów węzłowych, przy czym do rozwiązania układu równań wykorzystano metodę eliminacji Gaussa. Autonomiczne procedury zapisywania topologii układu i tworzenia rozszerzonej macierzy admitacyjnej ułatwiają proces przeprowadzania cyklicznych analiz symulo-

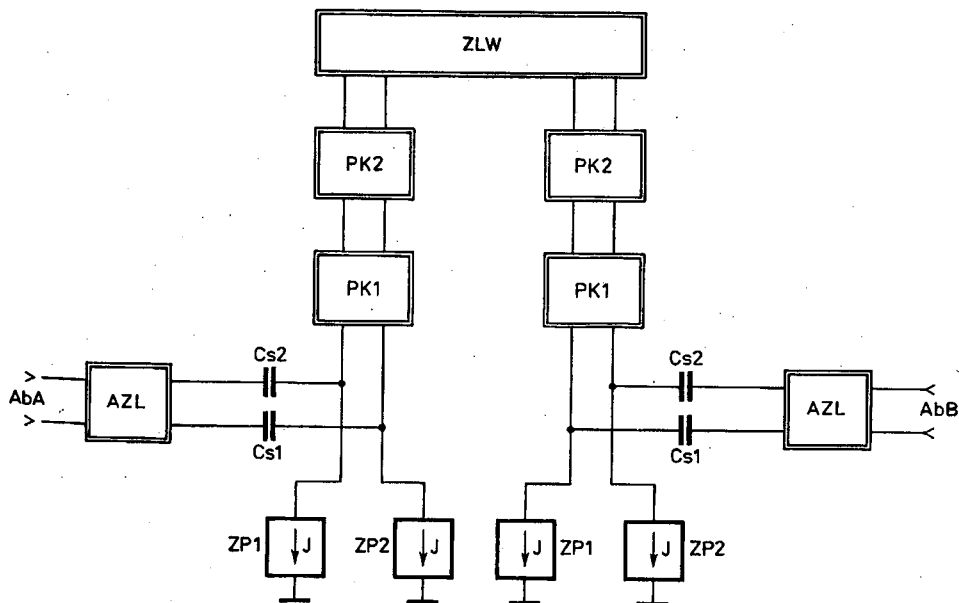
wanego układu, który jest niezbędny przy optymalizacji. Optymalizacja jest dokonywana metodą Powell'a, tj. najszybszą z metod bezgradientowych. Ze względu na moc obliczeniową mikrokomputera IBM XT/AT wielkość analizowanego układu lub podukładu limitują następujące ograniczenia: maksymalna ilość elementów – 100, maksymalna ilość węzłów – 50.

4. OPTIMALIZACJA WARTOŚCI ELEMENTÓW SIECI DRÓG ROZMÓWNYCH PEŁNOELEKTRONICZNEJ CENTRALI TELEFONICZNEJ Z DWUSTOPNIOWYM POLEM KOMUTACYJNYM

Przykład zastosowania opracowanej metody

Przedmiot i cel optymalizacji

Przedmiotem optymalizacji jest sieć dróg rozmównych pełnoelektronicznej centrali abonenckiej, zestawiana przy połączeniach wewnętrznych. Schemat blokowy drogi rozmównej zestawionej przy połączeniu wewnętrznym jest przedstawiony na rys. 2.

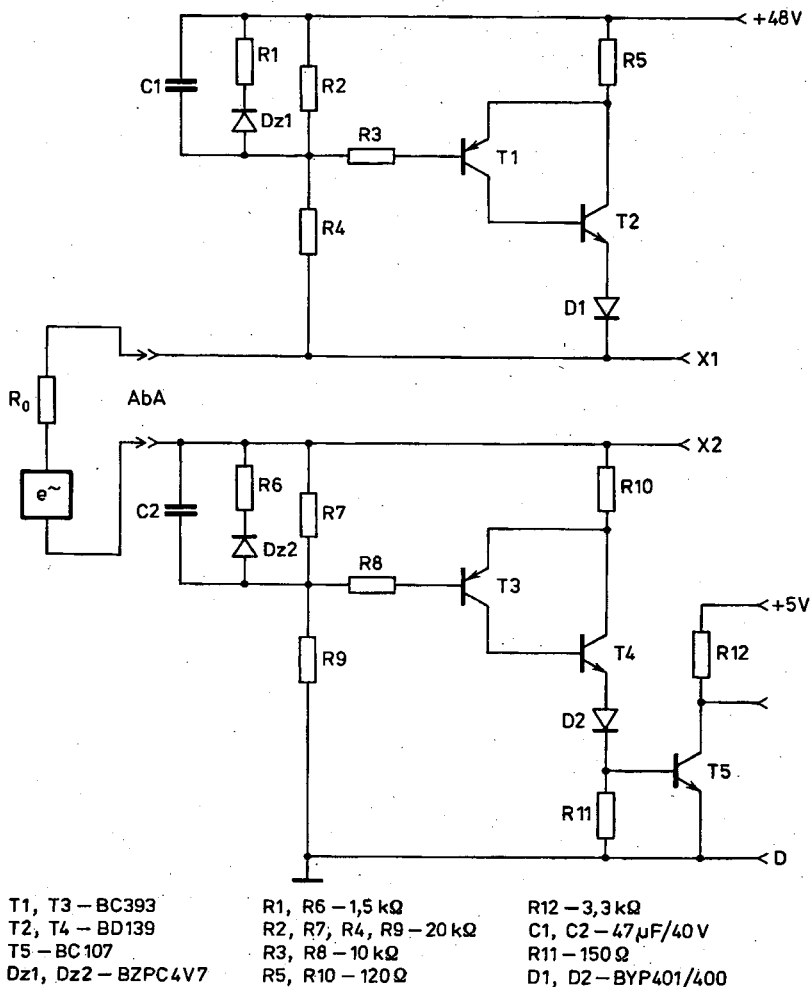


Rys. 2. Schemat blokowy drogi rozmównej zestawionej przy połączeniu wewnętrznym

Oznaczenia bloków funkcjonalnych:

- AZL – Abonencki Zespół Linii Wewnętrznej,
- ZP – Źródło Polaryzujące,
- PK – Punkt Komutacyjny,
- ZLW – Zespół Linii Wewnętrznej,
- AbA, AbB – Abonenci wewnętrzni centrali,
- Cs – Pojemność sprzęgająca AZL z polem komutacyjnym

Struktury poszczególnych bloków funkcjonalnych zostały opracowane dla realizacji sieci dróg rozmównych małonumerowej centrali abonenckiej ŁA20/4, produkowanej seryjnie. Schematy ideowe układów AZL, ZLW i PK są przedstawione odpowiednio na rys.3, rys. 4 i rys. 5.

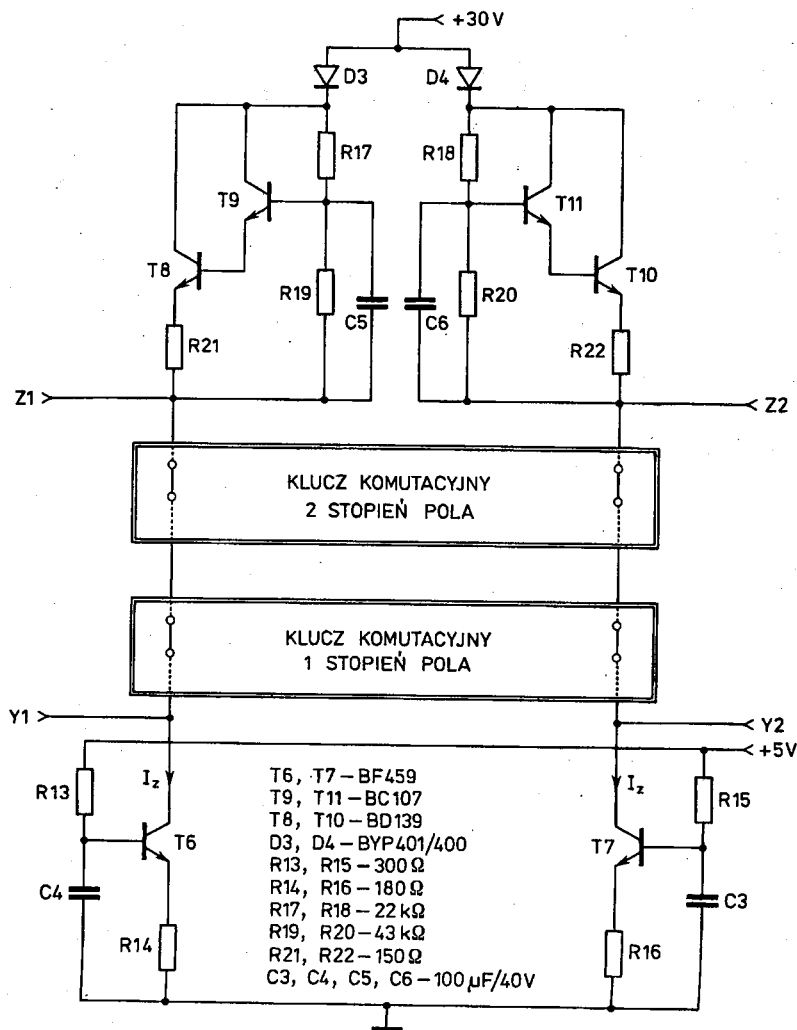


Rys. 3. Schemat ideowy układu AZL

Opis elementów schematów zastępczych

G_{A1}, G_{A2} — małosygnałowe konduktancje widziane między zaciskami X1 i X2 a masą układu AZL z rys. 3

Celem optymalizacji sieci dróg rozmównych jest uzyskanie zbioru wartości elementów składowych wszystkich bloków funkcjonalnych, dla których parametry teletransmisyjne sieci są najkorzystniejsze. Wartości elementów układów przedstawionych na rys. 3, rys. 4 i rys. 5 zapewniają działanie poszczególnych układów, ale nie są optymalne. Wartości te stanowią jedynie punkt wyjściowy w procesie optymalizacji przedstawioną metodą.



Rys. 4. Schemat ideowy układu ZLW

Opis elementów schematów zastępczych

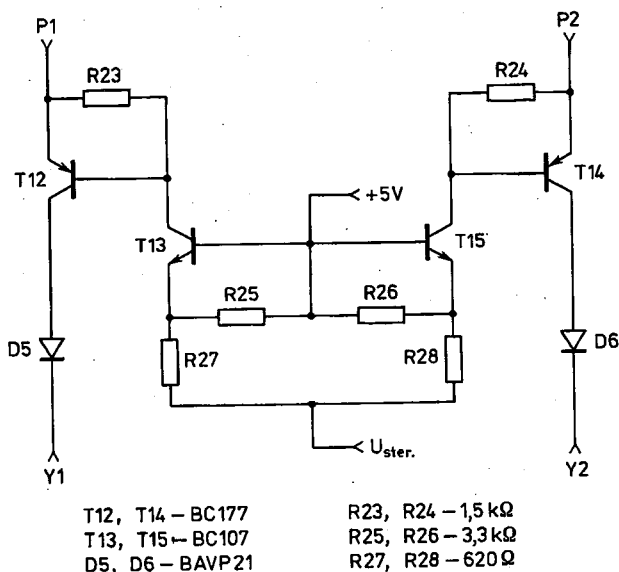
G_{s1}, G_{s2} – małosygnałowe konduktancje widziane między zaciskami Y1 i Y2 a masą źródeł polaryzujących z rys. 4

$G_{1...1}, G_{1...2}$ – małosygnałowe konduktancje widziane między zaciskami Z1 i Z2 układu ZLW z rys. 4

Założenia wstępne i kryterium optymalizacji

W procesie optymalizacji wartości elementów sieci dróg rozmównych centrali przyjęto następujące założenia wstępne:

- 1). Punktem wyjściowym procesu optymalizacji są wartości elementów przedstawione na rys. 3, rys. 4 i rys. 5.



Rys. 5. Schemat ideowy układu PK

Opis elementów zastępczych

$R_{k,i,j}$ – małosygnałowe rezystancje zamkniętych kluczy komutacyjnych, widziane między zaciskami P1 i Y1 oraz P2 i Y2 na rys. 5

$G_{k,i,j}$ – małosygnałowe konduktancje reprezentujące upływność zamkniętych kluczy komutacyjnych, widziane między zaciskami P1 i P2 a masą na rys. 5

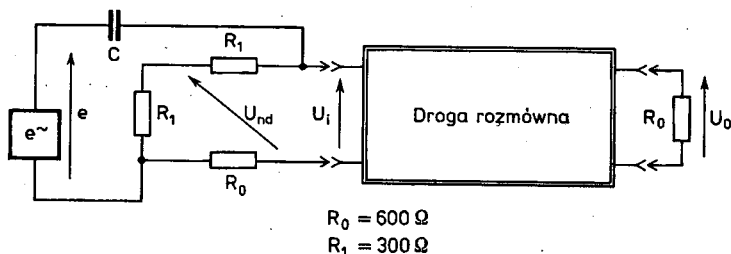
- 2). Przyjęto, że optymalizacji podlegają wartości rezystancji i pojemności wchodzących w skład sieci dróg rozmównych, z wyjątkiem pojemności sprzęgających AZL z polem komutacyjnym.
- 3). Z powodów przedstawionych poniżej, za kryterium optymalizacji przyjęto jak najkorzystniejsze wartości tłumienności przejścia A_w i tłumienności niedopasowania A_{nd} , przy spełnianiu przez poszczególne podukłady określonych warunków stałoprądowych.

Jednym z podstawowych problemów, które muszą być rozwiązane przy projektowaniu pełnoelektronicznych pól komutacyjnych z przestrzennym rozdziałem kanałów jest spełnienie wymagań dotyczących parametrów teletransmisyjnych sieci dróg rozmównych. Doświadczenia zdobyte przy projektowaniu, uruchamianiu i wdrażaniu do produkcji centrali abonenckiej ŁA20/4 wskazują, że największe trudności występują przy spełnianiu wymagań dotyczących tłumienności niedopasowania oraz tłumienności przejścia. Wymagania dotyczące tłumienności przejścia A_w oraz tłumienności niedopasowania A_{nd} można sformułować następująco:

Tłumienność przejścia przez centralę dla sygnału o częstotliwości 800 Hz i poziomie 0 dB nie może przekraczać 0.8 dB. Tłumienność przejścia w paśmie 300 Hz – 3400 Hz powinna być utrzymywana w przedziale – 0.5 dB, +1 dB, w odniesieniu do tłumienności dla sygnału o częstotliwości 800 Hz.

Tłumienność niedopasowania mierzona względem rezystancji $600\ \Omega$ przy dowolnej częstotliwości z zakresu $300\ \text{Hz} - 600\ \text{Hz}$ powinna być nie mniejsza niż $15\ \text{dB}$. Odpowiednia wartość dla częstotliwości z zakresu $600\ \text{Hz} - 3400\ \text{Hz}$ powinna być nie mniejsza niż $20\ \text{dB}$.

Pomiary wartości A_w i A_{nd} należy przeprowadzić w układzie przedstawionym na rys. 6, przy maksymalnym prądzie zasilania pętli abonenckiej.



Rys. 6. Układ pomiarowy do pomiaru tłumienności przejścia oraz tłumienności niedopasowania

Wartości A_w i A_{nd} można obliczyć na podstawie pomiarów, korzystając ze wzorów

$$A_{nd} = 20 \times \lg \left| \frac{e}{U_{nd}} \right| - 6 [\text{dB}], \quad (5)$$

$$A_w = 20 \times \lg \left| \frac{U_o}{U_i} \right|. \quad (6)$$

W procesie optymalizacji przyjęto ponadto zasadę, że wartości rezystancji zawierają się w zakresie $10\ \Omega - 100\ \text{k}\Omega$, zaś wartości pojemności w zakresie $1\ \text{nF} - 100\ \mu\text{F}$.

Optymalizacja wartości elementów składowych sieci dróg rozmównych centrali

Ilość elementów, niezbędna do zestawienia drogi rozmównej przy połączeniu wewnętrznym, obliczona na podstawie rys. 2, rys. 3, rys. 4 i rys. 5 wynosi 116. Układ o tym stopniu komplikacji może być uznany za „duży” w znaczeniu podanym na wstępie. Z tego powodu optymalizację wartości elementów wchodzących w skład drogi rozmównej przeprowadzono opisaną metodą.

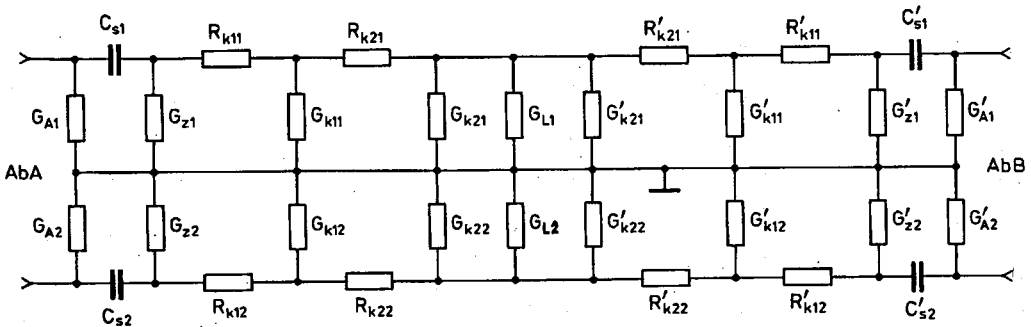
Zgodnie z nią, we wstępnej fazie optymalizacji należy dokonać podziału sieci dróg rozmównych na podukłady. W oparciu o zasadę izolacji stałoprądowej i jedności funkcjonalnej dokonano następującego podziału:

Podukład nr. 1 – AZL

Podukład nr. 2 – ZP + $2 \times \text{PK}$ + ZLW

Schemat zastępczy drogi rozmównej zestawionej przy połączeniu wewnętrznym jest przedstawiony na rys. 7.

Idealna droga rozmówna przedstawiona w postaci podobnej do rys. 7 charakteryzuje się zerowymi wartościami wszystkich rezystancji i konduktancji. Tak więc optymalizacja wstępna elementów schematów zastępczych dróg rozmównych ze względu na



Rys. 7. Schemat zastępczy drogi rozmównej zestawionej przy połączeniu wewnętrznym

uzyskanie jak najlepszych wartości A_w i A_{nd} , sprowadza się do stwierdzenia, że elementy te powinny mieć wartości minimalne.

Kryterium optymalizacji jest funkcjonalem składającym się z trzech wyrażań

$$J = J1 + J2 + J3. \quad (7)$$

$J1$ reprezentuje wymaganie zawierania się wartości elementów w narzuconych granicach, $J2$ jest uzależnione od wymagań stałoprądowych stawianych danemu podukładowi, zaś $J3$ zależy od wartości elementów schematu zastępczego danego podukładu. Poniżej przedstawione są wyniki optymalizacji wartości elementów poszczególnych podukładów, wraz z zastosowanymi kryteriami. W każdym przypadku $J1$ jest określone następująco:

$J1=0$ jeśli wszystkie $R \in \{10 \Omega, 100 \text{ k}\Omega\}$, oraz wszystkie $C \in \{1 \text{ nF}, 100 \mu\text{F}\}$;

$J1=10$ jeśli powyższy warunek nie jest spełniony.

Wyrażenia $J2$ i $J3$ przybierają postać charakterystyczną dla poszczególnych podukładów.

Podukład 1 – AZL

$J2=0$ dla $20 \text{ mA} \leq I_p \leq 56 \text{ mA}$, oraz $U_{det} \leq 0.25 \text{ V}$,

$J2=10^5$ przy niespełnieniu powyższego warunku,

I_p – prąd polaryzacji pętli abonenckiej,

U_{det} – napięcie wyjściowe z detektora przepływu prądu w pętli abonenckiej, (napięcie między punktami C i D na rys. 7),

$J3=(G_{A1})^2+(G_{A2})^2+(G_{A1}-G_{A2})^2$.

Wartości $J2$ i $J3$ są obliczane przy minimalnej rezystancji pętli abonenckiej, wynoszącej 75Ω . W podobny sposób, przy maksymalnej rezystancji pętli (1200Ω) są wyznaczane wartości $J2'$ i $J3'$. Tak więc, w przypadku układu AZL minimalizowany funkcjonal ma postać

$$J = J1 + J2 + J2' + J3 + J3' \quad (8)$$

W wyniku optymalizacji uzyskano wartości elementów układu AZL zebrane w tab. 1. Wartość rezystancji $R12$ nie miała wpływu na kryterium optymalizacji, dlatego jej wartość optymalna pozostała równa wartości początkowej. Przy optymalnych

Tabela 1

Wartości elementów układu AZL przed i po optymalizacji

Element	Wartość początkowa	Wartość optymalna
R1, R6	1.5 kΩ	446 Ω
R2, R7	20 kΩ	14.7 kΩ
R4, R9	20 kΩ	10.0 kΩ
R3, R8	10 kΩ	10.6 kΩ
R5, R10	120 Ω	75 Ω
R11	150 Ω	76 Ω
R12	3.3 kΩ	3.3 kΩ
C1, C2	47 μF	100 μF

wartościach elementów zawartych w tab. 1, prąd polaryzacji pętli abonenckiej zmienia się w granicach 22 mA – 38 mA, przy zmianach rezystancji pętli w narzuconym zakresie. Optymalne wartości elementów małosygnałowych schematu zastępczego AZL są równe

$$G_{A1}^0 = G_{A2}^0 = G_A^0 = 0.01 \text{ mS} \quad (9)$$

w całym paśmie telefonicznym (300 Hz – 3400 Hz).

W trakcie procesu optymalizacji wartość funkcjonału J uległa zmniejszeniu od $J' = 1.257$ do $J^0 = 0.051$.

Podukład 2 – ZP + 2 × PK + ZLW

Ze względu na symetrię układów ZP, PK i ZLW optymalizację podukładu nr 2 przeprowadzono dla połączenia jednego abonenta z linią wewnętrzną. Jest to równoznaczne z założeniem

$$\begin{aligned} G_{z1} &= G_{z2} = G_z \\ R_{k11} &= R_{k12} = R_{k1} \\ G_{k11} &= G_{k12} = G_{k1} \\ R_{k21} &= R_{k22} = R_{k2} \\ G_{k21} &= G_{k22} = G_{k2} \\ G_{L1} &= G_{L2} = G_L \end{aligned} \quad (10)$$

Ponadto założono, że punkty komutacyjne PK w obydwu stopniach pola komutacyjnego są identyczne. Rozróżnienie elementów ich schematów jest spowodowane tym, że punkt komutacyjny w pierwszym stopniu pola jest polaryzowany prądem o mniejszej wartości niż analogiczny element w stopniu drugim.

Składniki kryterium optymalizacji dla podukładu nr 2 mają postać:

$$J2 = 0, \text{ dla } 22.5 \text{ mA} \leq I_z \leq 27.5 \text{ mA}$$

$$J2 = 10^5, \text{ przy niespełnieniu tego warunku}$$

I_z – prąd źródła ZP (rys. 6)

$$J3 = G_z^2 + G_{k1}^2 + R_{k1}^2 + R_{k2}^2 + (G_{k2} + G_L)^2$$

W wyniku optymalizacji otrzymano wartości elementów układu ZLW PK i ZP zebrane w tabl. 2.

Tabela 2

Wartości elementów układów ZLW, PK i ZP przed i po optymalizacji

Układ	Element	Wartość początkowa	Wartość optymalna
ZLW	R17, R18	22 k Ω	53.2 k Ω
	R19, R20	43 k Ω	22.3 k Ω
	R21, R22	150 Ω	38 Ω
	C5, C6	100 μ F	100 μ F
PK	R23, R24	1.5 k Ω	1.5 k Ω
	R25, R26	3.3 k Ω	3.3 k Ω
	R27, R28	620 Ω	620 Ω
ZP	R13, R15	300 Ω	300 Ω
	R14, R16	180 Ω	169 Ω
	C3, C4	100 μ F	100 μ F

Wartości rezystancji R13, R15, oraz R23–R28 nie miały wpływu na kryterium optymalizacji. Przy optymalnych wartościach elementów zawartych w tab. 2 prąd źródła polaryzującego ZP $I_z = 24.6$ mA, zaś elementy schematu zastępczego mają wartości

$$G_z^0 = 0.4 \times 10^{-10} \text{ mS} - \text{przyjęto } G_z^0 = 0$$

$$G_{k_1}^0 = 0.12 \times 10^{-10} \text{ mS} - \text{przyjęto } G_{k_1}^0 = 0$$

$$G_{k_2}^0 + G_L^0 = \begin{cases} 0.0200 \text{ mS dla } f = 300 \text{ Hz} \\ 0.0190 \text{ mS dla } f = 600 \text{ Hz} \\ 0.0185 \text{ mS dla } f = 800 \text{ Hz} \\ 0.0180 \text{ mS dla } f = 3400 \text{ Hz} \end{cases} \quad (11)$$

przyjęto $G_{k_2}^0 + G_L^0$ traktować jako jeden element oznaczając go G_L^0

$$R_{k_1}^0 = 7.1 \Omega$$

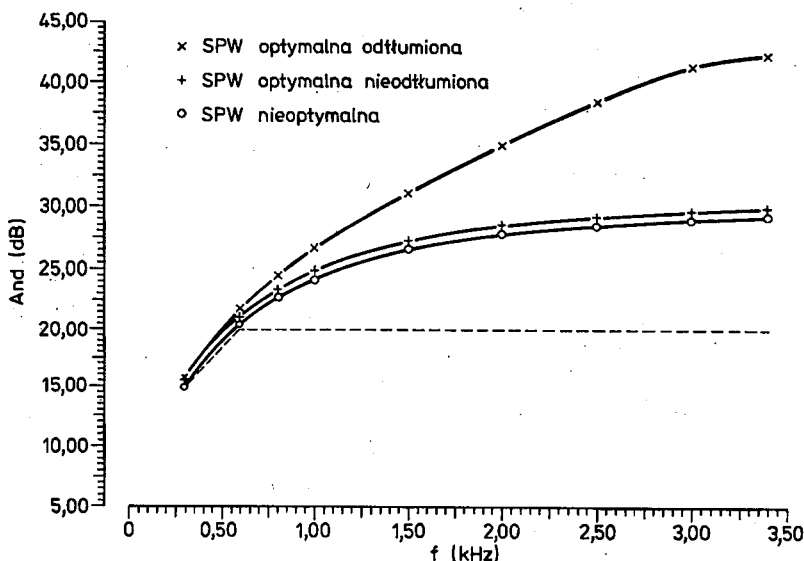
$$R_{k_2}^0 = 7.6 \Omega$$

W trakcie procesu optymalizacji wartość funkcjonau J uległa zmniejszeniu od $J^* = 0.112$ do $J^0 = 0.033$.

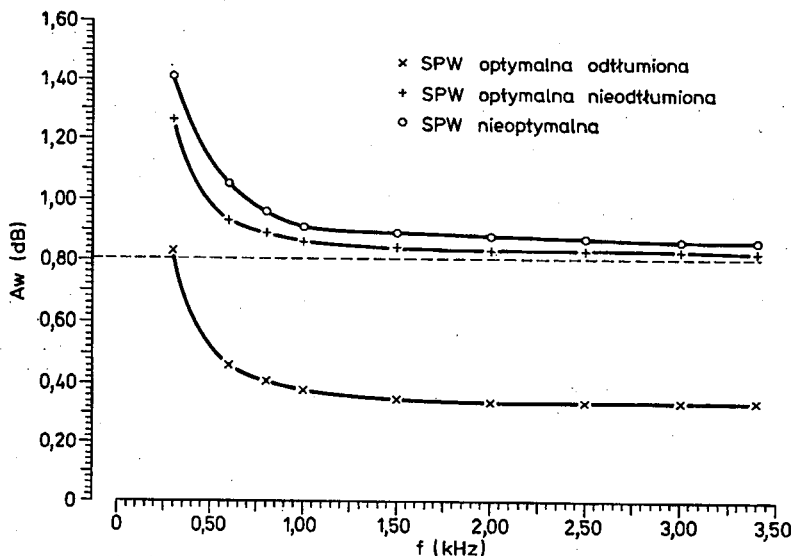
Wartości tłumienności przejścia A_w i tłumienności niedopasowania A_{nd} , obliczono zgodnie z rys. 6 i wzorami 5 i 6, analizując układ z rys. 7, przy przyjęciu wartości elementów zawartych w tab. 1 oraz tab. 2. Uzyskane wyniki pozwalają na stwierdzenie, że zarówno droga rozmówna nieoptymalizowania jak i optymalna nie spełniają wymagań teletransmisyjnych. W celu uzyskania zadawalających wartości A_w i A_{nd} zdecydowano się na od tłumienie drogi rozmównej poprzez zastosowanie dwójnikowej kompensacji rezystancji zamkniętych kluczy komutacyjnych ujemną

rezystancją, zrealizowaną przy pomocy układu INIC. Obszerne omówienie układu prądowo uzależnionego konwertera impedancji ujemnej (INIC), jak też i innej metody od tłumiania drogi rozmównej zawiera literatura [1], [2].

W celu wyznaczenia wartości ujemnej rezystancji kompensującej przeprowadzono optymalizację układu z rys. 7, uzupełnionego elementami – R_i , połączonymi szerego-



Rys. 8. Tłumienność niedopasowania przy połączeniu wewnętrznym



Rys. 9. Tłumienność przejścia przy połączeniu wewnętrznym

wo z elementami R_{klj} . Wartości elementów przyjęto z tab. 1 i tab. 2, a wartość początkową ujemnej rezystancji założono

$$-R_{l1}^0 = -\frac{R_{K1} + R_{K2}}{2} = -7.3 \Omega. \quad (12)$$

Przyjęto następujące kryterium optymalizacji

$$J = (A_{nd})_{300\text{Hz}}^2 + (A_{nd})_{600\text{Hz}}^2 + (A_{nd})_{3400\text{Hz}}^2 + (A_w)_{300\text{Hz}}^2 + (A_w)_{800\text{Hz}}^2 + (A_w)_{3400\text{Hz}}^2 \quad (13)$$

W wyniku optymalizacji otrzymano wartość $-R_{l1}^0 = -8.5 \Omega$.

Zależności A_{nd} i A_w w funkcji częstotliwości dla trzech układów: optymalnego od tłumionego, optymalnego nieod tłumionego i nieoptymalnego przedstawiono graficznie na rys. 8 i rys. 9.

BIBLIOGRAFIA

1. A. B o g u s z, St. K u t a: *Obwody od tłumiające w układach komutacji przestrzennej*. Materiały KST'88 ATR, Bydgoszcz wrzesień 1988
2. A. B o g u s z: *Optymalizacja struktury i sterowania wybranego elektronicznego układu komutacyjnego*. Rozprawa doktorska, AGH Kraków, 1990
3. L. O. C h u a, M. L. P e n: *Komputerowa analiza układów elektronicznych*. Algorytmy i metody obliczeniowe. Warszawa: WNT, 1981
4. S. W. D i r e c t o r, R. A. R o h r e r: *The generalized adjoint network and network sensitivities*. IEEE Trans. on Circ. Theory, 1969, vol. CT-16, No. 3, Aug.
5. M. D r y j a, J. M. J a n k o w s c y: *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*. Część 2. Warszawa: WNT, 1982
6. W. F i n d e i s e n, J. S z y m a n o w s k i, A. W i e r z b i c k i: *Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji*. Warszawa: PWN, 1977
7. T. G r y b a: *Calcul des circuits electroniques VLSI avec optimisation des tolerances*. L'Universite des Scines et Techniques de Lille, 1985
8. J. S e i d l e r, A. B a d a c h, W. M o l i s z: *Metody rozwiązywania zadań optymalizacji*. Warszawa: WNT, 1980
9. S. S i e n i u t y c z, Z. S z w a s t: *Praktyka obliczeń optymalizacyjnych*. Warszawa: WNT, 1982. 2

A. BOGUSZ, St. KUTA

THE COMPONENTS VALUES OPTIMIZATION METHOD IN A LARGE, ANALOG ELECTRONIC CIRCUIT

S u m m a r y

The paper presents worked out method, which can be used to optimization components values in a large electronic circuit. As a „large electronic circuit” there is understood a network, which can't be analysed as a union on a particular class of computers. The method is based on the main circuit division to subnetworks represented by adequate small signal or DC equivalent circuits. All these equivalent circuits connected together give a main circuit equivalent network. Optimization is done in two stages. At first, optimal values

of equivalent circuits components are obtained by using a DC or small signal quality criterion referred to main circuit. Next all subnetworks are subjected to serial optimizing to obtain such their components values, which lead to values of corresponding equivalent circuits components approach optimal values obtained previously. The paper also contains a optimization of components values in PABX switching network, as a practical example illustrating described method.

Niskoszumne odbiorniki z detektorami termicznymi zakresu fal prawie milimetrowych

MAREK TADEUSZ FABER

Instytut Podstaw Elektroniki, Politechnika Warszawska

Otrzymano 1991.09.20

Autoryzowano do druku 1991.12.18

Praca obejmuje całościowo zagadnienia związane z wykorzystaniem elementów termicznych do detekcji i mieszania sygnałów w niskoszumnych odbiornikach zakresu fal prawie milimetrowych (100 GHz do 1000 GHz). Przedstawione zostały w niej podstawy teoretyczne, opis zjawisk fizycznych i zasady praktycznego ich wykorzystania. Podane też zostały podstawy analizy pracy detektorów i mieszaczy termicznych oraz optymalizacji konstrukcji odbiorników. Szczególną uwagę zwrócono na odbiorniki z detektorami pyroelektrycznymi i elementami bolometrycznymi kładąc nacisk na osiągnięcia światowe i przewidywany rozwój tego rodzaju odbiorników.

1. WPROWADZENIE

Ostatnie dziesięciolecie cechowało się znacznym wzrostem zainteresowania niskoszumnym odbiorem sygnałów o częstotliwościach powyżej 100 GHz. Było ono stymulowane przede wszystkim rozwojem radioastronomii oraz zastosowaniami w fizyce plazmy, spektroskopii i radarach. W porównaniu z latami siedemdziesiątymi czułość odbiorników uległa poprawie o więcej niż o rząd wielkości [15], [25], [31]. Na przykład, zastępcza wejściowa jednowstęgowa temperatura szumów odbiornika na częstotliwości 100 GHz, która na początku lat siedemdziesiątych wynosiła około 2000 K, uległa obniżeniu do poniżej 200 K.

Zakres o długościach fal od 3 mm do 300 μm , zwany zakresem fal prawie milimetrowych (near millimeter waves), jest szczególnie eksponowany z uwagi na potencjalne zastosowania. Jest to jednocześnie zakres fal o szczególnych trudnościach technicznych, ponieważ w zakresie tym przenikają się wzajemnie techniki falowodowe dominujące przy niższych częstotliwościach z technikami stosowanymi przy odbiorze sygnałów z zakresu dalekiej podczerwieni.

Wymagania stawiane odbiornikom radioastronomicznym są szczególnie ostre, gdyż osiągalny stosunek sygnału do szumu S w czasie obserwacji Δt w pasmie Δf dany jest zależnością [25]:

$$S = \frac{T_A}{T_R} \sqrt{2\Delta f \Delta t}, \quad (1)$$

gdzie T_A jest równoważną temperaturą sygnału doprowadzonego z anteny, zaś T_R jest zastępczą wejściową temperaturą szumów odbiornika. T_R wymieniana jest więc z kwadratem czasu obserwacji (np. przy zadanym S zmniejszenie T_R dwukrotnie pozwala skrócić czas obserwacji czterokrotnie, np. z 8 do 2 godzin). Dążenie do uzyskania możliwie najniższych zastępczych wejściowych temperatur szumów ma więc bardzo istotne znaczenie. Istnieje jednakże naturalne praktyczne ograniczenie czułości systemu odbiorczego. Występuje ono wtedy, gdy szum termiczny spowodowany emisją atmosferyczną i stratami w wejściowych układach optycznych systemu odbiorczego jest porównywalny z zastępczą wejściową temperaturą szumów odbiornika. Na przykład, w radioastronomii naziemnej w zakresie fal milimetrowych wynosi ono około 50 K.

Straty w strukturach falowodowych wzrastają wraz ze wzrostem częstotliwości (np. na częstotliwości 220 GHz straty typowego falowodu osiągają wartość 0,3 dB/cm). Zmusza to z jednej strony do minimalizowania długości stosowanych odcinków falowodów, a z drugiej do poszukiwania środków umożliwiających realizację wymaganych funkcji układowych w strukturach o znacznie mniejszych stratach. Dobre rezultaty przyniosło wykorzystanie metod i technik stosowanych w układach optycznych i dalekiej podczerwieni. Zasadnicza różnica polega na tym, że wymiary poprzeczne struktur nie mogą być o wiele rzędów wielkości większe od długości fali. Prowadzi to do tzw. układów „quasi-optycznych” projektowanych w oparciu o zmodyfikowane metody stosowane w optyce i realizowanych przy użyciu innych materiałów. Na przykład, soczewki wykonywane są z teflonu lub reksolitu, lustra najczęściej z polerowanego aluminium, zaś polaryzatory z drutów berylowych. Dopasowanie soczewek do powietrza uzyskuje się nacinając ich powierzchnie rowkami o odpowiednio dobranym kształcie i głębokości.

W zakresie podczerwieni i fal submilimetrowych wygodne jest często przedstawienie strumienia energii (sygnału) docierającego do odbiornika w postaci strumienia fotonów. Zasada nieoznaczoności mechaniki kwantowej narzuca ograniczenia na jednoczesny pomiar ilości fotonów (natężenia) i fazy fotonów (tzn. fazy pola elektromagnetycznego). Detektor (odbiornik), który określa zarówno natężenie jak i fazę nazywany jest detektorem koherentnym. W detektorach koherentnych (z wyjątkiem tych z przemianą „w górę”) zawsze występuje spontaniczna emisja fotonów. Te dodatkowe fotony towarzyszą więc zawsze sygnałowi, który ma być mierzony. Są one źródłem szumu, który ogranicza właściwości detektora koherentnego w takim stopniu, że spełniona jest zasada nieoznaczoności. Szum powodowany tą spontaniczną emisją fotonów jest w przybliżeniu równy szumowi wytwarzanemu przez ciało czarne o temperaturze $T = hc/\lambda k$, gdzie λ jest średnią długością fali, h jest stałą Plancka, c jest prędkością światła a k jest stałą Boltzmanna [27]. Detektor ograniczony jedynie tą spontaniczną emisją fotonów (ograniczenie kwantowe) nazywany jest idealnym detektorem (odbiornikiem) koherentnym.

Detektory bezpośrednie, które wytwarzają wyjściowe napięcie lub prąd proporcjonalne do mocy sygnału, nie mierzą fazy pola elektromagnetycznego fotonów. Ponieważ w tych niekoherentnych pomiarach nie jest określana faza, to zasada nieoznaczoności nie narzuca ograniczeń na dokładność pomiaru ilości (liczby) fotonów. A więc niekoherentne (bezpośrednie) detektory mogą być w gruncie rzeczy bezszumne i mogą wykryć odbiór pojedynczego fotonu. Taki detektor bezpośredni (o sprawności kwantowej $= 1$) nazywany jest idealnym licznikiem fotonów. W praktyce, prawie idealne niekoherentne liczniki fotonów mogą być realizowane tylko w zakresie fal widzialnych. W zakresie podczerwieni czułości takich detektorów są o dwa, trzy rzędy wielkości gorsze, a w zakresie fal prawie milimetrycznych nie mogą być one w ogóle realizowane.

W praktycznie realizowanych odbiornikach (detektorach) występuje oczywiście wiele innych źródeł szumów, takich jak np. szumy oscylatora lokalnego, szumy tła, szum śrutowy, tunelowania, czy też szumy termiczne. Sprawia to, że odbiorniki zakresu fal prawie milimetrycznych (100 GHz do 1000 GHz) odbiegają swoją czułością (poza nielicznymi wyjątkami) o kilka rzędów wielkości od ograniczenia kwantowego.

Pojęcia detektor i odbiornik, które były dotychczas używane niemal zamiennie, muszą być uściślone. Przez detektor lub element detekcyjny będziemy rozumieli ten podstawowy element odbiornika, który reaguje na docierające do niego promieniowanie elektromagnetyczne. Odbiornik natomiast jest systemem pomiarowym, w którym detektor jest użyty i który wytwarza sygnał wyjściowy uzależniony od promieniowania docierającego do jego wejścia. Rozróżnienie to jest konieczne, ponieważ określony detektor może być użyty w różnych rodzajach odbiorników, np. w bezpośrednim (wideo) czy heterodynowym, prowadząc do różnych właściwości odbiornika.

Wiele różnych zjawisk fizycznych może być wykorzystanych w detektorach do wytworzenia sygnału elektrycznego uzależnionego od docierającego do detektora promieniowania elektromagnetycznego. Większość z nich można zaklasyfikować do jednej z trzech grup [6]:

1) Prostowniki: w elemencie indukowane są prądy o częstotliwościach doprowadzonych sygnałów i poprzez nieliniową charakterystykę prądowo-napięciową elementu wytwarzany jest sygnał (na częstotliwości pośredniej – odbiorniki heterodynowe, lub stałoprądowy – odbiorniki bezpośrednie) uzależniony od docierającego promieniowania.

2) Elementy termiczne: promieniowanie elektromagnetyczne absorbowane w elemencie grzeje go, a wynikający z tego wzrost temperatury mierzony jest termometrem wytwarzającym sygnał elektryczny.

3) Elementy kwantowe: pojedyncze kwanty energii wyzwalaają nośniki ładunku, zwykle jako przejście poprzez zabronione pasmo energetyczne pomiędzy pasmem podstawowym i pasmem przewodnictwa.

Detektory należące do trzeciej grupy wymagają do swego działania dostatecznej energii fotonów ($E = hf$), a więc dla określonego półprzewodnika istnieje częstotliwość poniżej której nie może on być stosowany (odcięcie „od dołu”). Detektory należące do tej grupy nie mogą być realizowane w zakresie fal prawie milimetrycznych i nie będą rozpatrywane w tym opracowaniu.

Detektory należące do pierwszej grupy, określone jako „prostowniki”, to detektory oparte o złącza p - n , złącza metal-półprzewodnik (np. diody Schottky'ego) i złącza nadprzewodnik-izolator-nadprzewodnik (SIS). Z uwagi na czułość, detektory te wykorzystywane są w chłodzonych odbiornikach heterodynowych. Odbiorniki te, zwłaszcza z diodami Schottky'ego, osiągnęły bardzo wysoki poziom rozwoju i technicznej doskonałości. W najlepszych rozwiązaniach ich czułości ograniczane są obecnie już tylko zjawiskiem fizycznym wykorzystywanym w procesie przemiany częstotliwości [9]. Obszerne zagadnienia związane z tymi odbiornikami są przedmiotem oddzielnego opracowania i nie będą one tu rozważane.

Opracowanie niniejsze koncentruje się na niskoszumnych odbiornikach zakresu fal prawie milimetrowych (100 GHz do 1000 GHz) wykorzystujących termiczne elementy detekcyjne. Elementy te stosowane są zarówno w odbiornikach bezpośrednich jak i w odbiornikach heterodynowych. Zagadnienia te omawiane są kolejno w dalszej części opracowania.

2. ODBIORNIKI BEZPOŚREDNIE

Proces detekcji termicznej polega na:

- 1) absorpcji promieniowania elektromagnetycznego;
- 2) wzroście temperatury wynikającym z zaabsorbowanej energii i wymiany ciepła z otoczeniem;
- 3) zmianie wartości jakiejś wielkości fizycznej zależnej od temperatury lub jej zmiany, np. ciśnienia gazu (komórki Golay'a), różnicy potencjałów elektrycznych (termopary), rezystancji elektrycznej (bolometry), itp.;
- 4) pomiarze tej zmiany, np. ugięcia wiązki światła (komórki Golay'a), zmiany napięcia (termopary, bolometry);

Graniczna czułość tego procesu jest determinowana szumem wynikającym ze statystycznych fluktuacji nie tylko natężenia detekowanego promieniowania (szum tła), ale także fluktuacji temperatury absorbera i parametru fizycznego, którego zmiany służą do wykrywania zmian temperatury. Ponieważ te dwa ostatnie procesy szumowe zależne są od temperatury w której zachodzą, to jedynym zasadniczym sposobem zwiększenia czułości jest chłodzenie detektora (o ile jest to możliwe). Obniżanie temperatury ma sens aż do poziomu przy którym szumy własne detektora stają się mniejsze od szumów tła. W zastosowaniach radioastronomicznych niska temperatura nieba (szum kosmiczny o temperaturze ≈ 3 K) i dobre anteny (mały wpływ powierzchni Ziemi) sprawiają, że często konieczne jest chłodzenie do temperatur poniżej 1 K.

Czułość odbiorników bezpośrednich jest zwykle określana mocą równoważną szumom — NEP [10], [27]. Moc równoważna szumom detektora jest definiowana jako taka moc padająca na detektor, która wytwarza na jego wyjściu sygnał równy wartości skutecznej szumów własnych detektora w pasmie 1 Hz. A więc im mniejsza wartość NEP tym bardziej czuły jest detektor, czy odbiornik w którym jest on wykorzysta-

tywany. NEP detektora jest bezpośrednio związana z minimalną liczbą fotonów o określonej długości fali jaka może być wykryta w ciągu 1 sekundy. Na przykład, wartość $NEP = 10^{-15} \text{ W/Hz}^{1/2}$ pozwala przy stosunku sygnału do szumu równym 1, wykryć $3,6 \cdot 10^6$ fotonów w ciągu 1 sekundy przy długości fali $1 \mu\text{m}$ lub $3,6 \cdot 10^6$ fotonów w 1 sekundę przy długości fali 1 mm.

Oprócz NEP także i inne właściwości odbiorników muszą być rozważane przy ocenie przydatności odbiornika do poszczególnych zastosowań. Właściwości te są zwykle ze sobą powiązane i na ogół zachodzi potrzeba skomplikowanego i trudnego optymalizowania parametrów odbiornika. Najważniejszymi, oprócz czułości, parametrami odbiornika są:

- 1) szybkość działania, która często może być wymieniana z czułością;
- 2) liniowość charakterystyk, a przynajmniej ich powtarzalność, niezbędna przy pomiarach ilościowych;
- 3) możliwość grupowania w większe zestawy — w wielu przypadkach czas potrzebny do obserwacji jest odwrotnie proporcjonalny do liczby użytych odbiorników (detektorów);
- 4) temperatura pracy, moc wydzielana w odbiorniku, odporność mechaniczna, niezawodność, itp.

Charakterystyki częstotliwościowe detektora określone są charakterystykami częstotliwościowymi absorbera. Odpowiedź czasowa (czas narastania i opadania mogą być różne) zależy od sposobu pochłaniania energii, przewodnictwa cieplnego, masy termicznej i efektywnej konduktancji termicznej do otoczenia. Szybkość działania ma często podstawowe znaczenie i niejednokrotnie uniemożliwia wykorzystanie określonego detektora termicznego w odbiornikach radioastronomicznych, radiometrycznych i radiokomunikacyjnych.

Termopary są detektorami, które w zakresie dalekiej podczerwieni mogą osiągać NEP rzędu $10^{-9} \text{ W/Hz}^{1/2}$ i czasy odpowiedzi 10^{-2} s . Odznaczają się dużą wytrzymałością mechaniczną i niezawodnością. Przy niższych częstotliwościach są elementami znacznie wolniejszymi i mniej czułymi i nie znajdują zastosowania w rozważanych tu odbiornikach zakresu fal prawie milimetrowych.

Detektory pneumatyczne opierają swe działanie na zmianach ciśnienia gazu w zamkniętych komorach na skutek grzania przez padające nań promieniowanie. Najbardziej rozpowszechnione są one w postaci tzw. komórek Golay'a. Elementem pochłaniającym promieniowanie jest tu folia metalowa umieszczona wewnątrz komory. Ciepło przekazywane jest wypełniającemu komorę gazowi drogą przewodnictwa. Zmiany ciśnienia gazu monitorowane są ugięciem wiązki światła padającego na komorę. Komórki Golay'a osiągają NEP rzędu $10^{-10} \text{ W/Hz}^{1/2}$ a ich czas odpowiedzi jest rzędu 10^{-2} s . Ich dużą wadą jest silne mikrofonowanie (wrażliwość na wstrząsy). Wyklucza to ich zastosowanie w odbiornikach radioastronomicznych i radiokomunikacyjnych. Znajdują one natomiast zastosowanie w laboratoryjnych systemach pomiarowych w zakresie dalekiej podczerwieni.

Detektory wykorzystujące zjawisko pyroelektryczne, a więc temperaturową zależność spontanicznej polaryzacji elektrycznej w niektórych kryształach, są elementami znacznie szybszymi od omawianych poprzednio. Ich czas odpowiedzi może sięgać

10^{-9} s zaś NEP rzędu 10^{-10} W/Hz^{1/2} [11], [12]. Z uwagi na swe właściwości i potencjalne zastosowania zostaną one szerzej omówione w dalszej części opracowania.

Szerokie zastosowanie w wysokoczułych odbiornikach zakresu fal prawie milimetrycznych znalazły detektory bolometryczne wykorzystujące zależność rezystancji materiału od temperatury. Odbiorniki z tymi detektorami chłodzone są do temperatur ciekłego helu i osiągają ekstremalne czułości. Na przykład, w temperaturze 1,2 K (ciekły hel ⁴He) NEP najlepszego odbiornika [6] jest rzędu 10^{-15} W/Hz^{1/2}, zaś w temperaturze 0,3 K (ciekły hel ³He) aż $6 \cdot 10^{-16}$ W/Hz^{1/2} [7]. Czas odpowiedzi tych detektorów jest rzędu 10^{-2} s. Podobne czasy odpowiedzi i czułości osiągają detektory wykorzystujące gwałtowną zmianę rezystancji przy przejściu materiału ze stanu normalnego do nadprzewodnictwa. Odbiorniki i detektory bolometryczne zostaną szerzej omówione w dalszej części opracowania.

Na szczególną uwagę i oddzielne omówienie zasługują detektory wykorzystujące gorące elektrony w chłodzonym do 4 K antymonku indu typu *n* [13]. Pomimo, że zmiana konduktancji w tych elementach następuje wskutek innych przyczyn niż objętościowe grzanie materiału, to znane są one pod nazwą „bolometrów” z gorącymi elektronami. Czas odpowiedzi odbiorników z tymi detektorami osiąga 10^{-5} s, a NEP jest rzędu 10^{-13} W/Hz^{1/2}.

2.1. DETEKTORY PYROELEKTRYCZNE

Effekt pyroelektryczny odkryty został przez Piotra i Marię Curie, jednak wykorzystanie go do detekcji promieniowania elektromagnetycznego przyniosły dopiero lata sześćdziesiąte. Ponad dwudziestoletni okres rozwoju doprowadził detektory pyroelektryczne do stanu technicznej dojrzałości [12], zwłaszcza w zastosowaniach do wykrywania i obserwacji obiektów w zakresie podczerwieni. Detektory pyroelektryczne pracują zwykle w temperaturach pokojowych, ale możliwe jest także występowanie efektu pyroelektrycznego w niskich temperaturach. Teoria opisująca ten efekt i charakterystyki wykorzystywanych materiałów omówione są szeroko w opracowaniach [11], [12]. Zawarte są tam też szczegółowe rozważania dotyczące optymalizacji właściwości detektorów. Dla rozważań jakościowych możliwe jest przytoczone tu podejście uproszczone [16] podkreślające opis fizyczny zjawiska.

Effekt pyroelektryczny może powstawać w materiałach wykazujących polaryzację spontaniczną. Występuje on w 10 spośród 32 klas krystalograficznych. Kryształy należące do tych klas nie posiadają środka symetrii, posiadają natomiast oś biegunową, na kierunku której występują pewne charakterystyczne cechy materiału. W kryształach pyroelektrycznych poddanych niewielkim, jednolitym zmianom temperatury następuje zmiana wartości ich polaryzacji spontanicznej. Effekt pyroelektryczny obserwowany jest jedynie poniżej charakterystycznej dla danego materiału temperatury Curie. Powyżej tej temperatury bezwładny ruch cieplny cząstek przeważa nad siłami porządkującymi dipole elektryczne; materiał traci więc uporządkowanie i nie wykazuje już wypadkowej polaryzacji spontanicznej. Dla wszystkich kryształów

pyroelektrycznych istnieje więc pewien zakres temperatur bliskich ich temperaturze Curie, w który polaryzacja spontaniczna jest silnie zależna od zmian temperatury. Ta zależność wykorzystywana jest do detekcji promieniowania elektromagnetycznego.

Większość materiałów pyroelektrycznych krystalizuje w ten sposób, że powstają kryształy wielodomenowe, w których wektory polaryzacji poszczególnych domen skierowane są w różnych przypadkowych kierunkach. Efekt pyroelektryczny w kryształach wielodomenowych jest więc słaby. Dlatego też stosuje się procesy powodujące uporządkowanie domen. Jednym z nich jest stosowanie tzw. polaryzacji wstępnej przy podgrzaniu kryształu powyżej temperatury Curie (T_C), a następnie ochłodzenie go w polu elektrycznym rzędu 10 kV/cm do temperatury niższej od T_C . Innym sposobem gwarantującym trwałe uporządkowanie domen jest stosowanie odpowiedniego domieszkania w czasie procesu krystalizacji.

Promieniowanie elektromagnetyczne zaabsorbowane przez kryształ pyroelektryczny powoduje zmianę widma fononowego sieci krystalicznej, a tym samym, pewne średnie przesunięcie ładunku w kryształach. W wyniku tego procesu następuje zmiana momentu dipolowego na jednostkę objętości, czyli zmiana wektora polaryzacji. Zmiana polaryzacji wywołuje z kolei prąd o gęstości w przybliżeniu równej [16]:

$$\vec{J} = \frac{d\vec{Ps}}{dt} = \vec{p} \cdot \frac{dT}{dt} \quad (2)$$

gdzie $\vec{Ps}$ jest polaryzacją spontaniczną, T — temperaturą, zaś p nazywane jest współczynnikiem pyroelektrycznym, który jest stałą charakteryzującą dany materiał. Określenie wielkości dT/dt wymaga rozpatrzenia procesów termodynamicznych w modelu, który uwzględnia nie tylko parametry materiałowe, ale również konfigurację geometryczną określonego elementu pyroelektrycznego.

Jak we wszystkich detektorach termicznych tak i tu detekcja promieniowania elektromagnetycznego przebiega etapami. Najpierw promieniowanie jest absorbowane i wywołuje zmiany temperatury elementu pyroelektrycznego, a następnie w wyniku tych zmian powstaje zmiana polaryzacji spontanicznej, która z kolei wywołuje napięcie na elektrodach naniesionych na przeciwległe płaszczyzny kryształu detektora.

Założmy najprostszy przypadek, tzn. cienką płytkę materiału pyroelektrycznego podtrzymywaną przez uchwyt o małej przewodności cieplnej do otoczenia, znajdującą się w stałej temperaturze T . Jeżeli do płytki dostarczona będzie energia $W(t)$, nastąpi podgrzanie materiału do temperatury $T + \Delta T$ oraz równoczesny odpływ części energii do otoczenia. Dla najbardziej ogólnego przypadku impulsu schodkowego, gdy $W(t)$ w czasie $t=0$ narasta od 0 do I_0 , przyrost temperatury będzie równy [16]:

$$\Delta T = \frac{I_0}{G_T} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_T}\right) \right] \quad (3)$$

zaś dla przypadku sinusoidalnego $W(t) = I_0 + I_\omega \exp j\omega t$:

$$\Delta T = \frac{I_\omega}{G_T} (1 + \omega^2 \tau_T^2)^{-1/2} \quad (4)$$

i przesunięcie fazy $\varphi = \arctg \omega \tau_T$, gdzie C_T jest pojemnością cieplną płytki, G_T jest jej przewodnością cieplną zaś $\tau_T = C_T/G_T$ jest termiczną stałą czasu układu.

Powyższe zależności są słuszne tylko w przypadku równomiernego grzania objętości płytki. W przypadku występowania dużych współczynników absorpcji albo w przypadku pokrycia powierzchni detektora materiałem absorbującym, straty energii występują jedynie w warstwie powierzchniowej pyroelektryka. Analiza takiego układu, zwłaszcza przy złożonych konfiguracjach obecnych detektorów, jest bardzo skomplikowana [11], [12].

Materiał pyroelektryczny wraz z naniesionymi elektrodami tworzy układ elektryczny detektora. Układ ten przedstawić można w postaci pojemności C połączonej równolegle z rezystancją R . Napięcie pyroelektryczne $u(t)$ powstałe w wyniku zmiany temperatury o ΔT zapisać można równaniem:

$$C \cdot \frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{R} = A \cdot p \cdot \frac{d\Delta T}{dt} \quad (5)$$

gdzie A jest powierzchnią czołową płytki.

Dla promieniowania pobudzającego w postaci impulsu schodkowego, rozwiązaniem równania jest:

$$u(t) = \frac{ApI_0}{C_T C} \left[\frac{1}{\tau_e} - \frac{1}{\tau_T} \right]^{-1} \cdot [\exp(-t/\tau_T) - \exp(-t/\tau_e)] \quad (6)$$

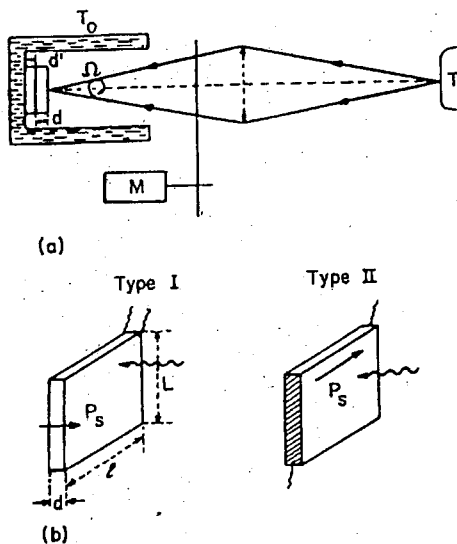
gdzie $\tau_e = RC$ jest elektryczną stałą czasu układu. Dla promieniowania o sinusoidalnie modulowanej amplitudzie z pulsacją ω , rozwiązanie równania ma postać:

$$u(t) = \omega p A \eta G_T^{-1} I_\omega e^{j(\omega t + \varphi)} (1 + \omega^2 \tau_e^2)^{-1/2} (1 + \omega^2 \tau_T^2)^{-1/2} \quad (7)$$

gdzie η jest emisyjnością powierzchni płytki.

Z zależności powyższych wynika, że detektor pyroelektryczny nie reaguje na składową stałą promieniowania ($\omega = 0$). Odpowiedź detektora jest liniowa w funkcji energii pobudzającej pyroelektryk. Ograniczenie od strony górnych częstotliwości wynika tylko z τ_e i τ_T . O ile termiczna stała czasu jest parametrem materiałowo-konstrukcyjnym, na który nie można mieć wpływu po wykonaniu detektora, to stałą czasu τ_e można regulować przez dołączenie na wejście detektora odpowiedniej rezystancji R . Idealny detektor pyroelektryczny jest bezstratnym kondensatorem, a więc teoretycznie elementem bezszumnym. W rzeczywistym detektorze występują szумы typowe dla detektorów termicznych, a więc związane z rezystancjami istniejącymi w układzie, fluktuacjami termicznymi materiału i szумы tła. Istotną rolę odgrywają też szумы dołączonego do detektora wzmacniacza, który nie tylko wzmacnia powstające napięcie pyroelektryczne, ale również dokonuje transformacji bardzo wysokiej impedancji detektora do wartości niższej odpowiadającej potrzebom dalszej obróbki sygnału. Szумы związane z rezystancjami to szумы Johnsonowskie o $\bar{e}_n^2 = 4kTR\Delta f$, wynikające z istnienia strat w materiale pyroelektrycznym i rezystancji obciążenia detektora. Ponieważ element detekcyjny posiada znaczną pojemność, szумы te nie są już szumami białymi, lecz szumami filtrowanymi przez stałą czasu τ_e .

Zawężając pasmo wzmacniacza współpracującego z detektorem zmniejszamy moc szumów zwiększając tym samym czułość odbiornika, ale jednocześnie ograniczamy częstotliwość z jaką modulowane może być detekowane promieniowanie. Jeżeli uwzględnimy przy tym niereagowanie detektora na składową stałą, to okaże się że dla każdego detektora pyroelektrycznego istnieje optymalna częstotliwość modulacji sygnału f_m , przy której ma on największą czułość [12]. Ta optymalna częstotliwość jest



Rys. 1. Detektor pyroelektryczny [11]: a) schemat, b) dwa podstawowe rodzaje cięcia materiału

zwykle bardzo mała, ale może być ona zwiększona do wartości praktycznych poprzez stosowanie bardzo cienkich płytek pyroelektrycznych; zapewnia to równomierne grzanie całej objętości materiału (przy grubości rzędu $1 \mu\text{m}$ f_{opt} jest rzędu 1 Hz). Powyżej f_{opt} czułość detektora zmniejsza się ze wzrostem f_m , ale nie tak szybko jak w innych detektorach termicznych – w praktyce odwrotnie proporcjonalnie do pierwiastka z częstotliwości powyżej 10–100 Hz w zależności od detektora. Zwiększenie pasma detektora pociąga za sobą nieuchronny spadek czułości, ale nawet przy $f_m = 100 \text{ MHz}$ jest ona wystarczająca do wielu zastosowań.

Spośród wielu zastosowań materiałów pyroelektrycznych materiałem pozwalającym uzyskać największe czułości jest siarczan trójglicyny TGS i jego pochodne. Domieszkowanie α – alaniną pozwala uzyskać monokrystały jednodomenowe umożliwiające osiągnięcie NEP rzędu $10^{-10} \text{ W/Hz}^{1/2}$ przy częstotliwości modulującej $\approx 10 \text{ Hz}$, grubości płytki rzędu μm i powierzchni kilku mm^2 . Przy wyższych częstotliwościach modulujących NEP zwiększa się co najmniej jak $f^{1/2}$ pomiędzy 10^2 i 10^5 Hz . Na rysunku 1 przedstawiono schematycznie detektor pyroelektryczny i dwa stosowane rodzaje cięcia kryształu.

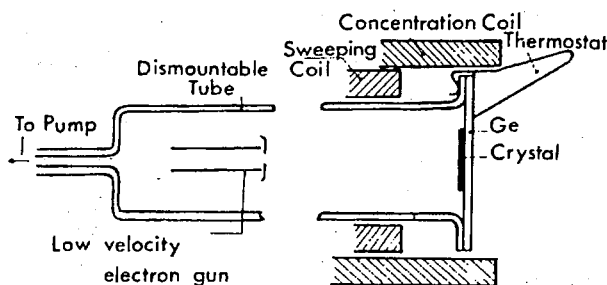
Kryształy pyroelektryczne są zawsze piezoelektrykami (stwierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe). Powoduje to, że każda vibracja mechaniczna jest źródłem

niepożądanego zakłócającego sygnału elektrycznego. Zjawisku temu przeciwdziała się stosując cienkie płytki pyroelektryka i umieszczając je w komorach próżniowych. Starannie też wytłumia się rezonanse mechaniczne konstrukcji zarówno na drodze mechanicznej jak też stosując odpowiednie filtry elektryczne [11].

Detektory pyroelektryczne są obecnie szeroko stosowane do detekcji promieniowania w zakresach częstotliwości aż do podczerwieni włącznie. Preferowane one są wszędzie tam gdzie wysoka czułość, niski koszt, niezawodność i odporność mechaniczna mają podstawowe znaczenie. Pracują one przy temperaturach bliskich ich temperaturze Curie, np. 299 K dla TGS. W takiej temperaturze idealny detektor pyroelektryczny osiągałby NEP rzędu 10^{-10} W/Hz^{1/2} – najlepsze detektory rzeczywiste osiągają porównywalne czułości.

W temperaturze 0,3 K idealny detektor osiągałby NEP rzędu 10^{-17} W/Hz^{1/2}, a więc znacznie mniej od najlepszych bolometrów germanowych chłodzonych do tej temperatury. Prowadzone są więc liczne prace nad zjawiskiem pyroelektrycznym występującym przy niskich temperaturach [11], [12]. Kilka kryształów ferroelektrycznych wykazuje efekt pyroelektryczny charakteryzujący się temperaturą Curie bliską 80 K. Odbiorniki z takimi detektorami miałyby duże znaczenie w zastosowaniach do obserwacji Ziemi z satelitów. W warunkach kosmicznych chłodzenie do tej temperatury jest proste i nie wymaga dostarczania mocy z urządzeń zasilających satelity (chłodzenie bierne). Wiele współczesnych satelitów radiometrycznych wykorzystuje odbiorniki z detektorami pyroelektrycznymi TGS podgrzewanymi w termostatach do temperatury około 300 K. Zastosowanie detektorów pracujących w temperaturze 80 K pozwoliłoby nie tylko zmniejszyć pobór mocy, ale także uzyskać znacznie większe czułości, gdyż szum Johnsonowski byłby znacznie mniejszy. W konsekwencji detektor pyroelektryczny obserwujący Ziemię w zakresie podczerwieni mógłby stać się elementem o czułości ograniczanej tylko szumem fotonowym.

Jednym z ważnych zastosowań detektorów pyroelektrycznych jest wykrywanie, identyfikacja i obserwacja obiektów w zakresie podczerwieni w warunkach złej widoczności (noc, zachmurzenie, zapylenie, itp.). Najlepszym przykładem jest tu vidikon pyroelektryczny zwany też pyrikonem, przedstawiony schematycznie na rysunku 2. W pyrikonie obraz podczerwony jest absorbowany przez pyroelektryczną „siatkówkę”, wytwarzając temperaturową płaskorzeźbę, która jest zamieniana w roz-



Rys. 2. Schemat vidikonu pyroelektrycznego [12]

kład ładunku elektrycznego. Rozkład ten odczytywany jest przez wiązkę wolnych elektronów i następnie przetwarzany w układach elektronicznych urządzenia. Obrazy otrzymywane tą drogą mogą dostarczyć więcej informacji niż obrazy widzialne (np. emisyjność, rozkład temperatur, itp.), a jakość uzyskiwana we współczesnych pyrikonach porównywalna jest z jakością obrazu telewizyjnego, tzn. rozdzielczość temperaturowa sięga 0,2 K przy 16 półobrazach na sekundę i rozdzielczości przestrzennej odpowiadającej pięciu parom linii na milimetr. [12].

Detektory pyroelektryczne podlegają wciąż intensywnemu rozwojowi osiągając coraz to lepsze parametry i techniczną dojrzałość. Wydaje się jednak, że potencjalne możliwości wykorzystania efektu pyroelektrycznego nie zostały jeszcze wyczerpane.

2.2. DETEKTORY I ODBIORNIKI BOLOMETRYCZNE

Tradycyjnie bolometrem nazywany jest element, którego rezystancja zmienia się wraz ze zmianą temperatury. Od kilkudziesięciu lat elementy te były wykorzystywane do pomiarów mocy mikrofalowej, głównie w laboratoryjnych zestawach pomiarowych, i w zależności od tego jaki materiał użyty był w konstrukcji bolometru, dzielone były na baretery i termistory [10], [20], [28].

Typowy bareter wykonany jest z drutu Wollastona, będącego pewnym stopem platyny. Stosowane druty mają średnicę rzędu $1\ \mu\text{m}$ i długości od ułamka do kilku milimetrów. Grubość drutu narzucona jest głębokością wnikania, zaś jego długość powinna być kilkakrotnie mniejsza od długości fali. Rozwój technologii cienkich warstw umożliwił zastąpienie drutu Wollastona warstwą rezystywną o grubości znacznie mniejszej od głębokości wnikania. Pojemność cieplna baretera jest niewielka, i jego stała czasowa może być rzędu 10^{-5} s — możliwy jest więc pomiar mocy chwilowej sygnałów mikrofalowych modulowanych z częstotliwością sięgającą kilkudziesięciu kHz [28]. Dopasowanie baretera do głowicy pomiarowej (współosiowej czy falowodowej) uzyskiwane jest poprzez wstępne podgrzanie (prąd polaryzujący) baretera do temperatury $100\text{--}200^\circ\text{ C}$.

Typowy termistor wykorzystuje w swej konstrukcji materiały półprzewodnikowe, których temperaturowy współczynnik zmian rezystancji osiąga duże, ujemne wartości. Materiał półprzewodnikowy formowany jest w kulkę o średnicy od kilkudziesięciu do kilkuset μm , pokrytą cienką warstwą szkła, w której zatopione są dwa platynowe przepusty. Termistory mają kilkakrotnie większą czułość niż baretery, ale za to przy tej konstrukcji są elementami o dużej bezwładność — stała czasu rzędu 1 s. Nadają się więc do pomiaru wartości średniej promieniowania mikrofalowego. Ponieważ rezystancja termistora maleje ze wzrostem wydzielanej w nim mocy, odporność termistora na przesterowania (mechanizm samozabezpieczenia) jest znacznie większa niż baretera [28]. Tak jak baretery, tak i termistory wymagają do poprawnej pracy wstępnego podgrzania do temperatury około 100° C .

Baretery i termistory montowane są do głowic pomiarowych; w zakresie fal milimetrowych są to wyłącznie głowice falowodowe. Zasadniczą trudnością jest dobre

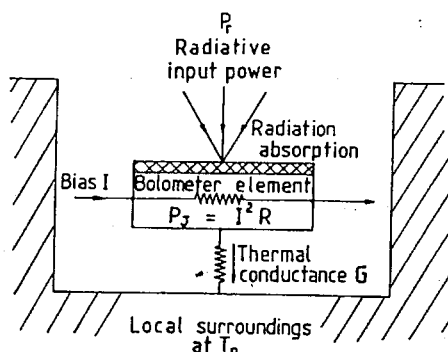
dopasowanie głowicy w całym zakresie pracy falowodu oraz uniezależnienie pomiaru mocy od temperatury otoczenia (układy mostkowe). Głowice pomiarowe kalibrowane są przez producenta. Ze względu na trudności wykonawcze ich cena rośnie szybko ze wzrostem zakresu częstotliwości pracy, a ponadto maleje dokładność pomiaru (np. ± 1 dB przy 200 GHz).

Przedstawione powyżej tytułem wprowadzenia baretery i termistory stosowane w systemach laboratoryjnych do pomiaru mocy aż do częstotliwości 300 GHz, nie mogą być stosowane do detekcji promieniowania elektromagnetycznego o małym natężeniu i częstotliwościach pasma fal prawie milimetrowych. Zwiększenie czułości oraz częstotliwości i pasma pracy detektorów bolometrycznych wymaga bardzo starannej ich optymalizacji i zwykle pracy w niskich temperaturach sięgających nawet 0,3 K. Niezbędna staje się więc bardziej wnikliwa analiza pracy detektorów bolometrycznych.

2.2.1. Analiza i optymalizacja detektorów bolometrycznych

Szczegółowa analiza detektorów bolometrycznych jest bardzo skomplikowana [7]; dlatego też w niniejszym opracowaniu przytoczymy jedynie jej wyniki i wnioski wystarczające do opisu występujących w nich zjawisk i wyjaśnienia zasad konstruowania odbiorników bolometrycznych o ekstremalnych czułościach.

Właściwości „idealnego” detektora bolometrycznego wynikają nie tylko z właściwości elektrycznych i termicznych samego elementu bolometrycznego, ale także z termicznego sprzężenia go z detekowanym promieniowaniem i najbliższym otoczeniem. Idealny bolometr (rysunek 3) składa się z absorbera promieniowania elektromagnetycznego silnie sprzężonego termicznie z termometrem, jakim zwykle jest zależny od temperatury rezystor polaryzowany prądem stałym I . Ciepło powstające w wyniku zaabsorbowanej energii powoduje wzrost temperatury rezystora, zmianę jego wartości, a więc i zmianę występującego na nim spadku napięcia. Sprzężenie cieplne do otoczenia znajdującego się w temperaturze T_0 opisywane jest statyczną konduktancją cieplną G



Rys. 3. Model „idealnego” detektora bolometrycznego [7]

Promieniowanie docierające do detektora składa się z dwóch części: promieniowania tła o mocy P_r pochodzącego z emisji termicznej elementów sprzęgających i filtrujących umieszczonych przed detektorem i z szumów docierających z wolnej przestrzeni (np. szum kosmiczny); oraz z promieniowania docierającego z detekowanego źródła $q(t)$ — zwykle modulowanego. W stanie ustalonym temperatura bolometru będzie zależała od temperatury otoczenia T_0 i od szybkości z jaką energia jest w bolometrze rozpraszana. Przy zerowej mocy wydzielanej byłaby ona równa T_0 . Przepływ prądu polaryzującego powoduje wzrost temperatury o $\Delta T = I^2 R/G$. Zaabsorbowanie promieniowania tła o mocy P_r powoduje dalszy wzrost temperatury o $\Delta T = P_r/G$. Temperatura stanu ustalonego T może być wyznaczona z równania:

$$P_T = I^2 R + P_r = G(T - T_0). \quad (8)$$

Aby uniknąć nadmiernego wzrostu temperatury bolometru (samopodgrzewanie uniemożliwiałoby pracę w niskiej temperaturze, np. 0,3 K), niezbędne jest aby konduktancja termiczna G była dostatecznie duża:

$$G \gg P_r / T_0. \quad (9)$$

Absorpcja modulowanej energii $q(t)$ docierającej z detekowanego źródła (sygnał odbierany) spowoduje dalszą niewielką zmianę temperatury $\delta(t)$ ponad temperaturę stanu ustalonego T . To właśnie ta zmiana, poprzez jej wpływ na rezystancję bolometru, wytworzy zmianę spadku napięcia na bolometrze proporcjonalną do mocy odbieranego sygnału.

Odpowiedź bolometru na docierające doń promieniowanie zależy od obwodów polaryzacji bolometru. Ponieważ maksimum czułości i minimum czasu odpowiedzi uzyskiwane są w warunkach stałego prądu polaryzującego, to stosuje się rezystory polaryzujące o rezystancji znacznie większej od rezystancji bolometru. Wartość prądu polaryzującego dobiera się tak, aby uzyskać maksimum czułości przetwarzania

$$S(0) \equiv dV/dP_r = \alpha IR/G_e \quad (10)$$

gdzie α jest współczynnikiem temperaturowym zmian rezystancji bolometru, zaś $G_e \equiv dP_r/dT$ jest „efektywną” konduktancją termiczną. Przy tak dobranym prądzie polaryzacji zmiana temperatury ΔT jest $\leq 0,1 T_0$ [7], zaś efektywna konduktancja termiczna jest $G_e \approx 1,4 G_d$, gdzie $G_d \equiv dP_T/dT \approx 1,4 G$ jest „dynamiczną konduktancją termiczną.

Jeżeli założymy, że detekowane promieniowanie modulowane z pulsacją ω ma postać:

$$q(t) = q_0(1 - e^{j\omega t}) \quad (11)$$

to zmiany temperatury bolometru będą, z dokładnością do opóźnienia fazy, równe:

$$\delta(t) = \delta_0(\omega)(1 - e^{j\omega t}). \quad (12)$$

Spowodują one zmiany rezystancji bolometru:

$$R(t) = R[1 + \alpha\delta(t)]. \quad (13)$$

Wielkości te muszą spełniać równanie:

$$I^2 R(t) + P_r + q(t) - G(T - T_0) - G_e \delta(t) = C_p (d/dt) \delta(t) \quad (14)$$

gdzie C_p jest pojemnością cieplną bolometru przy stałym ciśnieniu.

Odejmując wartość stanu ustalonego otrzymamy:

$$C_p (d/dt) \delta(t) + G_e \delta(t) = q(t). \quad (15)$$

Rozwiązaniem tego równania, z dokładnością do opóźnienia fazy, jest:

$$\delta_0(\omega) = q_0 / G_e (1 + \omega^2 \tau_e^2)^{1/2} \quad (16)$$

gdzie $\tau_e \equiv C_p / G_e$ jest efektywną stałą czasu odpowiedzi.

Dla ujemnych współczynników termicznych rezystancji efektywna stała czasu odpowiedzi τ_e jest mniejsza od termicznej stałej czasu $\tau \equiv C_p / G_d$.

Amplituda składowej zmiennej spadku napięcia na bolometrze będzie równa:

$$V_0 = \alpha I R \delta_0(\omega) = q_0 \alpha I R / G_e (1 + \omega^2 \tau_e^2)^{1/2} \quad (17)$$

Czułość przetwarzania $S(\omega)$ definiowana jako stosunek wartości skutecznej napięcia wyjściowego detektora do wartości skutecznej mocy sygnału wejściowego, jest równa:

$$S(\omega) \equiv V_{sk} / q_{sk} = \alpha I R / G_e (1 + \omega^2 \tau_e^2)^{1/2}. \quad (18)$$

Zwiększenie czułości bolometru możliwe byłoby poprzez:

- 1) wzmocnienie napięcia wyjściowego detektora;
- 2) zwiększenie zmian temperatury zachodzących dla określonej mocy absorbowanej, tzn. zmniejszenie konduktancji cieplnej G ;
- 3) zwiększenie zmian rezystancji zachodzących dla określonej zmiany temperatury, tzn. zwiększenie $|\alpha|$ i R .

Ograniczenie sposobu 2) wynika nie tylko z wymagania aby $G \gg P_r / T_0$, ale także ze stałej czasu detekcji $\tau_e = C_p / G_e$. Zwiększenie czułości odbywałoby się kosztem szybkości działania detektora. Sposób 1) i 3) doprowadzą w ostateczności do fundamentalnych ograniczeń wynikających z:

a) szumów tła — czyli fluktuacji mocy absorbowanej przez detektor na tle której pojawia się odbierany (detekowany) sygnał. Szumy tła mogą być opisane poprzez równoważną im moc:

$$(\text{NEP})_r \simeq 5,25 \cdot 10^{-12} \sqrt{P_r T_r} \quad (19)$$

gdzie P_r jest mocą promieniowania tła, zaś T_r jest temperaturą tła;

b) szumów powodowanych fluktuacjami temperatury detektora na skutek wymiany ciepła z otoczeniem. Szumy te mogą być opisane poprzez:

$$(\text{NEP})_T \simeq \sqrt{4kT^2 G_d} \simeq 7,43 \cdot 10^{-12} T G_d^{1/2} \quad (20)$$

c) szumów Johnsonowskich — czyli szumów, związanych z rezystancją bolometru i opisywanymi równoważną im mocą:

$$(\text{NEP})_J \simeq [4kTR(1 + \omega^2 \tau_e^2)]^{1/2} / S(0). \quad (21)$$

Całkowita moc równoważna szumom ograniczającym czułość idealnego bolometru jest sumą (w kwadracie z uwagi na brak korelacji) mocy szumów wszystkich trzech składników. Szумы związane z fluktuacjami temperatury i szумы Johnsonowskie to „wewnętrzne” szумы detektora, zaś szумы tła to szумы „zewnętrzne”.

Optymalizacja bolometru z punktu widzenia warunków w jakich będzie on pracował, polega na wyborze jego parametrów, tak aby uzyskać maksymalny stosunek sygnału do szumu. Można to przeprowadzić dwustopniowo:

- 1) wybrać wartość konduktancji termicznej G ;
- 2) ustalić prąd polaryzacji tak, aby uzyskać najlepsze właściwości detektora.

Dla ustalonej wartości G optymalny prąd polaryzacji jest bliski temu przy którym uzyskuje się maksimum czułości przetwarzania bolometru, a więc odpowiadający wzrostowi temperatury o $\leq 0,1 T_0$. $(NEP)_T$ i $(NEP)_J$ są wtedy w przybliżeniu równe. Ich suma w kwadracie dla $\omega\tau_e < 1$ może być aproksymowana przez:

$$(NEP)_{J+T} \simeq 10^{-11} T G_d^{1/2} \quad (22)$$

czy też uwzględniając, że $\tau = C_p/G_d$, poprzez:

$$\tau^{1/2} (NEP)_{J+T} \simeq 10^{-11} T C_p^{1/2} \quad (23)$$

Tak więc ograniczenie czułości zoptymalizowanego bolometru powodowane szumami wewnętrznymi wynika tylko z T , C_p i τ .

Dobór wartości konduktancji termicznej G musi uwzględniać szумы tła jakie wystąpią w konkretnym zastosowaniu bolometru.

a) Zerowe szумы tła

W większości zastosowań w warunkach kosmicznych systemy sprzęgające i filtrujące odbiornika (zwykle quasi-optyczne) będą chłodzone do temperatury otwartej przestrzeni kosmicznej zapewniając wąskie pasmo filtrów wejściowych i wąską wiązkę anten odbiornika widzących w tle szумы kosmiczne o temperaturze ≈ 3 K. Szумы tła widziane przez detektor bolometryczny będą w tym przypadku bardzo małe. Jedynym ograniczeniem czułości bolometru będzie $(NEP)_{J+T}$. Zmniejszanie konduktancji termicznej G_d zmniejsza $(NEP)_{J+T}$, ale jednocześnie zwiększa stałą czasu. Częstotliwość z jaką modulowany jest odbierany sygnał wyznacza maksymalną wartość stałej czasu, ograniczając tym samym czułość odbiornika. A więc ograniczenie czułości jest tu spowodowane stałą czasu.

Zmniejszanie temperatury w której pracuje bolometr powoduje liniowe zmniejszanie wartości $(NEP)_{J+T}$, a więc i zwiększanie czułości. Stąd tak istotne jest chłodzenie bolometru do bardzo niskich temperatur. Innym jeszcze ważniejszym tego powodem jest zmniejszanie pojemności cieplnej bolometru.

b) Ograniczenie szumami tła

Jeżeli moc szumów tła nie może być mniejsza niż NEP najlepszych detektorów (pasmo filtrów wejściowych, szerokość wiązki anteny, częstotliwość modulująca, niechłodzone układy quasi-optyczne, itp.), to z punktu widzenia czułości zmniejszanie szumów własnych bolometru miałoby sens tylko do poziomu przy którym

$$(\text{NEP})_{J+T} \leq (\text{NEP})_r. \quad (24)$$

Relacja ta narzuca dolne ograniczenie na termiczną stałą czasu detektora:

$$\tau \geq 10^{-22} C_p T_r^2 / (\text{NEP})_r^2. \quad (25)$$

W tym przypadku dalsze chłodzenie poprawia właściwości detektora poprzez obniżenie tego ograniczenia stałej czasu. Ponieważ chłodzenie zmniejsza też pojemność cieplną, to uzyskane tą drogą obniżenie ograniczenia stałej czasu może być znaczne.

c) Ograniczenie mocą tła

W wielu zastosowaniach naziemnych i w eksperymentach laboratoryjnych moc promieniowania tła jest tak duża, że konduktancja termiczna G musi być wybierana w oparciu o inne kryteria, aby uniknąć nadmiernego wzrostu temperatury ΔT i spadku czułości przetwarzania bolometru. Wartość konduktancji termicznej G musi być tak wybierana, aby wzrost temperatury powodowany promieniowaniem tła nie przekraczał 10% temperatury otoczenia elementu bolometrycznego:

$$G \geq 10 P_r / T_0 \quad (26)$$

Dążenie do pracy bolometru w warunkach przy których $(\text{NEP})_{J+T} \leq (\text{NEP})_r$ prowadzi z kolei do ograniczenia konduktancji termicznej G od góry:

$$G \leq 0,2 P_r T_r / T_0^2 \quad (27)$$

A więc:

$$10 P_r / T_0 \leq G \leq 0,2 P_r T_r / T_0^2 \quad (28)$$

Wartość G spełniająca ten warunek może istnieć tylko wtedy, gdy lewa strona nierówności jest nie większa od strony prawej, czyli gdy:

$$T_0 \leq 0,02 T_r \quad (29)$$

Tak więc i w takich warunkach pracy chłodzenie może być niezbędne, jeżeli chce się wykorzystać potencjalne możliwości bolometru. Na przykład, przy temperaturze tła równej 75 K należałoby chłodzić bolometr do temperatury 1,5 K, a przy temperaturze tła 15 K aż do temperatury 0,3 K.

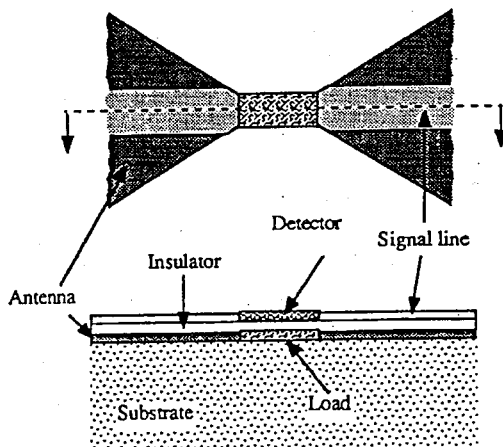
2.2.2. Wysokoczułe bolometry niechłodzone

W warunkach wysokiej temperatury tła, a więc najczęściej w zastosowaniach do detekcji i pomiaru promieniowania w szerokopasmowych systemach laboratoryjnych, kłopotliwe i trudne chłodzenie bolometru nie jest zwykle niezbędne. Spośród wielu rozwiązań detektorów bolometrycznych konstruowanych do tych celów przedstawione zostaną tu dwa stanowiące szczytowe osiągnięcia światowe.

Wymóg małych wymiarów bolometru w stosunku do długości fali oraz równomiernego grzania całej objętości materiału doprowadził do opracowania mikrobolo-

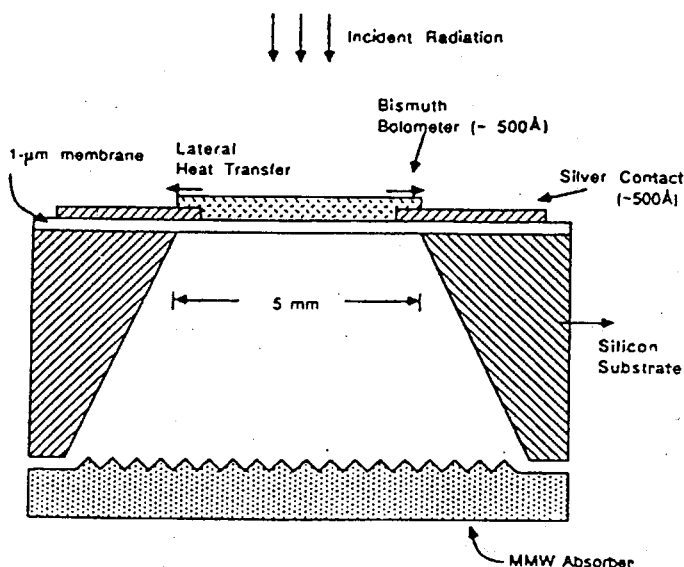
metrów opartych o bizmut [22] i tellur [5], [29]. Stosowane warstwy rezystywne mają grubości od 500 Å w przypadku bizmutu do 1200 Å w przypadku telluru, a wymiary poprzeczne około 5 μm . Dla efektywnego sprzężenia z promieniowaniem elektromagnetycznym te tak małe elementy muszą być zintegrowane z odpowiednimi antenami. Prowadzi to do konstrukcji quasi-optycznych detektorów, w których element bolometryczny stanowi obciążenie „skupione” anteny planarnej. Najczęściej stosowanym materiałem jest bizmut, ponieważ mała rezystywność cienkiej jego warstwy sprzyja łatwemu dopasowaniu bolometru do impedancji anteny planarnej wynoszącej 100–200 Ω .

Tellur cechują zmiany rezystancji w funkcji temperatury dR/dT stokrotnie większe niż ma to miejsce w bizmucie. Ale wysoka rezystywność telluru ogromnie utrudnia dopasowanie bolometru do anteny planarnej. Jednym z rozwiązań tego problemu jest rozdzielenie obciążenia anteny od termometru tellurowego. Umożliwia to konstrukcja przedstawiona schematycznie na rysunku 4.



Rys. 4. Widok z góry i przekrój poprzeczny mikrobolometru zintegrowanego z anteną typu „bow-tie” [29]

Obciążenie dopasowane impedancyjnie do anteny i pełniące tu rolę absorbera, oddzielone jest elektrycznie od termometru warstwą izolacyjną. Jednocześnie warstwa ta zapewnia bardzo silne sprzężenie termiczne obciążenia z termometrem, tak że zmiany temperatury obciążenia na skutek zaabsorbowanego promieniowania, powodują analogiczne szybkie zmiany temperatury elementu detekcyjnego i w konsekwencji zmiany jego rezystancji. W prezentowanym tu bolometrze obciążenie wykonane jest z nichromu o grubości 1500 Å i dołączone jest do anteny typu „bow-tie” wykonanej ze złota o grubości 1500 Å. Warstwa izolacyjna o grubości 1800 Å wykonana jest z SiO_2 . Termometr tellurowy ma grubość 1200 Å i dołączony jest do linii sygnałowych wykonanych ze złota o grubości 2000 Å. Detektor i obciążenie mają wymiary 4,5 $\mu\text{m} \times 5,0 \mu\text{m}$. W bolometrze tym czułość ograniczana jest szumami typu $1/f$, które dominują nad innymi szumami. Osiąga on moc równoważną szumom $\text{NEP} = 6,7 \cdot 10^{-9} \text{ W/Hz}^{1/2}$ przy częstotliwości modulującej do 30 kHz.



Rys. 5. Quasi-optyczny monolityczny bolometr membranowy [19]

Inną szerokopasmową konstrukcję quasi-optycznego bolometru mierzącego gęstość mocy promieniowania przedstawiono na rysunku 5. Bolometr tworzy warstwa bizmutu o grubości $500 \text{ \AA}$ napyłona na warstwie izolacyjnej SiO_2 o grubości $1,2 \text{ }\mu\text{m}$. Warstwa bizmutu o wymiarach $4 \text{ mm} \times 4 \text{ mm}$ absorbująca promieniowanie i będąca jednocześnie termometrem, ma rezystancję $70 - 100 \text{ }\Omega$. Warstwa izolacyjna spoczywa na podłożu krzemowym w którym wytrawiono odpowiednie okno. Promieniowanie przedostające się przez warstwy bizmutu i SiO_2 wydzielane jest w obciążeniu bezodbiciowym, którym jest absorber mikrofalowy. Konstrukcja bolometru zapewnia małą konduktancję termiczną pomiędzy warstwą bizmutu i podłożem krzemowym; ale wystarczająco dużą aby uniknąć samopodgrzewania promieniowaniem tła. Warstwa bizmutu jest znacznie cieńsza od długości fali, a więc bolometr jest membraną zawieszoną w wolnej przestrzeni. Prowadzi to do bardzo szerokopasmowej pracy bolometru. Dolna częstotliwość pracy związana jest z dyfrakcją i wynika z wymiarów bolometru. Górna częstotliwość pracy ograniczana jest właściwościami elektrycznymi cienkiej warstwy bizmutu i leży ona w zakresie dalekiej podczerwieni. Przy podanych wymiarach bolometr powinien pokryć zakres częstotliwości od 100 GHz do 10 THz . Stała czasu detektora jest duża (około 100 ms) — jest on więc używany do pomiarów wartości średniej promieniowania zapewniając $\text{NEP} = 3 \cdot 10^{-9} \text{ W/Hz}^{1/2}$.

2.2.3. Bolometry chłodzone

W ustalonej temperaturze pracy pojemność cieplna bolometru jest jednym z najważniejszych czynników ograniczających właściwości bolometru w warunkach małych szumów tła. Jakość realizowanych bolometrów jest wynikiem starannej

optymalizacji szczegółów konstrukcyjnych, która polega na minimalizacji całkowitej pojemności cieplnej poprzez właściwy wybór materiału i minimalizację masy całkowitej.

Ciepło właściwe większości materiałów krystalicznych w niskich temperaturach spełnia relację:

$$C_w = aT + bT^3 \quad (30)$$

gdzie pierwszy składnik reprezentuje udział elektronów, a drugi wibracje sieci krystalicznej, czyli udział fononów. Tak więc jak długo udział elektronów będzie mały w stosunku do udziału fononów to

$$(\text{NEP})_{J+T} \propto T^{5/2} \quad (31)$$

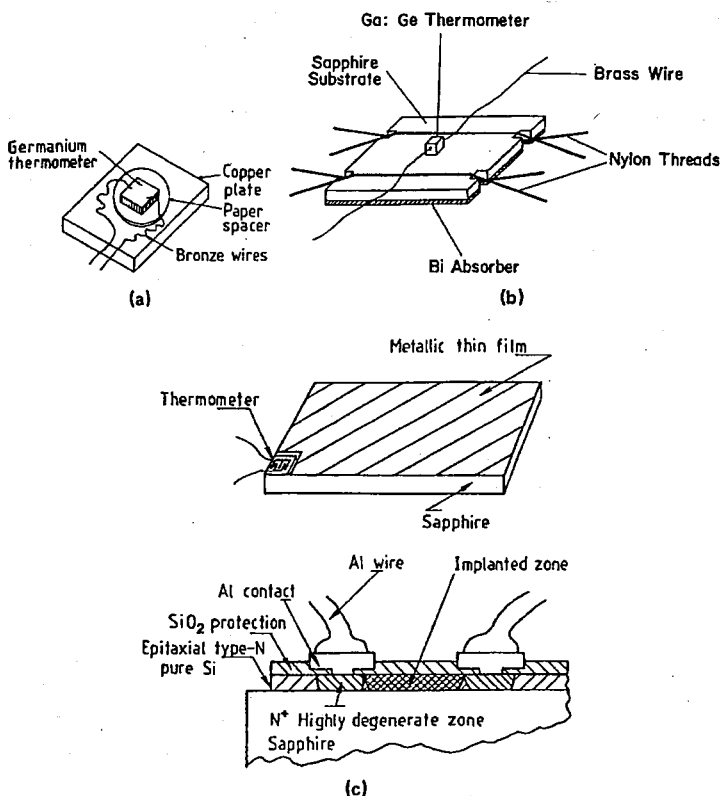
W miarę obniżania temperatury wpływ fononów na pojemność cieplną będzie malał aż do poziomu poniżej wpływu elektronów. Wtedy zależność pojemności cieplnej od temperatury zmieni się z $T^{5/2}$ na zależność $T^{3/2}$. W każdym z tych zakresów zmian, zmniejszanie pojemności cieplnej z temperaturą jest więc znaczne. Jest to zasadniczy powód poprawy właściwości detektorów bolometrycznych w miarę obniżania temperatury ich pracy.

Materiały niekrystaliczne i materiały z zanieczyszczeniami magnetycznymi wykazują wolniejsze zmiany pojemności cieplnej w funkcji temperatury. Należy ich więc unikać w konstrukcji chłodzonych bolometrów o ekstremalnych czułościach. Materiały nadprzewodzące wykazują natomiast bardzo duże zmiany pojemności cieplnej w funkcji temperatury i ich użycie przynosi często znaczne korzyści. Najlepszymi materiałami do konstrukcji bolometrów okazują się w kolejności: diament, szafir, czysty krzem, kwarc, czysty german, domieszkowane german i krzem oraz dwutlenek krzemu SiO_2 .

Typ i rodzaj termometru użytego do monitorowania zmian temperatury nie ma podstawowego znaczenia. Materiał użyty w konstrukcji termometru musi jednak zapewniać: małą pojemność cieplną, dużą konduktancję cieplną, dużą czułość temperaturową ($5 \leq |\alpha| \leq 40 \text{ K}^{-1}$), poziom rezystancji wygodny do dopasowania szumowego wzmacniacza, łatwość wykonywania kontaktów elektrycznych i cięcia do małych rozmiarów. Najczęściej używanym materiałem jest german domieszkowany galem. Jako termometry stosuje się też cienkowarstwowe oporniki węglowe, domieszkowany krzem, bizmut, tellur oraz nadprzewodzące cienkie warstwy (głównie metaliczne). Różne sposoby minimalizacji pojemności cieplnej przy jednoczesnym zapewnieniu odpowiedniej powierzchni zbierającej i absorbującej promieniowanie przedstawione są na rysunku 6.

Konfiguracja pokazana na rysunku 6a jest stosowana w konstrukcji bolometrów o bardzo małej powierzchni. W konstrukcji tej termometr pełni jednocześnie rolę absorbera i jest często pokrywany warstwą nieprzewodzącą zwiększającą absorpcję. Termometr przymocowany jest do płytki miedzianej za pomocą odpowiedniego lakieru.

W konfiguracji pokazanej na rysunku 6b funkcje absorbera i termometru są oddzielone. Rolę absorbera spełnia podłoże dielektryczne o małej pojemności cieplnej



Rys. 6. Najczęściej stosowane konfiguracje bolometrów chłodzonych do najniższych temperatur:
 a) bolometr o bardzo małej powierzchni, b) bolometr z oddzielonymi funkcjami absorbera i termometru
 c) bolometr wykonany za pomocą technologii układów scalonych

pokryte odpowiednią warstwą absorbującą. Zmiany temperatury podłoża monitorowane są termometrem germanowym dołączonym mechanicznie i termicznie do podłoża (lakier lub klej epoksydowy). Podłoża wykonywane są z szafiru, czystego krzemu lub diamentu. Naparowywane są na nie warstwy absorbujące z czystego złota, nichromu, bizmutu lub wysokodomieszkowanych półprzewodników. Bolometr zawieszany jest w komorze próżniowej przy pomocy nylonowych nici.

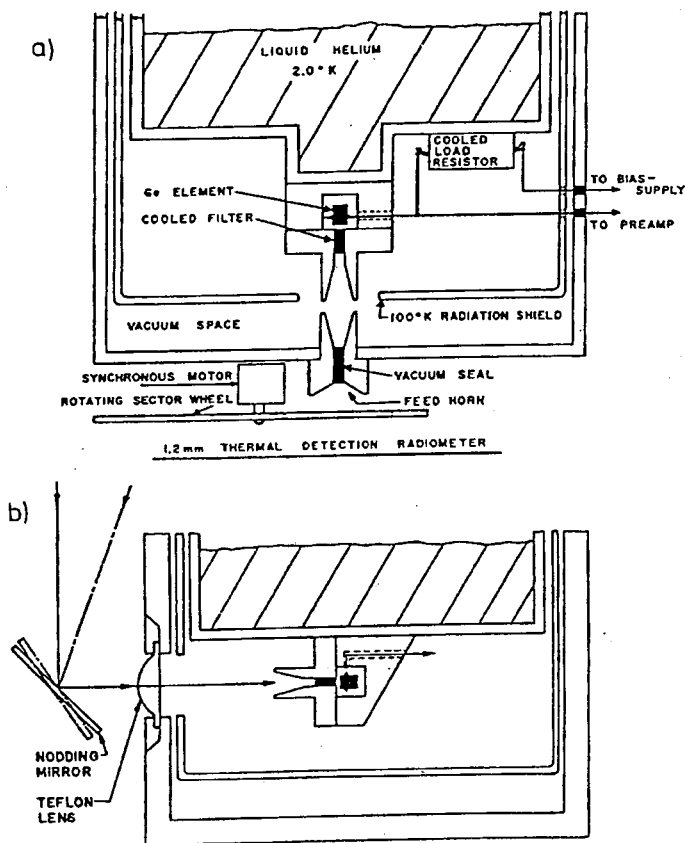
Bolometr pokazany na rysunku 6c (dolny rysunek ukazuje szczegóły konstrukcji jego termometru) wykonywany jest technologiami stosowanymi w produkcji układów scalonych. Pozwala to wyeliminować z konstrukcji bolometru wszelkie materiały niekryształiczne i zmniejszyć masę elementów metalicznych. Uzyskuje się w ten sposób bardzo małą pojemność cieplną przy dużej powierzchni zbierającej i absorbującej. Konfiguracja tego rodzaju stosowana jest często w konstrukcji bolometrów z warstwami nadprzewodzącymi.

W zastosowaniach radioastronomicznych i radiometrycznych, np. [1], [15], [18], [21], odbiorniki bolometryczne chłodzone są do temperatur ciekłego helu ^4He , tzn. 1,5 K, lub nawet ciekłego helu ^3He , tzn. 0,3 K. Konstrukcję typowego odbiornika

bolometrycznego przedstawiono na rysunku 7. W odbiorniku tym pracującym na częstotliwości 300 GHz, do temperatury 2 K chłodzone są zarówno element bolometryczny i rezystor obciążenia jak też i filtr wejściowy. System chłodzenia odbiornika zapewnia wydajność około 24 godzin pracy na 1 litr ciekłego helu ^4He .

Chłodzenie do temperatur ciekłego helu ^3He jest znacznie trudniejsze i droższe. Uzyskiwane wydajności są rzędu 30 godzin pracy z 5 litrów ciekłego helu ^3He przy jednoczesnym zużyciu 30 litrów ciekłego helu ^4He (chłodzenie dwustopniowe) [1]. Po tym czasie niezbędne jest ponowne ochładzanie odbiornika do temperatury $\sim 20\text{ K}$ i napełnianie (z dużymi ubytkami) zbiorników helowych. Eksploatacja takich odbiorników jest bardzo skomplikowana, droga i możliwa jedynie w warunkach laboratoriów i radioteleskopów naziemnych.

Opracowane dotychczas stosunkowo zwarte (ale bardzo drogie) chłodziarki o obiegu zamkniętym umożliwiają 12 godzinną pracę odbiornika w temperaturze 0,3 K. Potem niezbędne jest powtórzenie cyklu chłodziarki trwającego 1 godzinę.

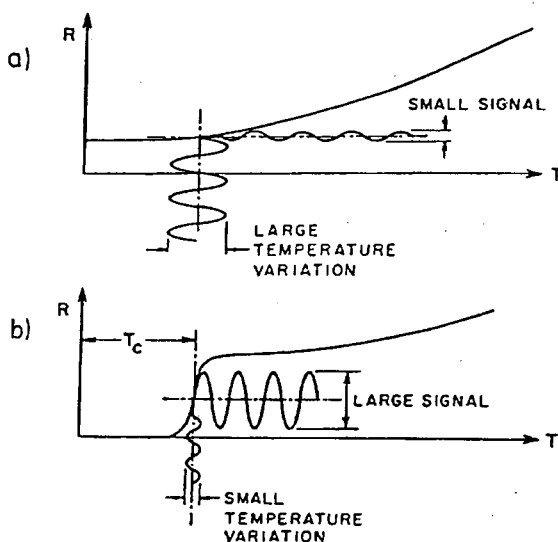


Rys. 7. Odbiornik bolometryczny chłodzony do temperatury 2 K, pracujący na częstotliwości 300 GHz umieszczony a) w ognisku głównym anten radioteleskopowych, b) w ognisku wtórnym – konfiguracja Cassegraina

Dopuszczalne obciążenie cieplne jest niewielkie ($\sim 10 \mu\text{W}$) [7] i taki sposób chłodzenia znajduje zastosowania w odbiornikach pracujących na pokładach wysoko latających samolotów, balonów i raket oraz satelitów i sond kosmicznych.

Odbiorniki bolometryczne z termometrami germanowymi i krzemowymi osiągają w temperaturze ciekłego helu ^4He wartości NEP od $10^{-13} \text{ W/Hz}^{1/2}$ do $10^{-14} \text{ W/Hz}^{1/2}$ przy stałych czasu od 5 ms do 100 ms. Najlepszy odbiornik tego typu osiągnął w temperaturze 1,2 K czułość opisywaną mocą równoważną szumom $\text{NEP} = 3 \cdot 10^{-15} \text{ W/Hz}^{1/2}$ przy stałej czasu 25 ms [6]. Chłodzenie do temperatury ciekłego helu ^3He poprawia czułość o rząd wielkości przy kilkukrotnie mniejszej stałej czasu. Najbardziej czułe odbiorniki bolometryczne osiągają w temperaturze 0,3 K NEP rzędu $10^{-16} \text{ W/Hz}^{1/2}$ przy stałej czasu kilku ms [7], [18].

W niektórych zastosowaniach konieczne jest wykrywanie promieniowania modulowanego z bardzo małą częstotliwością. Uzależnione prądowo szumy typu $1/f$ stanowią tu bardzo istotne ograniczenie; dla germanu domieszkowanego galem jest to 4–10 Hz. Pewnym rozwiązaniem tego problemu może być zastosowanie termometrów nadprzewodzących, które umożliwiają pracę bolometru przy częstotliwościach niższych od 1 Hz.



Rys. 8. Przetwarzanie zmian temperatury na zmiany rezystancji w przypadku: a) normalnego metalu, b) nadprzewodnika

Bolometry nadprzewodzące wykorzystują do detekcji promieniowania gwałtowną zmianę rezystancji przy przejściu materiału ze stanu normalnego do stanu nadprzewodnictwa — rysunek 8. Stosując odpowiednie materiały (np. stop cyny i miedzi [2]) można uzyskać dostatecznie szeroki zakres temperatur, w którym następuje zmiana rezystancji. Ponieważ zakres ten jest bardzo niewielki (rzędu 10 mK), niezbędne jest bardzo staranne stabilizowanie temperatury pracy bolometru w środku tego zakresu, gdyż każda zmiana temperatury pracy jest źródłem sygnału za-

klócającego. Przy złej stabilizacji szumy związane z fluktuacjami temperatury mogłyby zdominować inne źródła szumów i ograniczyć czułość bolometru. Wymóg bardzo dobrej stabilizacji temperatury pracy ogromnie komplikuje konstrukcję odbiorników z bolometrami nadprzewodzącymi.

Jeżeli nie jest możliwe chłodzenie odbiornika do temperatur niższych od 2 K, to odbiorniki z bolometrami nadprzewodzącymi są naturalną alternatywą, ponieważ temperatura przejścia w stan nadprzewodnictwa jest zwykle wyższa. Odbiorniki te pozwalają uzyskać czułości opisywane wartościami NEP rzędu 10^{-15} W/Hz^{1/2} [6], [27], a częstotliwość modulująca detekowany sygnał może sięgać 100 kHz.

Odkrycie nadprzewodników wysokotemperaturowych otworzyło nowe możliwości wykorzystania nadprzewodnictwa do detekcji promieniowania elektromagnetycznego. Temperatura przejścia w stan nadprzewodnictwa jest dla Y-Ba-Cu-O bliska 90 K [17]. Znacznie łatwiejsze jest więc chłodzenie odbiornika – można wykorzystać do tego łatwo dostępny i stosunkowo tani ciekły azot. Stała czasu jest bardzo mała, nawet rzędu kilkudziesięciu pikosekund. Wyklucza to klasyczny mechanizm bolometryczny. Warstwa Y-Ba-Cu-O ma charakter granulowany i jest układem obszarów nadprzewodzących (wielkości rzędu μm) słabo związanych przez obszary o przewodnictwie metalicznym (normalnym). Odpowiedź warstwy nadprzewodzącej na padające promieniowanie wydaje się być konsekwencją nieliniowości układu słabych złączy metal-nadprzewodnik, wywołanej przez zaindukowane prądy wielkiej częstotliwości. Wysokotemperaturowe warstwy nadprzewodzące reagując wprost na falę nośną, mogą być wykorzystane jako elementy mieszające, co zwiększa i tak już bardzo duże perspektywy ich wykorzystania stymulujące liczne prace badawcze.

2.3. BOLOMETRY Z GORĄCYMI ELEKTRONAMI

Klasyczny efekt bolometryczny polega na zmianach rezystancji materiału na skutek jego objętościowego grzania przez pochłanianie promieniowania elektromagnetycznego. Grzanie objętościowe odznacza się stosunkowo dużą stałą czasu i w praktyce częstotliwość modulująca sygnał detekowany przez bolometr nie może przekraczać około 100 kHz. Szybsze detektory bolometryczne można zrealizować w przypadku, gdy w relacji dR/dT , T odnosi się nie do temperatury sieci krystalicznej, lecz np. do temperatury zbioru swobodnych nośników (elektronów). Detektory wykorzystujące podgrzewanie elektronów charakteryzują się pasmem około 1,5 MHz.

Ponieważ zmiana właściwości elektrycznych materiału powodowana promieniowaniem elektromagnetycznym następuje na skutek innych przyczyn niż objętościowe grzanie, to z formalnego punktu widzenia, detektory z gorącymi elektronami należy zaliczyć do fotoprzewodników, dla odróżnienia klasyfikowanych jako fotoprzewodniki „drugiego rodzaju”. Niepoprawna formalnie, ale tradycyjna nazwa „bolometr z gorącymi nośnikami” zostanie zachowana w tym opracowaniu.

W fotoprzewodnictwie drugiego rodzaju istniejące w materiale swobodne nośniki, które są słabo sprzężone z siecią krystaliczną, podgrzewane są przez promieniowanie

elektromagnetyczne. Prowadzi to do zmian ruchliwości nośników, a więc i do zmian konduktywności [14], [26]. Jeżeli podgrzewanie nośników będzie niejednorodne przestrzennie, to gradient temperatury nośników spowoduje powstanie siły elektromotorycznej (analogicznie do efektu termoelektrycznego) o wartości proporcjonalnej do mocy absorbowanego promieniowania [13].

Fotoprzewodnictwo gorących elektronów występuje w niektórych półprzewodnikach, np. w germanie, krzemie czy antymonku indu. Jedynie w antymonku indu InSb efekt ten jest silny [26] i tylko ten materiał znalazł zastosowanie w konstrukcji bolometrów z gorącymi elektronami.

W temperaturach ciekłego helu ^4He 4,2 K w bardzo czystym antymonku indu ($N_D - N_A \approx 3 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$) istnieją wciąż „niezamrożone” elektrony. Temperatura T_e tego gazu częściowo zdegenerowanych elektronów przewodnictwa, może być łatwo podniesiona ponad temperaturę sieci krystalicznej. Temperatura T_e jest wynikiem bardzo silnych wzajemnych oddziaływań elektronów na siebie. Ponieważ gaz elektronów jest bardzo słabo sprzężony z siecią krystaliczną, to temperatura sieci T_0 pozostaje niezmienną (o ile tylko wzrost temperatury elektronów $\Delta T \ll T_0$). Wzrost temperatury gazu elektronów powoduje wzrost ruchliwości elektronów, ponieważ w tak niskich temperaturach ruchliwość jest limitowana rozpraszaniem na zjonizowanych domieszkach, co jest procesem silnie zależnym od prędkości elektronów, a więc i temperatury. Wynikające stąd zmiany konduktywności są więc duże i silnie zależne od temperatury gazu elektronów. Ponieważ masa elektronów jest niewielka, to szybkość działania może być znaczna.

Niejednorodne przestrzennie grzanie elektronów wymaga wytworzenia niejednorodnego rozkładu gęstości absorbowanego promieniowania. Jest to osiąganę przy pomocy sprężynki kontaktującej dotykającej punktowo półprzewodnik [13]. Pole elektryczne występujące pomiędzy sprężynką i podłożem na którym spoczywa półprzewodnik, powoduje że grzanie elektronów bezpośrednio pod punktem kontaktującym jest znacznie silniejsze niż w dużych odległościach od niego. Wystąpi więc gradient temperatur elektronów i powstanie siła elektromotoryczna. Dość trudna technologicznie konstrukcja i praktycznie uzyskiwane czułości gorsze niż przy jednorodnym grzaniu elektronów, sprawiły że detektory oparte o efekt termoelektryczny nie zostały upowszechnione.

Jednorodne grzanie elektronów wymaga umieszczenia kawałka InSb o wymiarach małych w stosunku do długości fali, w odpowiednio dopasowanym i zoptymalizowanym falowodzie. Element polaryzowany jest prądem stałym, a cała konstrukcja chłodzona ciekłym helem ^4He do temperatury 4,2 K. Rezystancja elementu półprzewodnikowego jest mała (poniżej 1Ω) i współpraca z niskoszumnym wzmacniaczem wymaga specjalnych zabiegów. Jednym z nich jest zastosowanie chłodzonego transformatora podwyższającego impedancję. Transformator ten jest często układem rezonansowym, co niestety zawęży pasmo detektora [14]. Innym sposobem jest zwiększenie rezystancji InSb poprzez zastosowanie polaryzacji kryształu polem magnetycznym i zmniejszenie temperatury pracy poniżej 2 K [26]. Trzeci sposób wykorzystuje zoptymalizowane chłodzone niskoszumne wzmacniacze tranzystorowe i bardzo czysty kryształ antymonku indu o specjalnie ukształtowanych powierzch-

niach, co zapewnia zwiększenie rezystancji. Ten sposób jest obecnie preferowany w większości odbiorników [6].

Uzyskiwane czułości i szybkości działania odbiorników zależne są od sposobu zwiększania impedancji wyjściowej detektora i sprzężenia ze wzmacniaczem. Transformator podwyższający impedancję pozwolił skonstruować odbiornik o $NEP = 6 \cdot 10^{-13} \text{ W/Hz}^{1/2}$ pracujący w temperaturze 4,2 K przy częstotliwościach sygnału do 600 GHz. Szybkość działania ograniczona była transformatorem – stała czasu większa od 100 μs . Stosowanie polaryzującego pola magnetycznego i chłodzenie do temperatur $\leq 2 \text{ K}$ zapewnić mogło odbiornik o $NEP = 5 \cdot 10^{-12} \text{ W/Hz}^{1/2}$ i stałej czasu około 200 ns. Sposób trzeci, tzn. optymalizacja wzmacniacza i kształtu kryształu umożliwił konstrukcję odbiornika na częstotliwość 300 GHz o $NEP = 4 \cdot 10^{-13} \text{ W/Hz}^{1/2}$ i stałej czasu 100 ns. Zmniejszenie stałej czasu bolometru jest możliwe poprzez zwiększenie temperatury w jakiej pracuje odbiornik. Ocenia się [6], że przy pracy w temperaturze 20 K możliwa będzie czułość detektora opisywana wartością $NEP \cdot 4 \cdot 10^{-11} \text{ W/Hz}^{1/2}$ przy czasie odpowiedzi około 3 ns.

Odbiorniki bezpośrednie z bolometrami z gorącymi elektronami pokrywają obecnie cały zakres fal prawie milimetrowych, oferując mniejsze czułości od najlepszych bolometrów klasycznych ale za to znacznie większe szybkości działania. Powyżej 1 THz ich czułość zmniejsza się proporcjonalnie do kwadratu długości fali i znaczenie tych odbiorników maleje.

3. ODBIORNIKI HETERODYNOWE

Odbiorniki heterodynowe z przemianą „w dół” są koherentnymi systemami detekcyjnymi. Element detekcyjny pełni w nich rolę mieszacza częstotliwości, do którego oprócz sygnału wejściowego doprowadzony jest sygnał z oscylatora lokalnego (heterodyny) o znacznie większej mocy i zwykle harmonicznie zmienny w czasie. W wyniku działania tych dwóch sygnałów detektor wytwarza sygnał proporcjonalny do mocy sygnału wejściowego:

$$V_0 = K \langle p_{in} \rangle \quad (32)$$

gdzie K jest stałą a $\langle p_{in} \rangle$ jest mocą sygnału wejściowego uśrednioną w czasie długim w stosunku do okresu sygnału, ale krótszym od stałej czasu odpowiedzi detektora τ_R . Jeżeli różnica częstotliwości sygnałów wejściowego i heterodyny, czyli częstotliwość pośrednia f_{IF} jest mniejsza niż $1/\tau_R$, to:

$$V_0 = K [p_L + p_S + 2(p_L p_S)^{1/2} \cos(2\pi f_{IF} t - \varphi)] \quad (33)$$

gdzie p_L i p_S są mocami heterodyny i sygnału, zaś φ jest różnicą faz tych sygnałów w czasie $t=0$.

Jeżeli rozważalibyśmy detektor (mieszacz) tak szybki aby reagował na chwilowe wartości sygnałów wejściowego i heterodyny (np. klasyczna dioda Schottky'ego) to sygnał wyjściowy mieszacza zawierałby także składowe o częstotliwościach har-

monicznych oraz ich sumach i różnicach, zgodnie z klasyczną teorią mieszaczy. Detektory termiczne są jednak zbyt wolne i przypadek taki nie będzie tu rozważany.

Ponieważ moc heterodyny p_L jest większa od mocy sygnału p_S , to wartość skuteczna napięcia wyjściowego o częstotliwości pośredniej V_0 jest większa niż byłaby w przypadku detektora bezpośredniego, tzn. przy $p_L = 0$. Zwiększanie mocy heterodyny zwiększa sygnał pośredniej częstotliwości aż do poziomu, przy którym zaczynają odgrywać rolę różne ograniczenia praktyczne lub o podstawowym dla danego mieszacza znaczeniu.

Sprawność przemiany E_c (odwrotność strat przemiany L_c^{-1}) definiowana jest jako:

$$E_c = \frac{\text{moc dysponowana na wyjściu p.cz. mieszacza}}{\text{moc dysponowana źródła sygnału}}. \quad (34)$$

Dla większości mieszaczy sprawność przemiany jest mniejsza od jedności. Przemiana sygnału na niższą częstotliwość pośrednią umożliwia jego wzmocnienie w niskoszumnych wzmacniaczach o pasmie B_{IF} i następnie zdetekowanie w drugim detektorze, który ma pasmo B_0 .

Szczególnego podkreślenia wymagają następujące właściwości odróżniające odbiorniki heterodynowe od odbiorników bezpośrednich:

1) Odbiornik reaguje tylko na sygnały, które po przemianie dadzą sygnał o częstotliwości leżącej wewnątrz pasma pośredniej częstotliwości B_{IF} . Odbierane mogą być sygnały obu wstępnych odległe od częstotliwości heterodyny o $\pm f_{IF}$. B_{IF} jest ograniczane zarówno wzmacniaczem pośredniej częstotliwości, jak też i stałą czasu odpowiedzi mieszacza. Jeżeli widmo sygnału heterodyny jest dostatecznie wąskie (duża stałość częstotliwości), to B_{IF} może być bardzo wąskie zapewniając dużą rozdzielczość częstotliwościową sygnału wejściowego.

2) Moc sygnału o częstotliwości pośredniej jest proporcjonalna do mocy sygnału wejściowego. Szum na częstotliwości pośredniej jest zwykle proporcjonalny do B_{IF} . Dlatego też podaje się często tak zwaną moc równoważną szumom „przed detekcją”, NEP_H , wyrażaną w W/Hz. NEP_H jest definiowana jako taka moc sygnału wejściowego, która po przemianie zapewni na częstotliwości pośredniej stosunek mocy sygnału do mocy szumów równy jedności przy pasmie $B_{IF} = 1$ Hz. Porównanie czułości odbiorników bezpośrednich i heterodynowych może być dokonywane dopiero po uwzględnieniu drugiej przemiany (detekcji), w wyniku której wytwarzany jest sygnał wyjściowy w odbiornikach heterodynowych. Gdy stosunek mocy sygnału do mocy szumów na częstotliwości pośredniej $[S/N]_{IF}$ jest mniejszy od jedności, to stosunek napięcia sygnału do „napięcia” szumów na wyjściu odbiornika $[S/N]_0$ jest wyrażony przez [6]:

$$[S/N]_0 \approx [S/N]_{IF} (B_{IF} / B_0)^{1/2}. \quad (35)$$

A więc moc równoważna szumom na wyjściu odbiornika heterodynowego, NEP_0 , przy $B_0 = 1$ Hz jest dana przez:

$$NEP_0 \approx NEP_H (B_{IF})^{1/2} \quad (36)$$

i wyrażana jest w W/Hz^{1/2}.

3) Informacja o fazie sygnału zachowana jest w sygnale pośredniej częstotliwości. Tak więc sygnały z różnych odbiorników obserwujących to samo źródło sygnału z różnych miejsc, mogą być ze sobą skorelowane dostarczając informacji przestrzennej o źródle sygnału. Ma to duże znaczenie w radioastronomii i radiometrii.

4) Z wrażliwości na fazę sygnału wynika, że odbiornik reaguje tylko na sygnał koherentny z sygnałem heterodyny przestrzennie na powierzchni aktywnej elementu mieszającego. Oznacza to, że odbiornik heterodynowy ma właściwości anteny i reaguje tylko na jeden mod rozkładu pola elektromagnetycznego sygnału, nawet jeżeli mieszacz jest elementem wielomodowym.

Odbiorniki heterodynowe wykazują więc właściwości istotnie różne od odbiorników bezpośrednich. Preferowane są one wtedy, gdy wymagana jest wysoka czułość, reagowanie na jeden mod odbieranego sygnału i duża rozdzielczość częstotliwościowa. W większości zastosowań radioastronomicznych stanowią one jedyną alternatywę.

O czułości prawidłowo zaprojektowanego odbiornika decydują szumy stopni wejściowych, a więc układów sprzęgających, układu przemiany częstotliwości i wzmacniacza pośredniej częstotliwości. Szumy dalszych stopni nie powinny odgrywać już istotnej roli. Oprócz szumów wewnętrznych mieszacza o szumach układu przemiany mogą też decydować fluktuacje amplitudy i fazy sygnału lokalnego oscylatora. Zwiększanie czułości odbiornika poprzez zmniejszanie jego szumów własnych może w końcu doprowadzić do fundamentalnych ograniczeń czułości każdego odbiornika. Ograniczeniami tymi są fluktuacje odbieranego sygnału i tła na którym on występuje.

Jeżeli założymy, że mieszacz absorbuje C_{in} -tą część docierającego sygnału widzanego na tle o temperaturze T_r , to najmniejsza moc sygnału $(P_s)_{min}$, która może być wykryta w stopniach pośredniej częstotliwości dana jest przez [6]:

$$(P_s)_{min} \approx \frac{hf B_{IF}}{C_{in}} + \frac{hf B_{IF}}{\exp(hf/kT_r) - 1}. \quad (37)$$

Dla przypadku sprawności absorpcji $C_{in}=1$, ponieważ NEP_H definiowana jest przy $B_{IF}=1$ Hz, mamy:

$$(NEP_H)_{min} \approx hf + \frac{hf}{\exp(hf/kT_r) - 1}. \quad (38)$$

Pierwszy składnik tego wyrażenia związany jest z szumem fotonowym odbieranego sygnału, zaś drugi z szumami termicznymi tła. W zakresie fal prawie milimetrowych $hf \ll kT_r$, i $(NEP_H)_{min} \sim kT_r$, to znaczy, że ostatecznym ograniczeniem czułości odbiornika są szumy tła. Dla odbiornika, który odbiera obie wstęgi boczne ograniczenie to jest oczywiście dwa razy większe, tzn. $(NEP_H)_{min} \sim 2kT_r$. Te fundamentalne ograniczenia mogłyby być osiągnięte tylko w przypadku, gdyby sprawność przemiany była tak duża, że szumy tła byłyby tak „wzmocnione”, iż zdominowałyby szumy mieszacza i wzmacniacza p.cz. Ponieważ dla detektorów termicznych sprawność przemiany jest zwykle mniejsza od jedności, to czułości odbiorników heterodynowych z tymi detektorami w zakresie fal prawie milimetrowych ograniczane są szumami własnymi odbiornika, a nie szumami termicznymi tła.

W odbiorniku heterodynowym, w którym sprawność wejściowych układów sprzęgających jest równa C_{in} , zaś sprawność przemiany E_c , moc sygnału p.cz. P'_{IF} dostarczonego do wzmacniacza p.cz. jest równa:

$$P'_{IF} = C_{in} E_c C_{IF} P_S, \quad (39)$$

gdzie C_{IF} jest sprawnością z jaką sygnał p.cz. dostarczany jest z wyjścia mieszacza do wejścia wzmacniacza pośredniej częstotliwości. Jeżeli temperatura źródła sygnału jest równa T_S , to przy $hf \ll kT_S$:

$$P_S = k T_S \Delta f. \quad (40)$$

W odbiorniku, który odbiera obie wstęgi boczne

$$\Delta f = 2 B_{IF} \quad \text{i wtedy} \quad (P_S)_{DSB} = 2 k T_S B_{IF}, \quad (41)$$

zaś w odbiorniku odbierającym sygnał w jednej ze wstęg

$$\Delta f = B_{IF} \quad \text{i wtedy} \quad (P_S)_{SSB} = k T_S B_{IF}. \quad (42)$$

Należy zauważyć, że w odbiorniku radiometrycznym P_S jest szumem termicznym i odróżnienie tego szumu od szumów własnych odbiornika (tzn. osiągnięcie stosunku „sygnału” do szumu większego od jedności) możliwe jest tylko na drodze dostatecznie długiej obserwacji źródła — jego sygnał szumowy jest skorelowany.

Szumami własnymi odbiornika są:

1) Szumy własne elementu mieszającego, których moc jest niezależna od poziomu sygnału wejściowego. Zakładając, że szumy te mają gęstość widmową mocy niezależną od częstotliwości w pasmie B_{IF} , można zdefiniować temperaturę tych szumów T_D taką, że moc szumów doprowadzonych do wejścia wzmacniacza pośredniej częstotliwości jest równa $k T_D B_{IF} C_{IF}$.

2) Szumy wzmacniacza pośredniej częstotliwości określane temperaturą szumów T_A taką, że moc szumów wzmacniacza odniesiona do jego wejścia jest równa $k T_A B_{IF}$.

3) Inne (dodatkowe) szumy, np. szumy amplitudowe i fazowe lokalnego oscylatora, powodujące wzrost mocy szumów na wejściu wzmacniacza p.cz. opisywany przez $k T_d C_{IF} B_{IF}$.

Tak więc moc szumów odbiornika odniesionych do wejścia wzmacniacza pośredniej częstotliwości, P_R , jest równa:

$$P_R = k B_{IF} (T_D C_{IF} + T_A + C_{IF} T_d). \quad (43)$$

Taką moc szumów otrzymalibyśmy, gdyby źródło sygnału miało temperaturę $(T_R)_{DSB}$

$$P'_{IF} = C_{in} E_c C_{IF} 2 k B_{IF} (T_R)_{DSB} \quad (44)$$

czyli gdy

$$(T_R)_{DSB} = \frac{T_D}{2 C_{in} E_c} + \frac{T_A}{2 C_{in} C_{IF} E_c} + \frac{T_d}{2 C_{in} E_c}. \quad (45)$$

$(T_R)_{DSB}$ jest nazywana zastępczą wejściową dwuwstęgową temperaturą szumów odbiornika i opisuje czułość odbiornika, w którym sygnał odbierany jest w obu

wstęgach bocznych, np. radiometrycznego. W przypadku sygnałów wąskopasmowych odbieranych tylko w jednej ze wstęg bocznych, definiowana analogicznie zastępcza wejściowa jednowstęgowa temperatura szumów odbiornika jest dwukrotnie większa:

$$(T_R)_{SSB} = 2(T_R)_{DSB}. \quad (46)$$

Temperatura szumów odbiornika może być wyrażona poprzez moc równoważną szumom przed detekcją NEP_H . I tak:

$$(T_R)_{DSB} \approx \frac{NEP_H}{2k} \quad \text{zaś} \quad (T_R)_{SSB} \approx \frac{NEP_H}{k}. \quad (47)$$

Właściwości mieszacza opisywane są zwykle zastępczą wejściową temperaturą szumów i stratami przemiany $L_c = E_c^{-1}$. Zastępcza wejściowa jednowstęgowa temperatura szumów mieszacza jest równa:

$$(T_M)_{SSB} = T_D / E_c. \quad (48)$$

Temperatura szumów T_M i straty przemiany L_c oraz moc heterodyny optymalizująca te dwie wielkości są najważniejszymi parametrami mieszacza i one używane są przy charakteryzowaniu i porównywaniu mieszaczy.

Wyprowadzenia powyższe dokonywane były i są słuszne w warunkach ograniczania czułości odbiornika szumami termicznymi tła, a nie szumami fotonowymi odbieranego sygnału, czyli gdy $T_R \gg hf/k$. Ograniczenie to, z praktycznego punktu widzenia określające graniczną czułość odbiornika, jest np. dla częstotliwości 300 GHz równe około 14 K, zaś dla 1 THz około 46 K.

Spośród detektorów termicznych rozpatrywanych w rozdziale 2 praktyczne zastosowanie w odbiornikach heterodynowych znalazły tylko elementy fotoprzewodzące z gorącymi elektronami. Klasyczne bolometry są zwykle zbyt wolne, aby mogły pracować w praktycznych układach przemiany częstotliwości. Wprawdzie detektory pyroelektryczne mogłyby zapewnić częstotliwości pośrednie do 1 MHz [11], ale praktycznie uzyskiwane rezultaty są tak niezadowalające [6], iż jest mało prawdopodobne aby mogły konkurować z odbiornikami wykorzystującymi detektory fotoprzewodzące. Dlatego też tylko odbiorniki z mieszaczami z gorącymi elektronami zostaną tu szerzej omówione.

3.1. ODBIORNIKI I MIESZACZE Z GORĄCYMI ELEKTRONAMI

Możliwości wykorzystania elementów bolometrycznych z gorącymi elektronami w procesie mieszania rozpatrywane były już w latach sześćdziesiątych [3]. W konstrukcji odbiornika na pasmo Ka wykorzystano wtedy objętościowe kawałki antymonku indu InSb o wymiarach porównywalnych z długością fali. Wykazując możliwości i dając podstawy teoretyczne prace te zapoczątkowały intensywny rozwój mieszaczy z gorącymi elektronami, który doprowadził do technicznej doskonałości obecne odbiorniki heterodynowe z takimi mieszaczami [25], [30], [31].

Elementem mieszającym jest bryłka kryształu antymonku indu umieszczona w falowodzie i ochłodzona do temperatury ciekłego helu 4,2 K. W takiej temperaturze w bardzo czystym InSb istnieją wciąż swobodne elektrony przewodnictwa. Elektrony te są bardzo słabo sprzężone z siecią krystaliczną i bardzo łatwo jest podnieść ich temperaturę bez podgrzewania sieci krystalicznej. Wzrost temperatury elektronów powoduje wzrost ich ruchliwości, a w konsekwencji zmianę konduktywności materiału.

Jeżeli składową stałą prądu płynącego przez bolometr oznaczmy jako I_0 , to zmiana konduktancji spowodowana wzrostem temperatury elektronów o ΔT spowoduje zmianę spadku napięcia na elemencie równą [23]:

$$\Delta V = I_0 \Delta R = -(3/2) I_0 R_0 (\Delta T/T_0), \quad (49)$$

gdzie R_0 jest rezystancją bolometru w temperaturze sieci krystalicznej T_0 . W przypadku, gdy wymiary elementu są małe w stosunku do długości fali w falowodzie, w którym jest on umieszczony i którym prowadzone są sygnał wejściowy i sygnał heterodyny, moc wydzielana w bolometrze jest opisywana przez:

$$P_i \approx I_0^2 R + P_L + 2(P_L P_S)^{1/2} \exp(j\omega_{IF} t), \quad (50)$$

gdzie P_L jest mocą heterodyny, zaś P_S mocą sygnału wejściowego, małą w stosunku do P_L . Trzeci składnik tego wyrażenia jest mocą sygnału o częstotliwości pośredniej f_{IF} równej różnicy częstotliwości sygnału i heterodyny. Zmiana rezystancji bolometru powoduje zmianę wydzielanej w nim mocy z P_i^0 do P_i i przy $I_0 = \text{const.}$ mamy:

$$P_i = P_i^0 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\Delta T}{T_0} \right). \quad (51)$$

Moc P_i musi być równa mocy P_e potrzebnej do podniesienia temperatury elektronów o ΔT :

$$P_e \approx K \Delta T + \frac{Cd(\Delta T)}{dt} \quad (52)$$

gdzie K jest konduktancją termiczną pomiędzy elektronami przewodnictwa i siecią krystaliczną, zaś C jest pojemnością cieplną elektronów przewodnictwa.

Porównując moce P_i z P_e i podstawiając P_i^0 otrzymamy:

$$[I_0^2 R_0 + P_L^0 + 2(P_L^0 P_S^0)^{1/2} \exp(j\omega_{IF} t)] \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\Delta T}{T_0} \right) = K \Delta T + \frac{Cd(\Delta T)}{dt} \quad (53)$$

Rozwiązując to równanie można wyznaczyć spadek napięcia na elemencie bolometrycznym:

$$V_b \approx I_0 R_0 \left[1 - \frac{3}{2} \frac{(I_0^2 R_0 + P_L^0)}{K' T_0} - \frac{3(P_L^0 P_S^0)^{1/2}}{K' T_0} \cdot \frac{\exp(j\omega_{IF} t)}{1 + j\omega_{IF} \tau'} \right] \quad (54)$$

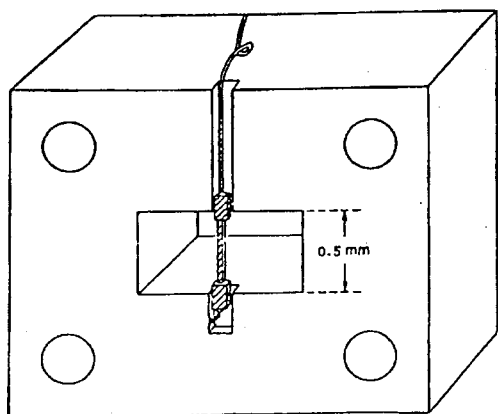
gdzie $K' = K + (3/2) \cdot (I_0^2 R_0 + P_L^0)/T_0$ zaś $\tau' = C/K'$.

Ostatni składnik tego wyrażenia jest napięciem sygnału o częstotliwości pośredniej f_{IF} . Bolometr nie reaguje bezpośrednio na sygnał o częstotliwości mikrofalowej ponieważ τ' jest rzędu 10^{-7} s.

Podane tu proste zależności wyprowadzone są przy założeniu, że przyrost temperatury elektronów ΔT jest mały w stosunku do temperatury sieci krystalicznej T_0 (przybliżenie liniowe). Wyjaśniają one jakościowo zjawisko mieszania sygnałów, ale nie są wystarczające do opisu ilościowego. Pomiary mieszacza bolometrycznego wskazują [23], że sygnał o częstotliwości osiąga maksimum przy $P_0 R_0 \approx P_L^0 \approx K T_0 \approx 5 \cdot 10^{-7}$ W. Element przeznaczony był do pracy przy częstotliwości 120 GHz i miał wymiary $1 \times 1 \times 0,1$ mm, co zapewniało rezystancję dynamiczną około 500 Ω przy pracy w temperaturze 4,2 K. Przy tej optymalnej mocy heterodyny ($5 \cdot 10^{-7}$ W) mieszacz pracował z $\Delta T \sim 1$ K, a więc w warunkach dalekich od przybliżenia liniowego.

Parametr τ' określa pasmo częstotliwości pośrednich mieszacza. τ' różni się od stałej czasu relaksacji elektronów $\tau = C/K$ i wskazuje, że szerokość pasma p.cz. rośnie wraz ze wzrostem mocy wydzielanej w bolometrze. Przy mocy zapewniającej największą sprawność przemiany mieszacza pasmo to ograniczone jest do 2 MHz. Optymalizacja właściwości szumowych odbiornika wykazuje, że minimum zastępczej wejściowej temperatury szumów występuje przy trochę mniejszej mocy heterodyny i pasmo pośredniej częstotliwości jest nawet mniejsze.

Mała moc heterodyny potrzebna do optymalnej pracy mieszacza bolometrycznego z InSb jest dużą zaletą odbiorników z tymi mieszaczami, ponieważ przy częstotliwościach większych od 100 GHz realizacja prostych, niezawodnych i przestrajanych generatorów o mocy rzędu mW jest bardzo trudna. Przy niższych częstotliwościach stosowane są często klistrony refleksowe, ale powyżej 120 GHz są one albo niedostępne albo bardzo drogie i mają krótki czas życia. Generatory z lampami z falą wsteczną, karcinotrony, dostępne są do częstotliwości 600 GHz, ale są również bardzo drogie, skomplikowane mechanicznie i wymagają wysokonapięciowych zasilaczy



Rys. 9. Konstrukcja mieszacza bolometrycznego z gorącymi elektronami na częstotliwość 230 GHz [24]

dużych mocy. Moce potrzebne do pompowania mieszaczy z gorącymi elektronami są na tyle małe (rzędu $1 \mu\text{W}$), że mogą być otrzymane poprzez powielanie częstotliwości generatorów półprzewodnikowych (z uwagi na szumy głównie z diodami Gunna). Powielacze częstotliwości z waraktorowymi diodami Schottky'ego osiągnęły wysoki poziom technicznej dojrzałości, np. [8], i mogą zapewnić sygnał heterodyny o dostatecznej mocy. Przykładem może tu być łańcuch sześciokrotnego powielania składający się z podwajacza falowodowegoysterowującego potrajacz quasi-optyczny [4].

Przykład konstrukcji mieszacza bolometrycznego z gorącymi elektronami przedstawiony jest na rysunku 9. Mieszacz ten tworzy kryształ antymonku indu o wymiarach małych w stosunku do długości fali, umieszczony w płaszczyźnie pola E falowodu prostokątnego, którym prowadzone są sygnał wejściowy i sygnał lokalnego oscylatora. Przesuwany zwieracz falowodowy umieszczony za bolometrem umożliwia dopasowanie elementu mieszającego do falowodu. Bolometr polaryzowany jest prądem stałym poprzez rezystor o dużej wartości.

Sygnał wyjściowy pośredniej częstotliwości odprowadzany jest z kryształu cienkimi drutami i doprowadzany do wzmacniacza niskoszumnego. Ponieważ szumy bolometru są szumami równoważnymi szumom rezystancji 500Ω w temperaturze 4 K (czyli około 7Ω w temperaturze pokojowej) a straty przemiany wynoszą około 10 dB , to wzmacniacz p.cz. (20 kHz do 2 MHz) musi zapewnić przy tej rezystancji źródła sygnału szumy własne nie większe niż opisywane zastępczą wejściową temperaturą szumów równą 5 K . Stopnie wejściowe takich wzmacniaczy tworzone są poprzez równoległe połączenie kilku tranzystorów polowych [24], [27].

Mała częstotliwość pośrednia odbiorników heterodynowych może być ich zaletą tylko w przypadku odbioru sygnałów o wąskich widmach, np. linii emisyjnych cząstek.

Tabela 1

Najlepsze odbiorniki heterodynowe z mieszaczami z gorącymi elektronami

Częstotliwość [GHz]	$(T_R)_{\text{DSB}}$ [K]	Heterodyna	Pozycja literatury
115	150	klistron	[23]
230	300	klistron	
		+ powielacz	[6], [24]
345	325	klistron	
		+ powielacz	[31]
410	320	klistron	
		+ powielacz	[31]
461	650	karcinotron	[6], [32]
470	750	klistron	
		+ powielacz	[31]
500	350	karcinotron	
		+ powielacz	[25]
500	1000	karcinotron	
		+ powielacz	[32]
575	350	karcinotron	
		+ powielacz	[25], [31]

Trzeba jednakże z góry znać częstotliwość sygnału i dostatecznie dobrze stabilizować heterodynę — zwykle w układach z pętlą fazową. W przypadkach poszukiwania sygnału, czy obserwacji spektralnych wąskie pasmo p.cz. stanowi bardzo duże ograniczenie. Niezbędne jest wtedy ciągle przestrajanie oscylatora lokalnego i powtarzanie obserwacji. Mała częstotliwość pośrednia powoduje też, że odbiorniki jednowstęgowe mogą być konstruowane tylko w oparciu o fazową eliminację sygnału lustrzanego.

Odbiorniki heterodynowe z mieszaczami z gorącymi elektronami konstruowane są do odbioru sygnałów o częstotliwościach do 600 GHz. Najlepsze dotychczas uzyskane rezultaty zestawiono w tabeli 1. Odbiorniki te są obecnie w zakresie częstotliwości powyżej 200 GHz odbiornikami heterodynowymi o największych czułościach. Nawet przy częstotliwości 575 GHz temperatury szumów odbiorników mogą być niższe od 400 K (współczynnik szumów 3,77 dB). Mała moc heterodyn ($\sim 1 \mu\text{W}$) potrzebna do ich optymalnej pracy pozwala wytwarzać sygnał lokalnego oscylatora drogą powielania częstotliwości w powielaczach z waraktorowymi diodami Schottky'ego. Chłodzenie do temperatur 4,2 K, choć skomplikowane, nie nastęrcza obecnie dużych trudności technicznych. Konstruowane są już zwarte chłodziarki helowe o obiegu zamkniętym, które przy wadze 4 kg i poborze mocy 100 W zapewniają obciążalność cieplną 100 mW w temperaturach poniżej 10 K [30].

Przewiduje się, że będzie możliwe konstruowanie odbiorników heterodynowych z mieszaczami bolometrycznymi przeznaczonych do pracy przy częstotliwościach do 1 THz i o pasmach pośredniej częstotliwości istotnie większych od 2 MHz, być może przy wykorzystaniu innych niż antymonek indu materiałów, np. HgCdTe [30].

4. PODSUMOWANIE

Opracowanie niniejsze dotyczy niskoszumnych odbiorników zakresu fal prawie milimetrowych (100 GHz do 1000 GHz) wykorzystujących elementy termiczne do detekcji i mieszania sygnałów. Praca obejmuje całość zagadnień z tym związanych. Przedstawione zostały podstawy teoretyczne, opis zjawisk fizycznych i zasady praktycznego ich wykorzystania. Podane też zostały podstawy analizy pracy detektorów termicznych oraz optymalizacji konstrukcji odbiorników. Dokonana też została analiza porównawcza praktycznych odbiorników z detektorami termicznymi realizowanych w zakresie fal prawie milimetrowych.

Wśród odbiorników bezpośrednich największe znaczenie mają odbiorniki z detektorami pyroelektrycznymi i elementami bolometrycznymi. Detektory pyroelektryczne są obecnie szeroko stosowane do detekcji promieniowania elektromagnetycznego w zakresach częstotliwości aż do podczerwieni włącznie. Preferowane one są wszędzie tam, gdzie wysoka czułość, niski koszt, prostota, niezawodność i odporność mechaniczna mają podstawowe znaczenie. Pracują one w temperaturach bliskich temperaturze Curie (np. 299 K dla TGS) zapewniając czułości opisywane wartością mocy równoważnej szumom NEP rzędu $10^{-10} \text{ W/Hz}^{1/2}$.

W zastosowaniach, w których czułość ma decydujące znaczenie stosowane są odbiorniki wykorzystujące detektory bolometryczne. W temperaturze ciekłego helu ^4He , tzn. $\sim 2\text{ K}$, czułości tych odbiorników osiągają poziom opisywany wartością NEP rzędu $10^{-14}\text{ W/Hz}^{1/2}$ przy stałych czasu odpowiedzi około 25 ms. Chłodzenie do temperatury ciekłego helu ^3He , tzn. $\sim 0,3\text{ K}$, poprawia czułość o rząd wielkości przy kilkukrotnie mniejszej stałej czasu. Najbardziej czułe odbiorniki osiągają w tej temperaturze wartości NEP rzędu $10^{-16}\text{ W/Hz}^{1/2}$.

W odbiornikach heterodynowych praktyczne zastosowanie znalazły tylko bolometryczne elementy mieszające z gorącymi elektronami. Odbiorniki takie są w zakresie częstotliwości powyżej 200 GHz odbiornikami heterodynowymi o największych czułościach. Nawet przy częstotliwości 575 GHz zastępcze wejściowe temperatury szumów mogą być niższe od 400 K (współczynnik szumów 3,77 dB). Mała moc heterodyny potrzebna do optymalnej pracy tych odbiorników ($\sim 1\text{ }\mu\text{W}$), pozwala wytwarzać sygnał lokalnego oscylatora drogą powielania częstotliwości w powielaczach z waraktorowymi diodami Schottky'ego. Istotnym ograniczeniem tych odbiorników jest niska częstotliwość pośrednia (do około 2 MHz). Przewiduje się, że możliwa będzie konstrukcja odbiorników heterodynowych z mieszaczami z gorącymi elektronami przeznaczonych do pracy przy częstotliwościach do 1 THz i o pasmach pośredniej częstotliwości większych od 2 MHz.

Wysokoczułe odbiorniki z detektorami termicznymi stanowią istotną alternatywę w stosunku do odbiorników z diodami Schottky'ego i złączami nadprzewodnik-izolator-nadprzewodnik, a przy częstotliwościach większych od 250 GHz są albo jedynym możliwym rozwiązaniem, lub też zapewniają czułości znacznie większe niż odbiorniki diodowe.

BIBLIOGRAFIA

1. P. A d e et al.: *A 0,4 K bolometer receiver for millimeter astronomy*. Digest of 6th Int'l. Conf. on Infrared and Millimeter Waves, p. W-3-5, Dec. 7-12, 1981, Miami Beach
2. J. M. A n d r e w s, M. W. P. S t r a n d b e r g: *Thermal microwave phonons*. Proc. IEEE, vol. 54, no. 4, pp. 523-528, Apr., 1966
3. F. A r a m s, C. A l l a n, B. P e y t o n, E. S a r d: *Millimeter mixing and detection in bulk InSb*, Proc. IEEE, vol. 54, no. 4, pp. 612-622, Apr. 1966
4. J. W. A r c h e r, M. T. F a b e r: *High-output, single- and dual-diode, millimeter-wave frequency doublers*. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-33, no. 6, pp. 533-538, June, 1985
5. H. B i e r m a n: *Material advances pave the way for device and system improvements*. Microwave Journal, no. 10, pp. 26-40, Oct., 1990
6. T. G. B l a n e y: *Detection techniques at short millimeter and submillimeter wavelengths: an overview*. in Infrared and Millimeter Waves, vol. 3, pp. 2-67, K. J. Button, Ed., New York: Academic Press, 1982
7. G. C h a n i n, J. P. T o r r e: *^3He refrigerators and bolometers for infrared and millimeter-wave observations*. in Infrared and Millimeter Waves, vol. 10, pp. 283-309, K. J. Button, Ed., New York: Academic Press, 1983
8. M. T. F a b e r, J. W. A r c h e r, R. J. M a t t a u c h: *A frequency doubler with 35% efficiency at W band*. Microwave Journal, vol. 28, no. 7, pp. 145-152, July, 1985

9. M. T. Faber, J. W. Archer: *Millimeter-wave, shot-noise limited, fixed-tuned mixer*. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-33, no. 11, pp. 1172-1178, Nov., 1985
10. B. G al w a s: *Miernictwo mikrofalowe*. WKiŁ, Warszawa, 1985
11. A. H a d n i: *Pyroelectricity and pyroelectric detectors*. in *Infrared and Millimeter Waves*. vol. 3, pp. 111-180, K. J. Button, Ed., New York: Academic Press, 1982
12. A. H a d n i: *Review of recent improvements in pyroelectric detectors*. in *Infrared and Millimeter Waves*, vol. 8, pp. 173-211, K. J. Button, Ed., New York: Academic Press, 1983
13. R. I. H a r r i s o n, J. Z u c k e r: *Hot-carrier microwave detector*. Proc. IEEE, vol. 54, no. 4, pp. 588-595, Apr., 1966
14. M. A. K i n c h, B. V. R o l l i n: *Detection of millimeter and submillimeter wave radiation by free carrier absorption in a semiconductor*. British J. Appl. Phys., vol. 14, no. 10, pp. 672-676, Oct., 1963
15. E. L. K o i l b e r g: *Detection of millimeter and submillimeter waves*. 1987 IEEE MTT's Int'l. Microwave Symp. Digest. pp. 759-762, June 9-11, 1987, Las Vegas
16. A. K o n o p k a, J. K o n o p k a: *Wykorzystanie efektu pyroelektrycznego do detekcji fal milimetrowych i submilimetrowych*. Mat. III Krajowej Konf. Mikrofalowej Elektroniki Ciała Stałego, pp. 322-331, 30.09-3.10, 1974, Zakopane
17. J. K o n o p k a et al.: *Detekcja mikrofal za pomocą warstwy nadprzewodzącej Y-Ba-Cu-O*. Mat. VIII Krajowej Konf. Mikrofalowej MIKON-88, pp. 175-181, 3-7.10, 1988, Gdańsk
18. E. K r e y s a r: *Bolometer systems developed at MPIFR*. Proc. Int'l. Symp. on Millimeter and Submillimeter Wave Radio Astronomy, URSI, pp. 153-158, 1984, Grenada
19. C. C. L i n g, G. M. R e b e i z: *A wideband monolithic submillimeter-wave quasi-optical power meter*. 1990 IEEE MTT's Int'l. Microwave Symp. Digest, pp. 1315-1318, May 8-10, 1990, Dallas, Texas
20. R. L i t w i n, M. S u s k i: *Technika mikrofalowa*. WNT, Warszawa, 1972
21. F. J. L o w: *Thermal detection radiometry at short millimeter wavelengths*. Proc. IEEE, vol. 54, no. 4, pp. 477-484, April, 1966
22. D. P. N e i k i r k, W. W. L a m, D. B. R u t l e d g e: *Far-infrared microbolometer detectors*. Int'l. J. of Infrared and Millimeter Waves, vol. 5, no. 3, pp. 245-277, 1984
23. T. G. P h i l l i p s, K. B. J e f f e r t s: *A low temperature bolometer heterodyne receiver for millimeter wave astronomy*. Rev. Sci. Instrum., vol. 44, no. 8, pp. 1009-1014, Aug., 1973
24. T. G. P h i l l i p s, K. B. J e f f e r t s: *Millimeter-wave receivers and their applications in radio astronomy*. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-22, no. 12, pp. 1290-1292, Dec., 1974
25. T. G. P h i l l i p s, D. P. W o o d y: *Millimeter and submillimeter wave receivers*. Annu. Rev. Astronomy Astrophys., vol. 20, pp. 285-323, (Annual Reviews, Inc., Palo Alto, CA), 1982
26. E. H. P u t l e y: *Indium antimonide submillimeter photoconductive detectors*. Appl. Optics., vol. 4, pp. 649-656, June, 1965
27. P. L. R i c h a r d s, L. T. G r e e n b e r g: *Infrared detectors for low-background astronomy: incoherent and coherent devices from one micrometer to one millimeter*. in *Infrared and Millimeter Waves*, vol. 6, pp. 149-207, K. J. Button, Ed., New York: Academic Press, 1982
28. H. E. T h o m a s: *Techniki i urządzenia mikrofalowe*. WNT, Warszawa, 1978
29. S. M. W e n t w o r t h, D. P. N e i k i r k: *Far-infrared composite microbolometers*. 1990 IEEE MTT's Int'l. Microwave Symp. Digest, pp. 1309-1310, May 8-10, 1990, Dallas, Texas
30. L. R. W h i c k e r et al: *Detector and mixer technology for millimeter waves*. Digest of 6th Int'l. Conf. on Infrared and Millimeter Waves, p. T-5-1, Dec. 7-12, 1981, Miami Beach
31. W. J. W i l s o n: *Submillimeter-wave receivers - a status report*. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-31, no. 11, pp. 873-878, Nov., 1983
32. A. H. F. V a n V l i e t, Th. D e G r a a u w, S. L i d h o l m, H. V a n D e S t a d t: *A low noise heterodyne receiver for astronomical observations operating around 0.63 mm wavelength*. Int'l. J. Infrared and Millimeter Waves, vol. 3, no. 6, pp. 817-823, Nov., 1982

M. T. FABER

**LOW-NOISE THERMAL-DETECTION RECEIVERS
AT NEAR-MILLIMETER WAVES****S u m m a r y**

Aspects related to applications of thermal elements to detection and mixing in low-noise near-millimeter-wave (100 GHz to 1000 GHz) receivers are comprehensively reviewed. Theoretical basis, physical processes and means of their practical implementations are presented together with outlines of analysis, design and optimization of detectors, mixers and receivers. Receivers employing pyroelectric detectors and bolometric elements are of particular interest and are considered in more details. Their state-of-the-art performance is summarized and further development is foreseen.

Procesy ograniczające wpływ zakłóceń w komputerowych urządzeniach pomiarowych

ANNA DOMAŃSKA

*Instytut Elektroniki i Telekomunikacji
Politechnika Poznańska*

Otrzymano 1991.07.24

Autoryzowano do druku 1991.10.11

Przedstawiono koncepcję wektorowej postaci niedokładności pomiaru w komputerowych urządzeniach pomiarowych, nazywanych układami pomiarowymi trzeciej generacji. Przedstawiono metody, które mogą być stosowane w celu ograniczania zakłóceń sygnału użytecznego. Rozróżniono trzy przypadki oddziaływania zakłóceń: wertykalne, horyzontalne i łączne. Uwzględniono trzy rodzaje relacji jakie mogą zachodzić w dziedzinie czasu między sygnałem użytecznym a zakłóceniami: dodawania, mnożenia, splatania.

1. WPROWADZENIE

Upowszechnienie się tanich standaryzowanych komputerów osobistych sprzyjało powstaniu i rozpowszechnieniu się urządzeń pomiarowych trzeciej generacji (UP3G) [8,9]. Składają się one z modułów pomiarowych współpracujących z zestawem komputerowym klasy IBM PC. Moduły pomiarowe są rodzajem przyrządów pomiarowych, pozbawionych wskaźników i elementów ręcznej regulacji. Są one sterowane programowo lub przez klawiaturę komputera. Monitor komputera umożliwia wyświetlanie wyników pomiarowych oraz ekranową symulację płyt czołowych przyrządów. Cechą UP3G jest integracja funkcji metrologicznych i informatycznych. Komputer osobisty, poza spełnianiem zadań związanych z organizacją systemu i przetwarzaniem wyników, stał się blokiem funkcjonalnym współtworzącym te wyniki.

Zmiany sposobu realizacji pomiarów, wpłynęły na zmianę w sferze możliwości kształtowania właściwości metrologicznych UP3G. Możliwości te uległy znacznemu rozszerzeniu dzięki programowym metodom wpływania na jakość wyniku pomiarowego.

Koncepcji realizacji procesu pomiarowego w UP3G podporządkowany powinien być sposób podejścia do zagadnienia niedokładności pomiaru. Niedokładność pomiaru (NP) należy traktować jako wielkość dwuwymiarową. UP3G realizują

bowiem pomiary z „organizacją czasu” — operacje na sygnale dokonywane są nie tylko w osi amplitudy ale i osi czasu. Symbolicznie NP przedstawia więc wektor z przestrzeni dwuwymiarowej o składowych horyzontalnej (H) i wertykalnej (W):

$$NP = [H, W] = [(HD, HL), (WD, WL)] \quad (1)$$

Każda ze współrzędnych H i W składa się z części deterministycznej HD i WD oraz z części losowej HL i WL. Części te traktowane są jako odpowiednio błędy systematyczne (BS) oraz przypadkowe (BP):

$$BS = (HD, WD) \quad (2a)$$

$$BP = (HL, WL) \quad (2b)$$

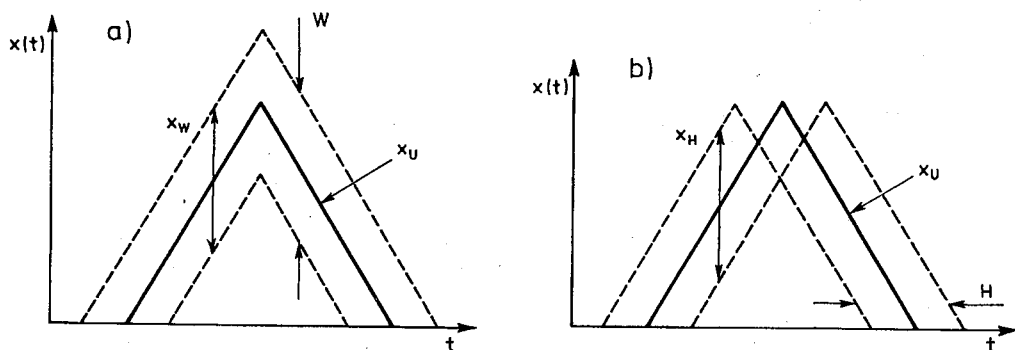
Dwuwymiarowy charakter NP pociąga za sobą dwuwymiarowość BS i BP.

Kształtowanie właściwości metrologicznych polega na oddziaływaniu na współrzędne H i W w celu ich minimalizacji. Podstawowymi procedurami związanymi z tym oddziaływaniem są: kalibracja, korekcja i przetwarzanie sygnału. Redukcja BS dokonywana jest w wyniku procedury korekcji. BP są ograniczane w rezultacie zastosowania odpowiednio dobranych operacji przetwarzania sygnału pomiarowego. Ustalenie wartości BS i BP zachodzi w procesie kalibracji urządzenia.

Programowe kształtowanie właściwości metrologicznych w następstwie programowej realizacji pomiaru, rozszerzyło możliwości oddziaływania na jakość wyniku pomiaru zwłaszcza w zakresie ograniczania i estymacji BP, nazywanych dalej zakłóceniami. Jest to element NP, którego skuteczne zredukowanie jest najsilniej uzależnione od możliwości realizacji bardziej złożonych algorytmów.

W tej pracy przedstawione zostaną metody, które mogą być stosowane w celu ograniczenia zakłóceń procesu pomiarowego w UP3G. Część z tych metod jest efektywną dopiero w wersji programowej. Ponieważ BP jest wielkością dwuwymiarową, należy rozróżnić trzy przypadki oddziaływania zakłóceń: tylko wertykalnych, tylko horyzontalnych, łącznie wertykalnych i horyzontalnych.

Nieokreśloność wartości sygnału użytecznego, spowodowaną występowaniem zakłóceń wertykalnych lub horyzontalnych zilustrowano odpowiednio na rys. 1a i 1b. Gdy oba zakłócenia występują jednocześnie wówczas w sygnale pomiarowym x oprócz



Rys. 1. Nieokreśloność wartości sygnału użytecznego: a) oddziaływanie zakłóceń wertykalnych, b) oddziaływanie zakłóceń horyzontalnych

sygnału użytecznego x_U , pojawiają się dwie składowe amplitudowe: x_W — od zakłóceń wertykalnych i x_H — od zakłóceń horyzontalnych. Ten najogólniejszy przypadek można zapisać jako:

$$x = r[x_U(t), x_W(t), x_H(t), \dot{x}_U(t)] \quad (3a)$$

$$z = f[x_W(t), x_H(t), \dot{x}_U(t)] \quad (3b)$$

r — związek między sygnałem użytecznym a sygnałem zakłóceń,

z — sygnał zakłóceń,

$$\dot{x}_U(t) = \frac{d}{dt} x_U(t).$$

Prezentowane metody ograniczania zakłóceń będą uwzględniać trzy rodzaje relacji jakie w dziedzinie czasu mogą zachodzić między sygnałem użytecznym a sygnałem zakłóceń: sumy, iloczynu i splotu. Kolejność omawianych zagadnień podporządkowana została dokonaniem wcześniej rozróżnieniu trzech przypadków oddziaływania zakłóceń (wertykalnych, horyzontalnych, łącznych). Zakłócenia mają charakter stacjonarny.

2. OGRANICZANIE ZAKŁÓCEŃ WERTYKALNYCH

Przetwarzanie sygnału pomiarowego dla wydobycia informacji o sygnale użytecznym, może polegać na: uśrednianiu, analizie korelacyjnej, filtracji liniowej lub nieliniowej (homomorficznej).

2.1. OGRANICZANIE ZAKŁÓCEŃ W WYNIKU UŚREDNIANIA SYGNAŁU POMIAROWEGO

Metody ograniczania zakłóceń w wyniku uśredniania sygnału pomiarowego są stosowane jeżeli:

- sygnał przetwarzany jest okresowy lub quasi-okresowy,
- zakłócenia mają zerową wartość średnią i są nieskorelowane z sygnałem.

W przypadku występowania zakłóceń stacjonarnych, stosowane są algorytmy zwykłego uśredniania addytywnego (uśrednianie proste lub nadmiarowe). Algorytmy uśredniania ważonego (wykładniczego) stosuje się najczęściej gdy zakłócenia są niestacjonarne. Algorytmy różnią się między sobą selektywnością oraz wpływem na amplitudę sygnału uśrednionego [6, 7].

Gdy rozpatrywane jest uśrednianie sygnału reprezentowanego przez próbki (zdyskretyzowanego w czasie) wówczas jako wskaźnik skuteczności ograniczania zakłóceń występuje stosunek sygnału do szumu. Oblicza się go na podstawie: próbek sygnału pomiarowego, wariancji sygnału zakłóceń (σ_n^2) oraz liczby powtórzeń (i) sygnału pomiarowego wziętych do uśredniania. Poprawa stosunku sygnału do szumu zależy wprost proporcjonalnie od pierwiastka kwadratowego z liczby powtórzeń [1].

Jeżeli rozpatruje się uśrednianie sygnału po konwersji A/C (dyskretyzacja w czasie i w amplitudzie), wskaźnikiem skuteczności ograniczania zakłóceń jest wartość skuteczna zakłóceń sygnału uśrednionego ($\sqrt{\sigma_i^2}$). Zależy ona nie tylko od wariancji sygnału zakłóceń (σ_n^2) oraz liczby powtórzeń (i) ale i od wariancji szumu kwantyzacji (σ_d^2). W poniżej przedstawionych algorytmach uśredniania przyjęto założenie, że liczba bitów przetwornika A/C jest równa liczbie bitów słowa danych jednostki operacyjnej.

Symbole zastosowane w opisie algorytmów oznaczają:

$S_j(k)$ – próbka sygnału uśrednionego z (j) powtórzeń,

$x_j(k)$ – próbka sygnału z (j)-tego powtórzenia,

σ_n^2 – wariancja zakłóceń sygnału użytecznego,

σ_i^2 – wariancja zakłóceń sygnału uśrednionego z (i) powtórzeń,

σ_d^2 – wariancja szumu kwantyzacji, $\sigma_d^2 = \frac{q^2}{12} = \left(\frac{U_{FS}}{2^m}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{U_{FS}^2}{2^{2m} \cdot 12}$,

U_{FS} – nominalny pełny zakres przetwarzania A/C,

q – wielkość przedziału kwantyzacji,

m – długość słowa,

i – całkowita liczba powtórzeń.

Uśrednianie proste

Uśrednianie proste jest realizowane według następującego algorytmu:

$$S_j(k) := S_{j-1}(k) + \frac{x_j(k)}{i} \quad (4a)$$

$$S_0(k) = 0, \quad j = 1, \dots, i. \quad (4b)$$

Rezultat końcowy jest następujący:

$$S_i(k) = \frac{x_1(k)}{i} + \dots + \frac{x_i(k)}{i} \quad (4c)$$

$$\sigma_i = \sqrt{i \cdot \sigma_d^2 + \frac{\sigma_n^2}{i}}. \quad (4d)$$

Uśrednianie nadmiarowe

Uśrednianie nadmiarowe jest realizowane według algorytmu:

$$S_j(k) := S_{j-1}(k) + \frac{x_j(k)}{2^n} \quad (5a)$$

$$S_0(k) = 0, \quad j = 1, \dots, i, \quad (5b)$$

$$n = 0, 1, \dots, \log_2 i - 1.$$

Rezultat końcowy jest następujący:

$$S_i(k) = \frac{x_1(k)}{2^e} + \dots + \frac{x_i(k)}{2^e}, \quad 2^e = i \quad (5c)$$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{4 \cdot i \cdot \sigma_d^2}{7} + \frac{\sigma_n^2}{i}} \quad (5d)$$

Oba algorytmy cechują się porównywalną skutecznością tłumienia zakłóceń, dla tej samej liczby powtórzeń (i). Przy uśrednianiu nadmiarowym zmniejszony jest wpływ szumu kwantyzacji w stosunku do tego wpływu w uśrednianiu prostym. Na podstawie wartości σ_n^2 i σ_d^2 , można wyznaczyć optymalną liczbę powtórzeń dającą minimum wariancji σ_i^2 . Wadą obu algorytmów jest to, iż ograniczenie zakłóceń połączone jest ze zmianą amplitudy sygnału użytecznego. Gdy zachodzi potrzeba wydłużenia czasu uśredniania, algorytm uśredniania nadmiarowego daje możliwość kontynuacji uśredniania, bez rozpoczynania obliczeń od początku (por. 5c).

Uśrednianie wykładnicze

Uśrednianie wykładnicze przebiega według algorytmu:

$$S_j(k) := \frac{i-1}{i} \cdot S_{j-1}(k) + \frac{x_j(k)}{i} \quad (6a)$$

$$S_1(k) := x_1(k), \quad j = 2, 3, \dots, i. \quad (6b)$$

Rezultat końcowy jest następujący:

$$S_i(k) = \left(\frac{i-1}{i}\right)^{i-1} \cdot x_1(k) + \frac{1}{i} \left[\left(\frac{i-1}{i}\right)^{i-2} \cdot x_2(k) + \dots + \frac{i-1}{i} \cdot x_{i-1}(k) + x_i(k) \right] \quad (6c)$$

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 = & \left[\left(\frac{i-1}{i}\right)^{2(i-1)} + \frac{1 - \left(\frac{i-1}{i}\right)^{2(i-1)}}{2i-1} \right] \cdot \sigma_n^2 + i^2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{i-1}{i}\right)^{2i}}{2i-1} \cdot \sigma_d^2 + \\ & + i^2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{i-1}{i}\right)^{2(i-1)}}{2i-1} \cdot \sigma_z^2 \end{aligned} \quad (6d)$$

δ_z^2 – wariancja błędu zaokrąglenia wyniku mnożenia czynnika $\left(\frac{i-1}{i}\right)^{i-w}$ przez $x_w(k)$;

jej wartość wynika z oszacowania: $\sigma_d^2 \leq \sigma_z^2 \leq \sigma_c^2$, przy czym σ_c^2 oznacza wariancję

błędu zaokrąglenia o jeden bit i wynosi: $\sigma_c^2 = \frac{q^2}{8} = \left(\frac{U_{FS}}{2^m}\right)^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{U_{FS}^2}{2^{2m} \cdot 8}$.

W uśrednianiu wykładniczym wagi próbki $x(k)$ z kolejnych powtórzeń sygnału, są zróżnicowane (por. 6c). Zapobiega to zmianie amplitudy sygnału użytecznego w wyniku uśredniania. Jednakże w porównaniu z dwiema poprzednimi metodami, osiągnięta skuteczność tłumienia zakłóceń jest w tym przypadku najniższa.

Uśrednianie, oprócz redukcji zakłóceń, może także dawać poprawę rozdzielczości

sygnału przechowywanego w pamięci [6]. Jeżeli np. do uśredniania sygnału 8-bitowego jest stosowany procesor 16 lub 32-bitowy, to taka rozdzielczość operacji arytmetycznych polepsza rozdzielczość otrzymywanych danych do 10 bitów i więcej.

2.2. KORELACYJNE METODY OGRANICZANIA ZAKŁÓCEŃ SYGNAŁU POMIAROWEGO

Korelacyjne metody eliminacji wpływu zakłóceń na sygnał użyteczny można podzielić na:

- metody z zastosowaniem funkcji autokorelacji,
- metody z zastosowaniem funkcji korelacji wzajemnej,
- metody wykorzystujące zarówno funkcję autokorelacji i korelacji wzajemnej.

Metoda funkcji autokorelacji jest stosowana, gdy sygnał użyteczny jest zdeterminowany, w szczególności harmoniczny, o nieznannej częstotliwości powtarzania i amplitudzie, zakłócenia zaś są sygnałem losowym. W metodzie wykorzystywana jest zasadnicza różnica w kształcie funkcji autokorelacji sygnałów zdeterminowanych i losowych oraz fakt, iż sygnały te są nieskorelowane.

Funkcja autokorelacji sygnału harmonicznego ma okresowo powtarzalny kształt, z tą samą częstotliwością co sygnał użyteczny i amplitudę równą kwadratowi wartości skutecznej sygnału użytecznego.

Funkcja autokorelacji zakłóceń szumowych dąży do zera przy rosnącym przesunięciu. W przypadku zakłóceń zawierających składową stałą, funkcja autokorelacji dąży do kwadratu wartości tej stałej. Przedział skorelowania zakłóceń jest tym węższy im szersze jest pasmo sygnału. Obie wielkości są powiązane następującą zależnością [1,12]:

$$\Delta\tau = \Delta\omega \approx \frac{\pi}{2}. \quad (7)$$

$\Delta\tau$ – przedział czasowy, dla którego korelacja jest znacząca,
 $\Delta\omega$ – szerokość pasma sygnału.

Funkcja autokorelacji sygnału pomiarowego x , będącego sumą sygnału użytecznego x_U oraz zakłóceń wertykalnych x_W , jest sumą funkcji autokorelacji sygnału użytecznego R_{x_U} i funkcji autokorelacji zakłóceń R_{x_W} :

$$R_x(n\Delta t) = R_{x_U}(n\Delta t) + R_{x_W}(n\Delta t) \quad (8)$$

Δt – elementarne opóźnienie,

n – krotność elementarnego opóźnienia.

Wraz ze wzrostem przesunięcia (wzrost n) zachodzi zbieżność:

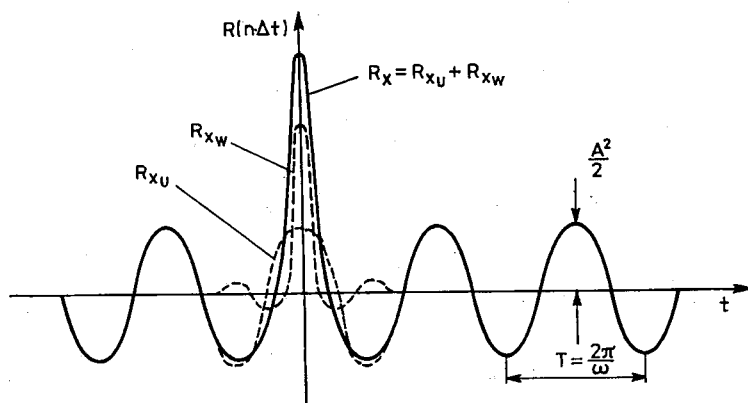
$$R_{x_W}(n\Delta t) \rightarrow 0 \quad (9a)$$

więc:

$$R_x(n\Delta t) \rightarrow R_{x_U}(n\Delta t). \quad (9b)$$

Im bardziej szerokopasmowy jest sygnał zakłóceń, tym szybciej odpowiadająca mu funkcja autokorelacji zmierza do zera i tym mniejsze jest przesunięcie, przy którym

funkcja autokorelacji sygnału pomiarowego przechodzi w funkcję autokorelacji sygnału użytecznego. Wówczas można określić częstotliwość i amplitudę sygnału użytecznego jeśli jest nim sygnał harmoniczny (por. rys. 2), lub wyznaczyć wartość średniokwadratową sygnału użytecznego w pozostałych przypadkach – sygnałów użytecznych zdeterminowanych. Z właściwości metody stosującej funkcję autokorelacji do ograniczania zakłóceń występujących w sygnale pomiarowym wynika, iż nie będzie ona skuteczna, gdy sygnał użyteczny jest niezdedeterminowany [12].



Rys. 2. Autokorelacyjna metoda wykrywania sygnału użytecznego

Drugą odmianą metod korelacyjnych jest metoda z zastosowaniem funkcji korelacji wzajemnej. Sygnałem użytecznym może być sygnał zdeterminowany lub losowy. Funkcja korelacji wzajemnej dwóch sygnałów jest miarą ich podobieństwa i ma tę właściwość, iż nie zawiera tych elementów, które różnią oba sygnały. Jeśli np. dwa sygnały różnią się między sobą w ten sposób, że jeden zawiera składową stałą lub określoną składową harmoniczną a drugi nie, to składowych tych nie zawiera funkcja korelacji wzajemnej. W szczególności funkcja korelacji wzajemnej dwóch sygnałów okresowych o tym samym okresie jest również funkcją okresową o tym okresie, natomiast funkcja korelacji wzajemnej sygnałów okresowych o różnych okresach, wynosi zero.

Warunkiem zastosowania metody z funkcją korelacji wzajemnej jest, by była dostępna niezakłócona wersja sygnału użytecznego (x_U^0), np. w postaci sygnału odniesienia utrwalonego w pamięci komputera. Rezultat skorelowania sygnału pomiarowego (x) z sygnałem odniesienia (x_U^0) jest następujący:

$$R_{x,x_U^0} = R_{x_U,x_U^0} + R_{x_W,x_U^0} = R_{x_U,x_U^0}. \quad (10)$$

Na podstawie funkcji R_{x_U,x_U^0} i parametrów sygnału x_U^0 , można ustalić parametry, uwolnionego od zakłóceń, rzeczywistego sygnału użytecznego x_U . Proces ten można utożsamić z filtracją, w której właściwości filtru, są określane przez charakterystykę sygnału odniesienia.

Ograniczanie wpływu zakłóceń na sygnał pomiarowy przedstawioną metodą może być stosowane zwłaszcza, gdy sygnał użyteczny i zakłócający mają zbliżone częstotliwości co utrudnia filtrację oraz, gdy poziom sygnału użytecznego jest poniżej poziomu zakłóceń.

Miarą skuteczności ograniczenia zakłóceń sygnału pomiarowego jest stosunek sygnału do szumu $\left(\frac{S}{D}\right)$. Jeśli sygnał użyteczny jest sinusoidalny, wówczas stosunek sygnału do szumu wynosi [1]:

– w metodzie stosującej autokorelacji:

$$\frac{S}{D} = 10 \log \frac{N}{1 + 16 R_0^2 + 8 R_0^4} \quad (11)$$

R_0^2 – wartość średniokwadratowa stosunku szumu do sygnału na wejściu,

N – liczba próbek sygnału,

– w metodzie stosującej funkcję korelacji wzajemnej:

$$\frac{S}{D} = 10 \log \frac{N}{1 + R_0} \quad (12)$$

Z porównania wyrażeń (11) i (12) wynika, że w przypadku sygnałów harmonicznych, druga metoda daje lepszą poprawę stosunku sygnału do szumu, czyli jest skuteczniejsza niż metoda pierwsza, przy tej samej długości realizacji sygnału (N) i dla tego samego R_0 .

Trzecią odmianą metod korelacyjnych jest metoda z połączeniem zastosowania funkcji autokorelacji i korelacji wzajemnej. Jeśli sygnał użyteczny jest sygnałem harmonicznym o nieznannej częstotliwości lub amplitudzie a zakłócenia stanowią szum losowy, wówczas w pierwszym etapie stosuje się metodę z funkcją autokorelacji. W rezultacie następuje poprawa stosunku sygnału do szumu (wstępna) oraz ustalenie częstotliwości sygnału użytecznego. Na tej podstawie w drugim etapie wygenerowany zostaje sygnał odniesienia i skorelowany z sygnałem użytecznym, określonym w pierwszym etapie. W rezultacie następuje dalsza poprawa stosunku sygnału do szumu, nie osiągnięta przy użyciu samej tylko metody z funkcją autokorelacji [1,2,12].

2.3. OGRANICZANIE ZAKŁÓCEŃ SYGNAŁU POMIAROWEGO W WYNIKU FILTRACJI

Filtracja sygnału jest operacją, której celem jest wydzielenie sygnału użytecznego z sygnału pomiarowego. W procesie filtracji liniowej dokonywany jest rozdział składowych, które są addytywnie niezależne. Warunek niezależności wynika z potrzeby wyodrębnienia transformaty Fouriera każdej składowej z osobna, by następnie odpowiednią składową wyeliminować.

Ogólnie, w dziedzinie czasu sygnał użyteczny i sygnał zakłócający mogą być między sobą w jednej z trzech następujących realizacji: sumy, iloczynu lub spłotu. Przypadki takie zachodzą, gdy zakłócenia wertykalne sygnału użytecznego są odpowiednio:

addytywne, multiplikatywne lub wynikają z drgania położenia sygnału (są typu jitterowego). Filtracji liniowej podlegają jedynie zakłócenia pierwszego rodzaju. Wydzielenie sygnału użytecznego w przypadku zakłóceń drugiego i trzeciego rodzaju, jest zagadnieniem filtracji homomorficznej [3,10,11,13].

Filtracja liniowa składa się z trzech etapów:

- liniowej transformacji sygnału (Fouriera),
- właściwej filtracji liniowej,
- odwrotnej liniowej transformacji.

Filtracja homomorficzna natomiast jest procesem złożonym z następujących etapów:

- transformacji homomorficznej,
- właściwości filtracji liniowej,
- odwrotnej transformacji homomorficznej.

Homomorficzne odwzorowanie, jest to przekształcenie przestrzeni $X \rightarrow Y$, spełniające warunek [10]:

$$H(x_1 \bullet x_2) = H(x_1) \blacksquare H(x_2) \quad (13)$$

$$x_1, x_2 \in X, \quad H(x_1), H(x_2) \in Y.$$

- – operacja określona na elementach przestrzeni X ,
- – operacja określona na elementach przestrzeni Y .

Właściwości przekształcenia określoną warunkiem (13), nazywa się zachowaniem operacji.

W filtracji homomorficznej użyte symbole oznaczają:

- – operację wejściową (iloczyn, splot),
- – operację wyjściową (suma),

H – złożenie operacji logarytmowania i transformacji Fouriera (w odpowiedniej kolejności).

Jeśli sygnały, które w dziedzinie czasu są w relacji iloczynu lub splotu, poddane zostaną odpowiedniej transformacji homomorficznej, to w rezultacie otrzymuje się ich addytywną reprezentację. Rozdział składowych addytywnych dokonuje się wówczas według zasad filtracji liniowej.

Filtracja homomorficzna względem mnożenia jest złożeniem następujących operacji:

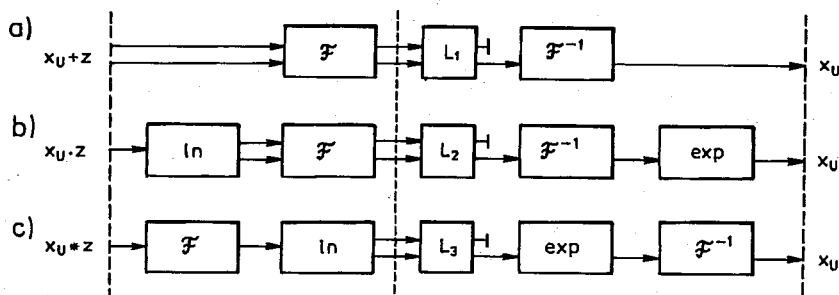
$$\exp(\mathcal{F}^{-1}(L_2(\mathcal{F}(\ln(\cdot)))))) \quad (14a)$$

Natomiast filtracja homomorficzna względem splotu jest złożeniem operacji:

$$\mathcal{F}^{-1}(\exp(L_3(\ln(\mathcal{F}(\cdot))))) \quad (14b)$$

L_i – operacja właściwej filtracji liniowej.

Struktury omawianych filtrów przedstawia rys. 3. Warunkiem skuteczności filtracji zakłóceń w układach z rys. 3 jest by transformaty (liniowe lub homomorficzne) sygnałów występujących na wejściach układów L_i zajmowały rozłączne zakresy zmiennej niezależnej.

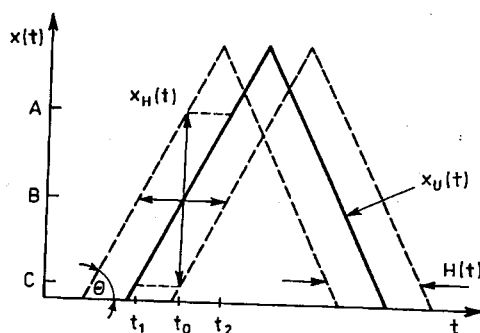


Rys. 3. Ogólna struktura filtru: a) liniowego, b) homomorficznego względem mnożenia, c) homomorficznego względem spłotu

3. OGRANICZANIE ZAKŁÓCEŃ HORYZONTALNYCH

Występowanie zakłóceń horyzontalnych objawia się niestałością związków fazowych między próbkami przetwarzanego sygnału, wynikającą z drgania ich położenia [4,5]. Problem jest tym bardziej istotny im bardziej szerokopasmowy jest system pomiarowy. Fluktuacja sygnału w osi czasu może okazać się wówczas znaczącą w stosunku do jego okresu. Wpływ zakłóceń horyzontalnych jest także istotny wówczas, gdy chodzi o osiągnięcie podwyższonej skuteczności operacji wydobywania sygnału użytecznego z zakłóceń. Np. w celu osiągnięcia możliwie maksymalnej w danych warunkach poprawy stosunku sygnału do szumu w wyniku operacji uśredniania, zachodzi potrzeba wydłużenia czasu rejestracji sygnału. Efekt pozytywny osiąga się pod warunkiem, że wpływ zakłóceń horyzontalnych jest zanedbywalnie mały. Wymaga to zachowywania stałości związków fazowych w dłuższym przedziale czasu.

Zakłócenia horyzontalne oddziałują na amplitudę sygnału w sposób nieaddytywny. Powstanie składowej amplitudowej $x_H(t)$ od zakłóceń horyzontalnych $H(t)$ przedstawia rys. 4.



Rys. 4. Oddziaływanie zakłóceń horyzontalnych na sygnał użyteczny