

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ROZPRAWY
ELEKTROTECHNICZNE

TOM IX · ZESZYT 1-2

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1963

RADA REDAKCYJNA

PROF. JANUSZ GROSZKOWSKI, PROF. JANUSZ LECH JAKUBOWSKI,
PROF. BOLESŁAW KONORSKI, PROF. IGNACY MALECKI
PROF. PAWEŁ NOWACKI, PROF. PAWEŁ SZULKIN

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor Naczelny

PROF. WITOLD NOWICKI

Sekretarz

JULIUSZ MIERZEJEWSKI

ADRES REDAKCJI

*Warszawa, Politechnika, Plac Jedności Robotniczej 1,
Katedra Teletransmisji Przewodowej, Gmach Mechaniki*

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
Warszawa, Młodowa 10

Nakład 710 (584+126)	Oddano do składania 22.XI.63
Ark. wyd. 15,5, ark. druk. 14,5	Podpisano do druku w kwietniu 1963
Papier druk. sat. kl. III, 80 g, 70 × 100	Druk ukończono w kwietniu 1963
Zamówienie nr 1849/62	Cena zł 50,— L-86

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

621.396.611

JACEK KUDREWICZ

Zastosowanie metod analizy funkcjonalnej do badania stabilności nieliniowych układów elektrycznych

Rękopis dostarczono 6.4.1962

W pracy rozpatruje się układ elektryczny składający się z części liniowej i nieliniowej, objętych pętlą sprzężenia zwrotnego. Badanie stabilności polega na zastosowaniu metod analizy funkcjonalnej do badania pewnych jakościowych własności rozwiązań nieliniowego równania całkowego (typu Volterry) opisującego układ. Badane są własności układu z punktu widzenia stabilności zwyczajnej (w sensie Lapunowa), asymptotycznej oraz tzw. stabilności energetycznej. Określono warunki stabilności w zależności od własności części liniowej układu i od charakterystyki elementu nieliniowego. Sformułowano pewne proste twierdzenia, wyznaczające warunki, jakie musi spełniać liniowa część układu, aby cały układ był stabilny dla każdego elementu nieliniowego, którego charakterystyka mieści się w kącie ograniczonym dwoma prostymi. Wnioski wynikające z tych twierdzeń zastosowano do badania stabilności układów automatycznej regulacji. Niektóre spośród twierdzeń dotyczących układu z jednym elementem nieliniowym w pętli sprzężenia zwrotnego zostały uogólnione na układy z wieloma elementami nieliniowymi w różnych pętlach sprzężenia zwrotnego. Wszystkie rozważania teoretyczne zilustrowano przykładami.

WSTĘP

Metody badania stabilności układów dynamicznych pochodzące od Lapunowa i jego uczniów doprowadziły do określenia koniecznych i wystarczających warunków stabilności dla stosunkowo szerokiej klasy układów. Praktyczne wykorzystanie tych warunków (np. do określenia stabilności układów automatycznej regulacji) napotyka jednak na poważne trudności i to nie tylko rachunkowe. Nie ma bowiem ogólnych metod pozwalających wyznaczyć funkcję Lapunowa, przy pomocy której szacuje się zakres stabilności.

W przedstawionej pracy podano systematyczny wykład nowej metody badania stabilności, polegającej na zastosowaniu analizy funkcjonalnej do jakościowego badania rozwiązań nieliniowego równania całkowego opisującego układ¹⁾. Celem pracy jest raczej uzyskanie praktycznie przydatnej

¹⁾ Częściowe wyniki przedstawionej pracy były już publikowane w artykułach [3] i [4].

metody niż otrzymanie nowych ogólnych rozwiązań teoretycznych. Dlatego też w pracy zajęto się wyłącznie układami dynamicznymi, których równania posiadają współczynniki niezależne od czasu, a zdecydowana większość pracy poświęcona jest układom zawierającym tylko jeden element nieliniowy. Należy przypuszczać, że podaną metodę można będzie uogólnić na znacznie szerszą klasę układów. W pracy badane są warunki stabilności zwykłej i asymptotycznej, w sensie Lapunowa, oraz nie rozpatrywanej w klasycznej teorii tzw. stabilności energetycznej.

Rozdział 1 zawiera ogólne sformułowanie problemu i określa pojęcia stabilności układu elektrycznego. W rozdziale 2 udowodniono pewne własności równań liniowych, a w szczególności obliczono normy i widmo operatorów opisujących liniowy układ elektryczny. Rozdział ten ma jedynie znaczenie pomocnicze i nie zawiera zasadniczo żadnych nowych wyników. Ostatni paragraf rozdziału („Operator sprzężony i jego $\mathcal{L}$ -transformata”) został napisany jedynie na użytek rozdziału 6 i może być chwilowo pominięty w czytaniu. W rozdziałach 3 i 4 sformułowano i udowodniono wystarczające warunki stabilności układu elektrycznego. Ostateczne wnioski dotyczące stabilności zwyczajnej w sensie Lapunowa (twierdzenie IV i V) są identyczne z wnioskami uzyskanymi pierwszą metodą Lapunowa. Jeżeli chodzi natomiast o twierdzenie VI dające ilościowe oszacowanie obszaru stabilności asymptotycznej, to daje ono pewne nowe wyniki w stosunku do metod Lapunowa. Najbardziej przydatne praktycznie są twierdzenia VII, VIII i IX dotyczące warunków stabilności energetycznej. Uzyskane wyniki ilustrowane są przykładami. Rozdział 5 podaje ogólne zasady zastosowania twierdzeń VIII i IX do badania układów automatycznej regulacji, natomiast rozdział 6 uogólnia wyniki rozdziału 4 na układy zawierające wiele elementów nieliniowych i wiele pętli sprzężenia zwrotnego.

W pracy korzysta się z ogólnych pojęć analizy funkcjonalnej, które znaleźć można np. w książce: Lusternik i Sobolew: „Elementy analizy funkcjonalnej” (ewentualnie w innych podręcznikach, np. [2]). Podstawowe wiadomości dotyczące funkcji prawie okresowych zaczerpnięto z książki: H. Bohr: „Almost periodic functions”.

Przedstawiona metoda badania stabilności różni się w sposób istotny od metody klasycznej, tak że nie było potrzeby korzystania z jakichkolwiek wyników dotyczących teorii Lapunowa (z wyjątkiem samej definicji stabilności, którą określamy tu w oparciu o zupełnie inne pojęcia).

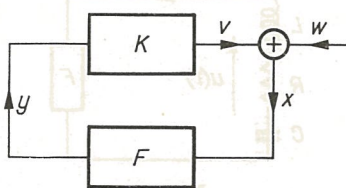
1. RÓWNANIA UKŁADU ELEKTRYCZNEGO. OKREŚLENIE STABILNOŚCI

Równania układu elektrycznego. Rozpatrzmy układ elektryczny składający się z części liniowej K i nieliniowej F , pracujących w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego (rys. 1).

Niech część liniowa układu będzie zbudowana z elementów RLC o stałych skupionych. Można ją wtedy opisać podając równanie różniczkowe:

$$\sum_{v=0}^m a_v \frac{d^v v}{dt^v} = \sum_{v=0}^n b_v \frac{d^v y}{dt^v}; \quad m \geq n, \quad a_m \neq 0 \quad (1.1)$$

wiązące z sobą przebiegi $y(t)$ na wejściu i $v(t)$ na wyjściu układu K przy odpowiednich warunkach początkowych: $\left. \frac{d^v v}{dt^v} \right|_{t=0} = v_v \quad (v = 0, 1 \dots m-1)$ zależnych od ładunków na kondensatorach i strumieni magnetycznych



Rys. 1

w cewkach w momencie $t = 0$. Rozwiązując równanie (1.1) względem $v(t)$ otrzymamy:

$$v(t) = \frac{b_m}{a_m} y(t) + \int_0^t k(t-\tau) y(\tau) d\tau + r(t), \quad (1.2)$$

gdzie $r(t)$ jest rozwiązaniem równania jednorodnego (dla $y(t) \equiv 0$) i znika w przypadku zerowych warunków początkowych. Dla najczęściej spotykanych układów $b_m = 0$ ($m > n$) i wtedy funkcja $k(t)$ jest tzw. charakterystyką impulsową układu liniowego K .

O układzie nieliniowym F założmy, że daje się opisać zależnością:

$$y(t) = f[x(t)], \quad (1.3)$$

gdzie $x(t)$ i $y(t)$ są przebiegami odpowiednio na wejściu i wyjściu układu F , natomiast $f(x)$ jest funkcją ciągłą i taką, że $f(0) = 0$.

Korzystając z zależności (1.2) i (1.3) możemy układ elektryczny przedstawiony na rys. 1 opisać równaniem:

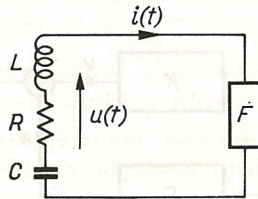
$$x(t) = \frac{b_m}{a_m} f[x(t)] + \int_0^t k(t-\tau) f[x(\tau)] d\tau + r(t) + w(t), \quad (1.4)$$

gdzie $w(t)$ jest przebiegiem elektrycznym przyłożonym z zewnątrz do układu¹⁾.

Jako najprostszy przykład rzeczywistego układu elektrycznego opisywanego równaniem (1.4) rozpatrzmy obwód rezonansu szeregowego RLC , współpracujący z opornością nieliniową (np. opornością ujemną typu łukowego) dającą się opisać równaniem $u = f(i)$. Dla części liniowej układu RLC możemy napisać równanie

$$u(t) = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + \frac{Q_0}{C}$$

np. z warunkiem początkowym $i(0) = 0$ (Q_0 jest ładunkiem na kondensatorze C



Rys. 2

w chwili $t = 0$). Rozwiązując je względem $i(t)$ a następnie wstawiając na miejsce $u(t)$ wyrażenie $f[i(t)]$ otrzymamy:

$$i(t) = \int_0^t \frac{e^{-\alpha(t-\tau)}}{\omega L} [\omega \cos \omega(t-\tau) - \alpha \sin \omega(t-\tau)] f[i(\tau)] d\tau - \frac{Q_0 \omega_0^2}{\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t,$$

gdzie

$$\alpha = \frac{R}{2L}; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.$$

Otrzymane równanie całkowe jest formalnie równoważne nieliniowemu równaniu różniczkowemu:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + \left(R - \frac{df}{di} \right) \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0; \quad i(0) = 0, \quad \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = Q_0 \omega_0^2.$$

W przedstawionym przykładzie K i F są dwójnikami, jednak w bardziej złożonych przypadkach są to zwykle czwórniki.

Idea metody badania stabilności. Badanie stabilności układu przedstawionego na rys. 1 sprowadza się do określenia warunków, przy których

¹⁾ Warto wspomnieć, że równanie (1.4) jest formalnie równoważne równaniu różniczkowemu:

$$\sum_{v=0}^m a_v \frac{d^v x(t)}{dt^v} - \sum_{v=0}^n b_v \frac{d^v f[x(t)]}{dt^v} = \sum_{v=0}^m a_v \frac{d^v w(t)}{dt^v}$$

z warunkami początkowymi zależnymi od $r(t)$ i $w(t)$.

rozwiązanie równania (1.4) będzie dostatecznie małe w pewnym ściśle określonym sensie zależnym od przyjętego kryterium stabilności.

Idea przedstawionej metody polega na tym, że funkcje $x(t)$ traktujemy jako elementy pewnej przestrzeni funkcyjnej (przestrzeni Banacha), a równanie (1.4) (lub inne równoważne mu równanie) jako pewne równanie operatorowe:

$$x = Ax \quad (1.5)$$

w tej przestrzeni. Operator nieliniowy A zależy na ogół od r i w będących również elementami przestrzeni i jest określony bądź bezpośrednio przez prawą stronę równania (1.4) lub w inny sposób, byleby tak, aby równanie (1.5) było równoważne równaniu (1.4).

Dobór odpowiedniej przestrzeni funkcyjnej, w której rozpatrujemy równanie (1.5), jest ściśle związany z wyborem odpowiedniego kryterium stabilności. Można na nieskończenie wiele sposobów wybierać rodzaj przestrzeni i otrzymywać rozmaite kryteria stabilności, z których oczywiście nie wszystkie będą miały sens praktyczny. Wybór takiej, a nie innej przestrzeni funkcyjnej jest więc podyktowany względami technicznymi, a otrzymane kryterium stabilności musi być co najmniej zgodne z intuicyjnym pojęciem stabilności układu elektrycznego.

Szczególnie wygodne są takie przestrzenie funkcyjne, w których operator A daje się oszacować przez nierówność:

$$\|Ax\| \leq C(S) \|x\| \quad \text{dla } x \in S \quad (1.6)$$

spełnioną w pewnym podzbiorze S przestrzeni unormowanej, gdzie $\|x\|$, $\|Ax\|$ oznaczają odpowiednio normy elementów x i Ax , natomiast $C(S)$ jest liczbą stałą wspólną dla wszystkich $x \in S$. W przestrzeniach tego typu układ elektryczny [względnie równanie (1.5)] będziemy nazywać stabilnym (w zbiorze S), jeżeli równanie (1.5) nie ma rozwiązań w zbiorze S , z wyjątkiem rozwiązania zerowego. W tych przypadkach wystarczający warunek stabilności sprowadzi się do spełnienia nierówności:

$$C(S) < 1, \quad (1.7)$$

która — jak widać z postaci równania (1.5) i nierówności (1.6) — gwarantuje nieistnienie rozwiązania równania (1.5) w zbiorze S , mającego normę różną od zera.

Dyskusja nierówności (1.7), jej praktyczna przydatność i sensowność przyjętego kryterium stabilności z punktu widzenia technicznego zależy, jak już wspomnieliśmy, od konkretnie przyjętej przestrzeni funkcyjnej. W przedstawionej pracy rozpatrzmy stabilność układu z punktu widzenia trzech różnych kryteriów stabilności: zwykłej stabilności w sensie Lapunowa, stabilności asymptotycznej (również w sensie Lapunowa) i tzw. stabilności energetycznej.

Stabilność zwykła (w sensie Lapunowa). Rozpatrzmy równanie (1.4) w przestrzeni Banacha $C_{[0, \infty)}$. Elementami przestrzeni są funkcje $x(t)$ ciągłe i ograniczone na półosi liczbowej $t \in [0, \infty)$, a norma elementu $x \in C_{[0, \infty)}$ ma postać:

$$\|x\|_c \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t \geq 0} |x(t)|. \quad (1.8)$$

Określmy w przestrzeni $C_{[0, \infty)}$ dwa operatory K i f następującymi równaniami:

$$Kx \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b_m}{a_m} x(t) + \int_0^t k(t-\tau) x(\tau) d\tau, \quad fx \stackrel{\text{def}}{=} f[x(t)], \quad (1.9)$$

gdzie $k(t)$ jest pewną funkcją ciągłą spełniającą warunek $\int_0^\infty |k(t)| dt < \infty$,

natomiast $f(x)$ jest funkcją znikającą w zerze. Przy tych założeniach wartości operatorów Kx i fx należą również do przestrzeni $C_{[0, \infty)}$ i równanie (1.4) może być przepisane w postaci:

$$x = Kfx + z, \quad (1.10)$$

gdzie $z(t) = r(t) + w(t)$ jest również elementem przestrzeni $C_{[0, \infty)}$.

Definicja 1. Układ elektryczny przedstawiony na rys. 1 i opisujący się równaniem (1.10) będziemy nazywać stabilnym w sensie Lapunowa, jeżeli małym funkcjom $z(t)$ odpowiadają małe rozwiązania $x(t)$ lub dokładniej mówiąc, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać takie $\eta(\varepsilon)$, że z nierówności $\|z\|_c < \eta$ wynika $\|x\|_c < \varepsilon$.

W następnych rozdziałach, formalizując zagadnienie będziemy mówić o stabilności zerowego rozwiązania równania (1.10), pamiętając, że jest to równoznaczne ze stabilnością układu elektrycznego w sensie definicji 1.

Stabilność asymptotyczna. Oprócz zwykłej stabilności w sensie Lapunowa rozpatrywać będziemy również tzw. stabilność asymptotyczną (której definicja pochodzi również od Lapunowa).

Definicja 2a. Układ elektryczny opisujący się równaniem (1.4) nazywamy stabilnym asymptotycznie, jeżeli pobudzony drganiem $z(t) = r(t) + w(t)$ znikającymi przy $t \rightarrow \infty$, daje odpowiedź $x(t)$ również znikającą w nieskończoności.

Dla określenia warunków stabilności asymptotycznej wprowadzimy nową przestrzeń funkcyjną. Rozpatrzmy w przestrzeni Banacha $C_{[0, \infty)}$ podzbiór N funkcji $x(t)$ znikających w nieskończoności: $x(t) \in N$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. Podzbiór N stanowi liniową podprzestrzeń przestrzeni $C_{[0, \infty)}$. Poza tym N jest podprzestrzenią domkniętą, to znaczy, że jeżeli ciąg funkcji $x_m(t) \in N$ jest ciągiem zbieżnym do $x(t)$ w tym sensie, że: $\|x_m(t) - x(t)\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$, to granica $x(t)$ również należy do N . Dwie funkcje $x_1(t)$ i $x_2(t)$ należące do $C_{[0, \infty)}$ nazywać będziemy równoważny-

mi, jeżeli $(x_1 - x_2) \in N$. Przestrzeń $C_{[0, \infty)}$ można teraz podzielić na rozłączne klasy funkcji równoważnych, w ten sposób, że dwie funkcje $x_1(t)$ i $x_2(t)$ zaliczamy do tej samej klasy X wtedy i tylko wtedy, gdy są sobie równoważne. Określimy sumę dwóch klas X i Y jako klasę funkcji równoważnych z funkcją $x(t) + y(t)$, gdzie $x(t) \in X$, $y(t) \in Y$. Iloczyn klasy X przez liczbę a określamy jako klasę aX funkcji równoważnych z funkcją $ax(t)$, gdzie $x(t) \in X$. Klasy funkcji równoważnych można teraz uważać za elementy przestrzeni ilorazowej C/N . Z ogólnej teorii przestrzeni ilorazowych wynika, że określona powyżej przestrzeń C/N stanie się liniową przestrzenią Banacha, jeżeli wprowadzimy w niej normę $\| \cdot \|_{CN}$ według następującej definicji:

$$\| X \|_{CN} \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in X} \| x \|_c = \inf_{\theta \in N} \sup_{t \geq 0} |x(t) + \theta(t)| = \limsup_{T \rightarrow \infty} \sup_{t > T} |x(t)|, \quad (1.11)$$

gdzie $x(t)$ jest dowolną funkcją należącą do klasy X .

Podprzestrzeń N jest zerem przestrzeni C/N .

Ponieważ każda z klas X , Y będąca elementem przestrzeni C/N jest w pełni określona przez podanie dowolnego reprezentanta klasy, nie będzie więc nieporozumień, jeżeli w dalszym ciągu elementy przestrzeni ilorazowej oznaczać będziemy małymi literami x , y zachowując jednak oddzielne symbole dla oznaczenia norm w przestrzeni $C_{[0, \infty)}$: $\| \cdot \|_c$ i w przestrzeni C/N : $\| \cdot \|_{CN}$.

W następnym rozdziale wykazemy, że równości definicyjne (1.9) określają również operatory w przestrzeni C/N . Występujące w definicji $x(t)$ są wówczas dowolnymi reprezentantami klasy $X \in C/N$. W przypadku gdy w równaniu (1.4) funkcja $z(t) = r(t) + w(t)$ spełnia warunek $z(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, to $\| z \|_{CN} = 0$ i układ elektryczny opisuje się równaniem o postaci

$$x = Kfx \quad (1.12)$$

rozpatrywanym na elementach przestrzeni C/N .

Powyższe rozważania pozwalają sformułować definicję stabilności asymptotycznej w następujący sposób:

Definicja 2b. Układ elektryczny przedstawiony na rys. 1 opisujący się równaniem (1.12) (w przestrzeni C/N) nazywać będziemy stabilnym asymptotycznie, jeżeli równanie (1.12) nie posiada rozwiązań w przestrzeni C/N mających normę $\| x \|_{CN}$ różną od zera.

Może się zdarzyć, że równanie (1.12) nie ma rozwiązań (różnych od zera) jedynie w pewnym podzbiorze S przestrzeni C/N . Mówimy wtedy, że równanie (1.12) jest stabilne w zbiorze S . W szczególności S może być całą przestrzenią C/N .

Stabilność energetyczna. Rozpatrzmy teraz w przestrzeni $C_{(-\infty, +\infty)}$ zbiór funkcji prawie okresowych w sensie Bohra.

Funkcję (zespoloną) $x(t)$ ciągłą dla $t \in (-\infty, +\infty)$ nazywamy prawie okresową (wg H. Bohra), jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba

$L(\varepsilon)$ taka, że każdy z przedziałów osi liczbowej o długości $L(\varepsilon)$ zawiera co najmniej jedną liczbę $T(\varepsilon)$ taką, że

$$|x(t+T) - x(t)| < \varepsilon \text{ dla } t \in (-\infty, +\infty).$$

Jak wynika z podstawowego twierdzenia teorii funkcji prawie okresowych, każda funkcja $x(t)$ prawie okresowa może być rozwinięta w jednostajnie zbieżny szereg Fouriera:

$$x(t) = \sum_p c_p e^{i\omega_p t}, \quad (1.13)$$

a zbiór funkcji prawie okresowych jest identyczny z jednostajnym domknięciem wszystkich wielomianów trygonometrycznych o postaci

$$\sum_{p=1}^N c_p e^{i\omega_p t}, \text{ gdzie } \omega_p \text{ są dowolnymi rzeczywistymi liczbami.}$$

Zbiór funkcji prawie okresowych tworzy (domkniętą) przestrzeń Banacha z normą:

$$\|x\|_1 = \sup_t |x(t)| \quad (1.14)$$

(kombinacja liniowa i granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji prawie okresowych jest funkcją prawie okresową). W zbiorze funkcji prawie okresowych określić można funkcjonal dwuliniowy ciągły o postaci:

$$(x, y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \overline{y(t)} dt \quad (1.15)$$

mający własności iloczynu skalarnego. Poprzez iloczyn skalarny określa się nową normę:

$$\|x\|_H = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt}. \quad (1.16)$$

Łatwo sprawdzić, że funkcje $e^{i\omega t}$ dla $-\infty < \omega < +\infty$ tworzą przy tak określonym iloczynie skalarnym nieprzeliczalny układ zupełny wzajemnie ortogonalnych i unormowanych funkcji, tj.:

$$(e^{i\omega_1 t}, e^{i\omega_2 t}) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \omega_1 = \omega_2, \\ 0 & \text{dla } \omega_1 \neq \omega_2. \end{cases} \quad (1.17)$$

Dla funkcji prawie okresowej o postaci (1.13) mamy¹⁾

$$\|x\|_H = \sqrt{\sum_p |c_p|^2}. \quad (1.18)$$

1) Można wykazać, że zachodzi równość $\|x\|_H^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} |x(t)|^2 dt$ dla dowolnej liczby T_0 .

Weźmy teraz funkcję $x(t)$ o postaci $x(t) = x_0(t) + \Theta(t)$, gdzie x_0 jest ustaloną funkcją prawie okresową, natomiast $\Theta \in N$ (funkcja $\Theta'(t)$ jest ciągła i znika dla $t \rightarrow \infty$). Każdą z funkcji $x(t)$ dla wszystkich $\Theta \in N$ będziemy utożsamiać z tym samym elementem x nowej przestrzeni funkcyjnej H . Mówimy więc, że $x \in H$, jeżeli $x = x_0 + \Theta$, gdzie $\Theta \in N$, natomiast x_0 jest funkcją prawie okresową. Przestrzeń H stanie się przestrzenią Banacha, jeżeli wprowadzimy w niej normę:

$$\|x\|_{CN} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{t > T} |x(t)| = \|x_0\|_1. \quad (1.19)$$

Istnieje naturalnie wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy elementami przestrzeni H i funkcjami prawie okresowymi. Poza tym H jest podprzestrzenią przestrzeni C/N .

Ponieważ dla każdej funkcji $\Theta(t)$ znikającej w nieskończoności:

$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\Theta(t)|^2 dt = 0$, więc w przestrzeni H można również rozpatrywać normę $\| \cdot \|_H$ zdefiniowaną przez równość (1.16) oraz iloczyn skalarny o postaci (1.15). (Zbiór N jest zerem przestrzeni H , mamy więc $(x, \Theta) = 0$ dla dowolnych $x \in H$ i $\Theta \in N$). Pomiedzy normami (1.16) i (1.19) zachodzi nierówność:

$$\|x\|_{CN} \geq \|x\|_H. \quad (1.20)$$

Ponieważ każdy element x przestrzeni H jest reprezentowany przez pewną funkcję prawie okresową o postaci (1.13), więc dla każdego $x \in H$ zachodzi równość (1.18).

W dalszym ciągu będziemy rozpatrywać jedynie przestrzeń H funkcji rzeczywistych, a więc zbiór takich funkcji prawie okresowych, dla których w rozwinięciu (1.13) wszystkie składniki zespolone występują jako parami sprzężone.

Norma $\|x\|_H$ ma prostą interpretację fizyczną. Jeżeli $x(t)$ jest sygnałem prądu lub napięcia w obwodzie elektrycznym, to $\|x\|_H$ oznacza asymptotyczną (w przedziale $[0, T]$ przy $T \rightarrow \infty$) wartość skuteczną sygnału, natomiast $\|x\|_H^2$ jest proporcjonalny do mocy sygnału. Jeżeli $x(t)$ posiada granicę przy $t \rightarrow \infty$, to jak wynika z reguły de L'Hospitala: $\|x\|_H = \lim_{T \rightarrow \infty} x(t)$. W szczególności wszystkie sygnały zni-

kające w nieskończoności jak również sygnały o ograniczonej energii ($\int_0^\infty |x(t)|^2 dt < \infty$) mają znikającą normę $\|x\|_H$.

Rozpatrzmy teraz równanie (1.4) w przestrzeni H . Przy pewnych ograniczeniach narzuconych na funkcje $k(t)$ i $f(x)$ operatory K i f (wzór 1.9) są poprawnie określonymi operatorami w przestrzeni H i równanie (1.4) można przepisać w postaci

$$x = Kfx + z. \quad (1.21)$$

Badanie własności rozwiązań równania (1.21) w przestrzeni H prowadzi w naturalny sposób do następującej definicji stabilności.

Definicja 3. Układ elektryczny przedstawiony na rys. 1 i opisujący się równaniem (1.21) w przestrzeni H nazywać będziemy stabilnym energetycznie, jeżeli przy pobudzeniu sygnałem $z(t)$ o znikającej mocy średniej daje odpowiedź $x(t)$ również o znikającej mocy średniej lub inaczej mówiąc, jeżeli w przypadku $\|z\|_H = 0$ równanie (1.21) nie ma w przestrzeni H rozwiązań różnych od zera.

Jeżeli równanie $x = Kfx$ nie ma rozwiązań (niezerowych) jedynie w pewnym podzbiorze S przestrzeni H , to mówimy, że jest ono stabilne w zbiorze S .

2. WŁASNOŚCI RÓWNAŃ LINIOWYCH

Operator liniowy i jego $\mathcal{L}$ -transformata. Rozpatrzmy równanie o postaci:

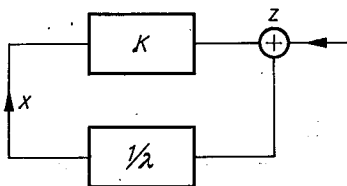
$$\lambda x = Kx + z, \quad (2.1)$$

gdzie λ jest liczbą rzeczywistą, $x(t)$ i $z(t)$ funkcjami z pewnej przestrzeni Banacha, natomiast K jest operatorem o postaci¹⁾:

$$Kx \stackrel{\text{def}}{=} a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) + \int_0^t k(t-\tau) x(\tau) d\tau. \quad (2.2)$$

Równanie (2.1) opisuje liniowy układ elektryczny, którego schemat blokowy pokazany jest na rys. 3.

Oczywiście K jest operatorem określonym na zbiorze funkcji m -krotnie różniczkowalnych (gęstym w przestrzeni $C_{[0,\infty)}$) jak również w przestrze-



Rys. 3

niach C/N i H . Z samej postaci operatora wynika, że dla liczb rzeczywistych α, β i funkcji x, y należących do dziedziny operatora K mamy:

$$K(\alpha x + \beta y) = \alpha Kx + \beta Ky.$$

1) Splot w równości (2.2) jest działaniem przemienne:

$$\int_0^t k(t-\tau) x(\tau) d\tau = \int_0^t k(\tau) x(t-\tau) d\tau.$$

Przyporządkujemy operatorowi K funkcję zmiennej zespolonej $K(s)$ o postaci:

$$K(s) = a_m s^m + \dots + a_1 s + a_0 + \mathcal{L}[k(t)], \quad (2.3)$$

gdzie $\mathcal{L}$ jest symbolem transformaty Laplacea¹⁾:

$$\mathcal{L}[k(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} k(t) dt.$$

Funkcję $K(s)$ nazywać będziemy $\mathcal{L}$ -transformatą operatora K i oznaczać przez $\mathcal{L}[K]$. Jeżeli przez $\tilde{x}(s)$ i $\tilde{y}(s)$ oznaczymy odpowiednio transformaty Laplace'a funkcji $x(t)$ i $y(t)$, gdzie $y = Kx$, to $\tilde{y}(s) = K(s) \tilde{x}(s) + \tilde{r}(s)$, gdzie $\tilde{r}(s)$ jest wielomianem stopnia $m-1$ znikającym tożsamościowo w przypadku gdy $a_m = \dots a_1 = 0$ lub gdy $x(0) = x'(0) = \dots = x^{(m-1)}(0) = 0$.

Z teorii przekształcenia Laplace'a wynikają natychmiast następujące własności $\mathcal{L}$ -transformaty operatora K :

- 1° $\mathcal{L}[K_1 K_2] = \mathcal{L}[K_1] \cdot \mathcal{L}[K_2]$,
- 2° $\mathcal{L}[\alpha K_1 + \beta K_2] = \alpha \mathcal{L}[K_1] + \beta \mathcal{L}[K_2]$,
- 3° $\mathcal{L}[I] = 1$,
- 4° $\mathcal{L}[K^{-1}] = (\mathcal{L}[K])^{-1}$,

gdzie K_1 i K_2 są dowolnymi operatorami o postaci (2.2), α, β — liczbami rzeczywistymi, I — operatorem tożsamościowym.

Przy pomocy funkcji $K(s) = \mathcal{L}[K]$ określimy zasadnicze własności operatora K .

Założmy dalej, że $K(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$ jest ilorazem dwóch wielomianów $L(s)$ i $M(s)$ o rzeczywistych współczynnikach [co jest równoznaczne założeniu równoważności równania (2.1) z pewnym równaniem różniczkowym liniowym o stałych rzeczywistych współczynnikach].

Warunki ograniczoności operatora K

Twierdzenie I: Operator K jest operatorem ograniczonym w przestrzeniach $C_{[0, \infty)}$, C/N , H (i określonym w całej przestrzeni) wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:

1. $st L(s) \leq st M(s)$
2. $K(s)$ — jest funkcją ograniczoną w półpłaszczyźnie $Re s \geq 0$ lub równoważne im:

$$1^* \quad a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0,$$

$$2^* \quad \int_0^{\infty} |k(t)| dt < \infty.$$

¹⁾ $K(s)$ traktujemy jako funkcję określoną przez (2.3) i wszystkie jej przedłużenia analityczne.

Dowód: Równoważność warunków 1, 2 i 1*, 2* wynika z własności transformat Laplace'a. Istotnie, jeżeli $K(s)$ jest funkcją wymierną o rzeczywistych współczynnikach i spełniającą warunek 1, to $k(t)$ ma postać:

$$k(t) = \sum_{\nu} A_{\nu} t^{n_{\nu}} e^{a_{\nu} t} \cos(\omega_{\nu} t + \varphi_{\nu}), \quad (2.4)$$

gdzie $a_{\nu} + i\omega_{\nu}$ są współrzędnymi biegunów funkcji $K(s)$.

Warunek 2* jest zatem spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie $a_{\nu} < 0$, a więc gdy zachodzi 2.

Poza tym warunki 1 i 1* są identyczne.

Niech teraz $x \in C_{[0, \infty)}$; z nierówności:

$$\begin{aligned} \|Kx\|_c &= \sup_{t \geq 0} \left| a_0 x(t) + \int_0^t k(t-\tau) x(\tau) d\tau \right| \leq |a_0| \sup_{t \geq 0} |x(t)| + \\ &+ \sup_{t \geq 0} \int_0^t |k(t-\tau)| d\tau \cdot \sup_{\tau \geq 0} |x(\tau)| = (|a_0| + \int_0^{\infty} |k(t)| dt) \|x\|_c \end{aligned} \quad (2.5)$$

wynika, że warunki 1* i 2* wystarczają do tego, aby operator K był ograniczony.

Jeżeli nie jest spełniony warunek 1, to oczywiście operator nie jest określony na funkcjach nieróżniczkowalnych. Podobnie jeżeli $K(s)$ ma bieguny w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} s > 0$, to operator K jest nieograniczony np. w punkcie $x(t) \equiv 1$. Jeżeli natomiast $K(s)$ ma biegun na osi $\operatorname{Re} s = 0$, np. $K(i\omega_0) = \infty$, to jak łatwo sprawdzić operator K jest nieograniczony np. w punkcie $x(t) = e^{i\omega_0 t}$ (lub $x(t) = \cos \omega_0 t$).

Udowodniliśmy więc twierdzenie I dla przestrzeni $C_{[0, \infty)}$. Dla przestrzeni C/N wystarczy wykazać, że z warunków 1* i 2* wynika $K\theta \in N$ dla każdego $\theta \in N$. W tym celu oznaczmy: $\int_0^{\infty} |k(t)| dt = M_1$, $\sup_{t \geq 0} |\theta(t)| = M_2$.

Z 2* wynika, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje T_1 , także, że nierówność $T \geq T_1$ pociąga za sobą $\int_T^{\infty} |k(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2M_2}$. Podobnie z tego, że $\theta \in N$, wy-

nika istnienie T_2 takiego, że $|\theta(t)| < \frac{\varepsilon}{2(|a_0| + M_1)}$ dla $t \geq T_2$. Stąd dla $t > T_1 + T_2$ mamy:

$$\begin{aligned} \left| a_0 \theta(t) + \int_0^t k(\tau) \theta(t-\tau) d\tau \right| &\leq |a_0| \frac{\varepsilon}{2(|a_0| + M_1)} + \left| \int_0^{T_1} k(\tau) \theta(t-\tau) d\tau \right| + \\ &+ \left| \int_{T_1}^t k(\tau) \theta(t-\tau) d\tau \right| \leq \frac{\varepsilon |a_0|}{2(|a_0| + M_1)} + \frac{\varepsilon}{2(|a_0| + M_1)} \int_0^{T_1} |k(\tau)| d\tau + M_2 \int_{T_1}^t |k(\tau)| d\tau < \varepsilon. \end{aligned}$$

Operator K spełniający warunki 1 i 2 jest więc dobrze określony w przestrzeni ilorazowej C/N , to znaczy dla każdego reprezentanta elementu $x \in C/N$ otrzymamy ten sam element $Kx \in C/N$, a z ograniczoneści K w $C_{[0, \infty)}$ wynika ograniczoneść w C/N .

Ponieważ przestrzeń H jest podprzestrzenią funkcji prawie okresowych z przestrzeni C/N , więc dla spełnienia twierdzenia 1 w przestrzeni H wystarczy sprawdzić, że operator K spełniający warunki 1 i 2 przeprowadza każdą funkcję prawie okresową $x(t)$ w funkcję $y(t) = y_0(t) + \Theta(t)$, gdzie $y_0(t)$ jest funkcją prawie okresową, natomiast $\Theta(t)$ znika w nieskończoności. Istotnie:

$$y(t) = Kx = a_0 x(t) + \int_0^{\infty} k(\tau) x(t - \tau) d\tau - \int_t^{\infty} k(\tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (2.6)$$

Z nierówności:

$$\left| \int_0^{\infty} k(\tau) x(t + T - \tau) d\tau - \int_0^{\infty} k(\tau) x(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_0^{\infty} |k(\tau)| d\tau \cdot \sup_t |x(t + T) - x(t)|$$

wynika, że funkcja:

$$y_0(t) = a_0 x(t) + \int_0^{\infty} k(\tau) x(t - \tau) d\tau \quad (2.7)$$

jest prawie okresowa¹⁾. Ponieważ funkcje prawie okresowe są ograniczone, więc: $\Theta(t) = - \int_t^{\infty} k(\tau) x(t - \tau) d\tau$ znika dla $t \rightarrow \infty$ c. n. d.

Wykażemy jeszcze, że jeżeli $x(t) = \sum_{\nu} c_{\nu} e^{i\omega_{\nu} t}$, to zachodzi równość:

$$y_0(t) = \sum_{\nu} c_{\nu} K(i\omega_{\nu}) e^{i\omega_{\nu} t}. \quad (2.8)$$

Istotnie korzystając z (2. 7) i całkując szereg (jednostajnie zbieżny) wyraz po wyrazie, mamy:

$$\begin{aligned} y_0(t) &= a_0 \sum_{\nu} c_{\nu} e^{i\omega_{\nu} t} + \int_0^{\infty} k(\tau) \sum_{\nu} c_{\nu} e^{i\omega_{\nu}(t-\tau)} d\tau = \\ &= \sum_{\nu} c_{\nu} e^{i\omega_{\nu} t} \left(a_0 + \int_0^{\infty} k(\tau) e^{-i\omega_{\nu} \tau} d\tau \right) = \sum_{\nu} c_{\nu} K(i\omega_{\nu}) e^{i\omega_{\nu} t}. \end{aligned}$$

1) ε_1 — okres funkcji $y_0(t)$ jest ε_2 — okresem funkcji $x(t)$, gdzie

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \left(|a_0| + \int_0^{\infty} |k(\tau)| d\tau \right).$$

Warto wspomnieć, że jeżeli mamy równanie różniczkowe:

$$M\left(\frac{d}{dt}\right)y(t) = L\left(\frac{d}{dt}\right)x(t); \quad y^v(0) = y_v \quad v = 0, 1 \dots (st M - 1),$$

gdzie M i L są wielomianami o stałych rzeczywistych współczynnikach, to rozwiązanie równania ma postać $y = Kx + r$, gdzie $K(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$, natomiast $r(t)$ jest rozwiązaniem równania jednorodnego zależnym od danych warunków początkowych. Jeżeli K jest operatorem ograniczonym, to $r(t) \in N$.

Rezolwenta i widmo operatora K . Rozwiązując formalnie równanie (2. 1) względem x , otrzymamy:

$$x = (\lambda I - K)^{-1} z. \quad (2.9)$$

Operator $R_\lambda = (\lambda I - K)^{-1}$ nazywa się rezolwentą operatora K . Liczby (zespolone) λ , dla których rezolwenta jest określona i ograniczona w całej przestrzeni, tworzą zbiór wartości regulowanych operatora K . Dopelnienie zbioru wartości regularnych do całej przestrzeni liczb zespolonych nosi nazwę widma operatora K i oznacza się przez $Sp(K)$. Jeżeli $(\lambda I - K)^{-1}$ nie jest operatorem ograniczonym w całej przestrzeni, to $\lambda \in Sp(K)$.

Zgodnie z własnościami $\mathcal{L}$ -transformaty operatora mamy:

$$\mathcal{L}[(\lambda I - K)^{-1}] = \frac{1}{\lambda - K(s)} = \frac{M(s)}{\lambda M(s) - L(s)}. \quad (2.10)$$

Z twierdzenia I wnioskujemy, że rezolwenta R_λ jest operatorem ograniczonym wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\lambda - K(s) \neq 0 \quad \text{dla} \quad Re s \geq 0 \quad \text{i} \quad st M \leq st(\lambda M - L).$$

Ponieważ nierówność $st M > st(\lambda M - L)$ może zajść tylko wtedy, gdy $\lambda = K(\infty)$, więc przyjmując, że punkt $s = \infty$ leży na linii $Re s = 0$, otrzymamy ostateczny warunek ograniczoności rezolwenty:

$$\lambda - K(s) \neq 0 \quad \text{dla} \quad Re s \geq 0 \quad (2.11)$$

Stąd wynika:

Twierdzenie II: Widmem operatora K w przestrzeniach $C_{[0, \infty)}$, C/N , H jest zbiór wartości λ spełniających nierówność przeciwną do (2. 11):

$$Sp(K) = \{\lambda : \lambda = K(s) \quad \text{dla} \quad Re s \geq 0\}. \quad (2.12)$$

Obraz widma na płaszczyźnie zmiennej zespolonej otrzymujemy odwzorowując funkcją $K(s)$ półpłaszczyznę $Re s \geq 0$. Bezpośrednio z (2. 12) otrzymamy następujące własności widma operatora K :

- 1° Zbiór punktów $\lambda_\omega = K(i\omega)$ dla $\omega \in (-\infty + \infty)$ jest brzegiem widma
- 2° Jeżeli $\lambda \in Sp(K)$, to również $\bar{\lambda} \in Sp(K)$ [gdyż $\bar{K}(s) = K(\bar{s})]$
- 3° Jeżeli $\lambda \in Sp(K)$, to $W(\lambda) \in Sp(W(K))$, gdzie W jest wielomianem o rzeczywistych współczynnikach
- 4° Jeżeli $\lambda \in Sp(K)$, to $\frac{1}{\lambda} \in Sp(K^{-1})$.

Dla operatorów ograniczonych funkcja $K(s)$ jest ograniczoną w pół-
płaszczyźnie $\operatorname{Re} s \geq 0$, a zatem widmo jest zbiorem ograniczonym. Promień
spektralny $|K|_{sp} \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{\lambda \in Sp(K)} |\lambda|$ zgodnie z własnością 1° wynosi:

$$|K|_{sp} = \sup_{\omega} |K(i\omega)|. \quad (2.13)$$

Operatory nieograniczone mają widmo nieograniczone: $|K|_{sp} = \infty$.

Norma operatora K. Każdy operator liniowy ograniczony posiada skoń-
czoną normę:

$$\|K\| \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{\|x\|=1} \|Kx\|, \quad (2.14)$$

która w różnych przestrzeniach jest na ogół różna.

W dalszym ciągu zajmiemy się obliczeniem względnie oszacowaniem nor-
my operatora K w przestrzeniach $C_{[0,\infty)}$, C/N , H .

Na podstawie nierówności (2.5) mamy dla przestrzeni $C_{[0,\infty)}$:

$$\|K\|_c \leq |a_0| + \int_0^{\infty} |k(\tau)| d\tau, \quad (2.15)$$

a w szczególnym przypadku dla $a_0 = 0$ zachodzi równość:

$$\|K\|_c = \int_0^{\infty} |k(\tau)| d\tau. \quad (2.16)$$

Dla dowodu wystarczy wskazać taką funkcję $x_0(t) \in C_{[0,\infty)}$ o normie $\|x_0\|_c = 1$
i taki punkt t_0 , że $(Kx_0)(t_0)$ różni się od $\int_0^{\infty} |k(\tau)| d\tau$ o dowolnie małą liczbę $\varepsilon > 0$. Wy-
bierzmy t_0 tak, aby $\int_{t_0}^{\infty} |k(\tau)| d\tau < \frac{\varepsilon}{2}$, a następnie dobierzmy funkcję $x_0(t)$ tak, aby
 $x_0 \in C_{[0,\infty)}$, $\sup_t |x_0(t)| = 1$ i ponadto: $\int_0^{t_0} |x_0(\tau) - \operatorname{sign} k(t_0 - \tau)| d\tau < \frac{\varepsilon}{2 \sup_{0 < \tau < t_0} |k(\tau)|}$.

Taki wybór $x_0(t)$ jest zawsze możliwy, ponieważ zbiór funkcji ciągłych jest gęsty
w przestrzeni $L_{[0,t_0]}$

Ostatecznie otrzymamy:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |k(\tau)| d\tau - (Kx_0)(t_0) &= \int_0^{\infty} |k(\tau)| d\tau - \int_0^{t_0} k(t_0 - \tau) \operatorname{sign} k(t_0 - \tau) d\tau + \\ &\quad - \int_0^{t_0} k(t_0 - \tau) [x_0(\tau) - \operatorname{sign} k(t_0 - \tau)] d\tau \leq \int_{t_0}^{\infty} |k(\tau)| d\tau + \\ &\quad + \sup_{0 < \tau < t_0} |k(\tau)| \int_0^{t_0} |x_0(\tau) - \operatorname{sign} k(t_0 - \tau)| d\tau < \varepsilon, \text{ c.n.d.} \end{aligned}$$

Obliczenie normy $\|K\|_{CN}$ operatora K w przestrzeni C/N jest znacznie
trudniejsze. Ograniczymy się jedynie do oszacowania jej od góry. Jak wy-

nika z samej definicji przestrzeni C/N , każdy element $x \in C/N$ o normie $\|x\|_{CN} = 1$ da się przedstawić w postaci $x = x_0 + \Theta$, gdzie $\|x_0\|_C = 1$ i $\Theta \in N$.

Wobec tego:

$$\sup_{\|x\|_{CN}=1} \|Kx\|_{CN} = \sup_{\substack{\|x_0\|_C=1 \\ \Theta \in N}} \|K(x_0 + \Theta)\|_{CN} = \sup_{\|x_0\|_C=1} \|Kx_0\|_{CN} \leq \sup_{\|x_0\|_C=1} \|Kx_0\|_C$$

i ostatecznie:

$$\|K\|_{CN} \leq \|K\|_C. \quad (2.17)$$

Dla obliczenia normy $\|K\|_H$ operatora K w przestrzeni H posłużymy się równością (2. 8).

Ponieważ, dla każdego elementu x przestrzeni H mamy $\|x\|_H = \sqrt{\sum_{\nu} |c_{\nu}|^2}$, gdzie $x_0 = \sum_{\nu} c_{\nu} e^{i\omega_{\nu} t}$ jest prawie okresowym reprezentantem elementu $x \in H$, więc:

$$\begin{aligned} \|Kx\|_H^2 &= \left\| \sum_{\nu} c_{\nu} K(i\omega_{\nu}) e^{i\omega_{\nu} t} \right\|_H^2 = \sum_{\nu} |K(i\omega_{\nu}) c_{\nu}|^2 \leq \sup_{\omega_{\nu}} |K(i\omega_{\nu})|^2 \sum_{\nu} |c_{\nu}|^2 \leq \\ &\leq \sup_{\omega} |K(i\omega)|^2 \|x\|_H^2. \end{aligned}$$

Jeżeli ω_0 jest punktem osi liczbowej, dla którego $|K(i\omega)|$ osiąga swój kres górny, to kładąc $x = e^{i\omega_0 t}$ otrzymamy równość $\|Kx\| = |K(i\omega_0)|$. Jeżeli $|K(i\omega)|$ osiąga swój kres górny w nieskończoności, to $\|Ke^{int}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sup_{\omega} |K(i\omega)|$. Mamy więc ostatecznie dla operatorów ograniczonych:

$$\|K\|_H = \sup_{\omega} |K(i\omega)| = \sup_{Re s \geq 0} |K(s)|. \quad (2.18)$$

Łatwo sprawdzić, że $\|K(\sqrt{2} \cos \omega t)\|_H = \|K e^{i\omega t}\|_H$ i $\|\sqrt{2} \cos \omega t\|_H = 1$, więc operator K zachowuje swą normę w przestrzeni funkcji rzeczywistych należących do H .

Ponieważ w każdej przestrzeni Banacha norma operatora jest nie mniejsza od promienia spektralnego, mamy więc dla wszystkich rozpatrywanych norm ciąg nierówności:

$$\sup_{Re s \geq 0} |K(s)| = |K|_{Sp} = \|K\|_H \leq \|K\|_{CN} \leq \|K\|_C = \int_0^{\infty} |k(\tau)| d\tau, \quad (2.19)$$

gdzie ostatnia równość zachodzi jedynie dla $\sigma_0 = 0$.

Warunki stabilności układu liniowego. Operując wprowadzonymi powyżej pojęciami możemy znane twierdzenie o stabilności układu liniowego wypowiedzieć w następującej formie:

Twierdzenie III. Jeżeli λ nie należy do $Sp(K)$, to równanie (2.1) jest stabilne w sensie wszystkich trzech definicji stabilności (sformułowanych w rozdz. I).

Istotnie, jeżeli λ nie należy do $Sp(K)$, to równanie (2.1) jest równoważne równaniu (2.9) i dla każdego rozwiązania $x(t)$ mamy $\|x\| \leq \|R_\lambda\| \|z\|$, gdzie $\|R_\lambda\| < \infty$ w każdej z przestrzeni $C_{[0, \infty)}$, C/N , H . Stąd i z definicji stabilności wynika teza twierdzenia.

Operator sprzężony i jego $\mathcal{L}$ -transformata. Ze względu na równości (2.6) i (2.7) operator ograniczony K w przestrzeni H może być utożsamiony z operatorem:

$$Kx = a_0 x(t) + \int_0^\infty k(\tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (2.20)$$

(Łatwo sprawdzić, że jeżeli $x \in N$, to $Kx \in N$). Postać ta jest wygodniejsza od postaci (2.2) ze względu na to, że dla funkcji $x(t)$ prawie okresowych wynik operacji jest również funkcją prawie okresową.

Obok operatora (2.20) rozpatrzmy w przestrzeni H operator:

$$K^*x = a_0 x(t) + \int_0^\infty k(\tau) x(t + \tau) d\tau, \quad (2.21)$$

gdzie $k(\tau)$ tak samo jak w (2.20) jest funkcją o postaci (2.4). Analogicznie jak dla operatora K można wykazać, że operator K^* jest ograniczony w całej przestrzeni H wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione jest drugie założenie twierdzenia I.

Jeżeli $x(t) = \sum_\nu c_\nu e^{i\omega_\nu t}$, to:

$$y(t) = K^*x = \sum_\nu c_\nu e^{i\omega_\nu t} \left(a_0 + \int_0^\infty k(\tau) e^{i\omega_\nu \tau} d\tau \right) = \sum_\nu c_\nu K(-i\omega_\nu) e^{i\omega_\nu t}, \quad (2.22)$$

gdzie $K(s)$ jest $\mathcal{L}$ -transformatą operatora K .

Operatory K i K^* są względem siebie sprzężone, to znaczy że dla każdego $x, y \in H$ mamy tożsamość:

$$(Kx, y) = (x, K^*y). \quad (2.23)$$

Istotnie, jeżeli $x(t)$ i $y(t)$ przedstawimy w postaci:

$$x(t) = \sum_\nu c_\nu e^{i\omega_\nu t}, \quad y(t) = \sum_\nu b_\nu e^{i\omega_\nu t}$$

(gdzie obie sumy rozciągnięte są na przeliczalną ilość tych wskaźników ν , dla których $|c_\nu| + |b_\nu| \neq 0$), a następnie skorzystamy z (2.2), (2.22) i (1.17), to otrzymamy:

$$(Kx, y) = \left(\sum_\nu c_\nu K(i\omega_\nu) e^{i\omega_\nu t}, \sum_\nu b_\nu e^{i\omega_\nu t} \right) = \sum_\nu c_\nu \bar{b}_\nu K(i\omega_\nu)$$

$$(x, K^*y) = \left(\sum_\nu c_\nu e^{i\omega_\nu t}, \sum_\nu b_\nu K(-i\omega_\nu) e^{i\omega_\nu t} \right) = \sum_\nu c_\nu \bar{b}_\nu \bar{K}(-i\omega_\nu) =$$

$$= \sum_\nu c_\nu \bar{b}_\nu K(i\omega_\nu),$$

co dowodzi tożsamości (2.23).

Oczywiście, dla każdego operatora ograniczonego K istnieje do niego sprzężony operator K^* . Z ogólnych własności operatorów sprzężonych lub bezpośrednio z (2.22) można wyprowadzić następujące własności:

$$1^\circ (\alpha K_1 + \beta K_2)^* = \alpha K_1^* + \beta K_2^*; \alpha, \beta — \text{liczby rzeczywiste}$$

$$2^\circ (K_1 K_2)^* = K_2^* K_1^*$$

$$3^\circ \text{ Jeżeli istnieje } K^{-1}, \text{ to } (K^{-1})^* = (K^*)^{-1}$$

$$4^\circ \|K^*\|_H = \|K\|_H.$$

Pojęcie $\mathcal{L}$ -transformaty operatora K (które pozwoliło na określenie jego zasadniczych własności) można rozszerzyć na nieco szerszą klasę operatorów w przestrzeni H . Funkcję $A(s)$ określoną dla $\operatorname{Re} s \geq 0$ nazywać będziemy $\mathcal{L}$ -transformatą operatora A ($A(s) = \mathcal{L}[A]$), jeżeli:

$$1^\circ |A(s)| \text{ jest ograniczone dla } \operatorname{Re} s \geq 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } A \text{ jest operatorem ograniczonym}$$

$$2^\circ \mathcal{L}[\alpha A_1 + \beta A_2] = \alpha \mathcal{L}[A_1] + \beta \mathcal{L}[A_2]$$

$$3^\circ \mathcal{L}[A_1 \cdot A_2] = \mathcal{L}[A_1] \cdot \mathcal{L}[A_2]$$

$$4^\circ \text{ dla } x = \sum_v c_v e^{i\omega_v t}, y = Ax = \sum_v c_v A(i\omega_v) e^{i\omega_v t}.$$

Z własności 1° – 3° wynika między innymi, że jeżeli istnieje rezolwenta operatora A , to $\mathcal{L}[(\lambda I - A)^{-1}] = \frac{1}{\lambda - A(s)}$. Zachodzi więc twierdzenie II, mówiące, że widmem operatora A jest obszar, na który funkcja $A(s)$ odwzorowuje półpłaszczyznę $\operatorname{Re} s \geq 0$. Ponadto z 4° wynika, że $\|A\|_H = \sup_{\omega} |A(i\omega)|$.

Jeżeli dla operatora K^* przyjmiemy:

$$K^*(s) = \mathcal{L}[K^*] \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{L}[K]} = \overline{K}(s), \quad (2.24)$$

to — jak łatwo sprawdzić — spełnione są wszystkie cztery własności $\mathcal{L}$ -transformaty i wobec tego widmem operatora K^* jest obszar, na który funkcja $\overline{K}(s) = K(\overline{s})$ odwzorowuje półpłaszczyznę $\operatorname{Re} s \geq 0$. Widma operatorów K i K^* są więc identyczne¹⁾.

Iloczyn K^*K jest operatorem samosprzężonym, to znaczy $(K^*K)^* = K^*K$. Na podstawie trzeciej własności $\mathcal{L}$ -transformaty:

$$\mathcal{L}[K^*K] = |K(s)|^2.$$

1) $\mathcal{L}$ -transformaty operatorów K^* oddają więc w przestrzeni H te same usługi co $\mathcal{L}$ -transformaty operatorów K . W innych przestrzeniach istnieje jednak zasadnicza różnica pomiędzy własnościami $\mathcal{L}$ -transformat. Np. w przestrzeni $C_{[0,\infty)}$ transformata Laplace'a funkcji $y(t) = Kx$ wynosi $\tilde{y}(s) = K(s) \tilde{x}(s)$, gdzie $\tilde{x}(s) = \mathcal{L}[x(t)]$, natomiast dla operatorów K^* $\mathcal{L}$ -transformata $K^*(s) = \overline{K}(\overline{s})$ jest na ogół funkcją nieholomorficzną i nie może być transformatą Laplace'a żadnej funkcji.

Widmem operatora K^*K jest więc odcinek dodatniej półosi rzeczywistej, na który funkcja $|K(s)|^2$ odwzorowuje półpłaszczyznę $\operatorname{Re} s \geq 0$. Ponadto:

$$\|K^*K\|_H = \sup_{\omega} |K(i\omega)|^2 = \|K^*K\|_{Sp} = \|K\|_H^2.$$

3. WARUNKI STABILNOŚCI W SENSIE LAPUNOWA

Warunki stabilności zwyczajowej. Rozpatrzmy równanie o postaci:

$$\lambda x = Kf x + z, \quad (3.1)$$

gdzie x, z są elementami przestrzeni $C_{[0, \infty)}$, λ — liczbą, K — operatorem ograniczonym o postaci (2.2), natomiast operator f jest określony przez równość:

$$f x = f[x(t)] = x(t) + \varphi[x(t)], \quad (3.2)$$

gdzie funkcja $\varphi(x)$ znika w zerze $\varphi(0) = 0$ i spełnia warunek Lipschitza:

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq \delta(r) |x_1 - x_2| \quad (3.3)$$

w przedziale $|x| \leq r$ ze stałą $\delta(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$.

Warunek (3.3) przenosi się w prosty sposób na operator nieliniowy $\varphi = f - I$ (gdzie I — operator tożsamościowy). Mamy mianowicie dla wszystkich elementów $x \in C_{[0, \infty)}$ i spełniających warunek $\|x\|_c \leq r$ nierówność:

$$\|\varphi x_1 - \varphi x_2\|_c \leq \delta(r) \|x_1 - x_2\|_c. \quad (3.4)$$

Podstawiając w równaniu (3.1) $f = I + \varphi$, możemy przepisać je w postaci $\lambda x - Kx = K\varphi x + z$, a jeżeli λ nie należy do $Sp(K)$, to

$$x = (\lambda I - K)^{-1} (K\varphi x + z), \quad (3.5)$$

gdzie $(\lambda I - K)^{-1}$ jest operatorem ograniczonym. Dla λ nie należącego do $Sp(K)$ równania (3.1) i (3.5) są sobie równoważne.

Udowodnimy następujące:

Twierdzenie IV. Jeżeli λ nie należy do $Sp(K)$, to rozwiązanie zerowe równania (3.1) jest stabilne w sensie Lapunowa.

W dowodzie skorzystamy z metody kolejnych przybliżeń dla równania (3.5). Wykorzystamy mianowicie twierdzenie (Banacha): Niech w kuli $\|x\| \leq r$ przestrzeni Banacha zadany będzie operator A , spełniający warunek Lipschitza ze stałą α mniejszą od jedności i taki, że dla $\|x\| \leq r$, $\|Ax\| \leq r$. Wtedy równanie $x = Ax$ posiada w kuli $\|x\| \leq r$ jedyne rozwiązanie x^* . Można je otrzymać jako granicę ciągu kolejnych przybliżeń: $x_{n+1} = Ax_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, gdzie x_0 jest dowolnym elementem z kuli $\|x\| < r$.

Weźmy w przestrzeni $C_{[0, \infty)}$ kulę o promieniu r : $\|x\|_c \leq r$ i wprowadźmy oznaczenie $Ax \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda I - K)^{-1} (K\varphi x + z)$.

Z nierówności:

$$\|Ax\|_c \leq \|(\lambda I - K)^{-1} K\|_c \delta(r) \cdot r + \|(\lambda I - K)^{-1}\|_c \cdot \|z\|_c$$

wynika, że dla:

$$\|z\|_c \leq \frac{r}{\|(\lambda I - K)^{-1}\|_c} (1 - \|(\lambda I - K)^{-1} K\|_c \delta(r)) \quad (3.6)$$

mamy: $\|Ax\|_c \leq r$.

Ponadto operator A spełnia warunek Lipschitza:

$$\|Ax_1 - Ax_2\|_c = \|(\lambda I - K)^{-1} K(\varphi x_1 - \varphi x_2)\|_c \leq \|(\lambda I - K)^{-1} K\|_c \delta(r) \|x_1 - x_2\|_c$$

ze stałą, która dla dostatecznie małych r jest mniejsza od jedności (ponieważ $\delta(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$).

Z twierdzenia Banacha wynika więc, że w kuli o promieniu r spełniającym nierówność:

$$\|(\lambda I - K)^{-1} K\|_c \delta(r) < 1 \quad (3.7)$$

istnieje jedyne rozwiązanie x^* równania (3.5), które otrzymać można metodą kolejnych przybliżeń¹⁾.

Jak wynika bezpośrednio z równania (3.5), rozwiązanie x^* spełnia nierówność:

$$\|x^*\|_c \leq \frac{\|(\lambda I - K)^{-1}\|_c}{1 - \|(\lambda I - K)^{-1} K\|_c \delta(r)} \|z\|_c.$$

Ponieważ dla λ nie należącego do $Sp(K)$ operatory $(\lambda I - K)^{-1}$ i $(\lambda I + K)^{-1}$ są ograniczone, więc dla dowolnego ε ($0 < \varepsilon < r$) mamy $\|x^*\|_c < \varepsilon$, jeżeli tylko $\|z\|_c < \eta$, gdzie:

$$\eta = \frac{\varepsilon}{\|(\lambda I - K)^{-1}\|_c} (1 - \|(\lambda I - K)^{-1} K\|_c \delta(r)),$$

a zatem rozwiązanie zerowe równania (3.1) jest stabilne w sensie definicji 1, c.n.d.

Oczywiście małe rozwiązania $x^*(t)$ mamy jedynie dla dostatecznie małych $\|z\|_c$. Przy większych $\|z\|_c$ metoda kolejnych przybliżeń na ogół zawodzi, a rozwiązanie równania (3.5) nie musi być jednoznaczne. Dlatego interesować nas może oszacowanie maksymalnej wartości normy $z(t) : \|z\|_{\max}$, dla której rozwiązanie równania (3.5) można otrzymać metodą kolejnych przybliżeń (w oparciu o twierdzenie Banacha). Ze względu na zastosowania interesująca jest dyskusja $\|z\|_{\max}$ w zależności od parametru λ dla λ rzeczywistych. Zależność $\|z\|_{\max}$ od λ otrzymamy z nierówności (3.6). Rozpatrując bowiem warunek (3.6) w kulach o różnych promieniach r , otrzymamy:

$$\|z\|_{\max} = \max_{r \geq 0} \frac{r}{\|(\lambda I - K)^{-1}\|_c} (1 - \|(\lambda I - K)^{-1} K\|_c \delta(r)) \quad (3.8)$$

1) Metoda kolejnych przybliżeń dla równania (3.5) jest identyczna z metodą Newtona dla równania: $Px = 0$, gdzie $Px \stackrel{\text{df}}{=} \lambda x - Kfx - z$.

pod warunkiem, że zachodzi nierówność (3.7). Przy ustalonych operatorach K i f prawa strona równości (3.8) jest funkcją λ , równą zero dla $\lambda \in Sp(K)$.

Dla dużych parametrów λ metodę kolejnych przybliżeń można stosować bezpośrednio do równania (3.1). Rozumując podobnie jak w dowodzie twierdzenia IV można wykazać, że jeżeli:

$$|\lambda| > \|K\|_c \max_{|x| \leq r} \left| \frac{df(x)}{dx} \right| \quad \text{ i } \quad \|z\|_c < r \left(|\lambda| - \|K\|_c \max_{|x| \leq r} \left| \frac{df(x)}{dx} \right| \right),$$

to w kuli $\|x\| \leq r$ istnieje jedyne rozwiązanie x^* równania (3.1) spełniające warunek:

$$\|x^*\|_c \leq \frac{\|z\|_c}{|\lambda| - \|K\|_c \max_{|x| \leq r} \left| \frac{df(x)}{dx} \right|}.$$

Maksymalną wartość $\|z\|_{max}$, dla której równanie (3.1) można rozwiązać metodą kolejnych przybliżeń, można wyznaczyć z zależności:

$$\|z\|_{max} = \max_{r \geq 0} r \left(|\lambda| - \|K\|_c \max_{|x| \leq r} \left| \frac{df(x)}{dx} \right| \right) \quad (3.9)$$

analogicznej do równości (3.8)¹⁾.

Przykład. Rozpatrzmy równanie o postaci:

$$x(t) = \mu \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \left[x(\tau) - \frac{x^3(\tau)}{3a^2} \right] d\tau + y(t), \quad (*)$$

gdzie a i μ są liczbami dodatnimi. Jeżeli oznaczymy $\frac{1}{\mu} = \lambda$ i $\frac{1}{\mu} y(t) = z(t)$, to otrzymamy równanie typu:

$$\lambda x = Kfx + z,$$

$$\text{gdzie } f(x) = x - \frac{x^3}{3a^2}, \quad Kx = \int_0^t e^{-a(t-\tau)} x(\tau) d\tau.$$

Mamy oczywiście $K(s) = \mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$ i wobec tego widmo operatora K jest obszarem, na który funkcja $\frac{1}{s+a}$ odwzorowuje półpłaszczyznę $\operatorname{Re} s \geq 0$ (rys. 4a). Wartości parametru spełniające warunek $\operatorname{Re} \frac{1}{\lambda} \geq a$ należą do widma operatora K . Zerowe rozwiązanie równania (*) jest więc stabilne w sensie Lapunowa, jeżeli $\mu = \frac{1}{\lambda} < a$ (dla λ — rzeczywistych).

1) Wzór (3.9) i poprzedzające go warunki podano dla funkcji $f(x)$ różniczkowalnej. W ogólniejszym przypadku należy $\max \left| \frac{df(x)}{dx} \right|$ zastąpić przez stałą z warunku Lipschitza dla funkcji $f(x)$.

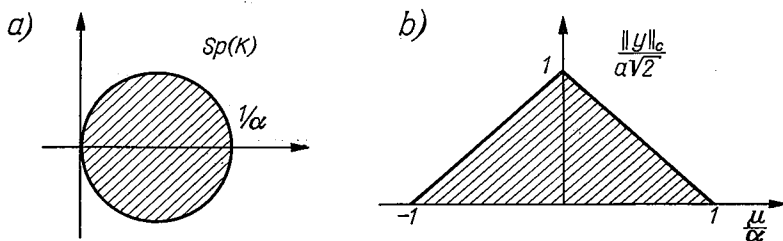
Wyznamy jeszcze $\max \|y\|_c$, dla którego równanie (*) można rozwiązać metodą kolejnych przybliżeń. W tym celu obliczamy:

$$\max_{|x| \leq r} \left| \frac{d}{dx} \left(x - \frac{x^3}{3a^2} \right) \right| = \max_{|x| \leq r} \left| 1 - \frac{x^2}{a^2} \right| = 1 \quad \text{dla } r \leq a\sqrt{2}.$$

Ponieważ $\|K\|_c = \int_0^\infty e^{-at} dt = \frac{1}{a}$, więc zgodnie z (3.13) mamy $\|z\|_{\max} = a\sqrt{2} \left(|\lambda| - \frac{1}{a} \right)$ dla $r \leq a\sqrt{2}$ i ostatecznie dla

$$\|y\|_c \leq a\sqrt{2} \left(1 - \frac{|\mu|}{a} \right) \quad (**)$$

rozwiązanie równania (*) jest jednoznaczne w kuli $\|x\|_c \leq a\sqrt{2}$ i daje się otrzymać metodą kolejnych przybliżeń. Nierówność (**) przedstawiono na rys. 4b.



Rys. 4

Rozpatrzmy jeszcze w przestrzeni $C_{[0, \infty)}$ równanie o postaci:

$$\lambda x = K\varphi x + z, \quad (3.10)$$

gdzie operator nieliniowy φ spełnia warunek (3.4).

Twierdzenie V. Jeżeli K jest operatorem ograniczonym, to rozwiązanie zerowe równania (3.10) jest stabilne w sensie Lapunowa, dla wszystkich wartości parametru λ .

Dowód: Istotnie dla każdego λ istnieje kula $\|x\|_c \leq r$ o promieniu r spełniającym nierówność: $\|K\|_c \delta(r) < |\lambda|$.

Jeżeli teraz $\|x\|_c \leq r$ i $\|z\|_c \leq r(|\lambda| - \|K\|_c \delta(r))$, to operator $Ax \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\lambda} (K\varphi x + z)$ spełnia nierówność:

$$\|Ax\|_c \leq \frac{1}{|\lambda|} (\|K\|_c \delta(r)r + \|z\|_c) \leq r$$

i warunek Lipschitza

$$\|Ax_1 - Ax_2\|_c \leq \frac{1}{|\lambda|} \|K\|_c \delta(r) \|x_1 - x_2\|_c$$

ze stałą mniejszą od jedności. Stąd na podstawie twierdzenia Banacha

w kuli $\|x\|_c \leq r$ istnieje jedyne rozwiązanie x^* równania (3.10) spełniające nierówność:

$$\|x^*\|_c \leq \frac{\|z\|_c}{|\lambda| - \|K\|_c \delta(r)},$$

z której wnioskujemy o stabilności równania, c.n.d.

Podobnie jak w poprzednich przypadkach, równość:

$$\|z\|_{\max} = \max_{r \geq 0} r(|\lambda| - \|K\|_c \delta(r)) \quad (3.11)$$

określa maksymalną wartość $\|z\|$, dla której równanie (3.10) można rozwiązać metodą kolejnych przybliżeń (w oparciu o twierdzenie Banacha).

Warto wspomnieć, że każdy przypadek operatora nieliniowego f określonego przez funkcję $f(x) = ax + \varphi(x)$, gdzie $\varphi(x)$ spełnia warunek (3. 3) da się (ze względu na dowolność parametru λ) sprowadzić bądź do równania (3. 1) (dla $a \neq 0$), bądź do równania (3. 10) (dla $a = 0$). Jeżeli w równaniu (3. 1) funkcja $\varphi(x)$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $\delta(r)$, która nie dąży do zera przy $r \rightarrow 0$, to rozwiązanie zerowe równania (3.1) nie musi być stabilne dla każdego $\lambda \in Sp(K)$, będzie jednak stabilne w przypadku spełnienia nierówności (3. 7) (gdy norma rezolwenty operatora jest dostatecznie mała).

W przypadku gdy funkcja $f(x)$ nie spełnia warunku Lipschitza w przedziale $|x| \leq r$ dla dostatecznie małych r , to nawet równanie $\lambda x = Kfx$ (gdzie $f(0) = 0$) może mieć niezerowe rozwiązania w $C_{[0, \infty)}$. Np. równanie: $\lambda x(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \sqrt{|x(\tau)|} d\tau$ ma rozwiązanie $x(t) = \frac{1}{\lambda^2} \left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right)^2$.

Warunki stabilności asymptotycznej. Rozpatrzmy w przestrzeni C/N równanie:

$$\lambda x = Kfx, \quad (3.12)$$

gdzie K jest operatorem ograniczonym o postaci (2.2), natomiast f jest określony przez równość (3.2).

Wykażemy najpierw, że operator f jest dobrze określonym operatorem w przestrzeni C/N , to znaczy, że jeżeli x_1 i x_2 są dowolnymi funkcjami z przestrzeni $C_{[0, \infty)}$, takimi że $x_1 - x_2 \in N$, to również $(fx_1 - fx_2) \in N$. Istotnie z (3. 3) wynika, że funkcja $f(x)$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $1 + \delta$, a więc:

$$\|fx_1 - fx_2\|_{CN} \leq (1 + \delta) \|x_1 - x_2\|_{CN} = 0.$$

Operatory nieliniowe f i φ (gdzie $\varphi = I - f$) będziemy charakteryzować funkcjami:

$$p_c(r) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{r} \sup_{\|x\|_{CN} \leq r} \|fx\|_{CN} = \frac{1}{r} \max_{|x| \leq r} |f(x)|, \quad (3.13)$$

$$q_c(r) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{r} \sup_{\|x\|_{CN} \leq r} \|\varphi x\|_{CN} = \frac{1}{r} \max_{|x| \leq r} |\varphi(x)|. \quad (3.14)$$

Funkcje $p_c(r)$ i $q_c(r)$ są ciągłymi funkcjami r , spełniają warunek $p_c(r) \leq 1 + q_c(r)$, a ponadto $q_c(r) \leq \delta(r)$ i $p(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 1^1$

Twierdzenie VI. Jeżeli spełniona jest co najmniej jedna z nierówności:

$$|\lambda| > \|K\|_{CN} p_c(r), \quad (3.15)$$

$$1 > \|(\lambda I - K)^{-1} K\|_{CN} q_c(r), \quad (3.16)$$

to równanie (3.12) nie ma rozwiązań na sferze $\|x\|_{CN} = r$ (czyli jest na tej sferze stabilne w sensie definicji 2).

Dla równania $\lambda x = K\varphi x$ nierówności (3.15) i (3.16) należy zastąpić przez

$$|\lambda| > \|K\|_{CN} q_c(r). \quad (3.17)$$

Dowód: jeżeli x^* jest rozwiązaniem równania (3.12) o normie $\|x^*\|_{CN} = r \neq 0$, to:

$$|\lambda|r = |\lambda| \|x^*\|_{CN} = \|Kf x^*\|_{CN} \leq \|K\|_{CN} \cdot \sup_{\|x\|_{CN} \leq r} \|fx\|_{CN} = \|K\|_{CN} \cdot p_c(r) \cdot r,$$

co przeczy nierówności (3.15).

Podobnie dla λ nie należącego do $Sp(K)$ równanie (3.12) jest równoważne równaniu

$$x = (\lambda I - K)^{-1} K\varphi x.$$

Jeżeli teraz x^* jest rozwiązaniem równania o normie $\|x^*\| = r \neq 0$, to:

$$r = \|x^*\|_{CN} = \|(\lambda I - K)^{-1} K\varphi x^*\|_{CN} \leq \|(\lambda I - K)^{-1} K\|_{CN} \cdot q_c(r) \cdot r,$$

co przeczy nierówności (3.16). Tak samo dowodzi się warunku (3.17) dla równania $\lambda x = K\varphi x$, c. n. d.

Z twierdzenia VI wynikają ważne wnioski:

Wniosek 1. Jeżeli λ nie należy do $Sp(K)$, to istnieje $r_0 > 0$ takie, że w kuli $\|x\|_{CN} \leq r_0$ równanie (3.12) nie ma rozwiązań.

Istotnie $\varphi(x)$ spełnia warunek Lipschitza (3.3) i $q_c(r) \leq \delta(r)$ (funkcja $\delta(r)$ jest nie malejąca i $\delta(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$), a ponadto $\|\lambda I - K^{-1}K\|_{CN} < \infty$. Istnieje więc liczba r_0 taka, że dla wszystkich $0 < r < r_0$ zachodzi nierówność $\|(\lambda I - K)^{-1} K\|_{CN} \delta(r) < 1$ pociągająca za sobą warunek (3.16).

Wniosek 2. Jeżeli funkcja $f(x)$ spełnia nierówność $|f(x)| \leq a|x|$, gdzie $a \geq 1$, to równanie (3.12) nie ma rozwiązań w całej przestrzeni C/N , dla parametrów λ takich, że $|\lambda| > \|K\|_{CN} \cdot a$.

Istotnie z (3.13) wynika, że $p(r) = a$, a następnie z (3.15) teza wniosku.

Punkt o współrzędnych (μ_0, r_0) leżący na płaszczyźnie (μ, r) będziemy zaliczać do tzw. obszaru stabilności asymptotycznej równania (3.12), jeżeli równanie to dla rzeczywistego parametru $\lambda = \frac{1}{\mu_0}$ nie ma rozwiązań

1) Mając daną funkcję $f(x)$ można łatwo wyznaczyć $p_c(r)$ i $q_c(r)$. Np. dla $f(x)$ nieparzystej i nie malejącej mamy: $rp_c(r) = f(r)$.

$x^* \in C/N$ o normie $\|x^*\|_{CN} = r_0$. Punkty (μ, r) , gdzie $\mu = \frac{1}{\lambda}$, spełniające nierówności (3.15) i (3.16) należą naturalnie do obszaru stabilności asymptotycznej.

Przykład. Oszacujmy [przez nierówności (3.15) i (3.16)] obszar stabilności asymptotycznej dla równania

$$x(t) = \mu \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f[x(\tau)] d\tau \quad (\alpha > 0)$$

dla dwóch różnych funkcji $f_1(x) = \operatorname{arctg} x$, $f_2(x) = x + x^3$.

$\mathcal{L}$ -transformata operatora liniowego wynosi $K(s) = \frac{1}{s+a}$ i norma $\|K\|_{CN} \leq \frac{1}{a}$.

Podobnie $\mathcal{L}[(\lambda I - K)^{-1} K] = \frac{K(s)}{\lambda - K(s)} = \frac{\mu}{s + a - \mu}$ (gdzie $\lambda\mu = 1$) i $\|(\lambda I - K)^{-1} K\|_{CN} \leq \frac{|\mu|}{a - \mu}$. Można sprawdzić, że w obu przypadkach nierówności szacujące normy przechodzą w równości. Funkcje $p_c(r)$ i $q_c(r)$ szacujące operatory nieliniowe f_1 i f_2 wyniosą:

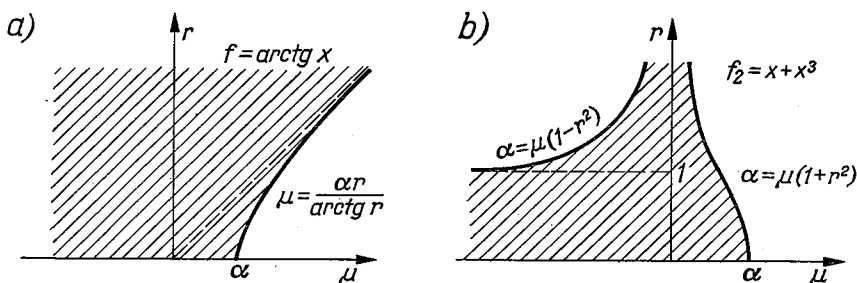
$$p_{1c}(r) = \frac{\operatorname{arctg} r}{r}, \quad q_{1c}(r) = 1 - \frac{\operatorname{arctg} r}{r}, \quad p_{2c}(r) = 1 + r^2, \quad q_{2c}(r) = r^2.$$

Podstawiając otrzymane wyrażenie do nierówności (3.15) i (3.16) oraz odrzucając zbędne nierówności, otrzymamy oszacowanie obszaru stabilności asymptotycznej w postaci:

$$\mu < a \frac{r}{\operatorname{arctg} r} \quad \text{dla funkcji } f_1(x) = \operatorname{arctg} x,$$

$$r < \sqrt{\frac{a - \mu}{|\mu|}} \quad \text{dla funkcji } f_2(x) = x + x^3.$$

Na rysunku 5 zakreskowano obszary stabilności asymptotycznej dla obu przypadków.



Rys. 5

Jeżeli mamy do czynienia z równaniem niejednorodnym

$$\lambda x = Kfx + z \quad (*)$$

w przestrzeni C/N (funkcja $z(t)$ nie znika w nieskończoności), to w pewnych przypadkach można rozwiązywać je metodą kolejnych przybliżeń. Warunki stosowa-

ności metody kolejnych przybliżeń dla równania (*) lub równoważnego mu dla λ nie należącego do $Sp(K)$ równania:

$$x = (\lambda I - K)^{-1} K \varphi x + (\lambda I - K)^{-1} z$$

są analogiczne do warunków (3. 9) i (3. 8). Można bowiem wykazać, że operator nieliniowy φ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $\delta(r)$ w kuli $\|x\|_{CN} \leq r$ przestrzeni C/N .

4. WARUNKI STABILNOŚCI ENERGETYCZNEJ

Własności operatora nieliniowego. Nierówności (3. 15) ÷ (3. 17) szacujące obszar stabilności asymptotycznej są niewygodne w praktycznym zastosowaniu, ze względu na to, że istnieją trudności w obliczeniu normy operatora liniowego w przestrzeni C/N . Niżej przeprowadzone rozważania mają na celu zastąpienie norm $\|\cdot\|_{CN}$ operatorów liniowych poprzez normy $\|\cdot\|_H$ przestrzeni H , które jak wiadomo, są równe promieniowi spektralnemu operatora i łatwo dają się określić przez $\mathcal{L}$ -transformatę operatora.

Rozpatrzmy równanie:

$$\dot{x} = Kf x \quad (4.1)$$

w przestrzeni H , gdzie operator K (na ogół nieograniczony) ma postać (2. 2), natomiast f jest określony przez (3. 2).

Niech funkcja $f(x)$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $1 + \delta(r)$ ograniczoną dla każdego r . Wówczas z nierówności:

$$|f[x(t + \tau)] - f[x(t)]| \leq (1 + \delta) |x(t + \tau) - x(t)| \quad (4.2)$$

wynika, że dla każdej funkcji $x(t)$ prawie okresowej funkcja $f[x(t)]$ jest również prawie okresową¹⁾.

Oznaczmy przez $S(r)$ zbiór funkcji $x \in H$ takich, że $\|x\|_{CN} \leq r - \varepsilon$, gdzie ε jest dowolnie małą ustaloną liczbą.

Dla każdej funkcji $x(t) \in S(r)$ istnieje takie T_0 , że $\sup_{t \geq T_0} |x(t)| \leq r$. Z nierówności:

$$\begin{aligned} \|f x_1 - f x_2\|_H^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} |f[x_1(t)] - f[x_2(t)]|^2 dt \leq \\ &\leq (1 + \delta(r))^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt = (1 + \delta(r))^2 \|x_1 - x_2\|_H^2 \end{aligned}$$

wynika, że operator f spełnia warunek Lipschitza (o normach $\|\cdot\|_H$) ze

¹⁾ Każda funkcja prawie okresowa jest ograniczona. Dlatego, aby $f[x(t)]$ była funkcją prawie okresową, dla każdej funkcji $x(t)$ prawie okresowej wystarczy ciągłość (jednostajna) funkcji $f(x)$ na całej osi x .

stałą $1 + \delta(r)$ w zbiorze $S(r)$. Na ogół jednak warunek Lipschitza nie jest spełniony w żadnej kuli $\|x\|_H \leq r$. W kuli $\|x\|_H \leq r$ mogą bowiem istnieć funkcje o normie $\|x\|_{CN} = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \sup_{t > T_0} |x(t)|$ dowolnie dużej, a $\delta(r)$ może być nieograniczone przy $r \rightarrow \infty$.

Jedynie w przypadku gdy $\sup_r \delta(r) < \infty$, warunek Lipschitza zachodzi w całej przestrzeni H . Podobnie operator φ spełnia warunek Lipschitza.

$$\|\varphi x_1 - \varphi x_2\|_H \leq \delta(r) \|x_1 - x_2\|_H$$

w zbiorze $S(r)$.

Podobnie jak w rozdziale 3 operatory f i φ będziemy charakteryzować funkcjami:

$$p_H(r) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in S(r)} \frac{\|fx\|_H}{\|x\|_H} = \max_{|x| \leq r} \left| \frac{f(x)}{x} \right|, \quad (4.3)$$

$$q_H(r) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in S(r)} \frac{\|\varphi x\|_H}{\|x\|_H} = \max_{|x| \leq r} \left| \frac{\varphi(x)}{x} \right|. \quad (4.4)$$

Drugie równości we wzorach (4.3) i (4.4) wymagają udowodnienia. Wykażemy dla przykładu równość (4.3). Oznaczmy $C = \max_{|x| \leq r} \left| \frac{f(x)}{x} \right|$. Stąd wynika, że $|f(x)| \leq C|x|$ dla $|x| \leq r$ i ponadto istnieje x_0 ($|x_0| \leq r$) takie, że $|f(x_0)| = C|x_0|$. Z nierówności $|f(x)| \leq C|x|$ wynika, że dla $x(t) \in S(r)$:

$$\|fx\|_H^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} |f[x(\tau)]|^2 d\tau \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} C^2 |x(\tau)|^2 d\tau = C^2 \|x\|_H^2.$$

W otrzymanej nierówności, kładąc na miejsce $x(t)$ funkcję stałą $x(t) \equiv x_0$, mamy: $\|fx_0\|_H = C\|x_0\|_H$. Stąd C jest najmniejszą z liczb, dla której zachodzi nierówność: $\|fx\|_H \leq C\|x\|_H$ przy $x \in S(r)$ i zgodnie z definicją $C = p_H(r)$.

Zachodzą nierówności $p_H(r) \geq p_c(r)$, $q_H(r) \geq q_c(r)$, a poza tym $p_H(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 1$, $q_H(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ i $|1 - q_H(r)| \leq p_H(r) \leq 1 + q_H(r)$.

Przy zadanej funkcji $f(x)$ łatwo jest wyznaczyć $p_H(r)$ i $q_H(r)$. Mianowicie $p_H(r)$ jest tangensem najmniejszego kąta α (o jednym ramieniu pokrywającym się z osią x), w którym mieści się funkcja $|f(x)|$ dla $|x| \leq r$.

Warunki stabilności

Twierdzenie VII. Jeżeli zachodzi co najmniej jedna z nierówności:

$$\inf_{\text{Res} \geq 0} \left| \frac{1}{K(s)} \right| > |\mu| p_H(r), \quad (4.5)$$

$$\inf_{\text{Res} \geq 0} \left| \frac{1}{K(s)} - \mu \right| > |\mu| q_H(r), \quad (4.6)$$

to równanie

$$x = \mu K f x \quad (4.7)$$

nie ma w zbiorze $S(r)$ rozwiązań x^* o normie $\|x^*\|_H > 0$ (to znaczy jest stabilne w $S(r)$ w sensie definicji 3).

Dla równania:

$$x = \mu K \varphi x \quad (4.8)$$

nierówności (4. 5) i (4. 6) należy zastąpić przez:

$$\inf_{\text{Res} \geq 0} \left| \frac{1}{K(s)} \right| > |\mu| q_H(r). \quad (4.9)$$

Dowód: Załóżmy, że równanie (4. 7) ma rozwiązanie x^* w zbiorze $S(r)$. Wówczas:

$$\|x^*\|_H \leq |\mu| \|K\|_H \|\varphi x^*\|_H \leq |\mu| \|K\|_H p_H(r) \|x^*\|_H.$$

Ponieważ $\|K\|_H = \sup_{\text{Res} \geq 0} |K(s)| = \left(\inf_{\text{Res} \geq 0} \left| \frac{1}{K(s)} \right| \right)^{-1}$, więc powyższa nierówność jest przeciwna nierówności (4.5).

Podobnie, jeżeli operator $(I - \mu K)^{-1}$ jest ograniczony na zbiorze argumentów $\mu K \varphi x$ dla $x \in S(r)^1$, to równanie (4.8) jest równoważne równaniu:

$$x = \mu (I - \mu K)^{-1} K \varphi x. \quad (4.10)$$

Jeżeli teraz x^* spełnia równanie (4.10), to zachodzi nierówność:

$$\|x^*\|_H \leq |\mu| \|(I - \mu K)^{-1} K\|_H \|\varphi x^*\|_H \leq |\mu| \|(I - \mu K)^{-1} K\|_H q_H(r) \|x^*\|_H$$

przeciwna do nierówności (4.6) ze względu na to, że

$$\|(I - \mu K)^{-1} K\|_H = \sup_{\text{Res} \geq 0} \left| \frac{K(s)}{1 - \mu K(s)} \right| = \left(\inf_{\text{Res} \geq 0} \left| \frac{1}{K(s)} - \mu \right| \right)^{-1}, \quad \text{c.n.d.}$$

Analogicznie dowodzi się warunku (4.9) dla równania (4.8).

Podobnie jak w rozdziale 3 obszarem stabilności energetycznej równania (4.7) nazywać będziemy zbiór punktów (μ, r) takich, że dla parametru μ równanie nie ma rozwiązań (o normie $\|x\|_H > 0$) w zbiorze $S(r)$. Nierówności (4.5) i (4.6) szacują obszar stabilności energetycznej.

Przykład. Zbadajmy rozwiązania równania:

$$\frac{dx}{dt} + 2ax + \omega^2 \int_0^t x(\tau) d\tau = \mu \left[x(t) - \frac{x^3(t)}{a^2} \right] + \Theta(t); \quad x(0) = x_0 \quad (*)$$

w zbiorze $S(a)$, gdzie $a > 0$, $\omega > 0$, μ — dowolna liczba rzeczywista, $\Theta(t)$ — dowolna funkcja znikająca w nieskończoności, x_0 — dowolny warunek początkowy.

Poddając równanie (*) przekształceniu Laplace'a otrzymamy:

$$\left(s + 2a + \frac{\omega^2}{s} \right) \tilde{X}(s) = \mu \mathcal{L} \left[x(t) - \frac{x^3(t)}{a^2} \right] + \mathcal{L}[\Theta(t)] + x_0,$$

¹⁾ Wystarczy założyć ograniczoność operatora $(I - \mu K)^{-1} K$.

a stąd:

$$x(t) = \mu \int_0^t k(t-\tau) \left[x(\tau) - \frac{x^3(\tau)}{a^2} \right] d\tau + z(t),$$

gdzie $k(t) = \mathcal{L}^{-1}[K(s)]$, $K(s) = \frac{s}{s^2 + 2as + \omega^2}$, natomiast $z(t)$ jest funkcją, dla której $\|z\|_H = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ponieważ } \inf_{\text{Res} \geq 0} \left| \frac{1}{K(s)} - \mu \right| &= \inf_{\text{Res} \geq 0} \left| s + 2a - \mu + \frac{\omega^2}{s} \right| = 2a - \mu \text{ dla } \mu < 2a; \quad p_H(r) = \\ &= \max_{|x| \leq r} \left| 1 - \frac{x^2}{a^2} \right| = 1 \text{ dla } r \leq a; \quad q_H(r) = \max_{|x| \leq r} \left| \frac{x^3}{a^2 x} \right| = \frac{r^2}{a^2}; \end{aligned}$$

więc ostatecznie warunki (4.5) i (4.6) przyjmą postać:

$$2a > |\mu|, \quad 2a - \mu > |\mu| \frac{r^2}{a^2}.$$

Dla $r \leq a$ co najmniej jedna z powyższych nierówności zachodzi przy $\mu < 2a$ i ostatecznie dla $\mu < 2a$ równanie (*) nie ma w zbiorze $S(a)$ rozwiązań o normie $\|x^*\|_H > 0$.

Porównanie stabilności energetycznej z innymi definicjami stabilności.

Układ elektryczny, dla którego spełnione są warunki stabilności energetycznej w zbiorze $S(r)$, nie może generować drgań prawie okresowych o amplitudzie $\|x\|_{CN} \leq r$. Nie wiadomo, czy w układzie nie powstaną drgania nie zanikające w nieskończoności i nie będące funkcjami prawie okresowymi (np. o postaci $x(t) = \sin t^2$). Odpowiedź na to pytanie może dać jedynie zbadanie warunków stabilności asymptotycznej. Ponieważ jednak wśród praktycznych układów elektrycznych (nie parametrycznych) nie są znane takie, które mogłyby wytwarzać ograniczone drgania, nie będące prawie okresowymi funkcjami czasu (z wyjątkiem drgań zanikających w nieskończoności), więc ograniczenie się w praktyce do określenia warunków stabilności energetycznej wydaje się w pełni usprawiedliwione¹⁾.

Badanie stabilności energetycznej jest praktycznie znacznie łatwiejsze od badania stabilności asymptotycznej. Przede wszystkim występująca w nierównościach szacujących obszar stabilności norma operatora liniowego K daje się wyznaczyć bezpośrednio poprzez łatwą do określenia funkcję przenoszenia układu linearyzowanego ($\mathcal{L}$ -transformatę operatora K). Poza tym, ponieważ $\|K\|_H \leq \|K\|_{CN}$, więc obszar stabilności energetycznej jest zwykle większy od obszaru stabilności asymptotycznej, co ma duże znaczenie praktyczne.

Powstaje pytanie, czy można w jakiś sensowny sposób podać inną definicję stabilności (nazwijmy ją E -stabilnością), tak aby obszar E -stabilności był większy od obszaru stabilności energetycznej. Należało by wte-

¹⁾ Dla uściślenia rozważań należało by wykazać, że równanie $\lambda x = Kfx$ przy omawianych założeniach narzuconych na K i f nie może mieć rozwiązań ograniczonych, nie będących funkcjami prawie okresowymi (z dokładnością do funkcji zanikających w nieskończoności).

dy określić nową przestrzeń funkcyjną E , taką, aby dla operatorów liniowych zachodziła nierówność $\|K\|_E < \|K\|_H$. Ponieważ w każdej przestrzeni funkcyjnej $\|K\|_H \geq \|K\|_{sp}$, a w przestrzeni H zachodzi równość $\|K\|_H = \|K\|_{sp}$, a więc widmo operatora K w przestrzeni E musiałoby być mniejsze od obszaru, na który funkcja $K(s)$ odwzorowuje półpłaszczyznę $\operatorname{Re} s \geq 0$. Ze względu na twierdzenie III niektóre spośród układów liniowych wytwarzających drgania narastające musiałyby być uważane za stabilne w sensie definicji E -stabilności. Taka definicja E -stabilności byłaby więc nie do przyjęcia¹⁾. Z tych względów przestrzeń H możemy uważać za najlepszą w tym znaczeniu, że obszar stabilności energetycznej jest największym z obszarów dla wszystkich sensownych definicji stabilności.

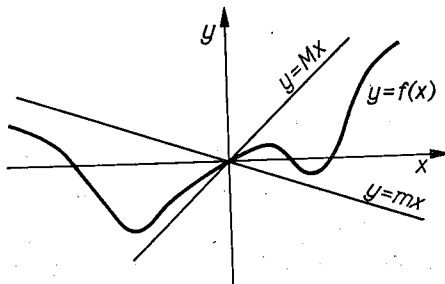
Inną istotną zaletą przestrzeni H jest istnienie iloczynu skalarnego, znacznie ułatwiającego obliczenia. Pozwoliło to — między innymi — na uogólnienie (w rozdziale 6) twierdzenia VII na układy nieliniowych równań całkowych.

Określenie stabilności całkowitej. W dalszym ciągu będziemy rozpatrywać równanie: $x = \mu Kfx$ w przestrzeni H , gdzie K jest operatorem o postaci (2.2) (na ogół nieograniczonym), μ — parametrem liczbowym, a f operatorem określonym przez funkcję $f(x)$, dla której zakładać będziemy tylko, że znika w zerze i jest ciągła na całej osi liczbowej. Dotychczasowe rozważania pozwalały na łatwą dyskusję stabilności, w zależności od parametru μ (charakteryzującego wzmocnienie układu elektrycznego), przy ustalonej funkcji $f(x)$. Obecnie zbadamy, jak zależy stabilność od przebiegu funkcji $f(x)$ przy ustalonym parametrze μ . Nie zmniejszając ogólności założeń przyjmijmy $\mu = -1$.

O funkcji spełniającej dla $x \in (-\infty, +\infty)$ warunek:

$$\inf_x \frac{f(x)}{x} > m, \quad \sup_x \frac{f(x)}{x} < M, \quad (4.11)$$

gdzie m, M są ustalonymi liczbami, mówić będziemy, że zawiera się wewnątrz kąta (m, M) . W szczególności może być $M = \infty, m = -\infty$. Geo-



Rys. 6

1) Przestrzeń E mogłaby być jednak wykorzystana np. w teorii generatorów samowzbudnych do określenia warunków narastania drgań z zadaną szybkością.

metrycznie oznacza to, że funkcja $f(x)$ leży w kącie pomiędzy prostymi $y = (m + \varepsilon)x$ i $y = (M - \varepsilon)x$, dla dowolnie małego $\varepsilon > 0$ (dla $M \neq \infty$, $m \neq -\infty$). Jeżeli dla każdej funkcji $f(x)$ ciągłej i spełniającej warunek (4.11) równanie:

$$x + Kf x = 0 \quad (4.12)$$

nie ma rozwiązań w całej przestrzeni H (z wyjątkiem rozwiązania zerowego), to mówimy, że równanie (4.12) jest stabilne całkowicie dla funkcji zawartych wewnątrz kąta (m, M) .

Warunki stabilności całkowanej. Aby zbadać warunki stabilności całkowanej, oprzemy się na następującym lemacie będącym modyfikacją twierdzenia VII.

Lemat. Jeżeli dla pewnej liczby a zachodzi nierówność:

$$\sup_x \left| \frac{f(x)}{x} - a \right| < \inf_{\operatorname{Re} s \geq 0} \left| \frac{1}{K(s)} + a \right|, \quad (4.13)$$

to równanie (4.12) nie ma rozwiązań w całej przestrzeni H .

Dowód: Przedstawmy funkcję $f(x)$ w postaci: $f(x) = ax + g(x)$. Równanie (4.12) można więc przepisać w postaci: $x + Kax + Kgx = 0$ i jeżeli $(I + aK)^{-1}$ jest operatorem ograniczonym w punktach Kgx dla wszystkich $x \in H$, to:

$$x = -(I + aK)^{-1} Kgx. \quad (4.14)$$

Założmy teraz, że x^* jest rozwiązaniem równania (4.14). Wtedy:

$$\|x^*\|_H \leq \|(I + aK)^{-1} K\|_H \|gx^*\|_H \leq \|(I + aK)^{-1} K\|_H \cdot \sup_x \left| \frac{g(x)}{x} \right| \cdot \|x^*\|_H. \quad (4.15)$$

Ponieważ $\frac{g(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} - a$ i $\|(I + aK)^{-1} K\|_H = \left(\inf_{\operatorname{Re} s \geq 0} \left| \frac{1}{K(s)} + a \right| \right)^{-1}$,

więc nierówność (4.15) przeczy (4.13), a zatem równanie (4.14) i równoważne mu (4.12) nie mają rozwiązań w przestrzeni H , c.n.d.

W oparciu o udowodniony lemat, wykażemy:

Twierdzenie VIII. Jeżeli zachodzi nierówność:

$$\left| \frac{1}{K(s)} + \frac{M+m}{2} \right| \geq \frac{M-m}{2} \quad \text{dla } \operatorname{Re} s \geq 0 \quad (4.16)$$

lub równoważna jej nierówność:

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1 + mK(s)}{1 + MK(s)} \right) \geq 0 \quad \text{dla } \operatorname{Re} s \geq 0, \quad (4.17)$$

to równanie (4.12) jest stabilne całkowicie dla funkcji zawartych wewnątrz kąta (m, M) .

Dowód. Kładąc $a = \frac{M+m}{2}$ i korzystając z (4.11) mamy: $\sup_x \left| \frac{f(x)}{x} - a \right| < \frac{M-m}{2}$. Podstawiając uzyskaną zależność do (4.16) otrzymamy:

$$\left| \frac{1}{K(s)} + \frac{M+m}{2} \right| \geq \frac{M-m}{2} > \sup_x \left| \frac{f(x)}{x} - a \right|$$

dla wszystkich $\operatorname{Re} s \geq 0$. Spełniony jest więc warunek (4.13) i równanie (4.12) nie ma rozwiązań w H .

Wykażemy jeszcze równoważność warunków (4.16) i (4.17). Nierówność (4.16) oznacza, że dla wszystkich $\operatorname{Re} s \geq 0$ wartości funkcji

$$W(s) = \frac{2}{M-m} \left(\frac{1}{K(s)} + \frac{M-m}{2} \right)$$

leżą na zewnątrz koła o środku w początku układu współrzędnych i promieniu jednostkowym. Korzystając teraz z własnej funkcji homograficznej $\frac{W-1}{W+1}$ otrzymamy, że dla $\operatorname{Re} s \geq 0$ wartości funkcji $\frac{W(s)-1}{W(s)+1}$ leżą w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej, a zatem

$$\operatorname{Re} \left(\frac{W(s)-1}{W(s)+1} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1+mK(s)}{1+MK(s)} \right) \geq 0 \quad \text{dla } \operatorname{Re} s \geq 0.$$

Z wzajemnej jednoznaczności odwzorowania homograficznego wynika równoważność nierówności (4.16) i (4.17), c.n.d.

Twierdzenie IX. Jeżeli zachodzi nierówność:

$$\operatorname{Re} \frac{1}{K(s)} \geq -m \quad \text{dla } \operatorname{Re} s \geq 0, \quad (4.18)$$

to równanie (4.12) jest stabilne całkowicie dla funkcji zawartych wewnątrz kąta (m, ∞) .

Dowód: Oznaczmy dla ustalonego s : $\frac{1}{K(s)} + m = u_1 + iv$, $\frac{1}{K(s)} + M = u_2 + iv$, gdzie u_1, u_2, v są liczbami rzeczywistymi. Z założeń wynika, że dla $\operatorname{Re} s \geq 0$ i $M > m$ mamy $u_2 > u_1 \geq 0$. Stąd:

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1+mK(s)}{1+MK(s)} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{u_1 + iv}{u_2 + iv} \right) = \frac{u_1 u_2 + v^2}{u_2^2 + v^2} \geq 0$$

i warunek (4.17) zachodzi dla każdego $M > m$. Z twierdzenia VIII wynika więc stabilność równania (4.12).

W ten sam sposób można wykazać, że jeżeli $\operatorname{Re} \frac{1}{K(s)} \leq -M$ dla $\operatorname{Re} s \geq 0$, to równanie (4.12) jest stabilne całkowicie dla funkcji $f(x)$ zawartych w kącie $(-\infty, M)$.

Jeżeli w warunku (4.11) nierówności silne zamienimy na słabe, to nierówności (4.16), (4.17) i (4.18) należy zamienić na silne.

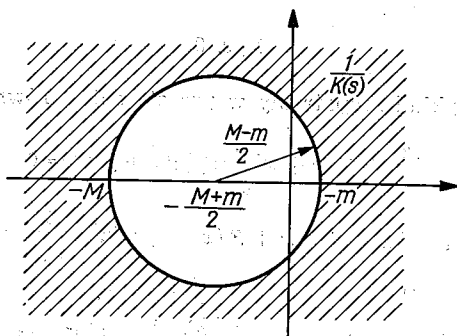
Przy korzystaniu z twierdzeń VIII i IX może być pożyteczna następująca własność funkcji wymiernych $F(s)$. Na to, aby dla wszystkich $\operatorname{Re} s \geq 0$ zachodziła nierówność $\operatorname{Re} F(s) \geq 0$, trzeba i wystarcza, aby

1° $\operatorname{Re} F(i\omega) \geq 0$ dla $\omega \in (-\infty, +\infty)$,

2° przynajmniej dla jednego punktu s_0 , takiego, że $\operatorname{Re} s_0 < 0$, było $\operatorname{Re} F(s_0) \leq 0$.

Twierdzenia VIII i IX ustalają związek pomiędzy kątem, w którym zawiera się funkcja $f(x)$, i widmem operatora K dla równań stabilnych całkowiec. Nierówność (4.16) mówi, że zbiór wartości funkcji $\frac{1}{K(s)}$ dla wszystkich $\operatorname{Re} s \geq 0$ musi znajdować się na zewnątrz koła o środku w punkcie $-\frac{M+m}{2}$ i promieniu $\frac{M-m}{2}$ (rys. 7), a nierówność (4.18) jest granicznym przypadkiem nierówności (4.16) przy $M \rightarrow \infty$. Odwzorowując przez inwersję zewnętrzne wspomnianego koła, otrzymamy obszar, w którym musi mieścić się widmo operatora K (zbiór wartości funkcji $K(s)$ dla $\operatorname{Re} s \geq 0$), tak aby równanie (4.12) było stabilne dla wszystkich funkcji $f(x)$ zawartych w kącie (m, M) .

Nie wdając się w szczegółową dyskusję odwzorowania przez inwersję obszaru z rys. 7 nadmienimy tylko, że w przypadku gdy $m < 0 < M$, to



Rys. 7

$Sp(K)$ musi mieścić się wewnątrz koła o środku leżącym na osi rzeczywistej i przecinającym ją w punktach $-\frac{1}{M}$ i $-\frac{1}{m}$. Jeżeli natomiast $0 < m < M$ lub $m < M < 0$, to $Sp(K)$ musi leżeć na zewnątrz takiego koła. W przypadkach granicznych $m = 0$ lub $M = 0$ okrąg sprowadzi się do prostej, a w przypadku $m = M$ do punktu.

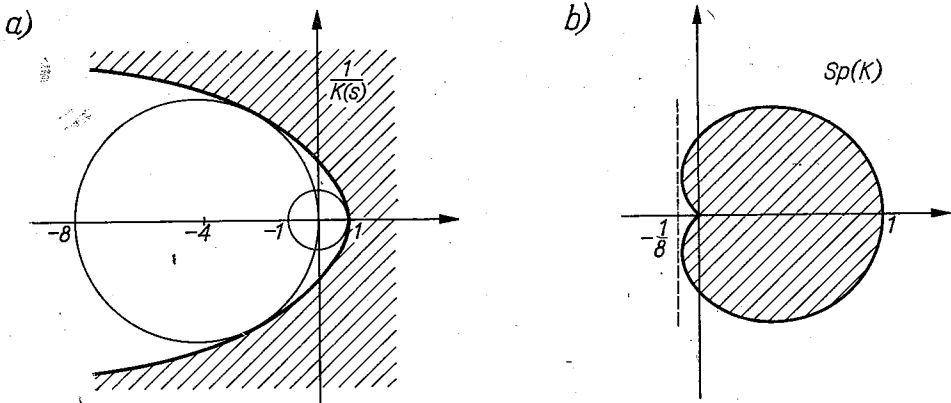
Przykłady.

1° Zbadajmy, dla jakich funkcji $f(x)$ równanie¹⁾:

$$x(t) + \int_0^t (t-\tau) e^{-(t-\tau)} f[x(\tau)] d\tau = 0 \quad (*)$$

1) Zero po prawej stronie równości rozumiemy jako punkt zerowy przestrzeni H .

jest stabilne całkowiec. Mamy oczywiście $k(t) = te^{-t}$ i $K(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$. Obszar $\frac{1}{K(s)}$ dla $\operatorname{Re} s \geq 0$ jest „zewnątrzem” paraboli (rys. 8), natomiast $\operatorname{Sp}(K)$ jest ograniczone kardioidą. Wpisując w parabolę koła o rozmaitych promieniach i odczytując punkty przecięcia okręgów z osią rzeczywistą możemy wyznaczyć cały ciąg liczb m, M takich, że jeżeli $f(x)$ zawiera się wewnątrz któregoś z kątów (m, M) , to równanie (*) jest stabilne całkowiec. Np. dla okręgów pokazanych na rysunku mamy $m = -1, M = 1$ oraz $m = 0, M = 8$. Łatwo zauważyć, że istnieją ograniczenia $\inf(m) = -1, \sup(M) = \infty$.



Rys. 8

2° Jako drugi przykład rozpatrzmy w przestrzeni H równanie:

$$\frac{dx}{dt} + 2\alpha x + \omega^2 \int_0^t x(\tau) d\tau + f(x) = 0 \quad (**)$$

(dla $\alpha > 0$) równoważne równaniu: $x + Kfx = 0$, gdzie $\frac{1}{K(s)} = s + 2\alpha + \frac{\omega^2}{s}$. Obszar

$\frac{1}{K(s)}$ dla $\operatorname{Re} s \geq 0$ jest półpłaszczyzną $\operatorname{Re} \frac{1}{K(s)} \geq 2\alpha$.

Zgodnie z twierdzeniem IX równanie (**) jest stabilne całkowiec dla wszystkich funkcji ciągłych $f(x)$ zawartych wewnątrz kąta $(-2\alpha, \infty)$.

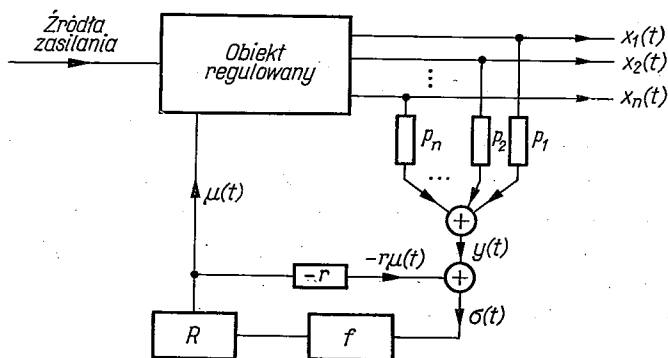
5. PRZYKŁADY BADANIA STABILNOŚCI UKŁADÓW AUTOMATYCZNEJ REGULACJI

Równania układu automatycznej regulacji. Układ automatycznej regulacji z jednym elementem nieliniowym opisuje się zwykle układem równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= \sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha k} x_{\alpha} + a_k \mu, \quad k = 1, 2, \dots, n \\ V^2 \ddot{\mu} + W \dot{\mu} + S \mu &= f(\sigma) \\ \sigma &= y - r \mu, \quad \text{gdzie } y = \sum_{\alpha=1}^n p_{\alpha} x_{\alpha}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Drugie i trzecie równanie opisuje organ regulujący, natomiast pozostałe równania — obiekt regulowany. Funkcje $x_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) są wielkościami podlegającymi regulacji, $y(t)$ — sygnałem na wyjściu układu pomiarowego (mierzącego wielkości regulowane), $\sigma(t)$ przebiegiem sterującym regulator, a $\mu(t)$ — przebiegiem na wyjściu członu wykonawczego regulatora. Parametry b_{ak} , a_k , n — charakteryzują obiekt podlegający regulacji, natomiast V^2 , W , S , r , p_α — regulator.

Schemat blokowy układu regulacji odpowiadający układowi równań (5.1) jest pokazany na rys. 9.



Rys. 9

Ten sam układ automatycznej regulacji można opisać układem równań (całkowych):

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t F(t - \tau) \mu(\tau) d\tau, \\ \mu(t) &= \int_0^t R(t - \tau) f[\sigma(\tau)] d\tau, \\ \sigma(t) &= y(t) - r\mu(t), \end{aligned} \quad (5.2)$$

równoważnych układowi (5.1) po wyrugowaniu zmiennych $x_k(t)$. Funkcję przejścia $F(t)$ obiektu regulowanego łącznie z układem pomiarowym $F(t)$ oraz funkcję przejścia $R(t)$ członu wykonawczego regulatora można określić bezpośrednio z równań (5.1). Transformatory Laplace'a tych funkcji przyjmą postać:

$$R(s) = \frac{1}{V^2 s^2 + Ws + S} \quad F(s) = P(sI - B)^{-1} A,$$

gdzie A , B , P są macierzami:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad P = (p_1, p_2, \dots, p_n),$$

a I — macierzą jednostkową.

Stosując przyjętą w poprzednich rozdziałach symbolikę, układ równań (5.2) można przepisać w postaci:

$$\begin{aligned} y &= F\mu, \\ \mu &= Rf\sigma, \\ \sigma &= y - r\mu. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Rugując teraz z układu (5.3) zmienne y i μ otrzymamy:

$$\sigma = Kf\sigma, \quad (5.4)$$

gdzie $K \stackrel{\text{def}}{=} (F - r)R$ jest operatorem o postaci (2.2), a odpowiadająca mu $\mathcal{L}$ -transformata wynosi:

$$\mathcal{L}[K] = K(s) = \frac{\mathbf{P}(s\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{A} - r}{V^2 s^2 + Ws + S}. \quad (5.5)$$

Określenie warunków stabilności (np. całkowitej) równania (5.4) sprowadzi się teraz do określenia położenia widma operatora K na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. W przypadku gdy równanie (5.4) jest stabilne (np. asymptotyczne) i ponadto operatory R i F_k (gdzie $x_k = F_k\mu$)¹⁾ są ograniczone, wszystkie sygnały $x_k(t)$ i $\mu(t)$ znikają dla $t \rightarrow \infty$.

Przykład²⁾. Rozpatrzmy układ automatycznej regulacji opisujący się równaniami:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + a_1f(\sigma), \\ \dot{x}_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + a_2f(\sigma), \\ \sigma &= p_1x_1 + p_2x_2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Jest to szczególny przypadek układu (5.1) dla $n = 2$, $V^2 = W = r = 0$.

Poddając równania (5.6) przekształceniu Laplace'a i następnie rugując z równań zmienne x_1 i x_2 otrzymamy:

$$\tilde{\sigma} = \frac{(a_1p_1 + a_2p_2)s + p_1(a_2b_{12} - a_1b_{22}) + p_2(a_1b_{21} - a_2b_{11})}{s^2 - (b_{11} + b_{22})s + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})} \tilde{f}, \quad (5.7)$$

gdzie $\tilde{\sigma}$ i $\tilde{f}$ są odpowiednio transformatami Laplace'a funkcji $\sigma(t)$ i $f[\sigma(t)]$.

Wprowadźmy oznaczenia:

$$\begin{aligned} a_1p_1 - a_2p_2 &= \alpha; & -b_{11} - b_{22} &= \gamma; & b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} &= \delta; \\ p_1(a_2b_{12} - a_1b_{22}) + p_2(a_1b_{21} - a_2b_{11}) &= \varepsilon \cdot \alpha. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Poddając teraz równanie (5.7) odwrotnemu przekształceniu Laplace'a otrzymamy:

$$\sigma(t) + \int_0^t k(t-\tau)f[\sigma(\tau)]d\tau = 0, \quad (5.9)$$

1) $\mathcal{L}$ -transformaty $F_k(s)$ operatorów F_k są elementami macierzy $(s\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{A}$.

2) Porównaj ten sam przykład rozwiązany metodami klasycznymi: Rozenwasser E. H. „K woprosu o ustojczivosti...” — Awtomat. i Tielemiech., t. XX nr 6, 1959.

gdzie

$$\mathcal{L}[k(t)] = -a \frac{s + \varepsilon}{s^2 + \gamma s + \delta}. \quad (5.10)$$

Założmy, że interesuje nas, jakie zależności muszą być spełnione pomiędzy współczynnikami a , ε , γ , δ , aby równanie (5.9) było stabilne (całkowicie) dla wszystkich funkcji $f(\sigma)$ ciągłych i takich, że $\frac{f(\sigma)}{\sigma} \geq 0$ (i ograniczone od góry). Zgodnie z oznaczeniami przyjętymi w rozdziale 4 żądamy, aby $m = 0$, $M = \infty$ i w myśl twierdzenia IX warunkiem wystarczającym stabilności jest:

$$\operatorname{Re} \frac{1}{K(s)} > 0 \quad \text{dla} \quad \operatorname{Re} s \geq 0. \quad (5.11)$$

Zera i bieguny funkcji $K(s)$ muszą zatem leżeć w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} s < 0$, czyli $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\gamma > 0$, a ponadto musi zachodzić nierówność:

$$\operatorname{Re} \frac{1}{K(i\omega)} = -\frac{1}{a} \operatorname{Re} \frac{\delta - \omega^2 + i\gamma\omega}{\varepsilon + i\omega} = \frac{-1}{a(\varepsilon^2 + \omega^2)} [\omega^2(\gamma - \varepsilon) + \varepsilon\delta] > 0$$

dla wszystkich $\omega \in (-\infty, +\infty)$. Stąd ostatecznie dla spełnienia warunku (5.11) trzeba i wystarcza, aby:

$$a < 0, \quad \gamma \geq \varepsilon > 0, \quad \delta > 0. \quad (5.12)$$

Nierówności (5.12) zgodnie z twierdzeniem IX gwarantują stabilność równania (5.9) dla wszystkich funkcji $f(\sigma)$ ciągłych i takich, że $0 \leq \frac{f(\sigma)}{\sigma} \leq M < \infty$.

Ponieważ ponadto przebiegi $x_1(t)$ i $x_2(t)$ wyrażają się wzorami:

$$x_1 = K_1 f \sigma, \quad x_2 = K_2 f \sigma,$$

gdzie

$$K_1(s) = \frac{a_1 s + a_2 b_{12} - a_1 b_{22}}{s^2 + \gamma s + \delta}, \quad K_2(s) = \frac{a_2 s + a_1 b_{21} - a_2 b_{11}}{s^2 + \gamma s + \delta},$$

a z nierówności $\gamma > 0$, $\delta > 0$ wynika ograniczoność operatorów K_1 i K_2 , więc jeżeli tylko $\sigma(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, to również $x_1(t)$ i $x_2(t)$ znikają w nieskończoności.

Jeżeli na funkcję $f(\sigma)$ narzucimy inne ograniczenia, to warunki stabilności wyrażą się w postaci innego układu nierówności. Dla wyznaczenia ich będzie nam potrzebna znajomość widma operatora liniowego.

Założmy, że $f(\sigma) = a[\sigma + \varphi(\sigma)]$, gdzie $\frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0$. Jeżeli wprowadzi-

my oznaczenia: $f_0(\sigma) = \frac{1}{a} f(\sigma)$ i $a\alpha = \mu = \frac{1}{\lambda}$, to równanie (5.9) przyjmie postać:

$$\sigma = \mu K_0 f_0 \sigma, \quad (5.13)$$

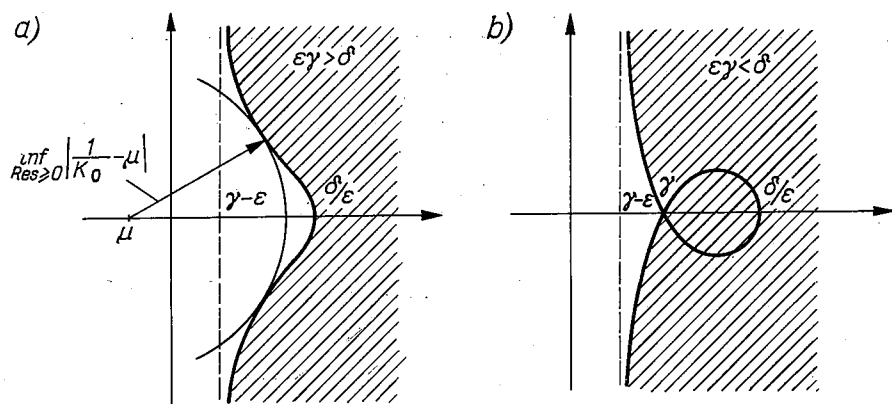
gdzie operatorowi K_0 odpowiada $\mathcal{L}$ -transformata: $K_0(s) = \frac{s + \varepsilon}{s^2 + \gamma s + \delta}$.

Zbadamy obszar, na który funkcja $\frac{1}{K_0(s)}$ odwzorowuje półpłaszczyznę $\operatorname{Re} s \geq 0$. Granicą tego obszaru będzie linia:

$$\frac{1}{K_0(i\omega)} = \frac{\delta - \omega^2 + i\omega\gamma}{\varepsilon + i\omega} = \gamma - \varepsilon + \frac{\varepsilon(\varepsilon^2 - \varepsilon\gamma + \delta)}{\omega^2 + \varepsilon^2} + i\omega \frac{\omega^2 + \varepsilon\gamma - \delta}{\omega^2 + \varepsilon^2}$$

dana jako funkcja parametru $\omega \in (-\infty, +\infty)$.

Łatwo zauważyć, że linia ta jest symetryczna względem osi rzeczywistych i leży w pasie pomiędzy prostymi pionowymi o odciętych $\gamma - \varepsilon$ i $\frac{\delta}{\varepsilon}$, przy czym pierwsza z prostych jest asymptotą linii. Jeżeli $\varepsilon\gamma - \delta \geq 0$, to linia ma przebieg monotoniczny, natomiast dla $\varepsilon\gamma - \delta < 0$ tworzy „pętlę” przecinając oś rzeczywistych dodatkowo w punkcie o odciętej γ . Ograniczymy dyskusję do przypadku $\gamma - \varepsilon < \frac{\delta}{\varepsilon}$ (w przeciwnym przypadku dyskusja przebiega podobnie). Na rysunku 10 zakreskowano obszar, na któ-



Rys. 10

ry funkcja $\frac{1}{K_0(s)}$ odwzorowuje półpłaszczyznę $\operatorname{Re} s \geq 0$ (dla dwóch przypadków $\varepsilon\gamma > \delta$ i $\varepsilon\gamma < \delta$). Na podstawie twierdzenia IX można wnioskować, że równanie (5.9) jest stabilne całkowicie dla każdej funkcji $f(\sigma)$ takiej, że $-af(\sigma)$ leży wewnątrz kąta $(\varepsilon - \gamma, \infty)$.

Jeszcze dokładniejsze oszacowanie obszaru stabilności można otrzymać korzystając z twierdzenia VII.

Wyrażenie $\inf_{\operatorname{Re} s \geq 0} \left| \frac{1}{K_0(s)} - \mu \right|$ dla różnych μ obliczamy bądź na drodze analitycznej, bądź wykreślnie, korzystając z rys. 10. Jeżeli dla zadanej funkcji $f_0(s)$ określimy $p_H(r)$ i $q_H(r)$, to warunki stabilności określają nierówności (4.5) i (4.6).

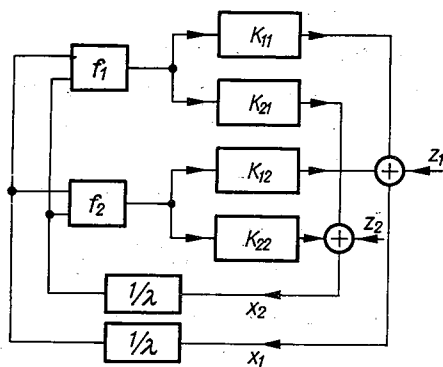
6. STABILNOŚĆ UKŁADÓW WIELOOBWODOWYCH

Przestrzeń H_n . Metody badania stabilności energetycznej można w prosty sposób uogólnić na układy elektryczne zawierające wiele członów nieliniowych i wiele pętli sprzężenia zwrotnego. Np. układ dwu równań z dwoma niewiadomymi:

$$\lambda x_1(t) = \int_0^t k_{11}(t-\tau) f_1[x_1(\tau), x_2(\tau)] d\tau + \int_0^t k_{12}(t-\tau) f_2[x_1(\tau), x_2(\tau)] d\tau + z_1(t),$$

$$\lambda x_2(t) = \int_0^t k_{21}(t-\tau) f_1[x_1(\tau), x_2(\tau)] d\tau + \int_0^t k_{22}(t-\tau) f_2[x_1(\tau), x_2(\tau)] d\tau + z_2(t)$$

opisuje przebiegi elektryczne w układzie pokazanym schematycznie na rys. 11.



Rys. 11

Bardziej złożone układy elektryczne opisują się ogólnie n równaniami całkowymi z n niewiadomymi funkcjami: $x_1(t), \dots, x_n(t)$.

Niech każda z funkcji $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) będzie elementem przestrzeni H . Utwórzmy nową przestrzeń funkcyjną H_n , której elementami będą n -wyrazowe ciągi:

$$x = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \quad (6.1)$$

elementów $x_i \in H$.

Określmy w H_n iloczyn skalarny przez równość:

$$(x, y)_{H_n} \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^n (x_i, y_i)_H \quad (6.2)$$

(gdzie indeksy H_n i H oznaczają, w jakiej przestrzeni brany jest odpowiedni iloczyn skalarny) oraz normę:

$$\|x\|_{H_n} \stackrel{\text{df}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^n \|x_i\|_H^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^n |x_i(t)|^2 dt}. \quad (6.3)$$

Oprócz $\|\cdot\|_{H_n}$ rozpatrywać będziemy w H_n drugą normę o postaci:

$$\|x\|_* \stackrel{\text{df}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^n \|x_i\|_{CN}^2} \quad (6.4)$$

Oczywiście zachodzi nierówność $\|x\|_* \geq \|x\|_{H_n}$, a przestrzeń H_n jest zupełną przestrzenią Banacha przy zbieżności według normy $\|x\|_*$.

Operator liniowy w H_n . Określmy w przestrzeni H_n operator K równością:

$$y_i = \sum_{j=1}^n K_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.5)$$

gdzie każdy z operatorów K_{ij} ma postać (2.2).

Równość (6.5) będziemy zapisywać krótko: $y = Kx$, a sam operator K będziemy przedstawiać w postaci macierzy kwadratowej:

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

Operator K jest ograniczony, jeżeli dla każdego wektora $x = (x_1, \dots, x_n)$ należącego do H_n wynik operacji $Kx = y = (y_1, \dots, y_n)$ należy również do H_n .

Lemat. Operator K w przestrzeni H_n jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy każdy z operatorów K_{ij} [elementów macierzy (6.6)] jest ograniczony w przestrzeni H .

Dowód: Jeżeli wszystkie K_{ij} są ograniczone, to bezpośrednio z równości (6.5) wynika, że każde $y_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) należy do H . Załóżmy teraz, że wśród elementów macierzy (6.6) istnieje operator K_{lp} nieograniczony np. w punkcie $x_0 \in H$. Podstawiając w równości (6.5) $x = (0, \dots, 0, x_0, 0, \dots, 0)$, gdzie x_0 stoi na p -tym miejscu otrzymamy $y_l = K_{lp}x_0$, a więc l -ty wyraz ciągu $Kx_0 = y = (y_1, \dots, y_l, \dots, y_n)$ nie należy do H i operator K jest nieograniczony, c.n.d.

Nazwijmy $\mathcal{L}$ -transformatą operatora K macierz $K(s)$ o postaci:

$$\mathcal{L}[K] = K(s) = \begin{pmatrix} K_{11}(s) & \dots & K_{1n}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{n1}(s) & \dots & K_{nn}(s) \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

gdzie każdy z elementów macierzy jest $\mathcal{L}$ -transformatą odpowiadającego mu operatora z macierzy (6.6), brana w przestrzeni H , tj. $K_{ij}(s) = \mathcal{L}[K_{ij}]$. $\mathcal{L}$ -transformaty operatorów K w przestrzeni H_n posiadają następujące własności:

$$1^\circ \mathcal{L}[\alpha K_1 + \beta K_2] = \alpha \mathcal{L}[K_1] + \beta \mathcal{L}[K_2],$$

gdzie α, β — są n^2 — elementowymi macierzami liczb rzeczywistych;

$$2^\circ \mathcal{L}[K_1 \cdot K_2] = \mathcal{L}[K_1] \cdot \mathcal{L}[K_2];$$

3° $\mathcal{L}[I] = I$, gdzie po lewej stronie równości I oznacza operator tożsamościowy, natomiast po prawej macierz jednostkową;

$$4^\circ \text{ Jeżeli istnieje } K^{-1}, \text{ to } \mathcal{L}[K^{-1}] = (\mathcal{L}[K])^{-1}.$$

Na podstawie własności 1°—4° można określić $\mathcal{L}$ -transformatę dla rezolwenty operatora K :

$$\mathcal{L}[(\lambda I - K)^{-1}] = \frac{1}{\det[\lambda I - K(s)]} \begin{pmatrix} D_{11}(s, \lambda) & \dots & D_{n1}(s, \lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ D_{1n}(s, \lambda) & \dots & D_{nn}(s, \lambda) \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

gdzie $D_{ij}(s, \lambda)$ są względnymi dopełnieniami algebraicznymi elementów $\delta_{ij}\lambda - K_{ij}(s)$ macierzy $\lambda I - K(s)$. (gdzie $\delta_{ii} = 1$; $\delta_{ij} = 0$ dla $i \neq j$).

Twierdzenie X. Widmem operatora K , ograniczonego w przestrzeni H_n jest zbiór zer wielomianów $W_s(\lambda) = \det[\lambda I - K(s)]$ dla wszystkich s z półpłaszczyzny $\operatorname{Re} s \geq 0$:

$$\operatorname{Sp}(K) = \{\lambda : \det[\lambda I - K(s)] = 0 \text{ dla } \operatorname{Re} s \geq 0\}. \quad (6.9)$$

Dowód: Istotnie przy ustalonym s_0 macierz $(\lambda I - K(s_0))^{-1}$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\det[\lambda I - K(s_0)] \neq 0$. Spełnienie tej nierówności dla wszystkich $\operatorname{Re} s \geq 0$ gwarantuje istnienie i ograniczoność macierzy (6.8) w całej półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} s \geq 0$, a więc istnienie rezolwenty $R_\lambda = (\lambda I - K)^{-1}$.

Norma operatora liniowego w H_n . Normę operatora K w przestrzeni H_n można wyznaczyć z zależności:

$$\|K\|_{H_n}^2 = \|K^* K\|_{H_n} = |K^* K|_{sp}, \quad (6.10)$$

gdzie operator K^* jest sprzężony do operatora K .

Dowód: Ponieważ w każdej przestrzeni Hilberta

$$\|K\| = \sup_{\|x\| = \|y\| = 1} |(Kx, y)|,$$

więc:

$$\|K\|^2 = \sup_{\|x\|=1} (Kx, Kx) = \sup_{\|x\|=1} (x, K^* Kx) \leq \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |(y, K^* Kx)| = \|K^* K\|.$$

Z drugiej strony $\|K^* K\| \leq \|K^*\| \|K\| = \|K\|^2$ i stąd ostatecznie mamy równość:

$$\|K\|^2 = \|K^* K\|. \quad (*)$$

W każdej przestrzeni Banacha i dla każdego operatora ograniczonego A istnieje granica: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \|A\|_p$.

W szczególności dla operatorów samosprzężonych mamy $\|A^2\| = \|A\|^2$ i ogólniej $\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}$, a więc $\|A\|_p = \|A\|$. Ponieważ operator $K^* K$ jest samosprzężony, więc ostatecznie zachodzi równość (6.10).

Postać operatora K^* sprzężonego do operatora ograniczonego [danego wzorem (6.6)] wyznaczmy z definicyjnej tożsamości:

$$(Kx, z)_{H_n} = (x, K^* z)_{H_n}. \quad (6.11)$$

Korzystając z (6.2) i (6.5) otrzymamy:

$$\begin{aligned} (Kx, z)_{H_n} &= \sum_i \left(\sum_j K_{ij} x_j, z_i \right)_H = \sum_{ij} (K_{ij} x_j, z_i)_H = \\ &= \sum_{ij} (x_j, K_{ij}^* z_i)_H = \sum_j \left(x_j, \sum_i K_{ij}^* z_i \right)_H = (x, K^* z)_{H_n}, \end{aligned}$$

a więc operator K^* jest dany przez macierz:

$$K^* = \begin{pmatrix} K_{11}^* & K_{21}^* & \dots & K_{n1}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{1n}^* & K_{2n}^* & \dots & K_{nn}^* \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

Nazwiemy $\mathcal{L}$ -transformatą operatora K^* macierz:

$$\mathcal{L}[K^*] = K^*(s) = \begin{pmatrix} K_{11}^*(s) & \dots & K_{n1}^*(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{1n}^*(s) & \dots & K_{nn}^*(s) \end{pmatrix}, \quad (6.13)$$

gdzie każda z funkcji $K_{ij}^*(s)$ jest $\mathcal{L}$ -transformatą operatora K_{ij}^* (lub, co na jedno wychodzi, funkcją sprzężoną do $\mathcal{L}$ -transformaty operatora K_{ij} : $K_{ij}^*(s) = \overline{K_{ij}(s)}$). $\mathcal{L}$ -transformata operatora K^* posiada te same własności 1°—4° co $\mathcal{L}$ -transformata operatora K , a ponadto:

$$\mathcal{L}[K^* K] = \mathcal{L}[K^*] \cdot \mathcal{L}[K] = K^*(s) \cdot K(s). \quad (6.14)$$

Elementy $R_{ij}(s)$ macierzy $K^*(s) K(s)$, będącej $\mathcal{L}$ -transformatą operatora $K^* K$, wyraża się wzorami:

$$R_{ij}(s) = \sum_{l=1}^n \overline{K_{li}(s)} K_{lj}(s) = \overline{R_{ji}(s)}$$

a widmo operatora K^*K jest podzbiorem osi rzeczywistej (to znaczy pierwiastki wielomianu $W_s^*(\lambda) = \det[\lambda I - K^*(s) K(s)]$ są rzeczywiste).

Ostatecznie normę operatora K w przestrzeni H_n obliczamy ze wzoru:

$$\|K\|_{H_n} = \sup_{\operatorname{Re} s \geq 0} \sqrt{\lambda(s)}, \quad \text{gdzie} \quad \det[\lambda I - K^*(s) K(s)] = 0. \quad (6.15)$$

Dla przykładu obliczmy normę operatora ograniczonego:

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$$

w przestrzeni H_2 . $\mathcal{L}$ -transformata operatora K^*K ma postać:

$$K^*(s) K(s) = \begin{pmatrix} |K_{11}(s)|^2 + |K_{21}(s)|^2 & \overline{K}_{11}(s) K_{12}(s) + \overline{K}_{21}(s) K_{22}(s) \\ K_{11}(s) \overline{K}_{12}(s) + K_{21}(s) \overline{K}_{22}(s) & |K_{22}(s)|^2 + |K_{12}(s)|^2 \end{pmatrix}.$$

Stąd:

$$W_s^*(\lambda) = \det[\lambda I - K^*(s) K(s)] = \lambda^2 - 2\sigma(s)\lambda + \Delta^2(s),$$

gdzie oznaczono:

$$\sigma(s) = \frac{1}{2}(|K_{11}(s)|^2 + |K_{12}(s)|^2 + |K_{21}(s)|^2 + |K_{22}(s)|^2),$$

$$\Delta^2(s) = \det[K^*(s) K(s)] = |\det K(s)|^2 = |K_{11}(s) K_{22}(s) - K_{12}(s) K_{21}(s)|^2.$$

Rozwiązując równanie $W_s^*(\lambda) = 0$ otrzymamy:

$$\lambda_{\pm} = \sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \Delta^2}.$$

Ponieważ $0 \leq \Delta \leq \sigma$, więc zera wielomianu $W_s^*(\lambda)$ spełniają nierówności:

$$0 \leq \lambda_- \leq \sigma \leq \lambda_+ \leq 2\sigma.$$

Największa z wartości λ_+ dla wszystkich $\operatorname{Re} s \geq 0$ (lub — co na jedno wychodzi — dla $s = i\omega$; $-\infty < \omega < +\infty$) jest kwadratem normy K :

$$\|K\|_{H_2}^2 = \sup_{\omega} (\sigma(i\omega) + \sqrt{\sigma^2(i\omega) - \Delta^2(i\omega)}). \quad (6.16)$$

Warto nadmienić, że jeżeli w przestrzeni H_n istnieje wektor x_0 o normie $\|x_0\|_{H_n} = 1$ taki, że $\|Kx_0\|_{H_n} = \|K\|_{H_n}$, to istnieje również wektor jednostkowy i rzeczywisty z taki, że $\|Kz\|_{H_n} = \|K\|_{H_n}$. Inaczej mówiąc operator K rozpatrywany na podprzestrzeni funkcji rzeczywistych zachowuje swą normę.

Aby udowodnić tę własność, należy zauważyć najpierw, że operator K przekształca funkcje rzeczywiste w rzeczywiste, a więc z liniowości wynika, że $K\bar{x} = \overline{(Kx)}$ (kreska oznacza funkcję sprzężoną). Jeżeli x_0 leżące w kuli jednostkowej realizuje maksimum funkcjonału $\|Kx\|_{H_n}$, to zachodzi równość:

$$\|K\|^2 = (Kx_0, Kx_0) = (x_0, K^*Kx_0) = \sup_{\|y\|=1} (y, K^*Kx_0) = \|K^*K\|$$

i wobec tego wektory x_0 i K^*Kx_0 są do siebie równoległe. Oznaczmy przez x_p dowolny wektor jednostkowy prostopadły do x_0 ; będzie on również prostopadły do K^*Kx_0 , a więc:

$$0 = (x_p, K^*Kx_0) = (Kx_p, Kx_0)$$

i wektor Kx_p jest prostopadły do Kx_0 .

Dokonajmy następnie rozkładu wektora $\bar{x}_0$ na kierunek prostopadły i równoległy do x_0 : $\bar{x}_0 = \alpha x_0 + \beta x_p$. Rozkład ten jest jednoznaczny, α wyznaczamy z zależności $\alpha = (\bar{x}_0, x_0)$, natomiast $\beta x_p \stackrel{\text{df}}{=} \bar{x}_0 - \alpha x_0$. Ponieważ wektory $x_0, \bar{x}_0, x_p$ są jednostkowe, więc zachodzi równość $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Założmy $\beta \neq 0$; wykażemy, że $\|Kx_p\| = \|K\|$.

$$\text{Istotnie } \|K\|^2 = \|K\bar{x}_0\|^2 = \|K(\alpha x_0 + \beta x_p)\|^2 = |\alpha|^2 \|Kx_0\|^2 + |\beta|^2 \|Kx_p\|^2$$

$$\text{i stąd } \|Kx_p\|^2 = \frac{1 - |\alpha|^2}{|\beta|^2} \|K\|^2 = \|K\|^2.$$

$$\text{Utwórzmy teraz wektor } z = \frac{x_0 + \bar{x}_0}{\sqrt{2\operatorname{Re}(1 + \alpha)}}. \text{ Sprawdzimy, że } \|z\| = 1.$$

Istotnie:

$$\|z\|^2 = \frac{1}{2\operatorname{Re}(1 + \alpha)} \|(1 + \alpha)x_0 + \beta x_p\|^2 = \frac{|1 + \alpha|^2 + |\beta|^2}{2\operatorname{Re}(1 + \alpha)} = 1.$$

Ponadto

$$\|Kz\|^2 = \frac{1}{2\operatorname{Re}(1 + \alpha)} \|(1 + \alpha)Kx_0 + \beta Kx_p\|^2 = \frac{|1 + \alpha|^2 + |\beta|^2}{2\operatorname{Re}(1 + \alpha)} \|K\|^2 = \|K\|^2.$$

Rozpatrzmy jeszcze przypadek, gdy $\beta = 0$. Wtedy $\bar{x}_0 = x_0$ albo $\bar{x}_0 = -x_0$ i wektor x_0 jest rzeczywisty albo urojony. W tym ostatnim przypadku kładziemy $z = ix_0$.

Operator nieliniowy. Rozpatrzmy teraz układ n funkcji rzeczywistych

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.17)$$

zależnych od n rzeczywistych argumentów, z których każdy może przebiegać całą oś liczbową. O funkcjach f_i będziemy zakładać, że dadzą się przedstawić w postaci:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (6.18)$$

gdzie z kolei funkcje φ_i są ciągłymi funkcjami w całym zbiorze argumentów i spełniającymi warunki:

$$\frac{|\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)|}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}} \rightarrow 0 \quad \text{dla } \sum_{v=1}^n x_v^2 \rightarrow 0. \quad (6.19)$$

Jeżeli przez $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ oznaczmy punkty n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej E_n , to równość (6.17) określa ciągłe odwzorowania E_n w siebie:

$$Y = f(X), \quad (6.20)$$

przy czym dla $X = 0$ $f(X) = 0$.

Gdy we wzorach (6.17) na miejsce $x_1, x_2, \dots, x_n$ wstawimy funkcje $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ prawie okresowe, to $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ będą również funkcjami prawie okresowymi.

Istotnie, każda z funkcji prawie okresowych jest ograniczona. Funkcje f_i na każdym zbiorze ograniczonym przestrzeni E_n można dowolnie dokładnie jednostajnie przybliżać przez wielomiany

$$W_i = \sum_{\alpha=1}^m C_{k_1, k_2, \dots, k_n} x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n},$$

gdzie $\alpha = \sum_{i=1}^n k_i$, tak aby dla dowolnego $\varepsilon > 0$ było $|y_i - W_i| < \frac{\varepsilon}{4}$ dla wszystkich X z danego zbioru ograniczonego. Ponieważ sumy i iloczyny funkcji prawie okre-

sowych są funkcjami prawie okresowymi, więc dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\frac{\varepsilon}{2}$ — okres: $T\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ dla funkcji $W_i(t) = W_i(x_1(t), x_2(t), x_n(t))$, stąd:

$$|y_i(t+T) - y_i(t)| \leq |y_i(t+T) - W_i(t+T)| + |y_i(t) - W_i(t)| + |W_i(t+T) - W_i(t)| < \varepsilon,$$

czyli $\frac{\varepsilon}{2}$ — okres funkcji $W_i(t)$ jest ε -okresem funkcji $y_i(t)$.

Równość (6. 20) określa więc w sposób poprawny nieliniowy operator f odwzorowujący przestrzeń H_n w siebie. Oczywiście z ciągłości funkcji f_i wynika, że $f(x + \theta) = f(x)$, gdzie $x \in H_n$, natomiast θ jest zerem przestrzeni H_n (ciągami funkcji znikających w nieskończoności).

Jak wynika z (6. 18), operator f da się przedstawić w postaci:

$$fx = Ax + \varphi x, \quad (6.21)$$

gdzie

$$fx = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \varphi x = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

Operator φ [który można zdefiniować przez (6. 21) lub przez układ funkcji $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$] jest również nieliniowym operatorem w H_n .

Założmy najpierw, że $\det A \neq 0$. Równość (6. 21) można wtedy przepisać w postaci:

$$fx = A(x + \psi x), \quad (6.22)$$

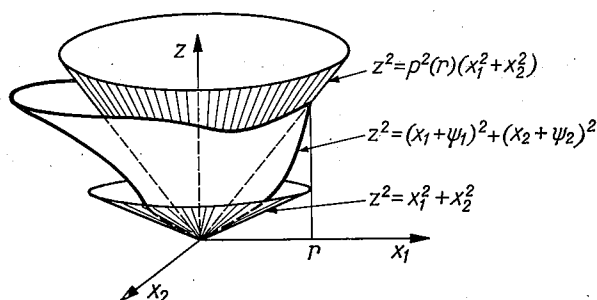
gdzie $\psi x = A^{-1} \varphi x$. Funkcje $\psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ określające operator ψ spełniają ten sam warunek (6.19), co funkcje $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Wprowadźmy dla funkcji $\psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ wyrażenia:

$$p(r) = \max_{\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq r^2} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i + \psi_i(x_1, \dots, x_n))^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}}, \quad (6.23)$$

$$q(r) = \max_{\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq r^2} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \psi_i^2(x_1, \dots, x_n)}{\sum_{i=1}^n x_i^2}}. \quad (6.24)$$

Zgodnie z określeniem, $p(r)$ jest najmniejszą spośród liczb C , taką, że dla $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq r^2$ zachodzi nierówność $\sum_{i=1}^n (x_i + \psi_i(x_1, \dots, x_n))^2 \leq C^2 \sum_{i=1}^n x_i^2$. Geometrycznie $\alpha = 2 \arctg p(r)$ oznacza kąt rozwarcia najszerszego stożka (w przestrzeni $n+1$ wymiarowej) o równaniu $z = p(r) \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ ograniczającego od góry hiperpowierzchnię:
 $z = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i + \psi_i(x_1, \dots, x_n))^2}$ w kole $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq r^2$ (rys. 12). Podobnie interpretuje się stała $q(r)$.



Rys. 12

Funkcje $p(r)$ i $q(r)$ są niemalejącymi ciągłymi funkcjami zmiennej r określonymi dla $r \geq 0$, przy czym $p(0) = 1$, $q(0) = 0$.

Oznaczmy przez $S(r)$ zbiór tych elementów przestrzeni H_n , dla których:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n \|x_i\|_{C_N}^2} \leq r - \varepsilon, \quad (6.25)$$

gdzie $\varepsilon > 0$ jest dowolnie małą ustaloną liczbą.

Stąd wynika, że jeżeli $x \in S(r)$, gdzie $x = x_1(t), x_2(t), \dots, x_n$, to istnieje takie $T_0(\varepsilon)$, że $\sup_{t \geq T_0} \sum_{i=1}^n x_i^2(t) \leq r^2$. Ponieważ:

$$\|x\|_{H_n} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} \sum_{i=1}^n |x_i(t)|^2 dt \leq \sup_{t \geq T_0} \sum_{i=1}^n |x_i(t)|^2 \leq r^2 \quad \text{dla } x \in S(r),$$

więc zbiór $S(r)$ zawiera się w kuli o promieniu r . Funkcje $p(r)$ i $q(r)$ pozwalają oszacować normy wektorów $x + \psi x$ oraz ψx dla $x \in S(r)$.

Istotnie:

$$\begin{aligned} \|x + \psi x\|_{H_n}^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} \sum_{i=1}^n |x_i(t) + \psi(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))|^2 dt \leq \\ &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} p^2(r) \sum_{i=1}^n |x_i(t)|^2 dt = p^2(r) \cdot \|x\|_{H_n}^2, \end{aligned}$$

a więc:

$$\|x + \psi x\|_{H_n} \leq p(r) \|x\|_{H_n} \quad \text{dla } x \in S(r) \quad (6.26)$$

i podobnie można wykazać, że:

$$\|\psi x\|_{H_n} \leq q(r) \|x\|_{H_n} \quad \text{dla } x \in S(r). \quad (6.27)$$

Oszacowania (6. 26) i (6. 27) nie dają się poprawić, gdyż można wskazać w $S(r)$ takie x , dla którego zachodzą równości.

W przypadku gdy $\det A = 0$, funkcje ψ_i nie są jednoznacznie określone i wtedy zamiast funkcji $q(r)$ określonej przez (6. 24) będziemy się posługiwać funkcją:

$$q^*(r) = \max_{\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq r^2} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \varphi_i^2(x_1, \dots, x_n)}{\sum_{i=1}^n x_i^2}}. \quad (6.28)$$

Dowodzi się [w sposób identyczny jak dla $q(r)$], że jeżeli $x \in S(r)$, to zachodzi nierówność:

$$\|\psi x\|_{H_n} \leq q^*(r) \|x\|_{H_n}. \quad (6.29)$$

Warunki stabilności energetycznej. Wyprowadzone własności operatorów K i f w przestrzeni H_n pozwalają na określenie warunków stabilności równania:

$$\lambda x = K f x \quad (6.30)$$

w przestrzeni H_n [gdzie K i f są określone przez (6. 6) i (6. 21)].

Twierdzenie. Jeżeli $\det A \neq 0$ i zachodzi co najmniej jedna z nierówności:

$$\|KA\|_{H_n} p(r) < |\lambda|, \quad (6.31)$$

$$\|(\lambda I - KA)^{-1} KA\|_{H_n} q(r) < 1, \quad (6.32)$$

to równanie (6. 30) nie ma rozwiązań w zbiorze $S(r)$ mających normę $\|x\|_{H_n}$ różną od zera.

W przypadku gdy $\det A = 0$, nierówności (6. 31) i (6. 32) należy zastąpić przez:

$$\|(\lambda I - KA)^{-1} K\|_{H_n} q^*(r) < 1. \quad (6.33)$$

Dowód: Załóżmy, że $x^* \in S(r)$ i jest rozwiązaniem równania (6.30), wtedy (ponieważ $fx = A(x + \psi x)$):

$$|\lambda| \|x^*\|_{H_n} = \|Kf x^*\|_{H_n} \leq \|KA\|_{H_n} \|x^* + \psi x^*\|_{H_n} \leq \|KA\|_{H_n} p(r) \|x^*\|_{H_n},$$

co w przypadku $\|x^*\|_{H_n} \neq 0$ przeczy warunkowi (6.31).

Jeżeli λ nie należy do $Sp(KA)$, to równanie (6.30) jest równoważne równaniu

$$x = (\lambda I - KA)^{-1} KA \psi x. \quad (6.34)$$

Niech teraz $x^* \in S(r)$ i będzie rozwiązaniem równania (6.34). Wtedy:

$$\|x^*\|_{H_n} \leq \|(\lambda I - KA)^{-1} KA\|_{H_n} \cdot q(r) \|x^*\|_{H_n},$$

co przeczy warunkowi (6. 32) (dla $\|x^*\|_{H_n} \neq 0$).

W przypadku gdy $\det A = 0$, równanie (6.30) przyjmie postać: $\lambda x = KA x + K \varphi x$, a dla λ nie należącego do $Sp(KA)$:

$$x = (\lambda I - KA)^{-1} K \varphi x \quad (6.35)$$

i podobnie jak w poprzednich przypadkach warunek (6.33) jest zaprzeczeniem istnienia niezerowych rozwiązań w zbiorze $S(r)$, c.n.d.

Z udowodnionego twierdzenia wynika ważny:

Wniosek: Jeżeli λ nie należy do $Sp(KA)$, to istnieje $r_0 > 0$ takie, że w zbiorze $S(r_0)$ równanie (6. 30) nie ma rozwiązań różnych od zerowego (a więc jest stabilne energetycznie w sensie definicji 3).

Istotnie, ponieważ $q(r)$ i $q^*(r)$ dążą do zera przy $r \rightarrow 0$, więc dla dostatecznie małych r zachodzą nierówności (6. 32) lub (6. 33).

Przedstawiona praca jest pełnym tekstem rozprawy doktorskiej. Autor dziękuje Promotorowi doc. drowi Romanowi Kulikowskiemu za sugestię podjęcia tematu i cenne uwagi.

Zakład Teorii Łączności IPPT PAN

WYKAZ LITERATURY

1. Bohr.: Almost Periodic Functions. N. York 1931.
2. Kantorowicz i Akiłow: Funkcjonalny analiz w normiowanych przestrzeniach. Moskwa 1960.

3. Kudrewicz J.: Badanie stabilności nieliniowych układów elektrycznych metodami analizy funkcjonalnej. — Archiwum Elektr. t. X, nr 1, 1961.
4. Kudrewicz J.: O pewnej metodzie badania stabilności nieliniowych układów elektrycznych. — Arch. Elektr. t. X, nr 2, 1961.
5. Lusternik L. A., Sobolew W. I.: Elementy analizy funkcjonalnej. PWN, Warszawa 1950.
6. Małkin I. G.: Teiorja ustojczivosti dwizenja. Moskwa 1952.

J. KUDREWICZ

APPLICATION OF THE FUNCTIONAL ANALYSIS METHODS FOR THE INVESTIGATION OF STABILITY OF NON-LINEAR ELECTRICAL SYSTEMS

Contents

A new method of investigating the stability based on the application of the functional analysis in the qualitative investigation of non-linear integral equation (Volterra type) describing the electrical system has been proposed in this paper. The investigation has been limited to these systems, whose equations have coefficients independent of time.

The main part of this paper is devoted to the systems composed of the linear part K and non-linear one F , working in a closed feedback loop. The following equation describes such a system (Fig. 1):

$$x(t) = \mu \int_0^t k(t-\tau) f(x(\tau)) d\tau + z(t), \quad (1)$$

where $x(t)$ is a signal in the feedback loop, $f(x)$ — function describing the non-linear element F , $k(t)$ — pulse response of the linear part K , μ — the divorced numeric parameter characterizing the amplification of the system, whereas $z(t)$ — a signal applied externally to the system or formed in the system K because of certain initial conditions. We assume that the system K is composed of elements RLC with lumped constants equation (1) can be thus reduced to the finite system of simple differential equations, whereas $f(x)$ is a continuous function of the following form $f(x) = x + g(x)$, where $\frac{g(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

The idea of introduced method is based on determining such function space (Banach) of signals $x(t)$, $z(t)$ where the equation (1) could be considered as an operational equation:

$$x = Kfx + z \quad (2)$$

over the elements of this space (K is a linear operator $Kx = \int_0^t k(t-\tau) x(\tau) d\tau$,

and f a non-linear one $fx = f[x(t)]$). If now the equation (2) has sufficiently small solutions (in the sense of space norm) we say that the system is stable.

The paper investigates stability according to three different definitions: simple and asymptotic stability in Lapunov's sense, and, so called, energetic stability which has not been yet investigated.

In order to investigate the condition of simple stability (in Lapunov's sense) the space $C_{[0,\infty)}$ of the function $x(t)$ continuous for $t \in (0, \infty)$ with the norm $\|x\|_c = \sup_{t>0} x(t)$ has been introduced. It has been agreed to call the system stable, if for arbitrary $\varepsilon > 0$ such $\eta(\varepsilon)$ exists that from the inequality $\|z\|_c < \eta$ results $\|x\|_c < \varepsilon$, where x is the solution of the equation (2). Application of Newton's method for the solution of the equation (2) allowed in a simple way to get the conditions of simple stability identical with conditions received by means of the first Lapunov's method (theorems IV and V).

To determine the conditions of asymptotic stability a factor space $C_{[0,\infty)}/N$, has been introduced, where N is a set of all the functions $y(t)$ fading out by $t \rightarrow \infty$. A norm $\|x\|_{CN} = \limsup_{T \rightarrow \infty} \sup_{t>T} |x(t)|$. The electrical system has been called asymptotically stable if from the condition $\|z\|_{CN} = 0$ results $\|x\|_{CN} = 0$ [or with other words if for $z(t) \rightarrow 0$ by $t \rightarrow \infty$ the solution of the equation (2) also fades out in the infinity]. By means of the norm of the linear operator K in the space $C_{[0,\infty)}/N$ and of certain quantities characterizing the function $f(x)$ new evaluation of the range of the asymptotic stability has been obtained in the form of inequalities easy to be disserted in relation with the parameter μ (determining the amplification of the system) (theorem VI).

The idea of energetic stability has been introduced mainly in order to simplify the calculation of the norm of the linear operator (helping to evaluate the range of stability). An „under-space” H of the almost periodic functions (in H. Bohr's sense)

has been separated in the space $C_{[0,\infty)}/N$ and a norm $\|x\|_H = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt \right]^{1/2}$

has been introduced in it; the above norm determines the effective value of the signal $x(t)$. The electrical system has been called energetically stable if from the condition $\|z\|_H = 0$ results $\|x\|_H = 0$. The energetic stability is thus synonymous with the impossibility of generation by the system of almost periodic signals. As the norm of the operator K in the space H is expressed in a simple way by the transfer function of the system (Laplace's transform of the function $k(t)$), the obtained inequalities evaluating the range of energetic stability are specially convenient in applications (theorem VII).

It has been also demonstrated (theorems VIII and IX) that if the following inequality occurs:

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1 + mK(s)}{1 + MK(s)} \right) > 0 \text{ for } \operatorname{Re} s > 0, \text{ where } K(s) = \mathcal{L}[k(t)],$$

the equation $x + Kfx = 0$ is energetically stable (i.e. in the space H there are no non-zero solutions) for every function $f(x)$ satisfying the inequality $m \leq \frac{f(x)}{x} \leq M$.

The conclusions resulting from this theorem have been applied to the investigation of stability conditions of the automatic regulation systems.

The last chapter contains the generalization of the investigation methods of energetic stability on the electric systems containing many non-linear elements and many feed-back loops. Such systems are generally described by n integral equations with n unknown functions. Investigating the given system of integral equations in the space H_n being the Cartesian product of the space H ($H_n = H \times \underbrace{H \times \dots \times H}_{n\text{-times}}$) stability conditions analogous to the conditions obtained for one equation (theorem XI) have been received.

J. KUDREWICZ

APPLICATION DES MÉTHODES DE L'ANALYSE FONCTIONNELLE AUX
ÉTUDES DE LA STABILITÉ DES CIRCUITS ÉLECTRIQUES NON-LINÉAIRES

Résumé

Dans le travail présent on a proposé une méthode originelle des études de la stabilité; cette méthode consiste en application de l'analyse fonctionnelle aux études qualitatives des solutions de l'équation intégrale non-linéaire (type Volterra) décrivant le circuit électrique. On s'est borné à l'analyse des circuits, les équations de lesquels ont des coefficients indépendants du temps.

La principale partie du travail présent est consacrée aux circuits composés de la partie linéaire K et de la partie non-linéaire F , qui se trouvent ensemble dans un circuit clos à réaction. Un tel circuit (fig. 1) peut être décrit par une équation suivante:

$$x(t) = \mu \int_0^t k(t-\tau) f(x(\tau)) d\tau + z(t), \quad (1)$$

où $x(t)$ c'est le signal dans le circuit à réaction, $f(x)$ c'est la fonction décrivant l'élément non-linéaire F , $k(t)$ c'est la caractéristique impulsionnelle de la partie linéaire K , μ c'est un facteur numérique distingué, caractérisant l'amplification du circuit et $z(t)$ c'est le signal extérieur appliqué au circuit ou bien un signal se formant dans le circuit K à cause de certaines conditions initiales. Une hypothèse de départ pour étudier le circuit K est la suivante: il se compose des éléments RLC à constantes concentrées [l'équation (1) peut être alors réduite à un système fini des équations différentielles ordinaires] et $f(x)$ c'est une fonction continue sous la forme $f(x) = x + g(x)$, où $\frac{g(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

L'idée de la méthode présentée consiste en détermination d'un tel espace fonctionnel (de Banach) des signaux $x(t)$, $z(t)$ dans lequel l'équation (1) peut être étudiée comme une équation opérationnelle:

$$x = Kfx + z \quad (2)$$

au-dessus des éléments de cet espace (K c'est un opérateur linéaire):

$$Kx = \int_0^t k(t-\tau) x(\tau) d\tau,$$

et f c'est un opérateur non-linéaire:

$$fx = f[x(t)].$$

Si maintenant l'équation (2) a des solutions suffisamment petites (dans le sens de la norme d'espace), nous admettons que le circuit est stable.

Dans le travail présent on a analysé la stabilité du point de vue de trois différentes définitions: de stabilité ordinaire, de stabilité asymptotique dans le sens de Lapounoff et de si nommée stabilité énergétique, qui n'était pas considérée jusqu'à présent.

Pour étudier les conditions de la stabilité ordinaire (dans le sens de Lapounoff) on a supposé l'existence de l'espace $C_{[0, \infty)}$ des fonctions $x(t)$ continues pour $t \in [0, \infty)$ avec une norme $\|x\|_c = \sup_{t \geq 0} |x(t)|$. Le circuit peut être considéré stable, si au volontier $\varepsilon > 0$ il existe tel $\eta(\varepsilon)$, que de l'inégalité $\|z\|_c < \eta$ il résulte $\|x\|_c < \varepsilon$ où x c'est la solution de l'équation (2). L'application de la méthode de Newton à la solution de l'équation (2) a donné la possibilité d'obtenir, d'une manière simple, les conditions de la stabilité ordinaire identiques avec les conditions obtenues utilisant la première méthode de Lapounoff (théorèmes IV et V).

Pour déterminer les conditions de la stabilité asymptotique on a admis l'espace de quotient $C_{[0, \infty)}/N$, où N c'est l'ensemble de toutes les fonctions $y(t)$ disparaissant à $t \rightarrow \infty$. Dans cet espace on a déterminé la norme $\|x\|_{CN} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{t > T} |x(t)|$. Le circuit électrique est considéré stable asymptotiquement, si de la condition $\|z\|_{CN} = 0$ il résulte $\|x\|_{CN} = 0$ [ou, autrement dit, si pour $\|z\|(t) \rightarrow 0$ avec $t \rightarrow \infty$ la solution de l'équation (2) disparaît aussi à l'infini]. Utilisant la norme de l'opérateur linéaire K à l'espace $C_{[0, \infty)}/N$ ainsi que de certaines valeurs caractérisant la fonction $f(x)$, on a reçu une nouvelle évaluation des limites de stabilité asymptotique sous la forme des inégalités faciles à analyser en relation au facteur μ (déterminant l'amplification du circuit) théorème VI).

La notion de la stabilité énergétique est considéré principalement pour simplifier le calcul de la norme de l'opérateur linéaire (à l'aide doquel s'effectue l'évaluation des limites de stabilité). On a distingué à l'espace $C_{[0, \infty)}/N$ un sub-espace H des fonctions presque périodiques (dans le sens de H. Bohr) et on a admis

dans cette sub-espace une norme $\|x\|_H = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt \right]^{1/2}$ déterminant une

valeur efficace du signal $x(t)$. Le circuit électrique a été considéré stable énergétiquement s'il résulte, de la condition $\|z\|_H = 0$, que $\|x\|_H = 0$. La stabilité énergétique est ainsi synonyme avec l'impossibilité de la génération par le circuit des signaux presque périodiques. Parce que la norme de l'opérateur K dans l'espace H s'exprime simplement par la fonction de transfert du circuit [la transformée de Laplace de la fonction $k(t)$], par conséquent les inégalités obtenues, évaluant les limites de la stabilité énergétique, sont singulièrement commodes aux applications (théorème VII).

On a prouvé entre autre (théorèmes VIII et IX), que s'il arrive l'inégalité

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1 + mK(s)}{1 + MK(s)} \right) > 0 \text{ pour } \operatorname{Re} s \geq 0,$$

où $K(s) = k(t)$, l'équation $x + Kf\dot{x} = 0$ est stable énergétiquement (c'est à dire il n'y a pas dans l'espace H de solutions autres que zero) pour chaque fonction $f(x)$ accomplissant l'inégalité $m \leq \frac{f(x)}{x} \leq M$.

Les conclusions résultant de cette théorème ont été utilisé aux études des conditions de stabilité des circuits de régulation automatique.

Le chapitre dernier comporte la généralisation des méthodes d'études de la stabilité énergétique aux schémas électriques ayant beaucoup d'éléments non-linéaires et de circuits à réaction. De tels schémas s'expriment en général par n équations intégrales avec n fonctions inconnues. Analysant un système donné des équations intégrales dans l'espace H_n étant un produit de Descartes de l'espace H ($H_n = \underbrace{H \times H \times \dots \times H}_n$) on a obtenu des conditions de stabilité analogues aux conditions déterminées en cas d'une seule équation (théorème XI).

J. KUDREWICZ

ANWENDUNG VON METHODEN DER FUNKTIONALANALYSE ZUR
UNTERSUCHUNG DER STABILITÄT VON NICHT LINEAREN ELEKTRISCHEN
SYSTEMEN

Zusammenfassung

In diesem Aufsatz wird eine neue Versuchsmethode für die Untersuchung der Stabilität vorgeschlagen, welche auf der Anwendung der Funktionalanalyse für die qualitative Forschung nicht linearer Integralgleichungen (Type Volterra) beruht, die das elektrische System beschreiben. Man hat sich nur auf die Forschung derjenigen Systeme beschränkt, deren Gleichungen, die unabhängig von der Zeit sind, Faktoren besitzen.

Der Hauptteil dieses Aufsatzes ist den Systemen gewidmet, welche aus dem linearen Teil K und nicht linearen Teil F bestehen und in einer geschlossenen Rückkopplungsschleife arbeiten. Dieses System (Fig. 1) wird durch nachstehende Gleichung dargestellt:

$$x(t) = \mu \int_0^t k(t-\tau) f(x(\tau)) d\tau + z(t) \quad (1)$$

wobei $x(t)$ als Signum in der Rückkopplungsschleife ist, $f(x)$ als Funktion des beschreibenden nicht linearen Elementes ist F , $k(t)$ stellt die Charakteristik des Impulses des linearen Teiles dar, K, μ bildet ein abgesondertes Zahlenparameter, welches die Verstärkung des Systems charakterisiert, dagegen $z(t)$ ist als Signum, das äusserlich an das System angelegt oder im System K entstanden ist, infolge Bestehens gewisser anfänglicher Bedingungen. Bei der Anordnung K setzen wir voraus, dass sie aus den festgefügteten Elementen RLC besteht, die konzentrisch konstant sind. [Die Gleichung (1) dann als vollendete Anordnung gewöhnlicher Differentialgleichungen reduziert werden], dagegen ist $f(x)$ eine kontinuierliche Funktion in Form von: $f(x) = x + g(x)$, wobei $\frac{g(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ ist.

Der Sinn dieser dargestellten Methode beruht auf der Benennung einer solchen Raumfunktion (nach Banach) der Signa $x(t), z(t)$, in welcher die Gleichung (1) als operatorische Gleichung betrachtet werden kann:

$$x = Kfx + z \quad (2)$$

Über den Elementen dieses Raumes (K ist linearer Operator):

$$Kx = \int_0^t k(t-\tau) x(\tau) d\tau$$

und f nicht linearer Operator:

$$fx = f[x(t)].$$

Wenn jetzt die Gleichung (2) eine genügend kleine Lösung besitzt (im Sinne der Raumnorm), so sagen wir, dass das System stabil ist. In diesem Aufsatz wurde die Stabilität vom Standpunkte drei verschiedener Definitionen betrachtet, d.h. der gewöhnlichen asymptotischen Stabilität im Sinne Lapunow's und noch nicht untersuchten, sogenannten energetischen Stabilität.

Zwecks Untersuchung der Bedingungen für die gewöhnliche Stabilität (im Sinne von Lapunow), führte man in den Raum $C_{[0, \infty)}$ die Funktion $x(t)$ ein, die kontinuierlich für $t \in [0, \infty]$ mit der Norm $\|x\|_c = \sup_{t \geq 0} |x(t)|$ ist. Dieses System wird als mit „stabil“ bezeichnet angenommen, wenn für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $\mu(\varepsilon)$ existiert, das aus der Ungleichheit $\|z\|_c < \mu$ sich ergibt, und $\|x\|_c < \varepsilon$, wo x die Lösung der Gleichung (2) ist. Die Anwendung der Newton'schen Methode zur Lösung der Gleichung (2) gestattete auf einfache Weise die Errechnung der Bedingungen für die gewöhnliche Stabilität, die identisch mit den erzielten Bedingungen ist, die mittels der ersten Methode nach Lapunow erzielt wurden. (Behauptungssatz IV und V). Zwecks Bestimmung der asymptotischen Stabilitätsbedingungen wurde der Quotientenraum $C_{[0, \infty)}/N$ eingeführt, wo N die Zusammenstellung aller Funktionen $y(t)$ ist, welche bei $t \rightarrow \infty$ schwinden.

In diesem Raume wurde die Norm $\|x\|_{CN} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{t > T} |x(t)|$ bezeichnet. Die elektrische Anordnung wird dann als asymptotisch stabil bezeichnet, wenn aus der Bedingung $\|z\|_{CN} = 0$ sich ergibt, und dass $\|x\|_{CN} = 0$ ist, [oder anders gesagt, wenn für $z(t) \rightarrow 0$ bei $t \rightarrow \infty$ die Lösung der Gleichung (2) ebenfalls in der Unendlichkeit schwindet]. Mit Hilfe der Norm des linearen Operators K im Raume $C_{[0, \infty)}/N$ und gewisser Größen, welche die Funktion $f(x)$ charakterisieren, erzielte man eine neue Einschätzung des asymptoten Stabilitätsbereiches in Form von Ungleichheiten, die leicht für die Dissertation in Abhängigkeit vom Parameter μ (welches die Verstärkung des Systems bezeichnet) (n. Behauptungssatz VI), ist.

Der Begriff der energetischen Stabilität wurde hauptsächlich zur Vereinfachung für die Berechnung der Norm des linearen Operators (mit dessen Hilfe man den Stabilitätsbereich einschätzt), eingeführt. Im Raume $C_{[0, \infty)}/N$ wurde der Unterraum H der fast periodischen Funktionen abgesondert (im Sinne von H. Bohr), und dagegen die Norm:

$$\|x\|_H = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt \right]^{1/2} \text{ eingeführt, welche den Effektivwert des Signums } x(t)$$

bezeichnet. Das elektrische System wird als energetisch stabil bezeichnet, wenn aus der Bedingung $\|z\|_H = 0$ sich $\|x\|_H = 0$ ergibt. Die energetische Stabilität ist also gleichbedeutend der Unmöglichkeit einer Erzeugung der fast periodischen Signa durch das System. Da jedoch die Norm des Operators K im Raume H auf einfache Weise durch die Funktion der Übertragung [durch Transformation der Funktion $k(t)$ nach Laplace] ausgedrückt wird, sind die erzielten Ungleichheiten, welche den energetischen Stabilitätsbereich einschätzen, besonders bequem bei der Anwendung (Behauptungssatz VII). Es wurde u. a. bewiesen, (lt. Behauptungssätzen VIII u. IX), dass beim Vorkommen folgender Ungleichheit

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1 + mK(s)}{1 + MK(s)} \right) > 0 \text{ für } \operatorname{Re} s \geq 0, \text{ wo } K(s) = \mathcal{L}[k(t)],$$

so gilt die Gleichung $x + Kfx = 0$ als energetisch stabil (d.h. dass es im Raume H keine nicht nullige Lösung giebt), für jede Funktion $f(x)$, welche die Ungleichheit $m \leq \frac{f(x)}{x} \leq M$ erfüllt.

Die Folgerungen, welche sich aus diesem Behauptungssatz ergeben, wurden bei der Untersuchung der Stabilitätsbedingungen der selbstgesteuerten Systeme angewandt. Der letzte Abschnitt enthält eine Verallgemeinerung der Untersuchungsmethoden der energetischen Stabilität in Bezug auf elektrische Systeme, welche viele nicht lineare Elemente sowie viele Rückkopplungsschleifen enthalten.

Solche Systeme beschreiben sich allgemein mit n Integralgleichungen, mit n unbekannten Funktionen. Bei der Betrachtung eines gegebenen Systems von Integralgleichungen im Raume H_n , welches das Karthesianische Produkt H ($H_n = \underbrace{H \times H \times \dots \times H}_{n \text{ mal}}$) darstellt, erhielt man Stabilitätsbedingungen, welche analog den Bedingungen sind, wie sie bei einer Gleichung erzielt wurden (Behauptungssatz XI).

Я. КУДРЕВИЧ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СХЕМ

Резюме

В представленной работе предлагается новый метод исследования устойчивости основанный на применении функционального анализа для качественного исследования решений нелинейного интегрального уравнения (типа Вольтерры), описывающего электрическую схему. Рассматриваются только лишь такие схемы, уравнения которых имеют коэффициенты независимые от времени.

Основная часть работы посвящена схемам состоящим из линейной части K и нелинейной F работающих в замкнутой цепи обратной связи. Такая схема (рис. 1) описывается следующим уравнением:

$$x(t) = \mu \int_0^t k(t-\tau) f(x(\tau)) d\tau + z(t), \quad (1)$$

где $x(t)$ является сигналом в цепи обратной связи, $f(x)$ — функцией описывающей нелинейный элемент F , $k(t)$ является импульсной переходной функцией линейной части K , μ — выделенным численным параметром характеризующим усиление системы, а $z(t)$ — сигналом приложенным извне к схеме, или возникшим в системе K из-за существования некоторых начальными условиями. Принято, что система K состоит из элементов RLC с сосредоточенными постоянными [уравнение (1) может быть тогда приведено к конечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений], а $f(x)$ есть непрерывной функцией вида $f(x) = x + g(x)$, где $\frac{g(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Идея представленного метода состоит в определении такого пространства Банаха сигналов $x(t)$, $z(t)$, в котором уравнение (1) может рассматриваться в качестве операционного уравнения:

$$x = K f x + z \quad (2)$$

над элементами этого пространства (K является линейным оператором:

$$Kx = \int_0^t k(t-\tau) x(\tau) d\tau,$$

а f нелинейным $fx = f[x(t)]$. Если теперь уравнение (2) имеет достаточно малые решения (в смысле нормы пространства), то мы утверждаем, что схема является устойчивой.

В работе рассматривается стабильность с точки зрения трёх различных определений: обычной устойчивости, асимптотической устойчивости в смысле Ляпунова и, до сих пор не рассматриваемой, так называемой энергетической устойчи-

ности. Для исследования условий обычной устойчивости (в смысле Ляпунова) введено пространство $C_{[0, \infty)}$ функций $x(t)$ непрерывных для $t \in [0, \infty]$ с нормой $\|x\|_C = \sup_{t \geq 0} x(t)$. Систему принято считать устойчивой, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta(\varepsilon)$, что из неравенства $\|z\|_C < \eta$ следует $\|x\|_C < \varepsilon$ где x является решением уравнения (2). Применение метода Ньютона к решению уравнения (2) даёт возможность простым способом получить условия обычной устойчивости, тождественные с условиями полученными с помощью первого метода Ляпунова (теоремы IV и V).

Для получения условий асимптотической устойчивости введено фактор-пространство $C_{[0, \infty)}/N$, где N является совокупностью всех функций $y(t)$ исчезающих при $t \rightarrow \infty$. В этом пространстве определено норму $\|x\|_{CN} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{t > T} |x(t)|$. Электрическую схему считают асимптотически устойчивой, если из условия $\|z\|_{CN} = 0$ следует $\|x\|_{CN} = 0$ [или иначе говоря, если для $z(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ решение уравнения (2) тоже исчезает в бесконечности]. При помощи нормы линейного оператора K в пространстве $C_{[0, \infty)}/N$ и некоторых величин характеризующих функцию $f(x)$ получено новую оценку диапазона асимптотической устойчивости в виде неравенств лёгких для проанализирования в зависимости от параметра μ (определяющего усиление схемы) (теорема VI).

Понятие энергетической устойчивости введено главным образом для упрощения расчётов нормы линейного оператора (с помощью которого оценивается диапазон стабильности). Введено в пространстве $C_{[0, \infty)}/N$ субпространство H почти периодических функций (в смысле Г. Бора) и введено в нём норму

$$\|x\|_H = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt \right]^{1/2} \text{ определяющую эффективное значение сигнала } x(t).$$

Электрическую систему считают энергетически устойчивой, если из условия $\|z\|_H = 0$ следует $\|x\|_H = 0$. Энергетическая устойчивость следовательно однозначна с невозможностью генерирования системой почти-периодических сигналов. Так как норма оператора K в пространстве H выражается простым способом переходной функцией системы (преобразованием Лапласа функции $k(t)$), следовательно получаемые неравенства оценивающие диапазон энергетической устойчивости являются особенно выгодными для применения (теорема VII).

Доказано между прочим (теоремы VIII и IX), что если выполнено неравенство:

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1 + mK(s)}{1 + MK(s)} \right) > 0, \text{ для } \operatorname{Re} s \geq 0,$$

где $K(s) = a[k(t)]$, то равенство $x + Kfx = 0$ стабильно энергетически (это обозначает, что в пространстве H нет ненулевых решений) для каждой функции $f(x)$ соблюдающей неравенство $m \leq \frac{f(x)}{x} \leq M$.

Следующие из этой теоремы выводы применены для исследования условий устойчивости схем автоматического регулирования.

Последняя глава содержит обобщение методов исследования энергетической устойчивости для применения к электрическим схемам, содержащим много нелинейных элементов и много цепей обратной связи. Такие схемы описываются в общем n интегральными уравнениями с n неизвестными функциями. Рассматривая данную систему интегральных уравнений в пространстве H_n являющемся прямым произведением пространства H ($H_n = \underbrace{H \times H \times \dots \times H}_{n \text{ раз}}$) получено условия устойчивости аналогичные к условиям полученным для одного уравнения (теорема XI).

ANDRZEJ WISZNIEWSKI

Nowa metoda określania charakterystyk członów pomiarowych przekąźników odległościowych typu L3 (B.B.C.)

Rękopis dostarczony 27.6.1960

W artykule, stosując metodę odwzorowania płaszczyzn zespolonych, wyprowadzono równania określające przebiegi charakterystyk przekąźnika L3 na płaszczyźnie RX . Udowodniono, że przebiegi charakterystyk zależą od rodzaju zwarcia i oporności źródła zasilania.

Wywody, zilustrowane przykładem obliczeń, pozwalają na wykreślne przedstawienie obszarów działania przekąźnika L3 w zależności od rodzaju zwarcia oraz oporności źródła zasilania.

1. WSTĘP

Przekąźniki odległościowe typu L3 i niektóre im pokrewne (np. RYT 10) łączy wspólna cecha, polegająca na tym, że w chwili niesymetrycznego zwarcia ich człony mierzące otrzymują prądy i napięcia pochodzące nie tylko z pętli zwarciowej, lecz także z fazy lub faz nie dotkniętych zwarcie. W przekąźnikach, o których mowa, obok prądu zwarciowego oraz napięcia pętli zwarcia na człon mierzący podaje się jeszcze napięcie polaryzujące z obwodów nie uszkodzonych lub uszkodzonych tylko częściowo.

Napięcie polaryzujące, o którym mowa, powoduje, że charakterystyka członu mierzącego wykreślana w płaszczyźnie RX zależy od rodzaju zwarcia i oporności wewnętrznej systemowego źródła zasilania. Liczbowe ujęcie tych zależności jest tematem niniejszego artykułu. Omówiony w nim zostanie tylko przekąźnik L3, jako powszechnie występujący w sieciach krajowych.

2. SPOSÓB UJĘCIA ZAGADNIENIA

Człon mierzący przekąźnika L3 jest przyrządem indukcyjnym. Na ruchomy bębenek działa moment pochodzący od dwu strumieni magnetycznych. Pierwszy z nich jest powodowany napięciem $\hat{U}_1$ przyłożonym do cewki I. Napięcie to wynosi:

$$\hat{U}_1 = \hat{I} \hat{Z}_M - \hat{U}, \quad (1)$$

gdzie:

$\hat{Z}_M$ — zastępcza impedancja linii nastawiana na przekąźniku,
 $\hat{U}, \hat{I}$ — napięcie i prąd z pętli zwarciowej dobrane tak, że

$$\frac{\hat{U}}{\hat{I}} \hat{Z}_1,$$

$\hat{Z}_1$ — oporność dla składowej zgodnej linii od miejsca zainstalowania przekąźnika do miejsca zwarcia.

Drugi strumień jest wytwarzany przez napięcie $\hat{U}_2$ przyłożone do cewki II. Jest to napięcie:

dla zwarć trójfazowych — międzyprzewodowe opóźnione o 60° względem U ,

dla zwarć dwufazowych — między wyprzedzającą fazą zwartą a fazą „zdrową”,

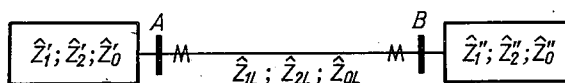
dla zwarć jednofazowych — międzyfazowe faz nie uszkodzonych.

Równanie na moment dla układu indukcyjnego jest określane przez następujący wzór:

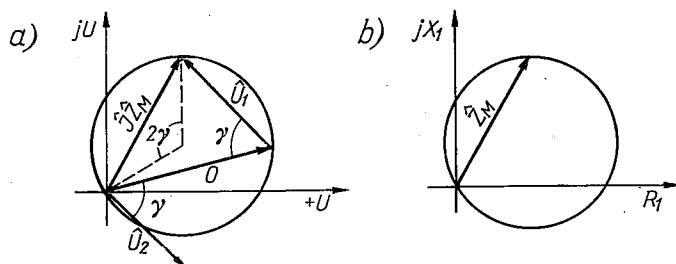
$$M = k U_1 U_2 \sin(U_1, U_2). \quad (2)$$

Przyjmując, że $U_1 \neq 0$, $U_2 \neq 0$ oraz że charakterystyka przekąźnika jest określona równaniem (2), przy założeniu $M = 0$ otrzymuje się równanie w postaci:

$$\sin(\hat{U}_1, \hat{U}_2) = 0. \quad (3)$$



Rys. 1. Schemat systemu, w którym pracuje przekąźnik



Rys. 2. Wykres działania przekąźnika dla założenia $\gamma = \text{const}$: a) w płaszczyźnie napięć, b) w płaszczyźnie oporności pozorniej

Wykreślając wykres wektorowy napięć (rys. 2a) otrzymuje się w wyniku napięciowy obszar działania przekąźnika. Obszar ten jest okręgiem, jeśli założyć, że kąt między wielkościami $\hat{U}$ i $\hat{U}_2$ jest stały i wynosi γ . Okręg

ten przeniesiony w płaszczyznę Z_1 — otrzymaną przez podzielenie płaszczyzny napięć przez prąd $\hat{I}$ — jest przedstawiony na rys. 2b.

Wpływ napięcia polaryzującego na przebieg charakterystyk polega na tym, że wyżej określony kąt γ nie jest wielkością stałą. Zależy on od rodzaju zwarcia, systemowego źródła zasilania, odległości miejsca zwarcia od przekaznika i oporności łuku. Dotychczasowe publikacje [1], [2] podają interwał możliwych zmian kątów γ , wykreślając charakterystyki dla wartości krańcowych.

Celem niniejszego artykułu jest uzyskanie wykresu charakterystyki dla omawianych przekazników nie w formie rodziny kół dla różnych kątów γ , lecz w formie jednej krzywej. Przebieg tego okręgu będzie zależał, jak wspomniano na wstępie, od rodzaju zwarcia i parametrów energosystemu.

3. OKREŚLENIE PRZEBIEGU CHARAKTERYSTYK PRZEKAŹNIKÓW L3

Charakterystyka przekaznika L3 musi być określona osobno dla każdego rodzaju zwarcia.

Dla zwarcia trójfazowego, symetrycznego przebieg jej można znaleźć na podstawie rozważań z rozdziału 2. Należy bowiem zauważyć, że przy tym zwarcu kąt γ jest stały i wynosi 60° . Charakterystyka przebiega więc tak, jak to pokazuje rys. 2b.

Poniżej zostaną określone przebiegi charakterystyk dla zwarć 2 i 1-fazowych. Zakłada się, że przekaznik pracuje w systemie pokazanym na rys. 1. Dla zwarcia dwufazowego faz $R - T$ w kierunku linii warunek działania przekaznika 1 przedstawiony równaniem (3) może być napisany nieco inaczej:

$$\frac{|\hat{Z}_M(\hat{I}_R - \hat{I}_T) - (\hat{U}_R - \hat{U}_T) + j(\hat{U}_S - \hat{U}_T)|}{|\hat{Z}_M(\hat{I}_R - \hat{I}_T) - (\hat{U}_R - \hat{U}_T) - j(\hat{U}_S - \hat{U}_T)|} = 1, \quad (4)$$

gdzie:

$\hat{U}_R, \hat{U}_S, \hat{U}_T$ — napięcia faz R, S, T ,

$\hat{I}_R, \hat{I}_T$ — prądy faz R, T .

Dzieląc równanie (4) przez $(\hat{I}_R - \hat{I}_T)$ otrzymuje się:

$$\frac{\left| \hat{Z}_M - \hat{Z}_1 + j \frac{\hat{U}_S - \hat{U}_T}{\hat{I}_R - \hat{I}_T} \right|}{\left| \hat{Z}_M - \hat{Z}_1 - j \frac{\hat{U}_S - \hat{U}_T}{\hat{I}_R - \hat{I}_T} \right|} = 1. \quad (5)$$

Można obliczyć, że:

$$\frac{\hat{U}_S - \hat{U}_T}{\hat{I}_R - \hat{I}_T} = \hat{Z}_1 e^{j60^\circ} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{Z}'_1, \quad (6)$$

gdzie $\hat{Z}'_1$ oznacza oporność systemowego źródła zasilania dla składowej zgodnej.

Podstawiając równanie (6) w (5) otrzymuje się

$$\frac{\left| \hat{Z}_1(1 + e^{j30}) - \hat{Z}_M + \hat{Z}'_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \right|}{\left| \hat{Z}_1(1 - e^{j30}) - \hat{Z}_M - \hat{Z}'_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \right|} = 1, \quad (7)$$

co daje się prościej zapisać:

$$\frac{|\hat{Z}_1 - \hat{A}|}{|\hat{Z}_1 - \hat{B}|} = p, \quad (8)$$

przy czym:

$$\hat{A} = \frac{\hat{Z}_M - \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{Z}'_1}{1 + e^{j30}}, \quad (9)$$

$$\hat{B} = \frac{\hat{Z}_M + \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{Z}'_1}{1 - e^{j30}}. \quad (10)$$

$$p = \frac{|1 - e^{j30}|}{|1 + e^{j30}|}. \quad (11)$$

Równanie (8) określa w płaszczyźnie $\hat{Z}_1$ okrąg. Dla łatwiejszego wyznaczenia środka i promienia tego okręgu należy rozwiązać to równanie ze względu na $\hat{Z}_1$. Otrzymuje się wtedy:

$$\hat{Z}_1 = \frac{p^2 \hat{B} - \hat{A}}{p^2 - 1} + \frac{|\hat{B} - \hat{A}|}{|p^2 - 1|} p e^{j\psi}, \quad (12)$$

gdzie ψ zmienne od 0 do 360°.

Równanie (12) pierwszym członem prawej strony wyznacza środek, natomiast drugim — długość promienia okręgu charakterystyki. Podobnie wyznacza się obszar działania przekazywnika dla zwarć jednofazowych.

Dla zwarcia fazy R z ziemią warunek działania można napisać następująco:

$$\frac{|\hat{Z}_M(\hat{I}_R + 3k\hat{I}_0) - \hat{U}_R + je^{j12}(\hat{U}_S - \hat{U}_T)|}{|\hat{Z}_M(\hat{I}_R + 3k\hat{I}_0) - \hat{U}_R - je^{j12}(\hat{U}_S - \hat{U}_T)|} = 1, \quad (13)$$

gdzie:

$\hat{I}_0$ — składowa zerowa prądu,

k — współczynnik korekcji prądowej,

e^{j12} — wartość określająca przesunięcie fazowe cewki polaryzującej.

Dla zwarcia tego można obliczyć:

$$\frac{\hat{U}_S - \hat{U}_T}{\hat{I}_R + 3k\hat{I}_0} = -\sqrt{3} \left[\hat{Z}_1 + \hat{Z}'_1 - \frac{\hat{Z}'_1(1+3k) - \hat{Z}'_0}{2\hat{I}_1 + (1+3k)\hat{I}_0} \hat{I}_0 \right]. \quad (14)$$

Jak widać, prawa strona równania (14) zależy od ilorazu $\frac{\hat{I}_0}{\hat{I}_1}$, czyli od stosunku współczynników rozptywu dla składowej zgodnej i zerowej. Przy przemieszczaniu się zwarcia wzdłuż linii stosunek ten z reguły ulega zmianie. Równanie (14) można w każdym razie napisać

$$\frac{\hat{U}_S - \hat{U}_T}{\hat{I}_R + 3k\hat{I}_0} = -j\sqrt{3}[\hat{Z}_1 + \Delta\hat{Z}]. \quad (15)$$

Z analizy najczęściej spotykanych współczynników rozptywu można przyjąć, że przy zwarciach blisko granicy pierwszej strefy — a takie są dla nas najbardziej interesujące — można w przybliżeniu przyjąć:

$$\Delta\hat{Z} \approx 0,6\hat{Z}'_1. \quad (16)$$

Podstawiając równanie (15) i (16) do równania (13) otrzymuje się:

$$\frac{|\hat{Z}'_1(1 + \sqrt{3}e^{j12}) - \hat{Z}_M + 0,6\hat{Z}'_1e^{j12}|}{|\hat{Z}'_1(1 - \sqrt{3}e^{j12}) - \hat{Z}_M - 0,6\hat{Z}'_1e^{j12}|} = 1. \quad (17)$$

Równanie (17) ma postać podobną do równania (7), zatem rozwiązuje się je tak samo, otrzymując ostatecznie w wyniku obszar działania jako okrąg.

4. DZIAŁANIE PRZEKAŹNIKA L3 PRZY ZWARTCIACH WSTECZ

Dla przełączników, które na człon mierzący podawały parametry wyłącznie z pętli zwarcia, fakt przebiegu charakterystyki przez III ćwiartkę określa, że bliskie zwarcia „za plecami” spowodują działanie członu mierzącego. Inaczej jest w przełącznikach omawianych w niniejszym artykule. Przebieg charakterystyki przełącznika w płaszczyźnie $\hat{Z}_1$ określa jego działanie przy zwarciach tylko w danym, z góry określonym kierunku. Tak więc przebieg charakterystyki przez II i III ćwiartkę układu współrzędnych określa, że przełącznik zadziała przy zwarcu w danym kierunku przez ujemną oporność czynną:

W celu określenia działania przy zwarciach wstecz należy ułożyć warunek działania przy tego typu zaburzeniach. W przypadku np. zwarcia dwufazowego RT można napisać:

$$\frac{|-\hat{Z}_M(\hat{I}_R - \hat{I}_T) - (\hat{U}_R - \hat{U}_T) + j(\hat{U}_S - \hat{U}_T)|}{|-\hat{Z}_M(\hat{I}_R - \hat{I}_T) - (\hat{U}_R - \hat{U}_T) - j(\hat{U}_S - \hat{U}_T)|} = 1, \quad (18)$$

gdzie:

$\hat{I}_R, \hat{I}_T$ — prądy płynące w linii $A - B$ (rys. 1),

$\hat{U}_R, \hat{U}_S, \hat{U}_T$ — napięcie na szynach stacji A .

Z punktu widzenia przekąźnika można napisać:

$$\frac{\hat{U}_R - \hat{U}_T}{\hat{I}_R - \hat{I}_T} = \hat{Z}_1. \quad (19)$$

Oczywiście można napisać:

$$\frac{\hat{U}_S - \hat{U}_T}{\hat{I}_R - \hat{I}_T} = \hat{Z}_1 e^{-j60} - j \frac{\sqrt{3}}{2} (\hat{Z}_1'' + \hat{Z}_{1L}), \quad (20)$$

gdzie $\hat{Z}_{1L}$ — oporność linii $A - B$ dla składowej zgodnej.

Równanie działania przekąźnika przedstawia się zatem:

$$\left| \frac{\hat{Z}_1 (1 + e^{j30}) + \hat{Z}_M + \frac{\sqrt{3}}{2} (\hat{Z}_1'' - \hat{Z}_{1L})}{\hat{Z}_1 (1 - e^{j30}) + \hat{Z}_M - \frac{\sqrt{3}}{2} (\hat{Z}_1'' - \hat{Z}_{1L})} \right| = 1. \quad (21)$$

Równanie (21) łatwo już sprowadzić do postaci określonej równaniem (8).

Stwierdzając, że przekąźnik będzie działał poprawnie przy zwarciach „za plecami” należy dowieść, że obszar działania obejmuje oporności, które nie mogą wystąpić w praktyce.

5. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY OKREŚLENIA CHARAKTERYSTYK PRZEKĄŹNIKA L3 PRZY RÓŻNEGO RODZAJU ZWARCIACH

Wartości oporności wyrażone z uwzględnieniem przekładni napięciowej 110/0,1 oraz prądowej 300/5 wynoszą odpowiednio (rys. 1):

$$\hat{Z}_{1L} = \hat{Z}_{2L} = 1,2 \cdot e^{j60} \Omega,$$

$$\hat{Z}_{0L} = 3,6 \cdot e^{j60} \Omega,$$

$$\hat{Z}'_1 = \hat{Z}'_2 = j \cdot 0,9 \Omega,$$

$$\hat{Z}''_1 = \hat{Z}''_2 = j \cdot 0,5 \Omega,$$

$$\hat{Z}'_0 = j \cdot 1 \Omega,$$

$$\hat{Z}''_0 = j \cdot 0,3 \Omega.$$

Oblicza się charakterystykę przekąźnika zainstalowanego w stacji A dla zwarć w kierunku linii.

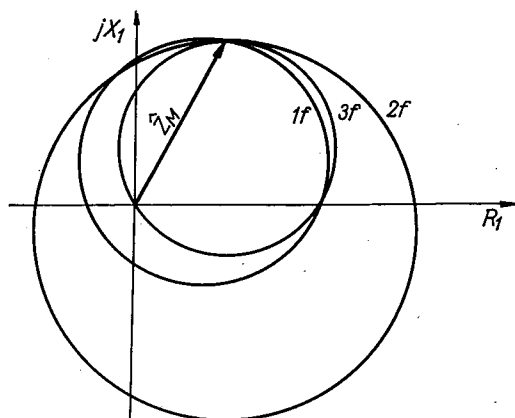
Dla przekąźnika tego $Z_M = 1 \cdot e^{j60}$

a) Dla zwarcia trójfazowego

Zgodnie z twierdzeniami rozdziału 2 można napisać nie uciekając się do podstawienia w równanie (8):

$$Z_1 = 0,58 e^{j30} + 0,58 e^{j\psi}.$$

Charakterystyka jest pokazana na rys. 3 (krzywa 3f).



Rys. 3. Zestawienie charakterystyk dla zwarcia: jednofazowych (krzywa 1f), dwufazowych (krzywa 2f), trójfazowych (krzywa 3f) — wg przykładu obliczeniowego

b) Dla zwarcia dwufazowego R — T

Zgodnie ze wzorami (9), (10), (11)

$$\hat{A} = \frac{e^{j60} - 0,78 e^{j90}}{1 + e^{j30}} = 0,26 e^{-j6},$$

$$\hat{B} = \frac{e^{j60} + 0,78 e^{j90}}{1 - e^{j30}} = 3,3 e^{j148},$$

$$p = 0,27.$$

A zatem:

$$\hat{Z}_1 = 0,5 e^{-j16} + 1,02 e^{j\psi}.$$

Wykres określony tym równaniem jest pokazany na rys. 3 (krzywa 2f) oraz na rys. 4 (krzywa 2).

c) Dla zwarcia jednofazowego R — O

Dla tego zwarcia:

$$A = \frac{\hat{Z}_M - 0,6 \hat{Z}'_1 e^{j12}}{1 + \sqrt{3} e^{j12}} = \frac{e^{j60} - 0,54 e^{j102}}{2,74 e^{j6}} = 0,26 e^{j20},$$

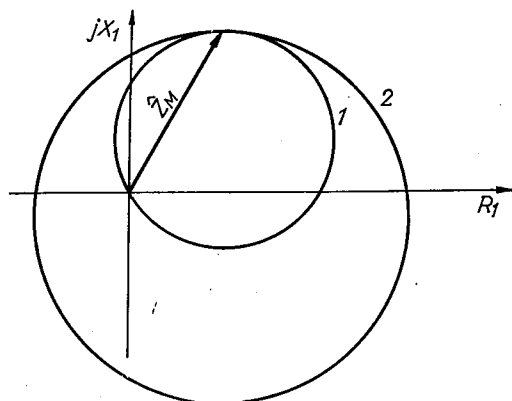
$$B = \frac{\hat{Z}_M + 0,6 \hat{Z}'_1 e^{j12}}{1 - \sqrt{3} e^{j12}} = \frac{1,44 e^{j75}}{0,79 e^{-j152}} = 1,82 e^{j227},$$

$$p = 0,27.$$

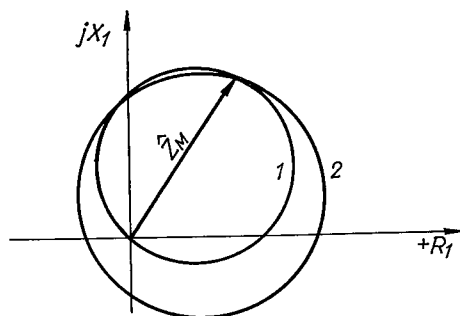
A zatem:

$$\hat{Z}_1 = 0,43 e^{j29} + 0,64 e^{j\psi}.$$

Wykres określony tym równaniem jest pokazany na rys. 3 (krzywa 1f) oraz na rys. 5 (krzywa 2).



Rys. 4. Zestawienie charakterystyk dla zwarcia dwufazowego. Krzywa 1 — charakterystyka uproszczona przy założeniu $\hat{Z}'_1 = 0$, krzywa 2 — charakterystyka dokładna wg przykładu obliczeniowego



Rys. 5. Zestawienie charakterystyk dla zwarcia jednofazowego. Krzywa 1 — charakterystyka uproszczona, krzywa 2 — charakterystyka dokładna wg przykładu obliczeniowego

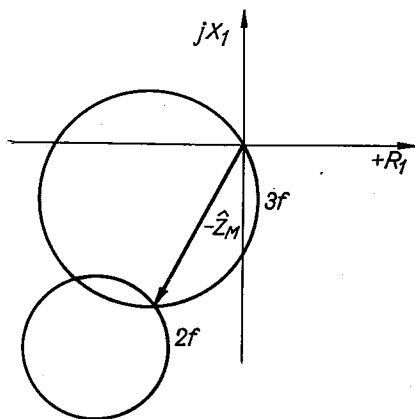
6. OMÓWIENIE WYNIKÓW I WNIOSKI

Jak widać z przykładu obliczeniowego, przebieg charakterystyk przełącznika dla zwarć niesymetrycznych (rysunku 3, 4 i 5) różni się nieco od wykresu uproszczonego, zakładającego stałość kąta γ . Szczególnie duże różnice występują dla zwarcia dwufazowego.

Przebiegi charakterystyk rzeczywistych w zestawieniu z uproszczonymi (rysunki 3, 4) wskazują na to, że odkształcenie obszaru działania jest

dla zabezpieczenia korzystne. Jak widać z wykresów, odkształcenie to powoduje zmniejszanie wrażliwości przełącznika na oporność przejścia w miejscu zwarcia.

Na rys. 6 pokazano charakterystyki przełącznika dla zwarcia dwu- i trójfazowego po stronie szyn zbiorczych. Charakterystyki podano bez obliczeń. Jak widać z tych wykresów, w których przyjęto oporność w kierunku szyn za dodatnią, obszar zakreślony okręgiem $3f$ oraz $2f$ określa oporność, która nie może wystąpić w praktyce systemowej.



Rys. 6. Zestawienie charakterystyk działania przy zwarciach wstecz: dla zwarcia trójfazowego — krzywa $3f$, dla zwarcia dwufazowego — krzywa $2f$

Z rozważań wyżej przytoczonych można wyciągnąć następujące wnioski.

Rzeczywisty obszar działania przełącznika L3 określany okręgiem charakterystyki różni się od przebiegu uproszczonego tym więcej, im większa jest oporność wewnętrzna źródła zasilania w stosunku do oporności $\hat{Z}_M$ nastawionej na przełączniku. W związku z tym dla krótkich linii pracujących w słabym systemie należy określać charakterystyki wyżej omawianą metodą, natomiast w przypadku linii długich pracujących w systemie silnym, przyjęcie charakterystyk uproszczonych nie powoduje poważniejszych błędów.

Przebieg charakterystyk rzeczywistych wskazuje na fakt, że oporność źródła zasilania zmniejsza wrażliwość przełącznika na oporność przejścia w miejscu zwarcia.

Określenie w wyłożony wyżej sposób przebiegów działania przełącznika przy zwarciach „za plecami” może znaleźć nieliczne zastosowanie i to tylko przy analizie nieprawidłowych wyłączeń mających miejsce np. w czasie zwarć jednocześnie z kołysaniami zwarciovymi.

WYKAZ LITERATURY

1. Atabiekow G. I.: Teoreticheskie osnovy relejnoj zaszczyty wysokowoltnych sietiej. Goseniergoizdat., Moskwa 1958.
2. Lidwin A., Trojak J., Bekker I., Radecki I.: Zabezpieczenia i ochrony przekaźnikowe w układach elektroenergetycznych. PWT, Warszawa 1959.
3. Sonneman W. K., Lensner H. W.: Compensator Distance Relaying. General Principles of Operation. — A.I.E.E. Transaction, Part III, 1958, str. 37.
4. Wiszniewski A.: Kilka uwag o kształtowaniu charakterystyk przekaźników odległościowych i kierunkowych. — Przegląd Elektrotechniczny nr 3, 1960.
5. Zydanowicz J.: Zabezpieczenia przekaźnikowe układów elektroenergetycznych, cz. I, PWN, Warszawa 1957.

A. WISZNIEWSKI

A NEW METHOD OF DETERMINING THE CHARACTERISTICS OF THE DISCRIMINATING ELEMENT OF THE DISTANCE RELAY TYPE L3 (B.B.C.)

Summary

Equations determining the lines of the characteristics of the relay L3 on the $R - X$ diagram are obtained by applying the transformation method of the complex planes.

There is demonstrated that the lines of the characteristics depend on the kind of fault and on the impedance of the supply source.

The deductions illustrated by calculations render it possible to determine, by plotting a diagram, the zones of operation of the relay L3 as a function of kind of fault and the supply source.

A. WISZNIEWSKI

UNE NOUVELLE MÉTHODE DE DÉTERMINER LES CARACTÉRISTIQUES DES UNITÉS DE MESURE DE RELAIS DE DISTANCE TYPE L3 (B.B.C.)

Résumé

Dans cet article appliquant la méthode de transformation des diagrammes d'impédance on obtient les équations qui déterminent les caractéristiques du relais L3. On démontre que ces caractéristiques dépendent de l'espèce du court-circuit et de l'impédance, de la source d'alimentation.

Les deductions illustrées par l'exemple des comptes, permettent de tracer les zones de fonctionnement du relais L3, en dépendance de la sorte du court-circuit et de l'impédance de la source d'alimentation.

A. WISZNIEWSKI

NEUE ABLEITUNGSMETHODE DER ORTSDIAGRAMME FÜR WIEDERSTANDSMESSGLIEDER DER B.B.C. L3- DISTANZRELAIS

Zusammenfassung

Mit Anwendung von Komplexen Fläche RX wurden die Grundformen und Ortsdiagramme des Distanzrelais L3 abgeleitet und aufgestellt. Es wurde bewiesen.

dass die Lage der Ortskurve auf der RX -Fläche vom komplexen Widerstand der Kurzschlussquelle und der Kurzschlussart hängt ab.

Der aufgeführte Beispiel gibt einen klaren Über die Handhabung der im Aufsatz abgeleiteten Gleichungen und Kurven.

А. ВИШНЕВСКИ

НОВЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК
ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ОРГАНОВ ДИСТАНЦИОННЫХ ЗАЩИТ ТИПА L3 (В.В.С.)

Резюме

В статье применяется метод преобразования комплексных плоскостей — выведены уравнения определяющие характеристики защиты L3 в координатах RX . Доказано, что характеристики зависят от вида короткого замыкания и сопротивления источников тока.

Выводы, иллюстрированные расчётным примером, дают возможность графического определения зон действия защиты L3 в зависимости от вида короткого замыкания, а также сопротивления источников тока.

POLECAMY UWADZE CZYTELNIKÓW

B. Konorski

PODSTAWY ELEKTROTECHNIKI

t. I, 1956 r.; t. II, 1961 r.

R. Kulikowski

WSTĘP DO SYNTEZY LINIOWYCH UKŁADÓW ELEKTRYCZNYCH

1957

S. Węgrzyn

PRZEBIEGI NIEUSTALONE W OBWODACH ELEKTRYCZNYCH

1960

Reklamacje wynikające z niemożliwości nabycia naszych
książek przyjmuje i załatwia Państwowe Wydawnictwo
Naukowe — Dział Sprzedaży Książek. Warszawa. Miodo-
wa 10, tel. 6-22-91 w. 355.

IRENA PERSAK

Optymalizacja układów unilateryzacji we wzmacniaczach tranzystorowych wielkiej częstotliwości

Rękopis dostarczono 13. 4. 1962

Artykuł zawiera omówienie i porównanie różnych systemów unilateryzacji wzmacniaczy tranzystorowych wielkiej częstotliwości. Porównanie zostało dokonane na podstawie wielkości skutecznego wzmocnienia mocy G_{ps} przy dopasowaniu. Obliczenia, których wyniki podane są w postaci wykresów, zostały przeprowadzone dla zakresu częstotliwości średnich ($f \ll f_a$) i wielkich ($f \approx f_a$) przy uwzględnieniu zespolonego charakteru parametrów tranzystora i w oparciu o rachunek macierzowy. Wyniki niektórych obliczeń potwierdzone zostały eksperymentalnie.

1. WSTĘP

Wzmacniacz tranzystorowy w ogólnym przypadku jest czwórnikiem bilateralnym i asymetrycznym. Przy założeniu małych sygnałów można przyjąć, że jest to czwórnik liniowy. Bilateralność wzmacniaczy tranzystorowych pociąga za sobą:

- 1°. Zależność imitancji wejściowej i wyjściowej od imitancji obciążenia i źródła.
- 2°. Możliwość niestabilności.
- 3°. Trudności w dostrojeniu obwodów rezonansowych.

Przyczyną bilateralności tranzystorów jest wewnętrzne sprzężenie zwrotne uzależnione przede wszystkim od wielkości oporu rozproszenia bazy $r_{bb'}$, pojemności złącza kolektora C_{Tc} , upływności kolektora g_c oraz zjawiska modulacji szerokości bazy.

Skutki bilateralności tranzystorów zależą od zakresu rozpatrywanych częstotliwości.

Istnieją przedziały tzw. „potencjalnej niestabilności”, tj. takie zakresy częstotliwości, dla których przy pewnych wartościach admitancji obciążenia i generatora tranzystor staje się niestabilny, a wzmocnienie mocy jest nieograniczone.

W warunkach potencjalnej niestabilności istnieją dwa podejścia do optymalizacji wzmacniaczy tranzystorowych. Jedno dotyczy optymalizacji wzmacniaczy o danym, wcześniej ustalonym marginesie stabilności bezwzględnej, drugie — to unilateryzacja.

Przez unilateryzację rozumiemy rodzaj neutralizacji wywołujący likwidację sprzężenia wewnątrz tranzystora.

Unilateryzacja i jej wpływ na wzmocnienie tranzystora jest tematem niniejszej pracy.

Istnieją cztery podstawowe typy unilateryzacji, których nazwy wywodzą się od nazw macierzy używanych przy analizie łączenia czwórników, a więc:

- równoległy „y”,
- szeregowy „z”,
- szeregowo-równoległy „h”,
- równoległo-szeregowy „m”.

Dla uogólnienia rozważań wygodnie jest korzystać z macierzy imitancyjnej $[k]$ (macierz imitancyjna jest symboliczna i może być zastąpiona przez dowolną spośród czterech wymienionych). Posługując się macierzą imitancyjną maksymalne skuteczne wzmocnienie mocy układu unilateralnego możemy wyrazić następująco:

$$G_{ps \max} = \frac{|k_{21}|^2}{4 \operatorname{Re}(k_{11}) \cdot \operatorname{Re}(k_{22})}. \quad (1)$$

Różne typy unilateryzacji, w różnych konfiguracjach w rozmaity sposób kształtują poszczególne wyrazy tego wzoru. Stąd właśnie wynika problem wyboru optymalnego typu unilateryzacji.

Artykuł ten zawiera dyskusję i podaje wyniki obliczeń dla czterech rodzajów unilateryzacji (y , z , h , m) w układzie OE i OB dla tranzystorów warstwowych typu OC45 i OC44. W obliczeniach posługiwano się parametrami tych tranzystorów podanymi przez firmy Philips, Mullard dla schematu zastępczego „hybrid π ” w układzie OE. W pracy posługiwano się pojęciem wzmocnienia mocy przy unilateryzacji bezstratnej. Wzmocnienie układu przy unilateryzacji bezstratnej jest niezmiennikiem względem wszystkich trzech konfiguracji tranzystora oraz transformacji macierzowych $[y]$ i $[z]$. Służy ono jako wielkość odniesienia przy porównywaniu różnych typów tranzystorów i wyników unilateryzacji w różnych konfiguracjach.

Przeprowadzone obliczenia wyłoniły w sposób zdecydowany optymalny typ unilateryzacji dla układu OE. Dla konfiguracji wspólna baza nie istnieje typ unilateryzacji, który by w sposób wyraźny był optymalny dla całego zakresu częstotliwości. Opłacalność stosowania określonych systemów unilateryzacji zależy tu od szeregu czynników, o czym będzie mowa przy szczegółowej dyskusji otrzymanych wyników.

2. ZASADY UNILATERYZACJI CZWÓRNIKÓW

Przy rozważaniu metod unilateryzacji wygodnie jest korzystać z macierzowej teorii czwornika liniowego. Macierz imitancyjną czwornika liniowego można zapisać w postaci symbolicznej następująco:

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix},$$

gdzie D_i i F_i symbolizują odpowiednio zależne i niezależne zmienne odnoszące się do i -tej pary zacisków.

W naszym przypadku są to więc, zależnie od konkretnie użytej macierzy, prądy i napięcia na wyjściu i wejściu czwornika. Elementy użytej tu macierzy imitancyjnej $[k]$ mają następujące znaczenia:

$$\begin{aligned} k_{11} &= \left. \frac{D_1}{F_1} \right|_{F_2=0} && \text{jest wejściową imitancją} \\ k_{12} &= \left. \frac{D_1}{F_2} \right|_{F_1=0} && \text{jest współczynnikiem transformacji wstecz albo imitancją reprezentującą wewnętrzne sprzężenie} \\ k_{21} &= \left. \frac{D_2}{F_1} \right|_{F_2=0} && \text{jest współczynnikiem transformacji do przodu lub odpowiednią imitancją} \\ k_{22} &= \left. \frac{D_2}{F_2} \right|_{F_1=0} && \text{jest imitancją wyjściową.} \end{aligned}$$

Macierz ta, zależnie od potrzeb, może być zastąpiona przez macierze $[y]$, $[z]$, $[h]$, i $[m]$.

Wzmacniacz tranzystorowy jest czwornikiem przezroczystym, a jego parametry macierzowe w zakresie wyższych częstotliwości są zespolone i zależą od częstotliwości.

W celu odseparowania wyjścia i wejścia czwornika należy go doprowadzić do formy unilateralnej. Oznacza to, że w wyrażeniach na imitancję wejściową i wyjściową musi zniknąć wyraz wiążący wejście z wyjściem

$$K_{we} = k_{11} - \frac{k_{12} \cdot k_{21}}{K_{22} + K_L}, \quad (2)$$

$$K_{wy} = k_{22} - \frac{k_{12} \cdot k_{21}}{k_{11} + K_G}. \quad (3)$$

(Indeksem L opatrzone imitancję obciążenia na wtórnych zaciskach, zaś indeksem G — na zaciskach pierwotnych).

Aby czwornik był unilateralny, musi zniknąć jedna z imitancji k_{12} lub k_{21} . Ze względu jednak na to, że imitancja k_{21} jest odpowiedzialna za wzmocnienie czwornika, czwornik unilateryzujemy przez doprowadzenie

k_{12} do zera. Otrzymamy wówczas czwórnik unilateralny, którego macierz imitancyjna będzie miała postać:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Należy zauważyć, że jeżeli znika wyraz k_{12} którejkolwiek z czterech macierzy ($[y]$, $[z]$, $[h]$ lub $[m]$), znika on również i w pozostałych postaciach macierzy. Wynika to ze związków zachodzących między wyrazami poszczególnych macierzy [2] i ma zasadnicze znaczenie dla teorii unilateryzacji. Parametry te w rozmaity sposób opisują mechanizm wewnętrznego sprzężenia i tak:

Admitancja y_{12} reprezentuje równoległe sprzężenie zależne od napięcia wyjściowego.

Impedancja z_{12} przedstawia szeregowo sprzężenie zależne od prądu wyjściowego.

Współczynnik transformowania napięcia h_{12} przedstawia szeregowo sprzężenie zależne od napięcia wyjściowego.

Współczynnik transformowania prądu m_{12} reprezentuje sprzężenie równoległe zależne od prądu wyjściowego.

W praktyce unilateralny układ otrzymujemy przez odpowiednie (tj. zgodne z zasadami obowiązującymi dla poszczególnych macierzy [2]) połączenie czwornika unilateryzowanego z unilateryzującym.

Jeżeli czwórnik unilateryzowany opisujemy przez:

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

zaś czwórnik unilateryzujący przez:

$$\begin{bmatrix} D'_1 \\ D'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} \\ k'_{21} & k'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F'_1 \\ F'_2 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

to przy połączeniu tych czworników w taki sposób, by wielkości F'_1 i F'_2 były równe odpowiednio F_1 i F_2 wypadkowy układ będzie zdefiniowany przez:

$$\begin{bmatrix} D_{1u} \\ D_{2u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} + k'_{11} & k_{12} + k'_{12} \\ k_{21} + k'_{21} & k_{22} + k'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

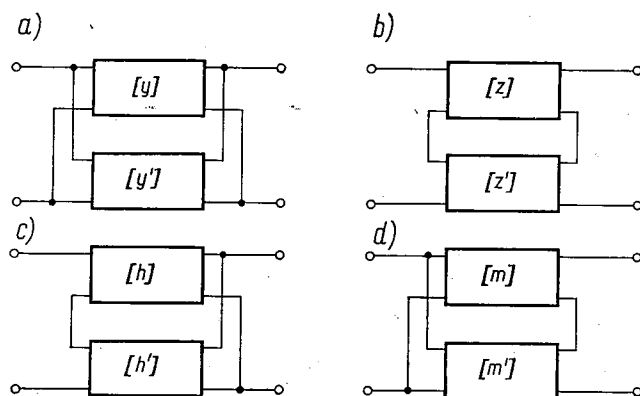
Aby złożony z tych czworników układ był unilateralny, musi być spełniony warunek:

$$k_{12} + k'_{12} = 0. \quad (8)$$

Imitancyjna macierz unilateralnego układu będzie miała postać (4), a jej wyrazy przy założeniu $k_{11} \geq 0$ i $k_{22} \geq 0$ będą spełniały warunek bezwzględnej stabilności zdefiniowany [7] przez wyrażenie (9).

$$|k_{12} \cdot k_{21}| + \operatorname{Re}(k_{12} \cdot k_{21}) < 2 \operatorname{Re} k_{11} \cdot \operatorname{Re} k_{22}. \quad (9)$$

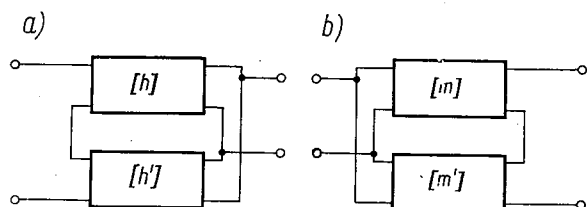
Unilateryzacji można dokonać wieloma różnymi sposobami przez dołączenie (w sposób dozwolony) do czwórnika bilateralnego takiego układu, który zapewnia spełnienie warunku (8). Na rysunku 1 są przedstawione cztery podstawowe układy połączeń czwórnika unilateryzującego z unilateryzowanym.



Rys. 1. Podstawowe połączenia czwórnika unilateryzowanego z unilateryzującym

Dla połączeń tych charakterystyczne jest to, że poszczególne wyrazy macierzy czwórnika unilateryzowanego sumują się w sposób arytmetyczny z odpowiednimi wyrazami czwórnika unilateryzującego, jeżeli użyć dla odpowiedniego połączenia macierzy wskazanej na rys. 1.

Od nazw macierzy odpowiadających omawianym połączeniom pochodzą nazwy czterech podstawowych układów unilateryzacji: typu y , z , h , m . Unilateryzacja typu h i m nosi także nazwę mostkowej. Przy unilateryz-



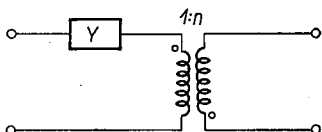
Rys. 2. Unilateryzacja typu h i m bez użycia transformatora

zacji typu y i z z uwagi na fazę wyrazów y_{12} i z_{12} w typowych tranzystorach do spełnienia warunku (8) konieczny jest transformator odwracający fazę. W przypadku unilateryzacji mostkowej h i m transformator nie jest konieczny pod warunkiem jednak, że odwrócimy kolejność końcówek jak na rys. 2. Połączenia takie są dozwolone dla wszystkich trójników.

3. TRANZYSTOR W UKŁADZIE UNILATERALNYM

3.1. Unilateryzacja typu y

Układ połączeń czwórników przy unilateryzacji typu y ma postać jak na rys. 1a. Czwórnik unilateryzujący przyjmuje się na ogół w postaci jak na rys. 3 (zakładamy tu, że transformator jest idealny).



Rys. 3. Czwórnik unilateryzujący dla unilateryzacji typu y

Przy spełnieniu warunku unilateryzacji (8) macierz wypadkowa przybiera postać:

$$\begin{bmatrix} y_{11} - n y_{12} & 0 \\ y_{21} - y_{12} & y_{22} - \frac{y_{12}}{n} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

przy czym

$$Y = -n y_{12}, \quad (11)$$

Postać ta jest bardzo wygodna do obliczeń. Jej parametry wyrażają się za pomocą typowych parametrów tranzystora rzeczywistego, wyznaczonych bezpośrednio ze schematu zastępczego lub pomierzonych oraz jednego parametru układu unilateryzującego — n .

Jeśli spełniony jest warunek $g_{11} \geq 0$, $g_{22} \geq 0$, to możemy przystąpić do określenia optymalnej wartości przekładni n zapewniającej największą wartość wzmocnienia mocy.

Maksymalne wzmocnienie układu unilateralnego określone przy pomocy wyrazów macierzy admitancyjnej y ma postać:

$$G_{psmax} = \frac{|y_{21u}|^2}{4 g_{11u} \cdot g_{22u}}. \quad (12)$$

Podstawiając do wzoru (12) wyrazy z (10) i maksymalizując wzmocnienie mocy ze względu na n otrzymamy optymalną wartość przekładni transformatora w postaci:

$$n_{opt} = \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}. \quad (13)$$

3.2. Unilateryzacja typu z

Podobnie jak przy unilateryzacji równoległej korzystamy tu z transformatora.

Unilatoryzacja szeregową może być uzyskana przy pomocy czwórnika, którego schemat ideowy jest pokazany na rys. 4.

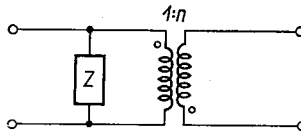
Macierz impedancyjna wypadkowa przybiera kształt:

$$[z_u] = \begin{bmatrix} z_{11} + \frac{z_{12}}{n} & 0 \\ z_{21} - z_{12} & z_{22} + n z_{12} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Warunek unilatoryzacji można wyrazić następująco:

$$z_{12} = n Z. \quad (15)$$

Analogicznie jak przy unilatoryzacji typu y wielkość i struktura Z może być określona ze znajomości wyrazu z_{12} oraz przekładni transformatora.



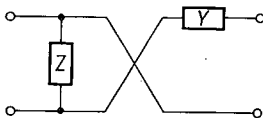
Rys. 4. Czwórnik unilatoryzujący typu z

Optymalna wartość przekładni transformatora wyznaczona z uwagi na maksymalne wzmocnienie mocy wynosi teraz:

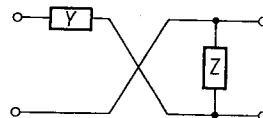
$$n_{opt} = \sqrt{\frac{r_{22}}{r_{11}}}. \quad (16)$$

3.3. Unilatoryzacja typu h i m

Ze względu na wzajemne analogie obydwa typy tych unilatoryzacji mogą być omówione łącznie. Przy ich użyciu nie jest konieczny tran-



Rys. 5. Czwórnik unilatoryzujący typu h



Rys. 6. Czwórnik unilatoryzujący typu m

sformator, pod warunkiem, że połączenie zostanie dokonane w sposób dozwolony jak na rys. 2.

Na rysunkach 5 i 6 pokazane są podstawowe typy układów unilatoryzujących odpowiadające systemowi h i m .

Macierze unilateralne tych połączeń mają postać:

$$[h_u] = \begin{bmatrix} h_{11} + \frac{h_{12}}{Y} & 0 \\ h_{21} + h_{12} & h_{22} + \frac{h_{12}}{Z} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$[m_u] = \begin{bmatrix} m_{11} - \frac{m_{12}}{Z} & 0 \\ m_{21} + m_{12} & m_{22} - \frac{m_{12}}{Y} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Warunkiem unilateryzacji dla połączenia typu h jest spełnienie równania:

$$h_{12} = \frac{ZY}{1 + ZY} \approx ZY \text{ lub } h_{12} = \frac{ZY}{1 + ZY} \approx ZY. \quad (19)$$

Unilateryzacja zaś typu m będzie dokonana, gdy spełniona będzie równość

$$m_{12} = \frac{-ZY}{1 + ZY} \approx -ZY \text{ lub } m_{12} = \frac{-ZY}{1 + ZY} \approx -ZY. \quad (20)$$

Wielkości Z i Y zoptymalizowane względem skutecznego wzmocnienia mocy wyrażają się przez wzór (21) dla unilateryzacji typu h oraz przez wzór (22) dla typu m .

$$Z_{opt} = \sqrt{\frac{Re h_{11} \cdot Re h_{12}}{Re h_{22} (1 - Re h_{12})}} \text{ lub } Y_{opt} = \sqrt{\frac{Re h_{22} \cdot Re h_{12}}{Re h_{11} (1 - Re h_{12})}}. \quad (21)$$

Drugi człon czwórnik oblicza się ze wzoru (19).

$$Y_{opt} = \sqrt{\frac{-Re m_{11} \cdot Re m_{12}}{Re m_{22} \cdot (1 + Re m_{12})}} \text{ lub } Z_{opt} = \sqrt{\frac{Re m_{22} \cdot Re m_{12}}{Re m_{11} \cdot (1 + Re m_{12})}}. \quad (22)$$

Drugi człon czwórnik unilateryzującego oblicza się ze wzoru (20).

Dla niezbyt wielkich częstotliwości, w przypadku gdy $h_{12} \ll 1$ i $m_{12} \ll 1$ można korzystać z przybliżonych wzorów [1].

4 WZMOCNIENIE MOCY UKŁADU ZUNILATERYZOWANEGO

Maksymalne skuteczne wzmocnienie mocy układu dla tranzystora, który nie jest potencjalnie niestabilny, może wskutek unilateryzacji wzrosnąć lub zmaleć, zależnie od charakteru wewnętrznego sprzężenia wzmacniacza niezunilateryzowanego. Podczas unilateryzacji przy wyborze odpowiedniej wartości k'_{12} dla spełnienia warunku (8) ulegają zmianie wszystkie parametry czwórnik unilateralnego. Zmiana ta odbywa się w rozmaitych kierunkach, zależnie od wybranego typu unilateryzacji oraz od tego, na jakiej częstotliwości ją przeprowadzamy i dla jakiego punktu pracy.

Unilateralne wzmocnienie mocy opisane przez te parametry wyraża się zależnością (1), a o jego wartości w określonych warunkach decyduje typ wybranej unilateryzacji.

W zakresie potencjalnej niestabilności wzmocnienie $G_{ps\ max}$ jest nieograniczone, a parametry robocze wzmacniacza tracą sens fizyczny. Z tego względu szacowanie zmian wzmocnienia mocy wynikłych wskutek unilateryzacji jest trudne. Żeby ocenić, który rodzaj unilateryzacji jest najlepszy z punktu widzenia maksymalnego wzmocnienia mocy, należy dla tego samego tranzystora, przy ustalonej konfiguracji i interesującego zakresu częstotliwości, przeliczyć lub pomierzyć wzmocnienie dla wszystkich typów unilateryzacji. Ważne jest ustalenie konfiguracji i zakresu częstotliwości oraz typu tranzystora, bowiem typ unilateryzacji optymalny dla OE nie jest wcale optymalny dla OB. Ponadto ten sam rodzaj unilateryzacji, dla tej samej konfiguracji w pewnym zakresie częstotliwości jest opłacalny, w innym — nie. Decydujące znaczenie mają tu parametry tranzystora, a właściwie ich charakterystyczne kombinacje, o czym będzie mowa dalej.

Interesujące właściwości wykazuje wzmocnienie dostarczane przez wzmacniacze unilateryzowane przy pomocy układów bezstratnych. Wzmocnienie to podane przez Masona [9] wyraża się wzorem:

$$U = \frac{|k_{21} - k_{12}|^2}{4 [Re k_{11} \cdot Re k_{22} - Re k_{12} \cdot Re k_{21}]} \quad (23)$$

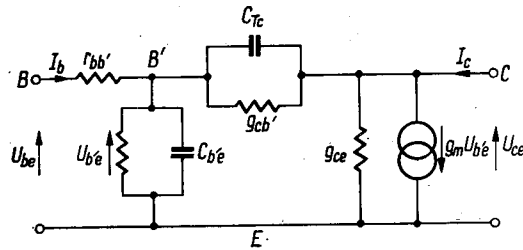
i jest wielkością stałą dla danego tranzystora i wybranej częstotliwości, niezależnie od konfiguracji.

Ponadto U jest niezmiennikiem względem transformacji macierzowych $[y]$ i $[z]$. Wielkość ta ma w praktyce duże znaczenie dla celów porównawczych. „Masonowskie” maksymalne skuteczne wzmocnienie mocy U może służyć jako wielkość odniesienia przy porównywaniu zdolności wzmacniających różnych układów unilateryzujących. Dla wielkich częstotliwości, bliskich f , wzmocnienie „masonowskie” U można określić wprost z parametrów układu zastępczego tranzystora [1].

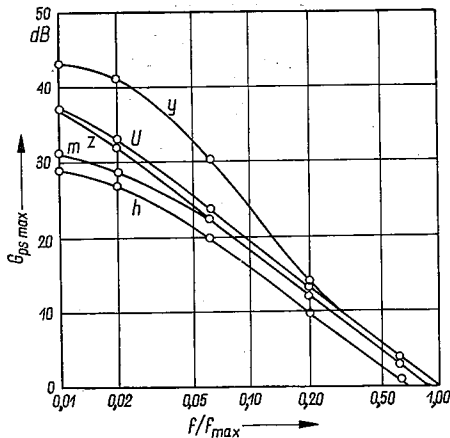
$$U = \frac{f_a}{8 \pi C_{Tc} \cdot r_{bb'} \cdot f^2} \quad (24)$$

Przy częstotliwości maksymalnej f_{max} wzmocnienie przy bezstratnej unilateryzacji staje się jednością — tranzystor przestaje wzmacniać. Właściwość ta może więc być wykorzystana do wyznaczania maksymalnej częstotliwości generacji tranzystora.

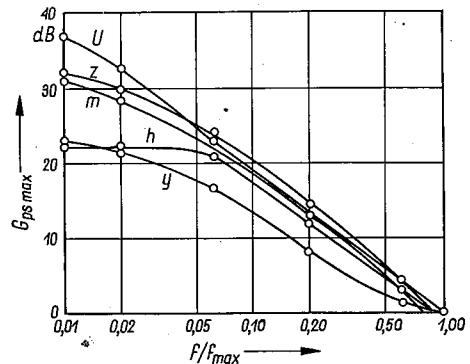
Na rysunkach 8—11 są podane odpowiednie zestawy krzywych maksymalnego skutecznego wzmocnienia mocy otrzymane w wyniku obliczeń czterech rodzajów unilateryzacji w układzie OE i OB dla tranzystorów stopowych OC45 i OC44.



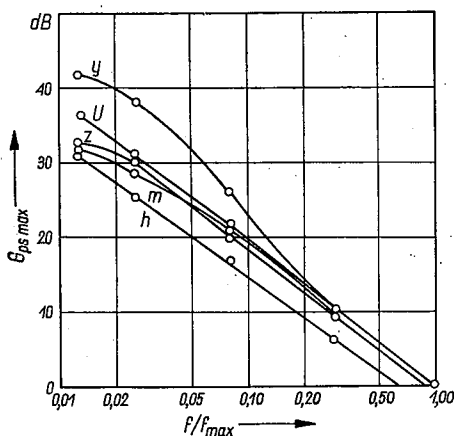
Rys. 7. Schemat zastępczy typu „hybrid π ” tranzystora rzeczywistego w układzie OE



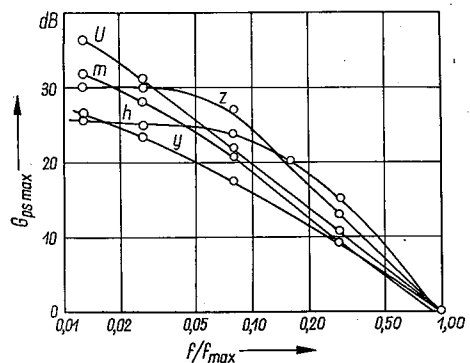
Rys. 8. Przebieg maksymalnego wzmożnienia mocy tranzystora OC44 w układzie OE dla różnych rodzajów unilateryzacji



Rys. 9. Przebieg maksymalnego wzmożnienia mocy tranzystora OC44 w układzie OB dla różnych rodzajów unilateryzacji



Rys. 10. Przebieg maksymalnego wzmożnienia mocy tranzystora OC45 w układzie OE dla różnych rodzajów unilateryzacji



Rys. 11. Przebieg maksymalnego wzmożnienia mocy tranzystora OC45 w układzie OB dla różnych rodzajów unilateryzacji

Przy obliczeniach korzystano z parametrów tych tranzystorów podanych dla układu zastępczego OE typu „hybrid π ”, rys. 7.

Dane dotyczące tranzystora OC45 Philips, Mullard:

$$I_E = 1 \text{ mA}; U_{CB} = -6 \text{ V}; I_{co} = 5 \text{ } \mu\text{A}; r_{bb'} = 75 \text{ } \Omega; g_{b'e} = 0,76 \text{ mS};$$

$$g_{cb'} = 0,3 \text{ } \mu\text{S}; g_{ce} = 16 \text{ } \mu\text{S}; g_m = 38 \text{ mS}; C_{b'e} = 1000 \text{ pF};$$

$$C_{Tc} = 10,5 \text{ pF}; f_\alpha = 6 \text{ MHz}; f_{max} = 17,4 \text{ MHz}.$$

Dane tranzystora OC44 Philips, Mullard:

$$I_E = 1 \text{ mA}; U_{CB} = -6 \text{ V}; r_{bb'} = 110 \text{ } \Omega; g_{b'e} = 0,39 \text{ mS}; g_{cb'} = 0,5 \text{ } \mu\text{S};$$

$$g_{ce} = 40 \text{ } \mu\text{S}; g_m = 39 \text{ mS}; C_{b'e} = 410 \text{ pF}; C_{Tc} = 10,5 \text{ pF};$$

$$f_\alpha = 15 \text{ MHz}; f_{max} = 22,8 \text{ MHz}.$$

Niektóre punkty obliczeń zostały sprawdzone eksperymentalnie.

5. WNIOSKI

Podane krzywe pozwalają wyłonić optymalny ze względu na wzmocnienie mocy rodzaj unilatoryzacji dla badanych typów tranzystorów, zaś ich porównanie ze spotykanymi w literaturze [11], [4], [5] fragmentarycznymi rozważaniami na ten temat pozwala na pewne uogólnienia w tej mierze.

Dla konfiguracji o wspólnym emiterze bezspornie jako najbardziej optymalny wyłania się typ unilatoryzacji y . Natomiast dla układu OB ten typ unilatoryzacji daje najmniejsze wzmocnienie mocy.

W układzie OE w całym zakresie częstotliwości wzmocnienie osiągane przy unilatoryzacji y jest największe dla obydwu typów tranzystorów. Wzmocnienie to przewyższa w zakresie mniejszych częstotliwości wartość osiąganą przy unilatoryzacji obwodem bezstratnym, a więc układ wprowadza pewne dodatnie sprzężenie zwrotne.

Efekty dodatniego sprzężenia zwrotnego przy unilatoryzacji obserwuje się również w układzie OB. Zjawisko to ma miejsce na większych częstotliwościach dla unilatoryzacji typu z , a w przypadku tranzystora OC45 także i dla — h . Zjawisko to ma ścisły związek z parametrami tranzystora, o czym będzie jeszcze mowa.

Najmniej korzystnym typem unilatoryzacji dla konfiguracji o wspólnym emiterze jest unilatoryzacja mostkowa h . Typy z i m zajmują miejsce pośrednie.

Dla ułatwienia dyskusji wszystkie krzywe zostały narysowane w funkcji częstotliwości zredukowanej $\frac{f}{f_{max}}$ i na wszystkich zestawach zostało naniesione wzmocnienie mocy $\dot{U}$ otrzymywane przy unilatoryzacji układem bezstratnym. Jak widać, przy unilatoryzacji w układzie OE nie ma

większych różnic w przebiegach krzywych dla obydwu typów tranzystorów i unilateryzacja „y” jest najkorzystniejsza. Różnice te zarysowują się dopiero w układzie OB.

Jako optymalny dla konfiguracji OB rodzaj unilateryzacji można przyjąć typ z, jakkolwiek na częstotliwościach bliskich i większych od f_α dla tranzystora OC45 krzywa h przewyższa krzywą wzmocnienia przy typie z. Obydwa ostatnie typy unilateryzacji w tym zakresie wprowadzają dodatnie sprzężenie zwrotne.

W zakresie częstotliwości poniżej $\frac{f}{f_{max}} = 0,1$ dla OC45 krzywe wzmocnienia mocy odpowiadające tym dwóm typom unilateryzacji przebiegają płasko. Również dla tranzystora OC44 krzywa h przebiega w tym zakresie płasko. Tu w całym zakresie typ z jest najkorzystniejszy i poczynając od $f = 1,4$ MHz charakteryzuje się pewnym sprzężeniem dodatnim. Na drugim i trzecim miejscu dla układu OB stoi kolejno typ m i h . Jak już powiedziano, rozbieżności w charakterze krzywych wzmocnienia dla tranzystorów OC45 i OC44 wynikają z różnicy parametrów ich schematu zastępczego. Szczególny wpływ na zachowanie się omówionych krzywych mają parametry $r_{bb'}$, C_{Tc} , $g_{eb'}$ oraz wiążące się z nimi wielkości f_α i f_{max} , przy czym decydują nie same ich wartości, lecz odpowiednie kombinacje. Spośród tych kombinacji najbardziej interesujący jest stosunek częstotliwości $\frac{f_{max}}{f_\alpha}$ oraz iloczyny $g_{eb'} \cdot r_{bb'}$ i $r_{bb'} \cdot C_{Tc}$. Wielkości te są wzajemnie zależne, np. częstotliwość maksymalna zależy wprost proporcjonalnie od $\sqrt{\frac{f_\alpha}{r_{bb'} \cdot C_{Tc}}}$. Częstotliwość graniczna f_α jest tym większa, im węższa jest baza, ale zawężeniu bazy towarzyszy wzrost oporności rozproszona $r_{bb'}$. Ponadto przy małej szerokości bazy istnieje groźba jej przebiccia, a więc trzeba stosować mniejsze napięcie kolektora, co pociąga za sobą wzrost pojemności C_{Tc} . Jak stąd wynika, uzyskany takim kosztem wzrost częstotliwości granicznej f_α niewiele wpływa na zwiększenie f_{max} . Dobrą ilustracją tego zagadnienia mogą być parametry badanych tranzystorów.

Dla umożliwienia porównania krzywych z rys. 8—11 z podobnym, choć nie pełnym zestawem analogicznych krzywych podanym w [4] i [11], przełączymy następujące kombinacje parametrów rozważanych tranzystorów.

OC45:

$$\frac{f_{max}}{f_\alpha} \simeq 2,9$$

$$\frac{1}{g_{eb'}} = a r_{bb'}$$

$$a = 0,35$$

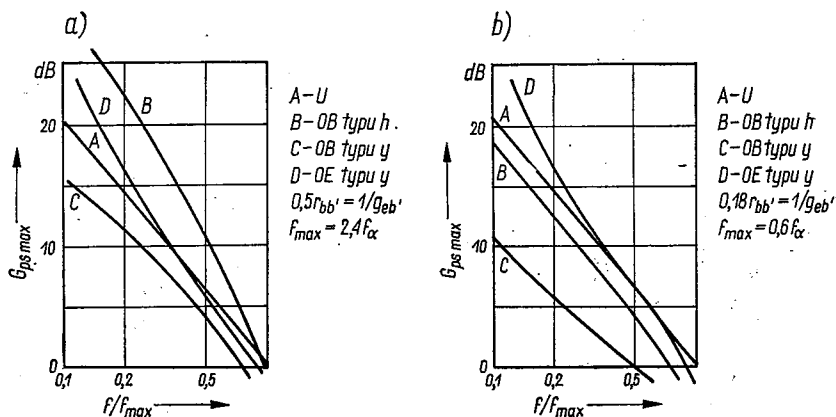
OC44.

$$\frac{f_{max}}{f_\alpha} \simeq 1,52$$

$$\frac{1}{g_{eb'}} = a r_{bb'}$$

$$a = 0,23$$

Na rysunku 12 zostały przytoczone charakterystyki maksymalnego skutecznego wzmocnienia mocy w funkcji $\frac{f}{f_{max}}$ podane przez wymienionych autorów. Krzywe z rys. 12a dotyczą tranzystorów warstwowych wyciąganych, zaś krzywe z rys. 12b odnoszą się do tranzystorów o $f_{max} \approx f_a$. Do tej ostatniej grupy należą tranzystory z barierą powierzchniową i te stopowe przeznaczone do pracy na bardzo dużych częstotliwościach, które charakteryzują się wyjątkowo cienkim obszarem bazy. Z bardzo dużym



Rys. 12. Przebieg maksymalnego wzmocnienia mocy układów zunilatoryzowanych [4], [11]

- a) $A-U$, $B-OB$ typu h , $C-OB$ typu y , $D-OE$ typu y , $0,5 r_{bb'} = \frac{1}{g_{eb'}}$, $f_{max} = 2,4 f_a$;
 b) $A-U$, $B-OB$ typu h , $C-OB$ typu y , $D-OE$ typu y , $0,18 r_{bb'} = \frac{1}{g_{eb'}}$, $f_{max} = 0,6 f_a$

przybliżeniem możemy przeprowadzić analogię między zestawem krzywych z rysunku 12a a zestawem krzywych wzmocnienia obliczonych i częściowo potwierdzonych eksperymentalnie dla tranzystora OC45. Zaś z jeszcze większym przybliżeniem w odniesieniu do tranzystora OC44 i krzywych z rysunku 12b. Ostrożność ta jest podyktowana różnorodnością typów dyskutowanych tranzystorów.

Oczywiście w tym przypadku możemy rozpatrywać jedynie zakres częstotliwości od $0,1 \frac{f}{f_{max}}$ do $\frac{f}{f_{max}}$, gdyż tym właśnie zakresem zajmują się cytowani autorzy [4] i [11]. Na rys. 12a jako optymalny w układzie OB występuje typ unilatoryzacji h , zaś najmniej korzystny jest typ y . Nanieśiano tu również wzmocnienie przy unilatoryzacji bezstratnej oraz wzmocnienie przy unilatoryzacji y w układzie OE. Istotnie w tym zakresie częstotliwości krzywe wzmocnienia dla tranzystora OC45 poparte obliczeniami i pomiarami są zgodne z krzywymi przytoczonymi przez cytowanych autorów.

Podobne porównanie krzywych wzmocnienia tranzystora OC44 z krzywymi z rysunku 12b prowadzi do bardzo bliskich analogii tych przebiegów. Trudno mówić o identyczności, bo są to inne tranzystory, a ponadto zestaw krzywych jest odmienny, ale te analogie dają poważne przesłanki do uogólnień w tym względzie. Dla tranzystorów o małym stosunku $\frac{f_{max}}{f_a}$ (tj. bliskim 1) oraz takich, dla których jednocześnie współczynnik a jest mały ($a \leq 0,3$) — w układzie OB optymalny jest typ unilateryzacji szeregowej z. Natomiast dla tranzystorów, u których stosunek $\frac{f_{max}}{f_a}$ jest duży ($\frac{f_{max}}{f_a} \geq 2$) dla częstotliwości $\frac{f}{f_{max}} \geq 0,1$ optymalna jest unilateryzacja h .

Jak więc widać, dla układu wspólna baza istnieją dwa typy unilateryzacji z lub h , z których jeden zależy od sprecyzowanych wyżej parametrów tranzystora oraz zakresu częstotliwości można uznać za najkorzystniejszy. Dla układu tego w sposób wyraźny wyłania się jedynie najgorszy z uwagi na wielkość wzmocnienia mocy typ unilateryzacji. Jest to unilateryzacja y , ta sama, która dla układu OE wysunęła się na czoło.

Na zakończenie należy zwrócić uwagę na możliwość stosowania mieszanych układów unilateryzujących, będących kombinacją układów podstawowych. Istniałaby wówczas możliwość takiego uformowania parametrów k_{11} , k_{21} i k_{22} tranzystora unilateralnego, by uzyskać wzmocnienia mocy większe od obliczonych powyżej. Opłacalność stosowania określonej kombinacji zależy przy tym od rozpatrywanego zakresu częstotliwości.

*Politechnika Warszawska
Katedra Podstaw Telekomunikacji*

WYKAZ LITERATURY

Książki:

1. Filipkowski A.: Tranzystorowe wzmacniacze wielkiej częstotliwości. P.W.T., Warszawa 1961.
2. Golde W.: Tranzystorowe wzmacniacze małej częstotliwości. P.W.T., Warszawa 1961.
3. Rosiński W.: Zasady działania tranzystora i jego parametry. P.W.T., Warszawa 1961.
4. Hunter L. P. i inni: Elektronika półprzewodnikowa. P.W.T., Warszawa 1960.

Artykuły:

5. Cote A. J.: Evaluation of Transistor Neutralization Networks. — IRE Transactions, CT-5, Nr 2, czerwiec 1958, s. 95—103.

6. Stern A. P.: Stability and Power Gain of Tuned Transistor Amplifiers. — PIRE, marzec 1957, s. 335—343.
7. Stern A. P., Aldrige C. A.: Internal Feedback and Neutralization of Transistor Amplifiers — PIRE, lipiec 1955, s. 838—847.
8. Stern A. P.: Considerations on the Stability of Active Elements and Application to Transistors. — IRE Nat Conv. Rec. pt. 2, 1956, s. 46—52.
9. Mason S. J.: Power Gain in Feedback Amplifier. — IRE Transactions CT-1, Nr 2, czerwiec 1954.
10. Czerne Ch. I.: Rasczet paralelnoj schiemy nejtralizacii rezonansnogo usilitela na gloskostnom tranzistore. — Elektrosviaz nr 2, 1959, s. 33—42.
11. Drouilhet P. R. Jr.: Predictions Based on the Maximum Oscillator Frequency of a Transistor. — IRE Transactions CT-2, Nr 2, czerwiec 1955, s. 178—183.
12. Cheng C. C.: Neutralization and Unilateralization. — IRE Trans. CT-2, Nr 2, czerwiec 1955, s. 138—145.
13. Chu G. Y.: Unilateralization of Junction-Transistors Amplifiers at High Frequency. — PIRE, sierpień 1955, s. 1001—1006.

I. PERSAK

EVALUATION OF UNILATERIZATION OF JUNCTION TRANSISTOR AMPLIFIERS AT FREQUENCY

Summary

The article contains the description and the comparison of different systems of unilaterization of transistor amplifiers at high frequencies. The comparison has been done on the ground of the magnitude available power gain, in case when the amplifier is matched.

The calculations, the results of which are given by means of curves have been done for center frequencies ($f \ll f_a$) and high frequencies ($f \approx f_a$).

They have been made by means of matrices for complex parameters of junction transistors.

Some results have been proved during experiment research work.

I. PERSAK

L'ÉVALUATION DES SYSTÈMES DE L'UNILATERISATION DANS LES TRANSISTORS AMPLIFICATEURS DE HAUTES FRÉQUENCES

Résumé

Cet article conclut l'explication et la comparaison de différents systèmes de l'unilaterisation des amplificateurs à transistors des fréquences élevées.

La comparaison est rendue sur la base de la valeur du gain en puissance maximum du transistor terminé sur son impédance caractéristique. Les calculs sont représentés au moyen de courbes qui sont réalisées pour les moyennes fréquences ($f \ll f_a$) et hautes fréquences ($f \approx f_a$).

Ces calculs sont accomplis au moyen de matrices pour les paramètres des jonctions des transistors. Enfin, quelques résultats des calculs sont comparés avec les résultats expérimentaux obtenus.

I. PERSAK

OPTIMALE DIMENSIONIRUNG DER UNILATERISATIONKETTEN IN DER TRANSISTORHOCHFREQUENZVERSTÄRKERSTUFEN

Zusammenfassung

In der Arbeit wurden die Grundlagen, Beschreibung und Vergleich der verschiedenen Systemen von Unilaterisation der Transistorhochfrequenzverstärkerstufen angegeben.

Als Grundlage des Vergleiches wurde das Wert des Effektionaleistungsverstärkung bei der Anpassung angenommen. Die Berechnungen wurden für Mittel- ($f \ll f_a$) und Hochfrequenzbereich ($f \approx f_a$) bei der Anwendung der Komplexparameter von Transistor und mit Hilfe der Matrixrechnung durchgeführt und in der Diagrammenform dargestellt.

Die auf dem theoretischen Wege erhaltenen Ergebnisse wurden mit der Messungen verglichen. Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Praxis wird festgestellt.

И. ПЭРСАК

ОПТИМАЛИЗАЦИЯ СХЕМ НЕЙТРАЛИЗАЦИИ В УСИЛИТЕЛЯХ ВЫСОКОЙ ЧАСТОТЫ НА ТРАНЗИСТОРАХ

Резюме

В статье рассмотрены разные системы нейтрализации внутренней обратной связи в резонансных усилителях высокой частоты на плоскостных транзисторах. В этой работе дано сравнение и оценку различных систем нейтрализации. Сравнение сделано на основе величины максимального достижимого усиления по мощности при согласовании. Расчёт, которого результаты вычислены кривыми был переведён для диапазона частот средних ($f \ll f_a$) и великих ($f \approx f_a$) при полных параметрах транзистора. При исчислении использовано матричный расчёт. Некоторые результаты расчёта испытано экспериментально.

621.313.2

FELIKS ANDRZEJEWSKI

Metoda obliczania silników prądu stałego pracujących przy dużej liczbie włączeń

Rękopis dostarczono 11. 4. 1962

Podano metodę obliczania silników prądu stałego dużej mocy, przystosowanych do dużej liczby włączeń. Określono ogólne wzory, wiążące liczbę włączeń z podstawowymi parametrami konstrukcyjnymi i eksploatacyjnymi, oraz z temperaturą uzwojenia twornika. Takie ujęcie pozwala na najkorzystniejszy dobór i korelację poszczególnych parametrów na samym początku projektowania maszyny.

1. WSTĘP

W silnikach dużej mocy, pracujących z przerwami, ważną rzeczą jest znajomość liczby włączeń w ciągu godziny, którą silnik może wykonać bez przekroczenia dopuszczalnej temperatury. To wiąże się ze znajomością warunków pracy (przyśpieszeń, opóźnień, czasu przerwy itp.), momentów zamachowych, stałych czasowych, średniej temperatury i wielu innych jeszcze wielkości. Takich więc maszyn nie można prawidłowo obliczać w oparciu o normalne wzory, ponieważ tych wszystkich wielkości nie uwzględniają; wszystkie potrzebne parametry uzyskuje się dopiero po całkowitym obliczeniu maszyny; takie przeliczenia trzeba wykonać z reguły kilkakrotnie, aby osiągnąć żądane wyniki. Taki tok postępowania jest bardzo pracochłonny, wyklucza możliwość narzucenia z góry pewnych wartości, a ponadto nie pozwala uzyskać optymalnych wartości parametrów, bo nieznane są związki zachodzące między nimi.

Podana metoda obliczania wiąże parametry eksploatacyjne z wielkościami konstrukcyjnymi maszyny w jedną całość, co daje możliwość przyjęcia z góry pewnych wielkości, umożliwia analizę zasadniczych parametrów i tym samym pozwala na ich najwłaściwsze dobranie dla każdego warunków pracy, już przy wstępnym obliczeniu maszyny.

Wiele współczynników liczbowych uzyskano w Sekcji Maszyn Prądu Stałego Zakładu M-5.

2. STAŁE CZASOWE

2.1. Elektromagnetyczna stała czasowa

Silniki dużych i średnich mocy, stosowane w napędach hutniczych głównych i pomocniczych, pracują w układzie Leonarda, najczęściej przy własnym wzbudzeniu stałym. W takim przypadku prędkość obrotowa silnika jest regulowana przez prąd wzbudzenia prądnicy i wówczas na czas trwania przebiegów nieustalonych silnika ma wpływ elektromagnetyczna stała czasowa obwodu wzbudzenia prądnicy

$$T'_p = \frac{L_{wp}}{R_{wp}} = \frac{Z_{wp}}{R_{wp}} \frac{\sigma \Phi_p}{I_{wp}} 10^{-8} \text{ [sek]}.$$

Uwzględniając, że strumień magnetyczny szczeliny wynosi

$$\Phi_p = a_{ip} l_{ip} \tau_p B_{\delta p},$$

a oporność obwodu wzbudzenia

$$R_{wp} = \frac{\vartheta}{\gamma'} \cdot \frac{l_{wp} Z_{wp}}{q_{wp}},$$

oraz wprowadzając, że

$$j_{wp} = \frac{I_{wp}}{q_{wp}}, \quad \gamma = \frac{\gamma'}{\vartheta},$$

otrzymamy

$$T'_p = \gamma \sigma \frac{\sigma_{ip}}{j_{wp}} \frac{l_{ip}}{l_{wp}} \tau_p B_{\delta p} 10^{-6} \text{ [sek]}, \quad (1)$$

gdzie:

$\gamma = \frac{\gamma'}{\vartheta}$ — przewodność miedzi dla przyjętej temperatury

uzwojeń wzbudzenia $\left[\frac{\text{m}}{\Omega \text{ mm}^2} \right]$,

$\vartheta = (l + \Theta)$ — współczynnik cieplny oporności,

Θ — przyrost temperatury uzwojenia [$^{\circ}\text{C}$],

σ — współczynnik rozproszenia uzwojenia wzbudzenia,

l_{ip} — idealna długość twornika prądnicy [cm],

z_{wp}, l_{wp} — liczba i średnia długość zwoju uzwojenia wzbudzenia [cm],

τ_p — podziałka biegunowa prądnicy [cm].

Jeżeli silnik ma jeszcze regulację obrotów powyżej znamionowych, to wówczas czas trwania stanów nieustalonych dla tego zakresu, określa stała czasowa obwodu wzbudzenia silnika, którą można również wyrazić wzorem (1), z tym, że wejdą do niego parametry obwodu wzbudzenia silnika.

2.2. Stała czasowa wywołana prądami wirowymi w litych częściach obwodu magnetycznego

Oprócz wymienionej poprzednio elektromagnetycznej stałej czasowej, związanej z obwodem wzbudzania, istnieje jeszcze stała czasowa wywołana prądami wirowymi, indukowanymi zmianą wielkości strumienia roboczego, w masywnych częściach żelaznych obwodu magnetycznego. W maszynach prądu stałego tylko jarzmo jest wykonane z litego żelaza i w nim powstają prądy wirowe, dające własne elementarne strumienie, przeciwdziałające zmianie strumienia głównego i opóźniające jego ustalenie się. To działanie prądów wirowych wyraża stała czasowa [11] określona wzorem

$$T_{Fe} = \frac{4}{\pi Q} \frac{\tau_{st}}{\delta} \frac{h_j l_j}{\frac{h_j}{l_j} + \frac{l_j}{h_j}} 10^{-9} \text{ [sek]}, \quad (2)$$

gdzie:

Q — oporność właściwa żelaza [Ω cm],

δ — długość szczeliny [cm],

τ_{st} — średnia długość drogi strumienia w jarzmie, przypadająca na parę biegunów [cm],

h_j, l_j — wymiary poprzecznego przekroju jarzma [cm].

Jak wynika ze wzoru (2), ta stała czasowa jest proporcjonalna do przekroju rdzenia i jest tym mniejsza, przy tym samym przekroju, im jeden z boków jest mniejszy.

Całkowita elektromagnetyczna stała czasowa jest równa sumie

$$T_p = T'_p + T_{Fe} = T'_p \left(1 + \frac{T_{Fe}}{T'_p} \right) = T'_p g. \quad (3)$$

Dla wykonanych w Zakładach M-5 maszyn o mocach od 800 do 4800 kW otrzymano wartości $\frac{T_{Fe}}{T'_p} \approx 8 \div 15\%$, a więc $g \approx (1,08 \div 1,15)$; jak widać, nie są to wartości duże.

Hamowanie układu Leonarda odbywa się przez zwarcie obwodu wzbudzenia prądnicy oporem R_{hp} (rys. 1), wówczas prąd wzbudzenia zanika wg równania wykładniczego ze stałą czasową

$$T_{hp} = \frac{L_{wp}}{R_{wp} + R_{hp}} = T_p \frac{R_{wp}}{R_{wp} + R_{hg}},$$

gdzie L_{wp}, R_{wp} — indukcyjność i oporność uzwojenia wzbudzenia prądnicy.

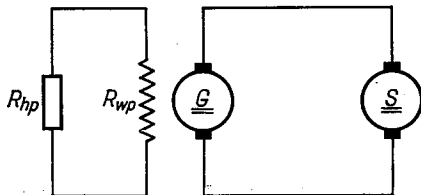
Oznaczając przez

$$c = 1 + \frac{R_{hp}}{R_{wp}}$$

otrzymamy stałą czasową hamowania w postaci

$$T_{hp} = \frac{T_p}{c}. \quad (4)$$

Jak widać z powyższej zależności, T_{hp} jest tym mniejsze od T_p , im wielkość oporu R_{hp} jest większa w stosunku do R_{wp} . Zależności te będą omówione szczegółowo w rozdz. 3.



Rys. 1. Schemat układu Leonarda; R_{wp} , R_{hp} — oporność uzwojenia wzbudzenia generatora i oporność dodatkowa, na którą zwraca się obwód przy hamowaniu silnika

2.3. Elektromechaniczna stała czasowa

Zmiana prędkości obrotowej układu napędowego jest związana z elektromechaniczną stałą czasową

$$B = \frac{GD^2 n_n}{375 M_n}, \quad (5)$$

którą można przedstawić również w postaci [7]

$$B = \frac{GD^2 R}{375 c_e c_m} \quad \text{lub} \quad 0,5 I_z^2 R B = \frac{GD^2 n_0^2}{728}, \quad (6)$$

gdzie:

$R = (R_s + R_p)$ — całkowita oporność obwodu tworników silnika i prądnicy,

c_e , c_m — stałe konstrukcyjne,

GD^2 — moment zamachowy,

I_z — prąd zwarcia,

n_0 — prędkość obrotowa przy idealnym biegu luzem.

Wprowadzimy współczynnik wyrażający stosunek elektromechanicznej stałej czasowej do elektromagnetycznej

$$b = \frac{B}{T_p},$$

a przy hamowaniu

$$b_h = \frac{B}{T_{hp}} = c \frac{B}{T_p} = c b. \quad (7)$$

Dla napędów dużych i średnich mocy stałe czasowe są zawarte w granicach [7]

$$B = 0,2 \div 0,02, \text{ zaś } T_p = 0,5 \div 3,$$

więc wartości wskaźnika b wynoszą

$$b = 0,01 \div 0,50.$$

3. ŚREDNI PRZYROST TEMPERATURY UZWOJENIA TWORNIKA

W rozważaniach, mających na celu znalezienie wyrażenia wiążącego podstawowe parametry konstrukcyjne z wielkościami eksploatacyjnymi, posłużymy się najprostszą zależnością temperatury twornika od strat w nim wytworzonych. Oczywiście, taki najprostszy związek daje wyniki przybliżone, co w tych ogólnych rozważaniach nie ma znaczenia z uwagi na to, że dokładne przeliczenia temperatury będą przeprowadzone po ustaleniu wszystkich wymiarów, wielkości elektrycznych i magnetycznych.

Średni przyrost temperatury twornika można wyrazić wzorem [6]

$$\Theta = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\Delta P_{Cut} + \Delta P_{Fet}}{S} [^{\circ}\text{C}], \quad (8)$$

gdzie

ΔP_{Cut} , ΔP_{Fet} — straty w miedzi i w żelazie twornika [W],

S — powierzchnia chłodzenia [cm^2],

α — średni współczynnik oddawania ciepła $\left[\frac{\text{W}}{\text{cm}^2 \text{ } ^{\circ}\text{C}} \right]$.

Ze wzoru (8) widać, że przy określonej temperaturze możemy odprowadzić tym większe straty, im będzie wyższy współczynnik α lub im będzie większa powierzchnia chłodzenia twornika S .

Średni współczynnik oddawania ciepła α zależy od stanu powierzchni oddającej ciepło i od szybkości przepływu powietrza. W przypadku przewietrzania obcego, co dla dużych maszyn pracujących z przerwami ma zawsze miejsce, współczynnik α jest wyrażony wzorem [6]

$$\alpha = \alpha_0 (1 + k_0 \sqrt{v_p}) \left[\frac{\text{W}}{\text{cm}^2 \text{ } ^{\circ}\text{C}} \right],$$

gdzie v_p — szybkość powietrza [m/sek].

Współczynnik k_0 ma następujące wartości:

dla powierzchni uzwojeń pokrytych lakierem $\alpha_0 = 1,33 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{W}}{\text{cm}^2 \text{ } ^{\circ}\text{C}} \right]$,

dla powierzchni stalowych rdzeni prokrytych lakierem

$$\alpha_0 = 1,67 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{W}}{\text{cm}^2 \text{ } ^{\circ}\text{C}} \right].$$

Współczynnik k_0 ma następujące wartości:

dla czynnej długości twornika $k_0 = 0,8$,

dla powierzchni połączeń czołowych $k_0 = 1,0$,

dla powierzchni cewek wzbudzenia $k_0 = 0,8$.

Średnią powierzchnię chłodzenia maszyn posiadających ν promieniotwórczych kanałów wentylacyjnych można wyrazić wzorem

$$S = \pi D (l_{Fe} + 2l_i) + \pi D_w l_{Fe} + \frac{\pi}{4} (D^2 - D_w^2) (2 + \nu) \text{ [cm}^2\text{]}.$$

gdzie:

D, D_w — średnica zewnętrzna i wewnętrzna twornika [cm],

l_{Fe} — długość żelaza twornika [cm],

$2l_i \approx 0,5 \tau$ — osiowa długość połączeń czołowych przednich i tylnych [cm] wg [9].

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$D_w = D - 2H, \quad d = \frac{H}{D}, \quad \varphi_{Fe} = \frac{l_{Fe}}{l_i}$$

i wówczas z wyrażeń dla strumienia w szczelinie oraz w rdzeniu twornika otrzymamy wyrażenie

$$\frac{B_t}{B_\delta} = \frac{\alpha_i \tau}{2k_{Fe} \varphi_{Fe} (H - h_z)} = \beta_1,$$

z którego wyznaczymy

$$H = \frac{\alpha_i \tau}{2k_{Fe} \varphi_{Fe} \beta_1} + h_z$$

oraz

$$d = \frac{H}{D} = \frac{\pi}{2p} \left(\frac{\alpha_i}{2k_{Fe} \varphi_{Fe} \beta_1} + \frac{h_z}{\tau} \right).$$

Przyjmując średnie wartości dla współczynników

$$\varphi_{Fe} \approx 0,75, \quad \beta_1 \approx 1,1, \quad \alpha_i \approx 0,7, \quad k_{Fe} \approx 0,93$$

otrzymamy wartość

$$d \approx 0,3 \frac{\pi}{p},$$

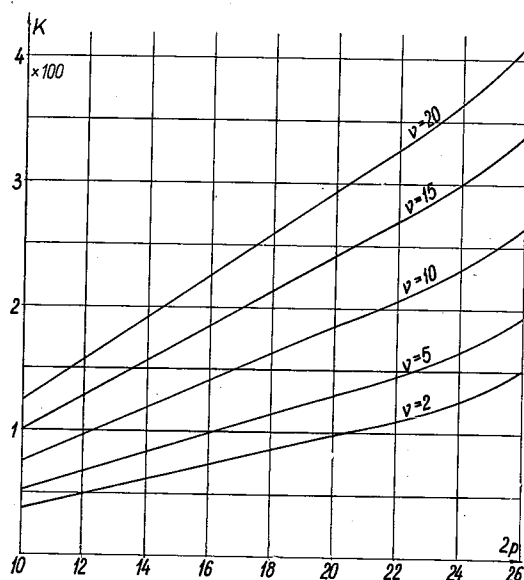
po uwzględnieniu której i wprowadzeniu oznaczenia $\beta_2 = \frac{\tau}{l_i}$ otrzymamy ostateczne wyrażenie określające powierzchnię chłodzenia twornika w postaci

$$S = 3p \left\{ \left[\frac{1}{\beta_2} + 0,4(2 + \nu) \right] \cdot \left(1 - 0,3 \frac{\pi}{p} \right) + 0,33 \right\} \tau^2 = K \tau^2. \quad (9)$$

Współczynnik

$$K = 3p \left\{ \left[\frac{1}{\beta_2} + 0,4(2 + \nu) \right] \cdot \left(1 - 0,3 \frac{\pi}{p} \right) + 0,33 \right\}$$

przedstawiono na rys. 2, dla różnej liczby kanałów $\nu = 2, 5, 10, 15, 20$ w funkcji liczby par biegunów $2p$; do obliczeń przyjęto średnie wartości β_2 w zależności od $2p$ wg [10].



Rys. 2. Zależność współczynnika K od liczby biegunów $2p$ dla różnych liczb kanałów promieniowych ν

Straty w miedzi uzwojenia twornika wynoszą

$$\Delta P_{Cut} = I^2 R_s,$$

a ponieważ

$$I = j_{ts} q_{ts}, \quad I = \frac{\pi D A 2a}{N}, \quad R_s = \frac{\vartheta}{\gamma'} \cdot \frac{l_{srt} N}{q_{ts} (2a)^2},$$

więc będzie

$$\Delta P_{Cut} = \frac{j_{ts}}{\gamma} l_{srt} \left(\frac{p}{a} \right) \tau A 10^{-2} \text{ [W]}. \quad (10)$$

Uwzględniając zależności (9) i (10) oraz oznaczając $\frac{\Delta P_{Fet}}{\Delta P_{Cut}} = \Delta P_t$ wzór (8) przyjmie postać następującą

$$\Theta = \frac{l_{srt}}{a\gamma} \left(\frac{p}{a} \right) \frac{j_t A}{K\tau} (1 + \Delta P_t) 10^{-2} \text{ [}^\circ\text{C]}, \quad (11)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} j_{ts} & \text{ — gęstość prądu twornika silnika [A/mm}^2\text{],} \\ l_{st} & \text{ — średnia długość pręta uzwojenia twornika silnika [cm],} \\ A & \text{ — okład prądu twornika silnika } \left[\frac{\text{A}}{\text{cm}} \right]. \end{aligned}$$

4. DOPUSZCZALNA LICZBA WŁĄCZEŃ SILNIKA BOCZNIKOWEGO PRĄDU STAŁEGO

W silnikach hutniczych, do napędów głównych i pomocniczych, rozruch i hamowanie odbywa się nierzadko kilkaset razy w ciągu godziny. Straty występujące przy rozruchu i hamowaniu są znacznie większe niż przy pracy ustalonej i dlatego one stanowią właściwe kryterium oceny silnika.

Dla silników pracujących z przerwami cykl pracy T_c składa się z czasu rozruchu t_r i hamowania t_h , czasu pracy ustalonej t_u oraz czasu przerwy t_0 .

Ilość ciepła wytworzonego przez straty prądowe w uzwojeniu twornika w stanie ustalonym ($\varepsilon T_c - t_n$) wynosi

$$Q_{cut} = I^2 R_s (\varepsilon T_c - t_n) = I^2 R_s T_c \left(\varepsilon - \frac{t_n}{T_c} \right). \quad (12)$$

Straty w żelazie twornika istnieją przez cały czas pracy i przyjmując, że są stałe za cały okres, dają następującą ilość ciepła

$$Q_{Fet} = \Delta P_{Fet} \varepsilon T_c. \quad (13)$$

Ilość ciepła w uzwojeniu twornika, przy rozruchu silnika nieobciążonego, w układzie Leonarda wynosi [7]

$$Q_r = \frac{GD^2 n_0^2}{728} \cdot \frac{R_s}{R} \alpha_w^2 \frac{b}{1+b} = \frac{1}{2} I_z^2 B R_s \alpha_w^2 \frac{b}{1+b}. \quad (14)$$

Ilość ciepła w uzwojeniu twornika przy rozruchu, gdy wzmożenie wzbudzenia zostaje zdjęte po osiągnięciu prędkości n_0 , oblicza się dla dwóch okresów — wzmożenia wzbudzenia i okresu, w którym zdjęto wzmożenie, otrzymamy tu następujące uproszczone wyrażenie [7]

$$Q_r = \frac{1}{2} I_z^2 R_s B (2 \alpha_w - 1) \frac{b}{1+b}. \quad (15)$$

Gdy współczynnik wzmożenia $\alpha_w = 1$, wówczas ilości ciepła wyrażone wzorami (14) i (15) są takie same, gdy zaś $\alpha_w > 1$, to ilość ciepła wyrażona wzorem (14) jest tym większa, im α_w jest większe od jedności. W dalszych rozważaniach będziemy korzystać tylko z zależności (14).

Ilość ciepła wydzielona przy hamowaniu wynosi

$$Q_h = \frac{GD^2 n_0^2}{728} \cdot \frac{R_s}{R} \cdot \frac{b_h}{1 + b_h} - \frac{1}{2} I_z^2 B R_s \frac{b_h}{1 + b_h}. \quad (16)$$

Uwzględniając (7), wyrażenie (16) można napisać w postaci

$$Q_h = \frac{GD^2 n_0^2}{728} \frac{R_s}{R} \frac{bc}{1 + bc} = \frac{1}{2} I_z^2 B R_s \frac{bc}{1 + bc}, \quad (17)$$

gdzie $I_z = \frac{E_n}{R}$ — prąd zwarcia układu Leonarda.

Całkowita ilość ciepła Q , wytworzona w tworniku, wynosi

$$Q = \Delta P_{cut} T_c \left(\varepsilon - \frac{t_n}{T_c} \right) + \Delta P_{Fe} \varepsilon T_c + Q_r + Q_h, \quad (18)$$

a dopuszczalna ilość ciepła Q_n wytworzona przez straty znamionowe silnika ΔP_n w okresie T_c jest równa

$$Q_n = \Delta P_n T_c = (\Delta P_{cut} + \Delta P_{Fe}) T_c; \quad (19)$$

liczba okresów pracy w ciągu godziny będzie

$$W = \frac{3600}{T_c}. \quad (20)$$

Określając z równań (18) i (19) czas T_c i wstawiając w (20) oraz oznaczając przez $m = \frac{t_n}{T_c}$ otrzymamy

$$W = 3600 \frac{(\Delta P_{cut} + \Delta P_{Fe})(1 - \varepsilon) + \Delta P_{cut} m}{Q_r + Q_h}. \quad (21)$$

Korzystając z zależności, że $B = bT_p$, $b_h = cb$, można napisać

$$Q_r + Q_h = 0,5 \cdot I_z^2 R_s T_p \left[\alpha_w^2 \frac{b^2}{1 + b} + \frac{b^2 c}{1 + bc} \right],$$

oznaczając ponadto przez $\frac{I_z}{I} = i$ oraz uwzględniając, że $\Delta P_{cut} = I_{Rs}^2$ wyrażenie (21) przyjmie postać

$$W = 7200 \frac{(1 + \Delta P_i)(1 - \varepsilon) + m}{i^2 T_p \left[\alpha_w^2 \frac{b^2}{1 + b} + \frac{b^2 c}{1 + bc} \right]}. \quad (22)$$

Współczynnik w nawiasie kwadratowym

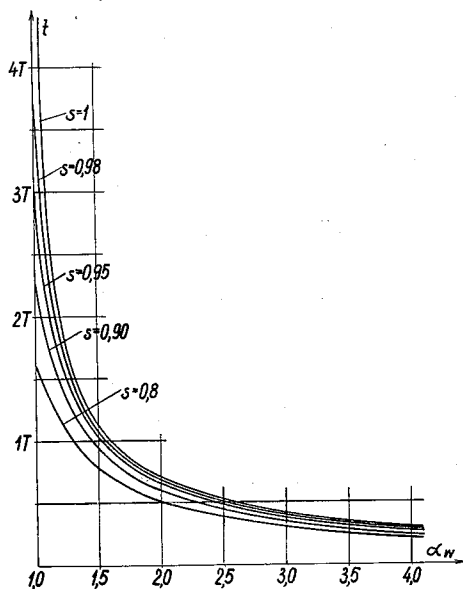
$$Z = \left[\alpha_w^2 \frac{b^2}{1 + b} + \frac{b^2 c}{1 + bc} \right]$$

jest funkcją wzmożenia wzbudzenia α_w^2 , parametru b oraz c .

Na rys. 3 przedstawiony jest czas trwania stanu nieustalonego

$$t = T_p \ln \frac{\alpha_w}{\alpha_w - s}$$

w zależności od współczynnika wzmożenia wzbudzenia α_w , dla różnych wartości stosunku prądu nieustalonego do znamionowego $s = \frac{I_p}{I_n}$. Z przebiegu krzywej $t = f(\alpha_w)$ widać, że zasadnicze skrócenie czasu trwania stanu nieustalonego osiąga się dla $\alpha_w = 2$; powyżej tej wartości praktycz-



Rys. 3. Zależność czasu trwania stanu nieustalonego t w zależności od współczynnika wzmożenia α_w dla różnych wartości stosunków prądu nieustalonego i prądu znamionowego s

nie nie osiąga się skrócenia czasu, natomiast zwiększa wydatnie moc źródła wzbudzenia prądnicy. Niezależnie od tego, że wzrostem współczynnika α_w , rośnie amplituda prądu rozruchu napędu wg zależności

$$I_s = \frac{\alpha_w}{\alpha_b} \cdot \frac{1}{I_z},$$

z której można wyznaczyć graniczną wartość współczynnika wzmożenia

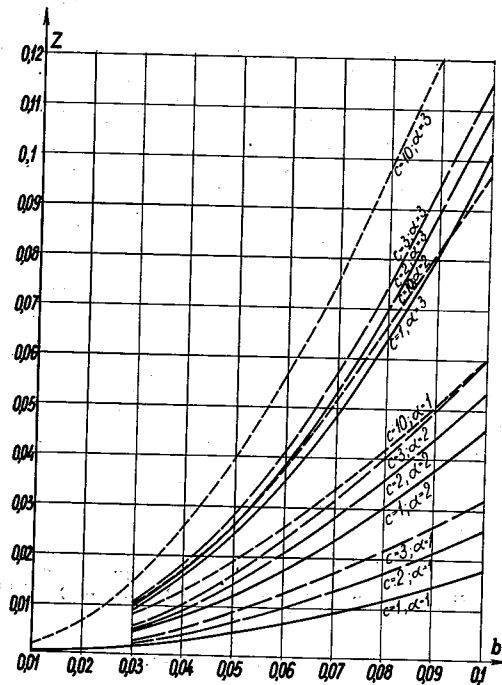
$$\alpha_w \leq \frac{I_{s \max}}{I_z} \frac{1}{\alpha_b} \approx p_k \frac{P_p}{U_n^2} R \frac{1}{\alpha_b},$$

gdzie:

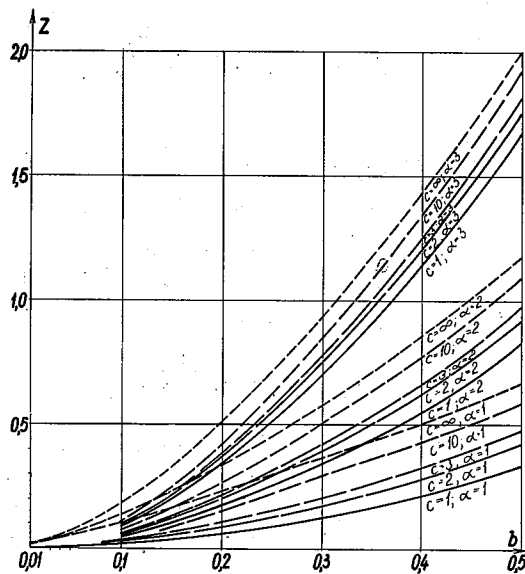
$$p_k = \frac{I_{s \max}}{I_n} \text{ — przeciążalność prądowa prądnicy,}$$

$$U_n, P_p \text{ — napięcie znamionowe i moc prądnicy,}$$

$$\alpha_b = b^{\frac{1}{1-b}}.$$



Rys. 4. Zależność współczynnika Z od parametru $b = 0,01 \div 0,10$ dla różnych wartości współczynnika wzmożenia wzbudzenia α_w i dla różnych wartości parametru c



Rys. 5. Zależność współczynnika Z od parametru $b = 0,1 \div 0,5$ dla różnych wartości współczynnika wzmożenia wzbudzenia α_w i dla różnych wartości parametru c

Na rys. 4 i 5 jest przedstawiona zależność Z w funkcji parametru b dla różnych wartości współczynnika wzmożenia wzbudzenia $a_w = 1, 2, 3$ i dla wartości $c = 1, 2, 3, 10$ i ∞ .

Przebiegi Z dla małych wartości b ($b = 0,01 \div 0,10$) są podane na rys. 4, zaś dla dużych ($b = 0,1 \div 0,5$) na rys. 5. Z tych przebiegów widać, że największy wpływ na wartość Z ma współczynnik wzmożenia a_w , szczególnie dla dużych wartości b ; jest to jeszcze jeden powód, aby nie stosować dużego wzmożenia.

Wpływ współczynnika c na wartość Z jest stosunkowo niewielki w odniesieniu do $c = 1$ (tzn. gdy opór $R_{hp} = 0$); istnieją małe różnice przyrostu Z nawet dla bardzo dużych wartości c . Inaczej przedstawia się to dla małych b ($b < 0,3$). Tutaj wpływ c jest duży i dla dużych wartości jest znacznie większy niż wpływ a_w .

Ze wzrostem c maleje stała czasowa hamowania $T_{hp} = T_p/c$, lecz rośnie Z , a ponadto wzrasta szczyt prądu przejściowego I_{sh} . Szczytową wartość prądu twornika wyznacza się z dwóch równań [7]

$$I = (a_w I_z - I_{za}) \frac{B}{T_p - B} \left[e^{-\frac{t}{T_p}} - e^{-\frac{t}{B}} \right],$$

wyrażającego przebieg prądu twornika, oraz

$$t_s = B \frac{T_p}{T_p - B} \ln \frac{T_p}{B},$$

wyrażającego czas, po którym występuje szczyt prądu. Z tych równań otrzymamy wyrażenie dla szczytowej wartości prądu

$$I_s = (a_w I_z - I_{za}) b^{\frac{1}{1-b}}, \quad (23)$$

gdzie

$$I_{za} = \frac{c_e n}{R} = \frac{E_{pa}}{R} \text{ — prąd zwarcia, który płynąłby w nieruchomym silniku przy wzbudzeniu prądnicy prądem } I_{wa}, \text{ dającym s.em. } E_{pa}.$$

Wyrażenie na szczyt prądu przy hamowaniu otrzymamy ze wzoru (23), podstawiając $a_w = 0$ oraz b_h zamiast b

$$I_{sh} = -I_{za} b_h^{\frac{1}{1-b_h}};$$

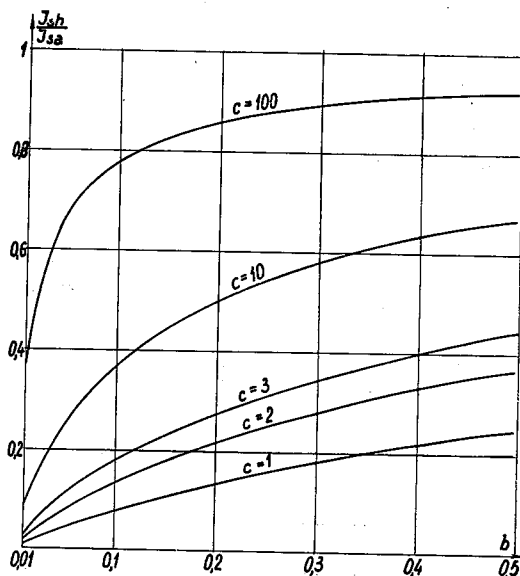
uwzględniając, że $b_h = c b$, otrzymamy następującą bezwzględną wartość stosunku prądów

$$\left| \frac{I_{sh}}{I_{za}} \right| = (c b)^{\frac{1}{1-bc}}. \quad (24)$$

Wyrażenie (24) w funkcji b jest podane na rys. 6, dla różnych wartości $c = 1, 2, 3, 10$ i 100 .

W celu wyznaczenia wartości zależności (24) dla $b = \frac{1}{c}$ zlogarytmujemy je

$$z = \ln \left| \frac{I_{sh}}{I_{za}} \right| = \frac{\ln b + \ln c}{1 - bc}$$



Rys. 6. Zależność $\left| \frac{I_{sh}}{I_{sa}} \right| = (bc)^{\frac{1}{1-bc}}$ w funkcji b dla różnych wartości parametru c

i z reguły l'Hospitala otrzymamy

$$z \left(\frac{1}{c} \right) = \frac{(\ln b + \ln c)'}{(1 - bc)'} \bigg|_{\frac{1}{c}} = \frac{\frac{1}{b}}{-c} \bigg|_{\frac{1}{c}} = -1,$$

a więc gdy $b = \frac{1}{c}$

$$\left| \frac{I_{sh}}{I_{za}} \right| = \frac{1}{e} = 0,368.$$

Wszystkie krzywe mają przebieg rosnący do asymptoty, którą jest wartość $\left| \frac{I_{sh}}{I_{za}} \right| = 1$. Wzrost krzywych zależy od wartości parametru c . Przy $c \approx 3$, nawet dla dużych b , wartość ilorazu nie przekracza 0,45. Należy zauważyć, że ze wzrostem c wzrastają wartości $\left| \frac{I_{sh}}{I_{sa}} \right|$ dla małych wartości b .

Określmy bliżej jeszcze licznik wyrażenia (22), który w tym celu przekształcimy w następujący sposób

$$\begin{aligned} (1 + \Delta P_t)(1 - \varepsilon) + \frac{t_n}{T_c} &= (1 + \Delta P_t)(1 - \varepsilon) \left[1 + \frac{t_r + t_h}{t_0} \frac{1}{1 + \Delta P_t} \right] = \\ &= (1 + \Delta P_t)(1 - \varepsilon) \left[1 + \frac{n}{t_0} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \left(\frac{1}{1 + \Delta P_t} \right) \right], \end{aligned} \quad (25)$$

gdzie:

$$t_r = \frac{n}{a} \text{ — czas rozruchu [sek],}$$

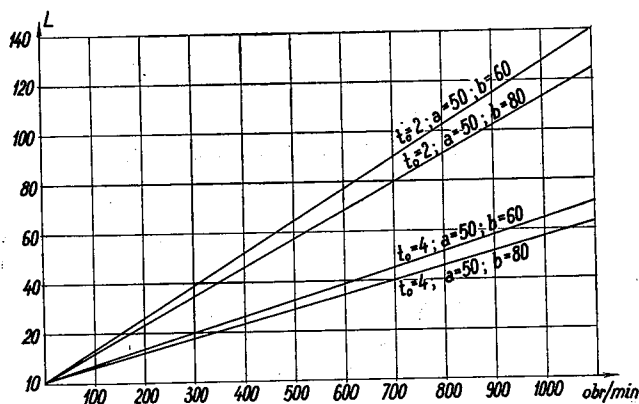
$$t_h = \frac{n}{b} \text{ — czas hamowania [sek],}$$

$$t_0 \text{ — czas przerwy [sek].}$$

Wartości przyspieszeń a lub opóźnień b są zależne od rodzaju urządzeń, tak samo zresztą jak i czas przerwy t_0 . Na rys. 7 przedstawiono zależność

$$L = 1 + \frac{n}{t_0} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \left(\frac{1}{1 + \Delta P_t} \right)$$

dla $a = 50$ (obr/min)/sek, $b = 60$ i 80 (obr/min)/sek i $t_0 = 2$ i 4 sek; podane wartości można uważać jako wartości średnie, często spotykane



Rys. 7. Zależność współczynnika L w funkcji obrotów n dla różnych wartości przyspieszeń a , b i czasu przerwy t_0

w urządzeniach hutniczych. Stosunek strat ΔP_t przyjęto jako wartość średnią $\Delta P_t \approx 0,44$ dla maszyn hutniczych produkowanych w kraju. Oczywiście, ΔP_t jest stałe tylko dla określonej prędkości obrotowej i obciążenia, jednak wpływ zmian ΔP_t ma mały wpływ na wartość współczynnika L .

Podstawiając do wzoru (22) wyrażenie na straty $(1 + \Delta P_t)$ ze wzoru (11), a na stałą czasową ze wzoru (1) i (3) oraz korzystając z zależności, że

$$B_{\delta s} A_s = \frac{P_{is}}{n_s} \frac{\pi^2 \cdot 6 \cdot 10^{11}}{4 p_s^2 \tau_s^2 l_{is} \kappa a_{is}}, \quad \frac{B_{\delta p}}{B_{\delta s}} = \kappa$$

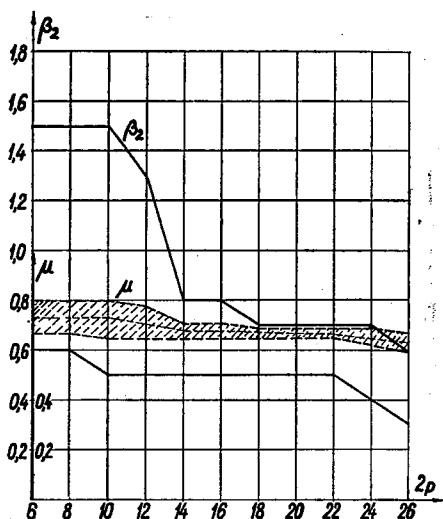
otrzymamy

$$W = 0,48 \frac{\left(\frac{\alpha_{is}}{\alpha_{ip}}\right) \left(\frac{l_{is}}{l_{ip}}\right) (1 - \varepsilon) \kappa p_s a_s}{g \sigma \cdot i^2 \left(\frac{j_{ts}}{j_{wp}}\right) \left(\frac{l_{srts}}{l_{srwp}}\right) \left(\frac{P_{is}}{n_s}\right)} \frac{\tau_s^3}{\tau_p} \Theta a \cdot \frac{KL}{Z}, \quad (26)$$

wielkości ze znaczkami *s* odnoszą się do silnika, zaś ze znaczkami *p* do prądnicy.

Stosunek średniej długości pręta twornika silnika l_{srts} i zwoju uzwojenia wzbudzenia prądnicy l_{srwp} można wyrazić

$$\frac{l_{srts}}{l_{srwp}} \approx \frac{\tau_s}{\tau_p} \left(\frac{\frac{l_t}{\tau_s} + 1,40}{\frac{2l_t}{\tau_p} + 1,25} \right) \approx \frac{\tau_s}{\tau_p} \left(\frac{\frac{1}{\beta_2} + 1,40}{\frac{2}{\beta_2} + 1,25} \right) \approx \frac{\tau_s}{\tau_p} \mu. \quad (27)$$



Rys. 8. Zależność współczynników β_2 i $\mu = \frac{\frac{1}{\beta_2} + 1,40}{\frac{2}{\beta_2} + 1,25}$ w funkcji liczby biegunów $2p$

Wartości β_2 wg [10] są przedstawione jako funkcja $2p$ na rys. 8. Rozpiętość wartości, szczególnie do $2p = 14$ jest duża; na tym samym rysunku są podane wartości

$$\mu = \frac{\frac{1}{\beta_2} + 1,40}{\frac{2}{\beta_2} + 1,25} = f(2p),$$

dla których obszar zmian jest już bardzo wąski tak, że średnia wartość jest prawie stała dla wszystkich liczb par biegunów i wynosi $\mu_{sr} \approx 0,68$.

Jeżeli prądnica i silnik posiadają różne parametry oznaczone we wzorze (26) symbolami p oraz s , wówczas należy to uwzględnić, najlepiej jako stosunek np. $\frac{a_{is}}{a_{ip}}$ itd., jeżeli natomiast obydwie maszyny mają odpowiednie parametry sobie równe

$$a_{is} \approx a_{ip}, \quad l_{is} \approx l_{ip}, \quad j_{wp} \approx j_{ws}, \quad l_{srwp} \approx l_{srws}, \\ \kappa \approx 1, \quad \sigma = 1,2, \quad g = 1,11,$$

to uwzględniając zależność (27) otrzymamy wzór (26) w postaci

$$W = 0,36 \frac{(1 - \varepsilon) p_s a_s}{\mu i^2 \left(\frac{j_{ts}}{j_{ws}} \right) \left(\frac{P_{is}}{n_s} \right)} \tau_s^2 \Theta \alpha \frac{KL}{Z}. \quad (28)$$

Wzór (28) wyraża liczbę włączeń W w zależności od podstawowych parametrów konstrukcyjnych i najważniejszych parametrów eksploatacyjnych, charakteryzujących pracę maszyny. Bardzo istotną wielkością występującą w tej zależności są straty w tworniku

$$\Delta P_{Cut} + \Delta P_{Fet} = \Theta \alpha \tau_s^2 K, \quad (29)$$

do której jest proporcjonalna liczba włączeń. Największy wpływ ma wielkość podziałki biegunowej, bo występuje w kwadracie. Wielkość strat w tworniku, narzucona współczynnikiem sprawności, ogranicza wielkości wchodzące do wzoru (29); ze wzrostem τ_s lub α uzyskuje się niższą temperaturę Θ , zaś liczba W zostanie określona sumą strat. Jeżeli przyjąć stałą temperaturę Θ , to zwiększając straty zwiększy się liczba W , oczywiście kosztem współczynnika sprawności.

Liczba włączeń W jest proporcjonalna do iloczynu liczby par biegunów p_s oraz do liczby gałęzi równoległych uzwojenia a_s dla tego iloczynu; w zależności od rodzaju uzwojenia, otrzymamy następujące wartości:

1. uzwojenie pętlicowe proste $a_s p_s = p_s^2$,
2. uzwojenie pętlicowe dwukrotne $a_s p_s = 2p_s^2$,
3. uzwojenie faliście wielokrotne $a_s p_s < p_s^2$.

Jak stąd wynika, iloczyn $a_s p_s$ wpływa wybitnie na wielkość W , zwłaszcza że i parametr K zależy od p_s .

Wielkość W jest odwrotnie proporcjonalna do momentu maszyny $\left(\frac{P_{is}}{n_s} \right)$, który jest wielkością narzuconą.

Ze wzoru (28) wynika, że gęstość prądu w tworniku j_{ts} powinna być mała, zaś w uzwojeniu wzbudzenia j_{ws} duża.

Rodzaj pracy wyrażony iloczynem $(1 - \varepsilon) L$, zależy od względnego czasu pracy, prędkości obrotowej, przyspieszenia itp.

Parametr Z i jego wpływ na wielkość W był już omówiony poprzednio

W obliczeniach silników pracujących przy częstych rozruchach, należy uwzględniać jakość komutacji, a szczególną uwagę zwracać na to, czy nie zostaje przekroczona średnia wartość napięcia międzywycinkowego $e_{k\delta r}$. Moc wewnętrzna maszyny można wyrazić

$$P_i = \frac{\pi D}{2\psi} A e_{k\delta r} \left(\frac{a}{Z_x p} \right) 10^{-3} \text{ [kW]},$$

a uwzględniając, że

$$\frac{U}{E} = \psi, \quad j_{ts} = \frac{A}{h_z \lambda \varphi_{Cu}}, \quad \varphi_{Cu} = \frac{q_{Cu}}{q_z}, \quad \lambda = \frac{b_z}{\tau_z}, \quad Z_x = 1,$$

otrzymamy

$$P_i = \frac{1}{\psi} \tau_s j_{ts} h_z \lambda \varphi_{Cu} e_{k\delta r} a_s \cdot 10^{-1}. \quad (30)$$

Można przyjąć następujące średnie wartości $\psi = 0,95$, $\varphi_{Cu} = 0,6 \div 0,7$, średnio 0,65, dla maszyn posiadających uzwojenie kompensacyjne $e_{k\delta r} \leq$

$\leq 15 \div 20 \text{ V}$, średnio 18, $\frac{b_z}{h_z} = \frac{1}{3} \div \frac{1}{5}$, średnio $\frac{4}{15}$;

gdy $D = 50 \div 100 \text{ cm}$, $\tau_z \approx 2,0 \div 2,5 \text{ cm}$, średnio 2,25 cm,
 $\lambda \approx 0,504$, $h_z \approx 4,0 \div 4,5 \text{ cm}$, średnio 4,25 cm,

gdy $D = 100 \div 400 \text{ cm}$, $\tau_z \approx 2,5 \div 3,5 \text{ cm}$, średnio 3,00 cm,
 $\lambda \approx 0,422$, $h_z \approx 4,5 \div 5,0 \text{ cm}$, średnio 4,75 cm.

Uwzględniając powyższe wartości otrzymamy wyrażenie (30), gdy $D = 50 \div 100 \text{ cm}$, w postaci

$$P_i = 2,64 j_{ts} \tau_s a_s \text{ [kW]}, \quad (31)$$

a gdy $D = 100 \div 400 \text{ cm}$,

$$P_i = 2,47 j_{ts} \tau_s a_s \text{ [kW]}; \quad (32)$$

różnica między współczynnikami stałymi wyrażeń (31) i (32) jest mała i wynosi około 6,5% w stosunku do wartości (31), która będzie przyjęta do dalszych rozważań.

Podstawiając (31) do wzoru (28) i przyjmując $\mu_{\delta r} \approx 0,68$ otrzymamy

$$W = 0,2 \frac{(1 - \varepsilon) p_s \tau_s n \theta a}{i^2 \left(\frac{j_{ts}^2}{j_{ws}} \right)} \frac{KL}{Z}. \quad (33)$$

Wzór (33) określa liczbę włączeń z uwzględnieniem średniego napięcia międzywycinkowego $e_{k\delta r}$ od parametrów konstrukcyjnych i eksploatacyj-

nych maszyny oraz od temperatury. Ponieważ w wyrażeniu tym występuje w mianowniku gęstość prądu twornika w kwadracie, więc należy ją przyjmować niższą niż w normalnych maszynach. Wzór (29), wyrażający straty w tworniku, można również napisać w postaci

$$\Delta P_{Cut} + \Delta P_{Fet} = j_{ts}^2 k_{Cut} G_{Cut} + B^2 k_{Fet} G_{Fet}.$$

Z powyższego widać, że aby spełnić warunek małej gęstości j_{ts} , należy zwiększyć straty w żelazie, aby suma strat pozostała stała.

5. OBLICZANIE SILNIKÓW

Będzie tu podana metodyka obliczania tych wszystkich parametrów, które są charakterystyczne dla maszyn pracujących z dużą liczbą włączeń. Należy zaznaczyć, że maszyny tego typu mają zawsze przewietrzanie obce.

5.1. Dane do obliczenia silnika

Dane potrzebne do obliczenia silnika są następujące:

- a) moc P [kW],
- b) napięcie U [V],
- c) prąd I [A],
- d) liczba obrotów n [obr/min],
- e) względny czas pracy ε , czas przerwy t_0 ,
- f) żądany moment zamachowy układu GD^2 i silnika $(GD^2)_s$ [tm^2],
- g) liczba nawrotów w ciągu godziny W ,
- h) przyspieszenie a (obr/min/sek), opóźnienie b (obr/min/sek).

5.2. Podziałka biegunowa maszyny

Podziałkę biegunową maszyny najlepiej jest wyznaczyć w oparciu o stałą Postnikowa [10], która mieści się w wąskich granicach $21 < C < 25$, dla dużych rozpiętości mocy. Stała ta ma ponadto jeszcze i tę zaletę, że można ją wyznaczyć przez współczynniki, których optymalne wartości łatwo określić. Podziałkę biegunową wyznacza się na podstawie wzoru

$$\tau = C \sqrt[4]{\frac{P_i \beta_2}{4 p \lambda_1 f}} \text{ [cm]},$$

gdzie:

$$\lambda_1 = \frac{h_2}{\tau}, \quad \beta_2 = \frac{\tau}{l_i},$$

h_2 — głębokość żłobka [cm].

Na ogół dla maszyn do średnicy $D = 200$ cm, optymalna wartość podziałki biegunowej wynosi

$$30 < \tau < 45 \quad [\text{cm}],$$

natomiast gdy $D \geq 200$ cm

$$45 < \tau < 60 \quad [\text{cm}].$$

5.3. Liczba biegunów

Liczba biegunów jest parametrem ważnym, wywierającym duży wpływ na inne wielkości maszyny i dlatego musi być dobrana bardzo starannie. Od liczby biegunów zależy prąd przypadający na sworzeń szczotkowy

$$I_{sw} = \frac{I}{p},$$

co w konsekwencji prowadzi do wydłużenia komutatora. Liczba biegunów związana jest również z wielkością napięcia międzywycinkowego, napięciem maszyny i liczbą wycinków wzorem

$$e_{k\delta r} = \frac{2pU}{K}.$$

Następnie liczba biegunów musi być tak dobrana, aby częstotliwość nie przekraczała wartości

$$f = \frac{pn}{60} = 10 \div 60 \text{ Hz}.$$

Należy również uwzględnić wpływ liczby biegunów p na wielkość W [wzory (28) i (33)].

5.4. Długość twornika

Długość twornika wiąże się z jakością komutacji, wielkością momentu zamachowego, wielkością powierzchni chłodzenia, od której zależy temperatura jego uzwojenia.

Dla średniego napięcia międzywycinkowego $e_{k\delta r}$ i średniej wartości s.e.m. samoindukcji e_{ss} mamy następujące zależności przy $z_z = 1$

$$e_{k\delta r} = 2 \left(\frac{p}{a} \right) (a_i B_\delta) (v l_i) 10^{-6} \quad [\text{V}],$$

$$e_{ssr} = 2 \lambda A (v l_i) 10^{-6} \quad [\text{V}].$$

Dla dużych maszyn można przyjąć następujące wartości szczegółowe

$$a_i = 0,7, \quad e_{k\delta r} \leq 20, \quad e_{ssr} \leq 10, \quad B_\delta = 9500 \div 11000,$$

$$\lambda \approx 5,5, \quad A = 400 \div 500,$$

λ — współczynnik przewodności żłobkowej,

a wówczas otrzymamy

$$v l_i < (13 \div 15) \left(\frac{a}{p} \right) 10^3 \left[\frac{\text{m cm}}{\text{sek}} \right],$$

$$v l_i < (18 \div 23) 10^2 \left[\frac{\text{m cm}}{\text{sek}} \right].$$

Dla maszyn dużych szybkość obwodowa twornika nie powinna przekraczać wartości $v \leq 60$ m/sek.

Obydwie zależności przedstawiają warunki graniczne, jakim musi odpowiadać iloczyn vl_i ; gdy przy $v = \text{const}$ uzwojenie pętlicowe $a = p$ daje zbyt małą wartość, to wówczas należy stosować uzwojenia o stosunku $\frac{a}{p} = 2$.

Wg [6] długość twornika l_i ze względów konstrukcyjnych i warunków chłodzenia nie powinna przekraczać

$$l_i \leq 125 \text{ cm} \quad \text{przy } D \leq 215 \text{ cm}$$

$$l_i \leq 165 \text{ cm} \quad \text{przy } D \geq 215 \text{ cm}.$$

Po określeniu idealnej długości twornika l_i przyjmuje się długość pakietu żelaza l_p i wyznacza liczbę kanałów v .

Na podstawie tych danych i przyjętej liczby biegunów z rys. 2 wyznacza się wartość współczynnika K , a znając podziałkę biegunową — powierzchnię chłodzenia twornika $S = K\tau^2$.

5.5. Moment zamachowy

Moment zamachowy musi być podany przez użytkownika, który oblicza całość urządzenia napędowego. Przy doborze poszczególnych wymiarów przez konstruktora, należy je tak ustalać, aby nie przekroczyć żądanej wartości momentu zamachowego. Jeżeli tego warunku nie da się urzeczywistnić bez przekroczenia mocy granicznej, bądź też warunków otrzymanych w pktcie 5.4 dla granicznych $e_{k\delta r}$ i $e_{s\delta r}$, to wówczas należy wykonać dwie, a nawet trzy maszyny. W takim przypadku zagadnienie celowości wykonania musi być rozpatrywane w całości układu napędowego.

W zależności od wymiarów twornika moment zamachowy jest proporcjonalny

$$GD^2 \equiv D^4 l \equiv \tau^4 l.$$

Wielkość momentu zamachowego na podstawie tylko wymiarów geometrycznych można z dostateczną dokładnością wyznaczyć ze wzoru

$$(GD^2)_s = 1,6 l_{Fe} (D + D_w)^3 (D - D_w) + 0,4 D^4 + 0,35 D_k l_k \quad [\text{tm}^2],$$

wszystkie wymiary w [m]; ostatni składnik wyrażający udział komutatora jest niewielki i wynosi około 8% całego GD^2 .

5.6. Współczynnik Z

W oparciu o znany moment zamachowy GD^2 na podstawie wzorów (5) i (6), wyznaczamy elektromechaniczną stałą czasową B . Następnie ze wzorów (1) i (3) obliczamy elektromagnetyczną stałą czasową T_p i wyznaczamy współczynnik $b = \frac{B}{T_p}$. Współczynnik wzmożenia wzbudzenia α_w przyjmujemy nie większy od 2; wartość tę należy jeszcze sprawdzić, czy nie przekracza granicznej.

Ostatnim parametrem wchodzącym do wzoru na Z jest c , wyznaczamy go z rys. 6, dla otrzymanej poprzednio wartości b .

Wydaje się, że przyjmowanie $c > 5$ nie jest celowe, zwłaszcza dla dużych b , bo wówczas silnie rośnie Z . Mając wyznaczone parametry α_w , b oraz c określamy z rys. 4 i 5 wartość współczynnika Z .

5.7. Współczynnik L

Współczynnik L oblicza się w oparciu o narzucone wielkości przyspieszeń, a , b , wartości t_0 dla żądanej liczby obrotów n . Wartość stosunku strat ΔP_t można przyjąć średnią, bo to nie odgrywa większej roli; można również, szczególnie w pierwszym przeliczeniu, przyjąć wartość L z rys. 7.

5.8. Gęstość prądu w tworniku

Gęstość prądu w tworniku jest wielkością bardzo ważną, bo od niej z jednej strony zależy wykorzystanie i koszt maszyny, a z drugiej liczba włączeń, która jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu gęstości (33); wielkość j_{ts} jest również związana z mocą, wymiarami i rodzajem uzwojenia. Przy wyborze j_{ts} należy uwzględnić wszystkie powyższe zależności.

5.9. Gęstość prądu w uzwojeniu wzbudzenia

Gęstość prądu w uzwojeniu wzbudzenia również wchodzi do wzoru na liczbę włączeń i można ją wyznaczyć bądź z ogólnie przyjętych wartości dla cewek posiadających kanały wentylacyjne, $j_{sw} = 2 \div 4 \text{ A/mm}^2$, i dla cewek bez kanałów, $j_{ws} = 1,5 \div 2 \text{ A/mm}^2$, bądź też na podstawie wzorów uwzględniających nagrzanie miedzi cewki [10].

Po ustaleniu wszystkich parametrów wchodzących do wzorów (28), (31) i (33) przeprowadza się ostateczną wzajemną korektę wartości wszystkich wielkości. Dalszy tok obliczeń odbywa się już tak samo jak dla normalnych maszyn.

6. PRZYKŁAD LICZBOWY

W celu zilustrowania toku obliczania zostanie podany przykład liczbowy dla silnika walcowniczego pracującego w układzie Leonarda.

6.1. Dane maszyny

$P = 1000 \text{ kW}$, $U = 750 \text{ V}$, $I = 1500 \text{ A}$, $n = 500 \div 1000 \text{ obr/min}$, $\varepsilon = 40^\circ$, średni czas przerwy $t_0 = 2,5 \text{ sek}$, $a \approx 30 \text{ obr/min/sek}$, $b \approx 50 \text{ obr/min/sek}$, $(GD^2)_s \leq 3,5 \text{ tm}^2$.

6.2. Liczba włączeń

Liczba włączeń dla podanych poprzednio wartości ε oraz t_0 wynosi

$$W = \frac{3600}{T_c} = \frac{3600}{4,2} \approx 860.$$

6.3. Liczba biegunów

Minimalną liczbę biegunów wyznacza się dla maksymalnej wartości prądu przypadającej na sworzeń ($I_{pmax} = 600 \div 1000 \text{ A}$) ze wzoru

$$p_{min} = \frac{I_n}{I_{pmax}} = \frac{1500}{600} \approx 3,$$

przyjmujemy $p = 4$.

6.4. Częstotliwość

$$f_{min} = \frac{4 \cdot 500}{60} \approx 33 \text{ Hz}, \quad f_{max} = \frac{4 \cdot 1000}{60} \approx 66 \text{ Hz}.$$

6.5. Wymiary geometryczne

Przyjmując wartości $C \approx 23$, $\beta_2 \approx 1,5$, $\lambda \approx 0,13$, otrzymamy wartość podziałki biegunowej

$$\tau = 23 \sqrt[4]{\frac{1000 \cdot 1,5}{0,93 \cdot 0,13 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 33}} \approx 50 \text{ cm}$$

i średnicy zewnętrznej

$$D = \frac{8 \cdot 50}{\pi} = 128 \text{ cm}.$$

Srednicę wewnętrzną obliczamy ze wzoru

$$D_w \approx D - 2 \frac{b\zeta}{\pi} \tau - 2 \cdot 0,1 \tau,$$

gdzie:

$\frac{B_z}{B_j} = b$ — stosunek indukcji w zębach i jarzmie twornika, średnio

$$b \approx 1,5,$$

$\zeta = \frac{b_z}{t}$ — stosunek średniej szerokości zęba do podziałki żłobkowej, średnio $\zeta \approx 0,55$,

dla której otrzymamy wartość

$$D_w \approx 128 - 26 - 10 \approx 92 \text{ cm.}$$

Idealna długość $l_i = \frac{50}{1,5} \approx 34 \text{ cm}$; przyjmując długość pakietu $l_p \approx 5 \text{ cm}$ otrzymamy liczbę pakietów $n_p = 7$ i liczbę kanałów $\nu = n_p - 1 = 6$; długość kanału przyjmujemy $b_p = 1 \text{ cm}$, wobec tego długość twornika będzie

$$l_t = l_i + 0,5 \nu = 34 + 3 = 37 \text{ cm,}$$

a długość żelaza

$$l_{Fe} = l_t - 0,5 \nu = 34 - 3 = 31 \text{ cm,}$$

6.6. Moment zamachowy silnika

$$(GD^2)_s \approx 1,08 [1,6 \cdot 0,31 (1,28 + 0,92)^3 \cdot 0,36 + 0,4 \cdot 1,28^4] \approx 3,2 \text{ tm}^2.$$

Współczynnik 1,08 uwzględnia moment zamachowy komutatora.

6.7. Prędkość obwodowa

$$\text{Wartość znamionowa } V_a = \frac{\pi \cdot 1,28 \cdot 500}{60} = 33,5 \text{ m/sek}$$

i wartość maksymalna $V_{amax} = 67/\text{sek}$.

6.8. Wyznaczenie współczynników Z , K , L

Współczynnik Z wyznaczamy dla następujących wartości $b = 0,125$; $a_w = 2$; $i = 2$; $c = 3$, a wówczas otrzymamy wartość $Z \approx 0,09$.

Współczynnik K dla $\nu = 6$ i $2p = 8$ wynosi $K = 41,6$.

Współczynnik L wyznaczmy dla $\alpha \approx 30 \text{ obr/min/sek}$, $b \approx 50 \text{ obr/min/sek}$; $t_0 = 2,5 \text{ sek}$ i średniej wartości $\Delta P_t = 0,44$, dla $n = 500 \text{ obr/min}$

$$L = 1 + \frac{500}{2,5} \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{50} \right) \left(\frac{1}{1,44} \right) = 8,4, \text{ a dla } n = 1000 \text{ obr/min } L = 13,4.$$

6.9. Współczynnik oddawania ciepła α

Przyjmując, że $V_p = V_a$ otrzymamy
 dla $V_a = 33,5$ m/sek $\alpha = 1,67 \cdot 10^{-3}$ $(1 + 0,8 \cdot 5,8) = 9,42 \cdot 10^{-3}$; dla
 $V_{amax} = 67$ m/sek $\alpha_{max} = 12,6 \cdot 10^{-3}$.

6.10. Dane uzwojenia i gęstości prądów

Przyjmujemy uzwojenie pętlicowe proste $a = p$.

Gęstość prądu w tworniku określamy ze wzoru

$$j_t = 2 + (1,0 \div 1,5) \sqrt[4]{V_p}$$

dla $V_p = V_a = 33,5$ m/sek, $j_t = 2 + \sqrt[4]{33,5} = 4,4$ A/mm².

Gęstość prądu w uzwojeniu wzbudzenia $j_w = 2$ A/mm².

6.11. Wyznaczenie temperatury uzwojenia twornika

W oparciu o obliczone i dane wielkości ze wzoru (28) wyznaczmy średni przyrost temperatury dla $n = 500$ obr/min

$$\begin{aligned} \Theta &= 1,9 \frac{W i^2 \left(\frac{j_t}{j_w} \right) \left(\frac{P_i}{n} \right) \frac{Z}{(1-\varepsilon) p^2 \tau^2 a} \frac{1}{KL}} 10^3 = \\ &= 1,9 \frac{860 \cdot 4 \cdot 2,2 \cdot 2,15 \cdot 10^6}{0,6 \cdot 8^2 \cdot 50^2 \cdot 9,42} \cdot \frac{0,09}{41,6 \cdot 8,4} \approx 84^\circ \text{C}. \end{aligned}$$

Dla przyjętych i obliczonych wartości otrzymano przyrost temperatury odpowiadający klasie B.

Politechnika Wrocławska
 Katedra Maszyn Elektrycznych
 Zakład Napędów i Automatyki

WYKAZ LITERATURY

1. Batałow N. M., Bielyj W. A. i inni: Kranowo-metallurgiczeskie elektrodwigateli (teorija, konstrukcija, primienienje). Gos. Energi. Izdat., Moskwa 1958.
2. Dubicki B.: Maszyny elektryczne, t. I Maszyny prądu stałego. P.W.N. Warszawa 1958.
3. Gogolewski Z., Gabryś W.: Maszyny prądu stałego. P.W.T., Warszawa 1960.
4. Gogolewski Z.: Napęd elektryczny. Warszawa 1956.
5. Gotter G.: Erwärmung und Kühlung elektrischer Maschinen. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1954.

6. Gurin J. S., Kuroczkin M. N.: Projektowanie maszyn postojannowo toka, Gos. Energo. Izdat., Moskwa 1961.
7. Manitijs J., Bisztyga K. i inni: Hutnicze napędy elektryczne. Wyd. Górniczo-Hutnicze, Kraków 1959.
8. Pełczewski Wł.: Zagadnienia ciepłe w maszynach elektrycznych. P.W.T., Warszawa 1956.
9. Połtiew W. K., Smolnikow L. P.: Elektrooborudowanie metalurgicznych ciechów. Gos. Nauczno-Tiech. Izdat. Litierat. po cziernoj i cwietnoj metalurgii. Swierdłowski 1954.
10. Postnikow I. M.: Projektowanie elektrycznych maszyn. Gos. Izdat. Tiechn. Litieratury U.S.S.R., Kijew 1960.
11. Rjudenbierg T.: Pieriechodnyje procesy w elektroenergietycznych sistie-mach. Izdat. Inostrannoj Litieratury. Moskwa 1955 (tłumaczenie z wydania amerykańskiego).

F. ANDRZEJEWSKI

A METHOD OF COMPUTATION OF D. C. MOTORS WORKING AT A LARGE NUMBER OF SWITCH ON

Summary

The paper gives a method of computing direct current motors operating at a large number of switch on in an hour. The method of computation presented allows for and analysis of the basic structural and exploitation parameters, and makes it possible to impose in advance their desirable values.

Taking into account the electromagnetic time constant, eddy currents constant and electromechanical constant (point 2) as well as the mean temperature increase (point 3), the admissible number of switch on (point 4) can be expressed by formula (28); if the maximum voltage between sectors is also taken into consideration, then the number of switch on will be expressed by formula (33). This formula connects the number of switch on (W) with the geometrical dimensions (τ_s), the number of pole pairs (p_s), rotational speed (n), mean temperature increase of the armature (θ), density of current in the armature (j_{ts}) and exciting current (j_{ws}). On the basis of this formula one arrives at the ultimate mutual correction of these essential parameters of a motor.

F. ANDRZEJEWSKI

LA MÉTHODE DE CALCUL DES MOTEURS À COURANT CONTINU TRAVAILLANT À GRAND NOMBRE DES MISES EN CIRCUIT

Résumé

L'article contient le mode de calcul des moteurs à courant continu travaillant à grand nombre des mises en circuit par heure. Le mode de calcul permet d'analyser les principaux paramètres de construction et d'exploitation; c'est aussi grâce à lui qu'il devient possible d'imposer dès le commencement leurs valeurs exigées.

En tenant compte de la constante de temps électromagnétique des courants de Foucault, de la constante électromécanique (points 2) et de l'accroissement moyen de la température (point 3) on peut exprimer le nombre admissible des mises en circuit (point 4) sous la forme (28). Si l'on prend encore en considération la tension maximum entre lamelles de collecteur, le nombre des mises en circuit sera exprimé par (33). Cette formule lie le nombre des mises en circuit (W) avec les dimensions géométriques (τ_s), la quantité de pôles (p_s), le nombre des tours (n), l'accroissement moyen de la température d'induit (θ), la densité de courant d'induit (j_{ts}) et la densité de courant d'excitation (j_{ws}). À la base de cette formule on arrive à la finale correction mutuelle de ces principaux paramètres de la machine.

F. ANDRZEJEWSKI

METHODE ZUR BERECHNUNG VON GLEICHSTROMMOTOREN MIT GROSSER SCHALTHÄUFIGKEIT

Zusammenfassung

Im nachstehenden Artikel wird die Berechnungsart von Gleichstrommotoren mit grosser Schalthäufigkeit pro Stunde beschrieben, die besonders in Hüttenbetrieben Verwendung finden. Seit langem bestand das Bedürfnis nach einer Berechnungsmethode, bei der sowohl Betriebs — wie auch Konstruktionsparameter klar hervortreten und bei der von vornherein gewünschte Parameterwerte eingesetzt werden können. Diesen Anforderungen hat die klassische Methode bisher nicht genügt.

In Abschnitt 2.1 u. 2.2. wird die elektromagnetische Zeitkonstante der Erregerwicklung im Stromerzeugen als Funktion von geometrischen sowie Induktionswerten angegeben (Formel 1).

Im Abschnitt 2.2 wird die Grösse der Zeitkonstante als Funktion der auftretenden Wirbelströme dargestellt, welche in einem massiven Joch bei Veränderung des Stromflusses entstehen. Formel 3 stellt den gesamten elektromagnetischen Zeitverlauf dar.

Beim Bremsvorgang eines in Leonardschaltung gekuppelten Aggregates wird die Erregerwicklung des Stromerzeugers über einen Zusatzwiderstand R_{ph} geschlossen (Fig. 1), wodurch ein merklich kleinerer Wert der Dauer-Bremskonstante erreicht wird (4).

In Punkt 2.3 wird der Wert der elektromechanischen Zeitkonstante erläutert, und das Verhältnis der elektromechanischen zur elektromagnetischen Zeitkonstante beim Anlassen (b) sowie beim Bremsen (b_h) dargestellt. Der Verhältniswert soll $b = 0,01 \div 0,50$ betragen.

Im Abschnitt 3 wird ausgehend von der Formel 3 der mittlere Temperaturzuwachs im Anker (θ) beschrieben. Zugrunde gelegt sind gewisse mittlere Parameterwerte, wie die Oberflächenkühlung (S), als Produkt des Parameters K , dessen Verlauf als Funktion $2p$ (Fig. 2) und als Quadrat der Polteilung τ^2 in Formel 9 auftritt.

Die Kupferverluste im Anker ΔP_{cut} als Konstruktionsparameter beim Strombelag A (Formel 10) sind in der Art festgelegt, dass nach Auswertung von 9 und 10 die Formel 8 unter 11 in endgültiger Form entsteht.

Im 4-ten Abschnitt ist bei bestimmter Einschalthäufigkeit des Motors W (Formel 21) die Abhängigkeit von Kupfer — und Eisenverlusten im Anker beschrieben, wobei die Grösse der Verluste proportional zur abgegebenen Wärme beim Anlassen

sowie Bremsen des Motors ist. Unter Berücksichtigung der Formelwerte aus 14, 17 bzw. 21 wird die Formel 22 entwickelt. Die Konstante K ist als Funktion a_w^2 , b und C in Fig. 4, 5 dargestellt wobei die Funktion $Z = f(b)$ bei $a_w = 1, 2, 3 \dots$ und für $C = 1, 2, 3 \dots 10$ und ∞ entwickelt wurde.

In Fig. 3 ist die Anlasszeit als Veränderliche der Erregung a_w aufgetragen. Wie aus dem Diagramm klar hervorgeht tritt bei $a_w = 2$ eine Zeitverkürzung des Anlassvorganges ein. Bei Werten $a_w > 2$ wird die Anlasszeit praktisch nicht vergrößert, dagegen ist die Erregerleistung der Stromquelle grösser geworden.

Unabhängig wird beim Wachsen von a_w auch der Amplitudenwert des Anlasstromes vergrößert.

In Fig. 6 wird die Funktion der Ströme erläutert ($\frac{I_{sh}}{I_{zs}}$) und zwar als Funktion der Parameter b und c (24) bei denen deutlich der Einfluss des Wertes c erkenntlich wird. Unter Berücksichtigung der Formelwerte aus 1,3 sowie 14 Formel 22 wird der Formelwert 26 ermittelt, um nachfolgend unter Berücksichtigung von 27 den Endwert 28 zu erhalten. In diesem Endwert wird die Häufigkeit der Motoreinschaltungen in Abhängigkeit von den Grundwerten der Konstruktion sowie zu den wichtigsten Betriebsparametern gebracht. Dieses Verhältnis ist vor allem im Hüttenbetrieb anzutreffen.

Die Grösse der Ankerverluste 29, in Abhängigkeit von der Häufigkeit der Motorschaltungen, wird durch Grenzen als Abhängige der Motorleistungsfähigkeit festgelegt. Bei dauernder Erwärmung, was einer wachsenden Grösse der Wärmeverluste gleichkommt vergrößert sich W , auf Kosten der Motorleistungsfähigkeit. Sie beträgt bei einer Schalthäufigkeit W bei einfacher Schleifenwicklung $a_s p_s = p_s^2$, bei doppelter Schleifenwicklung $a_s p_s = 2p_s^2$, bei Wellenwicklungen $a_s p_s < p_s^2$. Der Grössenwert W ist umgekehrt proportional zum Motormoment ($\frac{P_{is}}{n_s}$), welchen Wert man von vornherein angenommen hatte.

Aus 28 ist folgerichtig, dass die Stromdichte im Anker j_{ts} klein zu halten ist, wogegen sie aber in der Erregerwicklung gross ausgelegt werden muss.

Die Arbeitsart des Motors, ausgedrückt als Produkt $(1 - \varepsilon) L$, ist abhängig von der Arbeitsdauer des Motors, von seiner Umfangsgeschwindigkeit, Voreilung u.s.w. Da ein Motor mit häufiger Schaltfolge schweren Kommutationsfolgen unterliegt, muss er so gebaut sein, dass die zulässige Kollektorlamellenspannung nicht überschritten wird, deren Wert e_{ksr} für Motoren mit Kompensationswicklungen 15 ÷ 20 sie erreichen dürfen. Die Eigenstärke des Motor unter Berücksichtigung der mittleren Spannung, ergibt sich aus Formel 30. Bei Annahme von mittleren Parameterwerten wird Formel 31,32 entwickelt, wobei die Motorstärke als Funktion der Stromdichte j_{ts} , der Polteilung τ_p und parallel geschalteter Ankerwindungen aufzufassen ist. Bei Berücksichtigung der Werte 31 und 28 erhält man die Formel 33, welche die mögliche Einschaltzahl W unter Berücksichtigung der mittleren Teilspannungen enthält. Aus der Formel folgt, dass die Ziffer W umgekehrt proportional ist zum Quadrat der Stromdichte im Anker j_{ts}^2 .

Deshalb wäre es angebracht sie niedriger, als bei normalen Motoren anzunehmen.

Bei Verkleinerung der Stromdichtewerte im Anker verringert man gleichzeitig die Kupferverluste. Um aber die Gesamtverluste in annehmbaren Grenzen zu halten, kann man die Eisenverluste einhalten.

Im Abschnitt 5 sind Richtwerte für die Annahme von Berechnungsgrössen angegeben, die bei Formel 28, 33 eingesetzt werden können und bei einer vollwertigen Korrelation unter den jeweils gegebenen Arbeitsbedingungen den einzelnen Motor kennzeichnen.

In Punkt 5.2 sind Formelzeichen von Postnikow für die einzelnen Polteilbezeichnungen angegeben.

Die Anzahl der Pole ($2p$) Punkt 5.3 muss unter Berücksichtigung der Stromgrößen behandelt werden, die rechnungsgemäss auf einen Ankerbolzen fallen

$I_{sw} = \frac{I}{p}$, was die Ankerlänge des Motors beeinflusst. Die Anzahl der Pole beeinflusst ferner die Größen der Spannung zwischen den einzelnen Kollektorlamellen $e_{ksr} = \frac{2pU}{K}$ selbst die Frequenz $f = \frac{p \cdot n}{60}$ soll in Grenzen zwischen $10 \div 60$ Hz liegen. Bei Auswahl des Wertes $2p$ berücksichtigt man Formel 28 u. 33.

Die Ankerlänge (Punkt 5.4) ist eine besondere Grösse, die mit der Beschaffenheit der Kommutation, der Grösse des Schwungmomentes sowie der Kühlfläche zusammenhängt.

Mit Bezug auf die Größenänderung der Lamellenspannung e_{ksr} sowie die der Selbstinduktion e_{ssr} setzt man allgemein Grenzwerte und für die übrigen Größen Mittelwerte in die Gleichungen ein. Als Ergebnis erhalten wir das Produkt der Kreisgeschwindigkeit bei einer ideal festgelegten Ankerlänge

$$v_{li} < (13 \div 15) \left(\frac{a}{p} \right) 10^2 \left[\frac{\text{m cm}}{\text{sek}} \right],$$

$$v_{li} < (18 \div 23) 10^2 \left[\frac{\text{m cm}}{\text{sek}} \right].$$

Bei grossen Maschinen soll die Kreisgeschwindigkeit des Anker den Wert $v \leq 60$ m/sek nicht überschreiten.

Ф. АНДЖЕВСКИ

МЕТОД РАСЧЁТА ДВИГАТЕЛЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА, РАБОТАЮЩИХ ПРИ БОЛЬШОМ ЧИСЛЕ ВКЛЮЧЕНИЙ

Резюме

В статье даётся способ расчёта двигателей постоянного тока, работающих при большом числе включений в течение одного часа; такой тип работы характерный для всех металлургических приводов. Здесь следовало применить такой метод, который позволял бы анализировать одновременно все эксплуатационные и конструктивные параметры; получено ещё и такую выгоду, что можно заранее принять некоторые значения требуемых параметров. Всех этих достоинств не имеют расчёты по классическому методу.

Во второй главе пункт 2.1. определена электромагнитная постоянная времени цепи возбуждения генератора, в зависимости от геометрических размеров и индукции формула (1); в пункте 2.2. выведена формула (2), позволяющая определить величину постоянной времени, обусловленной вихревыми токами, возникающими в массивном ярме, а наводимыми изменениями тока; формула (3) изображает полную электромагнитную постоянную времени.

При торможении в схеме Леонарда обмотка возбуждения генератора замыкается на дополнительное сопротивление R_{ph} (рис. 1), вследствие чего можно получить на много меньшее значение постоянной времени торможения: формула (4).

В пункте 2.3 дано выражение [формулы (5) и (6)] для механической постоянной времени, а также определено отношение электромеханической постоянной

времени к электромагнитной для пуска b и для торможения b_n (7); даны численные значения этого отношения $b=0,01 \div 0,50$.

В разделе 3 проанализировано среднее повышение температуры якоря (θ), исходя из формулы (8). Приняты некоторые средние значения параметров, определена поверхность охлаждения S в виде произведения параметра K , изменимость которого в функции $2r$ показана на рис. 2, и квадрата полюсного деления τ^2 : формула (9).

Потери в меди якоря ΔP_{Cut} выражены конструктивными параметрами и линейной нагрузкой якоря A (формула 10) так, что учитывая формулы (9) и (10); формула (8) примет окончательный вид, выраженный формулой (11).

В разделе 4 определено число включений двигателя W [формула (21)] в зависимости от потерь в меди и стали якоря, от режима работы и от количества тепла выделенного при пуске и торможении. Если учесть формулы (14) и (17), выражение (21) принимает вид (22). Коэффициент Z , являющийся функцией параметров a_w^2 , b , а также c изображен на рис. 4 и 5; на этих рисунках изображена зависимость $Z=f(b)$ для $a_w=1, 2, 3$ и для $c=1, 2, 3, 10$ и ∞ .

На рис. 3 дана длительность переходного процесса в функции величины форсировки возбуждения a_w . Как видно из этих процессов основное сокращение длительности неустановившегося состояния достигается для $a_w=2$; выше этого значения практически не достигается сокращения времени, а заметно увеличивается мощность источника возбуждения генератора. Независимо от этого с увеличением a_w увеличивается амплитуда тока пуска в ход привода.

На рис. 6 изображена зависимость отношения токов $\frac{i_{sh}}{I_{za}}$ в качестве функции параметров b , а также c [формула 24], из чего видно влияние величины c на это отношение.

Если учесть зависимость (1) и (3), а также (11), формула получит вид (26), а затем, после введения выражения (27), получается окончательный вид (28).

Эта формула выражает число включений W в зависимости от основных конструктивных параметров и самых важных эксплуатационных параметров характеризующих работу машины. Величина потерь в якоре [формула (29)], которым пропорционально число включений, ограничена величиной требуемого к.п.д.; если же принять постоянную температуру θ , то увеличивая потери, увеличится число W , конечно, за счёт к.п.д.

Число включений W пропорционально произведению $a_s p_s$ и имеет для петлевой обмотки значение $(a_s p_s) = p_s^2$, для двухходовой $2p_s^2$, а для волновой множественной $(a_s p_s) < p_s^2$.

Величина W обратно пропорциональная моменту двигателя $\left(\frac{P_{is}}{n_s}\right)$, который является предполагаемой величиной.

Из формулы (28) следует, что плотность тока в якоре j_{ts} должна быть малая, в обмотке же возбуждения j_{ws} большая.

Род работы, выраженный произведением $(1-\varepsilon)L$, зависит от относительного времени работы, скорости вращения, ускорений и т.п.

Так как двигатель, подвергающийся частым пускам и торможениям имеет трудные условия коммутации, следует заботиться о том, чтобы не было превышено допускаемое значение напряжения между коллекторными пластинками e_{kcp} , которое для машин имеющих компенсационную обмотку достигает $e_{kcp} \leq 15 \div 20$.

Внутреннюю мощность машины с учётом среднего напряжения выражает формула (30); принимая средние значения параметров, входящих в эту формулу,

мы получим выражения (31) и (32), в которых мощность является функцией плотности тока j_{ts} , полюсного деления τ_s и числа параллельных ветвей обмотки якоря a_s . Учитывая зависимость (31) и формулы (28), мы получим выражение (33), изображающее число включений W с учётом среднего напряжения между коллекторными пластинками. Из формулы следует, что число W обратно пропорционально квадрату плотности тока якоря j_{ts}^2 и поэтому следует её ниже, чем в нормальных машинах. Принятие более низкого значения плотности тока в якоре уменьшит потери в меди. В связи с тем, чтобы сохранить требуемое значение общих потерь, следует увеличить соответственно потери в стали.

В разделе 5 даны указания для вычисления тех величин, которые выступают в формуле (28) или (33), с целью взаимной корреляции и подбора оптимальных значений при предполагаемом режиме.

В пункте 5.2. даны формулы Постникова для определения полюсного деления.

Число полюсов $2p$ (пункт 5.3.) следует определить с учётом величины тока, приходящегося на стержень $I_{sw} = \frac{I}{p}$, что имеет влияние на длину коммутатора.

Число полюсов влияет тоже на величину напряжения между коллекторными пластинками $e_{кр} = \frac{2pU}{K}$, а также на величину частоты $f = \frac{p \cdot n}{60}$, которая должна содержаться в пределах 10–60 гц. При подборе значения $2p$ следует тоже учесть формулы (28) и (33).

Длина якоря (пункт 5.4) является очень важной величиной, потому что она связана с качеством коммутации, величиной махового момента и величиной поверхности охлаждения.

Исходя из зависимостей, выражающих напряжение между коллекторными пластинками $e_{кр}$, а также э.д.с. самоиндукции e_{scr} и принимая для них предельные значения, при средних значениях остальных величин, мы получим тогда для произведения цепной скорости v и идеальной длины якоря значения

$$v l_1 < (13 \div 15) \left(\frac{a}{p} \right) 10^3 \left[\frac{\text{m cm}}{\text{sek}} \right]$$

$$v l_1 < (18 \div 23) 10^3 \left[\frac{\text{m cm}}{\text{sek}} \right]$$

Для больших машин цепная скорость якоря не должна превышать значения $v \leq 60$ м/сек.

WACŁAW KOŁTOŃSKI

Optymalny odsłuch stereofoniczny oraz jego obiektywna kontrola

Rękopis dostarczono 7.4.1962

W artykule omówione są dwa bardzo istotne zagadnienia dotyczące przestrzennej transmisji dźwięków, a mianowicie optymalne warunki odsłuchu audycji stereofonicznej w pomieszczeniach mieszkalnych oraz sposób obiektywnej kontroli jakości efektu stereofonicznego. Wychodząc z założenia, że czynnikami decydującymi o prawidłowości odsłuchu stereofonicznego są: wierność odwzorowania przestrzennego oraz błąd lokalizacji przestrzennej, autor wykazuje niedoskonałość konwencjonalnych systemów odtwarzających poprzez graficzne wyznaczenie ich obszarów optymalnego odsłuchu i przedstawia następnie własną koncepcję rozgłaszania stereofonicznego opartą o wykorzystanie wyłącznie fal odbitych. Z rozpatrzenia kilku przykładów praktycznego realizowania tej koncepcji wynika, że nowy system w porównaniu z konwencjonalnymi pozwala uzyskać znacznie większy obszar optymalnego odsłuchu przy równoczesnym uproszczeniu sposobu instalowania i eksploatacji urządzenia stereofonicznego w pomieszczeniach mieszkalnych.

Druga część artykułu poświęcona jest możliwościom obiektywnej oceny efektu stereofonicznego. Autor uwzględniając dotychczasowy brak odpowiednich metod pomiarowych rozpatruje sposób wyznaczania błędu lokalizacji w procentach na podstawie mierzonych w miejscu odsłuchu 4 składowych kierunkowych fali dźwiękowej. Podany jest układ pomiarowy opracowany specjalnie do tego celu oraz przytoczone są wyniki pomiarów eksperymentalnych. Wykazano zgodność tych wyników z rezultatami analizy graficznej przeprowadzonej w pierwszej części pracy. Na zakończenie podsumowano wyniki całej pracy w formie wytycznych do projektowania instalacji i urządzeń stereofonicznych, przeznaczonych do eksploataowania w pomieszczeniach mieszkalnych.

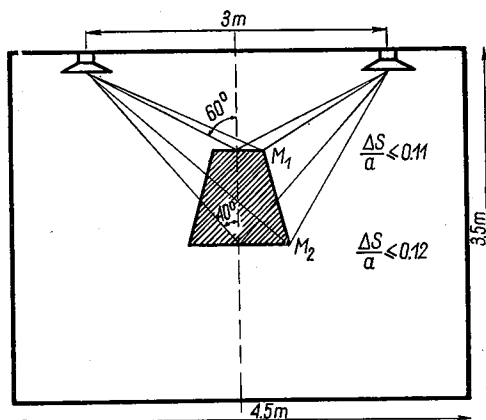
Analizując całokształt dotychczasowego dorobku naukowego i technicznego w dziedzinie przestrzennego przenoszenia i odtwarzania dźwięków łatwo zauważyć, że mimo przeszło dziesięcioletniej eksploatacji urządzeń stereofonicznych pewne podstawowe zagadnienia, decydujące o dalszym rozpowszechnieniu stereofonii nie zostały dotąd należycie rozwiązane. Jako najistotniejsze wśród nich wymienić trzeba:

- 1) niekorzystny i niepożądany wpływ sposobu ustawienia głośników na wielkość i położenie obszaru optymalnego odsłuchu oraz
- 2) brak obiektywnej metody kontroli jakości odbioru (odsłuchu) stereofonicznego.

Obydwa te wyjątkowo aktualne tematy zostały objęte planem prac naukowo-badawczych Zakładu Badania Drgań IPPT PAN, a osiągnięte wyniki przedstawia w skrócie niniejsza publikacja.

Obecne kierunki rozwoju stereofonii wskazują wyraźnie na to, że głównym terenem jej użytkowania stają się pomieszczenia mieszkalne i przytoczone poniżej rozważania przeprowadzone zostały właśnie pod takim kątem widzenia.

Na podstawie statystyki, za standartowe pomieszczenie mieszkalne w Polsce można przyjąć pokój prostokątny o średnich wymiarach $3,5 \times 4,5$ m. Stosując w takim pomieszczeniu konwencjonalne urządzenie do stereofonicznego odtwarzania dźwięków mamy do dyspozycji kilka realnych sposobów ustawienia głośników, pokazanych na rys. 1, 2, 3. Jednak we wszystkich tych przypadkach prawidłowy odsłuch stereofoniczny możliwy jest tylko, jak wykazała praktyka, na b. ograniczonym obszarze, leżącym wzdłuż osi symetrii głośników. Poza tym obszarem dźwięki są lokalizowane przez słuchacza fałszywie w stosunku do zamierzeń transmisji, efekty stereofoniczne ulegają zniekształceniom a przy większych oddale-

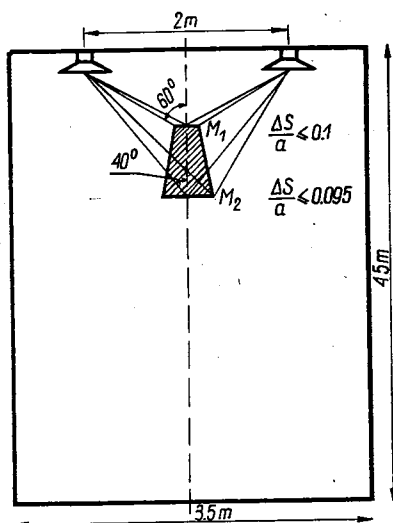


Rys. 1. Jeden z konwencjonalnych sposobów ustawienia głośników do stereofonicznego odtwarzania dźwięków

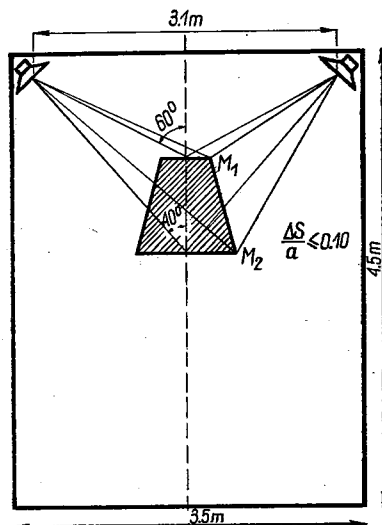
niach od obszaru optymalnego odsłuchu — zanikają całkowicie. Jeżeli mamy przeanalizować zależność istniejącą między sposobem usytuowania głośników a warunkami odsłuchu, to już na wstępie nasuwa się pytanie, co właściwie powinniśmy uważać za obszar optymalnego odsłuchu stereofonicznego. Dotychczasowe poglądy specjalistów na ten temat są dosyć rozbieżne i niesprecyzowane.

W niniejszej pracy za punkt wyjścia przyjęto założenie, że na obszarze optymalnego odsłuchu występować musi maksimum wierności odwzorowania przestrzennego oraz minimum błędu lokalizacji przestrzennej, gdyż w ten sposób zostają uwzględnione wpływy zarówno strony nadawczej,

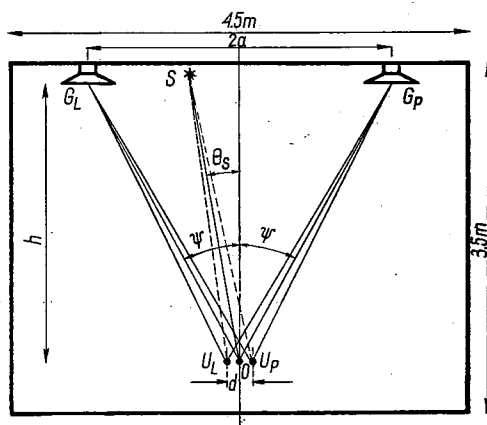
jak i odbiorczej. Z ogólnej teorii słyszenia przestrzennego wiadomo, że zasadniczym wykładnikiem wierności odwzorowania jest tzw. kąt lokalizacji, czyli kąt, pod którym lokalizowane jest przez słuchacza, stereofonicznie odtworzone, pozorne źródło dźwięku. W celu dokładniejszego



Rys. 2. Jeden z konwencjonalnych sposobów ustawienia głośników do stereofonicznego odtwarzania dźwięków



Rys. 3. Jeden z konwencjonalnych sposobów ustawienia głośników do stereofonicznego odtwarzania dźwięków



Rys. 4. Typowe warunki odsłuchu stereofonicznego

określenia związku między tym kątem a wiernością odwzorowania zostanie rozpatrzony elementarny przypadek odsłuchu stereofonicznego, przedstawiony na rys. 4. Zakładając na razie, że zamiast głośników działa w punkcie S rzeczywiste, pierwotne źródło tonu sinusoidalnego, można

określić chwilowe przebiegi akustyczne odbierane przez lewe i prawe ucho w następujący sposób (fale odbite pomijane jako znacznie słabsze w stosunku do fal bezpośrednich):

$$U_L = A \sin \omega(t + \varphi), \quad (1)$$

$$U_P = B \sin \omega(t - \varphi). \quad (2)$$

Różnica fazowa między tymi przebiegami wyniesie

$$\Phi_1 = \frac{\omega d \sin \theta_s}{c}, \quad (3)$$

gdzie:

- 2φ — opóźnienie prawej fali dźwiękowej w stosunku do lewej, wywołane różnicą dróg łączących źródło S z prawym i lewym uchem,
- d — wielkość odstepu między uszami,
- c — prędkość rozchodzenia się dźwięku w powietrzu,
- θ_s — kąt lokalizacji, pod którym znajduje się źródło S w stosunku do osi symetrii słuchacza.

Przy rozważaniu procesu odsłuchu stereofonicznego w warunkach pokazanych na rys. 4 sytuacja komplikuje się, albowiem trzeba uwzględnić fakt, że każde ucho odbiera wówczas dźwięki z dwóch źródeł, którymi są głośniki G_L i G_P . Dlatego też podane wyżej wzory (1), (2), (3) muszą być zastąpione następującymi:

$$U_L = A_L \sin \omega(t + \varphi) + B_L \sin \omega(t - \varphi), \quad (4)$$

$$U_P = A_P \sin \omega(t - \varphi) + B_P \sin \omega(t + \varphi), \quad (5)$$

$$\Phi_2 = 2 \arctg \left(\frac{A - B}{A + B} \operatorname{tg} \varphi \right) = 2 \arctg \left(\frac{A - B}{A + B} \operatorname{tg} \frac{\omega d \sin \psi}{2c} \right), \quad (6)$$

gdzie:

$$A = A_L + A_P,$$

$$B = B_L + B_P,$$

ψ — kąt, pod którym umieszczone są głośniki w stosunku do osi symetrii układu.

Gdy $\omega\varphi$ oraz Φ_2 są $\ll \frac{\pi}{2}$, wówczas

$$\Phi_2 = \frac{A - B}{A + B} \cdot \frac{\omega d \sin \psi}{c}. \quad (7)$$

Na podstawie równania (3) kąt lokalizacji można wyznaczyć ze wzoru:

$$\sin \theta_s = \frac{\Phi_2 c}{\omega d}. \quad (8)$$

Uwzględniając zależność (7) otrzymujemy ostatecznie równanie

$$\sin \theta_s = \frac{A - B}{A + B} \sin \psi, \quad (9)$$

przy pomocy którego określa się wielkość kąta θ_s (zawartego między osią symetrii układu a punktem S , gdzie jest lokalizowane pozorne, odtworzone stereofonicznie źródło dźwięku) w zależności od sposobu ustawienia głośników oraz od natężeń dźwięku w lewym i prawym uchu. Przy poprawnej transmisji stereofonicznej i prawidłowym jej odtworzeniu musi być spełniony podstawowy warunek wiernego odwzorowania przestrzennego:

$$\theta_s = \theta_m, \quad (10)$$

gdzie:

θ_m — kąt, pod którym umieszczone jest pierwotne źródło dźwięku w stosunku do mikrofonów lub do innego punktu odniesienia w pomieszczeniu nadawczym.

Oznaczając przez A i B ciśnienia działające na lewy i prawy mikrofon oraz zakładając, że posługujemy się przeważnie obecnie stosowanym systemem mikrofonowym XY , możemy napisać:

$$A \div \sin(45^\circ + \theta_m),$$

$$B \div \sin(45^\circ - \theta_m),$$

a stąd

$$\frac{A - B}{A + B} = \frac{\sin \theta_m}{\cos \theta_m} = \operatorname{tg} \theta_m. \quad (11)$$

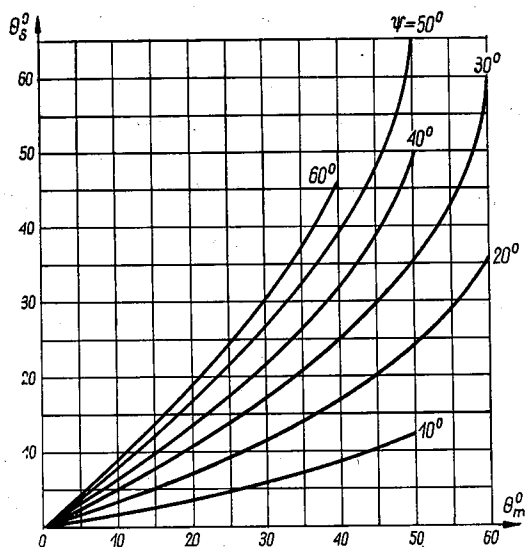
Następnie uwzględniając (9) i (7) otrzymujemy

$$\sin \theta_s = \operatorname{tg} \theta_m \sin \psi. \quad (12)$$

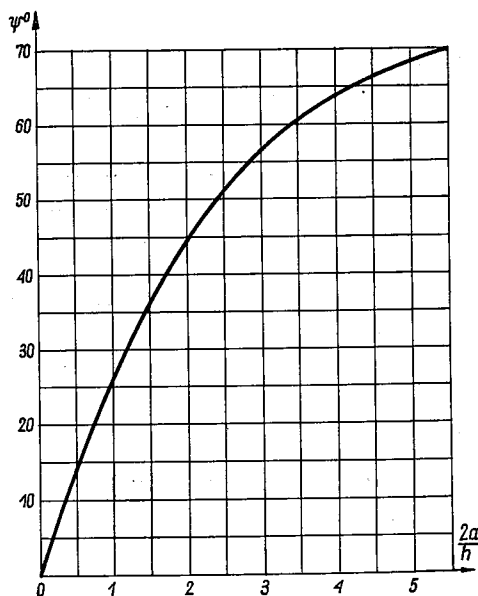
Ten ostatni wzór pozwala na obliczenie krzywych (rys. 5) obrazujących, w jakim stopniu spełniony zostaje podstawowy warunek odwzorowania stereofonicznego $\theta_s = \theta_m$ przy różnych wielkościach kąta ψ . Jak widać, najdokładniejsze odwzorowanie, gdy błąd nie przekracza 10%, występuje przy $\psi = 60^\circ$ i to tylko dla θ_s i θ_m nie większych od 40° . Powyżej tej wartości korzystniejszy jest $\psi = 40^\circ$. Stąd wniosek, że małe kąty θ_s , θ_m są odwzorowywane dokładniej przy większych wartościach ψ i odwrotnie. Operując pojęciem odległości h można stwierdzić, że dla małych kątów θ_s , θ_m korzystniejsza jest mała odległość słuchacza od głośników (przy $2a = \text{const}$) i odwrotnie. Wierność odwzorowania zależy więc od θ_s , θ_m oraz ψ lub $\frac{2a}{h}$. Związek między tymi wielkościami ilustruje krzywa $\psi =$

$= f\left(\frac{2a}{h}\right)$ na rys. 6. Na podstawie tej krzywej i poprzednich można stwierdzić co następuje:

1) Stosowane dotąd w urządzeniach stereofonicznych konwencjonalne systemy głośnikowe nie są w stanie zapewnić zupełnie prawidłowego odsłuchu nawet na samej osi symetrii układu, gdyż do tego potrzebna byłaby zmiana kąta ψ w zależności od kąta Θ_m , czyli inaczej mówiąc ciągle prze-



Rys. 5. Krzywe przedstawiające, w jakim stopniu zostaje spełniony podstawowy warunek wierności odwzorowania $\Theta_s = \Theta_m$ przy różnych kątach ψ ustawienia głośników względem słuchacza

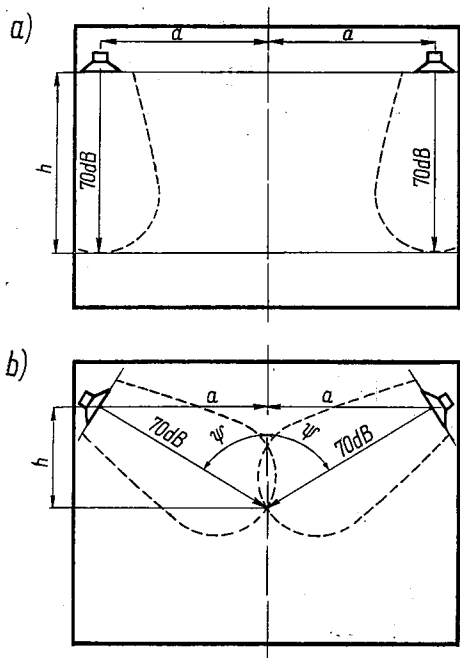


Rys. 6. Krzywa zależności stosunku odstepu między głośnikami do odległości słuchacza od kąta ustawienia głośników

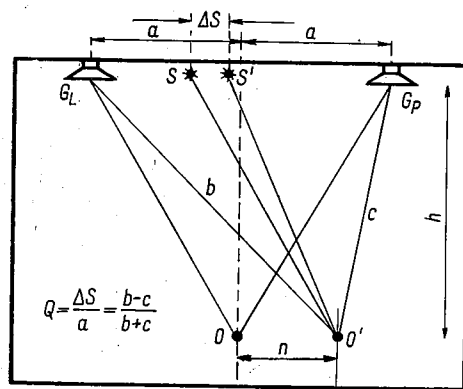
stawianie głośników lub przemieszczanie się słuchacza w zależności od chwilowego położenia pierwotnego źródła dźwięków w stosunku do mikrofonów. Jest to oczywiście rozwiązanie zupełnie nierealne i dlatego może być zastąpione w praktyce pewnymi kompromisami. Jeden z nich — to ograniczenie się w odwzorowywaniu kąta Θ_m tylko do wartości 35° — 40° , drugi — obieranie obszaru optymalnego odsłuchu wokół odcinka osi symetrii, względem którego głośniki znajdują się pod kątem ψ nie większym od 60° i nie mniejszym niż 40° . Wówczas błąd odwzorowania nie powinien przekroczyć 10%.

2) Przyjmując za dopuszczalny zakres zmian kąta ψ granice 40° — 60° trzeba stwierdzić, że najmniejszy, użyteczny i realny odstęp między głośnikami powinien wynosić 1 m, zaś największy jest uzależniony od wymiarów pomieszczenia mieszkalnego.

3) Przy dużych odstępach między głośnikami (powyżej 3—4 m) skierowanie głośników membranami ku osi symetrii układu odtwarzania (por. rys. 7) jest równoznaczne w skutkach ze zmniejszeniem wspomnianych od-



Rys. 7. Wpływ kierunkowości promieniowania głośników na warunki odsłuchu stereofonicznego



Rys. 8. Powstawanie błędu lokalizacji przestrzennej Q

stępów i powoduje przesunięcie obszaru optymalnego odsłuchu w stronę linii głośników. Zjawisko to potęguje się wraz ze wzrostem kierunkowości promieniowania głośników.

We wszystkich dotychczasowych rozważaniach zakładano, że słuchacz usytuowany jest symetrycznie w stosunku do układu głośników. Należy obecnie rozpatrzyć, jaki wpływ na odsłuch stereofoniczny będzie miało zajęcie przez słuchacza pozycji asymetrycznej (por. rys. 8). Takie prze-

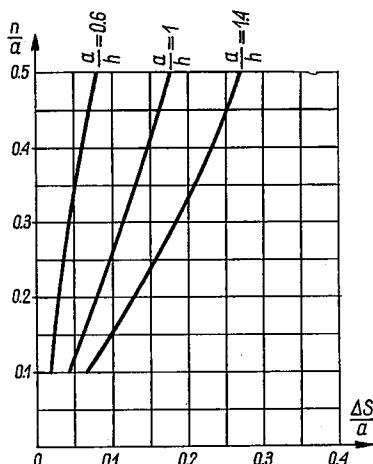
mieszczenie w bok od osi symetrii powoduje zmianę stosunku amplitud i faz (ew. czasów), z którymi dochodzą fale dźwiękowe do lewego i prawego ucha, jak również zmianę wielkości kątów ψ , które w omawianych warunkach przestają być sobie równe. W konsekwencji powyższego parametry lokalizacji zostają zniekształcone i dlatego słuchacz lokalizuje kierunek fali dźwiękowej z pewnym błędem, dającym się określić z dostateczną dla niniejszych celów dokładnością przy pomocy wzoru:

$$Q = \frac{\Delta S}{a} = \frac{b - c}{b + c} \cdot 100, \quad (13)$$

gdzie:

- ΔS — wielkość przesunięcia pozornego źródła dźwięku wzdłuż płaszczyzny głośników, spowodowanego błędem lokalizacji,
- a — połowa odległości między głośnikami,
- b — odległość słuchacza od lewego głośnika,
- c — odległość słuchacza od prawego głośnika.

Przyjmując kolejno różne wielkości odsunięcia słuchacza (n) od osi symetrii (a i h wiadome) otrzymujemy na podstawie wzoru (13) dane do wykreślenia krzywych obrazujących zależność ΔS od n przy różnych stosunkach $\frac{a}{h}$ (por. rys. 9). Jak widać z tych krzywych, przesunięcie pozor-



Rys. 9. Zależność błędu lokalizacji od asymetrii usytuowania słuchacza, jego odległości od głośników oraz odstepu między głośnikami

nego źródła dźwięku ΔS maleje wraz ze zmniejszaniem się stosunku $\frac{a}{h}$, co oznacza, że dla utrzymania niewielkiego ΔS potrzebne są małe odstepy między głośnikami oraz duże odległości słuchacza od głośników. Jednak wówczas w większości przypadków niemożliwe byłoby uzyskanie opty-

malnego kąta ψ , który jak wykazano wyżej, powinien zawierać się w granicach 40° — 60° .

Jeżeli obydwa głośniki urządzenia stereofonicznego promieniują w określonym czasie dźwięk o jednakowym natężeniu, wówczas błąd lokalizacji występujący w danym miejscu obszaru odsłuchu wyznaczony może być na podstawie wielkości amplitud fal odbieranych przez lewe i prawe ucho słuchacza usytuowanego w tymże miejscu. Obowiązuje przy tym również wzór (13), w którym odległości b , c zostają zastąpione amplitudami A , B :

$$Q = \frac{\Delta S}{a} = \frac{A - B}{A + B} \cdot 100. \quad (14)$$

Na osi symetrii amplitudy są sobie równe i wtedy oczywiście błąd $\frac{\Delta S}{a} = 0$.

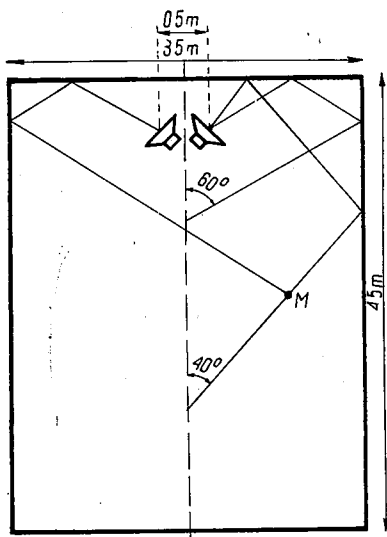
Zależności fazowe można pominąć, gdyż odgrywają one rolę jedynie przy tonach ciągłych (raczej w praktyce nie występujących) o małych częstotliwościach.

Z przeprowadzonej powyżej analizy wpływu wzajemnego usytuowania słuchacza i głośników na jakość efektu stereofonicznego wynikają warunki określające nam obszar optymalnego odsłuchu. Otóż na obszarze tym kąt ψ musi być utrzymany w granicach 40° — 60° a równocześnie błąd lokalizacji Q nie może przekroczyć pewnej, przyjętej za dopuszczalną wartości. Zakładając $Q_{max} = 10\%$ wyznaczono metodą graficzną obszary optymalnego odsłuchu dla trzech uprzednio rozpatrzonych sposobów ustawienia głośników (por. rys. 1, 2, 3 — pola zakreskowane). Obszary te wypadają b. niewielkie, niemniej jednak odpowiadające im ustawienia głośników można uważać za stosunkowo korzystne. W praktyce bowiem mamy często do czynienia z warunkami lokalnymi, które nie pozwalają na osiągnięcie nawet takich wyników, jak pokazane na rys. 1, 2, 3. Przyczynę stanowią nieregularne, niesymetryczne lub nieproporcjonalne kształty pomieszczeń oraz niekorzystne wyposażenie wnętrza. Wówczas ustawienie głośników w wymaganym odstępnie staje się często zupełnie niemożliwe lub też obszar optymalnego odsłuchu wypada w miejscu dla słuchacza niedostępnym. Należy zresztą podkreślić, że nawet w pomieszczeniach dogodnych zainstalowanie urządzenia stereofonicznego wg klasycznych zasad, jak np. na rys. 1, 2, 3, nastręcza również wiele trudności, szczególnie przy nowoczesnym budownictwie mieszkaniowym, oddającym do dyspozycji użytkownika niewielkie puste przestrzenie.

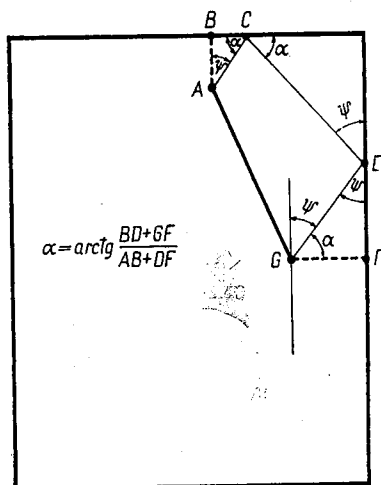
Wobec takich sytuacji jest b. pożądane rozwiązanie systemu rozgłaszającego w sposób pozwalający na spełnienie następujących warunków:

- 1) jak najmniejszy odstęp między głośnikami,
- 2) zredukowany do minimum wpływ umieszczenia głośników względem słuchacza na jakość efektów stereofonicznych.

Nasze badania wykazały, że osiągnięcie tych wyników jest w znacznym stopniu możliwe przez wykorzystanie fal odbitych, kierowanych. Jeden ze sposobów realizacji tej zasady w praktyce jest przedstawiony na rys. 10. Dwa głośniki umieszczone w niewielkiej odległości od siebie (np. 0,5 m) i zwrócone tyłem do słuchacza promieniają fale dźwiękowe w kierunku znajdujących się przed nimi płaszczyzn ścian itp. Dopiero po odbiciu się od tych płaszczyzn fale dochodzą do słuchacza drogami zaznaczonymi przykładowo na rys. 10. Dzięki dwukrotnemu odbiciu od płaszczyzn wzajemnie prostopadłych następuje skierowanie fali ku słuchaczowi pod takim kątem ψ , że odstęp między głośnikami wydaje się znacznie większy niż w rzeczywistości. W celu dokładniejszego przeanalizowania tego układu wprowadzamy oznaczenie wg rys. 11. Jako znane przyjmujemy położenie słuchacza i głośników. Wtedy również jako znane mo-



Rys. 10. Zasada odsłuchu stereofonicznego za pośrednictwem kierowanych fal odbitych



Rys. 11. Wyznaczenie drogi fali dwukrotnie odbitej

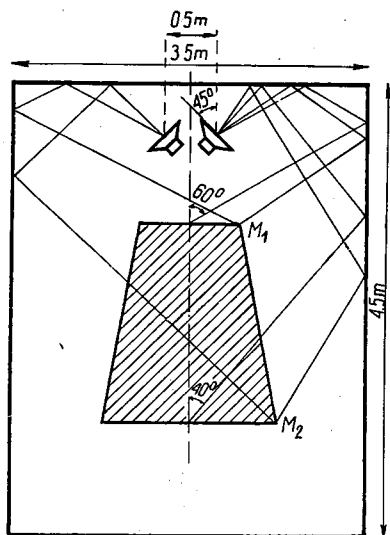
zemy traktować odcinki AB , BD , DF i GF . Interesuje nas droga, po której 2-krotnie odbijając się od ścian dotrze fala od głośnika do słuchacza. Jest to równoznaczne ze znajomością kąta α lub ψ . Na podstawie elementarnych zależności trygonometrycznych

$$\alpha = \arctg \frac{BD + GF}{AB + DF}. \quad (15)$$

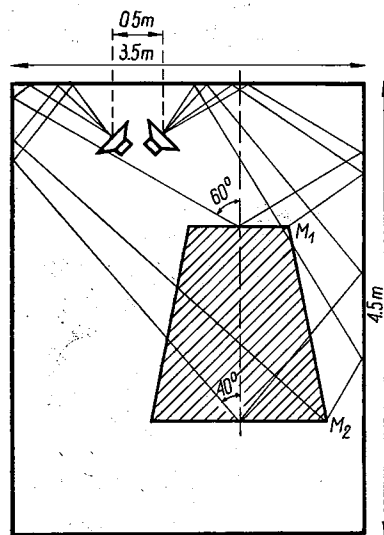
Dla każdego konkretnego usytuowania głośnika i ucha słuchacza określonego odległościami AB , BD , DF i GF istnieje więc tylko jedna droga, po której może przejść fala dźwiękowa spełniając warunek dwukrotne-

go odbicia zgodnie z rys. 10. Dzięki specyficznemu ustawieniu i skierowaniu głośników fale docierające do słuchacza innymi drogami będą mieć tak małe amplitudy, że nie mogą wywrzeć żadnego decydującego wpływu na wrażenie kierunkowe, natomiast, jak wykazała praktyka, wzbogacają efekt przestrzenności dźwięku.

Przyjmując te same zasady co poprzednio można określić obszar optymalnego odsłuchu również dla omawianego ostatnio układu stereofonicznego, opartego na wykorzystaniu fal odbitych (por. rys. 12). Jest on przeszło 4 razy większy od obszaru uzyskiwanego przy konwencjonalnym ustawieniu głośników (por. rys. 1, 2, 3), aczkolwiek odstęp między głośnikami wynosi zaledwie 0,5 m. Jest rzeczą zmienną, że wielkość tego odstępu wpływa tu jedynie na położenie obszaru optymalnego odsłuchu, a nie na jego rozmiar. Zgodnie z zależnością (15) zwiększanie tego odstępu przybliża obszar odsłuchu ku głośnikom, zaś zmniejszanie — oddala. Analogiczną rolę odgrywa zmiana kąta ustawienia głośników ψ , przy czym zależność ta potęguje się wraz ze wzrostem kierunkowości działania głośników. Wreszcie podobny jest też wpływ odległości głośników od tylnej ściany.



Rys. 12. Obszar optymalnego odsłuchu przy systemie kierowanych fal odbitych



Rys. 13. Asymetryczny układ odsłuchu za pośrednictwem kierowanych fal odbitych

Natomiast szersze znaczenie ma zmiana odstępu między bocznymi ścianami pomieszczenia, gdyż pociąga za sobą nie tylko przesunięcie obszaru optymalnego odsłuchu, lecz również zmianę jego rozmiarów.

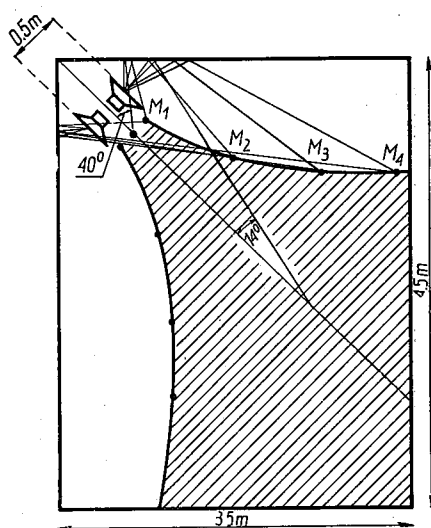
Powyższy układ głośników charakteryzuje się symetrią w stosunku do pomieszczenia odbiorczego. Należy obecnie rozpatrzyć, jakie skutki wywoła asymetria pokazana na rys. 13. Przeprowadzona analiza graficzna dowodzi, że w takim przypadku wielkość obszaru odsłuchu nie ulega

zmianie (o ile w grę wchodzi to samo pomieszczenie, co poprzednio). Zostaje on jedynie przesunięty względem osi symetrii pomieszczenia w przeciwnym kierunku niż głośniki. Wpływ odstepu między głośnikami, kąta ψ itp. pozostaje bez zmian.

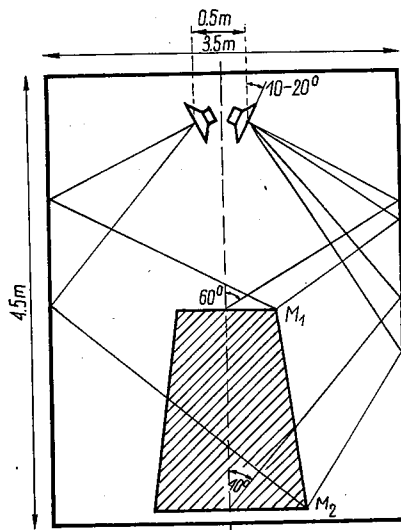
Zasadę odbitych fal kierowanych można realizować jeszcze w inny sposób, przedstawiony na rys. 14, przez umieszczenie głośników w rogu pomieszczenia odbiorczego membranami do ścian, tworzących kąt prosty. Otrzymany tak układ jest jednak niezbyt korzystny, gdyż kąt ψ będzie tu zawsze mniejszy od 45° , a więc prawie poza zakresem optymalnych wartości, z punktu widzenia dokładnego odwzorowania przestrzennego.

Natomiast obszar, na którym $Q = \frac{\Delta S}{a} \leq 0,1$, jest b. duży. Praktycznie oznacza to, że mamy do czynienia z niewielką zależnością jakości efektu stereofonicznego od usytuowania słuchacza oraz z poważnymi zniekształceniami kierunkowymi.

Odstęp między głośnikami i kąt ich skierowania nie wpływa tu prawie wcale na obszar odsłuchu. Jedynie przy oddalaniu lub przybliżaniu głośników względem wierzchołka kąta, utworzonego przez ściany obszar ten ulega przesunięciu w głąb pomieszczenia i odwrotnie.



Rys. 14. Odmienny od podanego poprzednio sposób realizacji zasady odbitych fal kierowanych



Rys. 15. Uproszczony sposób realizacji zasady odbitych fal kierowanych

Prostą, lecz również mało korzystną wersję układu operującego falami odbitymi pokazuje rys. 15. Wielkość obszaru odsłuchu jest b. zbliżona do tej na rys. 12, lecz położenie nieco inne (obszar odsłuchu bardziej oddalony od głośników). Jako poważną wadę wymienić tu należy możliwość odbierania w niektórych miejscach obszaru optymalnego odsłuchu bez-

pośrednich fal dźwiękowych, co wobec niewielkiego odstepu między głośnikami wywołuje efekt monofoniczności.

Ogólną wadą systemu odbitych fal kierowanych jest pewna jego zależność od zdolności pochłaniania dźwięków przez otoczenie głośników i słuchacza. Doświadczenia wykazały jednak, że zależność ta i powodowane nią zniekształcenia efektu stereofonicznego zauważalne są tylko w wyjątkowo niekorzystnych warunkach, a więc np., gdy ściany pomieszczenia odbiorczego pokrywają materiały o dużym współczynniku absorpcji dźwięków.

Przedstawione powyżej wyniki teoretyczne wymagały sprawdzenia w praktyce. Oczywiście nie mogło być mowy o użyciu do tego celu stosowanych dotąd powszechnie subiektywnych metod oceny. Biorąc to pod uwagę, jak również ogólną potrzebę posiadania obiektywnego sposobu kontroli działania układów stereofonicznych przystąpiono do opracowania specjalnej metody pomiarowej.

Z przytoczonych już zależności (9) i (14) wynika, że zarówno kąt lokalizacji Θ_s , jak również błąd lokalizacji Q mogą być obliczone na podstawie wielkości amplitud fal A i B , odbieranych przez lewe i prawe ucho. Tak więc zagadnienie obiektywnego określania Θ_s i Q można sprowadzić do pomiaru amplitud fal dźwiękowych przy uszach słuchacza. W przypadku odsłuchu stereofonicznego wchodzi w grę 4 amplitudy, ponieważ każde ucho odbiera fale z dwóch głośników i dlatego też wzory (9) i (14) przybierają postać:

$$\sin \Theta_s = \frac{A_L + A_P - B_L - B_P}{A_L + A_P + B_L + B_P} \sin \psi, \quad (16)$$

$$Q = \frac{A_L + A_P - B_L - B_P}{A_L + A_P + B_L + B_P} 100, \quad (17)$$

gdzie:

A_L — amplituda impulsu fali z lewego głośnika, odebranego przez lewe ucho,

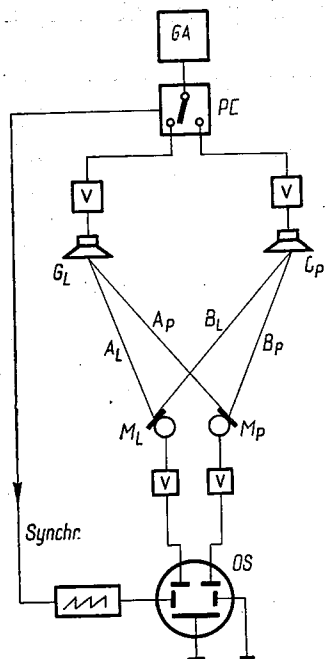
A_P — amplituda impulsu fali z lewego głośnika, odebranego przez prawe ucho,

B_L — amplituda impulsu fali z prawego głośnika, odebranego przez lewe ucho,

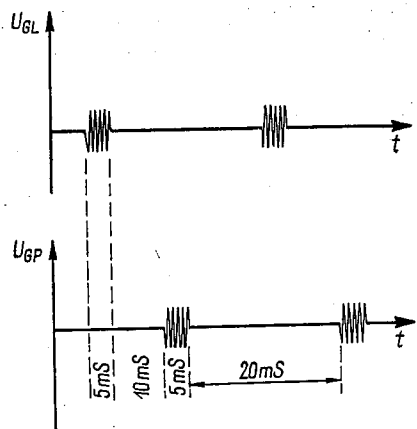
B_P — amplituda impulsu fali z prawego głośnika, odebranego przez prawe ucho,

Cztery wymienione wyżej impulsy można nazwać składowymi kierunkowymi, gdyż od ich wielkości i wzajemnego ich stosunku zależy kierunek lokalizowania dźwięku, odtwarzanego stereofonicznie. Pomiar poszczególnych składowych wymaga odpowiedniego rozdzielenia ich w czasie, ponieważ w warunkach normalnego odsłuchu stereofonicznego odbiór A_L i B_L przez lewe ucho, a A_P i B_P przez prawe ucho następuje nieomal równo-

częście. W celu rozdzielenia i pomierzenia amplitud wspomnianych składowych zastosowano następującą metodę: w układzie generatora akustycznego GA i przełącznika elektronowego PE (por. rys. 16) zostaje wytworzony sygnał kontrolny o przebiegu pokazanym na rys. 17. Składa się on z dwóch amplitudowo równych impulsów U_{GL} i U_{GP} przesuniętych względem siebie w czasie o kilkanaście milisekund. Wcześniejszy impuls



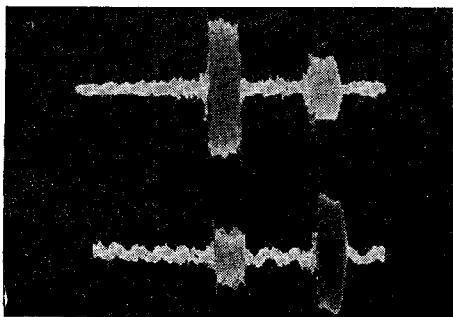
Rys. 16. Schemat blokowy układu do mierzenia składowych kierunkowych fali dźwiękowej



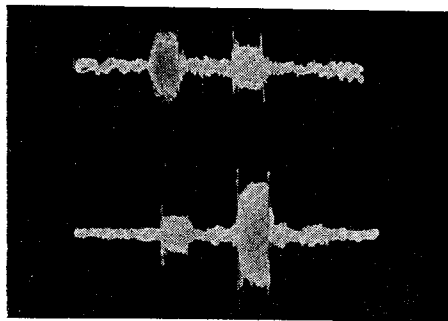
Rys. 17. Sygnał kontrolny używany do pomiaru składowych kierunkowych fali dźwiękowej

U_{GL} doprowadzany jest do lewego kanału, zaś późniejszy U_{GP} — do prawego kanału badanego urządzenia stereofonicznego. W ten sposób głośniki G_L i G_P działają nie równocześnie, lecz kolejno w odstępie kilkunastu msek, dzięki czemu ustawione zamiast słuchacza dwa specjalne mikrofony pomiarowe M_L i M_P odbierają 4 oddzielne impulsy, odpowiadające wspomnianym składowym kierunkowym. Po dołączeniu mikrofonów do dwustrumieniowego oscyloskopu OS otrzymuje się na jego ekranie ostateczny wynik pomiaru prawidłowości odbieranego efektu stereofonicznego w formie 4 impulsów, jak to pokazują przykładowe zdjęcia na rys. 18 i 19. Ponieważ do głośników doprowadzone zostały impulsy o jednakowych napięciach (a zakładamy także jednakową sprawność głośników), więc przy prawidłowym odsłuchu stereofonicznym wielkości odebranych impulsów A_L , A_P , B_L , B_P powinny być takie, aby po podstawie-

niu do wzorów (16) i (17) dały wynik równy lub bliski zeru. Potwierdzają to wyniki pokazane na rys. 18 i 19, gdzie pierwszy przedstawia oscylogram impulsów odebranych w obrębie obszaru optymalnego odsłuchu stereofonicznego (wyznaczonego teoretycznie), a drugi — poza tym obszarem.



Rys. 18. Oscylogram z pomiaru składowych kierunkowych fali na osi symetrii głośników



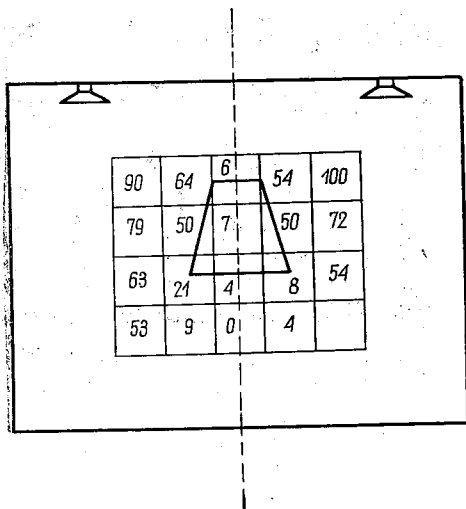
Rys. 19. Oscylogram z pomiaru składowych kierunkowych fali w znacznym oddaleniu od osi symetrii głośników

Po stwierdzeniu, że opracowana metoda pomiarowa spełnia postawione jej zadanie, wykorzystano ją do praktycznego wyznaczenia obszarów optymalnego odsłuchu stereofonicznego w przypadkach rozpatrzonych już teoretycznie. W tym celu na podłogę eksperymentalnego pomieszczenia odbiorczego naniesiono siatkę o polach $0,5 \times 0,5$ m i ustawiając mikrofony na poszczególnych polach rejestrowano fotograficznie obrazy odebranych impulsów szumu białego. Czynności te powtarzano dla różnych ustawień głośników. Na podstawie wielkości amplitud, wyznaczonych ze zdjęć oscylogramów obliczono przy pomocy wzoru (17) błędy lokalizacji Q w poszczególnych miejscach pomieszczenia odbiorczego. Obszary, na których Q nie przekracza 10% pokrywają się w poważnym stopniu z obszarami optymalnego odsłuchu wyznaczonymi teoretycznie (por. rys. 1, 2, 3, 12 oraz 20, 21, 22 i 23).

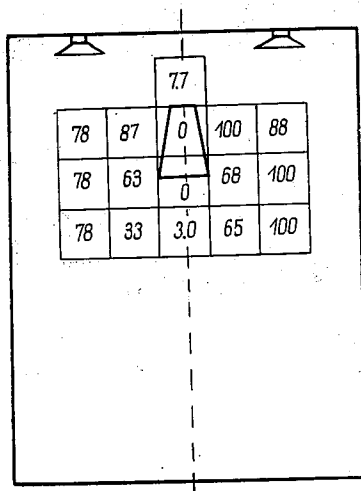
Z uzyskanych w niniejszej pracy rezultatów zarówno teoretycznych, jak i doświadczalnych wynikają następujące wytyczne dla projektowania urządzeń i instalacji do przestrzennego odtwarzania dźwięków.

1) Dysponujemy realnie dwoma systemami stereofonicznego rozgłaszania dźwięków w pomieszczeniach zamkniętych: konwencjonalnym, opartym na odbiorze fal bezpośrednich oraz opracowanym powyżej, wykorzystującym odbite fale kierowane. Wybór systemu powinien być uzależniony od warunków lokalnych w pomieszczeniu odbiorczym (kształt i wymiary pomieszczenia, sposób jego umeblowania) oraz od wymagań jakościowych stawianych odsłuchowi. System konwencjonalny zapewnia uzy-

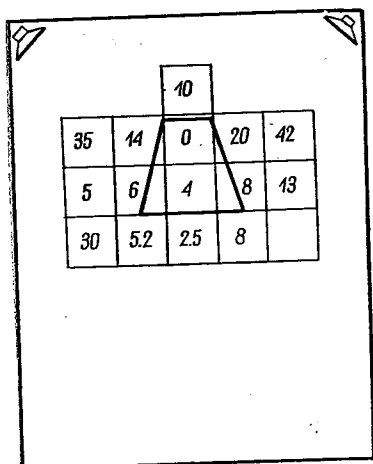
skanie prawidłowego efektu stereofonicznego bez względu na własności akustyczne otoczenia, lecz obszar, na którym błąd lokalizacji nie przekracza 10%, jest b. mały, a możliwość zmiany jego położenia również poważnie ograniczona. Ponadto niezbędny jest stosunkowo duży odstęp między głośnikami, co w praktyce nie zawsze daje się zrealizować.



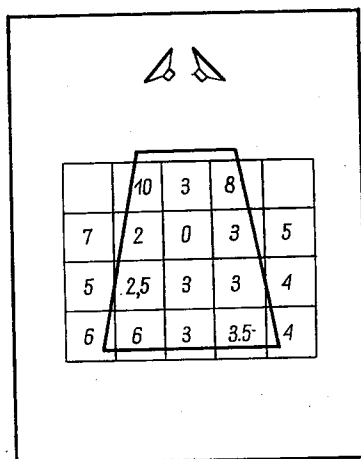
Rys. 20. Błąd lokalizacji przestrzennej (w %) wyznaczony na podstawie pomiarów składowych kierunkowych fali dźwiękowej (por. rys. 1)



Rys. 21. Błąd lokalizacji przestrzennej (w %) wyznaczony na podstawie pomiarów składowych kierunkowych fali dźwiękowej (por. rys. 2)



Rys. 22. Błąd lokalizacji przestrzennej (w %) wyznaczony na podstawie pomiarów składowych kierunkowych fali dźwiękowej (por. rys. 3)



Rys. 23. Błąd lokalizacji przestrzennej (w %) wyznaczony na podstawie pomiarów składowych kierunkowych fali dźwiękowej (por. rys. 12)

Przy zastosowaniu drugiego z wymienionych systemów obszar optymalnego odsłuchu powiększa się znacznie, jak też możliwości zmiany jego położenia. Odstęp między głośnikami może być b. mały, dzięki czemu ustawienie ich w dowolnym pomieszczeniu mieszkalnym nie sprawia żadnych trudności.

2) Jako punkt wyjścia do projektowania stereofonicznych instalacji głośnikowych należy przyjmować założenie wstępne określające wielkość i położenie żadanego obszaru optymalnego odsłuchu. Mając te dane dokonuje się wyboru systemu odtwarzania w myśl uwag podanych w p. 1). Następnie można przystąpić do wyznaczenia miejsc, w których powinny znaleźć się głośniki. W tym celu na plan pomieszczenia odbiorczego, sporządzony w dowolnej skali, nanosimy przyjętą w założeniu obszar odsłuchu, a na jego podłużnej osi symetrii zaznaczamy skrajny punkt, do którego fale dźwiękowe dochodzić muszą pod kątem 60° . W dalszym ciągu posługując się w zależności od obranego systemu odtwarzania jedną z metod graficznych przedstawionych uprzednio na rys. 1, 2, 3 lub 10, 12, 14 otrzymujemy miejsca ustawienia głośników.

3) Podany w p. 2) sposób postępowania jest najbardziej celowy tylko wówczas, gdy mamy dużą swobodę dysponowania wolnym miejscem w pomieszczeniu odbiorczym. W przeciwnym przypadku korzystniejsza jest odwrotna kolejność postępowania. Mianowicie narzucamy z góry takie ustawienie głośników, na jakie pozwalają warunki lokalne w pomieszczeniu odbiorczym, a następnie wyznaczamy graficznie dający się uzyskać obszar optymalnego odsłuchu.

4) Przy projektowaniu urządzeń opartych o zasadę kierunkowych fal odbitych należy zawsze brać pod uwagę wpływ własności dźwiękochłonnych otoczenia (ścian, umeblowania itp.) i w miarę możliwości redukować ten wpływ tak, aby odbicia fal na drodze od głośników do słuchacza nie uległy zbytniemu osłabieniu.

5) Uzyskane w praktyce obszary optymalnego odsłuchu są przeważnie znacznie większe (o ok. 50—70%) niż to wynika z teorii, ponieważ zachowanie pierwotnych kierunków fal dźwiękowych jest tylko w pewnym stopniu konieczne do otrzymania przestrzennych wrażeń słuchowych, a właśnie te ostatnie są podstawowym celem stereofonii.

*Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Zakład Badania Drgań*

WYKAZ LITERATURY

1. Clark H. A. M., Dutton G. F., Vanderlyn P. B.: The Stereosonic Recording and Reproducing System. — Journal of the Audio Engineering Society, vol 6, No. 2, 1958, s. 102—117.
2. Kołtoński W.: Zarys teorii przenoszenia i odtwarzania dźwięków przestrzennych. PWN, Warszawa 1958.

3. Kołtoński W.: Zależności fazowe w stereofonicznym zapisywaniu i odczytywaniu dźwięku. — *Technika Kinematografii* Nr 1, 1956, str. 16—20.
4. Sayers B. McA., Cherry E.C.: Mechanism of Binaural Fusion in the Hearing of Speech. — *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 29, No 9, 1957, str. 973—987.
5. Warncke H.: Die Grundlagen der raumbezüglichen, stereophonischen Übertragung in Tonfilm. — *Akustische Zeitschrift*, 3 1941, str. 174—188.

W. KOŁTOŃSKI

THE OPTIMUM LISTENING CONDITIONS FOR STEREO AND METHOD OF OBJECTIVE DETERMINATION THERE OF

Summary

The two very important problems concerning the spatial transmission of sound, namely the optimum listening conditions for stereophonic programme in living rooms and the method for objective determination of the quality of stereophonic effect, are discussed in this paper.

Assuming that a true stereo perception is determined by two factors, that is the accuracy of auditory perspective and localization error, the author shows deficiencies of the conventional stereophonic reproduction systems by means of graphical determination of their optimum listening areas. The author discusses his own conception of stereophonic transmission based on taking into account only the reflected sound waves. From some experiments it may be seen that the resulting optimum listening area for the new system using this conception is actually much greater than that obtained with the conventional systems. At the same time the installation and using of stereo equipment in the home may be simpler.

In the second part of this paper some possibilities of objective estimation of the stereophonic effect are described. To the author's knowledge no method enabling such objective estimation has been known and therefore the author discusses a method for the determination of localization error (in percent), using 4 directional components of sound wave measured in the listening place.

The block diagram of the measuring set worked out especially for this purpose, and the results of experimental measurement are given. The agreement of the above — mentioned results with the results of graphical analysis given in the first part of this work is shown.

In the conclusion the results of the whole work are summarized and the principles for the design of stereophonic equipments for home — use are given.

W. KOŁTOŃSKI

AUDITION STÉRÉOPHONIQUE OPTIMALE ET SON CONTRÔLE OBJECTIF

Résumé

Les deux problèmes essentiels, concernant la transmission spatiale des sons, sont considérés dans l'article présent, notamment les conditions optimales de l'audition stéréophonique dans les chambres d'habitation et la méthode de contrôle

objectif de la qualité de l'effet stéréophonique. Partant du principe, que les facteurs fondamentaux de la régularité de l'audition stéréophonique sont: l'exactitude de la reproduction spatiale et l'erreur de la disposition spatiale l'auteur montre l'imperfection de conventionnels systèmes de reproduction en analysant la solution graphique de leur espace de l'audition optimale et présente une conception originelle de la diffusion stéréophonique, basée sur l'utilisation de ondes réfléchies. Analysant la réalisation de cette conception sur quelques exemples pratiques on obtient, que le système nouvel, en comparaison avec les systèmes conventionnels, rend possible un rayon d'audition optimal sensiblement plus grand que jusqu'à présent, simplifiant en même temps la méthode d'installation et d'exploitation de l'équipement stéréophonique dans les chambres d'habitation.

La seconde partie de l'article est consacré aux possibilités de l'évaluation objective de l'effet stéréophonique. Considérant l'absence jusqu'à présent des méthodes convenables de mesure, l'auteur analyse la méthode de déterminer l'erreur de localisation en pour cent en vertu de quatre composantes directionnelle de l'onde acoustique. Le circuit de mesure, élaboré spécialement pour ce but, est présenté, ainsi que des résultats des mesures expérimentales. On a montré l'accord de ces résultats avec ceux-ci de l'analyse graphique accomplie dans la partie précédente de l'article.

Enfin on a résumé les résultats du travail sous la forme des directives concernant la composition des projets de l'installation et de l'équipement de stéréophonie, déterminé à l'exploitation dans des chambres d'habitation.

W. KOŁTOŃSKI

DAS OPTIMALE STEREOPHONISCHE ABHÖREN UND SEINE OBJEKTIVE KONTROLLE

Zusammenfassung

In diesem Artikel werden zwei sehr wesentliche Probleme besprochen, welche die räumliche Tonübertragung betreffen, und zwar das optimale Abhören, sowie die Art und Weise der Durchführung einer objektiven Kontrolle des stereophonischen Effektes.

Der Verfasser geht vom Standpunkte aus, dass auf ein regelmässiges stereophonisches Abhören nachstehende Faktoren Einfluss haben, wie die räumlich getreue Wiedergabe, sowie der Fehler in der räumlichen Lokalisierung. Der Verfasser weist auf die Unzuvollkommenheit der konventionellen Wiedergabesysteme mittels graphischer Bestimmung ihres optimalen Abhörortes hin, und stellt ein eigenes Konzept für eine stereophonische Wiedergabe vor, welches auf der Ausnutzung der nur reflektierten Wellen beruht.

Aus der sorgfältigen Betrachtung einiger Beispiele der praktischen Verwirklichung der Idee dieses Konzeptes geht hervor, dass das neue System im Vergleich mit anderen konventionellen Lösungen einen bedeutend grösseren Raum des optimalen Abhörens gibt, bei gleichzeitig vereinfachter Einbauart und Bedienung in Wohnräumen.

Im zweiten Teil dieses Artikels behandelt der Verfasser die Möglichkeiten einer objektiven Beurteilung des stereophonischen Effektes.

Der Verfasser berücksichtigt den bisherigen Mangel an entsprechenden Messmethoden, betrachtet die Art und Weise der Ermittlung des Lokalisierungsfehlers

in Prozenten auf Grund der am Abhörtort gemessenen vier Richtungskomponenten der Schallwelle.

Er giebt ferner das Schema der Messanordnung, welche besonders für diesen Zweck ausgearbeitet wurde, sowie alle versuchlichen Messergebnisse bekannt.

Hierbei wird auf die Übereinstimmung der letzteren mit den Ergebnissen der graphischen Analyse, welche im ersten Teil der Arbeit durchgeführt wurde hingewiesen.

Zum Schluss werden die Ergebnisse der ganzen Arbeit in Form von Anleitungen für die Entwürfe von stereophonischen Schaltungen und Anlagen in Wohnräumen angegeben.

В. КОЛТОНЬСКИ

ОПТИМАЛЬНОЕ СТЕРЕОФОНИЧЕСКОЕ ВОСПРИЯТИЕ И ЕГО ОБЪЕКТИВНЫЙ КОНТРОЛЬ

Резюме

В работе рассматриваются два весьма существенные вопросы, касающиеся пространственной передачи звука, а именно оптимальные условия восприятия стереофонической передачи в жилых помещениях и способ объективного контроля качества стереофонического эффекта.

Исходя из предположения, что решающими факторами правильности стереофонического восприятия является пространственное отображение и погрешность пространственной локализации, автор показывает несовершенство конвенциональных воспроизводящих систем, путем графического определения зон оптимального восприятия и предлагает затем оригинальную концепцию стереофонического вещания, основанную на использовании только лишь отраженных волн. Из рассмотрения нескольких примеров практической реализации этой концепции получается, что новая система, по сравнению с конвенциональной, дает возможность получить значительно большую зону оптимального восприятия, при одновременном упрощении способа установки и эксплуатации стереофонического устройства в жилых помещениях.

Во второй части работы обсуждается возможность объективной оценки стереофонического эффекта. Учитывая, что до сих пор нет соответствующих измерительных методов, автор рассматривает способ определения погрешности локализации в процентах, на основании измеренных в месте восприятия четырех направленных компонент звуковой волны. Приводится схема измерительной системы, разработанная специально для этой цели, а также приводятся результаты экспериментальных измерений. Доказывается согласие их с результатами графического анализа, проведенного в первой части работы. В заключении подведены итоги всей работы в форме указаний для проектирования установки и стереофонических устройств, предназначенных для эксплуатации в жилых помещениях.

WIESŁAW WOLIŃSKI, TADEUSZ ADAMOWICZ

Impulsowe źródła podczerwieni

Rękopis dostarczono 12.3.1962

Artykuł obejmuje przegląd zagadnień dotyczących lamp wyładowczych niskiego i wysokiego ciśnienia.

Omówiono zjawiska fizyczne zachodzące w wyładowaniu lamp błyskowych i przeanalizowano wpływ rodzaju i ciśnienia gazu, mocy wyładowania oraz obwodu elektrycznego na parametry lamp pracujących jako źródła podczerwieni. Zestawiono i omówiono szereg istniejących rozwiązań konstrukcyjnych.

1. WSTĘP

Rozwijające się coraz bardziej różne dziedziny nauki i techniki stwarzają zapotrzebowanie na impulsowe źródła światła o dużej radiancji¹⁾ i wydajności w określonym zakresie charakterystyki widmowej promieniowania oraz odpowiednim czasie błysku. Wykorzystywany jest zarówno zakres nadfioletu i podczerwieni, jak również i część widzialna promieniowania. Najprostszym rozwiązaniem technicznym impulsowych źródeł światła są lampy błyskowe stosowane do celów sygnalizacji, lokacji w podczerwieni, fotografii ultraszybkiej i noktowizji. W zależności od zastosowania lampy te budowane są na moce średnie od kilku do kilkunastu tysięcy watów (W). Moce w błysku dochodzą do kilku megawatów (MW), a czas błysku w zależności od typu wynosi od 1 μ s do 1 ms.

Błysk powstaje przy rozładowaniu kondensatorów o określonej energii. Wydzielenie energii zachodzi między elektrodami umieszczonymi w gazach szlachetnych, w powietrzu lub w parach metali. Ze względu na źródło energii wyładowanie ma charakter impulsowy i stanowi jedną z niestacjonarnych postaci wyładowania, zbliżoną pod względem procesów elementarnych i właściwości świetlnych do wyładowania iskrowego.

W artykule niniejszym omówiono zjawiska fizyczne zachodzące w lampie w czasie błysku jak również przeanalizowano wpływ rodzaju oraz ciś-

1) Przez radiancję należy rozumieć stosunek natężenia promieniowania do pola pozornej powierzchni promiennika. Wielkość ta nazywana jest również w literaturze luminancją energetyczną lub jaskrawością energetyczną. Jednostką radiancji jest $\text{Wm}^{-2} \text{sr}^{-1}$.

nienia gazu, napięcia, mocy i obwodu elektrycznego na jej parametry elektryczne i świetlne. Zebrano i omówiono również szereg istniejących rozwiązań konstrukcyjnych w wykonaniu radzieckim, francuskim, holenderskim, angielskim i amerykańskim.

2. ZJAWISKA FIZYCZNE ZACHODZĄCE W WYŁADOWANIU BŁYSKOWYM

Fizyczny przebieg wyładowania impulsowego tłumaczy się teorią kanałów plazmowych — teorią przebicia jednolawinowego. Przebiecie przestrzemi międzyelektrodowej i utworzenie kanału wyładowczego zapoczątkowuje w lampach błyskowych częściowa jonizacja gazu spowodowana przyłożeniem impulsu zapłonowego. Przez obszar wyładowania zaczyna przebiegać lawina elektronów, powodująca wytworzenie się kanału plazmowego. Rozwój kanału plazmowego i jego ogromna szybkość powstawania spowodowana jest fotojonizacją gazu, która występuje pod wpływem krótkofalowego promieniowania wysyłanego przez czoło lawiny.

Drugim czynnikiem sprzyjającym rozwojowi kanału jest odkształcenie pola elektrycznego na skutek powstawania ładunków przestrzennych. Wpływ deformacji pola jest różny dla różnych kierunków poruszania się kanałów plazmowych. Dla kanału plazmowego dodatniego, poruszającego się od anody do katody, czoło przechodzi z obszaru o małym natężeniu pola do obszaru o dużym natężeniu i narastanie jest bardzo szybkie. Elektrony odprowadzane są do anody, a przed czołem kanału powstaje ładunek jonów dodatnich znacznie podwyższający potencjał pola i jakby zmniejszający przestrzeń międzyelektrodową.

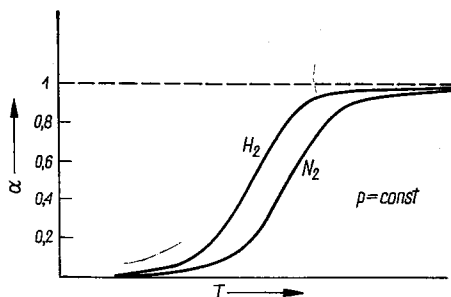
Przebieg zjawiska przy zapoczątkowaniu kanału plazmowego przy katodzie jest inny. Tutaj czoło kanału przebiega przez obszar o stopniowo malejącym natężeniu pola. Dodatni ładunek istniejący przed czołem kanału obniża potencjał pola. W wyniku tej deformacji pola elektrycznego kształt kanału plazmowego dodatniego jest zwarty, natomiast ujemnego rozwidlony i rozmyty.

Oprócz dwu wyżej opisanych przypadków, zapoczątkowanie kanału plazmowego może nastąpić również w dowolnym punkcie przestrzeni międzyelektrodowej. Korzystniejsze warunki tworzenia się kanału plazmowego dodatniego potwierdzają rozwiązania praktyczne, gdzie dla uzyskania niższego napięcia zapłonu i większej szybkości przebiegu kanału, rzędu $(3 \div 4) \cdot 10^8$ cm/s, przykładą się impuls zapłonowy w pobliżu anody.

Po przebiciu przestrzeni międzyelektrodowej i utworzeniu się plamki katodowej, wrywane z katody elektrony neutralizują dodatnie ładunki przestrzenne kanału i przekształcają go we włókno plazmy o dużym przewodnictwie elektrycznym. Szybkość przebiegu impulsu prądowego osiąga wartości od $(10^9 \div 10^{10})$ cm/s. Gęstości prądu wyładowania dochodzą od kilku do kilkudziesięciu kA/cm², a temperatura na osi kanału przekracza 10^4 °K. W takiej temperaturze następuje prawie całkowita jonizacja ter-

miczna atomów gazu. Stopień jonizacji α , definiowany jako stosunek liczby atomów zjonizowanych do liczby wszystkich atomów pierwotnych, w funkcji temperatury ma przebieg jak na rys. 1.

Z charakterystyki przedstawionej na rysunku widać, że po przekroczeniu pewnej temperatury prawie wszystkie atomy gazu są zjonizowane. Aby to nastąpiło, należy wydzielić w lampie odpowiednią moc, która



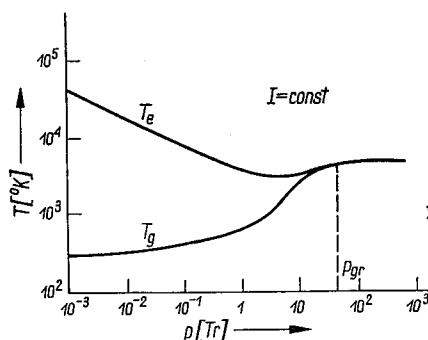
Rys. 1. Przebieg stopnia jonizacji α w funkcji temperatury [6]

w znacznej mierze zależy od ciśnienia i rodzaju gazu wypełniającego lampę. Badania przeprowadzone przez Wulfsona i współpracowników [18] wykazały, że przy wyładowaniach o odpowiednio dużej energii oporność właściwa plazmy nie zależy od rodzaju gazu ani od materiału elektrod i wynosi $(1,5 \div 3) \cdot 10^{-2}$ cm. Wytworzenie takich warunków wyładowania jest możliwe tylko dlatego, że ośrodek gazowy powoduje zwężenie słupa wyładowania, tzw. efekt „skurczu”, tym większe, im większe jest ciśnienie gazu. Jednocześnie gaz otaczający tworzy osłonę kanału i utrudnia dyfuzję ładunków elektrycznych ku ściankom bańki.

Pobieranie energii z pola elektrycznego i przekazywanie jej plazmie odbywa się za pośrednictwem elektronów, którym z uwagi na szybkość poruszania się można przypisać pewną temperaturę elektronową T_e . Także atomom i jonom w obszarze słupa wyładowania można również przyporządkować pewną wspólną temperaturę T_g , określoną ich szybkością poruszania się. Należy zaznaczyć, że temperatura jonów jest zawsze nieco większa od temperatury atomów obojętnych z uwagi na działanie pola elektrycznego. Atomy obojętne i wzbudzone, elektrony i jony, będące składnikami plazmy, znajdują się w nieustannym ruchu i zderzają się między sobą. Następuje między nimi wymiana energii. Jedne z tych zderzeń prowadzą do wzbudzenia atomów i ich jonizacji, inne powodują zanik atomów wzbudzonych i rekombinację. Wypromieniowane w dwu ostatnich procesach kwanty energii mogą być pochłonięte w sąsiednim obszarze wyładowania powodując dalsze wzbudzenie i jonizację gazu. Procesy wzbudzeń stopniowych oraz absorpcje promieniowania rezonansowego, zwłaszcza krótkofalowego, są typowe dla wyładowań w plazmie o wysokiej temperaturze i dużych koncentracjach cząstek.

Stan, w którym następuje wyrównanie procesów prowadzonych do wzbudzenia i jonizacji z procesami przeciwnymi, nazywany jest stanem równowagi termicznej. Odpowiada on wyrównaniu temperatur T_e i T_g . W rzeczywistości temperatura elektronowa zawsze musi być nieco wyższa od temperatury gazu, aby istniało przekazywanie energii. Czas ustalenia się równowagi termicznej jest funkcją mocy wyładowania i ciśnienia gazu.

Zmniejszenie ciśnienia gazu lub gęstości prądu wyładowania wywoła zakłócenie stanu równowagi. Wraz ze zmniejszeniem się liczby zderzeń atom-elektron, wydłuża się droga swobodna elektronów, a zatem rośnie ich energia kinetyczna. Odpowiada to podwyższeniu temperatury T_e , a obniżeniu temperatury gazu T_g . Zależność temperatur T_e i T_g od ciśnienia gazu, dla stałego prądu wyładowania podaje rys. 2.



Rys. 2. Zależność temperatury elektronowej T_e i temperatury gazu T_g od ciśnienia gazu wypełniającego lampę przy stałym prądzie wyładowania [13]

Można przyjąć, że dla odpowiednio dużych mocy wyładowania i powyżej pewnego ciśnienia granicznego gazu p_{gr} czas ustalania się równowagi termicznej jest mniejszy od 10^{-5} s i maleje do 10^{-7} s, a samo wyładowanie jest najbardziej skoncentrowaną formą wyładowania łukowego.

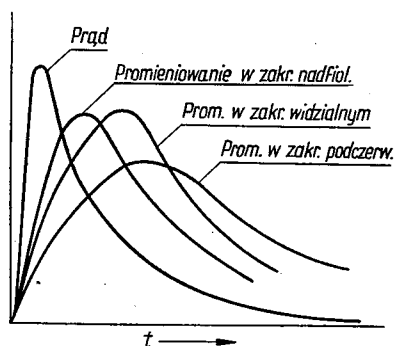
W ostatnim etapie wyładowanie łukowe zostaje przerwane wskutek wyczerpania się energii kondensatora zasilającego. Gorąca plazma zanika w procesach rekombinacji powierzchniowej i objętościowej. Odprowadzanie ciepła następuje przez ścianki bańki i elektrody. Należy zaznaczyć, że ze wzrostem ciśnienia gazu czas rekombinacji objętościowej znacznie maleje zwiększając szybkość zaniku plazmy. Czas rekombinacji objętościowej maleje również ze wzrostem ciężaru atomowego gazu wypełniającego lampę.

Szczegółowe rozpatrzenie teorii wyładowań błyskowych i plazmy termicznej podaje literatura [5], [6], [7], [13], [14], [16], [18].

Badania przeprowadzone przez licznych autorów [9], [12] wykazały, że na charakterystykę spektralną wyładowania błyskowego składają się trzy rodzaje widma powstające w określonej kolejności.

W pierwszym okresie wyładowania otrzymuje się tzw. widmo iskrowe posiadające strukturę prążkową. Jest to to samo promieniowanie, które wywołuje fotojonizację w czole lawiny. Widmo iskrowe powstaje przy przejściu elektronu w atomie wzbudzonym z poziomów wyższych na niższe i różniących się znacznie energią. Głównie zaś przy powrocie elektronu z poziomu odpowiadającego najmniejszemu potencjałowi krytycznemu wzbudzenia na poziom podstawowy. Intensywność linii iskrowych jest proporcjonalna do energii elektronów wzbudzających, a więc rośnie ze wzrostem napięcia przyłożonego na lampę. W pierwszej chwili rozwijania się lawiny duża część promieniowania iskrowego zostaje wypromieniowana na zewnątrz lampy. W miarę rozwijania się kanału promieniowanie to jest coraz silniej pochłaniane przez plazmę.

W następnej fazie, gdy wyładowanie przechodzi w łukowe, otrzymujemy widmo ciągłe z nałożonymi nań prążkami rezonansowymi, charakterystycznymi dla gazu lub pary metalu wypełniającego lampę. Różnorodność i natężenie tych linii rośnie ze wzrostem ciśnienia i mocy dostarczanej na jednostkę objętości słupa wyładowania. Widmo łuku rozciągające się od nadfioletu do podczerwieni powstaje na skutek złożonych procesów wtórnych, takich jak oddziaływanie między sąsiednimi atomami, hamowanie elektronów, efekt Dopplera itd. Równocześnie, na skutek wyżej podanych procesów, linie widma prążkowego ulegają rozszerzeniu i maksimum energii przez nie wysyłanej przesuną się w stronę fal dłużych. Dla niektórych gazów i par metali (Kr, Xe, Hg) przy wysokim ciśnieniu, można z pewnym przybliżeniem, ważnym tylko w obsza-



Rys. 3. Rozkład widmowy promieniowania lampy w czasie trwania błysku [14]

rze promieniowania widzialnego, przyrównać ich widmo łukowe do rozkładu promieniowania ciała doskonale czarnego o temperaturze takiej, jaka panuje na osi wyładowania. Natomiast w podczerwieni, zwłaszcza dla Xe i Kr, promieniowanie jest dużo większe, niż wynika to z rozkładu dla ciała doskonale czarnego.

W końcowym okresie błysku, przy malejącej koncentracji jonów, zaczyna przeważać widmo rekombinacyjne. Jednocześnie stygnąca plazma

wysyła długofalowe promieniowanie termiczne. Ilustrację zmian charakterystyki widmowej promieniowania w czasie trwania błysku dają fotografie wykonane przez Olsena i Huxforda [12].

Rys. 3 przedstawia impuls prądu wyładowania i trzy krzywe obrazujące rozkład widmowy promieniowania lampy w czasie trwania błysku. Z rysunku tego widać, że przesunięcie między maksimum prądu wyładowania i maksimum promieniowania w podczerwieni jest największe. Wynika stąd, że dla lamp pracujących jako źródło podczerwieni czas błysku będzie zawsze najdłuższy. Opisane wyżej podstawowe procesy fizyczne zachodzące w wyładowaniu błyskowym pozwalają na wybór określonych warunków pracy lamp.

3. ROZWIĄZANIA KONSTRUKCYJNE ORAZ PARAMETRY ELEKTRYCZNE I ŚWIETLNE LAMP BŁYSKOWYCH

Lampy błyskowe można najogólniej podzielić na dwie zasadnicze grupy: lampy nisko- i wysokociśnieniowe. Ciśnienie gazu wypełniającego lampę decyduje o jej konstrukcji, materiałach użytych do budowy i parametrach świetlnych. Lampy w każdej z wyżej podanych grup różnią się między sobą rodzajem gazu lub pary metalu wypełniającego bańkę, mocą wyładowania, charakterystyką spektralną i sprawnością.

a) Lampy błyskowe niskociśnieniowe

Rozwiązania konstrukcyjne różnych typów lamp niskociśnieniowych są do siebie bardzo zbliżone. Bańka lampy jest rurką ze szkła twardego lub z topionego kwarcu o niewielkiej średnicy wewnętrznej ($1,5 \div 10$) mm, która — zależnie od długości i żądanej koncentracji strumienia światła — może mieć kształt prostoliniowy, litery U, części koła lub linii śrubowej. Elektrody wtopione w końce rurki wykonane są z niklu, wolframu lub kowaru. Czasem elektrody aktywuje się barem lub cezem, co pozwala, przy zachowaniu niezmienniej konstrukcji lampy, na zmniejszenie napięcia zapłonu lub podwyższenie ciśnienia gazu. Stosuje się tutaj elektrodę zapłonową z drutu w postaci klamry lub spirali, która umieszczona jest na zewnętrznej powierzchni rurki wyładowczej. Zwykle rurka wyładowcza umieszczona jest jeszcze w osłonie szklanej.

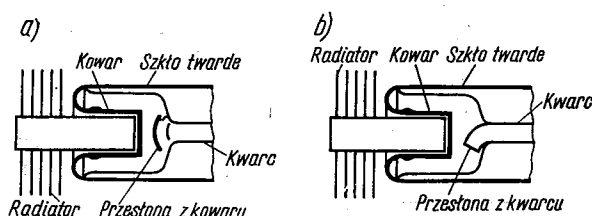
Do napełnienia lamp używa się najczęściej ciężkich gazów szlachetnych, jak Ar, Kr, Xe lub mieszaniny Kr/Xe, 90/10%. Ciśnienie gazu w lampie w zależności od jej typu wynosi od kilkunastu do kilkuset torrów. Energie wydzielane w błysku dla różnych lamp zmieniają się w bardzo szerokim zakresie. Ściśle związana z energią jest długość przestrzeni międzyelektrodowej oraz minimalny czas powstawania.

Spotyka się lampy o energii w błysku rzędu ułamków Ws, niewielkiej odległości elektrod i stosunkowo dużej częstotliwości powtarzania błysków. Są to lampy stroboskopowe, takie jak LSD8 i IFT10. Zwiększenie energii

wyładowania osiąga się najczęściej przez podwyższenie napięcia kondensatora i wydłużenie przestrzeni międzyelektrodowej.

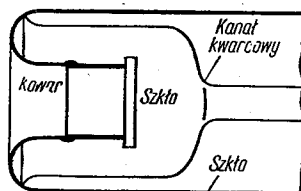
Lampy błyskowe dużej mocy budowane są na energię w błysku od kilku do kilkunastu tysięcy Ws, przy czym długość rurki wyładowczej dochodzi tutaj do 1,5 m. W tym przypadku czas powtarzania błysków jest rzędu 10 s. Wynika to z czasu ładowania się kondensatora zasilającego jak również ze średniej mocy traconej w lampie. Ze wzrostem mocy nie wystarcza samo wydłużenie rurki wyładowczej — musi także wzrosnąć jej średnica. Dla porównania podamy szereg typów lamp niskociśnieniowych, od najstarszych do produkowanych obecnie.

Jedna ze starszych, lecz bardzo ciekawa konstrukcyjnie lampa dużej mocy została zrealizowana w laboratorium prof. Laporte'a (Francja) w 1950 r. [8]. Schemat konstrukcji elektrod podaje rys. 4a, b. Elektrody



Rys. 4. Konstrukcja elektrod lampy wykonanej przez prof. Laporte'a w 1950 r. [8]

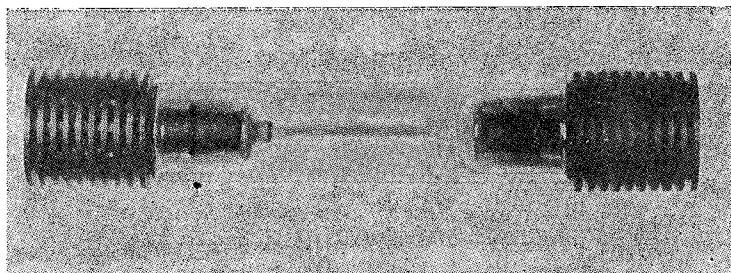
tworzą część obudowy lampy. Wykonano je z dwu cylindrów kowarowych, zamkniętych z jednej strony i wtopionych w rurkę szklaną. Rurka ta stanowi osłonę zewnętrzną lampy. Wewnątrz niej jest umieszczony kanał kwarcowy, w którym zachodzi wyładowanie. Kanał kwarcowy jest wtopiony w rurkę zewnętrzną przez szkła przejściowe. Lampa jest napełniona Xe pod ciśnieniem ok. 35 Tr, długość przestrzeni międzyelektrodowej wynosi 10 cm, a średnica wewnętrzna rurki kwarcowej 1 cm. Energii w błysku nie podano, wiadomo tylko, że była większa od 100 Ws. W celu polepszenia skuteczności chłodzenia elektrod wciśnięto w nie cylindryczne radiatory. Dla uniknięcia osadzania się rozpylonych cząstek katody



Rys. 5. Konstrukcja katody lampy przystosowanej do obserwacji czołowej [8]

w centralnej części rurki kwarcowej zakrzywiano kanał wyładowczy przy katodzie przez dodanie osłony z kwaru lub kowaru. W praktyce okazało się to mało skuteczne. W opisaney wyżej lampie wykorzystywano boczne świecenie słupa wyładowania.

Druga wersja lampy Laporte'a pozwala na obserwację czołową słupa wyładowczego. Dzięki temu uzyskano wzrost luminancji źródła i zmniejszenie natężenia linii iskrowych silnie pochłanianych wzdłuż kanału. Rozwiązanie konstrukcyjne katody tej lampy podaje rys. 5. Elektrodę cylindryczną z kowaru zamknięto płytką szklaną. Dla utrudnienia przedostawania się rozpylonych cząstek do centralnych części słupa wyładowania, płytka szklana ma średnicę nieco większą niż elektroda. Ogólny wygląd tej lampy przedstawia rys. 6.



Rys. 6. Fotografia lampy wykonanej przez prof. Laporte'a do obserwacji czołowej [8]

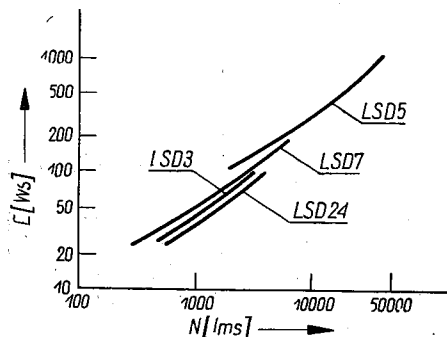
Lampy powyższe znalazły zastosowanie przede wszystkim w fotografii ultraszybkiej i mikrofotografii. Nie podano jednak ich parametrów świetlnych. Wiadomo tylko, że przewyższały lampy ówczesne znajdujące się w handlu o przeciętnych parametrach:

Energia w błysku	$E = 100 \text{ Ws}$
Czas błysku	$\tau_{bl} = 10^{-4} \text{ s}$
Moc średnia w błysku	$P_{sr} = 1 \text{ MW}$
Strumień średni	$\Phi_{sr} = 40 \text{ Mlm}$
Średnie natężenie światła	$I_{sr} = 3 \text{ Mcd}$

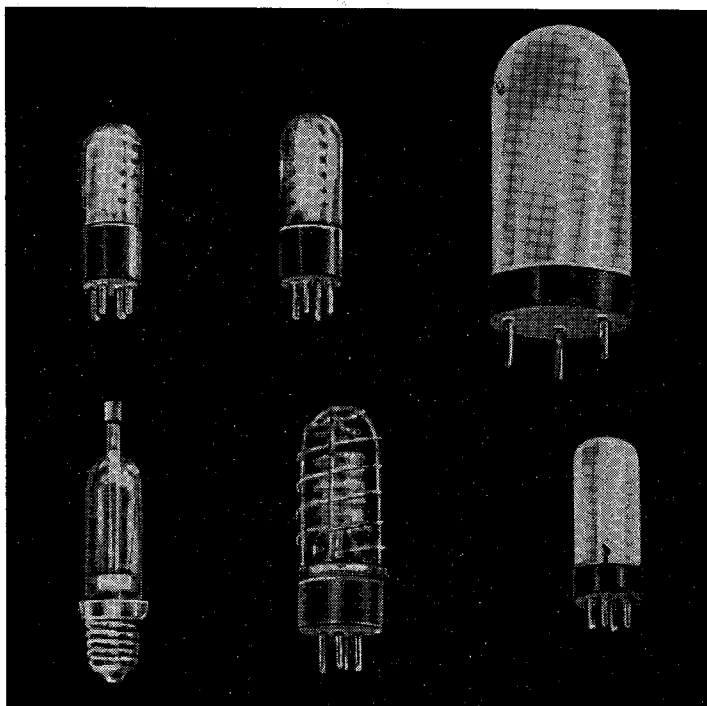
Literatura z 1954 r. [15] podaje następujące typy lamp niskociśnieniowych produkowane przez firmę Mullard: LSD7, LSD3, LSD5, LSD8 i LSD24. Rurki wyładowcze wszystkich tych lamp wykonane są ze szkła twardego i napełniane Xe pod ciśnieniem ok. 100 Tr. Pierwsze trzy są lampami dużej mocy. Największa z nich LSD5 ma energię w błysku równą 1000 Ws, lecz czas powtarzania jest duży z uwagi na małą moc admysyjną, wynoszącą ok. 50 W. Lampa LSD8 jest lampą stroboskopową o mocy admysyjnej 20 W i 500 błyskach na sek. Lampa LSD24 wykonana jest na obniżone napięcie zapłonu ok. 1000 V i ma skrócony kanał wyładowczy uformowany w kształcie litery U. Do jej zasilania użyto po raz pierwszy kondensatory elektrolityczne o napięciu roboczym 500 V i małym prądzie upływności, podczas gdy w poprzednich typach stosowano wyłącznie kondensatory papierowe. W porównaniu z lampą LSD3 o tej samej energii otrzymano tutaj większą wydajność świetlną. Rys. 7 przedstawia zależ-

ność ilości światła od energii kondensatora dla kilku typów lamp firmy Mullard.

We wszystkich tych lampach elektrody zapłonowe wykonane są z drutu w postaci kłamyry lub spirali i umieszczone na rurce wyladowczej. W lampach LSD5 i LSD8 posiadających największą moc admisyjną do-



Rys. 7. Zależność ilości światła od energii kondensatora zasilającego dla lamp firmy Mullard [15]



Rys. 8. Fotografia lamp błyskowych niskociśnieniowych firmy Mullard [15]

przewodzenia elektrod zapłonowych są pokryte szkłem w celu zabezpieczenia przed przebicciem.

Parametry elektryczne i świetlne lamp firmy Mullard podaje tablica 1. Wygląd zewnętrzny tych lamp przedstawia rys. 8. Obecnie produkowa-

T a b l i c a 1
Parametry elektryczne i świetlne lamp firmy Mullard wg danych z roku 1954 [15]

T y p	Energia w błysku		Napięcie kondensatora		Pojemność kon- densatora		Moc średnia		Czas powtarzania		Napięcie elektrody zapłonowej		Czas błysku		Ilość światła		Wydaj- ność światlna		Trwałość	
	Ws		kV		μF		W		s		kV		ms		lms		lm/W		tys. błysków	
LSD3	100		2,5		32		—		—		ok. 3		ok. 0,1		ok. 3000		ok. 30		10	
LSD7	300		2,5		48		—		—		ok. 3		—		ok. 10500		ok. 35		10	
LSD5	1000		2,5		160		50		20		ok. 3		—		ok. 40000		ok. 40		10	
LSD8	0,04		2,5		0,0065		20		2·10 ⁻³		ok. 3		—		—		—		—	
LSD24	100		1,0		200		—		—		ok. 3		—		ok. 4100		ok. 41		10	

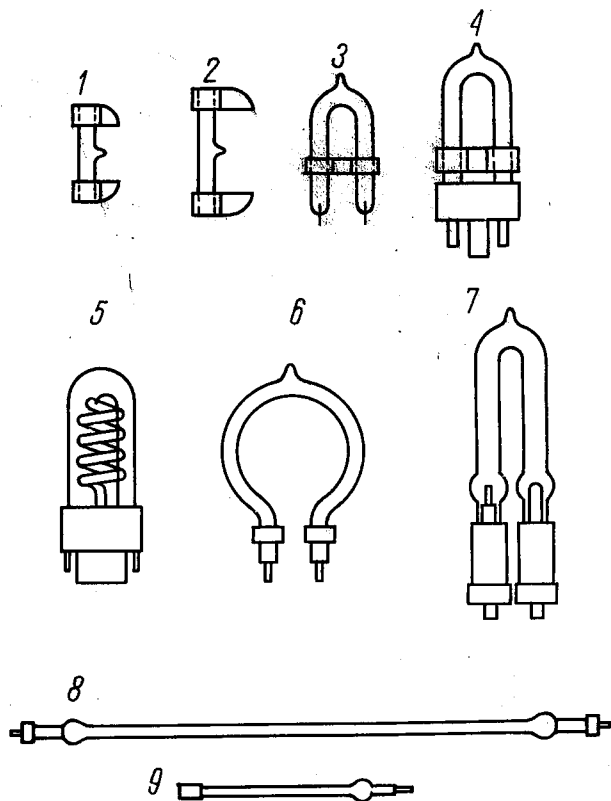
Tablica 2

Parametry elektryczne i świetlne lamp produkowanych przez ZSRR [10]

Typ	Energia w błysku	Napięcie konden- satora	Pojem- ność kon- densatora	Dopuszcz. moc średnia	Czas powta- rzania	Napięcie elektr. zapłonu	Czas*) błysku	Oporność promien- nika	Ilość światła	Wydaj- ność światłna	Trwałość
	Ws	V	μF	W	s	kV	ms	Ω	lm. s	lm/W	tys. błysków
IPK-20	20	130	2500	2	10	0,7	0,2	0,16	200	10	10
IFK-50	50	200	2500	5	10	1,0	0,4	0,32	700	14	10
IFK-120	120	300	2500	12	10	1,0	1,2	0,7	2500	ok. 21	10
IFK-500	500	500	4000	30	15	3,5	8,0	1,0	10000	20	10
IFP-2000	2000	500	16000	300	15	2,0	4,0	0,45	60000	30	5
IFB-300	300	300	6500	40	7,5	1,5	8,0	2,5	5000	ok. 16,5	10
IFK-200	200	500	1600	72	7,5	2,0	1,6	2,0	3500	17,5	3
IFP-500	500	500	4000	65	7,5	3,0	7,0	3,5	12000	24	3
IFP-1500	1500	1000	3000	100	15	4,0	9,0	6,0	35000	ok. 23	3
IFP-4000	4000	1400	4000	270	15	5,0	16,0	8,0	120000	30	3
IFP-15000	15000	2400	5000	1250	12	5,0	4,5	1,8	500000	ok. 33	10
IFT-10	0,01	500	1,08	10	0,001	1,0	0,007	1,0	średnie natężenie światła 1 świeca	—	20 godz.

*) Czas błysku mierzony na poziomie 35% max. strumienia światła.

ne lampy niskociśnieniowe bardzo niewiele odbiegają wyglądem od lamp opisanych wyżej. W lampach najnowszych zrezygnowano z osłony zewnętrznej zmniejszającej odprowadzanie ciepła i pochłaniającej część energii świetlnej. Jednocześnie coraz rzadziej stosuje się spiralne zwiniecie rurki wyładowczej, a samą rurkę wykonuje się z topionego kwarcu, powiększając w ten sposób moc admisyjną przy nie zmienionych rozmiarach.



Rys. 9. Lampy błyskowe niskociśnieniowe produkowane przez Z.S.R.R. [10]

1 — ИФК 20; 2 — ИФК 50; 3 — ИФК 120; 4 — ИСТ 10; 5 — ИФК 500;
6 — ИФК 2000; 7 — ИФБ 300; 8 — ИФП 15000; 9 — ИФП 200

Parametry produkowanych obecnie w ZSRR lamp niskociśnieniowych zebrane są w tablicy 2 [10]. Lampy te przedstawione schematycznie na rys. 9 są napełnione ksenonem pod ciśnieniem 60—250 Tr i są używane przede wszystkim jako promienniki podczerwieni.

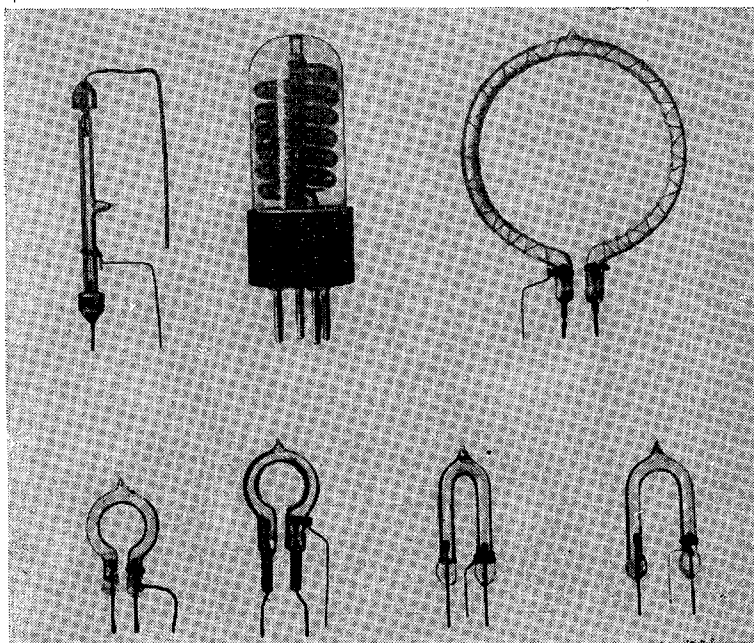
Bardzo podobne do lamp produkowanych przez ZSRR są lampy firmy Philips [22]. Parametry tych lamp podaje tablica 3. Wszystkie typy lamp firmy Philips napełniane są Xe i dają bardzo intensywne promieniowanie

T a b l i c a 3
Parametry elektryczne i świetlne lamp produkowanych przez firmę Philips (wg katalogu firmowego) [22]

T y p	Energia w błysku	Napięcie konden- satora	Pojemność konden- satora	Moc średnia	Czas powta- rzania	Napięcie elektr. zapłonu	Czas*) błysku	Ilość światła	Wydaj- ność świetlna	Trwałość		Materiał bańki
	Ws	V	μF	W	s	kV	ms	lm s	lm/W	tys. błysków	—	
103723	65	500	500	11	6	8	1	ok. 2900	45	10	szkło	
103730	1000	3000	220	17	60	0,5	0,5	60000	60	1	kwarc	
103740	500	500	4000	17	30	8	1	27500	55	5	kwarc	
103751	75	500	600	12,5	6	8	1	3750	50	10	szkło	
103752	800	3000	160	13	60	8	0,5	52000	65	1	kwarc	
103758	65	500	500	11	6	8	1	3250	50	10	szkło	
103762	42	500	300	7	6	8	1	2100	50	10	szkło	

*) Czas błysku mierzony na poziomie 50% max. strumienia światła

zarówno w obszarze światła widzialnego, jak i podczerwieni. Podane w tabelicy 3 lampy holenderskie mają wydajność rzędu 50 lm/W. Lampy te przedstawia rys. 10.



Rys. 10. Fotografia lamp firmy Philips wg katalogu firmowego z 1960 r. [22]

b) Lampy błyskowe wysokociśnieniowe

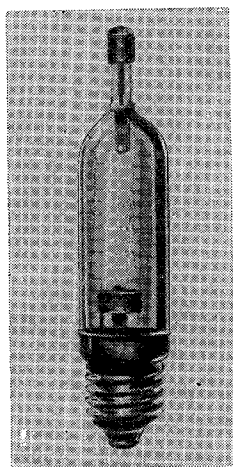
Lampy o wysokim ciśnieniu znacznie odbiegają budową od lamp niskociśnieniowych. Konstrukcyjnie są one zbliżone najbardziej do lamp wyładowczych na pracę ciągłą. Bańka lampy jest wykonana z topionego kwarcu lub, w starszych typach, ze szkła twardego. W bańce są umieszczone trzy elektrody w większości przypadków wykonane z wolframu. Dwie z nich o masywnej budowie i grubych doprowadzeniach są elektrodami głównymi, między którymi następuje rozładowanie kondensatora. Trzecia, dużo cieńsza od elektrod głównych, służy do zapoczątkowania wyładowania i nazywa się elektrodą zapłonową.

Ciśnienie gazu wypełniającego lampę, zwykle Xe lub Ar, wynosi od jednej do kilkudziesięciu atmosfer. Odległość międzyelektrodowa jest rzędu cm, a napięcie na kondensatorze dochodzi do 10 kV. Energia kondensatora zasilającego lampę nie przekracza kilkudziesięciu Ws i zwykle jest rzędu kilku Ws. Ciśnienia gazu i wielkość gęstości mocy wyładowania są ograniczone wytrzymałością mechaniczną lampy i szybkością rozpylania katody. Odstęp elektrod przy określonym ciśnieniu jest uzależniony od napięcia, jakim dysponujemy.

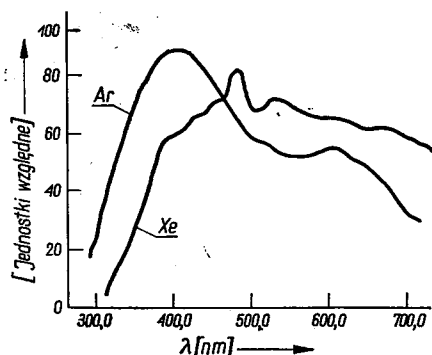
Wczesne konstrukcje lamp wysokociśnieniowych datują się z okresu II wojny światowej. Są to lampy średniej i dużej mocy przeznaczone do fotografii ultraszybkiej. W związku z tym duży nacisk kładziono na zwiększenie promieniowania w obszarze krótkofalowym i widzialnym. Lampy tego typu to angielskie LSD2 oraz dwie lampy stroboskopowe dużej mocy, ksenonowa i rtęciowa, w wykonaniu niemieckim [16].

Lampa LSD2, tzw. „Arditron”, rys. 11, była produkowana seryjnie przez firmę Mullard [15].

Szklana bańka tej lampy jest napełniana Ar pod ciśnieniem 1 atmosfery. Wszystkie elektrody są wykonane z wolframu. Elektroda zapłonowa w kształcie pierścienia otacza anodę. Katoda lampy jest umieszczona w wąs-



Rys. 11. Fotografia lampy LSD2 produkowanej przez firmę Mullard [15]



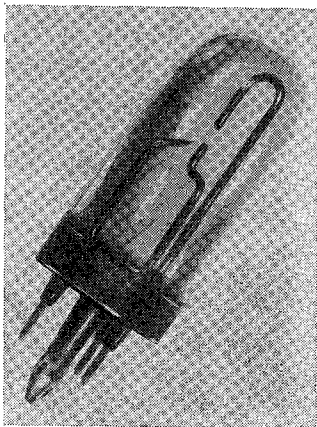
Rys. 12. Charakterystyki widmowe lampy LSD2 dla napełnienia Ar i Xe [15]

kim rękawie szklanym naprzeciwko anody. Rozpylony w czasie błysku materiał elektrod zostaje porwany przez falę uderzeniową, wtłoczony w wąską przestrzeń za katodę i osadzony. W ten sposób uniknięto zaciemnienia bańki w części środkowej. Około roku 1954 lampę LSD2 napełniano Xe również pod ciśnieniem 1 atm. Jednocześnie powiększono grubość ścianek bańki, aby zabezpieczyć ją przed działaniem wzmożonej, wskutek większego ciężaru atomowego Xe, fali uderzeniowej. Przy wypełnianiu Xe wzrosła energia promieniowania w zakresie widzialnym i bliskiej podczerwieni oraz zmalał czas błysku do 1 μ s. Charakterystyki widmowe napełnienia lampy Ar i Xe podaje rys. 12.

We Francji w roku 1960 wykonano wysokociśnieniową lampę ksenonową [4], która służyła głównie do sygnalizacji w zakresie podczerwieni i nadfioletu. Lampa ta jest zbudowana z grubościenną bańki szklanej wypełnionej Xe pod ciśnieniem ok. 2 atm i posiada trzy elektrody oraz rurkę

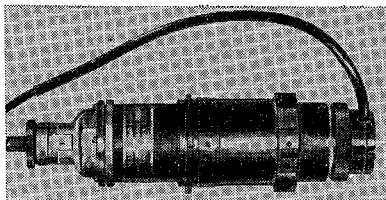
pompową, wyprowadzone przez płaską stopkę. Rys. 13 przedstawia wygląd zewnętrzny tej lampy.

Elektrody umieszczone są na osi bańki, a odległość między nimi wynosi 1 cm. Elektroda zapłonowa znajduje się w pobliżu anody. Przy opracowywaniu tej lampy zwrócono szczególną uwagę na otrzymywanie dużej energii promieniowania w podczerwieni i nadfiolecie oraz na możliwie najkrótszy czas błysku.



Rys. 13. Fotografia lampy wysokociśnieniowej Xe francuskiej z roku 1960 [4]

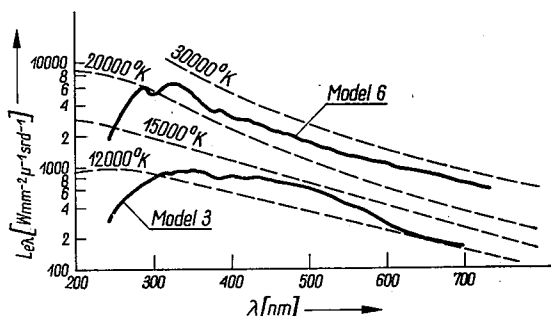
W optymalnych warunkach kondensator o pojemności 50 nF i napięciu roboczym 6,3 kV dostarczał lampie energię wynoszącą 1 Ws. Przy częstotliwości powtarzania błysków wynoszącej 50 Hz, lampa może pracować kilkadziesiąt godzin bez zmiany parametrów. W tych warunkach otrzymano dla podczerwieni i dla nadfioletu jednakową emitancję energetyczną wynoszącą ok. 5000 W/cm^2 — w przybliżeniu równą słonecznej. Czasy błysku dla nadfioletu i podczerwieni wynoszą odpowiednio 1 i $1,2 \mu\text{s}$.



Rys. 14. Fotografia lampy błyskowej w wykonaniu amerykańskim z roku 1961 [11]

Jeden z ostatnich modeli lamp błyskowych w wykonaniu amerykańskim [11], opublikowany w sierpniu 1961 r., rys. 14, ma układ elektrod wolframowych umieszczonych w powietrzu. Średnice elektrod i odstęp między nimi mają jednakowe rozmiary — 0,75 mm. Przerwę między elektrodami otacza metalowa ożebrowana klatka. Całość jest zmontowana

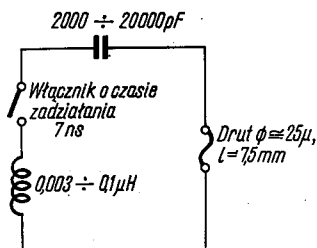
na kondensatorze i posiada pojemność $0,8 \mu\text{F}$ i indukcyjność $2 \cdot 10^{-9} \text{ H}$. Rozładowanie kondensatora o energii 5 Ws powoduje przepływ impulsu prądu o natężeniu rzędu 35000 A . Całkowity czas trwania błysku światła wynosi ok. $0,5 \mu\text{s}$. Czas narastania wynosi $0,12 \mu\text{s}$, a zaniku $0,375 \mu\text{s}$. Luminancja w błysku wynosi $6 \cdot 10^{-7} \text{ cd/cm}^2$ przy temperaturze barwowej ok. $30\,000 \text{ }^\circ\text{K}$. Charakterystykę widmową promieniowania mod. 3 i mod. 6 podaje rys. 15.



Rys. 15. Charakterystyki widmowe lamp błyskowych amerykańskich mod. 3 i mod. 6 [11]

Moc wypromieniowania w błysku zawarta jest w przeważającej części w zakresie widzialnym i nadfiolecie i wynosi ok. $150\,000 \text{ W}$. Sprawność energetyczna lampy wynosi więc tylko 1% . Parametry elektryczne i świetlne lamp opisanych wyżej podaje tablica 4.

Z innych błyskowych źródeł światła na uwagę zasługują dwa rozwiązania amerykańskie. Pierwsze z nich to urządzenie oparte na zjawisku eksplozji cienkiego drutu platynowego lub aluminium [2]. Drucik Pt lub Al jest umieszczony między zaciskami obwodu elektrycznego jak to widać na rys. 16.



Rys. 16. Schemat układu elektrycznego, detonacyjnego źródła światła [2]

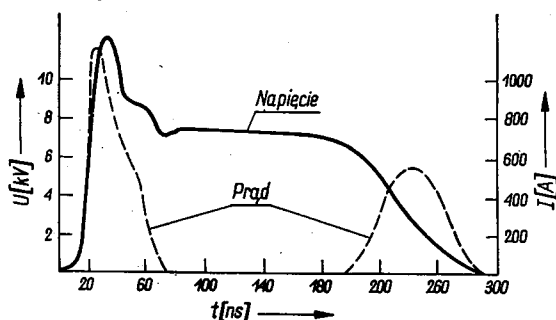
Przy zamknięciu klucza, naładowany do ok. 20 kV kondensator przekazuje swą energię drutowi. Następuje przepływ prądu. Szybkość wzrostu jego gęstości przekracza wartość 10^{16} A/cm^2 . Drut eksploduje i połączenie zostaje zerwane przed całkowitym rozładowaniem się kondensatora.

Tablica 4

Parametry elektryczne i świetlne lamp wysokociśnieniowych [15], [1], [5], [4], [11]

Typ, kraj, rok prod.	Ener- gia w błysku	Napię- cie kon- densa- tora		Pojem- ność kon- densa- tora	Moc średnia	Czas powta- rzania	Nap. elektr. zapiętnu	Czas błysku	Lumina- cja	Wy- daj- ność świe- tlna	Spraw- ność cał- kowita	Rodzaj napę- n. i ciśn.	Odl. elektrod	Pow. stupa wyłado- wania
		Ws	kV	μF	W	s	kV	μs	cd/cm ²	lm/W	%	atm	cm	cm ²
LSD2 Anglia 1941	100	—	10	2	—	—	—	≥ 1	—	—	35	Ar-1 lub Xe-1	—	—
L. strobosk. Niemcy ok. 1941	—	—	—	0,3	20000	—	—	5	max $6 \cdot 10^7$	40	—	Hg 5	—	0,12
L. strobosk. Niemcy ok. 1943	—	—	—	0,3	20000	—	—	2	$> 10^8$	80	—	Xe 3	—	0,12
Z.S.R.R. ok. 1950	7	—	—	—	—	—	—	20	$5 \cdot 10^6$	20	20	3,5	—	—
Niemcy ok. 1952	5	—	—	—	—	—	—	5	$3 \cdot 10^7$	—	—	Ar 11	3	1
Francja 1960	1	6,3	0,05	50	0,02	—	ok. 20	dla nadf. 1,0 dla podcz. 1,2	5000 W/cm ² w reflek- torze	—	—	Xe ok. 2	1	0,1
Mod. USA 9 1961	5	3,5	0,8	—	—	0,001 w spec. warun- kach	bez elektr. zapiętnu	0,5	$6 \cdot 10^7$	—	ok. 1,5	powietrze 1	0,075	0,006

W fazie końcowej, gdy ciśnienie pary metalu między zaciskami odpowiednio zmaleje, następuje wyładowanie łukowe i kondensator rozładowuje się całkowicie. Rys. 17 przedstawia przebieg napięcia i prądu w obwodzie elektrycznym jak na rys. 16 w czasie błysku. Eksplozji towarzyszy wypromieniowanie dużej ilości energii świetlnej, powstanie silnej fali uderzeniowej i pól magnetycznych, dużego ciśnienia, temperatury i gęstości plazmy. Niniejszy artykuł nie zawiera żadnych danych pozwalających określić parametry świetlne, rozkład promieniowania i sprawność urządzenia. Wydaje się jednak, że największa część energii wypromieniowania jest w obszarach nadfioletu i widzialnym. Wskazuje na to wysoka temperatura barwowa wynosząca ok. 50 000 °C.



Rys. 17. Przebieg napięcia i prądu w obwodzie elektrycznym jak na rys. 16 w czasie błysku [2]

Drugim urządzeniem jest tzw. molekularny wzmacniacz światła-lazer [20]. Zbudowany jest on na syntetycznym kryształ rubinu z domieszkami chromu. Kryształ jest pobudzany błyskiem światła lampy niskociśnieniowej napełnionej mieszaniną Kr i Ne i wysyła w czasie ok. 1 ms energię skupioną w dwóch prążkach światła czerwonego

$$\lambda_1 - 694,3 \text{ nm},$$

$$\lambda_2 - 692,9 \text{ nm},$$

przy czym szerokość pierwszego z nich jest mniejsza od 0,1 nm. Moc promieniowania obu linii wynosi 10 kW, co przy mocy dostarczanej rzędu 1 MW określa sprawność urządzenia na ok. 1%. Natomiast wzmocnienie mocy prążków czerwonych wyciętych z widma lampy błyskowej jest pięciokrotne. Podawanie w ten sposób wzmocnienia jest dosyć sztuczne z uwagi na to, że pobudzanie kryształu następuje pod wpływem promieniowania przypadającego w zakresie ok. $\lambda = 560,0 \text{ nm}$ o szerokości 70 nm.

Z literatury wynika, że obecnie są prowadzone prace nad zwiększeniem sprawności tego typu urządzeń jak również nad uzyskaniem promieniowania w obszarze bliskiej podczerwieni.

4. WPŁYW RODZAJU I CIŚNIENIA GAZU, MOCY WYŁADOWANIA ORAZ OBWODU ELEKTRYCZNEGO NA PARAMETRY LAMP PRACUJĄCYCH JAKO IMPULSOWE ŹRÓDŁA PODCZERWIENI

Do napełniania lamp błyskowych używa się najczęściej gazów szlachetnych, takich jak: He, Ne, Ar, Kr Xe, chociaż są lampy, w których wyładowanie przebiega w powietrzu lub w parach metali (Hg, Pt, Al). Rodzaj ośrodka wpływa na rozkład spektralny promieniowania lampy, jej konstrukcję, dobór materiałów użytych do budowy, czas błysku i trwałość.

Śród wszystkich gazów szlachetnych ksenon posiada największy ciężar atomowy i najbardziej skomplikowaną strukturę widma. Rozkład poziomów energetycznych w atomie Xe i określone prawdopodobieństwo przejść między nimi sprawia, że możliwe jest wypromieniowanie linii w całym obszarze widma. Linie iskrowe są tutaj przesunięte w stronę fal długich i znajdują się już częściowo w obszarze promieniowania widzialnego. Występuje to dlatego, że ksenon, w szeregu gazów szlachetnych, posiada najniższe potencjały wzbudzenia i jonizacji. W obszarze widzialnym widma ksenonu znajduje się bardzo duża ilość prążków, a równomierny rozkład ich natężeń wskazuje na możliwości uzyskania światła białego. Energia wypromieniowana w podczerwieni jest największa dla Xe, nieco mniejsza dla kryptonu i maleje bardzo szybko dla innych gazów. Jeśli w obszarze widzialnym, parametry świetlne przy wyładowaniach w Xe, Kr, Ar, Be, He mają się do siebie jak 100 : 70 : 50 : 18 : 6, to w podczerwieni korzyści wynikające z napełnienia Xe lub Kr są jeszcze większe. Dodatkowo maksima promieniowania w podczerwieni wykazują tendencję do przesuwania się w stronę fal długich w miarę zwiększania się ciężaru atomowego gazu i dla różnych gazów przy następujących długościach fal wynoszą:

dla argonu λ [nm] — 760,0; 805,0; 837,5;

dla kryptonu λ [nm] — 760,0; 820,0; 900,0;

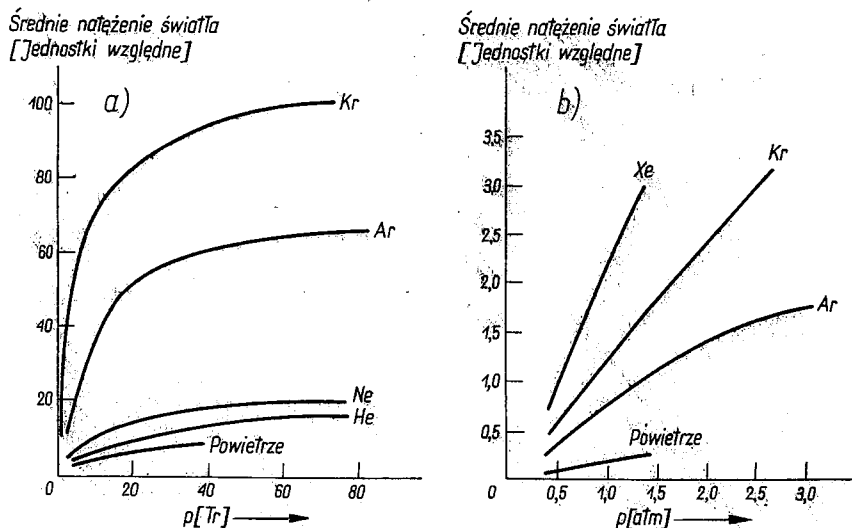
dla ksenonu λ [nm] — 840,0; 900,0; 1000,0;

Jednocześnie ciśnienie gazu wypełniającego lampę ma duży wpływ na jej widmo promieniowania. Ze wzrostem ciśnienia maksimum energii promieniowania przesuwa się w stronę fal długich.

Zależność natężenia światła w zakresie widzialnym od ciśnienia dla różnych gazów wypełniających lampę podaje rys. 18 a, b. Z charakterystyk tych wynika, że począwszy od ciśnień rzędu 50 Tr występuje jak gdyby stan nasycenia. Po przekroczeniu ciśnienia 0,5 atm następuje szybki wzrost natężenia światła. W tym przypadku również najlepszy jest ksenon. Najmniejsze natężenie światła występuje dla powietrza i stąd bardzo mała sprawność lampy amerykańskiej Mod. 9.

Z innych rodzajów napełnień duże promieniowanie w obszarze widzialnym i podczerwieni otrzymuje się przy wyładowaniu błyskowym w parach rtęci o wysokim ciśnieniu. Charakterystyka widmowa takiej lam-

py w podczerwieni jest ciągła z ostro występującymi liniami rezonansowymi przypadającymi na następujące długości fal: 1014, 1130, 1370, 1700 nm. Jednak parametry lamp błyskowych z parami rtęci zależą w znacznym stopniu od temperatury bańki i dlatego lampy te nie są zbyt często stosowane.



Rys. 18. Zależność natężenia światła od ciśnienia gazu i rodzaju gazu (w zakresie widzialnym promieniowania) [5]

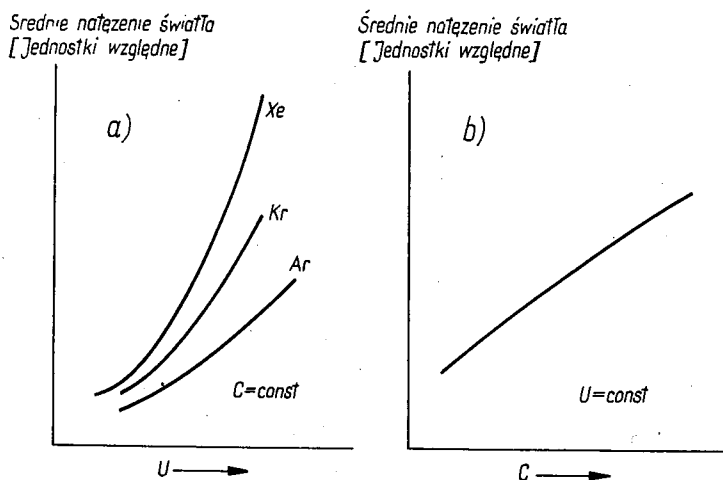
Z wyładowań błyskowych w parach innych metali, największe znaczenie dla techniki podczerwieni miałyby prawdopodobnie wyładowania w parach cezu z dodatkiem ciężkich gazów szlachetnych, jak krypton i ksenon. Ujemną stroną takiej lampy jest konieczność utrzymywania ciśnienia par cezu, co najmniej rzędu kilku torów, co wymaga stałej temperatury bańki ok. 300°C. Wiąże się to z dodatkowymi grzejnikami lub dobraniem takich warunków pracy, w których wydzielana moc średnia zapewniałaby utrzymanie tej temperatury. Ponadto pary cezu w tej temperaturze działają szkodliwie na szkło bańki powodując zaciemnienie i miejscowe mięknienie szkła prowadzące do pęknięć. Zachodzi konieczność stosowania specjalnych szkieł lub powłok osłonnych odpornych na działanie par cezu.

Energia wypromieniowania błysku przez lampę jest proporcjonalna do energii dostarczonej przez kondensator zasilający i określonej wzorem

$$E = \frac{1}{2} Cu^2.$$

Rys. 19 a, b podaje zależność średniego natężenia promieniowania lampy od napięcia i pojemności kondensatora dla różnych gazów wypełniających.

Aby uzyskać widmo ciągłe, przy danym ciśnieniu, trzeba przekroczyć pewną wartość gęstości mocy przypadającej na jednostkę objętości słupa wyładowania. Po przekroczeniu tej wartości, dalsze zwiększenie gęstości mocy daje proporcjonalny wzrost natężenia promieniowania w całym zakresie widma. Dla jeszcze większych gęstości mocy następuje bardzo szybko, w stosunku do pozostałych obszarów, wzrost energii krótkofalowej



Rys. 19. Zależność średniego natężenia promieniowania od napięcia i pojemności kondensatora dla Xe, Ar i Kr

części widma. Uprzywilejowanie części krótkofalowej spowodowane jest zwiększeniem natężenia linii iskrowych oraz wysoką temperaturą na osi słupa wyładowania. W odniesieniu do lamp błyskowych będących promiennikami podczerwieni należy przypuszczać, że istnieje pewna optymalna wartość gęstości mocy w słupie wyładowania, dla której promieniowanie w podczerwieni jest duże i jednocześnie stosunek energii promieniowanej w tym obszarze do energii całego widma jest jeszcze korzystny. Jednocześnie odpowiednio duża gęstość mocy w słupie wyładowania jest związana z konstrukcją, ciśnieniem gazu i materiałami użytymi do budowy lampy. W lampach niskociśnieniowych, w których w czasie błysku słup wyładowania może dotykać ścianek bańki, gęstość mocy nie przekracza zwykle ($10^4 \div 10^5$) W/cm³. Zwiększenie mocy tych lamp prowadzi się dwoma drogami. Pierwsza to proporcjonalne w stosunku do mocy wydłużanie lampy, druga to zwiększanie gęstości mocy przez zastosowanie materiałów o większej wytrzymałości termicznej. Druga z metod wprowadza całkowitą zmianę parametrów świetlnych lampy. Dodatkowym problemem jest rosnące z mocą rozpylanie elektrod. Zwalcza się je przez odpowiedni kształt elektrod wykonanych z trudno rozpylanych materiałów oraz stosowanie przesłon zabezpieczających przed osadzaniem się rozpylonych cza-

stek w centralnej części bańki. W przypadku lamp wysokociśnieniowych, w których na skutek dużego ciśnienia gazu, słup wyładowczy, znajdujący się na osi bańki, ma średnicę rzędu milimetra, gęstość mocy jest rzędu ($10^6 \div 10^{10}$) W/cm³. Tak duża gęstość mocy daje dużą gęstość prądu, wysoką temperaturę, silne pola magnetyczne i olbrzymią falę uderzeniową. Czynniki te decydują o konstrukcji lampy. Średnio o kilka rzędów większe gęstości mocy w lampach wysokociśnieniowych wskazują na dużo większą, niż to jest w lampach niskociśnieniowych, temperaturę panującą na osi wyładowania i dochodzącą do 50 000°K oraz luminancję rzędu 10⁷ cd/cm².

Ważnym parametrem lamp błyskowych decydującym o ich zastosowaniu jest czas błysku. Czas ten zależy od rodzaju gazu wypełniającego lampę i jego ciśnienia oraz od elementów układu elektrycznego zasilania. Z rozkładu widmowego błysku w czasie wynika, że dla promieniowania w podczerwieni czas błysku będzie zawsze najdłuższy. Czas ten można zmniejszyć przez dobór odpowiedniego gazu i zwiększanie ciśnienia. Ze wzrostem ciśnienia gazu wypełniającego lampę coraz większą rolę zaczyna odgrywać rekombinacja objętościowa prowadząc do zmniejszenia czasu błysku. Współczynnik rekombinacji objętościowej przy stałym ciśnieniu rośnie z ciężarem atomowym gazu. Stąd dla lamp błyskowych wysokociśnieniowych wypełnionych Xe otrzymuje się nie tylko największe promieniowanie w podczerwieni, ale również najkrótszy czas błysku przy tej samej mocy i konstrukcji. Najistotniejszy jednak wpływ na czas błysku odgrywają elementy układu elektrycznego zasilania lampy. Wpływ elementów układu omówiony będzie niżej. Energia wypromieniowana w błysku przez lampy wysokociśnieniowe jest znacznie mniejsza niż dla przeciętnych lamp niskociśnieniowych. Lampy te pozwalają jednak na osiągnięcie krótkotrwałych błysków rzędu 1 μs. Lampy błyskowe wymagają stosowania napięcia stałego do ładowania kondensatora. W zależności od typu, wielkość napięcia dostarczanego przez zasilacz wynosi od 100 V do 10 kV. Moc zasilacza zależy od średniej mocy pobieranej przez lampę i musi być od niej większa z uwagi na straty w obwodzie ładowania kondensatora. W urządzeniach stacjonarnych, do zasilania, korzysta się z sieci prądu zmiennego, natomiast w urządzeniach przenośnych z baterii lub akumulatora. W tym przypadku konieczna jest zamiana niskiego napięcia stałego na zmienne przy pomocy przetwornicy wibratorowej lub tranzystorowej. Dalszy układ zasilacza, prostownik wysokiego napięcia, jest taki sam dla obu rodzajów źródeł zasilających przy uwzględnieniu różnicy częstotliwości. Ten typ źródeł zasilających stosuje się przede wszystkim w lampach pobierających małą moc średnią. Rozładowanie kondensatora magazynującego energię oraz uzyskanie dobrej powtarzalności błysków może zachodzić w dwojaki sposób. W pierwszym przypadku napięcie kondensatora jest niższe od napięcia potrzebnego do zapłonu lampy. Wyzwalanie błysków odbywa się przy pomocy urządzenia zapłonowego działającego na zasadzie

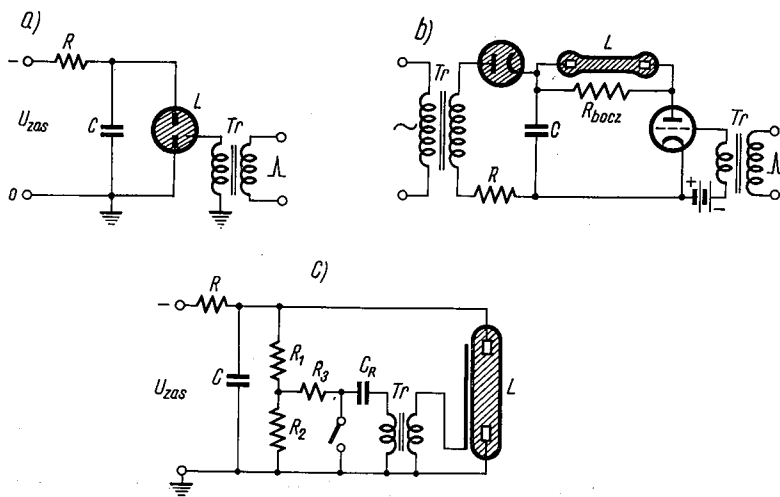
jonizowania gazu między elektrodami lampy lub między jedną z elektrod i elektrodą pomocniczą zewnętrzną lub wewnętrzną. Elektroda zapłonowa jest połączona przez uzwojenie wtórne transformatora z rozproszeniem z uziemioną anodą. Katoda lampy jest na potencjale ujemnym. Przyłożenie impulsu napięciowego na elektrodę zapłonową zapoczątkowuje błysk. W drugim przypadku napięcie kondensatora jest wyższe od napięcia zapłonu lampy. Lampa zabocznikowana oporem rzędu $1\text{ M}\Omega$ lub dławikiem o indukcyjności kilkuset mH połączona jest z kondensatorem poprzez tyratron. Przyłożenie dodatniego impulsu napięciowego na siatkę tyratronu zapoczątkowuje błysk.

W obu przypadkach częstość zapalania lampy jest ograniczona szybkością ładowania się, poprzez opór zabezpieczający, kondensatora zasilającego. Stała czasu ładowania wynosi

$$\tau_{lad} = RC$$

i można ją zmniejszyć, przy zachowaniu energii kondensatora, przez zmniejszanie oporu zabezpieczającego. Wiąże się to bezpośrednio ze wzrostem mocy zasilacza.

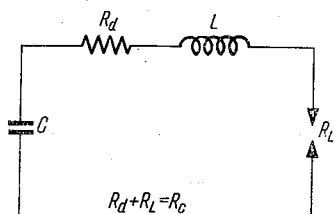
Źródłem impulsów stosowanych do zapłonu lamp błyskowych są najczęściej transformatory z rozproszeniem. Wielkość wymaganego impulsu zapłonowego wynosi dla różnych lamp od kilku do kilkunastu kilowoltów i zależy od ciśnienia gazu i rodzaju elektrody zapłonowej. Stąd w lampach



Rys. 20. Typowe schematy układów zasilających lampy błyskowe

wysokociśnieniowych stosuje się wyłącznie elektrody zapłonowe wewnętrzne. Wartość amplitudy impulsu zapłonowego, dla danej lampy, zależy również od stromości czoła impulsu i jego znaku. Typowe schematy układów zasilających podaje rys. 20 a, b, c. W większości przypadków lampa błyskowa jest dołączona przy pomocy krótkich i grubych przewo-

dów do zacisków kondensatora magazynującego energię. Obwód taki posiada oporność, indukcyjność i pojemność. Rys. 21 przedstawia uproszczony schemat układu elektrycznego lampa-kondensator. Pojemność obwodu jest określona wielkością kondensatora magazynującego energię i wynosi od ułamka do kilkunastu tysięcy μF . Pojemność lampy i doprowadzeń można pominąć. Indukcyjność układu jest sumą indukcyjności własnej kondensatora i indukcyjności doprowadzeń. Jej wartość zależy od rodzaju



Rys. 21. Uproszczony schemat układu elektrycznego lampa-kondensator

użytego kondensatora i jego pojemności (rośnie z pojemnością) oraz od długości doprowadzeń. We wszystkich konstrukcjach układów lampa-kondensator starano się, by indukcyjność obwodu była jak najmniejsza. Przeciętnie wynosi ona ok. 1 μH , chociaż w konstrukcjach specjalnych, np. w lampie USA mod. 9, przez zastosowanie kondensatora o szczególnie małej indukcyjności własnej oraz montaż układu elektrod wprost na wyjściu kondensatora osiągnięto obniżenie wypadkowej indukcyjności obwodu do $2 \cdot 10^{-9}$ H.

Lampa w czasie błysku przedstawia prawie idealny opór omowy, którego wartość zależy od oporności właściwej plazmy i rozmiarów kanału wyladowczego. Oporności słupa wyladowania różnych typów lamp wynoszą od dziesiątych części Ω do kilku Ω . Oporność rzeczywista obwodu R_c składa się więc z oporności lampy R_L i oporności doprowadzeń R_d . Oporność doprowadzeń powinna być dużo mniejsza od oporności lampy gdyż stosunek:

$$\frac{R_L}{R_L + R_d}$$

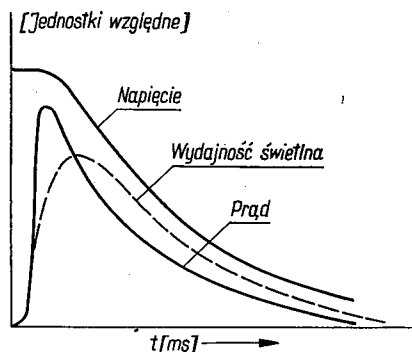
decyduje o sprawności układu. Od wielkości C , L i R_c zależy charakter przebiegu prądu i napięcia w czasie wyladowania. Stosunek wzajemny tych wielkości decyduje o tym, czy przebieg będzie miał charakter aperiodyczny, czy oscylacyjny. Dla lamp niskociśnieniowych pracujących z kondensatorami o dużych pojemnościach i posiadających stosunkowo duży opór rzeczywisty, przebieg prądu wyladowania podaje rys. 22.

Przybliżony czas błysku oblicza się ze wzoru:

$$\tau_{\text{blysk}} = C \cdot R_c.$$

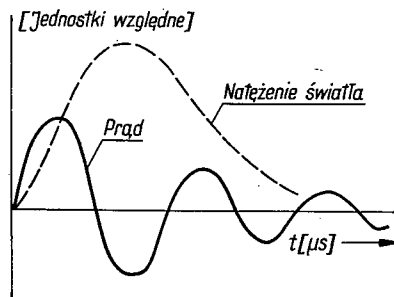
Wzór ten nie uwzględnia zmiany oporności lampy w czasie trwania błysku.

Dla przeciętnych lamp niskociśnieniowych o pojemności kondensatora równej kilkuset μF i oporności całkowitej obwodu rzędu kilku Ω czas błysku wyliczony w ten sposób wynosi ok. 1 ms. Dla lamp pracujących



Rys. 22. Przebieg napięcia, prądu i wydajności świetlnej w funkcji czasu dla lampy niskociśnieniowej

z kondensatorem o małej pojemności, zwłaszcza w przypadku lamp wysokociśnieniowych, w których oporność słupa wyładowania jest rzędu $(0,2 \div 0,5) \Omega$, dużą rolę odgrywa iloczyn LC . Wyładowanie ma przebieg



Rys. 23. Przebieg prądu i natężenia światła w lampie wysokociśnieniowej

oscylacyjny, rys. 23. Dla takiego wyładowania czas błysku jest w przybliżeniu tego samego rzędu co okres oscylacji obwodu nietłumionego o elementach L i C .

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Dla przeciętnie występujących wartości pojemności i indukcyjności jest on rzędu 1 μs .

W zakończeniu pragnęlibyśmy podziękować prof. B. Paszkowskiemu i mgrowi inż. J. Hennelowi za liczne dyskusje i pomoc w opracowaniu niniejszego artykułu oraz prof. J. Rolińskiemu za udostępnienie posiadanych materiałów.

nonparel

WYKAZ LITERATURY

1. Ardenne M.: Tabellen der Elektronenphysik. — Jonenphysik und Übermikroskopie, Berlin 1956.
2. Chase N., Hankin N., Webb F.: Instrumentation for Exploding Wire Research. — Electronics, lipiec 1, 1960.
3. Eckart F.: Elektronenoptische Bildwandler und Röntgenbildverstärker. Leipzig 1956.
4. Galinaro R.: Étude et réalisation d'un tube à éclairs destiné à la transmission de l'information en ultraviolet ou en infrarouge. L'Onde Electrique nr 396, marzec 1960.
5. Iwanow A.: Elektryczne źródła światła. Warszawa 1953.
6. Kapcow J. A.: Elektronika. Warszawa 1956.
7. Kapcow J. A.: Elektrieskije jawlenja w gazach i wakuumie, 2 wydanie, 1950.
8. Laporte M.: Les lampes à éclairs lumière blanche, grande puissance. — Le Vide Nr 31, styczeń 1951.
9. Larché: Die Strahlung des Xe Hochdruckbogens hoher Leistungsaufnahme. — Zeitschrift Physik 136, 1953.
10. Lewitin J. B.: Technika promieniowania podczerwonego. — Nowa Technika, zeszyt 37.
11. Wolan P.: High-Intensity, Fractional-Microsecond Light Sources. — Journal of SMPTE, Vol. 70, sierpień 1961.
12. Olsen H. N., Huxford W. S.: Dynamic Characteristics of the Plasma in Discharges through Rare Gases. — Physical Review, Nr 87, 1952.
13. Penning F. M.: Elektrische Gasentladungen. — Philips Technische Bibliothek, 1957.
14. Piekara B.: Konstrukcja i charakterystyki lamp błyskowych oraz własności elektryczne i energetyczne plazmy wyładowań impulsowych dużej mocy. Praca doktorska, 1960.
15. Robinson N. W.: Elektronische Blitzlampen. — Philips Technische Rundschau Nr 6, 1954.
16. Własow W.: Lampy elektronowe. Warszawa.
17. Wolska A.: Analiza widmowa. Warszawa 1949.
18. Wulfson K. S.: Ob impulsnom rozriadie w iniertnych gazach. — Izwestija Akademii Nauk SSSR, wyp. 9, Nr 3, 1945.
19. Progress in Light Sources. — Illuminating Engineering, luty 1956.
20. Light Amplifier Extends Spectrum. — Electronics Nr 30, 22 lipca 1960.
21. Praca zbiorowa: Technika świetlna. Warszawa 1960.
22. Katalog firmy Philips, wrzesień 1960.

W. WOLIŃSKI, T. ADAMOWICZ

PULSED, INFRARED RADIATION SOURCES

Summary

This article is a review of the problems dealing with the low and high pressure discharge lamps.

The physical phenomena which appear in flash discharge are discussed here. Also some of the factors like gas filling, power and electrical circuit influencing the operating conditions of infrared sources are analysed.

Many of the existing constructions of flash lamps are collected and discussed.

W. WOLIŃSKI, T. ADAMOWICZ

TUBES À ECLAIRS COMME SOURCE DU RAYONNEMENT INFRA-ROUGE

Résumé

Dans cet article on a assemblé des matériaux concernant les tubes à éclairs de basse et de haute pression.

On a discuté les phénomènes physiques de la décharge électrique qui a été source de l'éclair. On a analysé l'influence: a) de la nature et de la pression du gaz, b) de la puissance de la décharge, c) du circuit électrique, sur les paramètres des tubes à éclairs utilisées comme source du rayonnement infra-rouge.

On a confronté et discuté les constructions existantes de ces tubes.

W. WOLIŃSKI, T. ADAMOWICZ

INFRAROTBLITZQUELLEN

Zusammenfassung

Dieser Artikel enthält einen Überblick von Problemen der Blitzentladungslampen für Niedrig- und Hochdruck.

Die physikalischen Eigenschaften der Blitzentladung wurden besprochen. Es wurde der Einfluss verschiedener Faktoren wie Gasfüllung, Leistung und Schalt-schema auf das Verhalten der Blitzlampen, die als Infrarotquellen eingesetzt sind, behandelt.

Es wurde eine Reihe von Konstruktionslösungen dieser Lampen beschrieben.

В. ВОЛИНСКИ, Т. АДАМОВИЧ

ИМПУЛЬСНЫЕ ИСТОЧНИКИ ИНФРАКРАСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Резюме

В статье рассматриваются вопросы, касающиеся разрядных ламп низкого и высокого давления.

Представлены физические явления, происходящие в искровом разряде и проанализировано влияние давления и рода газа, мощности разряда, а также электрической схемы на параметры ламп, работающих в качестве источников инфракрасного излучения.

Описаны и сравнены современные конструктивные решения.

621.311.1:621.317:384

JERZY BADER, ANDRZEJ BALCERZAK, JERZY JANUSZ ZIELIŃSKI

Straty mocy na ulot w linii o małej średnicy przewodów

Rękopis dostarczono 3.11.1961

Przedmiotem artykułu jest analiza strat mocy na ulot w liniach 220 kV o zmniejszonym przekroju przewodów. Przeprowadzono analizę metod obliczeniowych, wyników uzyskanych na podstawie pomiarów zagranicznych oraz wyników pomiarów własnych. W wyniku tej analizy autorzy wyznaczyli roczne straty ulotu linii 220 kV oraz wskazali, które z metod obliczeniowych dają wyniki zbliżone do uzyskanych drogą eksperymentalną.

1. WSTĘP

W ciągu ostatnich lat obserwuje się w różnych krajach tendencję do przełączania linii napowietrznych na napięcie wyższe od napięcia, na jakie były one zbudowane. Próby takiego przełączania linii, którego podstawą są czynniki techniczno-ekonomiczne, były przeprowadzane w Związku Radzieckim, we Francji, w Polsce, a także i w innych krajach. Wiąże się z tym szereg zagadnień technicznych, które przed podjęciem decyzji o przełączeniu powinny być szczegółowo zbadane. Jednym z istotnych tu czynników jest zjawisko ulotu. Zwiększenie napięcia pracy linii powoduje wzrost natężenia pola elektrycznego przy powierzchni przewodów, co pociąga za sobą zwiększenie strat mocy na ulot oraz zwiększenie poziomu zakłóceń radioelektrycznych w pasmach częstotliwości radiowych, a czasem i telewizyjnych. W obydwu kierunkach były przeprowadzone prace badawcze. W niniejszym artykule zostaną omówione jedynie zagadnienia związane ze stratą mocy na ulot.

Zwiększenie napięcia pracy linii istniejącej odpowiada z punktu widzenia ulotu, warunkom występującym w linii na wyższe napięcie, lecz o mniejszym od przeciętnego przekroju przewodów. W ten sposób będzie rozpatrywane zagadnienie w dalszej części niniejszej pracy.

W tablicy 1 przytoczono średnice przewodów linii dla napięcia 220 kV, stosowane w różnych krajach. Należy podkreślić, że wg kalkulacji radzieckich koszt budowy linii zmniejsza się o 1% przy zmniejszeniu przekroju przewodów o 2% [1].

Celem niniejszej pracy jest analiza strat mocy na ulot dla linii 220 kV o małym przekroju przewodów. Analizę tę przeprowadzono w oparciu o znane wzory teoretyczne, pomiary przeprowadzone w innych krajach oraz pomiary własne.

Tablica 1

**Normalne i zmniejszone średnice przewodów
w liniach pracujących przy napięciu 220 kV**

Kraj	Średnica normalna przewodu	Średnica zmniejszona przewodu
	mm	mm
Polska	26,9	19,2
Francja	24,9	18,9
U.S.A.	30,4	—
Szwecja	25	—
Włochy	26,9	22
Z.S.R.R.	25	—

2. CHARAKTERYSTYKA LINII BADANEJ

Do badania strat ulotu została wybrana i udostępniona przez Zarząd Energetyczny Okręgu Centralnego linia na napięcie 220 kV. Linia ta budowana była odcinkami w różnych okresach czasu, zasadniczo z przeznaczeniem do pracy przy napięciu 150 kV. Linia składa się z czterech odcinków różniących się między sobą pod względem konstrukcji słupów oraz przekroju i układu przewodów. Charakterystyczne dane dla poszczególnych odcinków podano w tablicy 2 oraz na rys. 1. Całkowita długość

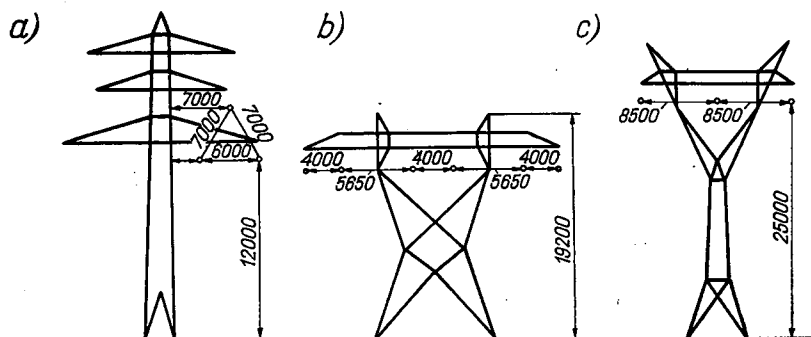
Tablica 2

Ogólne dane konstrukcyjne linii badanej 220 kV

Odcinek linii	Długość odcinka		Typ słupa przelotowego wg rys. 1	Układ przewodów	Przekrój przewodów	Średnica przewodów
	km	%			mm ²	mm
1	2	2	A	trójkątny	350	26,9
2	58,4	55	A	trójkątny	185	19,2
3	27,3	25	B	płaski	185	19,2
4	19,3	18	C	płaski	350	26,9

badanej linii wynosi 107 km. Trasa linii jest praktycznie prostoliniowa na prawie całej długości i biegnie w płaskim, otwartym terenie, a wysokość linii nad poziomem morza nie przekracza 200 m.

Oprócz parametrów konstrukcyjnych linii zasadniczy wpływ na wartość strat ulotu mają warunki klimatyczne występujące w rejonie badanej linii. Celem zdefiniowania tych warunków dla badanej linii przeprowadzono analizę klimatu w oparciu o dane zarejestrowane w ciągu 5 lat, w okresie od 1.1.1955 r. do 31.12.1959 r. przez trzy stacje meteorologiczne: Warszawa, Warka i Radom leżące w rejonie linii. Dane te dotyczy-



Rys. 1. Odległości między przewodami na słupach przelotowych linii 220 kV

ły średnich miesięcznych temperatur, ciśnień i wilgotności, średniej liczby dni z opadem w poszczególnych miesiącach, średniej liczby dni, w których występowały poszczególne zjawiska meteorologiczne (jak deszcz, krupa, mgła, mżawka, grad, burza), oraz wartości opadu i ilości godzin z deszczem i mżawką dla poszczególnych miesięcy. Na podstawie tych danych określono liczbę godzin w roku z występującym opadem śniegu i deszczu oraz średnią intensywność opadu, wynoszącą 0,62 mm/godz. Dla ustalenia liczby godzin z mgłą przyjęto, że występuje ona przez 3 godziny każdego dnia, w którym została zarejestrowana jako zjawisko. Dla obliczenia liczby godzin z sadzą przyjęto, że występuje ona średnio przez pół godziny każdego dnia w miesiącu, w którym średnia temperatura zawiera się w granicach od -3°C do $+3^{\circ}\text{C}$. Okres czasu wolny od wyżej wymienionych zjawisk określono jako „pogoda”. Wyniki przeprowadzonej w ten sposób analizy dla każdej z trzech stacji meteorologicznych zestawiono w tablicy 3. Podaną w ostatniej rubryce tablicy 3 liczbę godzin trwania poszczególnych zjawisk średnio dla całej linii obliczono posługując się wzorem

$$t_{sr} = \frac{t_1 + 2t_2 + t_3}{4},$$

gdzie t_1 , t_2 , t_3 oznaczają liczbę godzin trwania danego zjawiska odpowiednio w Warszawie, Warce i Radomiu.

Tablica 3

Sredni czas występowania poszczególnych zjawisk meteorologicznych
w rejonie badanej linii 220 kV

Warunki atmosfery- czne	Średnia ilość godzin w roku				
	Warszawa	Warka	Radom	Średnio dla całej linii	
	godz	godz	godz	godz	%
Pogoda	7525	7454	7478	7478	85,3
Śnieg	294	265	226	263	3,0
Deszcz	733	812	902	814	9,3
Mgła	132	153	78	129	1,5
Sadź	76	76	76	76	0,9

3. METODY OBLICZANIA STRAT NA ULOT

3.1. Źródła metod określania strat

W roku 1961 minęło pół wieku od pierwszych obszernych badań F. W. Peecka [2], mających na celu uzyskanie podstaw do obliczenia strat ulotu. Od tego czasu liczni badacze zaproponowali już kilkadziesiąt metod analitycznych i ich odmian oraz wyznaczyli szereg krzywych empirycznych służących do określania strat ulotu w liniach wysokich napięć. Różnorodność sposobów określania strat ulotu i znaczna rozbieżność wyników (co zostanie zilustrowane podanymi niżej przykładami liczbowymi), pochodzi, jak wydaje się, nie tylko ze skomplikowanego charakteru zjawiska ulotu, lecz głównie z trudności adaptowania zależności obserwowanych w warunkach laboratoryjnych do warunków występujących w eksploatacji trójfazowych linii napowietrznych wysokich napięć.

Dawniejsze bowiem analityczne metody określania strat oparte były przeważnie na obszernych badaniach zjawiska przy napięciu stałym dla stosunkowo małych wartości napięć i średnic elektrod, dla których udało się określić uzasadnione teoretycznie zależności funkcjonalne, o współczynnikach liczbowych wyznaczanych przeważnie na drodze empirycznej. Na poważne trudności napotykało jednak prawidłowe uwzględnienie różnicy między zjawiskami przy napięciu stałym a zmiennym, wpływu znacznych odległości, skomplikowanego kształtu i rozmieszczenia wzajemnego przewodów linii, a szczególnie ujęcie we wzorach analitycznych wpływu czynników atmosferycznych na charakter i intensywność wyładowań ulotowych.

W ostatnich latach w miarę rozwoju sieci najwyższych napięć prowadzono coraz szersze badania eksperymentalne strat ulotu w liniach i wysunięto propozycje uogólnienia ich wyników w celu posługiwania się nimi do obliczeń przy projektowaniu linii. Początkowo trudności uzyska-

nia wyników w warunkach eksploatacyjnych i mała ich liczność dawały niewielkie prawdopodobieństwo wyznaczenia krzywych możliwych do stosowania w rozmaitych sieciach. Ostatnio, jak wydaje się, możliwość porównania licznych danych doświadczalnych radzieckich [3], amerykańskich [4], [5] i niemieckich [6] oraz sprawdzenie zasad uogólniania wyników pozwalają na szacunek strat ulotu bardziej ścisły, a zarazem prostszy, niż to umożliwiają metody analityczne.

3.2. Podstawowe zasady i klasyfikacja metod analitycznych

Niewątpliwie jakościowo i ilościowo ulot zależy od natężenia pola na powierzchni i w pobliżu elektrody ulotującej, a więc zależy od napięcia linii oraz od jej wymiarów geometrycznych. Poszczególne metody różnią się jednak poważnie sposobem uwzględnienia tych parametrów we wzorze na straty mocy oraz uwzględnieniem szeregu innych parametrów dodatkowych. Spośród wielu charakterystycznych cech odróżniających te metody należało by wymienić jako najważniejsze:

- definicję napięcia (lub natężenia pola) przyjętego jako podstawowy parametr dla wyznaczania strat ulotu,
- funkcjonalną zależność strat od napięcia linii,
- sposób uwzględnienia różnicy między ulotem przy napięciu stałym i zmiennym,
- sposób uwzględnienia odkształcenia pola przy powierzchni przewodu na skutek odchyień od idealnej powierzchni walcowej, spowodowanych stosowaniem przewodów linkowych oraz wpływami opadów.

Przykłady interpretacji tych zagadnień przedstawiono w skrócie na podstawie źródłowych podręczników monograficznych [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15].

a) Ulot a jonizacja

Jak wiadomo, natężenie jonizacji K_j określa się jako natężenie pola, przy którym rozpoczyna się już jonizacja lawinowa, a natężenie ulotu K_0 jako natężenie pola, przy którym wyładowania świetlące są dostatecznie intensywne, aby móc je zaobserwować gołym okiem. Zgodnie ze wzorami F. W. Peek'a [11] dla walców równoległych

$$K_j = 21,1 \text{ kV/cm}, \quad \text{zaś} \quad K_0 = 21,1 \left(1 + \frac{0,3}{\sqrt{r}} \right) \text{ kV/cm}$$

(wartości skuteczne, dla gęstości względnej powietrza równej 1). F. W. Peek do obliczeń strat ulotu przyjmował napięcie obliczone z pośredniej wartości natężenia pola

$$K_{kr} = K_j \left[1 + \frac{0,3}{\sqrt{r}} \cdot \frac{1}{1 + 230 r^2} \right].$$

Dla przewodów cienkich to natężenie krytyczne zbliża się do natężenia ulotu, dla grubszych do natężenia jonizacji. Różnice liczbowe pokazuje tablica 4.

Tablica 4

$\frac{K_{kr}}{K_j}$ i $\frac{K_o}{K_j}$ w zależności od promienia przewodu

r cm	$\frac{K_{kr}}{21,1}$	$\frac{K_o}{21,1}$
0,01	2,93	4,00
0,05	1,85	2,34
0,1	1,29	1,95
0,2	1,06	1,67
0,5	1,007	1,42
0,8	1,002	1,34
1,0	1,001	1,30

Dla promieni przewodów linii wysokich napięć, dla których obliczanie strat ulotu ma praktyczną wartość, można przyjąć $K_{kr} = K_j$ z błędem znacznie mniejszym niż 1%. Inni badacze (np. Holm) za podstawę przyjęli napięcie ulotu U_0 , twierdząc, że tzw. „zimny ulot” przy napięciu bliskim napięcia jonizacji charakteryzuje się tak małą energią, że jest ona pomijalna przy obliczaniu strat ulotu. Późniejsze dane eksperymentalne nie potwierdziły jednak tego poglądu, gdyż straty występują na ogół już poniżej napięcia ulotu widocznego, a nawet, jak wykazał Peterson, również poniżej przyjętej przez Peeka granicy.

b) Zależność funkcjonalna $P(U)$

Na ogół ze względu na jednorodność wzoru i analogię do wzoru na straty Joule’a autorzy poszczególnych metod podają zależność strat mocy na ulot od drugiej potęgi napięcia. Peek i metody pochodne przyjmują tu zależność od kwadratu różnicy napięcia linii i napięcia początkowego jonizacji:

$$P = A(U - U_j)^2. \quad (1)$$

Metody traktujące stratę mocy jako iloczyn średniej wartości napięcia przez ładunek $C(U - U_{kr})^1$ w jednostce czasu (np. Holm, Mayr) dochodzą do zależności

$$P = A \cdot U(U - U_{kr}). \quad (2)$$

¹⁾ Oznaczone tu napięcie krytyczne U_{kr} oznacza w zależności od metody U_j , U_0 lub inną wartość pośrednią założoną na podstawie danych empirycznych przez autora metody.

Metody oparte raczej na wynikach eksperymentalnych niż na rozważaniach teoretycznych, jak np. metoda Petersona, wychodzą z zależności

$$P = A \cdot U^2. \quad (3)$$

Pewną odrębną grupę stanowią metody opierające się na zależności strąt mocy od trzeciej potęgi napięcia. Wychodzą one z zależności strąt od prądu ulotu, który nie jest funkcją liniową napięcia. Przyjmując za Townsendem

$$i = 2 \pi \rho r \gamma K \quad (4)$$

i uwzględniając rozkład pola dla układów walcowych dochodzi się wówczas do zależności

$$i = A \cdot U (U - U_{kr}), \quad (5)$$

a więc wg Prinza

$$P = A U^2 (U - U_{kr}). \quad (6)$$

Rozważania te po pozytywnym sprawdzeniu eksperymentalnym w warunkach laboratoryjnych przyjął za podstawę swej metody Stockmeier. Również Kühn przyjął (zresztą dla napięć stałych) zależność trzeciego stopnia, jednak w postaci podobnej do wzoru Peeka, a mianowicie

$$P = A (U - U_{kr})^3. \quad (7)$$

Wszystkie powyższe zależności, sprawdzone przez autorów metod dla stosunkowo wąskiego zakresu parametrów, wykazują bardzo różną zależność strąt od napięcia poza skontrolowanym przedziałem.

c) Uwzględnienie wpływu zmienności napięcia

Wpływ zmienności napięcia na wartość strąt ulotu w porównaniu z obszerniej zbadanymi stratami przy napięciu stałym został zaobserwowany już przez Peeka. Stwierdził on zwiększenie strąt przy napięciu zmiennym, co ujął we wzorze w postaci proporcjonalności strąt do $(f + a)$, gdzie określona doświadczalnie stała $a = 25$. Jednak większość późniejszych badaczy zaobserwowała znacznie bardziej skomplikowany wpływ zmienności napięcia na straty ulotu. Stwierdzono niejednakowy wpływ częstotliwości przy różnych odstępach i promieniach przewodów. Przyjmując bowiem, że szybkość ruchu ładunku zależy od natężenia pola, czas trwania półokresu napięcia przy odległościach większych niż stosowane w pierwotnych badaniach może być niewystarczający do przepływu ładunku do drugiej elektrody (dla częstotliwości sieciowych odległość graniczna jest rzędu kilkunastu centymetrów) lub jego dyfuzji poza obszar dużych naprężeń. Przy napięciu zmiennym i występujących w sieciach odległościach zwiększa się więc wpływ ładunku przestrzennego w pobliżu przewodów, zwiększają się w konsekwencji natężenia

pola w przestrzeni między chmurą ładunku a przeciwnie naładowanym przewodem (w następnym półokresie napięcia zmiennego) i zwiększa się prąd ulotu. Poszczególni autorzy (m. innymi Holm, Zalesski, Mayr) w rozmaity sposób adaptowali wnioski z tego zjawiska do wzorów posługując się np. pojęciem średniego, maksymalnego lub zerowego promienia drgań ładunku w otoczeniu przewodu, w związku z tym postacie ich wzorów i w tej części są odmienne.

d) Uwzględnienie stanu powierzchni przewodu

Analizy wszystkich poprzednio omawianych czynników związanych ze stratami ulotu dokonywano dla przewodów walcowych (układy walców koncentrycznych lub równoległych), w zakresie laboratoryjnych zmian parametrów powietrza atmosferycznego. Warunki te są odmienne od występujących w liniach. Geometryczny kształt przewodów odbiega bowiem od idealnych walców, przy czym zastosowanie analitycznych metod określania natężenia pola i intensywności wyładowań dla tych kształtów jest praktycznie niemożliwe. Czynione w USA próby traktowania przewodu wielożyłowego jako zespołu niezmiernie zbliżonych przewodów walcowych prowadzą do bardzo żmudnych obliczeń, które ponadto dają nieścisłe wyniki wobec odkształcenia żył w warunkach eksploatacyjnych. Przeważająca więc większość badaczy przyjęła uwzględnienie tych różnic przez umowne zmniejszenie napięcia lub natężenia ulotu z wartości obliczonej dla walców do pewnej wartości zastępczej dla danego kształtu przewodu metalowego.

Jeszcze większy, a trudniejszy do zdefiniowania wpływ na straty ulotu mają nieustabilizowane warunki stanu powietrza w otoczeniu przewodów i stanu powierzchni przewodów wskutek wpływów atmosferycznych. Wpływ sadzi, deszczu, śniegu, mgły, a nawet znacznego zwiększenia wilgotności powietrza na zjawisko ulotu jest bardzo znaczny, a ustalenie jakichkolwiek przeciętnych dotyczących „normalnego” opadu napotyka na duże trudności. M. in. trudne jest przenoszenie doświadczeń uzyskanych w jednym rejonie do odmiennych warunków klimatycznych w innym. We wzorach analitycznych wpływy te odzwierciedlają analogiczne do poprzednich współczynniki obniżenia napięcia lub naprężenia ulotu. Jedynie wpływ zmian gęstości powietrza (określany przeważnie jako zależność odwrotnie proporcjonalna strat od gęstości) nie wprowadza praktycznie większych niż kilkuprocentowe zmiany wartości strat.

Reasumując, należy zaznaczyć, że wpływ kształtu przewodów i warunków atmosferycznych w ich otoczeniu jest szczególnie trudny do uwzględnienia i obarczony dużym błędem, gdyż w odróżnieniu od wpływu rodzaju i wartości napięcia nie była tu możliwa teoretyczna analiza istoty zjawiska fizycznego, lecz jedynie przyjęcie opartych na eksperymencie współczynników.

3.3. Zestawienie wzorów obliczeniowych dla strat mocy na ulot

a) Wzór Peek'a

$$P = \frac{241}{\delta} (f + 25) \sqrt{\frac{r}{a}} (U - U_j)^2 10^{-3} \text{ [kW/km]} \quad (8)$$

dla układu trójprzewodowego i napięcia międzyprzewodowego U w kV,
 P oznacza trójfazową stratę mocy.

U_j — napięcie jonizacji w kV,

r — promień przewodu w cm,

a — odstęp między przewodami w cm,

δ — gęstość względna powietrza $\left(\delta = \frac{b}{760} \cdot \frac{293}{t + 273} \right)$,

f — częstotliwość napięcia na przewodach.

b) Wzór Zalesskiego

$$P = \frac{0,222 \left(f + \frac{65}{a} \right) (U - U_j)^2 \cdot 10^{-3}}{\ln \frac{a}{L_{sr}}} \text{ [kW/km]}, \quad (9)$$

gdzie: a i L_{sr} w metrach.

$$L_{sr} = 0,19 \sqrt{\frac{r K_o}{f}}, \quad K_o = 21,1 \cdot m \cdot \left(1 + \frac{0,301}{\sqrt{\delta r}} \right),$$

pozostałe określenia jak w metodzie a).

c) Wzór Mayra

$$P = \frac{\gamma f r^2}{3 \cdot 10^9} K_r (K_r - K_j) \left(\ln \frac{2 b K_r}{\pi f r} - 1 \right) \text{ [kW/km]}, \quad (10)$$

gdzie:

K_r — natężenie pola przy przewodzie w kV/cm,

K_j — natężenie jonizacji (wg autora przy dobrej pogodzie równe 17 kV/cm, przy deszczu równe 11 kV/cm),

γ — współczynnik jonizacji

(wg autora równy 2 przy dobrej pogodzie, równy 1,4 przy deszczu),

b — ruchliwość jonów (wg autora równa 1,5 cm²/V·sek, pozostałe oznaczenia jak w metodzie a).

d) Wzór Holma (uproszczony)

$$P = 0,182 f U (U - U_0) \left(\frac{1}{\ln \frac{a}{L}} - \frac{1}{\ln \frac{a}{r}} \cdot 10^{-3} \right) \text{ [kW/km]}, \quad (11)$$

gdzie średnia odległość drgających ładunków od przewodu

$$L = \sqrt{\frac{3 \cdot 10^3 U \arccos \frac{U_n}{U}}{2\sqrt{2} \pi f \ln \frac{a}{r}}}.$$

e) Wzór Petersena (uproszczony)

$$P = \frac{0,11 f}{\left(\ln \frac{a}{r} \right)^2} U^2 F \cdot 10^{-3} \text{ [kW/km]}, \quad (12)$$

gdzie F zależy od stosunku $\frac{U}{U_j}$ wg zależności empirycznej w sposób następujący:

$\frac{U}{U_j}$	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
F	0,016	0,021	0,031	0,045	0,080	0,14	0,31	0,82	2,0

f) Wzór Prinza

$$P = \frac{\varphi}{\sqrt{3}} \frac{2 \varepsilon_0 b}{(0,87a)^2} U^2 (U - U_j) \text{ [kW/km]}, \quad (13)$$

gdzie:

φ — współczynnik empiryczny zależy od stosunku $\frac{a}{r}$ (np. dla

$$\frac{a}{r} = 700, \varphi = 0,78, \text{ dla } \frac{a}{r} = 500, \varphi = 0,83),$$

$$\varepsilon_0 = \frac{111}{4 \pi} 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}},$$

b — ruchliwość jonów $\left(\text{ok. } 1,5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}} \right),$

a — odstęp, w metrach,

U — napięcie sieci (międzyprzewodowe) w V,

U_j — napięcie jonizacji w V.

g) Wzór Stockmeiera (uproszczony, za Worobiewem [15])

$$P = \frac{37}{\sqrt{3} r^{1,82}} U^2 (U - U_j) 10^{-3} \text{ [kW/km]}, \quad (14)$$

gdzie:

U i U_j w kV,
 r — w metrach.

3. 4. Obliczenia dla linii badanej

Natężenie pola na powierzchni przewodów linii przy napięciu znamionowym 220 kV obliczono ze wzorów

$$K_r = \frac{U \cdot \beta}{2 r \ln \frac{a}{r}} \text{ [kV/cm]}, \quad (15)$$

gdzie:

U — napięcie międzyprzewodowe (kV),
 r — promień przewodu (cm),
 a — odległość między przewodami (cm).

Jak wiadomo, dla układu 2 przewodów współczynnik $\beta = 1$, dla 3 przewodów w układzie trójkątowym symetrycznym $\beta = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,15$, zaś w układzie płaskim $\beta = 1,19$.

Wzory te tylko w przybliżeniu odpowiadają warunkom występującym w linii, gdyż traktują przewody robocze jako układ samotny. W rzeczywistości na wartość natężenia pola mają wpływ: ziemia (zwierciadlane odbicia przewodów roboczych w ziemi), przewody odgromowe, konstrukcja słupów. Wpływ ten jest jednak w praktyce bardzo nieznaczny, gdyż bądź odległość elementów zakłócających rozkład pola jest duża (w przypadku odbić zwierciadlanych w odległości co najmniej $2h$ stosunek $\frac{2h}{a}$ w badanej linii wynosi ok. 6), bądź też zakłócenie pola występuje tylko na nieznacznym w stosunku do długości linii odcinku (w pobliżu słupów). Dla uproszczenia obliczeń przyjęto stały odstęp przewodów $a = 7$ m w całej linii. Nieścisłość ta oraz wynikające z poprzednich rozważań nieuwzględnienie elementów zakłócających pole sprawiają, że w niektórych punktach linii rzeczywiste natężenia pola są nieco różne od obliczonych i podanych w tablicy 5. Jednak, jak wyrywkowo sprawdzono, odchylenia te nie przekraczają $\pm 5\%$, a sumaryczny wpływ ich dla całej linii praktycznie się znosi.

Do określenia naprężeń jonizacji przyjęto wg wzoru Peek'a

$$K_j = 21,1 m_1 m_2 \quad (16)$$

współczynniki określające odkształcenie przewodnika metalowego od powierzchni walcowej (m_1) oraz wpływ opadów atmosferycznych na stan powierzchni i najbliższego otoczenia przewodów (m_2). W literaturze spotyka się znaczną dowolność przyjmowania tych współczynników. Dla uzgodnienia wyników do wszystkich metod obliczeniowych z wyjątkiem metody c z tablicy 6 przyjęto wartości liczbowe współczynników podane przez J. L. Jakubowskiego [10]. A mianowicie, dla używanych linek aluminiowych $m_1 = 0,90$. Drugi współczynnik $m_2 = 1$ dla pogody, zaś $m_2 = 0,8$ dla deszczu. Przyjęto również, że w warunkach złej pogody występuje obniżenie gęstości względnej powietrza z $\delta = 1$ (przy ładnej pogodzie) do $\delta = 0,95$ przy brzydkiej. A zatem wynikające stąd natężenia jonizacji wyniosą wg wzoru (16)

dla dobrej pogody:

$$K_j = 21,1 \cdot 0,9 \cdot 1 \cdot 1 = 19,0 \text{ kV/cm},$$

dla deszczu i małej gęstości powietrza:

$$K_j = 21,1 \cdot 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,95 = 14,4 \text{ kV/cm}.$$

Jak wynika z porównania z tablicą 5, natężenie pola na powierzchni przewodów jest większe od natężenia jonizacji dla odcinków linii o osz-

Tablica 5

Natężenie pola na powierzchni przewodów linii 220 kV

Odcinek linii	Średnica przewodów	Układ przewodów	K_r
	mm		kV/cm
1	26,9	trójkątny	15,1
2	19,2	—	20,0
3	19,2	płaski	20,7
4	26,9	—	15,6

czędnościowym przekroju przewodów również i przy dobrej pogodzie. Przy deszczu przekroczenie natężenia jonizacji występuje na wszystkich odcinkach linii.

Napięcia jonizacji wyliczono z wartości K_j wg wzoru (15)

$$U_j = \frac{1}{\beta} K_j \cdot 2r \ln \frac{a}{r}.$$

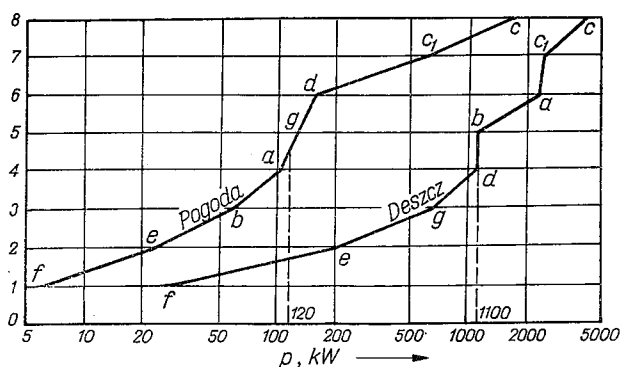
Niektóre metody obliczeń (jak np. Holma) bazują na natężeniach pola wyższych od natężenia jonizacji (np. natężenia pola ulotu widocznego)

$$K_u = K_j \left(1 + \frac{0,3}{\sqrt{r \delta}} \right). \quad (17)$$

Dla wymiarów przewodów występujących w linii badanej K_u jest większe od K_j o 26 do 31%. Jak wykazały jednak obliczenia, wyniki, jakie uzyskanoby przez wprowadzenie do wzorów K_u zamiast K_j , byłyby niewspółmiernie niskie (np. straty równe zeru dla ładnej pogody). Dlatego przeprowadzono obliczenia metodą Holma — wzór (11) — równolegle w dwu wariantach: w oparciu o K_j (pozycja d) i w oparciu o K_u (pozycja h).

Wyniki obliczeń poszczególnymi metodami zestawiono w tablicy 6. Jak widać, różnice między poszczególnymi metodami prowadzą do rozbieżności wyników w granicach kilku rzędów wielkości (pomijając nawet wariant metody Holma uwidoczniony w pozycji h, a oparty na napięciu ulotu widocznego). Również dają się zauważyć znaczne rozbieżności między stosunkiem strat przy deszczu i ładnej pogodzie w poszczególnych metodach. Wynosi on od 2,4 (dla metody c) do 23,3 (dla metody a), średnio można przyjąć, że dla badanej linii wynosi on około 10.

Na rys. 2 uszeregowano wyniki uzyskane poszczególnymi metodami od najmniejszej do największej wartości. Z braku innych kryteriów przyjęto za wartość najbardziej prawdopodobną średnią między środkowymi wynikami w tym szeregu. Te wartości strat wynoszą ok. 120 kW



Rys. 2. Zestawienie wyników obliczeń strat mocy na ulot w badanej linii 220 kV wg tabl. 6

dla pogody, a ok. 1100 kW dla deszczu. Jak widać z tablicy 6 i wykresu z rys. 2 metody a i f dają wyniki wyraźnie niższe — wiadomo zresztą, że metoda f oparta jest na wynikach uzyskanych przy napięciu stałym, a metoda e przystosowana do określania szczególnie małych strat w zakresie ulotu wstępnego. Wydaje się więc, że metody te nie nadają się do obliczeń strat ulotu w liniach o małym przekroju przewodów, gdzie należy spodziewać się intensywnego ulotu.

Metoda c i jej wariant c_1 dają natomiast wyniki znacznie wyższe od pozostałych (szczególnie przy ładnej pogodzie).

Tablica 6

Wyniki obliczeń strat ulotu w badanej linii 220 kV

Ozna- czenie meto- dy	Warunki atmosferyczne										Pogoda									
	Odcinek linii										1		2		3		4		cała linia	
	Długość odcinka										2 km		58,4 km		27,3 km		19,3 km		107 km	
	Metoda obliczeń										kW/km	kW	kW/km	kW	kW/km	kW	kW/km	kW	kW/km	kW
a	Peek	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,79	46	2,12	58	—	—	—	0,97	104	
b	Zaleski	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,34	20	1,44	39	—	—	—	0,55	59	
c	Mayr*)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	17,8	1038	27,9	762	—	—	—	16,8	1800	
c ₁	Mayr*)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5,34	312	12,3	336	—	—	—	6,33	678	
d	Holm**)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,50	88	2,98	81	—	—	—	1,58	169	
e	Peterson	0,11	—	—	—	—	—	—	—	—	0,24	14,0	0,27	7,5	0,12	2,3	—	0,22	24	
f	Prinz	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,05	2,9	0,10	2,7	—	—	—	0,05	6	
g	Stockmeier	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,18	69	2,25	61	—	—	—	1,21	130	
h	Holm**)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0	0	

3.5. Wyniki zagranicznych badań eksperymentalnych strat ulotu

Pomijając tę grupę badań, które służą do określenia wartości pewnych parametrów w wyznaczonych na drodze teoretycznych rozważań zależnościach (o czym była mowa wyżej), przeprowadzone w ostatnich latach za granicą badania strat ulotu można podzielić na następujące grupy:

- badania przeprowadzane w warunkach laboratoryjnych na krótkich odcinkach przewodów,
- badania przeprowadzane na specjalnie zbudowanych odcinkach linii doświadczalnych (odcinki o długości rzędu 1 km),
- badania na rzeczywistych liniach przesyłowych.

Badania na liniach rzeczywistych dokonywane są na ogół rzadko, gdyż są kosztowne, pracochłonne i — wobec określania strat „a posteriori” — nie mogą wpłynąć na bardziej ekonomiczne zaprojektowanie przewodów. Niemniej jednak, ze względu na możliwość uniknięcia błędów modelowania i ułatwioną rejestrację dużych prądów ulotu, wyniki ich są bardzo cenne i pozwalają na sprawdzenie w eksploatacji przyjętych założeń i wyników prób laboratoryjnych.

Przy badaniach na odcinkach linii doświadczalnej większa swoboda zmiany parametrów i możliwość uzyskania obszernych wyników dla różnych parametrów, wobec dysponowania na miejscu stałą bazą laboratoryjną, pozwala na uzyskiwanie strat ulotu zależnych zarówno od parametrów linii (przekrój, konstrukcja i rozmieszczenie przewodów, rodzaj słupów i izolatorów), jak i od czynników zewnętrznych (wilgotność, temperatura i ciśnienie powietrza, rodzaj i nasilenie opadów atmosferycznych, obecność mgły lub sadzi).

Badania modelowe w laboratorium ze względu na niewielką długość użytych do badań próbek nie pozwalają na dokładne wyznaczenie strat energii; jednak umożliwiają określenie natężeń pola w trudnych do obliczenia układach przewodów, jakimi są szczególnie przewody wiązkowe. Poniżej zostaną przedstawione niektóre wyniki badań zagranicznych uzyskane w ostatnich latach.

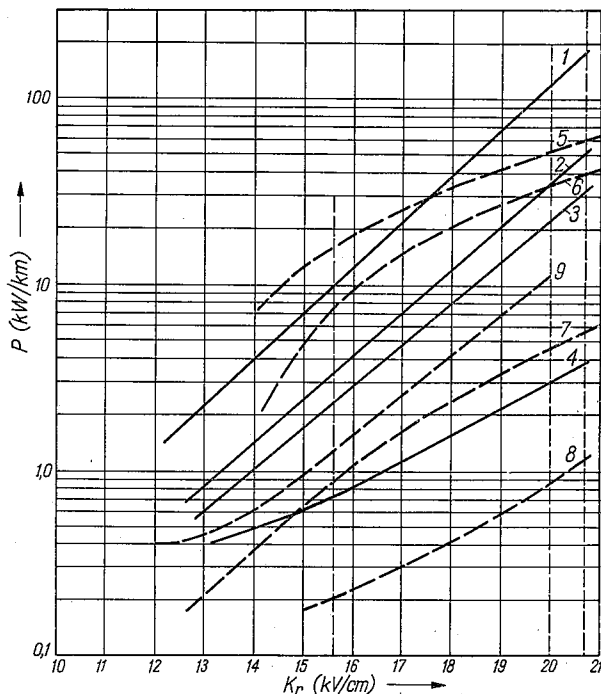
Spośród licznych wyników badań [3], [4], [5], [6], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28] wybrano te, które bądź dają się porównać z badaniami przeprowadzonymi przez autorów bądź też poprzez wyjaśnienie wpływu poszczególnych parametrów, pozwalają na uogólnienie wyników.

Do najpilniej śledzonych zależności strat ulotu (jeśli pominąć nie interesujące nas tu problemy dotyczące przewodów wiązkowych) należały:

- określanie zależności strat od rodzaju opadów atmosferycznych,
- określanie zależności strat od intensywności opadów atmosferycznych,

- uogólnianie wyników dla różnych konstrukcji linii poprzez zależność między stratami a natężeniem pola (co prowadzi niejako do empirycznej metody obliczeniowej),
- określanie dodatkowych czynników wpływających na zwiększenie strat w zależności od natężenia pola na powierzchni przewodów (dotyczy to naturalnie natężenia pola dla powierzchni walcowej określonego w sposób podany wyżej).

Zestawienie obszernych grup wyników badań niemieckich [6] i radzieckich [25], [26] podano na rys. 3. Analizując charakterystyczny prze-



Rys. 3. Straty ulotu w zależności od natężenia pola na powierzchni przewodów wg badań niemieckich i radzieckich

- 1 — Straty przy deszczu, badania niemieckie [6]
 - 2 — Straty przy mgie „ „
 - 3 — Straty średnie roczne „ „
 - 4 — Straty przy pogodzie „ „
 - 5 — Straty przy silnym deszczu, badania radzieckie [25], [26]
 - 6 — Straty przy słabym deszczu „ „
 - 7 — Straty średnie roczne „ „
 - 8 — Straty przy pogodzie „ „
 - 9 — Straty przy suchym śniegu „ „
- dla $K_r > 19$ kV/cm większość krzywych jest ekstrapolowana

bieg krzywych R. Bartenstein [6] przedstawił niektóre z nich jako proste w skali logarytmicznej), co pozwoliłoby na bardzo nieskomplikowane ujęcie zależności strat od natężenia pola.

$$\log_{10} P = a(K_r - b). \quad (18)$$

W pewnych granicach zależność tę spełniałyby i krzywe radzieckie. Należy jednak zauważyć, iż zależność ta jest słuszna dla najczęściej stosowanego w liniach przesyłowych gradientu napięcia, a więc dla $K_r = 14 \dots 18$ kV/cm. Dla wyższych i niższych natężeń pola charakterystyki zakrzywiają się. Szczególnie interesujące wydaje się spłaszczenie krzywych przy dobrych warunkach atmosferycznych dla małych natężeń, a przy złych warunkach atmosferycznych dla dużych natężeń. Wydaje się, że własności te można wytłumaczyć w sposób następujący:

— Wskutek istnienia nierówności na powierzchni przewodu ulot występuje nawet przy stosunkowo małym natężeniu pola i przy ładnej pogodzie, a zwiększenie K_r niewiele wpływa na natężenie pola na tych nierównościach. Dopiero po zwiększeniu natężenia pola K_r do takiej wartości, przy której ulot występuje praktycznie na całej powierzchni przewodu, zależność logarytmu strat od natężenia pola przybiera charakter prostoliniowy.

— Natomiast podczas deszczu przy bardzo dużych natężeniach pola występuje niejako nasycenie prądu ulotu powyżej pewnej wartości. Zjawisko to zostało zresztą ujęte i w podanych poprzednio metodach obliczeniowych. Stosunek między stratami przy deszczu i ładnej pogodzie zmniejsza się ze wzrostem gradientu K_r i np. wg wzoru (8) dla odcinka 3 linii badanej przy 20 kV/cm wynosi 18, przy 22 kV — 6, zaś przy 24 kV/cm tylko 4,5.

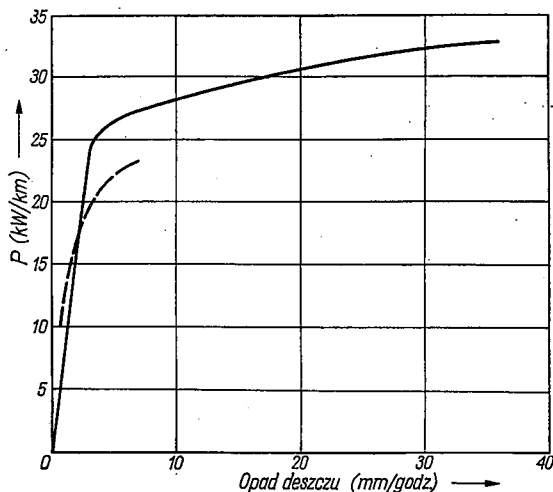
Wadą interpretowanych powyżej pomiarów jest ich zakres nie sięgający w szeregu przypadków wartości natężeń pola 20,0 kV/cm i 20,7 kV/cm występujących w badanej linii. Stosowanie tu więc ekstrapolowanych zależności prostoliniowych przyniosłoby nieścisłe rezultaty.

Interesujące są wyniki badań nad wpływem intensywności deszczu na wielkość strat. Okazuje się, że początkowo małe zwiększenie intensywności powoduje szybki wzrost strat, jednak powyżej ok. 0,1 mm opadu na minutę występuje nasycenie; wzrost strat przy opadzie aż do 0,6 mm/min nie przekracza 20%. Zależność tę interpolowaną dla występującego w badanej linii natężenia pola $K_r = 15,6$ kV/cm wg badań radzieckich [26] i niemieckich [6] przedstawiono na rys. 4. Warto zwrócić uwagę, że uwidocznione na rys. 3 wyniki badań radzieckich podają w przybliżeniu dwukrotną różnicę między stratami przy dużej i małej intensywności deszczu.

Według innych badań [29] różnica między stratami przy deszczu silnym (0,36 mm/min) i słabym (0,015 mm/min) maleje ze wzrostem natężenia pola. Przy $K_r \geq 18$ kV/cm różnica ta nie przekracza 20%, podczas gdy np. przy $K_r = 14$ kV/cm straty przy deszczu intensywnym są siedmiokrotnie wyższe niż przy słabym. Potwierdzają to inne, dawniejsze badania [5] doprowadzone jednak do natężeń pola nie przekraczających 16 kV/cm. Przy K_r wynoszącym ok. 10 kV/cm straty przy deszczu o intensywności

0,2 mm/min i powyżej są ok. 20-krotnie wyższe niż przy intensywności ok. 0,03 mm/min, przy $K_r = 16$ kV/cm stosunek ten jest jedynie 3-krotny.

Porównując straty w różnych warunkach atmosferycznych wg poszczególnych publikacji można stwierdzić następującą kolejność wielkości strat: największe występują przy sadzi, niewiele mniejsze przy



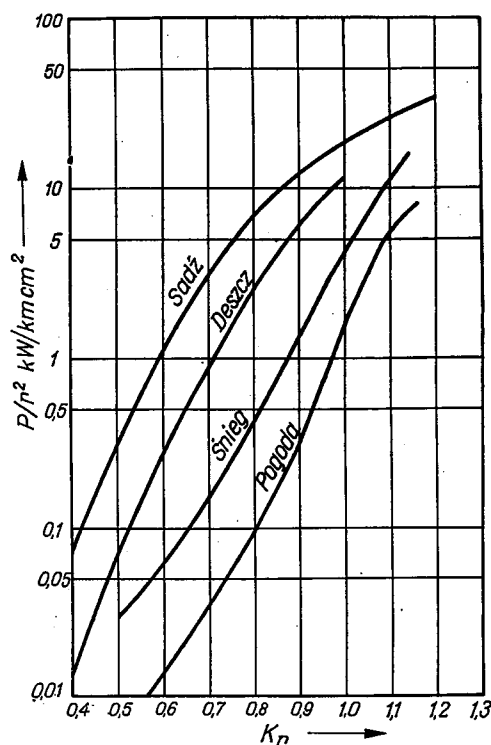
Rys. 4. Zależność strat ulotu od intensywności deszczu dla $K_r = 15,6$ kV/cm. Linia ciągła — badania radzieckie [26], linia przerywana — badania niemieckie [6]

silnym deszczu, mniejsze przy małym deszczu. Straty przy mgie, zależnie od jej intensywności, bywają większe lub mniejsze niż przy słabym deszczu (lecz zawsze mniejsze niż przy silnym deszczu). Straty przy śniegu suchym są jeszcze mniejsze, przy śniegu mokrym mogą się zbliżyć do poziomu strat przy deszczu. Straty przy pogodzie bez opadów są najmniejsze, jednak daje się zauważyć pewien ich wzrost przy znacznej wilgotności względnej powietrza.

Większość tych badań nie wyróżnia strat energii na izolatorach liniowych. Tylko badania francuskie [16] i radzieckie [28] podają straty energii na łańcuchu izolatorów jednokołpakowych, zresztą o innych parametrach niż spotykane w linii badanej. Porównując jednak dane dla podobnych układów izolacyjnych można przyjąć, że przy ładnej pogodzie straty na 1 łańcuch nie powinny przekraczać 10 W; przy złej pogodzie może nastąpić kilkakrotny wzrost, jednak nie przekraczający 50 W na 1 łańcuch.

Przytaczane wyniki eksperymentalne, jeśli były podawane w zależności od K_r , dotyczyły strat linii trójfazowej w przeliczeniu na przewody o promieniu 1 cm. Przyjmuje się przeliczanie strat w stosunku $\frac{P}{r^2}$, co

zresztą uwzględnił już w swojej metodzie Mayr — wzór (10). Zestawienie porównawcze nowszych wyników, poparte obszernymi badaniami własnymi, zostało dokonane ostatnio przez grupę badaczy radzieckich pod kierunkiem W. W. Burgsdorfa [3], [27]. Dla lepszego uogólnienia wyników zostało ono ujęte w formie zależności strat mocy na przewodzie o promieniu jednostkowym od stosunku natężenia pola na przewodzie do natężenia początkowego ulotu. Są to najbardziej kompletne wyniki z dotychczas opublikowanych i pozwalają na zastosowanie przyjętych krzywych przeciętnych do określenia ulotu dla każdego typu i przekroju przewodów. Wyniki te dla ładnej pogody, deszczu, mgły i sadzi przedstawione są na rys. 5. Wzajemne położenie i kształt krzywych są zgodne z podaną wyżej interpretacją różnych wyników badań zagranicznych.



Rys. 5. Uogólnione krzywe eksperymentalne do określania strat mocy na ulot [3]

Powyższa publikacja przyjmuje, że natężenie stanowiące wartość odniesienia różni się zarówno od natężenia jonizacji, jak i od natężenia ulotu widocznego. Wychodząc ze wzoru na natężenie ulotu widocznego:

$$K_o = 21,1 \left(1 + \frac{0,3}{\sqrt{r}} \right) \quad (19)$$

autorzy przyjęli współczynnik empiryczny 0,82 obniżenia natężenia ulotu widocznego dla rzeczywistej powierzchni przewodu w stosunku do powierzchni walcowej przewodu o tej samej średnicy. Tak określone natężenie K_0 nie różni się od przyjmowanego w poprzednich rozważaniach natężenia K_j jedynie dla przewodu o promieniu $r = 18$ mm, który zresztą niewiele odbiega od promienia przewodów linii rozpatrywanych w publikacji [3], [27]. Dla mniejszych promieni przewodów wartość odniesienia przyjmowana przez autorów radzieckich jest nieco wyższa niż określona w niniejszym opracowaniu. I tak dla odcinka 1 i 4 linii badanej ($r = 13,45$ mm) wzrost ten wynosi ok. 3%, dla odcinka 2 i 3 ($r = 9,6$ mm) — ok. 7%. W tablicy 7 zestawiono wartości strat w poszczególnych odcinkach linii badanej wyznaczone z krzywych radzieckich [3], [27].

Tablica 7

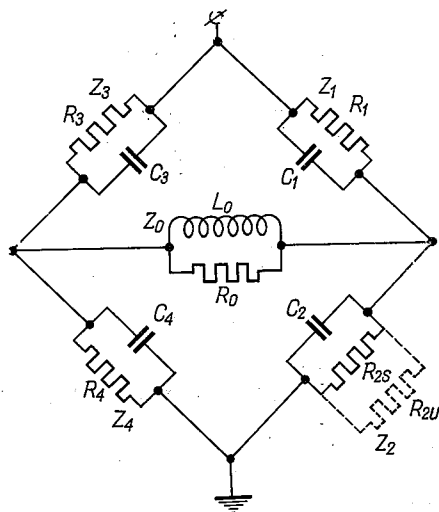
Straty ulotu w linii 220 kV określone wg krzywych radzieckich [3] w założeniu $K_0 > K_j$

Nr i długość odcinka Warunki atmosferyczne	1 (2 km)		2 (58,4 km)		3 (27,3 km)		4 (19,3 km)		Cała linia (107 km)	
	kW/km	kW	kW/km	kW	kW/km	kW	kW/km	kW	kW/km	kW
Pogoda	0,11	0,2	0,90	52,5	1,38	37,6	0,15	2,9	93	0,87
Śnieg	0,42	0,8	3,15	184	4,7	128	0,54	10,4	323	3,0
Deszcz	2,6	5,2	16,0	934	20,5	566	3,6	69	1574	14,7
Sadź	7,7	15,4	33,0	1926	39,0	1064	10,0	193	3198	29,9

Dla rozpatrywanej linii wartości strat mocy na ulot wyznaczone przy pomocy wzorów teoretycznych oraz eksperymentalnych krzywych (tablice 6 i 7) wykazują duże rozbieżności, dochodzące do dwóch rzędów wielkości. Wyniki z krzywych eksperymentalnych dla pogody i deszczu różnią się od najbardziej prawdopodobnych wyników obliczeniowych (rys. 2) tylko o kilkadziesiąt procent. Tym niemniej jednak nie ma podstawy do stwierdzenia, że dla warunków występujących dla badanej linii metody obliczeniowe Holma, Stockmeiera, Zalesskiego i Peeka oraz wyniki radzieckich badań eksperymentalnych, dające wartości tego samego rzędu, są ściślejsze od pozostałych metod określenia strat mocy na ulot. Wartości natężenia pola w rozpatrywanej linii są bowiem wyższe niż przeciętnie występujące w liniach, zaś warunki klimatyczne w Polsce centralnej mogą różnić się znacznie od warunków w rejonach badań eksperymentalnych w ZSRR i innych krajach. Biorąc powyższe pod uwagę zdecydowano przeprowadzić badania eksperymentalne na linii krajowej w celu uzyskania podstaw do jak najbardziej prawidłowego określenia strat energii w linii.

4. UKŁAD POMIAROWY

Istnieje szereg układów do pomiaru strat mocy na ulot. Bliższe dane tych układów można znaleźć np. w publikacjach [6], [12], [16], [19], [30], [31]. Ogólnie układy te można podzielić na dwie zasadnicze grupy: układy, w których prąd ulotu jest mierzony za pośrednictwem przekładników, i układy, w których prąd ulotu jest mierzony w specjalnych obwodach *RLC*, najczęściej mostkowych. Autorzy wybrali do pomiarów układ mostkowy, który w stosunku do układów z przekładnikami jest trudniejszy w obsłudze, natomiast jest łatwiejszy do wykonania. Schemat tego układu jest przedstawiony na rys. 6. Wprawdzie N. P. Jemieljanow



Rys. 6. Schemat ideowy mostka do pomiaru strat ulotu

i L. J. Cieplajew [30] przeprowadzili analizę matematyczną tego układu, to jednak wskutek trudności jej wykorzystania i pewnych niejasności, konieczne było przeprowadzenie powtórnych obliczeń, których wyniki są podane niżej.

Prąd w gałęzi zerowej mostka z rys. 6 można wyrazić następująco:

$$I_0 = U \frac{\frac{1}{Z_2} - \frac{Z_3}{Z_1 Z_4}}{\frac{Z_0}{Z_1} \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) \left(\frac{Z_3}{Z_0} + \frac{Z_3}{Z_4} + 1\right) + \left(1 + \frac{Z_3}{Z_4}\right)}. \quad (20)$$

Pomijając we wzorze wyrazy $\frac{Z_3}{Z_4}$ oraz $\frac{Z_1}{Z_2}$, gdyż w warunkach praktycznych:

$$\frac{Z_3}{Z_4} \ll 1 \text{ oraz } \frac{Z_1}{Z_2} \ll 1,$$

oraz podstawiając:

$$\begin{aligned}\frac{1}{Z_1} &= \frac{1}{R_1} + j \frac{1}{X_1}, \\ \frac{1}{Z_2} &= \frac{1}{R_{2U}} + \frac{1}{R_{2S}} + j \frac{1}{X_2}, \\ \frac{1}{Z_3} &= \frac{1}{R_3} + j \frac{1}{X_3}, \\ \frac{1}{Z_4} &= \frac{1}{R_4} + j \frac{1}{X_4}, \\ \frac{1}{Z_0} &= \frac{1}{R_0} + j \frac{1}{X_0}\end{aligned}$$

otrzymuje się

$$I_0 = \frac{I_u + I_{cz} + j I_b}{A + jB}, \quad (21)$$

gdzie:

$$I_u = \frac{U}{R_{2U}} \quad (22)$$

jest prądem ulotu (przy pominięciu spadku napięcia w gałęziach 1 i 3).

$$I_{cz} = \frac{U}{R_{2S}} + \frac{U}{X_1} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_3} \cdot \frac{X_3}{X_4} (\operatorname{tg} \delta_3 - \operatorname{tg} \delta_4 - \operatorname{tg} \delta_1 - \operatorname{tg} \delta_1 \operatorname{tg} \delta_3 \operatorname{tg} \delta_4) \quad (23)$$

jest tak zwanym prądem czynnym będącym w fazie z prądem I_u ,

$$I_b = \frac{U}{X_1} \left[\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_3} \cdot \frac{X_3}{X_4} (\operatorname{tg} \delta_1 \operatorname{tg} \delta_4 - \operatorname{tg} \delta_3 \operatorname{tg} \delta_4 - \operatorname{tg} \delta_1 \operatorname{tg} \delta_3 - 1) + \frac{X_1}{X_2} \right] \quad (24)$$

jest tak zwanym prądem biernym, przesuniętym w fazie o 90° w stosunku do prądu I_u

$$A = 1 + \frac{X_3}{X_1} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_3} (\operatorname{tg} \delta_1 \operatorname{tg} \delta_3 + 1) + \frac{X_0}{X_1} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_0} (\operatorname{tg} \delta_0 \operatorname{tg} \delta_1 + 1), \quad (25)$$

$$B = \frac{X_3}{X_1} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_3} (\operatorname{tg} \delta_3 - \operatorname{tg} \delta_1) + \frac{X_0}{X_1} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_0} (\operatorname{tg} \delta_0 - \operatorname{tg} \delta_1), \quad (26)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{X}{R}; \quad X = \frac{1}{\omega C}. \quad (27)$$

We wzorze oporność R_{2U} , zastępująca oporność ulotu, wchodzi jedynie do wyrazu I_u ; pozostałe wyrazy nie zależą od natężenia ulotu. Tak więc, gdy ulot nie występuje

$$R_{2U} \rightarrow \infty; \quad I_u \rightarrow 0; \quad I_0 \rightarrow \frac{I_{cz} + j I_b}{A + jB}.$$

Przy odpowiednim dobraniu wartości C_1 , C_2 , R_1 , R_2 można uzyskać $I_{cz} = 0$ i $I_b = 0$; jest to stan kompensacji mostka. W takich warunkach

$$I_0 = \frac{I_u}{A + jB} = \frac{I_u}{A + \frac{B^2}{A}} - j \frac{I_u}{\frac{A^2}{B} + B}. \quad (28)$$

Gdy w gałęź zerową zostanie włączona cewka prądowa watomierza, a cewka napięciowa za pośrednictwem przekładnika zostanie dołączona do napięcia zasilającego linię, watomierz zmierzy moc

$$P = U_c \cdot \frac{I_u}{A + \frac{B^2}{A}}, \quad (29)$$

gdzie U_c — napięcie na cewce napięciowej watomierza.

Moc ta jest wprost proporcjonalna do mocy traconej na ulot. Przekładnia prądowa wynosi tu $A + \frac{B^2}{A}$, przekładnia napięciowa $\frac{U_c}{U}$.

W warunkach eksploatacyjnych, mimo zrównoważenia mostka przed pomiarem, w czasie pomiaru może wystąpić w gałęzi zerowej pewna składowa bierna niekompensacji I'_b , wywołana zmianami oporności X_2 . Zmiany oporności X_2 , to znaczy pojemności linii, są wywoływane wystąpieniem ulotu lub kołysaniem się przewodów na skutek wiatru. Uwzględniając to, prąd w gałęzi zerowej wyniesie:

$$I_0 = \frac{I_u}{A + \frac{B^2}{A}} + \frac{I'_b}{B + \frac{A^2}{B}} - j \frac{I_u}{B + \frac{A^2}{B}} + j \frac{I'_b}{A + \frac{B^2}{A}}, \quad (30)$$

a moc mierzona przy umieszczeniu cewki prądowej watomierza w gałęzi zerowej

$$P = U_c \left[\frac{I_u}{A + \frac{B^2}{A}} + \frac{I'_b}{B + \frac{A^2}{B}} \right]. \quad (31)$$

Prąd niekompensacji I'_b wprowadza błąd pomiaru. Błąd ten jest tym mniejszy, im prąd I'_b jest mniejszy oraz im B jest mniejsze od A . W warunkach eksploatacyjnych na ogół I'_b nie przekracza 10% wartości I_u . Ponadto można układ tak zestawić, aby B było 10 ... 100 razy mniejsze od A . Dzięki temu błąd pomiaru sprowadza się do małych wartości, nieistotnych z punktu widzenia praktycznego.

Przeprowadzone rozważania dotyczą podstawowej harmonicznej napięcia. Dla wyższych harmonicznych przekładnia prądowa $A + \frac{B^2}{A}$ przyjmuje, jak wynika ze wzorów (25) i (26), inne wartości. Zależność prze-

kładni prądowej od częstotliwości, zwłaszcza dla trzeciej, piątej i siódmej harmonicznej napięcia, można znacznie złagodzić przez odpowiednie dobranie parametrów mostka.

Straty na ulot zależą nie tylko od procentowego udziału poszczególnych harmonicznych w krzywej napięcia zasilającego, ale i od kąta ich przesunięcia. Tak np. wg A. M. Foleya i F. Olsena [31], w konkretnie badanych przez nich warunkach zawartość 5% trzeciej harmonicznej w napięciu zasilającym, przy przesunięciu o 0° elektrycznych w stosunku do napięcia, powoduje wzrost strat na ulot o ok. 10%, zaś przy przesunięciu o 180° , powoduje wzrost strat o ok. 60%. Przytoczony przykład wskazuje celowość przeprowadzania pomiarów w warunkach eksploatacyjnych, przy zasilaniu napięciem systemu. Otrzymane bowiem wyniki mogą się znacznie różnić od wyników wyznaczonych w warunkach idealnych, w szczególności przy zasilaniu napięciem nie zawierającym wyższych harmonicznych.

Zrównoważenie mostka powinno się odbywać w zasadzie w układzie, w którym przewiduje się przeprowadzanie pomiarów. W tym celu napięcie zasilające układ należy obniżyć do najwyższej wartości, przy której nie występuje ulot. Przeprowadzając pomiary podczas pracy systemu elektroenergetycznego nie zawsze istnieją takie możliwości. Nie było ich także podczas przeprowadzania pomiarów w linii badanej. Z tego względu na czas kompensowania mostka układ zasilano istniejącym w stacji napięciem 15 kV. Po skompensowaniu mostka i przełączeniu zasilania na napięcie pracy 220 kV wystąpiła pewna składowa prądu, będąca w fazie z napięciem, nie związana z prądem ulotu. Było to spowodowane różnymi rozkładami napięć gwiazdowych w sieci 15 kV i 220 kV. Z tego względu mostek przy napięciu 220 kV nie był całkowicie skompensowany. W takich warunkach można przeprowadzać pomiary, konieczne jest tylko wyznaczenie prądu niekompensowanego.

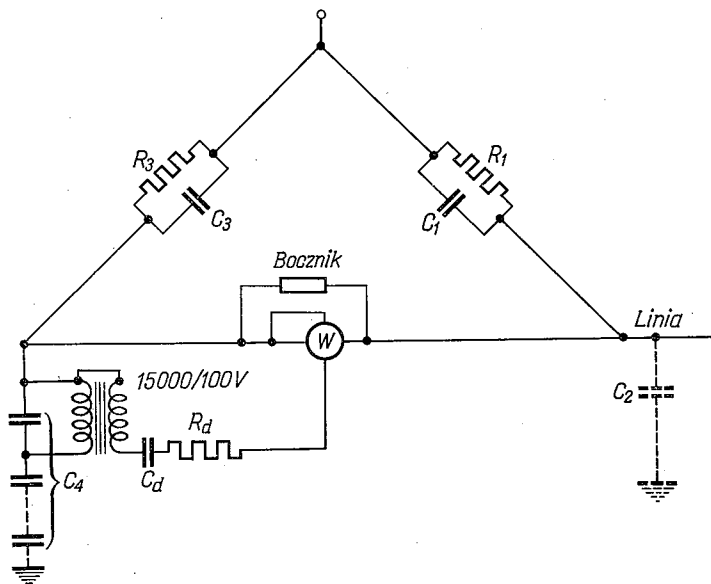
Schemat zainstalowanego mostka na stacji podano na rys. 7. Wartości liczbowe poszczególnych parametrów były następujące:

$$\begin{array}{lll} C_1 = 770 \mu\text{F} & R_1 = 12,7 \Omega & \text{tg } \delta_1 = 0,327 \\ C_2 = 0,92 \mu\text{F} & \text{—} & \text{—} \\ C_3 = 8,38 \mu\text{F} & R_3 = 1080 \Omega & \text{tg } \delta_3 = 0,350 \\ C_3 = 0,01 \mu\text{F} & R_4 = 64 \text{ M}\Omega & \text{tg } \delta_4 = 0,005. \end{array}$$

W gałęzi zerowej mostka była włączona cewka prądowa watomierza oraz dla rozszerzenia zakresu pomiarowego stosowano dodatkowo boczniki. Parametry gałęzi zerowej zależały od bocznika i zawierały się w granicach $R_0 = 12 - 60 \Omega$, $L_0 = 3,2 - 16 \text{ mH}$. Boczniki były tak skonstruowane, że $\text{tg } \delta_0 = -0,083$ i był niezależny od rodzaju bocznika.

Elementy R_1 , R_3 , C_1 , C_3 oraz watomierz i boczniki były umieszczone podczas pomiarów w metalowej obudowie znajdującej się pod potencja-

łem przewodu fazy badanej. Jako gałąź czwartą wykorzystano znajdujący się w stacji pojemnościowy dzielnik napięcia. Do górnego członu dzielnika napięcia dołączono przekładnik napięciowy dla zasilania cewki napięciowej watomierza. Dosyć dużo kłopotów nastęrczał dobór watomierza do układu. Wobec braku miliwatomierza powstała konieczność



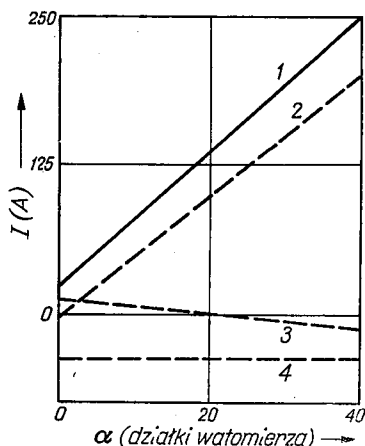
Rys. 7. Schemat mostka zastosowanego do pomiaru strat ulotu w linii

dostosowania normalnego watomierza. W tym celu usunięto opór szeregowy z obwodu ruchomej cewki napięciowej watomierza i zastosowano ją jako cewkę prądową (o prądzie do 8 mA) włączając w gałąź zerową mostka. Nieruchomą cewkę prądową watomierza wykorzystano jako cewkę napięciową. Cewkę tę włączono do przekładnika napięciowego 15000/100 V zainstalowanego na ostatnim stopniu dzielnika pojemnościowego (rys. 7)].

W celu zapewnienia zgodności fazy prądu w cewce napięciowej (nieruchomej) z fazą napięcia zasilającego, w szereg z cewką włączono kondensator C_d . Wartość prądu w cewce napięciowej nastawiono za pomocą w szereg włączonego opornika dodatkowego R_d .

Wyznaczenie przekładni napięciowej watomierza połączonego z przekładnikiem napięciowym i dzielnikiem napięcia nie nastęrcza kłopotów. Pewne komplikacje wystąpiły przy wyznaczeniu przekładni prądowej. W omawianym przypadku były one wywołane prądem niekompensowanym oraz dodatkowym prądem indukowanym w cewce ruchomej watomierza przez pole cewki nieruchomej. Wskutek stosunkowo małej oporności obwodu zewnętrznego cewki ruchomej watomierza (R_1C_1 ; R_3C_3

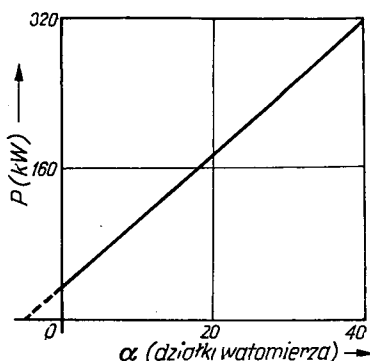
i ewentualnie bocznik) SEM indukowana w cewce ruchomej powodowała w niej przepływ prądu o wartościach od 0 do 0,5 mA. Wartości te uzależnione są od położenia cewki ruchomej watomierza w stosunku do cewki nieruchomej, a zatem od wartości mocy mierzonej.



Rys. 8. Przykładowa zależność prądu ulotu od wychyleń watomierza dla układu z rys. 7

1 — prąd ulotu linii, 2 — prąd w cewce prądowej watomierza pomnożony przez przekładnię układu, 3 — prąd indukowany w cewce ruchomej watomierza pomnożony przez przekładnię układu, 4 — prąd niekompensowany

Aby uwzględnić wyżej wymienione zjawiska przy skalowaniu przekładni prądowej mostka z watomierzem, układ zasilano napięciem 110 kV, przy którym nie występował ulot i którego układ gwiazdowy odpowiadał układowi gwiazdowemu napięcia pomiarowego 220 kV. W takich warun-



Rys. 9. Przykładowa zależność mocy traconej na ulot w zależności od wychyleń watomierza dla układu z rys. 7

kach linię obciążono specjalnie skonstruowanymi opornikami. Mierząc prąd w opornikach i prąd w cewce prądowej watomierza ustalono przekładnię prądową układu. Schematyczny jej przebieg pokazano na rys. 8. Dla ilustracji na rysunek ten naniesiono także prąd niekompensacji, prąd indukowany w cewce ruchomej od cewki nieruchomej watomierza

oraz czułość watomierza. Krzywe te otrzymano dla określonej wartości napięcia. Dla innej wartości napięcia krzywe te należy przeliczać. Na podstawie tych krzywych oraz przekładni napięciowej układu wyznaczono przekładnię mocy watomierza. Schematyczny jej przebieg pokazano na rys. 9.

5. WYNIKI POMIARÓW

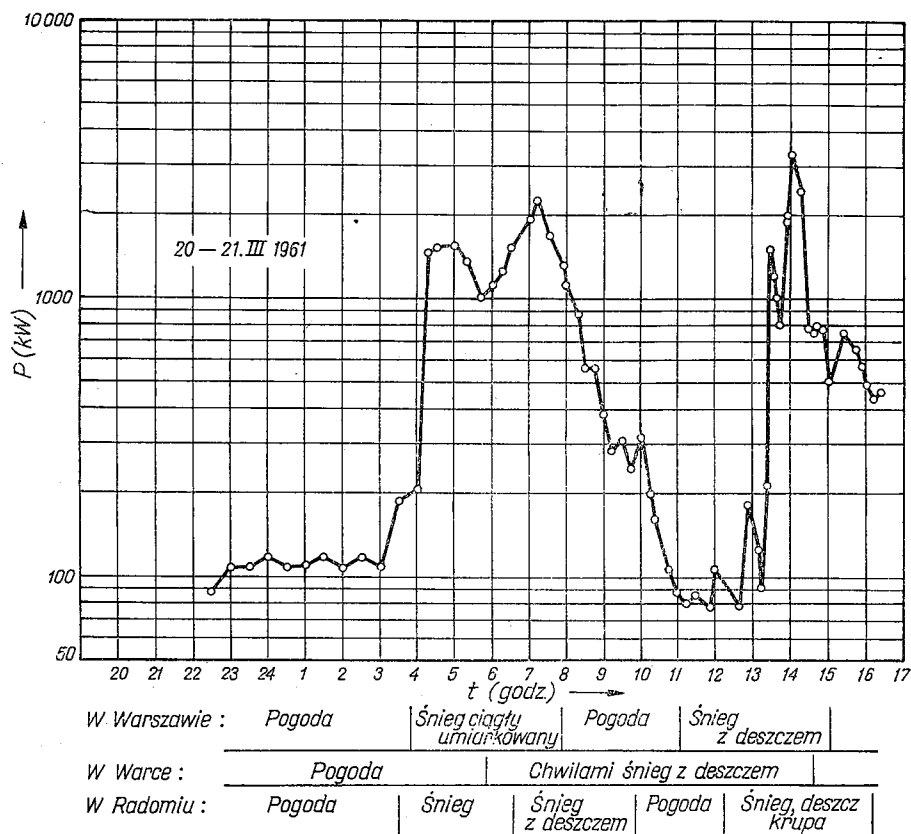
Przy pomocy omówionej w rozdziale 4 metody przeprowadzono pomiary mające na celu określenie strat energii elektrycznej spowodowanych zjawiskiem ulotu w linii 220 kV.

Najpewniejszą, bezpośrednią drogą osiągnięcia tego celu byłaby bezwątpienia ciągła rejestracja mocy związanej ze zjawiskiem ulotu w ciągu całego roku. Główną przyczyną nie pozwalającą jednak na tego rodzaju pomiary była konieczność utrzymania linii w ruchu w systemie sieci 220 kV. Możliwe było jedynie okresowe krótkotrwałe uzyskiwanie jej do pomiarów po uprzednim każdorazowym uzgodnieniu z Energetyką. Z tego też względu pomiary zostały ograniczone do pewnej ilości stosunkowo krótkich, najwyżej dobowych cykli pomiarowych dla określenia wartości mocy strat ulotu w różnych warunkach atmosferycznych. Dane takie łącznie ze znajomością rocznych danych klimatycznych rejonu linii pozwalają na sporządzenie z pewnym przybliżeniem rocznego bilansu strat energii. Dla określenia warunków atmosferycznych panujących w rejonie linii w trakcie wykonywania pomiarów bazowano zasadniczo na danych otrzymywanych ze stacji meteorologicznych Warszawa i Radom. Stacje te dostarczały danych dotyczących temperatury, wilgotności, ciśnienia, wysokości opadu i opisu pogody, rejestrowanych w odstępach jednogodzinnych. Dodatkowo uruchomiony punkt obserwacyjny w Warce rejestrował temperaturę, wilgotność i wysokość opadu.

Początkowo planowano każdorazowe uruchamianie pomiarów na podstawie krótkoterminowej meteorologicznej prognozy wystąpienia charakterystycznych warunków atmosferycznych w rejonie linii. Ponieważ jednak pomiary musiały być zgłaszane w Dyspozycji Mocy co najmniej na 48 godzin naprzód, prognoza pogody na taki okres dla danego rejonu stawała się mało prawdopodobna. Stąd też z konieczności pomiary przeprowadzane były przeważnie dla przypadkowych warunków atmosferycznych.

Pomiary objęły następujące miesiące: luty, marzec, kwiecień, maj, czerwiec i lipiec, w latach 1960 i 1961. Na przestrzeni 34 różnych dni przeprowadzono w czasie 200 godzin ok. 1000 pomiarów wartości mocy strat ulotu. Wyniki dla poszczególnych cykli pomiarowych były układane w wykresy, których dwa przykłady przytoczono na rys. 10 i rys. 11. Na wykresy mocy nakładano warunki klimatyczne rejonu linii. Z otrzymanych w ten sposób wielu zestawień określono wartości mocy strat ulotu

odpowiadające możliwie sprecyzowanym warunkom atmosferycznym. Przyjmowano przy tym jedną wartość z okresu czasu 1—2 godzinnego cyklu pomiarowego. Tak np. z wykresu na rys. 10 określono dla godzin 23—3 trzy wartości ok. 110 kW mocy strat podporządkowując je warunkom odpowiadającym pogodzie w rejonie linii. Dalej dla okresu czasu między godziną 5 i 8 w analogiczny sposób odczytano 3 wartości, podpo-

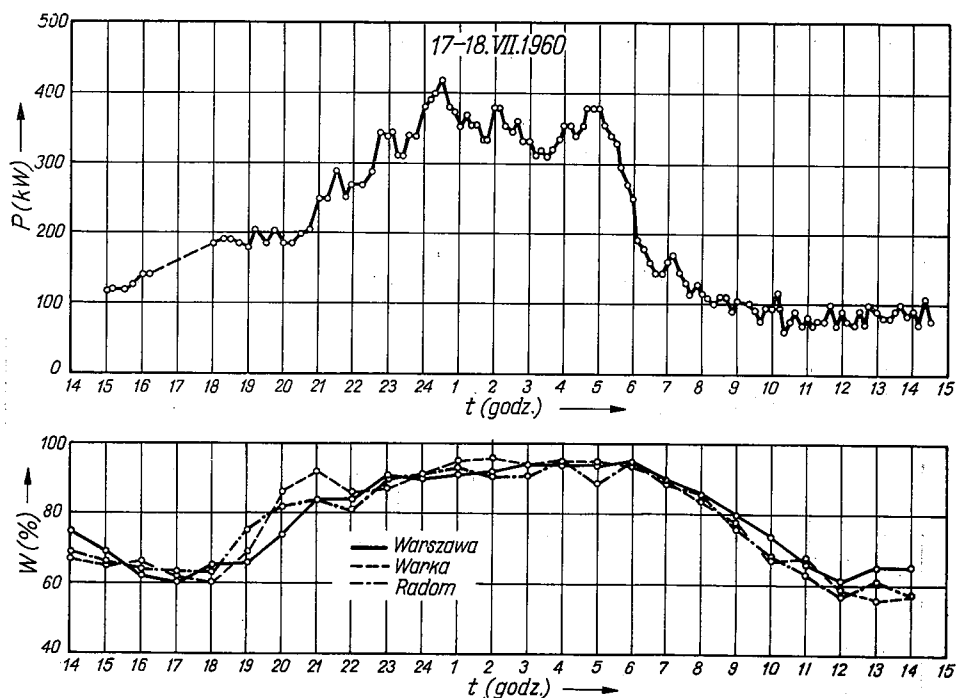


Rys. 10. Wykres zmian wartości mocy strat ulotu w linii badanej w czasie 18-godzinnego cyklu pomiarowego przy różnych warunkach atmosferycznych

rządkowując je warunkom „śnieg z deszczem”, jakkolwiek notowania meteorologiczne nie pozwalały na stwierdzenie, że cały rejon linii równocześnie znajduje się w strefie śniegu z deszczem. Następnie na tym wykresie charakterystyczny jest czas między godz. 13 a 15, gdzie odczytano wartość mocy strat ok. 3000 kW podporządkowując ją również warunkom „śnieg z deszczem”.

Drugi wykres pokazany na rys. 11 stanowi charakterystyczny przykład wzrostu strat ulotu ze znacznym i szybkim wzrostem wilgotności

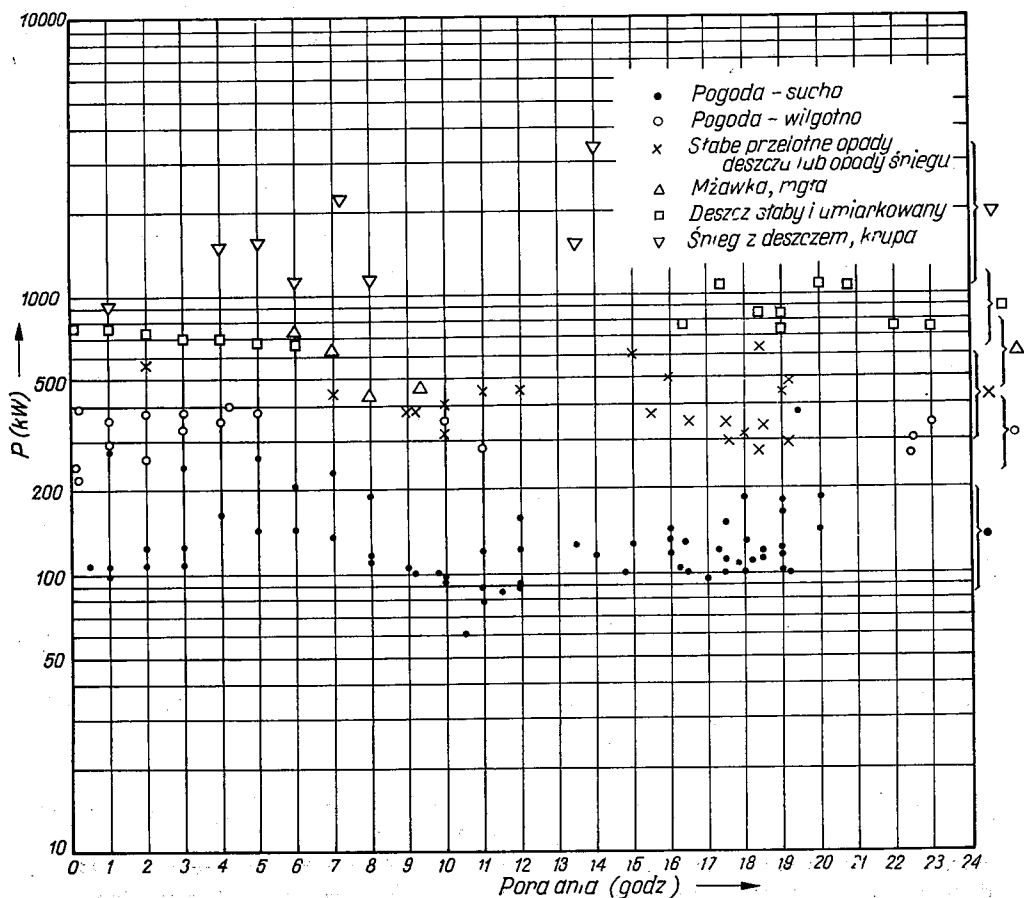
powietrza. W ciągu pogodnej nocy, przy praktycznie stałym ciśnieniu wystąpił szybki wzrost wilgotności powyżej 90 a nawet 95% na skutek gwałtownego obniżenia temperatury (na wykresie pokazano jedynie przebieg wilgotności). Punkty odczytane z tego wykresu sięgają wartości



Rys. 11. Wykres zmian wartości mocy strat ulotu w linii badanej w czasie 24-godzinnego cyklu pomiarowego przy dużych zmianach wilgotności względnej powietrza

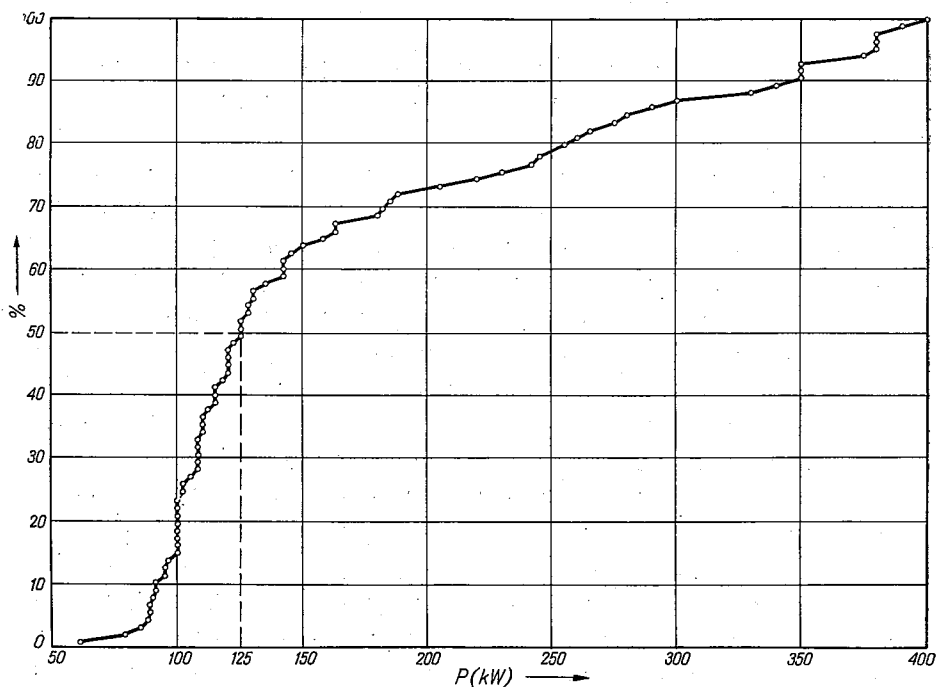
400 kW, i zostały podporządkowane warunkom „pogoda-wilgotno”. Wyznaczone w ten sposób wartości mocy naniesiono na jeden wykres przedstawiony na rys. 12. Jak widać, ułożyły się one w pewne pasma odpowiadające różnym warunkom atmosferycznym. Rozrzut punktów w poszczególnych pasmach jest spowodowany niejednakowym natężeniem zjawisk powodujących straty ulotu, a poza tym niezupełnie jednoczesnym występowaniem tych zjawisk wzdłuż całej linii (107 km).

Dla stanu określonego jako „pogoda”, charakteryzującego się brakiem „zjawisk” atmosferycznych, dla poszczególnych pomiarów warunki w całym rejonie linii były na ogół jednakowe. Dla tej więc grupy pomiarów uznano za właściwe określenie najbardziej prawdopodobnej wartości mocy strat ulotu jako reprezentatywnej dla warunków „pogoda”. W tym celu wyznaczono krzywą prawdopodobieństwa pokazaną na rys. 13, z której dla 50% otrzymano wartość mocy 125 kV. Wyznaczoną w ten sposób wartość przyjęto jako wskaźnik strat mocy w badanej linii przy pogodzie.



Rys. 12. Zestawienie zmierzonych wartości mocy strat ulotu dla linii badanej w różnych warunkach atmosferycznych w latach 1960, 1961

Dla innych warunków atmosferycznych wyznaczenie wskaźnika strat ulotu jest znacznie trudniejsze i mniej dokładne. Jednocześnie występowania danego zjawiska na całej długości 107 km linii w czasie wykonywania pomiarów była mało prawdopodobna. Ponadto wykonane pomiary nie objęły wszystkich możliwych zjawisk i na ogół prowadzone były przy umiarkowanej intensywności ich występowania. Np. nie rejestrowano strat ulotu przy deszczach silnych i ulewnych, a jedynie przy słabych i umiarkowanych. Z powyższych względów wydaje się słuszne przyjęcie, jako wskaźników, górnych wartości mocy strat ulotu z poszczególnych pasm z rys. 13, ponieważ wartości te odpowiadają raczej większemu prawdopodobieństwu jednoczesności występowania danego zjawiska atmosferycznego w całym rejonie linii. Tak więc dla śniegu przyjęto wartość 550 kW, dla mgły i mżawki 750 kW, a dla deszczu 1100 kW. Inną luką był również brak pomiarów przy sady. Mając jed-



Rys. 13. Wykres prawdopodobieństwa wystąpienia w badanej linii wartości mocy strat ulotu przy pogodzie

nak maksymalne wartości notowane przy lepiącym się śniegu z deszczem w temperaturze ok. 0°C , przyjęto że wartość strat przy sady będzie nie mniejsza. Opierając się na powyższych rozważaniach i kalkulacjach oszacowano dla badanej linii wartości mocy strat ulotu, które zostały zestawione w tablicy 8.

Tablica 8

Zestawienie strat określonych różnymi metodami

Warunki atmosferyczne	Wartość oszacowana na podstawie badań własnych kW	Wartość wyznaczona z eksperymentalnych krzywych radzieckich kW	Wartość najbardziej prawdopodobna z uzyskanych metodami analitycznymi kW
Pogoda	125	93	120
Śnieg	550	323	brak danych
Mgła	750	brak danych	brak danych
Deszcz	1100	1574 ×	1100
Sadź	3300	3198	brak danych

6. UOGÓLNIENIE WYNIKÓW BADAŃ

Uzyskane na podstawie własnych pomiarów wartości strat mocy w badanej linii zestawiono łącznie z wartościami obliczonymi w tabelicy 8.

Jak widać, rozbieżności między poszczególnymi wynikami nie są zbyt wielkie. Dla warunków ładnej pogody wartość z pomiarów własnych jest niemal zgodna z wartością uzyskaną jako najbardziej prawdopodobną z metod obliczeniowych. Wartość uzyskana z krzywych radzieckich jest nieco (o dwadzieścia kilka procent) niższa, nie jest jednak niższa od najmniejszych wartości strat przy pogodzie uzyskanych podczas pomiarów własnych. Jednak regularność przebiegu krzywej rozkładu prawdopodobieństwa wyników (rys. 13) i uwzględnienie w niej grupy wyników przy dość dużej wilgotności powietrza (badania w ZSRR przeprowadzone były w rejonach o bardziej suchym klimacie) pozwalają uznać wartość 125 kW za określoną ściśle i odpowiadającą warunkom pracy linii. Ustalone na podstawie pomiarów własnych straty mocy przy opadach śnieżnych są 1,7 razy większe od wartości wyznaczonych z krzywych radzieckich. Można jednak przypuszczać, że w radzieckich warunkach klimatycznych występowanie suchego śniegu jest częstsze niż w Polsce, gdzie przeważnie opady śnieżne występują przy wyższych temperaturach powietrza. Jak wiadomo z rozważań w rozdz. 3, straty przy mokrym śniegu mogą być znaczne większe niż przy suchym. Wydaje się więc, że przyjęcie za podstawę do określenia strat przy śniegu wartości 550 kW, aczkolwiek znacznie mniej ściśle od wartości przyjętej dla ładnej pogody, odpowiada jednak bardziej warunkom pracy linii badanej niż wartość uzyskana z krzywych radzieckich. Dla wartości określonej dla mgły brak jest danych porównawczych uzyskanych innymi drogami, należy jednak zauważyć, że zgodnie z przewidywaniami z rozdz. 3 wartość ta jest mniejsza niż dla deszczu, a większa niż dla ładnej pogody i śniegu.

Wartość strat mocy uzyskana przy deszczu jest zgodna z wartością uzyskaną na drodze analitycznej. Straty mocy określone natomiast z radzieckich krzywych eksperymentalnych są ok. 40% wyższe. Biorąc jednak pod uwagę omawianą w rozdz. 3 silną zależność wartości strat od intensywności deszczu, można wysunąć przypuszczenie, że przyczyną tej różnicy jest większa intensywność opadów (mimo mniejszego opadu rocznego) w rejonach badań prowadzonych w ZSRR. Wartość strat mocy dla warunków występowania sady oszacowana w rozdz. 5 odpowiada, jak widać z tabelicy 8, wartości uzyskanej na podstawie eksperymentalnych badań radzieckich. Przyjmując podane w tabelicy 3 roczne czasy trwania poszczególnych warunków atmosferycznych w rejonie badanej linii oraz przeanalizowane powyżej wartości strat mocy uzyskane z własnych pomiarów, obliczono następujące wartości:

Roczna strata energii na ulot $2,3 \cdot 10^6$ kWh

Srednia roczna strata mocy na ulot 263 kW

Sredni roczny wskaźnik strat mocy na 1 km linii 2,46 kW/km

W związku z tym, że jak wynika z tablicy 6 udział odcinków 1 i 4 linii (tzn. o przekroju przewodów 350 mm²) w bilansie strat mocy całej linii jest bardzo nieznaczny, można oszacować średni wskaźnik strat mocy dla odcinków o zmniejszonym przekroju przewodów (185 mm²) na ok. 3 kW/km. Dla porównania przytoczono niżej, podawane przez literaturę wartości strat mocy w liniach wysokich napięć. Opracowania radzieckie [26] podają straty na ulot w liniach w zależności od rejonu klimatycznego i natężenia pola na przewodzie. Np. dla zalecanego $K_r = 17$ kV/cm, średni roczny wskaźnik strat mocy na ulot dla szeregu linii w europejskiej części ZSRR waha się w granicach 1,0—1,7 kW/km. Dla $= 15,6$ kVcm (występującego np. w odcinku 4 linii badanej wskaźniki wynoszą 0,5—0,9 kW/km.

Długotrwałe badania francuskie [19] dla odcinków linii 220 kV o średnicach przewodów zbliżonych do występujących w linii badanej, przeprowadzone w ciągu 5000 godzin letnich pozwoliły na uzyskanie następujących wskaźników:

dla średnicy przewodów 24,9 mm — 1,0 kW/km,

dla średnicy przewodów 18,9 mm — 1,8 kW/km.

Niewątpliwie średnie wskaźniki roczne z uwzględnieniem wpływu występujących w zimie niekorzystnych warunków atmosferycznych byłyby wyższe.

Określony w publikacji [3] udział strat ulotu w całości strat mocy czynnej w szeregu linii najwyższych napięć wynosi średnio kilkanaście procent. Dla badanej linii przy założeniu mocy przesyłowej 30 MVA udział strat ulotu w całości strat mocy czynnej wynosi ok. 50%, zaś przy założeniu mocy przesyłowej 60 MVA — około 20%.

Jak widać więc, straty mocy na ulot w badanej linii przekraczają znacznie wartości spotykane przeciętnie w liniach najwyższych napięć. Biorąc pod uwagę, że stanowią one jedynie część strat czynnych w linii, kryteria ekonomiczne mogą decydować o celowości stosowania zmniejszonego przekroju przewodów w liniach 220 kV, o ile nie staną temu na przeszkodzie inne względy (np. zakłócenia radioelektryczne).

WNIOSKI

Podawane w literaturze metody obliczeń strat mocy na ulot prowadzą do bardzo rozbieżnych wyników. Dla warunków występujących w liniach o zmniejszonym przekroju przewodów, straty obliczone wg wzorów Pe-

tersona i Prinza są wielokrotnie mniejsze od wyznaczonych drogą eksperymentalną, obliczone zaś wg wzorów Mayra — kilkakrotnie większe. Natomiast wyniki uzyskane wg wzorów Holma, Stockmeiera, Zalesskiego oraz w przypadku ładnej pogody również wg wzoru Peeka wykazują różnice w stosunku do wyników eksperymentalnych jedynie w granicach kilkudziesięciu procent.

Jak wykazały badania, zastosowanie w linii 220 kV zmniejszonego przekroju 185 mm² prowadzi do zwiększenia strat mocy na ulot, jednak wartość ich nie przekracza mocy strat cieplnych w przewodach. A zatem wartość strat mocy na ulot może nie mieć decydującego znaczenia przy wyborze przekroju przewodów linii 220 kV w granicach 185 mm² do 350 mm². Wniosek ten jest szczególnie istotny przy przełączaniu istniejących linii na wyższe napięcia.

Autorzy wyrażają podziękowanie Państwowej Dyspozycji Mocy i Zarządowi Energetycznemu Okręgu Centralnego za udostępnienie linii do badań i pomoc w organizacji pomiaru, oraz Kolegom H. Czagacbanianowi, S. Kiersztynowi i J. Radziwiłłowi za aktywny udział w przeprowadzaniu pomiarów.

*Instytut Elektrotechniki
Zakład Wysokich Napięć*

WYKAZ LITERATURY

1. Popkow W. I.: Zagadnienia ulotu przy napięciu zmiennym. — Przegląd Elektrotechniczny, 1960, Nr 4, s. 129.
2. Peek F. W.: The Law of Corona and the Dielectric Strength of Air. — AIEE, 1911, tom 30, s. 1889.
3. Burgsdorf W. W. i inni: Études de l'effet de couronne sur lignes aériennes a très haute tension. — CIGRE, 1960, rap. 413.
4. Peterson W. S., Cozzens B., Carrol J.: Desert Measurements of Corona Loss on Conductors for Operation above 230 kV. — Trans. AIEE, 1950, cz. II, s. 872.
5. Gross I. W., Wagner C. F., Naef O., Tremaine R. L.: Corona Investigation on Extra-High Voltage Lines — 500 kV Test Project of the American Gas and Electric Company. — Trans. AIEE, 1951, cz. I, s. 75.
6. Bartenstein R., Lesch G.: Mesure des pertes par effet de couronne et des perturbations radiophoniques à la station de recherches de Mannheim — Rheinau avec étude spécial des conducteurs en faisceaux. — CIGRE 1956, rap. 402.
7. Zalesskij A. W.: Pieriedacza elektriczeskoj enierгии. 1949.
8. Gänger B.: Der elektrische Durchschlag von Gasen. Springer Verlag, 1953.
9. Kapcow N. A.: Elektriczeskije jawlenija w gazach i wakuumie. 1950.
10. Jakubowski J. L.: Technika wysokich napięć. 1949.
11. Peek F. W.: Dielectric Phenomena in High-Voltage. Engineering. New-York-London 1929.
12. Sirotnski L. I.: Technika wysokich napięć — tom I, PWT, Warszawa 1954.
13. Szpor St.: Wytrzymałość elektryczna i technika izolacyjna. PWT, Warszawa 1951.
14. Townsend J.: Electrons in Gases. 1947.
15. Worobiew A. A.: Technika wysokich napiężeń. 1945.

16. Beldi F.: Nouvelles recherches sur les pertes par effet de couronne d'une ligne de transmission. — CIGRE, 1948, rap. 408.
17. Läßle H.: Neue Untersuchungen über die Wechsellspannungskorona an Leitungsseilen. — ETZ, 1944, Nr 3/4, s. 25.
18. Sporn P., Monteith A. C.: Progress Report on tidd 500 kV Test Project of the American Gas and Electric Company — Corona Radioinfluence, and others Factors. — Trans. AIEE, 1950, cz. II, s. 891.
19. Ailleret P., Cahen F.: La station expérimental à 500 kV de Chevilly. Résultats d'une année d'essais: emplois de conducteurs en faisceaux effet couronne; rapprochements. — CIGRE, 1948, rap. 410.
20. Mori H., Yamada T., Hoki S.: Recherches relatives à l'effet de couronne, effectuées sur la ligne experimentale de transport d'energie de Tanaski au Japon. — CIGRE, 1954, rap. 402.
21. Nigol O., Cassan J. G.: Corona Loss Research at Ontario Hydro Cold-water Project. — Trans. AIEE, 1961, cz. III, s. 304.
22. Naef O., Tremaine R. L., Jones A. R.: Techniques of Corona Loss Measurement and Analysis — 500 kV Test Project of the American Gas and Electric Company. — Trans. AIEE, 1951, cz. I, s. 496.
23. Seylaz E., Berger K.: Versuchsanlage für die Messung der Korona-Verluste von Höchstspannungsleitern unter willkürlich erzeugbaren oder natürlichen klimatischen Verhältnissen. — SEV, 1952, Nr 14, s. 593.
24. Renaudin D.: Station expérimentale à 400 kV de Chevilly. Mesure des pertes et étude de l'effet couronne. — CIGRE, 1948, rap. 409.
25. Bogdanowa N. B.: Woprosy korony na liniach 400 kV.
1. Potiery na koronu na liniach 400 kV. — Izwiestia Akadiemii Nauk SSSR, otd. tiechn. nauk., Nr 2, s. 238.
26. Popkow W. I., Bogdanowa N. B.: O mietodikie ocenki godowych potier enierгии na koronu. — Elektricestwo, 1957, Nr 1, s. 9.
27. Burgsdorf W. W. i inni: Korona na wozdusznych liniach oczeń wysoko naprjażenija. — Elektrieskije Stancji, 1960, Nr 8, s. 65.
28. Ławruchin M. i inni: Utieczki po izolatoram wozdusznoj linii postojannowo toka pri rozlicznych meteorologiczeskich usłowijach. — Izwiestia N.I.I. Postojannowo Toka, sbornik 4, 1959.
29. Rudolph W.: Die Korona von Drehstrom — Höchstspannungsleitungen als Verlust-und Störquelle. — E.M., 1953, s. 131, 149, 178, 199.
30. Jemielianow N. P., Ciepljajew L. J.: Nieurawnowieszennyje mostowyje schiemy dlja izmierienija potier na koronu. — Elektricestwo, 1958, Nr 11, s. 11.
31. Foley A. H., Olsen F.: Project EHV — Preliminary Corona Investigations: the Effect of Harmonics on Corona Losses. — Trans. AIEE, 1960, cz. III, s. 310.

J. BADER, A. BALCERZAK, J. J. ZIELINSKI

CORONA LOSSES IN THE HIGH-TENSION LINE WITH CONDUCTORS OF SMALL DIAMETER

Summary

Investigations of corona losses and radio interference in the high-tension line of 220 kV were made out. In this paper, the analysis of corona losses based on the well known mathematical formulas, generalised measurements performed in other

countries, and the authors' own measurements were attempted. The performed analysis was based on the investigations of the 220 kV high-tension line which is 107 km long, runs across the flat country not higher than 200 m above the sea level. The line consisted of four different sections with the diameter of conductors 185 and 350 mm², and having the pylons of diverse construction as shown in Fig. 1. The detailed data of the line are given in Table 2. To characterize the climatic conditions of the region across which the line runs, an analysis was performed covering the period of five years (1955—1959). It was based on the material supplied by the following meteorological stations: Warszawa (located near the northern end of the line), Warka (the station located near the middle section of the line), and Radom (the southern end of the line). The results of the meteorological analysis are given in Table 3.

Before tackling the problem of corona losses in the Rożki-Mory line the authors performed an analysis of the individual computation methods, considering particularly such parameters as the dependence of corona losses upon the value of voltage, frequency, and the state of conductor surface and atmospheric conditions. In Table 6 there are given the computed results of corona losses in the Rożki-Mory line by means of Peek's method (8), Zalesski's method (9), Mayr's method (10), the simplified Holm's method (11), Peterson's method (12), Prinz's method (13) and Stockmeir's method (14). It should be noted that the Holm's method was applied in two variants; accepting as the basis the ionisation field strength (d in Table 6) and accepting as the basis for computations the corona field strength (h in Table 6). Fig. 2 shows the results obtained by means of the respective methods tabulated from the minimum to the maximum value. In Table 6, the corona field strength was not included. One curve illustrates the corona losses in good weather, the other during the rain. It appears from the figure that the results obtained by means of various methods differ from each other considerably. It can be noted that there exists much diversity in the individual methods between the loss ratio for rainy and good weather. The ratio is from 2.4 to 23.3. Since there were no other criteria it was agreed to accept as the most probable value the median of the results quoted in Fig. 2. The values of the losses amount to 120 kW for good weather and about 1100 kW for rain.

The authors carried out an extensive analysis of the methods of determination of corona losses based on the experimental curves given by German and Russian authors. The results for the Polish line obtained from the Russian curves were given in Table 7. The results given in Tables 6 and 7 show considerable divergence. Due to this, the necessity to carry out measurements in the discussed line arose. For the measurement a bridge circuit was used, the schematic diagram of which is shown in Fig. 6; and Fig. 7 shows a detailed diagram of the same. — Analyzing the measurement circuit the authors indicate that the readings of the wattmeter applied in the bridge could be proportional to corona losses. In practical conditions, however, the matter is somewhat more complex. Due to the difficulty of a frequent switching off of the line (lack of pressure in the switch tanks) the full bridge compensation was not obtained — and there occurred a certain non-compensation current. Furthermore, since a milliwattmeter was not available a standard wattmeter with a resistor in series removed from the circuit of a moving coil was used as a current coil and was connected to the zero branch of the bridge. In the setup arranged like this, in the moving coil of the wattmeter flew the current induced by the non-moving one. At the voltage lower than the critical corona voltage the measurement of the bridge current ratio was carried out by loading the line with specially designed resistors. As an example, Fig. 8 shows the dependence of the load current upon the wattmeter readings, for the definite supply voltage.