

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

Nr Indeksu 363189

PL ISSN 0867-6747

KWARTALNIK
ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

ELECTRONICS AND
TELECOMMUNICATIONS
QUARTERLY

TOM XL — ZESZYT 1

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
WARSZAWA 1994

Subscription for external subscribers:

The promotional subscription price in 1994 is \$ 80 including postage for institutions. Subscriptions should be sent too the publisher, Polish Scientific Publishers PWN Ltd, Journal Division, Miodowa 10, 00-251 Warsaw, POLAND, fax (48) (22) 26 09 50, (48) (22) 26 71 63, with a copy by fast to Electronics and Telecommunications Quarterly 00-665 Warsaw, ul. Nowowiejska 15/19, p. 470. Subscription is occupied after showing a checque or transfer documents. Our bank account is as follows: Bank account: PBK VIII O/Warszawa nr 370028-1052-139-112. At subscriber's request this journal will be air mailed at additional postage to 50% of gross price to European countries and 65% overseas.

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

KWARTALNIK
ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI
ELECTRONICS AND
TELECOMMUNICATIONS
QUARTERLY

TOM XL — ZESZYT 1

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
WARSZAWA 1994

RADA REDAKCYJNA

Przewodniczący

prof. dr inż. ADAM SMOLIŃSKI
członek rzeczywisty PAN

Członkowie

prof. dr hab. inż. DANIEL JÓZEF BEM, prof. dr hab. inż. MICHAŁ BIAŁKO –
czł. koresp. PAN, prof. dr hab. inż. STEFAN HAHN – czł. koresp. PAN, prof. dr
inż. ANDRZEJ HAŁAS, prof. dr inż. ZDZISŁAW KACHLICKI, prof. dr hab. inż.
BOHDAN MROZIEWICZ, prof. dr inż. JERZY OSIOWSKI, prof. dr inż. WITOLD
ROSIŃSKI – czł. rzecz. PAN, prof. dr hab. inż. STEFAN WĘGRZYN – czł. rzecz.
PAN, prof. dr hab. inż. WIESŁAW WOLIŃSKI – czł. koresp. PAN, prof. dr inż.
ANDRZEJ ZIELIŃSKI, prof. dr inż. MARIAN ZIENTALSKI

REDAKCJA

Redaktor Naczelny

prof. dr hab. inż. WIESŁAW WOLIŃSKI

Zastępca Redaktora Naczelnego

doc. dr inż. KRYSTYN PLEWKO

Sekretarz Odpowiedzialny

mgr KRYSTYNA LELAKOWSKA

„Wydanie publikacji dofinansowane jest przez
Komitet Badań Naukowych”

ADRES REDAKCJI

00-665 Warszawa, ul. Nowowiejska 15/19 Politechnika, pok. 470
Instytut Telekomunikacji, Gmach im. prof. JANUSZA GROSZKOWSKIEGO

Dyżury Redakcji: środy i piątki, godz. 14–16
tel. 628 89 81 21007-737

Telefony domowe: Redaktora Naczelnego: 12 17 65

Zast. Red. Naczelnego: 26 83 41

Sekretarza Odpowiedzialnego: 25 29 18

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN

Warszawa, ul. Miodowa 10

Ark. druk. 9.25	Podpisano do druku w maju 1994r.
Papier offsetowy kl. III 80 g. B-1	Druk ukończono w czerwcu 1994r.

Skład: ArtGraph, W-wa, ul. Czerniakowska 81/83

Druk i oprawa: Drukarnia Braci Grodzickich, Żabieniec ul. Przelotowa 7

Zmodyfikowane ujęcie modelu Jilesa-Athertona

JERZY HUBERT BARANOWSKI

Instytut Podstaw Elektroniki, Politechnika Warszawska

Otrzymano 1993.07.10

Autoryzowano do druku 1993.11.23

Dedukuję Profesorowi Adamowi Smolińskiemu

Artykuł jest poświęcony wykorzystaniu teorii magnesowania ferromagnetyków zaproponowanej przez D.C. Jilesa i D.L. Athertona. Przedstawia się opracowane algorytmy do obliczania pętli histerezy i przenikalności magnetycznej. Uzasadniono potrzebę zmodyfikowania modelu Jilesa-Athertona. Praca ta jest wprowadzeniem do opracowanego modelu transformatora, który zostanie przedstawiony oddzielnie w zastosowaniu do programu analizy układów elektronicznych.

1. WPROWADZENIE

Proces doskonalenia i zwiększania zakresu zastosowania uniwersalnych programów komputerowej analizy układów elektronicznych polega — między innymi — na opracowywaniu i włączaniu do bibliotek tych programów modeli nowych elementów, bądź rozszerzaniu modeli już znanych o nowe zjawiska fizyczne. Niniejsza praca jest poświęcona zasadom budowy modelu transformatora z rdzeniem ferrytowym, według teorii przedstawionej w 1986 r. przez D.C. Jilesa i D.L. Athertona [1]. Teoria Jilesa-Athertona (w skrócie — TJA) charakteryzuje się tym, że odwołuje się do procesów fizycznych i jest dobrze osadzona w przeszło 150-letniej historii badania ferromagnetyków. Inne znane propozycje modelowania procesów magnesowania sprowadzają się, ujmując najogólniej, do mniej lub bardziej udanego naśladownictwa geometrycznego pętli histerezy, bez głębszych uzasadnień fizycznych [2, 3, 4].

Wykorzystanie TJA jest jednak dość trudne. Oryginalna praca jest napisana bardzo zwięźle. Nie zawiera istotnych szczegółów wyprowadzeń zależności

fizyko-matematycznych ani algorytmów, a jedynie założenia ogólne i szkice wprowadzeń, oraz końcową postać zasadniczego wzoru.

Model transformatora wprowadzono do programu PSPICE (podając niezbyt zasadnie, że jest to model Jilesa–Athertona). Ponieważ program PSPICE nie był w kraju rozpowszechniony, a zasady budowy zastosowanego w nim modelu transformatora nie były dostatecznie jasne, autor niniejszej pracy podjął w 1991 r. własne studia nad TJA, dążąc do opracowania modelu transformatora w zastosowaniu do programu NAP2. Wyniki prac z opisem przeprowadzonych badań i modeli transformatorów zostały przedstawione w raporcie naukowym [5] w końcu 1991 r.

W 1993 r. pewne szczegóły związane z modelem transformatora zastosowanym w programie PSPICE stały się znane dzięki pracy [6]. Z zawartych w niej zależności matematycznych wynika, że model procesów magnesowania wykorzystany w programie PSPICE nie jest, biorąc rzecz ściśle, modelem Jilesa–Athertona, lecz pewną jego wersją uproszczoną w sposób dość dowolny, bez podania uzasadnienia.

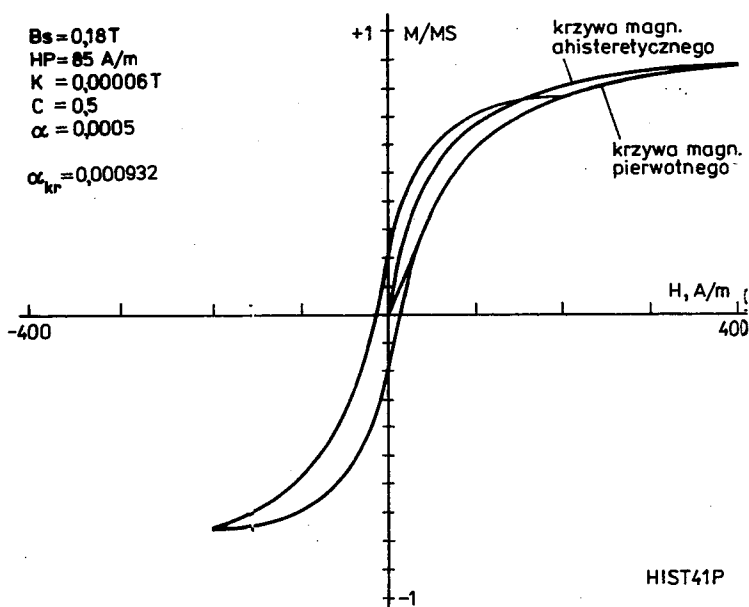
Z kolei, zbadanie zależności matematycznych podanych w oryginalnej pracy Jilesa–Athertona doprowadziło do wniosku, że również Autorzy TJA nie zastosowali się konsekwentnie do zasad swojej teorii. Autor niniejszej pracy, postępując rygorystycznie według zasad TJA, otrzymał jednak nieco inną zależność końcową, fundamentalną dla późniejszych konstrukcji modeli transformatorów. Różnice między ujęciem oryginalnym a ujęciem przedstawionym w niniejszej pracy nie są jednak bardzo istotne. Zagadnienia te, a również inne problemy — nasuwające potrzebę pewnego zmodyfikowania zależności końcowej TJA, są rozważane w dalszych częściach pracy. Jest ona zaplanowana jako wprowadzenie do opisu transformatora, który bez tego wprowadzenia prawdopodobnie nie byłby zrozumiały.

Autor posługuje się systemem SI. Nie jest w pełni jasne, jaki układ jednostek stosowano w pracy [1] i ta kwestia stwarza margines niepewności przy korzystaniu z tej publikacji, zredukowanej do tego dość lakonicznie.

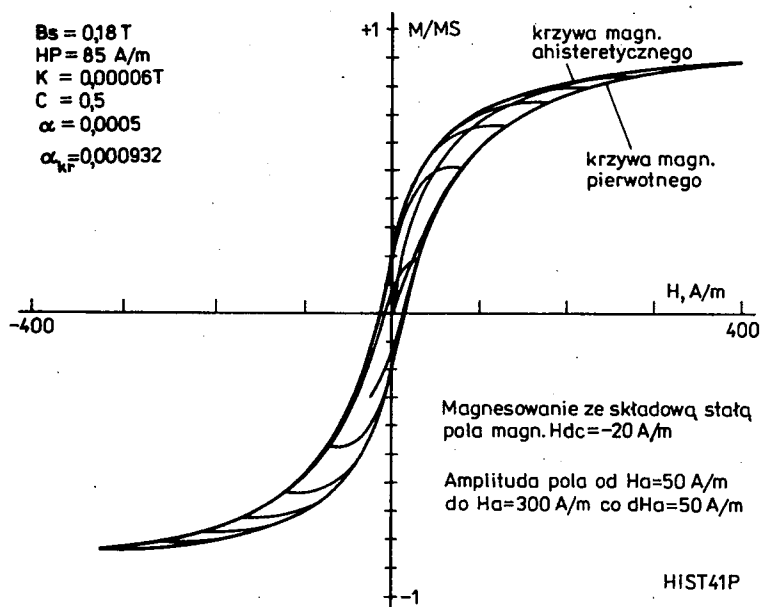
2. PODSTAWOWE ZALEŻNOŚCI OPISUJĄCE MODEL JILESA–ATHERTONA

2.1. CHARAKTERYSTYKI MAGNESOWANIA

Przebieg magnesowania ferromagnetyków charakteryzuje zamknięta krzywa esowata (sigmoid) nazywana potocznie pętlą histerezy. Zwykle pętla histerezy jest wyznaczona doświadczalnie przy magnesowaniu prądem zmiennym sinusoidalnym. Typowy kształt pętli histerezy jest przedstawiony na rys. 1, gdzie zamieszczono również dwie inne krzywe — charakterystykę magnesowania ahiste-



Rys. 1. Przykład pętli histerezy magnetycznej oraz krzywych magnesowania ahisteretycznego i pierwotnego



Rys 2. Pętle histerezy przy różnych amplitudach pola magnetycznego i ze składową stałą (ujemną) tego pola

retycznego i leżącą zawsze niżej charakterystykę magnesowania początkowego. Na rys. 2 przedstawiono analogiczny zestaw charakterystyk ukazujący zmianę kształtu pętli histerezy przy kilku różnych amplitudach natężenia pola magnetycznego H i dodatkowo przy nie-zeroj składowej stałej tego pola (wstępnego podmagnesowania). Na obu rysunkach zamiast indukcji magnetycznej B przedstawiono pokrewną wielkość — namagnesowanie (ang. magnetization) — oznaczone literą M . Między wielkościami B, M, H występuje związek

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H, \quad (1)$$

gdzie

μ_0 — przenikalność magnetyczna próżni.

Konsekwencją opisywania krzywej magnesowania przez $M(H)$ — a nie przez $B(H)$ — jest całkowita płaskość charakterystyki $M(H)$ w zakresie nasycenia materiału magnetycznego, dzięki czemu wartość namagnesowania¹ w nasyceniu M_s może być dobrze określona jako wartość asymptotyczna. Natomiast wykres zależności $B(H)$ w zakresie nasycenia, tj. silnych pól H , ma stałe nachylenie równe przenikalności magnetycznej próżni μ_0 , co trochę utrudnia — acz nie zasadniczo — wyznaczenie wielkości nazywanej w technicznych zastosowaniach indukcją nasycenia B_s . W praktyce bowiem przyjmuje się, że charakterystyka $B(H)$ typowych ferromagnetyków w zakresie nasycenia jest również prawie zupełnie płaska (w porównaniu z dużą stromością części środkowych), tj. przyjmuje się, że oba rodzaje wykresów różnią się jedynie skalą wartości M i B .

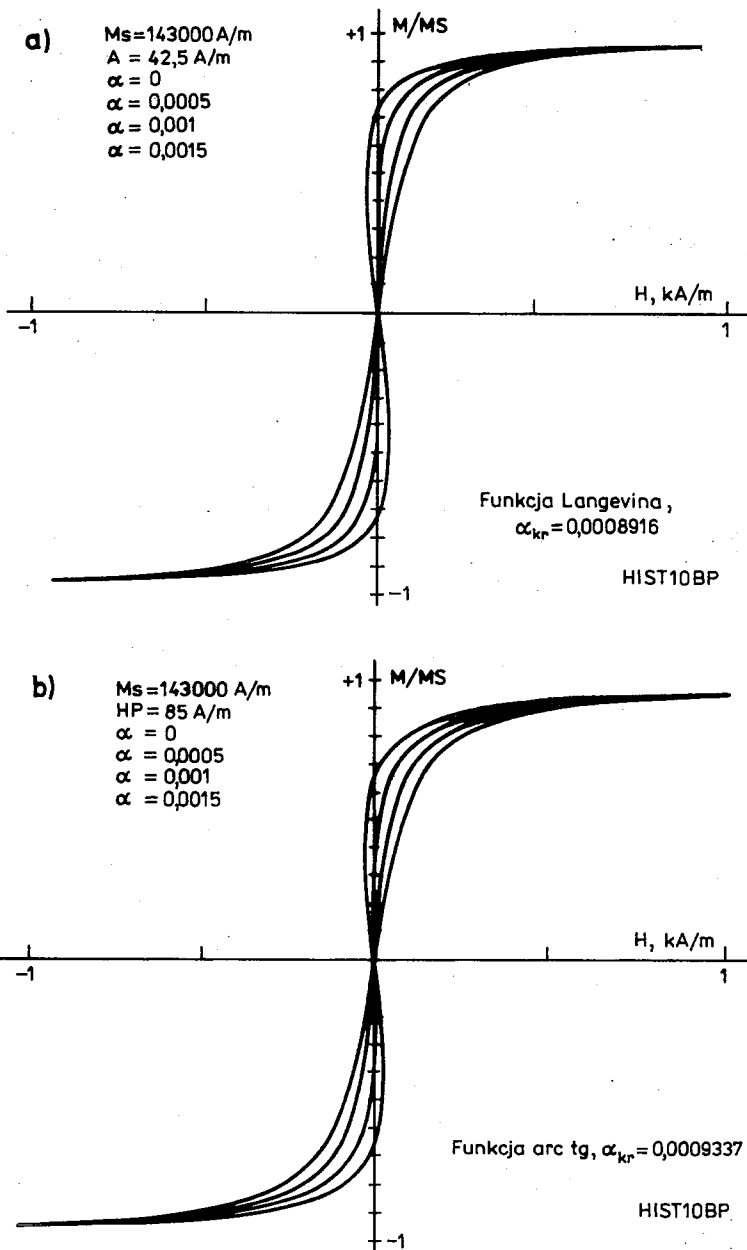
2.2. MAGNESOWANIE AHISTERETYCZNE

W modelu Jilesa-Athertona (w skrócie — JA) ważną rolę pełni charakterystyka magnesowania ahisteretycznego (ang. anhysteretic magnetization). Charakterystyka ta ma określony sens fizyczny i można ją zdjąć doświadczalnie — jest zbiorem punktów M, H odpowiadających magnesowaniu polem złożonym ze składowej stałej i składowej zmiennej o amplitudzie początkowo dużej, lecz stopniowo redukowanej całkowicie. Charakterystyka ahisteretyczna reprezentuje więc magnesowanie bez strat energii wynikających z występowania histerezy (magnesowanie bezstratne).

W TJA uwzględnia się sprzężenia magnetyczne występujące między domenami magnetycznymi, przez przyjęcie efektywnego pola magnetycznego H_e określonego przy użyciu współczynnika sprzężenia α następująco

$$H_e = H + \alpha \cdot M. \quad (2)$$

¹ Oprócz terminu „namagnesowanie” bywa używany termin „magnetyzacja”.



Rys. 3. Znormalizowane wykresy namagnesowania ahisteretycznego przy różnych wartościach współczynnika sprzężenia domen: a) wg funkcji Langevina b) wg funkcji arctg

Namagnesowanie ahisteretyczne M_a opisuje się następująco

$$M_a = M_s \cdot f(H_e), \quad (3)$$

gdzie M_s — namagnesowanie w nasyceniu, zaś $f(H_e)$ jest pewną funkcją dobraną arbitralnie w celu możliwie dobrego odzwierciedlenia kształtu krzywych magnesowania. Wartość funkcji $f(H_e)$ powinna być równa zero przy H_e równym zero, oraz dążyć do jedności przy H_e dążącym do nieskończoności. W pracy JA jako przykład takiej funkcji podaje się funkcję Langevina

$$\frac{M_a}{M_s} = f = \coth \frac{H_e}{a} - \frac{a}{H_e} \quad (4)$$

gdzie a — parametr pomocniczy (w jednostkach natężenia pola).

Zamiast funkcji Langevina w dalszych rozważaniach przyjmuje się znacznie prostszą i nie nastroczającą trudności obliczeniowych funkcję arctg, tj.

$$\frac{M_a}{M_s} = f = \frac{2}{\pi} \arctg \frac{H_e}{H_P} \quad (5)$$

przy czym parametr H_P ma identyczne znaczenie, co parametr a w zależności (4). Przez dobór wartości H_P można dobierać stromość charakterystyk $M_a(H_s)$. Stromość charakterystyk $M_a(H)$ zależy natomiast nie tylko od wartości H_P , lecz również od wartości współczynnika sprzężenia α . Łatwo zauważyć, że współczynnik α nie powinien być większy od pewnej wartości krytycznej α_{kr} , tj.

$$\alpha \leq \alpha_{kr} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{H_P}{M_s}, \quad (6)$$

gdyż w przeciwnym przypadku krzywa modelująca charakterystykę $M_a(H)$ miałaby odcinek o ujemnym nachyleniu — co byłoby nienaturalne. Na rys. 3 przedstawiono wykresy $M_a(H)$ obliczone na podstawie wzoru (5) dla kilku różnych wartości α .

2.3. MAGNESOWANIE HISTERYTYCZNE

Przemieszczanie się domen magnetycznych objawia się zewnętrznie stratami energii i pętlową charakterystyką magnesowania. Przemieszczanie się domen znajdujących się w zmiennym polu ma charakter ruchu obrotowego o drobnych skokach — między kolejnymi pozycjami „zakotwiczenia” poszczególnych domen, podobnie, jak przy tarcu mechanicznym. W TJA przyjmuje się przybliżenie, że ruch domen jest procesem ciągłym. Związane zaś z obrotem domen namagnesowanie M opisuje się równaniem

$$M = M_a - \delta \cdot k \cdot \frac{dM}{dB_e}, \quad (7)$$

w którym występuje efektywna indukcja B_e

$$B_e = \mu_0(H + \alpha \cdot M). \quad (8)$$

Parametr K , określany w jednostkach indukcji, może być stały, lub zależny od H bądź od M . W dalszych rozważaniach przyjmuje się stałą wartość k . Wartość δ przyjmuje się równą 1 gdy natężenie pola H powiększa się ($dH/dt > 0$), i równą -1 gdy natężenie pola zmniejsza się ($dH/dt < 0$).

Jeżeli zależność (7) przedstawić w postaci

$$(M_a - M) \frac{dB_e}{dH} = \delta \cdot k \frac{dM}{dH} \quad (9)$$

i wykorzystać zależność (8) do określenia pochodnej $dB_e/dH = \mu_0 + \mu_0 \cdot \alpha \cdot dM/dH$, to otrzymuje się równanie

$$\frac{dM}{dH} = \frac{M_a - M}{\delta \cdot k / \mu_0 - \alpha (M_a - M)}. \quad (10)$$

To równanie określa nachylenie charakterystyki magnesowania dM/dH jako w przybliżeniu proporcjonalne do różnicy $M_a - M$ (przy pominięciu sprzężenia magnetycznego reprezentowanego przez współczynnik α).

W dalszych rozważaniach wielkość M występująca w równaniu (10), jako związana ze stratami energii („nieodwracalnymi”, ang. irreversible), jest oznaczana symbolem M_{irr} .

2.4. ODKSZTAŁCENIA SPRĘŻYSTE DOMEN

Przemieszczaniu się obrotowemu domen magnetycznych towarzyszą odkształcenia sprężyste ścian domen, pobierana w tym procesie energia jest następnie zwracana (straty energii są więc „odwracalne”, ang. reversible). W TJA rozważa się odkształcenia ścian domen (zakotwiczonych na krawędziach) jako odkształcenia sferyczne, a związane z tym procesem namagnesowanie M_{rev} określa się następująco

$$M_{rev} = c(M_a - M) \quad (11)$$

gdzie c — bezwymiarowy współczynnik proporcjonalności.

2.5. RÓWNANIE MAGNESOWANIA HISTERETYCZNEGO PRZY UWZGLĘDNIENIU ODKSZTAŁCEŃ SPRĘŻYSTYCH DOMEN

W TJA przyjmuje się, że namagnesowanie M składa się z M_{irr} i M_{rev} , tj.

$$M = M_{irr} + M_{rev} \quad (12)$$

oraz

$$\frac{dM}{dH} = \frac{dM_{irr}}{dH} + \frac{dM_{rev}}{dH}. \quad (13)$$

We wzorze (10) określającym pochodną dM_{irr}/dH można wykorzystać następujące podstawienie oparte na zależnościach (11) i (12)

$$M_a - M_{irr} = M_a - M + M_{rev} = (1 + c)(M_a - M). \quad (14)$$

Dzięki temu podstawieniu można ze wzoru (10) wyeliminować różnicę $(M_a - M_{irr})$ i zapisać go następująco

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = \frac{M_a - M_{irr}}{\delta \cdot k/\mu_0 - \alpha(M_a - M_{irr})} = \frac{(1 + c)(M_a - M)}{\delta \cdot k/\mu_0 - \alpha(1 + c)(M_a - M)} \quad (15)$$

Ponieważ zgodnie z (11)

$$\frac{dM_{rev}}{dH} = c \frac{dM_a}{dH} - c \frac{dM}{dH} \quad (16)$$

to po zsumowaniu pochodnych według (13) otrzymuje się

$$\frac{dM}{dH} = \frac{M_a - M}{\delta \cdot k/\mu_0 - \alpha(1 + c)(M_a - M)} + \frac{c}{1 + c} \cdot \frac{dM_a}{dH}. \quad (17)$$

Ta postać podstawowej zależności zamykającej cykl rozważań w TJA, różni się nieco — acz nie zasadniczo — od zależności przytoczonej w oryginalnej pracy Jilesa-Athertona w postaci następującej (być może wynikającej z błędu drukarskiego)

$$\frac{dM}{dH} = \frac{1}{1 + c} \cdot \frac{M_a - M}{\delta \cdot k/\mu_0 - \alpha(M_a - M)} + \frac{c}{1 + c} \cdot \frac{dM_a}{dH}. \quad (\text{JA-34})$$

W pracy Jilesa-Athertona nie podaje się algorytmu rozwiązywania równania oznaczonego numerem 34, ani sposobu dobierania parametrów modelu rdzenia.

Analiza równania (17) prowadzi do następujących wniosków. Nachylenie dM/dH , wyrażające faktycznie pewną krotność lokalnej przenikalności magnetycznej, jest w przybliżeniu proporcjonalne do odchylenia wartości namagnesowania M od namagnesowania ahisteretycznego M_a . W typowych przypadkach nachylenie dM/dH nie odbiega zbyt od nachylenia dM_a/dH . Nachylenie początkowe krzywej pierwotnego magnesowania ($M \approx 0, M_a \approx 0$) jest $c/(1 + c)$ razy mniejsze od nachylenia początkowego krzywej magnesowania ahisteretycznego, co pozwala sądzić, że parametr c może być rzędu 0,5. Parametr α nie wpływa istotnie na kształt pętli histerezy, gdy jego wartość jest mała, jednak przy powiększaniu wartości α wpływ ten staje się coraz bardziej istotny. Przy dużych wartościach α pętla histerezy może przekształcać się w pętlę prostokątną. Jest to zależne również od parametru k — duża wartość k powoduje „rozszerzenie” pętli.

Należy zauważyć, że w TJA przebieg magnesowania nie zależy od prędkości zmian pola (częstotliwości sygnału sinusoidalnego). TJA nie ujmuje również wpływu prądów wirowych w rdzeniu.

Reasumując powyższe streszczenia TJA należy stwierdzić, że w sumie teoria ta stwarza dobre podstawy do opracowania modelu transformatora z histerezą, zwłaszcza przy stosowaniu rdzenia ferrytowego, dla którego pominięcie wpływu prądów wirowych jest w pełni uzasadnione.

3. ROZWIĄZANIA NUMERYCZNE RÓWNAŃ MODELU JILES-A-HERTONA

Model JA jest oparty na pojęciu magnesowania ahisteretycznego, opisanego zależnością (3). Graficzne obrazy teoretycznej zależności $M(H)$ w przypadku magnesowania ahisteretycznego są przedstawione na rys. 3a — w przypadku wykorzystania funkcji Langevina, i na rys. 3b — w przypadku stosowania funkcji arctg. Stromość charakterystyk magnesowania zależy od współczynnika sprzężenia α . Przy wartości α większej niż α_{kr} występuje nieuzasadniony fizycznie odcinek charakterystyki o ujemnym nachyleniu.

Pętle histerezy oraz krzywe magnesowania pierwotnego przedstawione na rys. 1 i na rys. 2 zostały wykreślone przy użyciu programu HIST41P (w języku QBASIC). Wykresy są obrazem rozwiązań przekształconego równania (17), zasadniczego dla rozważanego modelu JA. Program oparto na algorytmie jednokrokovym, którego zastosowanie względem równania typu

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (18)$$

polega na wykorzystaniu formuły

$$y_{k+1} = y(k) + \frac{h}{2} \{f(x_k, y_k) + f[x_{k+1}, y_k + h \cdot f(x_k, y_k)]\}, \quad (19)$$

gdzie h — krok rozwiązania, zaś indeksy $k, k+1$ odnoszą się do wartości x, y w kolejnych punktach rozwiązania. Formuła (19), znana jako algorytm Rungego-Kutty drugiego rzędu (a również nazywana algorytmem Heuna), zapewnia lokalny błąd dyskretyzacji malejący kwadratowo z krokiem h .

Przygotowując się do przejścia z wielkości M (namagnesowanie w a/m) na wielkość B (indukcję w T) najczęściej używaną w obliczeniach technicznych, w programie HIST41P zastosowano przedstawienie eliminujące zmienną M z równania (17)

$$B = \mu_0(M + H) \approx \mu_0 M \quad (20)$$

gdzie

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ V} \cdot \text{s} / (\text{A} \cdot \text{m}) \approx 1,25664 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}.$$

Podstawienie jest oparte na wykorzystaniu zależności (1) w warunkach, gdy $M \gg H$. Na tej samej zasadzie przyjęto równość przybliżoną $B_a \approx \mu_0 \cdot M_a$, oraz równość

$B - B_a \approx \mu_0(M - M_a)$. Te podstawienia umożliwiają przedstawienie równania (17) w postaci wykorzystanej w programie HIST41P i w dalszych obliczeniach

$$\frac{dB}{dH} = \mu_0 \frac{(B_a - B)}{\delta \cdot k - \alpha(1 + c)(B_a - B)} + \frac{c}{1 + c} \frac{dB_a}{dH}. \quad (21)$$

W programie HIST41P równanie (21) występuje w postaci

$$\frac{dB}{dH} = MO \frac{(B_a - B)}{WK - WA(B_a - B)} + WC \frac{dB_a}{dH} \quad (21a)$$

gdzie $MO = \mu_0$, $WK = \delta \cdot k$, $WA = \alpha(1 + c)$, $WC = c/(1 + c)$.

Nasycenie namagnesowania M_s zastąpiono odpowiednio nasyceniem indukcji B_s , określając tę wielkość następująco

$$B_s = \mu_0 M_s \quad (22)$$

Na tej podstawie przyjęto następujące określenie indukcji ahisteretycznej B_a , jako wielkości analogicznej do M_a

$$B_a = B_s \frac{2}{\pi} \arctg \frac{H_e}{H_p} + \mu_0 H \approx B_s \frac{2}{\pi} \arctg \frac{H_e}{H_p} \quad (23)$$

gdzie efektywne pole magnetyczne H_e jest określone zmodyfikowaną zależnością (2)

$$H_e = H + \alpha \cdot M_a \approx H + (\alpha/\mu_0) \cdot B_a \quad (24)$$

Uwzględnienie, bądź nieuwzględnianie w zależności (23) członu $\mu_0 H$, ma znaczenie bardziej symboliczne niż wartościowe, gdyż nawet przy bardzo silnych polach wpływ tego członu na przebieg obliczanej charakterystyki magnesowania ferromagnetyków jest znikomy. Dlatego w programie HIST41P służącym do obliczania środkowych, najbardziej stromych części charakterystyk magnesowania, wykorzystano uproszczoną postać zależności (24).

Formuła algorytmu Heuna (19) w zastosowaniu do równania (21a) jest zawarta w liniach 160–164 programu HIST41P (patrz Dodatek). Przez BAN oznaczono indukcję ahisteretyczną B_a , przez B indukcję B , pochodne tych wielkości względem pola magnetycznego H są oznaczane symbolami DBAN, DB. Wartości z poprzedniego kroku są oznaczane dodaniem litery M (BANM, BM, DBANM, DBM). Lina 160 odpowiada dokładnie formule (19), linie 162, 164 służą do obliczania wartości pochodnych, które będą wykorzystane do obliczeń BAN w następnym kroku.

Cykl obliczeń przy deklaracji $FUN = 0$ zaczyna się od przyjęcia zerowych warunków początkowych ($H = 0$, $B = 0$, $B_a = 0$) i obliczenia charakterystyk magnesowania ahisteretycznego $B_a(H)$ i magnesowania początkowego $B(H)$ (li-

nie $48 \div 60$). Rysowanie każdej pętli histerezy zaczyna się również od zerowych warunków początkowych, gdy składowa stała pola HDC w linii 64 jest zadeklarowana jako zerowa. Wtedy początkowa gałąź pętli histerezy powtarza część charakterystyki magnesowania początkowego (jak np. na rys. 1). Jeżeli składowa stała pola HDC nie jest równa zeru, najpierw dokonuje się obliczenia początkowego punktu odpowiadającego polu HDC na charakterystyce magnesowania ahisteretycznego $B_a(H)$ (procedura ujęta w liniach 64 i $70 \div 80$), potem na podstawie zapamiętanych wartości (linia 100) zaczyna się obliczanie początkowych gałęzi zaprogramowanej liczby pętli histerezy (linie $120 \div 156$). Jak widać na wykresach, w każdym cyklu magnesowania początkowa gałąź pętli histerezy dość zdecydowanie odchyła się od charakterystyki magnesowania ahisteretycznego, dążąc do charakterystyki magnesowania początkowego, co jest szczególnie wyraźne przy dużych amplitudach pola magnesującego.

Przy pewnych zestawach parametrów $BS = B_a$, $K = k$, $HP = H_p$, $ALFA = \alpha$, $C = c$, krzywe opisujące pierwszą pętlę magnesowania są wyraźnie niezamknięte. Nie wynika to bynajmniej z niedostatków algorytmu Heuna, który przy obliczaniu pojedynczej pętli spisuje się dobrze, lecz głównie z tego, że pierwszy cykl magnesowania różni się zwykle od cyklu granicznego, jaki ustala się dopiero po większej liczbie cykli. Oczywiście, do obliczania większej liczby cykli magnesowania algorytmu Heuna istotnie nie nadaje się, gdyż przy dużej liczbie kroków może nie zapewnić dostatecznej dokładności i zbieżności.

Trzeba też zauważyć, że model Jilesa-Athertona przy pewnych zestawach parametrów opisuje charakterystyki znacznie odbiegające od znanych, czemu nie należy się zbytnio dziwić, gdyż jest to model przybliżony. Dlatego trzeba starannie dobierać wartości parametrów modelu, śledząc krytycznie kształt obliczanych pętli histerezy. Dodać trzeba, że opis niektórych ferromagnetyków (np. o prostokątnej pętli histerezy, i innych wymaga, jak się wydaje, przyjęcia innych postaci funkcji, niż funkcje Langevina i $\arctg$, a być może uwzględnienia jeszcze innych zależności.

4. ZASTOSOWANIE PROGRAMU NAP2 DO RÓWNAŃ MODELU JILESA-ATHERTONA

Całkowanie numeryczne równania (21) w zastosowaniu do modelowania dławików i transformatorów nastręcza pewne trudności, które stają się niekiedy bardzo istotne. Trudności wynikają z potrzeby przełączania wartości parametru $\delta = + - 1$, przy przechodzeniu z jednej gałęzi na drugą gałąź pętli histerezy. To przełączanie — wiążące się z nieciągłością pochodnej dB/dH w skrajnych punktach pętli — może być niestabilne (oscylacyjne, polegające na kilkukrotnej zmianie wartości δ , przy czym nie zawsze ustala się właściwą wartość δ), co może powodować zakłócenia i ewentualną rozbieżność procesu iteracyjnego.

Przełączenie wartości δ powinno nastąpić każdorazowo przy zmianie kierunku magnesowania, tj. przy zmianie pola H . Stwarza to dodatkowe kłopoty, jeżeli równanie (21) jest całkowane przy użyciu programów uniwersalnych (jak NAP2). Równanie to bowiem musi być modelowane przez równoważne obwody elektryczne, występujące obok innych obwodów sieci elektrycznej, której częścią jest dany dławik lub transformator. Pole H w takich przypadkach nie jest oczywiście zmienną niezależną, ale pozostaje ciągle zmienną decydującą o wartości δ . Musi być zatem zastosowany dodatkowo specjalny obwód, służący jedynie do wykrywania zmiany znaku pochodnej dH/dt i reagujący odpowiednią wartością δ . Powinien to być obwód typu „różniczkującego” względem zmiennej H . Problem się na tym nie kończy, bowiem oprócz pożądaných przełączeń wartości δ na krańcach pętli histerezy (przebiegających wprawdzie niekiedy ze wspomnianymi wyżej oscylacjami), mogą wystąpić przełączenia na zboczach jej gałęzi, mimo pełnej regularności opisu pętli na tych odcinkach krzywej magnesowania. Te niepożądane przełączenia wartości δ mogą wynikać z chwilowego zaburzenia procesu obliczeń iteracyjnych, tj. z lokalnej utraty zbieżności, przy czym źródło tych zaburzeń może wiązać się z innymi częściami sieci elektrycznej. W zwykłych układach takie chwilowe zaburzenia zdarzają się często i zwykle nie powodują destrukcyjnych zmian procesu iteracyjnego, gdyż po kilku dalszych cyklach jest możliwe ponowne uzyskanie zbieżności. Jednak w przypadku sieci zawierających modele elementów z histerezą (np. ferromagnetycznych), jak wykazały liczne doświadczenia — tu tylko wzmiankowane — jest zupełnie inaczej. Każde przełączenie na inną gałąź pętli histerezy, zwłaszcza w punktach odległych od skrajnych punktów pętli, pociąga tak dużą zmianę parametrów rozwiązania, że powrót do rozwiązania właściwego często nie jest już możliwy. Z reguły też po przypadkowym przełączeniu wartości δ (wywołanym chwilowym brakiem zbieżności) program liczy dalej bez zakłóceń, jednak obliczane rozwiązanie już nie dotyczy układu badanego.

Stwierdzono, że przy zastosowaniu modelu Jilesa-Athertona tego rodzaju zakłócenia są dość częste. Podatność układu zawierającego model JA na takie zakłócenia zwiększa się zwłaszcza wtedy, gdy gałęzie pętli histerezy mają odcinki o ujemnym nachyleniu (w pobliżu skrajnych punktów pętli, tj. w obszarach, gdzie należy spodziewać się najmniejszych wartości pochodnej dB/dH). Stwierdzono również, że praktycznie niemożliwy jest taki dobór współczynników α , c , k występujących w równaniu (21), aby przy opisywaniu konkretnego materiału ferromagnetycznego uzyskać zadowalający (bez odcinków o ujemnym nachyleniu) kształt pętli histerezy dla wszystkich możliwych amplitud sinusoidalnego pola magnesującego. Z reguły kształt pętli jest właściwy dla amplitud małych i dużych, natomiast w pewnym zakresie amplitud pośrednich występują odcinki o ujemnym nachyleniu (zwykle trudno dostrzegalne, gdyż stromość tych odcinków jest mała).

Pokonanie przedstawionych trudności, lub choćby ich częściowe zmniejszenie, niewątpliwie wymaga dalszych studiów i prawdopodobnie modyfikacji modelu JA.

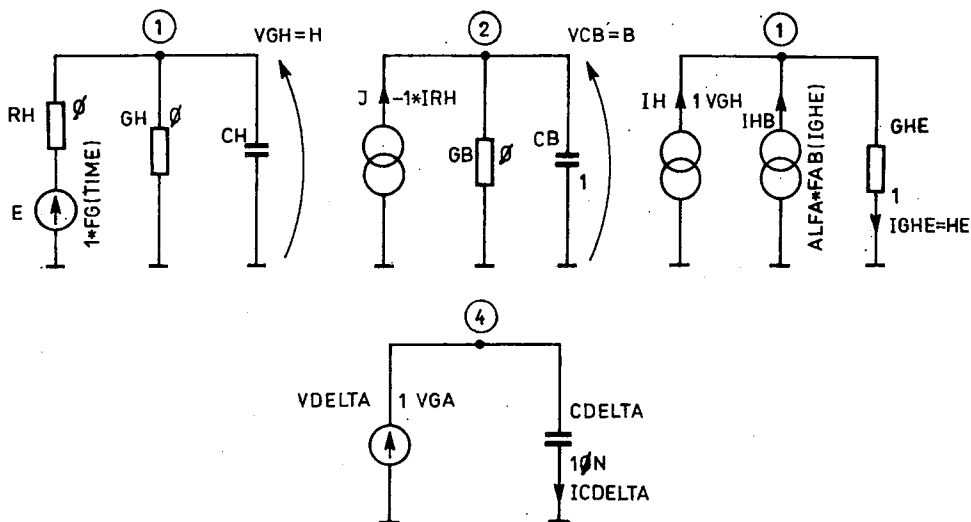
W dalszej części niniejszej pracy jest stosowany model JA nieznacznie zmodyfikowany, opisany przez zespół równań

$$\frac{dB}{dt} = \left[\frac{B_a - B}{\delta \cdot P_k - P_l(B_a - B)} + W_c \frac{dB_a}{dH} + \mu_0 \right] \frac{dH}{dt} \quad (25)$$

$$B_a = B_s \frac{2}{\pi} \arctg \frac{H_e}{H_p} \quad (26)$$

$$H_e = H + \alpha \cdot B_a. \quad (27)$$

Powyższe równania różnią się od przytoczonych wcześniej zależności tym, że parametry α , P_k , P_l są traktowane jako wielkości wzajemnie niezależne, co zapewnia większą swobodę przy ich doborze. Równanie (25) powstało z przekształcenia równania (21) przy uwzględnieniu, że pole H i indukcja B są funkcjami czasu t . Do równania wprowadzono przenikalność magnetyczną próżni μ_0 , dla zapewnienia właściwego przebiegu $B(H)$ w zakresie nasycenia. Należy zauważyć, że zawartość nawiasu kwadratowego w równaniu (25) wyraża lokalną przenikalność magnetyczną dB/dH na zboczach pętli.



Rys. 4. Obwody wykorzystane do modelowania procesów magnesowania przy zastosowaniu programu NAP2 (zadanie HIS100P)

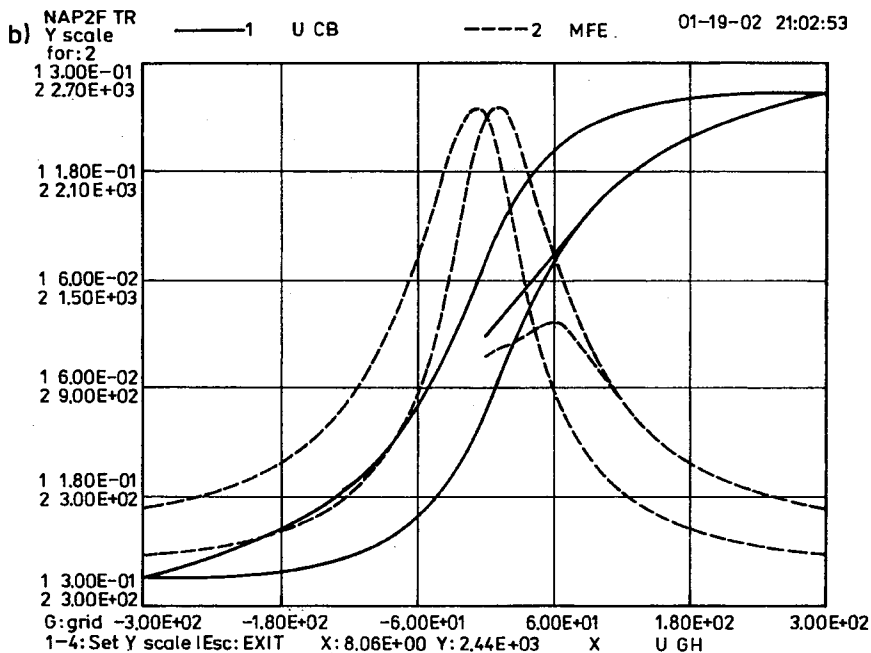
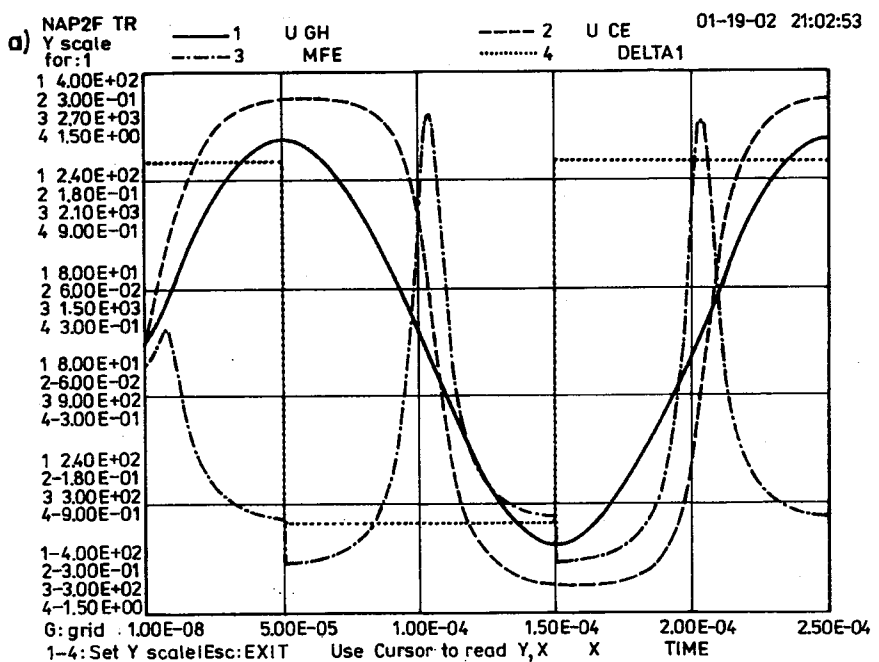
Zespół równań (25) ÷ (26) może być rozwiązany przy użyciu zastępczego zespołu obwodów sprzężonych przedstawionego na rys. 4. Rozwiązanie to jest treścią przytoczonego niżej zadania HIS100P w języku programu NAP2.

```

CIRCUIT: HIS100P * Magnesowanie rdzenia z histereza
HP=73 A/m,BS=.36 T (ind. nasycenia)
K=280;PL=2800;MO=1.25664E-6;ALFA=.02
C=.75,WC=C/(1+C),MO=4PHIE-7 H/m - przenikalnosc magn. prozni
O=0;AM=300;OMG=10000PHI
Skladowa stala, amplituda, pulsacja pola magn.
G/SIN/ A 1*AO B 1*AM D 1/OMG
DELTA/TAB2/ -1E60 -1 0 -1 0 1 1E60 1
H 1 0 .001 E 1*FG(TIME)
H 1 0 0;CB 2 0 1;GHE 3 0 1
DELTA 4 0 1 VGH;CDELTA 4 0 1ON;DELTA1=1*FDELTA(ICDELTA)
VCB=B - indukcja w T (1Tesla=1Wb/m^2)
B 0 2 0 J -1*IRH: VGH=VCH - pole H w A/m
BA/ATAN/ B .22918311 D 73: BS=.36T, B=2/PHI*BS, D=HP-73A/m
H 0 3 1 VGH;BA=1*FBA(IGHE): BA (ind. ahister. bez skl. MO*H)
HB 0 3 .02*FBA(IGHE): .02=ALFA
D1// A 1 B 1 D 73 E 2: 73=HP
F1=318.52258*FD1(IGHE);FD2// 1*DF1: 318.52258 = PHI/2*HP/BS
FBA=1/FD2(-1*ALFA)
B// A -1*PL B 1*DELTA1 C 1*BA D -1*PK E -1
LAA=.4286*DFBA;LBB=1/FB(VCB): .4286=C/(1+C)
MD// 1*LAA;CH 1 0 1*FMD(LBB) 1*MO
pojemnosc rowna przenikalnosci magnetycznej
FMD i CH wyrazaja lokalna (dynamiczna) przenikalnosc magn.
dB/dH w T/(A/m)
FE= 7.958E5*CH: przenikalnosc magn. w Gs/Oe jest wieksza
1E7/(4PHI)=7.958E5 razy
MODIFY XVNALL 10 XIALL 1
TIME 0 250U
TR *GRAPH VGH VCB MFE DELTA1 *GRAPH (VGH) VCB MFE
RUN STEP 10N TRUNC 1E-4 MAXIT 200 MINSTEP 250N

```

Do całkowania wykorzystano obwody typu RC. Pole H jest reprezentowane sinusoidalną SEM źródła w obwodzie pierwszym; ze względu na $RH = 0$ SEM źródła jest równa napięciu na konduktancji GH , tak więc $VGH = H$. Pole efektywne H_e jest obliczane w obwodzie trzecim jako suma prądu I_H (równego liczbowo napięciu VGH) i prądu I_{HB} wyrażającego składową $\alpha \cdot B_a$ (obliczaną przez program pod postacią iloczynu $ALFA \cdot FBA(IGHE)$). Użycie oddzielnego obwodu do sumowania prądów I_H i I_{HB} jest koniecznością wynikającą z zależności prądu I_{HB} od rezultatu sumowania — od prądu $IGHE = H_e$. Pojemność CH wyraża chwilową przenikalność magnetyczną dB/dH , prąd płynący przez pojemność CH $ICH = -IRH$ po przetransformowaniu do obwodu drugiego wytwarza na pojemności CB napięcie będące analogiem indukcji magnetycznej, tj. $VCB = B$. Obwód czwarty spełnia funkcję obwodu różniczkującego względem sygnału VGH ; służy do indykacji zmiany kierunku pola H . W tym celu jest wykorzystywana funkcja $FDELTA//$, która zależnie od znaku argumentu (prądu $ICDELTA$) generuje wartość $DELTA1$ równą $+1$, lub -1 . W tym przypadku zastosowanie obwodu in-



Rys. 5. Wyniki obliczeń przy użyciu programu NAP2 (zadanie HIS100P): a) przebiegi czasowe; b) postać pętli histerezy i wykres przenikalności magnetycznej (pozycja kursora umożliwia odczyt wartości maksymalnej przenikalności magnetycznej — przy dolnej skali wartości)

dykacji zmiany kierunku pola H nie jest konieczne, gdyż w danym zadaniu pole to jest zmienną pierwotną. Zastosowanie obwodu indykacji ma na celu sprawdzenie prawidłowości jego funkcjonowania.

Zależność $B_a(H_e)$ jest obliczana przy zastosowaniu funkcji FBA/ATAN/, przez instrukcję $BA = 1 * FBA(IGHE)$. Pochodna dB_a/dH występująca w równaniu (25) została wyznaczona przez różniczkowanie zależności (26) z uwzględnieniem zależności (27). Ponieważ

$$\frac{dB_a}{dH} = \frac{2B_s}{\pi H_p} \cdot \frac{1}{1 + (H_e/H_p)^2} \cdot \frac{dH_e}{dH}; \quad \frac{dH_e}{dH} = 1 + \alpha \cdot \frac{dB_a}{dH}$$

po podstawieniu dH_e/dH otrzymuje się

$$\frac{dB_a}{dH} = \frac{1}{\frac{\pi H_p}{2B_s} [1 + (\frac{H_e}{H_p})^2] - \alpha}. \quad (28)$$

Wartość pochodnej dB_a/dH jest wyznaczana przez instrukcję $DFBA = 1/DFD2(-ALFA)$, przy wykorzystaniu instrukcji pomocniczych $FD1//$, $DF1$, $FD2//$.

Wielkość LAA jest równa iloczynowi $W_c \cdot dB_a/dH$ występującemu w równaniu (25) w nawiasach kwadratowych, natomiast wielkość LBB jest równa wartości ułamka stanowiącego pierwszą część sumy zawartej w tym nawiasie. Suma $(LAA + LBB + \mu_0) = CH$ wyraża zatem chwilową przenikalność magnetyczną dB/dH w jednostkach SI, tj. w T/(A/m). Równoważna przenikalność magnetyczna określona w Gs/Oe — większa 795800 razy — jest oznaczona symbolem MFE.

Na rys. 5a są przedstawione obliczone wykresy indukcji magnetycznej $B=VCB$ i przenikalności magnetycznej MFE, na tle wykresu sinusoidalnie zmiennego pola $H=VGH$ o amplitudzie 300 A/m. Są widoczne spłaszczenia wierzchołków wykresu B , wynikające z częściowego nasycania się rdzenia. Wykres MFE jest nieciągły w punktach zwrotu kierunku magnesowania (momenty zmiany kierunku magnesowania są zaznaczone zmianą wartości $\delta = DELTA1$, która została również wykreślona). Na rys. 5b przedstawiono kształt pętli histerezy (z gałęzią magnesowania początkowego) i wykres wartości MFE wynikający z pełnego obiegu pierwszej pętli.

5. DOBÓR PARAMETRÓW MODELU RDZENIA

W niniejszej pracy podaje się jedynie orientacyjne wskazówki naświetlające dobór parametrów modelu rdzenia.

Podstawową wielkością jest indukcja nasycenia $B_s = BS$, której wartość trzeba przyjąć na samym początku. Następnie trzeba przyjąć wartość współczynnika $H_p = HP$. Dla typowych miękkich ferromagnetyków wartość H_p może

być wyznaczona przy zastosowaniu przybliżonego wzoru określającego największą chwilową wartość przenikalności magnetycznej

$$\mu_m \approx 0,98 \cdot M_m \quad (29)$$

gdzie

$$M_m = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{B_s}{H_p} \quad (30)$$

Na przykład, dla rdzenia z typowych blach transformatorowych (Fe - Si 4%) przy wartościach $B_s = 2T$, $\mu_m = 5 \cdot 10^{-3} T/(A/m)$, należy przyjąć $H_p \approx 250 A/m$. Następnie trzeba określić parametry α , W_c . Można ich wartości przyjąć wstępnie i ewentualnie zmienić w następnych krokach. Wartość współczynnika α zwykle znajduje się w przedziale 0,005–0,5, wstępnie można przyjąć typową wartość $\alpha = 0,015$. Przez wybór wartości α określa się wartość początkową przenikalności magnetycznej μ_p , która zależy również od współczynnika W_c ; tę zależność ujmuje wzór

$$\mu_p = W_c \frac{M_m}{1 - \alpha} \quad (31)$$

Gdyby przyjąć dla blach Fe - Si wartość $\mu_p \approx 1,35 \cdot 10^{-3} T/(A/m)$ (czyli około 1000 Gs/Oe), to przy $\alpha = 0,15$ należałoby przyjąć również $W_c \approx 0,25$.

Współczynniki α , W_c występują w ogólnym wyrażeniu określającym zależność części przenikalności magnetycznej μ od chwilowego punktu pracy na charakterystyce magnesowania rdzenia. Ogólnie przenikalność magnetyczna μ jest określana następującą sumą

$$\mu = \mu_a + \mu_b + \mu_0 \quad (32)$$

Przenikalność μ_a (oznaczaną w dotychczasowych programach symbolem LAA) określa wzór

$$\mu_a = W_c \frac{M_m}{1 - \alpha + \left(\frac{H + \alpha \cdot B_a}{H_p} \right)^2}, \quad (33)$$

Szczególną postacią wzoru (33) jest zależność (31), bowiem $\mu_a(0) = \mu_p$. Natomiast przenikalność μ_b (w programie HIS100P oznaczona symbolem LBB) określa wzór

$$\mu_b = \frac{B_a - B}{\epsilon P_k - P_l(B_a - B)} \quad (34)$$

Powyższe wzory odzwierciedlają podstawową zależność (25).

Taką samą wartość początkowej przenikalności μ_p można zapewnić przy różnych, odpowiednio dobranych wartościach α , W_c , co wynika ze wzoru (31), jednak przy większych wartościach α wartość μ_a będzie zmieniać się bardziej, co wynika ze wzoru (33). To spostrzeżenie można wykorzystać przy późniejszym korygowaniu

niu wartości α , W_c — mając na celu ukształtowanie pożądanej zależności μ_a od chwilowego punktu pracy rdzenia.

Dobór wartości P_l, P_k może również polegać na przyjęciu wstępnych wartości tych parametrów i późniejszej ich korekcji. Zwykle wartość P_l wynosi od 2000 T/(A/m) do 4000 T/(A/m), zaś liczbowa wartość P_k jest równa około 0,015–0,5 wartości P_l (parametr P_k jest określany w A/m). Przyjęcie większej wartości P_k pociąga rozszerzenie pętli histerezy. Duże wartości P_l, P_k — znacznie większe od przytoczonych wyżej — powodują pewne upodobnienie pętli histerezy do tzw. pętli prostokątnych.

Najlepiej jest dobierać wartości P_l, P_k — a również korygować inne parametry — obserwując bezpośrednio na monitorze komputera kształty poszczególnych pętli wynikające z przyjętych wartości parametrów.

Autor dziękuje Doktorowi Marianowi Bukowskiemu za cenne rozmowy dotyczące możliwości scałkowania równań modelu JA przy użyciu programu NAP2.

DODATEK

```

10 T$ = "HIST41P": 'Cykle magnesowania histeretycznego - wg funkcji ahisteretycznej typu arc tg
    'Magnesowanie ze składowa stała pola magnesującego. Poprawiono 1.10.'91

12 H$ = "krzywa magn. ahisteretycznego": B$ = "krzywa magn. pierwotnego"
    M1$ = "Magnesowanie ze składowa stała": M2$ = "pola magn. Hdc="
    M3$ = "Amplituda pola od Ha=": M4$ = "do Ha="

14 LOCATE 1, 1: PRINT "Okresl rodzaj charakterystyk, FL=0 to komplet krzywych,"
    LOCATE 2, 1: PRINT "FL=1 to magnesowanie ahisteretyczne i początkowe,"
    LOCATE 3, 1: PRINT "FL=2 to petle histerezy.": INPUT "Zatem, FL= ": FL

18 CLS : SCREEN 3: PI = 3.1415926#
20 XL = -400: XP = -XL: WINDOW (XL, -1.025)-(XP, 1.03)
22 LINE (XL, 0)-(XP, 0): LINE (0, -1.12)-(0, 1.12)
24 DSX = 100: FOR J = 0 TO XP STEP DSX: LINE (J, 0)-(J, -.02): NEXT J
26 DSX = -DSX: FOR J = 0 TO XL STEP DSX: LINE (J, 0)-(J, -.02): NEXT J
28 FOR J = -1 TO 1.01 STEP .1: LINE (XL / 120, J)-(XP / 100, J): NEXT J
30 LOCATE 14, 1: PRINT CINT(XL): LOCATE 14, 76: PRINT CINT(XP): LOCATE 12, 74: PRINT "H, A/m"
32 LOCATE 1, 37: PRINT "+1": LOCATE 25, 43: PRINT "-1";
34 'LOCATE 1, 43: PRINT "B/Bs"
    LOCATE 1, 43: PRINT "M/MS"
36 LOCATE 25, 73: PRINT T$:

40 BS = .18: A = 85: C = .5: K = .00006: ALFA = .0005
42 WS = 2 * BS / PI: WP = WS * A: WH = A * A: MO = 4 * PI * .0000001
44 WK = K: WA = ALFA * (1 + C): WC = C / (1 + C): ALM = ALFA / MO: DH = .01 * A: ALFAkr = PI / 2 * A * MO / BS
    IF ALFA <= ALFAkr THEN 46 ELSE CLS
    PRINT "WSPOLCZYNNIK SPRZEZENIA ALFA ZA DUZY, WIEKSZY OD ALFAkr=": ALFAkr: GOTO 200

```

```

46 LOCATE 1, 1: PRINT "B="; BS; "T": LOCATE 2, 1: PRINT "HP="; A; "A/m"
   LOCATE 3, 1: PRINT "K="; K; "T": LOCATE 4, 1: PRINT "C="; C; LOCATE 5, 1: PRINT "α="; ALFA
   LOCATE 7, 1: PRINT "α =" ; LOCATE 7, 6: PRINT USING ".#####"; ALFAkr; LOCATE 8, 2: PRINT "kr"
   'LOCATE 6, 1: PRINT "WS="; WS; " WP="; WP; LOCATE 7, 1: PRINT "WC="; WC; " WA="; WA
   'LOCATE 8, 1: PRINT "WK="; WK

```

```

48 IF FL = 2 THEN 62 ELSE LOCATE 2, 50: PRINT H$: LOCATE 7, 56: PRINT B$
50 H1 = 400: FOR H = 0 TO H1 STEP DH
   IF H = 0 THEN B = 0: BM = 0: BANM = 0: DBANM = WP / (WH - WP * ALM): DBM = WC * DBANM
52 GOSUB 160
54 LINE (HM, BANM / BS)-(H, BAN / BS)
56 B = BM + DH / 2 * (DB + DBM)
58 LINE (HM, BM / BS)-(H, B / BS)
60 HM = H: BM = B: DBM = DB: BANM = BAN: DBANM = DBAN: NEXT H

```

```

62 IF FL = 1 THEN 170
64 HDC = -20: IF HDC <> 0 THEN DH = DH * SGN(HDC): GOTO 70
66 BDC = 0: BMDC = 0: BANDC = 0: BANMDC = 0: DBANMDC = WP / (WH - WP * ALM): DBMDC = WC * DBANMDC: GOTO 120

```

```

70 FOR H = 0 TO HDC STEP DH: IF H = 0 THEN B = 0: BM = 0: BANM = 0: DBANM = WP / (WH - WP * ALM): DBM = WC * DBANM
72 GOSUB 160
76 B = BM + DH / 2 * (DB + DBM)
80 HM = H: BM = B: DBM = DB: BANM = BAN: DBANM = DBAN: NEXT H
100 BDC = B: BMDC = BM: BANDC = BAN: BANMDC = BANM: DBANMDC = DBANM: DBANDC = DBAN

```

```

120 HA1 = 50: HA2 = 300: DHA = 50: FOR HA = HA1 TO HA2 STEP DHA
122 H0 = HDC: H1 = HDC + HA: DH = ABS(DH): L = 0
124 FOR H = H0 TO H1 STEP DH

```

```

126 IF L = 0 AND H = H0 THEN 128 ELSE 142
128 B = BDC: BM = BMDC: BAN = BANDC: BANM = BANMDC: DBANM = DBANMDC: DBM = DBMDC
130 GOSUB 160: B = BAN: BM = BAN: GOTO 148
142 GOSUB 160
144 B = BM + DH / 2 * (DB + DBM)
146 LINE (HM, BM / BS)-(H, B / BS)
148 HM = H: BM = B: DBM = DB: BANM = BAN: DBANM = DBAN: NEXT H: IF L = 1 THEN 154
150 IF L = 2 THEN 156
152 IF L = 0 THEN H0 = H1: H1 = HDC - HA: DH = -DH: WK = -WK: L = 1: GOTO 124
154 IF L = 1 THEN H0 = H1: H1 = HDC + HA: DH = -DH: WK = -WK: L = 2: GOTO 124
156 NEXT HA: GOTO 170

```

```

160 BAN = BANM + DH / 2 * (DBANM + WP / (WH + (H + ALM * (BANM + DH * DBANM)) ^ 2 - WP * ALM))
162 DBAN = WP / (WH + (H + ALM * BAN) ^ 2 - WP * ALM)
164 DB = M0 * (BAN - B) / (WK - WA * (BAN - B)) + WC * DBAN
166 RETURN

```

```

170 IF HDC = 0 THEN 174 ELSE LOCATE 17, 47: PRINT M1$: LOCATE 18, 47: PRINT M2$: HDC; "A/m"
174 IF FL = 0 OR FL = 2 THEN 176 ELSE 189
176 LOCATE 20, 47: PRINT M3$: HA1; "A/m": LOCATE 21, 47: PRINT M4$: HA2; "A/m co dHa="; DHA; "A/m"
189 E$ = INKEY$: IF E$ = "" THEN 189
200 END

```

BIBLIOGRAFIA

1. D.C. Jiles: *Theory of ferromagnetic hysteresis*. J. of Magnetism and Magnetic Materials 61 (1986), pp. 48–60.
2. D. Nitzan: MTRAC. *Computer program for the transient analysis of circuit including magnetic cores*. IEEE Trans. Magn., vol. MAG-5, Sept. 1969, pp. 524–533.
3. M.K. El-Sharbiny: *Representation of magnetic characteristics by a sum of exponentials*. IEEE Trans. Magn., vol. MAG-9, Mar. 1973, pp. 60–61.
4. J.H. Chan, A. Vladimirescu, Xiao-Chun Gao, P. Liebmman, J. Valainis: *Nonlinear transformer model for circuit simulation*. IEEE Trans. Computer-Aided Design, vol. 10, Apr. 1991, pp. 476–481
5. J.H. Baranowski: *Model transformatora z histerezą magnetyczną rdzenia*. Raport naukowy dostępny w Bibliotece Inst. Podstaw Elektroniki Pol. Warszawskiej, 1991
6. J. Izydorczyk: PSpice. *Komputerowa symulacja układów elektronicznych*. Gliwice, Helion, 1993

J.H. BARANOWSKI

MODIFICATION OF THE MODEL JILES-ATHERTON

Summary

The paper discussed application of the hysteretic magnetization theory by D.C. Jiles and D.L. Atherton. New algorithms are presented for the hysteresis loop and magnetic permeability calculations in ferromagnetics. Next, same difficulties related to the original formulation are revealed and remedies presented. The paper is introduction to a novel transformer model which is to be formulated in a companion publication.

621.319.1
621.314.2.042

Model transformatora z histerezą magnetyczną rdzenia

JERZY HUBERT BARANOWSKI

Instytut Podstaw Elektroniki, Politechnika Warszawska

Otrzymano 1993.07.10

Autoryzowano do druku 1993.10.10

Dedykuję Profesorowi Adamowi Smolińskiemu

W artykule jest przedstawiony model transformatora z histeretycznym rdzeniem ferrytowym, opracowany według zasad wywodzących się z teorii mechanizmów magnesowania ferromagnetyków Jilesa-Athertona. Model jest dostosowany do programu NAP2. Są podane przykłady wykorzystania modelu w układach z sygnałami sinusoidalnymi i impulsowymi.

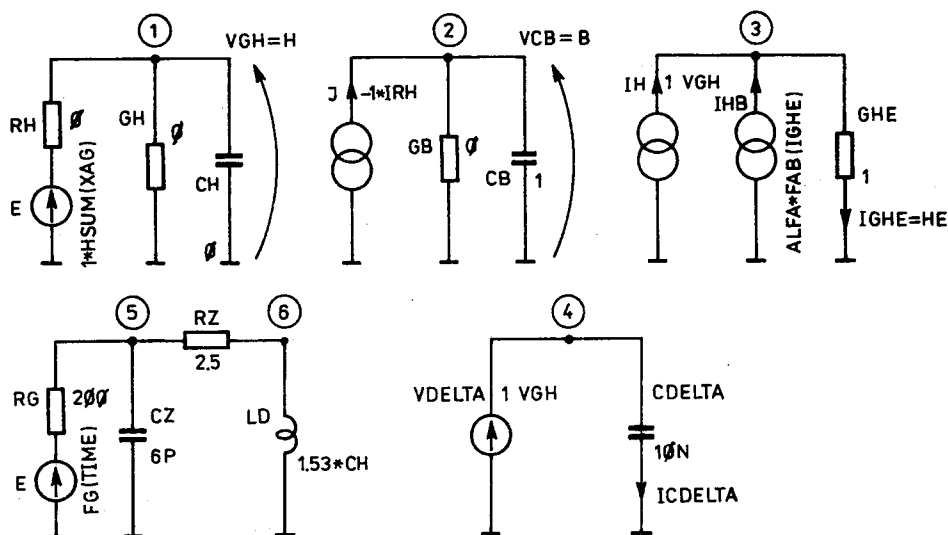
1. WSTĘP

Praca ta jest oparta na teorii magnesowania histeretycznego D.C. Jilesa i D.L. Athertona [1], w ujęciu zmodyfikowanym [2]. Przedstawione w niej oryginalne modele dławika i transformatora są podane w ujęciu przystosowanym do wykorzystania ich w analizie układów elektronicznych przy użyciu programu NAP2. Zasady budowy tych modeli nawiązują bezpośrednio do pracy [2], tzn. niniejszy artykuł może być uważany za kontynuację tej pracy.

2. MODEL DŁAWIKA

Obwody modelujące dławik z rdzeniem magnetycznym są przedstawione na rys. 1.

Są to w istocie te same obwody, co przedstawione na rysunku 4 w pracy [2], jedyna istotna różnica polega na dołączeniu piątego obwodu symulującego sprzężenie rdzenia ze źródłem sterującym o rezystancji wewnętrznej RG, poprzez uzwo-



Rys. 1. Schemat zastępczy dławika w układzie sterowania ze źródła o rezystancji $R_G = 200\Omega$

jenie (o liczbie zwojów Z). Dla źródła sterującego, dławik reprezentuje głównie pewną indukcyjność histeretyczną, w obwodzie wejściowym uwzględniono jednak również rezystancję R_T i pojemność własną C_Z uzwojenia. Indukcyjność dławika L_D , jako wielkość chwilowa, jest liczbowo równa pewnej wielokrotności chwilowej przenikalności magnetycznej μ . Obliczanie tej indukcyjności polega na wykorzystaniu wzoru

$$L_D = \frac{A_E}{L_E} \cdot \mu \cdot Z^2, \quad (1)$$

w którym chwilowa przenikalność magnetyczna μ jest określona w jednostkach SI (w $T/(A/m = H/m)$), pole przekroju poprzecznego A_E w m^2 , długość drogi magnetycznej L_E w m.

Zespół obwodów modelujących dławik jest treścią przytoczonego niżej zadania HIS205 sformułowanego w języku programu NAP2.

Zadanie dotyczy dławika o 40 zwojach nawiniętych na rdzeniu E25/13/7 (ferryt 3C8 firmy Philips). Do dławika jest doprowadzone napięcie ze źródła SEM o amplitudzie 80 V i częstotliwości 5 kHz. Rezystancja wewnętrzna źródła wynosi $R_G = 200\Omega$.

Pole magnesujące jest wyrażone przez funkcję sumującą $HSUM//$. Dzięki zastosowaniu tej funkcji powstaje możliwość uwzględnienia wpływu szczeliny powietrznej (długości $L_{AG} = AGL$), przy transformatorze zaś — możliwość sumowania pól wynikających z prądów przepływających przez kilka uzwojeń. W przypadku rdzenia bez szczeliny i pojedynczego uzwojenia o liczbie zwojów Z ,

```

*CIRCUIT: HIS205 * Dławik z histereza magnetyczna rdzenia
: rdzen ferrytowy, może mieć szczelinę powietrzną
: Dane geometryczne rdzenia E25/13/7
: AE=5.5E-5m^2 (przekrój rdzenia), LE=5.75E-2m (droga magnet.)
: C1=1045.45m^-1, BS=.36T (ind. nasycenia)
PK=280;PL=2800;MO=1.25664E-6;ALFA=.02: C=.75
: MO=4PHIE-7 H/m - przenikalność magn. próżni
AO=0;AM=80;OMG=10000PHI
: Składowa stała, amplituda, pulsacja sygnału sterującego
FG/SIN/ A 1*AO B 1*AM D 1/OMG
FDELTA/TAB2/ -1E60 -1 0 -1 0 1 1E60 1
RG 6 0 200 E 1*FG(TIME);RZ 6 7 2.5;CZ 6 0 6P
: RZ, CZ - rezystancja i pojemność własna uzwojenia dławika
HSUM// 695.65*IRZ: 695.65-WH=Z/LE, Z=40 zwojów
GH 1 0 0;CB 2 0 1;GHE 3 0 1
XAG=-69.2*VCB;RH 1 0 0 E 1*HSUM(XAG)
: 69.2 = AGL/(MO*LE), AGL=5E-6m - długość szczeliny powietrznej
VDELTA 4 0 1 VGH;CDELTA 4 0 1ON;DELTA1=1*FDELTA(ICDELTA)
: VCB=B - indukcja w T (1Tesla=1Wb/m^2)
GB 0 2 0 J -1*IRH: VGH=VCH - pole H w A/m
FBA/ATAN/ B .22918311 D 73: BS=.36T, B=2/PHI*BS, D=HP=73A/m
IH 0 3 1 VGH;BA=1*FBA(IGHE)
: BA (ind. ahisteretyczna bez składowej MO*H)
IHB 0 3 .02*FBA(IGHE): .02=ALFA
FD1// A 1 B 1 D 73 E 2: 73=HP
DF1=318.52258*FD1(IGHE);FD2// 1*DF1: 318.52258=PHI/2*HP/BS
DFBA=1/FD2(-1*ALFA)
FB// A -1*PL B 1*DELTA1 C 1*BA D -1*PK E -1
LAA=.4286*DFBA;LBB=1/FB(VCB): .4286=C/(1+C)
FMD// 1*LAA;CH 1 0 1*FMD(LBB) 1*MO
: FMD i CH wyrażają lokalną (dynamiczną) przenikalność
: magnetyczną dB/dH w T/(A/m)
MFE= 7.958E5*CH
: przen. magn. w Gs/Oe jest większa 1E7/(4PHI)=7.958E5 razy
LD 7 0 1.53*CH
: 1.53m=WL=Z^2*AE/LE, LD - indukcyjność chwilowa (lokalna)
: dławika
*MODIFY XVNALL 10 XIALL 1
*TIME/-2 0 275U
*TR *GRAPH VCZ IRZ VCB MFE *GRAPH (VGH) VCB MFE
: MFE - przenikalność w Gs/Oe
*RUN STEP 80N TRUNC 1E-4 MAXIT 200 MINSTEP 320N

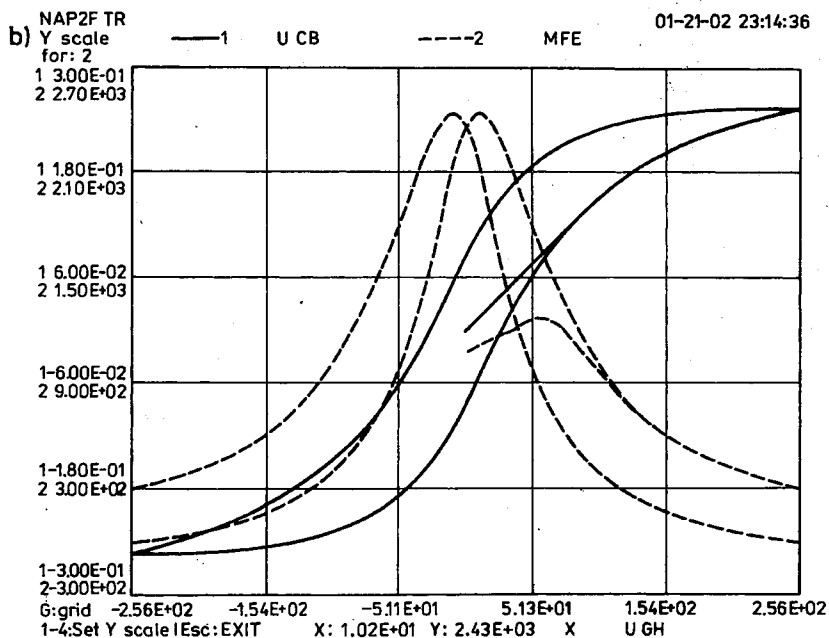
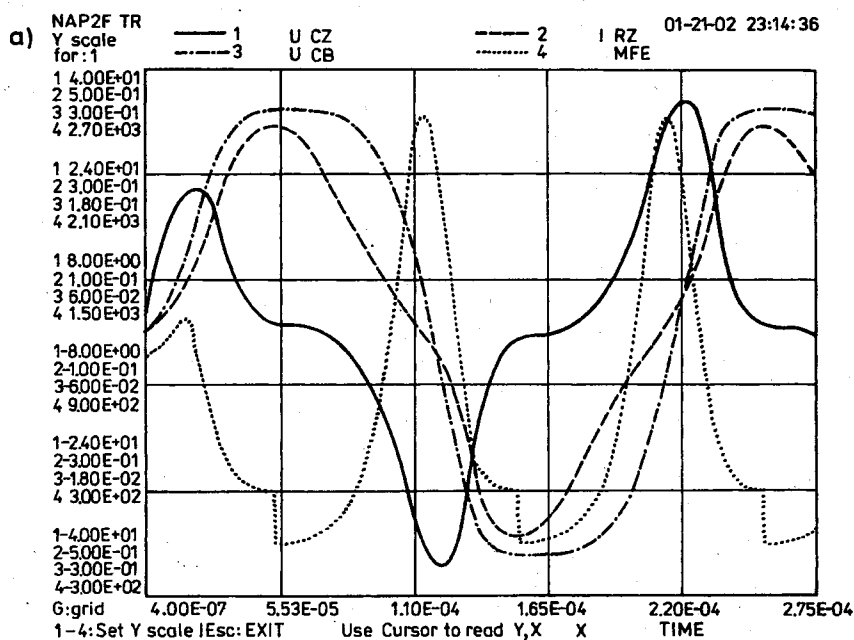
```

natężenie pola magnetycznego w magnetowodzie długości L_E określa się wzorem

$$H = I_{RZ} \frac{Z}{L_E}. \quad (2)$$

Dla rdzenia ze szczeliną powietrzną wydłużającą obwód magnetyczny o długość szczeliny L_{AG} można przyjąć — wobec ciągłości strumienia magnetycznego — równanie bilansujące siłę magnetomotoryczną

$$H \cdot L_E + H_{AG} \cdot L_{AG} = I_{RZ} \cdot Z. \quad (3)$$



Rys. 2. Przebiegi występujące w układzie z Rys. 1 po włączeniu sinusoidalnej SEM źródła o amplitudzie 80 V i częstotliwości 5 kHz: a) przebiegi czasowe; b) wykresy pętli histerezy i przenikalności magnetycznej

Ponieważ natężenie pola w szczelinie może być określone jako $H_{AG} = B/\mu_0$ (w przypadku nierozpraszania się strumienia magnetycznego w szczelinie, co jest możliwe przy szczelinie dostatecznie wąskiej i dużej powierzchni A_E), to natężenie pola efektywnie magnesującego rdzeń można wyznaczyć następująco

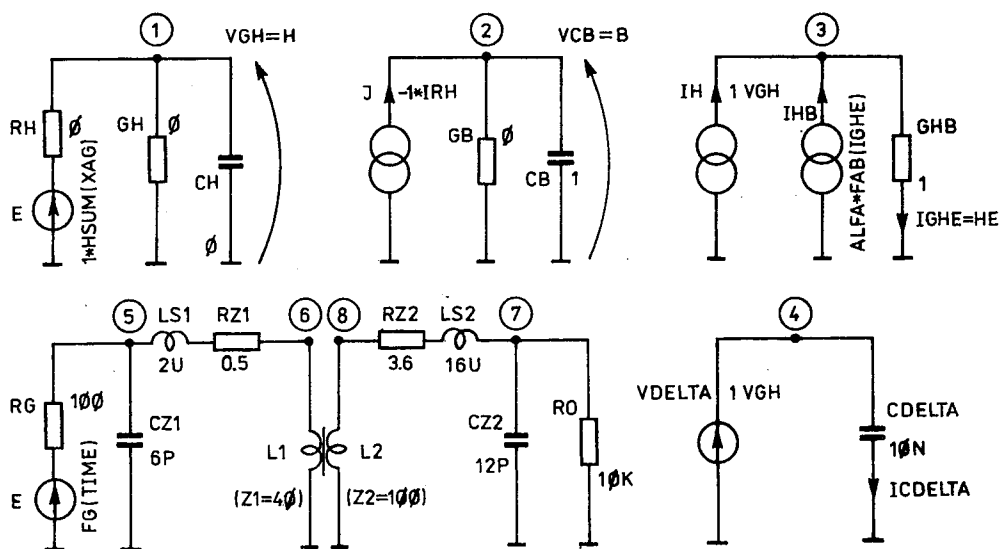
$$H = I_{RZ} \frac{Z}{L_E} - B \frac{L_{AG}}{L_E \cdot \mu_0}. \quad (4)$$

Wzór ten w zadaniu HIS205 jest realizowany poprzez instrukcje HSUM// I XAG = -69.2*VCB.

Przebiegi czasowe napięcia VCZ wytwarzanego na dławiku i płynącego przez dławik prądu IRZ, oraz indukcji magnetycznej VCB i przenikalności magnetycznej MFE — są przedstawione na rys. 2a. Zarówno przebieg napięcia, jak i przebieg prądu, są silnie odkształcone, ze względu na częściowe nasycanie się rdzenia. Pętla histerezy opisywana w pierwszym cyklu magnesowania — wraz z początkową gałęzią magnesowania pierwotnego — jest przedstawiona na rys. 2b. Zwraca uwagę specyficzne odkształcenie przebiegów w pierwszym półokresie, związane z gałęzią magnesowania pierwotnego.

3. MODEL TRANSFORMATORA

Obwody modelujące transformator z rdzeniem magnetycznym są przedstawione na rys. 3. Modelowany transformator z dwoma uzwojeniami — pierwotnym ($Z_1 = 40$ zwojów) i wtórnym ($Z_2 = 100$ zwojów) — ma rdzeń ferrytowy tego samego typu, co rozpatrywany uprzednio dławik. Zespół obwodów modelujących jest rozwinięciem układu modelującego dławik z rys. 1. W układzie występują sprzężone indukcyjności L_1 , L_2 proporcjonalne — w stosunku kwadratu liczby zwojów — do chwilowej przenikalności magnetycznej rdzenia. Są to indukcyjności główne obwodu pierwotnego i obwodu wtórnego transformatora. Przyjęto koncepcję pełnego sprzężenia między indukcyjnościami głównymi, tj. przyjęto wartość współczynnika sprzężenia $\kappa = KAPPA = 1$. Założono, że indukcyjności rozproszenia obwodów — pierwotnego LS1 i wtórnego LS2 — reprezentują części rozproszone strumienia magnetycznego zamykające się przez powietrze i dlatego przyjęto, że są to wielkości stałe. Uwzględniono rezystancje uzwojeń RZ1, RZ2 i pojemności własne uzwojeń CZ1, CZ2. Pojemności CZ1, CZ2 są dołączone do zacisków uzwojeń w taki sposób (poza indukcyjnościami rozproszenia), aby prądy płynące przez indukcyjności LS1, LS2 były dokładnie równe prądom płynącym przez indukcyjności główne L_1 , L_2 . Jest to wykorzystane przy określaniu wypadkowej siły magnetomotorycznej (przez funkcję HSUM/) wynikającej z oddziaływania obu prądów — wejściowego i wyjściowego — na rdzeń. Ta siła jest równa sumie iloczynów prądów i liczb zwojów uzwojeń, przez które te prądy płyną.



Rys. 3. Schemat zastępczy transformatora dwuuzwojeniowego w układzie sterowania ze źródła o rezystancji $R_G = 100\Omega$, przy obciążeniu rezystancją $R_O = 10k\Omega$

Model jest opisany w formie zadania w języku programu NAP2, przy założeniu sterowania w obwodzie pierwotnym ze źródła sygnału sinusoidalnego o rezystancji wewnętrznej $R_G = 100\Omega$, o amplitudzie SEM równej 25 V i częstotliwości 5 kHz.

Przebiegi napięcia $VCZ1$ na uzwojeniu pierwotnym i napięcia $VCZ2$ na uzwojeniu wtórnym transformatora (obciążonym rezystancją $R_O = 10k\Omega$), oraz przebieg indukcji VCB — są pokazane na rys. 4a, natomiast zakreślana pętla histerezy — na rys. 4b.

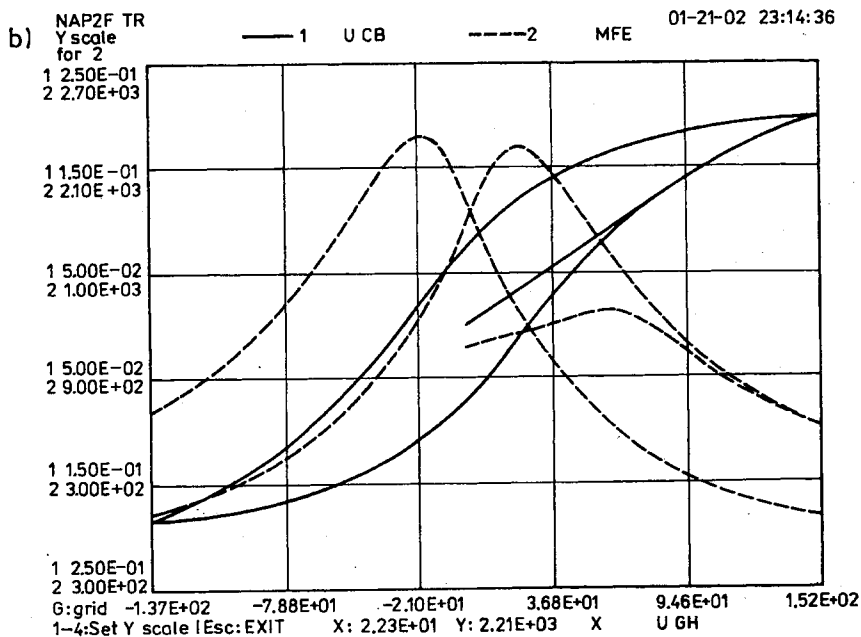
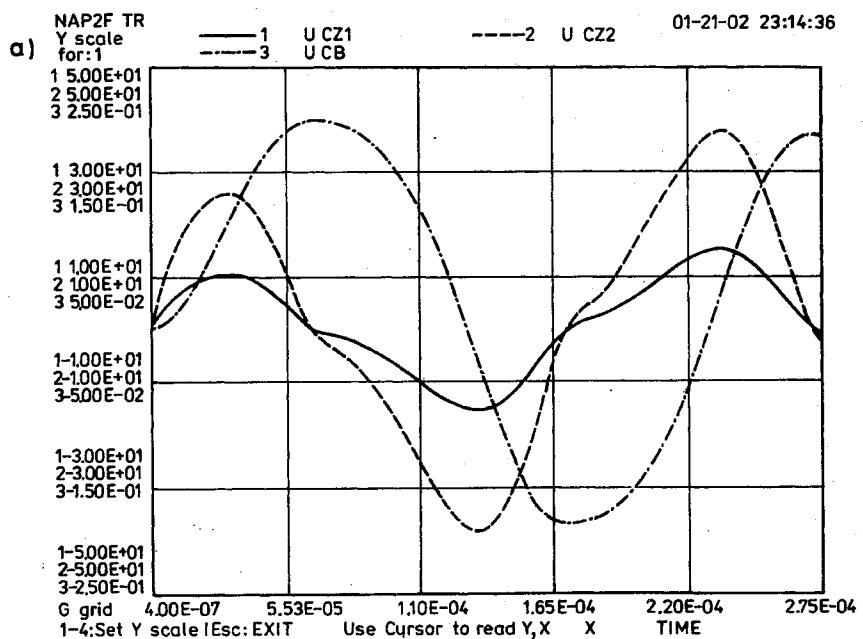
Charakterystyczne dla magnesowania histeretycznego są asymetryczne odkształcenia impulsów dodatnich i ujemnych, w jakie przekształcają się połówki sinusoidy przy silnym przesterowaniu rdzenia. Ta asymetria kształtów jest rezultatem występowania histerezy. Zniekształcenia tego rodzaju nie występują, jeżeli modeluje się rdzeń przy użyciu charakterystyki $B(H)$ — choćby nieliniowej — ale bez histerezy.

Na rys. 5a przedstawiono przebiegi występujące przy sterowaniu tego samego transformatora pojedynczym przebiegiem impulsowym prostokątnym o amplitudzie 10 V i czasie trwania 500 ns (również ze źródła o rezystancji $R_G = 100\Omega$ i przy obciążeniu rezystancją $R_O = 10k\Omega$). Widoczne są oscylacje na czole i na tylnym zboczu impulsu, związane z występowaniem indukcyjności rozproszenia i pojemności, oraz z małą wartością rezystencji R_G (przyczyniającą się do słabego tłumienia drgań w wypadkowym układzie złożonym z dwóch sprzężonych obwodów rezonansowych).

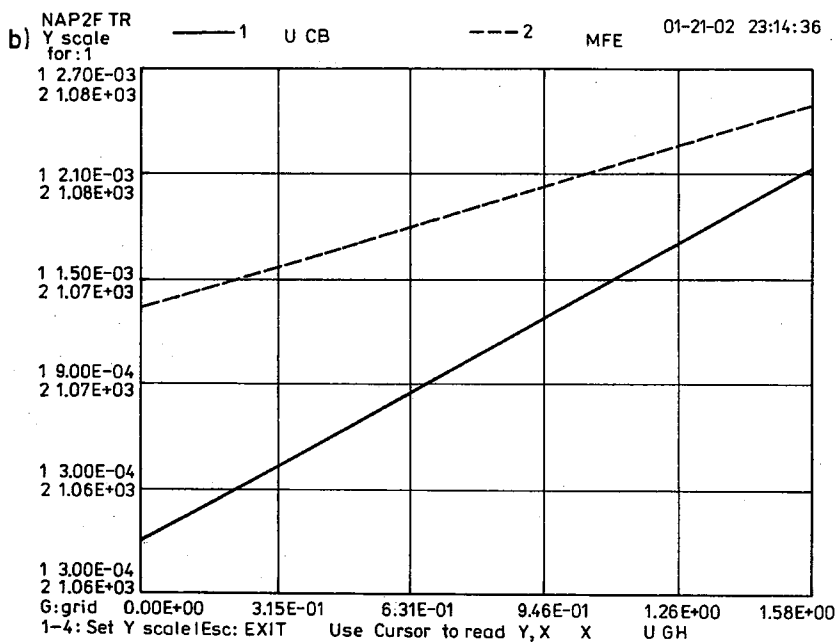
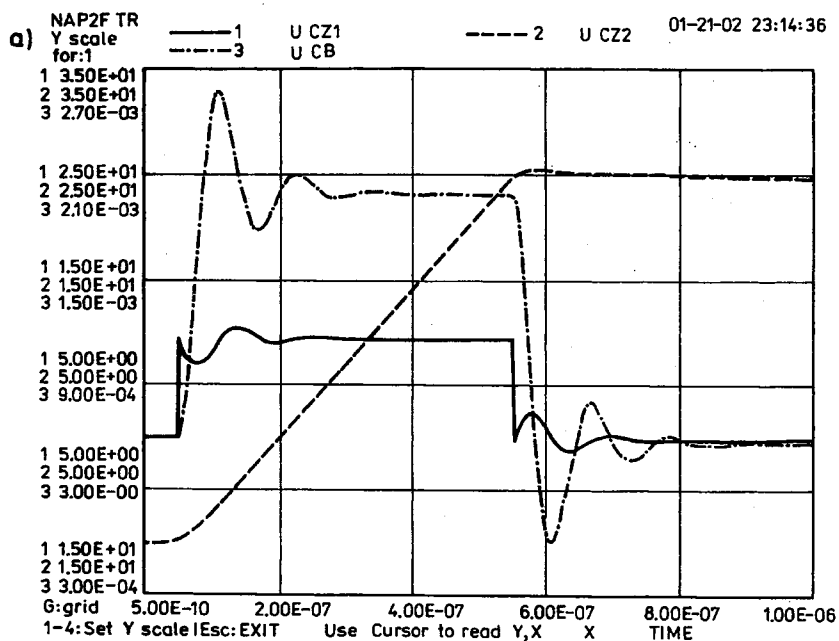
```

*CIRCUIT: HIS405 * Transformator dwuuzwojeniowy z histereza
:rdzen, ferrytowy, moze miec szczelina powietrzna
:Dane geometryczne rdzenia E25/13/7
: AE=5.5E-5m^2 (przekroj rdzenia), LE=5.75E-2m (droga magnet.)
: C1==1045.45m^-1, BS=.36T (ind. nasycenia)
PK=280;PL=2800;MO=1.25664E-6;ALFA=.02 :C=.75
: MO=4PHIE-7 H/m - przenikalnosc magn. prozni
AO=0;AM=25;OMG=10000PHI
: Skladowa stala, amplituda, pulsacja sygnalu sterujacego
FG/SIN/ A 1*AO B 1*AM D 1/OMG
FDELTA/TAB2/ -1E60 -1 0 -1 0 1 1E60 1
RG 5 0 100 E 1*FG(TIME);RO 7 0 10K
LS1 5 6 2U;RZ1 LS1 .5;LS2 7 8 16U;RZ2 LS2 3.6
CZ1 5 0 6P;CZ2 7 0 12P
: LS1,RZ1,CZ1,LS2,RZ2,CZ2 - indukcyjnosci rozproszenia,
: rezystancje i pojemnosci wlasne uzwojen transformatora
HSUM// 695.65*ILS1 1739.13*ILS2
: 695.65=WH1=Z1/LE,1793.13=WH2=Z2/LE
: Z1=40 zwojow, Z2=100 zwojow
GH 1 0 0;CB 2 0 1;GHE 3 0 1
XAG=-69.2*VCB;RH 1 0 0 E 1*HSUM(XAG)
: 69.2=AGL/(MO*LE), AGL=5E-6m - dlugosc szczeliny powietrznej
VDELTA 4 0 1 VGH;CDELTA 4 0 10N;DELTA1 = 1*FDELTA(ICDELTA)
: VCB=B - indukcja w T (1Tesla=1Wb/m^2)
GB 0 2 0 J -1*IRH: VGH=VCH - pole H w A/m
FBA/ATAN/ B .22918311 D 73: BS=.36T, B=2/PHI*BS, D=HP=73A/m
IH 0 3 1 VGH;BA=1*FBA(IGHE)
: BA (ind. ahisteretyczna bez skladowej MO*H)
IHB 0 3 .02*FBA(IGHE): .02=ALFA
FD1// A 1 B 1 D 73 E 2: 73=HP
DF1=318.52258*FD1(IGHE);FD2// 1*DF1: 318.52258 = PHI/2*HP/BS
DFBA=1/FD2(-1*ALFA)
FB// A -1*PL B 1*DELTA1 C 1*BA D -1*PK E -1
LAA=.4286*DFBA;LBB=1/FB(VCB): .4286=C/(1+C)
FMD// 1*LAA;CH 1 0 1*FMD(LBB) 1*MO
: FMD i CH wyrazaja lokalna (dynamiczna) przenikalnosc
: magnetyczna dB/dH w T/(A/m)
MFE= 7.958E5*CH
: przen. magn. w Gs/Oe jest wieksza 1E7/(4PHI)=7.958E5 razy
L1 6 0 1.53*CH: 1.53m=WL1=Z1^2*AE/LE=Z1^2/C1
L2 8 0 9.5652589*CH: 9.5652589m=WL2=Z2^2*AE/LE=Z2^2/C1
FP// E .5;X12=1*L1*L2
M12 L1 L2 1*FP(X12): 1=KAPPA - wsp. sprzezenia
*MODIFY XVNALL 10 XIALL 1
*TIME/-2 0 275U
*TR *GRAPH *Y VCZ1 VCZ2 *Y VCB *GRAPH (VGH) VCB MFE
: MFE - przenikalnosc w Gs/Oe
*RUN STEP 80N TRUNC 1E-4 MAXIT 200 MINSTEP 320N

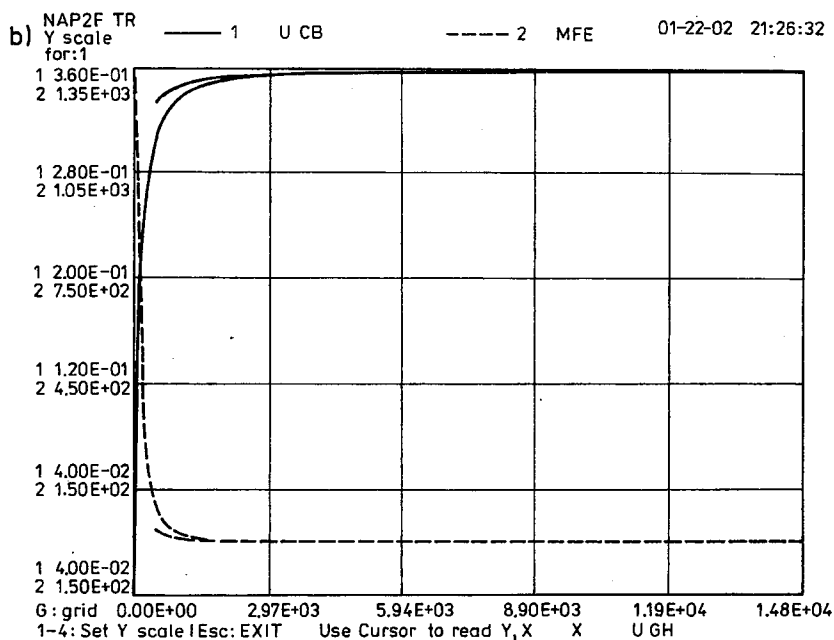
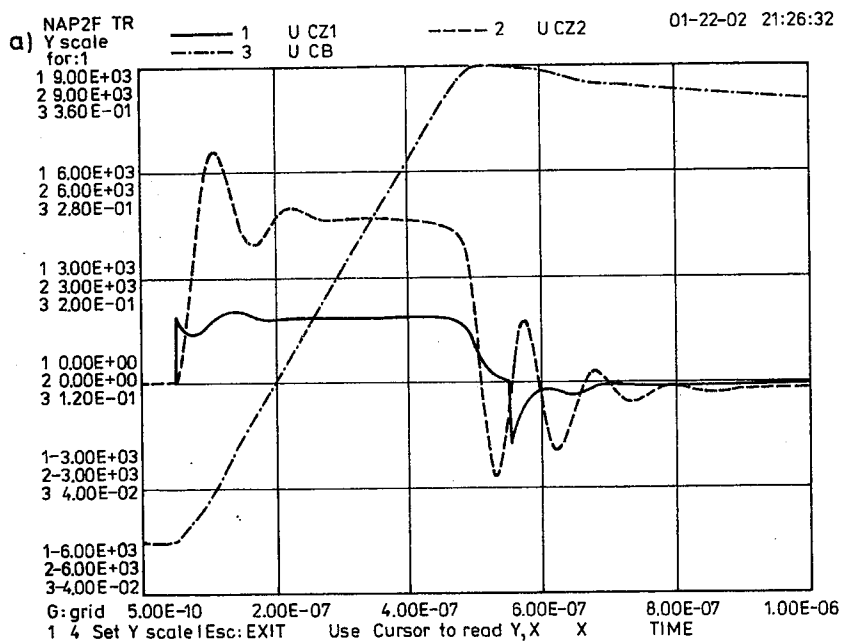
```



Rys. 4. Przebiegu występujące w układzie z rys. 3 po włączeniu sinusoidalnej SEM źródła o amplitudzie 25 V i częstotliwości 5 kHz: a) przebiegu czasowe; b) wykresy pętli histerezy i przenikalności magnetycznej



Rys. 5. Przebiegi występujące w układzie z rys. 3 przy sterowaniu SEM źródła o przebiegu impulsowym, o amplitudzie 10 V



Rys. 6. Przebiegi jak na Rys. 5 — lecz przy amplitudzie impulsu zwiększonej 200 razy. Widoczne są zniekształcenia tylnej części grzbietu impulsu wynikające z nasycania się rdzenia

Wobec małej amplitudy i krótkiego czasu trwania impulsu, przyrost indukcji VCB w rdzeniu jest mały, tzn. praca rdzenia jest prawie liniowa. Charakterystyczne jest — ale słabo widoczne (rys. 5b) — zakreszenie małej lokalnej pętli histerezy w czasie oscylacji na tylnym zboczku impulsu; oscylacjom tym odpowiada chwilowa skokowa zmiana przenikalności magnetycznej MFE.

Na rys. 6a i rys. 6b są pokazane przebiegi występujące przy sterowaniu impulsem o bardzo dużej amplitudzie 2000 V. W tym przypadku jest widoczny bardzo wyraźnie skutek silnego nasycania się rdzenia i zmniejszenia indukcyjności głównej w wyniku zmniejszenia się przenikalności magnetycznej. W końcowej części impulsu pojawił się bowiem silny zwis. Oscylacje natomiast nie zmieniły się, gdyż są związane głównie z liniową częścią modelu, tj. z indukcyjnościami rozproszenia i pojemnościami.

4. UWAGI DOTYCZĄCE STABILNOŚCI OBLICZEŃ PRZY RDZENIACH ZE SZCZELINĄ POWIETRZNĄ

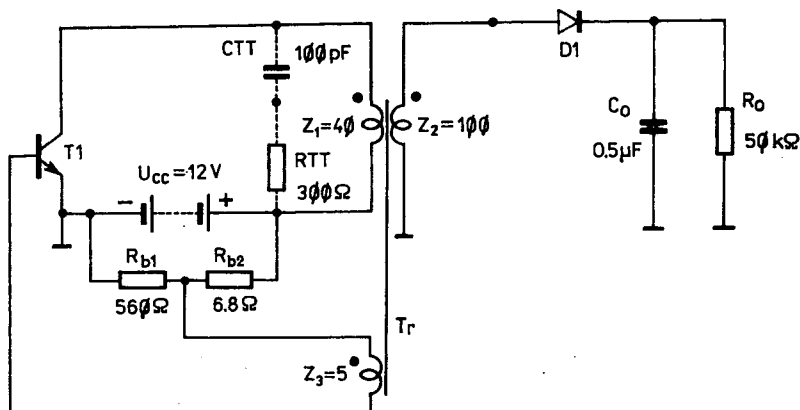
W powyższych przykładach w zasadzie jest możliwe uwzględnienie szczeliny powietrznej. W tym celu w każdym zadaniu została podana (w komentarzu) wartość współczynnika liczbowego 69,2 — jaką należałoby przyjąć dla szczeliny powietrznej długości $AGL=5E-6$ m przy zastosowaniu wzoru (4) dla obliczenia wartości XAG. Tak mała długość szczeliny ($5 \mu m$) praktycznie oznacza pracę rdzenia bez szczeliny.

W przytoczonych wyżej zadaniach nie można jednak przyjmować szczeliny dłuższej, niż około $5E-6$ m, gdyż proces iteracyjny obliczeń staje się rozbieżny (przy zastosowaniu programu NAP2). Oczywiście, ograniczenia maksymalnej długości szczeliny do $5E-6$ m nie można zaakceptować. Są stosowane tego typu rdzenie o szczelinach rzędu $5E-4$ m, a nawet większych.

Przyczyną niestabilności algorytmów programu NAP2 jest w tym przypadku, jak się okazuje, zbyt idealistyczny (dla tego programu) zapis obwodu pierwszego, w którym występuje zerowa wartość rezystancji RH. Program NAP2 oblicza podane wyżej zadania stabilnie i znacznie szybciej, gdy zostanie zadeklarowana wartość RH nieco różna od zera. Wyniki obliczeń, a zwłaszcza indukcja $B = VCB$, są jednak bardzo wrażliwe na zmianę wartości RH. Oczywiście, wprowadzenie nie-zerowej rezystancji RH w jakimś stopniu modyfikuje opis modelu, można jednak spodziewać się, że odstępstwa od ścisłego opisu są nie wielkie jeżeli RH jest dostatecznie małe. W podanych przykładach przebieg obliczeń przy użyciu programu NAP2 przebiegał bez większych zakłóceń, a wyniki nie odbiegały istotnie od oczekiwanych, gdy wartość rezystancji RH była dobierana proporcjonalnie do długości szczeliny, w proporcji $1\Omega/m$.

5. TRANSFORMATOR TRÓJUZWOJENIOWY (W UKŁADZIE PRZETWORNICY DWUTAKTOWEJ)

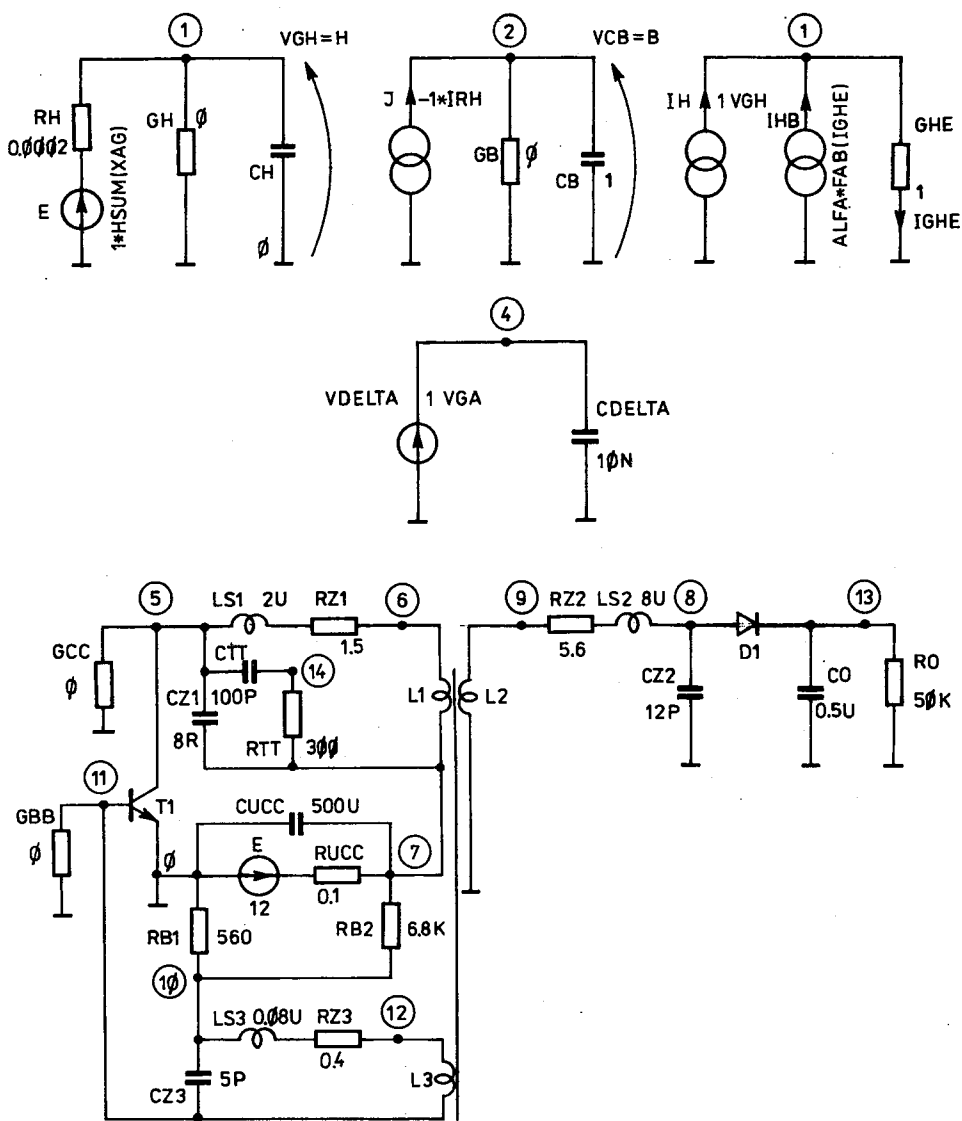
Na rys. 7 jest przedstawiony układ tranzystorowej przetwornicy dwutaktowej, będący przykładem zastosowania transformatora trójuzwojeniowego, w stosunkowo skomplikowanym układzie generacyjnym.



Rys. 7. Układ przetwornicy dwutaktowej z transformatorem trójuzwojeniowym

Przetwornica dwutaktowa jest odmianą samowzbudnego generatora samodławnego z układem prostowniczym na wyjściu [3]; jest zasilana ze źródła napięcia $U_{cc} = 12\text{ V}$. W obwodzie wejściowym znajduje się układ CTD, RTD służący do tłumienia pasożytniczych oscylacji o wielkiej częstotliwości, które pojawiają się po każdym przełączeniu i których ewentualne uwzględnienie powoduje bardzo poważne wydłużenie procesu obliczeń przy analizie komputerowej. W układach fizycznych stosowanie takich obwodów tłumiących jest pożądane, ale nie jest konieczne, m.in. dlatego, że drgania o dużej częstotliwości są zwykle silnie tłumione dzięki dodatkowym rezystancjom rozproszonym układu, na ogół przy analizie komputerowej nie uwzględnianym. Te rozproszone rezystancje dla pasożytniczych drgań wielkiej częstotliwości (związanych z występowaniem indukcyjności rozproszonych i pojemności uzwojeń, oraz pojemności montażowych) mogą mieć zwiększoną wartość, m.in. wskutek zjawiska naskórkowości.

Na rys. 8 jest przedstawiony schemat zastępczy układu przetwornicy w ujęciu przystosowanym do analizy przy użyciu programu HIS461 napisanego w języku programu NAP2. Występujący w tym schemacie model transformatora dwuuzwojeniowego. Indukcyjności L_1 , L_2 , L_3 są obliczane jako proporcjonalne do kwadratu liczby zwojów Z_1 , Z_2 , Z_3 . Jest istotne, że należy określać indukcyjności wzajemne M_{12} , M_{13} , M_{23} między wszystkimi trzema uzwojeniami. Konieczność uwzględniania indukcyjności wzajemnych między kompletem uzwojeń stwarza poważne



Rys. 8. Schemat zastępczy przetwornicy dostosowany do analizy przy użyciu programu NAP2

trudności obliczeniowe w przypadku używania modeli transformatorów o dużej liczbie uzwojeń.

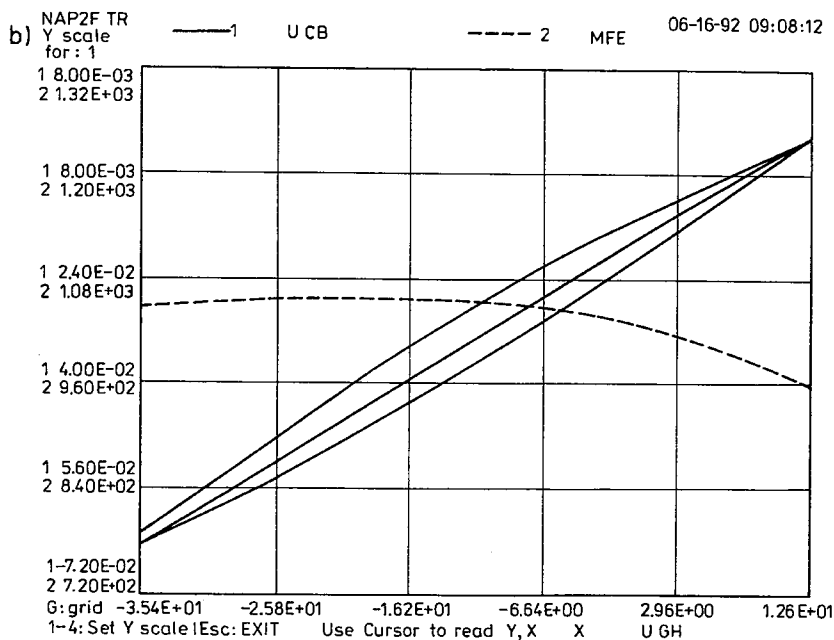
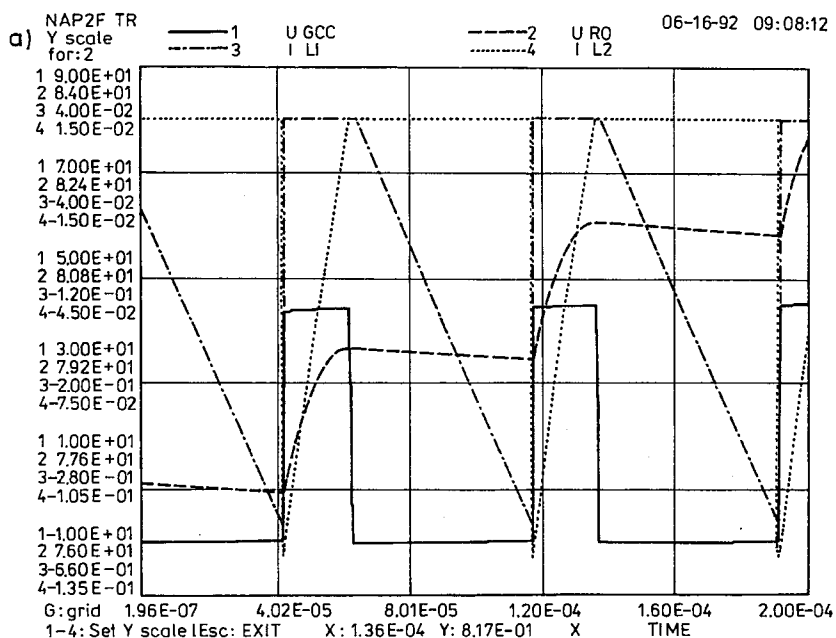
W niżej zamieszczonym programie występuje taki sam rdzeń magnetyczny, co i w przykładach poprzednich, jednak ze szczeliną powietrzną długości 0,2 mm. Dla ułatwienia obliczeń została zastosowana rezystancja $RH = 0,0002\Omega$.

```

*CIRCUIT: HIS461 * Przetwornica dwutaktowa
: Transformator z rdzeniem ferrytowym, ze szczelina powietrzna
: Dane geometryczne rdzenia E25/13/7
:  $AE=5.5E-5m^2$  (przekroj rdzenia),  $LE=5.75E-2m$  (droga magnet.)
:  $C1=1045.45m^{-1}$ ,  $BS=.36T$  (ind. nasycenia)
PK=280;PL=2800;MO=1.25664E-6;ALFA=.02: C=.75
:  $MO=4\pi H/m$  - przenikalnosc magn. prozni
TT1/NPN/ IS 1E-13 TF .5N TR 1.8N AF .99 AR .85 >
CE 13P CC 8P GS 10 NG 4E-4
DD1/DIODE/ IS 5E-13 TT 5N CJ 6P GS 10
RUCC 7 0 .1 E 12;CUCC 7 0 500U;RB1 10 0 560;RB2 7 10 6.8K
CTT 5 14 100P;RTT 14 7 300
T1 5 11 0 TT1;TD1 8 13 DD1;RO 13 0 50K;CO 13 0 .5U
GCC 5 0 0;GBB 11 0 0
FDELTA/TAB2/ -1E60 -1 0 -1 0 1 1E60 1
LS1 5 6 2U;RZ1 LS1 1.5;LS2 8 9 8U;RZ2 LS2 5.6
CZ1 5 7 8P;CZ2 8 0 12P
LS3 10 12 .08U;RZ3 LS3 .4;CZ3 10 11 5P
: LS1,RZ1,CZ1,LS2,RZ2,CZ2,LS3,RZ3,CZ3 - ind. rozproszenia,
: rezystancje i pojemnosci wlasne uzwojen transformatora
HSUM// 695.65*ILS1 1739.13*ILS2 86.957*ILS3
:  $695.65=WH1=Z1/LE$ ,  $1793.13=WH2=Z2/LE$ ,  $86.957=WH3=Z3/LE$ 
:  $Z1=40$  zwojow,  $Z2=100$  zwojow,  $Z3=5$  zwojow
GH 1 0 0;CB 2 0 1;GHE 3 0 1
XAG=-2767.91*VCB
:  $2767.91=AGL/(MO*LE)$ ,  $AGL=2E-4m$  - dl. szczeliny powietrznej
RH 1 0 .0002 E 1*HSUM(XAG)
VDELTA 4 0 1 VGH;CDELTA 4 0 10N;DELTA1 = 1*FDELTA(ICDELTA)
:  $VCB=B$  - indukcja w T ( $1Tesla=1Wb/m^2$ )
GB 0 2 0 J -1*IRH: VGH=VCH - pole H w A/m
FBA/ATAN/ B .22918311 D 73: BS=.36T,  $B=2/PHI*BS$ ,  $D=HP=73A/m$ 
IH 0 3 1 VGH;BA=1*FBA(IGHE)
: BA (ind. ahisteretyczna bez skladowej  $MO*H$ )
IHB 0 3 .02*FBA(IGHE): .02=ALFA
FD1// A 1 B 1 D 73 E 2: 73=HP
DF1=318.52258*FD1(IGHE);FD2// 1*DF1:  $318.52258 = PHI/2*HP/BS$ 
DFBA=1/FD2(-1*ALFA)
FB// A -1*PL B 1*DELTA1 C 1*BA D -1*PK E -1
LAA=.4286*DFBA;LBB=1/FB(VCB):  $.4286=C/(1+C)$ 
FMD// 1*LAA;CH 1 0 1*FMD(LBB) 1*MO
: FMD i CH wyrazaja lokalna (dynamiczna) przenikalnosc magn.
:  $dB/dH$  w T/(A/m)
MFE= 7.958E5*CH
: przen. w Gs/Oe jest wieksza  $1E7/(4PHI)=7.958E5$  razy
L1 6 7 1.5304414*CH:  $1.5304414m=WL1=Z1^2*AE/LE=Z1^2/C1$ 
L2 9 0 9.5652589*CH:  $9.5652589m=WL2=Z2^2*AE/LE=Z2^2/C1$ 
L3 12 11 .023913147*CH:  $.023913147m=WL3=Z3^2*AE/LE=Z3^2/C1$ 
FP// E .5;X12=1*L1*L2;X13=1*L1*L3;X23=1*L2*L3
M12 L1 L2 1*FP(X12): 1=KAPPA - wsp. sprzezenia
M13 L1 L3 1*FP(X13);M23 L2 L3 1*FP(X23)

*TIME/-6 0 200U
*TR *GRAPH VGCC VRO IL1 IL2 *GRAPH (VGH) VCB MFE
*RUN STEP 8N TRUNC 1E-4 MAXIT 200 MINSTEP 16N: 1 ekran
*RUN: 2 ekran
*RUN: 3 ekran
*RUN: 4 ekran
*RUN: 5 ekran

```



Rys. 9. Przebiegi występujące w przetwornicy (zakres 10 „ekranu”): a) schodkowe narastanie napięcia VRO, impulsowe prostokątne zmiany napięcia kolektorowego VGC, trójkątne przebiegi prądów wejściowego ILS1 i wyjściowego ILS2; b) regularny przebieg magnesowania rdzenia ze szczelini

Program oblicza przebiegi czasowe kolejnymi „ekranami” (o czasie trwania $200\mu s$) obrazującymi doładowywanie pojemności CO porcjami ładunku w kolejnych impulsach prądu wyjściowego IL2 płynącego przez diodę D1. Napięcie wyjściowe VRO narasta schodkowo, przy czym w miarę zwiększania się tego napięcia staje się coraz bardziej zauważalne częściowe rozładowywanie pojemności CO (w czasie taktu wejściowego) przez rezystancję RO, względem której pojemność ta pełni funkcję magazynu energii. Na rys. 9a są pokazane przebiegi w zakresie dziesiątego „ekranu” (obliczone po rozszerzeniu liczby poleceń RUN w programie HIS461). W analizowanym interwale czasu nie dochodzi jeszcze do ustabilizowania się średniej wartości napięcia wyjściowego, które ciągle powiększa się.

Ponieważ zastosowano dość dużą szczelinę powietrzną rdzenia, indukcyjność L1 rdzenia jest wyraźnie zlinearyzowana, co znajduje odzwierciedlenie w prawie liniowych przebiegach prądów — wejściowego IL1 i wyjściowego IL2, a również w kształcie pętli histerezy i wykresie przenikalności magnetycznej MFE (rys. 9b). Obliczanie takich przebiegów wymaga dobrania odpowiedniego kroku oraz dokładności iteracji i zwykle trwa dość długo.

6. PODSUMOWANIE

Modele dławików i transformatorów zbudowane na podstawie teorii Jilesa-Athertona [1] w ujęciu zmodyfikowanym [2] umożliwiają analizowanie układów elektronicznych z elementami magnetycznymi przy dużych sygnałach, gdy jest istotne uwzględnienie nieliniowości oraz histerezy magnetycznej rdzeni. Nadają się głównie do modelowania elementów z rdzeniami ferrytowymi, dla których uwzględnienie zjawisk związanych z prądami wirowymi nie jest konieczne (teoria Jilesa-Athertona nie obejmuje tych zjawisk). Należy również zauważyć, że teoria Jilesa-Athertona nie uzależnia przebiegu magnesowania od szybkości magnesowania, co oznacza, że przenikalność magnetyczna nie jest zależna od częstotliwości obiegu pętli histerezy.

Podane przykłady modeli i ich zastosowań, odnoszące się do konkretnego rodzaju rdzenia, mogą być z łatwością wykorzystane do budowy modeli innych dławików i transformatorów, z innymi rdzeniami magnetycznymi i innymi liczbami zwojów.

Wykorzystanie modeli histeretycznych wiąże się z pewnymi trudnościami obliczeniowymi, m.in. wymaga właściwego doboru parametrów sterujących przebiegiem analizy numerycznej (kroku, dokładności), a również krytycznego sprawdzenia wyników obliczeń (np. przez powtórne obliczenie przy innych parametrach). Te zastrzeżenia wiążą się z możliwością przełączenia się (chwilowego, lub na dłuższy czas) elementu magnetycznego na inną gałąź pętli histerezy, pod wpływem lokalnej niezbieżności procesu obliczeniowego. Tego rodzaju lokalne niezbieżności w układach zwykłych najczęściej nie powodują utraty zbieżności w skali całego

procesu. W przypadku występowania w układzie elementów hysteretycznych również może nie nastąpić utrata zbieżności w skali globalnej, jednak po niewłaściwym przełączeniu się elementu hysteretycznego proces obliczeń już nie odzwierciedla istoty analizowanych zagadnień fizycznych.

Ważną cechą modeli elementów magnetycznych hysteretycznych jest możliwość uwzględnienia, przy analizie układów elektronicznych z tymi elementami, procesu magnesowania pierwotnego i stanu przejściowego występującego bezpośrednio po procesie magnesowania pierwotnego. Jak bowiem wynika z analiz komputerowych, przy magnesowaniu rdzenia hysteretycznego przebiegami wielokrotnie powtarzanymi, kształt pętli histerezy ustala się dopiero po znacznej liczbie cykli. Zmianom kształtu pętli odpowiadają dynamiczne zmiany (zniekształcenia) sygnału przenoszonego. Są one szczególnie znaczne w części odpowiadającej magnesowaniu pierwotnemu.

BIBLIOGRAFIA

1. D.C. Jiles: *Theory of ferromagnetic hysteresis*. J. of Magnetism and Magnetic Materials 61 (1986), pp. 48-60
2. J.H. Baranowski: *Zmodyfikowane ujęcie modelu Jilesa-Athertona*. Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji, 1994, t. 40, z. 1, s. 1-20.
3. J.H. Baranowski: *Półprzewodnikowe układy impulsowe i cyfrowe*. WNT, 1976, s. 828

J.H. BARANOWSKI

MODEL OF THE TRANSFORMER WITH A HYSTERETIC CORE

Summary

The paper present a novel model of a transformer with a hysteretic core. The model uses a modified Jiles-Atherton hysteretic magnetization theory. Computer implementation in the NAP2 program is illustrated with practical circuit examples, where sinusoidal and pulse signals are used.

Weryfikacja algorytmu optymalizacji struktur topologicznych sieci niehierarchicznych z komutacją łączy

IRENEUSZ OLSZEWSKI, ANTONI ZABŁUDOWSKI

*Instytut Telekomunikacji i Elektrotechniki
Akademia Techniczno-Rolnicza Bydgoszcz*

Otrzymano 1993.10.19

Autoryzowano do druku 1993.12.12

W pracy przedstawiono heurystyczne podejście do problemu optymalizacji sieci telefonicznych. W pierwszej części przytoczono powszechnie formułowany problem optymalizacji oraz przedstawiono sformułowanie problemu, w którym uwzględniono optymalizację struktury topologicznej sieci. Część druga zawiera algorytm rozwiązujący ten problem. W części trzeciej przedstawiono analizę ruchową sieci, w warunkach przeciążeń, opartą na modelu symulacyjnym. W ostatniej części artykułu pokazano, dla przykładowych danych, minimalną strukturę topologiczną sieci uzyskaną przy zastosowaniu proponowanego algorytmu oraz wyniki symulacyjne.

Stosowane obecnie metody analizy oraz optymalizacji sieci niehierarchicznych bazują na modelach analitycznych jedno lub dwuparametrowych [11]. W modelach tych wykorzystuje się powszechnie przyjmowane założenie dotyczące długości ścieżek w sekwencjach dróg alternatywnych, którego głównym celem jest eliminacja niepożądanych zjawisk w sieci pracującej w warunkach przeciążeń [8]. Założenie to nakłada dosyć duże wymagania na początkowy zbiór kanałów w przypadku, gdy projektowana sieć, o narzuconej z góry spójności węzłowej, ma być realizowana na zasadzie dzierżawy kanałów transmisyjnych. Przystępując zatem do projektowania takiej sieci, np. wydzielonej, należy postawić następujące pytanie: czy początkowy zbiór kanałów umożliwi realizację sieci o długości ścieżek równej co najwyżej dwa w każdej sekwencji dróg alternatywnych. Pozytywna odpowiedź na to pytanie pojawić się może w przypadku, gdy sieć będzie realizowana (w sensie dzierżawy kanałów) na terenie małego obszaru bądź na terenie aglomeracji, jednakże w przypadku, gdy sieć ma być realizowana na dużym obszarze geograficznym, pozytywna odpowiedź na to pytanie jest mało prawdopodobna.

W artykule tym, będącym kontynuacją prac [9] oraz [14], podjęto próbę rozwiązania problemu optymalizacji struktur topologicznych sieci z uwzględnieniem narzuconych kryteriów jakościowych. Prace [9], [14] zawierają sformułowanie problemu optymalizacji, prezentują stosowane metody oraz algorytmy optymalizacji struktur topologicznych sieci. Niniejsza praca przedstawia modyfikację algorytmu optymalizacji, wykorzystującego rozbitcie sieci na podsieci oraz analizę ruchową wyznaczonej sieci uzyskaną w wyniku symulacji badanej sieci.

1. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU OPTIMALIZACJI

Powszechnie przyjmowane sformułowanie problemu optymalizacji dla sieci wykorzystujących niehierarchiczne strategie kierowania ruchem jest różne od analogicznego problemu formułowanego dla sieci hierarchicznych, gdyż obejmuje także problem znajdowania optymalnych sekwencji dróg alternatywnych. W sieciach hierarchicznych zagadnienie formułowania problemu optymalizacji sprowadzało się do optymalnego wyznaczania przepustowości kanałów (wiązek łączy), ponieważ sekwencje dróg alternatywnych były zwykle określone poprzez hierarchię węzłów sieci. Za kryterium jakości obsługi w tych sieciach przyjmowano prawdopodobieństwo blokady na drogach ostatniego wyboru [15]. W sieciach niehierarchicznych problem optymalizacji jest bardziej złożony. Za kryterium jakości obsługi przyjmuje się indywidualne prawdopodobieństwa blokady dla poszczególnych relacji (par węzłów). Ponadto, wraz z optymalizacją przepustowości kanałów sieci, należy jednocześnie optymalizować sekwencję dróg alternatywnych. Problem optymalizacji sieci, dla macierzy określającej natężenia w godzinie największego ruchu, formułuje się więc w następujący sposób [3], [11].

PROBLEM 1

Znaleźć wektor przepustowości kanałów (liczności wiązek) oraz sekwencję dróg alternatywnych w każdej relacji, tak aby minimalizować funkcję kosztu sieci dla danej macierzy ruchu, przy spełnieniu ograniczeń nałożonych na prawdopodobieństwa blokady w poszczególnych relacjach.

W niniejszej pracy zajęto się nieco odmiennym problemem. Podobnie jak to zdefiniowano dla problemu 1, w formułowanym zadaniu optymalizacji funkcję celu stanowić będzie koszt budowy sieci rozumiany jako koszt dzierżawy kanałów transmisyjnych. Z punktu widzenia administracji sieci optymalizacja struktury topologicznej sieci z uwzględnieniem topologii początkowej, minimalizująca koszt utworzenia sieci, jest w pełni uzasadniona. Natomiast z punktu widzenia użytkowników sieci najważniejszym parametrem pozwalającym dokonać jej oceny jest jakość realizowanej transmisji. Zatem, w procesie optymalizacji, poszukiwanie najkorzystniejszej struktury topologicznej sieci, dla zachowania wymaganej jakości

obsługi zgłoszeń, należy prowadzić z jednoczesnym doбором przepustowości kanałów. Optymalizacja struktury topologicznej sieci wymaga spełnienia pewnego dodatkowego parametru niezawodnościowego określonego dla całej sieci. W artykule za parametr ten (miarę) przejęto spójność węzłową sieci [2]. Formułowany w pracy problem optymalizacji można określić w następujący sposób [9].

PROBLEM 2

Wyznaczyć strukturę topologiczną sieci oraz określić dla tej topologii wektor przepustowości kanałów C , tak aby zminimalizowany został całkowity koszt budowy sieci przy założeniu, że znane są: macierz ruchu R , parametr niezawodnościowy oraz wskaźnik jakościowy przesyłanego strumienia określony dla każdej pary węzłów.

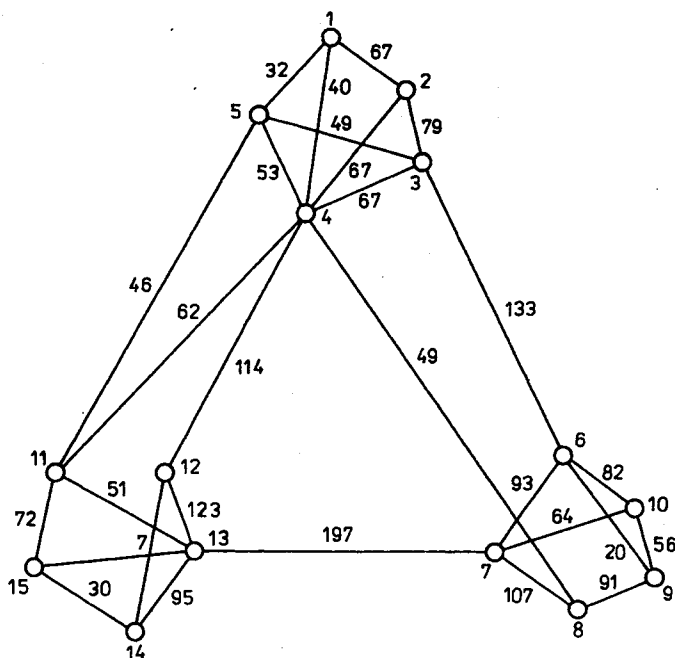
W sformułowaniu tym nie uwzględnia się problemu wyboru sekwencji dróg alternatywnych. Problem ten rozwiązuje się dla ustalonej struktury topologicznej sieci. Algorytm wyboru dróg alternatywnych z uwzględnieniem kolejności ich zajmowania przedstawiono w kolejnej części niniejszej pracy.

2. ALGORYTM OPTYMALIZACJI STRUKTURY TOPOLOGICZNEJ SIECI WYKORZYSTUJĄCY ROZBICIE SIECI NA PODSIECI

W pracy [9] przedstawiono algorytm optymalizacji struktur topologicznych sieci niehierarchicznych wykorzystujący rozbitcie sieci na posieci, którego ogólna idea oparta została na metodzie podziału i oszacowań [12]. Na rysunku 1 przedstawiono strukturę topologiczną sieci uzyskaną po zastosowaniu tego algorytmu. Dane do optymalizacji sieci przedstawiono w końcowej części tej pracy.

Koszt sieci dla takiej struktury topologicznej wynosi 9.2621×10^9 . W celu zbadania zachowania się sieci w warunkach awarii przeprowadzono analizę ruchową sieci w oparciu o model symulacyjny. Dokładne wyniki badań oraz opis modelu przedstawione zostaną w pracy przygotowywanej przez autorów [10].

W modelu symulacyjnym sieci uwzględniono wpływ awarii jednego lub dwóch dowolnych kanałów na pracę całej sieci. W trakcie symulacji sposobu pracy sieci zastosowano statyczną alternatywną strategię kierowania ruchem. Przyjęcie takiej strategii kierowania ruchem wynika z faktu, że w rozważnym problemie optymalizacji uwzględnia się tylko jedną macierz ruchu. Ogólna zasada przyjętej strategii jest następująca: zgłoszenia każdej relacji mają dostęp do wielu dróg alternatywnych. Warunkowa metoda zestawiania drogi połączeniowej zapewnia przetestowanie wszystkich, odpowiednio uszeregowanych, dróg alternatywnych. Odrzucenie zgłoszenia następuje wtedy, gdy dla danej relacji wszystkie drogi (ścieżki) w sekwencji dróg alternatywnych zostaną zajęte. Zanim bliżej podany będzie sposób szeregowania sekwencji dróg alternatywnych, załóżmy, że dla każdej pary węzłów został wyznaczony zbiór l — ścieżek rozłącznych węzłowo [2], przy czym, drogi te



Rys. 1. Minimalna struktura sieci uzyskana po zastosowaniu algorytmu 3 w [9]. Liczby na krawędziach grafu oznaczają wartości przepustowości kanałów

zostały uporządkowane w sposób niemalejący względem długości mierzonej liczbą kanałów tworzących ścieżkę.

W prowadzonych badaniach przyjęto $l + 1$ dróg alternatywnych, gdzie l jest spójnością węzłową sieci oraz zastosowano następujący sposób szeregowania tych dróg: pierwszą drogą w wyborze jest droga wynikająca z algorytmu optymalizacji (algorytm 3 w [9]). Kolejne drogi są wybierane w zależności od relacji pomiędzy pierwszą drogą w sekwencji, a drogami zawartymi we wcześniej wyznaczonym zbiorze. W przypadku, gdy ścieżki w zbiorze są rozłączne węzłowo ze ścieżką pierwszą, wówczas $l - 1$ pierwszych ścieżek z tego zbioru tworzą kolejne ścieżki w sekwencji. Za $l + 1$ ścieżkę w sekwencji przyjmuje się najkrótszą ścieżkę w sensie liczby kanałów. W przypadku zaś, gdy jedna ze ścieżek w zbiorze pokrywa się ze ścieżką pierwszą, wówczas pozostałe $l - 1$ ścieżki tworzą kolejne drogi w sekwencji. Ścieżka $l + 1$ jest wybierana podobnie jak poprzednio. W ostatnim przypadku, gdy ścieżka pierwsza nie jest rozłączna węzłowo z dowolną ścieżką (ścieżkami) zawartą w zbiorze, wówczas cały zbiór ścieżek tworzy kolejne ścieżki w sekwencji. Stosując przedstawioną strategię kierowania ruchem wykonano symulację dla sieci pokazanej na rys. 1, przyjmując, że prawdopodobieństwo poprawnej pracy kanału wynosi 0.995. Dla przyjętej wartości uzyskane globalne prawdopodobieństwo blokady jest równe 3.975×10^{-3} . W celu zwiększenia jakości realizowanej

transmisji zwiększono wartości przepustowości wszystkich kanałów w sieci o 20%, tym samym zwiększając koszt sieci również o około 20%. Uzyskane globalne prawdopodobieństwo blokady wynosiło 1.854×10^{-3} (założone 10^{-3}). W celu zbadania wpływu struktury topologicznej sieci na awaryjną pracę sieci przy ustalonym prawdopodobieństwie poprawnej pracy kanałów wykonano symulację pracy sieci dla dwóch przypadków: w pierwszym z nich zwiększono liczbę kanałów, których koszt dzierżawy wynosi 20% kosztu sieci, w drugim zaś, zwiększono przepustowości kanałów o 10% w całej sieci oraz dodano pewną liczbę kanałów, których koszt dzierżawy wynosi 10% kosztu sieci. Topologię dodatkowych kanałów oraz wartości ich przepustowości przedstawiono poniżej:

a) przypadek pierwszy

$$K_{3,7} - 39$$

$$K_{8,14} - 39$$

$$K_{6,13} - 39$$

$$K_{11,12} - 35$$

$$K_{5,12} - 39$$

b) przypadek drugi

$$K_{3,7} - 34$$

$$K_{6,12} - 34$$

$$K_{8,14} - 34$$

Należy zwrócić uwagę na fakt, że nowo wprowadzone kanały w obydwu przypadkach umieszczone zostały w zbiorach rozdzielających. Po wprowadzeniu dodatkowych kanałów zmieniono także zasadę tworzenia sekwencji dróg alternatywnych, przy czym, idea tworzenia tych sekwencji pozostała nie zmieniona. W przypadku wprowadzenia kanału łączącego węzły v_i oraz v_j pierwszą drogą w wyborze jest droga bezpośrednia, drugą zaś, droga wynikająca z algorytmu optymalizacji. Kolejne drogi są wybierane w taki sposób, podobnie jak poprzednio, aby liczba ścieżek rozłącznych węzłowo wynosiła l . W pierwszym przypadku, gdy zmiany w sieci polegały na zwiększeniu liczby kanałów, prawdopodobieństwo blokady 1.039×10^{-3} , w drugim zaś, gdy zwiększono liczbę kanałów w sieci oraz przepustowości kanałów, prawdopodobieństwo blokady wynosiło 1.017×10^{-3} . Prowadzone przez autorów badania, dotychczas nie publikowane, wykazały, że sieć otrzymana przy wykorzystaniu algorytmu 3 w [9], której strukturę topologiczną przedstawiono na rys. 1 jest „odporna” na przeciążenia, przyjmując za kryterium oceny sieci zależność ruchu przenoszonoego w funkcji przeciążenia. Stwierdzenie to oznacza, że wraz ze wzrostem przeciążenia w sieci (w każdej relacji) rośnie również wartość ruchu przenoszonoego przez sieć. Powyższe wyniki wskazują jednak, że w przypadku awaryjnej pracy sieci, aby uzyskać założoną jakość obsługi należy zwiększyć koszt sieci o ponad 20%. Najlepsze wyniki uzyskano w przypadku częściowego zwiększenia zarówno przepustowości jak i liczby kanałów przy założeniu takiego samego 20% wzrostu kosztu sieci.

Wprowadzenie dodatkowych kanałów do pewnego zbioru rozdzielającego Bd_{ij} zapewnia utworzenie większej liczby dróg rozłącznych węzłowo dla par węzłów należących do podsieci danych odpowiednio grafem G_i oraz G_j . Zgłoszenia

generowane z podsieci G_i do podsieci G_j będą obsługiwane przez kanały należące do zbioru rozdzielającego Bd_{ij} nie blokując tym samym dróg połączeniowych dla zgłoszeń generowanych w relacjach $G_i - G_k$ oraz $G_j - G_k$.

W pracy [9] algorytmem ustalającym topologię zbiorów rozdzielających dla każdego wierzchołka drzewa rozwiązań jest algorytm 2 (Wyznacz zbiory rozdzielające). Dla danego zbioru liczb $\{y_{12}, y_{13}, y_{23}\}$, którego elementy określają liczby kanałów łączących odpowiednie podsieci, wybiera on, na mocy twierdzenia 2 w [9], kanały zapewniające wymaganą spójność l -węzłową całej sieci. Kanały te nie umożliwiają jednak utworzenia l -dróg rozłącznych węzłowo w danym zbiorze rozdzielającym Bd_{ij} dla par węzłów umieszczonych w podsieciach G_i oraz G_j . Z uwagi na uzyskane wyniki algorytm ten został zmodyfikowany, przy czym ogólna idea tego algorytmu (algorytm 1) jest podobna. Dla danego zbioru liczb $\{y_{12}, y_{13}, y_{23}\}$ generowane są kolejne drzewa najkrótszych ścieżek [2], a następnie z drzew tych są wybierane każdorazowo tylko kanały niezbędne dla zapewnienia spójności l -węzłowej dla podgrafów $G_i \cup G_j$. Pozostała część jest wybierana z uszeregowanych w sposób niemalejący kanałów, według kosztów przypadających na jednostkę przepustowości, które nie zostały wybrane poprzednio. W celu dokładnego przedstawienia zmodyfikowanego algorytmu wprowadzone zostaną następujące oznaczenia:

N_i — oznacza zbiór węzłów do podsieci G_i ;

B_i^j — oznacza podzbiór zbioru N_i , zawierający węzły, do których dołączone są kanały prowadzące z podsieci G_i do podsieci G_j ;

W_i^j — oznacza moc zbioru B_i^j ;

v_i — oznacza węzeł należący do podsieci danej grafem G_i .

Poniżej przedstawiono szczegółowy opis algorytmu w postaci procedury napisanej w Pascalu.

Algorytm 1

Dane:

macierz kosztów ϕ ; zbiór liczb $\{y_{12}, y_{13}, y_{23}\}$;

Wyniki:

zbiory rozdzielające Bd_{ij} ; $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$;

procedurę WyznaczZbioryRozdzielające;

var

CechaKanał:boolean;

begin

$B_i^j := \emptyset, Bd_{ij} := \emptyset, i, j = 1, 2, 3, i \neq j$;

repeat

wyznacz drzewo ekonomiczne;

{macierz wag określona poprzez macierz kosztów ϕ }

{elementy określające koszt kanałów należących do}

```

{podsieci  $G_i$  są równe zero}
for  $k := 1$  to  $n - 1$  do {Analiza gałęzi należących do drzewa}
  begin
    określ węzły  $v_i$  oraz  $v_j$  połączone  $k$ -tym kanałem;
    if  $i <> j$  then
      begin {węzły  $v_i$  oraz  $v_j$  należą do różnych podsieci}
        CechaKanału := false;
         $\phi[i, j] := \infty$ ,  $\phi[j, i] := \infty$ ;
        if  $(W_i^j = l)$  and  $(W_j^i = l)$  then
          begin
            pomiędzy podsieciami zapewniona jest już
            wymagana spójność węzłowa
          end
        else if  $(v_i \notin B_i^j)$  and  $(v_j \notin B_j^i)$  then
          begin
            CechaKanału := true;
             $B_i^j := B_i^j + \{v_i\}$ ;
             $B_j^i := B_j^i + \{v_j\}$ ;
          end;
        end;
      if CechaKanału then
        do zbioru rozdzielającego  $Bd_{ij}$  dodaj kanał  $k$ -ty;
        if LiczbaKanałów w  $Bd_{ij} = y_{ij}$  then
          usuń pozostałe kanały łączące podsieci  $G_i$  oraz  $G_j$ ;
        end;
      until  $(W_i^j = l, i, j = 1, 2, 3, i \neq j)$ ;
      uszereguj nie malejąco pozostałe kanały w zbiorach łączących poszczególne pod-
      sieci według kosztów przypadających na jednostkę przepustowości;
      ze zbiorów tych, dla danego zbioru liczb  $\{y_{12}, y_{13}, y_{23}\}$  wybierz brakujące kanały
      o najmniejszym koszcie i dodaj je do odpowiednich zbiorów  $Bd_{ij}$ ;
    end;
  end;
end;
```

Przyjęta spójność węzłowa rzędu l dla podgrafów $G_i \cup G_j$, $i, j = 1, 2, 3$, zapewnia także, na mocy twierdzenia 2 w [9], wymaganą spójność grafu G , pod warunkiem jednak, że każda z podsieci G_i jest spójna l węzłowo.

Po wyznaczeniu kanałów należących do zbiorów rozdzielających przystąpić można obecnie do wyznaczenia oszacowania dolnego dla każdego wierzchołka drzewa rozwiązań określonego zbiorem liczb $\{y_{12}, y_{13}, y_{23}\}$. Oszacowanie to, podobnie jak w [9], składać się będzie z dwóch składników: pierwszy z nich zawierał będzie oszacowanie dolne kanałów należących do zbiorów rozdzielających, drugie zaś, sumaryczną wartość oszacowań każdej z podsieci. W celu wyznaczenia minimalnego kosztu kanałów należących do zbiorów rozdzielających wykorzystano

fakt, że funkcja przepustowości kanałów w funkcji natężenia strumienia dostarczonego do kanału jest identyczna dla wszystkich kanałów w sieci. Ponadto przyjęto założenie, że elementy $\phi[i, j]$ w podmacierzach określających koszty kanałów należących do poszczególnych podsieci G_i są równe zero, za wyjątkiem tych elementów dla których $\phi[i, j] = \infty$. Przy powyższym założeniu koszt kanałów należących do zbiorów rozdzielających będzie minimalny, jeżeli ruch generowany w węzłach sieci skierowany zostanie wzdłuż tras najkrótszych w sensie kosztów przypadających na jednostkę przepustowości. Należy jednak zaznaczyć, że w przypadku, gdy pomiędzy dowolnym węzłem v_i oraz v_j , które należą odpowiednio do podsieci G_i oraz G_j istnieje kanał bezpośredni, wówczas ruch generowany z węzła v_i do węzła v_j i odwrotnie zawsze zostanie skierowany w kanał bezpośredni.

Z uwagi na fakt, że oszacowanie dolne kanałów należących do podsieci G_i jest identyczne jak w [9] zatem nie będzie ono tutaj definiowane.

Zanim przedstawiony zostanie algorytm optymalizacji struktury topologicznej sieci podany zostanie sposób wyznaczania oszacowania górnego. W pracy [9] oszacowanie górne wyznaczono przy pomocy algorytmu heurystycznego (Algorytm 1). Algorytm ten znajdował rozwiązanie suboptymalne spełniające narzucone ograniczenia. Wprowadzenie założenia na spójność l -węzłową podgrafów $G_i \cup G_j$ uniemożliwiło zastosowanie tego algorytmu. Nie udało się również wyznaczyć oszacowania górnego, które byłoby słuszne dla każdego wierzchołka drzewa rozwiązań określonego zbiorem liczb $\{y_{12}, y_{13}, y_{23}\}$. Zatem w proponowanym algorytmie za oszacowanie górne przyjęto koszt sieci wyjściowej, zawierającej wszystkie kanały, określony zależnością 1 w [9]. W celu wyznaczenia przepustowości kanałów ruch generowany w węzłach sieci skierowany został wzdłuż tras najkrótszych w sensie kosztów przypadających na jednostkę przepustowości. Należy zaznaczyć, że w przypadku bezpośredniego połączenia węzłów ruch generowany w tej relacji kierowany jest zawsze w kanał bezpośredni.

Po przedstawieniu algorytmów wyznaczających wartości oszacowania dolnego dla każdego zbioru liczb $\{y_{12}, y_{13}, y_{23}\}$ oraz oszacowania górnego podany zostanie obecnie algorytm optymalizacji struktury topologicznej sieci, który jest modyfikacją algorytmu 3 w [9], wykorzystujący rozbić sieci na podsieci.

Algorytm 2

procedura Optymalizacja Sieci

begin

dokonaj podziału sieci na podsieci;

określ warunek: czy każda z podsieci jest spójna l -węzłowo oraz czy kanały łączące podsieci zapewniają spójność l -węzłową dla podsieci $G_i \cup G_j$, $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$;

if warunek = false then

{optymalizacja sieci jest niemożliwa}

```
else begin
  wyznacz oszacowanie górne; {koszt sieci wyjściowej}
  struktura minimalna := struktura początkowa;
  repeat
    wygeneruj zbiór liczb  $k_1, k_2, k_3$ , gdzie  $k_i$  — liczba
    kanałów wychodzących z podsieci  $G_i$  oraz dla zbioru tego
    wyznacz liczby  $y_{12}, y_{13}, y_{23}$ ;  $\{y_{ij} \geq 1\}$ 
    wyznacz topologię zbiorów rozdzielających; {algorytm}
    wyznacz oszacowanie dolne sieci;
    if oszacowanie dolne  $\leq$  oszacowanie górne then
      begin
        wyznacz rozptyw strumieni wzdłuż tras najkrótszych;
        wyznacz strukturę topologiczną każdej z podsieci;
        if koszt sieci  $\leq$  oszacowanie górne then
          begin
            oszacowanie górne := koszt sieci;
            struktura minimalna := otrzymana struktura;
          end;
        end
      else {zamknięcie wierzchołka w drzewie rozwiązań}
    until (czy możliwa jest generacja nowych liczb  $k_1, k_2, k_3$ );
  end;
  drukuj minimalną strukturę;
end;
```

Komentarza wymaga sposób wyznaczenia minimalnej struktury topologicznej każdej z podsieci. Przy ustalonej topologii zbiorów rozdzielających oraz skierowaniu strumienia wzdłuż ścieżek najkrótszych minimalną strukturę topologiczną każdej z podsieci wyznaczyć można stosując algorytm heurystyczny przedstawiony w pracy [9] (algorytm 1), bądź też algorytm oparty na metodzie podziału i oszacowań, który przedstawiono w pracy [14]. W obydwu tych algorytmach wprowadzono dodatkowe ograniczenie na długość średnicy grafu G_i , przyjmując, że długość ta nie może być większa niż dwa.

3. ANALIZA RUCHOWA SIECI W WARUNKACH PRZECIĄŻENIA

Głównym celem analizy ruchowej sieci telefonicznych z komutacją kanałów jest ocena jakości obsługi zgłoszeń oferowanych sieci. Istnieją dwa podstawowe podejścia do rozwiązywania tego problemu. Pierwsze, oparte jest na modelach analitycznych (jedno lub dwuparametrowych), drugie zaś, na modelu symulacyjnym. Modele analityczne, charakteryzujące się dużą szybkością obliczeń, są

stosowane w analizie ruchowej sieci jak również stanowią podstawę dla metod optymalizacji liczności wiązek [3], [11]. Często jednak, dla weryfikacji przyjętych założeń w modelach analitycznych, stosuje się modele symulacyjne. W niniejszej pracy dla celów analizy ruchowej sieci przyjęto model symulacyjny. Podobnie jak to przyjęto w pracach [3], [11], również w tej pracy analizy sieci dokonuje się przyjmując następujące założenia:

— strumień zgłoszeń w każdej relacji (węzeł źródłowy–węzeł docelowy) jest strumieniem Poissona;

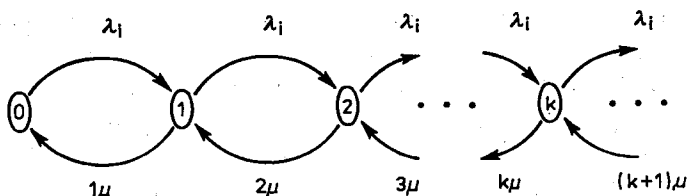
— czas trwania rozmowy jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z wartości średnią τ ;

— strumień ruchu w każdej relacji jest opisany przez wartość średnią liczby jednocześnie trwających połączeń;

— zgłoszenia nie przyjęte do obsługi są tracone (nie uwzględnia się powracania zgłoszeń do ponownej obsługi);

— węzły komutacyjne sieci są nieblokowane.

Z uwagi na dość dużą złożoność systemu, jakim jest sieć telefoniczna, dokonano dekompozycji całej sieci na zbiór par węzłów (składników) sieci. Do opisu działania każdej z nich zastosowano model masowej obsługi, w którym źródłem zgłoszeń są abonenci dołączeni do węzłów komutacyjnych danej pary, zaś stanowiskami obsługi są podkanały tworzące drogi, należące do ścieżek określonych strategią kierowania ruchem. W pracy przyjęto, że intensywność generowanego strumienia zgłoszeń przez i -tą parę jest stała i wynosi λ_i . Przy przyjętym założeniu modelem matematycznym, który dość dobrze opisuje pracę pary węzłów, jest model Poissona [6]. Diagram przejść dla tego modelu przedstawiono na rysunku 2.



Rys. 2. Diagram przejść w modelu Poissona

W teoretycznych rozważaniach model ten posiada nieskończoną liczbę stanów, jednakże w tym przypadku liczba stanów ograniczona jest skończonymi wartościami przepustowości kanałów. Wartości tych przepustowości są wyznaczone w trakcie optymalizacji dla narzuconej z góry jakości obsługi zgłoszeń. Należy także zaznaczyć, że w trakcie symulacji pracy sieci kanały należące do ścieżek danej pary węzłów są wykorzystywane również w ścieżkach wyznaczonych dla innych par węzłów. W modelu Poissona prawdopodobieństwo przebywania systemu w k -tym stanie jest równe [6]:

$$p_k^i = \frac{(\frac{\lambda_i}{\mu})^k}{k!} e^{-\frac{\lambda_i}{\mu}}. \quad (1)$$

średnią liczbę zajętych stanowisk obsługi, która jest równa średniej liczbie realizowanych połączeń, można wyznaczyć w następujący sposób:

$$\bar{N}_i = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda_i \tau)^k}{k!} e^{-\lambda_i \tau} = \lambda_i \tau, \quad (2)$$

gdzie:

λ_i — jest intensywnością strumienia zgłoszeń dla i -tej pary węzłów;

$\tau = 1/\mu$ — jest średnim czasem obsługi.

Intensywność strumienia zgłoszenia dla i -tej pary węzłów można określić w następujący sposób:

$$\lambda_i = R_i \mu \quad (3)$$

gdzie:

R_i — jest danym natężeniem ruchu dla i -tej pary węzłów.

W programie symulacyjnym zastosowano metodę planowania zdarzeń [5], [13]. Za strukturę danych, reprezentującą zbiór zdarzeń, przyjęto listę cykliczną. Czas trwania symulacji, licząc od chwili uzyskania przez system stanu ustalonego, wyznacza ustalona liczba zrealizowanych połączeń w całej sieci. Zanim podany zostanie szczegółowy algorytm symulacyjny objaśnione zostaną procedury oraz zmienne użyte w tym programie.

Przez

St — rozumie się stan sieci oznaczający liczbę aktualnie realizowanych połączeń;

Lp — oznacza liczbę zrealizowanych połączeń;

Call — zmienna boolowska oznaczająca początek (true) lub koniec (false) połączenia;

procedure CzasZgłoszenia (NrSkładnik: word; var Czas: real);

{zaplanowana zostaje chwila wystąpienia zgłoszenia w parze}

{określonej zmiennej NrSkładnik}

procedure CzasObsługiZgłoszenia (NrSkładnik: word; var Czas: real);

{wyznaczony zostaje czas obsługi zgłoszenia o rozkładzie}

{wykładniczym z wartością średnią τ }

procedure KierowanieRuchem (NrSkładnik: word; var StatusPołączenia: boolean; var: NrŚcieżki: byte);

{wykorzystując warunkową metodę zestawiania połączenia procedura testuje kolejne ścieżki zgodnie z przyjętą strategią kierowania ruchem. W przypadku braku wolnej drogi połączeniowej zmienna StatusPołączenia=false}

Poniżej przedstawiono szczegółowy opis algorytmu w postaci procedury napisanej w Pascalu.

Algorytm 3

```
procedure Symulacja;
var
  CzasSystemowy, Czas: real;
  NrSkładnik: word;
begin
  Lp:=0; St:=0;
  CzasSystemowy:=0;
  for NrSkładnik:=1 to LiczbaSkładników do
    begin {Ustalenie wartości początkowych}
      CzasZgłoszenia(NrSkładnik, Czas);
      Czas:=CzasSystemowy+Czas;
      Call:=true;
      ZapisDoListy(NrSkładnik, Call, Czas);
    end;
  while Lp ≤ ZadanaLiczbaPołączeń do
    begin
      OdczytListy(NrSkładnik, Call, Czas);
      CzasSystemowy:=Czas;
      if Call then
        begin
          KierowanieRuchem(NrSkładnik, StatusPołączenia, Nrścieżki);
          if StatusPołączenia then
            begin
              RealizacjaPołączenia(NrSkładnik, Nrścieżki);
              CzasObsługiZgłoszenia(NrSkładnik, Czas);
              Czas:=CzasSystemowy+Czas;
              Call:=false;
              ZapisDoListy(NrSkładnik, Call, Czas);
              Lp:=Lp+1;
              St:=St+1;
              CzasZgłoszenia(NrSkładnik, Czas);
              Czas:=CzasSystemowy+Czas;
              Call:=true;
              ZapisDoListy(NrSkładnik, Call, Czas);
            end;
          else
            begin
              LiczbaStrat:=LiczbaStrat+1;
              CzasZgłoszenia(NrSkładnik, Czas);
              Czas:=CzasSystemowy+Czas;
```

```

        Call:=true;
        ZapisDoListy(NrSkładnik,Call,Czas);
    end;
end
else begin
    RozłączeniePołączenia(NrSkładnik);
    St:=St-1;
end;
end;
end;
end;

```

Otrzymane wyniki w trakcie symulacji są rejestrowane od chwili uzyskania przez system stanu ustalonego. Na ich podstawie oszacować można następujące parametry:

— globalne prawdopodobieństwo blokady (GPB) określone w następujący sposób:

$$GPB = \frac{LiczbaStrat}{LiczbaStrat + ZadanaLiczbaPołączeń} \quad (4)$$

oraz indywidualne prawdopodobieństwo blokady (IPB_i) wyznaczone dla każdej pary węzłów w sposób analogiczny:

$$IPB_i = \frac{LiczbaStrat_i}{LiczbaStrat_i + LiczbaPołączeń_i} \quad (5)$$

Wyznaczone prawdopodobieństwa blokady GPB oraz IPB_i pozwalają określić zależność ruchu przenoszonego Rp w funkcji ruchu oferowanego Rof dla sieci oraz dla każdej pary węzłów

$$Rp = (1 - GPB)Rof \quad (6)$$

$$Rp_i = (1 - GPB_i)Rof_i \quad (7)$$

Kolejnym parametrem, który można wyznaczyć na podstawie uzyskanych wyników symulacyjnych oraz indywidualnych prawdopodobieństw blokady jest efektywność ruchowa sieci. Parametr ten jest określony w następujący sposób [8]:

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^M lRof_i(1 - IPB_i)}{\sum_{k=1}^K C_k} \quad (8)$$

gdzie:

l_i — jest średnią długością ścieżki, uzyskaną na podstawie wyników symulacyjnych, łączącą i -tą parę węzłów;

M — jest liczbą par węzłów;

K — jest liczbą kanałów w sieci;

C_k — jest przepustowością k -tego kanału.

4. WYNIKI BADAŃ I WNIOSKI

Dla ilustracji przedstawionych w poprzedniej części artykułu algorytmów rozpatrzony zostanie przykład sieci rozważany poprzednio w pracy [9]. Dana jest macierz odległości L oraz macierz ruchu R dla sieci zupełnej złożonej z piętnastu węzłów. Należy znaleźć strukturę topologiczną sieci o najmniejszym koszcie budowy, dla której wymagana spójność węzłowa wynosi trzy, a względna wartość odrzuconego strumienia jest równa 0.001 dla każdej pary węzłów. Następnie, dla uzyskanej struktury topologicznej należy dokonać analizy ruchowej sieci w warunkach przeciążenia.

Dane określające macierze L oraz R przedstawiono poniżej.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 23 & 40 & 45 & 27 & 122 & \infty & \infty & \infty & 142 & \infty & \infty & 135 & 160 & \infty \\ 23 & 0 & 19 & 38 & 37 & 100 & \infty & \infty & 138 & \infty & 131 & \infty & \infty & 153 & 15 \\ 40 & 19 & 0 & 32 & 43 & 82 & 101 & \infty & \infty & 104 & \infty & 103 & \infty & \infty & 14 \\ 45 & 38 & 32 & 0 & 28 & \infty & 99 & 123 & 127 & \infty & 92 & 76 & 91 & \infty & \infty \\ 27 & 37 & 43 & 28 & 0 & \infty & \infty & 150 & 154 & 139 & 105 & 94 & 112 & \infty & \infty \\ 122 & 100 & 82 & \infty & \infty & \infty & 30 & 40 & 38 & 23 & \infty & 100 & 97 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 101 & 99 & \infty & 30 & 0 & 25 & 40 & 36 & \infty & \infty & 76 & 94 & 116 \\ \infty & \infty & \infty & 123 & 150 & 40 & 25 & 0 & 21 & 29 & \infty & 110 & \infty & 112 & \infty \\ \infty & 138 & \infty & 127 & 154 & 38 & 40 & 21 & 0 & 17 & \infty & 126 & 116 & 132 & \infty \\ 142 & \infty & 104 & \infty & 139 & 23 & 36 & 29 & 17 & 0 & \infty & 119 & 111 & \infty & 152 \\ \infty & 131 & \infty & 92 & 105 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 28 & 40 & 45 & 23 \\ \infty & \infty & 103 & 76 & 94 & 100 & \infty & 110 & 126 & 119 & 28 & 0 & 21 & 41 & 39 \\ 135 & \infty & \infty & 91 & 112 & 97 & 76 & \infty & 116 & 111 & 40 & 21 & 0 & 25 & 40 \\ 160 & 153 & \infty & \infty & \infty & \infty & 94 & 112 & 132 & \infty & 45 & 41 & 25 & 0 & 30 \\ \infty & 152 & 141 & \infty & \infty & \infty & 116 & \infty & \infty & 152 & 23 & 39 & 40 & 30 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 & 4 & 6 & 7 & 8 & 2 & 6 & 5 & 4 & 8 & 4 & 5 & 4 \\ 7 & 0 & 5 & 6 & 3 & 4 & 3 & 5 & 5 & 3 & 5 & 10 & 2 & 7 & 9 \\ 8 & 5 & 0 & 10 & 10 & 2 & 8 & 4 & 4 & 7 & 7 & 2 & 3 & 2 & 6 \\ 4 & 6 & 10 & 0 & 4 & 10 & 2 & 3 & 7 & 4 & 10 & 7 & 9 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 10 & 4 & 0 & 2 & 9 & 9 & 2 & 9 & 10 & 6 & 6 & 6 & 10 \\ 7 & 4 & 2 & 10 & 2 & 0 & 10 & 5 & 10 & 4 & 5 & 3 & 8 & 7 & 5 \\ 8 & 3 & 8 & 2 & 9 & 10 & 0 & 7 & 4 & 10 & 2 & 9 & 4 & 9 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 9 & 5 & 7 & 0 & 8 & 2 & 4 & 3 & 10 & 8 & 8 \\ 6 & 5 & 4 & 7 & 2 & 10 & 4 & 8 & 0 & 9 & 6 & 8 & 6 & 6 & 6 \\ 5 & 3 & 7 & 4 & 9 & 4 & 10 & 2 & 9 & 0 & 3 & 10 & 8 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 7 & 10 & 10 & 5 & 2 & 4 & 6 & 3 & 0 & 2 & 9 & 8 & 8 \\ 8 & 10 & 2 & 7 & 6 & 3 & 9 & 3 & 8 & 10 & 2 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 9 & 6 & 8 & 4 & 10 & 6 & 8 & 9 & 2 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 7 & 2 & 7 & 6 & 7 & 9 & 8 & 6 & 9 & 8 & 2 & 2 & 0 & 8 \\ 4 & 9 & 6 & 4 & 10 & 5 & 8 & 8 & 6 & 2 & 8 & 4 & 10 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Za koszt stały podkanału ϕ_{0k} , który skokowo zależy od długości kanału l_k przyjęto następujące wartości:

do 25 km	36×10^4 ;
od 25 do 100 km	180×10^4 ;
powyżej 100 km	255×10^4 ;

zaś za koszt podkanału ϕ_{lk} , przypadający na jednostkę przepustowości kanału l_k , przyjęto wartości:

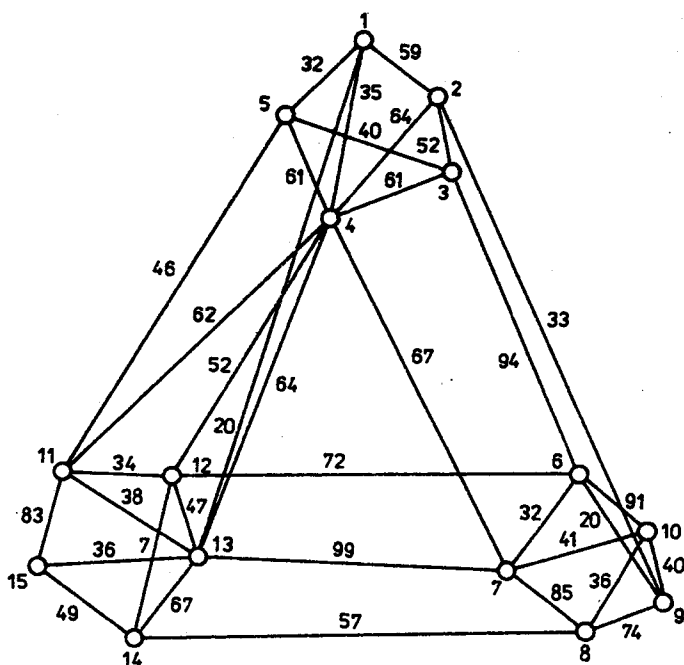
do 25 km	8.4×10^4 ;
od 25 do 100 km	7.2×10^4 ;
powyżej 100 km	6.6×10^4 ;

Funkcję kosztu dzierżawy kanału określono zależnością 3 w [9].

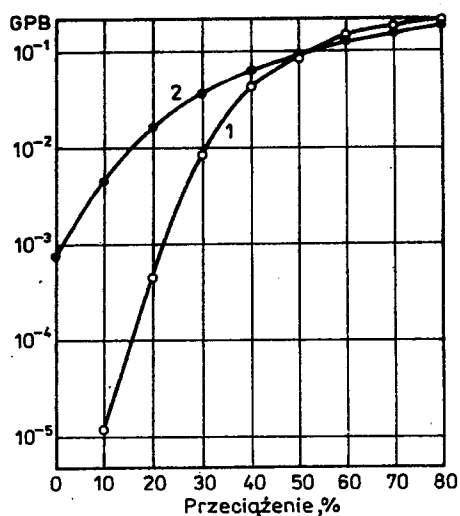
Przyjęte wartości ϕ_{0k} oraz ϕ_{lk} odpowiadają wartościom obowiązującym od czerwca 1991 r. w taryfikacji krajowej [1]. Dla przyjętych danych koszt sieci, która zawiera wszystkie istniejące kanały i spełnia ograniczenia dotyczące jakości obsługi zgłoszeń wynosi 1.1234×10^{10} . Stosując algorytm wykorzystujący rozbięcie sieci na podsieci (algorytm 2) uzyskano strukturę topologiczną sieci przedstawioną na rysunku 3. Koszt sieci dla tej struktury wynosi 9.5864×10^9 .

Na krawędziach grafu sieci opisano wyznaczone przez algorytm wartości przepustowości kanałów. Dodatkowo wprowadzone ograniczenie w algorytmie 2 na spójność węzłową podgrafów $G_i \cup G_j$ skraca czas obliczeń w stosunku do czasu obliczeń przy użyciu algorytmu 3 w [9]. Wynika to ze zmniejszenia się liczby wierzchołków w drzewie rozwiązań wygenerowanym przez algorytm 2. Badania wykazały, że liczba wierzchołków dla pokazanego przykładu w przypadku użycia algorytmu 2 jest o 47% mniejsza od liczby wierzchołków wygenerowanych przez algorytm 3 w [9]. Dla sieci, której strukturę topologiczną przedstawiono na rys. 3, dokonano analizy ruchowej stosując model symulacyjny. Czas trwania symulacji pracy sieci dla jednego przebiegu określono liczbą 2×10^6 zrealizowanych połączeń. Wartość ta odpowiada około siedemdziesięciu godzinom czasu pracy sieci. Za średni czas trwania połączenia przyjęto $\tau = 2$ min. Na rysunku 4 przedstawiono zależność globalnego prawdopodobieństwa blokady w funkcji przeciążenia dla dwóch strategii kierowania ruchem: w pierwszym przypadku (krzywa 1) zastosowano statyczną strategię kierowania ruchem przedstawioną w poprzedniej części artykułu, w drugim zaś (krzywa 2), dla porównania, zastosowano strategię wynikającą z algorytmu optymalizacji.

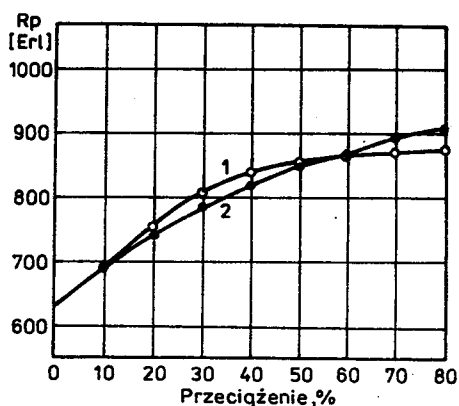
Z rysunku tego wynika, że sieć jest „odporna” na przeciążenia w przypadku stosowania obu tych strategii. Na rysunku 5 przedstawiono zależność ruchu przenoszonego przez sieć w funkcji przeciążenia dla tych samych strategii kie-



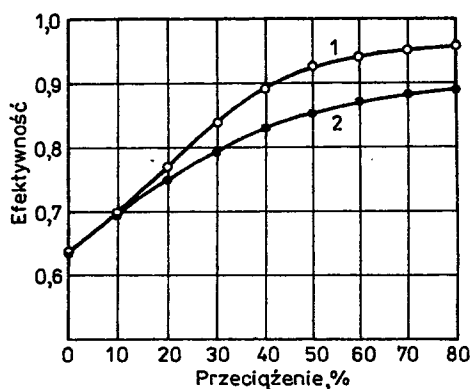
Rys. 3. Minimalna struktura sieci uzyskana po zastosowaniu algorytmu 2. Liczby na krawędziach grafu oznaczają wartości przepustowości kanałów



Rys. 4. Zależność globalnego prawdopodobieństwa blokady w funkcji przeciążenia: 1 — statyczna alternatywna strategia kierowania ruchem; 2 — strategia kierowania ruchem wynikająca z algorytmu optymalizacji



Rys. 5. Zależność ruchu przenoszonego przez sieć w funkcji przeciążenia: 1 — statyczna alternatywna strategia kierowania ruchem; 2 — strategia kierowania ruchem wynikająca z algorytmu optymalizacji



Rys. 6. Efektywność ruchowa sieci w funkcji przeciążenia: 1 — statyczna alternatywna strategia kierowania ruchem; 2 — strategia kierowania ruchem wynikająca z algorytmu optymalizacji

rowania ruchem. Zarówno w pierwszym jak i drugim przypadku degradacja sieci nie występuje [7], [8]. Ruch przenoszony przez sieć rośnie wraz ze wzrostem przeciążenia, co jest zjawiskiem korzystnym. Rysunek 6 pokazuje efektywność ruchową sieci w funkcji przeciążenia wyznaczoną na podstawie zależności 6. Jak należało oczekiwać, efektywność ruchowa sieci w przypadku stosowania statycznej alternatywnej strategii kierowania ruchem jest większa niż w przypadku strategii wynikającej z algorytmu optymalizacji. Wyrażna różnica zaznacza się powyżej 15% przeciążenia. Przy 80% przeciążeniu różnica ta wynosi około 0.75. Należy jednak zauważyć, że krzywe przedstawione na rysunkach 4, 5 oraz 6 dotyczą jedynie globalnych parametrów sieci. Z uwagi na fakt, że w sie-

ciach niesymetrycznych różnice prawdopodobieństw blokady w poszczególnych relacjach mogą być znaczne, analiza parametrów indywidualnych uzyskanych dla poszczególnych par węzłów jest w pełni uzasadniona. Ze względu na ograniczoną objętość niniejszej pracy zdecydowano się na analizę parametrów tylko dla dwóch par węzłów, przy czym pary te zostały wybrane w sposób losowy spośród wszystkich par, w których węzły należą do różnych podsieci. Sekwencje dróg alternatywnych dla wybranych par są następujące:

relacja 3-6

3-6,

2-4-7-6,

3-2-9-6,

3-4-12-6;

relacja 9-12

9-10-6-12,

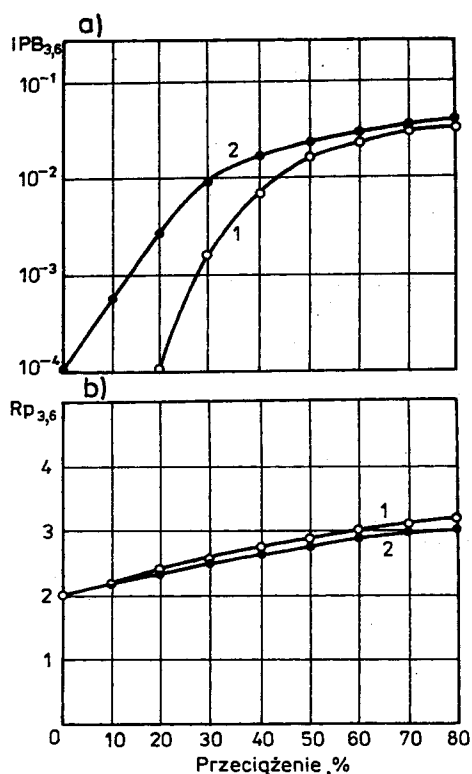
9-6-12,

9-2-4-12,

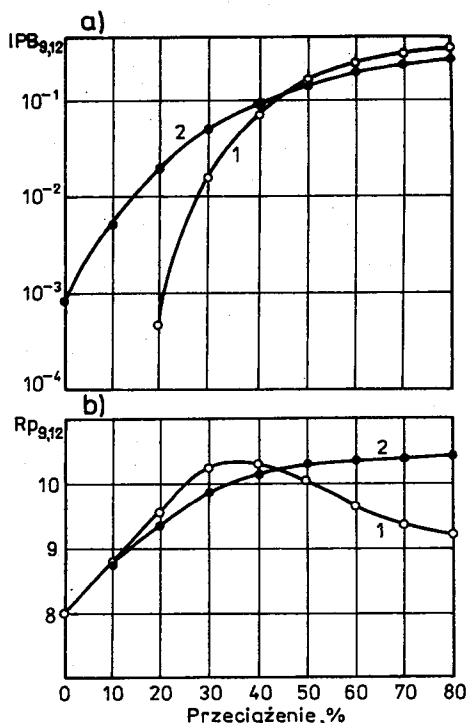
9-8-14-12.

Na rysunku 7a przedstawiono zależność indywidualnego prawdopodobieństwa blokady w funkcji przeciążenia w relacji 3-6 dla dwóch strategii kierowania ruchem. Podobnie jak w przypadku zależności globalnego prawdopodobieństwa blokady w funkcji przeciążenia, wartości indywidualnego prawdopodobieństwa blokady dla tych samych wartości przeciążenia są znacznie mniejsze w przypadku statycznej alternatywnej strategii kierowania ruchem. Na rysunku 7b pokazano zależność ruchu przenoszonego w funkcji przeciążenia. Należy zaznaczyć, że wraz ze wzrostem przeciążenia w relacji 3-6 występuje również wzrost przeciążenia w pozostałych relacjach sieci proporcjonalny do nominalnych wartości ruchu. Rysunek 8a oraz 8b przedstawia te same parametry w relacji 9-12.

Z rysunku 8b wynika, że w przypadku statycznej alternatywnej strategii kierowania ruchem występuje degradacja. Zaczynając od 40% przeciążenia, dalszy wzrost przeciążenia powoduje spadek wartości ruchu przenoszonego w relacji 9-12. Zjawisko to powoduje pogorszenie się jakości obsługi inicjowanych połączeń. Istnieje wiele metod eliminacji tego zjawiska, do których między innymi należą „rezerwacja łączy” oraz „redukcja dróg alternatywnych” [4], [7]. Metoda „rezerwacji łączy” polega na rezerwacji wyodrębnionej grupy łączy dla połączeń bezpośrednich. Z praktycznego punktu widzenia, metoda ta jest jednak trudna do zastosowania w sieci, której strukturę topologiczną przedstawiono na rysunku 3.



Rys. 7a. Zależność indywidualnego prawdopodobieństwa blokady w funkcji przeciążenia w relacji 3-6; 7b. Zależność ruchu przenoszonego przez sieć w funkcji przeciążenia w relacji 3-6: 1 — statyczna alternatywna strategia kierowania ruchem; 2 — strategia kierowania ruchem wynikająca z algorytmu optymalizacji



Rys 8a. Zależność indywidualnego prawdopodobieństwa blokady w funkcji przeciążenia w relacji 9-12; 8b. Zależność ruchu przenoszonego przez sieć w funkcji przeciążenia w relacji 9-12: 1 — statyczna alternatywna strategia kierowania ruchem; 2 — strategia kierowania ruchem wynikająca z algorytmu optymalizacji

Ustalenie pewnej liczby łączy dla połączeń bezpośrednich jest możliwe tylko dla 35 par węzłów sieci. Natomiast zmniejszenie liczby dróg alternatywnych (metoda „redukcji dróg alternatywnych”) w każdej relacji poprawiłoby jakość obsługi inicjowanych połączeń w przypadku przeciążeń, jednakże wpłynęłoby niekorzystnie na niezawodność sieci.

BIBLIOGRAFIA

1. Cennik opłat za usługi w krajowym obrocie telekomunikacyjnym. Załącznik do zarządzenia nr 38 Dyrektora Generalnego PPTT z dnia 91.06.18
2. N. Deo: *Teoria grafów i jej zastosowanie w technice i informatyce*. Warszawa 1989

3. Z. Dziong, M. Pióro: *Metodyka analizy ruchowej i optymalizacji sieci telekomunikacyjnych z komutacją kanałów*. Przegląd Telekomunikacyjny, 1986 nr 11
4. Z. Dziong, M. Pióro: *Niehierarchiczne strategie kierowania ruchem w sieciach telefonicznych*. Przegląd Telekomunikacyjny, 1986 nr 11
5. G.S. Fishman: *Symulacja komputerowa — pojęcia i metody*. PWE, Warszawa, 1981
6. A. Jajszczyk: *Podstawy telekomunikacji*. WPP, Poznań, 1989
7. R.S. Krupp: *Stabilization of alternate networks*. ICC'82, Philadelphia 1982
8. Y. Nakogame, H. Mori: *Flexible routing in the global communication network*. ITC 7, Stockholm, 1973
9. I. Olszewski, A. Zabłudowski: *Algorytmy optymalizacji struktur topologicznych sieci niehierarchicznych z komutacją łączy*. Przegląd Telekomunikacyjny, 1993 nr 2
10. I. Olszewski, A. Zabłudowski: *Analiza ruchowa sieci w warunkach awarii*. W przygotowaniu
11. M. Pióro: *Design methods for non-hierarchical circuit switched networks with advanced routing*. Prace naukowe, Elektronika, Warszawa 1989, z. 87
12. I.W. Romanowski: *Algorytmy rozwiązywania ekstremalnych zadań*. Moskwa, 1977
13. J. Tyszer: *Symulacja cyfrowa*. WNT, Warszawa, 1990
14. A. Zabłudowski, I. Olszewski: *Optymalizacja struktur topologicznych sieci niehierarchicznych*. Raport, Instytut Telekomunikacji ATR. Bydgoszcz 1992
15. A. Zabłudowski: *Optymalizacja sieci telekomunikacyjnych z alternatywną regułą doboru tras*. Praca doktorska, Bydgoszcz 1976

A. ZABŁUDOWSKI, I. OLSZEWSKI

THE CORRECTNESS VERIFICATION OF THE ALGORITHM OF TOPOLOGICAL STRUCTURE OPTIMIZATION OF NON-HIERARCHICAL CIRCUIT SWITCHING NETWORK

Summary

In this paper the heuristic approach to the optimization problem of the telephone network has been presented. The paper consists of four parts. In the first part the network topology optimization problem has been formulated. The second part gives the proposed network topology optimization algorithm. In turns, two last parts deals with the network traffic analysis. The third part shows the analysis of non-hierarchical network under congestion conditions. In the last part of the paper the results for the traffic analysis for the certain optimized network structure has been shown.

Osobliwości procesu przepolaryzowania w polikrystalicznych cienkich warstwach ferroelektrycznych typu PZT

Z. SUROWIAK, D. CZEKAJ

Instytut Problemów Techniki, Uniwersytet Śląski

V.P. DUDKEVICH, A.A. BAKIROV, I.M. SEM, E.V. SVIRIDOV

*Wydział Fizyki, Uniwersytet Rostowski,
Rostów nad Donem (Rosja)*

Otrzymano 1993.07.27

Autoryzowano do druku 1994.04.07

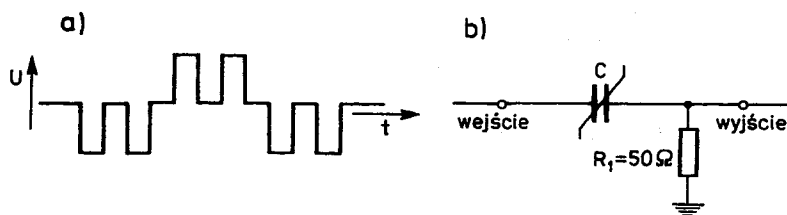
Jedną z podstawowych właściwości cienkich warstw ferroelektrycznych jest zdolność do przepolaryzowania w zewnętrznym polu elektrycznym. Na zjawisku tym oparte jest zastosowanie tych cienkich warstw jako elementów pamięci. Proces przepolaryzowania cienkich warstw charakteryzuje się pewnymi osobliwościami. Zaliczyć do nich można, m. innymi zależność czasu przepolaryzowania od powierzchni elektrod oraz anomalny przebieg zależności czasu przepolaryzowania od amplitudy bipolarnych prostokątnych impulsów napięcia elektrycznego. Do opisu fizycznej natury tych osobliwości zaproponowano prosty, statyczny model, który pozostaje w jakościowej zgodności z eksperymentem. Wykazano to na przykładzie cienkich warstw typu PZT o składzie chemicznym $\text{Pb}(\text{Zr}_{0.53}\text{Ti}_{0.45}\text{W}_{0.01}\text{Cd}_{0.01})\text{O}_3$.

1. WPROWADZENIE

Od kilku lat prowadzone są intensywne badania procesu przepolaryzowania w polikrystalicznych cienkich warstwach ferroelektrycznych. Zainteresowanie tą problematyką należy wiązać z realnymi perspektywami budowy niskoenergetycznych elementów pamięci opartych na cienkich warstwach ferroelektrycznych. Badane są pod tym kątem cienkie warstwy o różnym składzie chemicznym, o różnej grubości, strukturze i mikrostrukturze oraz osadzone na różnych podłożach. Jako przykład wymienić można badania:

- „grubych” (od 30 do 100 μm) warstw $\text{Ba}(\text{Ti}_{0.98}, \text{Sn}_{0.02})\text{O}_3$, otrzymanych metodą elektroforezy [1] lub sitodruku [2] na podłożach z folii platynowej;
- „średniej” (od 1.0 do 10 μm) grubości cienkich warstw BaTiO_3 i $(\text{Ba}, \text{Sr})\text{TiO}_3$, osadzonych na podłożach z platyny lub stali nierdzewnej [3, 4] oraz cienkich warstw $(\text{Pb}_{0.92}\text{Bi}_{0.07}\text{La}_{0.01})(\text{Fe}_{0.405}\text{Nb}_{0.325}\text{Zr}_{0.27})\text{O}_3$, otrzymanych metodą rozpylania w.cz. na podłożach z połączanej ceramiki Al_2O_3 [5];
- „bardzo cienkich” (od 0.04 do 0.50 μm) warstw typu PZT o składzie chemicznym $\text{Pb}(\text{Zr}, \text{Ti})\text{O}_3$, osadzonych na podłożach krzemowych z platynową warstwą pośrednią przy użyciu chemicznej metody żolowo-żelowej [6, 7].

Badania procesu przepolaryzowania cienkich warstw ferroelektrycznych prowadzone są najczęściej metodą Merza [8] lub metodami będącymi jej modyfikacjami [9]. Stosowane są przy tym różnego rodzaju układy elektroniczne [10], które wywołują przepolaryzowanie ferroelektryka w czasie t_s . Na ekranie oscylografu rejestrowane jest zmienne napięcie $U(t)$ na oporniku R (od 50 do 75 Ω), proporcjonalne do natężenia prądu przepolaryzowania i_s w obwodzie z badaną próbką (rys. 1b). Pierwszy dodatni impuls napięcia powoduje spolaryzowanie cienkiej warstwy. Krzywa $U(t)$ w tym przypadku odpowiada prądowi przepolaryzowania próbki (i_s) oraz prądowi ładowania (i_c) liniowego kondensatora ($i = i_s + i_c$). Drugi dodatni impuls napięcia nie wywołuje już przepolaryzowania i stąd też krzywa $U(t)$ nie odpowiada prądowi $i_s(t)$, lecz tylko prądowi $i_c(t)$. Pozwala to na wydzielenie składowej prądu elektrycznego $i_s(t)$, związanej wyłącznie z przepolaryzowaniem ferroelektrycznego kondensatora cienkowarstwowego. Czas przepolaryzowania (t_s) przyjęto określać jako czas, w którym prąd przepolaryzowania i_s zmniejsza się od wartości maksymalnej (i_{max}) do $0.01i_{\text{max}}$ [8].

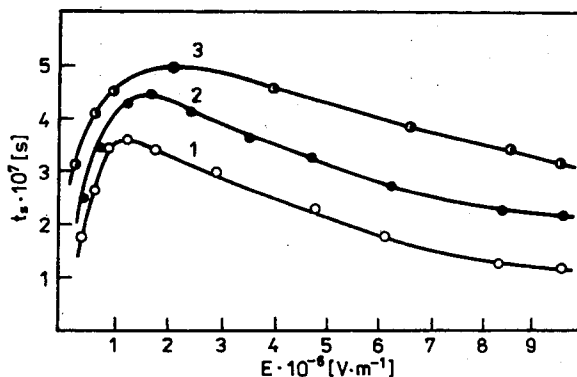


Rys. 1. Schemat ideowy układu do badania procesu przepolaryzowania cienkich warstw ferroelektrycznych (b) bipolarnymi impulsami napięcia elektrycznego (a).

Przeprowadzone dotychczas badania wykazały, że proces przepolaryzowania polikrystalicznych cienkich warstw ferroelektrycznych charakteryzuje się kilkoma osobliwościami, których fizyczny mechanizm nie jest w pełni i jednoznacznie określony. I tak np.:

- Zakres wartości czasów przepolaryzowania (t_s) podawanych przez różnych autorów jest bardzo szeroki: od 10^{-3}s [1] do 10^{-8}s [6, 7]. Trudno przyjąć, iż jest to związane wyłącznie z różnym składem chemicznym, lub tylko z różną grubością badanych cienkich warstw.

- b) Wartości funkcji $t_s(E)$ wykazują zawsze wzrost w obszarze słabych pól elektrycznych, maksimum w polach przewyższających nieco pole koercji ($E > E_c$) oraz spadek w obszarze silnych pól [1-5]. Dotyczy to cienkich warstw o prostym składzie chemicznym, jak np. BaTiO_3 (rys. 2) [4], lecz również cienkich warstw o bardziej złożonym składzie chemicznym takich jak $(\text{Pb}_{0.92}\text{Bi}_{0.07}\text{La}_{0.01})(\text{Fe}_{0.405}\text{Nb}_{0.325}\text{Zr}_{0.27})\text{O}_3$ (rys. 3) [5].



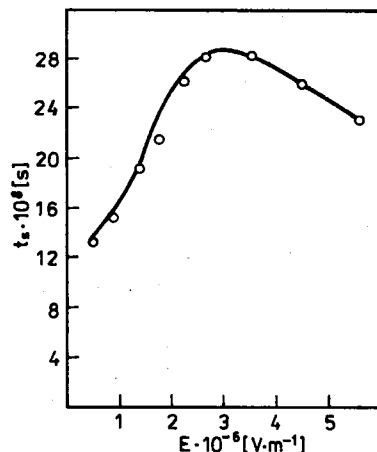
Rys. 2. Zależność czasu przepolaryzowania (t_s) od amplitudy prostokątnych bipolarnych impulsów natężenia pola elektrycznego (E) dla polikrystalicznych cienkich warstw BaTiO_3 o jednakowej grubości, lecz o różnych mikrodeformacjach $\langle \Delta d/d \rangle$ oraz różnych rozmiarach obszarów koherentnego rozpraszania promieni rentgenowskich (D):

1 — $\langle \Delta d/d \rangle = 0.001$ i $\Delta > 100$ nm;

2 — $\langle \Delta d/d \rangle = 0.005$ i $D > 100$ nm;

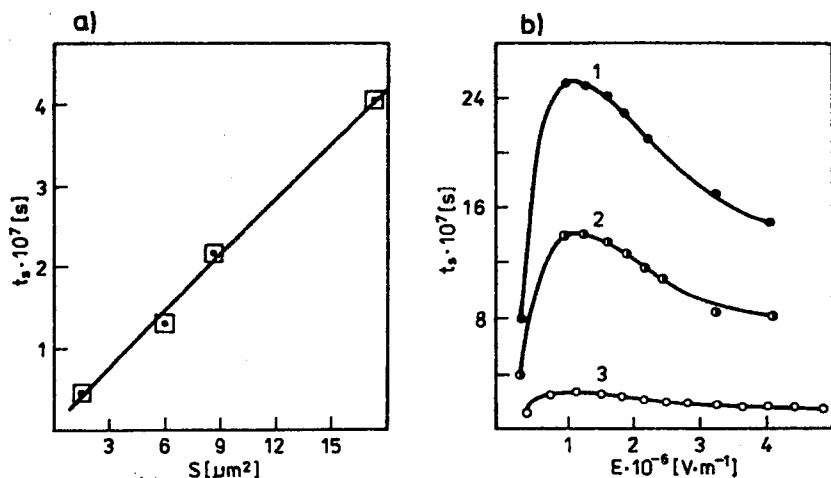
3 — $\langle \Delta d/d \rangle = 0.01$ i $D \approx 90$ nm.

Powierzchnia elektrod $S = 1.76$ mm²; podłoże z platyny



Rys. 3. Zależność $t_s(E)$ dla polikrystalicznej cienkiej warstwy $(\text{Pb}_{0.92}\text{Bi}_{0.07}\text{La}_{0.01})(\text{Fe}_{0.405}\text{Nb}_{0.325}\text{Zr}_{0.27})\text{O}_3$ o grubości $d_f = 4.5$ μm, osadzonej na podłożu ceramicznym (Al_2O_3) pokrytym złotem. Powierzchnia elektrody $S = 0.813$ mm²

- c) W miarę wzrostu wartości średnich mikrodeformacji $\langle \Delta d/d \rangle$ ostrość maksimum krzywej $t_s(E)$ zmniejsza się, a samo maksimum funkcji przesuwają się w stronę silniejszych pól, przyłożonych do próbek o równych grubościach i jednakowym składzie chemicznym (rys. 2). Wartość średnich mikrodeformacji przyjmowana jest za integralną miarę stopnia doskonałości struktury. Wyznacza się ją w oparciu o analizę profili rentgenowskich maksimum dyfrakcyjnych [11]. Miarą średnich mikrodeformacji jest stosunek średniej bezwzględnej zmiany odległości międzypłaszczyznowej Δd_{hkl} (wywołanej obecnością liniowych defektów struktury) do średniej odległości międzypłaszczyznowej d_{hkl} dla wzorca (np. ceramiki lub kryształu).



Rys. 4. Wpływ powierzchni elektrod (S) na czas przepolaryzowania (t_s)

- a) Zależność $t_s(S)$ dla polikrystalicznej cienkiej warstwy $\text{Pb}(\text{Zr}_{0.5}\text{Ti}_{0.5})\text{O}_3$ o grubości $d_f = 60$ nm, na podłożu z krzemu pokrytego platyną (pomiar prowadzono przy jednakowych wartościach amplitudy pola przepolaryzowującego) [7]
 b) Zależność $t_s(E)$ dla cienkich warstw typu PZT o jednakowej grubości $d_f \approx 2.5$ μm , osadzonych na podłożu z platyny; 1 — powierzchnia górnej elektrody $S_1 = 2.4$ mm^2 ; 2 — $S_2 = 1.7$ mm^2 ; 3 — $S_3 = 0.4$ mm^2

d) Czas przepolaryzowania (t_s) wzrasta ze wzrostem powierzchni elektrod przewodzących, naniesionych na górną powierzchnię cienkiej warstwy (rys. 4).

Fizyczna natura przedstawionych powyżej efektów (osobliwości procesu przepolaryzowania w cienkich warstwach) nie była analizowana przez innych autorów, chociaż np. maksima na krzywych $t_s(E)$ obserwowano już dawno w badaniach ceramiki $\text{Pb}(\text{Zr}, \text{Ti}, \text{Sn})\text{O}_3$ z domieszką Nb [12] oraz w badaniach kryształów BaTiO_3 [13].

W niniejszej pracy podjęto próbę przedstawienia jednego z możliwych mechanizmów powstawania wyżej wymienionych efektów przepolaryzowania w cienkich warstwach. Przedstawiony przez autorów prosty (jakościowy i statyczny) model procesu przepolaryzowania uwzględnia stan dotychczasowych badań eksperymentalnych i wnioski z nich wynikające, a szczególnie te dostatecznie uzasadnione jak np.:

- a) Rozkład mikroobjętości ferroelektryka względem progowych (lub koercyjnych) pól przepolaryzowania jest tym szerszy im większa jest wartość średnich mikrodeformacji $\langle \Delta d/d \rangle$ [3, 4].
 b) Czas przepolaryzowania (t_s) jest limitowany dopływem ekranującego ładunku elektrycznego [14, 15]. Dynamiczny charakter tego procesu trudno jest opisać za pomocą prostych formuł matematycznych. Dlatego też przedstawiony zostanie tylko prosty model fizyczny objaśniający w sposób jakościowy wystę-

powanie maksimum funkcji $t_s(E)$. W modelu tym przyjęto, że do momentu rozpoczęcia się procesu przepolaryzowania na okładkach kondensatora z cienkowarstwowym ferroelektrykiem powinien zgromadzić się ładunek Q_E , wystarczający do ekranowania chociażby tej części polaryzacji, która jest zdolna do przepolaryzowania się w polu elektrycznym o amplitudzie E .

- c) Na granicy między cienką warstwą ferroelektryczną i podłożem oraz cienką warstwą i górną elektrodą przewodzącą mogą formować się warstwy przejściowe o różnym składzie chemicznym i (lub) różnej strukturze. Na przykład w czasie osadzania cienkich warstw BaTiO_3 na podłożach niklowych, metodą rozpylania katodowego, w atmosferze tlenu, tworzy się przejściowa warstwa NiO [16], zaś przy osadzaniu cienkich warstw perowskitowych $\text{Pb}(\text{Zr}, \text{Ti})\text{O}_3$ na stali nierdzewnej powstaje przejściowa warstwa o tym samym składzie chemicznym, lecz o strukturze typu pirochloru [17].
- d) Stwierdzony eksperymentalnie liniowy wzrost czasu przepolaryzowania (t_s) ze wzrostem powierzchni elektrody (S) ferroelektrycznego kondensatora cienkowarstwowego (rys. 4) potwierdza hipotezę, iż czas przepolaryzowania jest ograniczony czasem dopływu ładunku ekranującego polaryzację. Ponieważ efekt ten ma miejsce tylko w przypadku cienkich warstw polikrystalicznych (a nie monokrystalicznych) stąd też nie można mówić o nukleacji i bocznym ruchu jednej (lub kilku) domeny, co prowadziłoby do wzrostu „rzeczywistego”, („fizycznego”) czasu przepolaryzowania (t_s) ze wzrostem powierzchni elektrody (S). Należy również wykluczyć wpływ tangencjalnej składowej oporu elektrycznego elektrod (obwód z rozłożonymi parametrami), gdyż zazwyczaj elektrody mają wystarczająco dużą grubość.

2. NAPIĘCIA I ŁADUNKI ELEKTRYCZNE W LINIOWYM KONDENSATORZE Z DWUWARSTWOWYM DIELEKTRYKIEM

Rozpatrzmy wzajemną zależność napięć i ładunków na poszczególnych warstwach dwuwarstwowego dielektryka w kondensatorze, znajdującym się w obwodzie prądu stałego (rys. 5).

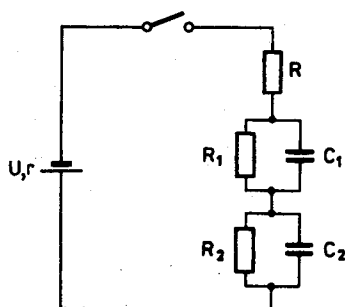
Z analizy tego prostego obwodu elektrycznego wynika, że całe zadanie w ujęciu statycznym sprowadza się do rozwiązywania następującego układu równań (oznaczenia pod rys. 5):

$$U_{C_1} = \frac{Q_1}{C_1} = R_1 I_{R_1}, \quad (1)$$

$$U_{C_2} = \frac{Q_2}{C_2} = R_2 I_{R_2}, \quad (2)$$

$$I = I_{R_1} + I_{C_1} = I_{R_2} + I_{C_2}, \quad (3)$$

$$U = U_{C_1} + U_{C_2} + IR, \quad (4)$$



Rys. 5. Obwód zastępczy wykorzystany przy obliczeniach zależności napięcia elektrycznego (U) oraz ładunków elektrycznych (Q) od czasu w kondensatorze cienkowarstwowym, z dwuwarstwowym dielektrykiem, podłączonym do źródła prądu stałego o sile elektromotorycznej U i oporze wewnętrznym r :

R_1, C_1 — opór elektryczny i pojemność elektryczna związana z właściwą cienką warstwą ferroelektryczną;

R_2, C_2 — opór elektryczny i pojemność elektryczna związana z warstwą przejściową;

R — opór elektryczny spełniający tę samą rolę jak na rys. 1 ($R = 50 - 75 \Omega$)

$$I_{C_1} = \frac{dQ_1}{dt}, \quad (5)$$

$$I_{C_2} = \frac{dQ_2}{dt}. \quad (6)$$

Z równań (1)–(6) w wyniku prostych przekształceń i podstawień otrzymuje się następujące równanie różniczkowe:

$$\frac{d^2 Q_1}{dt^2} + a \frac{dQ_1}{dt} + b Q_1 = c, \quad (7)$$

gdzie:

$$a = \frac{R_1 R_2 (C_1 + C_2) + r(R_1 C_1 + R_2 C_2)}{r R_1 R_2 C_1 C_2}, \quad (8)$$

$$b = \frac{R_1 + R_2 + r}{r R_1 R_2 C_1 C_2}, \quad (9)$$

$$c = \frac{U}{r R_2 C_2}. \quad (10)$$

Rozwiązanie równania (7) ma postać:

$$Q_1 = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{c}{b}, \quad (11)$$

gdzie:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad (12)$$

$$A_1 = -\frac{\frac{U}{r} + \frac{c}{b}\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (13)$$

$$A_2 = -\frac{\frac{U}{r} + \frac{c}{b}\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (14)$$

Nietrudno wykazać, że przy spełnionych warunkach:

$$r + R \ll R_1 \quad \text{ i } \quad r + R \ll R_2, \quad (15)$$

przybliżone rozwiązania mają postać:

$$U_1(t) = U \left[\left(\frac{C_2}{C_1 + C_2} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) e^{-t/\tau_1} + \right. \\ \left. - \frac{C_2}{C_1 + C_2} e^{-t/\tau_2} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right], \quad (16)$$

$$U_2(t) = U \left[\left(-\frac{C_2}{C_1 + C_2} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) e^{-t/\tau_1} + \right. \\ \left. - \frac{C_1}{C_1 + C_2} e^{-t/\tau_2} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right], \quad (17)$$

gdzie:

$$\tau_1 = \frac{R_1 R_2 (C_1 + C_2)}{R_1 + R_2}, \quad (18)$$

$$\tau_2 = \frac{(r + R) C_1 C_2}{C_1 + C_2}, \quad (19)$$

$$\tau_1 \gg \tau_2 \text{ (zgodnie z warunkami (15))}. \quad (20)$$

Zależności Q_1 i Q_2 otrzymuje się w oparciu o równania (16) i (17)

$$Q_1(t) = C_1 \cdot U_1(t), \quad (16a)$$

$$Q_2(t) = C_2 \cdot U_2(t). \quad (17a)$$

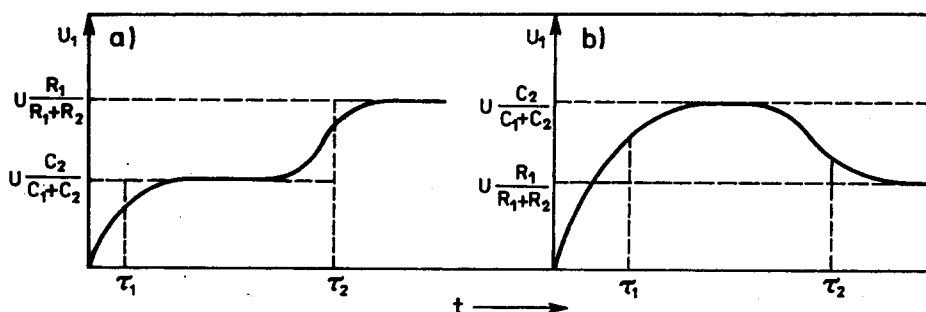
W zależności od stosunku przenikalności elektrycznych ($\varepsilon_2/\varepsilon_1$) i elektrycznych oporności właściwych (ϱ_2/ϱ_1) obydwu warstw dwuwarstwowego dielektryka wykresy funkcji $U_1(t)$ mogą mieć różny przebieg (rys. 6).

Pierwszy przypadek (rys. 6a) dotyczy warunku:

$$\varepsilon_2 \cdot \varrho_2 < \varepsilon_1 \cdot \varrho_1, \quad (21)$$

który jest równoważny nierówności:

$$\frac{C_2}{C_1 + C_2} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} < 0. \quad (22)$$



Rys. 6. Zależność $U_1(t)$ na właściwej cienkiej warstwie ferroelektrycznej w kondensatorze z dwuwarstwowym dielektrykiem, po włączeniu go do źródła napięcia stałego:

a — $\varepsilon_2 \varrho_2 < \varepsilon_1 \varrho_1$; b — $\varepsilon_2 \varrho_2 > \varepsilon_1 \varrho_1$

Drugi przypadek (rys. 6b) dotyczy warunku:

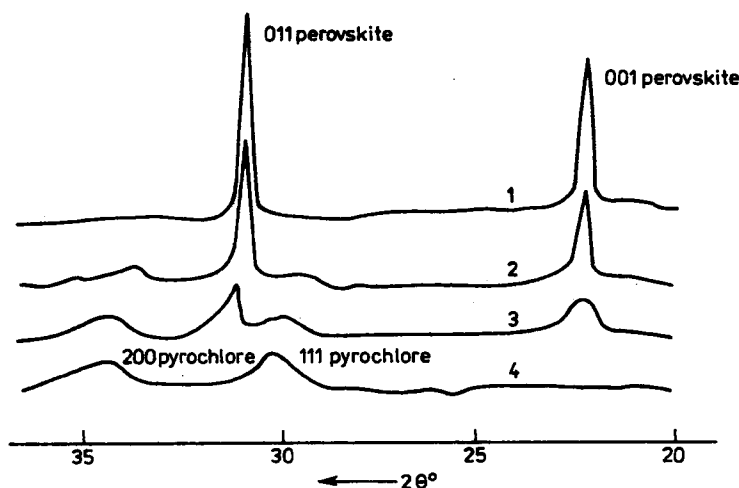
$$\varepsilon_2 \varrho_2 > \varepsilon_1 \varrho_1, \quad (23)$$

który jest równoważny nierówności:

$$\frac{C_2}{C_1 + C_2} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} > 0. \quad (24)$$

Ze względu na wysoką wartość przenikalności elektrycznej (ε_1) oraz dużą elektryczną oporność właściwą (ϱ_1) ferroelektryka bardziej realnym jest przypadek pierwszy ($\varepsilon_2 \varrho_2 < \varepsilon_1 \varrho_1$) i jemu to poświęcimy naszą uwagę. Warunek (21) realizuje się zwłaszcza w przypadku osadzania cienkich warstw typu PZT o składzie chemicznym $\text{Pb}(\text{Zr}_{0.53}\text{Ti}_{0.45}\text{W}_{0.01}\text{Cd}_{0.01})\text{O}_3$, na podłożach z nierdzewnej stali, metodą w.cz. rozpylania targetu o składzie stechiometrycznym, w atmosferze tlenu [17]. W początkowym stadium osadzania, a więc bezpośrednio na podłożu, formuje się warstwa przejściowa o tym samym składzie chemicznym co target, lecz o strukturze typu pirochloru. Górna część kondensatu (a więc ta właściwa cienka warstwa ferroelektryczna) ma strukturę typu perowskitu. Potwierdzają to rentgenogramy cienkiej warstwy o grubości wyjściowej $d_f = 5.0 \mu\text{m}$ (rys. 7, dyfraktogram 1) stopniowo ścienianej metodą trawienia chemicznego w 5% wodnym roztworze HNO_3 od strony swobodnej powierzchni (rys. 7, dyfraktogramy 2–4).

Podkreślić należy, że pirochlorowa warstwa przejściowa nie była identyfikowana na rentgenogramach w przypadku otrzymywania cienkich warstw na podłożach z polikrystalicznej platyny w $T_s \gg 700\text{K}$ pomimo zachowania wszystkich pozostałych warunków osadzania. W miarę podwyższania temperatury podłoży ze stali nierdzewnej grubość warstwy przejściowej stopniowo się zmniejsza. Rentgenogramy cienkich warstw, otrzymanych w odpowiednio wysokiej temperaturze, mogą nie wykazywać już fazy pirochloru. Warstwa przejściowa jednak nadal istnieje o czym świadczą badania dielektryczne (niskoczęstotliwościowa dyspersja ε).



Rys. 7. Rentgenowskie dyfraktogramy jednej cienkiej warstwy $\text{Pb}(\text{Zr}_{0.53}\text{Ti}_{0.45}\text{W}_{0.01}\text{Cd}_{0.01})\text{O}_3$ (o wyjściowej grubości $d_f = 5.0 \mu\text{m}$, na podłożu ze stali nierdzewnej) stopniowo ścienianej metodą chemicznego trawienia w 5% wodnym roztworze HNO_3 :

1 — $d_f = 5.0 \mu\text{m}$ 2 — $d_f = 1.5\text{--}2.0 \mu\text{m}$ 3 — $d_f = 0.8\text{--}1.1 \mu\text{m}$ 4 — $d_f = 0.2\text{--}0.4 \mu\text{m}$

Cienkie warstwy typu PZT o wyżej podanym składzie chemicznym, lecz o czystej fazie ze strukturą typu pirochloru, otrzymano zarówno na stali nierdzewnej jak i na platynie stosując odpowiednio niskie temperatury osadzania (grubość cienkich warstw od 1 do $5 \mu\text{m}$). Dla takich cienkich warstw z rozmiarami ziarn od 0.1 do $0.2 \mu\text{m}$ otrzymano $\varepsilon_2 = 32\text{--}42$ i $\varrho_2 = (3.6\text{--}4.0) \times 10^9 \Omega \text{ m}$.

W przypadku cienkich warstw perowskitowych, jakie można osadzić na platynie w odpowiednio wysokiej temperaturze, otrzymano $\varepsilon_1 = 480\text{--}530$ i $\varrho_1 = (4.4\text{--}5.8) \times 10^9 \Omega \text{ m}$ (dla grubości $d_f = 2\text{--}5 \mu\text{m}$ i rozmiarów ziaren od 0.2 do $0.3 \mu\text{m}$).

Z przedstawionych danych eksperymentalnych wynika, że w przypadku dwuwarstwowych dielektryków, jakimi mogą być cienkie warstwy typu PZT, spełniona jest nierówność $\varepsilon_2 \varrho_2 < \varepsilon_1 \varrho_1$. Stąd też „progowe” napięcia $\frac{UC_2}{C_1+C_2}$ i $\frac{UR_1}{R_1+R_2}$ na kondensatorze C_1 z ferroelektryczną cienką warstwą mogą mieć różne wartości (rys. 6a). Zależy to od stosunku grubości d_1 i d_2 poszczególnych warstw, ich przenikalności elektrycznych ε_1 i ε_2 , a także ich elektrycznych oporów właściwych ϱ_1 i ϱ_2 .

Jeśli

$$\frac{C_2}{C_1 + C_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad (25)$$

to z równania (16) wynika, że czasem relaksacji limitującym czas gromadzenia się na elektrodzie ładunku ekranującego P_s jest τ_2 , który w oparciu o równanie (19)

można wyrazić następująco:

$$\tau_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 (r + R)}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1} S, \quad (26)$$

gdzie: S — powierzchnia elektrody.

Jeśli $\frac{C_2}{C_1 - C_2} \ll 1$ (rys. 6a), to czasem relaksacji limitującym czas gromadzenia się ładunku ekranującego P_s na kondensatorze z cienką warstwą ferroelektryczną jest czas τ_1 , który zgodnie z równaniem (18) można wyrazić następująco:

$$\tau_1 = \frac{\varepsilon_0 \varrho_1 \varrho_2 (\varepsilon_1 d_1 + \varepsilon_2 d_2)}{\varrho_1 d_1 + \varrho_2 d_2}. \quad (27)$$

W przypadku braku warstwy przejściowej otrzymuje się tylko jeden czas relaksacji:

$$\tau = \frac{(r_1 + R_1)RC}{r + R_1} \approx RC_1, \quad (28)$$

$$\text{gdzie: } C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{d_1} \cdot S. \quad (29)$$

Z (28) i (29) otrzymuje się:

$$\tau \approx \frac{R \varepsilon_0 \varepsilon_1}{d_1} S. \quad (30)$$

3. CZAS PRZEPOLARYZOWANIA JAKO CZAS GROMADZENIA SIĘ ŁADUNKU EKRANUJĄCEGO

Wykażemy teraz, że istnienie rozkładu mikroobszarów cienkiej warstwy po polach przepolaryzowujących polaryzację oraz przyjęcie założenia o konieczności zgromadzenia się na kondensatorze „zarodkowego” ładunku, zdolnego w przyszłości ekranować (choćby częściowo) przełączaną polaryzację, prowadzi do wystąpienia zależności $t_s(E)$ lub $t_s(U)$ jakościowo zgodnej z wynikami eksperymentu.

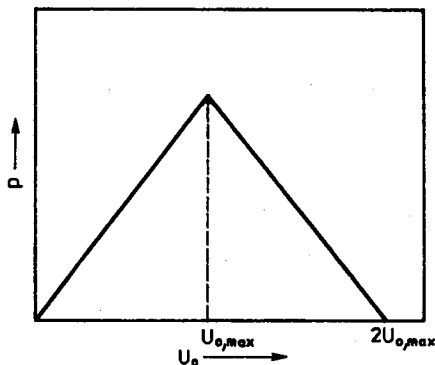
W przyjętym modelu procesu przepolaryzowania oparto się na jednym z najprostszych rozkładów mikroobszarów cienkiej warstwy względem progowych napięć U_0 (patrz rys. 8). Uwzględniając warunki normowania, gęstość prawdopodobieństwa mikroobszarów przepolaryzowanych (p) w funkcji progowego napięcia przepolaryzowującego (U_0) przedstawić można następująco:

$$p = \frac{1}{U_{0,\max}^2} \cdot U_0, \quad \text{dla } U_0 \ll U_{0,\max} \quad (31)$$

$$p = -\frac{1}{U_{0,\max}^2} U_0 + \frac{2}{U_{0,\max}}, \quad \text{dla } U_{0,\max} \ll U_0 \ll 2U_{0,\max}, \quad (32)$$

gdzie:

$U_{0,\max}$ — napięcie progowe odpowiadające maksimum funkcji rozkładu.



Rys. 8. Prosty rozkład mikroobszarów cienkiej warstwy względem progowych napięć elektrycznych (U_0), przyjęty do teoretycznej analizy zależności $t_s(U)$:

p — gęstość prawdopodobieństwa;

$U_{0,\max}$ — progowe napięcie elektryczne, odpowiadające maksimum rozkładu $p(U_0)$

W przypadku cienkich warstw typu PZT, kiedy to spełniony jest warunek $\epsilon_2 \epsilon_2 < \epsilon_1 \epsilon_1$, zgodnie z równaniem (16) maksymalne napięcie na ferroelektrycznym kondensatorze $U_{1,\max}$, po przyłożeniu impulsu o wysokości U , wynosi:

$$U_{1,\max} = U \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (33)$$

Dla napięć $U_{1,\max}$ z zakresu $0 \ll U_{1,\max} \ll U_{0,\max}$ mikroobszary cienkiej warstwy z progowymi napięciami z przedziału $U_0 - (U_0 + dU_0)$ stanowią następujący ułamek wszystkich mikroobszarów:

$$dw = p dU_0 = \frac{1}{U_{0,\max}^2} U_0 dU_0. \quad (34)$$

Zatem ta część mikroobszarów (w), która zdolna jest przepolaryzować się w polu $U_{1,\max}$ w warunkach stałego dopływu ładunku ekranującego, jest dana wyrażeniem:

$$w = \int_0^{U_{1,\max}} p dU_0 = \frac{U_{1,\max}^2}{2U_{0,\max}^2}. \quad (35)$$

Ładunek elektryczny niezbędny dla ekranowania polaryzacji P , która uległa przełączeniu, wyniesie odpowiednio:

$$Q_2 = 2PS \frac{U_{1,\max}^2}{2U_{0,\max}^2}. \quad (36)$$

Wartość polaryzacji P może być wyznaczona z pętli histerezy dielektrycznej metodą Sawyera-Towera [18].

Jeśli przyjąć, że „zarodkowy” ładunek Q_e , niezbędny dla zainicjowania procesu przepolaryzowania, jest k razy mniejszy od Q , to:

$$Q = 2PS \frac{U_{1,\max}^2}{2U_{0,\max}^2} \cdot k, \quad (37)$$

gdzie:

$$2PSk = U_e \cdot C_1, \quad 0 < k < 1. \quad (38)$$

Podstawiając wyrażenie (38) do równania (37) otrzymuje się:

$$Q_e = \frac{U_{1,\max}^2 \cdot U_e \cdot C_1}{2U_{0,\max}^2} \quad (39)$$

Zakładając, że warunki gromadzenia się takiego ładunku są jednakowe dla dowolnych U (lub $U_{1,\max}$), to czas z tym związany można znaleźć albo rozwiązując równanie:

$$Q_1(t) = Q_e, \quad (40)$$

albo rozwiązując układ równań (16) i (39):

$$\frac{U_{1,\max}^2 U_e}{2U_{0,\max}^2} = U \left[\left(\frac{C_2}{C_1 + C_2} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) e^{-t/\tau_1} + \frac{C_2}{C_1 + C_2} e^{-t/\tau_2} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right]. \quad (41)$$

Przybliżone analityczne rozwiązanie tego równania ze względu na t przedstawimy dla dwóch skrajnych przypadków (wyliczony czas t zgodnie z przyjętym modelem będzie bliski czasowi przepolaryzowania t_s). I tak:

(1) W przypadku słabych pól, jeśli $\frac{C_2}{C_1 + C_2} \ll 1$, to równanie (41) przyjmie postać:

$$\frac{U_{1,\max} U_e}{2U_{0,\max}^2} = U \frac{R_1}{R_1 + R_2} (1 - e^{-t/\tau_1}), \quad (42)$$

lub

$$t = t_s \approx -\tau_1 \ln \left(1 - \frac{U_{1,\max} U_e}{2U_{0,\max}^2} \right). \quad (43)$$

(2) W podobny sposób można wyliczyć t_s dla innych zakresów wartości $U_{1,\max}$.

I tak: a) dla $U_{0,\max} \ll U_{1,\max} \ll 2U_{0,\max}$

$$t_s = -\tau_1 \ln \left(1 + \frac{U_e}{U_{1,\max}} + \frac{U_{1,\max} U_e}{2U_{0,\max}^2} - \frac{2U_e}{U_{0,\max}} \right); \quad (44)$$

b) dla $U_{1,\max} \gg 2U_{0,\max}$

$$t_s = -\tau_1 \ln \left(1 - \frac{U_e}{U_{1,\max}} \right). \quad (45)$$

Można wykazać, że wyrażenia (43), (44) i (45) mają sens fizyczny jeśli:

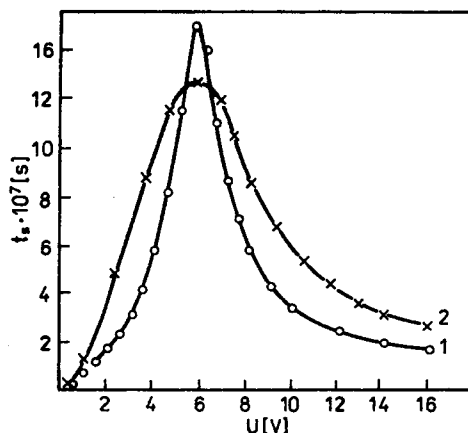
$$U_e \leq \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) U_{0,\max}. \quad (46)$$

Nierówność (46) oznacza, że istnieje możliwość nagromadzenia „zarodkowego” ładunku ekranującego i przełączenia polaryzacji w tej części próbki, w której $U_0 \ll U_{1,\max}$ (rys. 8).

Okazuje się, że nierówność $\frac{C_2}{C_1+C_2} \ll 1$, warunkująca przydatność wzorów (43), (44) i (45) do określenia zależności $t_s(U)$, w rzeczywistości jest spełniana bardzo rzadko. Oznacza ona bowiem faktycznie, że $C_1 \gg C_2$ lub $\varepsilon_1/d_1 \gg \varepsilon_2/d_2$, co jest spełnione tylko w przypadku stosunkowo grubych warstw przejściowych.

Przybliżone analityczne rozwiązanie równania (41) jest możliwe jeszcze i w tym szczególnym przypadku kiedy spełnione jest równanie (25). Słuszne są wtedy nadal rozwiązania (43), (44) i (45) z tym, że miejsce τ_1 zajmuje τ_2 .

Teoretyczna zależność $t_s(U)$ uzyskana w oparciu o równania (43), (44) i (45) została przedstawiona na rys. 9 (krzywa 1). Otrzymano ją po przyjęciu następujących wartości parametrów dla realnych cienkich warstw ferroelektrycznych typu PZT: $\varepsilon_1 = 500$, $\rho_1 = 5 \times 10^9 \Omega \text{ m}$, $d_1 = 2 \mu\text{m}$, $\varepsilon_2 = 40$, $\rho_2 = 3.8 \times 10^9 \Omega \text{ m}$, $d_2 = 0.01 \mu\text{m}$, $S = 2 \text{ mm}^2$, $R = 75 \Omega$, $P = 15 \mu\text{C} \times \text{cm}^{-2}$, $k = 0.1$ i $U_{0,\max} = 4 \text{ V}$. Wartości tych parametrów uzyskano na drodze eksperymentalnej dla serii cien-



Rys. 9. Zależność $t_s(U)$ dla polikrystalicznej cienkiej warstwy ferroelektrycznej typu PZT:
 1 — krzywa teoretyczna (wartości parametrów niezbędnych do obliczeń podano w tekście);
 2 — krzywa eksperymentalna

kich warstw typu PZT o składzie $\text{Pb}(\text{Zr}_{0.53}\text{Ti}_{0.45}\text{W}_{0.01}\text{Cd}_{0.01})\text{O}_3$, otrzymanych metodą rozpylania w polu wysokiej częstotliwości w warunkach podanych w pracy [11]. Eksperymentalną zależność $t_s(U)$ dla tych samych cienkich warstw typu PZT przedstawia krzywa 2 na rys. 9.

Porównując teoretyczny wykres $t_s(U)$, przedstawiony na rys. 9 (krzywa 1), z wynikami eksperymentalnymi uzyskanymi dla tych samych cienkich warstw PZT (rys. 9, krzywa 2), stwierdzić można ich jakościową zgodność, co świadczy o słuszności przyjętego modelu procesu przepolaryzowania w polikrystalicznych cienkich warstwach ferroelektrycznych. Należy podkreślić, że rezultaty badań teoretycznych i eksperymentalnych, przeprowadzonych w niniejszej pracy dla cienkich warstw typu PZT, pozostają również w dobrej zgodności z wynikami uzyskanymi wcześniej na drodze eksperymentu dla cienkich warstw ferroelektrycznych o innych składach chemicznych (rys. 2 i 3).

4. WNIOSKI

Podjęto po raz pierwszy próbę objaśnienia niektórych osobliwości procesu przepolaryzowania polikrystalicznych cienkich warstw ferroelektrycznych. W oparciu o prosty, statyczny model procesu przepolaryzowania, zakładający konieczność wcześniejszego zgromadzenia się na okładkach kondensatora ładunku ekranującego polaryzację, w sposób analityczny opisano następujące główne rezultaty eksperymentalne uzyskiwane przez wielu autorów:

- ogólny przebieg zależności $t_s(E)$ (włączając obecność obszaru wzrostu t_s przy wzroście E , obszaru zmniejszania się t_s przy dalszym wzroście E oraz występowania maksimum na krzywej $t_s(E)$);
- możliwość szerokich zmian wartości t_s w zależności od warunków osadzania cienkich warstw oraz od rodzaju materiału elektrod i podłoża;
- liniową zależność t_s od powierzchni elektrod.

Autorzy zdają sobie w pełni sprawę z tego, że przyjęty model nie mógł dać ilościowej zgodności wyników teoretycznych i eksperymentalnych. Ferroelektryk w procesie przepolaryzowania reprezentuje bowiem bardziej złożony układ niż obwód $R-C$. Niemożliwe jest również wcześniejsze nagromadzenie ładunków niezbędnych dla ekranowania polaryzacji, gdyż przepolaryzowanie cienkiej warstwy jest procesem dynamicznym. Pomimo przyjętych uproszczeń przedstawione przez nas rozważania potwierdziły jednak słuszność samej idei ograniczenia czasu przepolaryzowania czasem dopływu ekranującego ładunku. Idea ta może być wykorzystana dla budowy dynamicznego, a więc bardziej realnego modelu.

Praca była finansowana przez KBN (Polska).

BIBLIOGRAFIA

1. Z. Surowiak, J. Dec, J. Kwapuliński: *Badania procesów przepolaryzowania w ferroelektrycznych warstwach $\text{Ba}(\text{Ti}_{0.98}\text{Sn}_{0.02})\text{O}_3$, otrzymanych metodą wypalania past*. Physics Papers, Silesian University, Katowice 1976, vol. 5, p. 155
2. Z. Surowiak, J. Dec: *Switching process in $\text{Ba}(\text{Ti}_{0.98}\text{Sn}_{0.02})\text{O}_3$ films in an electric field with rectangular impulses*. Thin Solid Films. 1979, vol. 60, p. 11
3. S.V. Biryukov, V.M. Mukhortov, A.M. Margolin, Yu.I. Golovko, I.N. Zakharchenko, V.P. Dudkevich, E.G. Fesenko: *Polarizaciya i jeje pieriekluchenie v MDM strukturakh s polikristallichesкими i geteroepitaksialnymi plenkami (Ba, Sr) TiO_3 , poluchennymi katodnym raspylem*. Izv. VUZ, Fizika, 1986, vol. 4, p. 28
4. Z. Surowiak, E. Nogas, A.M. Margolin, S.V. Biryukov, I.N. Zakharchenko: *The influence of the structural perfection degree on the switching processes in polycrystalline BaTiO_3 thin films*. Ferroelectrics. 1991, vol. 115, p. 21
5. W. Spence, P.M. Miller, N. Wu: *Characteristics of RF sputtered $(\text{Pb}_{0.92}\text{Bi}_{0.07}\text{La}_{0.01})(\text{Fe}_{0.405}\text{Nb}_{0.325}\text{Zr}_{0.270})\text{O}_3$ ferroelectric thin films*. Ferroelectrics. 1973, vol. 5, p. 201
6. J.F. Scott: *Switching kinetics of lead zirconate titanate submicron thin film memories*. J. Appl. Phys. 1988, vol. 64, p. 787
7. B.P. Maderic, L.E. Sanchez, S.Y. Wu: *Ferroelectric switching, memory retention and endurance properties of very thin PZT films*. Ferroelectrics. 1991, vol. 116, p. 65
8. W.J. Merz: *Switching processes in BaTiO_3* . Phys. Rev. 1954, vol. 95, p. 690
9. Z. Surowiak: *Problems of physics of ferroelectric thin films. Part I*. Silesian University, Katowice, 1977, p. 225
10. Z. Surowiak, J. Dec: *Instrument for measuring the switching transition in ferroelectric thin films*. Rev. Sci. Instrum. 1970, vol. 49, p. 1719
11. Z. Surowiak: *The influence of technological conditions on the structure and physical properties of ferroelectric films*. Silesian University, Katowice, 1991, p. 136
12. G.W. Taylor: *Electrical properties of niobium-doped ferroelectric $\text{Pb}(\text{Zn}, \text{Sn}, \text{Ti})\text{O}_3$* . J. Appl. Phys. 1967, vol. 38, p. 4697
13. E.V. Siniakov, E.F. Dudnik: *Chastichnyie processy pieriepolarizacii monokristallov BaTiO_3 na pryamougolnykh bipolarnykh impulsakh*. Fizika Tverdovo Tela. 1968, vol. 10, p. 282
14. V.I. Gurtovoj, S.G. Gach, V.Z. Borodin: *Ustanovka dla issledovaniya pieriepolarizacii segnetoelektrikov pri zaryadovom upravlenii*. Pribory i Technika Eksperimenta (USSR). 1985, vol. 4, p. 224
15. S.G. Gach, V.I. Gurtovoj, V.Z. Borodin: *Dielektricheskij gisterezis pri zaryadovom upravlenii v oblasti inducirovannogo fazovogo pieriekhoda*. Tezisy Dokladov XI Vsesojuznoj Konferencji po Fizike Segnetoelektrikov, Czernovcy (USSR). 1987, vol. 2, p. 94
16. V.P. Dudkevich, E.G. Fesenko: *Fizika segnetoelektricheskich plenok*. RGU, Rostov-na-Donu (USSR) 1979, p. 192
17. Z. Surowiak, M. Łoposzko, I.N. Zakharchenko, A.A. Bakirov, E.A. Marchenko, E.V. Sviridov, V.M. Mukhortov, V.P. Dudkevich: *Thin ferroelectric films of the lead zirconate-titanate type obtained by RF sputtering*. Thin Solid Films. 1991, vol. 205, p. 76
18. C.B. Sawyer, C.H. Tower: *The circuit for the observation of ferroelectric hysteresis loops*. Phys. Rev. 1930, vol. 35, p. 269

Z. SUROWIAK, D. CZEKAJ, V.P. DUDKEVICH, A.A. BAKIROW, J.M. SEM, E.V. SVIRIDOV

PECULIARITIES OF THE SWITCHING PROCESS IN POLYCRYSTALLINE THIN FERROELECTRIC FILMS OF PZT-TYPE

Summary

One of the basic properties of thin ferroelectric films is ability of the switching of polarization under influence of an external electric field. Application of such thin films as memory devices is based on this phenomenon. The switching process of the thin films has some distinctive features. One can include among them for example dependence of the switching time on the electrode surface and an anomalous course of the switching time curve on the amplitude of bipolar rectangular electric voltage impulses. For describing the physical nature of these peculiarities the simple statical model is developed. The qualitative compactibility the experiment and the model is shown on the base of PZT-type thin films with the chemical constitution $\text{Pb}(\text{Zr}_{0.53}\text{Ti}_{0.45}\text{W}_{0.01}\text{Cd}_{0.01})\text{O}_3$.

Analiza temperaturowa układów hybrydowych Część I: Metody analityczne

ANDRZEJ KOS

Akademia Górniczo-Hutnicza, Katedra Elektroniki

Otrzymano 1993.10.20

Autoryzowano do druku 1993.12.20

W pracy sformułowano problem modelowania stacjonarnych pól temperatury w hybrydowych układach mocy. Przedstawiono przegląd metod analitycznych rozwiązywania podobnych problemów w mikroelektronice. Zaproponowano własne rozwiązania dla różnych konstrukcji mikroukładów i różnych sposobów chłodzenia. Zastosowano metodę rozdzielania zmiennych.

1. WSTĘP

W niniejszej pracy przedstawiono stacjonarny model termiczny dwu i trójwymiarowy układu hybrydowego. Metody rozwiązania podzielono ogólnie na analityczne (Część I) i numeryczne (Część II). Oczywiście jest to podział umowny, ponieważ podejście analityczne wymaga również operacji numerycznych. Z kolei, techniki numeryczne często wykorzystują zależności otrzymane na drodze analitycznej. Opis metod poprzedzono przeglądem innych rozwiązań. Przedstawione podejście analityczne opiera się na metodzie rozdzielania zmiennych. Przeznaczone jest do rozwiązywania układów posiadających nieskomplikowane warunki brzegowe. Pokazano sposób obliczania temperatury w dowolnym punkcie układu i temperatury średniej. W końcu dokonano porównania rozwiązań analitycznych i numerycznych.

2. POSTAWIENIE PROBLEMU

Modelowanie procesów termicznych w mikroukładach hybrydowych obejmuje różne warianty konstrukcyjne oraz różne sposoby chłodzenia. Powszechnie używanym jest model trójwymiarowy. Jednak dla pewnej grupy układów w szczególnych

przypadkach wystarczająco dokładnym, a przy tym oszczędnym jest model dwuwymiarowy. W niniejszej pracy wykorzystano oba modele.

Mała grubość ceramicznych płytek podłożowych w porównaniu z ich pozostałymi wymiarami oraz wymiarami źródeł ciepła znajdujących się na tych płytkach, a także wystarczająco dobra przewodność termiczna ceramiki stosowanej w układach hybrydowych zachęca do zastosowania modelu dwuwymiarowego [19], [34], [45]. Temperatura $T(x, y)$ mierzona jest względem temperatury otoczenia T_0 . Równanie wyrażające bilans energii dla cylindra o długości L_z , chłodzonego płynem ma postać (rys. 1) [45]

$$\lambda \oint_{\partial S} d\xi \int_0^{L_z} \nabla T(x, y) \cdot \bar{u}_n dz + \alpha_0 \iint_{\Omega_0} T(x, y) dS + \alpha_z \iint_{\Omega_z} T(x, y) dS = \iint_{\Omega_0} p_0(x, y) dS + \iint_{\Omega_z} p_z(x, y) dS \quad (1)$$

przy czym α_0, α_z — współczynniki przejmowania ciepła przez płyn (gaz lub ciecz), odpowiednio dla przedniej i tylnej powierzchni płytki podłożowej [$\text{W}/\text{m}^2\text{K}$]. Przejmowanie ciepła obejmuje wszelkie możliwe sposoby przekazywania energii cieplnej ciała stałego do płynu (konwekcję, przewodzenie i radiację) [12], [20], [24], [25], [34], [39].

λ — przewodność termiczna podłoża [W/mK],

L_z — grubość płytki [mm],

p_0, p_z — gęstość mocy źródeł ciepła [W/m^2],

$\bar{u}_n$ — normalna do brzegu.

W modelu dwuwymiarowym dla dowolnego punktu (x, y) na obu powierzchniach płytki podłożowej temperatura jest taka sama, można więc przyjąć, że

$$\alpha_0 = \alpha_z = \alpha \quad (2)$$

Na podstawie tych założeń i twierdzenia Green'a zastosowanego do pierwszej całki równania (1), równanie to można zapisać

$$\lambda L_z \iint_S \nabla^2 T(x, y) dS + 2\alpha \iint_{\Omega_0} T(x, y) dS = \iint_{\Omega_0} p dS, \quad (3)$$

lub w postaci różniczkowej

$$\nabla^2 T(x, y) - \frac{T(x, y)}{L^2} = -\frac{p(x, y)}{\lambda L_z}, \quad (4)$$

przy czym L — charakterystyczny promień termiczny (promień plamki cieplnej) [45]

$$L = \sqrt{\frac{\lambda L_z}{2\alpha}}. \quad (5)$$

W dalszej części pracy przedstawiono interpretację fizyczną plamki cieplnej i promienia termicznego.

Jeśli grubość podłoża jest dostatecznie mała, przekazywanie ciepła do otoczenia powierzchniami brzegowymi można zaniedbać. Warunek brzegowy przyjmuje postać warunku Newmanna (warunek brzegowy drugiego rodzaju)

$$\nabla T \cdot \bar{u}_n = 0 \quad (6)$$

Większą dokładność obliczeń układu jednowarstwowego (rys. 1) zapewnia model trójwymiarowy

$$\nabla^2 T(x, y, z) = 0 \quad (7)$$

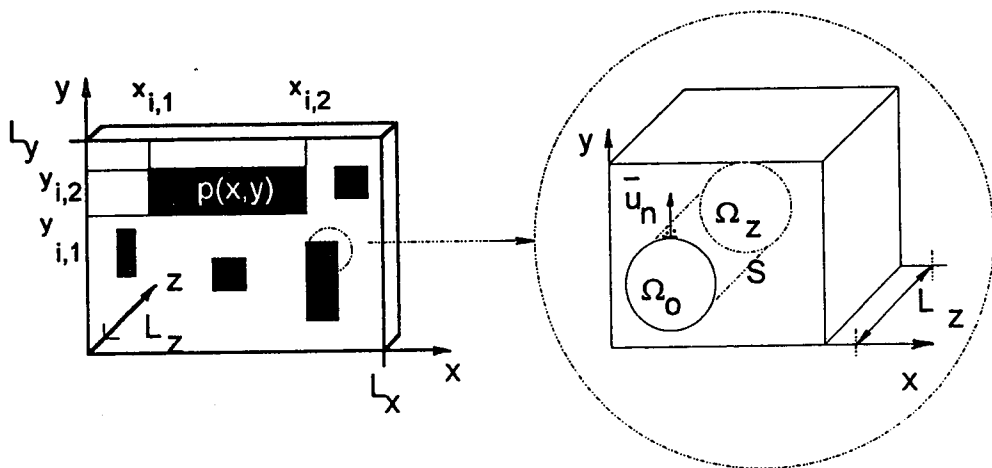
$$\lambda \nabla T \cdot \bar{u}_n + \alpha T = p, \quad \text{dla } z = 0 \quad \text{ i } \quad z = L_z \quad (8)$$

$$\nabla T \cdot \bar{u}_n = 0, \quad \text{dla } x = 0, x = L_x, y = 0 \quad \text{ i } \quad y = L_y, \quad (9)$$

przy czym L_x, L_y wymiary boczne podłoża (rys. 1).

Jeśli grubość warstwy L_z jest porównywalna z jej pozostałymi wymiarami geometrycznymi, wówczas warunek brzegowy (9) zastąpiony zostanie warunkiem brzegowym trzeciego rodzaju

$$\lambda \nabla T \cdot \bar{u}_n + \alpha T = 0. \quad (10)$$



Rys. 1. Płytkę podłożowa i jej wycinek użyty do tworzenia równania bilansu energii

Rozpatrzmy układ wielowarstwowy, przedstawiony na rys. 2. Do jego opisu użyjemy modelu trójwymiarowego. Warunki brzegowe wzdłuż osi x i y są takie same jak dla modelu jednowarstwowego. Warunki brzegowe wzdłuż osi z , dla $z \in \langle L_{z,1}, L_{z,r-1} \rangle$ określamy z prawa zachowania energii. Strumień ciepła dopływającego do powierzchni styku od strony jednej z warstw jest równy strumieniowi ciepła odpływającego od tej powierzchni do warstwy sąsiedniej. Na po-

wierzchniach styku ($z = L_{z,i}$) mamy więc do czynienia z warunkiem brzegowym czwartego rodzaju, który zapiszemy

$$\lambda_i \nabla T_i \cdot \bar{u}_n = \lambda_{i+1} \nabla T_{i+1} \cdot \bar{u}_n \quad (11)$$

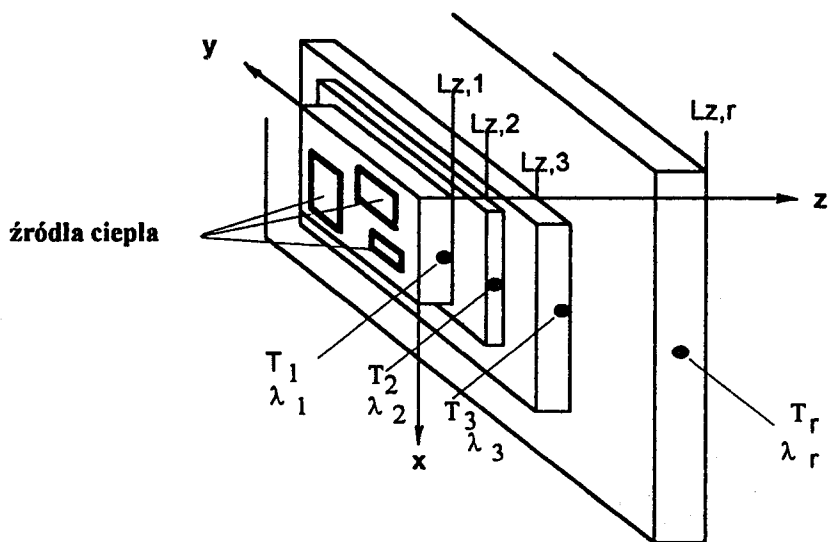
$$T_i = T_{i+1} + \frac{\lambda_{i+1}}{G_{si}} \nabla T_{i+1} \cdot \bar{u}_n \quad (12)$$

przy czym $i = 1, \dots, r-1$,

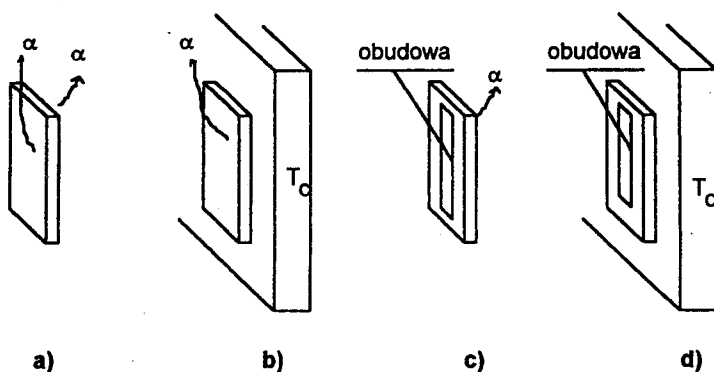
r — liczba warstw,

λ_i, T_i — odpowiednio przewodność i temperatura i -tej warstwy,

G_{si} — konduktancja termiczna na styku warstw [$\text{W/m}^2 \text{ K}$]



Rys. 2. Układ hybrydowy wielowarstwowy



Rys. 3. Sposoby chłodzenia

Sposób chłodzenia układu narzuca warunki brzegowe dla $z = 0$ i $z = L_{z,r}$. Różne metody odprowadzania ciepła do otoczenia przedstawiono na rys. 3.

Pierwszy przypadek (rys. 3a) pokazuje obustronne przejmowanie ciepła przez płyn. Oznacza to, że obowiązuje warunek brzegowy (8). W kolejnym przypadku (rys. 3b) mamy jednostronne przejmowanie ciepła przez płyn. Z drugiej strony układu ciepło przepływa przez wymiennik, który zapewnia stałą temperaturę chłodzonej powierzchni (np. topniejący lód). Wymiennik może również pełnić funkcję ciała stabilizującego temperaturę mikroukładu. Temperatura układu przewyższająca temperaturę otoczenia utrzymywana jest na stałym poziomie dzięki zewnętrznemu układowi autoregulacji. Wówczas warunek brzegowy dla $z = 0$ opisany jest równaniem (8), a dla $z = L_{z,r}$ przyjmuje postać

$$T(x, y, L_{z,r}) - T_c(x, y, L_{z,r}) = 0 \quad (13)$$

przy czym T_c — ustalona wartość temperatury na powierzchni brzegowej.

Rys. 3c przedstawia mikroukład w obudowie. Materiał obudowy stanowi izolator adiabatyczny. Ciepło przejmowane jest drugą stroną układu przez płyn. Warunek brzegowy dla $z = 0$ ma postać równania (8), w którym współczynnik $\alpha = 0$. Ostatni przypadek (rys. 3d) to układ jednostronnie obudowany. Ciepło przejmowane jest przez wymiennik.

3. METODY ANALITYCZNE W MIKROELEKTRONICE

3.1. PRZEGLĄD METOD

Pierwsze metody z konieczności wykorzystywały jedynie papier i ołówek. Metody graficzne używane były między innymi do projektowania anten w.cz. Mapy regionów dwuwymiarowych struktur jednorodnych posiadających kilka źródeł ciepła kreślono jeszcze z początkiem lat 70-ych. Stosowalność ograniczona była do układów chłodzonych przy pomocy wymienników ciepła [11]. Mikroukłady chłodzone w ten sam sposób analizowano metodami wykorzystującymi rezystancję termiczną. Opracowano modele termiczne dla struktur o różnych kształtach [12]. Obliczenia temperatury układów wielowarstwowych, chłodzonych zarówno konwekcyjnie jak i przez wymienniki ciepła można przeprowadzić w oparciu o metodę rozdzielania zmiennych [4], [27], [28], [46]. Jeszcze inne podejście polega na wykorzystaniu funkcji Greena [15]. W tym wypadku warunek brzegowy Neumanna zastąpiono abstrakcyjnymi odbiciami zwierciadlanymi źródeł ciepła względem boków analizowanego układu prostokątnego [5]. W pracy wykorzystano nowatorski pomysł Deana [12]. Metodę rozszerzono na układy wielowarstwowe [18].

Ze względu na geometrię ciał, metody analityczne podzielić można na takie, które adresowane są do struktur cylindrycznych i prostokątnych. Zaczniemy od

kształtów cylindrycznych. Carslaw i Jaeger obliczyli rezystancję termiczną okrągłego źródła ciepła umieszczonego na powierzchni półnieskończonej struktury [7]. Podobna struktura była przedmiotem prac Balageasa, Kropeza i Cielo [3]. Kennedy wyprowadził wzór do obliczania ustalonej temperatury cylindra z okrągłym źródłem ciepła umieszczonym w jego środku [26]. Brook i Smith rozszerzyli rozwiązanie stacjonarne na struktury wielowarstwowe [6]. Nakwaski wyprowadził stacjonarne rozwiązanie półnieskończonej struktury z okrągłym źródłem, mającym gaussowski rozkład gęstości strumienia ciepła [37]. Nakwaski i Kontkiewicz wyliczyli temperaturę ustaloną i przejściową struktury ze źródłem ciepła o nierównomiernej gęstości mocy, umieszczonym wewnątrz struktury, posiadającej stałą temperaturę na jednej z powierzchni brzegowych [38].

Drugą grupą są układy prostokątne. Hein wyprowadził rozwiązanie jednowarstwowej struktury z prostokątnym źródłem ciepła [21]. Lindsted i Surty rozwiązali problem jednowarstwowej struktury prostokątnej z prostokątnym źródłem ciepła, ułożonym w środku górnej powierzchni [36]. Podobny problem był przedmiotem prac Petrova, Kochetkova i Synorova [43]. Ellison wyprowadził rozwiązanie stacjonarne dwuwarstwowego układu ze źródłami ciepła na powierzchni i pomiędzy warstwami [16], a następnie rozszerzył je na struktury czterowarstwowe [17], [18], jakkolwiek wyliczył jedynie temperaturę pierwszej warstwy. Rozwiązanie temperaturowe na powierzchni dwuwymiarowej struktury zaproponowali również Castello i Antognetti [8]. Nieco później Antognetti, Bisio i Curatelli zajęli się analizą przejściową na powierzchni układów dwuwarstwowych [1]. Kokkas przedstawił rozwiązanie w pierwszej warstwie struktury czterowarstwowej [27]. Joyce i Dixon analizowali rezystancję termiczną wielowarstwowego układu ze źródłami ciepła pomiędzy warstwami [23]. Carslaw i Jaeger [7] studiowali problem, w którym źródło ciepła ma wymiary boczne struktury. Podobne zadanie było przedmiotem prac Newmanna, Bonda i Stefaniego [40]. Lee i Palisoc wyprowadzili rozwiązanie temperatury na powierzchni styku i we wnętrzu czterowarstwowej struktury z wieloma źródłami ciepła ułożonymi na powierzchni układu [35]. Oni także wprowadzili technikę projektowania układów scalonych z dużą liczbą małych źródeł ciepła [42].

Inny podział metod analitycznych, przeprowadzony z punktu widzenia przydatności w technice hybrydowej, bierze pod uwagę liczbę wymiarów modelu termicznego. Najprostszy ale i najmniej dokładny są modele jednowymiarowe, wykorzystujące pojęcie rezystancji termicznej figury geometrycznej wytyczonej przez strumień cieplny przepływający od źródła do przeciwległej powierzchni (heat spreading angle). Podstawy matematyczne są ekstremalnie proste, a stosowność ograniczona do układów chłodzonych przy pomocy wymiennika ciepła [2], [10]. Modele dwuwymiarowe nadają się szczególnie do mikroukładów bez obudowy chłodzonych obustronnie konwekcyjnie, których grubość jest znacznie mniejsza od pozostałych wymiarów. Rozkład temperatury po obu stronach układu jest taki sam [5], [14], [32].

Najbardziej dokładnymi ale i czasochłonnymi są modele trójwymiarowe. Użycie ich jest niezbędne tam, gdzie mamy do czynienia z układami wielowarstwowymi [28], [46] lub gdy wymiary źródeł ciepła są bardzo małe, porównywalne z grubością podłoża [45]. Przykładem może być plamka cieplna (hot spot) występująca przy końcu szczeliny rezystora korygowanego laserowo [9], [44]. Wybór właściwego modelu podyktowany jest kompromisem pomiędzy dokładnością, a nakładem obliczeniowym.

Niekonwencjonalnym podejściem do analizy termicznej mikroukładów hybrydowych jest wykorzystanie sieci neuropodobnych. Istotą ich funkcjonowania jest generowanie wartości temperatury układu dla zadanych danych wejściowych: geometrii, pobudzenia i sposobu chłodzenia. Nauczona sieć nie wnika w złożoność procesów termicznych, a jedynie spełnia postawione przed nią wymagania numeryczne [29], [31], [33].

3.2. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

W niniejszej pracy zostanie wykorzystana metoda rozdzielania zmiennych. Rozwiązanie problemu dwuwymiarowego (4), z warunkiem brzegowym (6) może być zapisane w postaci szeregu

$$T(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} \varphi_n(x) \psi_m(y), \quad (14)$$

w którym funkcje bazowe przyjmują postać

$$\varphi_n(x) = \cos \omega_i x / L_x, \quad \omega_i = n\pi \quad (15)$$

$$\psi_m(y) = \cos \omega_j y / L_y, \quad \omega_j = m\pi \quad (16)$$

$$i, j = 0, 1, 2, \dots$$

L_x, L_y — wymiary podłoża (rys. 1).

Podobnie możemy zapisać funkcję gęstości mocy źródeł ciepła

$$p(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} q_{n,m} \varphi_n(x) \psi_m(y). \quad (17)$$

Współrzędne źródeł ciepła oznaczamy $x_{i,1}, x_{i,2}$ oraz $y_{i,1}, y_{i,2}, i = 1, \dots, N$. N jest liczbą źródeł. Nie tracąc na ogólności rozważań zakładamy, że funkcja gęstości mocy przyjmuje stałe wartości wewnątrz źródeł i tożsamościowo równa jest zeru w obszarze, gdzie nie ma źródeł. Można to zapisać następująco

$$p(x, y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N p(i) & \text{dla } \begin{cases} x_{i,1} \leq x \leq x_{i,2} \\ y_{i,1} \leq y \leq y_{i,2} \end{cases} \\ 0 & \text{w innym przypadku.} \end{cases} \quad (18)$$

Dzięki ortogonalności funkcji bazowych łatwo wyznaczyć współczynniki szeregu (17). Po prostych przekształceniach mamy

$$q_{0,0} = \frac{1}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} p(x, y) dx dy \quad (19)$$

$$q_{n,0} = \frac{2}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} p(x, y) \cos \frac{n\pi x}{L_x} dx dy \quad (20)$$

$$q_{0,m} = \frac{2}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} p(x, y) \cos \left(\frac{m\pi y}{L_y} \right) dx dy \quad (21)$$

$$q_{n,m} = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} p(x, y) \cos \left(\frac{n\pi x}{L_x} \right) \cos \left(\frac{m\pi y}{L_y} \right) dx dy. \quad (22)$$

Biorąc pod uwagę własności funkcji $p(x, y)$ (18) można łatwo obliczyć całki (19)–(22). Otrzymujemy proste wzory, przydatne do obliczeń komputerowych

$$q_{0,0} = \frac{1}{L_x L_y} \sum_{i=1}^N p(i)(x_{i,2} - x_{i,1})(y_{i,2} - y_{i,1}) \quad (23)$$

$$q_{n,0} = \frac{4}{n\pi L_y} \sum_{i=1}^N p(i)(y_{i,2} - y_{i,1}) \sin \left(\frac{n\pi(x_{i,2} - x_{i,1})}{2L_x} \right) \times \\ \times \cos \left(\frac{n\pi(x_{i,2} + x_{i,1})}{2L_x} \right) \quad (24)$$

$$q_{0,m} = \frac{4}{m\pi L_x} \sum_{i=1}^N p(i)(x_{i,2} - x_{i,1}) \sin \left(\frac{m\pi(y_{i,2} - y_{i,1})}{2L_y} \right) \times \\ \times \cos \left(\frac{m\pi(y_{i,2} + y_{i,1})}{2L_y} \right) \quad (25)$$

$$q_{n,m} = \frac{16}{n\pi\pi^2} \sum_{i=1}^N p(i) \sin \left(\frac{n\pi(x_{i,2} - x_{i,1})}{2L_x} \right) \sin \left(\frac{m\pi(y_{i,2} - y_{i,1})}{2L_y} \right) \times \\ \times \cos \left(\frac{n\pi(x_{i,2} + x_{i,1})}{2L_x} \right) \cos \left(\frac{m\pi(y_{i,2} + y_{i,1})}{2L_y} \right), \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (26)$$

Jeżeli do równania (4) podstawimy za $T(x, y)$ wzór (14), a za $p(x, y)$ wzór (17), to otrzymamy zależność wiążącą współczynniki szeregów (14) i (17)

$$a_{n,m} = \frac{q_{n,m}}{\lambda\mu^2 L_z}, \quad (27)$$

przy czym

$$\mu^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L_x^2} + \frac{m^2 \pi^2}{L_y^2} + \frac{1}{L^2}. \quad (28)$$

Ostatecznie temperaturę $T(x, y)$ oblicza się przy pomocy wzoru

$$T(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q_{n,m}}{\lambda \mu^2 L_z} \cos\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right). \quad (29)$$

Charakterystyczny promień termiczny L , opisany wzorem (5), posiada interpretację fizyczną [13]. Jeśli na podłożu wzdłuż osi y znajduje się długie i wąskie źródło ciepła (np. rezystor grubowarstwowy), wówczas temperaturę wzdłuż osi x w pobliżu tego rezystora można obliczyć jako

$$T(x) = T_{max} \exp(-x/L) \quad (30)$$

Wyniki obliczeń promienia termicznego L [mm] dla różnych wariantów konstrukcyjnych i różnych sposobów chłodzenia układów

Tablica 1.

Grubość podłoża L_z [mm]	Konwekcja naturalna $\alpha = 15$ [W/m ² K]			Konwekcja wymuszona $\alpha = 150$ [W/m ² K]		
	Szkło $\lambda = 5$ [W/mK]	Alumina Al_2O_3 $\lambda = 20$ [W/mK]	Beryllia BeO $\lambda = 300$ [W/mK]	Szkło $\lambda = 5$ [W/mK]	Alumina Al_2O_3 $\lambda = 20$ [W/mK]	Beryllia BeO $\lambda = 300$ [W/mK]
0.3	7	14	55	2.7	5.5	21
0.6	10	20	77	3.9	7.7	30
1.0	13	26	100	5	10	39

Rozumowanie to uogólnia się na przypadki źródeł ciepła o kształtach zbliżonych do kwadratu. W tym wypadku L jest promieniem plamki cieplnej, w centrum której znajduje się źródło. Ta własność pozwala oszacować „siłę” wzajemnych oddziaływań termicznych źródeł. W tablicy 1 przedstawiono wartości liczbowe promieni termicznych obliczone dla różnych typowych materiałów podłożowych, grubości płytek i sposobów chłodzenia. Najbardziej popularne układy wykonane na bazie alundu (alumina), chłodzone niewymuszoną konwekcją posiadają promień plamki cieplnej równy 20 mm. Należy więc liczyć się ze wzajemną interakcją termiczną przyrządów elektronicznych pracujących w tych układach.

Aby obliczyć temperaturę układu jednowarstwowego (rys. 1) ale z uwzględnieniem niezerowego gradientu temperatury wzdłuż osi z postępujemy podobnie jak w przypadku modelu dwuwymiarowego. Podstawiając szereg (14), w którym współczynniki $a_{n,m}(z)$ zależne są od zmiennej z , do równania (7) otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 a_{n,m}(z)}{\partial z^2} - \gamma^2 a_{n,m}(z) = 0, \quad (31)$$

przy czym

$$\gamma^2 = (n\pi/L_x)^2 + (m\pi/L_y)^2, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (32)$$

Rozwiązanie równania (31) ma postać

$$a_{n,m}(z) = a_1 \cosh(\gamma z) + a_2 \sinh(\gamma z). \quad (33)$$

Współczynniki a_1, a_2 otrzymujemy z warunków brzegowych. Dla układów chłodzonych konwekcyjnie (rys. 3a), w których obowiązuje warunek (8) mamy

$$a_1 = q_{n,m} \frac{\gamma \lambda \cosh(\gamma L_z) + \alpha \sinh(\gamma L_z)}{2\alpha \gamma \lambda \cosh(\gamma L_z) + (\alpha^2 + \gamma^2 \lambda^2) \sinh(\gamma L_z)} \quad (34)$$

$$a_2 = -q_{n,m} \frac{\gamma \lambda \sinh(\gamma L_z) + \alpha \cosh(\gamma L_z)}{2\alpha \gamma \lambda \cosh(\gamma L_z) + (\alpha^2 + \gamma^2 \lambda^2) \sinh(\gamma L_z)} \quad (35)$$

i ostatecznie

$$T(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} q_{n,m} \frac{\alpha \sinh(\gamma(L_z - z)) + \gamma \lambda \cosh(\gamma(L_z - z))}{2\alpha \gamma \lambda \cosh(\gamma L_z) + (\alpha^2 + \gamma^2 \lambda^2) \sinh(\gamma L_z)} \times \\ \times \cos\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right). \quad (36)$$

Układy chłodzone z jednej strony konwekcyjnie, a z drugiej za pośrednictwem wymiennika o ustalonej temperaturze $T_c(x, y, L_z)$ opisane są warunkami brzegowymi (8) i (13) — rys. 3b. Temperatura T_c przedstawiona jest również w postaci szeregu (14), ale ze współczynnikami $b_{n,m}$. Współczynniki te oblicza się ze wzorów (19)–(22), w których w miejsce funkcji gęstości mocy należy podstawić funkcję $T_c(x, y)$. W praktyce może się zdarzyć, że temperatura wymiennika ma wartość stałą na całej powierzchni, wówczas

$$b_{0,0} = T_c = \text{const.} \quad (37)$$

$$b_{n,0} = b_{0,m} = b_{n,m} = 0. \quad (38)$$

Ogólnie dla dowolnie zadanej funkcji $T_c(x, y)$ temperaturę układu przedstawiono na rys. 3b zapiszemy

$$T(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q_{n,m} \sinh(\gamma(L_z - z)) + b_{n,m}[\gamma \lambda \cosh(\gamma z) + \alpha \sinh(\gamma z)]}{\gamma \lambda \cosh(\gamma L_z) + \alpha \sinh(\gamma L_z)} \times \\ \times \cos\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right). \quad (39)$$

Postępujemy analogicznie dla wyznaczenia temperatury układu jednostronnie obudowanego, chłodzonego konwekcyjnie (rys. 3c). Obowiązuje warunek brzegowy

(8). Ostatecznie

$$T(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} q_{n,m} \frac{\alpha \sinh(\gamma(L_z - z)) + \gamma \lambda \cosh(\gamma(L_z - z))}{\alpha \gamma \lambda \cosh(\gamma L_z) + \gamma^2 \lambda^2 \sinh(\gamma L_z)} \times \\ \times \cos\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right). \quad (40)$$

Przekazywanie ciepła do otoczenia układu obudowanego z wymiennikiem (rys. 3d) opisują równania brzegowe (8) i (13). Temperaturę w dowolnym punkcie układu oblicza się ze wzoru

$$T(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[q_{n,m} \frac{\sinh(\gamma(L_z - z))}{\gamma \lambda \cosh(\gamma L_z)} + b_{n,m} \frac{\cosh(\gamma z)}{\cosh(\gamma L_z)} \right] \times \\ \times \cos\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right). \quad (41)$$

Rozpatrzmy różne sposoby chłodzenia układów wielowarstwowych. Rysunek 4a przedstawia układ nieobudowany, chłodzony konwekcyjnie i jednocześnie przekazujący ciepło do otoczenia za pośrednictwem wymiennika. Układ w obudowie przedstawia rysunek 4b. W przykładowym układzie trójwarstwowym temperatury poszczególnych warstw oznaczono jako T_1, T_2, T_c . Grubości poszczególnych warstw są dowolne zaś wymiary boczne L_x, L_y jednakowe. Obowiązują warunki brzegowe: (8) — tylko dla $z = 0$, (9), (11), (12) i (13). W przypadku układu obudowanego we wzorze (8) należy wyzerować współczynnik α . Rozwiązanie modelu wielowarstwowego przebiega analogicznie jak dla modelu jednowarstwowego trójwymiarowego. Współczynniki rozwinięcia w szereg $a_1^w(n, m, z)$ i $a_2^w(n, m, z)$, odpowiadając kolejnym warstwom, można zapisać

$$a_1^w(n, m, z) = a_{11} \cosh(\gamma z) + a_{12} \sinh(\gamma z) \quad \text{dla } z \in \langle 0, L_{z1} \rangle \quad (42)$$

$$a_2^w(n, m, z) = a_{21} \cosh(\gamma z) + a_{22} \sinh(\gamma z) \quad \text{dla } z \in \langle L_{z1}, L_{z2} \rangle. \quad (43)$$

Współczynniki a_{ij} otrzymujemy z warunków brzegowych. W tym celu tworzymy układ równań, który dla mikroukładu przedstawionego na rysunku 4a wygląda następująco

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\gamma \lambda_1 & 0 & 0 \\ \gamma \lambda_1 \sinh(\gamma L_{z1}) & \gamma \lambda_1 \cosh(\gamma L_{z1}) & -\gamma \lambda_2 \sinh(\gamma L_{z1}) & -\gamma \lambda_2 \cosh(\gamma L_{z1}) \\ \cosh(\gamma L_{z1}) & \sinh(\gamma L_{z1}) & -\cosh(\gamma L_{z1}) & -\sinh(\gamma L_{z1}) \\ 0 & 0 & \cosh(\gamma L_{z2}) & \sinh(\gamma L_{z2}) \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{n,m} \\ 0 \\ 0 \\ b_{n,m} \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Rozwiązując równanie (44) otrzymujemy szukane współczynniki

$$a_{11} = \frac{q_{n,m} + \lambda_1 \gamma a_{12}}{\alpha} \quad (45)$$

$$a_{12} = \frac{-q_{n,m} \gamma \sinh(\gamma L_{z2}) [\lambda_1 \sinh(\gamma L_{z1}) \sinh(\gamma(L_{z2} - L_{z1}))]}{\gamma \sinh(\gamma L_{z2}) \{ [\alpha \lambda_1 \cosh(\gamma L_{z1}) + \lambda_1^2 \gamma \sinh(\gamma L_{z1})] [\sinh(\gamma(L_{z2} - L_{z1}))] +$$

$$+ \frac{\lambda_2 \cosh(\gamma L_{z1}) \cosh(\gamma(L_{z2} - L_{z1}))}{\gamma \sinh(\gamma L_{z2}) \{ [\alpha \lambda_1 \cosh(\gamma L_{z1}) + \lambda_1^2 \gamma \sinh(\gamma L_{z1})] \sinh(\gamma(L_{z2} - L_{z1})) +$$

$$+ \frac{b_{n,m} \alpha \gamma \lambda_2 [\sinh(\gamma L_{z1}) \cosh(\gamma(L_{z2} - L_{z1})) +$$

$$+ \lambda_2 [\alpha \sinh(\gamma L_{z1}) + \gamma \lambda_1 \cosh(\gamma L_{z1})] \cosh(\gamma(L_{z2} - L_{z1})) \} +$$

$$+ \frac{\cosh(\gamma L_{z1}) \sinh(\gamma(L_{z2} - L_{z1}))}{+ \lambda_2 [\alpha \sinh(\gamma L_{z1}) + \gamma \lambda_1 \cosh(\gamma L_{z1})] \cosh(\gamma(L_{z2} - L_{z1}))} \} \quad (46)$$

$$a_{21} = \frac{q_{n,m} \cosh(\gamma L_{z1}) \sinh(\gamma L_{z2}) - b_{n,m} \alpha \sinh(\gamma L_{z1})}{\alpha \sinh(\gamma(L_{z2} - L_{z1}))} +$$

$$+ \frac{\sinh(\gamma L_{z2}) [\alpha \sinh(\gamma L_{z1}) + \gamma \lambda_1 \cosh(\gamma L_{z1})] a_{12}}{\alpha \sinh(\gamma(L_{z2} - L_{z1}))} \quad (47)$$

$$a_{22} = \frac{b_{n,m}}{\sinh(\gamma L_{z2})} - ctgh(\gamma L_{z2}) a_{21}. \quad (48)$$

Aby obliczyć temperaturę w dowolnym punkcie układu warstwowego bez obudowy otrzymane współczynniki podstawiamy do wzorów (42), (43), a te z kolei do wzoru (14). W mikroukładzie obudowanym przedstawionym na rysunku 4b nie występuje wymiana ciepła z otoczeniem na powierzchni $z = 0$. Współczynniki szeregu oblicza się z układu równań, w którym wyzerowano współczynnik α . Ostatecznie otrzymujemy

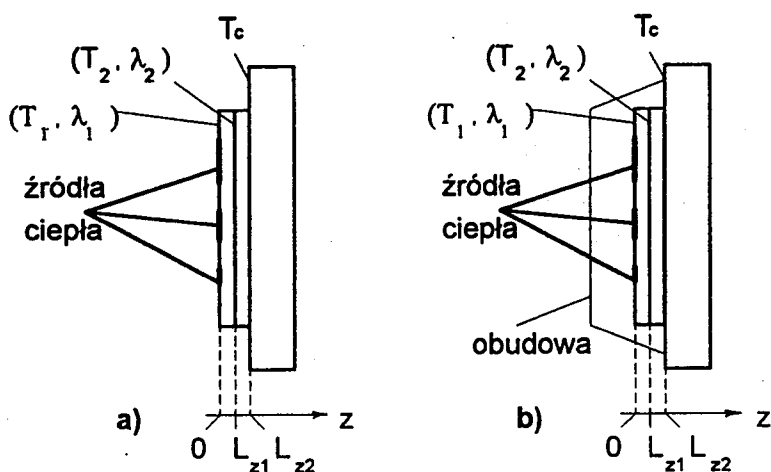
$$a_{11} = q_{n,m} \frac{tgh(\gamma L_{z1})}{\gamma \lambda_1} + \frac{\sinh(L_{z2} - L_{z1})}{\cosh(\gamma L_{z1}) \sinh(\gamma L_{z2})} a_{21} + \frac{tgh(\gamma L_{z1})}{\sinh(\gamma L_{z2})} b_{n,m} \quad (49)$$

$$a_{12} = - \frac{q_{n,m}}{\gamma \lambda_1} \quad (50)$$

$$a_{21} = \frac{q_{n,m} \sinh(\gamma L_{z2}) + b_{n,m} \gamma [\lambda_2 \cosh^2(\gamma L_{z2}) - \lambda_1 \sinh^2(\gamma L_{z2})]}{\gamma \lambda_1 \sinh(\gamma L_{z1}) \sinh(\gamma(L_{z2} - L_{z1})) + \gamma \lambda_2 \cosh(\gamma L_{z1}) \cosh(\gamma(L_{z2} - L_{z1}))} \quad (51)$$

$$a_{22} = \frac{b_{n,m}}{\sinh(\gamma L_{z2})} - ctgh(\gamma L_{z2}) a_{21}. \quad (52)$$

Wzory analityczne do obliczania temperatury układów składających się z większej liczby warstw otrzymuje się w podobny sposób.



Rys. 4. Mikroukład warstwowy a) bez obudowy, b) obudowany

Obliczenie temperatury wymaga sumowania wyrazów szeregu Fouriera. Badanie zbieżności w każdym kroku sumowania zwiększa czas obliczeń [45], [46]. W pracy [30] zaproponowano praktyczną regułę, która pozwala „a priori” określić liczbę wyrazów szeregu zapewniającą określoną dokładność.

Do projektowania przydatna jest znajomość temperatury średniej. Umożliwia ona oszacowanie wartości współczynników zależnych od temperatury, charakteryzujących własności fizyczne materiałów. Temperaturę średnią obliczamy na płaszczyźnie z warstwy (T_{mv}) lub w całej warstwie (T_m).

$$T_{mv}(z) = \frac{1}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} T(x, y, z) dx dy \quad (53)$$

$$T_m = \frac{1}{L_x L_y L_z} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} T(x, y, z) dx dy dz. \quad (54)$$

Korzystając ze wzorów (53) i (54) wylicza się temperaturę średnią dla różnych przypadków konstrukcji i chłodzenia.

— Dla układu jednowarstwowego chłodzonego obustronną konwekcją (rys. 3a)

$$T_{mv}(z) = \frac{P_c}{2\alpha L_x L_y} \cdot \frac{\lambda + \alpha(L_z - z)}{\lambda + 0.5\alpha L_z} \quad (55)$$

$$T_m = \frac{P_c}{2\alpha L_x L_y}, \quad (56)$$

przy czym P_c jest całkowitą mocą cieplną wydzielaną w układzie.

— Dla układu jednowarstwowego przekazującego ciepło konwekcyjnie i przez wymiennik (rys. 3b)

$$T_{mv}(z) = \frac{P_c(L_z - z)}{L_x L_y (\lambda + \alpha L_z)} + T_{cm} \frac{\lambda + \alpha z}{\lambda + \alpha L_z} \quad (57)$$

$$T_m = \frac{P_c L_z}{2 L_x L_y (\lambda + \alpha L_z)} + T_{cm} \frac{\lambda + 0.5 \alpha L_z}{\lambda + \alpha L_z}, \quad (58)$$

przy czym T_{cm} oznacza średnią temperaturę wymiennika (dla $z = L_z$).

— Dla układu jednowarstwowego w obudowie chłodzonego konwekcyjnie (rys. 3c)

$$T_{mv}(z) = P_c \frac{\lambda + \alpha(L_z - z)}{\alpha \lambda L_x L_y} \quad (59)$$

$$T_m = P_c \frac{2\lambda + \alpha L_z}{2\alpha \lambda L_x L_y}. \quad (60)$$

— Dla układu jednowarstwowego w obudowie chłodzonego przez wymiennik (rys. 3d)

$$T_{mv}(z) = P_c \frac{L_z - z}{\lambda L_x L_y} + T_{cm} \quad (61)$$

$$T_m = P_c \frac{L_z}{2\lambda L_x L_y} + T_{cm}. \quad (62)$$

Temperaturę średnią modelu wielowarstwowego oblicza się osobno dla każdej warstwy.

— Dla układu bez obudowy (rys. 4a)

$$T_{mv1}(z) = \frac{P_c}{L_x L_y} \cdot \frac{\lambda_1(L_{z2} - L_{z1}) + \lambda_2(L_{z1} - z)}{\alpha \lambda_1(L_{z2} - L_{z1}) + \lambda_2(\alpha L_{z1} + \lambda_1)} + T_{cm} \frac{\lambda_2(\alpha z + \lambda_1)}{\alpha \lambda_1(L_{z2} - L_{z1}) + \lambda_2(\alpha L_{z1} + \lambda_1)} \quad (63)$$

dla $z \in \langle 0, L_{z1} \rangle$

$$T_{mv2}(z) = \frac{P_c}{L_x L_y} \cdot \frac{\lambda_1(L_{z2} - z)}{\alpha \lambda_1(L_{z2} - L_{z1}) + \lambda_2(\alpha L_{z1} + \lambda_1)} + T_{cm} \frac{\alpha \lambda_1(z - L_{z1}) + \lambda_2(\alpha L_{z1} + \lambda_1)}{\alpha \lambda_1(L_{z2} - L_{z1}) + \lambda_2(\alpha L_{z1} + \lambda_1)} \quad (64)$$

dla $z \in \langle L_{z1}, L_{z2} \rangle$

$$T_{m1} = \frac{P_c}{L_x L_y} \cdot \frac{\lambda_1(L_{z2} - L_{z1}) + 0.5 \lambda_2 L_{z1}}{\alpha \lambda_1(L_{z2} - L_{z1}) + \lambda_2(\alpha L_{z1} + \lambda_1)} + T_{cm} \frac{\lambda_2(0.5 \alpha L_{z1} + \lambda_1)}{\alpha \lambda_1(L_{z2} - L_{z1}) + \lambda_2(\alpha L_{z1} + \lambda_1)} \quad (65)$$

$$T_{m2} = \frac{P_c}{L_x L_y} \cdot \frac{0.5\lambda_1 L_{z2}}{\alpha\lambda_1(L_{z2} - L_{z1}) + \lambda_2(\alpha L_{z1} + \lambda_1)} + T_{cm} \frac{\lambda_2(\alpha L_{z1} + \lambda_1) + \alpha\lambda_1(0.5L_{z2} - L_{z1})}{\alpha\lambda_1(L_{z2} - L_{z1}) + \lambda_2(\alpha L_{z1} + \lambda_1)}. \quad (66)$$

— Dla układu wielowarstwowego obudowanego (rys. 4b)

$$T_{mv1}(z) = \frac{P_c}{L_x L_y} \left[\frac{L_{z1} - z}{\lambda_1} + \frac{L_{z2} - L_{z1}}{\lambda_2} \right] + T_{cm} \quad (67)$$

$$T_{mv2}(z) = \frac{P_c}{L_x L_y} \cdot \frac{L_{z2} - z}{\lambda_2} + T_{cm} \quad (68)$$

$$T_{m1} = \frac{P_c}{L_x L_y} \left[\frac{L_{z1}}{2\lambda_1} + \frac{L_{z2} - L_{z1}}{\lambda_2} \right] + T_{cm} \quad (69)$$

$$T_{m2} = \frac{P_c}{L_x L_y} \cdot \frac{L_{z2}}{2\lambda_2} + T_{cm}. \quad (70)$$

Łatwo zauważyć, że temperatura średnia nie zależy od rozmieszczenia źródeł ciepła. Znajomość temperatury średniej jest przydatna do obliczania współczynników materiałowych zależnych od temperatury.

PODSUMOWANIE

Przedstawiono szczegółowo sposób wyprowadzania wzorów do obliczeń temperatury układów jedno i wielowarstwowych. Przy pomocy tych wzorów oblicza się temperaturę w dowolnym punkcie i temperaturę średnią układu. Wartość temperatury średniej jest przydatna do obliczania współczynników materiałowych zależnych od temperatury. Ogólnie rzecz biorąc metoda analityczna adresowana jest do układów o nieskomplikowanych warunkach brzegowych (niepiramidalnych). Jej zaletą jest możliwość szybkiego obliczenia temperatury w wybranym punkcie układu.

BIBLIOGRAFIA

1. P. Antognetti, G.R. Bisio, F. Curatelli, S. Palara: Three-dimensional thermal simulation: application to delayed short circuit protection in power IC's. IEEE Journal of Solid-State Circuits, 1980, vol. SC-15, p. 277
2. O. Arkin: Practical computer program for improved hybrid thermal analysis. Hybrid Circuit Technology, 1986, vol. 11, pp. 37-42
3. D.L. Balageas, J.C. Kropez, P. Cielo: Pulsed photo-thermal modeling of layered materials, J. Of Appl. Phys., 1986, vol. 59, p. 348

4. R. Barbou, G. Menozzi, G. Moulin: *Temperature prediction on hybrid microelectronics*, Proc. 6th, European Hybrid Microelectronics Conf. Bournemouth, 1987, pp. 332–338
5. E. Boone, G. De Mey, L. Rottiers: *Temperature distribution on ceramic substrates*. Electronics Letters, 1986, vol. 22, pp. 442–443
6. P. Brook, J.G. Smith: *Spreading resistance of multi-layer cylindrical structure*. Electronics Letters, 1973, No. 9, p. 253
7. M.S. Carlslaw, J.C. Jaeger: *Conduction of heat in solids*. Oxford University Press, 1959
8. R. Castello, P. Antognetti: *Integrated circuit thermal modelling*. IEEE Journ. Solid State Circuits, 1983, vol. SC-19, p. 363–1978
9. G. Casselman, G. De Mey: *Influence of trimming on the electric field distribution in thick film resistors*. Hybrid Circuits, 1985, vol. 8, pp. 10–12
10. R.F. David: *Computerized thermal analysis of hybrid circuits*. IEEE Trans. on Parts, Hybrids and Packaging, 1977, vol. PHP-13, no. 3, pp. 283–290
11. D.J. Dean: *Handbook of thick film technology*. Chapter 11 w książce R.G. Loasby, P. Holmes, Electrochemical Publications, 1976
12. D.J. Dean: *Thermal design of electronic circuit boards and packages*. Ayr, Scotland: Electrochem. Publ. Ltd., 1985
13. G. De Mey, S. Demolder: *A test substrate for thermal analysis of hybrid circuits*. Hybrid Circuits, 1987, vol. 12, pp. 43–45
14. G. De Mey, L. Van Schoor: *Thermal analysis of hybrid circuits with mounted components*. Hybrid Circuits, 1988, vol. 15, pp. 28–32
15. J.W. Dettman: *Mathematical methods in physics and engineering*. McGraw-Hill Publishers, 1969
16. G.N. Ellison: *The effect of some composite structures on the thermal resistance of substrates and integrated circuit chips*. IEEE Trans Electron Devices, 1973, vol. ED-20, pp. 233–238
17. G.N. Ellison: *The thermal design of an LSI single chip package*. IEEE Trans. Parts, Hybrids Packag., 1976, vol. PHP-12, pp. 371–378
18. G.N. Ellison: TAMS: *A thermal analyzer for multilayer structures*. Electrosoft, 1990, vol. 1, no. 2, pp. 85–97
19. G.P. Ferraris, M. Tudanca: *The solution of two-dimensional heat conduction problems for predicting operating temperature and power handling capabilities of hybrid circuits*. Electrocomponent Science and Technology, 1980, vol. 7, pp. 97–105
20. S.J. Gdula: *Przewodzenie ciepła*, PWN, Warszawa, 1981
21. V.L. Hein: *Convection cooling of substrates containing multiple heat sources*. The Bell System Technical Journal, 1967, vol. 8, p. 1659
22. W. Janke: *Zjawiska termiczne w elementach i układach półprzewodnikowych*. WNT, Warszawa, 1992
23. W.B. Joyce, R.W. Dixon: *Thermal resistance of heterostructure lasers*. J. Appl. Phys., 1975, vol. 46, p. 855
24. W. Kalita, T. Niedziałek: *Analysis of stationary (by HYBTERM PROGRAM) and non-stationary temperature fields in hybrid microcircuits*. 17-th Conf. and Exhibition of the ISHM — Poland Chapter, Rzeszów — Solina, 15–18 September 1993
25. E. Kącki: *Termokinetyka*. WNT, Warszawa, 1967
26. D.P. Kennedy: *Spreading resistance in cylindrical semiconductor devices*. J. Appl. Phys., 1960, vol. 31, p. 1490
27. A.G. Kokkas: *Thermal analysis of multiple-layer structures*. IEEE Trans. on Electron Devices, 1974, vol. ED-21, no. 11, pp. 674–681
28. A. Kos: *Analiza temperaturowa hybrydowych układów scalonych. Model stacjonarny ciągły*. Zeszyty Naukowe AGH, Elektrotechnika, Kraków, 1985, vol. 4, no. 1, pp. 57–74

29. A. Kos: *Neural net aided design of power circuits topology*. XIV Krajowa Konferencja Teoria Obwodów i Układy Elektroniczne, Warszawa — Waplewo, 23–25.X.1991, pp. 616–623
30. A. Kos: *Accuracy of temperature computation in hybrid microelectronics*. Hybrid Circuits, No. 27, 1992, pp. 25–27
31. A. Kos: *Temperature prediction with neural nets in hybrid power circuits*. Proc. of the First Int. Conf. on Electronics and Automatic Control, Tizi-Ouzou, Algeria, 4–6 May, 1992, vol. 1, pp. 161–168
32. A. Kos, M. Ziółko: *Modelling of temperature fields of power hybrid circuits*. Proc. of the 12-th IASTED International Conference, Modelling, Identification and Control, Innsbruck, Austria, Feb. 15–17, 1993, pp. 296–298
33. A. Kos: *An approach to thermal placement in power electronics using neural networks*. Proc. of the 1993 IEEE Int. Symposium on Circuits and Systems, Chicago, Illinois, May 3–6, pp. 2427–2430
34. A. Kos, E. Boone: *Verification of temperature computations of hybrid circuits*. XVI Krajowa Konferencja Teoria Obwodów i Układy Elektroniczne, Koszalin-Kołobrzeg, 26–28 październik 1993, pp. 150–155
35. C.C. Lee, A.L. Palisoc: *Thermal analysis of GaAs integrated circuit devices*, 1986 IEEE Gallium Arsenide Integrated Circuit Symposium, Technical Digest, IEEE Cat. No. 86CH2372-1, pp. 115–118
36. R.D. Linsted, R.J. Surty: *Steady-state junction temperatures of semiconductor chips*. IEEE Trans. on Electron Devices, vol. ED-19, no. 1, January, 1972
37. W. Nakwaski: *Spreading thermal resistance of the heat-sink of a light-emitting diode*, Solid State Electronics, 1984, 27, p. 823
38. W. Nakwaski, A.M. Kontkiewicz: *Thermal resistance of light-emitting diode*. IEEE Trans Electron Devices, 1985, Vol. ED-32, p. 2282
39. A. Napieralski: *Komputerowe projektowanie układów półprzewodnikowych dużej mocy ze szczególnym uwzględnieniem ich własności termicznych*. Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, no. 562, Łódź, 1988
40. D.H. Newman, D.J. Bond, J. Stefani: *Thermal resistance models for proton-isolated double-heterostructure lasers*, Solid-State and Electron Devices, 1978, vol. 2, p. 42
41. S. Nowak, D. Luśniak-Wójcicka, M. Cieź: *Układy mikroelektroniczne grubowarstwowe*. WNT Warszawa, 1977
42. A.L. Palisoc, C.C. Lee: *Thermal design of integrated circuit devices*. Proc. of 1988, IEEE Semiconductor Thermal and Temperature Measurement Symp., IEEE Cat. 88CH2530, 1988, pp. 118–121
43. B.K. Petrov i inni: *A calculation of the equilibrium temperature distribution in multiple-emitter microwave transistors*. Radio Engineering and Electron Physics, USSR, 1972, vol. 17, p. 1738
44. L. Rottiers, G. De Mey: *Thermal modelling of hybrid circuits*. Proc. of the 9-th Boundary Element Conference, 1987, pp. 277–288.
45. L. Rottiers, G. De Mey: *Hot spot effects in hybrid circuits*. IEEE Trans. on Components, Hybrids, and Manufacturing Technology, vol. 11, No. 3, 1988, pp. 274–278.
46. E. Wehrhahn: *Temperature distribution on multilayer substrates*. Proc. 6-th European Microelectronics Conf., 1987, pp. 264–280.

ANDRZEJ KOS

**THERMAL ANALYSIS OF HYBRID CIRCUITS
PART I: ANALYTICAL METHODS****Summary**

In the paper the problem of steady-state temperature fields modelling of hybrid power circuits is stated. The review of analytical solutions of similar problems in microelectronics is presented. Author's solutions for various kinds of constructions and cooling systems with the eigenfunction expansion are carried out.

Analiza temperaturowa układów hybrydowych Część II: Metody numeryczne. Praktyczne zastosowania

ANDRZEJ KOS

Akademia Górniczo-Hutnicza, Katedra Elektroniki

Otrzymano 1993.10.20

Autoryzowano do druku 1993.12.20

Prezentowano przegląd metod numerycznych rozwiązywania stacjonarnego równania przewodnictwa ciepła w mikroelektronice. Zaproponowano algorytm numeryczny wykorzystujący metodę różnic skończonych, pozwalający obliczać temperaturę układów o dowolnie skomplikowanych kształtach. Korzystając ze specjalnych własności macierzy konduktancji termicznych otrzymano analityczny wzór do obliczania temperatury średniej. Porównano rozwiązania analityczne i numeryczne.

1. PRZEGLĄD METOD NUMERYCZNYCH W MIKROELEKTRONICE

Historycznie rzecz biorąc przegląd metod numerycznych otwiera metoda różnic skończonych [5], [19], [25], [31], [36], [61]. Wenthen użył ją do obliczeń stanu ustalonego i przejściowego diody zamontowanej na specjalnym podłożu [66]. Kobayashi i Iwane analizowali rozkład temperatury diody laserowej, przymocowanej do wymiennika ciepła. Przeprowadzili również studia na temat wpływu warstwy granicznej na ten rozkład [37]. Baxter i Anslow także stosowali metodę różnic skończonych do obliczeń stanu ustalonego i temperatury przejścia przyrządów półprzewodnikowych pracujących na alundowych podłożach [7]. Andrews, Mahalingam i Berg wykorzystali tę metodę do oceny termicznej plastikowych obudów typu „dual-in-line” [2]. Mahalingam, Andrews i Drye użyli tej samej techniki do symulacji termicznych układów logicznych LSI i VLSI [51]. Również Kohara i jego współpracownicy obliczyli rezystancję termiczną obudów w technologii hybrydowej [38]. Moffat, Ramadhyani i Incropera studiowali mechanizm przekazywania ciepła drogą konwekcji i przewodzenia w izotermicznym podłożu [53]. Habchi i Acharya analizowali mechanizm konwekcji pionowej płyty z przyrządami elektronicznymi [29]. Modelowanie termiczne układów hybrydowych można znaleźć

również w pracach [6], [18], [39], [41], [43], [44]. Sharama zamodelował procesy termiczne układów mikroelektronicznych w postaci obwodu rezystancyjnego. Do rozwiązania użył metody „Monte Carlo” [60].

W oparciu o metodę różnic skończonych powstały między innymi następujące programy komputerowe: SINDA [23], TRUMP [62], ROMAN II [52], BICEPS [55], GTI [41], SUPRA [14], HYBRITHERM i PROMOTHEE [18], HYBTERM [34].

Odmianą metody różnic skończonych jest metoda pudełek skończonych („finite boxes”) zaproponowana przez Franza i jego współpracowników. Zakłada ona nieregularną, uwzględniającą specyfikę geometrii przyrządu, siatkę podziału. Dwuwymiarowy system symulacji został użyty do analizy diody 100 V, tyrystora oraz GaAs MESFET [26].

Kolejną metodą obliczeń jest metoda elementów skończonych [35], [59], [69]. Waller, Fox i Hannemann wykorzystali ją do symulacji temperatury i naprężeń termicznych podstawek przytwierdzonych do podłoża [65]. Bocchi opisał jej użycie do analizy termicznej układów VHSIC (Very High Speed Integrated Circuit) [8]. Bonnifait i Cadre stworzyli program działający w oparciu o metodę elementów skończonych, służący do analizy temperaturowej układów drukowanych, zawierających wiele przyrządów [9]. Groothvis i jego współpracownicy modelowali układy VLSI [28]. Zardini i jego zespół studiowali problem optymalnego wyboru grubości warstw pośredniczących pomiędzy strukturą monolityczną, a podłożem układu hybrydowego [68]. Charles Jr. i Clatterbaugh modelowali jednocześnie zjawiska elektryczne, termiczne i mechaniczne zachodzące w układach VLSI [13].

Na bazie modelu różnicowego opracowano między innymi programy komputerowe: PATRAN, NASTRAN [3], ANSYS [24] i AUTOTHERM [67]. Ten ostatni stanowi zintegrowany system do projektowania i weryfikacji układów hybrydowych, ASIC i przyrządów montowanych powierzchniowo (SMD). Program wyposażony jest w system ekspertowy generujący trójkątną siatkę podziału, dostosowaną do geometrii przyrządu i żądanej dokładności obliczeń.

Najmłodszą metodą analizy numerycznej jest metoda elementów granicznych [4], [10], [11], [12]. Polega ona na dyskretyzacji tylko powierzchni brzegowej, co minimalizuje liczbę równań algebraicznych. De Mey ze swoim zespołem zastosował ją do modelowania nieobudowanych układów hybrydowych mocy [21], [57], [58], do analizy zjawisk termicznych wewnątrz układów obudowanych [20], [22] oraz do optymalizacji topografii tych układów [56]. Lee, Palisoc i Baynham studiowali problemy termiczne w układach prostokątnych [49]. Głowacki i współpracownicy analizowali rozptyw ciepła w strukturach krzem-ceramika [27]. Ogólnie dostępnym programem komputerowym wykorzystującym metodę elementów granicznych jest BEASY [15]. Oprócz metod analitycznych i numerycznych należy wymienić metodę obrazów zaproponowaną przez Lecturcqa, Dorkela, Napieralskiego i Lachivera [48], a zaliczaną do metod analityczno-numerycznych.

2. ROZWIĄZANIE RÓWNIANIA PRZEWODNICTWA CIEPŁA

Do rozwiązywania stacjonarnego równania przewodnictwa ciepła (7), Część I [46] z dowolnymi warunkami brzegowymi wykorzystano metodę różnic skończonych. Jej zaletą jest prostota, wadą zaś potrzeba dużej pamięci komputera. Metoda pudełek zaproponowana przez Franza minimalizuje tę wadę, wybierając elastycznie dyskretyzację w zależności od szybkości zmian funkcji temperatury. Dokonuje więc redukcji obliczeń na etapie tworzenia modelu [26]. W niniejszej pracy przedstawiono takie podejście, które zmniejsza do niezbędnego minimum liczbę analizowanych w danej chwili węzłów, przy stałym skoku siatki. Pozwala to uprościć obliczenia na etapie manipulacji i przetwarzania danych. Prowadzi do kompromisu pomiędzy czasem obliczeń, a wymaganą pamięcią [43], [44]. Na podstawie modelu dyskretnego wyprowadzono zależności analityczne, pozwalające obliczyć temperaturę średnią [42].

2.1. PRZYPADEK JEDNOWARSTWOWY

Równanie różniczkowe (7), Część I [46] przekształca się w równanie różnicowe, zastępując pochodne cząstkowe ilorazami różnicowymi

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cong \frac{T(x - h_x, y, z) - 2T(x, y, z) + T(x + h_x, y, z)}{h_x^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \cong \frac{T(x, y - h_y, z) - 2T(x, y, z) + T(x, y + h_y, z)}{h_y^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \cong \frac{T(x, y, z - h_z) - 2T(x, y, z) + T(x, y, z + h_z)}{h_z^2}, \quad (3)$$

przy czym, h_x, h_y, h_z — skok siatki odpowiednio wzdłuż osi x, y, z .

Poszukujemy rozwiązania w skończonej liczbie węzłów. Rysunek 1 przedstawia rozmieszczenie węzłów według reguły

$$x = (i - 0.5)h_x \quad (4)$$

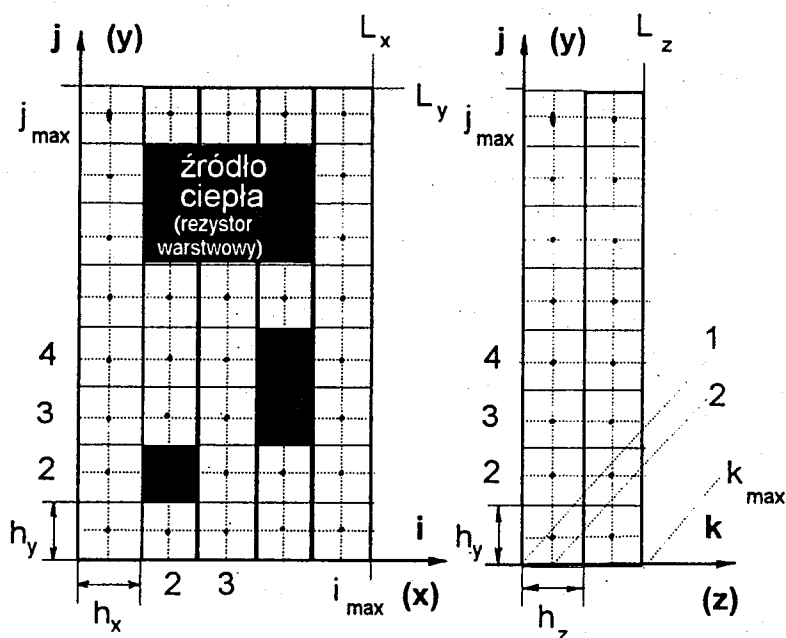
$$y = (j - 0.5)h_y \quad (5)$$

$$z = (k - 1.5)h_z \quad (6)$$

przy czym $i = 1, \dots, i_{\max} = L_x/h_x, j = 1, \dots, j_{\max} = L_y/h_y, k = 2, \dots, L_z/h_z + 1$, dla $z = 0, k = 1$, a dla $z = L_z, k = k_{\max} = L_z/h_z + 2$.

Równanie (7), Część I [46] dla węzła wewnętrznego można zapisać następująco

$$\begin{aligned} &G_x[T(i - 1, j, k) + T(i + 1, j, k) - 2T(i, j, k)] + \\ &G_y[T(i, j - 1, k) + T(i, j + 1, k) - 2T(i, j, k)] + \\ &G_z[T(i, j, k - 1) + T(i, j, k + 1) - 2T(i, j, k)] = 0 \end{aligned} \quad (7)$$



Rys. 1. Rozkład węzłów

przy czym

$$G_x = \lambda h_y h_z / h_x \quad (8)$$

$$G_y = \lambda h_x h_z / h_y \quad (9)$$

$$G_z = \lambda h_x h_y / h_z \quad (10)$$

są to konduktancje termiczne obliczone odpowiednio wzdłuż osi x, y, z .

Warunek brzegowy (8), Część I [46] dla $z = 0$ przyjmuje postać

$$P_z(i, j, 1) + 2G_z[T(i, j, 2) - T(i, j, 1)] - G_w T(i, j, 1) = 0. \quad (11)$$

Ten sam warunek dla $z = L_z$

$$2G_z[T(i, j, k_{\max}) - T(i, j, k_{\max} - 1)] + G_w T(i, j, k_{\max}) = 0. \quad (12)$$

Warunek brzegowy (9). Część I [46] dla $x = 0$ i $x = L_x$ można zapisać

$$T(i, j, k) - T(i + \delta_i, j, k) = 0 \quad (13)$$

dla $i = 1$ $\delta_i = -1$, dla $i = i_{\max}$ $\delta_i = 1$, a dla $y = 0$ i $y = L_y$

$$T(i, j, k) - T(i, j + \delta_j, k) = 0 \quad (14)$$

$$\text{dla } j = 1 \ \delta_j = -1, \text{ dla } j = j_{\max} \ \delta_j = 1.$$

Warunek (10), Część I [46] wygląda następująco

$$\text{dla } x = 0, \quad G_x[T(2, j, k) - T(1, j, k)] - G_{wx}T(1, j, k) = 0 \quad (15)$$

$$\text{dla } x = L_x, \quad G_x[T(i_{\max}, j, k) - T(i_{\max} - 1, j, k)] + G_{wx}T(i_{\max}, j, k) = 0 \quad (16)$$

$$\text{dla } y = 0, \quad G_y[T(i, 2, k) - T(i, 1, k)] - G_{wy}T(i, 1, k) = 0 \quad (17)$$

$$\text{dla } x = L_y, \quad G_y[T(i, j_{\max}, k) - T(i, j_{\max} - 1, k)] + G_{wy}T(i, j_{\max}, k) = 0 \quad (18)$$

przy czym $P_z(i, j, 1)$ jest mocą wydzielaną w prostokącie $h_x h_y$

$$P_z(i, j, 1) = p(i, j, 1)h_x h_y \quad (19)$$

G_w, G_{wx}, G_{wy} — konduktancje termiczne

$$G_w = \alpha h_x h_y \quad (20)$$

$$G_{wx} = \alpha h_y h_x \quad (21)$$

$$G_{wy} = \alpha h_x h_y. \quad (22)$$

Każdemu węzłowi (i, j, k) przyporządkowujemy jednowymiarową współrzędną l według przepisu

$$l = (k_{\max} i_{\max})(j - 1) + k_{\max}(i - 1) + k \quad (23)$$

przy czym

$$l = 1, \dots, l_{\max} = i_{\max} j_{\max} k_{\max}. \quad (24)$$

Najszybciej zmienia się k , wolniej i , wreszcie najwolniej j .

Równanie węzła (7) przyjmuje postać

$$G_x[T(l - k_{\max}) + T(l + k_{\max}) - 2T(l)] + G_y[T(l - i_{\max} k_{\max}) + T(l + i_{\max} k_{\max})] + \\ - 2T(l)] + G_z[T(l - 1) + T(l + 1) - 2T(l)] = 0. \quad (25)$$

Równanie (25) zapisane dla wszystkich węzłów z uwzględnieniem warunków brzegowych można przedstawić w postaci macierzowej

$$\mathbf{GT} = \mathbf{P}_z \quad (26)$$

przy czym

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_A & \mathbf{G}_C & & & & \\ \mathbf{G}_C & \mathbf{G}_B & \mathbf{G}_C & & & \\ & \mathbf{G}_C & \mathbf{G}_B & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \mathbf{G}_B & \mathbf{G}_C \\ & & & & \mathbf{G}_C & \mathbf{G}_B & \mathbf{G}_C \\ & & & & & \mathbf{G}_C & \mathbf{G}_A \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbf{G}_A = \begin{bmatrix} G_{A1} & G_{A3} & & & & & \\ G_{A3} & G_{A2} & G_{A3} & & & & \\ & G_{A3} & G_{A2} & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & G_{A2} & G_{A3} & \\ & & & & G_{A3} & G_{A2} & G_{A3} \\ & & & & & G_{A3} & G_{A1} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\mathbf{G}_B = \begin{bmatrix} G_{B1} & G_{B3} & & & & & \\ G_{B3} & G_{B2} & G_{B3} & & & & \\ & G_{B3} & G_{B2} & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & G_{B2} & G_{B3} & \\ & & & & G_{B3} & G_{B2} & G_{B3} \\ & & & & & G_{B3} & G_{B1} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\mathbf{G}_C = \begin{bmatrix} G_{C1} & & & & & & \\ & G_{C1} & & & & & \\ & & G_{C1} & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & G_{C1} & & \\ & & & & & G_{C1} & \\ & & & & & & G_{C1} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\mathbf{G}_{A1} = \begin{bmatrix} a & -2G_z & & & & & \\ -2G_z & b & -G_z & & & & \\ & -G_z & c & -G_z & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & c & -G_z & \\ & & & & G_z & b & -2G_z \\ & & & & & -2G_z & a \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$a = G_w + 2G_z, \quad b = G_x + G_y + 3G_z, \quad c = G_x + G_y + 2G_z \quad (32)$$

$$\mathbf{G}_{A2} = \begin{bmatrix} a & -2G_z & & & & & \\ -2G_z & d & -G_z & & & & \\ & -G_z & e & -G_z & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & e & -G_z & \\ & & & & -G_z & d & -2G_z \\ & & & & & -2G_z & a \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$d = 2G_x + G_y + 3G_z, \quad e = 2G_x + G_y + 2G_z \quad (34)$$

$$G_{A3} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ & -G_x & & & & & \\ & & -G_x & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & -G_x & & \\ & & & & & -G_x & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$G_{B1} = \begin{bmatrix} a & -2G_z & & & & & \\ -2G_z & f & -G_z & & & & \\ & -G_z & g & -G_z & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & g & -G_z & \\ & & & & -G_z & f & -2G_z \\ & & & & & -2G_z & a \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$f = G_x + 2G_y + 3G_z, \quad g = G_x + 2G_y + 2G_z \quad (37)$$

$$G_{B2} = \begin{bmatrix} a & -2G_z & & & & & \\ -2G_z & h & -G_z & & & & \\ & -G_z & j & -G_z & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & j & -G_z & \\ & & & & -G_z & h & -2G_z \\ & & & & & -2G_z & a \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$h = 2G_x + 2G_y + 3G_z, \quad j = 2G_x + 2G_y + 2G_z \quad (39)$$

$$G_{B3} = G_{A3} \quad (40)$$

$$G_{C1} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ & -G_y & & & & & \\ & & -G_y & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & -G_y & & \\ & & & & & -G_y & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$T = [T(1) \ T(2) \ \dots \ T(l_{\max})]^T \quad (42)$$

$$P_z = [P_z(1) \ P_z(2) \ \dots \ P_z(l_{\max})]^T. \quad (43)$$

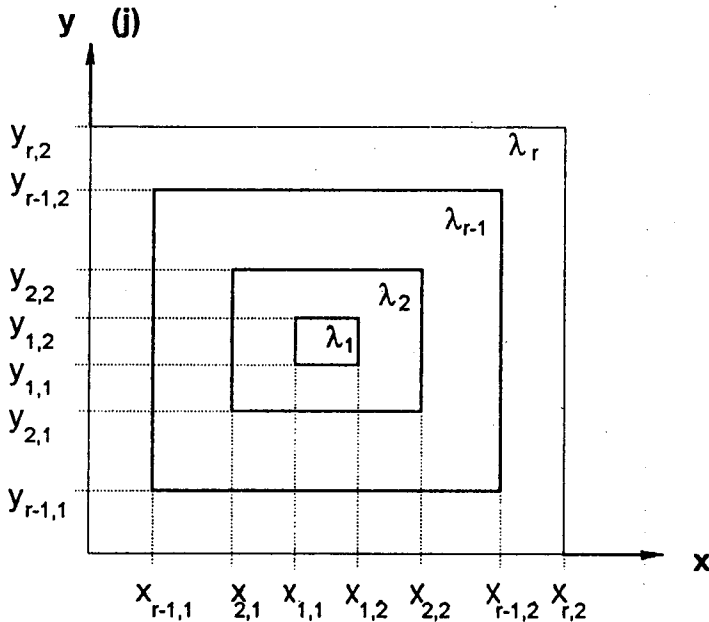
Spełnienie warunku

$$k_{\max} \leq i_{\max} \leq j_{\max} \quad (44)$$

zapewnia minimalne wymiary macierzy G .

2.2. PRZYPADEK WIELOWARSTWOWY

Rozważmy struktury piramidalne — rys. 2. Część I [46]. Oznaczenia położenia i wymiary warstw przedstawiono na rysunku 2.



Rys 2. Wymiary warstw struktury piramidalnej - widok z góry.
Grubości i konduktywności warstw odpowiednio $h_{z1}, \lambda_1, h_{z2}, \lambda_2, \dots, h_{zr}, \lambda_r$

Numer węzła l , podobnie jak w przypadku struktury jednowarstwowej przebiega sieć węzłów w taki sposób, że najszybciej zmienia się współrzędna k , wolniej i , wreszcie najwolniej j . Warunki brzegowe na styku struktury z otoczeniem są takie same jak poprzednio. Na granicy warstw mamy

$$G_{z,i}[T_i(k_{Gi}) - T_i(k_{Gi} - 1)] - G_{z,i+1}[T_{i+1}(k_G + 1) - T_{i+1}(k_{Gi})] = 0 \quad (45)$$

$$T_i(k_{Gi}) - T_{i+1}(k_{Gi}) - \frac{\lambda_i + \lambda_{i+1}}{G_{si}} \cdot \frac{T_i(k_{Gi}) - T_{i+1}(k_{Gi})}{h_{zi} + h_{zi+1}} = 0 \quad (46)$$

przy czym

$$i = 1, \dots, r - 1,$$

r — liczba warstw,

$G_{z,i}$ — konduktancja termiczna odnosząca się do i -tej warstwy,

G_{si} — konduktancja termiczna styku warstw,

k_{Gi} — indeks węzła brzegowego, leżącego na granicy warstw.

Macierz G struktury piramidalnej można zapisać następująco

$$G = \begin{bmatrix} Q_L^r & (G_D^r)^T & & & & \\ G_D^r & Q_L^{r-1} & (G_D^{r-1})^T & & & \\ & G_D^{r-1} & \ddots & & & \\ & & & Q_L^2 & (G_D^2)^T & \\ & & & G_D^2 & Q_P^1 & G_D^2 \\ & & & & (G_D^2)^T & Q_P^2 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & (G_D^{r-1})^T & G_D^{r-1} & & \\ & & & & & & Q_P^{r-1} & G_D^r & \\ & & & & & & (G_D^r)^T & Q_P^r \end{bmatrix} \quad (47)$$

przy czym

$$Q^1 = \begin{bmatrix} G_A^1 & G_C^1 & & & & \\ G_C^1 & G_B^1 & G_C^1 & & & \\ & G_C^1 & G_B^1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & G_B^1 & G_C^1 \\ & & & & G_C^1 & G_B^1 & G_C^1 \\ & & & & & & G_C^1 & G_A^1 \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$Q_L^i = \begin{bmatrix} G_A^i & G_C^i & & & & \\ G_C^i & G_B^i & G_C^i & & & \\ & G_C^i & G_B^i & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & G_B^i & G_C^i \\ & & & & G_C^i & G_B^i \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$i = 2, \dots, r$$

i — numer warstwy, mającej przewodność cieplną λ_i .

$$Q_P^i = \begin{bmatrix} G_B^i & G_C^i & & & \\ G_C^i & G_B^i & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & G_B^i & G_C^i \\ & & & G_C^i & G_A^i \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$i = 2, \dots, r$$

$$G_D^i = \begin{bmatrix} V_L^r & & & & & & \\ & V_L^{r-1} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & V_L^{i+1} & & & \\ & & & & V^i & & \\ & & & & & V_L^{i+1} & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & V_L^{r-1} \\ & & & & & & & & V_L^r \end{bmatrix} \quad (51)$$

$i = 2, \dots, r$

Sposób konstrukcji macierzy G_A^i , G_B^i , G_C^i , V^i , V_L^i wygląda analogicznie jak dla układów jednowarstwowych.

Znając kształt macierzy G można łatwo przypisać każdemu węzłowi odpowiedni element tej macierzy. Węzłowi o kolejnym numerze l_i ($i = 1, \dots, l_{\max}$) odpowiada l_i -ty element przekątnej głównej, który to element jest sumą konduktancji występujących między tym węzłem, a wszystkimi węzłami sąsiednimi. W kolumnie l_i pod przekątną główną wystąpi nie więcej niezerowych elementów niż wynosi liczba węzłów sąsiadujących z węzłem l_i , które posiadają współrzędną l większą od l_i . Ich wartości równe są konduktancjom ze znakiem minus, występującym pomiędzy węzłami l_i i l . Numery wierszy w jakich się znajdują odpowiadają ich kolejnym numerom l .

Jeśli grubość warstwy jest porównywalna z jej pozostałymi wymiarami, to uwzględnia się wymianę ciepła z otoczeniem poprzez powierzchnie boczne struktury. Wówczas do elementów przekątnej głównej macierzy G o numerach odpowiadających numerom węzłów brzegowych bocznych należy dodać konduktancję obliczoną analogicznie do przypadku jednowarstwowego (15)–(18).

Dla struktur o dużych rozmiarach i silnie zróżnicowanym polu temperatury wprowadza się współczynnik konwekcji będący funkcją współrzędnych geometrycznych.

$$\alpha = \alpha(x, y, z) \quad (52)$$

2.3. ROZWIĄZANIE RÓWNANIA MACIERZOWEGO $GT = P_Z$

Macierz G jest symetryczna i dodatnio określona. Przeprowadza się jej dekompozycję na czynniki trójkątne, stosując metodę Choleskiego [63]

$$G = LL^T. \quad (53)$$

Równanie macierzowe (26) przyjmuje postać

$$LT_p = P_z, \quad (54)$$

przy czym

$$\mathbf{T}_p = \mathbf{L}^T \mathbf{T}. \quad (55)$$

Taka dekompozycja pozwala uniknąć obliczeń macierzy $\mathbf{G}^{-1}$. Macierz $\mathbf{L}$ jest trójkątna i pasmowa o szerokości pasma

$$l_p = \sum_{i=1}^r i_{\max}(k_{\max,i} - 2) + 2i_{\max,r} + 1. \quad (56)$$

Można ją przedstawić jako

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{1,1}^* & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ l_{p,1}^* & & & \ddots & \\ & & \ddots & & \ddots \\ & & & l_{m,p}^* & \dots & l_{m,m}^* \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$L(i, j) = 0 \text{ dla } i - j \geq l_p \text{ lub } i - j < 0,$$

przy czym

$$l_{1,1}^* = L(1, 1) \quad (58)$$

$$l_{p,1}^* = L(l_p, 1) \quad (59)$$

$$l_{m,p}^* = L(l_{\max}, l_{\max} - l_p + 1) \quad (60)$$

$$l_{m,m}^* = L(l_{\max}, l_{\max}). \quad (61)$$

W metodzie Choleskiego obliczenia elementów macierzy $\mathbf{L}$ przebiegają według następującego schematu: zakłada się, że wszystkie $L(i, j)$, dla $j \leq k - 1$, są już znane, wówczas z równości (53) otrzymuje się następujące równania dla $L(k, k)$ i $L(i, k)$, $i \geq k + 1$

$$G(k, k) = L^2(k, 1) + L^2(k, 2) + \dots + L^2(k, k) \quad (62)$$

$$G(i, k) = L(i, 1) \cdot L(k, 1) + L(i, 2) \cdot L(k, 2) + \dots + L(i, k) \cdot L(k, k) \quad (63)$$

Macierz $\mathbf{L}$ jest macierzą rzadką. Dla struktur o zróżnicowanych kształtach i wymiarach liczba niezerowych elementów tej macierzy może stwarzać potrzebę użycia bardzo dużej pamięci komputera. Aby tego uniknąć w niniejszej pracy zaproponowano przetwarzanie w danej chwili tylko pewnej części macierzy $\mathbf{L}$, zwanej buforem $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} L(i, i) & \dots & L(i + NB - 1, i + NB - 1) \\ \vdots & & \vdots \\ L(i + l_p - 1, i) & \dots & L(i + l_p + NB - 2, i + NB - 1) \end{bmatrix} \quad (64)$$

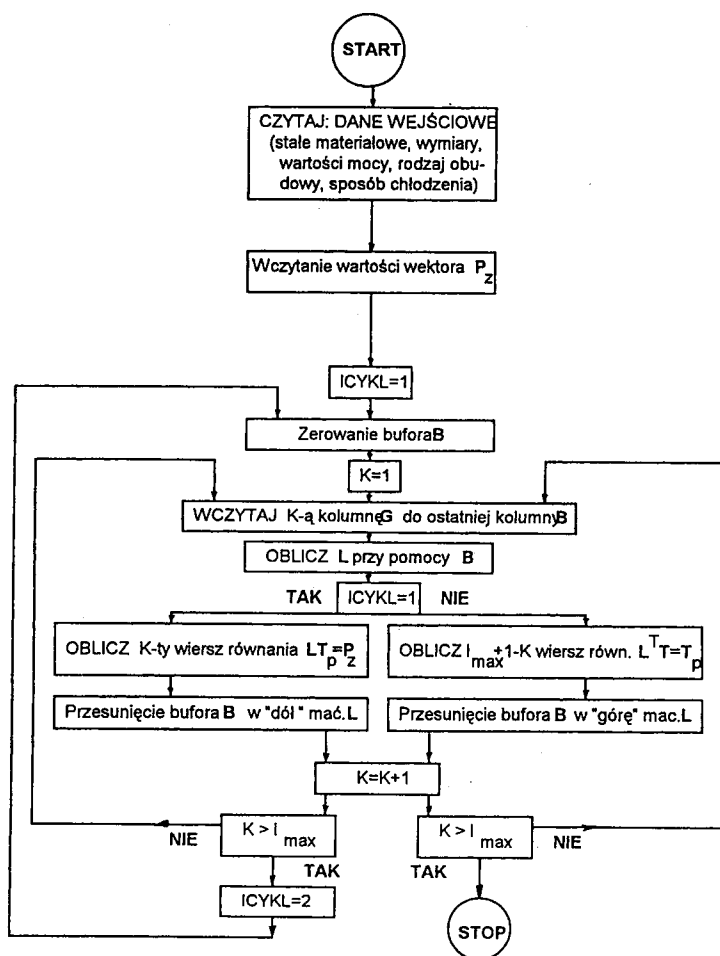
$$L(n, m) = 0 \text{ gdy } l_{\max} < n \leq 0 \text{ lub } l_{\max} < m \leq 0$$

przy czym NB jest „długością bufora” ($NB \geq l_p$), dobieraną stosownie do wielkości pamięci, który dysponujemy. Szczegółowe rozważania na ten temat przedstawiono w punkcie 3.

Minimalny wymiar macierzy B

$$\min \dim B = (l_p, l_p) \quad (65)$$

Schemat algorytmu numerycznego ilustruje rys. 3. W oparciu o tę metodę napisano program GTI w języku FORTRAN [41].



Rys. 3. Schemat blokowy programu GTI

2.4. TEMPERATURA ŚREDNIA STRUKTURY JEDNOWARSTWOWEJ

Rozważa się strukturę jednowarstwową opisaną modelem dwuwymiarowym (4), Część I, [46] z warunkiem brzegowym (9). Część I. Zakładamy, że skok siatki wzdłuż osi x i y jest taki sam i równa się h . Konduktancje termiczne oblicza się ze wzorów

$$G_x = G_y = G = \lambda L_z \quad (66)$$

$$G_w = 2ah^2. \quad (67)$$

Podmacierze macierzy $\mathbf{G}$ (27) wyglądają następująco:

$$\mathbf{G}_A = \begin{bmatrix} 2G + G_w & -G & & & \\ -G & 3G + G_w & -G & & \\ & -G & 3G + G_w & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 3G + G_w & -G \\ & & & & -G & 2G + G_w \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$\mathbf{G}_B = \begin{bmatrix} 3G + G_w & -G & & & \\ -G & 4G + G_w & -G & & \\ & -G & 4G + G_w & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 4G + G_w & -G \\ & & & & -G & 3G + G_w \end{bmatrix} \quad (69)$$

$$\mathbf{G}_C = \begin{bmatrix} -G & & & & \\ & -G & & & \\ & & -G & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -G \end{bmatrix}. \quad (70)$$

Temperaturę średnią oblicza się jako sumę temperatur we wszystkich węzłach struktury podzieloną przez liczbę węzłów

$$T_{mn} = \frac{1}{l_{\max}} \sum_{i=1}^{l_{\max}} T(i), \quad (71)$$

przy czym wektor temperatur otrzymuje się z równania macierzowego

$$\mathbf{T} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{P}_z. \quad (72)$$

Pomocnym będzie lemat: Jeśli macierz rzeczywista $\mathbf{G}$ jest macierzą symetryczną nieosobliwą i suma elementów każdego wiersza (kolumny) jest stała i równa c , to suma elementów każdej kolumny (wiersza) macierzy odwrotnej $\mathbf{G}^{-1}$ jest również stała i wynosi $1/c$. Dowód przedstawiono w [42].

Suma wszystkich elementów każdej kolumny lub wiersza macierzy G dla rozważanej struktury jest stała i wynosi G_w . Z tego spostrzeżenia oraz równania (72) wynika, że

$$\sum_{i=1}^{l_{\max}} T(i) = \frac{P_c}{G_w}, \quad (73)$$

przy czym P_c — całkowita moc wydzielana w układzie.

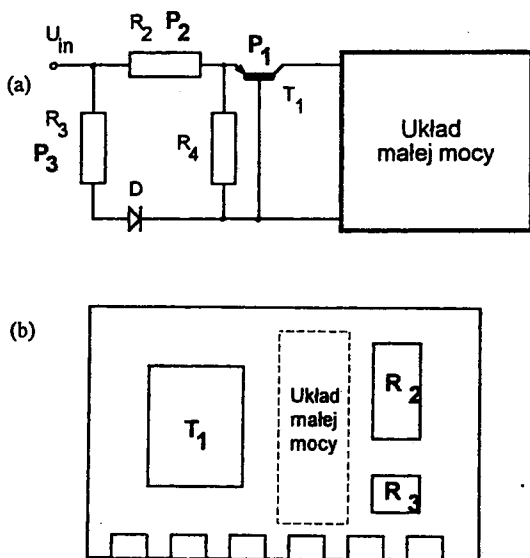
Ostatecznie, korzystając ze wzorów (67), (71) i (73) otrzymujemy

$$T_{mn} = \frac{P_c}{2\alpha L_x L_y} \quad (74)$$

co odpowiada wzorowi (56) w Części I [46].

3. PORÓWNANIE ROZWIĄZAŃ ANALITYCZNYCH I NUMERYCZNYCH

Aby ocenić przydatność obu przedstawionych metod: analitycznej (Część I [46]) i numerycznej przeprowadzono weryfikację termograficzną i analizę porównawczą. Wyniki ilustruje przykład. Stabilizator napięcia wykonany techniką hybrydową posiada trzy termicznie istotne elementy, tranzystor T_1 i dwa rezystory grubowarstwowe R_2 , R_3 o mocach odpowiednio $P_1 = 2.5W$, $P_2 = 1.3W$, $P_3 = 0.25W$. Pozostałe przyrządy wydzielają relatywnie małą moc i mogą być pominięte w analizie termicznej. Schemat i topografię układu przedstawia rysunek 4. Mikroukład wykonano na podłożu alundowym (96% Al_2O_3) o wymiarach



Rys. 4. Stabilizator napięcia (a) schemat układu, (b) topografia

$50 \times 80 \times 0.76 \text{ mm}^3$, posiadającym konduktywność termiczną $\lambda = 20 \text{ W/mK}$. Ciepło odprowadzane jest do otoczenia przy swobodnym ruchu powietrza. W oparciu o pomiary termograficzne zidentyfikowano wartość współczynnika wymiany ciepłej, $\alpha = 18.2 \text{ W/m}^2\text{K}$. Rozwiązanie analityczne (36) — Część I [46] w pobliżu źródeł ciepła uznano za zgodne z wynikami pomiarów [47]. Porównano również wyniki rozwiązania numerycznego, przy użyciu programu GTI, dla różnych wartości skoku siatki (a) $h_x = h_y = 2.5 \text{ mm}$, (b) 5 mm , (c) 10 mm z wynikami pomiarów. Dla wszystkich przypadków $h_z = L_z$. Względny błąd obliczeń w węzłach siatki na powierzchni źródeł ciepła

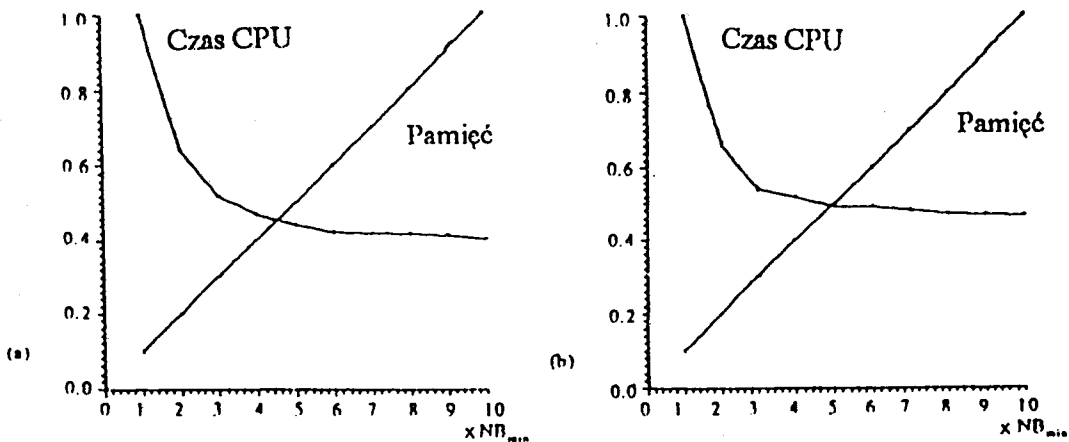
$$\delta_r = \max_i \left| \frac{T_{\text{numer.}}(i) - T_{\text{pomiar.}}(i)}{T_{\text{pomiar.}}(i)} \right| \quad (75)$$

(a) $\delta_r < 3\%$, (b) $\delta_r < 5\%$, (c) $\delta_r < 20\%$.

Obliczenia zrealizowano na mikrokomputerze 386 z koprocesorem numerycznym. Rysunek 5 przedstawia zależność czasu obliczeń (CPU) i niezbędnej pojemności pamięci od wielkości bufora NB (64). Kompromis uzyskuje się dla

$$\text{NB} \cong 5 \cdot \text{NB}_{\min}. \quad (76)$$

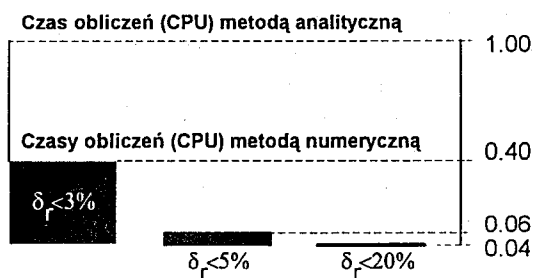
Dla porównania zestawiono względne czasy obliczeń pola temperatur metodą numeryczną dla różnych skoków siatki odniesione do czasu obliczeń analitycznych w węzłach siatek (rys. 6). W pierwszym przypadku metoda numeryczna wymagała 40% czasu potrzebnego dla metody analitycznej, w drugim 6%, a w trzecim tylko 4%.



Rys. 5. Względny czas obliczeń i względna objętość pamięci przy błędach obliczeń:

(a) $\delta_r < 3\%$, (b) $\delta_r < 5\%$

Swobodny wybór długości bufora NB pozwala analizować struktury o dowolnych kształtach i z żadaną dokładnością przy użyciu powszechnie dostępnych



Rys. 6. Porównanie czasów obliczeń metodą analityczną i numeryczną z uwzględnieniem różnych dokładności (przy różnych skokach siatki)

mikrokomputerów. Również w przypadku układów o nieskomplikowanych warunkach brzegowych użycie opisanej metody numerycznej jest korzystne pod warunkiem, że oblicza się pole temperatur całej struktury.

4. ZAKOŃCZENIE

W pracy scharakteryzowano techniki wykorzystywane do obliczeń temperatury w mikroelektronice. Zaproponowano dwie metody obliczeń: analityczną (Część I [46]) i numeryczną.

Pierwszą z wymienionych jest metoda rozdzielania zmiennych. Adresowana jest do układów o nieskomplikowanych warunkach brzegowych (niepiramidalnych). Jej zaletą jest możliwość szybkiego obliczenia temperatury w wybranym punkcie układu. Przy pomocy opisanej metody numerycznej można analizować układy o dowolnych kształtach i sposobach chłodzenia (np. struktury piramidalne). Opisany algorytm umożliwia istotną redukcję niezbędnej pojemności pamięci komputera. W oparciu o metodę różnic skończonych wyprowadzono zależności analityczne służące do obliczania temperatury średniej układu.

Porównanie czasów obliczeń zaproponowanymi metodami: analityczną i numeryczną pozwala stwierdzić, że czas obliczeń pola temperatury całej struktury jest znacznie krótszy przy użyciu metody numerycznej.

BIBLIOGRAFIA

1. T. Adahi, A. Yoshu, T. Sudo: *Two dimensional semiconductor analysis, using finite-element method*. IEEE J. of Solid-State Circuits, 1972, vol. ED-26
2. J.A. Andrews, L.M. Mahalingam, H.M. Berg: *Thermal characteristics of 16- and 40-pin plastic DIP's*. IEEE Trans. Components, Hybrid and Manufacturing Technology, 1981, Vol. CHMT-4, p. 455
3. W.J. Anderson: *Finite elements in mechanical and structural design*. Mac Neal-Schwendler, Corp., Los Angeles, 1984

4. P.K. Banerjee, L.J. Butterfield: *Boundary element methods in engineering science*. London, New York, McGraw Hill Books Co. (IK), 1981
5. H.Z. Barakat, J.A. Clark: *On the solution of the diffusion equations by numerical methods*, Journal of Heat Transfer, November, 1966
6. R. Barbou, G. Menozzi, G. Moulin: *Temperature prediction on hybrid microelectronics*. Proc. 6th, European Hybrid Microelectronics Conf., Bournemouth, 1987, pp. 332-338
7. G.K. Baxter, J.W. Anslow: *High temperature thermal characteristics of microelectronic packages*. IEEE Trans. Parts, Hybrids and Packaging, 1977, vol. PHP-13, p. 385
8. W.J. Bocchi: *Finite element engineering analyses applied to microelectronic*. Proc. IEEE 1986 National Aerospace and Electronics Conference, pp. 1150-1153, Dayton, USA
9. M. Bonnifait, M. Cadre: *Thermal simulations for electronic components using finite elements and nodal networks*. ASME HTD, vol. 57, pp. 231-237, 1986
10. C.A. Brebbia, S. Walker: *Boundary element techniques in engineering*. London, Boston: Butterworth Inc., 1980
11. C.A. Brebbia: *The boundary element method for engineers*. London, Pentech, 1984
12. C.A. Brebbia, J.C.F. Telles, L.C. Wróbel: *Boundary element techniques: Theory and applications*. Engineering, Berlin, New York, Springer-Verlag, 1984
13. H.K. Charles, Jr, G.V. Clatterbaugh: *Computer-aided modelling for electrical, thermal and mechanical analysis of VLSI circuit boards*. The John Hopkins University, kontakt prywatny, 1992
14. D. Chin, M. Kump, R.W. Dutton: *SUPRA — Stanford University Process Analysis Program*. Stanford Electronics Laboratory, Stanford University, Stanford, California
15. *Boundary element method, software name: BEASY*. Computational Mechanics Institute, 25 Bridge Street, Billerica, MA 01821
16. D.R. Croft, and D.G. Lilley: *Heat transfer calculations using finite difference equations*. Applies Science Publ., London, 1977
17. G. De Mey: *The auxiliary boundary element method for time dependent problems*. Journal of Computational and Applied Mathematics, North-Holland, 12&13, 1985, pp. 239-245
18. G. De Mey, L. Rottiers, M. Driscart, L. Vanschoor: *Thermal studies on hybrid circuits*. Hybrid Circuits, 1988, vol. 17, pp. 8-11
19. B.P. Demidowicz, I.A. Maron: *Metody numeryczne*. PWN, Warszawa, 1965
20. S. De Smet, M. Driscart, G. De Mey: *Convection cooling inside microelectronic packages*, w książce B. Sunden, A. Zukauskas „Recent advances in heat transfer”, Elsevier, Amsterdam, 1992, pp. 855-866
21. M. Driscart, G. De Mey: *A boundary element approach for thermal modelling of microelectronic components and packages*. Proc. EURODEM Conf., Nice, France, 1990, pp. 393-404
22. M. Driscart: *Model for a semiconductor chip in the thermal simulation of a complete package*. W książce B. Sunden, A. Zukauskas, „Recent advances in heat transfer”, Elsevier, Amsterdam, 1992, pp. 879-888
23. *Finite difference analysis, software name: SINDA*. Computer Software Management and Information Center (COSMIC), 112, Barrow Hall, University of Georgia, Athens, GA 30602
24. *Finite element analysis, software name: ANSYS*, Swanson Analysis Systems, Inc., Johnson Road, P.O. Box 65, Houston, PA 15342
25. G.E. Forsythe, W.R. Wasow: *Finite difference methods for partial differential equations*. New York, Wiley Corp., 1960
26. F.F. Franz, G.A. Franz, S. Selberherp, C. Ringhofer, P. Markovich: *Finite Boxes — a generalization of the finite difference method suitable for semiconductor device simulation*. IEEE Trans. on Electron Devices, 1983, vol. ED-30, pp. 1070-1080

27. A. Głowacki i inni: *Analiza rozptyłu ciepła w strukturach krzem — ceramika metodą elementu brzegowego*. Prace ITE-CEMI, 1987, vol. 4, p. 37
28. S. Groothuis, M. Masood: *Finite element modelling in VLSI packaging*. TI Engineering Journal, January–February 1985
29. S. Habchi, S. Acharya: *Laminar mixed convection in a partially blocked vertical channel*. ASME HTD, 1986, vol. 57, pp. 189–197
30. H. Hardisty, J. Abboud: *Thermal analysis of dual in-line package using the finite-element method*. IEE Proc., February 1987, vol. 134, no. 1, p. 23–31
31. F.B. Hildebrand: *Finite-difference equations and simulations*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1968
32. W. Janke: *Zjawiska termiczne w elementach i układach półprzewodnikowych*. WNT, Warszawa, 1992
33. W. Kalita: *Projektowanie i technologia grubowarstwowych mikroukładów hybrydowych przeznaczonych do pracy w trudnych warunkach eksploatacyjnych*. Manuskrypt, Lwowski Instytut Politechniczny, Lwów, 1992
34. W. Kalita, T. Niedziałek: *Analysis of stationary (by HYBTERM PROGRAM) and non-stationary temperature fields in hybrid microcircuits*. 17-th Conf. and Exhibition of the ISHM — Poland Chapter, Rzeszów — Solina, 15–18 September 1993
35. H. Kardestuncer: *Finite element handbook*. Mc Graw-Hill Book Company, New York 1987
36. E. Kącki: *Termokinetyka*. WNT, Warszawa, 1967
37. T. Kobayashi, G. Iwane: *Three dimensional thermal problems of double-heterostructure semiconductor lasers*. Japanese J. Appl. Phys., 1977, vol. 16, p. 1403
38. M. Kohara, S. Tsutsumi, H. Shibata, H. Nakata: *High thermal conduction package technology for flip chip devices*. IEEE Trans. Components, Hybrids and Manufacturing Technology, 1983, Vol. CHMT-6, p. 267
39. A. Kos: *Effective method of an optimal choice of the geometry of an integrated circuit, thermal problem*. Proc. of IASTED Int. Symposium on Applied Informatics, Lille, France, vol. III, pp. 121–124, 1983
40. A. Kos: *Problem optymalnego wyboru geometrii obwodów w układach scalonych ze względu na eliminację pasożytniczych cieplnych sprzężeń zwrotnych*. Elektronika, 1983, nr 1–2, pp. 55–56
41. A. Kos: *Computer-aided topology design with minimization of thermal interactions*. Proc. of the 1985 Int. Symposium on Microelectronics, ISHM, Anaheim, USA, pp. 123–126
42. A. Kos: *Average temperature calculation by the finite difference method in power microelectronics*. XIV Krajowa Konferencja Teoria Obwodów i Układy Elektroniczne, Warszawa-Waplewo, 23–25.X.1991, pp. 216–221
43. A. Kos: *Compromise in Choleski's method used in power microelectronics*. Proc. of the Int. AMSE Conf. Calcutta, India, Dec. 7–9, 1992, AMSE Press, vol. 3, pp. 101–110
44. A. Kos: *Temperature fields computations in microcircuits with finite difference method*. Proc. of the 7th Int. Conf. on Systems, Modelling and Control, Zakopane, May 17–21, 1993, Vol. I, pp. 266–271
45. A. Kos: *Temperature computations in power microcircuits*. Hybrid Circuits, 1993, No. 31, pp. 12–14
46. A. Kos: *Analiza temperaturowa układów hybrydowych*. Część I: Metody analityczne, Kwart. Elektr. i Telekom., 1994, vol. 40, z. 1, ss. 75–92
47. A. Kos, E. Boone: *Verification of temperature computations of hybrid circuits*. XVI Krajowa Konferencja Teoria Obwodów i Układy Elektroniczne, Koszalin-Kołobrzeg, 26–28 października 1993, pp. 150–155

48. P. Leturcq, J.M. Dorkel, A. Napieralski, E. Lachivier: *A new approach to thermal analysis of power devices*. IEEE Transaction on Electron Devices, 1987, vol. ED-34, No. 5, pp. 1147-1156
49. C.C. Lee, A.L. Palisoc: *Thermal analysis of solid state devices using boundary element method*. IEEE Trans Electron Devices, 1988, Vol. 35, p. 1151
50. W. Łobodziński: *Numeryczna metoda wyznaczania pól temperatury w układach hybrydowych*. Prace PIE, 1975, nr 1, ss. 5-51
51. L.M. Mahalingam, J.A. Andrews, J.E. Drye: *Thermal studies in pin grid array packages for high density LSI and VLSI logic circuits*. IEEE Trans. Components, Hybrids and Manufacturing Technology, 1983, Vol. CHMT-6, p. 246
52. C.D. Maldonado: *ROMAN II, A two dimensional Process Simulator for Modelling and Simulation in the design of VLSI devices*. Appl. Phys. 1983, vol. A-31, p. 119
53. D.F. Moffat, S. Ramadhyani, F.P. Incropera: *Conjugate heat transfer from wall embedded sources in turbulent channel flow*. ASME HTD, 1986, Vol. 57, pp. 177-182
54. A. Napieralski: *Komputerowe projektowanie układów półprzewodnikowych dużej mocy ze szczególnym uwzględnieniem ich własności termicznych*. Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, no. 562, Łódź, 1988
55. B.R. Penumall: *A comprehensive two-dimensional VLSI process simulation program, BI-CEPS*. IEEE Trans. Electron Devices, 1983, vol. ED-30, p. 986
56. L. Rottiers, G. De Mey: *An automatic placement algorithm for optimising thermal behaviour of hybrids circuits*. Proc. 6th European Microelectronics Conf., 1987, Bournemouth, pp. 325-331
57. L. Rottiers, G. De Mey: *Eigenfunction expansion versus the boundary element method for thermal problems in microelectronics*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 20, North-Holland, 1977, pp. 367-372
58. L. Rottiers, G. De Mey: *Simulation of the thermal behaviour in hybrid circuits*. Proc. of the Intersociety Conf. on Thermal Phenomena in Electronic Components, Los Angeles, 1988, pp. 15-20
59. L.J. Segerlind: *Applied finite element analysis*. New York: John Wiley, 1969
60. A. Sharma: *Statistical thermal modelling of multi-chip modules*. Proc. of the 36-th Electronic Components Conference, Seattle, USA, pp. 138-140, 1986
61. G.D. Smith: *Numerical solution of partial difference equations: finite difference methods*. Oxford: Clarendon Press, 1978
62. Z.J. Staszak: *Program do obliczeń rozkładów temperatur w ciele stałym w oparciu o model wielowymiarowy*. Raport ITE, Politechnika Gdańska, 1981
63. J. Stoer: *Wstęp do metod numerycznych*. PWN, Warszawa, 1979
64. J. Szargut: *Modelowanie numeryczne pól temperatury*. WNT, Warszawa, 1992
65. D.L. Waller, L.R. Fox, R.J. Hannemann: *Analysis of surface mount thermal and thermal stress performance*. IEEE Trans. Components, Hybrids and Manufacturing Technology, vol. CHMT-6, p. 257, 1983
66. F.T. Wenthen: *Computer-aided thermal analysis of power semiconductor devices*. IEEE Trans. on Electron Devices, September 1970, vol. ED-17, no. 9, pp. 765-770
67. D. Wolff, J. Walcutt: *Thermal prediction and verification tools. Improve system reliability*. Hybrid Circuit Technology, May 1991, pp. 12-15
68. C. Zardini, F. Rodes, G. Duchamp, J.L. Aucouturier: *3D thermal simulation of power hybrid assemblies*. Hybrid Circuits, no. 24, January 1991, pp. 20-21
69. O. Zienkiewicz: *The finite element method*. London, McGraw-Hill, 1977

ANDRZEJ KOS

THERMAL ANALYSIS OF HYBRID CIRCUITS
PART II: NUMERICAL METHODS. APPLICATIONS

Summary

The review of numerical methods for temperature computations in microelectronics is presented. The numerical algorithm which is able to compute temperature of a circuit with no matter how complicated boundary conditions based on the finite difference method is proposed. Basing on the special properties of the matrix of thermal conductances the analytical formula for average temperature calculations is obtained. Finally the analytical numerical solutions are compared.

Switched current building blocks for analog sampled circuits

KRZYSZTOF WAWRYN, ROBERT SUSZYŃSKI, ANDRZEJ MAZUREK

Instytut Elektroniki, Wyższa Szkoła Inżynierska w Koszalinie

Otrzymano 1994.02.10

Autoryzowano do druku 1994.02.25

This paper presents switched current building blocks used to configure analog current sampled circuits and focuses on application of switched current circuits in filtering and Sigma-Delta modulation. Several building block topologies used in filtering and Sigma-Delta modulator configurations, together with results of SPICE simulations are presented and discussed.

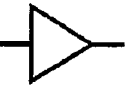
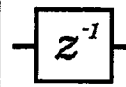
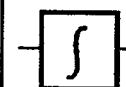
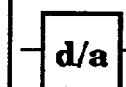
1. INTRODUCTION

Recently, the switched current (SI) innovative technique has been receiving substantial consideration for the construction of fully integrated circuits [1-4]. The SI technique, as the main advantage, allows implementation of SI circuits on standard digital CMOS process. This is an attractive feature due to the trends in the integration of large analog/digital systems on a single chip. In comparison to the switched-capacitor (SC) circuits, the SI circuits exhibit some advantages: wider signal dynamic range with supply voltage reduced to -3.3 V and 3.3 V, insensitivity to nonlinearities and variations in capacitances and transconductances, potential for higher frequency operation and reduction in both power and area requirements.

A SI system uses analog sampled-data circuits composed of building blocks shown in Table 1 in which signals are represented by current samples. This is in contrast with switched capacitor circuits which use voltage samples [5]. The SI technique can be applied to the whole range of analog sampled-data signal processing applications that have previously been implemented with switched capacitors. Therefore, the applications for SI systems will be much the same as for SC systems, i.e. to general filtering or analog to digital conversion tasks.

Analog sampled-data building blocks

Table 1.

amplifier	summer	delay cell	integrator	comparator	d/a converter
					

Generally, switched filters [6–11] like each sampled-data circuit shown in figure 1 are described by the transfer function

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z + \dots + a_m z^{-m}} \quad (1)$$

and comprise the following building blocks: an amplifier, a summer and a delay cell where a signal is delayed by one clock period (T). The delay cell is usually described by the z -domain transfer function z^{-1} .

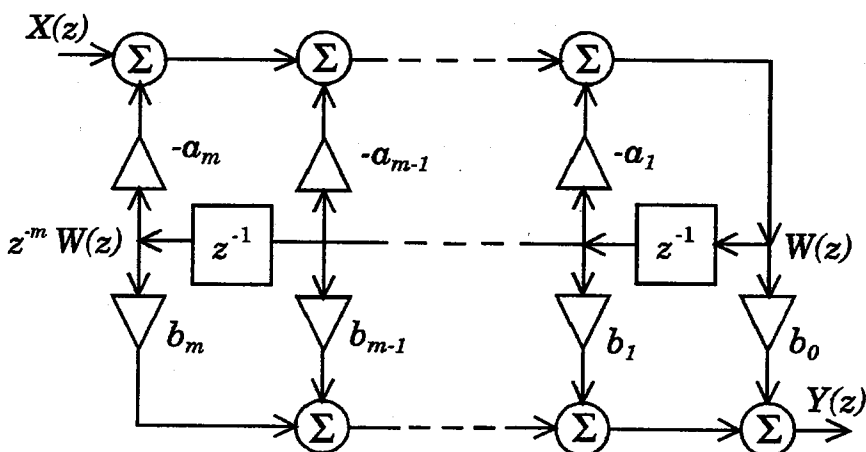


Fig. 1. Sampled-data circuit

Usually, sampled analog to digital converters are based on Sigma - Delta modulator topologies. Sigma-delta ($\Sigma\Delta$) modulators are analog oversampled circuits in which an analog input signal is sampled and converted to a single-bit digital stream. Oversampled a/d converters have recently drawn considerable interest from integrated circuit designers as they offer high precision analog to digital conversion without requiring precision elements or accurate component matching. A number of high resolution and high speed monolithic $\Sigma\Delta$ converters have been realized in the past few years [12–18]. Their topologies comprise a series of integrators nested within multiple feedback loops. The number of integrators in the forward path defines the order of the modulator. Block diagrams of first-,

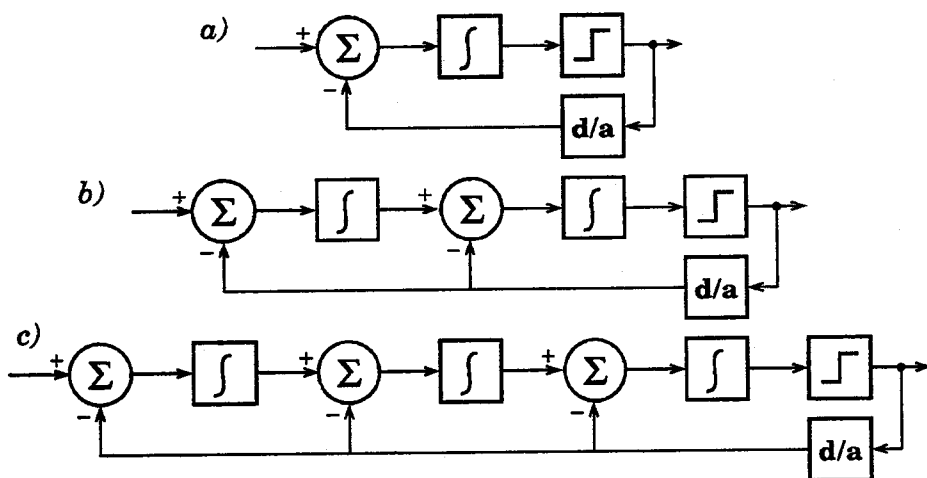


Fig. 2. Single-stage $\Sigma\Delta$ modulators, a) first-order stage, b) second-order stage, c) third-order stage

second- and third-order modulators are shown in figure 2. Direct realization of high order $\Sigma\Delta$ a/d modulators is generally avoided, because they are unstable. Unfortunately, an instability of $\Sigma\Delta$ modulators of order three or higher arises from limit cycles that accumulate large signals in the integrators. To achieve third- or higher-order $\Sigma\Delta$ modulators maintaining circuit stability, the technique of cascading multiple first- and/or second-order stages can be used. Ideally, $\Sigma\Delta$ modulators of any order can be realized by cascading well matched first- and second-order sections. Instability is avoided because each individual stage is self-contained first- or second-order $\Sigma\Delta$ modulator with only one or two integrators in its forward path.

$\Sigma\Delta$ modulators of any order need the following signal processing building blocks: a summer, a switched integrator, a comparator and a one-bit digital to analog converter with variable gain. All building blocks to compose filters and $\Sigma\Delta$ modulators can be realized in current domain.

2. FILTER SIGNAL PROCESSING BUILDING BLOCKS

2.1. CURRENT AMPLIFIER

Current amplifier is shown in figure 3. The operation of the amplifier is as follows. The transistor T_2 acts to mirror the current I_1 of the transistor T_1 to the output.

2.2. CURRENT SUMMER

Current summer is shown in figure 4. The operation of the summer is as follows. The transistor T_2 acts to mirror the sum of currents $I, i_1, \dots, i_n$ of the transistor T_1 to the output. The advantage of the current summer in comparison to voltage one is a lack of resistors to perform summing operation.

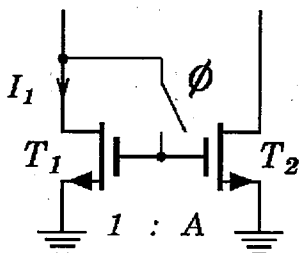


Fig. 3. SI current amplifier

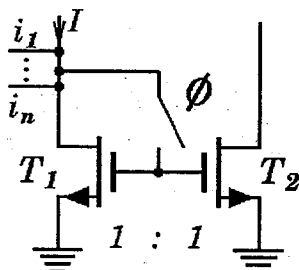


Fig. 4. SI current summer

2.3. DELAY CELL

The delay cell which delays a signal by one clock period (T) usually comprises cascaded two memory cells, a fundamental building block of SI technique. Each memory cell delays a signal by a half of one clock period ($T/2$). Several memory cell topologies can be used to build delay cells. The simple NMOS and PMOS memory cells are shown in figure 5. The operation of the cell (NMOS and PMOS) is as follows. On phase $\phi 2$ the transistor T_0 is diode-connected and the current $I + i$ charges its gate-source capacitance to a level V_{gs} . On phase $\phi 1$ the V_{gs} of transistor T_0 maintains the flow of the drain current $I + i$, so $i_0 = -i$.

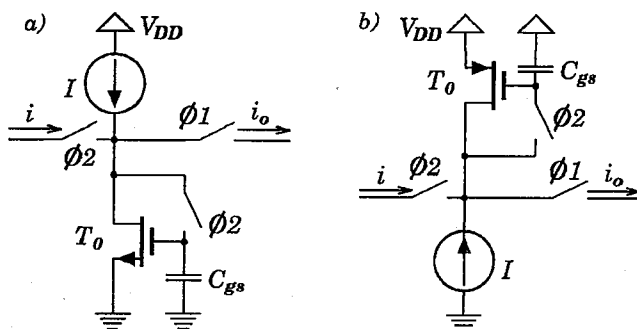


Fig. 5. Simple current memory cells, a) NMOS memory cell, b) PMOS memory cell

Presented simple memory cells have low output resistance. When there is a need to increase the output resistance, an improved regulated memory cell [19] shown in figure 6 can be used. During phase $\phi 1$, transistor T_1 is diode-connected and its gate capacitance charges up until V_{gs1} is sufficient to maintain the drain current. The gate of transistor T_3 is connected to the drain of transistor T_1 and senses the drain-source voltage of transistor T_1 (V_{ds1}). As transistor T_3 carries a constant current I , any difference between V_{ds1} and the V_{gs3} needed to maintain I is amplified by the loop formed by transistors T_2 and T_3 . Thus V_{ds1} is maintained constant at V_{gs3} . During phase $\phi 2$, transistor T_2 maintains the sampled drain current. The output resistance is now $g_{m2}r_{ds3}$ greater than the output resistance of simple memory cell.

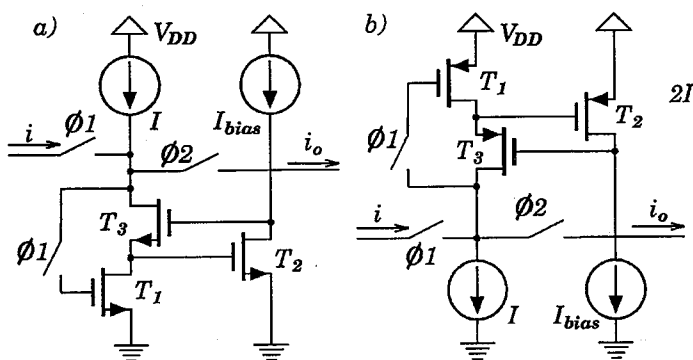


Fig. 6. Regulated cascode current memory cells, a) NMOS memory cell, b) PMOS memory cell

3. A/D CONVERTER SIGNAL PROCESSING BUILDING BLOCKS

3.1. SI INTEGRATOR

Integrators performing sampled signals are described by the z -domain transfer function. SI integrator building block is created with current memory cell, a fundamental building block of SI technique. Several current memory cell topologies can be used to create SI integrator. A second generation lossless integrator shown in figure 7 is built of the simplest memory cells. The operation of the cell is as follows. On phase $\phi 2$ the transistor T_1 is diode connected and the input current charges its gate-source capacitance C_{gs} to a level V_{gs} . On phase $\phi 1$, the V_{gs} maintains the flow of the drain current of the transistor T_2 . The integration of the input current is performed by transistors T_1 and T_2 , while the transistor T_3 is used to mirror the current I_1 of transistor T_1 to the output. The transfer function of the inverting integrator may be found as follows. On phase $\phi 2$ of clock

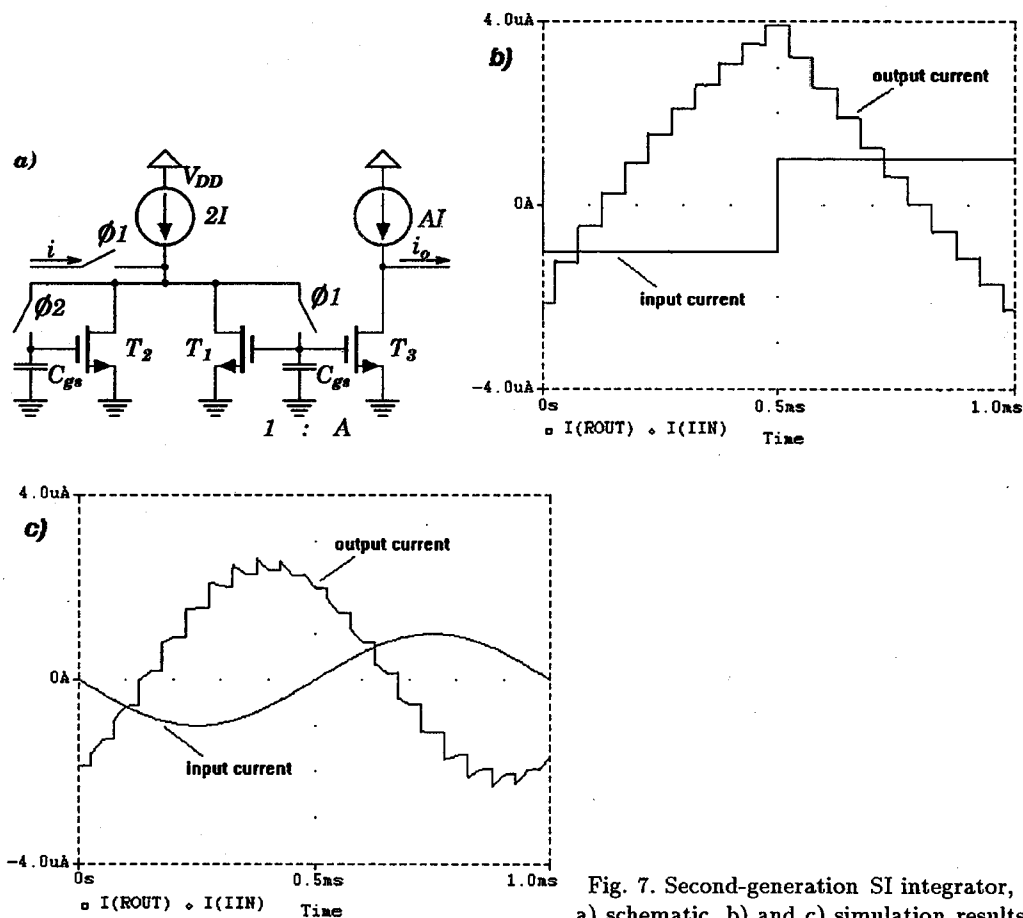


Fig. 7. Second-generation SI integrator, a) schematic, b) and c) simulation results

period $(n - 1)$, transistor T_2 is diode connected and passes current

$$I_2 = 2I - I_1 = I + \frac{i_0(n - 1)}{A}. \quad (2)$$

On the next phase ϕ_1 of the clock period (n) , transistor T_1 is diode connected and passes current

$$I_1 = 2I - I_2 + i(n) + I - \frac{i_0(n)}{A}. \quad (3)$$

Rearranging equations (2) and (3) we obtain:

$$\frac{i_0(n)}{A} + i(n) = \frac{i_0(n - 1)}{A}. \quad (4)$$

Taking z -transforms, the z -domain transfer function, according to the backward

Euler method, can be expressed by the transfer function of the inverting integrator

$$H(z) = \frac{i_0(z)}{i(z)} = \frac{-A}{1 - z^{-1}} \quad (5)$$

The integration performed according to the forward Euler method can be obtained when the input current is sampled on phase $\phi 2$ instead on phase $\phi 1$. The z -domain transfer function can be expressed by the transfer function of the noninverting integrator

$$H(z) = \frac{i_0(z)}{i(z)} = \frac{Az^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (6)$$

The output current swing of this integrator is from $-AI$ to AI .

A damped integrator can be created by addition of an extra feedback stage. Analysis of noninverting and inverting circuits shown in figure 8 gives the following z -domain transfer characteristics

$$H_{\text{inv}}(z) = -\frac{a}{1 - bz^{-1}} \quad \text{and} \quad H_{\text{noninv}}(z) = \frac{az^{-1}}{1 - bz^{-1}} \quad (7)$$

where $a = \frac{A}{1 + B}$ and $b = \frac{1}{1 + B}$,

which correspond to the backward and forward Euler methods of damped integrator, respectively.

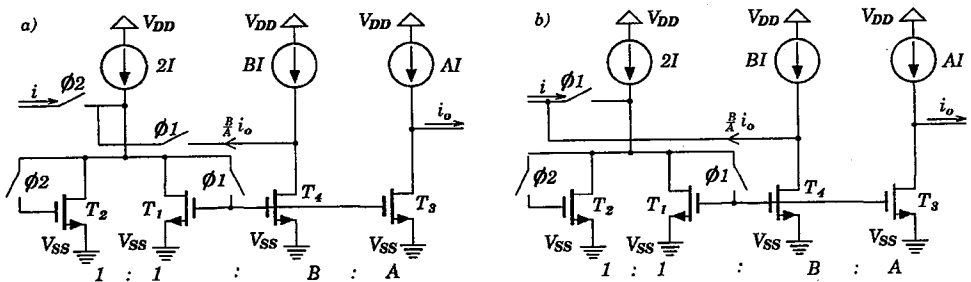


Fig. 8. Second generation damped SI integrators, a) noninverting, b) inverting

In similar way we can analyse a feedforward integrator and built a generalised second-generation SI integrator shown in figure 9. The transfer function of this integrator is given by the equation

$$i_0(z) = \frac{a_1 z^{-1}}{1 - bz^{-1}} i_1(z) - \frac{a_2}{1 - bz^{-1}} i_2(z) - \frac{a_3 (1 - z^{-1})}{1 - bz^{-1}} i_3(z) \quad (8)$$

where $a_1 = \frac{A_1}{1 + B}$, $a_2 = \frac{A_2}{1 + B}$, $a_3 = \frac{A_3}{1 + B}$ and $b = \frac{1}{1 + B}$

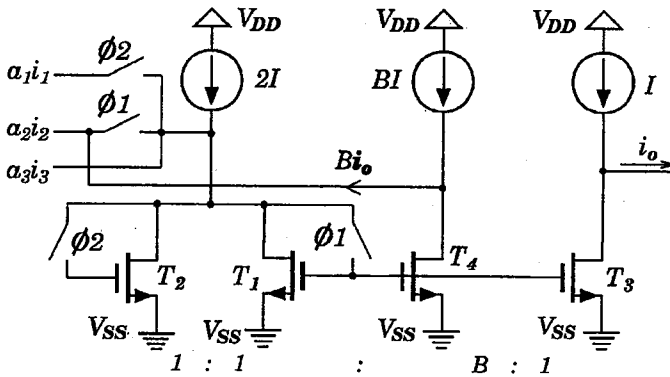


Fig. 9. Generalised second-generation SI integrator

The other topology of SI lossless integrator shown in figure 10 uses fully complementary memory cells. Application of NMOS and PMOS memory cells allows to memorize for both positive and negative input currents and decreases the power consumption in comparison to simple memory cell which additionally

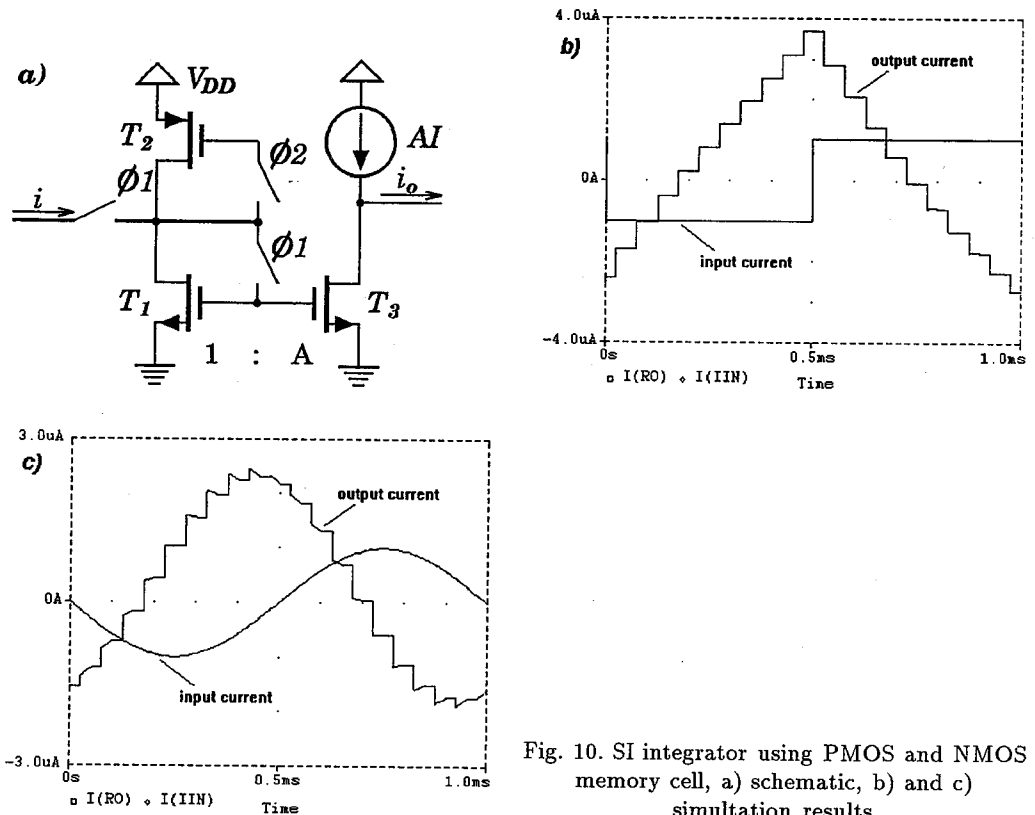


Fig. 10. SI integrator using PMOS and NMOS memory cell, a) schematic, b) and c) simulation results

needs to be biased to memorize negative and positive input currents. Another advantage is better voltage swing than in the case of simple current memory. The lossless integrator using complementary memory cells operates in a similar manner to integrator shown in figure 7.

Transfer function of this integrator can be also expressed by the equation (5). The output current swing of this integrator is from $-AI$ to AI , too. Both presented integrators exhibit low output resistance. When there is a need to increase the output resistance, an improved regulated cascode SI integrator shown in figure 11 can be used in which output resistance is $g_{m2}r_{ds3}$ greater than the output resistance of simple current memory cell. This integrator uses regulated

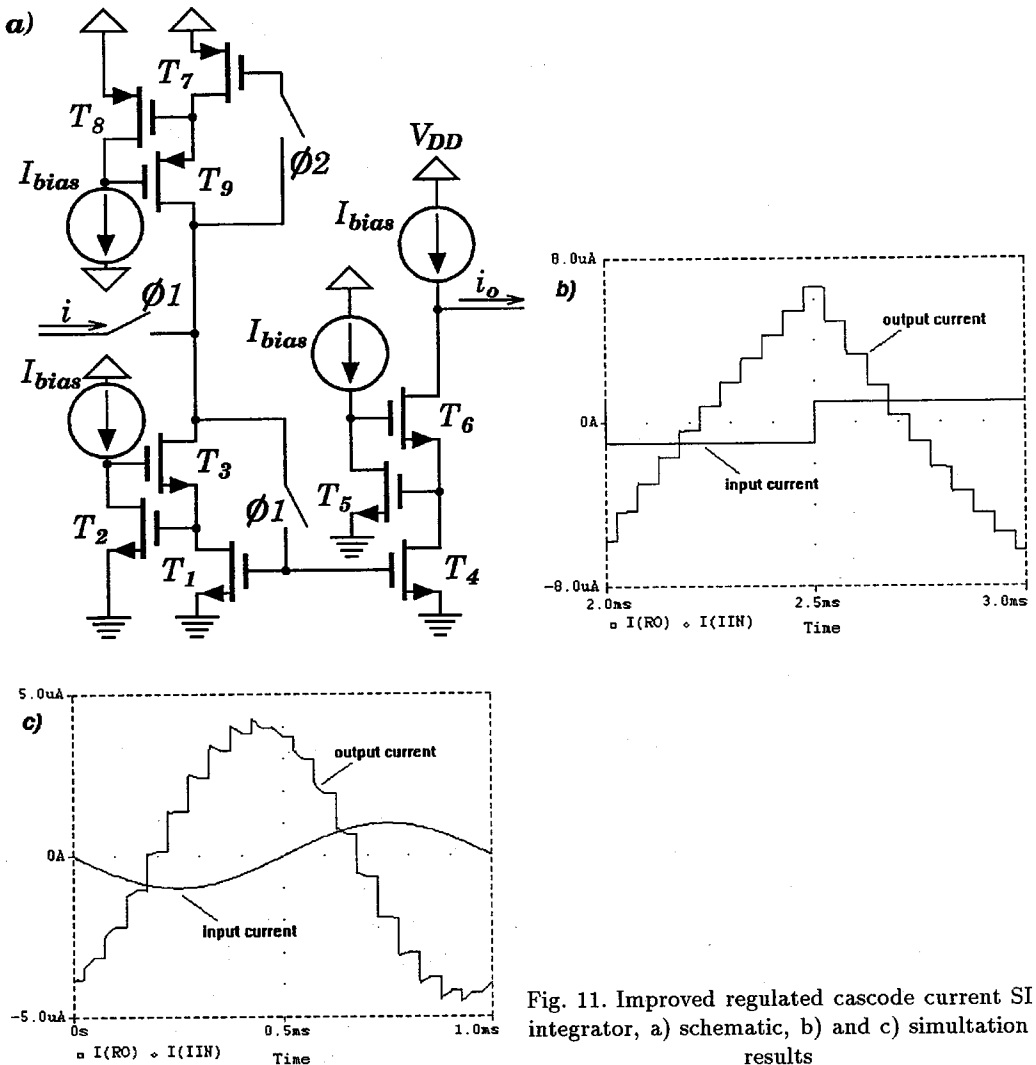


Fig. 11. Improved regulated cascode current SI integrator, a) schematic, b) and c) simulation results

cascode memory cells in a complementary structure. The operation is the same as in the case of integrator built of simple memory cells.

Damped integrators can be also created by addition of extra feedback stage.

3.2 CURRENT COMPARATOR

The current comparator shown in figure 12 can be used as a building block in the SI integrator structure. Output of a current comparator is an output of the $\Sigma\Delta$ modulator and gives voltage logic states. The structure of the comparator is based on a simple CMOS inverter and the operation of the circuit is as follows. If the input current I_{in} is greater than zero, then the input voltage goes up until reaches V_{dd} . It causes the output voltage of the inverter goes down to be in low state. On the other hand, if the input current I_{in} is less than zero, then the input voltage of the inverter goes down until reaches ground. It causes the output voltage of the inverter goes up to be in high state. So the inverter can distinguish between positive and negative input currents, then it operates as a current comparator.

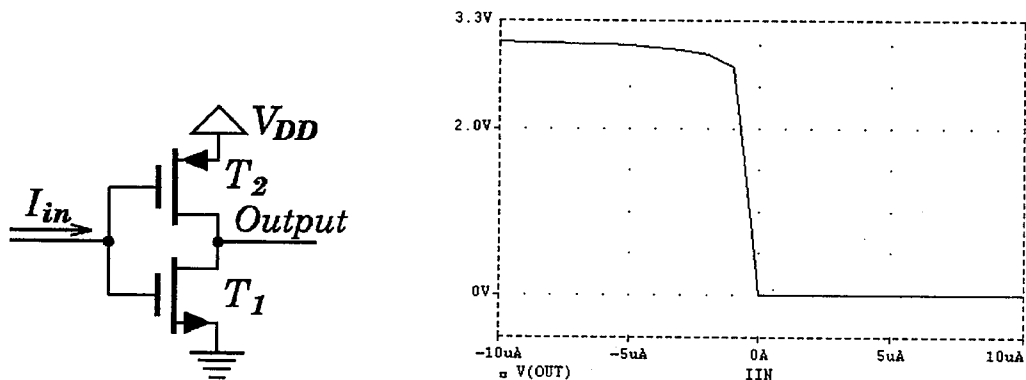


Fig. 12. Current comparator and its transfer characteristic

3.3 ONE BIT D/A CURRENT CONVERTER

The one bit d/a current converter shown in figure 13a can be used as a building block in the SI integrator structure. Input to a one bit d/a current converter is driven by voltage logic states of the output of the $\Sigma\Delta$ modulator. If it is necessary to delay the output signal by a period T at first (it depends on the type of integrator - inverting/noninverting used) then additionally flip-flop trigger can be inserted between output of $\Sigma\Delta$ modulator and input of one bit d/a converter. The operation of the circuit is as follows. If the input terminal is in a high state, then the transistor T_0 is turned on and the output current equals $I_{out} = 2KI - KI = KI$.

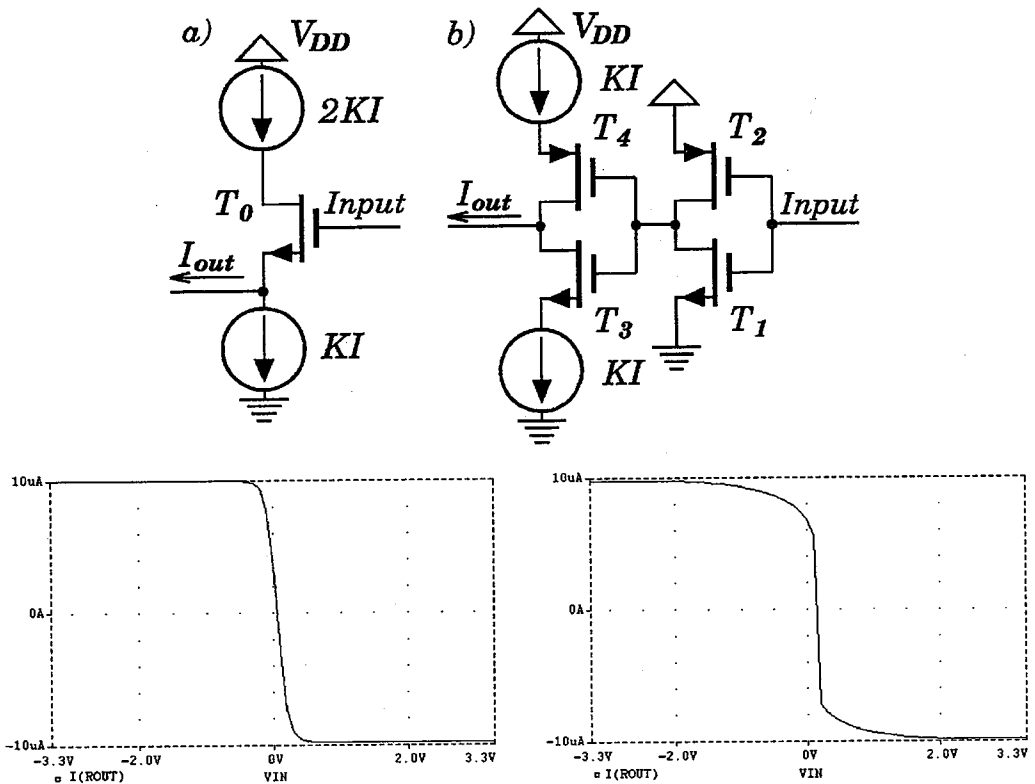


Fig. 13. One bit digital to analog current converter and its transfer characteristic, a) single NMOS transistors topology, b) complementary transistors topology

On the other hand, if the input terminal is in a low state, then the transistor T_0 is turned off and the output current equals $I_{out} = -KI$. Thus, the circuit generates current $+KI$ and $-KI$, where K denotes the gain of the circuit.

The complementary one bit d/a converter shown in figure 13b can be also used in SI integrator topologies. The advantage is a decrease in the power consumption in comparison to simple one bit d/a converter. The operation of the circuit is as follows. If the input terminal is in a high state, then the transistor T_3 is turned off, the transistor T_4 is turned on and the output current equals $I_{out} = KI$. On the other hand, if the input terminal is in a low state, then the transistor T_3 is turned on, the transistor T_4 is turned off and the output current equals $I_{out} = -KI$. Thus, the circuit generates $+KI$ and $-KI$, when K denotes the gain of the circuit.

4. SI FILTER TOPOLOGY

Presented in previous sections building blocks have been used to configure a SI filter. A switched biquadratic section filter called biquad shown in figure 14 has

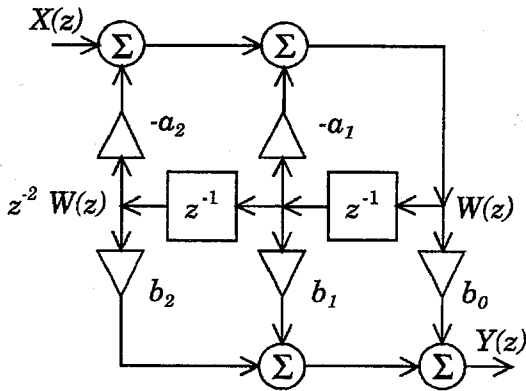


Fig. 14. Switched biquadratic section

been implemented. The biquad section is composed of switched current amplifiers, summers and delay cells. The z -domain transfer function of the biquad derived from equation (1) is expressed as follows

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}. \quad (9)$$

By simple rearrangement of the equation (9) we obtain

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{c_2 z^2 + c_1 z + c_0}{d_2 z^2 + d_1 z + 1}. \quad (10)$$

where

$$c_0 = \frac{b_2}{a_2}; \quad c_1 = \frac{b_1}{a_2}; \quad c_2 = \frac{b_0}{a_2}; \quad d_1 = \frac{a_1}{a_2}; \quad d_2 = \frac{1}{a_2}.$$

The s -domain transfer function of the biquad is expressed as follows

$$H(s) = \frac{k_2 s^2 + k_1 s + k_0}{s^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)s + \omega_0^2}. \quad (11)$$

Applying the bilinear z -transform

$$s \Leftrightarrow \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (12)$$

to the s -domain transfer function (11) the z -domain transfer function becomes

$$H(z) = \frac{\left(\frac{4k_2 + 2k_1T + k_0T^2}{d}\right)z^2 + \left(\frac{2k_0T^2 - 8k_2}{D}\right)z + \left(\frac{4k_2 - 2k_1T + k_0T^2}{D}\right)}{\left(\frac{\omega_0^2T^2 + \left(\frac{2\omega_0T}{Q}\right) + 4}{D}\right)z^2 + \left(\frac{2\omega_0^2T^2 - 8}{D}\right)z + 1} \quad (13)$$

where

$$D = \omega_0^2T^2 - \frac{2\omega_0T}{Q} + 4.$$

Presented procedure has been used to design low-pass biquad section shown in figure 14 which satisfies following input specifications: $f_0 = 10$ kHz, $k_0 = \omega_0^2$, $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $Q = 0.707$, $f_c = 1/T = 100$ kHz.

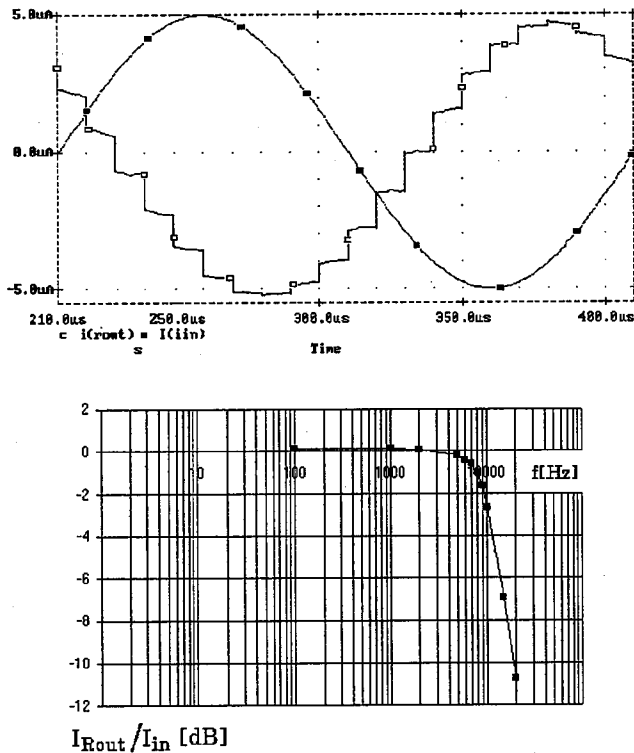


Fig. 15. Low-pass filter (biquad section), a) input and output signals for $f = 5$ kHz, b) module of the transfer function versus frequency

Coefficients of z -domain transfer function (9) have been derived from equations (13) and (10) and computed. They are equal

$$\begin{aligned} a_1 &= -1.116; \quad a_2 = 0.424 \\ b_0 &= 0.064; \quad b_1 = 0.128; \quad b_2 = 0.064 \end{aligned}$$

The switched biquad section composed of single NMOS memory cells shown in figure 5a, amplifiers shown in figure 3 and summers shown in figure 4 has been simulated using SPICE simulator and simulation results are plotted in figure 15. The filter structure shown in figure 14 can be easily integrated on a single chip on standard digital CMOS process, because the filter structure is composed of switched current sampled data circuits.

5. SI A/D CONVERTER TOPOLOGY

Presented in previous sections buildings blocks have been used to configure a $\Sigma\Delta$ modulator. First order switched current Sigma-Delta modulator shown in figure 16a has been implemented. The circuit is composed of a switched current integrator, a comparator and a one bit digital to analog converter. The output signal of this modulator is uniformly distributed in time pulse density modulated bit stream containing information on the amplitude of the input signal.

To analyse the Sigma-Delta modulator in more detail, the operation of this circuit is explained in terms of feedback control system. At each sampling instant, the difference between the input current I_{IN} and the current from d/a converter I_{REF} (which corresponds to output pulse stream) is detected and held for one time period. If the comparator output is high, then the negative current $-I_{REF}$ is fed back to the input of the integrator (and it is subtracted from current I_{IN}). If the comparator output is low, then a positive current $+I_{REF}$ is fed back to the input of the integrator (and it is added to current I_{IN}). Over time, the modulator will act to minimize difference of the input current and current from feedback (output pulse representation) by instant pushing the integrated current to zero. For this discussion, it is convenient to consider the output comparator to be a sequence of pulses with amplitudes of precisely $+3.3$ V or -3.3 V. According to this convention, the analog input signal of the current value near zero is converted to a sequence of alternating from -3.3 V to 3.3 V sequence of pulses with pulse density 50%. For the input current greater than zero pulse density is greater than 50% and for the input current less than zero lower than 50%, respectively.

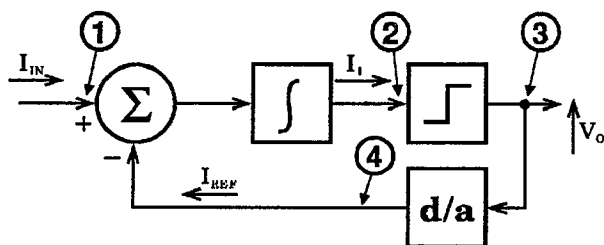


Fig. 16. First-order SI $\Sigma\Delta$ modulator, a) structure,

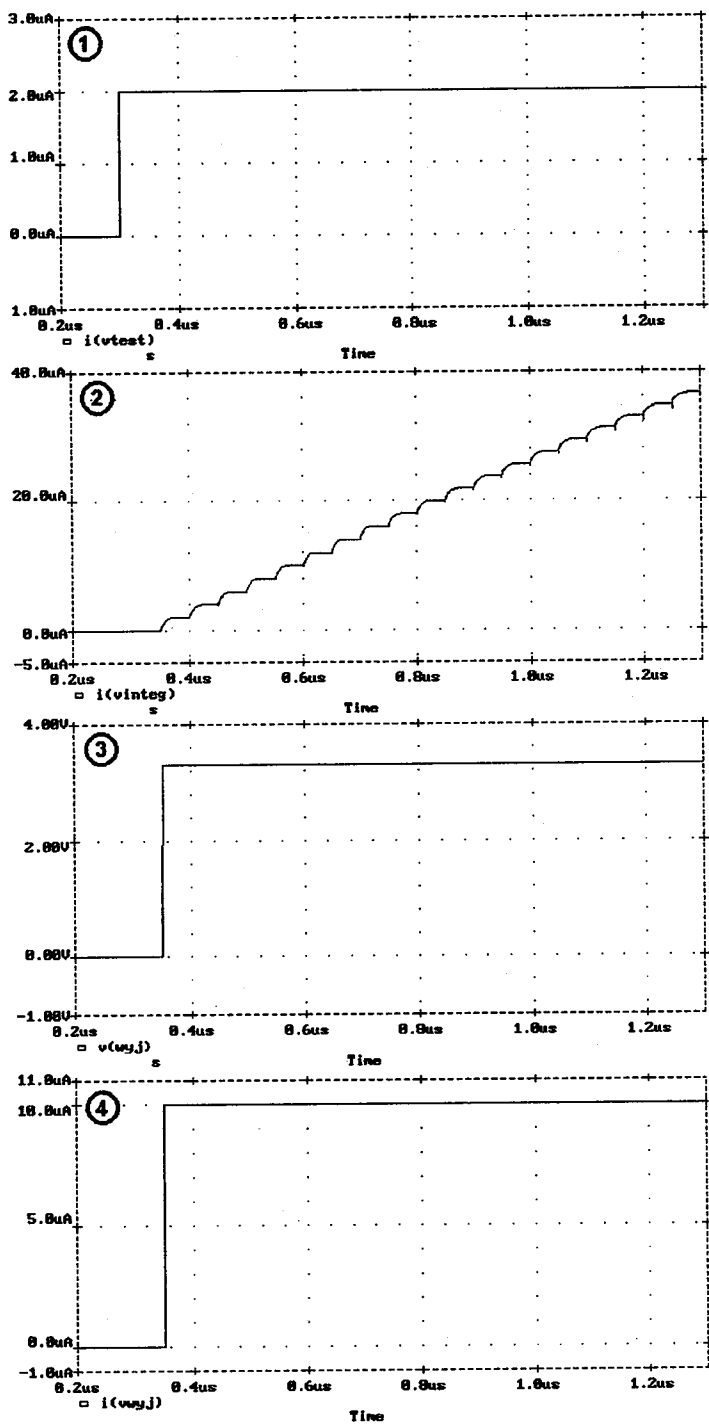


Fig. 16. First-order SI $\Sigma\Delta$ modulator, b) signals in depicted nodes of open loop structure,

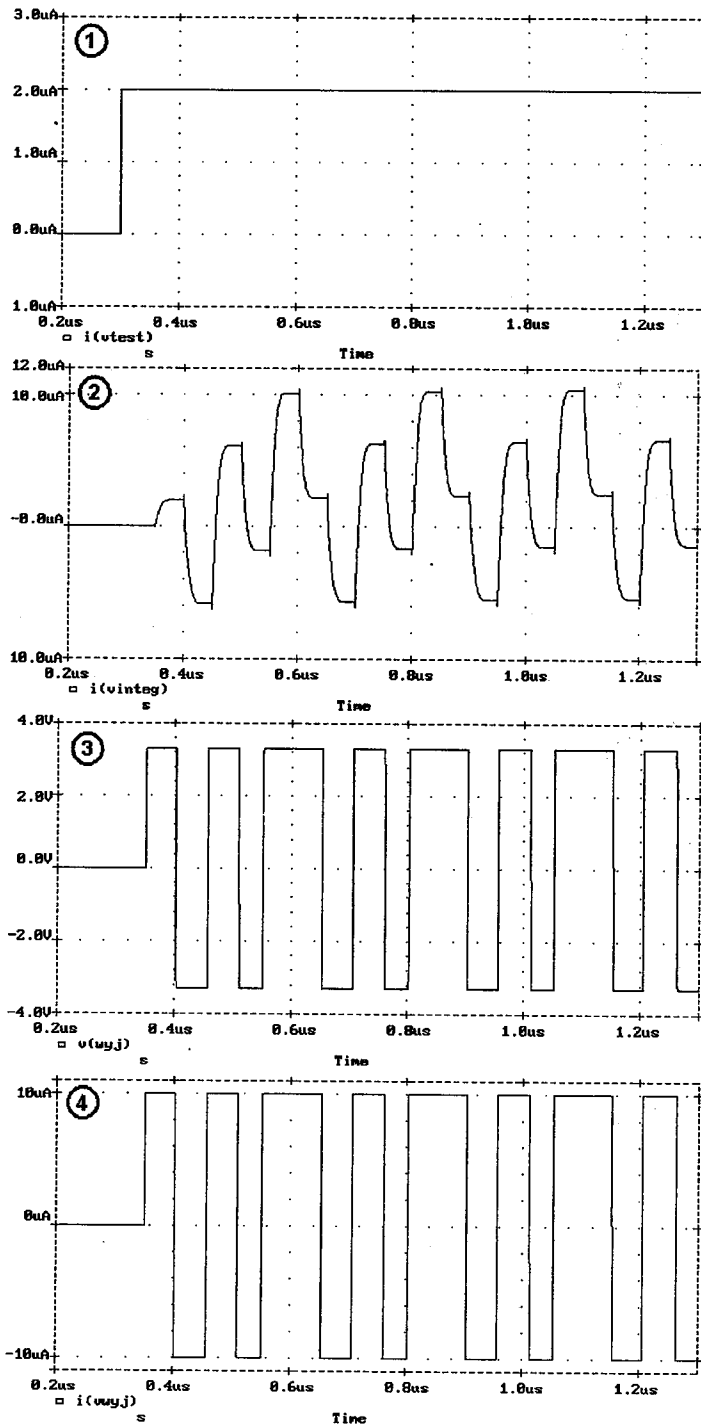


Fig. 16. First-order SI $\Sigma\Delta$ modulator, c) signals in depicted nodes of closed loop structure

The first order $\Sigma\Delta$ modulator composed of integrator shown in figure 11, summer shown in figure 4, comparator shown in figure 12, and one bit d/a converter shown in figure 13 has been simulated using SPICE simulator and detailed simulation results are plotted in figure 16 b and c.

In analog to digital conversion applications, the basic Sigma-Delta modulator has to be followed by a decimating filter, to produce a more conventional N-bit digital representation of the signal at a much lower sampling rate, as shown in figure 17.

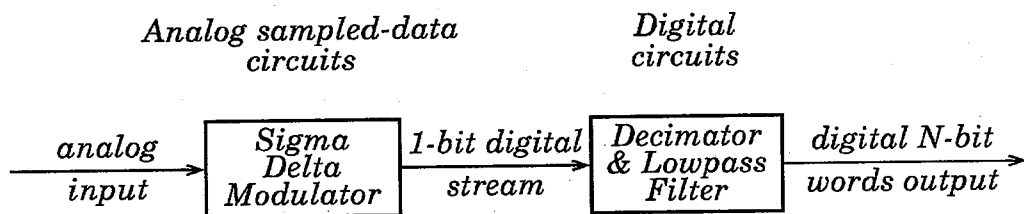


Fig. 17. Oversampling a/d conversion

The a/d converter shown in figure 17 can be integrated on a single chip on standard digital CMOS process, because the $\Sigma\Delta$ modulator is composed of analog SI sampled-data circuits while the decimating filter is composed of digital circuits.

6. CONCLUDING REMARKS

The switched current technique is an analog sampled data processing technique which by operating in the current domain offers several advantages over the switched capacitor technique operating in the voltage domain: higher relation between signal dynamic range and supply voltage, insensitivity to nonlinearities in capacitances and transconductances, and potential for higher frequency operation.

In the paper we have reviewed existing achievements in SI technique in application to filtering and $\Sigma\Delta$ modulation. Several building block topologies such as SI amplifiers, summers, delay cells, integrators, current comparator and one-bit d/a converters have been discussed. Simulation results of each building block have been also presented. Properties of SI buildings blocks have been studied for application to sampled-data filters and $\Sigma\Delta$ modulators. The application of SI techniques to the realization of filters has been demonstrated to realize bi-quad and to the realization of $\Sigma\Delta$ modulators has been demonstrated to realize first-order stage $\Sigma\Delta$ modulator. Simulation results are presented and discussed in detail. Both applications are very promising and allow a filter and a complete $\Sigma\Delta$ a/d converter to be fabricated on a single digital chip.

REFERENCES

1. J.B. Hughes, N.C. Bird and I.C. Macbeth: *Switched currents - a new technique for analog sampled-data signal processing*. Proc. ISCAS, 1989, pp. 1584-1587
2. J.B. Hughes, I.C. Macbeth, and D.M. Pattullo: *Second generation switched-current signal processing*. Proc. ISCAS, 1990, pp. 2805-2808
3. C. Toumazou, F.J. Lidgey and D.G. Haigh (Eds): *Analogue IC design: the current - mode approach*. Peter Peregrinus Ltd., 1990
4. N.C. Battersby and C. Toumazou: *Switched-current techniques: a review and recent developments*. Proc. 10th ECCTD, 1991, pp. 1084-1093
5. G.C. Temes, ed.: *Special section on switched capacitor circuits*. Proc. IEEE, 1983, Vol. 71, pp. 926-1005
6. G.M. Jacobs, D.J. Allstot, R.W. Broderson and P.R. Gray: *Design techniques for MOS switched capacitor ladder filters*. IEEE Trans. Circuits and Systems, 1978, Vol. CAS-25, No. 12, pp. 1014-1021
7. A.S. Sedra: *Switched capacitor filter synthesis*. from "Design of MOS VLSI circuits for telecommunications". Chapter 9, Prentice-Hall, 1985
8. J.B. Hughes, I.C. Macbeth and D.M. Patullo: *Switched current filters*. IEE Proceedings, 1990, Vol. 137, Pt. G, No. 2, pp. 1360-1367
9. J.B. Hughes: *Switched current filters*, in Toumazou, F.J. Lidgey and D.G. Haigh (Eds) "Analogue IC design: the current-mode approach". Peter Peregrinus Ltd., 1990
10. T. Fiez and D. Allstot: *A CMOG switched-current filter technique*. in Proc. ISSCC, 1990, Digest of Technical Papers, pp. 206-207
11. K. Wawryn, A. Mazurek: *Switched current integrators*. Proc. 16-th Nat. Conf. "Circuit Theory and Electronic Circuits". pp. 102-107, 1993
12. J. Candy: *A use of double integration in sigma delta modulation*. IEEE Trans. Commun., Vol. COM-33, pp. 249-258, 1985
13. R.M. Gray: *Oversampled sigma-delta modulation*. IEEE Trans. Commun., 1987, Vol. COM-35, pp. 481-489
14. M.W. Hauser, R.W. Brodersen: *Circuit and technology considerations for MOS delta-sigma A/D converters*. Proc. ISCAS, 1986, pp. 1310-1315
15. B. Boser, B. Wooley: *The design of sigma-delta modulation analog-to-digital converters*. IEEE J. Solid-State Circuits, 1988, Vol. 23, pp. 1298-1308
16. P.J. Crawley, G.W. Roberts: *Switched-current Sigma-Delta modulation for a/d conversion*. in Proc. ISCAS, 1992, pp. 1320-1323
17. P.J. Crawley, G.W. Roberts: *A component-invariant second-order switched-current Sigma-Delta modulator*. Proc. ISCAS, 1992, pp. 1324-1327
18. K. Wawryn, R. Suszyński: *Switched current building blocks for sigma-delta modulators*. Proc. 16th Nat. Conf. "Circuit Theory and Electronic Circuits", pp. 108-113, 1993
19. C. Toumazou, J.B. Hughes, D.M. Patullo: *Regulated cascode switched current memory cell*. Electronic Letters, 1990, Vol. 26, pp. 1593-1595

K. WAWRYN, R. SUSZYŃSKI, A. MAZUREK

ANALOGOWE UKŁADY PRÓBKOWANE Z PRZELĄCZONYMI PRĄDAMI

Streszczenie

W pracy przedstawiono struktury analogowych układów próbkowanych z przełączonymi prądami. Szczegółowo omówiono kilkanaście struktur układów stosowanych w filtracji i modulacji Sigma-Delta. Układy te przedstawiają struktury komputerowe programu SPICE. Wyniki symulacji wraz z ich podziałem przedstawiono w pracy.

Dyfrakcja na półpłaszczyźnie impedancyjnej z uogólnionymi warunkami brzegowymi. Analiza rozwiązania w otoczeniu krawędzi

HALINA KUDREWICZ

*Zakład Teorii Fal Elektromagnetycznych
Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Świętokrzyska 21, 00-049 Warszawa*

Otrzymano 1994.01.31

W pracy zbadano zachowanie rozwiązania problemu dyfrakcji na półpłaszczyźnie z uogólnionymi warunkami drugiego rzędu, w otoczeniu krawędzi. Znalaziono jednoparametrową rodzinę rozwiązań dla pola TM, dla której osobliwość na krawędzi jest najbardziej "łagodna", a pole spełnia zasadę wzajemności. Podano początkowe wyrazy rozwinięcia funkcji wyrażających gęstość prądu elektrycznego i magnetycznego na półpłaszczyźnie i składowych pola w aperturze.

1. WSTĘP

Klasyczne warunki brzegowe opisujące powierzchnię impedancyjną, zwane warunkami Leontowicza wiążą składowe styczne pola elektrycznego i magnetycznego; w matematycznym sformułowaniu wiążą funkcję z jej pochodną. Uogólnione warunki brzegowe opisują związek między funkcją i jej pochodnymi pierwszego i wyższych rzędów. Rzędem uogólnionych warunków nazywa się rząd najwyższej pochodnej w nich występującej.

Warunki drugiego rzędu zostały wprowadzone przez Karpa i Karala (1965) dla opisu fal powierzchniowych prowadzonych przez powierzchnię dielektryczną [1]. Warunki brzegowe, które sformułował Wainstein (1966) dla struktury dielektrycznego półnieskończonego schodka położonego na doskonale przewodzącej płaszczyźnie [2], są też warunkami drugiego rzędu, por. [3].

W dalszych latach duże zainteresowanie uogólnionymi warunkami brzegowymi wiązało się z analizą rozpraszania wiązki radarowej na metalicznych obiektach pokrytych dielektryczną powłoką. Dla symulacji takich powierzchni, złasz-

cza, gdy grubość powłoki nie jest mała w porównaniu z długością fali, warunki Leontowicza okazały się mało dokładne. Natomiast warunki czwartego rzędu mogą zapewnić dobrą symulację struktury, jeśli chodzi o współczynnik odbicia, aż do grubości warstwy równej jednej czwartej długości fali [4]. Interesujące wyniki analizy struktur rozpraszających przy użyciu uogólnionych warunków brzegowych znajdują się w [5]. Tu też można znaleźć obszerną bibliografię dotyczącą impedancyjnych warunków brzegowych pierwszego i wyższych rzędów. Uogólnione warunki brzegowe stosuje się również do wielowarstwowych struktur dielektrycznych [6], są też próby modelowania przy ich pomocy dielektrycznych pokryw obwodów drukowanych [4]. W pracy [4] można znaleźć wyprowadzenie uogólnionych warunków brzegowych i powiązanie stałych w nich występujących ze współczynnikiem odbicia odpowiedniej struktury. W pracach [7], [8], [9] rozwiązane są kanoniczne problemy dyfrakcji na półpłaszczyźnie z różnymi uogólnionymi warunkami brzegowymi. Obszerna bibliografia znajduje się w [7].

Wyświetlono problemy związane z jednoznacznością i zasadą wzajemności. Dla warunków uogólnionych postulowany warunek na krawędzi i dodatkowo żądanie spełnienia zasady wzajemności (która przy warunkach pierwszego rzędu jest spełniona automatycznie) nie zapewniają jednoznaczności rozwiązania. Dla warunków drugiego rzędu otrzymuje się jednoparametrową rodzinę rozwiązań z dowolną stałą. Dla warunków N -tego rzędu dowolnych stałych jest $N-1$. Pokazano, że stałe te wiążą się z wartościami pewnych składowych pola na półpłaszczyźnie przy krawędzi [7].

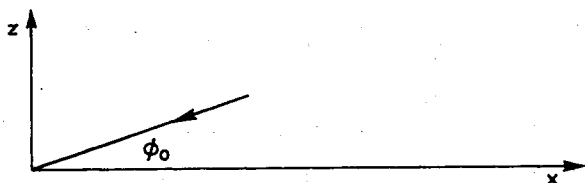
Przedstawiona praca jest poświęcona znalezieniu rozwiązania problemu dyfrakcji na półpłaszczyźnie z uogólnionymi warunkami brzegowymi drugiego rzędu i zbadaniu jego zachowania w otoczeniu krawędzi. Rozpatrzony problem jest bliźniaczy do problemu przedstawionego w [7]. Został rozwiązany nieco odmienną metodą, dającą aparat do zbadania własności rozwiązania na krawędzi. Problem dyfrakcyjny jest sformułowany w rozdz. 2. Konstrukcja rozwiązania znajduje się w rozdz.3. Rozwiązania poszukuje się w postaci całkowitej superpozycji fal płaskich o nieznanych amplitudach, których szuka się metodą Wienera-Hopfa. Otrzymuje się rodzinę funkcji jednakowo zachowujących się w nieskończoności, prowadzących do jednoparametrowej rodziny rozwiązań o najbardziej łagodnej osobliwości na krawędzi i spełniających zasadę wzajemności.

Ostatecznie rozwiązanie problemu dyfrakcji przy zadanych warunkach zawiera stałą w ogólności zależną od wszystkich parametrów problemu. Dodatkowy warunek jaki należy nałożyć na pole przy krawędzi dla obliczenia tej stałej, nie jest tu dyskutowany. Warunek taki został wprowadzony przez Seniora [7].

Badanie zachowania skonstruowanej rodziny rozwiązań w otoczeniu krawędzi znajduje się w rozdz.4. Znalaziono pierwsze wyrazy rozwinięcia asymptotycznego funkcji wyrażających gęstość prądu elektrycznego i magnetycznego na półpłaszczyźnie oraz składowych pola w aperturze.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU DYFRAKCYJNEGO

Na półpłaszczyznę impedancyjną umieszczoną w płaszczyźnie xy dla $x \geq 0$ pada fala płaska prostopadłe do krawędzi y , pod kątem ϕ_0 z osią x , Rys 1.



Rys. 1. Fala płaska padająca na półpłaszczyznę $z = 0$, $x \geq 0$.

Rozpatrujemy pole TM względem osi y . Wtedy $\mathbf{E} = (0, E_y, 0)$, $\mathbf{H} = (H_x, 0, H_z)$. Dla fali padającej prostopadłe do krawędzi problem jest dwuwymiarowy, nie zależy od y . Składowa elektryczna padającej fali płaskiej ma postać

$$E_y^i(x, z, t) = u_i e^{-i\omega t},$$

gdzie

$$u_i = e^{-ik(x \cos \phi_0 + z \sin \phi_0)} \quad (1)$$

Poszukiwać będziemy pola TM również zależnego harmonicznie od czasu, przy czym czynnik $e^{-i\omega t}$ będziemy wszędzie opuszczali.

Szukane pole wyraża się przez skalarną funkcję u poprzez zależności

$$E_y = u, \quad H_x = \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad H_z = -\frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2)$$

Półpłaszczyzna impedancyjna jest opisana przez uogólnione warunki drugiego rzędu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \mp ik(s_1 + s_2) \frac{\partial u}{\partial z} + k^2(s_1 s_2 + 1)u = 0 \quad \text{dla } x > 0, \quad (3)$$

Stałe s_j , dla $j = 1, 2$, są liczbami zespolonymi. Ich fizyczna interpretacja jest podana w [4]. Przy przyjętych tam oznaczeniach należy podstawić $s_j = \Gamma'_j$.

Przyjmujemy warunek $\text{Re } s_j > 0$, co oznacza, że półpłaszczyzna jest pasywna. Znak górny we wzorze (3) odnosi się do górnej strony półpłaszczyzny, znak dolny do dolnej.

Szukane pole jest sumą pola padającego wyznaczonego przez u_i i ugiętego wyznaczonego przez u_s . Zatem mamy

$$u = u_i + u_s. \quad (4)$$

Funkcja u_i jest dana przez (1), funkcję u_s znajdziemy rozwiązując następujący problem brzegowy:

równanie Helmholtza

$$\nabla^2 u_s + k^2 u_s = 0, \quad (5)$$

gdzie $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$ oraz warunki brzegowe jakie wynikają z (3) przy uwzględnieniu (4) i (1). Mamy

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} - ik(s_1 + s_2) \frac{\partial u_s}{\partial z} + k^2(s_1 s_2 + 1)u_s = r_1 e^{i\alpha_0 x} \quad \text{dla } x > 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} + ik(s_1 + s_2) \frac{\partial u_s}{\partial z} + k^2(s_1 s_2 + 1)u_s = r_2 e^{i\alpha_0 x} \quad \text{dla } x > 0 \quad (7)$$

odpowiednio dla górnej i dolnej strony półpłaszczyzny, gdzie

$$r_1 = \alpha_0^2 + \gamma_0 k(s_1 + s_2) - k^2(s_1 s_2 + 1), \quad (8)$$

$$r_2 = \alpha_0^2 - \gamma_0 k(s_1 + s_2) - k^2(s_1 s_2 + 1),$$

$$\alpha_0 = -k \cos \Phi_0, \quad \gamma_0 = k \sin \Phi_0. \quad (9)$$

Ponadto na funkcję u_s nakładamy warunki wynikające z nałożenia na pole warunków w nieskończoności i na krawędzi półpłaszczyzny i zapewniające spełnienie zasady wzajemności. Warunki te formułujemy w następujący sposób:

1. Od pola ugiętego żądamy, żeby po odjęciu pola optyki geometrycznej miało tylko fale wybiegające.

2. Spośród funkcji u_s spełniających równanie Helmholtza (5) i warunki brzegowe (6)-(7) wybieramy taką, która ma "najłagodniejszą" osobliwość na ostrzu i zapewnia polu spełnienie zasady wzajemności. Zasada ta głosi, że jeżeli zamienimy kąt padania z kątem obserwacji, to pole dalekie nie ulegnie zmianie.

W dalszych rachunkach będziemy korzystali z ciągłości funkcji i jej pochodnej w aperturze

$$\begin{aligned} (u_i + u_s)|_{z=0_-} &= (u_i + u_s)|_{z=0_+} & \text{dla } x < 0, \\ \frac{\partial(u_i + u_s)}{\partial z} \Big|_{z=0_-} &= \frac{\partial(u_i + u_s)}{\partial z} \Big|_{z=0_+} & \text{dla } x < 0. \end{aligned} \quad (10)$$

3. METODA ROZWIĄZANIA

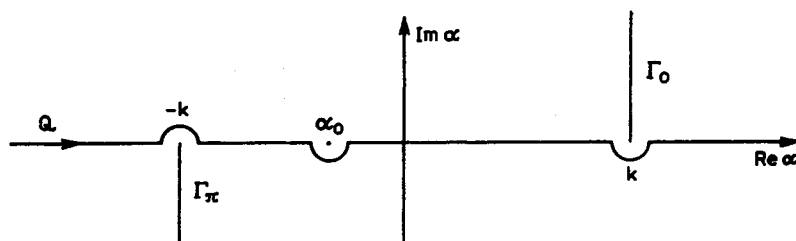
Rozwiązania u_s równania (5) z warunkami (6) i (7) szukamy w następującej postaci

$$\begin{aligned} u_s &= \int_Q A(\alpha) e^{i(\alpha x + \gamma z)} d\alpha & \text{dla } z > 0, \\ u_s &= \int_Q B(\alpha) e^{i(\alpha x - \gamma z)} d\alpha & \text{dla } z < 0, \end{aligned} \quad (11)$$

gdzie

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \alpha^2}, \quad \gamma(0) = k. \quad (12)$$

Linia Q jest położona na płaszczyźnie α z cięciami Γ_0 , Γ_π , jak na Rys. 2.



Rys. 2. Płaszczyzna zespolona α i kontur całkowania Q .

Należy znaleźć amplitudy A i B . Wstawiając funkcje (11) do warunków brzegowych (6) i (7) otrzymujemy równania

$$\int_Q (\gamma + ks_1)(\gamma + ks_2)A(\alpha)e^{i\alpha x} d\alpha = r_1 e^{i\alpha_0 x} \quad \text{dla } x > 0, \quad (13)$$

$$\int_Q (\gamma + ks_1)(\gamma + ks_2)B(\alpha)e^{i\alpha x} d\alpha = r_2 e^{i\alpha_0 x} \quad \text{dla } x > 0. \quad (14)$$

Wstawiając funkcje (11) do warunków ciągłości (10) otrzymujemy równania

$$\int_Q [A(\alpha) - B(\alpha)]e^{i\alpha x} d\alpha = 0 \quad \text{dla } x < 0, \quad (15)$$

$$\int_Q i\gamma[A(\alpha) + B(\alpha)]e^{i\alpha x} d\alpha = 0 \quad \text{dla } x < 0. \quad (16)$$

Oznaczmy przez Ω^+ półpłaszczyznę powyżej linii całkowania Q , a przez Ω^- półpłaszczyznę poniżej tej linii. Oznaczmy przez $\bar{U}_j$, $j = 1, 2$ dowolną funkcję analityczną w Ω^+ , ciągłą w obszarze domkniętym i znikającą dla $|\alpha| \rightarrow \infty$, a przez L_j , $j = 1, 2$ dowolną funkcję analityczną w Ω^- , ciągłą w obszarze domkniętym i znikającą dla $|\alpha| \rightarrow \infty$. Nietrudno pokazać, że jeżeli funkcje A i B spełniają następujące zależności:

$$(\gamma + ks_1)(\gamma + ks_2)A(\alpha) = \bar{U}_1(\alpha) + \frac{r_1}{2\pi i(\alpha - \alpha_0)}, \quad (17)$$

$$(\gamma + ks_1)(\gamma + ks_2)B(\alpha) = \bar{U}_2(\alpha) + \frac{r_2}{2\pi i(\alpha - \alpha_0)}, \quad (18)$$

$$A(\alpha) - B(\alpha) = L_1(\alpha), \quad (19)$$

$$\gamma[A(\alpha) + B(\alpha)] = L_2(\alpha), \quad (20)$$

to spełniają również układ równań (13)–(16). Odejmując i dodając stronami równania (17) i (18) i korzystając z (19) i (20) otrzymujemy dwa niezależne równania Wienera-Hopfa

$$U_1(\alpha) = H_1(\alpha, s_1, s_2)L_1(\alpha) + \frac{p_1}{2\pi i(\alpha - \alpha_0)}, \quad (21)$$

$$U_2(\alpha) = H_2(\alpha, s_1, s_2)L_2(\alpha) + \frac{p_2}{2\pi i(\alpha - \alpha_0)}, \quad (22)$$

gdzie oznaczono

$$\begin{aligned} U_1(\alpha) &= \bar{U}_1(\alpha) - \bar{U}_2(\alpha), \\ U_1(\alpha) &= \bar{U}_1(\alpha) + \bar{U}_2(\alpha), \end{aligned} \quad (23)$$

czyli

$$\begin{aligned} \bar{U}_1(\alpha) &= \frac{1}{2}[U_1(\alpha) + U_2(\alpha)], \\ \bar{U}_2(\alpha) &= \frac{1}{2}[U_1(\alpha) - U_2(\alpha)] \end{aligned} \quad (24)$$

oraz

$$H_1(\alpha, s_1, s_2) = (\gamma + ks_1)(\gamma + ks_2), \quad (25)$$

$$H_2(\alpha, s_1, s_2) = \frac{1}{\gamma}(\gamma + ks_1)(\gamma + ks_2), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} p_1 &= r_2 - r_1 = -2\gamma_0 k(s_1 + s_2), \\ p_2 &= -(r_2 - r_1) = 2k^2(s_1 s_2 + 1) - 2\alpha_0^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Funkcje U_1 , U_2 , tak jak $\bar{U}_1$ i $\bar{U}_2$ należą do klasy funkcji analitycznych w Ω^+ , ciągłych w obszarze domkniętym i dążących do zera dla $|\alpha| \rightarrow \infty$, $\alpha \in \Omega^+$.

Wprowadzimy jednostronne transformaty Fouriera

$$\mathcal{L}_+[f(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x} dx. \quad (28)$$

$$\mathcal{L}_-[g(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 g(x)e^{-i\alpha x} dx. \quad (29)$$

Prawostronna transformata $\mathcal{L}_+$ jest funkcją analityczną w obszarze $\alpha \in \Omega^-$, lewostronna transformata $\mathcal{L}_-$ jest funkcją analityczną w obszarze $\alpha \in \Omega^+$.

Ze sposobu wprowadzenia funkcji L_j , U_j , $j = 1, 2$ wynika, że funkcja L_1 jest prawostronną transformatą Fouriera gęstości prądu magnetycznego $I_1(x)$

$$I_1(x) = E_y(x, 0_+) - E_y(x, 0_-), \quad (30)$$

a funkcja L_2 jest prawostronną transformatą Fouriera gęstości prądu elektrycznego $I_2(x)$ (pomnożonej przez stałą)

$$I_2(x) = H_x(x, 0_+) - H_x(x, 0_-). \quad (31)$$

Mamy zatem uwzględniając (3)

$$L_1(\alpha) = \mathcal{L}_+[I_1(x)], \quad (32)$$

$$L_2(\alpha) = \mathcal{L}_+[\omega\mu I_2(x)]. \quad (33)$$

Natomiast funkcje $\bar{U}_1$ i $\bar{U}_2$ są lewostronnymi transformatami

$$\bar{U}_1(\alpha) = \mathcal{L}_- \left[\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} - ik(s_1 + s_2) \frac{\partial u_s}{\partial z} + k^2(s_1 s_2 + 1)u_s + r_1 e^{i\alpha_0 x} \right], \quad (34)$$

$$\bar{U}_2(\alpha) = \mathcal{L}_- \left[\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} + ik(s_1 + s_2) \frac{\partial u_s}{\partial z} + k^2(s_1 s_2 + 1)u_s + r_2 e^{i\alpha_0 x} \right]. \quad (35)$$

Stąd i z (23)

$$U_1(\alpha) = \mathcal{L}_- \left[-2ik(s_1 + s_2) \frac{\partial u_s}{\partial z} - p_1 e^{ik\alpha_0 x} \right], \quad (36)$$

$$U_2(\alpha) = \mathcal{L}_- \left[2 \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} + 2k^2(s_1 s_2 + 1)u_s - p_2 e^{i\alpha_0 x} \right]. \quad (37)$$

Dla rozwiązania równań Wienera-Hopfa (21) i (22) należy sfaktoryzować funkcje H_1 i H_2 . Pomocną tu będzie faktoryzacja funkcji K występującej w problemie dyfrakcji na półpłaszczyźnie impedancyjnej ze standardowymi warunkami Leontowicza [10].

Mamy

$$H_1(\alpha, s_1, s_2) = \gamma^2 K(\alpha, s_1)K(\alpha, s_2), \quad (38)$$

$$H_2(\alpha, s_1, s_2) = \gamma K(\alpha, s_1)K(\alpha, s_2), \quad (39)$$

gdzie

$$K(\alpha, s_j) = \frac{ks_j + \gamma}{\gamma} \quad \text{dla } j = 1, 2. \quad (40)$$

Funkcja (40) spełnia wszystkie warunki jednoznacznej faktoryzacji na linii Q w klasie czynników faktoryzacji dążących do jedności w nieskończoności, dokonanej standardowymi formułami

$$K(\alpha, s_j) = K_L(\alpha, s_j)K_U(\alpha, s_j) \quad \text{dla } j = 1, 2, \quad (41)$$

gdzie

$$K_L(\alpha, s_j) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_Q \frac{\ln K(t, s_j)}{t - \alpha} dt \right\} \quad \text{dla } \alpha \in \Omega^-, \quad (42)$$

$$K_U(\alpha, s_j) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_Q \frac{\ln K(t, s_j)}{t - \alpha} dt \right\} \quad \text{dla } \alpha \in \Omega^+. \quad (43)$$

Funkcja K_L jest analityczna i różna od zera dla $\alpha \in \Omega_-$ i jest ciągła w obszarze domkniętym. Funkcja K_U jest analityczna i różna od zera dla $\alpha \in \Omega_+$ i jest ciągła w obszarze domkniętym. Ponadto $K_L(\alpha, s_j) \rightarrow 1$ i $K_U(\alpha, s_j) \rightarrow 1$ dla $|\alpha| \rightarrow \infty$ w odpowiednich półpłaszczyznach. Znane jest też przedłużenie analityczne każdej z tych funkcji na całą płaszczyznę α z cięciem.

Mamy więc następującą faktoryzację

$$H_j(\alpha, s_1, s_2) = H_{jL}(\alpha, s_1, s_2) H_{jU}(\alpha, s_1, s_2) \quad \text{dla } j = 1, 2, \quad (44)$$

gdzie

$$H_{1L}(\alpha, s_1, s_2) = (k - \alpha) K_L(\alpha, s_1) K_L(\alpha, s_2), \quad (45)$$

$$H_{1U}(\alpha, s_1, s_2) = (k + \alpha) K_U(\alpha, s_1) K_U(\alpha, s_2), \quad (46)$$

oraz

$$H_{2L}(\alpha, s_1, s_2) = \sqrt{k - \alpha} K_L(\alpha, s_1) K_L(\alpha, s_2), \quad (47)$$

$$H_{2U}(\alpha, s_1, s_2) = \sqrt{k + \alpha} K_U(\alpha, s_1) K_U(\alpha, s_2), \quad (48)$$

gdzie czynniki K_L i K_U dane są wzorami (42), (43).

Rozwiązujemy równanie (22). Podstawiając (44) do (22), dla $j = 2$, mamy

$$U_2(\alpha) = H_{2L}(\alpha, s_1, s_2) H_{2U}(\alpha, s_1, s_2) L_2(\alpha) + \frac{p_2}{2\pi i(\alpha - \alpha_0)}, \quad (49)$$

skąd mamy

$$\frac{U_2(\alpha)}{H_{2U}(\alpha, s_1, s_2)} = H_{2L}(\alpha, s_1, s_2) L_2(\alpha) + \frac{p_2}{2\pi i(\alpha - \alpha_0) H_{2U}(\alpha, s_1, s_2)}. \quad (50)$$

Rozkładając ostatni składnik równości (50) na sumę funkcji analitycznych odpowiednio w Ω^+ i Ω^- oraz grupując wyrażenia analityczne w każdym z tych obszarów otrzymujemy

$$\frac{U_2(\alpha)}{H_{2U}(\alpha, s_1, s_2)} - \frac{1}{2\pi i(\alpha - \alpha_0)} \left[\frac{p_2}{H_{2U}(\alpha, s_1, s_2)} - \frac{p_2}{H_{2U}(\alpha_0, s_1, s_2)} \right] = \frac{H_{2L}(\alpha, s_1, s_2) L_2(\alpha) + \frac{p_2}{2\pi i(\alpha - \alpha_0) H_{2U}(\alpha_0, s_1, s_2)}}{H_{2U}(\alpha, s_1, s_2)} \quad (51)$$

Po prawej stronie równości (51) mamy funkcje analityczne w Ω^+ i ciągłe w $\Omega^+ + Q$, a po lewej – funkcje analityczne w Ω^- i ciągłe w $\Omega^- + Q$. Jeżeli założymy, że liczba falowa k jest zespolona, to utworzy się wspólny obszar analityczności tych funkcji, w postaci pasa zawierającego linię Q . Wtedy wnioskiem z równości (51)

zachodzącej we wspólnym pasie jest to, że każda ze stron tej równości jest funkcją całkowitą $C_2(\alpha)$.

Stąd mamy rozwiązanie ogólne równania Wienera-Hopfa (22)

$$U_2(\alpha) = \left[C_2(\alpha) + \frac{p_2}{2\pi i(\alpha - \alpha_0)} \left(\frac{1}{H_{2U}(\alpha, s_1, s_2)} - \frac{1}{H_{2U}(\alpha_0, s_1, s_2)} \right) \right] H_{2U}(\alpha, s_1, s_2), \quad (52)$$

$$L_2(\alpha) = \left[C_2(\alpha) - \frac{p_2}{2\pi i(\alpha - \alpha_0)H_{2U}(\alpha_0, s_1, s_2)} \right] \frac{1}{H_{2L}(\alpha, s_1, s_2)}. \quad (53)$$

Należy wybrać rozwiązanie szczególne prowadzące do funkcji u_s generującej pole o najslabszej osobliwości na ostrzu i spełniające zasadę wzajemności. W tym celu zbadamy zachowanie w nieskończoności poszczególnych składników wzoru (52) i (53). Z równości (47), (48) i własności funkcji K_L i K_U wynika

$$H_{2L}(\alpha, s_1, s_2) = O(\sqrt{\alpha}) \quad \text{dla } |\alpha| \rightarrow \infty, \alpha \in \Omega^-, \quad (54)$$

$$H_{2U}(\alpha, s_1, s_2) = O(\sqrt{\alpha}) \quad \text{dla } |\alpha| \rightarrow \infty, \alpha \in \Omega^+. \quad (55)$$

Weźmiemy pod uwagę dwie możliwości:

a. $C_2(\alpha) \equiv 0$,

b. $C_2(\alpha) = C_2$,

gdzie C_2 jest stałą, która nie zależy od α , ale może zależeć od parametrów problemu.

a. Dla $C_2(\alpha) \equiv 0$, uwzględniając (47), (48) mamy

$$U_2(\alpha) = \frac{p_2}{2\pi i(\alpha - \alpha_0)} \left(1 - \frac{\sqrt{k + \alpha} K_U(\alpha, s_1) K_U(\alpha, s_2)}{\sqrt{k + \alpha_0} K_U(\alpha_0, s_1) K_U(\alpha_0, s_2)} \right), \quad (56)$$

$$L_2(\alpha) = - \frac{p_2}{2\pi i(\alpha - \alpha_0) \sqrt{k + \alpha_0} K_U(\alpha_0, s_1) K_U(\alpha_0, s_2) \sqrt{k - \alpha} K_L(\alpha, s_1) K_L(\alpha, s_2)}. \quad (57)$$

Ze wzoru (56) mamy

$$U_2(\alpha) = O(1/\sqrt{\alpha}) \quad \text{dla } |\alpha| \rightarrow \infty, \alpha \in \Omega^+. \quad (58)$$

Stąd, z równości (37) i twierdzenia Abela wynika

$$2 \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} + 2k^2(s_1 s_2 + 1)u_s - p_2 e^{i\alpha_0 x} = O(1/\sqrt{x}) \quad \text{dla } x \rightarrow 0_-. \quad (59)$$

Stąd możemy wnioskować

$$\frac{\partial u_s}{\partial x} = O(\sqrt{x}), \quad u_s = O(x\sqrt{x}) \quad \text{dla } x \rightarrow 0_-. \quad (60)$$

Ze wzoru (57) mamy

$$L_2(\alpha) = O(1/\alpha\sqrt{\alpha}) \quad \text{dla } |\alpha| \rightarrow \infty, \alpha \in \Omega^-. \quad (61)$$

Stąd z równości (33) i twierdzenia Abela wynika

$$I_2(x) = O(\sqrt{x}) \quad \text{dla } x \rightarrow 0_+. \quad (62)$$

b. Dla $C_2(\alpha) = C_2$, ze wzorów (52), (53) mamy

$$U_2(\alpha) = C_2\sqrt{k+\alpha} K_U(\alpha, s_1) K_U(\alpha, s_2) + \frac{p_2}{2\pi i(\alpha - \alpha_0)} \left[1 - \frac{\sqrt{k+\alpha} K_U(\alpha, s_1) K(\alpha, s_2)}{\sqrt{k+\alpha_0} K_U(\alpha_0, s_1) K_U(\alpha_0, s_2)} \right], \quad (63)$$

$$L_2(\alpha) = \frac{C_2}{\sqrt{k-\alpha} K_L(\alpha, s_1) K_L(\alpha, s_2)} - \frac{p_2}{2\pi i(\alpha - \alpha_0)\sqrt{k-\alpha_0} K_U(\alpha_0, s_1) K(\alpha_0, s_2)\sqrt{k-\alpha} K_L(\alpha, s_1) K_L(\alpha, s_2)}. \quad (64)$$

Zatem

$$U_2(\alpha) = O(\sqrt{\alpha}) \quad \text{dla } |\alpha| \rightarrow \infty, \alpha \in \Omega^+. \quad (65)$$

skąd

$$2\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} + 2k^2(s_1 s_2 + 1)u_s - p_2 e^{i\alpha_0 x} = O(1/x\sqrt{x}) \quad \text{dla } x \rightarrow 0_-. \quad (66)$$

Stąd możemy wnioskować

$$\frac{\partial u_s}{\partial x} = O(1/\sqrt{x}), \quad u_s = O(\sqrt{x}) \quad \text{dla } x \rightarrow 0_-. \quad (67)$$

Ze wzoru (64) mamy

$$L_2(\alpha) = O(1/\sqrt{\alpha}) \quad \text{dla } |\alpha| \rightarrow \infty, \alpha \in \Omega^-. \quad (68)$$

Skąd

$$I_2(x) = O(1/\sqrt{x}) \quad \text{dla } x \rightarrow 0_+. \quad (69)$$

Przejdźmy do rozwiązania równania (21). Postępując tak jak w przypadku równania (22) dochodzimy do ogólnej postaci rozwiązania

$$U_1(\alpha) = \left[C_1(\alpha) + \frac{p_1}{2\pi i(\alpha - \alpha_0)} \left(\frac{1}{H_{1U}(\alpha, s_1, s_2)} - \frac{1}{H_{1U}(\alpha_0, s_1, s_2)} \right) \right] \times H_{1U}(\alpha, s_1, s_2) \quad (70)$$

$$L_1(\alpha) = \left[C_1(\alpha) - \frac{p_1}{2\pi i(\alpha - \alpha_0)H_{1U}(\alpha_0, s_1, s_2)} \right] \frac{1}{H_{1L}(\alpha, s_1, s_2)}, \quad (71)$$

gdzie $C_1(\alpha)$ jest dowolną funkcją całkowitą. Z równości (45), (46) i własności funkcji K_L , K_U wynika

$$H_{1L}(\alpha, s_1, s_2) = O(\alpha) \quad \text{dla } |\alpha| \rightarrow \infty, \alpha \in \Omega^-, \quad (72)$$

$$H_{1U}(\alpha, s_1, s_2) = O(\alpha) \quad \text{dla } |\alpha| \rightarrow \infty, \alpha \in \Omega^+. \quad (73)$$

Dla $C_1(\alpha) \equiv 0$, uwzględniając (45), (46) mamy

$$U_1(\alpha) = \frac{p_2}{2\pi i(\alpha - \alpha_0)} \left(1 - \frac{(k + \alpha) K_U(\alpha, s_1) K_U(\alpha, s_2)}{(k + \alpha_0) K_U(\alpha_0, s_1) K_U(\alpha_0, s_2)} \right), \quad (74)$$

$$L_1(\alpha) = - \frac{p_1}{2\pi i(\alpha - \alpha_0)(k + \alpha_0) K_U(\alpha_0, s_1) K_U(\alpha_0, s_2)(k - \alpha) K_L(\alpha, s_1) K_L(\alpha, s_2)} \quad (75)$$

Ze wzoru (74) mamy

$$U_1(\alpha) = d \quad \text{dla } |\alpha| \rightarrow \infty, \alpha \in \Omega^+, \quad (76)$$

gdzie

$$d = - \frac{p_1}{2\pi i(\alpha - \alpha_0) K_U(\alpha_0, s_1) K_U(\alpha_0, s_2)}. \quad (77)$$

Stąd i z równości (36) wynika

$$\frac{\partial u_s}{\partial z} = d\delta(x) \quad \text{dla } x \rightarrow 0_-, \quad (78)$$

gdzie δ jest funkcją Diraca. Ze wzoru (75) mamy

$$L_1(\alpha) = O(1/\alpha^2) \quad \text{dla } |\alpha| \rightarrow \infty, \alpha \in \Omega^-. \quad (79)$$

Skąd

$$I_1(x) = O(x) \quad \text{dla } x \rightarrow 0_+. \quad (80)$$

Dla $C_1(\alpha) \equiv 0$ zachowanie funkcji $\frac{\partial u_s}{\partial z}$ na ostrzu jest zaskakujące, ale najlepsze z możliwych. Poprzestaniemy na tym rozwiązaniu szczególnym i przejdziemy do skonstruowania funkcji u_s , obliczając amplitudy A i B postulowanej postaci rozwiązania (11). Ze wzorów (19) i (20) otrzymujemy

$$A(\alpha) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\gamma} L_2(\alpha) + L_1(\alpha) \right], \quad (81)$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\gamma} L_2(\alpha) - L_1(\alpha) \right]. \quad (82)$$

Przypadek 1. $C_1(\alpha) \equiv 0$, $C_2(\alpha) \equiv 0$.

Podstawiając (57) i (75) do wzorów (81) i (82) otrzymamy

$$A^0(\alpha) = \frac{\alpha_0^2 - k^2(s_1 s_2 + 1) + k(s_1 + s_2)\sqrt{k - \alpha_0}\sqrt{k - \alpha}}{2\pi i(\alpha - \alpha_0)\sqrt{k^2 - \alpha^2}\sqrt{k + \alpha_0}K_{U1}^0 K_{U2}^0 \sqrt{k - \alpha}K_{L1}K_{L2}}, \quad (83)$$

$$B^0(\alpha) = \frac{\alpha_0^2 - k^2(s_1 s_2 + 1) - k(s_1 + s_2)\sqrt{k - \alpha_0}\sqrt{k - \alpha}}{2\pi i(\alpha - \alpha_0)\sqrt{k^2 - \alpha^2}\sqrt{k + \alpha_0}K_{U1}^0 K_{U2}^0 \sqrt{k - \alpha}K_{L1}K_{L2}}. \quad (84)$$

We wzorach (83), (84) przyjęliśmy oznaczenie

$$K_{Uj}^0 = K_U(\alpha_0, s_j), K_{Lj} = K_L(\alpha, s_j) \quad \text{dla } j = 1, 2. \quad (85)$$

Dla znalezienia pola dalekiego dokonuje się w rozwiązaniu (11) zamiany zmiennych

$$x = r \cos \Phi, \quad z = r \sin \Phi, \quad \alpha = k \cos \beta. \quad (86)$$

Zamiana zmiennych Φ i Φ_0 nie zmienia wartości pola dalekiego, jeżeli funkcje $\gamma A(\alpha)$ i $\gamma B(\alpha)$ są symetryczne względem kątów Φ i β .

Jak widać funkcje (83) i (84) nie spełniają tego warunku ze względu na czynnik α_0^2 w liczniku.

Przypadek 2. $C_1(\alpha) \equiv 0$, $C_2(\alpha) = C_2$.

Podstawiając (75) i (64) do wzorów (81) i (82) otrzymamy

$$A(\alpha) = A^0(\alpha) + \frac{\pi i(\alpha - \alpha_0)\sqrt{k + \alpha_0}K_{U1}^0 K_{U2}^0 C_2}{2\pi i(\alpha - \alpha_0)\sqrt{k^2 - \alpha^2}\sqrt{k + \alpha_0}K_{U1}^0 K_{U2}^0 \sqrt{k - \alpha}K_{L1}K_{L2}}, \quad (87)$$

$$B(\alpha) = B^0(\alpha) + \frac{\pi i(\alpha - \alpha_0)\sqrt{k + \alpha_0}K_{U1}^0 K_{U2}^0 C_2}{2\pi i(\alpha - \alpha_0)\sqrt{k^2 - \alpha^2}\sqrt{k + \alpha_0}K_{U1}^0 K_{U2}^0 \sqrt{k - \alpha}K_{L1}K_{L2}}. \quad (88)$$

Dobieramy stałą C_2 tak, żeby wyrugować występujący w liczniku składnik α_0^2

$$C_2 = \frac{C + \alpha_0}{\pi i\sqrt{k + \alpha_0}K_{U1}^0 K_{U2}^0}. \quad (89)$$

Ostatecznie więc otrzymujemy jednoparametrową rodzinę rozwiązań, gdzie dowolnym parametrem jest stała C

$$u(x, z) = u_i(x, z) - \frac{1}{2\pi i} \int_Q F(\alpha; C) e^{i\alpha x} e^{i\gamma|z|} d\alpha, \quad (90)$$

gdzie

$$F(\alpha; C) = \frac{-\alpha_0\alpha - C(\alpha - \alpha_0) + k^2(s_1 s_2 + 1) - \frac{z}{|z|}k(s_1 + s_2)\sqrt{k - \alpha_0}\sqrt{k + \alpha}}{(\alpha - \alpha_0)\sqrt{k^2 - \alpha^2}\sqrt{k + \alpha_0}K_{U1}^0 K_{U2}^0 \sqrt{k - \alpha}K_{L1}K_{L2}}. \quad (91)$$

4. ASYMPTOTYCZNE ROZWINIĘCIE POLA NA KRAWĘDZI

Całkowa postać rozwiązania (90) ma formę odwrotnej transformaty Fouriera względem zmiennej x dla każdej ustalonej wartości zmiennej z . Z tej postaci trudno jest wnioskować o zachowaniu pola w otoczeniu krawędzi. Możemy jednak uzyskać pewne informacje o zachowaniu pola w przekroju $z = 0$ wykorzystując funkcje $U_j, L_j, j = 1, 2$, które są jednostronnymi transformatami Fouriera. Posłużymy się twierdzeniem wiążącym asymptotyczne rozwinięcie funkcji w zerze z asymptotycznym rozwinięciem jej transformaty Laplace'a w nieskończoności [12]. Teza tego twierdzenia brzmi.

Jeżeli funkcja $\varphi(t)$ ma rozwinięcie

$$\varphi(t) \sim \sum a_n \psi_n(t) \quad (92)$$

do N-tego wyrazu przy $t \rightarrow 0$, to jej transformata Laplace'a $\mathcal{L}[\varphi(t)] = f(s) = \int_0^\infty \varphi(t)e^{-st} dt$ ma rozwinięcie

$$f(s) \sim \sum a_n g_n(s) \quad (93)$$

do N-tego wyrazu, jednostajnie względem argumentu s przy $s \rightarrow \infty$, $s \in S_\Delta$, $\Delta > 0$, gdzie S_Δ jest sektorem $0 < |s| < \infty$, $|s| < \pi/2 - \Delta$,

$$g_n(s) = \mathcal{L}[\psi_n(t)]. \quad (94)$$

Dla jednostronnych transformat Fouriera (28) i (29) teza pozostanie prawdziwa, jeżeli współczynniki a_n we wzorze (74) podzielimy przez 2π oraz obszar S_Δ obrócimy odpowiednio o kąt $\pi/2$, zgodnie ze wskazówkami zegara dla transformaty $\mathcal{L}_+$, a przeciwnie — dla transformaty $\mathcal{L}_-$.

Z twierdzenia skorzystamy w drugą stronę. Rozwiniemy funkcje U_j, L_j w nieskończoności i będziemy wnioskowali o rozwinięciu pewnych składowych pola w lewo i prawostronnym otoczeniu punktu $x = 0$ dla $z = 0$. Kluczem do rozwinięcia funkcji U_j, L_j w nieskończoności jest rozwinięcie w nieskończoności czynników faktoryzacji K_L, K_U , które można znaleźć w pracy [11]. Dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia otrzymujemy w następujący sposób.

Dla funkcji K_L korzystamy ze wzoru określającego jej przedłużenie analityczne na całą płaszczyznę z cięciem

$$K_L(\alpha, s_j) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\ln K^*(t, s_j)}{t - \alpha} dt \right\} \quad \text{dla } \alpha \notin \Gamma_0, \quad (95)$$

gdzie

$$K^*(\alpha, s_j) = \frac{\sqrt{k^2 + \alpha^2} + ks_j}{\sqrt{k^2 - \alpha^2} + ks_j} \quad \text{dla } j = 1, 2. \quad (96)$$

We wzorze (95) rozwijamy funkcję $\ln K^*(t, s_j)$ dla $t \rightarrow \infty$ i następnie całkujemy to rozwinięcie wyraz po wyrazie. W rezultacie otrzymujemy

$$K_L(\alpha, s_j) = 1 + \frac{s_j k}{\pi \alpha} \ln(1 - \alpha/k) + O(1/\alpha) \quad \text{dla } \alpha \rightarrow \infty, \alpha \notin \Gamma_0, \quad (97)$$

Następnie korzystając z własności

$$K_U(\alpha, s_j) = K_L(-\alpha, s_j) \quad (98)$$

otrzymujemy

$$K_U(\alpha, s_j) = 1 - \frac{s_j k}{\pi \alpha} \ln(1 + \alpha/k) + O(1/\alpha) \quad \text{dla } \alpha \rightarrow \infty, \alpha \notin \Gamma_\pi, \quad (99)$$

Przejdźmy do rozwinięcia kolejnych funkcji U_j, L_j wykorzystując ponadto rozwinięcia

$$\frac{1}{\alpha - \alpha_0} = \frac{1}{\alpha} \left[1 + \frac{\alpha_0}{\alpha} + \frac{\alpha_0^2}{\alpha^2} + \dots \right], \quad |\alpha| > |\alpha_0|, \quad (100)$$

$$\frac{1}{k - \alpha} = \frac{1}{\alpha} \left[1 + \frac{k}{\alpha} + \frac{k^2}{\alpha^2} + \dots \right], \quad |\alpha| > k, \quad (101)$$

$$\frac{1}{\sqrt{k - \alpha}} = -\frac{i}{\sqrt{\alpha}} \left[1 - \frac{k}{2\alpha} + \frac{3k^2}{8\alpha^2} + \dots \right] \quad \text{dla } \alpha \rightarrow \infty, \alpha \notin \Gamma_0, \quad (102)$$

$$\sqrt{k + \alpha} = \sqrt{\alpha} \left[1 + \frac{k}{2\alpha} - \frac{k^2}{8\alpha^2} + \dots \right] \quad \text{dla } \alpha \rightarrow \infty, \alpha \notin \Gamma_\pi. \quad (103)$$

Podstawiając (99) i (100) do (74) otrzymamy

$$U_1(\alpha) = d \left[1 - \frac{s_1 + s_2}{\pi} \frac{k}{\alpha} \ln(1 + \alpha/k) \right] + O(1/\alpha) \quad \text{dla } \alpha \rightarrow \infty, \alpha \notin \Gamma_\pi, \quad (105)$$

gdzie stała d jest określona wzorem (77).

Podstawiając (97), (100) i (101) do (75) otrzymamy

$$L_1(\alpha) = -\frac{d}{\alpha^2} \left[1 - \frac{s_1 + s_2}{\pi} \frac{k}{\alpha} \ln(1 - \alpha/k) \right] + O(1/\alpha) \quad \text{dla } \alpha \rightarrow \infty, \alpha \notin \Gamma_0. \quad (105)$$

Podstawiając (103), (100) i (99) do (63) otrzymamy

$$U_2(\alpha) = C_2 \sqrt{\alpha} \left[1 - \frac{s_1 + s_2}{\pi} \frac{k}{\alpha} \ln(1 + \alpha/k) \right] + O(1/\sqrt{\alpha}) \quad \text{dla } \alpha \rightarrow \infty, \alpha \notin \Gamma_\pi. \quad (106)$$

Podstawiając (102), (100) i (97) do (64) otrzymamy

$$L_2(\alpha) = -\frac{C_2 i}{\sqrt{\alpha}} \left[1 - \frac{s_1 + s_2}{\pi} \frac{k}{\alpha} \ln(1 - \alpha/k) \right] + O(1/\alpha\sqrt{\alpha}) \quad \text{dla } \alpha \rightarrow \infty, \alpha \notin \Gamma_0. \quad (107)$$

Korzystając z wyżej cytowanego twierdzenia otrzymujemy z asymptotycznych rozwinięć (104)–(107) oraz wzorów (32), (33) i (36), (37) następujące rozwinięcia

$$H_x = -\frac{2\pi d}{2k\omega\mu(s_1 + s_2)}\delta(x) - \frac{1}{\omega\mu}\ln x + O(1) \quad \text{dla } x \rightarrow 0_-, \quad (108)$$

$$I_1(x) = 2\pi d \left[x + \frac{k(s_1 + s_2)i}{6\pi}x^2\ln x \right] + O(x^2) \quad \text{dla } x \rightarrow 0_+, \quad (109)$$

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} + k^2(s_1 s_2 + 1)u_s = \frac{1}{2}\sqrt{\pi i}C_2 \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{k(s_1 + s_2)C_2}{\sqrt{\pi i}} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad \text{dla } x \rightarrow 0_-. \quad (110)$$

dla $x \rightarrow 0_-$.

$$E_y = \frac{2\sqrt{\pi i}C_2}{k^2(s_1 s_2 + 1)}\sqrt{x} + O(x\sqrt{x}\ln x) \quad \text{dla } x \rightarrow 0_-, \quad (111)$$

$$I_2(x) = \frac{2i\sqrt{\pi i}C_2}{\omega\mu} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{4\sqrt{\pi i}C_2}{\omega\mu}\sqrt{x}\ln x + O(\sqrt{x}) \quad \text{dla } x \rightarrow 0_+. \quad (112)$$

5. WNIOSKI

Rozpatrzone problem dyfrakcji na półpłaszczyźnie impedancyjnej z warunkami brzegowymi drugiego rzędu i dokonano analizy zachowania pola na krawędzi. Zastosowano procedurę polegającą na zapostulowaniu rozwiązania w całkowitej postaci, jako superpozycję fal płaskich z nieznanymi amplitudami i zastosowano metodę Wienera-Hopfa do ich znalezienia.

Rozwiązanie i jego analizę ułatwia fakt, że faktoryzowana charakterystyczna funkcja tego problemu daje się łatwo wyznaczyć przez charakterystyczną funkcję problemu dyfrakcji na półpłaszczyźnie impedancyjnej opisanej warunkami Leontowicza.

Wprowadzone przez narzuconą procedurę jednostronne transformaty Fouriera służą do skonstruowania rozwiązania, a jednocześnie pozwalają określić zachowanie składowych pola na krawędzi. Mianowicie, ze znajomości rozwinięcia tych transformat w nieskończoności otrzymuje się rozwinięcie asymptotyczne funkcji wyrażających gęstość prądu elektrycznego i magnetycznego na półpłaszczyźnie i pewnych składowych pola w aperturze na krawędzi.

Podobnie jak dla warunków Leontowicza w rozwinięciu pojawiają się wyrazy zawierające logarytm. Jednak osobliwość pola na krawędzi jest tu silniejsza. Najbardziej zaskakujące jest zachowanie składowej H_x w aperturze, która jest deltą Diraca, podczas, gdy dla warunków Leontowicza składowa ta jest rzędu $O(1/\sqrt{x})$ [11].

BIBLIOGRAFIA

1. S.N. Karp, F.C. Karal, Jr., *Generalized Impedance Boundary Conditions with Applications to Surface Wave Structures*, in *Electromagnetic Wave Theory*, Part 1, edited by J. Brown, 479-483, Pergamon, New York, 1965
2. L.A. Wainstein: *Teoria dyfrakcji i metody faktoryzacji*. Wyd. Sovietskie Radio, Moskwa, 1966 (w jęz. rosyjskim)
3. R.G. Rojas, Z. Al-hekail, *Generalized impedance/resistive boundary conditions for electromagnetics scattering problems*. Radio Sci., vol.24, pp 1-12, January-February 1989
4. T.B.A. Senior, J.L. Volakis, *Derivation and Application of a class of Generalized Boundary Conditions*. IEEE Trans. Antennas Propag., AP-37, pp. 1566-1572, 1989
5. T.B.A. Senior, J.L. Volakis: *Generalized Impedance Boundary Conditions in Scattering*. Proc. IEEE, October 1991, pp. 1413-1420
6. M.A. Ricoy, J.L. Volakis, *Derivation of generalized transition/boundary conditions for planar multiple-layer structures*. Radio Sci. 25(4), pp. 391-405, 1990
7. T.B.A. Senior, M.A. Ricoy: *On the Use of Generalized Impedance Boundary Conditions*, presented at the IEEE AP-S and URSI Symp., Dallas, TX, 1990
8. T.B.A. Senior: *Diffraction by a Generalized Impedance Half-Plane*. Radio Sci. vol. 26, pp. 163-167, 1991
9. J.L. Volakis, T.B.A. Senior: *Application of a Class of Generalized Boundary Conditions to Scattering by a Metal-Backed Dielectric Half-Plane*. Proc. IEEE, 1989, vol. 77, pp. 796-805
10. T.B.A. Senior: *Diffraction by a Semi-Infinite Metallic Sheet*. Proc. Roy. Soc. (London), vol. A213, pp. 436-458, 1952.
11. H. Kudrewicz: *Dyfrakcja na półpłaszczyźnie impedancyjnej. Struktura rozwiązania w otoczeniu krawędzi*. Prace IPPT PAN 43/1990
12. A. Erdelyi: *Rozwinięcia asymptotyczne*. PWN, Warszawa 1967
13. I.M. Ryżik, I. Gradsztejn: *Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów*. Państwowe Wydawnictwo Techniczno-Teoretycznej Literatury, Moskwa-Leningrad 1951 (w języku rosyjskim)

H. KUDREWICZ

DIFFRACTION BY AN IMPEDANCE HALF-PLANE WITH GENERALIZED BOUNDARY CONDITIONS. BEHAVIOUR OF THE SOLUTION NEAR THE EDGE

Summary

TM plane wave diffraction by an impedance half-plane has been investigated. On the half-plane generalized boundary conditions of the second order are imposed. One parameter family of solutions that satisfy the reciprocity conditions and have "the weakest" singularity at the edge, is found. In the vicinity of the edge an asymptotic expansion of the field is constructed.

SPIS TREŚCI

J. H. Baranowski: Zmodyfikowane ujęcie modelu Jilesa-Athertona	1
J. H. Baranowski: Model transformatora z histerezą magnetyczną rdzenia	21
I. Olszewski, A. Zabłudowski: Weryfikacja algorytmu optymalizacji struktur topologicznych sieci niehierarchicznych z komutacją łączy	39
Z. Surowiak, D. Czekał, V.P. Dudkevich, A.A. Bakirov, I.M. Sem, E.V. Sviridov: Osobliwości procesu przepolaryzowania w polikrystalicznych cienkich warstwach ferroelektrycznych typu PZT	59
A. Kos: Analiza temperaturowa układów hybrydowych. Cz. I: Metody analityczne	75
A. Kos: Analiza temperaturowa układów hybrydowych. Cz. II: Metody numeryczne. Praktyczne zastosowanie	93
K. Wawryn, R. Suszyński, A. Mazurek: Analogowe układy próbkowane z przełączonymi prądami	113
H. Kudrewicz: Dyfrakcja na półpłaszczyźnie impedancyjnej z uogólnionymi warunkami brzegowymi. Analiza rozwiązania w otoczeniu krawędzi	131

CONTENTS

J. H. Baranowski: Modification of the model Jiles-Atherton	1
J. H. Baranowski: Model of the transformer with a hysteretic core	21
I. Olszewski, A. Zabłudowski: The correctness verification of the algorithm of topological structure optimization of non-hierarchical circuit switching network	39
Z. Surowiak, D. Czekał, V.P. Dudkevich, A.A. Bakirov, I.M. Sem, E.V. Sviridov: Peculiarities of the switching process in polycrystalline thin ferroelectric films of PZT-type	59
A. Kos: Thermal analysis of hybrid circuits Part I: Analytical methods	75
A. Kos: Thermal analysis of hybrid circuits Part II: Numerical methods. Applications	93
K. Wawryn, R. Suszyński, A. Mazurek: Switched current building blocks for analog sampled circuits	113
H. Kudrewicz: Diffraction by an impedance half-plane with generalized boundary conditions. Behaviour of the solution near the edge	131

Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji

WARUNKI PRENUMERATY

Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są na okresy kwartalne:

na teren kraju

- jednostki kolportażowe „RUCH” S.A. i urzędy pocztowe oddawcze, właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora, oraz doręczyciele w miejscowościach, gdzie dostęp do urzędu jest utrudniony,
- od osób lub instytucji, zamieszkałych lub mieszkających się w miejscowościach, w których nie ma jednostek kolportażowych „RUCH”, wpłaty należy wносить do „RUCHU” S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28. Konto: PBK XIII Oddział Warszawa nr 370044-1195-139-11. „RUCH” S.A. zapewnia dostawę pod wskazanym adresem pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty.

na zagranicę

- „RUCH” S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28. Konto: PBK XIII Oddział Warszawa nr 370044-1195-139-11. Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zleceniodawca.
- Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100 % wyższa od krajowej.

Dostawa zamówionej prasy następuje:

- przez jednostki kolportażowe „RUCH” S.A. — w sposób uzgodniony z zamawiającym,
- prenumerata pocztowa — pod wskazanym adresem, w ramach opłaconej prenumeraty.

Terminy przyjmowania przez „RUCH” S.A. wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną oraz przez Pocztcę Polską (tylko prenumerata krajowa):

„RUCH” S.A.

- do 20 XI na I kw. roku następnego
- do 20 II na II kw.
- do 20 V na III kw.
- do 20 VIII na IV kw.

Poczta Polska

- do 25 XI na I kw. roku następnego
- do 25 II na II kw.
- do 25 V na III kw.
- do 25 VIII na IV kw.

Bieżące numery można nabyć w Księgarni Wydawnictwa Naukowego PWN, ul. Miodowa 10, 00-251 Warszawa. Również można je nabyć, a także zamówić (przesyłka za zaliczeniem pocztowym) we Wzorcowni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN, Pałac Kultury i Nauki, 00-90 Warszawa.

UWAGA!

Poczynając od 1993 r. prenumeratę naszego czasopisma prowadzi również Zakład Kolportażu Wydawnictwa SIGMA-NOT. Zamówienia na prenumeratę należy składać w terminach kwartalnych. Wpłata na II kw. wynosi 60 000 zł

Warunkiem przyjęcia prenumeraty jest wpłata na konto wartości zamówionych egzemplarzy. Wpłat na prenumeratę należy dokonywać na blankietach do wpłat na rachunki bankowe na konto:

Zakład Kolportażu Wydawnictwa SIGMA-NOT Sp. z o.o.
00-950 Warszawa nr PBK III O/Warszawa 370015-1573-139-11

Zakład Kolportażu oferuje również możliwość zamawiania prenumeraty ze zleceniem wysyłki za granicę. Jej cena jest dwukrotnie wyższa od ceny prenumeraty normalnej, a zlecający powinien podać dokładny adres odbiorcy za granicą. Dodatkowych informacji udziela:

Zakład Kolportażu Wydawnictwa SIGMA-NOT Sp. z o.o.
00-716 Warszawa, skr. poczt. 1004, ul. Bartycka 20.
Telefony: 40-30-86, 40-35-89, 40-00-21 w. 249, 295, 299

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

Indeks 363189
ISSN 0867-6747

**KWARTALNIK
ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI
ELECTRONICS AND
TELECOMMUNICATIONS
QUARTERLY**

TOM XL — ZESZYT 2

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
WARSZAWA 1994

Subscription for external subscribers:

The promotional subscription price in 1995 is \$ 90 including postage for institutions. Subscriptions should be sent to the publisher, Polish Scientific Publishers PWN Ltd, Journal Division, Miodowa 10, 00-251 Warsaw, POLAND, fax (48) (22) 26 09 50, (48) (22) 26 71 63, with a copy by fast to Electronics and Telecommunications Quarterly 00-665 Warsaw, ul. Nowowiejska 15/19, p. 470. Subscription is occupied after showing a cheque or transfer documents. Our bank account is as follows: Bank account: PBK VIII O/Warszawa nr 370028-1052. At subscriber's request this journal will be air mailed at additional postage to 50% of gross price to European countries and 65% overseas.

Subscription orders available through the local press distribution or through the Foreign Trade Enterprise ARS Polona, 00-068 Warszawa, Krakowskie Przedmieście 7, Poland.

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

KWARTALNIK
ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI
ELECTRONICS AND
TELECOMMUNICATIONS
QUARTERLY

TOM XL — ZESZYT 2

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
WARSZAWA 1994

RADA REDAKCYJNA

Przewodniczący

prof. dr inż. ADAM SMOLIŃSKI
członek rzeczywisty PAN

Członkowie

prof. dr hab. inż. DANIEL JÓZEF BEM, prof. dr hab. inż. MICHAŁ BIAŁKO –
czł. koresp. PAN, prof. dr hab. inż. STEFAN HAHN – czł. koresp. PAN, prof. dr
inż. ANDRZEJ HAŁAS, prof. dr inż. ZDZISŁAW KACHLICKI, prof. dr hab. inż.
BOHDAN MROZIEWICZ, prof. dr inż. JERZY OSIOWSKI, prof. dr inż. WITOLD
ROSIŃSKI – czł. rzecz. PAN, prof. dr hab. inż. STEFAN WĘGRZYN – czł. rzecz.
PAN, prof. dr hab. inż. WIESŁAW WOLIŃSKI – czł. koresp. PAN, prof. dr inż.
ANDRZEJ ZIELIŃSKI, prof. dr inż. MARIAN ZIENTALSKI

REDAKCJA

Redaktor Naczelny

prof. dr hab. inż. WIESŁAW WOLIŃSKI

Zastępca Redaktora Naczelnego

doc. dr inż. KRYSTYN PLEWKO

Sekretarz Odpowiedzialny

mgr KRYSTYNA LELAKOWSKA

Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych

ADRES REDAKCJI

00-665 Warszawa, ul. Nowowiejska 15/19 Politechnika, pok. 470
Instytut Telekomunikacji, Gmach im. prof. JANUSZA GROSZKOWSKIEGO

Dyżury Redakcji: środy i piątki, godz. 14–16
tel. 628 89 81 21007-737

Telefony domowe: Redaktora Naczelnego: 12 17 65

Zast. Red. Naczelnego: 26 83 41

Sekretarza Odpowiedzialnego: 25 29 18

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN

Warszawa, ul. Miodowa 10

Ark. druk. 10.75	Podpisano do druku we wrześniu 1994 r.
Papier offsetowy kl. III 80 g. B-1	Druk ukończono w październiku 1994 r.

Skład: *ArtGraph*, Warszawa, ul. Czerniakowska 81/83

Druk i oprawa: Drukarnia Braci Grodzickich, Żabieniec, ul. Przelotowa 7

The comparative study of the constitutive and Maxwell's electromagnetic field theories

Part I. The comparison of the constitutive distributed parameter model to the Maxwell's model of the electromagnetic field

WACŁAW NIEMIEC

*Independent Institute-Education Center, "Knowledge-Science"**Otrzymano 1994.03.16**Autoryzowano do druku 1994.04.26*

The article is devoted to the comparative analysis of the J.C. Maxwell's theory partial differential equations of the electromagnetic field to the partial differential constitutive state equations of the constitutive distributed parameter electromagnetic field theory deduced by Wacław Niemiec. The "state of art" of the classic literature of the J.C. Maxwell's electromagnetic field theory has been considered. Subsequently there has been discussed in many aspects the partial differential constitutive state equations deduced for the electromagnetic field by author pertinent to literature Nobel Prizes for Physics criterions.

1. INTRODUCTION

In the article in two parts entitled: "ON THE CONSTITUTIVE DISTRIBUTED PARAMETER MODELLING OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD" [1] and [2] an original constitutive distributed parameter mathematical model of the electromagnetic field has been firstly in the world literature introduced. In Part I of this article possessing the title "Part I. The constitutive distributed parameter mathematical model of the electromagnetic field" [1], original system of partial differential constitutive state equations has been deduced:

$$\frac{D\mathbf{D}}{Dt} = D_e \nabla^2 \mathbf{D} - \mathbf{D} \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \mathbf{D} \pm \mathbf{J}(t) \quad (1)$$

$$(I) \quad \mathbf{D} \frac{D\mathbf{B}}{Dt} = U_B \nabla^2 \mathbf{B} - \mathbf{D} \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{v} \pm S(t) + G_D \operatorname{div} \mathbf{D} + \mathbf{W}_D D_e \nabla^2 \mathbf{D} \quad (2)$$

$$f \operatorname{div} \mathbf{D} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \hat{a} \nabla^2 \mathbf{v} - f \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{D} \operatorname{div} \mathbf{v} + \\ + \hat{b} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} \pm \mathbf{T}(t) - M_B \nabla^2 \mathbf{B} + N_D \nabla^2 \mathbf{D} \quad (3)$$

where: $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad}$ (sum of adequate gradient operations) [1-4], [14-15].

For the system (I) its constitutive invariance to the physical coefficients has been proved [1], the system (I) has subsequently been solved in an original way — analytically from the point of view of space-time distribution of the state variables of the electromagnetic field, in [2].

In the aims of this article we will make the comparative studies of Maxwell's electromagnetic field theory to the new deduced constitutive distributed parameter model of the electromagnetic field which is given in [1] and [2]. In this part of the article is compared the Maxwell's partial differential equations to the deduced by Wacław Niemiec partial differential constitutive state equations of the system (I) for the electromagnetic field, from [1]. The focus is concentrated not only on the physical but also for the mathematical aspects of both theories, comparing the areas of both applications from these theories, too. The author of [1] and [2] places his constitutive distributed parameter electromagnetic field theory in the world literature. From the World Scientific News it is classified to those which undergo to the Nobel Prize Committee of Physics considerations. From the other side author got the international scientific opinions that since the time of J.C. Maxwell no one has done such complete new electromagnetic field theory, [1-2].

2. THE DISCUSSION OF THE MAXWELL'S ELECTROMAGNETIC FIELD THEORY

According to the topic literature [5-13], the Maxwell's electromagnetic field theory considers the electromagnetic field characterized by the general state vectors of:

- the electric field intensity $\mathbf{E}$, and
- the magnetic field intensity $\mathbf{H}$,

which are both described in their mutual space-time relations governed by J. C. Maxwell's partial differential equations:

$$c_f \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi [\mathbf{j} + \mathbf{j}^{(e)}] \quad (2.1)$$

$$c_f \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho \quad (2.4)$$

where: $\mathbf{j}$ — the density on the surface of conductive current,
 $\mathbf{j}^{(e)}$ — the density on surface of the electric current coming from the activity of the external sources,
 ρ — volume density of the electric charge,
 c_f — the velocity of light in space ($c_f = 300000$ km/s).

For the complete presentation of the Maxwell's electromagnetic field theory we need to include the material equations

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.7)$$

where: ε_0 — absolute electric constant,
 ε — relative electric constant,
 μ_0 — absolute magnetic constant H/m,
 μ — relative magnetic constant,
 σ — conductivity of the medium.

It is evident that the eq. (2.3) is a conclusion of the eq. (2.2). The eq. (2.4) and the eq. (2.1) are connected by the continuity partial differential equation:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad (2.8)$$

representing the law of the constant electric charge.

3. THE DISCUSSION OF THE PROPERTIES AND DEFICIENCIES OF THE MAXWELL'S ELECTROMAGNETIC FIELD THEORY

According to the literature of applications of the Maxwell's electromagnetic field theory [5–13], the most often met there assumptions and deficiencies of this theory can be presented as follows:

1. the medium is assumed as being homogeneous and isotropic so that $\varepsilon_0 \varepsilon = \text{const}$, $\mu_0 \mu = \text{const}$, $\sigma = \text{const}$, as characteristic for the medium conditions,
2. the electromagnetic phenomena are considered as appearing in vacuum so that $\varepsilon_0 = \varepsilon = \mu_0 = \mu = 1$ and $\sigma = 0$ by absence of electric charges and currents,
3. the external source current is assumed as being $\mathbf{j}^{(e)} = 0$,
4. the movement of the medium is neglected,
5. in the Maxwell's electromagnetic field theory we have no problems of the phenomenal continuity of every state variable,
6. the intensities of the external sources are not determined for:

- all state variables straightforwardly,
 - are not given in the differential form of the time and space coordinates,
7. necessity of the exact determination of boundary conditions by the nonhomogeneous media,
 8. the Maxwell's electromagnetic field theory does not contain all physical phenomena of the electromagnetic field, and other physical questions have not been explained by this theory.

As we see from the above points of analysis of the Maxwell's electromagnetic field theory, this theory is based on:

- many important assumptions which are necessary to be formulated before an attempt of using this theory,
- many significant limitations and simplifications of the problems of generation, existence, reflection and receiving sets for the electromagnetic field,
- many deficiencies of the description of physical phenomena and medium conditions for the yield and quality aspects of the electromagnetic waves.

The above listed questions, and a lot of others not mentioned in this analysis allow to formulate the opinion that the J. C. Maxwell's simplifications taken all together are very strong and, this is an idea which should be extended and perfected to the better form as it is till now.

4. CONSTITUTIVE DISTRIBUTED PARAMETER MODELLING CONCEPT OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD

The concept of the author's constitutive distributed parameter modelling relies to the following ground ideas [1-4]:

I. — The local basis:

$Z(x, y, z, t)$ — the source point of processing of the electromagnetic field, constant space-time coordinates,

$\bar{\Omega}_{(x,y,z)t}$ — the locally selected volume-time element around the point $Z(x, y, z, t)$, phenomenally closed (every physical phenomenon can be treated in the separate way),

$F_{(x,y,z)t}$ — the external oriented surface of the locally selected volume-time element $\bar{\Omega}_{(x,y,z)t}$,

$\mathbf{n}^{(z)}$ — the normal external surface orientation vector of the surface $F_{(x,y,z)t}$.

II. — The global basis:

$Q^R(\xi^R, \eta^R, \zeta^R, \tau)$ — the variable point being reciprocal to the constant coordinates point $Z(x, y, z, t)$,

Ω_{Rt} — working space volume-time containing the point $Q^R(\xi^R, \eta^R, \zeta^R, \tau)$,

$\mathbf{F}_{Rt}$ — external oriented surface of Ω_{Rt} ,

$\mathbf{n}_R^{(z)}$ — the normal external surface orientation vector of the surface $\mathbf{F}_{Rt}$.

Corollary 1. The variable point $Q^R(\xi^R, \eta^R, \zeta^R, \tau)$ possesses its representation for:

— the potential fields $Q^R(\xi^R, \eta^R, \zeta^R, \tau) \equiv Q(\xi, \eta, \zeta, \tau)$, and,

— the rotational fields $Q^R(\xi^R, \eta^R, \zeta^R, \tau) \equiv Q'(\xi', \eta', \zeta', \tau)$ fulfilling the physical phenomena reciprocal relations:

$$Q(\xi, \eta, \sigma z, \tau) \xleftrightarrow{\text{Ph}(1)} Z(x, y, z, t) \xleftrightarrow{\text{Ph}(2)} Q'(\xi', \eta', \zeta', \tau) \quad (4.1)$$

Ph(1) — physical phenomena of potential fields,

Ph(2) — physical phenomena of rotational fields.

Corollary 2. The mutual circulations of the normal external surface orientation vectors: $\mathbf{n}_R^{(z)}$ — the boundary control tasks influence on $\mathbf{n}^{(z)}$, give the sings of summations of the effects of physical phenomena in pertinent balances consequently to the balance procedure.

III. — The balance procedure:

1. Choice of adequate balance state variables for assumed criterions.
2. Determination of the physical phenomena for $\mathbf{F}_{(x,y,z)t}$, by (1).
3. Determination of the physical phenomena for $\overline{\Omega}_{(x,y,z)t}$, by (1).
4. Determination of the phenomenal links between balances.
5. Determination of $\mathbf{n}^{(z)}$ to $\mathbf{n}_R^{(z)}$ circulations for the balance signs.
6. Determination of the source elements pertinent to balance.
7. Introduction of the general balance formula.

5. THE PARTIAL DIFFERENTIAL CONSTITUTIVE STATE EQUATIONS OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD DEDUCED BY AUTHOR

The deduced by W. Niemiec in [1] partial differential constitutive state equations of the electromagnetic field have the system form:

$$\frac{D\mathbf{D}}{Dt} = D_e \nabla^2 \mathbf{D} - \mathbf{D} \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \mathbf{D} \pm \mathbf{J}(t) \quad (1)$$

$$(I) \quad \mathbf{D} \frac{D\mathbf{B}}{Dt} = \mathbf{U}_B \nabla^2 \mathbf{B} - \mathbf{D} \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{v} \pm S(t) + G_D \operatorname{div} \mathbf{D} + \mathbf{W}_D D_e \nabla^2 \mathbf{D} \quad (2)$$

$$f \operatorname{div} \mathbf{D} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \widehat{a} \nabla^2 \mathbf{v} - f \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{D} \operatorname{div} \mathbf{v} + \widehat{b} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} \pm \mathbf{T}(t) - M_B \nabla^2 \mathbf{B} + N_D \nabla^2 \mathbf{D} \quad (3)$$

where: $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad}$ (sum of adequate gradient operations) [1-4], [14-15]

From the condition of the following derivative $\frac{D}{Dt} = 0$ [1-4], [14-15] for every state variable of the electromagnetic field, two continuity systems of partial differential equations as the constitutive invariance of the system (I) to its physical coefficients are considered, alternatively:

— **for the variable coefficients**

$D_e = D_e(x, y, z, t)$, $U_B = U_B(x, y, z, t)$, $W_D = W_D(x, y, z, t)$, $\gamma = \gamma(x, y, z, t)$, $\varepsilon = \varepsilon(x, y, z, t)$, $G_D = G_D(x, y, z, t)$, $M_B = M_B(x, y, z, t)$ and $N_D = N_D(x, y, z, t)$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \text{grad} D_e (\text{grad}) \mathbf{D} - (\mathbf{v} \text{grad}) \mathbf{D} + \mathbf{D} \text{grad} \left(\frac{\gamma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \right) \Big|_{\mathbf{n}(z)} \quad (1')$$

$$(II) \quad \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\text{grad}) U_B (\text{grad}) \mathbf{B} - \mathbf{D} (\mathbf{v} \text{grad}) \mathbf{B} + \\ + \mathbf{D} \text{grad} G_D + [\mathbf{W}_D \text{grad} D_e (\text{grad}) \mathbf{D}]^* \quad (2')$$

$$f \text{ div } \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -f \text{ div } \mathbf{D} (\mathbf{v} \text{grad}) \mathbf{v} - \text{grad} M_B (\text{grad}) \mathbf{B} + \text{grad} N_D (\text{grad}) \mathbf{D} \quad (3')$$

[]* — the included element only for the complete presentation of the electromagnetic field energy continuity from the diffusion phenomenon.

— **for the constant coefficients**

$D_e \neq D_e(x, y, z, t)$, $U_B \neq U_B(x, y, z, t)$, $W_D \neq W_D(x, y, z, t)$, $\gamma \neq \gamma(x, y, z, t)$, $\varepsilon \neq \varepsilon(x, y, z, t)$, $G_D \neq G_D(x, y, z, t)$, $M_B \neq M_B(x, y, z, t)$ and $N_D \neq N_D(x, y, z, t)$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \text{grad}) \mathbf{D} \quad (1'')$$

$$(III) \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \text{grad}) \mathbf{B} \quad (2'')$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \text{grad}) \mathbf{v} \quad (3'')$$

The systems of the partial differential equations of the continuity (II) or (III) represent the invariance groups of the continuity for the presentation of the constitutive invariance of the system (I) to its physical coefficients. As a consequence of the utilization of this point of view physical coefficients of the system (I) are assumed to be constant for its analytical solution. Another problem is the space-time interpretation of the constitutive invariance for the continuous media with the space and time memories for the system (I) by its continuity systems of the partial differential equations (II) or (III), given in the continuation of the considerations of this article.

6. COMPARISON OF THE FEATURES OF THE MAXWELL'S AND NIEMIEC'S ELECTROMAGNETIC FIELD THEORIES

For the general classification of the features of J. C. Maxwell's and Niemiec's electromagnetic fields theories we need to introduce the general scientific criterions

being common for the content of both theories and Nobel Prize for Physics [18]. The comparison should contain the following criterions:

- the physical phenomena aspects pertinent to the balances,
- the mathematical methods of the balances,
- the additional informations and assumptions,
- the area of applications, and others.

The comparative interpretations of some aspects of the J. C. Maxwell's and W. Niemic's electromagnetic field theories in the Table 1, have been placed.

Table 1

Comparison of some features of J.C. Maxwell's and W. Niemic's electromagnetic field theories

Nr	Theories Features	J.C. Maxwell's electromagnetic field theory	Niemic's constitutive distributed parameter electromagnetic field theory
	1	2	3
1.	All known state variables of the electromagnetic field.	YES	YES
2.	General — anisotropic and non-homogeneous media, reciprocally.	NO	YES
3.	All known physical phenomena of the electric and magnetic fields.	NO	YES
4.	Limites and unlimited space-time considerations.	YES	YES
5.	Existence of source elements for all balances.	NO	YES
6.	Moving source elements.	NO	YES
7.	Continuous forms of all state variables.	NO	YES
8.	General forms of physical coefficients.	NO	YES
9.	Mass/charge, energy and momentum balances.	NO	YES
10.	Balance constructions.	NO	YES
11.	Following derivative forms of all balances	NO	YES
12.	Constitutive invariance to physical coefficients.	NO	YES

	1	2	3
13.	General forms of boundary conditions for all physical phenomena.	NO	YES
14.	General applications without physical and space-time constraints.	NO	YES
15.	Possessing local and global bases.	NO	YES
16.	Mathematical classification of partial differential equations.	NONLINEAR (undetermined)	QUASILINEAR (determined)
17.	Others which are not formulated yet.	Criteria YES or NO	Criteria YES or NO

The Table 1 does not contain all comparative criterions of both electromagnetic field theories because the areas of the applications of these theories are still not limited.

Consequently to this opinion we have no ability to appreciate all possibilities of comparisons of both theories. The content of the Table 1 makes only a possibility to apprehend a great superiority of the constitutive distributed parameter electromagnetic field theory made by NIEMIEC's over classic J.C. Maxwell's electromagnetic field theory.

7. CONCLUSIONS

The comparative studies of both theories of the electromagnetic field, Maxwell's and constitutive distributed parameter of author enable us to formulate the following conclusions:

- the J. C. Maxwell's theory is a mathematical formulation of the known in this time correct physical experiments. This is made very correct but very approximately and under very strong assumptions. J. C. Maxwell's theory should be an outset for the more general theory of the electromagnetic field which should be elaborated. Studying the literature of the applications of the J. C. Maxwell's electromagnetic field theory it is possible to stress that the authors did not perfect but only applied this theory.
- the constitutive distributed parameter theory of the electromagnetic field prepared by W. Niemiec is an original extension of the J. C. Maxwell's electromagnetic field theory to the general electromagnetic field theory for the moving coordinate systems. In this theory of the electromagnetic field the J.C. Maxwell's is only an outset and it is used only in a few not important points and helpfully.

Continuing it is necessary to stress here that

Waclaw NIEMIEC's — constitutive distributed parameter electromagnetic field theory:

- fulfils much more precisely all the cases of known applications of the J. C. Maxwell's electromagnetic field theory,
- can be extended on all cases of the applications with moving coordinate systems.

NOTATION

D	— vector of the induction of the electric field	$\frac{C}{m^2},$
B	— vector of the induction of the magnetic field	$\frac{T}{m},$
v	— field vector velocity of the electromagnetic medium	$\frac{m}{s},$
D_e	— coefficient of the electric charge diffusion	$\frac{m^2}{s},$
γ	— coefficient of the electric conductivity (or σ)	$\frac{A}{Vm},$
ε_0	— coefficient of the absolute electric permeability	$\frac{C}{Vm},$
ε	— coefficient of the relative electric permeability	
U_B	— vector coefficient of the energy distribution of the magnetic induction A,	
G_D	— coefficient of the energy of the conductivity and permeability for the electric induction	$\frac{V}{m},$
W_D	— vector coefficient of the energy distribution of the electric charge diffusion	$\frac{V}{m},$
f	— coefficient of the mass of the electric charge	$\frac{kg}{C},$
$\hat{a}, \hat{b}$	— coefficients of the material properties of the electromagnetic medium	$\frac{Ns}{m},$
M_B	— coefficient of the force of the magnetic induction	$\frac{Nm}{Vs},$
N_D	— coefficient of the force of the electric induction	$\frac{Nm}{C},$
η_w	— coefficient of the dynamic viscosity	$\frac{Ns}{m^2},$
h	— the crystal press module	$\frac{N}{m^2},$
$\bar{k}$	— the Poisson constant of the crystal, for the crystal medium	

$$\hat{a} = \frac{h}{p} \quad \text{and} \quad \hat{b} = \frac{h\bar{k}}{p(\bar{k} - 1)}$$

by p — the unitary time transformation
and for the fluid medium

$$\hat{a} = \eta_w \quad \text{and} \quad \hat{b} = \frac{\eta_w}{3}$$

J(t) — the outside source of the electric charge on the chosen external oriented surface

S(t) — the outside source of the electromagnetic energy

$\frac{A}{m^2},$
 $\frac{J}{m^4},$

- $\mathbf{T}(t)$ — the outside source of the momentum of the electromagnetic medium $\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{m}^3}$,
 $\bar{\Omega}_{(x,y,z)t}$ — the locally selected volume-time element phenomenally closed (every phenomenon can be treated in the separate way) around the source point $Z(x, y, z, t)$ of the processing of the electromagnetic field $\mathbf{m}^3 - \mathbf{s}$,
 $(a, b, c)t$ — the dimensions of the locally selected volume-time element $\bar{\Omega}_{(a,b,c)t}$ by $x = a, y = b, z = c$ for the time "t" $\mathbf{m}, \mathbf{m}, \mathbf{m}, \mathbf{s}$,
 $\mathbf{F}_{(a,b,c)t}$ — the external oriented surface of the locally selected volume-time element $\bar{\Omega}_{(a,b,c)t}$ $\mathbf{m}^2 - \mathbf{s}$,
 $\mathbf{n}^{(z)}$ — the normal external surface orientation vector of the surface $\mathbf{F}_{(a,b,c)t}$,
 Ω_{Rt} — the working space volume-time of the apparatuses of the electromagnetic field $\mathbf{m}^3 - \mathbf{s}$,
 $\mathbf{F}_{Rt}$ — the external oriented surface of Ω_{Rt} $\mathbf{m}^2 - \mathbf{s}$,
 $\mathbf{n}_R^{(z)}$ — the normal external surface orientation vector of the surface $\mathbf{F}_{Rt}$
 (x, y, z, t^*) — the constant space-time coordinates of Ω_{Rt} $\mathbf{m}, \mathbf{m}, \mathbf{m}, \mathbf{s}$,
 t — time $\mathbf{s}$.

REFERENCES — Part I

1. W. Niemiec: *On the constitutive distributed parameter modelling of the electromagnetic field. Part I. The constitutive distributed parameter mathematical model of the electromagnetic field.* Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji, 1991, 37, Z. 3-4, ss. 351-368
2. W. Niemiec: *On the constitutive distributed parameter modelling of the electromagnetic field. Part II. The solution of the model partial differential constitutive state equations of the electromagnetic field.* Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji, 1991, t. 37, Z. 3-4, ss. 369-391
3. W. Niemiec: *On the constitutive distributed parameter modelling of the singlecomponent real processes. Part I. The partial differential constitutive state equations describing the singlecomponent real processes.* Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji, 1993, t. 39, Z. 1, ss. 131-151
4. W. Niemiec: *On the constitutive distributed parameter modelling of the singlecomponent real processes. Part II. The solution of partial differential constitutive state equations for the singlecomponent real processes.* Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji, 1993, t. 39, Z. 1, ss. 155-186
5. R. Sikora: *Teoria pola elektromagnetycznego.* WNT, Warszawa, 1985
6. R. Matusiak: *Teoria pola elektromagnetycznego.* WNT, Warszawa, 1976
7. J.D. Jackson: *Elektrodynamika klasyczna.* PWN, Warszawa, 1982
8. E.M. Purcell: *Elektryczność i magnetyzm.* PWN, Warszawa, 1974
9. R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands: *Feynmana wykłady z fizyki. Tom II — Część I.* PWN, Warszawa, 1974
10. A.N. Tichonow, A.A. Samarski: *Równanie fizyki matematycznej.* PWN, Warszawa, 1963
11. L.D. Landau, E.M. Lifszyc: *Krótki kurs fizyki teoretycznej. Tom I. Mechanika. Elektrodynamika.* PWN, Warszawa, 1986
12. N.A. Krall, A.W. Trivelpiece: *Fizyka plazmy.* PWN, Warszawa, 1979
13. A.W. Czernietski: *Wstęp do fizyki plazmy.* PWN, Warszawa, 1971
14. B. Średniawa: *Hydrodynamika i teoria sprężystości.* PWN, Warszawa, 1977

15. A.J.A. Morgan: *On the construction of constitutive equations for continuous media*. Archiwum Mechaniki Stosowanej, vol. 17, 1965, No. 1, pp. 145-174
16. W. Nowacki: *Dynamiczne zagadnienia termosprężystości*. PWN, Warszawa, 1966.
17. S. Węgrzyn: *Podstawy automatyki*. PWN, Warszawa, 1974
18. Fact Sheets on Sweden: 1. *Alfred Nobel and the Nobel Prizes*. 2. *Nobelkommitteer*. 3. *Nobel Prizes for Physics*

W. NIEMIEC

STUDIUM PORÓWNAWCZE KONSTITUTYWNEJ I MAXWELL'OWSKIEJ TEORII POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO

CZ. I. PORÓWNANIE KONSTITUTYWNEGO ROZŁOŻONEGO PARAMETRYCZNIE MODELU
DO MAXWELL'OWSKIEGO MODELU POLA ELEKTRYCZNEGO

Streszczenie

Artykuł poświęcony jest analizie porównawczej J. C. Maxwell'owskiej teorii równań różniczkowych cząstkowych pola elektromagnetycznego w stosunku do równań różniczkowych cząstkowych konstytutywnych stanu dla konstytutywnej rozłożonej parametrycznie teorii pola elektromagnetycznego wprowadzonej przez Wacława NIEMCA. Rozważono "state of art" klasycznej literatury J. C. Maxwell'owskiej teorii pola elektromagnetycznego. Następnie zostały przedyskutowane w wielu aspektach równania różniczkowe cząstkowe konstytutywne stanu wprowadzone przez autora dla pola elektromagnetycznego, według literaturowych kryteriów dla prac nagradzanych Nagrodami Nobla w zakresie Fizyki.

The comparative study of the constitutive and Maxwell's electromagnetic field theories

Part II. The comparison of the analytical solution problems of the constitutive distributed parameter model to the Maxwell's model of the electromagnetic field

The article contains comparative analysis of the analytical solution of the constitutive distributed parameter mathematical model of the electromagnetic field which was elaborated and deduced by author to the literature "state of art" of the analytical solutions of the Maxwell's partial differential equations of this type of the field. Obtained by author partial differential constitutive state equations from the deduced by himself mathematical model in many solution aspects have been discussed, pertinent to literature Nobel Prizes for Physics criterions.

1. INTRODUCTION

In the frains of this article we concentrate ourselves on the comparison of the solution problems of the J. C. Maxwell's electromagnetic field theory partial differential equations to the partial differential constitutive state equations of the electromagnetic field deduced by W. Niemiec by himself [1-3]. As an introduction of this part of the article it is necessary to stress that the quantity of the cases of the solutions of both electromagnetic field theories is not limited yet, so we have ability to compare some general approaches of them.

Because the J. C. Maxwell's electromagnetic field theory is generally literature known, we shall consider the literature "state of the art" of its solutions [5-13] comparing them to the solution problems of partial differential constitutive state equations of the constitutive distributed parameter electromagnetic field theory deduced by W. Niemiec [1-3]. Let us recall this original constitutive distributed parameter electromagnetic field theory [1-3] from the point of view of its analytical solution [3], with respect to the general rules of the solutions of this class of the partial differential constitutive state equations [4], according to their properties [5]. Proceeding consequently to the constitutive idea given by W. Niemiec, deduced by himself partial differential constitutive state equations have the system form [1-3]:

$$\frac{D\mathbf{D}}{Dt} = D_e \nabla^2 \mathbf{D} - \mathbf{D} \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \mathbf{D} \pm \mathbf{J}(t) \quad (1)$$

$$(I) \quad \mathbf{D} \frac{D\mathbf{B}}{Dt} = \mathbf{U}_B \nabla^2 \mathbf{B} - \mathbf{D}\mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{v} \pm S(t) + G_D \operatorname{div} \mathbf{D} + \mathbf{W}_D D_e \nabla^2 \mathbf{D} \quad (2)$$

$$f \operatorname{div} \mathbf{D} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \hat{a} \nabla^2 \mathbf{v} - f \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{D} \operatorname{div} \mathbf{v} + \\ + \hat{b} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} \pm \mathbf{T}(t) - M_B \nabla^2 \mathbf{B} + N_D \nabla^2 \mathbf{D}, \quad (3)$$

where:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} F \text{ (sum of adequate gradient operations) [1-3], [4-5], [15].}$$

For the system (I) the constitutive invariance is obtainable by the use of the condition for every state variable following derivative $\frac{D}{Dt} = 0$ [1-3], [4-5], [15] and possesses the continuity two different cases, given by the two different systems of the partial differential equations of the continuity:

— for the variable coefficients

$$D_e = D_e(x, y, z, t), \mathbf{U}_B = \mathbf{U}_B(x, y, z, t), \mathbf{W}_D = \mathbf{W}_D(x, y, z, t), \gamma = \gamma(x, y, z, t), \\ \varepsilon = \varepsilon(x, y, z, t), G_D = G_D(x, y, z, t), M_B = M_B(x, y, z, t) \text{ and } N_D = N_D(x, y, z, t)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \operatorname{grad} D_e (\operatorname{grad}) \mathbf{D} - (\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{D} + \mathbf{D} \operatorname{grad} \left(\frac{\gamma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \right) \Big|_{\mathbf{n}(z)} \quad (1')$$

$$(II) \quad \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\text{grad}) \mathbf{U}_B (\text{grad}) \mathbf{B} - \mathbf{D} (\mathbf{v} \text{grad}) \mathbf{B} + \mathbf{D} \text{grad} G_D [+ \mathbf{W}_D \text{grad} D_e (\text{grad}) \mathbf{D}]^* \quad (2')$$

$$f \text{div} \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -f \text{div} \mathbf{D} (\mathbf{v} \text{grad}) \mathbf{v} - \text{grad} M_B (\text{grad}) \mathbf{B} + \text{grad} N_D (\text{grad}) \mathbf{D} \quad (3')$$

[]* — the included element only for the complete presentation of the electromagnetic field energy continuity from the diffusion phenomenon.

— **for the constant coefficients**

$D_e \neq D_e(x, y, z, t)$, $\mathbf{U}_B \neq \mathbf{U}_B(x, y, z, t)$, $\mathbf{W}_D \neq \mathbf{W}_D(x, y, z, t)$, $\gamma \neq \gamma(x, y, z, t)$, $\varepsilon \neq \varepsilon(x, y, z, t)$, $G_D \neq G_D(x, y, z, t)$, $M_B \neq M_B(x, y, z, t)$ and $N_D \neq N_D(x, y, z, t)$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \text{grad}) \mathbf{D} \quad (1'')$$

$$(III) \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \text{grad}) \mathbf{B} \quad (2'')$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \text{grad}) \mathbf{v}. \quad (3'')$$

The above considerations enable us to formulate the idea that the system of the partial differential constitutive state equations in the forms of the following derivatives (I) is invariant to its variable — the system (II) or constant — the system (III), physical coefficients. As a consequence of this idea the physical coefficients for the analytical solution of the system (I) are assumed as being constant.

2. THE PROBLEMS OF THE ANALYTICAL SOLUTION OF THE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE J.C. MAXWELL'S ELECTROMAGNETIC FIELD THEORY

In this chapter of the article we consider the transformations of the partial differential equations of the J. C. Maxwell's electromagnetic field theory to their analytical solutions according to the literature studies of these problems [6–14]. As an outset of the considerations let us recall the complete system of Maxwell's partial differential equations of the electromagnetic field:

$$c_f \text{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi [\mathbf{j} + \mathbf{j}^{(e)}] \quad (2.1)$$

$$c_f \text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\text{div} \mathbf{D} = 4\pi \varrho \quad (2.4)$$

by c_f — the velocity of the light in space ($c_f = 300000 \text{ km/s}$) and additional material equations:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.7)$$

and the continuity partial differential equation

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (2.8)$$

The literature problems of the solutions of the above presented partial differential equations of the Maxwell's electromagnetic field theory contain two following approaches [6-14]:

Class A. — simplifications by the strong medium assumptions,

Class B. — transformations to the literature known partial differential equations.

According to the literature studies [6-14], Class A can be presented by the cases:

Case A.1. Environmental medium is isotropic and homogeneous:

The literature assumes here that $\varepsilon_0 \varepsilon = \text{const}$, $\mu_0 \mu = \text{const}$ and $\sigma = \text{const}$ (2.9), or more significantly for the cosmic space there are assumed $\varepsilon_0 \varepsilon = 1$, $\mu_0 \mu = 1$ with $\sigma = 0$ (2.10) by the absence of the external electric currents and electric charges.

In this case the partial differential equations of the Maxwell's electromagnetic field theory reduce themselves to:

$$c_f \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.11)$$

$$c_f \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2.12)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad (2.13)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (2.14)$$

Case A.2. The statical case

By the elimination of the elements containing the time operations from the Maxwell's partial differential equations of the electromagnetic field, these equations can be written as:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (2.15)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \varrho \quad (2.16)$$

$$c_f \operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi [\sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}^{(e)}] \quad (2.17)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.18)$$

as a consequence of the assumption that $\sigma = 0$ there is to obtain here

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (2.19)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\Pi\rho \quad (2.20)$$

$$c_f \operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\Pi \mathbf{j} \quad (2.21)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.22)$$

Case A.3. The homogeneous electromagnetic medium.

With the assumption that $\rho = 0$ and $\mathbf{j}^{(e)} = 0$ from the eq. (2.1) we have:

$$c_f \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{E} + 4\Pi \sigma \operatorname{rot} \mathbf{E}. \quad (2.23)$$

Proceeding consequently to the equation

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H} - \Delta \mathbf{H} \quad (2.24)$$

and the eq. (2.2), one obtains the formula

$$c_f^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H} - c_f^2 \Delta \mathbf{H} = -\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - 4\Pi \sigma \mu_0 \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2.25)$$

which subsequently can be modified to

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{1}{a_f^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \frac{4\Pi \sigma \mu_0 \mu}{c_f^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (2.26)$$

because

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad \text{and} \quad a_f^2 = \frac{c_f^2}{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}.$$

In continuation of the considerations the literature gives

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{a_f^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{4\Pi \sigma \mu_0 \mu}{c_f^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.27)$$

Because the coordinates H_x, H_y, H_z and E_x, E_y, E_z , the literature introduces a function " $U = U(x, y, z, t)$ " of each coordinate fulfilling the partial differential equation

$$\Delta U = \frac{1}{a_f^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{4\Pi \sigma \mu_0 \mu}{c_f^2} \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (2.28)$$

Continuing the literature studies it is possible to find there an assumption of " $\sigma = 0$ " and the interpretation of the eq. (2.28) from there is:

$$\Delta U = \frac{1}{a_f^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (2.29)$$

and this equation presents himself the propagation of the electromagnetic wave with the velocity

$$a_f = \frac{c_f}{|\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu|} \quad (2.30)$$

without dissipation.

In an other case for $\sigma \gg 0$ and $a_f \rightarrow 0$ there is to obtain from the Maxwell's electromagnetic field theory here:

$$\Delta U = \frac{4\pi\sigma\mu_0\mu}{c_f^2} \frac{\partial U}{\partial t} \quad (2.31)$$

for "U" being one of the coordinates H_x, H_y, H_z or E_x, E_y, E_z .

Case A.4. The diffraction problem

In the steady states for the diffraction problem, the eq. (2.29) is fulfilled by the function:

$$U = S(x, y, z)e^{i\omega t} \quad (2.32)$$

which modifies subsequently the eq. (2.28) to its elliptic form:

$$\Delta S + (r^2 + iq^2)S = 0 \quad (2.33)$$

by:

$$r^2 = \frac{\omega^2}{a_f^2} \quad \text{and} \quad q^2 = \frac{4\pi\sigma\mu_0\mu\omega}{c_f^2}$$

Case A.5. The idea of oscillator

In the Maxwell's theory of the propagation of the electromagnetic waves the literature introduces the idea of the oscillator being strictly connected to the idea of linear electric currents. The oscillator represents infinitely small electric current conductor in its length. As an introduction, let us introduce rectilinear electric current conductor with time variable electric current. For two electric charges "+e" and "-e" the oscillator can be characterized by the momentum:

$$\mathbf{p}(t) = e(t)l_R. \quad (2.34)$$

Because the intensity of electric current can be given as:

$$I(t) = \dot{e}(t) \quad (2.35)$$

so that

$$\frac{dp}{dt} = \mathbf{I}_0(t) \quad (2.36)$$

with additional relation

$$\mathbf{I}_0(t) = I(t)\mathbf{L}_R, \quad (2.37)$$

where: the relation (2.37) is called the momentum of the electric current, $\mathbf{L}_R$ — length of the rectilinear electric current conductor. In continuation the literature

considers the electromagnetic field which is made by the oscillator and characterized by the momentum

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 f(t) \quad (2.38)$$

inside unlimited space by the assumption that $\sigma = 0$, $\varepsilon_0 \varepsilon = 1$ and $\mu_0 \mu = 1$. Outside the electric current conductor " $\mathbf{L}_R$, the electromagnetic field by the Maxwell's partial differential equations in the below form has been described:

$$c_f \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{and} \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad (2.39)$$

where

$$c_f \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad \text{and} \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (2.40)$$

Case A.6. Combined electromagnetic medium problems.

In many literature solutions of the Maxwell's partial differential equations of the electromagnetic field there is a possibility to meet a lot of combinations of the scientific questions of the Cases A.1–A.5, which can be generally divided to the following groups:

- the different electromagnetic medium properties and adequate assumptions,
- the different volume Ω_R and time "t" conditions of conductor,
- the different surface $\mathbf{F}_R$ and time "t" conditions of conductor,
- the different linear $\mathbf{L}_R$ and time "t" conditions of conductor.

For the Class B of the solution problems of the Maxwell's partial differential equations we can separate the following cases:

Case B.1. The boundary conditions problems

If the electromagnetic medium is nonhomogeneous, it is necessary to include to the Maxwell's partial differential equations the boundary conditions. On the brim of two different electromagnetic media M_1 and M_2 the following boundary conditions should be fulfilled:

$$E_s^{(1)} = E_s^{(2)} \quad (\text{continuity of the tangent coordinates of the vector } \mathbf{E}), \quad (2.41)$$

$$H_s^{(1)} = H_s^{(2)} \quad (\text{continuity of the tangent coordinates of the vector } \mathbf{H}), \quad (2.42)$$

and consequently

$$B_{n_1}^{(1)} = B_{n_2}^{(2)} \quad (\text{continuity of the normal coordinates of the vector } \mathbf{B}), \quad (2.43)$$

for $D_{n_1}^{(1)}$ and $D_{n_2}^{(2)}$ (continuity of the normal coordinates of the vector $\mathbf{D}$),

$$\text{there is } D_{n_1}^{(1)} - D_{n_2}^{(2)} = 4\pi \rho_s \quad (2.44)$$

where:

$\mathbf{n}_1$ — the normal inside surface orientation vector of the surface F_1 ,

$\mathbf{n}_2$ — the normal inside surface orientation vector of the surface F_2 ,

ϱ_s — the surface density of the electric charge.

The Maxwell's partial differential equations taken together with the boundary conditions allow on the synonymous determination of the electromagnetic field by known the initial state of this field.

Case B.2. The integral forms of the Maxwell's partial differential equations of the electromagnetic field

The literature of the electromagnetic field contains the integral forms of the Maxwell's partial differential equations of this field, written as:

$$c_f \oint_{L_R} \mathbf{H} d\mathbf{s} = 4\pi \iint_{F_R} i dF_R \quad (2.45)$$

and consequently

$$c_f \oint_{L_R} \mathbf{E} d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{F_R} \mathbf{B} dF_R = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (2.46)$$

with

$$i = j_p + j = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + j \quad (2.47)$$

by

$$j_p = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.48)$$

The magnetic flux is defined in literature as follows:

$$\Phi = \iint_{F_R} \mathbf{B} dF_R \quad (2.49)$$

By the closed space of volume Ω_R there is:

$$\oiint_{F_R} \mathbf{B} dF_R = 0 \quad (2.50)$$

and consequently:

$$\oiint_{F_R} \mathbf{D} dF_R = \iiint_{\Omega_R} \text{div} \mathbf{D} d\Omega_R = 4\pi \iiint_{\Omega_R} \varrho d\Omega_R = 4\pi e \quad (2.51)$$

where "e" is complete electric charge inside Ω_R .

Case B.3. The potentials of the electromagnetic field.

This literature approach for the determination of the electromagnetic field needs to find six coordinates of the state vectors "E" and "H". For

the realization of this task we introduce, following the cited literature, the potential fields — vector potential “ $\mathbf{A}^r$ ” and the scalar potential “ φ ”. In continuation, following the cited literature, let us consider the Maxwell’s partial differential equations of the electromagnetic field.

Because “ $\mathbf{H}$ ” is a rotational field which property comes from the condition

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad (2.52)$$

this field can have been presented by the another vector “ $\mathbf{A}^r$ ” fulfilling relation

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}^r. \quad (2.53)$$

Continuing considerations, making use of the formula

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c_f} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.54)$$

there is the ability here to obtain

$$\operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c_f} \frac{\partial \mathbf{A}^r}{\partial t} \right) = 0. \quad (2.55)$$

Concerning the content of the eq. (2.54) we have the ability to define the another formula of the potential field

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c_f} \frac{\partial \mathbf{A}^r}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi \quad (2.56)$$

and after transformations

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c_f} \frac{\partial \mathbf{A}^r}{\partial t}. \quad (2.57)$$

The introduced potentials “ $\mathbf{A}^r$ ” and “ φ ” are not determined synonymously, so that arbitrary chosen function F fulfils:

$$\mathbf{A}^r = \mathbf{A}^r + \operatorname{grad} F \quad \text{and} \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c_f} \frac{\partial F}{\partial t} \quad (2.58)$$

For the synonymous interpretation, the literature introduces additionally so called LORENTZ CONDITION

$$\operatorname{div} \mathbf{A}^r + \frac{1}{c_f} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (2.59)$$

The potentials “ $\mathbf{A}^r$ ” and “ φ ” fulfil together the partial differential equations

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \varrho, \quad (2.60)$$

and

$$\Delta \mathbf{A}^r - \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}^r}{\partial t^2} = -\frac{4\mathbf{I}}{c_f} \mathbf{j}. \quad (2.61)$$

Case B.4. The potential of the linear current conductor

Analysing "the state of the art" of the literature considerations concerning searching of the mathematical methods in the Maxwell's electromagnetic field theory, let us recall the

Case A.5. for which the linear current conductor " $\mathbf{L}_R$ " generates an electromagnetic field being a special case of the oscillator. Outside of the electric current conductor " $\mathbf{L}_R$ " the electromagnetic field is described by the Maxwell's partial differential equations:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c_f} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{with} \quad \text{div } \mathbf{H} = 0 \quad (2.62)$$

and

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c_f} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad \text{with} \quad \text{div } \mathbf{E} = 0. \quad (2.63)$$

For the synonymous determination of the electromagnetic field it is necessary to introduce into the considerations the initial conditions, and let us assume the zero initial conditions of this field. Continuing the analysis of the literature considerations, it is necessary to define the potentials " $\mathbf{A}$ " and " φ " by the state variables " $\mathbf{H}$ " and " $\mathbf{E}$ " of the electromagnetic field:

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}^r \quad (2.64)$$

and

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c_f} \frac{\partial \mathbf{A}^r}{\partial t} - \text{grad } \varphi \quad (2.65)$$

by

$$\text{div } \mathbf{A}^r + \frac{1}{c_f} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (2.66)$$

The external vector potential for the electric current linear conductor " $\mathbf{L}_R$ " fulfils the homogeneous wave equation:

$$\Delta \mathbf{A}^r - \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}^r}{\partial t^2} = 0 \quad (2.67)$$

For the chosen direction " $\mathbf{z}$ " along the line of the electric current conductor " $\mathbf{L}_R$ " there is

$$\mathbf{A}^r = A^r(x, y, z) \mathbf{z}^0 \quad (2.68)$$

where: $\mathbf{z}^0$ — the versor of the axis " $\mathbf{z}$ ".

Now we are looking for the vector potential "A^r" given by the formula:

$$\mathbf{A}^r(Z, t) = \int_{\mathbf{L}_R} A_0^r(Z, Q^R, t) d\mathbf{L}_R(Q^R) \quad \text{for} \quad Z = Z(x, y, z, t). \quad (2.69)$$

The function $\mathbf{A}_0^r(P, Q^R, t)$ should fulfil pertinent to the constant space-time coordinates of the point $Z(x, y, z, t)$ the wave partial differential equation:

$$\Delta \mathbf{A}_0^r - \frac{1}{c_f} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_0^r}{\partial t^2} = 0. \quad (2.70)$$

The solution of the above problem is a time delay vector potential possessing the form

$$\mathbf{A}_0^r(Q^R, Z, t) = \frac{\mathbf{I}_0 \left(t - \frac{r_{Q^R, Z}}{c_f} \right)}{c_f r_{Q^R, Z}} \quad (2.71)$$

where:

$$\mathbf{I}_0(t) = I(t) d\mathbf{L}_R = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{p} \dot{f}(t). \quad (2.72)$$

see chapter of the Case A.5.

The vector potential of the oscillator can, too, be presented in the form

$$\mathbf{A}_0^r = \frac{\mathbf{p}_0 \dot{f}(t - \frac{r}{c_f})}{c_f r} \quad \text{for} \quad r = r_{Q^R, Z}. \quad (2.73)$$

In many scientific works the Authors use so called "polarization potential" or "Hertz's potential", $\overline{\Pi}$, assuming the form

$$\mathbf{A}^r = \frac{1}{c_f} \frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial t} \quad (2.74)$$

which fulfils the subject equation

$$\Delta \overline{\Pi} - \frac{1}{c_f} \frac{\partial^2 \overline{\Pi}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.75)$$

and is connected to the scalar potential " φ " by the formula

$$\varphi = -\text{div } \overline{\Pi} \quad (2.76)$$

In accordance with above, the vectors "E" and "H" of the electromagnetic field are:

$$\mathbf{E} = \text{grad div } \overline{\Pi} - \frac{1}{c_f} \frac{\partial^2 \overline{\Pi}}{\partial t^2} = \text{rot rot } \overline{\Pi} \quad (2.77)$$

and

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c_f} \text{rot } \frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial t}. \quad (2.78)$$

Making use of the eq. (2.73) into our considerations we obtain the following formula of the polarization potential

$$\bar{\Pi}_0 = \frac{\mathbf{p}_0 f(t - \frac{r}{c_f})}{r} \quad \text{so that} \quad \bar{\Pi}_0 = \frac{\mathbf{p}(t - \frac{r}{c_f})}{r} \quad (2.79)$$

Case B.5. The momentum of dipole depending periodically to time

For this subject case we have literature assumption

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 e^{-i\omega t}. \quad (2.80)$$

The formula (2.80) can subsequently be used into the eq. (2.79) to obtain the Hertz vector " $\bar{\Pi}$ " which is consequently applied to the formulae (2.77) and (2.78) for the determination of the vectors " $\mathbf{E}$ " and " $\mathbf{H}$ ". For the counting of the energy stream coming through the surface of the sphere possessing radius " R " and placed in the center of the oscillator, it is necessary to consider the Poynting vector, possessing the value

$$S = \frac{c_f}{4\bar{\Pi}} |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = \frac{c_f}{4\bar{\Pi}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}. \quad (2.81)$$

The relation (2.81) is, next step of the literature considerations, integrated on the surface of the sphere.

Case B.6. Combined mathematical problems

Analysing "the state of the art" of the literature of the electromagnetic field it is possible to noticed there a lot of combined mathematical problems, there.

It comes from the assumptions of the literature considerations of the different real problems of the electromagnetic field:

- combined properties of the electromagnetic media,
- combined geometric problems of the apparatuses of the appearance and existence of this field,
- different applications of the obtained analytical results, and are many times very critical appreciated by their own authors [6-14].

3. THE ANALYTICAL SOLUTION OF THE PARTIAL DIFFERENTIAL CONSTITUTIVE STATE EQUATIONS OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD DEDUCED BY W. NIEMIEC

In the aims of this chapter we concentrate ourselves on the solution problems of the system of partial differential constitutive state equations of the electromagnetic field deduced by Professor Dr. Eng. Waclaw NIEMIEC and presented in

[1-3]. The solution of this system of partial differential constitutive state equations in work [3] has been printed out. The content of this chapter is devoted for the discussion of the superiority of:

- originality of the analytical solution,
- precision of the analytical solution,
- complete information obtained from this solution about the electromagnetic field,
- independence of this solution to the shapes of so called working space volume-time of this electromagnetic field apparatuses,
- conceiving both: local source problems and global physical phenomena problems together,
- bringing into relief the initial conditions and the initial and boundary conditions problems,

from the analytical solution of the partial differential constitutive state equations of the electromagnetic field deduced by Professor Dr. Eng. Waław Niemiec [1-3], over existing in the literature analytical solutions of the electromagnetic field considered in Chapter 2.

3.1. THE SOLUTION ANALYSIS OF THE SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL CONSTITUTIVE STATE EQUATIONS OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD DEDUCED BY W. NIEMIEC

As an outset let us recall the subject system of partial differential constitutive state equations of the electromagnetic field [1-3]:

$$\frac{D\mathbf{D}}{Dt} = D_e \nabla^2 \mathbf{D} - \mathbf{D} \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \mathbf{D} \pm \mathbf{J}(t) \quad (1)$$

$$(I) \quad \mathbf{D} \frac{D\mathbf{B}}{Dt} = \mathbf{U}_B \nabla^2 \mathbf{B} - \mathbf{D} \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{v} \pm S(t) + G_D \operatorname{div} \mathbf{D} + \mathbf{W}_D D_e \nabla^2 \mathbf{D} \quad (2)$$

$$f \operatorname{div} \mathbf{D} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \hat{a} \nabla^2 \mathbf{v} - f \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{D} \operatorname{div} \mathbf{v} + \hat{b} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} \pm \mathbf{T}(t) - M_B \nabla^2 \mathbf{B} + N_D \nabla^2 \mathbf{D}, \quad (3)$$

where:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad}_F \text{ (sum of adequate gradient operations) [1-3], [4-5], [15].}$$

For the system of the partial differential constitutive state equations (I) the constitutive invariance to its physical coefficients by the systems of the partial differential equations of the continuity (II) or (III), has been given — see Chapter 1, INTRODUCTION. As a consequence of the utilization of this point of view the physical coefficients of the system (I) are assumed to be constant for its analytical solution.

3.1.1. The source functions for the electromagnetic field

According to the constitutive procedure, we have to consider the source functions acting inside the locally selected volume-time element — phenomenally closed (the influences of every physical phenomenon of the state variables being the coordinates of the state variables state vector can be treated in the separate way) $\bar{\Omega}_{(a,b,c)t}$ which can be equivalently transformed to the point $Z(x, y, z, t)$ being its geometric center. In the working space volume-time of the apparatuses of the electromagnetic field Ω_{Rt} the following relation is fulfilled:

$$Z(x, y, z, t) \in \bar{\Omega}_{(a,b,c)t} \in \Omega_{Rt}. \quad (3.1.1.1)$$

It is evident that for the constant coordinates values $x = a, y = b, z = c$, the below state vector of the electromagnetic field remains constant:

$$\begin{bmatrix} \varrho(a, b, c) \\ \mathbf{D}(a, b, c) \\ \mathbf{B}(a, b, c) \\ \mathbf{v}(a, b, c) \end{bmatrix} = \text{constant} \quad (3.1.1.2)$$

and the space partial differential operations are equal to zero

$$\nabla \begin{bmatrix} \varrho(a, b, c) \\ \mathbf{D}(a, b, c) \\ \mathbf{B}(a, b, c) \\ \mathbf{v}(a, b, c) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.1.1.3)$$

and consequently to this approach the system (I) is transformed to its source form:

The source functions:

$$\begin{aligned} \text{(I}^s\text{)} \quad & \frac{d\mathbf{D}}{dt} = \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \mathbf{D} \pm \mathbf{J}(t) & (1) \quad \mathbf{D}^z(t), \mathbf{B}^z(t), \mathbf{v}^z(t), \varrho^z(t). \\ & \mathbf{D} \frac{d\mathbf{B}}{dt} = \pm S(t) & (2) \\ & f\varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \pm \mathbf{T}(t) & (3) \\ & \frac{d\varrho}{dt} = \pm J_P(t) & (4) \end{aligned}$$

The initial conditions: $\mathbf{D}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{v}_0, \varrho_0$.

REMARK: For the integration of the eq. (I^s.2) sign modulus of the eq. (I^s.1) is used and consequently for the eq. (I^s.3) is applied the modulus of the eq. (I^s.4) — both cases because the possibility of inverse transformation of the electromagnetic field.

As the consequence of the above idea, the solution of the system (I^s) gives the source functions:

— for the electric induction vector [3]

$$\mathbf{D}^Z(t) = e^{-\frac{\gamma}{\epsilon_0 \epsilon} t} \left[\pm \int \mathbf{J}(t) e^{-\frac{\gamma}{\epsilon_0 \epsilon} t} dt + \mathbf{D}_c \right] \quad (\text{S.1})$$

where: $\mathbf{D}_c$ — the integration constant vector,

— for the magnetic induction vector

$$\mathbf{B}^z(t) = \mathbf{B}_0 \pm \int_0^t \frac{S(t)}{|\mathbf{D}^z(t)|_s} dt, \quad (\text{S.2})$$

where: $|\cdot|_s$ — sign modulus only,

— for the field vector velocity

$$\mathbf{v}^z(t) = \mathbf{v}_0 \pm \int_0^t \frac{\mathbf{T}(t)}{f|\varrho^z(t)|} dt \quad (\text{S.3})$$

where:

$$\varrho^z(t) = \varrho_0 \pm \int_0^t J_p(t) dt$$

and $J_p(t)$ — the scalar value of the vector $\mathbf{J}(t)$.

The identical considerations for the boundary control problems by the fixed dimensions of the surface $\mathbf{F}_{Rt}$ of the working space volume-time Ω_{Rt} are valid.

3.1.2. THE ANALYSIS OF THE HOMOGENEOUS PART OF THE SYSTEM (I)

The homogeneous part of the system (I) can be written as follows:

$$\frac{D\mathbf{D}}{Dt} = D_e \nabla^2 \mathbf{D} - \mathbf{D} \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (1)$$

$$(\text{I}^h) \quad \mathbf{D} \frac{D\mathbf{B}}{Dt} = \mathbf{U}_B \nabla^2 \mathbf{B} - \mathbf{D}\mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{v} + G_D \operatorname{div} \mathbf{D} + \mathbf{W}_D D_e \nabla^2 \mathbf{D} \quad (2)$$

$$f \operatorname{div} \mathbf{D} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \hat{a} \nabla^2 \mathbf{v} - f \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{D} \operatorname{div} \mathbf{v} + \hat{b} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - M_B \nabla^2 \mathbf{B} + N_D \nabla^2 \mathbf{D} \quad (3)$$

where:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \mp (\text{sum of adequate gradient operations}) [1-3], [4-5], [15].$$

In continuation of the considerations we introduce the mathematical rotational fields theory [2-5], [15-18]:

- there exists an “A” field — the vector potential of the flow field there, for which
- the relation $\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{A}$ remains valid, and consequently
- the relation $\text{div rot } \mathbf{A} = 0$ is fulfilled.

The above rotational fields relations enable us to formulate the separation of the homogeneous part of the subject system called above (I^h) for:

- the partial differential equations of the potential fields
(variable point $Q(\xi, \eta, \zeta, \tau)$)

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = D_e \nabla^2 \mathbf{D} \quad (1)$$

$$(I_1^{\text{hp}}) \quad \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = U_B \nabla^2 \mathbf{B} + G_D \text{div } \mathbf{D} + W_D D_e \nabla^2 \mathbf{D} \quad (2)$$

$$f \text{div } \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -M_B \nabla^2 \mathbf{B} + N_D \nabla^2 \mathbf{D} \quad (3)$$

For the analysis of the system (I_1^{hp}) the following approaches are possible [2–5], [15–18]:

- 1°. — idealization of the medium — only one physical coefficient or one state variable is different than zero but others are assumed as being zero,
- 2°. — separation of the single physical phenomena — the identical space operations on the same state variables are consequently valid.

As a consequence of the application of the method 1° or 2° for the system (I_1^{hp}) — we have:

- the partial differential equations type diffusion of the electric induction vector

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = D_e \nabla^2 \mathbf{D} \quad (1)$$

$$(I_2^{\text{hp}}) \quad \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = W_D D_e \nabla^2 \mathbf{D} \quad (2)$$

$$f \text{div } \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = N_D \nabla^2 \mathbf{D} \quad (3)$$

- the partial differential equation of the electric induction of the electromagnetic energy continuity

$$\dots\dots\dots (1)$$

$$(I_3^{\text{hp}}) \quad \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = G_D \text{div } \mathbf{D} \quad (2)$$

$$\dots\dots\dots (3)$$

— the partial differential equations type diffusion of the magnetic induction vector

..... (1)

(I^{hp}₄) $D \frac{\partial B}{\partial t} = U_B \nabla^2 B$ (2)

$f \operatorname{div} D \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -M_B \nabla^2 B$ (3)

— the partial differential equations in the forms of the following derivatives of the rotational field (variable point $Q'(\xi', \eta', \zeta', \tau)$)

From the system (I^h) it is possible to obtain for this case:

$\frac{DD}{Dt} = -D \operatorname{div} \mathbf{v}$ (1)

(I^{hr}) $D \frac{DB}{Dt} = -DB \operatorname{div} \mathbf{v}$ (2)

$f \operatorname{div} D \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \hat{a} \nabla^2 \mathbf{v} - f \mathbf{v} \operatorname{div} D \operatorname{div} \mathbf{v} + \hat{b} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}$ (3)

where:

$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \quad [1-3], [4-5], [15].$

3.2. THE COMPLETE SOLUTION OF THE SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL CONSTITUTIVE STATE EQUATIONS OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD DEDUCED BY W. NIEMIEC

The analytical solutions of the phenomenal partial differential equations of (I^{hp}₂), (I^{hp}₃) and (I^{hp}₄) — for the potential fields and the systems (I^{hr}) — for the rotational field, pertinent to the source functions given by the formulae (S.1), (S.2) and (S.3) are the outset basis for the construction of the complete analytical solution of the system of the partial differential constitutive state equations for the electromagnetic field (I).

For the analytical complete solution of the system (I) the following state vector of the electromagnetic field is used:

$[\hat{\mathbf{V}}] = \begin{bmatrix} \text{Density of electric charge,} \\ \text{Induction vector} \\ \text{of electric field,} \\ \text{Induction vector} \\ \text{of magnetic field,} \\ \text{Field vector velocity} \\ \text{of electromagnetic medium.} \end{bmatrix} . \quad (3.2.1)$

The state vector $[\hat{\mathbf{V}}]$ possesses the coordinates of:

- the physical phenomena not taking parts into considerations, or consequently,
- the places without relations between physical phenomena, too.

On the basis of the above presented state vector of the electromagnetic field the complete solution of the system (I) contains:

- the source functions inside $\bar{\Omega}_{(a,b,c)t} \in \Omega_{Rt}$,
- the boundary source functions on the brim $\mathbf{F}_{Rt}$ of Ω_{Rt} ,
- the analytical phenomenal solutions of the potential fields,
- the analytical phenomenal solutions of the rotational field. In concord with the above presented ideas the complete solution of the electromagnetic field can be written as follows:

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{c} \text{State vector} \\ \text{of complete} \\ \text{solution of} \\ \hat{\mathbf{V}} \\ \text{state vector} \\ \text{coordinates} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{State vector} \\ \text{of source} \\ \text{functions in point} \\ Z(x, y, z, t) \\ \text{of} \\ \hat{\mathbf{V}}_Z \\ \text{state vector} \\ \text{coordinates} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{State vector of} \\ \text{boundary source} \\ \text{functions in point} \\ R(x, y, z, t) \\ \text{of} \\ \hat{\mathbf{V}}_R \\ \text{state vector} \\ \text{coordinates} \end{array} \right] + \\
 & + \left[\begin{array}{c} \text{State vector of phenomenal} \\ \text{solutions of potential fields} \\ Z \leftarrow Q \rightarrow R \\ \text{or} \\ \hat{\mathbf{V}}_{ZQR} \\ \text{state vector coordinates} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{State vector of phenomenal} \\ \text{solutions of rotational field} \\ Z \leftarrow Q' \rightarrow R \\ \text{or} \\ \hat{\mathbf{V}}_{ZQ'R} \\ \text{state vector coordinates} \end{array} \right] \quad (3.2.2)
 \end{aligned}$$

On the basis of the formula (3.2.2) we have the ability to compare the originalities and the features of the analytical solutions of the Maxwell's partial differential equations and the partial differential constitutive state equations deduced by Waław Niemiec [1-3], for the electromagnetic field.

4. COMPARISON OF THE FEATURES OF THE ANALYTICAL SOLUTION OF THE MAXWELL'S PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS TO THE ANALYTICAL SOLUTION OF THE DEDUCED BY W. NIEMIEC PARTIAL DIFFERENTIAL CONSTITUTIVE STATE EQUATIONS OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD

Pertinent to the Chapter 6 in Part I of this article [1] we consider the existing in the subject literature of the electromagnetic field the analytical solutions type Cases A or Cases B of the Maxwell's partial differential equations of the electromagnetic field problems, to compare them with the analytical solution of

the partial differential constitutive state equations of the electromagnetic field deduced by Professor Dr. Eng. Wacław Niemiec [1-3].

The following comparative criterions, pertinent to Nobel Prize for Physics, for above analytical solutions have been introduced [21]:

- the source functions and the boundary source functions,
- the physical phenomena of the potential field and the rotational field,
- the space-time local and global problems,
- the mathematical methods and assumptions,
- the area of applications and others.

The detailed discussion of the above comparative aspects of the analytical solutions obtained from J.C. Maxwell's and W. Niemiec's electromagnetic field theories in Table 1, have been placed.

Table 1

Comparison of some features of the analytical solutions of the J.C. Maxwell's partial differential equations and the partial differential constitutive state equations deduced by W. Niemiec [1-3] for the electromagnetic field

Nr	Theories Features of analytical solutions	Maxwell's electromagnetic field theory	Niemiec's constitutive distributed parameter electromagnetic field theory
	1	2	3
1.	All theories features placed in Table 1 of Part I of this article [1] remain valid	YES	YES
2.	Limited and unlimited space-time conditions in the analytical solution problems.	YES	YES
3.	Assumption of constant physical coefficients in all analytical solutions from constitutive invariance.	NO	YES
4.	Local source functions analytical solutions.	NO	YES
5.	Global phenomenal analytical solutions.	YES	YES
6.	Both local source functions and global phenomenal analytical solutions.	NO	YES
7.	State vector forms of source, phenomenal and complete analytical solutions.	NO	YES

	1	2	3
8.	Decompositions of the system of basic equations for: — source equations, — homogeneous equations which are disposed to: — potential fields, — rotational fields, linear equations.	NO	YES
9.	Common norm of eigenfunctions for phenomenal solutions of potential fields.	NO	YES
10.	Isotropic and anisotropic Green tensors for phenomenal solutions of rotational fields.	NO	YES
11.	Physical Green function method for all analytical phenomenal solutions.	NO	YES
12.	Initial and boundary conditions — every physical phenomenon and whole electromagnetic field by pertinent Green functions.	NO	YES
13.	Locally distributed parameter control problems of source.	NO	YES
14.	Yield and quality processing of electromagnetic field by use of physical phenomena.	NO	YES
15.	Summation of effects of single physical phenomena treated separately as a state vector with pertinent coordinates to the state vector of complete solution of electromagnetic field.	NO	YES
16.	High and adjustable precisions of phenomenal and complete solutions.	NO	YES
17.	Others which are not formulated yet.	Criteria YES or NO	Criteria YES or NO

6. CONCLUSIONS

The above made comparative studies of the "state of art" of the analytical solution cases of the J.C. Maxwell's partial differential equations of the electro-

magnetic field to those ones analytical solutions for the partial differential constitutive state equations deduced by W. Niemiec [2] and solved by author [3] for the electromagnetic field, allow for the presentation of the scientific revolution changes made in the electromagnetic field theory not only in the part devoted for the construction of W. Niemiec original partial differential constitutive state equations of this field but also their original analytical solutions.

These revolution scientific changes come from the idea that the original partial differential constitutive state equations deduced in [2], have been solved in the original way — analytically preserving their constitutive features [3].

It should be stressed here according to the Table 1, that analytical solutions obtained by W. Niemiec, possessing [3], [5]:

- constitutive features of system (I) [16–18];
- the source functions for the source state vector in the point $Z(x, y, z, t) \in \bar{\Omega}_{(a,b,c)t} \in \Omega_{Rt}$,
- the boundary source functions for the boundary source state vector in the point $R(x, y, z, t) \in \mathbf{F}_{Rt} \in \Omega_{Rt}$,
- constitutive transformations of the homogeneous part of the partial differential constitutive state equations of the electromagnetic field for the physically determined **phenomenal linear partial differential equations of [16–18]**;
- the potential fields,
- the rotational flow field, by their constant physical coefficients,
- connection of the eigenfunctions to their “a,b,c” dimensions for the time “t” of the locally selected volume-time element $\bar{\Omega}_{(a,b,c)t}$,
- supporting of the all: source, boundary, phenomenal and complete solutions of the state variables of the electromagnetic field, have revolution scientific significance.

As a consequence of this original approach, analytical solutions of the deduced partial differential constitutive state equations of the electromagnetic field:

- possess the features of the validity for all possible cases,
- give the complete information about the electromagnetic field physical features,
- allow on the identification of the parameters of the electromagnetic field for their apparatuses [19–20],
- allow to formulate the control processing of the yield and quality problems of the appearance and existence of the electromagnetic field [19–20].

Such great importance of the analytical solutions of all questions for the electromagnetic field can never be found from the solutions of J.C. Maxwell’s partial differential equations solved analytically or in any other way [6–14].

The above mentioned ideas appear straight not only from the world literature of the electromagnetic field but also from the correspondence obtained by W. Niemiec from Professors of Scientific Centers from USA, Germany and Japan which had been the grounds for the formalization of the content of the Table 1, because:

- obtained by other authors from the Maxwell's partial differential equations of the electromagnetic field analytical solutions consider only the particular cases of the applications of the electromagnetic field;
 - under strong medium assumptions and simplifications,
 - with the separation of single physical phenomena or ideas, as it has been seen from the Cases A.1, A.2, A.3, A.4, A.5 and A.6,
- the mathematical methods used by the other Authors for Maxwell's partial differential equations of the electromagnetic field;
- do not contain the source and the boundary source problems,
- do not possess the physical interpretation for all state variables of the electromagnetic field,
- do not fulfil the conditions of the general approach, pertinent to the considered in the article Cases B.1, B.2, B.3, B.4, B.5 and B.6.

In the continuation, it is necessary to stress here the scientific revolution of the results obtained by W. Niemiec from the analytical solutions of partial differential constitutive state equations of the electromagnetic field comparing to the analytical solutions of the J.C. Maxwell's partial differential equations of the electromagnetic field made by other Authors in their works [6–14].

Because every Author should know the position of his scientific work in the world scientific literature of the considered subject, studying the criterions of the Nobel Prize Physics Committee to award this kind Prize, every competent Reader of this Part of the article may conclude that W. Niemiec's scientific articles of the constitutive distributed parameter theory of the electromagnetic field, deduced in [2] and analysed in Part I [1] and solved in its partial differential constitutive state equations from, analytically in [3] and consequently analysed in this Part of the article fulfil; every Part separately and both Part I and Part II together all conditions to be awarded by the Nobel Prize Committee of Physics p. 21].

NOTATION

$\mathbf{D}$	— vector of the induction of the electric field
$\mathbf{B}$	— vector of the induction of the magnetic field
$\mathbf{v}$	— field vector velocity of the electromagnetic medium
D_e	— coefficient of the electric charge diffusion
γ	— coefficient of the electric conductivity (or σ)

$\frac{\text{C}}{\text{m}^2}$,
$\frac{\text{T}}{\text{s}}$,
$\frac{\text{m}}{\text{s}}$,
$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$,
$\frac{\text{A}}{\sqrt{\text{m}}}$,

ε_0	— coefficient of the absolute electric permeability	$\frac{C}{Vm}$,
ε	— coefficient of the relative electric permeability	
U_B	— vector coefficient of the energy distribution of the magnetic induction A ,	
G_D	— coefficient of the energy of the conductivity and permeability for the electric induction	$\frac{V}{m}$,
W_D	— vector coefficient of the energy distribution of the electric charge diffusion	$\frac{Vs}{m^2}$,
f	— coefficient of the mass of the electric charge	$\frac{kg}{C}$,
$\hat{a}, \hat{b}$	— coefficients of the material properties of the electromagnetic medium	$\frac{Ns}{m^2}$,
M_B	— coefficient of the force of the magnetic induction	$\frac{Nm}{Vs}$,
N_D	— coefficient of the force of the electric induction	$\frac{Nm}{C}$,
η_w	— coefficient of the dynamic viscosity	$\frac{Ns}{m^2}$,
h	— the crystal press module	$\frac{N}{m^2}$,
$\bar{k}$	— the Poisson constant of the crystal, for the crystal medium	

$$\hat{a} = \frac{h}{p} \quad \text{and} \quad \hat{b} = \frac{h\bar{k}}{p(\bar{k} - 2)}$$

by p — the unitary time transformation $\frac{1}{s}$,
and **for the fluid medium**

$$\hat{a} = \eta_w \quad \text{and} \quad \hat{b} = \frac{\eta_w}{3}$$

$J(t)$	— the outside source of the electric charge on the chosen external oriented surface	$\frac{A}{m^2}$,
$S(t)$	— the outside source of the electromagnetic energy	$\frac{J}{m^4}$,
$T(t)$	— the outside source of the momentum of the electromagnetic field	$\frac{N}{m^3}$,
$\bar{\Omega}_{(x,y,z)t}$	— the locally selected volume-time element phenomenally closed (every phenomenon can be treated in the separate way) around the source point $Z(x, y, z, t)$ of the processing of the electromagnetic field	$m^3 - s$,
$(a, b, c)t$	— the dimensions of the locally selected volume-time element $\bar{\Omega}_{(a,b,c)t}$ by $a = x, y = b, z = c$ for the time “ t ”	m, m, m, s ,
$F_{(a,b,c)t}$	— the external oriented surface of the locally selected volume-time element $\bar{\Omega}_{(a,b,c)t}$	$m^2 - s$,
$n^{(z)}$	— the normal external surface orientation vector of the surface $F_{(a,b,c)t}$,	
Ω_{Rt}	— the working space volume-time of the apparatuses of the electromagnetic field	$m^3 - s$,
F_{Rt}	— the external oriented surface of Ω_{Rt}	$m^2 - s$,
$R(x, y, z, t)$	— the boundary source point of F_{Rt}	
$n_R^{(z)}$	— the normal external surface orientation vector of the surface F_{Rt}	

(x, y, z, t) — the constant space-time coordinates of Ω_{Rt} m, m, m, s,
 t — time s,

REFERENCES — Part II

1. W. Niemiec: *Part I of this article*
2. W. Niemiec: *On the constitutive distributed parameter modelling of the electromagnetic field. Part I. The constitutive distributed parameter mathematical model of the electromagnetic field.* Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji, 1991, t. 37, Z. 3-4, ss. 351-368.
3. W. Niemiec: *On the constitutive distributed parameter modelling of the electromagnetic field. Part II. The solution of model partial differential constitutive state equations of the electromagnetic field.* Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji, 1991, t. 37, Z. 3-4, ss. 369-391
4. W. Niemiec: *On the constitutive distributed parameter modelling of the singlecomponent real processes. Part I. The partial differential constitutive state equations describing the singlecomponent real processes.* Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji, 1993, 39, Z. 1, ss. 131-151
5. W. Niemiec: *On the constitutive distributed parameter modelling of the singlecomponent real processes. Part II. The solution of partial differential constitutive state equations for the single component real processes.* Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji, 1993, t. 39, Z. 1, ss. 155-186
6. R. Sikora: *Teoria pola elektromagnetycznego.* WNT, Warszawa, 1985
7. R. Matusiak: *Teoria pola elektromagnetycznego.* WNT, Warszawa, 1976
8. J.D. Jackson: *Elektrodynamika klasyczna.* PWN, Warszawa, 1982
9. E.M. Purcell: *Elektryczność i magnetyzm.* PWN, Warszawa, 1974
10. R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands: *Feynmana wykłady z fizyki. Tom II — Część I.* PWN, Warszawa, 1974
11. A.N. Tichonow, A.A. Samarski: *Równanie fizyki matematycznej.* PWN, Warszawa, 1963
12. L.D. Landau, E.M. Lifszyc: *Krótki kurs fizyki teoretycznej. Tom I. Mechanika.* Elektrodynamika. PWN, Warszawa, 1986
13. N.A. Krall, A.W. Trivelpiece: *Fizyka plazmy.* PWN, Warszawa, 1979.
14. A.W. Czernietski: *Wstęp do fizyki plazmy.* PWN, Warszawa, 1971
15. B. Średniawa: *Hydrodynamika i teoria sprężystości.* PWN, Warszawa, 1977
16. A.J.A. Morgan: *On the construction of constitutive equations for continuous media.* Archiwum Mechaniki Stosowanej, 1965, vol. 17, No. 1, pp. 145-174
17. W. Nowacki: *Dynamiczne zagadnienia termosprężystości.* PWN, Warszawa, 1966
18. W. Nowacki, Z. Oleksiak: *Termodyfuzja w ciałach stałych.* PWN, Warszawa, 1991
19. S. Węgrzyn: *Podstawy automatyki.* PWN, Warszawa, 1974
20. W. Findeisen: *Wielopoziomowe układy sterowania.* WNT, Warszawa, 1974
21. Fact Sheets on Sweden: 1. *Alfred Nobel and the Nobel Prizes.* 2. *Nobelkommitteer.* 3. *Nobel Prizes for Physics.*

W. NIEMIEC

STUDIUM PORÓWNAWCZE KONSTITUTYWNEJ I MAXWELL'OWSKIEJ TEORII
POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGOCZ. II. PORÓWNANIE ZAGADNIEŃ ANALITYCZNYCH ROZWIĄZAŃ KONSTITUTYWNEGO
ROZŁOŻONEGO PARAMETRYCZNIE MODELU DO MAXWELL'OWSKIEGO MODELU
POLA ELEKTRYCZNEGO

Streszczenie

Artykuł zawiera analizę porównawczą rozwiązania analitycznego konstytutywnego rozłożonego parametrycznie modelu matematycznego pola elektromagnetycznego, jaki opracował i wprowadził autor do literaturowego "state of art" rozwiązań analitycznych Maxwell'owskich równań różniczkowych cząstkowych dla tego typu pola. Analizę przeprowadzono według literaturowych kryteriów dla prac naukowych nagradzanych Nagrodami Nobla w zakresie Fizyki.

Autor był Profesorem w Politechnice Śląskiej w Gliwicach, obecnie pracuje w Independent-Education Center, „Knowledge-Science”.

Adres autora do korespondencji z Czytelnikami: 33-300 Nowy Sącz, Polska, ul. Barska 33

Projektowanie cyfrowego filtra SOI o liniowej fazie z uwzględnieniem wymagań dotyczących jego odpowiedzi jednostkowej

FELICJA WYSOCKA-SCHILLAK

*Zakład Elektroniki i Informatyki
Wyższa Szkoła Pedagogiczna, Bydgoszcz*

Otrzymano 1994.01.14

W pracy przedstawiono metodę projektowania cyfrowego dolnoprzepustowego filtra SOI o liniowej fazie i w przybliżeniu równomiernie falistej charakterystyce częstotliwościowej przy jednoczesnym uwzględnieniu warunku, aby energia wydzielona przez pierwszych k próbek odpowiedzi jednostkowej filtra była możliwie minimalna. W metodzie tej zadanie projektowania filtra jest przekształcane w równoważne zadanie polioptymalizacji, do rozwiązania którego jest stosowana metoda przesuwanej funkcji kary. Praca zawiera ponadto opis opracowanego programu ENER oraz przykład obliczeniowy ilustrujący działanie tego programu.

1. WSTĘP

Filtry cyfrowe o skończonym czasie trwania odpowiedzi impulsowej (w skrócie SOI), liniowej charakterystyce fazowej i równomiernie falistej charakterystyce częstotliwościowej są najczęściej projektowane metodami opartymi na algorytmie Remeza [1-4]. Metody te nie umożliwiają jednak uwzględnienia w procesie projektowania żadnych dodatkowych warunków czy ograniczeń ani w dziedzinie czasu ani w dziedzinie częstotliwości.

W wielu zastosowaniach istotne jest jednak uwzględnienie pewnych dodatkowych warunków dotyczących np. odpowiedzi impulsowej czy jednostkowej filtra, lub też jego charakterystyki amplitudowej. W takich przypadkach do projektowania filtrów wykorzystuje się najczęściej metody programowania liniowego [5-8]. Metody te umożliwiają jednak uwzględnienie jedynie tych ograniczeń, które są liniowe.

W niniejszej pracy zaproponowano metodę projektowania dolnoprzepustowego filtra SOI o liniowej fazie i równomiernie falistej charakterystyce często-

tliwościowej, umożliwiającą uwzględnienie dodatkowych warunków w dziedzinie czasu lub w dziedzinie częstotliwości. W odróżnieniu od metod wykorzystujących procedury programowania liniowego, zaproponowana metoda umożliwia również uwzględnienie warunków, które nie są liniowe. Przykładem takich warunków są wymagania dotyczące energii np. energii wydzielanej przez odpowiedź jednostkową filtru [9]. W pracy przedstawiono rozwiązanie zadania zaprojektowania dolnoprzepustowego filtru SOI o liniowej fazie i w przybliżeniu równomiernie falistej charakterystyce częstotliwościowej z jednoczesnym uwzględnieniem takiego właśnie dodatkowego wymagania dotyczącego energii. Podano również opis opracowanego programu ENER oraz przykład obliczeniowy.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Rozpatrzmy dolnoprzepustowy filtr cyfrowy SOI o symetrycznej odpowiedzi impulsowej, której długość N jest liczbą nieparzystą. Charakterystyka częstotliwościowa $H(e^{j\omega})$ takiego filtru jest wyrażona następująco [10, 11]:

$$H(e^{j\omega}) = h(0) + 2 \sum_{n=1}^M h(n) \cos(\omega n) \quad (1)$$

gdzie: $h(n)$ — odpowiedź impulsowa filtru,

$$M = (N - 1)/2,$$

ω — pulsacja unormowana względem częstotliwości próbkowania $F_p(\omega \in \langle 0; \pi \rangle)$.

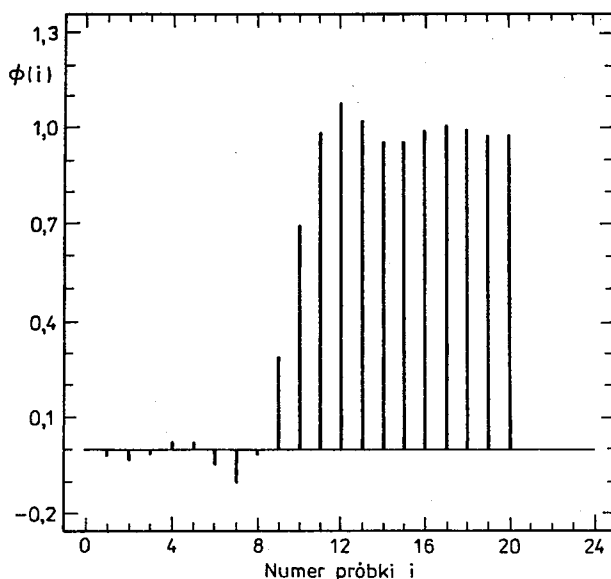
Zadanie zaprojektowania filtru o określonej charakterystyce częstotliwościowej sprowadza się do wyznaczenia odpowiednich wartości współczynników $h(n)$, $n = 0, 1, \dots, M$.

W rozpatrywanym przez nas przypadku żądamy, aby charakterystyka częstotliwościowa projektowanego filtru aproksymowała w sposób w przybliżeniu równomiernie falisty charakterystykę częstotliwościową idealnego filtru dolnoprzepustowego o postaci

$$\tilde{H}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{— w pasmie przepustowym } P = \langle 0; \omega_0 \rangle \\ 0 & \text{— w pasmie zaporowym } S = \langle \omega_s; \pi \rangle, \end{cases} \quad (2)$$

gdzie: ω_p i ω_s — unormowane pulsacje krańcowe odpowiednio pasma przepustowego i zaporowego.

Jednocześnie chcemy, aby energia wydzielona przez pierwszych k próbek odpowiedzi jednostkowej filtru była możliwie minimalna, przy czym k jest numerem próbki, dla której odpowiedź jednostkowa zaczyna monotonicznie rosnąć do wartości 1 (rys. 1).



Rys. 1. Przykładowa odpowiedź jednostkowa filtra dolnoprzepustowego

Energia $\mathcal{P}$ wydzielona przez k próbek odpowiedzi jednostkowej jest określona wzorem

$$\mathcal{P} = \sum_{i=0}^k \Phi^2(i) \quad (3)$$

gdzie $\Phi(i)$ jest próbką odpowiedzi jednostkowej zdefiniowaną następująco

$$\Phi(i) = \sum_{j=0}^i a(j), \quad (4)$$

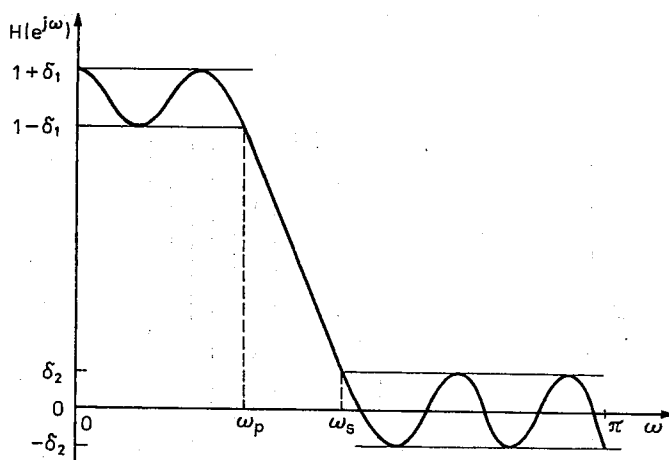
przy czym

$$a(M) = h(0) \text{ i } a(j) = a(N - 1 - j) = h(M - j), \quad j = 0, 1, \dots, M - 1.$$

W przypadku równomiernie falistej aproksymacji idealnej charakterystyki częstotliwościowej charakterystyka aproksymująca ma mieć przebieg pokazany na rysunku 2. Występujące na tym rysunku wielkości δ_1 i δ_2 są maksymalnymi odchyleniami charakterystyki częstotliwościowej projektowanego filtra od charakterystyki częstotliwościowej filtra idealnego, tzn. odpowiednio od wartości 1 w paśmie przepustowym i od wartości zero w paśmie zaporowym.

Oznaczmy przez $Y = [y_1, y_2, \dots, y_{M+1}]^T$ wektor o współrzędnych zdefiniowanych następująco:

$$y_i = h(i - 1), \quad i = 1, 2, \dots, M + 1; \quad (5)$$



Rys. 2. Charakterystyka częstotliwościowa $H(e^{j\omega})$ o przebiegu równomiernie falistym w pasmie przepustowym i zaporowym

a przez $H(\omega, \mathbf{Y})$ charakterystykę częstotliwościową otrzymaną przy przyjęciu we wzorze (1) współczynników o wartościach określonych przez wektor $\mathbf{Y}$. Funkcja błędu $E(\omega)$ może być przedstawiona w postaci:

$$E(\omega) = W(\omega)[\tilde{H}(e^{j\omega}) - H(\omega, \mathbf{Y})]. \quad (6)$$

gdzie:

$$W(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in P = \langle 0, \omega_p \rangle, \\ w = \delta_1/\delta_2, & \omega \in S = \langle \omega_s, \pi \rangle. \end{cases} \quad (7)$$

W rozpatrywanym zadaniu mamy do czynienia z dwoma kryteriami, które powinny być uwzględniane jednocześnie w procesie projektowania filtra. Chcemy bowiem, aby charakterystyka częstotliwościowa projektowanego filtra aproksymowała w sposób w przybliżeniu równomiernie falisty charakterystykę częstotliwościową idealnego filtra dolnoprzepustowego i jednocześnie, aby energia wydzielona przez pierwszych k próbek odpowiedzi jednostkowej filtra była możliwie minimalna. Zadanie aproksymacji sformułujemy w sposób następujący:

Dla zadanych wartości N , β , ω_p , ω_s i w znaleźć wektor $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, \dots, Y_{M+1}]^T$, który minimalizuje

$$\max_{\omega \in P \cup S} |E(\omega)| + \beta \mathcal{P}, \quad (8)$$

gdzie β jest współczynnikiem wagowym.

3. PRZEKSZTAŁCENIE PROBLEMU W ZADANIE POLIOPTYMALIZACJI

Rozpatrywane zadanie projektowania filtra, sformułowane zależnością (8), można przekształcić w odpowiednie zadanie polioptymalizacji z ograniczeniami.

W ogólnym przypadku zadaniem polioptymalizacji (lub też zadaniem optymalizacji wielokryterialnej) nazywamy zadanie polegające na wyborze zespołu zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$ korzystnych z punktu widzenia kilku wskaźników jakości $q_1, q_2, \dots, q_r$ [12]. Uporządkowany zespół zmiennych $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ jest zwykle interpretowany jako wektor lub jako punkt w przestrzeni R^n . Cały zespół wskaźników można uwzględnić jednocześnie tworząc nowy syntetyczny wskaźnik jakości

$$Q(\mathbf{x}) = \tilde{Q}(q_1(\mathbf{x}), q_2(\mathbf{x}), \dots, q_r(\mathbf{x})). \quad (9)$$

Najprostszym syntetycznym wskaźnikiem jakości jest funkcja o postaci [12, 13]:

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^r \beta_i q_i(\mathbf{x}) \quad (10)$$

gdzie $\beta_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, r$) są współczynnikami wagowymi.

W rozpatrywanym przez nas przypadku należy ustalić dwa wskaźniki jakości odpowiadające dwom kryteriom występujących w zadaniu projektowania filtra, tzn. minimalizacji funkcji błędu i jednoczesnej minimalizacji energii wydzielonej przez pierwszych k próbek odpowiedzi jednostkowej filtra. Określanie postaci pierwszego z tych wskaźników rozpoczniemy od podzielenia pasm przepustowego $P = \langle 0, \omega_p \rangle$ i zaporowego $S = \langle \omega_s, \pi \rangle$ na podprzedziały $\Theta_j, j = 1, 2, \dots, J + K$ zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \langle 0; \omega_1 \rangle, \\ \Theta_j &= \langle \omega_{j-1}; \omega_j \rangle, \quad j = 2, 3, \dots, J - 1, \\ \Theta_J &= \langle \omega_{J-1}; \omega_p \rangle, \\ \Theta_{J+1} &= \langle \omega_s; \omega_J \rangle, \\ \Theta_k &= \langle \omega_{k-2}; \omega_{k-1} \rangle, \quad k = J + 2, J + 3, \dots, J + K - 1, \\ \Theta_{J+K} &= \langle \omega_{J+K-2}; \pi \rangle, \end{aligned} \quad (11)$$

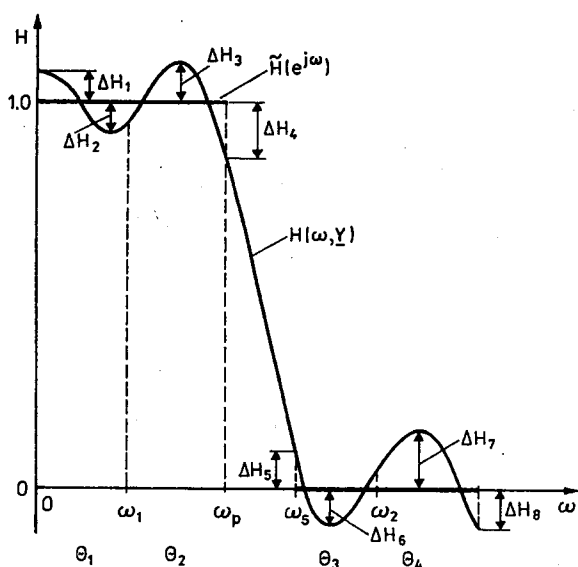
gdzie: $\omega_r, r = 1, 2, \dots, J + K - 2$, ($\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{J+K-2}$) są unormowanymi pulsacjami, dla których spełnione są warunki:

$$(-1)^{m+i} \frac{dH(\omega, \mathbf{Y})}{d\omega} \bigg|_{\omega=\omega_i} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, J - 1, \quad (12)$$

$$(-1)^k \frac{dH(\omega, \mathbf{Y})}{d\omega} \bigg|_{\omega=\omega_k} > 0, \quad k = J, J + 1, \dots, J + K - 2, \quad (13)$$

gdzie:

$$m = \begin{cases} 0 & \text{dla } J \text{ nieparzystego,} \\ 1 & \text{dla } J \text{ parzystego,} \end{cases}$$



Rys. 3. Sposób wyznaczania wartości $\Delta H_i(Y)$, $i = 1, 2, \dots, 8 (M = 5)$

a J i K są liczbami przedziałów Θ_i występujących odpowiednio w pasmie przepustowym i zaporowym. W każdym z tak zdefiniowanych podprzedziałów Θ_i , $i = 1, 2, \dots, J + K$, funkcja $H(e^{j\omega})$ ma dokładnie jedno ekstremum lokalne.

Określmy następnie wartości największych odległości $\Delta H_i(Y)$, $i = 1, 2, \dots, J + K + 4$, pomiędzy charakterystykami $H(e^{j\omega})$ i $H(\omega, Y)$ w sposób następujący (rys. 3):

— w pasmie przepustowym dla J parzystego

$$\Delta H_1(Y) = H(0, Y) - \tilde{H}(e^{j0}), \quad (14)$$

$$\Delta H_k(Y) = \max_{\omega \in \Theta_{k-1}} (\tilde{H}(e^{j\omega}) - H(\omega, Y)), \quad \text{dla } k \text{ parzystego } (k \geq 2 \text{ i } k \leq J + 1), \quad (15)$$

$$\Delta H_k(Y) = \max_{\omega \in \Theta_{k-1}} (H(\omega, Y) - \tilde{H}(e^{j\omega})), \quad \text{dla } k \text{ nieparzystego } (k \geq 3 \text{ i } k \leq J + 1), \quad (16)$$

$$\Delta H_{J+2}(Y) = \tilde{H}(e^{j\omega_p}) - H(\omega_p, Y); \quad (17)$$

— w pasmie przepustowym dla J nieparzystego

$$\Delta H_1(Y) = \tilde{H}(e^{j0}) - H(0, Y), \quad (18)$$

$$\Delta H_k(Y) = \max_{\omega \in \Theta_{k-1}} (H(\omega, Y) - \tilde{H}(e^{j\omega})), \quad \text{dla } k \text{ parzystego } (k \geq 2 \text{ i } k \leq J + 1), \quad (19)$$

$$\Delta H_k(\mathbf{Y}) = \max_{\omega \in \Theta_{k-1}} (H(e^{j\omega}) - H(\omega, \mathbf{Y})),$$

dla k nieparzystego ($k \geq 3$ i $k \leq J+1$), (20)

$$\Delta H_{J+2}(\mathbf{Y}) = \tilde{H}(e^{j\omega_p}) - H(\omega_p, \mathbf{Y}); \quad (21)$$

— w pasmie zaporowym

$$\Delta H_{J+3}(\mathbf{Y}) = H(\omega_s, \mathbf{Y}) - \tilde{H}(e^{j\omega_s}), \quad (22)$$

$$\Delta H_k(\mathbf{Y}) = \max_{\omega \in \Theta_{k-3}} (\tilde{H}(e^{j\omega}) - H(\omega, \mathbf{Y})),$$

dla $k = J+4, J+6, \dots$ ($k \leq J+K+3$), (23)

$$\Delta K_k(\mathbf{Y}) = \max_{\omega \in \Theta_{k-3}} (H(\omega, \mathbf{Y}) - \tilde{H}(e^{j\omega})),$$

dla $k = J+5, J+7, \dots$ ($k \leq J+K+3$), (24)

$$\Delta H_{J+K+4}(\mathbf{Y}) = (-1)^K (\tilde{H}(e^{k\pi}) - H(\pi, \mathbf{Y})). \quad (25)$$

Należy zauważyć, że ponieważ w zadaniu występuje tylko $M+1$ niewiadomych, tzn. współrzędnych wektora $\mathbf{Y}$, możemy żądać wyrównania jedynie $M+2$ odległości. W przypadku równomiernie falistej charakterystyki częstotliwościowej maksymalna liczba ekstremów wynosi $M+3$ [2, 10]. W związku z tym można żądać wyrównania odległości $\Delta H_1(\mathbf{Y}) \div \Delta H_{M+2}(\mathbf{Y})$ lub $\Delta H_2(\mathbf{Y}) \div \Delta H_{M+3}(\mathbf{Y})$.

Zadanie zaprojektowania filtra o równomiernie falistej charakterystyce amplitudowej sprowadza się do znalezienia takiego wektora $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, \dots, Y_{M+1}]^T$, dla którego spełniony jest warunek

$$\Delta \tilde{H}_k(\mathbf{Y}) = \Delta \tilde{H}_l(\mathbf{Y}), \quad (26)$$

$$k, l = \begin{cases} 1, 2, \dots, M+2 & \text{— gdy rozpatrywane są odległości} \\ & \Delta H_1(\mathbf{Y}) + \Delta H_{M+2}(\mathbf{Y}), \\ 2, 3, \dots, M+3 & \text{— gdy rozpatrywane są odległości} \\ & \Delta H_2(\mathbf{Y}) + \Delta H_{M+3}(\mathbf{Y}), \end{cases}$$

gdzie:

$$\Delta \tilde{H}_k(\mathbf{Y}) = \Delta H_k(\mathbf{Y}), \quad k = 1, 2, \dots, J+2 \quad (27)$$

$$\Delta \tilde{H}_k(\mathbf{Y}) = w \Delta H_k(\mathbf{Y}), \quad k = J+3, J+4, \dots, J+K+4, \quad (28)$$

i $w = \delta_1/\delta_2$.

Wprowadźmy teraz funkcję $X_1(\mathbf{Y})$ określoną następująco:

$$X_1(\mathbf{Y}) = \sum_{i=I_0}^I (\Delta \tilde{H}_i(\mathbf{Y}) - \tilde{S})^2, \quad (29)$$

przy czym

$$\tilde{S} = \frac{1}{M+2} \sum_{i=I_0}^I \Delta H_i(\mathbf{Y}), \quad (30)$$

gdzie:

$$I_0 = \begin{cases} 1 & \text{— gdy rozpatrywane są odległości } \Delta H_1(\mathbf{Y}) \div \Delta H_{M+2}(\mathbf{Y}), \\ 2 & \text{— gdy rozpatrywane są odległości } \Delta H_2(\mathbf{Y}) \div \Delta H_{M+3}(\mathbf{Y}), \end{cases}$$

$$I = I_0 + M + 1.$$

Można wykazać, że przy spełnieniu warunku (26) tak określona funkcja $X_1(\mathbf{Y})$ osiąga minimum globalne równe zero. Funkcja $X_1(\mathbf{Y})$ zdefiniowana wzorem (29) może być zastosowana jako pierwszy ze wskaźników jakości. Jako drugi wskaźnik może być użyta funkcja dana wzorem (3).

Rozpatrywane zadanie projektowania filtru, określone zależnością (8), można przekształcić w następujące równoważne zadanie polioptymalizacji z ograniczeniami: Znaleźć wektor $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, \dots, Y_{M+1}]^T$, który minimalizuje syntetyczny wskaźnik jakości $Q(\mathbf{Y}, \beta_1, \beta_2)$ o postaci

$$Q(\mathbf{Y}, \beta_1, \beta_2) = \beta_1 \sum_{i=I_0}^I (\Delta \tilde{H}_i(\mathbf{Y}) - \tilde{S})^2 + \beta_2 \sum_{i=0}^k \left(\sum_{j=0}^i a(j) \right)^2 \quad (31)$$

przy następujących warunkach ograniczających

$$\Delta H_i(\mathbf{Y}) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, J + K + 4 \quad (32)$$

$$\bigwedge_{\omega \in (\omega_p, \omega_s)} H(\omega, \mathbf{Y}) - 1 < 0. \quad (33)$$

Spełnienie ograniczenia (33) zapewnia kontrolę przebiegu funkcji aproksymującej $H(\omega, \mathbf{Y})$ w przedziale (ω_p, ω_s) , tak aby nie przyjmowała ona wartości większych od 1.

Sformułowane powyżej zadanie polioptymalizacji może być traktowane jako zadanie programowania nieliniowego z ograniczeniami o wskaźniku jakości danym wzorem (31). Zadanie tego typu można rozwiązać jedną z metod poszukiwania minimum z ograniczeniami. Otrzymane rozwiązanie jest funkcją przyjętych wartości współczynników wagowych β_1 oraz β_2 . Wartości tych współczynników są przyjmowane w zależności od założonych priorytetów.

Z podanych w literaturze [12, 14, 15] metod, do rozwiązywania rozpatrywanego zadania wybrano metodę przesuwanej funkcji kary. Metoda ta uważana jest bowiem za jedną z najbardziej efektywnych metod poszukiwania minimum z ograniczeniami [14]. Umożliwia ona sprowadzenie zadania z ograniczeniami do ciągu zadań bez ograniczeń poprzez odpowiednią modyfikację funkcji celu. Zadania programowania nieliniowego bez ograniczeń rozwiązywano metodą gradientu sprzężonego Polaka-Ribiery [12, 14, 15].

Początkowe wartości współrzędnych wektora $\mathbf{Y}$, służące jako punkt startowy w rozwiązywaniu zadania programowania nieliniowego, wyznaczono przybliżając sumą częściową szeregu Fouriera funkcję $H_0(e^{j\omega})$ określoną zależnością:

$$\tilde{H}_0(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq \omega_p, \\ \frac{\omega - \omega_s}{\omega_p - \omega_s}, & \omega_p < \omega < \omega_s, \\ 0, & \omega_s \leq \omega \leq \pi. \end{cases} \quad (34)$$

Współczynniki tego szeregu są wyrażone następująco:

$$h_0 = h(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \tilde{H}_0(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi}(\omega_p + \omega_s), \quad (35)$$

$$\begin{aligned} h_k = h(k) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \tilde{H}_0(e^{j\omega}) \cos(k\omega) d\omega = \\ &= \frac{-4}{k^2\pi(\omega_s - \omega_p)} \sin\left(k \frac{\omega_s + \omega_p}{2}\right) \sin\left(k \frac{\omega_s - \omega_p}{2}\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (36)$$

Przyjęcie takich współczynników powoduje wyraźne zmniejszenie amplitud oscylacji funkcji $H(\omega, \mathbf{Y})$ w pobliżu pulsacji ω_p i ω_s w porównaniu z przypadkiem zastosowania współczynników szeregu Fouriera aproksymującego funkcję $\tilde{H}(e^{j\omega})$ daną wzorem (2). Tak określony punkt startowy jest więc bliższy poszukiwanego rozwiązania, a jego użycie w procedurze minimalizacyjnej powoduje skrócenie czasu wykonywania obliczeń.

Do określenia wartości funkcji $X(\mathbf{Y})$ niezbędna jest znajomość maksymalnych odległości $\Delta H_i(\mathbf{Y})$ pomiędzy funkcjami $H(\omega, \mathbf{Y})$ i $\tilde{H}(e^{j\omega})$. Wartości tych odległości w przedziałach $\Theta_l, l = 2, 3, \dots, J-1$ oraz $\Theta_k, k = J+2, J+3, \dots, J+K-1$, wyznaczano posługując się metodą złotego podziału [12, 14, 15]. Metoda ta umożliwia znalezienie odciętej $\tilde{a}$ oraz rzędnej $f(\tilde{a})$ minimum rozpatrywanej funkcji $f(a)$ w określonym przedziale, przy założeniu, że w tym przedziale funkcja $f(a)$ jest ciągła i ma dokładnie jedno minimum.

4. OPIS PROGRAMU ENER

Na podstawie przedstawionego sposobu projektowania dolnoprzepustowego filtra SOI o liniowej fazie, umożliwiające uzyskanie w przybliżeniu równomiernie falistej charakterystyki częstotliwościowej przy jednoczesnym spełnieniu warunku, aby energia wydzielona przez pierwszych k próbek odpowiedzi jednostkowej filtra była możliwie minimalna, został opracowany program ENER. Program ten jest napisany w języku Fortran 77, przy czym do kompilacji wykorzystano kompilator Fortranu firmy Microsoft (wersja 5.1).

Danymi wejściowymi dla programu są:

- liczba N ,
- wartość $w = \delta_1/\delta_2$,
- wartości współczynników wagowych β_1 i β_2 ,
- wartości unormowanych częstotliwości $f_p = \omega_p/2\pi$ oraz $f_s = \omega_s/2\pi$,
- wartość parametru IW informującego, czy chcemy otrzymać wydruki kolejnych współrzędnych wyznaczonej charakterystyki $|H(\omega, \mathbf{Y})|$ ($IW = 1$), czy też nie ($IW = 0$),
- wartość parametru IDB informującego, czy wartości funkcji $|H(\omega, \mathbf{Y})|$ mają być wyrażone w decybelach ($IDB=1$), czy też nie ($IDB=0$),
- wartość parametru EPS, zwanego kryterium zakończenia procedury minimalizacji bez ograniczeń [14] (procedura ta kończy swoje działania, gdy $\|\nabla X(\mathbf{Y})\| \leq EPS$).

W programie ENER wykorzystano odpowiednio zmodyfikowaną procedurę GSPRIE opracowaną w Instytucie Automatyki Politechniki Warszawskiej [14]. Procedura ta umożliwia rozwiązywanie zadań programowania nieliniowego bez ograniczeń metodą gradientu sprzężonego Polaka-Ribieri, przy czym gradient funkcji celu jest estymowany numerycznie.

Po przeprowadzeniu obliczeń przy użyciu programu ENER jako wyniki końcowe otrzymujemy wartości współczynników $h(i)$, $i = 0, 1, \dots, M$, występujących we wzorze (1). Istnieje ponadto możliwość drukowania:

- kolejnych wartości współrzędnych $f = \omega/2\pi$ i $|H(\omega, \mathbf{Y})|$ wyznaczonej funkcji aproksymującej w pasmach przepustowym i zaporowym,
- wartości współrzędnych ekstremów wyznaczonej funkcji $|H(\omega, \mathbf{Y})|$ oraz wartości największych odległości $\Delta H_i(\mathbf{Y})$, $i = 1, 2, \dots, J + K + 4$, pomiędzy funkcjami $H(\omega, \mathbf{Y})$ i $\tilde{H}(e^{j\omega})$.

Przy użyciu programu ENER przeprowadzono projektowanie szeregu dolnoprzepustowych filtrów SOI o w przybliżeniu równomiernie falistych charakterystykach częstotliwościowych przy jednoczesnym uwzględnieniu warunku, aby energia wydzielona przez pierwszych k próbek odpowiedzi jednostkowej filtru była możliwie minimalna. Obliczenia wykonywano dla $N \leq 35$ przy użyciu mikrokomputera IBM PC 386 z zegarem 33 MHz, z koprocesorem matematycznym. Czas wykonywania obliczeń wahał się od kilkunastu sekund do kilku minut, przy czym czas ten wyraźnie zwiększał się w miarę wzrostu liczby N oraz w miarę zmniejszania się wartości parametru EPS.

Przykładowe wyniki projektowania filtru dolnoprzepustowego przy użyciu programu ENER dla danych $N = 23$, $w = 1$, $f_p = 0.15$ i $f_s = 0.21$ są podane w tablicy 1. Do obliczeń przyjęto wartość parametru $EPS = 10^{-6}$ oraz $\beta_1 = 1$ i $\beta_2 = 0.4$. W rozpatrywanym przypadku $k = 8$. Przebieg wyznaczonej charakterystyki $|H(\omega, \mathbf{Y})|$ dla powyższych danych jest pokazany na rysunku 4.

W celu zilustrowania wpływu wartości współczynników wagowych β_1 i β_2 na przebieg charakterystyki $|H(\omega, \mathbf{Y})|$ oraz otrzymaną wartość energii $\mathcal{P}$ zamiesz-

Tablica 1

Dolnoprzepustowy filtr cyfrowy SOI o liniowej fazie

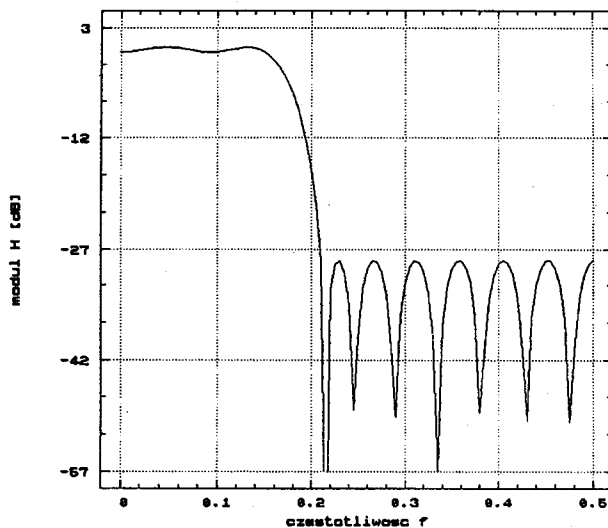
Wyniki obliczeń dla danych:

 $N = 23, f_p = 0,15, f_s = 0,21, w = 1, \beta_1 = 1, \beta_2 = 0,4$

pasmo przepustowe	0.000000	0.150000
pasmo zaporowe	0.210000	0.500000

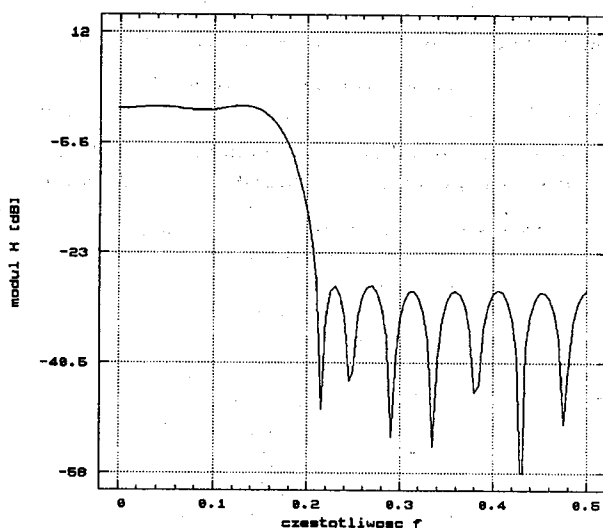
Wartości współczynników $h(i), i = 0, 1, \dots, M$

$h(0) =$	$.35939140E + 00$
$h(1) =$	$.28570270E + 00$
$h(2) =$	$.11899240E + 00$
$h(3) =$	$-.24959480E - 01$
$h(4) =$	$-.70203540E - 01$
$h(5) =$	$-.30760380E - 01$
$h(6) =$	$.22892370E - 01$
$h(7) =$	$.36189270E - 01$
$h(8) =$	$.11614870E - 01$
$h(9) =$	$-.15085970E - 01$
$h(10) =$	$-.24892330E - 01$
$h(11) =$	$.44447840E - 02$

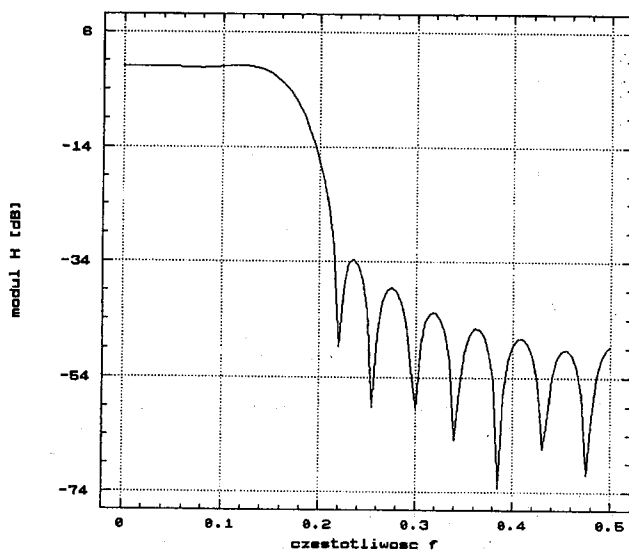


Rys. 4. Przebieg charakterystyki $|H(\omega, Y)|$ otrzymanej w wyniku obliczeń dla danych: $N = 23, f_p = 0,15, f_s = 0,21, w = 1, \beta_1 = 1, \beta_2 = 0,4$

czono wyniki obliczeń dla kilku par wartości β_1 i β_2 przy nie zmienionych pozostałych danych wejściowych. Przebiegi wyznaczonych charakterystyk $|H(\omega, Y)|$ dla $\beta_1 = 1$ i $\beta_2 = 0$ (charakterystyka częstotliwościowa równomiernie falista; wymagania dotyczące energii nie są uwzględniane) oraz dla $\beta_1 = 1$ i $\beta_2 = 100$



Rys. 5. Przebieg charakterystyki $|H(\omega, Y)|$ otrzymanej dla danych: $N = 23$, $f_p = 0,15$, $f_s = 0,21$, $w = 1$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$



Rys. 6. Przebieg charakterystyki $|H(\omega, Y)|$ otrzymanej dla danych: $N = 23$, $f_p = 0,15$, $f_s = 0,21$, $w = 1$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 100$

Tablica 2

Wartości energii $\mathcal{P}$ otrzymane
dla danych: $N = 23$, $f_p = 0,15$,
 $f_s = 0,21$, $w = 1$, $\beta_1 = 1$ przy
różnych wartościach
współczynnika β_2

β_1	$\mathcal{P}$
0	2.135×10^{-2}
0.2	1.824×10^{-2}
0.3	1.715×10^{-2}
0.4	1.625×10^{-2}
0.6	1.483×10^{-2}
1.0	1.417×10^{-2}
2.0	1.383×10^{-2}
10.0	1.365×10^{-2}
100.0	1.361×10^{-2}

(wymagania dotyczące charakterystyki częstotliwościowej są praktycznie pomijane, uwzględniane są natomiast wymagania dotyczące minimalizacji energii) są pokazane odpowiednio na rysunkach 5 i 6. Otrzymane wartości energii $\mathcal{P}$ w funkcji współczynnika β_2 są zamieszczone w tablicy 2. Na podstawie otrzymanych wyników można zaobserwować, że ze wzrostem wartości parametru β_2 przy $\beta_1 = 1$, wartość energii $\mathcal{P}$ maleje, wartość tłumienia w pasmie zaporowym rośnie, ale przebieg charakterystyki $|H(\omega, \mathbf{Y})|$ odbiega coraz bardziej od przebiegu równomiernie falistego.

5. UWAGI KOŃCOWE

W pracy przedstawiono metodę projektowania cyfrowego dolnoprzepustowego filtra SOI o liniowej fazie i w przybliżeniu równomiernie falistej charakterystyce częstotliwościowej umożliwiającą jednoczesne uwzględnienie warunku, aby energia wydzielona przez pierwszych k próbek odpowiedzi jednostkowej filtru była możliwie minimalna. Zaletą zaproponowanej metody projektowania jest jej elastyczność. Przy uwzględnieniu tylko pierwszego ze wskaźników jakości, przy jednoczesnym wprowadzeniu dodatkowych ograniczeń w zadaniu optymalizacji, zaproponowana metoda została zastosowana do projektowania filtrów o charakterystykach częstotliwościowych monotonicznych w pasmie przepustowym i równomierniefalistych w pasmie zaporowym [16, 17]. Przy uwzględnieniu dwu wskaźników jakości i jednoczesnej odpowiedniej zmianie postaci drugiego z nich, rozpatrywana metoda może być zastosowana do projektowania innych rodzajów filtrów SOI o liniowej fazie, w przypadku których oprócz warunków dotyczących charakterystyki częstotliwościowej niezbędne jest jednoczesne uwzględnienie dodatkowych warunków dotyczących minimalizacji lub maksymalizacji energii określonej

nego sygnału. Takim warunkiem może być np. wymaganie maksymalizacji energii przenoszonej przez sygnał w określonym pasmie częstotliwości [18]. Uwzględnienie dodatkowych nieliniowych wymagań dotyczących np. energii nie jest możliwe ani w przypadku metod opartych na algorytmie Remeza ani też w przypadku metod wykorzystujących algorytmy programowania liniowego.

BIBLIOGRAFIA

1. D.J. Shpak, A. Antoniou: *A generalized Remez method for the design of FIR digital filters*. IEEE Trans. Circuits and Syst., 1990, vol. CAS-37, No. 2, p. 161-174
2. L.R. Rabiner, J.H. McClellan, T.W. Parks: *FIR digital filters design techniques using weighted Chebyshev approximation*. Proc. IEEE, 1975, vol. 63, No 4, p. 595-610
3. J.H. McClellan, T.W. Parks, L.R. Rabiner: *A computer program for designing optimum FIR linear phase digital filters*. IEEE Trans. Audio Electroacoust., 1973, vol. AU-21, No 6, p. 506-526
4. T.W. Parks, J.H. McClellan: *Chebyshev approximation for nonrecursive digital filters with linear phase*. IEEE Trans. Circuit Theory, 1972, vol. CT-19, No 2, p. 189-194
5. K. Steiglitz, T.W. Parks, J.F. Kaiser: *METEOR A constraint-based FIR filter design program*. IEEE Trans. Signal Processing, 1992, vol. 40, No. 8, p. 1901-1909
6. A.J. Johnson: *Optimal linear phase digital filter design by one-phase linear programming*. IEEE Trans. Circuits and Syst., 1990, vol. CAS-37, No. 4, p. 554-558
7. J.K. Liang, R.J.P. DeFigueiredo, F.C. Liu: *Design of optimal Nyquist, partial response, Nth band and nonuniform tap spacing FIR digital filters using linear programming techniques*. IEEE Trans. Circuits and Syst., 1985, vol. CAS-32, No. 4, p. 386-392
8. H. Samueli: *On the design of optimal equiripple FIR digital filters for data transmission applications*. IEEE Trans. Circuits and Syst., 1988, vol. CAS-35, No. 12, Dec. 1988, p. 1542-1546
9. P.P. Vaidyanathan, T.Q. Nguyen: *Eigenfilters: a new approach to least-squares FIR filter design and applications including Nyquist filters*. IEEE Trans. Circuits and Syst., 1987, vol. CAS-34, No. 1, p. 11-22
10. A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer: *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów*. WKŁ, Warszawa 1979
11. A. Wojtkiewicz: *Elementy syntezy filtrów cyfrowych*. WNT, Warszawa 1984
12. J. Seidler, A. Badach, W. Molisz: *Metody rozwiązywania zadań optymalizacji*. WNT, Warszawa 1980
13. M. Peschel, C. Riedl: *Poliptymalizacja. Metody podejmowania decyzji kompromisowych w zagadnieniach inżynierjino-technicznych*. WNT, Warszawa 1979
14. W. Findeisen, J. Szymanowski, A. Wierzbicki: *Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji*. PWN, Warszawa 1980
15. T. Kręglewski, T. Rogowski, A. Ruszczyski, J. Szymanowski: *Metody optymalizacji w języku FORTRAN*. PWN, Warszawa 1984
16. F. Wysocka-Schillak: *Design of optimal low-pass linear phase FIR digital filters using nonlinear programming techniques*. Int. J. Cir. Theor. Appl. (w druku)
17. F. Wysocka-Schillak: *Projektowanie cyfrowego filtra SOI o charakterystyce częstotliwościowej monotonicznej w pasmie przepustowym i równomiernie falistej w pasmie zaporowym*. Kwart. Elektr. i Telekom. 1992, t. 38, z. 4, s. 691-700.
18. P.R. Chevillat, G. Ungerboeck: *Optimum FIR transmitter and receiver filters for data transmission over band-limited channels*. IEEE Trans. Communications, 1982, vol. COM-30, No. 8, p. 1909-1916

F. WYSOCKA-SCHILLAK

DESIGN OF A FIR LINEAR PHASE DIGITAL FILTER INCLUDING REQUIREMENTS
DUE TO THE UNIT STEP RESPONSE

Summary

A method is presented for designing linear phase FIR low-pass digital filters. Using the method it is possible to obtain nearly equiripple frequency response of the filter and simultaneously to minimize the energy in the step response over the interval $0 \leq i \leq k$, where k is the time taken for the beginning of a monotone rise. The filter design problem is transformed into an equivalent multiple criterion minimization problem, which is solved using a penalty function shifting method. A description of the computer program ENER is included. An illustrative numerical design example is also provided.

