W przypadku gdy linia CPZ jest symetryczna magnetycznie (przeplecenie, symetria naturalna), wówczas $Z'_a = Z_b = Z'_c = Z'_d = Z'_l$ i wtedy zastępcze oporności fazowe układu przesyłowego typu CPZ wyrażają się:

$$\left.\begin{aligned} Z_R &= Z_t + \frac{Z'_l}{2}, \\ Z_S &= Z_t + \frac{Z'_l}{2}, \\ Z_T &= Z_t. \end{aligned}\right\} \tag{18b}$$

Wzory (18) i schematy zastępcze jak na rys. 10 mogą być podstawą obliczeń układu przesyłowego typu CPZ w warunkach normalnej pracy przy zachowaniu symetrii prądowej w tym układzie i obliczeń sieci trójfazowej o dowolnej konfiguracji i parametrach, w której występują linie typu CPZ.

Oporności robocze poszczególnych faz linii CPZ zgodnie ze wzorami (17) spełniają następujące zależności:

$$\left.\begin{aligned} Z_a &= Z_{s_a} - Z_{m_a}, \\ Z_b &= Z_{s_b} - Z_{m_b}, \\ Z_c &= Z_{s_c} - Z_{m_c}, \\ Z_d &= Z_{s_d} - Z_{m_d}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Jak wynika z równań (16), przy uwzględnieniu zależności (15) oporności $Z_s$ i $Z_m$ są odpowiednio równe:

$$\left.\begin{aligned} Z_{s_a} &= Z_{aa_g} = Z_s, \\ Z_{s_b} &= Z_{bb_g} = Z_s, \\ Z_{s_c} &= Z_{cc_g} = Z_s, \\ Z_{s_d} &= Z_{dd_g} = Z_s, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

oraz:

$$\left.\begin{aligned} Z_{m_a} &= Z_{ac_g} + a^2 (Z_{ad_g} - Z_{ab_g}), \\ Z_{m_b} &= Z_{bd_g} + a\ (Z_{bc_g} - Z_{ab_g}), \\ Z_{m_c} &= Z_{ac_g} + a^2 (Z_{bc_g} - Z_{cd_g}), \\ Z_{m_d} &= Z_{bd_g} + a\ (Z_{ad_g} - Z_{cd_g}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Zgodnie z ogólnymi wzorami (12) i (13) oporności wzajemne w omach między odpowiednimi pętlami linii CPZ oblicza się z następujących zależności wartościowych:

$$\left.\begin{aligned}
Z_{ab_g} &= \left(R_{go} + j\,0{,}145\ \lg \frac{D_g}{b_{ab}}\right) l,\\
Z_{ac_g} &= \left(R_{go} + j\,0{,}145\ \lg \frac{D_g}{b_{ac}}\right) l,\\
Z_{ad_g} &= \left(R_{go} + j\ 0{,}145\ \lg \frac{D_g}{b_{ad}}\right) l,\\
Z_{bc_g} &= \left(R_{go} + j\,0{,}145\ \lg \frac{D_g}{b_{bc}}\right) l,\\
Z_{bd_g} &= \left(R_{go} + j\,0{,}145\ \lg \frac{D_g}{b_{bd}}\right) l,\\
Z_{cd_g} &= \left(R_{go} + j\,0{,}145\ \lg \frac{D_g}{b_{cd}}\right) l.
\end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

gdzie: $l$ — długość linii CPZ w km; odległości między odpowiednimi przewodami linii ($b$) w cm są zaznaczone na rys. 6 i 7, zaś $D_g$ — jak we wzorach (13) w cm.

Podstawiając $a = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $a^2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz zależności (22) do wzorów (21) otrzymuje się:

$$\left.\begin{aligned}
Z_{m_a} &= \left[\left(R_{go} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}145 \lg \frac{b_{ab}}{b_{ad}}\right) + j\left(0{,}145 \lg \frac{D_g}{b_{ac}} \sqrt{\frac{b_{ad}}{b_{ab}}}\right)\right] l,\\
Z_{m_b} &= \left[\left(R_{go} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}145 \lg \frac{b_{ab}}{b_{bc}}\right) + j\left(0{,}145 \lg \frac{D_g}{b_{bd}} \sqrt{\frac{b_{bc}}{b_{ab}}}\right)\right] l,\\
Z_{m_c} &= \left[\left(R_{go} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}145 \lg \frac{b_{cd}}{b_{bc}}\right) + j\left(0{,}145 \lg \frac{D_g}{b_{ac}} \sqrt{\frac{b_{bc}}{b_{cd}}}\right)\right] l,\\
Z_{m_d} &= \left[\left(R_{go} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}145 \lg \frac{b_{cd}}{b_{ad}}\right) + j\left(0{,}145 \lg \frac{D_g}{b_{bd}} \sqrt{\frac{b_{ad}}{b_{cd}}}\right)\right] l.
\end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Biorąc pod uwagę, że $Z_s = \left(R_o + R_{go} + j\ 0{,}145\ \frac{D_g}{r_e}\right) l$ [patrz wzory (12) i (13)] i wstawiając odpowiednio wzory (23) do wzorów (19) uzyskujemy następujące zależności na zastępcze oporności fazowe linii CPZ:

$$\left.\begin{aligned} Z_a &= \left[\left(R_o - \frac{\sqrt{3}}{2}\,0{,}145 \lg \frac{b_{ab}}{b_{ad}}\right) + j\left(0{,}145 \lg \frac{b_{ac}}{r_e}\sqrt{\frac{b_{ab}}{b_{ad}}}\right)\right] l\,, \\ Z_b &= \left[\left(R_o + \frac{\sqrt{3}}{2}\,0{,}145 \lg \frac{b_{ab}}{b_{bc}}\right) + j\left(0{,}145 \lg \frac{b_{bd}}{r_e}\sqrt{\frac{b_{ab}}{b_{bc}}}\right)\right] l\,, \\ Z_c &= \left[\left(R_o - \frac{\sqrt{3}}{2}\,0{,}145 \lg \frac{b_{cd}}{b_{bc}}\right) + j\left(0{,}145 \lg \frac{b_{ac}}{r_e}\sqrt{\frac{b_{cd}}{b_{bc}}}\right)\right] l\,, \\ Z_d &= \left[\left(R_o + \frac{\sqrt{3}}{2}\,0{,}145 \lg \frac{b_{cd}}{b_{ad}}\right) + j\left(0{,}145 \lg \frac{b_{bd}}{r_e}\sqrt{\frac{b_{cd}}{b_{ad}}}\right)\right] l\,. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Należy zwrócić uwagę na składnik czynny zastępczych oporności fazowych linii CZP we wzorach (24), który zależy nie tylko od czynnej oporności przewodów. Ta okoliczność pozwala stwierdzić, że w warunkach asymetrii magnetycznej linii CPZ poza czynnymi stratami mocy w przewodach, wywołanymi przepływem przez nie prądu, istnieją w fazach linii CPZ dodatkowe straty mocy czynnej o różnych znakach — dodatnie i ujemne, co jest cechą niesymetrycznych magnetycznie układów przestrzennych. Jak się można przekonać, straty dodatkowe we wszystkich fazach linii CPZ są równe zeru, jeżeli układy prądów wypływających z zacisków transformatorów są układami symetrycznymi.

Rozpatrzmy dwa jedynie możliwe przypadki, gdy linia typu CPZ jest linią symetryczną magnetycznie, tzn. w przypadku symetrii naturalnej (rys. 7) i w przypadku odpowiedniego przeplecenia (rys. 8).

W pierwszym przypadku, jak to widać z rysunków 7a i 7b, gdzie podano kwadratowy układ przewodów o następstwie faz ($a$ — $b$ — $c$ — $d$), spełnione są zależności:

$$\left.\begin{aligned} b_{ab} &= b_{bc} = b_{cd} = b_{ad} = b\,, \\ b_{ac} &= b_{bd} = \sqrt{2}\,b\,. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Podstawiając te dane do wzorów odpowiednio (23) i (24) otrzymuje się:

$$Z_{m_a} = Z_{m_b} = Z_{m_c} = Z_{m_d} = Z_m = \left(R_{go} + j\,0{,}145 \lg \frac{D_g}{\sqrt{2}\,b}\right) l \tag{26}$$

oraz

$$\left.\begin{aligned} Z_a = Z_b = Z_c = Z_d = Z_l &= \left(R_o + j\,0{,}145 \lg \frac{\sqrt{2}\,b}{r_e}\right) l = \\ &= \left(R_o + j\,0{,}145 \lg \frac{b_{śr}}{r_e}\right) l\,. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Wzory (26) i (27) można było przewidzieć z góry, bowiem na pętlę ($ag$) oddziałuje tylko prąd w pętli ($cg$) o takiej samej wartości, lecz o kierunku przeciwnym. Wpływ pętli ($bg$) i ($dg$) na pętlę ($ag$) kompensuje się, gdyż

$I_d = -I_b$ oraz $b_{ad} = b_{ab}$. Wzory te są takie same jak dla linii jednofazowej „przewód — przewód" o odstępie międzyprzewodowym równym $\sqrt{2}b$.

We wzorze (27) $b_{śr} = \sqrt{2}b$ oznacza średni odstęp międzyprzewodowy linii typu CPZ o kwadratowym układzie przewodów.

Wyrażając równanie (27) słowami stwierdza się, że w przypadku gdy linia typu CPZ posiada kwadratowy układ przewodów jak na rysunkach 7a i 7b i spełnione są warunki symetrii prądowej, wówczas zastępcze oporności fazowe linii są sobie równe.

Jeżeli zamienimy na rysunkach 7a i 7b przewody c i d, wówczas nie uzyskamy całkowitej symetrii magnetycznej linii, co widać bezpośrednio ze wzorów (23) i (24) po podstawieniu w nich:

$$b_{ab} = b_{bd} = b_{cd} = b_{ac} = b$$

i

$$b_{ad} = b_{bc} = \sqrt{2}\,b\,.$$

W tym bowiem przypadku zastępcze oporności bierne wszystkich faz linii CPZ są takie same, natomiast zastępcze oporności czynne faz $a$ i $c$ różnią się od oporności czynnych faz $b$ i $d$; i tak:

$$R_a = R_c = R_o - \Delta R\,,$$

$$R_b = R_d = R_o + \Delta R\,,$$

gdzie

$$\Delta R = \frac{\sqrt{3}}{2}\,0{,}145\,\lg\frac{1}{\sqrt{2}} = -\,0{,}019\ \Omega/\mathrm{km}\,.$$

W budowie linii średnich napięć stosuje się najczęściej przewody stalowo-aluminiowe o przekrojach 25 do 150 mm$^2$. Czynna oporność jednostkowa tych przewodów $R_o = 1{,}205 \div 0{,}193\ \Omega/\mathrm{km}$. Wobec tego poprawka $\Delta R = -\,0{,}019\ \Omega/\mathrm{km}$ w obliczeniach zastępczej oporności czynnej faz linii CPZ może być pominięta, gdyż nieuwzględnienie jej powoduje błąd w granicach około $2 \div 10\%$, w zależności od przekroju przewodów.

Jeżeli więc przewody linii CPZ o układzie kwadratowym są zawieszone zgodnie z następstwem faz ($a$ — $b$ — $c$ — $d$) niezależnie od kierunku postępowania — zgodnie (rys. 7a) bądź przeciwnie (rys. 7b) z ruchem wskazówek zegara — wówczas linia CPZ jest symetryczna magnetycznie.
W przypadku następstwa faz ($a$ — $b$ — $d$ — $c$) — rysunki 7c i 7d — niezależnie od kierunku postępowania linia nie jest całkowicie symetryczna, jednak w praktycznych obliczeniach można założyć, że jest symetryczna.

Średni odstęp międzyprzewodowy w układzie jak na rysunkach 7c lub 7d $b''_{śr} = \frac{b}{\sqrt{2}}$, zaś w układzie jak na rysunkach 7a lub 7b $b'_{śr} = \sqrt{2}b$ .

Zatem w układzie o następstwie faz ($a$ — $b$ — $d$ — $c$) oporności bierne ($X''$) faz linii CPZ są nieco mniejsze od oporności biernych ($X'$) w układzie o następstwie faz ($a$ — $b$ — $c$ — $d$). Stosunek tych oporności wynosi:

$$k = \frac{X''}{X'} = \frac{\lg \frac{b}{\sqrt[4]{2}\, r_e}}{\lg \frac{\sqrt{2}\, b}{r_e}} \approx \frac{\lg \frac{b}{\sqrt[4]{2}}}{\lg \sqrt{2}\, b}.$$

Dla $b = 100$ cm $k \approx 0{,}90$, zaś dla $b = 400$ cm $k \approx 0{,}92$.

Z powyższego wynika, że pod względem elektrycznym (nieco mniejsze straty napięcia i mocy biernej) korzystniej jest umieszczać przewody linii CPZ w układzie kwadratowym o następstwie faz ($a$ — $b$ — $d$ — $c$).

W praktyce kwadratowy układ przewodów jest nieekonomiczny ze względu na duży koszt konstrukcji wsporczych linii. Pod względem ekonomicznym lepszy będzie układ prostokątny, którego krótsze ramię jest równoległe do osi słupa. W tym przypadku linia nie będzie symetryczna magnetycznie.

Rozpatrzymy następnie przypadek, gdy linia CPZ o dowolnym układzie przewodów przepleciona jest zgodnie z rys. 8, na którym podano tylko jeden pełny cykl przeplecenia.

W tym przypadku oporności wzajemne poszczególnych nieuziemionych faz linii będą sobie równe; równe sobie będą również fazowe oporności robocze linii.

Nietrudno uzasadnić, że oporność wzajemna linii CPZ w przypadku przeplecenia będzie równa następującemu wyrażeniu:

$$Z_m = \left( Z_{m_{ao}} \frac{l}{4n} = Z_{m_{bo}} \frac{l}{4n} + Z_{m_{co}} \frac{l}{4n} + Z_{m_{do}} \frac{l}{4n} \right) n =$$

$$= \frac{1}{4} (Z_{m_a} + Z_{m_b} + Z_{m_c} + Z_{m_d}) \tag{28}$$

i analogicznie oporność robocza linii — wyrażeniu:

$$Z_l = \frac{1}{4} (Z_a + Z_b + Z_c + Z_d). \tag{29}$$

Litera $n$ we wzorze (28) oznacza liczbę cykli przepleceń. W każdym cyklu są cztery sekcje przepleceń.

Uwzględniając wzory odpowiednio (23) i (24) otrzymamy:

$$Z_m = \left( R_{z_0} + j\, 0{,}145 \lg \frac{D_g}{b_{śr}} \right) l, \tag{30}$$

gdzie

$$b_{śr} = \sqrt[4]{(b_{ac} \cdot b_{bd})^2 \frac{b_{ab}\, b_{cd}}{b_{ad}\, b_{bc}}}, \tag{31}$$

oraz

$$Z_l = \left(R_o + j\,0{,}145 \lg \frac{b_{śr}}{r_e}\right) l\,. \tag{32}$$

Tak więc w przypadku symetrii magnetycznej linii CPZ oporności wzajemne poszczególnych faz linii są sobie równe i wynoszą $Z_m$; analogicznie oporności robocze poszczególnych faz linii są sobie równe i wynoszą $Z_l$.

Jeżeli przewody linii CPZ są ze stali, wówczas

$$Z_l = R_o + j\left(0{,}145 \lg \frac{b_{śr}}{r} + X_{wo}\right) l\,, \tag{32a}$$

gdzie:

$r$ — promień przewodu,

$X_{wo}$ — wewnętrzna jednostkowa oporność bierna przewodu.

Oporności $R_o$ i $X_{wo}$ dla przewodów stalowych zależą od obciążenia prądowego przewodów. Oblicza się je z odpowiednich tablic lub krzywych podawanych w literaturze.

Podane w rozdz. 2 zależności na straty napięcia w linii CPZ i oporności zastępcze linii dotyczyły przypadku, gdy wartości oporności uziemień roboczych systemu CPZ na początku i końcu linii CPZ były równe zeru. Załóżmy, że oporności te wynoszą: na początku linii — $R_{u1}$, na końcu linii — $R_{u2}$. W tym przypadku straty napięcia w poszczególnych pętlach ziemno-powrotnych, oznaczonych po wzorach (10), można wyrazić następującymi zależnościami:

$$\left.\begin{aligned} \Delta U'_a &= \Delta U_a + \Delta U_{R_u}, \\ \Delta U'_b &= \Delta U_b + \Delta U_{R_u}, \\ \Delta U'_c &= \Delta U_c + \Delta U_{R_u}, \\ \Delta U'_d &= \Delta U_d + \Delta U_{R_u}, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

gdzie:

$\Delta U_a$, $\Delta U_b$, $\Delta U_c$, $\Delta U_d$ — straty napięcia w odpowiednich pętlach linii CPZ, określone wzorami (11), przy założeniu, że oporności uziemień roboczych są równe zeru,

$\Delta U_{R_u} = \Delta U_{R_{u1}} + \Delta U_{R_{u2}}$ — strata napięcia na opornościach uziemień roboczych linii CPZ.

Straty napięcia na uziemieniach roboczych wywołuje prąd $I_g$ przepływający przez ziemię, a zatem:

$$\Delta U_{R_u} = I_g (R_{u_1} + R_{u_2}) = I_g R_u . \tag{34}$$

Ponieważ $I_g = -(I_a + I_b + I_c + I_d)$, a więc

$$\left.\begin{aligned} \Delta U'_a &= \Delta U_a + R_u (I_a + I_b + I_c + I_d), \\ \Delta U'_b &= \Delta U_b + R_u (I_a + I_b + I_c I_d), \\ \Delta U'_c &= \Delta U_c + R_u (I_a + I_b + I_c I_d), \\ \Delta U'_d &= \Delta U_d + R_u (I_a + I_b + I_c + I_d). \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Podstawiając za $\Delta U_a \ldots \Delta U_d$ we wzorach (35) równania (11), otrzymamy identycznie zależności jak we wzorach (11), jeżeli zamiast występujących w nich oporności własnych i wzajemnych podstawimy podane w tych wzorach oporności powiększone o oporność $R_u$. Jak się nietrudno przekonać, o oporność $R_u$ powiększą się także oporności wzajemne odpowiednich faz nieuziemionych linii CPZ. To znaczy możemy napisać ogólnie:

$$\left.\begin{aligned} Z'_s &= R_u + Z_s = R_u + \left(R_o + R_{go} + j\,0{,}145 \lg \frac{D_g}{r_e}\right) l \\ \text{i} \\ Z'_m &= R_u + Z_m = R_u + \left(R_{g_o} + j\,0{,}145 \lg \frac{D_g}{b_{śr}}\right) l . \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Ponieważ zastępcze oporności fazowe linii w warunkach symetrii prądowej oblicza się ze wzoru $Z_l = Z_s - Z_m$, wynika z tego, że w rozważanym przypadku oporności uziemień roboczych nie wpływają bezpośrednio na wartości zastępczych oporności fazowych linii CPZ. Jest to oczywiste także z tego powodu, że w warunkach symetrii prądowej linii prąd płynący przez te uziemienia $I_g = 0$.

Jeżeli prądy w linii typu CPZ nie spełniają warunków symetrii prądowej, wówczas nie można zastąpić takiej linii schematem jak na rys. 9, niezależnie od tego, czy linia jest przepleciona, czy posiada kwadratowy układ przewodów. W takim przypadku straty napięcia w linii można obliczać ze wzorów ogólnych (11).

W praktyce przeplatanie linii typu CPZ, zwłaszcza linii średnich napięć, może nie być celowe, gdyż mimo uzyskania symetrii linii CPZ układ przesyłowy typu CPZ pozostaje nadal układem niesymetrycznym, jeżeli nie zastosować dodatkowych środków (dławiki) do kompensacji tej asymetrii. W przypadku gdy linia CPZ nie jest przepleciona, można jednak w obliczeniach mniej dokładnych korzystać ze wzorów (32) lub (32a) na oporność roboczą linii, zakładając, że linia ta jest symetryczna przez odpowiednie

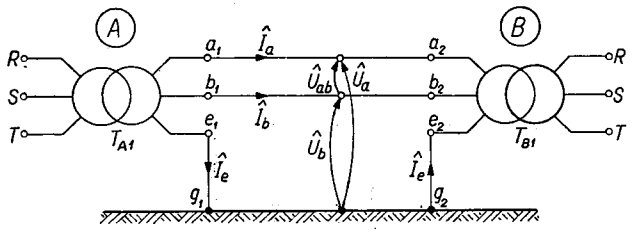
przeplecenie. Takie założenie przyjmuje się często przy obliczaniu oporności roboczych niesymetrycznych linii trójfazowych trójprzewodowych średnich napięć.

## 4. RÓWNANIA PODSTAWOWE DLA SKŁADOWYCH SYMETRYCZNYCH GRUPOWYCH W UKŁADZIE PRZESYŁOWYM TYPU CPZ

Jażeli będziemy rozpatrywać układ, w którym znajduje się kilka, np. $k$ wielofazowych obwodów tego samego typu, związanych między sobą indukcyjnością wzajemną, np. linia typu CPZ lub równoległe linie trójprzewodowe wiążące szyny stacji zasilającej i odbiorczej, wówczas w każdym z tych obwodów jednego typu, np. w jednej części linii CPZ lub w jednym torze linii trójfazowej trójprzewodowej, prądy i napięcia można rozłożyć na składowe symetryczne w liczbie równej liczbie faz w obwodzie. Będą to składowe symetryczne $n$-fazowe. W ogólnym przypadku zarówno prądy, jak i napięcia różnych kolejności w każdym z tych obwodów nie są sobie równe. Jeżeli rozpatrywać prądy lub napięcia jakiejkolwiek kolejności we wszystkich $k$ obwodach, to można zbudować $k$-fazowe składowe symetryczne, które nazywają się grupowymi składowymi symetrycznymi danej kolejności. Liczba takich składowych symetrycznych grupowych wynosi $k$. W podobny sposób można utworzyć składowe symetryczne grupowe od wszystkich $n$-fazowych składowych w $k$-obwodach. Jeżeli więc mamy $k$ obwodów i $n$ faz w każdym z tych obwodów, wówczas otrzymamy $m = k \cdot n$ składowych grupowych [4].

W linii typu CPZ można wyodrębnić dwa układy dwufazowe, przy czym każdy z tych układów składać się będzie z dwóch przewodów odpowiednio połączonych z transformatorami na początku i końcu linii. Zostaną tu podane związki w odniesieniu do prądów płynących w tych przewodach oraz do napięć „fazowych", jakie występują między odpowiednimi przewodami i układem odniesienia tych napięć. Jak już nadmieniono, układem odniesienia mogą być punkty neutralne w sieci, np. punkty zerowe generatorów, ziemia, przez którą nie przepływa prąd związany z rozpatrywanym układem przesyłowym (ziemia neutralna), lub także punkty powierzchni ziemi bezpośrednio pod rozważaną linią. W tym ostatnim przypadku ziemia bierze udział w przewodzeniu prądu związanego z linią; zastępuje przewód fazowy, dlatego napięcia przewodów napowietrznych w stosunku do ziemi są — ściśle biorąc — napięciami międzyprzewodowymi. W dalszych rozważaniach operować będziemy napięciami przewodów (lub faz nieuziemionych) w odniesieniu do ziemi w odpowiednim rozpatrywanym miejscu bezpośrednio pod linią CPZ. Napięcia te nazywać będziemy umownie napięciami fazowymi doziemnymi lub krócej napięciami fazowymi.

Rozpatrzmy najpierw jeden charakterystyczny układ dwufazowy linii CPZ, np. układ złożony z przewodów $a$ i $b$ (rys. 11). Jest to znany układ typu „dwa przewody — ziemia" (DPZ).




Rys. 11. Schemat linii typu DPZ

W ogólnym przypadku dwufazowy układ napięć i prądów można zastąpić bądź składowymi dwufazowymi kolejności zgodnej i przeciwnej, bądź składowymi dwufazowymi kolejności zgodnej i zerowej [3]. Do rozważań przyjęto składowe symetryczne dwufazowe kolejności zgodnej i zerowej, zwane tu w skrócie składowymi dwafazowymi. Operator charakterystyczny dla tych składowych dwufazowych wynosi:

$$a_1 = e^{j\frac{2\pi}{2}} = e^{j\pi} = 1\underline{/180^\circ} = -1. \tag{37}$$

Napięcia układu dwufazowego wyrażają się w następujący sposób za pomocą składowych symetrycznych dwufazowych:

$$\left.\begin{aligned} U_a &= U_{a_1} + U_{a_0}, \\ U_b &= U_{b_1} + U_{b_0}. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Zgodnie z założeniem

$$\left.\begin{aligned} U_{b_1} &= a_1 U_{a_1} = -U_{a_1} \\ &\text{i} \\ U_{b_0} &= U_{a_0}. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Zatem

$$\left.\begin{aligned} U_a &= U_{a_1} + U_{a_0}, \\ U_b &= -U_{a_1} + U_{a_0}. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Analogicznie w odniesieniu do prądów otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned} I_a &= I_{a_1} + I_{a_0}, \\ I_b &= -I_{a_1} + I_{a_0}. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

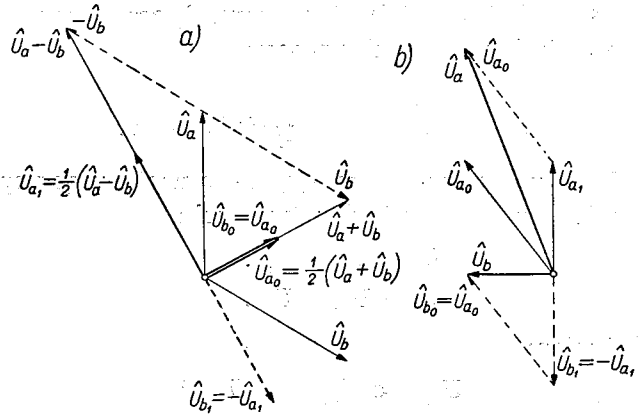
Składowe symetryczne dwufazowe napięć i prądów, odpowiednio zgodna i zerowa, wyrażają się następującymi zależnościami, wynikającymi z równań (40) i (41):

$$\left.\begin{aligned} U_{a_1} &= \frac{1}{2}(U_a - U_b), \\ U_{a_0} &= \frac{1}{2}(U_a + U_b). \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

oraz

$$\left.\begin{aligned} I_{a_1} &= \frac{1}{2}(I_a - I_b), \\ I_{a_0} &= \frac{1}{2}(I_a + I_b). \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Na rysunku 12 podano wykreślny sposób obliczania składowych symetrycznych dwufazowych napięć fazowych oraz — odwrotnie — określanie napięć fazowych na podstawie znanych ich składowych symetrycznych w układzie dwufazowym.




Rys. 12. Wykresy wskazowe napięć i ich składowych symetrycznych dwufazowych

a) rozkład napięć na składowe symetryczne; b) obliczanie napięć na podstawie ich składowych symetrycznych

Należy zaznaczyć, że wielkości napięć fazowych $U_a$ i $U_b$ oraz prądów $I_a$ i $I_b$ w fazach odpowiednio $a$ i $b$ w układzie typu DPZ (rys. 11) charakteryzują ten układ. Prąd w ziemi $I_e$ w tym układzie oraz napięcie międzyprzewodowe $U_{ab}$ można bowiem obliczyć z następujących równań ogólnych, spełnionych w każdym przypadku pracy tego układu:

$$\left.\begin{aligned} I_a + I_b + I_e &= 0 \\ \text{oraz} \qquad U_a - U_b - U_{ab} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

W odniesieniu do drugiej części układu typu CPZ (fazy $c$ i $d$, rys. 13) możemy analogicznie napisać następujące zależności:

$$\left.\begin{aligned} U_c &= U_{c_1} + U_{c_0}, \\ U_d &= U_{d_1} + U_{d_0} = -U_{c_1} + U_{c_0} \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

i

$$\left.\begin{aligned} U_{c_1} &= \frac{1}{2}(U_c - U_d), \\ U_{c_0} &= \frac{1}{2}(U_c + U_d), \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

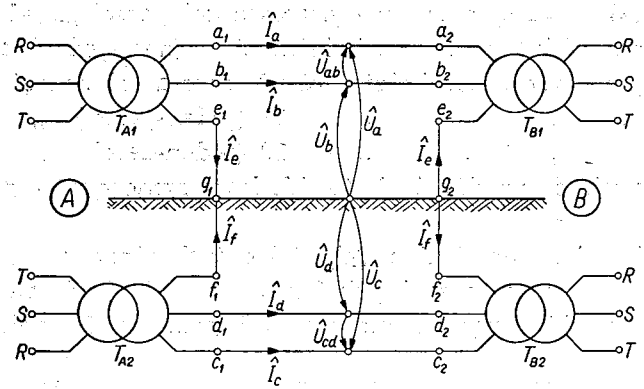
jak również

$$\left.\begin{aligned} I_c &= I_{c_1} + I_{c_0}, \\ I_d &= -I_{c_1} + I_{c_0} \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

oraz

$$\left.\begin{aligned} I_{c_1} &= \frac{1}{2}(I_c - I_d), \\ I_{c_0} &= \frac{1}{2}(I_c + I_d). \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Składowe symetryczne zerowe napięć i prądów w obu częściach układu CPZ ogólnie nie są sobie równe ($I_{a_0} \neq I_{c_0}$). Składowe te tworzą nowy układ




Rys. 13. Schemat linii typu CPZ (2 × DPZ)

dwufazowy (dwa obwody dwufazowe). Analogicznie nie są sobie równe składowe symetryczne kolejności zgodnej, które również tworzą nowy układ dwufazowy. A zatem składowe te można znowu rozłożyć na ich składowe symetryczne dwufazowe w analogiczny sposób, jak uczyniono to w odniesieniu do obu rzeczywistych części układu CPZ. Otrzymamy w ten sposób

składowe symetryczne grupowe kolejności zgodnej i zerowej składowych symetrycznych dwufazowych kolejności zgodnej i zerowej odpowiednio napięć lub prądów [4].

Na podstawie powyższego rozważania i równań (39) i (42) oraz (45) i (46) otrzymamy dla napięć następujące związki w odniesieniu do fazy „a", którą przyjmiemy za fazę podstawową:

$$\left.\begin{aligned} U_{a_{01}} &= \frac{1}{2}(U_{a_0} - U_{c_0}) = \frac{1}{4}(U_a + U_b - U_c - U_d), \\ U_{a_{00}} &= \frac{1}{2}(U_{a_0} + U_{c_0}) = \frac{1}{4}(U_a + U_b + U_c + U_d), \\ U_{a_{11}} &= \frac{1}{2}(U_{a_1} - U_{c_1}) = \frac{1}{4}(U_a - U_b - U_c + U_d), \\ U_{a_{10}} &= \frac{1}{2}(U_{a_1} + U_{c_1}) = \frac{1}{4}(U_a - U_b + U_c - U_d). \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Składowe symetryczne napięć $U_{a_{01}}$ i $U_{a_{00}}$, powstałe z rozłożenia składowych symetrycznych dwufazowych napięć $U_{a_0}$ i $U_{c_0}$, oraz składowe symetryczne $U_{a_{11}}$ i $U_{a_{10}}$, powstałe z rozłożenia składowych symetrycznych dwufazowych napięć $U_{a_1}$ i $U_{c_1}$, nazwiemy tu składowymi symetrycznymi grupowymi składowych symetrycznych dwufazowych napięć układu przesyłowego typu CPZ lub — w skrócie — składowymi symetrycznymi grupowymi napięć odpowiedniej kolejności, i tak:

$U_{a_{01}}$ — składową symetryczną grupową kolejności „zgodnej zerowej" napięć lub po prostu kolejności 01 (zero-jeden) napięć;
$U_{a_{00}}$ — jak wyżej, lecz kolejności 00 (zero-zero) napięć;
$U_{a_{11}}$ — „ „ „ „ 11 (jeden-jeden) „
$U_{a_{10}}$ — „ „ „ „ 10 (jeden-zero) „

W odniesieniu do prądów będą to składowe symetryczne grupowe prądów.

Z równań (49) po prostych przekształceniach otrzymuje się zależności określające napięcia poszczególnych faz (w odniesieniu do ziemi pod linią CPZ) za pomocą składowych symetrycznych grupowych napięć, i tak:

$$\left.\begin{aligned} U_a &= U_{a_{01}} + U_{a_{00}} + U_{a_{11}} + U_{a_{10}} = U_{a_{01}} + U_{a_{00}} + U_{a_{11}} + U_{a_{10}}, \\ U_b &= U_{b_{01}} + U_{b_{00}} + U_{b_{11}} + U_{b_{10}} = U_{a_{01}} + U_{a_{00}} - U_{a_{11}} - U_{a_{10}}, \\ U_c &= U_{c_{01}} + U_{c_{00}} + U_{c_{11}} + U_{c_{10}} = -U_{a_{01}} + U_{a_{00}} - U_{a_{11}} + U_{a_{10}}, \\ U_d &= U_{d_{01}} + U_{d_{00}} + U_{d_{11}} + U_{d_{10}} = -U_{a_{01}} + U_{a_{00}} + U_{a_{11}} - U_{a_{10}}. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Podobnie jak dla napięć, można napisać następujące zależności dla prądów w układzie CPZ:

$$\left.\begin{aligned} I_{a_{01}} &= \frac{1}{4}(I_a + I_b - I_c - I_d), \\ I_{a_{00}} &= \frac{1}{4}(I_a + I_b + I_c + I_d), \\ I_{a_{11}} &= \frac{1}{4}(I_a - I_b - I_c + I_d), \\ I_{a_{10}} &= \frac{1}{4}(I_a - I_b + I_c - I_d). \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

oraz

$$\left.\begin{aligned} I_a &= I_{a_{01}} + I_{a_{00}} + I_{a_{11}} + I_{a_{10}}, \\ I_b &= I_{a_{01}} + I_{a_{00}} - I_{a_{11}} - I_{a_{10}}, \\ I_c &= -I_{a_{01}} + I_{a_{00}} - I_{a_{11}} + I_{a_{10}}, \\ I_d &= -I_{a_{01}} + I_{a_{00}} + I_{a_{11}} - I_{a_{10}}. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Jeżeli przez $A$, $B$, $C$ i $D$ oznaczymy napięcia fazowe lub prądy w fazach linii typu CPZ, wówczas równania (50) dotyczące napięć i równania (52) w odniesieniu do prądów możemy napisać również w postaci macierzowej, a mianowicie:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & -1, & -1 \\ -1, & 1, & -1, & 1 \\ -1, & 1, & 1, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{a_{01}} \\ A_{a_{00}} \\ A_{a_{11}} \\ A_{a_{10}} \end{bmatrix}$$

Macierz

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & -1, & -1 \\ -1, & 1, & -1, & 1 \\ -1, & 1, & 1, & -1 \end{bmatrix}$$

można nazwać — podobnie jak w teorii składowych symetrycznych trójfazowych — macierzą operatorową składowych symetrycznych grupowych.

Podobnie za pomocą równania macierzowego można przedstawić zależność składowych symetrycznych grupowych fazy podstawowej — $A_{a_{01}}$, $A_{a_{00}}$, $A_{a_{11}}$, $A_{a_{10}}$ — w funkcji wielkości $A$, $B$, $C$ i $D$:

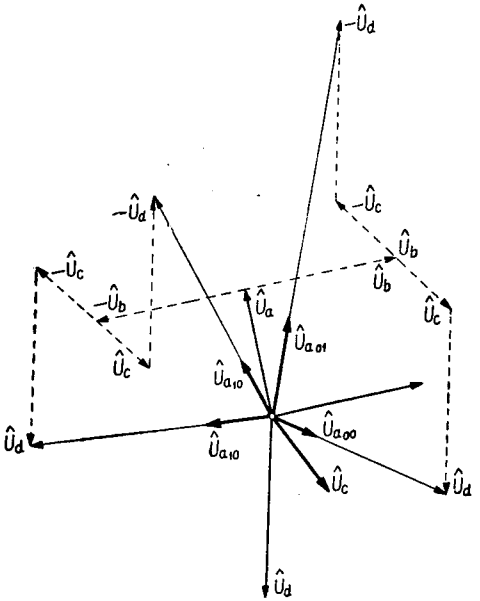
$$\begin{bmatrix} A_{a01} \\ A_{a00} \\ A_{a11} \\ A_{a10} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1, & 1, & -1, & -1 \\ 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & -1, & -1, & 1 \\ 1, & -1, & 1, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}$$

Macierz

$$\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 1, & -1, & -1, & -1 \\ 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & -1, & -1, & 1 \\ 1, & -1, & 1, & -1 \end{bmatrix}$$

powstaje z macierzy $\mathbf{S}_1$ przez przestawienie drugiego wiersza z pierwszym i drugiej kolumny z pierwszą. Oczywiście jest spełniona zależność

$$\mathbf{S}_2 = 4\,\mathbf{S}_1^{-1}.$$




Rys. 14. Rozkład napięć fazowych na składowe symetryczne grupowe

Na rysunku 14 podano wykreślny sposób wyznaczania składowych symetrycznych grupowych napięć na podstawie danych napięć fazowych w układzie CPZ.

Jeżeli linia jest obciążona symetrycznie oraz jeżeli symetryczne są napięcia w linii, tzn. jeżeli zachodzą związki:

$$I_a = I_a, \qquad I_c = I_c = -I_a,$$
$$I_b = a^2 I_a \quad \text{i} \quad I_d = a^2 I_c = -I_b,$$
$$I_e = aI_a \qquad I_f = aI_c = -I_e$$

oraz

$$U_a = U_a, \qquad U_c = U_c = -U_a,$$
$$U_b = a^2 U_a \quad \text{i} \quad U_d = a^2 U_c = -U_b,$$

gdzie $a$ — operator charakterystyczny składowych symetrycznych trójfazowych,

wówczas składowe symetryczne grupowe napięć i prądów spełniają następujące równania:

$$\left.\begin{aligned} U_{a_{01}} &= -\frac{1}{2} a U_a, \\ U_{a_{00}} &= 0, \\ U_{a_{11}} &= \frac{1}{2}(1 - a^2) U_a, \\ U_{a_{10}} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

oraz

$$\left.\begin{aligned} I_{a_{01}} &= -\frac{1}{2} a I_a, \\ I_{a_{00}} &= 0, \\ I_{a_{11}} &= \frac{1}{2}(1 - a^2) I_a, \\ I_{a_{10}} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Równania (53) i (54) oznaczają, że w przypadku gdy układy prądów i napięć w systemie przesyłowym CPZ są symetryczne, składowe grupowe odpowiednio napięć i prądów kolejności zerowej składowych symetrycznych dwufazowych nie występują w układzie CPZ.

W celu uzupełnienia podstaw teorii składowych symetrycznych grupowych podamy zależności dla składowych grupowych napięć poszczególnych faz układu CPZ w funkcji składowych grupowych napięć fazy podstawowej (fazy $a$). Zależności te wynikają z ogólnych zasad składowych symetrycznych grupowych i także przez odpowiednie porównanie ze wzorów (50). Podobne zależności słuszne są również dla składowych grupowych prądów.

$$\left.\begin{aligned}
&U_{a_{01}} = U_{a_{01}}, \quad U_{a_{00}} = U_{a_{00}}, \quad U_{a_{11}} = U_{a_{11}}, \quad U_{a_{10}} = U_{a_{10}},\\
&U_{b_{01}} = U_{a_{01}}, \quad U_{b_{00}} = U_{a_{00}}, \quad U_{b_{11}} = -U_{a_{11}}, \quad U_{b_{10}} = -U_{a_{10}},\\
&U_{c_{01}} = -U_{a_{01}}, \quad U_{c_{00}} = U_{a_{00}}, \quad U_{c_{11}} = -U_{a_{11}}, \quad U_{c_{10}} = U_{a_{10}},\\
&U_{d_{01}} = -U_{a_{01}}, \quad U_{d_{00}} = U_{a_{00}}, \quad U_{d_{11}} = U_{a_{11}}, \quad U_{d_{10}} = -U_{a_{10}}.
\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Dla określenia wszystkich napięć międzyprzewodowych oraz prądów w układzie CPZ wystarczy znać napięcia $U_a$, $U_b$, $U_c$ i $U_d$ oraz prądy $I_a$, $I_b$, $I_c$ i $I_d$. Inne wielkości napięć i prądów poza wymienionymi znajduje się w sposób elementarny, w oparciu o prawa Kirchhoffa.

## 5. OPORNOŚCI LINII TYPU CPZ DLA SKŁADOWYCH SYMETRYCZNYCH GRUPOWYCH NAPIĘĆ I PRĄDÓW

Wzory (11) podają ogólne zależności na fazowe straty w linii CPZ w funkcji prądów płynących w przewodach linii. Wyrażając w tych wzorach prądy $I_a$, $I_b$, $I_c$ i $I_d$ za pomocą odpowiednich składowych symetrycznych grupowych $I_{a_{01}}$, $I_{a_{00}}$, $I_{a_{11}}$ i $I_{a_{10}}$ otrzymuje się następujące równania:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta U_a &= I_{a_{01}}(Z_{aa_g} + Z_{ab_g} + a_1 Z_{ac_g} + a_1 Z_{ad_g}) + I_{a_{00}}(Z_{aa_g} + Z_{ab_g} + Z_{ac_g} + \\
&+ Z_{ad_g}) + I_{a_{11}}(Z_{aa_g} + a_1 Z_{ab_g} + a_1 Z_{ac_g} + Z_{ad_g}) + I_{a_{10}}(Z_{aa_g} + a_1 Z_{ab_g} + \\
&+ Z_{ac_g} + a_1 Z_{ad_g}),\\
\Delta U_b &= I_{a_{01}}(Z_{ba_g} + Z_{bb_g} + a_1 Z_{bc_g} + a_1 Z_{bd_g}) + I_{a_{00}}(Z_{ba_g} + Z_{bb_g} + Z_{bc_g} + \\
&+ Z_{bd_g}) + I_{a_{11}}(Z_{ba_g} + a_1 Z_{bb_g} + a_1 Z_{bc_g} + Z_{bd_g}) + I_{a_{10}}(Z_{ba_g} + a_1 Z_{bb_g} + \\
&+ Z_{bc_g} + a_1 Z_{bd_g}),\\
\Delta U_c &= I_{a_{01}}(Z_{ca_g} + Z_{cb_g} + a_1 Z_{cc_g} + a_1 Z_{cd_g}) + I_{a_{00}}(Z_{ca_g} + Z_{cb_g} + Z_{cc_g} + \\
&+ Z_{cd_g}) + I_{a_{11}}(Z_{ca_g} + a_1 Z_{cb_g} + a_1 Z_{cc_g} + Z_{cd_g}) + I_{a_{10}}(Z_{ca_g} + a_1 Z_{cb_g} + \\
&+ Z_{cc_g} + a_1 Z_{cd_g}),\\
U_d &= I_{a_{01}}(Z_{da_g} + Z_{db_g} + a_1 Z_{dc_g} + a_1 Z_{dd_g}) + I_{a_{00}}(Z_{da_g} + Z_{db_g} + Z_{dc_g} + \\
&+ Z_{dd_g}) + I_{a_{11}}(Z_{da_g} + a_1 Z_{db_g} + a_1 Z_{dc_g} + Z_{dd_g}) + I_{a_{10}}(Z_{da_g} + a_1 Z_{db_g} + \\
&+ Z_{dc_g} + a_1 Z_{dd_g}).
\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Oznaczmy przez:

$$\left.\begin{aligned}
Z_{a_{01}} &= Z_{aa_g} + Z_{ab_g} + a_1 Z_{ac_g} + a_1 Z_{ad_g},\\
Z_{a_{00}} &= Z_{aa_g} + Z_{ab_g} + Z_{ac_g} + Z_{ad_g},\\
Z_{a_{11}} &= Z_{aa_g} + a_1 Z_{ab_g} + a_1 Z_{ac_g} + Z_{ad_g},\\
Z_{a_{10}} &= Z_{aa_g} + a_1 Z_{ab_g} + Z_{ac_g} + a_1 Z_{ad_g};
\end{aligned}\right\} \tag{57a}$$

$$\left.\begin{aligned} Z_{b_{01}} &= Z_{ba_g} + Z_{bb_g} + a_1 Z_{bc_g} + a_1 Z_{bd_g}, \\ Z_{b_{00}} &= Z_{ba_g} + Z_{bb_g} + Z_{bc_g} + Z_{bd_g}, \\ Z_{b_{11}} &= Z_{ba_g} + a_1 Z_{bb_g} + a_1 Z_{bc_g} + Z_{bd_g}, \\ Z_{b_{10}} &= Z_{ba_g} + a_1 Z_{bb_g} + Z_{bc_g} + a_1 Z_{bd_g}; \end{aligned}\right\} \tag{57b}$$

$$\left.\begin{aligned} Z_{c_{01}} &= Z_{ca_g} + Z_{cb_g} + a_1 Z_{cc_g} + a_1 Z_{cd_g}, \\ Z_{c_{00}} &= Z_{ca_g} + Z_{cb_g} + Z_{cc_g} + Z_{cd_g}, \\ Z_{c_{11}} &= Z_{ca_g} + a_1 Z_{cb_g} + a_1 Z_{cc_g} + Z_{cd_g}, \\ Z_{c_{10}} &= Z_{ca_g} + a_1 Z_{cb_g} + Z_{cc_g} + a_1 Z_{cd_g}; \end{aligned}\right\} \tag{57c}$$

$$\left.\begin{aligned} Z_{d_{01}} &= Z_{da_g} + Z_{db_g} + a_1 Z_{dc_g} + a_1 Z_{dd_g}, \\ Z_{d_{00}} &= Z_{da_g} + Z_{db_g} + Z_{dc_g} + Z_{dd_g}, \\ Z_{d_{11}} &= Z_{da_g} + a_1 Z_{db_g} + a_1 Z_{dc_g} + Z_{dd_g} \\ Z_{d_{10}} &= Z_{da_g} + a_1 Z_{db_g} + Z_{dc_g} + a_1 Z_{dd_g}. \end{aligned}\right\} \tag{57d}$$

Podstawiając $a_1 = -1$ równania (57) możemy napisać w następującej postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} Z_{a_{01}} \\ Z_{a_{00}} \\ Z_{a_{11}} \\ Z_{a_{10}} \end{bmatrix} = \mathbf{S}_2 \begin{bmatrix} Z_{aa_g} \\ Z_{ab_g} \\ Z_{ac_g} \\ Z_{ad_g} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} Z_{b_{01}} \\ Z_{b_{00}} \\ Z_{b_{11}} \\ Z_{b_{10}} \end{bmatrix} = \mathbf{S}_2 \begin{bmatrix} Z_{ba_g} \\ Z_{bb_g} \\ Z_{bc_g} \\ Z_{bd_g} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} Z_{c_{01}} \\ Z_{c_{00}} \\ Z_{c_{11}} \\ Z_{c_{10}} \end{bmatrix} = \mathbf{S}_2 \begin{bmatrix} Z_{ca_g} \\ Z_{cb_g} \\ Z_{cc_g} \\ Z_{cd_g} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} Z_{d_{01}} \\ Z_{d_{00}} \\ Z_{d_{11}} \\ Z_{d_{10}} \end{bmatrix} = \mathbf{S}_2 \begin{bmatrix} Z_{da_g} \\ Z_{db_g} \\ Z_{dc_g} \\ Z_{dd_g} \end{bmatrix},$$

gdzie macierz

$$\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 1, & 1, & -1, & -1 \\ 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & -1, & -1, & 1 \\ 1, & -1, & 1, & -1 \end{bmatrix}$$

Przez analogię z nazwami oporności dla składowych symetrycznych trójfazowych (patrz np. [9]) oporności określone wzorami (57) można nazwać: $Z_{a_{01}}$ — oporność fazy „a" dla składowej symetrycznej grupowej 01 prądu

$Z_{a_{00}}$ — oporność fazy „a" dla składowej symetrycznej grupowej 00 prądu
$Z_{a_{11}}$ — oporność fazy „a" dla składowej symetrycznej grupowej 11 prądu
$Z_{a_{10}}$ — oporność fazy „a" dla składowej symetrycznej grupowej 10 prądu

Podobnie można nazwać oporności pozostałych faz dla odpowiednich składowych grupowych prądu.

Podstawiając zależności (57) do wzorów (56) otrzymuje się:

$$\left.\begin{aligned} \Delta U_a &= I_{a_{01}} Z_{a_{01}} + I_{a_{00}} Z_{a_{00}} + I_{a_{11}} Z_{a_{11}} + I_{a_{10}} Z_{a_{10}}, \\ \Delta U_b &= I_{a_{01}} Z_{b_{01}} + I_{a_{00}} Z_{b_{00}} + I_{a_{11}} Z_{b_{11}} + I_{a_{10}} Z_{b_{10}}, \\ \Delta U_c &= I_{a_{01}} Z_{c_{01}} + I_{a_{00}} Z_{c_{00}} + I_{a_{11}} Z_{c_{11}} + I_{a_{10}} Z_{c_{10}}, \\ \Delta U_d &= I_{a_{01}} Z_{d_{01}} + I_{a_{00}} Z_{d_{00}} + I_{a_{11}} Z_{d_{11}} + I_{a_{10}} Z_{d_{10}} \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

lub w postaci równania macierzowego:

$$\begin{bmatrix} \Delta U_a \\ \Delta U_b \\ \Delta U_c \\ \Delta U_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{a_{01}}, & Z_{a_{00}}, & Z_{a_{11}}, & Z_{a_{10}} \\ Z_{b_{01}}, & Z_{b_{00}}, & Z_{b_{11}}, & Z_{b_{10}} \\ Z_{c_{01}}, & Z_{c_{00}}, & Z_{c_{11}}, & Z_{c_{10}} \\ Z_{d_{01}}, & Z_{d_{00}}, & Z_{d_{11}}, & Z_{d_{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{a_{01}} \\ I_{a_{00}} \\ I_{a_{11}} \\ I_{a_{10}} \end{bmatrix}. \tag{58a}$$

Rozkładając straty napięcia $\Delta U_a, \ldots \Delta U_d$ na ich składowe symetryczne grupowe wg równań (49) i uwzględniając zależności (58) otrzymuje się następujące zależności na składowe grupowe strat napięcia w linii CPZ, przyporządkowane fazie podstawowej „a":

$$\left.\begin{aligned} \Delta U_{a_{01}} &= I_{a_{01}} Z_{01_{01}} + I_{a_{00}} Z_{01_{00}} + I_{a_{11}} Z_{01_{11}} + I_{a_{10}} Z_{01_{10}}, \\ \Delta U_{a_{00}} &= I_{a_{01}} Z_{00_{01}} + I_{a_{00}} Z_{00_{00}} + I_{a_{11}} Z_{00_{11}} + I_{a_{10}} Z_{00_{10}}, \\ \Delta U_{a_{11}} &= I_{a_{01}} Z_{11_{01}} + I_{a_{00}} Z_{11_{00}} + I_{a_{11}} Z_{11_{11}} + I_{a_{10}} Z_{11_{10}}, \\ \Delta U_{a_{10}} &= I_{a_{01}} Z_{10_{01}} + I_{a_{00}} Z_{10_{00}} + I_{a_{11}} Z_{10_{11}} + I_{a_{10}} Z_{10_{10}} \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

lub

$$\begin{bmatrix} \Delta U_{a_{01}} \\ \Delta U_{a_{00}} \\ \Delta U_{a_{11}} \\ \Delta U_{a_{10}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{01_{01}}, & Z_{01_{00}}, & Z_{01_{11}}, & Z_{01_{10}} \\ Z_{00_{01}}, & Z_{00_{00}}, & Z_{00_{11}}, & Z_{00_{10}} \\ Z_{11_{01}}, & Z_{11_{00}}, & Z_{11_{11}}, & Z_{11_{10}} \\ Z_{10_{01}}, & Z_{10_{00}}, & Z_{10_{11}}, & Z_{10_{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{a_{01}} \\ I_{a_{00}} \\ I_{a_{11}} \\ I_{a_{10}} \end{bmatrix}. \tag{59a}$$

Oporność $Z_{01_{01}}$ nazwiemy (przez analogię z odpowiednią nazwą oporności w teorii składowych symetrycznych trójfazowych) opornością dla składowej symetrycznej grupowej kolejności 01 napięcia i składowej symetrycznej grupowej ko-

lejności 01 prądu, lub w skrócie — opornością dla składowych symetrycznych grupowych napięcia i prądu kolejności 01;

Oporność $Z_{01_{00}}$ jak wyżej, lecz dla składowych symetrycznych grupowych kolejności 01 napięcia i kolejności 00 prądu.

Opierając się na podanych przykładowo określeniach można wprowadzić odpowiednie nazwy dla pozostałych oporności we wzorach (59).

Wymienione wyżej oporności wyrażają się następującymi wzorami (po uwzględnieniu $a_1 = -1$):

$$\left.\begin{aligned} Z_{01_{01}} &= \frac{1}{4}(Z_{a_{01}} + Z_{b_{01}} - Z_{c_{01}} - Z_{d_{01}}),\\ Z_{01_{00}} &= \frac{1}{4}(Z_{a_{00}} + Z_{b_{00}} - Z_{c_{00}} - Z_{d_{00}}),\\ Z_{01_{11}} &= \frac{1}{4}(Z_{a_{11}} + Z_{b_{11}} - Z_{c_{11}} - Z_{d_{11}}),\\ Z_{01_{10}} &= \frac{1}{4}(Z_{a_{10}} + Z_{b_{10}} - Z_{c_{10}} - Z_{d_{10}}); \end{aligned}\right\} \tag{60a}$$

$$\left.\begin{aligned} Z_{00_{01}} &= \frac{1}{4}(Z_{a_{01}} + Z_{b_{01}} + Z_{c_{01}} + Z_{d_{01}}),\\ Z_{00_{00}} &= \frac{1}{4}(Z_{a_{00}} + Z_{b_{00}} + Z_{c_{00}} + Z_{d_{00}}),\\ Z_{00_{11}} &= \frac{1}{4}(Z_{a_{11}} + Z_{b_{11}} + Z_{c_{11}} + Z_{d_{11}}),\\ Z_{00_{10}} &= \frac{1}{4}(Z_{a_{10}} + Z_{b_{10}} + Z_{c_{10}} + Z_{d_{10}}); \end{aligned}\right\} \tag{60b}$$

$$\left.\begin{aligned} Z_{11_{01}} &= \frac{1}{4}(Z_{a_{01}} - Z_{b_{01}} - Z_{c_{01}} + Z_{d_{01}}),\\ Z_{11_{00}} &= \frac{1}{4}(Z_{a_{00}} - Z_{b_{00}} - Z_{c_{00}} + Z_{d_{00}}),\\ Z_{11_{11}} &= \frac{1}{4}(Z_{a_{11}} - Z_{b_{11}} - Z_{c_{11}} + Z_{d_{11}}),\\ Z_{11_{10}} &= \frac{1}{4}(Z_{a_{10}} - Z_{b_{10}} - Z_{c_{10}} + Z_{d_{10}}); \end{aligned}\right\} \tag{60c}$$

$$\left.\begin{aligned} Z_{10_{01}} &= \frac{1}{4}(Z_{a_{01}} - Z_{b_{01}} + Z_{c_{01}} - Z_{d_{01}}), \\ Z_{10_{00}} &= \frac{1}{4}(Z_{a_{00}} - Z_{b_{00}} + Z_{c_{00}} - Z_{d_{00}}), \\ Z_{10_{11}} &= \frac{1}{4}(Z_{a_{11}} - Z_{b_{11}} + Z_{c_{11}} - Z_{d_{11}}), \\ Z_{10_{10}} &= \frac{1}{4}(Z_{a_{10}} - Z_{b_{10}} + Z_{c_{10}} - Z_{d_{10}}). \end{aligned}\right\} \tag{60d}$$

Oznaczając przez

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_{a_{01}}, & Z_{b_{01}}, & Z_{c_{01}}, & Z_{d_{01}} \\ Z_{a_{00}}, & Z_{b_{00}}, & Z_{c_{00}}, & Z_{d_{00}} \\ Z_{a_{11}}, & Z_{b_{11}}, & Z_{c_{11}}, & Z_{d_{11}} \\ Z_{a_{10}}, & Z_{b_{10}}, & Z_{c_{10}}, & Z_{d_{10}} \end{bmatrix}$$

oporności dla składowych symetrycznych grupowych napięcia i prądu możemy napisać również w postaci:

$$\begin{bmatrix} Z_{01_{01}} \\ Z_{01_{00}} \\ Z_{01_{11}} \\ Z_{01_{10}} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\mathbf{Z}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} Z_{00_{01}} \\ Z_{00_{00}} \\ Z_{00_{11}} \\ Z_{00_{10}} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\mathbf{Z}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} Z_{11_{01}} \\ Z_{11_{00}} \\ Z_{11_{11}} \\ Z_{11_{10}} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\mathbf{Z}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} Z_{10_{01}} \\ Z_{10_{00}} \\ Z_{10_{11}} \\ Z_{10_{10}} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\mathbf{Z}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Jak z powyższych rozważań i związków wynika, istnieje pewna analogia między równaniami dla składowych symetrycznych grupowych w odniesieniu do faz linii typu CPZ a równaniami dla składowych symetrycznych trójfazowych. Zasady teorii składowych symetrycznych trójfazowych stosuje się powszechnie do obliczeń sieci elektroenergetycznych trójfazowych dzięki uproszczeniom obliczeniowym, jakie te zasady dają; jednak uproszczenia te wynikają z założenia symetrycznych oporności własnych i wzajemnych każdego elementu sieci, w przeciwnym bowiem razie obliczenia metodą składowych symetrycznych są bardzo skomplikowane i mało przydatne dla praktyki.

Podobnie przedstawia się zagadnienie zastosowania teorii składowych grupowych do obliczeń linii i sieci typu CPZ. Gdyby oporności własne

i wzajemne pętli ziemnopowrotnych w linii CPZ były niesymetryczne, celowość stosowania zasad teorii składowych grupowych do obliczeń linii i sieci tego typu byłaby problematyczna.

Jeżeli założymy, że linia typu CPZ jest symetryczna dla składowych grupowych, wówczas obliczanie linii tą metodą znacznie się upraszcza i może znaleźć szerokie zastosowanie w praktyce.

Przy tym założeniu, tzn. przy spełnieniu zależności:

$$Z_{aa_g} = Z_{bb_g} = Z_{cc_g} = Z_{dd_g} = Z_s$$

i

$$Z_{ab_g} = Z_{ac_g} = Z_{ad_g} = Z_{bc_g} = Z_{bd_g} = Z_{cd_g} = Z_m$$

otrzymuje się:

$$\left.\begin{aligned} Z_{a_{01}} = Z_{a_{11}} = Z_{a_{10}} = Z_{b_{01}} = Z_{c_{10}} = Z_{d_{11}} = Z_s - Z_m = Z_l\,, \\ Z_{b_{11}} = Z_{b_{10}} = Z_{c_{01}} = Z_{c_{11}} = Z_{d_{01}} = Z_{d_{10}} = -(Z_s - Z_m) = -Z_l \end{aligned}\right\} \quad (61)$$

oraz

$$Z_{a_{00}} = Z_{b_{00}} = Z_{c_{00}} = Z_{d_{00}} = Z_s + 3Z_m\,,$$

jak również:

$$\left.\begin{aligned} Z_{01_{c0}} = Z_{01_{11}} = Z_{01_{10}} = Z_{00_{01}} = Z_{00_{11}} = Z_{00_{10}} = Z_{11_{01}} = Z_{11_{00}} = Z_{11_{10}} = \\ = Z_{10_{01}} = Z_{10_{00}} = Z_{10_{11}} = 0\,, \\ Z_{01_{01}} = Z_{11_{11}} = Z_{10_{10}} = Z_s - Z_m = Z_l \end{aligned}\right\} \quad (62)$$

oraz

$$Z_{00_{00}} = Z_s + 3Z_m\,.$$

Wobec powyższego równania (59) uproszczą się do następujących:

$$\left.\begin{aligned} \Delta U_{a_{01}} = I_{a_{01}} Z_{01_{01}} = I_{a_{01}}(Z_s - Z_m) = I_{a_{01}} Z_l\,, \\ \Delta U_{a_{00}} = I_{a_{00}} Z_{00_{00}} = I_{a_{00}}(Z_s + 3Z_m)\,, \\ \Delta U_{a_{11}} = I_{a_{11}} Z_{11_{11}} = I_{a_{11}}(Z_s - Z_m) = I_{a_{11}} Z_l\,, \\ \Delta U_{a_{10}} = I_{a_{10}} Z_{10_{10}} = I_{a_{10}}(Z_s - Z_m) = I_{a_{10}} Z_l\,. \end{aligned}\right\} \quad (63)$$

Sposób obliczenia oporności własnej pętli ziemnopowrotnej $Z_s$, wzajemnej $Z_m$ oraz oporności roboczej linii CPZ $Z_l$ został podany w rozdz. 2.

Oporności dla składowych grupowych poszczególnych kolejności napięcia i prądu we wzorach (63) możemy oznaczyć następująco:

$$Z_{01_{01}} = Z_{01}\,,$$
$$Z_{00_{00}} = Z_{00}\,,$$
$$Z_{11_{11}} = Z_{11}\,,$$
$$Z_{10_{10}} = Z_{10}\,,$$

przy czym:

$$Z_{01} = Z_{11} = Z_{10} = Z_l = \left(R_o + j\,0{,}145 \lg \frac{b_{sr}}{r_e}\right) l\,,$$

zaś

$$Z_{00} = Z_s + 3\,Z_m = 4\,R_u + \left(R_o + 4\,R_{go} + j\,0{,}145 \lg \frac{D_g}{r_e b^3{}_{sr}}\right) l\,. \qquad (64)$$

Przekształcając drugą zależność we wzorach (64) otrzymuje się:

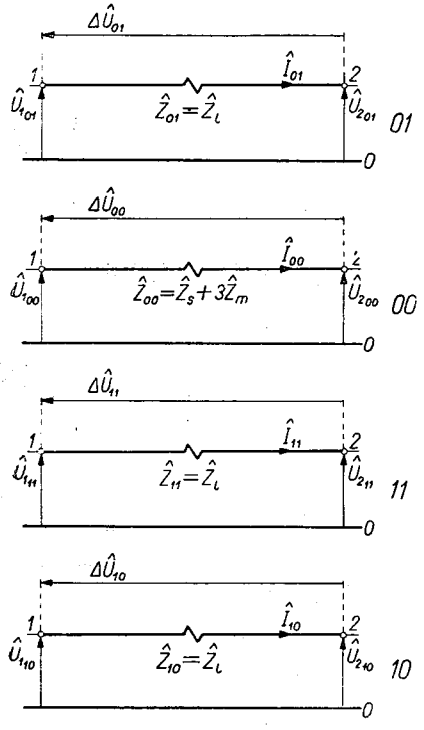
$$Z_{00} = 4\left[R_u + \left(\frac{1}{4} R_o + R_{go} + j\,0{,}145 \lg \frac{D_g}{\sqrt[4]{r_e b^3{}_{sr}}}\right) l\right]. \qquad (64a)$$

W przypadku zastosowania na przewody linii CPZ linek stalowych oporności podane we wzorach (64) oblicza się następująco:

$$Z_{01} = Z_{11} = Z_{10} = R_u + \left[R_o + j\left(0{,}145 \lg \frac{b_{sr}}{r} + X_{wo}\right)\right] l\,,$$

$$Z_{00} = 4\left\{R_u + \left[\frac{1}{4} R_o + R_{go} + j\left(0{,}145 \lg \frac{D_g}{\sqrt[4]{r\, b^3{}_{sr}}} + \frac{1}{4} X_{wo}\right)\right] l\right\}, \qquad (65)$$

gdzie: $r$ i $X_{wo}$ jak we wzorach (32a).




Rys. 15. Schematy zastępcze linii typu CPZ dla składowych symetrycznych grupowych

Średni odstęp międzyprzewodowy ($b_{śr}$) we wzorach na oporności linii typu CPZ dla składowych grupowych można obliczać w praktyce ze wzoru (31). Należy tu jednak podkreślić, że zalecane (przez autora) obliczenie $b_{śr}$ wg wzoru (31) jest przybliżone. Aby bowiem były spełnione równania $Z_{01} = Z_{11} = Z_{10} = Z_l$, linia typu CPZ musiałaby być przepleciona w ten sposób, że każdy cykl przeplecenia należałoby podzielić na 6 sekcji, niezależnie od układu przewodów. Zagadnienie przepleceń i analizy linii przeplecionej wg rys. 8 dla normalnego stanu pracy linii w układzie składowych symetrycznych grupowych będzie tematem oddzielnej pracy.

Ze wzorów (63) wynikają schematy zastępcze linii CPZ dla poszczególnych składowych symetrycznych grupowych napięć i prądów w odniesieniu do fazy podstawowej $a$. Oczywiście analogiczne schematy obowiązują dla składowych grupowych pozostałych faz linii CPZ. Schematy te podano na rys. 15.

W odniesieniu do składowych symetrycznych grupowych prądów przyporządkowanych odpowiednim fazom spełniane są następujące zależności, podobnie jak dla napięć (wzory 55):

$$\left.\begin{array}{llll} I_{a01}=I_{a01}, & I_{a00}=I_{a00}, & I_{a11}=I_{a11}, & I_{a10}=I_{a10}, \\ I_{b01}=I_{a01}, & I_{b00}=I_{a00}, & I_{b11}=-I_{a11}, & I_{b10}=-I_{a10}, \\ I_{c01}=-I_{a01}, & I_{c00}=I_{a00}, & I_{c11}=-I_{a11}, & I_{c10}=I_{a10}, \\ I_{d01}=-I_{a01}, & I_{d00}=I_{a00}, & I_{d11}=I_{a11}, & I_{d10}=-I_{a10}. \end{array}\right\} \qquad (66)$$

Na rysunku 16 podany jest rozpływ poszczególnych składowych grupowych prądów przynależnych do odpowiednich faz linii CPZ. Rozpływ ten w linii CPZ nie zależy od układu połączeń transformatorów na początku i końcu linii. W podanym na rys. 16 układzie przesyłowym CPZ transformatory na początku linii są połączone od strony linii w trójkąt, a na końcu linii od strony linii — w gwiazdę. Na rys. 16 zaznaczono również składowe grupowe napięć fazowych linii.

Sprawdźmy w oparciu o rys. 16 prawidłowość wzorów ogólnych (64) na oporności linii typu CPZ dla poszczególnych składowych symetrycznych grupowych napięcia i prądu. Załóżmy, że linia jest symetryczna magnetycznie.

Dla poszczególnych składowych grupowych strat napięcia w pętli „przewód $a$ — ziemia" możemy napisać następujące zależności: dla składowej grupowej kolejności 01 (rys. 16a):

$$\Delta U_{a01}=I_{a01}Z_s+I_{b01}Z_m-I_{c01}Z_m-I_{d01}Z_m=I_{a01}(Z_s-Z_m), \qquad (67)$$

dla składowej grupowej kolejności 00 (rys. 16b):

$$\Delta U_{a00}=I_{a00}Z_s+I_{b00}Z_m+I_{c00}Z_m+I_{d00}Z_m=I_{a00}(Z_s+3Z_m), \qquad (67b)$$

dla składowej grupowej kolejności 11 (rys. 16c):

$$\Delta U_{a11}=I_{a11}Z_s-I_{b11}Z_m-I_{c11}Z_m+I_{d11}Z_m=I_{a11}(Z_s-Z_m), \qquad (67c)$$

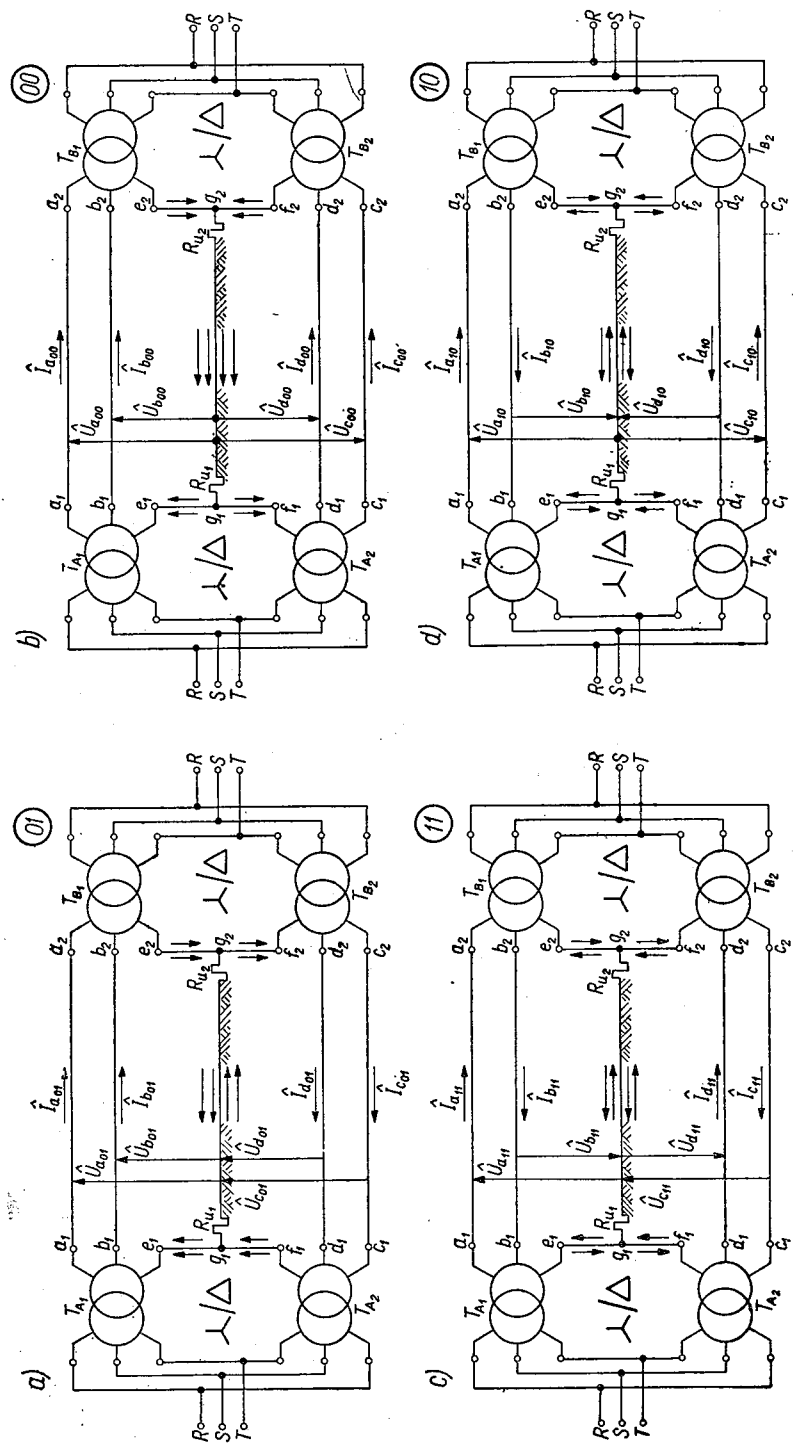
dla składowej grupowej kolejności 10 (rys. 16d):

$$\Delta U_{a10}=I_{a10}Z_s-I_{b10}Z_m+I_{c10}Z_m-I_{d10}Z_m=I_{a10}(Z_s-Z_m). \qquad (67d)$$

Jak widać, końcowe wzory (67) są takie same jak wzory (63), co potwierdza słuszność wzorów (64) na oporności odpowiednich składowych symetrycznych grupowych napięcia i prądu.

Z powyższego wynika również, że oporności linii typu CPZ dla poszczególnych składowych symetrycznych grupowych napięcia i prądu można obliczać opierając się na schematach rozpływu poszczególnych składowych grupowych prądów w poszczególnych fazach linii CPZ.

Należy tu również dodać, że schematy na rys. 16 mogą być także podstawą do obliczania oporności zastępczych transformatorów dla składo-

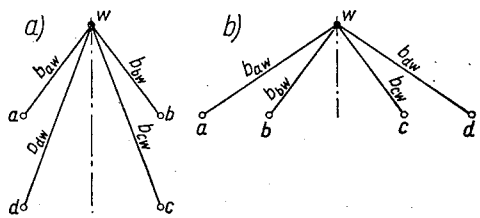


Rys. 16. Rozpływ prądów i napięcia poszczególnych składowych symetrycznych grupowych w linii typu CPZ
a) dla składowej kolejności 01; b) dla składowej kolejności 00; c) dla składowej kolejności 11;
d) dla składowej kolejności 10

wych symetrycznych grupowych napięcia i prądu. Podanie metod obliczeń wymienionych oporności transformatorów nie mieści się w zakresie tej pracy.

## 6. WPŁYW PRZEWODÓW ODGROMOWYCH NA OPORNOŚCI LINII TYPU CPZ

W praktyce elektroenergetyczne linie napowietrzne mogą być chronione od bezpośrednich wyładowań atmosferycznych za pomocą jednego lub dwu przewodów odgromowych, którymi są na ogół linki stalowe. Założymy na wstępnie, że przewody odgromowe uziemione są na obu końcach linii oraz — co się z pierwszym założeniem wiąże — że każdy przewód odgromowy wiedzie na całej swej długości jednakowy prąd. W rzeczywistości prze-




Rys. 17. Układy przewodów linii typu CPZ z przewodem odgromowym
a) układ kwadratowy; b) układ płaski

wody odgromowe mogą być uziemione na każdym słupie linii, a prąd płynący przez nie jest największy w pobliżu miejsca zwarcia doziemnego i dopiero w odległości kilkunastu przęseł od miejsca zwarcia staje się wzdłuż linii prawie jednakowy. Założenia tu poczynione mają na celu uproszczenie obliczeń i podanie zasadniczych zależności na oporności linii CPZ dla odpowiednich składowych symetrycznych grupowych napięcia prądu. W praktyce obliczeń sieci normalnych często korzysta się z tych założeń, aczkolwiek, co należy podkreślić, podane są w literaturze metody obliczania rozpływu prądów w przewodach odgromowych z uwzględnieniem wpływu sposobu i oporności uziemień konstrukcji wsporczych linii.

Rozpatrzmy linię typu CPZ z jednym przewodem odgromowym, umieszczonym symetrycznie względem skrajnych przewodów linii, tzn. na osi słupów (rys. 17).

Ogólnie biorąc prądy płynące w przewodach linii indukują w pętli „przewód odgromowy — ziemia" siłę elektromotoryczną, która jest źródłem prądu $I_w$ w tej pętli. Prąd ten z kolei wywołuje dodatkowe straty napięcia w poszczególnych pętlach ziemnopowrotnych, utworzonych przez przewody robocze linii i ziemię.

Załóżmy, że linia CPZ jest odpowiednio przepleciona lub posiada przewody w układzie kwadratowym o następstwie faz *a*, *b*, *c* i *d* (rys. 17a). Załóżmy jeszcze, że kierunek prądu $I_w$ w przewodzie odgromowym jest zgodny z kierunkiem przepływu energii w linii.

Możemy napisać następujące zależności na poszczególne składowe symetryczne grupowe strat napęcia w pętli „przewód *a* — ziemia":

$$\begin{aligned}
\Delta U_{a_{01}} &= I_{a_{01}}(Z_s - Z_m) + I_w Z_{m_{w_{01}}},\\
\Delta U_{a_{00}} &= I_{a_{00}}(Z_s + 3Z_m) + I_w Z_{m_{w_{00}}},\\
\Delta U_{a_{11}} &= I_{a_{11}}(Z_s - Z_m) + I_w Z_{m_{w_{11}}},\\
\Delta U_{a_{10}} &= I_{a_{10}}(Z_s - Z_m) + I_w Z_{m_{w_{10}}},
\end{aligned} \tag{68}$$

gdzie m. in.:

$I_w$ — prąd płynący w przewodzie odgromowym,

$Z_{m_{w_{01}}}$ — oporność „wzajemna" między przewodem odgromowym i linią typu CPZ dla składowej grupowej kolejności 01 starat napięcia w linii CPZ,

$Z_{m_{w_{00}}}$ — jak wyżej, lecz dla składowej kolejności 00,

$Z_{m_{w_{11}}}$ — jak wyżej, lecz dla składowej kolejności 11,

$Z_{m_{w_{10}}}$ — jak wyżej, lecz dla składowej kolejności 10,

Równania (68) powstały w wyniku rozkładu strat napięcia w poszczególnych pętlach ziemnopowrotnych na ich składowe symetryczne grupowe. Wyżej określone oporności „wzajemne" spełniają następujące związki:

$$\left.\begin{aligned}
Z_{m_{w_{01}}} &= \frac{1}{4}(Z_{aw_g} + Z_{bw_g} - Z_{cw_g} - Z_{dw_g}),\\
Z_{m_{w_{00}}} &= \frac{1}{4}(Z_{aw_g} + Z_{bw_g} + Z_{cw_g} + Z_{dw_g}),\\
Z_{m_{w_{11}}} &= \frac{1}{4}(Z_{aw_g} - Z_{bw_g} - Z_{cw_g} + Z_{dw_g}),\\
Z_{m_{w_{10}}} &= \frac{1}{4}(Z_{aw_g} - Z_{bw_g} + Z_{cw_g} - Z_{dw_g}),
\end{aligned}\right\} \tag{69}$$

lub — w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} Z_{m_{w_{10}}} \\ Z_{m_{w_{00}}} \\ Z_{m_{w_{11}}} \\ Z_{m_{w_{10}}} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\mathbf{S}_2 \begin{bmatrix} Z_{aw_g} \\ Z_{bw_g} \\ Z_{cw_g} \\ Z_{dw_g} \end{bmatrix} \tag{69a}$$

We wzorach (69) i (69a) oznaczają:

$Z_{aw_g}$ — oporność wzajemna między pętlami „przewód odgromowy — ziemia" i „przewód $a$ — ziemia",

$Z_{bw_g}$, $Z_{cw_g}$, $Z_{dw_g}$ — jak wyżej, lecz między pętlami „przewód odgromowy — ziemia" i pętlami odpowiednio przewód $b$ — ziemią, przewód $c$ — ziemia i przewód $d$ — ziemia,

$\mathbf{S}_2$ — macierz określona w rozdz. 3 ($\mathbf{S}_2 = 4\mathbf{S}_1$, gdzie $\mathbf{S}_1$ — macierz operatorowa składowych symetrycznych grupowych).

Prąd w przewodzie odgromowym $I_w$ indukowany pod wpływem prądów fazowych w przewodach roboczych linii można rozłożyć na prądy wywołane przepływem w fazach linii składowych grupowych prądów poszczególnych kolejności, tzn.

$$I_w = I_{w(01)}' + I_{w(00)}' + I_{w(11)}' + I_{w(10)}', \tag{70}$$

gdzie:

$I_{w(01)}'$ — prąd w przewodzie odgromowym wywołany przepływem w fazach linii składowych grupowych prądów kolejności 01,

$I_{w(00)}'$ — jak wyżej, lecz kolejności 00,

$I_{w(11)}'$ — jak wyżej, lecz kolejności 11,

$I_{w(10)}'$ — jak wyżej, lecz kolejności 10.

Oznaczmy przez $Z_{ww_g} = Z_{s_w}$ — oporność własną pętli „przewód odgromowy — ziemia" (przewód $w$ — ziemia). Opierając się o rys. 16 poszczególne składowe prądu $I_w$ możemy wyznaczyć z następujących ogólnych zależności:

$$\left.\begin{aligned}
&I_{w(01)}' Z_{s_w} + I_{a01} Z_{aw_g} + I_{b01} Z_{bw_g} + I_{c01} Z_{cw_g} + I_{d01} Z_{dw_g} = 0,\\
&I_{w(00)}' Z_{s_w} + I_{a00} Z_{aw_g} + I_{b00} Z_{bw_g} + I_{c00} Z_{cw_g} + I_{d00} Z_{dw_g} = 0,\\
&I_{w(11)}' Z_{s_w} + I_{a11} Z_{aw_g} + I_{b11} Z_{bw_g} + I_{c11} Z_{cw_g} + I_{d11} Z_{dw_g} = 0,\\
&I_{w(10)}' Z_{s_w} + I_{a10} Z_{aw_g} + I_{b10} Z_{bw_g} + I_{c10} Z_{cw_g} + I_{d10} Z_{dw_g} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{71}$$

Uwzględniając zależności podstawowe dla składowych symetrycznych grupowych prądów (64) otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned}
&I_{w(01)}' Z_{s_w} + I_{a01}(Z_{aw_g} + Z_{bw_g} - Z_{cw_g} - Z_{dw_g}) = 0,\\
&I_{w(00)}' Z_{s_w} + I_{a00}(Z_{aw_g} + Z_{bw_g} + Z_{cw_g} + Z_{dw_g}) = 0,\\
&I_{w(11)}' Z_{s_w} + I_{a11}(Z_{aw_g} - Z_{bw_g} - Z_{cw_g} + Z_{dw_g}) = 0,\\
&I_{w(10)}' Z_{s_w} + I_{a10}(Z_{aw_g} - Z_{bw_g} + Z_{cw_g} + Z_{dw_g}) = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{72}$$

Oczywiście zachodzą związki: $Z_{aw_g} = Z_{wa_g}$, $Z_{bw_g} = Z_{wb_g}$, $Z_{cw_g} = Z_{wc_g}$, $Z_{dw_g} = Z_{wd_g}$.

Zatem:

$$\left.\begin{aligned} I_{w(01)}' Z_{s_w} + I_{a01} Z_{m_{w01}} &= 0, \\ I_{w(00)}' Z_{s_w} + I_{a00} Z_{m_{w00}} &= 0, \\ I_{w(11)}' Z_{s_w} + I_{a11} Z_{m_{w11}} &= 0, \\ I_{w(10)}' Z_{s_w} + I_{a10} Z_{m_{w10}} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{72a}$$

Rozpatrzmy możliwe przypadki symetrii linii typu CPZ; pierwszy — gdy linia posiada kwadratowy układ przewodów, drugi — gdy symetrię linii uzyskano przez odpowiednie przeplecenie.

Układ kwadratowy

Możemy tu wyróżnić dwa przypadki: a) poziomy układ przewodów każdej części linii (rysunki 7a i 17a), oraz b) pionowy układ przewodów każdej części linii (rys. 7b).

W przypadku a) spełniane są następujące oczywiste związki (rys. 17a):

$$Z_{aw_g} = Z_{bw_g} \quad \text{i} \quad Z_{cw_g} = Z_{dw_g},$$

zaś w przypadku b):

$$Z_{aw_g} = Z_{dw_g} \quad \text{i} \quad Z_{bw_g} = Z_{cw_g}$$

lub — przy zmianie przewodów $c$ i $d$:

$$Z_{aw_g} = Z_{cw_g} \quad \text{i} \quad Z_{bw_g} = Z_{dw_g}.$$

Podstawiając ww. związki do wzorów (69) otrzymamy:

w przypadku a):

$$\left.\begin{aligned} Z_{m_{w01}} &\neq 0 \quad \text{i} \quad I_{w_{(01)}}' \neq 0, \\ Z_{m_{w00}} &\neq 0 \quad \text{i} \quad I_{w_{(00)}}' \neq 0, \\ Z_{m_{w11}} &= 0 \quad \text{i} \quad I_{w_{(11)}}' = 0, \\ Z_{m_{w10}} &= 0 \quad \text{i} \quad I_{w_{(10)}}' = 0, \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

w przypadku b):

$$\left.\begin{aligned} Z_{m_{w01}} &= 0 \quad \text{i} \quad I_{w_{(01)}}' = 0, \\ Z_{m_{w00}} &\neq 0 \quad \text{i} \quad I_{w_{(00)}}' \neq 0, \\ Z_{m_{w11}} &\neq 0 \quad \text{i} \quad I_{w_{(11)}}' \neq 0, \\ Z_{m_{w10}} &= 0 \quad \text{i} \quad I_{w_{(10)}}' = 0, \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

W przypadku b) przy zamianie przewodów c i d otrzymuje się:

$$\left.\begin{aligned} Z_{m_{w01}} &= 0 \quad \text{i} \quad I_{w_{(01)}'} = 0, \\ Z_{m_{w00}} &\neq 0 \quad \text{i} \quad I_{w_{(00)}'} = 0, \\ Z_{m_{w11}} &= 0 \quad \text{i} \quad I_{w_{(11)}'} = 0, \\ Z_{m_{w10}} &\neq 0 \quad \text{i} \quad I_{w_{(10)}'} \neq 0, \end{aligned}\right\} \tag{74a}$$

Z zależności (73), (74) i (74a) wynika, że prąd $I_w$ w przewodzie odgromowym przy kwadratowym układzie przewodów linii CPZ jest indukowany przez składowe symetryczne grupowe prądów dwóch kolejności, przy czym w każdym przypadku przez składowe kolejności 00. W konsekwencji przewód odgromowy ma wpływ przede wszystkim na składową kolejności 00 strat napięcia w linii oraz w mniejszym stopniu na jedną z pozostałych składowych strat napięcia w zależności od sposobu rozmieszczenia przewodów. Oczywiście każda składowa strat napięcia w linii CPZ zależy w tym przypadku od dwóch składowych prądów fazowych w linii.

Na podstawie tego, co powiedziano wyżej, stwierdza się, że linia typu CPZ o kwadratowym układzie przewodów roboczych z przewodem odgromowym jest linią niesymetryczną magnetycznie i oczywiście elektrycznie. W obliczeniach przybliżonych (praktycznych) można założyć niezależnie od sposobu rozmieszczenia przewodów:

$$Z_{m_{w01}} = Z_{m_{w11}} = Z_{m_{w10}} = 0.$$

W tym przypadku

$$I_{w_{(01)}'} = I_{w_{(11)}'} = I_{w_{(10)}'} = 0.$$

oraz

$$I_{w_{(00)}'} = -I_{a_{00}} \frac{Z_{aw_g} + Z_{bw_g} + Z_{cw_g} + Z_{dw_g}}{Z_{s_w}} = -I_{a_{00}} \frac{Z_{m_{w00}}}{Z_{s_w}}, \tag{75}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} Z_{m_{w00}} &= Z_{aw_g} + Z_{bw_g} + Z_{cw_g} + Z_{dw_g} = \\ &= 4R_u + \left(4R_{go} + j\,0{,}145 \lg \frac{D_g}{\sqrt[4]{b_{aw} b_{bw} b_{cw} b_{dw}}}\right) l = \\ &= 4\left[R_u + \left(R_{go} + j\,0{,}145 \lg \frac{D_g}{b_{śr_w}}\right) l\right] = 4 Z_{m_w}. \end{aligned} \tag{76}$$

We wzorach (76) oznaczają:

$R_u$ — oporność uziemień przewodu odgromowego na początku i końcu linii,

$R_{go}$, $D_g$ i $l$ — jak we wzorach np. (36),

$$b_{sr_w} = \sqrt[4]{b_{aw} b_{bw} b_{cw} b_{dw}} \tag{77}$$

— średni odstęp między przewodami fazowymi (roboczymi) i przewodem odgromowym $w$, przy czym odstępy między poszczególnymi przewodami fazowymi i przewodem odgromowym — $b_{aw}$, $b_{bw}$, $b_{cw}$ i $b_{dw}$ — jak na rys. 17.

$Z_{m_w}$ — oporność wzajemna między pętlami „przewód fazowy — ziemia" i „przewód odgromowy $w$ — ziemia",

$Z_{m_{w_{00}}}$ — oporność wzajemna między przewodami fazowymi linii CPZ i przewodem odgromowym $w$ dla składowych symetrycznych grupowych napięcia i prądu kolejności 00.

## Linia przepleciona

W przypadku gdy linia asymetryczna magnetycznie [np. rys. 17b) lub także 17a)] jest odpowiednio przepleciona, wówczas:

$$Z'_{aw_g} = Z'_{bw_g} = Z'_{cw_g} = Z'_{dw_g} = Z_{m_w},$$

gdzie

$$Z_{m_w} = \frac{1}{4}(Z_{aw_g} + Z_{bw_g} + Z_{cw_g} + Z_{dw_g}) = R_u + \left(R_{go} + j\,0{,}145 \lg \frac{D_g}{b_{sr_w}}\right) l, \tag{78}$$

przy czym oznaczenia jak we wzorach (76).

W tym przypadku są słuszne równania (75).

Na podstawie powyższego można stwierdzić ogólnie: jeżeli linia typu CPZ z jednym przewodem odgromowym jest symetryczna magnetycznie, wówczas w przewodzie odgromowym płynie prąd indukowany tylko przez prądy składowych grupowych kolejności 00.

Podstawiając zależność (76) do równań (68) i biorąc pod uwagę, że: $Z_{m_{w_{01}}} = Z_{m_{w_{11}}} = Z_{m_{w_{10}}} = 0$ otrzymuje się:

$$\left.\begin{aligned} \Delta U_{a_{01}} &= I_{a_{01}}(Z_s - Z_m) = I_{a_{01}} Z_{01}, \\ \Delta U_{a_{00}} &= I_{a_{00}}\left(Z_s + 3Z_m - \frac{4Z^2_{m_w}}{Z_{m_w}}\right) = I_{a_{00}} Z_{00_w}, \\ \Delta U_{a_{11}} &= I_{a_{11}}(Z_s - Z_m) = I_{a_{11}} Z_{11}. \\ \Delta U_{a_{10}} &= I_{a_{10}}(Z_s - Z_m) = I_{a_{10}} Z_{10}, \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Z równań (79) wynika, że przewód odgromowy ma wpływ tylko na oporność dla składowych symetrycznych grupowych prądu i napięcia kolejności 00 linii CPZ. W warunkach symetrycznego obciążenia prądowego linii CPZ przewód odgromowy nie ma wpływu na tę linię lub wpływ ten jest praktycznie pomijalny.

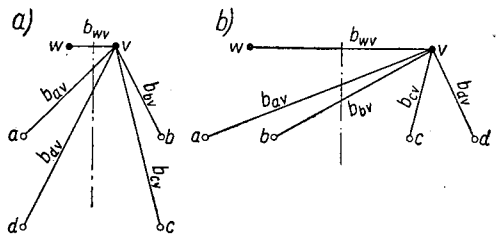
Oporność $Z_{00_w}$ we wzorach (79) nazywa się opornością linii typu CPZ z przewodem odgromowym dla składowych symetrycznych grupowych napięcia i prądu kolejności 00, przy czym:

$$Z_{00_w} = Z_s + 3Z_m - \frac{4Z_{mw}^2}{Z_{s_w}}. \tag{80}$$

Oporność własną pętli „przewód odgromowy — ziemia" $Z_{s_w}$ oblicza się analogicznie jak w przypadku pętli „przewód — ziemia", tj. ze wzoru:

$$Z_{s_w} = R_u + \left[R_{wo} + R_{go} + j\left(0{,}145 \lg \frac{D_g}{r_w} + X_{w_{wo}}\right)\right] l. \tag{81}$$

Oznaczenia we wzorze (81) są analogiczne z oznaczeniami we wzorze (32a), przy czym indeks „$w$" odnosi się do wielkości przyporządkowanych przewodowi odgromowemu — $w$.




Rys. 18. Układy przewodów linii typu CPZ z dwoma przewodami odgromowymi
a) układ kwadratowy; b) układ płaski

Rozpatrzmy następnie linię typu CPZ z dwoma przewodami odgromowymi zawieszonymi symetrycznie względem osi konstrukcji wsporczych linii (rys. 18). W tym przypadku prądy płynące w przewodach fazowych linii mogą indukować prądy w obu przewodach odgromowych, a te z kolei wywołują dodatkowe straty napięcia w przewodach fazowych. Poza tym prądy w przewodach odgromowych będą wpływać na siebie nawzajem.

Tak jak w przypadku poprzednio rozpatrywanym założymy, że linia CPZ jest symetryczna magnetycznie, przy czym symetria ta została uzyskana przez odpowiednie przeplecenie linii o dowolnym układzie przewodów.

Możemy napisać następujące równania ogólne na składowe symetryczne grupowe strat napięcia w fazie $a$ linii CPZ z dwoma przewodami odgromowymi — $w$ i $v$, wiodącymi prądy odpowiednio $I_w$ i $I_v$:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta U_{a01} &= I_{a01}(Z_s - Z_m) + I_w Z_{m_{w01}} + I_v Z_{m_{v01}},\\
\Delta U_{a00} &= I_{a00}(Z_s + 3Z_m) + I_w Z_{m_{w00}} + I_v Z_{m_{w00}},\\
\Delta U_{a11} &= I_{a11}(Z_s - Z_m) + I_w Z_{m_{w11}} + I_v Z_{m_{t11}},\\
\Delta U_{a10} &= I_{a10}(Z_s - Z_m) + I_w Z_{m_{w10}} + I_v Z_{m_{w10}},
\end{aligned}\right\} \tag{82}$$

Oporności $Z_{m_w}$ zostały określone po wzorach (68). Podobnie oporności wzajemne między pętlą „przewód $v$ — ziemia" a linią dla poszczególnych składowych symetrycznych strat napięcia w linii wyrażają się zależnościami:

$$\left.\begin{aligned}
Z_{m_{v01}} &= Z_{av_g} + Z_{bv_g} - Z_{cv_g} - Z_{dv_g},\\
Z_{m_{v00}} &= Z_{av_g} + Z_{bv_g} + Z_{cv_g} + Z_{dv_g},\\
Z_{m_{v11}} &= Z_{av_g} - Z_{bv_g} - Z_{cv_g} + Z_{dv_g},\\
Z_{m_{v10}} &= Z_{av_g} - Z_{bv_g} + Z_{cv_g} - Z_{dv_g},
\end{aligned}\right\} \tag{83}$$

gdzie:

$Z_{av_g}$ — oporność wzajemna między pętlami „przewód odgromowy $v$ — ziemia" i „przewód $a$ — ziemia",

$Z_{bv_g}$, $Z_{cv_g}$ i $Z_{dv_g}$ — jak wyżej, lecz w odniesieniu do pętli $(vg)$—$(bg)$, $(vg)$—$(cg)$ i $(vg)$—$(dg)$.

Oczywiście spełnione są zależności:

$$Z_{av_g} = Z_{va_g}, \quad Z_{bv_g} = Z_{vb_g}, \quad Z_{cv_g} = Z_{vc_g}, \quad Z_{dv_g} = Z_{vd_g}.$$

Wprowadzimy następujące nowe oznaczenia:

$Z_{wv_g} = Z_{vw_g} = Z_{wv} = Z_{vw}$ — oporność wzajemna między pętlami „przewód odgromowy $v$ — ziemia" i „przewód odgromowy $w$ — ziemia",

$I_{w(01)}$, $I_{w(00)}$, $I_{w(11)}$, $I_{w(10)}$ — prądy w przewodzie odgromowym $w$, wywołane przepływem składowych grupowych prądów odpowiedniej kolejności, płynących w przewodach fazowych oraz w przewodzie odgromowym $v$,

$I_{v(01)}$, $I_{v(00)}$, $I_{v(11)}$, $I_{v(10)}$ — prądy w przewodzie odgromowym $v$ wywołane przepływem składowych grupowych prądów odpowiedniej kolejności płynących w przewodach fazowych i w przewodzie odgromowym $w$.

Zakładamy, że przewody odgromowe są takie same i połączone ze sobą na obu końcach linii CPZ z uziemieniami o łącznej oporności $R_u$, tzn., że oporności własne pętli „przewód odgromowy — ziemia" są sobie równe, a więc $Z_{s_v} = Z_{s_w}$.

Możemy napisać następujące związki między prądami w przewodach odgromowych i przewodach fazowych linii:

$$\left.\begin{aligned} I_{w(01)} Z_{s_w} + I_{a01} Z_{m_{w_{01}}} + I_{v(01)} Z_{wv} &= 0, \\ I_{w(00)} Z_{s_w} + I_{a00} Z_{m_{w_{00}}} + I_{v(00)} Z_{wv} &= 0, \\ I_{w(11)} Z_{s_w} + I_{a11} Z_{m_{w_{11}}} + I_{v(11)} Z_{wv} &= 0, \\ I_{w(10)} Z_{s_w} + I_{a10} Z_{m_{w_{10}}} + I_{v(10)} Z_{wv} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

oraz

$$\left.\begin{aligned} I_{v(01)} Z_{s_v} + I_{a01} Z_{m_{v_{01}}} + I_{w(01)} Z_{vw} &= 0, \\ I_{v(00)} Z_{s_v} + I_{a00} Z_{m_{v_{00}}} + I_{w(00)} Z_{vw} &= 0, \\ I_{v(11)} Z_{s_v} + I_{a11} Z_{m_{v_{11}}} + I_{w(11)} Z_{vw} &= 0, \\ I_{v(10)} Z_{s_v} + I_{a10} Z_{m_{v_{10}}} + I_{w(10)} Z_{vw} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

Wobec założenia, że linia CPZ jest odpowiednio przepleciona i uwzględniając zależności w przypadku linii z jednym przewodem odgromowym, równania (84) i (85) przybiorą postać:

$$\left.\begin{aligned} I_{w(01)} Z_{s_w} + I_{v(01)} Z_{wv} &= 0, \\ I_{w(00)} Z_{s_w} + I_{a00} Z_{m_{w_{00}}} + I_{v(00)} Z_{wv} &= 0, \\ I_{w(11)} Z_{s_w} + I_{v(11)} Z_{wv} &= 0, \\ I_{w(10)} Z_{s_w} + I_{v(10)} Z_{wv} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

oraz

$$\left.\begin{aligned} I_{v(01)} Z_{s_v} + I_{w(01)} Z_{vw} &= 0, \\ I_{v(00)} Z_{s_v} + I_{a00} Z_{m_{v_{00}}} + I_{w(00)} Z_{vw} &= 0, \\ I_{v(11)} Z_{s_v} + I_{w(11)} Z_{vw} &= 0, \\ I_{v(10)} Z_{s_v} + I_{w(10)} Z_{vw} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

Z grup równań (86) i (87) wynikają bezpośrednio następujące zależności:

$$\left.\begin{aligned} I_{w(01)} = I_{v(01)} &= 0, \\ I_{w(14)} = I_{v(11)} &= 0, \\ I_{w(10)} = I_{v(10)} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{88a}$$

a zatem

$$I_w = I_{w(00)} \quad \text{i} \quad I_v = I_{v(00)}.$$

Ze względu na identyczne usytuowanie każdego przewodu odgromowego względem przewodów fazowych oporności wzajemne między przewodami fazowymi linii i każdym przewodem odgromowym będą takie same, tj. $Z_{m_{v_{00}}} = Z_{m_{w_{00}}} = 4Z_{m_w} = 4Z_{m_v}$. Wobec tego

$$I_{w(00)} = I_{v(00)} = -I_{a00} \frac{4Z_{m_w}}{Z_{s_w} + Z_{w_v}}. \tag{88b}$$

Łatwo stwierdzić, że wobec odpowiedniego przeplecenia linii są słuszne zależności:

$$Z_{m_{w_{01}}} = Z_{m_{w_{11}}} = Z_{m_{w_{10}}} = 0,$$

i

$$Z_{m_{v_{01}}} = Z_{m_{v_{11}}} = Z_{m_{v_{10}}} = 0.$$

Podstawiając powyższe związki do wzorów (82) otrzymuje się:

$$\left.\begin{aligned} \Delta U_{a_{01}} &= I_{a_{01}}(Z_s - Z_m) = I_{a_{01}} Z_{01}, \\ \Delta U_{a_{00}} &= I_{a_{00}}(Z_s + 3Z_m) - \frac{8Z_{m_w}^2}{Z_{s_w} + Z_{wv}} = I_{a_{00}} Z_{00_{wv}}, \\ \Delta U_{a_{11}} &= I_{a_{11}}(Z_s - Z_m) = I_{a_{11}} Z_{11}, \\ \Delta U_{a_{10}} &= I_{a_{10}}(Z_s - Z_m) = I_{a_{10}} Z_{10}. \end{aligned}\right\} \quad (89)$$

Z powyższych zależności wynika, że tylko prądy składowej symetrycznej grupowej kolejności 00 indukują prądy w przewodach odgromowych linii typu CPZ, a zatem przewody odgromowe mają wpływ tylko na oporność linii dla składowej grupowej napięcia i prądu kolejności 00.

W przypadku rozważanym, gdy linia CPZ nie jest odpowiednio przepleciona, równania (89) nie są spełnione. Dla praktycznych przybliżonych obliczeń, w szczególności w odniesieniu do linii średnich napięć, można wtedy pominąć wpływ asymetrii linii i założyć, że przewody odgromowe mają wpływ tylko na oporność linii CPZ dla składowej symetrycznej grupowej kolejności 00.

Jak widać ze wzorów (89), oporność linii CPZ dla składowych grupowych kolejności 00 z uwzględnieniem dwóch przewodów odgromowych wyraża się wzorem:

$$Z_{00_{wv}} = Z_s + 3Z_m - \frac{8Z_{m_w}^2}{Z_{s_w} + Z_{wv}}. \quad (90)$$

Wzór (90) obowiązuje dla linii CPZ o przewodach odgromowych umieszczonych symetrycznie w stosunku do słupów i odpowiednio w stosunku do przewodów fazowych linii (rys. 18), czego wyrazem jest równość $Z_{m_v} = Z_{m_w}$. Jeżeli ta symetria nie jest spełniona, tj. $Z_{m_v} \neq Z_{m_w}$, wówczas — jak łatwo przekonać się — $I_{v(00)} \neq I_{v(00)}$, wskutek czego wzór na oporność $Z_{00_{wv}}$ jest o wiele bardziej złożony od wzoru (90) i nie będzie tu podany, bowiem przypadek niesymetrycznego umieszczenia przewodów odgromowych w linii CPZ może zachodzić w wyjątkowych warunkach.

Oporność $Z_{wv}$ we wzorze (85) oblicza się z zależności

$$Z_{wv} = R_u + \left(R_{go} + j\,0{,}145 \lg \frac{D_g}{b_{wv}}\right) l, \quad (91)$$

Tablica 3

**Zestawienie porównawcze wzorów na oporności podłużne linii typu CPZ dla składowych symetrycznych grupowych i oporności linii trójfazowej trójprzewodowej dla składowych symetrycznych trójfazowych**

| Oporności dla składowych symetrycznych grupowych | Linia typu CPZ | | | Oporności dla składowych symetrycznych trójfazowych | Linia trójfazowa trójprzewodowa | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | bez przewodów odgromowych | jeden przewód odgromowy | dwa przewody odgromowe | | bez przewodów odgromowych | jeden przewód odgromowy | dwa przewody odgromowe |
| $Z_{01}$ | $Z_s - Z_m$ | $Z_s - Z_m$ | $Z_s - Z_m$ | $Z_1$ | $Z_s - Z_m$ | $Z_s - Z_m$ | $Z_s - Z_m$ |
| $Z_{00}$ | $Z_s + 3Z_m$ | $Z_s + 3Z_m \frac{4Z^2_{m_w}}{Z_{s_w}}$ | $Z_s + 3Z_m \frac{8Z^2_{m_w}}{Z_{s_w} + Z_{wv}}$ | $Z_0$ | $Z_s + 2Z_m$ | $Z_s + 2Z_m \frac{3Z^2_{m_w}}{Z_{s_w}}$ | $Z_s + 2Z_m \frac{6Z^2_{m_w}}{Z_{s_w} + Z_{wv}}$ |
| $Z_{11}$ | $Z_s - Z_m$ | $Z_s - Z_m$ | $Z_s - Z_m$ | $Z_3$ | $Z_s - Z_m$ | $Z_s - Z_m$ | $Z_s - Z_m$ |
| $Z_{10}$ | $Z_s - Z_m$ | $Z_s - Z_m$ | $Z_s - Z_m$ | — | — | — | — |

$$Z_s = \left( R_o + R_{go} + j\,0{,}145 \lg \frac{D_g}{r_e} \right) l$$

$$Z_m = \left( R_{go} + j\,0{,}145 \lg \frac{D_g}{b_{śr}} \right) l; \qquad b_{śr} = \sqrt[4]{(b_{ac}\, b_{bd})^2 \frac{b_{ab}\, b_{cd}}{b_{bc}\, b_{ad}}}$$

$$Z_{s_w} = \left( R_{o_w} + R_{go} + j\,0{,}145 \lg \frac{D_g}{r_{e_w}} \right) l$$

$$Z_{m_w} = \left( R_{go} + j\,0{,}145 \lg \frac{D_g}{b_{śr_w}} \right) l; \qquad b_{śr_w} = \sqrt[4]{b_{aw}\, b_{bw}\, b_{cw}\, b_{dw}}$$

$$Z_{wv} = \left( R_{go} + j\,0{,}145 \lg \frac{D_g}{b_{wv}} \right) l$$

$$Z_s = \left( R_o + R_{go} + j\,0{,}145 \lg \frac{D_g}{r_e} \right) l$$

$$Z_m = \left( R_{go} + j\,0{,}145 \lg \frac{D_g}{b_{śr}} \right) l; \qquad b_{śr} = \sqrt[3]{b_{ab}\, b_{ac}\, b_{bc}}$$

$$Z_{s_w} = \left( R_{o_w} + R_{go} + j\,0{,}145 \lg \frac{D_g}{r_{e_w}} \right) l$$

$$Z_{m_w} = \left( R_{go} + j\,0{,}145 \lg \frac{D_g}{b_{śr_w}} \right) l; \qquad b_{śr_w} = \sqrt[3]{b_{aw}\, b_{bw}\, b_{cw}}$$

$$Z_{wv} = \left( R_{go} + j\,0{,}145 \lg \frac{D_g}{b_{wv}} \right) l$$

gdzie $b_{ww}$ — odstęp między przewodami odgromowymi jak na rys. 17, a pozostałe oznaczenia jak w tekście.

Suma składowych grupowych prądów kolejności 01 płynących w przewodach fazowych linii CPZ jest równa zeru. To samo dotyczy składowych grupowych prądów kolejności 11 i 10. Przy pracy normalnej, przy założeniu, że układy prądów w obu częściach linii CPZ są układami symetrycznymi, suma prądów w przewodach faz *a*, *b*, *c* i *d* linii jest też równa zeru. Stąd wynika, że przewody odgromowe wpływają na oporności robocze linii CPZ, podobnie jak wpływają na oporności linii dla składowych grupowych kolejności 01, 11 i 10. Zatem wpływ przewodów odgromowych na oporności robocze linii CPZ nie występuje wcale, jeżeli linia jest odpowiednio przepleciona, lub jest pomijalnie mały, bądź też nie występuje wcale w przypadku linii nieprzeplecionej.

Na podstawie wzorów na oporności zastępcze linii typu CPZ dla poszczególnych składowych symetrycznych grupowych napięcia i prądu można stwierdzić, że istnieje pewna analogia między tymi wzorami i wzorami na zastępcze oporności linii normalnych, tj. trójfazowych, trójprzewodowych dla składowych symetrycznych trójfazowych napięcia i prądu. W tablicy 3 podano zestawienie ww. oporności dla linii CPZ i linii normalnej przy założeniu, że oporność uziemień roboczych w linii CPZ — $R_u = 0$.

## 5. ZAKOŃCZENIE

Podane w pracy metody obliczeń zastępczych oporności roboczych podłużnych linii typu CPZ, ogólne podstawy teorii składowych symetrycznych grupowych oraz zasady obliczeń oporności linii dla składowych symetrycznych grupowych napięcia i prądu są podstawą obliczeń elektrycznych układu przesyłowego typu CPZ we wszystkich warunkach jego pracy, jak również sieci elektroenergetycznych w ogóle, w których występują linie typu CPZ.

Teoria składowych symetrycznych grupowych ma szczególnie cenne zastosowanie do obliczania linii CPZ i sieci zawierających linie tego typu w stanach awaryjnych, tj. przy zwarciach i przerwach w przewodach.

Analiza tych stanów przy pomocy składowych symetrycznych grupowych wymaga opanowania metod obliczeń zastępczych oporności wszystkich elementów sieci dla tych składowych, a więc transformatorów pracujących w układzie CPZ i w części sieci normalnej (trójfazowej trójprzewodowej), linii normalnych, dławików, generatorów i ewentualnie kondensatorów szeregowych i silników elektrycznych. Te zagadnienia oraz me-

tody obliczeń linii typu CPZ i sieci, w których te linie pracują, będą tematami oddzielnych publikacji.

*Składam na tym miejscu serdeczne podziękowanie oraz wyrażam wdzięczność Panom Profesorowi Karolowi Przanowskiemu i Kandydatowi n.t. Maciejowi Krakowskiemu za przeczytanie rękopisu niniejszej pracy i cenne uwagi.*

*Zakład Elektroenergetyki Politechniki Łódzkiej*

## WYKAZ LITERATURY

1. Andriejew W. W.: Czetyriechfaznaja schiema elektropieriedaczi s triechfaznymi transformatorami. — Elektriczestwo, 1952, nr 1, str. 15.
2. Carson I. R.: Wave Propagation in Overhead Wires with Ground Return. — Bell. Syst. Techn. Journ., 1926, t. 5, str. 539.
3. Clarke E.: Circuit Analysis of A. C. Power Circuits. New York, 1943, t. I.
4. Ebin L. E.: Ekonomicznyje schiemy elektropieriedaczi i mietody ich rasczota. — Elektriczestwo, 1952, nr 1, str. 23.
5. Filsztinskij A. A.: Czetyriechprowodnaja elektropieriedacza kak sredstwo powyszenja ekonomicznosti i nadieżnosti wysokowoltnych sietiej. — Elektriczestwo, 1952, nr 1, str. 17.
6. Haberland G.: Theorie der Leitung von Wechselstrom durch die Erde. — Z. Ang. Math. Mech., t. 6, 1926, str. 366.
7. Krakowski M.: Obliczanie linii przesyłowej „dwa przewody — ziemia" przy założeniu, że przewodząca warstwa ziemna ma wymiary skończone. Praca kandydacka wykonana w Katedrze Podstaw Elektrotechniki Politechniki Łódzkiej w 1956 r., nie publikowana.
8. K woprosu o czetyriechprowodnych i szestiprowodnych linjach elektropieriedaczi. — Elektriczestwo, 1953, nr 3, str. 75.
9. Nowacki P. J.: Składowe symetryczne. Skrypt, PWN, Poznań—Wrocław, 1954.
10. Mayr O.: Die Erde als Wechselstromleiter. — ETZ, 1925, str. 1352 i 1436.
11. Owsjejenko W. W.: Niekotoryje woprosy konstruirowanja czetyriech prowodnych elektropieriedaczi. — Elektriczestwo, 1952, nr 1, str. 30.
12. Rüdenberg R.: Die Ausbreitung der Erdströme in der Umgebung von Wechselstromleitungen. — Z. Ang. Math. Mech., 1925, t. 5, str. 361.

З. КОВАЛЬСКИ

## СОПРОТИВЛЕНИЯ И ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СХЕМЫ ВОЗДУШНЫХ ЛИНИЙ СРЕДНИХ НАПРЯЖЕНИЙ ТИПА „ЧЕТЫРЕ ПРОВОДА — ЗЕМЛЯ"

### Резюме

1. Общие свойства линий типа „четыре провода — земля"
Цель работы

В 1952 году Андреев [1] и Фильштинский [5] предложили новый метод электропередачи по схеме „четыре провода — земля", названный в сокращении: ЧПЗ.

Система электропередачи типа ЧПЗ состоит из четырёхпроводной линии электропередачи и с не менее двух трансформаторов на каждой станции соединённой этой линией. Трансформаторы на каждой станции имеют группы соединений отличающиеся друг от друга на 6 условных часов (180 электрических градусов). Поэтому в условиях симметрии по току, ток не проходит через землю. Земля одновремённо заменяет два провода нормальной (трёхфазной, трёхпроводной) линии. Благодаря заземлению одной из фаз трансформаторов, напряжения проводов относительно земли равны междупроводному напряжению, которое существует в каждой характеристической части схемы типа ЧПЗ.

Заземление фазы сети и необходимость проектирования изоляции аппаратуры и линии по отношению к земле на междупроводное напряжение составляют некоторые недостатки сетей типа ЧПЗ. Эти недостатки не играют существенной роли в области сетей средних напряжений.

Целью настоящей работы является изложение прежде всего методов расчёта эквивалентных сопротивлений линий типа ЧПЗ в условиях нормальной работы (рабочих сопротивлений) а также сопротивлений для симметричных групповых составляющих. Представленные в работе зависимости являются основанием расчётов линий типа ЧПЗ и сетей, в которых работают линии такого типа в нормальных и аварийных условиях.

## 2. Продольные эквивалентные сопротивления линий типа ЧПЗ собственные, взаимные и рабочие

Земля является обратным путём для проводных токов в линии типа ЧПЗ. Это обозначает, что схему „четыре провода — земля" можно заменить четырьмя цепями с обратным путём через землю, между которыми существует магнитная связь. Потери напряжения в соответственных вышеуказнных цепях можно выразить следующим уравнением в виде матрицы:

$$\begin{bmatrix} \Delta U_a \\ \Delta U_b \\ \Delta U_c \\ \Delta U_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa_g}, & Z_{ba_g}, & Z_{ca_g}, & Z_{da_g} \\ Z_{ab_g}, & Z_{bb_g}, & Z_{cb_g}, & Z_{db_g} \\ Z_{ac_g}, & Z_{bc_g}, & Z_{cc_g}, & Z_{dc_g} \\ Z_{ad_g}, & Z_{bd_g}, & Z_{cd_g}, & Z_{dd_g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_d \end{bmatrix}.$$

В работе проведена сводка зависимостей для собственных и взаимных цепей с обратным путём тока через землю данных Рюденбергом, Габерландом, Карсоном и Краковским. Для практических расчётов автор рекомендует пользоваться формулами Карсона — Краковского.

Предполагая симметрию токовой нагрузки линии тока ЧПЗ, то есть $I_b = a^2 I_a$ $I_c = -I_a$ и $I_d = -a^2 I_a$ также полагая симметрию линии ЧПЗ, зависимости для эквивалентных фазовых сопротивлений линии типа ЧПЗ (рабочие сопротивления) значительно упрощаются:

$$Z_a = Z_b = Z_c = Z_d = Z_s - Z_m = Z_l.$$

В работе представлены формулы для сопротивлений собственного ($Z_s$), взаимного ($Z_m$) и рабочего ($Z_l$) линии типа ЧПЗ. Так например частоты $f = 50$ Гц.

$$Z_l = \left(R_o + j\frac{f}{50} 0{,}145 \lg \frac{b_{śr}}{r_e}\right) l.$$

Вышеуказанная зависимость имеет подобный вид как формула на эквивалентное сопротивление нормальной линии для согласной и противофазной симметричной составляющей в системе трёхфазных симметричных составляющих. Различие состоит только в формуле на средний междупроводной промежуток ($b_{sr}$), который представлен в работе для линии типа ЧПЗ.

Автор представляет эквивалентную схему линии тупа ЧПЗ, а также схему системы электропередачи типа ЧПЗ в условиях нормальной работы, полагая магнитную симметрию линии и тогда, когда системы токов в обоих характеристических частях линии ЧПЗ являются симметричными.

Линии типа ЧПЗ с квадратичной системой проводов обладают конечно магнитной симметрией. В другом случае симметрия линии получается с помощью соответственного переплетения.

Если не соблюдены условия симметрии линии по току а также если несимметричная линия типа ЧПЗ переплетена несоответственным образом, расчёт такой линии является относительно сложным.

### 3. Основные уравнения для групповых симметричных составляющих в системе электропередачи типа ЧПЗ

Линия типа ЧПЗ состоит из двух характеристических составных частей, из двух линий типа „два провода — земля", сопряжённых взаимно магнитной индуктивностью. Поэтому в линии типа ЧПЗ можно выделить две двухфазные цепи.

В каждой цепи в отдельности можно разложить напряжения и токи на двухфазные симметричные составляющие с согласной обратной очередностью или же с согласной и нулевой очередностью. В работе применён этот последний метод разложения.

Если $U_a, U_b$ а также $U_c$ и $U_d$ обозначают фазовые напряжения в линии типа ЧПЗ, тогда разлагая эти напряжения на двухфазные составляющие, можно получить следующие зависимости по отношению к основным фазам:

$$U_{a_1} = \frac{1}{2}(U_a - U_b) \qquad \text{а также} \quad U_{c_1} = \frac{1}{2}(U_c - U_d)$$

$$U_{a_0} = \frac{1}{2}(U_a + U_b) \qquad U_{c_0} = \frac{1}{2}(U_c + U_d).$$

Обобщая $U_{a_1} \neq U_{c_1}$ и $U_{a_0} \neq U_{c_0}$.

Двухфазные составляющие с согласной очередностью в обеих характеристических цепях линии ЧПЗ можно вновь разложить на новые двухфазные составляющие, называемые групповыми составляющими. Аналогично можно разложить двухфазные составляющие с нулевой очередностью. Получаются таким образом по отношению к основной фазе следующие зависимости для групповых симметричных составляющих напряжений в системе типа ЧПЗ [4]:

$$\begin{bmatrix} U_{a_{01}} \\ U_{a_{00}} \\ U_{a_{11}} \\ U_{a_{10}} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1, & 1, & -1, & -1, \\ 1, & 1, & 1, & 1, \\ 1, & -1, & -1, & 1, \\ 1, & -1, & 1, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \\ U_d \end{bmatrix}$$

Наоборот:

$$\begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \\ U_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1, & 1, \\ 1, & 1, & -1, & -1, \\ -1, & 1, & -1, & 1, \\ -1, & 1, & 1, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{a_{01}} \\ U_{a_{00}} \\ U_{a_{11}} \\ U_{a_{10}} \end{bmatrix}$$

Подобным образом можно разложить фазовые токи на групповые составляющие и наоборот.

Если в схеме типа ЧПЗ известны напряжения $U_a$, $U_b$, $U_c$ и $U_d$ а также токи $I_a$, $I_b$, $I_c$ и $I_d$ тогда остальные значения напряжений и токов выступающие в этой схеме можно определить элементарным образом.

## 4. Сопротивления линий типа ЧПЗ для симметричных групповых составляющих напряжений и токов

Составляющие групповые потери напряжения отдельных очередностей в соответственных цепях с обратным путём в линии типа ЧПЗ в зависимости от групповых симметричных составляющих токов по соответственных преобразованиях, можно выразить таким образом:

$$\begin{bmatrix} \Delta U_{a_{01}} \\ \Delta U_{c_{00}} \\ \Delta U_{a_{11}} \\ \Delta U_{a_{10}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{01_{01}} Z_{01_{00}} Z_{01_{11}} Z_{01_{10}} \\ Z_{00_{01}} Z_{00_{00}} Z_{00_{11}} Z_{00_{10}} \\ Z_{11_{01}} Z_{11_{00}} Z_{11_{11}} Z_{11_{10}} \\ Z_{10_{01}} Z_{10_{00}} Z_{10_{11}} Z_{10_{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{a_{01}} \\ I_{a_{00}} \\ I_{a_{11}} \\ I_{a_{10}} \end{bmatrix}$$

Если предположить, что линия типа ЧПЗ имеет симметрическую систему проводов (квадратичная система или переплетение), тогда сопротивления для групповых симметричных составляющих напряжения и тока отдельных очередностей составляют следующие уравнения:

$$Z_{01_{01}} = Z_{11_{11}} = Z_{10_{10}} = Z_s - Z_m = Z_l$$

и

$$Z_{00_{00}} = Z_s + 3Z_m,$$

а остальные сопротивления в вышеуказанном матричном уравнении равны нулю. Поэтому между групповыми составляющими потерь напряжения и групповыми составляющими токов в линии ЧПЗ образуются следующие зависимости:

$$U_{a_{01}} = Z_{01_{01}} I_{a_{01}} = Z_{01} I_{a_{01}} = (Z_s - Z_m) I_{a_{01}}$$
$$U_{a_{00}} = Z_{00_{00}} I_{a_{00}} = Z_{00} I_{a_{00}} = (Z_s + 3Z_m) I_{a_{00}}$$
$$U_{a_{11}} = Z_{11_{11}} I_{a_{11}} = Z_{11} I_{a_{11}} = (Z_s - Z_m) I_{a_{11}}$$
$$U_{a_{10}} = Z_{10_{10}} I_{a_{10}} = Z_{10} I_{a_{10}} = (Z_s - Z_m) I_{a_{10}}$$

Основываясь на этих уравнениях даны эквивалентные схемы линии типа ЧПЗ для отдельных групповых симметричных составляющих напряжения и тока.

## 5. Влияние громоотводных проводов на эквивалентные сопротивления линии типа ЧПЗ

Рассмотрены два случая линии ЧПЗ: с одним и с двумя громоотводными проводами. Принято предпосылку, что громоотводные провода заземлены только лишь на обоих концах линии.

Автор доказывает, что когда линия типа ЧПЗ переплетена соответственным образом, тогда громоотводные провода влияют только лишь на эквивалентные сопротивление для групповой составляющей напряжения и тока 00 очередности. Для этого случая даны зависимости на сопротивление линии $Z_{00}$ с учётом громоотводных проводов и так:
в случае одного громоотводного провода

$$Z_{00_w} = Z_{00} - \frac{4Z^2_{mw}}{Z_{s_w}}$$

и в случае, когда линия имеет два громоотводные провода, помещенные симметрично относительно от опорной конструкции линии, то

$$Z_{00_{wv}} = Z_{00} - \frac{8Z^2_{mw}}{Z_{s_w} + Z_{wv}}.$$

Эквивалентные сопротивления линии типа ЧПЗ с учётом громоотводных проводов меньше сопротивлений линии без этих проводов. В работе даны подробные формулы для собственных сопротивлений громоотводных проводов ($Z_{s_w}$ или $Z_{s_v}$) для взаимных сопротивлений между рабочими проводами и громоотводными проводами ($Z_{m_w}$ или $Z_{m_v}$) а также для взаимных сопротивлений между громоотводными проводами линии ($Z_{m_v}$).

Автор даёт сводку зависимостей для сопротивлений линии нормальных — рабочих и для трёхфазных симметричных составляющих а также для сопротивлений линии типа ЧПЗ — рабочих и для групповых симметричных составляющих. Автор показывает, что существует некоторая аналогия между сопротивлениями нормальных линий и линий типа ЧПЗ.

## 6. Заключение

Представленные в работе методы расчёта эквивалентных рабочих продольных сопротивлений линий типа ЧПЗ, общие основы теории групповых симметричных составляющих а также принципы расчёта сопротивлений линии для симметричных групповых составляющих напряжения и тока являются существенным элементом электрических расчётов схемы электропередачи типа ЧПЗ во всех условиях её работы.

Теория симметричных групповых составляющих применяется прежде всего для расчётов сетей в случае коротких замыканий и перерывов проводов в линиях типа ЧПЗ.

Z. KOWALSKI

## EQUIVALENT IMPEDANCES AND DIAGRAMS OF MEDIUM VOLTAGE OVER-HEAD LINES OF THE „FOUR WIRE — GROUND" TYPE

### Summary

1. General properties of „four wire — ground" type lines. Scope of work

In 1952 Andriejew [1] and Filsztinskij [5] described a new transmission method of electric energy by a „four wire — ground" system, called in abreviation: CPZ.

The transmission system of the CPZ type consists of a four-wire transmission line and of at least two transformers at every station connected to this line. One phase of these transformers is normally grounded. The angular displacement groups of transformers at every station differ by 6 conventional hours (180 electric degrees). In consequence, under the conditions of current symmetry of the system, no current flows through the ground. The ground acts as a substitute of two conductors of an ordinary (three-phase, three-conductor) double track line. On account of the grounding of one of the transformer phases the voltage between the conductors and the earth equals the interphase value, existing in every characteristic part of the CPZ system. The grounding of one of the phases of the system and in consequence the necessity of designing the insulation to earth of the line and of the equipment for the inter-phase voltage, constitute the disadvantages of the CPZ system. This inferiority does not play any essential role in the range of medium voltage networks.

The aim of this paper is in the first place to present the calculation methods of equivalent impedances of the CPZ type overhead lines in conditions of routine service (service impedances) and of impedances for group symmetrical components. The equations given in this paper are a base for calculating lines of the CPZ type and networks, in which these lines work, in normal and fault conditions.

2. Self, mutual and service longitudinal equivalent impedances of CPZ lines

In lines of the CPZ type the earth constitutes the return route for the conductor currents. This fact signifies that the „four wire — ground" system may be substituted by four loops, with the earth as a return route, between which there exist magnetic interconnections. The voltage losses in the respective earth-return loops of CPZ lines can be expresser by the following matrix equation:

$$\begin{bmatrix} \Delta U_a \\ \Delta U_b \\ \Delta U_c \\ \Delta U_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa_g}, & Z_{ba_g}, & Z_{ca_g}, & Z_{da_g} \\ Z_{ab_g}, & Z_{bb_g}, & Z_{cb_g}, & Z_{db_g} \\ Z_{ac_g}, & Z_{b\ g}, & Z_{cc_g}, & Z_{dc_g} \\ Z_{ad_g}, & Z_{bd_g}, & Z_{cd_g}, & Z_{dd_g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_d \end{bmatrix}.$$

The relations for self and mutual impedances presented by Rüdenberg, Haberland, Carson and Krakowski are compared in this paper. For practical calculations the Carson — Krakowski's formulas are recommended by the author.

Assuming a load-current symmetry of the CPZ line i.e. $I_b = a^2 I_a$, $I_c = -I_a$ and $I_d = -a^2 I_a$, and a CPZ line symmetry, the relations between the equivalent phase impedances (service impedances) of the CPZ line are notably simplified, namely:

$$Z_a = Z_b = Z_c = Z_d = Z_s - Z_m = Z_l.$$

The paper gives formulas for self ($Z_s$), mutual ($Z_m$) and service ($Z_l$) equivalent impedances of CPZ lines. For instance for a frequency $f$:

$$Z_l = \left( R_o + j \frac{f}{50} 0{,}145 \lg \frac{b_{sr}}{r_e} \right) l.$$

This relation is similar to the formula for the equivalent impedance of an ordinary line for positive and negative sequence symmetrical components in the system of symmetrical three-phase components. There is a difference only in the formula for the average inter-conductor distance ($b_{sr}$) which is given for lines of the CPZ type in this paper.

The author presents the equivalent diagram of a CPZ line and the diagram of a transmission system of the CPZ type under the conditions of normal service, assuming a magnetic symmetry of the line and when the disposition of currents in both the characteristic parts of the CPZ line is symmetrical.

Lines of the CPZ type with a square configuration of conductors are naturally in magnetic symmetry. In other cases a symmetry of the line is obtained by suitable transpositions.

If the symmetry conditions of currents are not satisfied and also if the transposition in an asymmetrical line of the CPZ type is not carried out adequately the calculation of such a line is relatively complicated.

## 3. BASIC EQUATIONS FOR GROUP SYMMETRICAL COMPONENTS IN A TRANSMISSION SYSTEM OF THE CPZ TYPE

A line of the CPZ type is composed of two characteristic parts — two lines of the „two wire — ground" type interconnected by magnetic induction. In a CPZ line therefore, two two-phase systems may be distinguished.

In each system separately the voltages and currents can be converted into two-phase symmetrical components of positive and negative sequence or positive and zero sequence. The latter method of conversion is used in this paper.

If the phase voltages of a CPZ line are denoted $U_a$, $U_b$ and $U_c$ and $U_d$, then by converting these voltages into two-phase symmetrical components, the following relations are obtained in reference to the basic phases:

$$U_{a_1} = \frac{1}{2}(U_a - U_b) \qquad U_{c_1} = \frac{1}{2}(U_c - U_d)$$

$$U_{a_0} = \frac{1}{2}(U_a + U_b) \qquad U_{c_0} = \frac{1}{2}(U_c + U_d).$$

In general $U_{a1} \neq U_{c1}$ and $U_{a0} \neq U_{c0}$.

The two-phase components of positive sequence in both characteristic systems of the CPZ line can be further converted into new two-phase components, called group components.

The two-phase symmetrical components of the zero sequence can be analogically converted. In this manner, in reference to the basic phase, the following relations can be obtained for group symmetrical components of voltages in a system of the CPZ type [4]:

$$\begin{bmatrix} U_{a_{01}} \\ U_{a_{00}} \\ U_{a_{11}} \\ U_{a_{10}} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1, & 1, & -1, & -1, \\ 1, & 1, & 1, & 1, \\ 1, & -1, & -1, & 1, \\ 1, & -1, & 1, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \\ U_d \end{bmatrix}$$

Reversely:

$$\begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \\ U_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1, & 1, \\ 1, & 1, & -1, & -1, \\ -1, & 1, & -1, & 1, \\ -1, & 1, & 1, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{a_{01}} \\ U_{a_{00}} \\ U_{a_{11}} \\ U_{a_{10}} \end{bmatrix}$$

Similarly the phase currents can be converted into group components and reversely.

If in a system of the CPZ type the voltages $U_a$, $U_b$, $U_c$ and $U_d$ and the currents $I_a$, $I_b$, $I_c$ and $I_d$ are known, then the remaining current and voltage magnitudes occurring in such a system can be determined by elementary methods.

## 4. IMPEDANCES OF A CPZ LINE FOR GROUP SYMMETRICAL COMPONENTS OF VOLTAGES AND CURRENTS

Particular sequence group components of voltage loss in respective earth-return loops of a CPZ line can be expressed with relation to group symmetrical components, after suitable transformations, in the following manner:

$$\begin{bmatrix} \Delta U_{a_{01}} \\ \Delta U_{a_{00}} \\ \Delta U_{a_{11}} \\ \Delta U_{a_{10}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{0101} & Z_{0100} & Z_{0111} & Z_{0110} \\ Z_{0001} & Z_{0000} & Z_{0011} & Z_{0010} \\ Z_{1101} & Z_{1100} & Z_{1111} & Z_{1110} \\ Z_{1001} & Z_{1000} & Z_{1011} & Z_{1010} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{a_{01}} \\ I_{a_{00}} \\ I_{a_{11}} \\ I_{a_{10}} \end{bmatrix}$$

On assumption that a CPZ line has a symmetrical configuration of conductors (square configuration or transpositions) the impedances for group symmetrical components of voltages and currents of both sequences fulfil the following equations:

$$Z_{0101} = Z_{1111} = Z_{1010} = Z_s - Z_m = Z_l$$

and

$$Z_{0000} = Z_s + 3Z_m,$$

whereas other impedances of the given matrix formula are equal to zero. In view of the latter the following relations occur between group components of voltage-loss and group components of currents in a CPZ line:

$$\Delta U_{a_{01}} = Z_{0101} I_{a_{01}} = Z_{01} I_{a_{01}} = (Z_s - Z_m) I_{a_{01}}$$

$$\Delta U_{a_{00}} = Z_{0000} I_{a_{00}} = Z_{00} I_{a_{00}} = (Z_s + 3Z_m) I_{a_{00}}$$

$$\Delta U_{a_{11}} = Z_{1111} I_{a_{11}} = Z_{11} I_{a_{11}} = (Z_s - Z_m) I_{a_{11}}$$

$$\Delta U_{a_{10}} = Z_{1010} I_{a_{10}} = Z_{10} I_{a_{10}} = (Z_s - Z_m) I_{a_{10}}$$

Equivalent diagrams of a CPZ line based on these equations are given for individual group symmetrical components of voltage and current.

## 5. INFLUENCE OF EARTH-WIRES ON EQUIVALENT IMPEDANCES OF A CPZ LINE

Two cases of a CPZ line are consideed: with one and two earth-wires. It was assumed that the earth-wires are grounded only at both ends of the line.

The author proves, that if a CPZ line is well transposed, the earth-wire influence only the line equivalent impedance for the current and voltage group component of the 00 sequence. The line impedance $Z_{00}$ for this case is given taking into account earth-wires, thus in the case of one earth-wire:

$$Z_{00_w} = Z_{00} - \frac{4Z^2_{m_w}}{Z_{s_w}}$$

and in the case of a line with two earth-wires placed symmetrically with relation to the axis of the line supporting construction:

$$Z_{00_{wv}} = Z_{00} - \frac{8\,Z^2 m_w}{Z_{s_w} + Z_{wv}}.$$

The equivalent impedances of a CPZ line taking into consideration the earth-wires, are lower than the line impedances without these earth-wires. The paper presents detailed formulas for self impedances of earth-wires ($Z_{s_w}$ or $Z_{m_v}$), for mutual impedances between working conductors and earth-wires ($Z_{m_w}$ or $Z_{m_v}$) and for mutual impedances between earth-wires ($Z_{wv}$).

The author gives a summary of relations for impedances of normal lines — service impedances and impedances and impedances for three-phase symmetrical components — and for impedances of CPZ lines — service impedances and impedances for group symmetrical components. He states that a certain analogy exists between impedances of normal lines and CPZ lines.

## 6. CONCLUSIONS

The presented methods of calculating service longitudinal equivalent impedances of CPZ lines, the general bases of the theory of group symmetrical components and the principles of calculating the line impedances group symmetrical components of voltage and current are an essential factor in electric calculations of a CPZ transmission system under all service conditions.

The theory of group symmetrical components may especially be applied in calculating networks in short-circuit conditions and in cases of braking of conductors in CPZ lines.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

# ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM IV · ZESZYT 4

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1958

RADA REDAKCYJNA

PROF. JANUSZ GROSZKOWSKI, PROF. JANUSZ LECH JAKUBOWSKI,
PROF. BOLESŁAW KONORSKI, PROF. IGNACY MALECKI,
PROF. PAWEŁ NOWACKI, PROF. PAWEŁ SZULKIN, PROF. STANISŁAW SZPOR

KOMITET REDAKCYJNY

*Redaktor Naczelny*

PROF. WITOLD NOWICKI

*Sekretarz*

JULIUSZ MIERZEJEWSKI

ADRES REDAKCJI

*Warszawa, Politechnika, Plac Jedności Robotniczej 1,*
*Katedra Teletransmisji Przewodowej, Gmach Mechaniki*

*PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE*
*Warszawa, Miodowa 10*

| | |
|---|---|
| Nakład 610 (497 + 113) | Oddano do składania 19.VIII.58. |
| Ark. wyd. 8,5, druk. 8 + 3 wklejki | Podpisano do druku 12.XII.58 r. |
| Pap. druk. sat. kl. III, 80 g, 70×100 | Druk ukończono w grudniu 1958 r. |
| Zamówienie nr 1289/58. | Cena zł. 25 A-12 |

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

621.395.645.34

WŁADYSŁAW MAJEWSKI jr

# Parametry wzmacniacza ze sprzężeniem zwrotnym i metody ich wyznaczania

*Rękopis dostarczono 15.11.1957*

Rozpatrzono podstawowe parametry wzmacniacza ze sprzężeniem zwrotnym oraz bezpośrednią metodę ich wyznaczania opartą na elementarnej teorii sprzężenia zwrotnego. Następnie rozważono metodę wyznaczania parametrów na podstawie analizy sieci i wyprowadzono wzory dla podstawowych układów wzmacniaczy ze sprzężeniem zwrotnym. Przedstawiono również matematyczną odmianę metody analizy sieci polegającą na zastosowaniu rachunku krakowianów. Na zakończenie scharakteryzowano krótko kilka innych metod wyznaczania parametrów wzmacniacza ze sprzężeniem zwrotnym oraz przeprowadzono ich porównanie.

## 1. PARAMETRY WZMACNIACZA ZE SPRZĘŻENIEM ZWROTNYM I BEZPOŚREDNIA METODA ICH WYZNACZANIA

### 1.1. Zagadnienia ogólne

Każdy wzmacniacz ma pewne charakterystyczne własności. Do najważniejszych z nich należą: wzmacnianie sygnału wejściowego, jego zniekształcanie (zniekształcenia liniowe i nieliniowe) oraz wprowadzanie zakłóceń (szumy). Ponadto wzmacniacz z punktu widzenia źródła i odbiornika przedstawia pewną oporność (oporność wejściową i wyjściową). Wreszcie powyższe własności, a szczególnie wzmocnienie, ulegają zmianie w czasie na skutek działania czynników przypadkowych.

Ilościowym odbiciem tych własności wzmacniacza są jego parametry bezwzględne. Rodzinę parametrów odpowiadających własnościom wzmacniacza bez sprzężenia zwrotnego nazywać będziemy rodziną bezwzględnych parametrów pierwotnych, rodzinę zaś parametrów odpowiadających własnościom wzmacniacza ze sprzężeniem zwrotnym — rodziną bezwzględnych parametrów wtórnych. Parametr charakteryzujący zastosowane we wzmacniaczu sprzężenie zwrotne i wiążący ze sobą te dwie rodziny nazywać bę-

dziemy współczynnikiem sprzężenia zwrotnego. Wprowadzimy również rodzinę parametrów względnych, charakteryzujących zmianę, jakiej ulegają bezwzględne parametry pierwotne na skutek zastosowania sprzężenia zwrotnego.

Pierwszy etap projektowania wzmacniacza ze sprzężeniem zwrotnym polega na wyprowadzeniu zależności między parametrami wzmacniacza i jego elementami. Dlatego zagadnienie wyznaczania parametrów stanowi podstawę projektowania.

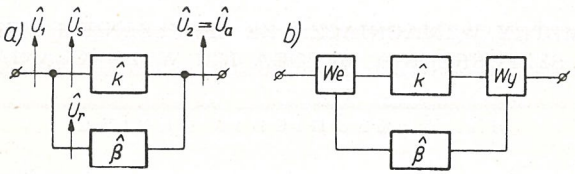
W niniejszym rozdziale przypomnimy podstawy elementarnej teorii sprzężenia zwrotnego, zdefiniujemy bliżej parametry wzmacniacza i rozważymy bezpośrednią, opartą na elementarnej teorii sprzężenia zwrotnego metodę ich wyznaczania.

Literatura [2], [7], [10], [12], [15], [17].

## 1.2. Zarys elementarnej teorii sprzężenia zwrotnego

Wzmacniaczem ze sprzężeniem zwrotnym nazywamy wzmacniacz, w którym część napięcia (lub prądu) wyjściowego przekazywana jest na wejście.

Podstawowy schemat blokowy wzmacniacza ze sprzężeniem zwrotnym podano na rys. 1-1a. Układ może być podzielony na dwa człony:




Rys. 1-1. Schematy blokowe wzmacniacza ze sprzężeniem zwrotnym

a) czwórnik wzmacniający $k$,

b) czwórnik sprzężenia zwrotnego $\beta$ (zwykle tłumiący).

Stosując oznaczenia podane na rysunku możemy wprowadzić następujące parametry:

a) wzmocnienie bez sprzężenia zwrotnego:

$$\hat{k} = \frac{\hat{U}_a}{\hat{U}_s} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_s},$$

b) współczynnik przenoszenia członu sprzężenia zwrotnego:

$$\hat{\beta} = \frac{\hat{U}_r}{\hat{U}_a},$$

c) współczynnik przenoszenia pętli sprzężenia zwrotnego:

$$\hat{\beta}\hat{k} = \frac{\hat{U}_r}{\hat{U}_s},$$

d) wzmocnienie w przypadku zastosowania sprzężenia zwrotnego:

$$\hat{k}_r = \frac{\hat{U}_a}{\hat{U}_1} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}.$$

Wzmocnienie bez sprzężenia $\hat{k}$ jest jednym z parametrów pierwotnych wzmacniacza, a z punktu widzenia sprzężenia zwrotnego — parametrem pomocniczym charakteryzującym człon wzmacniający pętli.

Współczynnik przenoszenia członu sprzężenia zwrotnego $\hat{\beta}$ jest parametrem pomocniczym charakteryzującym człon sprzężenia zwrotnego pętli.

Współczynnik przenoszenia pętli $\hat{k}\hat{\beta}$ odgrywa — jak zobaczymy niżej — fundamentalną rolę w teorii sprzężenia zwrotnego i może być uważany za parametr charakteryzujący sprzężenie zwrotne. Dlatego jest on także nazywany współczynnikiem sprzężenia zwrotnego.

Istnieje wiele schematowych możliwości odgałęziania napięcia z wyjścia i przekazywania go na wejście.

Układ sprzężenia nazywamy napięciowym, jeżeli oporność obciążenia „widzi" człony $k$ i $\beta$ jako połączone równolegle, prądowym zaś, jeżeli „widzi" je jako połączone szeregowo. Układ stanowiący kombinacje układów napięciowego i prądowego nazywamy mieszanym. Zamiast nazw napięciowy i prądowy stosuje się też mniej właściwe (nie jednoznaczne) nazwy równoległy i szeregowy. Układ sprzężenia nazywamy równoległym jeżeli oporność generatora „widzi" człony $k$ i $\beta$ jako połączone równolegle, a szeregowym, jeżeli widzi je jako połączone szeregowo. Układ stanowiący kombinacje układów równoległego i szeregowego nazywamy mostkowym.

Poza rozpatrzonym poprzednio uproszczonym schematem blokowym bywa stosowany bardziej ogólny schemat z czwórnikiem wejściowym i wyjściowym (rys. 1-1b).

Podstawowe zagadnienie elementarnej teorii sprzężenia zwrotnego polega na wyznaczeniu wzmocnienia w przypadku zastosowania sprzężenia zwrotnego $\hat{k}_r$ ze znajomości $\hat{k}$ i $\hat{\beta}$. Zagadnienie to należy rozpatrywać w dwóch przypadkach:

a) napięcie wejściowe $\hat{U}_1 = \text{const}$; napięcie wyjściowe ulega zmianie z wartości $\hat{U}_2$ na $\hat{U}_{2r}$ ;

b) zmieniamy napięcie wejściowe z wartości $\hat{U}_1$ do takiej wartości $\hat{U}_{1r}$, że napięcie wyjściowe $\hat{U}_2 = \text{const}$.

Korzystając z podanych definicji i schematu blokowego łatwo jest wykazać, że w obu przypadkach słuszny jest wzór:

$$\hat{k}_r = \frac{\hat{k}}{1 - \hat{k}\hat{\beta}}. \tag{1.1}$$

Podobnie wprowadzić można wzór dla napięcia $n$-tej harmonicznej $U_{h(n)}$ [1]) (przy założeniu $U_2 = \text{const}$):

$$U_{h(n)r} = \frac{U_{h(n)}}{|1 - \hat{k}\hat{\beta}|} \tag{1.2}$$

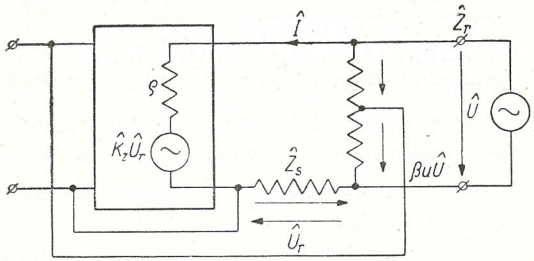
i analogiczny wzór dla napięcia szumów $U_{sz}$.

Różniczkując i przekształcając równanie (1.1) możemy uzyskać równanie charakteryzujące stałość pracy wzmacniacza

$$\frac{d\hat{k}_r}{\hat{k}_r} = \frac{1}{1 - \hat{k}\hat{\beta}} \cdot \frac{d\hat{k}}{\hat{k}}. \tag{1.3}$$

Rozpatrując schemat z rys. 1-2 wyprowadzić można następujący wzór na oporność wyjściową:

$$\hat{Z}_{wy_r} = \hat{Z}_{wy} \frac{1 - \hat{S}_z \hat{Z}_s}{1 - \hat{K}_z \hat{\beta}_u}. \tag{1.4}$$




Rys. 1-2. Schemat do wyznaczania oporności wyjściowej

Zastosowano tu następujące oznaczenia:

$\hat{Z}_{wy} = \varrho_a$ — oporność wewnętrzna ostatniej lampy,

$\hat{K}_z$ — wzmocnienie wzmacniacza w stanie jałowym,

[1]) W dalszym ciągu będziemy oznaczać napięcie $n$-tej harmonicznej przez $U_h$, opuszczając indeks $n$.

$\hat{S}_z = \frac{\hat{K}_z}{\varrho_a}$ — zastępcze nachylenie charakterystyki,

$\hat{\beta}_u$ — współczynnik przenoszenia członu sprzężenia napięciowego,

$\hat{Z}_s$ — oporność prądowego sprzężenia zwrotnego.

Wzór ten upraszcza się w szczególnych przypadkach:

a) dla sprzężenia napięciowego $\hat{Z}_s = 0$,

b) dla sprzężenia prądowego $\hat{\beta}_u = 0$,

c) dla układu jednostopniowego $\hat{K}_z = -K_a$; $\hat{S}_z = -S_a$.

Podobnie można wyprowadzić wzór na oporność wejściową.

Na zakończenie dodamy, że sprzężenie zwrotne nazywamy ujemnym, gdy $|\hat{k}_r| < |\hat{k}|$, a dodatnim, gdy $|\hat{k}_r| > |\hat{k}|$.

### 1.3. Parametry bezwzględne wzmacniacza ze sprzężeniem zwrotnym

W tablicy 1 — 1 zestawiono pierwotne i wtórne parametry bezwzględne wzmacniacza ze sprzężeniem zwrotnym. Związki między tymi dwoma rodzinami parametrów wynikają ze wzorów rozdz. 1.2. Są one zebrane w omówionej w dalszym ciągu tablicy 1 — 2.

Dodatkowego wyjaśnienia wymaga własność wzmacniacza nazwana zmiennością własności w czasie i odpowiadający jej parametr bezwzględny — współczynnik niestałości pracy podany w tablicy 1 — 1. Przez zmienność własności w czasie rozumiemy własność wzmacniacza polegającą na zmianie jego właściwości, a w szczególności wzmocnienia w czasie na skutek czynników przypadkowych (np. temperatura, starzenie się lamp itp.). Wielkością charakteryzującą zmienność własności w czasie jest względna zmiana wzmocnienia $\frac{\Delta\hat{k}}{\hat{k}}$. Ze wzrostem tej wielkości zwiększa się niestałość pracy wzmacniacza. Dlatego wydaje się słuszne stosowanie dla tej wielkości nazwy współczynnik niestałości pracy.

Metoda bezpośrednia wyznaczania parametrów wzmacniacza polega — jak widać z powyższych rozważań — na wyznaczaniu parametrów wtórnych na podstawie parametrów pierwotnych i współczynnika sprzężenia zwrotnego $\hat{k}\hat{\beta}$. Metoda ta może być więc nazwana również metodą wyznaczania parametrów wtórnych na podstawie parametrów pierwotnych. Do stosowania jej konieczne jest rozbicie wzmacniacza na człony $k$ i $\beta$ i rozważanie pracy wzmacniacza w dwóch sytuacjach: w normalnych warunkach pracy i przy wyłączonym sprzężeniu zwrotnym.

Tablica 1 — 1

**Parametry bezwzględne wzmacniacza ze sprzężeniem zwrotnym**

| Własność charakteryzowana przez parametr | Nazwa parametru | Oznaczenie parametru | |
|---|---|---|---|
| | | pierwotny | wtórny |
| Wzmacnianie | wzmocnienie (współczynnik wzmocnienia) | $\hat{k}$ | $\hat{k}_r$ |
| Zniekształcenia nieliniowe | napięcie $n$-tej harmonicznej | $U_h$ | $U_{hr}$ |
| | współczynnik zawartości $n$-tej harmonicznej | $h$ | $h_r$ |
| Szumy | napięcie szumów | $U_\sigma$ | $U_{\sigma r}$ |
| | współczynnik szumów | $\sigma$ | $\sigma_r$ |
| Zniekształcenia liniowe | współczynnik zniekształceń liniowych | $m$ | $m_r$ |
| Zmienność własności w czasie | współczynnik niestałości pracy | $\frac{\Delta\hat{k}}{\hat{k}}$ | $\frac{\Delta\hat{k}_r}{\hat{k}_r}$ |
| Oporność | oporność wyjściowa | $\hat{Z}_{wy}$ | $\hat{Z}_{wy_r}$ |
| | oporność wejściowa | $\hat{Z}_{we}$ | $\hat{Z}_{we_r}$ |
| Stabilność | margines amplitudy i fazy | — | — |
| Sprzężenie zwrotne | współczynnik sprzężenia zwrotnego | $\hat{k}\hat{\beta}$ | |

## 1.4. Parametry względne wzmacniacza ze sprzężeniem zwrotnym

Parametry względne charakteryzują zmianę, jakiej ulegają parametry bezwzględne na skutek zastosowania sprzężenia zwrotnego. Rozważmy dowolny parametr pierwotny $\hat{p}$ i odpowiadający mu parametr wtórny $\hat{p}_r$. Parametr względny odpowiadający parametrowi $\hat{p}$ moglibyśmy nazwać współczynnikiem zmiany $\hat{p}$ i zdefiniować jako $\frac{\hat{p}}{\hat{p}_r}$ lub

jako $\frac{\hat{p}_r}{\hat{p}}$. Pierwszą z tych wielkości oznaczać będziemy przez $\hat{F}_p$, drugą przez $\hat{H}_p$. Dla ustalenia jednoznacznych nazw tych wielkości rozważymy ich moduły dla sprzężenia dodatniego i ujemnego.

a. Sprzężenie dodatnie. Dla wszystkich (z wyjątkiem oporności) parametrów $p$ zachodzi nierówność $|\hat{p}_r| > |\hat{p}|$, a więc $|\hat{F}_p| < 1$, $|\hat{H}_p| > 1$. Ze względów praktycznych wygodniej jest uznać za podstawową tę z powyższych wielkości, której moduł jest większy od jedności, a więc $\hat{H}_p$. Moduł $\hat{H}_p$ mówi, ile razy wzrasta moduł parametru $\hat{p}$ na skutek zastosowania dodatniego sprzężenia zwrotnego; $\hat{H}_p$ można więc nazwać współczynnikiem wzrostu $\hat{p}$. Dla sprzężenia ujemnego $|\hat{H}_p| < 1$ wzrost parametru $\hat{p}$ jest mniejszy od jedności, a więc następuje zmniejszenie jego modułu.

b. Sprzężenie ujemne. Dla wszystkich (z wyjątkiem oporności) parametrów $\hat{p}$ zachodzi nierówność $|\hat{p}_r| < |\hat{p}|$, a więc $|\hat{F}_p| > 1$, $|\hat{H}_p| < 1$. W tym przypadku wygodniej jest uznać za podstawową wielkość $\hat{F}_p$. Moduł $\hat{F}_p$ mówi, ile razy zmalał moduł parametru $\hat{p}$ na skutek zastosowania sprzężenia zwrotnego. $\hat{F}_p$ można więc nazwać współczynnikiem spadku $\hat{p}$.

Dla sprzężenia dodatniego $|\hat{F}_p| > 1$ spadek parametru $\hat{p}$ jest mniejszy od jedności, a więc następuje wzrost jego modułu.

W dalszym ciągu zajmować się będziemy przede wszystkim ujemnym sprzężeniem zwrotnym. Dlatego stosować będziemy wyłącznie nazwę współczynnik spadku $\hat{p}$ dla wielkości $\hat{F}_p$. W literaturze spotyka się także odwrotność $\hat{F}_p$. Wielkość tę oznaczać będziemy przez $\hat{\delta}_p$ i nazywać pozostałością $\hat{p}$. W przypadku sprzężenia ujemnego $|\hat{\delta}_p| < 1$ mówi, ile pozostało z modułu $\hat{p}$ po zastosowaniu sprzężenia zwrotnego.

W przypadku gdy parametrem $\hat{p}$ jest oporność wejściowa lub wyjściowa, sytuacja jest inna. Wartość $|\hat{F}_p|$ zależy wtedy nie tylko od tego, czy sprzężenie jest dodatnie, czy ujemne, lecz także od struktury szóstników wejściowych lub wyjściowych. Dla sprzężenia ujemnego może być zarówno $|\hat{F}_p| > 1$, jak i $|\hat{F}_p| < 1$.

Nazwę współczynnik spadku oporności stosować będziemy jednak niekiedy dla uzyskania jednolitej terminologii.

Współczynnikiem spadku zniekształceń nieliniowych zajmiemy się bliżej w rozdziale 2.

Wzory uzależniające współczynniki zmiany od $\hat{k}\hat{\beta}$ zestawiono w tablicy 1 — 2. Wynikają one ze wzorów (1.1) ÷ (1.4). Zestawienie to pro-

Tablica 1 — 2

**Parametry względne wzmacniacza ze sprzężeniem zwrotnym**

| Nazwa parametru | Wzór określający wartość parametru | Uwagi |
|---|---|---|
| Współczynnik spadku wzmocnienia | $\hat{F}_k = \frac{\hat{k}}{\hat{k}_r} = 1 - \hat{k}\hat{\beta}$ | |
| Współczynnik pozostałości wzmocnienia | $\hat{\delta}_k = \frac{\hat{k}_r}{\hat{k}} = \frac{1}{1 - \hat{k}\hat{\beta}} = \frac{1}{\hat{F}_k}$ | |
| Współczynnik spadku zniekształceń nieliniowych | $F_h = \frac{U_h}{U_{h_r}} = \frac{h}{h_r} = \lvert 1 - \hat{k}\hat{\beta} \rvert = F_k$ | $U_2 = \text{const}$ |
| Współczynnik spadku szumów | $F_\sigma = \frac{\sigma}{\sigma_r} = \lvert 1 - \hat{k}\hat{\beta} \rvert = F_k$ | |
| Współczynnik spadku niestałości pracy | $\hat{F}_s = \frac{\Delta \hat{k}}{\hat{k}} : \frac{\Delta \hat{k}_r}{\hat{k}_r} = 1 - \hat{k}\hat{\beta} = \hat{F}_k$ | |
| Współczynnik spadku oporności wejściowej | $\hat{F}_{z_{we}} = \frac{\hat{Z}_{we}}{\hat{Z}_{we_r}}$ | |
| | $\hat{F}_{z_{we}} = \frac{1}{1 - \hat{k}\hat{\beta}} = \frac{1}{\hat{F}_k}$ | układ szeregowy |
| | $\hat{F}_{z_{we}} = 1 - \hat{k}\hat{\beta} = \hat{F}_k$ | układ równoległy |
| | $\hat{F}_{z_{we}} = 1$ | układ mostkowy zrównoważony |
| Współczynnik spadku oporności wyjściowej | $\hat{F}_{z_{wy}} = \frac{\hat{Z}_{wy}}{\hat{Z}_{wy_r}}$ | |
| | $\hat{F}_{z_{wy}} = \frac{1 - \hat{K}_z \hat{\beta}_u}{1 - \hat{S}_z \hat{Z}_s}$ | układ mieszany |
| | $\hat{F}_{z_{wy}} = \frac{1}{1 - \hat{S}_z \hat{Z}_s}$ | układ prądowy |
| | $\hat{F}_{z_{wy}} = 1 - \hat{K}_z \hat{\beta}_u$ | układ napięciowy |
| | $\hat{F}_{z_{wy}} = 1$ | układ mostkowy zrównoważony |

wadzi do wniosku, że podstawową rolę w teorii sprzężenia zwrotnego odgrywa współczynnik spadku wzmocnienia. Inne współczynniki spadku (również współczynnik spadku oporności wyjściowej — co wykażemy w rozdziale 2) są prostymi jego funkcjami. Wynika stąd, że do wyznaczenia parametrów względnych, a więc także i parametrów bezwzględnych wtórnych wzmacniacza, wystarcza znajomość współczynnika spadku wzmocnienia. Zagadnieniem tym zajmiemy się bliżej w rozdziale 2.

## 2. WYZNACZANIE PARAMETRÓW WTÓRNYCH W OPARCIU O OGÓLNĄ ANALIZĘ SIECI

### 2.1. Zagadnienia ogólne

Podstawowym parametrem względnym wzmacniacza ze sprzężeniem zwrotnym jest współczynnik spadku wzmocnienia. Jak wykazano poprzednio, inne parametry wtórne bezwzględne, a więc także względne, są prostymi jego funkcjami. Dotychczas wyrażaliśmy wszystkie parametry względne, a w szczególności współczynnik spadku wzmocnienia, w funkcji współczynnika sprzężenia zwrotnego $\hat{k}\hat{\beta}$. Można jednak postąpić inaczej przyjmując za wielkość pierwotną właśnie podstawowy parametr względny — współczynnik spadku wzmocnienia. Postępowanie takie jest mniej poprawne pod względem logicznym, ale — jak wykażemy w dalszym ciągu — bardziej ogólne.

Każdy układ elektryczny bierny lub czynny można przedstawić w postaci sieci elektrycznej określonej układem równań liniowych.

Współczynnik spadku wzmocnienia $\hat{F}_k$ jest stosunkiem dwóch wzmocnień obliczonych przy dwóch różnych stanach odniesienia (ze sprzężeniem i bez sprzężenia). Można więc określić funkcję wiążącą współczynnik spadku wzmocnienia ze współczynnikami układu równań liniowych charakteryzujących wzmacniacz przedstawiony w postaci sieci elektrycznej. Wzmocnienie w przypadku zastosowania sprzężenia zwrotnego $\hat{k}_r$ jest również funkcją współczynników tego układu równań.

Zajmiemy się więc najpierw metodami analizy sieci. W dalszym ciągu określimy $\hat{F}_k$ i $\hat{k}_r$ oraz inne parametry względne w funkcji współczynników układu równań.

Należy zwrócić uwagę, że w metodzie analizy sieci nie jest potrzebne rozbicie wzmacniacza na człony $k$ i $\beta$. Jest to poważną zaletą tej metody, gdyż wyodrębnienie członów $k$ i $\beta$ nastręcza często dużo trudności.

Literatura: [3], [4], [6], [8], [11], [12], [18], [19], oraz literatura matematyczna podana w przypisach.

## 2.2. Klasyczne metody rozwiązywania sieci elektrycznych

### 2.2.1. Postawienie zagadnienia

Dana jest sieć złożona z $n$ gałęzi między $a$ węzłami. Należy sieć taką rozwiązać. Zadanie takiej sieci polega na podaniu $n$ oporności zespolonych oraz wszystkich sił elektromotorycznych (*s.em.*) działających w sieci. Rozwiązanie polega na znalezieniu $n$ prądów przewodowych. Początkowo zajmiemy się sieciami biernymi, tzn. takimi, w skład których wchodzą układy bierne i *s.em.*-ne zewnętrzne. Później rozważania uogólnimy na sieci czynne z lampami elektronowymi.

### 2.2.2. Metoda równań Kirchhoffa

Dla znalezienia $n$ prądów należy ułożyć $n$ równań liniowo niezależnych. Na podstawie pierwszego prawa Kirchoffa możemy ułożyć $a-1$ takich równań. Pozostałe $n-a+1$ równań układamy na podstawie drugiego prawa Kirchhoffa. Dla uzyskania liniowej niezależności tych równań konieczne jest zachowanie warunku następującego: każde nowe oczko zawiera nową gałąź. Przed rozpoczęciem obliczeń należy sieć zorientować, tzn. założyć kierunki prądów i kierunki obiegów poszczególnych oczek.

### 2.2.3. Metody prądów cyklicznych Maxwella

Można zmniejszyć ilość równań do $n-a+1$ obliczając zamiast prądów przewodowych prądy oczkowe[1]).

Prądy przewodowe można obliczyć w prosty sposób jako sumę algebraiczną odpowiednich prądów oczkowych.

Dana jest sieć o $n$ gałęziach i $a$ węzłach.

Dla sieci takiej możemy ułożyć $k = n - a + 1$ równań o następującej postaci:

$$\begin{aligned}
&\hat{Z}_{11}\hat{I}_1 + \hat{Z}_{12}\hat{I}_2 + \ldots\ldots\ldots + \hat{Z}_{1k}\hat{I}_k = \hat{E}_1,\\
&\hat{Z}_{21}\hat{I}_1 + \hat{Z}_{22}\hat{I}_2 + \ldots\ldots\ldots + \hat{Z}_{2k}\hat{I}_k = \hat{E}_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\hat{Z}_{i1}\hat{I} + \hat{Z}_{i2}\hat{I}_2 + \ldots\ldots\ldots + \hat{Z}_{ik}\hat{I}_k = \hat{E}_i,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{2.1}$$

[1]) Literatura [6], [11].

$$\hat{Z}_{j1}\hat{I}_1 + \hat{Z}_{j2}\hat{I}_2 + \ldots + \hat{Z}_{ji}\hat{I}_i + \ldots + \hat{Z}_{jj}\hat{I}_j + \ldots + \hat{Z}_{jk}\hat{I}_k = \hat{E}_j,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\hat{Z}_{k1}\hat{I}_1 + \hat{Z}_{k2}\hat{I}_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \hat{Z}_{kk}\hat{I}_k = \hat{E}_k,$$

gdzie:

$\hat{I}_j$ — prąd płynący w $j$-ym oczku,

$\hat{E}_j$ — *s.em.* działająca w $j$-ym oczku.

Zastanowimy się, jaki jest sens fizyczny współczynników występujących w równaniach.

Z równania dla $j$-ego oczka otrzymujemy:

$$\hat{Z}_{jj} = \frac{\hat{E}_j}{\hat{I}_j} \qquad \text{dla } \hat{I}_p = 0 \quad \begin{cases} p = 1, 2, \ldots k, \\ p \neq j. \end{cases} \tag{2.2}$$

$\hat{Z}_{jj}$ jest to oporność własna $j$-ego oczka obliczona w założeniu, że żadne prądy poza $\hat{I}_j$ nie płyną. Z tego względu można nazwać $\hat{Z}_{jj}$ opornością własną stanu jałowego.

Analogicznie otrzymujemy:

$$\hat{Z}_{ji} = \frac{\hat{E}_j}{\hat{I}_i} \qquad \text{dla } \hat{I}_p = 0 \quad \begin{cases} p = 1, 2, \ldots k, \\ p \neq i. \end{cases} \tag{2.3}$$

$\hat{Z}_{ji}$ jest to oporność wzajemna stanu jałowego oczek $j$-ego i $i$-tego.

Dla układów biernych, w których obowiązuje zasada wzajemności, słuszny jest wzór:

$$\hat{Z}_{ij} = \hat{Z}_{ji}. \tag{2.4}$$

W y z n a c z n i k i e m c h a r a k t e r y s t y c z n y m powyższego układu równań nazywamy wyznacznik utworzony ze współczynników występujących w tych równaniach.

Z równania (2.4) wynika, że w przypadku układów biernych wyznacznik ten jest symetryczny względem głównej przekątnej.

### *2.2.4. Oporność robocza własna i oporność robocza wzajemna*

Załóżmy, że w oczku $j$-ym działa *s.em.* $\hat{E}_j$ i że jest to jedyna *s. em.* działająca w sieci.

Obliczmy prąd $\hat{I}_j$ płynący w sieci pod wpływem *s.em.* $\hat{E}_j$:

$$\hat{I}_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

gdzie:

$\Delta$ — wyznacznik charakterystyczny układu równań,

$\Delta_j$ — wyznacznik utworzony z wyznacznika charakterystycznego przez zastąpienie $j$-ej kolumny kolumną wyrazów wolnych.

Założyliśmy, że $\hat{E}_p = 0$, $p \neq j$, a więc

$$\Delta_j = (-1)^{2j}\, \Delta_{jj}\, \hat{E}_j.$$

$\Delta_{jj}$ jest to podwyznacznik utworzony z wyznacznika charakterystycznego przez skreślenie $j$-ego wiersza i $j$-ej kolumny.

Wprowadzając pojęcie dopełnienia algebraicznego elementu $E_j$ możemy napisać:

$$(-1)^{2j}\, \Delta_{jj} = D_{jj}.$$

Ostatecznie:

$$\hat{I}_j = \hat{E}_j \frac{D_{jj}}{\Delta}$$

oraz

$$\hat{Z}_{jj_r} = \frac{\hat{E}_j}{\hat{I}_j} = \frac{\Delta}{D_{jj}}. \tag{2.5}$$

$Z_{jj_r}$ jest to oporność własna robocza oczka $j$-ego.

Załóżmy teraz, że działa *s.em.* $\hat{E}_j$ i obliczmy prąd $\hat{I}_i$ przez nią wywołany:

$$\hat{I}_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

$$\Delta_i = (-1)^{i+j}\, \Delta_{ji}\, \hat{E}_j.$$

$\Delta_{ji}$ jest to podwyznacznik utworzony z wyznacznika charakterystycznego przez skreślenie $j$-ego wiersza i $i$-tej kolumny.

Wprowadzając jak poprzednio pojęcie dopełnienia algebraicznego

$$(-1)^{i+j}\, \Delta_{ji} = D_{ji},$$

otrzymujemy:

$$\hat{Z}_{ji_r} = \frac{\hat{E}_j}{\hat{I}_i} = \frac{\Delta}{D_{ji}}. \tag{2.6}$$

$Z_{ji_r}$ jest to oporność wzajemna robocza oczek $j$-ego i $i$-tego.

Zakładając, że $\hat{Z}$ jest częścią oporności $\hat{Z}_{mn}$, możemy — korzystając z A1 [1]) — napisać wzory wyrażające $\hat{Z}_{ji_r}$ i $\hat{Z}_{jj_r}$ w funkcji $\hat{Z}$:

[1]) Zob. przypisy dotyczące podstaw matematycznych pracy.

$$\hat{Z}_{jj_r} = \frac{\Delta^0 + \hat{Z}D_{mn}}{D^0_{jj} + \hat{Z}D_{jjmn}}, \tag{2.7}$$

$$\hat{Z}_{ji_r} = \frac{\Delta^0 + \hat{Z}D_{mn}}{D^0_{ji} + \hat{Z}D_{jimn}}, \tag{2.8}$$

gdzie:

$$D_{jimn} = (-1)^{m+n}(-1)^{i+j}\Delta_{jimn}.$$

W szczególnym przypadku może być $m = n$.

Zakładając, że działają dwie *s.em.*-ne $\hat{E}_j$ i $\hat{E}_k$, otrzymamy następujące wyrażenia na $\hat{I}_i$:

$$\hat{I}_i = \frac{D_{ji}}{\Delta}\hat{E}_j + \frac{D_{ki}}{\Delta}\hat{E}_k = \frac{\hat{E}_j}{\hat{Z}_{ji_r}} + \frac{\hat{E}_k}{\hat{Z}_{ki_r}} = (\hat{I}_i)_j + (\hat{I}_i)_k. \tag{2.9}$$

Zgodnie z zasadą superpozycji możemy prąd pochodzący od *s.em.*-nych $\hat{E}_j$ i $\hat{E}_k$ rozpatrywać jako sumę prądów obliczonych przy założeniu, że $\hat{E}_k = 0$ i że $\hat{E}_j = 0$.

Rozumowanie powyższe można uogólnić na dowolną ilość *s.em.*-nych.

### *2.2.5. Orientacja sieci*

Zajmiemy się obecnie ważnym w zastosowaniach praktycznych zagadnieniem orientacji sieci. Rozważmy równanie $k$-tego oczka układu równań (2 — 1). Słowami może być ono wyrażone w sposób następujący: suma algebraiczna spadków napięć występujących w oczku równa jest *s.em.*-nej zewnętrznej w nim działającej. Konieczne jest ustalenie znaków wielkości występujących w tym równaniu. W tym celu przyjmiemy następujące reguły:

a. Obiegiem dodatnim $k$-tego oczka nazywamy założony kierunek prądu własnego oczka $\hat{I}_k$. Kierunek ten oznaczamy na schemacie zastępczym strzałką. Obiegi dodatnie poszczególnych oczek mogą być założone w sposób najzupełniej dowolny.

b. Spadek napięcia wywołany w oczku $k$ przez prąd $\hat{I}_k$ $\hat{Z}_{kk}\hat{I}_k$ jest skierowany zgodnie z obiegiem dodatnim.

c. Spadek napięcia wywołany w oczku $k$ przez prąd $\hat{I}_j$ $\hat{Z}_{kj}\hat{I}_j$ jest skierowany zgodnie z obiegiem dodatnim, jeżeli prądy $\hat{I}_k$ i $\hat{I}_j$ przepływają przez element $\hat{Z}_{kj}$ w tym samym kierunku. W przeciwnym przypadku ten spadek napięcia skierowany jest przeciwnie do obiegu dodatniego.

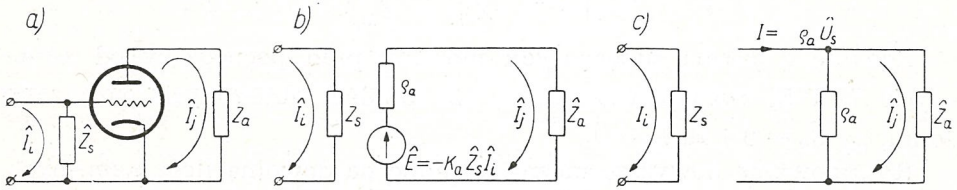
d. Wszystkie spadki napięcia skierowane zgodnie z obiegiem dodatnim posiadają znak plus, wszystkie spadki napięcia skierowane przeciwnie posiadają znak minus.

e. *s.em.* $\hat{E}_k$ posiada znak plus, jeżeli jest skierowana zgodnie z prądem $\hat{I}_k$, znak minus — jeżeli jest skierowana przeciwnie. Znaki te dotyczą *s.em.*-nej po prawej stronie równania. Kierunek *s.em.*-nej oznaczamy strzałką.

### 2.2.6. *Metoda prądów cyklicznych Maxwella dla układów czynnych*

Podstawowym elementem sieci z elementami czynnymi jest lampa elektronowa. Rozważmy sieć jak w rozdz. 2.2.3.

Załóżmy, że w skład sieci wchodzi lampa elektronowa, której siatka znajduje się w $i$-tym, a anoda w $j$-ym oczku. Ten fragment sieci podano na rys. 2-1.




Rys. 2-1. Schematy zastępcze lampy elektronowej

Stosując znany schemat zastępczy lampy możemy zastąpić ją dwójnikiem złożonym ze skierowanej zgodnie z prądem $\hat{I}_j$ *s.em.*-nej o wartości $\hat{E} = -K_a\hat{U}_s = -K_a\hat{Z}_s\hat{I}_i$ i oporności wewnętrznej $\varrho_a$. Należy zwrócić uwagę, że w literaturze spotyka się również inny schemat zastępczy w postaci dwójnika z *s.em.*-ną skierowaną przeciwnie do prądu $\hat{I}_j$, o wartości $\hat{E} = K_a\hat{U}_s$ i oporności $\varrho_a$. Z podanych poprzednio reguł orientacji sieci wynika, że metody te są równoważne. W dalszym ciągu stosować będziemy pierwszy schemat zastępczy. Stosuje się również schemat zastępczy ze źródłem o stałym prądzie podany na rys. 2-1c (rozdz. 2.2.7).

Napiszmy układ równań dla rozpatrywanej sieci. Zmianie ulegnie jedynie równanie dla oczka $j$-ego. Ma ono postać:

$$\left.\begin{aligned} &\hat{I}_1\hat{Z}_{j1} + \hat{I}_2\hat{Z}_{j2} + \ldots + \hat{I}_i\hat{Z}^0_{ji} + \ldots + \hat{I}_k\hat{Z}_{jk} = \hat{E}_j - K_a\hat{Z}_s\hat{I}_i \\ \text{lub} \\ &\hat{I}_1\hat{Z}_{j1} + \hat{I}_2\hat{Z}_{j2} + \ldots + \hat{I}_i(\hat{Z}^0_{ji} + K_aZ_s) + \ldots + \hat{I}_k\hat{Z}_{jk} = \hat{E}_j. \end{aligned}\right\} \quad (2.10)$$

Wprowadzimy oznaczenie $K_a\hat{Z}_s = \hat{W}$ i nazwę $\hat{W}$ — wzajemna oporność charakterystyczna.

Należy zwrócić uwagę na to, że $\hat{Z}_{ji} \neq \hat{Z}_{ij}$, gdyż

$$\hat{Z}_{ij} = \hat{Z}^0_{ji}, \qquad \text{a} \qquad \hat{Z}_{ji} = \hat{Z}^0_{ji} + \hat{W}.$$

Założenie $\hat{W} = 0$ sprowadza układ równań do układu równań (2.1).

W układach ze sprzężeniem zwrotnym założenie $\hat{W} = K_a \hat{Z}_s = 0$, czyli $K_a = 0$ może mieć dwa aspekty. Przy rozważaniu wzmocnienia wielkość $\hat{k}_{r_0} = \hat{k}_{r_{w=0}}$ oznacza przenoszenie bezpośrednie wzmacniacza przy wyłączeniu lampy, przy czym to wyłączenie jest idealne, tzn. nie zmienia warunków pracy źródła i odbiornika.

Przy rozważaniu przenoszenia pętli założenie to oznacza idealne, tzn. nie zmieniające warunków pracy lamp, przerwanie pętli sprzężenia. Zagadnienie to zostanie szerzej omówione w rozdziale 2.4.

Warto zwrócić uwagę na to, że przy wzmacniaczach wielostopniowych musimy założyć jednakowy kierunek prądów płynących przez wszystkie oporniki $\hat{Z}_s$.

### 2.2.7. *Metoda potencjałów węzłowych*

Rozważane poprzednio równania prądów cyklicznych Maxwella opierają się na fakcie równowagi napięć w oczkach zamkniętych. Dane są *s.em.*-ne działające w układzie, szukane — prądy przez nie wywołane. Można ułożyć analogiczny układ równań opierających się na równowadze prądów dopływających i odpływających z węzłów[1]). Źródła działające w układzie muszą być przedstawione w postaci źródeł o stałej wydajności prądowej. Dane są prądy dopływające z tych źródeł do układu, szukane — różnice potencjałów wytwarzane przez nie między poszczególnymi węzłami a dowolnie wybranym punktem, np. ziemią. Stosując oznaczenia:

$\hat{I}_j$ — wydajność prądowa $j$-ego źródła,

$\hat{U}_k$ — napięcie między $k$-tym węzłem a ziemią,

$\hat{Y}_k$ — przewodność między $k$-tym węzłem a ziemią,

$\hat{Y}_{kl}$ — przewodność między $k$-tym i $l$-tym węzłem,

$\hat{Y}_{kk} = \hat{Y}_k + \hat{Y}_{k1} + \hat{Y}_{k2} + \ldots + \hat{Y}_{kn}$,

możemy, jak łatwo wykazać, ułożyć następujący układ równań:

$$\left.\begin{aligned} \hat{Y}_{11}\hat{U}_1 - \hat{Y}_{12}\hat{U}_2 - \ldots - \hat{Y}_{1n}\hat{U}_n &= \hat{I}_1, \\ -\hat{Y}_{21}\hat{U}_1 + \hat{Y}_{22}\hat{U}_2 - \ldots - \hat{Y}_{2n}\hat{U}_n &= \hat{I}_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ -\hat{Y}_{n1}\hat{U}_1 - \hat{Y}_{n2}\hat{U}_2 - \ldots + \hat{Y}_{nn}\hat{U}_n &= \hat{I}_n. \end{aligned}\right\} \qquad (2.11)$$

Dla rozpatrywanej sieci możemy wprowadzić pojęcia przewodności własnej roboczej $j$-ego węzła

[1]) Literatura [6], [11].

$$\hat{Y}_{jj_r} = \frac{\hat{I}_j}{\hat{U}_j} = \frac{\Delta'}{D'_{jj}}, \tag{2.12}$$

i przewodności wzajemnej roboczej węzłów $j$-ego i $i$-tego

$$\hat{Y}_{ji_r} = \frac{\hat{I}_j}{\hat{U}_i} = \frac{\Delta'}{D'_{ji}}, \tag{2.13}$$

w których

$\Delta'$ — wyznacznik charakterystyczny,

$D'_{lm}$ — odpowiednie dopełnienie algebraiczne.

Metodę potencjałów węzłowych stosować można także do układów czynnych przedstawiając lampę elektronową w postaci źródła o stałej wydajności prądowej — $S_a\hat{U}_s$ i oporności $\varrho_a$ (rys. 2.1c).

W dalszym ciągu posługiwać się będziemy głównie metodą prądów cyklicznych Maxwella. W przypadku zastosowania metody potencjałów węzłowych zaznaczymy to wyraźnie.

## 2.3. Współczynnik spadku wzmocnienia

### *2.3.1. Zagadnienia ogólne*

Zajmiemy się najpierw definicją ogólną wielkości nazywanej różnicą zwrotną. Następnie udowodnimy, że w układach z pojedynczą pętlą współczynnik spadku wzmocnienia jest równy różnicy zwrotnej. Dowód przeprowadzimy dwoma drogami: bezpośrednią i pośrednią za pomocą nowego pojęcia stosunku zwrotnego związanego z parametrami pierwotnymi. Druga droga umożliwi też wytłumaczenie terminu „różnica zwrotna".

### *2.3.2. Różnica zwrotna*

Wzmacniacz ze sprzężeniem zwrotnym można, jak poprzednio wykazano, scharakteryzować układem równań liniowych.

Załóżmy, że wyznacznik charakterystyczny układu jest $\Delta$, a oporność wzajemna charakterystyczna $\hat{W}$. Oporność ta reprezentuje przenoszenie lampy, której siatka znajduje się w oczku $i$-tym, a anoda w $j$-tym.

Określenie. Różnicą zwrotną $\hat{F}$ dla dowolnej sieci z opornością wzajemną charakterystyczną $\hat{W}$ nazywamy stosunek wartości wyznacznika charakterystycznego układu równań opisującego sieć obliczonej przy nominalnej wartości elementu $\hat{W}$ i przy jego zaniku ($\hat{W} = 0$).

Możemy to wyrazić następującym wzorem

$$\hat{F} = \frac{\Delta}{\Delta^0}. \tag{2.14a}$$

Definicję powyższą można odnieść również do sieci scharakteryzowanej układem równań potencjałów węzłowych. W tym przypadku

$$\hat{F}' = \frac{\Delta'}{\Delta^{0'}}. \tag{2.14b}$$

Wyznacznik $\Delta^{0'}$ jest wyznacznikiem charakterystycznym obliczonym przy założeniu $\hat{W}' = S_a = 0$.

### 2.3.3. *Współczynnik spadku wzmocnienia a różnica zwrotna*

Podamy obecnie bezpośredni dowód, że współczynnik spadku wzmocnienia równy jest różnicy zwrotnej.

Załóżmy, że wejście wzmacniacza znajduje się w $n$-tym oczku i że w tym oczku włączony jest generator o *s.em.*-nej $\hat{E}_n = \hat{U}_1$ i oporności $\hat{Z}_1$. Oznaczmy ponadto napięcie występujące na siatce lampy przez $\hat{U}_s$.

Pomnożymy i podzielimy wyrażenie na różnicę zwrotną przez $D_{ni}$. Zauważmy, że $D_{ni}$ nie zależy od $\hat{W}$, gdyż $\hat{W}$ leży w $i$-tej kolumnie. W takim razie $D_{ni} = D^0_{ni}$.

Możemy więc napisać:

$$\hat{F} = \frac{\Delta}{\Delta^0} = \frac{\Delta}{D_{ni}} \cdot \frac{D^0_{ni}}{\Delta^0} = \frac{\dfrac{\Delta}{D_{ni}}}{\dfrac{\Delta^0}{D^0_{ni}}};$$

$\dfrac{\Delta}{D_{ni}}$ jest stosunkiem *s.em.*-nej działającej w oczku $n$-tym do prądu płynącego w oczku $i$-tym (wzór 2.6).

Możemy zatem napisać

$$\frac{\Delta}{D_{ni}} \cdot \frac{1}{\hat{Z}_s} = \left(\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_s}\right)_r$$

oraz

$$\frac{\Delta^0}{D^0_{ni}} \cdot \frac{1}{Z_s} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_s};$$

$\left(\dfrac{\hat{U}_1}{\hat{U}_s}\right)_r$ oznacza wartość stosunku $\dfrac{\hat{U}_1}{\hat{U}_s}$ w przypadku występowania sprzężenia zwrotnego.

W dalszym ciągu możemy napisać:

$$\hat{F} = \frac{\frac{\Delta}{D_{ni}} \cdot \frac{1}{Z_s}}{\frac{\Delta^0}{D^0_{ni}} \cdot \frac{1}{Z_s}} = \frac{\left(\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_s}\right)_r}{\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_s}}.$$

Rozważyć musimy teraz dwa przypadki:

a. $\hat{U}_1 = \text{const}$. Zastosowanie sprzężenia zwrotnego powoduje zmianę napięcia wyjściowego z $\hat{U}_2$ na $\hat{U}_{2r}$ i napięcia siatkowego z $\hat{U}_s$ na $\hat{U}_{sr}$. Wzmocnienie jest oczywiście proporcjonalne do odpowiedniego napięcia siatkowego.

W tym przypadku mamy:

$$\left(\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_s}\right)_r = \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_{sr}},$$

$$\hat{F} = \frac{\left(\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_s}\right)_r}{\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_s}} = \frac{\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_{sr}}}{\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_s}} = \frac{\hat{U}_s}{\hat{U}_{sr}} = \frac{\hat{k}}{\hat{k}_r}.$$

b. $\hat{U}_2 = \text{const}$. Zastosowanie sprzężenia zwrotnego powoduje zmianę napięcia wyjściowego, które kompensujemy zmieniając napięcie wejściowe z $\hat{U}_1$ na $\hat{U}_{1r}$, tak aby napięcie wyjściowe $\hat{U}_2$ nie zmieniło się. Nie zmienia się również napięcie siatkowe $U_s = \text{const}$. Wzmocnienie jest oczywiście odwrotnie proporcjonalne do napięcia wejściowego.

W tym przypadku mamy:

$$\left(\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_s}\right)_r = \frac{\hat{U}_{1r}}{\hat{U}_s},$$

$$\hat{F} = \frac{\left(\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_s}\right)_r}{\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_s}} = \frac{\frac{\hat{U}_{1r}}{\hat{U}_s}}{\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_s}} = \frac{\hat{U}_{1r}}{\hat{U}_1} = \frac{\hat{k}}{\hat{k}_r}.$$

W obu przypadkach otrzymaliśmy więc:

$$\hat{F} = \frac{\hat{k}}{\hat{k}_r}.$$

Z drugiej strony

$$\hat{F}_k = \frac{\hat{k}}{\hat{k}_r},$$

otrzymujemy więc

$$\hat{F}_k = \hat{F}. \tag{2.15a}$$

Załóżmy teraz, że rozpatrywany wzmacniacz scharakteryzowany został układem równań dla potencjałów węzłowych. Załóżmy, że wydajność prądowa źródła wynosi $\hat{I}_1$. Jak wiadomo, $\hat{I}_1 = \dfrac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_1}$, gdzie $\hat{Z}_1$ oznacza oporność źródła, a $\hat{U}_1$ *s.em.*-ną tego źródła przy przedstawieniu go w postaci generatora o stałej wydajności napięciowej.

Różnicę zwrotną $\hat{F}'$ możemy przekształcić podobnie jak poprzednio do następującej postaci

$$\hat{F}' = \frac{\Delta'}{\Delta^{0'}} = \frac{\dfrac{\Delta'}{D'_{ni}}}{\dfrac{\Delta^{0'}}{D^{0'}_{ni}}};$$

$\dfrac{\Delta'}{D'_{ni}} = \left(\dfrac{\hat{I}_1}{\hat{U}_s}\right)_r$ jest stosunkiem prądu dopływającego do $n$-tego węzła (wzór 2.13) do napięcia między $i$-tym węzłem a ziemią.

Mnożąc powyższe równanie stronami przez $\hat{Z}_1$ i zastępując $\hat{I}_1\hat{Z}_1$ przez $\hat{U}_1$ możemy napisać:

$$\frac{\Delta'}{D'_{ni}}\hat{Z}_1 = \left(\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_s}\right)_r$$

oraz

$$\frac{\Delta^{0'}}{D^{0'}_{ni}}\hat{Z}_1 = \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_s}.$$

Otrzymujemy więc następujące równanie identyczne z otrzymanym już poprzednio:

$$\hat{F}' = \frac{\left(\dfrac{\hat{U}_1}{\hat{U}_s}\right)_r}{\dfrac{\hat{U}_1}{\hat{U}_s}}.$$

Wynik ostateczny jest więc następujący:

$$\hat{F}' = \hat{F}_k = \hat{F}. \tag{2.15b}$$

Dlatego też w dalszym ciągu zamiast $\hat{F}_k$ będziemy pisać także $\hat{F}$.

W rozważaniach powyższych milcząco założono, że istnieje tylko jedna droga dla energii — za pośrednictwem członu $k$. Założenie to, jak również wyprowadzony na jego podstawie wzór (2.15) jest przybli-

żone, jednak w większości przypadków praktycznych — słuszne. Zagadnienie zostanie omówione bliżej w rozdz. 2.5.4.

Przy zupełnie ścisłym ujęciu zagadnienia $\hat{U}_{sr}$ jest proporcjonalne nie do $\hat{k}_r$, ale do $\hat{k}_r - k_{r0}$, co w konsekwencji prowadzi do wzoru (2.24).

### 2.3.4. *Współczynnik przenoszenia pętli i stosunek zwrotny*

Wprowadzimy obecnie pojęcie stosunku zwrotnego i podamy dowód pośredni wzoru (2.15).

Jak wiadomo, współczynnikiem sprzężenia zwrotnego jest wielkość $\hat{\beta}\hat{k}$. Stosunkiem zwrotnym nazywamy wielkość

$$\hat{T} = -\hat{\beta}\hat{k}; \tag{2.16}$$

znak „−" ma na celu przyjęcie ze stanu odniesienia „czystego ujemnego" sprzężenia zwrotnego.

$$\hat{F}_k = 1 - \hat{\beta}\hat{k} = 1 + \hat{T}. \tag{2.17}$$

Znajdziemy obecnie związek $\hat{T}$ ze współczynnikami układu równań i doprowadzimy do równania (2.15) wiążącego spadek wzmocnienia $\hat{F}_k$ z różnicą zwrotną $\hat{F}$.

Załóżmy, że przerwaliśmy pętle w sposób idealny i że włączyliśmy w obwodzie anodowym lampy (oczko $j$) *s.em.*-ną $\hat{E}'_a$.

Możemy napisać:

$$\hat{T} = -\frac{\hat{E}''_a}{\hat{E}'_a} = K_a \frac{\hat{U}''_s}{\hat{E}'_a},$$

gdzie:

$\hat{U}''_s$ — napięcie, jakie dojdzie poprzez pętle sprzężenia na siatkę,

$\hat{E}''_a = -\hat{K}_a\hat{U}_s$ — *s.em.* w obwodzie anodowym wywołana tym napięciem.

Na podstawie rozważań poprzednich możemy napisać:

$$\frac{\hat{U}''_s}{\hat{E}'_a} = \frac{D^0_{ji}}{\Delta^0}\hat{Z}_s$$

i dalej

$$\hat{T} = K_a\hat{Z}_s\frac{D^0_{ji}}{\Delta^0} \tag{2.18a}$$

lub

$$\hat{T} = \hat{W}\frac{D^0_{ji}}{\Delta}, \tag{2.18b}$$

ale na podstawie (2.17) mamy:

$$\hat{F}_k = \frac{\Delta^0 + \hat{W} D^0_{ii}}{\Delta^0}.$$

Stosując równienie A1 otrzymujemy ostatecznie:

$$\hat{F}_k = \frac{\Delta}{\Delta^0} = \hat{F}.$$

Załóżmy, że przerwaliśmy pętlę i przyłożyliśmy napięcie jednostkowe na jej wejście. Różnica między napięciami przyłożonym na wejściu i otrzymanym na wyjściu wynosi właśnie $\hat{F} = 1 - \hat{k}\hat{\beta}$. Stąd pochodzi nazwa „różnica zwrotna".

### 2.3.5. *Współczynnik spadku wzmocnienia a różnica zwrotna w układach z pętlą wielokrotną*

W układach bardziej skomplikowanych możemy spotkać się z różnymi przypadkami typowymi.

a. Układ jednolampowy z pętlą jednokrotną lub wielokrotną. W tym przypadku założenie $K_a = 0$ jest równoznaczne z przerwaniem wszystkich pętli sprzężenia. Różnica zwrotna równa jest wtedy współczynnikowi spadku wzmocnienia.

b. Układ wielolampowy z pętlą jednokrotną lub wielokrotną obejmującą wszystkie stopnie, np. sprzężenie szeregowo-równoległe, można traktować jako dwie pętle oddzielne, obejmujące jednak wszystkie stopnie. W tym przypadku $\hat{F}$ jest symetryczne względem współczynników amplifikacji wszystkich lamp i założenie, że którykolwiek z nich jest równy zeru jest równoznaczne z przerwaniem wszystkich pętli sprzężenia. Również wtedy różnica zwrotna jest równa współczynnikowi spadku wzmocnienia.

c. Układ wielolampowy z pętlą wielokrotną. W tym przypadku $\hat{F}$ nie jest symetryczne względem wszystkich współczynników amplifikacji.

Założenie, że współczynnik amplifikacji pewnej lampy jest równy zeru, jest równoznaczne przerwaniu tylko tych pętli, w skład których wchodzi ta lampa. Różnica zwrotna obliczona przy założeniu $K_{av} = 0$, oznaczana $F_v$, jest równa współczynnikowi spadku wzmocnienia obliczonemu względem stanu odniesienia, który polega na wyłączeniu tych pętli sprzężenia.

Rozważmy na przykład wzmacniacz trzystopniowy ze sprzężeniem zwrotnym lokalnym w pierwszym i trzecim stopniu i ze sprzężeniem głównym obejmującym wszystkie trzy stopnie.

Oznaczając całkowite wzmocnienie ze sprzężeniem przez $\hat{k}_r$ otrzymamy:

$$\hat{F}_2 = \frac{\hat{k}_{r1}\hat{k}_z\hat{k}_{r3}}{\hat{k}_r},$$

$$\hat{F}_1 = \frac{\hat{k}_1\hat{k}_z\hat{k}_{r3}}{\hat{k}_r},$$

$$\hat{F}_3 = \frac{\hat{k}_{r1}\hat{k}_2\hat{k}_3}{\hat{k}_r}.$$

Przykłady bliżej charakteryzujące to zagadnienie są podane w rozdziale 3.

## 2.4. Wzmocnienie

### *2.4.1. Zagadnienia ogólne*

Podobnie jak w poprzednim punkcie, przedstawiamy wzmacniacz w postaci sieci elektrycznej. Rozwiązanie tej sieci [1]) umożliwia bezpośrednie wyznaczenie wzmocnienia z uwzględnieniem wszystkich istniejących w układzie sprzężeń. Jest to szczególnie użyteczne w układach z wielokrotną pętlą sprzężenia.

### *2.4.2. Ogólne wyrażenie na wzmocnienie*

Załóżmy, że na wejściu wzmacniacza w oczku $n$-tym działa *s.em.* $\hat{E}_n$, a przez dwójnik obciążający $\hat{Z}_{ob}$ znajdujący się w oczku $m$-tym płynie prąd $\hat{I}_m$. Wtedy wzmocnienie określone jest wzorem:

$$\hat{k}_r = \frac{\hat{U}_{ob}}{\hat{E}_n} = \frac{I_m}{\hat{E}_n}\,\hat{Z}_{ob}. \tag{2.19}$$

Tak określone wzmocnienie uwzględnia wpływ oporności wewnętrznej źródła. Stanowi więc odpowiednik wzmocności skutecznej.

Na podstawie wzoru (2.6) można napisać

$$\hat{k}_r = \frac{D_{nm}}{\Delta}\hat{Z}_{ob}. \tag{2.20}$$

Wzmocnienie jest więc funkcją współczynników układu równań charakteryzujących wzmacniacz. Oczywiście w przypadku gdy przez dwójnik obciążający płynie prąd równy sumie algebraicznej kilku prądów oczkowych, należy obliczyć je kolejno i podstawić na miejsce prądu $\hat{I}_m$.

[1]) w sensie punktu 2.2.1.

### 2.4.3. *Przenoszenie bezpośrednie*

Załóżmy, że siatka rozpatrywanej lampy znajduje się w oczku $i$-tym, a anoda w $j$-ym.

Na podstawie (2.20) i (2.8) można napisać:

$$\hat{k}_r = \frac{D^0_{nm} + \hat{W} D_{nmji}}{\Delta^0 + \hat{W} D_{ji}} \hat{Z}_{ob}. \tag{2.21}$$

Zakładając $\hat{W} = 0$ i oznaczając przez $\hat{k}_{r0}$ wartość $\hat{k}_r$ przy $W = 0$ mamy:

$$\hat{k}_{r0} = \frac{D^0_{nm}}{\Delta^0} \hat{Z}_{ob}; \tag{2.22}$$

$\hat{k}_{r0}$ nazywamy przenoszeniem bezpośrednim.

Interpretacja fizyczna przenoszenia bezpośredniego jest następująca: przy przerwaniu gałęzi $k$ część mocy przechodzi przez gałąź $\beta$. Przenoszenie bezpośrednie zależy od własności szóstnika wejściowego, członu sprzężenia zwrotnego i szóstnika wyjściowego.

### 2.4.4. *Wzmocnienie bez sprzężenia zwrotnego*

Wyprowadzimy wzór wiążący ze sobą $\hat{k}_r$, $\hat{k}_{r0}$, $\hat{k}$, $\hat{F}$. Opierając się na wzorach (2.21) i (2.22) obliczmy wielkość $\hat{k}_r - \hat{k}_{r0}$:

$$\hat{k}_r - \hat{k}_{ro} = \frac{\Delta^0 D_{nmji} - D^0_{nm} D_{ji}}{\Delta^0 (\Delta^0 + \hat{W} D_{ji})} \hat{W} \hat{Z}_{ob}.$$

Stosując wzór A2:

$$\Delta D_{abcd} = D_{ab} D_{cd} - D_{ad} D_{cb}$$

możemy napisać

$$\hat{k}_r - \hat{k}_{r0} = \frac{D_{ni}}{\Delta^0} (-\hat{W}) \frac{D_{jm}}{\Delta^0} \hat{Z}_{ob} \frac{\Delta^0}{\Delta^0 + \hat{W} D_{ji}}. \tag{2.23}$$

Rozpatrzmy znaczenie poszczególnych czynników:

a) $\frac{D_{ni}}{\Delta^0}$ jest stosunkiem prądu w obwodzie siatki do *s.em.*-nej wejściowej,

b) $-\hat{W}$ jest stosunkiem *s.em.*-nej w obwodzie anody do prądu w obwodzie siatki,

c) $\frac{D_{jm}}{\Delta^0}$ jest stosunkiem prądu w obwodzie wyjściowym do *s.em.*-nej, w obwodzie anodowym,

d) $\dfrac{\Delta^0}{\Delta^0 + \hat{W} D_{ji}} = \dfrac{1}{\hat{F}}$ jest odwrotnością różnicy zwrotnej.

Wielkości wymienione w punktach a) i c) odnoszą się do stanu pracy z wyłączonym sprzężeniem, gdyż występuje w nich $\Delta^0$ i wielkości $D_{ni}$ i $D_{jm}$ spełniające równania: $D_{ni} = D^0_{ni}$ i $D_{jm} = D^0_{jm}$ (patrz rozważania rozdziału 2.3.3).

Iloczyn czynników a) i b) równy jest stosunkowi *s.em.*-nej powstającej w obwodzie anodowym rozpatrywanej lampy do *s.em.*-nej wejściowej.

Iloczyn czynników a), b) i c) równy jest stosunkowi prądu w obwodzie wyjściowym do *s.em.*-nej wejściowej.

Iloczyn tych trzech czynników i oporności obciążenia równy jest stosunkowi napięcia wyjściowego na oporniku obciążenia do *s.em.*-nej wejściowej. Czynniki a) i c) obliczone są przy wyłączonym sprzężeniu. Iloczyn powyższy równy jest więc wzmocnieniu bez sprzężenia zwrotnego.

Otrzymujemy wzór następujący:

$$\hat{k}_r - \hat{k}_{r0} = \frac{\hat{k}}{\hat{F}}. \tag{2.24}$$

Przeprowadzimy dyskusję fizyczną otrzymanego wzoru. Część napięcia przechodzącego za pośrednictwem członu $\beta$ wynosi $\hat{E}\hat{k}_{r0}$, gdzie $\hat{E}$ jest *s.em.*-ną wejściową.

Całkowite napięcie wyjściowe wynosi $\hat{E}\hat{k}_r$. Współczynnik spadku wzmocnienia wynosi jak wiadomo $\hat{F}$. Jednak dla porównania wzmocnienia ze sprzężeniem zwrotnym i bez sprzężenia należy założyć, że energia ma tylko jedną drogę za pośrednictwem członu $k$, a człon $\beta$ służy jedynie do podania energii wstecz. Wtedy napięcie na wyjściu wynosiłoby $\hat{E}\hat{k}_r - \hat{E}\hat{k}_{r0}$, a więc wzmocnienie $\hat{k}_r - \hat{k}_{r0}$. To właśnie wzmocnienie mnożone przez współczynnik spadku wzmocnienia $\hat{F}$ powinno być równe wzmocnieniu bez sprzężenia $\hat{k}$. Wynik ten zgodny jest z (2.24). W praktyce $k_{r0} \ll k_r$ i słuszny jest dotychczas stosowany wzór uproszczony

$$\hat{k}_r = \frac{\hat{k}}{\hat{F}}. \tag{2.15c}$$

W układach mostkowych zrównoważonych $\hat{k}_{r0} = 0$ i wzór powyższy jest wzorem ścisłym.

## 2.5. Współczynnik spadku zniekształceń nieliniowych i szumów

Wyprowadźmy wzór (1.2) na podstawie ogólnej teorii.

Załóżmy, że anoda lampy rozważanej znajduje się w oczku $j$-ym, o oporność obciążenia w $m$-tym, *s.em.* generatora zastępczego $n$-tej harmonicznej jest $E_h$.

Możemy napisać (analogicznie do rozważań z rozdz. 2.3.3):

$$\hat{F} = \frac{\Delta}{\Delta^0} = \frac{\Delta}{D_{jm}} \cdot \frac{D^0_{jm}}{\Delta^0} = \frac{\dfrac{\Delta}{D_{jm}} \cdot \dfrac{1}{Z_{0b}}}{\dfrac{\Delta^0}{D^0_{jm}} \cdot \dfrac{1}{Z_{0b}}} = \frac{\dfrac{\hat{E}_h}{\hat{U}_{hr}}}{\dfrac{\hat{E}_h}{\hat{U}_h}} = \frac{\hat{U}_h}{\hat{U}_{hr}}.$$

Założono tu $E_h = \text{const}$. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\hat{U}_{hr} = \frac{\hat{U}_h}{\hat{F}} = \frac{\hat{U}_h}{1 - \hat{k}\hat{\beta}}. \tag{2.25}$$

Otrzymaliśmy wzór równoważny wzorowi (1.2).

Występująca w tym wzorze wielkość $\hat{F} = 1 - \hat{k}\hat{\beta}$ powinna być obliczona dla częstotliwości rozważanej $n$-tej harmonicznej.

Dla określenia współczynnika spadku zniekształceń nieliniowych musimy rozważyć dwa przypadki.

a) $U_1 = \text{const}$. Zastosowanie sprzężenia zwrotnego powoduje w tym przypadku poza zmianą napięcia $n$-tej harmonicznej, także zmianę napięcia siatkowego $U_s$ o częstotliwości podstawowej. Zmienia się więc także zastępcza *s.em.*-na $n$-tej harmonicznej, będąca funkcją napięcia siatkowego. Określenie nowej wartości tej *s.em.*-nej może być dokonane przy zastosowaniu teorii obwodów prawie liniowych. Wyznaczenie współczynnika spadku zniekształceń nieliniowych nie jest więc możliwe przy pomocy liniowej teorii sprzężenia zwrotnego, którą tu rozważamy.

b) $U_2 = \text{const}$. Odpowiada to przyjętemu uprzednio założeniu $E_h = \text{const}$. Zastosowanie sprzężenia zwrotnego powoduje w tym przypadku jedynie zmianę $n$-tej harmonicznej.

Współczynnik spadku zniekształceń nieliniowych podany w tablicy 1—2 odnosi się do rozpatrywanego przypadku i wyraża się wzorem:

$$F_h = \frac{U_h}{U_{hr}} = \frac{h}{h_r} = |1 - \hat{k}\hat{\beta}| = F(n\omega). \tag{2.26}$$

Wielkości $U_h$ i $h$ odnoszą się do $n$-tej harmonicznej. Indeks $(n)$ pominięto dla uproszczenia.

Przy sprzężeniu zwrotnym ujemnym $F_h = F(n\omega) > 1$ i $h_r < h$. Następuje więc spadek zawartości $n$-tej harmonicznej. Przy sprzężeniu zwrotnym dodatnim $F_h = F(n\omega) < 1$ i $h_r > h$. Następuje więc wzrost zawartości $n$-tej harmonicznej w stosunku $\frac{1}{F_h}$.

W układach zawierających kilka dróg sprzężenia zwrotnego harmoniczne wytwarzane przez daną lampę są redukowane w stosunku różnicy zwrotnej obliczonej przy sprowadzeniu do zera współczynnika amplifikacji tej lampy. Stanem odniesienia jest tu więc stan wyłączenia wszystkich sprzężeń, których pętle obejmują rozpatrywaną lampę.

## 2.6. Współczynnik spadku niestałości pracy

### *2.6.1. Zagadnienia ogólne*

Sprzężenia zwrotne ujemne ma dwa główne aspekty: spadek wzmocnienia i zwiększenie stałości pracy. Wzór (1.3) dotyczy stosunku względnej zmiany napięcia wyjściowego wywołanego zmianą $k$ do względnej zmiany $k$. Wzór ten dotyczy wyłącznie zmian w członie $k$ i jest przybliżony, gdyż przy jego wyprowadzeniu zakładano milcząco, że przenoszenie bezpośrednie jest równe zeru. Ogólna teoria umożliwia uogólnienie tych rozważań. Należy zwrócić uwagę, że jakkolwiek w wielu przypadkach współczynnik spadku niestałości pracy jest równy współczynnikowi spadku wzmocnienia, to jednak istnieje różnica pojęciowa między tymi współczynnikami.

Dalsze rozważania odnosić się będą zarówno do sprzężenia ujemnego, jak i dodatniego.

### *2.6.2. Definicja uogólnionego współczynnika spadku niestałości pracy*

Określenie. Uogólnionym współczynnikiem spadku niestałości pracy $\hat{S}$ dla układu z elementem charakterystycznym $\hat{W}$ nazywamy wielkość

$$\hat{S} = \frac{1}{\dfrac{\partial \ln \hat{k}_r}{\partial \ln \hat{W}}}. \tag{2.27a}$$

Współczynnik $\hat{S}$ ujmuje ilościowo zależność zmian wzmocnienia od zmian elementu charakterystycznego, który może się obecnie znajdować zarówno w członie $k$, jak i w członie $\beta$. Współczynnik $S$ jest bardziej ogólny od wprowadzonego w rozdziale 1 współczynnika $\hat{F}_s$. W dalszym ciągu będziemy nazywać $\hat{S}$ współczynnikiem spadku niestałości pracy.

Zastosujemy podaną definicję do przypadku dotyczącego zmian członu $k$, rozważanego w rozdz. 1.

Załóżmy, że jedynym zmiennym elementem jest $\hat{W}$. Możemy wtedy zastąpić pochodną cząstkową w (2.27a) pochodną zwyczajną. Otrzymujemy wtedy:

$$\hat{S} = \frac{d \ln \hat{W}}{d \ln \hat{k}_r}. \tag{2.27b}$$

W dalszym ciągu mamy:

$$d \ln \hat{k}_r = \frac{d\hat{k}_r}{\hat{k}_r} = \frac{1}{\hat{S}} d \ln \hat{W} = \frac{1}{\hat{S}} \cdot \frac{d\hat{W}}{\hat{W}}.$$

Otrzymujemy ostatecznie:

$$\frac{d\hat{k}_r}{\hat{k}_r} = \frac{1}{\hat{S}} \cdot \frac{d\hat{W}}{\hat{W}}. \tag{2.28}$$

Założyliśmy jednak, że zmiany dotyczą członu $k$. Możemy więc napisać:

$$\frac{d\hat{W}}{\hat{W}} = \frac{d\hat{k}}{\hat{k}}.$$

Podstawiając otrzymany wynik do (2.28) mamy:

$$\frac{d\hat{k}_r}{\hat{k}_r} = \frac{1}{\hat{S}} \cdot \frac{d\hat{k}}{\hat{k}}. \tag{2.29}$$

Porównując otrzymany wynik z (1.3) mamy:

$$\hat{S} = \hat{F}. \tag{2.30}$$

Otrzymany rezultat jest rezultatem przybliżonym ze względu na pominięcie przenoszenia bezpośredniego.

### *2.6.3. Ogólne wyrażenie na współczynnik spadku niestałości pracy*

Rozważmy przypadek ogólny. Wyrazimy $\hat{S}$ w funkcji parametrów sieci opisującej wzmacniacz zakładając jak poprzednio, że jedynym zmieniającym się parametrem jest $\hat{W}$.

$$\hat{S} = \frac{d \ln \hat{W}}{d \ln \hat{k}_r} = \frac{d\hat{W}}{\hat{W} d \ln \hat{k}_r}.$$

Obliczymy pochodną $\frac{d \ln \hat{k}_r}{d \hat{W}}$ wychodząc ze wzoru (2.21):

$$\hat{k}_r = \frac{D^0_{nm} + \hat{W} D_{nmji}}{\Delta^0 + \hat{W} D_{ji}} \hat{Z}_{0b}, \qquad \hat{Z}_{0b} = \text{const},$$

$$\ln \hat{k}_r = \ln (D^0_{mn} + \hat{W} D_{nmji}) + \ln \hat{Z}_{0b} - \ln (\Delta^0 + \hat{W} D_{ji}),$$

$$\frac{d \ln \hat{k}_r}{d\hat{W}} = \frac{D_{nmji}}{D^0_{nm} + \hat{W} D_{nmji}} - \frac{D_{ji}}{\Delta^0 + \hat{W} D_{ji}} = \frac{\Delta^0 D_{nmji} - D^0_{nm} D_{ji}}{(D^0_{nm} + W D_{nmji})(\Delta^0 + W D_{ji})}.$$

Przekształcając licznik jak w (2.4.4) mamy:

$$\frac{d \ln \hat{k}_r}{d\hat{W}} = -\frac{D_{ni} D_{jm}}{D_{nm} \Delta}.$$

Otrzymujemy więc ostatecznie:

$$\hat{S} = -\frac{1}{W} \cdot \frac{\Delta D_{nm}}{D_{ni} D_{jm}}. \tag{2.31}$$

Wzór te ma znaczenie raczej teoretyczne.

Rozważmy przypadek szczególny, gdy

$$\hat{k}_{r0} = 0.$$

Na podstawie (2.22) mamy wtedy:

$$D^0_{nm} = 0,$$

$$\frac{1}{\hat{S}} = \frac{\Delta^0 D_{nmji} - D^0_{nm} D_{ji}}{(D^0_{nm} + \hat{W} D_{nmji}) \Delta} \hat{W} = \frac{\Delta^0 D_{nmji}}{\hat{W} D_{nmji} \Delta} \hat{W} = \frac{1}{\hat{F}}.$$

Otrzymujemy więc:

$$\hat{S} = \hat{F}. \tag{2.30}$$

Współczynnik spadku niestałości pracy i współczynnik spadku wzmocnienia są równe dla każdego układu z elementem charakterystycznym $\hat{W}$, jeżeli sprowadzenie do zera tego elementu sprowadza do zera wzmocnienie układu. W tym przypadku przenoszenie bezpośrednie układu równe jest oczywiście zeru.

### *2.6.4. Związek między współczynnikiem spadku niestałości pracy a współczynnikiem spadku wzmocnienia*

Wyprowadzimy obecnie wzór ogólny wiążący $\hat{S}$ i $\hat{F}$ i przeprowadzimy jego dyskusję. Dotąd rozpatrywaliśmy współczynnik spadku niestałości pracy odniesiony do zmian wielkości $\hat{k}_r$. Obecnie dla uwzględnienia wpływu przenoszenia bezpośredniego wprowadzimy współczynnik spadku niestałości pracy odniesiony do różnicy $\hat{k}_r - \hat{k}_{r0}$, tzn. pomijający zmiany napięcia przechodzące członem $\beta$.

$$\hat{S}' = \frac{d \ln \hat{W}}{d \ln (\hat{k}_r - \hat{k}_{r0})}. \tag{2.32}$$

Przekształcając wzór:

$$\hat{k}_r - \hat{k}_{r0} = - \frac{\hat{W} D_{ni} D_{jm}}{\Delta^0 (\Delta^0 + \hat{W} D_{ji})} \hat{Z}_{ob} \tag{2.23}$$

jak w punkcie poprzednim otrzymujemy:

$$\frac{d \ln (\hat{k}_r - \hat{k}_{r0})}{d\hat{W}} = \frac{1}{\hat{W}} - \frac{D_{ji}}{\Delta^0 + \hat{W} D_{ji}} = \frac{1}{\hat{W} \hat{F}}.$$

Podstawiając otrzymany wynik do (2.32) mamy:

$$\hat{S}' = \hat{F}. \tag{2.33}$$

Współczynnik spadku niestałości pracy odniesiony do wielkości $\hat{k}_r - \hat{k}_{r0}$ równy jest współczynnikowi spadku wzmocnienia.

Na podstawie (2.33) i (2.32) mamy więc:

$$\hat{F} = \frac{1}{\hat{W}} \cdot \frac{d\hat{W}}{d \ln (\hat{k}_r - \hat{k}_{r0})} = \frac{d\hat{W}}{\hat{W}} \cdot \frac{\hat{k}_r - \hat{k}_{r0}}{d\hat{k}_r}$$

oraz na podstawie (2.28):

$$\hat{S} = \frac{1}{\hat{W}} \cdot \frac{d\hat{W}}{d \ln \hat{k}_r} = \frac{d\hat{W}}{\hat{W}} \cdot \frac{\hat{k}_r}{d\hat{k}_r}$$

Dzieląc te dwa równania stronami otrzymujemy wzór ostateczny:

$$\frac{\hat{F}}{\hat{S}} = 1 - \frac{\hat{k}_{r0}}{\hat{k}_r} \tag{2.34}$$

Wzór powyższy uzależnia od siebie $\hat{F}$ i $\hat{S}$ w przypadku ogólnym. Wynika z niego oczywiście

$$\hat{F} = \hat{S} \qquad \text{dla} \qquad \hat{k}_{r0} = 0.$$

### 2.6.5. *Szczególne przypadki związku współczynnika spadku niestałości pracy ze współczynnikiem spadku wzmocnienia*

Rozważymy teraz szczególne przypadki umiejscowienia w pętli zmieniającego się elementu $W$.

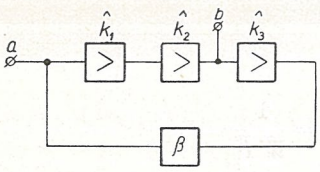
a. Zmiany dotyczą gałęzi $k$. Zwykle $k_r \gg k_{r0}$.

Na podstawie wzoru (2.34) otrzymujemy przybliżony wynik znany już z poprzednich rozważań:

$$\hat{S} \approx \hat{F}.$$

W szczególnym przypadku dla sprzężenia mostkowego zrównoważonego mamy $\hat{k}_{r0} = 0$ i $\hat{S} = \hat{F}$.

b. Zmiany dotyczą gałęzi $\beta$. W tym przypadku $\hat{k}_{r0} = \hat{k}$. Wynika to stąd, że rozpatrywany element charakterystyczny — lampa — znajduje się w gałęzi $\beta$ i zanik tego elementu likwiduje sprzężenie zwrotne.




Rys. 2-2. Schemat do wyznaczania współczynnika spadku niestałości pracy

Mamy więc $k_{r0} \gg k_r$ i $S \ll F$.

Rozpatrzymy przykład podany na rys. 2—2.

Załóżmy, że zmianom podlega element $k_3$ i że szukamy zmian napięcia w przekroju $b$:

$$\hat{k}_r' = \hat{k}_{r_{a-b}} = \frac{\hat{k}_1\hat{k}_2}{1 - \hat{k}_1\hat{k}_2\hat{k}_3\hat{\beta}} = \frac{\hat{k}_1\hat{k}_2}{1 + \hat{T}},$$

$\hat{k}_{r0}' = \hat{k}_1\hat{k}_2$ jest to wartość $\hat{k}_r'$ przy $\hat{k}_3 = 0$,

$$\frac{\hat{k}_{r0}}{\hat{k}_r} = 1 + \hat{T},$$

$$\frac{\hat{F}}{\hat{S}} = 1 - \frac{\hat{k}_{r0}}{\hat{k}_r} = -\hat{T},$$

$$\hat{S} = -\frac{\hat{F}}{\hat{T}} = -\frac{1 + \hat{T}}{\hat{T}}. \tag{2.35}$$

Otrzymaliśmy ciekawy wzór. Wynika z niego, że zmiany członu $\beta$ nie podlegają redukcji.

Jest to zresztą jasne fizycznie, gdyż przy silnym sprzężeniu zachodzi zależność:

$$\hat{k}_r = -\frac{1}{\beta}. \tag{2.36}$$

## 2.7. Współczynnik spadku oporności

### *2.7.1. Zagadnienia ogólne*

W rozdziale pierwszym podano już wzory na oporność wyjściową wzmacniacza ze sprzężeniem zwrotnym.

Obecnie stosując ogólną teorię sieci wyprowadzimy wzory ogólne wiążące oporność „widzianą" między dwoma dowolnymi punktami wzmacniacza ze sprzężeniem zwrotnym ze współczynnikami spadku wzmocnienia obliczonymi w pewnych specjalnych warunkach.

### 2.7.2. *Ogólne wyrażenie na oporność*

Dla wyznaczenia oporności włączamy umyślony generator w taki sposób, by nie zmienić warunków pracy układu i mierzymy stosunek odpowiedniego napięcia do prądu. Generator może być włączony w dwojaki sposób:

a. Szeregowo. W tym przypadku oporność wewnętrzna generatora musi być równa zeru. Mierzona oporność równa jest stosunkowi *s.em.*-nej generatora do sumy prądów z niego czerpanych.

b. Równolegle. W tym przypadku oporność wewnętrzna generatora musi być nieskończenie wielka. Mierzona oporność równa jest stosunkowi napięcia, jakie ustali się na wyjściu generatora, do prądu dawanego przez generator.

Rozważmy pierwszy przypadek. Załóżmy, że generator o *s.em.*-nej równej $\hat{U}_k$ i o zerowej oporności wewnętrznej włączamy w $k$-te oczko. Załóżmy ponadto dla uproszczenia, że równania ułożono w taki sposób, że przez generator przepływa tylko jeden prąd $\hat{I}_k$. Otrzymujemy wtedy następujące wyrażenie na mierzoną oporność:

$$\hat{Z} = \frac{\Delta}{D_{kk}}. \tag{2.37a}$$

Wzór powyższy można przekształcić w sposób następujący:

$$\hat{Z} = \frac{\Delta}{\Delta^0} \cdot \frac{\Delta^0}{D^0_{kk}} \cdot \frac{D^0_{kk}}{D_{kk}}.$$

Rozważmy znaczenie poszczególnych czynników.

$\frac{\Delta_0}{D^0_{kk}} = \hat{Z}_0$ jest to oczywiście oporność widziana przez generator w przypadku wyłączenia sprzężenia zwrotnego.

Znaczenie pozostałych dwóch czynników wynika z rozważań następujących. Załóżmy, że między zaciskami pomiarowymi włączona jest oporność $\hat{Z}'$. Oznaczając przez $\hat{F}(\hat{Z}')$ wartość różnicy zwrotnej obliczonej przy tym założeniu możemy napisać na podstawie wzoru (2.7):

$$\hat{F}(\hat{Z}') = \frac{\Delta(Z')}{\Delta^0(Z')} = \frac{\Delta(0) + Z'D_{kk}}{\Delta^0(0) + Z'D^0_{kk}}.$$

Zakładając, że $\hat{Z}' = 0$ (układ znajduje się w normalnych warunkach), mamy oczywiście

$$\hat{F}(0) = \hat{F} = \frac{\Delta}{\Delta^0}.$$

$\frac{\Delta}{\Delta_0} = \hat{F}(0)$ oznacza więc wartość różnicy zwrotnej obliczonej dla normalnych warunków pracy układu, a więc w przypadku, gdy zaciski pomiarowe są zwarte.

Zakładając, że $Z'$ dąży do nieskończoności mamy:

$$\lim_{Z' \to \infty} \hat{F}(Z') = \hat{F}(\infty) = \frac{D_{kk}}{D^0_{kk}}.$$

$\frac{D_{kk}}{D^0_{kk}}$ oznacza więc wartość różnicy zwrotnej obliczonej w przypadku, gdy zaciski pomiarowe są rozwarte.

Stosując powyższe oznaczenia otrzymujemy wzór następujący:

$$\hat{Z} = \hat{Z}_0 \frac{\hat{F}(0)}{\hat{F}(\infty)}. \tag{2.38}$$

Rozważmy drugi przypadek.

Wygodniej tu będzie posłużyć się równaniami potencjałów węzłowych. Załóżmy, że generator o wydajności prądowej $\hat{I}_k$ i oporności wewnętrznej nieskończenie wielkiej włączamy między $k$-ty węzeł a ziemię. Otrzymujemy wtedy następujące wyrażenie na przewodność:

$$\hat{Y} = \frac{\Delta'}{D'_{kk}} = \frac{\Delta'}{\Delta^{0'}} \cdot \frac{\Delta^{0'}}{D^{0'}_{kk}} \cdot \frac{D^{0'}_{kk}}{D'_{kk}}. \tag{2.37b}$$

$\frac{\Delta^{0'}}{D^{0'}_{kk}} = \hat{Y}_0$ jest to przewodność widziana przez generator w przypadku wyłączenia sprzężenia zwrotnego.

Znaczenie pozostałych czynników wynika z rozważań analogicznych do przeprowadzonych poprzednio. Jedynie $Z'$ należy zastąpić przewodnością włączoną między zaciskami pomiarowymi $Y'$.

$\frac{\Delta'}{\Delta^{0'}} = \hat{F}'(0)$ [1]) oznacza wartość różnicy zwrotnej obliczonej dla normalnych warunków pracy układu, a więc w przypadku, gdy zaciski pomiarowe są rozwarte: $Y' = 0$; $Z' = \infty$.

$\frac{D'_{kk}}{D^{0'}_{kk}} = \hat{F}'(\infty)$ oznacza wartość różnicy zwrotnej obliczonej w przypadku, gdy zaciski pomiarowe są zwarte: $Y' = \infty$; $Z' = 0$.
Stosując oznaczenia powyższe otrzymujemy wzór następujący:

[1]) Symbol w nawiasie odnosi się do $Y'$, a nie do $Z'$.

$$\hat{Y} = \hat{Y}_0 \frac{F'(0)}{F'(\infty)}.$$

Biorąc pod uwagę, że $\hat{F}'(0) = \hat{F}(\infty)$; $\hat{F}'(\infty) = \hat{F}(0)$; $\hat{Z} = \frac{1}{\hat{Y}}$ dochodzimy do wyniku otrzymanego poprzednio:

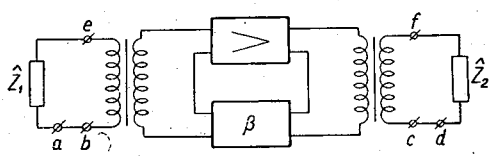
$$\hat{Z} = \hat{Z}_0 \frac{\hat{F}(0)}{\hat{F}(\infty)}. \tag{2.38}$$

Oporność „widziana" między dwoma dowolnymi punktami w układzie ze sprzężeniem zwrotnym równa jest iloczynowi oporności „widzianej" przy wyłączonym sprzężeniu przez stosunek dwóch różnic zwrotnych obliczonych kolejno przy zwarciu i rozwarciu tych punktów.

Zastosujemy powyższe twierdzenie do obliczenia oporności wejściowej i wyjściowej wzmacniaczy ze sprzężeniem zwrotnym, chociaż jest ono bardziej ogólne i dotyczy wszelkich oporności w układzie ze sprzężeniem zwrotnym.

### 2.7.3. *Sprzężenie zwrotne prądowe szeregowe*

Rozważmy wzmacniacz ze sprzężeniem dwustronnie szeregowym (szeregowym, prądowym). Schemat podano na rys. 2—3.




Rys. 2-3. Schemat do wyznaczania oporności wejściowej i wyjściowej układu prądowego szeregowego

a. Oporność wejściowa

Istnieją dwie możliwości obliczania oporności wejściowej:

1) na podstawie wzoru

$$\hat{Z}_{eb} = \frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_{we}}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_{we}},$$

$Z_{eb}$ oznacza tu oporność widzianą między zaciskami $e$ i $b$;

2) na podstawie wzoru

$$\hat{Z}_{ab} = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_{we}, \tag{2.39}$$

$Z_{ab}$ oznacza tu oporność widzianą między zaciskami $a$ i $b$. Wybieramy drugą możliwość, gdyż wtedy mamy:

$$\hat{F}(0) = \hat{F}_{nom} = \hat{F},$$

$\hat{F}(\infty) = 1$ — sprzężenie nie występuje [1]).

Otrzymujemy wzór

$$\hat{Z}_{ab} = \hat{Z}_{ab0}(1 - \hat{k}\hat{\beta}); \tag{2.40}$$

$Z_{ab0}$ jest to oporność „widziana" między zaciskami $a$ i $b$ przy przerwaniu pętli.

Przy zastosowaniu pierwszej możliwości $\hat{F}(0)$ i $\hat{F}(\infty)$ wyrażałoby się wzorami bardziej złożonymi.

b. Odporność wyjściowa.

W analogiczny sposób otrzymujemy

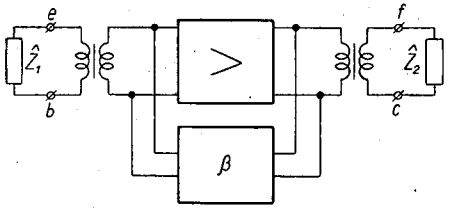
$$\hat{Z}_{cd} = \hat{Z}_2 + \hat{Z}_{wy}, \tag{2.41}$$

$$\hat{Z}_{cd} = \hat{Z}_{cd0}(1 - \hat{k}\hat{\beta}). \tag{2.42}$$

W rozdziale 3 zobaczymy, że wzory powyższe zawierają w sobie mniej ogólne zależności podane w rozdziale 1.

### 2.7.4. *Sprzężenie zwrotne równoległe napięciowe*

Rozważmy wzmacniacz ze sprzężeniem dwustronnie równoległym (równoległym, napięciowym). Schemat podano na rys. 2—4.




Rys. 2-4. Schemat do wyznaczania oporności wejściowej i wyjściowej układu napięciowego równoległego

a. Oporność wejściowa

Dla uzyskania prostego wzoru końcowego postąpimy przeciwnie niż w poprzednim przypadku:

$$\hat{Z}_{be} = \frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_{we}}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_{we}}, \tag{2.43}$$

$F(0) = 1$ — sprzężenie zwrotne nie występuje

$\hat{F}(\infty) = \hat{F}_{nom} = \hat{F}$.

Otrzymamy więc

$$\hat{Z}_{be} = \hat{Z}_{be0} \frac{1}{1 - \hat{k}\hat{\beta}}. \tag{2.44}$$

[1]) W powyższych i dalszych rozważaniach zakładamy, że transformatory są idealne.

b. Oporność wyjściowa

W analogiczny sposób otrzymujemy

$$\hat{Z}_{cf} = \frac{\hat{Z}_2 \hat{Z}_{wy}}{\hat{Z}_2 + \hat{Z}_{wy}}, \tag{2.45}$$

$$\hat{Z}_{cf} = \hat{Z}_{cf0} \frac{1}{1 - \hat{k}\hat{\beta}}. \tag{2.46}$$

W rozdziale 3 zobaczymy, że powyższe wzory zawierają w sobie mniej ogólne zależności podane w rozdziale 1.

### 2.7.5. *Sprzężenie zwrotne mostkowe*

W układach mostkowych zrównoważonych człon $\beta$ „nie widzi" oporności zewnętrznej (obciążenia lub źródła), z tego względu $\hat{F}(0) = \hat{F}(\infty)$

$$\hat{Z}_{we} = \hat{Z}_{we0}, \tag{2.47}$$

$$\hat{Z}_{wy} = \hat{Z}_{wy0}. \tag{2.48}$$

### 2.7.6. *Sprzężenie zwrotne kombinowane*

W układach kombinowanych (np. szeregowych, napięciowych) należy odpowiednio korzystać ze wzorów podanych wyżej (2.39) ÷ (2.48).

## 2.8. Stabilność i jej związek z różnicą zwrotną

Należy zaznaczyć, że zagadnienie stabilności jest zagadnieniem osobnym — obszernym i trudnym.

Zajmiemy się tu więc jedynie podstawowymi problemami zagadnienia stabilności i jej związkiem z różnicą zwrotną.

Z podstawowego wzoru teorii sprzężenia zwrotnego (1.1) wynika, że warunek wzbudzenia ma postać

$$\hat{k}\hat{\beta} = 1.$$

Powyższy warunek zespolony można rozbić na dwa rzeczywiste: warunek amplitudy

$$k\beta = 1,$$

warunek fazy

$$\arg \hat{k}\hat{\beta} = 0.$$

We wzmacniaczach z silnym sprzężeniem zwrotnym w środku pasma użytecznego warunek amplitudy jest spełniony, nie jest natomiast

spełniony warunek fazy — sprzężenie zwrotne jest „czysto ujemne": $\arg \hat{k}\hat{\beta} = 180°$. Na krańcach pasma ze względu na przesunięcia fazowe wprowadzone przez wzmacniacz warunek fazy może być spełniony. O stabilności wzmacniacza można więc sądzić na podstawie przebiegu charakterystyk

$$k\beta = f(f) \quad \text{i} \quad \arg \hat{k}\hat{\beta} = \varphi(f).$$

Ogólny warunek stabilności stanowi kryterium stabilności Nyquista: wzmacniacz jest stabilny, jeżeli krzywa biegunowa wektorów $\hat{k}\hat{\beta}$ w zakresie częstotliwości od zera do nieskończoności nie obejmuje punktu (1, 0). Wynika stąd, że badanie stabilności wzmacniacza wymaga zdjęcia charakterystyk częstotliwościowych — amplitudowej (wzmocnieniowej) i fazowej czwórnika utworzonego przez przecięcie pętli sprzężenia zwrotnego.

Pomiar fazy, zwłaszcza przy wyższych częstotliwościach, jest trudny i wielokrotne jego powtarzanie przy badaniu wzmacniacza byłoby bardzo kłopotliwe. Można jednak w początkowym stadium badań zdejmować jedynie charakterystykę amplitudową, a charakterystykę fazową obliczać na jej podstawie korzystając z ogólnych związków amplitudy i fazy, słusznych dla pewnej klasy czwórników.

Obliczenia takie są bardzo złożone i dlatego w praktyce opieramy się na zestawach charakterystyk. Najbardziej typowy zestaw charakterystyk ma wygląd następujący: faza dąży asymptotycznie do $-\frac{\pi}{2}$ l, gdy amplituda opada liniowo w skali logarytmicznej częstotliwości z nachyleniem 6l dB/okt.

Maksymalne dopuszczalne graniczne przesunięcie fazowe pętli wynosi 180°, a więc maksymalne nachylenie charakterystyki 12 dB/okt. W praktyce dla zapewnienia pewnego marginesu fazy dopuszcza się nachylenie 10 dB/okt (1,2 N/okt).

Jednostopniowy wzmacniacz *RC* charakteryzuje się nachyleniem 6 dB/okt oraz częstotliwością graniczną górną zależną od elementów *RC*. Trzystopniowy wzmacniacz z jednakowymi częstotliwościami granicznymi ma nachylenie 18 dB/okt. Dla zapewnienia nachylenia nie przekraczającego 10 dB/okt konieczne jest rozsunięcie częstotliwości granicznych stopni. Rozważania powyższe dotyczyły zakresu górnych częstotliwości. Sytuacja dla zakresu dolnych częstotliwości jest analogiczna.

Należy zwrócić uwagę, że o stabilności decyduje przebieg charakterystyki amplitudowej i fazowej pętli głównej.

Rozważania powyższe są bardzo uproszczone i mają charakter przybliżony.

Tablica 2 — 1

**Zestawienie ważniejszych wzorów ogólnej teorii sprzężenia zwrotnego**

| Lp. | Wzór | Rozdział | Uwagi |
|---|---|---|---|
| 1 | $\hat{F}_v = \frac{\Delta}{\Delta_v^0}$ | 2.3 | $\hat{F}_v$ — różnica zwrotna dla $v$-tej lampy<br>$\Delta$ — wyznacznik charakterystyczny układu równań<br>$\Delta_v^0$ — wyznacznik charakterystyczny obliczony w przypadku $K_{av} = 0$ |
| 2 | $\hat{k}_r - \hat{k}_{r0v} = \frac{\hat{k}_v}{\hat{F}_v}$ | 2.4 | $\hat{k}_r$ — wzmocnienie<br>$\hat{k}_{r0v}$ — przenoszenie bezpośrednie równe wzmocnieniu przy założeniu $K_{av} = 0$<br>$\hat{k}_v$ — wzmocnienie w przypadku wyłączenia pętli sprzężenia obejmujących lampę $v$-tą |
| 3 | $\hat{k}_r = \frac{\hat{k}_v}{\hat{F}_v}$, czyli $\hat{F}_{kv} = \hat{F}_v$ | 2.4 | wzory przybliżone słuszne przy $k_r \gg k_{r0}$<br>$\hat{F}_{kv}$ — współczynnik spadku wzmocnienia |
| 4 | $\hat{k}_r = \frac{D_{nm}}{\Delta}\hat{Z}_{ob}$ | 2.4 | wejście wzmacniacza — oczko $n$-te<br>wyjście wzmacniacza — oczko $m$-te<br>$D_{nm} = (-1)^{n+m}\Delta_{nm}$<br>$\Delta_{nm}$ — podwyznacznik utworzony z $\Delta$ przez skreślenie $n$-tego wiersza i $m$-tej kolumny<br>$\hat{Z}_{ob}$ — oporność obciążenia |
| 5 | $F_h = F_{kv}(n\omega)$ | 2.5 | $F_h$ — współczynnik spadku zawartości $n$-tej harmonicznej wytwarzanej przez $v$-tą lampę |
| 6 | $\frac{\hat{F}}{\hat{S}} = 1 - \frac{\hat{k}_{r0}}{\hat{k}_r}$ | 2.6 | $\hat{S}$ — uogólniony współczynnik spadku niestałości pracy |
| 7 | $\hat{F} = \hat{S}$ | 2.6 | wzór przybliżony słuszny przy $k_r \gg k_{r0}$ |

cd. tabl. 2—1

| Lp. | Wzór | Rozdział | Uwagi |
|---|---|---|---|
| 8 | $\hat{Z} = \hat{Z}_0 \frac{\hat{F}(0)}{\hat{F}(\infty)}$ | 2.7 | $\hat{Z}$ — oporność widziana między dwoma dowolnymi punktami<br>$\hat{Z}_0$ — oporność widziana między tymi punktami przy wyłączeniu sprzężenia zwrotnego<br>$\hat{F}(0)$ — różnica zwrotna obliczona przy zwartych zaciskach pomiarowych<br>$\hat{F}(\infty)$ — różnica zwrotna obliczona przy rozwartych zaciskach pomiarowych |

## 3. PARAMETRY PODSTAWOWYCH UKŁADÓW WZMACNIAJĄCYCH ZE SPRZĘŻENIEM ZWROTNYM

### 3.1. Zagadnienia ogólne

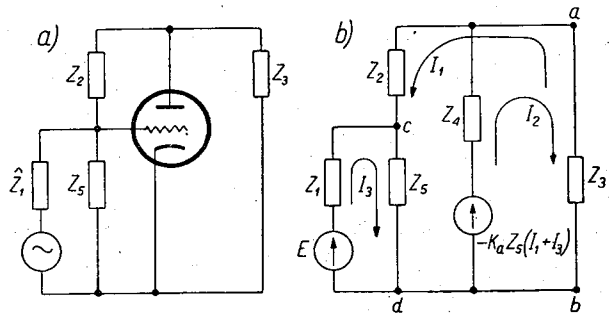
W rozdziale niniejszym zajmiemy się praktycznym zastosowaniem teorii omówionej w rozdziałach poprzednich. Rozpatrzymy podstawowe układy jednolampowe oraz kilka wielostopniowych. Stosować będziemy metodę wyznaczania parametrów wtórnych w oparciu o ogólną analizę sieci (omówioną w rozdziale 2) porównując jedynie uzyskane wyniki z otrzymywanymi w oparciu o klasyczną teorię sprzężenia zwrotnego. Dla rozpatrywanych układów wyznaczymy współczynnik spadku wzmocnienia, wzmocnienie, współczynnik spadku zniekształceń nieliniowych oraz oporność wejściową i wyjściową. Nie będziemy natomiast wyznaczać współczynnika spadku niestałości pracy, gdyż równy jest on w przybliżeniu odpowiedniemu współczynnikowi spadku wzmocnienia. Poza klasyczną metodą obliczania wyznaczników i rozwiązywania układów równań zastosujemy także rachunek krakowianów, który może być bardzo przydatny przy rozważaniu tych zagadnień.

### 3.2. Wzmacniacz jednostopniowy z równoległym sprzężeniem napięciowym

#### *3.2.1. Równania oczek i wyznacznik charakterystyczny*

Na podstawie rzeczywistego i zastępczego schematu układu (rys. 3—1) możemy, używając oznaczeń podanych na tych schematach, ułożyć następujące równanie oczek [1]):

[1]) W rozdziale niniejszym będziemy opuszczać dla uproszczenia „daszki" przy wielkościach zespolonych.




Rys. 3-1. Wzmacniacz jednostopniowy z równoległym sprzężeniem napięciowym a) schemat rzeczywisty; b) schemat zastępczy

$$\begin{aligned} I_1(Z_2+Z_3+Z_5) - I_2Z_3 + I_3Z_5 &= 0,\\ -I_1Z_3 + I_2(Z_3+Z_4) &= -K_aZ_5(I_1+I_3),\\ I_1Z_5 + I_3(Z_1+Z_5) &= E. \end{aligned}$$

Wyznacznik charakterystyczny układu ma więc postać:

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_2+Z_3+Z_5 & -Z_3 & Z_5 \\ K_aZ_5 - Z_3 & Z_3+Z_4 & K_aZ_5 \\ Z_5 & 0 & Z_1+Z_5 \end{vmatrix}$$

Obliczając ten wyznacznik, otrzymujemy następujące wyrażenie:

$$\Delta = (Z_2+Z_3+Z_5)(Z_3+Z_4)(Z_1+Z_5) - K_aZ_3Z_5^2 - Z_5^2(Z_3+Z_4) + (K_aZ_5 - Z_3)Z_3(Z_1+Z_5).$$

Przyjmując założenie:

$$Z_3 \ll Z_2+Z_5,$$
$$Z_3 \ll K_aZ_5,$$

spełnione zwykle w praktyce, otrzymujemy:

$$\Delta \approx (Z_1Z_2 + Z_2Z_5 + Z_5Z_1)(Z_3+Z_4) + K_aZ_1Z_3Z_5.$$

Zakładając $K_a = 0$ mamy:

$$\Delta^0 = (Z_1Z_2 + Z_2Z_5 + Z_5Z_1)(Z_3+Z_4).$$

### *3.2.2. Współczynnik spadku wzmocnienia*

Współczynnik spadku wzmocnienia obliczamy ze wzoru

$$F = \frac{\Delta}{\Delta^0}.$$

Mamy więc:

$$F = 1 + \frac{K_a Z_1 Z_3 Z_5}{(Z_1 Z_2 + Z_2 Z_5 + Z_5 Z_1)(Z_3 + Z_4)}. \tag{3.1a}$$

Przekształcając drugi składnik powyższego wzoru i wprowadzając oznaczenia:

$$k = -\frac{K_a Z_3}{Z_3 + Z_4},$$

$$\beta = \frac{Z'}{Z_2 + Z'}$$

$$Z' = \frac{Z_1 Z_5}{Z_1 + Z_5}$$

otrzymujemy wzór zgodny z ogólną teorią:

$$F = 1 - k\beta. \tag{3.1b}$$

Interpretacja fizyczna tego wzoru przy przyjętych oznaczeniach jest zupełnie jasna i nie wymaga wyjaśnień.

### 3.2.3. *Wzmocnienie*

Jak wiadomo z poprzednich rozważań, wzmocnienie w rozpatrywanym przypadku wyraża się wzorem:

$$k_r = \frac{(I_2 - I_1) Z_3}{E}.$$

Konieczne jest więc znalezienie wyrażeń na $I_2$ i $I_1$. Stosując rachunek wyznaczników możemy napisać:

$$I_2 - I_1 = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\Delta},$$

gdzie:

$\Delta$ — wyznacznik charakterystyczny,

$\Delta_1$, $_2$ — odpowiednie podwyznaczniki.

Np. podwyznacznik $\Delta_2$ ma postać następującą:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} Z_2 + Z_3 + Z_5 & 0 & Z_5 \\ K_a Z_5 - Z_3 & 0 & K_a Z_5 \\ Z_5 & E & Z_1 + Z_5 \end{vmatrix}.$$

Dokonując przekształceń algebraicznych i pomijając składniki małe w stosunku do pozostałych otrzymujemy:

$$k_r \approx -\frac{K_a Z_2 Z_3 Z_5}{\Delta} \tag{3.2a}$$

oraz

$$k_{r0} \approx 0.$$

Przekształcając powyższe wyrażenie i wprowadzając oznaczenia:

$$\gamma = \frac{Z''}{Z_1 + Z''},$$

$$Z'' = \frac{Z_2 Z_5}{Z_2 + Z_5}$$

otrzymujemy wzór następujący:

$$k_r = \gamma \frac{k}{F}. \tag{3.2b}$$

$\gamma$ jest, jak widać z powyższych wzorów, współczynnikiem przenoszenia członu wejściowego wynikającym z podziału *s.em.*-nej $E$ między oporniki $Z_1$ i równolegle połączone oporniki $Z_2$ i $Z_5$ (przy założeniu $Z_2 \gg Z_3$).

W przypadku silnego sprzężenia zwrotnego, tzn. gdy $|k\beta| \gg 1$, otrzymujemy

$$k_r = -\frac{\gamma}{\beta} = -\frac{Z_2}{Z_1}. \tag{3.2c}$$

### *3.2.4. Współczynnik spadku zniekształceń nieliniowych*

Z teorii przedstawionej w rozdziale 2 wynika, że współczynnik spadku zawartości $n$-tej harmonicznej wyraża się wzorem

$$F_h = F(n\omega).$$

Wyprowadzimy powyższą zależność bezpośrednio dla rozpatrywanego przypadku. Załóżmy, że w oczku *2* działa *s.em.* $n$-tej harmonicznej $E_h$ wywołująca na oporności obciążenia napięcie $U_h$ w przypadku wyłączenia sprzężenia zwrotnego, a $U_{hr}$ w warunkach normalnej pracy. Zakładamy ponadto, że $U_2 = \text{const}$ (częstotliwość podstawowa). Dlatego można przyjąć, że $E_h$ nie zależy od sprzężenia zwrotnego.

Możemy napisać równania następujące:

$$U_h = I_{2h}^0 Z_3,$$

$$U_{h_r} = I_{2h} Z_3,$$

$$I_2^0 = \frac{E_h}{\Delta^0},$$

$$I_2 = \frac{E_h}{\Delta}.$$

Wynika stąd równanie

$$\frac{h}{h_r} = \frac{U_h}{U_{h_r}} = \frac{I_{2h}^0}{I_{2h}} = \frac{\Delta}{\Delta^0} = F. \tag{3.3}$$

Otrzymaliśmy więc wynik zgodny z ogólną teorią.

### 3.2.5. *Oporność wyjściowa*

Oprzemy się tu na rozważaniach dotyczących oporności z rozdziału poprzedniego. Generator włączony między zaciski $a$ i $b$ „zobaczyłby" oporność $Z_{ab}$ wyrażoną wzorem:

$$Z_{ab} = \frac{Z_3 Z_{wy}}{Z_3 + Z_{wy}}.$$

Dla wyznaczenia $Z_{ab}$ skorzystamy ze wzoru (2.46):

$$Z_{ab} = \frac{Z_{ab0}}{F}.$$

Podstawiając do tego wzoru wyrażenie otrzymane na $F$ i $Z_{ab0} = Z_3 \| Z_4 \| Z_2 + Z'$ otrzymujemy po dokonaniu prostych przekształceń

$$Z_{wy} = \frac{Z_4}{1 + K_a \beta}. \tag{3.4}$$

Otrzymany wynik jest identyczny z podanym w rozdz. 1.

### 3.2.6. *Oporność wejściowa*

Postępujemy analogicznie jak w punkcie poprzednim. Generator włączony między zaciski $c$ i $d$ przy zwartej *s.em.*-nej $E$ „zobaczyłby" oporność $Z_{cd}$ wyrażoną wzorem

$$Z_{cd} = \frac{Z_1 Z_{we}}{Z_1 + Z_{we}}.$$

Dla wyznaczenia $Z_{cd}$ skorzystamy ze wzoru (2.44):

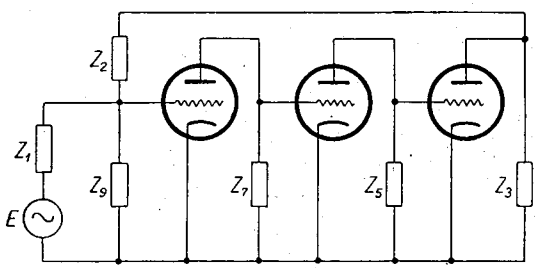
$$Z_{cd} = \frac{Z_{cd0}}{F}.$$

Podstawiając do tego wzoru wyrażenia na $F$ i $Z_{cd0}$ otrzymujemy po dokonaniu prostych przekształceń:

$$Z_{we} = \frac{Z''}{1 - k\beta}. \tag{3.5}$$

### 3.3. Wzmacniacz trzystopniowy z równoległym sprzężeniem napięciowym

Schemat wzmacniacza podano na rys. 3—2. Obliczając wyznacznik charakterystyczny układu $\Delta$ i zakładając kolejno $K_{a1} = 0$; $K_{a2} = 0$; $K_{a3} = 0$ otrzymalibyśmy $\Delta_1^0 = \Delta_2^0 = \Delta_3^0$ Oznacza to, że obojętne jest miejsce przerwania pętli, co wynika stąd, że układ posiada tylko jedną pętlę sprzężenia, do której wchodzą wszystkie trzy stopnie. Dlatego wzory na parametry dla tego układu można uzyskać bezpośrednio ze wzorów dla układu poprzedniego zastępując w nich $K_a$ przez iloczyn $k_1\ k_2\ K_{a3}$. Wzory te podane są w tablicy 3—1.




Rys. 3-2. Wzmacniacz trzystopniowy z równoległym sprzężeniem napięciowym

### 3.4. Wmacniacz jednostopniowy z szeregowym sprzężeniem prądowym (katodowym)

#### *3.4.1. Równanie oczek i wyznacznik charakterystyczny*

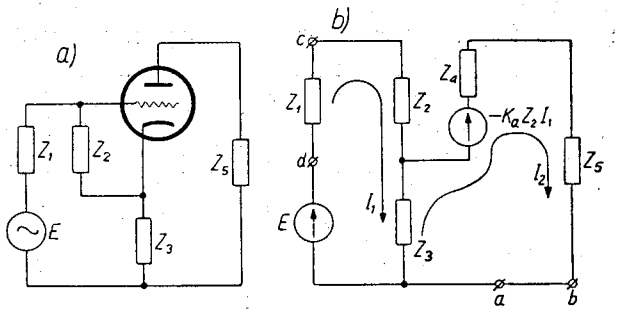
Na podstawie rzeczywistego i zastępczego schematu układu (rys. 3—3) możemy, używając oznaczeń podanych na tych schematach, ułożyć następujące równania oczek:

$$I_1(Z_1 + Z_2 + Z_3) - I_2 Z_3 = E,$$

$$-I_1 Z_3 + I_2(Z_3 + Z_4 + Z_5) = -K_a I_1 Z_2.$$

Wyznacznik charakterystyczny ma postać:

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_1 + Z_2 + Z_3 & -Z_3 \\ K_a Z_2 - Z_3 & Z_3 + Z_4 + Z_5 \end{vmatrix}.$$




Rys. 3-3. Wzmacniacz jednostopniowy z szeregowym sprzężeniem prądowym: a) schemat rzeczywisty, b) schemat zastępczy

Jeżeli $Z_2 \to \infty$ (założenie zwykle słuszne w praktyce dla dostatecznie małych częstotliwości), to $\Delta \to \infty$, ale $\frac{\Delta}{Z_2}$ ma granicę $\Delta'$.

$$\Delta' = \lim \frac{\Delta}{Z_2} = \lim \begin{vmatrix} \frac{Z_1 + Z_3}{Z_2} + 1 & -Z_3 \\ K_a - \frac{Z_3}{Z_2} & Z_3 + Z_4 + Z_5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -Z_3 \\ K_a & Z_3 + Z_4 + Z_5 \end{vmatrix}.$$

W dalszym ciągu zamiast $\Delta'$ będziemy pisać $\Delta$. Otrzymujemy następujące wyrażenie na $\Delta$:

$$\Delta = Z_3 + Z_4 + Z_5 + K_a Z_3.$$

Zakładając $K_a = 0$ mamy

$$\Delta^0 = Z_3 + Z_4 + Z_5.$$

### 3.4.2. *Współczynnik spadku wzmocnienia*

Współczynnik spadku wzmocnienia obliczamy jak poprzednio ze wzoru $F = \frac{\Delta}{\Delta^0}$. Mamy więc wyrażenie następujące:

$$F = 1 + \frac{K_a Z_3}{Z_3 + Z_4 + Z_5}. \tag{3.6a}$$

Podamy teraz interpretację fizyczną powyższego wzoru. Przekształcając drugi składnik otrzymujemy:

$$\frac{K_a Z_3}{Z_3 + Z_4 + Z_5} = \frac{K_a (Z_3 + Z_5)}{Z_3 + Z_4 + Z_5} \cdot \frac{Z_3}{Z_3 + Z_5} = -k\beta .$$

Pierwszy czynnik oznacza całkowite wzmocnienie członu wzmacniającego z przeciwnym znakiem $-k$ (całkowity opór obciążenia lampy wynosi $Z_3 + Z_5$), drugi — współczynnik przenoszenia członu sprzężenia zwrotnego $\beta$. Stosując wprowadzone oznaczenia otrzymujemy zgodnie z teorią ogólną:

$$F = 1 - k\beta. \tag{3.6b}$$

Można też podać bezpośrednią interpretację wzoru (3.6a). Stosunek napięcia występującego na oporniku $Z_3$ i przenoszącego się elektrostatycznie na siatkę *do s.em.*-nej działającej w obwodzie anodowym i wywołującej to napięcie wynosi

$$\frac{Z_3}{Z_3 + Z_4 + Z_5}.$$

Iloczyn tej wielkości przez współczynnik amplifikacji lampy $K_a$ równy jest stosunkowi zwrotnemu $T = -k\beta$.

Podamy jeszcze uproszczony wzór dla pentod:

$$F = 1 + S_a Z_k, \tag{3.6c}$$

gdzie $Z_k = Z_3$, a $S_a$ jest nachyleniem charakterystyki.

### 3.4.3. *Wzmocnienie*

Dla rozpatrywanego układu oprócz wzmocnienia całkowitego $k$ wprowadza się wzmocnienie użyteczne $k_u$ określone jako stosunek napięcia na oporniku $Z_5$ do *s.em.*-nej wejściowej $E$. W rozpatrywanym przypadku mamy:

$$k_{ur} = \frac{\Delta_2}{\Delta} Z_5 .$$

Obliczając $\Delta_2$ otrzymujemy następujące wyrażenie:

$$k_{ur} = -\frac{K_a Z_5}{Z_3 + Z_4 + Z_5 + K_a Z_3} \tag{3.7a}$$

oraz

$$k_{ur0} = 0.$$

Wprowadzając oznaczenie

$$k_u = -\frac{K_a Z_5}{Z_3 + Z_4 + Z_5}$$

(wzmocnienie użyteczne bez sprzężenia zwrotnego) i korzystając z (3.6) możemy uzyskać następujące wyrażenie:

$$k_{ur} = \frac{k_u}{F}. \tag{3.7b}$$

Podamy jeszcze uproszczony wzór dla pentod:

$$k_{ru} = -\frac{S_a Z_a}{1 + S_a Z_k}, \tag{3.7c}$$

w którym $Z_a = Z_5$, a inne oznaczenia jak w (3.6c).

### 3.4.4. *Współczynnik spadku zniekształceń nieliniowych*

Z teorii rozpatrzonej w rozdziale 2 wynika wzór

$$F_h = F(n\omega).$$

Wzór ten można sprawdzić bezpośrednio jak w 3.2.4.

### 3.4.5. *Oporność wyjściowa*

Postąpimy tu analogicznie jak w 3.2.5.

Generator włączony między zaciski $a$ i $b$ „zobaczyłby" oporność $Z_{ab}$ wyrażoną wzorem

$$Z_{ab} = Z_{wy} + Z_5.$$

Dla wyznaczenia $Z_{ab}$ skorzystamy ze wzoru

$$Z_{ab} = Z_{ab0} F.$$

Podstawiając $Z_{ab0} = Z_3 + Z_4 + Z_5$ i korzystając z (3.6) otrzymujemy wyrażenia

$$Z_{wy} = Z_3 + Z_4 + K_a Z_3 \tag{3.8a}$$

lub

$$Z_{wy} \approx \varrho_a (1 + S_a Z_k), \tag{3.8b}$$

gdzie

$$\varrho_a = Z_4,$$
$$Z_k = Z_3.$$

### 3.4.6. *Oporność wejściowa*

Obwody wejściowe wzmacniaczy stosowanych w praktyce różnią się od obwodu wejściowego wzmacniacza z rys. 3—3. Zamiast dwójnika o *s.em.*-nej $E$ i oporności $Z_1$ występuje dwójnik utworzony z równoległego połączenia dwójnika o *s.em.*-nej $E'$ i oporności $Z'_1$ z dwójnikiem o oporności $Z''_1$. Stosując regułę Thevenina łatwo wykazać, że dwójniki te są równoważne, gdy zachodzą związki:

$$Z_1 = \frac{Z'_1 Z''_1}{Z'_1 + Z''_1} \qquad \text{oraz} \qquad E = E' \frac{Z''_1}{Z'_1 + Z''_1}.$$

Dla określenia oporności wejściowej należy wyznaczyć oporność widzianą pomiędzy punktami $c$ i $d$ przy zwartej *s.em*-nej $E'$ (rys. 3—3b).

Na podstawie wzoru (2.38) możemy napisać:

$$Z_{cd} = Z_{cd0} \frac{F(0)}{F(\infty)} = Z_1,$$

gdyż

$$Z_{cd0} = Z_1$$

oraz

$$F(0) = F(\infty) = F.$$

Wynika stąd, że $F$ nie zależy od $Z_1$. Mamy stąd:

$$Z_{we} = Z''_1. \tag{3.9}$$

Oporność wejściowa nie zależy więc od sprzężenia zwrotnego. Zjawisko to można fizycznie wytłumaczyć w sposób następujący. W oczku *1* prąd nie płynie, gdyż $Z_2 = \infty$. Na oporniku $Z_1$ nie występuje spadek napięcia, a więc jego oporność nie wpływa na $F$. Wynika stąd, że $F(0) = F(\infty)$.

## 3.5. Wzmacniacz trzystopniowy ze sprzężeniem prądowym szeregowym przez opornik katodowy

### 3.5.1. *Równania oczek i wyznacznik charakterystyczny*

Na podstawie rzeczywistego i zastępczego schematu układu (rys. 3—4) możemy używając oznaczeń podanych na tych schematach ułożyć następujące równania oczek:

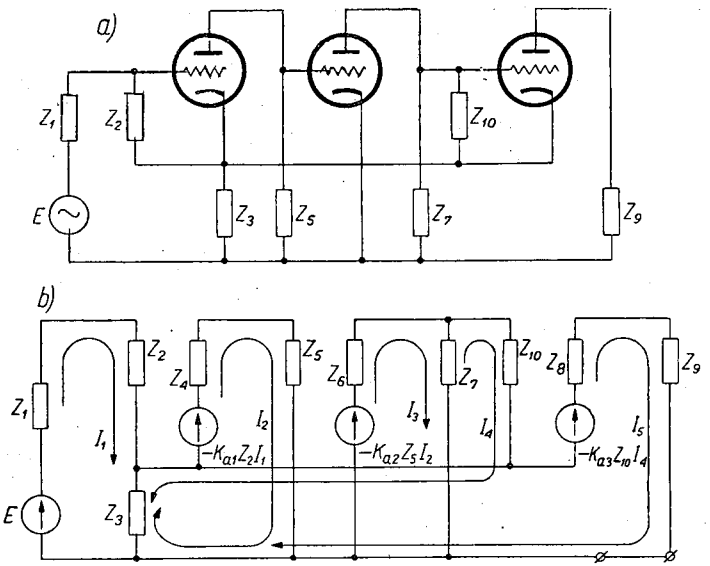
$$\begin{aligned}
I_1(Z_1 + Z_2 + Z_3) - I_2 Z_3 + I_4 Z_3 - I_5 Z_3 &= E,\\
-I_1 Z_3 + I_2(Z_3 + Z_4 + Z_5) - I_4 Z_3 + I_5 Z_3 &= -K_{a1} Z_2 I_1,\\
I_3(Z_6 + Z_7) - I_4 Z_7 &= -K_{a2} Z_5 I_2,\\
I_1 Z_3 - I_2 Z_3 - I_3 Z_7 + I_4(Z_3 + Z_7 + Z_{10}) - I_5 Z_3 &= 0,\\
-I_1 Z_3 + I_2 Z_3 - I_4 Z_3 + I_5(Z_3 + Z_8 + Z_9) &= -K_{a3} Z_{10} I_4.
\end{aligned}$$

Wyznacznik charakterystyczny układu ma więc postać:

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_1+Z_2+Z_3 & -Z_3 & 0 & Z_3 & -Z_3 \\ K_{a1}Z_2-Z_3 & Z_3+Z_4+Z_5 & 0 & -Z_3 & Z_3 \\ 0 & K_{a2}Z_5 & Z_6+Z_7 & -Z_7 & 0 \\ Z_3 & -Z_3 & -Z_7 & Z_3+Z_7+Z_{10} & -Z_3 \\ -Z_3 & Z_3 & 0 & K_{a3}Z_{10}-Z_3 & Z_3+Z_8+Z_9 \end{vmatrix}.$$

Dzieląc $\Delta$ przez $Z_2 \cdot Z_{10}$ i przechodząc do granicy jak w punkcie poprzednim otrzymamy:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & -Z_3 & 0 & 0 & -Z_3 \\ K_{a1} & Z_3+Z_4+Z_5 & 0 & 0 & Z_3 \\ 0 & K_{a2}Z_5 & Z_6+Z_7 & 0 & 0 \\ 0 & -Z_3 & -Z_7 & 1 & -Z_3 \\ 0 & Z_3 & 0 & K_{a3} & Z_3+Z_8+Z_9 \end{vmatrix}.$$




Rys. 3-4 Wzmacniacz trzystopniowy ze sprzężeniem prądowym przez wspólny opornik katodowy a) schemat rzeczywisty, b) schemat zastępczy

W dalszym ciągu zamiast $\Delta'$ będziemy pisać $\Delta$.

Wyznaczymy obecnie $\Delta$ przy pomocy rachunku krakowianów. Dla porównania w przypisie B podajemy pełne wyprowadzenie wzoru na $\Delta$ metodą klasyczną.

Na podstawie tablicy A1 możemy napisać

$$h_{11} = 1; \quad h_{12} = K_{a1}; \quad h_{13} = h_{14} = h_{15} = 0;$$

$$g_{12} = -Z_3; \quad g_{13} = g_{14} = 0; \quad g_{15} = -Z_3;$$

$$h_{22} = Z_3 + Z_4 + Z_5 + K_{a1}Z_3; \quad h_{23} = K_{a2}Z_5; \quad h_{24} = -Z_3;$$

$$h_{25} = Z_3;$$

$$g_{23} = 0; \quad g_{24} = 0; \quad g_{25} = \frac{K_{a1}Z_3 + Z_3}{Z_3 + Z_4 + Z_5 + K_{a1}Z_3};$$

$$h_{33} = Z_6 + Z_7; \quad h_{34} = -Z_7; \quad h_{35} = 0; \quad g_{34} = 0;$$

$$g_{35} = -\frac{K_{a2}Z_5}{Z_6 + Z_7} \cdot \frac{K_{a1}Z_3 + Z_3}{Z_3 + Z_4 + Z_5 + K_{a1}Z_3};$$

$$h_{44} = 1; \quad h_{45} = K_{a3};$$

$$g_{45} = -Z_3 + \frac{K_{a1}Z_3^2 + Z_3^2}{Z_3 + Z_4 + Z_5 + K_{a1}Z_3} - \frac{K_{a2}Z_5Z_7}{Z_6 + Z_7} \cdot \frac{K_{a1}Z_3 + Z_3}{Z_3 + Z_4 + Z_5 + K_{a1}Z_3};$$

$$h_{55} \approx Z_3 + Z_8 + Z_9 + K_{a3}Z_3 - \frac{K_{a1}Z_3^2 + K_{a1}K_{a3}Z_3^2}{Z_3 + Z_4 + Z_5 + K_{a1}Z_3} +$$

$$+ \frac{K_{a1}K_{a2}K_{a3}Z_3Z_5Z_7}{(Z_6 + Z_7)(Z_3 + Z_4 + Z_5 + K_{a1}Z_3)};$$

$$h_{22}h_{55} \approx (Z_3 + Z_4 + Z_5 + K_{a1}Z_3)(Z_3 + Z_8 + Z_9 + K_{a3}Z_3) +$$

$$+ \frac{K_{a1}K_{a2}K_{a3}Z_3Z_5Z_7}{Z_6 + Z_7};$$

$$\Delta = h_{11}h_{22}h_{33}h_{44}h_{55} = (Z_3 + Z_4 + Z_5 + K_{a1}Z_3)(Z_6 + Z_7)(Z_3 + Z_8 + Z_9 + K_{a3}Z_3) +$$

$$+ K_{a1}K_{a2}K_{a3}Z_5Z_7Z_3.$$

Otrzymane na $\Delta$ wyrażenie nie jest symetryczne względem $K_{a1}$, $K_{a2}$, $K_{a3}$. Zakładając kolejno $K_{a1}$, $K_{a2}$, $K_{a3} = 0$ otrzymujemy trzy wartości wyznacznika $\Delta^0$, a mianowicie:

$$\Delta_1^0 = (Z_3 + Z_4 + Z_5)(Z_6 + Z_7)(Z_3 + Z_8 + Z_9 + K_{a3}Z_3),$$

$$\Delta_2^0 = (Z_3 + Z_4 + Z_5 + K_{a1}Z_3)(Z_6 + Z_7)(Z_3 + Z_8 + Z_9 + K_aZ_3),$$

$$\Delta_3^0 = (Z_3 + Z_4 + Z_5 + K_{a1}Z_3)(Z_6 + Z_7)(Z_3 + Z_8 + Z_9).$$

### 3.5.2. *Współczynnik spadku wzmocnienia*

Obliczymy $F_1$, $F_2$, $F_3$ i podamy ich interpretację fizyczną.

$$F_2 = 1 + \frac{K_{a1}Z_5}{Z_3 + Z_4 + Z_5 + K_{a1}Z_3} \cdot \frac{K_{a2}Z_7}{Z_6 + Z_7} \cdot \frac{K_{a3}Z_3}{Z_3 + Z_8 + Z_9 + Z_3K_{a3}}, \tag{3.10a}$$

$$F_2 = 1 - k_{r1}k_2k_{r3}\beta_g, \tag{3.10b}$$

$$F_1 = 1 + \frac{K_{a1}Z_3}{Z_3 + Z_4 + Z_5} \cdot \frac{K_{a2}Z_7}{Z_6 + Z_7} \cdot \frac{K_{a3}Z_3}{Z_3 + Z_8 + Z_3 + Z_3K_{a3}} + \frac{K_{a1}Z_3}{Z_3 + Z_4 + Z_5}, \tag{3.11a}$$

$$F_1 = 1 - k_1k_2k_{r3}\beta_g - k_1\beta_{l1}. \tag{3.11b}$$

Analogicznie otrzymujemy wyrażenie na $F_3$:

$$F_3 = 1 - k_{r1}k_2k_3\beta_g - k_3\beta_{l3}, \tag{3.12}$$

$$F_1 = F_2 \cdot F_{l1}. \tag{3.13}$$

Istotnie

$$(1 - k_{r1}k_2k_{r3}\beta_g)(1 - k_1\beta_{l1}) = (1 - k_1\beta_{l1}) - (1 - k_1\beta_{l1})k_{r1}k_2k_{r3}\beta_g = \\ = 1 - k_1k_2k_{r3}\beta_g - k_1\beta_{l1};$$

analogicznie

$$F_3 = F_2F_{l3}. \tag{3.14}$$

Oczywiście także

$$F_2 = F_2F_{l2} = F_2, \tag{3.15}$$

gdyż $F_{l2} = 1$.

Zastosowano następujące oznaczenia:

$$\frac{K_{a1}Z_5}{Z_3 + Z_4 + Z_5} = -k_1,$$

$$\frac{K_{a2}Z_7}{Z_6 + Z_7} = -k_2,$$

$$\frac{K_{a3}Z_3}{Z_9 + Z_8 + Z_3 + K_{a3}Z_3} = -k_{r3}\beta_g,$$

$$\frac{K_{a1}Z_5}{Z_4 + Z_5 + Z_3 + K_{a1}Z_3} = -k_{r1}$$

[na podstawie (3.6) i (3.7)],

$$\frac{K_{a3}Z_3}{Z_9 + Z_8 + Z_3} = -k_3\beta_g = -k_3\beta_{l3},$$

$$\frac{K_{a1}Z_3}{Z_3 + Z_4 + Z_5} = -k_1\beta_{l1}.$$

Wzory (3.10) ÷ (3.15) można interpretować opierając się na wynikach rozdz. 3.4 w sposób następujący.

Po przerwaniu pętli na anodzie drugiej lampy i przyłożeniu napięcia przejdzie ono przez trzeci stopień wzmacniacza z włączonym sprzężeniem lokalnym ($k_{r3}$), przez dzielnik napięcia pętli głównej sprzężenia zwrotnego ($\beta_g$), przez pierwszy stopień wzmacniacza z włączonym sprzężeniem zwrotnym ($k_{r1}$) i przez drugi stopień wzmacniacza ($k_2$) dojdzie do anody lampy drugiej zgodnie ze wzorem (3.10).

Po przerwaniu pętli na anodzie pierwszej lampy i przyłożeniu napięcia przejdzie ono z powrotem na anodę tej lampy dwoma drogami: pętlą główną przez drugi stopień ($k_2$), przez trzeci stopień ze sprzężeniem ($k_{r3}$), przez dzielnik napięcia pętli głównej sprzężenia zwrotnego ($\beta_g$) i przez pierwszy stopień z wyłączonym sprzężeniem ($k_1$), oraz pętlą lokalną pierwszego stopnia przez dzielnik napięcia pętli lokalnej ($\beta_{l1}$) i pierwszy stopień z wyłączonym sprzężeniem ($k_1$) zgodnie ze wzorem (3.11). Analogicznie można interpretować wzór (3.12).

Wzór (3.13) wynika z następujących stwierdzeń:

a) $F_2$ jest to spadek wzmocnienia odniesiony do stanu, gdy włączone są sprzężenia lokalne pierwszego i trzeciego stopnia;

b) $F_1$ jest to spadek wzmocnienia odniesiony do stanu, gdy włączone jest tylko sprzężenie lokalne trzeciego stopnia;

c) $F_{l1}$ jest to spadek wzmocnienia wywołany sprzężeniem lokalnym pierwszego stopnia.

Podamy jeszcze uproszczone wzory dla pentod:

$$F_2 = 1 + \frac{S_{a1}Z_5}{1 + S_{a1}Z_3} S_{a2}Z_7 \frac{S_{a3}Z_3}{1 + S_{a3}Z_3}, \qquad (3.10c)$$

$$F_1 = 1 + S_{a1}Z_5S_{a2}Z_7 \frac{S_{a3}Z_3}{1 + S_{a3}Z_3} + S_{a1}Z_3, \qquad (3.11c)$$

$$F_3 = 1 + \frac{S_{a1}Z_5}{1 + S_{a1}Z_3} S_{a2}Z_7 \cdot S_{a3}Z_3 + S_{a3}Z_3. \qquad (3.12b)$$

### 3.5.3. *Wzmocnienie*

Rozpatrzymy wzmocnienie użyteczne wzmacniacza w przypadku występowania sprzężenia zwrotnego $k_{ur}$. Dla uproszczenia pomijać będziemy indeks $u$.

Do znalezienia wyrażenia na wzmocnienie trzeba wyznaczyć podwyznacznik $\Delta_{15}$. Po wykonaniu przekształceń uzyskujemy następujące wyrażenie na wzmocnienie:

$$k_r = -\frac{K_{a1}K_{a2}K_{a3}Z_5Z_7Z_9}{\left[\begin{array}{c}(Z_3+Z_4+Z_5+K_{a1}Z_3)(Z_6+Z_7)(Z_3+Z_8+Z_9+K_{a3}Z_3)+\\ +K_{a1}K_{a2}K_{a3}Z_3Z_5Z_7\end{array}\right]}. \tag{3.16a}$$

Stosując poprzednie oznaczenia oraz oznaczenie

$$k_{r3} = -\frac{K_{a3}Z_9}{Z_3+Z_8+Z_9+K_{a3}Z_3}$$

możemy powyższe wyrażenie przedstawić w postaci

$$k_r = \frac{k_{r1}k_2k_{r3}}{F_2}. \tag{3.16b}$$

Stosując wzory (3.13) i (3.14) uzyskujemy następujące wyrażenia:

$$k_r = \frac{k_{r1}k_2k_3}{F_3}, \tag{3.16c}$$

$$k_r = \frac{k_1k_2k_{r3}}{F_1}. \tag{3.16d}$$

W przypadku silnego sprzężenia zwrotnego otrzymujemy:

$$k_r \approx -\frac{1}{\beta_g}.$$

$\beta_g$ wyznaczamy ze wzoru następującego:

$$\frac{1}{\beta_g} = \frac{k_{r3}}{k_{r3}\beta_g} - \frac{-\dfrac{K_{a3}Z_9}{Z_3+Z_8+Z_9+K_{a1}Z_3}}{-\dfrac{K_{a3}Z_3}{Z_3+Z_8+Z_9+K_{a1}Z_3}} = \frac{Z_9}{Z_3}.$$

Otrzymujemy więc ostatecznie:

$$k_r \approx -\frac{Z_9}{Z_3}. \tag{3.17}$$

### 3.5.4. *Współczynnik spadku zniekształceń nieliniowych*

Na podstawie rozważań poprzednich możemy napisać:

$$F_h = F_3 = F_2F_{l3}. \tag{3.18}$$

Harmoniczne są więc redukowane w stosunku iloczynu współczynnika spadku wzmocnienia pętli głównej $F_2$ i współczynnika spadku wzmocnienia pętli lokalnej stopnia trzeciego $F_{l3}$.

### 3.5.5. *Oporność wyjściowa*

Postępując analogicznie jak w 3.4.5. uzyskujemy wzory następujące:

$$Z_{wy} = Z_3 + Z_8 + k_{r1}k_2K_{a3}Z_3 \tag{3.19a}$$

lub

$$Z_{wy} = Z_8(1 + k_{r1}k_2S_{a3}Z_3). \tag{3.19b}$$

Wzory te są uproszczone, gdyż pominięto przy ich wyprowadzaniu sprzężenia lokalne wobec sprzężenia głównego.

### 3.5.6. *Oporność wejściowa*

Można wykazać, że podobnie jak w przypadku wzmacniacza jednostopniowego oporność wejściowa nie ulega zmianie przy zastosowaniu sprzężenia zwrotnego.

## 3.6. Wzmacniacz trzystopniowy z szeregowym sprzężeniem prądowym za pośrednictwem czwórnika sprzęgającego

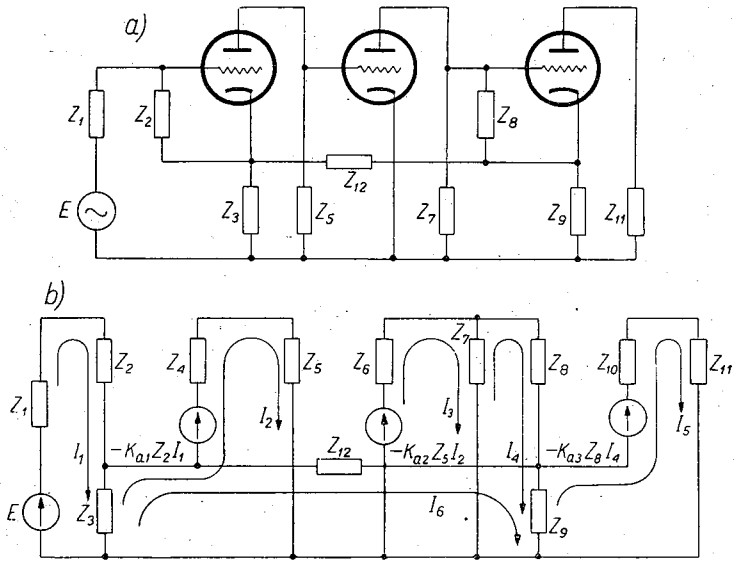
### 3.6.1. *Równania oczek i wyznacznik charakterystyczny*

Na podstawie rzeczywistego i zestępczego schematu układu (rys. 3—5) możemy używając oznaczeń podanych na tych schematach ułożyć następujące równania oczek:

$$\begin{aligned}
&I_1(Z_1 + Z_2 + Z_3) - I_2Z_3 - I_6Z_3 = E,\\
&I_1(K_{a1}Z_2 - Z_3) + I_2(Z_3 + Z_4 + Z_5) + I_6Z_3 = 0,\\
&I_2K_{a2}Z_5 + I_3(Z_6 + Z_7) - I_4Z_7 = 0.\\
&-I_3Z_7 + I_4(Z_7 + Z_8 + Z_9) - I_5Z_9 + I_6Z_9 = 0,\\
&I_4(K_{a3}Z_8 - Z_9) + I_5(Z_9 + Z_{10} + Z_{11}) - I_6Z_9 = 0,\\
&-I_1Z_3 + I_2Z_3 + I_4Z_9 - I_5Z_9 + I_6(Z_3 + Z_9 + Z_{12}) = 0.
\end{aligned}$$

Wyznacznik charakterystyczny tego układu ma postać: $\Delta =$

$$\begin{vmatrix}
Z_1 + Z_2 + Z_3 & -Z_3 & 0 & 0 & 0 & -Z_3\\
K_{a1}Z_2 - Z_3 & Z_3 + Z_4 + Z_5 & 0 & 0 & 0 & Z_3\\
0 & K_{a2}Z_5 & Z_6 + Z_7 & -Z_7 & 0 & 0\\
0 & 0 & -Z_7 & Z_7 + Z_8 + Z_9 & -Z_9 & Z_9\\
0 & 0 & 0 & K_{a3}Z_8 - Z_9 & Z_9 + Z_{10} + Z_{11} & -Z_9\\
-Z_3 & Z_3 & 0 & Z_9 & -Z_9 & Z_3 + Z_9 + Z_{12}
\end{vmatrix}$$




Rys. 3-5. Wzmacniacz trzystopniowy ze sprzężeniem prądowym za pośrednictwem czwórnika sprzęgającego: a) schemat rzeczywisty, b) schemat zastępczy

Dzieląc $\Delta$ przez $Z_2$ i $Z_8$ i przechodząc do granicy otrzymujemy:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & -Z_3 & 0 & 0 & 0 & -Z_3 \\ K_{a1} & Z_3+Z_4+Z_5 & 0 & 0 & 0 & +Z_3 \\ 0 & K_{a2}Z_5 & Z_6+Z_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Z_7 & 1 & -Z_9 & Z_9 \\ 0 & 0 & 0 & K_{a3} & Z_9+Z_{10}+Z_{11} & -Z_9 \\ 0 & Z_3 & 0 & 0 & -Z_9 & Z_3+Z_9+Z_{12} \end{vmatrix}.$$

W dalszym ciągu zamiast $\Delta'$ będziemy pisać $\Delta$.

Wyprowadzenie wzoru na $\Delta$ metodą krakowianów analogiczne do wyprowadzenia podanego w punkcie poprzednim podajemy w przypisie B2.

Ostateczny wzór ma postać:

$$\Delta = (Z_3+Z_4+Z_5+K_{a1}Z_3)(Z_6+Z_7)(Z_3+Z_9+Z_{12})(Z_9+Z_{10}+Z_{11}+K_{a3}Z_9) + \\ + K_{a1}K_{a2}K_{a3}Z_3Z_5Z_7Z_9.$$

Obliczenie $\Delta$ przy pomocy rachunku krakowianów może być przeprowadzone bezpośrednio, bez stosowania wzorów tablicy A1. Schemat obliczenia podamy w 3.6.4.

Otrzymane wyrażenie na $\Delta$ nie jest symetryczne względem $K_{a1}$, $K_{a2}$, $K_{a3}$. Zakładając kolejno $K_{a1}$, $K_{a2}$, $K_{a3} = 0$ otrzymamy trzy wartości $\Delta^0 : \Delta_1^0$, $\Delta_2^0$, $\Delta_3^0$;

$$\Delta_1^0 = (Z_3 + Z_4 + Z_5)(Z_6 + Z_7)(Z_3 + Z_9 + Z_{12})(Z_9 + Z_{10} + Z_{11} + K_{a3}Z_9),$$

$$\Delta_2^0 = (Z_3 + Z_4 + Z_5 + K_{a1}Z_3)(Z_6 + Z_7)(Z_3 + Z_9 + Z_{12})(Z_9 + Z_{10} + Z_{11} + K_{a3}Z_9),$$

$$\Delta_3^0 = (Z_3 + Z_4 + Z_5 + K_{a1}Z_3)(Z_6 + Z_7)(Z_3 + Z_9 + Z_{12})(Z_9 + Z_{10} + Z_{11}).$$

### 3.6.2. *Współczynnik spadku wzmocnienia*

Obliczymy $F_1$, $F_2$ i $F_3$ i podamy ich interpretację fizyczną.

$$F_2 = 1 + \frac{K_{a1}Z_5}{Z_3 + Z_4 + Z_5 + K_{a1}Z_3} \cdot \frac{K_{a2}Z_7}{Z_6 + Z_7} \cdot \frac{K_{a3}Z_9}{Z_9 + Z_{10} + Z_{11} + K_{a3}Z_9} \times \times \frac{Z_3}{Z_3 + Z_9 + Z_{12}}, \tag{3.20a}$$

$$F_2 = 1 - k_{r1}k_2k_{r3}\beta_g, \tag{3.20b}$$

$$F_1 = 1 + \frac{K_{a1}Z_5}{Z_3 + Z_4 + Z_5} \cdot \frac{K_{a2}Z_7}{Z_6 + Z_7} \cdot \frac{K_{a3}Z_9}{Z_9 + Z_{10} + Z_{11} + K_{a3}Z_9} \cdot \frac{Z_3}{Z_3 + Z_9 + Z_{12}} + + \frac{K_{a1}Z_3}{Z_3 + Z_4 + Z_5}, \tag{3.21a}$$

$$F_1 = 1 - k_1k_2k_{r3}\beta_g - k_1\beta_{l1}. \tag{3.21b}$$

Analogicznie otrzymujemy wyrażenie na $F_3$:

$$F_3 = 1 - k_{r1}k_2k_3\beta_g - k_3\beta_{l3}. \tag{3.22}$$

Słuszne są również wzory:

$$F_1 = F_2F_{l1}, \tag{3.23}$$

$$F_3 = F_2F_{l3}. \tag{3.24}$$

W powyższych wzorach zastosowano następujące oznaczenia:

$$\frac{K_{a1}Z_5}{Z_3 + Z_4 + Z_5} = -k_1; \qquad \frac{K_{a1}Z_5}{Z_3 + Z_4 + Z_5 + K_{a1}Z_3} = -k_{r1};$$

$$\frac{K_{a2}Z_7}{Z_6 + Z_7} = -k_2; \qquad \frac{K_{a3}Z_9}{Z_9 + Z_{10} + Z_{11}} \cdot \frac{Z_3}{Z_3 + Z_9 + Z_{12}} = -k_3\beta_g;$$

$$\frac{K_{a3}Z_9}{Z_9 + Z_{10} + Z_{11}} = -k_3\beta_{l3}; \qquad \frac{K_{a1}Z_3}{Z_3 + Z_4 + Z_5} = -k_1\beta_{l1};$$

$$\frac{K_{a3}Z_9}{Z_9+Z_{10}+Z_{11}+K_{a3}Z_9}\cdot\frac{Z_3}{Z_3+Z_9+Z_{12}}=-k_{r3}\beta_g.$$

Interpretacje fizyczne wzorów (3.20) ÷ (3.24) są analogiczne jak w 3.5. Zmianie ulega jedynie wyrażenie na $\beta$. Dochodzi w nim czynnik

$$\beta'_g=\frac{Z_3}{Z_3+Z_9+Z_{12}},$$

który przedstawia przenoszenie czwórnika sprzęgającego.

Uproszczone wzory dla pentod mają postać analogiczną jak w 3.5.

### *3.6.3. Wzmocnienie*

Obliczenie wzmocnienia sprowadza się do znalezienia prądu $I_5$ w zależności od siły elektromotorycznej $E$.

Zagadnienie rozwiążemy metodą krakowianów. Krakowian współczynników $\underline{a}$ ma postać identyczną z wyznacznikiem układu równań. Dlatego też wartości współczynników $g$ i $h$ rozkładu tego krakowianu są identyczne z obliczonymi w przypisie B2. Krakowian wyrazów wolnych ma postać:

$$\underline{b}=\begin{Bmatrix}E\\0\\0\\0\\0\\0\end{Bmatrix}.$$

Współczynniki krakowianu $\underline{b}$ znajdujemy wg tablicy A-2 w sposób następujący:

$$b'_1=E;$$

$$b'_2=-\frac{K_{a1}E}{Z_3+Z_4+Z_5K_{a1}Z_3};$$

$$b'_3=\frac{K_{a2}Z_5}{Z_6+Z_7}\cdot\frac{K_{a1}E}{Z_3+Z_4+Z_5+K_{a1}Z_3};$$

$$b'_4=Z_7\frac{K_{a2}Z_5}{Z_6+Z_7}\cdot\frac{K_{a1}E}{Z_3+Z_4+Z_5+K_{a1}Z_3};$$

$$b'_5 = -\frac{K_{a3}Z_7}{Z_9+Z_{10}+Z_{11}+K_{a3}Z_9}\cdot\frac{K_{a2}Z_5}{Z_6+Z_7}\cdot\frac{K_{a1}E}{Z_3+Z_4+Z_5+K_{a1}Z_3} =$$

$$= k_{r1}k_2k_{r3}\frac{E}{Z_{11}};$$

$$b'_6 = \frac{Z_9}{Z_3+Z_9+Z_{12}-k_{r1}k_2k_{r3}\beta_{13}Z_3}\,k_{r1}k_2k_{r3}\frac{E}{Z_{11}} = \beta'_g\frac{k_{r1}k_2k_{r3}}{F_2}\cdot\frac{E}{Z_{11}}.$$

Zastosowano tu oznaczenia poprzednie oraz

$$k_{r3} = -\frac{K_{a3}Z_{11}}{Z_9+Z_{10}+Z_{11}+K_{a3}Z_9}.$$

Niewiadome $I_6$ i $I_5$ odpowiadające $x_6$ i $x_5$ znajdujemy wg tablicy A-2 w sposób następujący: $I_6 = b'_6$.

$$I_5 = k_{r1}k_2k_{r3}\frac{E}{Z_{11}} + k_{r1}k_2k_{r3}\beta_{13}\frac{Z_9}{Z_3+Z_9+Z_{12}}\cdot\frac{k_{r1}k_2k_{r3}}{F_2}\cdot\frac{E}{Z_{11}} =$$

$$= k_{r1}k_2k_{r3}\frac{E}{Z_{11}}\left(1+\frac{k_{r1}k_2k_{r3}\beta_g}{1-k_{r1}k_2k_{r3}\beta_g}\right) = \frac{k_{r1}k_2k_{r3}}{F_2}\cdot\frac{E}{Z_{11}}.$$

Otrzymaliśmy ostatecznie:

$$k_r = \frac{k_{r1}k_2k_{r3}}{F_2}. \tag{3.25a}$$

Na podstawie (3.23) i (3.24) możemy napisać:

$$k_r = \frac{k_1k_2k_{r3}}{F_1}, \tag{3.25b}$$

$$k_r = \frac{k_{r1}k_2k_3}{F_3}. \tag{3.25c}$$

W przypadku silnego sprzężenia zwrotnego mamy:

$$k_r \approx -\frac{1}{\beta_g},$$

$$\frac{1}{\beta_g} = \frac{k_{r3}}{k_{r3}\beta_g} = \frac{-\dfrac{K_{a3}Z_{11}}{Z_9+Z_{10}+Z_{11}+K_{a3}Z_9}}{-\dfrac{K_{a3}Z_9}{Z_9+Z_{10}+Z_{11}+K_{a3}Z_9}\cdot\dfrac{Z_3}{Z_3+Z_9+Z_{12}}} =$$

$$= \frac{Z_{11}}{Z_9}\cdot\frac{Z_3+Z_9+Z_{12}}{Z_3},$$

$$k_r = -\frac{Z_{11}}{Z_9}\cdot\frac{Z_3+Z_9+Z_{12}}{Z_3}. \tag{3.26}$$

*3.6.4. Bezpośrednia metoda znajdowania współczynnika spadku wzmocnienia i wzmocnienia w zastosowaniu do rozpatrywanego układu*

Bezpośrednia metoda znajdowania współczynnika spadku wzmocnienia i wzmocnienia w zastosowaniu do rozpatrywanego układu polega na rozkładzie krokowianu współczynników i wyrazów wolnych układu równań na czynniki trójkątne przy pomocy schematu Hausbrandta.

Dalsze postępowanie sprowadza się przy znajdowaniu wyrażenia na spadek wzmocnienia do obliczenia iloczynu wszystkich $h_{ii}$, a przy znajdowaniu wzmocnienia do wykonania odpowiedniego dzielenia.

W rozpatrywanym przypadku dokonujemy mnożenia dwóch następujących krakowianów:

$$\begin{Bmatrix} \underline{a} & \underline{b} \\ \underline{g} & \underline{b'} \end{Bmatrix} = \left\{\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & -Z_3 & 0 & 0 & 0 & -Z_3 & E \\ K_{a1} & Z_3+Z_4+Z_5 & 0 & 0 & 0 & Z_3 & 0 \\ 0 & K_{a2}Z_5 & Z_6+Z_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Z_7 & 1 & -Z_9 & Z_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{a3} & Z_9+Z_{10}+Z_{11} & -Z_9 & 0 \\ 0 & Z_3 & 0 & 0 & -Z_9 & Z_3+Z_9+Z_{12} & 0 \\ \hline 1 & g_{12} & g_{13} & g_{14} & g_{15} & g_{16} & b'_1 \\ 0 & 1 & g_{23} & g_{24} & g_{25} & g_{26} & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & g_{34} & g_{35} & g_{36} & b'_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & g_{45} & g_{46} & b'_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & g_{56} & b'_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b'_6 \end{array}\right\}$$

$$\begin{Bmatrix} \tau \\ \underline{h} \end{Bmatrix} = \left\{\begin{array}{cccccc} I & II & III & IV & V & VI \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} & h_{15} & h_{16} \\ 0 & h_{22} & h_{23} & h_{24} & h_{25} & h_{26} \\ 0 & 0 & h_{33} & h_{34} & h_{35} & h_{36} \\ 0 & 0 & 0 & h_{44} & h_{45} & h_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{55} & h_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{66} \end{array}\right\}$$

Wyniki przyrównujemy do zera i obliczamy współczyniki $g$, $h$, $b'$. Kolejność postępowania jest następująca:

a) mnożąc kolejno kolumnę *1* przez kolumny *I, II ... VI* i wyniki przyrównując do zera znajdujemy $h_{11}$, $h_{12}$ ... $h_{16}$,

b) mnożąc kolejno kolumnę *I* przez kolumny *2, 3, ... 7* znajdujemy $g_{12}$, $g_{13}$, ... $g_{16}$, $b'_1$,

c) mnożąc kolejno kolumnę *2* przez kolumny *II, III, ... VI* znajdujemy $h_{22}$ ... $h_{26}$,

d) mnożąc kolejno kolumnę *II* przez kolumny *3, 4, ... 7* znajdujemy $g_{23}$ ... $g_{26}$, $b'_2$.

Postępując dalej wg wskazanej kolejności znajdujemy pozostałe współczynniki $h$ i $g$, oraz $b'$.

Następnie obliczamy $\Delta = h_{11}h_{22}h_{33}h_{44}h_{55}h_{66}$. Prąd $I_5$ występujący w wyrażeniu na wzmocnienie znajdujemy mnożąc $\tau\underline{x} = \{I_1 I_2 I_3 I_4 I_5 I_6\}$ kolejno przez wiersze $g$ i przyrównując wyniki z odpowiednimi współczynnikami $b'$.

Mamy:

$$I_6 = b'_6,$$
$$I_5 + I_6 g_{56} = b'_5.$$

Oczywiście wyniki otrzymane tą metodą są takie same jak otrzymane w przypisie B2 i w rozdz. 3.6.3. Dlatego też pomijamy szczegółowe obliczenia.

Metoda bezpośrednia nie wymaga żadnych wzorów obliczeniowych, co stanowi jej poważną zaletę.

### *3.6.5. Współczynnik spadku zniekształceń nieliniowych*

Analogicznie jak w 3.5.4. mamy:

$$F_h = F_3 = F_3 F_{l3}. \tag{3.27}$$

### *3.6.6. Oporność wyjściowa*

Można wykazać, że oporność wyjściowa wyraża się wzorem analogicznym do (3.23):

$$Z_{wyr} \approx Z_{10}(1 + k_{r1} k_2 \beta'_g S_{a3} Z_9). \tag{3.28}$$

### *3.6.7. Oporność wejściowa*

Można wykazać, że podobnie jak w dwóch poprzednich przykładach oporność wejściowa nie ulega zmianie przy zastosowaniu sprzężenia zwrotnego.

## 3.7. Wmacniacz z transformatorem w pętli

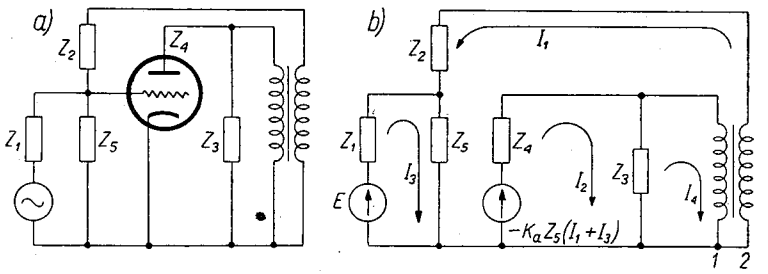
### *3.7.1. Zagadnienia ogólne*

W układach wzmacniających stosowanych w praktyce występują często transformatory. Transformatory te mogą wchodzić w skład pętli sprzężenia zwrotnego, lub też mogą do niej nie wchodzić. W pierwszym przypadku konieczne jest uwzględnianie ich przy układaniu równań. W drugim przypadku wystarczy często zastąpienie oporności generatora lub odbiornika odpowiednią opornością przeniesioną. Dla wskazania metody postępowania rozpatrzymy prosty wzmacniacz z transformatorem w pętli. Dla porównania będzie to wzmacniacz rozpatrywany w rozdziale 3.2 z dodanym transformatorem.

### *3.7.2. Równania oczek i wyznacznik charakterystyczny*

Na podstawie rzeczywistego i zastępczego schematu układu (rys. 3—6) możemy używając oznaczeń podanych na tych schematach ułożyć następujące równania oczek:

$$\begin{aligned}
I_1(jX_2 + Z_2 + Z_5) &+ I_3 Z_5 &- I_4 jX_{12} &= 0,\\
I_1 K_a Z_5 &+ I_2(Z_3 + Z_4) + I_3 K_a Z_5 &- I_4 Z_3 &= 0,\\
I_1 Z_5 &+ I_3(Z_1 + Z_5) &&= E,\\
-I_1 jX_{12} &- I_2 Z_3 &I_4(Z_3 + jX_1) &= 0.
\end{aligned}$$




Rys. 3-6. Wzmacniacz z transformatorem w pętli: a) schemat rzeczywisty, b) schemat zastępczy

Wyznacznik charakterystyczny układu ma więc postać:

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_2 + Z_5 + jX_2 & 0 & Z_5 & -jX_{12} \\ K_a Z_5 & Z_3 + Z_4 & K_a Z_5 & -Z_3 \\ Z_5 & 0 & Z_1 + Z_5 & 0 \\ -jX_{12} & -Z_3 & 0 & Z_3 + jX_1 \end{vmatrix},$$

gdzie:

$jX_1$ i $jX_2$ — odpowiednio oporności własne transformatora w czkach *1* i *2*,

$jX_{12}$ — oporność oddziaływania między oczkami *1* i *2*.

Przyjmując założenia upraszczające:

a) gałąź sprzężenia zwrotnego nie obciąża lampy (jak w 3.2),

b) transformator ma właściwie dobrane oporności $X_1$, $X_2$, tzn. że nie działają one bocznikująco,

c) współczynnik sprzężenia bliski jest jedności $X_{12} \approx \sqrt{X_1 X_2}$

otrzymujemy następujące przybliżone wyrażenie na $\Delta$:

$$\Delta = (Z_1 + Z_5)(Z_3 + Z_4)\left\{jX_1(Z_2 + Z') + \frac{K_a Z_3 jX_{12} Z'}{Z_3 + Z_4}\right\},$$

$$Z' = \frac{Z_1 Z_5}{Z_1 + Z_5} \quad \text{(jak w 3.2).}$$

Przy układaniu powyższych równań założono, że oba uzwojenia transformatora mają ten sam kierunek nawinięcia. Jeżeli kierunki nawinięć są przeciwne, to zamiast $X_{12}$ należy podstawić $-X_{12}$.

Zakładając $K_a = 0$ mamy:

$$\Delta^0 = (Z_1 + Z_5)(Z_3 + Z_4)\, jX_1(Z_2 + Z').$$

### *3.7.3. Współczynnik spadku wzmocnienia*

Współczynnik spadku wzmocnienia obliczamy jak poprzednio. Wprowadzając założenie podane w punkcie c) i stosując oznaczenie $p = \sqrt{\frac{X_2}{X_1}}$ mamy:

$$F = 1 + \frac{K_a Z_3}{Z_3 + Z_4} \cdot \frac{Z'}{Z_2 + Z'} p; \tag{3.29}$$

Otrzymany wzór jest podobny do wzoru (3.1). Różnica polega na tym, że teraz

$$\beta = \frac{Z'}{Z_2 + Z'} p;$$

$p$ jest przekładnią transformatora.

Jeżeli kierunki nawinięć obu uzwojeń transformatora są różne, otrzymamy wzór:

$$F = 1 - \frac{K_a Z_3}{Z_3 + Z_4} \cdot \frac{Z'}{Z_2 + Z'} p. \tag{3.30}$$

Mamy teraz do czynienia z dodatnim sprzężeniem zwrotnym.

Inne parametry rozpatrywanego układu otrzymamy zamieniając we wzorach rozdziału 3.2

$$\frac{Z'}{Z_2 + Z'} \quad \text{na} \quad \frac{Z'}{Z_2 + Z'} p.$$

## 3.8. Porównanie omówionych układów

### *3.8.1. Kryteria porównania układów wzmacniaczy ze sprzężeniem zwrotnym*

Układy ze sprzężeniem zwrotnym mogą być porównywane z różnych punktów widzenia. Kryteria porównywania mogą być takie same jak podane w rozdziale 1 kryteria podziału. Możemy np. porównywać wzmacniacze z napięciowym i prądowym sprzężeniem ze względu np. na ich oporność wyjściową. Zagadnienia te zostały omówione w przypadkach ogólnych w rozdziałach 1 i 2.

Obecnie zajmiemy się porównaniem bardziej skomplikowanych układów stosowanych w praktyce w urządzeniach telefonii nośnej.

Wielkością określającą wymagane sprzężenie zwrotne jest zadana zawartość harmonicznych. Znając zniekształcenia nieliniowe dawane przez lampę końcową przy danej mocy wyjściowej możemy określić wymagany współczynnik spadku zniekształceń nieliniowych. Stabilność wzmacniacza zależy od współczynnika spadku wzmocnienia pętli głównej. Jak widzieliśmy z podanych przykładów, współczynnik spadku wzmocnienia pętli głównej nie musi być równy współczynnikowi spadku zniekształceń nieliniowych.

Będzie to jeden punkt widzenia naszego porównania. Z drugiej strony podstawowe znaczenie dla stabilności ma przebieg współczynnika spadku wzmocnienia pętli głównej na krańcach pasma przenoszonego w funkcji częstotliwości. Zależy to oczywiście od kształtu funkcji określającej współczynnik spadku wzmocnienia pętli głównej.

Będzie to drugi punkt widzenia naszego porównania.

### *3.8.2. Układy z pętlą jednokrotną i układy z pętlą wielokrotną*

Przy założeniu, że źródłem zniekształceń nieliniowych jest ostatnia lampa, zachodzi zależność

$$F_h = F_3. \tag{3.31}$$

Rozważmy dwa układy: wzmacniacz trzystopniowy ze sprzężeniem przez trzy stopnie oraz wzmacniacz trzystopniowy ze sprzężeniem przez trzy stopnie i sprzężeniem lokalnym w trzecim stopniu.

W pierwszym układzie

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_g. \tag{3.32}$$

Współczynnik spadku zawartości harmonicznych równy jest współczynnikowi spadku wzmocnienia pętli głównej

$$F_h = F_g. \tag{3.33}$$

Wkład tego typu rozważono w rozdz. 3.3.

W drugim układzie

$$F_1 \neq F_2 \neq F_3 \tag{3.34}$$

$$F_2 = F_g \tag{3.35}$$

Na podstawie związków podanych poprzednio możemy napisać:

$$F_h = F_3 = F_2 F_{l3} > F_g.$$

W układach tego typu współczynnik spadku zawartości harmonicznych jest większy od współczynnika spadku wzmocnienia pętli głównej, a więc wymagany spadek zawartości harmonicznych można uzyskać przy mniejszym współczynniku spadku wzmocnienia pętli głównej, czyli przy większej stabilności układu.

Układy tego typu rozważono w rozdziałach 3.5 i 3.6.

### *3.8.3. Układy anodowe i układy katodowe*

Wyrażenie na stosunek zwrotny układów anodowych (sprzężenie równoległe napięciowe) zawiera iloczyn oporności obciążenia wszystkich trzech stopni. Wynika stąd, że nachylenie wzmocnienia dla dużych częstotliwości wynosi przy równych wielkościach oporności anodowych 18 dB/okt. Dla uzyskania dopuszczalnego nachylenia 12 dB/okt trzeba rozsunąć częstotliwości graniczne poszczególnych stopni, co może być dokonane przez zmniejszenie jednej z oporności anodowych, a więc kosztem wzmocnienia.

Drugą cechą takiego układu jest to, że oporności transformatorów wejściowego i wyjściowego wchodzą bezpośrednio do pętli. Układ tego typu rozpatrzono w punkcie 3.4.

Wyrażenie na stosunek zwrotny układów katodowych zawiera iloczyn tylko dwóch oporności anodowych i oporności katodowej. Dzięki temu, że oporność katodowa jest z reguły znacznie mniejsza od opor-

ności anodowych, częstotliwość graniczna ostatniego stopnia jest przesunięta i nie jest potrzebne zmniejszenie jednej z oporności anodowych. Transformatory wejściowy i wyjściowy nie wchodzą w zasadzie do pętli. Jednak transformator wyjściowy może mieć wpływ przy częstotliwościach rezonansów równoległych, gdyż wtedy jego oporność staje się współmierna z opornością wewnętrzną lampy i oddziałuje na prąd. Układy tego typu rozważono w rozdziałach 3.5 i 3.6.

Z powyższego porównania widać wyraźnie, że przewagę mają układy katodowe, posiadające siłą rzeczy sprzężenie zwrotne w trzecim stopniu.

## 4. PORÓWNANIE METOD WYZNACZANIA PARAMETRÓW WZMACNIACZA ZE SPRZĘŻENIEM ZWROTNYM

### 4.1. Zagadnienia ogólne

W niniejszej pracy przedstawiono dwie główne metody wyznaczania parametrów wzmacniaczy ze sprzężeniem zwrotnym oraz dwa warianty matematyczne drugiej metody.

Scharakteryzujemy krótko te metody i przeprowadzimy ich porównanie. Podamy również krótkie charakterystyki niektórych innych metod.

### 4.2. Metoda bezpośrednia

Metodę bezpośrednią omówiono w rozdziale 1. Parametry wzmacniacza ze sprzężeniem zwrotnym wyznacza się tu na podstawie parametrów, jakimi charakteryzuje się ten wzmacniacz przy wyłączonym sprzężeniu oraz na podstawie współczynnika sprzężenia zwrotnego równego przenoszeniu pętli i charakteryzującego samo sprzężenie. Do określenia współczynnika sprzężenia zwrotnego konieczne jest rozbicie rozpatrywanego wzmacniacza na dwa człony: $k$ i $\beta$. W praktyce, zwłaszcza w układach katodowych, podział wzmacniacza na takie człony jest trudny do przeprowadzenia. Obliczenie wzmocnienia bez sprzężenia zwrotnego $k$ jest również skomplikowane, gdyż sprzężenie zwrotne musi być przerwane w taki sposób, aby nie zmieniły się warunki pracy źródła (np. wzmacniacz z równoległym sprzężeniem napięciowym rozpatrzony w rozdz. 3.1.). Ogranicza to oczywiście ogólność metody.

Wyznaczanie pozostałych parametrów wtórnych jest już tylko konsekwencją obliczenia parametrów pierwotnych $k$ i $\beta$ lub — nawet więcej — podstawowego parametru wtórnego współczynnika spadku wzmocnienia $1 - k\beta$.

Reasumując: metoda powyższa jest mało ogólna i wymaga w wielu przypadkach indywidualnego rozpatrywania typowych układów. Daje ona wyniki uproszczone, gdyż np. z reguły pomija się w niej przenoszenia bezpośrednie za pośrednictwem członu $\beta$. Zaletą metody jest natomiast prostota obliczeń przy zastosowaniu pewnych uproszczeń i w odniesieniu do prostych układów.

Inną zaletą jest logiczna definicja współczynnika sprzężenia zwrotnego oparta na sprzężeniu jako na przyczynie wywołującej zmianę pierwotnych parametrów wzmacniacza.

Literatura: [2[, [7], [10], [15], [17].

### 4.3. Metoda analizy sieci i jej matematyczne warianty

Metodę tę omówiono w rozdziale 2. Wzmacniacz przedstawiamy tu w postaci sieci elektrycznej nie wyróżniając członów $k$ i $\beta$. Parametry takiej sieci charakteryzują w zupełności wzmacniacz ze sprzężeniem zwrotnym. Dla rozpatrywanej sieci definiujemy pewien współczynnik $F$ nazywany różnicą zwrotną. Jak wykazano, jest on równy współczynnikowi spadku wzmocnienia. Wzmocnienia wyznaczamy bezpośrednio z parametrów sieci. Znajomość wzmocnienia bez sprzężenia nie jest wcale potrzebna. Pozostałe parametry wtórne są — jak wykazano — prostymi funkcjami współczynnika spadku wzmocnienia.

Metoda ta jest zupełnie ogólna i stosuje się do wszystkich układów ze sprzężeniem zwrotnym. Może być również uogólniona na układy złożone wyłącznie z elementów dwukierunkowych (bez lamp). Wyniki otrzymane przy pomocy tej metody są zupełnie ścisłe, lecz właśnie dlatego ich interpretacja fizyczna może być trudna.

Pod względem logicznym metoda poprzednia jest bardziej poprawna. Tutaj punktem wyjścia nie jest przyczyna zmian, lecz sama zmiana, a mianowicie współczynnik zmiany wzmocnienia.

Obliczenia są dość skomplikowane i sprowadzają się do wyznaczania wartości wyznaczników niekiedy wysokiego stopnia. W stosunkowo prostych układach rozpatrzonych w rozdz. 3 stopień wyznacznika charakterystycznego dochodził do 6. Możliwe jest uproszczenie obliczeń przez stosowanie pewnych metod obliczeniowych.

W rozdziale 3 rozpatrzono również metodę krakowianów w zastosowaniu do wyznaczania parametrów wtórnych. Metoda ta nie wnosi nic nowego pod względem elektrycznym, a zmienia jedynie technikę rachunkową. Ilość obliczeń nie ulega specjalnemu zmniejszeniu, są one natomiast znacznie prostsze. Wzory są symetryczne i mniejsza jest możliwość pomyłki. Metoda krakowianów znajduje zastosowanie zarówno

przy obliczaniu współczynnika spadku wzmocnienia, jak i przy obliczaniu wzmocnienia.

Stosowanie metody krakowianów nie jest celowe przy wyznacznikach czwartego stopnia i niższych i przy układach pięciu i mniej równań.

Podstawowe twierdzenia z rachunku krakowianów podano w przypisie A2.

Literatura: [3], [8], [12].

Metoda ta może być stosowana również do układów tranzystorowych, co przekracza ramy niniejszej pracy ([20], [25]).

### 4.4. Metoda czwórnikowo-szóstnikowa

Metoda czwórnikowo-szóstnikowa przyjmuje za punkt wyjścia podział wzmacniacza ze sprzężeniem zwrotnym na cztery człony: czwórnik wzmacniający, czwórnik sprzężenia zwrotnego, szóstnik wejściowy, szóstnik wyjściowy. Obliczenie wzmocnienia i oporności wyjściowej opiera się na rozwiązaniu szóstnika wyjściowego. Szóstnik ten charakteryzujemy dziewięcioelementową macierzą oporową. Czwórnik wzmacniający charakteryzujemy opornością wyjściową i wzmocnieniem w stanie jałowym. Czwórnik sprzężenia zwrotnego charakteryzujemy opornością wyjściową i opornością przenoszenia. Zakładamy wreszcie, że szóstnik wejściowy nie wprowadza żadnego tłumienia, a charakteryzuje się jedynie własnościami sumującymi. Tworzymy układ trzech równań dla szóstnika wyjściowego pracującego między czwórnikami wzmacniającym i sprzężenia zwrotnego i opornością obciążenia. Możemy stąd określić wzmocnienie, oporność wyjściową, a również decydujący o stabilności współczynnik spadku wzmocnienia oraz współczynnik spadku zniekształceń nieliniowych.

Metoda powyższa ze względu na konieczność dokonania podziału wzmacniacza jest mniej ogólna od metody analizy sieci, może być jednak z powodzeniem stosowana w praktyce.

Literatura: [12], [19].

### 4.5. Metoda macierzowa

Metoda macierzowa, podobnie jak poprzednia, przyjmuje za punkt wyjścia podział wzmacniacza ze sprzężeniem zwrotnym na poszczególne człony — najczęściej dwa: czwórnik wzmacniający i czwórnik sprzężenia zwrotnego. Dla każdego z tych członów obliczamy jedną z macierzy podstawowych, następnie zaś macierz czwórnika powstałego z ich połączenia. Wybór najdogodniejszej do obliczeń macierzy wynika z ty-

pu sprzężenia zwrotnego (np. dla sprzężenia szeregowego prądowego należy posługiwać się macierzą oporową). W dalszym ciągu obliczamy macierz łańcuchową czwórnika zastępczego, a stąd wzmocnienie wzmacniacza. Współczynnik spadku wzmocnienia może być obliczony dwoma metodami: bezpośrednio przez porównanie wzmocnień $k_r$ i $k$ lub też pośrednio przez utworzenie dodatkowego czwórnika zastępczego odpowiadającego przeciętej pętli wzmocnienia. Pierwszy z tych wariantów wymaga znajomości $k$. Wielkość ta może być wyznaczona z $k_r$ przez przyrównanie do zera pewnych elementów macierzy członu sprzężenia zwrotnego ([23], [25]).

Drugi z wariantów wymaga obliczenia macierzy czwórnika zastępczego [12].

Metoda macierzowa jest podobnie jak metoda poprzednia mniej ogólna od metody opartej na analizie sieci, a ponadto wymaga skomplikowanych obliczeń. Wydaje się, że stosowanie tej metody w układach lampowych nie jest celowe. Znajduje ona natomiast zastosowanie w tranzystorowych układach ze sprzężeniem zwrotnym. Wynika to z faktu powszechnego stosowania rachunku macierzowego w układach tranzystorowych.

Literatura: [12], [21], [22], [23], [25], [27].

### 4.6. Wnioski końcowe

Z przeprowadzonych poprzednio rozważań wynika, że metodą najbardziej ogólną jest metoda oparta o analizę sieci. Wymaga ona jednak dość złożonych obliczeń. W przypadku układów bardziej skomplikowanych celowe jest stosowanie rachunku krakowianów. Wyniki końcowe otrzymywane metodą analizy sieci są złożone i mało przejrzyste. Konieczne jest więc zastosowanie pewnych dopuszczalnych w praktyce założeń upraszczających. Metoda analizy sieci może znaleźć również zastosowanie w układach tranzystorowych [20], [25]. Przekracza to jednak ramy niniejszej pracy.

Metody bezpośrednia i szóstnikowo-czwórnikowa są mniej ogólne, ale wymagają mniejszej ilości obliczeń.

Metody macierzowe nadają się szczególnie do układów tranzystorowych.

*Praca niniejsza została opracowana na podstawie pracy magisterskiej wykonanej w Katedrze Teletransmisji Przewodowej pod kierunkiem prof. Juliusza Grabowskiego, któremu składam serdeczne podziękowanie za pomoc, dyskusje, wnikliwe i cenne uwagi, dotyczące zarówno treści pracy, jak i zastosowanej terminologii. Pragnę również podziękować mgrowi inż. Zbigniewowi Hoffmanowi za przejrzenie pracy i cenne uwagi.*

*Katedra Teletransmisji Przewodowej*
*Politechniki Warszawskiej*

# PRZYPISY

## A. PODSTAWY MATEMATYCZNE PRACY

### A.1. Specjalne twierdzenia z teorii wyznaczników

Przedstawimy dwa specjalne twierdzenia:

a) Rozważmy wyznacznik $\Delta = |a_{ij}|$. Niech $a_{mn} = a_0 + a^0_{mn}$. Wykażemy, że $\Delta$ jest liniową funkcją $a_0$.

Rozwijając wyznacznik $\Delta$ według elementów $m$-tego wiersza mamy:

$$\Delta = a_{m1}D_{m1} + a_{m2}D_{m2} + \cdots + D_{mn}a_{mn} + \cdots =$$

$$= a_{m1}D_{m1} + \cdots + a_0 D_{mn} + a^0_{mn}D_{mn} + \cdots = \Delta^0 + a_0 D_{mn} = \Delta^0 + a_0 D^0_{mn}\ ^{*}).$$

$\Delta^0$ jest wartością wyznacznika $\Delta$ przy $a_0 = 0$.

Zwrócić należy uwagę na fakt, że $D_{mn}$ nie zależy od $a_{mn}$, a więc $D_{mn} = D^0_{mn}$.

Otrzymaliśmy wzór następujący:

$$\Delta = \Delta^0 + a_0 D_{mn}. \tag{A.1}$$

b) Można wykazać, że zachodzi następująca tożsamość:

$$\Delta D_{abcd} = D_{ab}D_{cd} - D_{ad}D_{cb}; \tag{A.2}$$

$a$, $c$ — dowolne wiersze,

$b$, $d$ — dowolne kolumny

$$D_{abcd} = (-1)^{a+b+c+d}\,\Delta_{abcd};$$

$\Delta_{abcd}$ jest to wyznacznik utworzony z wyznacznika $\Delta$ przez skreślenie wierszy $a$ i $c$ oraz kolumn $b$ i $d$.

### A.2. Niektóre twierdzenia z rachunku krakowianów

#### *A.2.1. Określenie krakowianu*

Krakowianem nazywamy zbiór jakichkolwiek elementów ustawionych w tabelę (w ogólnym przypadku prostokątną) i spełniający aksjomaty podane niżej.

$$\underline{k} = \left\{ \begin{array}{l} a_{11}\,a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn} \end{array} \right\}.$$

Dwa krakowiany są równe, jeżeli równe są ich odpowiednie elementy. Krakowiany różnią się tym od macierzy, które określamy w sposób identyczny, że mnożenie ich odbywa się sposobem „kolumna przez kolumnę", nie zaś „wiersz przez kolumnę" jak w przypadku macierzy.

---

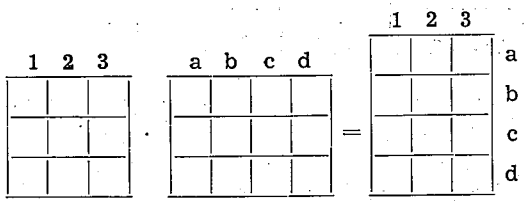
[1]) $D_{jk}$ oznacza dopełnienie algebraiczne elementu $a_{jk}$. $D_{jk} = (-1)^{j+k}\,\Delta_{jk}$.

Iloczynem dwóch krakowianów mającym jednakową ilość wierszy (tylko takie można mnożyć) $\underline{a}$ i $\underline{b}$ jest krakowian $\underline{c}$, którego elementy określone są wzorem:

$$c_{kl} = a_{1l}b_{1k} + a_{2l}b_{2k} + \cdots + a_{ml}b_{mk}; \qquad (A.3)$$

$$k = 1, 2, \cdots p \qquad l = 1, 2, \cdots n.$$

Mnożenie krakowianów ułatwia następujący schemat:




Łatwo zauważyć, że iloczynem dwóch krakowianów jest krakowian mający tyle kolumn, ile ma ich pierwszy czynnik i tyle wierszy, ile kolumn ma drugi czynnik.

Można wykazać, że mnożenie krakowianów nie jest przemienne. Zmiana porządku czynników w iloczynie dwóch krakowianów powoduje w krakowianie będącym rezultatem ich pomnożenia zamianę kolumn na wiersze i odwrotnie. Wprowadza się pewien specjalny krakowian nazywany jednostkowym i oznaczany przez $\tau$:

$$\tau = \left\{ \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right\}$$

Przy mnożeniu jakiegoś krakowianu przez $\tau$ (lub odwrotnie) należy wziąć tyle wierszy w $\tau$, ile ma ich ten krakowian. Łatwo wykazać słuszność następujących wzorów:

$$\underline{k} \cdot \tau = \underline{k} \qquad (A.4)$$

$$\tau \cdot \underline{k} = \underline{k}^* \qquad (A.5)$$

$k^*$ oznacza krakowian otrzymany z $\underline{k}$ przez zamianę w nim wierszy na kolumny i odwrotnie; nazywany on jest transpozycją krakowianu $\underline{k}$ i bywa oznaczany także przez $\tau\underline{k}$ (bez kropki).

### *A.2.2. Rozkład na czynniki trójkątne*

Podstawową operacją w rachunku krakowianów jest rozkład na czynniki trójkątne. Dany jest krakowian kwadrasty (tj. mający równą ilość kolumn i wierszy) $\underline{a}$. Szukany jest jego rozkład postaci:

$$\left\{\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12}\ a_{13}\ \ldots\ a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22}\ a_{23}\ \ldots\ a_{2n} \\ a_{21} & a_{32}\ a_{33}\ \ldots\ a_{3n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ a_{n3}\ \ldots\ a_{nn} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 1\ g_{12}\ g_{13}\ \ldots\ g_{1n} \\ 0\ \ 1\ g_{23}\ \ldots\ g_{2n} \\ 0\ \ 0\ \ 1\ \ldots\ g_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ldots\ \ 1 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} h_{11}\ h_{12}\ h_{13}\ \ldots\ h_{1n} \\ 0\ h_{22}\ h_{23}\ \ldots\ h_{2n} \\ 0\ \ 0\ h_{33}\ \ldots\ h_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ldots\ h_{nn} \end{array}\right\}$$

Znalezienie rozkładu polega na znalezieniu $n^2$ wielkości $h_{ij}\,g_{ij}$. Konieczne jest ułożenie $n^2$ równań. Można tego dokonać wykonując mnożenie $\underline{g} \cdot \underline{h}$ i wyrażając w ten sposób wielkości $a_{ij}$ w funkcji $g_{ij}$ i $h_{ij}$. Najwygodniejszy układ równań otrzymujemy obliczając elementy $a_{ij}$ w kolejności zaznaczonej kreskami pionowymi i poziomymi oraz numerami. Wykonując mnożenie mamy następujący układ równań:

$$1\left\{\begin{array}{l} a_{11} = h_{11} \\ a_{21} = h_{12} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} = h_{1n} \end{array}\right.$$

Obliczamy stąd $h_{11},\ h_{12}, \ldots, h_{1n}$.

$$2\left\{\begin{array}{l} a_{12} = h_{11}\,g_{12} \\ a_{13} = h_{11}\,g_{13} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} = h_{11}\,g_{1n} \end{array}\right.$$

Obliczamy stąd $g_{12},\ g_{13}\ \ldots, g_{1n}$ w założeniu $h_{11} \neq 0$.

$$3\left\{\begin{array}{l} a_{22} = h_{12}\,g_{12} + h_{22} \\ a_{32} = h_{13}\,g_{12} + h_{23} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n2} = h_{1n}\,g_{12} + h_{2n} \end{array}\right.$$

Obliczamy stąd $h_{22},\ h_{23}, \ldots, h_{2n}$.

$$4\left\{\begin{array}{l} a_{23} = h_{12}\ g_{13} + h_{22}\,g_{23} \\ a_{24} = h_{12}\ g_{14} + h_{22}\,g_{24} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{2n} = h_{12}\,h_{1n} + h_{22}\,g_{2n} \end{array}\right.$$

Obliczamy stąd $g_{23},\ g_{24}, \ldots, g_{2n}$ w założeniu, że $h_{22} \neq 0$.

Postępując w sposób analogiczny możemy otrzymać dalsze równania.

W tablicy A1 podano wzory dla krakowianów szóstego stopnia. Wzory powyższe można jednak wyprowadzić w prostszy sposób metodą następującą. Równanie $\underline{a} = \underline{g} \cdot \underline{h}$ można przekształcić do postaci następującej:

$$\begin{Bmatrix} \underline{a} \\ \underline{g} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -\tau \\ \underline{h} \end{Bmatrix} = \underline{0}, \tag{A.6}$$

gdzie:

$\begin{Bmatrix} \underline{a} \\ \underline{g} \end{Bmatrix}$ — krakowian utworzony z $\underline{a}$ i $\underline{g}$,

$\cdot \begin{Bmatrix} -\tau \\ \underline{h} \end{Bmatrix}$ — krakowian utworzony z $-\tau$ i $\underline{h}$,

$\underline{a}$ — dane

$\underline{g}$ i $\underline{h}$ — szukane.

Obliczenie polega na pomnożeniu kolumn i przyrównaniu do zera elementów otrzymanego krakowianu.

Przykład tego typu w zastosowaniu do układu ze sprzężeniem zwrotnym podano w 3.6.4.

### *A.2.3. Zastosowanie krakowianów do obliczania wyznaczników*

Jak wiadomo z teorii wyznaczników, wyznacznik trójkątny, tzn. mający wyłącznie zerowe elementy nad lub pod główną przekątną, równy jest iloczynowi elementów przekątnej głównej.

Metoda obliczania wyznaczników polega na rozkładzie wyznacznika obliczanego na iloczyn dwóch wyznaczników trójkątnych $|g|$ i $|h|$ o budowie takiej samej jak odpowiednich krakowianów. Ze względu na to, że wyznaczniki można mnożyć metodą „kolumna przez kolumnę", wszystkie wzory na współczynniki krakowianów $\underline{g}$ i $\underline{h}$ odnoszą się też do wyznaczników. Wartość $\Delta$ może być więc obliczona ze wzoru:

$$\Delta = h_{11} h_{22} h_{33} \ldots h_{nn}. \tag{A.7}$$

### *A.2.4. Zastosowanie krakowianów do rozwiązywania układów równań liniowych*

Rozważmy układ równań liniowych:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n &= b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n &= b_n. \end{aligned}$$

Stosując oznaczenia:

$$\underline{a} = \begin{Vmatrix} a_{11}\, a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\, a_{n2} \cdots a_{nn} \end{Vmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Vmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{Vmatrix}$$

możemy — jak łatwo wykazać — zastąpić powyższy układ równań następującym równaniem krakowianowym

$$\underline{x} \cdot \tau \underline{a} = \underline{b}, \tag{A.8}$$

Rozwiązanie tego równania krakowianowego polega na znalezieniu współczynników krakowianu $x$. Etapy rozwiązania są następujące:

a) dokonanie rozkładu $\underline{a} = \underline{g} \cdot \underline{h}$,

b) dokonanie rozkładu $\underline{b} = \underline{b'} \cdot \underline{h}$ (rozkład ten może być przeprowadzony w sposób analogiczny do rozkładu z punktu a),

c) obliczenie współczynników krakowianu $\underline{x}$ przez pomnożenie $\tau\underline{x}$ kolejno przez wiersze $\underline{g}$ i przyrównanie wyników do odpowiednich współczynników krakowianu $\underline{b'}$. Wzory potrzebne do obliczenia współczynników $\underline{b'}$ i $\underline{x}$ dla układu sześciu równań podano w tablicy A2.

Rozwiązanie układu równań może być dokonane również metodą bezpośrednią z zastosowaniem schematu Hausbrandta. Przykład tego rodzaju rozwiązania w zastosowaniu do układu ze sprzężeniem zwrotnym rozpatrzono w 3.6.4.

Literatura matematyczna związana z pracą: [1], [5], [9], [13], [14], [16].

## B. WYPROWADZENIE NIEKTÓRYCH WZORÓW

### B.1. Wzór na $\Delta$ z rozdziału 3.5.1.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -Z_3 & 0 & 0 & -Z_3 \\ K_{a1} & Z_3 + Z_4 + Z_5 & 0 & 0 & Z_3 \\ 0 & K_{a2} Z_5 & Z_6 + Z_7 & 0 & 0 \\ 0 & -Z_3 & -Z_7 & 1 & -Z_3 \\ 0 & Z_3 & 0 & K_{a3} & Z_3 + Z_8 + Z_9 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \Delta_{11} - K_{a1} \Delta_{21};$$

$\Delta_{11}$ i $\Delta_{21}$ oznaczają odpowiednie podwyznaczniki.

W dalszym ciągu mamy:

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} Z_3 + Z_4 + Z_5 & 0 & 0 & Z_3 \\ K_{a2} Z_5 & Z_6 + Z_7 & 0 & 0 \\ -Z_3 & -Z_7 & 1 & -Z_3 \\ Z_3 & 0 & K_{a3} & Z_3 + Z_8 + Z_9 \end{vmatrix} =$$

$$= (Z_3 + Z_4 + Z_5)(Z_6 + Z_7)(Z_3 + Z_8 + Z_9 + K_{a3} Z_3) +$$
$$- Z_3 [-K_{a2} Z_5 Z_7 K_{a3} - (Z_6 + Z_7)(-K_{a3} Z_3 - Z_3)]$$

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} -Z_3 & 0 & 0 & -Z_3 \\ K_{a2}Z_5 & Z_6+Z_7 & 0 & 0 \\ -Z_3 & -Z_7 & 1 & -Z_3 \\ +Z_3 & 0 & K_{a3} & Z_3+Z_8+Z_9 \end{vmatrix} =$$

$$= -Z_3(Z_6+Z_7)(Z_3+Z_8+Z_9+Z_3K_{a3}) + Z_3[-K_{a2}Z_5Z_7K_{a3} - (Z_6+Z_7)(-K_{a3}Z_3 - Z_3)]$$

$$\Delta = (Z_3+Z_4+Z_5)(Z_6+Z_7)(Z_3+Z_8+Z_9+K_{a3}Z_3) +$$
$$+ K_{a1}Z_3(Z_6+Z_7)(Z_3+Z_8+Z_9+K_{a3}Z_3) + K_{a2}K_{a3}Z_3Z_5Z_7 - (Z_6+Z_7)(K_{a3}Z_3+Z_3)Z_3 +$$
$$+ K_{a1}K_{a2}K_{a3}Z_3Z_5Z_7 - K_{a1}K_{a3}Z_3^2(Z_6+Z_7) - Z_3^2(Z_6+Z_7).$$

Dwa pierwsze składniki powyższego wyrażenia można przekształcić w sposób następujący:

$$(Z_3+Z_4+Z_5)(Z_6+Z_7)(Z_3+Z_8+Z_9+K_{a3}Z_3) + K_{a1}Z_3(Z_6+Z_7) \times$$
$$\times (Z_3+Z_8+Z_9+K_{a3}Z_3) = (Z_3+Z_4+Z_5+K_{a1}Z_3)(Z_6+Z_7)(Z_3+Z_8+Z_9+K_{a3}Z_3).$$

Trzeci składnik można pominąć wobec piątego, gdyż $K_{a1} \gg 1$. Podobnie pominąć można składniki czwarty, szósty i siódmy.

Ostatecznie otrzymujemy więc:

$$\Delta = (Z_3+Z_4+Z_5+K_{a1}Z_3)(Z_6+Z_7)(Z_3+Z_8+Z_9+K_{a3}Z_3) + K_{a1}K_{a2}K_{a3}Z_3Z_5Z_7.$$

B2. Wzór na $\Delta$ z rozdziału 3.6.1

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -Z_3 & 0 & 0 & 0 & -Z_3 \\ K_{a1} & Z_3+Z_4+Z_5 & 0 & 0 & 0 & Z_3 \\ 0 & K_{a2}Z_5 & Z_6+Z_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Z_7 & 1 & -Z_9 & Z_9 \\ 0 & 0 & 0 & K_{a3} & Z_9+Z_{10}+Z_{11} & -Z_9 \\ 0 & Z_3 & 0 & 0 & -Z_9 & Z_2+Z_9+Z_{12} \end{vmatrix}$$

Zastosujemy rachunek krakowianów. Na podstawie tablicy A-1 możemy napisać:

$$h_{11} = 1; \quad h_{12} = K_{a1}; \quad h_{13} = h_{14} = h_{15} = h_{16} = 0;$$

$$g_{12} = -Z_3; \quad g_{13} = g_{14} = g_{15} = 0; \quad g_{16} = -Z_3;$$

$$h_{22} = Z_3+Z_4+Z_5+K_{a1}Z_3; \quad h_{23} = K_{a2}Z_5; \quad h_{24} = h_{25} = 0;$$

$$h_{26} = Z_3; \quad g_{23} = g_{24} = g_{25} = 0 \quad g_{26} = \frac{K_{a1}Z_3+Z_3}{Z_3+Z_4+Z_5+K_{a1}Z_3};$$

$$h_{33} = Z_6+Z_7; \quad h_{34} = -Z_7 \quad h_{35} = h_{36} = 0; \quad g_{34} = g_{35} = 0$$

$$g_{36} = -\frac{(K_{a1}Z_3 + Z_3)\,K_{a2}Z_5}{(Z_3 + Z_4 + Z_5 + K_{a1}Z_3)\,(Z_6 + Z_7)};$$

$$h_{44} = 1; \quad h_{45} = K_{a3}; \quad h_{46} = 0; \quad g_{45} = -Z_9;$$

$$g_{46} = Z_9 - \frac{K_{a2}Z_5Z_7K_{a1}Z_3}{(Z_3 + Z_4 + Z_5 + K_{a1}Z_3)\,(Z_6 + Z_7)}$$

$$h_{55} = Z_9 + Z_{10} + Z_{11} + K_{a3}Z_9; \quad h_{56} = -Z_9;$$

$$g_{56} \approx \frac{K_{a1}K_{a2}K_{a3}Z_3Z_5Z_7}{(Z_9 + Z_{10} + Z_{11} + K_{a3}Z_9)\,(Z_3 + Z_4 + Z_5 + K_{a1}Z_3)\,(Z_6 + Z_7)};$$

$$h_{66} = Z_3 + Z_9 + Z_{12} + \frac{K_{a1}K_{a2}K_{a3}Z_3Z_5Z_7Z_9}{(Z_9 + Z_{10} + Z_{11} + K_{a3}Z_9)\,(Z_3 + Z_4 + Z_5 + K_{a1}Z_3)\,(Z_6 + Z_7)};$$

$$\Delta = h_{11}h_{22}h_{33}h_{44}h_{55}h_{66} =$$

$$= (Z_3 + Z_4 + Z_5 + K_{a1}Z_3)\,(Z_6 + Z_7)\,(Z_9 + Z_{10} + Z_{11} + K_{a3}Z_9)\,(Z_3 + Z_9 + Z_{12}) +$$

$$+ K_{a1}K_{a2}K_{a3}Z_3Z_5Z_7Z_9.$$

Tablica A1

**Obliczanie wyznaczników szóstego stopnia**

1
$$\begin{cases} h_{11} = a_{11}; & h_{12} = a_{21}; & h_{13} = a_{31}; \\ h_{14} = a_{41}; & h_{15} = a_{51}; & h_{16} = a_{61}. \end{cases}$$

2
$$\begin{cases} g_{12} = \dfrac{a_{12}}{h_{11}}; & g_{13} = \dfrac{a_{13}}{h_{11}}; & g_{14} = \dfrac{a_{14}}{h_{11}}; & g_{15} = \dfrac{a_{15}}{h_{11}}; & g_{16} = \dfrac{a_{16}}{h_{11}}. \end{cases}$$

3
$$\begin{cases} h_{22} = a_{22} - h_{12}g_{12} \\ h_{23} = a_{32} - h_{13}g_{12} \\ h_{24} = a_{42} - h_{14}g_{12} \\ h_{25} = a_{52} - h_{15}g_{12} \\ h_{26} = a_{62} - h_{16}g_{12} \end{cases}$$

4
$$\begin{cases} g_{23} = \dfrac{a_{23}}{h_{22}} - \dfrac{h_{12}}{h_{22}}\,g_{13} \\ g_{24} = \dfrac{a_{24}}{h_{22}} - \dfrac{h_{12}}{h_{22}}\,g_{14} \\ g_{25} = \dfrac{a_{25}}{h_{22}} - \dfrac{h_{12}}{h_{22}}\,g_{15} \\ g_{26} = \dfrac{a_{26}}{h_{22}} - \dfrac{h_{12}}{h_{22}}\,g_{16} \end{cases}$$

5
$$\begin{cases} h_{33} = a_{33} - h_{13}g_{13} - h_{23}g_{23} \\ h_{34} = a_{43} - h_{14}g_{13} - h_{24}g_{23} \\ h_{35} = a_{53} - h_{15}g_{13} - h_{25}g_{23} \\ h_{36} = a_{63} = h_{16}g_{13} - h_{26}g_{23} \end{cases}$$

6
$$\begin{cases} g_{34} = \dfrac{a_{34}}{h_{33}} - \dfrac{h_{13}}{h_{33}} g_{14} - \dfrac{h_{23}}{h_{33}} g_{24} \\ g_{35} = \dfrac{a_{35}}{h_{33}} - \dfrac{h_{13}}{h_{33}} g_{15} - \dfrac{h_{23}}{h_{33}} g_{25} \\ g_{36} = \dfrac{a_{36}}{h_{33}} - \dfrac{h_{13}}{h_{33}} g_{16} - \dfrac{h_{23}}{h_{33}} g_{26} \end{cases}$$

7
$$\begin{cases} h_{44} = a_{44} - h_{14}g_{14} - h_{24}g_{24} - h_{34}g_{34} \\ h_{45} = a_{54} - h_{15}g_{14} - h_{25}g_{24} - h_{35}g_{34} \\ h_{46} = a_{64} = h_{16}g_{14} - h_{26}g_{24} - h_{36}g_{34} \end{cases}$$

8
$$\begin{cases} g_{45} = \dfrac{a_{45}}{h_{44}} - \dfrac{h_{14}}{h_{44}} g_{15} - \dfrac{h_{24}}{h_{44}} g_{25} - \dfrac{h_{34}}{h_{44}} g_{35} \\ g_{46} = \dfrac{a_{46}}{h_{44}} - \dfrac{h_{14}}{h_{44}} g_{16} - \dfrac{h_{24}}{h_{44}} g_{26} - \dfrac{h_{34}}{h_{44}} g_{36} \end{cases}$$

9
$$\begin{cases} h_{55} = a_{55} - h_{15}g_{15} - h_{25}g_{25} - h_{35}g_{35} - h_{45}g_{45} \\ h_{56} = a_{65} - h_{16}g_{15} - h_{26}g_{25} - h_{36}g_{35} - h_{46}g_{45} \end{cases}$$

10
$$\begin{cases} g_{56} = \dfrac{a_{56}}{h_{55}} - \dfrac{h_{15}}{h_{55}} g_{16} - \dfrac{h_{25}}{h_{55}} g_{26} - \dfrac{h_{35}}{h_{55}} g_{36} - \dfrac{h_{45}}{h_{55}} g_{46} \end{cases}$$

11
$$\{ \quad h_{66} = a_{66} - h_{16}g_{16} - h_{26}g_{26} - h_{36}g_{36} - h_{46}g_{46} - h_{56}g_{56}$$

Tablica A2

**Rozwiązywanie układów sześciu równań z sześcioma niewiadomymi**

$$b'_1 = \frac{b_1}{h_{11}}$$

$$b'_2 = \frac{b_2}{h_{22}} - \frac{h_{12}}{h_{22}} b'_1$$

$$b'_3 = \frac{b_3}{h_{33}} - \frac{h_{13}}{h_{33}} b'_1 - \frac{h_{23}}{h_{33}} b'_2$$

$$b'_4 = \frac{b_4}{h_{44}} - \frac{h_{14}}{h_{44}} b'_1 - \frac{h_{24}}{h_{44}} b'_2 - \frac{h_{34}}{h_{44}} b'_3$$

$$b'_5 = \frac{b_5}{h_{55}} - \frac{h_{15}}{h_{55}} b'_1 - \frac{h_{25}}{h_{55}} b'_2 - \frac{h_{35}}{h_{55}} b'_3 - \frac{h_{45}}{h_{55}} b'_4$$

$$b'_6 = \frac{b_6}{h_{66}} - \frac{h_{16}}{h_{66}} b'_1 - \frac{h_{26}}{h_{66}} b'_2 - \frac{h_{36}}{h_{66}} b'_3 - \frac{h_{46}}{h_{66}} b'_4 - \frac{h_{56}}{h_{66}} b'_5$$

$$x_6 = b'_6$$
$$x_5 = b'_5 - g_{56}x_6$$
$$x_4 = b'_4 - g_{45}x_5 - g_{46}x_6$$
$$x_3 = b'_3 - g_{34}x_4 - g_{35}x_5 - g_{36}x_6$$
$$x_2 = b'_2 - g_{23}x_3 - g_{24}x_4 - g_{25}x_5 - g_{26}x_6$$
$$x_1 = b'_1 - g_{12}x_2 - g_{13}x_3 - g_{14}x_4 - g_{15}x_5 - g_{16}x_6$$

## WYKAZ LITERATURY

### A. Literatura podstawowa


1. Banachiewicz T.: Metody rachunków astronomicznych. (Skrypt). Kraków 1952; rozdział 4.
2. Black H. S.: Stabilized Feed-back Amplifiers. — B.S.T.J., styczeń 1934.
3. Bode H. W.: Relations between Attenuation and Phase in Feedback Amplifier Design. — B.S.T.J., lipiec 1940.
4. Bode H. W.: Network Analysis and Feedback Amplifier Design. D. Van Nostrand Company, New York 1945.
5. Dowgird Z.: Krakowiany i ich zastosowanie w mechanice budowli. P.W.N. Warszawa 1956.
6. Goldman S.: Transformation Calculus and Electrical Transients. Constable and Company, London 1949.
7. Grabowski J.: Sprzężenie zwrotne w urządzeniach radiotechnicznych małej częstotliwości. Państwowy Instytut Telekomunikacyjny, Warszawa 1938.
8. Hofman Z.: Wzmacniacz nadawczy do telefonii K 12/P. Przemysłowy Instytut Telekomunikacyjny, Warszawa 1954.
9. Kochmański T.: Metody obliczeń geodezyjnych. (Skrypt). Kraków 1953, rozdział 6.
10. Krize S. N.: Usilitieli napriażenija niskoj cziastoty. Moskwa 1953, rozdział 5.
11. Krug K.: Podstawy elektrotechniki (tłumaczenie z rosyjskiego). PWN, Warszawa 1953; część II, rozdział 1.
12. Majewski W. jr: Parametry wzmacniacza ze sprzężeniem zwrotnym i metody ich wyznaczania. Praca magisterska. Katedra Teletr. Przewodowej Polit. Warsz.
13. Majewski W. jr Krakowiany i możliwości ich zastosowania w teleelektryce. — Zeszyty Naukowe Polit. Warsz. Elektryka Nr 17, PWN, Warszawa 1958.
14. Olszewski Z.: Rozwiązywanie układów równań liniowych metodą krakowianów. — „Politechnika" nr 5/6, 1947.
15. Rotkiewicz W.: Technika odbioru radiowego. PWT, Warszawa 1954 tom II, rozdział 7.
16. Sierpiński W.: Zasady algebry wyższej. Polskie Towarzystwo Matematyczne, Warszawa — Wrocław 1951.
17. Terman F. E.: Radiotechnika. (Tłumaczenie z angielskiego). PWT, Warszawa 1952, tom I, punkt 6-14.
18. Smoliński A.: Związki między charakterystykami częstotliwościowymi wzmacniaczy szerokopasmowych. — Zeszyty Naukowe Polit. Warsz. Elektryka Nr 6, PWN, Warszawa 1955.
19. 12-kanalnaja sistiema wysokoczastnowo telefonirowanja po kabielnych linjach swiazi. Swiazizdat, Moskwa 1954.


### B. Literatura uzupełniająca


20. Almond J., Bootkroyd A. R.: Broadband Transistor Feedback Amplifiers. — PIEE v. 103, Part B, N° 7, styczeń 1956.
21. Asiejew B.: Podstawy radiotechniki. (Tłumaczenie z rosyjskiego). PWN, Warszawa 1955, punkt 5.3.

22. Limwicz-Siedow M.: Korektirujuszczyje ciepi w awtomatikie. Moskwa 1954, rozdział I.
23. Muradjan A. G.: Otricatielnaja obrotnaja swiaz w połuprowodnikowych usilitielach. — „Elektroswiaz" nr 6, 1956.
24. Nowicki W.: Zasady teletransmisji przewodowej. PWT, Warszawa 1953, tom I.
25. Shea R. F.: Principles of Transistor Circuits. D. Van Nostrand Company, New York 1953.
26. Smoliński A.: Zasady wzmacniania. PWT, Warszawa 1950, 1954, tomy I i II.
27. Trochimienko J. K.: Obratnaja swiaz w schiemach z kristaliczeskimi triodami. — „Radjotiechnika" T. 11, nr 9, 1956.
28. Żyszkowski.: Zarys układów przenoszenia przewodowego. Państwowy Instytut Telekomunikacyjny, Warszawa 1950, rozdział 2.

В. МАЕВСКИ (юнр.)

## ПАРАМЕТРЫ УСИЛИТЕЛЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ И МЕТОДЫ ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Резюме

В начале изложены параметры усилителя с обратной связью, то есть абсолютные первичные параметры характеризирующие свойства усилителя до введения обратной связи, абсолютные вторичные параметры характеризующие свойства усилителя после введения обратной связи а также относительные параметры определяющие изменения абсолютных параметров происходящие из-за введения обратной связи.

Представлен непосредственный метод определения этих параметров на основании элементарной теории обратной связи.

Далее рассмотрен основанный на произведениях Боде метод определения параметров усилителя на базе теории цепей. Выведены формулы возвратной разности, возвратного отношения, усиления при наличии обратной связи, усиления в случае выключения обратной связи, нелинейных искажений, чувствительности на изменения, выходного и входного сопротивлений. Вышеуказанные параметры связаны с определёнными прежде параметрами усилителя с обратной связью.

Выведены формулы параметров основных усилительных схем с применением обратной связи. Использованы здесь также для расчёта краковяны.

В заключении приведена краткая характеристика нескольких других методов определения параметров усилителя с обратной связью, а также произведено сравнение этих методов.

W. MAJEWSKI jr.

## PARAMETERS OF FEEDBACK AMPLIFIER AND METHODS OF THEIR DETERMINING

Summary

Parameters of feedback amplifier are introduced in the beginning of the paper, e.i. absolute primary parameters, characterizing the properties of the amplifier before feedback, absolute secondary parameters characterizing the

properties of the amplifier after feedback, and relative parameters determining the changes in absolute parameters in result of feedback.

A direct method for determining these parameters is discussed, the method being based on the elementary feedback theory.

Subsequently, a method based on the papers of Bode is discussed e.i. the method for determining parameters of feedback amplifier on the basis of network analysis. Formulae are deduced for return difference, return ratio, gain with feedback, gain before feedback, nonlinear distortions, sensitivity, input and output impedances. The above values are connected with the formerly determined parameters of feedback amplifier.

Finally, formulae are deduced for parameters of basic feedback amplifying systems. The calculus of cracovians is also applied here.

In conclusion, a few other methods for determining parameters of feedback amplifier are characterized and compared.

621.3.083.9

TADEUSZ KACZOREK

# Metoda potencjałów węzłowych i twierdzenia o wzajemności w obwodach liniowych ze sprzężeniami między gałęziami

*Rękopis dostarczono 14.3.1958*

W artykule wykazano możliwość stosowania metody potencjałów węzłowych w obwodach liniowych z dowolnymi sprzężeniami między gałęziami, dla których $\mathcal{R}_e(\hat{Z}_{kl}) = 0$, gdzie $\hat{Z}_{kl}$ — impedancja sprzężenia między gałęziami $k$ i $l$.

Rozważono twierdzenia o wzajemności w obwodach liniowych z dowolnymi sprzężeniami między gałęziami. Stwierdzono, że twierdzenia o wzajemności w ogólnym przypadku stosują się tylko do obwodów liniowych z symetrycznymi sprzężeniami między gałęziami. Udowodniono, że zakres stosowalności twierdzenia o wzajemności w odniesieniu do zamiany miejscami węzła doprowadzenia prądu z jedynego w tym obwodzie idealnego źródła prądu z węzłem pomiaru potencjału jest szerszy od zakresu stosowalności twierdzenia o wzajemności w odniesieniu do zamiany miejscami jedynej w tym obwodzie idealnej siły elektromotorycznej z punktem pomiaru prądu. Podano warunek konieczny i wystarczający stosowalności twierdzenia o wzajemności w odniesieniu do zamiany miejscami węzła doprowadzenia prądu z jedynego w tym obwodzie idealnego źródła prądu z węzłem pomiaru potencjału w obwodach liniowych z niesymetrycznymi sprzężeniami między gałęziami.

Wykazano niemożliwość zastąpienia w ogólnym przypadku obwodu liniowego ze sprzężeniami między gałęziami, zawierającego idealne siły elektromotoryczne, równoważnym obwodem bez tych sprzężeń z idealnymi źródłami prądu, w sensie przyporządkowania każdej gałęzi z idealną siłą elektromotoryczną i szeregowo z nią połączoną impedancją, gałęzi z idealnym źródłem prądu i równolegle z nim przyłączoną admitancją. Podano uogólnione twierdzenia o wzajemności dotyczące obwodów liniowych z symetrycznymi sprzężeniami między gałęziami, w których obok jednej idealnej siły elektromotorycznej w $k$-tej gałęzi występuje jeszcze w $l$-tej gałęzi jedno idealne źródło prądu.

Wyprowadzono zależności pozwalające szybko obliczyć prądy w poszczególnych gałęziach w stanie ustalonym po zmianie parametrów (impedancji), jeżeli znane są odpowiednie wartości prądów przed zmianą oraz wartości admitancji własnych i wzajemnych zwarciowych dla tego obwodu.

Rozważania zilustrowano na przykładach.

## 1. WSTĘP

Zagadnienie metody potencjałów węzłowych i twierdzenia (zasady) o wzajemności w obwodach liniowych przy gałęziach ekranowych są opracowane i mają swą literaturę [3], [4], [6], [7], [8], [9].

Celem tego artykułu jest ekstrapolowanie metody potencjałów węzłowych i twierdzeń o wzajemności na obwody liniowe ze sprzężeniami między gałęziami. Zakładamy, że impedancje $\hat{Z}_{kl}$ sprzężeń między gałęziami nie zależą od prądu ani od napięcia oraz spełniają warunek $\mathcal{R}_e(\hat{Z}_{kl}) = 0$.

W pierwszej części artykułu rozpatrywać będziemy sprzężenia symetryczne indukcyjne oraz matematyczne im odpowiadające sprzężenia niesymetryczne. Przykłady takich sprzężeń niesymetrycznych między gałęziami podaje np. le Corbeiller [1].

W drugiej części artykułu rozpatrywać będziemy obwody liniowe o sprzężeniach pojemnościowych między idealnymi kondensatorami.

W rozważaniach naszych korzystać będziemy z rachunku macierzy.

W literaturze [8], [9] spotkać można pogląd, że nie celowe jest stosowanie metody potencjałów węzłowych przy rozwiązywaniu obwodów liniowych ze sprzężeniami między gałęziami. Pogląd ten opiera się na fakcie niemożliwości wyrażenia bezpośredniego prądów w poszczególnych gałęziach rozważanego obwodu w zależności od potencjałów węzłów, do których te gałęzie są przyłączone.

Znane dotąd sposoby zastępowania obwodów ze sprzężeniami między gałęziami [2], [9] obwodami równoważnymi bez tych sprzężeń nie rozwiązują też zagadnienia. Zastąpienie bowiem obwodu liniowego ze sprzężeniami między gałęziami obwodem równoważnym bez sprzężeń powoduje przeniesienie węzłów do innych punktów rozważanego obwodu. Otrzymany więc obwód bez sprzężeń między gałęziami jest dla celów analizy przy pomocy metody potencjałów węzłowych nieprzydatny. Ponadto trzeba jeszcze podkreślić, że podawane w literaturze [2], [9] sposoby zastępowania obwodu ze sprzężeniami między gałęziami obwodami równoważnymi, bez tych sprzężeń, nie są dostatecznie ogólne, aby pozwalały osiągnąć cel w dowolnym obwodzie liniowym.

Przedstawiona metoda potencjałów węzłowych pozwala rozwiązać dowolny obwód liniowy ze sprzężeniami między gałęziami (nawet niesymetrycznymi), tzn. określić prądy w poszczególnych gałęziach rozważanego obwodu, jeżeli dane są wartości idealnych sił elektromotorycznych lub prądów idealnych źródeł prądowych oraz impedancje wszystkich gałęzi wraz z impedancjami sprzężeń między gałęziami.

Rozważania nasze rozpoczniemy od analizy prostszych obwodów liniowych zasilanych idealnymi źródłami prądowymi ze sprzężeniami między gałęziami, wyłączając z nich sprzężenia pojemnościowe.

Dalej uogólnimy nasze rozważania na dowolne obwody liniowe ze sprzężeniami między gałęziami (włącznie ze sprzężeniami pojemnościowymi) zasilane jednocześnie idealnymi źródłami prądu i idealnymi siłami elektromotorycznymi.

Twierdzenie (zasadę) o wzajemności podaje się w literaturze [6], [9] najczęściej dla obwodów liniowych przy gałęziach ekranowanych bądź dla stanu ustalonego, bądź też dla stanu nieustalonego przy warunkach początkowych zerowych [5].

W literaturze zasadę wzajemności formułuje się najczęściej następująco [4].

„Jeżeli siła elektromotoryczna $\hat{E}$ znajdująca się w dowolnym punkcie $A$ jednowymiarowej sieci liniowej powoduje istnienie pewnego określonego natężenia pądu $\hat{I}$ w innym punkcie $B$ sieci, to ta sama siła elektromotoryczna $\hat{E}$ przeniesiona do punktu $B$ wywoła w punkcie $A$ to samo natężenie prądu $I$". Dowód zasady wzajemności przeprowadza się w podręcznikach elektrotechniki [8], [9] w zasadzie dla przebiegów ustalonych sinusoidalnych w obwodach liniowych bez sprzężeń między gałęziami.

Dowód słuszności zasady wzajemności opiera się na symetryczności macierzy dołączonej, tzn. na fakcie, że kofaktory (dopełnienia algebraiczne lub podwyznaczniki względne) symetrycznie położone w stosunku do głównej przekątnej macierzy dołączonej są sobie równe ($\hat{C}_{kl} = \hat{C}_{lk}$). Ponieważ dla dowolnej macierzy wyjściowej symetrycznej macierz dołączona jest symetryczna, wystarczającym więc warunkiem przy spełnieniu pozostałych jest, aby dla rozważanego obwodu obowiązywała zasada wzajemności w sformułowaniu podanym wyżej — symetryczność macierzy impedancji w metodzie prądów oczkowych.

Niektórzy autorzy [4] jako dualne sformułowanie zasady wzajemności podają: „Jeżeli prąd $\hat{I}$ doprowadzony do dowolnego punktu węzłowego $A$ jednowymiarowej sieci liniowej powoduje w innym punkcie węzłowym $B$ istnienie potencjału $\hat{V}$, to ten sam potencjał wywołany zostanie w punkcie węzłowym $A$ przez doprowadzenie do $B$ takiego samego prądu $\hat{I}$ (miejsca odprowadzenia prądów pozostają w obu przypadkach nie zmienione)".

Jeżeli chodzi o zakres stosowalności zasady wzajemności, to nadmienia się [4], że jest on ten sam co zakres stosowalności metody prądów oczkowych (obwodowych).

Istota pierwszego twierdzenia o wzajemności polega na równości prądów w wybranych gałęziach przy zamianie miejscami jedynej w tym obwodzie, idealnej siły elektromotorycznej z punktem pomiaru prądu za pomocą amperomierza o oporności wewnętrznej równej zeru.

Drugie twierdzenie (zasada) o wzajemności dotyczy zamiany miejscami węzła doprowadzenia prądu z jedynego w tym obwodzie płynącego z idealnego źródła prądu z węzłami pomiaru potencjału w stosunku do potencjału węzła odniesienia za pomocą woltomierza o oporności wewnętrznej nieskończenie wielkiej, a zakładamy przy tym, że węzeł odprowadzenia prądu pozostaje w obu przypadkach ten sam. Przy takiej zamianie wartości potencjałów węzłów (w obu przypadkach) są te same.

Tak więc w dalszych rozważaniach mówiąc o twierdzeniu o wzajemności w odniesieniu do zamiany miejscami jedynej (w tym obwodzie), idealnej siły elektromotorycznej z punktem pomiaru prądu będziemy mieli na myśli pierwsze twierdzenie o wzajemności, a mówiąc o twierdzeniu o wzajemności w odniesieniu do zamiany miejscami węzła doprowadzenia prądu z jedynego (w tym obwodzie), idealnego źródła prądu z węzłem pomiaru potencjału — drugie twierdzenie o wzajemności.

Twierdzenie o wzajemności w odniesieniu do zamiany miejscami jedynej, idealnej siły elektromotorycznej z punktem pomiaru prądu, stosuje się do obwodów liniowych z symetrycznymi sprzężeniami między gałęziami. W takich obwodach stosując metodę prądów oczkowych otrzymamy symetryczną macierz impedancji własnych oczek oraz impedancji wzajemnych między oczkami, co jest wystarczającym warunkiem (przy spełnieniu pozostałych) stosowalności twierdzenia o wzajemności.

Metoda prądów oczkowych może być z powodzeniem stosowana również w obwodach liniowych o niesymetrycznych sprzężeniach między gałęziami. Wobec tego zakres stosowalności twierdzenia o wzajemności w odniesieniu do zamiany miejscami jedynej, idealnej siły elektromotorycznej z punktem pomiaru prądu jest węższy niż metody prądów oczkowych.

Wobec niestosowania w literaturze [3], [6], [8], [9] metody potencjałów węzłowych do rozwiązywania obwodów liniowych ze sprzężeniami między gałęziami, nie znajdujemy w niej odpowiedzi na zakres stosowalności twierdzenia o wzajemności w odniesieniu do zamiany miejscami węzła doprowadzenia prądu z jedynego, idealnego źródła prądu z węzłem pomiaru potęcjału.

Twierdzenie o wzajemności znajduje liczne zastosowania w różnych dziedzinach elektrotechniki stosowanej.

## 2. OBWODY LINIOWE ZASILANE IDEALNYMI ŹRÓDŁAMI PRĄDOWYMI Z DOWOLNYMI SPRZĘŻENIAMI MIĘDZY GAŁĘZIAMI, DLA KTÓRYCH $\mathcal{R}e(\hat{Z}_{kl}) = 0$, Z WYJĄTKIEM SPRZĘŻEŃ POJEMNOŚCIOWYCH

Rozważmy obwód liniowy posiadający $n$ węzłów i $m$ gałęzi pasywnych, w których nie występują źródła energii elektrycznej. Niech do

$l$-tego węzła ($l = 1, 2, 3, \ldots, n$) będzie przyłączone $p_l$ gałęzi. Obwód zasilają idealne źródła prądowe. Między poszczególnymi gałęziami występują dowolne sprzężenia, dla których $\mathcal{R}_e(\hat{Z}_{kl}) = 0$ w ogólnym przypadku niesymetryczne, z wyjątkiem sprzężeń pojemnościowych.

Jeżeli przez $\hat{U}_1, \hat{U}_2, \hat{U}_3, \ldots, \hat{U}_m, \hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{I}_3, \ldots, \hat{I}_m$ oznaczymy napięcia na gałęziach obwodu oraz prądy w poszczególnych gałęziach, a przez $\hat{Z}_1, \hat{Z}_2, \hat{Z}_3, \ldots \hat{Z}_m, \hat{Z}_{12}, \hat{Z}_{13}, \hat{Z}_{14}, \ldots \hat{Z}_{kl}$ oznaczymy impedancje własne gałęzi i impedancje uwarunkowane istnieniem sprzężeń między gałęziami, to dla rozważanego obwodu możemy napisać układ $m$ równań liniowych w postaci:

$$\left.\begin{aligned}
\hat{U}_1 &= \hat{Z}_1\hat{I}_1 + \hat{Z}_{12}\hat{I}_2 + \hat{Z}_{13}\hat{I}_3 + \ldots + \hat{Z}_{1m}\hat{I}_m \\
\hat{U}_2 &= \hat{Z}_{21}\hat{I}_1 + \hat{Z}_2\hat{I}_2 + \hat{Z}_{23}\hat{I}_3 + \ldots + \hat{Z}_{2m}\hat{I}_m \\
\hat{U}_3 &= \hat{Z}_{31}\hat{I}_1 + \hat{Z}_{32}\hat{I}_2 + \hat{Z}_3\hat{I}_3 + \ldots + \hat{Z}_{3m}\hat{I}_m \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\hat{U}_m &= \hat{Z}_{m1}\hat{I}_1 + \hat{Z}_{m2}\hat{I}_2 + \hat{Z}_{m3}\hat{I}_3 + \ldots + \hat{Z}_m\hat{I}_m
\end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

Zapisując układ równań (1 a) w postaci macierzowej otrzymamy

$$\begin{matrix} \overset{1}{\diagdown} \\ m \end{matrix}\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix} = \overset{m}{\diagdown}\begin{bmatrix} Z_1 & Z_{12} & Z_{13} & \ldots & Z_{1m} \\ Z_{21} & Z_2 & Z_{23} & \ldots & Z_{2m} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_3 & \ldots & Z_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{1m} & Z_{2m} & Z_{3m} & \ldots & Z_m \end{bmatrix} \begin{matrix} \overset{1}{\diagdown} \\ m \end{matrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix} \tag{1b}$$

lub krócej

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z}\mathbf{I}, \tag{1c}$$

gdzie

**U** — macierz kolumnowa stopnia $m \times 1$ napięć na poszczególnych gałęziach obwodu,

**Z** — macierz kwadratowa stopnia $m$ impedancji własnych gałęzi ($\hat{Z}_l$) oraz impedancji uwarunkowanych występowaniem sprzężeń między gałęziami ($\hat{Z}_{kl}$).

**I** — macierz kolumnowa stopnia $m \times 1$ prądów w poszczególnych gałęziach obwodu.

Ponieważ macierz kwadratowa impedancji **Z** jest macierzą nieosobliwą [7], możemy więc znaleźć macierz odwrotną $\mathbf{Z}^{-1}$. Z równania (1c) otrzymamy

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{U}. \tag{2a}$$

Uziemiając dowolnie wybrany węzeł, który przyjęliśmy za węzeł odniesienia, możemy wyrazić napięcia na wszystkich impedancjach przez

potencjały $n-1$ węzłów niezależnych. W tym celu należy skorzystać z macierzy łączącej **A**. Elementami macierzy **A** są liczby $+1$, $-1$, 0. W jednym wierszu mogą występować co najwyżej liczby $+1$, $-1$, gdyż jedna gałąź może być zawarta tylko między dwoma węzłami niezależnymi. Jest to równoznaczne stwierdzeniu, że napięcie na jednej gałęzi określają potencjały najwyżej dwóch węzłów niezależnych. W wierszach, które odpowiadają gałęziom sąsiadującym z węzłem odniesienia, wystąpi tylko albo $+1$ albo $-1$.

$\mathbf{A} =$

| | | Potencjały węzłów niezależnych |
|---|---|---|
| | | $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_{n-1}$ |
| Napięcia na impedancjach gałęzi | $U_1$ | |
| | $U_2$ | |
| | $U_3$ | |
| | $U_4$ | |
| | . | |
| | . | |
| | . | |
| | . | |
| | . | |
| | . | |
| | . | |
| | $U_m$ | |

Mamy więc równanie

$$\mathbf{U} = \mathbf{AV}, \tag{3}$$

gdzie **V** — macierz kolumnowa stopnia $n-1 \times 1$ potencjałów węzłów niezależnych.

Podstawiając równanie (3) w równanie (2a) otrzymamy

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{AV}. \tag{2b}$$

Jeżeli przez $\hat{I}'_l$ oznaczymy wypadkowy prąd z idealnych źródeł prądowych wpływający do $l$-tego węzła, do którego przyłączonych jest $p_l$ pasywnych gałęzi, i skorzystamy z pierwszego prawa Kirchhoffa, to otrzymamy zależność

$$\sum_{\mu}^{p_l} \hat{I}\mu = \hat{I}'_l \quad \text{dla} \quad l = 1, 2, 3, \ldots, n-1 \tag{4a}$$

lub w postaci macierzowej

$$\mathbf{A}_l\mathbf{I} = \mathbf{I}'_l, \tag{4b}$$

gdzie:

$\mathbf{A}_t$ — macierz prostokątna stopnia $n-1 \times m$, otrzymana przez transpozycję (przestawienie) z macierzy łączącej $\mathbf{A}$,

$\mathbf{I}'_t$ — macierz kolumnowa stopnia $n-1 \times 1$ wypadkowych prądów wpływających do poszczególnych węzłów niezależnych z idealnych źródeł prądowych.

Podstawiając równanie (2b) w równanie (4b) otrzymamy

$$\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{I}'_t \tag{5a}$$

lub

$$\mathbf{Y}\mathbf{V} = \mathbf{I}'_t, \tag{5b}$$

gdzie

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}. \tag{6}$$

Ponieważ macierz kwadratowa admitancji $\mathbf{Y}$ stopnia $n-1 \times n-1$ jest macierzą nieosobliwą [7], można więc obliczyć jej macierz odwrotną $\mathbf{Y}^{-1}$.

Z równania (5b) mamy więc

$$\mathbf{V} = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{I}'_t. \tag{7}$$

Aby otrzymać ostatecznie równanie macierzowe wyrażające prądy w poszczególnych gałęziach w zależności od wielkości danych, należy równanie (7) podstawić w równanie (2b). Otrzymamy wtedy

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{I}'_t. \tag{8a}$$

Podstawiając jeszcze w równaniu (8a) wartość na $\mathbf{Y}^{-1}$ z równania (6), mamy

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}[\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{I}'_t. \tag{8b}$$

Aby dać odpowiedź, w jakim zakresie w rozważanym obwodzie liniowym obowiązuje twierdzenie o wzajemności w odniesieniu do zamiany miejscami węzła doprowadzenia prądu z jednego źródła prądu z węzłem pomiaru potencjału, musimy rozważyć równania (5b) i (6). Z równania (6) widać, że gdy macierz impedancji $\mathbf{Z}$ jest macierzą symetryczną, to symetryczna jest też macierz admitancji $\mathbf{Y}$. Wniosek ten został wyciągnięty w oparciu o znane twierdzenia [1], że macierz odwrotna macierzy symetrycznej jest też macierzą symetryczną oraz że pomnożenie prawostronne macierzy symetrycznej ($\mathbf{Z}^{-1}$) przez pewną macierz ($\mathbf{A}$) (spełniającą warunek wykonalności mnożenia macierzy) i lewostronne przez macierz transponowaną pierwszej ($\mathbf{A}_t$) daje w wyniku ($\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}$) zawsze macierz symetryczną.

Tak więc twierdzenie o wzajemności w odniesieniu do zamiany miejscami węzła doprowadzenia prądu z jedynego, idealnego źródła prądu

z węzłem pomiaru potencjału, stosuje się w dowolnym obwodzie liniowym o symetrycznych sprzężeniach między gałęziami. Jest to własność generalna, nie wyklucza ona jednak przypadków stosowania twierdzenia o wzajemności w omawianym sensie do klasy obwodów liniowych o niesymetrycznych sprzężeniach między gałęziami. Obwód analizowany w przykładzie 1 i 2 [1]) jest tym szczególnym przypadkiem obwodu liniowego z niesymetrycznymi sprzężeniami między gałęziami, do którego nie stosuje się twierdzenia o wzajemności w odniesieniu do zamiany miejscami jedynego, idealnego źródła napięcia z punktem pomiaru prądu, a stosuje się twierdzenie o wzajemności w odniesieniu do zamiany miejscami węzła doprowadzenia prądu z jedynego, idealnego źródła prądu z węzłem pomiaru potencjału. Jak to zostanie niżej dowiedzione, twierdzenie o wzajemności w odniesieniu do zamiany miejscami węzła doprowadzenia prądu z jedynego, idealnego źródła prądu z węzłem pomiaru potencjału stosuje się dla tych obwodów liniowych z niesymetrycznymi sprzężeniami między gałęziami, dla których macierz łącząca $\mathbf{A}$ odgrywa rolę macierzy symetryzującej w iloczynie $\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}$ przy macierzy $\mathbf{Z}^{-1}$ niesymetrycznej.

Przechodzimy do określenia warunku koniecznego i dostatecznego stosowalności twierdzenia o wzajemności w odniesieniu do zamiany miejscami węzła doprowadzenia prądu z jedynego w tym obwodzie źródła prądu z węzłem pomiaru potencjału w obwodach liniowych z niesymetrycznymi sprzężeniami między gałęziami.

Aby twierdzenie o wzajemności w sensie określonym wyżej stosowało się w obwodach z niesymetrycznymi sprzężeniami między gałęziami, iloczyn $\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}$ musi być macierzą symetryczną. Korzystając z własności, że macierz trasponowana macierzy symetrycznej jest równa macierzy wyjściowej oraz że

$$[\mathbf{BA}]_t = \mathbf{A}_t\mathbf{B}_t, \quad [\mathbf{A}_t]_t = \mathbf{A},$$

przy założeniu symetryczności macierzy $\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}$, możemy napisać

$$\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A} = [\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}]_t = \mathbf{A}_t\mathbf{Z}_t^{-1}\mathbf{A}.$$

Obie strony ostatniego równania macierzowego mnożymy lewostronnie przez macierz $\mathbf{A}$, a prawostronnie przez macierz $\mathbf{A}_t$. Mnożenie takie obu stron równania jest dopuszczalne, gdyż dla dowolnej macierzy istnieje zawsze iloczyn $\mathbf{A}_t\mathbf{A}$ oraz $\mathbf{A}\mathbf{A}_t$, i jest macierzą kwadratową symetryczną. Otrzymamy wtedy

$$\mathbf{A}\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{A}_t = \mathbf{A}\mathbf{A}_t\mathbf{Z}_t^{-1}\mathbf{A}\mathbf{A}_t.$$

[1]) Przykłady podano za tekstem.

Gdyby macierz kwadratowa $\mathbf{AA}_t$ była macierzą nieosobliwą, wtedy można by obustronnie ostatnie równanie pomnożyć lewostronnie i prawostronnie przez macierz $[\mathbf{AA}_t]^{-1}$. Dostalibyśmy wówczas

$$[\mathbf{AA}_t]^{-1}[\mathbf{AA}_t]^{-1}\mathbf{Z}^{-1}[\mathbf{AA}_t][\mathbf{AA}_t]^{-1} = [\mathbf{AA}_t]^{-1}[\mathbf{AA}_t]\,\mathbf{Z}_t^{-1}[\mathbf{AA}_t][\mathbf{AA}_t]^{-1},$$

a stąd

$$\mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{Z}_t^{-1}.$$

Ponieważ w rozważanych przez nas obwodach liniowych z niesymetrycznymi sprzężeniami między gałęziami $\mathbf{Z}^{-1} \neq \mathbf{Z}_t^{-1}$, bowiem macierz $\mathbf{Z}^{-1}$ jest macierzą niesymetryczną, dochodzimy więc do wniosku, że tylko w tym przypadku, gdy macierz $\mathbf{AA}_t$ jest macierzą osobliwą, iloczyn $\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}$ może być macierzą symetryczną.

Tak więc warunkiem koniecznym stosowalności twierdzenia o wzajemności w odniesieniu do zamiany miejscami węzła doprowadzenia prądu z jedynego w tym obwodzie idealnego źródła prądu w obwodach liniowych z niesymetrycznymi sprzężeniami między gałęziami jest osobliwość macierzy $\mathbf{AA}_t$. Warunek ten nie jest jednak warunkiem dostatecznym stosowalności omawianego twierdzenia, gdyż dotyczy on tylko własności topologicznych obwodu. Warunek dostateczny stosowalności twierdzenia musi dotyczyć nie tylko własności topologicznych obwodu, ale również charakteru fizycznego elementów obwodu, a w szczególności charakteru sprzężeń między gałęziami.

Dla danej konfiguracji obwodu i sposobu oznaczenia węzłów mamy jednoznacznie określoną macierz łączącą $\mathbf{A}$. Żądamy, aby macierz łącząca $\mathbf{A}$ była macierzą symetryzującą macierz admitancji $\mathbf{Z}^{-1}$, tzn. aby iloczyn $\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}$ był macierzą symetryczną.

Rozpatrzmy przypadek ogólny. Macierz admitancji $\mathbf{Z}^{-1}$ niech ma postać

$$\mathbf{Z}^{-1} = \begin{array}{c} \overset{m}{\diagdown} \\ m \end{array} \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & \dots & Y_{1m} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & \dots & Y_{2m} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & \dots & Y_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_{m1} & Y_{m2} & Y_{m3} & \dots & Y_{mm} \end{bmatrix}$$

Macierz łącząca dla rozpatrywanego przez nas obwodu liniowego będzie macierzą prostokątną stopnia $m \times n - 1$.

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \overset{n-1}{\diagdown} \\ m \end{array} \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \dots & \lambda_{1\,n-1} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \dots & \lambda_{2\,n-1} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & \dots & \lambda_{3\,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \lambda_{m3} & \dots & \lambda_{m\,n-1} \end{bmatrix}$$

Ponieważ elementami macierzy łączącej są $+1$, $-1$, $0$, więc $\lambda_{kl}$ może przyjmować odpowiednio wartość $+1$, $-1$, $0$.

$$\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}=\overset{n-1}{\underset{n-1}{\begin{vmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{21} & \lambda_{31} & \dots & \lambda_{m1}\\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{32} & \dots & \lambda_{m2}\\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} & \dots & \lambda_{m3}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \lambda_{2n-1} & \lambda_{3n-1} & \lambda_{3n-1} & \dots & \lambda_{mn-1}\end{vmatrix}}}\overset{m}{\underset{m}{\begin{vmatrix}Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & \dots & Y_{1m}\\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & \dots & Y_{2m}\\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & \dots & Y_{3m}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ Y_{m1} & Y_{m2} & Y_{m3} & \dots & Y_{mm}\end{vmatrix}}}\overset{n-1}{\underset{m}{\begin{vmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \dots & \lambda_{1\,n-1}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \dots & \lambda_{2\,n-1}\\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & \dots & \lambda_{3\,n-1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \lambda_{m3} & \dots & \lambda_{m\,n-1}\end{vmatrix}}}=$$

$$=\overset{n-1}{\underset{n-1}{\begin{vmatrix}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{m}\lambda_{\mu1}Y_{\mu j}\lambda_{j1} & \sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{m}\lambda_{\mu1}Y_{\mu j}\lambda_{j2} & \sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{m}\lambda_{\mu1}Y_{\mu j}\lambda_{j3} & \dots & \sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{m}\lambda_{\mu1}Y_{\mu j}\lambda_{jn-1}\\ \sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{m}\lambda_{\mu2}Y_{\mu j}\lambda_{j1} & \sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{m}\lambda_{\mu2}Y_{\mu j}\lambda_{j2} & \sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{m}\lambda_{\mu2}Y_{\mu j}\lambda_{j3} & \dots & \sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{m}\lambda_{\mu2}Y_{\mu j}\lambda_{jn-1}\\ \sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{m}\lambda_{\mu3}Y_{\mu j}\lambda_{j1} & \sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{m}\lambda_{\mu3}Y_{\mu j}\lambda_{j2} & \sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{m}\lambda_{\mu3}Y_{\mu j}\lambda_{j3} & \dots & \sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{m}\lambda_{\mu3}Y_{\mu j}\lambda_{jn-1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{m}\lambda_{\mu\,n-1}Y_{\mu j}\lambda_{j1} & \sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{m}\lambda_{\mu\,n-1}Y_{\mu j}\lambda_{j2} & \sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{m}\lambda_{\mu\,n-1}Y_{\mu j}\lambda_{j3} & \dots & \sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{m}\lambda_{\mu\,n-1}Y_{\mu j}\lambda_{jn-1}\end{vmatrix}}}$$

Aby macierz admitancji $\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}$ była macierzą symetryczną, musi być spełniony warunek

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{m}\lambda_{\mu k}\hat{Y}_{\mu j}\lambda_{jl}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{m}\lambda_{\mu l}\hat{Y}_{\mu j}\lambda_{jk} \tag{9}$$

dla dowolnej pary wskaźników $k$ i $l$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n-1$, $l = 1, 2, 3, \dots, n-1$), z wyjątkiem $k = l$.

Warunek (9) jest warunkiem dostatecznym stosowalności twierdzenia o wzajemności w odniesieniu do zamiany miejscami węzła doprowadzenia prądu z jedynego w tym obwodzie idealnego źródła prądu z węzłem pomiaru potencjału w obwodach liniowych z niesymetrycznymi sprzężeniami między gałęziami.

Korzystając z warunku (9) można z jednej strony określić zależności, jakie powinny spełniać elementy macierzy łączącej (**A**) $\lambda_{kl}$ (jaka powinna być konfiguracja obwodu i sposób numeracji węzłów), aby przy zadanej macierzy impedancji **Z** (impedancjach własnych gałęzi i impedancjach sprzężeń między gałęziami) macierz $\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}$ była macierzą symetryczną, a więc aby twierdzenie o wzajemności się stosowało.

Z drugiej strony w tych przypadkach, gdy dana jest konfiguracja obwodu i gdy przyjęto pewien sposób numeracji węzłów, tzn. gdy określona jest jednoznacznie macierz łącząca **A**, warunek (9) pozwala przy

poczynieniu dodatkowych założeń co do sprzężeń między gałęziami odpowiedzieć na pytanie, jakiego charakteru (symetryczne czy niesymetryczne) i między jakimi gałęziami mogą wystąpić sprzężenia w rozważanym obwodzie.

### 3. OBWODY LINIOWE ZASILANE IDEALNYMI SIŁAMI ELEKTROMOTORYCZNYMI ZE SPRZĘŻENIAMI MIĘDZY WSZYSTKIMI GAŁĘZIAMI O DOWOLNYM CHARAKTERZE, LECZ NIE POJEMNOŚCIOWYM, DLA KTÓRYCH $\mathcal{R}_e(\hat{Z}_{kl}) = 0$.

Dotychczas rozważaliśmy obwody liniowe ze sprzężeniami między gałęziami, w których występowały wyłącznie tylko idealne źródła prądu. Obwody takie otrzymujemy jak wiadomo w wyniku zastąpienia sił elektromotorycznych idealnymi źródłami prądu. Zastąpienie takie jest jednak możliwe tylko wówczas, jeżeli gałęzie, w których występują siły elektromotoryczne, nie mają sprzężeń z innymi gałęziami.

Tak więc dotychczasowe rozważania obejmowały te obwody liniowe, w których gałęzie z siłami elektromotorycznymi nie miały sprzężeń z pozostałymi gałęziami.

Obecnie weźmiemy pod uwagę szerszą klasę obwodów liniowych zasilanych idealnymi siłami elektromotorycznymi, w których sprzężenia o dowolnym charakterze, ale nie pojemnościowym [$\mathcal{R}_e(Z_{kl}) = 0$], mogą występować między wszystkimi gałęziami.

Niech rozważany obwód liniowy ma $m$ gałęzi i $n$ węzłów. W $l$-tym węźle niech zbiega się $p_l$ gałęzi.

Dla rozważanego obwodu możemy — podobnie jak poprzednio — napisać układ $m$ równań liniowych (1a), który zapisujemy macierzowo w postaci (1b) lub (1c).

Przy założeniu, że macierz impedancji $\mathbf{Z}$ jest nieosobliwa, otrzymujemy równanie (2a). Dalszy bieg rozważań będzie inny.

W tym przypadku napięcia na poszczególnych impedancjach $\hat{U}_1$, $\hat{U}_2$, $\hat{U}_3$, ..., $\hat{U}_m$ będą nie tylko różnicą potencjałów węzłów, do których rozważana gałąź jest dołączona, ponieważ w gałęzi może zgodnie z założeniem występować idealna siła elektromotoryczna. Tak więc w tym przypadku napięcia na poszczególnych impedancjach będą sumą algebraiczną różnicy odpowiednich potencjałów węzłów, do których rozważana gałąź jest przyłączona, oraz wypadkowej siły elektromotorycznej występującej w danej gałęzi. Zapisać to można macierzowo następująco

$$\mathbf{U} = \mathbf{AV} + \mathbf{E}, \tag{10}$$

gdzie:

**U**, **A**, **V** — są tymi samymi macierzami co w rozważaniach podanych poprzednio.

**E** — macierz kolumnowa stopnia $m \times 1$ wypadkowych idealnych sił elektromotorycznych występujących w poszczególnych gałęziach rozważanego obwodu.

W oparciu o pierwsze prawo Kirchhoffa możemy napisać równanie [7]

$$\mathbf{A}_t \mathbf{I} = \mathbf{0} \tag{11a}$$

Jeżeli do równania (2a) podstawimy wyrażenie na macierz **U** z równania (10), to otrzymamy

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}^{-1}\{\mathbf{AV} + \mathbf{E}\}. \tag{12}$$

Wyrażenie na macierz **I** z równania (12) podstawiamy z kolei do równania (11a); mamy wtedy

$$\mathbf{A}_t \mathbf{Z}^{-1}\{\mathbf{AV} + \mathbf{E}\} = \mathbf{A}_t \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{AV} + \mathbf{A}_t \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{E} = \mathbf{0} \tag{11b}$$

lub

$$\mathbf{A}_t \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{AV} = -\mathbf{A}_t \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{E}. \tag{11c}$$

Prawa strona równania (11c) wyraża w skondensowanej formie prawo zastępowania idealnych sił elektromotorycznych idealnymi źródłami prądu oraz operację sumowania prądów z idealnych źródeł prądu przyłączonych do rozpatrywanego węzła.

W przypadku gdy w obwodzie rozważanym nie ma sprzężeń między gałęziami, macierz impedancji **Z** jest macierzą diagonalną. Diagonalną macierzą będzie też macierz od niej odwrotna $\mathbf{Z}^{-1}$. Elementami niezerowymi na głównej przekątnej tej macierzy $\mathbf{Z}^{-1}$ będą przewodności odpowiednich gałęzi.

W wyniku pomnożenia prawostronnego tej macierzy diagonalnej ($\mathbf{Z}^{-1}$) stopnia $m \times m$ przez macierz kolumnową stopnia $m \times 1$ otrzymamy macierz kolumnową stopnia $m \times 1$ prądów zwarciowych sił elektromotorycznych będących jednocześnie prądami idealnych zastępczych źródeł prądowych. Mnożenie z kolei lewostronne otrzymanej macierzy $\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{E}$ przez transponowaną macierz łączącą $\mathbf{A}_t$ realizuje operację sumowania prądów z idealnych źródeł prądu przyłączonych do rozpatrywanego węzła.

Z równania (11c) przy założeniu, że macierz admitancji $\mathbf{Y} = \mathbf{A}_t \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{A}$ jest macierzą nieosobliwą, mamy równanie

$$\mathbf{V} = -[\mathbf{A}_t \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}_t \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{E}. \tag{13}$$

Podstawiając otrzymaną wartość na **V** z równania (13) do równania (12) dostaniemy

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{E} - \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{A}[\mathbf{A}_t \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}_t \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{E}. \tag{14}$$

Równanie (14) pozwala obliczyć prądy w poszczególnych gałęziach obwodu liniowego ze sprzężeniami między wszystkimi gałęziami o dowolnym charakterze, ale niepojemnościowym, dla których $\mathcal{R}_e(\hat{Z}_{kl}) = 0$ przy zasilaniu idealnymi siłami elektromotorycznymi.

## 4. OBWODY LINIOWE ZASILANE IDEALNYMI ŹRÓDŁAMI PRĄDU ORAZ SIŁAMI ELEKTROMOTORYCZNYMI ZE SPRZĘŻENIAMI MIĘDZY WSZYSTKIMI GAŁĘZIAMI O DOWOLNYM CHARAKTERZE, ALE NIEPOJEMNOŚCIOWYM, DLA KTÓRYCH $\mathcal{R}_e(\hat{Z}_{kl}) = 0$

Rozważane niżej obwody liniowe ze sprzężeniami między wszystkimi gałęziami będą stanowiły dalsze uogólnienie obwodów rozpatrywanych dotychczas. Bierzemy mianowicie pod uwagę obwody liniowe ze sprzężeniami między wszystkimi gałęziami o dowolnym charakterze, ale niepojemnościowym, dla których $\mathcal{R}_e(\hat{Z}_{kl}) = 0$, takie same jak w rozważaniach poprzedniego rozdziału, z tą jedynie różnicą, że obok idealnych sił elektromotorycznych wystąpią w tym przypadku również idealne źródła prądu.

Przyjmując oznaczenia takie same, jak użyte wyżej możemy dla rozpatrywanego obwodu napisać równania (1a), (1b), (1c), (2a), (4a), (4b), (10), (12).

Jeżeli z równania (12) podstawimy wyrażenie na $\mathbf{I}$ do równania (4b), to otrzymamy

$$\mathbf{A}_t \mathbf{Z}\{\mathbf{AV} + \mathbf{E}\} = \mathbf{I}'_l, \tag{15a}$$

stąd

$$\mathbf{A}_t \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{AV} = \mathbf{I}'_l - \mathbf{A}_t \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{E}. \tag{15b}$$

Korzystając z macierzy odwrotnej $[\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}]^{-1}$ macierzy admintacji $\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}$ na macierz $\mathbf{V}$ mamy wyrażenie

$$\mathbf{V} = [\mathbf{A}_t \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{A}]^{-1}\{\mathbf{I}'_l - \mathbf{A}_t \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{E}\}. \tag{16}$$

Ostatecznie wyrażenie na macierz prądów w poszczególnych gałęziach rozważanego obwodu liniowego ze sprzężeniami między wszystkimi gałęziami otrzymamy wówczas, gdy równanie (16) podstawimy do równania (12).

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{A}\{[\mathbf{A}_t \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{A}]^{-1}[\mathbf{I}'_l - \mathbf{A}_t \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{E}]\} + \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{E}. \tag{17}$$

Z równania (16) i (17) jako szczególne przypadki wynikają związki otrzymane wyżej. Jeżeli mianowicie w równaniach (16) i (17) założyć $\mathbf{I}'_l = \mathbf{0}$, co oznacza, że rozważany obwód jest zasilany tylko idealnymi siłami elektromotorycznymi, to otrzymamy równania (13) i (14).

Jeżeli natomiast założyć w równaniach (16) i (17), że $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, co odpowiada przypadkowi obwodu zasilanemu wyłącznie tylko idealnymi źródłami prądu, to otrzymamy równania (7) i (8b).

## 5. UOGÓLNIONE TWIERDZENIE O WZAJEMNOŚCI

W oparciu o równania (16) i (17) można podać ogólniejsze twierdzenia o wzajemności, dotyczące obwodów liniowych z symetrycznymi sprzężeniami między gałęziami, w których obok jednej idealnej siły elektromotorycznej w $k$-tej gałęzi występuje jeszcze w $l$-tej gałęzi jedno idealne źródło prądu.

Aby uzasadnić, że podane niżej twierdzenia o wzajemności są ogólniejsze od sformułowanych na początku artykułu, należy wykazać niemożliwość zastąpienia w ogólnym przypadku obwodu liniowego ze sprzężeniami między gałęziami, zawierającego idealne siły elektromotoryczne, równoważnym obwodem bez tych sprzężeń z idealnymi źródłami prądu w sensie przyporządkowania każdej gałęzi z idealną siłą elektromotoryczną i szeregowo z nią połączoną impedancją, gałęzi z idealnym źródłem prądu i równolegle z nim połączoną admitancją.

Dowodząc ostatniego twierdzenia dowodzimy jednocześnie, że obwody liniowe o dwóch różnych źródłach energii elektrycznej (napięcia i prądu) nie dadzą się w ogólnym przypadku sprowadzić do równoważnych obwodów zawierających albo tylko idealne siły elektromotoryczne, albo idealne źródła prądu.

## 6 ZASTĘPOWANIE ŹRÓDEŁ NAPIĘCIA RÓWNOWAŻNYMI ŹRÓDŁAMI PRĄDU

Rozpatrzmy obwód liniowy o $n$ węzłach i $m$ gałęziach, między którymi występują sprzężenia indukcyjne lub matematycznie im odpowiadające, dla których $\mathcal{R}e(\hat{Z}_{kl}) = 0$ i gdzie $\hat{Z}_{kl}$ — impedancja sprzężenia między gałęziami $k$ i $l$.

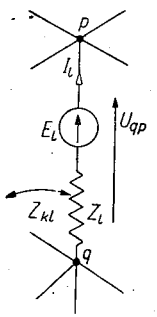
Niech w $l$-tej gałęzi, znajdującej się między $p$ i $q$-tym węzłem, będzie idealna siła elektromotoryczna $\hat{E}_l$ połączona szeregowo z impedancją $\hat{Z}_l$, tak jak to pokazano na rys. 1. Gałąź z impedancją $\hat{Z}_l$ posiada sprzężenia z wszystkimi pozostałymi gałęziami rozważanego obwodu liniowego.

Oznaczając przez $\hat{Z}_{l\mu}$ impedancję uwarunkowaną istnieniem sprzężenia między gałęziami $l$ i $\mu$, a przez $\hat{I}_\mu$ prąd w $\mu$-tej gałęzi ($\mu = 1, 2, 3, \ldots, m$), możemy dla $l$-tej gałęzi rozważanego obwodu napisać równanie

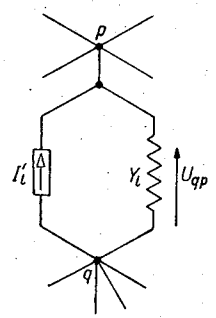
$$\hat{U}_{pq} = \hat{E}_l - \left[\hat{Z}_l \hat{I}_l + \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq l}}^{m} \hat{Z}_{l\mu} \hat{I}_\mu\right]. \tag{18a}$$

Aby można było przyporządkować gałęzi $l$-tej — jak na rys. 1 — równoważną jej gałąź bez sprzężeń, przedstawioną na rys. 2, zawierającą idealne źródło prądu, trzeba mieć możliwość doprowadzenia równania (18a) do postaci

$$\hat{U}_{pq} = \hat{k}\hat{E}_l - \hat{Z}\hat{I}_l . \tag{18b}$$




Rys. 1. Wybrana gałąź z obwodu liniowego ze sprzężeniami między wszystkimi gałęziami




Rys. 2. Wybrana gałąź z obwodu liniowego ze sprzężeniami między wszystkimi gałęziami jak na rys. 1 po zastąpieniu źródła napięcia równoważnym źródłem prądu

Z równania (18b) łatwo już jest przejść przez podzielenie obu stron równania przez $\hat{Z}$ do równania (18c), które odpowiada schematowi gałęzi z rys. 2.

$$\hat{I}'_l = \hat{I}_l + \hat{Y}_l \hat{U}_{pq} , \tag{18c}$$

gdzie

$$\hat{I}'_l = \frac{\hat{k}}{\hat{Z}} \hat{E}_l , \qquad \hat{Y}_l = \frac{1}{\hat{Z}} .$$

Aby równanie (18a) doprowadzić do postaci (18b), należy z równania (18a) wyrugować $m - 1$ prądów w poszczególnych gałęziach rozważanego obwodu. W oparciu o pierwsze prawo Kirchhoffa dla rozważanego obwodu można ułożyć tylko $n - 1$ związków między samymi prądami.

Przy zdefiniowaniu węzła jako punktu, w którym zbiegają się co najmniej trzy gałęzie, liczba węzłów może być co najwyżej równa 2/3 liczby gałęzi. Ze związków napisanych dla rozważanego obwodu w oparciu o drugie prawo Kirchhoffa korzystać w ogólnym przypadku dla

wyrugowania $m-1$ prądów nie możemy, gdyż związki te wprowadzają nowe niewiadome napięcia. Jedyny wyjątek stanowią tu gałęzie połączone równolegle z gałęzią rozważaną, dla których można napisać też równanie o postaci (18a) bez wprowadzania nowych niewiadomych napięć.

Możliwości więc wyrugowania w ogólnym przypadku $m-1$ prądów w poszczególnych gałęziach z równania (18a) nie ma. Tak więc nie jest możliwe przyporządkowanie gałęzi $l$-tej, jak na rys. 1, zawierającej idealną siłę elektromotoryczną $\hat{E}_l$ i szeregowo z nią połączoną impedancję $\hat{Z}_l$ mającą sprzężenia ze wszystkimi pozostałymi gałęziami obwodu, równoważnej gałęzi z idealnym źródłem prądu $\hat{I}'_l$ oraz równoległe do niej przyłączoną admitancją $\hat{Y}_l$, przedstawionej na rys. 2.

Uogólniając nasze rozważania stwierdzamy, że nie można w ogólnym przypadku zastąpić obwodu liniowego ze sprzężeniami między gałęziami [dla których $\mathcal{R}_e(\hat{Z}_{kl}) = 0$], zawierającego siły elektromotoryczne, równoważnym obwodem bez tych sprzężeń z idealnymi źródłami prądu w sensie omawianym wyżej, tzn. nie można gałęziom rozważanego obwodu z siłami elektromotorycznymi i impedancjami (jak na rys. 1) przyporządkować równoważnych im gałęzi z idealnymi źródłami prądu i równolegle do nich przyłączonymi admitancjami (jak na rys. 2).

*Twierdzenie 1.*

Jeżeli w dowolnym obwodzie liniowym z symetrycznymi sprzężeniami między wszystkimi gałęziami obok jednego idealnego źródła prądu włączonego pomiędzy węzeł $A$ i węzeł odniesienia istnieje jeszcze w gałęzi $l$-tej przyłączonej do tych samych węzłów (węzeł $A$ i węzeł odniesienia) idealna siła elektromotoryczna $\hat{E}$, a w dowolnie wybranej $k$-tej gałęzi przyłączonej do węzła $B$ i węzła odniesienia jest prąd $\hat{I}_k$, to przenosząc idealną siłę elektromotoryczną $\hat{E}$ do $k$-tej gałęzi i doprowadzając prąd z idealnego źródła prądu do węzła $B$ (węzeł odprowadzenia nie ulega przy tym zmianie), stwierdzamy, że przy spełnieniu warunku

$$\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\mu=1}^{m} \hat{Y}'_{k\mu}\,\lambda_{\mu j}\,\hat{Z}'_{ja} = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\mu=1}^{m} \hat{Y}'_{l\mu}\,\lambda_{\mu j}\,\hat{Z}'_{jb}$$

prąd w gałęzi $k$-tej przed zmianą $\hat{I}_k$ jest równy prądowi w $l$-tej gałęzi po zmianie $I_l$, tzn.

$$\hat{I}_k = \hat{I}_l\,.$$

Aby dowieść wyżej sformułowanego twierdzenia weźmy pod uwagę równanie (17). Wprowadzamy następujące upraszczające oznaczenia.

$$\mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{Y}' = \overset{m}{\underset{m}{\begin{vmatrix} Y'_{11} & Y'_{12} & Y'_{13} & \dots & Y'_{1m} \\ Y'_{21} & Y'_{22} & Y'_{23} & \dots & Y'_{2m} \\ Y'_{31} & Y'_{32} & Y'_{32} & \dots & Y'_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y'_{m1} & Y'_{m2} & Y'_{m3} & \dots & Y'_{mm} \end{vmatrix}}}; \quad [\mathbf{A}_t \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{A}]^{-1} = \mathbf{Z}' = \overset{n-1}{\underset{n-1}{\begin{vmatrix} Z'_{11} & Z'_{12} & Z'_{13} & \dots & Z'_{1n-1} \\ Z'_{21} & Z'_{22} & Z'_{23} & \dots & Z'_{2n-1} \\ Z'_{31} & Z'_{32} & Z'_{33} & \dots & Z'_{3n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z'_{n-11} & Z'_{n-12} & Z'_{n-13} & \dots & Z_{n-1\,n-1} \end{vmatrix}}}$$

Po uwzględnieniu tych oznaczeń równanie (17) można zapisać następująco

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{Z}'\mathbf{I}_l + \{\mathbf{Y}' - \mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{Z}'\mathbf{A}_t\mathbf{Y}'\}\mathbf{E}. \tag{17a}$$

Dla obwodu liniowego z symetrycznymi sprzężeniami między gałęziami wyrażenie w nawiasie $\{\mathbf{Y}' - \mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{Z}'\mathbf{A}_t\mathbf{Y}'\}$ jest macierzą symetryczną stopnia $m \times m$. Wynika to z faktu symetryczności w takich przypadkach macierzy admitancji $\mathbf{Y}'$ oraz impedancji $\mathbf{Z}'$ i z faktu, że wykonane na nich operacje mnożenia zgodnie z wyżej przytaczanymi twierdzeniami dają w wyniku macierz symetryczną. Macierz tę oznaczmy przez

$$\mathbf{Y}' - \mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{Z}'\mathbf{A}_t\mathbf{Y}' = \mathbf{Y}'' = \overset{m}{\underset{m}{\begin{vmatrix} Y''_{11} & Y''_{12} & Y''_{13} & \dots & Y''_{1m} \\ Y''_{21} & Y''_{22} & Y''_{23} & \dots & Y''_{2m} \\ Y''_{31} & Y''_{32} & Y''_{33} & \dots & Y''_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y''_{m1} & Y''_{m2} & Y''_{m3} & \dots & Y''_{mm} \end{vmatrix}}}$$

Równanie (17a) można zapisać w postaci rozwiniętej następująco:

$$\overset{1}{\underset{m}{\begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ I_m \end{vmatrix}}} = \overset{m}{\underset{m}{\begin{vmatrix} Y'_{11} & Y'_{12} & Y'_{13} & \dots & Y'_{1m} \\ Y'_{21} & Y'_{22} & Y'_{23} & \dots & Y'_{2m} \\ Y'_{31} & Y'_{32} & Y'_{33} & \dots & Y'_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y'_{m1} & Y'_{m2} & Y'_{m3} & \dots & Y'_{mm} \end{vmatrix}}} \overset{n-1}{\underset{m}{\begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \dots & \lambda_{1n-1} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \dots & \lambda_{2n-1} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & \dots & \lambda_{3n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \lambda_{m3} & \dots & \lambda_{m\,n-1} \end{vmatrix}}} \times$$

$$\times \overset{n-1}{\underset{n-1}{\begin{vmatrix} Z'_{11} & Z'_{12} & Z'_{13} & \dots & Z'_{1n-1} \\ Z'_{21} & Z'_{22} & Z'_{23} & \dots & Z'_{2n-1} \\ Z'_{31} & Z'_{32} & Z'_{33} & \dots & Z'_{3n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z'_{n-11} & Z'_{n-12} & Z'_{n-13} & \dots & Z'_{n-1\,n-1} \end{vmatrix}}} \overset{1}{\underset{n-1}{\begin{vmatrix} I'_1 \\ I'_2 \\ I'_3 \\ \vdots \\ I'_{n-1} \end{vmatrix}}} + \overset{m}{\underset{m}{\begin{vmatrix} Y''_{11} & Y''_{12} & Y''_{13} & \dots & Y''_{1m} \\ Y''_{21} & Y''_{22} & Y''_{23} & \dots & Y''_{2m} \\ Y''_{31} & Y''_{32} & Y''_{33} & \dots & Y''_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y''_{m1} & Y''_{m2} & Y''_{m3} & \dots & Y''_{mm} \end{vmatrix}}} \overset{1}{\underset{m}{\begin{vmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ \vdots \\ E_m \end{vmatrix}}}$$

Po wykonaniu wskazanych operacji otrzymamy

$$\begin{matrix}1\\ m\end{matrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix} = \begin{matrix}1\\ m\end{matrix}\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\mu=1}^{m} Y'_{1\mu}\,\lambda_{\mu j}\,Z'_{ji}\,I'_i \\ \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\mu=1}^{m} Y'_{2\mu}\,\lambda_{\mu j}\,Z'_{ji}\,I'_i \\ \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\mu=1}^{m} Y'_{3\mu}\,\lambda_{\mu j}\,Z'_{ji}\,I'_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\mu=1}^{m} Y'_{m\mu}\,\lambda_{\mu j}\,Z'_{ji}\,I'_i \end{bmatrix} + \begin{matrix}1\\ m\end{matrix}\begin{bmatrix} \sum_{\mu=1}^{m} Y''_{1\mu}\,E_\mu \\ \sum_{\mu=1}^{m} Y''_{2\mu}\,E_\mu \\ \sum_{\mu=1}^{m} Y''_{3\mu}\,E_\mu \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sum_{\mu=1}^{m} Y''_{m\mu}\,E_\mu \end{bmatrix}$$

Na podstawie ostatniego równania mamy wyrażenie na prąd $\hat{I}_q$ w $q$-tej gałęzi

$$\hat{I}_q = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\mu=1}^{m} \hat{Y}'_{q\mu}\,\lambda_{\mu j}\,\hat{Z}'_{ji}\,\hat{I}'_i + \sum_{\mu=1}^{m} \hat{Y}''_{q\mu}\,\hat{E}_\mu .$$

Weźmy pod uwagę warunki istniejące w rozpatrywanym obwodzie przed zmianą miejscami. Są one

$$\hat{I}'_i = \begin{cases} = 0 \text{ dla } i \neq a \\ = \hat{I} \text{ dla } i = a \end{cases}; \qquad \hat{E}_\mu \begin{cases} = 0 \text{ dla } \mu \neq l \\ = \hat{E} \text{ dla } \mu = l . \end{cases}$$

Po uwzględnieniu tych warunków otrzymamy następujące wyrażenie na prąd w $k$-tej gałęzi

$$\hat{I}_k = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\mu=1}^{m} \hat{Y}_{k\mu}\,\lambda_{\mu j}\,\hat{Z}'_{ja}\,\hat{I} + \hat{Y}''_{kl}\,\hat{E} .$$

Po zamianie miejscami źródeł energii i punktu pomiaru prądu mamy następujące warunki

$$\hat{I}'_i = \begin{cases} = 0 \text{ dla } i \neq b \\ = \hat{I} \text{ dla } i = b \end{cases}; \qquad \hat{E}_\mu \begin{cases} = 0 \text{ dla } \mu \neq k \\ = \hat{E} \text{ dla } \mu = k. \end{cases}$$

Pisząc dla tych warunków wyrażenie na prąd w $l$-tej gałęzi otrzymamy

$$\hat{I}_l = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\mu=1}^{m} \hat{Y}'_{l\mu}\,\lambda_{\mu j}\,\hat{Z}'_{jb}\,\hat{I} + \hat{Y}''_{lk}\,\hat{E} .$$

Ponieważ $Y''_{lk} = Y''_{kl}$, więc przy spełnieniu warunku podanego w twierdzeniu

$$\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\mu=1}^{m} \hat{Y}'_{l\mu}\,\lambda_{\mu j}\,\hat{Z}'_{jb} = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\mu=1}^{m} \hat{Y}'_{k\mu}\,\lambda_{\mu j}\,\hat{Z}'_{ja}$$

prądy w $k$-tej gałęzi przed zamianą i $l$-tej gałęzi po zamianie będą sobie równe.

*Twierdzenie II.*

Jeżeli w dowolnym obwodzie liniowym z symetrycznymi sprzężeniami między wszystkimi gałęziami obok jednego idealnego źródła prądu włączonego między węzeł $A$ i węzeł odniesienia istnieje jeszcze w gałęzi $l$-tej przyłączonej do tych samych węzłów, idealna siła elektromotoryczna $\hat{E}$, a dowolnie wybrany węzeł $B$ ma potencjał $\hat{V}_b$, to przenosząc idealną siłę elektromotoryczną do gałęzi $k$-tej przyłączonej do węzła $A$ i węzła odniesienia i doprowadzając prąd $\hat{I}$ z idealnego źródła prądu do węzła $B$ (węzeł odprowadzenia prądu, będący węzłem odniesienia, nie ulega zmianie) stwierdzamy, że przy spełnieniu warunku

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{n-1}\hat{Z}'_{b\mu}\lambda_{j\mu}\hat{Y}'_{jl}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{n-1}\hat{Z}'_{a\mu}\lambda_{j\mu}\hat{Y}'_{jk}$$

potencjał węzła $A\,\hat{V}_a$ po zmianie jest równy potencjałowi węzła $B\,\hat{V}_b$ przed zmianą, tzn.

$$\hat{V}_a=\hat{V}_b\,.$$

Dowodząc wyżej sformułowanego twierdzenia, skorzystamy z równania (16). Przyjmujemy te same oznaczenia upraszczające, co przy dowodzie twierdzenia pierwszego. Pisząc równanie (16) w postaci rozwiniętej i uwzględniając przyjęte oznaczenia upraszczające otrzymamy

$$\begin{bmatrix}V_1\\V_2\\V_3\\\vdots\\V_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z'_{11}&Z'_{12}&Z'_{13}&\dots&Z'_{1\,n-1}\\Z'_{21}&Z'_{22}&Z'_{23}&\dots&Z'_{2\,n-1}\\Z'_{31}&Z'_{32}&Z'_{33}&\dots&Z'_{3\,n-2}\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\Z'_{n-11}&Z'_{n-12}&Z'_{n-13}&\dots&Z'_{n-1\,n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I'_1\\I'_2\\I'_3\\\vdots\\I'_{n-1}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}Z'_{11}&Z'_{12}&Z'_{13}&\dots&Z'_{1\,n-1}\\Z'_{21}&Z'_{22}&Z'_{23}&\dots&Z'_{2\,n-1}\\Z'_{31}&Z'_{32}&Z'_{33}&\dots&Z'_{3\,n-1}\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\Z'_{n-11}&Z'_{n-12}&Z'_{n-13}&\dots&Z'_{n-1\,n-1}\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}\lambda_{11}&\lambda_{21}&\lambda_{31}&\dots&\lambda_{m1}\\\lambda_{12}&\lambda_{22}&\lambda_{32}&\dots&\lambda_{m2}\\\lambda_{13}&\lambda_{23}&\lambda_{33}&\dots&\lambda_{m3}\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\\lambda_{1\,n-1}&\lambda_{2\,n-1}&\lambda_{3\,n-1}&\dots&\lambda_{m\,n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y'_{11}&Y'_{12}&Y'_{13}&\dots&Y'_{1m}\\Y'_{21}&Y'_{22}&Y'_{23}&\dots&Y'_{2m}\\Y'_{31}&Y'_{32}&Y'_{33}&\dots&Y'_{3m}\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\Y'_{m1}&Y'_{m2}&Y'_{m3}&\dots&Y'_{mm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_1\\E_2\\E_3\\\vdots\\E_m\end{bmatrix}$$

Po wykonaniu wskazanych mnożeń otrzymamy

$$\begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{n-1} \end{vmatrix}^{1}_{n-1} = \begin{vmatrix} \sum_{n=1}^{n-1} Z'_{1\mu} I'_\mu \\ \sum_{n=1}^{n-1} Z'_{2\mu} I'_\mu \\ \sum_{n=1}^{n-1} Z'_{3\mu} I'_\mu \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sum_{n=1}^{n-1} Z'_{n-1\,\mu} I'_\mu \end{vmatrix}^{1}_{n-1} - \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{n-1} Z'_{1\mu}\,\lambda_{j\mu} Y'_{ji} E_i \\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{n-1} Z'_{2\mu}\,\lambda_{j\mu} Y'_{ji} E_i \\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{n-1} Z'_{3\mu}\,\lambda_{j\mu} Y'_{ji} E_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{n-1} Z'_{n-1\,\mu}\,\lambda_{j\mu} Y'_{ji} E_i \end{vmatrix}^{1}_{n-1}$$

W oparciu o ostatnie równanie możemy napisać wyrażenie na potencjał $\hat{V}_q$ niezależnego $q$-tego węzła rozpatrywanego obwodu.

$$\hat{V}_q = \sum_{\mu=1}^{n-1} \hat{Z}'_{q\mu} \hat{I}'_\mu - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{n-1} \hat{Z}'_{q\mu}\,\lambda_{j\mu}\,\hat{Y}'_{ji}\,\hat{E}_i .$$

Dla rozpatrywanego obwodu przed zmianą miejscami mamy następujące warunki

$$\hat{E}_i \begin{cases} = 0 & \text{dla } i \neq l \\ = \hat{E} & \text{dla } i = l \end{cases}; \quad \hat{I}'_\mu \begin{cases} = 0 & \text{dla } \mu \neq a \\ = \hat{I} & \text{dla } \mu = a . \end{cases}$$

Po uwzględnieniu tych warunków otrzymujemy wyrażenie na potencjał $\hat{V}_b$ $B$-tego węzła.

$$\hat{V}_b = \hat{Z}'_{ba}\hat{I} - \sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{n-1} \hat{Z}'_{b\mu}\,\lambda_{j\mu}\,\hat{Y}'_{ji}\,\hat{E} .$$

Po zmianie miejscami źródeł energii elektrycznej i punktu pomiaru potencjału mamy dla rozważanego obwodu następujące warunki:

$$\hat{E}_i \begin{cases} = 0 & \text{dla } i \neq k \\ = \hat{E} & \text{dla } i = k \end{cases}; \quad \hat{I}'_\mu \begin{cases} = 0 & \text{dla } \mu \neq b \\ = \hat{I} & \text{dla } \mu = b . \end{cases}$$

Pisząc dla tych warunków wyrażenie na potencjał $\hat{V}_a$ $A$-tego węzła, otrzymujemy

$$\hat{V}_a = \hat{Z}'_{ab}\hat{I} - \sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{n-1} \hat{Z}'_{a\mu}\,\lambda_{j\mu}\,\hat{Y}'_{jk}\,\hat{E} .$$

Dla naszego obwodu liniowego o symetrycznych sprzężeniach między gałęziami spełniona jest równość $\hat{Z}'_{ab} = \hat{Z}'_{ba}$. Jeżeli nadto rozpatrywany obwód spełnia warunek twierdzenia

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{n-1}\hat{Z}'_{b\mu}\lambda_{j\mu}\hat{Y}'_{ji}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{n-1}\hat{Z}'_{a\mu}\lambda_{j\mu}\hat{Y}'_{jk},$$

to zachodzi równość potencjałów $\hat{V}_b$ węzła $B$ przed zamianą i potencjału $\hat{V}_a$ węzła $A$ po zamianie, tzn. że

$$\hat{V}_a=\hat{V}_b.$$

Dla stosowalności podanych wyżej twierdzeń do obwodów z symetrycznymi sprzężeniami między gałęziami konieczne jest spełnienie podanych w nich warunków. Warunki te wymagają określonych dla danego obwodu zależności między impedancjami własnymi gałęzi i impedancjami sprzężeń między gałęziami.

Jeżeli gałęzie $l$ i $k$, w których znajduje się siła elektromotoryczna przed zamianą lub po zamianie, nie mają sprzężeń z pozostałymi gałęziami, a ich impedancje własne są sobie równe, to — jak łatwo tego dowieść — warunki twierdzeń dla dowolnego obwodu liniowego z symetrycznymi sprzężeniami między pozostałymi gałęziami są zawsze spełnione. Jest to oczywiste, gdyż wtedy obwód sprowadza się, wobec możliwości zastąpienia jednego rodzaju idealnego źródła energii elektrycznej drugim rodzajem, do obwodu zasilanego z jednego tylko idealnego źródła energii (napięcia czy prądu).

W przypadku pierwszego twierdzenia idealne źródło prądu zastępujemy równoważnym idealnym źródłem napięcia o sile elektromotorycznej równej co do wartości stracie napięcia na impedancji danej gałęzi pochodzącej od przepływającego przez nią tylko prądu idealnego źródła prądu. W ten sposób otrzymamy w danej gałęzi dwie siły elektromotoryczne połączone szeregowo, które oczywiście zastępuje jedna wypadkowa. W przypadku natomiast drugiego twierdzenia, zastępując siłę elektromotoryczną równoważnym idealnym źródłem prądu, otrzymamy obwód, który będzie zasilany tylko jednym idealnym wypadkowym prądem, będącym sumą algebraiczną prądu idealnego właściwego źródła prądu i prądu idealnego zastępczego źródła prądu.

Zakładając, że obwód zasila albo tylko jedyne idealne źródło napięcia, albo tylko jedyne idealne źródło prądu, otrzymamy natychmiast podane na początku artykułu twierdzenie o wzajemności w odniesieniu do zamiany miejscami idealnej jedynej siły elektromotorycznej z punktem pomiaru prądu i w odniesieniu do zamiany miejscami węzła doprowadzenia prądu z idealnego jedynego źr:dła prądu z węzłem pomiaru potencjału.

Należy zwrócić uwagę, że oba twierdzenia o wzajemności zostały tu dowiedzione w oparciu o związki otrzymane przy analizie obwodu liniowego metodą potencjałów węzłowych, gdy tymczasem w literaturze

[4], [6], [8], [9] twierdzeń tych dowodzi się w pierwszym przypadku w oparciu o związki wynikające z metody prądów oczkowych, w drugim przypadku o związki wynikające z metody potencjałów węzłowych.

## 7. OBWODY LINIOWE ZE SPRZĘŻENIAMI MIĘDZY GAŁĘZIAMI ZASILANE IDEALNYMI ŹRÓDŁAMI PRĄDU

Uogólniając nasze rozważania weźmy pod uwagę obwody liniowe, w których obok dotychczas omawianych sprzężeń między gałęziami występują jeszcze sprzężenia pojemnościowe między idealnymi kondensatorami. W pierwszej części rozważania nasze ograniczymy do obwodów liniowych, w których idealne kondensatory będą jedynymi elementami w danej gałęzi, tzn. gałęzie, w których występują idealne kondensatory, są gałęziami pasywnymi — bez rezystancji oraz reaktancji. Przy uwzględnieniu wszystkich możliwych pojemności, pojemności idealnych kondensatorów oraz pojemności cząstkowe tworzą wielobok zupełny. Dla rozważanych przez nas obwodów pojemności cząstkowe można traktować jako pojemności włączone równolegle do impedancji poszczególnych gałęzi lub do pojemności idealnych kondensatorów.

Niech rozważany obwód ma $m$ gałęzi pasywnych i $n$ węzłów. Do $l$-tego węzła niech będzie przyłączonych $p_l$ gałęzi. Obwód zasilają idealne źródła prądu.

Przyjmując te same oznaczenia jak wyżej na prądy $\hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{I}_3 \ldots, \hat{I}_m$ w impedancjach, $\hat{U}_1, \hat{U}_2, \hat{U}_3, \ldots, \hat{U}_m$ — na napięcie na odpowiednich impedancjach oraz $\hat{Z}_1, \hat{Z}_2, \hat{Z}_3, \ldots, \hat{Z}_m, \hat{Z}_{12}, \hat{Z}_{13}, \ldots, \hat{Z}_{kl}$ — na impedancje własne gałęzi i impedancje sprzężeń między gałęziami, możemy dla rozpatrywanego obwodu napisać równania (1a), (1b), (1c). Słuszne też będą dla naszego obwodu równania (2a) i (3).

Oznaczmy przez $\hat{I}''_1, \hat{I}''_2, \hat{I}''_3, \ldots, \hat{I}_m$ prądy w odpowiednich pojemnościach cząstkowych.

Niech do $l$-tego węzła będzie przyłączonych $q_l$ pasywnych gałęzi utworzonych z pojemności cząstkowych.

W oparciu o pierwsze prawo Kirchhoffa możemy napisać dla $l$-tego węzła zależność

$$\sum_{\mu}^{p_l} \hat{I}_\mu + \sum_{\mu}^{q_l} \hat{I}''_\mu = \hat{I}'_l, \tag{19a}$$

gdzie

$\hat{I}'_l$ jest wypadkowym prądem wpływającym do $l$-tego węzła z idealnych źródeł prądu.

Zapisując macierzowo równanie (19a) otrzymamy

$$\mathbf{A}_t\{\mathbf{I} + \mathbf{I}''\} = \mathbf{I}'_l. \tag{16b}$$

Macierze $\mathbf{I}$, $\mathbf{I}'$, $\mathbf{I}'_l$ są macierzami kolumnowymi stopnia $m \times 1$ złożonymi odpowiednio z prądów w impedancjach własnych gałęzi, prądów w pojemnościach cząstkowych i prądów wypadkowych doprowadzonych do poszczególnych węzłów.

Prądy wpływające do węzła z idealnych zastępczych źródeł prądu $\hat{I}'_1$, $\hat{I}'_2$ $\hat{I}_3'$ ..., $\hat{I}'_{n-1}$ wstawiamy do macierzy $\mathbf{I}'_l$ ze znakiem plus (+), a wypływające z węzła ze znakiem minus (−).

Podstawiając z równania (2b) wyrażenie na $\mathbf{I}$ do równania (18b), otrzymamy

$$\mathbf{A}_t \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{AV} + \mathbf{A}_t \mathbf{I}' = \mathbf{I}'_l . \tag{19c}$$

Prądy w pojemnościach cząsteczkowych można wyrazić przy pomocy potencjałów węzłów niezależnych, do których rozważana pojemność cząstkowa jest przyłączona, oraz admitancji odpowiadających tym pojemnościom cząstkowym.

Mamy więc

$$\mathbf{I}' = \mathbf{YU} = \mathbf{YAV}. \tag{20}$$

Występująca w równaniu (20) macierz admitancji $\mathbf{Y}$ pojemności cząstkowych jest macierzą diagonalną stopnia $m \times m$. Jej elementami niezerowymi na głównej przekątnej są admitancje odpowiednich pojemności cząstkowych.

Podstawiając z równania (20) wyrażenie na $\mathbf{I}'$ do równania (19c), otrzymamy

$$\{\mathbf{A}_t \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{A}_t \mathbf{YA}\} \mathbf{V} = \mathbf{I}'_l . \tag{19d}$$

Ponieważ macierz $[\mathbf{A}_t \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{A}_t \mathbf{YA}]$ jest macierzą nieosobliwą, więc korzystając z odwrotności tej macierzy, z równania (18d), mamy

$$\mathbf{V} = [\mathbf{A}_t \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{A}_t \mathbf{YA}]^{-1} \mathbf{I}'_l . \tag{21}$$

Podstawiając z kolei z równania (21) wyrażenie na $\mathbf{V}$ do równania (2b) otrzymamy

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{A} [\mathbf{A}_t \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{A}_t \mathbf{YA}]^{-1} \mathbf{I}'_l . \tag{22}$$

Równanie (22) pozwala obliczyć prądy w poszczególnych impedancjach własnych gałęzi rozważanego obwodu liniowego.

Aby znaleźć macierz prądów w pojemnościach cząstkowych, należy wyrażenie na macierz $\mathbf{V}$ z równania (21) podstawić do równania (20). Otrzymamy wtedy

$$\mathbf{I}' = \mathbf{YA} [\mathbf{A}_t \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{A}_t \mathbf{YA}]^{-1} \mathbf{I}'_l . \tag{23}$$

Przy analizie zagadnienia zakresu stosowalności twierdzenia o wzajemności w rozpatrywanych przez nas obwodach liniowych oprzemy się o równanie (21).

Jeżeli w rozpatrywanym obwodzie występują tylko sprzężenia symetryczne ($\hat{Z}_{kl} = \hat{Z}_{lk}$), to symetryczna jest macierz impedancji $\mathbf{Z}$. Symetryczność macierzy $\mathbf{Z}$ pociąga za sobą symetryczność macierzy do niej odwrotnej $\mathbf{Z}^{-1}$. Jak już wyżej wspominaliśmy, mnożenie prawostronne przez dowolną macierz $\mathbf{A}$ (spełniającą oczywiście warunek wykonalności mnożenia) i jednoczesne mnożenie lewostronne przez macierz przestawioną (transponowaną) $\mathbf{A}_t$ (macierzy $\mathbf{A}$) dowolnej macierzy symetrycznej $\mathbf{Z}^{-1}$ daje w wyniku macierz symetryczną $(\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A})$. Tak więc przy symetrycznej macierzy impedancji $\mathbf{Z}$ będzie symetryczna jednocześnie macierz admitancji $\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}$.

Ponieważ macierz admitancji pojemności cząstkowych jest macierzą diagonalną, więc macierz admitancji $\mathbf{A}_t\mathbf{Y}\mathbf{A}$ będzie dla dowolnej macierzy łączącej $\mathbf{A}$ macierz symetryczną. Korzystając z twierdzenia, że suma dwóch macierzy symetrycznych tego samego stopnia jest macierzą symetryczną tegoż stopnia, dochodzimy do wniosku, że macierz $\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{A}_t\mathbf{Y}\mathbf{A}$ jest macierzą symetryczną dla dowolnego obwodu liniowego z symetrycznymi sprzężeniami między gałęziami. Tak więc z równania (21) wynika, że twierdzenie o wzajemności w odniesieniu do zamiany miejscami węzła doprowadzenia prądu z idealnego jedynego źródła prądu z węzłem pomiaru potencjału stosuje się w dowolnych obwodach liniowych o symetrycznych sprzężeniach między gałęziami. Podany warunek jest warunkiem generalnym stosowalności twierdzenia o wzajemności. Nie wyklucza on jednak przypadków szczególnych obwodów liniowych, w których mimo niesymetryczności sprzężeń między gałęziami (macierz impedancji $\mathbf{Z}$ jest wtedy niesymetryczna) twierdzenie o wzajemności w odniesieniu do zamiany miejscami węzła doprowadzenia prądu z idealnego źródła prądu z węzłem pomiaru potencjału będzie się stosować. Przytoczone w pierwszej części artykułu rozważania dotyczące warunków, przy spełnieniu których — mimo niesymetryczności sprzężeń — twierdzenie o wzajemności w omawianym sensie stosuje się w rozważanym obwodzie, mogą być bez przeszkody ekstrapolowane na analizowane tu obwody liniowe.

## 8. OBWODY LINIOWE ZE SPRZĘŻENIAMI MIĘDZY GAŁĘZIAMI ZASILANE IDEALNYMI SIŁAMI ELEKTROMOTORYCZNYMI

Rozpatrzmy obwód liniowy tej samej konfiguracji, o tej samej liczbie gałęzi i węzłów co w rozdziale poprzednim, z tą jedynie różnicą, że w gałęziach o sprzężeniach niepojemnościowych występują idealne siły elektromotoryczne. Idealnych źródeł prądu rozpatrywany obwód nie ma. Dla takiego obwodu słuszne są równania (1a), (1b), (1c), (2a), (10), (12) i (20).

Zachowując oznaczenia stosowane dotąd, możemy w oparciu o pierwsze prawo Kirchhoffa napisać

$$\mathbf{A}_t\{\mathbf{I}+\mathbf{I}'\}=\mathbf{O}. \tag{24}$$

Podstawiając wyrażenie na $\mathbf{I}$ z równania (12) do równania (24) otrzymamy

$$\mathbf{A}_t\{\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{AV}+\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{E}\}+\mathbf{A}_t\mathbf{I}'=\mathbf{O}. \tag{25a}$$

Jeżeli z równania (20) macierz prądów w pojemnościach cząstkowych $\mathbf{I}'$ wyrazimy przy pomocy admitancji pojemności cząstkowych i potencjałów węzłów niezależnych, to otrzymamy wtedy

$$[\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}+\mathbf{A}_t\mathbf{YA}]\mathbf{V}=-\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{E}. \tag{25b}$$

Korzystając z odwrotności macierzy $[\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}+\mathbf{A}_t\mathbf{YA}]^{-1}$ możemy wyrazić macierz potencjałów węzłów niezależnych $\mathbf{V}$ w zależności od impendancji i sił elektromotorycznych. Mamy

$$\mathbf{V}=-[\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}+\mathbf{A}_t\mathbf{YA}]^{-1}\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{E}. \tag{26}$$

Aby otrzymać macierz prądów w poszczególnych impendancjach i pojemnościach cząstkowych należy wyrażenie na $\mathbf{V}$ z równania (26) podstawić do równań (12) i (20); otrzymamy wówczas

$$\mathbf{I}=-\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}[\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}+\mathbf{A}_t\mathbf{YA}]^{-1}\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{E}+\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{E}, \tag{27}$$

$$\mathbf{I}'=-\mathbf{YA}[\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}+\mathbf{A}_t\mathbf{YA}]^{-1}\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{E}. \tag{28}$$

Równania (27) i (28) pozwalają znaleźć w rozważanym obwodzie liniowym prądy we wszystkich gałęziach i pojemnościach cząstkowych, jeżeli są dane watości idealnych sił elektromotorycznych, impendancje własne gałęzi, impendancje sprzężeń między gałęziami oraz admitancje pojemności cząstkowych.

Biorąc pod uwagę równanie (27) stwierdzamy, że przy istnieniu w rozpatrywanym obwodzie symetrycznych sprzężeń między gałęziami stosuje się twierdzenie o wzajemności w odniesieniu do zamiany miejscam jedynej, idealnej siły elektromotorycznej z punktu pomiaru prądu. W oparciu o wyżej przytaczane twierdzenia dochodzimy do wniosku, że macierz $\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}[\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}+\mathbf{A}_t\mathbf{YA}]^{-1}\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}+\mathbf{Z}^{-1}$ dla obwodów o symetrycznych sprzężeniach między gałęziami jest macierzą symetryczną. Otrzymany rezultat jest wystarczającym warunkiem (przy spełnieniu oczywiście warunków pozostałych) stosowalności twierdzenia o wzajemności w odniesieniu do zamiany miejscami jedynej, idealnej siły elektromotorycznej z punktu pomiaru prądu.

## 9. OBWODY LINIOWE ZE SPRZĘŻENIAMI MIĘDZY GAŁĘZIAMI ZASILANE IDEALNYMI ŹRÓDŁAMI ENERGII ELEKTRYCZNEJ (NAPIĘCIA I PRĄDU)

Obwód liniowy ze sprzężeniami między gałęziami zasilany idealnymi źródłami energii elektrycznej tym różni się od obwodów rozważanych w poprzednich dwóch rozdziałach, że obok idealnych sił elektromotorycznych w obwodzie tym istnieją jeszcze idealne źródła prądu. Przy tych samych założeniach i oznaczeniach słuszne będą dla rozważanego obwodu równania (1a), (1b), (1c), (2a), (10), (12), (19a), (19b), (19c), (20).

Jeżeli podstawimy wyrażenie na $\mathbf{I}$ z równania (12) do równania (19b), to otrzymamy

$$\mathbf{A}_t\{\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{AV} + \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{E}\} + \mathbf{A}_t\mathbf{I}' = \mathbf{I}_l'. \tag{29}$$

Macierz prądów w pojemnościach cząstkowych dostaniemy po podstawieniu wyrażenia na $\mathbf{U}$ z równania (10) do równania (20)

$$\mathbf{I}' = \mathbf{YU} = \mathbf{Y}\{\mathbf{AV} + \mathbf{E}\}. \tag{20a}$$

Podstawiając z kolei równanie (20a) do równania (29) mamy

$$[\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{A}_t\mathbf{YA}]\mathbf{V} = \mathbf{I}_l' - \mathbf{A}_t[\mathbf{Z}^{-1} - \mathbf{Y}]\mathbf{E}. \tag{30}$$

Macierz potencjałów węzłów niezależnych w zależności od wielkości danych wyrazi się równaniem

$$\mathbf{V} = [\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{A}_t\mathbf{YA}]^{-1}\{\mathbf{I}_l' - \mathbf{A}_t[\mathbf{Z}^{-1} - \mathbf{Y}]\mathbf{E}\}. \tag{31}$$

Aby otrzymać ostatecznie macierze prądów w poszczególnych impedancjach własnych gałęzi $\mathbf{I}$ oraz w pojemnościach cząstkowych $\mathbf{I}'$, należy podstawić w równania (12) i (20a) wyrażenie na $\mathbf{V}$ z równania (31); otrzymamy wtedy

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}[\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{A}_t\mathbf{YA}]^{-1}\{\mathbf{I}_l' - \mathbf{A}_t[\mathbf{Z}^{-1} - \mathbf{Y}]\mathbf{E}\} + \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{E}, \tag{32}$$

$$\mathbf{I}' = \mathbf{YA}[\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{A}_t\mathbf{YA}]^{-1}\{\mathbf{I}_l' - \mathbf{A}_t[\mathbf{Z}^{-1} - \mathbf{Y}]\mathbf{E}\} + \mathbf{YE}. \tag{33}$$

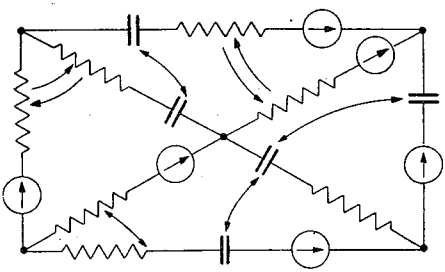
Równania (32) i (33) stanowią dalsze uogólnienie równań wyprowadzonych wcześniej [(8b), (14), (17), (22), (23), (27) i (28)].

Równania (8b), (14), (17), (22), (23), (27) i (28) można otrzymać z równań (32) i (33) zakładając odpowiednio: $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$ oraz $\mathbf{I} = \mathbf{0}$ lub $\mathbf{E} = \mathbf{0}$.

Podane w pierwszej części artykułu uogólnione twierdzenia o wzajemności stosują się w pełni do rozważanych tu obwodów liniowych. Biorąc pod uwagę równania (31) i (32) stwierdzamy, że mają one analogiczną budowę jak równania rozpatrywane wyżej. Ekstrapolując te twierdzenia o wzajemności na teren obecnie rozważanych obwodów liniowych należy tylko jako macierze $\mathbf{Z}'$ i $\mathbf{Y}'$ traktować odpowiednio macierze $[\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{A}_t\mathbf{YA}]^{-1}$ oraz $\mathbf{Z}^{-1} - \mathbf{Y}$.

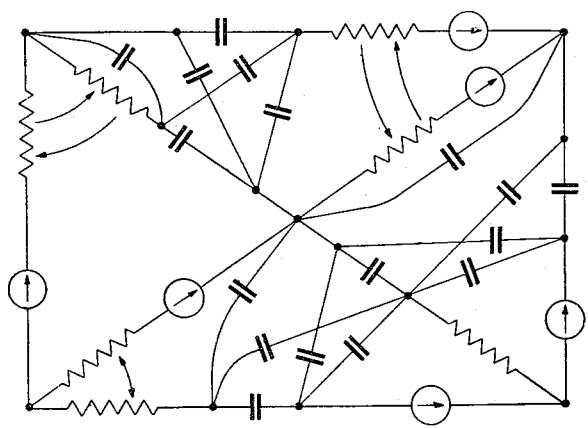
## 10. OBWODY LINIOWE O DOWOLNYCH SPRZĘŻENIACH MIĘDZY GAŁĘZIAMI ZASILANE DOWOLNYMI ŹRÓDŁAMI ENERGII ELEKTRYCZNEJ

Rozpatrzmy na końcu przypadek najogólniejszy obwodu liniowego jak na rys. 3, w którym obok sprzężeń między gałęziami o charakterze omawianym w pierwszej części artykułu występują jednocześnie sprzężenia pojemnościowe między idealnymi kondensatorami. Obwody zasilają dowolne źródła energii elektrycznej, tzn. że w obwodzie występują równocześnie idealne siły elektromotoryczne oraz idealne źródła prądu. Idealne siły elektromotoryczne mogą występować również w gałęziach zawierających pojemności kondensatorów.



Rys. 3. Obwód liniowy ze sprzężeniami między gałęziami i między idealnymi kondensatorami

W takim przypadku, gdy uwzględnimy istnienie sprzężeń pojemnościowych między idealnymi kondensatorami, otrzymamy obwód liniowy z odpowiednio większą liczbą gałęzi i węzłów. Dodatkowe gałęzie w otrzymanym obwodzie tworzą pojemności cząstkowe sprzężeń pojemnościowych. Przykład takiego obwodu podaje rys. 4. Otrzymany w ten sposób obwód należy do klasy obwodów rozważanych przy końcu pierwszej części artykułu.



Rys. 4. Obwód liniowy ze sprzężeniami między gałęziami jak na rys. 3 z wyrysowanymi pojemnościami cząstkowymi

## 11. NIEKTÓRE ZAGADNIENIA ANALIZY OBWODÓW LINIOWYCH ZE SPRZĘŻENIAMI MIĘDZY GAŁĘZIAMI

Ogólna tendencja do osiągnięcia wyników przy możliwie najmniejszym nakładzie czasu i środków stwarza zagadnienie kryteriów wyboru metody rozwiązywania obwodów liniowych ze sprzężeniami między gałęziami.

Praktycznymi metodami rozwiązywania obwodów liniowych ze sprzężeniami między gałęziami są w zasadzie: metoda oczkowa i metoda potencjałów węzłowych. Liczbę równań liniowych niezbędnych do rozwiązania obwodu metodą prądów oczkowych określa się jak wiadomo $m - n + 1$, gdzie $m$ — liczba gałęzi rozpatrywanego obwodu, $n$ — liczba węzłów tegoż obwodu.

Liczba równań liniowych w metodzie potencjałów węzłowych jest równa liczbie węzłów niezależnych $n - 1$. Jeżeli w analizie naszej ograniczymy się tylko do obliczenia prądów w poszczególnych gałęziach rozważanego obwodu, to oczywiście wybieramy tę metodę, która zapewnia nam układ równań niższego stopnia.

Często jednak chodzi nam o wartości prądów w poszczególnych gałęziach obwodu przy różnych wariantach pracy sieci. Jeżeli interesują nas prądy w gałęziach przy zmianach pewnej liczby impedancji rozważanego obwodu, to celowe jest rozwiązać obwód metodą prądów oczkowych. Potrzebne do dalszych rozważań admitancje własne zwarciowe i admitancje wzajemne zwarciowe otrzymamy wtedy jako odpowiednie elementy macierzy odwrotnej macierzy impedancji własnych oczek oraz impedancji wzajemnych oczek. Dla niektórych przypadków obwodów liniowych celowe jest wyznaczenie admitancji własnych zwarciowych i admitancji wzajemnych zwarciowych przez założenie dowolnej wartości prądu w wybranej gałęzi obwodu i rozwiązanie tegoż obwodu dla tej wartości prądu. Ta ostatnia metoda może być stosowana tylko do tych obwodów liniowych, w których założenia prądu w jednej wybranej gałęzi pozwala znaleźć prądy we wszystkich pozostałych. Dla dowolnego obwodu można określić liczbę niezbędnych prądów, które należy założyć w wybranych gałęziach, aby można było wyznaczyć prądy we wszystkich pozostałych gałęziach. W takich jednak przypadkach metoda traci najistotniejszą swoją zaletę — operatywność. Stosowanie tego sposobu wyznaczania admitancji własnych zwarciowych i admitancji wzajemnych zwarciowych w obwodach o dużej liczbie sprzężeń między gałęziami jest też niecelowe, gdyż wówczas konieczne jest dla określenia wyżej wspomnianych admitancji ułożenie odpowiedniego układu równań.

Rozważmy obwód liniowy o dowolnych sprzężeniach między gałęziami, dla których $\mathcal{R}_e(\hat{Z}_{kl}) = 0$, zasilany idealnymi siłami elektromoto-

rycznymi. Załóżmy, że interesują nas wartości prądów w poszczególnych gałęziach przy zmianach impedancji własnych $q$ gałęzi rozważanego obwodu. Przyjmujemy taką numerację impedancji, aby te z nich, które będą się zmieniały, miały indeksy od 1 do $q$. Wszystkich gałęzi obwód ma $m$. Liczba węzłów niech będzie $n$.

Stosując zasadę superpozycji, dla rozważanego obwodu liniowego na prąd w $l$-tej gałęzi otrzymamy równanie:

$$\hat{I}_l = \sum_{\mu=1}^{m} \hat{Y}_{l\mu} \hat{E}_\mu \tag{34}$$

dla $l = 1, 2, 3, \ldots, m$,
gdzie:

$$\hat{Y}_{l\mu} = \frac{\hat{I}_l}{\hat{E}_\mu} \begin{cases} l = \mu & \text{— admitancja własna zwarciowa} \\ l \neq \mu & \text{— admitancja wzajemna zwarciowa.} \end{cases}$$

Korzystając z zasady kompensacji impedancje $\hat{Z}_1, \hat{Z}_2, \hat{Z}_3, \ldots, \hat{Z}_q$ zastępujemy idealnymi siłami elektromotorycznymi o zwrotach przeciwnych do zwrotów prądów oraz równymi co do wartości stratom napięć na poszczególnych impedancjach

$$\hat{E}_k = \hat{Z}_k \hat{I}_k \tag{35}$$

dla $k = 1, 2, 3, \ldots, q$.

W oparciu o równanie (34), wyłączając spod znaku sumy idealne siły elektromotoryczne zastępujące impedancje $\hat{Z}_1, \hat{Z}_2, \hat{Z}_3, \ldots, \hat{Z}_q$, otrzymamy na prądy w poszczególnych gałęziach obwodu układ $m$ równań w postaci:

$$\left.\begin{aligned}
\hat{I}_1 &= -\hat{Y}_{11}\hat{E}_1 - \hat{Y}_{12}\hat{E}_2 - \hat{Y}_{13}\hat{E}_3 - \ldots - \hat{Y}_{1q}\hat{E}_q + \sum_{\mu=q+1}^{m} \hat{Y}_{1\mu}\hat{E}_\mu \\
\hat{I}_2 &= -\hat{Y}_{21}\hat{E}_1 - \hat{Y}_{22}\hat{E}_2 - \hat{Y}_{23}\hat{E}_3 - \ldots - \hat{Y}_{2q}\hat{E}_q + \sum_{\mu=q+1}^{m} \hat{Y}_{2\mu}\hat{E}_\mu \\
\hat{I}_3 &= -\hat{Y}_{31}\hat{E}_1 - \hat{Y}_{32}\hat{E}_2 - \hat{Y}_{33}\hat{E}_3 - \ldots - \hat{Y}_{3q}\hat{E}_q + \sum_{\mu=q+1}^{m} \hat{Y}_{3\mu}\hat{E}_\mu \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\hat{I}_m &= -\hat{Y}_{m1}\hat{E}_1 - \hat{Y}_{m2}\hat{E}_2 - \hat{Y}_{m3}\hat{E}_3 - \ldots - \hat{Y}_{mq}\hat{E}_q + \sum_{\mu=q+1}^{m} \hat{Y}_{m\mu}\hat{E}_\mu .
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Oznaczając w układzie równań (36) $\hat{I}_{ok} = \sum_{\mu=q+1}^{m} \hat{Y}_{k\mu}\hat{E}_\mu$ dla $k = 1, 2, 3, \ldots, m$, otrzymamy na prądy $\hat{I}_{01}, \hat{I}_{02}, \hat{I}_{03}, \ldots, \hat{I}_{0m}$ wyrażenie

$$\left.\begin{aligned}
\hat{I}_{01} &= \hat{I}_1 + \hat{Y}_{11}\hat{E}_1 + \hat{Y}_{12}\hat{E}_2 + \hat{Y}_{13}\hat{E}_3 + \ldots + \hat{Y}_{1q}\hat{E}_q \\
\hat{I}_{02} &= \hat{I}_2 + \hat{Y}_{21}\hat{E}_1 + \hat{Y}_{22}\hat{E}_2 + \hat{Y}_{23}\hat{E}_3 + \ldots + \hat{Y}_{2q}\hat{E}_q \\
\hat{I}_{03} &= \hat{I}_3 + \hat{Y}_{31}\hat{E}_1 + \hat{Y}_{32}\hat{E}_2 + \hat{Y}_{33}\hat{E}_3 + \ldots + \hat{Y}_{3q}\hat{E}_q \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\hat{I}_{0m} &= \hat{I}_m + \hat{Y}_{m1}\hat{E}_1 + \hat{Y}_{m2}\hat{E}_2 + \hat{Y}_{m3}\hat{E}_3 + \ldots + \hat{Y}_{mq}\hat{E}_q .
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Jeżeli rozważany obwód liniowy został rozwiązany, to oczywiście znane są wszystkie wielkości stojące po prawej stronie równań (37). Tak więc w dalszych rozważaniach możemy przyjąć, że znane są wartości prądów $\hat{I}_{01}$, $\hat{I}_{02}$, $I_{03}$, ... $\hat{I}_{0m}$.

Niech impedancje $\hat{Z}_1$, $\hat{Z}_2$, $\hat{Z}_3$, ..., $\hat{Z}_q$ ulegną zmianie do nowych wartości $\hat{Z}'_1$, $\hat{Z}'_2$, $\hat{Z}'_3$, ..., $\hat{Z}'_q$ o odpowiednią wartość przyrostu $\Delta\hat{Z}_k = \hat{Z}_k - \hat{Z}'_k$ dla $k = 1, 2, 3, \ldots, q$.

Korzystając z zasady kompensacji zastępujemy impedancje $\hat{Z}'_1$, $\hat{Z}'_2$, $\hat{Z}'_3$, ..., $\hat{Z}'_q$ odpowiednimi idealnymi siłami elektromotorycznymi o wartości równej

$$\hat{E}'_k = \hat{Z}'_k \hat{I}'_k \tag{38}$$

i zwrocie przeciwnym zwrotowi prądu w danej gałęzi.

Jeżeli oznaczymy przez $\hat{I}''_1$, $\hat{I}''_2$, $\hat{I}''_3$, ..., $\hat{I}''_q$ wartości prądów w impedancjach $\hat{Z}'_1$, $\hat{Z}'_2$, $\hat{Z}'_3$, ..., $\hat{Z}'_q$ (po zmianie), to otrzymamy dla nich w oparciu o równanie (34) następujący liniowy układ równań zapisany w postaci skróconej

$$\hat{I}''_l = -\sum_{\mu=1}^{q} \hat{Y}_{l\mu}\hat{E}'_\mu + \hat{I}_{0l} \tag{39a}$$

dla $l = 1, 2, 3, \ldots, q$.

Po podstawieniu w równanie (39a) zależności (38) i po przeniesieniu na lewą stronę $\hat{Y}_{ll}\hat{Z}'_l\hat{I}_l$ oraz po zgrupowaniu odpowiednich wyrazów mamy

$$\hat{I}_l(1 + \hat{Y}_{ll}\hat{Z}'_l) + \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu\neq l}}^{q} \hat{Y}_{l\mu}\hat{Z}'_\mu\hat{I}'_\mu = \hat{I}_{0l} \tag{39b}$$

dla $l = 1, 2, 3, \ldots, q$.

Układ równań (39b) można zapisać w postaci macierzowej następująco:

$$\begin{matrix} q \\ q \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 + Y_{11}Z'_1, & Y_{12}Z'_2, & Y_{13}Z'_3 \ldots, & Y_{1q}Z'_q \\ Y_{21}Z'_1, & 1 + Y_{22}Z'_2, & Y_{23}Z'_3 \ldots, & Y_{2q}Z'_q \\ Y_{31}Z'_1, & Y_{32}Z'_2, & 1 + Y_{33}Z'_3 \ldots, & Y_{3q}Z'_q \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{q1}Z'_1, & Y_{q2}Z'_1, & Y_{q3}Z'_3 \ldots, & 1 + Y_{qq}Z'_q \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ q \end{matrix}\begin{bmatrix} I'_1 \\ I'_2 \\ I'_3 \\ \vdots \\ I'_q \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ q \end{matrix}\begin{bmatrix} I_{01} \\ I_{02} \\ I_{03} \\ \vdots \\ I_{0q} \end{bmatrix} \tag{39c}$$

lub krócej

$$\mathbf{MI}' = \mathbf{I}_{0l}. \tag{39d}$$

Ponieważ macierz $\mathbf{M}$ jest macierzą nieosobliwą, więc korzystając z jej odwrotności $\mathbf{M}^{-1}$ otrzymamy na macierz prądów w poszczególnych gałęziach obwodu, po zmianie impedancji $q$ gałęzi, wyrażenie

$$\mathbf{I}'' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}_{0l}, \tag{40}$$

gdzie

$$\mathbf{M}^{-1} = \overset{q}{\underset{q}{\begin{vmatrix} 1+Y_{11}Z'_1, & Y_{12}Z'_2, & Y_{13}Z'_3, & \ldots, & Y_{1q}Z'_q \\ Y_{21}Z'_1, & 1+Y_{22}Z'_2, & Y_{23}Z'_3, & \ldots, & Y_{2q}Z'_q \\ Y_{31}Z'_1, & Y_{32}Z'_2, & 1+Y_{33}Z'_3, & \ldots, & Y_{3q}Z'_q \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{q1}Z'_1, & Y_{q2}Z'_2, & Y_{q3}Z'_3, & \ldots, & 1+Y_{qq}Z'_q \end{vmatrix}}}^{-1} = \overset{q}{\underset{q}{\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \ldots & m_{1q} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} & \ldots & m_{2q} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & \ldots & m_{3q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{q1} & m_{q2} & m_{q3} & \ldots & m_{qq} \end{vmatrix}}}$$

Korzystając jeszcze raz z równania (34) możemy napisać układ równań dla prądów $\hat{I}'_1, \hat{I}''_{q+2}, \hat{I}''_{q+3}, \ldots, \hat{I}''_m$ w impedancjach $\hat{Z}_{q+1}, \hat{Z}_{q+2}, \hat{Z}_{q+3}, \ldots \hat{Z}_m$ po zmianie impedancji

$$\hat{I}''_p = -\sum_{\mu=1}^{q} \hat{Y}_{p\mu}\hat{E}'_\mu + \hat{I}_{0p} \tag{41a}$$

dla $p = q+1,\ q+2,\ q+3, \ldots, m.$

Po podstawieniu do równania (41a) zależności (38) mamy

$$\hat{I}''_p = -\sum_{\mu=1}^{q} \hat{Y}_{p\mu}\hat{Z}'_\mu\hat{I}''_\mu + \hat{I}_{0p} \tag{41b}$$

dla $p = q+1,\ q+2,\ q+3, \ldots, m.$

lub w postaci macierzowej

$$\overset{1}{\underset{m-q}{\begin{vmatrix} I''_{q+1} \\ I''_{q+2} \\ I''_{q+3} \\ \vdots \\ I''_m \end{vmatrix}}} = \overset{q}{\underset{m-q}{\begin{vmatrix} Y_{q+11}Z'_1, & Y_{q+12}Z'_2, & Y_{q+13}Z'_3, & \ldots, & Y_{q+1,q}Z'_q \\ Y_{q+21}Z'_1, & Y_{q+22}Z'_2, & Y_{q+23}Z'_3, & \ldots, & Y_{q+2,q}Z'_q \\ Y_{q+31}Z'_1, & Y_{q+32}Z'_2, & Y_{q+33}Z'_3, & \ldots, & Y_{q+3,q}Z'_q \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{m1}Z'_1, & Y_{m2}Z'_2, & Y_{m3}Z'_3, & \ldots, & Y_{mq}Z'_q \end{vmatrix}}} \overset{1}{\underset{q}{\begin{vmatrix} I''_1 \\ I''_2 \\ I''_3 \\ \vdots \\ I''_q \end{vmatrix}}} = \overset{1}{\underset{m-q}{\begin{vmatrix} I_{0q+1} \\ I_{0q+2} \\ I_{0q+3} \\ \vdots \\ I_{0m} \end{vmatrix}}} \tag{41c}$$

Jeżeli podstawimy wyrażenie na macierz $\mathbf{I}''$ z równania (40) do równania (41c), to dostaniemy wtedy

$$
\begin{array}{c}
\overset{1}{\underset{m-q}{\diagdown}} \\
\begin{bmatrix} I''_{q+1} \\ I''_{q+2} \\ I''_{q+2} \\ \vdots \\ I''_{m} \end{bmatrix}
\end{array}
=
\begin{array}{c}
\overset{q}{\underset{m-q}{\diagdown}} \\
\begin{bmatrix}
Y_{q+11} Z'_1, & Y_{q+12} Z'_2, & Y_{q+13} Z'_3, & \ldots, & Y_{q+1q} Z'_q \\
Y_{q+21} Z'_1, & Y_{q+22} Z'_2, & Y_{q+23} Z'_3, & \ldots, & Y_{q+2q} Z'_q \\
Y_{q+31} Z'_1, & Y_{q+32} Z'_2, & Y_{q+33} Z'_3, & \ldots, & Y_{q+3q} Z'_q \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
Y_{m1} Z'_1, & Y_{m2} Z'_2, & Y_{m3} Z'_3, & \ldots, & Y_{mq} Z'_q
\end{bmatrix}
\end{array}
\times
$$

$$
\times
\begin{array}{c}
\overset{q}{\underset{q}{\diagdown}} \\
\begin{bmatrix}
m_{11} & m_{12} & m_{13} & \ldots & m_{1q} \\
m_{21} & m_{22} & m_{23} & \ldots & m_{2q} \\
m_{31} & m_{32} & m_{33} & \ldots & m_{3q} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
m_{q1} & m_{q2} & m_{q3} & \ldots & m_{qq}
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c}
\overset{1}{\underset{q}{\diagdown}} \\
\begin{bmatrix} I_{01} \\ I_{02} \\ I_{03} \\ \vdots \\ I_{0q} \end{bmatrix}
\end{array}
+
\begin{array}{c}
\overset{1}{\underset{m-q}{\diagdown}} \\
\begin{bmatrix} I_{0q+1} \\ I_{0q+1} \\ I_{0q+3} \\ \vdots \\ I_{0m} \end{bmatrix}
\end{array}
\tag{41d}
$$

Po wykonaniu wskazanych działań mamy

$$
\begin{array}{c}
\overset{1}{\underset{m-q}{\diagdown}} \\
\begin{bmatrix} I''_{q+1} \\ I''_{q+2} \\ I''_{q+3} \\ \vdots \\ I''_{m} \end{bmatrix}
\end{array}
=
-
\begin{array}{c}
\overset{1}{\underset{m-q}{\diagdown}} \\
\begin{bmatrix}
\sum\limits_{j=1}^{q} \sum\limits_{\mu=1}^{q} Y_{q+1\mu} Z'_\mu m_{\mu j} I_{0j} \\
\sum\limits_{j=1}^{q} \sum\limits_{\mu=1}^{q} Y_{q+2\mu} Z'_\mu m_{\mu j} I_{0j} \\
\sum\limits_{j=1}^{q} \sum\limits_{\mu=1}^{q} Y_{q+3\mu} Z'_\mu m_{\mu j} I_{0j} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum\limits_{j=1}^{q} \sum\limits_{\mu=1}^{q} Y_{m\mu} Z'_\mu m_{\mu j} I_{0j}
\end{bmatrix}
\end{array}
+
\begin{array}{c}
\overset{1}{\underset{m-q}{\diagdown}} \\
\begin{bmatrix} I_{0q+1} \\ I_{0q+2} \\ I_{0q+3} \\ \vdots \\ I_{0m} \end{bmatrix}
\end{array}
\tag{41e}
$$

Z równania (41e) mamy wyrażenie na prąd w $s$-tej gałęzi ($s = q + 1$, $q + 2$, $q + 3, \ldots, m$) — po jednoczesnej zmianie impedancji $q$ gałęzi — w zależności od prądów w poszczególnych impedancjach przed zmianą, od admitancji własnych i wzajemnych zwarciowych oraz od impedancji $\hat{Z}'_1, \hat{Z}'_2, \hat{Z}'_3, \ldots \hat{Z}'_q$.

$$
\hat{I}''_s = -\sum_{j=1}^{q} \sum_{\mu=1}^{q} \hat{Y}_{s\mu} \hat{Z}'_\mu \hat{m}_{\mu j} \hat{I}_{0j} + \hat{I}_{0s} \tag{41f}
$$

dla $s = q + 1$, $q + 2$, $q + 3, \ldots, m$.

Podstawiając do równania (41f) zamiast prądu $\hat{I}_{0s}$ odpowiednie wyrażenie z równań (37) po uwzględnieniu w nim zależności (35) otrzymamy

$$\hat{I}''_s = -\sum_{\mu=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}\hat{Y}_{s\mu}\hat{Z}'_\mu\hat{m}_{\mu j}\hat{I}_{0j} + \sum_{\mu=1}^{q}\hat{Y}_{s\mu}\hat{Z}_\mu\hat{I}_\mu + \hat{I}_s \tag{41g}$$

dla $s = q+1,\ q+2,\ q+3, \ldots, m$.

Oznaczając w równaniu (41g)

$$\hat{U}_{s\mu} = -\sum_{j=1}^{q}\hat{Z}'_\mu\hat{m}_{\mu j}\hat{I}_{0j} + \hat{Z}_\mu\hat{I}_\mu$$

mamy ostatecznie

$$\hat{I}''_s = \sum_{\mu=1}^{q}\hat{Y}_{s\mu}\hat{U}_{s\mu} + \hat{I}_s \tag{41h}$$

dla $s = q+1,\ q+2,\ q+3, \ldots, m$.

Przy danych impedancjach $\hat{Z}'_1, \hat{Z}'_2, \hat{Z}'_s, \ldots \hat{Z}'_q$, admitancjach własnych i wzajemnych zwarciowych prądach w poszczególnych gałęziach obwodu (przed zmianą impedancji) $\hat{U}_{s\mu}$ (dla dowolnego wskaźnika $s$) jest wielkością stałą. Z tego wynika następujący ważny wniosek praktyczny. Jeżeli obliczymy raz wartość $\hat{U}_{s\mu}$, to — aby następnie znaleźć prądy w poszczególnych gałęziach po zmianie impedancji — wystarczy tylko admitancje wzajemne zwarciowe pomnożyć przez $\hat{U}_{s\mu}$ i dodać do wartości obliczonej wartość prądu istniejącą w danej gałęzi przed zmianą impedancji.

Gdy w rozważanym obwodzie ulega zmianie jedna tylko impedancja, np. $\hat{Z}_k$, a interesuje nas prąd $s$-tej impedancji, to potrzebne zależności otrzymamy jako szczególny przypadek z równań ogólnych zakładając $q = k$.

Z równania (41g) mamy wtedy

$$\hat{I}''_s = -\hat{Y}_{sk}\hat{Z}'_k\hat{m}_{kk}\hat{I}_{0k} + \hat{Y}_{sk}\hat{Z}_k\hat{I}_k + \hat{I}_s.$$

Po podstawieniu do ostatniego równania odpowiednich wyrażeń na $\hat{m}_{kk}$ i $\hat{I}_{0k}$ z równań (40) oraz (37) dostaniemy po wykonaniu przekształceń

$$\hat{I}''_s = \frac{\Delta\hat{Z}_k}{1+\hat{Y}_{kk}\hat{Z}'_k}\hat{I}_k\hat{Y}_{sk} + \hat{I}_s = \hat{U}_{sk}\hat{Y}_{sk} + \hat{I}_s, \tag{42}$$

gdzie:

$$\Delta\hat{Z}_k = \hat{Z}_k - \hat{Z}'_k,$$

$$\hat{U}_{sk} = \frac{\Delta\hat{Z}_k}{1+\hat{Y}_{kk}\hat{Z}'_k}\hat{I}_k.$$

Jeżeli w rozważanym obwodzie ulegają zmianie dwie impedancje, np. $\hat{Z}_k$ i $\hat{Z}_l$, a interesuje nas prąd — podobnie jak poprzednio — $s$-tej gałęzi, to odpowiednie zależności otrzymamy z równań ogólnych dla $q = k$ i $q = l$.

Przyjmując w równaniu (41h) $q = k$ i $q = l$ otrzymamy:

$$\hat{I}''_s = \hat{Y}_{sk}\hat{U}_{sk} + \hat{Y}_{sl}\hat{U}_{sl} + \hat{I}_s$$

dla $s = q + 1, q + 2, q + 3, \ldots, m$.

gdzie:

$$\hat{U}_{sk} = -\hat{Z}'_k \hat{m}_{kk}\hat{I}_{0k} - \hat{Z}'_k \hat{m}_{kl}\hat{I}_{0l} + \hat{Z}_k \hat{I}_k,$$

$$\hat{U}_{sl} = -\hat{Z}'_l \hat{m}_{lk}\hat{I}_{0k} - \hat{Z}'_l \hat{m}_{ll}\hat{I}_{0l} + \hat{Z}_l \hat{I}_l.$$

Współczynniki $\hat{m}_{kk}$, $\hat{m}_{ll}$, $\hat{m}_{kl}$, $\hat{m}_{lk}$ wyznaczamy z równania (40).

W oparciu o równanie (21) dla rozważanych obwodów liniowych mamy równanie

$$\hat{V}_l = \sum_{\mu=1}^{n-1} \hat{Z}_{l\mu}\hat{I}'_\mu \tag{43}$$

dla $l = 1, 2, 3, \ldots, n-1$,

gdzie

$$\hat{Z}_{l\mu} = \frac{\hat{V}_l}{\hat{I}'_\mu}\begin{cases}\mu = l & \text{impedancja własna jałowa,}\\ \mu \neq l & \text{impedancja wzajemna jałowa.}\end{cases}$$

W obwodzie liniowym zależność między prądem wpływającym z jedynego źródła prądu do $l$-tego węzła a potencjałem $k$-tego węzła jest liniowa i to szczególnie prosta, gdyż $\hat{V}'_k = \hat{Z}_{kl}\hat{I}'_l$.

Zakładając w wybranej gałęzi dowolną wartość prądu $\hat{I}$ dla pewnych obwodów liniowych ze sprzężeniami między gałęziami, można wyznaczyć prądy we wszystkich pozostałych gałęziach rozważanego obwodu. Mając wartości prądu w poszczególnych gałęziach łatwo już określić, jaki musi być doprowadzony prąd do $l$-tego węzła z idealnego jedynego źródła prądu włączonego między ten węzeł a węzeł odniesienia oraz wartość potencjałów wszystkich węzłów niezależnych.

Z zależności $\hat{Z}_{kl} = \dfrac{\hat{V}'_k}{\hat{I}'_l}$ po podstawieniu wyliczonych wyżej wartości potencjałów i prądów doprowadzonych do węzłów niezależnych wyznaczymy impedancje własne jałowe oraz impedancje wzajemne zwarciowe.

Potencjały istniejące rzeczywiście w rozważanym obwodzie liniowym ze sprzężeniami między gałęziami znajdujemy z równania (43).

Tok postępowania przy tym sposobie rozwiązywania obwodów liniowych ze sprzężeniami między gałęziami ilustruje podany dalej przykład 2.

## PRZYKŁADY

*Przykład 1*

Obwód liniowy przedstawiony na rys. 5 z niesymetrycznymi sprzężeniami między gałęziami posiada idealne siły elektromotoryczne oraz idealne źródło prądu.

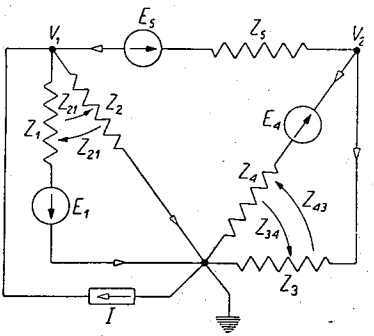
1. Obliczyć prądy we wszystkich gałęziach rozpatrywanego obwodu.

2. Rozpatrzyć zagadnienie stosowalności twierdzeń o wzajemności dla następujących przypadków:

a) zamiany miejscami węzła doprowadzenia prądu z idealnego, jedynego ($\hat{E}_1 = \hat{E}_5 = \hat{E}_4 = 0$) w tym obwodzie źródła prądu z węzłem pomiaru potencjału w stosunku do potencjału węzła odniesienia,

b) zamiany miejscami idealnej siły elektromotorycznej $\hat{E}_1$, przy zwartych siłach elektromotorycznych $\hat{E}_4$, $\hat{E}_5$ ($\hat{E}_4 = \hat{E}_5 = 0$) i stanie jałowym źródła prądu ($\hat{I} = 0$) z punktem pomiaru prądu znajdującym się w gałęzi z impedancją $\hat{Z}_4$,

c) przy istnieniu jednocześnie w obwodzie idealnej siły elektromotorycznej $\hat{E}_1$ w gałęzi z impedancją $\hat{Z}_1$ i idealnego źródła prądu załączonego między węzeł $V_1$ a węzeł odniesienia oraz przy przeniesieniu siły elektromotorycznej $\hat{E}_1$ do gałęzi z impedancją $\hat{Z}_4$ i doprowadzeniu prądu $\hat{I}$ do węzła $\hat{V}_2$.




Rys. 5. Obwód liniowy z niesymetrycznymi sprzężeniami między gałęziami

3. Wyznaczyć, jakie elementy macierzy admitancji $\mathbf{Y}' = \mathbf{Z}^{-1}$, leżące symetrycznie w stosunku do głównej przekątnej, muszą być równe zeru, aby macierz $\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}$ dla rozpatrywanego obwodu była macierzą symetryczną.

4. Obliczyć prądy w poszczególnych gałęziach obwodu przy istnieniu tylko sił elektromotorycznych $\hat{E}_1$ i $\hat{E}_4$ ($\hat{E}_5 = 0$, $\hat{I} = 0$) i po włączeniu w gałąź z impedancją $\hat{Z}_5$ dodatkowej impedancji $\hat{Z}_5'$.

### Rozwiązanie

1. Macierz impedancji własnych gałęzi oraz impedancji sprzężeń między gałęziami ma dla rozpatrywanego obwodu postać następującą

$$\mathbf{Z} = \begin{array}{c} \diagdown\!\!\!\!\diagdown \; 5 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} Z_1 & Z_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Z_{21} & Z_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & Z_{34} & 0 \\ 0 & 0 & Z_{43} & Z_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_5 \end{bmatrix}$$

Wyznacznik macierzy **Z** wyniesie

$$\hat{\Delta}' = \begin{vmatrix} \hat{Z}_1 & \hat{Z}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \hat{Z}_{21} & \hat{Z}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{Z}_3 & \hat{Z}_{34} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{Z}_{43} & \hat{Z}_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{Z}_5 \end{vmatrix} = \hat{Z}_5 (\hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21})(\hat{Z}_3\hat{Z}_4 - \hat{Z}_{34}\hat{Z}_{43}).$$

Aby znaleźć macierz odwrotną macierzy **Z**, należy na podstawie macierzy transponowanej wyznaczyć macierz dołączoną, a tę ostatnią podzielić przez wyznacznik macierzy $\hat{\Delta}'$ podany na stronicy 563.

Po wyznaczeniu macierzy łączącej **A** i jej transpozycji $\mathbf{A}_t$, korzystając z równania (16), otrzymamy wyrażenie na macierz potencjałów węzłów niezależnych **V**, ob. wklejka.

Wykonując wskazane działania otrzymujemy (45), str. 564, gdzie:

$$\hat{\Delta} = \left(\frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12} - \hat{Z}_{21}}{\hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21}} + \frac{1}{\hat{Z}_5}\right)\left(\frac{\hat{Z}_3 + \hat{Z}_4 - \hat{Z}_{34} - \hat{Z}_{43}}{\hat{Z}_3\hat{Z}_4 - \hat{Z}_{24}\hat{Z}_{43}} + \frac{1}{\hat{Z}_5}\right) - \frac{1}{\hat{Z}_5^2}.$$

Prądy w poszczególnych gałęziach obliczymy podstawiając wyrażenie na macierz **V** do równania (17). Mamy wtedy (46), wklejka za stroną 564.

Po wykonaniu wskazanych mnożeń otrzymamy (47), str. 565.

Prądy w poszczególnych gałęziach można również obliczyć rozwiązując dwa układy równań z dwiema niewiadomymi, do których wejdą wyznaczone wyżej wartości potencjałów $\hat{V}_1$ i $\hat{V}_2$ węzłów niezależnych. Układy tych równań wypisujemy na podstawie schematu obwodu przedstawionego na rys. 5.

2a) Aby dać odpowiedź, czy w rozpatrywanym obwodzie stosuje się twierdzenie o wzajemności w odniesieniu do zamiany miejscami węzła doprowadzenia prądu z idealnego, jedynego w tym obwodzie źródła prądu z węzłem pomiaru potencjału, musimy wziąć pod uwagę równanie (45) dla $\hat{E}_1 = \hat{E}_4 = \hat{E}_5 = 0$ i przy założeniu, że do węzłów $\hat{V}_1$, $\hat{V}_2$ zostały doprowadzone prądy $\hat{I}_1'$, $\hat{I}_2'$. Otrzymamy wtedy

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}\left|\begin{matrix} V_1 \\ V_2 \end{matrix}\right| = \frac{1}{\Delta} \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}\left|\begin{matrix} \dfrac{Z_1 + Z_2 - Z_{12} - Z_{21}}{Z_1Z_2 - Z_{12}Z_{21}} + \dfrac{1}{Z_5} & -\dfrac{1}{Z_5} \\ -\dfrac{1}{Z_5} & \dfrac{Z_3 + Z_4 - Z_{34} - Z_{43}}{Z_3Z_4 - Z_{34}Z_{43}} + \dfrac{1}{Z_5} \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}\left|\begin{matrix} I_1' \\ I_2' \end{matrix}\right| \tag{48}$$

Jeżeli $\hat{I}_1' = \hat{I}$ oraz $\hat{I}_2' = 0$, co odpowiada założeniu, że jedyne idealne źródło prądu daje prąd do węzła $\hat{V}_1$, wówczas na potencjał $\hat{V}_2$ z równania (48) mamy

$$\hat{V}_2 = -\frac{\hat{I}}{\hat{\Delta}\hat{Z}_5}.$$

Jeżeli natomiast prąd $\hat{I}$ doprowadzimy do węzła $\hat{V}_2 (\hat{I}_1' = 0,\ \hat{I}_2' = \hat{I})$, to na potencjał $V_1$ otrzymamy z równania (48) wyrażenie:

$$\hat{V}_1 = -\frac{\hat{I}}{\hat{\Delta}\hat{Z}_5}.$$

$$\mathbf{Z}^{-1} = \frac{1}{\Delta'} \begin{array}{c} \diagdown \begin{matrix} 5 \\ 5 \end{matrix} \\ \end{array} \begin{vmatrix} Z_2Z_5(Z_3Z_4 - Z_{34}Z_{43}) & -Z_{12}Z_5(Z_3Z_4 - Z_{34}Z_{43}) & 0 & 0 & 0 \\ -Z_{21}Z_5(Z_3Z_4 - Z_{34}Z_{43}) & Z_1Z_5(Z_3Z_4 - Z_{34}Z_{43}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_4Z_5(Z_1Z_2 - Z_{12}Z_{21}) & -Z_{34}Z_5(Z_1Z_2 - Z_{12}Z_{21}) & 0 \\ 0 & 0 & -Z_{43}Z_5(Z_1Z_2 - Z_{12}Z_{21}) & Z_3Z_5(Z_1Z_2 - Z_{12}Z_{21}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (Z_1Z_2 - Z_{12}Z_{21})(Z_3Z_4 - Z_{34}Z_{43}) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \end{vmatrix}_{1,2} = \frac{1}{\hat{\Delta}} \begin{vmatrix} \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12} - \hat{Z}_{21}}{Z_1 Z_2 - Z_{12} Z_{21}} + \frac{1}{Z_5} & -\frac{1}{Z_5} \\ -\frac{1}{Z_5} & \frac{Z_3 + Z_4 - Z_{34} - Z_{43}}{Z_3 Z_4 - Z_{34} Z_{43}} + \frac{1}{Z_5} \end{vmatrix}_{2,2} \left\{ \begin{vmatrix} I \\ 0 \end{vmatrix}_{2,1} - \begin{vmatrix} E_1 \frac{Z_2 - Z_{21}}{Z_1 Z_2 - Z_{12} Z_{21}} + \frac{E_5}{Z_5} \\ -E_4 \frac{Z_3 - Z_{43}}{Z_3 Z_4 - Z_{34} Z_{43}} - \frac{E_5}{Z_5} \end{vmatrix}_{2,1} \right\} \tag{45}$$

$$
\begin{array}{c|l}
I_1 & \dfrac{Z_2-Z_{12}}{\Delta\,(Z_1Z_2-Z_{12}Z_{21})}\left\{\left(\dfrac{Z_1+Z_2-Z_{12}-Z_{21}}{Z_1Z_2-Z_{12}Z_{21}}+\dfrac{1}{Z_5}\right)\left(I-E_1\dfrac{Z_2-Z_{21}}{Z_1Z_2-Z_{12}Z_{21}}-\dfrac{E_5}{Z_5}\right)-\dfrac{1}{Z_5}\left(E_4\dfrac{Z_3-Z_{43}}{Z_3Z_4-Z_{34}Z_{43}}+\dfrac{E_5}{Z_5}\right)\right\}+E_1\dfrac{Z_2}{Z_1Z_2-Z_{12}Z_{21}} \\
I_2 & \dfrac{Z_1-Z_{12}}{\Delta\,(Z_1Z_2-Z_{12}Z_{21})}\left\{\left(\dfrac{Z_1+Z_2-Z_{12}-Z_{21}}{Z_1Z_2-Z_{12}Z_{21}}+\dfrac{1}{Z_5}\right)\left(I-E_1\dfrac{Z_2-Z_{21}}{Z_1Z_2-Z_{12}Z_{21}}-\dfrac{E_5}{Z_5}\right)-\dfrac{1}{Z_5}\left(E_4\dfrac{Z_3-Z_{43}}{Z_3Z_4-Z_{34}Z_{43}}+\dfrac{E_5}{Z_5}\right)\right\}-E_1\dfrac{Z_{21}}{Z_1Z_2-Z_{12}Z_{21}} \\
I_3 = & \dfrac{Z_4-Z_{34}}{\Delta\,(Z_3Z_4-Z_{34}Z_{43})}\left\{\left(\dfrac{Z_3+Z_4-Z_{34}-Z_{43}}{Z_3Z_4-Z_{43}Z_{34}}+\dfrac{1}{Z_5}\right)\left(E_4\dfrac{Z_3-Z_{43}}{Z_3Z_4-Z_{34}Z_{43}}+\dfrac{E_5}{Z_5}\right)-\dfrac{1}{Z_5}\left(I-E_1\dfrac{Z_2-Z_{21}}{Z_1Z_2-Z_{12}Z_{21}}-\dfrac{E_5}{Z_5}\right)\right\}+E_4\dfrac{Z_{34}}{Z_3Z_4-Z_{34}Z_{43}} \\
I_4 & \dfrac{Z_3-Z_{43}}{\Delta\,(Z_3Z_4-Z_{34}Z_{43})}\left\{\left(\dfrac{Z_3+Z_4-Z_{34}-Z_{43}}{Z_3Z_4-Z_{43}Z_{34}}+\dfrac{1}{Z_5}\right)\left(E_4\dfrac{Z_3-Z_{43}}{Z_3Z_4-Z_{34}Z_{43}}+\dfrac{E_5}{Z_5}\right)-\dfrac{1}{Z_5}\left(I-E_1\dfrac{Z_2-Z_{21}}{Z_1Z_2-Z_{12}Z_{21}}-\dfrac{E_5}{Z_5}\right)\right\}-E_4\dfrac{Z_3}{Z_3Z_4-Z_{34}Z_{43}} \\
I_5 & \dfrac{1}{\Delta\,Z_5}\left\{\left(\dfrac{Z_3+Z_4-Z_{34}-Z_{43}}{Z_3Z_4-Z_{34}Z_{43}}+\dfrac{1}{Z_5}\right)\left(E_4\dfrac{Z_3-Z_{43}}{Z_3Z_4-Z_{34}Z_{43}}+\dfrac{E_5}{Z_5}\right)-\dfrac{1}{Z_5}\left(I-E_1\dfrac{Z_2-Z_{21}}{Z_1Z_2-Z_{12}Z_{21}}-\dfrac{E_5}{Z_5}\right)-\left(\dfrac{Z_1+Z_2-Z_{12}-Z_{21}}{Z_1Z_2-Z_{12}Z_{21}}+\dfrac{1}{Z_5}\right)\right. \\
& \left. I-E_1\dfrac{Z_2-Z_1}{Z_1Z_2-Z_{12}Z_{21}}-\dfrac{E_5}{Z_5}\right)+\dfrac{1}{Z_5}\left(E_4\dfrac{Z_3-Z_{43}}{Z_3Z_4-Z_{34}Z_{43}}+\dfrac{E_5}{Z_5}\right)\Bigg\}-\dfrac{E_5}{Z_5}
\end{array}
\qquad (47)
$$

Porównując otrzymane wyrażenia na $\hat{V}_1$ i $\hat{V}_2$ widzimy, że zachodzi równość

$$\hat{V}_1 = \hat{V}_2.$$

Stwierdzamy więc, że w rozważanym obwodzie stosuje się mimo występowania sprzężeń niesymetrycznych między gałęziami twierdzenie o wzajemności w odniesieniu do zamiany miejscami węzła doprowadzenia prądu z jedynego idealnego źródła prądu z węzłem pomiaru potencjału.

2b) Skorzystamy z równania (47) przy założeniu, że w rozpatrywanym przez nas obwodzie wystąpią tylko dwie idealne siły elektromotoryczne $E_1$ i $E_4$ ($I = 0$), $E_5 = 0$). Mamy wtedy (49), str. 567.

Jeżeli założymy, że istnieje w obwodzie tylko siła elektromotoryczna $\hat{E}_1 = \hat{E}$, wtedy na prąd w gałęzi z impedancją $\hat{Z}_4$ otrzymamy wyrażenie

$$\hat{I}_4 = \frac{1}{\hat{\Delta}} \cdot \frac{\hat{Z}_3 - \hat{Z}_{43}}{\hat{Z}_3\hat{Z}_4 - \hat{Z}_{34}\hat{Z}_{43}} \cdot \frac{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{21}}{\hat{Z}_3\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21}} \cdot \frac{\hat{E}}{\hat{Z}_5}.$$

Przy istnieniu natomiast siły elektromotorycznej $\hat{E}_4 = \hat{E}$ tylko w gałęzi z impedancją $\hat{Z}_4$ otrzymamy wyrażenie na prąd $\hat{I}_1$ w impedancji $\hat{Z}_1$.

$$\hat{I}_1 = \frac{1}{\hat{\Delta}} \cdot \frac{\hat{Z}_3 - \hat{Z}_{34}}{\hat{Z}_3\hat{Z}_4 - \hat{Z}_{34}\hat{Z}_{43}} \cdot \frac{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}}{\hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21}} \cdot \frac{\hat{E}}{\hat{Z}_5}.$$

Porównując wyrażenia na prądy $\hat{I}_4$ i $\hat{I}_1$ widzimy, że będą one sobie równe, gdy $\hat{Z}_{34} = \hat{Z}_{43}$ i $\hat{Z}_{12} = \hat{Z}_{21}$, tzn., że twierdzenie o wzajemności w odniesieniu do zamiany miejscami idealnej, jedynej w tym obwodzie siły elektromotorycznej z punktem pomiaru prądu w rozważanym obwodzie liniowym z niesymetrycznymi sprzężeniami między gałęziami nie stosuje się. Wniosek ten jest zgodny z ogólnym twierdzeniem, które orzeka, że twierdzenie o wzajemności w wyżej określonym sensie jest słuszne tylko w zastosowaniu do obwodów liniowych z symetrycznymi sprzężeniami między gałęziami.

2c) Napiszmy równanie (45) dla rozpatrywanego obwodu z niesymetrycznymi sprzężeniami między gałęziami dla przypadku występowania w nim jednocześnie sił elektromotorycznych $\hat{E}_1$ i $\hat{E}_4$ ($\hat{E}_5 = 0$) oraz przy istnieniu prądów $\hat{I}_1'$, $\hat{I}_2'$ wpływających odpowiednio do węzłów $\hat{V}_1$ i $\hat{V}_2$.

$$\begin{array}{c|c} {\scriptstyle 1}\backslash{\scriptstyle 2} & \\ \hline V_1 \\ \hline V_2 \end{array} = \frac{1}{\Delta} \begin{array}{c|c|c} {\scriptstyle 2}\backslash{\scriptstyle 2} & & {\scriptstyle 1}\backslash{\scriptstyle 2} \\ \hline \dfrac{Z_1 + Z_2 - Z_{12} - Z_{21}}{Z_1Z_2 - Z_{12}Z_{21}} + \dfrac{1}{Z_5} & -\dfrac{1}{Z_5} & I_1' - E_1 \dfrac{Z_2 - Z_{21}}{Z_1Z_2 - Z_{12}Z_{21}} \\ \hline -\dfrac{1}{Z_5} & \dfrac{Z_3 + Z_4 - Z_{34} - Z_{43}}{Z_3Z_4 - Z_{34}Z_{43}} + \dfrac{1}{Z_5} & I_2' + E_4 \dfrac{Z_3 - Z_{43}}{Z_3Z_4 - Z_{34}Z_{43}} \end{array}$$

Jeżeli założymy, że w obwodzie istnieje obok siły elektromotorycznej $\hat{E}_1 = \hat{E}$ jeszcze jedno idealne źródło prądu, z którego prąd $\hat{I}$ ($\hat{I}_1' = \hat{I}$) wpływa do węzła $\hat{V}_1$ (a wypływa z węzła odniesienia), to na potencjał $\hat{V}_2$ otrzymamy wyrażenie

$$\hat{V}_2 = -\frac{1}{\Delta\hat{Z}_5}\left(\hat{I} - \hat{E}\frac{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{21}}{\hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21}}\right).$$

$$
\begin{array}{c|c|}
\begin{array}{c} 1 \\ 5 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 5 \end{array} \\
\hline
I_1 & \dfrac{Z_2 - Z_{12}}{\Delta\,(Z_1Z_2 - Z_{12}Z_{21})}\left\{\left(\dfrac{Z_1 + Z_2 - Z_{12} - Z_{21}}{Z_1Z_2 - Z_{12}Z_{21}} + \dfrac{1}{Z_5}\right)\left(-E_1\dfrac{Z_2 - Z_{21}}{Z_1Z_2 - Z_{12}Z_{21}}\right) - \dfrac{E_4}{Z_5}\dfrac{Z_3 - Z_{43}}{Z_3Z_4 - Z_{34}Z_{43}}\right\} + E_1\dfrac{Z_2}{Z_1Z_2 - Z_{12}Z_{21}} \\
\hline
I_2 & \dfrac{Z_1 - Z_{12}}{\Delta\,(Z_1Z_2 - Z_{12}Z_{21})}\left\{\left(\dfrac{Z_1 + Z_2 - Z_{12} - Z_{21}}{Z_1Z_2 - Z_{12}Z_{21}} + \dfrac{1}{Z_5}\right)\left(-E_1\dfrac{Z_2 - Z_{21}}{Z_1Z_2 - Z_{12}Z_{21}}\right) - \dfrac{E_4}{Z_5}\dfrac{Z_3 - Z_{43}}{Z_3Z_4 - Z_{34}Z_{43}}\right\} - E_1\dfrac{Z_{21}}{Z_1Z_2 - Z_{12}Z_{21}} \\
\hline
I_3 & \dfrac{Z_4 - Z_{34}}{\Delta\,(Z_3Z_4 - Z_{34}Z_{43})}\left\{\left(\dfrac{Z_3 + Z_4 - Z_{34} - Z_{43}}{Z_3Z_4 - Z_{43}Z_{34}} + \dfrac{1}{Z_5}\right)\left(E_4\dfrac{Z_3 - Z_{43}}{Z_3Z_4 - Z_{34}Z_{43}}\right) + \dfrac{E_1}{Z_5}\dfrac{Z_2 - Z_{21}}{Z_1Z_2 - Z_{12}Z_{21}}\right\} + E_4\dfrac{Z_{34}}{Z_3Z_4 - Z_{34}Z_{43}} \\
\hline
I_4 & \dfrac{Z_3 - Z_{43}}{\Delta\,(Z_3Z_4 - Z_{34}Z_{43})}\left\{\left(\dfrac{Z_3 + Z_4 - Z_{34} - Z_{43}}{Z_3Z_4 - Z_{43}Z_{34}} + \dfrac{1}{Z_5}\right)\left(E_4\dfrac{Z_3 - Z_{43}}{Z_3Z_4 - Z_{34}Z_{43}}\right) + \dfrac{E_1}{Z_5}\dfrac{Z_2 - Z_{21}}{Z_1Z_2 - Z_{12}Z_{21}}\right\} - E_4\dfrac{Z_3}{Z_3Z_4 - Z_{34}Z_{43}} \\
\hline
I_5 & \dfrac{1}{\Delta\,Z_5}\left\{\left(\dfrac{Z_3 + Z_4 - Z_{34} - Z_{43}}{Z_3Z_4 - Z_{34}Z_{43}} + \dfrac{1}{Z_5}\right)E_4\dfrac{Z_3 - Z_{43}}{Z_3Z_4 - Z_{34}Z_{43}} - \dfrac{E_1}{Z_5}\cdot\dfrac{Z_2 - Z_{21}}{Z_1Z_2 - Z_{12}Z_{21}} - \left(\dfrac{Z_1 + Z_2 - Z_{12} - Z_{21}}{Z_1Z_2 - Z_{12}Z_{21}} + \dfrac{1}{Z_5}\right)E_1\dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_1Z_2 - Z_{12}Z_{21}} + \right. \\
 & \left. + \dfrac{E_4}{Z_5}\cdot\dfrac{Z_3 - Z_{43}}{Z_3Z_4 - Z_{34}Z_{43}}\right\}
\end{array}
\qquad (49)
$$

Przy istnieniu natomiast siły elektromotorycznej $\hat{E}$ ($\hat{E}_4 = -E$) tylko w gałęzi z impedancją $\hat{Z}_4$ i doprowadzeniu prądu $\hat{I}'_2 = I$ tylko do węzła $V_2$ mamy wyrażenie na potencjał $\hat{V}_1$.

$$\hat{V}_1 = -\frac{1}{\hat{\Delta}\hat{Z}_5}\left(\hat{I} - \hat{E}\,\frac{\hat{Z}_3 - \hat{Z}_{43}}{\hat{Z}_3\hat{Z}_4 - \hat{Z}_{34}\hat{Z}_{43}}\right).$$

Gdy porównamy otrzymane w obu przypadkach wyrażenia na potencjały $\hat{V}_1$ i $\hat{V}_2$, to stwierdzimy, że są one równe przy spełnieniu następujących zależności:

$$\hat{Z}_2 = \hat{Z}_3 \qquad \hat{Z}_{21} = \hat{Z}_{43}$$
$$\text{oraz}$$
$$\hat{Z}_1 = \hat{Z}_4 \qquad \hat{Z}_{12} = \hat{Z}_{34}.$$

Zależności te wynikają też bezpośrednio z warunku drugiego uogólnionego twierdzenia o wzajemności.

Tak więc drugie uogólnione twierdzenie o wzajemności w rozpatrywanym obwodzie będzie się stosować, jeżeli nawet sprzężenia będą miały charakter sprzężeń niesymetrycznych.

3. Aby dać odpowiedź, jakie elementy macierzy $\mathbf{Z}^{-1}$ muszą być równe zeru, aby macierz $\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}$ dla rozpatrywanego obwodu była macierzą symetryczną, musimy obliczyć macierz $\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}$ przy założeniu, że elementy macierzy $\mathbf{Z}^{-1}$ są wszystkie niezerowe, i określić żądane zależności z warunku symetryczności tej macierzy $(\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A})$.

$$\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A} = \overset{2}{\underset{5}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}}} \quad \overset{5}{\underset{5}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline Y'_{11} & Y'_{12} & Y'_{13} & Y'_{14} & Y'_{15} \\ \hline Y'_{21} & Y'_{22} & Y'_{23} & Y'_{24} & Y'_{25} \\ \hline Y'_{31} & Y'_{32} & Y'_{33} & Y'_{34} & Y'_{35} \\ \hline Y'_{41} & Y'_{42} & Y'_{43} & Y'_{44} & Y'_{45} \\ \hline Y'_{51} & Y'_{52} & Y'_{53} & Y'_{54} & Y'_{55} \\ \hline\end{array}}} \quad \overset{2'}{\underset{5}{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline -1 & 1 \\ \hline\end{array}}}$$

Po wykonaniu wskazanych mnożeń mamy

$$\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A} = \overset{2}{\underset{2}{\begin{array}{|l|l|}\hline Y'_{11} + Y'_{12} + Y'_{21} + Y'_{22} + Y'_{55} & Y'_{13} + Y'_{14} + Y'_{15} + Y'_{23} + Y'_{24} + Y'_{25} \\ \quad -Y'_{15} - Y'_{25} - Y'_{51} - Y'_{52} & \quad -Y'_{53} - Y'_{45} - Y'_{55} \\ \hline Y'_{31} + Y'_{32} + Y'_{41} + Y'_{42} + Y'_{51} + Y'_{52} & Y'_{33} + Y'_{34} + Y'_{35} + Y'_{43} + Y'_{44} + Y'_{45} \\ \quad -Y'_{35} - Y'_{45} - Y'_{55} & \quad +Y'_{53} + Y'_{45} + Y'_{55} \\ \hline\end{array}}}$$

Otrzymana macierz będzie symetryczna, jeżeli spełnione będą równości:

$$\hat{Y}'_{31} = \hat{Y}'_{13} \qquad \hat{Y}'_{41} = \hat{Y}'_{14} \qquad \hat{Y}'_{51} = \hat{Y}'_{1}$$
$$\hat{Y}'_{32} = \hat{Y}'_{23} \qquad \hat{Y}'_{42} = \hat{Y}'_{24} \qquad \hat{Z}'_{52} = \hat{Y}'_{25}$$
$$\hat{Y}'_{35} = \hat{Y}'_{53} \qquad \hat{Y}'_{45} = \hat{Y}'_{54}$$

Przy istnieniu sprzężeń niesymetrycznych między gałęziami z impedancjami $\hat{Z}_1$, $\hat{Z}_2$ oraz $\hat{Z}_3$, $\hat{Z}_4$ warunki symetryczności macierzy $\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}$ są spełnione i wobec tego w takim obwodzie stosuje się twierdzenie o wzajemności w odniesieniu do zamiany miejscami węzła doprowadzenia prądu z jedynego, idealnego źródła prądu z węzłem pomiaru potencjału. Gdyby w rozpatrywanym dotąd obwodzie wystąpiło jeszcze sprzężenie między gałęziami z impedancjami $\hat{Z}_2$ i $\hat{Z}_3$, wówczas warunki symetryczności macierzy $\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}$ nie byłyby już spełnione.

4. Zgodnie z rozważaniami przeprowadzonymi wyżej, aby obliczyć prądy w poszczególnych gałęziach po zmianie impedancji w pewnej gałęzi, trzeba znać prądy w tych gałęziach przed zmianą impedancji oraz admitancje własne zwarciowe i admitancje wzajemne zwarciowe. Prądy w poszczególnych gałęziach rozpatrywanego obwodu przy istnieniu tylko sił elektromotorycznych $\hat{E}_1$ i $\hat{E}_4$ określone są przez równanie macierzowe (49).

Admitancje własne zwarciowe oraz admitancje wzajemne zwarciowe określimy korzystając z równania (47) przy założeniu, że w rozpatrywanym obwodzie istnieje tylko $\hat{E}_5$, a $\hat{E}_1 = \hat{E}_4 = 0$, $\hat{I} = 0$. Wtedy otrzymamy

$$\hat{Y}_{15} = \frac{\hat{I}_1}{\hat{E}_5} = -\frac{1}{\Delta\hat{Z}_5}\left[\frac{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}}{\hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21}}\left(\frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12} - \hat{Z}_{21}}{\hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21}} + \frac{1}{\hat{Z}_5}\right) - \frac{1}{\hat{Z}_5}\right]$$

$$\hat{Y}_{25} = \frac{\hat{I}_2}{\hat{E}_5} = -\frac{1}{\Delta\hat{Z}_5}\left[\frac{\hat{Z}_1 - \hat{Z}_{12}}{\hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21}}\left(\frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12} - \hat{Z}_{21}}{\hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21}} + \frac{1}{\hat{Z}_5}\right) - \frac{1}{\hat{Z}_5}\right]$$

$$\hat{Y}_{25} = \frac{\hat{I}_3}{\hat{E}_5} = \frac{1}{\Delta\hat{Z}_5}\left[\frac{\hat{Z}_4 - \hat{Z}_{34}}{\hat{Z}_3\hat{Z}_4 - \hat{Z}_{34}\hat{Z}_{43}}\left(\frac{\hat{Z}_3 + \hat{Z}_4 - \hat{Z}_{34} - \hat{Z}_{43}}{\hat{Z}_3\hat{Z}_4 - \hat{Z}_{43}\hat{Z}_{34}} + \frac{1}{\hat{Z}_5}\right) + \frac{1}{\hat{Z}_5}\right]$$

$$\hat{Y}_{45} = \frac{\hat{I}_4}{\hat{E}_5} = \frac{1}{\Delta\hat{Z}_5}\left[\frac{\hat{Z}_3 - \hat{Z}_{43}}{\hat{Z}_3\hat{Z}_4 - \hat{Z}_{34}\hat{Z}_{43}}\left(\frac{\hat{Z}_3 + \hat{Z}_4 - \hat{Z}_{34} - \hat{Z}_{43}}{\hat{Z}_3\hat{Z}_4 - \hat{Z}_{43}\hat{Z}_{34}} + \frac{1}{\hat{Z}_5}\right) + \frac{1}{\hat{Z}_5}\right]$$

$$\hat{Y}_{55} = \frac{\hat{I}_5}{\hat{E}_5} = \frac{1}{\Delta\hat{Z}_5}\left[\left(\frac{\hat{Z}_3 + \hat{Z}_4 - \hat{Z}_{34} - \hat{Z}_{43}}{\hat{Z}_3\hat{Z}_4 - \hat{Z}_{34}\hat{Z}_{43}} + \frac{1}{\hat{Z}_5}\right)\frac{2}{\hat{Z}_5} + \frac{2}{\hat{Z}_5^2}\right] - \frac{1}{\hat{Z}_5}.$$

Korzystając z równania (42) otrzymamy na prądy w poszczególnych gałęziach rozpatrywanego obwodu po włączeniu dodatkowej impedancji $\hat{Z}_5'$ w szereg z impedancją $\hat{Z}_5$ wyrażenia:

$$\hat{I}_s'' = \hat{U}_{sk}\hat{Y}_{sk} + \hat{I}_s$$

dla $s = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots,$

gdzie

$$\hat{U}_{sk} = \frac{\Delta\hat{Z}_k}{1 + \hat{Y}_{kk}\hat{Z}_k'}\,\hat{k}.$$

Ponieważ dla naszego przypadku

$$\Delta\hat{Z}_k = \hat{Z}_5' \qquad \text{oraz} \qquad \hat{Z}_k' = \hat{Z}_5',$$

więc na $\hat{U}_{s5}$ otrzymamy wyrażenie

$$\hat{U}_{s5} = \frac{\hat{Z}_5'}{1 + \hat{Y}_{s5}\hat{Z}_5'}\,\hat{I}_5$$

dla $s = 1, 2, 3, 4, 5.$

Prądy w poszczególnych gałęziach wyrażą się ostatecznie następującymi równaniami:

$$\hat{I}_1'' = \frac{\hat{Z}_5'}{1 + \hat{Y}_{55}\hat{Z}_5'}\hat{I}_5\hat{Y}_{15} + \hat{I}_1;$$

$$\hat{I}_2'' = \frac{\hat{Z}_5'}{1 + \hat{Y}_{55}\hat{Z}_5'}\hat{I}_5\hat{Y}_{25} + \hat{I}_2;$$

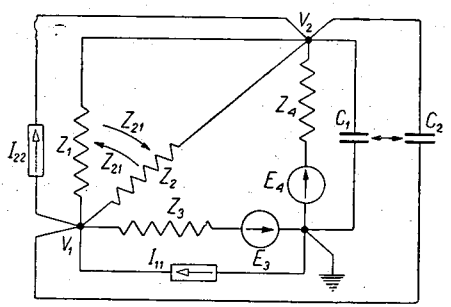
$$\hat{I}_3'' = \frac{\hat{Z}_5'}{1 + \hat{Y}_{55}\hat{Z}_5'}\hat{I}_5\hat{Y}_{35} + \hat{I}_3;$$

$$\hat{I}_4'' = \frac{\hat{Z}_5'}{1 + \hat{Y}_{55}\hat{Z}_5'}\hat{I}_5\hat{Y}_{45} + \hat{I}_4;$$

$$\hat{I}_5'' = \frac{\hat{Z}_5'}{1 + \hat{Y}_{55}\hat{Z}_5'}\hat{I}_5\hat{Y}_{55} + \hat{I}_5.$$

*Przykład 2*

1. W obwodzie jak na rys. 6 przy istnieniu sprzężeń niesymetrycznych między gałęziami z impedancjami $\hat{Z}_1$ i $\hat{Z}_2$ oraz sprzężeń między idealnymi kondensa-



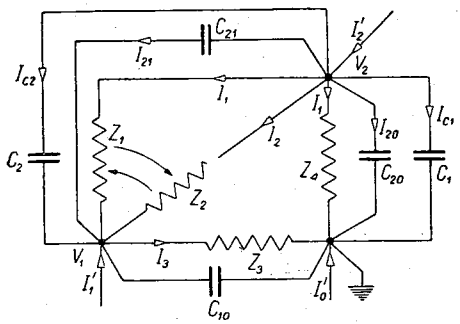

Rys. 6. Obwód liniowy ze sprzężeniami niesymetrycznymi między gałęziami i sprzężeniami między idealnymi kondensatorami

torami $C_1$ i $C_2$ należy obliczyć prądy w poszczególnych gałęziach i pojemnościach cząstkowych.

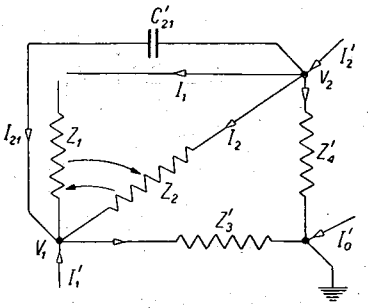
2. Rozpatrzyć zagadnienie stosowalności twierdzenia o wzajemności, jeżeli w rozważanym obwodzie występuje tylko jedno idealne źródło prądu ($\hat{E}_4 = \hat{E}_5 = 0$, $\hat{I}_2' = 0$ oraz $\hat{I}_1' \neq 0$).

Rozwiązanie

Uwzględniając pojemności cząstkowe sprzężeń pojemnościowych między idealnymi kondensatorami $C_1$ $C_2$ oraz zastępując siły elektromotoryczne idealnymi równoważnymi źródłami prądu, schemat obwodu przedstawiony na rys. 6 można narysować w postaci jak na rys. 7.




Rys. 7. Obwód z rys. 6 po zastąpieniu źródeł napięcia równoważnymi źródłami prądu i uwzględnieniu pojemności cząstkowych




Rys. 8. Obwód z rys. 7 po zastąpieniu gałęzi równoległych

Schemat obwodu przedstawiony na rys. 7 można jeszcze uprościć przez zastąpienie gałęzi równolegle połączonych jedną równoważną (wypadkową). Otrzymamy wtedy schemat obwodu jak na rys. 8.

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

$$\hat{Z}'_3 = \frac{\hat{Z}_3 \cdot \dfrac{1}{j\omega C_{10}}}{\hat{Z}_3 - j\dfrac{1}{\omega C_{10}}};$$

$$\hat{Z}'_1 = \frac{1}{\hat{Y}'_4}; \qquad \hat{Y}'_4 = \frac{1}{\hat{Z}_4} + j\omega C_{20} + j\omega C_1;$$

$$\hat{I}'_1 = \hat{I}'_{11} - \hat{I}_{22} - \frac{\hat{E}_3}{\hat{Z}_3}; \qquad \hat{I}'_0 = \frac{\hat{E}_3}{\hat{Z}_3} - \frac{\hat{E}_4}{\hat{Z}_4} - \hat{I}_{11};$$

$$\hat{I}'_2 = \hat{I}_{22} + \frac{\hat{E}_1}{\hat{Z}_4}; \qquad C'_{21} = C_{21} + C_2; \qquad \hat{Z}_{C21} = -j\frac{1}{\omega(C_{21} + C_2)}.$$

Prądy w poszczególnych gałęziach i pojemnościach cząstkowych rozważanego obwodu można obliczyć dwiema metodami.

Pierwsza metoda polega na wyznaczeniu w oparciu o schemat obwodu (rys. 8) macierzy: **A**, **Y**, **Z**, $\mathbf{I}_l$ i wykonaniu na tych macierzach operacji wskazanych w równaniach.

W drugiej metodzie skorzystamy z rozważań podanych na końcu drugiej części artykułu, dotyczących zakładania w wybranej gałęzi pewnej wartości prądu i określania na tej podstawie impedancji własnych jałowych oraz impedancji wzajemnych jałowych.

W tym przykładzie skorzystamy z drugiej metody. Dla określenia impedancji własnych jałowych z impedancji wzajemnych jałowych zakładamy dowolną wartość prądu $\hat{I}$ w gałęzi z impedancją $\hat{Z}_1$ oraz istnienie jednego idealnego źródła prą-

du załączonego między węzeł pierwszy a węzeł odniesienia. Wówczas we wszystkich pozostałych gałęziach będą prądy następujące:

$$\hat{I}_2 = \frac{\hat{Z}_1 - \hat{Z}_{21}}{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}} \hat{I};$$

$$\hat{I}_{21} = \frac{\hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21}}{\hat{Z}_{C_{21}}(\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12})} \hat{I};$$

$$\hat{I}'_4 = -\frac{\hat{Z}_{C_{21}}(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12} - \hat{Z}_{21}) + \hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21}}{\hat{Z}_{C_{21}}(\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12})} \hat{I};$$

$$\hat{I}'_3 = -\frac{\hat{Z}'_4\hat{Z}_{C_{21}}(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12} - \hat{Z}_{21}) + (\hat{Z}'_4 + \hat{Z}_{C_{21}})(\hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21})}{\hat{Z}'_3\hat{Z}_{C_{21}}(\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12})}.$$

Aby takie prądy istniały w poszczególnych gałęziach, prąd doprowadzony do węzła pierwszego musi równać się

$$\hat{I}'_1 = -\frac{(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12} - \hat{Z}_{21})[\hat{Z}_{C_{21}}(\hat{Z}'_3 + \hat{Z}'_4)] + (\hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21})(\hat{Z}'_3 + \hat{Z}'_4 + \hat{Z}_{C_{21}})}{\hat{Z}'_3\hat{Z}_{C_{21}}(\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12})},$$

a potencjały węzłów:

$$\hat{V}'_1 = -\frac{\hat{Z}'_4\hat{Z}_{C_{21}}(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12} - \hat{Z}_{21}) + (\hat{Z}'_4 + \hat{Z}_{C_{21}})(\hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21})}{\hat{Z}_{C_{21}}(\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12})} \hat{I},$$

$$\hat{V}'_2 = -\frac{\hat{Z}'_4[\hat{Z}_{C_{21}}(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12} - \hat{Z}_{21}) + \hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21}]}{\hat{Z}_{C_{21}}(\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12})} \hat{I}.$$

Wobec tego odpowiednie impedancje: własna jałowa $\hat{Z}_{11}$ i wzajemna jałowa $\hat{Z}_{21}$ wynoszą:

$$\hat{Z}_{11} = \frac{\hat{V}'_1}{\hat{I}'_1} = \frac{\hat{Z}'_3[\hat{Z}'_4\hat{Z}_{C_{21}}(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12} - \hat{Z}_{21}) + (\hat{Z}'_4 + \hat{Z}_{C_{21}})(\hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21})]}{(\hat{Z}_1 + Z_2 - \hat{Z}_{12} - \hat{Z}_{21})\hat{Z}_{C_{21}}(\hat{Z}'_3 + \hat{Z}'_4) + (\hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21})(\hat{Z}'_3 + \hat{Z}'_4 + \hat{Z}_{C_{21}})}$$

$$\hat{Z}_{21} = \frac{\hat{V}'_2}{\hat{I}'_1} = \frac{\hat{Z}'_3\hat{Z}'_4[\hat{Z}_{C_{21}}(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12} - \hat{Z}_{21}) + \hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21}]}{(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12} - \hat{Z}_{21})\hat{Z}_{C_{21}}(\hat{Z}'_3 + \hat{Z}'_4) + (\hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21})(\hat{Z}'_3 + \hat{Z}'_4 + \hat{Z}_{C_{21}})}$$

Jeżeli jedyne źródło prądu włączymy między węzeł a węzeł odniesienia oraz założymy podobnie jak wyżej prąd $\hat{I}$ w gałęzi z impedancją $\hat{Z}_1$, to na prądy we wszystkich pozostałych gałęziach otrzymamy wyrażenia

$$\hat{I}_2 = \frac{\hat{Z}_1 - \hat{Z}_{21}}{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}} \hat{I};$$

$$\hat{I}_{21} = \frac{\hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21}}{\hat{Z}_{C_{21}}(\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12})} \hat{I};$$

$$\hat{I}'_3 = \frac{\hat{Z}_{C_{21}}(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12} - \hat{Z}_{21}) + \hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21}}{\hat{Z}_{C_{21}}(\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12})} \hat{I};$$

$$\hat{I}'_4 = \frac{\hat{Z}'_3\hat{Z}_{C_{21}}(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12} - \hat{Z}_{21}) + (\hat{Z}'_3 + \hat{Z}_{C_{21}})(\hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21})}{\hat{Z}_4\hat{Z}_{C_{21}}(\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12})}.$$

Prąd wpływający do węzła $V_2$ wyniesie więc

$$\hat{I}_2' = \hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_4' + \hat{I}_{21} =$$

$$= \frac{(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12} - \hat{Z}_{21})\,[\hat{Z}_{C_{21}}(\hat{Z}_3 + \hat{Z}_4')] + (\hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21})\,(\hat{Z}_3' + \hat{Z}_4' + \hat{Z}_{C_{21}})}{\hat{Z}_4'\hat{Z}_{C_{21}}(\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12})}.$$

Potencjały węzłów wyrażają się w tym przypadku równaniami

$$\hat{V}_1' = \frac{\hat{Z}_3'\hat{Z}_{C_{21}}(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12} - \hat{Z}_{21}) + \hat{Z}_3'\,(\hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21})}{\hat{Z}_{C_{21}}(\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12})}\,\hat{I};$$

$$\hat{V}_2' = \frac{\hat{Z}_3'\hat{Z}_{C_{21}}(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12} - \hat{Z}_{21}) + (\hat{Z}_3' + \hat{Z}_{C_{21}})\,(\hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21})}{\hat{Z}_{C_{21}}(\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12})}\,\hat{I}.$$

Mając potencjały węzłów $\hat{V}_1$ $\hat{V}_2$ oraz $I$ możemy znaleźć impedancje $\hat{Z}_{22}$, $\hat{Z}_{12}$.

$$\hat{Z}_{22} = \frac{\hat{Z}_3'\hat{Z}_{C_{21}}(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12} - \hat{Z}_{21}) + \hat{Z}_3'\,(\hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21})}{(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12} - \hat{Z}_{21})\,[\hat{Z}_{C_{21}}(\hat{Z}_3' + \hat{Z}_4')] + (\hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21})\,(\hat{Z}_3' + \hat{Z}_4' + \hat{Z}_{C_{21}})};$$

$$\hat{Z}_{12} = \frac{\hat{Z}_3'\hat{Z}_4'\,[\hat{Z}_{C_{21}}(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12} - \hat{Z}_{21}) + \hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21}]}{(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12} - \hat{Z}_{21})\,[\hat{Z}_{C_{21}}(\hat{Z}_3' + \hat{Z}_4')] + (\hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21})\,(\hat{Z}_3' + \hat{Z}_4' + \hat{Z}_{C_{21}})}.$$

Korzystając z równania (43), otrzymamy wyrażenia na potencjały węzłów niezależnych

$$\left.\begin{aligned} \hat{V}_1 &= \hat{Z}_{11}\,\hat{I}_1' + \hat{Z}_{12}\,\hat{I}_2', \\ \hat{V}_2 &= \hat{Z}_{21}\,\hat{I}_1' + \hat{Z}_{22}\,\hat{I}_2'. \end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

Prądy w poszczególnych gałęziach rozważanego obwodu i pojemnościach cząstkowych wyrażają się równaniami:

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}}{\hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21}}\,(\hat{V}_2 - \hat{V}_1); \qquad \hat{I}_3 = \frac{\hat{V}_1 + \hat{E}_3}{\hat{Z}_3};$$

$$\hat{I}_2 = \frac{\hat{Z}_1 - \hat{Z}_{21}}{\hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21}}\,(\hat{V}_2 - \hat{V}_1); \qquad \hat{I}_4 = \frac{\hat{V}_1 - \hat{E}_4}{\hat{Z}_4};$$

$$\hat{I}_{C_1} = j\omega C_1 \hat{V}_2; \qquad \hat{I}_{10} = j\omega C_{10}\hat{V}_1;$$

$$\hat{I}_{C_2} = j\omega C_2(\hat{V}_2 - \hat{V}_1); \qquad \hat{I}_{21} = j\omega C_{21}(\hat{V}_2 - \hat{V}_1);$$

$$\hat{I}_{20} = j\omega C_{20}\hat{V}_2.$$

Jeżeli w rozważanym obwodzie będzie tylko jedno idealne źródło prądu o prądzie $\hat{I}$ ($\hat{I}_1' = \hat{I}$) załączone między węzeł pierwszy a węzeł odniesienia, to na potencjał drugiego węzła $\hat{V}_2$ otrzymamy w oparciu o równania (50) wyrażenie

$$\hat{V}_2 = \hat{Z}_{21}\,\hat{I}.$$

Przy doprowadzeniu z jedynego idealnego źródła prądu $\hat{I}$ ($\hat{I}_2' = \hat{I}$) do węzła drugiego, na potencjał węzła pierwszego otrzymamy wyrażenie

$$\hat{V}_1 = \hat{Z}_{12}\,\hat{I}.$$

Ponieważ, jak to widać z porównania odpowiednich wyrażeń, $\hat{Z}_{12} = \hat{Z}_{21}$, więc potencjał węzła drugiego $\hat{V}_2$ przy doprowadzeniu prądu $\hat{I}$ z idealnego jedynego źródła do węzła pierwszego równa się potencjałowi węzła pierwszego $\hat{V}_1$ przy doprowadzeniu prądu $\hat{I}$ z idealnego jedynego źródła do węzła drugiego, tzn.

$$\hat{V}_1 = \hat{V}_2.$$

Stwierdzamy wobec tego, że w rozpatrywanym obwodzie twierdzenie o wzajemności w odniesieniu do zamiany miejscami węzła doprowadzenia prądu z jedynego w tym obwodzie idealnego źródła prądu z węzłem pomiaru potencjału ma zastosowanie. Oczywiście do tego samego wniosku doszlibyśmy rozważając symetryzujące działanie macierzy łączącej $\mathbf{A}$ w iloczynie $\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}$ przy niesymetrycznej macierzy admitancji $\mathbf{Z}^{-1}$. Jak to wynika z równania (21) przy symetrycznej macierzy $\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}$ (będzie też symetryczna macierz $[\mathbf{A}_t\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{A}_t\mathbf{Y}\mathbf{A}]^{-1}$) twierdzenie o wzajemności w odniesieniu do zamiany miejscami węzła doprowadzenia prądu z jedynego idealnego źródła prądu z węzłem pomiaru potencjału będzie się stosować w rozważanym obwodzie.

*Katedra Elektrotechniki Teoretycznej*
*Politechniki Warszawskiej*

## WYKAZ LITERATURY

1. Le Corbeiller P.: Matrix Analysis of Electric Networks. John Wiley, 1950.
2. Gardner M. F., Barnes J. L.: Transients in Linear Systems. Vol. I, New York 1952.
3. Kerchner R., Corcoran G.: Alternating Current Circuits, New York 1955.
4. Konorski B.: Teoria dwójników i czwórników elektrycznych. Warszawa, PWT, 1951.
5. Kontorowicz M.: Rachunek operatorowy i stany nieustalone w obwodach elektrycznych. Warszawa, PWT, 1956.
6. Le Page W., Seely S.: General Network Analysis. New York 1952.
7. Taft W. A.: Osnowy mietodiki rasczota liniejnych elektriczeskich ceplej po zadannym ich czastotnym charaktieristakam. Wydawnictwa A.N. ZSRR, 1954.
8. Thompson H. A.: Alternating Current and Transient Circuit Analysis, New York 1955.
9. Zeweke T. W., Jonkin P. A.: Osnowy elektrotiechniki. Cz. I, Gosenergoizdat, 1956.

T. КАЧОРЕК

## МЕТОД УЗЛОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ И ТЕОРЕМЫ ВЗАИМНОСТИ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ СО СЦЕПЛЕНИЯМИ МЕЖДУ ВЕТВЯМИ

### Резюме

В статье доказана возможность применения метода узловых потенциалов в линейных цепях с произвольными сцеплениями между ветвями, для которых $Re(\hat{Z}_{kl}) = 0$, где $\hat{Z}_{kl}$ импеданс сцепления между ветвями $k$ и $l$.

Произведён анализ теорем взаимности в линейных цепях с произвольными сцеплениями между ветвями. Показано, что теоремы взаимности относятся в общем случае только к линейным цепям с симметрическими сцеплениями между

ветвями. Доказано, что область применения теоремы взаимности в случае замены местами узла подведения тока из единственного в данной цепи идеального источника тока с узлом измерения потенциала шире области применения теоремы взаимности в случае замены местами единственной в этой цепи идеальной электродвижущей силы с точкою измерения тока. Приведено необходимое и достаточное условие применяемости теоремы взаимности в случае замены местами узла подведения тока из единственного в этой цепи идеального источника тока с узлом измерения потенциала — в линейных цепях содержащих с несимметричными сцеплениями между ветвями.

Доказана в общем случае невозможность замены линейной цепи со сцеплениями между ветвями содержащей идеальные электродвижущие силы на эквивалентную цепь без этих сцеплений содержащую идеальные источники тока в смысле замещения каждой ветви с идеальной электродвижущей силой и с соединённым с ней последовательно импедансом ветвью соединённым адмитансом. Приведены обобщённые теоремы взаимности в линейных цепях с симметричными сцеплениями между ветвями, в которых кроме одной идеальной электродвижущей силы в $k$-той ветви находится ещё в $l$-той ветви один идеальный источник тока.

Составлены зависимости дающие возможность быстро рассчитать токи в отдельных ветвях в установившемся режиме после замены параметров (импедансов), если известны соответствующие значения токов перед заменой, а также значения собственных и взаимных адмитансов короткого замыкания цепи.

Приведены примеры иллюстрирующие изложенные рассуждения.

T. KACZOREK

## THE NODE METHOD AND RECIPROCITY THEOREMS IN LINEAR NETWORKS WITH COUPLINGS BETWEEN BRANCHES


### Summary

The paper shows the possibility of applying the node method to linear networks with any couplings between branches, for which $\mathcal{R}e(\hat{Z}_{kl}) = 0$, where $\hat{Z}_{kl}$ is the impedance of coupling between branches $k$ and $l$.

The reciprocity theorems in linear networks with any couplings between branches are discussed. It is stated that the reciprocity theorems in the general case apply only to linear networks with symmetrical couplings between branches. It is proved that the range of applicability of the reciprocity theorems with reference to the change of places of the node introducing the current from the only ideal source of current in this network, and the node of potential measurement, is more extensive than the range of applicability of the reciprocity theorem with reference to the change of places of the only ideal e.m.f. in this network and the point of current measurement. The author gives the necessary and sufficient condition of applicability of the reciprocity theorem with reference to the change of places of the node introducing the current from the only ideal source of current in this network and the node of potential measurement in linear networks with asymmetrical couplings between branches.

The author shows the impossibility of replacing in the general case a linear network with couplings between branches, comprising ideal e.m. forces, by an

equivalent circuit without these couplings with ideal sources of current, in the sense of referring each branch with ideal e.m.f. and the impedance of the branch connected with it in series, to the ideal source of current and admittance connected with it in parallel. Generalized reciprocity theorems are given, regarding linear networks with symmetrical couplings between branches, in which besides one ideal e.m.f. in the $k$-th branch, one more ideal source of current occurs in the $l$-th branch.

Relations are deduced, allowing for quick calculation of currents in the individual branches in the steady state after the change of parameters (of impedance), when the respective values of currents before the change, and the values of self admittances and mutual short circuits for this network, are known.