

POLSKA AKADEMIA NAUK  
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

Indeks 363189  
ISSN 0867-6747

**KWARTALNIK  
ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI  
ELECTRONICS AND  
TELECOMMUNICATIONS  
QUARTERLY**

TOM 42 — ZESZYT 1



WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN  
WARSZAWA 1996

**Kwartalnik jest wydawany z funduszu Komitetu Badań Naukowych  
i dofinansowany przez instytucje:**

- Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych
- Politechnika Gdańska, Wydział Elektryczny
- Politechnika Szczecińska, Instytut Elektroniki i Informatyki
- Instytut Łączności w Warszawie
- Spółka „Telekomunikacja Polska S.A.”

POLSKA AKADEMIA NAUK  
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

KWARTALNIK  
ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

ELECTRONICS AND  
TELECOMMUNICATIONS  
QUARTERLY

TOM 42 — ZESZYT 1



WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN  
WARSZAWA 1996

# RADA REDAKCYJNA

## *Przewodniczący*

prof. dr inż. ADAM SMOLIŃSKI

członek rzeczywisty PAN

## *Członkowie*

prof. dr hab. inż. DANIEL JÓZEF BEM — czł. koresp. PAN, prof. dr hab. inż. MICHAŁ BIAŁKO — czł. koresp. PAN, prof. dr hab. inż. STEFAN HAHN — czł. koresp. PAN, prof. dr inż. ANDRZEJ HAŁAS, prof. dr inż. ZDZISŁAW KACHLICKI, prof. dr hab. inż. BOHDAN MROZIEWICZ, prof. dr inż. JERZY OSIOWSKI, prof. dr inż. WITOLD ROSIŃSKI — czł. rzecz. PAN, prof. dr inż. STANISŁAW SŁAWIŃSKI, prof. dr hab. inż. STEFAN WĘGRZYN — czł. rzecz. PAN, prof. dr hab. inż. WIESŁAW WOLIŃSKI — czł. koresp. PAN, prof. dr inż. ANDRZEJ ZIELIŃSKI, prof. dr inż. MARIAN ZIENTALSKI

## REDAKCJA

### *Redaktor Naczelny*

prof. dr hab. inż. WIESŁAW WOLIŃSKI

### *Zastępca Redaktora Naczelnego*

doc. dr inż. KRYSTYN PLEWKO

### *Sekretarz Odpowiedzialny*

mgr KRYSTYNA LELAKOWSKA

## ADRES REDAKCJI

00-665 Warszawa, ul. Nowowiejska 15/19 Politechnika, pok. 470  
Instytut Telekomunikacji, Gmach im. prof. JANUSZA GROSZKOWSKIEGO

Dyżury Redakcji: środy i piątki, godz. 14—16

tel. 660 77 37; 628 89 81; 25 29 18+ aut. sekr.

Telefony domowe: Redaktora Naczelnego: 12 17 65

Zast. Red. Naczelnego: 26 83 41

Sekretarza Odpowiedzialnego: 25 29 18

## WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN

Warszawa, ul. Miodowa 10

---

Ark. wyd. 6.0 Ark. druk. 5.5

Podpisano do druku w marcu 1996 r.

---

Papier offsetowy kl. III 70 g.

Druk ukończono w kwietniu 1996 r.

---

Skład: Agnieszka Chmielewska Warszawa ul. Husarii 12

Druk i oprawa: Drukarnia Braci Grodzickich, Żabieniec, ul. Przelotowa 7

W dniu 29 lutego 1996 r. zmarł w Warszawie  
w wieku 85 lat

### Adam Smoliński

Członek rzeczywisty Polskiej Akademii Nauk, członek zwyczajny Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, emerytowany profesor zwyczajny Politechniki Warszawskiej, doktor honoris causa

Wojskowej Akademii Technicznej

członek zagraniczny Nowojorskiej Akademii Nauk, członek honorowy stowarzyszenia Elektryków Polskich i Polskiego Towarzystwa Elektroniki Teoretycznej i Stosowanej.

Zmarły Uczony był wybitnym specjalistą w dziedzinie elektroniki i telekomunikacji, twórcą szkół układów elektronicznych, mikrofalowej elektroniki ciała stałego i optoelektroniki. Był wieloletnim profesorem Politechniki Warszawskiej – Dziekanem ówczesnego Wydziału Łączności, cieszącym się wielkim poważaniem członkiem międzynarodowych i krajowych towarzystw naukowych. W Polskiej Akademii Nauk był Honorowym Przewodniczącym Komitetu Elektroniki i Telekomunikacji oraz Przewodniczącym Rady Redakcyjnej „Kwartalnika Elektroniki i Telekomunikacji” PAN.

Za działalność naukową uhonorowany został wysokimi orderami i odznakami państwowymi oraz zespołową Nagrodą Państwową II stopnia.

Redakcja

Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji



## Szanowni Autorzy

„Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji — Electronics and Telecommunication Quarterly” jest kontynuatorem tradycji powstałego 41 lat temu kwartalnika pt. „Rozprawy Elektrotechniczne”. „Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji” — czasopismo Komitetu Elektroniki i Telekomunikacji Polskiej Akademii Nauk — wydawany jest przez Wydawnictwo Naukowe PWN.

Kwartalnik jest czasopismem naukowym, na którego łamach są publikowane artykuły i komunikaty prezentujące wyniki oryginalnych oraz przeglądowych prac teoretycznych i technicznych związanych z szeroko rozumianymi dziedzinami współczesnej elektroniki i telekomunikacji.

Wszystkie publikowane w Kwartalniku artykuły są recenzowane przez wybitnych krajowych specjalistów, co zapewnia, że publikacje te są uznawane jako autorski dorobek naukowy. Opublikowanie w Kwartalniku wyniku prac naukowych, badawczych i technicznych zrealizowanych w ramach „GRANTów” Komitetu Badań Naukowych, spełnia więc jeden z wymogów stawianych tym pracom.

Czasopismo ukazuje się w ponad półmilionowym nakładzie i dociera do wszystkich zajmujących się elektroniką i telekomunikacją krajowych ośrodków naukowych oraz technicznych i do wielu instytucji zagranicznych. Jest ponadto prenumerowane przez liczne grono specjalistów.

Każdy z Autorów otrzymuje bezpłatnie 20 egzemplarzy nadbitek swojego artykułu, co ułatwia przesłanie tej publikacji do indywidualnie wybranych przez Autora osób i instytucji w kraju lub za granicą. Ułatwia to dodatkowo fakt, że w Kwartalniku mogą być publikowane artykuły również w języku angielskim.

Nadesłane do redakcji artykuły są publikowane w terminie około pół roku w przypadku sprawnej współpracy Autora z redakcją. Wytyczne dla Autorów dotyczące formy publikacji są zamieszczane w zeszytach Kwartalnika. Można je także otrzymać w siedzibie redakcji.

Artykuły można dostarczać osobiście lub pocztą pod adresem zamieszczanym na stronie redakcyjnej w każdym zeszycie.

Redakcja



# Boundary value problem for the electromagnetic fields in elliptical geometry

ZYGMUNT KRASIŃSKI, ADAM MAJEWSKI

*Instytut Podstaw Elektroniki, Politechnika Warszawska*

TAKASHI HINATA

*College of Science & Technology, Nihon University, Tokyo*

*Received 1995.11.10*

*Authorized 1996.01.15*

The improved point-matching method for the analysis of waveguides with elliptical geometry and the scattering problems by elliptical targets is proposed. The method is based on the boundary value problem, where the electromagnetic fields are expanded in terms of one or more elliptical coordinate systems using the Mathieu functions. Numerical results are presented for the highly-birefringent W-type elliptical fibers and the plane wave scattering by an axially slotted conducting elliptical cylinder.

**Key words:** elliptical fibers, modal birefringence, plane wave scattering, Mathieu functions, point-matching method.

## 1. INTRODUCTION

A number of works have been done for numerical analyses of electromagnetic fields in elliptical geometries. The problem of electromagnetic propagation in dielectric elliptical cylinder is closely related to the problem of scattering of electromagnetic waves from the same cylinder. Therefore, the methods used for the problem of propagation can be applied to the scattering problem.

In the case of the confocal elliptical geometries, the exact solutions in terms of Mathieu functions to the problems of propagation and scattering of electromagnetic fields can be found. In order to investigate the nonconfocal or the other structures with elliptical boundaries, the improved point matching method (IPMM) is proposed. The analysis is based on the boundary value problem, where the electromagnetic fields are expanded in terms of Mathieu functions.

In this paper, we present the formulation of the method and some numerical results for the case of the highly-birefringent W-type elliptical fibers with noncoaxial symmetry and the plane wave scattering by an axially slotted perfectly conducting elliptical cylinder with a dielectric interior region. The proposed approach is quite efficient in solving such numerical problems because it transforms mixed boundary value problem into a finite set of simultaneous equations. The numerical algorithm of the method is simple and it adopts no integration in the computation of coefficients of the simultaneous equations. The accuracy of computations can be improved simply by increasing the number of sampling points.

## 2. HIGHLY-BIREFRINGENT W-TYPE ELLIPTICAL FIBERS WITH NONCOAXIAL SYMMETRY

Multi-layer confocal-elliptical fibers were analyzed by several authors using the exact analytical method with Mathieu function expansion. In order to investigate the coaxial W-type elliptical fibers with layers of any ellipticity the authors proposed the IPMM with Mathieu function expansion [1]. In our IPMM, unlike the previously reported methods, high computational accuracy was achieved even in the case of fibers with layers of larger ellipticity  $e_j [ = 1 - b_j/a_j, b_j, a_j ]$  — the semiaxes of elliptical layers,  $j = \{1, 2\}$  [1]. Furthermore, the IPMM was applied for analysis of highly-birefringent fibers with a hollow layer outside an elliptical core [2]. The noncoaxial structures of W-type circular fibers have been investigated by IPMM with Bessel function expansion, whose numerical results are quite reliable [3].

In this section, we apply the IPMM with Mathieu function expansion for the accurate analysis of the highly-birefringent W-type elliptical fiber with noncoaxial symmetry which provide the larger modal birefringence compared to the noncoaxial W-type circular fibers. Numerical results are presented for the noncoaxial structures

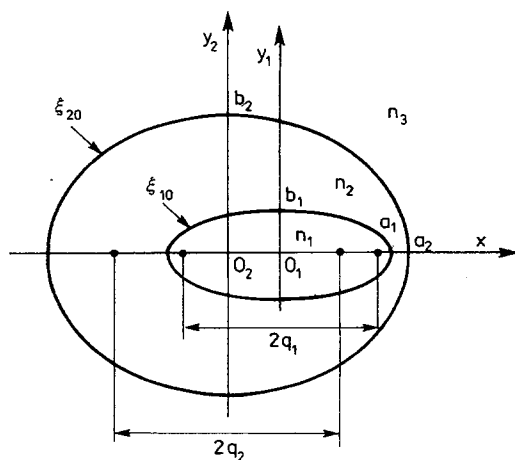


Fig. 1. Cross section of the noncoaxial W-type elliptical fiber:  $n_1 > n_3 > n_2$

of the silica fibers with a hollow layer outside the germanium-dioxide doped elliptical core.

Fig. 1 illustrates the cross-section in the  $x$ - $y$  plane of the noncoaxial W-type elliptical fiber. In our analysis, two elliptical coordinate systems  $(\xi_1, \eta_1, z)$  and  $(\xi_2, \eta_2, z)$  are introduced for the complete modal expansions and two of the elliptical cylinders with  $\xi_1 = \xi_{10}$  and  $\xi_2 = \xi_{20}$  are assumed to coincide with the boundaries of the layer 1 and 2, respectively. The refractive index in the layer of a number  $i$  is denoted by  $n_i$ , where  $i = \{1, 2, 3\}$  and it is assumed, that  $n_1 > n_3 > n_2$ . Since the fiber structure is symmetrical about the  $x$  axis, the electromagnetic fields can be separated into the odd modes  ${}_0\text{HE}_{mp}$ ,  ${}_0\text{EH}_{mp}$  and the even modes  ${}_e\text{HE}_{mp}$ ,  ${}_e\text{EH}_{mp}$ . Omitting the propagation factor  $e^{j(\omega t - \beta z)}$  ( $\beta$  is the propagation constant in the  $z$ -direction and  $\omega$  is the angular frequency), the  $z$ -components of electric and magnetic fields ( $E_z$  and  $H_z$ ) for the odd modes can be approximated by the complete modal expansions with the Mathieu functions as follows:

In layer 1:

$$E_z^{(1)} = \sum_{n=0}^{N-1} A_n^{(1)} C e_n(\xi_1, \gamma_1^2) c e_n(\eta_1, \gamma_1^2) \quad (1)$$

$$H_z^{(1)} = \sum_{n=1}^{N-1} B_n^{(1)} S e_n(\xi_1, \gamma_1^2) s e_n(\eta_1, \gamma_1^2). \quad (2)$$

In layer 2:

$$E_z^{(2)} = \sum_{l=0}^{L-1} A_l^{(2)} C e_l(\xi_2, -\gamma_{22}^2) c e_l(\eta_2, -\gamma_{22}^2) + \sum_{n=0}^{N-1} C_n^{(2)} F e k_n(\xi_1, -\gamma_{21}^2) c e_n(\eta_1, -\gamma_{21}^2) \quad (3)$$

$$H_z^{(2)} = \sum_{l=1}^{L-1} B_l^{(2)} S e_l(\xi_2, -\gamma_{22}^2) s e_l(\eta_2, -\gamma_{22}^2) + \sum_{n=1}^{N-1} D_n^{(2)} G e k_n(\xi_1, -\gamma_{21}^2) s e_n(\eta_1, -\gamma_{21}^2) \quad (4)$$

In layer 3 (the cladding):

$$E_z^{(3)} = \sum_{l=0}^{L-1} A_l^{(3)} F e k_l(\xi_2, -\gamma_3^2) c e_l(\eta_2, -\gamma_3^2) \quad (5)$$

$$H_z^{(3)} = \sum_{l=1}^{L-1} B_l^{(3)} G e k_l(\xi_2, -\gamma_3^2) s e_l(\eta_2, -\gamma_3^2), \quad (6)$$

where  $\gamma_1^2 = q_1^2(k_1^2 - \beta^2)/4$ ,  $-\gamma_2^2 = q_2^2(k_2^2 - \beta^2)/4$ ,  $-\gamma_3^2 = q_3^2(k_3^2 - \beta^2)/4$  and  $k_i = kn_i$ ,  $q_j$  is the semifocal length in elliptical coordinate system of a number  $j$ ,  $j = \{1, 2\}$ ,  $k$  is the wavenumber in free space;  $c e_n(\cdot)$ ,  $s e_n(\cdot)$  are the even and odd Mathieu functions of the first kind;  $C e_n(\cdot)$ ,  $S e_n(\cdot)$  are the even and odd modified Mathieu functions of the first kind;  $F e k_n(\cdot)$ ,  $G e k_n(\cdot)$  are the even and odd modified Mathieu functions of the second kind ("n" denotes the order of function).  $N$  and  $L$  are the number of space harmonics taken in our IPMM. The coefficients  $A_n^{(1)} \sim B_l^{(3)}$  of Eqs. 1–6 are determined from the

boundary conditions. Axial field components for the even modes are in the form of Eqs. 1–6, when the even Mathieu functions are replaced by the odd ones and vice versa. The total transverse components of the field in layer 2 can be expressed by combining the fractional  $\xi$ -component and  $\eta$ -component defined in two elliptical coordinate systems. The boundary conditions are satisfied by matching the tangential fields at equiangularly spaced points around the boundaries between layers of the fiber ( $\xi_{10}$ :  $N$  points,  $\xi_{20}$ :  $L$  points). It yields  $4(N+L-1)$ -dimensional simultaneously homogeneous linear equations and finally the characteristic equation, from which we can get the propagation constants of the modes. Because of the symmetry of the structure the matching is only performed in the upper half of the  $x-y$  plane.

Our computations were carried out for the fibers as shown in Fig. 2 with the pure silica cladding and the germanium-dioxide doped silica core. The birefringence that arises from stress is assumed to be neglected in our considerations. The results are

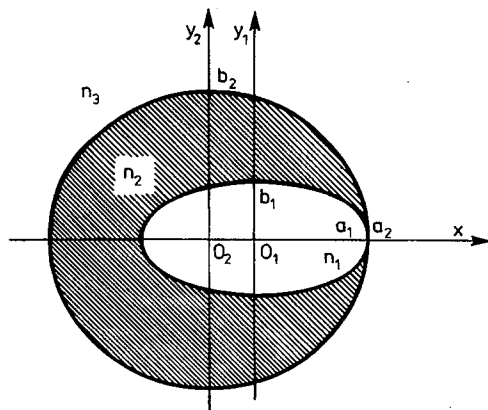


Fig. 2. Model of the noncoaxial double-step elliptical fiber with a hollow layer:  $n_1 > n_3 > n_2 = 1$

presented for the case, when  $N=L$ .

Fig. 3 illustrates the dependence of the modal birefringence  $B = |(\beta_o - \beta_e)/k|$  on the normalized frequency  $V = ka_1(n_1^2 - n_3^2)^{1/2}$  for elliptical fibers with a hollow layer as shown in Fig. 2, having different ellipticities  $e_1$  and  $e_2 = 0$  ( $\beta_o$  and  $\beta_e$  denote the propagation constants of the odd and even fundamental mode, respectively). The refractive indices of the core and cladding are taken as  $n_1 = 1.468175$  (GeO<sub>2</sub>: 13.5 mole%) and  $n_3 = 1.446917$  at the wavelength  $\lambda = 1.3 \mu\text{m}$  ( $\Delta = 1.4692\%$ , where  $\Delta = (n_1 - n_3)/n_3$ ). It is noted that presented fibers provide the large value of the modal birefringence ( $B > 10^{-3}$ ) and it depends significantly on the core ellipticity  $e_1$  and refractive-index difference  $\Delta$ . The value of  $B$  increases as these parameters are increased. In the frequency range  $V_{\text{cor}} < V < V_{\text{cer}}$  (broken-line curves),  $r = \{1, 3, 5\}$ , the single-polarization transmission is possible;  $V_{\text{cor}}$  and  $V_{\text{cer}}$  denote the normalized cut-off frequencies of the odd and even fundamental mode, respectively, and we have that:  $V_{\text{col}} \cong 2.295$ ,  $V_{\text{co3}} \cong 2.687$ ,  $V_{\text{co5}} \cong 3.381$ ,  $V_{\text{ce1}} \cong 2.315$ ,  $V_{\text{ce3}} \cong 2.769$ ,  $V_{\text{ce5}} \cong 3.559$ .

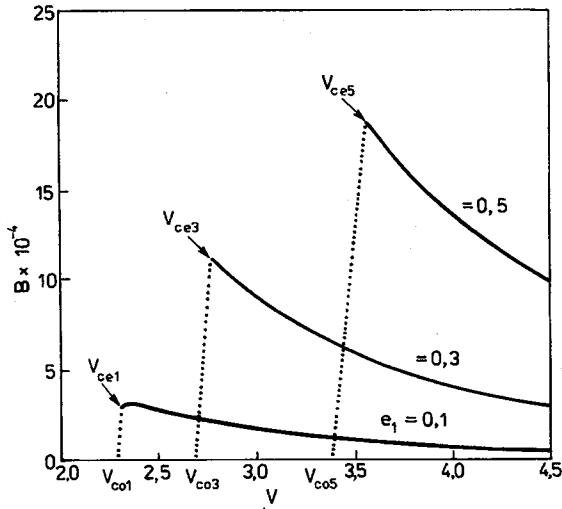


Fig. 3. Characteristics of  $B$  versus  $V$  for fibers as shown in Fig. 2 with  $e_2=0$  and different values of  $e_1$ ;  $n_1=1.4468175$  and  $n_3=1.446917$

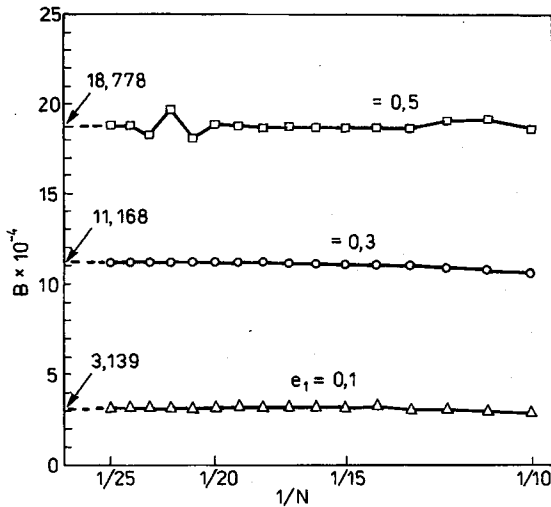


Fig. 4.  $B$  versus  $1/N$  for fibers as analyzed in Fig. 3 with  $e_2=0$  and different values of  $e_1$ ;  $n_1=1.468175$  and  $n_3=1.446917$

The convergence tests for  $B$  as a parameter of  $e_1$ , for fibers as considered in Fig. 3, when  $V=V_{ce5}$  (the case of  $e_1=0.5$ ),  $V=V_{ce3}$  (the case of  $e_1=0.3$ ) and  $V=2.35$  (the case of  $e_1=0.1$ ) are illustrated in Fig. 4. It can be seen that the convergence of  $B$  depends on ellipticity of the core. Numerical computations were carried out by using the truncation number  $N=L$ , which makes the relative error of  $B$  less than 0.01%.

### 3. PLANE WAVE SCATTERING BY AN AXIALLY SLOTTED CONDUCTING ELLIPTICAL CYLINDER WITH A DIELECTRIC INTERIOR REGION

The electromagnetic coupling between an external source and a scatterer has been of great interest in reducing the radar cross section of a target and in identifying the shape of scatterer. The numerical methods which have been reported so far on the plane wave scattering by a conducting elliptical cylinder with longitudinal slots [4, 5, 6] are not based on solving the boundary value problem.

In this section, we apply the IPMM with Mathieu function expansion for the accurate analysis of the plane wave scattering by an axially slotted conducting elliptical cylinder with a dielectric interior region. Numerical results are presented in graphical form for the far-field radiation patterns.

Fig. 5 illustrates a cross section in the  $x-y$  plane for the geometry of the problem. It is assumed that the perfectly conducting elliptical cylinder of the focal distance  $2d$ , with longitudinal slots is uniform along the  $z$ -axis. Let  $(\varepsilon_0, \mu_0)$  and  $(\varepsilon_1, \mu_0)$  denote the permittivities and permeabilities of the media for the outside region  $S_0$  ( $\xi > \xi_0$ ) and the inside region  $S_1$  ( $\xi < \xi_0$ ) of the elliptical cylinder, respectively.

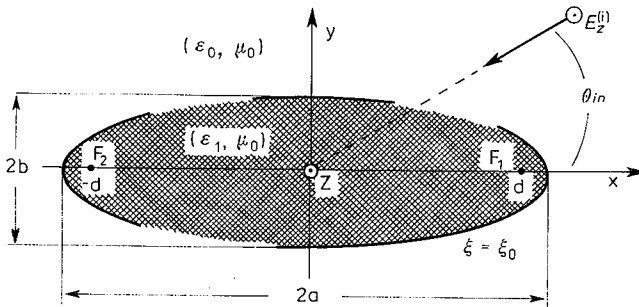


Fig. 5. Cross-sectional view of a conducting elliptical cylinder with longitudinal slots;  $F_1$ ,  $F_2$  and  $b$ ,  $a$  are the foci and semiaxes of the ellipse, respectively

We consider the time-harmonic fields with the time dependence  $\exp(j\omega t)$ , which is suppressed in the following equations. An incident plane wave impinges at an angle  $\theta_{in}$  with respect to the  $x$ -axis. In this paper, only the  $E$ -polarized case is considered, while the  $H$ -polarized case can be treated in the same way. The  $z$ -component of the incident electric wave  $E_z^{(i)} = \exp\{jk_0(x \cos \theta_{in} + y \sin \theta_{in})\}$  can be expanded by the finite sums with the Mathieu functions in the elliptical coordinate system  $(\xi, \eta, z)$ :

$$E_z^{(i)} = \sum_{n=0}^N \kappa_n C e_n(\xi, q_0) c e_n(\eta, q_0) c e_n(\theta_{in}, q_0) + \sum_{n=1}^N \nu_n S e_n(\xi, q_0) s e_n(\eta, q_0) s e_n(\theta_{in}, q_0), \quad (7)$$

where

$q_v = (k_v d/2)^2$ ,  $k_v = \omega \sqrt{\varepsilon_v \mu_0}$ ,  $v=0$  or  $1$ ,  $\kappa_{2n} = 2/p_{2n}$ ,  $\kappa_{2n+1} = 2j/p_{2n+1}$ ,  $\nu_{2n} = 2/s_{2n}$ ,  $\nu_{2n+1} = 2j/s_{2n+1}$  (defined in the reference [7]),  $c e_n(\eta, q)$ ,  $s e_n(\eta, q)$ : the Mathieu functions of the first kind and the " $n$ " order,

$Ce_n(\xi, q)$ ,  $Se_n(\xi, q)$ : the modified Mathieu functions of the first kind and the “ $n$ ” order.

The axial components of the scattered electric field  $E_z^{(S_0)}$  and the electric field inside the cylinder  $E_z^{(S_1)}$  which satisfy the Maxwell's equation, are expanded in terms of Mathieu functions as follows:

$$\xi \geq \xi_0: E_z^{(S_0)} = \sum_{n=0}^N X_n(N) Me_n^{(2)}(\xi, q_0) ce_n(\eta, q_0) + \sum_{n=1}^N Y_n(N) Ne_n^{(2)}(\xi, q_0) se_n(\eta, q_0) \quad (8)$$

$$\xi \leq \xi_0: E_z^{(S_1)} = \sum_{n=0}^N U_n(N) Ce_n(\xi, q_1) ce_n(\eta, q_1) + \sum_{n=1}^N V_n(N) Se_n(\xi, q_1) se_n(\eta, q_1) \quad (9)$$

where

$Me_n^{(2)}(\xi, q)$ ,  $Ne_n^{(2)}(\xi, q)$ : the Mathieu-Hankel functions of the “ $n$ ” order [7],

$X_n(N)$ ,  $Y_n(N)$ ,  $U_n(N)$ ,  $V_n(N)$ : the unknown coefficients.

Then  $\eta$  and  $\xi$  components of the magnetic field are given by

$$H_\eta^{(S_v)} = -\frac{j\omega\epsilon_v}{k_v^2 Q} \frac{\partial E_z^{(S_v)}}{\partial \xi}, \quad H_\xi^{(S_v)} = \frac{j\omega\epsilon_v}{k_v^2 Q} \frac{\partial E_z^{(S_v)}}{\partial \eta}, \quad v=0 \text{ or } 1, \quad Q = d\sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta} \quad (10)$$

In our IPMM, the expansion coefficients  $X_n(N) \sim V_n(N)$  are found from the eigenvalue equation which is obtained by applying the boundary conditions at  $\xi = \xi_0$  and  $\eta = \eta_\gamma = 2\pi\gamma/(2N+1)$ ,  $\gamma = 0, 1, 2, \dots, 2N$ :

$(\xi_0, \eta_\gamma) \in C$ : the set of conductor segments on the boundary,

$$E_z^{(I)} + E_z^{(S_0)} = 0, \quad E_z^{(S_1)} = 0 \quad (11)$$

$(\xi_0, \eta_\gamma) \in \bar{C}$ : the set of slot segments on the boundary,

$$E_z^{(I)} + E_z^{(S_0)} = E_z^{(S_1)}, \quad H_\eta^{(I)} + H_\eta^{(S_0)} = H_\eta^{(S_1)}. \quad (12)$$

By using the orthogonal properties of the Mathieu functions in Eqs. (11)~(12), we can get the following  $(2N+1)$ -dimensional simultaneous equations:

$$(\xi_0, \eta_\gamma) \in C: \sum_{n=0}^N c_n^{(0)}(\eta_\gamma) X_n(N) + \sum_{n=1}^N d_n^{(0)}(\eta_\gamma) Y_n(N) = \sum_{n=0}^N v_n^{(0)}(\eta_\gamma) + \sum_{n=1}^N w_n^{(0)}(\eta_\gamma), \quad (13)$$

$$(\xi_0, \eta_\gamma) \in \bar{C}: \sum_{n=0}^N c_n^{(1)}(\eta_\gamma) X_n(N) + \sum_{n=1}^N d_n^{(1)}(\eta_\gamma) Y_n(N) = \sum_{n=0}^N v_n^{(1)}(\eta_\gamma) + \sum_{n=1}^N w_n^{(1)}(\eta_\gamma), \quad (14)$$

where  $c_n^{(0)}(\eta_\gamma) \sim w_n^{(1)}(\eta_\gamma)$  in Eqs. (13)~(14) are defined as follows:

$$c_n^{(0)}(\eta_\gamma) = Me_n^{(2)}(\xi_0, q_0) ce_n(\eta_\gamma, q_0),$$

$$d_n^{(0)}(\eta_\gamma) = Ne_n^{(2)}(\xi_0, q_0) se_n(\eta_\gamma, q_0),$$

$$v_n^{(0)}(\eta_\gamma) = -\kappa_n Ce_n(\xi_0, q_0) ce_n(\eta_\gamma, q_0) ce_n(\theta_{in}, q_0),$$

$$w_n^{(0)}(\eta_\gamma) = -v_n Se_n(\xi_0, q_0) se_n(\eta_\gamma, q_0) se_n(\theta_{in}, q_0),$$

$$\begin{aligned}
c_n^{(1)}(\eta_\gamma) &= Me_n^{(2)'}(\xi_0, q_0) ce_n(\eta_\gamma, q_0) - Me_n^{(2)}(\xi_0, q_0) \sum_{p=0}^N \frac{Ce_p'(\xi_0, q_1)}{Ce_p(\xi_0, q_1)} ce_p(\eta_\gamma, q_1) \alpha_{n,p}, \\
d_n^{(1)}(\eta_\gamma) &= Ne_n^{(2)'}(\xi_0, q_0) se_n(\eta_\gamma, q_0) - Ne_n^{(2)}(\xi_0, q_0) \sum_{p=1}^N \frac{Se_p'(\xi_0, q_1)}{Se_p(\xi_0, q_1)} se_p(\eta_\gamma, q_1) \beta_{n,p}, \\
v_n^{(1)}(\eta_\gamma) &= \kappa_n ce_n(\theta_{in}, q_0) \left\{ Ce_n(\xi_0, q_0) \sum_{p=0}^N \frac{Ce_p'(\xi_0, q_1)}{Ce_p(\xi_0, q_1)} ce_p(\eta_\gamma, q_1) \alpha_{n,p} - Ce_n'(\xi_0, q_0) ce_n(\eta_\gamma, q_0) \right\}, \\
w_n^{(1)}(\eta_\gamma) &= v_n se_n(\theta_{in}, q_0) \left\{ Se_n(\xi_0, q_0) \sum_{p=1}^N \frac{Se_p'(\xi_0, q_1)}{Se_p(\xi_0, q_1)} se_p(\eta_\gamma, q_1) \beta_{n,p} - Se_n'(\xi_0, q_0) se_n(\eta_\gamma, q_0) \right\}
\end{aligned} \tag{15}$$

and

$$\begin{aligned}
\alpha_{n,p} &= \sum_{\gamma=0}^{2N} ce_n(\eta_\gamma, q_0) ce_p(\eta_\gamma, q_1) \bigg/ \sum_{\gamma=0}^{2N} ce_n^2(\eta_\gamma, q_0), \\
\beta_{n,p} &= \sum_{\gamma=0}^{2N} se_n(\eta_\gamma, q_0) se_p(\eta_\gamma, q_1) \bigg/ \sum_{\gamma=0}^{2N} se_n^2(\eta_\gamma, q_0).
\end{aligned}$$

The prime over  $Me_n^{(2)}(\xi_0, q_0)$ ,  $Ne_n^{(2)}(\xi_0, q_0)$ ,  $Ce_n(\xi_0, q_0)$  and  $Se_n(\xi_0, q_0)$  in Eqs. (15) denotes the derivative of the Mathieu function with respect to  $\xi_0$ , while the prime over the summation sign indicates that odd or even integer values of  $p$  are to be taken according as  $n$  is odd or even.

Once we calculate the coefficients  $X_n(N)$  and  $Y_n(N)$ , the scattered far-field patterns can be expressed by

$$E_z^{(S_0)} \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} \sqrt{2/(\pi k_0 \rho)} \exp\{-j(k_0 \rho - \pi/4)\} F(\eta), \tag{16}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$F(\eta) = 2 \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{\kappa_n} X_n(N) ce_n(\eta, q_0) + 2 \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{v_n} Y_n(N) se_n(\eta, q_0). \tag{17}$$

Figure 6 illustrates the convergence test of the backward scattered far-field  $|F(0)|$  versus  $1/N$  when  $b/a=0.6$ ,  $\theta_{in}=0^\circ$ ,  $\eta_g=\pm 120^\circ$  and  $\epsilon_r=4$ . The rapid convergence can be attained for  $N>68$ . In this case the relative error  $[=(\text{extrapolated true value} - \text{computed value})/(\text{extrapolated true value})]$  for  $|F(0)|$  is less than 0.1%.

The far-fields patterns are presented for the case of  $b/a=0.6$ . The comparison of the far-fields  $|F(\eta)|$  versus  $\eta$  produced by the elliptical cylinder with one slot of  $\eta_g=\pm 120^\circ$  in an homogeneous medium of  $\epsilon_r=\epsilon_1/\epsilon_0=1$  (the solid curve) with those by the dielectric elliptical cylinder with  $\epsilon_r=2$  (the dotted curve) is shown in Fig. 7.

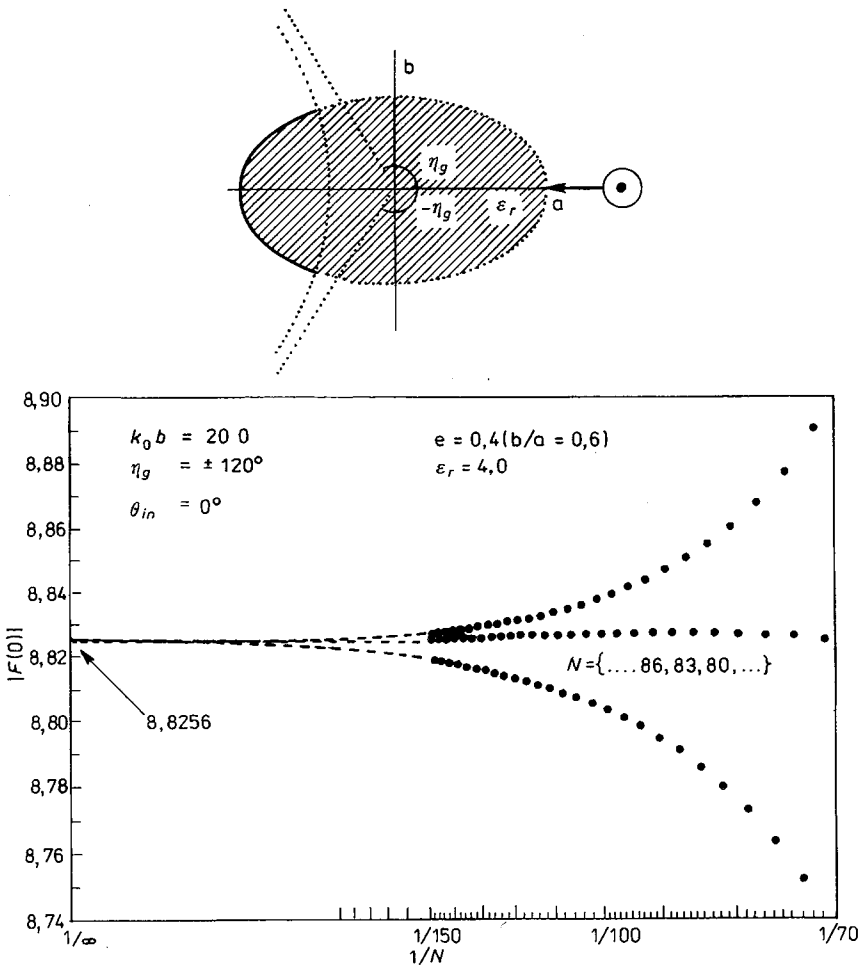
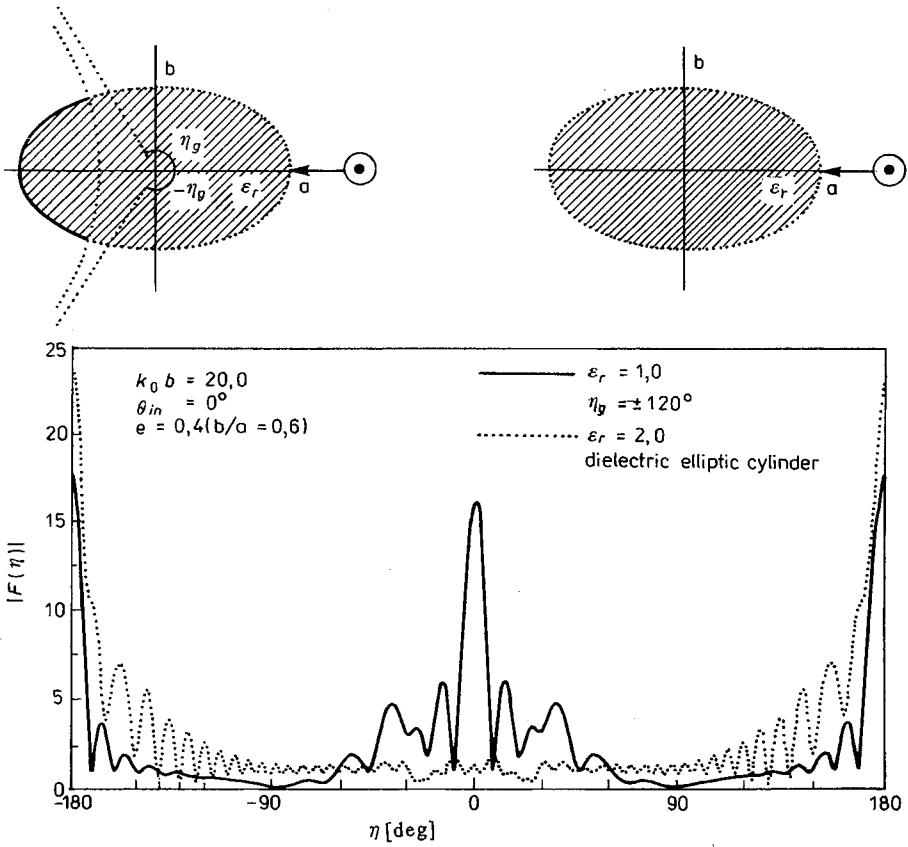
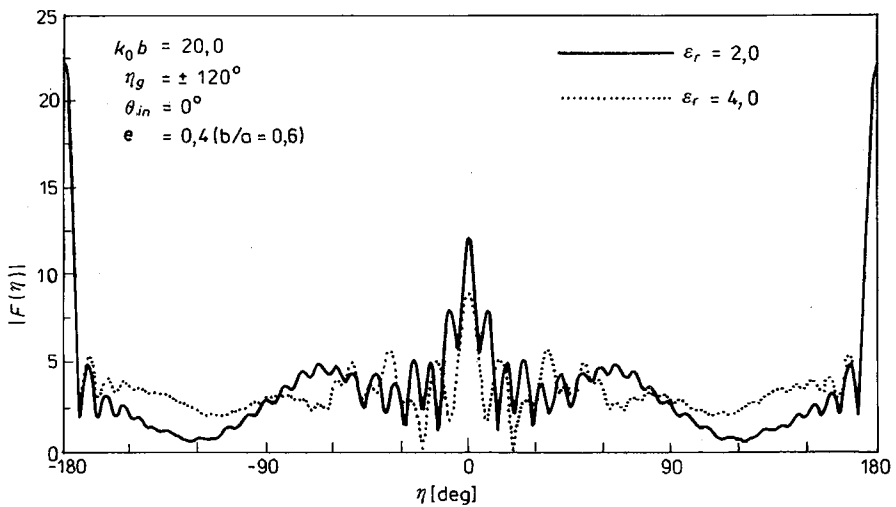


Fig. 6. Convergence of  $|F(0)|$  versus  $1/N$

The effects of  $\epsilon_r$  on the far-fields by the elliptical cylinder with one slot of  $\eta_g = \pm 120^\circ$  are illustrated in Fig. 8. It can be seen that: (1) the backward scattered field  $|F(0)|$  decreases and the ripples of the fields  $|F(\eta)|$  in the range  $|\eta| < 60^\circ$  increase as  $\epsilon_r$  is increased from  $\epsilon_r = 1$  to  $\epsilon_r = 4$ , which is due to the multiple reflection in the dielectric; (2) the forward scattered field  $|F(180^\circ)|$  by the slotted cylinder increases when  $\epsilon_r$  is increased from  $\epsilon_r = 1$  to  $\epsilon_r = 2$ , (3) the effects of changing  $\epsilon_r$  from  $\epsilon_r = 2$  to  $\epsilon_r = 4$  on the forward scattering are rather small.

The comparison of the far-fields  $|F(\eta)|$  versus  $\eta$  produced by the elliptical lens of the opening angle  $\eta_g = \pm 120^\circ$  (the solid curve) with those by the circular lens (the dotted curve) when a plane wave impinges on the elliptical lens along the major axis of the ellipse, is shown in Fig. 9 ( $n_1 = 1, n_2^2 = \epsilon_r$ ;  $n_1$  and  $n_2$  satisfy the Fermat's principle for given ellipticity of the cylinder). It can be seen that stronger intensity for the backward scattered field can be obtained for the elliptical lens than for the circular one.

Fig. 7. Far-fields  $|F(\eta)|$  versus  $\eta$ Fig. 8. Far-fields  $|F(\eta)|$  versus  $\eta$

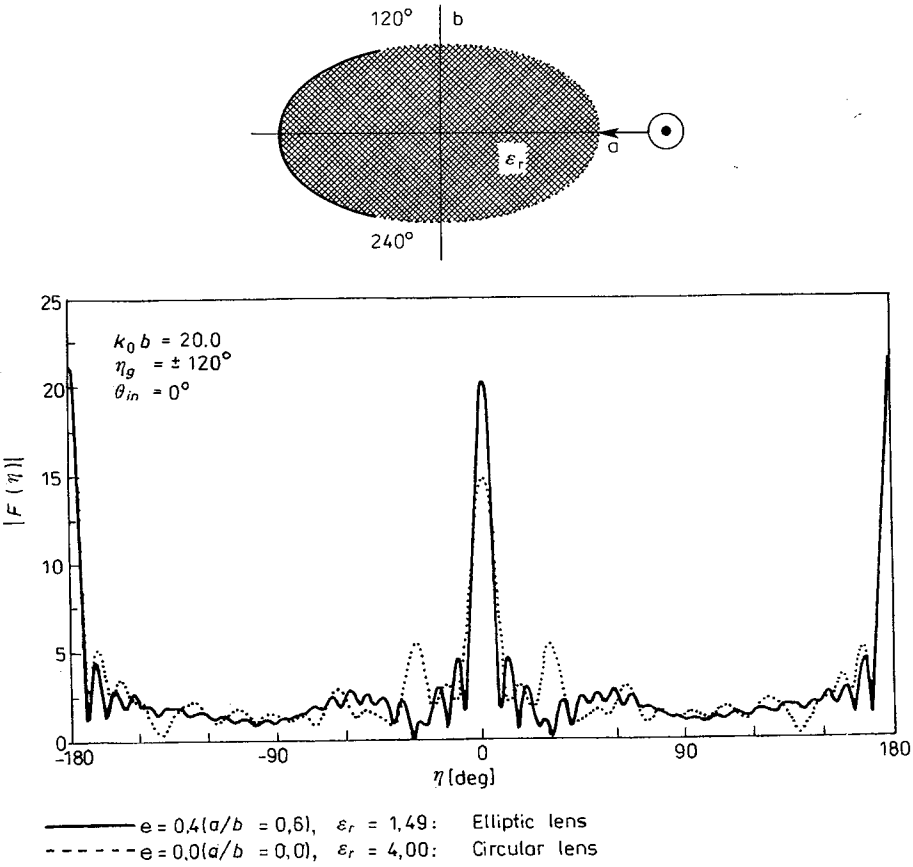


Fig. 9. Far-fields  $|F(\eta)|$  versus  $\eta$

CONCLUSIONS

We have presented the formulation of the improved point-matching method (IPMM) with Mathieu function expansion which is based on the boundary value problem and can be applied in investigations of the propagation and scattering problems in elliptical geometry.

Numerical results illustrating the application of the IPMM for analysis of highly-birefringent W-type elliptical fibers with noncoaxial symmetry and the plane wave scattering by an axially slotted perfectly conducting elliptical cylinder with a dielectric interior region have also been discussed. The proposed approach is quite efficient and the results of IPMM are quite reliable because the electromagnetic fields in each region of the fiber or scatterer are expanded by a sum of the complete set of wave functions. The Mathieu functions are calculated to more than ten significant digits over the range of arguments and orders used. The accuracy of computations can

be improved simply by increasing the number of sampling points. Our method never produces spurious numerical solutions.

Owing to its flexibility and accuracy, the IPMM proposed in this paper can be a useful tool for analysis of a large class of elliptical fibers (for example the multi-layer elliptical fibers with noncoaxial symmetry, elliptical-core fibers with various shapes of pits) and electromagnetic scattering problems by targets of the complex elliptical geometry.

#### REFERENCES

1. Z. Krasinski, A. Majewski and T. Hinata: *Accurate numerical analysis of polarization-maintaining W-type elliptical fibers*. Opto-Electronics Review, 1993, vol. 4, pp. 111–114
2. Z. Krasinski, T. Hinata, S. Yamashita and A. Majewski: *Analysis of highly-birefringent fibers with a hollow layer outside an elliptical core*. IEICE Trans. on Electronics, Japan, 1995, vol. E78-C, No. 1, pp. 111–116
3. T. Hosono, T. Hinata and H. Yoshikawa: *Numerical analysis of polarization-maintaining optical fibers with circular pits in a circular core*. Radio Science, 1984, vol. 19, No. 5, p. 1265–1270
4. D.R. Rhodes: *Theory of axially slitted circular and elliptic cylinder antennas*. J. Appl. Phys., 1950, vol. 21, pp. 1181–1188
5. J.H. Richmond: *Axial slot antenna on dielectric-coated elliptic cylinder*. IEEE Trans. Anten. Propagat., 1989, vol. 37, No. 10, pp. 1235–1241
6. J.Y. Wong: *Radiation patterns of slotted-elliptic cylinder antennas*. IRE Trans. Anten. Propagat., 1955, vol. 3, pp. 200–203
7. N.W. McLachlan: *Theory and application of Mathieu functions*. Clarendon Press, Oxford, England, 1947

Z. KRASIŃSKI, A. MAJEWSKI, T. HINATA

#### ZAGADNIENIE BRZEGOWE DLA PÓŁ ELEKTROMAGNETYCZNYCH W GEOMETRII ELIPTYCZNEJ

#### Streszczenie

Proponuje się zastosowanie zmodyfikowanej metody dopasowania punktowego do analizy światłowodów eliptycznych i problemów rozpraszania na obiektach o geometrii eliptycznej. Prezentowana metoda polega na rozwiązaniu zagadnienia brzegowego poprzez wyrażenie składowych pola elektromagnetycznego w jednym lub kilku układach współrzędnych eliptycznych, w postaci rozwinięć zawierających funkcje Mathieu. Wyniki numeryczne przedstawia się dla wysokodwójłomnych światłowodów eliptycznych o uogólnionym profilu „W” oraz problemu rozpraszania fali płaskiej na przewodzącym cylindrze eliptycznym z podłużnymi szczelinami.

**Słowa kluczowe:** światłowody eliptyczne, dwójłomność modowa, rozpraszanie fali płaskiej, funkcje Mathieu, metoda dopasowania punktowego.

# Model-based time-delay estimation

ANDRZEJ BORYS

*Instytut Telekomunikacji, Akademia Techniczno-Rolnicza, Bydgoszcz*

*Received 1995.08.21*

*Authorized 1996.03.10*

This paper deals with a problem of time-delay modelling in two-phase (gas-solid) flows. All the results presented refer to modelling transit-times of solids moving between sensors of a typical two-sensor measuring setup. The delays are extracted by comparison of two stochastic series obtained in measurements. For the purpose of modelling, the so-called g- and h-representations are developed for the relations between the two series and between the cross- and autocorrelation functions of the signals measured. Moreover, it is shown how to simplify the above representations to arrive at models, which are useful in practical estimation algorithms.

*Key words:* time-delay, estimation signal processing, radar signals, sonar signals.

## 1. INTRODUCTION

In this paper, we present a general framework for model-based estimation of time-delays. The estimation algorithm processes signals measured in a two-sensor setup. Here we refer to measurements done in a two-phase (gas-solid) flow [7].

The problem of time-delay occurs in such areas like radar and sonar signal processing, where the model with two identical sensor signals except for constant delay and additive noise is mostly used [8], [12]. The estimator structures applicable to this model have been developed [1], [8], [10], [12]. Crosscorrelation operation with signal prefiltering is performed in these structures. In the literature, there exist different filters to perform the prefiltering mentioned above. The most popular are those which are derived from the maximum likelihood principle (ML) [12]. Extensions of the time-delay model just mentioned are those with time-varying delays [16],[18] and those taking into account random variations of delay [3], [4].

The above model is useless, however, in most of flow problems, where estimation of time-delay is of great importance. These are quite different classes of problems. More detailed surveys on these classes of problems can be found in [11], [13–15]. Of

course, we can imagine a physical model of transit-times in a flow, governed by the laws of fluid dynamics. However, such a model would be too complicated to be useful in measurements. It is better to find a macroscopic model for transit-times in flows, and this philosophy lies behind an approach presented in this paper. A macroscopic model is presented in Section 2.

There exists one very often used model for transit-time modelling in the field of flows, see for example [11], [14], [17]. This model is based on the convolution integral and is attributed to Prof. Mesch and his research group. Here, we extend this model. Quite general expressions in form of the so-called g- and h-representations, which are extensions of the convolution integral [2], are developed. The theoretic results obtained in the paper are illustrated on an example of modelling and/or estimation of time-delays in a circulating fluidized bed [9].

The presentation is organized as follows. Section 2 presents derivation of the g- and h-representations for the relation between the sensor signals. The expressions for the g- and h-functions are developed in an explicit form as well. Furthermore, it is shown that the g-representation reduces to the h-representation under the assumption of separability of variables  $y$  (characteristic feature for a pattern in a flow) and  $t$  (time). In the next Section, the g- and h-representations are considered from the stochastic point of view. The corresponding relations between the cross- and autocorrelation functions are developed as well. Section 4 discusses possible scenarios of modelling for three kinds of flows. The paper ends with a summary.

## 2. TRANSIT-TIME MODELLING

The kind of modelling presented in this paper refers to measurements done with **any two-sensor setup**. One such an example is shown schematically in Fig. 1.

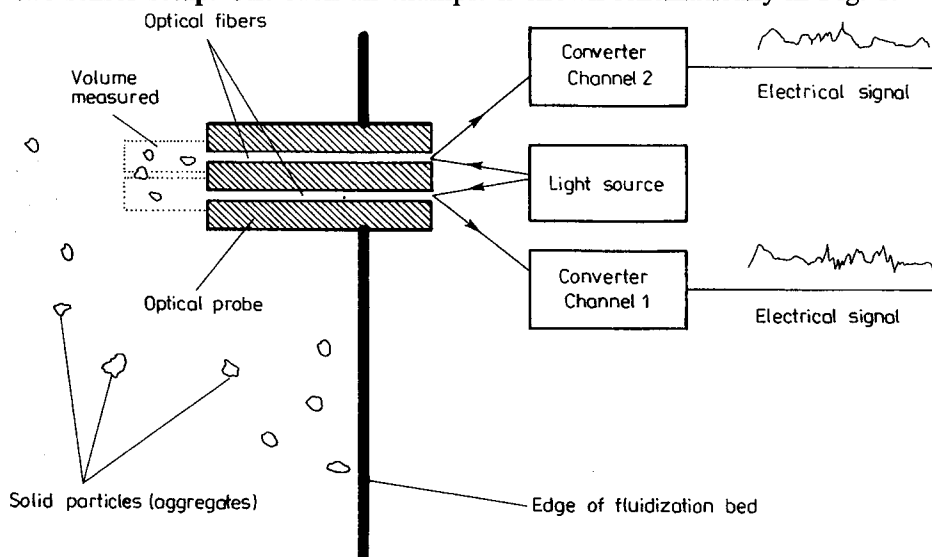


Fig. 1. Optical two-sensor measuring setup used in transit-time measurements

The optical measuring setup from Fig. 1 was used to obtain velocity patterns for solids in a fluidization bed. These results have been reported in [5], [6], [9].

Optical probe in Fig. 1 consists of two optical fibers for transmitting both the emitted and reflected light. The reflected light (from solid particles in the bed) is detected and converted into electrical signal. The electrical signal is then digitized. Finally, the digitized signal is processed (on line or off line) to obtain some useful information about the process in a fluidization bed, as for example solids velocity patterns. It can be shown that the electrical signals measured in the channels 1 and 2 in Fig. 1 are proportional to the solids volume concentration [9].

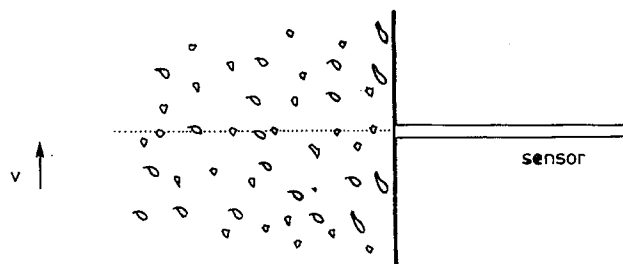
Let the distance between the sensors in a two-sensor measuring setup is  $L$ . In the setup of Fig. 1 used in [5], [6], [9], the sensors were positioned vertically in the fluidizing vessel in the distance  $L=4,4$  mm from each other.

First, let us assume ideal sensors as shown in Fig. 2a, that is sensors performing no spatial averaging (spatial averaging is illustrated in Fig. 2b). Then the measured signals, i.e. sensor signals, can be modelled as follows

$$s_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial z(y, t)}{\partial y} dy, \quad (1)$$

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial z(y, t - D(y))}{\partial y} dy, \quad (2)$$

a)



b)

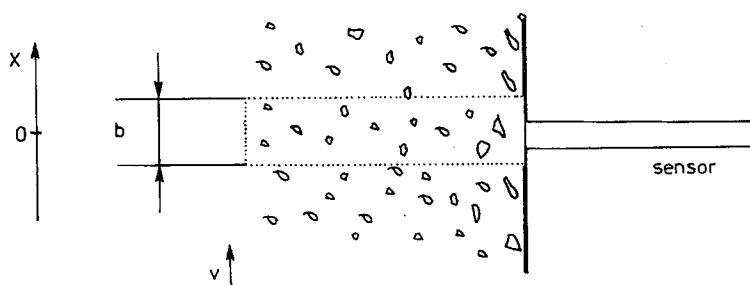


Fig. 2. Illustration to notion of ideal sensor a) — this is a sensor working with no volume (registering only particles lying on a dotted line in figure), b) nonideal sensor — this a sensor working with some volume shown as a dotted rectangular in figure

where  $t$  means time,  $s_1(t)$  and  $s_2(t)$  mean a signal at the first sensor (first channel) and at the second sensor (second channel), respectively. Moreover, the function  $z(y, t)$  in (1) and (2) is a function describing decomposition of a characteristic feature  $y$  of distinct particles (or their patterns) in a two-phase flow. (For example, particle velocity can play a role of a characteristic feature.) Each of these patterns is assumed to move with some specific velocity. Furthermore, the decomposition function  $z(y, t)$  is taken with regard to the signal amplitude and is assumed to depend upon time  $t$ . Note also that this function does not depend upon any other variable. It would depend upon the velocity if spatial averaging of a sensor would be taken into account, see Fig. 2b.

In [17], spatial averaging of a sensor in Fig. 2b is modelled by a low-pass filtering in the time domain, see Fig. 3. This result, however, will not be used in this paper.

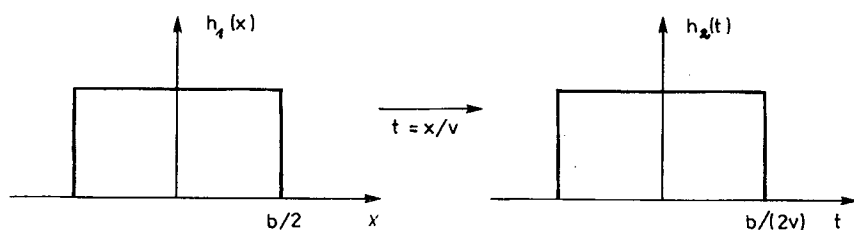


Fig. 3. Spatial averaging transformed into filtering in time domain, after [17]

The meaning of the variables in Fig. 3 is the same as in Fig. 2b. Moreover,  $t$  in Fig. 3 means time. Furthermore,  $h_1(x)$  and  $h_2(t)$  are the impulse responses of a spatial filter and a time-domain filter, respectively.

The function  $D(y)$  in (2) describes the time-delay, which takes place on a way between two sensors for a part of signal belonging to some particle pattern. Throughout this paper, the function  $D(y)$  is assumed to be a monotone function of its argument  $y$ , and independent of time.

Observe now that the expression under the integral symbol in (2) can be formally expressed as

$$\frac{\partial z(y, t - D(y))}{\partial y} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial z(y, \tau)}{\partial y} \delta(t - D(y) - \tau) d\tau. \quad (3)$$

In (3),  $\delta(\cdot)$  represents a Dirac impulse.

Substituting (3) into (2) and changing the order of integration yields

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial z(y, \tau)}{\partial y} \delta(t - D(y) - \tau) dy d\tau. \quad (4)$$

Defining in (4)

$$g(\tau, t - \tau, z, D) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial z(y, \tau)}{\partial y} \delta(t - D(y) - \tau) dy \quad (5)$$

leads to

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau, \tau, z, D) d\tau. \quad (6)$$

The expression (6) is the “g-representation”, we looked for, for the relation between the signal and output signals. Note, however, that there is some difference between our g-representation and the g-representation in [2]. In (6),  $z$  and  $D$  stand instead of  $s_1$ . Nevertheless, because there exists a simple relation between  $z$  and  $s_1$ , see eq. (1), we use here the same name for the representation in (6) as that used in [5].

Assume now that the variables  $y$  and  $t$  in  $z(y, t)$  can be separated. This means that the following relation

$$\frac{\partial z(y, t)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (z_1(y) \cdot z_2(t)) = z_2(t) \frac{\partial z_1(y)}{\partial y} \quad (7)$$

holds. Substituting (7) in (1) yields

$$s_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z_2(t) \frac{\partial z_1(y)}{\partial y} dy = z_2(t) \cdot \lambda, \quad (8)$$

where the constant  $\lambda$  is given by

$$\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial z_1(y)}{\partial y} dy. \quad (9a)$$

Equation (8) shows that the only difference between the functions  $s_1(t)$  and  $z_2(t)$  lies in the coefficient  $\lambda$ . Without loss of generality, this coefficient can be chosen to be equal to 1 (note that the function  $z_1(y)$  plays an analogous role to a distribution function in probability theory). So substituting

$$\lambda = 1 \quad (9b)$$

in (8) gives

$$s_1(t) = z_2(t). \quad (10)$$

Substituting (7) and (10) into (4) gives

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial z_1(y)}{\partial y} \delta(t - D(y) - \tau) dy d\tau. \quad (11)$$

Defining now

$$h(t - \tau, z_1, D) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial z_1(y)}{\partial y} \delta(t - D(y) - \tau) dy \quad (12)$$

and substituting in (11), we arrive at the so-called h-representation [2] for the relation between  $s_1(t)$  and  $s_2(t)$ . **This representation in our specific case reduces, however, to an ordinary convolution integral and has the following form**

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau, z_1, D) s_1(\tau) d\tau. \quad (13)$$

*Comment.* Equation (13) shows that the signals  $s_1(t)$  and  $s_2(t)$  can be considered as an input and an output of a linear system having an impulse response  $h(t, \cdot)$ . In other words,  $s_1(t)$  and  $s_2(t)$  are related by a convolution integral of some linear system (of some linear filter). This means that the signal  $s_2(t)$  is a filtered copy of  $s_1(t)$ .

Interesting to note is the fact that both the functions  $g(t-\tau, \tau, z, D)$  and  $h(t-\tau, z_1, D)$  can be expressed without using the integration symbol. Namely, defining the inverse function to  $D(y) = t - \tau$  as

$$y = D^{-1}(t - \tau), \quad (14)$$

and substituting this function in (5) gives

$$g(t - \tau, \tau, z, D) = \frac{1}{|D'(y)|} \left. \frac{\partial z(y, \tau)}{\partial y} \right|_{y=D^{-1}(t-\tau)}, \quad (15)$$

where  $D'(y)$  is the derivative of  $D$  with respect to  $y$ .

Similarly, using (14) in (12) yields

$$h(t - \tau, z_1, D) = \frac{1}{|D'(y)|} \left. \frac{\partial z_1(y)}{\partial y} \right|_{y=D^{-1}(t-\tau)}. \quad (16)$$

Let us now take into account the nonideal behaviour of the sensors by incorporating into the model their spatial averaging [17]. Then the corresponding expressions have the form

$$s_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial z(y, D(y), t)}{\partial y} dy, \quad (17)$$

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial z(y, D(y), t - D(y))}{\partial y} dy, \quad (18)$$

$$g(t - \tau, \tau, z, D) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial z(y, D(y), \tau)}{\partial y} \delta(t - D(y) - \tau) dy. \quad (19)$$

Similarly, when the separation rule is applicable to variables  $y$  and  $t$ , then we can write

$$\frac{\partial z(y, D(y), t)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (z_1(y, D(y)) \cdot z_2(t)) = z_2(t) \frac{\partial z_1(y, D(y))}{\partial y}. \quad (20)$$

Moreover, without loss of generality, we can assume

$$\lambda_D = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial z_1(y, D(y))}{\partial y} dy = 1. \quad (21)$$

Hence, when  $z(y, t)$  is factorisable, the equivalents of (17), (18) and (19) have the following form

$$s_1(t) = \lambda_D \cdot z_2(t) = z_2(t), \quad (22)$$

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial z_1(y, D(y))}{\partial y} z_2(t) dy, \quad (23)$$

$$h(t - \tau, z_1, D) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial z_1(y, D(y))}{\partial y} \delta(t - D(y) - \tau) dy. \quad (24)$$

Note that the expressions (15) and (16) only slightly change their form after taking into account sensor spatial averaging. For completeness, we write now down these modified relations

$$g(t - \tau, \tau, z, D) = \frac{1}{|D'(y)|} \frac{\partial z(y, D(y), \tau)}{\partial y} \Big|_{y=D^{-1}(t-\tau)}, \quad (25)$$

and

$$h(t - \tau, z_1, D) = \frac{1}{|D'(y)|} \frac{\partial z_1(y, D(y))}{\partial y} \Big|_{y=D^{-1}(t-\tau)}. \quad (26)$$

There exist in the signal processing literature two well known models used for time-delay estimation. The first one assumes a constant time-delay  $T_0$  between the sensor signals [1], [8], [10], [12], and the second one assumes a time-varying delay  $T(t)$  [16], [18].

These two models can be obtained in terms of our  $g$ - and  $h$ -representations. To show this, let us first consider the stationary case represented by  $h(t - \tau, z_1, D)$ , and write

$$h(t - \tau, z_1, D) = \delta(t - T_0 - \tau). \quad (27)$$

Substituting (27) in (13) yields

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - T_0 - \tau) s_1(\tau) d\tau = s_1(t - T_0). \quad (28)$$

In flows terminology, eq. (28) means that we have to do with all the particles (see Fig. 1) moving with a constant velocity  $v_0 = L/T_0$ . The transit-time of these particles is constant and equal to  $T_0$ . Note that in this case the function  $z_1(y)$  can be chosen to be

$$z_1(y) = \mathbf{1}(y - v_0), \quad (29)$$

where the function  $\mathbf{1}(x)$  is a unit step function.

Consider now the nonstationary case represented by the function  $g(t - \tau, \tau, z, D)$  and assume the following form for this function

$$g(t - \tau, \tau, z, D) = s_1(\tau) \delta(t - T(t) - \tau) \quad (30)$$

Substituting (30) in (6) yields

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) \delta(t - T(t) - \tau) d\tau = s_1(t - T(t)). \quad (31)$$

In flows terminology, eq. (31) must be interpreted as follows: the velocity of moving particles changes, it depends upon time. For the case of having more particle patterns in a flow, moving with different velocities, the estimated function  $T(t)$  from eq. (31) could be understood as a "group" delay for the above patterns (on the way between sensors).

Note that equation (30) can be also interpreted as a reduction of the g-representation to the nonstationary h-representation, i.e. to the product of two functions, one being the "input signal"  $s_1(\tau)$  and the second one being the "nonstationary impulse response". (Under the nonstationary impulse response we understand here a function dependent not only upon the time variable  $t - \tau$  but upon the time  $t$  as well.)

Both the above simple models, the one with a constant time-delay  $T_0$  built in and the second with a time-varying delay function  $T(t)$  built in were applied in [5] to estimate solid transit-times in a gas-solid flow of a circulating fluidized bed [9]. The method was called in [5] a segment-by-segment searching. It can be briefly described as follows:

1. find a segment (pattern) in a signal of the first sensor (i.e. in a signal  $x_1(t) = s_1(t) + n_1(t)$ , where  $n_1(t)$  means a small additive electronic noise in the first channel) possessing a feature or a number of features, which are characteristic for a solid lump; electronic noise means here a noise which is produced on the way of signal from the volume measured to the converter output, see Fig. 1,
2. detect (recognize) this segment in a signal of the second sensor (i.e. in a signal  $x_2(t) = s_2(t) + n_2(t)$ , where  $n_2(t)$  means a small additive electronic noise in the second channel),
3. find the difference in the instants of occurrence of the pattern and its recognized version,
4. go over to the next segment until all the registered samples of the signal  $x_1(t)$  are searched through.

The above procedure is illustrated in Fig. 4. Note that the difference in instants of occurrence of peaks in Fig. 4d is the estimated value of transit-time for the period of time considered in Fig. 4.

Hence, it follows that the segment-by-segment searching method rests upon two assumptions:

1. there occurs an infinite number of pairs of signal segments, each pair consisting of one segment taken from  $s_1(t)$  and the corresponding one taken from  $s_2(t)$ , such that for each pair

$$s_2(t) \cong s_1(t - T(t)) \text{ in some interval } t_i \leq t \leq t_i + \Delta t_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (32a)$$

holds;

2. in the intervals  $t_i \leq t \leq t_i + \Delta t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , the function  $T(t)$  is practically constant, that is

$$T(t) \cong T_{0i}. \quad (32b)$$

Before going further, we formulate now two theorems.

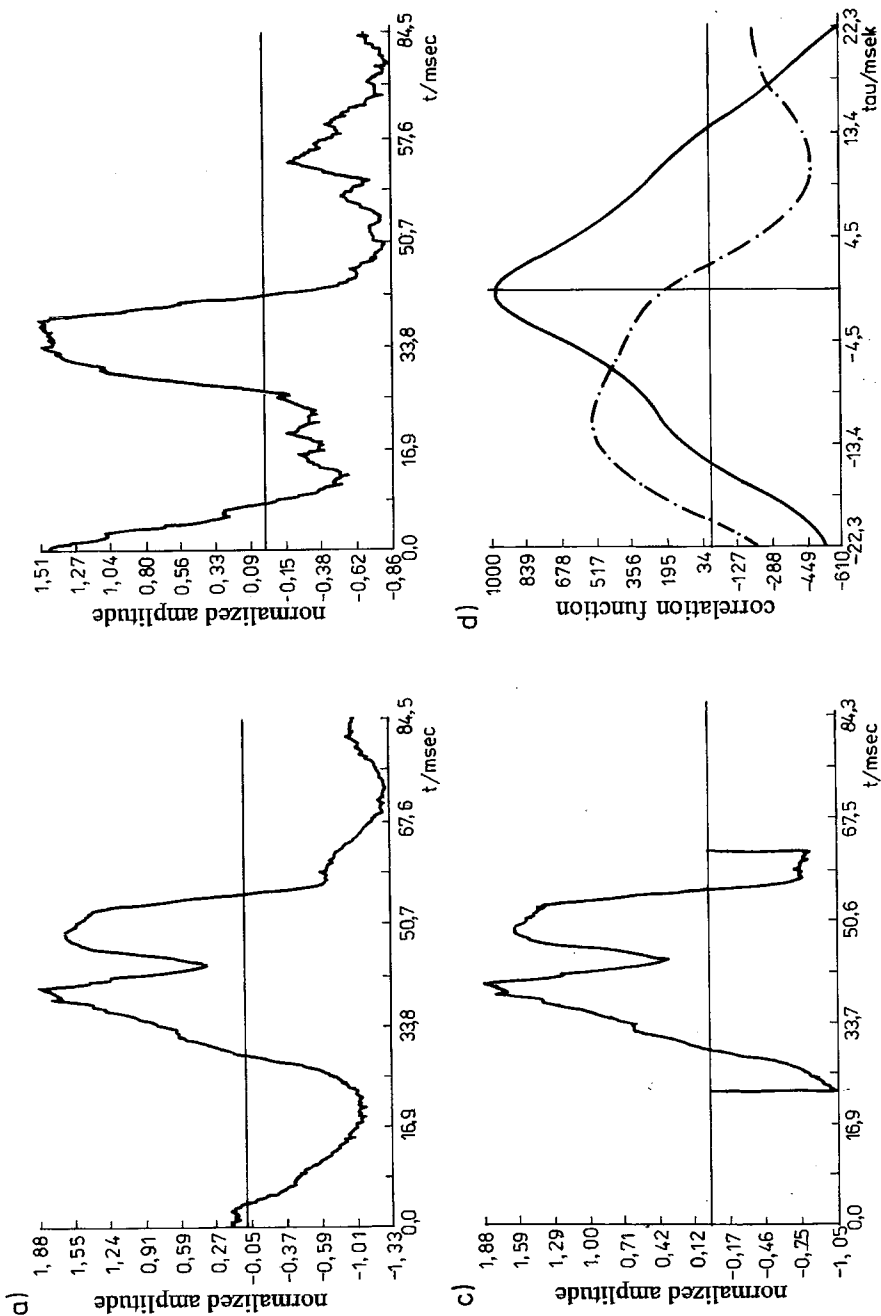


Fig. 4. a) a segment taken from the signal measured at the first channel, b) the corresponding segment of the signal measured at the second channel, c) a part of the signal of Fig. 4a taken for correlation function calculations with the signal of Fig. 4a or Fig. 4b, d) correlation function: solid line — for the signal of Fig. 4c) with the signal of Fig. 4a), dashed line — for the signal of Fig. 4c) with the signal of Fig. 4b)

*Theorem 1 (necessity condition).* Consider a two-phase flow in which concentration of one of the phases is measured with a two-sensor setup as, for example, that shown in Fig. 1. The necessity condition for the variables  $y$  and  $t$  to be factorisable in the function  $z(y,t)$  describing this flow is the existence of the linear stationary convolution representation for the signals measured (neglecting the small additive noise corrupting these signals). This convolution representation has the form given by eq. (13).

Proof: Note that the necessity condition for the variables  $y$  and  $t$  to be factorisable in the function  $z(y,t)$  has been already proved in the derivation presented above which led to eq. (13). The argument is that if eq. (13) would not hold we would arrive at the representation given by eq. (6). And the variables  $y$  and  $t$  would not be factorisable what means contradiction.

*Theorem 2 (sufficiency condition).* Consider a two-phase flow in which concentration of one of the phases is measured with a two-sensor setup as, for example, that shown in Fig. 1. The sufficiency condition for the variables  $y$  and  $t$  to be factorisable in the function  $z(y,t)$  describing this flow is the existence of the linear stationary convolution representation for the signals measured (neglecting the small additive noise corrupting these signals), as in eq. (13), with the impulse response function satisfying eq. (16) (or eq. (26)). That is there should exist such two functions  $z_1$  and  $D$  for the impulse response in (13) that satisfy eq. (16) (or eq. (26)).

Proof: Assume that eqs. (13) and (16) are satisfied. Then eq. (13), according to (16) and (12), can be rewritten as

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial z_1(y)}{\partial y} \delta(t - D(y) - \tau) dy d\tau. \quad (33a)$$

Note that eq. (33a) can be written equivalently in the form

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial (s_1(\tau) z_1(y))}{\partial y} \delta(t - D(y) - \tau) dy d\tau. \quad (33b)$$

Comparing now (33b) with (4), we see that both the relations are identical when we assume  $z(y,\tau) = s_1(\tau) z_1(y)$ . And the latter means that the variables  $y$  and  $t$  are factorisable in the function  $z(y,t)$ . Moreover, note that the proof is similar when spatial averaging of the sensors is taken into account. That is when eq. (26) is taken into account, instead of eq. (16). This ends the proof.

Consider now again a circulating fluidization process and take into account the following two things:

1. observation done in [7] that in short time periods the relation between sensor signals can be modelled by eq. (28),
2. theorem 2.

We conclude from the above that the function  $z(y,t)$ , which can eventually be obtained by solving the physical equations governing a circulating fluidization process, must possess the following properties:

1. the variables  $y$  and  $t$  in the function  $z(y, t)$  are factorisable when short time periods are considered,
2. when longer time periods are considered, then the variables  $y$  and  $t$  are not factorisable.

### 3. STOCHASTIC CONSIDERATION OF THE MODEL

Assume now that  $z(y, \cdot, t)$  is a sample of a stochastic process. (Note that the symbol “ $\cdot$ ” at the position of arguments of the function  $z$  stands for the function  $D(y)$ . Moreover, note that this term disappears if a model with ideal sensors is considered.) Then the signal  $s_1(t)$  is also a sample of a stochastic process. So we can calculate the autocorrelation function of  $s_1(t)$ , which will be expressed in our case by

$$R_{s_1 s_1}(t, \varphi) = E\{s_1(t) s_1(t + \varphi)\} = E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial z(y_1, \cdot, t)}{\partial y_1} dy_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial z(y_2, \cdot, t + \varphi)}{\partial y_2} dy_2\right\} \quad (34)$$

In (34), the symbol “ $\cdot$ ” at the positions of arguments of the function  $z$  stands for the function  $D(y_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Note that this term disappears if a model with ideal sensors is considered. Moreover, the symbol  $E$  in (34) means the expectation operation.

On assuming in eq. (34) the change of operations order as is shown below

$$R_{s_1 s_1}(t, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E\left\{\frac{\partial z(y_1, \cdot, t)}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial z(y_2, \cdot, t + \varphi)}{\partial y_2}\right\} dy_1 dy_2 \quad (35)$$

is allowable, and that the following function

$$f(t, t + \varphi, y_1, y_2) = E\left\{\frac{\partial z(y_1, \cdot, t)}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial z(y_2, \cdot, t + \varphi)}{\partial y_2}\right\} \quad (36)$$

exists, we obtain finally from (34)

$$R_{s_1 s_1}(t, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, t + \varphi, y_1, y_2) dy_1 dy_2. \quad (37)$$

On the other hand, the crosscorrelation function between the signals  $s_1(t)$  and  $s_2(t)$  can be generally expressed as

$$\begin{aligned} R_{s_1 s_2}(t, \varphi) &= E\{s_1(t) s_2(t + \varphi)\} = \\ &= E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial z(y_1, \cdot, t)}{\partial y_1} dy_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial z(y_2, \cdot, t + \varphi - D(y_2))}{\partial y_2} dy_2\right\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Using eq. (36) in (38) yields

$$R_{s_1 s_2}(t, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, t + \varphi - D(y_2), y_1, y_2) dy_1 dy_2. \quad (39)$$

Note now that the expression under the integral symbol in (39) can be formally written as

$$f(t, t + \varphi - D(y_2), y_1, y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \tau, y_1, y_2) \delta(t + \varphi D(y_2) - \tau) d\tau. \quad (40)$$

So substituting (40) into (39) gives

$$R_{s_1 s_2}(t, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} g_s(t, \varphi, \tau, f, D) d\tau, \quad (41)$$

where

$$g_s(t, \varphi, \tau, f, D) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \tau, y_1, y_2) \delta(t + \varphi - D(y_2) - \tau) dy_1 dy_2. \quad (42)$$

Eq. (41) can be considered as a relation between the cross- and autocorrelation functions of the signals  $s_1(t)$  and  $s_2(t)$ . This is because  $g_s(t, \varphi, \tau, f, D)$  in (42) is related with  $R_{s_1 s_1}(t, \varphi)$  through the function  $f$  — both depend upon this function.

Consider now the case, when it is allowable to separate the variables  $y$  and  $t$ , and consider first the function  $R_{s_1 s_1}(t, \varphi)$ . This function can be then expressed as

$$R_{s_1 s_1}(t, \varphi) = E \left\{ s_1(t) s_1(t + \varphi) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial z_1(y_1, \cdot)}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial z_1(y_2, \cdot)}{\partial y_2} dy_1 dy_2 \right\}. \quad (43)$$

On assuming further the independence of random variables in (43), we arrive at

$$R_{s_1 s_1}(t, \varphi) = E \{ s_1(t) s_1(t + \varphi) \} \cdot \lambda_y, \quad (44a)$$

where

$$\lambda_y = E \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial z_1(y_1, \cdot)}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial z_1(y_2, \cdot)}{\partial y_2} dy_1 dy_2 \right\}. \quad (44b)$$

Note finally that substituting  $\lambda_y = 1$  in (44a) yields the definition equation for  $R_{s_1 s_1}(t, \varphi)$ .

Consider now the crosscorrelation function between the signals  $s_1(t)$  and  $s_2(t)$  for the case of factorisable variables  $y$  and  $t$  in the function  $z(y, t)$ . Then, using the general definition given by (38) and (13), we arrive at

$$R_{s_1 s_2}(t, \varphi) = E \left\{ s_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} h(t + \varphi - \tau, z_1, D) \dot{s}_1(\tau) d\tau \right\}. \quad (45)$$

Furthermore, assume that it is allowable to write

$$R_{s_1 s_2}(t, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} E \{ s_1(t) s_1(\tau) h(t + \varphi - \tau, z_1, D) \} d\tau. \quad (46)$$

Moreover, assume that the stochastic process  $s_1$  is stationary, and that  $s_1$  and  $h$  are statistically independent, that is

$$E \{ s_1(t) s_1(\tau) h(t + \varphi - \tau, z_1, D) \} = R_{s_1 s_1}(\tau - t) \bar{h}(t + \varphi - \tau, z_1, D), \quad (47a)$$

where

$$\bar{h}(t + \varphi - \tau, z_1, D) = E\{h(t + \varphi - \tau, z_1, D)\}. \quad (47b)$$

Then we can rewrite (45) in the form

$$R_{s_1 s_2}(t, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{s_1 s_1}(\tau - t) \bar{h}(t + \varphi - \tau, z_1, D) d\tau. \quad (48)$$

Substituting  $\tau' = \tau - t$  in (48) leads to

$$R_{s_1 s_2}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{s_1 s_1}(\tau') \bar{h}(\varphi - \tau', z_1, D) d\tau', \quad (49a)$$

and finally

$$R_{s_1 s_2}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{s_1 s_1}(\tau) \bar{h}(\varphi - \tau, z_1, D) d\tau. \quad (49b)$$

Eq. (49b) shows that the relation between the crosscorrelation function of the signals  $s_1(t)$  and  $s_2(t)$  and the autocorrelation function of the signal  $s_1(t)$  can be expressed in the form of a convolution integral, under the conditions mentioned. In other words,  $R_{s_1 s_2}$  and  $R_{s_1 s_1}$  are related through the impulse response of a linear time-invariant system. Furthermore, the impulse response of this linear system is nothing else than the averaged impulse response given by eq. (16) or (26).

Writing now quite formally a variable  $T$  instead of  $t - \tau$  in (16) or (26), we arrive at

$$h_{(1)}(T, z_1, D) = \frac{1}{|D'(y)|} \left. \frac{\partial z_{1(1)}(y)}{\partial y} \right|_{y=D^{-1}(T)} \quad (50a)$$

and

$$h_{(2)}(T, z_1, D) = \frac{1}{|D'(y)|} \left. \frac{\partial z_{1(2)}(y)}{\partial y} \right|_{y=D^{-1}(T)}, \quad (50b)$$

respectively. Note that the function  $z_{1(i)}$ ,  $i=1, 2$ , in (50) means the function  $z_1$  in which the sensor spatial averaging is taken into account ( $i=2$ ) or not ( $i=1$ ). The similar refers to the functions  $h_{(1)}(T, z_1, D)$  and  $h_{(2)}(T, z_1, D)$ .

Assuming the variable  $y$  in (50) means velocity, we can interpret the right-hand side functions in (50) as the density functions of delays,  $p_T(T)$ , belonging to some sample function of a stochastic process. This is because, in fact, the functions  $\frac{\partial z_{1(i)}(y)}{\partial y}$ ,  $i=1, 2$ , play the role of density functions of velocities on assuming  $y=v$ , see eqs. (9a) and (21). Furthermore, the left-hand side of each of the above expressions represents an impulse response of a linear time-invariant system. So we can rewrite (50a) and (50b) as

$$h_{(i)}(T, \cdot) = p_{T(i)}(T), \quad i=1, 2. \quad (51)$$

Performing now the averaging operation from (47b) yields

$$\bar{h}_{(i)}(T, \cdot) = \bar{p}_{T(i)}(T), \quad i = 1, 2. \quad (52)$$

Note that the functions  $\bar{p}_{T(i)}(T)$ ,  $i = 1, 2$ , given by (52) represent the delay density functions, which take into account all the sample functions of a process. Therefore, we simply identify them with the delay probability density functions.

In general,  $\bar{h}_{(1)}(T, \cdot) \neq \bar{h}_{(2)}(T, \cdot)$ . However, if

$$\bar{h}_{(1)}(T, \cdot) - \bar{h}_{(2)}(T, \cdot) \cong 0 \quad \text{for all } T\text{'s} \quad (53)$$

holds, then

$$\bar{p}_{T(1)}(T) \cong \bar{p}_{T(2)}(T). \quad (54)$$

Eq. (54) states that the influence of sensor spatial averaging on the probability density function of delays can be neglected under the conditions mentioned above.

Note that using eqs. (45–52) the method of segment-by-segment searching described in previous Section can be interpreted as follows:

1. Time series measured in both channels, which are sample functions of two stochastic processes, are divided into segments, separately in each channel. The segments are chosen in such a way that it can be assumed that the variables  $y$  and  $t$  are separable and the function  $\partial z_1(y)/\partial y$  does not change within these segments. The function  $\partial z_1(y)/\partial y$  is still, however, subject to random changes, when going from one segment to another. Furthermore, each of the segments obtained is lengthened in thought in both directions:  $t = -\infty$  and  $t = +\infty$ , provided that the assumption of a fixed function  $\partial z_1(y)/\partial y$  holds for all times. So one arrives at two collections of sample functions for two stochastic processes (corresponding to two channels), of which the corresponding sample function pairs are related according to relations of type (13).
2. An impulse response  $h(t, \cdot)$  is found for every pair of the corresponding sample functions from point 1. Or more primitively, as in the method of segment-by-segment searching discussed, each  $h(t, \cdot)$  is approximated by a Dirac impulse shifted  $T_{0i}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , seconds, and the  $T_{0i}$  is found.
3. From all the  $T_{0i}$ 's collected, a histogram is constructed. This corresponds to constructing the function  $\bar{p}_T$ . Or equivalently, a histogram for velocities is constructed, corresponding to the function  $\bar{p}_v$ .

Using the method described above, it has been shown [7] that the function  $\bar{p}_v$  in a circulating fluidization process can be modelled as a sum of two Gauss functions. That is

$$\bar{p}_v(v) = \frac{\alpha}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-(v-v_{01})^2/(2\sigma_1^2)} + \frac{1-\alpha}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-(v-v_{02})^2/(2\sigma_2^2)}, \quad (55)$$

where  $\alpha$  and  $1 - \alpha$  are the weighting coefficients regarding the participation of dense and lean subphase in the solid phase [7], respectively.  $v_{01}$ ,  $\sigma_1$  and  $v_{02}$ ,  $\sigma_2$  are the mean value of velocity and its standard deviation for the dense and lean subphase, respectively.

#### 4. THREE SCENARIOS OF TRANSIT-TIME MODELLING

In this Section, we describe three possible scenarios of transit-time modelling in two-phase flows in terms of the model developed. Here we also summarize the results presented in the previous two Sections.

Let us start with the simplest scenario.

##### *Scenario No. 1.*

This scenario concerns a situation, where  $\bar{h}(t, \cdot) = h(t, \cdot) = \delta(t - T_0)$ . In other words, the above situation corresponds to the model with a constant delay. And physically, this means that all the solid particles, which make one phase of a flow consisting of two phases, move with the same velocity.

##### *Scenario No. 2.*

This scenario concerns a situation, where  $h(t, \cdot)$  represents such an impulse response of a linear time-invariant system, which is not a Dirac impulse. However, as before, this impulse response is not subject to random changes, i.e.  $\bar{h}(t, \cdot) = h(t, \cdot)$ . The underlying model is then the  $h$ -representation in form of a convolution integral with the same impulse response for both the convolution integrals: between the sensor signals  $s_1(t)$  and  $s_2(t)$  and between the auto- and crosscorrelation functions  $R_{s_1 s_1}$  and  $R_{s_1 s_2}$ .

Note that this model is an extended version of the previous one with a constant delay. Physically, this scenario describes such a situation, where different solid particles move with different velocities and a flow transit-time profile, given by

$$\frac{1}{|D'(y)|} \left. \frac{\partial z_1(y)}{\partial y} \right|_{y=D^{-1}(T)}, \quad (56)$$

does not change. Then this profile, that is a function describing distribution of time-delays, is a deterministic function.

##### *Scenario No. 3.*

*Interpretation 1.* This scenario concerns a situation, where, we say loosely, the flow transit-time profile changes. Note that according to (56), the flow transit-time profile is not a function of time. So when we speak here about profile changes, it means that we consider its random changes. And, in this form, the model considered can be used as an auxiliary model to model random changes of the flow transit-time profile in a sample function of a stochastic process, as explained in the end of Section 3. Furthermore, if  $\bar{h}(t, \cdot)$  is the same for all the sample functions of the original stochastic process, then this process is "reproducible".

*Interpretation 2.* Another interpretation would be as explained in what follows. So when we say that a flow transit-time profile changes it means that we have to do with a relation between the signals  $s_1(t)$  and  $s_2(t)$  in form of a  $g$ -representation. Let us make the following approximation

$$g(t-\tau, \tau, z, D) \cong s_1(\tau) h(t-\tau, t, \cdot) \quad (57)$$

in this  $g$ -representation.

Note that  $h(t-\tau, t, \cdot)$  in (57) can be viewed as an impulse response that depends upon time. In other words, it is a time-dependent impulse response. Note also that eq. (57) presents a little bit more general approximation than that from (30), where  $h(t-\tau, t, \cdot)$  has had a particular form  $\delta(t-T(t)-\tau)$ .

Consider now the crosscorrelation function between the signals  $s_1(t)$  and  $s_2(t)$ . Substituting (57) into the definition expression for the crosscorrelation function (see eq. (38)), we obtain

$$R_{s_1 s_2}(t, \varphi) = E \left\{ s_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) h(t+\varphi-\tau, t, \cdot) d\tau \right\}. \quad (58)$$

Furthermore, assume that it is allowable to write

$$R_{s_1 s_2}(t, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} E \{ s_1(t) s_1(\tau) h(t+\varphi-\tau, t, \cdot) \} d\tau. \quad (59)$$

Moreover, assume that the stochastic process  $s_1$  is stationary, and that  $s_1$  and  $h$  are statistically independent, that is

$$E \{ s_1(t) s_1(\tau) h(t+\varphi-\tau, t, \cdot) \} = R_{s_1 s_1}(\tau-t) \bar{h}(t+\varphi-\tau, t, \cdot), \quad (60a)$$

where

$$\bar{h}(t+\varphi-\tau, t, \cdot) = E \{ h(t+\varphi-\tau, t, \cdot) \}. \quad (60b)$$

Then we can rewrite (58) in the form

$$R_{s_1 s_2}(t, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{s_1 s_1}(\tau-t) \bar{h}(t+\varphi-\tau, t, \cdot) d\tau. \quad (61)$$

Assume now that  $h(t', t, \cdot)$ , as a stochastic process, is stationary of order one. That means the time independence of the averaged time-dependent impulse response, or in other words, that the averaged impulse response behaves as an impulse response  $h_0(t, \cdot)$  of a linear time-invariant system. Hence, we can write

$$\bar{h}(t+\varphi-\tau, t, \cdot) = h_0(t+\varphi-\tau, \cdot). \quad (62)$$

Substituting first  $\tau' = \tau - t$  into (61), taking then (62) into account in (61), and writing finally  $\tau$  instead of  $\tau'$ , yields

$$R_{s_1 s_2}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{s_1 s_1}(\tau) h_0(\varphi-\tau, \cdot) d\tau. \quad (63)$$

Now we will prove that the function  $h_0(t, \cdot)$  (Interpretation 2) is identical with the function  $\bar{h}(t, \cdot)$  (Interpretation 1). For this purpose, we use the following definition:

$$\bar{h}(T, \cdot) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_j(T, t_i, \cdot), \quad (64)$$

where  $h_j(T, t_i, \cdot)$  means the impulse response estimated from the  $j$ -th sample of the signal  $s_1(t)$  and the  $j$ -th sample of the signal  $s_2(t)$  at the time instant  $t_i$ . Note that eq. (64) presents **averaging of impulse responses in a sample** of a stochastic process.

Similarly, we can define

$$h_0(T, \cdot) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N h_j(T, t_i, \cdot). \quad (65)$$

Note that eq. (65) presents **averaging of impulse responses over samples** of a stochastic process.

Because of assumption in Interpretation 1 that the functions  $\bar{h}(t, \cdot)$  are identical for all the samples, we can write

$$N\bar{h}(T, \cdot) \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_1(T, t_i, \cdot) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_2(T, t_i, \cdot) + \dots + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_N(T, t_i, \cdot) \quad (66)$$

for  $N$  large enough. Then we re-group terms in (66) according to the occurrence of the same time instants  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . This leads to

$$N\bar{h}(T, \cdot) \cong \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N h_j(T, t_1, \cdot) + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N h_j(T, t_2, \cdot) + \dots + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N h_j(T, t_N, \cdot). \quad (67)$$

Applying now the definition (65) in (67), we arrive at

$$N\bar{h}(T, \cdot) \cong Nh_0(T, \cdot). \quad (68)$$

Finally, we get from (68)

$$\bar{h}(T, \cdot) = h_0(T, \cdot) \quad (69)$$

with  $N$  going into infinity. This ends the proof.

Moreover, we point out here that the function  $\bar{h}(T, \cdot)$  is a probability density function of delays.

Other scenarios than those presented above are also possible. This depends, as we have seen, upon how  $g$ -representations obtained look like or how they can be approximated in a concrete case. Note that the consideration of higher-order statistics of  $h(t - \tau, t, \cdot)$  in scenario No. 3 can also yield more information about a flow.

## SUMMARY

A general framework for modelling the transit-time profiles in two-phase flows has been presented. It has been shown when the so-called  $g$ - and  $h$ -representations for the relations between signals, measured with a two-sensor setup, and between their auto-

and cross-correlation functions exist. These representations can be eventually further simplified in different ways, depending upon how a flow looks like. Furthermore, it has been shown that, among all the possible simplifications, there are all the models underlying time-delay estimation published in the signal processing literature. The results presented have been illustrated on an example of transit-time modelling and estimation in a circulating fluidized bed.

## REFERENCES

1. M. Azaria, D. Hertz: *Time delay estimation by generalized cross correlation methods*. IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-32, no. 2, 1984, pp. 280–285
2. D. Ball, I.W. Sandberg: *Systems which possess g- and h-representations*. Circuits, Systems and Signal Processing, vol. 8, no. 2, 1989, pp. 145–162
3. J. Bohmann, H. Meyer, R. Peters, G. Spies: *A signal processor for a noncontact speed measurement system*. IEEE Trans. on Vehicular Technology, vol. VT-33, no. 1, 1984, pp. 14–22
4. J. Bohmann, H. Meyer: *An all-digital realization of a baseband DLL implemented as a dynamical state estimator*. IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-34, no. 3, 1986, pp. 535–545
5. A. Borys: *Solids velocity estimation in two-phase turbulent flow*. Proceedings 11. DAGM-Symposium Mustererkennung (Pattern Recognition)'89, Hamburg, 1989, pp. 531–535
6. A. Borys: *On using a stochastic-delay model to estimate solid-cluster velocities in gas-solid streams* (przyjęte do druku w Zesz. Naukowych ATR Bydgoszcz)
7. A. Borys, N. Fliege: *Digitale Verarbeitung von Meßsignalen zur Erfassung der lokalen Struktur von Gas-Feststoff-Strömungen*, Bericht A7, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1988
8. C. Carter: *Coherence and time delay estimation*, Proceedings of the IEEE, vol. 75, no. 2, 1987, pp. 236–255
9. E. Hartge, D. Rensner, J. Werther: *Solids concentration and velocity patterns in circulating fluidized beds*. Preprints of the 2nd Int. Conference on Circulating Fluidized Beds, Compiègne, France 1988
10. J. Hassab, R. Boucher: *Optimum estimation of time delay by a generalized correlator*. IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-27, no. 4, 1979, pp. 373–380
11. H. Kipphan: *Verfahren zur störungsfreien Identifikation stochastischer Transportkenngrößen von Mehrphasen-Strömungen*, Ph. D. dissertation (in German), TU Karlsruhe, 1975
12. Ch. Knapp, C. Carter: *The generalized correlation method for estimation of time delay*. IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. ASSP-24, no. 4, 1976, pp. 320–327
13. F. Mesch, H. Kipphan: *Solids flow measurement by correlation methods*. Optoelectronics, vol. 4, 1972, pp. 451–462
14. F. Mesch, R. Fritsche, H. Kipphan: *Transit time correlation — a survey on its applications to measuring transport phenomena*. Transactions of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol. 96, 1974, pp. 414–420
15. F. Mesch: *Speed and flow measurement by an intelligent correlation system*. Proceedings ISA'90, New Orleans, USA, 1990
16. M. Namazi, J. Stuller: *A new approach to signal registration with the emphasis on variable time delay estimation*. IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-35, no. 12, 1987, pp. 1649–1660
17. R. Peters, F. Blischke, H. Meyer: *Transit-time estimation in turbulent flows*. IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-36, no. 1, 1988, pp. 20–28
18. J. Stuller: *Maximum-likelihood estimation of time-varying delay — Part I*. IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-35, no. 3, 1987, pp. 300–313

---

A. BORYS

## ESTYMACJA CZASU OPÓŹNIENIA

## S t r e s z c z e n i e

W artykule poruszono problem szacowania czasu opóźnienia na podstawie analizy sygnałów uzyskanych w pomiarach przeprowadzonych w dwufazowych przepływach. Przedstawiono ogólny model dla powyższego zagadnienia. W tym celu wykorzystano tzw.  $g$ - i  $h$ - zależności pomiędzy sygnałami uzyskiwanymi w pomiarach oraz ich funkcjami autokorelacji i korelacji wzajemnej.

*Słowa kluczowe:* estymacja czasu opóźnienia, przetwarzanie sygnałów.



## A note on determination of simplified models by means of the Chebyshev polynomials

JANUSZ HALAWA

*Instytut Techniki Cybernetycznej, Politechnika Wrocławska*

ANNA TRZMIELAK-STANISŁAWSKA

*Instytut Nauk Komputerowych, Uniwersytet Wrocławski*

*Received 1995.11.28*

*Authorized 1996.03.08*

Simplified models are applicable in control problems to reckon simple control functions significant in high-speed control equipment as well as in problems of computer simulation to simplify the program diagrams (flowsheets) and to reduce the time of computations. A response of the simplified system should, in the sense of the norm assumed, closely approximate the response of the higher-order system.

The paper reveals how to simplify the mathematical models described by high-order transfer functions using Chebyshev polynomials.

*Key words:* simplified model, computer simulations, Chebyshev polynomials.

### METHOD DESCRIPTION

The transfer function

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (1)$$

is approximated with interpolation of the Chebyshev polynomial having the following knots

$$u_{N-1,k} = \cos\left(\frac{k\pi}{N}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, N. \quad (2)$$

Knots (2) are the extreme values of Chebyshev  $N$ -th polynomial of the first type  $T_N(s)$  or zeros  $(N-1)$  of Chebyshev polynomial of the second type with the addition of the numbers  $-1$  and  $1$ .

For the given function  $f(s)$  and for each  $N > 0$  the interpolation polynomial  $J_N(s)$  with knots (2) is expressed by the formula:

$$J_N(s) = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^N \left( \sum_{k=0}^N f(u_{N-1,k}) T_j(u_{N-1,k}) \right) T_j(s). \quad (3)$$

The symbol  $\sum''$  denotes  $\sum_{j=1}^m a_j = \frac{1}{2} a_1 + a_{l+1} + \dots + a_{m-1} + \frac{1}{2} a_m$ , for  $m > 1$ .

The function  $f(s)$  is worth being approximated to interpolation polynomials  $J_N(s)$  with knots (2) since it has the least norm from among discrete projective operators connected with Chebyshev polynomials. If we intend to make use of Chebyshev polynomial for approximating the function (3) determined in the interval  $[c,d]$  being different from interval  $[-1,1]$ , it is sufficient to transform linearly the interval  $[c,d]$  into the interval  $[-1,1]$  and to approximate the function  $f\left(\frac{d-c}{2}s + \frac{d+c}{2}\right)$ .

The formula (3) provides a simple expression for Chebyshev polynomial coefficients  $J_N$ . By making use of the identity

$$T_l(u_{Nk}) = T_k(u_{Nl})$$

for integer  $k, l, N$  being such that  $n+1 \geq k \geq 0$  and  $N+1 \geq 0$ , we may write down

$$\sum_{k=0}^N f(u_{n-1,k}) T_j(u_{n-1,k}) = \sum_{k=0}^N f(u_{n-1,k}) T_k(u_{n-1,j})$$

and then the interpolation polynomial (3) takes the form

$$f(s) = \sum_{j=0}^N \alpha_j T_j(s), \quad (5)$$

where  $\alpha_j = \sum_{k=0}^N f(u_{N-1,k}) T_k(u_{N-1,j})$ .

Chebyshev coefficients (5) of the polynomial approximate the coefficients of the Chebyshev series of the function  $f$ .

If the function  $f(s) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j T_j(s)$  and the interpolation polynomial for the  $f(x)$  is given by formula (3), then the coefficients of this polynomial are

$$\alpha_k = c_k + \sum_{i=1}^{\infty} (c_{2iN-k} + c_{2iN+k}) \quad k=0, 1, 2, \dots, N-1$$

and

$$\alpha_N = c_N + \sum_{i=1}^{\infty} c_{(2i+1)N}.$$

Thus it follows from the above that if the sequence  $\{a_k\}_0^{\infty}$  tends regularly to zero then the least approximated error of the coefficient  $\alpha_N$  is burdened whereas the greatest one  $\alpha_{N-1}$  and the error decrease for  $k=N-2, N-3, \dots, 0$ .

For the transfer function (1) the polynomial (15) is determined, and next use is made of the  $\alpha_i$  coefficients of the polynomial determined for constructing the rational approximation.

The series (3) is approximated by the rational function of the form

$$G_{m,n_1}(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m_1} b_i^* T_i(s)}{\sum_{i=0}^{n_1} a_i^* T_i(s)}, \quad m_1 \leq m, \quad n_1 \leq n \quad (6)$$

is to be found. The approximation is composed in a similar way as Pade approximation for Maclaurin expansion, i.e. the coefficients  $b_i^*$  and  $a_i^*$  are determined so in such a way that for the expression

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i T_i(s) - \frac{\sum_{j=0}^{m_1} a_j T_j(s)}{\sum_{j=0}^{n_1} b_j T_j(s)} = \frac{\left(\frac{1}{2}c_0 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j T_j(s)\right) \left(\sum_{j=0}^{n_1} b_j T_j(s)\right) - \sum_{j=0}^{m_1} a_j T_j(s)}{\sum_{j=0}^{k_1} b_j T_j(s)} \quad (7)$$

the coefficients for  $T_i(s)$  ( $i=0, 1, \dots, N$ ) in the numeration of (5) would vanish, thus

$$\left(\frac{1}{2}c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i T_i(s)\right) \sum_{i=0}^{n_1} a_i^* T_i(s) - \sum_{i=0}^{m_1} b_i^* T_i(s) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i T_i(s) \quad (8)$$

Because of the identity

$$T_{i+j}(s) + T_{|i-j|}(s) = 2T_i(s)T_j(s)$$

the equation (8) may be written as follows:

$$\frac{1}{2}c_0 \sum_{i=0}^{n_1} a_i^* T_i(s) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n_1} a_i^* c_j (T_{i+j}(s) + T_{|i-j|}(s)) - \sum_{i=0}^{m_1} b_i^* T_i(s) = \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j T_j(s). \quad (9)$$

The following set of equations for  $b_i^*$  and  $a_i^*$  results from the equation (9)

$$b_0^* = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n_1} a_i^* c_i, \quad (10)$$

$$b_r^* = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n_1} a_i^* (c_{|r-i|} + c_{r+i}), \quad r=1, 2, \dots, N, \quad b_i^* = 0, \text{ if } r > m_1.$$

We obtain  $n_1 + m_1 + 1$  equations with  $n_1 + m_1 + 2$  unknowns  $b_i^*$  and  $a_i^*$ . We can assume that  $a_{n_1}^*$  is equal to 1. Hence, we have  $n_1 + m_1 + 1$  unknown coefficients. Taking  $N = n_1 + m_1$ , we obtain a system of linear equations. By solving the system (10), we obtain the transfer function of the lower order for (6).

### Example

According to the method outlined above we shall find a third-order simplified transfer function

$$G_{s6}(s) = \frac{y_{s6}(s)}{x(s)} = \frac{L_{s6}(s)}{M_{s6}(s)}, \quad (11)$$

where

$$L_{s6}(s) = 0.103618s^5 + 0.942926s^4 + 2.58809s^3 + 2.00013s^2 + 0.366893s + 0.01536$$

and

$$M_{s6}(s) = s^6 + 8.396000s^5 + 19.314208s^4 + 7.5692s^3 + 2.631616s^2 + 0.524477s + 0.0313344.$$

The roots of the  $L_{s6}(s)$  are:

$$s_1 = -0.0600, s_2 = -0.1800, s_3 = -0.8600, s_4 = -3.8008 \text{ and } s_5 = -4.2000.$$

The roots of the  $M_{s6}(s)$  are:

$$s_1 = -0.0967, s_2 = -0.2032, s_3 = -3.9203, \\ s_5 = -0.0486 - 0.3121i, s_6 = -0.0486 + 0.3121i.$$

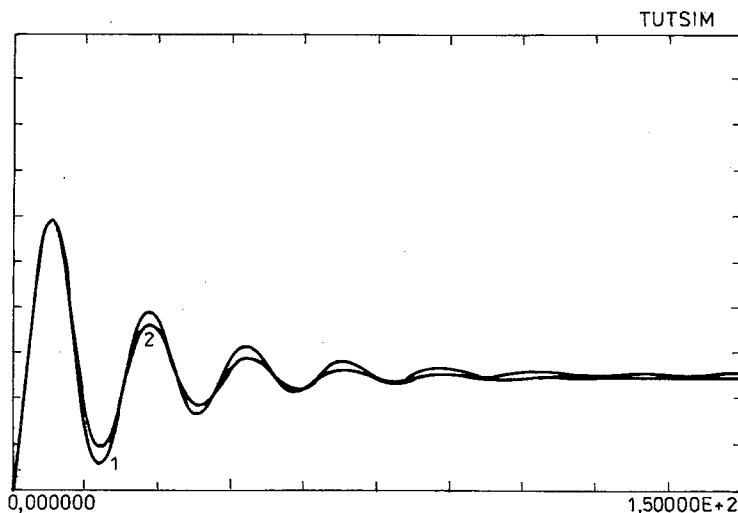


Fig. 1. The step responses of the models (11) and (12)

The transfer function (11) has been used as the example given above because its response to the step function is the oscillatory function. The above given system it is more difficult to determined the simplified transfer function which provide a better approximation of the initial system than in the case of systems of which responses are not the oscillatory functions.

The effect of the interval  $[c, d]$  on the response of the simplified system  $G_{23}(s)$  is shown in Fig. 1. For the interval  $[-1, 1]$  which contains the substantially affecting roots of the denominator (11), the response of the simplified system  $G_{23}(s)$  provides an affective approximation to the response of the simplified system. Fig. 1 presents responses of the initial systems (curve 1) and simplified systems to the interval  $[-1, 1]$ .

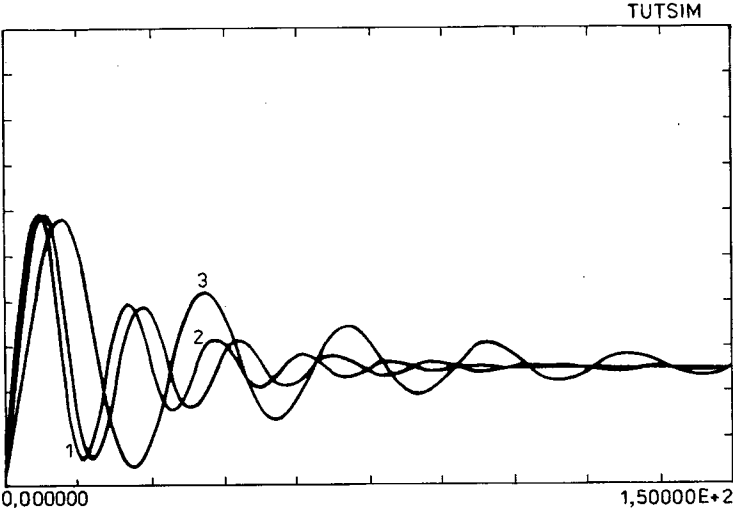


Fig. 2. The step responses of the models (12), (13) and (14)

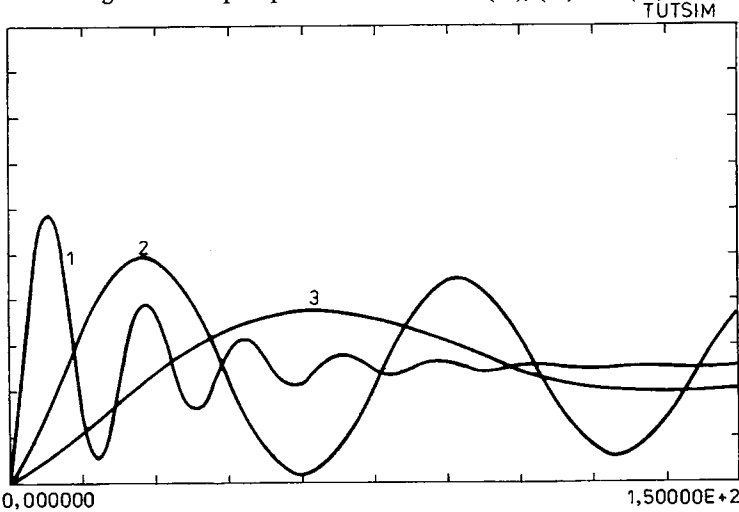


Fig. 3. The step responses of the models (12), (15) and (16)

Fig. 2 presents response of simplified systems to the following intervals:

1.  $[-1, 1]$  (curve 1),
2.  $[-0.9, 0.9]$  (curve 2) and
3.  $[-1.5, 1.5]$  (curve 3).

Fig. 3 presents response of simplified systems to the following intervals:

1.  $[-1, 1]$  (curve 1),
2.  $[-4, 4]$  (curve 2) and
3.  $[-10, 10]$  (curve 3).

The simplified transfer functions  $G_{23}(s)$  are:

$$G_{23}(s) = \frac{0.103094s^2 + 0.098544s + 0.008525}{s^3 + 0.248266s^2 + 0.113627s + 0.016814}, \text{ for intervals } [-1, 1], \quad (12)$$

$$G_{23}(s) = \frac{0.114311s^2 + 0.114311s + 0.011941}{s^3 + 0.188397s^2 + 0.052800s + 0.006763}, \text{ for intervals } [-0.9, 0.9], \quad (13)$$

$$G_{23}(s) = \frac{0.068767s^2 + 0.045456s + 0.003500}{s^3 + 0.188397s^2 + 0.052800s + 0.006763}, \text{ for intervals } [-1.5, 1.5], \quad (14)$$

$$G_{23}(s) = \frac{0.026084s^2 + 0.030344s + 0.004732}{s^3 + 1.007937s^2 + 0.015754s + 0.009391}, \text{ for intervals } [-4, 4], \quad (15)$$

$$G_{23}(s) = \frac{0.010255s^2 + 0.033432s + 0.003127}{s^3 + 3.152508s^2 + 0.071997s + 0.006235}, \text{ for intervals } [-10, 10]. \quad (16)$$

For the intervals  $[-0.3, 0.3]$  and  $[-5.0, 0.0]$  unstable simplified models have been obtained.

## CONCLUSIONS

The method presented in this paper has made it possible to obtain an effective approximation of the step response of the system described by the transfer function of the high order by means of the step response of the simplified system as compared with other methods for determining simplified models discussed in technical publication [3, 4].

The most frequently used form of the simplified system is the one described by means of the  $G_{23}(s)$  transfer function. It turns out, however, that in the method presented above the essential role is played by the interval  $[c, d]$  in which we do calculations. By assuming different values  $c, d$ , we obtain different approximation errors. Not all simplified models are acceptable. Unstable simplified models may also appear. The interval  $[c, d]$  should be matched in such a way as not to make the approximation error too big and, at the same time, to make it contain all the essential roots of the denominator of the transfer function describing the initial model.

## REFERENCES

1. Y. Bistritz, G. Langholz: *Model reduction by best Chebyshev rational approximation in complex plane*. Int. J. Control, 1979, vol. 30, no. 2, pp. 277—289
2. Y. Bistritz, G. Langholz: *Model reduction by Chebyshev polynomial Techniques*. IEEE Trans. on Autom. Control, 1979, vol. AC-24, no. 5, pp. 741—747
3. Chen C.F., Shieh L.S.: *An algebraic method for control systems design*. Int. J. Control, vol. 11, 1970, no. 5, pp. 717—739
4. M. F. Hutton, B. Freidland: *Routh Approximations for reducing order of linear time-invariant systems*. IEEE Trnas. on Autom. Control., 1978, vol. AC-20, no. 3, pp. 329—337

J. HALAWA, A. TRZMIELAK-STANISŁAWSKA

UWAGI DOTYCZĄCE MODELU UPROSZCZONEGO PRZY ZASTOSOWANIU  
WIELOMIANÓW CHEBYSHEVA

Streszczenie

W artykule opisano możliwości stosowania uproszczonego modelu matematycznego stosowanego w zagadnieniach sterowania w urządzeniach kontrolnych dużej szybkości. Wskazano możliwości symulacji komputerowej dla skrócenia czasu obliczeń. Przedstawiono przykłady stosowania modelu z zastosowaniem wielomianów Chebysheva.

*Słowa kluczowe:* urządzenia kontrolne, symulacja komputerowa, układy automatycznej regulacji.



# Ogólna analiza pracy układu impulsowego do korekcji współczynnika mocy

MAREK GOTFRYD

*Wydział Elektryczny, Politechnika Rzeszowska  
im. Ignacego Łukasiewicza*

*Otrzymano 1995.12.27*

*Autoryzowano do druku 1996.03.22*

W pracy przedstawiono ogólną analizę pracy układu impulsowego do korekcji współczynnika mocy. Przy założeniu bezstratności układu wyprowadzono zależności na wartość skuteczną napięcia wyjściowego, jego przebieg czasowy, na amplitudę wolnozmiennych tętnień tego napięcia oraz międzyszczytową wartość tętnień wielkoczęstotliwościowych. Otrzymane zależności są słuszne dla dowolnego układu do korekcji współczynnika mocy, którego działanie prowadzi do uzyskania sinusoidalnego poboru prądu sieciowego i który dostarcza energii do stałoprądowego obciążenia.

*Słowa kluczowe:* analiza, korekcja współczynnika mocy, harmoniczne prądu sieciowego, napięcie tętnień.

## 1. WSTĘP

Wiele urządzeń elektrycznych zasilanych z sieci pobiera z niej prąd o mocno odkształconym przebiegu. Są to szczególnie urządzenia zawierające beztransformatoremowe prostowniki sieciowe i tyrystorowe przekształtniki z regulacją fazową.

Odkształcenie prądu sieciowego, równoważne dużej zawartości w nim harmonicznych, jest z wielu względów niekorzystne [1], między innymi przyczynia się do zmniejszenia efektywnego współczynnika mocy tych urządzeń [2]. Z tego względu odpowiednie normy określają dopuszczalne poziomy harmonicznych prądu sieciowego urządzeń elektrycznych różnych kategorii [3].

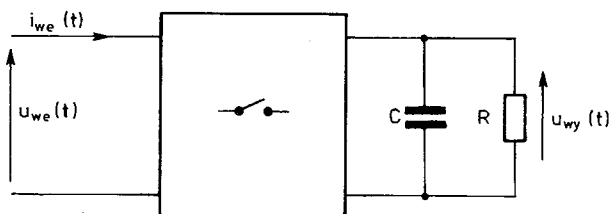
Zmniejszenie poziomu harmonicznych prądu sieciowego, czyli korekcję współczynnika mocy można uzyskać albo przez filtrację tych harmonicznych albo przez impulsowe sterowanie przepływem energii z sieci do urządzenia. W jednofazowych urządzeniach mniejszej mocy dominują układy korekcji współczynnika

mocy, działające w oparciu o drugą z tych zasad. Analiza trzech takich układów została przedstawiona wcześniej w [4, 5].

Niniejsza praca stanowi daleko idące uogólnienie tej analizy i dotyczy praktycznie dowolnego układu o zasilaniu sieciowym, którego zadaniem jest dostarczanie energii do stałoprądowego obciążenia i którego działanie prowadzi do uzyskania sinusoidalnego poboru prądu z sieci.

## 2. ANALIZA UKŁADU

Rozważmy dowolny układ, którego działanie polega na cyklicznym pobieraniu energii z sieci i na przekazywaniu jej do stałoprądowego obciążenia RC (rys. 1).



Rys. 1. Ogólna postać rozważanego układu

Niech cykle pracy układu mają długość  $T$ , przy czym długość ta może być stała lub zmienna (stała lub zmienna częstotliwość taktowania). Wymagane jest tylko, aby czas jednego cyklu był wielokrotnie (np. kilkaset razy) mniejszy od okresu sieciowego napięcia zasilającego. W układach praktycznych jest to spełnione, gdyż pracują one z częstotliwością taktowania od minimum 20 kHz (aby uniknąć efektów akustycznych) do około 100 kHz.

Założmy, że przedstawiony w postaci prostokąta na rys. 1 układ jest bezstratny i że energia pobierana przez niego w danym cyklu pracy jest w tym samym cyklu przekazywana w całości do wyjścia, tzn. że w układzie nie występuje gromadzenie energii w dłuższych niż jeden cykl okresach czasu. Wymaganie to, ułatwiające dalszą analizę, jest spełniane przez praktyczne układy korekcji współczynnika mocy. Gdyby było przeciwnie, tzn. gdyby ich działanie polegało na gromadzeniu energii w dłuższych okresach czasu, wymagałoby to użycia do tego elementów  $L$  i  $C$  o niekorzystnych, dużych wartościach indukcyjności i pojemności.

Niech napięcie sieciowe dane jest równaniem

$$u_{we}(t) = U_{wem} \cdot \sin \omega_s t, \quad (1)$$

gdzie  $U_{wem}$  jest amplitudą napięcia sieciowego, a  $\omega_s$  jego pulsacją.

Przy prawidłowym działaniu układu, prąd pobierany z sieci  $i_{we}(t)$  jest proporcjonalny do napięcia  $u_{we}(t)$ , tzn.

$$i_{we}(t) = g_w \cdot u_{we}(t), \quad (2)$$

gdzie  $g_w$  jest odpowiednim współczynnikiem proporcjonalności, równym konduktancji wejściowej układu. Jest oczywiste, że w ustalonych warunkach pracy układu konduktancja ta musi być stała, niezależna od czasu.

Zgodnie z (2), pomiędzy sinusoidalnym napięciem sieciowym i prądem pobieranym przez układ nie ma przesunięcia fazowego, a więc  $\cos\phi$  jest równy 1, ponadto prąd  $i_{we}(t)$  nie zawiera harmonicznych, czyli współczynnik mocy jest równy 1.

Rozważmy zależności energetyczne w układzie z rys. 1 w jednym, powiedzmy  $n$ -tym, cyklu pracy.

Równanie (2) obowiązuje dla wartości chwilowych  $i_{we}(t)$  i  $u_{we}(t)$ ; jest ono więc także słuszne dla wartości średnich tych wielkości, wziętych w poszczególnych cyklach pracy (bo z tych wartości złożone są przebiegi  $i_{we}(t)$  i  $u_{we}(t)$ ). Dla  $n$ -tego cyklu pracy równanie (2) przybierze postać

$$I_{wen} = g_w \cdot U_{wen}, \quad (3)$$

gdzie  $I_{wen}$ ,  $U_{wen}$  są to wartości średnie  $i_{we}(t)$  i  $u_{we}(t)$  w  $n$ -tym cyklu pracy. Ze względu na wspomnianą już krótkość cykli, wielkości te w tym przedziale czasu można uznać za (prawie) stałe i przedstawić powyższymi wartościami liczbowymi. Jak można obliczyć, dla częstotliwości taktowania równej 20 kHz największe zmiany napięcia wejściowego w jednym okresie taktowania (50  $\mu$ s) nie przekraczają 1,2% wartości jego amplitudy, są więc rzeczywiście małe.

Energia pobrana z sieci w  $n$ -tym cyklu jest równa

$$W_{wen} = U_{wen} \cdot I_{wen} \cdot T = U_{wen}^2 \cdot g_w \cdot T. \quad (4)$$

Jeżeli, jak przyjęto, układ jest bezstratny, to cała energia (4) powinna być przekazana na wyjście, co może być wyrażone następująco:

$$W_{wen} = C \cdot U_{wyn} \cdot \Delta U_{wyn} + \frac{U_{wyn}^2}{R} \cdot T, \quad (5)$$

gdzie  $U_{wyn}$  i  $\Delta U_{wyn}$  oznaczają odpowiednio wartość napięcia wyjściowego oraz jego przyrost w  $n$ -tym cyklu pracy układu. Ze względu na stałoprądowy charakter obciążenia  $u_{wy}(t) > 0$ , czyli także  $U_{wyn} > 0$ . Pierwszy składnik prawej strony równania (5) to przyrost energii zmagazynowanej w kondensatorze, drugi to energia tracona w  $R$  obciążenia. Zakładamy tu, że przyrost napięcia  $\Delta U_{wyn}$  jest bardzo mały w porównaniu z napięciem  $U_{wyn}$  tak, że

$$U_{wyn} \approx U_{wyn} + \Delta U_{wyn}. \quad (6)$$

Porównując stronami (4) i (5) otrzymamy

$$U_{wen}^2 \cdot g_w \cdot T = C \cdot U_{wyn} \cdot \Delta U_{wyn} + \frac{U_{wyn}^2}{R} \cdot T. \quad (7)$$

Z powyższego równania można wyznaczyć  $\Delta U_{wyn}$

$$\Delta U_{\text{wyn}} = \frac{T}{C} \left( g_w \cdot \frac{U_{\text{wcm}}^2}{U_{\text{wyn}}} - \frac{U_{\text{wyn}}}{R} \right). \quad (8)$$

Po przekształceniu można otrzymać następujące wyrażenie

$$\frac{\Delta U_{\text{wy}}}{T} = \frac{1}{C} \cdot \left( g_w \cdot \frac{U_{\text{wcm}}^2}{U_{\text{wyn}}} - \frac{U_{\text{wyn}}}{R} \right) \quad (9)$$

Lewa strona tego wyrażenia jest równa średniej wartości pochodnej napięcia  $u_{\text{wy}}(t)$  w  $n$ -tym cyklu pracy. Ponieważ długość tego cyklu jest bardzo mała w porównaniu z okresem zmienności napięć  $u_{\text{we}}(t)$  i  $u_{\text{wy}}(t)$ , lewą stronę równania (9) można potraktować jako zwykłą pochodną wolnozmiennnej składowej napięcia wyjściowego, a całe równanie jako równanie różniczkowe dla tej właśnie składowej. Można je zatem zapisać w postaci

$$\frac{du_{\text{wy}}(t)}{dt} = \frac{1}{C} \left( g_w \cdot \frac{u_{\text{we}}^2(t)}{u_{\text{wy}}(t)} - \frac{u_{\text{wy}}(t)}{R} \right), \quad (10)$$

pamiętając o tym, że wszystkie funkcje czasu tu występujące są funkcjami wolnozmiennymi.

Równanie (10) można przepisać w uproszczonej — pod względem zapisu — formie

$$u'_{\text{wy}}(t) = r(t) \cdot u_{\text{wy}}^{-1}(t) - a \cdot u_{\text{wy}}(t), \quad (11)$$

gdzie:

$$r(t) = g_w \cdot \frac{u_{\text{we}}^2(t)}{C} \quad \text{oraz} \quad a = \frac{1}{RC}. \quad (12)$$

Jest to nieliniowe równanie różniczkowe Bernoulliego. Procedura rozwiązania równania o analogicznej postaci ogólnej została przedstawiona w pracy [4], dlatego nie będzie tu powtarzana. Rozwiązaniem równania (10) jest funkcja

$$u_{\text{wy}}(t) = U_{\text{wcm}} \cdot \sqrt{\frac{g_w \cdot R}{2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_s RC)^2}} \cdot \sin \left( 2\omega_s t + \arctg \frac{1}{\omega_s RC} \right)}. \quad (13)$$

Zastosujmy tu, dla uproszczenia zapisu, oznaczenie

$$U_{\text{wy}} = U_{\text{wcm}} \cdot \sqrt{\frac{g_w \cdot R}{2}}, \quad (14)$$

czyli

$$u_{\text{wy}}(t) = U_{\text{wy}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_s RC)^2}} \cdot \sin \left( 2\omega_s t + \arctg \frac{1}{\omega_s RC} \right)}. \quad (15)$$

Jaki jest sens wielkości  $U_{wy}$ ? Można się o tym przekonać obliczając z definicji wartość skuteczną napięcia  $u_{wy}(t)$

$$U_{wyskut} = \sqrt{\frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} u_{wy}^2(t) \cdot dt}, \quad (16)$$

gdzie  $T_s = 2\pi/\omega_s$  jest okresem napięcia sieciowego.

Podstawiając (15) do (16) otrzymamy

$$\begin{aligned} U_{wyskut} &= \sqrt{\frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} U_{wy}^2 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_s RC)^2}} \cdot \sin \left( 2\omega_s t + \arctg \frac{1}{\omega_s RC} \right) \right) \cdot dt} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} U_{wy}^2 \cdot dt - \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} U_{wy}^2 \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_s RC)^2}} \cdot \sin \left( 2\omega_s t + \arctg \frac{1}{\omega_s RC} \right) \cdot dt}. \quad (17) \end{aligned}$$

Druga całka w ostatnim wyrażeniu jest tożsamościowo równa zeru ze względu na to, że jest to całka z funkcji sinus w jej okresie. Dlatego

$$U_{wyskut} = U_{wy}. \quad (18)$$

Zależność (14) określa więc wartość skuteczną napięcia wyjściowego układu. W dalszym ciągu rozważań będzie ona oznaczana przez  $U_{wy}$ . Po podniesieniu obydwu stron zależności (14) do kwadratu i przekształceniu otrzyma się

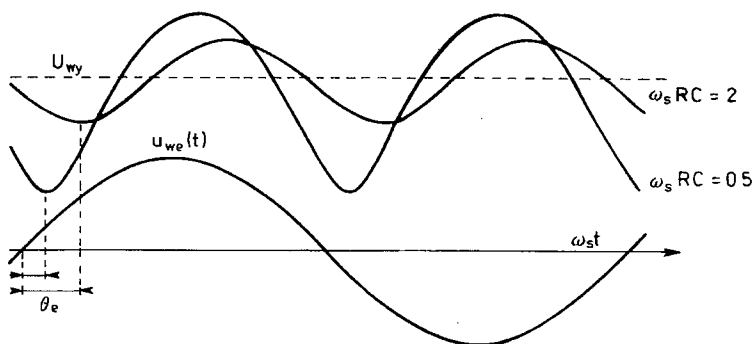
$$\frac{U_{wy}^2}{R} = \frac{U_{wem}^2}{2} \cdot g_w. \quad (19)$$

Jest to zapis bezstratności rozważanego układu w obrębie jednego okresu napięcia sieciowego lub jego wielokrotności. Jest to oczywisty rezultat przyjętego na początku rozważań założenia o bezstratności układu w każdym cyklu pracy.

Jak wynika z zależności (14), wartość skuteczną napięcia wyjściowego nie zależy od jego tętnień. Jest to prawidłowe, bo gdyby tak nie było, oznaczałoby to, że tętnienia napięcia wyjściowego mają wpływ na moc wyjściową i równą jej moc pobieraną z sieci, która zależy od współczynnika  $g_w$ . Przeczyłoby to założeniu, że  $g_w$  jest stałym współczynnikiem, wiążącym przebiegi czasowe  $i_{we}(t)$  i  $u_{we}(t)$ . Inaczej mówiąc, stałość współczynnika  $g_w$ , konieczna dla uzyskania sinusoidalnego poboru prądu  $i_{we}(t)$ , implikuje stałość mocy pobieranej z sieci i przekazywanej do obciążenia, a więc stałość wartości skutecznej napięcia wyjściowego — niezależnie od wartości jego tętnień.

Obliczony na podstawie zależności (15) przebieg napięcia  $u_{wy}(t)$  dla dwóch wartości parametru  $\omega_s RC$  przedstawiono na rys. 2. Widoczne jest zmniejszanie się amplitudy tętnień napięcia wyjściowego, ich opóźnianie się względem napięcia wejściowego oraz upodabnianie ich przebiegu do sinusoidy przy wzrastającej wartości  $\omega_s RC$ .

W celu wyznaczenia amplitudy napięcia tętnień, można posłużyć się zależnością (15). Celowe jest tu przedstawienie jej w uproszczonej, pod względem zapisu, postaci:

Rys. 2. Przebieg  $u_{wy}(t)$  dla różnych wartości  $\omega_s RC$ 

$$u_{wy}(t) = U_{wy} \sqrt{1-b} \cdot \sin(2\omega_s t + \varphi), \quad (20)$$

gdzie

$$b = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_s RC)^2}}, \quad (21)$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{1}{\omega_s RC}\right). \quad (22)$$

Amplitudę napięcia tętnień  $U_{tm}$  można określić jako połowę jego wartości międzyszczytowej

$$U_{tm} = \frac{1}{2} \cdot U_{wy} (\sqrt{1+b} - \sqrt{1-b}). \quad (23)$$

Wartości kąta  $\Theta_e = \omega_s t_e$ , dla których występują ekstrema napięcia wyjściowego, można łatwo wyznaczyć, obliczając pochodną wyrażenia (20) względem  $\omega_s t$  i przyrównując ją do zera. Otrzyma się wtedy

$$\omega_s t_e = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \varphi + k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (24)$$

czyli

$$\omega_s t_e = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctg \frac{1}{\omega_s RC} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (25)$$

lub w równoważnej, nieco prostszej postaci

$$\omega_s t_e = \frac{1}{2} \arctg(\omega_s RC) + k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (26)$$

Maksyma napięcia wyjściowego są więc przesunięte względem maksimów napięcia wejściowego o kąt  $\theta_e$  zawarty w zakresie  $(0, \pi/4)$ . Graniczne wartości tego kąta wystąpiłyby odpowiednio dla  $\omega_s RC = 0$  i  $\omega_s RC = \infty$ , co w układzie praktycznym nie jest możliwe. Zatem, w rzeczywistym układzie maksima napięcia wyjściowego nie pokrywają się z ekstremami napięcia wejściowego, jak to przedstawiono np. w [2, 6].

Ilustrację powyższych rozważań stanowią dane zamieszczone w tablicy 1. Zaprezentowano w niej dla różnych wartości parametru  $\omega_s RC$  obliczone wartości amplitudy napięcia tętnień, kąta  $\theta_e$  oraz także zawartości wyższych harmonicznych  $h_s$  w przebiegu napięcia wyjściowego. Zawartość ta stanowi wielkość określającą stopień odkształcenia napięcia tętnień od przebiegu sinusoidalnego. Obliczono ją przez numeryczne wyznaczenie współczynników szeregu Fouriera dla przebiegu okresowego określonego zależnością (15). Obliczenia te potwierdzają upodabnianie się tętnień napięcia wyjściowego do sinusoidy przy wzrastającej wartości parametru  $\omega_s RC$ .

Tablica 1

Wpływ  $\omega_s RC$  na amplitudę tętnień, kąt  $\theta_e$  i kształt przebiegu tętnień

| $\omega_s RC$ | $\frac{U_{tm}}{U_{wy}}$ | $\theta_e, ^\circ$ | $h_s, \%$ |
|---------------|-------------------------|--------------------|-----------|
| 0.2           | 0.6340                  | 5.7                | 20.0      |
| 0.5           | 0.5257                  | 13.3               | 15.4      |
| 1.0           | 0.3827                  | 22.5               | 10.3      |
| 2.0           | 0.2308                  | 31.7               | 5.9       |
| 5.0           | 0.0985                  | 39.3               | 2.5       |

Napięcie wyjściowe układu składa się ze składowej stałej (średniej) oraz składowej wolnozmiennnej (tętnień małoczęstotliwościowych), co można zapisać w postaci

$$u_{wy}(t) = U_{wy0} + u_t(t), \quad (27)$$

gdzie  $U_{wy0}$  jest składową stałą napięcia wyjściowego, a  $u_t(t)$  jest składową zmienną. Wzrost amplitudy tętnień powoduje spadek składowej stałej tak, aby ich łączna wartość skuteczna pozostała stała. Spadek ten nie jest duży, można się o tym przekonać w sposób przedstawiony poniżej.

Wiadomo, że dla przebiegów złożonych kwadrat ich wartości skutecznej jest równy sumie kwadratów wartości skutecznych poszczególnych składowych. W tym przypadku dla napięcia (27) mamy

$$U_{wy}^2 = U_{wy0}^2 + U_t^2, \quad (28)$$

gdzie  $U_t$  jest wartością skuteczną napięcia tętnień. Z zależności (28) wynika, że

$$U_{wy0} = \sqrt{U_{wy}^2 - U_t^2}. \quad (29)$$

Jeżeli amplituda tętnień jest niewielka w porównaniu z wartością skuteczną  $U_{wy}$ , można posłużyć się znaną przybliżoną równością

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}, \quad \text{gdy } x \ll 1. \quad (30)$$

Zależność (23) przyjmie wtedy prostą postać

$$U_{\text{im}} = \frac{1}{2} \cdot U_{\text{wy}} \cdot b, \quad (31)$$

a wartość skuteczna napięcia tętnień będzie równa

$$U_t = \frac{b}{2\sqrt{2}} \cdot U_{\text{wy}}, \quad (32)$$

ponieważ przebieg tętnień dla małych wartości  $b$  jest zbliżony do sinusoidalnego, co wynika także z równości (30). Podstawiając (32) do (29) otrzyma się

$$U_{\text{wy}0} = U_{\text{wy}} \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{8}} \quad (33)$$

Uwzględniając postać (21) współczynnika  $b$  otrzymamy wyrażenie na zależność składowej stałej napięcia wyjściowego od stałej czasowej obciążenia, czyli pośrednio od wielkości tętnień.

$$U_{\text{wy}0} = U_{\text{wy}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{8[1 + (\omega_s RC)^2]}}. \quad (34)$$

Ilościowy wpływ parametru  $\omega_s RC$  na wartość średnią napięcia wyjściowego przedstawia tablica 2. Zamieszczono w niej wartości amplitudy tętnień obliczone z zależności dokładnej (23) (jest to powtórzenie drugiej kolumny tablicy 1) i przybliżonej (31) oraz odpowiadającą im wartość składowej stałej napięcia obliczoną według wzoru (34). Dla porównania, w ostatniej kolumnie zamieszczono też wartość średnią napięcia obliczoną z definicji — przez scałkowanie w okresie  $T_s$  przebiegu danego wyrażeniem (15). Całkowanie przeprowadzono numerycznie ze względu na skomplikowaną postać tego wyrażenia, trudną do scałkowania analitycznego.

Tablica 2

Zależność napięcia tętnień i wartości średniej napięcia wyjściowego od  $\omega_s RC$

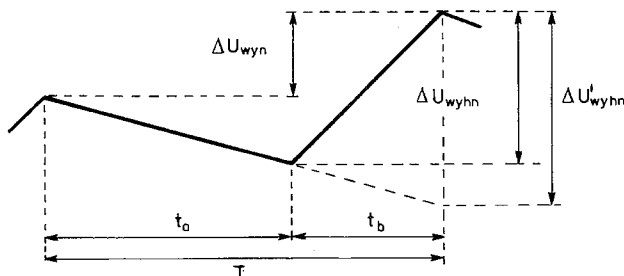
| $\omega_s RC$ | $\frac{U_{\text{im}}}{U_{\text{wy}}}$ wg (23) | $\frac{U_{\text{im}}}{U_{\text{wy}}}$ wg (31) | $\frac{U_{\text{wy}0}}{U_{\text{wy}}}$ wg (34) | $\frac{U_{\text{wy}0}}{\bar{U}_{\text{wy}}}$ z defin. |
|---------------|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------|------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| 0.2           | 0.6340                                        | 0.4903                                        | 0.9380                                         | 0.9100                                                |
| 0.5           | 0.5257                                        | 0.4472                                        | 0.9487                                         | 0.9340                                                |
| 1.0           | 0.3827                                        | 0.3536                                        | 0.9682                                         | 0.9639                                                |
| 2.0           | 0.2308                                        | 0.2236                                        | 0.9874                                         | 0.9869                                                |
| 5.0           | 0.0985                                        | 0.0981                                        | 0.9976                                         | 0.9976                                                |

Dane zawarte w tablicy 2 wskazują, że dla  $\omega_s RC \geq 2$  obliczenia amplitudy tętnień ze wzoru dokładnego (23) i przybliżonego (31) prowadzą do bardzo zbliżonych rezultatów; także składowa stała napięcia wyjściowego  $U_{wy0}$  jest praktycznie równa wartości skutecznej  $U_{wy}$ , z błędem nieprzekraczającym 1,3%. Natomiast dla  $\omega_s RC < 2$ , a szczególnie dla  $\omega_s RC \ll 2$ , rozbieżności między odpowiednimi wynikami stają się znaczne, co stanowi ilustrację niemożności stosowania wtedy przybliżonych wzorów (31) i (34). W tych warunkach wątpliwe też staje się założenie (6) o niewielkiej wartości przyrostu napięcia wyjściowego w jednym cyklu pracy.

W świetle powyższych faktów można przyjąć, że  $\omega_s RC = 2$  stanowi minimalną wartość tego parametru, dla której prezentowana analiza prowadzi do jeszcze poprawnych wyników, a amplitudę wolnozmiennych tętnień napięcia wyjściowego można uznać za jeszcze małą (w aspekcie tej analizy). Należy zwrócić uwagę, że amplituda ta, równa wtedy 23% składowej stałej napięcia, z praktycznego punktu widzenia jest nadal bardzo duża. Z tego względu w praktycznych układach parametr  $\omega_s RC$  musi mieć znacznie większą wartość (np.  $\omega_s RC > 10$ ), co jeszcze bardziej zwiększy dokładność prezentowanej analizy działania układu.

Wielkoczęstotliwościowe tętnienia napięcia wyjściowego układu związane są z cyklicznym doładowywaniem kondensatora C przy ciągle trwającym jego rozładowywaniu. Dla rozpatrywanej tutaj w sposób ogólny pracy układu dokładne określenie tych tętnień jest trudne, ponieważ zależą one od czasów gromadzenia i oddawania energii w poszczególnych cyklach pracy, są więc zależne od sposobu pracy realizowanego przez dany układ korekcji współczynnika mocy. Dlatego poniższe rozważania dotyczyć będą jedynie oszacowania maksymalnej międzyszczytowej wartości tych tętnień.

Praca układu polega na cyklicznym gromadzeniu energii pobieranej z wejścia i następnie przekazywaniu jej do obciążenia. Stosownie do tego, przebieg napięcia wyjściowego (na kondensatorze C) w jednym cyklu zawiera część narastającą (gdy zgromadzona energia jest przekazywana do obciążenia) i część opadającą (gdy przekazywanie energii nie następuje). Schematycznie przedstawiono to na rys. 3.



Rys. 3. Przyrosty napięcia  $u_{wy}(t)$  w jednym cyklu pracy

W rzeczywistości narastanie i opadanie napięcia wyjściowego odbywa się według bardziej złożonych, niż liniowe, funkcji, a dla niektórych układów kolejność występowania narastania i opadania napięcia może być zmieniona, jeżeli za początek

każdego cyklu przyjąć rozpoczęcie kolejnego gromadzenia energii w układzie. Mimo tego, następujące dalej rozważania zachowają swój ogólny charakter, gdyż rys. 3 ma tylko pogładowe znaczenie.

Różnica końcowej i początkowej wartości napięcia wyjściowego w okresie  $T$  stanowi jego małowartościowy (wolnozmienny) przyrost  $\Delta U_{\text{wyn}}$ , który może być wyliczony z równania (8). Wielkość ta stanowiła podstawę do wyprowadzenia zależności (13) na przebieg napięcia wyjściowego  $u_{\text{wy}}(t)$ .

Różnica między największą i najmniejszą wartością napięcia wyjściowego w jednym ( $n$ -tym) cyklu pracy jest międzyszczytową wartością napięcia tętnień wielkoczęstotliwościowych w tym cyklu. Na rys. 3 oznaczono ją przez  $\Delta U'_{\text{wyhn}}$ . Przez  $\Delta U'_{\text{wyhn}}$  oznaczono natomiast przyrost napięcia wyjściowego ponad wartość wynikającą z ciągłego rozładowywania się kondensatora  $C$ . Przyrost ten jest łatwy do wyznaczenia, jest to bowiem pierwszy składnik wyrażenia (8):

$$\Delta U'_{\text{wyhn}} = \frac{g_w}{C} \cdot \frac{U_{\text{wen}}^2}{U_{\text{wyn}}} \cdot T \quad (35)$$

Wartość  $\Delta U_{\text{wyhn}}$  jest zmniejszona w stosunku do  $\Delta U'_{\text{wyhn}}$  — o wartość rozładowania się kondensatora  $C$  w ciągu czasu  $t_b$ . Tu właśnie pojawia się trudność obliczeniowa, gdyż czasu  $t_b$  nie można, dla przypadku ogólnego, podać w postaci ustalonej (jest on zależny od realizowanego przez układ sposobu pracy). Najprostszym sposobem ominięcia tej trudności może być zaniechanie rozładowywania się kondensatora w ciągu czasu  $t_b$ , a więc przyjęcie, że:

$$\Delta U_{\text{wyhn}} = \Delta U'_{\text{wyhn}} \quad (36)$$

Po podstawieniu (35) otrzyma się

$$\Delta U_{\text{wyhn}} = \frac{T}{C} \cdot g_w \cdot \frac{U_{\text{wen}}^2}{U_{\text{wyn}}} \quad (37)$$

Wyrażenie na konduktancję  $g_w$  można uzyskać z przekształconej zależności (19)

$$g_w = \frac{2}{R} \cdot \frac{U_{\text{wy}}^2}{U_{\text{wen}}^2} \quad (38)$$

Podstawiając (38) do (37) uzyska się

$$\Delta U_{\text{wyhn}} = \frac{2T}{RC} \cdot \frac{U_{\text{wy}}^2}{U_{\text{wen}}^2} \cdot \frac{U_{\text{wen}}^2}{U_{\text{wyn}}} \quad (39)$$

Zależność (39) przedstawia maksymalną wartość międzyszczytowych wieloczęstotliwościowych tętnień napięcia wyjściowego w  $n$ -tym cyklu pracy.

Dla niewielkich małowartościowych tętnień napięcia wyjściowego, tzn. gdy zmienność napięcia  $u_{\text{wy}}(t)$  jest niewielka, maksimum tętnień wielkoczęstotliwościowych w okresie napięcia sieciowego wystąpi dla

$$t \approx \frac{T_s}{4} + k \cdot \frac{T_s}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (40)$$

gdyż wówczas  $U_{wen} \approx U_{wem}$  i  $U_{wyn} \approx U_{wy}$ . Podstawiając te równości do (39) otrzymamy

$$\Delta U_{wyh \max} = \frac{2T}{RC} \cdot U_{wy}. \quad (41)$$

Równość (40) jest słuszna także w przypadku układu o zmiennej częstotliwości taktowania, gdyż w takim układzie maksimum długości cyklu  $T$  w przybliżeniu pokrywa się z maksimum napięcia wejściowego. W tym przypadku przez  $T$  w zależności (41) należy rozumieć długość cyklu dla  $u_{we}(t) = U_{wem}$ .

### 3. PODSUMOWANIE

Przedstawiona analiza przeprowadzona była przy niewielu założeniach wstępnych. Podstawowe z nich to bezstratność oraz duża, w porównaniu z siecią, częstotliwość taktowania. Założenia te nie obejmowały w ogóle struktury wewnętrznej układu i szczegółowego sposobu jego pracy. Z tego względu wyniki analizy mają zastosowanie do dowolnego bezstratnego (lub o niewielkich stratach) układu do korekcji współczynnika mocy. Może on pracować ze stałą lub zmienną częstotliwością taktowania; może zawierać układy podwyższające, obniżające lub odwracające napięcia wejściowe.

Wyniki analizy mogą znaleźć zastosowanie także w odniesieniu do układów, które nie działają w sposób impulsowy (tj. w cyklach), o ile tylko pobierają z sieci prąd o sinusoidalnym przebiegu (przy  $\varphi = 0$ ) i które bez gromadzenia energii w sobie przekazują ją do stałoprądowego obciążenia RC. W tym przypadku w zależnościach (35–41) należy przyjąć  $T \rightarrow 0$ , co oczywiście sprowadzi wielkoczęstotliwościowe tętnienia napięcia wyjściowego do zera.

Napięcie wyjściowe układu wykazuje określone tętnienia małowartościowe, który amplituda zależy od stałej czasowej obciążenia. Jedynym sposobem ich zmniejszenia jest wzrost pojemności kondensatora C. Nie da się natomiast ich zmniejszyć przez odpowiednią modyfikację sposobu działania układu, gdyż prowadziłoby to do niesinusoidalności prądu pobieranego z sieci.

Otrzymana prosta zależność na maksymalną wartość międzyszczytowych tętnień wielkoczęstotliwościowych dotyczy układu, w którym kondensator wyjściowy jest bezstratny. Wiadomo, że rzeczywiste kondensatory wykazują m.in. pewną szeregową rezystancję strat. Rezystancja ta, przy impulsowym doładowywaniu kondensatora, jakie występuje w czasie pracy układu, może być przyczyną znacznego zwiększenia wielkoczęstotliwościowych tętnień napięcia wyjściowego. Dlatego, porównanie wartości tych tętnień w układzie rzeczywistym z wartością wynikającą z zależności (41) może być pomocne do określenia nieidealności kondensatora C i celowości np. zastąpienia go innym, o mniejszej stratności.

## BIBLIOGRAFIA

1. H. Supronowicz: *Poprawa współczynnika mocy układów przekształtnikowych*. WNT, Warszawa 1981, p. 29–36
2. J. Kołodziejski: *Korekcja współczynnika mocy i ograniczanie zakłóceń wytwarzanych w układach z obciążeniem nieliniowym*. Elektronika, 1994, vol. 35, nr 5, p. 20–26
3. IEC 555-2 International Standard. *Disturbances in supply systems caused by household appliances and similar electrical equipment. Part 2: Harmonics*
4. M. Gotfryd: *Analiza układów impulsowych do zmniejszania niekształceń prądu sieciowego — zależności podstawowe*. Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji, 1992, vol. 38, z. 4, p. 617–627
5. M. Gotfryd: *Praca układu impulsowego do zmniejszania zniekształceń prądu sieciowego ze zmienną częstotliwością kluczowania*. Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji, 1993, vol. 39, z. 2, p. 313–327
6. *Active Harmonic Filter Using TDA 4814A rated for 250W Output Power*. Siemens Application Note, 1989

M. GOTFRYD

## GENERAL ANALYSIS OF PULSE CIRCUIT FOR POWER FACTOR CORRECTION

## Summary

The paper presents a general analysis of a lossless pulse circuit for power factor correction. There have been derived formulas for rms value of output voltage and its waveform as well as low-frequency and high-frequency ripple of the output voltage. The obtained results are applicable to any lossless power factor correcting circuit with DC output which draws from mains the current in sinusoidal form, regardless the exact way of its operation, its operating frequency, etc.

*Key words:* analysis power factor correction, harmonics of mains current, ripple voltage.

# Problemy nieniszczących badań metodą magnetyczną i metodą prądów wirowych połączeń spawanych stali wysokowytrzymałej w konstrukcjach lotniczych

ANNA LEWIŃSKA-ROMICKA

*Instytut Metrologii i Systemów Pomiarowych, Politechnika Warszawska*

WIESŁAW SZACHNOWSKI

*Instytut Lotnictwa, Warszawa*

*Otrzymano 1996.01.05*

*Autoryzowano do druku 1996.01.26*

W artykule opisano problemy badań nieniszczących metodą magnetyczną i metodą prądów wirowych połączeń spawanych wiązką elektronów wysokowytrzymałej stali N18K9M5TPr w sprężarkach turboodrzutowych silników lotniczych. Przedstawiono wyniki badań eksperymentalnych. Na podstawie podanych rozważań zostały opracowane procedury praktycznych badań złącz.

*Słowa kluczowe:* badania nieniszczące, badania wiropądowe, badania magnetyczne, złącza spawane wiązką elektronów, sprężarki lotnicze.

## 1. WSTĘP

Nowoczesne technologie łączenia, do których zalicza się metody wykorzystujące źródła o wysokiej koncentracji energii — wiązka elektronów, laser, skondensowana wiązka światła białego, lub monochromatycznego, itp. — ze względu na własności złącza, są coraz częściej wykorzystywane do wytwarzania wyrobów spełniających wysokie wymagania eksploatacyjne. Wytrzymałość spawanego wiązką elektronów połączenia odbiega nieznacznie lub jest równa wytrzymałości materiału łączonego. Połączenia wykonywane wiązką elektronów charakteryzują się minimalnymi wymiarami złącza; zalicza się je do tzw. połączeń precyzyjnych. Połączenia takie

charakteryzuje niski poziom zanieczyszczeń oraz duża szczelność. Mogą być, i przeważnie są wykonywane na elementach gotowych, a więc również obrobionych cieplnie. Powoduje to, iż coraz częściej technologia ta zastępuje drogie technologie konwencjonalne, np. wiórowe, stosowane podczas wytwarzania konstrukcji integralnych. Spawanie za pomocą wiązki elektronów zalicza się do technologii, które odpowiadają współczesnym i przyszłościowym światowym standardom jakościowym. Spawanie elektronowe zastosowane zostało m.in. przy budowie sprężarek i wałów prototypów, a następnie seryjnych lotniczych silników turbodrzutowych.

Niniejsza publikacja przedstawia niektóre problemy doboru fizycznych parametrów nieniszczącej kontroli metodami magnetyczną i prądów wirowych jakości połączeń spawanych wiązką elektronów. Badania nieniszczące zastosowane będą do kontroli, podczas procesu wytwarzania oraz eksploatacji, niezwykle odpowiedzialnych połączeń — w zakładach lotniczych.

Przedmiotem badań i rozważań są badania połączeń spawanych elektronowo na przykładzie połączeń elementów wykonanych ze stali wysokowytrzymałej gatunku N18K9M5TPr.

Ponieważ własności złącz umożliwiają przyjęcie wytrzymałości połączeń równej lub bliskiej wytrzymałości łączonych materiałów zawęża się więc granice tolerancji wad dopuszczalnych [29, 47]. Mikropełnięcia propagować się mogą głównie wzdłuż granic ziarn ale również transkrystalicznie. Minimalną szerokość pęknięcia należy porównać z wielkością wydzielen na granicach ziarn. Stale wysokowytrzymałe charakteryzują się strukturą drobnoziarnistą. W badaniach praktycznych powinna być więc zapewniona wykrywalność pęknięć o szerokości rzędu  $1\text{ }\mu\text{m}$ . Z punktu widzenia wytrzymałości zmęczeniowej, pęknięcie o długości rzędu  $10\text{ }\mu\text{m}$  (wielkość porównywalna z wymiarem ziarna), traktuje się jako źródło potencjalnego niebezpieczeństwa [51].

Stale typu „maraging”, do których zalicza się m.in. polską stal gatunku N18K9M5TPr oraz stal 18Ni1700 produkcji amerykańskiej stanowią wyodrębnioną grupę stali wysokowytrzymałych. Spawalność tej stali, którą klasyfikuje się jako bardzo dobrą oraz znacznie większa od stali konwencjonalnych odporność na pękanie powoduje, iż stale gatunku maraging znajdują zastosowanie w wielu wysoko obciążanych, odpowiedzialnych konstrukcjach.

Z punktu widzenia fizyki stale te można traktować jako wysokostopowy martenzyt [38] niskowęglowy z siecią Fe—Ni o niskiej, lecz znaczącej ( $0,2 \div 1,85\%$ ) zawartości tytanu. Regułą jest obecność austenitu w strefie wpływu ciepła połączeń spawanych, co powodować może podwyższoną skłonność do tworzenia kruchych pęknięć.

## 2. WŁAŚCIWOŚCI MAGNETYCZNE STALI N18K9M5TPr

W związku z zastosowaniem bezwęglowych stali niklowych utwardzanych dyspersyjnie wydzieleniami faz międzymetalicznych w konstrukcjach mechanicznych, w dostępnej literaturze podawane są jedynie niektóre właściwości fizyczne tych stali, takie

jak np. gęstość, współczynnik rozszerzalności cieplnej lub przykładowe własności technologiczne [8].

W pracach [13, 32, 48] podano parametry elektryczne i magnetyczne niektórych gatunków stali. Brak jest jednak w dostępnej literaturze parametrów elektromagnetycznych w odniesieniu do stali wysokowytrzymałych, w szczególności stali N18K9M5TPr [8, 30].

Nieliczne firmy, wytwarzające stale wysokowytrzymałe, podają fragmentaryczne charakterystyki magnesowania tych stali, np. w zakresie nasycenia. Danych tych nie można wykorzystać do rozważań nad wyborem częstotliwości badania metodami magnetycznymi badań nieniszczących lub wpływem częstotliwości pracy przetwornika wirowego — na głębokość wnikania pola magnetycznego i prądów wirowych, a w dalszej kolejności — nad wyborem częstotliwości badań i częstotliwości pracy przetwornika. Przyczyną są tu różnice składu poszczególnych stali, odmienność parametrów obróbki cieplnej oraz niemożność pracy w przypadku wykorzystania wirowych przetworników stykowych (a tylko one mogą być brane pod uwagę przy aplikacjach metody prądów wirowych — przy założonym celu kontroli — do kontroli wirników w przemyśle lotniczym) w obszarze nasycenia charakterystyki magnesowania materiału wirników. Istotna jest przy tym również nieliniowość krzywej magnesowania i pętli histerezy, jak dla wszystkich materiałów ferromagnetycznych.

Do kontroli połączeń spawanych wirników, ze względu na krzywiznę powierzchni obiektu, zaleca się wykorzystanie miniaturowych przetworników wirowych stykowych. Mogą być one również stosowane do kontroli fragmentów konstrukcji spawanych, odznaczających się płaską powierzchnią. Przetworniki stykowe, a w szczególności miniaturowe, pracują przy słabych polach magnetycznych — w związku ze stosowaniem małych wartości natężenia prądu wzbudzającego.

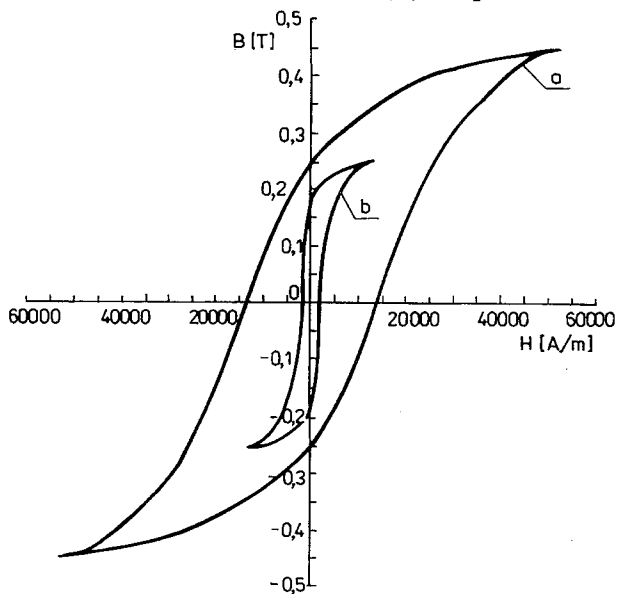
W miernictwie magnetycznym do określenia właściwości magnetycznych materiałów wykorzystuje się pierwotną krzywą magnesowania i pętlę histerezy odpowiadającą najczęściej warunkom magnesowania w stałych polach magnetycznych [31]. Pomiary tego rodzaju realizuje się w oparciu o specjalnie wykonywane próbki stanowiące zamknięte obwody magnetyczne, przeważnie o kształcie toroidalnym, na które nawija się odpowiednie uzwojenia wzbudzające — magnesujące i pomiarowe. Niżej zostaną przedstawione charakterystyki magnesowania próbek wykonanych ze stali N18K9M5TPr na przykładzie charakterystyk dwóch typów próbek różniących się zarówno kształtem, jak i historią metalurgiczną.

Próbka Nr 1 miała postać prostokątnego konturu zamkniętego o średniej długości obwodu magnetycznego wynoszącej  $l_m \cong 0,12$  m. Przekrój poprzeczny próbki wynosił  $S = 12,83 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>. Uzwojenia magnesujące i pomiarowe zawierały odpowiednio 1075 zwojów (druć średnicy 0,5 mm) i 1029 zwojów (druć średnicy 0,4 mm). Próbka została wycięta za pomocą piły elektroerozyjnej z tarczy wirnika sprężarki turbodrzutowego silnika lotniczego.

Próbka Nr 2 została wycięta w miejscu spawanej wiązki elektronów tarczy wirnika sprężarki lotniczego silnika turbodrzutowego [13]. Próbka Nr 2 stanowi toroid średnicy  $D_{\text{śred.}} \approx 0,282$  m i przekroju  $S \approx 48,7 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>. Długość obwodu

magnetycznego tej próbki wynosi  $l_m \approx 0,886$  m. Nawinięte na próbkę uzwojenia magnesujące i pomiarowe zawierają odpowiednio 1550 zwojów (druć średnicy 1,5 mm) oraz 400 zwojów (druć średnicy 0,3 mm). W przypadku obu próbek zastosowano technologię wykonania zapewniającą odzwierciedlenie historii metalurgicznej wyrobu, z którego zostały pobrane. Wybór wyrobu, z którego fragmenty stanowią opisywane próbki, jak również prace wiążące się z kontrolą jakości podzespołów silnika lotniczego, konsultowane były z jego konstruktorem [9].

Na rys. 1 przedstawiona została pętla histerezy próbki Nr 1 (krzywa a), reprezentującej uprzednio wspomniany wyrób w tzw. stanie gotowym — po zakończeniu całokształtu zabiegów technologiczno-konstrukcyjnych, którym podlegał materiał, tj. stal N18K9M5PT<sub>r</sub> w procesie produkcyjnym i w którym to stanie wyrób podlega ostatecznej kontroli jakości. W przypadku próbki Nr 1 jest to tarcza wirnika podlegająca magnetycznej kontroli jakości przed operacją łączenia tarcz. Przedstawiona charakterystyka obejmuje zakres natężeń pola magnetycznego od  $H = -54$  kA/m do  $H = +54$  kA/m. Maksymalna wartość pola była zdeterminowana wielkością okna próbki, a ściślej, liczbą zwojów mieszczących się w oknie próbki. Z uwagi na kształt i wymiary tarczy wirnika wielkość próbki należy uznać za maksymalną mimo, iż cena byłaby jak największa, ze względów pomiarowych. Większa próbka umożliwiłaby zastosowanie do pomiarów silniejszych pól magnetycznych. Jednakże dla potrzeb optymalizacji warunków nieniszczącej kontroli jakości zakres ten uznany został za wystarczający. Zwiększenie bowiem wymiarów wiązałoby się ze specjalnym wykonawstwem próbki i mimo, iż zachowana byłaby taka sama, jak dla tarczy historia metalurgiczna, to jednak, choćby ze względu np. na kształt tarczy i operacje



Rys. 1. Pętle histerezy magnetycznej stali N18K9M5PT<sub>r</sub>. a — dla materiału łączonego (próbki wyciętej z tarczy wirnika sprężarki), b — dla złącza spawanego wiązką elektronów

kucia matrycowego, próbka specjalnie wykonana nie byłaby próbką reprezentatywną. Dla porównania, na tym samym rysunku (rys. 1; krzywa b), przedstawiona została pętla histerezy próbki Nr 2, będącej w zasadzie połączeniem spawanym elektronowo (wyciętą spoiną) tarczy wirnika. Dla próbki tej charakterystyka magnesowania obejmuje zakres natężeń pola  $H = -13 \text{ kA/m}$  do  $+13 \text{ kA/m}$ . Przy tej wartości pola magnetycznego próbka znajdowała się również w stanie nasycenia.

Z punktu widzenia optymalizacji wartości prądu magnesującego dla potrzeb kontroli jakości złącz z wykorzystaniem metody magnetycznej badań nieniszczących, ten zakres natężenia stałego pola magnetycznego należy uznać za wystarczający (nasycenie materiału).

Przy doborze parametrów kontroli magnetycznej i wiropądowej istotna jest znajomość głębokości wnikania zmiennego pola magnetycznego do badanego materiału. Głębokość wnikania pola magnetycznego  $\delta$  do obiektu badanego (2) zależy przede wszystkim od częstotliwości  $f$  pola wzbudzającego, przenikalności magnetycznej  $\mu_r$  oraz przewodności elektrycznej materiału badanego elementu  $\gamma$ . Znajomość tych parametrów jest niezbędna przy aplikacjach szczegółowych rozwiązań elektrodynamicznych równań Maxwella do badań i kontroli jakości konkretnych materiałów i wyrobów.

Na podstawie charakterystyki magnesowania dla złącza, to jest próbki Nr 2, spawanej, obliczono wartość przenikalności początkowej (dla liniowego odcinka charakterystyki magnesowania)  $\mu_p$  oraz przenikalności początkowej względnej  $\mu_{pr}$  interesującej z punktu widzenia pracy w słabych polach magnetycznych, który to przypadek ma miejsce przy stosowaniu przetworników wiropądowych stykowych.

$$\mu_p = dB/dH. \quad (1)$$

Wynoszą one odpowiednio:  $\mu_p \approx 0,012 \text{ mH/m}$ ;  $\mu_{pr} \approx 9,4$ .

Podane wartości odnoszą się do słabego pola magnetycznego — o wartości  $H \approx 175 \text{ A/m}$ .

Dla pola magnetycznego o wartości  $H \approx 13 \text{ kA/m}$ , przenikalność względna wynosi  $\mu_r \approx 15,4$ . Z uwagi na to, iż kontrola jakości metodami magnetycznej defektoskopii prozkowej odbywa się przy wykorzystaniu silnych pól magnetycznych ta wartość przenikalności jest w tym przypadku istotna.

Głębokość wnikania pola magnetycznego  $\delta$  dla złącza spawanego (próbka Nr 2), dla przyjętej wartości elektrycznej przewodności właściwej  $\gamma \approx 5 \text{ Ms/m}$  i częstotliwości sieciowej pola magnetycznego  $f = 50 \text{ Hz}$  wynosi  $\delta \approx 8 \text{ mm}$ . Podobnie, jak w przypadku przenikalności, ta wartość współczynnika  $\delta$  odnosi się do kontroli jakości (w ramach procesu wytwarzania) metodami magnetycznymi podczas magnesowania przepływem prądu zmiennego. Wymienione współczynniki odnoszą się zarówno do połączenia spawanego elektronowo, jak i niespawanych elementów wykonanych ze stali maraging. Iloczyn  $\gamma\mu_r$  dla wymienionej próbki wynosi  $\gamma\mu_r \approx 77$ .

Dla porównania można dodać, że w pracy [33] podano, dla częstotliwości sieci zasilającej wartość iloczynu  $\gamma\mu_r \approx 1250$ , a głębokość wnikania pola magnetycznego  $\delta \approx 2 \text{ mm}$ . Oczywiście w przypadku cytowanego przykładu mamy do czynienia z inną stałą, o czym świadczy przede wszystkim iloczyn  $\gamma\mu_r$ .

W tabeli 1 zestawione zostały wybrane parametry magnetyczne: natężenie pola magnetycznego koercji  $H_c$ , natężenie pola magnetycznego odpowiadającego maksimum przenikalności magnetycznej  $H_{\mu\max}$ , natężenie pola magnetycznego odpowiadającego nasyceniu materiału  $H_s$  oraz indukcji remanencji  $B_r$  stali konstrukcyjnych.

Tabela 1

Wybrane parametry magnetyczne stali; natężenie pola magnetycznego koercji  $H_c$ , natężenie pola magnetycznego odpowiadające maksimum przenikalności magnetycznej  $H_{\mu\max}$ , natężenie pola magnetycznego odpowiadającego nasyceniu  $H_s$  oraz indukcja remanencji  $B_r$ .

| Materiał                                      | $H_c$       | $H_{\mu\max}$ | $H_s$ | $B_r$ |
|-----------------------------------------------|-------------|---------------|-------|-------|
| —                                             | A/m         | A/m           | A/m   | T     |
| stal wyżarzona [12]                           | 160 – 800   | —             | —     | —     |
| stal uleps. cieplnie [12]                     | 800 – 2400  | —             | —     | —     |
| stal hart. nisko odpuszcz. [12]               | 1600 – 4800 | —             | —     | —     |
| stal DGS-90 [10]                              | 1400        | 1500          | 9600  | ~1,5  |
| stal K-55 [10]                                | 800         | 800           | 9600  | ~1,0  |
| złącze spawane elektronowo<br>stal N18K9M5TPr | 1600        | 2000          | 13000 | ~0,18 |

Przedstawione charakterystyki magnesowania stali N18K9M5TPr oraz obliczone wartości jej przenikalności magnetycznej stanowią podstawę do określenia tej stali jako słabego ferromagnetyka. Pole magnetyczne koercji połączenia spawanego wiązką elektronów stali N18K9M5TPr wynosi  $H_c \approx 1600$  A/m; przekroczona zostaje więc umowna wartość kryterialna 1200 A/m, co wg [45] klasyfikuje tę stal do ferromagnetyków twardych, czego z pewnością przyczyną jest 9% zawartość kobaltu. Praktyczną konsekwencją kwalifikacji rozpatrywanej stali do ferromagnetyków twardych jest możliwość prowadzenia kontroli jakości metodami magnetycznymi nie tylko podczas magnesowania lecz również w sposób zwłoczny — po uprzednim magnesowaniu. Zwraca uwagę stosunkowo mała wartość indukcji remanencji wynosząca  $B_r \sim 0,18$  T. Jest to wartość kilkakrotnie mniejsza, niż dla innych stali, np. wymienionych w tabeli 1 stali DGS-90 i K-55, stosowanych do budowy rurociągów.

### 3. PARAMETRY NIENISZCZĄCEJ KONTROLI MAGNETYCZNEJ STALI N18K9M5TPr

Przy stosowaniu magnetycznych metod kontroli jakości spawanych elektronowo obiektów wykonanych ze stali N18K9M5TPr wymagane jest stosowanie magnetycznego pola o natężeniu ok. 2 kA/m, gdyż w polu o tej wartości połączenia spawane z tej stali charakteryzują się największą przenikalnością. W celu optymalizacji czułości, zaleca się prowadzenie badań przy natężeniu pola magnetycznego wynoszącym  $0,5 \times (H_{\mu\max} + H_s)$ , gdzie  $H_{\mu\max}$  jest natężeniem pola magnetycznego, odpowiadającym maksimum przenikalności magnetycznej, natomiast  $H_s$  odpowiada natężeniu pola

magnetycznego nasycenia [45]. Wobec tego optymalną wartością pola magnetycznego dla prowadzenia badań przy wykorzystaniu metody magnetycznej badań nieniszczących spawanych wiązką elektronów połączeń stali N18K9M5TPr jest 7,5 kA/m. Należy nadmienić, iż podczas prowadzenia nieniszczącej kontroli jakości metodami magnetycznymi i elektromagnetycznymi, celem optymalnego doboru parametrów kontroli oraz właściwej interpretacji wyników, niezbędna jest znajomość zastosowanych do badanego wyrobu warunków obróbki termicznej (przede wszystkim rzeczywistej temperatury i czasu starzenia). Jak wykazały bowiem ostatnie badania stali N18K9M5TPr, przy temperaturze starzenia 470°C struktura stali jest jeszcze wyłącznie martenzytyczna, natomiast już przy temperaturze starzenia wyższej zaledwie o 10°C, pojawiają się wydzielienia austenitu [17]! Stosowane w praktyce procesy starzenia, niekiedy jednak znacznie, przekraczają wymaganą tolerancję  $\pm 5^\circ\text{C}$ .

#### 4. PARAMETRY NIENISZCZĄCEJ KONTROLI WIROPRAĐOWEJ STALI N18K9M5TPr

Zjawisko prądów wirowych można określić następująco. Jeżeli w zmiennym polu elektromagnetycznym, wytworzonym przez przetwornik indukcyjnościowy, umieszczony zostanie obiekt z materiału przewodzącego prąd elektryczny, to na skutek określonego przez prawo Faraday'a zjawiska indukcji elektromagnetycznej, powstaną w obiekcie prądy wirowe. Rozkład prądów wirowych w obiekcie badanym jest opisany równaniami Maxwella [13, 41].

Zgodnie z równaniami Maxwella rozkład gęstości prądów wirowych, wytwarzanych w obiekcie, zależy od następujących czynników:

- a) częstotliwości pracy przetwornika wiroprowadowego i rozkładu pola elektromagnetycznego,
- b) kształtu i wymiarów obiektu oraz jego usytuowania względem pola,
- c) przewodności elektrycznej, przenikalności magnetycznej oraz stopnia niejednorodności (w tym również anizotropowości) materiału, z którego obiekt jest wykonany [13, 49].

Obecność nieciągłości materiałowej (np. pęknięcia) zorientowanej prostopadle lub ukośnie względem linii prądów wirowych powoduje zmianę rozkładu indukowanych w materiale prądów wirowych wskutek lokalnej zmiany przede wszystkim przewodności elektrycznej oraz w przypadku materiałów ferromagnetycznych — zmiany przenikalności magnetycznej. Nieciągłości zorientowane równolegle do linii prądów wirowych powodują jednakże lokalne zwiększenie reluktancji magnetycznej, zakłócając przebieg strumienia magnetycznego i mogą być wykrywane z odpowiednio mniejszą czułością w porównaniu z czułością wykrywania wad usytuowanych prostopadle do linii prądów wirowych [13, 21—27, 32, 42—44].

Przy wykrywaniu nieciągłości materiałowych przy wykorzystaniu prądów wirowych ze względu na to, że rozkład gęstości prądów wirowych zależy m.in. od właściwości fizykochemicznych obiektów badanych, istnieją następujące główne czynniki zakłócające: zmiany składu chemicznego, zmiany stanu obiektów wynikające

z przeprowadzonej obróbki cieplnej (zmiany struktury wewnętrznej, twardości) oraz zmiany wymiarów obiektów i zmiany sprzężenia obiektów z przetwornikami. W przypadku stosowania wiropływowych sond stykowych czynnikami zakłócającymi wykrywanie nieciągłości są zmiany struktury obiektów wzdłuż ich długości oraz zmiany w sprzężeniu obiektu z przetwornikiem takiej, jak oddalenie przetwornika (np. obecność warstwy pokrycia) oraz przenoszenie przetwornika w stosunku do jego prostopadłego prowadzenia względem powierzchni badania.

W celu ewentualnego uzyskania możliwości wykrywania wad, zalegających w określonej odległości od powierzchni obiektu badanego, konieczny jest odpowiedni wybór częstotliwości pracy przetwornika wiropływowego. Niżej podane zostaną rozważania odnośnie wpływu częstotliwości pola elektromagnetycznego, wzbudzającego w obiektach badanych, wykonanych ze stali N18K9M5TPr, prądy wirowe, na głębokość penetracji prądów wirowych [21, 22, 35].

W przypadku obiektów, wykonanych z materiałów ferromagnetycznych, w porównaniu z obiektami wykonanymi z materiałów nieferromagnetycznych, prądy wirowe koncentrują się w cienkiej warstwie powierzchniowej. Ilustracją zjawiska naskórkowości prądów wirowych niech będzie, zamodelowany przez J. Papisa [41], przebieg modułu potencjału wektorowego. Z prowadzonych badań wynika przykładowo, że dla obiektów z materiału o przewodności elektrycznej  $\gamma = 6 \text{ MS/m}$  i przenikalności magnetycznej względnej  $\mu_r = 200$  wada podpowierzchniowa w postaci pęcherza gazowego ( $\gamma = 0$  i  $\mu_r = 1$ ) o wymiarach  $1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$ , znajdującego się na głębokości  $1 \text{ mm}$  pod powierzchnią obiektu wpływa w sposób istotny na rozkład potencjału wektorowego przy częstotliwościach pracy przetwornika (częstotliwościach badania) mieszczących się w zakresie od  $80 \text{ Hz}$  do  $500 \text{ Hz}$ . Natomiast np. przy częstotliwości  $2400 \text{ Hz}$  wymieniona wada nie wpływa na przebieg modułu potencjału wektorowego. Przebieg modułu potencjału wektorowego dla wybranych częstotliwości pola magnetycznego przedstawiono na rys. 2 [41].

W rozważaniach porównawczych dotyczących zastosowań zjawiska prądów wirowych przyjęto uważać za głębokość wnikania pola magnetycznego i prądów wirowych taką głębokość penetracji ( $\delta$ ), przy której amplituda tych wielkości zmniejsza się  $e$ -krotnie w stosunku do odpowiednich ich wartości na powierzchni obiektu. Głębokość penetracji opisana jest następującą zależnością [13, 22, 32]:

$$\delta = 5 \cdot 10^5 / (f \gamma \mu_r)^{1/2}, \quad (2)$$

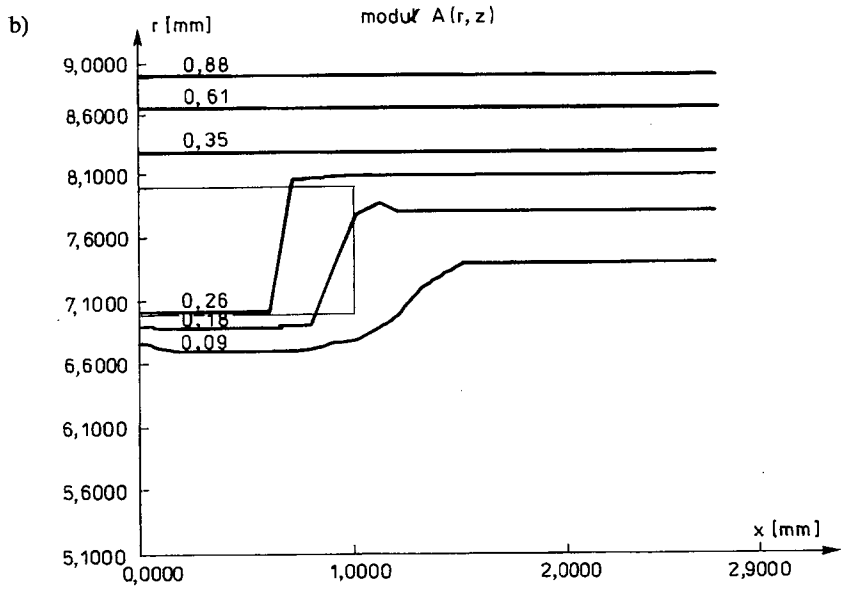
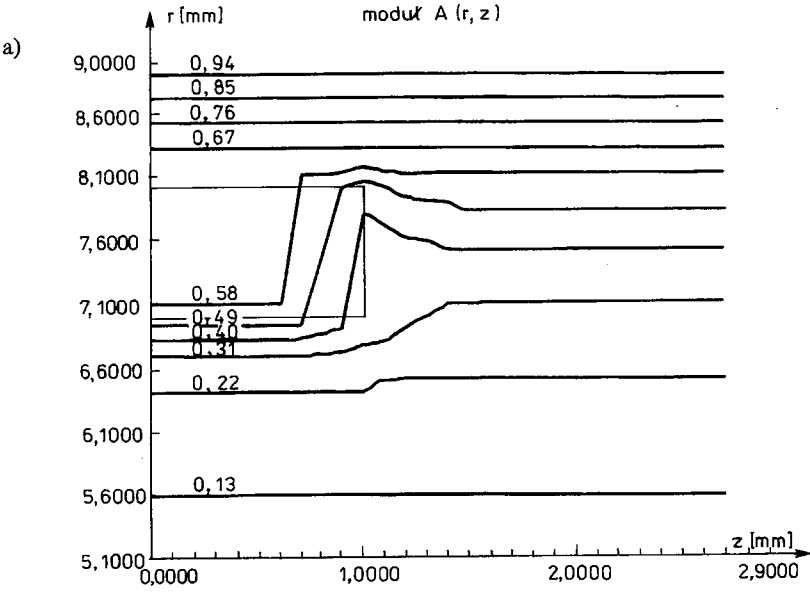
przy czym:

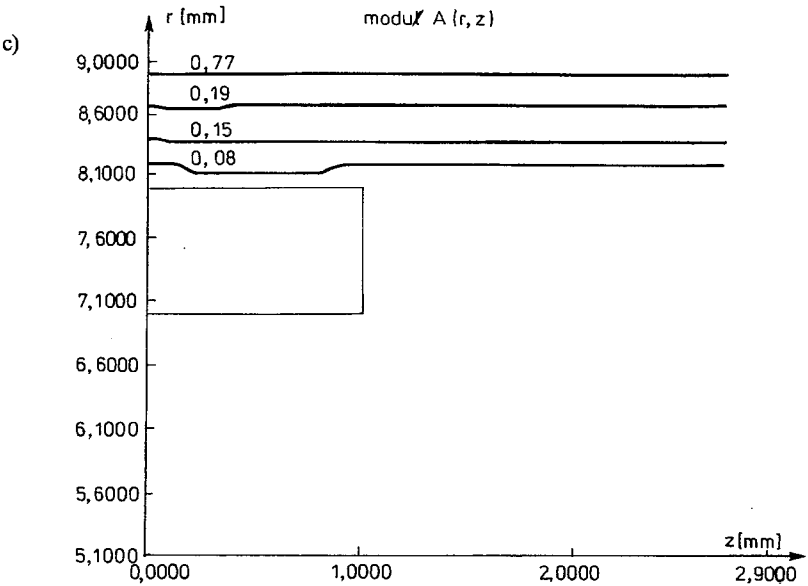
$f$  — częstotliwość pracy przetwornika,  $\text{Hz}$ ;

$\gamma$  — przewodność elektryczna materiału obiektu,  $\text{S/m}$ ;

$\mu_r$  — przenikalność magnetyczna względna obiektu, bezwymiarowa.

Zgodnie z zależnością (2) do wykrywania wad usytuowanych w warstwie powierzchniowej obiektów, wykonanych z materiałów o małej przewodności elektrycznej i małej przenikalności magnetycznej konieczne jest użycie stosunkowo dużych częstotliwości pracy przetwornika, co właściwie eliminuje możliwość uzyskania warunków badania niezbędnych przy wykrywaniu podpowierzchniowych wad obiektów.





Rys. 2. Przebieg modułu potencjału wektorowego w obiekcie walcowym o średnicy 18 mm, zawierającym wadę podpowierzchniową w postaci pęcherza usytuowanego na głębokości 1 mm pod powierzchnią obiektu. Częstotliwość pola wzbudzającego prądy wirowe a) 80 Hz, b) 500 Hz, c) 2400 Hz [41]

Przykładowe głębokości wnikania pola magnetycznego do obiektów, wykonanych ze stali o różnych parametrach elektromagnetycznych ( $\gamma$ ,  $\mu_r$ ), przedstawia tabela 2. W kolumnie drugiej podano głębokości wnikania prądów wirowych do obiektów wykonanych ze stali N18K9M5TPr.

Tabela 2

Głębokości wnikania pola magnetycznego do obiektów wykonanych ze stali o różnych parametrach elektromagnetycznych dla wybranych częstotliwości

| f<br>kHz | Stal<br>$\gamma = 5 \text{ MS/m}$<br>$\mu_r = 9,4$ | Stal<br>$\gamma = 7,5 \text{ MS/m}$<br>$\mu_r = 21$ | Stal<br>$\gamma = 6 \text{ MS/m}$<br>$\mu_r = 200$ |
|----------|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| 0,01     | 23,06                                              | 12,60                                               | 4,56                                               |
| 0,1      | 7,29                                               | 3,98                                                | 1,44                                               |
| 1        | 2,31                                               | 1,26                                                | 0,46                                               |
| 10       | 0,73                                               | 0,40                                                | 0,14                                               |
| 100      | 0,23                                               | 0,13                                                | 0,05                                               |
| 1000     | 0,07                                               | 0,04                                                | 0,02                                               |

Należy nadmienić, że wpływ wad obiektów na sygnału przetworników wiropiędowych jest ograniczony do około trzech (ew. czterech) głębokości penetracji.

Do obliczenia głębokości wnikania prądów wirowych do stali N18K9M5TPr przyjęto dla tej stali wartość przenikalności magnetycznej początkowej względnej  $\mu_{pr}=9,4$  oraz wartość przewodności elektrycznej właściwej  $\gamma=5$  MS/m. Głębokości wnikania prądów wirowych do stali N18K9M5TPr, obliczone zgodnie z definicyjnym wzorem (2), zostały zestawione w tabeli 3. Na rys. 3 przedstawiono przebieg zmiany głębokości wnikania prądów wirowych w zależności od częstotliwości pola wzbudzającego pole magnetyczne w stali N18K9M5TPr.

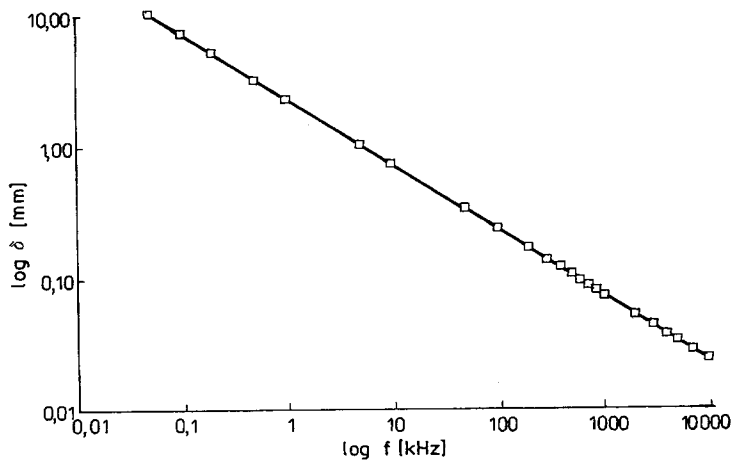
Tabela 3

Głębokość wnikania prądów wirowych do stali N18K9M5TPr dla częstotliwości w zakresie od 50 Hz do 10 MHz

|          |     |      |     |     |     |     |     |     |      |      |      |
|----------|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|
| f        | kHz | 0,05 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,5 | 1   | 5   | 10   | 50   | 100  |
| $\delta$ | mm  | 10,3 | 7,3 | 5,2 | 4,2 | 3,3 | 2,3 | 1,0 | 0,73 | 0,33 | 0,23 |

|          |     |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----------|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| f        | kHz | 200  | 300  | 400  | 500  | 600  | 700  | 800  | 900  | 1000 | 1100 |
| $\delta$ | mm  | 0,16 | 0,13 | 0,12 | 0,10 | 0,09 | 0,09 | 0,08 | 0,08 | 0,07 | 0,07 |

|          |     |      |      |      |      |      |      |      |      |      |       |
|----------|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| f        | kHz | 1200 | 1300 | 1400 | 1500 | 2000 | 3000 | 4000 | 5000 | 7000 | 10000 |
| $\delta$ | mm  | 0,07 | 0,06 | 0,06 | 0,06 | 0,05 | 0,04 | 0,04 | 0,03 | 0,03 | 0,02  |



Rys. 3. Głębokość wnikania pola magnetycznego i prądów wirowych do stali N18K9M5TPr w zależności od częstotliwości pola (parametry elektromagnetyczne stali  $\gamma=5$  MS/m;  $\mu_{pr}=9,4$ )

Inną, równie miarodajną ilustracją naskórkowości prądów wirowych, jest przebieg indukcji pola magnetycznego w zależności od głębokości liczonej od powierzchni obiektu badanego. Przebieg tak rozpatrywanej indukcji pola magnetycznego jest opisany następującą zależnością [22, 32]:

$$B = B_0 \exp[-d(\Pi f \gamma \mu)^{1/2}] \sin[2\Pi f t - d(\Pi f \gamma \mu)^{1/2}] \quad (3)$$

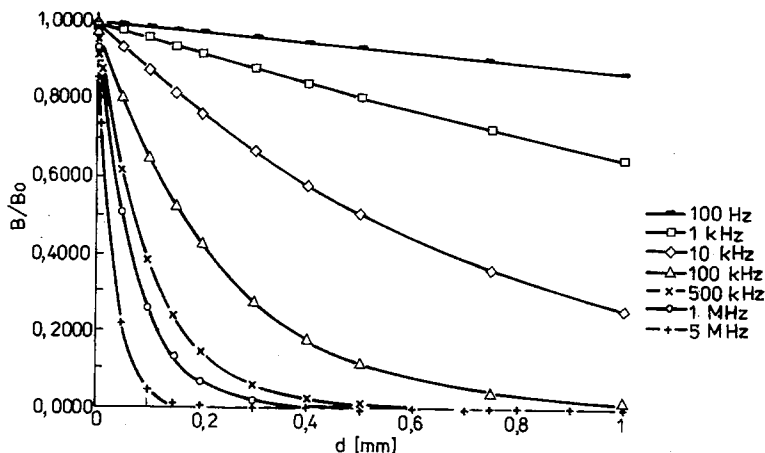
przy czym:

- $B$  — indukcja magnetyczna w odległości  $d$  od powierzchni (do wnętrza) obiektu badanego,  
 $B_0$  — indukcja magnetyczna na powierzchni obiektu,  
 $d$  — odległość od powierzchni obiektu; m,  
 $f$  — częstotliwość pracy przetwornika, Hz,  
 $t$  — czas,  
 $\gamma$  — przewodność elektryczna materiału obiektu, S/m,  
 $\mu$  — przenikalność magnetyczna bezwzględna materiału obiektu ( $\mu = \mu_0 \mu_r$ );  $\mu_0$  — stała magnetyczna;  $\mu_r$  — przenikalność magnetyczna względna.

Wartość indukcji magnetycznej w obiekcie badanym, będącej superpozycją indukcji, której źródło stanowi przetwornik wirowy oraz indukcji powstającej w wyniku indukowania w obiekcie prądów wirowych i na którą wpływ mają ewentualne wady obiektów, zawiera informację o wielkości (uwikłana funkcja głębokości, długości i szerokości nieciągłości) wady obiektu. Natomiast kąt przesunięcia fazowego indukcji pola magnetycznego, a w ślad za tym — kąt przesunięcia fazowego sygnału wyjściowego przetwornika zawiera, jak to wynika z zależności (3), informację o głębokości (głębokości zalegania) wady.

Zmiany wartości modułu indukcji magnetycznej wewnątrz obiektu wykonanego ze stali N18K9M5TPr, odniesione do wartości tego modułu na powierzchni obiektu, obliczone na podstawie zależności (3), przedstawiono na rys. 4. Pokazane na rys. 4 wykresy przedstawiają zmiany modułu indukcji dla siedmiu częstotliwości pola magnetycznego wzbudzającego w wyżej wymienionej stali prądy wirowe: 100 Hz; 1 kHz; 10 kHz; 100 kHz; 500 kHz; 1 MHz oraz 5 MHz.

Metodyki analizy sygnałów przetworników wirowych wynikają z rozważenia składowych rozwiązania równań Maxwella [13, 22, 32, 41], opisujących



Rys. 4. Indukcja magnetyczna wewnątrz obiektu wykonanego ze stali N18K9M5TPr unormowana względem indukcji na powierzchni obiektu

rozkład potencjału wektorowego w obiekcie, w którym wzbudzone są prądy wirowe. Rozwiązanie równań Maxwella prowadzi do otrzymania składowej rzeczywistej i składowej urojonej lub odpowiednio modułu i kąta przesunięcia fazowego potencjału wektorowego. Przebieg zmian modułu potencjału (rys. 2) ma swoje bezpośrednie odbicie w amplitudzie zmian sygnału wyjściowego przetwornika. Interpretacja zmian kąta przesunięcia fazowego potencjału wektorowego jest natomiast znacznie trudniejsza [41].

Istnieją dwa zasadnicze sposoby podejścia do sygnałów przetworników wiropądowych: analiza amplitudowa oraz analiza fazoczuła. O ile interpretacja amplitudy sygnałów przetworników, zgodnie z podanymi wyżej spostrzeżeniami, nie nastęrcza większych trudności, to interpretacja uwzględniająca zależności fazowe (interpretacja składowej urojonej sygnałów przetworników) nie jest pozbawiona poważnych trudności. Te problemy stanowiły przesłankę wyboru branych pod uwagę układów defektoskopów — z przeznaczeniem do badań laboratoryjnych, rozpoznawczych oraz do badań w warunkach przemysłowych w zakładach lotniczych.

## 5. ASPEKTY APARATUROWE NIENISZCZĄCEJ KONTROLI WIROPĄDOWEJ

Przy wyborze konfiguracji przetwornika wiropądowego [5, 13, 22] i układu analizy jego sygnałów wyjściowych wzięto pod uwagę założony cel kontroli, to jest wykrywanie nieciągłości, szczególnie zmęczenia, połączeń spawanych [28] wiązką elektronów obiektów wykonanych ze stali N18K9M5TPr. Taki cel kontroli wymaga wzięcia pod uwagę wielkich częstotliwości pracy przetworników w celu zapewnienia odpowiednio płytkiej penetracji prądów wirowych do wnętrza obiektu badanego.

Do kontroli połączeń spawanych obiektów wykonanych ze stali N18K9M5TPr mogą być brane pod uwagę jedynie przetworniki stykowe. Rozważania i badania modelowe przeprowadzono stosując analizę właściwości kilkudziesięciu i badania sygnałów kilku przetworników wiropądowych o różnych konfiguracjach — ze szczególnym uwzględnieniem dwu konfiguracji nieekranowanego i ekranowanego małowadliwych (tzw. sztyftowych) i miniaturowych przetworników stykowych: przetworników bezwzględnych (absolutnych) oraz różnicowych. Do przewidywanych zastosowań w zakładach lotniczych wybrano miniaturowe ekranowane przetworniki bezwzględne. Wybór konfiguracji bezwzględnej przetwornika był podyktowany metodyką analizy i prezentacji sygnałów przetwornika, zaimplementowanym w wybranym do celów kontroli w zakładach lotniczych defektoskopie wiropądowym. Wybór przetwornika ekranowanego podyktowany był m.in.: w przybliżeniu dwukrotnie mniejszą szerokością efektywną sygnału przetwornika, którą określa się dla wąskich wad typu pęknięć i w przybliżeniu dwukrotnie mniejszą szerokością strefy wpływu krawędzi obiektu badanego na sygnały przetwornika ekranowanego w stosunku do przetwornika nieekranowanego (dla przetworników opracowanych przez firmę INSTITUT Dr. Förster). Poddano analizie przetworniki i układy

defektoskopów produkcji renomowanych firm niemieckich: przede wszystkim INSTITUT Dr Förster oraz ROHMANN GMBH [15, 18]. Opis sposobów prezentacji informacji o wadach obiektów w defektoskopach wiroprowodowych podano niżej.

W defektoskopach może być wykorzystana jedna z dwu metodyk fazoczułej analizy sygnałów przetworników: tzw. analiza fazoczuła jednowymiarowa oraz tzw. analiza fazoczuła dwuwymiarowa, a także analiza amplitudowa [13, 22, 32, 34, 40].

Analiza fazoczuła jednowymiarowa pozwala na uzyskanie informacji odnośnie występowania wad (pęknięć) np. połączeń spawanych wiązką elektronów oraz wielkości wad. Nie pozwala jednak na rozróżnienie wad [3, 7, 11, 12, 14, 22, 24, 50] — na podstawie sygnałów przetworników wiroprowodowych. Założenia niniejszej pracy przewidywały także przeprowadzenie badań dla opracowania założeń dla spełnienia takiego celu kontroli. Z tego względu prowadzono rozważania i badania modelowe przy wzięciu pod uwagę możliwości wykorzystania analizy fazoczułej dwuwymiarowej.

Wykorzystanie analizy fazoczułej dwuwymiarowej pozwala na rejestrację sygnałów, wywołanych przez wady obiektów w postaci zobrazowania na płaszczyźnie we współrzędnych kartezjańskich  $(x, y)$ ; przy czym nowoczesne defektoskopy mają też możliwość przedstawiania zależności  $y(l)$ , gdzie  $x$  — jest składową rzeczywistą sygnałów przetwornika,  $y$  — składową urojoną,  $l$  — wymiarem liniowym określającym długość (szerokość) wady. W przypadku przedstawiania sygnałów przetworników wiroprowodowych dla miejsc obiektów, zawierających wady zobrazowanie sygnałów w postaci trajektorii [22, 27, 44], jest m.in. przydatne przy doborze warunków pracy przetworników. Przy takim zobrazowaniu sygnałów przetworników w niektórych przypadkach jest możliwe rozróżnianie wykrywanych wad — na podstawie charakterystycznych dla nich kształtów trajektorii. Najnowsze realizacje defektoskopów wiroprowodowych umożliwiają prezentację trajektorii zmian sygnałów przetworników.

Układy analizy sygnałów przetworników wiroprowodowych coraz częściej umożliwiają rejestrację składowej urojonej sygnałów przetworników. W tym przypadku nie ma możliwości rozróżniania wad. Należy podkreślić, że możliwość prezentacji użytkownikowi składowej urojonej sygnałów przetworników wiroprowodowych jest związana z wprowadzaniem w układach defektoskopów analizy fazoczułej. Przy zastosowaniu analizy fazoczułej możliwe jest wyodrębnienie z sygnałów wyjściowych przetworników składowych o określonym przesunięciu fazowym, np. odpowiadającym przesunięciu fazowemu sygnałów wywołanych przez pęknięcia. Możliwe jest wówczas także wyodrębnienie sygnałów w fazie różnej, np. o kąt  $\pi/2$  w stosunku do sygnałów wywołanych przez czynniki zakłócające (np. zmiany struktury obiektu wzdłuż jego długości). Przy prezentacji trajektorii zmian sygnałów przetworników takiej możliwości nie ma, gdyż wówczas analizowany jest „całkowity” sygnał wyjściowy przetwornika. Tak więc przy implementowaniu analizy fazoczułej dwuwymiarowej nie ma możliwości zmniejszania wpływu czynników zakłócających — na sygnały wywołane przez nieciągłości obiektów.

Badania modelowe mogą być prowadzone przy wykorzystaniu zobrazowania sygnałów przetworników wiroprowodowych w postaci trajektorii na płaszczyźnie  $(x, y)$

oraz wykresów  $y(I)$ . Taki sposób podejścia do sygnałów przetworników wiroprowodowych zastosowano np. w przyrządzie, model DEFECTOSCOP SD 2.832 produkcji firmy INSTITUT Dr. Förster. Częstotliwości pracy defektoskopu zawierają się w zakresie od 100 Hz do 10 MHz.

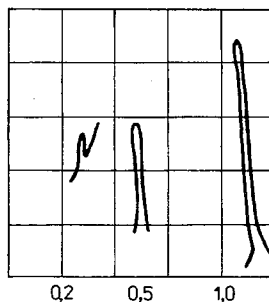
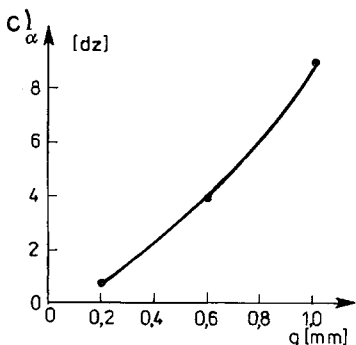
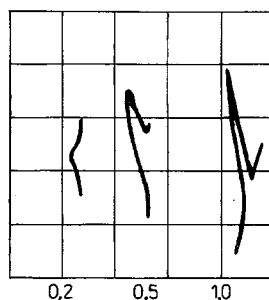
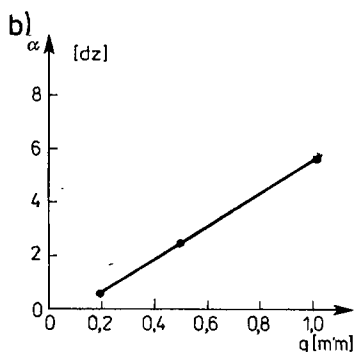
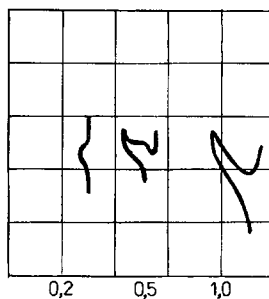
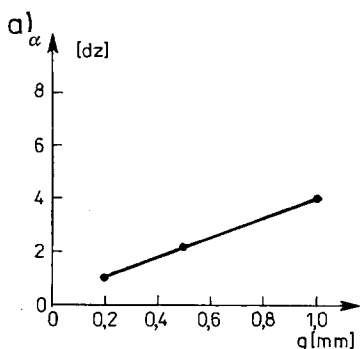
Przenośne defektoskopy wiroprowodowe pozwalają na przedstawianie użytkownikom przetworzonych sygnałów przetworników jedynie w postaci zmian amplitudy sygnałów — zależnie od wielkości rejestrowanych wad. Niemniej jednak defektoskopy o amplitudowej analizie sygnałów przetworników wiroprowodowych znakomicie spełniają swoją rolę — przyrządów umożliwiających wdrożenie szybkich i prostych procedur badań pozwalających na wykrywanie i ocenę głębokości rejestrowanych wad. Jak już zaznaczono, amplituda sygnałów przetworników wiroprowodowych jest uwikłaną funkcją głębokości, szerokości oraz długości wad.

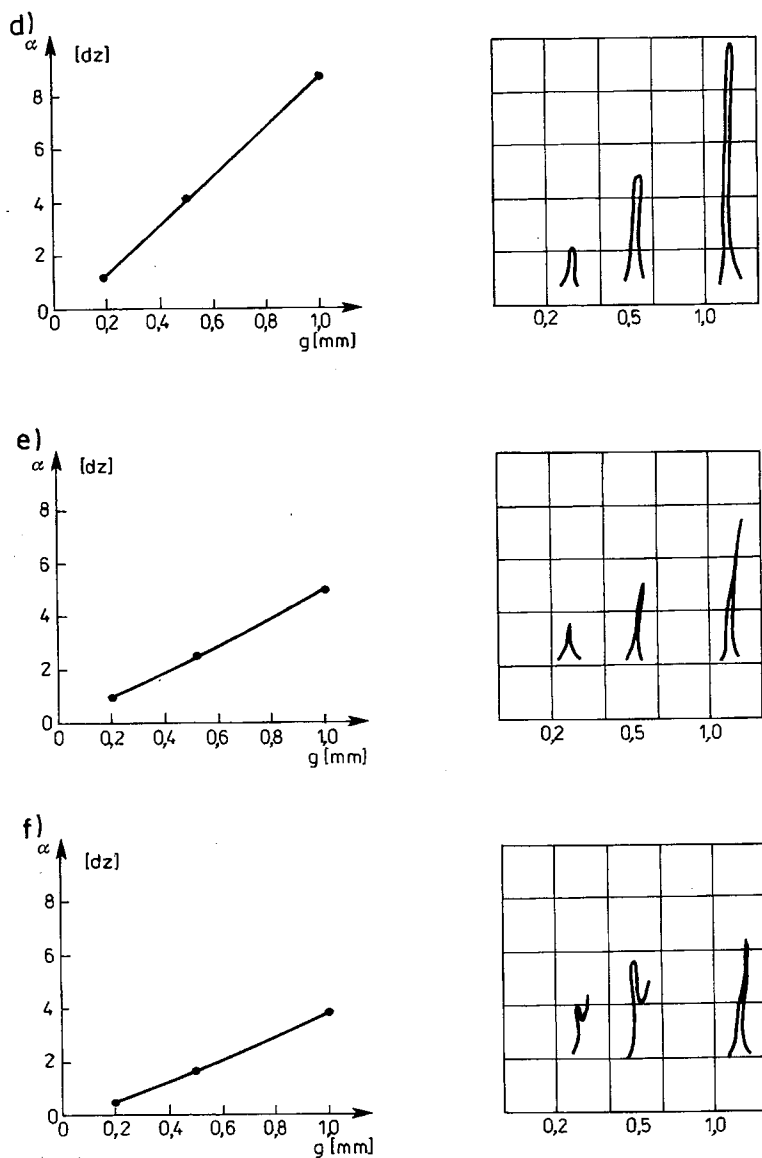
Do prowadzenia badań w zakładach lotniczych rekomenduje się wykorzystanie defektoskopu umożliwiającego rejestrację sygnałów zawierających informację o wielkości wad obiektów, np. DEFECTOMETER H 2.835 produkcji firmy INSTITUT Dr. Förster. Częstotliwość, przy której mogą być prowadzone badania obiektów wykonanych ze stali zarówno ferryticznych, jak i austenitycznych przy wykorzystaniu wspomnianego defektoskopu INSTITUT Dr. Förster wynosi około 4 MHz (ograniczenia aparaturowe). Wymienione defektoskopy charakteryzują się odpowiednim do założonego celu kontroli zakresem częstotliwości pracy oraz zapasem wzmocnienia. Mogą z nimi współpracować różnorodne przetworniki stykowe firmy INSTITUT Dr. Förster, które mogą być zastosowane — z przeznaczeniem do badania wirników w zakładach lotniczych.

Niżej zostaną opisane dalsze, istotne, środki techniczne kontroli wiroprowodowej. Są nimi wzorce wad. Wzorce [10, 37] wad sztucznych stosowane są do ustalania nastaw parametrów defektoskopów wiroprowodowych dla określonych wartości stosunku głębokości do szerokości wad. Wzorce wad mają jednakową szerokość, natomiast różną głębokość. Rekomenduje się wybór takich parametrów (wzmocnienia) defektoskopu, aby jego wskazania dla określonych wad sztucznych odpowiadały określonej wartości procentowej zakresu miernika wyjściowego defektoskopu. Wzorce wad nie służą natomiast (ze względu m.in. na regularny kształt oraz znaczną szerokość wad sztucznych) do celów porównywania wskazań defektoskopów ze wskazaniami tych aparatów — dla wad naturalnych. Przy zamierzonych aplikacjach przetworników stykowych wzorce wykonuje się w postaci płytek z różnych materiałów z naciętymi (np. piłką tarczową lub drutową — elektroiskrowo) rowkami wzdłużnymi. Jest standardem, że w badaniach wiroprowodowych stosuje się wady wzorcowe w postaci rowków o głębokościach 0,2 mm; 0,5 mm oraz 1,0 mm, a w niektórych przypadkach także 2 mm; 4 mm i 8 mm. Szerokości wad sztucznych wykonywanych przy użyciu piłek tarczowych wynoszą najczęściej 0,1 mm; elektroiskrowo — na przykład 0,3 mm. Przy opracowaniu procedur badań materiałów ferromagnetycznych można wykorzystywać wzorce wad, wykonywane przez firmę INSTITUT Dr. Förster. Są to wzorce wykonane ze stali ferrytycznej (gatunku St 37-2) i austenitycznej (gatunku Cronifer). Do badań modelowych wykorzystano m.in. wykonane metodą elektroiskrową wzorce wad sztucznych ze stali N18K9M5TPr, o głębokościach wad wynoszących 0,2 mm; 0,5 mm i 1,0 mm. Szerokość wad wynosiła 0,3 mm.

## 6. PRZYKŁADOWE WYNIKI BADAŃ WIROPRĄDOWYCH

Przykładowe wyniki badań wiroprowadowych dotyczą obiektów wykonanych ze stali N18K9M5TPr. Trajektorie obrazują zmiany sygnałów małowymiarowego nieekranowanego przetwornika sztyftowego, typ 2400 współpracującego z defektoskopem SD 2.832. Sygnały przetwornika dotyczą wad sztucznych wzorca w postaci wycinka korpusu ze stali N18K9M5TPr o głębokościach 0,2 mm; 0,5 mm i 1,0 mm. Sygnały wymienionego przetwornika dla szeregu częstotliwości pracy, zawartych



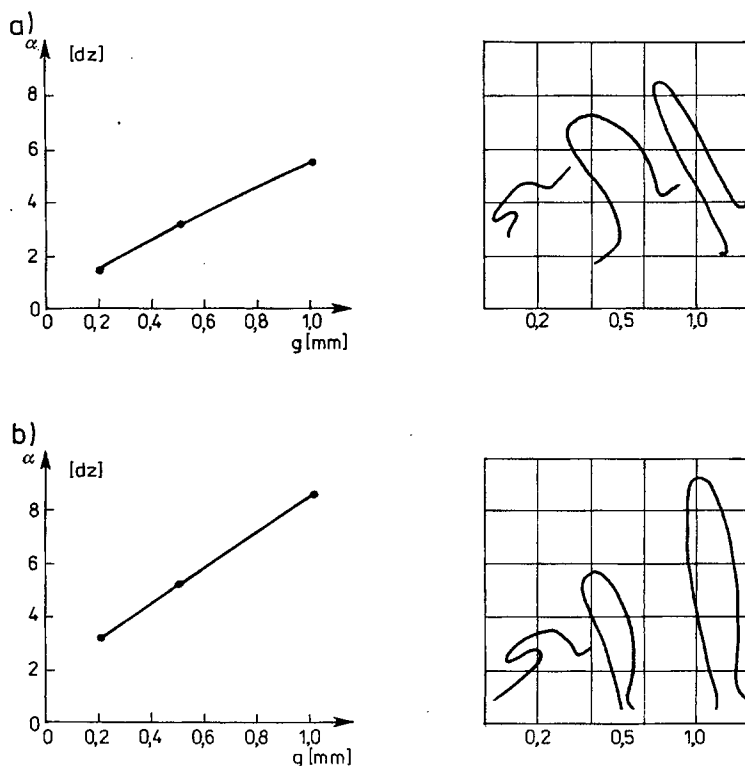


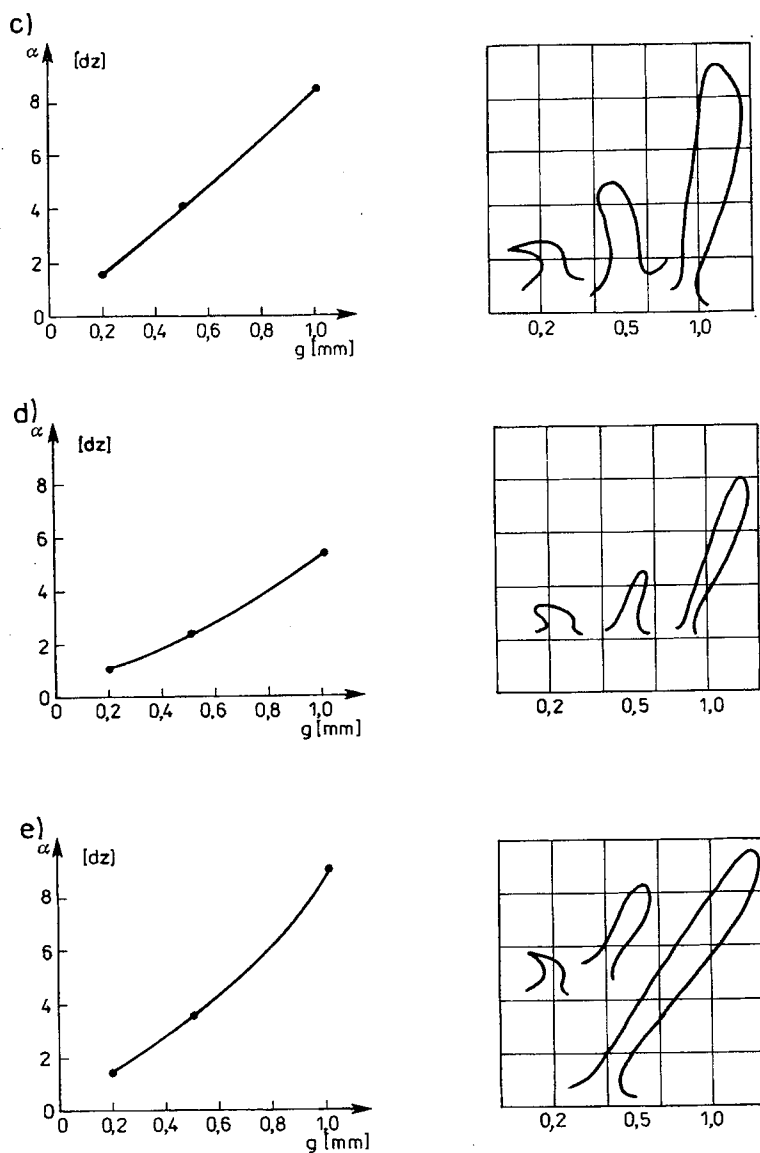
Rys. 5. Trajektorie zmian sygnałów sztyftowego przetwornika wiroprowadowego, typ 2400 dla wzorcowych wad sztucznych wycinka korpusu ze stali N18K9M5TPr. Częstotliwość pracy przetwornika: a) 300 kHz, b) 400 kHz, c) 500 kHz, d) 700 kHz, e) 990 kHz, f) 1,2 MHz. Parametry defektoskopu DEFECTOSCOPI 2.832: wzmocnienie wzmacniacza wyjściowego  $K=42,5$  dB, stosunek wzmocnień kanałów defektoskopu  $K_{y/x}=18$  dB, wzmocnienie wzmacniacza wstępnego  $U_i=-6$  dB, rezystancja wejściowa wzmacniacza wyjściowego  $I_p=1$  (oznaczenia — według opisu defektoskopu)

w zakresie od 300 kHz do 1,2 MHz przedstawiono na rys. 5. W lewej kolumnie na rys. 5 pokazano składową urojoną sygnałów przetwornika w zależności od głębokości wad; w prawej kolumnie — trajektorie zmian sygnałów przetwornika dla poszczególnych wad.

Z rys. 5 wynika, że częstotliwość, dla której uzyskuje się liniową zależność wskazań defektoskopu współpracującego z przetwornikiem, typ 2400, od głębokości (w podanym zakresie) wad w wycinku korpusu ze stali N18K9M5TPr, wynosi około 700 kHz. Nadmienić należy, że kąt przesunięcia fazowego ( $\Phi = 290^\circ$ ) prezentowanych na ekranie defektoskopu sygnałów przetwornika wybrano w tym przypadku taki, aby sygnały wywołane przez wady sztuczne wzorca ze stali N18K9M5TPr przyjmowały (zgodnie z wyżej podanym sposobem podejścia do sygnałów przetworników, polegającym na analizie składowej urojonej sygnałów) dla częstotliwości 700 kHz położenie pionowe.

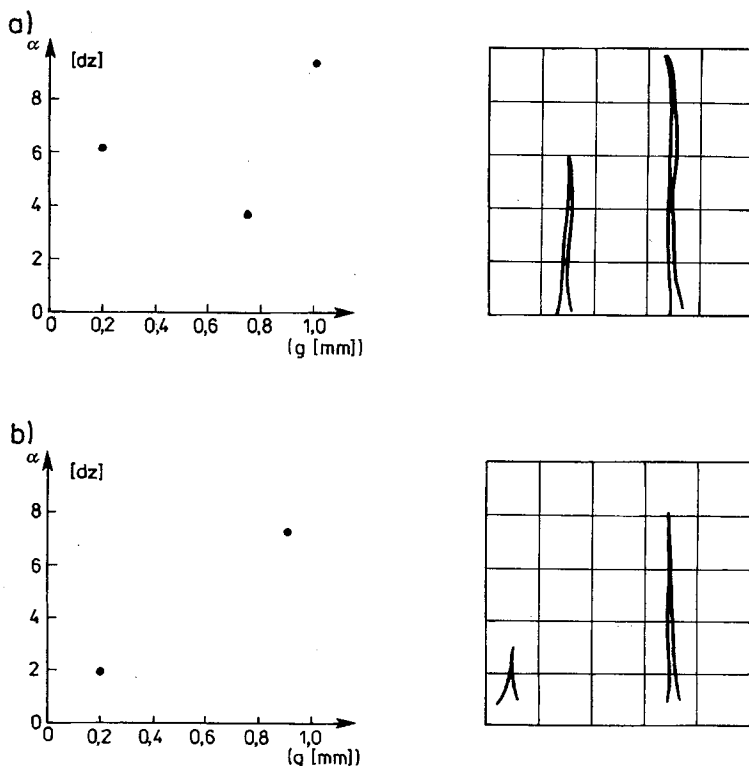
Na rys. 6 przedstawiono sygnały małowabarytowego przetwornika, typ 2550 produkcji firmy INSTITUT Dr. Förster, współpracującego z defektoskopem SD 2.832. Sygnały defektoskopu zarejestrowano dla wzorcowych wad sztucznych wykonanych w wycinku korpusu ze stali N18K9M5TPr.





Rys. 6. Trajektorie zmian sygnałów sztyftowego ekranowanego przetwornika wiroprowadowego, typ 2550 dla wzorcowych wad sztucznych wycinka korpusu ze stali NN18MK9M5TPr. Częstotliwość pracy przetwornika: a) 500 kHz, b) 700 kHz, c) 850 kHz, d) 990 kHz, e) 1,2 MHz. Parametry defektoskopu SD 2.832:  $K=49,5$  dB,  $K_{Y/X}=0$  dB,  $U_I=-18$  dB,  $I_P=1$ ,  $\Phi=265^\circ$

Na rys. 7 przedstawiono trajektorie zmian sygnałów małogabarytowego przetwornika bezwzględego, typ 2400 współpracującego z defektoskopem SD. 2.832 dla dwóch wad próbek ze stali N18K9M5TPr z pęknięciami wprowadzonymi przy wykorzystaniu wibratora. Próbkę były obciążane naprężeniami zmiennymi symetrycznymi, przy zwiększaniu amplitudy naprężeń. Przetwornik prowadzono w odległości



Rys. 7. Trajektorie zmian sygnałów przetwornika typ 2400 dla wad próbek poddanych naprężeniom zmiennym. Częstotliwość pracy przetwornika 700 kHz. Parametry defektoskopu SD 2.832:  $K=42,5$  dB,  $K_{y/x}=18$  dB,  $U_i=-6$  dB,  $I_p=1$ ,  $\Phi=290^\circ$

2 mm od krawędzi próbek. Przytoczone trajektorie zmian sygnałów przetwornika wiroprowodowego dotyczą częstotliwości 700 kHz. Uzyskane wyniki potwierdzają prawidłowość wyboru przetwornika i parametrów pracy defektoskopu.

Do prowadzenia badań połączeń spawanych wiązką elektronów wirników — w zakładach lotniczych, wybrano miniaturowy ekranowany przetwornik o konfiguracji bezwzględnej, typ 4070, przeznaczony do kontroli obiektów wykonanych ze stali austenitycznych oraz defektoskop H 2.835. Zakres częstotliwości pracy przetwornika nr 4070 wynosi 0,1 MHz do 4 MHz. Średnica zewnętrzna (obudowy) przetwornika wynosi 4 mm.

Optymalne parametry kontroli obiektów (w tym połączeń spawanych) wykonanych ze stali N18K9M5TPr ustalono na podstawie badań próbek z wadami wzorcowymi. Wybór parametrów kontroli został potwierdzony na podstawie badań próbek z wadami wprowadzonymi przy użyciu wibratora. Optymalne do prowadzenia badań próbek z wadami wzorcowymi parametry defektoskopu były następujące:

- wzmocnienie  $K=9,0$  dB,
- częstotliwość pracy defektoskopu, w przypadku kontroli obiektów stalowych: 4 MHz,
- próg detekcji sygnałów, wywołanych przez wady obiektu badanego 20 dBA.





Wyjaśnienia wymaga wybór przetwornika, który wyżej określono, jako przeznaczony do badania obiektów wykonanych ze stali austenitycznych. Stale austenityczne charakteryzują się małymi wartościami przewodności elektrycznej właściwej, wynoszącymi od około 0,5 MS/m do około 2 MS/m i zbliżonymi do jedności wartościami przenikalności magnetycznej; w praktyce wynosić może ona np. 1,005. Badane obiekty wykonane ze stali N18K9M5TPr, jak to wynika z oszacowania, charakteryzują się stosunkowo niewielką wartością przewodności elektrycznej właściwej (ok. 5 MS/m). Rozpatrywana stal jest słabym ferromagnetykiem. Złącza spawane wykonane z tej stali w słabych stałych polach magnetycznych mają małą przenikalność magnetyczną względną  $\mu_r$ , wynoszącą ok. 9,4. Niektóre gatunki stali konstrukcyjnych, z których wykonuje się obiekty poddawane kontroli wiropądowej mają przewodność elektryczną względną równą np 10 MS/m, a przenikalność magnetyczną względną wynoszącą np. 200 [11]. Z punktu widzenia doboru parametrów kontroli wiropądowej istotny jest, jak już zaznaczono iloczyn  $\gamma\mu$ , w danych warunkach pracy; jest to parametr opisujący właściwości elektromagnetyczne materiału. Parametr ten (dla słabych pól magnetycznych) dla połączeń wykonanych ze stali N18K9M5TPr wynosi ok. 47, podczas gdy dla innych materiałów ferromagnetycznych badanych wiropądowo może wynosić on np. 2000. Tak więc stal maraging ze względu na jej parametry elektromagnetyczne jest bliższa materiałom austenitycznym.

Istotną przesłanką poczynionego wyboru były także wskazówki producenta przyrządu DEFECTOMETER H 2.835. Kontrola obiektów wykonanych z materiałów o przewodności zawierającej się w zakresie od 1,4 MS/m do 4 MS/m (w przypadku najnowszego przyrządu DEFECTOMETER 2.837 — dla materiałów o przewodności zawierającej się w zakresie od 0,5 MS/m do 4,5 MS/m) może być mianowicie wykonywana przy użyciu przetworników przeznaczonych do badania stali austenitycznych. Niemniej jednak, ze względu na to, że stal będąca przedmiotem badań, jest ferromagnetyczna (wprawdzie jest ferromagnetykiem słabym), w tym nietypowym dla stosowania metody wiropądowej przypadku, wybrana została opcja pracy przyrządu DEFECTOMETER H 2.835 odpowiednia dla przypadku kontroli obiektów ferromagnetycznych.

Wzmocnienie defektoskopu DEFECTOMETER H 2.835 wybrane zostało w taki sposób, aby dla wady sztucznej wzorca wykonanego ze stali N18K9M5TPr, o głębokości 0,2 mm uzyskiwane było wskazanie miernika defektoskopu wynoszące 20 działek.

Na rys. 8 przedstawiono przykładowy wynik badania obiektu wykonanego ze stali N18K9M5TPr — w postaci rysunku obrazującego wskazania defektoskopu wiropądowego, model DEFECTOMETER H 2.835 współpracującego z miniaturowym przetwornikiem o konfiguracji bezwzględnej, nr 4070. Przedstawione wyniki dotyczą wady w postaci pęknięcia obiektu wykonanego ze stali N18K9M5TPr (trajektorie zmian sygnałów przetwornika wiropądowego wskazanego pęknięcia przedstawiono na rys. 7). Przetwornik prowadzono po dwóch powierzchniach próbki. Sygnały przetwornika, typ 4070, przetworzone w układzie defektoskopu, rejestrowano w punktach odpowiadających narożom i środkom symetrii siatki o boku oczka równym połowie średnicy zewnętrznej obudowy przetwornika, to jest siatki o boku oczka

równym 2 mm. Uzyskane próbki sygnałów przetwornika poddano akwizycji w komputerze personalnym i zobrazowano w postaci wykresu trójwymiarowego. Wyniki przedstawione na rys. 8 potwierdzają słuszność wyboru przetwornika wiroprowodowego, jego częstotliwości pracy, a także opcji pracy i parametrów defektoskopu, model DEFECTOMETER H 2.835.

Maksymalne sygnały (rys. 8), zarejestrowane dla wady wprowadzonej przy wykorzystaniu wibratora próbki stanowiącej wycinek wirnika ze stali N18K9M5TPr, przy prowadzeniu przetwornika po powierzchni A w pobliżu krawędzi ścianek A i B, przy wybranej czułości badania, odpowiadały wskazaniu defektoskopu, równym 70 działek. Maksymalne sygnały, zarejestrowane przy prowadzeniu przetwornika po powierzchni B w pobliżu krawędzi ścianek A i B, odpowiadały wskazaniu defektoskopu, równym 60 działek. Długość wady (określona na podstawie pokazanych wyników badań) liczona wzdłuż ścianki A wynosi około 3 mm, a liczona wzdłuż ścianki B — około 4,5 mm. Wybrany przetwornik, według producenta, odznacza się następującymi wybranymi parametrami: efektywną szerokością sygnału dla wad typu pęknięć 1,3 mm (parametr ten charakteryzuje efekt „rozciągania” sygnałów wywołanych przez wady); zakresem liniowości charakterystyki przetwarzania wynoszącym 1,3 mm oraz szerokością strefy wpływu krawędzi obiektów badanych wynoszącą 0,6 mm. Dodać można, że pęknięcie obiektu wpływa w sposób zauważalny (wskazanie wynosi wówczas około. 15 działek) na sygnały wybranego przetwornika nr 4070 z odległości około 2 mm względem środka wady.

### Podziękowanie

Autorzy wyrażają podziękowanie Panu mgr inż. Julianowi Fałęckiemu za konsultacje i udostępnienie do badań wirnika sprężarki silnika K-15.

Praca realizowana w ramach projektu badawczego KBN 7 S102 015 04.

### BIBLIOGRAFIA

1. ASTM Committee on NIW — Metals Handbook, 8 ed., ASTM Ohio, 1976
2. R.A. Baker, R.S. Tombaugh: *Eddy Current Examination of Heat-Exchanger Tubing with Inside-Surface*. Pitting Materials Evaluation, 1990, nr 1, s. 55—59
3. B. Benoist, P. Morizet, P. Gaillard, B. David, M. Pigeon: *Increasing Reliability of Defect Characterization on SG Tubing Using a Combination of Signal Processing and Expert System*. Proceedings of the 12th World Conference on Non-Destructive Testing. Amsterdam. Elsevier Science Publishers, Amsterdam—Oxford—New York—Tokyo, 1989, t. 2, s. 1702—1707
4. L.V. Bernus, R. Gebhardt, B. Gentner, G. Götsche, R. Wallhüter: *Eddy Current Inspection of Steam Generators: Development of Automated Data Evaluation*. Proceedings of the 12th World Conference on Non-Destructive Testing. Amsterdam. Elsevier Science Publishers, Amsterdam—Oxford—New York—Tokyo, 1989, t. 2, s. 1004—1009
5. V.S. Cecco, F.L. Sharp: *Recent Advances in Probe Design for Eddy-Current Testing of Heat Exchangers*. NDT International, 1989, nr 4, s. 217—221
6. V.S. Cecco, C.R. Bax: *Eddy Current in-Situ Inspection of Ferromagnetic Monel Tubes*. Materials Evaluation, 1975, nr 1, s. 1—4

7. C. Chavant, J. Cahouet: *Sensitivity Analysis of Electromagnetic Fields Depending on Flaw Shape in NDT*. Proceedings of the 13th World Conference on Non-Destructive Testing Amsterdam. Elsevier Science Publishers, Amsterdam—London—New York—Tokyo, 1992, s. 259—263
8. J. Chodorowski: *Materialoznawstwo lotnicze*. WPW, Warszawa 1983
9. J. Fałęcki: *Konsultacje oraz komunikaty ustne dotyczące wyboru materiału na próbki do opracowania procedur badań nieniszczących*. Instytut Lotnictwa, Warszawa, 1992—1994
10. B. Giovanni: *Fabrication of Artificial Reference Defects for Non-Destructive Testing*. Proceedings of the 12th World Conference on Non-Destructive Testing. Amsterdam. Elsevier Science Publishers, Amsterdam—Oxford—New York—Tokyo, 1989, t. 1, s. 584—553
11. K. Grotz: *First Experience with Image Analysis of Eddy-Current Signals*. Proceedings of the 12th World Conference on Non-Destructive Testing Amsterdam. Elsevier Science Publishers, Amsterdam—Oxford—New York—Tokyo, 1989, t. 2, s. 1401—1403
12. D.A. Hagemaiier, J.A. Register: *Mock Eddy-Current Demonstration: Crack versus Notches*. Materials Evaluation, 1990, nr 1, s. 50—54
13. H. Heptner, H. Stroppe: *Magnetyczne i indukcyjne badania metali*. Wyd. Śląsk, Katowice 1972
14. D. Horne, S. Upda, W. Lord: *Superposition of Eddy-Curent Probe Signals*. Materials Evaluation, 1984, nr 7, s. 930—933
15. *Instrukcje defektoskopów produkcji firm INSTITUT Dr. Förster oraz ROHMANN GMBH*
16. E. Kania, J. Ranachowski, A. Jędrzejewski: *Metody i aparatura do defektoskopowych badań magnetycznych*. Prace IPPT PAN, nr 38, Warszawa, 1994
17. W. Karliński, J. Konarski: *Komunikaty ustne, informacje o wynikach uzyskanych w trakcie realizacji Projektu KBN Nr 9 S604 016*, Warszawa 1995
18. Katalogi oraz prywatne komunikaty dotyczące sond wiroprowodowych produkcji firm INSTITUT Dr Förster oraz ROHMANN GMBH
19. W. Kelb: *Evaluation of Defect Progression by Means of Eddy-Current Testing*. Proceedings of the 12th World Conference on Non-Destructive Testing Amsterdam. Elsevier Science Publishers, Amsterdam—Oxford—New York—Tokyo, 1989, t. 2, s. 1050—1052
20. K. Krzywosz, G. Dan: *State-of-the-Art Electromagnetic NDE Technology for Ferromagnetic Heat Exchanger Tubing*. Proceedings of the 12th World Conference on Non-Destructive Testing Amsterdam. Elsevier Science Publishers, Amsterdam—Oxford—New York—Tokyo, 1989, t. 2, s. 1107—1109
21. A. Lewińska-Romicka: *Badania nieniszczące drutów i pretów metalowych metodą prądów wirowych*. Centrum Uczelniano-Przemysłowe Metrologii i Systemów Pomiarowych Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1985
22. A. Lewińska-Romicka: *Badania nieniszczące rur metalowych metodą prądów wirowych*. PWN, Warszawa 1991
23. A. Lewińska-Romicka: *Defektoskopia wiroprowodowa rur nieferromagnetycznych spawanych*. Rozprawy Elektrotechniczne PAN, 1990, z. 1, s. 175—206
24. A. Lewińska-Romicka: *Metodyka charakteryzowania wad rur na podstawie sygnałów przetworników wiroprowodowych*. Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji, 1995, z. 3, s. 379—410
25. A. Lewińska-Romicka: *Problemy nieniszczących badań rur niemagnetycznych*. Rozprawy Elektrotechniczne, 1986, z. 3, s. 801—812
26. A. Lewińska-Romicka: *Problemy zapewnienia jakości w procesie wytwarzania drutów. Badania nieniszczące z wykorzystaniem metody prądów wirowych*. Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji, z. 3, 1993, s. 603—625
27. A. Lewińska-Romicka: *Trajektorie napięcia przetworników wiroprowodowych samoporównawczych*. Rozprawy Elektrotechniczne, 1990, z. 3—4, s. 741—761
28. A. Lewińska-Romicka: *Wady rur spawanych z miedzi i mosiądzu*. Rudy i Metale Nieżelazne, 1990, nr 10—11, s. 281—283
29. R. Lord, J.P. Ramsey: *Reliable non Destructive Testing: The Key to Using Weldments in Critical Failer Aircraft Structure*. Materials Evaluation, 1986

30. Materiały ofertowe, np. prospekt firmy INCO Europe Ltd., 1976
31. M. Nałęcz, R. Jaworski: *Pomiary magnetyczne*, PWN, Warszawa 1965
32. *Nondestructive Testing Handbook*. Vol. 4. *Electromagnetic Testing*. Published by the American Society for Nondestructive Testing, Ed. II, 1986
33. *Nondestructive Testing Handbook*. Vol. 6. *Magnetic Particle Testing*. ASTM, USA, 1989
34. J. Papis: *Modelowanie trajektorii zmian napięcia przetwornika wirowprądowego w skomputeryzowanym defektoskopie do kontroli rur*. Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji, 1991, z. 3–4, s. 695–706
35. J. Papis: *Problemy doboru częstotliwości pracy przetwornika wirowprądowego w układzie samoporównawczym do kontroli rur spawanych wykonanych z materiałów nieferromagnetycznych*. Materiały Sympozjum Metrologia'89 „Metrologia wielkości mechanicznych i kontrola jakości produkcji”, Warszawa 1989, s. 499–506
36. Z. Pawłowski: *Badania nieniszczące*. Poradnik. Wyd. SIMP, ODK SIMP, Warszawa, 1988
37. H. Pfisterer: *Kontrollkörper nach DIN 54141, Teil 2 für die Wirbelstromprüfung von Rohren*. Materialprüfung, 1985, nr 12, s. 375–381
38. K. Rohrbach, M. Schmidt: *Metals Handbook*, 10 ed., ASM International, 1990
39. A. Schlicht, A. Zhirabok: *The Integrated Expert System for Nondestructive Testing in Quality Control Systems*. Proceedings of the 13th World Conference on Non-Destructive Testing Sao Paulo. Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam—London—New York—Tokyo, 1992, s. 201–205
40. G.P. Singh, S. Udupa: *The Role of Digital Signal Processing in NDT*, NDT International 1986, nr 3, s. 125–132
41. W. Solnica, A. Lewińska-Romicka, S. Piskorski, J. Papis: *Defektoskopia wirowprądowa obiektów nieferromagnetycznych*. Sprawozdanie z projektu badawczego nr 8 0513 91 01 (niepublikowane)
42. W. Solnica, A. Lewińska-Romicka, S. Piskorski, J. Papis: *Konfiguracje przetworników przelotowych w defektoskopii wirowprądowej*. Metrologia i Systemy Pomiarowe. Kwartalnik Polskiej Akademii Nauk. Komitet Metrologii i Aparatury Pomiarowej. Tom II. Zeszyt 1/1995, s. 105–118
43. W. Solnica, A. Lewińska-Romicka, S. Piskorski, J. Papis: *Metody analizy sygnałów przetworników wirowprądowych*. Zeszyty Naukowe Politechniki Gliwickiej, Zeszyt 111. Technika wirowprądowa w badaniach nieniszczących, Gliwice 1993, s. 81–101
44. A. Stössel: *Contrôle par courant de Foucault de tube de gainage en acier ferritique*. Proceedings of the 3rd European Conference on Nondestructive Testing, Firenze 1984, t. 2, s. 100–109
45. A. Stryk: *Defektoskopia magnetyczno-proszkowa*. IMŻ im. St. Staszica, ODK Kierowniczych i Specjalistycznych MHiPM, Gliwice—Chorzów, 1982
46. W. Szachnowski: *Fizyczne podstawy metod badań nieniszczących stosowanych w przemyśle lotniczym*. (prace niepublikowane), Instytut Lotnictwa, 1970–1995
47. R.G. Taylor: *Non-Destructive Testing of Electron Beam Welded Joints*. AGARD 1986 (prace o ograniczonym zasięgu).
48. J. Turowski: *Obliczenia elektromagnetyczne elementów maszyn i urządzeń elektrycznych*. WNT, Warszawa 1982
49. J. Vroman: *The Influence of Magnetic Properties on Eddy-Current Testing of a Tube*. The British Journal of NDT, 1981, nr 6, s. 307–310
50. J. Yi, S. Lee: *Flaw Characterization in Eddy-Current Testing with Lift-off Variations of Test Coil*. Proceedings of the 11th World Conference on NDT, Las Vegas 1985, t. I, s. 115–121

---

A. LEWIŃSKA-ROMICKA, W. SZACHNOWSKI

**PROBLEMS OF THE NONDESTRUCTIVE MAGNETIC PARTICLE  
AND EDDY CURRENT TESTING OF WELDED JOINTS IN AIRCRAFT STRUCTURES**

**S u m m a r y**

Problems appeared in magnetic particle and eddy current nondestructive testing of high strength steel N18K9M5TPr electron beam welded joints in aircraft turbo-jet engines' compressors are described. Results of experimental research are presented. Procedure for the practical quality testing of joints has been developed upon presented considerations.

*Key words:* nondestructive testing, eddy current testing, magnetic particle testing, electron beam welded joints, aircraft compressors.



## SPIS TREŚCI

|                                                                                                                                                                   |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Od redakcji . . . . .                                                                                                                                             | 3  |
| Z. Krasieński, A. Majewski, T. Hinata: Zagadnienie brzegowe dla pól elektromagnetycznych w geometrii eliptycznej . . . . .                                        | 7  |
| A. Borys: Estymacja czasu opóźnienia . . . . .                                                                                                                    | 19 |
| J. Halawa, A. Trzmielak-Stanisławska: Uwagi dotyczące modelu uproszczonego za pomocą wielomianów Chebysheva . . . . .                                             | 39 |
| M. Gotfryd: Ogólna analiza pracy układu impulsowego do korekcji współczynnika mocy . . . . .                                                                      | 47 |
| A. Lewińska-Romicka, W. Szachnowski: Problemy nieniszczących badań metodami magnetyczną i prądów wirowych połączeń spawanych w konstrukcjach lotniczych . . . . . | 59 |

## CONTENTS

|                                                                                                                                                                  |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| From redaction . . . . .                                                                                                                                         | 3   |
| Z. Krasieński, A. Majewski, T. Hinata: Boundary value problems for the electromagnetic fields in elliptical geometry . . . . .                                   | 7   |
| A. Borys: Model-based time-delay estimation . . . . .                                                                                                            | 179 |
| J. Halawa, A. Trzmielak-Stanisławska: A note on determination of simplified models by means of the Chebyshev polynomials . . . . .                               | 39  |
| M. Gotfryd: General analysis of pulse circuit for power factor correction . . . . .                                                                              | 47  |
| A. Lewińska-Romicka, W. Szachnowski: Problems of the nondestructive magnetic particle and Eddy current testing of welded joints in aircraft structures . . . . . | 59  |

## INFORMACJE DLA AUTORÓW

Redakcja przyjmuje do publikowania prace oryginalne, przeglądowe i monograficzne wchodzące w zakres szeroko pojętej elektroniki. Ponieważ KWARTALNIK ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI jest czasopismem Komitetu Elektroniki i Telekomunikacji Polskiej Akademii Nauk, w związku z tym na jego łamach znajdują się prace naukowe dotyczące podstaw teoretycznych i zastosowań z zakresu elektroniki, telekomunikacji, mikroelektroniki, optoelektroniki, radiotechniki i elektroniki medycznej.

Artykuły powinny charakteryzować oryginalne ujęcie zagadnienia, własna klasyfikacja, krytyczna ocena (teorii lub metod), omówienie aktualnego stanu, lub postępu danej gałęzi techniki oraz omówienie perspektyw rozwojowych.

Artykuły publikowane w innych czasopismach nie mogą być kierowane do druku w Kwartalniku Elektroniki i Telekomunikacji w drugiej kolejności zgłoszenia.

Objętość artykułu nie powinna przekraczać 30 stron po około 1800 znaków na stronie.

**Wymagania podstawowe:** Artykuły należy nadsyłać na dyskietce lub w maszynopisie pisanym jednostronnie lub na wyraźnym czarno-białym wydruku komputerowym, w 2 egzemplarzach, w języku polskim lub angielskim wybranym przez autora. Tekst artykułu musi być poprzedzony tytułem pracy, imieniem i nazwiskiem Autora wraz z podaniem miejsca jego pracy. Wszystkie strony muszą mieć numerację ciągłą.

**Sposób pisania tekstu:** Tekst powinien być pisany bez używania wyróżnień, a w szczególności nie dopuszcza się spacjiowania, podkreślania pisania tekstu dużymi literami z wyjątkiem wyrazów, które umownie pisze się dużymi literami (np. FORTRAN). Proponowane wyróżnienia Autor może zaznaczyć w maszynopisie zwykłym ołówkiem za pomocą przyjętych znaków adjustacyjnych) np. podkreślenie linią przerywaną oznacza spacjiowanie (rozstrzelanie), podkreślenie linią ciągłą — pogrubienie, podkreślenie wężym — kursywa. Tekst powinien być napisany z podwójnym odstępem między wierszami, tytuły i podtytuły małymi literami. Marginesy z każdej strony powinny mieć około 35 mm. Przy podziale pracy na rozdziały i podrozdziały cyfrowe ich oznaczenia nie powinny być większe niż III stopnia (np. 4.1.1).

**Sposób pisania tablic:** Tablice powinny być pisane na oddzielnych stronach. Tytuły rubryk pionowych i poziomych powinny być napisane małymi literami z podwójnym odstępem między wierszami. Przypisy (notki) dotyczące tablic należy pisać bezpośrednio pod tablicą. Tablice należy numerować kolejno liczbami arabskimi, u góry każdej tablicy podać tytuł. Tablice umieścić na końcu maszynopisu. Przyjmowane są tablice algorytmów i programy na wydrukach komputerowych. W tym przypadku zachowany jest ich oryginalny układ.

**Sposób pisania wzorów matematycznych:** Rozmieszczenie znaków, cyfr, liter i odstępów powinno być zbliżone do rozmieszczenia elementów druku. Wskaźniki i wykładniki potęg powinny być napisane wyraźnie i być prawidłowo obniżone lub podwyższone w stosunku do linii wiersza podstawowego. Znaki nad literami i cyframi, całkami i in. symbolami (strzałki, linie, kropki, daszki) powinny być umieszczone dokładnie nad tymi elementami, do których się odnoszą. Numery wzorów cyframi arabskimi powinny być kolejne i umieszczone w nawiasach okrągłych z prawej strony. Nazwy jednostek, symbole literowe i graficzne powinny być zgodne z wytycznymi IEE (International Electrical Commission) oraz ISO (International Organization of Standardization).

**Powołania:** Powołania na publikacje powinny być umieszczone na ostatnich stronach tekstu pod tytułem „Bibliografia”, opatrzone numeracją kolejną bez nawiasów. Numeracja ta powinna być zgodna z odnośnikami w treści artykułu. Przykłady opisu publikacji:

- periodycznej: F.Valdoni: A new millimetre wave satellite. E.T.T. 1990, vol. 2, nr 5, p. 553
- nieperiodycznej: K. Andersen: A resource allocation framework. XVI International Symposium. Stockholm (Sweden), May 1991, paper A2.4
- książki: Y.P. Tvidis: Operation and modelling of the MOS transistors. Mc Graw-Hill, New York 1987, p. 141—148.

**Material ilustracyjny:** Rysunki powinny być wykonane wyraźnie, na papierze gładkim, lub milimetrowym w formacie nie mniejszym niż 9x12 cm. Mogą być także w postaci wydruku komputerowego. Fotografie lub diapozytywy przyjmowane są kolorowe lub czarno-białe w formacie nie przekraczającym 10 x 15 cm. Na marginesie każdego rysunku i na odwrocie fotografii powinno być napisane ołówkiem imię i nazwisko Autora oraz skrót tytułu artykułu, do którego są przeznaczone.

Spis podpisów pod rysunki i fotografie powinien być umieszczony na oddzielnej stronie.

**Streszczenie.** Do każdego artykułu musi być dołączone streszczenie z tytułem artykułu. Streszczenia (Summary) muszą być w języku polskim i angielskim. Streszczenie powinno wyjaśniać główny cel pracy, wskazywać korzyści i ograniczenia, możliwe zastosowania i zalecenia dla dalszego rozwoju danej gałęzi techniki. Objętość streszczenia nie powinna przekraczać 100 słów, a jego treść nie może być identyczna ze „Wstępem”, lub „Zakończeniem”. Pod streszczeniami powinny być podane słowa kluczowe.

Autorowi przysługuje bezpłatnie 20 odbitek artykułu. Dodatkowe egzemplarze odbitek, lub cały zeszyt Autor może zamówić u wydawcy na własny koszt.

Autora obowiązuje korekta autorska, którą powinien wykonać w ciągu 3 dni od daty otrzymania tekstu z Redakcji i zwrócić osobiście, lub listownie pod adresem Redakcji. Korekta powinna być naniesiona na przekazanych Autorowi szpaltach na marginesach ew. na osobnym arkuszu w przypadku uzupełnień tekstu większych niż dwa wiersze. W przypadku nie zwrócenia korekty w terminie, korektę przeprowadza Redakcja Techniczna Wydawcy.

Redakcja prosi Autorów o powiadomienie jej o zmianie miejsca pracy i adresu prywatnego.,

Uwaga: W 1996 r. Redakcja przyjmuje teksty gładkie na dyskietkach z plikiem w formacie ASCII. Rysunki w formacie TIF lub PCX. Wydruk tekstu traktowany jako podstawa powinien zawierać również wzory matematyczne.

# KWARTALNIK ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

## T. 42, Z. 1(1996)

Czasopismo jest przeznaczone dla specjalistów oraz studentów zajmujących się tematyką dotyczącą podstaw teoretycznych i zastosowań z zakresu elektroniki, telekomunikacji, mikroelektroniki, optoelektroniki, radiotechniki i elektroniki medycznej. Zeszyt nr 1/96 zawiera opis zmodyfikowanej metody dopasowania punktowego do analizy światłowodów eliptycznych. Kolejna praca zawiera omówienie modelu szacowania czasu opóźnienia na podstawie analizy sygnałów uzyskanych w pomiarach przeprowadzonych w dwufazowych przepływach.

Następny artykuł wskazuje możliwości stosowania stymulacji komputerowej dla skrócenia czasu obliczeń w urządzeniach kontrolnych.

Ponadto zamieszczony jest artykuł dotyczący analizy pracy układu impulsywnego do korekcji współczynnika mocy. Wprowadzono zależności na wartość skuteczną napięcia wyjściowego, jego przebieg czasowy, na amplitudę wolnozmiennych tętnień tego napięcia oraz międzyszczytową wartość tętnień wielkoczęstotliwościowych.

Na uwagę zasługuje praca zawierająca wyniki nieniszczących badań połączeń spawanych wiązką elektronów przy użyciu metody magnetycznej i metody prądów wirowych. Badania te dotyczyły spawów ze stali wysokowytrzymałej.

**Subscription for external subscribers:**

The promotional subscription price in 1995 is \$ 90 including postage for institutions. Subscriptions should be sent to the publisher, Polish Scientific Publishers PWN Ltd, Journal Division, Miodowa 10, 00-250 Warsaw, POLAND, fax (48) (22) 26 09 50, (48) (22) 26 71 63, with a copy by fast to Electronics and Telecommunications Quarterly 00-665 Warsaw, ul. Nowowiejska 15/19, p. 470. Subscription is occupied after showing a cheque or transfer documents. Our bank account is as follows: Bank account: PBK VIII O/Warszawa nr 370028-1052. At subscriber's request this journal will be air mailed at additional postage to 50% gross price to European countries and 65% overseas.

Subscription orders available through the local press distribution or through the Foreign Trade Enterprise ARS Polona, 00-068 Warszawa, Krakowskie Przedmieście 7, Poland.

Ruch S.A. fulfils foreign customers orders, starting from any issue in the calendar year: tel.: (48) (22) 620 120 39; fax (48) (22) 620 17 62.

# Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji

## WARUNKI PRENUMERATY

**Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są na okresy roczne**

Na teren kraju prenumeratę przyjmują jednostki kolportażowe RUCH S.A., urzędy pocztowe oddawcze właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora oraz doręczyciele w miejscowościach, gdzie dostęp do urzędu jest utrudniony, a także Zakład Kolportażu Wydawnictwa SIGMA-NOT

**Termin przyjmowania przez RUCH S.A. prenumeraty krajowej i na zagranicę oraz przez Poczta Polską (tylko prenumerata krajowa) są kwartalne:** do 20.XI na I kw., do 20.II na II kw., do 20.V na III kw., i do 20.VIII na IV kw.

Zakład Kolportażu Wydawnictwa SIGMA-NOT przyjmuje prenumeratę do 5 XII roku poprzedzającego

**Dostawa** zamówionej prasy następuje w sposób uzgodniony z zamawiającym, pod wskazanym adresem, w ramach opłaconej prenumeraty.

Adresy przedsiębiorstw kolportażowych i ich konta bankowe:

**Zakład Kolportażu Wydawnictwa SIGMA-NOT**, 00-716 Warszawa, ul. Bartycka 20, skr. poczt. 1004

Konto PBK III Oddział Warszawa nr 370015-1573-139-11

Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę jest dwukrotnie wyższa od ceny krajowej. Zlecający powinien podać dokładny adres odbiorcy. Dodatkowe informacje można otrzymać pod nr telefonu 49-30-86 lub 40-00-21 wew. 249, 295, 299.

**Ruch S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy**, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28  
Konto PBK XIII Oddział Warszawa nr 370044-16551

Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zleceniodawca.

Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej. Od osób lub instytucji, zamieszkających lub mieszczących się w miejscowościach, w których nie ma jednostek kolportażowych RUCH prenumeratę Kwartalnika można zamówić w Oddziale Warszawskim RUCH na konto: PBK XIII Oddział Warszawa, nr 370044-16551.

**Bieżące numery** można nabyć w **Księgarni Wydawnictwa Naukowego PWN**, ul. Miodowa 10, 00-251 Warszawa. Również można je nabyć, a także zamówić (przesyłka za zaliczeniem pocztowym) we **Wzorcowni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN**, Pałac Kultury i Nauki, 00-901 Warszawa w cenie podanej na okładce kwartalnika.

### W roku 1996

|                                   |                       |
|-----------------------------------|-----------------------|
| przewidywana cena 1 egz. wyniesie | 7,00 zł (70.000 zł)   |
| prenumerata roczna w kraju        | 28,00 zł (280.000 zł) |
| prenumerata roczna za granicę     | 90 \$ USA             |

POLSKA AKADEMIA NAUK  
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

Indeks 363189  
ISSN 0867-6747

**KWARTALNIK**  
**ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI**  
**ELECTRONICS AND**  
**TELECOMMUNICATIONS**  
**QUARTERLY**

TOM 42 — ZESZYT 2



WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN  
WARSZAWA 1996

**Kwartalnik jest wydawany z funduszu Komitetu Badań Naukowych  
i dofinansowany przez instytucje:**

- Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych
- Politechnika Gdańska, Wydział Elektryczny
- Politechnika Szczecińska, Instytut Elektroniki i Informatyki
- Instytut Łączności w Warszawie
- Spółka „Telekomunikacja Polska S.A.”

POLSKA AKADEMIA NAUK  
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

KWARTALNIK  
ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

ELECTRONICS AND  
TELECOMMUNICATIONS  
QUARTERLY

TOM 42 — ZESZYT 2



WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN  
WARSZAWA 1996

# RADA REDAKCYJNA

## *Przewodniczący*

† prof. dr inż. ADAM SMOLIŃSKI  
członek rzeczywisty PAN

## *Członkowie*

prof. dr hab. inż. DANIEL JÓZEF BEM — czł. koresp. PAN, prof. dr hab. inż. MICHAŁ BIAŁKO — czł. koresp. PAN, prof. dr hab. inż. STEFAN HAHN — czł. koresp. PAN, prof. dr inż. ANDRZEJ HAŁAS, prof. dr inż. ZDZISŁAW KACHLICKI, prof. dr hab. inż. BOHDAN MROZIEWICZ, prof. dr inż. JERZY OSIOWSKI, prof. dr inż. WITOLD ROSIŃSKI — czł. rzecz. PAN, prof. dr inż. STANISŁAW SŁAWIŃSKI, prof. dr hab. inż. STEFAN WĘGRZYN — czł. rzecz. PAN, prof. dr hab. inż. WIESŁAW WOLIŃSKI — czł. koresp. PAN, prof. dr inż. ANDRZEJ ZIELIŃSKI, prof. dr inż. MARIAN ZIENTALSKI

## REDAKCJA

### *Redaktor Naczelny*

prof. dr hab. inż. WIESŁAW WOLIŃSKI

### *Zastępca Redaktora Naczelnego*

doc. dr inż. KRYSTYN PLEWKO

### *Sekretarz Odpowiedzialny*

mgr KRYSTYNA LELAKOWSKA

## ADRES REDAKCJI

00-665 Warszawa, ul. Nowowiejska 15/19 Politechnika, pok. 470  
Instytut Telekomunikacji, Gmach im. prof. JANUSZA GROSZKOWSKIEGO

Dyżury Redakcji: środy i piątki, godz. 14—16

tel. 660 77 37; 25 29 18 + aut. sekr.

Telefony domowe: Redaktora Naczelnego: 12 17 65

Zast. Red. Naczelnego: 26 83 41

Sekretarza Odpowiedzialnego: 25 29 18

## WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN

Warszawa, ul. Miodowa 10

---

Ark. wyd. 13,5 Ark. druk. 11,25

Podpisano do druku w lipcu 1996 r.

---

Papier offsetowy kl. III 70 g. B-1

Druk ukończono w lipcu 1996 r.

---

Skład: Agnieszka Chmielewska Warszawa ul. Husarii 12

Druk i oprawa: Drukarnia Braci Grodzickich, Żabieniec, ul. Przelotowa 7

## Szanowni Autorzy

„KWARTALNIK ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI – ELECTRONICS AND TELECOMMUNICATIONS QUARTERLY” jest kontynuatorem tradycji powstałego 41 lat temu kwartalnika pt. „Rozprawy Elektrotechniczne”. Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji – czasopismo Komitetu Elektroniki i Telekomunikacji Polskiej Akademii Nauk – wydawany przez Wydawnictwo Naukowe PWN.

Kwartalnik jest czasopismem naukowym, na którego łamach są publikowane artykuły i komunikaty prezentujące wyniki oryginalnych oraz przeglądowych prac teoretycznych i technicznych związanych z szeroko rozumianymi dziedzinami współczesnej elektroniki i telekomunikacji.

Wszystkie publikowane w Kwartalniku artykuły są recenzowane przez wybitnych krajowych specjalistów, co zapewnia, że publikacje te są uznawane jako autorski dorobek naukowy. Opublikowanie w Kwartalniku wyników prac naukowych, badawczych i technicznych, zrealizowanych w ramach „GRANTÓW” Komitetu Badań Naukowych, spełnia więc jeden z wymogów stawianych tym pracom.

Czasopismo ukazuje się w ponad półmilionowym nakładzie i dociera do wszystkich zajmujących się elektroniką i telekomunikacją krajowych ośrodków naukowych oraz technicznych i do wielu instytucji zagranicznych. Jest ponadto prenumerowane przez liczne grono specjalistów.

Każdy z Autorów otrzymuje bezpłatnie 20 egzemplarzy nadbitek swojego artykułu, co ułatwia przesłanie tej publikacji do indywidualnie wybranych przez Autora osób i instytucji w kraju lub za granicą. Ułatwia to dodatkowo fakt, że w Kwartalniku mogą być publikowane artykuły również w języku angielskim.

Nadesłane do redakcji artykuły są opublikowane w terminie około pół roku w przypadku sprawnej współpracy Autora z redakcją. Wytyczne dla Autorów dotyczące formy publikacji są zamieszczane w zeszytach Kwartalnika. Można je także otrzymywać w siedzibie redakcji.

Artykuły można dostarczać osobiście lub pocztą pod adresem zamieszczonym w stopce redakcyjnej.

Redakcja



## Elektrotermiczne wielkosygnałowe modele wybranych elementów półprzewodnikowych

JANUSZ ZARĘBSKI

*Katedra Radioelektroniki Morskiej  
Wyższa Szkoła Morska w Gdyni*

*Otrzymano 1996.03.29*

*Autoryzowano do druku 1996.04.18*

W artykule omówiono skupione elektrotermiczne modele statyczne (stałoprądowe) i dynamiczne (do analizy stanów przejściowych) tranzystora bipolarnego oraz diody p-n. Przedstawiono dwa typy takich modeli. Pierwszy typ — globalne elektrotermiczne modele drugiego rodzaju o ciągłych i ciągle różniczkowalnych charakterystykach, sformułowano dla potrzeb makroskopowej analizy układów elektronicznych z wykorzystaniem zaawansowanych algorytmów rozwiązywania równań obwodu, np. [30]. Drugi typ — elektrotermiczne modele hybrydowe, sformułowano dla potrzeb analizy z wykorzystaniem programu SPICE. Znaczną część rozważań teoretycznych zilustrowano wynikami doświadczalnymi. Opracowane modele mogą być również wykorzystane przy badaniu właściwości elementów półprzewodnikowych, np. przy wyznaczaniu obszaru bezpiecznej pracy tranzystora bipolarnego.

*Słowa kluczowe:* modele elektrotermiczne elementów półprzewodnikowych, tranzystory bipolarne, diody p-n.

### 1. WPROWADZENIE

Typowe modele elementów półprzewodnikowych podawane zwykle w postaci graficznej (wykresy charakterystyk), analitycznej (równania nieliniowe) lub symbolicznej (schematy zastępcze), są izotermicznymi modelami elektrycznymi, słusznymi dla określonej temperatury otoczenia  $T_a$ .

W wyniku efektu samonagrzewania temperatura wnętrza  $T_j$  elementu różni się, często nawet znacznie, od temperatury otoczenia i zależy od wydzielonej w elemencie mocy elektrycznej, a więc jest ona funkcją prądów i napięć zaciskowych elementu. Model elementu, w którym uwzględnia się wpływ temperatury wnętrza na jego właściwości elektryczne nazywa się modelem elektrotermicznym.

Elektrotermiczne modele skupione mają postać zależności typu  $i(u, T_j)$  lub  $u(i, T_j)$ , przy czym zakłada się, że temperatura wnętrza  $T_j$  dotyczy pewnego fragmentu całego

elementu — jego części półprzewodnikowej, w którym to obszarze ma ona jednakową wartość. Temperatura wnętrza może być wyeliminowana z podanych zależności poprzez uwzględnienie skupionego modelu termicznego o postaci  $T_j(u, i)$ . Otrzymuje się wówczas tzw. elektrotermiczny model drugiego rodzaju w postaci zmodyfikowanych zależności prądowo-napięciowych, w których efekty termiczne są reprezentowane przez parametry modelu termicznego, np. przez rezystancję termiczną [8, 9, 13, 38].

Interpretacją graficzną modelu elektrotermicznego są nieizotermiczne charakterystyki prądowo-napięciowe  $i(u)$  lub napięciowo-prądowe  $u(i)$ , które mogą być charakterystykami niemonotonicznymi. Charakterystyki niemonotoniczne  $i(u)$  mogą być typu N i wówczas, w sensie matematycznym, zależność  $i(u)$  jest też funkcją  $i(u)$ . Jeżeli charakterystyki niemonotoniczne  $i(u)$  są typu S, to niemonotoniczność dotyczy zależności  $u(i)$ . Wtedy, w sensie matematycznym, można mówić jedynie o funkcji  $u(i)$ , ponieważ zależność  $i(u)$  nie jest funkcją.

W literaturze sporo miejsca poświęcono skupionym elektrotermicznym modelom stałoprądowym [5, 6, 8, 9, 10, 13, 15, 16, 18, 24, 25, 28, 32, 33, 36, 38] oraz wielkosygnałowym dynamicznym [8, 9, 11, 14, 15, 28, 38]. Przy formułowaniu wymienionych modeli przyjęto szereg uproszczeń, które ograniczają ich dokładność i zakres stosowności, bądź też stwarzają niedogodności przy ich wykorzystaniu, zwłaszcza w analizie komputerowej. Analiza taka, wykorzystująca elektrotermiczne modele skupione elementów półprzewodnikowych, może być nazwana elektrotermiczną analizą makroskopową, w odróżnieniu od analizy mikroskopowej, bazującej na modelach o stałych rozłożonych.

W niniejszej pracy przedstawiono udoskonalone elektrotermiczne wielkosygnałowe stałoprądowe i dynamiczne modele wybranych elementów półprzewodnikowych do analizy układów elektronicznych: diody p-n oraz tranzystora bipolarnego, pozbawionych w dużej mierze niektórych wad i niedogodności modeli literaturowych.

Sformułowano dwa rodzaje modeli elektrotermicznych dla potrzeb analizy makroskopowej. Postać tych modeli jest podporządkowana wymaganiom stawianym przez stosowane metody i algorytmy analizy. Opracowanymi modelami są:

- globalne stałoprądowe elektrotermiczne modele drugiego rodzaju (GETM2) słuszne dla dowolnego zakresu pracy elementu. Modele te, przedstawione jako zależności analityczne, są dane funkcjami ciągłymi i ciągle różniczkowalnymi dla dowolnych wartości prądów, napięć, i temperatury wnętrza, co pozwala na stosowanie takich modeli w analizie układów z wykorzystaniem zaawansowanych algorytmów rozwiązywania nieliniowych równań obwodu, np. [30],

- elektrotermiczne stałoprądowe modele hybrydowe (HETM2) dla potrzeb analizy z wykorzystaniem programu SPICE. Modele takie są tworzone poprzez dołączenie do modeli wbudowanych w programie SPICE, dodatkowych źródeł sterowanych, modelujących wpływ efektów termicznych na właściwości zaciskowe elementu. Opracowano różne typy modeli hybrydowych o różnym stopniu złożoności, dokładności, zakresie słuszności oraz uwzględniające różne zjawiska fizyczne. Oszacowano ich dokładność i przydatność.

Znaczna część artykułu dotyczy modeli stałoprądowych, bowiem modele dynamiczne, przedstawione w dalszej części pracy, stanowią rozszerzenie modeli stało-

prądowych o elementy inercji elektrycznej, tj. pojemności złączowe (barierowe) i dyfuzyjne.

W rozdziale 2 dokonano przeglądu wielkosygnałowych elektrotermicznych modeli elementów półprzewodnikowych. W rozdziałach 3 i 4 przedstawiono odpowiednio stałoprądowe modele GETM2 i HETM2. Dynamiczne wersje tych modeli, przydatne w elektrotermicznej analizie stanów przejściowych, zaproponowano w rozdziale 5.

## 2. SPOSÓB FORMUŁOWANIA, KLASYFIKACJA I PRZEGLĄD MODELI ELEKTROTERMICZNYCH

Zgodnie z definicją podaną w rozdziale 1, model elektrotermiczny elementu uwzględnia wpływ temperatury wnętrza na jego właściwości. W zależności od sposobu uwzględnienia temperatury rozróżnia się, zgodnie z nazewnictwem zaproponowanym w pracy [8], dwa typy skupionych modeli elektrotermicznych, a mianowicie: elektrotermiczne modele pierwszego rodzaju (ETM1) i elektrotermiczne modele drugiego rodzaju (ETM2).

W elektrotermicznych modelach pierwszego rodzaju uwzględniony jest wpływ temperatury wnętrza elementu na jego właściwości elektryczne, lecz nie jest uwzględniona zależność tej temperatury od wydzielonej w elemencie mocy. Przykładowo, stałoprądowe modele ETM1 zapewniające poprawne modelowanie tranzystora bipolarnego w szerokim zakresie temperatury przedstawiono m.in. w pracach [3, 20, 22].

Z kolei, w elektrotermicznych modelach drugiego rodzaju temperatura wnętrza zależy dodatkowo od wydzielonej w elemencie mocy czynnej. Modele takie stanowią rozszerzenie ETM1. Elektrotermicznym modelom drugiego rodzaju poświęcono w literaturze stosunkowo dużo miejsca, np. [8, 9, 10, 13, 15, 16, 32, 38], przy czym zasadnicze znaczenie mają tutaj modele stałoprądowe, które stanowią podstawę przy formułowaniu modeli wielkosygnałowych dynamicznych, tj. modeli do analizy stanów przejściowych.

Przy formułowaniu elektrotermicznego stałoprądowego modelu drugiego rodzaju elementu wykrzystuje się:

- a) ETM1,
- b) skupiony model termiczny określający zależność temperatury wnętrza elementu od wydzielonej mocy, który typowo ma następującą postać analityczną

$$T_j = T_a + K_t \cdot p, \quad (1)$$

gdzie  $T_j$  — temperatura wnętrza elementu,  $T_a$  — temperatura otoczenia,  $K_t$  — rezystancja termiczna,  $p$  — moc elektryczna wydzielona w elemencie.

- c) zależność mocy  $p$  wydzielonej w elemencie od prądów i napięć na zaciskach elementu.

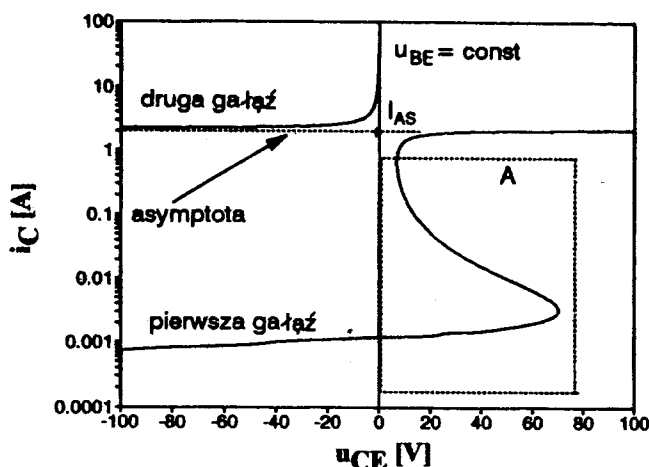
W znanych autorowi pracach poświęconych modelowaniu elementów półprzewodnikowych dla potrzeb makroskopowej analizy układów elektronicznych, rezystancja termiczna elementów jest traktowana jako wartość stała. W rzeczywistości jednak

zależy ona od wielu czynników, np. jest funkcją współrzędnych punktu pracy [21], co uwzględniono w elektrotermicznych modelach diody p-n i tranzystora bipolarnego, przedstawionych w dalszej części rozdziału. Ze względu na zakres słuszności modeli ETM2 oraz przeznaczenie można je podzielić na trzy kategorie, a mianowicie są to: modele lokalne (LETM2), modele hybrydowe (HETM2) oraz modele globalne (GETM2).

Formułowane w latach 80-tych elektrotermiczne modele drugiego rodzaju podstawowych elementów półprzewodnikowych (diody p-n, tranzystora bipolarnego, tranzystora MOS) były modelami lokalnymi (LETM2) słusznymi dla wybranego zakresu pracy elementu. Lokalny charakter modelu wynika z przyjęcia uproszczonej postaci ETM1, np. dla tranzystora bipolarnego jest to model Ebersa-Molla dla zakresu aktywnego normalnego. Przyjęcie szeregu uproszczeń na etapie formułowania modelu, np. pominięcie efektów drugorzędnych takich jak: powielanie lawinowe, prądy zerowe czy efekt Early'ego pozwalało, po wyeliminowaniu z zależności wyjściowych temperatury wnętrza, na przedstawienie LETM2 w postaci jawnych, zmodyfikowanych prądowo-napięciowych zależności algebraicznych, np. [8, 9, 13, 38]. LETM2 mogą być wykorzystywane do różnych celów, głównie do badania elektrotermicznych właściwości elementu, np. do poprawnego wyznaczania dozwolonego obszaru pracy. Mogą one też znaleźć zastosowanie przy pomiarze rezystancji termicznej tranzystora bipolarnego [7].

Modele LETM2 omawianych elementów były wykorzystywane również w analizie układów elektronicznych, np. [27, 38], przy czym możliwość przeprowadzenia takiej analizy wiązała się z koniecznością zapewnienia, aby w każdej iteracji punkt pracy elementu pozostawał w określonym zakresie pracy, np. dla tranzystora bipolarnego — w zakresie aktywnym normalnym. Niespełnienie tego warunku mogło prowadzić do poważnych trudności obliczeniowych. Powodem tego jest „lokalny” charakter modelu oraz dwugałęziowość nieizotermicznych charakterystyk wynikających z tego modelu. Przykładowo na rys. 1 przedstawiono typowy kształt takiej charakterystyki obliczonej na podstawie modelu LETM2 z pracy [38], dla tranzystora bipolarnego sterowanego napięciowo. Zaznaczony na rysunku obszar A odpowiada zakresowi aktywnemu normalnemu, w którym LETM2 stanowi dobre przybliżenie charakterystyk rzeczywistych (pierwsza gałąź dla  $u_{CE} > 0$ ). Istotnym mankamentem modelu jest fakt, że punktom leżącym na charakterystyce reprezentowanej przez pierwszą gałąź, w zakresie ujemnych wartości napięcia kolektor—emiter, odpowiadają dodatnie wartości prądu kolektora, co należałoby traktować jako nierealną w praktyce sytuację wydzielania w tranzystorze ujemnej mocy. Również wadą modelu jest to, że jego reprezentacją graficzną są faktycznie charakterystyki dwugałęziowe, przy czym druga gałąź jest gałęzią nierzeczywistą, wynikającą z przyjętych uproszczeń przy wyrowadzaniu dyskutowanego modelu. Położenie asymptoty (współrzędna  $I_{AS}$ ) zależy od wartości parametrów modelu. Dla tranzystora sterowanego prądowo, czy też dla diody p-n zamodelowanych za pomocą LETM2, otrzymuje się podobną jakościowo jak na rys. 1 charakterystykę prądowo-napięciową.

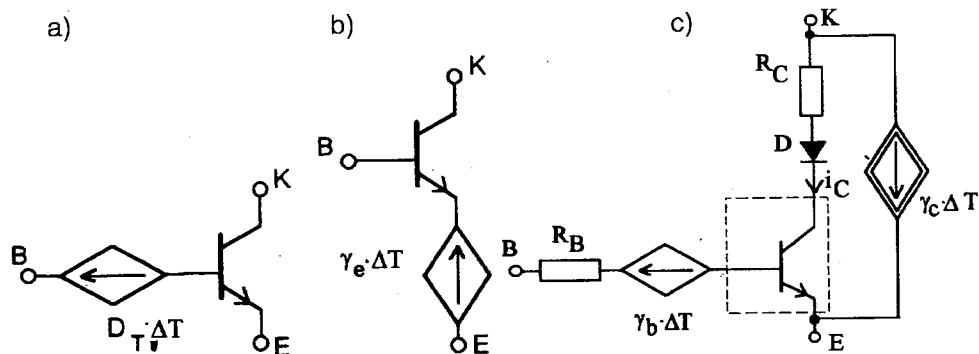
Do omawianej grupy lokalnych ETM2 należą również sformułowane w pracach [24, 25, 28] zależności algebraiczno-całkowe bez wyeliminowanej temperatury wnet-



Rys. 1. Dwugałęziowa charakterystyka  $i_C(u_{CE})$  tranzystora bipolarnego otrzymana z wykorzystaniem modelu LETM2 z pracy [38]

rza, służące głównie do badania efektów przebicia złączy i do analizy mechanizmów uszkodzeń.

Drugą kategorię modeli elektrotermicznych, według przyjętej klasyfikacji, stanowią elektrotermiczne modele hybrydowe (HETM2) sformułowane dla potrzeb elektrotermicznej analizy układów elektronicznych z wykorzystaniem programu SPICE [5, 6, 23, 31]. Podstawą wyjścia przy formułowaniu HETM2 są wbudowane w programie SPICE modele stałoprądowe, w których temperatura jest parametrem. Efekty termiczne w modelach HETM2 są modelowane za pomocą dołączonych do modelu izotermicznego odpowiednich generatorów sterowanych nadwyżką temperatury wnętrza ponad temperaturę otoczenia  $\Delta T$  (rys. 2).



Rys. 2. Modele hybrydowe tranzystora bipolarnego przedstawione w pracach [23] (a), [31] (b), [5, 6] (c)

W znanych autorowi pracach praktyczne realizacje modeli hybrydowych dotyczą tranzystora bipolarnego w zakresie aktywnym normalnym. Przedstawione w pracach

[23, 31] modele hybrydowe (rys. 3.2a, b) uwzględniają wpływ temperatury jedynie na napięcie baza – emiter tranzystora. W pracy [23] przyjęto stałą wartość parametru  $\gamma_e$  równą  $-2 \text{ mV/K}$ , natomiast zdefiniowany w pracy [31] współczynnik  $D_T$  uwzględnia zmiany szerokości przerwy energetycznej od temperatury.

Dokładniejsza postać hybrydowego modelu tranzystora bipolarnego zaproponowana w pracach [5, 6] wynika z rozwinięcia w szereg Taylora zależności funkcyjnych stanowiących model elementu w zakresie aktywnym normalnym, wokół temperatury otoczenia (rys. 2c). Współczynniki  $\gamma_b$  oraz  $\gamma_e$  modelują odpowiednio: efekt malenia napięcia baza – emiter przy wzroście temperatury oraz temperaturową zależność współczynnika wzmocnienia prądowego.

Opracowane ostatnio przez autora elektrotermiczne stałoprądowe modele diody p-n i tranzystora bipolarnego [32, 36], szluszne dla dowolnego zakresu pracy elementu, należą do trzeciej grupy rozważanych modeli. Są to tzw. globalne elektrotermiczne modele drugiego rodzaju (GETM2). Cechą charakterystyczną GETM2 jest to, że są one ciągle i ciągle różniczkowalne dla dowolnych wartości prądów, napięć i temperatury wnętrza elementu. Ta cecha modelu pozwala na pełne wykorzystanie GETM2 w analizie obwodów, z zastosowaniem nawet zaawansowanych algorytmów rozwiązywania równań obwodowych.

Przedstawione wersje stałoprądowych elektrotermicznych modeli drugiego rodzaju (tzn. LETM2, HETM2 oraz GETM2) stanowią podstawę przy formułowaniu elektrotermicznych wielkosygnałowych modeli dynamicznych. W pracach [8, 14, 38] przedstawiono ideę formułowania wielkosygnałowych dynamicznych modeli drugiego rodzaju stowarzyszonych z wybraną procedurą obliczania całki splotu, opisującej skupiony model termiczny elementu.

Zasadnicze znaczenie przy formułowaniu modeli stowarzyszonych ma postać zależności określającej wartość temperatury wnętrza w  $n$ -tym kroku obliczeń. Jak wynika z prac [9, 38], dla elementu indywidualnego, nie oddziałującego termicznie z innymi elementami, można napisać:

$$T_j^n = T_Z^{n-1} + K_Z \cdot p^n \quad (2)$$

gdzie  $T_Z^n$  oraz  $K_Z$  oznaczające tzw. temperaturę zastępczą oraz zastępczą rezystancję termiczną, są wielkościami znanymi w  $n$ -tym kroku obliczeń i mogą być traktowane jako parametry. W związku z tym równanie (2) jest ścisłym odpowiednikiem wzoru (1). Stosując wyrażenie (2) zamiast (1) oraz realizując identyczną procedurę postępowania jak przy formułowaniu elektrotermicznych modeli stałoprądowych, otrzymuje się w wyniku stowarzyszony elektrotermiczny model do analizy stanów przejściowych dla  $n$ -tego kroku o postaci identycznej jak stałoprądowa wersja ETM2. Zasadniczą wadą tej grupy modeli dynamicznych jest fakt, że oprócz lokalnego charakteru, modele te nie uwzględniają inercji elektrycznej w elementach półprzewodnikowych.

Omówione powyżej elektrotermiczne modele dotyczą elementów indywidualnych, nieoddziałujących termicznie z innymi elementami. Modele takie mogą być użyte również do opisu elementów pracujących w układach scalonych, jeśli uwzględni się

fakt, że w tej sytuacji na temperaturę wnętrza elementu dodatkowo wpływają moce wydzielane w innych elementach układu. Oznacza to, że nadwyżka temperatury wnętrza ponad temperaturę otoczenia  $i$ -tego elementu jest wyznaczona z modelu termicznego o postaci:

a) w przypadku wielkosygnałowym dynamicznym

$$\Delta T_i(t) = \sum_j Z_{ij}(t) \cdot p_j(t) = \int_0^t Z'(t-v) \cdot p(v) dv; \quad (3)$$

b) w przypadku stałoprądowym

$$\Delta T_i = \sum_j K_{tij} \cdot p_j. \quad (4)$$

W powyższych wzorach  $Z_{ij}(t)$  oraz  $K_{tij}$  dla  $i \neq j$  oznaczają odpowiednio wzajemną przejściową impedancję termiczną oraz wzajemną rezystancję termiczną między elementem  $i$ -tym oraz  $j$ -tym. Dla przypadku, gdy  $i=j$  wymienione parametry oznaczają odpowiednio własną przejściową impedancję termiczną oraz własną rezystancję termiczną  $i$ -tego elementu.

### 3. STAŁOPRĄDOWE GLOBALNE ELEKTROTERMICZNE MODELE DRUGIEGO RODZAJU ELEMENTÓW

Stosowanie w elektrotermicznej analizie obwodu modeli lokalnych, takich jak np. LETM2 napotyka na trudności, nawet jeżeli analiza odnosi się do zakrasu pracy elementu, w którym dany model zachowuje ważność. Powodem takiego stanu rzeczy jest fakt, że w procesie iteracyjnym, gdy obliczenia są realizowane z wykorzystaniem odpowiednich metod numerycznych, punkt pracy może znaleźć się poza obszarem ważności modelu, co na ogół prowadzi do nieakceptowalnych przez program wartości liczbowych (nadmiar) i w konsekwencji do przerywania obliczeń.

Nowoczesne algorytmy analizy obwodów, np. [1, 30], wymagają stosowania modeli elementów słusznych dla dowolnego zakresu ich pracy, których interpretacją graficzną są jednogłęziowe charakterystyki ciągłe i ciągle różniczkowalne, dla dowolnie wybranych wartości zmiennych.

Formułowanie modeli o powyższych właściwościach może napotkać na istotne trudności, jeżeli model ma uwzględniać specyficzne zjawiska fizyczne, takie, jak np. oddziaływania elektrotermiczne. Wygodnym rozwiązaniem, wykorzystywanym również przy formułowaniu modeli w dalszej części niniejszej pracy, okazało się przedstawienie modelu elektrotermicznego w postaci funkcji sklepanych (model odcinkami nieliniowy) [32]. Funkcja  $f$  w punkcie „sklejenia”  $\xi$  ma następujące właściwości:  $f(\xi^-) = f(\xi^+)$  oraz  $f'(\xi^-) = f'(\xi^+)$ .

Modelem dla potrzeb elektrotermicznej analizy obwodów spełniającym wymienione warunki jest przedstawiony w dalszej części pracy globalny elektrotermiczny model drugiego rodzaju (GETM2) diody p-n oraz tranzystora bipolarnego.

## 3.1. GLOBALNY ELEKTROTERMICZNY MODEL DIODY P-N

Przy formułowaniu modelu GETM2 diody p-n uwzględniono następujące składniki prądu:

a) prąd wynikający z charakterystyki idealnej diody z uwzględnieniem rezystancji szeregowej

$$i_D = i_s(T_j) \cdot \exp \left[ \frac{u - r_s(T_j) \cdot I_D}{U_T(T_j)} - 1 \right], \quad (5)$$

gdzie  $i_s$  — prąd nasycenia,  $r_s$  — rezystancja szeregową diody,  $U_T$  — potencjał termiczny,

b) prąd diody wynikający z powielania lawinowego

$$i_P = -i_Z \cdot \exp \left( \frac{U_Z(T_j) - u}{\lambda} \right) + I_Z \cdot \exp \left( \frac{U_Z(T_j)}{\lambda} \right). \quad (6)$$

Drugi składnik we wzorze (6) powoduje zerowanie prądu  $i_P$  dla  $u=0$ . Parametr  $\lambda$  modeluje „twardość” charakterystyki w zakresie przebiecia,  $U_Z$  to napięcie przebiecia,  $i_Z$  — parametr,

c) prąd generacyjno-rekombinacyjny

$$i_G = i_G \cdot \sqrt{d_0 + \left(1 - \frac{u}{U_B}\right)^2} \cdot \exp \left( -\frac{U_{g0}}{2hT_j} \right) \cdot \left[ \exp \left( \frac{u}{2 \cdot U_T} \right) - 1 \right], \quad (7)$$

gdzie  $U_B$  — napięcie kontaktowe złącza,  $h$  — iloraz stałej Boltzmanna i ładunku elementarnego,  $U_{g0}$  — napięcie odpowiadające szerokości przerwy energetycznej ekstrapolowanej do temperatury 0 K, równe 1.21 V dla krzemu, zaś  $d_0$ ,  $i_G$  — parametry modelu. W obliczeniach przyjmowano  $d_0 = 10^{-8}$ .

Uwzględniając we wzorach (5–7) następujące, znane termiczne zależności parametrów od temperatury:

$$U_T(T_j) = h \cdot T_j, \quad (8)$$

$$i_s(T_j) = I_0 \cdot (T_j/T_0)^2 \cdot \exp \left( -\frac{U_{g0}}{hT_j} \right), \quad (9)$$

$$r_s(T_j) = r_0 \cdot T_j/T_0, \quad (10)$$

$$U_Z(T_j) = U_{Z0} \cdot [1 + \alpha_t \cdot (T_j - T_0)], \quad (11)$$

gdzie  $i_0$ ,  $r_0$ ,  $\alpha_t$  — parametry modelu,  $T_0$  — temperatura odniesienia, a także przyjmując, że przez diodę płynie prąd „ $i$ ” będący sumą prądów  $i_D$ ,  $i_P$  oraz  $i_G$ , otrzymuje się model diody o postaci

$$\begin{aligned}
 i = & i_0 \cdot \left( \frac{T_j}{T_0} \right)^2 \exp \left( -\frac{U_{g0}}{hT_j} \right) \left[ \exp \left( \frac{u - r_0 \cdot i \cdot T_j / T_0}{hT_j} \right) - 1 \right] - \\
 & + i_z \cdot \exp \left[ \frac{U_{z0}}{\lambda} (1 + \alpha_t \cdot (T_j - T_0)) - \frac{u}{\lambda} \right] + \\
 & - i_z \cdot \exp \left[ \frac{U_{z0}}{\lambda} (1 + \alpha_t \cdot (T_j - T_0)) - \frac{u}{\lambda} \right] + \\
 & + I_G \cdot \sqrt{d_0 + \left( 1 - \frac{u}{U_B} \right)^2} \cdot \exp \left( -\frac{U_{g0}}{2hT_j} \right) \cdot \left[ \exp \left( \frac{u}{2hT_j} \right) - 1 \right].
 \end{aligned} \tag{12}$$

W zależności (10) przyjęto liniową zależność rezystancji szeregowej od temperatury, co, jak wynika z dokładniejszego modelu termicznej zależności rezystancji półprzewodnika domieszkowego od temperatury [19], jest pewnym uproszczeniem.

Z kolei w temperaturowej zależności prądu nasycenia we wzorze (9) przyjęto wartość wykładnika czynnika przedeksponencjalnego równą 2, co jest wartością leżącą pośrodku typowego, podawanego w literaturze, przedziału zmian tego parametru, wynoszącego od 1.5 do 2.5 [8]. Warto też zwrócić uwagę na fakt, że wpływ temperatury na prąd nasycenia uwidacznia się głównie poprzez silną zależność od temperatury czynnika opisanego funkcją eksponencjalną, natomiast wpływ potęgowego czynnika przedeksponencjalnego jest dużo mniejszy, a zatem dobór wartości wykładnika potęgi nie jest krytyczny.

W modelu (12) temperatura wnętrza wyznaczana jest z zależności

$$T_j = T_a + K_t(p, u) \cdot p \cdot \Gamma, \tag{13}$$

gdzie  $p$  oznacza wydzielaną w diodzie moc elektryczną,  $K_t(p, u)$  jest rezystancją termiczną diody, która jak pokazano np. w pracy [21], zależy od współrzędnych punktu pracy, natomiast  $\Gamma$  jest pewną funkcją ograniczającą od dołu zakres zmian wartości temperatury wnętrza diody, które mogą się pojawić w trakcie obliczeń numerycznych.

Postać zależności  $K_t(p, u)$  spełniająca wymagania ciągłości stawiane modelowi GETM2 została przedstawiona w rozdziale 3.3, natomiast znaczenie i postać funkcji  $\Gamma$  omówiono poniżej.

W rzeczywistych warunkach pracy elementu wartość temperatury jego wnętrza w warunkach wydzielania mocy jest zawsze większa od temperatury otoczenia, natomiast w przypadku gdy  $p=0$ , zachodzi warunek  $T_j = T_a$ . Jednakże w obliczeniach, z uwagi na niejawną postać zależności stanowiących GETM2, współrzędne punktu pracy (prąd, napięcie i temperatura wnętrza) można otrzymać jedynie metodami numerycznymi. W danej iteracji wartość prądu i napięcia mogą mieć przeciwne znaki, co w efekcie może prowadzić do wystąpienia ujemnych wartości mocy ( $p < 0$ ). Wówczas w modelu termicznym elementu, danym np. w postaci wzoru (1), dla określonej wartości rezystancji termicznej, temperatury otoczenia i mocy, temperatura wnętrza mogłaby osiągnąć wartość równą zero, co przy braku dodatkowych zabezpieczeń w programie obliczeniowym, mogłoby doprowadzić do nadmiaru i do przerwania obliczeń. Aby ustrzec się takiej sytuacji, w modelu termicznym (wzór 13) wprowadzono ciągłą i ciągle różniczkowalną funkcję  $\Gamma$  o postaci

$$\Gamma = [1 + \exp(-a_\gamma \cdot (K_t \cdot p + b_\gamma))]^{-1}, \quad (14)$$

w której wartości parametrów  $a_\gamma$ ,  $b_\gamma$  powinny być tak dobrane, żeby dla  $\Delta T \leq 0$  był spełniony warunek  $\Gamma \cdot |\Delta T| < T_a$ , natomiast dla  $\Delta T > 0$ , żeby zapewnić warunek  $\Gamma \cong 1$ . Parametrom  $a_\gamma$ ,  $b_\gamma$  można przyporządkować różne liczby spełniające wymienione warunki. Ostatecznie w zależności (14) przyjęto:  $a_\gamma = -5$  oraz  $b_\gamma = 1$ , co jak łatwo wykazać, zapewnia, że dla ujemnej wartości iloczynu rezystancji termicznej i mocy, spełniony jest warunek  $\Gamma \cdot \Delta T \geq -0.585$  K. Natomiast dla dodatnich wartości tego iloczynu, maksymalny błąd bezwzględny wyznaczenia nadwyżki temperatury wnętrza równy 0.278 K, występuje dla  $\Delta T = 1.28$  K i szybko maleje do zera przy wzroście  $\Delta T$ , np. dla  $\Delta T = 6.5$  K błąd ten wynosi już tylko 0.01 K.

### 3.2. GLOBALNY ELEKTROTERMICZNY MODEL TRANZYSTORA BIPOLARNEGO

Punktem wyjścia przy formułowaniu GETM2 tranzystora bipolarnego są następujące zależności [32]:

a) transportowa wersja modelu Ebersa – Molla (GETM1) — rys. 3, w której

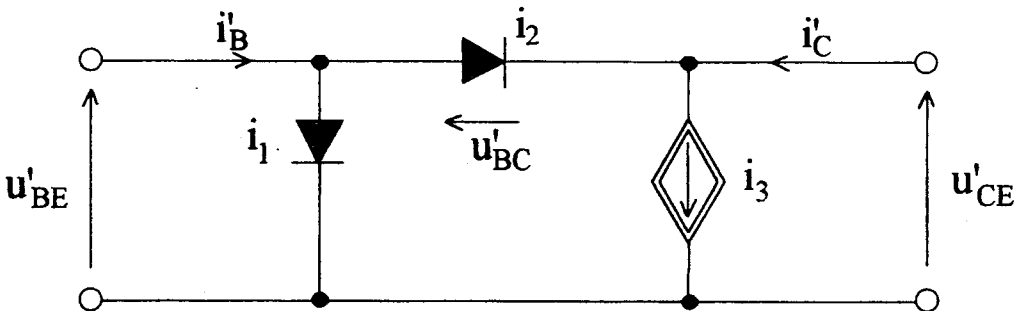
$$i_1(u'_{BE}, T_j) = \frac{I_s(T_j)}{\beta_F(T_j)} \cdot \left[ \exp \frac{u'_{BE}}{U_T(T_j)} - 1 \right], \quad (15)$$

$$i_2(u'_{BC}, T_j) = \frac{I_s(T_j)}{\beta_R(T_j)} \cdot \left[ \exp \frac{u'_{BC}}{U_T(T_j)} - 1 \right], \quad (16)$$

$$i_3(u'_{BE}, u'_{BC}, T_j) = I_s(T_j) \cdot \left[ \exp \frac{u'_{BE}}{U_T(T_j)} - \exp \frac{u'_{BC}}{U_T(T_j)} \right], \quad (17)$$

natomiast temperaturowe zależności  $I_s(T_j)$  oraz  $U_T(T_j)$  dane są wzorami (8) i (9). Przyjmuje się taką samą postać modelu współczynników wzmocnienia prądowego dla zakresu aktywnego normalnego —  $\beta_F$ , jak i dla zakresu aktywnego inwersyjnego —  $\beta_R$ , o postaci

$$\beta(T_j) = \frac{\beta_0 \cdot (1 + \hat{a} \cdot (T_j - T_0))}{1 + b \cdot (1 + c \cdot (T_j - T_0)) \sqrt{i_c^2 + d_1}} \cdot \left[ 1 - \sum_i \hat{\gamma}_i \cdot \exp(\hat{\alpha}_i \cdot \sqrt{i_c^2 + d_1}) \right] \quad (18)$$



Rys. 3. Obwodowa postać GETM1 tranzystora bipolarnego

gdzie suma wartości parametrów  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) jest równa jedności, natomiast  $\hat{a}$ ,  $b$ ,  $c$  oznaczają parametry modelu.

Model powyższy jest modyfikacją modelu przedstawionego w pracach [8, 38]. Uwzględnia on zależności  $\beta$  od temperatury wnętrza (współczynniki  $\hat{a}$ ,  $c$ ) oraz wpływ prądu kolektora  $i_C$  zarówno w zakresie wysokoprądowym (współczynnik  $b$ ) jak i niskoprądowym (współczynniki  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\gamma}$ ). Modelowanie zakresu niskoprądowego (wyrażenie w nawiasie kwadratowym) za pomocą sumy składników eksponencjalnych oddaje jakościowo dobrze kształt zależności  $\beta(i_C)$  w tym zakresie prądów już dla  $i = 2$ .

Chociaż współczynnik wzmocnienia prądowego w zakresie inwersyjnym ma mniejsze znaczenie, to z pewnych względów, wyjaśnionych w rozdziale 4, poświęconym modelom hybrydowym, konieczne jest operowanie modelami  $\beta_F$  i  $\beta_R$  o identycznej funkcyjnej postaci. Ponadto dla uproszczenia procesu modelowania przyjmuje się, że wartości parametrów modeli  $\beta_F$  i  $\beta_R$  są takie same, za wyjątkiem parametrów  $\beta_{OF}$  i  $\beta_{OR}$  modelujących zakres średnich prądów. We wzorze (18) powinien wystąpić moduł prądu kolektora, ponieważ model jest ważny dla zakresu normalnego i inwersyjnego. Jednakże z uwagi na formalne warunki jakie powinien spełniać model globalny, takie jak ciągłość i różniczkowalność, wprowadzono wyrażenie równoważne — pierwiastek z kwadratu prądu kolektora. Parametr  $d_1$  (przyjęto w obliczeniach  $d_1 = 10^{-6} \text{ A}^2$ ) gwarantuje różniczkowalność modelu dla dowolnej wartości prądu kolektora.

b) zależność mocy od prądów i napięć

$$p = i'_C \cdot u'_{CE} + i'_B \cdot u'_{BE}. \quad (19)$$

c) model termiczny o postaci danej wzorem (13), w którym moc  $p$  dana jest zależnością (19), natomiast rezystancja termiczna  $K_t(p, i'_C)$  zależy od mocy i od prądu kolektora. Dokładna postać zależności  $K_t(p, i'_C)$  spełniająca wymagania ciągłości stawiane modelowi GETM2 jest podana w rozdziale 3.3. Funkcja  $\Gamma$  pełni podobną rolę jak w przypadku termicznego modelu diody  $p-n$ , przy czym o ile dla diody wystarczające jest spełnienie warunku  $T_j > 0$ , o tyle w przypadku tranzystora, z uwagi na postać wzoru (18), warunki jakie muszą spełniać wartości parametrów  $a_\gamma$  i  $b_\gamma$  są silniejsze i wynikają ze spełnienia następujących nierówności

$$1 + \hat{a}(T_a - T_0 + K_t(p, i'_C) \cdot p \cdot \Gamma) > 0, \quad (20)$$

$$1 + c(T_a - T_0 + K_t(p, i'_C) \cdot p \cdot \Gamma) > 0. \quad (21)$$

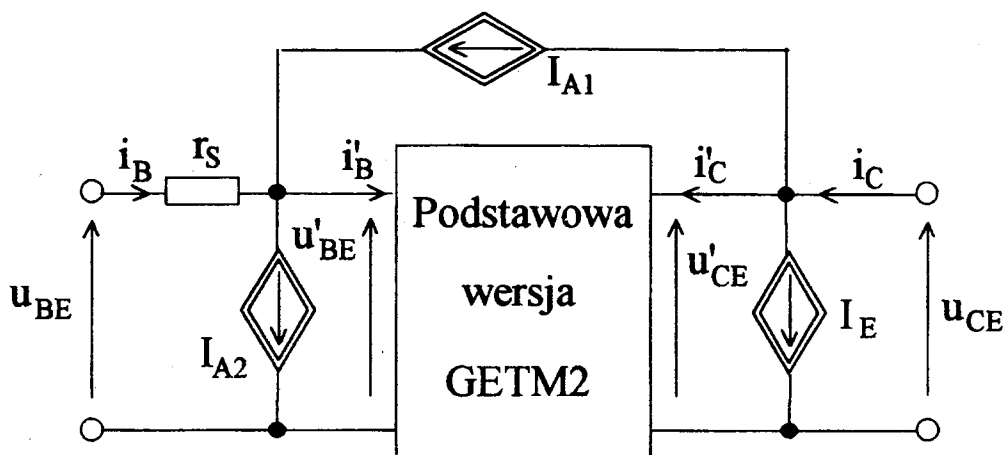
Przyjmując wartości parametrów  $a_\gamma$ ,  $b_\gamma$  takie same jak w przypadku diody oraz uwzględniając dodatkowo warunek  $T_0 \leq T_a$ , łatwo wykazać, że zależności (20, 21) są spełnione dla każdej wartości  $\hat{a}$  oraz  $c$  mniejszej od 1.709. Warunek ten jest spełniony w praktyce z nadmiarem, bowiem typowe wartości parametrów  $\hat{a}$  oraz  $c$  są dużo mniejsze od jedności.

Wynikowa postać modelu, po przyjęciu w charakterze zmiennych niezależnych napięcia  $u'_{BE}$  oraz  $u'_{CE} = u'_{BE} - u'_{BC}$ , dana jest równaniami:

$$i'_B - I_S(T_j) \cdot \left\{ \exp\left(\frac{u'_{BE}}{h \cdot T_j}\right) \left[ \frac{1}{\beta_F(T_j)} + \frac{1}{\beta_R(T_j)} \cdot \exp\left(-\frac{u'_{CE}}{h \cdot T_j}\right) \right] - \left( \frac{1}{\beta_F(T_j)} + \frac{1}{\beta_R(T_j)} \right) \right\} = 0$$

$$i'_C - I_S(T_j) \cdot \left\{ \exp\left(\frac{u'_{BE}}{h \cdot T_j}\right) \left[ 1 - \left( 1 + \frac{1}{\beta_R(T_j)} \right) \cdot \exp\left(-\frac{u'_{CE}}{h \cdot T_j}\right) \right] + \frac{1}{\beta_R(T_j)} \right\} = 0$$

$$T_j = T_a + K_t(p, i'_C) T_j (i'_C \cdot u'_{CE} + i'_B \cdot u'_{BE}) \cdot \Gamma. \quad (23)$$



Rys. 4. Rozszerzona wersja GETM2 tranzystora bipolarnego

Sformułowana powyżej podstawowa wersja GETM2 tranzystora bipolarnego może być znacznie ulepszona poprzez uwzględnienie w modelu dodatkowo rezystancji szeregowych, efektu Early'ego oraz powielania lawinowego. Model rozszerzony, uwzględniający wymienione efekty, przedstawiono na rysunku 4. Model GETM2 z rys. 4 jest opisany równaniami

$$i_B - i'_B - I_{A2} + I_{A1} = 0 \quad (24a)$$

$$i_C - i'_C - I_{A1} - I_E = 0, \quad (24b)$$

przy czym prądy  $i'_B$  oraz  $i'_C$  są prądami wewnętrznymi modelu w wersji rozszerzonej, wpływającymi do zacisków zewnętrznego modelu podstawowego, natomiast temperatura wnętrza dana jest zależnością

$$T_j = T_a + K_t(p, i_C) \cdot (i_C \cdot u_{CE} + i_B \cdot u_{BE}) \cdot \Gamma. \quad (25)$$

Źródło prądowe  $I_E$  modelujące efekt Early'ego, polegający na zmianie szerokości bazy od strony kolektora (zakres aktywny) i od strony emitera (zakres inwersyjny), opisane jest wzorem

$$I_E = i_1(u'_{BE}, T_j) \cdot \beta_F(T_j) \cdot \frac{u_{CE}}{V_{AN}} + i_2(u'_{BE}, u'_{CE}, T_j) \cdot \beta_R(T_j) \cdot \frac{u_{BE}}{V_{AI}}, \quad (26)$$

gdzie  $V_{AN}$  i  $V_{AI}$  oznaczają napięcie Early'ego tranzystora odpowiednio w zakresie normalnym i inwersyjnym.

Z kolei efekt powielania lawinowego w złączach kolektorowym i emiterowym, reprezentują źródła prądowe  $I_{A1}$  i  $I_{A2}$  o postaci

$$I_{A1} = i_C \cdot \exp\left(-\frac{U_{Z1}}{\lambda_1}\right) \cdot \left[\exp\left(-\frac{u'_{BE} - u'_{CE}}{\lambda_1}\right) - 1\right], \quad (27)$$

$$I_{A2} = (i_C - i_B) \cdot \exp\left(-\frac{U_{Z2}}{\lambda_2}\right) \cdot \left[\exp\left(-\frac{u'_{BE}}{\lambda_2}\right) - 1\right], \quad (28)$$

gdzie  $u'_{BE} = u_{BE} - r_s(T_j) \cdot i_B$ , przy czym rezystancja zastępcza bazy i emitera  $r_s(T_j)$  modelowana jest zależnością o postaci (10). Napięcia przebicia odpowiednio dla zakresu normalnego ( $U_{Z1}$ ) i inwersyjnego ( $U_{Z2}$ ) zależą od temperatury wnętrza elementu zgodnie ze wzorem (11), natomiast  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  są parametrami odpowiedzialnymi za „twardość” charakterystyk w zakresie przebicia.

Celem uniknięcia przepełnienia, dla odpowiednio dużych i dla odpowiednio małych wartości funkcji eksponencyjnej, zaproponowano liniową aproksymację charakterystyk wykładniczych w zależnościach opisujących GETM2. Funkcja aproksymująca  $\hat{g}(x)$  ma postać

$$\hat{g}(x) = \begin{cases} [1 + (x - x_0)] \cdot \exp(+x_0) & \text{dla } x \geq x_0 \\ \left[1 + (x + x_0) + \frac{1}{2}(x + x_0)^2\right] \cdot \exp(-x_0), & x < -x_0 \end{cases} \quad (29)$$

gdzie:  $x$  oznacza wykładnik funkcji eksponencjalnej, a  $x_0$  jest pewną wartością graniczną. W obliczeniach przyjmowano  $x_0 = 3 \cdot 10^3$ .

### 3.3. MODEL REZYSTANCJI TERMICZNEJ

Z pomiarów rezystancji termicznej diod p-n i tranzystorów bipolarnych zarówno indywidualnych, jak i elementów pracujących w układzie scalonym [21, 34, 35], wynika określony charakter zależności tego parametru od wydzielonej mocy, prądów i napięć zaciskowych. Celem uwzględnienia tej zależności w analizie, zaproponowano formalny model rezystancji termicznej, spełniający wymagania ciągłości i różniczkowalności funkcji, o postaci:

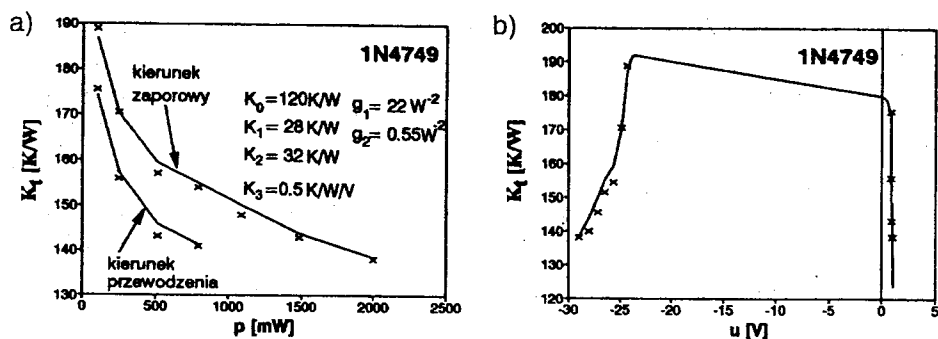
$$K_t = K + K_1 \cdot \exp(-g_1 \cdot p^2) + K_2 \cdot \exp(-g_2 \cdot p^2), \quad (30a)$$

gdzie

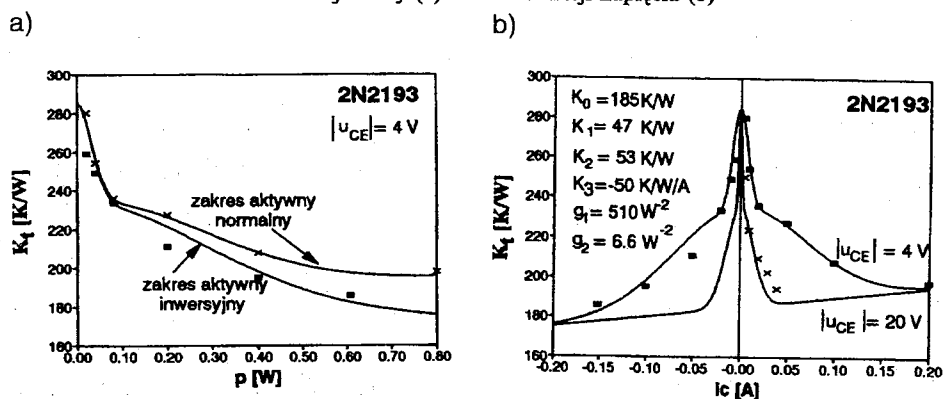
$$K = \begin{cases} K_0 - K_3 \cdot i_C & \text{dla tranzystora} \\ K_0 - K_3 \cdot u & \text{dla diody,} \end{cases} \quad (30b)$$

$$(30c)$$

natomiast  $K_0$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $g_1$ ,  $g_2$  — parametry modelu. Uzależnienie parametru  $K$  od prądu kolektora (dla tranzystora) oraz od napięcia (dla diody p-n) pozwala na



Rys. 5. Pomierzone i obliczone na podstawie wzoru (32) wartości rezystancji termicznej diody 1N4749 w funkcji mocy (a) oraz w funkcji napięcia (b)



Rys. 6. Pomierzone i obliczone na podstawie wzoru (32) wartości rezystancji termicznej tranzystora 2N2193 w funkcji mocy (a) i prądu kolektora (b)

uwzględnienie w modelu faktu, że dla tej samej wartości mocy rezystancja termiczna elementu jest różna w różnych zakresach jego pracy.

Na rys. 5 i 6 przedstawiono pomierzone oraz wyliczone na podstawie wzoru (30) zależności rezystancji termicznej diody Zenera 1N4749 i tranzystora bipolarnego 2N2193, zarówno w funkcji mocy (rys. 5a, rys. 6a) jak i w funkcji napięcia na diodzie (rys. 5b) oraz prądu kolektora tranzystora (rys. 6b). Wartości parametrów modelu, otrzymane w wyniku dopasowania zależności (30a, b, c) do wyników pomiarów, podano na rysunkach. Jak widać, model dany wzorem (30) zachowuje ciągłość dla dowolnej wartości mocy, napięcia diody oraz prądu kolektora i zapewnia dobrą zgodność z wynikami pomiarów. Charakterystyki  $K_t(I_c)$  z rys. 6b dla  $I_c < 0$  odpowiadają zakresowi aktywnemu inwersyjnemu tranzystora.

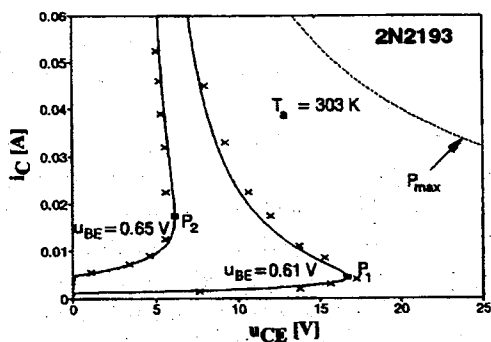
### 3.4. WERYFIKACJA DOŚWIADCZALNA MODELU GETM2

W celu weryfikacji zaproponowanych modeli GETM2 wykonano pomiary różnych typów diod p-n oraz tranzystorów małej i średniej mocy w szerokim

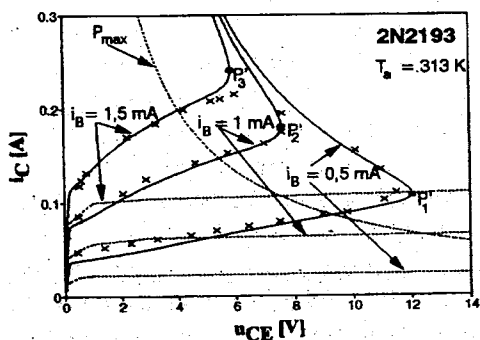
zakresie zmian prądów, napięć i temperatur otoczenia, w różnych zakresach pracy tych elementów. W charakterze przykładów przedstawiono otrzymane przez autora wyniki pomiarów (krzyżyki) i wyniki obliczeń (linia ciągła lub przerywana) tranzystora 2N2193 oraz diod: 1N4749 i BA159.

Wykorzystywane w obliczeniach wartości parametrów modelu GETM2 diody i tranzystora bipolarnego były wyznaczane zarówno na podstawie pomiarów, jak i poprzez dopasowanie odpowiednich zależności do wyników pomiarów, np. jak uprzednio zaznaczono, w formalnym modelu  $K_T$  (wzory 30a, b, c). W podobny sposób były wyznaczane wartości parametrów elektrotermicznych hybrydowych modeli diod i tranzystorów bipolarnych, sformułowanych w dalszej części pracy (rozdział 4).

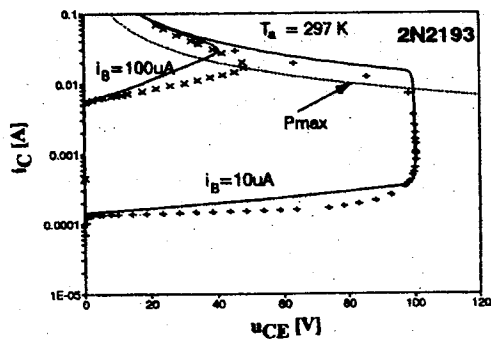
a)



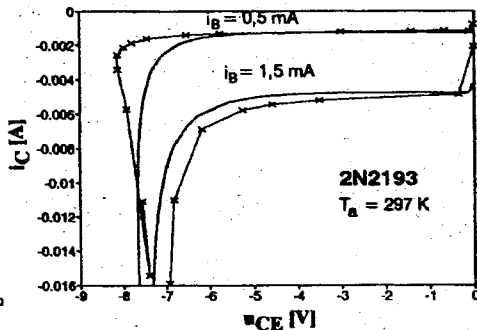
b)



c)



d)



Rys. 7. Nieizotermiczne statyczne charakterystyki wyjściowe tranzystora 2N2193

Na rys. 7 przedstawiono nieizotermiczne charakterystyki wyjściowe tranzystora 2N2193 w zakresie aktywnym normalnym odpowiednio dla przypadku  $u_{BE} = \text{const.}$  (rys. 7a) oraz dla  $i_B = \text{const.}$  (rys. 7 b, c). Na rys. 7b, na tle charakterystyk nieizotermicznych odpowiadających sterowaniu prądowemu, dla porównania, zaznaczono dodatkowo charakterystyki izotermiczne, tj. charakterystyki odpowiadające warunkowi  $T_j \cong T_a$ , otrzymane za pomocą charakterografu (linia przerywana).

Na omawianych charakterystykach nieizotermicznych współrzędne punktów P oraz P', w których rezystancja różniczkowa  $r_d = du_{CE}/di_C$  zmienia znak z dodatniego na ujemny, przechodząc przez zero, są określone przez efekty elektrotermiczne. Punkty, w których ta rezystancja zmienia znak, mogą być nazwane punktami przebiecia. Ponieważ na przebieg charakterystyk wpływają zarówno zjawiska elektryczne jak i termiczne, dlatego ten rodzaj przebiecia nazwano dalej przebieciem elektrotermicznym [28]. Współrzędne punktów przebiecia elektrotermicznego na rys. 7a leżą wewnątrz obszaru bezpiecznej pracy (SOA). W tych punktach nadwyżka temperatury ponad temperaturę otoczenia  $T_a$  wynosi od 16 K (punkt P<sub>1</sub>) do 21 K (punkt P<sub>2</sub>). Z kolei punkty P' na rys. 7b leżą poza SOA, a nadwyżka temperatur  $\Delta T$  w tych punktach wynosi od 240 K (punkt P'<sub>1</sub>) do 270 K (punkt P'<sub>3</sub>).

Warto podkreślić, że w przypadku izotermicznym przebiecie elektryczne nie prowadzi z reguły do zmiany znaku  $r_d$ . W tym przypadku, jako izotermiczne (elektryczne) napięcie przebiecia można przyjąć wartość napięcia wstecznego przy określonej wartości prądu wstecznego w zakresie przebiecia. Pomiary izotermiczne napięcia przebiecia wymagają zapewnienia znikomo małej nadwyżki temperatury wnętrza elementu ponad temperaturę otoczenia. W przybliżeniu wymagane warunki termiczne uzyskuje się wykonując pomiary omawianego parametru za pomocą charakterografu. Zmierzone w ten sposób izotermiczne napięcie przebiecia  $U_Z$  ( $T_a = 297$  K) rozważanego tranzystora przy  $i_B = 10 \mu A$  wynosi 105 V.

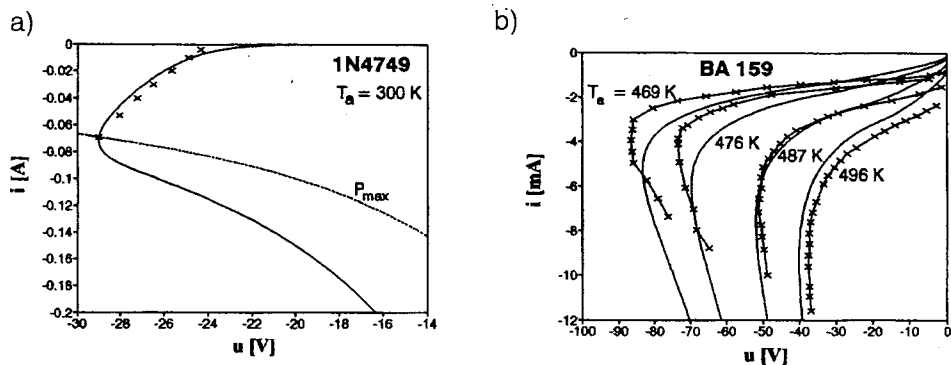
Jak widać z rys. 7c, na charakterystyce odpowiadającej prądowi bazy  $i_B = 10 \mu A$ , następuje gwałtowny wzrost prądu kolektora przy napięciu około 100 V, a więc przy wartości bliskiej wartości napięcia przebiecia izotermicznego. W początkowej fazie dla małego prądu kolektora, rzędu ułamka miliampera, nadwyżka temperatury wnętrza  $\Delta T$  wynosi zaledwie kilka kelwinów. Dalszy wzrost prądu, wywołany powielaniem lawinowym, prowadzi do szybkiego wzrostu  $\Delta T$  i przy prądzie kolektora około 20 mA (wówczas  $\Delta T \cong 250$  K) występuje zmiana znaku rezystancji różniczkowej, która, jak uprzednio zaznaczono, może być interpretowana jako przebiecie elektrotermiczne.

Na rys. 7d przedstawiono charakterystyki wyjściowe rozważanego tranzystora w zakresie aktywnym inwersyjnym. Nieco gorsza niż w zakresie aktywnym normalnym dokładność między wynikami obliczeń i pomiarów może wynikać z gorszej dokładności modelu rezystancji termicznej w zakresie aktywnym inwersyjnym. Wykorzystywane w obliczeniach wartości parametrów modelu tranzystora były następujące:  $\beta_{0F} = 140.3$ ,  $\beta_{0R} = 5.5$ ,  $\hat{a} = 0.015$  1/K,  $c = 0.01$  1/K,  $b = 2.995$  1/A,  $I_0 = 1.15 \cdot 10^7$  A,  $T_0 = 197$  K,  $r_0 = 102 \Omega$ ,  $\lambda_1 = 0.8$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $U_{Z01} = 105$  V,  $U_{Z02} = 8.5$  V,  $\alpha_{t1} = \alpha_{t2} = 2 \cdot 10^{-5}$  K<sup>-1</sup>,  $V_{AI} = 50$  V,  $V_{AN} = 170$  V,  $K_0 = 185$  K/W,  $K_1 = 47$  K/W,  $K_2 = 53$  K/W,  $K_3 = -50$  K/(W·A),  $g_1 = 510$  W<sup>-2</sup>,  $g_2 = 6.6$  W<sup>-2</sup>,  $\hat{\gamma}_1 = 0.6$ ,  $\hat{\gamma}_2 = 0.4$ ,  $\alpha_1 = -3$  A<sup>-1</sup>,  $\hat{\alpha}_2 = -1000$  A<sup>-1</sup>.

Z kolei na rys. 8a przedstawiono wyniki pomiarów i obliczeń charakterystyki prądowo-napięciowej  $i(u)$  diody 1N4749 w zakresie zaporowym.

Wartości parametrów modelu diody były następujące:  $T_0 = 300$  K,  $r_0 = 0.3 \Omega$ ,  $I_0 = 10^5$  A,  $\lambda = 1.2$ ,  $I_G = 1000$  A,  $U_B = 0.5$  V,  $U_{Z0} = -21.5$  V,  $I_Z = -1$  mA,  $\alpha_t = 5 \cdot 10^{-4}$  K<sup>-1</sup>,  $K_0 = 120$  K/W,  $K_1 = 28$  K/W,  $K_2 = 32$  K/W,  $K_3 = 0.5$  K/(W·V),  $g_1 = 22$  W<sup>-2</sup>,  $g_2 = 0.55$  W<sup>-2</sup>.

Na rys. 8b przedstawiono wyniki pomiarów i obliczeń w zakresie zaporowym diody BA159 dla różnych temperatur otoczenia [29]. Zmierzona charakterografem



Rys. 8. Nieizotermiczne charakterystyki statyczne diody 1N4749 (a) oraz diody BA159 dla różnych temperatur otoczenia (b)

izotermiczna wartość napięcia przebicia w temperaturze otoczenia równej 300 K wynosi 1500 V. Jak widać, praca w wysokich temperaturach otoczenia powoduje gwałtowny spadek wartości napięcia przebicia. Prezentowany przykład potwierdza uniwersalność GETM2 diody – również dla wysokich temperatur otoczenia. W obliczeniach wartości parametrów modelu diody były następujące:

$$T_0 = 303 \text{ K}, I_0 = 6 \cdot 10^7 \text{ A}, U_{Z0} = -1500 \text{ V}, \alpha_i = 10^{-6} \text{ K}^{-1}, U_B = 0.5 \text{ V}, \\ \lambda = 25, I_G = 520 \text{ A}, I_Z = -1 \text{ mA}, r_0 = 0.4 \Omega, K_0 = 55 \text{ K/W}, K_1 = 110 \text{ K/W}, \\ K_2 = 20 \text{ K/W}, K_3 = 0.04 \text{ K(W} \cdot \text{V)}, g_1 = 500 \text{ W}^{-2}, g_2 = 0.5 \text{ W}^{-2}.$$

Z przedstawionych na rysunkach 7 i 8 nieizotermicznych charakterystyk statycznych tranzystora 2N2193 oraz diod 1N4749 i BA159 widać dobrą zgodność wyników pomiarów i symulacji z wykorzystaniem modeli GETM2. Z kolei powszechnie używane charakterystyki izotermiczne, otrzymywane za pomocą charakterografu (rys. 7c), różnią się od charakterystyk nieizotermicznych zarówno ilościowo, jak i jakościowo. Nieizotermiczne charakterystyki wyjściowe tranzystora otrzymane z modelu GETM2 przy określonych warunkach polaryzacji tranzystora ( $u_{BE} = \text{const.}$ ), potwierdzają znane wcześniej właściwości tego elementu, np. [8, 38], iż przebicie elektrotermiczne rozumiane jako zmiana znaku  $r_d$ , może wystąpić przy małej nadwyżce temperatury wnętrza ponad temperaturę otoczenia, wynoszącej nawet kilkanaście kelwinów, a więc w temperaturze znacznie mniejszej od typowej wartości temperatury dopuszczalnej.

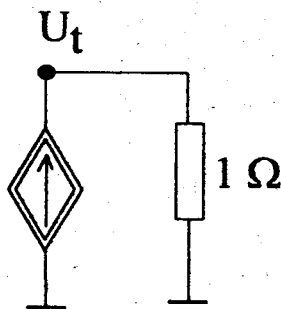
#### 4. STAŁOPRĄDOWE ELEKTROTERMICZNE MODELE HYBRYDOWE

Jak zaznaczono we wstępie, znane z literatury elektrotermiczne modele hybrydowe (HETM2) są tworzone poprzez dołączenie do izotermicznych modeli elementów wbudowanych w programie SPICE odpowiednich źródeł sterowanych, modelujących wpływ efektów termicznych na właściwości zaciskowe elementu.

Przedstawione w pracach [5, 6, 11, 23, 31] elektrotermiczne modele hybrydowe tranzystora biplanarnego posiadają pewne mankamenty, które mogą powodować trudności przy wykorzystaniu tych modeli w analizie, a mianowicie:

- modele dotyczą tranzystora bipolarnego jedynie w zakresie aktywnym normalnym. Przykładowo w modelu przedstawionym na rys. 2c, w zakresie inwersyjnym element próbkujący jakim jest dioda D ogranicza prąd kolektora (emitera) do wartości równej izotermicznemu prądowi nasycenia diody, co uniemożliwia prawidłowe modelowanie w tym zakresie pracy tranzystora,
- w modelu z pracy [5] parametry  $\gamma_b$  oraz  $\gamma_c$  (rys. 2c) są wyznaczane dla temperatury otoczenia  $T_a$ , natomiast bliższym rzeczywistości wydaje się określenie tych parametrów w temperaturze  $T_j$ ,
- przy sterowaniu prądowym napięcie baza—emiter  $u_{BE}$  może przyjmować wartości ujemne, co dla zakresu aktywnego normalnego nie ma miejsca,
- w rozważanych modelach nie uwzględnia się wielu istotnych zjawisk fizycznych, jak np. powielanie lawinowe. Nie uwzględnia się również zależności współczynnika wzmocnienia prądowego od prądu kolektora,
- w analizie dynamicznej z wykorzystaniem modeli hybrydowych nie uwzględnia się inercji elektrycznej [11] lub też sposób uwzględnienia tej inercji może budzić wątpliwości [23].

W dalszej części rozdziału zaproponowano udoskonalone wersje hybrydowych elektrotermicznych modeli diody p—n i tranzystora bipolarnego, pozbawione wymienionych wad modeli literaturowych. Przedstawiono szczegółowo hybrydowe elektrotermiczne modele pierwszego rodzaju (HETM1). Modele HETM2, zgodnie z ogólną zasadą tworzenia elektrotermicznych modeli drugiego rodzaju, stanowią połączenie HETM1 oraz termicznego modelu elementu, który w przypadku modeli hybrydowych realizowany jest w postaci obwodowej, przedstawionej na rys. 9. Wydajność źródła prądowego opisana jest wzorem (13) — dla diody p—n oraz wzorem (25) — dla tranzystora bipolarnego, natomiast wartość napięcia  $U_t$  jest równa wartości temperatury wnętrza elementu.



Rys. 9. Obwodowa postać termicznego modelu elementu

#### 4.1. ELEKTROTERMICZNE HYBRYDOWE MODELE TRANZYSTORA BIPOLARNEGO

Punktem wyjścia przy formułowaniu elektrotermicznego modelu hybrydowego tranzystora bipolarnego są zależności (22a) i (22b). Wybierając w charakterze zmiennych zależnych prąd kolektora  $i_c$  oraz napięcie wejściowe ( $u_{BE}$  lub  $u_{BC}$ ) można napisać:

— dla zakresu aktywnego normalnego

$$i_C = \beta_F(T_j) \cdot i_B + I_S(T_j) \cdot \left(1 + \frac{\beta_F(T_j) + 1}{\beta_R(T_j)}\right), \quad (31a)$$

$$u_{BE} = U_T \cdot \ln \left( \frac{i_B \cdot \beta_F(T_j)}{I_S(T_j)} + 1 + \frac{\beta_F(T_j)}{\beta_R(T_j)} \right), \quad (31b)$$

— oraz dla zakresu aktywnego inwersyjnego

$$i_C = - \left( \beta_R(T_j) + 1 \right) \cdot i_B - I_S(T_j) \cdot \left( \frac{1}{\beta_R(T_j)} + \frac{\beta_R(T_j) + 1}{\beta_F(T_j)} \right), \quad (32a)$$

$$u_{BC} = U_T \cdot \ln \left( \frac{i_B \cdot \beta_R(T_j)}{I_S(T_j)} + 1 + \frac{\beta_R(T_j)}{\beta_F(T_j)} \right). \quad (32b)$$

Przyjęto, że parametry opisujące współczynniki  $\beta_F(T_j)$  oraz  $\beta_R(T_j)$  — wzór (18), za wyjątkiem parametrów  $\beta_{OF}$  i  $\beta_{OR}$ , mają identyczne wartości. Wówczas słuszna jest następująca zależność

$$\frac{\beta_F(T_j)}{\beta_{OF}} = \frac{\beta_R(T_j)}{\beta_{OR}} = f(i_C, T_j), \quad (33)$$

gdzie postać funkcji  $f(i_C, T_j)$  wynika bezpośrednio z wzoru (18).

Łatwo zauważyć, że iloczyny  $\beta_F(T_j) \cdot i_B$  (wzory 31a i 31b) oraz  $\beta_R(T_j) \cdot i_B$  (wzory 32a i 32b) można przedstawić w identyczny sposób jako iloczyn prądu kolektora  $i_{CO}$  (lub modułu tego prądu), oznaczającego prąd zaciskowy modelu tranzystora wbudowanego w programie SPICE oraz funkcji  $f(i_C, T_j)$  danej wzorem (33). Wówczas, przy pewnych założeniach podanych w dalszej części rozdziału, zależności (31a—32b) można przekształcić do zunifikowanej postaci

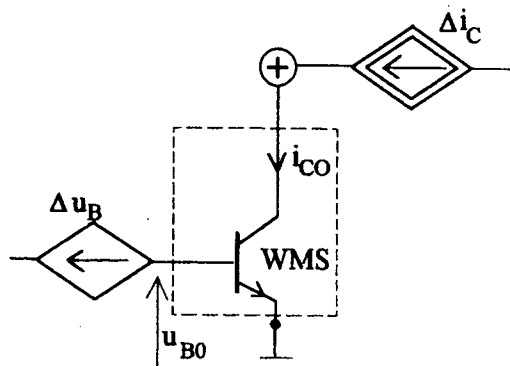
$$i_C = i_{CO} + \Delta i_C, \quad (34a)$$

$$i_B = i_{BO} + \Delta i_B, \quad (34b)$$

słusznej jednocześnie dla zakresu aktywnego normalnego oraz inwersyjnego. Zależności (34a, b) stanowią ogólną postać elektrotermicznego hybrydowego modelu tranzystora bipolarnego.

W powyższych wzorach  $u_{BO}$  oznacza napięcie wejściowe (konfiguracja WE) dla zakresu aktywnego normalnego — napięcie  $u_{BE}$  lub dla zakresu aktywnego inwersyjnego — napięcie  $u_{BC}$ , modelowane za pomocą wbudowanego modelu w programie SPICE. Z kolei składniki  $\Delta i_C$  oraz  $\Delta u_B$  modelują zmiany prądu i napięcia wejściowego wywołane efektami termicznymi oraz innymi efektami niemodelowanymi w programie SPICE, jak np. zależność  $\beta(i_C)$ . W praktycznej realizacji modelu hybrydowego składniki  $\Delta i_C$  oraz  $\Delta u_B$  mogą być reprezentowane przez odpowiednie źródła sterowane, dołączone do modelu tranzystora bipolarnego wbudowanego w programie SPICE

(WMS), co zilustrowano na rys. 10. Chociaż model elektrotermiczny dany wzorami (31a–32b) dotyczy formalnie zakresu aktywnego normalnego i aktywnego inwersyjnego, to jak wykazały symulacje, jest on słuszny dla napięć  $|u_{CE}|$  większych już od około 100 mV. W zakresie odcięcia i w nasyceniu dla napięć  $|u_{CE}|$  mniejszych od 100 mV, efekty termiczne są praktycznie do pominięcia. A zatem z tych zależności można korzystać dla dowolnego zakresu pracy tranzystora.



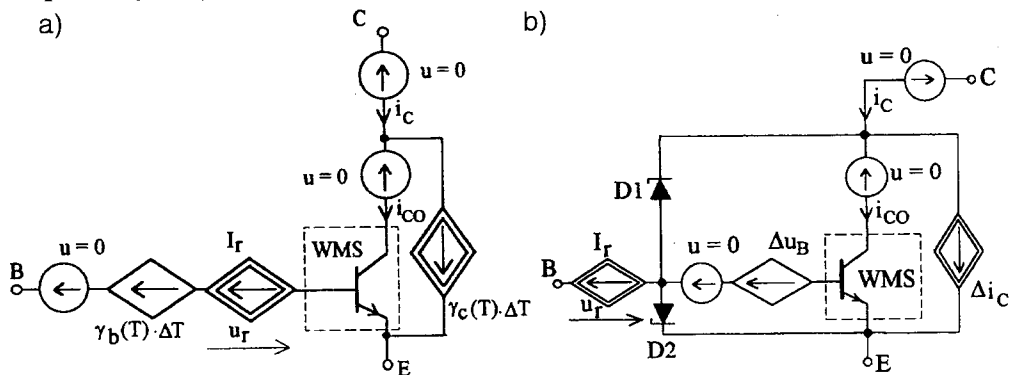
Rys. 10. Ogólna struktura elektrotermicznego hybrydowego modelu tranzystora bipolarnego

Opracowano dwa typy elektrotermicznych hybrydowych modeli tranzystora bipolarnego, różniące się ideą formułowania postaci modelu, złożonością zależności stanowiących model, dokładnością oraz zakresem stosowności. Sformułowanie tych modeli w jednolitej postaci, dla dowolnego zakresu pracy tranzystora, wymagało przyjęcia pewnych założeń upraszczających. Przyjęto, że  $i_B \gg I_S(T_a)$  oraz  $\beta_F \gg \beta_R$  i  $\beta_F \gg 1$ , a także pominięto w modelu  $\beta$  (wzór 18) efekt niskoprądowy (parametr  $\hat{\gamma} = 0$ ).

Pierwszy z proponowanych modeli, nazwany w pracy zlinearyzowanym modelem hybrydowym (HL), wykorzystuje ideę zaproponowaną w pracy [5], a polegającą na rozwinięciu charakterystyk statycznych tranzystora w szereg Taylora jednej zmiennej (temperatury) i obciążeniu szeregu po wyrazie liniowym. Wówczas pierwszy wyraz rozwinięcia (składowa stała) reprezentuje wbudowany model tranzystora w programie SPICE ( $i_{CO}$ ,  $u_{B0}$  w zależnościach 34 a, b), natomiast wyraz liniowy reprezentuje przyrosty napięcia wejściowego i prądu kolektora ( $\Delta i_C$ ,  $\Delta u_B$  w zależnościach 34a, b).

W niniejszej pracy zaproponowano dwa warianty modelu zlinearyzowanego. Pierwszy wariant modelu wynika z rozwinięcia zależności (31a–32b) wokół temperatury wnętrza — modelu  $HL(T_j)$ , drugi zaś, z rozwinięcia tych zależności wokół temperatury otoczenia — modelu  $HL(T_a)$ . Przy formułowaniu modelu  $HL(T_a)$  przyjmuje się ponadto pewne dodatkowe założenia, pozwalające na przedstawienie tego modelu w znacznie prostszej postaci, jednakże słusznej w węższym zakresie zmian współrzędnych punktu pracy tranzystora i temperatury otoczenia. Realizacja modeli zlinearyzowanych wymaga przyjęcia niezależności współczynnika wzmocnienia prądowego  $\beta$  od prądu kolektora, tzn. przyjmuje się, że w zależności (18) parametr  $b = 0$ . W rozważanym przypadku modeli zlinearyzowanych, składniki  $\Delta i_C$ ,  $\Delta u_B$  we wzorach

(34a, b) oznaczają iloczyny odpowiednio temperaturowych współczynników zmian prądu kolektora  $\gamma_c$  i napięcia baza-emiter/baza-kolektor  $\gamma_b$  oraz nadwyżki temperatury wnętrza ponad temperaturę otoczenia  $\Delta T$ .



Rys. 11. Obwodowa postać elektrotermicznego hybrydowego modelu tranzystora bipolarnego: model zlinearyzowany (a), model heurystyczny (b)

Postać obwodową modelu HL przedstawiono na rys. 11a. Linia przerywaną zaznaczono model tranzystora wbudowany w programie SPICE (WMS) służący dla zadanej temperatury otoczenia. Niezależne źródła napięciowe o zerowej wydajności służą do określania wartości odpowiednich prądów występujących w opisie źródeł sterowanych. Wybór źródła o wydajności  $u=0$ , zamiast np. rezystora liniowego, pozwala na dokładniejsze wyznaczenie wartości prądu, a poza tym nie występuje dodatkowy niepożądany spadek napięcia, co ma miejsce w przypadku wykorzystania rezystora.

W modelach zlinearyzowanych uwzględniono też rezystancję zastępczą bazy i emitera, zależną od temperatury, modelowaną za pomocą dołączonego do zacisku bazy sterowanego źródła prądowego  $I_r$  o wydajności  $u_r/r_s(T_j)$ , gdzie wielkość  $r_s(T_j)$  jest dana wzorem (10).

Po wyznaczeniu odpowiednich pochodnych z zależności (31a – 32b) i po prostych przekształceniach otrzymuje się dla modelu HL( $T_j$ ) wzory opisujące współczynniki  $\gamma_b$  oraz  $\gamma_c$  (rys. 11a) postaci:

$$\gamma_c(T_j) = \frac{\partial i_c}{\partial T} \Big|_{T=T_j} = \hat{a} \cdot i_{CO} + \hat{\phi} \cdot \frac{I_s(T_j)}{T_j} \cdot \left( 2 + \frac{U_{go}}{h T_j} \right) \cdot \left( \frac{1}{\beta_R(T_j)} + \left( \frac{\beta_{OF}}{\beta_{OR}} \right)^{\hat{\phi}} \right) - \frac{I_s(T_j)}{\beta_R(T_j)} \cdot \hat{a}, \quad (35a)$$

$$\gamma_b(T_j) = \frac{\partial u_B}{\partial T} \Big|_{T=T_j} = h \cdot \left[ \ln \left( \frac{(1 + \hat{a} \cdot (T_j - T_0)) \cdot \sqrt{i_{CO}^2 + d_1} + 1 + \left( \frac{\beta_{OF}}{\beta_{OR}} \right)^{\hat{\phi}}}{I_s(T_j)} \right) + \frac{\beta_{OF} \cdot \beta_{OR} \cdot i_B \cdot \left[ \hat{a} \cdot T_j - (1 + \hat{a} \cdot (T_j - T_0)) \left( 2 + \frac{U_{go}}{h \cdot T_j} \right) \right]}{\beta_{OF} \cdot \beta_R(T_j) \cdot i_B + I_s(T_j) \cdot (\beta_{OF} + \beta_{OR})} \right], \quad (35b)$$

gdzie  $\hat{\phi} = 1$  dla  $i_c \geq 0$  oraz  $\hat{\phi} = -1$  dla  $i_c < 0$ .

Rozwinięcie w szereg charakterystyk, przy formułowaniu modelu  $HL(T_a)$  wokół temperatury  $T_a$  oznacza, że model ten ma postać identyczną jak model  $HL(T_j)$ , przy czym w zależnościach (35a, b) należy formalnie przyjąć warunek  $T_j = T_a$ . W celu uproszczenia postaci modelu, tzn. otrzymania prostszych zależności opisujących współczynniki  $\gamma_b$  i  $\gamma_c$ , konieczne było przyjęcie założenia

$$i_{CO} \gg \frac{I_S(T_a)}{\hat{a} \cdot T_a} \cdot \frac{\beta_{OF}}{\beta_{OR}} \cdot \left(2 + \frac{U_{go}}{h \cdot T_a}\right), \quad (36)$$

które, jak wynika z doświadczenia, dla typowych tranzystorów małej i średniej mocy jest spełnione dla niezbyt wysokich temperatur otoczenia ( $T_a \leq 400$  K) i niezbyt małych prądów kolektora ( $i_{CO} \geq 10 \mu A$ ).

Ostatecznie otrzymuje się model  $HL(T_a)$  o postaci jak na rysunku 10a, w którym parametry  $\gamma_b$ ,  $\gamma_c$  opisane są wzorami

$$\gamma_c(T_a) = \frac{\partial i_C}{\partial T} \Big|_{T=T_a} = \hat{a} \cdot i_{CO}, \quad (37a)$$

$$\gamma_b(T_a) = \frac{\partial u_B}{\partial T} \Big|_{T=T_a} = h \cdot \left[ \ln \left( \frac{\sqrt{i_{CO}^2 + d_1}}{I_0} \right) + \hat{a} \cdot T_a - 2 \right]. \quad (37b)$$

Drugi z opracowanych typów modeli hybrydowych, oprócz modeli HL, nazwany w pracy heurystycznym modelem hybrydowym (HH), którego obwodową postać przedstawiono na rys. 11b, wynika bezpośrednio z algebraicznych przekształceń zależności (31a–32b), w wyniku których wydzielono część izotermiczną reprezentowaną przez model wbudowany w programie SPICE (WMS). Pozostała część przekształconych zależności opisuje zmianę prądu kolektora ( $\Delta i_C$ ) oraz napięcia baza – emiter/baza – kolektor ( $\Delta u_B$ ), spowodowane przez wzrost temperatury wnętrza elementu oraz efekt malenia wartości współczynnika wzmocnienia prądowego ze wzrostem prądu, modelowane przez prądowe i napięciowe źródła sterowane. Po przekształceniach ostatecznie otrzymuje się

$$\begin{aligned} \Delta u_B = & T_j \cdot h \cdot \ln \left( \frac{\sqrt{i_{CO}^2 + d_1} \cdot f(u_{CE}, i_C)}{I_S(T_j)} + 1 + \left( \frac{\beta_{OF}}{\beta_{OR}} \right)^{\hat{\phi}} \right) + \\ & - T_a \cdot h \cdot \ln \left( \frac{\sqrt{i_{CO}^2 + d_1}}{I_S(T_a)} + 1 + \left( \frac{\beta_{OF}}{\beta_{OR}} \right)^{\hat{\phi}} \right), \end{aligned} \quad (38a)$$

$$\begin{aligned} \Delta i_C = & -b \cdot (1 + c \cdot (T_j - T_0)) \cdot \sqrt{i_C^2 + d_1} \cdot i_C + i_{CO} \cdot \hat{a} \cdot (T_j - T_0) + \\ & + \hat{\phi} \cdot I_S(T_j) \cdot \left( \frac{1}{\beta_R(T_j)} + \left( \frac{\beta_{OF}}{\beta_{OR}} \right)^{\hat{\phi}} \right) \cdot [1 + b \cdot (1 + c \cdot (T_j - T_0)) \cdot \sqrt{i_C^2 + d_1}]. \end{aligned} \quad (38b)$$

Dodatkowo w HH, w celu uzyskania dokładniejszego modelu, uwzględniono efekty przebieg złączy spowodowane efektem powielania lawinowego, modelowane za

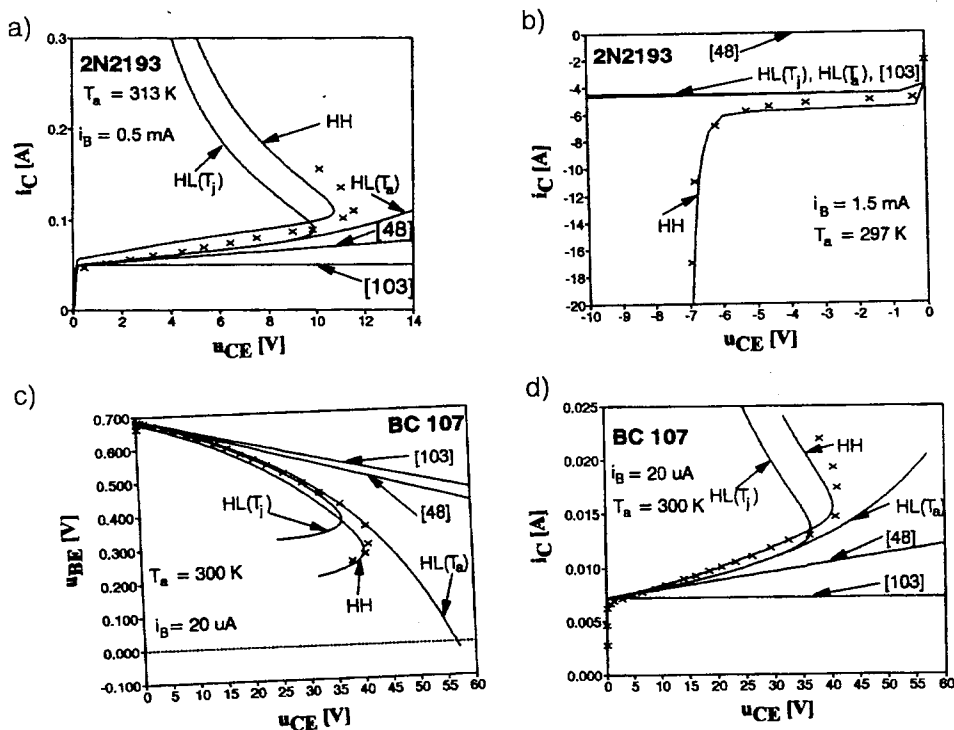
pomocą diod p–n wbudowanych w programie SPICE, z odpowiednimi wartościami parametrów modelu, a mianowicie:  $BV1=U_{ZO1}$ ,  $BV2=U_{ZO2}$ ,  $IBV1=IBV2=1\text{ mA}$ ,  $NBV1=\lambda_1/hT_a$ ,  $NBV2=\lambda_2/hT_a$ ,  $IS=10^{-18}\text{ A}$  oraz  $N=1$ .

W modelach HH źródła napięciowe o zerowej wydajności spełniają identyczną rolę jak w modelach zlinearyzowanych. Również zastępcza rezystancja szeregową bazy została wprowadzona do modelu w taki sam sposób, jak w przypadku modelu HL.

Wartości parametrów wbudowanego modelu tranzystora w programie SPICE, reprezentowanego na rys. 11a, b przez blok WMS, wynoszą:  $BF=\beta_{OF}$ ,  $BR=\beta_{OR}$ ,  $IS=I_s(T_a)$ , natomiast wartości pozostałych parametrów są wartościami „domyslnymi”, tzn. wartościami, które są przyjmowane w programie SPICE automatycznie, jeśli użytkownik nie określi ich wartości w pliku wejściowym.

W przypadku tranzystora bipolarnego, z uwagi na przyjętą przy formułowaniu modeli GETM2, HH i HL różną postać zależności  $\beta(i_C, T_j)$ , parametry modelujące współczynnik wzmocnienia prądowego (parametry:  $\hat{a}$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\beta_{OF}$ ,  $\beta_{OR}$ ) mogą mieć różne wartości w rozważanych modelach elektrotermicznych. Z kolei w hybrydowych modelach z prac [5, 23] parametry  $I$ ,  $\beta_{OF}$ ,  $\beta_{OR}$ ,  $\hat{a}$  mają zawsze takie same wartości jak parametry w modelu HL, natomiast rezystancja termiczna ma wartość stałą.

W celu porównania dokładności przedstawionych modeli hybrydowych, na rys. 12 przedstawiono wyniki symulacji wybranych nieizotermicznych charakterystyk



Rys. 12. Nieizotermiczne charakterystyki tranzystora 2N193 (a, b) oraz BC107 (c, d)

stałoprądowych tranzystorów 2N2193 i BC107 z wykorzystaniem elektrotermicznych hybrydowych modeli literaturowych [5, 23] oraz elektrotermicznych modeli hybrydowych zaproponowanych w pracy. Na rysunkach zaznaczono również wyniki pomiarów (krzyżyki). Dla tranzystora 2N2193 wartości parametrów modelu GETM2 podano w rozdziale 3.4. Wartości parametrów współczynnika wzmocnienia prądowego, występujących w hybrydowych oraz w zlinearyzowanych (liczby podane w nawiasach) modelach tego tranzystora wynoszą odpowiednio:  $\hat{a}=0.01$  (0.004) 1/K,  $b=5.945$  1/A,  $c=0.004$  1/K,  $\beta_{OF}=130.8$  (97.7),  $\beta_{OR}=2.8$  (1.95). Wartości parametrów modelu rezystancji termicznej w modelach proponowanych w niniejszej pracy (modele HH oraz HL) są podane w rozdziale 3.4. Wartość rezystancji termicznej w modelach literaturowych była stała i wynosiła 195 K/W.

Z kolei dla tranzystorów BC107 wartości parametrów modelu HH oraz HL (liczby podane w nawiasach w przypadku różnych wartości parametrów) były następujące:  $T_o=300$  K,  $r_o=50$   $\Omega$ ,  $\hat{a}=0.0047$  ( $3.95 \cdot 10^{-3}$ ) 1/K,  $b=2$  1/A,  $c=0.003$  1/K,  $I_o=4 \cdot 10^6$  A,  $\beta_{OF}=365$  (360),  $\beta_{OR}=10$  (10),  $U_{ZO1}=80$  V,  $U_{ZO2}=7$  V,  $K_o=350$  K/W,  $K_1=60$  K/W,  $K_2=40$  K/W,  $K_3=-20$  K/(W·A),  $g_1=625$  W $^{-2}$ ,  $g_2=6.25$  W $^{-2}$ . Dla modeli literaturowych stała wartość rezystancji termicznej wynosiła 350 K/W.

Jak widać, najlepszą zgodność z wynikami pomiarów zapewniają modele HH oraz HL( $T_j$ ), natomiast modele z prac [5, 23] legitymują się dużo gorszą dokładnością, przy czym w pewnych sytuacjach wyniki symulacji z wykorzystaniem modeli literaturowych różnią się nawet jakościowo od wyników pomiarów, np. dotyczy to sytuacji przedstawionych na rys. 12b oraz na rys. 12c. Uzyskiwanie najlepszej zgodności między wynikami pomiarów i obliczeń z wykorzystaniem modelu HH jest oczywiste, wynika bowiem ze sposobu formułowania modelu HH, w którym przyjęto najmniej założeń upraszczających oraz uwzględniono najwięcej zjawisk fizycznych, np. powielanie lawinowe. Z kolei, wśród modeli zlinearyzowanych, widoczna na rysunkach znacznie lepsza dokładność modelu HL( $T_j$ ) wynika przede wszystkim z uwzględnienia w tym modelu (wzory 35a, b) zależności prądu nasycenia od temperatury wnętrza, której to zależności nie uwzględniają inne modele liniowe.

#### 4.2. ELEKTROTERMICZNY HYBRYDOWY MODEL DIODY P–N

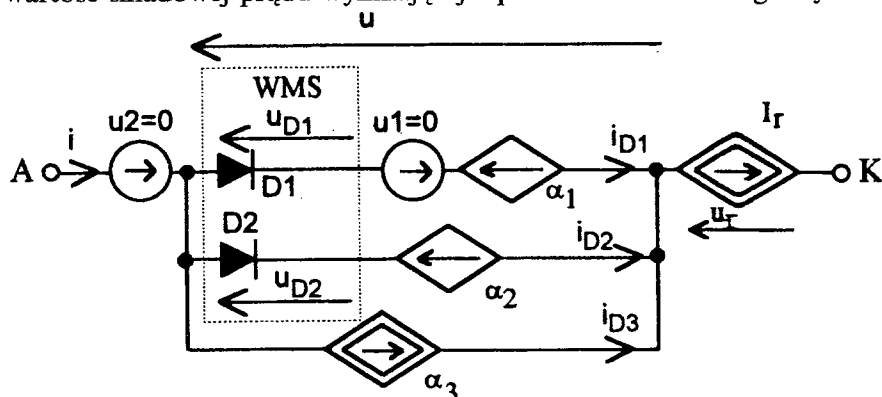
Dla diody p–n sformułowano zlinearyzowany model hybrydowy (HL), stosując analogiczną procedurę postępowania jak w przypadku tranzystora bipolarnego (rozdział 4.1), polegającą na rozwinięciu w szereg Taylora charakterystyk statycznych wokół temperatury wnętrza (model HL( $T_j$ )) lub wokół temperatury otoczenia (model HL( $T_a$ )) i obciążeniu szeregu po wyrazie liniowym. W charakterze zależności wyjściowych wykorzystano model diody przedstawiony w rozdziale 3.1. Z uwagi na metodologię formułowania modelu zorientowaną na prawidłowe zamodelowanie wpływu temperatury wnętrza na takie efekty jak zmiana napięcia przewodzenia (przy ustalonym prądzie) i napięcia przebicia oraz termiczna zmiana prądów nasycenia i generacyjnego w zakresie zaporowym, przy zapewnieniu możliwie małych błędów obciążenia szeregu, zależność (12) należy przedstawić w postaci trzech składników  $i_1$ ,  $i_2$  oraz  $i_3$ , gdzie

$$i_1(T_j) = I_0 \cdot \left(\frac{T_j}{T_0}\right)^2 \exp\left(-\frac{U_{go}}{hT_j}\right) \exp\left(\frac{u}{hT_j}\right) \quad (39a)$$

$$i_2(T_j) = -I_Z \cdot \exp\left[\frac{U_{Z0}}{\lambda}(1 + \alpha_i(T_j - T_0)) - \frac{u}{\lambda}\right] \quad (39b)$$

$$i_3(T_j) = I_G \cdot \sqrt[4]{d_0 + \left(1 - \frac{u}{U_B}\right)^2} \cdot \exp\left(-\frac{U_{go}}{2hT_j}\right) \cdot \left[\exp\left(\frac{u}{2hT_j}\right) - 1\right] - \\ + I_0 \cdot \left(\frac{T_j}{T_0}\right)^2 \exp\left(-\frac{U_{go}}{hT_j}\right) \quad (39c)$$

W powyższych wzorach pominięto niezależny od napięcia składnik prądu wynikający z powielania lawinowego (wzór 6), gdyż program SPICE, chociaż nie wynika to z formalnej postaci modelu diody w tym programie [41], zapewnia jednak, że dla napięcia  $u = 0$  wartość składowej prądu wynikającej z powielania lawinowego wynosi zero.



Rys. 13. Obwodowa postać modelu hybrydowego diody

Obwodową postać hybrydowego zlinearyzowanego modelu diody przedstawiono na rys. 13. Diody D1 i D2 reprezentują izotermiczny model wbudowany w programie SPICE, przy czym dioda D1 modeluje zakres przewodzenia i zaporowy (bez powielenia lawinowego), natomiast dioda D2 — zakres przebicia. W modelu uwzględniono dodatkowo rezystancję szeregową  $r_s(T_j)$ , która jest zrealizowana w postaci włączonego szeregowo sterowanego źródła prądowego  $I_r$  o wydajności  $u_r/r_s(T_j)$ . Pozostałe źródła sterowane pełnią następujące funkcje:

a) sterowane źródło napięciowe o wydajności  $\alpha_1 = \gamma_{u1} \cdot \Delta T$  modeluje termiczne zmiany napięcia na złączu przewodzącym. Temperaturowy współczynnik zmian tego napięcia  $\gamma_{u1}$  wyznaczony z wzoru (39a) ma postać

$$\gamma_{u1} = \frac{\partial u}{\partial T} = h \cdot \left[ \ln\left(\frac{\sqrt{i_{D1}^2 + d_1} + 1}{I_s(T_j)}\right) - 2 - \frac{U_{go}}{h \cdot T_j} \right] \quad (40a)$$

Chociaż zależność (40a) jest formalnie słuszna jedynie dla prądu  $i_1 > I_s(T_a)$ , to w praktyce podane ograniczenie jest nieistotne, bowiem w zakresie przewodzenia, typowo dla prądów mniejszych niż  $I_s(T_a)$ , nadwyżka temperatury wnętrza diody jest pomijalnie mała i wówczas wydajność sterowanego źródła napięciowego  $\alpha_1 \cong 0$ .

b) sterowane źródło napięciowe o wydajności  $\alpha_2 = \gamma_{u2} \cdot \Delta T$  modeluje termiczne zmiany napięcia przebicia. Temperaturowy współczynnik zmian tego napięcia  $\gamma_{u2}$  wyznaczony z wzoru (39b) ma postać

$$\gamma_{u2} = \frac{\partial u}{\partial T} = U_{zo} \cdot \alpha_t \quad (40b)$$

c) sterowane źródło prądowe o wydajności  $\alpha_3 = \gamma_i \cdot \Delta T$  modeluje termiczne zmiany prądów nasycenia i generacyjno-rekombinacyjnego. Temperaturowy współczynnik zmian tych prądów  $\gamma_i$  wyznaczony z zależności (39c), ma postać

$$\gamma_i = \frac{\partial i}{\partial T} = -\frac{I_s(T_j)}{T_j} \cdot \left( 2 + \frac{U_{go}}{h \cdot T_j} \right) - I_G \cdot \exp\left( -\frac{U_{go}}{2 \cdot h \cdot T_j} \right) \cdot \left[ \exp\left( \frac{u}{2 \cdot h \cdot T_j} \right) \cdot \frac{U_{go} - u}{2 \cdot h \cdot T_j^2} + \frac{U_{go}}{2 \cdot h \cdot T_j^2} \right] \cdot 4 \sqrt{\left( 1 - \frac{u}{U_B} \right)^2 + d_0} \quad (41)$$

Aby diody D1 i D2 modelowały odpowiednie zakresy pracy, przyjęto następujące wartości parametrów wbudowanego modelu diody w programie SPICE:

- dla diody D1: nieskończenie duże napięcie przebicia BV, prąd nasycenia  $I_S = I_s(T_a)$  oraz współczynnik emisji  $N = 1$ ,
- dla diody D2: duży współczynnik emisji  $N$  (przyjęto  $N = 100$ ), mały prąd nasycenia  $I_S$  (przyjęto  $I_S = 10^{-18}$  A), prąd przebicia  $IBV = |I_Z|$ , współczynnik przebicia  $NBV = \lambda/hT_a$ , napięcie przebicia  $BV = |U_{zo}|$  oraz współczynnik prądu rekombinacyjnego  $ISR = 0$ .

Dioda D1 opisana jest modelem  $i_{D1}(u_{D1}, T_a)$  stanowiącym sumę prądów  $i_1(T_a)$  oraz  $i_3(T_a)$ , natomiast dioda D2 — modelem  $i_{D2}(u_{D2}, T_a) = i_2(T_a)$ . W temperaturze otoczenia  $T_a$  zachodzi warunek  $u_{D1} = u_{D2} = u$ .

Elektrotermiczny hybrydowy model diody p-n przedstawiony na rys. 13 modeluje poprawnie nieizotermiczne charakterystyki diody w dowolnym zakresie pracy. Przykładowo, przy ustalonym napięciu  $u$  dla kierunku przewodzenia, wzrost temperatury złącza powoduje wzrost (co do modułu) wydajności źródła  $\alpha_1$ , co prowadzi do wzrostu napięcia  $u_{D1}$ . W konsekwencji następuje wzrost wartości prądu  $i_{D1}$ , do poziomu odpowiadającego temperaturze  $T_j$ . Należy zauważyć, że w zakresie zaporowym ( $i_{D1} = I_s(T_a)$ ) wpływ napięcia źródła sterowanego  $\alpha_1$  na napięcie diody jest praktycznie do pominięcia. Z kolei przy polaryzacji zaporowej, w temperaturze  $T_a$ , przebicie diody D2 występuje przy napięciu  $u_{D2} = U_{zo}$ . Dla ustalonej wartości napięcia  $u$  ze wzrostem temperatury rośnie również (co do modułu) wydajność źródła  $\alpha_2$  (dla  $\alpha_t > 0$ ), powodując wzrost napięcia  $u_{D2}$ . W związku z tym przebicie diody w temperaturze  $T_j$  wymaga zwiększenia, co do modułu, wartości napięcia  $u$  do wartości  $U_z(T_j)$ . Natomiast w zakresie zaporowym (dla napięć  $|u| < |U_z|$ ) efekty

elektrotermiczne modelowane są głównie przez źródło prądowe  $\alpha_3$ . Jest to szczególnie widoczne na nieizotermicznych charakterystykach diod wysokonapięciowych pracujących w dużych temperaturach otoczenia [29].

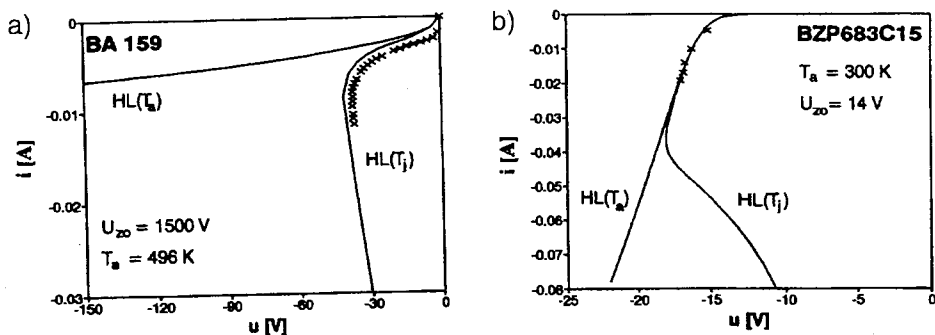
Model  $HL(T_a)$  diody, podobnie jak w przypadku tranzystora bipolarnego, jest modelem uproszczonym, słusznym dla węższego zakresu zmian prądów, napięć i temperatur otoczenia. Model ten otrzymuje się z zależności (40a, 40b, 41), przy warunku  $T_j = T_a$ , a także przy pominięciu efektu zmiany prądów nasycenia i generacyjnego od nadwyżki temperatury wnętrza ponad temperaturę otoczenia. Model  $HL(T_a)$  można przedstawić w postaci obwodowej jak na rys. 13, bez źródła sterowanego  $\alpha_3$ . Wydajności pozostałych źródeł sterowanych są opisane następującymi wzorami

$$\alpha_1 = \gamma_{u1} \cdot \Delta T = h \cdot [\ln((i_{B1}^2 + d_1)^{1/2} / I_0) - 2] \cdot \Delta T, \quad (42a)$$

$$\alpha_2 = \gamma_{u2} \cdot \Delta T = \alpha_t \cdot U_{ZO} \cdot \Delta T. \quad (42b)$$

Model  $HL(T_a)$ , z uwagi na sposób jego formułowania oraz przyjęte założenia upraszczające, może być przydatny głównie przy modelowaniu diod niskonapięciowych pracujących w temperaturach zbliżonych do temperatur otoczenia (300 K).

Na rys. 14 przedstawiono linią ciągłą charakterystyki statyczne diody BA159 i BZP683C15 otrzymane za pomocą modeli  $HL(T_j)$  oraz  $HL(T_a)$ , jak również zaznaczono wyniki pomiarów (krzyżyki). Wartości parametrów modelu HL diody BA159 podano w rozdziale 3.4. Natomiast parametry diody BZP683C15 miały następujące wartości:  $I_0 = 5 \cdot 10^6$  A,  $r_0 = 2$   $\Omega$ ,  $I_G = 100$  A,  $\lambda = 0.7$ ,  $\alpha_t = 5 \cdot 10^{-4}$  1/K,  $U_{ZO} = -14$  V,  $U_B = 0.5$  V,  $T_0 = 300$  K,  $I_Z = -1$  mA,  $K_0 = 370$  K/W,  $K_1 = 40$  K/W,  $K_2 = 30$  K/W,  $K_3 = 1.2$  K/(W·V),  $g_1 = 50$  W<sup>-2</sup>,  $g_2 = 9$  W<sup>-2</sup>.



Rys. 14. Nieizotermiczne charakterystyki statyczne diody BA159 (a) oraz diody BZP683C15 (b)

Jak należało oczekiwać, model  $HL(T_j)$  zapewnia dobrą zgodność z wynikami pomiarów dla obydwu diod. Natomiast wyniki obliczeń za pomocą modelu  $HL(T_a)$ , z uwagi na przyjęte założenia upraszczające przy jego wyprowadzaniu, są zadowalające jedynie dla diody BZP683C15 legitymującej się niskim napięciem przebicia (rzędu kilkunastu woltów) oraz pracującej w temperaturze otoczenia równej 300 K.

Jakościowa różnica między charakterystykami w zakresie zaporowym wynikającymi z modeli  $HL(T_a)$  i  $HL(T_j)$  dotyczy możliwości wystąpienia odcinka o ujemnej rezystancji dynamicznej, dla odpowiednio dużej wartości prądu diody. Możliwość wystąpienia ujemnej rezystancji dynamicznej na charakterystykach odpowiadających modelowi  $HL(T_j)$  wynika przede wszystkim z silnej zależności prądu nasycenia od temperatury wnętrza  $I_s(T_j)$ , występującego w wyrażeniu opisującym wydajność źródła sterowanego  $\alpha_3$  (wzór 41).

## 5. GLOBALNE ELEKTROTERMICZNE MODELE DO ANALIZY STANÓW PRZEJŚCIOWYCH

Model dynamiczny każdego elementu można przedstawić jako połączenie dwójników rezystancyjnych, pojemnościowych i indukcyjnych, przy czym w modelach elementów półprzewodnikowych występują zazwyczaj dwa pierwsze z wymienionych elementów [2, 12]. Elektrotermiczny model drugiego rodzaju elementu do analizy stanów przejściowych można zatem przedstawić za pomocą równań postaci

$$\hat{\phi}[\underline{i}_\phi(t), \underline{u}(t), T_j(t)] = 0, \quad (43a)$$

$$Q = g[\underline{u}(t), T_j(t)], \quad (43b)$$

$$T_j = h[T_a, p_{th}(t)], \quad (43c)$$

gdzie  $Q$  — ładunek,  $p_{th}(t)$  — moc czynna wydzielana w elemencie. Równanie (43a) reprezentuje część bezinercyjną (rezystancyjną) modelu, równanie (43b) opisuje efekt inercji elektrycznej rozumianej jako przepływ prądu związanego z czasowymi zmianami ładunku zgromadzonego w wybranych obszarach elementu, natomiast równanie (43c) jest modelem termicznym elementu.

Zasadniczym celem niniejszego rozdziału jest określenie wpływu temperatury wnętrza na inercję elektryczną elementu, czyli pojemność złączową (barierową) i dyfuzyjną. Ponieważ występuje dodatkowa składowa prądu proporcjonalna do szybkości zmian temperatury wnętrza elementu [12], szacuje się relacje między tą składową, a klasyczną składową proporcjonalną do szybkości zmian napięcia.

Jak zauważono w pracy [12], prąd płynący na skutek zmian napięcia oraz temperatury wynosi

$$i_Q = \partial Q(u, T_j) / \partial t = i_{el} + i_{th} = C(u, T_j) \cdot du/dt + \alpha(u, T_j) \cdot dT_j/dt, \quad (44)$$

gdzie  $C(u, T_j) = \partial Q(u, T_j) / \partial u$  oznacza pojemność elektryczną, natomiast współczynnik  $\alpha(u, T_j) = \partial Q(u, T_j) / \partial T_j$ .

We wzorze (44) można wyróżnić dwa składniki prądu proporcjonalne odpowiednio do szybkości zmian napięcia (składowa elektryczna —  $i_{el}$ ) oraz do szybkości zmian temperatury (składowa termiczna —  $i_{th}$ ). A zatem, w elemencie może płynąć prąd pojemnościowy przy braku zmian napięcia na złączu, przy czym jest on wywołany jedynie zmianami temperatury.

Aby określić wpływ temperatury na pojemność złączową należy rozważyć związany z każdym złączem ładunek nieskompensowanych jonów domieszek w warstwie opróżnionej, postaci

$$Q_j(u, T_j) = -B \cdot [U_B(T_j) - u]^w, \quad (45)$$

gdzie:  $B$  — parametr materiałowy zależny m.in., od koncentracji domieszek oraz powierzchni złącza,  $U_B(T_j)$  — napięcie bariery (kontaktowe),  $w$  — współczynnik określający profil koncentracji domieszek w warstwie ładunku przestrzennego.

Z zależności (45) dla złącza skokowego ( $w = 0.5$ ), otrzymuje się wzór na pojemność złączową (barierową) postaci

$$C_j(u, T_j) = \partial Q_j(u, T_j) / \partial u = 0.5 \frac{B}{\sqrt{U_B(T_j) - u}} \quad (47)$$

Napięcie bariery  $U_B(T_j)$  zależy od koncentracji domieszek  $N_a$ ,  $N_d$  obszarów po obu stronach złącza i dla złącza silnie domieszkowanego dane jest wzorem [19]

$$U_B(T_j) = h \cdot T_j \cdot \ln \left[ A \cdot \frac{N_a \cdot N_d}{T_j^3 \exp(-U_{go}/hT_j)} \right], \quad (49)$$

gdzie  $A$  — współczynnik, którego wartość dla krzemu wynosi  $6.25 \cdot 10^{-34} \text{ cm}^6 \text{K}^3$ .

Aby określić wpływ temperatury na pojemność dyfuzyjną, rozważmy ładunek mniejszościowych nośników nadmiarowych w bazie złącza, postaci:

$$Q_d(u, T_j) = \tau_{mn} \cdot i(u, T_j), \quad (46)$$

gdzie:  $i(u, T_j)$  — nieizotermiczna charakterystyka złącza idealnego (z pominięciem składnika generacyjno-rekombinacyjnego),  $\tau_{mn}$  — parametr zależny od czasu przelotu nośników mniejszościowych przez bazę złącza oraz od czasu życia tych nośników.

We wzorach (45, 46) pominięto zależność parametrów  $B$  i  $\tau_{mn}$  od temperatury. Natomiast pominięcie składnika prądu generacyjno-rekombinacyjnego w zależności  $i(u, T_j)$  powoduje, że wzór (46) może być mniej dokładny w zakresie małych i bardzo małych wartości prądów.

Z zależności (46) otrzymujemy wzór na pojemność dyfuzyjną

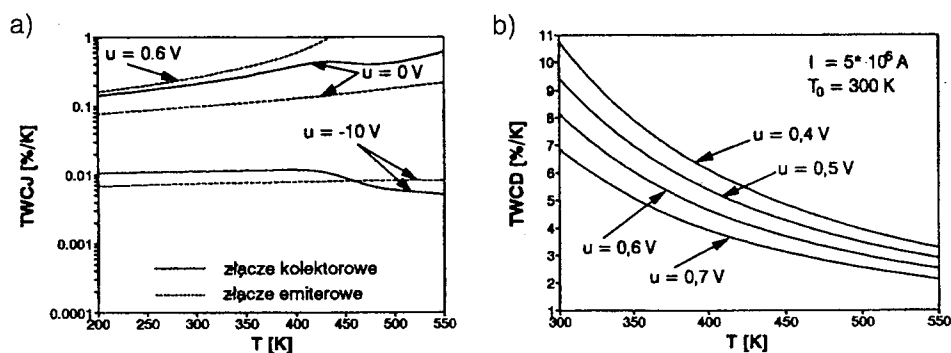
$$C_d(u, T_j) = \tau_{mn} \cdot \frac{\partial i(u, T_j)}{\partial u} \Big|_{T_j = \text{const.}} = \tau_{mn} \cdot \frac{i(u, T_j) + I_S(T_j)}{h \cdot T_j} \quad (50)$$

W celu porównania wartości składników prądu  $i_{el}$  oraz  $i_{th}$  trzeba najpierw oszacować wartości współczynników  $\alpha_j$  oraz  $\alpha_d$ , skojarzonych odpowiednio z ładunkami  $Q_j$  oraz  $Q_d$ . Otrzymuje się następujące zależności opisujące te współczynniki:

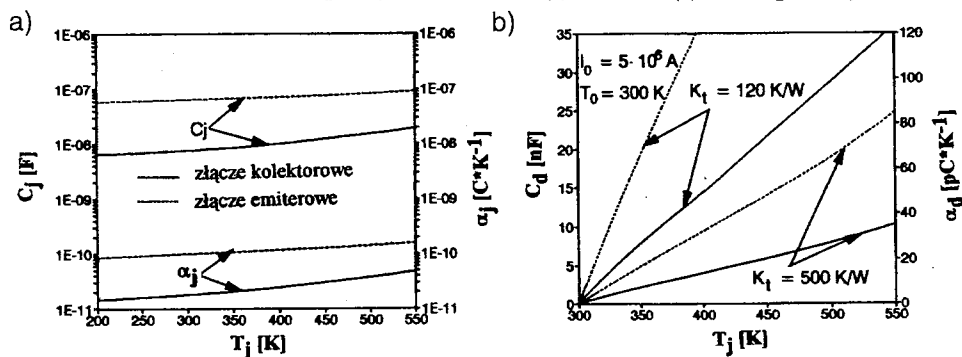
$$\alpha_j(u, T_j) = \partial Q_j(u, T_j) / \partial T_j = -C_j(u, T_j) \cdot \left[ \frac{U_B(T_j) - U_{go}}{T_j} - 3h \right]. \quad (48)$$

$$\alpha_d = \tau_{mn} \cdot \left. \frac{\partial i(u, T_j)}{\partial T_j} \right|_{u=\text{const.}} = \tau_{mn} \cdot \frac{U_{go} - u}{h \cdot T_j^2} (i - I_s(T_j)). \quad (51)$$

Aby pokazać wpływ temperatury na wartości pojemności złączej (barierowej) i dyfuzyjnej oraz współczynników  $\alpha_j$  i  $\alpha_d$  przeprowadzono obliczenia dla przykładowej struktury tranzystora równomiernie domieszkowanego, o jednostkowej powierzchni złącza oraz o koncentracji domieszek w emiterze, bazie i kolektorze odpowiednio równych:  $N_E = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ ,  $N_B = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ ,  $N_C = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ . Przy założonych koncentracjach domieszek, parametr  $B = 10.5 \cdot 10^{-8} \text{ F} \cdot \text{V}^{-0.5}$  (dla złącza emiterowego) oraz  $B = 10.5 \cdot 10^{-9} \text{ F} \cdot \text{V}^{-0.5}$  (dla złącza kolektorowego). W obliczeniach przyjęto  $\tau_{mn} = 1 \text{ ns}$ .



Rys. 15. Zależność współczynników TWCIJ (a) i TWCD (b) od temperatury



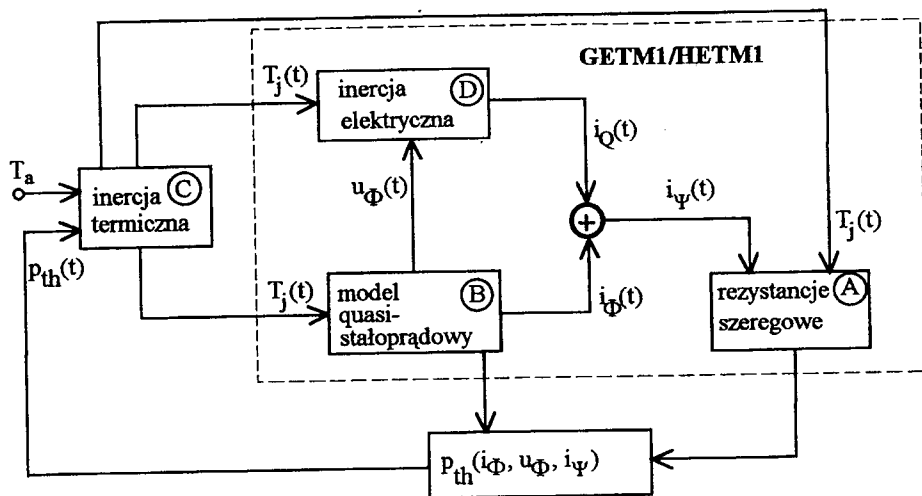
Rys. 16. Temperaturowa zależność  $\alpha_j$ ,  $C_j$  (a) oraz  $\alpha_d$  — linia ciągła i  $C_d$  — linia przerywana (b)

Na rys. 16 przedstawiono zależności temperaturowych współczynników względnych zmian pojemności złączej (TWCIJ) i dyfuzyjnej (TWCD), wyznaczonych jako iloczyn odwrotności odpowiedniej pojemności i jej pochodnej względem temperatury. Natomiast na rys. 17 wykreślono zależności  $C_j$  i  $\alpha_j$  (rys. 17a) oraz  $C_d$  i  $\alpha_d$  (rys. 17b) w funkcji temperatury złącza. Z rys. 17b widać, że zależności  $C_d(T_j)$  — linia przerywana i  $\alpha_d(T_j)$  — linia ciągła, zależą silnie od warunków chłodzenia elementu, reprezentowanych tutaj przez różne wartości rezystancji termicznej  $K_t$ . Dla wybranej temperatury, wartości  $C_d$  oraz  $\alpha_d$  są mniejsze dla elementu pracującego w warunkach gorszego odprowadzania ciepła do otoczenia (większa wartość  $K_t$ ).

Z przedstawionych zależności teoretycznych oraz wyników symulacji można sformułować dwa zasadnicze wnioski:

1) Pojemność dyfuzyjna zależy stosunkowo silnie od temperatury: temperaturowy współczynnik zmian  $C_d$  wynosi od około 2%/K (duża temperatura oraz duże napięcie), do około 10%/K (niska temperatura, małe napięcie). Z kolei pojemność złączowa w zakresie polaryzacji zaporowej zależy od temperatury znacznie słabiej, niż pojemność dyfuzyjna. Procentowe zmiany wartości  $C_j$  wynoszą od około 0.01 %/K (dla  $u = -10$  V) do około 0.1 %/K (dla  $u = 0$  V). Z przeprowadzonych przez autora pomiarów  $C_j(0)$  wybranych elementów (diod p–n: BVP680–100, BVP683C10, tranzystorów bipolarnych: BC107, BC211) otrzymano wartości  $TWCJ$  od 0.08 %/K do 0.15 %/K, co potwierdza przedstawione powyżej rozważania teoretyczne, związane z termicznymi właściwościami pojemności złączowej.

2) Aby składowe prądów  $i_{el}$  oraz  $i_{th}$  były porównywalne co do wartości, to szybkość zmian temperatury  $dT/dt$  musi być około 1000 razy większa niż szybkość zmian napięcia  $du/dt$  na złączu. Przykładowo dla złącza niespolaryzowanego, dla którego  $C_j(0) = 2$  nF (złącze diody BZX70), realna do uzyskania, w początkowym okresie grzania elementu, zmiana temperatury rzędu 1 K/ $\mu$ s [26], spowoduje przepływ prądu złącza ( $i_Q = i_{th}$ ) o wartości kilkudziesięciu mikroamperów.



Rys. 17. Struktura elektrotermicznego modelu drugiego rodzaju elementu do analizy stanów przejściowych

Ogólną strukturę elektrotermicznego modelu drugiego rodzaju elementu do analizy stanów przejściowych przedstawiono na rys. 17. Część rezydencyjna omawianej struktury reprezentują elektrotermiczne modele rezystancji szeregowych (blok A) oraz modele quasi-stałowprądowe (blok B) postaci takiej samej jak elektrotermiczne modele stałowprądowe opisane w rozdziałach 3 i 4, w których to modelach, wartości zmiennych odpowiadają chwili czasu  $t$ . Wyodrębnienie bloku A wynika z potrzeby uwzględnienia składnika mocy czynnej, wydzielonej w rezystancjach szeregowych, zależnej od składnika prądu  $i_Q$  wynikającej z przeładowania nieliniowych pojemności elementu. Model termiczny (blok C) może być wyrażony za pomocą całki splotu



zapewnić ciągłość i różniczkowalność modelu dla dowolnego napięcia i temperatury, przyjęto wzór aproksymujący zależność  $C_j(u, T_j)$  dla napięć  $u \geq U_B(T_j) - U_{gr}$  w postaci:

$$C_j(u, T_j) = \frac{B}{4\sqrt{U_{gr}}} \left( 3 - \frac{U_B(T_j - u)}{U_{gr}} \right), \quad (54)$$

przy czym dla napięć  $u < U_B(T_j) - U_{gr}$  obowiązuje nadal wzór (47). Napięcie graniczne  $U_{gr}$  powinno mieć możliwie małą wartość ( $U_{gr} > 0$ ). W obliczeniach przyjmowano  $U_{gr} = 0.2V$ .

### UWAGI KOŃCOWE

Praca jest poświęcona elektrotermicznym modelom wybranych elementów półprzewodnikowych, służącym do komputerowej analizy układów elektronicznych. Sformułowano nowe elektrotermiczne modele diody p-n i tranzystora bipolarnego. Modele te pozbawione są wielu wad i niedogodności modeli znanych z literatury, omówionych w rozdziale 1. Opracowane modele można podzielić na dwie zasadnicze grupy.

Do pierwszej z nich, należą globalne elektrotermiczne modele drugiego rodzaju (GETM2) diody p-n i tranzystora bipolarnego, które są ciągle i ciągle różniczkowalne dla dowolnych wartości prądów, napięć i temperatury wnętrza elementu, co umożliwia stosowanie tych modeli w zaawansowanych algorytmach analizy układów elektronicznych, np. [30].

Do drugiej grupy modeli, należą elektrotermiczne modele hybrydowe HETM2, sformułowane dla potrzeb wielkosygnałowej analizy za pomocą programu SPICE. Modele takie są tworzone poprzez dołączenie do izotermicznych modeli elementów wbudowanych w programie SPICE, odpowiednich źródeł sterowanych, modelujących wpływ efektów termicznych na właściwości zaciskowe elementów.

Przedstawiono dwa typy elektrotermicznych modeli hybrydowych:

- modele zlinearyzowane (dla diody p-n i tranzystora bipolarnego), wynikające z rozwinięcia zależności stanowiących model GETM2 elementu w szereg Taylora i obciążeniu szeregu po wyrazie liniowym,
- model heurystyczny (dla tranzystora bipolarnego), wynikający bezpośrednio z algebraicznych przekształceń modelu GETM2, w wyniku których została wydzielona część izotermiczna, reprezentowana przez model wbudowany w programie SPICE oraz część reprezentująca wpływ efektu samonagrzewania i zmian współczynnika  $\beta$  od prądu kolektora, na zaciskowe właściwości tranzystora.

Na bazie modeli stałoprądowych sformułowano również elektrotermiczne modele dynamiczne do analizy elektrotermicznych stanów przejściowych, uwzględniające zarówno inercję termiczną jak i inercję elektryczną, wynikającą z istnienia nieliniowych pojemności — dyfuzyjnej i barierowej.

Stałoprądowe modele GETM2 i HETM2 zweryfikowano doświadczalnie. Stwierdzono, że najdokładniejszymi modelami są modele globalne i heurystyczne modele hybrydowe. Natomiast elektrotermiczne hybrydowe modele tranzystora bipolarnego z prac [5, 23], są modelami najmniej dokładnymi.

Przedstawione w pracy modele były z powodzeniem wykorzystywane w elektrotermicznej stałoprądowej i dynamicznej analizie układów elektronicznych, z wykorzystaniem zarówno modeli HETM2 i programu SPICE [33], jak i modeli GETM2 i programów specjalizowanych [4, 39, 40].

## BIBLIOGRAFIA

1. K.S. Chao, D.K. Liu, C.T. Pan: *A Systematic Search Method for Obtaining Multiple Solutions of Simultaneous Nonlinear Equations*, IEEE Trans. on Circ. and Syst., 1995, Vol. CAS-22, N. 9, p. 748.
2. L.O. Chua: *Device Modelling via Basic Nonlinear Circuit Elements*. IEEE Trans. on Circ. and Syst., 1980, Vol. CAS-27, p. 1014
3. C. Gonzales-Brias, E. Munoz: *Temperature Dependence of the Nonideal Component of Base Current in Micropower  $n-p-n$  Transistors*, IEEE Trans. on El. Dev., 1984, Vol. ED-31, N. 10, Oct, p. 1503
4. K. Górecki, J. Zarębski, W.J. Stepowicz: *Elektryczna i elektrotermiczna analiza układów elektronicznych*, VI Symp. Podstawowe Problemy Energoelektroniki i Elektromechaniki. Ustroń 1995, s. 47
5. W. Janke, W. Kalman, Z. Łata: *Zastosowanie programu SPICE do symulacji układów elektronicznych w warunkach nieizotermicznych*. XV Sympozjum z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, Wisła 1992, s. 383
6. W. Janke, Z. Łata: *SPICE Simulation of D.C. Electrothermal Interactions with the Use of ETM-II*. XIV Nat. Conf. Circuit Theory and Electronic Circuits, Waplewo 1991, vol. 1, p. 309
7. W. Janke: *Metoda pomiaru rezystancji termicznej tranzystorów bipolarnych*. IV KK MEPIUS, Gdańsk 1980, s. 42
8. W. Janke: *Modele Elektrotermiczne elementów półprzewodnikowych*. Zesz. Nauk. Polit. Gdańskiej, Nr 374, Elektronika LVII, 1984, (praca habilitacyjna)
9. W. Janke: *Modeling of Semiconductor Devices for the Analysis of electrothermal Interactions in Electronic circuits*, Proc. IEEE Int. Conf. Signal and Systems, San Jose 1986, p. 149
10. W. Janke: *Modelowanie charakterystyk statycznych tranzystora bipolarnego*. Zesz. Nauk. Politechniki Gdańskiej, 1980, s. 73
11. W. Janke, W. Petrenko: *SPICE-aided Simulation of Electrothermal Interactions in Transient States*. XVI-th Nat. Conf. Circuit Theory and Electronic Circuits, Kołobrzeg 1993, vol. 2, p. 290
12. W. Janke, W.J. Stepowicz: *Elektrotermiczny model pojemności nieliniowej*. IX Kraj. Konf. Teoria Obwodów i Układy Elektroniczne, Szklarska Poręba 1986, s. 173
13. W. Janke, J. Zarębski: *Badanie nieizotermicznych charakterystyk statycznych bipolarnego tranzystora mocy*. Zesz. Nauk WSM w Gdyni, 1983, s. 19
14. W. Janke, J. Zarębski: *Elektrotermiczne stowarzyszone modele drugiego rodzaju i ich zastosowanie w analizie stanów przejściowych*. VII Kraj. Konf. Teoria Obwodów i Układy Elektroniczne, Kazimierz Dolny 1984, s. 225
15. W. Janke, J. Zarębski: *Modele elementów półprzewodnikowych do analizy oddziaływań elektrotermicznych w układach elektronicznych*. Zesz. Nauk WSM w Gdyni, 1989 s. 5
16. W. Janke, J. Zarębski: *Nowa postać nieizotermicznego modelu tranzystora bipolarnego*. Konf. z okazji XV-lecia Wyd. Elektrycznego WSM w Gdyni, 1984, s. 157
17. W. Janke: *Zjawiska termiczne w elementach i układach półprzewodnikowych*. WNT, Warszawa 1992
18. M. Latif, P.R. Bryant: *Multiple Equilibrium Points and Their Significance in the Second Breakdown of Bipolar Transistors*. IEEE J. Sol. St. Circ. 1981, SC-16, p. 8

19. W. Marciniak: *Przyrządy półprzewodnikowe i układy scalone*. WNT, Warszawa 1979
20. R. Martinelli: *The Temperature Dependence of the DC Base and Collector Currents in Silicon Bipolar Transistors*. IEEE Trans. on el. Dev., 1976, ED-23, p. 1218
21. S. Rubin, F. Oettinger: *Thermal Resistance Measurement on Power Transistors*. Nat. Bureau of Standards, NBS 400-14, U.S. Dept. of Commerce, 1979
22. U. Schindel: *An Extended Gummel-Poon Model for an Extreme Range of Temperature*. IEEE J. of Sol.-St. Circ., April 1984, Vol. SC-19, N. 2, p. 251
23. E. Schurack, T. Latzel, W. Rupp, A. Gottwald: *Nonlinear Effects in Transistors Caused by Thermal Power Feedback: Simulation and Modelling in SPICE*. IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems — ISCAS'92, San Diego 1992, p. 758
24. W.J. Stepowicz: *D.C. Nonisothermal Output Characteristics of a Bipolar Transistor Including Breakdown*. Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, Serie des sciences techniques, 1982, vol. XXX, N. 5–6, p. 85
25. W.J. Stepowicz: *Electrothermal Breakdown Modes in silicon Bipolar Transistors*. Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, Serie des sciences techniques, 1982, vol. XXX, N. 5–6, p. 93
26. W.J. Stepowicz, W. Janke: *Modele termiczne elementów półprzewodnikowych*. Zesz. Nauk. Polit. Gdańskiej, N. 348, Elektronika LVI, 1982, s. 3
27. W.J. Stepowicz, W. Janke: *Parametryczne zależności prądowo-napięciowe przyrządów półprzewodnikowych*. IX Sem. z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, Wiśła 1986, s. 157
28. W.J. Stepowicz: *Nieizotermiczne charakterystyki prądowo-napięciowe wybranych elementów półprzewodnikowych*. Zesz. Nauk. Polit. Gdańskiej, N. 373, Elektronika LVI, Gdańsk 1984 (praca habilitacyjna)
29. W.J. Stepowicz, J. Zarębski: *Przebieg termiczny w krzemowych diodach ze złączem p–n*. XVI Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, Ustroń 1993, Vol. 1, s. 261
30. A. Ushida, L.O. Chua: *Tracing Solution Curves of Non-linear Equations with Sharp Turning Points*. Circuit Theory and Applications, 1984, Vol. 12, 1–21, p. 1
31. K. Zamłyński: *Modelowanie termiczne sprzężenia zwrotnego w monolitycznych układach scalonych przy pomocy programu SPICE-2*. Rozprawy Elektrotechniczne, 1990, 35, z. 3, s. 673
32. J. Zarębski: *A New Form of the BJT Model Including Electrothermal Interactions*. 11-th European Confer. on Circuit Theory and Design — ECCTD'93, Davos 1993, Vol. 1, p. 431
33. J. Zarębski, K. Górecki: *D.C. Electrthermal Hybrid BJT Model for SPICE*. 6-th Simulation of semiconductor Devices and Processes — SISDEP'95, Erlangen 1995, vol. 6, p. 306
34. J. Zarębski, K. Górecki: *Pomiar rezystancji termicznej elementów półprzewodnikowych z wykorzystaniem systemu mikrokomputerowego*. Podstawowe Problemy Energoelektroniki — PPEV, Ustroń 1993, s. 463
35. J. Zarębski, K. Górecki: *Statyczna metoda pomiaru rezystancji termicznej tranzystora bipolarnego*. XV Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, Wiśła 1992, Vol. 1, s. 395
36. J. Zarębski: *The Global Electrothermal Model of a Bipolar Transistor for D.C. electronic Circuits Analysis*. Int. Conf. Communication, Control and Electronics COMCONEL'90, Kair 1990, p. 235
37. J. Zarębski: *The Time Dependence Calculations of the Junction Temperature of Semiconductor Devices*. Int. Journal of Microcomputer Applications, June 1994, Vol. 13, N. 2, p. 62
38. J. Zarębski: *Wielkosygnałowa analiza oddziaływań elektrotermicznych w układach półprzewodnikowych*. Rozprawa doktorska, Politechnika Gdańska, Gdańsk 1986
39. J. Zarębski: *Analiza elektrotermicznych stanów przejściowych w układach elektronicznych*. Kartalnik elektroniki i Telekomunikacji 1996, t. 42, z. 2 s. 145–170
40. J. Zarębski, K. Górecki: *Wybrane problemy stałoprądowej analizy obwodów tranzystorowych w obecności oddziaływań elektrotermicznych*. Zesz. Nauk. WSM w Gdyni, 1993, N. 25, s. 86
41. *The Design Center Analysis-Reference Manual Version 5.1* — MicroSim Corp., 1992

J. ZARĘBSKI

## ELECTROTHERMAL LARGE-SIGNAL MODELS OF SELECTED SEMICONDUCTOR DEVICES

## S u m m a r y

In the paper the d.c and a.c. large-signal electrothermal models of the BJT and the p-n diode are presented. There are two kinds of such models — the first called the global electrothermal model of the second kind, having the continuous and continuously differentiable characteristics, is formulated for the purpose of the electronic circuits analysis using the advanced algorithms of circuits equations solving. The second model called the electrothermal hybrid model is formulated for the analysis using SPICE. Some theoretical considerations are proved by measurements.

*Key words:* electrothermal models of semiconductor devices, BJT, P—N diode.

## Specyfikacja i symulacja ASM w języku VHDL

PAWEŁ WOLAŃSKI

*Instytut Informatyki i Elektroniki, Wyższa Szkoła Inżynierska  
w Zielonej Górze*

*Otrzymano 1996.02.09*

*Autoryzowano do druku 1996.06.21*

Integralną częścią profesjonalnych systemów CAD są języki opisu sprzętu (HDL). W projektowaniu urządzenia cyfrowego bardzo ważnym etapem jest komputerowa symulacja pracy prototypu przed jego wyprodukowaniem i standardowa forma udokumentowania rezultatów. Wiele nowych narzędzi automatycznej syntezy układów cyfrowych wymaga przedstawienia funkcjonowania lub struktury w języku VHDL. Bardzo popularną metodą projektowania układów cyfrowych jest metoda strukturalna wykorzystująca zapis działania algorytmu podobny do opisu graficznego programu komputerowego (flowchart). Modelem projektowanego układu jest wtedy algorytmiczny automat cyfrowy ASM (Algorithmic State Machine). Ze względu na rosnącą popularność symulatorów VHDL i dotychczasowe przyzwyczajenia i doświadczenie projektantów przydatna jest konwersja tradycyjnego opisu automatowego zwłaszcza za pomocą sieci działań na język opisu sprzętu. W artykule przedstawiono częściowe efekty prac nad stworzeniem najbardziej optymalnego stylu opisu ASM w języku VHDL oraz narzędzie (Translator) umożliwiający automatyczną konwersję opisu regułowego (reguły IF...THEN) na język VHDL. Kompilator ten stanowi pomost łączący różne fazy projektowania automatu cyfrowego w jednym środowisku programowym przeznaczonym do projektowania układów cyfrowych z elementami FPGA i FPLD. Praca zawiera również krótki przegląd niektórych znanych algorytmów zamiany opisu automatowego na język VHDL.

*Słowa kluczowe:* systemu CAD, języki opisu sprzętu HDL, algorytmiczny automat cyfrowy

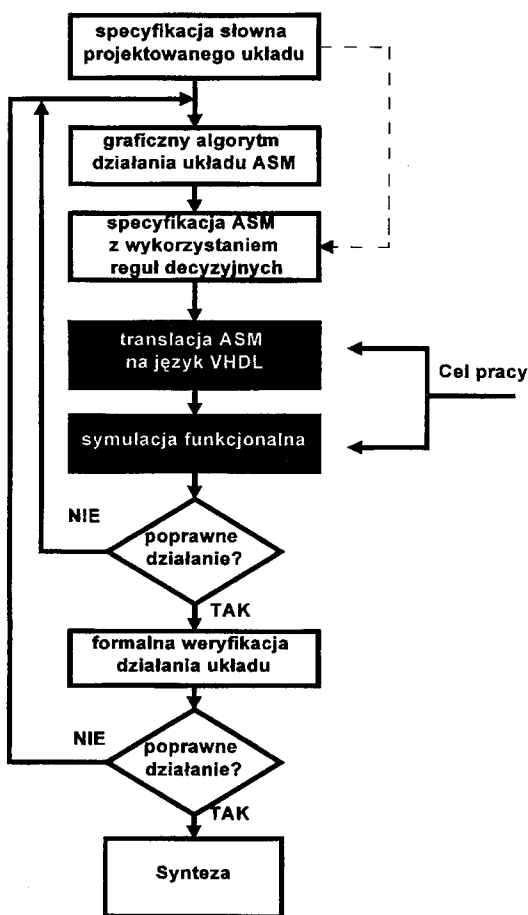
### 1. WPROWADZENIE

Dynamiczny rozwój techniki projektowania układów cyfrowych doprowadził do powstania i szybkiego rozwoju komputerowych systemów wspomagania projektowania (CAD). Integralną częścią profesjonalnych systemów CAD są języki opisu sprzętu np. takie jak VHDL czy Verilog [2, 3, 11, 15]. Z powodu kłopotów związanych m.in. z budową prototypu ważnym etapem jest komputerowa symulacja pracy urządzenia. Należy zwrócić uwagę na fakt, że dla wielu nowych narzędzi automatycznej syntezy układów cyfrowych opis projektowanego układu musi być przedstawiony w postaci języka VHDL [2, 3, 11, 15].

Popularną metodą projektowania układów cyfrowych jest metoda strukturalna [1, 8, 9, 10, 13] wykorzystująca zapis działania algorytmu podobny do opisu programu komputerowego, zwany siecią działań (*flowchart*). Modelem projektowanego układu jest wtedy algorytmiczny automat cyfrowy ASM (Algorithmic State Machine) [8, 10, 13]. Specyficzna postać sieci działań służąca do opisu algorytmicznego automatu cyfrowego w literaturze angielskiej nosi nazwę algorytmicznej sieci działań (ASM chart) [5, 12, 14].

Ze względu na dużą popularność symulatorów VHDL przydatna jest konwersja z opisu automatów za pomocą sieci działań na język opisu sprzętu. Różne metodologie i algorytmy zamiany opisu automatów cyfrowych na język VHDL zostały przedstawione między innymi w pracach [2, 3, 4, 15].

Celem artykułu jest przedstawienie opisu typu ASM w języku VHDL oraz prezentacja narzędzi (translatora) umożliwiającego automatyczną konwersję z opisu regułowego ASM (typu IF...THEN) na język VHDL. Translator ten stanowi pomost łączący różne fazy projektowania automatu cyfrowego w jednym środowisku



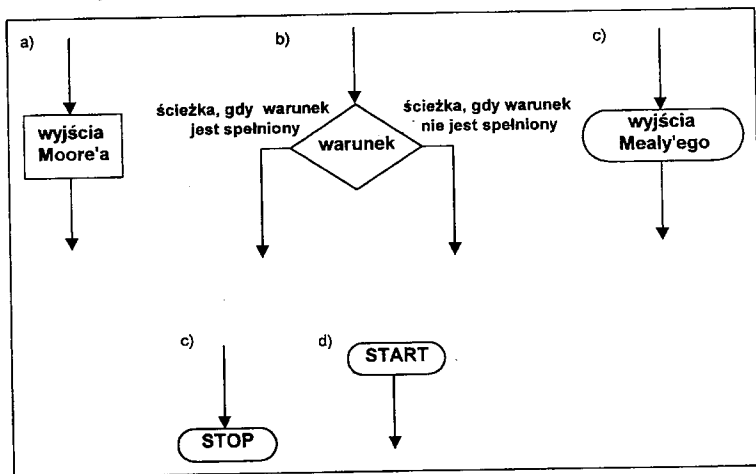
Rys. 1. Jeden z możliwych sposobów projektowania układów cyfrowych

programowym, zorientowanym na programowane struktury logiczne FPLD i FPGA. Początkowym etapem jest opis projektowanego układu z wykorzystaniem ASM, a końcowym etapem jest weryfikacja jego działania przez wykorzystanie symulatora języka VHDL oraz ewentualna synteza zaprojektowanego układu przy pomocy programu automatycznej syntezy (rys. 1).

## 2. ALGORYTMICZNY AUTOMAT CYFROWY

Jedną z metod projektowania układów cyfrowych jest wykorzystanie algorytmicznych automatów cyfrowych zwanych również algorytmicznymi maszynami stanów (*Algorithmic State Machine* — *ASM*). ASM są efektywnym narzędziem do modelowania nawet złożonych systemów [1, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14]. Mogą one również znaleźć zastosowanie do modelowania i syntezy procesów współbieżnych (powiązane sieci działań — *Linked State machine* — *LSM*) [3, 4]. Algorytmiczne automaty stanów często są wykorzystane również przez użytkowników języków opisu sprzętu do specyfikacji działania układu w poglądowy graficzny sposób.

Algorytmiczny automat cyfrowy opisany jest grafem zorientowanym, zbudowanym z dwóch rodzajów wierzchołków: wierzchołków operacyjnych i wierzchołków warunkowych (rys. 2). Wierzchołki operacyjne przedstawiane są w formie prostokątnych klatek operacyjnych, a wierzchołki warunkowe w postaci klatek decyzyjnych o kształcie rombu. Często wyróżnia się wierzchołek operatorowy początkowy (bez wejścia) i wierzchołek operatorowy końcowy (bez wyjścia). Ogólnie biorąc, wierzchołek operatorowy ma jedno wejście i jedno wyjście. Wierzchołki warunkowe mają



Rys. 2. Elementy opisu algorytmicznego automatu stanów:

- a) klatka operacyjna,
- b) klatka decyzyjna,
- c) klatka wyjść warunkowych
- d) klatka końca
- e) klatka początku

jedno wejście i dwa wyjścia. Wejścia i wyjścia wierzchołków połączone są łukami, skierowanymi od wyjścia do wejścia. Każde wyjście wierzchołka połączone jest z tylko jednym wejściem. Każde wejście wierzchołka łączy się z co najmniej jednym wyjściem wierzchołka. W każdej klatce decyzyjnej podaje się jeden z warunków logicznych należących do zbioru  $\{X\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Do klatek operacyjnych zapisuje się podzbiór zbioru operacji (mikrooperacji), tworzących operator (mikrorozkaz)  $Y \subseteq \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ . Warunki logiczne  $\{x\}$  stanowią sygnały wejściowe dla układu sterującego, opisanego algorytmicznym automatem stanów. Zbiór mikrooperacji  $Y$  pokrywa się ze zbiorem sygnałów wyjściowych układu sterującego.

W prawidłowo zbudowanym automacie ASM każdy z wierzchołków grafu leży co najmniej na jednej drodze (ścieżce) prowadzącej z wierzchołka początkowego do wierzchołka końcowego. Algorytmiczna sieć działań modeluje układ sterowania binarnego, mający skończoną liczbę stanów, w związku z czym istnieje równoważny jej automat skończony. Automat ten może być nie tylko zadany za pomocą wejść, wyjść i stanów wewnętrznych. ASM odwzorowuje ciągi stanów wejść  $\{X^*\}$  na ciągi stanów wyjść  $\{Y^*\}$ , a zadany przez niego automat opisuje uporządkowana trójka:  $\langle \{X^*\}, \{Y^*\}, \xi \rangle$  gdzie  $\xi: X^* \rightarrow Y^*$ .

Celem otrzymania opisu automatu za pomocą stanów wewnętrznych dokonuje się etykietowania ASM. Jeżeli etykiety, odpowiadające numerom stanów wewnętrznych są przypisane wierzchołkom operatorowym lub ich wejściom, to etykietowany ASM opisuje automat Moore'a. Umieszczenie etykiet na wyjściach wierzchołków operatorowych daje model układu sterującego w postaci automatu Mealy'ego. Numery etykiet utożsamiane są z numerami stanów automatów.

## 2.1. PRZEKSZTAŁCENIE ASM NA OPIS LOGICZNY AUTOMATU MOORE'A Z WYJŚCIAMI KOMBINACYJNYMI

Chcąc otrzymać system logiczny dla automatu Moore'a postępujemy następująco:

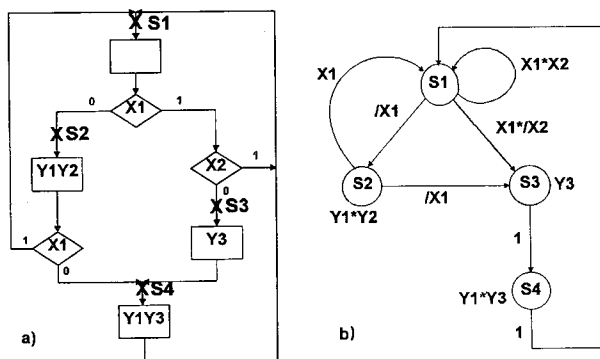
- symbolem **A1** oznacza się początkowy i końcowy wierzchołek operacyjny ASM
- pozostałym wierzchołkom operacyjnym przypisuje się jeden z symboli **A2**, **A3**, ..., **Ak**.

Dwa różne bloki operacyjne, oprócz bloku końcowego nie mogą być oznaczone jednakowymi symbolami. Ścieżkę w ASM, prowadzącą od wierzchołka o etykiecie **A** do sąsiedniego wierzchołka o etykiecie **A'** przechodzącą przez wierzchołki warunkowe, w których zapisane są warunki z podzbioru  $X$  zapisuje się w formie reguły decyzyjnej:

$$A \cdot \tilde{X} \mid - A' \text{ czyli } A \cdot X[A, A'] \mid - A'$$

$$Y \mid - Y[A]$$

gdzie  $\tilde{X} = X[A, A']$  oznacza iloczyn logiczny warunków zapisanych na ścieżce z **A** do **A'** w klatkach decyzyjnych, a  $Y$  iloczyn sygnałów wyjściowych, zapisanych w klatce operacyjnej **A**. Symbol  $\mid -$  (yield) opisuje tutaj wynikanie logiczne [1].



Rys. 3. a) Etykietowanie sieci działań ASM dla automatu Moore'a, b) Graf stanów odpowiadających sieci działań ASM z rys. 3a

Przykład transformacji ASM na układ logiczny Moore'a pokazano na rys. 3. Odpowiedni opis regułowy (rys. 4) może być uważany za symboliczną postać tablicy przejść stosowanej na przykład w pracach [6, 14, 17]. Symbol @ w regule przejścia oznacza operator „next” wzięty z logiki temporalnej [1]. Jeżeli ścieżka przechodzi przez wyjście klatki decyzyjnej, oznaczonej symbolem 1, to odpowiednią literę umieszcza się w iloczynie bez negacji, natomiast, gdy biegnie przez wyjście, oznaczone symbolem 0, litera zapisana w klatce decyzyjnej występuje w iloczynie w postaci zanegowanej.

|           |         |
|-----------|---------|
| S1*/X1    | - @S2   |
| S1*X1*X2  | - @S1   |
| S1*X1*/X2 | - @S3   |
| S2*X1     | - @S1   |
| S2*/X1    | - @S4   |
| S3        | - @S4   |
| S4        | - @S1   |
| S2        | - Y1*Y2 |
| S3        | - Y3    |
| S4        | - Y1*Y3 |

Rys. 4. Opis regułowy dla automatu Moore'a z rys. 3a

Opis ASM systemem reguł decyzyjnych jest zakończony gdy cały ASM jest pokryty ścieżkami, odpowiadającymi poszczególnym regułom decyzyjnym. Opis regułowy automatu często sporządza się przy ograniczeniach  $|X(a_i)| \leq g_{\max}$ , w szczególności  $|X(a_i)| \leq 1$ ; gdzie  $|X(a_i)|$  jest liczbą warunków logicznych istotnych w stanie  $a_i$ . Etykietami dodatkowymi oznacza się wejścia klatek decyzyjnych, do których prowadzą ścieżki z sąsiednich klatek warunkowych, nie przechodzące przez klatki operacyjne. Etykiety dodatkowe odpowiadają stanom dodatkowym automatu Moore'a. Stan ten, w zależności od wymagań stawianych przez układ sterowany, przypisuje się albo pusty zbiór sygnałów wyjściowych, albo zbiór sygnałów wyjściowych wpisanych w klatce operacyjnej, z której prowadzą ścieżki do etykietowanych dodatkowo wejść klatek decyzyjnych.

## 2.2. PRZEKSZTAŁCENIE ASM NA OPIS REGUŁOWY AUTOMATU MEALY'EGO Z WYJŚCIAMI KOMBINACYJNYMI

Zbiór stanów automatu Mealy'ego otrzymuje się oznaczając numerami (etykietując) odpowiednie elementy sieci działań.

- symbolem  $A1$  oznacza się wejście pierwszego wierzchołka występującego za wierzchołkiem początkowym oraz wejście wierzchołka końcowego
- symbolami  $A2, A3, \dots, Ak$  oznacza się pozostałe wejścia klatek, występujące za kłatkami operacyjnymi
- wejścia różnych klatek oznacza się różnymi symbolami
- wejście klatki może być oznaczone tylko jednym symbolem.

Ścieżkę w grafie, prowadzącą od punktu o etykiecie  $A$  do punktu o etykiecie  $A'$ , najbliższego i sąsiedniego względem  $A$ , przechodzącą przez wierzchołki decyzyjne, w których zapisane są warunki z podzbioru  $X$  zapisuje się w formie dwóch reguł decyzyjnych:

$$A \cdot \tilde{X} \mid -A' \quad \text{czyli} \quad A \cdot X[A, A'] \mid -A'$$

$$A \cdot \tilde{X} \mid -\tilde{Y} \quad \text{czyli} \quad A \cdot X[A, A'] \mid -Y[A, A']$$

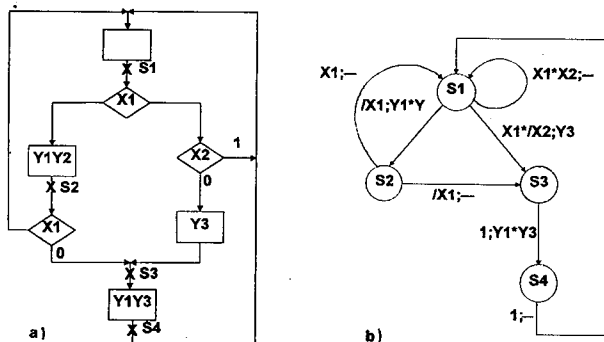
gdzie  $Y[A, A']$  oznacza zbiór sygnałów operacyjnych napotkanych w kłatkach operacyjnych i wyjściowych na ścieżce od wierzchołka  $A$  do wierzchołka  $A'$ . Pozostałe oznaczenia wyjaśniono w rozdz. 2.1.

Powyższe reguły decyzyjne, mające jednakową lewą stronę dają się zredukować do jednej:

$$A \cdot \tilde{X} \mid -A'Y$$

Jeżeli ścieżka przechodzi przez wyjście klatki warunkowej, oznaczone symbolem 1, to zapisana w tej klatce litera wchodzi do iloczynu bez negacji, natomiast, gdy ścieżka przebiega przez wyjście oznaczone symbolem 0, to litera występuje w iloczynie w postaci zanegowanej.

ASM jest opisany systemem reguł decyzyjnych, gdy cały graf jest pokryty ścieżkami, odpowiadającymi tym regułom. Ze względu na implementację systemu



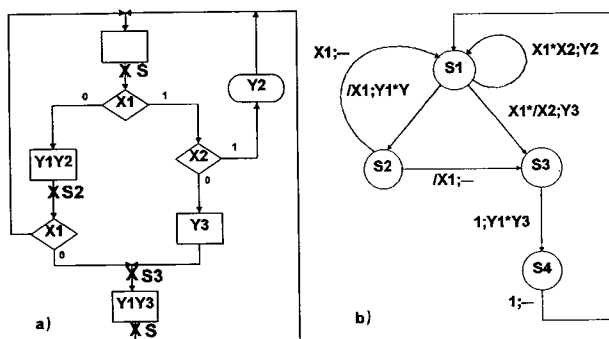
Rys. 5 a) Etykietowanie sieci działań ASM dla automatu Mealy'ego, b) Graf stanów odpowiadających sieci działań ASM z rys. 5a

|           |             |
|-----------|-------------|
| S1*/X1    | - @S2*Y1*Y2 |
| S1*X1*X2  | - @S1       |
| S1*X1*/X2 | - @S3*Y3    |
| S2*X1     | - @S1       |
| S2*/X1    | - @S4*Y1*Y3 |
| S3        | - @S4*Y1*Y3 |
| S4        | - @S1       |

**Rys. 6. Opis regułowy dla automatu Mealy'ego z rys. 5a**

reguł decyzyjnych, często narzuca się warunek, by  $|X(a_i)| \leq g_{\max}$  gdzie  $X(a_i)$  oznacza zbiór liter wejściowych (sygnałów wejściowych) występujących po lewej stronie reguł decyzyjnych (istotnych w stanie  $a_i$ ) a  $g_{\max} = 1$ . Wówczas etykietowanie ASM musi zostać uzupełnione o dodatkowe etykiety, rozdzielające klatki decyzyjne. Etykietami dodatkowymi oznaczone są wejścia klatek decyzyjnych, do których prowadzą ścieżki z sąsiednich klatek warunkowych, nie przechodzące przez klatki operacyjne. Uzyskuje się w ten sposób ograniczenie  $X(a_i) \leq 1$ . Etykiety dodatkowe odpowiadają stanom dodatkowym bez wyjść (mikrooperacje puste). Przykład takiego etykietowania zaprezentowano na rys. 5, a opis wg reguł decyzyjnych przedstawiono na rys. 6.

Jedną z cech odróżniających ASM od zwykłych sieci działań są klatki wyjść warunkowych (por. rys. 2c). Przedstawiają one w bezpośredni graficzny sposób uzależnienie odpowiedniego sygnału wyjściowego od aktualnego stanu automatu i stanu sygnałów wejściowych. Przykład takiej sieci działań podano na rys. 7, a odpowiedni opis regułowy przedstawia rys. 8.



b) Graf stanów odpowiadający sieci działań ASM z rys. 7a

|           |             |
|-----------|-------------|
| S1*/X1    | - @S2*Y1*Y2 |
| S1*X1*X2  | - @S1*Y2    |
| S1*X1*/X2 | - @S3*Y3    |
| S2*X1     | - @S1       |
| S2*/X1    | - @S4*Y1*Y3 |
| S3        | - @S4*Y1*Y3 |
| S4        | - @S1       |

Rys. 8. Opis regułowy dla automatu Mealy'ego z rys. 7a

Automaty zawierające klatki wyjść warunkowych niekiedy nazywane są uogólnionymi automatami z wyjściami typu Moore'a i Mealy'ego [14] lub krótko automatami Moore'a – Mealy'ego.

### 2.3. PRZEKSZTAŁCENIE ASM NA OPIS REGUŁOWY AUTOMATU MOORE'A Z WYJŚCIAMI REJESTROWYMI

Automat Moore'a z wyjściami rejestrowymi skojarzonymi z rejestrem stanu wewnętrznego, rozpatrywany może być również jako automat Mealy'ego z opóźnionymi o jeden takt wyjściami typu rejestrowego, lub odwrotnie [14]. Podczas etykietowania postępuje się w sposób identyczny jak w przypadku automatu Mealy'ego pamiętając o faktycznym momencie generowania aktywnego zbocza sygnału zegarowego.

Zaletą implementacji układu z wyjściami rejestrowymi jest nie tylko bardziej pewne działanie układu (synchronizacja wyjść i brak hazardu wyjściowego) ale również i jego uniwersalność [16]. Opis regułowy sieci działań z rys. 3 dla automatu Moore'a z wyjściami rejestrowymi przedstawiono na rys. 9.

|           |               |
|-----------|---------------|
| S1*/X1    | - @S2*@Y1*@Y2 |
| S1*X1*x2  | - @S1         |
| S1*X1*/X2 | - @S3*@Y3     |
| S2*X1     | - @S1         |
| S2*/X1    | - @S4*@Y1*@Y3 |
| S3        | - @S4*@Y1*@Y3 |
| S4        | - @S1         |

Rys. 9. Opis regułowy dla automatu Moore'a z wyjściami rejestrowymi

Ponieważ współczesne układy FPLD mają skonfigurowane komórki wyjściowe, synchronizacja wyjść nie zwiększa ich liczby. Rozpatrywany układ sekwencyjny jest równoważny automatu Moore'a w którym kod stanu wyjść stanowi część kodu stanów. W szczególnym przypadku kod stanu wyjść lub jego podzbiór może być równocześnie kodem stanów. Zdecydowanie redukuje to liczbę komórek i koniecznych do realizacji końcówek układu scalonego.

## 3. METODOLOGIA MODELOWANIA ASM W JĘZYKU VHDL

Jest wiele różnych metodologii opisu algorytmicznego automatu stanów (ASM) w języku VHDL [2, 3, 15]. Metodologie te różnią się stylem opisu. Wykorzystywany w nich jest zarówno opis funkcjonalny (proceduralny) jak i opis struktury (nieproceduralny) języka VHDL. W proponowanej metodologii wykorzystano wyjścia rejestrowe (register outputs) zarówno do kodowania stanów jak i zapamiętywania aktualnych stanów wyjść. Stosując etykietowanie opisane w rozdziale 2.3 można modelować zarówno automaty Moore'a jak i Mealy'ego stosując ten sam wzorzec (szablon). Metodologia zostanie omówiona dla sieci ASM z rys. 3.

### 3.1. METODA BŁOKÓW DOZOROWANYCH

Metoda bloków dozorowanych korzysta ze stylu języka VHDL opisującego strukturę modelowanej sieci działań projektowanego układu (rys. 3). Wykorzystywana jest konstrukcja blokowa. Wykonywaniem przypisań zawartych w blokach kierują semafore (guard) [2]. Szkic tego rozwiązania prezentowany jest na rys. 10.

```

package pack_ASM is
  constant AM_IN  : integer :=2;
  constant AM_OUT : integer :=3;
  constant AM_ST  : integer :=4;

  subtype T_STATES is integer range 1 to AM_ST;
  type T_OUT is array(1 to am_out) of bit;
  type T_IN is array(1 to am_in) of bit;
end pack_ASM;

use work.pack_ASM.all;
entity ASM4 is
  port( X    : in T_IN := "00";
        CLK : in bit;
        Y    : out T_OUT := "000");
end ASM4;

architecture MACHINE of ASM4 is
begin
  B1: block(CLK='1' and not CLK'stable)
    type T_STATES_VECTOR is array (natural range <>) of T_STATES;

    function RESOLVE (S : IN T_STATES_VECTOR(1 to AM_ST )) return T_STATES is
    begin
      return s(1);
    end RESOLVE;

    signal state : RESOLVE T_STATES register := 1;
  begin
    S1 : block(( state = 1 ) and guard)
    begin
      state <= guarded 2 when X(1)='0' else
                3 when X(1)='1' and X(2)='0' else
                1;
    end block S1;
    S2 : block(( state = 2 ) and guard)
    begin
      state <= guarded 4 when X(1)='0' else
                1;
    end block S2;
    S3 : block(( state = 3 ) and guard)
    begin
      state <= guarded 4;
    end block S3;
    S4 : block(( state = 4 ) and guard)
    begin
      state <= guarded 1;
    end block S4;

    O : block (guard)
    begin
      Y <= guarded "110" when state=1 and X(1)='0' else
            "001" when state=1 and X(1)='1' and X(2)='0' else
            "000" when state=1 and X(1)='1' and X(2)='1' else
            "000" when state=2 and X(1)='1' else
            "011" when state=2 and X(1)='0' else
            "101" when state=3 else
            "000";

      end block O;
    end block B1;
  end;
end;

```

Rys. 10. Model wykorzystujący konstrukcję bloków dozorowanych

Każdy poprawnie zaprojektowany algorytmiczny automat stanów musi w każdym momencie znajdować w jednym i tylko jednym stanie. Wybór odpowiedniego stanu dokonywany jest przez wyznaczenie wartości semaforów kierujących dostępem do przypisań zawartych wewnątrz bloków. Z tego powodu symulator musi wyznaczyć wartości wszystkich semaforów w każdym bloku by znaleźć blok, który powinien wyznaczyć następny stan układu. O tym w jakim stanie znajduje się aktualnie układ mówi sygnał o nazwie *state*. Sygnał ten musi być skojarzony z funkcją rezolucji, ponieważ jest sterowany przez więcej niż jeden sterownik [2, 3, 11, 15]. Jeżeli automat został prawidłowo zamodelowany w języku VHDL to jest niemożliwe aby dwa sterowniki jednocześnie próbowały ustalić wartość sygnału *state*, dlatego też wyznaczenie wartości wszystkich semaforów jest zbędnie wykonywaną czynnością przez komputer. Wyjścia ustawiane są za pomocą konstrukcji bloków dozorowanych (guarded blocks) [2] albo ustawia je specjalny proces [3]. Pierwsze rozwiązanie wydaje się być bardziej naturalne (eleganckie), ponieważ wykorzystywany jest konsekwentnie styl opisu struktury projektowanego układu, w przeciwieństwie do drugiego rozwiązania gdzie wykorzystywany jest dodatkowo opis funkcjonalny (proce).

### 3.2. METODA WYKORZYSTUJĄCA OPIS TABLICY STANÓW

W ogólnym przypadku, projektując algorytmiczny automat stanów metodą klasyczną [7, 9, 13] tworzy się tablice stanów. Tablica ta może zostać przeniesiona bezpośrednio do software'owego modelu układu. Metoda ta wydaje się być użyteczna dla układów, w których liczba wejść, wyjść i możliwych stanów układu jest mała. Jeżeli liczba ta wzrasta równocześnie gwałtownie wzrastają rozmiary tablicy, co powoduje rezerwacje dużej części pamięci komputera. Dodatkowo proces wyszukiwania w tablicy odpowiedniej wartości jest czasochłonny nawet dla aktualnie produkowanych stacji roboczych. Ponadto w rzeczywistych układach w wielu stanach wartości niektórych sygnałów wejściowych są nieistotne. Niestety ze względu na semantykę języka VHDL niezbędne jest zdefiniowanie wszystkich możliwych przejść. Ze względu na to, że wejścia układu są wartościami binarnymi, a indeksy tablic wartościami dziesiętnymi lub heksadecymalnymi niezbędne jest stosowanie funkcji konwersji, która dodatkowo zwalnia proces symulacji. Przedstawienie tablicy stanów w pliku tekstowym jest mało przejrzystą formą prezentacji działania układu.

Z tych powodów efektywność tej metody wydaje się być bardzo niska. Na rys. 11 zamieszczony jest szkic modelowania algorytmicznej maszyny stanów (z rys. 3) na podstawie klasycznej tablicy przejść.

### 3.3. METODA WYKORZYSTUJĄCA OPIS FUNKCJONALNY JĘZYKA VHDL

Alternatywna metoda modelowania algorytmicznego automatu stanów w języku VHDL jest przedstawiona na rys. 12. Model z rys. 12 opisuje sieć działań prezentowaną na rys. 3. W metodzie tej model całej maszyny zawarty jest w dwóch

```

function SET_NEXT_STATE( CURRENT_STATE : T_STATES; INPUT : T_IN) return
  T_STATES is constant TRANSITION_TABLE : TRANSITION :=
    (( 2, 3, 2, 1 ),
     ( 4, 1, 4, 1 ),
     ( 4, 4, 4, 4 ),
     ( 1, 1, 1, 1 ));
variable INDEX_IN : integer;
variable NEXT_STATE : T_STATES;
begin
  INDEX_IN := BIT_VEC TO_INT( INPUT );
  NEXT_STATE := TRANSITION_TABLE( CURRENT_STATE )( INDEX_IN );
  return NEXT_STATE;
end SET_NEXT_STATE;

function SET_OUT( CURRENT_STATE : in T_STATES) return T_OUT is
constant OUTPUT : MOORE_OUT := ( "001", "011", "100", "011" );
variable OUTPUTS : T_OUT;
begin
  OUTPUTS := OUTPUT( CURRENT_STATE );
  return OUTPUTS;
end SET_OUT;

entity ASM4 is
  port( X      : in T_IN := "00";
        CLK    : in bit;
        Y      : out T_OUT := "000");
end ASM4;

architecture ASM3 of ASM3 is
signal CURRENT_STATE : T_STATES := 1;
begin
  process
    variable NEXT_STATE : T_STATES := 1;
  begin
    if RESET='0' then
      NEXT_STATE := SET_NEXT_STATE( CURRENT_STATE, X );
      Y <= SET_OUT( NEXT_STATE ) after 1 ns;
    end if;-- RESET
    CURRENT_STATE <= NEXT_STATE after 1 ns;
    wait on X, CLK until (CLK='1');
  end process;
end;

```

Rys. 11. Model wykorzystujący opis tablicy stanów

procesach. W pierwszym procesie (o nazwie *set\_state*) wyznaczany jest aktualny stan automatu, który zapisany jest jako sygnał *current\_state*. Sygnał ten jest sterowany tylko przez jeden sterownik, dzięki czemu nie ma potrzeby użycia funkcji rezolucji. Sekwencja instrukcji zawarta wewnątrz procesu wykonywana jest w momencie zmiany sygnału *reset* lub w momencie wystąpienia narastającego zbocza sygnału zegarowego (*clk*). Jeżeli sygnał *reset* jest aktywny to proces wprowadza automat w zadany stan początkowy. W przypadku gdy sygnał *reset* nie jest aktywny to wyrażenie *case of* ustala na podstawie aktualnego stanu układu i stanu wejść, następny stan układu (sygnał *next\_state*). Jeżeli przejście do następnego stanu jest zależne od stanu wejść automatu to sprawdzenie odpowiednich warunków (stanów wejść) dokonuje kolejna (zagnieżdżona) instrukcja *case of*. Gdy przejście do następnego

```

entity ASM is
    port( X      : in  T_INPUTS;
          RESET  : in  bit;
          CLK    : in  bit;
          STATE  : out T_STATES;
          Y      : out T_OUTPUTS);
end ASM;
architecture MACHINE of ASM is
    signal CURRENT_STATE : T_STATES := 1;
begin
    SET_STATE : process
        variable NEXT_STATE : T_STATES;
    begin
        if (RESET='0') and (now/=0 ns) then
            case CURRENT_STATE is
                when 1 =>
                    case X(1) is
                        when '0' =>
                            NEXT_STATE := 2;
                        when '1' =>
                            case X(2) is
                                when '0' =>
                                    NEXT_STATE := 3;
                                when '1' =>
                                    NEXT_STATE := 1;
                            end case;
                        end case;
                when 2 =>
                    case X(1) is
                        when '0' =>
                            NEXT_STATE := 4;
                        when '1' =>
                            NEXT_STATE := 1;
                        end case;
                when 3 =>
                    NEXT_STATE := 4;
                when 4 =>
                    NEXT_STATE := 1;
                end case;
            else
                NEXT_STATE := 1;
            end if;
            CURRENT_STATE <= NEXT_STATE ;
            wait on RESET, CLK until CLK='1';
        end process;
        STATE <= CURRENT_STATE;
        SET_OUTPUT : process( CURRENT_STATE , X )
        begin
            case CURRENT_STATE'last_value is
                when 1 =>
                    case X(1) is
                        when '0' =>
                            Y <= "110";
                        when '1' =>
                            case X(2) is
                                when '0' =>
                                    Y <= "001";
                                when '1' =>
                                    Y <= "000";
                            end case;
                        end case;
                when 2 =>
                    case X(1) is
                        when '0' =>
                            Y <= "101";
                        when '1' =>
                            Y <= "000";
                        end case;
                when 3 =>
                    Y <= "101";
                when 4 =>
                    Y <= "000";
                end case;
            end process;
        end;
    end;
end;

```

Rys. 12. Model wykorzystujący konstrukcje *case of*

stanu następuje bezwarunkowo to przypisanie wartości do sygnału *next\_state* następuje bezpośrednio po ustaleniu aktualnego stanu układu (nie jest konieczne sprawdzenie stanu wejść).

W formie przykładu przedstawiono fragment analizy opisu prezentowanego na rys. 12. Jeżeli układ znajduje się w stanie nr 1 (*current\_state*=1) to konieczne jest sprawdzenie stanu sygnału (wejścia) *X*(1). Gdy sygnał ten jest równy zero to następnym stanem układu będzie stan nr 2 (*next\_state*=2). W przypadku gdy sygnał *X*(1) jest równy jeden to konieczne jest sprawdzenie stanu sygnału *X*(2). Jeżeli sygnał ten jest równy zero to następnym stanem będzie stan nr 3, a gdy jest równy jeden to następnym stanem będzie stan nr 1.

Wyjścia układu ustala proces *set\_output*. Wartości wyjść są ustawiane z wykorzystaniem analogicznej konstrukcji *case of*. Proces ten jest czuły na zmianę stanu automatu i na narastające zbocze sygnału synchronizującego (*clk*). Zamiast konstrukcji *case of* można również wykorzystać zagnieżdżające się konstrukcje *if-then-elsif-else*.

Styl ten wydaje się być bardzo naturalny i przejrzysty. Nawet ręczne stworzenie modelu automatu z wykorzystaniem wzorca modelu w języku VHDL jest łatwym zadaniem.

### 3.4. PORÓWNANIE RÓŻNYCH METODOLOGII OPISU ASM W JĘZYKU VHDL

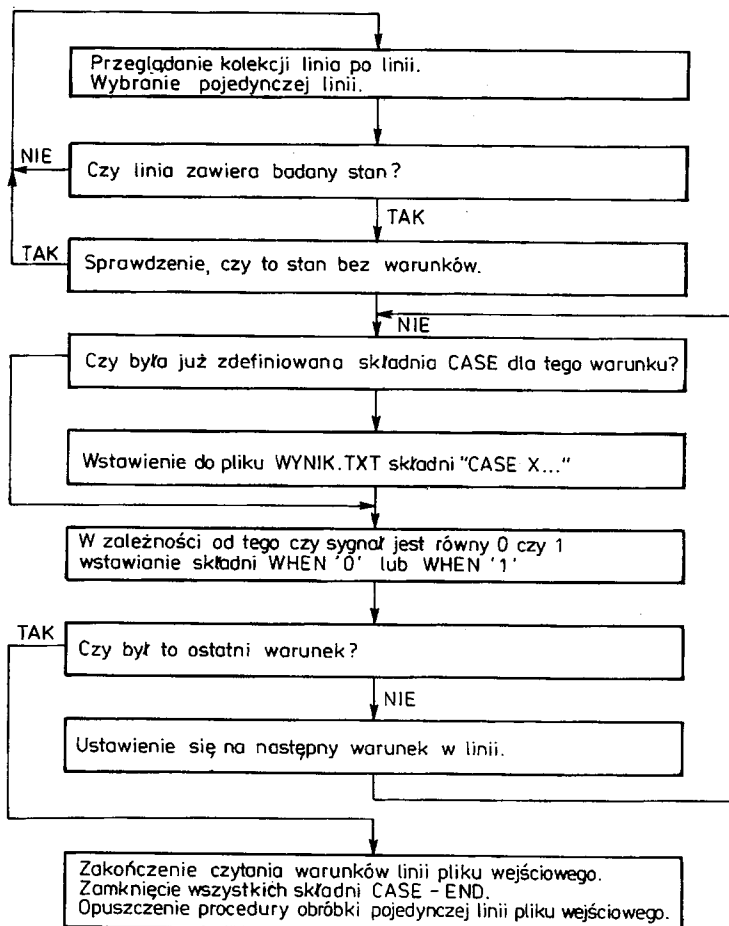
W tabeli 1 przedstawiono zestawienie charakterystycznych cech dla różnych stylów modelowania algorytmicznych maszyn stanów w języku VHDL.

Tabela 1. Charakterystyczne cechy różnych stylów opisu ASM w języku VHDL

| Metoda tablic stanów                                                                                                                                                                                                                                                      | Metoda bloków dozorowanych                                                                                                                                                                                                               | Metoda wykorzystująca opis sekwencyjny                                                                                                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• wymaga dużych zasobów pamięci</li> <li>• konieczność wykonywania dodatkowych czasochłonnych obliczeń</li> <li>• konieczność definiowania nieistotnych przejść (<i>don't care</i>)</li> <li>• mała przejrzystość opisu</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• konieczność wyznaczenia wartości wszystkich semaforów w każdym etapie symulacji</li> <li>• konieczność zastosowania funkcji rezolucji</li> <li>• naturalny i bardzo przejrzysty opis</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• opis jest naturalny i bardzo przejrzysty</li> <li>• nie ma potrzeby wykonywania dodatkowych obliczeń</li> <li>• nie ma potrzeby użycia funkcji rezolucji</li> </ul> |

## 4. ALGORYTM DZIAŁANIA TRANSLATORA OPISU REGUŁOWEGO ASM NA JĘZYK VHDL

W celu ułatwienia przygotowania opisu ASM w języku VHDL zrealizowano translator przetwarzający reguły decyzyjne otrzymane na podstawie sieci działań, grafu stanów lub tablicy przejść (tablicy tranzycyjnej [14]). Wykorzystana forma opisu



Rys. 13. Algorytm działania programu tłumacza

może być również łatwo otrzymana na podstawie tak zwanych automatów języków HDL, takich jak na przykład ABEL, CUPL, PALASM, MACHXL, MINC-MACHXL itp.). Program został napisany w języku Pascal (Borland Pascal 7.0) i współpracuje ze środowiskiem VHDL firmy Model Technology.

Algorytm działania programu przedstawiony jest na rysunku 13. Program odczytuje kolejne linie pliku tekstowego zawierające opis kolejnych reguł decyzyjnych. Przykładowa zawartość pliku wejściowego przedstawiona jest na rysunku 14.

|                          |                                                                                                |
|--------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| S3 -@S4 * Y1 * Y2        | przejście bezwarunkowe ze stanu S3 do stanu S4 i ustawienie wyjść Y1 i Y2                      |
| S1 * /X1  -@S2 * Y1 * Y2 | prosty warunek jednoargumentowy (/X1) przejścia z S1 do S2 i ustawienie wyjść Y1, Y2           |
| S1 * X1 * /X2  -@S3 * Y3 | złożony warunek wieloargumentowy (X1, /X2) przejścia ze stanu S1 do S3 i ustawienie wyjścia Y3 |
| S4 -@S1                  | bezw warunkowe przejście z S4 do S1                                                            |

Rys. 14. Przykładowy fragment opisu regułowego algorytmicznego automatu stanów

Po zakończeniu odczytu wyznaczane są zbiory wejść, wyjść i możliwych stanów układu. Do pliku wyjściowego zapisywane są w pierwszej kolejności stałe elementy modelu (takie jak deklaracja *entity* czy architektury), a następnie kolejne rozkazy wyboru *case of* dla kolejnych stanów układu.

## PODSUMOWANIE — KIERUNKI ROZWOJU

W artykule przedstawiono efekty prac nad stworzeniem najbardziej optymalnego stylu opisu algorytmicznego automatu cyfrowego w języku VHDL. Efektem przeprowadzonych prac było stworzenie programu translatora opisu regułowego algorytmicznych maszyn stanów na język VHDL.

Dalsze badania będą ukierunkowane na bardziej elastyczne i uniwersalne pokrycie wszystkich znanych klas automatów cyfrowych. W pierwszej kolejności prowadzone są prace nad stworzeniem optymalnego stylu opisu współbieżnych (komunikujących się) algorytmicznych automatów stanów (Linked State Machine). Wykorzystanie procesów współbieżnych reprezentowanych w języku VHDL do przedstawienia składowych automatowych sieci Petriego [18], może być następnym bardzo efektywnym i naturalnym sposobem specyfikacji funkcjonowania układu cyfrowego w celu jego symulacji i ewentualnej automatycznej syntezy.

Praca powstała w ramach grantu KBN nr 884/T11/95/08, pod kierunkiem naukowym prof. dr hab. inż. Mariana Adamskiego.

## BIBLIOGRAFIA

1. M. Adamski: *Projektowanie układów cyfrowych systematyczną metodą strukturalną*. Monografie nr 49, Wydawnictwo WSI w Zielonej Górze, 1990
2. J.R. Armstrong: *Chip-Level Modelling with VHDL*. Prentice-Hall, Inc., London 1989, pp. 50—52
3. L. Baker: *VHDL Programming With Advanced Topics*. John Wiley & Sons, Inc., New York 1993, pp. 209—233
4. H. Belhadj, L. Gerbaux, M.C. Bertrand, G. Saucier: *Specification and Synthesis of Communicating Finite State Machine*. IFIP Workshop On Control Dominated Synthesis from a Register Transfer Level Description, Grenoble, 1992
5. E.L. Daggles: *Logic design with emphasis on ASM method*. IEE Digital Electronics and Computing Series 2, Semicustom IC Design and VLSI 1983
6. D.H. Green, M.A. Chunghtai: *Use of multiplexers in direct synthesis of ASM-based design*. IEE Proceedings, 1986, Vol. 133, Pt. E, No. 4
7. W. Majewski: *Układy logiczne*. WNT, Warszawa 1992
8. P. Misiurewicz: *Podstawy techniki cyfrowej*. WNT, Warszawa 1985
9. W. Majewski, T. Łuba, K. Jasiński, B. Zbierzchowski: *Programowalne moduły logiczne w syntezie układów cyfrowych*. WKŁ, Warszawa 1992
10. M. Molski: *Modułowe i mikroprogramowalne układy cyfrowe*. WKŁ, Warszawa 1986
11. D.L. Perry: *VHDL*. McGraw-Hill, New York 1991
12. R.S. Sandige: *Modern Digital Design*. McGraw-Hill, New York 1990

13. W. Traczyk: *Układy cyfrowe — podstawy teoretyczne i metody syntezy*. WNT, Warszawa 1986
14. J.F. Wakerly: *Digital Design Principles and Practices*. New York 1990, s. 501 — 507
15. D.R. Coelho: *The VHDL Handbook*. Kluwer Academic Publishers, Boston 1989
16. M. Bolton: *Digital Systems Design with Programmable Logic*. Addison-Wesley Publishing Company, Wokingham, England, 1990
17. P. Wolański: *Modelowanie automatu cyfrowego z wykorzystaniem podzbioru sekwencyjnego języka VHDL*. 16 MSN, tom II Elektrotechnika i Elektronika, Zielona Góra, 1994, s. 108 — 111
18. M. Węgrzyn: *Implementacja współbieżnych kontrolerów cyfrowych z wykorzystaniem PLD*. Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji 1996, t. 42, z. 2, ss. 235 — 251

P. WOLAŃSKI

## WHDL SPECIFICATION AND SIMULATION OF ALGORITHMIC STATE MACHINE

### S u m m a r y

Hardware description languages (HDLs) are integral parts of many professional CAD systems. They help to solve some important problems that are related to prototyping of digital hardware. One of the most important ones is a big cost of building prototype. From this reason the computer simulation is very important. The initial description has to be given in VHDL for many synthesis tools. Algorithmic State Machine (ASM) methodology is a very popular way of designing digital devices. This approach is very similar to flowcharting, which describes graphically the algorithms of a computer program. Because of popularity of VHDL simulators there is a need to conversion from ASM description to VHDL. In this paper some effects of research on optimal style of description ASM in VHDL are presented. The translator from rule based description of the ASM to VHDL was created. The paper also presents selected different approaches of conversion ASM into VHDL.

*Key words:* systems CAD, HDL languages, algorithmic state machine.

## **Analiza elektrotermicznych stanów przejściowych w układach elektronicznych**

JANUSZ ZARĘBSKI

*Katedra Radioelektroniki Morskiej  
Wyższa Szkoła Morska w Gdyni*

*Otrzymano 1996.03.29*

*Autoryzowano do druku 1996.04.18*

W artykule przedstawiono nową metodę i algorytm do elektrotermicznej wielkosygnałowej analizy stanów przejściowych w układach elektronicznych. Metoda ta wykorzystuje globalne elektrotermiczne modele drugiego rodzaju elementów przedstawione w pracy [48] oraz dyskretne modele wyróżnionych z układu: dynamicznych bloków liniowych — stowarzyszone z efektywnymi algorytmami obliczania całki splotu [49] i dynamicznych bloków nieliniowych — stowarzyszone z algorytmem van Bokhovena [35]. Praktyczną implementacją metody jest program specjalizowany DYNAL, napisany w języku Turbo-Pascal dla komputera klasy IBM PC. Zamieszczone w pracy wyniki analiz i pomiarów wybranych układów elektronicznych potwierdzają poprawność metody zaproponowanej w pracy.

*Słowa kluczowe:* oddziaływania elektrotermiczne, układy dynamiczne, algorytmy

### **1. WPROWADZENIE**

Elektrotermiczna analiza stanów przejściowych polega na wyznaczeniu czasowych przebiegów prądów, napięć i temperatur wnętrza elementów przy uwzględnieniu samonagrzewania i wzajemnych oddziaływań termicznych pomiędzy elementami, np. w układzie scalonym.

Istnieje wiele typów układów elektronicznych pracujących typowo w warunkach znacznych zmian mocy chwilowych wydzielanych w elementach. W układach takich zmiany mocy mogą prowadzić zarówno do bardzo szybkich zmian temperatur, rzędu kilku kelwinów na mikrosekundę [16, 31], jak i do powolnych zmian temperatury, rzędu kilku kelwinów na minutę. Te ostatnie mogą mieć miejsce nawet po upływie godziny od włączenia zasilania [15, 46].

Oddziaływania elektrotermiczne w warunkach dynamicznych mają zatem szczególnie złożony charakter, a ich prawidłowa symulacja jest trudna i wymaga użycia specjalnych metod, algorytmów i programów komputerowych.

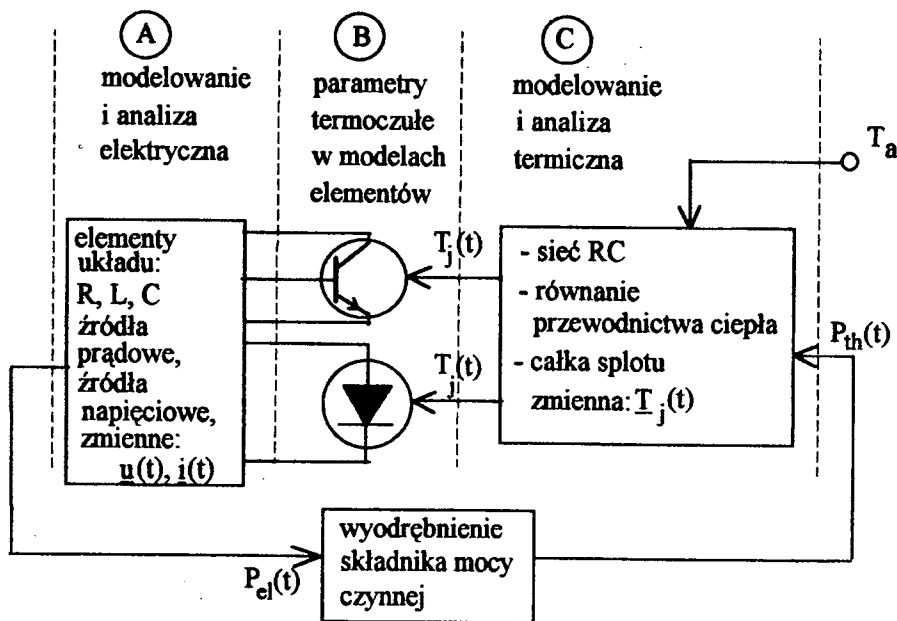
Algorytmy i programy komputerowe prezentowane w pracach innych autorów, np. [2, 11, 12, 14, 25, 29, 30] jak i we wcześniejszych pracach autora, np. [15, 41], posiadają szereg wad i ograniczeń, utrudniających obliczenia, czy wręcz uniemożliwiających uzyskanie określonych właściwości układu, wynikających np. z pominięcia inercji elektrycznej [11, 12, 14, 15, 30, 41], czy też z nieuwzględnienia zależności współczynnika wzmocnienia prądowego tranzystora bipolarnego od prądu kolektora [2, 25].

W rozdziale 2 dokonano przeglądu metod analizy elektrotermicznych stanów przejściowych w układach elektronicznych. W rozdziale 3 przedstawiono opracowaną przez autora metodę oraz algorytm takiej analizy, oparte na wykorzystaniu stowarzyszonych modeli dyskretnych. Przykłady analiz przeprowadzonych przy pomocy specjalizowanego programu DYNAL, stanowiącego praktyczną implementację zaproponowanej w pracy metody, przedstawiono w rozdziale 5.

## 2. CHARAKTERYSTYKA METOD I ALGORYTMÓW SYMULACJI ELEKTROTERMICZNYCH STANÓW PRZEJŚCIOWYCH

### 2.1. INFORMACJE WSTĘPNE – PODZIAŁ METOD, KLASYFIKACJA

W elektrotermicznej analizie stanów przejściowych w układach elektronicznych oddziaływania elektrotermiczne w elementach (samonagrzewanie) oraz pomiędzy elementami (wzajemne oddziaływania termiczne) realizowane są poprzez połączenie elektrotermicznych modeli pierwszego rodzaju elementów półprzewodnikowych, tzn.



Rys. 1. Schemat realizacji analizy elektrotermicznej

modeli skupionych z jednorodną temperaturą wnętrza, np. [18] oraz termicznego modelu elementu lub układu w postaci równania przewodnictwa ciepła, sieci RC lub całki spłotu. Wynikiem analizy elektrotermicznej jest wektor zmiennych elektrycznych w układzie (prądy i napięcia) oraz temperatur wnętrza elementów.

Na rys. 1 przedstawiono schemat blokowy ilustrujący sposób realizacji analizy elektrotermicznej. W celu przeprowadzenia takiej analizy należy sformułować i rozwiązać równania (układ równań) wynikające z: topologii obwodu (blok A), zależności stanowiących elektrotermiczny model pierwszego rodzaju elementów (blok B) oraz modelu termicznego (blok C), opisującego zależność temperatury wnętrza elementów od wydzielonej w nich mocy czynnej.

Zasadnicze kryterium podziału metod analizy elektrotermicznej opiera się na wyborze sposobu wyznaczania zmiennych niezależnych oraz przyjętej postaci (sposobu realizacji) modelu termicznego i modelu elektrotermicznego, przy czym przy realizacji tych metod wykorzystuje się odpowiednie numeryczne algorytmy formułowania i rozwiązywania nieliniowych równań obwodu.

Analiza elektrotermiczna układu, ze względu na sposób wyznaczania zmiennych niezależnych, może być przeprowadzona dwiema metodami: metodą zintegrowanych zmiennych (metoda wspólnych iteracji) oraz metodą rozdzielonych zmiennych (metoda relaksacyjna).

Metoda zintegrowanych zmiennych, np. [5, 9, 23, 25, 32, 36] polega na jednoczesnym rozwiązywaniu obwodu elektrycznego i modelu termicznego, co oznacza, że w trakcie tych samych iteracji modyfikowane są wartości prądów, napięć i temperatur wnętrza. Tak więc, w metodzie tej temperatury wnętrza poszczególnych elementów traktowane są jako zmienne na równi z prądami i napięciami.

Z kolei metoda rozdzielonych zmiennych, np. [17, 23, 26, 28] polega na rozwiązywaniu równań opisujących sieć elektryczną i termiczną na przemian, na ogół za pomocą różnych programów komputerowych. Metoda ta sprowadza się do wielokrotnej analizy elektrycznej układu oraz kolejnych modyfikacji temperatur każdego elementu termicznie czynnego. W pierwszym kroku analizy zakłada się, że temperatury wszystkich elementów są takie same, równe temperaturze otoczenia i przeprowadza się standardową analizę elektryczną. Wykorzystując wartości napięć i prądów zaciskowych elementów półprzewodnikowych wyznacza się wartości mocy wydzielonych w tych elementach, a następnie z modelu termicznego (analiza termiczna) wyznacza się poprawione temperatury elementów i cykl obliczeń zostaje powtórzony.

Opinie na temat efektywności obydwu typów metod analizy nie są jednoznaczne. Zdaniem autorów prac [10, 26, 28] metodę rozdzielonych zmiennych cechuje: mniejsza zajętość pamięci, łatwe dostosowanie do typowych programów analizy elektrycznej, łatwość modelowania (konstrukcje modelu elektrycznego i termicznego mogą być dane oddzielnie), mniejsza liczba zmiennych w każdym etapie obliczeń. Metoda ta spotyka się również z krytyką, a mianowicie jak stwierdzono w pracach [10, 32], metoda ta jest mniej efektywna na etapie wykonywania obliczeń [10], szybkość analizy jest przeważnie ograniczona wolną zbieżnością pętli termicznej, a ponadto omawiana metoda jest często rozbieżna i występują oscylacje [32].

Z kolei do zalet metody zintegrowanych zmiennych zalicza się łatwość tworzenia spójnego modelu elektrotermicznego, uzyskiwanie szybko rozwiązania (metoda Newtona-Raphsona) w jednym cyklu iteracji [26], jak również podkreśla się mniejszą liczbę iteracji wykonywanych w trakcie analizy [9]. Autorzy tych samych prac dostrzegają również wady metody zintegrowanych zmiennych, do których zaliczają przede wszystkim: dużą zajętość obszaru pamięci komputera, jak również konieczność operowania jednocześnie większą liczbą zmiennych.

## 2.2. PROBLEMY OBLICZENIOWE

W analizie elektrotermicznych stanów przejściowych pojawia się szereg specyficznych problemów obliczeniowych nie występujących w typowej analizie izotermicznej.

Pierwszy problem związany jest z występowaniem w analizie jednocześnie inercji elektrycznej charakteryzującej się krótkimi stałymi czasowymi oraz inercji termicznej charakteryzującej się długimi stałymi czasowymi, co jak zaznaczono w pracach [6, 8, 20] może prowadzić do nieakceptowalnej czasochłonności obliczeń [8], czy w przypadku wykorzystania programu SPICE, dla pewnej klasy pobudzeń — wręcz do przerwania procesu obliczeniowego [6]. W pracy [8] zaleca się, aby w zależności od zakresu czasowego przeprowadzanej analizy, pomijać najdłuższe lub najkrótsze stałe czasowe w układzie. Inny sposób oszczędności czasu analizy, proponowany w tej samej pracy, polega na wykonywaniu analizy termicznej (metoda relaksacyjna) dla średniej mocy wydzielanej w elemencie czy w układzie elektronicznym.

Drugi problem dotyczy konieczności rozróżnienia mocy czynnej zamienianej na ciepło (moc cieplna) oraz mocy całkowitej wydzielanej w elemencie, tzn. istnieje problem wyodrębniania składnika mocy, który wywołuje generację ciepła w elemencie. W rzeczywistym elemencie, przy pracy z sygnałem zmiennym, pewna energia jest niezbędna do przeładowania nieliniowych pojemności związanych z elementami półprzewodnikowymi, przy czym energia ta nie jest zamieniana na ciepło. Jak zauważono w pracy [11], całkowita moc wydzielana przy przełączaniu tranzystora pracującego w typowym układzie przeznaczonym do pomiarów czasu przełączania nie jest równa mocy cieplnej, zaś różnica pomiędzy mocą całkowitą i mocą cieplną zależy od warunków pracy tranzystora.

Trzeci problem związany jest ze sformułowaniem dynamicznego modelu termicznego analizowanego układu.

W grupie termicznych modeli skupionych opartych na idei przejściowej impedancji termicznej i wykorzystujących odpowiedni analog elektryczny RC, poprawnie modelowane są układy z elementami dyskretnymi, nieoddziaływającymi termicznie z innymi elementami, natomiast pojawiają się kłopoty z prawidłowym uwzględnieniem wzajemnych sprzężeń termicznych [1, 33]. Z kolei wykorzystywanie modelu termicznego w postaci całki spłotu w elektrotermicznej analizie z wykorzystaniem programu SPICE zmusza do wykonania wielokrotnej analizy stałoprądowej typu punkt pracy, co uniemożliwia uwzględnienie nieliniowych pojemności zawartych w wbudowanych modelach elementów w programie SPICE [11, 12]. W grupie termicznych modeli mikroskopowych, dyskretyzacja równania przewodnictwa ciepła,

przy zapewnieniu odpowiedniej dokładności modelu, prowadzi do dużej liczby węzłów. Wzrost liczby węzłów powoduje z kolei szybkie malenie wartości pojemności i rezystancji skojarzonych z każdym węzłem w analogu elektrycznym równania przewodnictwa ciepła, co prowadzi do małych termicznych stałych czasowych [8]. Z drugiej strony, odprowadzanie ciepła do otoczenia (konwekcja, radiacja) modelowane np. drabinką RC o dużej stałej czasowej [19] może powodować występowanie problemów zasygnalizowanych wcześniej, a związanych z występowaniem w modelu różniących się znacznie wartościami termicznych i elektrycznych stałych czasowych.

### 2.3. METODY, ALGORYTMY I PROGRAMY KOMPUTEROWE

W literaturze stosunkowo dużo miejsca poświęcono metodom, algorytmom i programom komputerowym do elektrotermicznej analizy dynamicznej układów elektronicznych. Jak zaznaczono wcześniej, metody symulacji elektrotermicznych stanów przejściowych w układach elektronicznych są ściśle związane z postacią elektrotermicznych modeli elementów. Jak wynika z pracy [10], wyróżnić tu można dwa typy takich modeli, a mianowicie są to elektrotermiczne modele pierwszego rodzaju (ETM1) oraz elektrotermiczne modele drugiego rodzaju (ETM2).

Opracowane w latach 70-tych i wykorzystywane po dzień dzisiejszy metody wyznaczania przebiegów elektrotermicznych w elementach układu elektronicznego oparte na ETM1 i wykorzystujące analog elektryczno-termiczny, np. [2, 23, 25, 26, 29], posiadają dwie istotne wady: zachodzi konieczność syntezy elektrycznego analogu modelu termicznego analizowanego obwodu, a analizowany ostatecznie schemat zastępczy zawiera na ogół znacznie więcej węzłów i gałęzi niż obwód pierwotny. Metody te są realizowane zarówno przy wykorzystaniu programów specjalizowanych np. [25, 33], jak i programów uniwersalnych, np. SPICE [29], NAP-2 [2, 23, 26], przy czym sposób realizacji obliczeń jest różny i zależy generalnie od tego, czy model jest mikroskopowy (równanie przewodnictwa ciepła) czy też wynika z idei przejściowej impedancji termicznej. Można wyróżnić dwie grupy metod analizy elektrotermicznej różniące się ideą formułowania modelu termicznego.

W pierwszej z omawianych grup metod analizy elektrotermicznej, nazwanej analizą makroskopową, model termiczny ma charakter skupiony. Postać termicznego modelu elementu dyskretnego stanowi połączenie sterowanego źródła prądowego o wydajności równej mocy wydzielanej w elemencie oraz obwodu RC, którego struktura i wartości elementów wynikają z postaci przejściowej impedancji termicznej elementu. Elektrotermicznej analizie makroskopowej poświęconych jest wiele publikacji, np. [1, 2, 4, 25, 30, 33, 36, 38, 39]. I tak, w pracy [25] analizowano układ wzmacniacza jednotranzystorowego, natomiast w pracy [33] pokazano wyniki symulacji nieizotermicznych charakterystyk pary różnicowej, wykonane przy pomocy programu specjalizowanego TRANS-TRAN metodą wspólnych iteracji. Z kolei w pracy [39] przedstawiono analizę prostego wzmacniacza metodą relaksacyjną przy pomocy programu OPTIMA-T, natomiast w pracy [38] ten sam autor informuje o opracowaniu nowego programu OPTIMA-1 opartego na metodzie wspólnych iteracji i przedstawia porównanie czasów analiz scalonego termostatu programem

OPTIMA-T oraz OPTIMA-1. Z przedstawionych danych liczbowych wynika, że metoda zintegrowanych zmiennych jest około czterokrotnie szybsza od metody relaksacyjnej.

Analizy elektrotermicznych stanów przejściowych oparte na termicznych modelach skupionych przeprowadzano również za pomocą programu SPICE wykorzystując zaimplementowane elektrotermiczne modele elementów [1, 4, 29, 36]. W wymienionych pracach rozważania teoretyczne zilustrowano przykładami analiz zarówno samych elementów półprzewodnikowych, takich jak dioda p-n [36], tranzystor IGBT [4], tranzystor bipolarny [29], jak i złożonych struktur scalonych, np. konwerter dc/dc [1]. Z kolei w pracy [2] przedstawiono sposób analizy wzmacniacza jednotranzystorowego z wykorzystaniem programu NAP-2 metodą relaksacyjną.

Jak wynika z cytowanych powyżej prac, w omawianej grupie metod analizy makroskopowej, prawidłowe uwzględnienie wzajemnych sprzężeń termicznych może stanowić poważny problem. W pracy [40] synteza modelu termicznego w postaci drabinek RC skojarzonych z każdą parą elementów sprzężonych termicznie jest uciążliwa i czasochłonna, wymaga bowiem wyznaczania wartości elementów drabinki metodami optymalizacyjnymi [37]. Z kolei w pracy [33] przepływ ciepła między tranzystorami modelowano za pomocą rezystora (brak inercji termicznej) o arbitralnie przyjętej wartości. Natomiast w pracach [1, 36] pomimo tego, że analiza dotyczyła układu scalonego, nie uwzględniono w ogóle wzajemnych sprzężeń termicznych między elementami. Ponadto w niektórych pracach w analizie uwzględnia się nieliniowe elektryczne pojemności elementów [1, 4, 25], w innych nie są one uwzględniane [29] i wreszcie na podstawie wyników pracy [33] nie można tego jednoznacznie stwierdzić. Wydajności źródeł prądowych w modelu termicznym są równe mocy czynnej wydzielonej w elemencie [25, 36] lub też są wyznaczane nieprawidłowo i reprezentują moc całkowitą, np. [4].

Druga grupa metod analizy elektrotermicznej wykorzystuje skupiony model ETM1 oraz model termiczny w postaci analogu elektrycznego wynikającego z dyskretyzacji równania przewodnictwa ciepła dla rozpatrywanego materiału półprzewodnikowego (element dyskretny lub układ scalony) [5, 7, 8, 17, 20, 23, 26, 27]. Taką analizę można by określić jako analizę quasi-mikroskopową. Dokładność modelu termicznego jest różna w poszczególnych pracach i zależy zarówno od wymiarowości sformułowania problemu (analiza dwu- lub trójwymiarowa) jak i od tego czy uwzględniono nieliniowe właściwości materiału półprzewodnikowego, przy czym w analizie uwzględniane są własne i wzajemne sprzężenia termiczne. Stosuje się tutaj zarówno metodę zintegrowanych zmiennych jak i metodę relaksacyjną.

W pracy [5] omówiono specjalizowany program do analizy elektrotermicznych stanów przejściowych metodą zintegrowanych zmiennych oraz przedstawiono otrzymane za pomocą tego programu wyniki analiz wybranych układów scalonych — wzmacniacza operacyjnego  $\mu A741$  oraz stabilizatora napięcia LM140d, dla różnych położenia tranzystorów na płytce. W pracach [8, 20] przedstawiono wyniki analizy tranzystora IGBT za pomocą programu SABER metodą wspólnych iteracji. Trójwymiarowy model termiczny uwzględnia nieliniowość parametrów materiałowych krzemu (uwzględniono zależność konduktywności krzemu od temperatury) oraz

nieliniowy efekt konwekcji ciepła. W pracy [26] przedstawiono relaksacyjną metodę analizy bipolarnego tranzystora mocy, przy czym analizę elektryczną wykonywano programem NAP-2, natomiast do analizy termicznej wykorzystano program TRUMP. W pracy [7] przedstawiono relaksacyjną metodę analizy elektrotermicznej układów elektronicznych i jako przykład ilustrujący możliwości prezentowanej metody podano wyniki analizy scalonego wzmacniacza wykonanego w technologii MESFET na arsenku galu. W analizie uwzględniono konwekcję i radiację, natomiast nie uwzględniono zależności konduktywności materiału półprzewodnikowego od temperatury. Zgodnie z algorytmem metody, analizę elektryczną (dla ustalonej temperatury) wykonuje się programem HSPICE jako ciąg analiz typu punkt pracy (analiza OP), a więc w analizie takiej nie mogą być uwzględniane elementy reprezentujące inercję elektryczną elementu. Natomiast analiza termiczna realizowana jest z wykorzystaniem programu NET1.

W pracy [27] przedstawiono algorytm relaksacyjnej metody analizy elektrotermicznych stanów przejściowych w układach elektronicznych zgodnie z którym, po wyznaczeniu punktu początkowego (elektrotermiczna analiza stałoprądowa [28]) obliczenia realizowane są w trzech zasadniczych etapach. W etapie pierwszym przeprowadza się analizę elektryczną dla ustalonych temperatur wnętrza elementów, otrzymanych z izotermicznej analizy stałoprądowej. Następnie przeprowadza się analizę termiczną wyznaczając przebiegi temperatur wnętrza elementów dla znanych (z analizy elektrycznej) wartości mocy. W trzecim etapie obliczeń, po skrupulatnych oględzinach przebiegu temperatur w elementach, rozpatrywany przedział czasowy dzielony jest na fragmenty, w których temperatura jest w przybliżeniu stała, a następnie dla każdego fragmentu wykonuje się elektryczną analizę stanów przejściowych dla średniej temperatury wnętrza analizowanego przedziału. Algorytm może być zrealizowany jedynie przy założeniu, że zjawiska termiczne przebiegają dużo wolniej niż zjawiska elektryczne, co w praktyce nie zawsze jest spełnione [3]. Omawiany algorytm metody relaksacyjnej [27] wykorzystano w analizie sterownika SBIMOS przy czym przedstawione wyniki analizy i pomiarów dotyczą sytuacji, gdy zmiany temperatur wnętrza elementów są niewielkie, rzędu pojedynczych kelwinów. W obliczeniach wykorzystano dwuwarstwowy termiczny model układu, przy czym założono stałość parametrów materiałowych. Autorzy omawianej pracy nie podają czasów analizy, jednakże należy przypuszczać, że w sytuacji dużych zmian temperatur wnętrza elementów czas analizy (z uwagi na strukturę algorytmu) mógłby się znacznie wydłużyć.

W pracach [18, 19] przedstawiono hybrydowy model termiczny dla elementów mocy, w którym przepływ ciepła w obszarze pastylki półprzewodnikowej jest opisany przez numeryczne rozwiązanie równania przewodnictwa ciepła, natomiast przepływ ciepła poprzez pozostałe elementy konstrukcyjne elementu jest symulowany za pomocą przejściowej impedancji termicznej. Omawiany model termiczny został sformułowany i wykorzystany w analizie elektrotermicznej lasera powierzchniowego [19] oraz tyrystora [18]. Ponadto stosuje się metody pełnej analizy mikroskopowej elementu półprzewodnikowego, tzn. takiej analizy, w której zarówno model elektryczny jak i model termiczny elementu jest modelem o stałych rozłożonych, np. [21, 22,

24]. W wymienionych pracach analiza elektryczna i termiczna wykonywana jest naprzemiennie (metoda rozdzielonych iteracji). Przykładowo w pracy [21] przedstawiono wyniki analizy tyrystora GTO, natomiast w pracach [22, 24] analizowano tranzystor bipolarny mocy z wykorzystaniem programów PASSC (analiza elektryczna) oraz SPICE (analiza termiczna).

W latach 80-tych zaproponowano metody elektrotermicznej analizy dynamicznej obwodów nieliniowych oparte na ETM2 i wykorzystujące przejściowe impedancje termiczne wraz z odpowiednimi całkami splotu (model termiczny). W pracach [13, 30] przedstawiono metodę analizy elektrotermicznych stanów przejściowych w diodzie p-n i w tranzystorze bipolarnym, należącą do grupy metod rozdzielonych iteracji, polegającą na kolejnym obliczaniu mocy wydzielanej w elementach (przy znanej temperaturze wnętrza) oraz temperatury wnętrza elementu (przy ustalonej wartości mocy). Ilustracją omawianej metody są zamieszczone w cytowanych pracach czasowe przebiegi napięcia na diodzie, prądu kolektora tranzystora oraz temperatur wnętrza tych elementów, otrzymane przy pobudzeniu prądem (w przypadku diody) oraz prądem bazy (w przypadku tranzystora) w postaci przebiegu sinusoidalnego, trójkątnego oraz uskoku Heaviside'a.

W pracy [12] zaproponowano metodę analizy elektrotermicznych stanów przejściowych z modelem termicznym w postaci całki splotu, za pomocą programu SPICE. Analiza przeprowadzana jest metodą zintegrowanych zmiennych, przy czym w każdym kroku analizy program pomocniczy BOBAS na podstawie danych z poprzednich kroków czasowych uaktualnia wartości parametrów zastępczych półanalitycznego algorytmu bezpamięciowego [9]. Analiza wykonywana jest jako ciąg analiz stałoprądowych typu punkt pracy i nie uwzględnia nieliniowych pojemności elementów. Z kolei wykorzystanie elektrotermicznych modeli stowarzyszonych pozwoliło na zastosowanie metody wspólnych iteracji i sprowadzenie analizy czasowej do sekwencji analiz stałoprądowych [10, 15, 41, 46]. Istotnym etapem takiej analizy jest wyznaczanie w każdym kroku czasowym wartości parametrów zastępczych modelu: tzw. temperatury zastępczej oraz zastępczej rezystancji termicznej. Opracowano dwie metody analizy różniące się sposobem wyznaczania parametrów zastępczych: metodę podstawową i metodę bezpamięciową [49].

Pierwsza z metod [10, 15] wymaga do obliczenia temperatury zastępczej w  $n$ -tym kroku analizy zapamiętania wartości mocy wydzielonych w każdym termicznie czynnym elemencie układu, we wszystkich krokach czasowych do  $(n-1)$  włącznie. Takie podejście jest czasochłonne i pamięciochłonne, lecz nie nakłada żadnych ograniczeń na postać przejściowej impedancji termicznej elementu. Z kolei metoda bezpamięciowa, np. [19, 41], polega na powiązaniu wartości temperatury zastępczej wykorzystywanej w  $n$ -tym kroku czasowym, z wartością temperatury wnętrza elementu, obliczonej w kroku  $(n-1)$ . Metoda bezpamięciowa jest metodą dużo szybszą od metody podstawowej, przy czym zysk czasowy wzrasta z liczbą kroków czasowych i złożonością układu, natomiast metoda wymaga, aby przebieg przejściowej impedancji termicznej był opisany zależnością stanowiącą sumę funkcji eksponencjalnych.

Chociaż zastosowanie metod wykorzystujących modele stowarzyszone upraszcza analizę w stosunku do metod opartych na ETM1 (oraz analogu elektrycznego

w modelu termicznym), nie zachodzi bowiem konieczność kłopotliwej i czasochłonnej syntezy modelu termicznego analizowanego obwodu, to jednak w pierwszym okresie rozwoju tych metod do roku 1986 [46], sformułowane modele, algorytmy i programy komputerowe posiadały szereg niedogodności, a mianowicie:

- a) analiza nie uwzględniała elementów inercji elektrycznej,
- b) z uwagi na ograniczony zakres słuszności modeli elementów stowarzyszonych z numeryczną procedurą obliczania całki splotu można było stosować bardzo ograniczoną klasę pobudzeń, gwarantujących pozostawanie elementu w określonym zakresie pracy (np. dla tranzystora był to zakres aktywny normalny),
- c) stosowany w analizie algorytm Newtona-Raphsona nie zawsze zapewniał zbieżność procesu iteracyjnego do rozwiązania,
- d) uruchomiony program komputerowy ELSA [43] stanowiący praktyczną realizację opracowanych metod, napisany w języku BASIC, pozwalał jedynie na analizę prostych układów tranzystorowych (w praktyce najwyżej dwa tranzystory), ze stałym krokiem, dla powolnych stanów przejściowych, przy braku inercji elektrycznej.

Prace prowadzone przez autora w latach 1987–95, pozwoliły na wstępne rozwiązanie niektórych z wymienionych problemów, np. opracowano prosty algorytm zmiennokrokowy [41, 42].

### 3. METODA ANALIZY ELEKTROTERMICZNYCH STANÓW PRZEJŚCIOWYCH OPARTA NA ZASTOSOWANIU STOWARZYSZONYCH MODELI DYSKRETNÝCH

W rozdziale tym przedstawiono oryginalną, opracowaną przez autora, metodę analizy elektrotermicznych stanów przejściowych w układach elektronicznych. W metodzie tej, sformułowanie dyskretnych modeli pewnych, wydzielonych z układu bloków inercyjnych, pozwala na realizację analizy jako sekwencji analiz stałoprądowych w kolejnych krokach czasowych. Publikowane przez autora wcześniejsze wersje metody pozwalały jedynie na analizę w ograniczonym zakresie. I tak, przedstawiona w pracach [41, 42] metoda pozwalała na zmiennokrokową analizę układów jedynie z inercją termiczną, natomiast algorytmy metody zaproponowane w pracach [40, 45] pozwalały na analizę obwodów ze stałym krokiem, opartą na modelach elementów półprzewodnikowych bez uwzględnienia inercji elektrycznej.

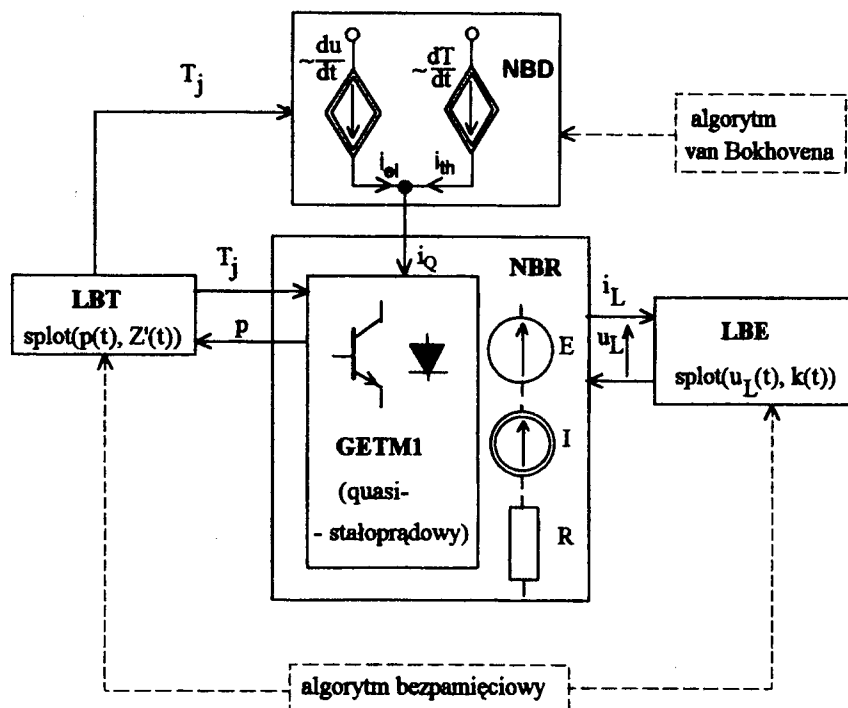
Metoda prezentowana w niniejszym rozdziale stanowi rozwinięcie metod wcześniej publikowanych i pozwala na zmiennokrokową analizę elektrotermiczną układu z uwzględnieniem zarówno inercji termicznej jak i elektrycznej.

#### 3.1. IDEA METODY

Zasadnicza idea tej metody opiera się na dekompozycji analizowanego obwodu na bloki (podobwoły) o charakterze rezystancyjnym i dynamicznym [44], a następnie na zastąpieniu bloków dynamicznych odpowiednimi modelami dyskretnymi o charak-

terze rezystancyjnym, których parametry są modyfikowane w kolejnych krokach czasowych. W prezentowanym wariacie metody wyróżnia się cztery bloki (rys. 2):

- nieliniowe bloki rezystancyjne (NBR),
- nieliniowe bloki dynamiczne (NBD),
- liniowe dynamiczne bloki termiczne (LBT),
- liniowe dynamiczne bloki elektryczne (LBE),



Rys. 2. Idea dekompozycji analizowanego obwodu

Nieliniowe bloki rezystancyjne zawierają rezystory liniowe, prądowe i napięciowe źródła niezależne oraz elementy półprzewodnikowe opisane przez quasi-stałowprądowe globalne elektrotermiczne modele pierwszego rodzaju, stanowiące zależności prądowo-napięciowo-temperaturowe [48]. Z kolei nieliniowe bloki dynamiczne reprezentują inercję elektryczną elementu półprzewodnikowego, rozumianą jako przepływ prądu wywołanego zmianami ładunku elektrycznego i reprezentowaną przez sterowane źródła prądowe o wydajności proporcjonalnej odpowiednio do szybkości zmian napięcia na złączu oraz temperatury wnętrza elementu [48]. Należy podkreślić, że wyodrębnienie inercji elektrycznej stanowiącej integralną część modelu dynamicznego elementu [48] w postaci oddzielnego bloku (NBD) jest zabiegiem czysto formalnym, pozwalającym na bardziej czytelne sformułowanie idei prezentowanej metody.

Bloki liniowe reprezentujące odpowiednio odpowiedź termiczną  $T_j(t)$  na pobudzenie mocą  $p(t)$  — blok LBT (model termiczny elementu) oraz odpowiedź prądową dwójnika RLC na pobudzenie napięciem — blok LBE, są opisane za pomocą całki

splotu. Do dyskretyzacji bloków LBT i LBE wykorzystano szybkie, tzw. bezpamięciowe algorytmy obliczania całki splotu [46, 47, 49]. Tak więc, dyskretne modele bloków liniowych są stowarzyszone z odpowiednim algorytmem bezpamięciowym. Z kolei w procesie dyskretyzacji bloku NBD wykorzystano algorytm BDF w wersji zaproponowanej przez van Bokhovena [35].

### 3.2. STOWARZYSZONE MODELE DYSKRETNE LINIOWYCH BLOKÓW DYNAMICZNYCH

Znajomość odpowiedzi impulsowej  $K(t)$  bloku liniowego pozwala na wyznaczenie odpowiedzi  $y(t)$  na pobudzenie  $x(t)$  za pomocą całki splotu o postaci

$$y(t) = y(0) + \int_0^t k(t-v) \cdot x(v) dv, \quad (1)$$

gdzie  $y(0)$  oznacza stan początkowy w chwili czasu  $t=0$ , natomiast dolna granica całkowania oznacza, że pobudzenie  $x(t)=0$  dla  $t \leq 0$ .

Jeżeli  $k(t)$  spełnia określone warunki, wówczas przy numerycznym obliczaniu całki splotu można wykorzystać tzw. algorytmy bezpamięciowe. W dalszej części rozdziału przedstawiono dwa typy algorytmów bezpamięciowych umożliwiających wyznaczenie odpowiedzi bloku LBT (rozdział 3.2.1) oraz bloku LBE (rozdział 3.2.2). W rezultacie otrzymuje się modele dyskretne rozważanych bloków liniowych, stowarzyszone z odpowiednimi algorytmami bezpamięciowymi.

#### 3.2.1. ALGORYTM BEZPAMIĘCIOWY WYZNACZANIA ODPOWIEDZI LINIOWYCH BLOKÓW TERMICZNYCH

Podstawowym parametrem termicznym elementu półprzewodnikowego jest przejściowa impedancja termiczna  $Z(t)$ , która z definicji oznacza stosunek nadwyżki temperatury wnętrza  $T_j(t)$  elementu ponad temperaturę odniesienia  $T_0$  (tutaj temperatura otoczenia  $T_a$ ), do uskoku mocy o wartości  $P_0$ . Znany, powszechnie stosowany model  $Z(t)$  ma postać [31]

$$Z(t) = K_t \cdot \left[ 1 - \sum_{k=1}^L a_k \cdot \exp(-t/\tau_k) \right], \quad (2)$$

gdzie  $K_t$  – rezystancja termiczna, stanowiąca wartość asymptotyczną przejściowej impedancji termicznej dla  $t \rightarrow \infty$ ,  $\tau_k$  – termiczna stała czasowa,  $a_k$  – współczynnik ( $a_1 + a_2 + \dots + a_L = 1$ ), natomiast  $L$  zależy od liczby warstw tworzących konstrukcję elementu i przyjmuje zwykle wartość 2 lub 3 [31].

Znając  $Z(t)$  można wyznaczyć nadwyżkę temperatury  $\Delta T(t) = T_j(t) - T_a$  stanowiącą model termiczny elementu, za pomocą całki splotu o postaci

$$\Delta T(t) = \int_0^t Z'(t-v) \cdot p(v) dv, \quad (3)$$

gdzie  $p(t)$  – moc wydzielana w elemencie, natomiast pochodna przejściowej impedancji termicznej  $Z'(t)$  ma sens odpowiedzi impulsowej  $k(t)$  we wzorze (1) i wynosi

$$Z'(t) = \sum_{k=1}^L Z'_k(t) = \sum_{k=1}^L \frac{K_t \cdot a_k}{\tau_k} \cdot \exp(-t/\tau_k). \quad (4)$$

Uwzględniając postać przejściowej impedancji termicznej, wzór (3) można przedstawić w postaci

$$\Delta T(t) = \sum_{k=1}^L \Delta T_k(t) = \sum_{k=1}^L \int_0^t Z'_k(t-v) \cdot p(v) dv. \quad (5)$$

Proponowany poniżej algorytm bezpamięciowy opiera się na specyficznych właściwościach przejściowej impedancji termicznej danej wzorem (2). Dla każdej składowej  $Z'_k(t)$  danej wzorem (4) i dla każdej chwili czasu  $t$  oraz dla ustalonego przedziału czasu  $\Delta t > 0$ , zachodzi warunek [49]

$$\int_t^{t+\Delta t} Z'_k[-t+\Delta t] dt \Big/ \int_t^{t+\Delta t} Z'_k(-t) dt = \xi_k = \text{const.} \quad (6)$$

Wykorzystując do rozwiązania równania (5) metodę trapezów otrzymuje się dla  $k$ -tej składowej w  $n$ -tym kroku czasowym

$$\Delta T_k^n = \hat{Q}_k^{n-1} + S_k^n, \quad (7)$$

gdzie

$$\hat{Q}_k^{n-1} = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\Delta^m}{2} \cdot (Z'_k{}^{n-m} \cdot p^m + Z'_k{}^{n-m+1} \cdot p^{m-1}), \quad (8)$$

natomiast  $S_k^n$  oznacza wartość całki splotu w ostatnim kroku, zależną od mocy  $p^n, p^{n-1}$  oraz od wartości kroku  $\Delta^n$ , a  $\Delta^m = t^m - t^{m-1}$  oznacza długość kroku czasowego.

Z drugiej strony słuszna jest następująca zależność

$$\Delta T_k^{n-1} = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\Delta^m}{2} \cdot (Z'_k{}^{n-m-1} \cdot p^m + Z'_k{}^{n-m} \cdot p^{m-1}). \quad (9)$$

Łatwo zauważyć, że  $\hat{Q}_k^{n-1} \neq \Delta T_k^{n-1}$ , natomiast pomiędzy odpowiednimi wartościami pochodnej przejściowej impedancji termicznej we wzorach (8) i (9) zachodzi zależność (6). Wykorzystując przedstawione powyżej spostrzeżenia oraz przyjmując  $\Delta t = \Delta^n$ , można nadwyżkę temperatury wnętrza w  $n$ -tym kroku czasowym przedstawić w następującej postaci

$$\Delta T^n = \sum_{k=1}^L \Delta T_k^n = \sum_{k=1}^L (\xi_k^n \cdot \Delta T_k^{n-1} + S_k^n), \quad (10)$$

gdzie

$$S_k^n = \alpha_2^{nk} \cdot p^{n-1} + \alpha_1^{nk} \cdot p^n \quad (11)$$

$$\xi_k^n = \exp(-\Delta^n/\tau_k), \quad (12)$$

oraz

$$\alpha_1^{nk} = \int_0^{\Delta/2} Z'_k(t) dt = K_t \cdot a_k \cdot (1 - \sqrt{\xi_k^n}), \quad (13)$$

$$\alpha_2^{nk} = \alpha_1^{n,k} \cdot \sqrt{\xi_k^n}. \quad (14)$$

Przedstawiony powyżej algorytm bezpamięciowy można łatwo dostosować do wyznaczania temperatury wnętrza elementu pracującego w układzie scalonym. Przy założeniu, że model wzajemnej przejściowej impedancji termicznej  $Z_{ij}(t)$  między elementami  $i$ -tymi oraz  $j$ -tym ma taką samą postać jak model własnej przejściowej impedancji termicznej elementu (wzór 2), wówczas dla elementu  $i$ -tego sprzężonego termicznie z  $N$ -elementami, otrzymuje się

$$\Delta T_i^n = T_{Zi}^{n-1} + R_i^n, \quad (15)$$

gdzie

$$T_{Zi}^{n-1} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^L T_{Zijk}^{n-1} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^L \Delta T_{ijk}^{n-1} \cdot \exp(-\Delta^n/\tau_{ijk}), \quad (16)$$

$$R_i^n = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^L R_{ijk}^n = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^L K_{ijk} \cdot a_{ijk} \cdot [1 - \exp(-\Delta^n/2\tau_{ijk})] \cdot [p_j^{n-1} \cdot \exp(-\Delta^n/2\tau_{ijk}) + p_j^n] \quad (17)$$

$i, j = 1, 2, \dots, N$  oraz  $k = 1, 2, \dots, L$ .

### 3.2.2. ALGORYTM BEZPAMIĘCIOWY WYZNACZANIA ODPOWIEDZI LINIOWYCH BŁOKÓW ELEKTRYCZNYCH

Transmitancję operatorową  $K(s)$  układu liniowego można zapisać w postaci

$$K(s) = L(s)/M(s), \quad (18)$$

gdzie  $L(s)$ ,  $M(s)$  — wielomiany zmiennej  $s$  odpowiednio stopnia  $l$  oraz  $m$ . Ponieważ, jak wynika z ogólnych właściwości układów liniowych, dla dwójnika liniowego RLC spełniona jest zależność  $|l-m| \leq 1$ , dlatego w wyrażeniu określającym odpowiedź impulsową dwójnika w dziedzinie czasu  $k(t)$ , oprócz składowych zawierających przebiegi sinusoidalne i cosinusoidalne mogą wystąpić również składniki dystrybucyjne, zawierające funkcję delta Diraca  $\delta(t)$  i/lub jej pochodną  $\delta'(t)$ . Stąd otrzymuje się

$$k(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{M_1} (A_k \cdot \exp(-a_k \cdot t) \cdot \cos \omega_k \cdot t) + \sum_{k=1}^{M_2} (B_k \cdot \exp(-b_k \cdot t) \cdot \sin \omega_k \cdot t) + \gamma_1 \cdot \delta(t) + \gamma_2 \cdot \delta'(t), \quad (19)$$

gdzie  $A_0$ ,  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $\omega_k$ ,  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  — współczynniki.

Należy zauważyć, że funkcje  $\cos \omega_k t$  i  $\sin \omega_k t$  mogą być zapisane w postaci sumy funkcji eksponencjalnych z współczynnikami zespolonymi, a wówczas sumy we wzorze (19) spełniają ogólny warunek stosowalności algorytmu bezpamięciowego. Uwzględniając ponadto właściwości próbkujące  $\delta$ -funkcji można sformułować bezpamięciowy algorytm wyznaczania odpowiedzi  $y(t) = i(t)$  dynamicznych dwójników liniowych (o odpowiedzi impulsowej  $k(t)$  danej wzorem (19)), o następującej postaci

$$i_{Li}^n = 2 \cdot \left[ \sum_{k=1}^{M_1} Re(i_{Lic}^{(n-k)}) + \sum_{k=1}^{M_2} Re(i_{Lls}^{(n-k)}) \right] + D_{El}^n(u_{Li}), \quad (20)$$

gdzie

$$D_{Ek}^n(u_{Li}^n) = \gamma_{1l} \cdot u_{Li}^n + \gamma_{2l} \cdot (u_{Li}^n - u_{Li}^{n-1}) / \Delta^n + \hat{z}_l^n, \quad (21a)$$

$$\hat{z}_l^n = \hat{z}_l^{n-1} + A_{\alpha l} \cdot \Delta^n \cdot u_{Li}^n, \quad (21b)$$

$$Re(i_{Lic}^{(n-k)}) = \exp(-a_{lk}\Delta^n) [Re(i_{Lic}^{(n-1-k)}) \cdot \cos \omega_{lk}\Delta^n - Im(i_{Lic}^{(n-1-k)}) \cdot \sin \omega_{lk}\Delta^n] + \\ + Re(h_{lic0}^{(n-k)}) \cdot u_{Li}^{n-1} + Re(h_{lic0}^{(n-k)}) \cdot u_{Li}^n \quad (21c)$$

$$Im(i_{Lic}^{(n-k)}) = \exp(-a_{lk}\Delta^n) [Im(i_{Lic}^{(n-1-k)}) \cdot \cos \omega_{lk}\Delta^n + Re(i_{Lic}^{(n-1-k)}) \cdot \sin \omega_{lk}\Delta^n] + \\ + Im(h_{lic0}^{(n-k)}) \cdot u_{Li}^{n-1} + Im(h_{lic0}^{(n-k)}) \cdot u_{Li}^n \quad (21d)$$

$$Re(i_{Lls}^{(n-k)}) = \exp(-b_{lk}\Delta^n) [Re(i_{Lls}^{(n-1-k)}) \cdot \cos \omega_{lk}\Delta^n - Im(i_{Lls}^{(n-1-k)}) \cdot \sin \omega_{lk}\Delta^n] + \\ + Re(h_{ls0}^{(n-k)}) \cdot u_{Li}^{n-1} + Re(h_{ls0}^{(n-k)}) \cdot u_{Li}^n \quad (21e)$$

$$Im(i_{Lls}^{(n-k)}) = \exp(-b_{lk}\Delta^n) [Im(i_{Lls}^{(n-1-k)}) \cdot \cos \omega_{lk}\Delta^n + Re(i_{Lls}^{(n-1-k)}) \cdot \sin \omega_{lk}\Delta^n] + \\ + Im(h_{ls0}^{(n-k)}) \cdot u_{Li}^{n-1} + Im(h_{ls0}^{(n-k)}) \cdot u_{Li}^n \quad (21f)$$

Idea powyższego algorytmu została przedstawiona w dodatku A dla najprostszego przypadku, gdy  $k(t) = \cos \omega t$ , natomiast zależności opisujące parametry  $Re(h_{lic0}^{(n-k)})$ ,  $Re(h_{ls0}^{(n-k)})$ ,  $Re(h_{lic1}^{(n-k)})$ ,  $Re(h_{ls1}^{(n-k)})$ ,  $Im(h_{lic0}^{(n-k)})$ ,  $Im(h_{lic1}^{(n-k)})$ ,  $Im(h_{ls0}^{(n-k)})$ ,  $Im(h_{ls1}^{(n-k)})$  zamieszczono w **Dodatku B**.

### 3.3. STOWARZYSZONY MODEL DYSKRETNY NIELINIOWEGO BLOKU DYNAMICZNEGO

Nieliniowe źródła prądowe w bloku NBD reprezentujące inercję elektryczną elementu półprzewodnikowego są sterowane pochodną napięcia na złączu lub pochodną temperatury wnętrza [48]

$$i_{el} = C(u, T_j) \cdot du/dt \quad (22)$$

$$i_{th} = \alpha(u, T_j) \cdot dT_j/dt, \quad (23)$$

gdzie  $C(u, T_j)$  oznacza sumę pojemności dyfuzyjnej i barierowej, natomiast zależności opisujące wielkość  $\alpha(u, T_j)$  podano w pracy [48]. A zatem sformułowanie dyskretnego modelu bloku NBD wymaga zastosowania odpowiedniego algorytmu całkowania (różniczkowania) numerycznego.

Znanych jest wiele numerycznych metod rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych, z których do najefektywniejszych zalicza się algorytmy pośrednie, takie

jak np. algorytm Adamsa-Moultona, algorytm BDF, czy algorytm Geara [50]. Dyskretyzacja bloku NBD z wykorzystaniem algorytmu pośredniego prowadzi do zależności algebraicznych w ogólnej postaci

$$\underline{i}_{el} = f_1[(C_{el}(\underline{u}_j^n, \underline{T}_j^n), \underline{s}, \underline{u}^n, \underline{u}^{n-1}, \dots, \underline{i}_{el}^{n-1}, \underline{i}_{el}^{n-2} \dots)] \quad (24a)$$

$$\underline{i}_{th} = f_2[(\alpha_{th}(\underline{u}^n, \underline{T}_j^n), \underline{s}, \underline{T}_j^n, \underline{T}_j^{n-1}, \dots, \underline{i}_{th}^{n-1}, \underline{i}_{th}^{n-2} \dots)], \quad (24b)$$

gdzie  $\underline{s}$  oznacza wektor parametrów algorytmu.

Istotną cechą omawianych algorytmów jest ich stabilność. Blok NBD jest częścią składową analizowanego układu (rys. 2), w którym stosunek wartości najdłuższej do najkrótszej stałej czasowej (elektryczne i termiczne stałe czasowe) może być bardzo duży. Taki układ wymaga stosowania globalnie stabilnych algorytmów całkowania. Warunek globalnej stabilności spełnia np. algorytm Geara rzędu 1 ÷ 6 [50]. W pełni ekwiwalentną formułą (w stosunku do algorytmu Geara) jest algorytm BDF w wersji zaproponowanej przez Braytona [51], którego rozwiniętą implementację przedstawił van Bokhoven [35]. Dla potrzeb analizy elektrotermicznej zaimplementowano algorytm van Bokhovena [35], zgodnie z którym wydajność źródła  $i_{th}$  można przedstawić w postaci

$$\underline{i}_{th}^n = \alpha_{th}^n \cdot \left( \frac{\underline{T}_j^n}{\eta_k^n} - \mu_k^n \right), \quad (25)$$

gdzie  $\mu_k^n$  jest funkcją  $\underline{T}_j^n, \underline{T}_j^{n-1}, \dots, \underline{T}_j^{n-k-1}$  oraz zależy od wielkości  $k$  poprzednich kroków czasowych, natomiast  $\eta_k^{n+1}$  zależy od bieżącego kroku oraz od  $(k-1)$  poprzednich kroków czasowych, gdzie  $k$  oznacza rząd algorytmu.

Analogiczną postać ma wyrażenie opisujące prąd  $\underline{i}_{el}$ , przy czym w powyższych wzorach zamiast temperatury  $\underline{T}_j$  należy podstawić napięcie złącza  $u$ .

### 3.4. RÓWNANIA OBWODU I ALGORYTM METODY

Proponowany algorytm elektrotermicznej analizy obwodów dynamicznych wymaga sformułowania w  $n$ -tym kroku obliczeń, algebraicznych równań nieliniowych (równań obwodu), o postaci

$$\underline{f}^n(\underline{i}^n, \underline{V}^n, \underline{i}_{\psi}^n, \underline{V}_L^n, \underline{i}_L^n) = \underline{0} \quad (26a)$$

$$\underline{\psi}^n(\underline{i}_{\psi}^n, \underline{V}_{\varphi}^n, \underline{V}^n, \underline{T}_j^n) = \underline{0} \quad (26b)$$

$$\underline{i}_L^n - \underline{i}_L^n(0) - \underline{A}_E^{n-1} - \underline{S}_E^n(\underline{V}_L^n) - \underline{D}_E^n(\underline{V}_L^n) = \underline{0} \quad (26c)$$

oraz

$$\underline{T}_j^n - \underline{T}_a - [\underline{I}_Z^n + \underline{R}^n(\underline{i}_{\psi}^n, \underline{V}^n, \underline{V}_{\varphi}^n)] \cdot \underline{\Gamma} = \underline{0}, \quad (26d)$$

gdzie

- $\underline{i}$  — prądy wewnętrzne bloków NBR niezwiązane z elementami półprzewodnikowymi,
- $\underline{V}$  — napięcia (potencjały węzłowe) wewnątrz bloków NBR,

- $\underline{i}_\psi$  – prądy zaciskowe modelu dynamicznego,  
 $\underline{V}_\varphi$  – napięcia zaciskowe modelu quasi-stałaoprądowego,  
 $\underline{T}_j$  – temperatury wnętrza elementów półprzewodnikowych,  
 $\underline{i}_L, \underline{i}_L(0), \underline{V}_L$  – odpowiedź prądowa bloku LBE, warunek początkowy oraz pobudzenie (napięcie na zaciskach bloków LBE),  
 $\Gamma$  – funkcja ograniczająca od dołu zakres zmian temperatury wnętrza elementu, której znaczenie omówiono w pracy [48].  
 $\underline{T}_{Zi}, \underline{R}_j$  – dane wzorami (16 i 17)  
 $\underline{D}_{El}, u_{El}$  – dane wzorem (21a)

$$\begin{aligned}
 A_{El}^{-1} = & 2 \cdot \sum_{k=1}^{M_1} \exp(-a_{ik} \cdot \Delta^n) \cdot [Re(i_{lc}^{(n-1)k}) \cos \omega_{ik} \Delta^n - Im(i_{lc}^{(n-1)k}) \sin \omega_{ik} \Delta^n] + \\
 & + 2 \sum_{k=1}^{M_2} \exp(-b_{ik} \Delta^n) \cdot [Re(i_{ls}^{(n-1)k}) \cdot \cos \omega_{ik} \Delta^n - Im(i_{ls}^{(n-1)k}) \sin \omega_{ik} \Delta^n] \quad (27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{El}^n(V_{Li}^n) = & \left[ \sum_{k=1}^{M_1} Re(h_{lco}^{nk}) + \sum_{k=1}^{M_1} Re(h_{lso}^{nk}) \right] \cdot V_{Li}^{n-1} + \left[ \sum_{k=1}^{M_2} Re(h_{lcl}^{nk}) + \right. \\
 & \left. + \sum_{k=1}^{M_2} Re(h_{lsl}^{nk}) \right] \cdot V_{Li}^{n-1}. \quad (28)
 \end{aligned}$$

Równanie (26a) wynika z pierwszego prawa Kirchhoffa oraz zawiera równania gałęzi uzależnionych prądowo. Równanie (26b) jest elektrotermicznym dynamicznym modelem elementu [48] po dyskretyzacji. Równanie (26c) opisuje zależność między prądem i napięciem na zaciskach bloku LBE reprezentowanego przez model dyskretny stowarzyszony z algorytmem bezpamięciowym przedstawionym w rozdziale (3.2.2). Równanie (26d) jest dyskretnym modelem termicznym elementu.

Oddzielnym problemem jest rozwiązanie nieliniowych równań algebraicznych (26a-26d), które w  $n$ -tym kroku czasowym można przedstawić w ogólnej postaci

$$\underline{F}(\underline{q}^n) = \underline{0}, \quad (33)$$

gdzie  $\underline{q}^n = [q_1^n, \dots, q_m^n] = [\underline{i}^n, \underline{V}^n, \underline{T}_j^n, \underline{i}_\psi^n, \underline{V}_\varphi^n, \underline{i}_L^n, \underline{V}_L^n]$ .

Do rozwiązania równania (33) można zastosować bezpośrednio algorytm Newtona-Raphsona, wykorzystując w charakterze punktu początkowego wynik analizy w poprzednim kroku czasowym, tzn. przyjmując, że  $\underline{x}^{n,o} = \underline{x}^{n-1}$ . Jednakże metoda Newtona-Raphsona nie zawsze prowadzi do rozwiązania, np. z reguły ma to miejsce w pierwszym kroku dla  $t=0$ , lub przy niewłaściwie wybranym kroku analizy (zbyt duża wartość kroku). Wówczas można wykorzystać algorytm metody kontynuacji zaproponowany przez A. Uhida i L. Chua [34]. Zgodnie z tym algorytmem, równanie (33) po przeprowadzeniu parametryzacji długością łuku „ $s$ ” wszystkich zmiennych wektora  $\underline{q}^n$  oraz po wprowadzeniu dodatkowej zmiennej  $\rho$ , przekształcane jest do homotopii o postaci

$$\underline{F}(\underline{q}^n(s), \rho) = \underline{F}(\underline{q}^n(s)) + (\rho - 1) \cdot \underline{F}(\underline{q}^0(s)). \quad (34)$$

W homotopii danej wzorem (34) liczba zmiennych (równa  $m$ ) jest większa niż liczba równań (równa  $m-1$ ). Wprowadza się zatem dodatkowe równanie długości łuku o postaci

$$(dq_1/ds)^2 + (dq_2/ds)^2 + \dots + (dq_m/ds)^2 = 1. \quad (35)$$

Zastosowanie procedury BDF do równania (35) [34] pozwala na sprowadzenie zależności (34, 35) do postaci algebraicznych równań nieliniowych, które dla  $n$ -tego kroku czasowego mają postać

$$\underline{F}^n[\underline{q}^n(s), \rho] = \underline{0}, \quad (36)$$

a którego rozwiązanie otrzymuje się dla  $\rho=1$ .

Algorytm metody w  $n$ -tym kroku analizy realizowany jest zgodnie z następującym schematem:

- 1) Pamiętaj z poprzedniego kroku  $T_{Zijk}^{n-1}, A_{Eik}^{n-1}$
- 2) Oblicz składowe  $R_{ijk}^n, S_{Eik}^n$  oraz wektor parametrów analizy

$$\underline{par}(n) = [\underline{T}_Z^{n-1}, \underline{A}_E^{n-1}, \underline{R}^n, \underline{S}_E^n, \underline{D}_E^n, \underline{PAB}^n]$$

gdzie  $\underline{PAB}^n = [\eta_k^n, \mu_k^n]$  jest wektorem parametrów algorytmu van Backhovena (wzór 25)

- 3) Rozwiąż równanie

$$\underline{F}^n(\underline{q}^n, \rho) |_{\underline{par}(n)} = \underline{0}$$

metodą Newtona-Raphsona (przyjąć  $\rho=1$ ) lub w przypadku braku zbieżności (zadana liczba iteracji) obliczenia należy powtórzyć algorytmem Uschida-Chua (przyjąć  $\rho=0$ )

- 4) Oblicz wartości mocy  $p$  w elementach
- 5) Oblicz nowe wartości składowych odpowiedzi bloków liniowych

$$\Delta T_{ijk}^n(T_{Zijk}^{n-1}, \dot{p}_j^n)$$

$$i_{Lk}^n(A_{Eik}^{n-1}, V_{Li}^n)$$

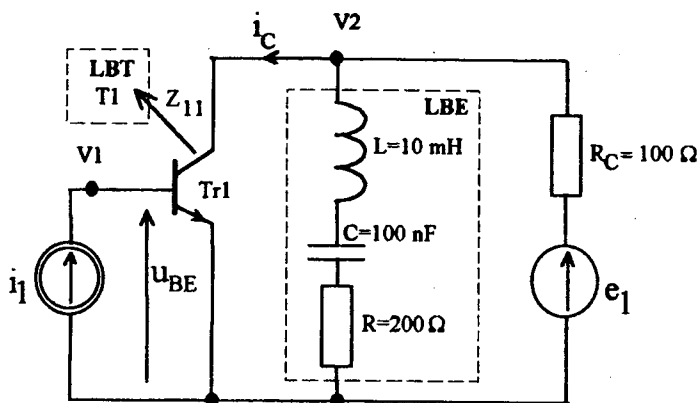
- 6) Wyznacz nową wartość kroku analizy  $\Delta^n$
- 7) Oblicz nowe wartości  $T_{Zijk}^n, A_{Eik}^n$
- 8) Przyjmij;  $n=n+1, t=t+\Delta^n$  i przejdź do punktu 2).

#### 4. WYNIKI ANALIZ

Opracowano i uruchomiono program DYNAL dla mikrokomputera klasy IBM PC w języku Turbo-Pascal 6.0, realizujący przedstawioną w rozdziale 3.4 metodę elektrotermicznej analizy dynamicznych obwodów nieliniowych.

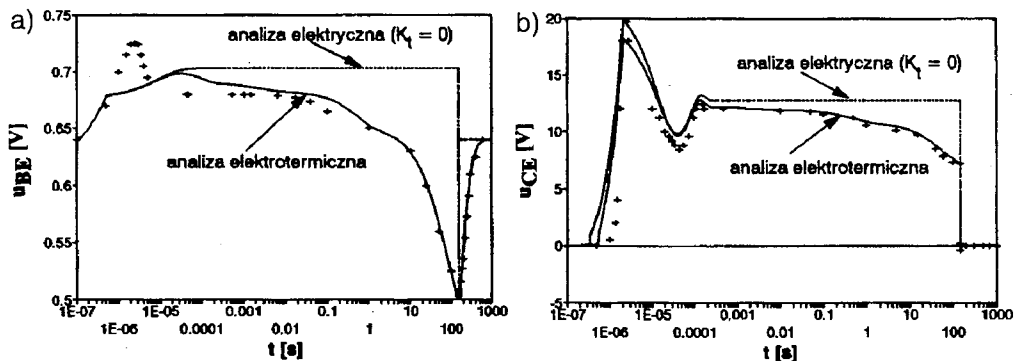
Za pomocą programu DYNAL przeprowadzono szereg symulacji elektrodynamicznych stanów przejściowych w wybranych układach elektronicznych. Część z tych wyników została opublikowana przez autora wcześniej, np. [6]. W charakterze

przykładu przedstawiono wyniki analiz elektrotermicznych stanów przejściowych w dwóch arbitralnie wybranych układach: wzmacniacza rezonansowego i wzmacniacza różnicowego.



Rys. 3. Układ wzmacniacza rezonansowego

Układ analizowanego jednotranzystorowego wzmacniacza rezonansowego z tranzystorem BC211 pokazano na rys. 3. W wyniku dekompozycji obwodu wyróżniono dwa bloki liniowe: LBT (model termiczny) oraz LBE (obwód RLC). Zasymlowano efekt włączenia i wyłączenia zasilania układu (przy warunku  $i_1 = I_1 = \text{const}$ ), co z obliczeniowego punktu widzenia jest równoważne pobudzeniu układu od strony wyjścia impulsem  $e_1 = E_{z0}(1 | (t - t_{z0}))$ . Przyjęto:  $I_1 = 0,5 \text{ mA}$ ,  $E_{z0} = 23 \text{ V}$ ,  $t_{z0} = 150 \text{ s}$ . Parametry quasi-stałaoprądowego modelu tranzystora BC211 wynoszą [48]:  $\beta_{OF} = 150$ ,  $\beta_{OR} = 10$ ,  $\hat{a} = 0.009 \text{ 1/K}$ ,  $c = 0.012 \text{ 1/K}$ ,  $b = 2 \text{ A}^{-1}$ ,  $I_o = 1.7 \cdot 10^7 \text{ A}$ ,  $r_o = 0$ ,  $T_o = 303 \text{ K}$ ,  $\lambda_1 = 0.8$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $U_{ZO1} = 60 \text{ V}$ ,  $U_{ZO2} = 8 \text{ V}$ ,  $V_{AN} = 170 \text{ V}$ ,  $V_{AI} = 50 \text{ V}$ ,  $\hat{\gamma}_i = \hat{\alpha}_i = 0$ ,  $\alpha_{i1} = \alpha_{i2} = 0$ . Parametry bloku NBD są następujące:  $N_C = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ ,  $N_B = 2 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ ,  $N_E = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ ,  $B_E = 74.4 \text{ pF} \cdot \text{V}^{-1/2}$ ,  $B_C = 17.8 \text{ pF} \cdot \text{V}^{-1/2}$ ,  $\tau_{mnE} = 100 \text{ ns}$ ,  $\tau_{mnC} = 0.05 \mu\text{s}$ ,  $\tau_1 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ ,  $a_2 = 0.03$ ,  $\tau_2 = 2.5 \text{ ms}$ ,  $a_3 = 0.12$ ,  $\tau_3 = 0.5 \text{ s}$ ,  $a_4 = 0.8$ ,  $\tau_4 = 90 \text{ s}$ ,  $K_t = 170 \text{ K/W}$ .

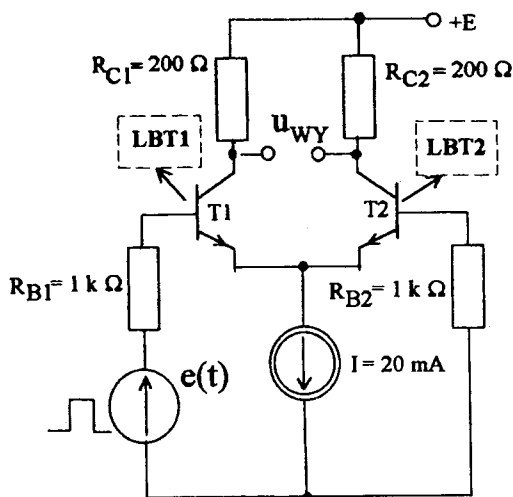


Rys. 4. Obliczone i pomierzone czasowe przebiegi  $u_{BE}$  (a) oraz  $u_{CE}$  (b) ilustrujące efekt włączenia/wyłączenia układu

Na rys. 4 przedstawiono czasowe przebiegi napięcia baza-emiter  $u_{BE}(t)$  i napięcia kolektor-emiter  $u_{CE}(t)$ , obliczone w warunkach izotermicznych (linia przerywana) oraz w obecności oddziaływań elektrotermicznych (linia ciągła). Ponadto wyniki symulacji zostały zweryfikowane doświadczalnie (krzyżyki). Zgodność wyników pomiarów i obliczeń jest dobra.

Jak widać, wpływ oddziaływań elektrotermicznych w analizowanym układzie na wybrane przebiegi elektryczne uwidacznia się już po czasie kilku milisekund od chwili włączenia zasilania, a największe różnice między przebiegami izotermicznymi i elektrotermicznymi występują w końcowej fazie dochodzenia do stanu ustalonego i mogą wynosić nawet 50%.

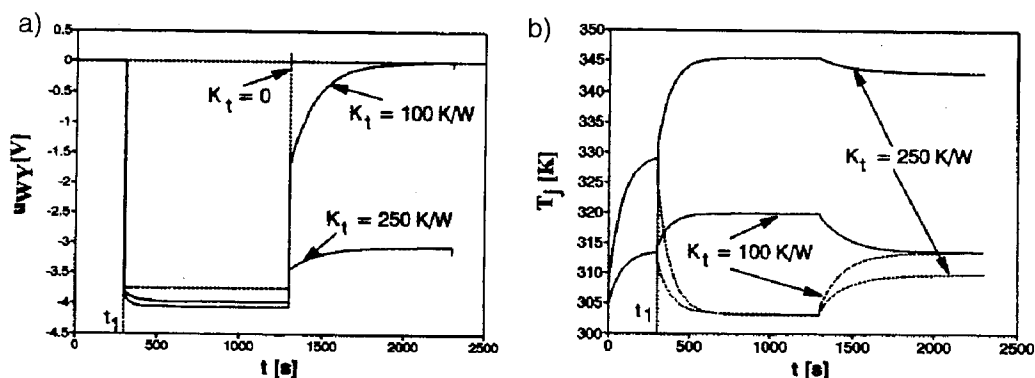
Z kolei układ analizowanego wzmacniacza różnicowego z rys. 5 pobudzono impulsem prostokątnym rozpoczynającym się w chwili czasu  $t_1$ , o czasie trwania 1000 s, amplitudzie 0.1 V oraz czasach narastania i opadania zboczy równych 1  $\mu$ s.



Rys. 5. Układ wzmacniacza różnicowego

Przyjęte w obliczeniach wartości parametrów quasi-stałoпрądowego modelu tranzystora bipolarnego odpowiadają parametrom tranzystora 2N2193 i wynoszą:  $\beta_{OF} = 130$ ,  $\beta_{OR} = 2$ ,  $\hat{a} = 0.02$  1/K,  $c = 0.004$  1/K,  $b = 10$  A<sup>-1</sup>,  $I_o = 4.4 \cdot 10^6$  A,  $r_o = 0$ ,  $T_o = 303$  K,  $\lambda_1 = 0.8$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $U_{Z01} = 105$  V,  $U_{Z02} = 8$  V,  $V_{AN} = 170$  V,  $V_{AI} = 50$  V,  $\hat{\gamma}_i = \hat{\alpha}_i = 0$ ,  $\alpha_{t1} = 0$ ,  $\alpha_{t2} = 0$ .

Z kolei wartości parametrów opisujących blok NBD dla rozpatrywanego tranzystora wynoszą:  $N_E = 10^{19}$  cm<sup>-3</sup>,  $N_B = 10^{16}$  cm<sup>-3</sup>,  $N_C = 10^{15}$  cm<sup>-3</sup>,  $B = 5.7 \cdot 10^{-11}$  F · V<sup>-1/2</sup> (dla złącza emiterowego) oraz  $B = 9.1 \cdot 10^{-12}$  F · V<sup>-1/2</sup> (dla złącza kolektorowego). W obliczeniach przyjęto następujące wartości parametrów termicznego modelu tranzystora:  $a_1 = 0.05$ ,  $\tau_1 = 5$  ms,  $a_2 = 0.1$ ,  $\tau_2 = 0.1$  s,  $a_3 = 0.85$ ,  $\tau_3 = 80$  s, przy czym przyjęto dwie wartości rezystancji termicznej, identyczne dla obydwu tranzystorów i odpowiednio równe 100 K/W oraz 250 K/W. Przebiegi  $u_{WY}(t)$  oraz



Rys. 6. Czasowy przebieg napięcia  $u_{WY}$  (a) oraz temperatury wnętrza tranzystorów (b)

$T_J(t)$  odpowiadające rozważanym sytuacjom przedstawiono na rys. 6. Na rys. 6.b linia ciągła dotyczy tranzystora Tr1, natomiast linia przerywana — tranzystora Tr2.

Na rys. 6.a dodatkowo linią przerywaną zaznaczono wyniki obliczeń dla przypadku izotermicznego ( $K_t = 0$ ). Jak widać dla dostatecznie dużej wartości  $K_t$  wzmacniacz różnicowy przestaje być układem liniowym, co w tym przypadku oznacza, że po wyłączeniu napięcia wejściowego, napięcie wyjściowe jest różne od zera.

## 6. UWAGI KOŃCOWE

Praca jest poświęcona analizie elektrotermicznych stanów przejściowych w układach elektronicznych. W pracy można wyróżnić trzy zasadnicze części.

W pierwszej z nich przedstawiono najważniejsze problemy obliczeniowe, a także dokonano przeglądu metod, algorytmów i programów komputerowych do takiej analizy.

W drugiej części pracy zaproponowano oryginalną, opracowaną przez autora, metodę analizy elektrotermicznych stanów przejściowych, która wymaga dekompozycji analizowanego układu na bloki (podobwody) o charakterze rezystancyjnym i dynamicznym, a następnie zastąpienia bloków dynamicznych odpowiednimi modelami dyskretnymi, których parametry są modyfikowane w kolejnych krokach czasowych. Takie podejście pozwala na realizację analizy jako sekwencji analiz stałoprądowych w kolejnych krokach czasowych. Bloki rezystancyjne zawierają rezystory liniowe, źródła niezależne oraz elementy półprzewodnikowe opisane za pomocą modeli GETM2 [48]. Przy dyskretyzacji dynamicznych bloków liniowych o charakterze elektrycznym i termicznym, zastosowano opracowane wcześniej przez autora, efektywne algorytmy bezpamięciowe [49], natomiast przy dyskretyzacji nieliniowych bloków dynamicznych wykorzystano algorytm zaproponowany przez van Bokhoven [35]. Przy rozwiązywaniu nieliniowych równań algebraicznych (równania obwodu) w każdym kroku czasowym, zastosowano opcjonalnie algorytm Newtona-Raphsona lub, przy braku skuteczności tego algorytmu, algorytm kontynuacji w wersji Ushida-Chua [34].

W trzeciej części pracy przedstawiono wyniki analiz wybranych prostych układów elektronicznych za pomocą opracowanego przez autora programu DYNAL, stanowiącego praktyczną implementację zaproponowanego w pracy algorytmu. Przedstawione przykłady analiz, w części zweryfikowanych doświadczalnie, wskazują na potrzebę uwzględnienia w obliczeniach oddziaływań elektrotermicznych. Czasowe przebiegi elektrotermiczne prądów i napięć mogą się znacznie różnić od przebiegów izotermicznych. Różnice te mogą być zarówno ilościowe, np. na rys. 4 wynoszą nawet 50%, jak i jakościowe, np. efekt utraty liniowości wzmacniacza różnicowego w obecności oddziaływań elektrotermicznych (rys. 6).

Symulacje charakterystyk elektrotermicznych układów elektronicznych mają również znaczenie praktyczne, np. pozwalają na dobór elementu wraz z radiatorem o odpowiednich wartościach parametrów termicznych, zapewniających poprawną pracę układu.

### BIBLIOGRAFIA

1. J. Bittner, T. Szepesi, Y. Ying: *New Switching Regulator I.C. Comes with a Full Feature, Thermally Accurate SPICE Macromodel*. Proc. IEEE APEC'90, Los Angeles 1990, p. 451
2. E. Bolek, A. Napierałski: *Analiza procesu przejściowego w tranzystorach bipolarnych z uwzględnieniem efektu samonagrzewania*. III Kraj. Konf. Teoria Obwodów i Układy Elektroniczne, Stawiska 1979, s. 236
3. G. De Mey: *Thermal Problems in Electronics Advanced Training Course*. „Mixed Design of VLSI Circ.”, Dębe 1994, p. 25
4. B. Fatemizadeh, D. Silber: *A Versatile Electrical Model for IGBT Including Thermal Effects*. 24-th Annual IEEE Power Electronic Specialists Conf., Seattle, June 1993, p. 85
5. K. F. Fukahori, P. R. Gray: *Computer Simulation of Integrated Circuits in the Presence of Electrothermal Interactions*. IEEE J. Sol. St. Circ., SC-11, N. 6, 1976, p. 834
6. K. Górecki, J. Zarębski, W. J. Stepowicz: *Elektryczna i elektrotermiczna analiza układów elektronicznych*. VI Sympozjum Podstawowe Problemy Energoelektroniki i Elektromechaniki, Ustroń 1995, s. 47
7. S. Harold, A. Kos: *Thermal Oscillations in GaAs Amplifiers*. XVII Nat. Conf. Circuit Theory and Electronic Networks, Polanica Zdr. 1994, Vol. 2, p. 383
8. A. R. Hefner, D. L. Blackburn: *Simulating the Dynamic Electrothermal Behaviour of Power Electronic Circuits and Systems*. IEEE Trans. on Power Electr., Vol. 8, N. 4, Oct. 1993, p. 376
9. W. Janke, W. Kalman, Z. Łata: *Zastosowanie programu SPICE do symulacji układów elektronicznych w warunkach nieizotermicznych*. Symp. z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, Wiśła 1992, s. 383
10. W. Janke: *Modele Elektrotermiczne elementów półprzewodnikowych*. Zesz. Nauk. Polít. Gdańskiej, Nr 374, Elektronika LVII, 1984, (praca habilitacyjna)
11. W. Janke, W. Pietrenko: *Problemy symulacji przejściowych przebiegów termicznych w układach impulsowego przetwarzania mocy*. Podstawowe Problemy Energoelektroniki — PPE V, Ustroń 1993, s. 30
12. W. Janke, W. Pietrenko: *SPICE-aided Simulation of Electrothermal Interactions in Transient States*. XVI-th Nat. Conf. Circ. Theory and Electronic Circuits, Kołobrzeg 1993, Vol. 2, p. 290
13. W. Janke, W. J. Stepowicz: *Elektrotermiczne modele elementów półprzewodnikowych*. Monografia z tematu III.2b, Probl. Res. MNSzWiT, 1-8, Warszawa 1981
14. W. Janke, W. J. Stepowicz: *Metoda analizy elektrotermicznych stanów przejściowych w diodach i tranzystorach*. IX Symp. Metody Matematyczne w Elektrotechnice, Pokrzywna 1981, s. 57
15. W. Janke, J. Zarębski: *Badanie elektrotermicznych stanów przejściowych w układzie wzmacniacza tranzystorowego*. Zesz. Nauk. Polít. Gdańskiej, Elektronika LXVI, N. 442, 1991, s. 21

16. R. C. Joy, E. S. Shiling: *Thermal Properties of Very Fast Transistors*. IEEE Trans. El. Dev., ED-17, N. 8, 1970, p. 586
17. A. K o s: *Modelowanie hybrydowych układów mocy i optymalizacja ich konstrukcji ze względu na rozkład temperatury*. Wydawnictwo AGH, Kraków 1994. (praca habilitacyjna)
18. Z. Lisik: *A Hybrid Approach to Heat Transfer Modelling in Electrothermal Models of Power Semiconductor Devices*. EPE, Brighton 1993, p. 161
19. Z. Lisik: *Modelowanie cieplnych, elektrycznych i elektrotermicznych własności przyrządów półprzewodnikowych mocy*. Zesz. Nauk. Nr 654, Z. 168, Polit. Łódzka, 1992 (praca habilitacyjna)
20. H. A. M a n t o o t h, A. R. H e f n e r: *Electro-Thermal Simulation of an IGBT PWM Inverter*. 24-th Annual IEEE Power Electronic Specialists Conf. (PESC'93), Seattle, June 1993, p. 75
21. A. N a k a g a w a: *A Time — and Temperature-Dependent Two-Dimensional Simulation of GTO Turnoff Process II — Inductive Load Case*. Solid-State Electronics, Vol. 28, N. 7, 1985, p. 677
22. A. N a p i e r a l s k i, M. G r e c k i: *Two-dimensional Simulation of Semiconductor Devices with Temperature Computation Inside the Silicon Structure*. Electromagnetic Phenomena in Nonlinear Circuits, Poznań 1994, p. 195
23. A. N a p i e r a l s k i: *Komputerowe projektowanie układów półprzewodnikowych mocy ze szczególnym uwzględnieniem ich właściwości termicznych*. Zesz. Nauk. Polit. Łódzkiej, 1988, N. 562 (praca habilitacyjna)
24. A. N a p i e r a l s k i, M. G r e c k i: *2D Simulation of Power Bipolar Transistor with Temperature Computation During Switching Process*. XVI-th Nat. Conf. Circuit Theory and Electronic Circuits, Kołobrzeg 1993, Vol. 1, p. 278
25. K. N e m e t h: *On the Analysis of Nonlinear Networks Taking into Account the Interdependence of Electrical and Thermal Effects*. IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems — ISCAS'76, p. 138
26. A. N o w a k o w s k i: *Badanie procesów termicznych w przyrządach półprzewodnikowych*. Zesz. Nauk. Polit. Gdańskiej. Zesz. Elektronika LX, N. 389, 1984 (praca habilitacyjna)
27. W. V. P e t e g e m i n n i: *Electrothermal Simulation and Design of Integrated Circuits*. IEEE J. of Sol.-St. Circ., Vol. 29, N. 2, Febr. 1994, p. 143
28. W. V. P e t e g e m, D. W a c h t e r, W. D e S a n s e n: *Electrothermal Simulation of Integrated Circuits*. 6-th IEEE SEMI-THERM, Phoenix 1990, p. 70
29. E. S c h u r a c k, T. L a t z e l, W. R u p p, A. G o t w a l d: *Nonlinear Effects in Transistors Caused by Thermal Power Feedback: Simulation and Modelling in SPICE*. IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems — ISCAS'92, San Diego 1992, p. 879
30. W. J. S t e p o w i c z, W. J a n k e: *Electrothermal Transients due to Selfheating in a Silicon P-N Diode*. IEEE Proc., Vol. 127, Pt. I, 1, 1980, p. 25
31. W. J. S t e p o w i c z, W. J a n k e: *Modele termiczne elementów półprzewodnikowych*. Zesz. Nauk. Polit. Gdańskiej, N. 348, Elektronika LVI, 1982, s. 3
32. V. S z e k e l y, K. T a r n a y: *Accurate Algorithm for Temperature Calculation of Devices in Nonlinear-Circuit-Analysis Programs*. El. Lett. Vol. 8, N. 19, 1972, p. 470
33. V. S z e k e l y: *Accurate Calculation of Device Heat Dynamics*. El. Lett., Vol. 9, N. 6, 1973, p. 132
34. A. U s h i d a, L. O. C h u a: *Tracing Solution Curves of Non-Linear Equations with Sharp Turning Points*. Circuit Theory and Applications, Vol. 12, 1-21, 1984, p. 1
35. W. M. G. V a n B o k h o v e n: *Linear Implicit Differentiation Formulas of Variable Step and Order*. IEEE Trans. on Circ. and Syst., Vol. CAS-22, N. 2, 1975, p. 109
36. R. V o g e l s o n g, C. B r z e z i ń s k i: *Extending SPICE for Electrothermal Simulation*. Proc. IEEE Custom Integrated Circuits Conf. (CICC), San Diego 1989, p. 21.4.1
37. K. Z a m ł y ń s k i: *Dwuwymiarowe modelowanie cieplnych odpowiedzi czasowych obwodów układów scalonych*. XII Kraj. Konf. Teoria Obwodów i Układy Elektroniczne. Rzeszów-Myczkowce 1989, s. 259
38. K. Z a m ł y ń s k i, J. O g r o d z k i: *Efficient Algorithm for Electrothermal Simulation of IC's*. XVI Nat. Conf. Circuit Theory and Electronic Circuits, Kołobrzeg 1993, Vol. 1, p. 309
39. K. Z a m ł y ń s k i: *Optima-T — the Program for Simulation of Electrothermal Circuits in the Presence of Electrothermal Interaction*. XIV Nat. Conf. Circ. Theory and Electronic Circuits, Waplewo 1991, p. 210
40. J. Z a r ę b s k i: *A Large-signal Analysis of Electrothermal Interactions in Electronic Circuits*. IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems — ISCAS'92, San Diego 1992, Vol. 3, p. 1404

41. J. Z a r ę b s k i: *A Novel Algorithm for Simulation of Dynamic Thermal Effects in Electronic Circuits*. VI Int. NASECODE Confer., Dublin 1989, p. 344
42. J. Z a r ę b s k i, W. C i t k o: *Zmiennokrokowy algorytm elektrotermicznej analizy dynamicznej obwodów nieliniowych*. XV Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, Wisła 1992, Vol. 1, s. 391
43. J. Z a r ę b s k i, W. J a n k e: *Komputerowy program analizy oddziaływań elektrotermicznych w układach elektronicznych*. IX Kraj. Konf. Teoria Obwodów i Układy Elektroniczne, Szklarska Poręba 1986, s. 167
44. J. Z a r ę b s k i, W. J a n k e: *Wielkosygnałowa analiza dynamiczna pewnej klasy obwodów elektrycznych*. II Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, Wisła 1985, s. 5
45. J. Z a r ę b s k i: *Simulation of Electrothermal Interactions in Electronic Circuits in Dynamic Case*. XIV Nat. Conf. on Circuit Theory and Electronic Circuits, Waplewo 1991, Vol. 1, p. 203
46. J. Z a r ę b s k i: *Wielkosygnałowa analiza oddziaływań elektrotermicznych w układach półprzewodnikowych*. Rozprawa doktorska. Politechnika Gdańska, Gdańsk 1986
47. J. Z a r ę b s k i: *Zastosowanie bezpamięciowej metody obliczania całki splotu w analizie liniowych obwodów dynamicznych*. Zesz. Nauk. WSM w Gdyni, 1993, N. 25, s. 71
48. J. Z a r ę b s k i: *Elektrotermiczne wielkosygnałowe modele wybranych elementów półprzewodnikowych*. Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji 1996, t. 42, zesz. 2, s. 93—128
49. J. Z a r ę b s k i: *The Time Dependence Calculations of the Junction Temperature of Semiconductor Devices*. Int. Journal of Microcomputer Appl., Vol. 13, N. 2, June 1994, p. 62
50. L. C h u a, D. P. L i n: *Komputerowa analiza układów elektronicznych*. WNT, Warszawa 1981
51. P. K. B r a y t o n i i n n i: *A New Efficient Algorithm for Solving Differential-Algebraic Systems Using Implicit Backward Differentiation Formulas*. Proc. IEEE, Vol. 60, Jan. 1972, p. 98

## Dodatek A

### Bezpamięciowy algorytm obliczania odpowiedzi bloku LBE dla przypadku odpowiedzi impulsowej w postaci funkcji cosinus

W niniejszym algorytmie nie nakłada się żadnych ograniczeń na postać  $u_L(t)$ , natomiast dla uproszczenia oznaczeń przyjmuje się stałą wartość kroku, tzn.  $\Delta = \text{const}$ . Zakłada się, że przebieg  $k(t)$  ma postać

$$k(t) = A \cdot \cos \omega t. \quad (\text{A1})$$

Ponieważ

$$A \cos \omega t = k_a(t) + k_b(t) = \frac{A}{2} \cdot \exp(j\omega t) + \frac{A}{2} \cdot \exp(-j\omega t), \quad (\text{A2})$$

dlatego, po uwzględnieniu liniowości splotu, odpowiedź prądową bloku LBE można przedstawić w następującej postaci

$$\begin{aligned} i_L(t) &= u_L(t) * \frac{A}{2} \cdot \exp(j\omega t) + u_L(t) * \frac{A}{2} \cdot \exp(-j\omega t) = \\ &= i_{La}(t) + i_{Lb}(t), \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

gdzie  $i_{La}(t)$  i  $i_{Lb}(t)$  oznaczają wartości zespolone sprzężone, a więc

$$Re[i_{La}(t)] = Re[i_{Lb}(t)], \quad (A4)$$

$$Im[i_{La}(t)] = -Im[i_{Lb}(t)]. \quad (A5)$$

Zatem w  $n$ -tym kroku obliczeń słuszna jest następująca zależność

$$i_L^n = 2 \cdot Re(i_{La}^n) = 2 \cdot Re(i_{Lb}^n). \quad (A6)$$

Dla przejrzystości, w dalszych rozważaniach przyjęto, że

$$i_L^n = 2 \cdot Re(i_{La}^n). \quad (A7)$$

Ponieważ jedną z funkcji podspłotowych (przebieg  $k(t)$ ) można przedstawić w postaci funkcji eksponencjalnych (zmiennej zespolonej), co jest warunkiem koniecznym stosowalności algorytmu bezpamięciowego, dlatego dla rozpatrywanego tutaj przypadku, poprzez analogię do zależności (10) z rozdziału 3.2.1, można napisać

$$i_{La}^n = \xi_a \cdot i_{La}^{n-1} + S_a^n, \quad (A8)$$

gdzie

$$\xi_a = \exp(j\omega\Delta) = \cos\omega\Delta + j\sin\omega\Delta, \quad (A9)$$

$$S_a^n = h_2 \cdot u_L^{n-1} + h_1 \cdot u_L^n. \quad (A10)$$

natomiast parametry  $h_1$  i  $h_2$  mają odpowiednio postać

$$h_1 = \int_0^{\Delta/2} k_a(t) dt = \int_0^{\Delta/2} \frac{A}{2} \cdot e^{j\omega t} dt = \frac{A}{2\omega} \cdot \left[ \sin \frac{\omega\Delta}{2} + j \left( 1 - \cos \frac{\omega\Delta}{2} \right) \right], \quad (A11)$$

$$h_2 = h_1 \cdot \sqrt{\xi_a} = \frac{A}{\omega} \cdot \sin \frac{\omega\Delta}{4} \cdot \left( \cos \frac{3\omega\Delta}{4} + j \sin \frac{3\omega\Delta}{4} \right). \quad (A12)$$

Ponieważ  $h_1$  i  $h_2$  dane są w postaci liczb zespolonych, dlatego z wzorów (A8 i A10), dla  $n = 1 (i_{La}^0 = 0)$  można napisać

$$i_{La}^1 = S_a^1 = Re(i_L^1) + j Im(i_L^1). \quad (A13)$$

W drugim kroku obliczeń otrzymuje się

$$\begin{aligned} i_{La}^2 &= \xi_a \cdot i_{La}^1 + S_a^2 = (\cos\omega\Delta + j\sin\omega\Delta) \cdot [Re(i_{La}^1) + j Im(i_{La}^1)] + Re(S_a^2) \\ &\quad + j Im(S_a^2). \end{aligned} \quad (A14)$$

Jak widać obliczenie  $i_{La}^2$  wymaga pamiętania zarówno  $Re(i_{La}^1)$  jak i  $Im(i_{La}^1)$ . A zatem dla  $n$ -tego kroku, poprzez analogię, otrzymuje się

$$\begin{cases} Re(i_{La}^n) = Re(i_{La}^{n-1}) \cdot \cos\omega\Delta - Im(i_{La}^{n-1}) \cdot \sin\omega\Delta + Re(S_a^n) \\ Im(i_{La}^n) = Im(i_{La}^{n-1}) \cdot \cos\omega\Delta + Re(i_{La}^{n-1}) \cdot \sin\omega\Delta + Im(S_a^n) \\ i_L^n = 2 \cdot Re(i_{La}^n), \end{cases} \quad (A15)$$

gdzie

$$\operatorname{Re}(S_a^n) = \operatorname{Re}(h_2) \cdot u_L^{n-1} + \operatorname{Re}(h_1) \cdot u_L^n, \quad (\text{A16})$$

$$\operatorname{Im}(S_a^n) = \operatorname{Im}(h_2) \cdot u_L^{n-1} + \operatorname{Im}(h_1) \cdot u_L^n. \quad (\text{A17})$$

## Dodatek B

### Parametry bezpamięciowego algorytmu wyznaczania odpowiedzi dyskretnych liniowych dynamicznych bloków LBE

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(h_{ic0}^{nk}) = & \frac{A_{ik} \exp(-a_{ik} \cdot \Delta^n/2)}{2 \cdot (a_{ik}^2 + \omega_{ik}^2)} \cdot \left[ a_{ik} \cos \frac{\omega_{ik} \Delta^n}{2} - \omega_{ik} \sin \frac{\omega_{ik} \Delta^n}{2} - \right. \\ & \left. + \exp(-a_{ik} \cdot \Delta^n/2) \cdot (a_{ik} \cos \omega_{ik} \Delta^n - \omega_{ik} \sin \omega_{ik} \Delta^n) \right] \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(h_{ic0}^{nk}) = & \frac{A_{ik} \exp(-a_{ik} \cdot \Delta^n/2)}{2 \cdot (a_{ik}^2 + \omega_{ik}^2)} \cdot \left[ a_{ik} \sin \frac{\omega_{ik} \Delta^n}{2} + \omega_{ik} \cos \frac{\omega_{ik} \Delta^n}{2} - \right. \\ & \left. + \exp(-a_{ik} \cdot \Delta^n/2) \cdot (a_{ik} \sin \omega_{ik} \Delta^n + \omega_{ik} \cos \omega_{ik} \Delta^n) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(h_{ic1}^{nk}) = & \frac{A_{ik}}{2 \cdot (a_{ik}^2 + \omega_{ik}^2)} \cdot \left[ a_{ik} + \exp\left(-a_{ik} \frac{\Delta^n}{2}\right) \cdot \left( \omega_{ik} \sin \frac{\omega_{ik} \Delta^n}{2} - \right. \right. \\ & \left. \left. + a_{ik} \cos \frac{\omega_{ik} \Delta^n}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(h_{ic1}^{nk}) = & \frac{A_{ik}}{2 \cdot (a_{ik}^2 + \omega_{ik}^2)} \cdot \left[ \omega_{ik} - \exp\left(-a_{ik} \frac{\Delta^n}{2}\right) \cdot \left( a_{ik} \sin \frac{\omega_{ik} \Delta^n}{2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \omega_{ik} \cos \frac{\omega_{ik} \Delta^n}{2} \right) \right]; \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(h_{is0}^{nk}) = & \frac{B_{ik} \exp(-b_{ik} \cdot \Delta^n/2)}{2 \cdot (b_{ik}^2 + \omega_{ik}^2)} \cdot \left[ \omega_{ik} \cos \frac{\omega_{ik} \Delta^n}{2} + b_{ik} \sin \frac{\omega_{ik} \Delta^n}{2} - \right. \\ & \left. + \exp\left(b_{ik} \frac{\Delta^n}{2}\right) \cdot (b_{ik} \sin \omega_{ik} \Delta^n + \omega_{ik} \cos \omega_{ik} \Delta^n) \right] \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(h_{is0}^{nk}) = & \frac{B_{ik} \exp(-b_{ik} \cdot \Delta^n/2)}{2 \cdot (b_{ik}^2 + \omega_{ik}^2)} \cdot \left[ \omega_{ik} \sin \frac{\omega_{ik} \Delta^n}{2} - b_{ik} \cos \frac{\omega_{ik} \Delta^n}{2} + \right. \\ & \left. + \exp\left(-b_{ik} \frac{\Delta^n}{2}\right) \cdot (b_{ik} \cos \omega_{ik} \Delta - \omega_{ik} \sin \omega_{ik} \Delta^n) \right]; \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

$$Re(h_{is1}^{nk}) = \frac{B_{ik}}{2 \cdot (b_{ik}^2 + \omega_{ik}^2)} \left[ \omega_{ik} - \exp\left(-b_{ik} \frac{\Delta^n}{2}\right) \cdot \left( \omega_{ik} \cos \frac{\omega_{ik} \Delta^n}{2} + b_{ik} \sin \frac{\omega_{ik} \Delta^n}{2} \right) \right]; \quad (A6)$$

$$Im(h_{is1}^{nk}) = -\frac{B_{ik}}{2 \cdot (b_{ik}^2 + \omega_{ik}^2)} \cdot \left[ b_{ik} + \exp\left(-b_{ik} \frac{\Delta^n}{2}\right) \cdot \left( \omega_{ik} \sin \frac{\omega_{ik} \Delta^n}{2} - b_{ik} \cos \frac{\omega_{ik} \Delta^n}{2} \right) \right]. \quad (A7)$$

J. ZARĘBSKI

## ANALYSIS OF ELECTROTHERMAL TRANSIENTS IN ELECTRONIC CIRCUITS

## Summary

In this paper a new method and algorithm for the electrothermal a.c. large-signal analysis of electronic circuits is presented. This method is based on the global electrothermal device models of the second kind [48] and the discrete models of some dynamical blocks associated with the effective algorithms of the convolution integral calculations for the linear blocks, and associated with Van Bockhoven algorithm [35] for the nonlinear blocks, respectively. A practical implementation of the method is the program DYNAL for IBM PC. The correctness of the method is confirmed by the results of analysis and measurements, described in the paper.

*Key words:* electrothermal transients in semiconductor devices and circuits, dynamic analysis of electronic circuits, algorithms.

## **Interpolacja temperatury w modelach wielowymiarowych metodą odwzorowania funkcji wielu zmiennych w odcinek prostej**

**SŁAWOMIR KOZIEŁ**

*Katedra Układów Elektronicznych, Politechnika Gdańska*

*Otrzymano 1996.01.09*

*Autoryzowano do druku 1996.06.26*

Praca stanowi próbę alternatywnego podejścia do problemu interpolacji temperatury w modelach wielowymiarowych. W zwięzły sposób zaprezentowano istotę zagadnienia oraz podstawowe idee proponowanej metody. Dokonano oszacowania błędu metody dla przypadku ogólnego. Uzasadniono wybór krzywej odwzorowania zapewniającej minimalizację maksymalnego błędu interpolacji. Zaprezentowano algorytm poszukiwania węzłów interpolacyjnych. Praca zawiera również wyniki weryfikacji prezentowanej metody uzyskane symulacyjnie w oparciu o specjalne funkcje testowe. Zamieszczono dyskusję wyników wraz z wnioskami i propozycjami modyfikacji.

*Słowa kluczowe:* interpolacja temperatury, symulacja komputerowa, monolityczne układy scalone.

### **1. WPROWADZENIE**

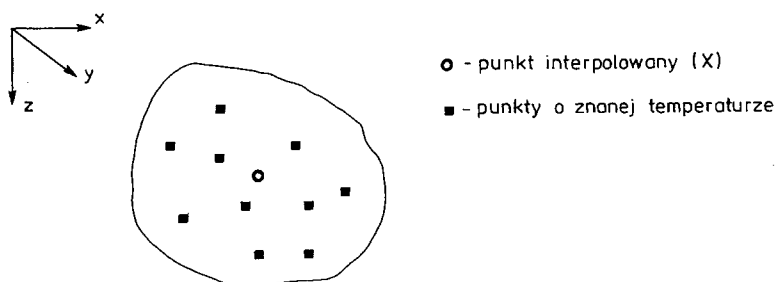
Jak powszechnie wiadomo, teoria interpolacji i aproksymacji jest dobrze rozwinięta jeśli chodzi o funkcje jednej zmiennej. Wiadomo również, że uogólnienie metod interpolacyjnych stosowanych dla tych funkcji na funkcje wielu zmiennych stanowi duży problem. Niniejsza praca jest próbą odpowiedzi na pytanie czy i w jakich warunkach możliwe jest stosowanie metod odpowiednich dla funkcji jednej zmiennej do interpolacji temperatury w modelach wielowymiarowych. Modelem najbardziej adekwatnym do rzeczywistości jest oczywiście model trójwymiarowy i w dalszej części pracy będzie rozważany właśnie taki model.

Problem przedstawia się w sposób następujący. W pewnym obszarze, na przykład strukturze monolitycznego układu scalonego, znany jest rozkład temperatury w postaci szeregu punktów o określonych współrzędnych i odpowiadających im wartościach temperatury. Dane te mogą pochodzić z pomiaru albo też mogą być wynikiem symulacji komputerowej układu. W pewnych sytuacjach potrzebna jest znajomość temperatury w innych, w ogólności dowolnie wybranych, punktach struktury.

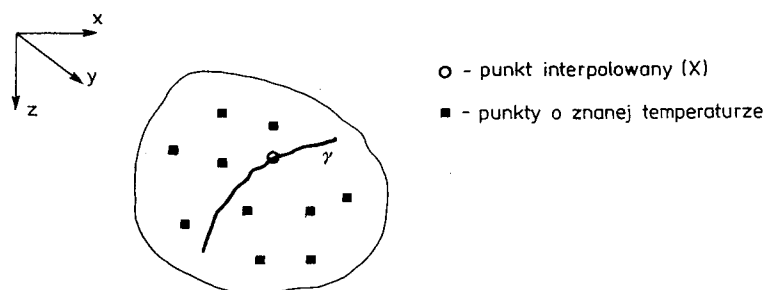
Sytuacją taką jest na przykład konieczność wizualizacji wyników pomiarów bądź analizy, w postaci mozaiki barwnej lub też, mówiąc bardziej ogólnie, potrzeba „zagęszczenia” punktów o znanej temperaturze.

## 2. METODOLOGIA INTERPOLACJI

Ogólny przypadek omawianego zagadnienia przedstawia Rys. 1. Chcemy wyznaczyć temperaturę punktu  $X$  znajdującego się w ograniczonym obszarze wraz z punktami o znanej temperaturze. Przyjmijmy, że temperatura wewnątrz obszaru opisana jest funkcją  $T = T(x, y, z)$ , której nie znamy oczywiście w postaci zależności analitycznej, mamy do dyspozycji jedynie wspomniany wyżej zbiór punktów o znanej temperaturze. O funkcji  $T(x, y, z)$  zakładamy, że jest ciągła i różniczkowalna przynajmniej  $n$  krotnie w sposób ciągły na całym rozpatrywanym obszarze, gdzie  $n$  jest pewną liczbą naturalną.



Rys. 1. Rozkład temperatury w postaci punktów w strukturze układu scalonego



Rys. 2. Idea rozwiązania problemu interpolacji temperatury

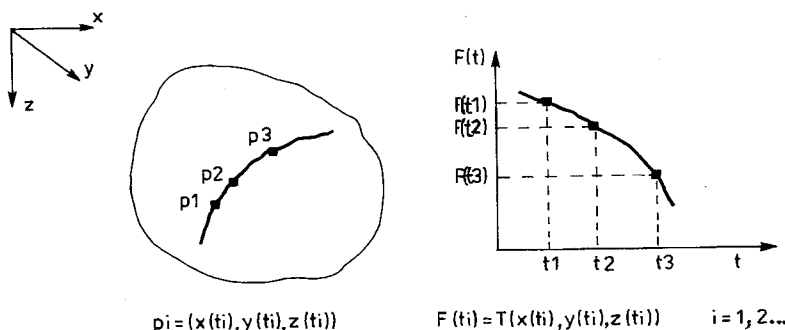
Na rys. 2 pokazano główną ideę rozwiązania postawionego wyżej problemu, przy użyciu metod interpolacyjnych właściwych dla funkcji jednej zmiennej. Przez rozpatrywany obszar prowadzimy krzywą  $\gamma$  taką, że przechodzi ona przez punkt interpolowany  $X$  oraz pewną liczbę punktów o znanych temperaturach. Krzywa  $\gamma$  zadana jest parametrycznie w sposób następujący ( $t$  — zmienna pomocnicza):

$$\begin{aligned} x &= x(t) & y &= y(t) & z &= z(t) \end{aligned} \quad (1)$$

przy czym funkcje  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  są ciągłe i różniczkowalne w sposób ciągły przynajmniej  $n$  krotnie. Wobec powyższego możemy zdefiniować odwzorowanie  $F(t)$  takie, że

$$F(t) = T(x(t), y(t), z(t)). \quad (2)$$

Jak widać, wartościami funkcji  $F(t)$  są wartości temperatury punktów leżących na krzywej  $\gamma$ . Rys. 3 pokazuje istotę tego odwzorowania.



Rys. 3. Istota odwzorowania wartości funkcji  $F(t)$

Punkty  $p_1, \dots, p_3$  są przykładowymi punktami leżącymi na krzywej  $\gamma$  o współrzędnych  $p_i = (x(t_i), y(t_i), z(t_i))$ , którym odpowiadają temperatury  $T_i = T(x(t_i), y(t_i), z(t_i))$ . Odpowiednio, każdemu argumentowi  $t_i$  funkcji  $F(t_i)$  przypisana jest wartość temperatury  $T_i$ . Ponieważ założyliśmy, że krzywa  $\gamma$  zawiera oprócz punktu interpolowanego  $X$  również pewną liczbę punktów o znanej temperaturze, wynika stąd, że znamy wartości funkcji  $F(t)$  dla pewnych wartości argumentu  $t$  (nie znamy oczywiście postaci analitycznej  $F(t)$ ).

Podsumowując: Przyjęcie opisanego odwzorowania sprawia, że uzyskaliśmy funkcję jednej zmiennej (w postaci dyskretnej, czyli tablicy argumentów i odpowiadających im wartości funkcji), a zatem możemy interpolować wartość temperatury w punkcie  $X$  (określonego współrzędnymi w modelu wielowymiarowym) przy pomocy metod właściwych dla funkcji jednej zmiennej. W dalszym ciągu będziemy rozważać interpolację wielomianową w sensie Lagrange'a. Niech krzywa  $\gamma$  przechodzi przez  $n$  punktów o znanej temperaturze  $P_i = (x(t_i), y(t_i), z(t_i))$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , o odpowiadających im wartościach temperatury  $T_i = T(x(t_i), y(t_i), z(t_i))$  oraz przez punkt  $X = (x(t_x), y(t_x), z(t_x))$ . Punktom tym odpowiadają węzły interpolacyjne  $t_i$  wraz z wartościami  $F_i = T(x(t_i), y(t_i), z(t_i))$  oraz punkt  $t_x$  o nieznannej temperaturze  $F_x$ . Wielomian interpolacyjny ma postać:

$$W_k(t) = \sum_{i=0}^k a_i t^i \quad (3)$$

gdzie  $k = n-1$ . Współczynniki wielomianu znajdujemy poprzez rozwiązanie układu  $n$  równań liniowych postaci

$$\begin{aligned}
 F_1 &= a_0 + a_1 t_1 + \dots + a_{k-1} t_1^{k-1} + a_k t_1^k \\
 F_2 &= a_0 + a_1 t_2 + \dots + a_{k-1} t_2^{k-1} + a_k t_2^k \\
 &\dots \\
 F_n &= a_0 + a_1 t_n + \dots + a_{k-1} t_n^{k-1} + a_k t_n^k
 \end{aligned} \tag{4}$$

przy czym  $k = n - 1$ . Wartość temperatury w punkcie X wynosi wówczas

$$F_x = W_k(t_x) = \sum_{i=0}^k a_i t_x^i. \tag{5}$$

### 3. OSZACOWANIE BŁĘDU INTERPOLACJI

W niniejszym rozdziale zostanie dokonane oszacowanie błędu interpolacji temperatury proponowaną metodą. Spróbujemy pokazać również, jakiego rodzaju krzywe zapewniają minimalizację maksymalnego błędu wyznaczenia temperatury. W literaturze ([3], [7]) można znaleźć następujące oszacowanie błędu interpolacji wielomianowej w sensie Lagrange'a (tu odniesione do rozpatrywanej funkcji  $F(t)$ ):

$$\varepsilon = |F(t) - W_k(t)| \leq \frac{M_{k+1}}{(k+1)!} |w_{k+1}(t)|, \tag{6}$$

gdzie

$$w_{k+1}(t) = (t - t_0)(t - t_1) \cdot \dots \cdot (t - t_k) \tag{7}$$

oraz

$$M_{k+1} = \max_{a \leq t \leq b} |F^{(k+1)}(t)| \tag{8}$$

przy czym  $[a, b]$  jest przedziałem, w którym zawierają się wszystkie węzły interpolacyjne, ponadto  $F(t)$  jest różniczkowalna  $k+1 = n$  krotnie jak zakładano w rozdziale 2. Aby znaleźć powiązanie pomiędzy wartością błędu interpolacji a krzywą  $\gamma$  należy wyznaczyć  $(k+1)$ -szą pochodną funkcji  $F(t)$  jako funkcji złożonej  $T(x, y, z)$  i  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ . Zgodnie z regułami różniczkowania funkcji złożonej ([6]) mamy

$$F^{(1)}(t) = \frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{dz}{dt} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 F^{(2)}(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dF}{dt} \right) = & \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z} \frac{dx}{dt} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x} \frac{dy}{dt} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \\
 & + \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z} \frac{dy}{dt} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial x} \frac{dz}{dt} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial y} \frac{dz}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{d^2 z}{dt^2}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

W podobny sposób możemy indukcyjnie wyznaczyć pochodne wyższych rzędów. Można sprawdzić, że  $n$ -ta pochodna funkcji  $F(t)$  może być opisana następującą zależnością

$$F^{(n)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{3i} (D_i)_j (R_i)_j \quad (11)$$

gdzie

$$(D_i)_j = \frac{\partial^i F}{\partial a_{1j} \partial a_{2j} \dots \partial a_{ij}} \quad (12)$$

oraz

$$(R_i)_j = \sum_m \left( c_m \prod_{l=1}^i \left( \frac{d^{w_l} a_{lj}}{dt^{w_l}} \right) \right). \quad (13)$$

przy czym  $c_m$  jest pewną liczbą naturalną.  $(R_i)_j$  jest sumą  $m$  składników, gdzie  $m$  stanowi liczbę możliwych kombinacji  $\prod_{l=1}^i \left( \frac{d^{w_l} a_{lj}}{dt^{w_l}} \right)$ , takich, że współczynniki  $w_l$  spełniają warunki:

1)  $\sum_{l=1}^i w_l = n$ ; 2)  $w_i \geq w_j$  dla  $i > j$ ; 3)  $w_i \leq n - i + 1$  dla każdego  $n$ . Symbol  $a_{ij}$  jest oznaczeniem ogólnym tj. może oznaczać jedną ze zmiennych:  $x$ ,  $y$ , lub  $z$ . Indeks  $j$  oznacza numer kombinacji pochodnych cząstkowych w następującej kolejności (przykład dla  $i=3$ ):

$$j=1 \Rightarrow \partial x \partial x \partial x$$

$$j=2 \Rightarrow \partial x \partial x \partial y$$

$$j=3 \Rightarrow \partial x \partial x \partial z$$

$$j=4 \Rightarrow \partial x \partial y \partial x$$

...

$$j=27 \Rightarrow \partial z \partial z \partial z$$

Dla lepszego zobrazowania problemu przedstawmy przykład czynnika  $(D_i)_j$  oraz  $(R_i)_j$  dla  $i=3$ ,  $j=5$  przy wyznaczaniu pochodnej 5-tego rzędu (czyli dla  $n=5$ ).

$$(D_3)_5 = \frac{\partial^3 T}{\partial x \partial y \partial y}; \quad (R_3)_5 = c_1 \frac{dx}{dt} \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{d^2 y}{dt^2} + c_2 \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} \frac{d^3 y}{dt^3}.$$

Wyrazy wchodzące w skład  $n$ -tej pochodnej funkcji  $F(t)$  mają tą własność, że w iloczynie  $(D_i)_j (R_i)_j$  występują pochodne rzędu co najwyżej  $n - i + 1$  funkcji  $x(t)$  (lub/  $y(t)$ ,  $z(t)$ ) oraz, poza  $i=n$ , każdy wyraz wspomnianego iloczynu zawiera pochodne rzędu co najmniej 2 funkcji  $x(t)$  (lub/  $y(t)$ ,  $z(t)$ ). Spostrzeżenie to ma ważne konsekwencje, o których wspomnimy w dalszej kolejności.

#### 4. WYBÓR KRZYWEJ $\gamma$ ZE WZGLĘDU NA MINIMALIZACJĘ MAKSYMALNEGO BŁĘDU INTERPOLACJI

Dla ustalonej wartości  $n$  oszacowanie błędu interpolacji można określić, korzystając z zależności (6), w sposób następujący:

$$\varepsilon \leq C \cdot M_n \leq C \cdot \max_{a \leq t \leq b} |F^{(n)}(t)| \leq C \cdot |F^{(n)}(t_m)| \leq C \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{3i} |(D_i)_j| |(R_i)_j|, \quad (14)$$

przy czym  $t_m$  oznacza taką wartość  $t$ , dla której wartość  $F^{(n)}(t)$  osiąga maksimum w przedziale  $[a, b]$ , natomiast  $C = \frac{|w_n(t)|}{n!}$ . Z zależności (14) widać, że maksymalny

błąd interpolacji jest tym mniejszy (dla ustalonego  $n$ ), im mniejsza jest liczba niezerowych czynników  $(R_{ij})$  i  $(D_{ij})$ . Przyjmijmy, że funkcje  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  są wielomianami. Wówczas maksymalny błąd będzie tym mniejszy, im niższy będzie stopień wielomianów określających  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ , bowiem niektóre wyrazy  $(R_{ij})$  będą się zerowały ze względu na zerowanie się pochodnych  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  rzędu wyższego niż stopień określających je wielomianów. Zauważmy ponadto, że jeśli

$$x(t) = c_x t + x_0 \quad y(t) = c_y t + y_0 \quad \dot{z}(t) = c_z t + z_0, \quad (15)$$

wówczas błąd interpolacji jest określony tylko przez wyrazy  $(D_{nj})$  i na podstawie (6), (12) i (13) daje się oszacować jako

$$\varepsilon \leq \frac{|w_n(t_m)|}{n!} \sum_{j=1}^{3n} \left| \frac{\partial^n T}{\partial a_{1j} \dots \partial a_{mj}} \prod_{l=1}^n c_{(a_{lj})} \right|, \quad (16)$$

gdzie  $c_{(a_{lj})}$  jest pochodną  $x(t)$ ,  $y(t)$  lub  $z(t)$ , (np.  $c_{(a_{lj})} = c_x$  jeśli  $a_{lj} = x$ ).

Powyższe rozumowanie pokazuje, że najlepszą krzywą, ze względu na maksymalny błąd interpolacji, jest prosta. Jeżeli dodatkowo, prosta ta jest równoległa do jednej z osi układu współrzędnych np. osi OX, wtedy błąd można oszacować jako

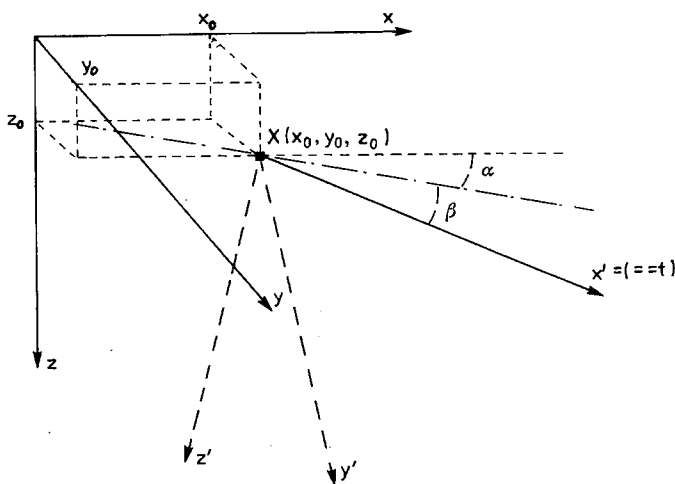
$$\varepsilon \leq \frac{|w_n(t_m)|}{n!} \cdot \left| \frac{\partial^n T}{\partial x^n} \left( \frac{dx}{dt} \right)^n \right|. \quad (17)$$

Odpowiednie oszacowanie można określić w przypadku równoległej prostej do pozostałych osi. Innym ważnym spostrzeżeniem jest, że nawet jeśli krzywa  $\gamma$  nie jest prostą, to maksymalny błąd interpolacji będzie tym mniejszy, im krzywa będzie bardziej przybliżała prostą, co w przypadku przyjętego założenia o określeniu funkcji  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  przez wielomiany oznacza, że błąd będzie tym mniejszy im mniejsze będą wartości ich współczynników.

Należy zauważyć, że minimalizacja błędu maksymalnego nie oznacza minimalizacji błędu interpolacji temperatury dla każdego, dowolnie wybranego punktu. Można bowiem wyobrazić sobie krzywe nie będące prostymi, zapewniające zerowy błąd interpolacji (np. izoterm). Tym niemniej, wobec nieznanowości postaci analitycznej funkcji  $T(x, y, z)$ , mając do dyspozycji jedynie zbiór punktów o znanych temperaturach, pokazana minimalizacja błędu maksymalnego przez wybór odpowiedniej krzywej jest najrozsądniejszym rozwiązaniem.

Aby móc lepiej interpretować zmienną  $t$ , wprowadzimy dodatkowe przekształcenie. Otóż dotychczas  $t$  było wielkością abstrakcyjną, nie mającą odniesienia do rzeczywistości geometrycznej problemu. Wprowadźmy zatem pomocniczy układ współrzędnych, zgodnie z Rys. 4.

Oś  $t$  funkcji  $F(t)$  pokrywa się z osią  $x'$  pomocniczego układu współrzędnych, przy czym  $t=0$  odpowiada  $x'=0$  i początek układu  $x'y'z'$  leży w punkcie  $X(x_0, y_0, z_0)$

Rys. 4. Pomocniczy układ współrzędnych dla interpretacji zmiennej  $t$ 

o poszukiwanej wartości temperatury. Oś  $y'$  leży w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny wyznaczonej przez osie  $xy$ . Związki pomiędzy współrzędnymi punktu w układzie  $xyz$  i  $x'y'z'$  są następujące:

$$\begin{cases} x = x_0 - (x' \cos \beta - z' \sin \beta) \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = y_0 - (x' \cos \beta + z' \sin \beta) \sin \alpha + y' \sin \alpha \\ z = z_0 - z' \cos \beta + x' \sin \alpha \end{cases} \quad (18)$$

Kąt  $\alpha$  jest kątem pomiędzy płaszczyznami  $xz$  i  $x'z'$ , zaś  $\beta$  jest kątem pomiędzy płaszczyznami  $xy$  i  $x'y'$ . Przyjmijmy teraz, że krzywa  $\gamma$  jest prostą i pokrywa się z osią  $t$ . Wówczas równania parametryczne krzywej  $\gamma$  są następujące

$$x(t) = x_0 - t \cdot \cos \beta \cos \alpha \quad y(t) = y_0 - t \cdot \cos \beta \sin \alpha \quad z(t) = z_0 - t \cdot \sin \beta \quad (19)$$

a z kolei moduły pochodnych równań (19) mają postać

$$\left| \frac{dx}{dt} \right| = \cos \beta \cos \alpha \quad \left| \frac{dy}{dt} \right| = \cos \beta \sin \alpha \quad \left| \frac{dz}{dt} \right| = \sin \beta \quad (20)$$

Można sprawdzić, że pochodna funkcji  $F(t)$  równa jest pochodnej funkcji  $T(x, y, z)$  w kierunku wektora kierunkowego krzywej  $\gamma$  (tu: prostej  $t$ ), bowiem

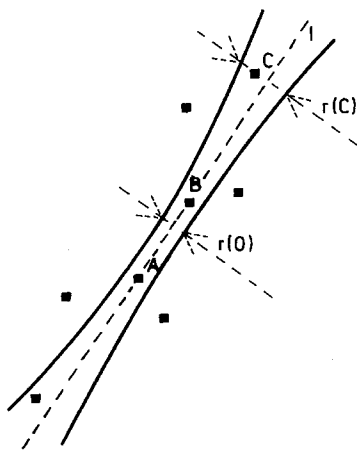
$$\sqrt{\left| \frac{dx}{dt} \right|^2 + \left| \frac{dy}{dt} \right|^2 + \left| \frac{dz}{dt} \right|^2} = 1. \quad (21)$$

Jak dotąd, pokazano w jaki sposób należy wybrać krzywą  $\gamma$ , aby zminimalizować błąd maksymalny interpolacji. Należy jeszcze rozważyć liczbę węzłów interpolacyjnych uwzględnianych w procedurze, co wobec założenia o interpolacji wielomianowej

w sensie Lagrange'a, równoważne jest stopniowi wielomianu. Dwa zasadnicze powody ograniczają od góry stopień wielomianu interpolacyjnego. Pierwszym jest zjawisko Runge'go ([3]), natomiast drugim jest fakt, że obszar, w którym dokonujemy interpolacji (np. objętość struktury półprzewodnikowej) jest ograniczony, a zatem znalezienie dużej liczby węzłów współliniowych może być niemożliwe. Wobec powyższego w praktycznej realizacji procedury ograniczono się do interpolacji wielomianami II stopnia.

## 5. POSZUKIWANIE WĘZŁÓW INTERPOLACJI

W dotychczasowych rozważaniach nie czyniono żadnych założeń dotyczących rozkładu punktów o znanej temperaturze w obszarze, w którym dokonujemy interpolacji. Sytuacją optymalną jest taka, kiedy dla każdego, dowolnie wybranego punktu  $X$  (o poszukiwanej temperaturze) można znaleźć potrzebną liczbę punktów o znanej temperaturze (zwanymi dalej węzłami pierwotnymi), które leżą wraz z punktem  $X$  na jednej prostej. Oczywiście wobec skończonej liczby węzłów pierwotnych nie zawsze jest to możliwe. Naszym celem staje się wobec tego znalezienie węzłów leżących już niekoniecznie współliniowo lecz na tyle blisko pewnej prostej odniesienia na ile to możliwe. W tym celu zdefiniowano rurę  $\rho$ , określoną przy pomocy dwóch punktów charakterystycznych  $A$  i  $B$  oraz przechodzącej przez nie prostej  $l$ , co pokazano na Rys. 5.



Rys. 5. Definicja rury  $\rho$

Promień rury  $\rho$  opisany jest zależnością (22) jeżeli  $b > x$  oraz  $r = r_0 x$  w przeciwnym przypadku, przy czym  $x = d(A, B)$ , zaś  $b = \max[d(A, C), d(B, C)]$  ( $d(\cdot, \cdot)$  — odległość euklidesowa), natomiast  $c_0$ ,  $c_1$  i  $r_0$  są pewnymi współczynnikami. Jak łatwo zauważyć promień rury

$$r = r_0 x \cdot \left( 1 + c_0 \left( \frac{b-x}{x} \right) + c_1 \left( \frac{b-x}{x} \right)^2 \right) \quad (22)$$

zależny jest od wartości parametrów  $c_0, c_1, r_0$ , przy czym dla  $c_0 = c_1 = 0$  rura ma stały promień, zaś dla  $r_0 = 0$  rura staje się linią prostą. Jeżeli wprowadzimy pomocnicze wielkości  $x, b$  jak wyżej oraz  $a = \min[d(A, C), d(B, C)]$ , wówczas punkt C znajduje się wewnątrz rury  $\rho$  określonej przez zależność (22) jeżeli  $s \leq r(C)$ , gdzie  $s$  dane

$$s = \sqrt{a^2 - \left( \frac{b^2 - a^2 - x^2}{2x} \right)^2} \quad (23)$$

przez (23) jest odległością punktu C od prostej l. Wprowadzenie rury  $\rho$  sprowadza problem poszukiwania węzłów interpolacji do poszukiwania tych węzłów pierwotnych, które leżą wewnątrz rury o odpowiednio zadanych parametrach. Przyjmijmy teraz, że potrzeba nam  $n$  węzłów interpolacyjnych, aby wyznaczyć temperaturę w punkcie X. Poniżej przedstawiono algorytm znajdowania węzłów z wykorzystaniem zdefiniowanej wyżej rury  $\rho$ .

1. Przyjmij wartości parametrów rury.
2. Znajdź punkty leżące najbliżej X w (liczbie klp —  $P_1, \dots, P_{lp}$ ). Indeks  $i = 0$ .
3. Weź punkt  $P_i$ , wyznacz  $x = d(X, P_i)$ . Wyznacz listę węzłów pierwotnych leżących wewnątrz rury o zadanych parametrach. Jeżeli ich liczba nie jest mniejsza niż  $n$  przejdź do 5, w przeciwnym razie przejdź do 4.
4. Jeżeli  $i < lp$  zwiększ  $i$  oraz przejdź do 3. W przeciwnym razie zwiększ wartości parametrów:  $c_0 = c_0 * w$ ;  $c_1 = c_1 * w$  ( $w$  — parametr pomocniczy,  $w > 1$ ) oraz wyzeruj indeks  $i$ . Przejdź do 3.
5. Koniec — znaleziono  $n$  węzłów interpolacyjnych.

Pomijając kwestię doboru parametrów, którą zajmujemy się w dalszej części pracy, istota algorytmu sprowadza się do określenia rury względem punktu X i najbliższego leżącego węzła pierwotnego i znajdowania węzłów leżących wewnątrz tej rury drogą przeglądania listy węzłów. W razie niepowodzenia (tj. niemożności znalezienia  $n$  węzłów wewnątrz rury) bierzemy kolejny węzeł pierwotny i powtarzamy procedurę. Jeżeli nie daje to rezultatu dla wszystkich  $lp$  węzłów pierwotnych, należy zwiększyć parametry  $c_0$  i  $c_1$  (czyli „rozszerzyć” rurę) i powtórzyć procedurę. Łatwo zauważyć, że efektywność procedury zależy od wartości parametrów  $lp$ ,  $w$  oraz parametrów rury.

Opisana procedura może zostać zmodyfikowana w celu zwiększenia efektywności. Po pierwsze, zamiast przeglądania w pkt. 3 algorytmu całej listy węzłów pierwotnych, można ograniczyć się tylko do tych, które leżą nie dalej od punktu X niż zadana odległość graniczna. Zmniejsza to znacznie koszt obliczeniowy algorytmu, bowiem sprawdzenie, czy dany węzeł leży wewnątrz rury wymaga wyznaczenia wartości  $s$  z zależności (23). Po drugie, do listy węzłów można dołączać punkty przecięcia prostej l ze ściankami izotermicznymi (tj. takimi brzegami rozpatrywanego obszaru, o którym zakładamy, że posiadają stałą, znaną temperaturę). Punkty takie leżą na prostej l i ich wykorzystanie jako węzłów interpolacyjnych jest bardzo korzystne, jakkolwiek z pewnym zastrzeżeniem. Otóż wspomniane dołączanie węzłów może

dotyczyć tylko punktów leżących blisko brzegu obszaru, w którym dokonywana jest interpolacja. W przeciwnym przypadku tak zmodyfikowana procedura znajdowałaby węzły interpolacyjne leżące daleko od punktu  $X$ , wobec czego wzrastałby znacznie błąd interpolacji (na skutek wzrostu czynnika  $w_{k+1}(t)$  w zależności (6)). Wstępne symulacje pokazały, że opisane zjawisko rzeczywiście ma miejsce, ustalono ponadto, że stosowanie powyższej modyfikacji daje dobre rezultaty dla punktów  $X$  leżących w odległości nie większej od brzegu struktury niż średnia odległość pomiędzy węzłami pierwotnymi.

Po znalezieniu węzłów interpolacyjnych możliwe jest dokonanie interpolacji temperatury w punkcie  $X$ , co przebiega w sposób opisany niżej (z założeniem, że liczba węzłów wynosi 3).

1. Wprowadź pomocniczy układ współrzędnych o środku w punkcie  $X$ , taki że oś  $OX$  pokrywa się z prostą  $l$  przechodzącą przez  $X$  i najbliższy punkt z rury.
2. Dokonaj transformacji współrzędnych punktu  $X$  i pozostałych z rury wg zależności odwrotnych do (18).
3. Wyznacz interpolacyjnie krzywą  $\gamma$  przy czym  $x(t)=t=x$ , natomiast  $y(t)$  i  $z(t)$  są wielomianami III stopnia. Krzywa przechodzi przez węzły interpolacyjne oraz punkt  $X$ .
4. Wyznacz wielomian interpolacyjny II stopnia wg zależności (4).
5. Wyznacz temperaturę w punkcie  $X$  wg zależności (5).

Jest oczywiste, że aby opisana procedura poszukiwania węzłów interpolacyjnych mogła prawidłowo funkcjonować, co jest również warunkiem stosowalności całej omawianej metody interpolacji, konieczne jest istnienie odpowiedniej liczby węzłów pierwotnych (co najmniej trzech w kierunku każdej osi układu współrzędnych, lub mniej w przypadku uwzględnienia modyfikacji polegającej na dołączaniu węzłów ze ścianek izotermicznych).

## 6. WERYFIKACJA METODY

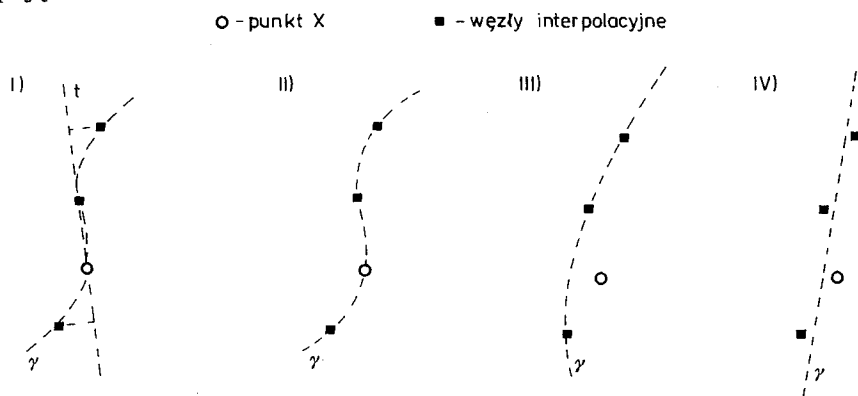
W celu sprawdzenia przydatności opisanej metody do interpolacji temperatury, konieczna jest znajomość rozkładu temperatury w pewnym obszarze, albo w postaci wyników pomiarów czy symulacji, albo w postaci zależności analitycznej. W niniejszej pracy zdecydowano się na użycie odpowiednich funkcji testowych symulujących rozkład temperatury w badanym obszarze. Dzięki temu możliwe było określenie grupy węzłów pierwotnych (współrzędne oraz temperatura), a także, po wyznaczeniu temperatury w zadanym punkcie  $X$  drogą interpolacji, sprawdzenie czy uzyskany wynik jest poprawny tj. czy wielkość błędu jest akceptowalna. Rozkład temperatury symulowany jest przez kombinację liniową funkcji postaci (24). Odpowiada to symulacji rozkładu temperatury w strukturze prostopadłościennej ze źródłami ciepła umieszczonymi na górnej ścianie, a więc sytuacji takiej jak w typowych monolitycznych układach scalonych. Parametry  $x_0$ ,  $y_0$  oraz  $T_0$  są odpowiednio współrzędnymi i temperaturą  $i$ -tego „wierzchołka”,

$$T_i = T_{0i} \cdot \exp\left(1 - \frac{a_i}{a_i - (x - x_0)^2 - c_i(y - y_0)^2}\right) \cdot \exp(-d \cdot z) \quad (24)$$

jeżeli  $a_i - (x - x_0)^2 - c_i(y - y_0)^2 > 0$  oraz  $T_i = 0$  w przeciwnym przypadku

natomiast parametry  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $d_i$  są współczynnikami kształtu. Funkcja opisana zależnością (24) jest klasy  $C^\infty$ , nośnik funkcji jest elipsą o średnicach  $2\sqrt{a_i}$  oraz  $2\sqrt{a_i/c_i}$ . Dobierając odpowiednio wartości parametrów można niemal dowolnie kształtować symulowany rozkład temperatury.

W trakcie weryfikacji poza podstawowym wariantem interpolacji opisanym w rozdziale V badano również warianty alternatywne, oparte o taki sam zbiór znalezionych węzłów interpolacyjnych. Przeprowadzone w dalszej części symulacje dają porównanie wyników osiągniętych z użyciem każdego z nich. Rys. 6 pokazuje istotę wszystkich wersji. Krótka charakterystyka poszczególnych wariantów jest następująca.



Rys. 6. Warianty interpolacji węzłów temperaturowych

Wariant I: zgodny z opisanym w rozdziale V.

Wariant II: krzywa  $\gamma$  taka, jak w wariacie I. Wprowadzono dodatkowe odwzorowanie  $a = a(t)$ , przy czym  $a$  jest odległością od X wzdłuż krzywej  $\gamma$  (skierowanej) czyli  $a = 0$  w punkcie X, oraz  $a$  rośnie w kierunku najbliższego węzła. Zależność (25) pokazuje postać funkcji  $a(t)$ . Interpolacji podlega funkcja  $F(a)$ ,

$$a(t) = \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt, \quad (25)$$

przy czym  $F(a) = T(x(t(a)), y(t(a)), z(t(a)))$ , gdzie  $t(a)$  jest funkcją odwrotną do  $a(t)$ . Oszacowanie błędu interpolacji w tym przypadku jest bardzo trudne z uwagi na podwójne złożenie funkcji. Warto jedynie zauważyć, że jeśli węzły interpolacyjne oraz punkt X są współliniowe, wówczas krzywa  $\gamma$  jest prostą, co przy uwzględnieniu pomocniczego układu współrzędnych sprawia, że  $a = t$ . Intuicyjnie, wariant ten

powinien dać rezultaty lepsze niż wariant I, jednak z uwagi na wspomniane trudności może to być pokazane jedynie empirycznie.

Wariant III: krzywa  $\gamma$  wyznaczana jest interpolacyjnie wielomianem II stopnia przechodzącym przez węzły interpolacyjne, natomiast punkt X jest rzutowany na krzywą. Wprowadza się dodatkowe odwzorowanie takie jak w wariancie II. Uzasadnienie intuicyjnym tego wariantu jest fakt, że w przypadku niewspółliniowości wszystkich punktów, współliniowość węzłów interpolacyjnych może być większa niż tychże punktów łącznie z punktem X, co zmniejsza błąd interpolacji temperatury w punkcie rzutowania X na krzywą  $\gamma$ . Powstaje oczywiście dodatkowy błąd wynikający z istnienia gradientu temperatury w kierunku punktu X, lecz wariant ten jest podatny na modyfikacje oparte o możliwość oszacowania tego gradientu.

Wariant IV: krzywa  $\gamma$  jest prostą, przy czym stanowi ona aproksymację średniokwadratową węzłów interpolacyjnych oraz punktu X. Zaletą tej wersji jest to, że krzywa  $\gamma$  jest prostą mimo, iż węzły nie muszą być współliniowe. Wadę stanowią dodatkowe błędy wynikające z rzutowania wszystkich punktów na krzywą, przy czym rzutowanie węzłów interpolacyjnych oznacza, że węzły funkcji  $F(t)$  są określone z błędem, natomiast rzutowanie punktu X daje błąd rodzaju takiego jak dla wariantu III.

Należy zaznaczyć, że w przypadku współliniowości węzłów interpolacyjnych oraz punktu X, wszystkie wersje stają się równoważne. Ocena przydatności poszczególnych wariantów uzyskana w wyniku przeprowadzonych symulacji przedstawiona została w następnym rozdziale.

## 7. WYNIKI SYMULACJI

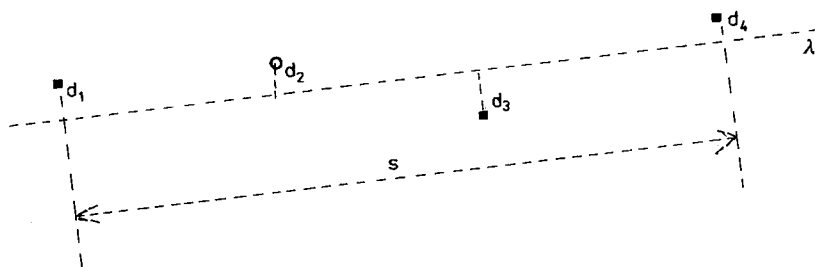
Efektywność opisywanych metod interpolacyjnych badano w oparciu o funkcje testowe przedstawione w rozdziale VI. Rozważano strukturę prostopadłościenną o rozmiarach  $100 \times 100 \times 50$  (jednostki znormalizowane). Wprowadzono dwa źródła ciepła umieszczone na górnej ścianie struktury ( $z=0$ ), przy czym  $T_{01}=100$  i  $T_{02}=70$  (wartości temperatur w jednostkach znormalizowanych). Wydaje się, na co wskazują wyniki wstępnych symulacji, że zwiększenie liczby źródeł ciepła czyni problem interpolacji łatwiejszym bowiem zwiększenie liczby źródeł zmniejsza zróżnicowanie temperatury w strukturze. Jest to powód, dla którego ograniczono się do dwóch źródeł. Ponadto założono, że wszystkie ścianki prócz górnej są izotermiczne, co ściśle oznacza, że występuje na nich idealne chłodzenie, natomiast dla celów symulacji przyjęto, że ścianka izotermiczna jest taką, na której znamy rozkład temperatury. Pierwsza część badań dotyczyła sytuacji, w której rozkład punktów o znanej temperaturze (węzłów pierwotnych) jest równomierny (przyjęto  $8 \times 8 \times 4$  punkty). Jest to przypadek najczęściej spotykany w praktyce, zarówno jeśli chodzi o pomiary jak i symulacje termiczne układów monolitycznych.

Jak wynika z poprzednich rozważań, bardzo istotną sprawą jest wzajemne usytuowanie węzłów interpolacyjnych, które w przypadku optymalnym powinny być współliniowe. Aby badać zależność błędu interpolacji od wspomnianego usytuowania węzłów wprowadzmy pomocniczy współczynnik liniowości  $W_l$  zdefiniowany jako

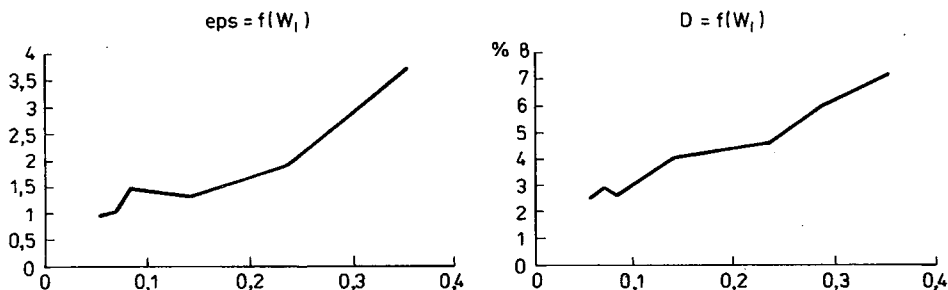
$$W_i = \frac{1}{s \cdot n} \sum_{j=1}^n d_i, \quad (26)$$

przy czym  $n$  jest łączną liczbą punktów (węzły interpolacyjne + punkt X),  $s$  rozpiętością rzutów punktów na prostą  $\lambda$ , która jest prostą aproksymującą punkty wg kryterium średniokwadratowego, natomiast  $d_i$  są odległościami poszczególnych punktów od ww. prostej. Rys. 7 pokazuje omówione wielkości. Wyniki zaprezentowane w dalszej części rozdziału dotyczą tylko wariantu II interpolacji ponieważ okazuje się, że ten wariant daje najlepsze rezultaty. Jedynie dla porównania zaprezentowano wybrane wyniki dotyczące pozostałych wariantów.

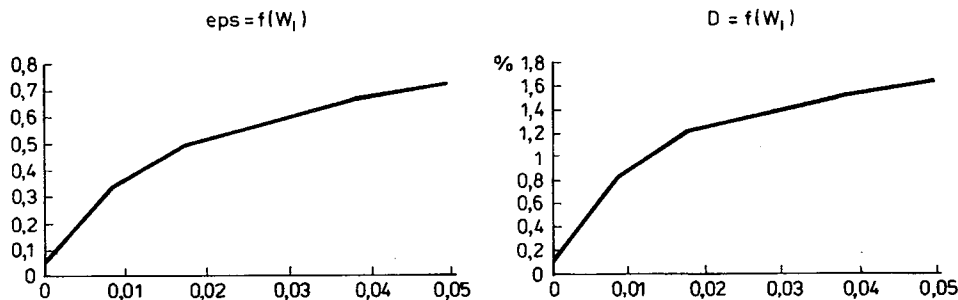
Rysunki 8 i 9 pokazują, jaki jest wpływ współczynnika liniowości na średni błąd bezwzględny i względny interpolacji temperatury. Interpolacji dokonywano dla 50



Rys. 7. Ilustracja wielkości określających współczynnik liniowości



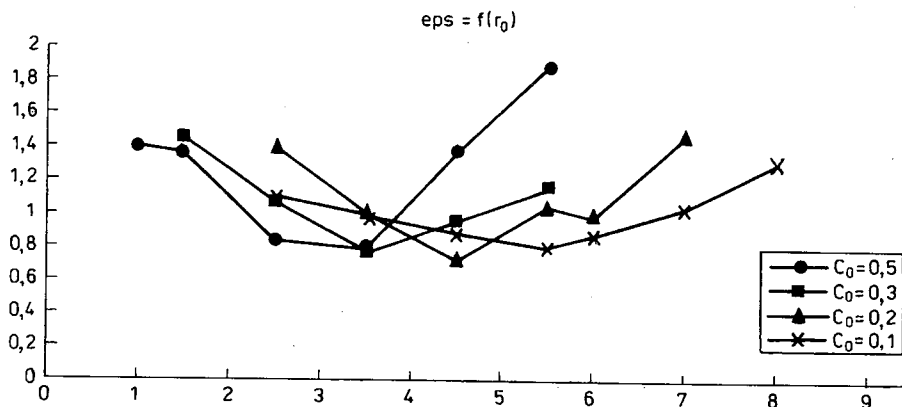
Rys. 8. Wpływ współczynnika liniowości na średni błąd bezwzględny i względny interpolacji temperatury



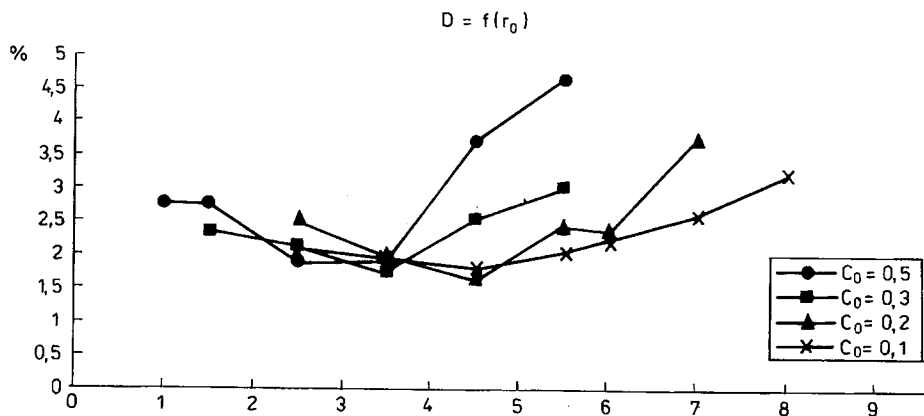
Rys. 9. Wpływ współczynnika liniowości na średni błąd bezwzględny i względny interpolacji temperatury

losowo wybranych punktów, przy czym argumentem wykreślanych zależności są średnie wartości  $W_1$  dla wszystkich punktów w danej serii. Rys. 8 odnosi się do dużych wartości współczynnika  $W_1$  (dokonywano serii symulacji dla różnych wartości parametrów rury). Rys. 9 dotyczy małych wartości  $W_1$ , przy czym regulacji współczynnika dokonywano przez tworzenie zbioru punktów kontrolnych jako sumy (z odpowiednimi proporcjami) elementów zbioru punktów wybranych losowo i zbioru punktów leżących na prostych łączących węzły pierwotne (dla których  $W_1=0$ ). Wykresy pokazują wyraźne uzależnienie wartości błędu interpolacji od wartości współczynnika liniowości. Pewne nieregularności wykresów spowodowane są faktem, iż badano stosunkowo niewielkie (liczebnie) zestawy losowo wybranych punktów. Powtórzmy, że dane z Rys. 8 uzyskano dla dowolnego rozmieszczenia punktów kontrolnych, natomiast w drugim przypadku położenie części punktów było narzucone z góry w sposób opisany wyżej.

Wydaje się, że wartość błędu bezwzględnego nie przekraczająca 1 [jedn. znorm.] jest całkowicie zadowalająca (trzeba przy tym pamiętać, że uwzględniano rozkład



Rys. 10. Wyniki interpolacji temperatury dla losowego zbioru punktów; błąd bezwzględny



Rys. 11. Wyniki interpolacji temperatury dla zbioru punktów; błąd względny

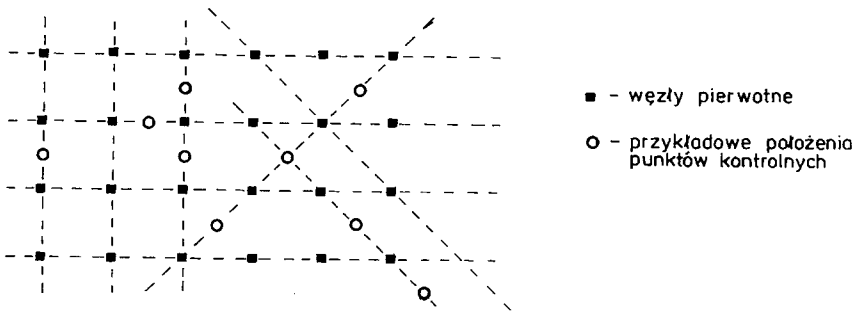
temperatury o  $T_{\max}=100$  i  $T_{\min}$  bliskich zeru). Powstaje pytanie, czy możliwe jest dobranie parametrów rury w taki sposób, aby zminimalizować współczynnik liniowości dla znajdujących węzłów interpolacyjnych, a tym samym błąd interpolacji temperatury. Rysunki 10 i 11 pokazują wyniki interpolacji temperatury dla zbioru 50 losowo wybranych punktów, przy różnych wartościach parametrów rury. Wstępne symulacje pokazały, że dla wartości parametru  $c_1$  rury różnego od zera następuje znaczne pogorszenie wyników (poważny wzrost błędu), wobec czego dalsze badania przeprowadzano zmieniając tylko parametry  $r_0$  i  $c_0$ , przy czym zakres zmian ustalono eksperymentalnie na podstawie wyników wstępnych. Z przedstawionych wykresów widać, że dla poszczególnych wartości  $c_0$  występują minima błędów interpolacji. Minima te tworzą pewien „front”, taki, że przy zmniejszaniu  $c_0$  wartość  $r_0$  odpowiadająca minimum rośnie. Ponadto, charakterystyka błędu wydaje się bardziej płaska dla małych  $c_0$ , a więc bardziej „odporna” na zmianę  $r_0$ . Mówiąc obrazowo, wydaje się, że lepszą jest rura szersza, ale o niewiele zmieniającej się średnicy. Oczywiście niedopuszczalne jest ustalenie  $c_0=0$ , bowiem ze sposobu działania algorytmu poszukiwania węzłów interpolacyjnych wynika, że dla rury o stałej średnicy może wystąpić sytuacja, w której nie jest możliwe znalezienie odpowiedniej liczby węzłów. Rysunki 10 i 11 pokazują również, że w przypadku dowolnego umiejscowienia punktów kontrolnych można znaleźć parametry rury zapewniające osiągnięcie średniej wartości błędu bezwzględnego poniżej 1 i względnego poniżej 2 [%]. Należy zauważyć, że o ile wartość błędu bezwzględnego zdeterminowana jest narzuconymi warunkami eksperymentu, o tyle wartość błędu względnego jest stosunkowo niezależna od nich jeśli tylko utrzymać założenie o równomiernym rozmieszczeniu węzłów pierwotnych. Ściślej mówiąc, niezależność ta dotyczy średniego współczynnika liniowości węzłów interpolacyjnych, lecz to wystarcza jeśli chodzi o określenie przydatności praktycznej metody. W dalszych rozważaniach przyjęto, że parametrami optymalnymi rury są:

$$r_0=4.0 \quad c_0=0.2 \quad c_1=0.0$$

Dotychczas brano pod uwagę jedynie wartości średnie błędów interpolacji, jako bardziej reprezentatywne dla zbioru punktów. Okazuje się, że wartości maksymalne błędów bezwzględnych sięgają kilku jednostek znormalizowanych, lecz dotyczy to co najwyżej jednego lub dwóch punktów w zbiorze. Podsumowując, należy stwierdzić, że wyniki interpolacji przy użyciu opisywanej metody w odniesieniu do przypadku równomiernego rozmieszczenia węzłów pierwotnych i dowolnego rozmieszczenia punktów kontrolnych są zadowalające.

Należy w tym miejscu dodać, że badano również zależność błędu interpolacji od rozpiętości węzłów, co ma swoje odniesienie w postaci czynnika  $w_{(k+1)}(t)$  (zależność (7)). Wpływ tego czynnika jest jednak bardzo mały w porównaniu z zależnością błędu od wartości współczynnika liniowości węzłów interpolacyjnych.

Rozważano przypadek, w którym punkty kontrolne (czyli te w których następuje interpolacja temperatury) nie są rozmieszczone dowolnie lecz leżą na prostych łączących węzły pierwotne, co pokazuje Rys. 12. W takiej sytuacji jest oczywiste, że wyniki interpolacji są niezależne od parametrów rury, bowiem zawsze można znaleźć



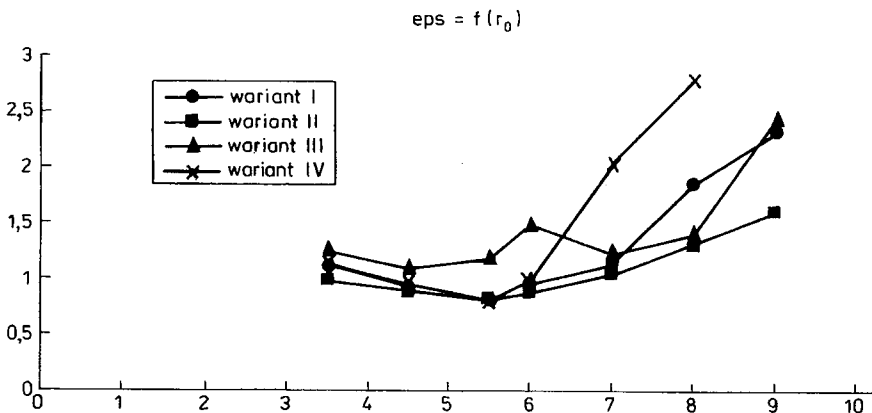
Rys. 12. Ilustracja rozmieszczenia punktów kontrolnych na prostych łączących węzły pierwotne

węzły leżące współliniowo. Wartość współczynnika  $W_1$  jest wobec tego równa zero dla każdego punktu kontrolnego wybranego w opisany sposób. Wyniki interpolacji temperatury dla zbioru 50 punktów przedstawiają się następująco:

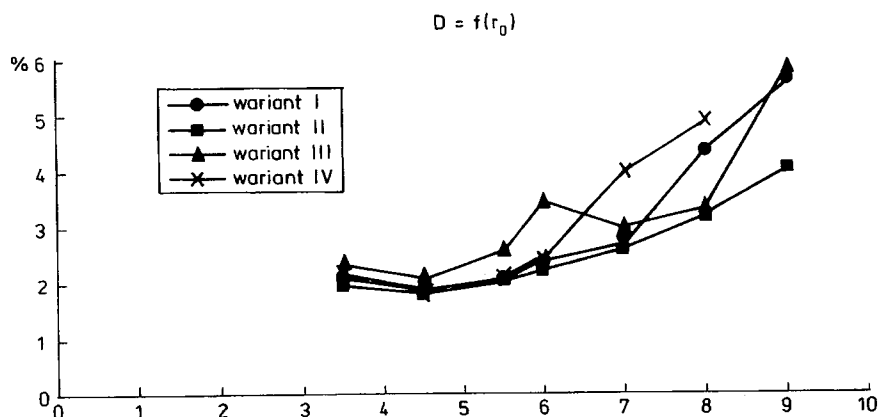
|                         |             |
|-------------------------|-------------|
| średni błąd bezwzględny | — 0.05      |
| średni błąd względny    | — 0.09 [%]  |
| max. błąd bezwzględny   | — 0.44      |
| max. błąd względny      | — 0.71 [%]. |

Jak widać wartości błędów są bardzo małe i to zarówno jeśli chodzi o wielkości średnie jak i maksymalne. Można w tym miejscu podnieść zarzut, że wyniki te uzyskano dla symulowanego rozkładu temperatury i mogą one nie przystawać do rzeczywistości. Wobec powyższego, w dalszej części rozdziału przedstawiono wyniki interpolacji dla rozkładów temperatury uzyskanych w wyniku analizy termicznej dokonanej przy pomocy rozwiązania równania przewodnictwa ciepła metodą różnic skończonych.

Na początku rozdziału wspomniano, że prezentowane wyniki dotyczą wariantu II interpolacji, bowiem właśnie dla tego wariantu uzyskano najmniejsze wartości błędów. Rys. 13 i 14 pokazują jak kształtują się wartości błędów interpolacji



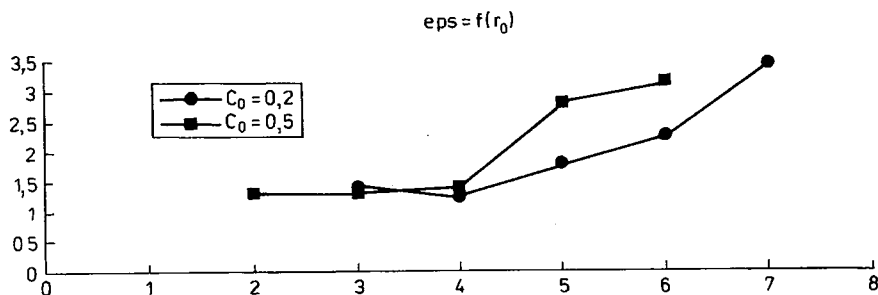
Rys. 13. Wartości błędów interpolacji (błąd bezwzględny) — zależność od wariantu interpolacji



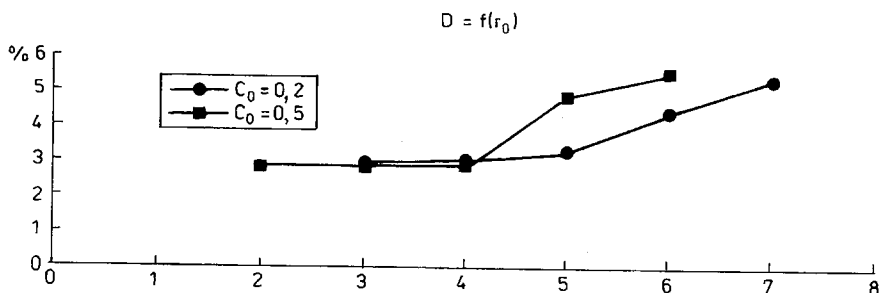
Rys. 14. Wartości błędów interpolacji (błąd względny) – zależność od wariantu interpolacji

temperatury dla poszczególnych wariantów dla przykładowej wartości parametru rury  $c_0=0.3$  przy zmianie parametru  $r_0$ . Prezentowane wyniki dotyczą dowolnego rozkładu punktów kontrolnych (badano zbiory 50-cio elementowe). Dla innych wartości parametrów rury zależności mają podobny charakter. Należy dodać, że w przypadku rozmieszczenia punktów kontrolnych w sposób podobny do pokazanego na Rys. 12, wszystkie warianty interpolacji stają się równoważne, o czym wspomniano już w rozdziale VI.

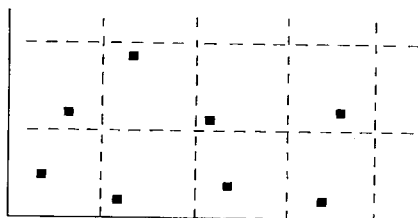
Rysunki 15 i 16 pokazują wyniki interpolacji temperatury w przypadku quasi-dowolnego rozmieszczenia węzłów pierwotnych i losowego rozmieszczenia punktów kontrolnych. Wykresy przedstawiają wartości średnie błędu bezwzględnego i względnego interpolacji dla zbioru 50 punktów kontrolnych. Przez rozmieszczenie quasi-dowolne węzłów pierwotnych rozumiane jest takie, jak pokazano na Rys. 17. Cała struktura podzielona jest na równe części, przy czym w każdej z nich znajduje się jeden węzeł pierwotny o losowo wybranym położeniu. Sytuacja taka jest przypadkiem znacznie trudniejszym dla zagadnienia interpolacji niż przypadek równomiernego rozmieszczenia węzłów. Mimo to, jak widać z przedstawionych wykresów uzyskane wyniki są bardzo dobre, minimum błędu względnego nie przekracza 3 [%]. Rzecz



Rys. 15. Wyniki interpolacji temperatury w przypadku quasi-dowolnego rozmieszczenia węzłów pierwotnych



Rys. 16. Wyniki interpolacji temperatury w przypadku quasi-dowolnego rozmieszczenia węzłów pierwotnych



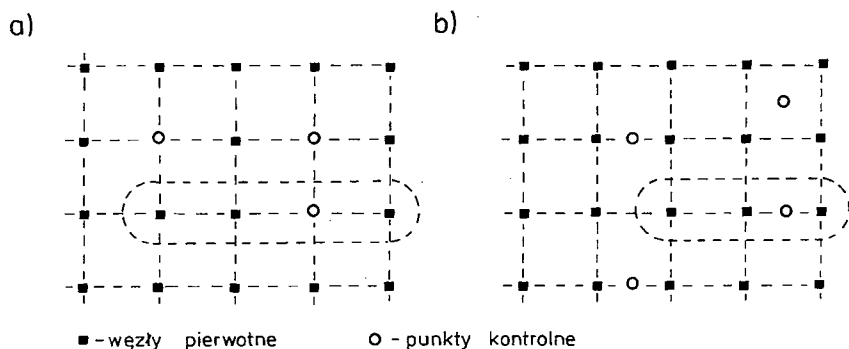
Rys. 17. Rozmieszczenie quasi-dowolne węzłów pierwotnych

istotniejszą jest fakt, że minima błędów dla odpowiednich wartości parametru  $c_0$  rury są osiągane przy wartościach parametru  $r_0$  zbliżonych do tych, jakie miały miejsce przy równomiernym rozkładzie węzłów pierwotnych. To istotne spostrzeżenie świadczy o tym, że optymalne parametry rury są względnie niezależne od rozkładu węzłów pierwotnych. Dotychczas uzyskane wyniki dotyczyły interpolacji dla rozkładów temperatury symulowanych przy pomocy funkcji testowych. Aby stwierdzić stosowność metody dla rzeczywistych rozkładów temperatury, w szczególności zaś by zbadać czy interpolacja wielomianami II stopnia jest wystarczająca, dokonano interpolacji dla rozkładów temperatury uzyskanych drogą rozwiązywania równania przepływu ciepła metodą różnic skończonych. Rozważano struktury prostopadłościennne zawierające jedno, dwa i trzy źródła ciepła. Strukturę podzielono na segmenty w liczbie  $6 \times 6 \times 3$  (rozmiary struktury:  $100 \times 100 \times 50$  w jedn. znormalizowanych). W celu weryfikacji, potraktowano zbiór 15 losowo wybranych węzłów pierwotnych jako punkty kontrolne i dokonywano dlań interpolacji porównując wyniki z danymi pochodzącymi z analizy. Temperatura odniesienia była równa 0. Wartości średnie błędów względnych dla różnej liczby źródeł ciepła są następujące:

1 źródło — 3.23 [%], 2 źródła — 4.74 [%], 3 źródła — 4.4 [%].

Uzyskane wartości błędów wydają się duże, należy však pamiętać, że w tym przypadku wpływ na to ma rozpiętość węzłów interpolacyjnych (czynnik  $w_{(k+1)}(t)$  w zależności (6)). Wyjaśnia to Rys. 18. Widać, że w przypadku a), z jakim mamy tutaj do czynienia, wartość  $w_{(k+1)}(t)$  ma wartość większą, niż w przypadku b).

Biorąc pod uwagę przykłady zaznaczone w ramach i przyjmując znormalizowaną odległość pomiędzy węzłami siatki równą 1, wartość wielomianu  $w_{(k+1)}(t)$  w przypad-



Rys. 18. Wpływ rozpiętości węzłów interpolacyjnych na wartości wielomianu

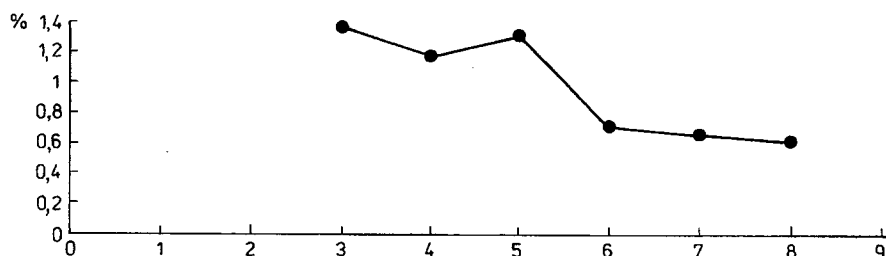
a)  $w_{(k+1)} = 0.375$ , b)  $w_{(k+1)} = 2$ 

ku a) wynosi 0.375, natomiast dla przypadku b) wynosi 2. Podobnie, można bez trudu sprawdzić, że jeśli dla każdego punktu kontrolnego znajdujemy optymalne węzły interpolacyjne (z punktu widzenia minimalizacji błędu maksymalnego), wówczas w przypadku a) wartość wielomianu  $w_{(k+1)}(t)$  jest większa niż w przypadku b) w stosunku  $16/3 \cong 5,33$  niezależnie od wyboru krzywej  $\gamma$  (tu: prostej). Jeżeli dodatkowo założyć, że wartość przeciętna błędu interpolacji jest ściśle skorelowana z jego wartością maksymalną, to średnią wartość błędu dla omawianego przypadku należy skorygować o podany wyżej mnożnik (bowiem w praktyce punkty kontrolne będą rozmieszczone zgodnie z przypadkiem b)). W takiej sytuacji średni błąd osiąga wartość mniejszą niż 1%. Można zatem stwierdzić, że interpolacja wielomianami II stopnia jest wystarczająca, tj. zapewnia wartości błędów interpolacji na tyle małe, że stosowanie rozważanej metody dla rzeczywistych rozkładów temperatury jest sensowne. Rozważana metoda interpolacji może być z powodzeniem zastosowana dla modelu dwuwymiarowego poprzez przyjęcie stałej wartości współrzędnej  $z$ . Poniżej przedstawiono wyniki interpolacji temperatury w takim właśnie modelu, przy czym uwzględniono rozkład temperatury symulowany za pomocą funkcji testowych przy założeniach takich jak podano na początku rozdziału. Interpolacji dokonywano dla zbioru 30 losowo wybranych punktów kontrolnych. Rozkład węzłów pierwotnych był równomierny, lecz w odróżnieniu od poprzednich symulacji tym razem badano zależność błędu interpolacji od gęstości węzłów pierwotnych. Wartości na osiach argumentów (Rus. 19 – 21) odpowiadają liczbie węzłów pierwotnych na współrzędnej (np. wartość 6 odpowiada liczbie  $6 \times 6 = 36$  węzłów). Podczas badań, parametry rury w procedurze znajdowania węzłów interpolacyjnych wynosiły:  $r_0 = 4$ ,  $c_0 = 0.2$ ,  $c_1 = 0.0$ .

Rys. 19 pokazuje zależność wartości średniej błędu względnego interpolacji od gęstości węzłów pierwotnych. Jak łatwo zauważyć wartości błędów są znacznie mniejsze niż w przypadku modelu trójwymiarowego (porównanie jest dopuszczalne ponieważ rozpatrujemy ten sam rozkład temperatury, tyle, że niejako w jednej płaszczyźnie). Jest to spowodowane faktem, że dla modelu trójwymiarowego liczba czynników ( $D_i$ ), w zależności (11) jest kilkakrotnie większa niż w przypadku modelu dwuwymiarowego; innymi słowy na błąd interpolacji w modelu trójwymiarowym

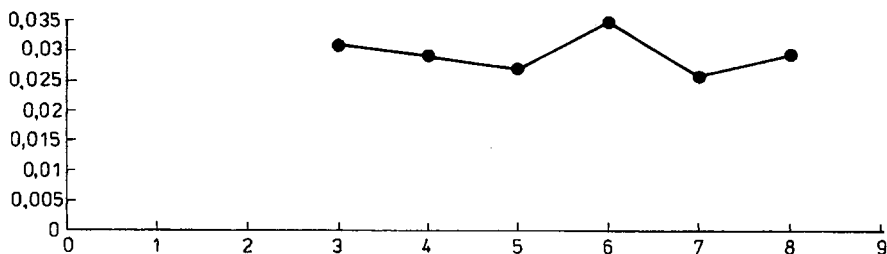
rzutuje większa liczba pochodnych cząstkowych (które mogą przybierać niezerowe wartości) niż dla modelu dwuwymiarowego. Rys. 20 pokazuje ważną właściwość procedury poszukiwania węzłów interpolacyjnych, o której była już mowa uprzednio. Otóż wartość średnia współczynnika liniowości węzłów interpolacyjnych w przypadku równomiernego rozkładu węzłów pierwotnych nie jest zależna od ich gęstości w rozpatrywanym obszarze. Staje się to zrozumiałe jeśli uwzględnić zależność (22), z której wynika, że rozmiary rury, przy stałych wartościach parametrów, zależne są od odległości  $x$  i  $b$ , których przeciętne wartości z kolei są wprost proporcjonalne do gęstości węzłów pierwotnych. Mimo tego z Rys. 19 widać, że średnia wartość błędu interpolacji rośnie przy zmniejszaniu gęstości węzłów pierwotnych. Efekt ten jest

$$D = f(n)$$



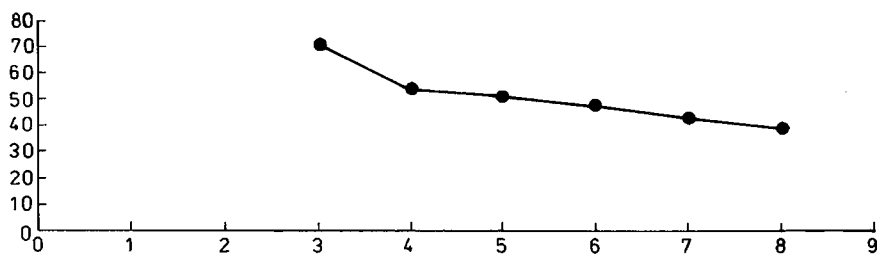
Rys. 19. Średnia wartość błędu względnego interpolacji w funkcji gęstości węzłów pierwotnych

$$W_l = f(n)$$



Rys. 20. Średnia wartość współczynnika liniowości w funkcji gęstości węzłów pierwotnych

$$s = f(n)$$



Rys. 21. Średnia wartość rozpiętości węzłów interpolacyjnych w funkcji gęstości węzłów pierwotnych

spowodowany oczywiście wzrostem rozpiętości węzłów interpolacyjnych (rośnie wówczas wartość czynnika  $w_{(k+1)}(t)$  w zależności (6)), co pokazuje Rys. 21. Nasuwa się w tym miejscu wniosek potwierdzający wcześniejsze rozważania o stosowalności rozważanej metody interpolacji — wykorzystanie jej jest możliwe wówczas, gdy mamy do dyspozycji wystarczającą liczbę węzłów pierwotnych.

## 8. PODSUMOWANIE

Wyniki weryfikacji rozważanej w niniejszej pracy metody interpolacji temperatury w modelach wielowymiarowych, skłaniają do twierdzącej odpowiedzi na pytanie postawione na wstępie. Przy zastosowaniu odpowiednich procedur poszukiwania węzłów interpolacyjnych możliwe jest wykorzystanie metod interpolacyjnych właściwych dla funkcji jednej zmiennej do interpolacji temperatury w przypadku rozkładu opisanego funkcją wielu zmiennych.

Proponowana metoda daje szczególnie dobre wyniki wówczas, kiedy rozkład punktów o znanej temperaturze (węzłów pierwotnych) jest równomierny, aczkolwiek również w przypadku dowolnego ich rozmieszczenia wartości błędów interpolacji są akceptowalnie małe. Należy przy tym oddzielnie odnieść się do średnich wartości błędów uzyskiwanych dla dużych zbiorów punktów interpolowanych oraz do wartości maksymalnych. W tym drugim przypadku okazuje się, że wartości błędów mogą być duże (do kilkunastu % dla badanych rozkładów temperatur) co mogłoby postawić stosowalność metody pod znakiem zapytania gdyby nie fakt, że tak duże wartości błędów dotyczą tylko pojedynczych punktów. Ponadto, jeżeli zrezygnować z założenia o dowolnym rozmieszczeniu punktów kontrolnych i umieszczać je tak jak pokazano na Rys. 12, wówczas zarówno wartości średnie jak i maksymalne błędów stają się zadowalające.

Najistotniejszym zagadnieniem, jeśli chodzi o efektywność metody, jest znalezienie odpowiednich węzłów interpolacyjnych. Zaproponowana procedura poszukiwania węzłów interpolacyjnych posiada tę właściwość, że możliwe jest znalezienie takich wartości parametrów procedury (rozumianych jako parametry odpowiednio zdefiniowanej „rury”), które zapewniają znajdowanie najlepszych węzłów (w sensie minimalizacji współczynnika liniowości), przy czym, co istotne, parametry te są względnie niezależne od rozkładu węzłów pierwotnych. Uniwersalność metody pozwala na jej stosowanie praktycznie bez żadnych modyfikacji dla modeli dwuwymiarowych oraz jednowymiarowych, przy czym, w tym ostatnim przypadku staje się ona równoważna zwykłej interpolacji wielomianowej funkcji jednej zmiennej (z tą różnicą, że następuje automatyczne wyszukiwanie najlepszych węzłów interpolacyjnych).

Proponowana metoda nadaje się szczególnie dobrze do „zagęszczania” wyników pomiarów, bądź analizy, przy badaniu rozkładów temperatury np. w strukturach układów monolitycznych. Oczywiście jej stosowalność nie ogranicza się do zagadnień termicznych, mimo, że były one dziedziną, dla potrzeb której opracowano powyższą metodę.

Metodę można z powodzeniem modyfikować w celu zwiększenia efektywności interpolacji tj. zmniejszenia błędów oraz zmniejszenia kosztu obliczeniowego

algorytmu. Wydaje się, że dobre rezultaty może dać interpolacja wielomianami III stopnia, chociaż spowoduje to wzrost liczby węzłów pierwotnych koniecznych do tego by zadziałać mógł algorytm znajdowania węzłów interpolacyjnych. Ponadto można ograniczyć liczbę węzłów pierwotnych uwzględnianych przez algorytm znajdowania węzłów interpolacyjnych do tych, których odległość od punktu kontrolnego nie przekracza zadanej wartości. Spowoduje to znaczne przyspieszenie pracy procedury w sytuacji gdy występuje duża gęstość węzłów pierwotnych. Najpoważniejszą modyfikacją, o której wspomniano przy okazji omawiania wariantów interpolacji, jest dokonywanie poprawek do uzyskiwanych wyników w oparciu o szacowanie gradientu temperatury w węźle leżącym najbliżej danego punktu kontrolnego. Dotyczyć to może, jak wspomniano, głównie wariantu III interpolacji. Szacowanie takie można przeprowadzić jeśli znajdziemy trzy wektory określone przez rozpatrywany węzeł oraz trzy inne, leżące blisko niego i na tej podstawie wyznaczymy przybliżone wartości pochodnych cząstkowych funkcji opisującej rozkład temperatury, w danym węźle. Opracowano pewne proste algorytmy wyznaczające oszacowanie gradientu i wynikającej zeń poprawki, co doprowadziło do poprawy wyników interpolacji jednakże nie była to poprawa znacząca.

Pomimo, iż opisywaną metodę interpolacji, ze względu na charakter zagadnienia dla potrzeb którego była opracowana, rozważano w odniesieniu do funkcji trzech zmiennych, można ją bez trudu uogólnić na funkcje dowolnej liczby zmiennych. Przy zachowaniu odpowiednich ograniczeń dotyczących rozmieszczenia węzłów pierwotnych i punktów interpolowanych, może ona znaleźć szerokie zastosowanie na przykład w zagadnieniach modelowania wieloparametrowych funkcji przystosowania przy optymalizacji układów elektronicznych za pomocą algorytmów genetycznych oraz wszędzie tam, gdzie występuje potrzeba zmniejszenia kosztu obliczeniowego wyznaczania wartości funkcji wieloparametrowych. Jest to możliwe poprzez wstępne wyznaczenie podstawowej siatki węzłów a w dalszej kolejności interpolowanie wartości funkcji dla innych, potrzebnych wartości parametrów. Taka procedura może dawać dobre wyniki w sytuacji kiedy przewiduje się konieczność wielokrotnego wyznaczania wartości funkcji co ma miejsce na przykład we wspomnianej optymalizacji układów elektronicznych za pomocą algorytmów genetycznych.

#### BIBLIOGRAFIA

1. P. R. B r y a n t, M. L a t i f: *Network Analysis Approach to Multidimensional Modeling of Transistors Including Thermal Effects*, IEEE Transistors on comp.-aided design of integr. circuits and systems. vol. CAD-1, No. 2, April 1982
2. K. B u r z y ń s k i, J. G r a n a t o w i c z, T. P i w e c k i, K. S z y m k i e w i c z: *Metody numeryczne w hydrotechnice*. Skrypt Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 1987
3. Z. F o r t u n a, B. M a c u k o w, J. W ą s o w s k i: *Metody numeryczne*, WNT, Warszawa 1993
4. W. J a n k e: *Zjawiska termiczne w elementach i układach półprzewodnikowych*, WNT, Warszawa 1992
5. J. L e g r a s: *Praktyczne metody analizy numerycznej*, WNT, Warszawa 1974
7. W. P o r ę b s k i, T. R a t a j c z a k, A. R u c i ń s k i: *Zastosowania teorii algorytmów*, Skrypt Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 1986
8. Praca zbiorowa pod red. prof. zw. dr inż. J. Szargunta: *Modelowanie numeryczne pól temperatury*, WNT, Warszawa 1992

S. KOZIEL

INTERPOLATION OF TEMPERATURE IN MULTIDIMENSIONAL MODELS  
BY TRANSFORMATION OF MULTIVARIABLE FUNCTIONS INTO LINE SEGMENT

S u m m a r y

The work is a trial of alternative approach to a problem of interpolation of temperature in multidimensional models. An essence of problem and basic ideas of proposed method is shown. An estimation of method's error is developed for general case. The choice of transformation curve which gives minimalization of maximal interpolation error is justified. The algorithm of searching for interpolation nodes is shown. The results of verification of presented method taken by simulation using special test functions is also reported. The work includes discussion of results, conclusions and propositions of modifications.

*Key words:* interpolation of temperature, computer simulation, monolithic circuits.



## Dwudiodowy, mikrofalowy filtr kierunkowy

STANISŁAW ROSŁONIEC, TAHAR HABIB

*Instytut Radioelektroniki, Politechnika Warszawska*

*Otrzymano 1996.01.26*

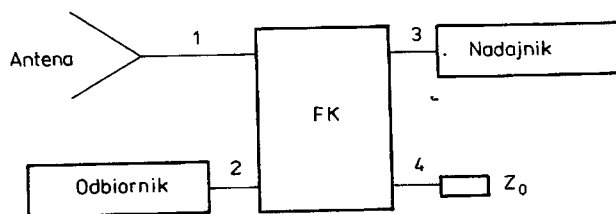
*Autoryzowano do druku 1996.02.07*

W artykule przedstawiono nową strukturę mikrofalowego filtra kierunkowego z dwiema, sterowanymi prądowo, diodami PIN. Przy spolaryzowaniu tych diod w kierunku zaporowym tłumienie w linii głównej filtru jest pomijalnie małe w zadanym pasmie częstotliwości. Jednocześnie zapewniona jest duża (teoretycznie nieskończona) szerokopasmowa separacja pomiędzy przeciwnymi wrotami linii głównej i sprzężonej. Separacja ta występuje również w przypadku spolaryzowania diod w kierunku przewodzenia, o ile zastosowane diody są identyczne. Dzięki tej, unikalnej właściwości omawiany filtr może być stosowany jako wzrotnica antenowa w wielu urządzeniach radiokomunikacyjnych i radiolokacyjnych.

*Słowa kluczowe:* telekomunikacja, technika mikrofalowa, filtry.

### 1. WSTĘP

Pierścieniowe i gałęziowe mikrofalowe filtry kierunkowe są ważnymi podzespołami modułów nadawczo-odbiorczych, rys. 1, stosowanych w różnego rodzaju systemach radiokomunikacyjnych i radiolokacyjnych. Ich standardowe struktury elektryczne (pasywne i stacjonarne) są wyczerpująco opisane w ogólnie dostępnej literaturze, dla której odniesieniami źródłowymi są [1]–[3].

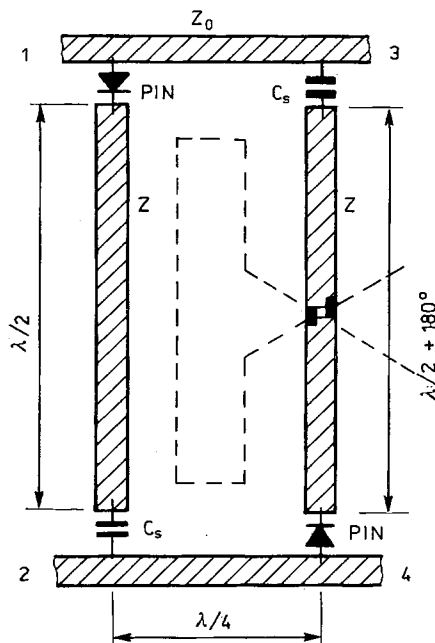


Rys. 1. Schemat funkcjonalny modułu nadawczo-odbiorczego

Wspólną zasadą pracy filtrów tego typu jest częstotliwościowy podział sygnałów. Oznacza to, że nie mogą być one stosowane bezpośrednio w systemach, w których dla nadawania i odbierania wykorzystuje się te same pasma częstotliwości. Nie zapewniają one również dostatecznie dużej, niezależnej od częstotliwości, separacji pomiędzy przeciwnymi wrotami, do których dołączone są odpowiednio odbiornik i nadajnik. Z tego też powodu odbiornik nie jest dostatecznie zabezpieczony od strony nadajnika przed przesterowaniem lub nawet zniszczeniem. W celu wyeliminowania wymienionych wyżej wad opracowano nowy, sterowany elektronicznie filtr kierunkowy, którego struktura elektryczna i podstawowe charakterystyki częstotliwościowe są przedmiotem rozważań w niniejszym artykule.

## 2. DWUDIODOWY, MIKROFALOWY FILTR KIERUNKOWY

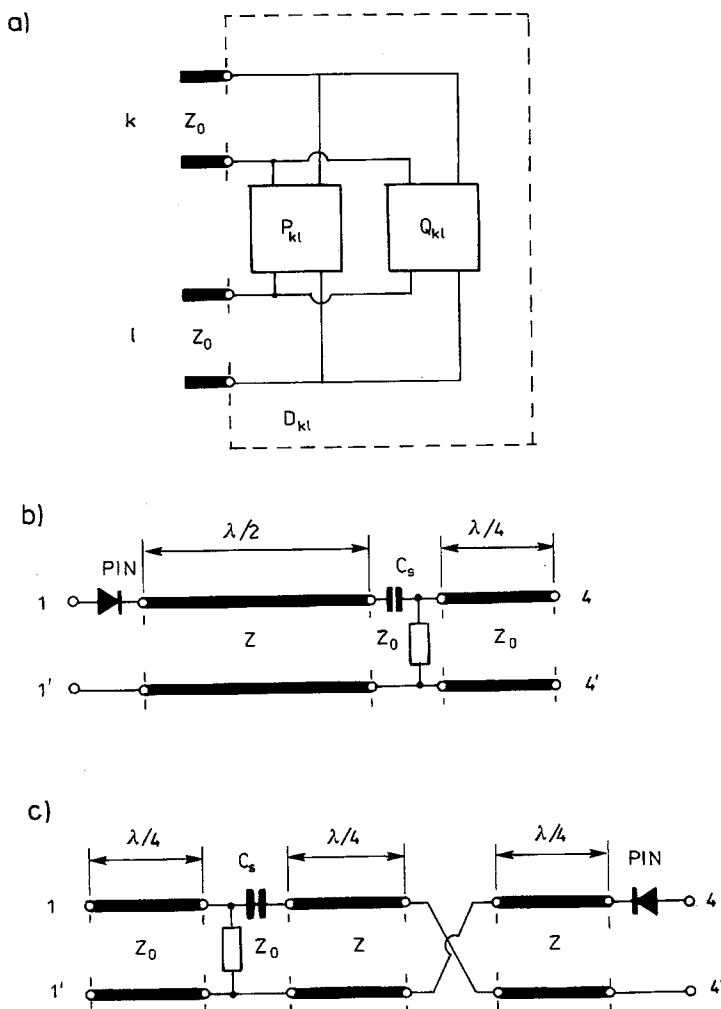
Zarys konstrukcji rozważanego filtra kierunkowego przedstawia rys. 2.



Rys. 2. Dwudiodowy, mikrofalowy filtr kierunkowy

Jego głównymi elementami składowymi są dwa mikropaskowe rezonatory, dwie diody PIN i szerokopasmowa sekcja odwracająca fazę. Filtr ten jest obwodem asymetrycznym zarówno względem płaszczyzny poziomej  $x-x'$  jak i płaszczyzny pionowej  $y-y'$ , zatem nie może on być analizowany metodą pobudzeń w fazie i w przeciwfazie [4] [5]. Do jego analizy może być stosowany opisany poniżej algorytm komputerowy polegający na trzykrotnej dekompozycji filtra w odpowiednie dwuwrotniki. Idea tego algorytmu została zaczerpnięta z pracy [6], w której zastosowano

go do analizy niesymetrycznych trójwrotników. Dla dowolnej pary wrót  $k-1$ , gdzie  $k=1, 2, 3$  i  $4$ , filtr ten może być przedstawiony w postaci połączonych równolegle dwuwrotników  $P_{kl}$  i  $Q_{kl}$ , rys. 3(a).



Rys. 3. Schematy zastępcze analizowanego filtru: a) uogólniony schemat zastępczy filtru zredukowanego do dwuwrotnika  $D_{kl}$ , b) schemat zastępczy dwuwrotnika  $P_{14}$ , c) schemat zastępczy dwuwrotnika  $Q_{14}$

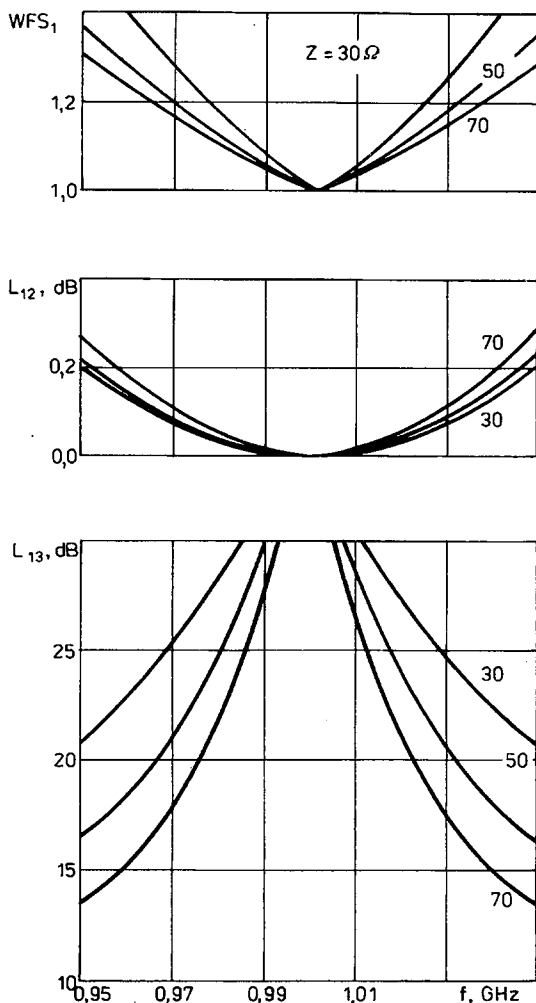
Dla konkretności dalszych rozważań przyjmijmy, że wyznaczane są parametry rozproszenia  $S_{11}$ ,  $S_{14}$ ,  $S_{41}$  i  $S_{44}$ . W tym przypadku dwuwrotniki  $P_{14}$  i  $Q_{14}$  są reprezentowane przez obwody zastępcze pokazane na rys. 3(b) i 3(c). Macierze  $(ABCD)_P$  i  $(ABCD)_Q$  tych obwodów mogą być łatwo wyznaczone poprzez mnożenie odpowiednich macierzy  $(ABCD)$  elementarnych dwuwrotników składowych [5] [7]. W oparciu o macierze  $(ABCD)_P$  i  $(ABCD)_Q$  wyznacza się macierze

admitancyjne  $[Y]_P$  i  $[Y]_Q$ , których suma  $[Y] = [Y]_P + [Y]_Q$  umożliwia obliczenie poszukiwanych parametrów rozproszenia  $S$ . W tym celu wykorzystuje się standardowe transformacje macierzowe  $[Y] \rightarrow [S]$ . W podobny sposób można wyznaczyć pozostałe parametry rozproszenia  $S$  analizowanego filtra. Powyższy algorytm zastosowano w programie komputerowym MFK-2. Obliczone za pomocą tego programu charakterystyki:

$$WSF_1(f) = [1 + |S_{11}(f)|] / [1 - |S_{11}(f)|]$$

$$L_{12}(f) [\text{dB}] = 20 \log[1 / |S_{12}(f)|] \quad (1)$$

$$L_{13}(f) [\text{dB}] = 20 \log[1 / |S_{13}(f)|]$$



Rys. 4. Charakterystyki  $WFS_1(f)$ ,  $L_{12}(f)$  i  $L_{13}(f)$  obliczone dla filtra z idealnymi diodami PIN będącymi w stanie włączenia

zobrazowano na rys. 4. Charakterystyki te obliczono dla następujących danych  $Z_0=50\ \Omega$ ,  $Z=(30, 50, 70)\ \Omega$ ,  $C_s=2.2\ \text{nF}$  i  $f_0=1\ \text{GHz}$ . Diody PIN są reprezentowane przez idealne klucze będące w stanie zwarcia. Obliczone w podobny sposób charakterystyki

$$L_{14}(f)[\text{dB}]=L_{32}(f)[\text{dB}]=20\log[1/|S_{13}(f)|] \quad (2)$$

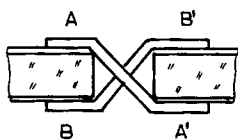
są niezależne od częstotliwości i osiągają nieskończenie duże wartości. Są one niezależne również od parametrów zastosowanych diod PIN, o ile diody te są identyczne. Charakterystyki  $\text{WFS}_3(f)$ ,  $L_{31}(f)[\text{dB}]$ ,  $L_{32}(f)[\text{dB}]$  i  $L_{34}(f)[\text{dB}]$  obliczone dla filtru z wyłączonymi idealnymi diodami PIN (klucze rozwarte) zestawiono w Tablicy 1.

Tablica 1

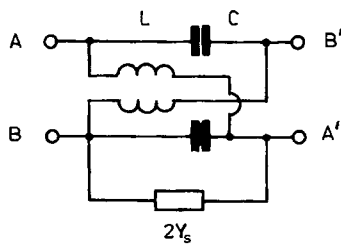
| $f[\text{GHz}]$ | $Z_0=Z=50\ \Omega$ , $C_s=2.2\ \text{nF}$ , $f_0=1\ \text{GHz}$ |                     |                     |                     |
|-----------------|-----------------------------------------------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
|                 | $\text{WFS}_3$                                                  | $L_{31}[\text{dB}]$ | $L_{32}[\text{dB}]$ | $L_{34}[\text{dB}]$ |
| 0.85            | 1.656                                                           | 0.276               | > 100               | > 100               |
| 0.95            | 1.171                                                           | 0.029               | > 100               | > 100               |
| 1.00            | 1.000                                                           | 0.000               | > 100               | > 100               |
| 1.05            | 1.171                                                           | 0.029               | > 100               | > 100               |
| 1.15            | 1.656                                                           | 0.276               | > 100               | > 100               |

Wszystkie z omawianych dotychczas charakterystyk obliczono przy założeniu, że straty w tworzących filtr odcinkach linii są pomijalnie małe, a sekcja odwracająca fazę jest idealna. Spełnienie powyższego warunku w szerokim pasmie częstotliwości jest możliwe tylko przez obwody o parametrach skupionych, podobne do pokazanego na rys. 5. O szerokopasmowości tego typu inwertera decyduje głównie admitancja  $Y_s(f)$ , określona w płaszczyźnie szczeliny, która to admitancja powinna być jak najmniejsza. W praktyce, osiąga się to poprzez odpowiednie ukształtowanie (wycięcie) nierezonansowych wnek obciążających szczelinę [8] [9]. Na rys. 6 przedstawiono charakterystyki  $\text{WFS}_1(f)$ ,  $L_{12}(f)[\text{dB}]$  i  $L_{13}(f)[\text{dB}]$  obliczone dla tego samego filtru ( $Z_0=50\ \Omega$ ,  $Z=(30, 50, 70)\ \Omega$ ,  $C_s=2.2\ \text{nF}$  i  $f_0=1\ \text{GHz}$ ), w którym idealne (zwarte) klucze zastąpiono diodami PIN typu MA4P7000, opisanymi w Dodatku. Charakterystyki  $\text{WFS}_3(f)$ ,  $L_{31}(f)[\text{dB}]$  i  $L_{34}(f)[\text{dB}]$  obliczone dla filtru z diodami spolaryzowanymi zaporowo (stan wyłączenia) są przedstawione na rys. 7. Parametrem tych charakterystyk jest pojemność zastępcza  $C_p$  diody w stanie zaporowym, która naturalnie powinna być jak najmniejsza. Również w tym przypadku charakterystyka  $L_{32}(f)[\text{dB}]$ , określająca separację pomiędzy nadajnikiem i odbiornikiem przyjmuje duże wartości (większe od 100 dB) w szerokim pasmie częstotliwości. Impedancje  $Z_{\text{on}}(f)$  i  $Z_{\text{off}}(f)$  reprezentujące diody PIN, odpowiednio w stanach włączenia i wyłączenia, obliczono przyjmując  $C_p=0$  i  $L_p=0$ . Powyższe założenie jest słuszne dla diod wykonanych w postaci monolitycznej, tj. bez opravek.

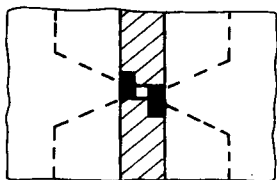
a)



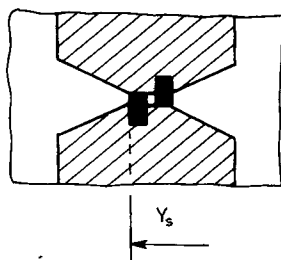
b)



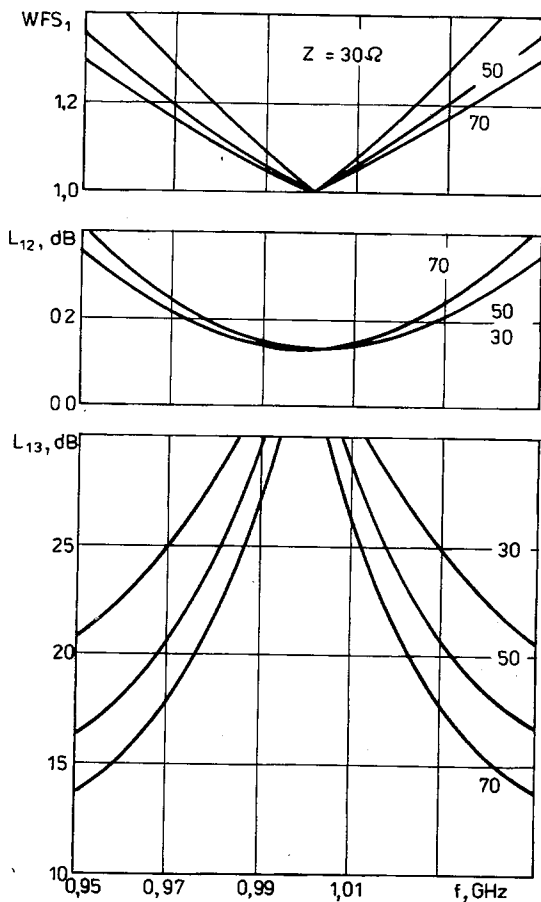
c)



d)



Rys. 5. Sekcja odwracająca fazę: a) przekrój podłużny, b) schemat zastępczy, c) widok z przodu, d) widok z tyłu



Rys. 6. Charakterystyki  $WFS_1(f)$ ,  $L_{12}(f)$  i  $L_{13}(f)$  obliczone dla filtra diodami PIN typu MA4P7000 spolaryzowanymi w kierunku przewodzenia, patrz Dodatek