POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM III · ZESZYT 1

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1957

RADA REDAKCYJNA

PROF. JANUSZ GROSZKOWSKI, PROF. JANUSZ LECH JAKUBOWSKI,
PROF. BOLESŁAW KONORSKI, PROF. IGNACY MALECKI,
PROF. PAWEŁ NOWACKI, PROF. PAWEŁ SZULKIN, PROF. STANISŁAW SZPOR

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor Naczelny
PROF. WITOLD NOWICKI

Sekretarz
JULIUSZ MIERZEJEWSKI

ADRES REDAKCJI

Warszawa, Politechnika, Plac Jedności Robotniczej 1,
Katedra Teletransmisji Przewodowej, Gmach Mechaniki

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
Warszawa, Krakowskie Przedmieście 79

Nakład 709 + 96	Oddano do składania 15.XI.56
Ark.wyd. 12,7, druk. 10,5	Druk ukończono w kwietniu 1957
Pap. druk. sat. kl, V 70 g, 70 × 100	B-074.
Zamówienie nr 1669c/56	Cena zł 25.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa.

537.525

JAN GRYGOŁAJTYS

Zastosowanie sondy elektrycznej Langmuira do wyznaczania parametrów plazmy wyładowania elektrycznego

Rękopis dostarczono 19.5.1956

Przedstawiono zarys teorii sondy elektrycznej Langmuira oraz przeprowadzono krytykę założeń, na których opiera się ta teoria. Dla przykładowego obliczenia parametrów plazmy wykonano doświadczenia z sondą płaską i sondą walcową w rozrzedzonej parze rtęci.

Omówiono źródła błędów oraz zakres zastosowania metody sondy elektycznej Langmuira.

1. WSTĘP

Metoda sondy elektrycznej Langmuira jest podstawową metodą pomiarową, stosowaną przy badaniach wyładowań elektrycznych w rozrzedzonych gazach.

Metoda ta znalazła w ostatnich czasach praktyczne zastosowanie w elektrotechnice, mianowicie przy badaniach zjawisk występujących w prostownikach rtęciowych i lampach gazowanych.

Odnośnie teorii sondy i jej zastosowania jako metody badawczej ukazało się do chwili obecnej kilkadziesiąt publikacji, głównie w U. S. A., w Związku Radzieckim i w Niemczech. W Polsce nie były dotychczas publikowane badania z tej dziedziny.

Teoria sondy po raz pierwszy została ogłoszona przez I. Langmuira i H. M. Mott-Smitha [1] w roku 1924. Równocześnie, w tym samym prawie czasie, M. Schenkel i W. Schottky [2], [3] przeprowadzili badania nad wpływem prądów w ściankach [1)] naczyń próżniowych w prostownikach rtęciowych; badania te stanowią przyczynek do zagadnienia rozwiązanego przez Langmuira.

Oprócz stosunkowo dawnych publikacji, poświęconych określeniu zakresu i dokładności omawianej metody, ukazują się aż do chwili obecnej publikacje dotyczące zastosowania sondy w badaniach wyładowań elektrycznych.

[1)] „Wandströme".

Zjawiska powstające przy wyładowaniach elektrycznych są dotąd rozpatrywane opisowo w sposób zupełnie ogólnikowy. Metoda sondy Langmuira stwarza możliwości ilościowego określenia tych zjawisk. Z tego też względu metoda ta zasługuje na uwagę, pomimo że zakres jej stosowania jest ograniczony wpływem wielu czynników ubocznych, a zasadnicze założenia, na których się opiera, mogą być przedmiotem zastrzeżeń.

W niniejszej pracy postawiono sobie jako cel krytyczne przeanalizowanie zasadniczych założeń, na których się opiera teoria sondy, oraz praktyczne przeprowadzenie pomiarów charakterystycznych wielkości plazmy łuku elektrycznego w rozrzedzonej parze rtęci.

2. ZARYS TEORII SONDY

Metoda sondy elektrycznej Langmuira może być wykorzystywana do wyznaczenia następujących parametrów wyładowania elektrycznego w rozrzedzonych gazach:

1. temperatury i średniej prędkości elektronów,
2. potencjału plazmy,
3. koncentracji elektronów.

Poza tym teoretycznie jest możliwe na podstawie pomiarów sondą określenie temperatury i średniej prędkości jonów. Uzyskane jednak w ten sposób wyniki wydają się być niezgodne z rzeczywistością.

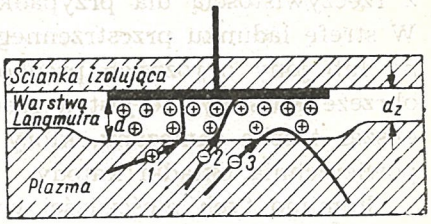
Plazmą wyładowania elektrycznego nazywamy zbiór drobin gazowych, obojętnych elektrycznie, oraz elementarnych cząsteczek, naładowanych elektrycznie, to jest jonów i elektronów.

Elementarne cząsteczki elektryczne, jako nośniki prądu elektrycznego, wywołują pod wpływem pola elektrycznego prąd unoszenia pomiędzy anodą i katodą. Ze względu na częste zderzenia cząsteczek elektrycznych z drobinami gazu elektrony i jony oprócz uporządkowanego ruchu unoszenia posiadają również bezładny ruch kinetyczny, podobnie jak obojętne cząsteczki gazowe. Dlatego też Langmuir założył, że cząsteczki elektryczne tworzą gaz elektronów oraz gaz jonów, którym można przypisać z jednej strony właściwości termodynamiczne gazów doskonałych, a z drugiej strony właściwości elektrostatyczne ładunków elementarnych.

Jeżeli w plazmie wyładowania elektrycznego umieścimy jako pomocniczą elektrodę metalową okładkę sondy, której potencjał jest większy lub mniejszy od potencjału plazmy, to wokół tej okładki utworzy się warstwa ładunku przestrzennego (rys. 1). Sonda naładowana dodatnio względem plazmy powoduje odpychanie jonów, gromadzi się natomiast

wokół niej ładunek przestrzenny elektronów, i odwrotnie, sonda o potencjale ujemnym względem plazmy staje się ekranem dla elektronów, przy czym podążają do niej prawie wyłącznie jony.

Jony i elektrony trafiające z pewną początkową prędkością do warstwy ładunku przestrzennego, nazywanej warstwą Langmuira, zostają przyśpieszone i przyciągnięte do sondy, której przekazują swój ładunek elektryczny, albo są zahamowane i odepchnięte z powrotem z warstwy ładunku przestrzennego do plazmy, zależnie od wielkości i znaku potencjału sondy. Potencjał sondy V_s możemy zmieniać względem potencjału plazmy V_p przy pomocy źródła napięcia załączonego pomiędzy sondą i jedną z elektrod wyładowania elektrycznego, tj. anodą lub katodą. Pod wpływem dopływających jonów lub elektronów w obwodzie sondy powstaje prąd elektryczny.



Rys. 1. Warstwa ładunku przestrzennego tworząca się w otoczeniu sondy płaskiej o potencjale ujemnym względem plazmy

1 — tor drogi jonu przyciągniętego do sondy, 2 — tor drogi elektronu o dużej energii kinetycznej, 3 — tor drogi elektronu o małej energii kinetycznej, d — grubość warstwy Langmuira wytworzonej pod wpływem pola sondy, d_z — grubość warstwy Langmuira tworzącej się przy ściance izolującej

Istnienie warstwy ładunku przestrzennego w otoczeniu metalowych sond, jak również w otoczeniu wszelkich materialnych przedmiotów, ograniczających obszar wyładowania elektrycznego, możemy stwierdzić w sposób doświadczalny. Wokół sondy naładowanej ujemnie tworzy się bowiem ciemna obwódka, która pozwala odróżnić obszar warstwy od świecącego się obszaru plazmy. Tłumaczy się to tym, że w warstwie ładunku przestrzennego ze względu na brak elektronów nie może powstać ani światło wzbudzenia, ani też rekombinacji.

Dla płaskiej sondy grubość warstwy ładunku przestrzennego możemy obliczyć na podstawie równania ładunku przestrzennego Langmuira (prawo 3/2), które znane jest z teorii lamp próżniowych:

$$j = \frac{\sqrt{\frac{2e}{m}}}{9\pi} \frac{U^{3/2}}{d^2}, \qquad (1)$$

gdzie:

j — prąd dopływający do jednostkowej powierzchni sondy,

$U = V_s - V_p$ — napięcie na warstwie ładunku przestrzennego,

d — grubość warstwy ładunku przestrzennego,

e — ładunek elementarny,

m — masa jonu lub elektronu.

Poszczególne wielkości należy obliczać w jednostkach CGSE.

Równanie Langmuira określa ograniczający wpływ ładunku przestrzennego na przepływ prądu ładunków pomiędzy płaskimi okładkami katody i anody przy założeniu, że początkowa prędkość tych ładunków przy katodzie jest równa zeru. Założenie to nie jest całkowicie zgodne z rzeczywistością dla przypadku warstwy tworzącej się wokół sondy. W strefę ładunku przestrzennego sondy przedostają się bowiem elektrony lub jony o różnych prędkościach początkowych [1]). Poza tym samo obrzeże warstwy nie jest w rzeczywistości ostrą krawędzią, lecz stanowi obszar trochę zamazany, który trudno ściśle porównać z geometryczną powierzchnią okładki katody.

Pomimo tych nieścisłości wzór (1) można stosować z wystarczającą dokładnością do wyznaczenia przybliżonego grubości warstwy ładunku przestrzennego.

Sonda wprowadzona do plazmy jako element pomiarowy nie powinna oczywiście wywołać zakłócenia zasadniczego wyładowania. Zakłócenia te nie występują wówczas, gdy wymiary sondy są nieznaczne w porównaniu z obszarem wyładowania i gdy wielkość prądu dopływającego do sondy jest mała w porównaniu z wielkością prądu wyładowania głównego.

Warunki te można uzyskać dzięki temu, że ładunek elektrostatyczny gromadzący się wokół sondy neutralizuje na zewnątrz wpływ pola elektrycznego samej okładki sondy (rys. 1). Pole elektryczne ładunku przestrzennego w ten sposób nakłada się na pole elektryczne okładki sondy, że w obszarze położonym na zewnątrz warstwy nie występuje prawie żadne pole elektryczne. Dzięki utworzeniu się warstwy do sondy mogą przedostać się tylko te cząsteczki elektryczne, które pod wpływem bezładnego ruchu kinetycznego lub też ruchu unoszenia względnie dyfuzji natrafią przypadkowo na swej drodze na granicę warstwy.

Należy przy tym zwrócić uwagę, że do sondy naładowanej dodatnio lub ujemnie przedostają się nie tylko wyłącznie elektrony lub jony. Jeżeli napięcie na warstwie ładunku przestrzennego jest stosunkowo niewielkie, to — pomimo odpychającego działania pola elektrycznego — mogą się do powierzchni sondy przedostać cząsteczki elektrycznego

[1]) Uwzględniając, że początkowe prędkości jonów lub elektronów odpowiadają rozkładowi prędkości Maxwella, uzyskujemy wzór poprawkowy:

$$j = \frac{\sqrt{2}}{9\pi}\left(\frac{e}{m}\right)^{1/2}\frac{U^{3/2}}{x^2}\left[1+\frac{2{,}66}{\left(\frac{Ue}{kT}\right)^{1/2}}\right],$$

gdzie: T — temperatura jonów lub elektronów, k — stała Boltzmanna; pozostałe oznaczenia jak w równaniu (1).

przeciwnego niż normalnie znaku, jeżeli posiadają odpowiedni kierunek, a ich energia kinetyczna jest dostatecznie duża dla pokonania wpływu sił pola elektrycznego.

Wielkość prądu i płynącego w obwodzie sondy oraz gęstość j prądu na powierzchni sondy zależą więc od liczby ładunków elektrycznych n uderzających w jednostkową powierzchnię sondy w ciągu jednostki czasu:

$$j = \frac{i}{S} = j_- - j_+ = n_- e - n_+ e, \tag{2}$$

gdzie:

i — prąd płynący w obwodzie sondy,
S — powierzchnia sondy,
j — gęstość prądu na powierzchni sondy,
j_-, j_+ — gęstość prądu jonów względnie elektronów na powierzchni sondy,
n_-, n_+ — liczba jonów względnie elektronów uderzających w jednostkową powierzchnię sondy w ciągu jednostki czasu,
e — ładunek elementarny elektronu (wartość bezwzględna $e = 1{,}6019 \cdot 10^{-19}$ C).

Równanie (2) będzie słuszne jedynie w tym przypadku, jeżeli wszystkie cząsteczki uderzające w powierzchnię sondy przekazują jej swój ładunek elektryczny, tj. wtedy, gdy nie występują odbicia elektronów lub jonów od powierzchni sondy. Poza tym uderzenia cząsteczek o powierzchnię sondy nie powinny wywoływać emisji wtórnej.

Jeżeli napięcie na warstwie ładunku przestrzennego jest dostatecznie duże, to do sondy przedostają się prawie wyłącznie elektrony bądź jony. Występuje wówczas gęstość prądu nasycenia j_0.

Dla sondy silnie naładowanej dodatnio $n_+ \approx 0$ i wówczas uzyskujemy gęstość prądu nasycenia elektronów:

$$j_0 = n_- e. \tag{3}$$

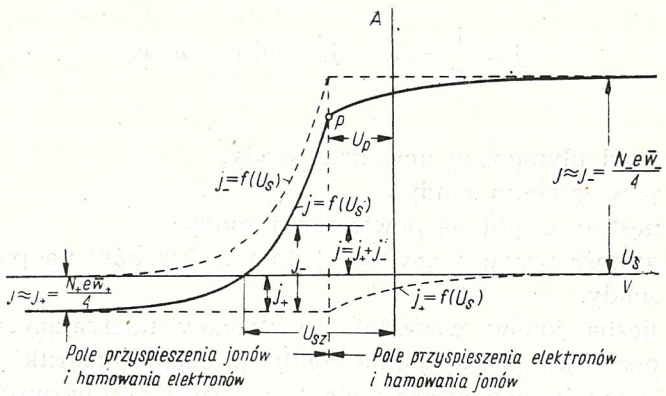
Dla sondy silnie naładowanej ujemnie $n_- \approx 0$ i wówczas uzyskujemy gęstość prądu nasycenia jonów:

$$j_0 = n_+ e. \tag{4}$$

Langmuir przyjął, co się okazało w przybliżeniu zgodne z wynikami doświadczeń, że te prądy nasycenia są niezależne od wielkości napięcia na warstwie ładunku przestrzennego, lecz zależą tylko od koncentracji elektronów względnie jonów w plazmie oraz od rozkładu prędkości tych cząsteczek. Prądy nasycenia posiadają więc charakter prądów dyfuzyjnych.

Nie rozważając na razie ilościowych zależności możemy wykreślić orientacyjnie, jak to podano na rys. 2, przebieg krzywej gęstości prądu dopływającego do jednostkowej powierzchni sondy.

Jeżeli sonda jest naładowana dodatnio względem plazmy, prąd elektronów jest praktycznie stały, podobnie jak prąd jonów dla sondy naładowanej ujemnie.



Rys. 2. Teoretyczny przebieg krzywej charakterystyki sondy $j = f(U_s)$

(W doświadczalnych charakterystykach prąd jonów jest kilkasetkrotnie mniejszy od prądu elektronów)

Jeżeli sonda jest naładowana ujemnie względem plazmy, prąd elektronów będzie stopniowo malał, w miarę wzrostu bezwzględnej wartości potencjału sondy względem plazmy. Stromość tej krzywej zależeć będzie oczywiście od rozkładu prędkości elektronów. Podobny charakter będzie miała krzywa prądu jonów dla wartości dodatnich potencjału sondy.

Wypadkowy prąd płynący w obwodzie sondy jest sumą składowych prądów jonów i elektronów. Prąd jonów ze względu na dużą bezwładność tych cząsteczek będzie znacznie mniejszy od prądu elektronów.

Wypadkowa krzywa, nazywana charakterystyką sondy, może być wyznaczona w sposób doświadczalny na podstawie pomiarów w zewnętrznym obwodzie elektrycznym sondy.

Langmuir wyprowadził teoretycznie przebieg charakterystyki sondy opierając się na podstawowych równaniach teorii kinetycznej gazu doskonałego.

Langmuir założył przede wszystkim, że dla elementarnych cząsteczek elektrycznych jest spełnione podstawowe równanie temperatury gazu doskonałego:

$$\frac{m\tilde{w}^2}{2}=\frac{3}{2}kT, \tag{5}$$

gdzie:

m — masa elementarnej cząsteczki w g,

$\tilde{w}^2$ — średnia arytmetyczna wartość kwadratów prędkości poszczególnych cząsteczek w $\frac{cm^2}{sek^2}$,

T — temperatura bezwzględna gazu w °K,

k — stała Boltzmanna; $k = \frac{R}{N} = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ erga/stopień.

Równanie (5) w teorii kinetycznej gazu określa, że średnia energia kinetyczna ruchu postępowego drobin zależy tylko od temperatury i jest wprost proporcjonalna do temperatury bezwzględnej.

Zależność tę wyprowadza się przy założeniu wielu uproszczeń, a więc: że ośrodek jest gazem doskonałym składającym się z kulistych, sprężystych cząsteczek, których stan jest określony przy pomocy trzech stopni swobody, że wielkość drobin jest znacznie mniejsza od średniej długości drogi pomiędzy powtarzającymi się wzajemnie zderzeniami i że siły międzycząsteczkowe są pomijalnie małe.

Przyjęcie równania (5) dla elementarnych cząsteczek elektrycznych posiada właściwie tylko formalny charakter definicji pojęcia temperatury elektronów lub jonów. Przy badaniu zjawisk elektrycznych nie korzystaliśmy bowiem dotychczas z żadnych pojęć termodynamicznych, a temperaturę cząsteczek elektrycznych możemy tylko określić przez analogię do zjawisk termodynamicznych jako pewną odpowiednią wielkość zastępującą średnią prędkość tych cząsteczek.

Bardziej istotnym założeniem Langmuira było przyjęcie, że rozkład prędkości cząsteczek elektrycznych jest zgodny z maxwellowskim rozkładem prędkości drobin obojętnych gazu.

W ośrodku gazowym w stanie równowagi, gdy nie występują żadne prądy gazowe, prędkości poszczególnych drobin są wynikiem nieuporządkowanego ruchu termodynamicznego.

Maxwell opierając się na rachunku prawdopodobieństwa wyprowadził wzory na gęstość prawdopodobieństwa skalarnej wartości prędkości W jako zmiennej losowej oraz na gęstość prawdopodobieństwa składowych prostokątnych tej prędkości W_x, W_y i W_z [1]).

Równania Maxwella zostały wyprowadzone jedynie przy dwóch następujących założeniach:

1) Długość wektora prędkości $\overrightarrow{W}$ dowolnej cząsteczki jest określona przez trzy składowe W_x, W_y i W_z, które można uważać jako zmienne losowe niezależne od siebie w sensie zasad rachunku prawdopodobieństwa.

[1]) Sposób wyprowadzenia wzorów podany został w załączniku-dodatku zamieszczonym za tekstem artykułu.

2) Gęstość prawdopodobieństwa wystąpienia jakiejkolwiek prędkości skalarnej W jest niezależna od kierunku tej prędkości, lecz jest tylko pewną funkcją skalaru prędkości W.

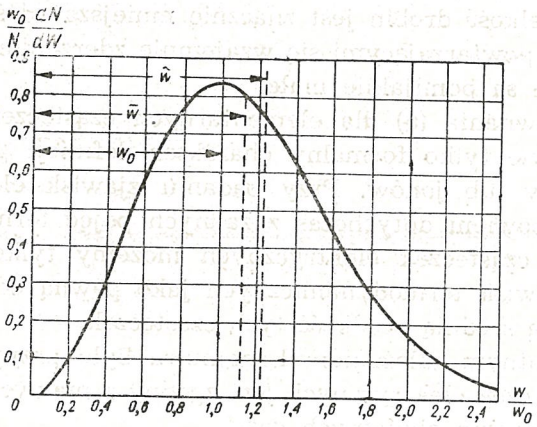
W myśl teorii Maxwella gęstość prawdopodobieństwa prędkości W wyraża się wzorem:

$$h(w) = \frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dw} = \frac{4w^2}{\sqrt{\pi}\, w_0^3} \exp\left(-\frac{w^2}{w_0^2}\right), \tag{6}$$

gdzie:

w — prędkość drobin,
$h(w)$ — gęstość prawdopodobieństwa zmiennej W,
N — liczba drobin w jednostce objętości,
w_0 — najbardziej prawdopodobna prędkość drobin.

Na rys. 3 podano krzywą rozkładu prędkości Maxwella.



Rys. 3. Maxwellowska krzywa rozkładu prędkości drobin gazowych
($\bar{w} = 1{,}128\ w_0$, $\tilde{w} = 1{,}225\ w_0$)

Wzór (6) pozwala nam wyznaczyć ułamek $\frac{\Delta N}{N}$ ogólnej liczby drobin, odpowiadający tym spośród nich, których prędkości zawierają się w granicach od w do $w + \Delta w$.

Uwzględniając wzory (6) i (5) uzyskujemy średnią arytmetyczną wartość prędkości drobin:

$$\bar{w} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} w_0 \tag{7}$$

oraz pierwiastek ze średniej arytmetycznej wartości kwadratów prędkości drobin:

$$\tilde{w} = \sqrt{\frac{3\,kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, w_0 \tag{8}$$

Stąd otrzymujemy, że:

$$w_0 = \sqrt{\frac{2\,kT}{m}} \tag{9}$$

oraz

$$\overline{w} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}\, \tilde{w}. \tag{10}$$

Na podstawie teorii Maxwella można wyznaczyć również prawdopodobieństwo wystąpienia składowej W_x prędkości w kierunku dowolnie obranej osi x.

$$\varphi(w_x) = \frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dw_x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{w_0} \exp\left(-\frac{w_x^2}{w_0^2}\right). \tag{11}$$

Opierając się na równaniu (11) możemy wyznaczyć liczbę drobin n_1 uderzających o dowolną powierzchnię jednostkową ścianki w ciągu jednostki czasu, w których składowa w_x prędkości jest większa od pewnej wybranej dowolnie prędkości w_{x1}

$$n_1 = \int_{w_{x1}}^{\infty} w_x dN = \int_{w_{x1}}^{\infty} \frac{N}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{w_x}{w_0} \exp\left(-\frac{w_x^2}{w_0^2}\right) = \frac{N}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{w_0}{2} \exp\left(-\frac{w_{x1}^2}{w_0^2}\right).$$

Uwzględniając wzór (7) otrzymujemy ostatecznie:

$$n_1 = \frac{N\overline{w}}{4} \exp\left(-\frac{w_{x1}^2}{w_0^2}\right). \tag{12}$$

Całkowitą liczbę drobin n o dowolnych prędkościach, uderzających o powierzchnię jednostkową ścianki w ciągu jednostki czasu, uzyskujemy przy założeniu, że $w_{x1} = 0$, tj.:

$$n = \frac{N\overline{w}}{4}. \tag{13}$$

Zakładając, że rozkład prędkości cząsteczek elektrycznych jest taki sam, jak rozkład prędkości obojętnych drobin gazowych, pomijamy wpływ prądu unoszenia pomiędzy anodą i katodą, jak również istnienie innych uporządkowanych ruchów ładunków. Wymaga to takiego ustawienia geometrycznego sondy, aby nie uwidaczniał się wpływ tych czynników ubocznych.

Jeżeli sonda posiada potencjał ujemny względem plazmy w ten sposób, że na warstwie ładunku przestrzennego wytwarza się napięcie U, to elektrony dla przedostania się do sondy muszą wykonać pracę:

$$A = eU. \tag{14}$$

Wykonanie tej pracy może się odbyć kosztem straty energii kinetycznej elektronów. Do sondy będą mogły przedostać się tylko te elektrony, których składowa prędkości prostopadła do powierzchni sondy spełnia nierówność

$$\frac{1}{2} m_- w_x^2 \geqslant eU,$$

to jest tylko takie elektrony, których prędkość:

$$w_x \geqslant w_{x1} = \sqrt{\frac{2eU}{m_-}}. \tag{15}$$

Uwzględniając wyprowadzone równania (2), (12) i (9) uzyskujemy równanie części krzywej charakterystyki sondy, odpowiadającej ujemnym wartościom potencjału sondy względem plazmy ($V_s \leqslant V_p$):

$$j = j_- - j_+ = \frac{N_- e\overline{w}_-}{4} \exp\left(-\frac{eU}{kT_-}\right) - \frac{N_+ e\overline{w}_+}{4}. \tag{16}$$

Dla części charakterystyki odpowiadającej dodatnim wartościom potencjału sondy ($V_s \geqslant V_p$) względem plazmy uzyskujemy analogicznie:

$$j = -j_- + j_+ = -\frac{N_+ e\overline{w}_+}{4} \exp\left(-\frac{eU}{kT_-}\right) + \frac{N_- e\overline{w}_-}{4}. \tag{17}$$

We wzorach (16) i (17) [1] należy uwzględniać przy tym wartość

[1]) Równanie charakterystyki Langmuira może być również wyprowadzone na podstawie prawa rozkładu drobin gazowych w polu potencjalnym, które zostało podane przez Boltzmanna i doprowadziło niezależnie do tych samych wniosków co równania Maxwella. Według prawa Boltzmanna pod wpływem energii potencjalnej (np. sił ciężkości) występuje nierównomierny rozkład koncentracji drobin gazowych:

$$N = N_0 e^{-\frac{A}{kT}},$$

gdzie:

N — koncentracja drobin występująca w przypadku działania zewnętrznego pola,

N_0 — koncentracja drobin występująca wówczas, gdy nie istnieje pole zewnętrzne,

A — potencjalna energia, która wywołuje zmianę koncentracji drobin,

k — stała Boltzmanna,

T — temperatura bezwzględna.

Jeżeli założymy, że $A = eU$, to dla poszczególnych składników prądu sondy uzyskamy te same wyniki co w równaniach (16) i (17).

bezwzględną napięcia U na warstwie ładunku przestrzennego w ten sposób, że dla dużych napięć ujemnych zanika prąd elektronów, a dla dużych napięć dodatnich zanika prąd jonów. W praktyce wykorzystujemy jednak tylko wzór (16).

Zgodnie ze wzorami (16) i (17) na rys. 2 oznaczono charakterystyczne odcinki charakterystyki sondy.

Porównując zdjętą w sposób doświadczalny krzywą charakterystyki sondy z jej równaniem możemy obliczyć parametry wyładowania elektrycznego. Po oddzieleniu prądu elektronów od prądu jonów wyznacza się jako pierwszy parametr temperaturę elektronów przez znalezienie pochodnej logarytmu naturalnego prądu elektronów względem napięcia sondy:

$$\frac{d(\ln j_-)}{dU} = -\frac{e}{kT_-}, \tag{18}$$

gdzie:

e — ładunek elementarny elektronu,

k — stała Boltzmanna.

Krzywą $j_- = f(U)$ wykreślamy zwykle w skali półlogarytmicznej, dzięki czemu

$$-\frac{e}{kT_-} = \operatorname{tg}\varphi, \tag{19}$$

gdzie φ jest kątem nachylenia części prostoliniowej krzywej względem osi napięcia. Z prostego przeliczenia możemy określić następnie średnie prędkości elektronów, odpowiadające ich temperaturze.

Charakterystycznym punktem rozpatrywanej krzywej jest jej punkt załamania. W punkcie tym potencjał sondy równa się potencjałowi plazmy. W otoczeniu sondy nie występuje ładunek przestrzenny. Do sondy dopływa prąd:

$$j = \frac{N_- e\bar{w}_-}{4} - \frac{N e\bar{w}_+}{4}. \tag{20}$$

Charakterystyka sondy wyznaczona jest zwykle w funkcji napięcia między sondą i anodą.

Wyznaczenie punktu załamania charakterystyki pozwala więc określić potencjał plazmy względem anody.

Drugim charakterystycznym punktem jest punkt odpowiadający gęstości prądu $j = 0$. Uzyskujemy wówczas napięcie izolowanej sondy V_z względem plazmy. W przypadku tym:

$$\frac{N_- e\overline{w}_-}{4} \exp\left(-\frac{eV_z}{kT}\right) = \frac{N_+ e\overline{w}_+}{4}.$$

Zakładamy, że w stanie równowagi statycznej koncentracja elektronów jest równa koncentracji jonów [1]).

$$N_+ = N_- = N. \tag{21}$$

Uzyskujemy stąd:

$$V_z = \frac{kT_-}{e} \ln\left(\frac{\overline{w}_-}{\overline{w}_+}\right) = \frac{kT_-}{2} \ln\left(\frac{T_- m_+}{T_+ m_-}\right). \tag{22}$$

Widać stąd, że izolowana sonda nie przyjmuje bynajmniej potencjału plazmy. Ze względu na to, że szybkie elektrony częściej uderzają w sondę niż powolne jony, izolowana sonda ładuje się ujemnie względem plazmy. Podobne zjawisko, znane jako napięcie kontaktowe, występuje przy zanurzeniu przewodników w cieczach.

Praktyczny sposób wyznaczenia parametrów plazmy podany zostanie dalej, przy omawianiu wyników własnych doświadczeń.

Temperatury jonów nie możemy wyznaczyć na podstawie równania (17), analogicznie jak temperatury elektronów. Jest to spowodowane tym, że dla dodatnich wartości potencjału sondy prąd elekronów jest znacznie większy niż prąd jonów, wskutek czego błędy pomiarów nie pozwalają określić zmienności składnika wyrażającego prąd jonów. Do określenia temperatury jonów musimy posługiwać się równaniami (16) i (21). Sposób ten jest jednak mniej dokładny i uzyskiwane wyniki obliczenia temperatury jonów są niepewne.

Pomiary krzywej charakterystyki sondy przeprowadzone przez Langmuira i innych badaczy w gazach szlachetnych, tlenie, wodorze i parach rtęci wykazały, że krzywe doświadczalne pokrywają się w przybliżeniu z krzywą teoretyczną.

Pomimo wielu odstępstw w zdjętej doświadczalnie charakterystyce sondy możemy zwykle wyodrębnić odcinek krzywej, którego przebieg pokrywa się z teoretyczną krzywą wykładniczą zanikania gęstości prądu elektronów. Fakt ten został przyjęty przez Langmuira jako potwierdzenie, że elektrony posiadają w plazmie rozkład prędkości odpowiadający rozkładowi maxwellowskiemu.

Podane wyżej rozważania dotyczą w zasadzie jedynie sondy płaskiej. Zastosowanie sondy płaskiej w praktyce jest ograniczone ze względu na zakłócenia, które wprowadza stosunkowo duża jej powierzchnia. Sonda płaska zachowuje warunki płaszczyzny jedynie w tym przypadku,

[1]) Założenie to nie zawsze jest słuszne.

gdy średnica okładki jest znacznie większa od grubości warstwy ładunku przestrzennego. Dlatego też zwykle stosujemy zamiast sondy płaskiej sondy walcowe lub kuliste, które mogą być wykonane w mniejszych rozmiarach:

Dla układu walcowego równanie ładunku przestrzennego Langmuira przybiera postać:

$$i_+ = \frac{2}{9}\sqrt{\frac{2e}{m_+}}\frac{U^{3/2}}{r_s\,\varphi_z}, \tag{23}$$

gdzie:

i_+ — prąd jonów dopływający do sondy,

r_s — promień walca sondy,

φ_z — funkcja podana na rys. 4, która nie daje się określić w postaci prostego wyrażenia.

Równanie (23) wraz z wykresem podanym na rys. 4 pozwala na obliczenie promienia zewnętrznego walcowej warstwy ładunku przestrzennego r_0, który oczywiście będzie większy od promienia sondy r_s[1]).

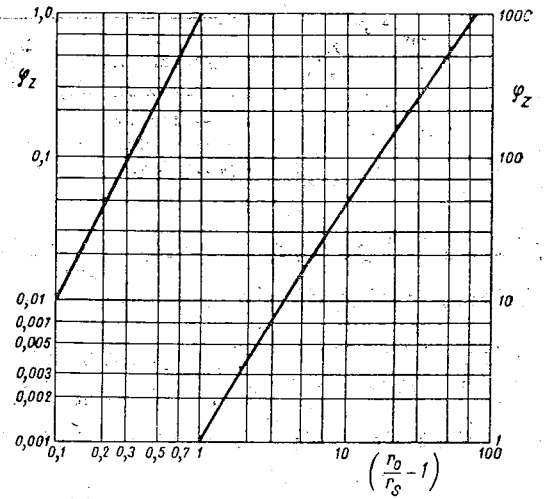
Znając stosunek $\frac{r_s}{r_0}$ możemy wyznaczyć gęstość prądu dyfundujących cząsteczek elektrycznych z plazmy do warstwy ładunku przestrzennego:

$$j(S_0) = \frac{r_s}{r_0}\,j(S), \tag{24}$$

gdzie:

$j(S_0)$ — gęstość prądu na powierzchni graniczącej pomiędzy plazmą i warstwą ładunku przestrzennego,

$j(S)$ — gęstość prądu na powierzchni sondy,



Rys. 4. Współczynnik φ_z do obliczenia średnicy warstwy ładunku przestrzennego, tworzącej się w otoczeniu sondy walcowej

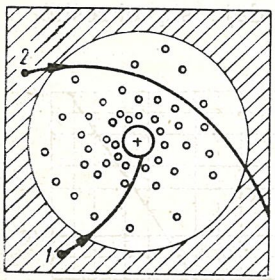
[1]) Równanie (23), podobnie jak równanie (1), wyprowadzane jest przy założeniu, że prędkość wejściowa cząsteczek elektrycznych do warstwy ładunku przestrzennego jest równa zeru. Dokładniejszy wzór uwzględnia temperaturę elektronów (patrz poz. [9]).

r_s — promień walca sondy,
r_0 — promień walca ładunku przestrzennego.

Do wyznaczenia parametrów wyładowania przy pomocy sondy walcowej powinniśmy skorygować wyprowadzone wyżej zależności dla sondy płaskiej przez podstawienie $j(S_0)$ zamiast gęstości j(S). Poprawka ta nie rozwiązuje jednak całkowicie tego zagadnienia. W przypadku sondy walcowej niektóre elektrony lub jony o dużej prędkości kinetycznej, nie skierowane bezpośrednio do powierzchni sondy, mogą przelecieć przez warstwę ładunku przestrzennego po torze komety, nie trafiając w sondę (rys. 5).

Langmuir przeprowadził szczegółową analizę tego zagadnienia. Ruch planetarny cząsteczek elektrycznych ogranicza wielkość prądu dopływającego do sondy w ten sposób, że:

$$j(S) = j(S_0) f_c,$$



Rys. 5. Warstwa ładunku przestrzennego w otoczeniu sondy walcowej o dodatnim potencjale względem plazmy
1 — tor drogi elektronu przyciągniętego do sondy, 2 — tor drogi elektronu o dużej energii kinetycznej, który przelatuje przez warstwę Langmuira pomimo sił przyciągających pola elektrycznego

gdzie f_c jest pewnym współczynnikiem korekcyjnym, który jest funkcją złożoną, zależną od $\frac{r_0}{r_s}$ oraz od $\frac{eU}{kT}$.

Im większe jest napięcie U na warstwie ładunku przestrzennego, tym więcej elektronów zostaje przyciągniętych do sondy, im większy jest natomiast stosunek $\frac{r_0}{r_s}$, tym więcej elektronów chybia sondę.

Dla dużych wartości stosunku $\frac{r_0}{r_s}$, tj. dla cienkich sond, i dla niezbyt małych wartości stosunku $\frac{eU}{kT}$ można wyrazić w przybliżeniu gęstość prądu sondy walcowej według następującego wzoru:

$$j^2(S) = j^2(S_0) \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{eU}{kT}\right). \tag{25}$$

Współczynnik korekcyjny wynosi wówczas:

$$f_c = \sqrt{\frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{eU}{kT}\right)}. \tag{26}$$

Przedstawienie pełnej analizy poprawek dla sondy walcowej, jak i dla kulistej, wymaga zawiłych rachunków. Bliższe wyjaśnienia można znaleźć w pracach [9] i [16].

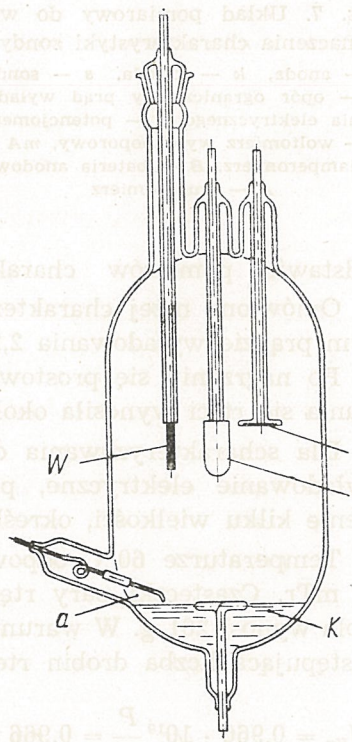
Współczynniki poprawkowe mogą być w praktyce wykorzystane tylko w sposób przybliżony przy pomocy metod graficznych. Godząc się z popełnionym błędem poprawki te zwykle pomijamy. Wiele innych czynników może wywołać zresztą w omawianych pomiarach błędy poważniejsze.

3. WYNIKI PRZEPROWADZONYCH BADAŃ W PLAZMIE ŁUKU W ROZRZEDZONEJ PARZE RTĘCI

W ramach badań prowadzonych w roku 1955 w Zakładzie Elektrotechniki Polskiej Akademii Nauk wykonano praktyczne próby pomiarów przy pomocy sondy Langmuira charakterystycznych wielkości plazmy łuku elektrycznego w rozrzedzonej parze rtęci. Doświadczenia zostały wykonane w laboratorium Instytutu Elektrotechniki. Miały one na celu zebranie wstępnych danych co do techniki pomiarów i obliczeń oraz występujących błędów pomiarowych. Z pomyślnym wynikiem wykonano kilkanaście pomiarów charakterystyk sondy płaskiej i sondy walcowej.

Obiektem badań był model małego prostownika szklanego z ciekłą katodą rtęciową, który został specjalnie wykonany dla pomiarów charakterystyki sondy (rys. 6).

Balon modelu wyposażony został w jedną anodę główną, jedną anodę zapłonową, jedną sondę płaską i sondę walcową. Sondy umieszczone zostały w odle-



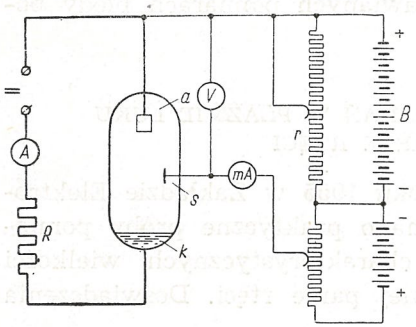
Rys. 6. Warstwa ładunku przestrzennego w otoczeniu sondy walcowej o dodatnim potencjale względem plazmy

K — katoda rtęciowa ze stabilizatorem plamki, *A* — anoda główna, *a* — pomocnicza anoda zapłonowa, *W* — sonda walcowa, *P* —sonda płaska

głości około 1 cm od anody. Balon modelu wykonano ze szkła boro-krzemowego z przepustami molibdenowymi, izolowanymi szkłem. Anodę główną wykonano z grafitu. Dla uniknięcia wahań napięcia pomiędzy

anodą i katodą zastosowano molibdenowy stabilizator plamki katodowej. W czasie prób model podłączony był do stanowiska próżniowego, wyposażonego w dyfuzyjną pompę rtęciową. Ciśnienie gazów obcych było mniejsze od 1 mTr.

Na rys. 7 podano schemat układu pomiarowego. Łuk elektryczny pomiędzy anodą i katodą utrzymywany był przy pomocy prądu stałego,



Rys. 7. Układ pomiarowy do wyznaczenia charakterystyki sondy

a — anoda, *k* — katoda, *s* — sonda, *R* — opór ograniczający prąd wyładowania elektrycznego, *r* — potencjometr, *V* — woltomierz wysokooporowy, *mA* — miliamperomierz, *B* — bateria anodowa, *A* — amperomierz

Pomiędzy anodą i poszczególnymi sondami włączono za pośrednictwem potencjometrów suchą baterię anodową w ten sposób, że przy pomocy suwaka potencjometru można było regulować w sposób płynny napęcie pomiędzy anodą i sondą w granicach od -100 V do $+10$ V.

Do pomiaru napęcia sondy wykorzystano wysokooporowy woltomierz magnetoelektryczny. Pomiary prądu sondy wykonano wielozakresowym miliamperomierzem magnetoelektrycznym. Charakterystyki sondy zdejmowane były w ustalonych warunkach termicznych.

Poniżej podamy przykładowe obliczenia parametrów wyładowania na podstawie pomiarów charakterystyki sondy płaskiej i sondy walcowej.

Omówione niżej charakterystyki sondy wykonane były przy ustalonym prądzie wyładowania 2,2 ÷ 2,3 A.

Po nagrzaniu się prostownika temperatura ścianki w miejscu skraplania się rtęci wynosiła około 60°C.

Dla scharakteryzowania ośrodka gazowego, w którym występowało wyładowanie elektryczne, przeprowadzono poniżej orientacyjne obliczenie kilku wielkości, określających stan tego ośrodka.

Temperaturze 60°C odpowiada ciśnienie nasyconej pary rtęci około 25 mTr. Cząsteczki pary rtęci są jednoatomowe, tak że masa jednego mola wynosi 201 g. W warunkach tych w 1 cm^3 znajduje się przeciętnie następująca liczba drobin rtęci:

$$N_{Hg} = 0{,}966 \cdot 10^{19} \frac{P}{T} = 0{,}966 \cdot 10^{19} \frac{25 \cdot 10^{-3}}{333} = 0{,}725 \cdot 10^{15} \quad [\text{drobin/cm}^3].$$

Pierwiastek ze średniej arytmetycznej kwadratów prędkości poszczególnych drobin rtęci wynosi:

$$\tilde{w} = 1{,}58 \cdot 10^4 \sqrt{\frac{T}{M}} = 1{,}58 \cdot 10^4 \sqrt{\frac{60 + 273}{201}} = 2{,}05 \cdot 10^4 \text{ [cm/sek]}.$$

Wartość średnia arytmetyczna prędkości drobin:

$$\overline{w} = 0{,}911\ \tilde{w} = 0{,}911 \cdot 2{,}05 \cdot 10^4 = 1{,}86 \cdot 10^4 \text{ [cm/sek]}.$$

Średnia długość drogi swobodnej drobiny rtęci:

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi d^2 N_{Hg}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot (1{,}82 \cdot 10^{-8})^2 \cdot 0{,}725 \cdot 10^{15}} \approx 0{,}94 \text{ [cm]},$$

gdzie d — średnica drobiny rtęci — wynosi $1{,}82 \cdot 10^{-8}$ [cm].

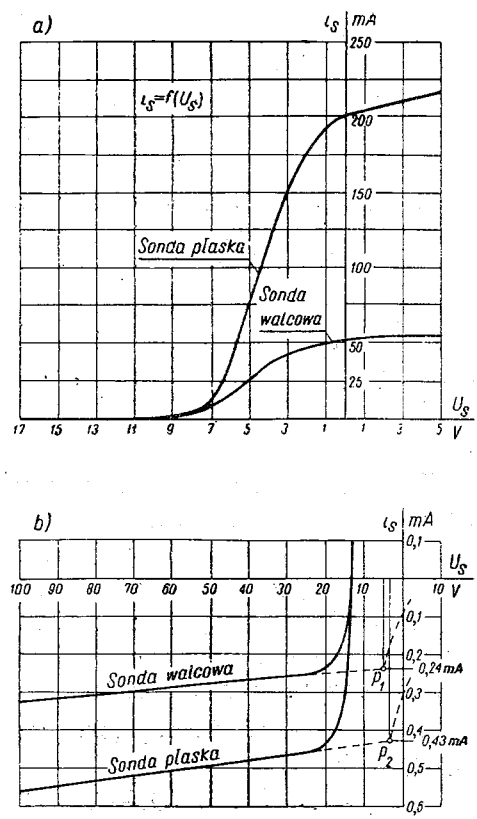
Średnia długość drogi swobodnej elektronu poruszającego się w tym ośrodku wynosić będzie:

$$\lambda_c = 4\sqrt{2}\,\lambda_0 = 5{,}6 \cdot 0{,}94 \approx 5{,}3 \text{ [cm]}.$$

3.1. Zastosowanie sondy płaskiej

Sonda płaska wykonana została ze stalowego płaskiego krążka o powierzchni jednostronnej $S = 0{,}95$ cm^2. Druga strona krążka i przewód doprowadzający do sondy zostały odizolowane od łuku przy pomocy szkła. Łuk elektryczny pomiędzy anodą i katodą podtrzymywany był prądem stałym $I_s = 2{,}3$ A. Napięcie pomiędzy anodą i katodą wyno[illegible]5 V.

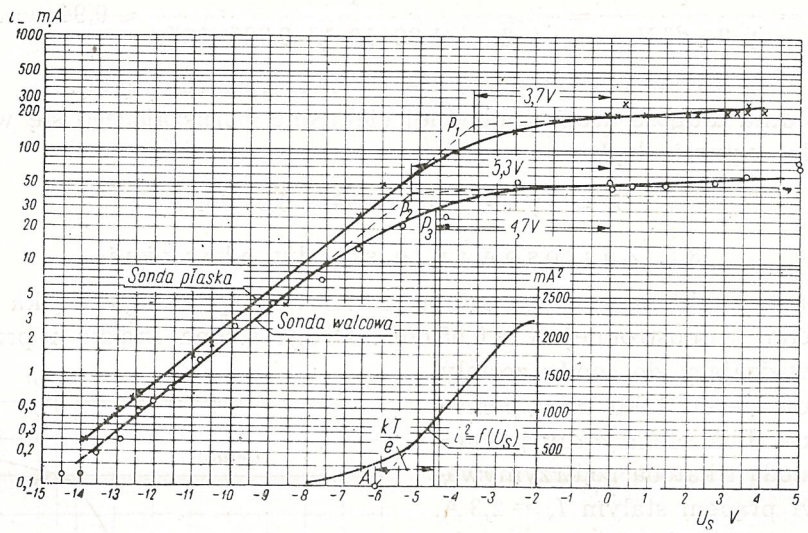
Na rys. 8 wykreślono charakterystykę sondy. Przyjęto przy tym, że potencjał anody równa się zeru. Ze względu na trudność przedstawienia na jednym wykresie charakteru zmiany prądu elektronów i prądu jonów umieszczono niżej w powiększonej skali dolną część wykresu. Z wykresu widać, że prąd w obwodzie sondy staje się równy zeru przy napięciu 13,0 V. Napięcie to odpowiada potencjałowi izolowanej sondy (V_z).



Rys. 8. Charakterystyki sondy płaskiej i sondy walcowej $i_s = f(U_s)$
a) przebieg charakterystyki dla dużych prądów sondy, b) przebieg charakterystyki dla prądów sądy mniejszych od +0,1 mA

Dla dalszych obliczeń wykreślimy w skali logarytmicznej prąd elektronów w funkcji napięcia sondy. W celu wyznaczenia prądu elektronów ekstrapolujemy prostoliniową część charakterystyki sondy z prawej części wykresu (rys. 8b).

Odcinek rzędnej pomiędzy charakterystyką sondy i tą ekstrapolowaną prostą wyraża nam prąd elektronów. Ekstrapolowana prosta według teoretycznych rozważań powinna być równoległą do osi odciętych.



Rys. 9. Krzywa prądu elektronów dopływającego do sondy w funkcji napięcia pomiędzy sondą i anodą [$i = f(U_s)$]
[$i^2 = f(U_s)$ — pomocnicza krzywa do wyznaczenia potencjału plazmy]

Krzywa prądu elektronów, podana na rys. 9, wykazuje zgodnie z teorią przebieg wykładniczy.

3.1.1. Potencjał plazmy

Potencjał plazmy określamy przez wyznaczenie punktu załamania krzywej prądu elektronowego (punkt P_1). Jak widać, rzeczywista charakterystyka zamiast ostrego załamania wykazuje w pobliżu punktu P_1 łagodne zagięcie. Na powstanie tej anomalii wpływają ograniczone wymiary sondy płaskiej. Powierzchnia zewnętrzna warstwy ładunku przestrzennego nie równa się ściśle powierzchni sondy, lecz zwiększa się w miarę wzrostu grubości ładunku przestrzennego.

Z rys. 9 widać, że napięcie pomiędzy plazmą otaczającą sondę i anodą wynosi:

$$U_p = V_p - V_a = -3{,}7 \text{ [V]},$$

gdzie:

V_p — potencjał plazmy,

V_a — potencjał anody.

Znając potencjał plazmy możemy wyznaczyć napięcie na warstwie ładunku przestrzennego przy dowolnym napięciu sondy. Tak na przykład dla izolowanej sondy względem plazmy:

$$V_z = 13{,}0 - 3{,}7 = 9{,}3 \text{ [V]}.$$

3.1.2. Temperatura elektronów

Temperaturę elektronów wyznaczamy z tangensa kąta nachylenia części wykładniczej krzywej prądu elektronowego.

$$\frac{d(\ln i)}{dU_s} = \frac{\ln \frac{i_2}{i_1}}{U_2 - U_1} = \frac{\ln 567}{10} = 0{,}634 \text{ [V}^{-1}\text{]},$$

gdzie z wykresu na rys. 9:

$$\ln \frac{i_2}{i_1} = \ln \frac{170}{0{,}3} \qquad \text{dla} \qquad \Delta U_s = 10 \text{ [V]},$$

stąd:

$$T_- = -\frac{e}{k \operatorname{tg} \varphi} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 0{,}634} = 18\,300 \text{ [°K]}.$$

3.1.3. Prędkość elektronów

Pierwiastek ze średniej arytmetycznej kwadratów prędkości:

$$\tilde{w}_- = \sqrt{\frac{3kT_-}{m_-}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-16}}{0{,}911 \cdot 10^{-27}}} \sqrt{T_-} = 0{,}675 \cdot 10^6 \sqrt{T_-} =$$

$$= 0{,}675 \cdot 10^6 \sqrt{18\,300} = 91{,}4 \cdot 10^6 \text{ [cm/sek]}.$$

Stąd średnia energia kinetyczna elektronów:

$$\frac{m_- \tilde{w}_-^2}{2} = \frac{0{,}911 \cdot 10^{-27} (91{,}4 \cdot 10^6)^2}{2} = 3{,}81 \cdot 10^{-12} \text{[ergów]} = 3{,}81 \cdot 10^{-19} \text{[Ws]} =$$

$$= 2{,}38 \text{[eV]}.$$

Średnia arytmetyczna prędkość elektronów:

$$\bar{w} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \tilde{w} = 84{,}0 \cdot 10^6 \text{ [cm/sek]}.$$

3.1.4. Koncentracja elektronów

Liczbę elektronów w 1 cm^3 możemy obliczyć na podstawie wielkości prądu elektronów płynącego do sondy w chwili, gdy jej potencjał jest

równy potencjałowi plazmy. W tym bowiem przypadku nie istnieje warstwa ładunku przestrzennego i można się nie liczyć z ewentualnymi zakłóceniami, które mogłyby wywołać wysysanie przez pole elektryczne sondy elektronów lub jonów z plazmy.

Z wykresu na rys. 9 widać, że dla $V_s = V_p$ prąd $i_- = 120$ mA. Stąd gęstość prądu elektronów na powierzchni sondy:

$$j_- = \frac{i_-}{S} = \frac{120}{0{,}95} = 126{,}4 \ [\mathrm{mA/cm^2}].$$

Liczba elektronów uderzających o powierzchnię 1 cm^2 sondy w ciągu 1 sekundy:

$$n_- = \frac{j_-}{e} = \frac{126{,}4 \cdot 10^{-3}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 79{,}0 \cdot 10^{16} \left[\frac{\text{elektronów}}{\mathrm{cm^2\ sek}}\right].$$

Stąd koncentracja elektronów:

$$N_- = \frac{4n_-}{\overline{w}_-} = \frac{4{,}79 \cdot 10^{16}}{84 \cdot 10^{6}} = 3{,}76 \cdot 10^{10} \left[\frac{\text{elektronów}}{\mathrm{cm^3}}\right].$$

3.1.5. Prędkość i temperatura jonów

Prędkość jonów można orientacyjnie wyznaczyć przez ekstrapolację lewostronnego odcinka charakterystyki sondy. Z ekstrapolacji tej wynika, że przy potencjale sondy równym potencjałowi plazmy prąd jonów $i = 0{,}43$ mA (wg rys. 8b).

Wynika stąd, że gęstość prądu elektronów:

$$j_{0_+} = \frac{0{,}43}{0{,}95} = 0{,}453 \ \mathrm{mA}.$$

Przez porównanie wzorów wyrażających gęstość prądu elektronów $\left(j_o = \frac{Ne\overline{w}}{4}\right)$ przy założeniu, że w plazmie koncentracja jonów jest równa koncentracji elektronów, $N_+ = N_-$, otrzymujemy:

$$\frac{\tilde{w}_-}{\tilde{w}_+} = \frac{\overline{w}_-}{\overline{w}_+} = \frac{j_0}{j_{0_+}} = \frac{126{,}4}{0{,}453} = 279.$$

Następnie możemy również określić temperaturę jonów:

$$\frac{T_+}{T_-} = \frac{m_+}{m_-}\left(\frac{\overline{w}_+}{\overline{w}_-}\right)^2 = \frac{3{,}34 \cdot 10^{-22}}{0{,}911 \cdot 10^{-27}}\left(\frac{1}{279}\right)^2 = 4{,}71,$$

stąd

$$T_+ = 18\,300 \cdot 4{,}71 = 86\,000 \ ^\circ[\mathrm{K}].$$

Wyniki obliczeń budzą w ostatnim przypadku poważne wątpliwości. Odnośnie do temperatury jonów znajdujemy w literaturze rozbieżne dane. Z dyskusji pomiarów przeprowadzonych w gazach szlachetnych wynikałoby, że temperatura jonów jest równa w przybliżeniu połowie temperatury elektronów.

Jeżeli przyjąć, tak jak to się często zakłada w literaturze, że pomiędzy elektronami i jonami istnieje równowaga energii kinetycznej, to jest, że:

$$\frac{m_+ \tilde{w}_+^2}{2} = \frac{m_- \tilde{w}_-^2}{2},$$

to wówczas w przypadku pary rtęci:

$$\frac{\tilde{w}_-}{\tilde{w}_+} = \sqrt{\frac{m_+}{m_-}} = \sqrt{\frac{3{,}34 \cdot 10^{-22}}{0{,}911 \cdot 10^{-27}}} = 607.$$

Przy założeniu tym temperatura elektronów równa jest temperaturze jonów.

3.1.6. Potencjał izolowanej sondy

Równanie (22) pozwala obliczyć potencjał izolowanej sondy:

$$V_z = \frac{kT_-}{e} \ln\left(\frac{\overline{w}_-}{\overline{w}_+}\right) = \frac{1}{0{,}634} \ln 279 = 8{,}87 \text{ [V]}.$$

Z bezpośrednich pomiarów uzyskaliśmy potencjał izolowanej sondy 9,3 [V].

3.1.7. Grubość warstwy ładunku przestrzennego

Dla przykładu obliczymy z równania ładunku przestrzennego grubość warstwy ładunku przestrzennego dla przypadku izolowanej sondy, tj. dla $V_z = 9{,}3$ V,

$$d^2 = \frac{\sqrt{\frac{2e}{m_+}}}{9\pi} \frac{U^{3/2}}{j_+} = \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{3{,}34 \cdot 10^{-22}}}}{9\pi} \frac{\sqrt{U^3 \left(\frac{1}{300}\right)}}{j_+ \cdot 3 \cdot 10^9} =$$

$$= 0{,}386 \cdot 10^{-8} \frac{U^{3/2}}{j_+} = 0{,}386 \cdot 10^{-8} \frac{9{,}3^{3/2}}{0{,}453 \cdot 10^{-3}} = 68{,}6 \cdot 10^{-4} \text{ [cm}^2\text{]},$$

$$d \approx 0{,}083 \text{ [cm]}.$$

Ze względu na trudne warunki obserwacji w czasie prób nie można było zauważyć występowania warstwy ładunku przestrzennego.

3.2. Zastosowanie sondy walcowej

Sonda walcowa wykonana została z drutu molibdenowego o średnicy 0,8 mm i długości $l = 11$ mm [1]). Powierzchnia sondy wynosiła:

$$S = \pi \cdot 0{,}8 \cdot 11 + \pi \cdot 0{,}4^2 = 28{,}1 \text{ mm}^2.$$

Pomiary poszczególnych punktów charakterystyki wykonano jak w przypadku sondy płaskiej. Łuk elektryczny podtrzymywany był prądem $I_s = 2{,}2$ A. Napięcie pomiędzy anodą i katodą wynosiło 15,5 V. Napięcie izolowanej sondy względem anody wynosiło 12,9 V.

Krzywe charakterystyczne podano na rysunkach 8 i 9.

3.2.1. Potencjał plazmy

Punkt załamania charakterystyki można wyznaczyć podobnie jak dla sondy płaskiej przez ekstrapolację dwóch części krzywej (rys. 9).

Wynikałoby stąd, że potencjał plazmy jest o 5,3 V mniejszy od potencjału anody. Wyznaczenie tego punktu jest jednak bardziej niepewne niż w poprzednim przypadku. Załamanie krzywej dla sondy walcowej jest zwykle łagodniejsze niż dla sondy płaskiej z tego względu, że ze wzrostem napięcia na warstwie ładunku przestrzennego ulega powiększeniu powierzchnia graniczna warstwy.

Potencjał plazmy możemy wyznaczyć jeszcze inną metodą, wykorzystując równanie (25), które uwzględnia dla pewnego odcinka charakterystyki wpływ przelotów planetarnych elektronów.

Dla sondy naładowanej dodatnio:

$$i_-^2 = \text{const} \cdot \left[1 + \frac{e(V_s - V_p)}{kT_-}\right].$$

Zależność ta jest słuszna dla wartości napięcia sondy przekraczającej o kilka woltów napięcie plazmy. Zgodnie z tym równaniem, gdy prąd i_- staje się równy zeru:

$$V_p = V_s - \frac{kT_-}{e}.$$

Stąd widać, że przez ekstrapolację prostej $i_-^2 = f(V_s)$ uzyskujemy punkt przecięcia z osią odciętych A przesunięty o wielkość $\frac{kT_-}{e}$ względem rzędnej, odpowiadającej potencjałowi plazmy. Konstrukcja ta zo-

[1]) Engel i Steinbeck [9] podają wyniki pomiarów z sondami o powierzchni 0,022 cm², Buchmann [10] stosował sondy o powierzchni 0,5 cm² i 0,01 cm², Hermann [12] wykorzystywał sondę 0,057 cm², Yussuf i Prescott [30] sondę o powierzchni 0,0314 cm².

stała wykorzystana w naszym przypadku do określenia potencjału plazmy (rys. 9).

$$V_p = 4{,}7 \text{ [V]}.$$

3.2.2. Temperatura elektronów

Temperaturę elektronów określamy jak w przypadku sondy płaskiej

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{d \ln i_-}{dU_s} = \frac{\ln \frac{40}{0{,}3}}{15 - 5{,}3} = 0{,}635 \text{ [V}^{-1}\text{]},$$

$$T_- = \frac{e}{k \operatorname{tg}\varphi} = \frac{11\,600}{0{,}635} = 18\,260 \text{ [°K]}.$$

(Stąd też: $\frac{kT_-}{e} = \frac{1}{0{,}635} = 1{,}57$ V, co wykorzystano przy określeniu potencjału plazmy w p. 3.2.1).

3.2.3. Prędkość elektronów

$$\tilde{w} = 0{,}675 \cdot 10^6 \sqrt{18260} = 91{,}2 \cdot 10^6 \text{ [cm/sek]},$$

$$\overline{w} = 83{,}7 \cdot 10^6 \text{ [cm/sek]}.$$

3.2.4. Koncentracja elektronów

Gęstość prądu elektronów płynącego do sondy, gdy jej potencjał jest równy potencjałowi plazmy:

$$j_- = \frac{i_-}{S} = \frac{30}{0{,}281} = 106{,}8 \text{ [mA/cm}^2\text{]}.$$

Liczba elektronów uderzających w 1 cm^2 sondy w ciągu 1 sek:

$$n_- = \frac{j_-}{e} = \frac{106{,}8 \cdot 10^{-3}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 66{,}7 \cdot 10^{16} \left[\frac{\text{elektronów}}{\text{cm}^2 \text{ sek}}\right].$$

Koncentracja elektronów i jonów:

$$N_- = N_+ = \frac{4n_-}{\overline{w}_-} = \frac{4 \cdot 66{,}7 \cdot 10^{16}}{83{,}7 \cdot 10^6} = 3{,}19 \cdot 10^{10} \text{ [elektronów/cm}^3\text{]}.$$

3.2.5. Prędkość i temperatura jonów

Ekstrapolując, jak dla przypadku sondy płaskiej, prostoliniowy odcinek krzywej sondy otrzymujemy przy $V_s = V_p$ prąd jonów płynących do sondy:

$$j_+ = 0{,}24 \text{ [mA]}.$$

Stąd stosunek prędkości elektronów i jonów:

$$\frac{\overline{w}_-}{\overline{w}_+} = \frac{i_-}{i_+} = \frac{30}{0{,}24} = 125$$

oraz stosunek ich temperatur:

$$\frac{T_+}{T_-} = \frac{m_+}{m_-}\left(\frac{\overline{w}_+}{\overline{w}_-}\right)^2 = \frac{367\,000}{(125)^2} = 23{,}5.$$

3.2.6. Potencjał izolowanej sondy

$$V_z = \frac{kT}{e}\ln\left(\frac{\overline{w}_-}{\overline{w}_+}\right) = 1{,}57 \ln 125 = 7{,}56 \text{ [V]}.$$

Z bezpośrednich pomiarów uzyskaliśmy potencjał izolowanej sondy $V_z = 12{,}9 - 4{,}7 = 8{,}2$ [V].

4. WNIOSKI Z PRZEPROWADZONYCH BADAŃ. OCENA BŁĘDÓW I ZAKRES ZASTOSOWANIA METODY SONDY LANGMUIRA

Porównując ze sobą wyniki pomiarów dla kilkunastu charakterystyk, uzyskane przy pomocy sondy walcowej i sondy płaskiej, można stwierdzić, że pomiary temperatury elektronów i ich prędkości nie przedstawiają poważniejszych trudności. Uzyskiwane wyniki są na ogół powtarzalne i nie obarczone poważniejszymi przypadkowymi błędami.

Trudniejsze jest wyznaczenie potencjału plazmy. Załamania charakterystyki nie można ściśle wyznaczyć i należy liczyć się z błędami dochodzącymi do $\pm$ 0,5 V. Ze względu na logarytmiczny przebieg prądu opierające się na tym obliczenie koncentracji elektronów obarczone jest większymi błędami.

Zastosowanie tej metody do pomiaru temperatury i średniej prędkości jonów budzi poważniejsze wątpliwości. Ze względu na mały udział jonów w porównaniu do elektronów w prądzie płynącym w obwodzie sondy wielkość prądu jonów może być wyznaczona jedynie w sposób orientacyjny. Wyniki obliczeń temperatury jonów wykazują duży rozrzut dla poszczególnych charakterystyk, który trudno jest wyjaśnić wpływem zmiany warunków doświadczeń.

Przesłanki, na których opiera się obliczenie temperatury i prędkości jonów, pozwalają wysunąć zastrzeżenia, czy sposób ten jest teoretycznie uzasadniony.

W czasie przeprowadzonych doświadczeń uzyskano temperaturę jonów kilkakrotnie większą od temperatury elektronów. W literaturze znajdujemy zwykle informacje, powtórzone prawdopodobnie za Lang-

muirem, że temperatura jonów jest równa w przybliżeniu połowie temperatury elektronów. E. Buchmann [10], który w 1934 r. badał dokładność metody sondy, zwraca jednak uwagę na duże rozbieżności w określeniu tej temperatury (uzyskiwane wyniki od kilkuset do kilkuset tysięcy °K).

Ze względu na wzmożoną wymianę energii pomiędzy jonami i obojętnymi drobinami gazu należałoby teoretycznie przewidywać, że temperatura jonów powinna być zbliżona do temperatury gazu. Na te prędkości powinien się nałożyć ruch unoszenia i ruch wywołany siłami dyfuzji.

Wskutek uzyskania z pomiarów zbyt dużych wartości temperatury jonów Langmuir wysunął przypuszczenie, że jony nie posiadają maxwellowskiego rozkładu prędkości.

Wydaje się, że uzyskiwane wyniki obliczenia temperatury jonów w znacznym stopniu zależne są od rodzaju gazu, w którym przeprowadzono doświadczenia.

Wyniki obliczeń uzyskiwanych z charakterystyk sond należy przyjmować z dużą ostrożnością. Zwracano już na to uwagę [15], że w literaturze publikowano zupełnie fałszywe dane, wynikające z popełnionych błędów pomiaru.

Wyniki pomiarów zawarte w niniejszej pracy posiadają charakter przykładowy i nie mogą być podstawą oceny zjawisk, które występowały w badanym modelu. Przeprowadzone doświadczenia miały przede wszystkim na celu przeanalizowanie samej metody pomiarowej.

Uzyskane wartości temperatury elektronów nie odbiegają jednak w sposób wyraźny od wyników publikowanych za granicą dla zbliżonych warunków doświadczeń. Uzyskane wartości koncentracji elektronów wydają się natomiast zbyt małe. Ze względu na wspomniane już rozbieżności w publikacjach nie można natomiast zupełnie wypowiedzieć się odnośnie ścisłości wyznaczenia temperatury jonów.

Źródła błędów mogą wynikać z wielu przyczyn.

Zgodnie z teorią sondy temperaturę elektronów oblicza się w założeniu, że na prąd sondy nie wpływa ruch unoszenia elementarnych cząsteczek, wynikający z przewodnictwa prądu pomiędzy anodą i katodą, nie wpływają ruchy dyfuzji elektronów lub jonów ani też wreszcie wpływy ewentualnych strumieni gazu. Z tego też względu nie można stosować metody sondy, gdy prędkość unoszenia cząsteczek elementarnych jest duża (tzn. duży gradient potencjału i duże napięcie pomiędzy anodą i katodą).

Czynniki te niewątpliwie wpłynęły w sposób istotny na uzyskaną dokładność pomiarów w czasie podanych w niniejszej pracy doświadczeń. Zastosowane sondy pomiarowe, a w szczególności sonda płaska,

nie były dostatecznie zabezpieczone od wpływu prądu unoszenia i wpływu strumienia par rtęci wyrzucanych z katody.

Założenia metody pomiarowej są zgodne z rzeczywistością, jeśli przyjąć, że wokół sondy tworzy się istotnie warstwa ładunku przestrzennego taka, jak ją opisano w poprzednich rozdziałach. Zderzenia elektronów z drobinami gazu mogą wywołać jonizację w bezpośrednim otoczeniu sondy i całkowicie zmienić charakter zjawisk. Dla uniknięcia tego konieczne jest, aby średnia długość drogi swobodnej elektronu była znacznie większa od grubości warstwy ładunku przestrzennego ($\lambda \gg d$) i aby ciśnienie gazu nie było zbyt duże (według Loeba poniżej 10 Tr). Warstwa ładunku przestrzennego nie tworzy zresztą zawsze ostro zarysowanej krawędzi z plazmą, tak jak to się przyjmuje w teorii.

Wyniki pomiarów może zniekształcić emisja elektronów z sondy, wywołana bombardowaniem sondy przez jony i elektrony, wywołana nagrzaniem się sondy (emisja termoelektronowa) lub wreszcie zjawiskiem fotoelektrycznym. Również mogą wywołać błędy atomy metastabilne przedostające się do warstwy ładunku przestrzennego.

Prądy płynące do sondy nie powinny w sposób istotny zakłócać rozkładu koncentracji elementarnych ładunków w plazmie.

Według Loeba sondę można stosować wówczas, gdy koncentracja elektronów przekracza 10^8 elektronów na 1 cm^3. Wymiary sondy powinny być małe.

W myśl założeń teorii sondy wszystkie elektrony i jony uderzające w powierzchnię sondy przekazują jej swój ładunek elektryczny. W rzeczywistości współczynnik odbicia elektronów i jonów jest mniejszy od jedności (Buchmann szacuje współczynnik odbicia elektronów jako 0,6).

Założenie, że koncentracja elektronów jest równa koncentracji jonów, można przyjąć tylko jako hipotezę. W literaturze są wzmianki, że w pewnych warunkach wyładowania w gazach liczba elektronów może nawet kilkakrotnie przekraczać liczbę jonów. Stąd też może pochodzić jedna z ważniejszych przyczyn niepewności w obliczeniu temperatury jonów.

Według teorii sondy przyjmuje się, że w plazmie występują jedynie jednowartościowe jony. W plazmie łuku Hg oprócz jonów jednowartościowych występują również jony dwu- i trójwartościowe. W pewnych przypadkach poważną rolę może odegrać obecność gazów obcych.

Opublikowanie teorii sondy wywołało żywe zainteresowanie. Przyjęto stąd stosowanie w opisach zjawisk towarzyszących wyładowaniom elektrycznym trochę sztuczne pojęcie temperatury elektronów, które stanowi pewien odpowiednik ich średniej prędkości.

Pomiary przy pomocy sondy potwierdziły, że bezładny ruch elektronów może być przedstawiony przy pomocy równań rozkładu prędkości Maxwella.

Zagadnieniom sondy poświęcono dużą ilość prac, które pozwoliły określić rozkład potencjałów i koncentracji elektronów w plazmie łuku elektrycznego niskiego ciśnienia. Przeprowadzono szczegółowe badania nad przyczynami błędów.

Wykładnicza zależność prądu sondy od jej potencjału uwidacznia się wyraźnie przy pomiarach w plazmie kolumny dodatniej [1]) wyładowania elektrycznego. Większe zniekształcenia charakterystyki, uniemożliwiające jej stosowanie, występują przy pomiarach w obszarze ciemni katodowej lub też w pobliżu ścianek na granicach obszaru kolumny.

Badania zniekształceń charakterystyki pozwoliły wykryć nieznane dotąd zjawiska. Zaobserwowano na przykład występowanie w pewnych przypadkach grup szybkich elektronów. Zdarzające się niekiedy kilkakrotne załamania charakterystyki świadczą, że rozkład prędkości elektronów może być wynikiem nałożenia się na siebie kilku rozkładów maxwellowskich. Na podstawie badań ostrości krzywej charakterystyki wysnuto wniosek, że w plazmie mogą powstać oscylacje cząsteczek elektrycznych.

Dla zniekształconych charakterystyk przeprowadzono próby określenia rozkładu prędkości w przypadkach, gdy nie są spełnione równania Maxwella (Druyvesteyn — rozkład prędkości przy zderzeniach niesprężystych [17]).

Zagadnieniom wpływu pola magnetycznego na przebieg charakterystyki sondy i zagadnieniom temperatury jonów poświęcono w ostatnich latach prace w Związku Radzieckim [13], [21], [22].

W 1955 r. w Anglii [30] opierając się na pomiarach charakterystyki sondy próbowano określić zależność impedacji łuku od parametrów wyładowania.

Dla łatwiejszego wyznaczenia charakterystyki sondy opracowywane były oscylograficzne układy pomiarowe. Do uzyskania krzywej charakterystyki na ekranie oscylografu katodowego konieczne jest przyłożenie do jednej z płyt krzywej napięcia proporcjonalnego do ln i. Wymaga to stosowania specjalnych układów [12].

W elektrotechnice metoda sondy znajduje ostatnio zastosowanie przy określaniu parametrów wyładowania elektrycznego w prostownikach rtęciowych [26], [27], [28].

5. ZAKOŃCZENIE

Metoda sondy Langmuira stanowi interesującą i pomysłową metodę badania zjawisk towarzyszących wyładowaniom elektrycznym w rozrze-

[1]) Inaczej zorza lub słup dodatni.

dzonych gazach. Na podstawie stosunkowo prostych pod względem technicznym pomiarów można określić ilościowo zasadnicze parametry plazmy i wysnuć wiele wniosków dotyczących zachowania się elementarnych cząsteczek w wyładowaniu elektrycznym, których nie można uzyskać przy pomocy innych metod.

W przeprowadzonej w niniejszej pracy analizie założeń, na których opiera się teoria sondy, omówiono źródła błędów oraz zwrócono uwagę na pewne niejasności teorii, które wymagają jeszcze przeprowadzenia badań.

W czasie przeprowadzonych doświadczeń nad łukiem elektrycznym w rozrzedzonej parze rtęci wykonano orientacyjne pomiary temperatury elektronów, potencjału plazmy i koncentracji elektronów. Zastosowanie metody sondy do pomiaru temperatury jonów budzi poważniejsze zastrzeżenia. Uzyskane wyniki pomiarów temperatury jonów wydają się być niezgodne z rzeczywistością.

Metoda sondy elektrycznej Langmuira powinna znaleźć zastosowanie w technice przy badaniach prototypów prostowników rtęciowych i lamp gazowanych.

Dodatek

MAXWELLOWSKI ROZKŁAD PRĘDKOŚCI DROBIN GAZOWYCH [1]

Maxwell przyjął, że chwilowa prędkość $\overrightarrow{W}$ dowolnej drobiny gazowej jest trójwymiarową zmienną losową o składowych prostokątnych W_x, W_y, W_z.

Równania Maxwella zostały wyprowadzone jedynie na podstawie dwóch następujących założeń:

1. Gęstość prawdopodobieństwa zmiennej trójwymiarowej W_x, W_y, W_z równa się iloczynowi gęstości prawdopodobieństwa jego składowych, tj.:

$$f(w_x, w_y, w_z) = \varphi_1(w_x)\,\varphi_2(w_y)\,\varphi_3(w_z). \tag{1.1}$$

2. Gęstość prawdopodobieństwa trójwymiarowej zmiennej losowej jest pewną funkcją w^2:

$$f(w_x, w_y, w_z) = g(w^2). \tag{1.2}$$

[1]) Teoria sondy opiera się na wyprowadzonym przez Maxwella równaniu rozkładu prędkości drobin gazowych. Uzasadnienie wzorów Maxwella w dostępnych dla autora dziełach przedstawione było w sposób wyrywkowy, a sformułowanie zasadniczych założeń zawierało wiele niejasności. W związku z tym autor uznał za konieczne przeanalizowanie tego zagadnienia. Podany sposób wyprowadzenia oparty jest na pracach [9], [23], [25], [29], [31].

Założenie (1.1) oznacza, że składowe W_x, W_y, W_z są zmiennymi niezależnymi od siebie w sensie zasad rachunku prawdopodobieństwa.

Założenie (1.2) oznacza, że gęstość prawdopodobieństwa wystąpienia wektora prędkości $\overrightarrow{W}$ o składowych W_x, W_y i W_z jest niezależna od kierunku tego wektora, lecz jedynie od jego wielkości skalarnej W. Innymi słowami — wszystkie kierunki prędkości są jednakowo uprzywilejowane. Założenie, że g jest funkcją w^2, a nie w, nie ma istotnego znaczenia.

Gęstością prawdopodobieństwa nazywamy granicę, do której dąży stosunek funkcji rozkładu prawdopodobieństwa do przyrostu zmiennej, gdy ten ostatni dąży do zera. Dla składowej na przykład W_x

$$\varphi_1(w_x) = \lim_{\Delta w_x \to 0} \frac{P(w_x \leqslant W_x < w_x + \Delta w_x)}{\Delta w_x}. \tag{1.3}$$

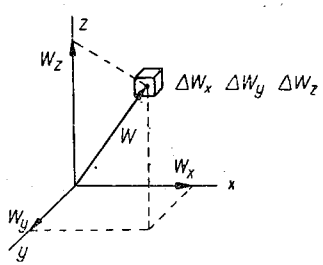
Dla trójwymiarowej natomiast zmiennej

$$f(w_x, w_y, w_z) =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta w_x \to 0 \\ \Delta w_y \to 0 \\ \Delta w_z \to 0}} \frac{P(w_x \leqslant W_x < w_x + \Delta w_x, w_y \leqslant W_y < w_y, w_z \leqslant W_z < w_z + \Delta w_z)}{\Delta w_x \, \Delta w_y \, \Delta w_z}. \tag{1.4}$$

Jeżeli potraktujemy prędkości poszczególnych drobin jako wektory sprowadzone do początku układu współrzędnych prostokątnych x, y, z (rys. 10), to gęstość prawdopodobieństwa $f(w_x, w_y, w_z)$ pozwoli nam wyznaczyć ułamek liczby drobin, których wektory prędkości kończą się w obszarze prostopadłościanu o bokach Δw_x, Δw_y, Δw_z

$$\frac{dN}{N} = f(w_x, w_y, w_z)\, dw_x\, dw_y\, dw_z. \tag{1.5}$$



Rys. 10. Szkic pomocniczy do wyprowadzenia równań Maxwella

Gęstość prawdopodobieństwa $\varphi_1(w_x)$ względnie $\varphi_2(w_y)$ lub $\varphi_3(w_z)$ pozwala nam wyznaczyć ułamek liczby drobin, dla których odpowiednie końce wektorów prędkości leżą pomiędzy dwoma płaszczyznami prostopadłymi do osi x względnie y lub z i odległymi od siebie o Δw_x względnie Δw_y lub Δw_z

$$\frac{dN_x}{N} = \varphi_1(w_x)\, dw_x. \tag{1.6}$$

W celu wyprowadzenia równań Maxwella znajdziemy różniczkę logarytmu naturalnego wyrażeń (1.1) i (1.2):

$$\mathrm{d}\left[\ln f(w_x, w_y, w_z)\right] = \frac{\varphi_1'(w_x)}{\varphi_1(w_x)}\,dw_x + \frac{\varphi_2'(w_y)}{\varphi_2(w_y)}\,dw_y + \frac{\varphi_3'(w_z)}{\varphi_3(w_z)}\,\mathrm{d}w_z \tag{1.7}$$

$$d\left[ln\, g(w^2)\right] = \frac{g'(w^2)}{g(w^2)}\,2w dw,$$

a ponieważ $w^2 = w_x^2 + w_y^2 + w_z^2$, więc:

$$d\left[\ln g(w^2)\right] = \frac{g'(w^2)}{g(w^2)}\,2(w_x dw_x + w_y dw_y + w_z dw_z). \tag{1.8}$$

Zgodnie z założeniami równania (1.7) i (1.8) powinny być tożsamościami. W_x, W_y i W_z są zmiennymi niezależnymi, więc przyrównując do siebie odpowiednie wyrażenia przy dw_x, dw_y i dw_z otrzymujemy:

$$\frac{\varphi_1'(w_x)}{w_x\,\varphi_1(w_x)} = \frac{\varphi_2'(w_y)}{w_y\,\varphi_2(w_y)} = \frac{\varphi_3'(w_z)}{w_z\,\varphi_3(w_z)} = \frac{2g'(w^2)}{g(w^2)} = \text{const.} \tag{1.9}$$

Załóżmy, że $\text{const} = -\dfrac{1}{2w_0^2}$. Dla składowej W_x otrzymujemy wówczas równanie różniczkowe:

$$\frac{1}{\varphi_1(w_x)}\,\frac{d\left[\varphi_1(w_x)\right]}{dw_x} = -\frac{w_x}{2w_0^2}. \tag{1.10}$$

Jako rozwiązanie tego równania uzyskujemy funkcję:

$$\varphi_1(w_x) = C\exp\left(-\frac{w_x^2}{w_0^2}\right). \tag{1.11}$$

Stałą całkowania C znajdujemy z pewnika, że prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego równa się jedności:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(w_x)\,dw_x = 1, \tag{1.12}$$

stąd:

$$C = \frac{1}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{w_x^2}{w_0^2}\right) dw_x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,w_0^2}, \tag{1.13}$$

gdyż całkę w mianowniku możemy doprowadzić do postaci całki Gaussa.

Postępując w ten sam sposób ze składowymi w_y i w_z, otrzymujemy wzory Maxwella na gęstość prawdopodobieństwa dla poszczególnych składowych:

$$\varphi_1(w_x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, w_0} \exp\left(-\frac{w_x^2}{w_0^2}\right),$$

$$\varphi_2(w_y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, w_0} \exp\left(-\frac{w_y^2}{w_0^2}\right), \tag{1.14}$$

$$\varphi_3(w_z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, w_0} \exp\left(-\frac{w_z^2}{w_0^2}\right).$$

Następnie na podstawie równania (1.1) możemy wyznaczyć:

$$f(w_x, w_y, w_z) = g(w^2) = \frac{1}{\pi^{3/2} w_0^3} \exp\left(-\frac{w^2}{w_0^2}\right). \tag{1.15}$$

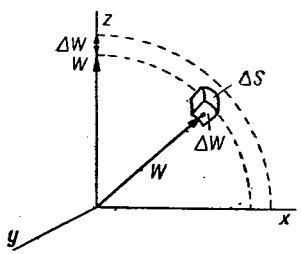
Postarajmy się teraz znaleźć gęstość prawdopodobieństwa:

$$h(w) = \lim_{\Delta w \to 0} \frac{P(w \leqslant W < w + \Delta w)}{\Delta w}, \tag{1.16}$$

która określa nam prawdopodobieństwo zdarzenia, że koniec wektora $\overrightarrow{W}$ będzie położony w obszarze ograniczonym przez dwie powierzchnie kuliste o promieniach W i $W + \Delta W$ (rys. 11).

W tej warstwie kulistej możemy wyodrębnić pewien element objętości, który w przybliżeniu odpowiadać będzie elementowi objętości Δw_x, Δw_y, Δw_z rozpatrywanemu na rys. 11 w ten sposób, że:

$$\Delta v = \Delta s\, \Delta w = \Delta w_x \Delta w_y \Delta w_z.$$



Rys. 11. Szkic pomocniczy do wyprowadzenia równań Maxwella

Prawdopodobieństwu $h(w)\Delta w$ odpowiadać będzie element objętości $4\pi w^2 \Delta w$, natomiast prawdopodobieństwu $f(w_x, w_y, w_z)\, \Delta w_x\, \Delta w_y\, \Delta w_z$ odpowiadać będzie element objętości $\Delta s \Delta w$. Stosunek tych prawdopodobieństw powinien równać się stosunkowi odpowiednich objętości:

$$\frac{h(w)\,\Delta w}{4\pi w^2\, \Delta w} = \frac{f(w_x, w_y, w_z)\, \Delta w_x\, \Delta w_y\, \Delta w_z}{\Delta s\, \Delta w},$$

skąd otrzymujemy:

$$h(w) = 4\pi w^2 f(w_x, w_y, w_z). \tag{1.17}$$

Uwzględniając równanie (1.17) otrzymujemy równanie Maxwella na gęstość prawdopodobieństwa skalara prędkości W[1].

$$h(w) = \frac{1}{N}\frac{dN}{dw} = \frac{4w^2}{\sqrt{\pi}\, w_0^3} \exp\left(-\frac{w^2}{w_0^2}\right). \tag{1.18}$$

Wykres tej funkcji podany został na rys. 3.

Pochodna wyrażenia (1.17) staje się równa zeru, gdy $w = w_0$. Możemy udowodnić stąd, że występuje wówczas maksimum funkcji $h(w)$. Stała w_0 jest więc najbardziej prawdopodobną prędkością drobin gazu.

Średnią wartość prędkości cząsteczek, tj. nadzieję matematyczną lub wartość oczekiwaną zmiennej losowej W, możemy określić przez całkowanie:

$$\overline{w} = E(w) = \frac{1}{N}\int_{w=0}^{w=\infty} w\, dN = \frac{1}{N}\int_0^\infty w\, h(w)\, dw =$$

$$= \int_0^\infty \frac{4w^2}{\sqrt{\pi}\, w_0^3} \exp\left(-\frac{w^2}{w_0^2}\right) dw = \frac{2}{\sqrt{\pi}} w_0. \tag{1.19}$$

Wartość średnią z kwadratów prędkości, tj. moment rzędu drugiego lub nadzieję matematyczną kwadratów prędkości, wyznacza nam całka:

$$\tilde{w}^2 = E(W^2) = \frac{1}{N}\int_{w=0}^{w=\infty} w^2\, dN = \int_0^\infty w^2\, h(w)\, dw =$$

$$= \int_0^\infty \frac{4w^4}{\sqrt{\pi}\, w_0^3} \exp\left(-\frac{w^2}{w_0^2}\right) = \frac{3}{2} w_0^2, \tag{1.20}$$

stąd:

$$\tilde{w} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, w_0. \tag{1.21}$$

Równanie (1.20) pozwala przy pomocy najbardziej prawdopodobnej prędkości w_0 wyznaczyć średnią energię kinetyczną drobin gazowych,

[1]) Przez porównanie objętości warstwy kulistej o grubości Δw z objętością pasa wyciętego w tej warstwie przez dwie płaszczyzny odległe od siebie o Δw_x można znaleźć związek pomiędzy gęstościami prawdopodobieństwa $\varphi_1(w_x)$ oraz $h(w)$:

$$\varphi_1(w_x) = \int_{w_x}^\infty \frac{1}{2w} h(w)\, dw.$$

która dzięki teorii kinetycznej gazu doskonałego jest znaną nam funkcją temperatury, jak to już podano w równaniu (5):

$$\frac{m\tilde{w}^2}{2} = \frac{3}{4} m w_0^2 = \frac{3}{2} kT$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \tag{1.22}$$

Jak widać stąd, najbardziej prawdopodobna prędkość w_0, która określa maksimum i stromość krzywej rozkładu prędkości drobin gazowych, zależna jest od temperatury gazu i masy jego drobin.

Instytut Elektrotechniki
Zakład Elektrotechniki PAN

WYKAZ LITERATURY

1. Langmuir I. and Mott-Smith H. M.: Jr. Gen. Electr. Rev. 27; 1924.
   Cz. I — Studies of Electric Discharges of Low Pressures, p. 449.
   Cz. II — Typical Experimental Data Illustrating the Use of Plane Collectors, p. 538.
   Cz. III — Typical Experimental Data Illustrating the Use of Cylindrical Collectors, p. 616.
   Cz. IV — Data on Discharges in Mercury Vapor Obtained with Cylindrical Collectors, p. 762.
   Cz. V — The Use of Spherical Collectors and the Effects of Magnetic Fields, p. 810.
2. Schenkel M. u. Schottky W.: Die Beteiligung des metallenen Gehäuses an den Entladungsvorgängen in Grossgleichrichtern. Wiss. Veröff. Siemens-Konz. 2,252 (1922).
3. Schottky W.: Wandströme und Theorie der positiven Säule. — Physik Z. XXV, 342 (1924).
4. Langmuir I.: Phys. Rev. 28. 1926, s. 727.
5. Langmuir I.: Zeitschrift f. Phys. 46 (1927), 282.
6. Tonks L. and Langmuir I.: General Theory of the Plasma of an Arc. — Physic Rev. 34, 876 (1929).
7. Druyvesteyn M. I.: Zeitschr. f. Phys. 64, 1930, s. 781.
8. Seeliger R.: Einführung in die Physik der Gasentladung. — Leipzig 1934 (str. 89).
9. Engel A., v. und Steenbeck M.: Elektrische Gasentladungen. Ihre Physik und Technik, Berlin 1934.
10. Buchmann E. F.: Über die Messung der Konzentration der Ladungsträger in der Glimmentladung. — Zeitschrift für Technische Physik XV, 1934, s. 186.
11. Richter E. F.: Über die Konstitution der Glühkathodenentladung in der Nähe und im Innern von hohlen Glühkathoden. — Zeitschrift f. Tech. Phys. 1936, str. 306.

12. Hermann P. K.: Verfahren zur direkten, halblogarithmischen Aufzeichnung von Sonden-Kennlinien. — Zeitschrift für Technische Physik, 1936 (17 Jahr), s. 482.

13. Spiwak G. W. i Rejchrudel E. M.: Obizuczenij plazmy po mietodu wozmuszczenja jeja magnitnym polem. — Izw. A. N. SSSR OMEM 479 (1938).

14. Berkel W. P. I.: Einfluss von Aenderungen des Sondenzustandes auf Sondencharakteristiken nach Langmuir. — Physica, 5, 1938, s. 230.

15. Granowskij W., Klarfeld B., Fabrikant W.: O nieprawilnom primienienij mietoda sondow w gazowom rozriadie. — Z. T. F. 8, 968, 1938.

16. Loeb L. B.: Fundamental Processes of Electrical Discharges in Gases. — New York, 1939 (Rozdział V, str. 200 i str. 232).

17. Druyvesteyn, Penning: Electrical Discharges in Gases. — Review of Modern Physics, 1939, 12, s. 87.

18. Wasserrab Th.: Zur Beschreibung des Entionisierungsvorgängen von Gasentladungen. — Wiss. Veröff. Siemens-Konz. 19, 1940, str. 1.

19. Maxfield-Benedict: Theory of Gaseous Conduction and Electronics. Mac Graw Hill, New York, 1941.

20. Cobine J. D.: Gaseous Conductors. New York 1941 (str. 134 — Probe Theory).

21. Siena L. A.: Charaktier dwiżenija jonow w płazmie. — Z. E. T. F., 16, 734, 1946.

22. Frisz S. E. i Kagan Ju. M.: Spiektroskopiczeskoje izuczenije dwiżenija jonow w płazmie. — Izw. A. N. SSSR., seria fiziczeskaja 12, 358, (1947). — Z. E. T. F. 17, 577 (1947); 18, 519 (1948).

23. Dushmann Saul: Scientific Foudations of Vacuum Technique. New York 1949 (Molecular velocities. Maxwell-Boltzmann distributions lows, s. 9 — 14).

24. Kapcow N. A.: Elektriczeskije jawlenija w gazach i wakuumie. Moskwa — Leningrad 1950, str. 299.

25. Bojew G. P.: Tieorija wierojatnostiej. Moskwa — Leningrad 1950, (str. 108 — Formuła Maxwella).

26. Bertele H. V.: Niederdruck — Stromrichterventile. — Wien 1952. (par. II. 5).

27. Hoyaux Max: Peut-on calculer un redresseur à vapeur de mercure? Bulletin de l'Association Internationale Congrès des Chemins de Fer. Septembre-Octobre 1952.

28. Hoyaux Max: Théorie de la chute de tension dans l'arc des redresseurs à vapeur de mercure. — Revue Générale de l'Electricité, Décembre 1954.

29. Fisz Marek: Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN, Warszawa 1954 (Rozkład prędkości Maxwella, str. 131 i 191).

30. Yussuf S. E., Prescott J. C.: The A. C. Impendance of Plasma Discharges in Mercury Vapeur. — The Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, t. 102, cz. C, Nr 1, 1955, str. 13.

31. Frisz S., Timoriewa A.: Kurs fizyki, tom I — Fizyka cząsteczkowa. Warszawa 1955 (Prawo Maxwella rozkładu prędkości, str. 187).

Я. ГРЫГОЛАЙТЫС

ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗОНДА ЛЭНГМЮРА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПЛАЗМЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАЗРЯДА

Резюме

Статья содержит краткое изложение теории электрического зонда Лэнгмюра и критический анализ предпосылок, на которых базируется эта теория. В статье приводятся примеры расчета параметров плазмы, составленные на основании экспериментальных исследований, проведенных с плоским и цилиндрическим зондом в разреженном ртутном паре. Эти исследования производились в Отделе Электротехники Польской Академии Наук.

Теория зонда была впервые опубликована И. Лэнгмюром и Г. Мотт-Смисом в 1924 году.

Электрический зонд Лэнгмюра позволяет определить температуру и концентрацию электронов и йонов, а также потенциал плазмы. Благодаря этому можно произвести количественный анализ явлений, которые рассматривались в электротехнической литературе весьма общим образом.

Вокруг зонда заряженного по отношении к окружающей его плазме создаётся слой пространственного заряда.

На основании характеристики зонда, т. е. зависимости электрического тока приходящего к зонду от его потенциала, можно рассчитать выше указанные параметры электрического разряда.

Теория зонда базируется на предположении, что распределение скорости элементарных электрических частиц происходит согласно максвелловскому распределению скоростей молекул идеального газа.

Мимо того, что метод определения характеристики зонда является сравнительно простым, определение параметров плазмы сопровождается обычно крупными ошибками и влияние многих второстепенных факторов может очень часто привести к значительному искажению результатов работы.

Во время описанных в статье экспериментов с электрической дугой в разреженном ртутном паре были получены вероятные результаты измерения температуры электронов и потенциала плазмы. Но нет уверенности в целесообразности применения этого метода к определению температуры йонов.

Метод электрического зонда Лэнгмюра получает в последнее время практическое применение в технике в процессе исследования явлений в ртутных вентилях и газотронах.

J. GRYGOŁAJTYS

APPLICATION OF LANGMUIR'S ELECTRICAL PROBE TO DETERMINATION OF PLASMA PARAMETERS IN ELECTRICAL DISCHARGE

Summary

An outline of Langmuir's electrical probe theory is presented in this paper. Its fundamental assumptions are discussed. Some examples are given for calculation of plasma parameters on the basis of experiments, which have been carried

out with a plane and cylindrical probe in the low-pressure mercury vapour. The tests have been made in the Electrotechnical Department of the Polish Academy of Sciences.

The probe theory was first published by I. Langmuir and H. Mott-Shmith in 1924.

The electron and positive-ion temperature can be determined by means of an electrical probe, as well as the plasma potential. Thus, the phenomena, which are examined in electrotechnics in a general way only, can be determined quantitatively.

Around a probe, which is electrically charged in respect to the surrounding plasma, a space-charge sheath will arise. On the basis of the probe characteristic, i. e. the relation between the probe current and the probe potential, the above mentioned parameters of electrical discharge may be calculated.

The probe theory is based on the fundamental assumption that the velocity distribution of electrons is in agreement with the maxwellian velocity distribution of inert gas neutral molecules. Moreover, the idea of the electron and positive-ion temperature is introduced provided that these particles agree with the inert gas temperature basic law.

Although the manner of probe characteristic determination is rather simple, the calculation of plasma parameters involves usually considerable errors and the influence of many secondary factors may entirely deform the final results.

During the above mentioned experiments on the electric arc in low-pressure mercury vapour, probable measurement results have been obtained as regards electron temperature and plasma potential. The application of this method to determination of positive-ion temperature involves considerable restrictions.

Langmuir's electrical probe method finds recently practical application in technics at the research work on the phenomena occuring in mercury arc valves and gas-filled tubes.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE—TOM III—ZESZYT 1—1957

534.64:621.395.62

JANUSZ KACPROWSKI

Analiza możliwości odtworzenia akustycznej oporności zespolonej ucha naturalnego za pomocą układu zastępczego

Rękopis dostarczono 14.5.1956

Celem pracy jest odtworzenie za pomocą prostego układu zastępczego akustycznej oporności zespolonej ucha ludzkiego, stanowiącego naturalną oporność obciążenia słuchawki. Zagadnienie to, ważne z punktu widzenia aktualnych potrzeb telefonometrii, nie zostało dotychczas rozwiązane w skali międzynarodowej i stanowi przedmiot prac badawczych prowadzonych równolegle w wielu laboratoriach zagranicznych.

Zrywając ze stosowaną przez większość autorów eksperymentalną metodą kolejnych prób i przybliżeń obliczono na drodze analitycznej parametry akustyczne R_a, M_a i C_a rezonatora o stałych skupionych, odtwarzającego oporność zespoloną przeciętnego ucha ludzkiego w zakresie do około 1000 Hz. Kontynuując rozważania teoretyczne zapoczątkowane przez K. Brauna i I. Barducciego wykazano, że zastosowanie odpowiednio zaprojektowanych otworów wylotowych we wnęce układu zastępczego jest konieczne — wbrew występującym obecnie tendencjom — do prawidłowego odtworzenia właściwości rezonansowych ucha naturalnego. Wyprowadzona zależność: $Q_n = Q_{n=1}\sqrt[4]{n} \approx Q_{n=1}\sqrt{f_0}$, określająca związek między współczynnikiem dobroci Q_n rezonatora a ilością n otworów czynnych, ma charakter ogólny i może być wykorzystana przy projektowaniu wszelkich rezonatorów akustycznych. W zakresie górnych częstotliwości pasma akustycznego (1000 Hz ÷ 10000 Hz) uproszczony anatomiczny model ucha naturalnego przedstawiono w postaci układu czwórników akustycznych o stałych rozłożonych. Określono proporcje i wymiary geometryczne falowodów akustycznych tworzących układ zastępczy, który zachowuje się w całym rozpatrywanym zakresie częstotliwości jak układ ucha naturalnego.

Wykazano, że jednoczesne spełnienie warunków w zakresie małych, średnich i dużych częstotliwości akustycznych w postaci stworzenia jednego układu zastępczego, stanowiącego tym samym prototyp wzorca sztucznego ucha, jest całkowicie realne i daje zadowalające wyniki.

1. ZAKRES ZAGADNIENIA

1.1. Wstęp

Słuchawka telefoniczna jest najdawniejszym i najbardziej rozpowszechnionym na świecie przetwornikiem elektroakustycznym. Wynaleziona w roku 1875 przez Bella, stosowana jest od przeszło pół wieku w urządzeniach telekomunikacyjnych, stanowiąc w przeważającej większości przypadków zakończenie każdego zestawu łączy telefonicznych i radiotelefonicznych.

Jest rzeczą charakterystyczną, że postęp techniczny w dziedzinie słuchawek, objawiający się poprawą ich właściwości elektroakustycznych oraz rozszerzeniem zakresu ich zastosowań, wyprzedził znacznie rozwój techniki pomiarowej, mającej na celu ścisłą — i to nie tylko jakościową, ale i ilościową — ocenę ich właściwości. Dopiero około roku 1930 znaleźć można w telekomunikacyjnej literaturze światowej pierwsze publikacje, będące wyrazem tendencji do ustalenia ścisłych kryteriów oceny jakości słuchawek oraz obiektywnych metod ich badania.

Przedmiotem niniejszej pracy jest zagadnienie obiektywizacji metod badania słuchawek różnych typów pod kątem zastosowań w przemyśle telekomunikacyjnym, przede wszystkim do celów kontroli produkcji i wymiany doświadczeń między poszczególnymi laboratoriami fabrycznymi i instytutami technicznymi.

1.2. Kryteria służące do oceny jakości słuchawek

1.2.1. Kryteria subiektywne

Słuchawki stosowane w telekomunikacji można podzielić, w zależności od ich przeznaczenia, na dwie zasadnicze grupy: do pierwszej z nich należą słuchawki pracujące w służbie informacyjnej (telefonia, radiokomunikacja), do drugiej — słuchawki odsłuchowe, których zadaniem jest umożliwienie kontroli jakości odtwarzania audycji słownych lub muzycznych podczas procesów przesyłania, zapisywania i odczytywania przebiegów dźwiękowych przeznaczonych do wywołania wrażeń artystycznych[1]). Większość słuchawek spotykanych w praktyce należy do grupy pierwszej; ponieważ zasadniczym celem, jakiemu

[1]) Pominięto tu ważną w praktyce, lecz raczej nieliczną grupę słuchawek pracujących w aparatach pomocniczych dla osób o osłabionym słuchu; ze względu na specjalny zakres zastosowań oraz specyficzne warunki techniczne, jakie słuchawki te muszą spełniać, wymagają one oddzielnego omówienia i nie wchodzą w zakres niniejszej pracy.

służą te słuchawki, jest przetwarzanie sygnałów elektrycznych na sygnały akustyczne zawierające informacje słowne, przeto ostatecznym kryterium jakości tego typu słuchawek jest zrozumiałość przesyłanej mowy, wyrażona w sposób ilościowy za pomocą wyrazistości procentowej (głosek, logatomów, sylab) i mierzona metodą subiektywną. Innym subiektywnym kryterium jakości słuchawki jako telefonicznego układu odbiorczego jest stosowana powszechnie w telekomunikacji tłumienność odniesienia, wyrażona tłumiennością tłumika dodatkowego (w dB lub w N), który należy wtrącić w ściśle określony transmisyjny układ odniesienia lub który należy usunąć z tego układu, aby otrzymać jednakowe wrażenie głośności w dwóch przypadkach: przed dokonaniem zmiany w układzie odniesienia oraz po zastąpieniu słuchawki układu odniesienia słuchawką badaną. Jednak wymienione wyżej ilościowe kryteria jakości transmisji telefonicznych, podobnie jak i wprowadzone ostatnio przez CCIF pojęcie tłumienności równoważnej wyrazistości (A. E. N.) [10], stosowane są raczej przy ocenie całych układów transmisyjnych nadawczo-odbiorczych (aparaty telefoniczne, łącza telefoniczne), natomiast stają się znacznie mniej użyteczne, a niekiedy niewystarczające przy ocenie jakości poszczególnego elementu układu, jakim jest słuchawka. Z tego względu przy ocenie słuchawek stosowanych do celów informacyjnych badać należy raczej czynniki obiektywne, które wpływają na zrozumiałość, niż samą zrozumiałość.

To samo w większym jeszcze stopniu dotyczy słuchawek odsłuchowych; zadaniem ich jest kontrola jakości audycji, a więc poinformowanie ich użytkowania nie tylko o tym, co słyszy lub będzie słyszał słuchacz oddalony od oryginalnego źródła dźwięku w czasie lub przestrzeni, ale i o tym, jak odbiera on (lub będzie odbierał) przekazywaną mu audycję. Dlatego też przy ocenie jakości słuchawek odsłuchowych trzeba badać czynniki obiektywne, które wpływają na wierność odtwarzania.

1.2.2. Kryteria obiektywne

Czynnikami obiektywnymi, które w sposób dostatecznie ścisły pozwalają ocenić jakość słuchawki, są:

a) charakterystyka skuteczności w funkcji częstotliwości,
b) skuteczność bezwzględna,
c) charakterystyka oporności zespolonej w funkcji częstotliwości,
d) zniekształcenie nieliniowe,
e) tłumienie zakłóceń zewnętrznych.

Jest rzeczą oczywistą, że rola poszczególnych czynników przy ocenie jakości badanej słuchawki nie jest jednakowa i zależy od typu

i przeznaczenia badanej słuchawki. Słuchawka telefoniczna na przykład powinna mieć dużą średnią skuteczność bezwzględną przy dopuszczalnych znacznych zniekształceniach liniowych i nieliniowych, które stosunkowo mało wpływają na zrozumiałość przesyłanej mowy; natomiast słuchawki odsłuchowe, stosowane do celów kontrolnych, powinny mieć możliwie płaską charakterystykę skuteczności w całym szerokim pasmie częstotliwości oraz minimalne zniekształcenia nieliniowe, podczas gdy skuteczność bezwzględna może być stosunkowo mała ze względu na stosowane w tym przypadku urządzenia wzmacniające.

Podobnie tłumienie zakłóceń zewnętrznych, uwarunkowane przede wszystkim konstrukcją muszli słuchawki i stopniem jej sprzężenia akustycznego z małżowiną ucha, jest czynnikiem, który nabiera specjalnego znaczenia jedynie w szczególnych przypadkach, kiedy w pomieszczeniu odbiorczym występuje wysoki poziom hałasów (maszynownie, kotłownie, kabiny samolotów); przeważnie jednak czynnik ten jest drugorzędny lub nawet trzeciorzędny.

1.3. Akustyczna oporność obciążenia słuchawki

1.3.1. Zastępczy układ elektryczny słuchawki telefonicznej

Zgodnie z ogólnymi zasadami tworzenia elektrycznych układów zastępczych przetworników elektroakustycznych, słuchawkę magnetyczną można przedstawić w postaci układu elektrycznego podanego na rys. 1.

Wielkością fizyczną, która stanowi ilościowe kryterium przy ocenie działania słuchawki, jest ciśnienie akustyczne p, wytwarzane w określonym punkcie kanału ucha zewnętrznego; zgodnie z regułą tworzenia układów zastępczych miarą ciśnienia akustycznego p jest prąd i_0 płynący przez oporność obciążenia, wg wzoru [1]:

$$p = i_0 \frac{\alpha}{n} 10^{7/2} [\mathrm{dn\,cm^{-2}}], \tag{1.1}$$

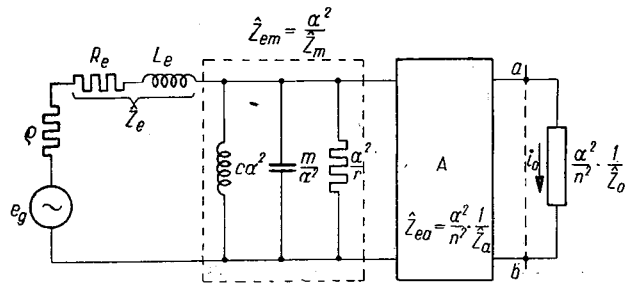
w którym prąd i_0 wyrażony jest w [A], n — w [$\mathrm{cm^2}$], a α — w [Gs cm].

[1]) Wyrażając ciśnienie akustyczne p w kanale ucha zewnętrznego jako iloczyn prędkości objętościowej $\dot{X}$ i akustycznej oporności obciążenia $\hat{Z}_0$, a następnie przechodząc kolejno od wielkości akustycznych do mechanicznych i elektrycznych przez wprowadzenie współczynników sprzężenia mechano-akustycznego n i elektromechanicznego α otrzymujemy

$$p = \dot{X}\hat{Z}_0 = \dot{x}\, n \frac{\hat{Z}_{m0}}{n^2} = \frac{\alpha^2}{n} \cdot \frac{\dot{x}}{\hat{Z}_{em0}} = \frac{u_0}{\hat{Z}_{em0}} \cdot \frac{\alpha}{n} 10^{7/2} = i_0 \frac{\alpha}{n} 10^{7/2},$$

gdzie $\hat{Z}_{m0}$ i $\hat{Z}_{em0}$ oznaczają akustyczną oporność obciążenia $\hat{Z}_0[\mathrm{gs^{-1}\,cm^{-4}}]$, przeniesioną odpowiednio na stronę mechaniczną ($\hat{Z}_{m0}[\mathrm{gs^{-1}}]$) i elektryczną ($\hat{Z}_{em0}[\Omega]$) układu zastępczego.

Przekształcając układ z rys. 1 zgodnie z twierdzeniem Thevenina, otrzymujemy układ uproszczony (rys. 2), z którego bezpośrednio wynika, że skuteczność działania słuchawki wyrażona w układzie zastępczym przez prąd i_0 (lub proporcjonalne do niego ciśnienie akustyczne p w kanale ucha zewnętrznego) zależy od oporności obciążenia akustycznego



Rys. 1. Zastępczy układ elektryczny słuchawki magnetycznej

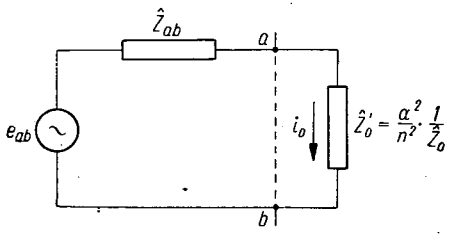
e_g — siła elektromotoryczna źródła,
ϱ — oporność wewnętrzna źródła,
R_e, L_e — elektryczna oporność rzeczywista i indukcyjność słuchawki przy unieruchomionym układzie drgającym, jako składowe oporności elektrycznej $\hat{Z}_e$,
r, m, c — mechaniczna oporność strat, masa i podatność układu drgającego, określająca jego oporność mechaniczną $\hat{Z}_m$,
α — współczynnik sprzężenia elektromechanicznego (w przypadku słuchawki elektromagnetycznej: $\alpha = \frac{Z \cdot \Phi_0}{\delta} 10^{-\frac{9}{2}}$, w przypadku słuchawki dynamicznej: $\alpha = B \cdot l \cdot 10^{-\frac{9}{2}}$, patrz [37] str. 274 i 278),
A — czwórnik symbolizujący akustyczną oporność wewnętrzną słuchawki $\hat{Z}_a$ przeniesioną na stronę elektryczną, którego konfiguracja zależy od mechanicznej konstrukcji słuchawki,
$\hat{Z}_0$ — akustyczna oporność obciążenia słuchawki, czyli akustyczna oporność wejściowa ucha ludzkiego,
n — współczynnik sprzężenia mechano-akustycznego, równy czynnej powierzchni membrany.

słuchawki opornością wejściową ucha. Z punktu widzenia twierdzenia Thevenina słuchawkę, jako nadajnik akustyczny, można by w zasadzie scharakteryzować przez:

a) ciśnienie akustyczne przy biegu luzem, tj. ciśnienie wytwarzane przez słuchawkę przy jej obciążeniu opornością akustyczną nieskończenie dużą,

b) zastępczą oporność źródła odniesioną do wylotu muszli słuchawki; ujęcie takie jednak byłoby czysto teoretyczne i nie zadowalałoby konstruktorów i użytkowników słuchawek, którzy chcą mieć dane pozwalające na porównanie efektów akustycznych otrzymanych przy użyciu słuchawki badanej z efektami akustycznymi przy słuchaniu bezpośred-

nim. Z tego względu badanie skuteczności słuchawek należy bezwzględnie przeprowadzać w warunkach jej normalnego obciążenia akustycznego opornością wejściową przeciętnego ucha ludzkiego. Jedynym sposobem, który by uniezależniał skuteczność słuchawki od jej oporu obciążenia, byłoby zasilanie jej (w układzie zastępczym na rys. 2) ze źródła prądowego o nieskończenie wielkiej oporności wewnętrznej ($|Z_{ab}| \gg |Z'_0|$) przez wprowadzenie dużych oporności akustycznych między membranę a ucho; sposób ten jednak nie jest w praktyce stosowany, gdyż zmniejsza skuteczność bezwzględną słuchawki.



Rys. 2. Uproszczony układ zastępczy słuchawki

1.3.2. Wpływ obciążenia słuchawki na jej właściwości elektroakustyczne

Poprzednio wykazano, że ciśnienie akustyczne wytwarzane przez membranę słuchawki zależy od jej obciążenia akustycznego; słuchawka jest nadajnikiem akustycznym, który w przeciwieństwie do głośnika promieniującego energię akustyczną w przestrzeń otwartą jest sprzężony z właściwą dla niego opornością obciążenia, która zależy od następujących czynników:

a) objętości przestrzeni powietrznej w kanale ucha zewnętrznego,

b) upływności akustycznej między muszlą słuchawki a małżowiną ucha,

c) konfiguracji geometrycznej (kształtu i wymiarów) wnęki ucha oraz związanych z tym właściwości rezonansowych wnęki,

d) oddziaływania ścianek kanału ucha i błony bębenka.

Ogólnie biorąc, obciążenie słuchawki akustyczną opornością wejściową ucha powoduje:

a) zwiększenie tłumienia drgań membrany,

b) zwiększenie częstotliwości rezonansowej membrany,

c) opadanie charakterystyki skuteczności przy małych częstotliwościach wskutek niedoskonałego sprzężenia muszli z uchem,

d) występowanie dodatkowych nierównomierności na charakterystyce skuteczności słuchawki wskutek rezonansowych właściwości wnęki ucha.

W literaturze fachowej spotkać można dane liczbowe dotyczące wpływu obciążenia słuchawki na jej właściwości elektroakustyczne; dane te są wynikiem badań statystycznych przeprowadzanych przy użyciu słuchawki telefonicznej określonego typu, obciążanej kolejno opornością

akustyczną różnych uszu oraz promieniującej energię w przestrzeń otwartą. Kilka najbardziej typowych wyników pomiarów zestawiono w tablicy 1 i 2.

Tablica 1

Częstotliwości rezonansowe i współczynniki tłumienia drgań membrany słuchawki promieniującej energię w przestrzeń otwartą i obciążonej uchem ludzkim [16]

Obciążenie	Nr słuchawki badanej	Częstotliwość rezonansowa Hz	Współczynnik tłumienia (wartość względna)
Przestrzeń otwarta	nr 1	854	122
Ucho ludzkie (wartość średnia)		918	200
Przestrzeń otwarta	nr 2	808	122
Ucho ludzkie (wartość średnia)		933	375

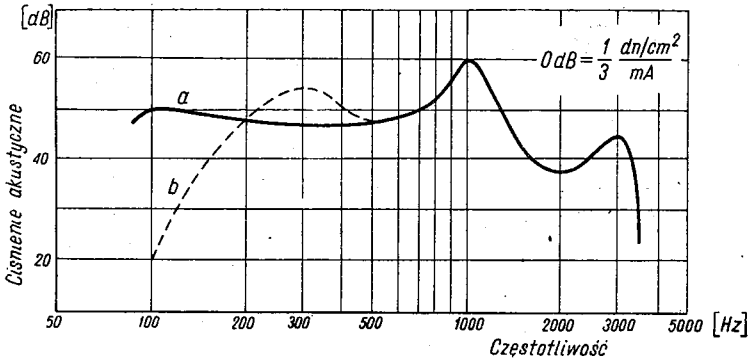
Tablica 2

Wpływ obciążenia słuchawki dynamicznej umieszczanej w różnych muszlach na jej częstotliwości rezonansowe i oporności rzeczywiste przy rezonansie [9]

Obciążenie opornością wejściową ucha osobnika	Typ muszli słuchawki					
	SFERT		W 28		Typ amerykański	
	f_0 (Hz)	r_0 (Ω)	f_0 (Hz)	r_0 (Ω)	f_0 (Hz)	r_0 (Ω)
nr 1	1790	196	1700	207	1598	195
nr 2	1789	192	1652	200	1601	201
nr 3	1785	189	1565	215	1587	201
nr 4	1795	195	1638	203	1591	198
nr 5 (kobieta)	1815	200	1615	222	1618	200

Na rys. 3 przedstawiono typowy wpływ szczelności sprzężenia muszli słuchawki badanej z uchem na charakterystykę skuteczności. Jak to łatwo przewidzieć z góry, nieszczelne sprzężenie słuchawki z uchem

objawia się gwałtownym opadaniem charakterystyki skuteczności w zakresie małych częstotliwości wskutek bocznikującego wpływu upływności akustycznej.



Rys. 3. Wpływ szczelności sprzężenia słuchawki z uchem na jej charakterystykę skuteczności

Krzywa a — sprzężenie szczelne, krzywa b — sprzężenie nieszczelne

Przeprowadzone we własnym zakresie systematyczne badania wpływu akustycznego obciążenia słuchawki na jej częstotliwość rezonansową oraz elektryczną oporność przy rezonansie dały wyniki zgodne z przewidywaniami. Badaniom poddano trzy typy słuchawek telefonicznych produkcji krajowej (P. Z. T., C. Z. P. T. i Z. W. A. T., model CB-49) oraz słuchawkę produkcji szwedzkiej (L. M. Ericsson, model RLD 5104), obciążając je kolejno opornością wejściową uszu czterech osób przeprowadzających pomiar, a następnie — badając w stanie swobodnym. Otrzymano wyniki zestawione w tablicach 3, 4, 5 i 6.

W czasie badań stwierdzono także wyraźny wpływ indywidualnych właściwości ucha osobnika przeprowadzającego pomiar na współczynnik tłumienia drgań membrany przy rezonansie; zaobserwowane różnice dochodzą do kilkunastu procent.

Podane przykłady wpływu obciążenia słuchawki na jej właściwości elektroakustyczne są wprawdzie fragmentaryczne i mają raczej charakter jakościowy, a nie ilościowy, niemniej jednak pozwalają na wyciągnięcie szeregu ważnych wniosków praktycznych dotyczących badania słuchawek. Wnioski te ująć można w następujących punktach:

a) Obciążenie słuchawki opornością wejściową ucha ludzkiego zwiększa na ogół częstotliwość rezonansową słuchawki i tłumienie drgań membrany, zmienia wartość składowej rzeczywistej oporności elektrycznej przy rezonansie oraz wpływa na kształt charakterystyki skuteczności.

b) Zmiany parametrów elektroakustycznych słuchawki obciążonej uchem ludzkim zależą od indywidualnych właściwości fizycznych ucha,

Tablica 3

Wpływ obciążenia słuchawki elektromagnetycznej na jej właściwości rezonansowe w przypadku słuchawki dawnej produkcji P.Z.T.

Obciążenie	Częstotliwość rezonansowa	Oporność przy rezonansie		
	f_0 (Hz)	Z_0 (Ω)	φ_0 (stopnie)	R_0 (Ω)
Ucho nr 1	1200	620	56,0	346
Ucho nr 2	1220	635	54,5	368
Ucho nr 3	1150	590	56,0	329
Ucho nr 4	1188	615	53,5	365
Wartości średnie	1189	615	55,0	353
Przestrzeń owarta	828	480	52,5	292

Tablica 4

Wpływ obciążenia słuchawki elektromganetycznej na jej właściwości rezonansowe w przypadku słuchawki C.Z.P.T.

Obciążenie	Częstotliwość rezonansowa	Oporność przy rezonansie		
	f_0 (Hz)	Z_0 (Ω)	φ_0 (stopnie)	R_0 (Ω)
Ucho nr 1	950	360	47,0	245
Ucho nr 2	1020	370	47,0	252
Ucho nr 3	995	364	46,0	252
Ucho nr 4	1020	370	45,0	262
Wartości średnie	996	366	46,2	253
Przestrzeń otwarta	735	364	39,5	280

Tablica 5

Wpływ obciążenia słuchawki elektromagnetycznej na jej właściwości rezonansowe w przypadku słuchawki Z.W.A.T. model CB — 49

Obciążenie	Częstotliwość rezonansowa	Oporność przy rezonansie		
	f_0 (Hz)	Z_0 (Ω)	φ_0 (stopnie)	R_0 (Ω)
Ucho nr 1	850	504	48,5	334
Ucho nr 2	950	540	47,0	368
Ucho nr 3	910	480	47,5	324
Ucho nr 4	900	481	49,0	316
Wartości średnie	902	501	48,0	335
Przestrzeń otwarta	490	412	37,5	327

Tablica 6

Wpływ obciążenia słuchawki elektromagnetycznej na jej właściwości rezonansowe w przypadku słuchawki L. M. Ericsson

Obciążenie	Częstotliwość rezonansowa	Oporność przy rezonansie		
	f_0 (Hz)	Z_0 (Ω)	φ_0 (stopnie)	R_0 (Ω)
Ucho nr 1	1029	494	50,5	314
Ucho nr 2	1036	480	49,0	315
Ucho nr 3	1010	493	49,5	320
Ucho nr 4	1024	492	48,0	328
Wartości średnie	1023	498	49,0	320
Przestrzeń otwarta	560	350	44,0	252

co jest spowodowane różnicami w strukturze anatomicznej kanału ucha oraz błony bębenka u poszczególnych ludzi.

c) Omówione wyżej wpływy obciążenia słuchawki na jej właściwości elektroakustyczne występują w różnym stopniu przy różnych konstrukcjach słuchawek, co potwierdza słuszność rozważań teoretycznych przeprowadzonych w oparciu o schemat zastępczy (rozdz. 1.3.1).

1.3.3. Warunki akustyczne badania słuchawek

Poprzednio wykazano, że właściwą ocenę obiektywną słuchawki, jeżeli przyjąć za kryterium ilościowe ciśnienie akustyczne wytwarzane w kanale ucha zewnętrznego, przeprowadzić można jedynie przy obciążeniu słuchawki właściwą dla niej opornością akustyczną, tj. taką opornością, jaką przedstawia sobą ucho ludzkie. Ponadto biorąc pod uwagę rozbieżności indywidualne między właściwościami uszu poszczególnych ludzi i spowodowane tym zmiany właściwości słuchawki (patrz np. tablice 2÷6) należałoby nie ograniczać się do pomiarów przypadkowych, ale za wynik przyjmować średnią z wyników uzyskanych przy obciążeniu słuchawki różnymi uszami; idąc tą drogą dochodzimy do pojęcia oporności akustycznej p r z e c i ę t n e g o ucha ludzkiego, które stanowi nominalną oporność obciążenia słuchawki przy jej badaniu.

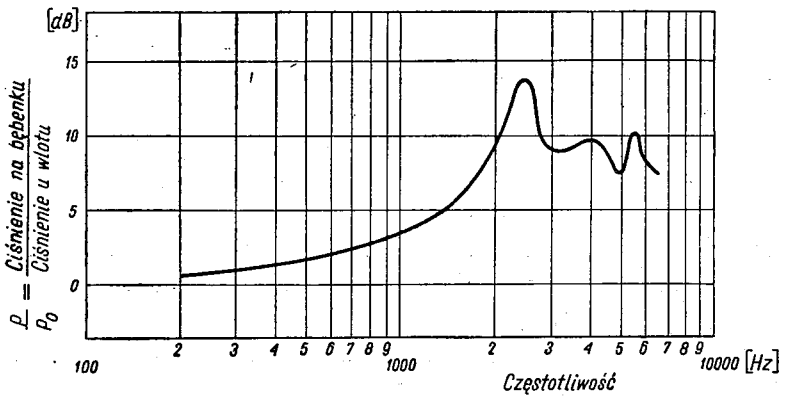
Z tego względu najprostszym rozwiązaniem przy badaniu właściwości słuchawki jest, jak się wydaje, stosowanie ucha ludzkiego jako oporności jej obciążenia.

W obecnym stanie rozwoju miernictwa elektroakustycznego znane są trzy metody badania słuchawek w warunkach ich użytkowania. Dwie z nich są metodami o b i e k t y w n y m i, gdyż ucho ludzkie pełni jedynie bierną rolę oporności obciążenia słuchawki, a pomiar ciśnienia akustycznego w odpowiednim miejscu kanału usznego odbywa się za pomocą przyrządu obiektywnego, jakim jest pomiarowy mikrofon-sonda; trzecia metoda jest metodą s u b i e k t y w n ą, wykorzystującą oprócz biernych właściwości ucha jako akustycznej oporności obciążenia również fizjologiczne i psychologiczne właściwości słuchu przy ocenie wielkości ciśnienia akustycznego wytwarzanego przez słuchawkę w kanale ucha.

M e t o d a p i e r w s z a polega na wprowadzeniu do kanału ucha zewnętrznego, w bezpośrednie sąsiedztwo błony bębenka, giętkiej rurki o średnicy ok. 0,6 mm, stanowiącej zakończenie pomiarowego mikrofonu-sondy. Znając charakterystykę skuteczności mikrofonu pomiarowego oraz charakterystykę tłumienności rurki sondującej, można w ten sposób pomierzyć bezpośrednio ciśnienie akustyczne wytwarzane przez słuchawkę na błonie bębenka w określonych warunkach zasilania elek-

trycznego. Metoda ta, jakkolwiek dokładna i prosta z teoretycznego punktu widzenia, przedstawia ogromne trudności natury wykonawczej; wymaga ona precyzyjnej aparatury pomiarowej i dużego doświadczenia ekipy pomiarowej, gdyż w przeciwnym przypadku mogą ulec uszkodzeniu organy ucha środkowego eksperymentatora.

Metoda druga jest pewnym uproszczeniem metody poprzedniej i ma na celu uniknięcie niebezpieczeństw związanych ze zbliżaniem rurki sondującej do błony bębenka. W tym przypadku koniec rurki sondującej wprowadza się poprzez muszlę słuchawki badanej do wlotu kanału usznego, a ciśnienie na błonie bębenka oblicza się na podstawie konwencjonalnych krzywych korekcyjnych przedstawiających w funkcji częstotliwości wzrost ciśnienia akustycznego na błonie bębenka w stosunku do ciśnienia panującego u wlotu kanału (rys. 4).



Rys. 4. Typowy przykład charakterystyki korekcji rozkładu ciśnienia w kanale ucha

Metoda trzecia jest metodą subiektywną; pomiar odbywa się w trzech etapach, przedstawionych schematycznie na rys. 5.

W etapie A dokonuje się pomiaru ciśnienia akustycznego p_0 w określonym punkcie pola akustycznego, przed głośnikiem G, zasilanym z generatora GA o napięciu U_g przy częstotliwości pomiarowej f.

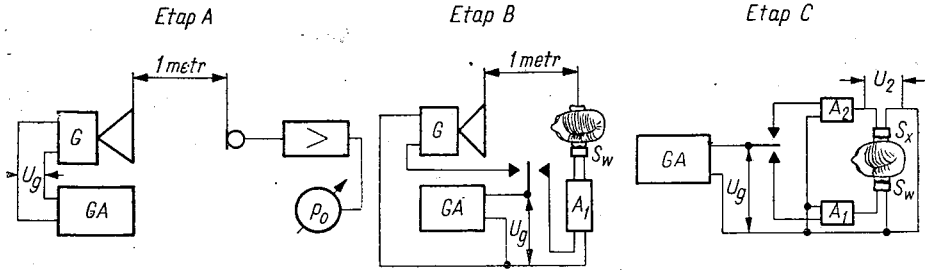
W etapie B słuchacz umieszczony w tym samym punkcie pola i posługujący się słuchawką wzorcową S_w tak reguluje tłumienność A_1 tłumika włączonego między generator a słuchawkę, aby otrzymać to samo wrażenie głośności, co przy słuchaniu bezpośrednim.

W etapie C słuchacz posługując się kolejno słuchawką wzorcową S_w i badaną S_x tak reguluje tłumienność A_2 tłumika włączonego w obwód słuchawki badanej, aby otrzymać wrażenie jednakowej głośności przy obu słuchawkach.

Skuteczność bezwzględna słuchawki badanej przy częstotliwości pomiarowej f wyraża się wówczas wzorem

$$S = \frac{p_0}{U_2} = \frac{p_0}{U_g} 10^{A_2/20} \left[\frac{\mathrm{dn/cm^2}}{\mathrm{V}}\right], \tag{1.2}$$

gdzie A_2 jest tłumiennością tłumika w dB.



Rys. 5. Schemat postępowania przy pomiarze skuteczności słuchawki metodą subiektywną

Skuteczność bezwzględna słuchawki $S_x = \frac{P_0}{U_2} = \frac{P_0}{U_g} 10^{\frac{A_2}{20}} \left[\frac{\mathrm{dn/cm^2}}{\mathrm{V}}\right]$

Jest rzeczą oczywistą, że wymienione metody badania słuchawek, jakkolwiek odtwarzające w sposób dokładny rzeczywiste warunki ich pracy, mogą być stosowane jedynie w nielicznych, specjalnych przypadkach ze względu na ogromne trudności wykonawcze oraz konieczność wielokrotnego powtarzania pomiarów w celu wyeliminowania błędów przypadkowych i uzyskania wyników średnich. Przy pomiarach laboratoryjnych, mających na celu badanie właściwości pewnych typów słuchawek, a przede wszystkim przy pomiarach masowych podczas kontroli produkcji określonego typu słuchawki w warunkach technicznych, metody te stają się całkowicie nierealne i muszą być zastąpione metodami prostszymi, które w sposób szybki i jednoznaczny określałyby elektroakustyczne właściwości słuchawki badanej. Jedyną drogą jest tu skonstruowanie znormalizowanego układu akustycznego, który przedstawiałby sobą nominalną oporność obciążenia słuchawki, odpowiadającą możliwie dokładnie akustycznej oporności wejściowej przeciętnego ucha ludzkiego. Układ taki zwany sztucznym uchem jest podstawowym urządzeniem stosowanym przy obiektywnych badaniach słuchawek; jakkolwiek w chwili obecnej układ sztucznego ucha nie został jeszcze znormalizowany w skali międzynarodowej, to jednak w poszczególnych krajach w instytutach badawczych prowadzone są równolegle intensywne prace, mające na celu wybór układu najwła-

ściwszego. W pewnych przypadkach można już mówić o wzorcach fabrycznych lub instytutowych, a nawet o wzorcach krajowych, stosowanych oficjalnie na terenie danej instytucji lub kraju.

Należy podkreślić, że jedynym racjonalnym z technicznego punktu widzenia rozwiązaniem jest wprowadzenie uniwersalnego międzynarodowego wzorca sztucznego ucha, gdyż tylko w ten sposób możliwa będzie współpraca i wymiana doświadczeń między ośrodkami badawczymi różnych krajów. Brak normalizacji sztucznego ucha prowadzić może do szeregu nieporozumień i błędnej interpretacji wyników badań przeprowadzanych w różnych warunkach.

Do czasu wprowadzenia wzorca międzynarodowego zagadnienie normalizacji wzorca sztucznego ucha jest zagadnieniem szczególnie ważnym w warunkach krajowych. W Polsce zagadnienie to nie zostało dotychczas opracowane; w Państwowym Instytucie Telekomunikacyjnym wykonano w roku 1950 model sztucznego ucha, który jednak nie został oficjalnie zalegalizowany i stanowił jedynie urządzenie do użytku wewnętrznego. Poszczególne resorty i instytucje (CBKT, Zakłady Wytwórcze Sprzętu Telekomunikacyjnego itp.) stosują wprawdzie własne prowizoryczne konstrukcje sztucznych uszu, jednak nie mogą być one uznane za urządzenia zapewniające dostateczną dokładność i powtarzalność wyników pomiarów nawet w warunkach technicznych (kontrola produkcji), a tym bardziej nie pozwalają na porównywanie wyników badań przeprowadzanych w różnych instytucjach.

Z tego względu zagadnienie opracowania wzorca sztucznego ucha, stanowiące punkt wyjściowy przy obiektywizacji metod badania słuchawek, jest zagadnieniem szczególnie ważnym z punktu widzenia potrzeb przemysłu telekomunikacyjnego.

2. ZAŁOŻENIA WSTĘPNE

2.1. Wymagania ogólne stawiane sztucznemu uchu

Warunki techniczne, jakim odpowiadać powinno idealne sztuczne ucho, ująć można w następujących punktach:

a) Sztuczne ucho powinno przedstawiać sobą dla sprzężonej z nim słuchawki w całym zakresie częstotliwości pomiarowych taką samą oporność akustyczną, jak przeciętne ucho ludzkie.

b) Sztuczne ucho powinno wprowadzać w całym zakresie częstotliwości pomiarowych taką samą upływność akustyczną, jaka w normalnych warunkach istnieje między muszlą badanej słuchawki a małżowiną ucha.

c) Zastosowany w sztucznym uchu mikrofon pomiarowy powinien w całym zakresie częstotliwości dawać wskazania proporcjonalne do ciśnienia akustycznego, jakie wytwarzane byłoby w warunkach rzeczywistych na błonie bębenka.

d) Konstrukcja sztucznego ucha powinna być możliwie prosta i określona w sposób jednoznaczny przez łatwo mierzalne wielkości fizyczne.

Warunek wymieniony w punkcie d jest szczególnie ważny z eksploatacyjnego punktu widzenia, gdyż stanowi gwarancję dokładności kopiowania wzorca sztucznego ucha, a więc tym samym decyduje o powtarzalności wyników pomiarowych przeprowadzonych przy użyciu różnych egzemplarzy sztucznych uszu tego samego typu.

Praktyczna realizacja wymienionych wyżej, w pewnym sensie przeciwstawnych sobie warunków nie jest rzeczą prostą i wymaga dokładnej podbudowy teoretycznej, popartej badaniami doświadczalnymi.

2.2. Oporność akustyczna ucha ludzkiego

Znajomość akustycznej oporności ucha ludzkiego jest punktem wyjścia przy dalszych rozważaniach dotyczących projektowania układu zastępczego.

Zagadnieniu wyznaczenia charakterystyki zespolonej oporności ucha ludzkiego w funkcji częstotliwości, jakkolwiek interesującemu zarówno akustyków i elektroakustyków [35], [16], jak otolaryngologów [25] oraz w pewnym zakresie i fizyków [32], poświęcono stosunkowo niewiele publikacji w światowej literaturze fachowej. Prace fizyków szły głównie w kierunku stworzenia metody i aparatury pomiarowej, natomiast pomijały niemal całkowicie zagadnienie analizy statystycznej otrzymanych wyników, ograniczając się do pomiaru jednostkowej oporności akustycznej błony bębenka u jednego przypadkowo wybranego osobnika (rys. 6). Badania Trögera [32] mają stosunkowo małą wartość praktyczną, gdyż:

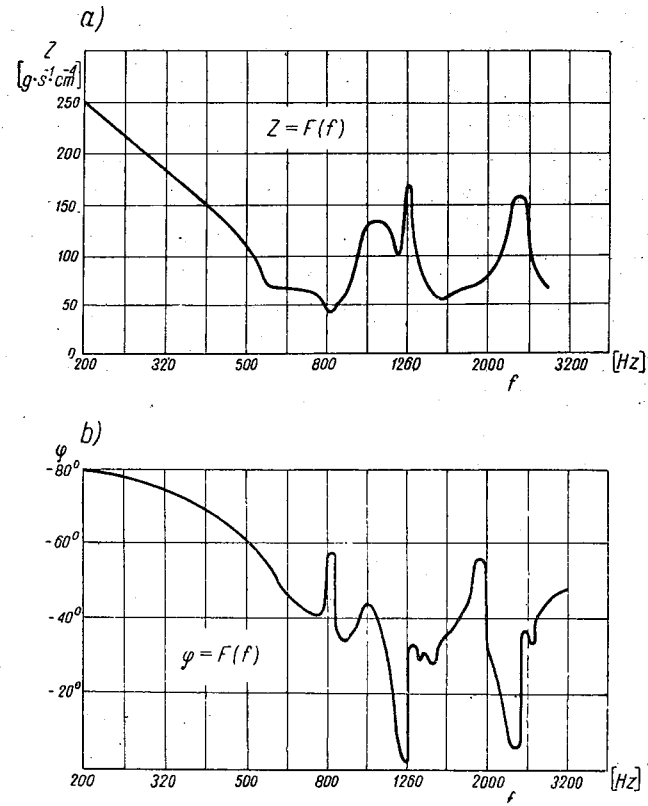
a) nie dają możności ustalenia wartości średniej i wyeliminowania różnic wywołanych błędami pomiarowymi oraz rozrzutem indywidualnym;

b) wykazują dostateczną zgodność i powtarzalność wyników pomiarów jedynie w zakresie małych i średnich częstotliwości akustycznych (do 600 Hz), a przy częstotliwościach większych stwierdzają występowanie znacznych rozrzutów indywidualnych wskutek różnic w anatomicznej budowie ucha środkowego u poszczególnych ludzi;

c) wykazują wyraźną zależność oporności błony bębenka od warunków pomiaru, przede wszystkim od otwarcia lub zamknięcia ust, stanu naprężenia mięśni szczęk itp.;

d) pomiary przeprowadzono w ograniczonym zakresie częstotliwości (do 3200 Hz), który z punktu widzenia potrzeb telekomunikacji jest niewystarczający;

e) pomiary dotyczą oporności błony bębenka, a nie oporności wejściowej kanału ucha zewnętrznego, która przy opracowywaniu sztucznego ucha jest najbardziej interesująca.



Rys. 6. Moduł (*a*) i argument (*b*) jednostkowej oporności akustycznej błony bębenka (wg Trögera)

Prace otolaryngologów (Metz [25]) mają jeszcze mniejszą wartość praktyczną przy konstrukcji sztucznego ucha, gdyż celem ich było przede wszystkim jedynie ustalenie wpływu zmian patologicznych w uchu zewnętrznym i środkowym na oporność akustyczną ucha. Cenny materiał rzeczowy znaleźć można natomiast w pracach akustyków, a przede wszystkim Westa i Inglisa.

West [35] pierwszy przeprowadził statystyczne pomiary oporności akustycznej ucha, określając częstotliwość rezonansową rury zamkniętej na końcu uchem ludzkim poprzez muszlę słuchawki. Badania Westa

miały raczej charakter jakościowy i porównawczy; w wyniku ustalono, że oporność przeciętnego ucha ludzkiego odtworzyć można z dostateczną dokładnością przez oporność wejściową nieskończenie długiej rury o średnicy 6,35 mm. Na tej zasadzie West zbudował sztuczne ucho stosowane w swoim czasie w Wielkiej Brytanii.

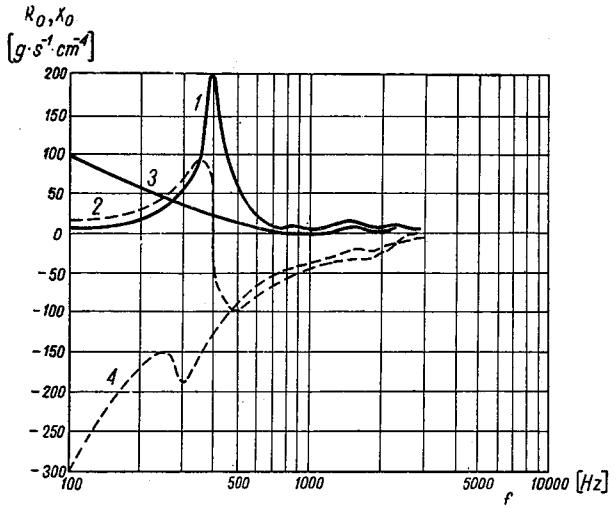
Inglis [16] na drodze systematycznych pomiarów przeprowadzonych na wielu osobnikach ustalił przeciętne wartości oporności zespolonej ucha ludzkiego mierzonej poprzez muszlę typowej (na ówczesne czasy) słuchawki telefonicznej. Wyniki pomiarów zestawiono w tablicy 7 oraz podano na rys. 7. Podobnie na rys. 8 oraz w tablicy 8 podano wartości średnie składowej rzeczywistej i urojonej oporności akustycznej u wlotu kanału ucha zewnętrznego.

Tablica 7

Składowa rzeczywista (R_0) i urojona (X_0) akustycznej oporności wejściowej ucha ludzkiego w funkcji częstotliwości przy sprzężeniu szczelnym z muszlą słuchawki oraz przy istnieniu upływności akustycznej między słuchawką a małżowiną ucha (wartości średnie wg Inglisa)

Częstotliwość	Sprzężenie szczelne		Sprzężenie nieszczelne	
	R_0	X_0	R_0	X_0
Hz]	Omy akustyczne [g s^{-1} cm^{-4}]		Omy akustyczne [g s^{-1} cm^{-4}]	
100	100	— 300	10	+ 15
200	55	— 170	15	+ 35
300	45	— 185	50	+ 75
400	25	— 125	200	0
500	18	— 90	50	— 100
600	10	— 70	10	— 75
800	5	— 50	12	— 55
1000	0	— 45	5	— 45
2000	5	— 15	5	— 20
3000	5	0	10	— 5

Przytoczone wyżej wyniki badań eksperymentalnych Inglisa zawierają najbardziej kompletne i miarodajne dane liczbowe dotyczące oporno-

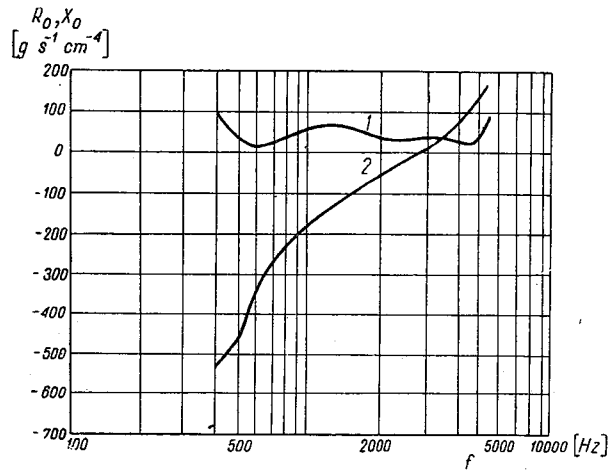


Rys. 7. Składowa rzeczywista R_0 i urojona X_0 akustycznej oporności wejściowej ucha (wg Inglisa)

1 — $R_0 = F(f)$
2 — $X_0 = F(f)$
} sprzężenie nieszczelne

Krzywe:

3 — $R_0 = F(f)$
4 — $X_0 = F(f)$
} sprzężenie szczelne



Rys. 8. Składowa rzeczywista R_0 i urojona X_0 akustycznej oporności wejściowej kanału ucha zewnętrznego (wg Inglisa)

Krzywe: 1 — $R_0 = F(f)$; 2 — $X_0 = F(f)$

ści akustycznej przeciętnego ucha ludzkiego. Z tego względu na wynikach tych należy opierać się z reguły przy projektowaniu wszelkich układów zastępczych, uważając zgodność akustycznej oporności układu zastępczego z wartościami podanymi przez Inglisa za podsta-

Tablica 8

Składowa rzeczywista (R_0) i urojona (X_0) akustycznej oporności zespolonej u wlotu kanału ucha zewnętrznego (wartości średnie wg Inglisa)

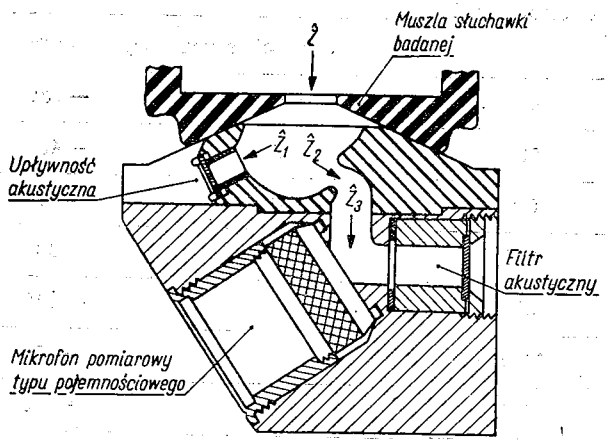
Częstotliwość [Hz]	R_0	X_0
	Omy akustyczne [g s^{-1} cm^{-4}]	
400	100	— 530
500	25	— 480
600	20	— 350
800	30	— 230
1000	60	— 170
2000	40	— 55
3000	30	+ 8
4000	35	+ 75
5000	50	+ 150

wowe kryterium przy ocenie jakości konstrukcji sztucznego ucha. Jak jednak będzie wykazane w dalszym ciągu pracy, kryterium to nie jest kryterium jedynym, lecz musi stanowić kompromis uwzględniający czynniki natury konstrukcyjnej i eksploatacyjnej.

2.3. Kierunki rozwojowe konstrukcji sztucznych uszu

W pierwszej fazie prac badawczych mających na celu odtworzenie akustycznych właściwości ucha ludzkiego konstruktorzy, wobec braku danych liczbowych dotyczących oporności akustycznej ucha oraz wobec nieumiejętności tworzenia układów zastępczych, starali się stosując metodę kolejnych prób i przybliżeń zbudować układ akustyczny, który kształtem, wymiarami oraz rodzajem zastosowanych materiałów konstrukcyjnych przypominałby możliwie dokładnie anatomiczną budowę ucha ludzkiego.

Badania eksperymentalne Westa i Inglisa doprowadziły w wyniku do zbudowania dwóch układów zastępczych (sztucznych uszu), odmiennych z konstrukcyjnego punktu widzenia, ale odtwarzających z dużą dokładnością charakterystykę oporności przeciętnego ucha ludzkiego w funkcji częstotliwości. Jak wspomniano poprzednio, West [35] zastosował jako podstawowy element akustyczny układu długą rurę o odpowiedniej średnicy (Ø 6,35 mm), zakończoną opornością strat w postaci warstwy korka. Sztuczne ucho Inglisa [16], którego opis często powtarza się w literaturze fachowej (rys. 9), było układem odtwarzającym w przy-



Rys. 9. Konstrukcja sztucznego ucha wg projektu Inglisa

bliżeniu kształt i wymiary wnęki przeciętnego ucha ludzkiego i posiadało skomplikowany układ korekcyjny, złożony z masy akustycznej, podatności i oporności strat, mający odtwarzać anatomiczne szczegóły ucha naturalnego.

Inni konstruktorzy, jak Ballantine [3], Weber [34], Fontanellaz [13], operując stosowaną już podówczas powszechnie metodą tworzenia układów zastępczych poszli w kierunku upraszczania konstrukcji sztucznego ucha, nadając mu stosunkowo nieskomplikowane kształty geometryczne, ale nie rezygnując jeszcze całkowicie ze stosowania elementów dodatkowych, najczęściej o charakterze stratnościowym i bezwładnościowym, które symbolizowałyby odpowiednie parametry ucha ludzkiego.

Dopiero najnowsze badania Olsona i Massy [28], Romanowa [30], Glasera i Morricala [14], [26], Barducciego [4], [5], [6] oraz szeregu uczonych radzieckich [19], [20], [33] zapoczątkowały nowy etap prac w tej dziedzinie. Badania te wykazały, że ścisłe odwzorowywanie akustycznych właściwości przeciętnego ucha ludzkiego, osiągane na drodze skomplikowanej konstrukcji i złożonej budowy układu zastępczego, jakkolwiek praktycznie możliwe, jest co najmniej niecelowe, gdyż:

a) właściwości indywidualne uszu poszczególnych ludzi zmieniają się w bardzo szerokich granicach w stosunku do wartości średnich,

b) dodatkowe parametry pomiaru, przede wszystkim stopień sprzężenia słuchawki z uchem i związana z tym upływność akustyczna, zmieniają się od przypadku do przypadku, gdyż zależą od kształtu muszli słuchawkowej, indywidualnej budowy małżowiny oraz siły docisku między nimi,

c) odtwarzanie skomplikowanej konstrukcji układu zastępczego, złożonego z trudnych do ścisłego i jednoznacznego określenia elementów akustycznych, jest rzeczą problematyczną i uniemożliwia dokładne powielenie modelu sztucznego ucha w odpowiedniej ilości egzemplarzy, co z kolei prowadzi do nieuniknionych błędów pomiarowych.

Znacznie bardziej racjonalnym rozwiązaniem jest zrezygnowanie ze ścisłego odtwarzania właściwości akustycznych ucha, a zwrócenie głównego nacisku na prostotę konstrukcji układu zastępczego przez nadanie mu regularnych kształtów geometrycznych oraz unikanie stosowania wszelkich elementów korekcyjnych, trudnych do ujęcia rachunkowego. System taki z jednej strony umożliwia dokładne kopiowanie i powielanie prototypu wzorca, a jednocześnie pozwala na ścisłe określenie jego charakterystyk na drodze obliczeń analitycznych.

Dążność do upraszczania konstrukcji sztucznego ucha przy jednoczesnym osiągnięciu maksymalnej stabilności układu i łatwości jego kopiowania oraz spełnieniu warunku powtarzalności wyników pomiarów cechuje wszystkie prowadzone obecnie prace badawcze w tej dziedzinie. Wszyscy autorzy wyrażają zgodną opinię, że jedynie taka metoda postępowania jest racjonalna, zwłaszcza jeśli chodzi o badanie słuchawek w skali technicznej, przede wszystkim do celów kontroli produkcji.

Jest rzeczą charakterystyczną, że przeważająca większość prac badawczych ma charakter doświadczalny i operuje metodą „prób i przybliżeń". Autorzy, opierając się na dość słabych przesłankach teoretycznych i unikając na ogół analizy matematycznej zachodzących zjawisk, zakładali z góry konfigurację układu zastępczego, przeprowadzali systematyczne pomiary porównawcze, a na podstawie ich wyników wydawali sąd o celowości i przydatności konstrukcji sztucznego ucha; w pewnych przypadkach uzyskane dane stanowią cenny materiał doświadczalny, pozwalający wyjaśnić rolę i znaczenie poszczególnych parametrów układu [14], [26].

W niniejszej pracy przyjęto odmienną metodę postępowania. Unikając wszelkiej przypadkowości w wyborze parametrów układu zastępczego, a korzystając z ogólnej teorii ustrojów akustycznych o stałych skupionych lub rozłożonych, przystosowanej do specyficznych warunków rozpatrywanego zagadnienia, starano się, o ile to tylko było możli-

we, przewidzieć na drodze analitycznej właściwości układu zastępczego i zbliżyć je do warunków rzeczywistych. Celem prac doświadczalnych było jedynie sprawdzenie słuszności rozważań teoretycznych.

Przy tych założeniach wybór najwłaściwszego układu zastępczego sztucznego ucha sprowadza się do ustalenia na drodze analitycznej następujących parametrów:

a) objętości wnęki,

b) kształtu wnęki,

c) materiału ścianek wnęki,

d) sposobu jej sprzęgnięcia z badaną słuchawką (materiału i kształtu profilu obrzeża),

e) konstrukcji mikrofonu pomiarowego i sposobu jego umieszczania we wnęce,

f) metody cechowania układu pomiarowego.

Rola poszczególnych parametrów będzie przeanalizowana w dalszej części pracy.

2.4. Wpływ konstrukcji sztucznego ucha na wyniki badania słuchawek

Zagadnienie obiektywizacji metod badania słuchawek telefonicznych za pomocą sztucznego ucha nabiera coraz większego znaczenia w związku z obecnym postępem w dziedzinie telekomunikacji oraz z wprowadzeniem nowych typów słuchawek o poprawionych właściwościach elektroakustycznych. Stosowane dotychczas w poszczególnych krajach i ośrodkach badawczych prototypy sztucznych uszu różnią się znacznie między sobą konstrukcją i właściwościami akustycznymi nawet w tych przypadkach, kiedy ich konstruktorzy postawili sobie za cel możliwie dokładnie odtworzenie w układzie zastępczym anatomicznej budowy ucha naturalnego.

W tablicy 9 zestawiono najważniejsze cechy charakterystyczne typowych sztucznych uszu. Jak widać, najistotniejsze różnice polegają na kształcie i wymiarach wnęki, na sposobie jej sprzęgnięcia ze słuchawką badaną oraz na rodzaju dodatkowej oporności akustycznej, symbolizującej straty energii w kanale ucha ludzkiego.

Przeprowadzone przez poszczególnych autorów konstrukcje układów zastępczych mają różną postać, poczynając od skomplikowanego układu Inglisa, Graya i Jenkinsa [16], odtwarzającego najdrobniejsze szczegóły anatomicznego ucha ludzkiego, a kończąc na prostej walcowej wnęce zamkniętej, reprezentowanej przez wzorzec amerykański [1].

Bezpośrednią konsekwencją znacznych różnic konstrukcyjnych poszczególnych układów zastępczych są ogromne różnice ich akustycznej

oporności wejściowej, a stąd — rozbieżności wyników pomiarów skuteczności i charakterystyki częstotliwości tej samej słuchawki badanej w różnych warunkach. Jako przykład służyć mogą charakterystyki słu-

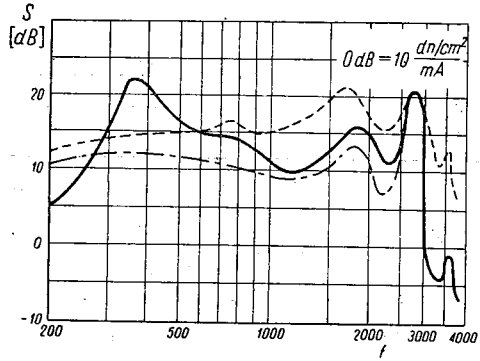
Tablica 9

Porównawcze zestawienie najważniejszych danych technicznych stosowanych obecnie sztucznych uszu

Autor	Wnęka		Sprzężenie	Akustyczna oporność dodatkowa [g s^{-1} cm^{-4}]	Konstrukcja
	Objętość (cm^3)	Kształt			
W. West [35]	3	wnęka cylindryczna z rurą	szczelne	72 ÷ 111	złożona
Inglis, Gray, Jenkins [16]	3	imitacja ucha naturalnego	z otworami	5 ÷ 21	skomplikowana
Olson i Massa [28]	4	stożek ścięty	z otworami	—	uproszczona
Ballantine [3]	4	stożek ścięty	z otworami	nie podano	uproszczona
Romanow [30]	6	cylindryczny	szczelne	—	uproszczona
Weber (PTT) [34]	3,2	dwie wnęki cylindryczne sprzężone ze szczeliną	szczelne	nie podano	złożona
Glaser, Morrical (M-112) [14]	6	dwie wnęki cylindryczne	szczelne	—	uproszczona
Glaser, Morrical (J. R. B. [14]	6	stożkowo-cylindryczny	szczelne	—	uproszczona
Wzorzec amerykański [1]	6	stożkowo-cylindryczny	szczelne	—	uproszczona
Barducci [4]	4,5	cylindryczny	z otworami	—	rezonator akustyczny
Braun [9]	2,7	cylindryczny	szczelne	—	uproszczona

chawki brytyjskiej, włoskiej i szwajcarskiej, zdjęte odpowiednio w układzie zastępczym sztucznego ucha konstrukcji włoskiej (I. N. U. A.), brytyjskiej (P. O. R. S.), amerykańskiej (A. S. A.) i szwajcarskiej

(P. T. T.) (rysunki 10, 11, 12). Zastosowane uszy sztuczne różniły się między sobą znacznie konstrukcją i właściwościami, mianowicie:



Rys. 10. Wpływ konstrukcji sztucznego ucha na charakterystykę skuteczności słuchawki brytyjskiej

——— ucho włoskie; - - - - ucho brytyjskie; —·— ucho amerykańskie

a) ucho amerykańskie (A. S. A.) ma kształt prostej wnęki walcowej szczelnie zamkniętej;

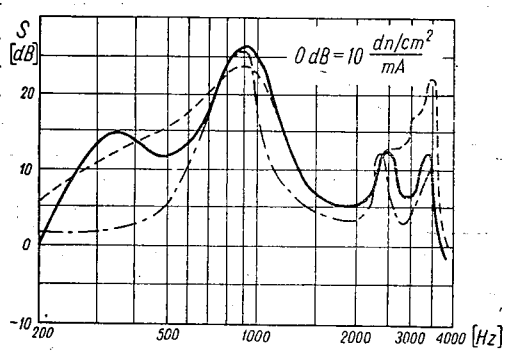
b) ucho włoskie (I. N. U. A.) jest rezonatorem odtwarzającym nieszczelne sprzężenie słuchawki z małżowiną ucha;

c) uszy brytyjskie (P. O. R. S.) i szwajcarskie (P. T. T.) są układami złożonymi, wykonanymi w postaci komory z dodatkową opornością akustyczną, przy czym różnią się znacznie między sobą konstrukcją.

Należy podkreślić, że układy wymienione w punktach b) i c) miały za zadanie odtwarzać bądź nieszczelne sprzężenie badanej słuchawki z uchem (b), bądź straty energii akustycznej przez jej pochłanianie w kanale usznym (c).

Otrzymane wyniki pomiarów można łatwo wyjaśnić w oparciu o odmienną konstrukcję stosowanych układów, mianowicie:

a) średni poziom skuteczności badanej w układzie zastępczym zależy od objętości wnęki sztucznego ucha; wyniki otrzymane przy zastosowaniu ucha konstrukcji włoskiej ($V = 4{,}5$ cm^3) są przeciętnie o 3÷4 dB mniejsze od wyników uzyskanych przy uchu konstrukcji brytyjskiej ($V = 3$ cm^3) i szwajcarskiej ($V = 3{,}2$ cm^3);



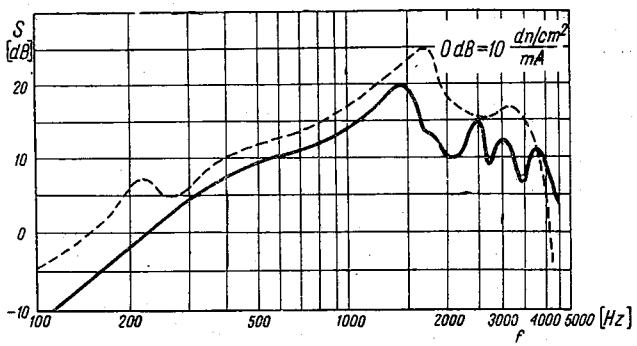
Rys. 11. Wpływ konstrukcji sztucznego ucha na charakterystykę skuteczności słuchawki włoskiej

——— ucho włoskie; - - - - ucho brytyjskie; —·— ucho amerykańskie

b) charakterystyka skuteczności słuchawki zależy od rezonansowych właściwości wnęki sztucznego ucha; ucho konstrukcji włoskiej wykazuje z reguły rezonans około 350 Hz, gdyż w zakresie częstotliwości małych i średnich rozpatrywane być może jako rezonator Helmholtza, odtwarzający rezonanso-

we właściwości ucha naturalnego przy nieszczelnym sprzężeniu z muszlą słuchawki;

c) rezonansowe właściwości wnęki sztucznego ucha wpływają na kształt charakterystyki skuteczności słuchawki również w zakresie dużych częstotliwości (2000÷4000 Hz); parametrem decydującym jest w tym przypadku kształt geometryczny (długość) wnęki, która w tym zakresie częstotliwości staje się falowodem akustycznym o wymiarach porównywalnych z długością fali dźwiękowej;



Rys. 12. Wpływ konstrukcji sztucznego ucha na charakterystykę skuteczności słuchawki szwajcarskiej
——— ucho włoskie; - - - - ucho szwajcarskie

d) wyższe rezonanse słuchawki spowodowane bądź wyższymi rozkładami drgań membrany, bądź rezonansowymi właściwościami muszli ulegają wyraźnemu stłumieniu w układach zastępczych wprowadzających dodatkową oporność strat (ucho brytyjskie i szwajcarskie); wpływ oporności dodatkowej na charakterystykę słuchawki w zakresie dużych częstotliwości jest porównywalny z wpływem zmiany kształtu wnęki (punkt c);

e) stosowanie wnęk całkowicie zamkniętych (np. A. S. A.) spłaszcza charakterystykę słuchawki w zakresie małych częstotliwości.

Z wniosków tych wynika, że opracowując wzorzec sztucznego ucha należy brać pod uwagę cel, do jakiego ma on służyć. Jeśli chodzi o pomiary przemysłowe, których celem jest kontrola stałości i powtarzalności właściwości słuchawek określonego typu, to stosować można układy zastępcze jak najbardziej uproszczone (np. wnęki zamknięte), łatwe do kopiowania i wygodne z użytkowego punktu widzenia. Natomiast przy laboratoryjnych badaniach słuchawek różnych typów należy dążyć do odtwarzania w układzie zastępczym najbardziej zasadniczych właściwości akustycznych ucha naturalnego, nawet kosztem prostoty konstrukcji.

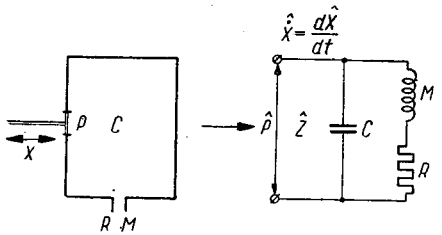
3. PRZESŁANKI TEORETYCZNE DO PROJEKTOWANIA WNĘKI SZTUCZNEGO UCHA

3.1. Wybór objętości wnęki

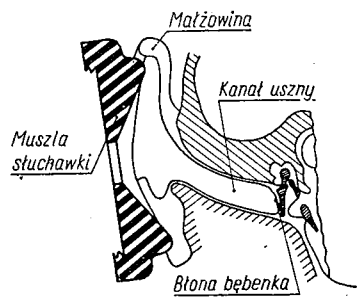
Zgodnie z wynikami badań eksperymentalnych (tablica 7 i rys. 7) przeciętne ucho ludzkie badane poprzez muszlę słuchawki telefonicznej przy istnieniu określonej upływności wskutek nieszczelnego sprzężenia zachowuje się w przybliżeniu jak akustyczny układ rezonansowy, złożony z masy akustycznej M, podatności C i oporności strat R w połączeniu równoległym (rys. 13), o następujących właściwościach:

częstotliwość rezonansowa	$f_0 \approx 400$ Hz,
maksymalna wartość składowej rzeczywistej oporności przy rezonansie	$R_{max} \approx 200$ [gs^{-1} cm^{-4}]
współczynnik dobroci	$Q \approx 5$.

Na podstawie powyższych danych można znając jeden z parametrów M, C, R układu wyznaczyć w sposób jednoznaczny dwa pozostałe. Parametrem, którego wartość można założyć z góry, jest podatność C, odpowiadająca wypadkowej objętości wnęki ucha przy uwzględnieniu objętości sprzęgniętej z nią wnęki muszli słuchawki (rys. 14). Wypadko-



Rys. 13. Model akustyczny wnęki ucha zewnętrznego i jego elektryczny układ zastępczy



Rys. 14. Anatomiczny przekrój ucha zewnętrznego

wą objętość wnęki ucha V obliczyć można ze wzoru:

$$V = V_u + (1 - k)\,\Delta V, \tag{3.1}$$

gdzie:

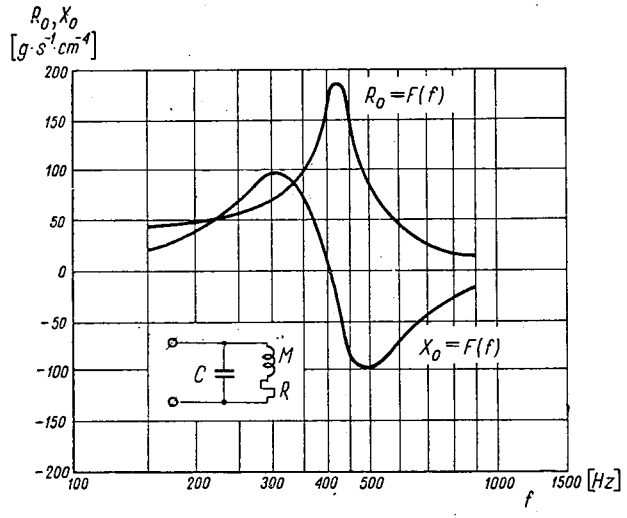
$V_u \approx 5$ cm^3 — przeciętna objętość wnęki ucha ludzkiego,
ΔV — objętość geometryczna wnęki muszli słuchawkowej,
k — współczynnik wypełnienia wnęki muszli słuchawkowej przez elastyczną i łatwo odkształcalną małżowinę ucha.

Objętość ΔV wnęki muszli słuchawkowej zależy od konstrukcji słuchawki i waha się w dość szerokich granicach. Słuchawki zagraniczne

o wybitnie wklęsłym kształcie muszli (np. słuchawka L. M. Ericsson typu RLD 1504) posiadają objętość ΔV rzędu 6 cm^3, podczas gdy słuchawki produkcji krajowej, stosowane powszechnie w Polsce, odznaczają się małą wklęsłością muszli i posiadają objętość wnęki ΔV od 2 cm^3 do ok. 4 cm^3.

Współczynnik wypełnienia k zależy bezpośrednio od stopnia wklęsłości muszli, przybierając, jak to stwierdzono eksperymentalnie, wartości $k \approx 0{,}5$ dla muszli płaskich ($\Delta V = 2$ cm^3), $k \approx 0{,}75$ dla muszli pośrednich ($\Delta V = 4$ cm^3) oraz $k \approx 0{,}83$ dla muszli wklęsłych ($\Delta V = 6$ cm^3).

Jak wynika ze wzoru (3.1), efektywna objętość wnęki muszli słuchawkowej wypełnionej częściowo małżowiną ucha nie zależy w przybliżeniu od konstrukcji słuchawki i równa jest około 1 cm^3. Zatem wypadkowa objętość wnęki ucha oraz sprzęgniętej z nią wnęki słuchawki równa się około 6 cm^3. Wartość ta przyjęta zostanie do dalszych rozważań jako objętość wnęki układu zastępczego.



Rys. 15. Obliczone charakterystyki składowej rzeczywistej (R_0) i urojonej (X_0) oporności akustycznej układu zastępczego

Podatność akustyczna C odpowiadająca objętości $V = 6$ cm^3 równa się

$$C = \frac{V}{\varrho_0 c^2} = \frac{6}{1{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot (3{,}44)^2 \cdot 10^8} = 4{,}3 \cdot 10^{-6}\ [\mathrm{cm^4 s^2 g^{-1}}], \qquad (3.2)$$

gdzie: ϱ_0 — gęstość powietrza w normalnych warunkach atmosferycznych,
c — prędkość dźwięku w powietrzu.

Optymalne zbliżenie [1] do charakterystyki oporności ucha przytoczonej przez Inglisa osiąga się przy następujących parametrach M i R układu zastępczego:

$$M = 30{,}3 \cdot 10^{-3} \ [\mathrm{g\,cm^{-4}}],$$

$$R = 40 \qquad [\mathrm{g\,s^{-1}\,cm^{4}}].$$

Obliczone analitycznie charakterystyki oporności rzeczywistej i urojonej układu zastępczego dla powyższych wartości parametrów R, M, C podane są na rys. 15.

3.2. Obliczenie parametrów układu

Zadanie odtworzenia w układzie zastępczym akustycznych właściwości wnęki ucha naturalnego w zakresie małych i średnich częstotliwości słyszalnych (do około 1000 Hz) sprowadza się do zbudowania rezonatora Helmholtza zasilanego od strony podatności, o częstotliwości rezonansowej $f_0 \approx 400$ Hz i współczynniku dobroci $Q \approx 5$. Zadanie to rozwiązać można najprościej w oparciu o ogólną teorię rezonatorów akustycznych.

Częstotliwość rezonansowa rezonatorą Helmholtza wyraża się ogólnym wzorem:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{MC}}, \tag{3.3}$$

w którym:

C — podatność akustyczna objętości powietrznej V wnęki rezonatora,

M — efektywna masa akustyczna powietrza drgającego w szyjce rezonatora.

Zakładając, że szyjka rezonatora ma postać rurki o długości l i przekroju kołowym $S = \pi r^2$, wzór (3.3) przekształcić można do postaci następującej:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{MC}} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{V(l+\delta)}} = \frac{c}{2} \left(\frac{r}{\pi V}\right)^{1/2} \left(\frac{l}{r} + \frac{\delta}{r}\right)^{-1/2}, \tag{3.4}$$

gdzie:

c — prędkość dźwięku w powietrzu,

δ — poprawka wlotu szyjki rezonatora.

[1] Idealne odtworzenie w układzie zastępczym charakterystyki oporności ucha pomierzonej przez Inglisa jest niemożliwe, gdyż przebieg tej charakterystyki (rys. 7) jest sprzeczny z ogólną teorią obwodów rezonansowych.

W klasycznej teorii rezonatorów akustycznych na poprawkę wlotu przyjmuje się wartość δ_m, która uwzględnia dodatkową masę akustyczną drgającą u obu wylotów szyjki. Z reguły zakłada się w tym przypadku, że wylot szyjki rezonatorą zachowuje się jak fikcyjny tłok o promieniu r, umieszczony w płaszczyźnie nieskończenie wielkiej, czemu odpowiada wartość [1],

$$\delta_m \approx 1{,}7\, r \approx 0{,}96\, S^{1/2}.$$

Wbrew założeniom stosowanym najczęściej w klasycznej teorii rezonatorów wielkość δ_m nie jest jedyną składową ogólnej poprawki wlotu δ we wzorze (3.4). Obliczając czynną długość szyjki rezonatora należy uwzględnić również wpływ lepkości i tarcia powietrza na efektywną masę drgającego powietrza M.

Ścisły wzór na czynną masę akustyczną powietrza drgającego w rurze o długości l i przekroju kołowym $S = \pi r^2$ przy uwzględnieniu tarcia ma postać [12]

$$M = \frac{\varrho_0 l}{S}\left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right), \tag{3.6}$$

gdzie:

$\Delta r = \left(\frac{2\mu}{\omega \varrho_0}\right)^{1/2}$ — jest zastępczą grubością warstwy ośrodka (powietrza) przylegającej do ścianek rurki, zależną od jego gęstości ϱ_0, lepkości μ oraz pulsacji drgań ω.

Ze wzoru (3.6) można obliczyć korekcję δ_t długości szyjki, uwzględniającą tarcie ośrodka i jego wpływ na masę M. Otrzymujemy:

$$\delta_t = l\frac{\Delta r}{r} = \frac{l}{r}\left(\frac{2\mu}{\omega \varrho_0}\right)^{1/2}. \tag{3.7}$$

Wyrażając we wzorze wyjściowym (3.4) wypadkową poprawkę wlotu δ jako sumę dwóch niezależnych składowych δ_t oraz δ_m:

---

[1]) Jest to uproszczenie zagadnienia gdyż — jak wykazała dokładna analiza matematyczna przeprowadzona przez Ingarda [15] — wyrażenie na δ_m jest skomplikowaną funkcją stosunku wymiarów otworu szyjki do wymiarów rezonatora, geometrycznego kształtu przekroju szyjki, kształtu bańki rezonatora, a jednocześnie zależy od sposobu umieszczenia w niej szyjki. Okazuje się jednak, że wykresy funkcji δ_m przy różnych, najczęściej stosowanych w praktyce wymienionych wyżej parametrach geometrycznych dla małych przekrojów szyjki dążą do wartości $\delta_m = 0{,}96\, S^{1/2}$, co potwierdza słuszność stosowanego uproszczenia do celów obliczeń praktycznych. Z tego względu dla przypadku kołowego przekroju szyjki przyjęta została w dalszej części pracy wartość poprawki $\delta_m = 1{,}7\, r$.

$$\delta = \delta_t + \delta_m \tag{3.8}$$

przekształcamy go do postaci

$$f_0 = \frac{c}{2}\left(\frac{r}{\pi V}\right)^{1/2}\left(\frac{l}{r} + \frac{\delta_t}{r} + \frac{\delta_m}{r}\right)^{-1/2} = \frac{1}{2} r\, c\,(\pi V l)^{-1/2}\left(1 + \frac{\delta_t}{l} + \frac{\delta_m}{l}\right)^{-1/2} =$$

$$= \frac{1}{2} r\, c\,(\pi V l)^{-1/2}\left(1 + \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2\mu}{\omega \varrho_0}} + 1{,}7\frac{r}{l}\right)^{-1/2} = \frac{1}{2} r\, c\,(\pi V l)^{-1/2}\,(\psi + \psi_m)^{-1/2}. \tag{3.9}$$

Wprowadzono tu następujące oznaczenia:

$\psi_m = 1{,}7\dfrac{r}{l}$ — współczynnik uwzględniający dodatkową masę powietrza drgającą u obu wylotów szyjki rezonatora (klasyczna poprawka wlotu),

$\psi = 1 + \dfrac{1}{r}\sqrt{\dfrac{2\mu}{\omega \varrho_0}}$ — współczynnik uwzględniający wpływ lepkości i tarcia powietrza na czynną masę powietrza drgającego w szyjce [1].

Ponieważ objętość wnęki rezonatora została założona z góry ($V = 6$ cm^3, patrz rozdział 3.1), a częstotliwość rezonansowa $f_0 = 400$ Hz jest znana, równanie (3.9) posiada dwie niewiadome r oraz l i jest niewyznaczalne. Aby obliczyć niewiadome r i l, należy skorzystać z warunku dodatkowego, jakim jest współczynnik dobroci Q rezonatora.

Wychodząc z ogólnego wzoru na współczynnik dobroci Q rezonatora Helmholtza

$$Q = \frac{\omega_0 M}{R_c} \tag{3.10}$$

i podstawiając odpowiednie wyrażenia na czynną masę akustyczną M oraz całkowitą oporność strat R_c, odniesione do częstotliwości rezonansowej $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$, można otrzymać przybliżony związek funkcjonalny między Q a fizykalnymi parametrami układu.

---

[1]) Przy pominięciu wpływu tarcia powietrza w szyjce ($\psi = 1$) wzór (3.9) przekształca się do postaci klasycznej

$$f_0 = \frac{c\, r}{2\sqrt{\pi V l\left(1 + 1{,}7\dfrac{r}{l}\right)}} = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{V l'}},$$

gdzie $l' = (l + 1{,}7\, r)$ jest skorygowaną długością szyjki, a $S = \pi r^2$ — powierzchnią jej przekroju.

Korzystając z wyprowadzonych poprzednio współczynników korekcyjnych δ_t oraz δ_m można wyrazić oporność bezwładnościową $\omega_0 M$ przy rezonansie jako:

$$\omega_0 M = \omega_0 \frac{\varrho_0 l}{S}\left(1 + \frac{\delta_t}{l} + \frac{\delta_m}{l}\right) = \omega_0 \frac{\varrho_0 l}{S}\left(1 + \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2\mu}{\omega_0 \varrho_0}} + 1{,}7\frac{r}{l}\right) =$$

$$= \omega_0 \frac{\varrho_0 l}{S}(\psi + \psi_m). \tag{3.11}$$

Całkowita oporność rzeczywista rezonatora R_c przy pominięciu oporności promieniowania wylotu [1] składa się z oporności strat R_t na tarcie w szyjce oraz oporności strat R_w na wymianę ciepła:

$$R_c \approx R_t + R_w. \tag{3.12}$$

Oporność strat na tarcie R_t odniesiona do powierzchni wylotu szyjki S wyraża się wzorem [15]

$$R_t = \frac{\varrho_t}{S} \cdot \frac{1}{r}(l + r), \tag{3.13}$$

w którym $\varrho_t = \sqrt{2\mu\varrho_0\omega}$ jest powierzchniową opornością strat wskutek lepkości ośrodka. W normalnych warunkach atmosferycznych ($t = 20°C$, $p_0 = 760$ mm Hg) $\varrho_t \approx 1{,}66 \cdot 10^{-3}(f)^{1/2}$.

Miarą strat na wymianę ciepła jest współczynnik ϱ_h, będący również funkcją częstotliwości i w normalnych warunkach atmosferycznych równy ok. $\frac{1}{\varrho_0 c} 10^{-6}(f)^{1/2}$. Do celów obliczeń praktycznych oporność strat na wymianę ciepła można uwzględnić zwiększając współczynnik lepkości powietrza μ o 114 %, a więc wprowadzając do wzorów wielkość $\mu' = 2{,}14\,\mu$ [37], która w normalnych warunkach atmosferycznych przybiera wartość $\mu' = 2{,}14 \cdot 1{,}84 \cdot 10^{-4} = 3{,}94 \cdot 10^{-4}$ [g/s·cm]. W myśl tego uproszczenia współczynnik dobroci Q układu można wyrazić w postaci przybliżonej ze wzorów (3.11) i (3.13) jako:

$$Q \approx \frac{\omega_0 M}{R_c} = \frac{\omega_0 \varrho_0 l r}{\varrho_t (l + r)}(\psi + \psi_m) =$$

$$= r \frac{\omega_0 \varrho_0}{\varrho_t\left(1 + \frac{r}{l}\right)}(\psi + \psi_m) \approx$$

$$\approx r\,(f)^{1/2}\left(\pi \frac{\varrho_0}{\mu'}\right)^{1/2} \tag{3.14}$$

[1] Słuszność tego założenia będzie uzasadniona w dalszej części pracy.

Przybliżenie takie jest słuszne dla małych przekrojów wylotu szyjki ($r \ll l$) oraz przy pominięciu poprawki wlotu, co w przypadku przeprowadzenia obliczeń technicznych jest dopuszczalne.

Podstawiając zgodnie z warunkami założonymi

$$f_0 = 400 \text{ Hz}, \quad Q = 5,$$

otrzymujemy:

$$r = Q(f)^{-1/2}\left(\frac{\mu'}{\pi \varrho_0}\right)^{1/2} = \frac{5}{20}\left(\frac{3{,}94 \cdot 10^{-4}}{\pi \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-3}}\right)^{1/2} = 0{,}08 \text{ cm}.$$

Znając promień r szyjki rezonatora można obliczyć jej długość l ze wzoru ogólnego (3.9); w rozważanym przypadku:

$$\psi_m = 1{,}7\frac{r}{l} = \frac{1{,}7 \cdot 0{,}08}{l} = \frac{0{,}136}{l},$$

$$\psi_0 = 1 + \frac{1}{0{,}08}\sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}94 \cdot 10^{-4}}{2\pi\, 400 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-3}}} = 1{,}20,$$

$$f_0^2 = \frac{1}{4} r^2 c^2 (\pi V l)^{-1} (\psi_0 + \psi_r)^{-1} = \frac{r^2 c^2}{4\pi V l\left(1{,}20 + \dfrac{0{,}136}{l}\right)}.$$

Podstawiając wartości liczbowe: $r = 0{,}08$ cm, $V = 6$ cm^3, $c = 3{,}44 \cdot 10^4$ cm/s, otrzymujemy

$$l = 0{,}42 \text{ cm} = 4{,}2 \text{ mm}.$$

W ten sposób zagadnienie odtworzenia właściwości rezonansowych wnęki ucha naturalnego w układzie zastępczym zostało rozwiązane; układ zastępczy ma postać rezonatora o objętości $V = 6$ cm^3 z szyjką w kształcie rurki o średnicy $2r = 1{,}6$ mm i długości $l = 4{,}2$ mm.

Pozostaje do sprawdzenia słuszność uczynionego poprzednio założenia, polegającego na pominięciu oporności promieniowania wylotu wobec strat na tarcie i wymianę ciepła.

Według klasycznego wzoru Rayleigha oporność promieniowania R_{pr} wylotu wyraża się wzorem

$$R_{pr} = \frac{\varrho_0}{2\pi c}\omega^2 = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-3}}{2\pi\, 3{,}44 \cdot 10^4}\omega^2 \approx 5{,}6 \cdot 10^{-9}\omega^2, \qquad (3.15)$$

gdzie $\omega = 2\pi f$ jest pulsacją drgań.

Przyjmując jako granice interesującego nas zakresu częstotliwości rezonatora

$$f_{\min} = 100 \text{ Hz}, \qquad f_{\max} = 1000 \text{ Hz},$$

otrzymujemy

$$R_{pr\,\min} = 5{,}6 \cdot 10^{-9}(628)^2 = 22 \cdot 10^{-4}\ [\mathrm{g\,s^{-1}\,cm^{-4}}],$$

$$R_{pr\,\max} = 5{,}6 \cdot 10^{-9}(6280)^2 = 22 \cdot 10^{-2}\ [\mathrm{g\,s^{-1}\,cm^{-4}}].$$

Oporność strat na tarcie i wymianę ciepła, wyznaczona dla odpowiednich pulsacji ze wzoru (3.13), przy wartości współczynnika $\mu' = 3{,}94 \cdot 10^{-4}$ [g/cm · s] wynosi.

$$R_{c\,\min} \approx 0{,}3\sqrt{\omega_{\min}} = 0{,}3\sqrt{628} = 7{,}5\ [\mathrm{g\,s^{-1}\,cm^{-4}}],$$

$$R_{c\,\max} \approx 0{,}3\sqrt{\omega_{\max}} = 0{,}3\sqrt{6280} = 23{,}8\ [\mathrm{g\,s^{-1}\,cm^{-4}}],$$

co dowodzi, że założenie upraszczające było dopuszczalne.

4. DOŚWIADCZALNE SPRAWDZENIE SŁUSZNOŚCI ZAŁOŻEŃ TEORETYCZNYCH

4.1. Cel badań eksperymentalnych

Celem badań eksperymentalnych było sprawdzenie słuszności przeprowadzonych poprzednio rozważań teoretycznych. Postanowiono zbadać doświadczalnie wpływ objętości wnęki sztucznego ucha oraz szczelności sprzężenia jej ze słuchawką na charakterystykę skuteczności obiektu badanego. Jednocześnie wyniki pomiarów powinny określić dokładność, z jaką można przewidzieć i obliczyć charakterystyczne właściwości sztucznego ucha, przede wszystkim jego częstotliwość rezonansową f_0 i współczynnik dobroci Q.

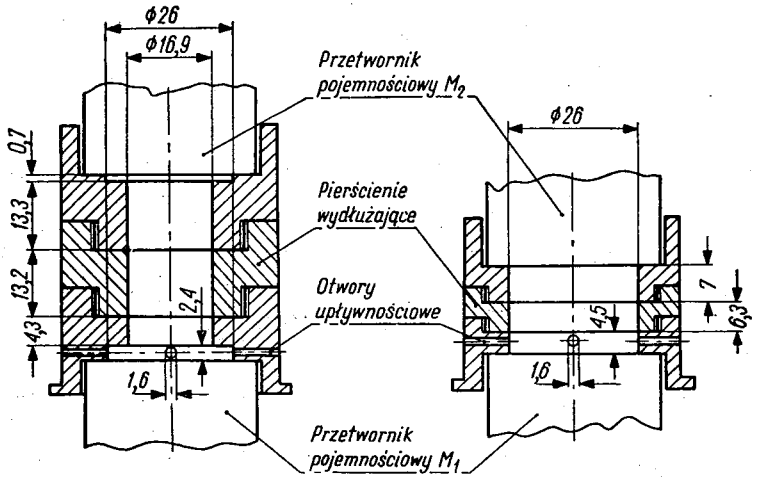
4.2. Opis wnęk doświadczalnych

Najbardziej racjonalnym z laboratoryjnego punktu widzenia rozwiązaniem okazało się skonstruowanie modeli wnęk sztucznego ucha o zmiennych parametrach: objętości i kształcie wnęki oraz różnej szczelności, realizowanej za pomocą odpowiedniej ilości otworów upływnościowych, łączących wnękę z przestrzenią otaczającą.

Dwie poddane badaniom wnęki sprzęgające miały charakter brył obrotowych (walców) o ściankach wykonanych z materiału sztywnego o akustycznej oporności właściwej znacznie większej od akustycznej oporności właściwej powietrza (mosiądz, $\varrho_0 c = 295 \cdot 10^4$ [$\mathrm{gs^{-1}\,cm^{-2}}$]). Obie wnęki posiadały jednakową objętość nominalną $V = 6\ \mathrm{cm^3}$, a różniły się jedynie kształtem. Wnęka nr I (rys. 16b) o średnicy $2r = 26$ mm i długości $l = 11{,}5$ mm była wnęką krótką, podczas gdy wnęka nr II (rys. 16a) o średnicy $2r = 16{,}9$ mm i długości $l = 17{,}6$ mm była wnęką wydłużoną. Nominalne objętości obu wnęk można było zwiększać o około 50% zachowując ich kształt walcowy przez zastosowanie dystansowych pierścieni wydłużających.

W celu nadania wnękom właściwości rezonansowych oraz zbadania wpływu szczelności na ich charakterystyki zaopatrzono każdą z nich w cztery otwory upływnościowe w kształcie rurek o odpowiednio dobranej średnicy i długości; otwory te, mające charakter parametrów zmiennych, można było dowolnie zamykać przez uszczelnienie woskiem. Przekrój i długość rurek upływnościowych dobrano tak, aby warunki założone ($f_0 = 400$ Hz, $Q = 5$) otrzymać przy:

a. nominalnej objętości wnęki ($V = 6$ cm^3),
b. dwóch otworach czynnych ($n = 2$).



Rys. 16. Konstrukcja doświadczalnych wnęk rezonansowych

Zgodnie z obliczeniami analitycznymi (rozdz. 3.2.1.) założone właściwości rezonansowe wnęki o objętości $V = 6$ cm^3 otrzymuje się przy zastosowaniu jednego otworu w kształcie rurki o średnicy Ø 1,6 mm i długości $l = 4{,}2$ mm. Chcąc zachować nie zmienione wartości parametrów akustycznych otworów upływnościowych (wypadkowej masy akustycznej M_a i oporności strat R_c) przy podwojeniu ilości otworów należy zwiększyć dwukrotnie ich długość nie zmieniając przekroju. Jest to oczywiste, skoro się weźmie pod uwagę, że masa akustyczna jednej rurki upływnościowej

$$M_a = \varrho_0 \frac{l}{S} \tag{4.1}$$

jest wprost proporcjonalna do jej długości [1] i odwrotnie proporcjonalna do jej przekroju. Zwiększając dwukrotnie długość rurki należy

[1] Jest to przybliżenie słuszne, jeśli pominie się poprawkę wlotu, gdyż efektywna długość rurki l' jest nieco większa od jej długości geometrycznych: $l' = l + \delta$, gdzie δ jest poprawką wlotu, obliczoną w rozdziale 3.2.

dla spełnienia warunku $M_a = \text{const}$ zwiększyć dwukrotnie jej przekrój lub — co jest jednoznaczne — podwoić ilość otworów nie zmieniając przekroju.

Podobnie chcąc zachować nie zmienioną wartość całkowitej oporności strat R_c, która w pierwszym przybliżeniu jest wprost proporcjonalna do długości rurki, należy zwiększając n razy ilość rurek zwiększyć jednocześnie n razy ich długość [1].

Wprowadzając zatem we wnękach doświadczalnych $n = 4$ otwory upływnościowe o średnicy Ø 1,6 mm i długości $l = 8{,}5$ mm każdy, z możnością ich kolejnego eliminowania, można w pewnych granicach wpływać na wartość czynnej masy akustycznej M_a oraz czynnej oporności strat R_c układu, a tym samym zmieniać właściwości rezonansowe wnęki.

Zależności liczbowe między ilością czynnych otworów a parametrami akustycznymi układu wnęki i jej częstotliwością rezonansową podano w tablicy 10.

Tablica 10

Zależność między ilością czynnych otworów upływnościowych (n) a względnymi wartościami parametrów akustycznych wnęki (M_a, R_c) i jej częstotliwością rezonansową (f) w odniesieniu do odpowiednich wartości przy $n = 2$ (M_{a0}, R_{c0}, f_0)

Ilość otworów czynnych	Masa akustyczna M_a/M_{a0}	Oporność strat R_c/R_{c0}	Częstotliwość rezonansowa f/f_0
	Wartości względne		
$n = 1$	2,0	2,0	0,71
$n = 2$	1,0	1,0	1,0
$n = 3$	0,676	0,676	1,22
$n = 4$	0.5	0,5	1,41

Zastosowanie zmiennej ilości otworów upływnościowych pozwala zatem zmieniać częstotliwość rezonansową wnęki od -30% do $+40\%$ w stosunku do wartości nominalnej $f_0 = 400$ Hz. Ponadto zwiększenie objętości wnęki o ok. 50% przez zastosowanie pierścienia przedłużającego wpływa na zmniejszenie częstotliwości rezonansowej w stosunku $\left(\frac{1}{1{,}5}\right)^{0{,}5}$, czyli o około 0,815.

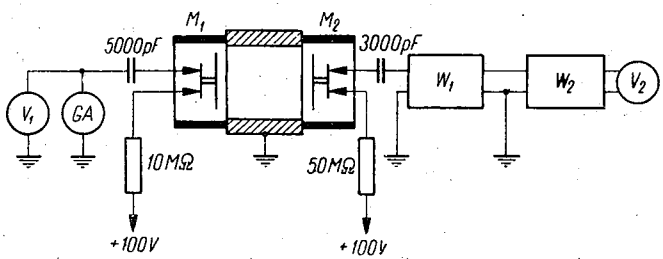
[1]) Otwory upływnościowe pracują w akustycznym połączeniu równoległym, co bezpośrednio uzasadnia słuszność przeprowadzonego rozumowania.

4.3. Układ pomiarowy

Badanie rezonansowych właściwości wnęk doświadczalnych polega na wyznaczeniu ciśnienia akustycznego panującego we wnęce w funkcji częstotliwości przebiegów akustycznych wymuszających drgania. Wnęki skonstruowano tak, że obie ich płaszczyzny czołowe można sprząc ściśle z membranami dwóch identycznych przetworników pojemnościowych, z których jeden pełni rolę nadajnika (źródła dźwięku), a drugi jest mikrofonem odbiorczym, służącym do pomiaru ciśnienia akustycznego we wnęce.

Przetwornik nadawczy (M_1) zasilany był ze źródła napięcia o regulowanej częstotliwości, natomiast przetwornik odbiorczy (M_2) wytwarzał na swych zaciskach siłę elektromotoryczną o wartości skutecznej, proporcjonalnej do ciśnienia akustycznego panującego we wnęce i mierzonej (po wzmocnieniu) za pomocą woltomierza lampowego.

Zarówno skuteczności elektroakustyczne obu zastosowanych przetworników wyznaczone metodą wzajemności ($S_1 = 1{,}9$ mV/dn/cm^2, $S_2 = 1{,}5$ mV/dn/cm^2), jak i wzmocnienia wzmacniaczy ($W_1 = 0{,}89$ V/V $=$ $= -1$ dB, $W_2 = 100$ V/V $= +40$ dB) były znane, co nadawało przeprowadzonym pomiarom charakter bezwzględny. Schemat układu pomiarowego pokazano na rys. 17.



Rys. 17. Schemat układu pomiarowego do badania wnęk doświadczalnych

GA — generator akustyczny, V_1, V_2 — woltomierze lampowe, M_1 — przetwornik pojemnościowy nadawczy, M_2 — przetwornik pojemnościowy odbiorczy, W_1 — wzmacniacz przymikrofonowy w układzie wtórnika katodowego, W_2 — wzmacniacz pomiarowy 40 dB.

Oddzielnego omówienia wymaga zagadnienie warunków zasilania przetwornika nadawczego. Badana wnęka jest układem rezonansowym równoległym (rys. 13), którego charakterystykę należy badać przy stałej wartości prędkości akustycznej $\dot{X} = \frac{dX}{dt} = \text{const}$, analogicznie jak przy badaniu rezonansu układu elektrycznego LC w połączeniu równoległym przy $I = \text{const}$.

Warunek stałości prędkości objętościowej wytwarzanej przez przetwornik pojemnościowy zanalizować można dwiema metodami, które będą omówione kolejno.

a. Zastosowany przetwornik pojemnościowy podlega prawu wzajemności, którego sformułowanie ma postać następującą:

$$\frac{\dot{X}}{I} = \frac{e}{p}\, 10^7, \tag{4.2}$$

gdzie:

$\dot{X}$ — prędkość objętościowa wytwarzana przez przetwornik pracujący jako nadajnik [$cm^3\ s^{-1}$],

I — prąd zasilania przetwornika nadawczego [A],

p — ciśnienie akustyczne działające na membranę przetwornika pracującego jako odbiornik [dn/cm^2],

e — siła elektromotoryczna (V) na zaciskach przetwornika odbiorczego poddanego działaniu ciśnienia akustycznego p.

Ponieważ skuteczność odbiorcza zastosowanych przetworników pojemnościowych jest w szerokim zakresie częstotliwości stała $\left(\frac{e}{p} = \text{const}\right)$, zatem w myśl zasady wzajemności prędkość akustyczna wytwarzana przez przetwornik przy pracy w charakterze nadajnika jest proporcjonalna do prądu zasilającego I:

$$\dot{X} = \frac{dX}{dt} = \text{const}\, I, \tag{4.3}$$

a więc warunek stałości prędkości objętościowej sprowadza się do warunku utrzymywania stałej wartości prądu zasilającego przetwornik w całym zakresie częstotliwości pomiarowych.

b. Do analogicznych wniosków dojść można rozpatrując mikrofon nadawczy jako przetwornik o charakterze podatnościowym, tj. pracujący poniżej swego rezonansu własnego. W tym zakresie częstotliwości wychylenie membrany jest proporcjonalne do amplitudy siły wymuszającej

$$X = \text{const}\, F_m, \tag{4.4}$$

a więc warunek stałości prędkości drgań jest spełniony, jeśli siła wymuszająca jest odwrotnie proporcjonalna do częstotliwości:

$$F_m = \text{const}\frac{1}{\omega}. \tag{4.5}$$

Ponieważ siła mechaniczna wymuszająca drgania membrany przetwornika pojemnościowego jest wprost proporcjonalna do ładunku elektrycznego

$$F_m = \text{const}\, q = \text{const} \int i\,dt = \text{const}\,\frac{I}{\omega}, \tag{4.6}$$

więc utrzymywanie stałej wartości prądu zasilającego przetwornik gwarantuje tym samym stałość prędkości objętościowej w funkcji częstotliwości.

Ponieważ kontrola prądu pobieranego przez przetwornik pojemnościowy jest pod względem wykonawczym trudna, zastąpiono ją kontrolą napięcia na zaciskach przetwornika, które ze względu na pojemnościowy charakter jego oporności wewnętrznej powinno być odwrotnie proporcjonalne do częstotliwości pomiarowej.

Należy podkreślić, że warunek powyższy realizowano jedynie przy tych pomiarach, których celem było wyznaczenie względnych wartości amplitud ciśnienia akustycznego we wnęce, a więc np. przy określeniu współczynnika dobroci Q.

Przy tych pomiarach natomiast, przy których względna wartość poziomu ciśnienia była rzeczą drugorzędną (wyznaczanie częstotliwości rezonansowych wnęki), utrzymywano z reguły stałą wartość napięcia na zaciskach przetwornika, w związku z czym otrzymane wartości poziomu ciśnienia wzrastały proporcjonalnie do częstotliwości. Niezbędną korekcję wyników można było wprowadzić na drodze obliczeniowej.

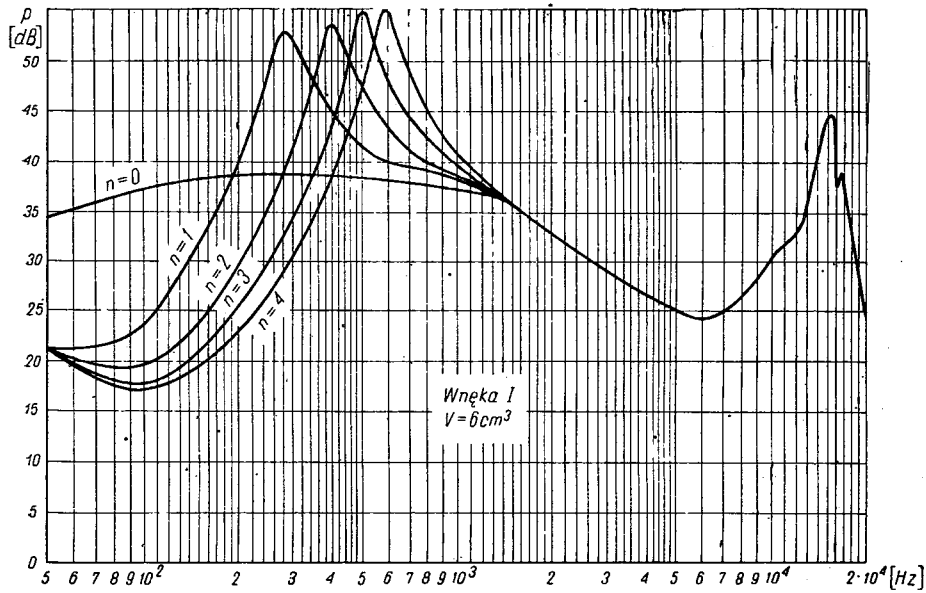
4.4. Wyniki pomiarów

Pierwsza część pomiarów objęła badanie wpływu objętości wnęki oraz ilości czynnych otworów upływnościowych na charakterystykę częstotliwości wnęki. Jakkolwiek zakres częstotliwości pomiarowych obejmował pasmo od 50 Hz do 20000 Hz, to jednak analizę wyników ograniczono zasadniczo na tym etapie pracy do zakresu małych i średnich częstotliwości słyszalnych (50 Hz ÷ 2000 Hz), przy których badaną wnękę można rozpatrywać jako układ o stałych skupionych.

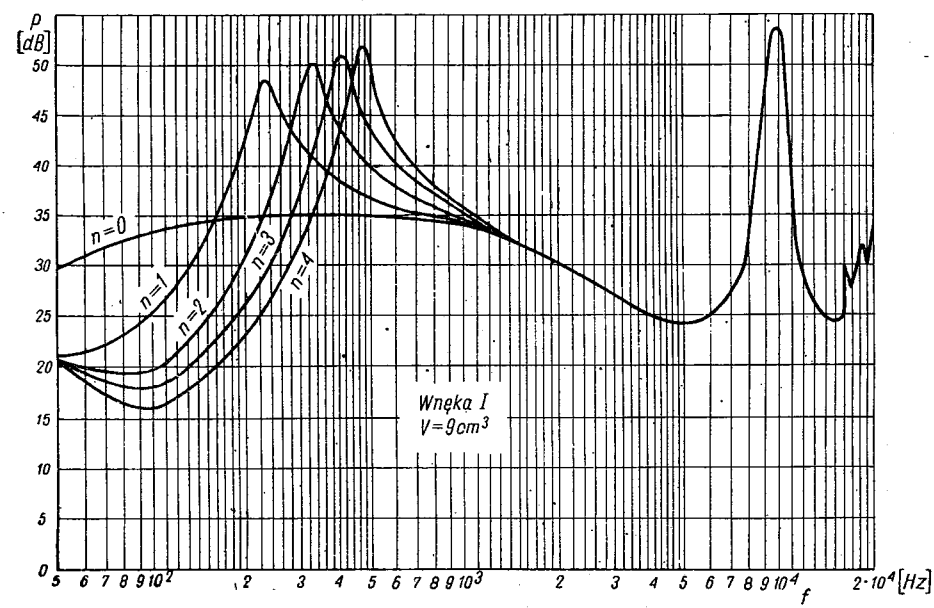
Na rysunkach 18 ÷ 21 podano charakterystyki ciśnienia akustycznego we wnękach w funkcji częstotliwości przy zasilaniu przetwornika nadawczego ze źródła o stałej wartości siły elektromotorycznej. Parametrami pomiarów były: objętość wnęki V oraz ilość czynnych otworów upływnościowych n.

Stwierdzono daleko idącą zgodność wyników pomiarów z obliczeniami teoretycznymi. Poniżej zestawiono wyniki obliczeń i pomiarów częstotliwości rezonansowych wnęk przy różnych ilościach czynnych otworów upływnościowych oraz przy różnych objętościach.

A. Wnęka nr I (rys. 18 i 19)

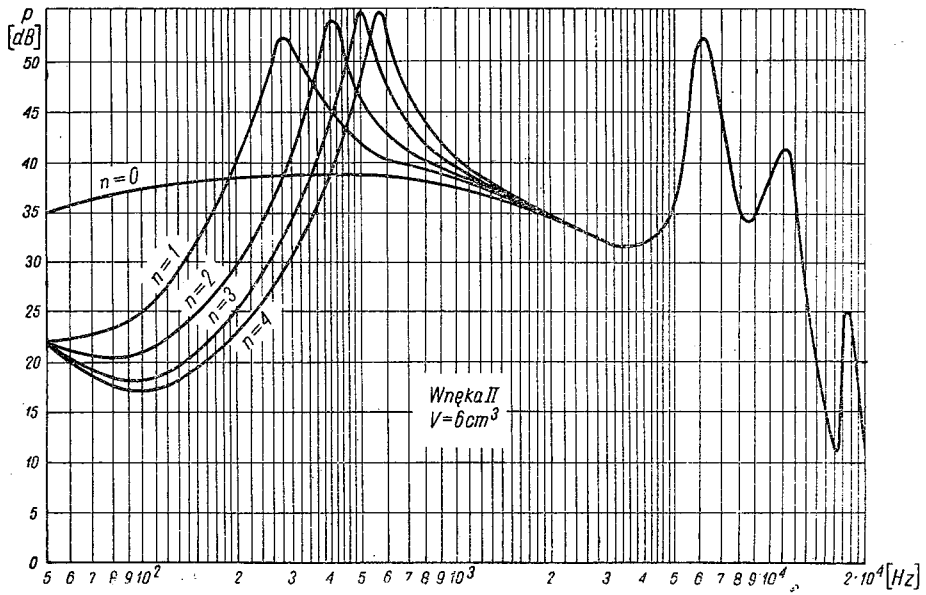


Rys. 18. Charakterystyki rezonansowe wnęki nr I ($V = 6$ cm^3) przy różnej ilości otworów czynnych

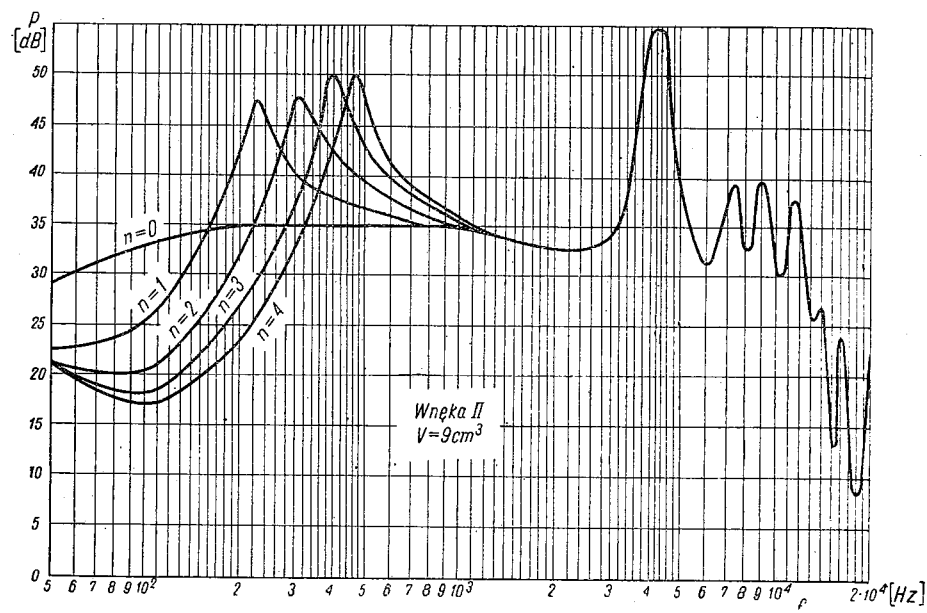


Rys. 19. Charakterystyki rezonansowe wnęki nr I ($V = 9$ cm^3) przy różnej ilości otworów czynnych

B. Wnęka nr II (rys. 20 i rys. 21)



Rys. 20. Charakterystyki rezonansowe wnęki nr II (V = 6 cm³) przy różnej ilości otworów czynnych



Rys. 21. Charakterystyki rezonansowe wnęki nr II (V = 9 cm³) przy różnej ilości otworów czynnych

Na rys. 22 podano porównawcze zestawienie charakterystyk wnęk nr I i nr II przy dwóch otworach czynnych ($n = 2$) oraz przy zamknięciu szczelnym ($n = 0$). Zgodnie z przewidywaniami teoretycznymi charakterystyki obu wnęk pokrywają się niemal dokładnie w zakresie częstotliwości do 2000 Hz; nieznaczne rozbieżności spowodowane są nieuniknionymi tolerancjami w wymiarowaniu wnęk oraz niedokładnościami wykonania otworów upływnościowych. Te same czynniki są przyczyną niewielkich rozbieżności między obliczonymi i pomierzonymi wartościami względnymi częstotliwości rezonansowych obu wnęk (tablice 11 ÷ 14).

Na rys. 23 uwidoczniono jednoczesny wpływ ilości otworów upływnościowych oraz objętości wnęki na jej właściwości rezonansowe. Przytoczone dane dotyczą wnęki nr I, przy czym w celu nadania wykresom większej przejrzystości ograniczano się do najbardziej istotnych z punktu widzenia zastosowań praktycznych zmian parametrów.

Należy podkreślić, że charakterystyka nr 5 odpowiada warunkom akustycznym panującym na błonie bębenka przy zmniejszonym docisku słuchawki do małżowiny ucha; występuje wówczas jednoczesny wpływ zwiększonej upływności (sprzężenie nieszczelne) oraz zwiększonej objętości wnęki ucha.

Druga część pomiarów miała na celu ustalenie wpływu parametrów wnęki na współczynnik dobroci utworzonego przez nią rezonatora akustycznego. W tym celu w układzie pomiarowym podanym na rys. 17 zdjęto charakterystyki rezonansowe obu wnęk doświadczalnych przy objętości nominalnej i zwiększonej odpowiednio o 50% (wnęka nr I) ewentualnie o 56% (wnęka nr II), przy czym parametrem zmiennym była ilość otworów upływnościowych n. Pomiary przeprowadzono przy stałej wartości prędkości objętościowej u wlotu wnęki, w związku z czym otrzymane charakterystyki miały postać rzeczywistych krzywych rezonansowych. Otrzymane wyniki podano na rysunkach 24 i 25; na podstawie charakterystyk wyznaczono metodą graficzną współczynniki dobroci obu wnęk przy różnych wartościach parametrów pomiaru. Zestawienie wyników podano w tablicy 15.

Za podstawę do obliczenia akustycznych parametrów wnęk przyjęto w rozdziałach 3.2. i 4.2. warunki nominalne: $V = V_{nom} = 6$ cm^3, $n = 2$, $f_0 = 400$ Hz, $Q = 5$.

Na podstawie podanej poprzednio analizy wpływu parametrów konstrukcyjnych rezonatora na jego właściwości akustyczne można ustalić zależność funkcjonalną między współczynnikiem dobroci Q układu a ilością otworów czynnych n. Przyjmując jako jedyny parametr zmienny ilość otworów n i ograniczając się do przypadku, gdy długość szyjki l

Tablica 11

Wpływ ilości otworów upływnościowych na częstotliwość rezonansową wnęki nr I

Ilość czynnych otworów	Objętość	f (Hz)		f/f_0	
		Wartości obliczone	Wartości pomierzone	Wartości obliczone	Wartości pomierzone
$n = 1$	Nominalna (6 cm^3)	284	284	0,71	0,70
$n = 2$		400	406	1,00	1,00
$n = 3$		489	500	1,22	1,23
$n = 4$		566	580	1,41	1,43
$n = 1$	Zwiększona o 50%	231	232	0,71	0,70
$n = 2$		326	332	1,00	1,00
$n = 3$		398	410	1,22	1,23
$n = 4$		461	470	1,41	1,42

Tablica 12

Wpływ objętości wnęki nr I na jej częstotliwość rezonansową

Objętość wnęki	Ilość otworów	f (Hz)		f/f_0	
		Wartości obliczone	Wartości pomierzone	Wartości obliczone	Wartości pomierzone
Nominalna	$n = 1$	284	284	0,815	0,817
Zwiększona o 50%		231	232		
Nominalna	$n = 2$	400	406	0,815	0,817
Zwiększona o 50%		326	332		
Nominalna	$n = 3$	489	500	0,815	0,820
Zwiększona o 50%		398	410		
Nominalna	$n = 4$	566	580	0,815	0,812
Zwiększona o 50%		461	470		

Tablica 13

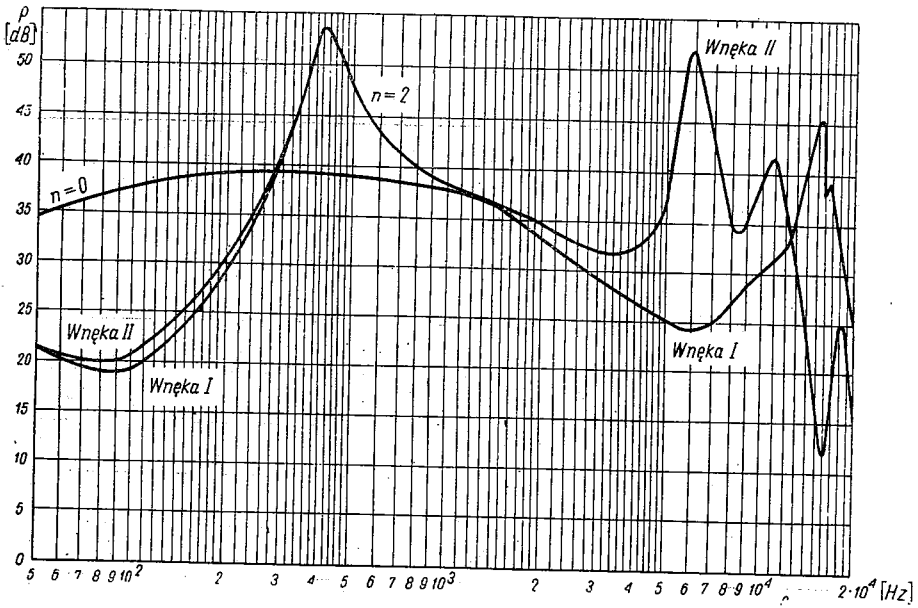
Wpływ ilości otworów upływnościowych na częstotliwość rezonansową wnęki nr I

Ilość czynnych otworów	Objętość	f (Hz)		f/f_0	
		Wartości obliczone	Wartości pomierzone	Wartości obliczone	Wartości pomierzone
$n = 1$	Nominalna (6 cm^3)	284	280	0,71	0,70
$n = 2$		400	400	1,00	1,00
$n = 3$		489	486	1,22	1,215
$n = 4$		566	566	1,41	1,42
$n = 1$	Zwiększona o 56%	227	225	0,71	0.715
$n = 2$		320	314	1,00	1,00
$n = 3$		391	396	1,22	1,26
$n = 4$		452	460	1,41	1,46

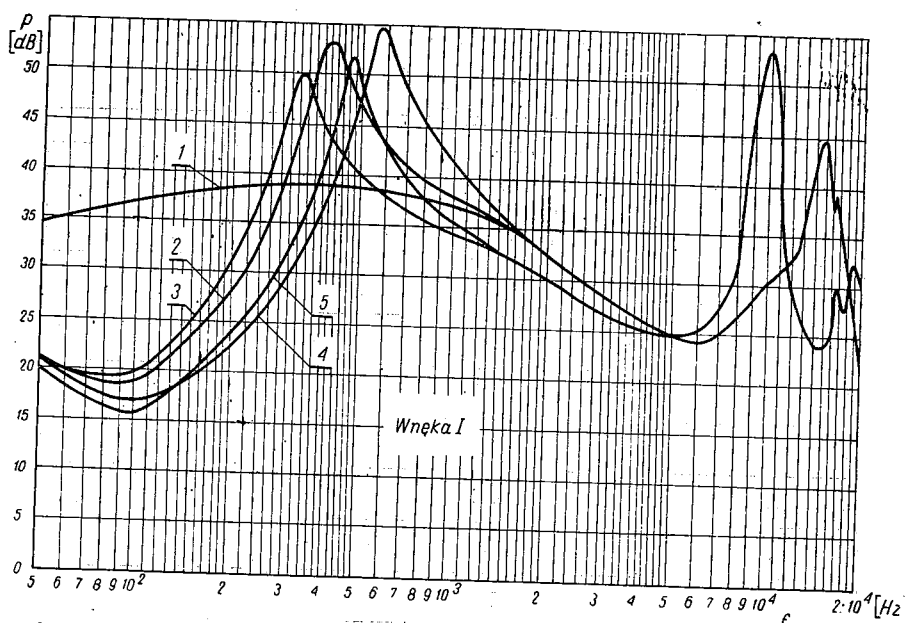
Tablica 14

Wpływ objętości wnęki nr I na jej częstoliwość rezonansową

Objętość wnęki	Ilość otworów	f (Hz)		f/f_0	
		Wartości obliczone	Wartości pomierzone	Wartości obliczone	Wartości pomierzone
Nominalna	$n = 1$	284	280	0,800	0,804
Zwiększona o 56%		227	225		
Nominalna	$n = 2$	400	400	0.800	0,786
Zwiększona o 56%		320	314		
Nominalna	$n = 3$	489	486	0,800	0,815
Zwiększona o 56%		391	396		
Nominalna	$n = 4$	566	566	0,800	0,812
Zwiększona o 56%		452	420		



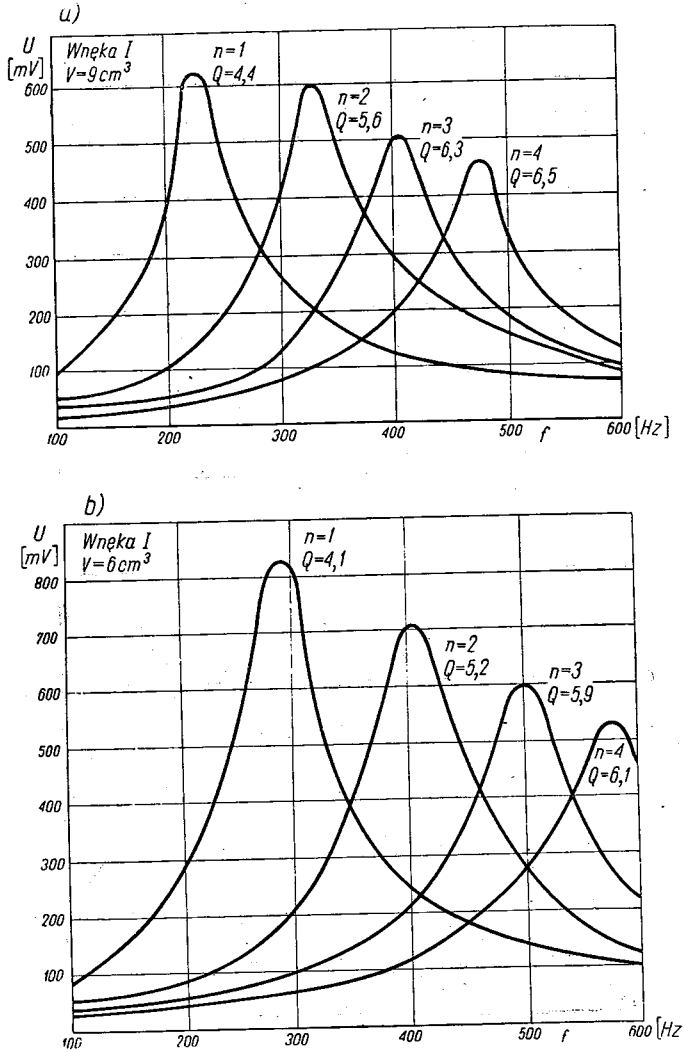
Rys. 22. Porównawcze zestawienie charakterystyk wnęk nr I i nr II ($V = 6$ cm³) przy zamknięciu szczelnym ($n = 0$) i dwóch otworach czynnych ($n = 2$)



Rys. 23. Wpływ ilości otworów czynnych i objętości wnęki nr I na jej właściwości rezonansowe

Krzywe: *1* — $n = 0$, $V = 6$ cm³; *2* — $n = 2$, $V = 6$ cm³; *3* — $n = 2$, $V = 9$ cm³; *4* — $n = 4$, $V = 6$ cm³; *5* — $n = 4$, $V = 9$ cm³

jest znacznie większa od promienia jej przekroju r ($l \gg r$), stwierdzamy, że składowa bezwładnościowa oporności pozornej układu przy rezonan-



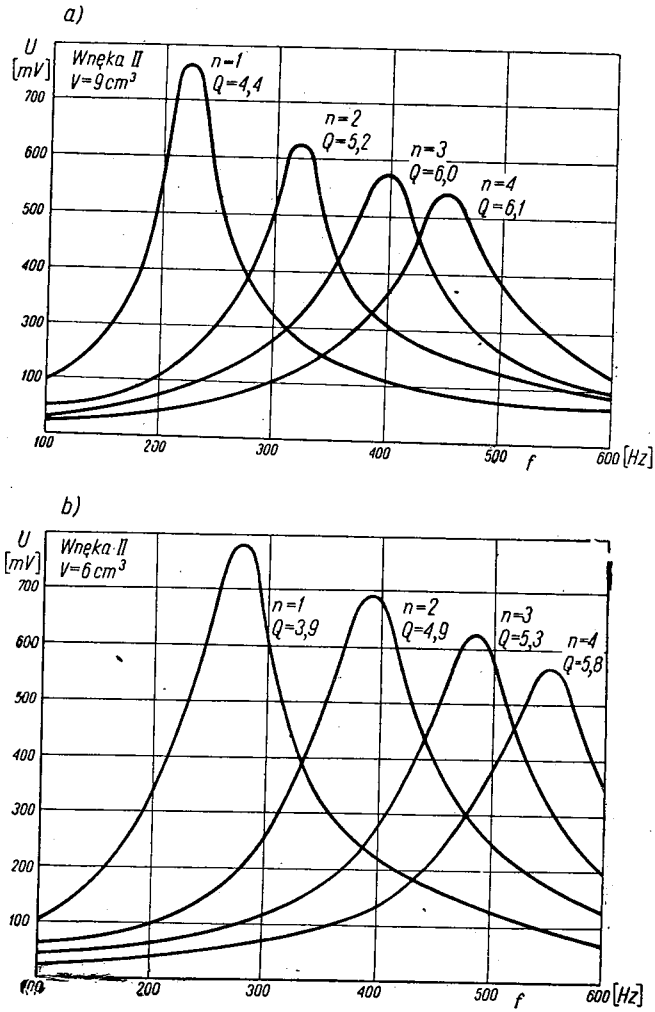
Rys. 24. Wpływ ilości otworów czynnych na właściwości selektywne wnęki nr I w okolicach rezonansu

a) objętość wnęki V = 9 cm³; b) objętość wnęki V = 6 cm³

sie jest odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z ilości otworów wylotowych rezonatora:

$$\omega_{0,n} M_n = \omega_{01} M_1 (n)^{-1/2}, \tag{4.7}$$

gdzie ω_{01} oraz M_1 oznaczają odpowiednio pulsację drgań własnych i masę czynną rezonatora o jednym otworze wylotowym, a ω_{0n} oraz M_n — o n jednakowych otworach wylotowych czynnych jednocześnie.



Rys. 25. Wpływ ilości otworów czynnych na właściwości selektywne wnęki nr II w okolicach rezonansu

a) objętość wnęki V = 9 cm³; b) objętość wnęki V = 6 cm³

Zależność ta ma bezpośrednie uzasadnienie, bowiem wypadkowa masa akustyczna M_n n jednakowych otworów wylotowych połączonych równolegle jest n razy mniejsza od masy akustycznej M_1 jednego otworu

$$M_n = M_1(n)^{-1}, \tag{4.8}$$

a pulsacja rezonansowa ω_0, która zgodnie ze wzorem ogólnym (3.3.) jest funkcją pierwiastkową masy M układu

$$\frac{\omega_{0n}}{\omega_{01}} = \left(\frac{M_n}{M_1}\right)^{-1/2}, \tag{4.9}$$

przy uwzględnieniu (4.8) spełnia warunek

$$\frac{\omega_{0n}}{\omega_{01}} = (n^{-1})^{-1/2} = (n)^{1/2}. \tag{4.10}$$

Tablica 15

Współczynniki dobroci Q oraz częstotliwości rezonansowe f_0 wnęk nr I i nr II przy różnej wartości parametrów n oraz V

Typ wnęki		Objętość nominalna				Objętość zwiększona			
		Ilość czynnych otworów				Ilość czynnych otworów			
		$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
nr I (krótka)	f_0	284	406	500	580	232	332	410	470
	Q	4,1	5,2	5,9	6,1	4,4	5,6	6,3	6,5
nr II (wydłużona)	f_0	280	400	486	566	225	314	396	460
	Q	3,9	4,9	5,2	5,8	4,4	5,2	6,0	6,1

Podobnie całkowita oporność strat R_{cn} n jednakowych otworów wylotowych połączonych równolegle jest n razy mniejsza od oporności strat R_{c1} pojedynczego otworu, o ile nie uwzględni się występującego jednocześnie wpływu zmiany pulsacji rezonansowej na powierzchniową oporność strat ϱ_t otworu [patrz wzór (3.13)]. Ponieważ jednak uproszczenie takie jest niedopuszczalne, ścisła zależność wypadkowej oporności strat R_{cn} od ilości otworów n, przy uwzględnieniu warunku (4.10), ma postać:

$$R_{cn} = R_{c1}(n)^{-3/4}. \tag{4.11}$$

Współczynnik dobroci układu Q (3.10) jest więc funkcją ilości otworów n, przy czym na podstawie wzorów (4.7) i (4.11) zależność tę można wyrazić w postaci

$$Q_n = Q_1(n)^{1/4}, \tag{4.12}$$

gdzie Q_1 i Q_n są odpowiednio współczynnikami dobroci rezonatora o jednym lub o n otworach wylotowych.

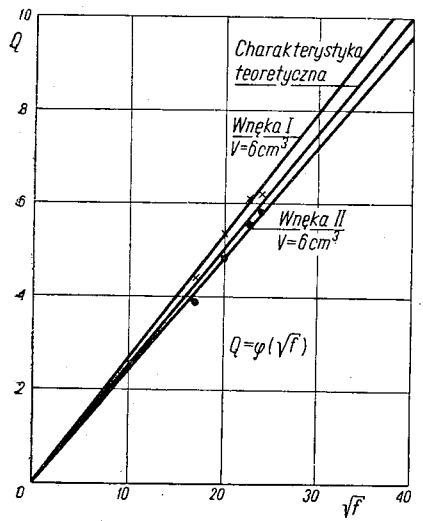
Pamiętając z kolei, że zgodnie z warunkiem (4.10) częstotliwość rezonansowa układu f_0 jest w przybliżeniu wprost proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z ilości otworów n, zależność (4.12) można przedstawić w sposób następujący:

$$Q_n = Q_1 (f_0)^{1/2}, \tag{4.13}$$

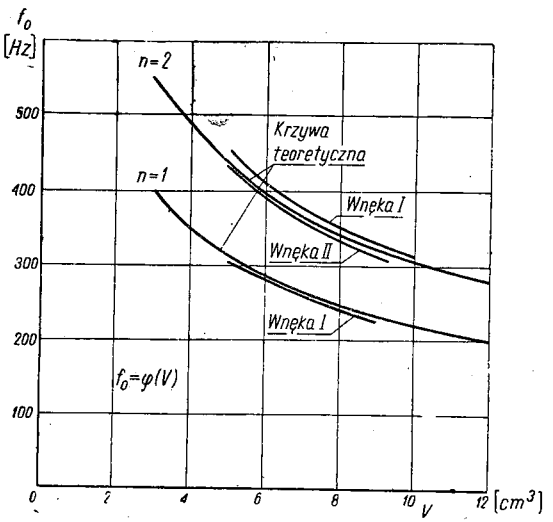
gdzie f_0 jest w rozpatrywanym przypadku wyłącznie funkcją ilości otworów n, ze względu na założoną z góry stałość pozostałych parametrów układu.

Wyniki pomiarów zestawione w tablicy 15 potwierdzają słuszność powyższych rozważań teoretycznych. Jakkolwiek współczynnik dobroci Q pomierzony w warunkach nominalnych odbiega nieco od wartości założonej, czego przyczyną są zarówno błędy pomiarowe i obliczeniowe, jak i nieuniknione tolerancje warsztatowe, to jednak otrzymana zgodność wyników pomiarów i obliczeń jest wystarczająca do celów zastosowań praktycznych.

Na rys. 26 zestawiono zdjęte eksperymentalnie charakterystyki współczynnika dobroci Q wnęk nr I i II (6 cm^3) w funkcji częstotliwości rezonansowej f_0 zmienianej ilością otworów czynnych. Przebieg charakterystyk jest na ogół zgodny z charakterystyką teoretyczną obliczoną wg wzoru (4.13) dla wnęki o objętości $V = 6$ cm^3, co potwierdza słuszność rozważań teoretycznych. Podobnie na rys. 27 podano pomierzone



Rys. 26. Współczynniki dobroci wnęk nr I i nr II ($V = 6$ cm^3) w funkcji częstotliwości zmienianej ilością otworów czynnych



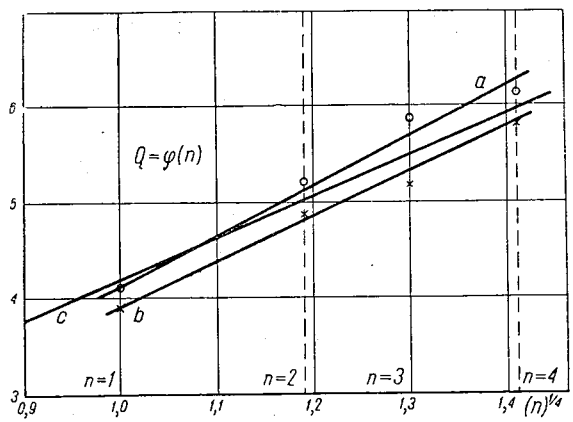
Rys. 27. Częstotliwość rezonansowa wnęk nr I i nr II w funkcji objętości

i obliczone charakterystyki częstotliwości rezonansowej f_0 wnęk nr I i nr II w funkcji ich objętości, przy jednym ($n = 1$) i dwóch ($n = 2$) otworach czynnych.

Porównanie wyników pomiarów i obliczeń wykazuje, że odtworzenie w układzie zastępczym założonych z góry właściwości rezonansowych wnęki ucha w oparciu o ogólną teorię akustycznych rezonatorów wnękowych jest całkowicie realne i daje dokładność wystarczającą do celów zastosowań praktycznych przy konstrukcji wnęki sztucznego ucha.

Jednocześnie należy podkreślić, że wyprowadzona poprzednio zależność (4.12), określająca związek funkcjonalny między współczynnikiem dobroci Q rezonatora a ilością otworów czynnych, ma charakter najzupełniej ogólny, co może mieć znaczenie praktyczne przy konstruowaniu rezonatorów akustycznych o założonym z góry współczynniku dobroci lub o zmienianych właściwościach rezonansowych. Według informacji posiadanych przez autora w literaturze fachowej nie poruszano dotychczas zagadnienia właściwości selektywnych rezonatora Helmholtza o kilku jednakowych otworach wylotowych czynnych równocześnie. Jedynie Ingard [15] omówił fragmentarycznie wpływ ilości otworów rezonatora na jego selektywność, ograniczając się jednak do przypadku zastąpienia jednego otworu wylotowego o przekroju S przez n jednakowych otworów o przekroju S_n tak dobranym, aby częstotliwość rezonansowa układu nie uległa zmianie.

Porównawcze zestawienie pomierzonych i obliczonych charakterystyk współczynnika dobroci wnęki nr I i nr II w funkcji ilości czynnych otworów wylotowych podano na rys. 28.



Rys. 28. Pomierzone i obliczone charakterystyki współczynników dobroci wnęk nr I i nr II w funkcji ilości czynnych otworów upływnościowych

a — wnęka I 6 cm³; b — wnęka II 6 cm³; c — charakterystyka teoretyczna

W celu zbadania wpływu materiału ścianek rezonatora na jego właściwości rezonansowe wykonano doświadczalną wnękę o kształcie i wymiarach analogicznych jak wnęka nr I, lecz z drzewa bukowego. Pomiary wykazały, że zjawisko pochłaniania energii akustycznej przez ścianki rezonatora nie ma praktycznie wpływu na częstotliwość rezonansową oraz współ-

czynnik dobroci układu. Wynik ten potwierdza słuszność poczynionych uprzednio założeń, w myśl których jedynym źródłem strat były straty tarciowe i cieplne w otworach wylotowych wnęki. Okazało się jednocześnie, że przy konstruowaniu wnęki sztucznego ucha stosować można w zasadzie dowolny materiał (drzewo, bakelit, metal niemagnetyczny); jedynym argumentem przemawiającym za stosowaniem wnęk metalowych (np. mosiądz) jest stałość ich konstrukcji w funkcji czasu i warunków atmosferycznych.

4.5. Wnioski

Przeprowadzona analiza teoretyczna poparta badaniami eksperymentalnymi pozwala na wyciągnięcie następujących wniosków, ważnych z punktu widzenia zastosowań praktycznych.

a) O właściwościach akustycznych wnęki sztucznego ucha w zakresie małych i średnich częstotliwości decyduje wyłącznie jej objętość oraz kształt i ilość otworów upływnościowych, symbolizujących nieszczelność sprzężenia słuchawki z uchem.

b) Właściwości rezonansowe wnęki ucha naturalnego sprzężonego ze słuchawką można odtworzyć w akustycznym układzie zastępczym, którego parametry (objętość, kształt i ilość otworów upływnościowych) dadzą się obliczyć na drodze analitycznej.

c) Zgodność wyników pomiarów właściwości rezonansowych (częstotliwości rezonansowej, współczynnika dobroci) układu zastępczego z wynikami obliczeń analitycznych jest całkowicie zadowalająca z punktu widzenia zastosowań praktycznych, zwłaszcza jeśli się uwzględni znaczne rozbieżności indywidualne uszu poszczególnych ludzi.

d) Optymalne zbliżenie do właściwości rezonansowych ucha naturalnego w zakresie małych i średnich częstotliwości akustycznych daje wnęka dowolnego kształtu o objętości $V = 6$ cm^3, częstotliwości rezonansowej $f_0 = 400$ Hz i współczynniku dobroci $Q = 5$.

e) Wymienione wyżej właściwości rezonansowe wnęki układu zastępczego o objętości 6 cm^3 zrealizować można za pomocą różnej liczby otworów upływnościowych o odpowiednio dobranych wymiarach. Jednym z rozwiązań, wygodnym z konstrukcyjnego punktu widzenia, jest zastosowanie dwóch otworów upływnościowych w postaci rurek o średnicy $2r = 1{,}6$ mm i długości $l = 8{,}5$ mm każda.

f) Zastosowanie odpowiednio zaprojektowanych otworów upływnościowych we wnęce sztucznego ucha jest konieczne dla prawidłowego odtworzenia właściwości rezonansowych ucha naturalnego, które z reguły jest sprzężone ze słuchawką w sposób nieszczelny wskutek istnienia opływności między małżowiną ucha i muszlą słuchawki.

Ten ostatni punkt wymaga dokładniejszego omówienia ze względu na występujące obecnie tendencje do stosowania układów zastępczych w postaci wnęk zamkniętych. Jak wynika z rozważań teoretycznych, popartych doświadczeniami, wnęka zamknięta pozbawiona jest całkowicie właściwości rezonansowych, posiadając w zakresie średnich i małych częstotliwości akustycznych płaską charakterystykę przenoszenia (patrz rys. 18 ÷ 23). Zasadniczym celem obiektywnych metod badania słuchawek jest odtworzenie ich właściwości występujących w warunkach normalnego użytkowania, czyli stwierdzanych metodami subiektywnymi. Jest rzeczą oczywistą, że charakterystyka skuteczności słuchawki zdjęta w układzie sztucznego ucha w postaci wnęki szczelnie zamkniętej będzie w zakresie małych i średnich częstotliwości akustycznych w y i d e a l i z o w a n a w stosunku do tej samej charakterystyki zdjętej metodą subiektywną, którą — jak stwierdzono na wstępie — uznać należy za jedyne właściwe kryterium jakości obiektu badanego.

W literaturze fachowej można spotkać wypowiedzi, które motywują celowość stosowania wnęk zamkniętych faktem, że upływność występująca między małżowiną ucha i muszlą słuchawki jest parametrem zmiennym, zależnym od kształtu muszli słuchawki, od indywidualnych właściwości anatomicznych ucha oraz od siły docisku słuchawki. Zwolennicy wnęk zamkniętych twierdzą, że korzystniej jest badać słuchawkę w warunkach wprawdzie znacznie różniących się od warunków jej użytkowania, ale za to eliminujących parametr zmienny od przypadku do przypadku i niewyznaczalny rachunkowo. Pogląd taki, reprezentowany między innymi w Stanach Zjednoczonych A. P., gdzie lansuje się wzorzec sztucznego ucha w postaci wnęki całkowicie zamkniętej o objętości 6 cm^3 (normy amerykańskie Z.24.9, J. A. S. A., t. 22, nr 5, wrzesień 1950, s. 602), wydaje się być najzupełniej niesłuszny, gdyż — jak wykazano w niniejszej pracy — zmiany warunków sprzężenia słuchawki badanej z uchem objawiają się jedynie niewielką zmianą położenia i wysokości wierzchołka rezonansu wnęki i w zasadzie nie wpływają na istotny kształt charakterystyki.

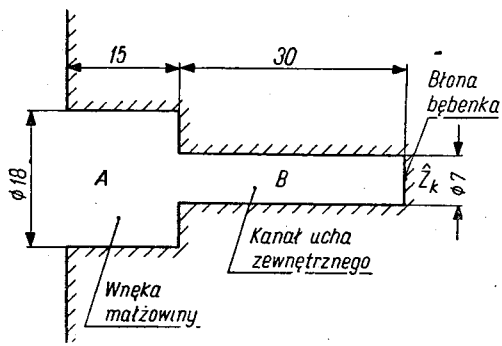
O ile stosowanie wnęk zamkniętych przy porównawczym badaniu seryjnym słuchawek o k r e ś l o n e g o t y p u np. do celów kontroli produkcji da się uzasadnić nieznacznym wprawdzie uproszczeniem konstrukcji układu zastępczego, to rozwiązanie takie nie wytrzymuje krytyki przy laboratoryjnych pomiarach, których celem jest ocena i porównanie właściwości akustycznych słuchawek różnych typów, a przede wszystkim przy badaniu modeli i prototypów, które z reguły badane być muszą w warunkach jak najbardziej zbliżonych do warunków ich użytkowania.

5. PRZEBIEGI FALOWE WE WNĘCE SZTUCZNEGO UCHA

5.1. Wstęp

Dotychczasowe rozważania przeprowadzone w założeniu, że wnęka małżowiny i kanał ucha zewnętrznego przedstawiają układ akustyczny o stałych skupionych, słuszne są jedynie w ograniczonym zakresie małych i średnich częstotliwości pasma akustycznego, kiedy długość fali dźwiękowej λ jest znacznie większa od wymiarów geometrycznych wnęk ucha (przede wszystkim od długości). Począwszy od częstotliwości, przy których długość fali λ staje się porównywalna z długością wnęk ucha, poprzednie rozważania zawodzą i muszą być zastąpione teorią falową przebiegów dźwiękowych w układach o stałych rozłożonych w sposób ciągły.

Uproszczony „anatomiczny" model ucha zewnętrznego przedstawić można w postaci układu podanego na rys. 29.



Rys. 29. Uproszczony anatomiczny model ucha zewnętrznego

Należy podkreślić, że wymiary geometryczne podane na rysunku odpowiadają przeciętnym wymiarom normalnego ucha ludzkiego i w indywidualnych przypadkach wykazywać mogą niewielkie odchylenia od tych wartości.

Podstawowym elementem akustycznym wnęki ucha jest rura o przekroju kołowym, średnicy a i długości l. Poniżej podana analiza ma na celu sprawdzenie możliwości odtworzenia właściwości akustycznych wnęki ucha za pomocą układu zastępczego o stałych rozłożonych o możliwie prostej konstrukcji, określonej w sposób jednoznaczny przez parametry dające się łatwo zmierzyć dostępnymi w praktyce metodami.

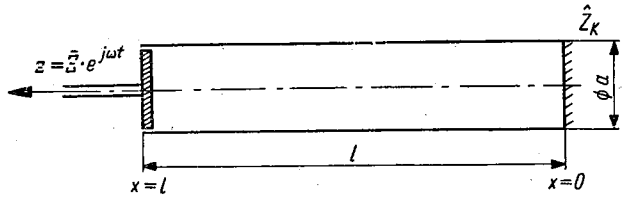
5.2. Fale dźwiękowe w rurze o skończonej długości

Przyjmując za punkt wyjścia do dalszych rozważań rurę o długości l i przekroju kołowym $S = \pi\frac{a^2}{4} = \pi r^2$, zasilaną w punkcie początkowym ($x = l$) przez źródło dźwięku w postaci tłoka drgającego ruchem sinusoidalnym prostym o równaniu

$$\Xi = \bar{\Xi} e^{j\omega t} \tag{5.1}$$

i zamkniętą na końcu ($x = 0$) opornością $\hat{Z}_k$, otrzymamy układ podany na rys. 30.

Układ taki można traktować jako tor akustyczny o stałych rozłożonych w sposób ciągły.



Rys. 30. Falowód akustyczny

Wychodząc z ogólnego równania różniczkowego potencjału prędkości fali płaskiej

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \tag{5.2}$$

i korzystając z zależności

$$p = -\varrho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{5.3}$$

oraz

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{5.4}$$

można wyprowadzić równania różniczkowe fali dźwiękowej w rurze

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \varrho_0 \frac{\partial v}{\partial t}, \tag{5.5a}$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\varrho_0 c^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial t}, \tag{5.5b}$$

które z formalnego punktu widzenia są odpowiednikami równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych napięcia i prądu w torze elektrycznym

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t}, \tag{5.6a}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + C\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{5.6b}$$

przy pominięciu strat ($R = 0$, $G = 0$).

Przez analogię do zjawisk zachodzących w torach elektrycznych wyrażenia na wartości chwilowe ciśnienia akustycznego i prędkości drgań w przekroju x można przedstawić w postaci

$$p = \hat{A}e^{j\omega t + \hat{\gamma}x} + \hat{B}e^{j\omega t - \hat{\gamma}x}, \tag{5.7a}$$

$$v = \frac{\hat{A}}{\hat{Z}_f} e^{j\omega t + \hat{\gamma}x} - \frac{\hat{B}}{\hat{Z}_f} e^{j\omega t - \hat{\gamma}x}, \tag{5.7b}$$

gdzie:

$\hat{Z}_f$ — akustyczna oporność falowa rury,

$\hat{A}$ i $\hat{B}$ — stałe w postaci wielkości zespolonych (funkcje odległości), które można wyznaczyć z warunków brzegowych),

$\hat{\gamma} = \alpha + j\beta$ — tamowność falowa rury, a α i β — odpowiednio tłumienność jednostkowa i przesuwność jednostkowa.

Wyrazy w postaci $f_1(j\omega t + \hat{\gamma}x)$ przedstawiają sobą fale pierwotne ciśnienia i prędkości biegnące w kierunku $-x$, a wyrazy $f_2(j\omega t - \hat{\gamma}x)$ — odpowiednio fale odbite od końca rury i biegnące w kierunku $+x$, jeżeli za początek układu współrzędnych przyjąć koniec rury.

Zakładając, że na końcu rury ($x = 0$) panuje ciśnienie akustyczne $\hat{P} = \hat{P}_k$ oraz zakładając prędkość $\hat{V} = \hat{V}_k$ otrzymujemy

$$\hat{P}_k = \hat{A} + \hat{B}, \tag{5.8a}$$

$$\hat{V}_k = \frac{\hat{A} - \hat{B}}{\hat{Z}_f}, \tag{5.8b}$$

czyli

$$\hat{A} = \frac{1}{2}(\hat{P}_k + \hat{V}_k\hat{Z}_f) = \frac{\hat{P}_k}{2}\left(1 + \frac{\hat{Z}_f}{\hat{Z}_k}\right), \tag{5.9}$$

$$\hat{B} = \frac{1}{2}(\hat{P}_k - \hat{V}_k\hat{Z}_f) = \frac{\hat{P}_k}{2}\left(1 - \frac{\hat{Z}_f}{\hat{Z}_k}\right), \tag{5.10}$$

gdzie $\hat{Z}_k = \frac{\hat{P}_k}{\hat{V}_k}$ jest akustyczną opornością obciążenia rury. Wielkości $\hat{A}$ i $\hat{B}$ przedstawiają odpowiednio ciśnienia akustyczne fali pierwotnej i odbitej w punkcie położonym na końcu rury.

Podstawiając wyrażenie na $\hat{A}$ i $\hat{B}$ do równań (5.7a) i (5.7b) otrzymujemy równania falowe rury w punkcie odległym o x od jej końca

$$\hat{P}_x = \frac{\hat{P}_k}{2}\left(1 + \frac{\hat{Z}_f}{\hat{Z}_k}\right)e^{\hat{\gamma}x} + \frac{\hat{P}_k}{2}\left(1 - \frac{\hat{Z}_f}{\hat{Z}_k}\right)e^{-\hat{\gamma}x}, \tag{5.11a}$$

$$\hat{V}_x = \frac{\hat{V}_k}{2}\left(1 + \frac{\hat{Z}_k}{\hat{Z}_f}\right)e^{\hat{\gamma}x} + \frac{\hat{V}_k}{2}\left(1 - \frac{\hat{Z}_k}{\hat{Z}_f}\right)e^{-\hat{\gamma}x} \tag{5.11b}$$

lub po wprowadzeniu funkcji hiperbolicznych

$$\hat{P}_x = \hat{P}_k\left(\cosh\hat{\gamma}\,x + \frac{\hat{Z}_f}{\hat{Z}_k}\sinh\hat{\gamma}\,x\right), \tag{5.12a}$$

$$\hat{V}_x = \hat{V}_k\left(\cosh\hat{\gamma}\,x + \frac{\hat{Z}_k}{\hat{Z}_f}\sinh\hat{\gamma}\,x\right). \tag{5.12b}$$

Oporność akustyczna rury w przekroju odległym o x od jej końca wyraża się na podstawie (5.12a) i (5.12b) wzorem

$$\hat{Z}_x = \frac{\hat{P}_x}{\hat{V}_x} = \hat{Z}_f\frac{\hat{Z}_k + \hat{Z}_f\operatorname{tgh}\hat{\gamma}\,x}{\hat{Z}_f + \hat{Z}_k\operatorname{tgh}\hat{\gamma}\,x}. \tag{5.13}$$

Wzory (5.12a) i (5.12b) określają rozkład ciśnienia lub prędkości w dowolnym przekroju rury w zależności od warunków panujących na jej końcu. Chcąc otrzymać odpowiednie wzory określające ciśnienie i prędkość w przekroju rury odległym o x od jej wlotu w zależności od wartości $\hat{P}_0$ i $\hat{V}_0$ u wlotu, należy do (5.12a) i (5.12b) podstawić $(-x)$ zamiast x, co jest równoznaczne z przeniesieniem początku układu współrzędnych z końca linii na jej początek. Otrzymujemy wówczas

$$\hat{P}_x = \hat{P}_0\left(\cosh\hat{\gamma}\,x - \frac{\hat{Z}_f}{\hat{Z}_0}\sinh\hat{\gamma}\,x\right), \tag{5.14a}$$

$$\hat{V}_x = \hat{V}_0\left(\cosh\hat{\gamma}\,x - \frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}_f}\sinh\hat{\gamma}\,x\right). \tag{5.14b}$$

Wreszcie oporność wejściową rury o długości l zamkniętej na końcu ($x = l$) opornością obciążenia $\hat{Z}_k$ wyrazić można ze wzoru (5.13) wzorem

$$\hat{Z}_w = \hat{Z}_f\frac{\hat{Z}_k + \hat{Z}_f\operatorname{tgh}\hat{\gamma}\,l}{\hat{Z}_f + \hat{Z}_k\operatorname{tgh}\hat{\gamma}\,l}. \tag{5.15}$$

Wyprowadzone wyżej równania falowe przebiegów akustycznych w rurze wykazują całkowitą zgodność formalną z odpowiednimi równaniami falowymi w torach elektrycznych. Fizyczna interpretacja tych równań jest analogiczna jak w przypadku przebiegów elektrycznych, pod warunkiem, że w obu porównywanych systemach ustali się układ odpowiadających sobie wielkości elektrycznych i akustycznych.

5.3. Interpretacja fizyczna analogii elektroakustycznych w odniesieniu do przebiegów falowych w rurze

Przytoczona wyżej analiza matematyczna przebiegów falowych na płaszczyźnie zjawisk akustycznych miała charakter czysto formalny, co prowadzić może do nieporozumień w przypadku automatycznego stoso-

wania jej wyników do obliczania układów akustycznych bez wnikania w sens fizyczny zachodzących zjawisk. Przyczyną tego jest wieloznaczność pojęcia oporności w akustyce, w przeciwieństwie do pojęcia oporności elektrycznej, która w sposób jednoznaczny określona jest stosunkiem napięcia do prądu w określonym punkcie lub elemencie układu.

Z analizy stosowanego w akustyce pojęcia oporności wynika [22], że pojęcie to można wyrazić w zasadzie za pomocą trzech kombinacji utworzonych z czterach podstawowych wielkości fizycznych charakteryzujących przebiegi drganiowe:

siły mechanicznej $\hat{F}_m$, prędkości liniowej $\hat{v}$,

ciśnienia $\hat{p}$, prędkości objętościowej $\hat{V} = v\hat{S}$,

gdzie S jest powierzchnią rozpatrywanego układu akustycznego.

W zależności od utworzonej kombinacji wynikają następujące rodzaje oporności:

a) oporność mechaniczna $\hat{Z}_m = \frac{\hat{F}_m}{\hat{v}}$ [gs^{-1}],

b) oporność akustyczna jednostkowa: $\hat{z}_a = \frac{\hat{p}}{\hat{v}}$ [gs^{-1} cm^{-2}],

c) oporność akustyczna

(tzw. oporność układu): $\hat{Z}_a = \frac{\hat{p}}{\hat{V}}$ [gs^{-1} cm^{-4}].

Należy ustalić, która z tych oporności jest najdogodniejsza przy obliczaniu układów akustycznych.

Niech układem odniesienia przy dalszych rozważaniach będzie tor elektryczny o właściwościach określonych układem równań różniczkowych (5.6), którego parametry R, G, L, C oznaczają odpowiednio oporność, upływność, indukcyjność i pojemność toru na jednostkę jego długości.

Wielkościami charakteryzującymi tor są:

a) oporność falowa $\hat{Z}_f = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$, wielkość w ogólnym przypadku zespolona, która dla toru bez strat przybiera wartość rzeczywistą $Z_f = \sqrt{\frac{L}{C}}$,

b) tamowność falowa $\hat{\gamma} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta$, która w przypadku toru bezstratnego sprowadza się do przesuwności jed-

nostkowej $\beta = \omega\sqrt{LC}$, gdyż tłumienność jednostkowa α dla $R = G = 0$ staje się równa zeru.

Odpowiednikami równań elektrycznych (5.6) są równania akustyczne (5.5), które przy uwzględnieniu strat komplikują się nieco. Straty na pochłanianie energii akustycznej w rurze bez względu na ich charakter fizyczny uznać można w pierwszym przybliżeniu za proporcjonalne do prędkości drgań cząsteczek v; w związku z tym równanie (5.5a) przy uwzględnieniu strat sprowadzi się do postaci

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = R_s v + \varrho_0 \frac{\partial v}{\partial t} \tag{5.16}$$

będącej ścisłym odpowiednikiem równania elektrycznego (5.6a). Wielkość R_s o wymiarze [gs^{-1} cm^{-3}], którą nazwać można jednostkową opornością strat, wyraża łączne [1] straty energii akustycznej w jednostce objętości ośrodka.

Równanie akustyczne (5.5b) przy uwzględnieniu strat nie ulegnie zmianie, jakkolwiek formalnie biorąc można by wydzielić z ogólnych strat pewną ich część, która wywołana byłaby rozpraszaniem energii w kierunku prostopadłym do kierunku rozchodzenia się fali, jak to ma miejsce w upływności G toru elektrycznego. Wydaje się jednak, że ujęcie takie byłoby nieco sztuczne i komplikowałoby jedynie zagadnienie.

Parametrami falowodu akustycznego są następujące wielkości fizyczne występujące w postaci stałych w równaniach (5.5b) i (5.16):

a) jednostkowa oporność strat R_s [gs^{-1} cm^{-3}],

b) jednostkowa masa akustyczna na jednostkę długości rury ϱ_0 [gcm^{-3}],

c) jednostkowa podatność akustyczna na jednostkę długości rury $\frac{1}{\varrho_0 c^2}$ [g^{-1} $cm \cdot s^2$].

Wielkości te są odpowiednikami stałych elektrycznych R, L, C.

Przez analogię do układu elektrycznego tamowność falową fali dźwiękowej $\hat{\gamma}$ wyrazić można jako

$$\hat{\gamma} = \sqrt{(R_s + j\omega\varrho_0)\, j\omega \frac{1}{\varrho_0 c^2}} = j\beta\sqrt{1 - j\frac{R_s}{\varrho_0 \omega}}. \tag{5.17}$$

Przy małych wartościach oporności strat $\left(\frac{R_s}{\varrho_0 \omega} \ll 1\right)$ wyrażenie

[1] Podział strat energii akustycznej ze względu na ich charakter fizyczny przeprowadzony zostanie w rozdziale 5.4.

$\left(1 - j\frac{R_s}{\varrho_0 \omega}\right)^{1/2}$ można rozwinąć na szereg potęgowy, uwzględniając następnie tylko dwa pierwsze jego wyrazy. Wówczas wyrażenie (5.17) na tamowność falową przybiera postać

$$\hat{\gamma} \approx \frac{R_s}{2\varrho_0 c} + j\beta = \alpha + j\beta, \tag{5.18}$$

gdzie człon $\alpha = \frac{R_s}{2\varrho_0 c}$ jest tłumiennością jednostkową rury. W przypadkach rury bezstratnej tamowność falowa sprowadza się, jak w przypadku bezstratnego toru elektrycznego, do przesuwności jednostkowej β.

Przez analogię do odpowiedniej wielkości elektrycznej oporność falową rury można wyrazić za pomocą wzoru:

$$\hat{Z}_f = \sqrt{\left(\frac{R_s + j\omega\varrho_0}{j\omega}\right)\varrho_0 c^2} = \sqrt{\left(\varrho_0 - j\frac{R_s}{\omega}\right)\varrho_0 c^2}\,. \tag{5.19}$$

Przy pominięciu strat oporność falowa rury upraszcza się do postaci

$$Z_f = \varrho_0 c, \tag{5.22}$$

przedstawiającej akustyczną oporność właściwą ośrodka.

Wynika stąd, że system analogii elektroakustycznych w odniesieniu do przebiegów falowych w torach długich może być oparty na następującym układzie wielkości wzajemnie sobie odpowiadających:

Wielkości elektryczne		*Wielkości akustyczne*	
Napięcie	u	Ciśnienie akustyczne	p
Prąd	i	Prędkość cząsteczek	v
Indukcyjność jednostkowa	L	Masa akustyczna jednostkowa na jednostkę długości (gęstość)	ϱ_0
Pojemność jednostkowa	C	Podatność akustyczna jednostkowa na jednostkę długości	$\frac{1}{\varrho_0 c^2}$
Oporność szeregowa jednostkowa	R	Jednostkowa oporność strat na jednostkę długości	R_s
Oporność falowa	Z_f	Akustyczna oporność falowa jednostkowa	$Z_f = \frac{p}{v} \approx \varrho_0 c$
Tamowność falowa	$\hat{\gamma} = \alpha + j\beta$	Tamowność falowa	$\hat{\gamma} \approx \frac{R_s}{2\varrho_0 c} + j\beta$

Przyjęcie powyższego systemu analogii wymaga konsekwentnego operowania równaniami (5.12), (5.13) i (5.14). W tym przypadku zarówno oporność falowa, jak i oporność w dowolnym przekroju rury mają charakter oporności akustycznych jednostkowych, tzn. odniesionych do jednostki powierzchni odpowiedniego przekroju rury, i wyrażane są w omach akustycznych jednostkowych [$gs^{-1}cm^{-2}$]. W związku z tym oporność obciążenia rury na jej końcu ($\hat{Z}_k$), podawaną najczęściej w warunkach praktycznych w postaci oporności mechanicznej $\hat{Z}_m$ [gs^{-1}], należy najpierw przetransponować na oporność akustyczną jednostkową zgodnie z zależnością

$$\hat{z}_a = \frac{\hat{Z}_m}{S}, \tag{5.21}$$

gdzie S jest powierzchnią rozpatrywanego przekroju. Odpowiednio do tego prędkość drgań cząsteczek v ma charakter fizyczny i wymiar prędkości liniowej [cms^{-1}].

Podany wyżej układ analogii, stosowany z reguły przy analizie rozchodzenia się fali dźwiękowej płaskiej w przestrzeni nieograniczonej, nie jest jedynym, jaki można stosować przy rozwiązywaniu przebiegów falowych w rurach. Traktując ośrodek wypełniający rurę o długości l i przekroju $S = \frac{\pi a^2}{4}$ jako:

masę akustyczną M_a

$$M_a = \frac{\varrho_0 l}{S} \quad [gcm^{-4}], \tag{5.22}$$

podatność akustyczną C_a

$$C_a = \frac{S l}{\varrho_0 c^2} \quad [g^{-1} cm^4 s^{-2}], \tag{5.23}$$

oraz oporność strat R_a

$$R_a = R_s \frac{l}{S} \quad [gs^{-1} cm^{-4}], \tag{5.24}$$

a następnie odnosząc te wielkości do jednostki długości rury, otrzymujemy układ zastępczy w postaci toru o stałych rozłożonych w sposób ciągły, którego parametrami są:

$M_{aj} = \frac{\varrho_0}{S}$ [gcm^{-5}] — masa akustyczna na jednostkę długości,

$C_{aj} = \frac{S}{\varrho_0 c^2}$ [$g^{-1} cm^3 \cdot s^2$] — podatność akustyczna na jednostkę długości,

$R_{aj} = \frac{R_s}{S}$ [$gs^{-1} cm^{-5}$] — oporność strat na jednostkę długości.

Odpowiednio do tego, zgodnie z równaniem (5.19), oporność falową rury można wyrazić jako

$$\hat{Z}_f = \sqrt{\frac{R_{aj} + j\omega M_{aj}}{j\omega C_{aj}}} = \frac{1}{S}\sqrt{\left(\varrho_0 - j\frac{R_s}{\omega}\right)\varrho_0 c^2}. \tag{5.25}$$

Przy pominięciu strat wyrażenie (5.25) upraszcza się do postaci

$$Z_f = \frac{\varrho_0 c}{S}. \tag{5.26}$$

Ujęcie takie prowadzi do następującego układu wzajemnie odpowiadających sobie wielkości elektrycznych i akustycznych:

Wielkości elektryczne		*Wielkości akustyczne*	
Napięcie	u	Ciśnienie akustyczne	p
Prąd	i	Prędkość objętościowa	$V = vS$
Indukcyjność jednostkowa	L	Masa akustyczna na jednostkę długości	$\frac{\varrho_0}{S}$
Pojemność jednostkowa	C	Podatność akustyczna na jednostkę długości	$\frac{S}{\varrho_0 c^2}$
Oporność szeregowa jednostkowa	R	Oporność strat na jednostkę długości	$\frac{R_s}{S}$
Oporność falowa	Z_f	Akustyczna oporność falowa	$Z_f = \frac{p}{V} \approx \frac{\varrho_0 c}{S}$
Tamowność falowa	$\hat{\gamma} = \alpha + j\beta$	Tamowność falowa	$\hat{\gamma} \approx \frac{R_s}{2\varrho_0 c} + j\beta$

Należy podkreślić, że wybór odpowiedniego systemu analogii nie ma wpływu na znaczenie fizyczne i na wymiar tamowności falowej oraz jej składowych: tłumienności jednostkowej α i przesuwności jednostkowej β, które określone są w obu przypadkach wzorem (5.18).

Równania falowe (5.12), (5.13) i (5.14) zachowują w tym przypadku swoją moc obowiązującą z tym jednak, że oporności: falowa i obciążenia występują teraz w postaci akustycznej oporności u k ł a d u odniesionej do określonego przekroju S i wyrażonej w omach akustycznych [$gs^{-1}cm^{-4}$], w związku z czym odpowiednikiem prądu elektrycznego staje się teraz prędkość objętościowa $V = v\ S$ [$cm^3 s^{-1}$].

Oba przytoczone wyżej równorzędne systemy analogii mają swoich zwolenników i przeciwników; ostatnio pewną przewagę zyskuje pierwszy system analogii operujący opornością akustyczną jednostkową [22]. Wydaje się jednak, że system drugi w odniesieniu do falowodów akustycznych jest bardziej przejrzysty, choćby z tego względu, że w przypadku rury o zmiennym przekroju pozwala na bezpośrednie uwidocznienie zmiany parametrów układu i jego oporności falowej, tak jak to ma miejsce w przypadku połączenia dwóch torów elektrycznych o odmiennych właściwościach konstrukcyjnych i różnych parametrach. Dlatego też przy obliczaniu oporności wejściowej wnęki sztucznego ucha będzie stosowane w dalszym ciągu pracy pojęcie akustycznej oporności układu odniesionej do określonego przekroju falowodu.

Zależności (5.14a), (5.14b) i (5.15) mają charakter najzupełniej ogólny i mogą być zastosowane przy wyznaczaniu akustycznej oporności wejściowej oraz rozkładu ciśnienia akustycznego we wnęce modelu sztucznego ucha. Podane wzory upraszczają się znacznie przy pominięciu oporności strat układu, przybierając wówczas dogodną do obliczeń rachunkowych postać:

$$\hat{P}_x = \hat{P}_0\left(\cos\beta x - j\frac{\hat{Z}_f}{\hat{Z}_0}\sin\beta x\right), \tag{5.27a}$$

$$\hat{V}_x = \hat{V}_0\left(\cos\beta x - j\frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}_f}\sin\beta x\right) \tag{5.27b}$$

oraz

$$\hat{Z}_w = \hat{Z}_f\frac{\hat{Z}_k + j\hat{Z}_f\operatorname{tg}\beta l}{\hat{Z}_f + j\hat{Z}_k\operatorname{tg}\beta l}. \tag{5.28}$$

Należy zatem sprawdzić, czy zjawisko pochłaniania energii fali dźwiękowej we wnękach ucha jest zjawiskiem, które należy uwzględniać przy obliczaniu układu zastępczego.

5.4. Tłumienie fali dźwiękowej w rurze

Miarą tłumienia energii fal dźwiękowych w rurze jest tłumienność jednostkowa α występująca w wyrażeniach (5.18) jako składowa rzeczywista tamowności falowej $\hat{\gamma} = \alpha + j\beta$.

Tłumienie fali dźwiękowej w rurze spowodowane jest przez:

a. straty energii w okolicach ścianek rury,

b. straty energii w ośrodku powietrznym.

Zjawiska wymienione w punkcie a. dają się odczuć tym wyraźniej, im objętość ośrodka w rurze jest mniejsza w stosunku do powierzchni jej ścianek, a więc występują w przypadku rur o małym przekroju. Zjawiska te wywołane są przez:

a. 1: tarcie cząsteczek ośrodka o ścianki rury, objawiające się niejednostajnym rozkładem prędkości cząsteczkowej wzdłuż promienia przekroju,

a. 2: wymianę ciepła między ściankami rury a stykającą się z nimi warstwą ośrodka,

a. 3: pochłanianie energii przez materiał ścianek.

Straty energii w ośrodku powietrznym (pkt b.) występują również w rurach o dużym przekroju i wywołane są trzema przyczynami:

b. 1: tarciem międzycząsteczkowym,

b. 2: wymianą ciepła między obszarami ośrodka o różnym stopniu zgęszczenia,

b. 3: międzycząsteczkową wymianą energii.

Wpływ poszczególnych przyczyn był analizowany przez wielu badaczy, między innymi przez Stokesa, Rayleigha, Lamba i Crandalla, jednak podane przez nich wzory na tłumienie mają ograniczoną wartość praktyczną ze względu na skomplikowany charakter zachodzących zjawisk fizycznych. Do celów obliczeniowych, zwłaszcza o charakterze orientacyjnym, jak to ma miejsce w niniejszej pracy, wygodniej jest korzystać ze wzorów uproszczonych, dających dostateczne przybliżenie.

Właściwą oporność strat R_s we wzorze (5.16), obejmującą łączny wpływ tarcia cząsteczek ośrodka o ścianki rury (a.1) oraz wymiany ciepła między ściankami i ośrodkiem (a.2), można ująć wzorem liczbowym, który przybiera różną postać w zależności od średnicy rozpatrywanej rury.

Jeżeli średnica rury $a = 2r$ spełnia warunek

$$a > 20 \sqrt{\frac{\mu'}{\varrho_0 \omega}}, \tag{5.29}$$

gdzie:

$\mu' = 2{,}14 \cdot 1{,}84 \cdot 10^{-4} = 3{,}94 \cdot 10^{-4}\ [\mathrm{gs^{-1}\,cm^{-1}}]$ — współczynnik lepkości powietrza zwiększony o 114% w celu uwzględnienia strat na wymianę ciepła (por. rozdz. 3.2),

$\varrho_0 = 1{,}21 \cdot 10^{-3}\ [\mathrm{gcm^{-3}}]$ — gęstość powietrza w normalnych warunkach atmosferycznych ($t = 20°\mathrm{C}$, $p_0 = 760$ mm słupa rtęci),

$\omega = 2\pi f$ — pulsacja fali rozchodzącej się w rurze,

to sumaryczny wpływ obu wymienionych wyżej czynników wyraża się wzorem przybliżonym [18]

$$R_s = \frac{\varrho_t}{r}. \tag{5.30}$$

W tym przypadku $\varrho_t = \sqrt{2\mu'\varrho_0\omega}$ ma to samo znaczenie fizyczne co we wzorze (3.13) i jest powierzchniową opornością strat wskutek lepkości ośrodka i wymiany ciepła.

Tłumienność jednostkowa α ma postać

$$\alpha = \frac{R_s}{2\varrho_0 c} = \frac{1}{cr}\sqrt{\frac{\mu'\omega}{2\varrho_0}}, \tag{5.31}$$

a więc przy założonych poprzednio wartościach stałych fizycznych powietrza

$$\alpha = \sqrt{\frac{3{,}94\cdot 10^{-4}\cdot\pi}{1{,}21\cdot 10^{-3}}}\cdot\frac{1}{3{,}44\cdot 10^{4}}\cdot\frac{\sqrt{f}}{r} \approx 3\cdot 10^{-5}\cdot (f)^{1/2} r^{-1}\ [\mathrm{N/cm}]. \tag{5.32}$$

Odpowiada temu tłumienie na drodze x:

$$n_{\mathrm{dB}} = 20\lg e^{\alpha x} = 8{,}68\,\alpha x = 2{,}6\cdot 10^{-4}\frac{\sqrt{f}}{r}x\ \ [\mathrm{dB}]. \tag{5.33}$$

Obliczona wartość tłumienia jest słuszna dla rur o dostatecznie dużym promieniu przekroju r:

$$r > 10\sqrt{\frac{\mu'}{\varrho_0\omega}} = 2{,}28\,(f)^{-1/2}, \tag{5.34}$$

a więc w przypadku częstotliwości pomiarowych ($f_{\min} \geqslant 100$ Hz) — dla rur o średnicy większej od 0,46 cm. Rura o średnicy większej od krytycznej wprowadza tłumienie proporcjonalne do pierwiastka kwadratowego z częstotliwości; przy górnej częstotliwości pasma interesującego nas z punktu widzenia badania właściwości słuchawek ($f_{\max} = 10000$ Hz) oraz przy średnicy rury $a = 1$ cm wprowadzone tłumienie jednostkowe wynosi około

$$n_{\mathrm{dB}} = 2{,}6\cdot 10^{-4}\frac{\sqrt{10000}}{0{,}5}x = 0{,}052\,x\ [\mathrm{dB}],$$

czyli 0,052 dB/cm; wartość tę można uznać za pomijalną. Przy rurach o średnicy większej od założonej wprowadzane tłumienie będzie, zgodnie z (5.32), odpowiednio mniejsze.

Ponieważ minimalna średnica wnęk ucha zewnętrznego jest większa od obliczonej poprzednio wartości krytycznej 0,46 cm i wynosi około 0,7 cm (patrz rys. 29), podane zależności są słuszne w rozpatrywanym przypadku.

Ze względu na strukturę materiału ścianek kanału ucha ludzkiego, które przedstawiają akustyczną oporność właściwą znacznie większą od akustycznej oporności właściwej powietrza, wpływ pochłaniania energii fali dźwiękowej przez ścianki kanału można pominąć, tym bardziej że przy kątach padania fali dźwiękowej bliskich 90° zachodzi zjawisko wewnętrznego całkowitego odbicia i fali przeniesionej do ścianek kanału praktycznie nie ma.

Straty energii w ośrodku powietrznym wypełniającym wnęki ucha, wywołane zjawiskami wymienionymi w punktach b.1, b.2 i b.3, ująć można w postaci tłumienności jednostkowej α, która wg wzoru klasycznego [18] rośnie z kwadratem częstotliwości i dla powietrza w temperaturze 20°C przybiera wartość

$$\alpha = 1{,}32 \cdot 10^{-13} f^2. \tag{5.35}$$

Dla częstotliwości $f = 20000$ Hz wartość ta wynosi około $5{,}3 \cdot 10^{-5}$ [N/cm].

Wartości wyznaczone metodą eksperymentalną przez Siviana [31] są znacznie większe od obliczonych teoretycznie, przede wszystkim ze względu na pomijany w tych ostatnich wpływ wilgotności powietrza. Przy częstotliwości $f = 20000$ Hz i wilgotności względnej 37% tłumienność jednostkowa α przybiera wartość

$$\alpha \approx 1{,}15 \cdot 10^{-3} \text{ [N/cm]}. \tag{5.36}$$

Wynika stąd, że tłumienie fali dźwiękowej w powietrzu w interesującym nas zakresie częstotliwości w najbardziej niekorzystnych warunkach nie przekracza wartości

$$n_{\text{dB}} = 20 \lg e^{0{,}00115\, x} = 0{,}01\, x \text{ [dB]},$$

czyli około 0,01 dB/cm. Wobec wyprowadzonych poprzednio zależności liczbowych tłumienie to tym bardziej może być pominięte przy obliczaniu układów zastępczych ucha ludzkiego. W dalszych zatem rozważaniach zjawisko tłumienia fal dźwiękowych w kanale ucha zewnętrznego nie będzie uwzględniane, w związku z czym odpowiednie układy akustyczne będą traktowane jako bezstratne.

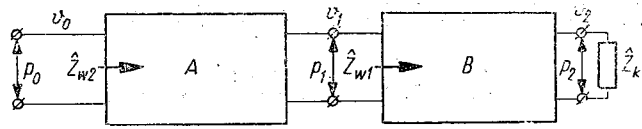
6. OBLICZENIE AKUSTYCZNEJ OPORNOŚCI WEJŚCIOWEJ UCHA

6.1. Elektryczny układ zastępczy modelu ucha zewnętrznego

Podany na rys. 29 uproszczony anatomiczny model ucha zewnętrznego można przedstawić w postaci elektrycznego układu zastępczego, do którego da się zastosować ogólna teoria falowa. Układ zastępczy podano na rys. 31.

Zadanie polega na obliczeniu charakterystyki oporności wejściowej układu ($\hat{Z}_w$) w funkcji częstotliwości i porównaniu jej z charakterystyką oporności wejściowej przeciętnego ucha ludzkiego zdjętą metodą eksperymentalną.

Zgodnie z podanymi poprzednio rozważaniami czwórniki A i B rozpatrujemy jako falowody akustyczne w postaci rur o jednostajnym przekroju i określonej długości, bezstratne, co znacznie upraszcza przebieg obliczeń.



31. Elektryczny układ zastępczy modelu ucha zewnętrznego

A — czwórnik (tor) odpowiadający wnęce małżowiny, B — czwórnik (tor) odpowiadający kanałowi ucha, $\hat{Z}_k$ — akustyczna oporność obciążenia odpowiadająca oporności błony bębenka, p_0 — ciśnienie akustyczne wytwarzane przez słuchawkę u wlotu wnęki małżowiny, p_1, p_2 — ciśnienia akustyczne w odpowiednich przekrojach układu, v — prędkości akustyczne (objętościowe) w odpowiednich przekrojach układu

Zagadnienie wyznaczenia oporności wejściowej falowodu akustycznego rozwiązać można bądź metodą obliczeniową w oparciu o wyprowadzone w rozdz. 5 równania falowe, bądź też metodą graficzną w oparciu o kołowy wykres impedancji, podobny do stosowanego w teorii torów elektrycznych wykresu Smitha. Metoda graficzna, nie wymagająca żmudnych obliczeń i operowania funkcjami hiperbolicznymi (w przypadku uwzględnienia strat układu), jest bez porównania prostsza od metody rachunkowej, toteż będzie zastosowana w niniejszej pracy po jej przeniesieniu na płaszczyznę zjawisk akustycznych.

W tym celu należy równania falowe (5.11) toru akustycznego przedstawić w postaci uwzględniającej współczynnik odbicia, definiowany jako stosunek ciśnienia fali pierwotnej do ciśnienia fali odbitej w punkcie położonym na końcu rury ($x = 0$). Zgodnie z tą definicją współczynnik odbicia fali wyrazić można ze wzorów (5.9) i (5.10)

$$\hat{r} = \frac{\hat{B}}{\hat{A}} = \frac{\hat{Z}_k - \hat{Z}_f}{\hat{Z}_k + \hat{Z}_f} = \frac{\dfrac{\hat{Z}_k}{\hat{Z}_f} - 1}{\dfrac{\hat{Z}_k}{\hat{Z}_f} + 1} = e^{-2\psi}. \tag{6.1}$$

Współczynnik odbicia zależy jedynie od stosunku wskazowego $\frac{\hat{Z}_k}{\hat{Z}_f}$ oporności obciążenia do oporności falowej rury i jest w ogólnym przypadku wielkością zespoloną.

Oznaczając ciśnienie akustyczne fali pierwotnej na końcu rury symbolem $\hat{P}'_k$

$$\hat{P}'_k = \hat{A} = \frac{\hat{P}_k}{2}\left(1 + \frac{\hat{Z}_f}{\hat{Z}_k}\right) \tag{6.2}$$

i wprowadzając je do równań (5.11) otrzymujemy:

$$\hat{P}_x = \hat{P}'_k e^{\hat{\gamma} x}(1 + \hat{r} e^{-2\hat{\gamma} x}), \tag{6.3}$$

$$\hat{V}_x = \frac{\hat{P}'_k}{\hat{Z}_f} e^{\hat{\gamma} x}(1 - \hat{r} e^{-2\hat{\gamma} x}), \tag{6.4}$$

$$\hat{Z}_x = \frac{\hat{P}_x}{\hat{V}_x} = \hat{Z}_f\left(\frac{1 + \hat{r} e^{-2\hat{\gamma} x}}{1 - \hat{r} e^{-2\hat{\gamma} x}}\right). \tag{6.5}$$

Są to równania falowe rury wyrażone w zależności od współczynnika odbicia. Za pomocą tych równań można określić wartość ciśnienia akustycznego, prędkości objętościowej lub oporności akustycznej w dowolnym przekroju rury. Wyrażenia $\hat{P}'_k e^{\hat{\gamma} x}$ i $\frac{\hat{P}'_k}{\hat{Z}_f} e^{\hat{\gamma} x}$ przedstawiają odpowiednio fale pierwotne ciśnienia i prędkości, podczas gdy wyrażenia $\hat{r}\hat{P}'_k e^{-\hat{\gamma} x}$ oraz $\hat{r}\frac{\hat{P}'_k}{\hat{Z}_f} e^{-\hat{\gamma} x}$ przedstawiają fale odbite.

Współczynnik odbicia fali r przedstawić można w postaci wykładniczej

$$\hat{r} = e^{-2\psi} = e^{-2(t_0 + j s_0)}, \tag{6.6}$$

przy czym wielkość e^{-2t_0} jest modułem współczynnika odbicia i wyraża stosunek amplitud fal: odbitej i pierwotnej w punkcie $x = 0$; $-2s_0$ jest argumentem przedstawiającym przesunięcie fazowe między obiema falami w tym samym punkcie układu.

Wprowadzając dla dowolnego przekroju rury odległego o x od jej końca oznaczenia

$$t = t_0 + \alpha x, \tag{6.7}$$

$$s = s_0 + \beta x, \tag{6.8}$$

można wyrażenie $\hat{r} e^{-2\hat{\gamma} x}$ przedstawić za pomocą wzoru:

$$\hat{r}\, e^{-2\hat{\gamma}x} = e^{-2(t+js)}, \tag{6.9}$$

wskutek czego wyrażenie (6.5) przekształci się do postaci:

$$\frac{\hat{Z}_x}{\hat{Z}_f} = \frac{1 + e^{-2(t+js)}}{1 - e^{-2(t+js)}} = a + jb. \tag{6.10}$$

Stosunek akustycznej oporności zespolonej w dowolnym przekroju rury do jej oporności falowej nazwać można przez analogię do odpowiednich wielkości w torach elektrycznych z r e d u k o w a n ą o p o r n o ś c i ą a k u s t y c z n ą rury.

Na końcu rury, w punkcie $x = 0$, równanie (6.10) przybiera postać

$$\frac{\hat{Z}_k}{\hat{Z}_f} = \frac{1 + e^{-2(t_0+js_0)}}{1 - e^{-2(t_0+js_0)}}. \tag{6.11}$$

Jeżeli pominąć tłumienie fali w rurze ($\alpha = 0$), to $t = t_0 = \text{const}$ w każdym jej przekroju; natomiast $s = s_0 + \beta x = s_0 + \frac{2\pi}{\lambda}x$ jest funkcją odległości, z czego wynika, że w miarę przesuwania się od końca rury do jej początku obserwujemy wzrost argumentu s od wartości $s_0(x = 0)$ do wartości $s_l = s_0 + 2\pi \frac{l}{\lambda}$ u wlotu ($x = l$). Jeżeli jednak, jak to ma miejsce w ogólnym przypadku, zjawiska tłumienia fali w rurze nie można pominąć, stosunek amplitud fal odbitej i pierwotnej określać należy wyrażeniem e^{-2t}, gdzie

$$t = t_0 + \alpha x \tag{6.12}$$

wzrasta liniowo w funkcji odległości.

Równanie (6.10) można wykorzystać, analogicznie jak w teorii torów elektrycznych, do konstrukcji biegunowego wykresu impedancji rury akustycznej. W tym celu oporność zredukowaną $\frac{\hat{Z}_x}{\hat{Z}_f} = a + jb$ oraz wielkość $t + js$ z równania (6.9) należy wyrazić za pomocą zmiennej zespolonej w postaci

$$p + jq = e^{-2(t+js)}. \tag{6.13}$$

Równanie (6.10) przekształca się wówczas w sposób następujący:

$$\frac{\hat{Z}_x}{\hat{Z}_f} = a + jb = \frac{1 + (p + jq)}{1 - (p + jq)}. \tag{6.14}$$

Równania (6.13) oraz (6.14) można użyć do naniesienia rodziny krzywych $t = \text{const}$ i $s = \text{const}$ oraz $a = \text{const}$ i $b = \text{const}$ odpowiednio na

płaszczyznę pomocniczych współrzędnych $p + jq$. Trzy wielkości zespolone: $(a + jb)$, $(t + js)$ oraz $(p + jq)$ powiązane są ze sobą równaniami (6.13) i (6.14).

Można wykazać, że miejscem geometrycznym punktów o stałych wartościach $a = \text{const}$ i $b = \text{const}$ na płaszczyźnie $p + jq$ są dwa układy kół ortogonalnych, przy czym okręgi dla stałej wartości a mają promienie równe $\frac{1}{1+r}$, a środki ich leżą na osi p w odległości $\frac{r}{1+r}$ od początku układu. Wszystkie rodziny krzywych $r = \text{const}$ dla wartości r zawartych między wartościami granicznymi $r = 0$ i $r = \infty$ leżą wewnątrz okręgu koła o promieniu $r = 1$ i środku położonym w początku układu ($p = 0$, $q = 0$), przy czym okręgi te są do siebie styczne w punkcie o współrzędnych $p = 1$, $q = 0$. Podobnie środki kół dla stałych wartości $b = \text{const}$ leżą w punktach o współrzędnych: $p = 1$, $q = \frac{1}{b}$, a promienie tych kół równają się odpowiednio $\frac{1}{b}$; okręgi te również są do siebie styczne w punkcie $p = 1$, $q = 0$.

Można również dowieść, że miejscem geometrycznym punktów o stałej wartości $t = \text{const}$ jest rodzina kół koncentrycznych o promieniach e^{-2t}, których środki leżą w początku układu współrzędnych, przy czym ze względów praktycznych okręgi te oznaczone są odpowiednimi wartościami iloczynu al. Natomiast miejscem geometrycznym punktów o stałej wartości s są proste przechodzące przez początek układu. Jeżeli teraz wielkość s zastąpić nową zmienną w

$$w = \frac{s}{2\pi} = \frac{s_0}{2\pi} + \frac{\beta x}{2\pi} = w_0 + \frac{x}{\lambda}, \tag{6.15}$$

która wyraża długość rury w długościach fali λ i przez analogię do odpowiedniej wielkości elektrycznej nazwana być może z r e d u k o w a n ą d ł u g o ś c i ą r u r y, to wykresy stałej wartości będą prostymi o nachyleniu $-\operatorname{tg} 4\pi w$, przechodzącymi przez początek układu.

Otrzymany w ten sposób wykres jest wykresem biegunowym Smitha, który na zasadzie analogii elektroakustycznych stosować można w całej rozciągłości do rozpatrywania akustycznych przebiegów falowych w rurach. W szczególności wykres pozwala na wyznaczenie zredukowanej akustycznej oporności rury w dowolnym jej przekroju (najczęściej u wlotu, $x = l$) przy znanej wielkości $t = js$, zależnej od zredukowanej akustycznej oporności obciążenia rury na jej końcu oraz od stałych al i $\frac{l}{\lambda}$, określających warunki propagacji fali dźwiękowej w rurze. Od-

wrotnie, wykres można stosować również do wyznaczenia oporności obciążenia rury na jej końcu w zależności od znanej oporności wejściowej.

6.2. Obliczenie oporności wejściowej modelu kanału ucha zewnętrznego

Z konstrukcyjnego punktu widzenia model kanału ucha zewnętrznego można przedstawić w postaci rury o długości $l = 30$ mm i średnicy $a = 7$ mm, obciążonej na końcu opornością błony bębenka $\hat{Z}_k$.

Jedyne dostępne w literaturze fachowej dane liczbowe dotyczące oporności błony bębenka w funkcji częstotliwości znaleźć można u Trögera [32]. Jednak z przyczyn omówionych w rozdziale 2.2 dane te posiadają małą wartość praktyczną, tym bardziej że nie uwzględniają najbardziej interesującego z punktu widzenia teorii falowej zakresu górnych częstotliwości pasma akustycznego ($f > 3000$ Hz).

Zagadnienie obliczenia oporności wejściowej kanału ucha zewnętrznego można by znacznie uprościć zakładając, że jednostkowa oporność akustyczna błony bębenka jest znacznie większa od akustycznej oporności właściwej powietrza:

$$|z_{kj}| \gg \varrho_0 c = 41{,}5 \ [\mathrm{gs^{-1}\,cm^{-2}}],$$

a więc przyjmując, że modelem kanału ucha jest rura zamknięta na końcu. Założenie takie jest jednak niedopuszczalne z punktu widzenia wyników pomiarów Trögera, który wykazał, że moduł jednostkowej oporności akustycznej błony bębenka posiada wartość skończoną, w zakresie częstotliwości 400÷3200 Hz nie przekraczającą 160 [$\mathrm{gs^{-1}\ cm^{-2}}$], a więc porównywalną z akustyczną opornością właściwą powietrza. Ponadto badania Trögera dowiodły, że oporność błony bębenka w rozpatrywanym zakresie częstotliwości ma charakter podatnościowy o argumencie zmiennym w granicach od —10° do —50°. Ten ostatni fakt ma duże znaczenie praktyczne, gdyż pozwala na przybliżone odtworzenie rzeczywistych warunków obciążenia w układzie zastępczym. Oporność obciążenia układu zastępczego stanowi mianowicie z reguły mikrofon pomiarowy, w przeważającej większości przypadków typu pojemnościowego. Z teorii działania mikrofonu pojemnościowego, popartej badaniami eksperymentalnymi, wynika, że oporność akustyczna membrany w zakresie częstotliwości mniejszych od jej częstotliwości rezonansowej ma charakter podatnościowy, przy czym określona jest w sposób ilościowy równoważną objętością wnęki powietrznej, symbolizującej podatność membrany, w połączeniu z podatnością znajdującej się pod nią poduszki powietrznej; wielkość ta zależy od wymiaru i konstrukcji mikrofonu i może być ustalona na drodze analitycznej lub eksperymen-

talnej. Z tego względu najbardziej racjonalnym z technicznego punktu widzenia rozwiązaniem jest przyjęcie do obliczeń jako oporności obciążenia układu zastępczego akustycznej oporności mikrofonu, stanowiącego naturalne zakończenie wnęki sztucznego ucha.

Zastosowany w układzie eksperymentalnym mikrofon pomiarowy typu pojemnościowego konstrukcji Pracowni Elektroakustyki Z. B. D. posiada objętość równoważną $V = 0{,}1$ cm^3 przy średnicy membrany $d = 22$ mm, czemu odpowiada akustyczna oporność jednostkowa

$$\hat{z}_j = \frac{\varrho_0 c^2}{j\omega V} S, \tag{6.16}$$

gdzie:

$V = 0{,}1$ [cm^3] — objętość równoważna,

$S = \frac{\pi d^2}{4} = 3{,}8$ [cm^2] — powierzchnia membrany,

$\varrho_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ [gcm^{-3}] — gęstość powietrza,

$c = 34{,}4 \cdot 10^3$ [cm s^{-1}] — prędkość dźwięku w powietrzu.

Podstawiając dane liczbowe otrzymujemy:

$$\hat{z}_j = -j \frac{1{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 11{,}8 \cdot 10^8}{\omega \cdot 0{,}1} \cdot 3{,}8 = -j \frac{54 \cdot 10^6}{\omega} \text{ [gs}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{]}. \tag{6.17}$$

W ten sposób zagadnienie określenia oporności obciążenia układu zastępczego zostało rozwiązane.

Wyznaczyć teraz należy pozostałe parametry rozpatrywanego falowodu, a mianowicie:

a) oporność falową,

b) tamowność falową.

Oporność falowa rury przy uwzględnieniu strat na tarcie i wymianę ciepła dana jest wzorem (5.25). Po podstawieniu wartości liczbowych do wzorów przejściowych (3.13) i (5.30) okazuje się jednak, co zresztą jest zgodne z rozważaniami przeprowadzanymi w rozdziale 5.4, że składowa urojona wyrażenia (5.25) jest w najniekorzystniejszym przypadku, a więc przy dolnej częstotliwości granicznej interesującego nas zakresu częstotliwości ($f_{min} = 100$ Hz), co najmniej o jeden rząd wielkości mniejsza od składowej rzeczywistej. W związku z tym oporność falową kanału ucha można z dostatecznym przybliżeniem uważać za rzeczywistą i niezależną od częstotliwości:

$$Z_f \approx \frac{\varrho_0 c}{S} = 108 \text{ [g} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-4}\text{]}, \tag{6.18}$$

co znacznie upraszcza przebieg obliczeń.

Tamowność falową $\hat{\gamma}$ określa wzór (5.18); tłumienność jednostkowa $a = \frac{R_s}{2\varrho_0 c}$ w rozpatrywanym przypadku przybiera wartości

$$a = \frac{R_s}{2\varrho_0 c} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\sqrt{2\mu'\varrho_0\omega}}{2\varrho_0 c} = \frac{1}{rc}\sqrt{\frac{\mu'}{2\varrho_0}}\omega, \tag{6.19}$$

które przy danym promieniu przekroju kanału $r = 0{,}35$ cm wzrastają proporcjonalnie do $(\omega)^{1/2}$ wg zależności

$$a = 3{,}4 \cdot 10^{-5}\sqrt{\omega} \text{ [N/cm]}. \tag{6.20}$$

Jak poprzednio wykazano, wartości, jakie przybiera a, są pomijalne; ponieważ jednak wprowadzenie ich do obliczeń w przypadku korzystania z wykresu biegunowego nie nastręcza żadnych trudności, parametr al będzie uwzględniony w celu zwiększenia dokładności wyników.

Zadanie sprowadza się zatem do obliczenia akustycznej oporności wejściowej $\hat{Z}_{w1}$ falowodu o następujących parametrach:

$$\hat{Z}_f = 108 \text{ [gs}^{-1}\text{cm}^{-4}\text{]},$$

$$l = 3 \text{ [cm]},$$

$$S = \pi r^2 = 0{,}385 \text{ [cm}^2\text{]},$$

$$\hat{Z}_k = -j\frac{54 \cdot 10^6}{\omega S} = -j\frac{54 \cdot 10^6}{\omega\, 0{,}385} = -j\,\frac{140}{\omega}\,10^6 \text{ [gs}^{-1}\text{cm}^{-4}\text{]},$$

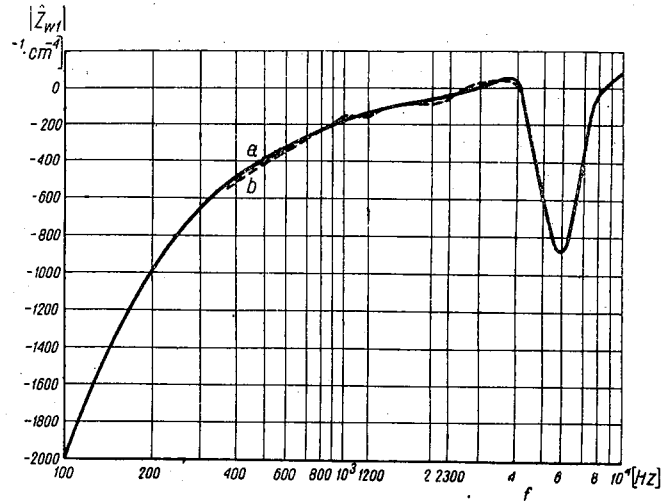
$$al = 1{,}02 \cdot 10^{-4}\sqrt{\omega} \text{ [N]}.$$

Przebieg obliczeń w oparciu o biegunowy wykres impedancji podano w tablicy 16.

Dla porównania w dwóch ostatnich wierszach tablicy 16 podano przeciętne wartości składowej urojonej (jX'_{w1}) i rzeczywistej (R'_{w1}) akustycznej oporności wejściowej kanału ucha zewnętrznego pomierzonego przez Inglisa [16]. Zgodność wartości obliczonej dla przypadku układu zastępczego ze składową urojoną jest najzupełniej dostateczna, zwłaszcza jeśli się weźmie pod uwagę duże wartości rozrzutu wyników pomiarów u poszczególnych osób, znacznie przekraczające rozbieżności między pomiarem i obliczeniem.

Obliczona w podany wyżej sposób oporność wejściowa układu zastępczego ma charakter czysto urojony, co jest konsekwencją pominięcia w obliczeniach składowej rzeczywistej oporności obciążenia; ponieważ jednak składowa ta w rzeczywistości niewątpliwie istnieje, mając swe źródło w oporności strat membrany mikrofonu pomiarowego, przeto zgodność wyników pomiarów i obliczeń jest w istocie jeszcze lepsza.

Wyniki pomiarów i obliczeń składowej urojonej kanału ucha zewnętrznego oraz jej układu zastępczego podano na rys. 32.



Rys. 32. Akustyczna oporność wejściowa kanału ucha zewnętrznego

a — wartości obliczone dla układu zastępczego;
b — wartości pomierzone przez Inglisa

6.3. Obliczenie akustycznej oporności wejściowej „anatomicznego" modelu ucha naturalnego

Obliczona w rozdziale 6.2. akustyczna oporność wejściowa kanału ucha zewnętrznego stanowi zgodnie z układem na rys. 29 oraz jego odpowiednikiem elektrycznym (rys. 31) oporność obciążenia falowodu symbolizującego wnękę małżowiny ucha naturalnego. W analogiczny sposób jak poprzednio można teraz obliczyć akustyczną oporność wejściową układu zastępczego, który jest falowodem o następujących parametrach akustycznych:

Długość $l = 1{,}5$ [cm]

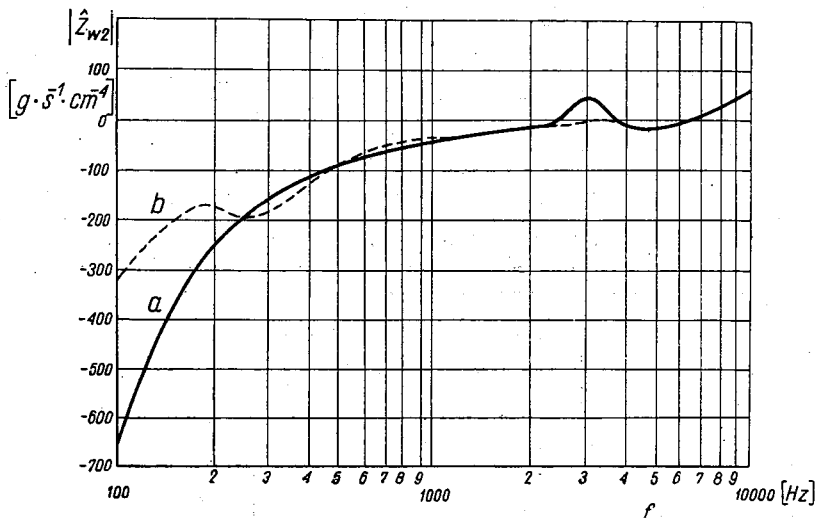
Przekrój $S = 2{,}5$ [cm^2]

Oporność falowa $Z_f = \frac{\varrho_0 c}{S} = 16{,}3$ [g/s · cm^4]

Tłumienność jednostkowa $\alpha = 13{,}2 \cdot 10^{-6} \sqrt{\omega}$ [N/cm].

Opornością obciążenia $\hat{Z}_k$ falowodu jest w tym przypadku oporność wejściowa $\hat{Z}_{w1}$ układu zastępczego, obliczona w tablicy 16. Przebieg obli-

czeń oporności wejściowej modelu ucha w funkcji częstotliwości podano w tablicy 17 umieszczając w dwóch ostatnich jej wierszach wartości po-



Rys. 33. Akustyczna oporność wejściowa anatomicznego modelu ucha
a — wartości obliczone dla układu zastępczego;
b — wartości pomierzone przez Inglisa

mierzone przez Inglisa przy sprzężeniu ścisłym muszli słuchawki z uchem. Na rys. 33 podano zestawienie porównawcze wyników pomiarów i obliczeń.

Otrzymane wyniki dowodzą, że akustyczną oporność wejściową ucha naturalnego przy ścisłym sprzężeniu ze słuchawką można odtworzyć w układzie zastępczym o prostych kształtach geometrycznych, złożonym z dwóch połączonych ze sobą falowodów akustycznych o przekroju kołowym i wymiarach zbliżonych do „anatomicznego" modelu ucha. Zgodność charakterystyk oporności akustycznej modelu zastępczego z charakterystyką oporności p r z e c i ę t n e g o ucha ludzkiego jest dostateczna, przynajmniej w zakresie średnich częstotliwości (300 — 2300 Hz), zwłaszcza jeśli się weźmie pod uwagę fakt, że dane eksperymentalne dotyczą wartości średnich, a rozrzuty indywidualne są znaczne i w wielu przypadkach przekraczają wartości bezwzględne różnicy między wynikami pomiarów i obliczeń.

Przeprowadzone obliczenia mają raczej charakter teoretyczny i służą przede wszystkim do wykazania możliwości odtworzenia akustycznej oporności ucha naturalnego za pomocą stosunkowo prostego układu zastępczego.

Wnioski z pomiarów potwierdzają w całej rozciągłości istniejące obecnie tendencje do upraszczania konstrukcji wnęki sztucznego ucha

Akustyczna oporność wejściowa $\hat{Z}_{w1}$ układu

f	Hz	100	200	300	400	600	800	1000
ω	s^{-1}	628	1256	1882	2512	3768	5025	6280
λ	cm	344,0	172,0	114,7	86,00	57,40	43,00	34,40
$\frac{l}{\lambda}$		0,009	0,017	0,026	0,035	0,052	0,070	0,087
al	N	0,0025	0,0036	0,0042	0,0051	0,0062	0,0072	0,0080
$\hat{Z}_k$	$\frac{g}{s\,cm^4}$	$0-j223\cdot10^3$	$0-j112\cdot10^3$	$0-j74{,}5\cdot10^3$	$0-j55{,}8\cdot10^3$	$0-j37{,}2\cdot10^3$	$0-j27{,}9\cdot10^3$	$0-j22{,}3\cdot10^3$
$\frac{\hat{Z}_k}{\hat{Z}_f}$		$0-j2060$	$0-j1035$	$0-j690$	$0-j517$	$0-j344$	$0-j258$	$0-j206$
t_0	N	0	0	0	0	0	0	0
w_0		0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250
$t_0 + al$	N	0,0025	0,0036	0,0040	0,0050	0,0060	0,0070	0,0080
$w_0 + l/\lambda$		0,259	0,267	0,276	0,285	0,302	0,320	0,337
$\frac{\hat{Z}_{w1}}{\hat{Z}_f}$		$0-j18{,}0$	$0-j9{,}00$	$0-j6{,}00$	$0-j4{,}50$	$0-j2{,}96$	$0-j2{,}08$	$0-j1{,}64$
$\hat{Z}_{w1}$	$\frac{g}{s\,cm^4}$	$0-j1950$	$0-j970$	$0-j650$	$0-j485$	$0-j320$	$0-j225$	$0-j177$
jX'_{w1}	$\frac{g}{s\,cm^4}$	—	—	—	$-j530$	$-j350$	$-j230$	$-j170$
R'_{w1}	$\frac{g}{s\,cm^4}$	—	—	—	100	20	30	60

przez nadawanie jej kształtów geometrycznie prostych, przede wszystkim kształtów brył obrotowych (wnęki walcowe). Jednocześnie wnioski te wykazują w całej pełni niecelowość stosowania skomplikowanych układów zastępczych (Inglis, West, Weber, Ballantine), które są trudne do produkcji seryjnej i powodują niepowtarzalność wyników pomiarów.

Otrzymany w wyniku obliczeń model układu zastępczego nie może być jednak uważany za ostateczny; przyczyny tego są następujące:

a) Kształt geometryczny modelu jest zbyt skomplikowany z punktu widzenia obecnych tendencji do jak największego upraszczania wnęki układu zastępczego, zmierzających m. in. do uniknięcia niedopuszczalnych błędów przy jej kopiowaniu.

b) Zastosowanie w układzie zastępczym drugiego falowodu w postaci wąskiej rurki (Ø 7 mm) jest niedogodne z eksploatacyjnego punktu

zastępczego kanału ucha zewnętrznego Tablica 16

1200	2000	2300	3000	4000	6000	8000	10000
7550	$12{,}6 \cdot 10^3$	$14{,}5 \cdot 10^3$	$18{,}8 \cdot 10^3$	$25{,}2 \cdot 10^3$	$37{,}7 \cdot 10^3$	$50{,}2 \cdot 10^3$	$62{,}8 \cdot 10^3$
28,62	17,20	14,95	11,50	8,60	5,74	4,30	3,44
0,105	0,175	0,201	0,260	0,350	0,525	0,698	0,873
0,0089	0,0114	0,0123	0,0140	0,0160	0,0190	0,0230	0,0256
$0-j18{,}5 \cdot 10^3$	$0-j11{,}1 \cdot 10^3$	$0-j9{,}65 \cdot 10^3$	$0-j7{,}45 \cdot 10^3$	$0-j5{,}56 \cdot 10^3$	$0-j3{,}71 \cdot 10^3$	$0-j2{,}78 \cdot 10^3$	$0-j2{,}23 \cdot 10^3$
$0-j171$	$0-j103$	$0-j89{,}5$	$0-j69{,}0$	$0-j51{,}5$	$0-j34{,}4$	$0-j25{,}8$	$0-j20{,}6 \cdot$
0	0	0	0	0	0	0	0
0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,245	0,243	0,242
0,0090	0,0114	0,0123	0,0140	0,0160	0,0190	0,0230	0,0250
0,355	0,425	0,456	0,510	0,600	0,770	0,941	1,115
$0-j1{,}27$	$0-j0{,}51$	$0-j0{,}29$	$0+j0{,}07$	$0+j0{,}728$	$0-j8{,}0$	$0-j0{,}39$	$0+j0{,}88$
$0-j137$	$0-j55{,}0$	$0-j31{,}4$	$0+j7{,}55$	$0+j78{,}5$	$0-j842$	$0-j41$	$0+j95$
$-j140$	$-j55$	$-j35$	$+j8$	$+j75$	—	—	—
55	40	30	30	35	—	—	—

widzenia, gdyż znacznie zmniejsza skuteczność mikrofonu pomiarowego, stanowiącego jej zakończenie, wskutek wykorzystania jedynie nieznacznej części (około 8%) czynnej powierzchni membrany mikrofonu.

c) Wypadkowa objętość wnęk układu zastępczego, równa 5 cm^3, odpowiada wprawdzie przeciętnej objętości wnęk ucha naturalnego, jednak nie uwzględnia objętości dodatkowej zawartej między muszlą badanej słuchawki a małżowiną ucha. Jak wykazano poprzednio (rozdz. 3.1), wypadkowa objętość wnęki układu zastępczego odtwarzającego rezonansowe właściwości wnęki ucha naturalnego w zakresie małych i średnich częstotliwości akustycznych (100÷1000 Hz) równa jest 6 cm^3. Ponieważ zaś założeniem podstawowym jest odtworzenie w jednym układzie zastępczym zarówno rezonansowych właściwości ucha w zakresie małych i średnich częstotliwości, jak i właściwości falowych oporności wejścio-

Akustyczna oporność wejściowa $\hat{Z}_{w2}$ „ana

f	Hz	100	200	300	400	600	800	1000
ω	s^{-1}	628	1256	1882	2512	3768	5025	6280
λ	cm	344,0	172,0	114,7	86,00	57,40	43,00	34,40
l/λ		0,004	0,009	0,013	0,017	0,026	0,035	0,043
αl	N	$5 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$10 \cdot 10^{-4}$	$12 \cdot 10^{-4}$	$14 \cdot 10^{-4}$	$16 \cdot 10^{-4}$
$\hat{Z}_k$	$\frac{g}{s \cdot cm^4}$	$0-j1950$	$0-j970$	$0-j650$	$0-j485$	$0-j320$	$0-j225$	$0-j177$
$\frac{\hat{Z}_k}{\hat{Z}_f}$		$0-j120$	$0-j59,5$	$0-j40$	$0-j29,8$	$0-j19,6$	$0-j13,8$	$0-j10,9$
t_0	N	0	0	0	0	0	0	0
w_0		0,250	0,252	0,254	0,255	0,258	0,262	0,265
$t_0 + \alpha l$	N	w a r t o ś c i						
$w_0 + l/\lambda$		0,254	0,261	0,267	0,272	0,284	0,297	0,308
$\frac{\hat{Z}_{w2}}{\hat{Z}_f}$		$0-j40$	$0-j15$	$0-j9,5$	$0-j7,1$	$0-j4,6$	$0-j3,3$	$0-j3,0$
$\hat{Z}_{w2}$	$\frac{g}{s\ cm^4}$	$0-j650$	$0-j244$	$0-j155$	$0-j116$	$0-j75$	$0-j54$	$0-j49$
jX'_{w2}	$\frac{g}{s\ cm^4}$	—	$-j170$	$-j185$	$-j125$	$-j70$	$-j50$	$-j45$
R'_{w2}	$\frac{g}{s\ cm^4}$	—	55	45	25	10	5	0

wej w zakresie górnych częstotliwości akustycznych, należy szukać bardziej uniwersalnego rozwiązania konstrukcyjnego, nawet kosztem zrezygnowania z dokładności odtworzenia warunków rzeczywistych.

Wziąwszy pod uwagę powyższe argumenty należy sprawdzić, w jakim stopniu oporność wejściowa drugiego falowodu w układzie zastępczym wpływa na oporność wejściową modelu.

Przy powtórzeniu obliczeń w założeniu, że drugi falowód akustyczny został wyeliminowany z układu, a więc że modelem wnęki ucha jest falowód w postaci rury cylindrycznej o długości $l = 1{,}5$ cm i średnicy $d = 1{,}8$ cm, zamknięty na końcu opornością membrany mikrofonu pojemnościowego $\left(\tilde{Z}_j = -j\frac{54 \cdot 10^6}{\omega}\ [gs^{-1}cm^{-2}]\right)$, otrzymuje się wyniki podane w tablicy 18.

tomicznego" modelu ucha naturalnego Tablica 17

1200	2000	2300	3000	4000	6000	8000	10000
7550	$12{,}6 \cdot 10^3$	$14{,}5 \cdot 10^3$	$18{,}8 \cdot 10^3$	$25{,}2 \cdot 10^3$	$37{,}7 \cdot 10^3$	$50{,}2 \cdot 10^{-3}$	$62{,}8 \cdot 10^3$
28,62	17,20	14,95	11,50	8,60	5,74	4,30	3,44
0,052	0,087	0,100	0,130	0,175	0,261	0,350	0,435
$17 \cdot 10^{-4}$	$22 \cdot 10^{-4}$	$24 \cdot 10^{-4}$	$27 \cdot 10^{-4}$	$31 \cdot 10^{-4}$	$38 \cdot 10^{-4}$	$44 \cdot 10^{-4}$	$50 \cdot 10^{-4}$
$0-j137$	$0-j55{,}0$	$0-j31{,}4$	$0+j7{,}55$	$0+j78{,}5$	$0-j842$	$0-j41$	$0+j95$
$0-j8{,}4$	$0-j3{,}4$	$0-j1{,}9$	$0+j0{,}46$	$0+j4{,}8$	$0-j51{,}6$	$0-j2{,}5$	$0-5{,}8$
0	0	0	0	0	0	0	0
0,269	0,296	0,327	0,068	0,218	0,253	0,311	0,277
p o m i j a l n e							
0,321	0,383	0,427	0,198	0,393	0,514	0,661	0,712
$0-j2{,}1$	$0-j0{,}91$	$0-j0{,}5$	$0+j2{,}9$	$0-j0{,}8$	$0+j0{,}09$	$0+j1{,}6$	$0+j4{,}1$
$0-j34$	$0-j14{,}8$	$0-j8{,}1$	$0+j47$	$0-j13$	$0+j1{,}5$	$0+j26$	$0+j67$
$-j35$	$-j15$	$-j8$	0	—	—	—	—
5	5	8	5	—	—	—	—

Jak widać, zgodność wyników obliczeń z danymi eksperymentalnymi jest teraz znacznie gorsza, co było z góry do przewidzenia. Należy więc z kolei tak skorygować wymiary falowodu, aby przy jego objętości $V = 6$ cm^3 otrzymać optymalne zbliżenie jego charakterystyki oporności wejściowej do charakterystyki, którą należy odtworzyć.

6.4. Ustalenie optymalnych wymiarów i kształtu wnęki układu zastępczego

Przybliżone określenie metodą analityczną wymiarów geometrycznych wnęki układu zastępczego dającego optymalne zbliżenie do charakterystyki oporności ucha naturalnego jest możliwe, jeżeli założy się z góry jej objętość i kształt; zgodnie z poprzednimi rozważaniami wnęka ma kształt walca o objętości $V = 6$ cm^3.

Wszystkie pozostałe parametry falowodu charakteryzujące go zarówno z akustycznego, jak i konstrukcyjnego punktu widzenia wyrazić wówczas można w zależności od jednego z jego wymiarów, na przykład od długości l [cm].

Tablica 18

Akustyczna oporność wejściowa $\hat{Z}_{w3}$ uproszczonego modelu ucha

f	$\hat{Z}_{w3}$	f	$\hat{Z}_{w3}$	f	$\hat{Z}_{w3}$
Hz	$g\,s^{-1}\,cm^{-4}$	Hz	$g\,s^{-1}\,cm^{-4}$	Hz	$g\,s^{-1}\,cm^{-4}$
100	$0 - j\,815$	800	$0 - j\,73{,}0$	3000	$0 - j\,14{,}5$
200	$0 - j\,278$	1000	$0 - j\,60{,}0$	4000	$0 - j\,7{,}7$
300	$0 - j\,204$	1200	$0 - j\,49{,}0$	6000	$0 + j\,1{,}9$
400	$0 - j\,146$	2000	$0 - j\,26{,}0$	8000	$0 + j\,13{,}5$
600	$0 - j\,98{,}0$	2300	$0 - j\,22{,}0$	10000	$0 + j\,46{,}5$

W tym przypadku:

Przekrój falowodu $$S = \frac{V}{l} = \varphi_1(l) \tag{6.21}$$

Oporność falowa $$Z_f \approx \frac{\varrho_0 c}{S} = \frac{\varrho_0 c}{\varphi_1(l)} = \varphi_2(l) \tag{6.22}$$

Oporność obciążenia $$\hat{Z}_k = -j\frac{54 \cdot 10^6}{\omega S} = \varphi_3(\omega, l) \tag{6.23}$$

Tłumienność $$\alpha l = \frac{1}{cr}\sqrt{\frac{\mu'}{2\varrho_0}\omega} = \varphi_4(\omega, l) \tag{6.24}$$

Przesuwność $$\beta l = 2\pi\frac{l}{\lambda} = \varphi_5(\omega, l) \tag{6.25}$$

Ponieważ trzy ostatnie parametry są funkcjami częstotliwości, obliczenia należy przeprowadzić metodą kolejnych przybliżeń w celu uzyskania optymalnego zbliżenia do warunków założonych, gdyż dokładne odtworzenie charakterystyki ucha normalnego w całym zakresie częstotliwości jest niemożliwe.

Orientacyjne wymiary falowodu obliczono przy częstotliwości pomiarowej $f = 2000$ Hz traktując falowód jako układ bezstratny i korzystając z biegunowego wykresu impedancji.

Akustyczna impedancja wejściowa wnęki ucha naturalnego ma przy częstotliwości $f = 2000$ Hz charakter pojemnościowy

$$\hat{Z}_0 = 5 - j15 \approx -j15 \ [\mathrm{g\,s^{-1}\,cm^{-4}}],$$

jeśli pominie się niewielką składową rzeczywistą, której wprowadzenie do obliczeń napotyka na poważne trudności rachunkowe. Oporność zredukowana

$$\hat{z} = \frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}_f} = \frac{\hat{Z}_0}{\varphi_2(l)} = \frac{\hat{Z}_0}{\varrho_0 c}\varphi_1(l) = -j0{,}362\,\varphi_1(l) =$$

$$= -j0{,}362 \cdot \frac{V}{l} = -j\frac{2{,}17}{l}. \tag{6.26}$$

Podobnie zredukowana oporność obciążenia

$$\hat{z}_k = \frac{\hat{Z}_k}{\hat{Z}_f} = \frac{\varphi_3(\omega, l)}{\varphi_2(l)} = -j\frac{54 \cdot 10^6}{\omega S} \cdot \frac{S}{\varrho_0 c} = -j\frac{54 \cdot 10^6}{\omega \varrho_0 c} =$$

$$= -j\frac{54 \cdot 10^6}{12{,}6 \cdot 10^3 \cdot 41{,}5} = 0 - j103. \tag{6.27}$$

Zredukowana długość linii

$$w = w_0 + \frac{l}{\lambda} = 0{,}250 + \frac{l}{17{,}25}. \tag{6.28}$$

Zagadnienie sprowadza się do znalezienia za pomocą wykresu biegunowego wartości l, która odpowiadałaby warunkom (6.26), (6.27) oraz (6.28).

Dokładne odtworzenie oporności wejściowej ucha naturalnego przy częstotliwości $f = 2000$ Hz daje wnęka długości $l = 2{,}1$ cm. Jednak przy innych częstotliwościach dokładność odtworzenia jest niewystarczająca, w związku z czym należy szukać rozwiązania kompromisowego. Optymalne zbliżenie oporności wejściowej falowodu do oporności założonej w całym zakresie częstotliwości uzyskuje się za pomocą wnęki walcowej o następujących wymiarach:

długość: $l = 1{,}2$ cm,

średnica przekroju: $d = 2{,}52$ cm,

objętość: $V = 6{,}0$ cm^3.

W tablicy 19 podano zestawienie obliczeń oporności wejściowej wnęki o wyżej podanych wymiarach przy jednoczesnym uwzględnieniu składowej urojonej jX_0 oporności założonej. Porównanie graficzne podano na rys. 34.

Zestawienie wyników obliczeń akustycznej oporności wejściowej $\hat{Z}_w$ falowodu średnicy prze

f	Hz	100	200	300	400	600	800
ω	s^{-1}	628	1256	1882	2512	3768	5025
λ	cm	344,0	172,0	114,7	86,00	57,40	43,00
l/λ		0,0035	0,0070	0,0105	0,0140	0,0210	0,0280
αl	N	$1{,}09\cdot10^{-5}\sqrt{\omega} = 27{,}2\cdot10^{-5}$ w a r t o ś c i					
$\hat{Z}_k$	$\frac{g}{s\cdot cm^4}$	$0-j17{,}1\cdot10^3$	$0-j8550$	$0-j5700$	$0-j4260$	$0-j2840$	$0-j2135$
$\frac{\hat{Z}_k}{\hat{Z}_f}$		$0-j2060$	$0-j1030$	$0+j687$	$0-j515$	$0-j343$	$0-j257$
t_0	N	0	0	0	0	0	0
w_0		0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250
$t_0+\alpha l$	N	w a r t o ś c i					
w_0+l/λ		0,253	0,257	0,260	0,264	0,271	0,278
$\frac{\hat{Z}_w}{\hat{Z}_f}$		$0-j50$	$0-j23$	$0-j16$	$0-j12$	$0-j7{,}6$	$0-j5{,}7$
$\hat{Z}_w$	$\frac{g}{s\cdot cm^4}$	$0-j415$	$0-j191$	$0-j133$	$0-j100$	$0-j64$	$0-j47$
jX_0	$\frac{g}{s\cdot cm^4}$	$-j310$	$-j170$	$-j185$	$-j125$	$-j70$	$-j50$

Zaprojektowana wnęka w całym zakresie częstotliwości pomiarowych interesujących nas z punktu widzenia badania słuchawek ($f_{max} \approx$ $\approx$ 7000 Hz) zachowuje się jak oporność skupiona o charakterze podatnościowym.

Fakt ten można łatwo przewidzieć z góry; zakładając mianowicie dla uproszczenia, że wnęka przedstawia sobą rurę bezstratną o długości l zamkniętą na końcu ($|\hat{Z}_k| = \infty$), można wzór (5.28) na oporność wejściową sprowadzić do postaci

$$\hat{Z}_w = \hat{Z}_f \frac{1 + j\frac{\hat{Z}_f}{\hat{Z}_k}\operatorname{tg}\beta l}{\frac{\hat{Z}_f}{\hat{Z}_k} + j\operatorname{tg}\beta l} \approx -j\frac{\varrho_0 c}{S}\operatorname{ctg} 2\pi\frac{l}{\lambda}. \tag{6.29}$$

Tablica 19

w kształcie wnęki walcowej o długości l = 1,2 cm, objętości V = 6 cm³, kroju d = 2,52 cm

1000	1200	2000	2300	3000	4000	6000	8000	10000
6280	7550	$12{,}6\cdot10^3$	$14{,}5\cdot10^3$	$18{,}8\cdot10^3$	$25{,}2\cdot10^3$	$37{,}7\cdot10^3$	$50{,}2\cdot10^3$	$62{,}8\cdot10^3$
34,40	28,62	17,20	14,95	11,50	8,60	5,74	4,30	3,44
0,0350	0,0420	0,0700	0,0805	0,1050	0,1400	0,2100	0,2800	0,3500
p o m i j a l n e						$1{,}09\cdot10^{-5}\sqrt{\omega} = 27{,}2\cdot10^{-4}$		
$0-j1710$	$0-j1430$	$0-j855$	$0-j745$	$0-j570$	$0-j427$	$0-j284$	$0-j213$	$0-j171$
$0-j206$	$0-j172$	$0-j103$	$0-j90$	$0-j69$	$0-j51$	$0-j34$	$0-j26$	$0-j21$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,250	0,250	0,250	0,250	0,252	0,253	0,255	0,257	0,258
p o m i j a l n e								
0,285	0,292	0,320	0,330	0,357	0,393	0,465	0,537	0,600
$0-j4{,}5$	$0-j3{,}8$	$0-j2{,}13$	$0-j1{,}82$	$0-j1{,}25$	$0-j0{,}8$	$0-j0{,}225$	$0+j0{,}235$	$0+j0{,}73$
$0-j38$	$0-j32$	$0-j17{,}5$	$0-j15$	$0-j10$	$0-j6{,}6$	$0-j1{,}9$	$1+j2$	$0+j6$
$-j45$	—	$-j15$	—	$-j0$	—	—	—	—

W zakresie częstotliwości, przy których spełniony jest warunek $\beta l \ll 1$, czyli $2\,l \ll \lambda$, funkcję ctg można rozwinąć na szereg, ograniczając się następnie do pierwszego jego wyrazu; otrzymujemy wówczas

$$\operatorname{cgt}\beta l \approx \frac{1}{\beta l} = \frac{c}{\omega l}, \tag{6.30}$$

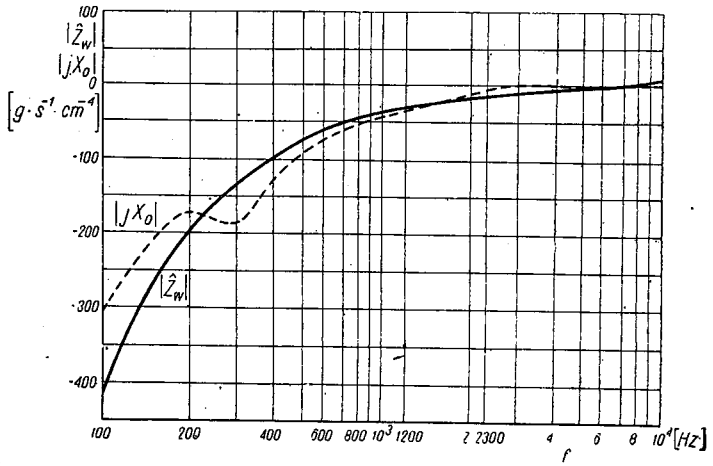
skąd

$$\hat{Z}_w \approx -j\frac{\varrho_0 c^2}{\omega S l} = \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{\varrho_0 c^2}{V} = \frac{1}{j\omega C_a}, \tag{6.31}$$

gdzie $C_a = \dfrac{V}{\varrho_0 c^2}$ jest akustyczną podatnością wnęki o objętości geometrycznej V cm³.

Fakt ten oczywiście nie ogranicza w niczym słuszności przeprowa-

dzonych poprzednio obliczeń, gdyż równania falowe, za pomocą których wyznaczono oporność wejściową wnęki, mają charakter ogólny i wyprowadzone zostały bez żadnych zastrzeżeń formalnych dotyczących wartości stosunku $2\pi\frac{l}{\lambda}$.



Rys. 34. Akustyczna oporność wejściowa wnęki sztucznego ucha
---- wartości założone (wg Inglisa)

Częstotliwości, przy których składowa urojona oporności wejściowej rury staje się równa zeru, określić można z zależności: $\operatorname{ctg} \beta l = \operatorname{ctg} \frac{\omega l}{c} = 0$; stąd otrzymujemy znane warunki rezonansu rury zamkniętej na końcu (lub jej odpowiednika elektrycznego — linii długiej rozwartej na końcu):

$$l = \frac{\lambda_n}{4}(2n-1) \tag{6.32}$$

lub

$$f_n = \frac{c}{4l}(2n-1), \tag{6.32a}$$

gdzie $n = 1, 2, 3, 4...$

Przy obliczonej długości wnęki $l = 1{,}2$ cm częstotliwość pierwszego rezonansu (ćwierćfalowego, $n = 1$) równa się

$$f_1 = \frac{c}{4l} = \frac{34{,}4 \cdot 10^3}{4 \cdot 1{,}2} \approx 7200 \text{ Hz}, \tag{6.33}$$

zatem w całym zakresie częstotliwości pomiarowych oporność wejściowa wnęki ma charakter podatnościowy.

6.5. Rozkład ciśnienia akustycznego we wnękach ucha

Przebieg charakterystyki oporności wejściowej wnęki odpowiada z dostateczną dokładnością charakterystyce składowej urojonej oporności ucha naturalnego w zakresie do ok. 3000 Hz przy sprzężeniu ścisłym z muszlą słuchawki. Ponieważ brak jest jakichkolwiek danych liczbowych dotyczących oporności ucha naturalnego powyżej 3000 Hz, przy weryfikowaniu kształtu i wymiarów wnęki w zakresie górnych częstotliwości pasma akustycznego ($f > 3000$ Hz) należy oprzeć się na innych przesłankach.

Dodatkowe informacje uzyskać można na podstawie badań eksperymentalnych dotyczących rozkładu ciśnienia akustycznego we wnękach ucha naturalnego, a w szczególności — na podstawie charakterystyki wzrostu ciśnienia akustycznego na błonie bębenka w stosunku do ciśnienia panującego w polu fali swobodnej.

Pomiary przeprowadzone niezależnie przez kilku badaczy, między innymi Békésy'ego, Wienera i Rossa [36] oraz Martina i Andersona [23], wykazały, że wyrażenie $\frac{P_2}{P_f}$ określające wzrost ciśnienia na błonie bębenka (P_2) w stosunku do ciśnienia w polu fali swobodnej (P_f) jest funkcją częstotliwości i osiąga maksimum rzędu 14÷22 dB przy częstotliwościach 3000÷4000 Hz.

Fakt ten ma bezpośrednie uzasadnienie teoretyczne. Korzystając z oznaczeń na rys. 31 stosunek $\frac{P_2}{P_f}$ wyrazić można w postaci

$$\frac{P_2}{P_f} = \frac{P_0}{P_f} \cdot \frac{P_1}{P_0} \cdot \frac{P_2}{P_1}, \tag{6.34}$$

gdzie:

$\frac{P_0}{P_f}$ — wzrost ciśnienia u wlotu małżowiny ucha wskutek zjawiska dyfrakcji fali dźwiękowej na głowie słuchacza [1],

$\frac{P_1}{P_0}$ — wzrost ciśnienia u wlotu do kanału ucha zewnętrznego (P_1) w stosunku do ciśnienia u wlotu małżowiny (P_0),

$\frac{P_2}{P_1}$ — wzrost ciśnienia na błonie bębenka (P_2) w stosunku do ciśnienia u wlotu kanału usznego (P_1).

[1]) Wielkość $\frac{P_0}{P_f}$ zależy od wymiarów głowy w stosunku do długości fali λ oraz od kąta padania fali dźwiękowej w stosunku do płaszczyzny symetrii głowy i określona jest krzywą teoretyczną dyfrakcji w przypadku przeszkody w kształcie kuli o średnicy d, w funkcji stosunku d/λ, przy różnych kątach padania fali.

Czynnik $\frac{P_0}{P_f}$ we wzorze (6.34) ma istotne znaczenie jedynie w przypadku słyszenia bezpośredniego, kiedy źródło dźwięku znajduje się z dala od ucha słuchacza; wpływ zjawiska dyfrakcji fali dźwiękowej na głowie słuchacza jest wtedy niepomijalny. Natomiast w przypadku słuchawki sprzęgniętej bezpośrednio z uchem (naturalnym lub sztucznym) czynnik ten traci sens fizyczny, w związku z czym miarą wzrostu ciśnienia akustycznego we wnękach ucha staje się wyrażenie:

$$\frac{P_2}{P_0} = \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{P_1}{P_0}. \tag{6.35}$$

Stosując wzór (5.27a) do przypadku kanału ucha naturalnego (rys. 29) otrzymujemy:

$$\hat{P}_2 = \hat{P}_1 \left(\cos \beta l_2 - j \frac{\varrho_0 c}{S_2} \cdot \frac{1}{Z_2} \sin \beta l_2 \right), \tag{6.36}$$

czyli

$$\left| \frac{P_2}{P_1} \right| = \left| \cos \beta l_2 - j \frac{\varrho_0 c}{S_2} \cdot \frac{1}{Z_2} \sin \beta l_2 \right| = \sqrt{\cos^2 \beta l_2 + \left(\frac{\varrho_0 c}{S_2 Z_2} \right)^2 \sin^2 \beta l_2}. \tag{6.37}$$

Zakładając, zgodnie z modelem ucha według rys. 29, $l_2 = 3$ cm, $\frac{\varrho_0 c}{S_2} = 108$ [gs^{-1} cm^{-4}], $Z_2 \approx 35$ [gs^{-1} cm^{-4}] widzimy, że stosunek $\frac{P_2}{P_1}$ osiąga maksimum równe

$$\left| \frac{P_2}{P_1} \right|_{\max} = \frac{\varrho_0 c}{S_2 Z_2} = \frac{108}{35} \approx 3{,}1 \approx 10 \text{ dB} \tag{6.38}$$

przy częstotliwości, przy której $\cos \beta l_2 = 0$, czyli przy $f \approx 2860$ Hz. Przyjęto tu, że przy tej częstotliwości składowa rzeczywista oporności wejściowej kanału ucha [wg Inglisa] równa się 35 omów akustycznych.

Przeprowadzając analogiczne obliczenie dla stosunku $\frac{P_1}{P_0}$ we wnęce małżowiny, mamy

$$\left| \frac{P_1}{P_0} \right| = \sqrt{\cos^2 \beta l_1 + \frac{\varrho_0 c}{S_1 Z_0} \sin^2 \beta l_1}, \tag{6.39}$$

gdzie, zgodnie z rys. 29, $l_1 = 1{,}5$ cm, $\frac{\varrho_0 c}{S_1} = 16{,}3$ [gs^{-1} cm^{-4}], a $Z_0 = 5$ [gs^{-1} cm^{-4}].

Stosunek $\frac{P_1}{P_0}$ osiąga maksimum równe

$$\left|\frac{P_1}{P_0}\right|_{\max} = \frac{\varrho_0 c}{S_1 Z_0} = \frac{16{,}3}{5} \approx 3{,}26 \approx 10 \text{ dB}. \tag{6.40}$$

W rezultacie stosunek $\frac{P_2}{P_0} = \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{P_1}{P_0}$ osiąga maksimum równe około 17 dB przy częstotliwości rzędu 4000 Hz.

Wynik obliczeń odpowiada wynikom pomiarów Wienera [36], który badając za pomocą mikrofonu-sondy rozkład ciśnienia w uchu ludzkim stwierdził wzrost ciśnienia $\frac{P_2}{P_0}$ rzędu 12 dB przy częstotliwości $f \approx$ ≈ 4000 Hz.

Przy odtwarzaniu oporności wejściowej ucha naturalnego można by w zasadzie tak wybrać wymiary i kształt wnęki, aby rezonans przy $f = 4000$ Hz odpowiadał pierwszemu rezonansowi ćwierćfalowemu rury. Rozwiązanie takie byłoby jednak niecelowe, gdyż charakter oporności wejściowej wnęki zmieniałby się w zakresie pomiarowym z podatnościowego ($f < 4000$ Hz) na bezwładnościowy (4000 Hz $< f <$ 8000 Hz), po czym znów na podatnościowy (8000 Hz $< f <$ 12000 Hz), przechodząc przez antyrezonans przy $f \approx 8000$ Hz.

Badania eksperymentalne nie wykryły występowania we wnękach ucha naturalnego rezonansów wtórnych ani zmiany charakteru oporności; przyczyną tego jest najprawdopodobniej silne tłumienie energii akustycznej w kanale ucha przy dużych częstotliwościach. Z tego względu znacznie bardziej racjonalnym rozwiązaniem jest umieszczenie pierwszego rezonansu ćwierćfalowego wnęki powyżej górnej granicy częstotliwości pomiarowych, tak aby wnęka w całym zakresie miała charakter podatnościowy. Zrezygnowanie z trudnego do przeprowadzenia odtworzenia rezonansowych właściwości ucha, wykazujących ponadto duże rozbieżności indywidualne, przynosi niewątpliwe korzyści w postaci uproszczenia układu zastępczego i możności dokładnego obliczenia jego charakterystyk na drodze analitycznej.

6.6. Drgania poprzeczne we wnęce sztucznego ucha

W dotychczasowych rozważaniach dotyczących przebiegów falowych we wnęce sztucznego ucha ograniczono się do przypadku drgań podłużnych we wnęce walcowej. Ograniczenie takie byłoby słuszne, gdyby wymiary poprzeczne wnęki (średnica walca $2r_0$) były mniejsze od najkrótszej fali. Ponieważ jednak w rozpatrywanym przypadku warunek ten nie jest spełniony, przeto należy rozważyć, czy zjawisko związane z występowaniem drgań poprzecznych we wnęce nie wprowadzą niepożądanych dodatkowych rezonansów.

Zagadnienia drgań poprzecznych we wnęce najłatwiej jest rozpatrywać w sposób syntetyczny, wychodząc z ogólnego równania fali dźwiękowej w układzie współrzędnych cylindrycznych.

Operator Laplace'a przybiera wówczas postać.

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \tag{6.41}$$

przy czym współrzędne (a, φ) są współrzędnymi biegunowymi w dowolnej płaszczyźnie przekroju wnęki prostopadłego do osi, a współrzędna x jest współrzędną długości wzdłuż osi walca.

Ogólne równanie potencjału prędkości

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \Phi \tag{6.42}$$

przybiera wówczas postać

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}. \tag{6.43}$$

Zakładając, że Φ jest sinusoidalną funkcją czasu

$$\Phi = F(r, \varphi, x)\, e^{j\omega t} \tag{6.44}$$

oraz korzystając z ogólnego warunku

$$P = -\varrho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{6.45}$$

otrzymuje się rozwiązanie równania falowego (6.43) względem P w postaci:

$$P = \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} (m\varphi) \sin\left(\frac{\omega_x x}{c}\right) I_m\left(\frac{\omega_r r}{c}\right) e^{j\omega t}, \tag{6.46}$$

gdzie $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_r^2}$, przy czym mogą być użyte bądź funkcje cos, bądź sin.

$I_m\left(\frac{\omega_r}{c} r\right)$ jest funkcją Bessela pierwszego rodzaju m-tego rzędu $(m = 1, 2, 3 \ldots)$.

Z warunków brzegowych wynika, że prędkość cząsteczkowa przy ściankach wnęki, a więc dla $x = l$ oraz $r = r_0$, musi być równa zeru.

Wyrażając prędkość cząsteczkową z ogólnego równania

$$v = \operatorname{grad}(\Phi) = j \frac{1}{\omega \varrho_0} \operatorname{grad}(P) \tag{6.47}$$

można napisać pierwszy warunek brzegowy w postaci

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin\frac{\omega_x}{c}x\right)_{x=l}=0, \tag{6.48}$$

skąd otrzymujemy znany warunek (6.32a) rezonansu drgań podłużnych w rurze zamkniętej na końcu:

$$f_x=\frac{c}{4l}(2n-1) \tag{6.49}$$

($n = 1, 2, 3, 4$ ...).

Warunek drugi, dotyczący ścian bocznych wnęki walcowej, ma postać

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[I_m\left(\frac{\omega_r}{c}r\right)\right]_{r=r_0}=0. \tag{6.50}$$

Warunek ten jest spełniony, gdy $\frac{\omega_r}{c}r_0=\pi\delta_{mn}$, przy wartościach δ_{mn} podanych w tablicy 20.

Tablica 20

Wartości współczynnika δ_{mn} określającego częstotliwości drgań poprzecznych wnęki walcowej

$\delta_{00}=0$	$\delta_{01}=1{,}220$	$\delta_{02}=2{,}233$
$\delta_{10}=0{,}586$	$\delta_{11}=1{,}697$	$\delta_{12}=2{,}717$
$\delta_{20}=0{,}972$	$\delta_{21}=2{,}130$	$\delta_{22}=3{,}090$

Częstotliwości rezonansowe drgań poprzecznych określone są wzorem

$$f_r=\frac{c}{2r_0}\delta_{mn}, \tag{6.51}$$

gdzie δ_{mn} przybiera wartości podane w tablicy 20.

Drgania własne wnęki walcowej są wynikiem superpozycji drgań podłużnych o częstotliwości f_x (6.49) oraz drgań poprzecznych (promieniowych) o częstotliwości f_r (6.51):

$$f=\sqrt{f_x^2+f_r^2}=\frac{c}{2}\sqrt{\left[\frac{1}{21}(2n-1)\right]^2+\left(\frac{\delta_{mn}}{r_0}\right)^2}, \tag{6.52}$$

gdzie:

$n = 1, 2, 3, 4$ ...

$\delta_{mn} = 0;\ 0{,}586;\ 0{,}972;\ 1{,}220$ ...

Pierwszy rozkład drgań we wnęce odpowiada wartości $\delta_{mn}=\delta_{00}=0$; jest to uwzględniany dotychczas przypadek rezonansu drgań podłuż-

nych. Podstawowemu rozkładowi drgań poprzecznych ($\delta_{10} = 0{,}586$) odpowiada tzw. rozkład średnicowy; cząstki ośrodka drgają w poprzek wnęki, tworząc jedną linię węzłową ciśnienia wzdłuż średnicy.

Rozpatrywane zagadnienie ma wiele wspólnego z zagadnieniem wyznaczania częstotliwości drgań własnych przestrzeni zamkniętej o żądadanym kształcie i wymiarach geometrycznych. Zagadnienie to w przypadku przestrzeni prostopadłościowej zostało szczegółowo opracowane teoretycznie [27] przy jednoczesnym uwzględnieniu aspektu praktycznego w przypadku rezonansów własnych sali [21].

Należy sprawdzić, czy w rozpatrywanym przypadku walcowej wnęki sztucznego ucha nie występują w zakresie częstotliwości niepożądane rezonanse własne, które zniekształcałyby wyniki badań słuchawek. Mówiąc inaczej, trzeba wyznaczyć częstotliwości własne wnęki w zakresie co najmniej do 10 000 Hz.

Kolejne częstotliwości drgań wzdłużnych wyrażają się wzorem (6.49), co przy długości wnęki 1,2 cm daje wartości:

$$f_{x1} = 7200 \text{ Hz},$$
$$f_{x2} = 21600 \text{ Hz},$$
$$\text{itd.}$$

Zatem w zakresie do 10000 Hz występuje jedynie pierwszy rezonans (ćwierćfalowy) drgań wzdłużnych.

Częstotliwości drgań poprzecznych, określonych wzorem (6.51), wynoszą:

$$f_{r1} = 7900 \text{ Hz},$$
$$f_{r2} = 13200 \text{ Hz},$$
$$\text{itd.}$$

W rozpatrywanym zakresie częstotliwości występuje zatem jedynie pierwszy rozkład drgań średnicowych, przy czym ze względu na ustalone proporcje wymiarów wnęki rozkład ten zachodzi przy częstotliwości f_{r1}, niewiele różniącej się od częstotliwości podstawowej drgań własnych f_{x1}.

Pierwszy wynikowy rezonans wnęki wypada przy częstotliwości

$$f = \sqrt{f_{x1}^2 + f_{r1}^2} = \sqrt{52 \cdot 10^6 + 62 \cdot 10^6} = 10700 \text{ Hz},$$

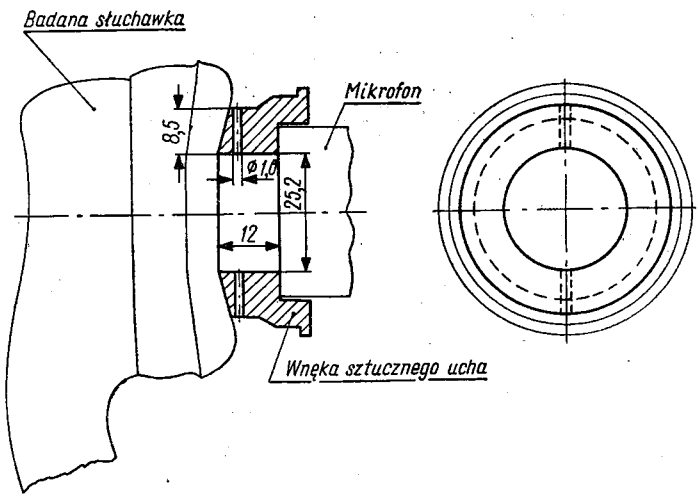
a więc powyżej rozpatrywanego zakresu.

W ten sposób wykazano, że zaprojektowana wnęka nie posiada, przynajmniej w zakresie do 7000 Hz, dodatkowych rezonansów własnych, nie występujących we wnękach ucha naturalnego.

6.7. Oporność wejściowa wnęki sztucznego ucha przy uwzględnieniu nieszczelności sprzężenia z muszlą słuchawki

Przeprowadzone w niniejszym rozdziale obliczenia oporności wejściowej wnęki sztucznego ucha wykonane były w założeniu, że wnęka ta jest szczelna, co odpowiada przypadkowi ścisłego sprzężenia muszli słuchawki badanej z uchem (sztucznym lub naturalnym). Jak wiadomo, warunki takie w rzeczywistości nie istnieją, gdyż między muszlą słuchawki a małżowiną ucha słuchacza występują z reguły nieszczelności nadające charakterystyce oporności wejściowej ucha właściwości rezonansowe. Zgodnie z rozważaniami przeprowadzonymi w rozdz. 3 właściwości rezonansowe wnęki odtworzono za pomocą dwóch otworów upływnościowych w postaci dwóch rurek (l = 8,5 mm; r = 0,8 mm) symbolizujących nieszczelność sprzężenia. Należy wyznaczyć dokładną charakterystykę oporności wnęki sztucznego ucha, zaopatrzonej w otwory upływnościowe, i porównać ją z charakterystką oporności ucha naturalnego przy nieszczelnym sprzężeniu muszli słuchawki z małżowiną.

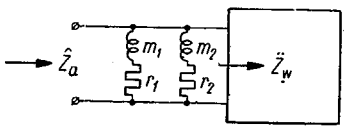
Obliczona w rozdziale 6.4 wnęka sztucznego ucha o objętości V = = 6 cm^3, przy wyposażeniu jej w otwory upływnościowe, ma kształt i wymiary jak na rys. 35.



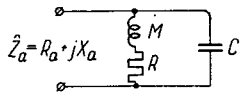
Rys. 35. Kształt i wymiary wnęki sztucznego ucha o objętości V = 6 cm^3

Zastępczy układ elektryczny wnęki ma postać podaną na rys. 36, gdzie m_1 i m_2 oraz r_1 i r_2 przedstawiają odpowiednio masy akustyczne i oporności strat obu otworów upływnościowych, a $\hat{Z}_w$ — obliczoną po-

przednio oporność wejściową wnęki przy sprzężeniu szczelnym. Do celów obliczeń praktycznych układ na rys. 36 można uprościć; ze względu na równoległe (w pierwszym układzie analogii) połączenie obu otworów upływnościowych wygodnie jest przedstawić je w postaci oporności skupionej o charakterze bezwładnościowym $\hat{Z} = R + j\omega M$, gdzie $R = \frac{r_1}{2} = \frac{r_2}{2}$ oraz $M = \frac{m_1}{2} = \frac{m_2}{2}$. Podobnie oporność wejściową wnęki $\hat{Z}_w$ można, przynajmniej w zakresie małych i średnich częstotliwości akustycznych, przedstawić w postaci oporności skupionej o charakterze podatnościowym: $\hat{Z}_w = \frac{1}{j\omega C_a}$, gdzie $C_a = \frac{V}{\varrho_0 c^2} = 4{,}3 \cdot 10^{-6}$ [cm^{4}s^{2}g^{-1}].



Rys. 36. Zastępczy układ elektryczny wnęki z rys. 35



Rys. 37. Zastępczy układ elektryczny wnęki w zakresie małych częstotliwości

Rys. 38. Zastępczy układ elektryczny wnęki w zakresie dużych częstotliwości

Zastępczy układ elektryczny wnęki sztucznego ucha przybiera więc w zakresie małych i średnich częstotliwości akustycznych postać równoległego obwodu rezonansowego z opornością strat w gałęzi bezwładnościowej (rys. 37). Parametry M, R, C, tego obwodu można wyznaczyć za pomocą zależności wyprowadzonych w rozdziale 3.2, co z kolei pozwoli na obliczenie składowej rzeczywistej i urojonej oporności wejściowej układu w oparciu o wzory ogólne obwodów rezonansowych.

W zakresie częstotliwości znacznie większych od częstotliwości rezonansowej obwodu $\left(R + j\omega M \gg \frac{1}{j\omega C}\right)$ otwory upływnościowe nie odgrywają żadnej roli, w związku z czym o oporności wejściowej układu decyduje wyłącznie oporność wnęki, którą jednak w tym zakresie częstotliwości należy uważać za oporność wejściową falowodu o wymiarach porównywalnych z długością fali. W związku z tym układ zastępczy wnęki przybiera postać jak na rys. 38. Oporność wejściową takiego

układu obliczono w rozdziale 6.4 dla całego zakresu częstotliwości. Jest rzeczą oczywistą, że zmiana charakteru układu zastępczego nie odbywa się skokiem, lecz w sposób ciągły; oznacza to, że charakterystyka oporności wejściowej układu rezonansowego (rys. 37) w miarę wzrostu częstotliwości stopniowo przejdzie w charakterystykę oporności wejściowej falowodu (rys. 38), obliczoną uprzednio.

Podatność C wnęki o objętości $V = 6\,\mathrm{cm}^3$ zgodnie ze wzorem (3.2) równa się $4{,}3 \cdot 10^{-6}$ [$\mathrm{cm}^4\mathrm{s}^2\mathrm{g}^{-1}$]. Przy obliczaniu pozostałych parametrów układu należy skorzystać z wyprowadzonych poprzednio zależności.

Wyrażając całkowitą oporność strat jednego otworu upływnościowego o długości l i promieniu r ze wzoru (3.13), przy uwzględnieniu strat na wymianę ciepła przez zwiększenie współczynnika lepkości o 114%, otrzymujemy

$$R = \frac{\varrho_t}{\pi r^2} \cdot \frac{1}{r}(l + r), \tag{6.53}$$

gdzie $\varrho_t = \sqrt{2\mu' \varrho_0 \omega} = 2{,}44 \cdot 10^{-3}\sqrt{f}$ jest funkcją częstotliwości. Przy danych wymiarach rurki upływnościowej: $l = 0{,}85$ cm oraz $r = 0{,}08$ cm oporność rzeczywista dwóch otworów w połączeniu równoległym równa się

$$R = 1{,}71\sqrt{f}\ \ [\mathrm{g\,s^{-1}\,cm^{-4}}].$$

Masa akustyczna jednej rurki przy uwzględnieniu poprawki wlotu oraz lepkości ośrodka wyraża się wzorem (3.6), który zgodnie z (3.11) przybiera postać

$$m_1 = m_2 = \frac{\varrho_0 l}{\pi r^2}\left(1 + 1{,}7\,\frac{r}{l} + \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2\mu}{\varrho_0 \omega}}\right). \tag{6.54}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy wypadkową masę akustyczną M dwóch połączonych równolegle otworów upływnościowych:

$$M = \frac{1}{2} \cdot \frac{1{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}85}{0{,}02}\left(1 + 1{,}7\,\frac{0{,}08}{0{,}85} + \frac{1}{0{,}08} \cdot \frac{0{,}221}{\sqrt{f}}\right) =$$

$$= 25\left(1{,}16 + 2{,}75\,\frac{1}{\sqrt{f}}\right)10^{-3}\ [\mathrm{g\,cm^{-4}}].$$

Zarówno M, jak i R są funkcjami częstotliwości, co należy uwzględnić w obliczeniach. Wyrażając składową rzeczywistą R_a i urojoną X_a oporności wejściowej $\hat{Z}_a$ równoległego obwodu rezonansowego (z opornością strat w gałęzi bezwładnościowej) z ogólnych wzorów:

$$R_a = \frac{R}{\omega^2 C^2 R^2 + (\omega^2 MC - 1)^2} \tag{6.55}$$

oraz

$$X_a = j\omega \frac{M - C(R^2 + \omega^2 M^2)}{\omega^2 C^2 R^2 + (\omega^2 MC - 1)^2}, \tag{6.56}$$

w których $M = f(\omega)$ oraz $R = f(\omega)$ zależą od częstotliwości, otrzymujemy charakterystykę oporności wejściowej wnęki sztucznego ucha w zakresie małych i średnich częstotliwości akustycznych przy uwzględnieniu nieszczelności sprzężenia słuchawki badanej z uchem. Wyniki obliczeń podano w tablicy 21.

Powyżej częstotliwości $f = 1000$ Hz składowa urojona X_0 oporności wejściowej wnęki przybiera wartości obliczone poprzednio dla przypadku sprzężenia szczelnego (tablica 19 i rys. 34).

Tablica 21

Obliczone wartości składowej rzeczywistej (R_a) i urojonej (X_a) oporności wejściowej wnęki sztucznego ucha z otworami upływnościowymi

Częstotliwość	R_a	X_a
Hz	$g\,s^{-1}\,cm^{-4}$	
100	17	+ 21
200	40	+ 49
250	60	+ 65
300	103	+ 83
375	201	+ 40
400	219	— 14
425	216	— 67
500	96	— 85
600	33	— 70
800	12	— 45
1000	5	— 37

Charakterystykę oporności wejściowej (R_a, X_a) wnęki sztucznego ucha zaopatrzonej w otwory upływnościowe, symbolizujące nieszczelności sprzężenia muszli słuchawki z małżowiną ucha naturalnego, podano na rys. 39.

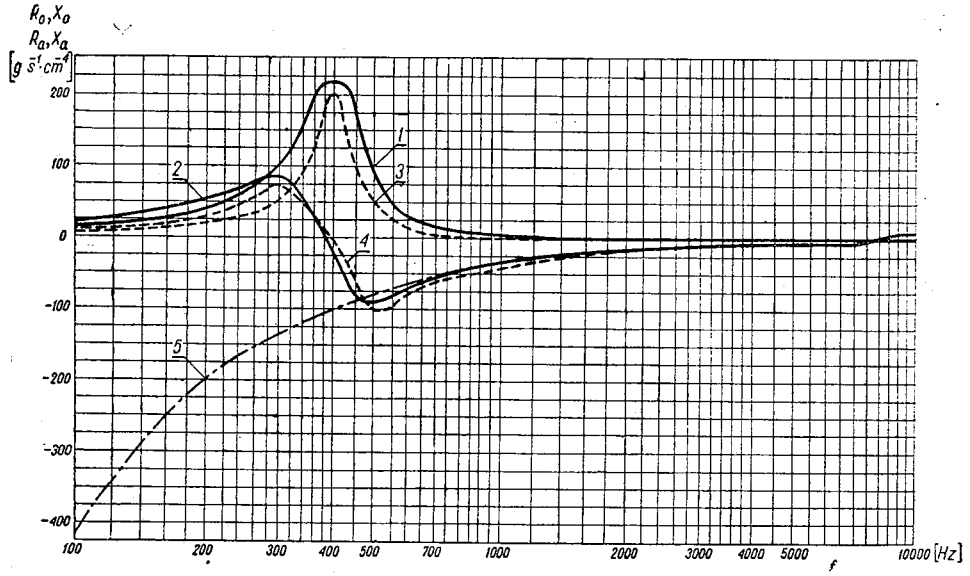
Na rysunku tym dla porównania zaznaczono liniami przerywanymi odpowiednie charakterystyki oporności wejściowej (R_0, X_0) pomierzone przez Inglisa.

7. WNIOSKI KOŃCOWE

Praca niniejsza, której głównym celem było teoretyczne i eksperymentalne przeanalizowanie możliwości odtworzenia w prostym układzie zastępczym akustycznej oporności wejściowej ucha ludzkiego, pozwala na wyciągnięcie szeregu wniosków praktycznych, ważnych z punktu widzenia obiektywizacji metod badania słuchawek.

Wykazano, że akustyczne właściwości ucha naturalnego, stanowiącego oporność obciążenia słuchawki w normalnych warunkach jej pracy, można — z dostateczną do celów praktyki dokładnością — odtworzyć za pomocą ściśle określonego, łatwego do ko-

piowania układu zastępczego o prostym kształcie geometrycznym. Ze względu na uzasadniony teoretycznie i sprawdzony doświadczalnie wpływ kształtu wnęk ucha na charakterystykę badanej słuchawki w zakresie dużych częstotliwości przy powierzchownej ocenie zagadnienia wydawać by się mogło, że zgodnie z pierwotnie panującymi tendencjami jedynie nadanie wnęce sztucznego ucha kształtu zbliżonego do wnęki ucha naturalnego oraz dokładne odtworzenie jego parametrów akustycznych prowadzić może do uzyskania wyników pomiarów zgodnych z rzeczywistością.



Rys. 39. Obliczone wartości składowej rzeczywistej i urojonej oporności wejściowej wnęki sztucznego ucha z rys. 35

1 — R_a, 2 — X_a } wartości obliczone

Krzywe:

3 — R_0, 4 — X_0 } wartości pomierzone przez Inglisa

5 — X_w wartości obliczone (wnęka szczelna)

Jednak zarówno duże rozbieżności indywidualne akustycznych właściwości uszu poszczególnych ludzi, jak i trudności techniczne związane z budową, użytkowaniem, a przede wszystkim — dokładnym sprecyzowaniem wartości parametrów układu zastępczego (stałość właściwości w czasie oraz ich powtarzalność przy powielaniu układu w dużej ilości

egzemplarzy) negują racjonalność takiego rozwiązania. Pierwotne usiłowania konstruktorów, mające na celu dokładne odtworzenie za pomocą skomplikowanego układu zastępczego akustycznych właściwości ucha naturalnego w całym zakresie pasma akustycznego, okazały się najzupełniej niecelowe, przede wszystkim ze względu na zjawisko rezonansów własnych wnęk ucha przy dużych częstotliwościach, co jest czynnikiem zmiennym od przypadku do przypadku, a następnie — ze względu na trudności rachunkowe przy określaniu wartości poszczególnych parametrów układu.

Jedynie racjonalnym rozwiązaniem okazało się nadanie wnęce sztucznego ucha postaci uproszczonej, która — jak to wykazano w niniejszej pracy — dostatecznie dokładnie odtwarza oporność przeciętnego ucha naturalnego, a jednocześnie umożliwia określenie właściwości układu na drodze analitycznej. Stosując uproszczoną konstrukcję wnęki sztucznego ucha wyznacza się po prostu właściwości słuchawki w konkretnych, ściśle określonych warunkach, zbliżonych do normalnych warunków jej użytkowania, rezygnuje się natomiast z badania wpływu indywidualnych właściwości ucha danego użytkownika na zachowanie się słuchawki.

Kompromis taki jest jednak nieunikniony; podobne uproszczenie stosuje się przecież przy badaniu głośników w komorze bezechowej, która z reguły stwarza warunki pracy odmienne od warunków rzeczywistych, stanowiąc jednak ściśle określony układ odniesienia.

Uzasadniona wyżej tendencja do upraszczania konstrukcji sztucznego ucha prowadzi z kolei do kierunków, które propagują stosowanie wnęk zamkniętych, a więc nie uwzględniających wpływu nieszczelności sprzężenia słuchawki z uchem na jej właściwości w zakresie małych częstotliwości. Pogląd ten, reprezentowany między innymi przez projektodawców wzorca amerykańskiego, opiera się na założeniu, że nieszczelność sprzężenia jest funkcją wielu przypadkowych czynników, zależnych zarówno od indywidualnych cech samej słuchawki i jej użytkownika, jak i od chwilowych warunków jej użytkowania (np. od siły docisku), a więc — że wprowadzenie pewnej znormalizowanej nieszczelności sprzężenia nie może dać wyników zgodnych z rzeczywistością. Pogląd taki jest jednak niesłuszny, gdyż zmiany warunków sprzężenia słuchawki z uchem objawiają się jedynie nieznaczną zmianą położenia i wysokości rezonansu wnęki ucha przy małych częstotliwościach, przy zachowaniu zasadniczych właściwości rezonansowych wnęki. Ponieważ zaś właściwości badanej słuchawki w tym zakresie zmieniają się wyraźnie w przypadku obciążenia jej układem rezonansowym zamiast układem o oporności podatnościowej (wnęka zamknięta), wprowadzenie wnęk

z otworami jest całkowicie uzasadnione z punktu widzenia zgodności warunków badania słuchawki z warunkami jej użytkowania.

Jest rzeczą oczywistą, że w pewnych przypadkach, np. przy pomiarach porównawczych do celów kontroli produkcji lub tp., można stosować wnękę zamkniętą (otwory upływnościowe zatkane), jednak takie sprzężanie odbiega znacznie od warunków rzeczywistych i nie daje należytego pojęcia o zachowaniu się słuchawki przy współpracy z uchem ludzkim.

Pożądane byłoby przeprowadzenie serii pomiarów obejmujących badanie wielu typów słuchawek za pomocą różnych sztucznych uszu, stanowiących obecnie wzorce krajowe czy instytutowe. Przeprowadzone pomiary porównawcze pozwoliłyby zbadać wpływ metody badania słuchawki na ocenę jej właściwości, a jednocześnie umożliwiłyby uzyskanie danych niezbędnych przy porównywaniu wyników uzyskanych przez różne laboratoria, co jest zagadnieniem ważnym wobec nieistnienia międzynarodowego wzorca sztucznego ucha.

Zakład Badania Drgań IPPT

WYKAZ LITERATURY

1. American Standard Method for the Coupler Calibration of Earphones, Z 24.9—1949, J. A. S. A., t. 22, 1950, Nr 5, s. 602.
2. Ballantine S.: Telephone Receiver Measurements. — J. A. S. A., t. 5, Nr 1, s. 19.
3. Ballantine S.: Receiver Testing with an Artificial Ear. — Electronics, t. 13, Nr 6, 1940, s. 34.
4. Barducci I.: Ricerche sperimentali sull'orecchio artificiale. — Alta Frequenza, t. 16, Nr 3—4, 1947.
5. Barducci I.: Contribution au problème de l'oreille artificielle pour l'étalonnage des récepteurs téléphoniques. — Ann. des Télécomm., t. 6, 1951, nr 6, s. 165.
6. Barducci I.: Beitrag zum Problem des künstlichen Ohres zur Eichung von Telephonhörern. — Arch. Elektr. Übertragung, t. 7, 1953, Nr 3, s. 155.
7. Beranek L. L.: Acoustic Measurements. Wyd. J. Wiley, N. Y., 1949.
8. Braun K.: Übertragungsverhältnisse beim Fernsprechen im Vergleich zum natürlichen Hören. — T. F. T., t. 32, Nr 3, 1943, s. 49.
9. Braun K.: Die akustischen Abschlussbedingungen für die Messung der Ferhörer. — T. F. T., t. 32, Nr 11, 1943, s. 237.
10. C. C. I. F.: „Żółta Księga", tom IV, Paryż, 1949.
11. Cook G. S., Chrzanowski P.: Ear and Closed Coupler Acoustic Impedance. — J. A. S. A., t. 16, 1944, s. 102.
12. Crandall J. B.: Theory of Vibrating Systems and Sound. — Wyd. D. van Nostrand Co, 1926.

13. Fontanellaz G.: Objektive Verständlichkeitmessungen an Teilnehmerapparaten. — Techn. Mitteilungen der P. T. T., t. 29, 1951, Nr 12, s. 445.
14. Glaser J. L., Morrical K. C.: A Comparison of Artificial Ear Couplers. J. A. S. A., t. 20, 1948, Nr 6, s. 771.
15. Ingard U.: On the Theory and Design of Acoustic Resonators. — J. A. S. A., t. 25, 1953, Nr 6, s. 1037.
16. Inglis A. H., Gray C. G. H., Jenkins R. T.: A. Voice and Ear for Telephone Measurements. — B. S. T. J., t. 11, r. 1932, s. 293.
17. Kallen R.: Ein Gerät zur Prüfung von Hörerkapseln. — Techn. Mitteilungen der P. T. T., t. 29, 1951, Nr 6, s. 222.
18. Kinsler L. E., Frey A. R.: Fundamentals of Acoustics. — Wyd. J. Wiley, 1950.
19. Krisztalewicz A. N.: Iskusstwiennoje ucho. (Streszczenie referatu). — Usp. fiz. nauk, Akad. Nauk ZSRR, t. 50, 1953, Nr 1.
20. Litwak I. M.: Nowyj kompleks akusticzeskoj izmieritielnoj apparatury. (Streszczenie referatu). — Usp. fiz. nauk, Akad. Nauk ZSRR, t. 50, 1953, Nr 1.
21. Malecki I.: Mechanizm rozchodzenia się fal dźwiękowych w salach. Wyd. Polit. Gdańskiej, 1949.
22. Malecki I.: Oporność akustyczna jako pojęcie falowe. — Zeszyty Naukowe Polit. Warsz., Seria Elektr., r. 1952, Nr 1.
23. Martin D. W., Anderson L. J.: Headphone Measurements and their Interpretation. — J. A. S. A., t. 19, 1947, Nr 1, s. 63.
24. Meister H.: Abnahmemessungen von Hörerkapseln auf objektiver Basis. — Techn. Mitteilungen der P. T. T., t. 29, 1951, Nr 6, s. 220.
25. Metz O.: The Acoustic Impedance Measured on Normal and Pathological Ears. — Acta Oto-Laryng., Stockholm, 1946, Suppl. 63, s. 254.
26. Morrical K. C., Glaser J. L., BensonR. W.: Interactions between Microphones, Couplers and Earphones. — J. A. S. A., t. 21, 1949, Nr 3, s. 190.
27. Morse P. M.: Vibration and Sound. Wyd. Mc Graw Hill Book Co, 1948.
28. Olson, Massa: Performance of Telephone Receivers as Affected by the Ear. — J. A. S. A., t. , r. 1935, s. 250.
29. Pumphrey R. J., Gold T.: Transient Reception and Degree of Resonance of the Human Ear. — Nature, t. 160, 1947, s. 124.
30. Romanow F. F.: Methods for Measuring the Performance of Hearing-Aids. — J. A. S. A., t. 13, 1942, s. 294.
31. Sivian L. J.: High Frequency Absorption in Air an other Gases. — J. A. S. A., t. 19, 1947, s. 914.
32. Troeger J.: Die Schallaufnahme durch das äussere Ohr. — Phys. Zeitschrift, t. 31, 1930, s. 26.
33. Warszawskij P. A., Glokin G. B.: Osobiennosti graduirowki dinamiczeskich tielefonow na jestiestwiennom i iskusstwiennom uchie (Streszczenie referatu). — Usp. fiz. nauk, Akad. Nauk ZSRR, t. 50, 1953, Nr 1.
34. Weber H.: Beitrag zum Aufbau des ortotelephonischen Übertragungssystems. — Techn. Mitteilungen der P. T. T., t. 24, 1946, Nr 1, s. 5 i Nr 4, s. 145.
35. West W.: An Artificial Ear. — P. O. E. E. J., t. 21, r. 1929, s. 293; t. 22, r. 1930, s. 260; t. 24, r. 1931, s. 27.
36. Wiener F. M., Ross D. A.: The Pressure Distribution in the Auditory Canal in a Progressive Sound Field. — J. A. S. A., t. 18, 1946, Nr 2, s. 401.
37. Żyszkowski Z.: Podstawy elektroakustyki. — Wyd. P. W. T., 1953.

Я. КАЦПРОВСКИ

АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ИСКУССТВЕННОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ВОСПРОИЗВЕДЕНИЯ КОМПЛЕКСНОГО АКУСТИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ЕСТЕСТВЕННОГО УХА

Резюме

Вопрос воспроизведения комплексного акустического сопротивления человеческого уха, составляющего естественное сопротивление нагрузки наушника телефонной трубки, является предметом параллельно производимых исследований во многих заграничных лабораториях.

Большинство авторов, исследуя этот вопрос, применяет метод последовательных приближений на базе сравнительных результатов измерений произведённых с искусственными системами, часто значительно отличающимися друг от друга по теоретическим предпосылкам и по конструктивному оформлению.

В описываемой работе принят иной метод анализа; продолжая теоретические соображения начатые К. Брауном и И. Бардучим доказывается, что:

А. Избегая случайности в выборе механических и акустических параметров искусственной системы и основываясь на общей теории акустических четырёхполюсников с сосредоточенными или распределёнными постоянными, можно путём анализа предвидеть свойства искусственной системы и приблизить их к заранее заданным свойствам.

Б. Принимая в качестве исходной точки приведенные в литературе результаты измерений комплексного акустического сопротивления среднего человеческого уха в пределах приблизительно до 1000 гц, можно с достаточной для практических применений точностью рассчитать акустические параметры R_a, M_a и C_a искусственной системы в сосредоточенных постоянных. Искусственная система имеет в этом случае вид акустического резонатора любой формы с объёмом $V = 6$ cm^3, с резонансной частотой $f_0 = 400$ гц и коэффициентом добротности $Q = 5$. Приведенные выше резонансные свойства искусственной системы можно получить путём применения соответственных отверстий утечки напора; выведенная зависимость $Q_n = Q_1 \sqrt[4]{n} \approx Q_1 \sqrt{f_0}$ определяющая функциональную связь коэффициента добротности Q резонатора и количества n активных отверстий — имеет совершенно общий характер и может быть использована при конструировании акустических резонаторов с заранее заданным коэффициентом добротности или с переменными резонансными свойствами.

В. Применение соответственно проектированных выходных отверстий резонатора искусственной системы необходимо для правильного воспроизведения резонансных свойств естественного уха, которое — как правило — сопряжено с наушником неплотно — вследствие наличия утечки между ушной раковиной и трубкой. Это утверждение подвергает сомнению целесообразность появляющихся в последнее время в литературе стремлений к применению искусственных систем имеющих форму замкнутых резонаторов (напр. нормы С. Ш. А., Z 24. 9, J. A. S. A., том 22, № 5, 1950 г., стр. 602).

Г. В пределах высших частот акустической полосы (1000 ÷ 10000 гц) можно аналитически рассчитать акустические параметры искусственной системы, основываясь на упрощенной аналитической модели естественного уха, нагруженного акустическим сопротивлением барабанной перепонки.

Рассматривая эту модель в виде последовательной системы акустических четырёхполюсников с распределёнными параметрами нагружённой известным сопротивлением измеренным Трэгером и применяя классическую теорию волновых процессов в трубах с потерями, можно с достаточной точностью определить геометрические размеры волноводов с общим объёмом $V = 6$ см^3, согласно соображениям в п. Б; такая система, нагруженная акустическим сопротивлением мембраны измерительного ёмкостного микрофона, ведёт себя в целом интересующем нас диапозоне частот как естественное ухо, имея в виду акустическую характеристику его входного сопротивления и распределение акустического давления в резонаторах.

Показано, что одновременное удовлетворение требований в диапозонах низких, средних и высоких акустических частот, в виде одной искусственной системы — вполне осуществимо и даёт удовлетворительные результаты.

J. KACPROWSKI

ANALYSIS OF THE POSSIBILITY OF REPRODUCING THE ACOUSTIC IMPEDANCE OF THE HUMAN EAR BY MEANS OF AN EQUIVALENT CIRCUIT

Summary

The problem of reproducing the acoustic impedance of the human ear, which constitutes the natural load impedance to the head phone, is a timely subject in the research work being carried on in several laboratiories abroad.

In the course of their work, the majority of authors use the trial-and-error method. In applying this method they use the comparative results of measurements obtained by means of equivalent circuits, these circuits differing greatly as regards the theoretical assumptions involved and their specific design.

The problem is handled by the present author in a different way. Continuing along the theoretical lines initially developed by K. Braun and I. Barducci, the author shows the following:

1. On the basis of the general theory of acoustic four-terminal networks with lumped or distributed constants, it is possible to predict, in an analytical way, the properties of the equivalent circuit and to approximate them to the assumed properties without involving any casualty in the choice of mechanical and acoustic parameters of the equivalent circuit.

2. Assuming as a starting point the results cited in the literature of measurements of the acoustic impedance of an average human ear in the frequency range up to about 1000 c/s, it is possible to calculate, with an accuracy sufficient for practical applications, the acoustic parameters R_a, M_a, and C_a of the equivalent circuit with lumped constants. In this case, the equivalent circuit has the form of an acoustic resonator with an arbitrary shape, but with a volume $V = 6$ cm^3, resonant frequency $f_0 = 400$ c/s and $Q = 5$. The above mentioned resonant properties of the equivalent circuit can be obtained by using appropriate orifices in the cavity of the resonator; the deduced relation $Q_n = Q_1 \cdot \sqrt[4]{n} = \sqrt{f_0}$, which determines the functional connection between the figure of merit Q of the resonator and the number n of the active orifices, has a completely general character

and may be used in constructing acoustic resonators with an assumed figure of merit Q or with variable resonant properties.

3. The use of appropriately designed orifices in the cavity of the equivalent circuit is necessary for the correct reprodoction of the resonant properties of the human ear, which as a rule is not tightly coupled to the headphone because of leakage effects between the concha of the ear and the cap of the headphone. Thus the author questions the tendencies existing recently in the literature to apply equivalent circuits having the shape of closed cavities (e. g. USA Standards Z 24.9, published in J. A. S. A., vol. 22, No 5, 1950, p. 602).

4. In the upper ranges of the acoustic frequency spectrum (1000 c/s — 10000 c/s), the acoustic parameters of an equivalent circuit can be calculated in an analytical way on the basis of a simplified anatomic model of the human ear, loaded by the acoustic impedance of the membrane of the ear-drum. By treating this model as a four-terminal network with distributed constants, connected in cascade and loaded by the prescribed impedance as measured by Tröger, and by applying the classical theory of wave phenomena in tubes with losses, it is possible to determine, with sufficient accuracy, the geometrical proportions (length and diameter) of wave guides possessing a total volume $V = 6$ cm^3 which result from the considerations of item 2 above. Such a circuit loaded by the acoustic impedance of the membrane in the measuring condenser microphone behaves through the entire frequency range in which we are interested, like the human ear, as regards the frequency characteristic of the acoustic input impedance and the distribution of acoustic pressure in the cavities. The author shows that it is fully possible to satisfy the required conditions in the low, middle and high audible frequency ranges simultanously, by means of o n e equivalent circuit, with satisfactory results being obtained.

621.396.67.011.21

JERZY CZYŻ

Impedancje wzajemne w płaskich układach antenowych

Rękopis dostarczono 12.5.1956

Wyprowadzono wzory ogólne na składową rzeczywistą i składową urojoną impedancji wzajemnej między dwoma nierównoległymi wibratorami położonymi w jednej płaszczyźnie. Do obliczeń zastosowano metodę indukowanych SEM-nych. Na podstawie otrzymanych wyrażeń wyprowadzono wzory na składowe impedancji wzajemnej i składowe oporu promieniowania przewodu umieszczonego skośnie nad ziemią. Uzyskane wyniki porównano z wartościami podanymi w literaturze dla niektórych szczególnych długości i położeń przewodów.

1. WSTĘP

W praktyce inżynierskiej często występują poważne trudności z obliczaniem układów antenowych ze względu na nie dość ogólne opracowania związanych z nimi zagadnień w samej teorii anten. Przykładem jest zagadnienie impedancji wzajemnych. Istniejące na ten temat opracowania ograniczają się do pewnych szczegółowych położeń i wymiarów rozważanych elementów promieniujących. Brak ujęcia ogólniejszego, obejmującego dowolne położenia i długości elementów, zmniejsza znacznie możliwości rozwiązań konstrukcyjnych układów antenowych w oparciu o istniejące materiały obliczeniowe. Wyrazem tego jest na przykład pewien zastój, jaki daje się zauważyć w zagadnieniach rozwoju techniki kierunkowych układów antenowych w radiofonicznym zakresie średniofalowym i długofalowym. Genezą niniejszej pracy była koncepcja czysto praktyczna, dotycząca nowego rozwiązania kierunkowego układu antenowego, co będzie tematem oddzielnego artykułu. Praca niniejsza dotyczy wyprowadzenia w możliwie operatywnej formie wyrażeń na składowe: rzeczywistą i urojoną impedancji wzajemnej nierównoległych elementów promieniujących, położonych w jednej płaszczyźnie.

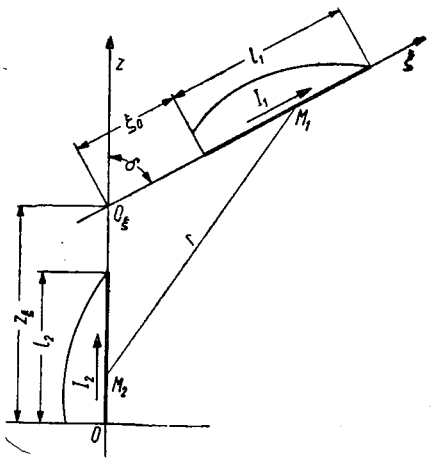
2. ZAŁOŻENIA WYJŚCIOWE

Wzajemne położenie elementów jest przedstawione na rys. 1. Wprowadzono następujące założenia upraszczające:

a) nieskończenie małą średnicę przewodów,
b) doskonałą przewodność,
c) brak tłumienia prądu przy promieniowaniu,
d) sinusoidalny rozkład prądu.

Niezależnie od wymienionych uproszczeń przyjęto następujące ograniczenia zakresu rozważań:

a. na jednym końcu każdego z przewodów występuje węzeł prądu, zwrócony w stronę strzałki dodatniego kierunku osi,
b. układ podany na rys. 1 nie pozwala zrealizować wzajemnej równoległości przewodów z wyjątkiem położenia współosiowego.



Rys. 1. Wzajemne położenie wibratorów

Jak wynika z rys. 1, w rozważanym zagadnieniu występuje pięć parametrów: l_1, l_2, δ, ξ_0, z_ξ, z których trzy ostatnie mogą przybierać wartości dowolne — dodatnie, ujemne, bądź równe zeru. Podane w dalszym ciągu wyrażenia składowych impedancji wzajemnej odnoszą się do strzałki prądu.

3. METODA OBLICZEŃ I WZORY PODSTAWOWE

Obliczenia przeprowadzono w oparciu o znaną metodę indukowanych SEM-nych, pozwalającą wyznaczyć obie składowe impedancji wzajemnej.

Zgodnie z definicją pojęcie impedancji wzajemnej odnosi się do warunku równości amplitud i zgodności faz prądów w obu rozpatrywanych przewodach. W związku z tym równania prądów będą:

$$I_1 = I_m \cdot \sin \alpha (l_1 + \xi_0 - \xi) \cdot e^{j\omega t}, \tag{1}$$

$$I_2 = I_m \cdot \sin \alpha (l_2 - z) \cdot e^{j\omega t}, \tag{2}$$

gdzie: $\alpha = \dfrac{2\pi}{\lambda}$.

Składowa styczna natężenia pola elektrycznego w punkcie M_1 od ładunków na przewodzie 2:

$$\mathbf{E}_{\xi 12} = -\operatorname{grad}_\xi \varphi - \mu \frac{\partial \mathbf{A}_\xi}{\partial t}. \tag{3}$$

Równanie ładunku na przewodzie 2:

$$Q_z = -j\frac{I_m}{c}\cos\alpha(l_2 - z)\,e^{j\omega t}. \tag{4}$$

Wyrażenie na skalarny potencjał opóźniony:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_0^{l_2} Q_z \frac{e^{-j\alpha r}}{r}\,e^{j\omega t}\,dz = -j30\,I_m \cdot \int_0^{l_2} \cos\alpha(l_2 - z)\frac{e^{-j\alpha r}}{r}\,e^{j\omega t}\,dz,$$

wobec tego gradient wzdłuż osi ξ:

$$-\operatorname{grad}_\xi \varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = j30\,I_m\frac{\partial}{\partial\xi}\int_0^{l_2}\cos\alpha(l_2 - z)\,\frac{e^{-j\alpha r}}{r}\,e^{j\omega t}\,dz. \tag{5}$$

Wyrażenie na składową wzdłuż osi ξ potencjału wektorowego opóźnionego:

$$\mathbf{A}_\xi = \mathbf{A}_z\cos\delta = \frac{I_m\cos\delta}{4\pi}\int_0^{l_2}\sin\alpha(l_2 - z)\,\frac{e^{-j\alpha r}}{r}\,e^{j\omega t}\,dz. \tag{6}$$

Ponieważ $\mu = 30\,\alpha\,\frac{4\pi}{\omega}$, więc:

$$-\mu\frac{\partial\mathbf{A}_\xi}{\partial t} = -j30\,I_m\,\alpha\cos\delta\int_0^{l_2}\sin\alpha(l_2 - z)\,\frac{e^{-j\alpha r}}{r}\,e^{j\omega t}\,dz. \tag{7}$$

Podstawiając wyrażenia (5) i (7) do (3) i pomijając czynnik $e^{j\omega t}$, otrzymuje się

$$\mathbf{E}_{\xi 12} = j30\,I_m\left[\frac{\partial}{\partial_\xi}\int_0^{l_2}\cos\alpha(l_2 - z)\,\frac{e^{-j\alpha r}}{r}\,dz + \right.$$

$$\left. - \alpha\cos\delta\int_0^{l_2}\sin\alpha(l_2 - z)\,\frac{e^{-j\alpha r}}{r}\,dz\right]; \tag{8}$$

$$\mathbf{E}_{\xi 12} = E_{\xi 12R} + jE_{\xi 12X}. \tag{8a}$$

Impedencja wzajemna:

$$Z_{12} = -\frac{1}{|I_m|^2}\int_{\xi_0}^{\xi_0 + l_1}\mathbf{E}_{\xi 12}\,I_m\sin\alpha(l_1 + \xi_0 - \xi)\,d\xi; \tag{9}$$

$$Z_{12} = R_{12} + jX_{12}. \tag{9a}$$

Składowa rzeczywista impedencji wzajemnej:

$$R_{12} = -\frac{1}{|I_m|}\int_{\xi_0}^{\xi_0+l_1} E_{\xi\,12\,R}\sin\alpha\,(l_1+\xi_0-\xi)\,d\xi. \tag{10}$$

Składowa urojona impedencji wzajemnej:

$$X_{12} = -\frac{1}{|I_m|}\int_{\xi_0}^{\xi_0+l_1} E_{\xi\,12\,X}\sin\alpha\,(l_1+\xi_0-\xi)\,d\xi. \tag{11}$$

Oczywiście $Z_{12} = Z_{21}$, co wynika z zasady wzajemności.

4. WYRAŻENIA NA SKŁADOWE IMPEDANCJI WZAJEMNEJ W POSTACI CAŁKOWEJ

Po rozwinięciu wyrażenia (8) i uwzględniając wyrażenie (8a) będzie:

$$E_{\xi\,12\,R} = 30\,I_m\left[\cos\alpha\,l_2\frac{\partial}{\partial\,\xi}\int_0^{l_2}\frac{\cos\alpha z\cdot\sin\alpha r}{r}dz + \right.$$

$$+\sin\alpha\,l_2\frac{\partial}{\partial\,\xi}\int_0^{l_3}\frac{\sin\alpha z\cdot\sin\alpha r}{r}dz - \alpha\cos\delta\cdot\sin\alpha\,l_2\int_0^{l_2}\frac{\cos\alpha z\cdot\sin\alpha r}{r}dz +$$

$$\left.+\alpha\cdot\cos\delta\cdot\cos\alpha\,l_2\int_0^{l_2}\frac{\sin\alpha z\cdot\sin\alpha r}{r}dz\right];$$

$$E_{\xi\,12\,X} = 30\,I_m\left[\cos\alpha\,l_2\frac{\partial}{\partial\,\xi}\int_0^{l_2}\frac{\cos\alpha z\cdot\cos\alpha r}{r}dz + \right.$$

$$+\sin\alpha\,l_2\frac{\partial}{\partial\,\xi}\int_0^{l_2}\frac{\sin\alpha z\cdot\cos\alpha r}{r}dz - \alpha\cdot\cos\delta\cdot\sin\alpha\,l_2\int_0^{l_2}\frac{\cos\alpha z\cdot\cos\alpha r}{r}dz +$$

$$\left.+\alpha\cdot\cos\delta\cdot\cos\alpha\,l_2\int_0^{l_2}\frac{\sin\alpha z\cdot\cos\alpha r}{r}dz\right].$$

Przy tym:

$$r = \sqrt{\xi^2 + 2\,(z_\xi - z)\,\xi\cdot\cos\delta + (z_\xi - z)^2}.$$

Rozwijając iloczyny podcałkowe oraz wprowadzając podstawienia:

$t = r + z$; $t' = r - z$; $t_1 = t - (z_\xi + \xi\cos\delta)$; $t_1' = t' + (z_\xi + \xi\cos\delta)$,

otrzymuje się wartości całek w następującej postaci:

$$\int_0^{l_2} \frac{\cos\alpha z \cdot \sin\alpha r}{r}\,dz = \frac{1}{2}\left\{\cos\alpha\zeta\,[f_1(\xi) - f_2(\xi)] + \sin\alpha\zeta\,[\varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi)]\right\}_{z=0}^{z=l_2},$$

$$\int_0^{l_2} \frac{\sin\alpha z \cdot \sin\alpha r}{r}\,dz = -\frac{1}{2}\left\{\cos\alpha\zeta\,[\varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi)] - \sin\alpha\zeta\,[f_1(\xi) - f_2(\xi)]\right\}_{z=0}^{z=l_2},$$

$$\int_0^{l_2} \frac{\cos\alpha z \cdot \cos\alpha r}{r}\,dz = \frac{1}{2}\left\{\cos\alpha\zeta\,[\varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi)] - \sin\alpha\zeta\,[f_1(\xi) + f_2(\xi)]\right\}_{z=0}^{z=l_2},$$

$$\int_0^{l_2} \frac{\sin\alpha z \cdot \cos\alpha r}{r}\,dz = \frac{1}{2}\left\{\cos\alpha\zeta\,[f_1(\xi) + f_2(\xi)] + \sin\alpha\zeta\,[\varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi)]\right\}_{z=0}^{z=l_2},$$

gdzie: $\zeta = z_\xi + \xi \cdot \cos\delta$

oraz

$$\left[f_1(\xi)\right]_{z=0}^{z=l_2} = \int_{z=0}^{z=l_2} \frac{\sin\alpha t_1}{t_1}\,dt_1; \qquad \left[f_2(\xi)\right]_{z=0}^{z=l_2} = \int_{z=0}^{z=l_2} \frac{\sin\alpha t_1'}{t_1'}\,dt_1';$$

$$\left[\varphi_1(\xi)\right]_{z=0}^{z=l_2} = \int_{z=0}^{z=l_2} \frac{\cos\alpha t_1}{t_1}\,dt_1; \qquad \left[\varphi_2(\xi)\right]_{z=0}^{z=l_2} = \int_{z=0}^{z=l_2} \frac{\cos\alpha t_1'}{t_1'}\,dt_1'.$$

Uwzględniając, że np. w odniesieniu do $f_1(\xi)$ jest:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial_\xi}[f_1(\xi)]\right\}_{z=0}^{z=l_2} = \left\{\frac{\partial f_1}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial \xi}\right\}_{z=0}^{z=l_2} = \left\{\frac{\sin\alpha\ t_1}{t_1}\ \frac{\partial t_1}{\partial \xi}\right\}_{z=0}^{z=l_2},$$

będzie:

$$E_{\xi 12R} = 15\,I_m\left\{\frac{\sin\alpha(t_1 - l_2 + \zeta)}{t_1} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial \xi} - \frac{\sin\alpha(t_1' + l_2 - \zeta)}{t_1'} \cdot \frac{\partial t_1'}{\partial \xi}\right\}_{z=0}^{z=l_2}; \quad (12)$$

$$E_{\xi 12X} = 15\,I_m\left\{\frac{\cos\alpha(t_1 - l_2 + \zeta)}{t_1} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial \xi} - \frac{\cos\alpha(t_1' + l_2 - \zeta)}{t_1'} \cdot \frac{\partial t_1'}{\partial \xi}\right\}_{z=0}^{z=l_2}. \quad (13)$$

Podstawiając wyrażenia (12) i (13) do (10) i (11), przeprowadzając redukcje wyrazów i porządkując, otrzymuje się następujące wyrażenia na R_{12} i X_{12} w postaci całkowej:

$$R_{12} = 30 \left\{ \sin \alpha l_2 \left[\cos \alpha (\xi_0 + \right.\right.$$

$$+ l_1) \int_{\alpha \xi_0}^{\alpha (\xi_0 + l_1)} \frac{\cos \alpha \sqrt{\xi^2 + 2 \xi z_\xi \cos \delta + z_\xi^2} \cdot \sin \alpha \xi}{\alpha \xi} d(\alpha \xi) +$$

$$- \sin \alpha (\xi_0 + l_1) \int_{\alpha \xi_0}^{\alpha (\xi_0 + l_1)} \frac{\cos \alpha \sqrt{\xi^2 + 2 \xi z_\xi \cos \delta + z_\xi^2} \cdot \cos \alpha \xi}{\alpha \xi} d(\alpha \xi) \Big] +$$

$$+ \alpha z_\xi \cos \alpha l_2 \left[\sin \alpha (\xi_0 + \right.$$

$$+ l_1) \int_{\alpha \xi_0}^{\alpha (\xi_0 + l_1)} \frac{\sin \alpha \sqrt{\xi^2 + 2 \xi z_\xi \cos \delta + z_\xi^2} \cdot \cos \alpha \xi}{\alpha \sqrt{\xi^2 + 2 \xi z_\xi \cos \delta + z_\xi^2} \cdot \alpha \xi} d(\alpha \xi) +$$

$$- \cos \alpha (\xi_0 + l_1) \int_{\alpha \xi_0}^{\alpha (\xi_0 + l_1)} \frac{\sin \alpha \sqrt{\xi^2 + 2 \xi z_\xi \cos \delta + z_\xi^2} \cdot \sin \alpha \xi}{\alpha \sqrt{\xi^2 + 2 \xi z_\xi \cos \delta + z_\xi^2} \cdot \alpha \xi} d(\alpha \xi) \Big] +$$

$$- \alpha (z_\xi - l_2) \left[\sin \alpha (\xi_0 + \right.$$

$$+ l_1) \int_{\alpha \xi_0}^{\alpha (\xi_0 + l_1)} \frac{\sin \alpha \sqrt{\xi^2 + 2 \xi (z_\xi - l_2) \cos \delta + (z_\xi - l_2)^2} \cdot \cos \alpha \xi}{\alpha \sqrt{\xi^2 + 2 \xi (z_\xi - l_2) \cos \delta + (z_\xi - l_2)^2} \cdot \alpha \xi} d(\alpha \xi) +$$

$$- \cos \alpha (\xi_0 +$$

$$+ l_1) \int_{\alpha \xi_0}^{\alpha (\xi_0 + l_1)} \frac{\sin \alpha \sqrt{\xi^2 + 2 \xi (z_\xi - l_2) \cos \delta + (z_\xi - l_2)^2} \cdot \sin \alpha \xi}{\alpha \sqrt{\xi^2 + 2 \xi (z_\xi - l_2) \cos \delta + (z_\xi - l_2)^2} \cdot \alpha \xi} d(\alpha \xi) \Big] \Big\}; \tag{14}$$

$$X_{12} = 30 \left\{ \sin \alpha l_2 \left[\sin \alpha (\xi_0 + \right.\right.$$

$$+ l_1) \int_{\alpha \xi_0}^{\alpha (\xi_0 + l_1)} \frac{\sin \alpha \sqrt{\xi^2 + 2 \xi z_\xi \cos \delta + z_\xi^2} \cdot \cos \alpha \xi}{\alpha \xi} d(\alpha \xi) +$$

$$- \cos\alpha(\xi_0 + l_1) \int_{\alpha\xi_0}^{\alpha(\xi_0+l_1)} \frac{\sin\alpha\sqrt{\xi^2 + 2\xi z_\xi \cos\delta + z_\xi^2} \cdot \sin\alpha\xi}{\alpha\xi} d(\alpha\xi) \Bigg] +$$

$$- \alpha z_\xi \cos\alpha l_2 \Bigg[\cos\alpha(\xi_0 +$$

$$+ l_1) \int_{\alpha\xi_0}^{\alpha(\xi_0+l_1)} \frac{\cos\alpha\sqrt{\xi^2 + 2\xi z_\xi \cos\delta + z_\xi^2} \cdot \sin\alpha\xi}{\alpha\sqrt{\xi^2 + 2\xi z_\xi \cos\delta + z_\xi^2} \cdot \alpha\xi} d(\alpha\xi) +$$

$$- \sin\alpha(\xi_0 + l_1) \int_{\alpha\xi_0}^{\alpha(\xi_0+l_1)} \frac{\cos\alpha\sqrt{\xi^2 + 2\xi z_\xi \cos\delta + z_\xi^2} \cdot \cos\alpha\xi}{\alpha\sqrt{\xi^2 + 2\xi z_\xi \cos\delta + z_\xi^2} \cdot \alpha\xi} d(\alpha\xi) \Bigg] +$$

$$+ \alpha(z_\xi - l_2) \Bigg[\cos\alpha(\xi_0 +$$

$$+ l_1) \int_{\alpha\xi_0}^{\alpha(\xi_0+l_1)} \frac{\cos\alpha\sqrt{\xi^2 + 2\xi(z_\xi - l_2)\cos\delta + (z_\xi - l_2)^2} \cdot \sin\alpha\xi}{\alpha\sqrt{\xi^2 + 2\xi(z_\xi - l_2)\cos\delta + (z_\xi - l_2)^2} \cdot \alpha\xi} d(\alpha\xi) +$$

$$- \sin\alpha(\xi_0 +$$

$$+ l_1) \int_{\alpha\xi_0}^{\alpha(\xi_0+l_1)} \frac{\cos\alpha\sqrt{\xi^2 + 2\xi(z_\xi - l_2)\cos\delta + (z_\xi - l_2)^2} \cdot \cos\alpha\xi}{\alpha\sqrt{\xi^2 + 2\xi(z_\xi - l_2)\cos\delta + (z_\xi - l_2)^2} \cdot \alpha\xi} d(\alpha\xi) \Bigg] \Bigg\}. \tag{15}$$

5. WYRAŻENIA NA SKŁADOWE IMPEDANCJI WZAJEMNEJ W POSTACI ROZWINIĘTEJ

Rozwiązanie dwunastu całek w wyrażeniach (14) i (15) sprowadza się do rozwiązania innych dwunastu całek powstałych przy rozwinięciu iloczynów w licznikach wyrażeń podcałkowych.

Osiem całek (I_1, I_2, I_3, I_4 oraz I_1', I_2', I_3', I_4') odnoszących się do czterech pierwszych całek wyrażeń (14) i (15) daje się rozwiązać przy pomocy trzech bądź czterech podstawień następujących:

$$u = \sqrt{\xi^2 + 2\xi z_\xi \cdot \cos\delta + z_\xi^2} + \xi, \qquad u' = \sqrt{\xi^2 + 2\xi z_\xi \cdot \cos\delta + z_\xi^2} - \xi;$$

$$u_1 = u + z_\xi; \qquad u_1' = u' + z_\xi;$$

$$u_2 = u - z_\xi; \qquad u_2' = u' - z_\xi;$$

$$u_3 = u + z_\xi \cdot \cos\delta, \qquad u_3' = u' - z_\xi \cdot \cos\delta.$$

Cztery całki (I_5, I_6 oraz I'_5, I'_6) dotyczące dwóch ostatnich całek wyrażeń (14) i (15) dają się rozwiązać przy pomocy trzech następujących podstawień:

$$w = \sqrt{\xi^2 + 2\xi(z_\xi - l_2)\cos\delta + (z_\xi - l_2)^2} + \xi,$$

$$w' = \sqrt{\xi^2 + 2\xi(z_\xi - l_2)\cos\delta + (z_\xi - l_2)^2} - \xi;$$

$$w_1 = w + (z_\xi - l_2), \qquad w'_1 = w' + (z_\xi - l_2);$$

$$w_2 = w - (z_\xi - l_2), \qquad w'_2 = w' - (z_\xi - l_2).$$

W rozwiązaniach wyżej wymienionych dwunastu całek występują funkcje Si oraz Ci (sinus integralny i kosinus integralny), których argumenty są równe wartościom αu_1, αu_2, αu_3 i $\alpha u'_1$, $\alpha u'_2$, $\alpha u'_3$ bądź wartościom αw_1, αw_2 i $\alpha w'_1$, $\alpha w'_2$ przy podstawieniu granic całkowania:

$$\xi = \xi_0 \text{ bądź } \xi = \xi_0 + l_1.$$

Podstawiając rozwiązania całek do wyrażeń (14) i (15), przeprowadzając redukcję wyrazów i porządkując, otrzymuje się następujące wyrażenia na R_{12} i X_{12} w postaci rozwiniętej [(16) i (17)], dotyczące ogólnego przypadku wzajemnego położenia przewodów l_1 i l_2 na płaszczyźnie — według rys. 1.

W wyrażeniu (16) na R_{12} długości przewodów l_1 i l_2 mogą być dowolne większe od zera. Natomiast w wyrażeniu (17) na reaktancję wzajemną X_{12} założono długości przewodów jednakowe i równe wielokrotności ćwierć fali, co wyraża się warunkiem:

$$\alpha l_1 = \alpha l_2 = \alpha l = k\frac{\pi}{2}, \tag{17a}$$

gdzie k oznacza dowolną dodatnią liczbę całkowitą. Wprowadzenie warunku (17a) do (17) jest niezbędne do uzyskania prawidłowych, skończonych wartości reaktancji X_{12} przy dowolnych wielkościach parametrów δ, ξ_0, z_ξ. Niespełnienie warunku (17a) prowadzi do błędnych wyników, przy czym błąd jest tym większy, im bardziej parametry δ, ξ_0, z_ξ zbliżają się do pewnych wartości ekstremalnych, krytycznych, np. $\xi_0 = 0$, $\delta = 180°$ itd., dla których wyrażenie (17) nie daje wielkości skończonych. Fakt ten wiąże się ściśle z przyjętym na wstępie założeniem nieskończenie małej średnicy przewodów.

Należy podkreślić, że wyrażenie (17) pozwala obliczyć wartości reaktancji wzajemnej, natomiast do wyznaczenia reaktancji własnej przewodu (self reactance) należy zastosować operację zbliżenia aż do pokrycia osi (dla nieskończenie małej średnicy) przewodów równoległych, czego nie można odtworzyć w układzie wg rys. 1, jakkolwiek

$$R_{12} = 15\left\{[\sin\alpha(l_1+l_2+\xi_0-z_\xi)]\left[\mathrm{Si}\,\alpha\left(\sqrt{(\xi_0+l_1)^2+2(\xi_0+l_1)\,z_\xi\cos\delta+z_\xi^2}+(\xi_0+l_1)-z_\xi\right)+\right.\right.$$

$$-\mathrm{Si}\,\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2+2\,\xi_0 z_\xi\cos\delta+z_\xi^2}+\xi_0-z_\xi\right)+$$

$$-\mathrm{Si}\,\alpha\left(\sqrt{(\xi_0+l_1)^2+2(\xi_0+l_1)\,z_\xi\cos\delta+z_\xi^2}-(\xi_0+l_1)+z_\xi\right)+$$

$$+\mathrm{Si}\,\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2+2\,\xi_0 z_\xi\cos\delta+z_\xi^2}-\xi_0+z_\xi\right)+$$

$$+\mathrm{Si}\,\alpha\left(\sqrt{(\xi_0+l_1)^2+2(\xi_0+l_1)(z_\xi-l_2)\cos\delta+(z_\xi-l_2)^2}-(\xi_0+l_1)+(z_\xi-l_2)\right)+$$

$$-\mathrm{Si}\,\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2+2\,\xi_0(z_\xi-l_2)\cos\delta+(z_\xi-l_2)^2}-\xi_0+(z_\xi-l_2)\right)+$$

$$-\mathrm{Si}\,\alpha\left(\sqrt{(\xi_0+l_1)^2+2(\xi_0+l_1)(z_\xi-l_2)\cos\delta+(z_\xi-l_2)^2}+(\xi_0+l_1)-(z_\xi-l_2)\right)+$$

$$\left.+\mathrm{Si}\,\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2+2\,\xi_0(z_\xi-l_2)\cos\delta+(z_\xi-l_2)^2}+\xi_0-(z_\xi-l_2)\right)\right]+$$

$$+[\cos\alpha(l_1+l_2+\xi_0-z_\xi)]\left[\mathrm{Ci}\,\alpha\left(\sqrt{(\xi_0+l_1)^2+2(\xi_0+l_1)\,z_\xi\cos\delta+z_\xi^2}-(\xi_0+l_1)+z_\xi\right)+\right.$$

$$-\mathrm{Ci}\,\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2+2\,\xi_0 z_\xi\cos\delta+z_\xi^2}-\xi_0+z_\xi\right)+$$

$$+\mathrm{Ci}\,\alpha\left(\sqrt{(\xi_0+l_1)^2+2(\xi_0+l_1)\,z_\xi\cos\delta+z_\xi^2}+(\xi_0+l_1)-z_\xi\right)+$$

$$-\mathrm{Ci}\,\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2+2\,\xi_0 z_\xi\cos\delta+z_\xi^2}+\xi_0-z_\xi\right)+$$

$$-\mathrm{Ci}\,\alpha\left(\sqrt{(\xi_0+l_1)^2+2(\xi_0+l_1)(z_\xi-l_2)\cos\delta+(z_\xi-l_2)^2}-(\xi_0+l_1)+(z_\xi-l_2)\right)+$$

$$+ \operatorname{Ci}\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2 + 2\,\xi_0\,(z_\xi - l_2)\cos\delta + (z_\xi - l_2)^2} - \xi_0 + (z_\xi - l_2)\right) +$$

$$- \operatorname{Ci}\alpha\left(\sqrt{(\xi_0 + l_1)^2 + 2\,(\xi_0 + l_1)\,(z_\xi - l_2)\cos\delta + (z_\xi - l_2)^2} + (\xi_0 + l_1) - (z_\xi - l_2)\right) +$$

$$+ \operatorname{Ci}\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2 + 2\,\xi_0\,(z_\xi - l_2)\cos\delta + (z_\xi - l_2)^2} + \xi_0 - (z_\xi - l_2)\right)\Big] +$$

$$+ [\sin\alpha\,(l_1 - l_2 + \xi_0 + z_\xi)]\Big[\operatorname{Si}\alpha\left(\sqrt{(\xi_0 + l_1)^2 + 2\,(\xi_0 + l_1)\,z_\xi\cos\delta + z_\xi^2} - (\xi_0 + l_1) - z_\xi\right) +$$

$$- \operatorname{Si}\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2 + 2\,\xi_0\,z_\xi\cos\delta + z_\xi^2} - \xi_0 - z_\xi\right) +$$

$$- \operatorname{Si}\alpha\left(\sqrt{(\xi_0 + l_1)^2 + 2\,(\xi_0 + l_1)\,z_\xi\cos\delta + z_\xi^2} + (\xi_0 + l_1) + z_\xi\right) +$$

$$+ \operatorname{Si}\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2 + 2\,\xi_0\,z_\xi\cos\delta + z_\xi^2} + \xi_0 + z_\xi\right) +$$

$$+ \operatorname{Si}\alpha\left(\sqrt{(\xi_0 + l_1)^2 + 2\,(\xi_0 + l_1)\,(z_\xi - l_2)\cos\delta + (z_\xi - l_2)^2} + (\xi_0 + l_1) + (z_\xi - l_2)\right) +$$

$$- \operatorname{Si}\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2 + 2\,\xi_0\,(z_\xi - l_2)\cos\delta + (z_\xi - l_2)^2} + \xi_0 + (z_\xi - l_2)\right) +$$

$$- \operatorname{Si}\alpha\left(\sqrt{(\xi_0 + l_1)^2 + 2\,(\xi_0 + l_1)\,(z_\xi - l_2)\cos\delta + (z_\xi - l_2)^2} - (\xi_0 + l_1) - (z_\xi - l_2)\right) +$$

$$+ \operatorname{Si}\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2 + 2\,\xi_0\,(z_\xi - l_2)\cos\delta + (z_\xi - l_2)^2} - \xi_0 - (z_\xi - l_2)\right)\Big] +$$

$$- [\cos\alpha\,(l_1 - l_2 + \xi_0 + z_\xi)]\Big[\operatorname{Ci}\alpha\left(\sqrt{(\xi_0 + l_1)^2 + 2\,(\xi_0 + l_1)\,z_\xi\cos\delta + z_\xi^2} + (\xi_0 + l_1) + z_\zeta\right) +$$

$$- \operatorname{Ci}\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2 + 2\,\xi_0\,z_\xi\cos\delta + z_\xi^2} + \xi_0 + z_\xi\right) +$$

$$+ \operatorname{Ci}\alpha\left(\sqrt{(\xi_0 + l_1)^2 + 2\,(\xi_0 + l_1)\,z_\xi\cos\delta + z_\xi^2} - (\xi_0 + l_1) - z_\xi\right) +$$

$$
\begin{aligned}
&- \operatorname{Ci}\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2 + 2\,\xi_0 z_\xi \cos\delta + z_\xi^2} - \xi_0 - z_\xi\right) + \\
&- \operatorname{Ci}\alpha\left(\sqrt{(\xi_0 + l_1)^2 + 2\,(\xi_0 + l_1)\;(z_\xi - l_2)\cos\delta + (z_\xi - l_2)^2} + (\xi_0 + l_1) + (z_\xi - l_2)\right) + \\
&+ \operatorname{Ci}\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2 + 2\,\xi_0 (z_\xi - l_2)\cos\delta + (z_\xi - l_2)^2} + \xi_0 + (z_\xi - l_2)\right) + \\
&- \operatorname{Ci}\alpha\left(\sqrt{(\xi_0 + l_1)^2 + 2\,(\xi_0 + l_1)\;(z_\xi - l_2)\cos\delta + (z_\xi - l_2)^2} - (\xi_0 + l_1) - (z_\xi - l_2)\right) + \\
&+ \operatorname{Ci}\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2 + 2\,\xi_0 (z_\xi - l_2)\cos\delta + (z_\xi - l_2)^2} - \xi_0 - (z_\xi - l_2)\right)\Big] + \\
+ [\sin\alpha\, l_2]\Big[[\sin\alpha(l_1 + \xi_0 + z_\xi\cos\delta)]\Big[&\operatorname{Ci}\alpha\left(\sqrt{(\xi_0 + l_1)^2 + 2\,(\xi_0 + l_1)\, z_\xi\cos\delta + z_\xi^2} + (\xi_0 + l_1) + z_\xi\cos\delta\right) + \\
&- \operatorname{Ci}\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2 + 2\;\xi_0\; z_\xi\;\cos\;\delta + z_\xi^2} + \xi_0 + z_\xi\cos\delta\right) + \\
&+ \operatorname{Ci}\alpha\left(\sqrt{(\xi_0 + l_1)^2 + 2\,(\xi_0 + l_1)\, z_\xi\cos\delta + z_\xi^2} - (\xi_0 + l_1) - z_\xi\cos\delta\right) + \\
&- \operatorname{Ci}\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2 + 2\,\xi_0 z_\xi\cos\delta + z_\xi^2} - \xi_0 - z_\zeta\cos\delta\right)\Big] + \\
- [\cos\alpha\,(l_1 + \xi_0 + z_\xi\cos\delta)]\Big[&\operatorname{Si}\alpha\left(\sqrt{(\xi_0 + l_1)^2 + 2\,(\xi_0 + l_1)\, z_\xi\cos\delta + z_\xi^2} + (\xi_0 + l_1) + z_\xi\;\cos\;\delta\right) - \\
&- \operatorname{Si}\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2 + 2\;\xi_0\;\; z_\xi\;\cos\;\delta + z_\xi^2} + \xi_0 + z_\xi\cos\delta\right) + \\
&- \operatorname{Si}\alpha\left(\sqrt{(\xi_0 + l_1)^2 + 2\,(\xi_0 + l_1)\, z_\xi\cos\delta + z_\xi^2} - (\xi_0 + l_1) - z_\xi\cos\delta\right) + \\
&+ \operatorname{Si}\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2 + 2\,\xi_0 z_\xi\cos\delta + z_\xi^2} - \xi_0 - z_\xi\cos\delta\right)\Big]\Big]\Big\}; \qquad (16)
\end{aligned}
$$

$$X_{12} = 15 \left\{ [\cos\alpha(\xi_0 + z_\xi)] \left[\mathrm{Si}\,\alpha\left(\sqrt{(\xi_0+l)^2 + 2(\xi_0+l)\, z_\xi \cos\delta + z_\xi^2} + (\xi_0+l) + z_\xi\right) + \right.\right.$$

$$- \mathrm{Si}\,\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2 + 2\,\xi_0 z_\xi \cos\delta + z_\xi^2} + \xi_0 + z_\xi\right) +$$

$$+ \mathrm{Si}\,\alpha\left(\sqrt{(\xi_0+l)^2 + 2(\xi_0+l)\, z_\xi \cos\delta + z_\xi^2} - (\xi_0+l) - z_\xi\right) +$$

$$- \mathrm{Si}\,\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2 + 2\,\xi_0 z_\xi \cos\delta\, z_\xi^2} - \xi_0 - z_\xi\right) +$$

$$- \mathrm{Si}\,\alpha\left(\sqrt{(\xi_0+l)^2 + 2(\xi_0+l)\,(z_\xi - l)\cos\delta + (z_\xi - l)^2} + (\xi_0+l) + (z_\xi - l)\right) +$$

$$+ \mathrm{Si}\,\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2 + 2\,\xi_0 (z_\xi - l)\cos\delta + (z_\xi - l)^2} + \xi_0 + (z_\xi - l)\right) +$$

$$- \mathrm{Si}\,\alpha\left(\sqrt{(\xi_0+l)^2 + 2(\xi_0+l)\,(z_\xi - l)\cos\delta + (z_\zeta - l)^2} - (\xi_0+l) - (z_\xi - l)\right) +$$

$$\left. + \mathrm{Si}\,\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2 + 2\,\xi_0\,(z_\xi - l)\,\cos\delta + (z_\xi - l)^2} - \xi_0 - (z_\xi - l)\right)\right] +$$

$$- [\sin\alpha(\xi_0 + z_\xi)] \left[\mathrm{Ci}\,\alpha\left(\sqrt{(\xi_0+l)^2 + 2(\xi_0+l)\, z_\xi \cos\delta + z_\xi^2} + (\xi_0+l) + z_\xi\right) + \right.$$

$$- \mathrm{Ci}\,\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2 + 2\,\xi_0 z_\xi \cos\delta + z_\xi^2} + \xi_0 + z_\xi\right) +$$

$$- \mathrm{Ci}\,\alpha\left(\sqrt{(\xi_0+l)^2 + 2(\xi_0+l)\, z_\xi \cos\delta + z_\xi^2} - (\xi_0+l) - z_\xi\right) +$$

$$+ \mathrm{Ci}\,\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2 + 2\,\xi_0 z_\xi \cos\delta + z_\xi^2} - \xi_0 - z_\xi\right) +$$

$$- \mathrm{Ci}\,\alpha\left(\sqrt{(\xi_0+l)^2 + 2(\xi_0+l)\,(z_\xi - l)\cos\delta + (z_\xi - l)^2} + (\xi_0+l) + (z_\xi - l)\right) +$$

$$+ \operatorname{Ci}\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2 + 2\,\xi_0\,(z_\xi - l)\,\cos\delta + (z_\xi - l)^2} + \xi_0 + (z_\xi - l)\right) +$$

$$+ \operatorname{Ci}\alpha\left(\sqrt{(\xi_0 + l)^2 + 2\,(\xi_0 + l)\,(z_\xi - l)\cos\delta + (z_\xi - l)^2} - (\xi_0 + l) - (z_\xi - l)\right) +$$

$$- \operatorname{Ci}\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2 + 2\,\xi_0\,(z_\xi - l)\,\cos\delta + (z_\xi - l)^2} - \xi_0 - (z_\xi - l)\right)\Big] +$$

$$- [\cos\alpha\,(2l + \xi_0 - z_\xi)]\Big[\operatorname{Si}\alpha\left(\sqrt{(\xi_0 + l)^2 + 2\,(\xi_0 + l)\,z_\xi\,\cos\delta + z_\xi^2} - (\xi_0 + l) + z_\xi\right) +$$

$$- \operatorname{Si}\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2 + 2\,\xi_0\,z_\xi\,\cos\delta + z_\xi^2} - \xi_0 + z_\xi\right) +$$

$$+ \operatorname{Si}\alpha\left(\sqrt{(\xi_0 + l)^2 + 2\,(\xi_0 + l)\,z_\xi\cos\delta + z_\xi^2} + (\xi_0 + l) - z_\xi\right) +$$

$$- \operatorname{Si}\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2 + 2\,\xi_0\,z_\xi\,\cos\delta + z_\xi^2} + \xi_0 - z_\xi\right) +$$

$$- \operatorname{Si}\alpha\left(\sqrt{(\xi_0 + l)^2 + 2\,(\xi_0 + l)\,(z_\xi - l)\,\cos\delta + (z_\xi - l)^2} - (\xi_0 + l) + (z_\xi - l)\right) +$$

$$+ \operatorname{Si}\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2 + 2\,\xi_0\,(z_\xi - l)\,\cos\delta + (z_\xi - l)^2} - \xi_0 + (z_\xi - l)\right) +$$

$$- \operatorname{Si}\alpha\left(\sqrt{(\xi_0 + l)^2 + 2\,(\xi_0 + l)\,(z_\xi - l)\cos\delta + (z_\xi - l)^2} + (\xi_0 + l)^2 - (z_\xi - l)\right) +$$

$$+ \operatorname{Si}\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2 + 2\,\xi_0\,(z_\xi - l)\,\cos\delta + (z_\xi - l)^2} + \xi_0 - (z_\xi - l)\right)\Big] +$$

$$- [\sin\alpha\,(2\,l + \xi_0 - z_\xi)]\Big[\operatorname{Ci}\alpha\left(\sqrt{(\xi_0 + l)^2 + 2\,(\xi_0 + l)\,z_\xi\,\cos\delta + z_\xi^2} - (\xi_0 + l) + z_\xi\right) +$$

$$- \operatorname{Ci}\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2 + 2\,\xi_0\,z_\xi\,\cos\delta + z_\xi^2} - \xi_0 + z_\xi\right) +$$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Ci}\alpha\left(\sqrt{(\xi_0+l)^2+2\,(\xi_0+l)\,z_\xi\cos\delta+z_\xi^2}+(\xi_0+l)-z_\xi\right)+\\
&+\operatorname{Ci}\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2+2\,\xi_0 z_\xi\cos\delta+z_\xi^2}+\xi_0-z_\xi\right)+\\
&-\operatorname{Ci}\alpha\left(\sqrt{(\xi_0+l)^2+2\,(\xi_0+l)\,(z_\xi-l)\cos\delta+(z_\xi-l)^2}-(\xi_0+l)+(z_\xi-l)\right)+\\
&+\operatorname{Ci}\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2+2\,\xi_0(z_\xi-l)\cos\delta+(z_\xi-l)^2}-\xi_0+(z_\xi-l)\right)+\\
&+\operatorname{Ci}\alpha\left(\sqrt{(\xi_0+l)^2+2\,(\xi_0+l)\,(z_\xi-l)\cos\delta+(z_\xi-l)^2}+(\xi_0+l)-(z_\xi-l)\right)+\\
&-\operatorname{Ci}\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2+2\,\xi_0(z_\xi-l)\cos\delta+(z_\xi-l)^2}+\xi_0-(z_\xi-l)\right)\Big]+\\
-[\sin\alpha\,l]\Big\{&[\cos\alpha(l+\xi_0+z_\xi\cos\delta)]\Big[\operatorname{Ci}\alpha\left(\sqrt{(\xi_0+l)^2+2\,(\xi_0+l)\,z_\xi\cos\delta+z_\xi^2}+(\xi_0+l)+z_\xi\cos\delta\right)+\\
&-\operatorname{Ci}\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2+2\,\xi_0 z_\xi\cos\delta+z_\xi^2}+\xi_0+z_\xi\cos\delta\right)+\\
&-\operatorname{Ci}\alpha\left(\sqrt{(\xi_0+l)^2+2\,(\xi_0+l)\,z_\xi\cos\delta+z_\xi^2}-(\xi_0+l)-z_\xi\cos\delta\right)+\\
&+\operatorname{Ci}\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2+2\,\xi_0 z_\xi\cos\delta+z_\xi^2}-\xi_0-z_\xi\cos\delta\right)\Big]+\\
+[\sin\alpha\,(l+\xi_0+z_\xi\cos\delta)]\Big[&\operatorname{Si}\alpha\left(\sqrt{(\xi_0+l)^2+2\,(\xi_0+l)\,z_\xi\cos\delta+z_\xi^2}+(\xi_0+l)+z_\xi\cos\delta\right)+\\
&-\operatorname{Si}\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2+2\,\xi_0 z_\xi\cos\delta+z_\xi^2}+\xi_0+z_\xi\cos\delta\right)+\\
&+\operatorname{Si}\alpha\left(\sqrt{(\xi_0+l)^2+2\,(\xi_0+l)\,z_\xi\cos\delta+z_\xi^2}-(\xi_0+l)-z_\xi\cos\delta\right)+\\
&-\operatorname{Si}\alpha\left(\sqrt{\xi_0^2+2\,\xi_0 z_\xi\cos\delta+z_\xi^2}-\xi_0-z_\xi\cos\delta\right)\Big]\Big\}. \qquad (17)
\end{aligned}$$

łatwo daje się uzyskać ten sam stan końcowy przy podstawieniu np. $z_\xi = 0$, $\xi_0 = 0$ i $\delta = 0$. Okoliczność ta pokrywa się z wynikami podanymi w literaturze [8].

Uwagi powyższe nie dotyczą obliczeń składowej rzeczywistej R_{12}, dla której istotny jest stan końcowy położenia przewodów, niezależnie od sposobu dojścia do tego położenia.

Wyrażenia (16) i (17) dotyczą ogólnego przypadku położenia wzajemnego obu przewodów. Nadając wartościom parametrów określone wielkości bądź tworząc pewne związki między nimi, uzyskuje się odtworzenie szczególnych położeń wzajemnych obu przewodów. Wyrażenia na składowe impedancji wzajemnej dla niektórych szczególnych położeń przewodów podane są w następnym rozdziale.

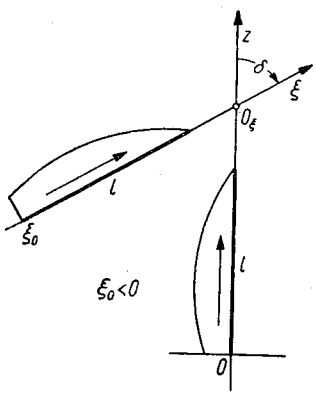
6. WYRAŻENIA NA SKŁADOWE IMPEDANCJI WZAJEMNEJ DLA NIEKTÓRYCH SZCZEGÓLNYCH POŁOŻEŃ PRZEWODÓW

Bezpośrednie podstawienia szczególnych wartości parametrów do wyrażeń ogólnych (16) i (17) na ogół nie dają od razu wyników, bowiem niektóre człony tych wyrażeń stają się rozbieżne. Należy tu stosować rozwinięcie na szereg funkcji Ci i przeprowadzać dyskusję przy przejściu do granicy dla wartości parametru dążącej do założonej. Przy wyznaczaniu granicy stosunku dwóch funkcji dążących do zera duże usługi oddaje reguła de l'Hospitala.

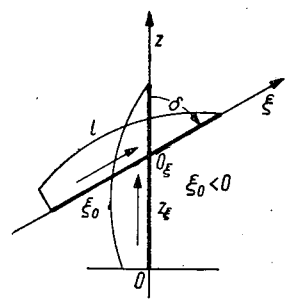
Otrzymane tą drogą wyniki dla niektórych często spotykanych w praktyce położeń obu przewodów podaje się niżej.

6.1. Warunek $l_1 = l_2 = l$, $\xi_0 = -z_\xi$

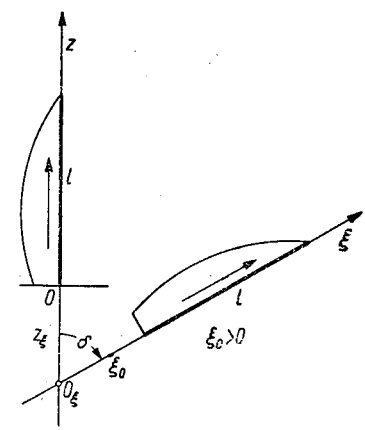
Warunek ten odpowiada sytuacji przedstawionej na rysunkach 2, 3 i 4 — w zależności od znaku parametru ξ_0.



Rys. 2.



Rys. 3.



Rys. 4.

Wyrażenia ogólne dla $\xi \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
R_{12} = 15 \Big\{ & [\sin 2\alpha(l+\xi_0)] \Big[2\,\mathrm{Si}\,\alpha\Big(\sqrt{(\xi_0+l)^2 - 2(\xi_0+l)\,\xi_0\cos\delta + \xi_0^2} + \\
& + 2\xi_0 + l\Big) + \\
& - 2\,\mathrm{Si}\,\alpha\Big(\sqrt{(\xi_0+l)^2 - 2(\xi_0+l)\,\xi_0\cos\delta + \xi_0^2} - 2\xi_0 - l\Big) + \\
& - \mathrm{Si}\,\alpha\Big(\xi_0\Big[2+\sqrt{2(1-\cos\delta)}\Big]\Big) - \mathrm{Si}\,\alpha\Big(\xi_0\Big[2-\sqrt{2(1-\cos\delta)}\Big]\Big) + \\
& - \mathrm{Si}\,\alpha\Big([\xi_0+l]\Big[2+\sqrt{2(1-\cos\delta)}\Big]\Big) - \mathrm{Si}\,\alpha\Big([\xi_0+l]\Big[2 + \\
& - \sqrt{2(1-\cos\delta)}\Big]\Big)\Big] + \\
& + [\cos 2\alpha(l+\xi_0)] \Big[2\,\mathrm{Ci}\,\alpha\Big(\sqrt{(\xi_0+l)^2 - 2(\xi_0+l)\,\xi_0\cos\delta + \xi_0^2} + \\
& + 2\xi_0 + l\Big) + \\
& + 2\,\mathrm{Ci}\,\alpha\Big(-\sqrt{(\xi_0+l)^2 - 2(\xi_0+l)\,\xi_0\cos\delta + \xi_0^2} + 2\xi_0 + l\Big) + \\
& - \mathrm{Ci}\,\alpha\Big(\xi_0\Big[2+\sqrt{2(1-\cos\delta)}\Big]\Big) - \mathrm{Ci}\,\alpha\Big(\xi_0\Big[2-\sqrt{2(1-\cos\delta)}\Big]\Big) + \\
& - \mathrm{Ci}\,\alpha\Big([\xi_0+l]\Big[2+\sqrt{2(1-\cos\delta)}\Big]\Big) - \mathrm{Ci}\,\alpha\Big(\Big[[\xi_0+l]\Big[2 + \\
& - \sqrt{2(1-\cos\delta)}\Big]\Big)\Big] + [\sin\alpha l]\Big[[\sin\alpha(l+\xi_0[1 + \\
& - \cos\delta])]\Big[\mathrm{Ci}\,\alpha\Big(\sqrt{(\xi_0+l)^2 - 2(\xi_0+l)\,\xi_0\cos\delta + \xi_0^2} + \\
& + \xi_0[1-\cos\delta] + l\Big) + \\
& - \mathrm{Ci}\,\alpha\Big(\xi_0\Big[1-\cos\delta+\sqrt{2(1-\cos\delta)}\Big]\Big) + \\
& + \mathrm{Ci}\,\alpha\Big(-\sqrt{(\xi_0+l)^2 - 2(\xi_0+l)\,\xi_0\cos\delta + \xi_0^2} + \xi_0[1-\cos\delta] + l\Big) + \\
& - \mathrm{Ci}\,\alpha\Big(\xi_0\Big[1-\cos\delta-\sqrt{2(1-\cos\delta)}\Big]\Big)\Big] - [\cos\alpha(l+\xi_0[1 + \\
& - \cos\delta])]\Big[\mathrm{Si}\,\alpha\Big(\sqrt{(\xi_0+l)^2 - 2(\xi_0+l)\,\xi_0\cos\delta + \xi_0^2} + \\
& + \xi_0[1-\cos\delta] + l\Big) + \\
& - \mathrm{Si}\,\alpha\Big(\xi_0\Big[1-\cos\delta+\sqrt{2(1-\cos\delta)}\Big]\Big) + \\
& - \mathrm{Si}\,\alpha\Big(\sqrt{(\xi_0+l)^2 - 2(\xi_0+l)\,\xi_0\cos\delta + \xi_0^2} - \xi_0[1-\cos\delta] - l\Big) + \\
& - \mathrm{Si}\,\alpha\Big(\xi_0\Big[1-\cos\delta-\sqrt{2(1-\cos\delta)}\Big]\Big)\Big]\Big] + \\
& - 2\Big[\mathrm{Ci}\,\alpha\Big(\sqrt{(\xi_0+l)^2 - 2(\xi_0+l)\,\xi_0\cos\delta + \xi_0^2} + l\Big) + \\
& + \mathrm{Ci}\,\alpha\Big(\sqrt{(\xi_0+l)^2 - 2(\xi_0+l)\,\xi_0\cos\delta + \xi_0^2} - l\Big) + \\
& - \mathrm{Ci}\,\alpha\Big([\xi_0+l]\sqrt{2(1-\cos\delta)}\Big) - \mathrm{Ci}\,\alpha\Big((\xi_0\sqrt{2(1-\cos\delta)}\Big)\Big]\Big\}; \qquad (18)
\end{aligned}
$$

$$X_{12} = 15 \Big\{ - [\cos 2\alpha (l + \xi_0)] \Big[2 \operatorname{Si} \alpha \Big(\sqrt{(\xi_0 + l)^2 - 2 (\xi_0 + l) \xi_0 \cos\delta + \xi_0^2} + 2 \xi_0 + l \Big) +$$

$$+ 2 \operatorname{Si} \alpha \Big(\sqrt{(\xi_0 + l)^2 - 2 (\xi_0 + l) \xi_0 \cos\delta + \xi_0^2} - 2 \xi_0 - l \Big) +$$

$$- \operatorname{Si} \alpha \Big(\xi_0 \Big[2 + \sqrt{2(1 - \cos\delta)} \Big] \Big) + \operatorname{Si} \alpha \Big(\xi_0 \Big[2 - \sqrt{2(1 - \cos\delta)} \Big] \Big) +$$

$$- \operatorname{Si} \alpha \Big([\xi_0 + l] \Big[2 + \sqrt{2(1 - \cos\delta)} \Big] \Big) + \operatorname{Si} \alpha \Big([\xi_0 + l] \Big[2 + - \sqrt{2(1 - \cos\delta)} \Big] \Big) \Big] +$$

$$- [\sin 2\alpha (l + \xi_0)] \Big[- 2 \operatorname{Ci} \alpha \Big(\sqrt{(\xi_0 + l)^2 - 2 (\xi_0 + l) \xi_0 \cos\delta + \xi_0^2} + 2 \xi_0 + l \Big) +$$

$$+ 2 \operatorname{Ci} \alpha \Big(- \sqrt{(\xi_0 + l)^2 - 2 (\xi_0 + l) \xi_0 \cos\delta + \xi_0^2} + 2 \xi_0 + l \Big) +$$

$$+ \operatorname{Ci} \alpha \Big(\xi_0 \Big[2 + \sqrt{2(1 - \cos\delta)} \Big] \Big) - \operatorname{Ci} \alpha \Big(\xi_0 \Big[2 - \sqrt{2(1 - \cos\delta)} \Big] \Big) +$$

$$+ \operatorname{Ci} \alpha \Big([\xi_0 + l] \Big[2 + \sqrt{2(1 - \cos\delta)} \Big] \Big) - \operatorname{Ci} \alpha \Big([\xi_0 + l] \Big[2 + - \sqrt{2(1 - \cos\delta)} \Big] \Big) \Big] - [\sin \alpha l] \Big[[\cos \alpha (l + \xi_0 [1 +$$

$$- \cos\delta])] \Big[\operatorname{Ci} \alpha \Big(\sqrt{(\xi_0 + l)^2 - 2 (\xi_0 + l) \xi_0 \cos\delta + \xi_0^2} + \xi_0 [1 - \cos\delta] + l \Big) +$$

$$- \operatorname{Ci} \alpha \Big(\xi_0 \Big[1 - \cos\delta + \sqrt{2(1 - \cos\delta)} \Big] \Big) +$$

$$- \operatorname{Ci} \alpha \Big(- \sqrt{(\xi_0 + l)^2 - 2 (\xi_0 + l) \xi_0 \cos\delta + \xi_0^2} + \xi_0 [1 - \cos\delta] + l \Big) +$$

$$+ \operatorname{Ci} \alpha \Big(\xi_0 \Big[1 - \cos\delta - \sqrt{2(1 - \cos\delta)} \Big] \Big) \Big] +$$

$$+ [\sin \alpha (l + \xi_0 [1 - \cos\delta])] \Big[\operatorname{Si} \alpha \Big(\sqrt{(\xi_0 + l)^2 - 2 (\xi_0 + l) \xi_0 \cos\delta + \xi_0^2} + \xi_0 [1 - \cos\delta] + l \Big) +$$

$$- \operatorname{Si} \alpha \Big(\xi_0 \Big[1 - \cos\delta + \sqrt{2(1 - \cos\delta)} \Big] \Big) +$$

$$- \operatorname{Si} \alpha \Big(- \sqrt{(\xi_0 + l)^2 - 2 (\xi_0 + l) \xi_0 \cos\delta + \xi_0^2} + \xi_0 [1 - \cos\delta] + l \Big) +$$

$$+ \operatorname{Si} \alpha \Big(\xi_0 \Big[1 - \cos\delta - \sqrt{2(1 - \cos\delta)} \Big] \Big) \Big] \Big] +$$

$$+ 2 \Big[\operatorname{Si} \alpha \Big(\sqrt{(\xi_0 + l)^2 - 2 (\xi_0 + l) \xi_0 \cos\delta + \xi_0^2} + l \Big) +$$

$$+ \operatorname{Si} \alpha \Big(\sqrt{(\xi_0 + l)^2 - 2 (\xi_0 + l) \xi_0 \cos\delta + \xi_0^2} - l \Big) +$$

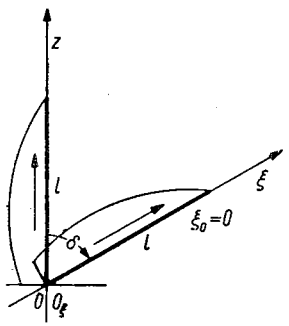
$$- \operatorname{Si} \alpha \Big([\xi_0 + l] \sqrt{2(1 - \cos\delta)} \Big) - \operatorname{Si} \alpha \Big(\xi_0 \sqrt{2(1 - \cos\delta)} \Big) \Big] \Big\}; \qquad (19)$$

$$\alpha l = k\frac{\pi}{2}.$$

6.1.1. Warunek: $l_1 = l_2 = l;\quad \xi_0 = -z_\xi = 0$

Sytuacja dotycząca tego warunku przedstawiona jest na rys. 5. Przechodząc do granicy dla $\xi_0 \to 0$ otrzymuje się z wyrażenia (18) składową rzeczywistą impedancji:

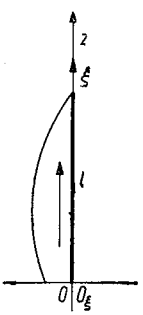
$$\begin{aligned} R_{12} = 15\Big\{&[\sin 2\alpha l]\left[\frac{3}{2}\,\mathrm{Si}\,2\alpha l - \mathrm{Si}\,\alpha\left(l\left[2+\sqrt{2(1-\cos\delta)}\right]\right) + \right.\\ &\left. - \mathrm{Si}\,\alpha\left(l\left[2-\sqrt{2(1-\cos\delta)}\right]\right)\right] +\\ &+[\cos 2\alpha l\,\left[\mathrm{Ci}\,2\alpha l - \mathrm{Ci}\,\alpha\left(l\left[2+\sqrt{2(1-\cos\delta)}\right]\right) + \right.\\ &\left. - \mathrm{Ci}\,\alpha\left(l\left[2-\sqrt{2(1-\cos\delta)}\right]\right)\right] +\\ &-[\sin^2\alpha l]\left[\mathrm{Ci}\,2\alpha l + E + \ln\frac{\alpha l\sin^2\delta}{2}\right] + [\cos^2\alpha l]\ln\frac{1+\cos\delta}{1-\cos\delta} +\\ &+2\,\mathrm{Ci}\,\alpha\left(l\sqrt{2(1-\cos\delta)}\right) - \mathrm{Ci}\,2\alpha l\Big\}. \end{aligned} \tag{20}$$



Rys. 5.

Podobnie wynik dla X_{12} przy $\alpha l = k\frac{\pi}{2}$ będzie:

$$\begin{aligned} X_{12} = 15\Big\{&-[\cos 2\alpha l]\left[2\,\mathrm{Si}\,2\alpha l - \mathrm{Si}\,\alpha\left(l\left[2+\right.\right.\right.\\ &\left.\left.\left.+\sqrt{2(1-\cos\delta)}\right]\right) +\right.\\ &\left.+\,\mathrm{Si}\,\alpha\left(l\left[2-\sqrt{2(1-\cos\delta)}\right]\right)\right] +\\ &-[\sin^2\alpha l]\,\mathrm{Si}\;2\;\alpha\;l + 2\,\mathrm{Si}\;2\;\alpha l +\\ &-2\,\mathrm{Si}\,\alpha\left(l\sqrt{2(1-\cos\delta)}\right)\Big\}. \end{aligned} \tag{21}$$



Rys. 6.

Podkreślić należy zgodność przebiegu X_{12} w funkcji δ przy $\alpha l = \pi$ z danymi zawartymi w literaturze [8].

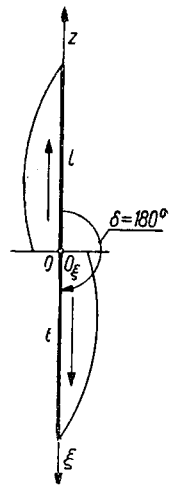
6.1.1.1. Warunek: $l_1 = l_2 = l;\quad \xi_0 = -z_\xi = 0;$ $\delta = 0$. Sytuację dotyczącą tego warunku przedstawia rys. 6. Przechodząc do granicy przy $\delta \to 0$, otrzymuje się z wyrażenia (20) bądź od razu z wyrażenia (18):

$$R_{12} = 15\,\{[1 + \cos^2 \alpha l]\,[E - \mathrm{Ci}\,2\alpha l + \ln 2\alpha l] - [\sin \alpha l]\,[\cos \alpha l]\,\mathrm{Si}\,2\alpha l\}. \quad (22)$$

Wyrażenie to jest zgodne z wynikiem podanym w literaturze dla przypadku skrajnego zbliżenia równoległych przewodów [6].

Dla X_{12} przy $al = k\,\frac{\pi}{2}$ otrzymuje się bezpośrednio z wyrażenia (21)

$$X_{12} = 15\,\{[3 \sin^2 \alpha l]\,\mathrm{Si}\,2\alpha l\}. \quad (23)$$



Rys. 7.

Wyniki uzyskane przy pomocy wyrażenia (23) są zgodne z danymi literatury [8].

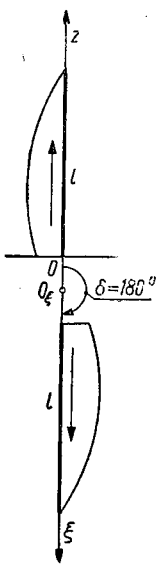
6.1.1.2. Warunek $l_1 = l_2 = l$; $\xi_0 = -z_\xi = 0$; $\delta = 180°$. Sytuację dotyczącą tego warunku przedstawia rys. 7.

Składowa rzeczywista impedancji:

$$R_{12} = 15\left\{[\sin 2\alpha l]\left[\frac{3}{2}\,\mathrm{Si}\,2\alpha l - \mathrm{Si}\,4\alpha l\right] + \right.$$

$$- [\cos 2\alpha l]\,[\mathrm{Ci}\,4\alpha l - \mathrm{Ci}\,2\alpha l + E + \ln \alpha l] +$$

$$\left. - [\sin^2 \alpha l]\,[\mathrm{Ci}\,2\alpha l + E + \ln 2\alpha l] + \mathrm{Ci}\,2\alpha l\right\}. \quad (24)$$



Rys. 8.

Składowa urojona przy $al = k\,\frac{\pi}{2}$:

$$X_{12} = 15\,\{-[\cos 2\alpha l]\,[2\,\mathrm{Si}\,2\alpha l - \mathrm{Si}\,4\alpha l] +$$

$$- [\sin^2 \alpha l]\,\mathrm{Si}\,2\alpha l\}. \quad (25)$$

6.1.2. Warunek: $l_1 = l_2 = l$; $\xi_0 = -z_\xi > 0$; $\delta = 180°$

Odnośną sytuację przedstawia rys. 8.

Składowa rzeczywista impedancji:

$$R_{12} = 15\left\{[\sin 2\alpha (l + \xi_0)]\,[2\,\mathrm{Si}\,2\alpha (2\xi_0 + l) + \right.$$

$$- \mathrm{Si}\,4\alpha (\xi_0 + l) - \mathrm{Si}\,4\alpha \xi_0] + [\cos 2\alpha (l +$$

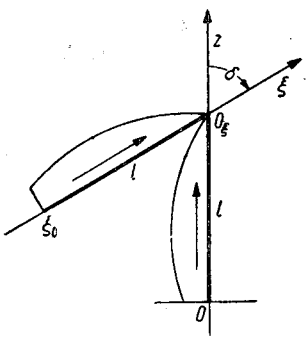
$$+ \xi_0)]\left[2\,\mathrm{Ci}\,2\alpha (2\xi_0 + l) - \mathrm{Ci}\,4\alpha (\xi_0 + l) - \mathrm{Ci}\,4\alpha \xi_0 + \right.$$

$$+ 2\ln\frac{2}{\alpha(2\xi_0+l)} + \ln\alpha\xi_0 + \ln\alpha(\xi_0+l)\Big] +$$
$$+ [\sin\alpha l]\Big[[\sin\alpha(2\xi_0+l)]\,[\mathrm{Ci}\,2\alpha(2\xi_0+l) - \mathrm{Ci}\,4\alpha\xi_0 +$$
$$+ \ln\frac{2}{\alpha(2\xi_0+l)} + 2\ln\alpha\xi_0\Big] +$$
$$- [\cos\alpha(2\xi_0+l)]\,[\mathrm{Si}\,2\alpha(2\xi_0+l) - \mathrm{Si}\,4\alpha\xi_0]\Big]\Big\}. \tag{26}$$

Wyrażenie na składową urojoną przy $al = k\frac{\pi}{2}$ można wyprowadzić z wyrażenia (19) przechodząc do granicy przy $\delta \to 180°$.

6.1.3. Warunek: $l_1 = l_2 = l$; $\xi_0 = -z_\xi = -l$

Sytuacja dotycząca tego warunku jest przedstawiona na rys. 9. Wyrażenie na składową rzeczywistą wyprowadza się z wyrażenia (18);



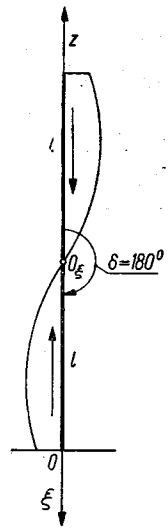
Rys. 9.

$$R_{12} = 15\Big\{[\sin\alpha l]\Big[[\sin\alpha(l\cos\delta)]\Big[\mathrm{Ci}\,\alpha(l[1+$$
$$+\cos\delta]) + \mathrm{Ci}\,\alpha(l[1-\cos\delta]) +$$
$$- \mathrm{Ci}\,\alpha\Big(l\Big[1-\cos\delta+\sqrt{2(1-\cos\delta)}\Big]\Big) +$$
$$- \mathrm{Ci}\,\alpha\Big(-l\Big[1-\cos\delta+$$
$$-\sqrt{2(1-\cos\delta)}\Big]\Big) +$$
$$- [\cos\alpha(l\cos\delta)]\Big[\mathrm{Si}\,\alpha(l[1+\cos\delta]) +$$
$$- \mathrm{Si}\,\alpha(l[1-\cos\delta]) +$$
$$+ \mathrm{Si}\,\alpha\Big(l\Big[1-\cos\delta+\sqrt{2(1-\cos\delta)}\Big]\Big) - \mathrm{Si}\,\alpha\Big(-l\Big[1-\cos\delta+$$
$$-\sqrt{2(1-\cos\delta)}\Big]\Big)\Big]\Big] +$$
$$- \mathrm{Ci}\,\alpha\Big(l\Big[2+\sqrt{2(1-\cos\delta)}\Big]\Big) - \mathrm{Ci}\,\alpha\Big(l\Big[2-\sqrt{2(1-\cos\delta)}\Big]\Big) +$$
$$+ 2\,\mathrm{Ci}\,\alpha\Big(l\sqrt{2(1-\cos\delta)}\Big) + \ln\frac{1+\cos\delta}{1-\cos\delta}\Big\}. \tag{27}$$

6.1.3.1. Warunek: $l_1 = l_2 = l$; $\xi_0 = -z_\xi = -l$; $\delta = 180°$. Sytuację dotyczącą tego warunku przedstawia rys. 10. Na podstawie wyrażenia (27), po przejściu do granicy dla $\delta \to 180°$, będzie:

$$R_{12} = 15\ \{[\sin^2 \alpha l]\ [\mathrm{Ci}\, 4\alpha l - \mathrm{Ci}\, 2\alpha l - \ln 2] - [\sin \alpha l]\ [\cos \alpha l]\ [\mathrm{Si}\, 4\alpha l + - \mathrm{Si}\, 2\alpha l] + - \mathrm{Ci}\, 4\alpha l + 2\,\mathrm{Ci}\, 2\alpha l - E - \ln \alpha l\}. \tag{28}$$

Można łatwo wykazać podstawiając $\xi_0 = -z_\xi = -\frac{l}{2}$ do wyrażenia (19), że przy $\delta \to 0$ i $\alpha l = \pi$ wartość X_{12} dąży do 15 $\{4\ \mathrm{Si}\pi + 2\ \mathrm{Si}2\pi\}$, tj. do wartości podanej w literaturze [4] dla wejściowej reaktancji anteny bikonicznej w wolnej przestrzeni, przy długości ramienia $\alpha l' = \frac{\pi}{2}$ i kącie rozwarcia dążącym do zera. Wynik ten jest również zgodny z podaną w literaturze [8] wartością reaktancji wzajemnej dla skrzyżowanych półfalowych dipoli przy kącie skrętu dążącym do zera. Należy podkreślić, że jakkolwiek stan końcowy układu jest tu określony i przedstawia pojedynczy dipol półfalowy, to jednak wielkość X_{12} jest zależna od rodzaju układu wyjściowego. Przy skrajnym zbliżeniu równoległych półfalowych dipoli $X_{12} = +42{,}5$, dla układu V przy $\delta \to 0$ reaktancja $X_{12} \to 0$, zaś dla skrzyżowanych dipoli przy $\delta \to 0$ reaktacja $X_{12} \to +154$. Okoliczność ta znajduje potwierdzenie w literaturze [8].



Rys. 10.

7. WYRAŻENIA NA OPÓR PROMIENIOWANIA DLA NIEKTÓRYCH SZCZEGÓLNYCH POŁOŻEŃ PRZEWODÓW

Zestawiając wyrażenie na składową rzeczywistą impedancji własnej (22) z odpowiednim wyrażeniem na składową impedancji wzajemnej łatwo otrzymać wyrażenie na składową rzeczywistą oporu promieniowania, odpowiadającą określonej sytuacji. W odniesieniu do podanych niżej przykładów składową impedancji wzajemnej należy brać z przeciwnym znakiem ze względu na przeciwfazę prądu w odbiciu lustrzanym w stosunku do oryginału:

$$R_\Sigma = R_{12\,\delta=0} - R_{12}, \tag{29}$$

gdzie $R_{12\,\delta=0}$ odpowiada wyrażeniu (22).

Dla wyznaczenia składowej urojonej oporu promieniowania wyrażenie na reaktancję własną należy wyprowadzić drogą skrajnego zbliżenia równoległych przewodów. Jak łatwo wykazać, reaktancja własna przewodu o długości $\alpha l = k\frac{\pi}{2}$ wynosi:

$$X_{11} = 15\,\{[1 + \cos^2 \alpha\, l]\,\mathrm{Si}\,2\,\alpha\, l\}, \tag{30}$$

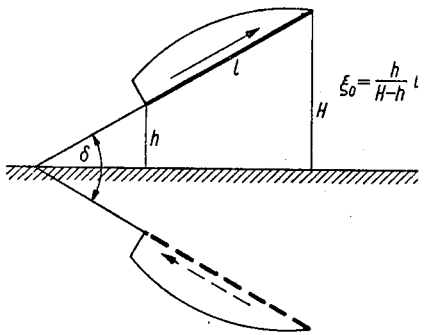
zaś składowa urojona oporu promieniowania $\left(\text{przy } \alpha\, l = k\,\frac{\pi}{2}\right)$

$$X_{\Sigma} = 15\,\{[1 + \cos^2 \alpha\, l]\,\mathrm{Si}\,2\,\alpha\, l\} - X_{12}. \tag{31}$$

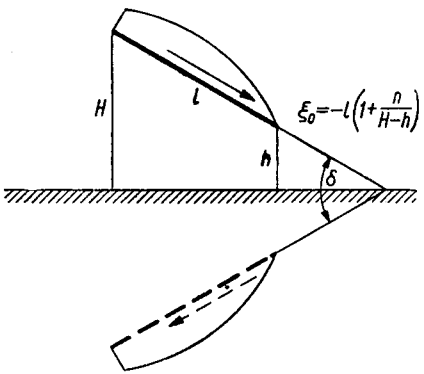
Niżej podaje się wyrażenia na opór promieniowania przewodu umieszczonego skośnie nad ziemią idealną dla różnych szczególnych sytuacji.

Dla zaoszczędzenia miejsca wyrażenia podane są schematycznie, w formie równania wskazującego wyraźnie, jakie składowe wzory należy ze sobą kojarzyć. Obok każdego wyrażenia znajduje się numer rysunku przedstawiającego sytuację, do której odnosi się wyrażenie.

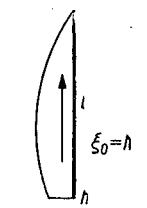
$$R_{\Sigma} = (22) - (18) \tag{32}$$



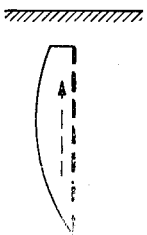
Rys. 11.



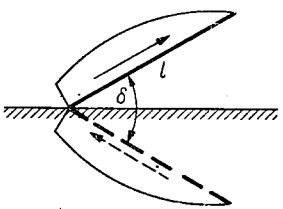
Rys. 12.



$$R_{\Sigma} = (22) - (26) \tag{33}$$



Rys. 13.



Rys. 14.

$$R_{\Sigma} = (22) - (20) \tag{34}$$

Ze względu na liczne zastosowania w praktyce podaje się niżej pełne rozwinięcie wyrażenia (34). Rysunek 18 przedstawia wykres wartości R_{Σ}.

$$R_{\Sigma} = 15 \Big\{ [\sin 2\alpha l] \Big[\mathrm{Si}\,\alpha \Big(l \Big[2 + \sqrt{2(1-\cos\delta)} \Big] \Big) + \mathrm{Si}\,\alpha \Big(l \Big[2 + - \sqrt{2(1-\cos\delta)} \Big] \Big) - 2\,\mathrm{Si}\,2\alpha l \Big] + + [\cos 2\alpha l] \Big[\mathrm{Ci}\,\alpha \Big(l \Big[2 + \sqrt{2(1-\cos\delta)} \Big] \Big) + \mathrm{Ci}\,\alpha \Big(l \Big[2 + - \sqrt{2(1-\cos\delta)} \Big] \Big) - 2\,\mathrm{Ci}\,2\alpha l \Big] + + [\sin^2 \alpha l] \Big[\ln \frac{\alpha l \sin^2 \delta}{2} \Big] + [\cos^2 \alpha l] \Big[\ln \Big(2\alpha l \frac{1-\cos\delta}{1+\cos\delta} \Big) \Big] + - 2 \Big[\mathrm{Ci}\,\alpha \Big(l \sqrt{2(1-\cos\delta)} \Big) - E \Big] + \ln 2\alpha l \Big\}. \tag{35}$$

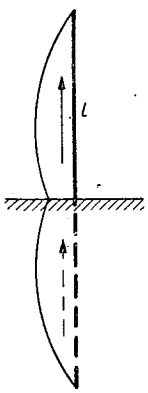
Należy nadmienić, że wyniki liczbowe uzyskane z zastosowania wzoru (35) są zgodne w szczególnych przypadkach z wartościami podanymi w literaturze [1], [7] i [8].

Wartość reaktancji

$$X_{\Sigma} = (30) - (21) \tag{36}$$

przy $\alpha l = k\frac{\pi}{2}$.

Podkreślić należy zgodność przebiegu X_{Σ} w funkcji δ przy $\alpha l = \frac{\pi}{2}$ według wyrażenia (36) z danymi zawartymi w literaturze [5].



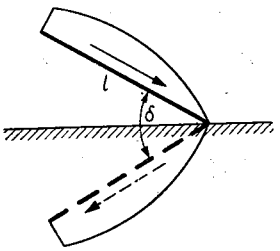
Rys. 15.

$$R_{\Sigma} = (22) - (24) \tag{37}$$

$$X_{\Sigma} = (30) - (25) \tag{38}$$

przy $\alpha l = k\frac{\pi}{2}$.

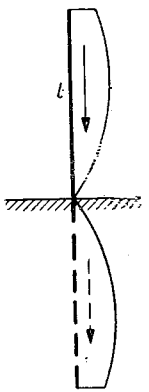
Wyrażenia (37) i (38) w postaci rozwiniętej są powszechnie znane z literatury [1] i stanowią szczególny przypadek wyrażeń ogólniejszych (35) i (36), z których można je wyprowadzić.



Rys. 16.

$$R_\Sigma = (22) - (27) \tag{39}$$

Należy zwrócić uwagę, że sytuacja przedstawiona na rys. 17 jest niejako odwróceniem warunków pracy normalnego symetrycznego wibratora i odpowiada obciążeniu jego końców pojemnościami, co nie znajduje odbicia ani na rysunku, ani w obliczeniach.



Rys. 17.

$$R_\Sigma = (22) - (28). \tag{40}$$

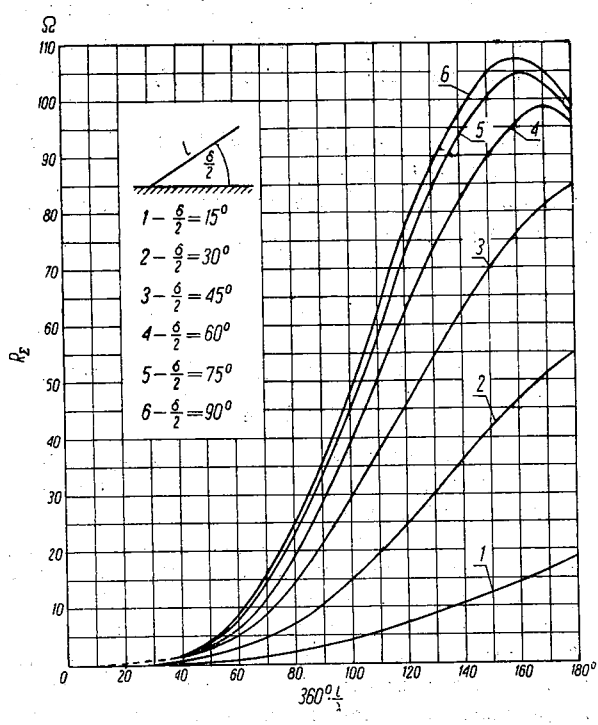
Z tego prawdopodobnie powodu wyniki liczbowe R_Σ dla $al = \frac{\pi}{2}$ według wzoru (40) różnią się dość znacznie od właściwej wartości R_Σ obliczonej innymi metodami dla symetrycznego wibratora obciążonego pojemnościowo. Natomiast dla wartości $al = k\pi$, gdzie $k = 1, 2, 3...$ wyniki otrzymane na podstawie wyrażenia (40) są całkowicie zgodne z wartościami, jakie można otrzymać na innej drodze.

8. WNIOSKI KOŃCOWE

W otrzymanych wyrażeniach na składowe impedancji wzajemnej i na składowe oporu promieniowania występują funkcje Si oraz Ci, dla których istnieją dokładne, łatwo dostępne tabele, dzięki czemu obliczanie wyrażeń po podstawieniu odpowiednich wartości parametrów nie nastręcza trudności merytorycznych. Nakład pracy związany z tymi obliczeniami nie jest większy niż np. przy wyznaczaniu poszczególnych punktów dla przestrzennych charakterystyk promieniowania układów antenowych.

Uzyskane wyrażenia pozwalają rozszerzyć zasięg obliczeń układów antenowych na systemy, w których występują elementy wzajemnie nierównoległe. Jest to szczególnie istotne dla wyznaczania ścisłej wartości oporu promieniowania wielu spotykanych w praktyce anten oraz dla obliczania i projektowania nowych, kierunkowych układów antenowych,

dających częstokroć duże korzyści ekonomiczne (patent nr 39673 Urz. Pat. PRL).



Rys. 18. Składowa rzeczywista oporu promieniowania przewodu umieszczonego skośnie nad ziemią

Biuro Studiów i Projektów Łączności
Warszawa

Autor składa gorące podziękowanie ob. technikowi J. Organkowi, studentowi W. S. I., za pomoc w wykonaniu podstawowych przeliczeń przy wyprowadzaniu niektórych wyrażeń dotyczących szczególnych położeń przewodów, a ob. mgrowi A. Wakuliczowi z Państwowego Instytutu Matematycznego za wspólne przedyskutowanie zagadnienia punktów szczególnych w rozważanych funkcjach.

WYKAZ LITERATURY

1. Ajzenberg G. Z.: Antienny dla magistralnych korotkowołnowych radioświaziej. 1948, str. 111.
2. Babin F.: Impédance mutuelle de deux antennes rectilignes fines, parallèles ou concourantes parcourues par des courants harmoniques. — Ann. des Télécomm., tom 8, nr 4, 1953, str. 145.
3. Babin F.: Couplage entre deux antennes rectilignes fines parcourues par des courants harmoniques, de position quelconque l'une par rapport à l'autre. — Ann. des Télécomm., tom 10, nr 1, 1955, str. 8.

4. Channey J. G.: Simplification for Mutual Impedance of Certain Antennas. — Journ. of Appl. Phys., tom 24, nr 6, 1953, str. 747.
5. King R.: Theory of V-Antennas. — JApPh, tom 22, nr 9, 1951, str. 1111.
6. Kryłow N. N.: Zadacznik po sudowoj radjotiechnikie, 1950, str. 160.
7. Lewin L.: Mutual Impedance of Wire Aerials. — Wir. Eng., t. 28, 1951, str. 352.
8. Medhurst R. G., B. Sc.: Dipole Aerials in Close Proximity. — Wir. Eng., tom 28, nr 339, 1951, str. 356.
9. Niejman M. S.: Pieriedajuszczije antienny, 1934, str. 357—361.
10. Pistolkors A. A.: Antienny, 1947, str. 168.

Г. ЧИЖ

ВЗАИМНЫЕ ИМПЕДАНСЫ В ПЛОСКИХ АНТЕННЫХ СИСТЕМАХ

Резюме

В настоящей статье выводятся по возможности в оперативной форме общие выражения активной и реактивной составляющих взаимного импеданса между двумя непараллельными вибраторами, лежащими в одной плоскости, рис. 1. В вычислениях введены упрощающие предположения, между прочим относящиеся к бесконечно малому диаметру проводов, а область рассуждений ограничена к вибраторам с узлом тока на одном из концов. Вычисления исполнены, основываясь на методе наведенных е. д. т. Как это следует из основных выражений (3), (5), (7) и (9), определение составляющих взаимного импеданса связано с двухкратным интегрированием. При помощи соответственных подстановок первое интегрирование относится к той же переменной, как и дифференцирование представленное в формуле (8), благодаря чему выражения (12) и (13) составляющих $E_{\xi 12}$ получаются в форме не содержащей интегралов. После подстановки (12) и (13) в (10) и (11) получаются выражения для обеих составляющих взаимного импеданса в интегральном виде [формулы (14) и (15)]. Второе интегрирование, после трёх или четырёх подстановок, ведёт к выражениям для обеих составляющих взаимного импеданса в развернутом виде [формулы (16) и (17)]. В этих выражениях выступают функции Si и Ci, для которых существуют таблицы их значений. Выражение (16) для активной составлющей дает конечные правильные значения для произвольной длины обоих проводов, выражение же (17) для реактивной составляющей относится к вибраторам с длиной равной многократности $\frac{\pi}{2}$.

Для другой длины выражение (17) дает значения обременённые погрешностью, возрастающей по мере того, как некоторые параметры приближаются к своим крайним, критическим значениям, при которых выражение (17) не дает конечных величин. Это тесно связано с принятым во вступлении предположением бесконечно малого диаметра проводов. Выражение (17) относится к значениям взаимного реактивного сопротивления, для определения же собственного реактивного сопротивления провода следует применять постепенные приближения до тех пор, пока не достигнем покрытия осей двух одинаковых параллельных проводов. Общие формулы (16) и (17) использованы затем для выведения выражений составляющих взаимного импеданса для некоторых особых

значений параметров, что относится к некоторым особым положениям проводов — по рисункам 2 до 10. Затем соединены выражения составляющих собственного импеданса и составляющих взаимного импеданса, и получены формулы сопротивления излучения косого провода над землёй, для различных углов наклона. Это соответствует часто встречаемым на практике условиям. Полученные таким путём результаты, относящиеся к общему случаю, вполне согласны с поданными в литературе значениями для некоторых особых значений длины и положения проводов. Исключением является выражение (40) дающее для $l = \lambda/4$ значения, довольно сильно отличающиеся от величин встречаемых в литературе для этого особого случая, а именно для нагруженного ёмкостью вибратора. Это вероятно следует из того, что в вычислениях не отражается факт нагрузки вибратора ёмкостью, не представленной впрочем на рис. 17.

Для длины равной многократности π значения получаемые по формуле (40) вполне согласны с величинами указанными в литературе и полученными иным путём. Общие выражения (16) и (17) позволяют расширить область вычислений антенных систем на системы, в которых выступают непараллельные к себе элементы. Это имеет существенное значение для вопроса расчёта и проектировки новых направленных антенных систем, неоднократно дающих большие экономические выгоды.

J. CZYŻ

MUTUAL IMPEDANCES IN PLANE AERIAL ARRAYS

Summary

The subject of this paper is to deduce in a possibly operative form general expressions for the active and reactive components of mutual impedance between two non-parallel radiators situated in one plane (Fig. 1). Simplified assumptions, concerning for example an infinitely small wire diameter, have been introduced into the calculations, and the considerations have been limited to radiators with a current node on one of the ends. The calculations have been carried out on the basis of the method of induced e. m. forces. It results from the basic expressions (3), (5), (7) and (9), that the determining of mutual impedance components is connected with the operation of integrating twice. By means of appropriate substitutions, the operation of the first integration concerns the same variable as the operation of differentiating, presented in formula (8), due to what, expressions (12) and (13) for the component $E_{\xi 12}$ are obtained in a form without integrals. After having substituted (12) and (13) to (10) and (11), an expression for both components of mutual impedance is obtained in an integral form (formulae 14 and 15).

The second operation of integrating, after having performed three or four substitutions, leads to expressions for both components of mutual impedance in a developed form (formulae 16 and 17). Functions Si and Ci, tables of values exist for which, are presented in these expressions.

The expression (16) for the active component gives finite correct values for arbitrary lengths of both wires, whereas the expression (17), concerning the reactive component is referred to radiators with the lengths equal to multiples of $\pi/2$. As far as other lengths are concerned, the expression (17) gives values with an error which is bigger when some of the parameters are approaching extreme

critical values, in presence of which the expression (17) does not give finite values. The above is exactly connected with the assumption of an infinitely small wire diameter, which has been accepted in the introduction. The expression (17) concerns the value of mutual reactance, whereas in order to determine the self-reactance of the wire, an operation of approaching the axes of two identical parallel wires, so as to cover one with the other, should be applied.

Subsequently, general formulae (16) and (17) are utilized in order to deduce expressions for the components of mutual impedance for some particular values of the parameters, which are referred to some particular positions of wires according to Fig. 2÷10. Furthermore, the expressions for components of the self-way formulae for components of the radiation resistance of a wire put obliquely to the earth surface, are obtained according to Fig. 11÷17. The values of the active component of the radiation resistance of this wire for different angles of inclination are presented in Fig. 18 in a form of a graph. It corresponds to a situation which occurs very often in practice.

The results obtained this way and concerning the general case are quite in agreement with the values given in literature for some particular lengths and positions of wires. There is an exception with the expression (40), which gives for $l = \lambda/4$ values considerably differing from the values given in literature for this particular case corresponding to a radiator loaded with capacity. It probably results from the above, that the fact that the radiator is loaded with capacity is not taken into consideration in the calculations; this capacity is not shown after all in Fig. 17.

For a length equal to the multiple of π, the values obtained by means of (40) are in full conformity with the values given in literature and deduced in another way.

The general expressions (16) and (17) allow to calculate aerial arrays composed of non-parallel elements. It is of essential importance for the sake of calculating and design of new directional aerial arrays, which give often economical profits.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM III · ZESZYT 2

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1957

RADA REDAKCYJNA

PROF. JANUSZ GROSZKOWSKI, PROF. JANUSZ LECH JAKUBOWSKI,
PROF. BOLESŁAW KONORSKI, PROF. IGNACY MALECKI,
PROF. PAWEŁ NOWACKI, PROF. PAWEŁ SZULKIN, PROF. STANISŁAW SZPOR

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor Naczelny
PROF. WITOLD NOWICKI

Sekretarz
JULIUSZ MIERZEJEWSKI

ADRES REDAKCJI

Warszawa, Politechnika, Plac Jedności Robotniczej 1,
Katedra Teletransmisji Przewodowej, Gmach Mechaniki

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
Warszawa, Krakowskie Przedmieście 79

Nakład 769 (672 + 97)	Oddano do składania 27.II.57
Ark. wyd. 9,45 druk. 8	Druk ukończono w czerwcu 1957
Pap. druk. sat. kl. III 80 g, 70 × 100	B-11.
Zamówienie nr 446c/57	Cena zł 25.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa.

539.2

TADEUSZ LIPOWIECKI

Pasmowa teoria przewodnictwa elektrycznego ciała stałego

Rękopis dostarczono 25.10.1956

Celem niniejszej pracy jest zapoznanie czytelnika z podstawami nowoczesnej pasmowej teorii przewodnictwa elektrycznego. Opisano budowę różnych typów siatek krystalicznych ciała stałego, poświęcając szczególną uwagę budowie siatki krystalicznej pierwiastków grupy 4.: węgla (diamentu), krzemu i germanu. Omówiono poziomy energetyczne atomu izolowanego oraz powstawanie pasm energetycznych w krysztale ciała stałego. Podano zasadę wyłączności Pauliego, wykorzystując ją przy rozpatrywaniu powstawania pasm energetycznych. Sklasyfikowano ciała stałe w zależności od wzajemnego położenia względem siebie pasma podstawowego i pasma przewodnictwa dzieląc je na przewodniki, półprzewodniki i izolatory. Na przykładzie krzemu i germanu omówiono istotę przewodnictwa nadmiarowego i niedomiarowego oraz określanie rodzaju przewodnictwa kryształów za pomocą zjawiska Halla. W pracy szczegółowo opisano zjawiska, których znajomość jest niezbędna przy studiowaniu fizycznych podstaw diod krystalicznych i tranzystorów.

1. WSTĘP

Pierwsze próby wyjaśnienia istoty przewodnictwa elektrycznego metali były czynione na przełomie XIX i XX wieku. Teoria elektronowa stanu metalicznego pochodzi w swojej pierwotnej formie od P. Drudego (1900), który opracował w szczegółach założenia E. Rieckego (1898) o egzystencji swobodnych elektronów w metalach. Teoria Drudego rozpatruje elektrony w metalach jako swobodne cząsteczki gazu i stosuje do nich prawa teorii kinetycznej. Zgodnie z poglądami teorii kinetycznej przyjmuje się, że elektrony znajdują się w ruchu chaotycznym, ograniczonym w swej drodze swobodnej wskutek ciągłych zderzeń z atomami metalu. W przypadku działania zewnętrznego pola elektrycznego ruch ten otrzymuje składową jednokierunkową i powoduje w ten sposób przepływ prądu elektrycznego.

Według Drudego przyjmuje się, że energia kinetyczna elektronu jest równa co do wielkości energii kinetycznej atomu w jednoatomowym ga-

zie. Posługując się bardzo prostymi założeniami Drude uzyskał wzory na przewodnictwo elektryczne i cieplne metalu.

W pierwotnej swej teorii Drude przyjmuje, że wszystkie elektrony między zderzeniami posiadają równie wielką swobodną drogę l, a po zderzeniu równą co do wielkości prędkość v. Wyliczenie na podstawie teorii Drudego przewodności elektrycznej i cieplnej metalu wymaga znajomości drogi l i prędkości v, które nie są bezpośrednio dostępne. Istotny sukces teoria Drudego uzyskała dla prawa Wiedemanna-Franza, jednak był to sukces ograniczony. Wyniki dotyczące prawa Wiedemanna-Franza, a także zjawisk termoelektrycznych i termicznej emisji elektronów, mogły uchodzić za przekonywające, jednak z reguły zawodziły.

Trudności te nie zostały także pokonane w następnym stadium udoskonalenia teorii elektronowej, kiedy Lorentz odrzucił warunek stałej prędkości wszystkich elektronów, zastosowując do nich prawo rozdziału prędkości Maxwella. Zasadnicza sprzeczność istniała między założeniami teorii elektronowej a wielkością ciepła właściwego metali.

Według poglądów teorii kinetycznej elektrony dysponując trzema stopniami swobody powinny wnieść swój dodatkowy udział do ciepła właściwego metalu, który by wynosił 3/2 R, tj. 3 kalorie na 1 gram-atom jednowartościowego metalu, optyczne właściwości metalu wskazują bowiem, iż liczba elektronów swobodnych jest współrzędna z liczbą atomów. Tymczasem doświadczenie pokazuje nam, iż ciepło właściwe metalu bardzo mało różni się od ciepła właściwego pozostałych substancji, które nie dysponują wolnymi elektronami.

Odkąd zaś A. Einstein i P. Debye udowodnili, że zależność ciepła właściwego ciał stałych od temperatury przedstawić można ilościowo, opierając się jedynie na oscylacjach termicznych atomów w sieci przestrzennej, stało się pewne, że właściwości gazu elektronowego są zasadniczo różne od właściwości zwykłego gazu. Tego rodzaju pogląd jest tym bardziej uzasadniony, że objętość gramoatomu metalu wynosi zaledwie kilka lub kilkanaście cm^3 i mol gazu idealnego osiągnąłby ją dopiero pod ciśnieniem tysięcy atmosfer.

Wielu badaczy, jak J. J. Thomson, Wien-Grüneisen, Bridgman, Bohr, Lindemann i inni, usiłowało rozwiązać zagadnienia związane z właściwościami stanu metalicznego; trudności te nie zostały jednak pokonane.

Równolegle do wyżej wymienionych prac prowadzone były badania nad właściwościami elektrycznymi półprzewodników i izolatorów. Materiał zbierany na drodze doświadczalnej gwałtownie narastał — powstała konieczność opracowania teorii, na bazie której można by przeprowadzić klasyfikację ciał stałych na przewodniki, półprzewodniki i izolatory, wyjaśnić w jednolity sposób zjawiska zachodzące pod wpływem różnych

czynników we wszystkich ciałach stałych oraz wyjaśnić szereg ciekawych właściwości elektrycznych półprzewodników, odmiennych od analogicznych właściwości przewodników metalicznych. Szczególnie interesujące są następujące właściwości półprzewodników:

1) bardzo szybki wzrost przewodności elektrycznej półprzewodników w miarę powiększania się procentowej zawartości domieszek w półprzewodniku; wzrost zawartości domieszek o kilka tysięcznych procenta może spowodować kilkutysięczny wzrost przewodności elektrycznej;

2) eksponencjalny wzrost przewodności elektrycznej półprzewodników w zależności od temperatury;

3) zależność przewodności elektrycznej od oświetlenia;

4) nieliniowy charakter zależności prądu w funkcji napięcia przyłożonego do elementu wykonanego z materiału półprzewodnikowego; zjawisko to występuje szczególnie wyraźnie przy dużych wartościach natężenia pola elektrycznego wewnątrz półprzewodnika.

Poza wyżej podanymi charakterystycznymi właściwościami, dotyczącymi samych półprzewodników, spotykamy się z niezwykle interesującymi właściwościami styków: metal-półprzewodnik i półprzewodnik-półprzewodnik.

Charakterystyczne właściwości półprzewodników i wyżej wymienionych styków są różnie wykorzystywane w technice: termistory, baretery, urdoksy, prostowniki selenowe i miedziowe, diody krystaliczne i inne są przykładami szerokiego zastosowania półprzewodników.

W 1948 r. został wynaleziony trójelektrodowy półprzewodnikowy przyrząd elektronowy, zwany triodą krystaliczną lub tranzystorem. Stwierdzono, że tranzystor posiada właściwości podobne do lampy elektronowej: może on wzmacniać przebiegi mocy zmienne w czasie. Wykazuje on ponadto szereg cennych właściwości układowych w stosunku do lampy elektronowej, jak np. brak obwodu żarzenia, możliwość natychmiastowego uruchomienia urządzenia tranzystorowego bez opóźnienia spowodowanego w urządzeniach lampowych nagrzewaniem się katod lamp elektronowych, bardzo małe wymiary geometryczne i szereg innych zalet.

Prawa rządzące ruchem elektronu swobodnego są już dawno poznane. Ustalone zostały one w oparciu o dynamikę newtonowską (przy prędkościach znacznie mniejszych od prędkości światła); w tych prawach elektron występuje jako cząstka posiadająca określoną masę i obdarzona elementarnym ładunkiem elektrycznym. W związku z tym interpretacja fizyczna zjawisk zachodzących w lampie elektronowej nie napotyka na żadne trudności. Wystarczy tutaj znajomość trzech zasad dynamiki Newtona i podstawowych praw dotyczących zachowania się elektronu w polu elektromagnetycznym.

Interpretacja fizyczna zjawisk zachodzących w elektronowych przyrządach półprzewodnikowych napotyka znaczne trudności — tu wymagana jest znajomość kwantowo-mechanicznych podstaw elektroniki ciała stałego, z których wynikła nowoczesna pasmowa teoria przewodnictwa elektrycznego.

Podwaliny nowej teorii przewodnictwa elektrycznego dał A. Sommerfeld, stosując do gazu elektronowego zasady mechaniki falowej i zastępując klasyczną statystykę Maxwella nową statystyką kwantową Fermiego-Diraca. Nowa statystyka nakłada na cząstki gazu elektronowego ograniczenia nieznane w klasycznej teorii kinetycznej, co sprawia, iż tego rodzaju gaz elektronowy nie odpowiada swymi właściwościami normalnym gazom jednoatomowym, których prawa klasyczna teoria przeniosła bez zastrzeżeń na elektrony metaliczne.

2. CIAŁA STAŁE I ICH STRUKTURA KRYSTALICZNA

Ciało stałe składa się z ułożonych w określonym porządku atomów, wchodzących w jego skład chemiczny. Atomy te tworzą tzw. siatkę krystaliczną ciała stałego.

Zwykle w ciele stałym mamy do czynienia z uporządkowanym ułożeniem atomów tylko w małych przestrzeniach, zwanych krystalitami. Sposób, w jaki są uporządkowane atomy w poszczególnych krystalitach danego ciała stałego, jest jednakowy, jednakże orientacje osi krystalograficznych w sąsiednich kryształach są różne. Ciała stałe o takiej budowie krystalicznej nazywamy ciałami polikrystalicznymi.

Ciała stałe składające się tylko z jednego krystalitu, a więc takie, w których orientacja siatki krystalicznej dla całego ciała jest jednakowa, nazywają się monokryształami. Niektóre monokryształy występują w naturze, jak np. kwarc, sól kuchenna, diament i inne. Można również na drodze laboratoryjnej otrzymywać monokryształy o znacznych rozmiarach geometrycznych.

Monokryształ kruszony przez uderzenie dzieli się na części ograniczone płaszczyznami równoległymi do naturalnych płaszczyzn kryształu. Naturalne kryształy NaCl mają kształt prostopadłościanu i taki sam kształt przybierają jego odłamki.

W monokrysztale może występować kilka rodzajów wiązań międzyatomowych o różnych wielkościach sił wiążących — wówczas monokryształ łatwiej dzieli się na części w kierunkach, w których wiązania są słabsze. Jako przykłady można podać monokryształ miki, dzielący się na płytki (dwa kierunki o wzmocnionej wytrzymałości) i monokryształ azbestu, dzielący się na nitki (jeden kierunek wzmocnionej wytrzymałości). Zjawisko to nazywamy anizotropią.

Jak już wspominaliśmy, podstawową cechą kryształu jest regularność rozmieszczenia w przestrzeni elementów, z których zbudowany jest kryształ. Elementami siatki krystalicznej są atomy, jony lub cząsteczki. Tworzą one siatkę przestrzenną, w której pewne zespoły strukturalne powtarzają się periodycznie. Periodyczność ma charakter trójwymiarowy. Punkty, w których znajdują się środki mas poszczególnych elementów siatki krystalicznej, nazywamy w ę z ł a m i. Trzy wymiary liniowe najmniejszego przestrzennie, powtarzającego się okresowo elementu siatki krystalicznej, czyli tak zwanej k o m ó r k i s i e c i o w e j, określone w kierunkach głównych osi krystalograficznych, noszą nazwę s t a ł y c h s i a t k i k r y s t a l i c z n e j. Jeżeli komórką sieciową kryształu jest sześcian (sól kuchenna, diament, krzem, german i in.), wówczas siatka krystaliczna charakteryzowana jest przez jedną stałą.

Przeprowadzając klasyfikację kryształów z punktu widzenia rodzajów wiązań międzyatomowych w siatce krystalicznej, możemy wyodrębnić następujące grupy kryształów:

1. K r y s z t a ł y m e t a l i c z n e. Są one nieprzezroczyste, plastyczne, dobrze przewodzą prąd elektryczny. Atomy metalu krystalizują w takiej formie, jak np. kule bilardowe wrzucone do naczynia i ułożone jak najgęściej[1]). Między naładowaną ujemnie chmurą elektronów walencyjnych a dodatnimi jonami metalicznymi znajdującymi się w węzłach siatki krystalicznej działają siły przyciągające, które stanowią istotę sił spójności siatki krystalicznej metalu. Błędne byłoby mniemanie, że do wytłumaczenia sił spójności wystarczą pojęcia zaczerpnięte z elektrostatyki; zasadniczą rolę odgrywają tutaj specyficzne własności gazu elektronowego, opisywane przez mechanikę kwantową.

2. K r y s z t a ł y w a l e n c y j n e. Są one twarde, kruche, nie odkształcają się plastycznie. Składają się z jednego lub kilku rodzajów atomów, związanych ze sobą za pomocą tzw. wiązań kowalentnych. Przedstawicielami tej grupy wiązań są kryształy pierwiastków wchodzących w skład czwartej grupy układu periodycznego Mendelejewa (węgiel, krzem, german) oraz szereg związków chemicznych (SiO_2, SiC, BN itd.).

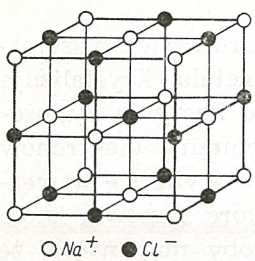
3. K r y s z t a ł y j o n o w e. Do nich zaliczają się kryształy substancji o składzie chemicznym typu M_mR_r (M — symbol atomu metalu, R — symbol atomu metaloidu, m, r — ilości odpowiednich atomów wchodzących w skład cząsteczki). W siatce krystalicznej kryształu jonowego znajdują się jony dodatnie metalu oraz jony ujemne metaloidu.

[1]) Gęstość „upakowania" atomów w siatce krystalicznej charakteryzowana jest za pomocą liczby koordynacyjnej; liczba ta określa ilość najbliższych sąsiednich atomów względem atomu rozpatrywanego.

Siłami wiążącymi są tutaj elektrostatyczne siły przyciągające pomiędzy sąsiednimi jonami.

4. Kryształy molekularne. Są one aglomeratami atomów lub cząsteczek o zewnętrznych powłokach zapełnionych przez elektrony. Typowe kryształy molekularne tworzą chlorowce w stanie stałym, w których elementami siatki krystalograficznej są dwuatomowe cząsteczki. W ten sam sposób krystalizują zestalone gazy obojętne. Siły wiążące kryształy molekularne nazywamy siłami Van der Waalsa. Siły te powstają między atomami i cząsteczkami dlatego, że atomy lub cząsteczki wskutek wirowego ruchu elektronów wokół jąder atomowych zachowują się podobnie jak zmienne multipole elektryczne. Siły Van der Waalsa działają na małych odległościach.

Typowym przykładem monokryształu jest kryształ soli kuchennej NaCl, będący kryształem jonowym typu M_mR_r (M = Na, R = Cl, m = $= r = 1$). Kryształ ten nie składa się ani z atomów Na i Cl, ani z cząsteczek NaCl, lecz z jonów atomów Na^+ i Cl^-. Jony umieszczone w węzłach siatki krystalicznej tworzą pewną całość stanowiącą olbrzymią cząsteczkę (rys. 1). Każdy jon znajduje się w polu działania wszystkich otaczających go jonów, a więc z punktu widzenia budowy kryształu nie ma logicznego sensu mówienie o cząsteczse NaCl. Symbol „NaCl" jest tylko formalnym symbolem chemicznego związku Na i Cl.



Rys. 1. Budowa siatki krystalicznej monokryształu NaCl

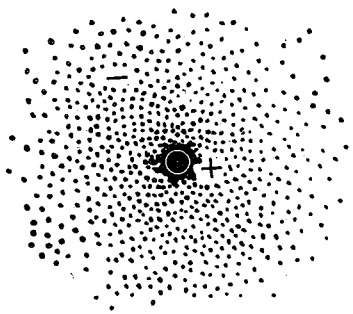
W technice tranzystorowej jako półprzewodnik stosowany jest głównie german. Kryształ germanu jest kryształem walencyjnym, w którym siłami wiążącymi poszczególne atomy ze sobą są tzw. siły wiązań kowalentnych.

Istotę wiązania kowalentnego wyjaśnimy na przykładzie cząsteczki wodoru H_2, w której dwa atomy wodoru związane są ze sobą również za pomocą wiązania kowalentnego. Najpierw musimy wyjaśnić sobie sens fizyczny funkcji falowej, za pomocą której w kwantowej mechanice opisywany jest stan elektronu.

Funkcja falowa Ψ nazywana bywa niekiedy w kwantowej mechanice „amplitudą prawdopodobieństwa", a kwadrat jej wielkości bezwzględnej, oznaczany jako $|\Psi|^2$, „gęstością prawdopodobieństwa".

Gęstość prawdopodobieństwa można zinterpretować fizycznie w następujący sposób: elektron, którego ruch opisywany jest funkcją falową, można sobie wyobrazić jako cząstkę o wymiarach geometrycznych znikomo małych w porównaniu z wymiarem atomu. Tor elektronu nie wydostaje się poza przestrzeń objętą funkcją falową. Dzieląc myślowo przestrzeń otaczającą jądro atomu na szereg jednakowych komórek

przestrzennych stwierdzimy, że w różnych komórkach elektron przebywa niejednakowe odcinki czasowe. Prawdopodobieństwem znalezienia się elektronu w którejkolwiek komórce przestrzennej będzie stosunek czasu, w jakim przebywa elektron w danej komórce, do całkowitego czasu obserwacji (przy założeniu, że czas obserwacji jest dostatecznie duży). Dokonując przejścia granicznego przez zmniejszenie średnic komórek do wymiarów nieskończenie małych otrzymamy gęstość prawdopodobieństwa $|\Psi|^2$, gdzie funkcja Ψ jest funkcją falową.

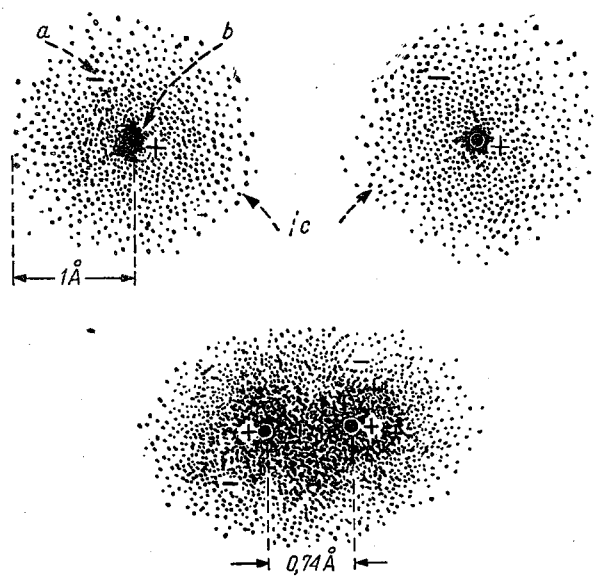


Rys. 2. Rozkład funkcji falowej w atomie wodoru

W rzeczywistości należy jeszcze wprowadzić do naszej funkcji falowej tzw. czynnik normujący, który zapewni nam równość

$$\iiint_V |\Psi|^2 \, dV = 1, \qquad (1)$$

gdyż prawdopodobieństwo znajdowania się elektronu w całej przestrzeni otaczającej jądro atomowe jest równe jedności. Całka brana jest względem całego obszaru, po którym przebiega funkcja falowa.



Rys. 3. Powstawanie wiązania kowalentnego między atomami wodoru
a — elektron; b — proton; c — atomy wodoru.

W izolowanym od wpływów zewnętrznych atomie funkcja falowa jest sferycznie symetryczna, a więc rozkład prawdopodobieństwa zna-

lezienia się elektronu wokół jądra atomowego jest sferycznie symetryczny w stosunku do jądra atomowego (rys. 2).

Przy zbliżaniu się dwóch atomów wodoru do siebie rozkłady funkcji falowych opisujących ruchy elektronów w poszczególnych atomach ulegają zmianie. Wzajemne oddziaływanie na siebie dwóch elektronów i dwóch jąder powoduje zagęszczenie rozkładu prawdopodobieństwa znalezienia się elektronu między jądrami. Zagęszczenie jest większe, niżby to wynikało z arytmetycznego nałożenia się obu funkcji dla poszczególnych atomów przy ich zbliżeniu (rys. 3) — stan ten jest charakterystyczny dla wiązania kowalentnego.

Na podstawie reguły Pauliego i praw mechaniki kwantowej twierdzimy, że wiązanie kowalentne między atomami jest najbardziej trwałe wtedy, kiedy biorą w nim udział dwa elektrony. Pozbawienie układu jednego elektronu bardzo silnie osłabia wiązanie, natomiast dodanie trzeciego elektronu tylko nieznacznie je wzmacnia. Właściwości te są zasadniczymi cechami międzyatomowych wiązań kowalentnych.

3. BUDOWA SIATKI KRYSTALICZNEJ DIAMENTU, KRZEMU I GERMANU

W rozważaniach związanych z przewodnictwem elektronowym ciała stałego interesować nas będą tylko elektrony powłoki zewnętrznej atomu, czyli elektrony walencyjne, natomiast nie będą wchodzić w rachubę elektrony znajdujące się w wewnętrznych powłokach elektronowych. Z tego powodu uważać będziemy atomy za składające się:

a) z rdzenia atomu, w skład którego wchodzi jądro atomowe oraz elektrony tworzące powłoki elektronowe o zakończonej budowie,

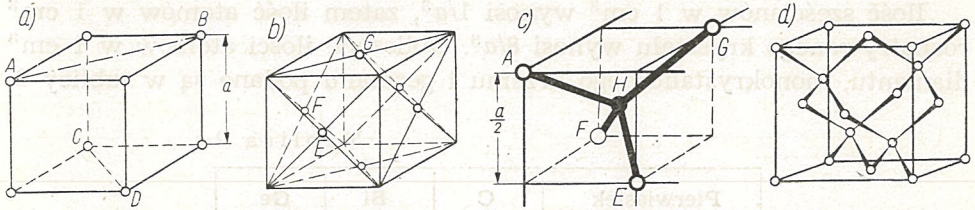
b. z elektronów wartościowościowych, otaczających rdzeń atomu.

Węgiel, krzem i german są pierwiastkami czwartej grupy układu periodycznego Mendelejewa, są więc czterowartościowościowe. Atomy ich będziemy rozpatrywać jako składające się z rdzenia atomowego posiadającego dodatni ładunek równy czterem elementarnym jednostkom ładunku elektrycznego oraz z czterech elektronów wartościowościowych. Jako dane orientacyjne można podać, że średnica atomu krzemu wynosi około 2 Å, natomiast średnica samego rdzenia atomu krzemu — około 0,4 Å.

Każdy atom znajdujący się w siatce krystalicznej związany jest z czterema sąsiednimi atomami za pomocą wiązań kowalentnych, jakie tworzą jego elektrony z elektronami atomów sąsiednich.

Na rysunku 4 przedstawiona jest budowa siatki krystalicznej diamentu, krzemu i germanu. W celu przejrzystego wyjaśnienia budowy podstawowego elementu tej siatki, którym w danym przypadku jest sześcian, wyodrębniono poszczególne grupy atomów, wchodzących w skład

sześcianu podstawowego. Na rys. 4a widzimy, że we wszystkich wierzchołkach rozpatrywanego sześcianu znajdują się atomy pierwiastka tworzącego siatkę krystaliczną. Atomy rozmieszczone są również na przecięciu się przekątnych wszystkich ścian sześcianu — są to tzw. atomy centrowane płaszczyznowe (rys. 4b). Wewnątrz sześcianu znajdują się jeszcze cztery atomy. Aby określić ich położenie, prowadzimy przez dwie dowolne równoległe do siebie płaszczyzny sześcianu przekątne względem siebie skośne (rys. 4a). Określamy w ten sposób atomy *A*, *B*, *C* i *D*.



Rys. 4. Budowa siatki krystalicznej diamentu, krzemu i germanu

Rozpatrzymy obecnie atom *A*. Z tym atomem tworzy wiązanie kowalentne jeden z atomów znajdujących się wewnątrz sześcianu. Pozostałe swoje trzy elektrony atom wewnętrzny zużywa na wiązania kowalentne z atomami znajdującymi się w punktach przecięcia się przekątnych ścian sześcianu, przy czym płaszczyzny tych ścian przechodzą przez węzeł siatki krystalicznej, w którym umieszczony jest atom *A* (rys. 4b i rys. 4c). Atomy te oznaczone są literami *E*, *F* i *G*. Atom wewnętrzny *H* znajduje się na przecięciu przekątnych sześcianu o boku $a/2$ (a — stała siatki krystalicznej).

W analogiczny sposób określamy położenie i wiązania trzech pozostałych atomów wewnętrznych, związanych kowalentnie z atomami kierunkowymi *B*, *C* i *D*. Całkowita budowa sześcianu, będącego najmniejszym elementem okresowo powtarzającym się w siatce krystalicznej, przedstawiona jest na rys. 4d. Jak wynika z powyższego, liczba koordynacyjna dla diamentu, krzemu i germanu wynosi 4.

Stałą siatki krystalicznej określa się za pomocą promieni Roentgena. Wartości stałych a dla siatek krystalicznych diamentu, krzemu i germanu podane są w tablicy 1.

Tablica 1

Pierwiastek	C	Si	Ge
a [Å]	3,56	5,42	5,62

Znając wartości a możemy określić ilość atomów danego pierwiastka w 1 cm^3 kryształu, należy jednak przedtem określić, ile atomów przypada na jeden elementarny sześcian uwidoczniony na rys. 4d.

Z ośmiu atomów znajdujących się w wierzchołkach sześcianu na jeden elementarny sześcian przypada tylko jeden atom, gdyż każdy wierzchołek jest jednocześnie wierzchołkiem ośmiu sześcianów[1]). Z sześciu atomów znajdujących się na ścianach sześcianu na jeden sześcian przypadają tylko trzy atomy, gdyż każda ściana jest jednocześnie ścianą dwóch sześcianów. Wewnętrzne cztery atomy należą wyłącznie tylko do jednego sześcianu. W sumie na jeden elementarny sześcian o boku a przypada $1 + 3 + 4 = 8$ atomów.

Ilość sześcianów w 1 cm^3 wynosi $1/a^3$, zatem ilość atomów w 1 cm^3 rozpatrywanego kryształu wynosi $8/a^3$. Obliczone ilości atomów w 1 cm^3 diamentu, monokrystalicznego krzemu i germanu podane są w tablicy 2.

Tablica 2

Pierwiastek	C	Si	Ge
ilość atomów w 1 cm^3 kryształu	$17{,}7.10^{22}$	$5{,}00.10^{22}$	$4{,}52.10^{22}$

4. POZIOMY ENERGETYCZNE ATOMU IZOLOWANEGO

Zagadnienie przewodnictwa elektrycznego w ciele stałym wiąże się ściśle z istotą budowy materii, dlatego też naszym punktem wyjściowym będzie omówienie budowy atomu i jego poziomów energetycznych w świetle współczesnych poglądów na budowę materii.

Atom wyobrażamy sobie jako miniaturowy układ planetarny. Elektrony i jądro atomowe wirują dokoła punktu, będącego środkiem masy całego układu. Ze względu na to, że masa elektronu jest znikomo mała w porównaniu z masą jądra atomowego, w dalszych rozważaniach będziemy zakładać, iż elektrony wirują dokoła nieruchomego jądra atomowego.

W celu uproszczenia rozważań rozpatrzymy tory elektronu w atomie o jednym elektronie (może być to wodór, jednokrotnie zjonizowany hel, dwukrotnie zjonizowany lit itd.).

Siła przyciągania pomiędzy jądrem atomowym i elektronem jest siłą dośrodkową, utrzymującą elektron na torze kołowym. Możemy to wyrazić za pomocą równania:

---

[1]) Można powiedzieć również, że na dany sześcian przypada tylko $^1/_8$ część każdego atomu wierzchołkowego, gdyż należy on do ośmiu sześcianów, których jest wierzchołkiem. Ponieważ atomów wierzchołkowych jest osiem, zatem na każdy sześcian przypada tylko jeden atom wierzchołkowy.

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{r^2}, \tag{2}$$

gdzie:

m — masa elektronu,

v — liniowa prędkość ruchu elektronu wokół jądra atomu,

r — promień orbity elektronu,

Z — liczba atomowa, określająca ilość elementarnych dodatnich jednostek ładunku elektrycznego jądra atomowego.

Dzieląc obie strony równania (2) przez dwa i skracając przez r, otrzymamy:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Ze^2}{r}. \tag{3}$$

Równanie (3) ujmuje w sposób matematyczny pierwszy warunek Bohra: energia kinetyczna elektronu równa się połowie jego energii potencjalnej.

Drugi warunek wypływa z falowej natury elektronów. Na podstawie praw mechaniki kwantowej (teoria de Broglie'a) twierdzimy, że z poruszającym się elektronem związana jest fala o długości określonej równaniem:

$$\lambda = \frac{h}{mv}; \tag{4}$$

h — jest to elementarny kwant działania (stała Plancka); jego liczbowa wartość wynosi $6{,}625 \cdot 10^{-27}$ erg · sek.

Z praw mechaniki kwantowej wynika również, iż orbita elektronu jest tylko wtedy trwała, gdy fala związana z elektronem tworzy na tej orbicie falę stojącą. Oznacza to, że na długości okręgu orbity układa się całkowita ilość fal λ:

$$2\pi r = n\lambda, \tag{5}$$

gdzie $n = 1, 2, 3, \ldots$

Uwzględniając równanie (4) otrzymujemy drugi warunek Bohra, jaki musi spełniać orbita elektronu:

$$mvr = \frac{nh}{2\pi}. \tag{6}$$

Przez rozwiązanie względem r równań (3) i (6) oraz wyrugowanie zmiennej v otrzymujemy wzór:

$$r = \frac{n^2h^2}{4\pi^2 m Ze^2} \tag{7}$$

określający promienie orbit, po których możliwe jest krążenie elektronu w atomie o jednym elektronie.

Ruch elektronu po jego orbicie jest ruchem w polu siły centralnej (2). Siła ta określona jest przez skalarne pole energii potencjalnej E_p, otaczające sferycznie symetrycznie jądro atomowe. Związek między polem wektorowym siły i polem skalarnym energii jest następujący:

$$\frac{Ze^2}{r^3} \cdot \vec{r} = \text{grad } E_p. \tag{8}$$

Przez pomnożenie obu stron równania (8) przez różniczkę wektora $\vec{r}$ otrzymamy:

$$\frac{Ze^2}{r^3} \vec{r} \cdot \vec{dr} = \text{grad } E_p \cdot \vec{dr} = dE_p. \tag{9}$$

Biorąc całkę równania (9) i zakładając warunek początkowy, że energia potencjalna elektronu jest równa zeru w punkcie nieskończenie odległym od jądra atomowego, otrzymujemy wyrażenie:

$$E_p = -\frac{Ze^2}{r} \tag{10}$$

określające nam energię potencjalną elektronu w atomie o jednym elektronie.

Całkowita energia elektronu równa jest sumie jego energii kinetycznej (3) i potencjalnej (10):

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}\frac{Ze^2}{r} - \frac{Ze^2}{r} = -\frac{1}{2}\frac{Ze^2}{r}. \tag{11}$$

Podstawiając do równania (11) wartość promienia orbity (7) otrzymamy:

$$E = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{n^2 h^2}. \tag{12}^{1})$$

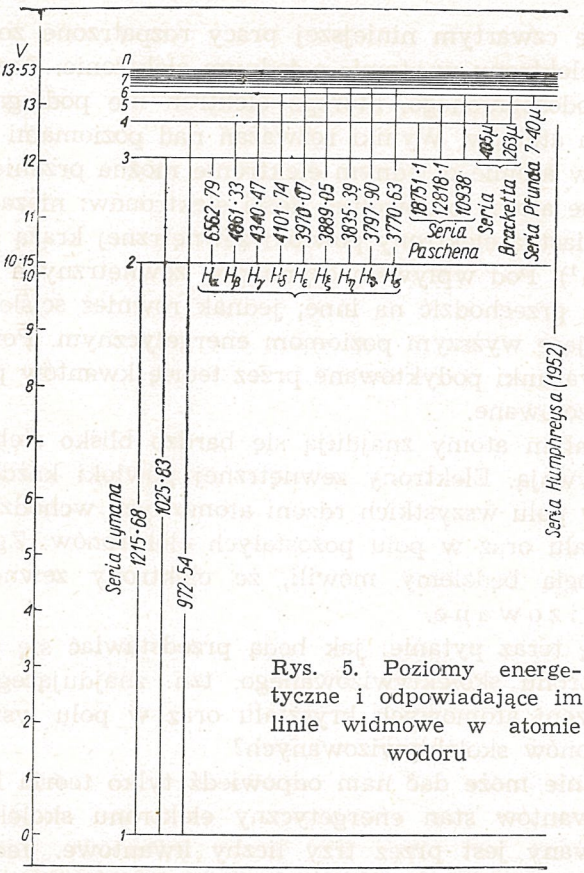
W mechanice kwantowej liczba n nosi miano g ł ó w n e j l i c z b y k w a n t o w e j. Główna liczba kwantowa podaje zasadniczy poziom energetyczny elektronu w atomie i przyjmuje wartości 1, 2, 3,..., znaczo-

[1]) Wzór (12) nie uwzględnia ruchu jądra dokoła środka masy atomu. Dokładna wartość E wynosi:

$E = -\frac{2\pi^2 \mu Z^2 e^4}{n^2 h^2}$ (11a), gdzie $\mu = \frac{mM}{m+M}$ (11b) jest zredukowaną masą elektronu (M – masa jądra atomowego).

ne również literami K, L, M,...[1]). Ze wzoru (12) widzimy, że wartości energii elektronu tworzą ciąg szybko zdążający do zera w miarę wzrostu głównej liczby kwantowej.

Na rys. 5 podaliśmy dla przypadku wodoru ($Z = 1$) poziomy energetyczne elektronu w elektronowoltach (1 eV $= 1{,}60 \cdot 10^{-12}$ erg) względem stanu podstawowego ($n = 1$) jako stanu odniesienia. Na rysunku podane są ponadto serie widmowe wodoru, powstające przy przeskoku elektronu z n-tego poziomu energetycznego na n_o -wy poziom energetyczny oraz odpowiadające im długości fal w Å.



Rys. 5. Poziomy energetyczne i odpowiadające im linie widmowe w atomie wodoru

Niebywała dokładność, z jaką sprawdza się doświadczalnie wzór (12), jest miarą wartości teorii Bohra.

[1]) Poza główną liczbą kwantową istnieje jeszcze tzw. orbitalna liczba kwantowa l, uwzględniająca możliwość poruszania się elektronu po elipsie; wielkość orbitalnej liczby kwantowej charakteryzuje stopień spłaszczenia elipsy. Liczba ta przyjmuje wartości 0, 1, 2,..., oznaczane również literami s, p, d ,f,....

Opisany wyżej model atomu Bohra nadaje się doskonale do wyjaśniania wielu zjawisk zachodzących w atomach odosobnionych, jednakże zawodzi przy rozpatrywaniu zjawisk wówczas, gdy atomy znajdują się w bezpośredniej bliskości siebie, a więc i w kryształach. Przy wyjaśnianiu zjawisk zachodzących w kryształach konieczne jest użycie ulepszonego modelu falowo-mechanicznego, w którym występują funkcje falowe wspomniane w poprzednim rozdziale.

5. POZIOMY ENERGETYCZNE ELEKTRONU W KRYSZTALE

W rozdziale czwartym niniejszej pracy rozpatrzone zostały poziomy energetyczne elektronu w atomie o jednym elektronie. Rozważania dotyczyły atomu odosobnionego, którego elektron nie podlegał oddziaływaniu pól innych atomów. Wyniki rozważań nad poziomami energetycznymi elektronu w atomie o jednym elektronie można przenieść na wszystkie odosobnione atomy o dowolnej ilości elektronów: niezależnie od właściwości pierwiastka elektrony powłoki zewnętrznej krążą po ściśle określonych torach[1]). Pod wpływem czynników zewnętrznych elektrony walencyjne mogą przechodzić na inne, jednak również ściśle określone tory, odpowiadające wyższym poziomom energetycznym. Poziomy te spełniają ogólne warunki podyktowane przez teorię kwantów przy założeniu, że atomy są izolowane.

W ciele stałym atomy znajdują się bardzo blisko siebie i silnie na siebie oddziaływają. Elektrony zewnętrznej powłoki każdego z atomów znajdują się w polu wszystkich rdzeni atomowych wchodzących w skład danego kryształu oraz w polu pozostałych elektronów. Zgodnie z przyjętą terminologią będziemy mówili, że elektrony zewnętrzne zostały s k o l e k t y w i z o w a n e.

Nasuwa się teraz pytanie: jak będą przedstawiać się poziomy energetyczne elektronu skolektywizowanego, tzn. znajdującego się w polu wszystkich rdzeni atomowych kryształu oraz w polu wszystkich pozostałych elektronów skolektywizowanych?

Na to pytanie może dać nam odpowiedź tylko teoria kwantów. Według teorii kwantów stan energetyczny elektronu skolektywizowanego scharakteryzowany jest przez trzy liczby kwantowe. Jednakże cząstki tego rodzaju jak elektrony różnią się jeszcze s p i n e m. Spin jest wy-

[1]) Elektronami tworzącymi wewnętrzne powłoki elektronowe zajmować się nie będziemy, gdyż one łącznie z jądrem prawie nie biorą udziału w reakcjach chemicznych oraz nie wywierają istotnego wpływu na rozkład pasm energetycznych nas interesujących; elektrony te wraz z jądrem tworzą rdzeń atomowy o dodatnim ładunku, równym bezwzględnie ładunkowi elektronów zewnętrznych (walencyjnych).

razem własnych momentów — mechanicznego i magnetycznego — elektronu, których powstanie w uproszczony sposób wyobrazić sobie można przez obrót elektronu naokoło własnej osi. Elektronowi odpowiada więc dalsza liczba kwantowa s, równa $+1/2$ lub $-1/2$.

W przyrodzie mamy do czynienia z dwoma zasadniczymi rodzajami mikrocząstek. Kryterium rozróżniającym cząstki jest ich spin. Cząstki o spinie całkowitym (łącznie ze spinem zerowym) podlegają statystyce Bose-Einsteina; opisywane są one przez tzw. symetryczne funkcje falowe. Spin całkowity posiadają cząstki alfa i kwanty energii promienistej. Cząstki o spinie połówkowym (elektrony, protony neutrony, neutrino) podlegają statystyce Fermi-Diraca i opisywane są przez antysymetryczne funkcje falowe. Funkcje falowe o innych własnościach symetrii w ogóle nie występują we wszechświecie.

Cechą symetrycznej funkcji falowej opisującej zespół cząstek o spinie całkowitym jest jej niezmienniczość przy zamianie miejscami dwóch dowolnych cząstek wchodzących w skład zespołu. Inaczej jest w zespole cząstek o spinie połówkowym: zamiana miejscami dwóch cząstek powoduje zmianę znaku funkcji falowej opisującej zespół — stąd też i nazwa „antysymetrycznej" funkcji falowej.

Spin elektronu wynosi $\pm 1/2$, elektron i zespół elektronów opisywane będą zatem przez antysymetryczne funkcje falowe.

Można wykazać, że tworząc wyznacznik z poszczególnych funkcji falowych opisujących każdy z elektronów skolektywizowanych otrzymamy antysymetryczną funkcję falową opisującą zespół elektronów skolektywizowanych w postaci:

$$u_A = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{vmatrix} \psi_1(1), & \psi_1(2), & \ldots & \psi_1(n) \\ \psi_2(1), & \psi_2(2), & \ldots & \psi_2(n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_n(1), & \psi_n(2), & \ldots & \psi_n(n) \end{vmatrix} \tag{13}$$

Zamiana miejscami dwóch elektronów prowadzi do zamiany miejscami dwóch kolumn w wyznaczniku (13), ulega więc zmianie znak wyznacznika, natomiast jego wartość bezwzględna pozostaje bez zmiany; to jest właśnie cechą antysymetrycznej funkcji falowej.

Wyobraźmy sobie teraz, że w naszym krysztale znajdują się dwa elektrony będące w jednakowych stanach kwantowych, czyli że $\Psi_k(q) = \Psi_l(q$ przy $k \neq l$. Warunek ten narzuca równość dwóch kolumn wyznacznika (13). Jak wiadomo, wyznacznik taki równy jest wówczas tożsamościowo zeru, a więc funkcja falowa U_A będzie tożsamościowo równa zeru. Ponieważ założyliśmy dowolny układ elektronów w przestrzeni,

zatem funkcja U_A opisująca zespół cząstek nie może być równa tożsamościowo zeru, możemy więc stwierdzić: zaprzeczenie tezie spowodowało zaprzeczenie założeniu, a więc teza jest słuszna. Zaprzeczenie nasze brzmiało: „w krysztale znajdują się dwa elektrony w jednakowych stanach kwantowych". Stąd wynika bardzo ważne twierdzenie, zwane zasadą wyłączności Pauliego: w ciele stałym nie mogą znajdować się jednocześnie dwa elektrony w jednakowych stanach kwantowych.

Zasadę tę można wyrazić jeszcze w innym ujęciu: na jednym poziomie energetycznym znajdować się mogą najwyżej dwa elektrony posiadające przeciwne kierunki krętów (spinów).

Przy rozpatrywaniu zagadnień związanych z istotą przewodnictwa elektrycznego ciała stałego spin elektronu nie odgrywa istotnej roli, dlatego niekiedy korzysta się ze skróconego sformułowania zasady wyłączności Pauliego, niezbyt ścisłego (w rzeczywistości fałszywego), lecz nie wnoszącego jakościowych zmian do rezultatów rozważań, a mianowicie: w ciele stałym na określonym poziomie energetycznym znajdować się może co najwyżej jeden elektron.

Obecnie — wykorzystując zasadę wyłączności Pauliego — przystąpimy do rozpatrzenia poziomów energetycznych w ciele stałym.

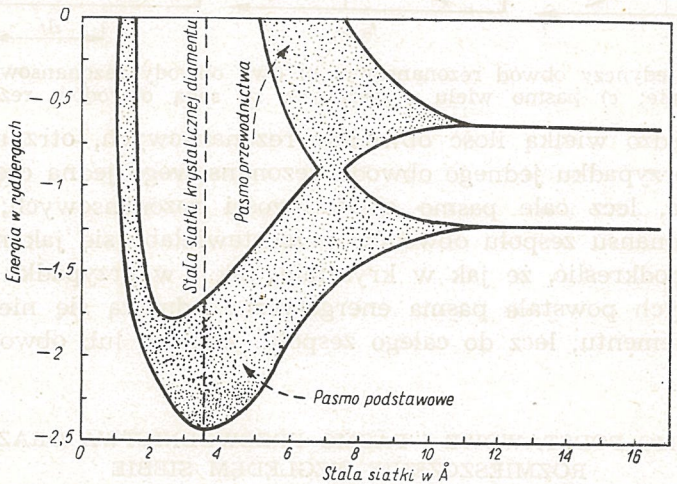
Wyobraźmy sobie, że poszczególne atomy wchodzące w skład kryształu są rozstawione w przestrzeni w taki sposób, jak tego wymaga charakterystyczna dla nich budowa siatki krystalicznej, lecz że są oddalone od siebie na odległości, przy których każdy z atomów można rozpatrywać jako pojedynczy atom izolowany[1]). Interesujące nas elektrony walencyjne znajdować się będą w tym przypadku na pewnych ściśle określonych poziomach energetycznych. Zmiana stanu energetycznego któregokolwiek z elektronów wymagałaby absorbcji lub emisji stosunkowo dużej porcji energii przez atom.

Będziemy teraz zbliżać do siebie atomy. Elektrony walencyjne poszczególnych atomów zaczną oddziaływać na siebie, jednakże w myśl zasady wyłączności Pauliego dwa dowolne wzięte z nich nie mogą znajdować się w tym samym stanie energetycznym. W wyniku zbliżenia nastąpi rozszczepienie się poszczególnych poziomów energetycznych na

[1]) Z teoretycznego punktu widzenia są to odległości nieskończenie wielkie, gdyż funkcje falowe określające ampitudę prawdopodobieństwa znalezienia się elektronu wokół rdzenia atomowego rozciągają się w nieskończoność, jednak ze względu na bardzo szybkie zmniejszanie się wartości funkcji falowej w miarę oddalania się od rdzenia, najmniejsze odległości praktyczne, przy których można już nie uwzględniać wzajemnego oddziaływania na siebie elektronów walencyjnych sąsiednich atomów, wynoszą około $4a$, gdzie a — stała siatki krystalicznej.

szereg podpoziomów. Z pojedynczych poziomów energetycznych powstaną pasma energetyczne, na których obecnie znajdować się będą kolektywizowane elektrony. W miarę wzrostu wzajemnego oddziaływania między atomami, czyli w miarę malenia odległości między atomami, następuje coraz większe rozszerzenie się pasm energetycznych — dzieje się tak dlatego, że coraz więcej elektronów wchodzi w pole oddziaływania jednego atomu.

Powstawanie pasm energetycznych z pojedynczych poziomów energetycznych w przypadku diamentu przedstawione jest na rys. 6. W wyniku wzajemnego oddziaływania między sąsiednimi atomami otrzymaliśmy z pojedynczych poziomów energetycznych całe pasma bardzo blisko siebie położonych poziomów energetycznych, charakterystycznych dla danej siatki krystalicznej i dla danego pierwiastka.

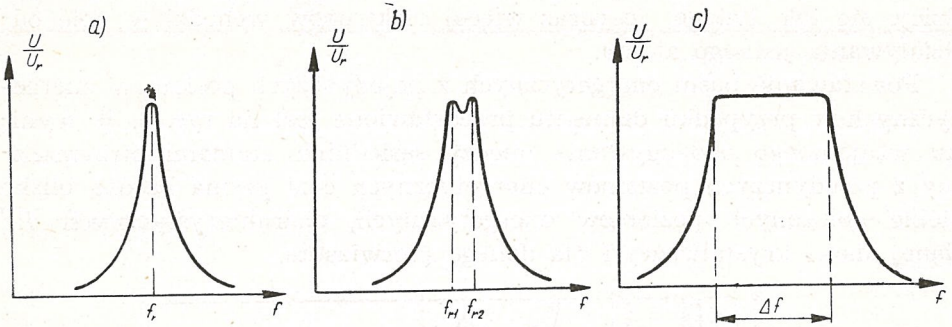


Rys. 6. Powstawanie pasm energetycznych w krysztale diamentu

Należy tutaj zaznaczyć, iż przeskoki elektronów z jednego poziomu na drugi mogą zachodzić wg zasady kombinacji Ritza — praktycznie biorąc — w nieskończenie wiele sposobów; tym tłumaczy się fakt, że widmo emisyjne i absorbcyjne ciała stałego jest widmem ciągłym, a nie prążkowym.

W fizyce makroskopowej mamy szereg analogii, odpowiadających zjawisku powstawania pasm energetycznych. Weźmy jako jeden z przykładów dwa obwody rezonansowe nastrojone na tę samą częstotliwość i oddalone od siebie na odległość, przy której sprzężenie magnetyczne między obwodami można przyjąć za równe zeru. W tym stanie każdy z obwodów posiada ściśle określoną tę samą częstotliwość rezonansową (rys. 7a). Przy zbliżaniu do siebie obwodów rośnie sprzężenie magnetyczne między nimi, w wyniku czego następuje stopniowe spłaszczanie

się krzywej rezonansu zespołu obwodów. Przy dostatecznie silnym sprzężeniu możemy otrzymać nawet krzywą rezonansu z dwoma lokalnymi rezonansami, leżącymi po obu stronach pierwotnej częstotliwości rezonansowej (rys. 7b). Sprzęganie trzech obwodów rezonansowych daje krzywą o trzech lokalnych rezonansach. Gdyby udało się nam sprzęgnąć



Rys. 7. a) pojedynczy obwód rezonansowy; b) dwa obwody rezonansowe sprzężone ponadkrytycznie; c) pasmo wielu sprzężonych ze sobą obwodów rezonansowych

ze sobą bardzo wielką ilość obwodów rezonansowych, otrzymalibyśmy nie jak w przypadku jednego obwodu rezonansowego jedną częstotliwość rezonansową, lecz całe pasmo częstotliwości rezonansowych; wówczas krzywa rezonansu zespołu obwodów przedstawiałaby się jak na rys. 7c.

Należy podkreślić, że jak w krysztale, tak i w przypadku obwodów rezonansowych powstałe pasma energetyczne odnoszą się nie do pojedynczego elementu, lecz do całego zespołu: atomów lub obwodów rezonansowych.

6. PASMO PODSTAWOWE I PASMO PRZEWODNICTWA ORAZ ICH ROZMIESZCZENIE WZGLĘDEM SIEBIE

W rozdziale poprzednim rozpatrywaliśmy powstawanie pasm energetycznych z pojedynczych poziomów energetycznych. Szczególnie ważny jest fakt, iż rozszczepieniu się na pasma energetyczne podlegają wszystkie poziomy energetyczne atomu:

a) poziomy obsadzone całkowicie elektronami (dwa elektrony o różnych spinach na jednym poziomie energetycznym),

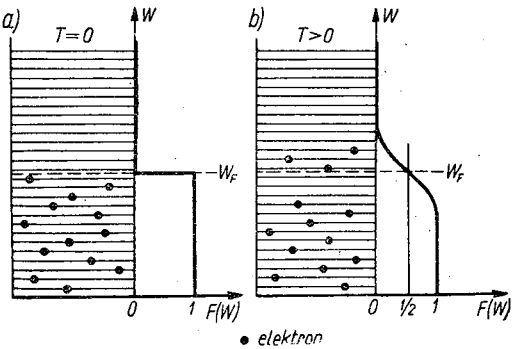
b) poziomy obsadzone częściowo elektronami (jeden elektron na jednym poziomie energetycznym),

c) poziomy nie obsadzone elektronami, tzn. wyższe wolne poziomy energetyczne, na które może przeskoczyć elektron z niższego poziomu pod wpływem czynnika zewnętrznego (kwantu energii promienistej, pobudzenia termicznego itp.).

Zajmiemy się obecnie analizą zjawisk zachodzących w najwyższym całkowicie zapełnionym elektronami pasmie energetycznym, zwanym

pasmem podstawowym, oraz w najniższym całkowicie wolnym lub częściowo zapełnionym elektronami pasmie energetycznym, tzw. pasmie przewodnictwa.

Rozpatrzymy najpierw zachowanie się elektronów w częściowo zapełnionym pasmie energetycznym. W temperaturze absolutnego zera, tzn. przy $T = 0$, elektrony posiadają najmniejszą energię kinetyczną. Zapełniają one kolejno poziomy energetyczne począwszy od najniższego, podporządkowując się zasadzie wyłączności Pauliego, zabraniającej istnienia więcej niż jednego elektronu na jednym i tym samym poziomie energetycznym[1]). Rozkład elektronów uwidoczniony jest na rys. 8a. Przyjęto tu za poziom odniesienia najniższy poziom energetyczny pasma częściowo zapełnionego elektronami. Graniczny poziom energetyczny, znajdujący się między najwyższym poziomem energetycznym obsadzonym przez elektron oraz najniższym wolnym poziomem energetycznym (przy $T = 0$), nazywany bywa p o z i o m e m F e r m i e g o (W_F). Przy temperaturze bezwzględnej większej od zera wypadkowa energia wszystkich elektronów jest większa, niż miało to miejsce przy $T = 0$, zatem niektóre z elektronów przesuną się na wyższe poziomy energetyczne, pozostawiając po sobie poziomy wolne. Na rys. 8b pokazano trzy elektrony znajdujące się na wyższych poziomach energetycznych oraz trzy wolne poziomy energetyczne leżące poniżej poziomu Fermiego.



Rys. 8. Rozkład energii elektronów w przewodniku elektrycznym: a) przy $T = 0$; b) przy $T > 0$

Rozkład prawdopodobieństwa zajmowania danego stanu energetycznego przez elektron w zależności od wielkości energii danego stanu i temperatury ciała stałego ujmuje funkcja Fermi-Diraca, określona jako

$$F(W) = \frac{N(W)}{Z(W)}, \tag{14}$$

gdzie:

$N(W)\,dW$ — ilość elektronów posiadających energię zawartą w przedziale energetycznym W, $W + dW$;

$Z(W)\,dW$ — ilość poziomów energetycznych (ściślej: stanów kwantowych), znajdujących się w tym samym przedziale energii. W, $W + dW$.

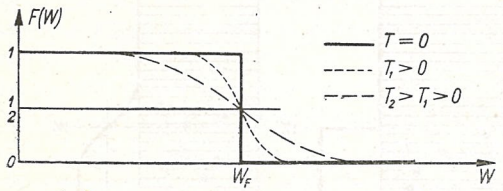
[1]) Tutaj i w dalszej części pracy posługiwać się będziemy skróconą formą zasady wyłączności Pauliego.

Funkcja $F(W)$ określa, jaka część stanów energetycznych w stosunku do całkowitej liczby stanów w danym przedziale energii jest obsadzona elektronami. Należy szczególnie mocno podkreślić, iż funkcja Fermi-Diraca nic nam nie mówi ani o ilości stanów energetycznych, ani o ilości znajdujących się na nich elektronów — określa ona tylko prawdopodobieństwo obsadzenia elektronem danego stanu energetycznego przy założeniu, że dany stan istnieje.

Funkcja Fermi-Diraca ma postać następującą:

$$F(W) = \frac{1}{\exp \frac{W - W_F}{k\,T} + 1}\,; \qquad (15)$$

jej przebieg graficzny przedstawiony jest na rys. 9. Jak wynika z przebiegu funkcji, poziom Fermiego można określić dwojako:



Rys. 9. Przebieg funkcji Fermi-Diraca przy różnych wartościach temperatury

a) przy $T = 0$ jako poziom energetyczny leżący między najniższym poziomem energetycznym nie obsadzonym przez elektron oraz najwyższym poziomem energetycznym obsadzonym przez elektron,

b) przy $T > 0$ jako poziom energetyczny, którego prawdopodobieństwo obsadzenia elektronem równe jest 0,5[1]).

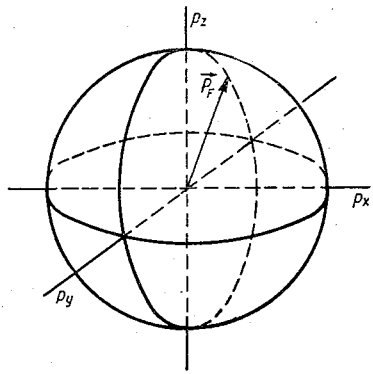
Przy $T = 0$ funkcja $F(W)$ zatraca swoją ciągłość — staje się ona tzw. funkcją jednostkową (czasem zwaną skokiem jednostkowym) (Dodatek 1).

Na rysunku 8 obok wykresów poziomów energetycznych umieszczone są wykresy funkcji Fermi-Diraca, obrazujące graficznie prawdopodobieństwo zajęcia danego stanu energetycznego przez elektron. Na rys. 8b widzimy trzy wolne poziomy energetyczne leżące poniżej poziomu Fermiego. Zgodnie z przyjętą terminologią wolne poziomy energetyczne znajdujące się poniżej poziomu Fermiego będziemy nazywali d z i u r a m i e l e k t r o n o w y m i.

Zachowanie się elektronów w zależności od temperatury wygodnie jest rozpatrywać w tzw. przestrzeni pędów, gdzie osiami układu współrzędnych prostokątnych są składowe pędu elektronu p_x, p_y i p_z. Korzy-

[1]) Powyższe definicje poziomu Fermiego są w fizycznym znaczeniu ścisłe jedynie dla przewodników; w przypadku półprzewodników i izolatorów poziom Fermiego określany jest na podstawie symetrii graficznej przebiegu funkcji (15) względem poziomu Fermiego (wykreślonej w liniowej skali energii).

stając z zasady ekwipartycji energii stwierdzamy, że rozkład elektronów w przestrzeni pędów będzie sferycznie symetryczny w stosunku do początku układu. Przy $T = 0$ elektrony zajmują kolejno — począwszy od najniższego — poziomy energetyczne. Pędy ich zawierają się w granicach strefy Fermiego, a maksymalny możliwy pęd odpowiada poziomowi Fermiego (rys. 10). Przy $T>0$ niektóre z elektronów posiadają energię większą od W_F, a więc i pędy większe od $\vec{p}_F$. Wewnątrz kuli o promieniu p_F pojawiają się dziury elektronowe wskutek przelotu elektronów poza powierzchnię kuli. Symetria rozkładu elektronów w przestrzeni pędów zostaje jednak zachowana przy $T>0$; każdemu elektronowi o pędzie $\vec{p}$ można przyporządkować elektron o pędzie $-\vec{p}$. Stąd wynika ważny wniosek: samo nagrzewanie ciała krystalicznego nie wywołuje przepływu elektrycznego prądu. Jeżeli umieścimy ciało krystaliczne posiadające pasmo przewodnictwa częściowo zapełnione elektronami w polu elektrycznym, nastąpi naruszenie symetrii rozkładu elektronów w przestrzeni pędów, a w wyniku otrzymamy przepływ prądu elektrycznego.



Rys. 10. Strefa Fermiego w przestrzeni pędów

Powyższe rozważania dotyczyły zjawisk zachodzących w częściowo zapełnionym elektronami pasmie energetycznym. Ciało krystaliczne posiadające pasmo energetycze częściowo zapełnione elektronami jest — jak wynika z przytoczonych rozważań — przewodnikiem. Elektrony znajdujące się w takim pasmie mogą poruszać się w kierunku narzuconym im przez zewnętrzne pole elektryczne. Wpływ sąsiednich pasm energetycznych: pasma całkowicie pozbawionego elektronów oraz pasma całkowicie zapełnionego elektronami (czyli pasma podstawowego) jest w danym przypadku pomijalny.

Przeważająca ilość ciał krystalicznych nie posiada pasma częściowo zapełnionego elektronami, lecz tylko pasmo podstawowe i pasmo całkowicie pozbawione elektronów (przy $T = 0$), zwane tutaj również pasmem przewodnictwa. Rozważania teoretyczne doprowadziły do wniosku, że gdy pasmo jest całkowicie zapełnione elektronami, to zewnętrzne pole elektryczne nie wprowadza zmian w ruchu elektronów pasma podstawowego. Sens fizyczny tej zasady można rozumieć, jak następuje: elektrony pasma podstawowego mają dlatego małe wartości energii, ponieważ

wzajemne oddziaływania między nimi zużyły część ich energii na wiązania międzyatomowe siatki krystalicznej. Elektron biorący udział np. w wiązaniu kowalentnym nie może samorzutnie wyskoczyć z wiązania, jeżeli wszystkie otaczające go wiązania są kompletne. Rozszerzając zagadnienie na cały kryształ możemy powiedzieć, iż w idealnym krysztale, nie posiadającym żadnych zakłóceń periodyczności siatki krystalicznej, wszystkie elektrony pasma podstawowego są „zaabsorbowane" swoimi wiązaniami i samorzutnie, bez udziału silnych czynników zewnętrznych, z wiązań swoich nie wyzwalają się.

Inaczej wygląda zachowanie się elektronów w pasmie przewodnictwa. Elektron znajdujący się w pasmie przewodnictwa posiada stosunkowo dużą energię i nie jest związany z elementami siatki krystalicznej w sposób unieruchamiający go. Pod wpływem zewnętrznych pól elektrycznych taki elektron może poruszać się swobodnie po całym krysztale, bierze zatem udział w przewodnictwie elektrycznym kryształu. Istnienie pasma przewodnictwa nie wystarcza jednak do tego, aby kryształ przewodził — muszą być jeszcze w tym pasmie elektrony.

O zachowaniu się kryształu w polu elektrycznym decyduje wzajemny układ obu pasm: pasma przewodnictwa i pasma podstawowego. Rozmieszczenie względem siebie ww. pasm może być następujące:

1) pasmo przewodnictwa i pasmo podstawowe częściowo pokrywają się wzajemnie (rys. 11a);

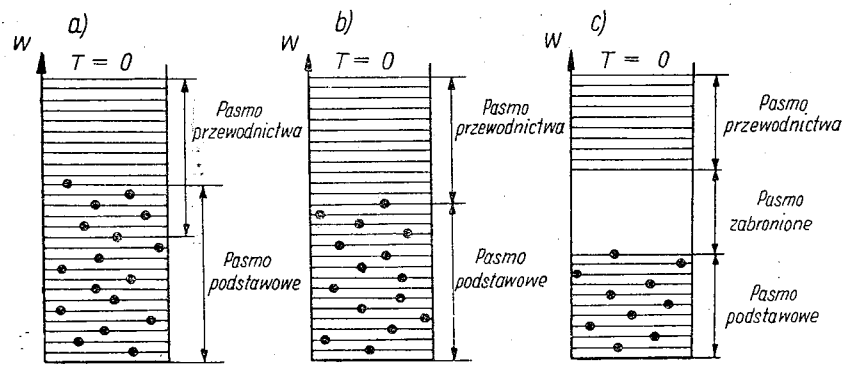
2) pasmo przewodnictwa i pasmo podstawowe stykają się ze sobą (rys. 11b);

3) pasmo przewodnictwa i pasmo podstawowe nie zachodzą na siebie — między nimi powstaje pasmo o zabronionych wartościach energii elektronu, tzw. pasmo niedozwolonych poziomów energetycznych, zwane niekiedy strefą zabronioną (rys. 11c).

Przypadek częściowego pokrywania się pasma podstawowego i pasma przewodnictwa w zasadzie nie różni się niczym od przypadku, gdy mamy do czynienia z pasmem energetycznym częściowo zapełnionym elektronami. Fizycznym obrazem obu wymienionych przypadków jest „gaz" elektronowy, przebywający w polu wszystkich rdzeni atomowych siatki krystalicznej.

Analogicznie sprawa przedstawia się w przypadku zetknięcia obu pasm: podstawowego i przewodnictwa. Stykanie się obu pasm należy rozumieć następująco: przejście elektronu ze stanu związanego do stanu wolnego może być dokonane w sposób ciągły, tzn. najmniejsza możliwa energia elektronu wolnego jest prawie równa największej możliwej energii elektronu pozostającego w stanie związanym. W przyrodzie nie znamy niewątpliwego przypadku stykających się ze sobą pasm energetycznych.

Trzeci wzajemny możliwy układ względem siebie pasm energetycznych, gdy między pasmem podstawowym i pasmem przewodnictwa znajduje się pasmo zabronionych poziomów energetycznych, jest spotykany najczęściej w przyrodzie. Ciała o takim układzie pasm energetycznych zaliczane są do grupy półprzewodników i izolatorów. Obraz fizyczny tego przypadku jest następujący: elektron znajdujący się w stanie związanym może przejść do stanu wolnego nie w sposób energetycznie ciągły, lecz tylko przez dostarczenie mu pewnej porcji energii, nie mniejszej od określonej wielkości, charakterystycznej dla danego ciała stałego.



Rys. 11. Wzajemne możliwe układy względem siebie pasm: podstawowego i przewodnictwa

Szerokość strefy zabronionej, czyli energia przeskoku elektronu z najwyższego poziomu pasma podstawowego do najniższego poziomu pasma przewodnictwa, jest wielkością decydującą o przewodności elektrycznej ciała stałego, a więc decydującą o tym, czy dane ciało krystaliczne zaliczamy do grupy półprzewodników, czy izolatorów[1]). Nie ma więc — jak wynika z powyższego — wyraźnej granicy między półprzewodnikami a izolatorami; podział na półprzewodniki i izolatory jest umowny; zwykle przyjmuje się graniczną szerokość strefy zabronionej ok. 2 eV.

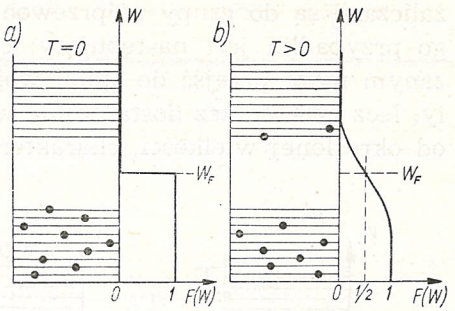
Rozpatrzymy obecnie zachowanie się elektronów w funkcji temperatury w idealnej siatce krystalicznej dla układu pasm energetycznych podanego na rys. 11c.

Na rys. 12a przedstawiony jest rozkład energii elektronów przy $T=0$ w półprzewodniku (lub izolatorze) oraz odpowiadający temu rozkładowi przebieg funkcji Fermi-Diraca). Wszystkie poziomy energetyczne pasma podstawowego są obsadzone elektronami, natomiast wszystkie poziomy

[1]) Rozważania dotyczą jedynie idealnej siatki krystalicznej — wpływ domieszek jest tutaj pominięty.

energetyczne pasma przewodnictwa są puste (w tych warunkach, jak już poprzednio wspominaliśmy, ciało nie przewodzi prądu elektrycznego).

Przy $T>0$ pewna część elektronów znajdujących się w pasmie podstawowym obdarzona jest energią wystarczającą do zerwania więzów utrzymujących je w stanie związanym — elektrony te staną się wolnymi, czyli przejdą do pasma przewodnictwa (rys. 12b). Istnieje całkowita symetria między pustymi poziomami energetycznymi w pasmie podstawowym (dziurami) i wolnymi elektronami w pasmie przewodnictwa. Wykorzystując tę symetrię twierdzimy, że przebieg funkcji Fermi-Diraca w strefie zabronionych poziomów energetycznych jest również symetryczny. Z powyższego wynika następujący wniosek: skok funkcji Fermi-Diraca przy $T=0$ znajduje się dokładnie w środku pasma zabronionych poziomów energetycznych w ciałach posiadających idealną budowę siatki krystalicznej.



Rys. 12. Rozkłady energetyczne elektronów w półprzewodniku samoistnym: a) przy $T=0$; b) przy $T>0$, oraz odpowiadające im przebiegi funkcji Fermi-Diraca

Zbadamy obecnie, jak zachowują się elektrony w ciałach o różnych szerokościach pasma zabronionego. W tym celu wygodnie jest posługiwać się funkcją Fermiego $N(W)$, określającą gęstość rozkładu elektronów w funkcji energii. Przebieg graficzny tej funkcji podany jest na rys. 13a[1]).

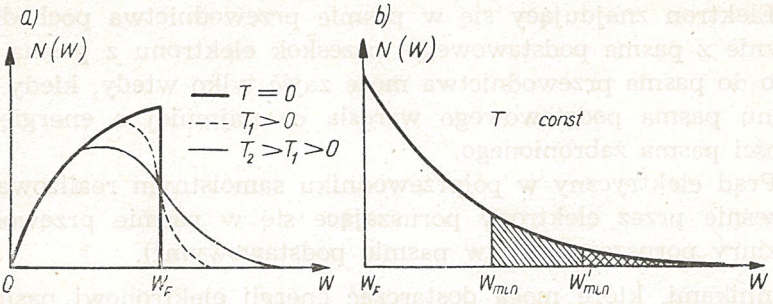
Określimy obecnie, jak zmienia się ilość elektronów w pasmie przewodnictwa w funkcji energii najniższego poziomu energetycznego pasma przewodnictwa przy $T=\text{const}$ (rys. 13 b). Pole powierzchni ograniczone osią energii W dla $W>W_{min}$, krzywą $N(W)$ oraz rzędną energii W_{min} przedstawia w pewnej skali ilość elektronów znajdujących się w pasmie przewodnictwa, określoną następującą całką niewłaściwą:

$$N=\int_{W_{min}}^{\infty} N(W)\,dW. \tag{16}$$

Jak widzimy z rys. 13b, zwiększenie minimalnej wartości energii pasma przewodnictwa, czyli równoważne temu zwiększenie szerokości

[1] Podany na rys. 13a przebieg funkcji Fermiego określa energię elektronów przy założeniu, że wszystkie elektrony są swobodne, jednak ze względu na to, iż badać będziemy zachowanie się elektronów w pasmie przewodnictwa, a więc powyżej określonej dolnej granicy W_{min}, możemy z pewnym przybliżeniem funkcję $N(W)$ zastosować do naszych jakościowych rozważań, wykorzystując jej przebieg dla $W>W_{min}$.

pasma zabronionych poziomów energetycznych, powoduje bardzo szybkie zmniejszanie się ilości elektronów w pasmie przewodnictwa. W interesujących nas półprzewodnikach szerokość pasma zabronionego jest znacznie mniejsza niż w dielektrykach; w czystym krystalicznym krzemie przy $T = 300°K$ ilość elektronów w pasmie przewodnictwa wynosi około $6{,}8 \cdot 10^{10}$ el/cm^3, w germanie około $2{,}5 \cdot 10^{13}$ el/cm^3.



Rys. 13. Przebieg funkcji Fermiego, określający gęstość rozkładu elektronów w zależności od energii

Ilość swobodnych elektronów w półprzewodniku zależy od temperatury w sposób wykładniczy, stąd i przewodność półprzewodników i izolatorów zmienia się również wykładniczo w funkcji temperatury wg następującej zależności:

$$\sigma = C \exp\left(-\frac{B}{T}\right), \tag{17}$$

gdzie:

σ — przewodność ciała krystalicznego,

B, C — stałe charakterystyczne dla danego ciała krystalicznego.

W przewodnikach metalicznych ilość elektronów biorących udział w przewodnictwie prądu elektrycznego jest niezależna od temperatury, gdyż wszystkie walencyjne elektrony siatki krystalicznej metalu uczestniczą w przewodzeniu prądu elektrycznego. Wzrost temperatury powoduje zwiększenie drgań rdzeni atomowych w węzłach siatki krystalicznej, co z kolei zmniejsza ruchliwość elektronów[1]); dlatego metale posiadają dodatni cieplny współczynnik oporności elektrycznej. W półprzewodnikach występuje również zjawisko zmniejszania się ruchliwości elektronów (lub dziur), jednak jest ono pomijalne w stosunku do zjawiska gwałtownego przyrostu liczby nośników ładunku przy wzroście temperatury.

[1]) Ruchliwością nazywamy prędkość poruszania się nośnika ładunku (elektronu lub dziury) w polu elektrycznym o jednostkowym natężeniu. Wymiarem ruchliwości w układzie MKS jest m^2/V · sek.

Przewodnictwo elektryczne idealnej siatki krystalicznej, tzn. nie posiadającej jakichkolwiek zakłóceń periodyczności przestrzennej, nazywa się przewodnictwem samoistnym. Cechy przewodnictwa samoistnego wymieniono poniżej.

1. Pojawieniu się elektronu w pasmie przewodnictwa towarzyszy jednoczesne pojawienie się dziury w pasmie podstawowym.
2. Elektron znajdujący się w pasmie przewodnictwa pochodzić może jedynie z pasma podstawowego; przeskok elektronu z pasma podstawowego do pasma przewodnictwa może zajść tylko wtedy, kiedy energia elektronu pasma podstawowego wzrosła co najmniej o energię równą szerokości pasma zabronionego.
3. Prąd elektryczny w półprzewodniku samoistnym realizowany jest jednocześnie przez elektrony poruszające się w pasmie przewodnictwa oraz dziury poruszające się w pasmie podstawowym[1]).

Czynnikami, które mogą dostarczać energii elektronowi pasma podstawowego, są:

a) energia cieplna,
b) energia świetlna,
c) energia pola elektrycznego.

Wpływ temperatury na przewodność półprzewodników był już przez nas omówiony — wykorzystywany jest on np. w termistorach. Wpływ oświetlenia na przewodność elektryczną półprzewodnika wykorzystujemy w fotoelementach stykowych oraz w fototranzystorach. Wpływ silnego pola elektrycznego odgrywa istotną rolę przy projektowaniu izolatorów[2]). Przy przekroczeniu pewnej określonej wartości pola elektrycznego elektrony pasma podstawowego będą mogły pobierać z zewnętrznego pola elektrycznego energie równe lub większe od energii przeskoku przez strefę zabronioną. Nastąpi wówczas lawinowe przechodzenie elektronów z pasma podstawowego do pasma przewodnictwa, co odpowiada przebiciu izolatora.

7. PRZEWODNOŚĆ DOMIESZKOWA W PÓŁPRZEWODNIKACH

Najczęściej w praktyce mamy do czynienia z półprzewodnikami mającymi zakłócenia periodyczności siatki krystalicznej. Z idealną budową siatki krystalicznej spotykamy się bardzo rzadko.

---

[1]) Zjawisko ruchu dziury w pasmie podstawowym wyjaśnione będzie w następnym rozdziale niniejszej pracy.

[2]) Występuje tutaj zjawisko nachylania się granic pasm energetycznych pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego. Szczegółową analizę tego zjawiska znajdzie czytelnik w [7].

Wpływ zakłóceń regularności siatki krystalicznej na przewodność elektryczną półprzewodników jest bardzo wielki — wprowadzenie np. do kryształu atomów obcych o procentowej zawartości rzędu 10^{-4} % (jeden atom zakłócający na milion atomów charakterystycznych dla danej siatki krystalicznej) może zwiększyć przewodność elektryczną półprzewodnika o kilka rzędów wielkości.

Zakłócenia periodyczności siatki krystalicznej ciała stałego mogą być następujące (rys. 14):

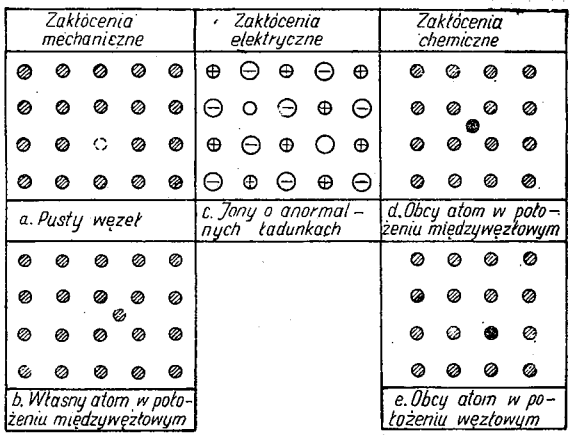
a) pusty węzeł, powstały w krysztale wskutek usunięcia z kryształu jonu lub atomu;

b) własny atom lub jon siatki, znajdujący się w położeniu międzywęzłowym;

c) anormalnie naładowany jon lub atom, właściwy dla danej siatki krystalicznej;

d) obcy atom lub jon w położeniu międzywęzłowym;

e) obcy atom lub jon umieszczony w położeniu węzłowym zamiast atomu lub jonu właściwego dla danej siatki krystalicznej.



Rys. 14. Rodzaje zakłóceń periodyczności siatki krystalicznej

Dwa pierwsze rodzaje zakłóceń zaliczają się do zakłóceń mechanicznych — mogą one być dokonane przez wywieranie znacznych sił mechanicznych na ciało krystaliczne oraz na drodze odpowiedniej obróbki termicznej. Zakłócenia mechaniczne występujące w siatce krystalicznej zbudowanej z atomów jednego rodzaju nie zmieniają składu chemicznego ciała, natomiast istniejące w różnoatomowej siatce krystalicznej (NaCl, PbS itd.) mogą wpływać na stosunki stechiometryczne ciała krystalicznego.

Zakłócenia trzeciego rodzaju (pkt c) nazywamy zakłóceniami elektrycznymi; powstają one przez:

a) umieszczenie kryształu w silnym polu elektrycznym,

b) nagrzanie kryształu do odpowiednio wysokiej temperatury,

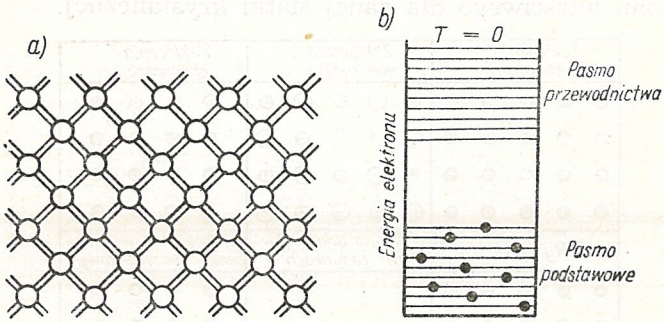
c) oświetlenie kryształu promieniowaniem o dostatecznej energii.

Zakłócenia elektryczne nie zmieniają składu chemicznego ciała ani też nie wpływają na jego stosunki stechiometryczne.

Zakłócenia czwartego i piątego rodzaju (wymienione w punktach d, e) nazywane są zakłóceniami chemicznymi — są to domieszki, zmieniające skład chemiczny kryształu.

Wszystkie rodzaje zakłóceń przyjęto określać terminem „domieszki". Nie wnikając w to, z jakiego rodzaju zakłóceniami mamy do czynienia, nazywać je będziemy zakłóceniami domieszek, a odpowiadające im poziomy energetyczne — poziomami domieszek.

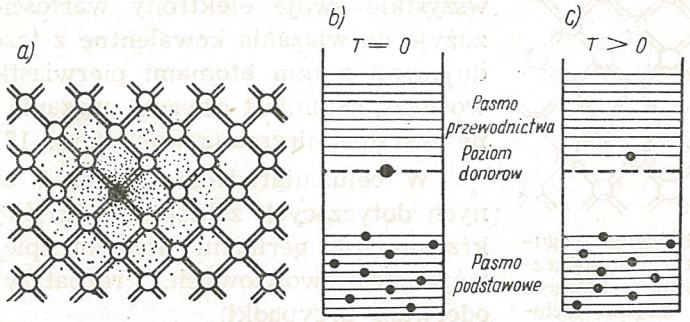
Przejdziemy obecnie do rozpatrzenia poziomów energetycznych w rzeczywistej siatce krystalicznej, tzn. posiadającej zakłócenia periodyczności. Rozważania nasze oprzemy na przykładzie siatki krystalicznej krzemu lub germanu.



Rys. 15. a) płaska interpretacja wiązań w idealnej siatce krystalicznej germanu; b) układ pasm energetycznych w idealnej siatce krystalicznej germanu przy $T = 0$

Jak wiemy, w siatce krystalicznej germanu każdy atom związany jest z czterema otaczającymi go atomami za pomocą czterech wiązań kowalentnych. W celu ułatwienia graficznej ilustracji zachodzących zjawisk założymy, że atomy germanu rozmieszczone są w siatce krystalicznej jak na rys. 15a. Przy $T = 0$ rozkład elektronów w pasmie przewodnictwa i podstawowym, odpowiadający podanej siatce, jest przedstawiony na rys. 15b. Załóżmy obecnie, że w siatce krystalicznej na miejsce jednego z atomów germanu wstawiono atom pierwiastka znajdującego się w piątej kolumnie układu periodycznego Mendelejewa, czyli posiadającego pięć elektronów wartościowościowych, np. fosfor, arsen i in. (rys. 16a). Atom domieszki z pięciu swoich elektronów walencyjnych cztery wykorzysta na wiązania kowalentne z otaczającymi go atomami germanu. Piąty elektron nie wchodzi w żadne wiązanie kowalentne (Dodatek 2) — związany on jest z atomem domieszki siłami elektrostatycznego oddzia-

ływania między nim i rdzeniem atomu. Elektron ten posiada dość znaczną energię przy $T = 0$, bliską energii elektronu wolnego w siatce krystalicznej Ge. Duża energia piątego elektronu jest przyczyną słabego związania elektronu z jego rdzeniem atomowym — fakt ten można wyjaśnić następująco: zakłada się, że elektron porusza się w polu rdzenia atomu domieszki podobnie jak wokół jądra atomowego w atomie izolowanym, jednakże promień orbity elektronu jest tak duży, że obejmuje również najbliższe atomy otaczające atom domieszki (rys. 16a). Można uważać, że wypadkowy dodatni ładunek atomu domieszki oraz poruszający się elektron znajdują się w ośrodku dielektrycznym o względnej przenikalności elektrycznej $\varepsilon > 1$, wobec czego siła przyciągająca występująca między elektronem a jonem domieszki jest ε razy mniejsza od siły, która by powstała w przypadku, gdyby zjawisko zachodziło w ośrodku o $\varepsilon = 1$. Względna przenikalność elektryczna krzemu wyno-

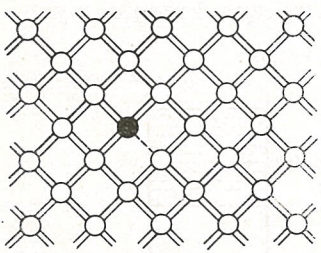


Rys. 16. a) zakłócenia regularności siatki krystalicznej germanu atomem pierwiastka pięciowartościowościowego oraz odpowiadający temu zakłóceniu układ poziomów energetycznych; b) przy $T = 0$; c) przy $T > 0$

si około 13, a więc siła wiążąca elektron z atomem domieszki jest stosunkowo mała. Doświadczalnie stwierdzono, że już w temperaturze pokojowej elektrony nie biorące udziału w wiązaniach kowalentnych nie wiążą się z atomami pięciowartościowościowych domieszek, lecz stają się swobodne, czyli przechodzą do pasma przewodnictwa. Na rysunkach 16b i 16c przedstawiono poziomy energetyczne elektronów w krysztale w przypadku zakłócenia regularności siatki krystalicznej domieszkami posiadającymi właściwości dostarczania elektronów do pasma przewodnictwa, czyli tzw. d o m i e s z k a m i d o n o r o w y m i. Jak widzimy, różnica energii między poziomem energetycznym donorów i najniższym poziomem energetycznym pasma przewodnictwa jest znacznie mniejsza w porównaniu ze zmianą energii elektronu przy jego przeskoku z pasma podstawowego do pasma przewodnictwa (w krzemie energia jonizacji donora wynosi 0,054 eV, natomiast całkowita szerokość pasma zabronionego jest 1,11 eV).

Elektrony oderwane od donorów poruszają się swobodnie w pasmie przewodnictwa i —podobnie jak w metalu — tworzą „gaz" elektronowy. Pozostałe dodatnio naładowane donory są nieruchome, wytwarzają one jedynie dodatni ładunek przestrzenny, neutralizujący ujemny ładunek przestrzenny wywołany przez elektrony. Jak wynika z powyższego, kryształ półprzewodnika posiadający zakłócenia siatki krystalicznej typu donorowego w niskich temperaturach[1]) ma przewodnictwo wyłącznie elektronowe; półprzewodniki tego rodzaju nazywane są półprzewodnikami nadmiarowymi lub półprzewodnikami typu *n*.

Rozpatrzymy obecnie zakłócenia siatki krystalicznej krzemu lub germanu atomami pierwiastków trójwartościowościowych, a więc należących do trzeciej kolumny naturalnego układu pierwiastków Mendelejewa (bor, glin, gal, i in.). Atom domieszki wszystkie swoje elektrony wartościowościowe zużyje na wiązania kowalentne z trzema sąsiadującymi z nim atomami pierwiastka podstawowego, natomiast czwarte wiązanie kowalentne zostanie niezrealizowane (rys. 17).



Rys. 17. Zakłócenia regularności siatki krystalicznej germanu atomem pierwiastka trójwartościowościowego

W celu ułatwienia rozważań energetycznych dotyczących zakłóceń siatki krystalicznej krzemu lub germanu atomami pierwiastków trójwartościowościowych, rozpatrzymy dwa oderwane przypadki:

a) elektron wolny wchodzi w niezrealizowane wiązanie kowalentne między dwoma atomami pierwiastka podstawowego,

b) elektron wolny wchodzi w czwarte wiązanie kowalentne między atomem pierwiastka podstawowego i atomem pierwiastka trójwartościowościowego.

W pierwszym przypadku przejście elektronu ze stanu wolnego do stanu związanego równoważne jest przeskokowi elektronu z pasma przewodnictwa na pusty poziom energetyczny w pasmie podstawowym. Istnienie tego poziomu wynika z założonej przez nas obecności niezrealizowanego wiązania kowalentnego między atomami pierwiastka podstawowego (rysunki 18a i 18b).

W drugim przypadku elektron przechodząc ze stanu wolnego do stanu związanego traci nieco mniejszą energię niż w przypadku pierwszym,

[1]) W wyższych temperaturach, przy których prawdopodobieństwo przeskoku elektronu z pasma podstawowego do pasma przewodnictwa jest dość znaczne, przewodnictwo elektryczne półprzewodnika będzie realizowane również częściowo przez dziury, powstające w pasmie podstawowym.