POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM V · ZESZYT 1

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1959

RADA REDAKCYJNA

PROF. JANUSZ GROSZKOWSKI, PROF. JANUSZ LECH JAKUBOWSKI,
PROF. BOLESŁAW KONORSKI, PROF. IGNACY MALECKI,
PROF. PAWEŁ NOWACKI, PROF. PAWEŁ SZULKIN, PROF. STANISŁAW SZPOR

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor Naczelny

PROF. WITOLD NOWICKI

Sekretarz

JULIUSZ MIERZEJEWSKI

ADRES REDAKCJI

Warszawa, Politechnika, Plac Jedności Robotniczej 1,
Katedra Teletransmisji Przewodowej, Gmach Mechaniki

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
Warszawa, Miodowa 10

Nakład 660 (530+130).	Oddano do składania 29.I.59.
Ark. wyd. 10,75, druk 10,25	Podpisano do druku 14.V.59.
Pap. druk. sat. kl. III, 80 g, 70×100	Druk ukończono w czerwcu 1959 r.
Zamówienie nr 169/59.	Cena zł. 25 W-7

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

621.3.083.72

STANISŁAW JUDYCKI

Analiza sygnałów impulsowych

Rękopis dostarczono 12.1.1958

Omówiono metody obliczania ilości sygnałów dla różnych kombinacji uszeregowania impulsów w sygnale w zależności od ilości impulsów w sygnale oraz ilości impulsów o różnych cechach, na podstawie rachunku permutacji, wariacji, kombinacji.

Na wstępie omówiono cechy i kryteria prądowe impulsu i sygnału, kojarzenie cech oraz zależności ilości impulsów od wskaźników cech.

W dalszej części podano klasyfikację i podział sygnałów, przeprowadzono analizę sygnałów jednoimpulsowych, wieloimpulsowych o stałej i zmiennej liczbie impulsów w sygnale oraz omówiono sygnały o specjalnych warunkach, jak np. o stałej liczbie jednakowych impulsów w sygnale, sygnały o różnych impulsach następujących po sobie i sygnały z cechą zerową.

Dla wszystkich omówionych przypadków zostały podane zależności pomiędzy występującymi wielkościami w postaci wykresów oraz wyników obliczeniowych oraz wzory na obliczanie ilości sygnałów impulsowych — zasadnicze klasyczne i zmodyfikowane.

1. WSTĘP

Technika sterowania zdalnego jest to dziedzina techniki zajmująca się metodami przekazywania na odległość czynności sterowania. W celu przekazania na odległość czynności sterowania musi być wysłane zlecenie z aparatury nadawczej do aparatury odbiorczej.

W technice sterowania zdalnego najczęściej jest stosowane sterowanie zdalne elektryczne przewodowe lub bezprzewodowe przy pomocy fal elektromagnetycznych. W układach elektrycznych techniki sterowania zdalnego wysyłamy zlecenie w postaci sygnałów impulsowych.

2. CECHY I KRYTERIA PRĄDOWE IMPULSÓW (SYGNAŁÓW)

2.1. Cechy impulsów

Każdy impuls charakteryzuje się intensywnością (amplitudą), czasem trwania oraz dodatkową cechą odrębną, jak np. biegunowością (impuls dodatni, impuls ujemny).

Sygnał złożony z impulsów będzie poza tym charakteryzował się co najmniej jedną dodatkową cechą, jak np. ilością impulsów w sygnale.

Cechy charakteryzujące impulsy i sygnały możemy podzielić na dwie grupy:

a) cechy niezależne (odrębne), jak np. cecha biegunowości,

b) cechy zależne, jak np. ilość impulsów, czas trwania impulsów.

Cechy niezależne będą to takie cechy, których parametry charakteryzujące impuls (sygnał) są odrębne dla wartości każdej cechy, jak np. dla cechy biegunowości impuls dodatni i odrębny impuls ujemny.

Cechy zależne będą to takie cechy, których parametry charakteryzujące impuls (sygnał) pokrywają się częściowo ze sobą dla poszczególnych wartości wskaźników cech.

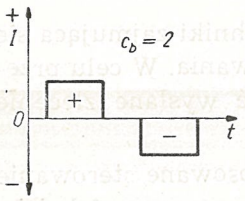
Cechy niezależne dzielimy na cztery podgrupy:

a1 — cecha biegunowości,
a2 — „ fazy,
a3 — „ częstotliwości,
a4 — „ układowa.

Cechy zależne dzielimy na cztery podgrupy:

b1 — cecha ilościowa,
b2 — „ czasowa,
b3 — „ amplitudy impulsu,
b4 — „ kształtu impulsu.

Dla oznaczenia ilości występujących cech wprowadzamy symbol c z indeksem literowym u dołu dla poszczególnych rodzajów cech.



Rys. 1. Wykres impulsów prądowych z cechą biegunowości

2.1.1. Cecha biegunowości

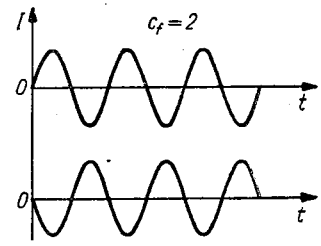
Cecha biegunowości może być uzyskana przy stosowaniu źródła prądu stałego. Dla cechy biegunowości wskaźnik ilości występujących cech przyjmuje wartość dwa ($c_b = 2$).

Cecha biegunowości impulsów jest bardzo często wykorzystywana w układach sterowania zdalnego dla potrzeb energetyki.

2.1.2. Cecha fazy

Cecha fazy jest uzyskiwana przez przesunięcie faz impulsów względem siebie. Najczęściej jest stosowane przesunięcie fazowe o kąt 180°, jak wskazano na rysunku 2 ($c_f = 2$). Przy przesunięciu fazowym o kąt 90°, otrzymujemy $c_f = 4$; przy przesunięciu o kąt 45° otrzymujemy $c_f = 8$.

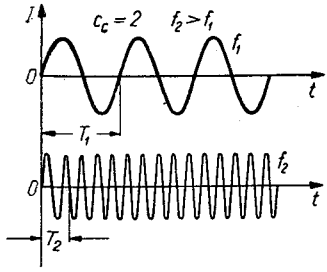
Ta cecha może być stosowana w układach przewodowych bądź bezprzewodowych.



Rys. 2. Wykres impulsów prądowych z cechą fazy

2.1.3. Cecha częstotliwości

Do przekazywania zleceń w postaci sygnałów mogą być wykorzystywane impulsy różnych częstotliwości. Cecha częstotliwości w zasadzie ma nieograniczone możliwości zastosowania. Przy doborze częstotliwości należy zwrócić uwagę na to, aby harmoniczne pewnych impulsów nie odpowiadały częstotliwościom podstawowym innych impulsów. Na rysunku 3 są podane impulsy o dwóch różnych częstotliwościach ($c_c = 2$). Przy założeniu zgodnie z podanym przykładem, że f_2 jest większe od f_1, musi być spełniony dodatkowy warunek, a mianowicie: $f_2 \neq 2f_1$, $f_2 \neq 3f_1$, $f_2 \neq 4f_1$.



Rys. 3. Wykres impulsów prądowych z cechą częstotliwości

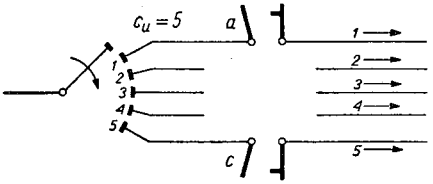
Przy zastosowaniu aparatury nadawczej i odbiorczej z elementami elektronowymi zakres częstotliwości może być zmieniany w dużych granicach. Częstotliwości powinny być dobrane do charakterystyki pracy lampy elektronowej bądź też tyratronowej. Przy zastosowaniu lampy tyratronowej o czasie zapłonu $t_z = 10^{-5} \div 10^{-6}$ sec i czasie wygaszania $t_w = 5 \cdot 10^{-4} \div 2 \cdot 10^{-5}$ sec cecha częstotliwości musi być tak dobrana, aby maksymalna wartość częstotliwości prądu zmiennego była taka, przy której jeszcze może pracować lampa tyratronowa.

2.1.4. Cecha układowa

Przez stworzenie układu dającego pod względem schematowym takie rozwiązanie, że włączony impuls sygnału może przebiegać tylko jedną drogą (jednym kanałem), tworzymy cechę nie charakteryzującą własności fizycznych impulsu, lecz jedynie zależną od rozwiązania schematowego i nazywamy ją cechą układową. Ponieważ różnice pomiędzy poszczegól-

nymi cechami są oparte na rozwiązaniach schematowych, zaliczamy je do grupy cech niezależnych.

Przykład układu z zastosowaniem cechy układowej przedstawia rys. 4. Pierwszym kanałem będzie przebiegać impuls przy ustawieniu rozdziela-

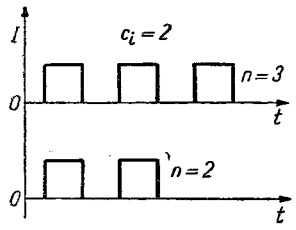


Rys. 4. Wykres impulsów prądowych z cechą układową

cza na pozycji pierwszej i zamknięciu przycisku a; piątym kanałem będzie przebiegać impuls przy ustawieniu rozdzielacza na pozycji piątej i zamknięciu przycisku c. Cecha $c_u = 5$.

2.1.5. Cecha ilościowa

Do przekazywania zleceń w postaci sygnałów złożonych mogą być stosowane impulsy o takiej samej charakterystyce. Sygnały będą różnić się liczbą impulsów. Zastosowanie tej cechy jest uniwersalne dla różnych rodzajów kanałów. Zaletą tej cechy jest prostota układu. Wadą jest możliwość zajścia przekłamań, gdyż cecha ta należy do grupy cech zależnych, a mianowicie sygnał o trzech impulsach w przypadku zniekształcenia jednego impulsu będzie odebrany jako sygnał o dwóch impulsach. Przy zastosowaniu tej cechy muszą być zastosowane dodatkowe kryteria zapobiegające odebraniu mylnego sygnału. Kryteria te będą omówione w dalszej części pracy.



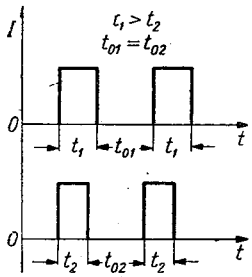
Rys. 5. Wykres impulsów prądowych z cechą ilościową

Na rysunku 5 jest podany przykład dwóch sygnałów o ilości impulsów $n = 2$ i $n = 3$. Cecha $c_i = 2$.

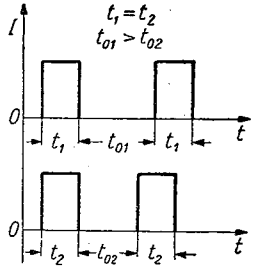
2.1.6. Cecha czasowa

Do przekazywania zleceń w postaci sygnałów złożonych mogą być stosowane impulsy o różnych czasach trwania, bądź też impulsy o jednakowym czasie trwania, lecz różnych odstępach między impulsami, lub też impulsy o różnych czasach trwania i różnych odstępach między impulsami.

Teoretycznie czasy trwania impulsów mogą zmieniać się w dużych granicach, czyli zastosowanie cechy czasowej daje dużą różnorodność sygnałów. Ponieważ jednak zarówno długie czasy trwania impulsów, jak i przerw zwiększają ogólny czas przekazywania sygnału, a tym samym są nieekonomiczne i zmniejszają ogólną sprawność pracy, więc w praktyce ograniczamy się do dwóch rodzajów impulsów (impuls długi, impuls krótki), względnie do trzech rodzajów impulsów (impuls długi, średni i krótki). Czas trwania długiego impulsu uzależniamy od rodzaju sygnału złożonego, warunków pracy, aparatury nadawczej i odbiorczej oraz od systemu sterowania.



Rys. 6. Wykres impulsów prądowych z cechą czasową



Rys. 7. Wykres impulsów prądowych z cechą czasową

Przy zastosowaniu w aparaturze nadawczej i odbiorczej elementów przekaźnikowych czas trwania najdłuższego i najkrótszego impulsu musi być dobrany do charakterystyki pracy elementu.

Przy sygnałach złożonych można tworzyć na przemian kombinacje impulsów długich, średnich i krótkich.

Zaletą cechy czasowej jest duża uniwersalność w zastosowaniu. Wadą cechy czasowej jest wpływ stanu obwodów liniowych i pracy elementów przekaźnikowych na parametr czasu.

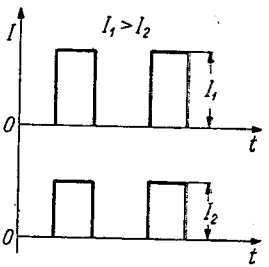
Na rysunku 6 podany jest przykład zastosowania cechy czasowej dwóch rodzajów impulsów o różnym czasie trwania, a równych odstępach pomiędzy impulsami ($c_t = 2$). Na rysunku 7 podany jest przykład zastosowania cechy czasowej dwóch rodzajów impulsów o równym czasie trwania, lecz różnych odstępach pomiędzy impulsami ($c_t = 2$).

2.1.7. Cecha amplitudy impulsu

W układach techniki sterowania zdalnego jako kryterium impulsu jest stosowana również cecha amplitudy impulsu. Cecha amplitudy może być stosowana zarówno w układach nadawczo-odbiorczych z przekaźnikami

elektromagnetycznymi lub innymi o dużej bezwładności, jak również w układach z aparaturą elektronową. Dobór wartości maksymalnych i minimalnych amplitud uzależniony będzie od charakterystyk pracy elementów zastosowanych w aparaturze.

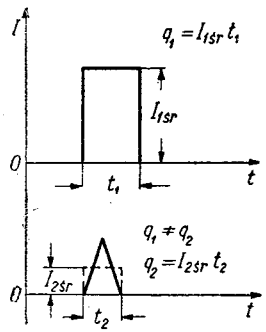
W przykładzie podanym na rysunku 8 została przyjęta cecha amplitudy ($c_a = 2$) przy zastosowaniu impulsów o dwóch różnych co do wartości amplitudach.



Rys. 8. Wykres impulsów prądowych z cechą amplitudy

2.1.8. *Cecha kształtu impulsu*

Cecha kształtu impulsu jest odmianą cechy amplitudy. Jako kryterium oceny kształtu impulsu może być przyjęte pole impulsu będące iloczynem parametrów czasu t i średniej wartości amplitudy $I_{śr}$. Iloczyn powyższy przedstawia ładunek elektryczny. Cechę powyższą można określić jako cechę pola impulsu.



Rys. 9. Wykres impulsów prądowych z cechą kształtu impulsu

Cecha ta jest stosowana w układach telemetrycznych, natomiast w układach sterowania zdalnego, ze względu na swój specyficzny charakter, raczej nie jest stosowana.

Na rysunku 9 jest podany przykład dwóch impulsów o różnych cechach kształtu, a mianowicie impuls I_1 — prostokątny i impuls I_2 — ostry, przy czym iloczyny $I_{1śr} \neq I_{2śr}$. Dla tego przykładu wskaźnik ilości cech $c_k = 2$.

2.2. Kryteria impulsu, jednostka

Nie wszystkie omówione w poprzednim rozdziale cechy mogą być zastosowane w odniesieniu do impulsu.

Impuls może mieć następujące cechy:

a) cechę biegunowości — c_b,
b) „ częstotliwości — c_c,
c) „ czasową — c_t,
d) „ amplitudy — c_a,
e) „ kształtu — c_k.

Każdy impuls charakteryzuje się dwoma cechami podstawowymi: cechą czasową — c_t i cechą amplitudy — c_a. Cechy te dają dwa podstawowe parametry charakteryzujące impuls: czas trwania — T i amplitudę — A.

Poza cechami podstawowymi każdy impuls charakteryzuje się jedną z cech pomocniczych. Cechy pomocnicze są następujące: cecha biegunowości — c_b i cecha częstotliwości c_c.

Cecha kształtu jest cechą złożoną i może być zastąpiona cechą czasową i umowną cechą amplitudy, jeśli przyjąć, że pole impulsu jest równe iloczynowi czasu przez średnią wartość amplitudy.

$$p = t_p A_{śr}, \tag{1}$$

gdzie:

p — pole,
t_p — czas trwania impulsu,
$A_{śr}$ — średnia wartość amplitudy.

Na podstawie powyższego cechy charakteryzujące impuls możemy podzielić na trzy grupy:

grupa 1 — cechy podstawowe	cecha czasowa — c_t,
	„ amplitudy — c_a,
grupa 2 — cechy pomocnicze	cecha biegunowości — c_b,
	„ częstotliwości — c_c,
grupa 3 — cecha złożona	cecha kształtu — c_k.

Na rysunku 10 przedstawiono dwa impulsy o parametrach podstawowych, czasie trwania i amplitudzie, t_1, I_1 i t_2, I_2, scharakteryzowane dodatkową cechą pomocniczą, a mianowicie cechą biegunowości $c_b = 2$; pierwszy — impuls dodatni, drugi — impuls ujemny.

Na rysunku 11 przedstawiono impuls o parametrach podstawowych t_3 i I_{3m}, charakteryzujący się dodatkową cechą częstotliwości.

Przyjmując, że każdy impuls elektryczny jest scharakteryzowany zasadniczo przez dwie cechy podstawowe, tj. czas trwania i amplitudę (intensywność), możemy tę zależność przedstawić przy pomocy wzoru

$$q_i = t_i A, \tag{2}$$

gdzie:

t_i — czas trwania impulsu,
A — amplituda (intensywność) impulsu,
q_i — impuls wyrażony w postaci ładunku.

Jeśli impuls jest prądu zmiennego, to parametry określające impuls a wynikające z cech podstawowych impulsu możemy przedstawić przy pomocy wzorów:

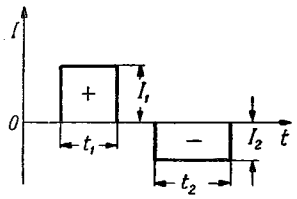
$$t_i = nT = n\,1/f, \tag{3}$$

$$A = I_{śr} = \Pi/2\, I_m = 1{,}57\, I_m, \tag{4}$$

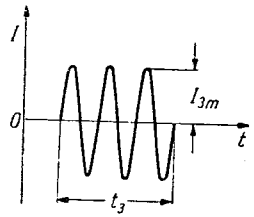
gdzie:

f — częstotliwość prądu zmiennego,
T — okres,
n — ilość okresów przypadających w czasie trwania impulsu.

Jednostkę impulsu określimy dla warunku: $t_i = 1$ i $A = 1$, wtenczas $q_i = 1$. Jednostką impulsu będzie impuls o amplitudzie jednostkowej i jednostkowym czasie trwania; może być nią amperosekunda lub jej wielokrotność malejąca lub rosnąca.



Rys. 10. Wykres impulsów prądowych o parametrach podstawowych z dodatkową cechą biegunowości



Rys. 11. Wykres impulsów prądowych o parametrach podstawowych z dodatkową cechą częstotliwości

2.3. Kryteria sygnału

Zlecenie przekazywane w postaci sygnału z aparatury badawczej do aparatury odbiorczej może się składać z jednego impulsu, względnie z grupy impulsów. W zależności od powyższego dzielimy przesyłane sygnały na sygnały jednoimpulsowe i sygnały wieloimpulsowe.

W stosunku do sygnału jednoimpulsowego obowiązują te same kryteria co dla impulsu. Cechy charakteryzujące impuls będą charakteryzować równie sygnał wieloimpulsowy. Sygnał wieloimpulsowy będzie poza tym charakteryzować się podstawową cechą ilościową c_i i pomocniczą cechą fazy c_f. Parametrami podstawowymi sygnału wieloimpulsowego będą podstawowe parametry impulsu, tj. parametr czasu i parametr amplitudy, oraz ilość impulsów. Pozostałe cechy pomocnicze impulsu (biegunowość i częstotliwość) oraz cecha fazy nie będą podstawowymi parametrami, lecz jedynie będą charakteryzować sygnały i będą kryteriami wyróżniającymi poszczególne sygnały, zarówno jednoimpulsowe, jak i złożone wieloimpulsowe.

2.4. Kojarzenie cech

W układach techniki sterowania zdalnego, gdy zachodzi konieczność stosowania zleceń w postaci sygnałów złożonych, stosuje się kojarzenie kilku cech, czyli tworzenie kombinacji cech. Daje to większą gwarancję

zapobieżenia nadaniu fałszywego sygnału oraz daje możność stworzenia większej liczby sygnałów złożonych.

Łączenie cech może być różnorakie. Można jedną cechę modulować cechą drugą, na tle cech tworzących parametry podstawowe impulsu wprowadzać cechę pomocniczą, np. na tle cechy czasowej wprowadzić cechę biegunowości, fazy lub częstotliwości (impuls długi dodatni, impuls długi ujemny, impuls krótki dodatni, impuls krótki ujemny).

Przy jednoczesnym przekazywaniu sygnałów złożonych w dwu kierunkach, mianowicie w kierunku sygnałów roboczych oraz w kierunku kontrolnych sygnałów zwrotnych, można stworzyć układy dupleksowe dwukierunkowe, przy czym dla obu kierunków można przyjąć kryteria o odmiennych cechach (np. dla jednego kierunku cechę biegunowości, dla drugiego kierunku cechę czasową).

Przy doborze kombinacji cech należy unikać takiego doboru, który przy występujących zniekształceniach lub awariach mógłby spowodować przekazanie mylnego sygnału. Przy cechach zależnych, jak czasowej lub ilościowej, impulsy krótkie będą jakby składowymi impulsów długich, również seria kilku impulsów będzie jakby składową większej serii impulsów. Wynikałoby stąd, że cechy zależne dają większe prawdopodobieństwo przekazania fałszywego zlecenia, czyli wydawałoby się że nie należy ich stosować. W praktyce cechy zależne czasowe i liczbowe stosuje się bardzo często, gdyż cechy te dają możność stworzenia większej ilości kombinacji, poza tym układy są prostsze i ekonomiczniejsze. W celu zabezpieczenia się od możliwości przekazania fałszywego sygnału należy stosować układy zabezpieczające w postaci specjalnych korektorów.

2.5. Zależności ilości impulsów od wskaźników cech

Ilość impulsów będących do dyspozycji, z których tworzymy sygnały przekazywane z aparatury nadawczej do aparatury odbiorczej, będzie zależna od ilości i liczbowej wartości wskaźników cech. W zależności od wskaźników cech otrzymujemy różne ilości impulsów.

a) Przy zastosowaniu jako kryterium jednej cechy ilość możliwych do uzyskania impulsów będzie się równać wskaźnikowi cechy.

$$n = c, \tag{5}$$

gdzie:

n — ilość impulsów o różnych cechach,

c — wskaźnik cechy.

Przy zastosowaniu cechy biegunowości wskaźnik $c_b = 2$, a zatem $n = c_b = 2$; otrzymujemy dwa impulsy: dodatni i ujemny.

b) Przy zastosowaniu jako kryterium kilku cech, które ze sobą nie są skojarzone, ilość możliwych do uzyskania impulsów będzie się równać sumie wskaźników poszczególnych cech.

$$n = c_1 + c_2 + \ldots + c_w = \sum_{p=1}^{p=w} c_p, \tag{6}$$

gdzie:

n — ilość impulsów o różnych cechach,

$c_1 \ldots c_w$ — wskaźniki cech.

Pomiędzy wartościami n i c_p będzie zależność liniowa, tj. ze wzrostem wskaźników i liczby cech będzie wzrastać liniowo ilość impulsów możliwych do uzyskania.

Przy zastosowaniu cechy biegunowości $c_b = 2$ i cechy częstotliwości $c_c = 3$ otrzymujemy $n = c_b + c_c = 2 + 3 = 5$.

c) Przy zastosowaniu jako kryterium dwu lub kilku cech skojarzonych ze sobą ilość możliwych do uzyskania impulsów będzie się równać iloczynowi wskaźników cech;

$$n = c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_w = \prod_{p=1}^{p=w} c_p, \tag{7}$$

gdzie:

n — ilość impulsów o różnych cechach,

$c_1 \ldots c_w$ — wskaźniki cech.

A więc przy zastosowaniu cechy biegunowości $c_b = 2$ (plus, minus) i cechy czasowej $c_t = 3$ (d — długi, s — średni, k — krótki) otrzymujemy ilość impulsów o różnych cechach

$$n = c_b \cdot c_t = 2 \cdot 3 = 6.$$

Będą to impulsy o następujących kryteriach prądowych:

$$-d, +d, -s, +s, -k, +k.$$

Przy zastosowaniu cechy biegunowości $c_b = 2$ (plus, minus), cechy czasowej $c_t = 3$(d — długi, s — średni, k — krótki) i cechy amplitudy $c_a = 3$ (w — trapezowy, p — prostokątny, m — ostrokątny) otrzymujemy ilość impulsów o różnych cechach

$$n = c_b \cdot c_t \cdot c_a = 18.$$

Będą to impulsy o następujących kryteriach prądowych:

$$\begin{array}{cccccc} -dw & -dp & -dm & +dw & +dp & +dm \\ -sw & -sp & -sm & +sw & +sp & +sm \\ -kw & -kp & -km & +kw & +kp & +km. \end{array}$$

3. KLASYFIKACJA I PODZIAŁ SYGNAŁÓW

3.1. Sygnały jednoimpulsowe

Do sygnałów jednoimpulsowych odnosić się będą te same kryteria co do impulsów, a więc metoda obliczania ilości możliwych sygnałów w zależności od zastosowanych cech będzie ta sama co dla impulsów. Jak wynika z rozważań rozdziału poprzedniego, ilość możliwych do uzyskania impulsów k będzie uzależniona od ilości i liczbowej wartości zastosowanych cech niezależnych lub skojarzonych ze sobą.

Jeżeli oznaczymy przez:

n — ilość impulsów o różnych cechach,

k — ilość impulsów w sygnale,

s — ilość możliwych do uzyskania sygnałów,

to dla sygnałów jednoimpulsowych $k = 1$ i

$$s = n. \tag{8}$$

3.2. Sygnały wieloimpulsowe

Dla sygnałów wieloimpulsowych przy zastosowaniu dwu lub kilku cech skojarzonych ze sobą obliczamy ilość możliwych do uzyskania sygnałów na podstawie wzorów kombinatoryki. W zależności od warunków kojarzenia poszczególnych cech charakteryzujących sygnał, praw zachowania poszczególnych impulsów w sygnale, inne będą kryteria oraz wzory, na podstawie których obliczamy ilość możliwych do uzyskania sygnałów.

Jeżeli oznaczymy przez

n — ilość impulsów o różnych cechach,

k — ilość impulsów w sygnale,

s — ilość możliwych do uzyskania sygnałów,

to przy doborze sygnałów mogą być przyjęte różne warunki dla wartości k — ilości impulsów w sygnale w zależności od wartości n — ilości impulsów o różnych cechach, kolejności poszczególnych impulsów w sygnale oraz powtarzania się tych samych impulsów w sygnale.

Ilość impulsów w sygnale k może być wielkością stałą lub może zmieniać się dla poszczególnych sygnałów zależnie lub niezależnie od wartości n — ilości impulsów o różnych cechach. Ilość sygnałów s będzie funkcją wartości n lub k lub też obu tych wartości. Możemy napisać, że:

$$s = f(n), \quad s = f(k), \quad s = f(n, k).$$

W zależności od wyżej omówionych warunków możemy przeprowadzić następujący podział sygnałów.

1) W zależności od ilości k impulsów w sygnale sygnały dzielimy na:

a) sygnały o stałej liczbie impulsów k;

b) sygnały o zmiennej liczbie impulsów k.

2) W zależności od stosunku ilości impulsów w sygnale k do ilości impulsów o różnych cechach n sygnały dzielimy na:

a) sygnały o stałej liczbie impulsów k, równej wartości n,

$$k = n;$$

b) sygnały o liczbie impulsów k, mniejszej od wartości n,

$$k < n;$$

c) sygnały o liczbie impulsów k, większej od wartości n,

$$k > n.$$

Dla ostatniego przypadku impulsy w sygnale muszą się powtarzać.

3) W zależności od kolejności impulsów w sygnale sygnały dzielimy na:

a) sygnały z uwzględnieniem porządku, tj. kolejności poszczególnych impulsów w sygnale; przy tym warunku w poszczególnych sygnałach mogą występować wszystkie te same impulsy, lecz w różnej kolejności;

b) sygnały bez uwzględnienia porządku, tj. kolejności poszczególnych impulsów w sygnale; przy tym warunku poszczególne sygnały różnią się co najmniej jednym impulsem.

Przy ilości impulsów w sygnale $k = \text{const}$ i $k = n$, tj. ilości impulsów o różnych cechach, nie będziemy mieli sygnałów różniących się od siebie co najmniej jednym impulsem, te same bowiem impulsy występują we wszystkich sygnałach, lecz w różnej kolejności. Odpowiada to wypadkowi z punktu 2a.

Przy ilości impulsów w sygnale $k = \text{const}$ i $k > n$ nie będziemy mieli również sygnałów różniących się od siebie co najmniej jednym impulsem, poza tym dla tego warunku w poszczególnych sygnałach muszą się powtarzać te same impulsy (co najmniej jeden impuls). Będą to sygnały z powtórzeniem impulsów, które będą omówione dalej.

Przy ilości impulsów w sygnale $k = \text{const}$ i $k < n$ będziemy mieli sygnały różniące się jednym impulsem, dwoma impulsami, trzema impulsami itd., przy czym ilość różnych impulsów w sygnale będzie zależna od stosunku ilości impulsów w sygnale k do ilości impulsów n o różnych cechach;

przy $k = n - 1$ będą występować sygnały różniące się jednym impulsem,

przy $k = n - 2$ będą występować sygnały różniące się dwoma impulsami,

przy $k = n - k$, czyli $k = \frac{n}{2}$, będą występować sygnały różniące się wszystkimi k impulsami,

Przy $k < \frac{n}{2}$ ilość sygnałów różniących się wszystkimi impulsami znacznie wzrośnie i to tym bardziej, im k będzie mniejsze od $\frac{n}{2}$.

4) W zależności od rodzaju zastosowanych impulsów w sygnale sygnały dzielimy na:

a) sygnały z impulsami nie powtarzającymi się w tym samym sygnale, tak zwane sygnały z impulsami bez powtórzeń,

b) sygnały z impulsami powtarzającymi się w tym samym sygnale, tak zwane sygnały z powtórzeniem impulsów.

Dla sygnałów z impulsami bez powtórzeń tych samych impulsów w sygnale musi być spełniony warunek

$$k \leqslant n.$$

Dla sygnałów z powtórzeniem tych samych impulsów w sygnale musi być spełniony warunek

$$k \geqq n,$$

gdzie:

n — ilość impulsów o różnych cechach,

k — ilość impulsów w sygnale.

3.3. Obliczanie ilości sygnałów wieloimpulsowych na podstawie kombinatoryki

Obliczania ilości sygnałów wieloimpulsowych dokonujemy przy pomocy klasycznych względnie zmodyfikowanych wzorów kombinatoryki, opartych na rachunku permutacji, wariacji, kombinacji.

3.3.1. Permutacje

Jeżeli mamy zbiór n elementów (impulsów), to wszystkie elementy (impulsy) możemy ustawić w dowolnej kolejności względem siebie. Liczbę sposobów ustawienia tych elementów nazywamy liczbą permutacji i oznaczamy literą Q_n.

Jeżeli zbiór będzie zawierać jeden element ($n = 1$), to liczba permutacji $Q_n = 1$, gdyż jeden element można uszeregować tylko w jeden sposób. Dwa elementy w zbiorze ($n = 2$) mogą być uszeregowane w dwojaki sposób: pierwszy element uszeregowany na pierwszym miejscu a_1 a_2, pierwszy element uszeregowany na drugim miejscu a_2 a_1, czyli liczba permutacji $Q_n = 2$. Przy wprowadzeniu trzech elementów otrzymujemy trzykrotnie więcej sposobów uszeregowania, gdyż trzeci element może być uszeregowany na początku, w środku, względnie na końcu zbioru dwóch elementów, czyli dla $n = 3$ otrzymujemy

$$Q_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3! = 6.$$

Przy $n = 3$ (a_1, a_2, a_3) możemy wprowadzić następujące uszeregowanie

$$\begin{array}{ll} a_1 a_2 a_3 & a_2 a_1 a_3 \\ a_1 a_3 a_2 & a_3 a_1 a_2 \\ a_2 a_3 a_1 & a_3 a_2 a_1 \end{array}$$

Rozumując w powyższy sposób dla zbioru z n elementów otrzymujemy liczbę permutacji

$$Q_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{t=1}^{t=n} t = n! \tag{9}$$

Jeżeli zbiór składający się z n elementów podzielimy na g grup o liczbie elementów w poszczególnych grupach

$$k_1, k_2, k_3 \ldots k_g,$$

to

$$k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_g = n. \tag{10}$$

Z powyższych n elementów zbioru możemy utworzyć $n!$ permutacji. Spośród utworzonych permutacji będą takie, które będą różnić się tylko rozmieszczeniem elementów należących do tej samej grupy — takie permutacje nazywamy równoważnymi, pozostałe zaś nierównoważnymi. I tak dla zbioru $n = 5$ przy podziale na dwie grupy, $g = 2$ o liczbie elementów w grupie pierwszej $k_1 = 3$ (a_1, a_2, a_3) i o liczbie elementów w grupie drugiej $k_2 = 2$ (b_1, b_2), permutacje

$$a_1 b_1 a_2 b_2 a_3,$$
$$a_2 b_2 a_3 b_1 a_1$$

będą równoważne, natomiast permutacje

$$a_1 b_1 a_2 b_2 a_3,$$
$$b_1 a_2 a_3 a_1 b_2$$

będą nierównoważne.

Liczba nierównoważnych między sobą permutacji zbioru n elementów będzie równa

$$P = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_g!} \tag{11}$$

Liczba równoważnych permutacji zbioru n elementów będzie równa

$$R = Q_n - P = n! \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_g!} = n! \left(1 - \frac{1}{k_1! k_2! \ldots k_g!}\right) =$$

$$= n! \frac{k_1! k_2! \ldots k_g! - 1}{k_1! k_2! \ldots k_g!}. \tag{12}$$

3.3.2. Wariacje

3.3.2.1. Wariacje bez powtórzeń. Jeżeli ze zbioru n elementów chcemy uszeregować k elementów w dowolnej kolejności względem siebie przy $k < n$ i jeśli przy tym każde uszeregowanie nie zawiera jednakowych elementów i różni się od innych co najmniej bądź kolejnością elementów, bądź też co najmniej jednym elementem, to liczbę sposobów uszeregowania nazywamy liczbą wariacji bez powtórzeń z n elementów po k i oznaczamy symbolem V_n^k.

Jeżeli ze zbioru n elementów będziemy brali po jednym elemencie ($k = 1$), to otrzymamy uszeregowanie jednoelementowe i liczba tych uszeregowań będzie równa wartości n, czyli liczba wariacji

$$V_n^{(1)} = n.$$

Jeżeli ze zbioru n elementów będziemy brali do uszeregowania po dwa elementy ($k = 2$), to otrzymamy $(n - 1)$ razy więcej wariacji niż przy uszeregowaniu jednoelementowym, gdyż do każdej wariacji jednoelementowej będziemy dostawiali kolejno $(n - 1)$ pozostałych elementów, czyli liczba wariacji będzie równa

$$V_n^{(2)} = n(n-1).$$

Rozumując analogicznie otrzymamy dla wariacji z n elementów po k liczbę wariacji

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k-1).$$

Jeżeli powyższe wyrażenie pomnożymy i podzielimy przez $(n - k)!$, to otrzymamy wzór w postaci

$$V_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k-1)(n-k)(n-k-1)\,2\cdot 1}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{13}$$

3.3.2.2. Wariacje z powtórzeniami. Jeżeli ze zbioru n elementów chcemy uszeregować k elementów w dowolnej kolejności względem siebie przy $k \lesseqgtr n$ i jeśli przy tym każde uszeregowanie będzie zawierało dowolne elementy różne lub jednakowe i różniło się od innych co najmniej bądź kolejnością elementów, bądź też co najmniej jednym elementem, to liczbę sposobów uszeregowania nazwiemy liczbą wariacji z powtórzeniem z n elementów po k i oznaczymy symbolem

$$W_n^k.$$

Jeżeli ze zbioru n elementów będziemy brali po jednym elemencie ($k = 1$), to otrzymamy uszeregowanie jednoelementowe i liczba tych uszeregowań będzie równa n, czyli liczba wariacji

$$W_n^{(1)} = n.$$

Jeżeli ze zbioru n elementów będziemy brali do uszeregowania dwa elementy ($k = 2$), to otrzymamy n razy więcej wariacji niż przy uszeregowaniu jednoelementowym, gdyż do każdej wariacji jednoelementowej będziemy dostawiali kolejno n elementów, czyli liczba wariacji będzie

$$W_n^{(2)} = n \cdot n = n^2.$$

Rozumując analogicznie otrzymamy dla wariacji z n elementów po k liczbę wariacji

$$W_n^k = n^k. \tag{14}$$

3.3.3. *Kombinacje*

3.3.3.1. Kombinacje bez powtórzeń. Każdy podzbiór złożony z k różnych elementów zbioru złożonego z n różnych elementów nazywamy k-elementową kombinacją bez powtórzeń z n elementów po k i oznaczamy symbolem

$$C_n^k.$$

Kombinacje bez powtórzeń różnią się od wariacji bez powtórzeń tym, że nie uwzględniamy porządku elementów, tj. porządek elementów jest dowolny, czyli wszystkie sposoby dowolnego uszeregowania tych samych elementów dadzą tę samą kombinację. A zatem poszczególne kombinacje muszą różnić się od siebie co najmniej jednym elementem.

Z każdej kombinacji bez powtórzeń można stworzyć wariację bez powtórzeń porządkując jej elementy. Przyjmując, że k-elementów można uporządkować, jak wynika z permutacji, k sposobami, dochodzimy do wniosku, że liczba kombinacji bez powtórzeń razy k równa się liczbie wariacji bez powtórzeń, czyli

$$C_n^k \cdot k! = V_n^{k'} = \frac{n!}{(n-k)!},$$

stąd

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \tag{15}$$

3.3.3.2. Kombinacje z powtórzeniami. Każdy podzbiór złożony z k różnych lub tych samych elementów zbioru złożonego z n różnych elementów nazywamy k-elementową kombinacją z powtórzeniem z n elementów po k i oznaczamy symbolem

$$K_n^k.$$

Poszczególne kombinacje z powtórzeniami muszą różnić się od siebie co najmniej jednym elementem.

Nie z każdej kombinacji z powtórzeniem można stworzyć wariację z powtórzeniem przez uporządkowanie jej elementów, gdyż te same elementy mogą być tylko raz uporządkowane. Liczbę kombinacji określamy ze wzoru

$$K_n^k \cdot k! = W_n^{k'} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!},$$

stąd

$$K_n^k = \frac{W_n^{k'}}{k!} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}. \tag{16}$$

4. SYGNAŁY WIELOIMPULSOWE O STAŁEJ LICZBIE IMPULSÓW

Do grupy sygnałów wieloimpulsowych o stałej liczbie impulsów zaliczamy wszystkie sygnały wieloimpulsowe, w których jest zachowany warunek, że liczba impulsów w poszczególnych sygnałach jest wielkością stałą (k = const). Jak wynika z rozważań podanych w poprzednim rozdziale, wartość k może być równa, większa lub mniejsza od wartości n, oznaczającej ilość impulsów o różnych cechach, z których tworzymy sygnały wieloimpulsowe. Ilość sygnałów s możemy obliczyć na podstawie wzorów kombinatoryki dla warunków omówionych i scharakteryzowanych w poprzednim rozdziale.

4.1. Sygnał wieloimpulsowy (permutacyjny) bez powtórzeń impulsów

Jeżeli mamy n impulsów o różnych cechach i chcemy uzyskać sygnały wieloimpulsowe o ilości impulsów w sygnale k, równej wartości n — ilości impulsów o różnych cechach, to tworzymy poszczególne sygnały przez ustawienie poszczególnych impulsów w sygnale w dowolnej kolejności, lecz różnej dla każdego sygnału. Liczba sposobów ustawienia, określona na podstawie rachunku permutacji, da nam ilość możliwych do uzyskania sygnałów. W poszczególnych sygnałach będą występować te same impulsy, lecz z zachowaniem różnej kolejności co najmniej jednego impulsu. W sygnale te same impulsy nie będą się powtarzać. Ilość różnych impulsów będzie $n \geqslant 2$. Jest to sygnał wieloimpulsowy permutacyjny bez powtórzeń impulsów w sygnale. Symbolicznie możemy oznaczyć go jako Sg. w. p. b. Ilość sygnałów będzie określona wzorem

$$s = Q_n = n! = \prod_{t=1}^{t=n} t = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \tag{17}$$

gdzie:

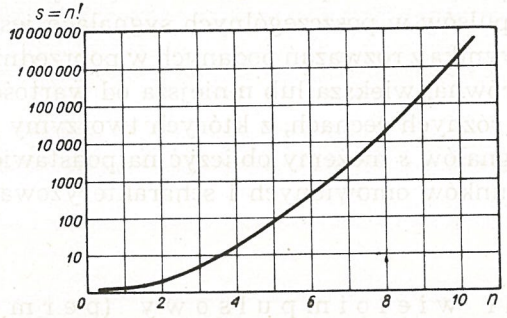
$k = n$,
$s = Q_n$ — ilość sygnałów,
n — ilość impulsów o różnych cechach,
k — ilość impulsów w sygnale.

Funkcja $s = f(n)$ jest funkcją rosnącą w zależności od wzrostu wartości n, jako iloczyn liczb od 1 do n.

Wartości funkcji $n!$ dla początkowych liczb będą następujące:

$0! = 1$	$4! = 24$	$8! = 40320$
$1! = 1$	$5! = 120$	$9! = 362880$
$2! = 2$	$6! = 720$	$10! = 3628800$
$3! = 6$	$7! = 5040$	$11! = 39916800$

Na rysunku 12 podano wykres zależności ilości sygnałów s od wartości n.



Rys. 12. Wykres zależności $s = f(n)$ dla permutacji bez powtórzeń impulsów w sygnale (p. 4.1.)

Dla określenia wartości $n!$ można posługiwać się wzorem Stirlinga, który daje wartość przybliżoną z niedużym procentem błędu,

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\Pi n}, \tag{18}$$

gdzie:
$n = k$ — ilość impulsów w sygnale,
e — podstawa logarytmów naturalnych.

Dla wartości $k = n = 4$ ilość sygnałów obliczamy ze wzoru

$$s = Q_n = n! = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

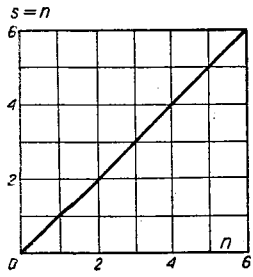
Jeśli poszczególne impulsy oznaczymy literami a, b, c, d, to otrzymamy następujący układ impulsów w poszczególnych sygnałach:

1 *abcd*	7 *bcda*	13 *cdab*	19 *dabc*
2 *abdc*	8 *bcad*	14 *cdba*	20 *dacb*
3 *acbd*	9 *bdac*	15 *cabd*	21 *dbca*
4 *acdb*	10 *bdca*	16 *cadb*	22 *dbac*
5 *adbc*	11 *bacd*	17 *cbad*	23 *dcab*
6 *adcb*	12 *badc*	18 *cbda*	24 *dcba*.

Dla rozpatrzonego przykładu poszczególne impulsy w sygnałach występują w tej samej kolejności 6 razy. Ogólnie przy ilości sygnałów s, ilości impulsów o różnych cechach n będziemy mieli $\frac{s}{n}$ razy zachowaną tę samą kolejność dla każdego impulsu, czyli — jak wynika ze wzoru (17) — $(n-1)!$ razy.

4.2. Sygnał wieloimpulsowy (permutacyjny) cykliczny

Jeżeli mamy n impulsów o różnych cechach i chcemy uzyskać k-impulsowe sygnały przy zachowaniu warunku, że $k = n$ oraz dodatkowego warunku, żeby poszczególne impulsy nie występowały w sygnałach w tej samej kolejności, to zgodnie z warunkiem omówionym w poprzednim rozdziale będziemy mieli $\frac{s}{n}$ razy mniejszą ilość sygnałów niż dla permutacji, czyli $(n-1)!$ razy mniejszą ilość sygnałów. Jest to zmodyfikowany przypadek rozpatrzonego sygnału wieloimpulsowego (permutacyjnego) bez powtórzeń. Dla powyższego przypadku impulsy w poszczególnych sygnałach muszą występować w różnej kolejności.



Rys. 13. Wykres zależności $s = f(n)$ dla permutacji o uszeregowaniu cyklicznym (p. 4.2.)

Ilość sygnałów określimy ze wzoru

$$s \quad Q_n - \frac{n!}{(n-1)!} = n = k; \tag{19}$$

gdzie:

$s = Q'_n$ — ilość sygnałów,

k — ilość impulsów w sygnale,

n — ilość impulsów o różnych cechach.

Jest to sygnał wieloimpulsowy permutacyjny cykliczny bez powtórzeń impulsów w sygnale. Możemy go oznaczyć symbolem Sg. w. p. c.

Funkcja $s = f(n)$ jest funkcją liniową; ze wzrostem wartości n wzrasta liniowo ilość sygnałów s. Na rysunku 13 podano wykres zależności ilości sygnałów s od wartości n.

Dla wartości $k = n = 4$ ilość sygnałów będzie równa

$$s = Q'_n = n = 4.$$

Jeśli poszczególne impulsy oznaczymy literami a, b, c, d, to otrzymamy sygnały o następującym układzie impulsów:

1 $abcd$	3 $cdab$
2 $bcda$	4 $dabc$

4.3. Sygnał wieloimpulsowy (wariacyjny) bez powtórzeń impulsów

Jeżeli mamy n impulsów o różnych cechach i chcemy uzyskać sygnały k-impulsowe przy zachowaniu warunku $k < n$ oraz uszeregowaniu impulsów w sygnałach tak, że każde uszeregowanie nie zawiera jednakowych impulsów i różni się od innych co najmniej bądź kolejnością impulsów, bądź też co najmniej jednym impulsem, to ilość uszeregowań stanowić będzie ilość możliwych do uzyskania sygnałów. Ilość sygnałów określimy ze wzoru na wariację bez powtórzeń z n elementów po k.

$$s = V_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}, \tag{20}$$

gdzie:

$s = V_n^k$ — ilość sygnałów,
k — ilość impulsów w sygnale,
n — ilość impulsów o różnych cechach.

Dla sygnałów k-impulsowych tworzonych na zasadzie wariacji bez powtórzeń musi być zachowany warunek:

$$2 \leqslant k \leqslant n-1,$$

stąd

$$n \geqslant 3.$$

Jest to sygnał wieloimpulsowy wariacyjny bez powtórzeń impulsów w sygnale. Symbolicznie możemy oznaczyć go jako Sg. w. w. b.

Funkcja ilości sygnałów s w zależności od wartości k i n jest funkcją dwóch zmiennych, rosnącą ze wzrostem k i n.

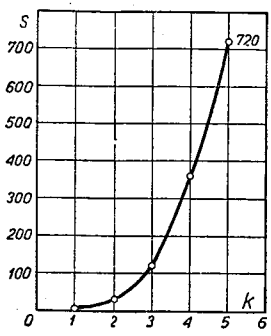
Dla ilości impulsów w sygnale $k = n - 1$ otrzymamy ilość sygnałów

$$s = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-n+1)!} = n!,$$

czyli jak dla wypadku pierwszego, tj. permutacji bez powtórzeń.

Na rysunku 14 jest podany wykres zależności $s = f(k)$ przy $n = \text{const} = 6$ dla warunku $2 \leqslant k \leqslant 5$. Ilość możliwych do uzyskania sygnałów dla różnych wartości k została obliczona wg wzoru

$$s = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{6!}{(6-k)!} = \frac{720}{(6-k)!}.$$



Rys. 14. Wykres zależności $s = f(k)$ przy $n = \text{const} = 6$ dla wariacji bez powtórzeń impulsów w sygnale (p. 4.3)

$$2 \leqslant k \leqslant 5$$

$$s = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{6!}{(6-k)!} = \frac{720}{(6-k)!}$$

k	s	rodzaj sygnału
1	6	sygnał 1-impulsowy
2	30	,, 2-impulsowy
3	120	,, 3-impulsowy
4	360	,, 4-impulsowy
5	720	,, 5-impulsowy

Na rysunku 15 jest podany wykres zależności $s = f(n)$ przy $k = \text{const} = 3$ dla warunku $4 \leqslant n \leqslant 10$. Ilość możliwych do uzyskania sygnałów dla różnych wartości n obliczona została wg wzoru

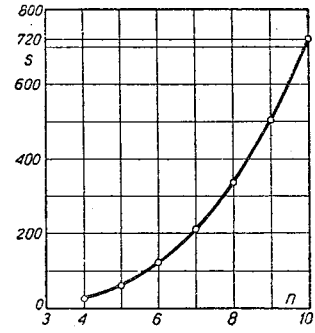
$$s = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-3)!}.$$

Rys. 15. Wykres zależności $s = f(n)$ przy $k = \text{const} = 3$ dla wariacji bez powtórzeń impulsów w sygnale (p. 4.3)

$$4 \leqslant n \leqslant 10$$

$$s = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-3)!}$$

n	s	rodzaj sygnału
4	24	sygnał 3-impulsowy
5	60	,, ,,
6	120	,, ,,
7	210	,, ,,
8	336	,, ,,
9	504	,, ,,
10	720	,, ,,



Przy ilości impulsów w sygnale $k = 2$ i ilości impulsów o różnych cechach $n = 4$ (a, b, c, d) otrzymujemy ilość sygnałów

$$s = V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{24}{2} = 12.$$

Poszczególne sygnały będą miały następujący układ impulsów:

1 ab	4 ba	7 bc	10 cb
2 ac	5 ca	8 bd	11 db
3 ad	6 da	9 dc	12 cd

4.4. Sygnał wieloimpulsowy (kombinacyjny) bez powtórzeń impulsów

Jeżeli mamy n impulsów o różnych cechach i chcemy uzyskać sygnały k-impulsowe przy zachowaniu warunku $k < n$ oraz jeżeli poszczególne sygnały muszą się różnić co najmniej jednym impulsem przy dowolnym uszeregowaniu impulsów w sygnałach, nie wpływającym na zmianę sygnału, to ilość możliwych do uzyskania sygnałów s określimy ze wzoru na kombinację bez powtórzeń z n elementów po k

$$s = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{21}$$

gdzie:

$s = C_n^k$ — ilość sygnałów,
k — ilość impulsów w sygnale,
n — ilość impulsów o różnych cechach.

Dla sygnałów k-impulsowych tworzonych na zasadzie kombinacji bez powtórzeń musi być zachowany warunek $2 \leqslant k \leqslant n\text{-}1$, stąd $n \geqslant 3$. Jest to sygnał wieloimpulsowy kombinacyjny bez powtórzeń impulsów w sygnale. Symbolicznie możemy oznaczyć go jako Sg. w. k. b.

Kombinacje bez powtórzeń różnią się od wariacji bez powtórzeń tym, że w kombinacji nie uwzględniamy porządku, tj. różnej kolejności następujących po sobie impulsów w sygnale. Ponieważ k impulsów możemy uporządkować k sposobami, więc ilość kombinacji razy $k!$ da liczbę wariacji bez powtórzeń.

$$V_n^k = k!\, C_n^k. \tag{22}$$

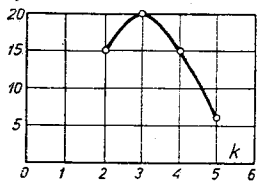
Funkcja $s = f(k, n)$ jest funkcją dwóch zmiennych. Jak wynika ze wzoru (21), ze wzrostem n przy $k = \text{const}$ funkcja s rośnie. Ze wzrostem k przy $n = \text{const}$ funkcja rośnie do wartości maksymalnej uzyskanej przy $k = \frac{n}{2}$ dla n — parzystej liczby i przy $k = \frac{n \mp 1}{2}$ dla n-nieparzystej liczby. Z dalszym wzrostem wartości k funkcja s maleje. Jak wynika z powyższych rozważań, przy stałej wartości n — ilości impulsów o różnych cechach otrzymujemy największą ilość sygnałów s przy właściwym doborze wartości k w zależności od wartości n.

Na rysunku 16 jest podany wykres zależności $s = f(k)$ przy $n = 6 = \text{const}$ dla warunku $2 \leqslant k \leqslant 5$.

Ilość możliwych do uzyskania sygnałów dla różnych wartości k obliczona została wg wzoru

$$s = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{6!}{k!(6-k)!} = \frac{720}{k!(6-k)!}.$$

Rys. 16. Wykres zależności $s = f(k)$ przy $n = \text{const} = 6$ dla kombinacji bez powtórzeń impulsów w sygnale (p. 4.4)



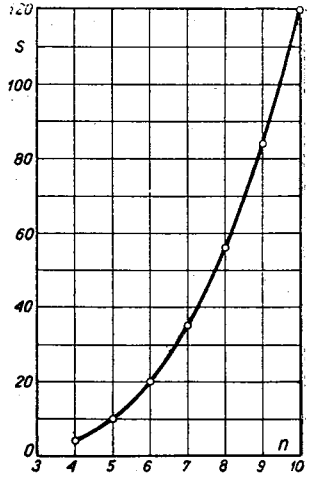
$$2 \leqslant k \leqslant 5$$

$$s = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{720}{k!\,(6-k)!}$$

k	s	rodzaj sygnału
2	15	sygnał 2-impulsowy
3	20	,, 3-impulsowy
4	15	,, 4-impulsowy
5	6	,, 5-impulsowy

Na rysunku 17 jest podany wykres zależności $s = f(n)$ przy $k = 3 = \text{const}$ dla warunku $4 \leqslant n \leqslant 10$.

Rys. 17. Wykres zależności $s = f(n)$ przy $k = \text{const} = 3$ dla kombinacji bez powtórzeń impulsów w sygnale (p. 4.4)



$$4 \leqslant n \leqslant 10$$

$$s = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{6\,(n-3)!}$$

n	s	rodzaj sygnału
4	4	sygnał 3-impulsowy
5	10	,, ,,
6	20	,, ,,
7	35	,, ,,
8	56	,, ,,
9	84	,, ,,
10	120	,, ,,

Ilość możliwych do uzyskania sygnałów dla różnych wartości n obliczona została wg wzoru

$$s = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n!}{6(n-3)!}.$$

Przy ilości impulsów w sygnale $k = 2$ i ilości impulsów o różnych cechach $n = 4$ (a, b, c, d) otrzymujemy ilość sygnałów

$$s = C_n^k = C_4^2 = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{24}{4} = 6.$$

Poszczególne sygnały będą miały następujący układ impulsów:

1 *ab*	3 *ad*	5 *bd*
2 *ac*	4 *bc*	6 *cd*

4.5. Sygnał wieloimpulsowy (wariacyjny) z powtórzeniem impulsów

Jeżeli mamy n impulsów o różnych cechach i chcemy uzyskać sygnały k-impulsowe przy zachowaniu warunków $n \geqslant 1$, $k \geqslant 2$, $k \leqslant n$, przy uszeregowaniu dowolnym jednakowych lub różnych impulsów w sygnale, tak aby poszczególne sygnały różniły się bądź to co najmniej jednym impulsem, bądź też co najmniej kolejnością uszeregowania impulsów w sygnale, bądź też i kolejnością i impulsami, to ilość możliwych do uzyskania sygnałów s określimy ze wzoru na wariację z powtórzeniem impulsów w sygnale z n elementów po k

$$s = W_n^k = n^k. \tag{23}$$

gdzie:

s — W_n^k — ilość sygnałów,
k — ilość impulsów w sygnale,
n — ilość impulsów o różnych cechach.

Jest to sygnał wieloimpulsowy wariacyjny z powtórzeniem tych samych impulsów w sygnale. Symbolicznie możemy oznaczyć go jako Sg. w. w. p.

Funkcja $s = n^k$ może być:

a) funkcją dwóch zmiennych przy zmiennych wartościach n i k,
b) funkcją jednej zmiennej przy zmiennej wartości k i n = const,
c) funkcją jednej zmiennej przy zmiennej wartości n i k = const.

Funkcję tę można przedstawić w postaci logarytmicznej

$$k = \frac{\log s}{\log n}. \tag{24}$$

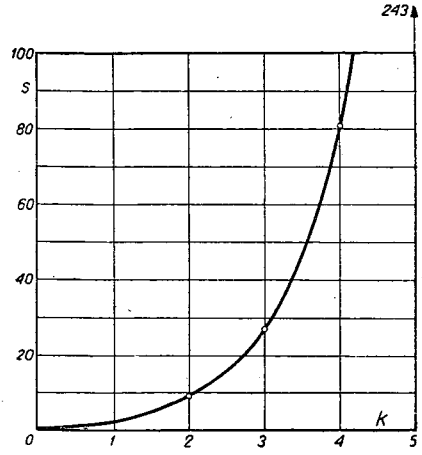
Przy n = const log n = const i ze wzrostem k rośnie log s, czyli wartość s. Przy k = const ze wzrostem n rośnie log n, czyli rośnie log s, czyli wartość s. Przy zmiennej wartości n i k ze wzrostem tych wartości rośnie log s, czyli rośnie wartość s.

Na rysunku 18 jest podany wykres zależności $s = f(k)$ przy n = const = = 3, dla warunku $2 \leqslant k \leqslant 5$.

Ilość możliwych do uzyskania sygnałów dla różnych wartości k obliczona została wg wzoru

$$s = n^k = 3^k.$$

Na rysunku 19 jest podany wykres zależności $s = f(n)$ przy $k = \text{const} = 3$, dla warunku $2 \leqslant n \leqslant 5$.



Rys. 18. Wykres zależności $s = f(k)$ przy $n = \text{const} = 3$ dla wariacji z powtórzeniem impulsów w sygnale (p. 4.5)

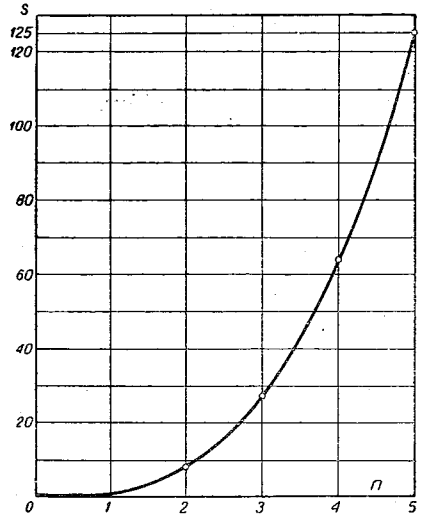
$$2 \leqslant k \leqslant 5$$

$$s = n^k = 3^k$$

k	s	rodzaj sygnału
1	3	sygnał 1-impulsowy
2	9	„ 2-impulsowy
3	27	„ 3-impulsowy
4	81	„ 4-impulsowy
5	243	„ 5-impulsowy

Ilość możliwych do uzyskania sygnałów dla różnych wartości n obliczona została wg wzoru

$$s = n^k = n^3.$$



Rys. 19. Wykres zależności $s = f(n)$ przy $k = \text{const} = 3$ dla wariacji z powtórzeniem impulsów w sygnale (p. 4.5)

$$2 \leqslant n \leqslant 5$$

$$s = n^k = n^3$$

n	s	rodzaj sygnału
2	8	sygnał 3-impulsowy
3	27	„ „
4	64	„ „
5	125	„ „

Przy ilości impulsów w sygnale $k = 2$ i ilości impulsów o różnych cechach $n = 3$ (a, b, c) otrzymujemy ilość sygnałów $s = n^k = 3^2 = 9$. Poszczególne sygnały będą miały następujący układ impulsów:

1 *aa*	4 *ab*	7 *ba*
2 *bb*	5 *ac*	8 *ca*
3 *cc*	6 *bc*	9 *cb*

Przy ilości impulsów w sygnale $k = 3$ i ilości impulsów o różnych cechach $n = 2$ (a, b) otrzymujemy ilość sygnałów $s = n^k = 2^3 = 8$. Poszczególne sygnały będą miały następujący układ impulsów:

1 *aaa*	3 *aba*	5 *baa*	7 *bba*
2 *bbb*	4 *aab*	6 *bab*	8 *abb*

4.6. Sygnał wieloimpulsowy (kombinacyjny) z powtórzeniem impulsów

Jeżeli mamy n impulsów o różnych cechach i chcemy uzyskać sygnały k-impulsowe przy zachowaniu warunków $n \geqslant 2$, $k \geqslant 2$, $k \leqslant n$ przy uszeregowaniu dowolnym impulsów w sygnale, nie wpływającym na zmianę sygnału, oraz jeżeli chcemy aby poszczególne sygnały różniły się co najmniej jednym impulsem, a w sygnale występowały te same i różne impulsy, to ilość możliwych do uzyskania sygnałów s określimy ze wzoru na kombinację z powtórzeniem z n elementów po k

$$s = K_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}, \tag{25}$$

gdzie:
$s = K_n^k$ — ilość sygnałów,
k — ilość impulsów w sygnale,
n — ilość impulsów o różnych cechach.

Jest to sygnał wieloimpulsowy kombinacyjny z powtórzeniem tych impulsów w sygnale. Symbolicznie możemy go oznaczyć Sg. w. k. p.

Funkcja $s = f(k, n)$ jest funkcją dwóch zmiennych. Jak wynika ze wzoru (25), przy $n = \text{const}$ ze wzrostem k funkcja rośnie, jak również przy $k = \text{const}$ ze wzrostem n funkcja rośnie. Przy wzroście obu wartości n i k funkcja rośnie. Funkcje $s_1 = f(k_1)$ przy $n_1 = \text{const}$ i $s_2 = f(n_2)$ przy $k_2 = \text{const}$ przyjmują tę samą wartość dla warunku, gdy $k_1 = k_2$ i $n_1 = n_2$.

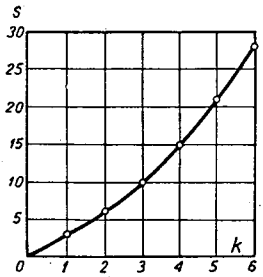
Na rysunku 20 jest podany wykres zależności $s = f(k)$ przy $n = 3 = \text{const}$ dla warunku $2 \leqslant k \leqslant 6$.

Ilość możliwych do uzyskania sygnałów dla różnych wartości k obliczona została wg wzoru

$$s = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(2+k)!}{2!\,k!}.$$

Na rysunku 21 jest podany wykres zależnoci $s = f(n)$ przy $k = 3 = \text{const}$ dla warunku $2 \leqslant n \leqslant 6$.

Rys. 20. Wykres zależności $s = f(k)$ przy $n = \text{const} = 3$ dla kombinacji z powtórzeniem impulsów w sygnale (p. 4.6)



$$2 \leqslant k \leqslant 6$$

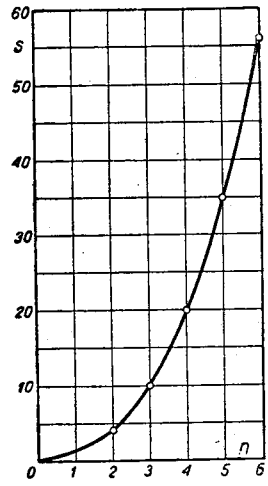
$$s = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} = \frac{(2+k)!}{2!\,k!}$$

k	s	rodzaj sygnału
2	6	sygnał 2-impulsowy
3	10	,, 3-impulsowy
4	15	,, 4-impulsowy
5	21	,, 5-impulsowy
6	28	,, 6-impulsowy

Ilość możliwych do uzyskania sygnałów dla różnych wartości n obliczona została wg wzoru

$$s \quad \frac{n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(n+2)!}{3!(n-1)!} = \frac{(n+2)!}{6(n-1)!}.$$

Rys. 21. Wykres zależności $s = f(n)$ przy $k = \text{const} = 3$ dla kombinacji z powtórzeniem impulsów w sygnale (p. 4.6)



$$2 \leqslant n \leqslant 6$$

$$s = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} = \frac{(n+2)!}{6\,(n-1)!}.$$

n	s	rodzaj sygnału
2	4	sygnał 3-impulsowy
3	10	,, ,,
4	20	,, ,,
5	35	,, ,,
6	56	,, ,,

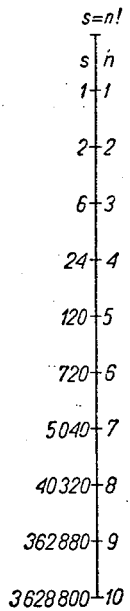
Przy ilości impulsów w sygnale $k = 3$ i ilości impulsów o różnych cechach $n = 3$ (a, b, c) otrzymujemy ilość sygnałów wg wzoru (25) $s = 10$.

Poszczególne sygnały będą miały następujący układ impulsów:

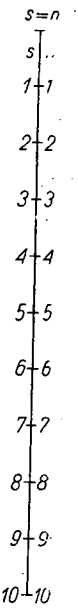
1	a	a	a	4	a	a	b	7	a	c	c	10	a	b	c
2	b	b	b	5	a	b	b	8	b	b	c				
3	c	c	c	6	a	a	c	9	c	c	b				

4.7. Nomogramy i wykresy dotyczące rozpatrzonych sygnałów wieloimpulsowych o stałej liczbie impulsów w sygnale

W celu ułatwienia obliczeń ilości sygnałów oraz porównania wartości s przy doborze najkorzystniejszych warunków pracy zostały sporządzone nomogramy i wykresy związane z rozpatrzonymi sygnałami wieloimpulsowymi o stałej liczbie impulsów w sygnale.



Rys. 22. Nomogram $s = f(k)$ dla permutacji bez powtórzeń impulsów w sygnale: $s = Q_n = n!$; $k = n$; $n \geqslant 2$



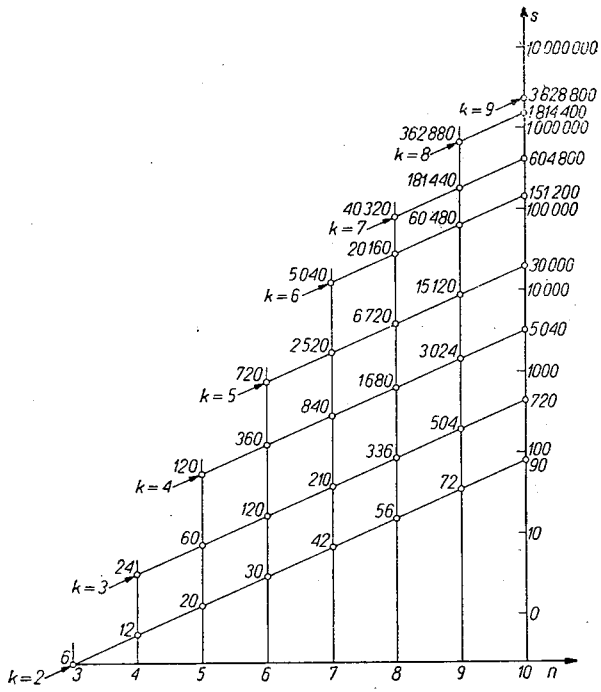
Rys. 23. Nomogram $s = f(k)$ dla permutacji cyklicznej: $s = Q_n = n$; $k = n$; $n \geqslant 2$

Na rysunkach 22 i 23 zostały podane nomogramy w postaci funkcji $s = f(k) = f(n)$ dla rozpatrzonych wypadków tworzenia sygnałów wieloimpulsowych podanych w rozdz. 4.1 i 4.2, tj. dla permutacji bez powtórzeń i permutacji o przebiegu cyklicznym, dla warunków $k = n$, $n \geqslant 2$.

Na rysunku 24 jest podany wykres zależności ilości sygnałów s od zmiany wartości ilości impulsów w sygnale k i zmiany wartości ilości impulsów n o różnych cechach dla rozpatrzonego w 4.3 przypadku sygnału wieloimpulsowego wariacyjnego bez powtórzeń impulsów w sygnale, dla warunków $2 \leqslant k \leqslant n-1$ i $n \geqslant 3$. Wykres sporządzono uwzględniając war-

tości n od 3 do 10 i zmiany wartości k od 2 do 9. Ilość sygnałów obliczono wg wzoru

$$s = V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

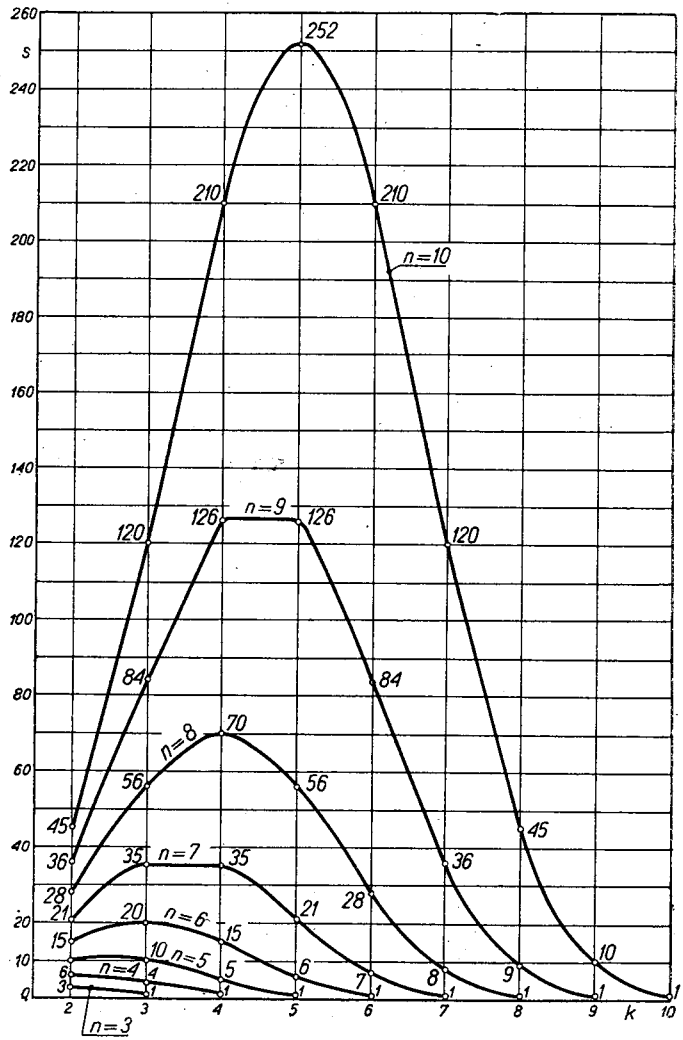


Rys. 24. Wykres zależności $s = f(n, k)$ dla wariacji bez powtórzeń impulsów w sygnale

$$s = V_n^k = \frac{n!}{(n-k_j)!}; \quad 2 \leqslant k \leqslant n-1; \quad n \geqslant 3$$

Otrzymano wartości na ilość sygnałów s od 6 do 3628800. Górne wartości nie mają praktycznego znaczenia, zostały zaś podane dla porównania i rozważań teoretycznych.

Na rysunku 25 jest podany wykres zależności ilości sygnałów s od zmiany wartości ilości impulsów k w sygnale i zmiany wartości ilości impulsów n o różnych cechach dla rozpatrzonego w 4.4 przypadku sygnału wielo-impulsowego kombinacyjnego bez powtórzeń tych samych impulsów w sygnale, dla warunków $2 \leqslant k \leqslant n-1$ i $n \geqslant 3$. Wykres sporządzono uwzględniając zmiany wartości n od 3 do 10 i zmiany wartości k od 2 do 9. Otrzymano wartości na ilość sygnałów s od 3 do 252. Aby otrzymać pełny prze-



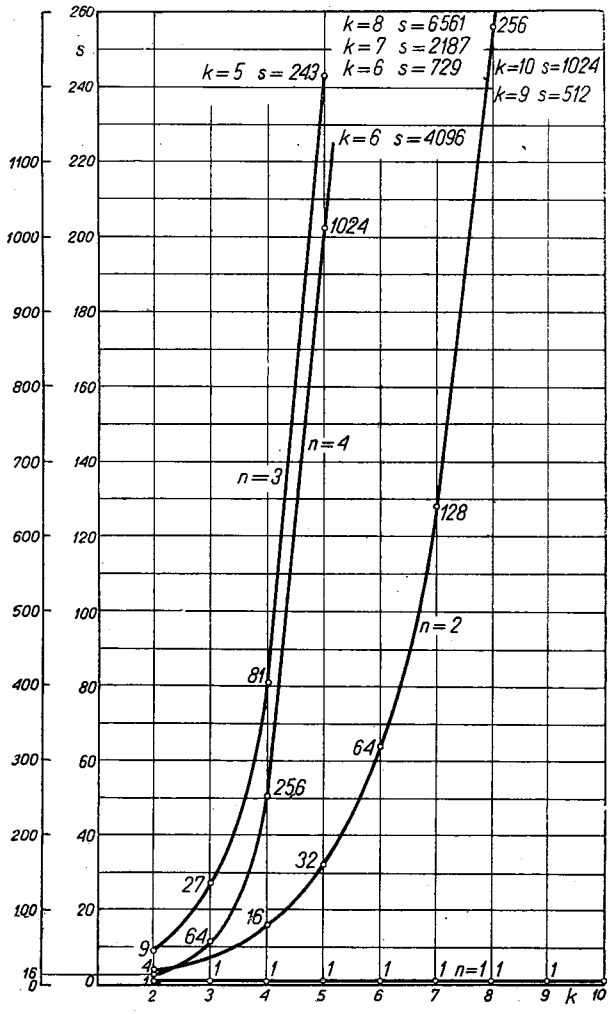
Rys. 25. Wykres zależności $s = f(n, k)$ dla kombinacji bez powtórzeń impulsów w sygnale

$$s = C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}; \quad 2 \leqslant k \leqslant n-1; \quad n \geqslant 3$$

bieg wykresu, podano również wartości $s = 1$ dla warunku $k = n$. Ilość sygnałów obliczono wg wzoru

$$s = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Na rysunku 26 jest podany wykres zależności ilości sygnałów s od zmiany wartości ilości impulsów w sygnale k i zmiany wartości ilości impul-

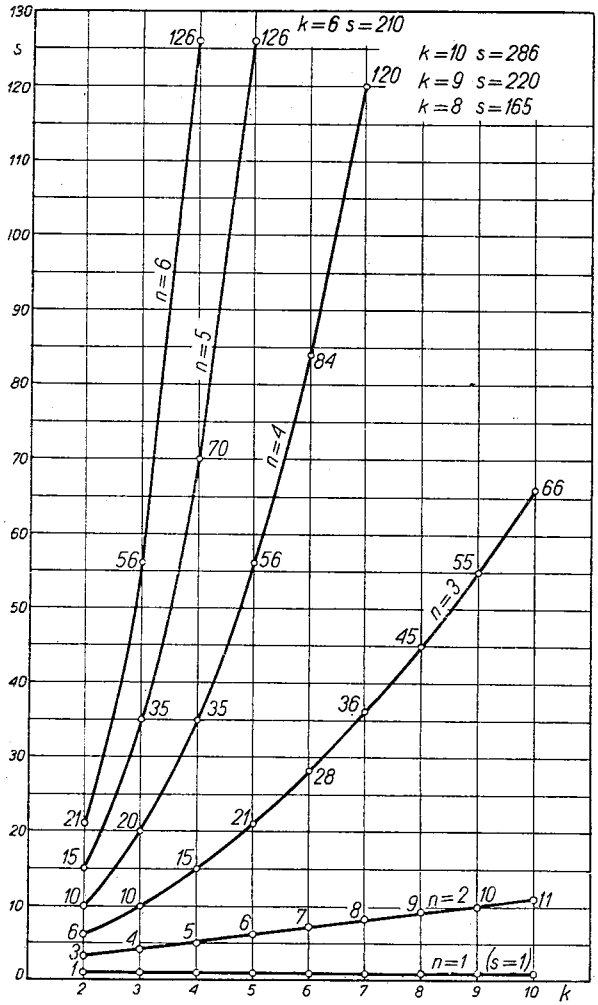


Rys. 26. Wykres zależności $s = f(n, k)$ dla wariacji z powtórzeniem impulsów w sygnale

$$s = W_n^k = n^k; \quad n \geqslant 1; \quad k \gtrless n; \quad k \geqslant 2$$

sów n o różnych cechach dla rozpatrzonego w 4.5 przypadku sygnału wieloimpulsowego wariacyjnego z powtórzeniem tych samych impulsów w sygnale, dla warunków $n \geqslant 1$, $k \geqslant 2$, $k \lesseqgtr n$. Wykres sporządzono uwzględniając zmiany wartości n od 1 do 4 i zmiany wartości k od 2 do 10. Ilość sygnałów obliczono wg wzoru

$$s = W_n^k = n^k.$$



Rys. 27. Wykres zależności $s = f(n, k)$ dla kombinacji z powtórzeniem impulsów w sygnale

$$s = K_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}; \quad n \geqslant 2; \quad k \gtrless n; \quad k \geqslant 2$$

Otrzymano wartość na ilość sygnałów s od 1 do 6561. Górne wartości nie mają praktycznego znaczenia, zostały zaś podane dla porównania i rozważań teoretycznych.

Na rysunku 27 jest podany wykres zależności ilości sygnałów s od zmiany wartości ilości impulsów w sygnale k i zmiany wartości ilości impulsów n o różnych cechach dla rozpatrzonego w 4.6 przypadku sygnału wieloimpulsowego kombinacyjnego z powtórzeniem tych samych impul-

sów w sygnale, dla warunków $n \geqslant 2$, $k \geqslant 2$, $k \leqslant n$. Wykres sporządzono uwzględniając zmiany wartości n od 1 do 6 i zmiany wartości k od 2 do 10. Otrzymano na ilość sygnałów wartości s od 1 do 286. Ilość możliwych do uzyskania sygnałów obliczona została wg wzoru

$$s = K_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

5. SYGNAŁY O SPECJALNYCH WARUNKACH

Przy stosowaniu sygnałów wieloimpulsowych zgodnie z rozpatrzonymi przypadkami 1, 3, 5, 6 przy wykorzystaniu wszystkich możliwych kombinacji zachodzi niebezpieczeństwo nadania fałszywego sygnału w razie zniekształcenia sygnału, np. w razie przestawienia impulsów o różnych kryteriach.

Poza układami kontrolnymi i korektorami w celu uzyskania pewności pracy i sygnalizowania zniekształconych sygnałów można przy układaniu sygnałów stworzyć dodatkowy warunek zapewniający niemożliwość przekazania zniekształconego sygnału jako roboczego. Wszystkie tworzone dodatkowe warunki, jak np. stała liczba jednakowych impulsów w sygnale, podlegają pewnym określonym prawom, dzięki czemu łatwa jest kontrola błędnych sygnałów. W takich układach przy tworzeniu sygnałów wieloimpulsowych nie wyzyskuje się wszystkich możliwych kombinacji, lecz tylko te, które podlegają określonemu prawu. W takim przypadku wszystkie zniekształcone sygnały, jako nie podlegające temu prawu, będą sygnalizowane.

Poniżej rozpatrzymy trzy przypadki sygnałów wieloimpulsowych o specjalnych warunkach.

5.1. Sygnał wieloimpulsowy o stałej liczbie jednakowych impulsów

Ilość sygnałów wieloimpulsowych, z których każdy składa się z k impulsów powtarzających się lub różnych, wybranych ze zbioru n impulsów o różnych cechach, obliczamy zgodnie z rozpatrzonym przypadkiem w rozdz. 4.5 ze wzoru na wariacje zp owtórzeniami

$$s = W_n^k = n^k.$$

Spośród możliwych do uzyskania sygnałów wybieramy te, które spełniają dodatkowy warunek, a mianowicie zawierają jednakową ilość impulsów o tej samej cesze. Jeśli oznaczymy przez m ilość impulsów o tej samej cesze, to ilość sygnałów spełniających ten warunek określimy przy pomocy wzoru jak dla przypadku rozpatrzonego w 4.4.

Ilość sygnałów o tej samej liczbie impulsów m określimy ze wzoru

$$s_m = C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}, \tag{26}$$

tj. jak dla kombinacji bez powtórzeń.

Ilość sygnałów s_m jest funkcją dwóch zmiennych. Analogicznie jak dla przypadku 4.4 funkcja osiąga maksimum przy $m = \frac{k}{2}$ dla wartości k — liczby parzystej i przy $m = \frac{k \pm 1}{2}$ dla wartości k liczby nieparzystej. Na podstawie powyższej zależności możemy określić najkorzystniejsze warunki, tj. maksymalną ilość sygnałów k-impulsowych.

Przy ilości impulsów w sygnale $k = 3$ i ilości impulsów o różnych cechach $n = 2$ (a, b) przy wykorzystaniu wszystkich kombinacji otrzymujemy ilość sygnałów $s = W_n^k = n^k = 2^3 = 8$.

Poszczególne sygnały będą miały następujący układ impulsów:

1	$a\ a\ a$	3	$a\ b\ a$	5	$b\ a\ a$	7	$b\ b\ a$
2	$b\ b\ b$	4	$a\ a\ b$	6	$b\ a\ b$	8	$a\ b\ b$

Przy zachowaniu dodatkowego warunku, że każdy sygnał zawiera jednakową ilość impulsów m o tej samej cesze przy $k = 2$, $n = 2$ (a, b) i $m = 2$ otrzymujemy ilość sygnałów

$$s_m = C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3.$$

Poszczególne sygnały będą miały następujący układ impulsów:

1	$a\ b\ a$		1	$b\ a\ b$
2	$a\ a\ b$	lub	2	$b\ b\ a$
3	$b\ a\ a$		3	$a\ b\ b$

5.2. Sygnały wieloimpulsowe o różnych impulsach następujących po sobie

Przy tworzeniu sygnałów k-impulsowych składających się z impulsów jednakowych lub różnych, wybranych ze zbioru n impulsów o różnych cechach, otrzymujemy ilość sygnałów s zgodnie ze wzorem (23) dla wariacji z powtórzeniem tych samych impulsów w sygnale.

Ze wszystkich możliwych do uzyskania sygnałów wybieramy tylko te, w których sąsiadujące impulsy mają różne cechy[1]). Przy zachowaniu tego warunku otrzymujemy mniejszą ilość sygnałów s_w wybranych ze zbioru s sygnałów, a mianowicie

$$s_w = n(n-1)^{k-1}, \tag{27}$$

[1]) [4]str. 242.

gdzie:

s_w — ilość sygnałów o sąsiadujących impulsach o różnych cechach,

n — ilość impulsów o różnych cechach,

k — ilość impulsów w sygnale.

Zależność wg wzoru (27) wynika z następującego rozważania. Dla sygnałów jednoimpulsowych przy zastosowaniu n impulsów o różnych cechach otrzymujemy n kombinacji, czyli n sygnałów. Dla sygnałów dwuimpulsowych otrzymujemy $(n-1)$ razy więcej kombinacji, czyli ilość sygnałów będzie równa $n(n-1)$; można ją przedstawić w postaci $n(n-1)^{2-1}$. Dla sygnałów k-impulsowych otrzymujemy całkowitą ilość kombinacji, czyli ilość sygnałów równą wartości $n(n-1)^{k-1}$.

Dla uzyskania sygnałów wieloimpulsowych o różnych impulsach następujących po sobie muszą być spełnione warunki:

$$n \geqslant 3 \text{ i } k \geqslant 2.$$

Przy wartości $n = 2$ niezależnie od wartości k, tj. ilości impulsów w sygnale, otrzymujemy tylko dwa sygnały. Przy wartości $k = 1$ otrzymujemy sygnał jednoimpulsowy.

Przy ilości impulsów w sygnale $k = 3$ i ilości impulsów o różnych cechach $n = 3$ (a, b, c) przy wykorzystaniu wszystkich kombinacji otrzymujemy ilość sygnałów $s = W_n^k = n^k = 3^3 = 27$.

Przy zachowaniu dodatkowego warunku, że w każdym sygnale następujące po sobie impulsy mają różne cechy, otrzymujemy ilość sygnałów

$$s_w = n(n-1)^{k-1} = 3 \cdot 2^2 = 12.$$

Poszczególne sygnały będą miały następujący układ impulsów:

1	a b c	5	b a c	9	c a b
2	a b a	6	b a b	10	c a c
3	a c a	7	b c a	11	c b a
4	a c b	8	b c b	12	c b c

5.3. Sygnały wieloimpulsowe z cechą zerową

W układach z sygnałami wieloimpulsowymi poza kombinacjami n impulsów o różnych cechach można stworzyć dodatkowe kombinacje z cechą braku prądu (cechą zerową). Teoretycznie można stworzyć dużo kombinacji przy wykorzystaniu dodatkowej cechy zerowej. Dla zwiększenia pewności ruchu i łatwej kontroli wykorzystujemy tylko te kombinacje, w których wartość liczbowa wskaźnika cechy zerowej jest stała.

Jeśli oznaczymy przez: k — ilość impulsów w sygnale, przez a — ilość impulsów z cechą zerową i przyjmiemy, że $k = \text{const}$ i $a = \text{const}$, to otrzymamy sygnały wieloimpulsowe o spełnionym dodatkowym warunku. Cecha zerowa (brak impulsu) nie może być na początku i końcu sygnału, gdyż

byłoby to równoważne z wyrzuceniem impulsu z serii. Przyjmując poza tym, że w każdym sygnale sąsiadujące impulsy mają różne cechy, dochodzimy do wniosku, że impulsy z cechą zerową nie mogą występować obok siebie. Ze wszystkich możliwych do uzyskania sygnałów wybieramy tylko te kombinacje, które odpowiadają wyżej wymienionym warunkom.

Zadanie sprowadza się do określenia ilości k-impulsowych sygnałów, w których jest a zerowych impulsów i $(k - a)$ prądowych impulsów[1]).

Oznaczmy tę ilość przez $B_{(k,\,a)}$ i wprowadźmy do rozpatrywanej funkcji $P_k(x)$

$$P_k(x) = B_{(k,0)} + B_{(k,1)}X + B_{(k,2)}X^2 + B_{(k,3)}X^3 + \ldots$$

Określmy zależność pomiędzy współczynnikami. Rozpatrzmy wszystkie dopuszczalne kombinacje z k impulsów rozdzielając je na grupy według cech porządkowych, to znaczy miejsc, na których stoją impulsy, a więc miejsc $(M - 1)$, M, $M + 1$, $M + 2$, gdzie M jest dowolną liczbą. Jeśli przyjmiemy określenie grupy na podstawie cechy impulsu znajdującego się na M-tym miejscu, to otrzymamy w ten sposób dwie podstawowe grupy:

w pierwszej grupie na M-tym miejscu będzie znajdować się impuls prądowy, w drugiej impuls z cechą zerową.

Dopuszczalne rozmieszczenie impulsów tworzą przy tym podgrupy: w pierwszej grupie będą cztery podgrupy — 1a, 1b, 1c, 1d, w drugiej zaś będzie jedna podgrupa — 2a.

Tabela grup

Grupa	Podgrupa	$M-1$	M	$M+1$	$M+2$
1	1a	i	i	i	$\sim$
	1b	0	i	i	$\sim$
	1c	i	i	0	i
	1d	0	i	0	i
2	2a	i	0	i	$\sim$

gdzie:

0 — impuls z cechą zerową,

i — impuls prądowy,

$\sim$ — impuls dowolny (zerowy lub prądowy).

Jeżeli rozmieszczenie należy do podgrup 1a, 1b, 1c, to usuńmy z nich M-ty impuls. Otrzymamy wówczas jakieś dopuszczalne rozmieszczenie z $(k-1)$ impulsów, pośród których będzie a impulsów z cechą zerową. Jeśli rozmieszczenie należy do podgrup 1d lub 2a, to usuńmy z nich M i $(M+1)$ impulsy. Otrzymamy wówczas dopuszczalne rozmieszczenie $(k-2)$ impulsów, pośród których będzie $(a-1)$ impulsów z cechą zerową.

[1]) [1] str. 88 — 92.

Na podstawie tego, co powyżej powiedziano, możemy ustalić stosunek pomiędzy współczynnikami funkcji $P_k(x)$

$$B_{(k,a)} = B_{(k-1,a)} + B_{(k-2,a-1)}.$$

Napiszmy wyrażenie dla funkcji $P(x)$ dla wypadków $(k-2)$ i $(k-1)$

$$P_{(k-2)}(x) = B_{(k-2,\,0)} + B_{(k-2,\,1)}X + B_{(k-2,\,2)}X^2 + B_{(k-2,\,3)}X^3 \ldots$$

$$P_{(k-1)}(x) = B_{(k-1,\,0)} + B_{(k-1,\,1)}X + B_{(k-1,\,2)}X^2 + B_{(k-1,\,3)}X^3 \ldots$$

Pomnóżmy pierwsze równanie przez X i dodajmy do drugiego, otrzymamy

$$P_k(x) = XP_{(k-2)}(x) + P_{(k-1)}(x).$$

Na podstawie powyższego można ustalić wartości $P(x)$ dla różnej ilości impulsów

$$P_0(x) = 0$$
$$P_1(x) = 1$$
$$P_2(x) = 1$$
$$P_3(x) = 1 + 1$$

Wprowadźmy nową funkcję $\Phi(x, y)$ w postaci

$$\Phi(x,y) = P_0(x) + P_1(x)y + P_2(x)y^2 + P_3(x)y^3 + \ldots$$

Pomnóżmy tę funkcję przez $(1—y—xy^2)$, a wykorzystując wprowadzone zależności dla $P(x)$ znajdziemy

$$\Phi(x,y)(1 - y - xy^2) = y,$$

stąd

$$\Phi(x,y) = \frac{y}{1 - y - xy^2}.$$

Interesujący nas współczynnik $B_{(k,a)}$ jest w rzeczywistości współczynnikiem przy x^a, y^n w podziale funkcji $\Phi(x, y)$ według x i y. Dla uzyskania podziału można posiłkować się szeregiem Maclorena dla funkcji dwóch zmiennych lub też inną metodą.

Rozkładając funkcję $\Phi(x, y)$ po x według szeregu otrzymamy:

$$\Phi(x,y) = \frac{y}{1-y} + \frac{y^3}{(1-y)^2}x + \frac{y^5}{(1-y)^3}x^2 + \frac{y^7}{(1-y)^4}x^3 + \ldots$$

Współczynnik przy x^a będzie:

$$\varphi_a(y) = \frac{y^{2a-1}}{(1-y)^{a+1}} = y^{a+1}(1-y)^{-a-1}.$$

$B_{(k,a)}$ będzie współczynnikiem przy y^k w rozłożeniu funkcji $\varphi_a(y)$ według szeregu potęg y. Według wzoru Maclorena współczynnik ten jest równy

$$\frac{1}{k!}\varphi_a^{(k)}(0), \quad \text{stąd} \quad B_{(k,a)} = \frac{1}{k!}\varphi_a^{(k)}(0).$$

Korzystając ze wzoru Leibnitza dla k pochodnej iloczynu dwóch funkcji obliczmy prawą stronę tego równania

$$\varphi_a^{(k)}(y) = \sum_{v=0}^{v=k} C_k^{(v)} (y^{2a+1})^{(k-v)} [(1-y)^{-a-1}]^{(v)},$$

gdzie $C_k^{(v)}$ — liczba kojarzeń z k elementów po v. W otrzymanym wyniku przy $y = 0$ będą równe zeru wszystkie człony, z wyjątkiem tych, w których

$$k - v = 2a + 1, \quad \text{tj.} \quad v = k - 2a - 1.$$

Ten człon przy $y = 0$ będzie równy

$$C_k^{k-2a-1}(2a-1)!\,(a+1)(a+2)\cdot\ldots\cdot(k-a-1) =$$

$$= \frac{k!}{(k-2a-1)!(2a+1)!}(2a+1)!\,\frac{(k-a-1)!}{a!} = k!\,\frac{(k-a-1)!}{(k-2a-1)!a!}.$$

Dzieląc otrzymane wyrażenie przez $k!$ otrzymamy wartość $B_{(k,a)}$, tj. ilość dopuszczalnych kombinacji przy zastosowaniu cechy zerowej zgodnie z podanym warunkiem

$$s_{(k,a)} = B_{(k,a)} = \frac{(k-a-1)!}{(k-2a-1)!a!} = \frac{[k-(a+1)]!}{[k-(2a-1)]!a!}. \tag{28}$$

Wyrażenie to można przedstawić w postaci:

$$s_{(k,a)} = B_{(k,a)} = \frac{(k-a-1)(k-a-2)\cdot\ldots\cdot(k-2a)}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot a)}. \tag{29}$$

Dla sygnałów k-impulsowych o a zerowych impulsach i $(k-a)$ prądowych impulsach dla różnych wartości k przy $a = \text{const}$, z uwzględnieniem warunku, że impuls zerowy nie może być na początku i końcu sygnału, otrzymujemy:

a) dla $k = 6$ i $a = 2$

$$s_{(k,a)} = \frac{(k-a-1)!}{(k-2a-1)!a!} = \frac{(6-2-1)!}{(6-4-1)!2!} = \frac{3!}{1!2!} = 3;$$

b) dla $k = 7$ i $a = 2$

$$s_{(k,a)} = \frac{(k-a-1)!}{(k-2a-1)!a!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6;$$

c) dla $k = 8$ i $a = 2$

$$s_{(k,a)} = \frac{(k-a-1)!}{(k-2a-1)!a!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{120}{12} = 10;$$

d) dla $k = 9$ i $a = 2$

$$s_{(k,a)} = \frac{(k-a-1)!}{(k-2a-1)!a!} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{720}{48} = 15;$$

e) dla $k = 10$ i $a = 2$

$$s_{(k,a)} = \frac{(k-a-1)!}{(k-2a-1)!a!} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{5040}{240} = 21.$$

Dla sygnałów k-impulsowych o a zerowych impulsach i $(k\text{-}a)$ impulsach prądowych dla różnych wartości a przy $k = \text{const}$ z uwzględnieniem warunku, że impuls zerowy nie może być na początku i końcu sygnału, otrzymujemy:

a) dla $k = 10$ i dla $a = 1$

$$s_{(k,a)} = \frac{(k-a-1)!}{(k-2a-1)!a!} = \frac{8!}{7!1!} = 8;$$

b) dla $k = 10$ i dla $a = 2$

$$s_{(k,a)} = \frac{(k-a-1)!}{(k-2a-1)!a!} = \frac{7!}{5!2!} = 21;$$

c) dla $k = 10$ i dla $a = 3$

$$s_{(k,a)} = \frac{(k-a-1)!}{(k-2a-1)!a!} = \frac{6!}{3!3!} = 20;$$

d) dla $k = 10$ i dla $a = 4$

$$s_{(k,a)} = \frac{(k-a-1)!}{(k-2a-1)!a!} = \frac{5!}{1!4!} = 5.$$

5.4. Analiza funkcji sygnałów wieloimpulsowych z cechą zerową

Dla funkcji dwóch zmiennych $s_{(k,a)} = f(k, a)$, jak wynika z analizy wzoru (28), muszą być spełnione następujące warunki: $a \geqslant 1$ i $k > 3$, to znaczy, że przy jednym impulsie zerowym ($a = 1$) sygnał powinien być co najmniej czteroimpulsowy, gdyż przy sygnale trójimpulsowym otrzymujemy ilość sygnałów $s_{(k,a)} = 1$.

Jeśli ilość impulsów zerowych będzie stała ($a = \text{const}$), a natomiast będzie zmienna ilość impulsów w sygnale (k — zmienne), to rozpatrywana

funkcja będzie funkcją jednej zmiennej $s_{(k,a)} = s_{(k)} = f(k)$. Dla przeprowadzenia analizy przekształcamy wzór (28). Przyjmując, że $a = \text{const}$, i oznaczając $a + 1 = b = \text{const}$ oraz $2a + 1 = d = \text{const}$, przy warunku $d > b > a$, otrzymamy wzór przekształcony w postaci

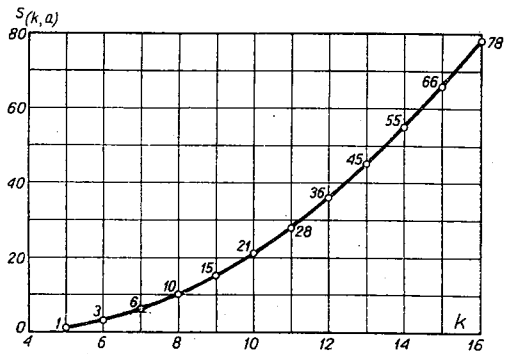
$$s_{(k,a)} = \frac{(k-b)!}{(k-d)!a!}. \tag{30}$$

Pomiędzy wielkościami k i $s_{(k,a)}$ jest zależność nieliniowa. Ze wzrostem k ilość sygnałów znacznie wzrasta.

Rys. 28. Wykres zależności $s = f(k)$ przy stałej wartości impulsów zerowych $a = \text{const} = 2$

$$s_{(k,a)} = \frac{(k-a-1)!}{(k-2a-1)!a!} = \frac{(k-3)!}{(k-5)!2!}$$

k	s	rodzaj sygnału
5	1	sygnał 5-impulsowy
6	3	„ 6-impulsowy
7	6	„ 7-impulsowy
8	10	„ 8-impulsowy
9	15	„ 9-impulsowy
10	21	„ 10-impulsowy
11	28	„ 11-impulsowy
12	36	„ 12-impulsowy
13	45	„ 13-impulsowy
14	55	„ 14-impulsowy
15	66	„ 15-impulsowy
16	78	„ 16-impulsowy



Na rysunku 28 jest podany wykres zależności ilości sygnałów s od zmiany wartości ilości impulsów w sygnale k przy stałej wartości ilości impulsów zerowych ($a = 2$). Wykres sporządzono dla przypadku zmiany wartości k od 5 do 16. Otrzymano wartości na ilość sygnałów s w granicach od 1 do 78. Ilość możliwych do uzyskania sygnałów obliczona została wg wzoru

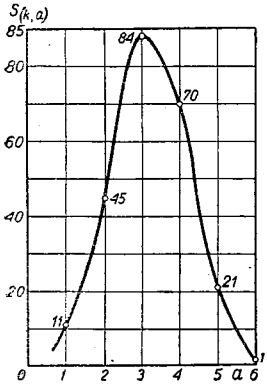
$$s_{(k,a)} = \frac{(k-a-1)!}{(k-2a-1)!a!}.$$

Jeśli ilość impulsów w sygnale $k = \text{const}$, natomiast będzie zmienna ilość impulsów zerowych a, to rozpatrywana funkcja będzie funkcją jednej zmiennej $s_{(k,a)} = s_{(a)} = f(a)$. Dla przeprowadzenia analizy przekształ-

camy wzór (28). Przyjmując, że k = const, i oznaczając $k-1 = b$ = const, otrzymamy wzór przekształcony w postaci

$$s_{(k,a)} = \frac{(b-a)!}{(b-2a)!a!} = \frac{(\text{const}-a)!}{(\text{const}-2a)!a!}. \tag{31}$$

Pomiędzy wielkościami a i $s_{(k,a)}$ jest zależność nieliniowa. Funkcja $s_{(k,a)} = f(a)$ będzie rosnącą do maximum i następnie malejącą do wartości 1.



Rys. 29. Wykres zależności $s = f(a)$ przy stałej wartości ilości impulsów w sygnale k = const = 13

$$s_{(k,a)} = \frac{(k-a-1)!}{(k-2a-1)!a!} = \frac{(12-a)!}{(12-2a)!a!}$$

a	s	rodzaj sygnału
1	11	sygnał 13-impulsowy
2	45	„ „
3	84	„ „
4	70	„ „
5	21	„ „
6	1	„ „

Na rysunku 29 jest podany wykres zależności ilości sygnałów s od zmiany wartości ilości impulsów zerowych a przy stałej wartości ilości impulsów w sygnale $k = 13$. Wykres sporządzono dla przypadku zmiany wartości a od 1 do 6. Otrzymano wartości na ilość sygnałów s w granicach od 11 do 1 poprzez maximum 84 przy $a = 3$.

Jak wynika z powyższych rozważań, przy stałej ilości impulsów w sygnale k, natomiast zmiennej wartości ilości impulsów zerowych a, można dobrać taką wartość a, przy której ilość sygnałów będzie największa. W celu ustalenia warunków maksymalnych wartości sygnałów s podano w tablicy 1 zestawienie wyników ilości sygnałów s w zależności od zmian wartości k i a, obliczone ze wzoru (28). Tablicę sporządzono uwzględniając zmiany wartości k od 3 do 20 przy zmianie a od 1 do 9. Otrzymano wartości na ilość sygnałów s od 1 do 2002.

Jak widać z zestawionych w tablicy wyników dla poszczególnych sygnałów wieloimpulsowych przy zmianie wartości k — ilości impulsów w sygnale otrzymujemy optymalne wartości ilości sygnałów dla różnych war-

Tablica 1

Ilość sygnałów $s(k,a)$ w zależności od k i a według wzoru (28)

k	a	s
3	1	1
4	1	2
5	1	3
	2	1
6	1	4
	2	3
7	1	5
	2	6
	3	1
8	1	6
	2	10
	3	4
9	1	7
	2	15
	3	10
	4	1
10	1	8
	2	21
	3	20
	4	5
11	1	9
	2	28
	3	35
	4	15
	5	1
12	1	10
	2	36
	3	56
	4	35
	5	6
13	1	11
	2	45
	3	84
	1	70
	5	21
	6	1
14	1	12
	2	55
	3	120
	4	126
	5	56
	6	7
15	1	13
	2	66
	3	165
	4	210
	5	126
	6	28
	7	1
16	1	14
	2	78
	3	220
	4	330
	5	252
	6	84
	7	8
17	1	15
	2	91
	3	286
	4	495
	5	462
	6	210
	7	36
	8	1
18	1	16
	2	105
	3	364
	4	715
	5	792
	6	462
	7	120
	8	9
19	1	17
	2	120
	3	445
	4	1001
	5	1287
	6	924
	7	330
	8	45
	9	1
20	1	18
	2	136
	3	560
	4	1365
	5	2002
	6	1716
	7	792
	8	165
	9	10

tości impulsów zerowych a. Zestawienie optymalnych wartości podano w tablicy 2.

Jak wynika z zestawienia podanego w tablicy 2:

a) dla sygnałów 3— 6-impulsowych maks. ilość sygnałów będzie przy $a=1$,
b) „ „ 7—10 „ „ „ „ „ „ $a=2$,
c) „ „ 11—13 „ „ „ „ „ „ $a=3$,
d) „ „ 14—17 „ „ „ „ „ „ $a=4$,
e) „ „ 18—20 „ „ „ „ „ „ $a=5$.

Tablica 2

Maksymalne wartości ilości sygnałów w zależności od zmiany a dla różnych sygnałów wieloimpulsowych

Lp.	Rodzaj sygnału	k	a	s_{max}
1	sygnał 3-impulsowy	3	1	1
2	„ 4 „	4	1	2
3	„ 5 „	5	1	3
4	„ 6 „	6	1	4
5	„ 7 „	7	2	6
6	„ 8 „	8	2	10
7	„ 9 „	9	2	15
8	„ 10 „	10	2	21
9	„ 11 „	11	3	35
10	„ 12 „	12	3	56
11	„ 13 „	13	3	84
12	„ 14 „	14	4	126
13	„ 15 „	15	4	210
14	„ 16 „	16	4	330
15	„ 17 „	17	4	495
16	„ 18 „	18	5	792
17	„ 19 „	19	5	1287
18	„ 20 „	20	5	2002

6. SYGNAŁY WIELOIMPULSOWE O ZMIENNEJ LICZBIE IMPULSÓW

Omówione dotychczas sygnały były o stałej liczbie impulsów k, to znaczy, że dla danej kombinacji i założonych warunków wszystkie sygnały były k-impulsowe.

W celu zwiększenia liczby możliwych do uzyskania sygnałów można tworzyć kombinacje o zmiennej liczbie elementów. Dla takich kombinacji otrzymamy sygnały o różnej ilości impulsów, czyli wielkość k będzie zmien-

na. Zwiększa się przez to ilość możliwych do uzyskania sygnałów, lecz zmniejsza się pewność pracy, gdyż uszkodzenie powodujące np. zgubienie jednego impulsu może spowodować, że sygnał k-impulsowy wskutek zniekształcenia może być odebrany jako prawidłowy $(k-1)$-impulsowy.

Nie dla wszystkich rozpatrzonych poprzednio przypadków można stworzyć kombinacje sygnałów o zmiennej liczbie impulsów. Rozpatrzmy kolejno poszczególne przypadki.

a) Dla przypadku pierwszego, w którym ilość sygnałów obliczamy ze wzoru na permutacje bez powtórzeń przy zachowaniu warunku $n = k$, liczba impulsów w sygnałach musi być stała, czyli nie można stosować kombinacji sygnałów o zmiennej liczbie impulsów.

b) Dla przypadku drugiego, w którym ilość sygnałów obliczamy dla permutacji cyklicznej dla warunku $s = n = k$, również nie można stosować kombinacji sygnałów o zmiennej liczbie impulsów.

c) Dla przypadku trzeciego, w którym ilość sygnałów obliczamy wg wzoru (19) na zasadzie wariacji bez powtórzeń, można uzyskać kombinacje sygnałów o zmiennej liczbie impulsów przy zachowaniu warunków $2 < k \leqslant n-1$ oraz $n \geqslant 4$.

Ilość sygnałów obliczamy na podstawie wzoru

$$s_z = V_n^k = \sum_{k=3}^{k=n-1} \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{32}$$

Przy ilości impulsów o różnych cechach $n = 4$ otrzymamy sygnały dwuimpulsowe i trójimpulsowe, przy $n = 6$ otrzymamy sygnały 2, 3, 4, 5-impulsowe.

d) Dla przypadku czwartego, w którym ilość sygnałów obliczamy wg wzoru (21) na zasadzie kombinacji bez powtórzeń, można uzyskać kombinacje sygnałów o zmiennej liczbie impulsów przy spełnionych warunkach $2 < k \leqslant n$ oraz $n \geqslant 3$. Ilość sygnałów obliczamy wg wzoru

$$s_z = C_n^k = \sum_{k=3}^{k=n} \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{33}$$

e) Dla przypadku piątego, w którym ilość sygnałów obliczamy wg wzoru (23) na zasadzie wariacji z powtórzeniem, można uzyskać kombinacje sygnałów o zmiennej liczbie impulsów przy spełnionych warunkach $k \leqslant n$, $k > 2$, $n > 1$.

Kombinacje o niepełnej ilości impulsów k w sygnale można przedstawić jako kombinacje o pełnej ilości impulsów k, jeśli wprowadzimy dodatkową cechę, tj. impuls zerowy[1]). Na przykład jeśli mamy do dyspozycji

[1]) [1] str. 78.

$n = 6$ impulsów o różnych cechach, które oznaczymy literami a, b, c, d, e, f, oraz tworzymy sygnały k-impulsowe, przy czym $k_{max} = 4$ i $k_{min} = 2$, to sygnały 2-impulsowe i 3-impulsowe można przedstawić jako 4-impulsowe, jeśli wprowadzimy dodatkową cechę impulsu zerowego. W takim przypadku sygnały

1	abc		1 $aboc$
2	ad	można przedstawić jako	2 $aood$
3	cef		3 $ceof$

Ilość impulsów o różnych cechach (ilość cech) będzie się równać $n_1 = n + 1$. Ponieważ jedna kombinacja składająca się z samych impulsów zerowych (0, 0, 0, 0) odpada, gdyż taki sygnał nie może mieć miejsca, to ilość możliwych do uzyskania sygnałów będzie równa

$$s_z = W_n^k = n_1{}^k - 1 = (n+1)^k - 1, \tag{34}$$

gdzie:

n — ilość sygnałów o różnych cechach prądowych,

k — maksymalna ilość impulsów w sygnale.

Dla przypadku piątego przy $n = 2$ i $k = 4$ ilość sygnałów wieloimpulsowych będzie równa $s = n^k = 2^4 = 16$.

Przy zmiennej liczbie impulsów w sygnale, tj. przy zastosowaniu sygnałów 2, 3 i 4-impulsowych, całkowita ilość sygnałów będzie

$$s_z = (n+1)^k - 1 = (2+1)^4 - 1 = 3^4 - 1 = 80.$$

Jak widać z powyższego, liczba sygnałów wzrosła 5-krotnie.

f) Dla przypadku szóstego, w którym ilość sygnałów obliczamy wg wzoru (25) dla kombinacji z powtórzeniem, przy zachowanych warunkach $k \leqslant n$, $k > 2$, $n > 1$, można uzyskać kombinacje sygnałów o zmiennej liczbie impulsów w sygnale. Jeśli wprowadzimy jak dla przypadku piątego dodatkową cechę impulsu zerowego, to kombinacje sygnałów o niepełnej liczbie impulsów w sygnale można rozpatrywać jako kombinacje z dopełnionymi impulsami zerowymi do pełnej liczby impulsów w sygnale. Całkowitą ilość sygnałów obliczamy ze wzoru

$$s_z = K_n^k = \frac{(n_1 + k - 1)!}{(n_1 - 1)!k!} = \frac{(n+k)!}{n!\,k!}, \tag{35}$$

gdzie:

n — ilość impulsów o różnych cechach,

k — maksymalna ilość impulsów w sygnale,

$n_1 = n + 1$ — ilość impulsów z uwzględnieniem cechy zerowej.

Dla przypadku szóstego przy ilości impulsów o różnych cechach $n = 4$ i $k = 3$ ilość sygnałów obliczona wg wzoru (25) będzie równa

$$s = K_n^k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} = \frac{(4+3-1)!}{(4-1)!3!} = 20.$$

Przy zmiennej liczbie impulsów w sygnale ilość sygnałów 2-impulsowych i 3-impulsowych będzie równa

$$s_z = K_n^k = \frac{(n+k)!}{n!\,k!} = \frac{7!}{4!3!} = 35,$$

czyli wzrośnie o 75 procent.

7. PORÓWNANIE WZORÓW I ZALEŻNOŚCI SYGNAŁÓW WIELOIMPULSOWYCH

Rozpatrzone w rozdziałach 4, 5, 6 sygnały wieloimpulsowe możemy przeanalizować i porównać na podstawie różnych kryteriów. W technice sterowania zdalnego w zasadzie są stosowane sygnały o stałej liczbie impulsów k w sygnale z ewentualnym jednym z dodatkowych warunków omówionych w rozdz. 5, jak sygnały o stałej liczbie jednakowych impulsów, sygnały o różnych impulsach następujących po sobie bądź też sygnały z cechą zerową. Sygnały wieloimpulsowe o zmiennej liczbie impulsów w sygnale nie są raczej stosowane w układach techniki sterowania zdalnego. Zostały one omówione w celu wszechstronnego oświetlenia możliwości tworzenia sygnałów wieloimpulsowych.

7.1. Porównanie zależności sygnałów wieloimpulsowych o stałej liczbie impulsów w sygnałach

Porównanie zależności rozpatrzonych przypadków sygnałów wieloimpulsowych o stałej liczbie k impulsów w sygnałach możemy przeprowadzić na podstawie kryterium stosunku ilości impulsów k w sygnale do ilości n impulsów o różnych cechach.

Ilość impulsów k w sygnale może być równa, mniejsza lub większa od ilości impulsów n o różnych cechach

$$k \lessgtr n.$$

Na podstawie powyższego możemy podzielić rozpatrzone przypadki sygnałów wieloimpulsowych na trzy grupy.

a) Grupa I

Do grupy pierwszej zaliczymy sygnały, dla których jest spełniony warunek, że $k = n$. Jak wynika z analizy rozpatrzonych wzorów, do grupy pierwszej możemy zaliczyć sygnały rozpatrzone w 4.1, 4.2, 4.4, 4.5, i 4.6. Dla przypadku omówionego w 4.3 warunek ten jest niemożliwy do uzyskania.

b) Grupa II

Do grupy drugiej zaliczamy sygnały, dla których jest spełniony warunek, że $k < n$. Do grupy tej możemy zaliczyć sygnały rozpatrzone w 4.3, 4.4, 4.5 i 4.6. Dla przypadków omówionych w 4.1 i 4.2 warunek ten jest niemożliwy do uzyskania.

c) Grupa III

Do grupy trzeciej zaliczamy sygnały, dla których jest spełniony warunek, że $k > n$. Do tej grupy możemy jedynie zaliczyć sygnały omówione w 4.5 i 4.6.

Tablica 3

Zestawienie porównawcze obliczeń ilości sygnałów s

Przypadek	Wzór i warunki	Ilości impulsów k w sygnale i ilości inpulsów n o różnych cechach				
		$n=4\ k=2$	$n=4\ k=3$	$n=4\ k=4$	$n=4\ k=6$	$n=7\ k=3$
		s	s	s	s	s
4.1.	$s=Q_n=n!$ $n\geqslant 2, k=n$	niemożl.	niemożl.	24	niemożl.	niemożl.
4.2.	$s=n=k=Q_n$ $n\geqslant 2$	„	„	4	„	„
4.3.	$s=V_n^k=$ $=\frac{n!}{(n-k)!}$ $2\leqslant k\leqslant n-1, n\geqslant 3$	12	24	niemożl.	niemożl.	210
4.4.	$s=C_n^k=$ $=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ $2\leqslant k\leqslant n-1, n\geqslant 3$	6 max dla $k=\frac{n}{2}$	4	1	niemożl.	35 max dla $k=\frac{n\pm 1}{2}$
4.5.	$s=W_n^k=n^k$ $k\geqslant n, k\geqslant 2, n\geqslant 1$	16	64	256	4096	343
4.6.	$s=K_n^k=$ $=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$ $k\geqslant n, k\geqslant 2, n\geqslant 2$	10	20	35	84	84

W celu porównania ilości sygnałów s dla poszczególnych przypadków w tablicy 3 zostały podane wyniki obliczeń ilości sygnałów s dla wartości ilości impulsów w sygnale k zmieniającej się od 2 do 6 oraz dla ilości impulsów o różnych cechach $n = 4$ i $n = 7$.

Jak wynika z porównania podanych w tablicy 3 wyników, dla przypadków objętych grupą I przy zachowaniu warunku $k = n$ największą liczbę sygnałów otrzymujemy dla przypadku 4.5 $s = n^k$, najmniejszą dla przypadku 4.4

$$s = \frac{n!}{k!(n - k)!} .$$

Dla grupy pierwszej kolejność maksymalnej ilości sygnałów dla poszczególnych przypadków jest następująca:

4.5, 4.6, 4.1, 4.2, 4.4.

Dla grupy drugiej przy spełnionym warunku $k < n$ kolejność maksymalnej ilości sygnałów dla poszczególnych przypadków będzie następująca:

4.5, 4.3, 4.6, 4.4.

Dla grupy trzeciej przy spełnionym warunku $k > n$ kolejność maksymalnej ilości sygnałów dla poszczególnych przypadków będzie następująca:

4.5, 4.6.

Jak wynika z powyższych rozważań, największą ilość sygnałów uzyskuje się dla przypadku 4.5, w którym zależność ilości sygnałów s od wartości k i n jest funkcją wykładniczą, tzw. wariacji z powtórzeniem. W przypadku jeśli warunki pozwalają na zastosowanie sygnałów wieloimpulsowych, przy czym w poszczególnych sygnałach mogą występować te same impulsy, najkorzystniejsze jest stosowanie kombinacji sygnałów właśnie tego przypadku.

W przypadku jeśli te same impulsy nie mogą się powtarzać w sygnale, największą ilość sygnałów otrzymujemy dla przypadku 4.1 przy zachowaniu warunku $k = n$ oraz dla przypadku 4.3 przy zachowaniu warunku $k < n$.

Omówione w 5.1 sygnały wieloimpulsowe o stałej liczbie jednakowych impulsów w sygnale stanowią szczególny przypadek sygnałów wieloimpulsowych omówionych w 4.5, tj. zgodnie z uszeregowaniem rachunku wariacji z powtórzeniem impulsów w sygnale. Ilość tych sygnałów jest znacznie mniejsza niż dla przypadku ogólnego 4.5.

Omówione w 5.2 sygnały wieloimpulsowe o różnych impulsach następujących po sobie stanowią również szczególny przypadek sygnałów wieloimpulsowych omówionych w 4.5. Ilość sygnałów dla tego przypadku będzie mniejsza niż dla przypadku ogólnego.

Omówione w 5.3 sygnały wieloimpulsowe z cechą zerową stanowią rozszerzenie omówionego przypadku 5.2. Przyjmując, że w każdym sygnale sąsiadujące impulsy są o różnych cechach, i wprowadzając dodatkową cechę zerową, zwiększamy ilość kombinacji, czyli możliwą ilość sygnałów. Ze wzrostem wartości ilości impulsów w sygnale ilość sygnałów rośnie. Przy pewnej wartości ilości impulsów zerowych otrzymujemy optymalne wartości ilości sygnałów (patrz tabl. 2).

7.2. Porównanie zależności sygnałów wieloimpulsowych o zmiennej liczbie impulsów w sygnale

Sygnały o zmiennej liczbie impulsów w sygnale, jak wynika z omówienia podanego w rozdziale 6, można uzyskać przez tworzenie (zastosowanie) wariacji bez powtórzeń (4.3), kombinacji bez powtórzeń impulsów w sygnale (4.4), oraz przez tworzenie (zastosowanie) wariacji z powtórzeniem impulsów w sygnale (4.5) i kombinacji z powtórzeniem impulsów w sygnale (4.6). Całkowita ilość sygnałów przy tym wzrośnie, gdyż dla poszczególnych omówionych przypadków 4.3, 4.4, 4.5 i 4.6 będzie równa sumie ilości sygnałów dla zmiennych wartości k od najmniejszej do największej wartości.

Dla wszystkich wyszczególnionych przypadków ze wzrostem wartości k — ilości impulsów w sygnale rośnie również uzyskiwana ilość sygnałów. Największa ilość sygnałów będzie dla wariacji z powtórzeniem impulsów, w której jest wykładnicza zależność pomiędzy ilością impulsów n o różnych cechach a ilością impulsów k w sygnale.

Wydział Łączności
Politechniki Warszawskiej

WYKAZ LITERATURY

1. Szczukin B. K.: Osnowy tiechniki tieleuprawlenija. 1945.
2. Mostowski A. Stark M.: Algebra wyższa, cz. I, P.T.M., 1953.
3. Oliver B. M.: Efficient Coding — Bell System Technical Journal 7/1952.
4. Małow W. S.: Tielemiechanika w eniergieticzeskich sistiemach. 1955.

С. ЮДЫЦКИ

АНАЛИЗ ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ

Резюме

В статье описан расчёт количества сигналов для разных комбинаций размещения импульсов в сигнале в зависимости от количества импульсов в сигнале, а также от количества импульсов с различными свойствами на основании перестановочного, вариационного и комбинационного вычисления.

В начале статьи описаны качества и критерии тока импульса и сигнала, сочетание качеств а также зависимости количества импульсов от индексов качеств.

В следующей части статьи изложена классификация и разделение сигналов. Описано получение одноимпульсных и многоимпульсных сигналов. Описаны далее многоимпульсные сигналы с постоянным количеством импульсов в сигнале, некоторые методы размещения импульсов в сигнале в определённом порядке на основании комбинационного вычисления, а также даны классические и модифицированные формулы для расчёта количества сигналов. Ко всем рассматриваемым вариантам были приложены примеры размещения импульсов в сигналах, графики зависимости количества сигналов от количества импульсов в сигнале и от количества импульсов с различными качествами.

Описаны многоимпульсные сигналы со специальными условиями, как напр. сигналы с постоянным числом одинаковых импульов в сигнале, сигналы с разными следующими один за другим импульсами, сигналы с нулевым качеством, а также сигналы с переменным количеством импульсов.

Произведено сравнение формул и зависимостей в отдельных рассматриваемых вариантах многоимпульсных сигналов с постоянным количеством импульсов в сигнале, а также сигналов с переменным количеством импульсов в сигнале.

S. JUDYCKI

ANALYSIS OF PULSE SIGNALS

Summary

The paper discusses methods of calculating the quantities of signals for different combinations of arranging pulses in a signal with relation to the number of pulses in the signal and the number of pulses with specific qualities, on the basis of the permutation, variation and combination calculus.

In the introduction, specific qualities and current cryteria of the pulse and signal are discussed, as well as the uniting of specific qualities and the dependance of the number of pulses on indicators of specific qualities.

Subsequently, a classification and division of signals are given. The arising of single-pulse and multi-pulse signals is discussed. Multi-pulse signals with a constant number of pulses in a signal, different methods of comparing pulses in tables on the basis of the combinatorial analysis, are discussed, and classical and modified formulae for calculating the quantity of signals are given. Examples of arranging pulses in signals, diagrams of the relationships between the quantity of signals, the quantity of pulses in signals and the quantity of pulses with different specific qualities, are given for all the discussed cases.

Multi-pulse signals with special conditions are discussed, e.g. the signals with a constant number of the same pulses in the signal, the signals with different pulses succeeding one after another, the signals with a specific mark equaling to zero, and the signals with a varying number of pulses.

A comparison of formulae and relations of particular cases discussed in this paper — concerning the multi-pulse signals with a constant number of pulses in the signal and the signals with a varying number of pulses — is carried out in the paper.

621.3.014.23

JANUSZ LECHOSŁAW MAKSIEJEWSKI

Metody obliczania prądu w odgromniku przy uderzeniu pioruna w linię w niedużej odległości od odgromnika

Rękopis dostarczono 29.8.1958

W pracy przeprowadzono rozważania prądu płynącego przez odgromnik o charakterystyce zaworowej w przypadku uderzenia pioruna w linię napowietrzną przy różnych ujęciach zasilania trafionego układu przez prąd pioruna, stosując zarówno metodę fal wędrownych, jak i metodę eliminacji oporności falowej oraz porównano wyniki obliczeń tego prądu. Praca niniejsza stanowi rozwinięcie rozważań Bergera [1], który zajmował się tylko jednym z ujęć.

1. WSTĘP

Przypadek uderzenia pioruna w linię w niedużej odległości od odgromnika ma duże znaczenie praktyczne, gdyż przez odgromnik może wówczas popłynąć prąd większy od dopuszczalnego. Za odległość niedużą uważa się odległość małą wobec długości całej fali pioruna.

W miejscu uderzenia pioruna lub na najbliższym słupie następuje przeskok do ziemi i na linii pojawiają się fale. Fale te przebiegają tam i z powrotem odbijając się w miejscu uderzenia oraz w miejscu ustawienia odgromnika.

W rozważaniach dotyczących uderzenia pioruna najwięcej dyskusji wywołuje sposób zasilania trafionego układu przez prąd pioruna. Można tu wyróżnić dwa ujęcia.

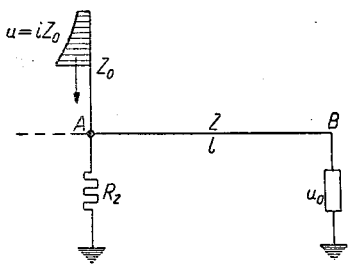
W pierwszym przyjmuje się, że kanał pioruna posiada określoną oporność falową Z_o. Mimo że stosowanie pojęcia oporności falowej kanału pioruna spotkało się z zastrzeżeniami szeregu autorów, ujęcie to znajduje znaczne rozpowszechnienie w praktyce.

Aby uniknąć wprowadzania oporności Z_o, wysunięto drugą koncepcję, według której przyjmuje się określony całkowity prąd pioruna wpływający do układu w miejscu trafienia.

Przypadek uderzenia pioruna w linię w niedużej odległości od odgromnika został rozpatrzony przez K. Bergera [1], który przyjął dany całkowity prąd pioruna. W celu porównania wyników rozważań opartych na obu koncepcjach przypadek powyższy zostanie rozpatrzony przy założeniu, że nadchodzi fala z kanału o oporności Z_o. Zakłada się, że dany jest wówczas prąd zwarciowy pioruna. Ujęcie to nie było rozważane przez Bergera. Rozważania zostaną przeprowadzone dwoma metodami, a mianowicie metodą fal wędrownych oraz metodą eliminacji oporności falowej.

2. OBLICZENIE PRĄDU PŁYNĄCEGO PRZEZ ODGROMNIK METODĄ FAL WĘDROWNYCH PRZY ZAŁOŻENIU PRĄDU ZWARCIOWEGO PIORUNA

Przyjmujemy układ obliczeniowy jak na rys. 1. W chwili przeskoku następuje uziemienie linii przez oporność R_z. Zakładamy, że fala napięciowa w kanale pioruna wyraża się wzorem $u = U e^{-\frac{t}{T}}$. Odpowiednia fala prądowa $i = I e^{-\frac{t}{T}}$, przy czym $u = Z_o i$. Prąd zwarciowy pioruna $i_z = 2i = 2I e^{-\frac{t}{T}} = I_z e^{-\frac{t}{T}}$.



Rys. 1. Układ obliczeniowy przy operowaniu prądem zwarciowym pioruna

Pierwszą falę składową w linii daje fala nadchodząca z kanału pioruna. Wynosi ona

$$u_1' = au. \tag{1}$$

Współczynnik przejścia

$$a = \frac{2\,\frac{1}{Z_o}}{\frac{1}{Z_o} + \frac{1}{Z} + \frac{1}{R_z}}, \tag{2}$$

gdzie Z — oznacza oporność falową linii.

Fala u_1' porusza się w kierunku punktu B, gdzie następuje odbicie. Fala odbita wynosi

$$u_1'' = (u_o - u_1')\,1_{t_o} = (u_o - au)\,1_{t_o},^{1)} \tag{3}$$

gdzie:

u_o — oznacza napięcie na odgromniku,

t_o — czas przebiegu przez fale odcinka AB o długości l.

---

1) Znak 1_τ oznacza, że dla danego wyrażenia początkiem rachunku czasu t jest τ μs, a dla $t < \tau$ wyrażenie jest równe zeru.

Fala u_1'' ulega odbiciu w punkcie A dając drugą falę składową poruszającą się w kierunku odgromnika

$$u_2' = \beta u_1'' 1_{2t_o}. \tag{4}$$

Współczynnik odbicia β wyrazi się następującym wzorem

$$\beta = \frac{\frac{1}{Z} - \frac{1}{Z_o} - \frac{1}{R_z}}{\frac{1}{Z} + \frac{1}{Z_o} + \frac{1}{R_z}}. \tag{5}$$

Począwszy od drugiej fali składowej odbicie w punkcie B będzie zachodzić ze współczynnikiem $\beta_1 = -1$, ponieważ przyjmujemy $u_o = \text{const}$. Mamy więc

$$u_2 = -u_2' 1_{3t_o} = -\beta(u_o - au) 1_{3t_o}. \tag{6}$$

Dla n-tej fali ($n > 1$) możemy napisać

$$u_n' = (-1)^n \beta^{n-1}(u_o - au) 1_{2(n-1)t_o}, \tag{7}$$

$$u_n'' = (-1)^{n-1} \beta^{n-1}(u_o - au) 1_{(2n-1)t_o}. \tag{8}$$

Fale składowe prądowe w odgromniku otrzymamy ze wzoru

$$i_{on} = \frac{u_n' - u_n''}{Z} 1_{(2n-1)t_o}.$$

Dla $n > 1$ mamy

$$i_{on} = (-1)^n \frac{2\beta^{n-1}(u_o - au)}{Z} 1_{(2n-1)t_o}, \tag{9}$$

natomiast

$$i_{o1} = -\frac{(u_o - 2au)}{Z} 1_{t_o}. \tag{10}$$

W chwili przyjścia n-tej fali składowej prąd w odgromniku wyniesie

$$i_o = i_{o1} 1_{t_o} + i_{o2} 1_{3t_o} + \ldots + i_{on} 1_{(2n-1)t_o}. \tag{11}$$

Czas trwania pierwszej fali składowej wynosi $2(n-1)t_o$, drugiej $2(n-2)t_o$ itd. Wprowadzając oznaczenie

$b = e^{-\frac{2t_o}{T}}$ możemy przepisać wzór (11) w postaci:

$$i_o = -\frac{(u_o - 2aUb^{n-1})}{Z} + \frac{2\beta(u_o - aUb^{n-2})}{Z} - \frac{2\beta^2(u_o - aUb^{n-3})}{Z} +$$

$$\ldots + (-1)^n \frac{2\beta^{n-1}(u_o - aU)}{Z}.$$

Przekształcając ten wzór w dalszym ciągu otrzymujemy:

$$i_o = -\frac{u_o}{Z} + \frac{2u_o\beta}{Z}[1 - \beta + \beta^2 - \ldots + (-1)^n \beta^{n-2}] +$$

$$+ \frac{2aUb^{n-1}}{Z}\left[1 - \frac{\beta}{b} + \frac{\beta^2}{b^2} - \ldots - (-1)^n \frac{\beta^{n-1}}{b^{n-1}}\right]. \qquad (13)$$

Wyrażenia w nawiasach stanowią szereg geometryczny, przy czym wykładnik pierwszego szeregu $q = -\beta$, drugiego natomiast $\frac{q}{b}$, mamy więc

$$i_o = -\frac{u_o}{Z} + \frac{2u_o\beta}{Z}\left[\frac{1 - q^{n-1}}{1 - q}\right] + \frac{2aUb^{n-1}}{Z}\left[\frac{1 - \frac{q^n}{b^n}}{1 - \frac{q}{b}}\right]. \qquad (14)$$

Ostatecznie

$$i_o = -\frac{u_o}{Z}\frac{[1 + q - 2q^n]}{(1 - q)} + \frac{2aU(b^n - q^n)}{Z(b - q)}. \qquad (15)$$

Aby otrzymać przebieg prądu i_o aż do momentu przyjścia następnej fali składowej, należy we wzorze (15) podstawić zamiast U wyrażenie $Ue^{-\frac{t}{T}}$.

Interesuje nas maksymalna wartość prądu i_{om}, którą możemy wyznaczyć z warunku $\frac{di_o}{dn} = 0$.

Warunek ten daje

$$\frac{di_o}{dn} = \frac{2aU}{Z(b - q)}[b^n \ln b - q^n \ln q] + \frac{2u_o q^n \ln q}{Z(1 - q)} = 0. \qquad (16)$$

Stąd otrzymujemy n odpowiadające maksimum prądu

$$n_m = \frac{\ln\left\{\frac{[aU(1 - q) - u_o(b - q)]}{aU(1 - q)} \cdot \frac{\ln q}{\ln b}\right\}}{\ln\frac{b}{q}}. \qquad (17)$$

Podstawiając n_m do równania (15) otrzymamy prąd i_{om}. Prąd ten występuje dla czasu $T_m = (2n_m - 1)\, t_0$.

3. OBLICZENIE PRĄDU PŁYNĄCEGO PRZEZ ODGROMNIK METODĄ ELIMINACJI OPORNOŚCI FALOWEJ PRZY ZAŁOŻENIU PRĄDU ZWARCIOWEGO PIORUNA

Zastępując odcinek l linii przez jego indukcyjność otrzymujemy obwód zastępczy jak na rys. 2. Indukcyjność określa się z zależności $L = t_0 Z$. Jak

poprzednio przyjmujemy, że fala napięciowa w kanale pioruna $u = Ue^{-\frac{t}{T}}$, natomiast odpowiednia fala prądowa $i = Ie^{-\frac{t}{T}}$.

Dla obwodu z rys. 2 możemy napisać równania:

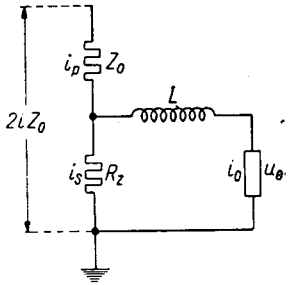
$$2Z_o i = Z_o i_p + pLi_o + u_o,$$

$$R_z i_s = pLi_o + u_o,$$

$$i_p = i_s + i_o.$$

W danym przypadku i_p stanowi całkowity prąd pioruna wpływający do układu. Z powyższych równań otrzymujemy:

$$i_o(p) = \frac{2Z_o R_z i - u_o(Z_o + R_z)}{pL(Z_o + R_z) + R_z Z_o}. \qquad (18)$$



Rys. 2. Obwód zastępczy ze stałymi skupionymi, dla przypadku z rys. 1 po wyeliminowaniu oporności falowej

Funkcja operatorowa odpowiadająca funkcji czasowej

$$i = Ie^{-\frac{t}{T}} \doteq \frac{Ip}{p + \frac{1}{T}}. \qquad (19)$$

Mamy więc

$$i_o(p) = \frac{p[2Z_o R_z I - u_o(Z_o + R_z)] - u_o(Z_o + R_z)\frac{1}{T}}{\left(p + \frac{1}{T}\right)\left[pL(Z_o + R_z] + R_z Z_o\right]} = \frac{M(p)}{N(p)}. \qquad (20)$$

Odnośną funkcję czasową możemy wyznaczyć stosując twierdzenie o rozkładzie

$$i_o(t) = \frac{M(0)}{N(0)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{M(p_k)}{p_k N'(p_k)} e^{p_k t}. \qquad (21)$$

Sumowanie należy rozciągać na wszystkie pierwiastki p_k równania $N(p) = 0$. W danym przypadku równanie to ma dwa pierwiastki:

$$p_1 = \frac{1}{T}, \qquad (22)$$

$$p_2 = -\frac{R_z Z_o}{L(Z_o + R_z)} = -\frac{1}{T_1}. \qquad (23)$$

Następnie wyznaczamy pochodną

$$N'(p) = 2pL(Z_o + R_z) + R_z Z_o + \frac{L}{T}(Z_o + R_z) \tag{24}$$

oraz wartość (20) dla $p = 0$

$$\frac{M(0)}{N(0)} = -\frac{u_o(Z_o + R_z)}{R_z Z_o}. \tag{25}$$

Podstawiając wyrażenia (23 ÷ 25) do (21) po przekształceniach otrzymujemy

$$i_o(t) = -\frac{u_o T_1}{L} + \frac{2IT}{T - T_1} e^{-\frac{t}{T}} + \left[\frac{u_o T_1}{L} - \frac{2IT}{T - T_1}\right] e^{-\frac{t}{T_1}}. \tag{26}$$

Wartość maksymalną prądu i_{om} wyznaczamy na podstawie warunku $\frac{di_o}{dt} = 0$. Wystąpi ona dla czasu

$$T_m = \frac{T_1 T}{T - T_1} \ln\left[\frac{2ILT - u_o T_1 (T - T_1)}{2ILT_1}\right]. \tag{27}$$

Wyrażenie na i_{om} otrzymujemy podstawiając T_m do wzoru (26).

4. PORÓWNANIE WYNIKÓW ROZWAŻAŃ OPARTYCH NA OBYDWU KONCEPCJACH ZASILANIA UKŁADU PRĄDEM PIORUNA

K. Berger w swych rozważaniach operuje całkowitym prądem pioruna wpływającym do układu $i_p = I_p e^{-\frac{t}{T}}$. Przeprowadza on obliczenia zarówno metodą fal wędrownych, jak i metodą eliminacji oporności falowej.

W obliczeniach pierwszą metodą Berger przyjmuje, że prądy płynące do odgromnika są małe w porównaniu z prądami w R_z, czyli że napięcie na R_z jest równe $i_p R_z$. Założenie to nie jest zawsze usprawiedliwione, dlatego też odpowiednie wzory otrzymane przez Bergera są słuszne tylko przy określonych stosunkach parametrów, które podaje on w swej pracy.

Obliczenia metodą fal wędrownych możemy przeprowadzić bez wprowadzania tych założeń upraszczających, biorąc pod uwagę układ obliczeniowy jak na rys. 3a.

Pierwszą falę składową w linii u_1' możemy wyznaczyć z zależności:

$$i_p = \frac{u_1'}{Z} + \frac{u_1'}{R_z},$$

stąd:

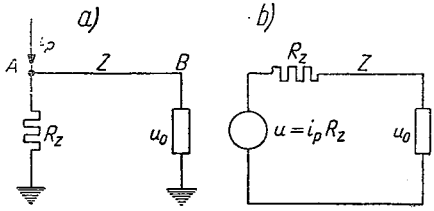
$$u_1' = i_p R_z \frac{Z}{Z + R_z}.$$

Wprowadzając w sposób formalny oznaczenia

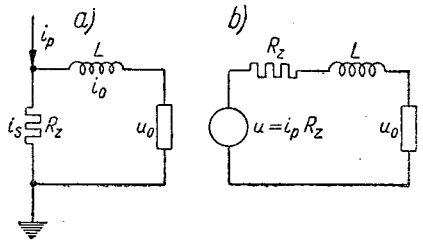
$$u = i_p R_z,$$

$$\alpha = \frac{Z}{Z + R_z} \tag{28}$$

otrzymamy na u_1' wzór o tej samej postaci co wzór (1). Stąd wynika, że układowi z rys. 3a odpowiada schemat podany na rys. 3b.



Rys. 3. Układ obliczeniowy (a) oraz odpowiadający mu schemat (b) przy operowaniu całkowitym prądem pioruna wpływającym do układu



Rys. 4. Układ obliczeniowy (a) ze stałymi skupionymi oraz odpowiadający mu obwód zastępczy (b), dla przypadku z rys. 3 po wyeliminowaniu oporności falowej

Dalszy bieg obliczeń jest taki sam jak w rozdz. 2. Otrzymujemy wzory na i_o oraz na n_m o identycznej postaci jak wzory (15) i (17), z tą różnicą, że obecnie należy podstawić do tych wzorów:

$$q = -\beta = \frac{Z - R_z}{Z + R_z}, \tag{29}$$

$$U = I_p R_z \tag{30}$$

oraz α wyrażone wzorem (28).

Obliczenia metodą eliminacji oporności falowej przeprowadził Berger wychodząc z układu obliczeniowego podanego na rys. 4a. Układowi temu odpowiada obwód zastępczy z rys. 4b, co wynika z zależności

$$i_p = i_s + i_o,$$

$$i_s R_z = (i_p - i_o) R_z = L \frac{di_o}{dt} + u_o.$$

Na prąd w odgromniku Berger otrzymuje wyrażenie:

$$i_o = \frac{I_p T}{T - T_2}\left(e^{-\frac{t}{T}} - e^{-\frac{t}{T_2}}\right) + \frac{u_o}{R_z}\left[e^{-\frac{t}{T_2}} - 1\right] \tag{31}$$

oraz na czas odpowiadający maksimum prądu i_{om} wyrażenie

$$T_m = \frac{T_2 T}{T_2 - T} \ln\left[\frac{I_p R_z T_2}{u_o(T_2 - T) + I_p R_z T}\right]. \tag{32}$$

gdzie

$$T_2 = \frac{L}{R_z}.$$

W celu porównania obydwu ujęć przeliczymy przykład podany przez Bergera korzystając z otrzymanych wzorów.

Przyjmujemy za Bergerem

$i_p = 25\ e^{-\frac{t}{70}}$ kA ($I_p = 25$ kA; $T = 70$ μs)
$Z = 500\ \Omega$
$R_z = 20\ \Omega$
$u_o = 50$ kV (odgromnik na napięcie znamionowe 10 kV)
$l = 500$ m
$L = 833{,}33$ μH.

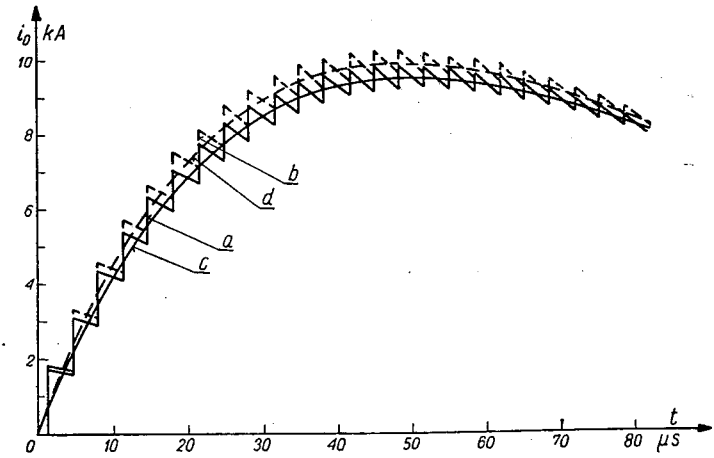
Tablica 1

Wielkość	Sposób zasilania układu prądem pioruna			
	Dany prąd zwarciowy pioruna I_z		Dany prąd całkowity pioruna I_p	
	Metoda		Metoda	
	fal wędrownych	eliminacji oporn. falowej	fal wędrownych	eliminacji oporn. falowej
i_{om} [kA]	9,7994	9,4908	10,202	9,8878
T_m [μs]	48,333	50,465	48,333	49,152

W tablicy 1 zestawiono wartości maksymalnego prądu w odgromniku i_{om} oraz czasu T_m, dla którego to maksimum występuje, obliczone dla obydwu koncepcji zasilania układu prądem pioruna. Przyjęto, że prąd zwarciowy I_z jest równy prądowi I_p oraz że $Z_o = 300\ \Omega$. Dla każdego sposobu zasilania układu prądem pioruna podano wyniki otrzymane metodą fal wędrownych oraz metodą eliminacji oporności falowej. Jak wynika z tablicy 1, obydwa ujęcia dają wyniki zbliżone.

W danym przypadku obliczenie metodą fal wędrownych wg wzorów podanych w publikacji Bergera nie może być przeprowadzone, gdyż przy przyjętych danych liczbowych założenie upraszczające wprowadzone przez Bergera nie jest spełnione i wzory dają wyniki zbyt mało dokładne.

Na rys. 5 linią ciągłą podano przebiegi prądu i_o w odgromniku w funkcji czasu, obliczone dla rozpatrywanego przykładu obydwoma metodami przy założeniu, że dany jest prąd zwarciowy pioruna, natomiast linią przerywaną — odpowiednie przebiegi prądu przy założeniu, że dany jest prąd



Rys. 5. Przebieg prądu w odgromniku: *a* — przebieg określony metodą fal wędrownych dla układu z rys. 1, *b* — analogiczny przebieg dla układu z rys. 3, *c* — przebieg określony metodą eliminacji oporności falowej dla układu z rys. 2, *d* — analogiczny przebieg dla układu z rys. 4

całkowity pioruna. Przy metodzie fal wędrownych otrzymujemy krzywe schodkowe — każdy skok i_o związany jest z przyjściem kolejnej fali składowej prądu. Z rys. 5 widać, że przy obydwu koncepcjach zasilania układu prądem pioruna przebieg krzywej dla obwodu ze stałymi skupionymi odpowiada przebiegowi mediany górnej i dolnej obwiedni odpowiedniej krzywej schodkowej.

W rozważaniach metodą fal wędrownych przy obydwu ujęciach pominięto obecność sąsiedniego przęsła (zaznaczonego na rys. 1 linią przerywaną), aby uzyskać ścisłą odpowiedniość układów obliczeniowych dla metody fal wędrownych i metody eliminacji oporności falowej. Metoda eliminacji oporności falowej nie pozwala na uwzględnienie obecności sąsiedniego przęsła.

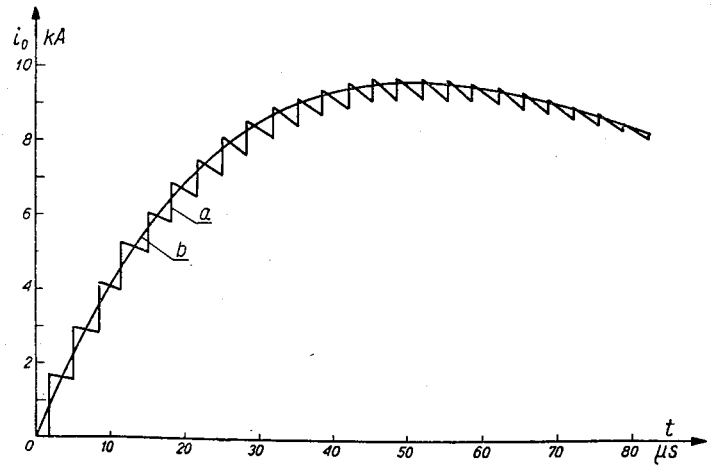
Przeprowadzając obliczenia metodą fal wędrownych możemy w łatwy sposób uwzględnić wpływ tego przęsła przyjmując, że jest ono nieskoń-

czenie długie. Wówczas np. operując danym prądem zwarciowym pioruna należy podstawić do wzorów (15) i (17) na α i β wyrażenia

$$\alpha = \frac{2\,\frac{1}{Z_o}}{\frac{1}{Z_o} + \frac{2}{Z} + \frac{1}{R_z}}, \tag{33}$$

$$\beta = -\frac{\left(\frac{1}{Z_o} + \frac{1}{R_z}\right)}{\frac{2}{Z} + \frac{1}{Z_o} + \frac{1}{R_z}}. \tag{34}$$

Dla rozważanego przykładu obliczeniowego otrzymamy wówczas $i_{om} =$ $= 9{,}5661$ kA. Na rys. 6 podano przebieg prądu w odgromniku w funkcji



Rys. 6. Przebieg prądu w odgromniku: *a* — przebieg określony metodą fal wędrownych dla układu z rys. 1 przy uwzględnieniu sąsiedniego przęsła, *b* — przebieg określony metodą eliminacji oporności falowej dla układu z rys. 2

czasu obliczony dla tego przypadku. Na rys. tym dla porównania nasieniono również odpowiedni przebieg prądu z rys. 5 otrzymany metodą eliminacji oporności falowej. Z rys. 6 widać, że przebieg tej krzywej dla dłuższych czasów zbliża się coraz bardziej do przebiegu górnej obwiedni krzywej schodkowej otrzymanej przy uwzględnieniu sąsiedniego przęsła.

5. WNIOSKI

Jak wynika z przeprowadzonych rozważań obydwie koncepcje zasilania układu prądem pioruna są praktycznie równoważne, o ile przyjąć, że prąd zwarciowy pioruna jest równy całkowitemu prądowi pioruna wpływającemu do układu. Wynik ten pokrywa się z wynikiem otrzymanym

przez J. L. Jakubowskiego [2] dla przypadku trafienia wierzchołka słupa przez piorun, a więc może być traktowany jako mający znaczenie ogólniejsze. W ten sposób możliwe jest porównywanie wyników obliczeń otrzymanych przy obydwu ujęciach, mimo ich teoretycznej różnicy.

W rozpatrzonym przypadku uderzenia pioruna w linię w niedużej odległości od odgromnika metoda eliminacji oporności falowej daje wyniki praktycznie pokrywające się z wynikami metody fal wędrownych. Całkowity współczynnik odbicia (z wyjątkiem pierwszej fali składowej) jest bliski 1 zgodnie z kryteriami podanymi w pracy [3]. Dla obydwu sposobów zasilania układu prądem pioruna przebieg krzywej otrzymanej metodą eliminacji oporności falowej odpowiada przebiegowi mediany górnej i dolnej obwiedni krzywej schodkowej.

Przy uwzględnieniu obecności sąsiedniego przęsła, co jest możliwe tylko dla metody fal wędrownych, otrzymujemy krzywą schodkową przebiegającą nieco niżej, tak że górna jej obwiednia dla dłuższych czasów ma przebieg zbliżony do przebiegu krzywej otrzymanej dla obwodu ze stałymi skupionymi.

Katedra Wysokich Napięć
Politechniki Warszawskiej

WYKAZ LITERATURY

1. Berger K.: Die Beanspruchung von Ueberspannungsableitern durch nahe Blitzeinschläge. — Bull. S. E. V. 1942 (33), s. 272.
2. Jakubowski J. L.: Uwagi o nowej redakcji Wskazówek ochrony odgromowej. — Przegląd Elektrotechn. 1957 (33), s. 422.
3. Jakubowski J. L.: Kryteria eliminacji oporności falowej przy odbiciach wielokrotnych. — Arch. El., t. III, 1954, z. 1, s. 69.

Я. Л. МАКСЕЕВСКИ

МЕТОДЫ РАСЧЁТА ТОКА В РАЗРЯДНИКЕ ВОВРЕМЯ УДАРА МОЛНИИ В ЛИНИЮ НА БЛИЗКОМ РАССТОЯНИИ ОТ РАЗРЯДНИКА

Резюме

Существуют разные взгляды относительно вопроса питания поражённого устройства током молнии. С одной точки зрения принимается, что канал молнии обладает определённым волновым сопротивлением Z_o. Помимо того, что применение понятия волнового сопротивления канала молнии встретилось с критикой ряда авторов, это понятие на практике значительно распространено. Чтобы избегнуть введения Z_o выдвинута другая концепция по которой принимается определённый полный ток молнии входящий в устройство в точке удара.

Случай удара молнии в линию на близком расстоянии от вентильного разрядника был рассмотрен К. Бергером [1], который принял, что известен полный ток молнии I_p.

Настоящая работа задаётся целью сравнения результатов рассуждений, полученных на основании этих теорий в указанном случае. Для того этот случай рассматривается принимая, что волна приходит из канала с волновым сопротивлением Z_0. Полагается, что известен тогда ток короткого замыкания молнии I_z. Такой подход не был анализирован Бергером.

Ток i_o текущий в разряднике рассчитывается двумя методами: методом блуждающих волн и методом исключения волнового сопротивления. Интересует нас максимальное значение этого тока i_{om} и время T_m (или очередный номер n_m соответственной составляющей волны в разряднике), в котором появляется это значение. Формулы для этих величин, полагая данным ток I_z, полученные методом блуждающих волн из цепи на рис. 1, представлены уравнениями (15) и (17); они получены методом исключения волнового сопротивления из цепи на рис. 2 уравнениями (26) и (27).

Если дан ток I_p, метод блуждающих волн (без введения упрощающего предположения применяемого Бергером, то есть цепи на рис. 3) ведёт к уравнениям такого же самого вида как (15) и (17) с тем, что выражения для некоторых параметров выступающих в этих уравнениях другие (28) ÷ (30). Метод исключения волнового сопротивления даёт тогда выражения (31) и (32) полученные Бергером (соответственная цепь представлена на рис. 4).

Для иллюстрации рассуждений приведён рассчётный пример. Принято, что ток I_z равен полному току молнии входящему в поражённое устройство. Результаты расчётов, полученные с помощью вышеуказанных методов представлены в таблице 1, а также в графическом виде на рис. 5 представляющим ток i в зависимости от времени. Непрерывные линии на этом рисунке соответствуют положению, что дан ток I_z, а прерывные линии положению, что дан ток I_p.

Оба подхода дают приближенные результаты, следовательно они практически эквивалентны. В обеих описыванных постановках вопроса форма кривой полученной методом исключения волнового сопротивления соответствует форме верхней медианы и нижней огибающей ступенчатой кривой.

J. L. MAKSIEJEWSKI

METHODS OF CALCULATION OF CURRENT IN A LIGHTNING-ARRESTER IN THE CASE OF A LIGHTNING STROKE TO THE LINE NEAR THE ARRESTER

Summary

There are different views on the question of feeding a struck system by lightning current. According to one view it is assumed that lightning channel represents surge impedance Z_o. Although the use of this conception met objections of some authors, such idea found considerable applications in practice. In order to avoid the introduction of Z_o another conception was put forward, according to which, definite total lightning current flowing into the system at the stricken point is assumed.

The case of a lightning stroke to the line near the valve-type lightning-arrester was considered by K. Berger [1] with the assumption of the given total lightning current I_p.

The object of the present paper is a comparison of results of considerations based on both conceptions for this case. Therefore the case is examined with the postulate that the current wave travels down a channel with surge impedance Z_o. It is assumed

also that current I_z is given. I_z being the current the stroke could deliver to a zero resistance ground. This opproach was not analysed by Berger.

The current i_o flowing in the lightning-arrester is calculated by two methods, viz. the travelling wave method and the method of elimination of surge impedance. The maximal value of this current i_{om} and the time T_m (or number n_m of the corresponding component wave in the arrester) for which this value appears, are of special interest. The expressions for these quantities with the assumption of the given current I_z, obtained by the method of travelling waves from the circuit in Fig. 1 are presented by (15) and (17), and received by the method of elimination of surge impedance from the circuit in Fig. 2 — by (26) and (27).

When current I_p is given the method of travelling waves (without introducing the simplified assumption brought by Berger, i. e. taking into consideration the circuit in Fig. 3) leads to equations of the same form as (15) and (17), only formulae for some parameters appearing in these equations being different (28) — (30). The method of elimination of surge impendance gives then expressions (31) and (33) obtained by Berger (the corresponding circuit is shown in Fig. 4).

The considerations are illustrated by a numerical example. It is assumed here that the current I_z is equal to the total lightning current flowing into the struck system. The results of computations, obtained by means of both methods are presented in Table 1 and in a graphic form by curves in Fig. 5 giving current i_o as the function of time. The continuous lines in this figure correspond to the assumption of given current I_z, and dotted lines — to the assumption of given current I_p.

The results obtained with one of these assumptions approach closely to the results obtained with the other assumption and, therefore both assumptions can be treated from the practical point of view as equivalent. For both postulates, the curve received by the method of elimination of surge impedance is identical with the median of the corresponding stepped line obtained by the method of travelling waves.

© Институт Гуманитарных Исследований

621.317.66 : 621.313.333

FELIKS ANDRZEJEWSKI, ZBIGNIEW ORZESZKOWSKI

Kalometryczna metoda pomiaru sprawności silników asynchronicznych chłodzących wodą

Rękopis dostarczono 21.4.1958.

W artykule podana jest kalorymetryczna metoda pomiaru strat w przypadku użycia wody jako czynnika chłodzącego. Przeprowadzono analizę dokładności pomiaru strat i sprawności. Określono wielkość obszaru tolerancji objętego błędem pomiaru. Porównano otrzymane wyniki z wynikami uzyskanymi z pomiaru metodą strat poszczególnych. W oparciu o przeprowadzoną analizę wyciągnięto wnioski.

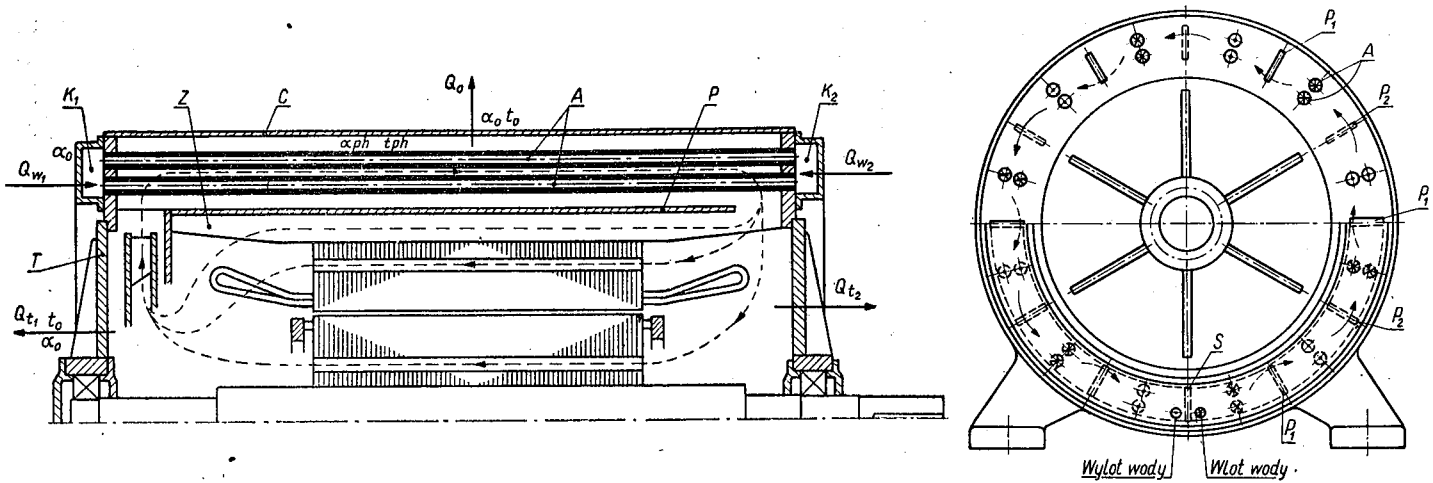
1. WSTĘP

Pomiar sprawności maszyn elektrycznych normalnie jest przeprowadzany przez pomiar strat poszczególnych bądź strat ogólnych lub też przez pomiar bezpośredni mocy wejściowej i wyjściowej.

Można również dokonać pomiaru sprawności maszyny metodą kalorymetryczną, opartą na pomiarze ilości ciepła odpowiadającego stratom maszyny. Ponieważ do takiego pomiaru potrzebne jest określenie przyrostu temperatur czynnika chłodzącego oraz jego ilości, więc metoda ta może być zastosowana we wszystkich maszynach, gdzie taki pomiar jest możliwy. W zależności od rodzaju użytego czynnika i rozwiązania obiegu chłodzącego zmienia się tylko sposób pomiaru ilości czynnika.

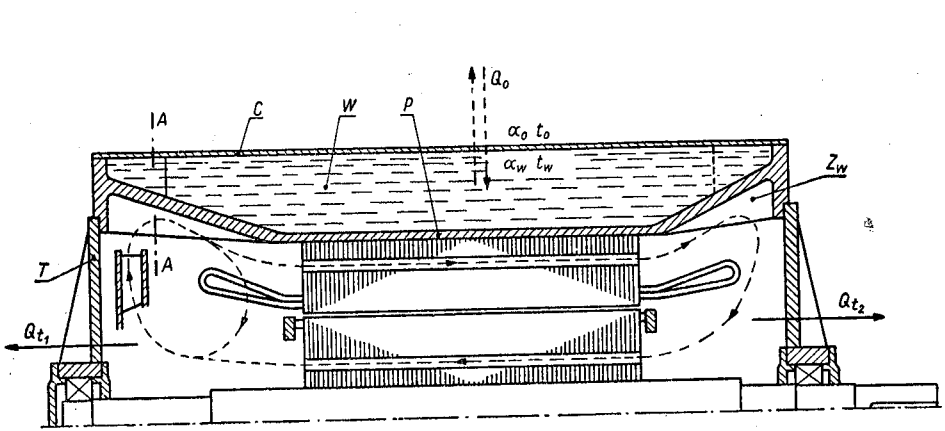
Metoda kalorymetryczna pozwala w sposób łatwy, prosty i szybki określić sprawności z dużą dokładnością oraz pozwala na prowadzenie pomiarów nawet w czasie pracy maszyny, co daje możliwość kontroli ciągłej stanu cieplnego przy różnych obciążeniach.

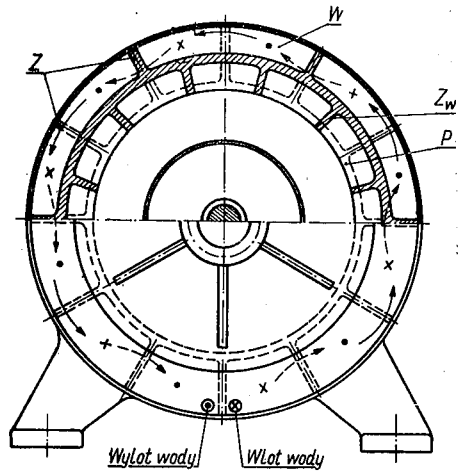
W pracy tej podana jest metoda kalorymetryczna pomiaru strat ze szczególnym zastosowaniem jej do chłodzenia wodnego maszyn asynchronicznych budowy zamkniętej [1]. Przeprowadzona jest analiza dokładności pomiaru strat i analiza dokładności pomiaru sprawności. Porównano wyniki analizy z wynikami osiąganymi sposobem strat poszczególnych. Na podstawie przeprowadzonych analiz wyciągnięto wnioski ogólne.



Rys. 1. Silnik rurowy (woda przepływa rurami A, a powietrze gorące między rurami)

Q_0 — ilość ciepła oddawana przez powietrze gorące do otoczenia; $Q_w=Q_{w1}+Q_{w2}$ — ilość ciepła, którą przejmuje woda z otoczenia przez komory K_1 i K_2; $Q_t=Q_{t1}+Q_{t2}$ — ilość ciepła oddawana do otoczenia przez obie tarcze T; α_0, α_{ph} — współczynniki przejmowania ciepła z zewnętrznej i wewnętrznej powierzchni osłony C; t_o, t_{ph} — temperatura powietrza otaczającego i temperatura powietrza między rurami; A — rury, przez które płynie woda; C — zewnętrzna osłona silnika; K_1, K_2 — komory wodne, w których znajdują się przegrody p_1 i p_2; S — przegrody w komorze K_1 i K_2 uniemożliwiające łączenie się wody wlotowej z wylotową; P — wewnętrzna osłona chłodnicy; T — tarcze; Z — żebra. Strzałki przerywane pokazują przepływ wody z jednego układu rur do drugiego w komorze K_2, strzałki zaś ciągłe w komorze K_1; kropka oznacza kierunek przepływu wody do patrzącego, a krzyżyk od patrzącego





Rys. 2. Silnik płaszczowy (woda przepływa między dwoma płaszczami)

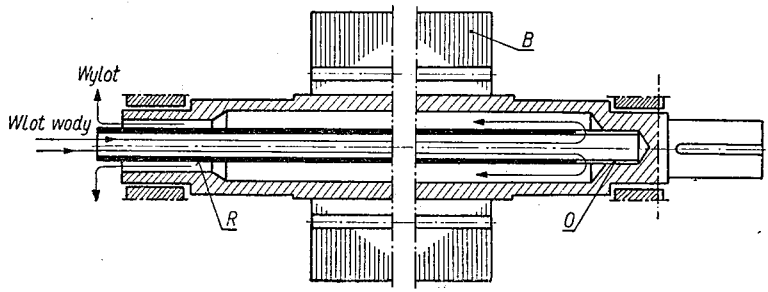
Q_0 — ilość ciepła wymieniana przez wodę z powietrzem otaczającym; $Q_t = Q_{t1} + Q_{t2}$ — ilość ciepła oddawana do otoczenia przez obie tarcze T; α_0, α_w —.współczynniki przejmowania ciepła dla powietrza z zewnętrznej powierzchni osłony i dla wody z powierzchni wewnętrznej; t_0, t_w — temperatura powietrza otaczającego i temperatura wody w komorze, C — zewnętrzna osłona silnika; P — wewnętrzny cylinder kadłuba; T — tarcze; W — komory wodne; Z_w — żebra wewnętrzne; Z — żebra komór wodnych

2. ZASADNICZE TYPY SILNIKÓW ZAMKNIĘTYCH CHŁODZONYCH WODĄ

Chłodzenie wodne silników może być zastosowane tylko w stojanie lub też w stojanie i wirniku jednocześnie. Możliwe są dwa zasadnicze sposoby chłodzenia wodnego stojana: gdy woda przepływa przez rury chłodnicy, a gorące powietrze w przestrzeni między nimi, rys. 1, oraz gdy woda przepływa między płaszczami — wewnętrznym i zewnętrznym, rys. 2, [1]. Oczywiście, że każdy z poszczególnych typów może mieć różnorodne rozwiązania konstrukcyjne.

Obydwa te rozwiązania pod względem pomiaru ilości ciepła są zupełnie równoważne, występują tylko pewne różnice tyczące wymiany ciepła bezpośrednio z powietrzem otaczającym, z pominięciem układu pomiarowego.

Rozwiązanie chłodzenia wodnego wirnika podane jest na rys. 3. Przez rurę R umieszczoną wewnątrz osiowego wytoczenia w wale doprowadzona jest woda, która przez otwory O w końcowej części rury wypływa i omywa wewnętrzną powierzchnię wału.



Rys. 3. Wał chłodzony wodą
B — pakiet blach wirnika; R — rura doprowadzająca wodę, O — otwory, przez które woda wypływa z rury doprowadzającej

Jeżeli w silniku zastosowane jest jednocześnie chłodzenie wodne stojana i wirnika, wtedy obydwa obiegi wody mogą być zasilane osobno lub też połączone szeregowo, tworząc jeden obieg. Ostatni sposób zasilania jest konstrukcyjnie prostszy i zużycie wody jest mniejsze, lecz stosować można go wtedy, jeżeli średnica wewnętrzna wału i ilość przepływającej wody zapewniają żądaną intensywność przejmowania ciepła.

3. ILOŚCI CIEPŁA WYMIENIANE BEZPOŚREDNIO Z POWIETRZEM OTACZAJĄCYM

W opisanych wyżej układach cieplnych, część ciepła jest oddawana lub też pobierana z otoczenia, przez co ilość ciepła przejęta przez wodę jest mniejsza lub większa niż ilość odpowiadająca wytworzonym stratom.

W tych rozważaniach będzie uwzględnione tylko ciepło oddawane przez konwekcję i przewodzenie, ilość zaś ciepła, która zostanie odprowadzona przez promieniowanie, jako pomijalnie mała, nie będzie uwzględniana.

Ponieważ w maszynach elektrycznych ścianki kadłuba, przez które następuje wymiana ciepła są bardzo cienkie w stosunku do średnic, w obliczeniach więc można przyjąć, że przenikanie ciepła odbywa się przez ścianki płaskie.

Ilość ciepła Q przechodząca przez ściankę z jednego ośrodka o współczynniku przejmowania ciepła α_1 i temperaturze t_1 do ośrodka o współczynniku α_2 i temperaturze t_2, na podstawie wzorów Newtona i Fouriera, dla ścianki płaskiej wynosi

$$Q = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 F_1} + \frac{b}{\lambda F_1} + \frac{1}{\alpha_2 F_2}} \text{ [kcal/h]}, \tag{1}$$

gdzie α_1, α_2 — współczynniki przejmowania ciepła z dwu stron ścianki [kcal/m^{2}h°C],

F_1, F_2 — powierzchnie ścianki [m^2],

b — grubość ścianki [m],

λ — przewodność cieplna ścianki [kcal/m h°C].

Przy niewielkich grubościach ścianek, znacznej wartości przewodności cieplnej i dużej powierzchni, co zazwyczaj zachodzi w odniesieniu do osłon wewnętrznych i zewnętrznych oraz tarcz, można przyjąć $\frac{b}{\lambda F_1} \approx 0$ i wtedy otrzymamy wzór (1) w postaci uproszczonej

$$Q = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha_1 F_1} + \frac{1}{\alpha_2 F_2}} \text{ [kcal/h]}. \tag{2}$$

W przypadku gdy powietrze gorące przepływa między rurami chłodnicy (rys. 1), to jego temperatura $t_1 = t_{ph}$ jest wyższa od temperatury powietrza otaczającego $t_2 = t_0$ i pewna ilość ciepła Q_0 przy określonych współczynnikach $\alpha_2 = \alpha_0$ i $\alpha_1 = \alpha_{ph}$ przejdzie bezpośrednio do powietrza i nie zostanie uwzględniona w bilansie. Ponieważ współczynnik przejmowania ciepła α_0 z zewnętrznej powierzchni stojana jest mały (przejmowanie ciepła w ruchu swobodnym), więc ilość ciepła Q_0 jest mała. Jak wynika z przykładów liczbowych [1], ta ilość ciepła wynosi około 1,7% ogólnej ilości ciepła wytworzonego w maszynie.

Pewna ilość ciepła zostaje również wymieniona między powietrzem a wodą przepływającą przez komory K_1 i K_2, rys. 1. W zależności od tego, czy średnia temperatura wody będzie wyższa, czy też niższa od temperatury powietrza, woda będzie oddawać lub też przejmować ciepło. Ponieważ na ogół średnia temperatura wody jest niższa, więc będzie ona przej-

mować pewną ilość ciepła z powietrza. Ze względu na niewielką wartość α_0 oraz małe powierzchnie komór, ta ilość ciepła jest nieznaczna i kompensuje częściowo ciepło oddawane przez zewnętrzną powierzchnię stojana, tak że ogólnie biorąc, całkowita ilość ciepła oddawanego tą drogą nie przekroczy 1,5%.

W przypadku gdy woda chłodząca wypełnia przestrzeń między dwoma płaszczami (rys. 2), wówczas — podobnie jak poprzednio dla komór — zależnie od wielkości temperatur wody i powietrza ciepło będzie przez nią przejmowane lub oddawane. Różnica temperatur wody i powietrza otaczającego jest zawsze mniejsza niż poprzednio rozpatrywana różnica temperatur powietrza gorącego w chłodnicy i powietrza otaczającego, więc przy tej samej wartości współczynnika α_0 ilość przejmowanego ciepła Q_0 jest tu mniejsza i na podstawie liczbowych wyników [1] przy $t_w < t_p$ wynosi około 1,5% całkowitej ilości ciepła wydzielonego w maszynie. Jak widać, ilość przejmowanego ciepła jest tej samej wielkości co wypadkowa ilość ciepła oddawana w przypadku gdy woda przepływa przez rury (rys. 1).

Jeszcze jedną drogą, którą przechodzi ciepło na zewnątrz, niezależnie od rozwiązania obiegu chłodzącego, są tarcze. Tak samo jak w poprzednio rozpatrywanych przypadkach tę ilość ciepła określa tu zasadniczo α_0, więc jest ona również niewielka. Z przeliczeń liczbowych [1] wynika, że ilość ciepła oddawana przez obie tarcze wynosi około 1,5% całej ilości ciepła. Jest to ten sam rząd wielkości co w przypadkach poprzednio rozpatrzonych. Wszędzie tam, gdzie występuje przejmowanie ciepła przez konwekcję swobodną, ilości te nie są duże z uwagi na małe wartości α_0, które zmieniają się niewiele w szerokich nawet granicach różnicy temperatur [1].

Streszczając, można powiedzieć, że w pierwszym typie chłodzenia (woda przepływa przez rury) całkowita ilość ciepła nie objęta bilansem cieplnym wynosi około 3%, w drugim zaś (woda przepływa między płaszczami) może wynosić od 0 do 1,5%.

Omówione ilości ciepła można uwzględnić na podstawie obliczeń wg wzorów (1) lub (2) albo też przyjąć szacunkowo.

4. ZASADA POMIARU METODĄ KALORYMETRYCZNĄ

W przypadku gdy maszyna znajduje się w stanie cieplnym ustalonym, praktycznie całe ciepło wytworzone przez straty w żelazie i obciążenia, bez uwzględnienia strat mechanicznych, odprowadzane jest za pośrednictwem wody chłodzącej. Mierząc więc odpowiednie parametry i zestawiając bilans cieplny powyższe straty można wyznaczyć. Możliwe są tu dwa sposoby pomiaru — bezpośredni i porównawczy.

Stosując pierwszy sposób mierzy się ilość i czas przepływu oraz różnicę temperatur między wylotem i wlotem wody chłodzącej. Na podstawie bilansu cieplnego

$$0{,}239\,S \cdot \tau_m = C_w V \vartheta_m$$

otrzymamy

$$S = 4{,}18 \frac{C_w V \vartheta_m}{\tau_m} \text{ [kW]}, \tag{3}$$

gdzie:

S — straty odprowadzane przez wodę chłodzącą [kW],

V — ilość wody [kg],

C_w — ciepło właściwe wody $\left[\frac{\text{cal}}{\text{g°C}}\right]$,

ϑ_m — różnica temperatur wody chłodzącej między wylotem i wlotem [°C],

τ_m — czas pomiaru [sec].

Drugi sposób pomiaru polega na porównaniu ilości ciepła odprowadzonego z ilością ciepła wytworzoną przez grzejnik elektryczny o znanej mocy.

W tym celu mierząc przyrost temperatury wody chłodzącej ϑ_m oraz czas przepływu τ_m zbiera się jednocześnie wypływającą z maszyny wodę do kalorymetru, w którym umieszczona jest spirala grzejna. Zebraną w czasie τ_m wodę podgrzewa się elektrycznie mierząc czas podgrzewania i przyrost temperatury przy znanej mocy grzejnika. Średnio biorąc przy różnicy temperatur wody wlotowej i wylotowej wynoszącej 20°C, czasie pomiaru 6 min, dla maszyny o mocy 1000 kW, pojemność kalorymetru wynosi około 0,3 m^3.

Na podstawie bilansu cieplnego strat w maszynie

$$0{,}239\,S\,\tau_m = C_w V \vartheta_m$$

i bilansu cieplnego w termostacie

$$0{,}239\,P_t\,\tau_t = C_w V \vartheta_t$$

otrzymamy straty wyrażone zależnością

$$S = \frac{\vartheta_m}{\vartheta_t} \cdot \frac{\tau_t}{\tau_m} P_t \text{ [kW]}, \tag{4}$$

gdzie:

P_t — moc doprowadzona do grzejnika [kW]; sprawność grzejnika zanurzonego całkowicie w wodzie $\eta_t = 100\%$,

ϑ_t, τ_t — przyrost temperatury [°C] i czas podgrzewania wody w termostacie [sec].

Pomiar, a w związku z tym i obliczanie wyniku, można znacznie uprościć rozpoczynając i kończąc podgrzewanie elektryczne jednocześnie z doprowadzeniem wody do termostatu, wtedy

$$\tau_m = \tau_t$$

i wzór (4) przyjmie postać

$$S = \frac{\vartheta_m}{\vartheta_t} P_t [\text{kW}]. \tag{5}$$

Jak widać ze wzoru (5), porównawczy sposób pozwala również uniknąć pomiaru czasów τ_m i τ_f.

5. POMIAR WIELKOŚCI WCHODZĄCYCH DO RÓWNANIA BILANSU

Dokładność pomiaru strat S zależy zasadniczo od prawidłowego sposobu pomiaru i odpowiednio dobranej aparatury dla określonych wielkości.

5.1. Pomiar czasu

Wchodzące do równania (4)wielkości czasów τ_m i τ_t mierzy się przy pomocy sekundomierza. Uchyb wskazań tego przyrządu jest zwykle rzędu $\pm$ 0,2 sec. Opóźnienie lub przyspieszenie reakcji wykonującego pomiar na początku i na końcu pomiaru szacuje się łącznie na $\pm$ 0,3 sec. Uchyb bezwzględny pomiaru czasu będzie zatem rzędu $\pm$ 0,5 sec, przy czym jest on praktycznie niezależny od długości trwania pomiaru.

5.2. Pomiar ilości wody

Ilość wody V najłatwiej można wyznaczyć przez zważenie. Spodziewany uchyb względny w przypadku użycia zwykłej wagi dziesiętnej wyniesie około $\pm$ 1%. Nie wyklucza się tu oczywiście stosowania innych sposobów pomiaru, jak np. wycechowanego zbiornika, licznika itp. których uchyb jest tego samego rzędu.

5.3. Pomiar mocy P

Moc P_t określa się przy pomocy watomierza precyzyjnego klasy 0,2 lub 0,5. Zakresy prądowe i napięciowe należy dobierać w ten sposób, aby mierzyć przy możliwie pełnym wychyleniu, ponieważ uchyb względny jest określony wzorem

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\% = \frac{kl.\,\alpha_m}{\alpha}\%,$$

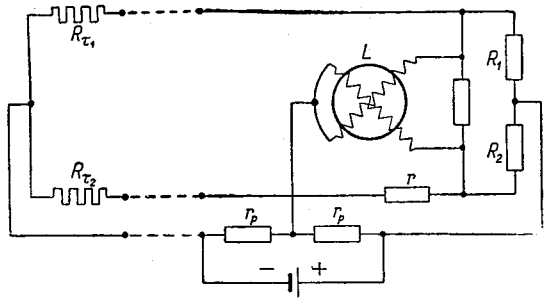
gdzie:

kl — klasa przyrządu,
α — wychylenie w działkach w czasie pomiaru,
α_m — całkowita ilość działek.

W przypadku gdy w czasie pomiaru występują wahania napięcia zasilającego, bardzo dobre usługi może oddać licznik kWh, który jako przyrząd całkujący eliminuje jednoczenie potrzebę pomiaru czasu τ_t. Przy odpowiednio dobranym i wycechowanym liczniku uchyb względny pomiaru będzie rzędu $\pm$ 1%. Czas pomiaru jest tu stosunkowo duży, rzędu kilkunastu minut, co jest ujemną stroną stosowania licznika.

5.4. Pomiar przyrostów temperatur ϑ_m i ϑ_t

Pomiar przyrostu temperatury powinien być przeprowadzany bezpośrednio, a nie na drodze pośredniej przez odejmowanie wyników z pomiarów poszczególnych temperatur. W ostatnim przypadku bowiem błąd pomiaru jest duży, zwłaszcza gdy poszczególne temperatury mało się od siebie różnią. Wobec powyższego najsłuszniejsze jest przeprowadzenie pomiaru przy pomocy termometrów oporowych w układzie różnicowym, rys. 4. Układy takie są dostosowane do pomiaru małych różnic temperatur



Rys. 4. Mostek różnicowy do pomiaru przyrostu temperatury

R_{τ_1}, R_{τ_2} — termometry oporowe; R_1, R_2 — oporniki stosunkowe; r_p — dzielnik napięcia; r — opornik wyrównawczy; L — logometr

i w przypadku dokładnie zrównoważonych termometrów, w optymalnych warunkach, przy różnicy temperatur $\vartheta \approx 20°C$, dają uchyb nie większy od $\pm$ 0,3°C. W związku z tym w czasie pomiaru należy tak regulować przepływ wody chłodzącej oraz moc zasilającą grzejnik w termostacie, ażeby uzyskać takie wartości ϑ_m i ϑ_t, dla których występuje optimum dokładności pomiaru.

Aby uniknąć odejmowania temperatur przy określaniu przyrostu ϑ_t, należy zastosować układ odniesienia wten sposób, aby na początku pomiaru było $\vartheta_t = 0$. W tym celu stosuje się dodatkowy termostat, w którym zebrana jest woda mająca temperaturę wyjścia z maszyny, w drugim zaś woda wyjściowa, która jest podgrzewana przez grzejnik. Po osiągnięciu żądanego przyrostu ϑ_t grzejnik zostaje wyłączony.

Ponieważ jednak osłony termometrów oporowych posiadają pewną pojemność cieplną, która powoduje opóźnienie wskazań przyrządu, należy więc przed odczytem zawsze odczekać pewien czas, zwykle 1 $\div$ 2 min, aż wskazanie logometru ustali się. Ten konieczny czas „odczekania" nie wpływa na dokładność pomiaru przyrostów temperatur ϑ_m i ϑ_t, gdyż pozostają one stałe przez czas wielokrotnie dłuższy.

Nieznaczne uchyby przypadkowe, które ewentualnie mogą wystąpić przy odczycie ϑ_m, można zmniejszyć do minimum przez określenie wartości średniej z kilku pomiarów.

6. ANALIZA DOKŁADNOŚCI POMIARU METODĄ KALORYMETRYCZNĄ

W oparciu o zależności matematyczne wyrażające uchyb graniczny przeanalizowana będzie dokładność pomiaru strat. W rozważaniach pominięty zostanie uchyb przypadkowy, co jest normalnie stosowane w pomiarach technicznych, gdy uchyb ten jest mniejszy od 1/3 uchybu granicznego. Takie uproszczenie nie wpływa na dokładność wyników, ponieważ określony uchyb graniczny daje już wyniki najniekorzystniejsze.

Przy pomiarze bezpośrednim (rozdz. 4) mierzone straty S są funkcją przyrostu temperatury, czasu i ilości wody dla obciążenia $P_2 = \text{const}$.

$$S = f(\vartheta_m, \tau_m, V),$$

a ogólny wzór na uchyb ma postać

$$\frac{dS}{S} = \frac{\partial S}{\partial \vartheta_m} \cdot \frac{d\vartheta_m}{S} + \frac{\partial S}{\partial \tau_m} \cdot \frac{d\tau_m}{S} + \frac{\partial S}{\partial V} \cdot \frac{dV}{S} \cdot \tag{6}$$

Zastępując przyrosty nieskończone wrównaniu (6) wartościami skończonymi, odpowiadającymi uchybom pomiarów poszczególnych parametrów, oraz przyjmując warunki najniekorzystniejsze, tzn. takie, że wszystkie uchyby dodają się, otrzymamy

$$\frac{\Delta' S}{S}\,\% = \pm\left(\frac{\Delta\vartheta_m}{\vartheta_m} + \frac{\Delta\tau_m}{\tau_m} + \frac{\Delta V}{V}\right) 100\,\%. \tag{7}$$

Przy pomiarze porównawczym [wzór (4)] wielkość mierzona jest funkcją następujących parametrów

$$S = f(\vartheta_m, \vartheta_t, \tau_m, \tau_t, P_t);\ P_2 = \text{const}$$

i uchyb graniczny określa wzór

$$\frac{\Delta' S}{S}\,\% = \pm\left(\frac{\Delta\vartheta_m}{\vartheta_m} + \frac{\Delta\vartheta_t}{\vartheta_t} + \frac{\Delta\tau_m}{\tau_m} + \frac{\Delta\tau_t}{\tau_t} + \frac{\Delta P_t}{P_t}\right) 100\,\%. \tag{8}$$

Dla warunków, gdy $\tau_m = \tau_t$ wzór (8) przyjmuje postać następującą:

$$\frac{\Delta' S}{S}\,\% = \pm\left(\frac{\Delta\vartheta_m}{\vartheta_m} + \frac{\Delta\vartheta_t}{\vartheta_t} + \frac{\Delta P_t}{P_t}\right) 100\,\%. \tag{8a}$$

We wzorach (7), (8) i (8a) przyjmuje się, że ilość ciepła wymieniona z powietrzem przez tarcze i powierzchnie zewnętrzne (rozdz. 3) jest uwzględniona w bilansie cieplnym, a błąd pozostający z niedokładności tych obliczeń bądź z oszacowania, jako bardzo mały, może być pominięty. Gdyby te ilości ciepła nie były uwzględnione w bilansie, wtedy uchyb tym spowodowany należałoby uwzględnić przy obliczaniu uchybu pomiaru strat.

Z równań (7), (8) i (8a) wynikają następujące wnioski.

1. Dokładność pomiaru każdego z parametrów decyduje w tym samym stopniu o dokładności wyniku ostatecznego. W związku z tym należy zwrócić największą uwagę na pomiary ϑ_m i ϑ_t jako najtrudniejsze do wykonania.

2. Przy prawidłowym wykonaniu pomiaru sposobem bezpośrednim jak również porównawczym straty S będą określone z dokładnością tego samego rzędu, a o doborze sposobu pomiaru decyduje tylko posiadana aparatura i ewentualnie prostota wykonania samego pomiaru.

Dla porównania rozpatrzymy przykład liczbowy ilustrujący wielkość uchybu przy pomiarze bezpośrednim i porównawczym.

a. Pomiar bezpośredni

dane: $\vartheta_m = 16°C$, uchyb $\Delta\vartheta_m \approx \pm 0{,}3\ °C$,
$\tau_m = 200$ sec, uchyb $\Delta\tau_m \approx \pm 0{,}5$ sec,
$V = 60$ kg, uchyb $\Delta V \approx \pm 0{,}6$ kg;

na podstawie wzoru (7) otrzymamy

$$\frac{\Delta' S}{S}\% = \pm\left(\frac{0{,}3}{16} + \frac{0{,}5}{200} + \frac{0{,}6}{60}\right)100 \approx \pm 3{,}1\ \%.$$

b. Pomiar porównawczy

dane: $\vartheta_m = 16°C$, uchyb $\Delta\vartheta_m \approx \pm 0{,}3\ °C$,
$\vartheta_t = 20°C$, uchyb $\Delta\vartheta_t \approx \pm 0{,}3\ °C$,
watomierz do pomiaru mocy grzejnika klasy 0,2,
całkowita ilość działek $\alpha_m = 150$,
wychylenie w czasie pomiaru $\alpha = 125$ działek;

ze wzoru (8a) będzie

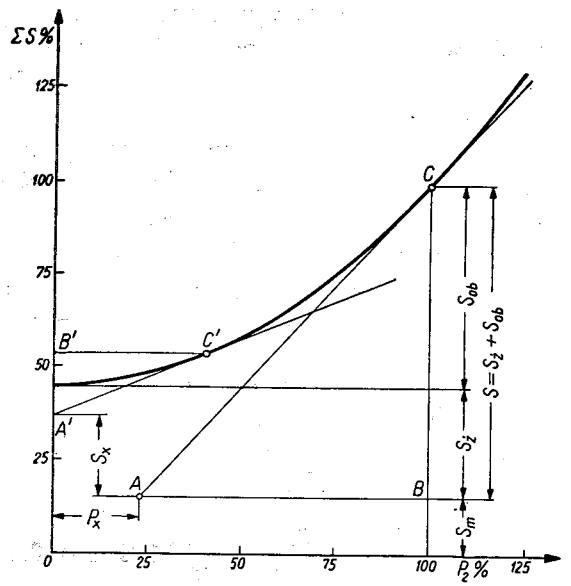
$$\frac{\Delta' S}{S}\% = \pm\left(\frac{0{,}3}{16} + \frac{0{,}3}{20} + \frac{0{,}3}{125}\right)100 \approx \pm 3{,}6\%.$$

Niezależnie od uchybu pochodzącego z pomiarów cieplnych $\Delta' S$ występuje jeszcze uchyb $\Delta'' S$, pochodzący z niedokładnego ustalenia mocy obciążenia P_2. Moc ta wyznaczana jest na drodze pomiarowej i przy zazwyczaj stosowanych sposobach obciążenia określana jest z uchybem $\pm$ (1 ÷ ÷ 3)%. Uchyb $\Delta'' S$ można określić z krzywej $S = f(P_2)$ podanej na rys. 5. Przyjmujemy, że w przedziale określonym błędem ΔP_2 odcinek krzywej jest linią prostą. Z trójkąta ABC odpowiadającego $P_2 > 0{,}5\ P_{2n}$ otrzymamy następującą zależność:

$$\frac{S}{P_2 - P_x} = \frac{S \pm \Delta'' S}{P_2 - P_x \pm \Delta P_2},$$

stąd

$$\frac{\Delta'' S}{S} = \pm \frac{\Delta P_2}{P_2 - P_x} \quad S \text{ lub } \frac{\Delta'' S}{S}\% = \pm \frac{\Delta P_2}{P_2 - P_x} 100\%. \tag{9}$$



Rys. 5. Zależność $\Sigma S\% = f(P_2\%)$, na podstawie której wyznacza się uchyb $\frac{\Delta''S}{S}\%$

Dla obciążeń $P_2 < 0{,}5\, P_{2n}$ (trójkąt $A'B'C'$) otrzymamy

$$\frac{P_2}{S - S_x} = \frac{P_2 \pm \Delta P_2}{S - S_x \pm \Delta''S},$$

skąd

$$\Delta''S = \pm (S - S_x)\frac{\Delta P_2}{P_2}, \tag{10}$$

lub

$$\frac{\Delta''S}{S}\% = \pm \frac{(S - S_x)}{S} \cdot \frac{\Delta P_2}{P_2} 100\%. \tag{11}$$

Wykres na rys. 5 wykonany jest w oparciu o średnie wartości strat otrzymanych z badań większej ilości silników indukcyjnych o danych znamionowych $U = 6000$ V, $P_2 = 250 \div 1000$ kW, $n = 485 \div 1470$ obr/min [4], dla których mamy następujący procentowy udział poszczególnych strat:

straty mechaniczne $S_m \approx 15\%\ \Sigma S$,

straty w żelazie $S_z \approx 30\%\ \Sigma S$,

straty obciążenia $S_{obc} \approx 55\%\ \Sigma S$.

Na podstawie wzoru (9) i wykresu (rys. 5), przyjmując $\Delta P_2 = \pm (1 \div 3)\%$, otrzymamy dla znamionowego obciążenia uchyb dodatkowy wynoszący

$$\frac{\Delta''S}{S}\,\% \approx (1 \div 3)\frac{100}{100-23} \approx 1{,}5 \div 4\%.$$

Wobec tego straty wyznaczone metodą kalorymetryczną, tzn. straty w żelazie i obciążenia, obarczone są całkowitym uchybem systematycznym granicznym wynoszącym

$$\frac{\Delta S}{S}\,\% = \pm\left(\frac{\Delta' S}{S}\,\% + \frac{\Delta'' S}{S}\,\%\right) = \pm\,(5 \div 8)\,\% \tag{12}$$

Jak już wspomniano poprzednio, w bilansie cieplnym wody chłodzącej nie ujęte były straty mechaniczne S_m, składające się ze strat tarcia w łożyskach S_t i mocy wentylatora S_w.

$$S_m = S_t + S_w.$$

Mocy pobieranej przez pompę zgodnie z PN-55/E-06000 nie uwzględniono. Całkowite zatem straty w maszynie wynoszą

$$\sum S = S + S_m. \tag{13}$$

a ich uchyb graniczny

$$\frac{\Delta \sum S}{\sum S}\,\% = \pm\frac{\Delta S + \Delta S_m}{\sum S}\,100\%. \tag{14}$$

Ponieważ straty mechaniczne stanowią małą część całkowitych strat, więc ich uchyb występujący w wyrażeniu (14) wpływa w nieznacznym tylko stopniu na wielkość $\Delta \Sigma S$, co pozwala na stosunkowo mało dokładny pomiar tych strat. Straty mechaniczne można określić jednym z podanych sposobów:

a. przyjęcie szacunkowe (lub obliczenie),
b. pomiar strat tarcia w łożyskach przez pomiar przyrostu temperatury oleju (metodą kalorymetryczną), strat wentylacyjnych z obliczeń,
c. pomiar strat w łożyskach i wentylacji z pomiarów biegu luzem.

Pierwszy z podanych sposobów jest najprostszy, lecz daje dość duże uchyby, w granicach $\pm$ 20%.

Drugi sposób jest oparty częściowo na obliczeniach, częściowo zaś na pomiarze i w związku z tym daje już uchyby mniejsze, w granicach $\pm$ (8 $\div$ $\div$ 10)%.

Najdokładniejszy jest pomiar podany w punkcie c, gdzie występujący uchyb jest rzędu $\pm$ (4 $\div$ 6)%.

Do rozważań dalszych przyjmiemy sposób pomiaru wymieniony w punkcie „b" jako częściowo oparty na tej samej zasadzie pomiaru co straty obciążenia i w żelazie.

Po podstawieniu do równania (14) przyjętych wartości ΔS i ΔS_m otrzymamy całkowity uchyb

$$\frac{\Delta \Sigma S}{S}\% = \pm \frac{(5 \div 8)\frac{85}{100} + (8 \div 10)\frac{15}{100}}{85 + 15} \approx \pm (5{,}5 \div 8{,}5)\%^{1)}.$$

Udział błędu spowodowany niedokładnością pomiaru strat mechanicznych, jak widać z powyższego wyniku i z równania (12), wpływa minimalnie na uchyb całkowity.

Przy stosowaniu w pomiarach metod pośrednich, do których zalicza się również metodę kalorymetryczną, sprawność można określić ze wzoru

$$\eta = \frac{P_2}{P_2 + \Sigma S}. \tag{15}$$

Moc P_2 przyjmuje się tu wg obliczeń i rzeczą mierzącego jest sprawdzić, czy gwarantowana sprawność przy powyższej mocy leży w granicach tolerancji dopuszczalnej przez odpowiednie przepisy. W związku z tym moc P_2 jest wielkością odniesienia i dlatego $\Delta P_2 = 0$, gdyż uchyby związane z niedokładnością pomiaru mocy P_2 zostały uwzględnione przy wyznaczaniu strat [równ. (9)]. Uchyb graniczny sprawności wynosi więc

$$\frac{\Delta \eta}{\eta}\% = \pm \frac{\Delta \Sigma S}{P_2 + \Sigma S} 100\% \tag{16}$$

lub inaczej

$$\frac{\Delta \eta}{\eta}\% = \Delta \Sigma S\,\%\,(1 - \eta), \tag{16a}$$

gdzie $\Delta \eta$ — uchyb sprawności wynikający z pomiaru.

Metoda kalorymetryczna w normie PN-55/E-06000 nie jest ujęta i w związku z tym dozwolone dla niej odchyłki sprawności przyjęto takie same jak dla metody strat poszczególnych, podanej w PNE; jest to uzasadnione tym, że obydwie one należą do tej samej grupy metod pośrednich i dopuszczalne uchyby sprawności określone normami wynoszą

$$\frac{\Delta \eta_n}{\eta}\% = 0{,}1\left(\frac{1}{\eta} - 1\right)100\%, \text{ gdy } \eta < 0{,}95,$$

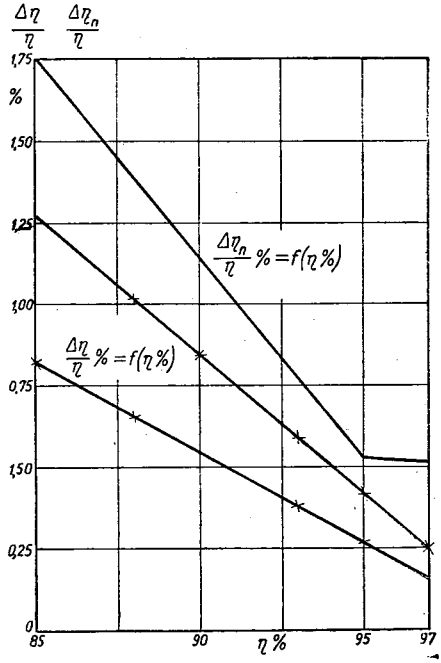
$$\frac{\Delta \eta_n}{\eta}\% = \frac{0{,}005}{\eta}100\%, \text{ gdy } \eta > 0{,}95,$$

gdzie $\Delta \eta_n$ — dozwolony uchyb sprawności określony przez normy.

---

1) Wynik ten jest tego samego rzędu co przy pomiarze sposobem strat poszczególnych [4].

Na rys. 6 przedstawione są zależności $\frac{\Delta\eta_n}{\eta}\,\%_0 = f(\eta\%_0)$ oraz obszary $\frac{\Delta\eta}{\eta}\,\%_0 = f(\eta\%_0)$ określone równaniem (16a) dla zakresu wynikającego z ustalonych poprzednio uchybów granicznych pomiaru strat $\frac{\Delta\sum S}{S}\,\%_0 = \pm (5{,}5 \div 8{,}5)\%_0$. Jak widać z rysunku, uchyby sprawności wynikające z pomiaru metodą kalorymeryczną mieszczą się całkowicie w granicach tolerancji przewidzianych normami.



Rys. 6. Zależności dopuszczalnych uchybów $\frac{\Delta\eta_n}{\eta}\,\%_0 = f(\eta\%_0)$ i uchybów pomiarowych $\frac{\Delta\eta}{\eta}\,\%_0 = f(\eta\%_0)$

Przy analizie pomiaru metodą kalorymetryczną określono jak to jest powszechnie stosowane, uchyb graniczny systematyczny, tzn. przyjęto warunki najbardziej niekorzystne — gdy wszystkie uchyby sumują się algebraicznie. Można również rozważania przeprowadzić określając wiarogodny uchyb systematyczny wypadkowy [5], który jest sumą geometryczną poszczególnych uchybów. Tak określony uchyb jest najbardziej prawdopodobny i w naszym przypadku wynosi liczbowo

$$\frac{\Delta'\sum S}{\sum S}\,\% \pm (2{,}5 \div 4{,}5)\%,$$

a więc jest znacznie mniejszy od uchybu granicznego.

Katedra Maszyn Elektrycznych Politechniki Wrocławskiej
Katedra Pomiarów Elektrycznych Politechniki Wrocławskiej

WYKAZ LITERATURY

1. Andrzejewski F.: Silniki asynchroniczne chłodzone wodą. — Zeszyty Naukowe Politechniki Wrocławskiej, nr 10, 1958.
2. Gramberg A.: Technische Messungen bei Maschinenuntersuchungen und zur Betriebskontrolle. J. Springer 1933.
3. Nürnberg W.: Die Prüfung elektrischer Maschinen. J. Springer 1955.
4. Orzeszkowski Z.: Dokładność pomiaru sprawności dużych silników indukcyjnych. — Zeszyty Naukowe Politechniki Wrocławskiej, nr 10, 1958.

5. Trzetrzewiński St.: Dokładność pomiarów elektrycznych. Elektryczne metody pomiarowe, t. II, str. 15, Wrocław 1952.
6. PN-55/E-06000.
7. VDE 0530/7.55.

Ф. АНДЖЕЕВСКИ и З. ОЖЕШКОВСКИ

КАЛОРИМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ ОХЛАЖДАЕМОГО ВОДОЙ

Резюме

1. ВВЕДЕНИЕ

Кроме обыкновенных методов применяемых для измерения коэффициента полезного действия электрической машины, возможно тоже определить потери прямо измерением количества теплоты и таким образом определить к. п. д. машины. Этот калориметрический метод измерения может быть применен для различных холодильных агентов (вода, водород, воздух), во всяком случае когда возможны измерения количества и температур агента у входа и выхода его из устройства.

Этот способ довольно просто позволяет определить к. п. д. машины даже во-время её нормальной работы. Точность измерения в данном случае такая же как при применении метода отдельных потерь.

Калориметрический метод изложен в этой работе, используя примеры асинхронных двигателей охлаждаемых водой.

2. ОСНОВЫ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО МЕТОДА

Основные системы водяного охлаждения статоров асинхронных двигателей показаны на рис. 1 и 2, роторов на рис. 3. Системы охлаждения статоров из точки зрения измерения количества теплоты эквивалентны, а различны только количества теплоты отдаваемые наружу, без учёта измерительной системы. Для системы изображенной на рис. 1 это количество теплоты составляет около 3% общего количества теплоты, а для системы на рис. 2 от 0 до 1,5%.

Количество теплоты произведённое машиной и переданное воде может быть измерено непосредственно или сравнительным методом.

Первый способ основан на составлении баланса, который в свою очередь основан на измерении количества V и приращения температур δ_m воды, а также времени её течения τ_m и следовательно потери определяются по формуле

$$S = 4{,}18 \frac{c_w V \vartheta_m}{\tau_m} \left[\text{kW}\right]. \tag{3}$$

Второй способ измерения основан на сравнении количества отведенной теплоты с количеством теплоты произведённым нагревателем с известной мощностью P_t.

Измеряя приращение температуры воды δ_m и время истечения τ_m собираем вытекающую воду в термостат, в котором она нагревается за время τ_t до разности δ_t; получаем тогда потери, определяемые на основании баланса:

$$S = \frac{\vartheta_m}{\vartheta_t} \cdot \frac{\tau_t}{\tau_m} P_t \text{ [kW]}. \tag{4}$$

Если измерения произведем так, чтобы $\tau_t = \tau_m$, тогда будет

$$S = \frac{\vartheta_m}{\vartheta_t} P_t \text{ [kW]}; \tag{5}$$

схема установки для измерения приращения температур изображена на рис. 4.

3. АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ

В анализе точности измерения не рассматривается случайная погрешность, как это обычно делается в технических измерениях, когда погрешность меньше $^1/_3$ предельной погрешности. При непосредственном измерении вся погрешность выражается

$$\frac{\Delta' S}{S} \% = \pm \left(\frac{\Delta \vartheta_m}{\vartheta_m} + \frac{\Delta \tau_m}{\tau_m} + \frac{\Delta V}{V} \right) 100\%. \tag{7}$$

При сравнительном измерении погрешность равняется

$$\frac{\Delta' S}{S} \% = \pm \left(\frac{\Delta \vartheta_m}{\vartheta_m} + \frac{\Delta \vartheta_t}{\vartheta_t} + \frac{\Delta \tau_m}{\tau_m} + \frac{\Delta \tau_t}{\tau_t} + \frac{\Delta P_t}{P_t} \right) 100\%. \tag{8}$$

Когда $\tau_m = \tau_t$, тогда на основании (5)

$$\frac{\Delta' S}{S} \% = \pm \left(\frac{\Delta \vartheta_m}{\vartheta_m} + \frac{\Delta \vartheta_t}{\vartheta_t} + \frac{\Delta P_t}{P_t} \right) 100\%. \tag{8a}$$

Независимо от погрешности полученной в процессе измерения теплоты $\Delta' S$ существует ещё погрешность $\Delta'' S$, которая следует из неточного измерения нагрузочной мощности P_2.

Погрешность $\Delta'' S$ можем определить из кривой $S = f(P_2)$ изображенной на рис. 5.

Когда $P_2 > 0{,}5 P_{2n}$, тогда

$$\frac{\Delta'' S}{S} \% = \pm \frac{\Delta P_2}{P_2 - P_x} 100\%, \tag{9}$$

но если $P_2 < 0{,}5 P_{2n}$, тогда

$$\frac{\Delta'' S}{S} \% = \pm \left(\frac{S - S_x}{S} \right) \frac{\Delta P_2}{P_2} 100\%. \tag{11}$$

Потери определены калориметрическим методом, обладают всей предельной ситематической погрешностью

$$\frac{\Delta S}{S} \% = \pm \left(\frac{\Delta' S}{S} \% + \frac{\Delta'' S}{S} \% \right). \tag{12}$$

В измерениях не предусмотрены механические потери S_m, которые можно вычислить или же принять приблизительно, или наконец измрить.

Так как механические потери составляют небольшую часть всех потерь ($S_m \approx \approx 0{,}15\Sigma S$), то их погрешность в незначительной степени сказывается на $\Delta\Sigma$S, что позволяет на относительно менее точное измерение этих потерь.

Вся предельная погрешность с учетом механических потерь равна

$$\frac{\Delta\Sigma S}{\Sigma S}\,\% = \pm\frac{\Delta S + \Delta S_m}{\Sigma S}\,100\%. \tag{14}$$

Предельная погрешность к.п.д. при относительной мощности P_2 и в связи с тем $\Delta P_2 = 0$ равна

$$\frac{\Delta\eta}{\eta}\,\% = \Delta\Sigma S\,\%\,(1-\eta). \tag{16a}$$

На рис. 6 представлена зависимость $\frac{\Delta\eta_n}{\eta}\,\% = f(\eta\%)$ согласно нормам и площадь $\frac{\Delta\eta}{\eta}\,\% = f(\eta\,\%)$ определена уравнением (16a), для интервала, исходящего из установленных предельных погрешностей потерь.

$$\frac{\Delta\Sigma S}{S}\,\% = \pm\,(5{,}5 \div 8{,}5)\,\%.$$

Как видно из рисунка погрешности к.п.д., происходящие от измерения по калориметрическому методу помещаются целиком в допускаемом интервале, предусмотренным нормами.

Степень точности измерения по калориметрическому методу такая же самая, как в случае измерения по методу отдельных потерь.

F. ANDRZEJEWSKI, Z. ORZESZKOWSKI

KALORIMETRISCHE WIRKUNGSGRADBESTIMMUNG DER WASSERGEKÜHLTEN DREHSTROMASYNCHRONMOTOREN

Zusammenfassung

1. EINLEITUNG

Ausser normal angewendeten Messmethoden kann man die in elektrischen Maschinen auftretenden Verluste auch mittels Messung der Wärmemenge ermitteln und auf diesem Wege den Wirkungsgrad bestimmen. Kalorimetrisches Verfahren kann für verschiedene Kühlungsmittel angewendet werden (Wasser, Wasserstoff, Luft), wenn es nur möglich ist die Kühlungsmittelmenge, sowie die Eintritts- und Austrittstemperatur des Kühlmittels zu messen. Die Methode ermöglicht den Wirkungsgrad auch im normalen Betrieb der Maschine leicht und einfach zu bestimmen.

Die Genauigkeit dieses Messverfahrens ist gleich der Genauigkeit des Einzelverlustverfahrens.

Die kalorimetrische Methode ist in diesem Artikel auf Grund eines wassergekühlten Drehstromasynchronmotors besprochen.

2. DER GRUNDSATZ DER KALORIMETRISCHEN MESSMETHODE

Die prinzipiellen Lösungen der Wasserkühlung von Ständern der Asynchronmotoren zeigt Bild 1. und 2, des Rotors Bild 3. Die Lösungen der Kühlung von Ständern sind im Hinsicht auf die Messung der durch die Verluste entstehenden Wärmemenge ganz gleichwertig. Der Unterschied beruht nur auf der Abgabe der Wärme nach aussen. Diese nach aussen abgegebene Wärmemenge ist nicht in die Messung hereingezogen und beträgt im ersten Falle 3% und im zweiten $0 \div 1{,}5\%$ der ganzen Wärmemenge.

Die in der Maschine entstehende und durch das Wasser übernommene Wärmemenge kann man mit Hilfe der direkten oder vergleichenden Messung bestimmen.

In dem direkten Verfahren sind gemessen: die Wassermenge V, Temperaturzunahme ϑ_m und Durchflusszeit τ_m. Die gemessenen Verluste betragen

$$S = 4{,}18 \frac{C_w V \vartheta_m}{\tau_m} \text{ [kW]}. \tag{3}$$

Bei vergleichender Messung wird die von der Maschine abgeführte Wärmemenge mit der Wärmemenge verglichen, die durch elektrisch gemessene Leistung P_t verursacht wird. Es wird gemessen die Temperaturzunahme ϑ_m und Durchflusszeit des Kühlwassers τ_m. Zugleich wird das abfliessende Wasser im Kalorimeter gesammelt und dort elektrisch in der Zeit τ_t bis zur Temperaturzunahme ϑ_t geheizt. Aus der Wärmebilanz folgen die Verluste

$$S = \frac{\vartheta_m \tau_t}{\vartheta_t \tau_m} P_t \text{ [kW]} \tag{4}$$

wenn die Zeiten der beiden Messungen gleich sind $\tau_m = \tau_t$, werden die Verluste wie folgt bestimmt.

$$S = \frac{\vartheta_m}{\vartheta_t} P_t \text{ [kW]} \tag{5}$$

Schema der Temperaturdifferenz-Messung zeigt Bild 4.

3. ANALYSE DER MESSGENAUIGKEIT

Der zufällige Fehler ist in der Rechnung nicht berücksichtigt, was in der technischen Messung normal angewendet ist, wenn der unregelmässige Fehler kleiner ist als 1/3 des systematischen Grenzfehlers.

Bei direkter Messung ist der systematische Grenzfehler.

$$\frac{\Delta' S}{S}\% = \pm \left(\frac{\Delta \vartheta_m}{\vartheta_m} + \frac{\Delta \tau_m}{\tau_m} + \frac{\Delta V}{V} \right) 100\%. \tag{7}$$

Bei vergleichender Messung ist

$$\frac{\Delta' S}{S}\% = \pm \left(\frac{\Delta \vartheta_m}{\vartheta_m} + \frac{\Delta \vartheta_t}{\vartheta_t} + \frac{\Delta \tau_m}{\tau_m} + \frac{\Delta \tau_t}{\tau_t} + \frac{\Delta P_t}{P_t} \right) 100\%. \tag{8}$$

und wenn $\tau_m = \tau_t$ dann folgt aus der Gleichung (5)

$$\frac{\Delta' S}{S}\% = \pm \left(\frac{\Delta \vartheta_m}{\vartheta_m} + \frac{\Delta \vartheta_t}{\vartheta_t} + \frac{\Delta P_t}{P_t} \right) 100\%. \tag{8a}$$

Unabhängig von dem bei Wärmemessungen auftretenden Messfehler $\Delta' S$ kommt noch der Fehler $\Delta'' S$ hinzu. Die Ursache dieses Fehlers ist die ungenaue Messung der vom Motor abgegebenen Leistung P_2. Den Fehler $\Delta'' S$ kann man mit Hilfe der Funktion $S = f(P_2)$ berechnen. Bild 5.

Für $P_2 > 0{,}5\ P_{2n}$ folgt

$$\frac{\Delta'' S}{S}\,\% = \pm \frac{\Delta P_2}{P_2 - P_x}\,100\% \tag{9}$$

und wenn $P_2 < 0{,}5\ P_{2n}$ ist, so

$$\frac{\Delta'' S}{S}\,\% = \pm \frac{S - S_x}{S}\,\frac{\Delta P_2}{P_2} \tag{11}$$

Der Grenzfehler der mit Hilfe des kalorimetrischen Verfahrens gemessenen Verluste beträgt

$$\frac{\Delta S}{S}\,\% = \pm \left(\frac{\Delta' S}{S}\,\% + \frac{\Delta'' S}{S}\,\%\right). \tag{12}$$

In der kalorimetrischen Messung sind die mechanische Verluste S_m nicht berücksichtigt. Sie können jedoch gemessen oder schätzungsweise angenommen werden. Da die mechanische Verluste viel kleiner sind als die Gesamtverluste ($S_m \approx \approx 0{,}15\ \Sigma S$), ist ihr Einfluss auf den ganzen Messfehler klein und deswegen brauchen sie nicht speziell genau gemessen werden.

Unter Berücksichtigung von ΔS_m beträgt der ganze systematische Grenzefehler.

$$\frac{\Delta \Sigma S}{\Sigma S}\,\% = \pm \frac{\Delta S + \Delta S_m}{\Sigma S}. \tag{14}$$

Bei der Annahme der Belastung P_2 als Bezugsgrösse und demnach $\Delta P_2 = 0$ ist der Grenzfehler der Wirkungsgradmessung

$$\frac{\Delta \eta}{\eta}\,\% = \Delta \Sigma S\%\,(1 - \eta). \tag{16a}$$

Bild 6 stellt folgende Funktionen dar:

$\frac{\Delta \eta_n}{\eta}$ % $= f(\eta\%)$ gemäss Vorschriften und $\frac{\Delta \eta}{\eta}$ % $= f(\eta\%)$ gemäss Gleichung (16_a) für die in den Betrachtungen errechnete Grösse von

$$\frac{\Delta \Sigma S}{\Sigma S}\,\% = \pm\,(5{,}5 \div 8{,}5)\%.$$

Bild 6 stellt dar, dass die Messfehler in den zulässigen Toleranzen eingehalten sind.

Die Messgenauigkeit des kalorimetrischen Verfahrens ist also ungefähr gleich der Genauigkeit des Einzelverlustverfahrens.

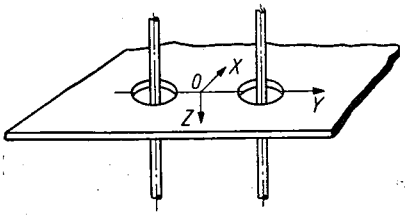
621.314.21

JANUSZ TUROWSKI

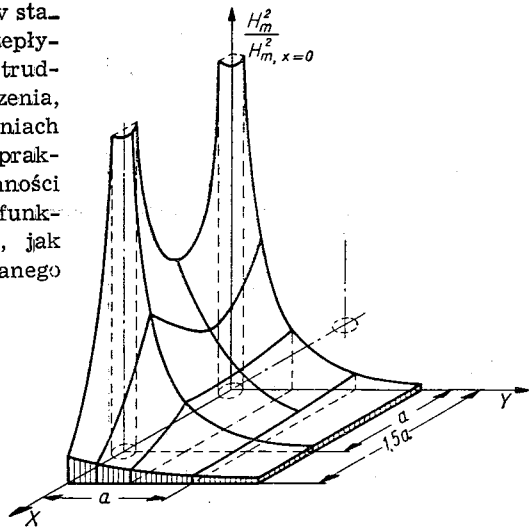
Straty w pokrywach transformatorów jedno- i trójfazowych

Rękopis dostarczono 20.6.1958

Przedstawiony schematycznie na rysunku 1 układ stalowej pokrywy transformatora, przez którą prostopadle przechodzą przepusty z prądem, był przedmiotem teoretycznych i doświadczalnych badań przeprowadzonych przez autora i częściowo już opublikowanych [1], [2]. Dokładne obliczeniowe ujęcie wszystkich skomplikowanych zjawisk zachodzących w stalowej pokrywie transformatora przy przepływie prądu przez przepusty jest bardzo trudne. Jednakże, stosując pewne uproszczenia, udało się w przeprowadzonych obliczeniach uwzględnić, z wystarczającą dla celów praktycznych dokładnością, wpływ zmienności przenikalności magnetycznej zarówno w funkcji miejsca na powierzchni pokrywy, jak i w głąb metalu. Specyficzną cechą badanego układu, utrudniającą bardzo obliczenia, jest wielka nierównomierność rozkładu pola elektromagnetycznego na powierzchni pokrywy. Dla ilustracji na rys 2 przedstawiono rozkład strat na powierzchni pokrywy transformatora trójfazowego w przypadku, gdy jest ona wykonana z materiału o stałej przenikalności magnetycznej.



Rys. 1. Fragment pokrywy transformatora jednofazowego



Rys. 2. Rozkład strat w pokrywie transformatora trójfazowego przy μ = const

1. WZORY I ZAŁOŻENIA WYJŚCIOWE

Wychodząc z podstawowych równań Maxwella, przy założeniu, że wektory natężeń pól elektrycznego K i magnetycznego H leżą w płaszczyźnie powierzchni metalu XY (rys. 1), oraz posługując się znanym twierdzeniem Poyntinga, można wyprowadzić [1] następujące ogólne wzory całkowe na straty w masywnych częściach metalowych spowodowane prądami wirowymi.

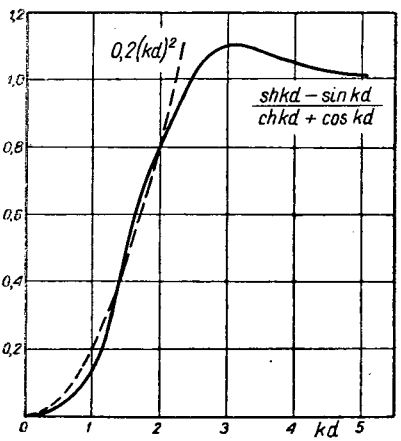
Dla blach i masywnych części metalowych ferromagnetycznych, w których fala wygasa wewnątrz nie przechodząc na drugą stronę:

$$P = \frac{N}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu_o}{2\gamma}}\int\int\sqrt{\mu'_p}\,H^2_{mp}\,ds \tag{1}$$

oraz dla blach z metalu nieferromagnetycznego (μ = const):

$$P = \frac{\operatorname{sh} kd - \sin kd}{\operatorname{ch} kd + \cos kd}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}\int_s\int H^2_{mp}\,ds \text{ [1)]} \tag{2}$$

W przypadku wzoru (1) całkowanie powinno obejmować całą powierzchnię badanego elementu, a więc w przypadku pokryw całkować można po ich powierzchni z jednej strony, ale wartość tę należy wtedy podwoić, gdyż układ jest całkowicie symetryczny względem płaszczyzny pokrywy. Wzór (2) dotyczy części metalowych wykonanych z materiału o stałej przenikalności magnetycznej i uwzględnia już obie — wewnętrzną i zewnętrzną powierzchnię pokrywy. Dlatego całkowanie powinno tu obejmować tylko jedną stronę pokrywy. Wynika to z tego, że wzór (2) wyprowadzono jedynie dla przypadku, kiedy pole elektromagnetyczne jest symetryczne względem płaszczyzny pokrywy.



Rys. 3. Współczynnik charakteryzujący zależność strat w pokrywie od grubości blachy

$\left(k = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}\right)$

Na rys. 3 przedstawiono wykres współczynnika $\frac{\operatorname{sh} kd - \sin kd}{\operatorname{ch} kd + \cos kd}$ występującego we wzorze (2) w funkcji kd. Można łatwo wyliczyć, że przy grubościach blachy nieferromagnetycznej (np. miedzianej) większych od

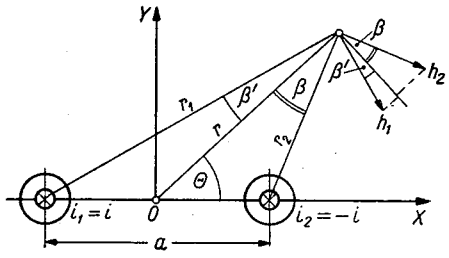
[1)] Oznaczenia symboli podano za tekstem artykułu.

$3 \div 4$ cm ($kd = 3 \div 4$) współczynnik ten w przybliżeniu równa się jedności. Natomiast w przypadku blach stalowych jest on równy jedności przy grubościach rzędu kilku milimetrów. Dlatego nie występuje on we wzorze (1). Jak widać z wykresu na rys. 3, omawiany współczynnik może być dla $kd < 2{,}3$ zastąpiony przez parabolę $0{,}2\ k^2d^2$, a powyżej tej liczby przez 1. We wspomnianym już artykule autora [1] przeprowadzono porównanie wzorów (1) i (2) ze znanymi wzorami na straty od prądów wirowych i wykazano, że drogą kolejnych uproszczeń można z nich otrzymać wszystkie postacie podawanych w podręcznikach wzorów na straty od prądów wirowych. Tak więc podane wyżej wzory całkowe są najbardziej ogólnymi wyrażeniami, pozwalającymi obliczać straty nawet przy nierównomiernym rozkładzie pola na powierzchni badanego elementu.

2. STRATY W POKRYWACH TRANSFORMATORÓW JEDNOFAZOWYCH

2.1. Rozkład natężenia pola magnetycznego na powierzchni pokrywy

Wypadkowe natężenie pola magnetycznego na powierzchni pokrywy można tutaj obliczać z prawa przepływu stosując zasadę superpozycji natężeń pól magnetycznych od prądów płynących w obu przepustach (rys. 4). Jest to możliwe dzięki temu, że pokrywa leży w płaszczyźnie linii sił pola magneytcznego i jest wykonana z praktycznie jednorodnego materiału. Pomijamy przy tym odmagnesowujące działanie otworów na przepusty, gdyż każdy z otworów zniekształca tylko pole drugiego przepustu i to w miejscu, gdzie pole to jest bardzo słabe w porównaniu do nakładającego się na nie silnego pola własnego przepustu (zależność hiperboliczna).



Rys. 4. Obliczenie natężenia pola magnetycznego na powierzchni pokrywy

Składowe styczna i promieniowa chwilowej wartości natężenia pola magnetycznego, zgodnie z rys. 4, wyniosą:

$$h_\Theta = h_1 \cos\beta' + h_2 \cos\beta = \frac{i_1 \cos\beta'}{2\pi r_1} + \frac{i_2 \cos\beta}{2\pi r_2} = \frac{i}{2\pi}\left(\frac{\cos\beta'}{r_1} - \frac{\cos\beta}{r_2}\right),$$

$$h_r = h_1 \sin\beta' - h_2 \sin\beta = \frac{i}{2\pi}\left(\frac{\sin\beta'}{r_1} + \frac{\sin\beta}{r_2}\right).$$

Stąd obliczamy amplitudę pola magnetycznego posługując się zależnością

$$\frac{H_m^2}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T h^2\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T (h_\Theta^2 + h_r^2)\,dt = \frac{I_m^2}{8\pi^2}\cdot\frac{a^2}{r_1^2 r_2^2}.$$

Po wprowadzeniu wartości skutecznej prądu i współrzędnych cylindrycznych r i Θ:

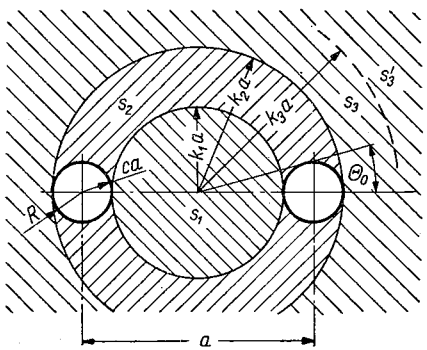
$$H_m^2 = \frac{I^2 a^2}{2\pi^2}\cdot\frac{1}{r^4 - \frac{a^2 r^2}{2}\cos 2\Theta + \frac{a^4}{16}}. \tag{3}$$

2.2. Straty w pokrywie transformatora jednofazowego wykonanej z metalu nieferromagnetycznego

Zgodnie ze wzorami (2) i (3) straty w pokrywie transformatora jednofazowego wykonanej z metalu nieferromagnetycznego wynoszą:

$$P = \frac{\operatorname{sh} kd - \sin kd}{\operatorname{ch} kd + \cos kd}\cdot\frac{I^2 a^2}{2\pi^2}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}\iint_s \frac{r\,dr\,d\Theta}{r^4 + \frac{a^4}{16} - \frac{a^2 r^2}{2}\cos 2\Theta}. \tag{4}$$

Wzór ten wyraża straty obliczone przy stałej temperaturze pokrywy, tj. przy stałej wartości przewodności właściwej γ w całej blasze. Ze względu na istnienie punktów nieciągłości funkcji podcałkowej na osiach przepustów całą powierzchnię pokrywy należy podzielić na trzy obszary całkowania (rys. 5), które należy rozwiązać oddzielnie [dla skrócenia zapisu funkcję podcałkową oznaczymy przez $f(r, \Theta)$]. Wydzielenie obszaru s'_3 na rys. 5 będzie potrzebne przy obliczeniach dotyczących pokryw stalowych.



Rys. 5. Granice całkowania

$$\iint_s f(r,\Theta)ds = \iint_{s_1} f(r,\Theta)ds + \iint_{s_2} f(r,\Theta)ds + \iint_{s_3+s'_3} f(r,\Theta)ds. \tag{5}$$

Całki dla obszaru s_1 i s_3 rozwiązuje się podobnie:

$$\iint_{s_1,s_2} f(r,\Theta)ds = \int_{r_{0,2}}^{r_{1,3}} r\cdot 2\int_0^\pi \frac{d\Theta}{r^4 + \frac{a^4}{16} - \frac{a^2 r^2}{2}\cos 2\Theta} = \tag{6}$$

Po rozwiązaniu tej całki ([5]-3.425) otrzymamy:

$$= 2 \int_{r_{0,2}}^{r_{1,3}} r \frac{\pi}{\sqrt{p^2 - q^2}} dr.$$

Całka ta posiada rozwiązanie przy $p^2 > q^2$, tzn. przy:

$$r < \frac{a}{2}, \text{ wówczas } \sqrt{p^2 - q^2} = + \left(\frac{a^4}{16} - r^4 \right)$$

oraz przy

$$r > \frac{a}{2}, \text{ wówczas } \sqrt{p^2 - q^2} = - \left(\frac{a^4}{16} - r^4 \right).$$

Po podstawieniu tych wartości otrzymuje się dwie całki. Jedną dla obszaru s_1, w granicach od 0 do $k_1 a$, i drugą — dla obszaru zewnętrznego s_3, w granicach od $k_2 a$ do $k_3 a$ (rys. 5). Po rozwiązaniu pierwszej całki ([5]-2.132.2.II) otrzymujemy wynik

$$\int\int_{s_1} f(r,\Theta)\, ds = 2\pi \int_0^{k_1 a} \frac{r dr}{\frac{a^4}{16} - r^4} = \frac{2\pi}{a^2} \ln \frac{1 + 4k_1^2}{1 - 4k_1^2} = \frac{2\pi}{a^2} \ln \frac{1 - 2c(1-c)}{2c(1-c)}, \qquad (7)$$

bo, zgodnie z rys. 5, $k_1 = \frac{1}{2} - c$, gdzie $c = \frac{R}{a}$.

Po rozwiązaniu analogicznie drugiej całki i podstawieniu $k_2 = \frac{1}{2} + c$ otrzymamy:

$$\int\int_{s_3} f(r,\Theta)\, ds = \frac{2\pi}{a^2} \ln \frac{[1 + 2c(1+c)](4k_3^2 - 1)}{2c(1+c)(4k_3^2 + 1)}. \qquad (8)$$

Pole magnetyczne bardzo szybko maleje w miarę oddalania się od osi przewodów (rys. 2). Posługując się otrzymanymi wzorami można wykazać, że większość strat (ok. 90%) wydziela się w części pokrywy ograniczonej stosunkowo niewielkim promieniem $k_3 a$, rzędu odległości osi przepustów a. Tymczasem wymiary pokrywy są zawsze co najmniej kilkakrotnie większe. Wpływ bliższej krawędzi pokrywy może tu być również pominięty, gdyż pole magnetyczne w kierunku prostopadłym do tej krawędzi wygasa znacznie szybciej niż w kierunku równoległym. Dlatego wydaje się, że można z wystarczającą dokładnością przyjąć, że powierzchnia pokrywy jest nieskończenie rozległa i założyć, że $k_3 \to \infty$. Dzięki temu ostatni wzór uprości się do postaci:

$$\int\int_{s_3} f(r,\Theta) ds = \frac{2\pi}{a^2} \ln \frac{1 + 2c(1+c)}{2c(1+c)}. \qquad (9)$$

Suma całek dla obszaru s_1 i s_3 wyniesie:

$$\iint_{s_1} + \iint_{s_3+s'_3} = \frac{2\pi}{a^2} \ln \frac{1+4c^4}{4c^2(1-c^2)}. \tag{10}$$

Wzajemną zależność pomiędzy współczynnikami k_1, k_2 i c wyjaśnia rys. 5.

Pozostają do obliczenia straty w pasku s_2. Tym razem, aby ominąć punkty nieciągłości i otwory, w których nie ma strat, obliczamy pierwszą całkę (6) w granicach od Θ_0 do $\pi - \Theta_0$ (rys. 5):

$$\iint_{s_2} f(r,\Theta)ds = \int_{k_1 a}^{k_2 a} r \cdot 2 \int_{\Theta_0}^{\pi-\Theta_0} \frac{d\Theta}{r^4 + \frac{a^4}{16} - \frac{a^2 r^2}{2}\cos 2\Theta}\, dr. \tag{11}$$

Rozwiązanie jej jest analogiczne jak całki (6), jednakże ze względu na inne granice otrzymujemy nieco inny i tylko jeden wynik, który po zastosowaniu podstawienia:

$$\frac{r^2 + \frac{a^2}{4}}{r^2 - \frac{a^2}{4}} \operatorname{tg}\Theta_0 = t$$

daje się sprowadzić do znanej całki:

$$= \frac{4}{a^2} \int_{T_1}^{T_2} \frac{\operatorname{arc\ tg}\ t}{t}\, dt. \tag{12}$$

Przyjmując wg rys. 5 $\operatorname{tg}\Theta_0 = \dfrac{R}{a/2} = 2c$ i podstawiając pod granice T_1 i T_2 ich wartości, otrzymamy:

$$T_{1,2} = \frac{1 \mp 2c + 2c^2}{c \mp 1} = \frac{(1 \mp c)^2 - 2c^2}{c \mp 1} \approx \mp 1 + c.$$

Ponieważ zwykle $c^2 = \left(\dfrac{R}{a}\right)^2 \ll 1$ (np. rzędu 0,03 i mniej), wynik całkowania w granicach $\mp 1 + c$ będzie się różnił bardzo mało od wyniku całkowania w granicach ∓ 1, gdyż mamy tu do czynienia jedynie z małym przesunięciem obu granic jednocześnie w kierunku dodatnim. Ponieważ przebieg funkcji podcałkowej w tych granicach jest łagodny i symetryczny względem osi rzędnych, to popełniając znikomy błąd (rzędu 0,3%) możemy przyjąć, że

$$\int_{-1+c}^{+1+c} \frac{\operatorname{arc\,tg}\, t}{t}\, dt \approx 2 \int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg}\, t}{t}\, dt = 2G = 1{,}832\ldots,$$

gdzie G — stała Catalàna.

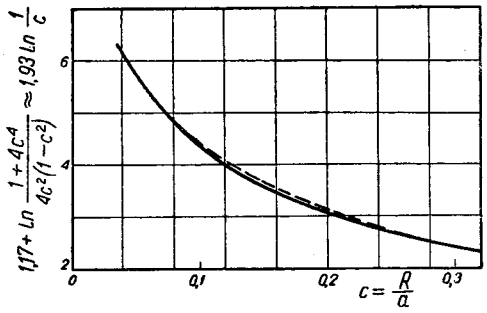
Stąd

$$\int\int_{s_2} f(r,\Theta)ds = \frac{4 \cdot 1{,}832}{a^2}. \tag{13}$$

Ostateczny wzór na straty w pokrywie transformatora jednofazowego wykonanej z blachy niemagnetycznej otrzymamy podstawiając wzory (10) i (13) do (5), a następnie do (4):

$$P = \frac{\operatorname{sh} kd - \sin kd}{\operatorname{ch} kd + \cos kd} \cdot \frac{I^2}{\pi}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}\left[\ln\frac{1+4c^4}{4c^2(1-c^2)} + 1{,}17\right]. \tag{14}$$

Funkcję w nawiasie przedstawiono wykreślnie na rys. 6. Można ją uprościć wprowadzając drugi składnik pod znak logarytmu i odrzucając drugie i czwarte potęgi c wobec 1. Otrzymamy wtedy wyrażenie $2 \ln \frac{0{,}9}{c}$. Na rys. 6 linią przerywaną przedstawiono aproksymację wzoru (14) przez krzywą $1{,}93 \ln \frac{1}{c}$. Największa odchyłka aproksymacji wynosi 1,7%. Wykorzystując następnie aproksymację współczynnika zależnego od kd, podaną na rys. 3, i podstawiając $\mu = 1{,}256 \frac{\text{Gs} \cdot \text{cm}}{\text{A}}$ oraz $\omega = 2\pi f$ możemy napisać następujące wzory na straty:



Rys. 6. Wykres funkcji pomocniczej do wzoru (14) w postaci pełnej i uproszczonej (linia przerywana)

Przy $kd < 2{,}3$

$$P \approx 10^{-12} I^2 d^2 \sqrt{f^3\gamma} \ln \frac{a}{R} \tag{15}$$

i przy $kd \geqslant 2{,}3$

$$P = 3{,}9 I^2 \sqrt{\frac{10^{-9} f}{\gamma}} \ln \frac{a}{R}. \tag{16}$$

Ze wzorów (15) i (16) widać, że wzrost oporności właściwej, a więc i nagrzania powoduje przy grubościach mniejszych zmniejszenie strat, a przy większych — zwiększenie. Przy małych grubościach straty znacznie bardziej zależą od częstotliwości niż przy dużych. Różnice te tłumaczą się tym, że im blacha jest cieńsza, tym pole jest w niej bardziej równo-

mierne i mniej zależy od głębokości wnikania $\left(\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}\right)$. Przy blachach grubych natomiast pole wygasa szybko w głąb metalu i straty silnie zależą od głębokości wnikania, nie zależą zaś od grubości blachy.

2.3. Straty w pokrywie transformatora jednofazowego wykonanej z materiału ferromagnetycznego

W przypadku blachy stalowej o zmiennej przenikalności magnetycznej straty należy obliczać przy pomocy wzoru (1). Ponieważ całkowanie przeprowadzamy z jednej strony pokrywy, wzór ten należy podwoić:

$$P = N\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\gamma}}\int_s\int\sqrt{\mu'}\,H_m^2\,ds\,. \tag{17}$$

Do rozwiązania tej całki konieczne jest zastąpienie wyrażenia podcałkowego przez funkcję analityczną od H_m. Funkcja ta musi posiadać możliwie prostą postać, gdyż inaczej rozwiązanie tej całki nastręczałoby bardzo duże trudności. Zmusza to do zrezygnowania ze znanych z literatury wyrażeń analitycznych krzywej magnesowania. Po kilku próbach przyjęto następującą funkcję:

$$\sqrt{\mu'}\,H_m^2 = C_1H_m + C_2H_m^2\,. \tag{18}$$

Zależność ta przy właściwym doborze parametrów C_1 i C_2 na podstawie rzeczywistej krzywej magnesowania pozwala uzyskać dokładność wystarczającą dla celów praktycznych. Dla znalezienia średnich wartości C_1 i C_2 z rzeczywistej krzywej magnesowania podanej na rys. 7 zestawiono układ dwóch równań typu:

$$\sqrt{\mu'}\,H_m^2 = C_1\Sigma H_m + C_2\Sigma H_m^2,$$

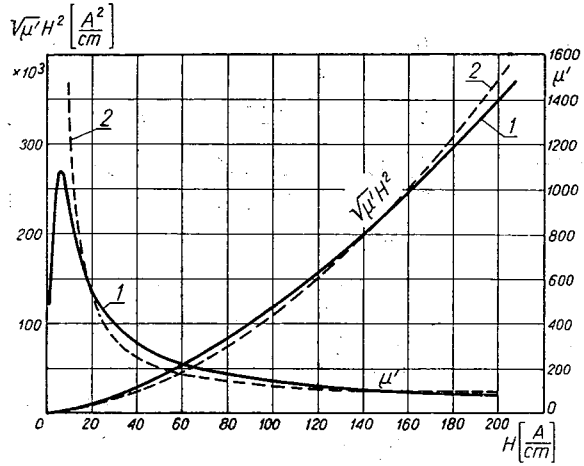
z których dla natężeń pola do ok. 200 A/cm wyliczono $C_1 = 310$ A/cm i $C_2 = 7{,}9$. Porównanie krzywej rzeczywistej z krzywą zastępczą podano na rys. 7.

Całka ze wzoru (17) rozbije się teraz na dwie całki, z których druga została już rozwiązana w punkcie poprzednim. Pozostaje do rozwiązania następująca całka:

$$C_1\int_s\int H_m ds = C_1\frac{I\,a}{\sqrt{2}\,\pi}\int_s\int\frac{r\,dr\,d\Theta}{\sqrt{r^4 - \frac{a^2r^2}{2}\cos 2\Theta + \frac{a^4}{16}}}. \tag{19}$$

Tym razem powierzchnię pokrywy podzielono na 4 obszary całkowania (rys. 5) s_1, s_2, s_3 i s'_3. Obszarom s_1, s_2, s_3 odpowiada zastępcza charaktery-

styka magnesowania (18), a obszarowi s'_3 stała wartość $\mu' \approx \mu'_{max}$. Określenie granicy tych obszarów nastąpi później. Oznaczając dla skrócenia zapisu funkcję podcałkową przez $f(r, \Theta)$, dla obszaru s_1 (rys. 5) mamy:



Rys. 7. Porównanie przeliczonych charakterystyk magnesowania stali
1 — krzywa rzeczywista, 2 — zastępcza przy $C_1 = 310$A/cm, $C_2 = 7{,}9$

$$\iint_{s_1} f(r,\Theta)ds = \int_{\Theta}^{k_1 a} r\frac{16}{a^2}\int_{0}^{\pi/2} \frac{d\Theta}{\sqrt{1-2\left(\frac{2r}{a}\right)^2\cos 2\Theta+\left(\frac{2r}{a}\right)^4}}dr. \qquad (20)$$

Po podstawieniu do pierwszej z całek (20) $p = \left(\frac{2r}{a}\right)^2 < 1$ i $2\Theta = \alpha$ otrzymamy podwójną całkę eliptyczną zupełną pierwszego rodzaju o nowych granicach od 0 do π, której rozwiązanie ([5]-3.413.1 i 6113.1) dla $p^2 < 1$ $\left(r < \frac{a}{2}\right)$ można przedstawić w postaci szeregu:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-2p\cos\alpha+p^2}} = K(p) = \frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 p^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 p^4+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 p^6+\ldots\right]. \qquad (21)$$

Powracając do wzoru (20), mamy:

$$\iint_{s_1} f(r,\Theta)ds = \frac{16}{a^2}\int_0^{k_1 a} r\,K(p)dr$$

Z podanego niżej porównania wartości dwu pierwszych wyrazów szeregu $K(p)$ z wartością całego szeregu widać, że wystarczy przyjąć dwa pierwsze wyrazy nie popełniając przy $0 \leqslant p \leqslant 0{,}7$ w najgorszym przypadku błędu większego od 0,5 %:

$\frac{2r}{a}$	0	0,4	0,6	0,8	0,9
$p = \left(\frac{2r}{a}\right)^2$	0	0,16	0,36	0,64	0,81
pierwszy + drugi wyraz	1,000	1,0064	1,032	1,1050	1,164
$K(p)$	1,000	1,0065	1,0346	1,1381	$\sim$ 1,273

W badanym obszarze s_1 zmienna p zawarta jest w granicach od 0 do $(1-2c)^2$, dlatego też, aby błąd nie przekroczył powyższej wartości (0,5 %), wystarczy, by c zawierało się w granicach 0,5 i 0,08 określonych równaniami $(1-2c)^2 = 0$ i $(1-2c)^2 = 0{,}7$. Jak łatwo można zauważyć, przekroczenie górnej granicy jest niemożliwe, natomiast dolna granica leży dużo niżej większości spotykanych w praktyce przypadków (tabl. 1). Nawet przy znacznym przekroczeniu dolnej granicy błąd będzie jeszcze dostatecznie mały. Na przykład przy $c = 0{,}05$ ($p = 0{,}8$) błąd jest jeszcze rzędu 1 %.

Otrzymujemy w rezultacie dwie proste całki:

$$\iint_{s_1} f(r,\Theta)\,ds = \frac{8\pi}{a^2}\int_0^{k_1 a} r\,dr + \frac{8\pi}{a^2}\int_0^{k_1 a}\frac{r}{4}\left(\frac{2r}{a}\right)^4 dr = 4\pi k_1^2\left(1+\frac{4}{3}k_1^4\right). \tag{22}$$

Podstawiamy ten wynik do (19) i po kilku przekształceniach otrzymujemy:

$$C_1\iint_{s_1} H_m\,ds = C_1\frac{Ia}{\sqrt{2\pi}}\,4\pi(0{,}271 - 1{,}25c + 2{,}25c^2 - 3{,}33c^3 + 5c^4 - 4c^5 + 1{,}3c^6). \tag{23}$$

Całkę (19) dla obszaru s_3 (rys. 5) przy $r > a/2$ można rozwiązać również przez sprowadzenie jej do podwojonej całki eliptycznej zupełnej pierwszego rodzaju o granicach od 0 do π, stosując tym razem podstawienie $p' = \left(\frac{a}{2r}\right)^2 < 1$. Błąd popełniony przy zastąpieniu szeregu $K(p')$ przez dwa jego pierwsze wyrazy będzie tu tego samego rzędu co poprzednio. Po przeprowadzeniu analogicznych obliczeń jak dla obszaru s_1 otrzymujemy:

$$C_1\iint_{s_3} H_m\,ds = C_1\frac{Ia}{\sqrt{2\pi}}\,2\pi\left[\ln\frac{k_3}{0{,}5+c} - \frac{1}{2^8}\left(\frac{1}{k_3^4} - \frac{1}{0{,}0625 + 0{,}5c + 1{,}5c^2 + 2c^3 + c^4}\right)\right]. \tag{24}$$

Tym razem przy $k_3 \to \infty$ wyrażenie (24) dążyłoby do nieskończoności. Wynika to z przyjętego na początku (wzór 18) założenia, że przy $H_m \to 0$ przenikalność magnetyczna μ' dąży do nieskończoności (rys. 7). Dlatego obszar s_3 ograniczono tak, aby natężenie pola magnetycznego w tym obszarze nie było mniejsze od „granicznej" wartości natężenia pola magnetycznego H_{mg}, której odpowiada maksymalna wartość przenikalności magnetycznej. Przy natężeniu pola magnetycznego mniejszym od H_{mg} założona krzywa zastępcza $\mu = f(H_m)$ znacznie odbiega od przebiegu rzeczywistego (rys. 7). Dlatego obszar ten wydzielono (rys. 5) jako obszar s'_3 i przyjęto dla niego $\mu = \text{const}$ [1]).

Najmniejsze natężenie pola magnetycznego na okręgu o promieniu $k_3 a$ wystąpi na osi $\Theta = \frac{\pi}{2}$ (rys. 4). Ze wzoru (3) dla $\Theta = \frac{\pi}{2}$ i z powyższych warunków możemy wyliczyć promień tego okręgu ($r_3 = k_3 a$) rozgraniczającego obszary s_3 i s'_3 (rys. 5):

$$H_{mg} = \frac{Ia}{\sqrt{2}\pi} \cdot \frac{1}{r_3^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{I}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \cdot \frac{1}{k_3^2 + 0{,}25},$$

skąd

$$k_3^2 = \frac{1}{\sqrt{2}\pi H_{mg}} \cdot \frac{I}{a} - 0{,}25. \tag{25}$$

Jednocześnie musi być spełniony warunek $k_3 \geqslant k_2 = 1/2 + c$ (rys. 5), stąd:

$$\frac{I}{a} \geqslant \sqrt{2}\pi H_{mg}(0{,}25 + k_2^2) = \sqrt{2}\pi H_{mg}(0{,}5 + c + c^2),$$

skąd

$$\frac{I}{a} > 4{,}45\,(0{,}5 + c)\,H_{mg}. \tag{26}$$

Maksimum krzywej $\mu = f(H)$ dla stali występuje w okolicy 5 — 6 A/cm. Przyjęto tu $H_{mg} = 5$ A/cm, gdyż przy mniejszych wartościach krzywa zastępcza zbyt silnie odbiega od krzywej rzeczywistej. Wskutek przyjętych założeń na granicy obszarów s_3 i s'_3 wystąpi tu pewna nieciągłość wartości μ. Jak wykazały przeliczenia sprawdzające, nie ma to istotnego wpływu

[1]) Przy promieniu $r > k_3 a$ wartość μ' w rzeczywistości maleje ze zmniejszaniem się wartości H_m (rys. 7). Uwzględnienie tej zmienności skomplikowałoby bardzo obliczenie tej stosunkowo niewielkiej części strat. Dlatego z wystarczającą dokładnością można tu przyjąć, że przy H_m ($r = k_3 a$, $\Theta = \frac{\pi}{2}$) < 5 A/cm, $\mu' = 1000 = \text{const}$. Błąd wynikający z tego uproszczenia będzie stanowił niewielką rezerwę w obliczeniu strat.

na wynik ostateczny, gdyż w tym obszarze pole jest już bardzo osłabione. Przyjęcie natomiast większej wartości H_{mg}, która znosiłaby ten skok μ spowodowałoby niepotrzebne zwężenie granicy (26). Mamy zatem warunek:

$$\frac{I}{a} > 22{,}3\,(c + 0{,}5), \tag{27}$$

który np. przy $c = 0{,}15$ wynosi: $I/a > 14{,}5$ A/cm. Warunek ten nie jest kłopotliwy, gdyż interesują nas tu jedynie większe prądy, przy których ten stosunek jest znacznie większy (rzędu 100 i więcej). Z tego powodu pewna płynność tej granicy spowodowana występowaniem we wzorze (27) parametru c nie ma istotnego znaczenia. Przyjmując zatem dla obszaru s'_3, $\mu' = 1000$, z krzywej zastępczej (18) otrzymamy $C'_1 = (32 - C_2)\,H_m$. Do całki $C_1 \iint_{s_3} H_m ds$ należy zatem dodać całkę $(32 - C_2) \iint_{s'_3} H_m^2\, ds$, która ma taką samą postać jak całka wynikająca z drugiej części wzoru (18) obliczona w p. 2.2 [wzory (8) i (9)], z tym że do wzorów tych zamiast k_3 należy podstawić nieskończoność, a zamiast współczynnika k_2 — współczynnik k_3:

$$(32 - C_2) \iint_{s'_3} H_m^2\, ds = (32 - C_2)\,\frac{I^2 a^2}{2\pi^2} \cdot \frac{2\pi}{a^2} \ln \frac{4k_3^2 + 1}{4k_3^2 - 1}. \tag{28}$$

Pozostaje do rozwiązania całka dla obszaru s_2:

$$C_1 \iint_{s_2} H_m ds = C_1 \frac{Ia}{\sqrt{2\pi}} \iint_{s_2} \frac{r\,dr\,d\Theta}{\sqrt{r^4 - 2\,\dfrac{a^2 r^2}{4}\cos 2\Theta + \dfrac{a^4}{16}}} =$$

$$= C_1 \frac{Ia}{\sqrt{2\pi}} \int_{k_1 a}^{k_2 a} r \cdot 4 \int_{\Theta_0}^{\pi/2} \cdot \frac{d\Theta\,dr}{\sqrt{r^4 - 2\dfrac{a^2 r^2}{4} + a^2 r^2 \sin^2\Theta + \dfrac{a^4}{16}}}. \tag{29}$$

Pierwszą całkę można sprowadzić do całki eliptycznej, która posiada rozwiązanie ([5] — 3.144.4), przez podstawienie: $\sin\Theta = x$ oraz $d\Theta = \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$:

$$\int_{\Theta_0}^{\pi/2} \frac{d\Theta}{\sqrt{\left(r^2 - \dfrac{a^2}{4}\right)^2 + a^2 r^2 \sin^2\Theta}} = \frac{1}{ar} \int_{\sin\Theta_0}^{\sin\frac{\pi}{2} = 1} \frac{dx}{\sqrt{\left[\left(\dfrac{r^2 - \dfrac{a^2}{4}}{ar}\right)^2 + x^2\right](1 - x^2)}},$$

gdzie granice spełniają warunek $\sin\frac{\pi}{2} > \sin\Theta_0 > 0$. Rozwiązaniem tej całki jest wyrażenie ([5] — 3.144.4):

$$= \frac{1}{ar} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r^2 - \frac{a^2}{4}}{ar}\right)^2 + 1}} F\left[\arccos\sin\Theta_0, \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r^2 - \frac{a^2}{4}}{ar}\right)^2 + 1}}\right] = \tag{30}$$

które po kilku przekształceniach można uprościć do postaci:

$$= \frac{4}{4r^2 + a^2} F(\varphi, k), \tag{31}$$

$$\text{gdzie } \varphi = \frac{\pi}{2} - \Theta_0 \text{ i } k = \frac{4ar}{4r^2 + a^2}.$$

Funkcja $F(\varphi, k)$ jest całką eliptyczną pierwszego rodzaju, którą można wykreślić przy pomocy tablic Legandre'a [6] przeliczając parametry tych tablic (φ, α) na parametry użyte w tej pracy $\left(c \text{ i } \frac{r}{a/2}\right)$. Zakresy parametru $\varphi(c)$ i zmiennej niezależnej $\alpha\left(\frac{2r}{a}\right)$ oraz granice całkowania ustalono przyjmując $0{,}05 < c < 0{,}40$[1]) oraz, zgodnie rys. 5, $\operatorname{tg}\Theta_0 = 2c$. Następnie wykreślone na rys. 8 krzywe $F(\varphi, k) = \left(\frac{2r}{a}\right)$, wykorzystując ich łagodny przebieg w części środkowej, zastąpiono w przybliżeniu rodziną linii prostych poziomych, zależnych, jak i te krzywe, od parametru $c(\varphi)$. Po ułożeniu i rozwiązaniu odpowiedniego układu trzech równań z trzema niewiadomymi ustalono ostatecznie następującą postać dla tej zastępczej rodziny linii prostych:

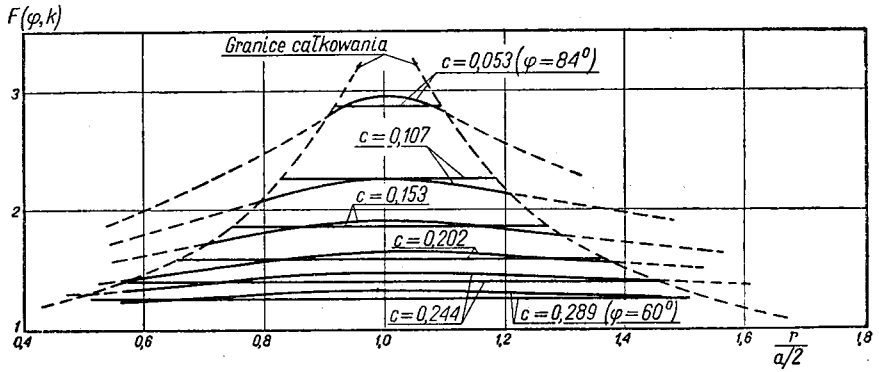
$$F(\varphi, k) = 4{,}92\,(0{,}7 - \Theta_0)^2 + 1{,}1. \tag{32}$$

Proste te również wykreślono na rys. 8.

Największa odchyłka aproksymacji w przyjętych wyżej granicach jest rzędu 5%. Jednakże popełniony tu błąd będzie bardzo mały z następujących powodów. Przy małych wartościach c (rzędu 0,05), gdzie interesująca nas część krzywej najbardziej odbiega od prostej poziomej, szerokość obszaru s_2 jest tak mała, że udział wydzielonych w nim strat w stosunku do strat w pozostałej powierzchni pokrywy jest bardzo mały. Zatem im mniejsza jest wartość c, tym mniejszy będzie błąd. Na rys. 8 linią przerywaną wykreślono granice całkowania. Przy większych wartościach c, gdzie granice całkowania rozszerzają się, dokładność aproksymacji wzrasta. W sumie błąd popełniony przy tym uproszczeniu jest też pomijalnie

[1]) W przedziale tym zawarte są wszystkie możliwe przypadki, zob. tabl. 1.

mały, gdyż odnosi się on tylko do jednej części strat wydzielonych w obszarze s_2. Druga część strat, odpowiadająca drugiej części wzoru (18) została obliczona dokładniej (p. 2.2).



Rys. 8. Aproksymacja prostoliniowa całki eliptycznej (31)

Podstawiając teraz (32) do (31), a następnie do (29) otrzymamy:

$$C_1 \int\int_{s_2} H_m ds = C_1 \frac{Ia}{\sqrt{2}\pi} \int_{k_1 a}^{k_2 a} r \cdot 4 \frac{4}{4r^2 + a^2} [4{,}92(0{,}7 - \Theta_0)^2 + 1{,}1]\, dr. \quad (33)$$

Po rozwiązaniu tej całki i dokonaniu odpowiednich podstawień otrzymamy wynik:

$$C_1 \int\int_{s_2} H_m ds = C_1 \frac{Ia}{\sqrt{2}\pi} 2[4{,}92(0{,}7 - \operatorname{arc\,tg} 2c)^2 + 1{,}1] \ln \frac{1 + 2c(1 + c)}{1 - 2c(1 - c)}. \quad (34)$$

Ostateczny wzór na straty w pokrywie stalowej transformatora z dwoma przepustami otrzymamy wstawiając do wzoru (17) i (18) wyrażenia (23), (24), (34), (28) oraz wynik poprzedniego rozdziału (33), w którym zamiast współczynnika zależnego od kd należy podstawić C_2. Do obliczonych strat można jeszcze dodać straty w częściach pokrywy pominiętych przy całkowaniu z powodu zastąpienia okrągłych otworów przez otwory o kształcie zbliżonym do kwadratu (wycinek pierścienia) oraz straty wydzielone na wewnętrznych powierzchniach cylindrycznych otworów. Można to obliczyć w sposób bardziej uproszczony ze względu na bardzo małe wymiary tej powierzchni. Przyjmując zatem, że na tych powierzchniach panuje jednakowe natężenie pola $H'_m = \frac{I}{\sqrt{2}\pi R}$, możemy te straty obliczyć z zależności:

$$P' = \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\gamma}} \cdot \frac{1}{2}(C_1 H'_m + C_2 H'^2_m \cdot [4(4R^2 - \pi R^2) + 2 \cdot 2\pi Rd] =$$

$$= \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}\left[C_1\left(1{,}72 + 6{,}28\frac{d}{R}\right)\frac{IR}{\sqrt{2\pi}} + C_2(1{,}72 + 6{,}28)\frac{I^2}{2\pi^2}\right]. \qquad (35)$$

Podstawiając i ten wynik do wzoru (17) i (18) oraz zgrupowując odpowiednio składniki otrzymamy ostateczny wzór na straty w pokrywie transformatora jednofazowego:

$$P = N\frac{Ia}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{\gamma}}\left(f_1 + f_I + \frac{I}{a}f_2\right), \qquad (36)$$

gdzie:

$$N \approx 1{,}3\ [1], [2], [3], [4],$$

$$f_1 = 310\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{cm}}\left\{1{,}085 - 5c + 9c^2 - 13{,}3c^3 + 20c^4 - 16c^5 + 5{,}3c^6 + \right.$$

$$+ \frac{1}{8 + 64c + 192c^2 + 256c^3 + 128c^4} - 2\ln(0{,}5 + c) +$$

$$\left. + \frac{2}{\pi}[4{,}92(0{,}7\text{-arc tg } 2c)^2 + 1{,}1]\ln\frac{1 + 2c\,(1 + c)}{1 - 2c(1 - c)} + 0{,}55c + 2\frac{d}{a}\right\},$$

$$f_I = 310\left(\ln k_3^2 - \frac{1}{128\,k_3^2}\right)\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{cm}} + 7{,}9\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{I}{a}\cdot\frac{32 - C_2}{C_2}\ln\frac{4k_3^2 + 1}{4k_3^2 - 1} \text{ oraz}$$

$$f_2 = 7{,}9\frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[\ln\frac{1 + 4c^4}{4c^2(1 - c^2)} + 1{,}44 + \frac{d}{R}\right];$$

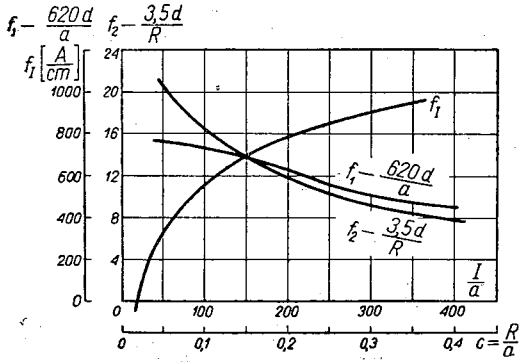
ze wzoru (35) $k_3^2 = 0{,}045\left(\frac{I}{a} - 5{,}55\right)$.

Współczynniki powyższe przedstawione są na rys. 9 w postaci wykresów.

Wzór uproszczony

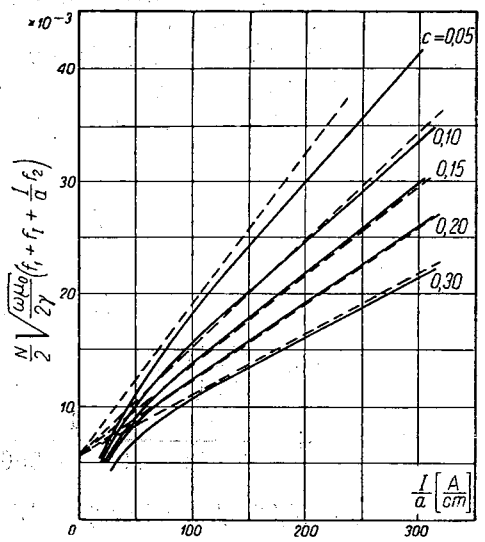
Wzór (36) można znacznie uprościć biorąc pod uwagę fakt, że w praktyce nie dysponujemy dokładnymi danymi materiałowymi poszczególnych pokryw. Wprawdzie wahania przewodności właściwej stali konstrukcyjnej mogą być dość duże (np. w przypadku pokryw badanych w tej pracy od $4{,}8 \cdot 10^4$ do ok. $8 \cdot 10^4 \frac{1}{\Omega\ \mathrm{cm}}$), to jednak występowanie przewodności pod pierwiastkiem znacznie łagodzi te różnice (2,2 — 2,8). Dzięki temu możemy przyjąć pewną przeciętną wartość przewodności właściwej, na przykład $7 \cdot 10^4 \frac{1}{\Omega\ \mathrm{cm}}$. Następnie, ponieważ poprawki na straty na krawędzi otworów

przy funkcjach f_1 i f_2 (rys. 9) są stosunkowo niewielkie, można przyjąć również i dla nich pewne średnie wartości — np. odpowiednio 20 i 0,6. Przyjmując wtedy dla współczynnika $N = 1{,}3$ możemy sporządzić na podstawie wzoru (36) i rys. 9 odpowiedni wykres (rys. 10), który pozwoli przez wprowadzenie prostoliniowej aproksymacji uzyskać dostatecznie dokładny, a jednocześnie bardzo prosty wzór na straty:



Rys. 9. Wykresy funkcji pomocniczych do obliczania strat w pokrywie transformatora jednofazowego przy pomocy wzoru (36)

$$\left[f_I = f\left(\frac{I}{a}\right);\quad f_1 = f_1(c);\quad f_2 = f_2(c)\right]$$



Rys. 10. Porównanie wzoru dokładnego (36) — linia ciągła, z wzorem uproszczonym (37) — linia przerywana

$$P = 5{,}5 \cdot 10^{-3} Ia\left(1 + \frac{0{,}0056}{\sqrt{c}} \cdot \frac{I}{a}\right), \tag{37}$$

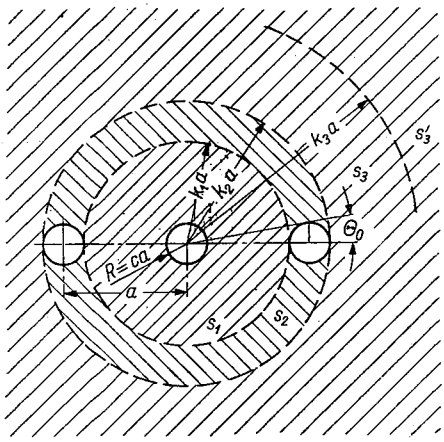
gdzie I — w A, a — w cm, P — w W.

Podane tu wzory wyprowadzono dla $\frac{I}{a} > 15$ A/cm, co obejmuje większość spotykanych w praktyce przypadków, zwłaszcza, że ten warunek nie jest sztywny i może być przekraczany kosztem pewnego zmniejszenia dokładności. Jak widać z rys. 10, wzór przybliżony (37) przy normalnych wykonaniach pokrywy $0{,}1 < c < 0{,}25$ dobrze się pokrywa ze wzorem dokładnym (36). Skrajne krzywe, dla $c = 0{,}05$ i $c = 0{,}3$, podano jedynie dla orientacji, gdyż takich przypadków (przy dużych prądach) w normalnych wykonaniach się nie spotyka. To samo dotyczy rozbieżności w początkowych częściach krzywych, przy $I/a < 50$ A/cm. W przypadkach wyjątkowych można posługiwać się wzorem dokładnym (36) i wykresami na

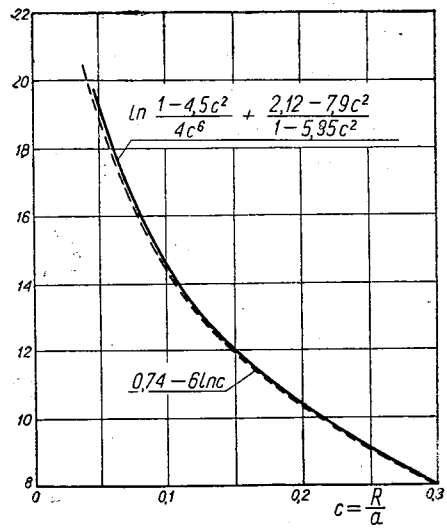
rys. 9. Wzór (37) podano dla temperatury stali 20°C. Przy innej temperaturze pokrywy należy straty pomnożyć przez $\sqrt{\frac{172+t}{192}}$.

3. STRATY W POKRYWACH TRANSFORMATORÓW TRÓJFAZOWYCH

W analogiczny sposób, jak to wykonano dla transformatorów jednofazowych, przeprowadzono obliczenia również dla transformatora trójfazo-



Rys. 11. Granice całkowania w układzie trójfazowym



Rys. 12. Wykres funkcji pomocniczej do wzoru (39) i jej aproksymacja funkcją uproszczoną

wego [2], którego trzy przepusty leżą w jednej płaszczyźnie (rys. 11). Otrzymano następujące wyniki:

1. W przypadku pokrywy wykonanej z metalu nieferromagnetycznego:

$$P = \frac{\operatorname{sh} kd - \sin kd}{\operatorname{ch} kd + \cos kd} \cdot \frac{I^2}{2\pi}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}\left(\ln\frac{1-4{,}5c^2}{4c^6} + \frac{2{,}12-7{,}9c^2}{1-5{,}35c^2}\right). \quad (38)$$

Wykres funkcji zależnej od $c = R/a$ przedstawiono na rys. 12. Odrzucając od tej funkcji składniki zawierające c^2, jako bardzo małe, otrzymamy w nawiasie wzoru (38) zależność: 0,74 — 6 ln c, która prawie dokładnie pokrywa się (linia przerywana na rys. 12) z krzywą pierwotną; zastępując następnie współczynnik zależny od kd przez parabolę $0{,}2\,k^2d^2$ i prostą po-

ziomą (rys. 3) oraz podstawiając $\mu = 1{,}256$ Gs·cm/A otrzymamy wzory uproszczone:
przy $kd < 2{,}3$

$$P = 0{,}25 \cdot 10^{-12} I^2 d^2 \sqrt{f^3 \gamma} \left(0{,}74 + 6 \ln \frac{a}{R}\right), \tag{39}$$

przy $kd \geqslant 2{,}3$

$$P = I^2 \sqrt{\frac{10^{-9} f}{\gamma}} \left(0{,}74 + 6 \ln \frac{a}{R}\right). \tag{40}$$

Porównując otrzymane tu wzory ze wzorami (15) i (16), łatwo zauważyć, że straty przy układzie trójfazowym są przy pozostałych warunkach takich samych około 1,5 raza większe od strat przy układzie jednofazowym.

2. W przypadku pokrywy wykonanej z materiału ferromagnetycznego po przeprowadzeniu obliczeń analogicznych jak w punkcie 2.3 otrzymano ostateczny wzór na straty:

$$P = N \frac{Ia}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{\gamma}} \left(f_1 + f_I + \frac{I}{a} f_2\right). \tag{41}$$

We wzorze tym:
$N = 1{,}3$;

$$f_1 = \frac{310}{\pi} \left[16{,}9 + 1{,}824 \ln \frac{3{,}73 - 3{,}23c}{1 + 1{,}73c + 1.5c^2} - 10{,}9 \ln(3{,}73 + 3{,}23c) + \right.$$
$$\left. + 9{,}4 \frac{d}{a}\right] \frac{\text{A}}{\text{cm}}; \tag{42}$$

$$f_2 = \frac{7{,}9}{\sqrt{2\pi}} \left[\ln \frac{1 - 4{,}5c^2}{4c^6} + \frac{2.12 - 7{,}9c^2}{1 - 5{,}35c^2} + 0{,}55 + 3 \frac{d}{R}\right] \frac{\text{A}}{\text{cm}}; \tag{43}$$

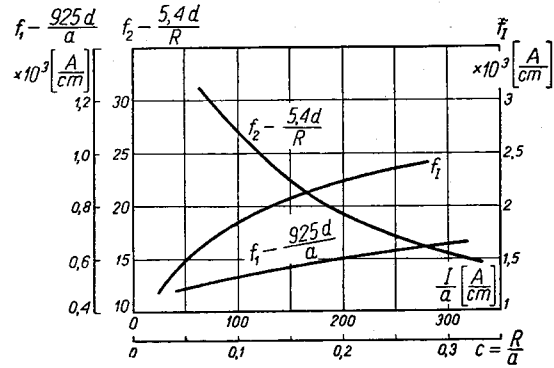
$$f_I = \frac{310}{\pi} \left[10{,}9 \ln(\sqrt{3} k_3 + \sqrt{1 + 3k_3^2}) - 6{,}28 \frac{1 + k_3^2 + 14k_3^4}{20 k_3^5} \sqrt{1 + 3k_3^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{32{,}0 - 7{,}9}{310 \frac{\text{A}}{\text{cm}}} \cdot \frac{I}{a} \ln \frac{k_3^2(1 + k_3^2)}{(1 - k_3^2)^2}\right] \frac{\text{A}}{\text{cm}}; \tag{44}$$

k_3 określa się ze wzoru $\frac{I}{a} = 22{,}2 \frac{k_3(1 + k_3^2)}{\sqrt{1 + 3k_3^2}} \frac{\text{A}}{\text{cm}}$. (45)

Współczynniki te przedstawiono wykreślnie na rysunku 13.

Wzór uproszczony otrzymujemy po dokonaniu analogicznych przeliczeń wartości podanych na rys. 13, podobnie jak to zrobiono dla układu

jednofazowego. Przyjmujemy przy tym $\gamma = 7 \cdot 10^4 \frac{1}{\Omega\,\mathrm{cm}}$, $925\,\frac{d}{a} = 140$,



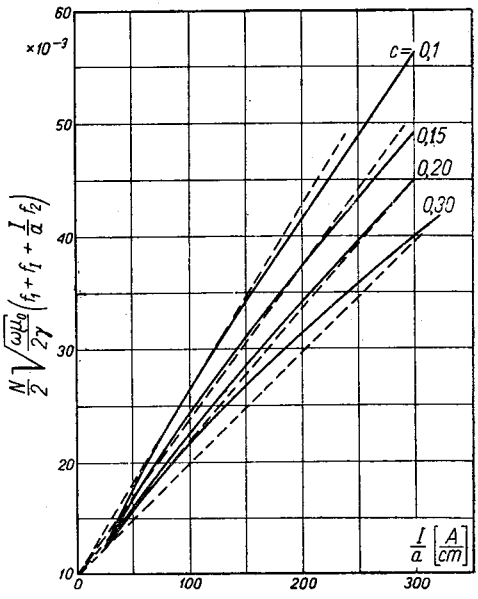
Rys. 13. Wykresy funkcji pomocniczych dla obliczania strat w pokrywie transformatora trójfazowego przy pomocy wzoru (41)

$$\left[f_I = f\left(\frac{I}{a}\right);\quad f_1 = f_1(c);\quad f_2 = f_2(c)\right]$$

$5{,}4\,\frac{d}{R} = 0{,}8$ oraz $N = 1{,}3$. Na podstawie wzoru (41) i wykresów na rys. 13 sporządzono wykresy podane na rys. 14. Oczywiście, najbardziej wygodne byłoby tu wyrażenie, które różniłoby się od wzoru (37) jedynie stałym współczynnikiem. Udało się to osiągnąć po prostu przez pomnożenie strat wyrażonych wzorem (37) przez $\sqrt{3}$. Dzięki temu straty w układzie trójfazowym wyrażą się wzorem podobnym do poprzedniego:

$$P = \sqrt{3} \cdot 5{,}5 \cdot 10^{-3} Ia \left(1 + \frac{0{,}0056}{\sqrt{c}} \cdot \frac{I}{a}\right). \qquad (46)$$

Wzór ten ma trochę inną postać niż w artykule [2] ze względu na to, że dostosowano go tu do wzoru (37), jednakże w liczbowych wynikach nie ma pomiędzy tymi wzorami prawie żadnej różnicy.



Rys. 14. Porównanie wzoru dokładnego (41) — linia ciągła, z wzorem uproszczonym (46) — linia przerywana

Ostatecznie:

$$P_{trójfaz} = \sqrt{3} \cdot P_{jednofaz}. \tag{47}$$

Jak widać z porównania wykresów na rys. 10 i 14, użyta aproksymacja jest bardziej dokładna w układzie jednofazowym niż w trójfazowym. Ale ponieważ w normalnych wykonaniach współczynnik c zwykle nie wykracza poza granice 0,1 — 0,2, to i tę ostatnią aproksymację można uznać za wystarczającą, uzyskując w zamian jednakowy i prosty wzór na straty dla obu układów.

Podane tu wzory wyprowadzono dla $\frac{I}{a} > 28 \frac{\text{A}}{\text{cm}}$, $c < 0{,}3$, co obejmuje wszystkie spotykane w praktyce przypadki, zwłaszcza że oba warunki nie są sztywne i mogą być przekraczane kosztem pewnego zmniejszenia dokładności. Największa rozbieżność między wzorem uproszczonym a dokładnym występuje przy $c = 0{,}3$, jednakże jest to przypadek wyjątkowy i trudny do zrealizowania ze względu na wymiary izolatorów przepustowych. Wzór (46) podano dla temperatury pokrywy 20°C. Przy innej temperaturze straty należy pomnożyć przez $\sqrt{\frac{172 + t}{192}}$.

Tablica 1

Obliczone straty w pokrywach bez przecięć normalnych transformatorów energetycznych

Moc i dolne napięcie transformatora	Prąd	a	$2R$	d	c	$\frac{I}{a}$	P_{obc} wg normy	Straty w pokrywie przy 95°C, obliczone wzorem:		
								uproszczonym	dokładnym	
kVA/kV	A	cm	cm	cm	—	A/cm	kW	W	W	%
500/0,231	1250	14	7	0,8	0,25	89,3	8,0	390	398	5,0
630/0,231	1580	14	7	0,8	0,25	113,0	9,45	558	582	6,2
1600/0,4	2310	14	7	1,0	0,25	165,0	19,5	1030	1080	5,5
16000/3	3070	24	9	1,6	0,19	128,0	123,0	2180	2260	1,9

W tablicy 1 podano obliczenie strat w stalowej pokrywie jednolitej dla kilku normalnych trójfazowych transformatorów energetycznych.

4. PRZYBLIŻONA ANALIZA WPŁYWU INNYCH CZYNNIKÓW NA STRATY W POKRYWACH

a. Wpływ bliższej krawędzi pokrywy

Wzory (14), (36), (38) i (41) zostały wyprowadzone dla pokryw nieskończenie rozległych, co jest słuszne w pełni, gdy bliższa krawędź pokrywy

znajduje się dostatecznie daleko od przepustów. Jednakże jak widać z wyników pomiarów sprawdzających wykonanych dla układu jednofazowego (tabl. 2), nawet przy odległości b rzędu kilkunastu cm wpływ bliższej krawędzi pokrywy jest niewielki i przy większych prądach mniej więcej sta-

Tablica 2

Wpływ zmniejszenia odległości osi przepustów od bliższej krawędzi pokrywy

Pokrywa nr 9	$I =$	2000	1500	1000	800	600	A
Wymiary 71 x 71 cm² $b - R = 35{,}5 - 1{,}8 \approx 34$ cm	$P =$	706	446	236	164	102	W
Po obcięciu 71 x 47,5 cm² $b - R = 12 - 1{,}8 \approx 10$ cm	$P =$	651	404	220	152	95,5	W
Zmniejszenie strat		8,0	9,3	6,8	7,3	6,4	%
Pokrywa nr 10							
Wymiary 95 x 71 cm² $b - R = 35{,}5 - 2{,}5 = 33$ cm	$P =$	762	474	239	164	97,5	W
Po obcięciu 95 x 50 cm² $b - R = 14{,}5 - 2{,}5 = 12$ cm	$P =$	692	432	221	153	92,5	W
Zmniejszenie strat		9,1	8,8	7,5	6,7	5,1	%

ły, rzędu kilku do 10%. Jest to uzasadnione tym, że pewne zmniejszenie strat wskutek ucięcia części blachy jest kompensowane przez odpowiednie, nieco większe zagęszczenie strumienia w części pokrywy zawartej między tą krawędzią a przepustami. Obliczenie takiej poprawki na wpływ bliższej krawędzi pokrywy jest możliwe w oparciu o wyznaczenie pola w blasze metodą odbicia zwierciadlanego, ale trzeba by było wtedy obliczać pole nie od trzech, lecz od sześciu przepustów, co znacznie utrudniłoby i tak już dość skomplikowane obliczenia. Wydaje się, że wystarczy tutaj przyjąć zasadę, że przy małej odległości bliższej krawędzi pokrywy (rzędu kilkunastu cm) i dużych prądach obliczone straty należy zmniejszyć o 7 — 10%.

b. Wpływ asymetrii prądów

Asymetria prądów powoduje, że w pobliżu przepustu o największym prądzie występuje nasycenie stali silniejsze, niż to miałoby miejsce przy symetrii prądów. Dzięki temu straty w pokrywie przy asymetrii prądów

są mniejsze niż przy symetrii. Na podstawie wyników pomiarów sprawdzających stwierdzono, że asymetria prądów w układzie trójfazowym dochodząca do 20% może spowodować zmniejszenie strat o kilka do 10%.

c. Wpływ lokalnego nasycenia pokrywy

Zjawisko to ma szczególne znaczenie przy cienkich pokrywach lub ściankach kadzi i silnych polach. Przy normalnych grubościach pokryw i natężeniach prądów nie odgrywa ono istotnej roli. Lokalne nasycenie pokrywy (w pobliżu przepustów) powoduje jak gdyby zmniejszenie jej grubości (maleje kd wskutek zmalenia μ — rys. 3). Wtedy część energii fali elektromagnetycznej przenika na drugą stronę pokrywy i straty maleją. Można to w przybliżeniu obliczyć na drodze następujących rozważań.

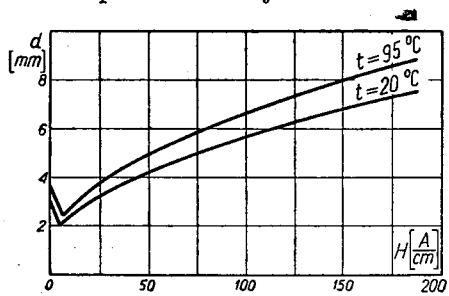
Z rysunku 3 widać, że straty w blasze stalowej praktycznie nie zależą od jej grubości przy $kd \geqslant 2{,}5$. Przyjmując, że przy 20°C przewodność właściwa $\gamma = 7 \cdot 10^4 \frac{1}{\Omega\ \mathrm{cm}}$, otrzymamy:

$$k = \sqrt{\frac{\omega \mu \gamma}{2}} = 0{,}375 \sqrt{\mu'} \sqrt{\frac{192}{172 + t}} \tag{48}$$

oraz

$$d \geqslant \frac{2{,}5}{k} = \frac{6{,}66}{\sqrt{\mu'}} \sqrt{\frac{172 + t}{192}}. \tag{49}$$

Na podstawie tej zależności i krzywej magnesowania stali można wykreślić krzywą granicznej grubości blachy, poniżej której należy uwzględniać współczynnik zmniejszający straty (rys. 3) wskutek przenikania fali przez blachę. Grubość ta wzrasta ze wzrostem natężenia pola magnetycznego (rys. 15).



Rys. 15. Graniczna grubość pokrywy, poniżej której należy stosować zmniejszający współczynnik poprawkowy na nasycenie (53)

Ze względu na bardzo nierównomierny rozkład pola magnetycznego na powierzchni pokrywy dokładne obliczenie strat przy cienkich blachach i silnych polach stwarzałoby bardzo duże trudności. We wzorze (17) pod całką występowałaby funkcja $k^2 \sqrt{\mu'} H^2 = C \mu' \sqrt{\mu'} H^2$. Przeliczając odpowiednio krzywą magnesowania dla stali stwierdzono, że dość dokładnie można to wyrażenie zastąpić funkcją analityczną $\mu' \sqrt{\mu'} H^2 = (2{,}185 \sqrt{H} - 5)\, 10^{-6}$, którą jednak byłoby bardzo trudno scałkować. Zresztą nie jest to normalnie potrzebne.

Aby wyznaczyć straty dla rzadkich przypadków cienkich pokryw i bardzo silnych pól, można zastosować następującą przybliżoną metodę. Ze wzoru (18) mamy:

$$\mu' = \left(\frac{310}{H} + 7{,}9\right)^2. \tag{50}$$

Wychodząc z założenia, że większość strat koncentruje się w pobliżu przewodów (rys. 2), określamy natężenie pola magnetycznego w środku między przepustami jako pewną wartość średnią dla obszaru, w którym występują największe straty. Jest to uzasadnione tym, że przy silniejszych polach $\mu = f(H)$ zmienia się bardzo wolno (rys. 7). Dla układu jednofazowego ze wzoru (3) przy $r = 0$:

$$H = 0{,}9\frac{I}{a}, \tag{51}$$

a dla trójfazowego z analogicznego wzoru (7) [2] przy $x = \frac{a}{2}$ i $y = 0$:

$$H = 0{,}8\frac{I}{a}. \tag{52}$$

Po podstawieniu (51) i (52) do (50) oraz wykorzystaniu zależności (48) otrzymamy współczynnik zmniejszający straty (rys. 3), równy:

$$0{,}2(kd)^2 \approx 0{,}03\, d^2\left(\frac{A_1 a}{I} + 7{,}9\right)^2 \frac{192}{172 + t}. \tag{53}$$

Następnie podstawiając to samo do wzoru (49) otrzymamy wzór na górną granicę stosowalności tego zmniejszającego współczynnika. Straty mnożymy przez współczynnik (53), gdy

$$d < \frac{I}{A_2 a + 1{,}7\, I}\sqrt{\frac{172 + t}{192}}, \tag{54}$$

gdzie po zaokrągleniu

dla układu jednofazowego $A_1 = 350$, $A_2 = 52$

oraz

dla układu trójfazowego $A_1 = 400$, $A_2 = 58$.

Ponieważ liczby te są do siebie odpowiednio zbliżone, to można również przyjąć dla obu układów jednakowe wartości (średnie).

Porównanie obliczeń z pomiarami potwierdza, że wzory te mimo niedużej dokładności mogą być używane jako poprawki na nasycenie. Wyprowadzone zależności (53) i (54) wykorzystano przy obliczeniu strat w badanych modelach pokryw (rysunki 16 i 17). Wpływem nasycenia tłumaczy się właśnie zagięcie krzywych strat ku osi odciętych w końcowych punk-

tach przebiegu dla pokryw nr 2, 3, 5, 6, 7 i 11. Właśnie w tych pokrywach grubość jest odpowiednio 1,3 — 1,1 — 1,3 — 1,2 — 1 i 1,8 razy większa od wartości granicznej obliczonej wzorem (54), podczas gdy w pokrywach nr 4, 8, 9 i 10 grubość w końcowych punktach pomiaru jest dostateczna (0,8 — 0,4 — 0,4 i 0,3 grubości granicznej) i krzywe nie mają odgięcia ku osi odciętych.

W normalnej praktyce nie ma potrzeby posługiwania się korekcyjnymi wzorami (53) i (54), gdyż tam, gdzie mamy do czynienia z dużymi prądami, grubość blach jest na ogół dostatecznie duża. W każdym razie grubość pokrywy większa od 7 mm zapewnia już dostateczną dokładność podanych w rozdziałach 2 i 3 wzorów na straty nawet przy prądach do 3000 ÷ 4000 A. Zwykle pokrywy wykonuje się z blachy grubszej (tabl. 1). Ze wzoru (53) widać, że przy grubościach blach mniejszych od podanej granicy (54) i przy dużych prądach można uzyskać znaczne zmniejszenie strat przez zmniejszenie grubości. Tak też jest w istocie. Pokrywa nr 11, o grubości 4 mm, najlepiej ilustruje to zjawisko.

d. Wpływ temperatury

Temperatura oddziałuje na straty poprzez przewodność właściwą. Wzory (37) i (46) podano dla 20°C. Dla wyznaczenia strat przy innej temperaturze należy je pomnożyć przez współczynnik $\sqrt{\frac{172+t}{192}}$. Jak widać, w normalnych pokrywach straty wzrastają ze wzrostem temperatury. Nierównomierny rozkład temperatury na pokrywie może być przyczyną dodatkowych niedokładności w obliczeniach. W przypadku silnych nasyceń, kiedy spełniony jest warunek (54), straty są proporcjonalne do $\sqrt{\frac{192}{172+t}}$ — wzór (53) —, a więc maleją ze wzrostem temperatury.

e. Wpływ dodatkowych czynników na straty

Istnieje cały szereg innych czynników dodatkowych, które w mniejszy lub większy sposób wpływają na rozrzut wyników pomiarów i obliczeń. Do nich należy skład chemiczny, budowa krystalograficzna, wpływ obróbki cieplnej i plastycznej, wpływ domieszek itp. Część z nich kompensuje się wzajemnie. Na przykład dla różnych materiałów $\sqrt{\frac{\mu}{\gamma}} \approx \text{const}$. Omówienie wpływu tych czynników wykracza poza ramy tej pracy.

5. DOŚWIADCZALNE SPRAWDZENIE WYPROWADZONYCH WZORÓW

a) Układ trójfazowy

Dla pokryw transformatorowych trójfazowych wykonano pomiary strat i temperatur na sześciu pokrywach oznaczonych numerami od 2 do 7,

o różnych danych wymiarowych i materiałowych podanych w tablicy 3. Modele składały się z pokryw przykręconych do skrzyni bez dna, imitującej górną część kadzi transformatora. Badania przeprowadzono dla sze-

Tablica 3

Dane wymiarowe i materiałowe oraz straty i temperatury w badanych pokrywach transformatorów trójfazowych

Nr pokrywy	a	$2R$	d	γ x10⁴	b	Wymiary pokrywy	Temperatury pokrywy		Prąd I	Straty	
							t_1	t_2		pomierzone	obliczone
	cm	cm	cm	$\frac{1}{\Omega\,cm}$	cm	cm · cm	°C	°C	A	W	W
2	13	5,6	0,5	6,8	18	65x135	48	25	600	87	97
							69	32	800	147	156
							89	38	1000	225	226
							123	49	1500	368	324*)
3	20	5,6	0,5	4,8	18	65x135	55	27	600	165	153
							78	32	800	260	237
							107	41	1000	372	351
							156	55	1500	639	637*)
4	25	7,0	0,75	6,8	22	70x150	70	32	1000	246	309
							124	47	1500	487	625
							184	63	2000	917	1055
							238	80	2500	1442	1600
5	18	7,0	0,55	ok. 8	22	70x150	83	29	1000	230	237
							126	36	1500	463	553
							179	54	2000	678	616*)
							204	62	2500	821	815*)
6	20	9,0	0,7	7,0	22	70x150	120	45	1500	518	516
							183	61	2000	906	862
							240	79	2500	1310	1290
							266	88	3000	1614	1765
							282	97	3500	1912	1880*)
							300	98	4000	2086	2200*)
7	30	9,0	0,7	7,1	22	70x150	98	46	1500	559	634
							148	63	2000	976	1060
							188	73	2500	1463	1570
							246	97	3000	2224	2250
							253	99	3500	2570	2900

*) z uwzględnieniem poprawek na nasycenie.

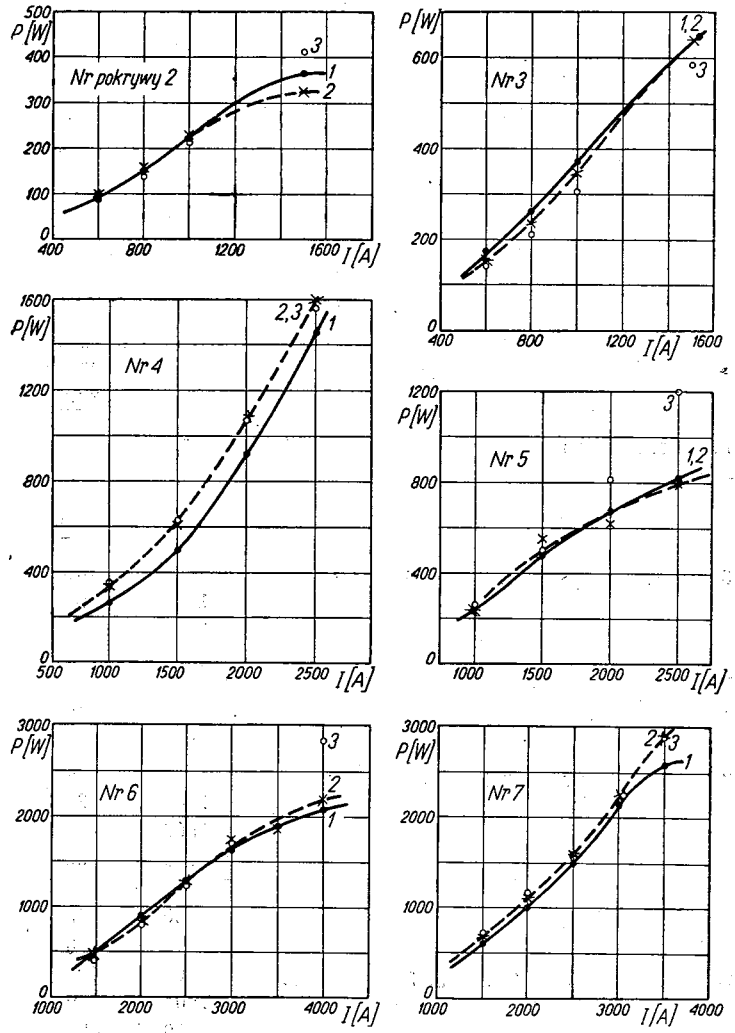
rokiego zakresu prądów od 600 do 4000 A dających straty w granicach od 80 do 3000 W. Straty wyznaczono przy pomocy watomierzy jako różnicę pomiędzy stratami w całym układzie połączeń z wmontowaną pokrywą a stratami w tym samym układzie połączeń bez pokrywy. Temperatury pokrywy mierzono termometrami między sąsiednimi przepustami w połowie ich odległości (t_1) oraz w połowie odległości środkowego przepustu od przeciwległej krawędzi pokrywy (t_2). Przewodność właściwą materiału poszczególnych pokryw pomierzono na próbkach wyciętych z pokryw. Ostateczne wyniki pomiarów strat i ich porównanie z obliczeniem podano w tablicy 3.

Na rys. 16 przedstawiono wykreślnie porównanie strat pomierzonych ze stratami obliczonymi ze wzorów (41) i (46) dla średniej z temperatur t_1 i t_2. Ponieważ pomiary wykonywano w układzie trójfazowym, przy dużych prądach nie udało się uniknąć asymetrii, która czasem przekraczała 20%. Ponadto przy tak dużych prądach odległość przepustów od bliższej krawędzi pokrywy podaną w tablicy 3 należy uważać raczej za małą. Zgodnie zatem z wyjaśnieniami z rozdz. 4 pkt a i pkt b obliczone straty należało zmniejszyć łącznie o około 20%.

Przy normalnych transformatorach takiego zmniejszania strat nie trzeba stosować, gdyż prąd jest tam symetryczny. Przy układzie jednofazowym tych poprawek nie trzeba było uwzględniać i sprawdzenie jest tam dokładniejsze. Krzywe *1* na rys. 16 przedstawiają straty pomierzone, a krzywe *2* — straty obliczone przy pomocy dokładnego wzoru (41) z uwzględnieniem poprawek na nasycenie dla pokryw nr 2, 3, 5 i 6, obliczonych na podstawie wzorów (53) i (54). Na tych samych wykresach kółeczkami oznaczono punkty wyliczone przy pomocy uproszczonego wzoru (46) bez uwzględnienia poprawki na nasycenie. Z punktów tych wynika, że wzór uproszczony daje w granicach normalnie spotykanych prądów ($\leqslant$ 3000 A) wyniki wystarczająco dokładne oraz że stosowanie poprawek na nasycenie jest potrzebne jedynie przy bardzo dużych prądach ($>$ 4000 A) i małych grubościach blach.

b) Układ jednofazowy

W tym przypadku, w odróżnieniu od poprzedniego, starano się wyeliminować wpływ zakłócających obraz czynników ubocznych, które występowały przy układzie trójfazowym, takich, jak nierównomierny rozkład temperatury, lokalne nasycenie blachy, wymagające stosowania poprawek na grubość, wpływ bliższej krawędzi pokrywy itp. Zastosowano tu w tym celu grubsze blachy, nieco mniejsze prądy i większe odległości przepustów od krawędzi. Dla wyeliminowania nierównomiernego nagrzania pokrywy pomiary wykonywano tak, aby temperatura jej nie wykraczała więcej niż o kilka °C ponad temperaturę otoczenia. Również nie występuje w tym układzie problem asymetrii prądów.



Rys. 16. Porównanie strat obliczonych z pomierzonymi na pokrywach transformatorów trójfazowych

1 ——●—— z pomiaru;
2 — — × — — obliczone wzorem dokładnym (41) z poprawką;
3 ○ wzór uproszczony (46) bez poprawki

Oprócz pomiarów wykonanych na grubych pokrywach (15 mm) zbadano jedną pokrywę o bardzo małej grubości (4 mm, nr 11) w celu sprawdzenia rozważań na temat wpływu lokalnego nasycenia na straty i wzorów poprawkowych (53) i (54).

Pomiary starat w pokrywach jednofazowych przeprowadzono tak samo jak w pokrywach trójfazowych, z tym, że tym razem nie używano stalowej kadzi, gdyż — jak to stwierdzono doświadczalnie — nie ma ona żadnego wpływu na badane straty. W tablicy 4 podano dane wymiarowe

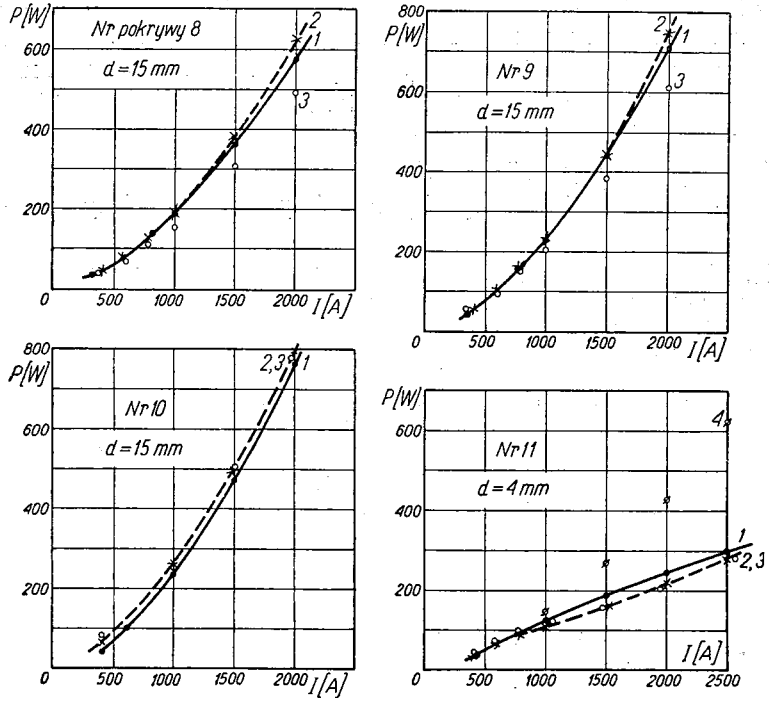
Tablica 4

Dane wymiarowe i materiałowe oraz straty w badanych pokrywach transformatorów jednofazowych

Nr pokrywy	a	$2R$	d	b	γ x10^4	Wymiary pokrywy	Prąd w przepustach	Straty	
								pomierzone	obliczone
	cm	cm	cm	cm	$\frac{1}{\Omega\,cm}$	cm · cm	A	W	W
8	13	3,2	1,5	27	5,55	53,5x71	400	42,2	44,6
							600	84	84,6
							800	134	134,6
							1000	193	194,5
							1500	368	382
							2000	580	619
9	18	3,2	1,5	35,5	5,55	71x71	400	50	54
							600	102	102
							800	164	164
							1000	236	235
							1500	446	457
							2000	706	743
10	26,3	5	1,5	35,5	5,55	94,5x71	400	45	60,8
							600	98	115
							800	164	180
							1000	239	258
							1500	474	495
							2000	762	792
11	13	5	0,4	50	6,91	100x200	400	29	31,7
							600	56	59,8
							800	88	85 *)
							1000	118	103 *)
							1500	185	154 *)
							2000	242	213 *)
							2500	300	285 *)

*) z uwzględnieniem poprawek na nasycenie.

i materiałowe badanych pokryw jednofazowych i wyznaczone w nich straty na drodze teoretycznej i doświadczalnej. Straty w pokrywach nr 8, 9 i 10 można było tym razem obliczać bez żadnych poprawek, wprost ze wzorów (36) i (37). Na rys. 17 przedstawiono wykreślnie porównanie strat pomierzonych (1) ze stratami obliczonymi wzorem dokładnym (2) i uprosz-



Rys. 17. Porównanie strat obliczonych z pomierzonymi na pokrywach transformatorów jednofazowych

1 ——●—— z pomiaru;
2 — — × — — obliczone wzorem dokładnym (36) z uwzględnieniem poprawki (53) dla pokrywy Nr 11;
3 ○ obliczone wzorem uproszczonym (37) z uwzględnieniem poprawki (53) dla pokrywy Nr 11;
4 ϕ obliczone wzorem uproszczonym (37) bez uwzględnienia poprawki (dotyczy tylko pokrywy Nr 11)

czonym (3). Dla pokrywy nr 11 kółkami przekreślonymi oznaczono straty obliczone bez uwzględnienia małej grubości pokrywy [tj. poprawki (53)].

Jak widać z wykresu dla pokrywy nr 11, przez zmniejszenie grubości pokrywy do 4 mm można przy większych prądach zmniejszyć straty o więcej niż połowę. Z rys. 17 widać, że przy odpowiednio grubych pokrywach wzory uproszczone dają wystarczająco dokładne wyniki.

6. MOŻLIWOŚCI ZMNIEJSZANIA STRAT W POKRYWACH PRZEZ WSTAWIANIE CIENKICH PŁYT STALOWYCH

Ze wzoru (53) i zbadania cienkiej blachy nr 11 wynika wniosek, że zmniejszając grubość pokrywy w bezpośrednim otoczeniu przewodów do 3 — 4 mm można uzyskać zmniejszenie strat przy prądach > 1000 A nie mniejsze niż przez stosowanie przecięć między przepustami, wypełnionych metalem niemagnetycznym. Na przykład przez wstawienie do otworu wyciętego w grubej pokrywie płyty stalowej o grubości 3 mm uzyskujemy następujące zmniejszenie strat przy prądach od 1000 do 4000 A i $a = 20$ cm:

dla układu trójfazowego, odpowiednio do

0,68 ... 0,26 wartości dla grubych pokryw nieprzeciętych przy 20°C

i

0,54 ... 0,21 — przy 70°C, wobec ok. 0,3, przy zastosowaniu przecięć.

dla układu jednofazowego —

0,60 ... 0,25 przy 20°C

i

0,48 ... 0,2 przy 70°C, wobec ok. 0,4, przy zastosowaniu przecięć.

Ten sposób może dać zatem nawet skuteczniejsze zmniejszenie strat niż przy stosowaniu przecięć między przepustami.

Obliczenie strat w pokrywach ze szczelinami niemagnetycznymi wyciętymi pomiędzy otworami na przepusty będzie przedmiotem innego artykułu autora.

Katedra Maszyn Elektrycznych i Transformatorów
Politechniki Łódzkiej

WYKAZ LITERATURY

1. Turowski J.: Pole elektromagnetyczne i straty w obudowie transformatora — Zesz. Nauk. Politechniki Łódzkiej „Elektryka" Nr 3, 1957.
2. Turowski J.: Straty w pokrywach transformatorów trójfazowych wywołane polem elektromagnetycznym przepustów. — Zesz. Nauk. Politechniki Łódzkiej „Elektryka" Nr 4, 1958.
3. Niejman L. R.: Powierchnostnyj effiekt w fierromagnitnych prowodach i magnitnych cepiach. — Elektriczestwo Nr 1, 1950.
4. Sluchotzki E. A.: Zur Berechnung von Induktoren für die Induktionserwärmung. — Deutsche Elektrot. Nr 8, 1957
5. Ryżik I. M., Gradsztejn I. S.: Tablicy intiegrałow, summ, riadow i proizwiedienij. Moskwa-Leningrad 1951.
6. Jahnke E., Emde F.: Tablicy funkcyj (tłum. z niem.) Moskwa 1949.

OZNACZENIA

a — odległość osi przepustów (w cm);
b — odległość osi przepustów od bliższej krawędzi pokrywy (w cm);
c $= R/a$ stosunek promienia otworu do odległości osi przepustów;

d — grubość blachy (w cm);
f — częstotliwość (w Hz);
H — pierwsza harmoniczna natężenia pola magnetycznego, $\hat{H}$ — wartość chwilowa zespolona, H_{mp} — wartość maksymalna na powierzchni metalu $\left(\mathrm{w}\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{cm}}\right)$;
I — wartość skuteczna prądu (w A);
$k = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}$;
N – współczynnik zwiększenia strat wskutek zmienności μ w głąb blachy;
P — straty (w watach);
R — promień otworu pod przepusty (w cm);
OXY – płaszczyzna powierzchni pokrywy, OZ — kierunek prostopadły do powierzchni;
γ — przewodność właściwa metalu $\left(\mathrm{w}\frac{1}{\Omega\ \mathrm{cm}}\right)$;
$\mu_0 = 4\pi 10^{-9}\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A\ cm}}$;
$\mu' = \mu/\mu_0$ — względna przenikalność magnetyczna (stosunek pierwszych harmonicznych H i B);
$\omega = 2\pi f$;

Inne oznaczenia w tekście. Jednostki podane przy oznaczeniach dotyczą wzorów liczbowych.

Я. ТУРОВСКИ

ПОТЕРИ В КРЫШКАХ ОДНО- И ТРЕХФАЗНЫХ ТРАНСФОРМАТОРОВ

Резюме

Крышка трансформатора представляет довольно обширную металлическую плоскость пронизываемую под прямым углом проводниками с током.

В такой системе магнитное поле, возникающее вокруг вводов очень неравномерно. Потери в крышке, которые при первом приближении пропорциональны квадрату напряжения магнитного поля, будут распределены по поверхности ещё более неравномерно (рис. 2). В стальных крышках источником добавочных усложнений является очень большая изменчивость магнитной проницаемости. Изменяемость проницаемости в плоскости крышки учтено, вводя аналитическую апроксимацию кривой намагничивания стали (формула 18). Изменяемость же проницаемости внутрь металла учтено, использовав работы других исследователей (лит. 3, 4), вводя в формулу (1) увеличивающий коэффициент N.

В предыдущей работе автора (лит. 1), исходя из основных уравнений Максвелла и теоремы Поинтинга выведено общие интегральные формулы (1) и (2) на потери в массивных металлических частях. Формула (1) относится к стальным листам толщиною свыше нескольких миллиметров, а формула (2) — к немагнитным крышкам.

Напряжение магнитного поля на поверхности крышки, входящее в эти формулы, рассчитано из закона полного тока, учитывая взаимное наложение полей от отдельных токов (3).

В пункте 2.2 выведено формулу на потери в крышке однофазного трансформатора выполненной из неферромагнитного металла (14). Формулы (15) и (16) являются упрощенными апроксимационными формулами.

В пункте 2.3 выведено такую же формулу как выше, но для стальной крышки (36).

В пункте 3 подано результаты аналогичных исчислений для трехфазного трансформатора. Эти исчисления проведено в другой работе автора (лит. 2). Здесь потери в крышке при неферромагнитном металле выражаются формулой (38), а в стальной крышке — формулой (41).

Так как формулы (36) и (41) очень сложны, разработано упрощенные приближенные формулы (37) и (46), которые довольно просты и удобны. Отличаются они от себя лишь только коэффициентом $\sqrt{3}$.

В пункте 4 проведено приближенный анализ влияния второстепенных факторов на потери в крышках. Установлено здесь (п. 4a) на опыте, что при небольшом расстоянии осей вводов от ближайшего края крышки потери могут уменьшаться на несколько до 10%. В случае ассиметрии токов (п. 4b) потери тоже уменьшаются на несколько до 10%. Это вызвано насыщением стали вблизи большего из токов. В пункте 4c исследовано влияние местного насыщения крышки при больших токах и малых толщинах листа. Для таких случаев выведено приближенный поправочный коэффициент (53), через который следует умножать потери в случае, когда толщина листа меньше величины рассчитанной формулой (54).

При обычных толщинах крышек и величинах тока нет необходимости учитывать этот уменьшающий коэффициент. Однако же на основании этой зависимости установлено, что путем установки соответственно тонких стальных листов в месте, где проходят вводы, можно получить значительное уменьшение потерь. Это видно на примере крышки № 11 (рис. 17), где кривая *4* представляет потери при нормальной толщине листа, а кривые *1*, *2* и *3* — при толщине 4 мм.

На рис. 16 представлено сравнение потерь в крышке трехфазного трансформатора, измеренных на моделях (кривые *1*) с рассчитанными точной формулой (41) с поправками (кривые *2*) и упрощенной формулой без поправок (кривые *3*).

Аналогичное сравнение потерь измеренных с рассчитанными для крышки однофазного трансформатора представлено на рис. 17.

J. TUROWSKI

LOSSES IN COVERS OF SINGLE- AND THREE-PHASE TRANSFORMERS

Summary

Using general integral formulae for eddy-current losses in solid metal ferromagnetic (1) and non-ferromagnetic (2) parts, which have been received in one of the former papers of the author [1], formulae for losses in covers of single-phase transformer (36) are deduced in this paper. Results of analogous calculations performed in another paper [2] for covers of three-phase transformers (41) are given as well. In result of the calculations, practical formulae for losses in covers of transformers made on non-ferromagnetic metal (14) and (38) and in steel covers, are received. By means of a suitable approximation, convenient simplified formulae are obtained (37) and (46), from which it follows that the losses in steel covers of three-phase transformers

are approximately $\sqrt{3}$ times greater than those in covers of single-phase transformers (47).

The influence of secondary factors upon losses in covers is discussed. In particular the influence of local saturation of the cover, currents being big and thickness of sheet small, are investigated. For such exceptional cases, suitably approximated correction coefficients are deduced, on the basis of which it is stated that a considerable decrease in losses is to be obtained by means of setting in suitably thin steel plates in the place of bushings.

All the formulae and conclusions from the calculations and considerations have been verified experimentally on a number of models within a wide range of currents, and the results have been satisfactorily confirmed (Fig. 16 and 17).

621.314.7

TADEUSZ JANKOWSKI

Praca impulsowa tranzystorów Wybrane zagadnienia

Rękopis dostarczono 30.12.1957

W pracy zostały omówione zagadnienia związane ze sterowaniem dużymi sygnałami tranzystorów pracujących w maszynach cyfrowych. Podane zostały i porównane z wynikami doświadczalnymi zależności czasowe między prądami wejściowymi i wyjściowymi oraz wynikające z rozwiązania równania dyfuzji zależności między napięciami i prądami. W ostatniej części spróbowano sprecyzować wymagania stawiane tranzystorom pracującym impulsowo, a następnie podano typowe układy impulsowe na tranzystorach stosowane w Zakładzie Aparatów Matematycznych PAN.

1. WSTĘP

Do chwili obecnej (1957 r.) tranzystory nie są w stanie zastąpić triod próżniowych. Tranzystory ustępują lampom próżniowym pod względem zakresu częstotliwości, oporności wejściowej, odporności termicznej, mocy wyjściowej itp. Na korzyść tranzystorów przemawiają jednak małe rozmiary i mały ciężar, mały pobór mocy (rzędu kilkudziesięciu mW i mniej na stopień) i stosunkowo duża trwałość[1]). Te cechy zapewniają wykorzystanie tranzystorów w urządzeniach przenośnych oraz w urządzeniach o dużej ilości elementów. Do tych ostatnich należą elektronowe maszyny cyfrowe, gdzie ilość lamp (ewentualnie tranzystorów) może dochodzić do kilku tysięcy.

Podstawą pracy maszyn cyfrowych jest technika impulsowa. Zastosowanie tranzystorów w maszynach cyfrowych wymaga więc zbadania impulsowych własności tranzystorów. Tematem poniższej pracy jest omówienie zagadnień, które wyłoniły się w czasie opracowywania (a ściślej: przed

[1]) Dane co do trwałości są bardzo różnorodne, ale np. w maszynie cyfrowej TRADIC w ciągu 5000 godz. pracy na 700 tranzystorów wymieniono 4 szt. Jest to w przybliżeniu 1‰/1000 h.

opracowaniem) jednego z podstawowych fragmentów maszyny cyfrowej, jakim jest rejestr. Zostały opracowane przebiegi czasowe, równanie tranzystora dla dużych sygnałów oraz z układów impulsowych wzmacniacz i przerzutnik dynamiczny. Pominięta natomiast została elementarna teoria zjawisk fizycznych zachodzących w tranzystorach oraz równania liniowe tranzystora dla małych sygnałów. Pomiary oraz konkretne układy wykonane zostały na krajowych tranzystorach produkcji Instytutu Łączności oraz IPPT PAN. Całość odnosi się wyłącznie do tranzystorów warstwowych *p-n-p*, tranzystory ostrzowe nie zostały omówione ze względu na odmienny charakter pracy oraz brak krajowych tranzystorów tego typu. Zastosowanie poniższej pracy do tranzystorów warstwowych *n-p-n* wymaga tylko niewielkich zmian.

2. PRZEBIEGI CZASOWE

2.1. Wprowadzenie

Pole, które pokrywa rodzina charakterystyk $I_k = f(U_k)$ dla $I_e = \text{const}$, można podzielić na 3 obszary:

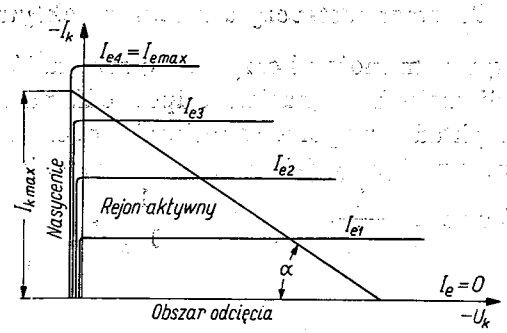
1. Rejon (obszar) odcięcia: emiter i kolektor są spolaryzowane ujemnie (zaporowo).
2. Rejon (obszar) aktywny: emiter jest spolaryzowany dodatnio, a kolektor ujemnie.
3. Rejon (obszar) nasycenia: tak emiter, jak i kolektor spolaryzowane są w kierunku przewodzenia (dodatnio).

W „normalnych" warunkach pracy tranzystor znajduje się w zakresie drugim. W pracy impulsowej, przy sterowaniu dużymi sygnałami tranzystor znajduje się początkowo w rejonie pierwszym, w czasie narastania impulsu w rejonie drugim (aktywnym), dla części płaskiej impulsu mamy stan nasycenia (rejon 3), wreszcie podczas opadania impulsu tranzystor jest znowu w rejonie aktywnym. W czasie przerwy między impulsami punkt pracy tranzystora znajduje się w rejonie odcięcia (— jakby klasa C).

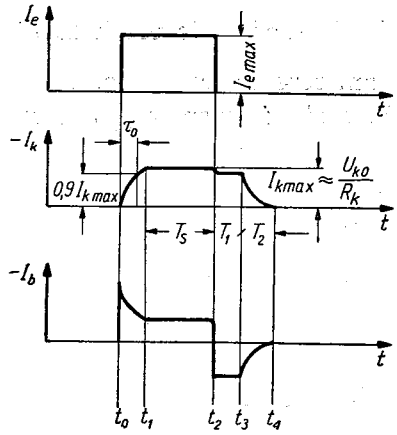
Rozpatrzmy układ *WB* (wspólna baza). Jeżeli założymy prostokątny w funkcji czasu kształt prądu I_e (będzie to w tym przypadku prąd sterujący, wejściowy), to przebiegi prądowe w tranzystorze będą wyglądały następująco (rys. 2).

Od chwili t_0 do t_1 tranzystor jest w rejonie aktywnym. Od chwili t_1 tranzystor jest przesterowany i znajduje się w zakresie nasycenia. Prąd I_k jest wówczas określony przez obwód kolektora i równa się w przybliżeniu (por. rys. 1) $-I_k = I_{k\,\max} = \dfrac{U_{k0}}{R_k}$. Trzeba podkreślić, że w przesterowanym tranzystorze nie obowiązuje równość $I_k = -\alpha I_e$, gdyż $I_{k\,max} < \alpha I_{e\,max}$. Czas $\tau_0 \approx t_1 - t_0$ nazywamy czasem narastania.

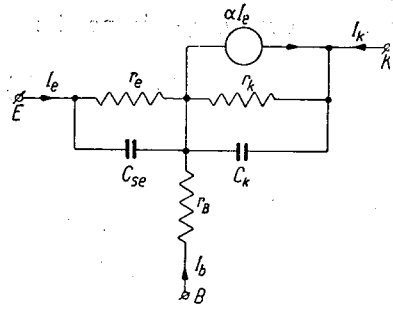
W chwili t_2 kończy się impuls wejściowy, jednak prąd I_k płynie prawie bez zmian do chwili t_3. Czas $T_1 = t_3 - t_2$ nazywamy opóźnieniem końca impulsu; jest ono spowodowane magazynowaniem nośników w obszarze bazy. Od chwili t_3 do t_4 prąd I_k maleje, a tranzystor znajduje się w rejonie aktywnym. Czas $T_2 = t_4 - t_3$ nazywamy czasem opadania impulsu.



Rys. 1. Droga punktu pracy w polu charakterystyk $I_k = f(U_k)\big|_{I_e = \text{const}}$ (schematycznie); $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{R_k}$



Rys. 2. Odpowiedź tranzystora na skok jednostkowy prądu emitera dla $I_{e\,max} > \dfrac{U_{k0}}{R_k \alpha}$



Rys. 3. Schemat zastępczy tranzystora dla zakresu aktywnego C_{se} — pojemność dyfuzyjna, C_k — pojemność kolektora

Przebieg prądu $I_b(t)$ wynika z równości $I_e + I_k + I_b = 0$. Obowiązuje przy tym zasada, że prądy wejściowy i wyjściowy dopływające do tranzystora uważamy za dodatnie. Charakterystyczna jest zmiana znaku prądu I_b w chwili t_2. Równość $I_b = I_e(1 - \alpha)$ nie obowiązuje, natomiast w dalszym ciągu słuszne jest, że $I_b = -(I_e + I_k)$.

Poniżej zostały obliczone czasy narastania, opóźnienia końca impulsu oraz opadania.

2.2. Czas narastania $t_0 < t < t_1$

2.2.1. Schemat zastępczy dla zakresu aktywnego

W zakresie aktywnym można korzystać ze schematów zastępczych stosowanych w teorii małych sygnałów. Odpowiedź na skok jednostkowy znajdujemy na przykład przy pomocy rachunku operatorowego. Jak podaje Moll [9], schemat zastępczy jak na rys. 3 zapewnia wystarczającą dokładność do czasów rzędu $\frac{1}{\omega_N}$, a nawet $\frac{1}{10\omega_N}$,

gdzie

$\omega_N = 2\pi f_N$

oraz

$f_N = f_{\alpha_0}$ — częstotliwość graniczna.

Jeżeli na przykład $\omega_N = 10^7$, to czasy narastania rzędu 0,1 μs mogą być obliczone przy pomocy schematu wg rys. 3 wystarczająco dokładnie.

Schemat powyższy słuszny jest więc w rejonie aktywnym dla czasów dłuższych od $\frac{1}{\omega_N}\left(\frac{1}{10\omega_N}\right)$ oraz dla napięć i prądów nie przekraczających wartości dopuszczalnych ze względu na zniszczenie tranzystora.

Stosując rachunek operatorowy zakłada się, że współczynnik wzmocnienia prądowego α_N równa się:

$$\alpha_N(p) = \frac{\alpha_N}{1 + \frac{p}{\omega_N}},$$

gdzie

$$\alpha_N = \alpha_0 = -\left.\frac{\partial I_k}{\partial I_e}\right|_{U_k = \text{const}}$$

jest współczynnikiem wzmocnienia prądowego dla prądu stałego, a p — zmienna zespolona.

Dla przebiegów sinusoidalnych korzysta się z symbolicznej postaci

$$\hat{\alpha}_N = \frac{\alpha_N}{1 + \frac{j\omega}{\omega_N}}$$

będącej przybliżeniem rozwiązania równania dyfuzji [por. str. (14)] dla małych sygnałów. Widać, że postać operatorową $\alpha_N(p)$ można otrzymać zastępując $j\omega$ w postaci symbolicznej przez p.

2.2.2. *Przebieg $I_k(t)$ dla prądu emitera narastającego skokiem*

Jeżeli oporność obciążenia w obwodzie kolektora jest wystarczająco mała[1]), to można napisać, że:

$$I_k(p) = -\alpha_N(p)\, I_e(p)$$

zakładając

$$I_e(t) = 1(t)\, I_{e\,\max}$$

oraz $t_0 = 0$

$$I_e(p) = \frac{1}{p} I_{e\,\max},$$

$$I_k(p) = -I_{e\,\max} \frac{1}{p} \cdot \frac{\alpha_N}{1 + \frac{p}{\omega_N}},$$

$$I_k(p) = -I_{e\,\max}\, \omega_N\, \alpha_N \cdot \frac{1}{p(p + \omega_N)}.$$

Ponieważ $L^{-1}\left(\frac{1}{p(p+b)}\right) = \frac{1}{b}\left(1 - e^{-bt}\right)$,

więc

$$\boxed{I_k(t) = -I_{e\,\max}\, \alpha_N \left(1 - e^{-\omega_N t}\right)} \tag{1}$$

Otrzymaliśmy przebieg wykładniczy. Jeżeli tranzystor jest przesterowany, czyli $I_{k\,\max} \approx \frac{U_{k0}}{R_k} < I_{e\,\max}\, \alpha_N$, to czas, w jakim prąd I_k osiągnie wartość $-\,0{,}9\, I_{k\,\max}$, obliczyć można z równania (1) jako

$$\boxed{\tau_0 = \frac{1}{\omega_N} \ln \frac{1}{1 - \frac{0{,}9\, I_{k\,\max}}{\alpha_N\, I_{e\,\max}}}} \tag{2}$$

(Jak widać, przy ustalonych warunkach w obwodzie kolektora τ_0 maleje dla rosnącego $I_{e\,\max}$). W podobny sposób można obliczyć czas narastania impulsu dla układu *WE* (wspólny emiter) z równania:

[1]) Chodzi o pominięcie r_k i C_k.

$$I_k(p) = \beta(p)\, I_b(p) = \frac{\alpha_N}{1 - \alpha_N + \dfrac{p}{\omega_N}}\, I_b(p).$$

2.2.3. Przebieg $I_k(t)$ dla przebiegu wykładniczego na wejściu

Ponieważ w praktyce założenie skokowego narastania prądu I_e nie jest spełnione i może prowadzić do dużych błędów, załóżmy przebieg wykładniczy prądu I_e. Przebieg taki może wystąpić w przypadku sterowania jednego stopnia tranzystorowego przez inny. Wówczas — pomijając pojemności bocznikujące — prąd I_e, który oznaczmy jako I_{e2}, jest proporcjonalny do prądu I_{k1}, gdzie I_{k1} jest prądem kolektora poprzedniego stopnia.

$$I_{e2}(t) = I_{e2\,\max}\left(1 - e^{-\omega_{N1} t}\right),$$

$$I_{e2}(p) = I_{e2\,\max}\,\omega_{N1}\frac{1}{p(p + \omega_{N1})};$$

jeżeli

$$\alpha_N(p) = \frac{\alpha_N}{1 + \dfrac{p}{\omega_{N2}}},$$

to

$$I_k(p) = I_{k2}(p) = -\alpha_N(p)\, I_{e2}(p) = -I_{e2\,\max}\,\alpha_N\,\frac{\omega_{N1}\,\omega_{N2}}{p(p + \omega_{N1})(p + \omega_{N2})}.$$

Stosując odwrotne przekształcenie Laplace'a

$$I_k(t) = -I_{e2\,\max}\,\alpha_N\left[1 + \frac{\omega_{N2}}{\omega_{N1} - \omega_{N2}}\, e^{-\omega_{N1} t} - \frac{\omega_{N1}}{\omega_{N1} - \omega_{N2}}\, e^{-\omega_{N2} t}\right],$$

a dla

$$\omega_{N1} \approx \omega_{N2} = \omega_N$$

$$\boxed{I_k(t) = -I_{e2\,\max}\,\alpha_N\left[1 - e^{-\omega_N t} - \omega_N t\, e^{-\omega_N t}\right]} \qquad (3)$$

[Wzór (3) słuszny jest przy zastosowaniu w obu stopniach podobnych tranzystorów].

W stosunku do wzoru (1) we wzorze (3) dochodzi jeszcze wyraz $-\omega_N t\, e^{-\omega_N t}$. Wyraz ten dąży wprawdzie do zera dla $\omega_N t \to \infty$, ale nie pozwala na podanie w sposób jawny czasu narastania τ_0. W tym wypadku

czas τ_0, w jakim prąd I_k osiąga wartość — 0,9 $I_{k\,max}$, znajdujemy ze wzoru (3) stosując metodę kolejnych prób.

2.3. Poszerzenie impulsu

W stanie nasycenia złącza emiter-baza oraz kolektor-baza są spolaryzowane w kierunku przewodzenia (por. p. 3.4). W tych warunkach występuje emisja nośników mniejszościowych tak przez emiter, jak przez kolektor. Możemy więc mówić o prądach emitowanych przez emiter i kolektor oraz odpowiednio o prądach dopływających do kolektora i emitera. Uważa się, że opóźnienie końca i poszerzenie impulsu wyjściowego spowodowane jest istnieniem prądu dopływającego do emitera po zniknięciu impulsu wejściowego. Zgodnie z tym, co było powiedziane wyżej, można napisać, że prąd I_e oraz prąd I_k składają się z dwu części:

$$I_e = -I_{ef} + I_{er}, \tag{4}$$

$$I_k = -I_{kf} + I_{kr}, \tag{5}$$

gdzie:

I_{ef} — prąd emitowany przez emiter,
I_{er} — prąd dopływający do emitera,
I_{kf} — prąd emitowany przez kolektor,
I_{kr} — prąd dopływający do kolektora.

Zakładając, że oba procesy są niezależne od siebie, słuszne są następujące równości:

$$I_{kr}(p) = \alpha_N(p)\, I_{ef}(p), \tag{6}$$

$$\alpha_N(p) = \frac{\alpha_N}{1 + \dfrac{p}{\omega_N}}, \tag{6a}$$

$$I_{er}(p) = \alpha_I(p)\, I_{kf}(p), \tag{7}$$

$$\alpha_I(p) = \frac{\alpha_I}{1 + \dfrac{p}{\omega_I}}, \tag{7a}$$

gdzie:

$\alpha_N = \alpha_0$
$\omega_N = \omega_0 = 2\pi f_{\alpha_0}$

} parametry mierzone w rejonie aktywnym przy $U_e > 0$, $U_k < 0$ (dla prądu stałego)

oraz

α_I
$\omega_I = 2\pi f_{\alpha_0}$

} parametry mierzone „w drugą stronę" przy $U_e < 0$, $U_k > 0$ (dla prądu stałego).

Ze wzorów (5) i (6) mamy

$$I_{ef}(p)\,\alpha_N(p) = I_k(p) + I_{kf}(p),$$

oraz ze wzorów (4) i (7) mamy

$$I_{kf}(p)\,\alpha_I(p) = I_e(p) + I_{ef}(p),$$

stąd:

$$I_{ef}(p) = I_{kf}(p)\,\alpha_I(p) - I_e(p), \tag{8}$$

$$[I_{kf}(p)\,\alpha_I(p) - I_e(p)]\,\alpha_N(p) = I_k(p) + I_{kf}(p),$$

a następnie

$$\boxed{I_{kf}(p) = -\frac{I_k(p) + I_e(p)\,\alpha_N(p)}{1 - \alpha_N(p)\,\alpha_I(p)}.} \tag{9}$$

oraz ze wzoru (7)

$$\boxed{I_{er}(p) = -\alpha_I(p)\frac{I_k(p) + I_e(p)\,\alpha_N(p)}{1 - \alpha_N(p)\,\alpha_I(p)}.} \tag{10}$$

Tranzystor jest w stanie nasycenia od chwili t_1 (wg rys. 2) do chwili t_3. W chwili t_2 następuje skok prądu I_e.

Oznaczając

$$\left.\begin{aligned} I_e &= I_{e1} \\ I_k &= I_{k1} \end{aligned}\right\} \approx \text{const dla } t_1 < t < t_2$$

oraz

$$\left.\begin{aligned} I_e &= I_{e2} \\ I_k &= I_{k2} \end{aligned}\right\} \approx \text{const dla } t_2 < t < t_3$$

otrzymujemy (dla przyrostów prądów):

$$\left.\begin{aligned} I_e(p) &= \frac{I_{e2} - I_{e1}}{p}, \\ I_k(p) &= \frac{I_{k2} - I_{k1}}{p}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Wstawiając (6a), (7a) i (11) do (9) i (10) oraz stosując odwrotne przekształcenie Laplace'a otrzymujemy $I_{er}(t)$ oraz $I_{kf}(t)$ o postaci:

$$\boxed{I(t) = A + B \cdot e^{-\omega_A t} + C \cdot e^{-\omega_B t},}$$

gdzie

$$\omega_A \approx \omega_N + \omega_I - \frac{\omega_N \omega_I (1 - \alpha_N \alpha_I)}{\omega_N + \omega_I}$$

oraz

$$\omega_B \approx \omega_N \omega_I \frac{(1 - \alpha_N \alpha_I)}{\omega_N + \omega_I},$$

a czas liczony jest od chwili t_2.

Z reguły przy tym prawdziwa jest nierówność

$$\omega_B < \omega_I < \omega_N < \omega_A$$

oraz

$$\omega_B \ll \omega_A.$$

Tranzystor przestaje znajdować się w stanie nasycenia po czasie T_{1k} (licząc od chwili t_2), gdy prąd I_{kf} staje się równy zeru. Przejście do rejonu aktywnego wymaga jednak czasu potrzebnego na dopłynięcie do emitera nośników emitowanych przez kolektor. W związku z tym uważamy, że czas T_1 potrzebny na przejście tranzystora do zakresu aktywnego jest większy od T_{1k} i równa się T_{1E} — czasowi, po którym prąd $I_{er} = 0$. Mamy więc: $T_1 = T_{1E} > T_{1k}$.

Czas T_{1E} wyznaczamy z warunku $I_{er} = 0$ zakładając, że $I_{k2} - I_{k1} \approx 0$ oraz pomijając wyrażenie $B \cdot e^{-\omega_A t}$ w stosunku do $C \cdot e^{-\omega_B t}$. Ostatnie uproszczenie można stosować dla $\omega_B \ll \omega_A$ (dokładniej: dla $\frac{\omega_I}{\omega_N}(1 + - \alpha_N \alpha_I) < \frac{1}{10}$). W praktyce wpływ stosunku współczynnika B do współczynnika C jest wówczas pomijalny.

Ostatecznie:

$$T_1 = \frac{\omega_N + \omega_I}{\omega_N \omega_I (1 - \alpha_N \alpha_I)} \cdot \ln \frac{I_{e2} - I_{e1}}{I_{e2} + \frac{I_{k1}}{\alpha_N}}. \tag{12}$$

Zazwyczaj $I_{e2} \approx 0$ i — jak widać z (12) — wpływ magazynowania nośników (czas T_1) będzie mniejszy dla rosnącego ω_N i ω_I oraz malejącego α_I. Poza tym czas T_1 rośnie przy przesterowaniu, to znaczy przy rosnącym $\left|\frac{I_{e1}}{I_{k1}}\right|$. Czas T_1 zależy również w pewnych granicach od szerokości impulsów, a dokładniej od czasu T_s, czyli od czasu, jaki upłynął od chwili przej-

ścia tranzystora z rejonu aktywnego do zakresu nasycenia do chwili, kiedy kończy się impuls wejściowy. Dla $T_s < \frac{1}{(1-\alpha_I)\omega_I}$ gęstość nośników w obszarze bazy nie osiąga stanu równowagi (por. Moll [9]) i czas T_1 jest mniejszy od czasu wyliczonego ze wzoru (12). Na przykład dla $\alpha_I = 0{,}96$ oraz $\omega_I = 10^7$ tranzystor nie osiąga stanu równowagi dla czasów

$$T_s < \frac{1}{(1-\alpha_I)\omega_I} = \frac{1}{(1-0{,}96)\cdot 10^7} = 2{,}5\ \mu s.$$

2.4. Czas opadania

Czas opadania równa się różnicy czasów t_4 i t_3 (rys. 2), przy czym $I_k(t_4) \overset{df}{=} 0{,}1\ I_{k1}$ oraz $I_k(t_3) \approx I_{k1} \approx -I_{k\,\max}$. Ponieważ dla $t \in [t_3, t_4]$ tranzystor znajduje się w rejonie aktywnym, więc korzystamy ze związku $I_k(p) = -\alpha_N(p)\, I_e(p)$ nieco go modyfikując. Mianowicie liczymy tak, jakby do chwili t_3 płynął prąd $I_e = -\frac{I_{k1}}{\alpha_N}$ [gdyż $I_k(t_3) \approx I_{k1}$], a następnie jakby nastąpił skok prądu I_e do wartości I_{e2}.

Wówczas oznaczając:

$$I_\Delta(t) = \left(\frac{I_{k1}}{\alpha_N} + I_{e2}\right) 1(t),$$

gdzie czas liczony jest od t_3,

$$I_{k1} = -|I_{k1}| \text{ oraz } I_{e2} = |I_{e2}|$$

$$I_k(p) = \frac{I_{k1}}{p} - \alpha_N(p)\, I_\Delta(p),$$

$$I_k(p) = \frac{I_{k1}}{p} - \alpha_N \omega_N \frac{\frac{I_{k1}}{\alpha_N} + I_{e2}}{p(p+\omega_N)},$$

stąd

$$I_k(t) = I_{k1} - \alpha_N \left(\frac{I_{k1}}{\alpha_N} + I_{e2}\right)\left(1 - e^{-\omega_N t}\right)$$

oraz dla $I_k(t) = 0{,}1\ I_{k1}$, $t_4 - t_3 = T_2$,

$$\boxed{T_2 = \frac{1}{\omega_N} \ln \frac{I_{k1} + \alpha_N I_{e2}}{0{,}1\, I_{k1} + \alpha_N I_{e2}}.} \tag{13}$$

2.5. Obliczenia i pomiary

A. CZAS NARASTANIA

$$\tau_0 = \frac{1}{\omega_N} \cdot \ln \frac{1}{1 - \dfrac{0{,}9\, I_{k\,\max}}{\alpha_N I_{e\,\max}}}.$$

Założenia[1])

$$\omega_N = 10^7 \qquad \left(\text{albo } f_{\alpha_N} = \frac{10}{2\pi}\ \text{MHz}\right)$$
$$\alpha_N = 0{,}96$$
$$I_{k\,\max} = 13\ \text{mA}$$
$$I_{e\,\max} = 20\ \text{mA}$$

$$\tau_0 = 0{,}1 \cdot 10^{-6} \ln \frac{1}{1 - \dfrac{0{,}9 \cdot 13}{0{,}96 \cdot 20}} = 0{,}1 \cdot 10^{-6} \ln \frac{1}{1 - 0{,}609} \approx 0{,}1\ \mu\text{s}.$$

Zmierzony czas narastania równa się 0,2 ÷ 0,3 μs. Należy jednak podkreślić, że czas narastania impulsów sterujących (z generatora) był gorszy od 0,1 μs, a poza tym dodatkowy błąd pomiarowy wprowadzał wzmacniacz oscyloskopu o pasmie ok. 3 MHz oraz pojemności wejściowej ok. 100 pF.

B. OPÓŹNIENIE KOŃCA IMPULSU

$$T_1 = \frac{\omega_N + \omega_I}{\omega_N \omega_I (1 - \alpha_N \alpha_I)} \cdot \ln \frac{I_{e2} - I_{e1}}{I_{e2} + \dfrac{I_{k1}}{\alpha_N}}.$$

Założenia[1])

$$\omega_N = 10^7$$
$$\omega_I = 0{,}7\ \omega_N$$
$$\alpha_N = \alpha_I = 0{,}96$$
$$I_{e1} = 22\ \text{mA}$$
$$I_{e2} = 0$$
$$I_{k1} = -13\ \text{mA}$$

$$T_1 = \frac{1{,}7\ \omega_N}{0{,}7\ \omega_N^2 (1 - \alpha_N^2)} \cdot \ln \frac{\alpha_N I_{e1}}{-I_{k1}} = \frac{1{,}7 \cdot 10^{-6}}{0{,}7 \cdot 10(1 - 0{,}96^2)} \cdot \ln \frac{0{,}96 \cdot 22}{13} =$$
$$= \frac{1{,}7 \cdot 10^{-6}}{0{,}7 \cdot 0{,}8} \ln 1{,}625 \approx 1{,}5\ \mu\text{s}.$$

[1]) Przyjęte wielkości są w zgodzie z warunkami pracy wzmacniacza impulsowego z rozdz. 4.3 oraz średnimi wartościami parametrów użytych tranzystorów. Różnica między $I_{e\,\max}$ z punktu A oraz I_{e1} z punktu B wynika z tego, że w czasie trwania impulsu prąd I_e rośnie (por. 4.1.4).

Mierzone opóźnienia końca impulsu są rzędu 0,4 ÷ 0,6 μs. Różnica między pomiarami i obliczeniami jest spowodowana tym, że nie jest spełniony warunek (por. str. 130).

$$T_s > \frac{1}{\omega_I(1-\alpha_I)} \approx 2{,}5\ \mu s,$$

poza tym błąd wprowadza wyrażenie $\frac{1}{1-\alpha_N\alpha_I}$, gdzie drobne zmiany α_N i α_I (np. w funkcji prądu I_e) powodują duże różnice w obliczeniach.

c. CZAS OPADANIA

$$T_2 = \frac{1}{\omega_N} \ln \frac{I_{k1} + \alpha_N I_{e2}}{0{,}1\, I_k + \alpha_N I_{e2}},$$

Założenia[1])

$$\omega_N = 10^7$$
$$I_{e2} = 0$$
$$I_{k1} = -13\ \text{mA}$$

$T_2 \approx 0{,}1 \cdot 10^{-6} \ln 10 \doteq 0{,}23\ \mu s.$

Pomiary w przybliżeniu są zgodne z wartością obliczoną.

3. RÓWNANIA TRANZYSTORA DLA DUŻYCH SYGNAŁÓW

3.1. Wstęp

W teorii małych sygnałów tranzystor dla danego punktu pracy traktowany jest jako czwórnik liniowy. Właściwości jego są całkowicie określone przez cztery parametry mierzone elektrycznie w różny sposób — zależnie od przyjętej reprezentacji.

Na przykład w reprezentacji h

$$u_1 = h_{11} i_1 + h_{12} u_2,$$
$$i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} u_2,$$

gdzie: u_1, i_1 — przyrosty napięcia i prądu na wejściu, u_2, i_2 — przyrosty napięcia i prądu na wyjściu tranzystora; $h_{11} = \frac{u_1}{i_1}$ dla $u_2 = 0$; $h_{12} = \frac{u_1}{u_2}$ dla $i_1 = 0$ (h_{12} jest miarą oddziaływania obwodu wtórnego na pierwotny); $h_{21} = \frac{i_2}{i_1}$ dla $u_2 = 0$ (h_{21} — współczynnik wzmocnienia prądowego); $h_{22} = \frac{i_2}{u_2}$ dla $i_1 = 0$ ($h_{22} = \frac{1}{r_{22}} \approx \frac{1}{r_k}$). W podobny sposób korzysta się z parametrów z_{ik} oraz y_{ik}.

Sterując tranzystor dużymi sygnałami nie można stosować parametrów czwórnikowych, gdyż są one funkcją napięć U_e i U_k oraz prądów I_e i I_k

[1]) Patrz odnośnik na str. 131.

tranzystora. Informacje o własnościach tranzystora dają wtedy funkcje: wejściowa $I_1 = f_1(U_1, I_2)$ oraz wyjściowa $I_2 = f_2(U_2, I_1)$ albo $U_1 = \varphi_1(I_1, I_2)$ oraz $U_2 = \varphi_2(I_1, I_2)$. Warto podkreślić, że funkcje wejściowe f_1 oraz φ_1 zależą od prądu wyjściowego I_2. Zależności powyższe można na przykład znaleźć doświadczalnie; poniżej podana będzie droga analitycznego rozwiązania tego zagadnienia. W tym celu trzeba jednak rozpatrzyć dokładniej przebiegi wizyczne w tranzystorze. Prądy płynące przez tranzystor są spowodowane dyfuzją nośników mniejszościowych do obszaru bazy (poprzez obszar bazy), a koncentracja i gradient nośników mniejszościowych w obszarze bazy zależą z kolei od napięć zewnętrznych. Jak z tego widać, trzeba przede wszystkim znaleźć rozkład koncentracji nośników w obszarze bazy. W dalszych rozważaniach przez prąd I_1 rozumie się prąd I_e; podobnie $I_2 = I_k$, $U_1 = U_e$, $U_2 = U_k$.

3.2. Rozwiązanie równania dyfuzji

W celu znalezienia zależności

$$I_e = f_1(U_e, I_k),$$
$$I_k = f_2(U_k, I_e)$$

lub

$$U_e = \varphi_1(I_e, I_k),$$
$$U_k = \varphi_2(I_e, I_k)$$

należy przede wszystkim rozwiązać równanie dyfuzji. (Spełnia je koncentracja nośników mniejszościowych $p(x, U_e, U_k)$.

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial t} = D_p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{p_n - p}{\tau_p}.} \tag{14}$$

Oznaczenia:

p — koncentracja nośników mniejszościowych (dziur dla tranzystora p-n-p) w obszarze bazy,

t — czas,

x — współrzędna na osi prostopadłej do płaszczyzn złącz; $x = 0$ dla złącza emiter-baza; $x = W$ dla złącza baza-kolektor (por. rys. 4),

$q = |e|$ — ładunek elektronu,

p_n — koncentracja nośników mniejszościowych w obszarze bazy dla $I_e = 0$,

D_p — stała dyfuzji nośników mniejszościowych w obszarze bazy,

τ_p — czas życia.

$$\sqrt{\tau_p D_p} = L_p.$$

Równanie dyfuzji wynika z:

1. równania ciągłości prądu

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{q} \operatorname{div} I_p,$$

2. wyrażenia na prąd dyfuzji

$$I_p = q D_p \operatorname{grad} p,$$

3. doświadczalnego prawa rekombinacji

$$p - p_n = P \cdot e^{-\frac{t}{\tau_p}}.$$

Znając $p = f(x, U_e, U_k)$ znajdujemy z równania:

$$I_p = -q D_p \frac{dp}{dx}$$

prądy I_e oraz I_k jako funkcje napięć U_e oraz U_k;

$$I_k \approx q D_p \frac{dp}{dx}\bigg|_{x=W} \qquad I_e \approx -q D_p \frac{dp}{dx}\bigg|_{x=0}$$

Przejście do szukanych funkcji jest już rzeczą łatwą.

Poczynione są tu następujące uproszczenia (rozpatrujemy tranzystor p-n-p):

a) założone jest $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$

(złącza w postaci płaszczyzn równoległych);

b) w obszarze bazy założony jest prąd wyłącznie mniejszościowy (dla tranzystora p-n-p prąd dziurowy);

c) założony jest stan ustalony

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0;$$

d) założona jest równość napięć zewnętrznych i napięć na złączach emiter-baza, kolektor-baza

$$U_e = \Phi_e \qquad U_k = \Phi_k;$$

pomija się w ten sposób spadki napięć poza złączami, a w szczególności na oporności r_B;

e) pominięty jest efekt Early'ego.

Dla stanu ustalonego koncentracja dziur $p(x)$ spełnia zgodnie ze wzorem (14) równanie

$$D_p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{p_n - p}{\tau_p} = 0.$$

Ponieważ $\tau_p D_p = L_p^2$, więc

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{p - p_n}{L_p^2}$$

oraz oznaczając $p - p_n = p_\Delta$

$$\frac{\partial^2 p_\Delta}{\partial x^2} = \frac{p_\Delta}{L_p^2}.$$

Po rozwiązaniu otrzymujemy:

$$p_\Delta(x) = A_1 e^{\frac{x}{L_p}} + A_2 e^{-\frac{x}{L_p}},$$

$$p(x) = A_1 e^{\frac{x}{L_p}} + A_2 e^{-\frac{x}{L_p}} + p_n. \tag{15}$$

Stałe A_1 i A_2 otrzymujemy z warunków brzegowych podanych przez Shockleya dla złącza p-n

$$p(0) = p_n e^{\lambda U_e},$$

$$p(W) = p_n e^{\lambda U_k},$$

gdzie:

$\lambda = \frac{q}{kT} = \frac{1}{0{,}026}$ w temperaturze pokojowej;

U_e i U_k są napięciami zewnętrznymi przyłożonymi na złącza;

$p(0)$ i $p(W)$ są koncentracjami dziur w obszarze n (bazy) na granicy złącz emiter-baza i baza-kolektor odpowiednio.

Wstawiając wartości brzegowe do (15) otrzymujemy:

$$A_1 = \frac{p_n}{2 \sinh\left(\frac{W}{L_p}\right)} \left[(e^{\lambda U_k} - 1) - (e^{\lambda U_e} - 1) e^{-\frac{W}{L_p}} \right],$$

$$A_2 = \frac{p_n}{2 \sinh\left(\frac{W}{L_p}\right)} \left[(e^{\lambda U_e} - 1) e^{\frac{W}{L_p}} - (e^{\lambda U_k} - 1) \right].$$

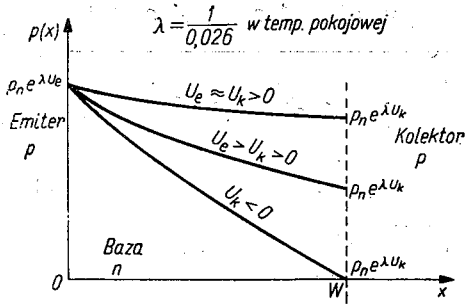
Orientacyjne: grubość bazy $W \approx 40$ μ, droga dyfuzji $L_p \approx 0{,}9$ mm, stąd $\frac{W}{L_p} \approx 0{,}05$.

Wstawiając wyrażenia na A_1 i A_2 do (15) i porządkując otrzymujemy:

$$p(x) = \frac{p_n}{\sinh\left(\frac{W}{L_p}\right)}\left[(e^{\lambda U_k} - 1)\sinh\left(\frac{x}{L_p}\right) + (e^{\lambda U_e} - 1)\sinh\left(\frac{W-x}{L_p}\right) + p_n\right] \tag{15a}$$

Wstawiając $x = 0$ i $x = W$ łatwo sprawdzić, że warunki brzegowe są spełnione. Przebieg $p(x)$ pokazany jest na rys. 4, przy czym nachylenie krzywej jest miarą prądu I_p, gdyż:

$$I_p = -qD_p\frac{dp}{dx}.$$



Rys. 4. Rozkład gęstości nośników w obszarze bazy

Różniczkując (15a) otrzymujemy:

$$I_{ep} = I_p(0) = \frac{qp_nD_p}{L_p}\left[(e^{\lambda U_e} - 1)\coth\left(\frac{W}{L_p}\right) - (e^{\lambda U_k} - 1)\operatorname{cosech}\left(\frac{W}{L_p}\right)\right], \tag{16a}$$

$$I_{kp} = -I_p(W) = -\frac{qp_nD_p}{L_p}\left[(e^{\lambda U_e} - 1)\operatorname{cosech}\left(\frac{W}{L_p}\right) - (e^{\lambda U_k} - 1)\coth\left(\frac{W}{L_p}\right)\right]. \tag{17a}$$

Ze wzoru (17a) obliczamy, dla jakiej wartości U_k prąd I_{kp} staje się równy zeru.

$$(e^{\lambda U_e} - 1)\frac{1}{\sinh\left(\frac{W}{L_p}\right)} = (e^{\lambda U_k} - 1)\frac{\cosh\left(\frac{W}{L_p}\right)}{\sinh\left(\frac{W}{L_p}\right)},$$

czyli

$$\cosh\left(\frac{W}{L_p}\right) = \frac{(e^{\lambda U_e} - 1)}{(e^{\lambda U_k} - 1)}.$$

Ponieważ

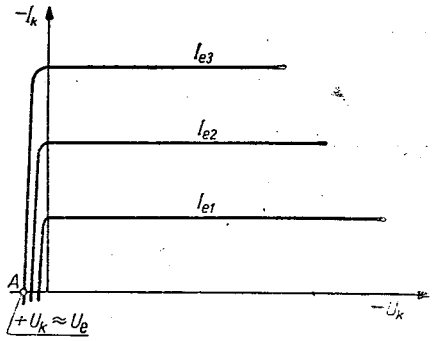
$$\frac{W}{L_p} \approx 0{,}05,$$

więc

$$\cosh\left(\frac{W}{L_p}\right) \approx 1.$$

Stąd wniosek, że $I_{kp} = 0$ dla $U_k \approx U_e$.

Na rodzinie charakterystyk $I_k = f(U_k, I_e)$ jest to np. punkt A (rys. 5). Popełniamy w tym miejscu błąd polegający na pominięciu składowej elektronowej prądu I_k. W dobrych tranzystorach, o dużej przewodności obszarów p oraz małej przewodności obszaru n, błąd ten jest mniejszy od 1%



Rys. 5. Rodzina charakterystyk $I_k = f(U_k, I_e)$

Widać to ze wzoru ($U_k > 0$):

$$\frac{I_p}{I_e + I_p} = \gamma_k = \left(1 + \frac{\sigma_n W}{\sigma_p L_{np}}\right)^{-1},$$

gdzie:

σ_p — przewodność obszaru p,
σ_n — przewodność obszaru n,
W — szerokość bazy,
L_{np} — droga dyfuzji elektronów w obszarze p,
I_e — składowa elektronowa prądu I_k,
I_p — składowa dziurowa prądu I_k.

Na przykład wg Huntera [1]
$\sigma_n = 0{,}2\,\mho\ \mathrm{cm}^{-1}$, $\sigma_p = 10\,\mho\ \mathrm{cm}^{-1}$, $W = 0{,}002$ cm, $L_{np} = 0{,}005$ cm i stąd $\gamma = 0{,}992$.

3.3. Uzależnienie wyników od parametrów mierzonych elektrycznie

Równanie (16a) i (17a) przepisujemy w sposób następujący:

$$I_e = a_{11}(e^{\lambda U_e} - 1) + a_{12}(e^{\lambda U_k} - 1), \tag{16b}$$

$$I_k = a_{21}(e^{\lambda U_e} - 1) + a_{22}(e^{\lambda U_k} - 1), \tag{17b}$$

gdzie $\lambda = \dfrac{1}{0{,}026}$ (w temp. pokojowej), a współczynniki a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} wynikają z porównania (16b) i (16a) oraz (17b) i (17a). Jak widać, $a_{12} = a_{21}$.

Zakładając stałość współczynników a_{ik} w funkcji napięć U_e i U_k można je uzależnić od parametrów tranzystora I_{e0}, I_{k0}, α_I oraz α_N (uproszczenie jest duże, niemniej jednak konieczne w tym miejscu). Mianowicie dla $\lambda U_k \ll 0$ oraz $U_e > 0$ równania (16b) i (17b) przybierają postać:

$$I_e = a_{11}(e^{\lambda U_e} - 1) - a_{12},$$

$$I_k = a_{21}(e^{\lambda U_e} - 1) - a_{22},$$

stąd:

$$I_k = \frac{a_{21}}{a_{11}} I_e + \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} - a_{22}$$

albo:

$$I_k = -\alpha_N I_e + I_{k0}.$$

Podobnie dla $\lambda U_e \ll 0$ i $U_k > 0$ otrzymujemy:

$$I_e = \frac{a_{12}}{a_{22}} I_k + \left(\frac{a_{21}a_{12}}{a_{22}} - a_{11}\right)$$

albo

$$I_e = -\alpha_I I_k + I_{e0}.$$

Stąd przez porównanie:

$$-\frac{a_{12}}{a_{22}} = \alpha_I, \qquad -\frac{a_{21}}{a_{11}} = \alpha_N,$$

$$\left(\frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}} - a_{11}\right) = I_{e0}, \qquad \left(\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} - a_{22}\right) = I_{k0}.$$

Rozwiązując powyższy układ równań względem wyrazów a_{ik} i wstawiając do (16b) i (17b) otrzymujemy:

$$I_e = -\frac{I_{e0}}{1-\alpha_N\alpha_I}\left(e^{\lambda U_e} - 1\right) + \frac{\alpha_I I_{k0}}{1-\alpha_N\alpha_I}\left(e^{\lambda U_k} - 1\right), \tag{16c}$$

$$I_k = +\frac{\alpha_N I_{e0}}{1-\alpha_N\alpha_I}\left(e^{\lambda U_e} - 1\right) - \frac{I_{k0}}{1-\alpha_N\alpha_I}\left(e^{\lambda U_k} - 1\right). \tag{17c}$$

Następnie wyrażając na przykład człon $(e^{\lambda U_k} - 1)$ przy pomocy (17c) i wstawiając do (16c) przechodzimy do równań:

$$I_e = f_1(U_e, I_k), \qquad I_k = f_2(U_k, I_e),$$

$$U_e = \varphi_1(I_e, I_k), \qquad U_k = \varphi_2(I_e, I_k),$$

$$I_e = f_1 = -I_{e0}\left(e^{\lambda U_e} - 1\right) - \alpha_I I_k, \tag{18}$$

$$I_k = f_2 = -\alpha_N I_e - I_{k0}\left(e^{\lambda U_k} - 1\right). \tag{19}$$

Równanie (18) przy $I_k = 0$ albo (19) przy $I_e = 0$ jest równaniem normalnej diody warstwowej.

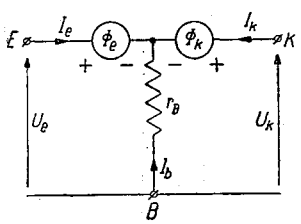
$$U_e = \varphi_1 = \frac{1}{\lambda}\ln\left[-\frac{I_e + \alpha_I I_k}{I_{e0}} + 1\right], \tag{20}$$

$$U_k = \varphi_2 = \frac{1}{\lambda}\ln\left[-\frac{I_k + \alpha_N I_e}{I_{k0}} + 1\right]. \tag{21}$$

Uwaga. Równania są wyprowadzone dla $U_e = \Phi_e$ oraz dla $U_k = \Phi_k$, $I_{e0} < 0$, $I_{k0} < 0$.

3.4. W n i o s k i

A. Jak widać z (20), oporność wejściowa tranzystora dla prądu stałego $R_{we} = \frac{U_e}{I_e}$ zależy nie tylko od prądu wejściowego I_e, ale również od prądu I_k. Zależność ta istnieje nawet dla oporności bazy $r_B = 0$, gdyż przy tym założeniu został wyprowadzony wzór (20).



Rys. 6. Schemat zastępczy tranzystora stosowany w zakresie nasycenia $\Phi_e = \varphi_1(I_e, I_k)$, $\Phi_k = \varphi_2(I_e, I_k)$

Uwzględniając oporność r_B należy w miejsce U_e we wzorze (20) wstawić $\Phi_e = U_e + I_b r_B$, gdzie:

U_e — napięcie wejściowe emiter-baza,

Φ_e — napięcie na złączu emiter-baza (polaryzacje i kierunki prądów wg rys. 6).

Podobnie zamiast U_k we wzorze (21) trzeba napisać $\Phi_k = U_k + I_b r_B$, gdzie:

U_k — napięcie kolektor-baza,

Φ_k — napięcie na złączu kolektor-baza (polaryzacje i kierunki prądów wg rys. 6).

Ilustruje to schemat zastępczy tranzystora, który jest szczególnie przydatny w rejonie nasycenia (rys. 6). Na schemacie tym pominięte są jeszcze oporności szeregowe w gałęziach E i K.

Na rysunku 7 wykreślone są charakterystyki wejściowe (dla prądu stałego) jednego z tranzystorów.

B. Korzystanie z równań (20) i (21) utrudnia słaba znajomość oporności r_B, która w dodatku zmienia się w funkcji prądu I_b oraz napięcia U_k.

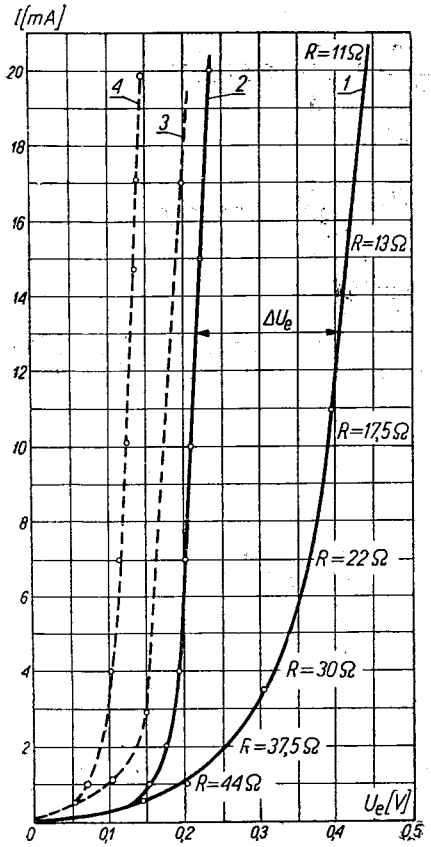
Na rysunku 8 pokazana jest zależność oporności r_B od prądu I_b. Oporność r_B została obliczona z charakterystyk na rys. 7 jako

$$r_B = \frac{\Delta U_e(I_e)}{I_e}\bigg|_{I_e = \text{const}},$$

gdzie $\Delta U_e(I_e) = U_e(I_e,\ I_k = 0) - \Phi_E(I_e, I_k = 0)$ oraz przy rozwartym kolektorze: $I_b = -I_e$.

Dla porównania parametr r_b ze schematu zastępczego T dla małych sygnałów, obliczany jako stosunek mierzonych wartości h_{12} i h_{22}, jest rzędu 500 ÷ 1000 Ω.

$$r_b = \frac{h_{12}}{h_{22}},$$



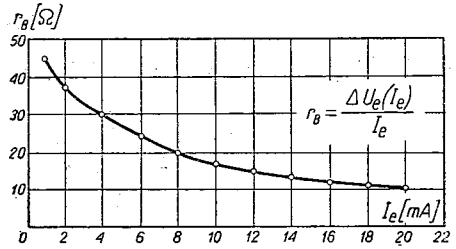
Rys. 7. Charakterystyki wejściowe tranzystora TW1373

$1 - U_e$ dla $I_k = 0$ (zmierzone); $2 - \Phi_e$ dla $I_k = 0$ (obliczone); $3 - U_e$ dla $I_k = -\alpha_N I_e$ (zmierzone); $4 - \Phi_e$ dla $I_k = -\alpha_N I_e$ (obliczone); $I_{e0} = 2{,}5\ \mu$A, $\alpha_N = 0{,}99$, $\alpha_I = 0{,}98$, $\alpha_I \alpha_N = 0{,}97$

$$h_{12} = \frac{\partial U_1}{\partial U_2} = \frac{\partial U_e}{\partial U_k}\bigg|_{I_e = \text{const}},$$

$$h_{22} = \frac{\partial I_2}{\partial U_2} = \frac{\partial I_k}{\partial U_k}\bigg|_{I_e = \text{const}}.$$

Różnica jest zrozumiała: oporność r_b w schemacie zastępczym typu T reprezentuje całkowite oddziaływanie obwodu wyjściowego na wejściowy, natomiast oporność r_B tylko częściowo, gdyż dodatkowo Φ_e zależy od I_k.



Rys. 8. Zależność oporności r_B od $I_e = -I_b$

Poza tym r_b jest mierzona przy b. małych prądach i_b, równych $(1 - \alpha_N) I_e$, podczas gdy oporność r_B obliczona jest dla prądów $1 \div 3$ rzędów wielkości większych.

C. Charakterystyczne jest to, że — jak wynika z rozwiązania równania dyfuzji — w stanie nasycenia do puszczalna jest dodatnia polaryzacja złącza kolektor-baza. W czasie pełnego wysterowania spadek napięcia na tranzystorze U_{ek} jest bardzo nieznaczny i może być rzędu kilkunastu, a nawet kilku mV (por. str. 137).

$$U_{ek} = U_e - U_k = \Phi_e - \Phi_k,$$

$$\Phi_e > 0,$$

$$\Phi_k > 0.$$

Na przykład dla tranzystora IŁ 1447:

wartości zmierzone: $I_{e0} = -2{,}2\ \mu$A; $I_{k0} = -2{,}1\ \mu$A; $\alpha_N = 0{,}96$; $\alpha_I = 0{,}985$.

wartości założone: $I_e = 20$ mA; $I_k = -13$ mA.

Ze wzoru (20) mamy

$$\Phi_E = 0{,}026 \ln\left[- \frac{20 - 0{,}985 \cdot 13}{-2{,}2 \cdot 10^{-3}} + 1 \right] \approx 0{,}2105\ \mathrm{V}$$

oraz ze wzoru (21)

$$\Phi_K = 0{,}026 \ln\left[- \frac{-13 + 0{,}96 \cdot 20}{-2{,}1 \cdot 10^{-3}} + 1 \right] \approx 0{,}2075\ \mathrm{V}$$

$$U_{EK} = \Phi_E - \Phi_K = 3\ \mathrm{mV}.$$

D. Wbrew pozorom parametry: I_{e0}; I_{k0}; α_N; α_I nie są wielkościami niezależnymi od siebie. Mianowicie z (16b) i (17b)

$$a_{12} = a_{21},$$

a z (16b) i (16c) oraz z (17b) i (17c)

$$a_{12} = \frac{\alpha_I I_{k0}}{1 - \alpha_N \alpha_I}, \qquad a_{21} = \frac{\alpha_N I_{e0}}{1 - \alpha_N \alpha_I},$$

stąd

$$\boxed{\alpha_I I_{k0} = \alpha_N I_{e0}.}$$

Pomiary w przybliżeniu potwierdzają tę równość.

4. PRACA TRANZYSTORÓW WARSTWOWYCH W UKŁADACH IMPULSOWYCH

4.1. Zastosowanie charakterystyk statycznych

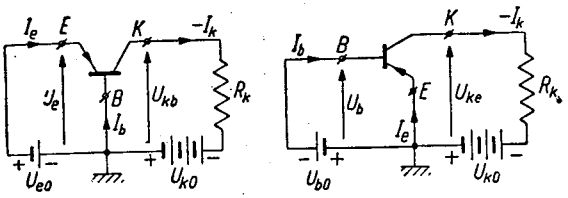
Tranzystor sterowany dużymi sygnałami zachowuje się tak jak element o dużej nieliniowości. W tych warunkach parametry z, h itp. stają się bezużyteczne i o właściwościach tranzystora najwięcej obok równań (20) i (21) mówią charakterystyki (por. 3.1).

4.1.1. Charakterystyki wyjściowe

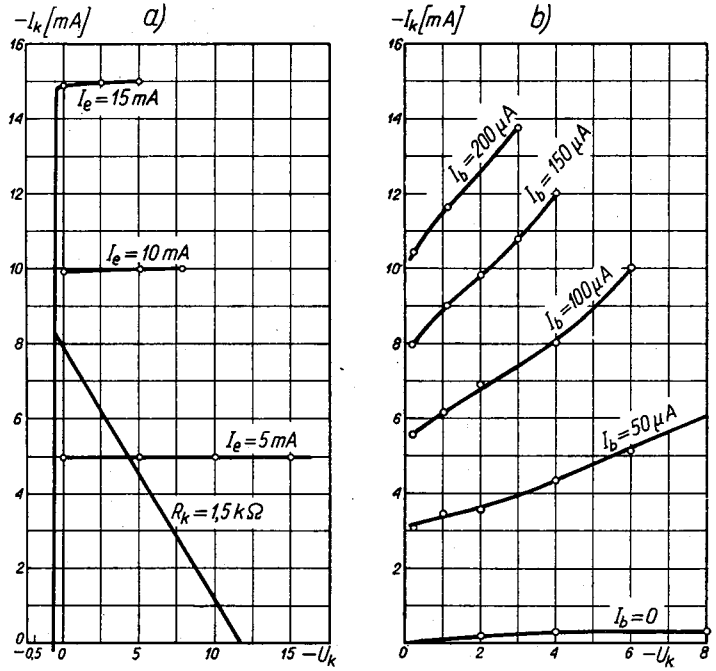
Do najważniejszych charakterystyk wyjściowych należą charakterystyki statyczne $I_k = f_1(U_{kb}, I_e = \mathrm{const})$ oraz $I_k = f_2(U_{ke}, I_b = \mathrm{const})$. Pierwsza jest charakterystyką wyjściową układu *WB*, druga charakterystyką wyjściową układu *WE*. Na rysunku 10 podane są obie rodziny charakterystyk; indeksy napięć zgodne są z rys. 9. Różnice między napięciami U_{ke} i U_{kb} są pomijalne dla napięć większych od kilku woltów i wtedy $U_{kb} \approx U_{ke} = U_k$.

Charakterystyki układu WB (rys. 10a) są liniowe dla $I_k < 0$ i $U_{kb} < 0$ i w tym zakresie można z nich łatwo odczytać wartość współczynnika wzmacniania prądowego α;

$$\alpha = -\left.\frac{\partial I_k}{\partial I_e}\right| U_{kb} = \text{const.}$$



Rys. 9. Oznaczenia napięć i prądów: a) w układzie WB, b) w układzie WE



Rys. 10. Charakterystyki wyjściowe tranzystora 678. a) Układ WB: I_k = 40 μA dla U_k = −15 V, I_e = 0; b) Układ WE: I_k = 0,6 mA dla U_k = −15 V, I_b = 0

Podobnie z charakterystyk układu WE można znaleźć wartość współczynnika wzmocnienia prądowego β. Liniowość tych charakterystyk jest już gorsza.

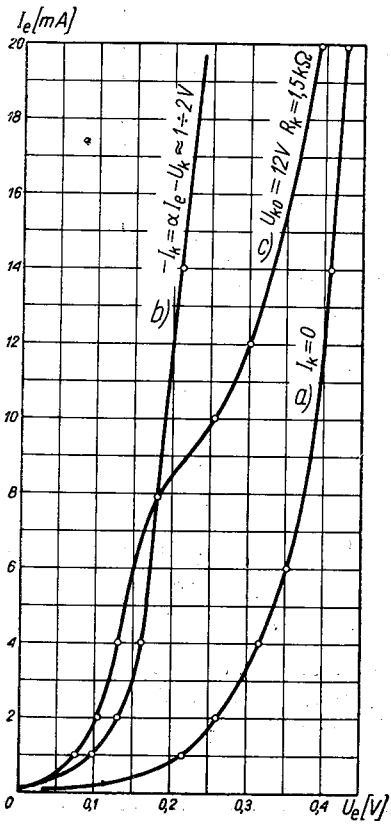
$$\beta = \left.\frac{\partial I_k}{\partial I_b}\right|_{U_{ke}=\text{const}} \approx \left.\frac{\Delta I_k}{\Delta I_b}\right|_{U_{ke}=\text{const}}.$$

Ze wzwiązku $\alpha = \dfrac{\beta}{1+\beta}$ można wyznaczać α wtedy, gdy konieczna jest dokładna znajomość α, a zarazem gdy $\alpha \approx 1$, np. dla $U_k \approx U_{ke} \approx U_{kb} = -4$ V i dla $I_k = -10$ mA (rys. 10b)

$$\beta \approx \frac{\Delta I_k}{\Delta I_b} \approx \frac{4 \cdot 10^{-3}}{50 \cdot 10^{-6}} = 80,$$

$$\alpha \approx \frac{80}{1+80} = 0{,}988.$$

Charakterystyki prądu I_k stają się nieliniowe dla zbyt dużych napięć kolektora (zbyt duże U_{kb} powoduje zniszczenie tranzystora) oraz dla $U_{kb} > 0$. Wzrost dodatniego napięcia U_{kb} powoduje szybkie malenie prądu I_k, a następnie zmianę jego znaku. Na przykład (rys. 10a) $I_k = 0$ dla $U_{kb} = +0{,}3$ V oraz dla $I_e = 15$ mA. Duże nachylenie (odwrotność nachylenia rzędu 20 Ω) oraz zagęszczenie charakterystyk powodują w czasie przesterowania ograniczenie napięciowe impulsu wyjściowego, czyli „obcięcie" przebiegu wejściowego. Jest to jedna z podstawowych cech pracy układów impulsowych i z tego punktu widzenia praca tranzystora w układach impulsowych jest bardzo korzystna.



Rys. 11. Charakterystyki wejściowe tranzystora 1447

4.1.2. Charakterystyki wejściowe

Obok charakterystyk wyjściowych należy wspomnieć o charakterystyce wejściowej $I_e = f_1(U_e, I_k)$. Charakterystyka wejściowa układu $WE - I_b = f(U_b, I_k)$ wynika z charakterystyk $I_e = f_1(U_e, I_k)$, $I_k = f_2(U_k, I_e)$ oraz dwu równań: $I_e + I_k + I_b = 0$ oraz $U_b = U_e$. W przeciwieństwie do większości układów lampowych charakterystyka wejściowa układu tranzystorowego $I_{we} = f(U_{we})$ zależy w dużym stopniu od przebiegu na wyjściu. Na rys. 11 podane są charakterystyki $I_e = f(U_e)$ dla trzech przypadków:

a) $I_k = 0$ — kolektor jest rozwarty i tranzystor pracuje w przybliżeniu jako dioda, a $I_b = -I_e$,

b) $I_k \approx -\alpha I_e$ oraz $-U_k = 1 \div 2$ V. Poza mniejszym niż dla $I_k = 0$ spadkiem napięcia na złączu emiter-baza [por. (20)] mamy $(1 - \alpha)$ razy mniejszy prąd dający spadek napięcia na oporności r_B — dla tych samych wartości prądu I_e. Stąd oporność wejściowa R_{we}

$$R_{we} = \frac{U_e}{I_e} = \frac{\Phi_e(I_e, I_k) + I_b r_B}{I_e} \tag{22}$$

równa dla przypadku a)

$$R_{we} = \frac{\Phi_e(I_e, 0) + I_e r_B}{I_e}$$

jest dla przypadku b) w przybliżeniu dwa razy mniejsza, gdyż wówczas

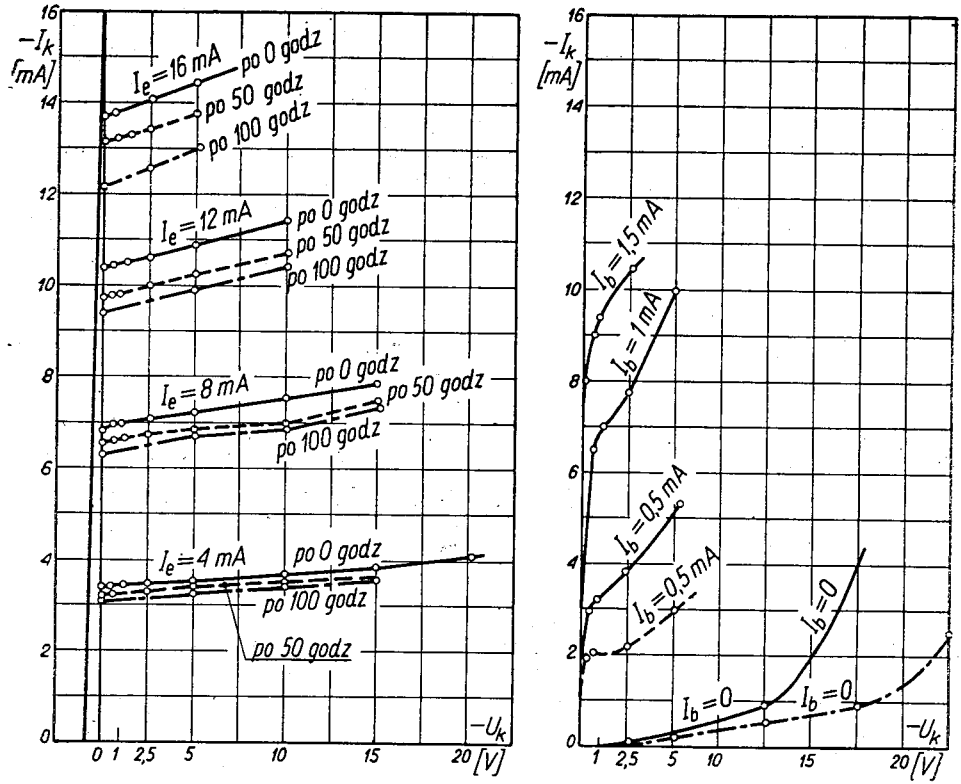
$$R_{we} = \frac{\Phi(I_e - \alpha I_e) + (1 - \alpha) I_e r_B}{I_e}.$$

c) W tym przypadku mamy napięcie $-U_{k0} = 12$ V i oporność obciążenia $R_k = 1{,}5$ kΩ; stąd $I_{k\,\max} = \frac{U_{k0}}{R_k} = 8$ mA. Charakterystyka wejściowa dla $I_e < 8$ mA zbliżona jest do b), zaś dla $I_e > 8$ mA zbliża się do a). Mniejsze niż w b) napięcie U_e dla $I_e < 8$ mA spowodowane jest wpływem napięcia U_k na szerokość bazy W (por. rys. 4) i na spadek napięcia na złączu emiter-baza. Mianowicie rosnące ujemne U_k powoduje poszerzenie bariery kolektor-baza, zwężenie bazy, a następnie zmniejszenie oporności złącza emiter-baza, czyli stosunku $\frac{\Phi_e}{I_e}$. Charakterystyka c) jest jakby charakterystyką roboczą.

Charakterystyki podane na rysunkach 10 i 11 są typowe, mimo że są zdjęte dla pojedynczych tranzystorów. Stosunkowo największy rozrzut występuje dla układu WE ze względu na zależność współczynnika β od wyrażenia $(1 - \alpha)$. Również często duży jest rozrzut wartości prądu I_{k02} (por. 4.2). Wpływ rozrzutu charakterystyk (szczególnie wejściowych) zmniejsza poważnie praca z przesterowaniem.

4.1.3. Stałość charakterystyk statycznych

Na rysunku 12 pokazane są charakterystyki tranzystora 284, który pracował jako wzmacniacz impulsowy w układzie WB. Tranzystor był sterowany impulsami o amplitudzie $I_{e\,\max} = 70$ mA, przy czym prąd średni był równy $I_{e\,śr} = 30$ mA. Charakterystyki były zdjęte przed rozpoczęciem pracy, po 50 godzinach i po (łącznie) 100 godzinach pracy. Z rysunku wi-



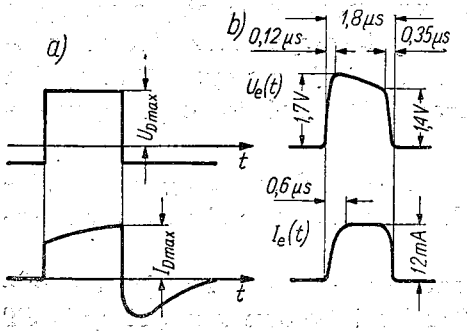
Rys. 12. Tranzystor 284

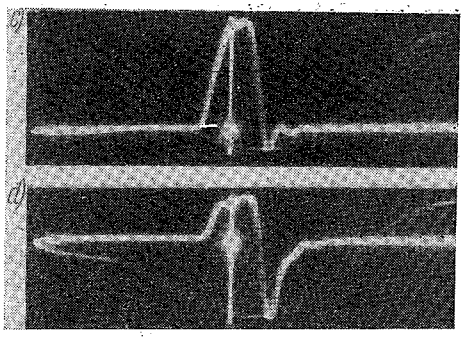
dać, że zmalało α oraz zwiększyła się oporność wejściowa. Dwa następne tranzystory (nr 344 i nr 352) pracując ponad 220 godzin w łagodniejszych warunkach: $I_{e\,max} = 20 \div 25$ mA przy wypełnieniu ok. $\frac{1}{5}$ nie wykazały zmiany α oraz prądów początkowych.

4.1.4. Przydatność charakterystyk statycznych w pracy impulsowej

Doświadczenie pokazało, że stosowanie charakterystyk statycznych w układach sterowanych krótkimi impulsami, prowadzi do dużych błędów. Rozpatrzmy zwykłą diodę warstwową: jeżeli przyłożymy na nią dodatni, prostokątny impuls napięcia, to kształt impulsu prądu będzie wyraźnie odbiegał od prostokąta. Prąd narasta przez cały czas trwania impulsu, a jeżeli po zniknięciu impulsu dioda będzie spolaryzowana ujemnie, to prąd będzie płynął przez pewien czas w przeciwnym kierunku. Jest to spowodowane magazynowaniem nośników przez diodę; w szczególności narasta-

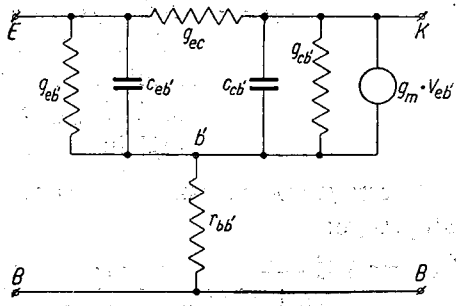
nie prądu w czasie przewodzenia jest wynikiem wzrostu przewodności germanu. Ostatecznie po czasie rzędu 2 μs może dla danego napięcia płynąć prąd jeszcze o połowę mniejszy, niż to wynika z pomiarów statycznych. Podobne zjawiska, chociaż w mniejszym stopniu, występują w diodach ostrzowych (por. Waltz [16]). W tranzystorach do powyższego dochodzi wpływ prądu I_k, który narastając wolniej niż I_e powoduje to, że spadek





Rys. 13. a) Przebieg napięcia i prądu diody (schematycznie); b) Przebieg napięcia i prądu emitera przy rozwartym kolektorze. Mimo malenia U_e w części płaskiej I_e prawie się nie zmienia. c) i d) Oscylogramy prądów I_e oraz I_b w tranzystorze pracującym w układzie WB; c) Przebieg $I_e(t)$ (Powolne narastanie od zera spowodowane jest kształtem napięcia wejściowego. Widać, że w części płaskiej $I_e \neq$ const); d) Przebieg $-I_b(t)$ (Ze względu na kształt prądu $I_e(t)$ nie obserwujemy malenia prądu I_b w części płaskiej impulsu)

napięcia na oporności r_B równy $(I_e + I_k)\, r_B$ maleje w funkcji czasu. Przy stałym napięciu U_e prąd I_e wówczas rośnie. W praktyce, gdy przebiegi prądowe w tranzystorze są bardziej zbliżone do przebiegów jak na fotografiach na rys. 13c niż do przebiegów na rys. 2, o tym że prąd I_e narasta w czasie trwania impulsów decydują zjawiska takie same jak w diodach warstwowych. Ostatecznie pomiary napięć potrzebnych do impulsowego wysterowania tranzystora muszą być wykonane dynamicznie. Napięcia te są większe od zmierzonych statycznie, a wyniki pomiarów podane są w 4.3.



Rys. 14. Schemat zastępczy w. cz. stosowany dla małych sygnałów w rejonie aktywnym

Warto zauważyć, że oporność (impedancja) wejściowa tranzystora nie ma w czasie trwania dużych impulsów charakteru pojemnościowego, o jakim można by wnioskować ze schematów tranzystora dla wysokiej często-

tliwości (rys. 3 i 14). Narastanie prądu takie jak na rys. 13a występuje dla impedancji o charakterze indukcyjnym. Odwrotnie jest po skończeniu impulsu wejściowego.

4.2. Parametry impulsowe tranzystorów

W pracy impulsowej najważniejszą rzeczą jest poprawne przenoszenie impulsów. Stąd parametrami podstawowymi są parametry określające kształt impulsów na wyjściu układów tranzystorowych. Rozpatrując czynniki wpływające na czas narastania, poszerzenie i czas opadania impulsu wyjściowego [rozdz. 2, wzory (2), (12) oraz (13)] widać, że decydują tu następujące parametry tranzystora:

f_N (ewent. ω_N) — częstotliwość graniczna ze względu na α_N. Im częstotliwość ta jest większa, tym są mniejsze czasy narastania i opadania.

Tranzystory produkowane w kraju mają przeważnie $f_N = 1 \div 2$ MHz. Prototypowe tranzystory IPPT PAN mają $f_N = 5$ MHz i więcej.

f_I (ewent. ω_I) — częstotliwość graniczna ze względu na α_I. Im częstotliwość ta jest większa, tym mniejsze jest poszerzenie impulsu. Częstotliwość f_I jest z reguły niższa od f_N.

α_I — współczynnik wzmocnienia prądowego po zamianie emitera z kolektorem. Im współczynnik ten jest mniejszy, tym mniejsze jest poszerzenie impulsu.

α_N — współczynnik wzmocnienia prądowego w kierunku normalnym. Wielkość jego nie jest bardzo krytyczna. Niemniej jednak za małe α_N powoduje konieczność zwiększenia $I_{e\,max}$ w celu uzyskania tego samego efektu na wyjściu.

Drugą grupę parametrów tranzystora stanowią elementy schematu zastępczego:

C_k — pojemność kolektora. Zbyt duża pojemność kolektora psuje czas narastania i opadania impulsu (por. rys. 3).

r_k — oporność kolektora w zakresie aktywnym. W dobrych tranzystorach z reguły wpływ jej jest pomijalny.

r_B — oporność bazy. Powinna być ona możliwie mała ze względu na straty mocy na tranzystorze i sprzężenie zwrotne. Rośnie zazwyczaj ze wzrostem częstotliwości granicznej tranzystora, gdyż wówczas bazę wyrabia się z cieńszych płytek germanu.

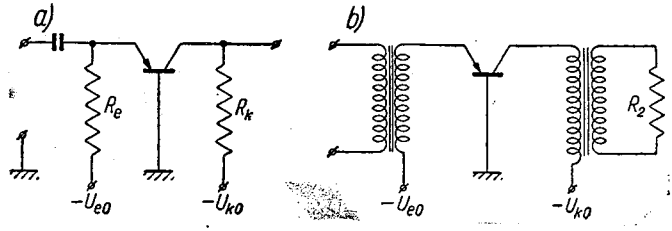
Trzecią grupę parametrów stanowią dopuszczalne wartości maksymalne prądów napięć i mocy:

$U_{k\ max}$ (WB) — Typowe tranzystory mają $U_{k\ max}$ (wartość chwilowa) równe — 15 V. Niemniej jednak produkowane są obecnie za granicą tranzystory o napięciach dopuszczalnych rzędu 60 V.

$I_{e\ max}$ — W badanych układach tranzystory pracowały przy $I_{e\ max} = 20 \div 25$ mA oraz $I_{k\ max} \approx 15$ mA przy wypełnieniu $\frac{1}{5}$. W zasadzie większe prądy też są dopuszczalne (por. 4.1.3).

$P_{strat\ max}$ — IŁ podaje dla swoich tranzystorów maksymalną moc strat = 50 mW. Ze wzrostem f_N dopuszczalna moc przeważnie maleje. Na przykład tranzystor firmy Mullard OC 45 o $f_N > 3$ MHz ma podaną dopuszczalną moc strat równą 20 mW.

Do ostatniej grupy parametrów należą prądy początkowe płynące w czasie odcięcia tranzystora[1]). Prądy te są przeważnie dużo większe niż w lam-



Rys. 15. Schemat wzmacniacza a) w układzie RC b) w układzie transformatorowym

pach próżniowych; powstała konieczność określenia po pierwsze: dopuszczalnej wielkości tych prądów, a po drugie: napięć, przy których prądy nie powinny jeszcze przekraczać wartości dopuszczalnych.

Wymagania w stosunku do tranzystorów zmieniają się jednak w zależności od charakteru ich pracy. Inne będą dla tranzystorów pracujących w układach RC, inne dla układów transformatorowych. Ilustruje to rys. 15.

W przypadku a) dobór oporności R_e i R_k może zmniejszyć wpływ prądów początkowych. Poza tym oporności te w pewnych granicach chronią tranzystor przed zniszczeniem.

W przypadku b) tranzystor jest „zwarty na krótko" i wartości prądów początkowych są bardziej krytyczne. Jako rezultat prac opisanych w punktach 4.3 i 4.4 zostały sprecyzowane następujące warunki:

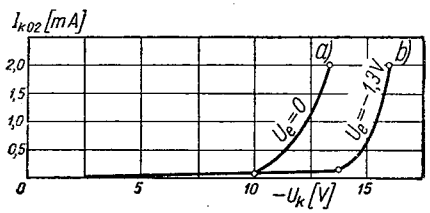
A. I_{e0} ($U_e = -5$ V) < 50 μA. — Jest to prąd początkowy dla $I_k = 0$. Warunek wynika z 4.4.

[1]) Układy impulsowe w czasie przerwy między impulsami są na ogół odcięte.

B. I_{k01} ($U_k = -15$ V) < 10 μA. — Prąd początkowy dla $I_e = 0$. Przy większych I_{k0} zazwyczaj prąd ten rośnie szybko dla rosnącego U_k.

C. I_{k02} ($U_k = -15$ V) < 50 μA. — Prąd początkowy dla $U_e = 0$ (emiter zwarty z bazą).

Jak widać, układ z pktu C jest układem pośrednim między *WB* i *WE*. W tranzystorach krajowych warunek C bardzo często nie jest spełniany, nawet jeśli są spełnione warunki A i B. Widać to na rys. 16, gdzie podana jest typowa charakterystyka prądu I_{k02}.



Rys. 16. Tranzystor TW 486. Charakterystyka prądu I_{k02}: a) dla $U_e = 0$, b) dla $U_e = -1{,}3$ V

Początkowo były przypuszczenia, że wzrost prądu I_{k02} jest powodowany dodatnią polaryzacją złącza emiter-baza przez spadek napięcia na oporności r_B (rys. 17a) i w konsekwencji — emisją dziur z emitera.

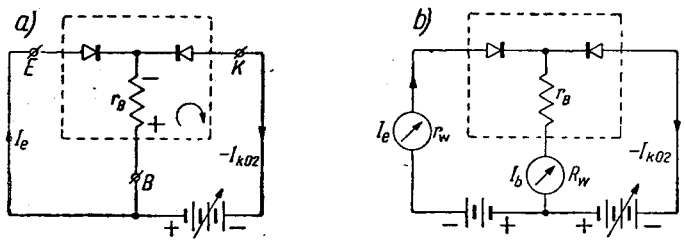
Okazało się jednak, że: po pierwsze prąd bazy jest rzędu prądu I_{k01} (bardzo mały), po drugie efekt wzrostu I_{k02} występuje nawet przy wstępnej ujemnej polaryzacji emitera. Otrzymano dla pewnego tranzystora (w układzie wg rys. 17b)

dla

$$U_{e0} = -1{,}3 \text{ V},$$
$$U_k = 15{,}5 \text{ V},$$

prądy

$$I_{k02} \approx I_e = 1 \text{ mA},$$
$$I_B = 8 \text{ μA}.$$



Rys. 17. Pomiar prądu I_{k02}. Złącza *p-n* zostały na schemacie zastąpione diodami; $r_w = 1$ kΩ, $R_w = 2$ kΩ

Gdyby efekt ten został spowodowany przez dodatnią polaryzację złącza emiter-bazą, to musiałaby być co najmniej spełniona równość:

$$I_b r_B = U_{e0},$$

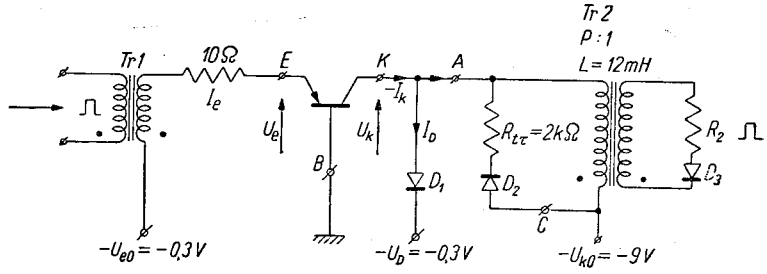
stąd:

$$r_B = \frac{U_{e0}}{I_b} = \frac{1{,}3}{8}\,10^6 = 160\ \text{k}\Omega.$$

Założenie, że $r_B = 160$ kΩ nie ma oczywiście sensu. Trzeba przypuszczać, że wzrost prądu I_{k02} został spowodowany bezpośrednimi procesami między emiterem i kolektorem.

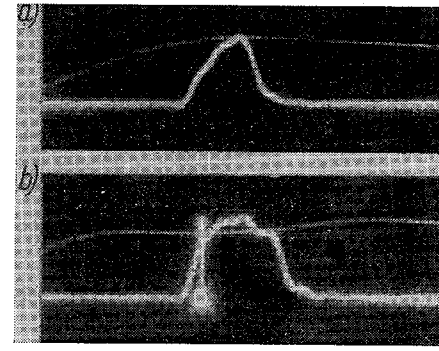
4.3. Wzmacniacz impulsowy

Wzmacniacz impulsowy jest podstawowym elementem maszyny cyfrowej. Opracowanie wzmacniacza ułatwia (a nawet często dopiero umożliwia) projektowanie dalszych układów: przerzutników dynamicznych,



Rys. 18. Wzmacniacz impulsowy z uziemioną bazą (*WB*). Dioda D_3 oznacza nieliniowość obciążenia

układów formujących impulsy, elektrycznych realizacji funktorów logicznych itp. Poniżej zostały omówione pewne zagadnienia, które wyłoniły się w czasie projektowania wzmacniacza[1]). Zgodnie z istniejącą obecnie w ZAM-ie tendencją wzmacniacz został zrealizowany transformatorowo. Pozwala to m. in. równocześnie sterować kilka stopni impulsami różnej wielkości i znaku, ułatwia dopasowanie kolejnych stopni, upraszcza układy logiczne itd. (Inna rzecz, że stosowanie transformatorów ma swoje wady; jedną z poważniejszych jest ta, że raz zaprojektowany i nawinięty transformator impulsowy może pracować w stosunkowo wąskim przedziale czasów oraz — ze względu na przekładnię — napięć).



Rys. 19. Przebieg prądu $I_k(t)$: a) przy pracy w rejonie aktywnym, b) przy pracy z nasyceniem

[1]) Dokładny projekt wzmacniacza znajduje się w dokumentacji ZAM; por. [18].

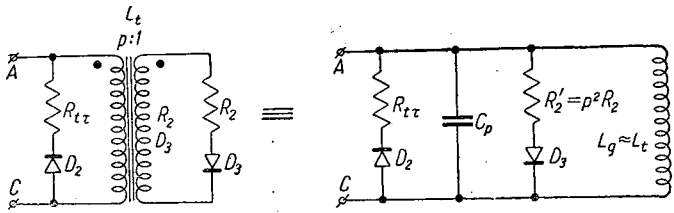
Na rysunku 18 został podany pełny schemat wzmacniacza. Transformatory impulsowe zostały nawinięte na rdzeniach ferrytowych $\mu = 800$ produkcji zakładów im. Kasprzaka. Tranzystory produkcji IŁ posiadały następujące parametry: $f_N \geqslant 1{,}6$ MHz; $\alpha_N \geqslant 0{,}96$; I_{k02} (dla $U_k = -15$ V) < 150 μA.

Założono przy tym: szerokość impulsów $\tau = 2$ μsec, czas narastania $\tau_0 < 0{,}45$ μs, czas opadania $T_2 < 0{,}45$ μsec, oraz częstotliwość repetycji $f_r = 100$ kHz ($T = 10$μs).

Wzmacniacz pracuje jakby w klasie C. Dodatni impuls wejściowy musi tak przesterować tranzystor, aby czas narastania impulsu na wyjściu był mniejszy od założonego. Należy jednak pamiętać o tym, że za duże przesterowanie powoduje opóźnienie końca i poszerzenie impulsu [czas T_2 ze wzoru (12)]. To[1]) wraz z opóźnieniem impulsów po przejściu przez stopień (por. rys. 24) ogranicza od dołu dopuszczalną szerokość impulsów wejściowych, gdyż czas narastania impulsu można by dosyć znacznie zmniejszyć przesterowując wzmacniacz.

WYBÓR OPORNOŚCI TŁUMIĄCEJ

Opornik R_{tl} oraz dioda D_2 służą do tłumienia przerzutów napięcia na pierwotnym uzwojeniu transformatora Tr 2. W pierwszym przybliżeniu,



Rys. 20. Schemat zastępczy transformatora impulsowego widziany z zacisków A — C. Dioda D_3 pracuje w czasie trwania impulsów, dioda D_2 pracuje w czasie przerzutu

pomijając ze względu na stosunkowo wolne przebiegi indukcyjność rozproszenia, schemat zastępczy transformatora impulsowego można przedstawić jak na rys. 20.

Przebieg napięcia na zaciskach AC pokazany jest na rys. 21a, przy czym

$$U_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \quad \text{oraz} \quad U_k = U_L - U_{k0}.$$

Od chwili $t_0 = 0$ do chwili $t = T - \tau$ (wg rys. 21) tranzystor nie przewodzi, prąd $i_k \approx 0$ i transformator przedstawia sobą obwód RLC, gdzie $R = R_{tl}$, $C = C_p$ oraz $L = L_g \approx L_{tr}$.

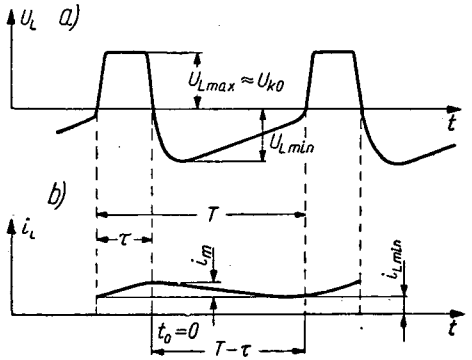
[1]) Poszerzenia impulsów zmniejsza dioda D_1, która ma za zadanie nie dopuścić do wejścia tranzystora w obszar nasycenia.

R_{tl} trzeba dobrać tak, aby:

1) prąd $i_{L\,\min}$ (rys. 21b) był dostatecznie mały,
2) suma napięć $(U_{k0} + U_{L\,\min})$ była mniejsza od dopuszczalnej wartości chwilowego napięcia U_k (por. 4.2)

$$U_{k0} + U_{L\,\min} < U_{k\,\max}.$$

Wybór oporności R_{tl} jest kompromisem między tymi dwoma warunkami.

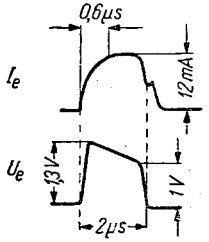


Rys. 21. Przebiegi na transformatorze.
a) $U_L(t)$; b) $i_L(t)$

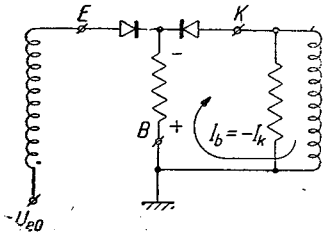
Oporność $R_{tl} = 2$ kΩ zapewnia $U_{k0} + U_{L\,\min} < 20$ V oraz $i_{L\,\min} < 1{,}5$ mA dla $L = 12$ mH.

POLARYZACJA EMITERA

Wstępne napięcie U_{e0} zostało dobrane doświadczalnie. Jak się okazało, dla $U_{e0} = 0$ impuls wyjściowy (napięciowy) jest znacznie poszerzony, a czas opadania dużo gorszy od przewidzianego. Równocześnie prąd I_e płynie po zniknięciu napięcia wejściowego (rys. 22). Jest to spowodowane tym, iż prąd I_k płynący po skończeniu impulsu wejściowego (por. rys. 2) płynąc



Rys. 22. Przebieg prądu i napięcia emitera dla $U_{e0} = 0$



Rys. 23. Stan po zniknięciu impulsu wejściowego

przez opornik r_B polaryzuje złącze emiter-baza w kierunku przewodzenia. Płynący teraz prąd I_e powoduje z kolei dalszy dopływ dziur do kolektora; psuje to kształt impulsu wyjściowego. Napięcie $-U_{e0}$ odcina prąd emitera po zniknięciu impulsu wejściowego i poprawia kształt napięcia wyjściowego[1]). Powinno być (por. rys. 23):

$$|U_{e0}| > |I_k r_B|.$$

Zmieniając U_{e0} w sposób ciągły i obserwując, kiedy prąd I_e płynący po zniknięciu impulsu wejściowego stanie się równy zeru, można ocenić (znając wartość I_k) oporność r_B. Z równości:

$$U_{e0} = I_k r_B$$

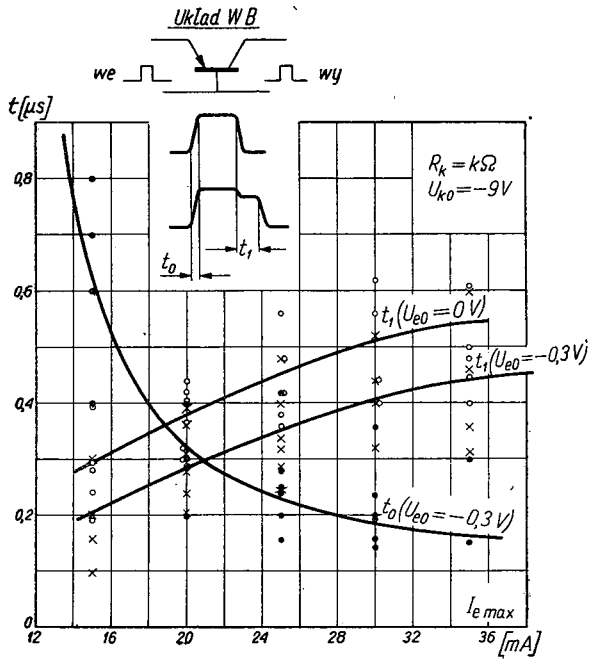
otrzymujemy dla $U_{e0} = 0{,}5$ V oraz $I_k = 10$ mA

$$r_B = \frac{0{,}5}{10 \cdot 10^{-3}} = 50\ \Omega.$$

Należy pamiętać, że r_B jest funkcją prądu I_b (względnie I_k).

WYZNACZANIE DANYCH WEJŚCIOWYCH

Wielkość napięcia wejściowego $U_{e\,max}$ oraz prądu wejściowego $I_{e\,max}$



Rys. 24. Zależność opóźnień początku i końca impulsu

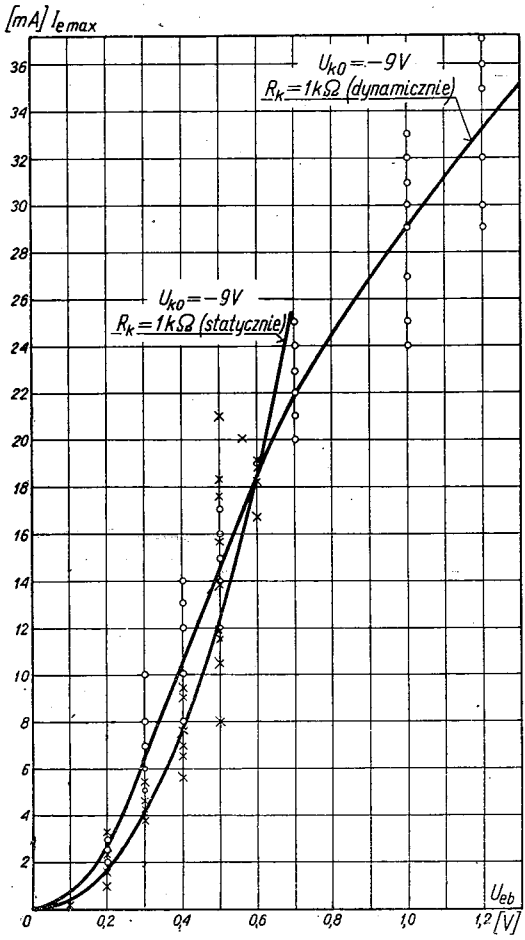
[1]) Dodatkowo wstępna polaryzacja emitera chroni wzmacniacz przed zakłóceniami zewnętrznymi, co jest szczególnie ważne przy szeregowej realizacji iloczynów logicznych.

potrzebnego do pełnego wysterowania wzmacniacza, wyznaczamy doświadczalnie;

$$\text{dla } U_{k0} = 9\,\text{V} \qquad R_k = R_2 = 1\,\text{k}\Omega$$

mamy

$$I_{R_k\,\max} = \frac{U_{k0}}{R_2} = \frac{9}{1 \cdot 10^3} = 9\,\text{mA}.$$



Rys. 25. Dynamiczne charakterystyki wejściowe tranzystora

Dodając prąd $I_{L\,\min} = 2$ mA otrzymujemy (pomijając prąd pojemnościowy I_{cp}), że po czasie narastania t_0

$$I_{k\,\max} = I_{R_k\,\max} + I_{L\,\min} = 11\,\text{mA}.$$

Dla danego $I_{k\,max}$ zdjęte są dynamicznie charakterystyki wejściowe. Zakładając, że $\tau_0 < 0{,}45$ μs oraz $T_2 < 0{,}45$ μs z załączonych charakterystyk znajdujemy $I_{e\,max} \approx 15 \div 20$ mA (rys. 24) oraz z załączonej dynamicznej charakterystyki wejściowej $U_{e\,max} \approx 0{,}6 \div 0{,}8$ V (rys. 25).

Napięcie na transformatorze wejściowym równa się oczywiście

$$U_{t\,max} = U_{e\,max} + U_{e0};$$

dla $U_e = -0{,}3$ V

$U_{t\,max} = 0{,}6 + 0{,}3 = 0{,}9$ V

WZMOCNIENIE MOCY

$$P_{wej} = U_{wej} I_{wej} = U_{t\,max} I_{e\,max} \leqslant 0{,}9 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 18\,\text{mW},$$

$$P_{wyj} = U_{wyj} I_{k\,max} = \frac{U_{wyj}^2}{R_k};$$

ponieważ

$$U_{wyj} \approx U_{k0} + U_{e\,max} = 9 + 0{,}6 = 9{,}6\,\text{V},$$

więc

$$P_{wyj} = \frac{9{,}6^2}{1{,}0 \cdot 10^{-3}} \approx 92\,\text{mW}.$$

$$K_p = \frac{P_{wyj}}{P_{wej}} > \frac{92}{18} = 5{,}3 \text{ (dla układu } WB).$$

Większe wzmocnienie mocy mamy w układzie WE, gdzie

$$I_{wej} = I_b = I_{e\,max} - I_{k\,max} I_{wej} \leqslant 5\,\text{mA},$$

$$P_{wej} = U_{t\,max} I_b \leqslant 0{,}9 \cdot 5 = 4{,}5\,\text{mW},$$

$$P_{wyj} \approx \frac{9^2}{1{,}0 \cdot 10^{-3}} = 81\,\text{mW},$$

$$K_p \geqslant \frac{81}{4{,}5} = 18.$$

Wzmocnienie mocy układu WB jest tyle razy mniejsze od wzmocnienia mocy układu WE, ile razy oporność wejściowa układu WB jest mniejsza od oporności wejściowej układu WE. Wzmacniacz WB spełnia jednak jeszcze warunek stawiany układom pracującym w maszynach cyfrowych — ma zdolność równoczesnego wysterowania trzech podobnych stopni.

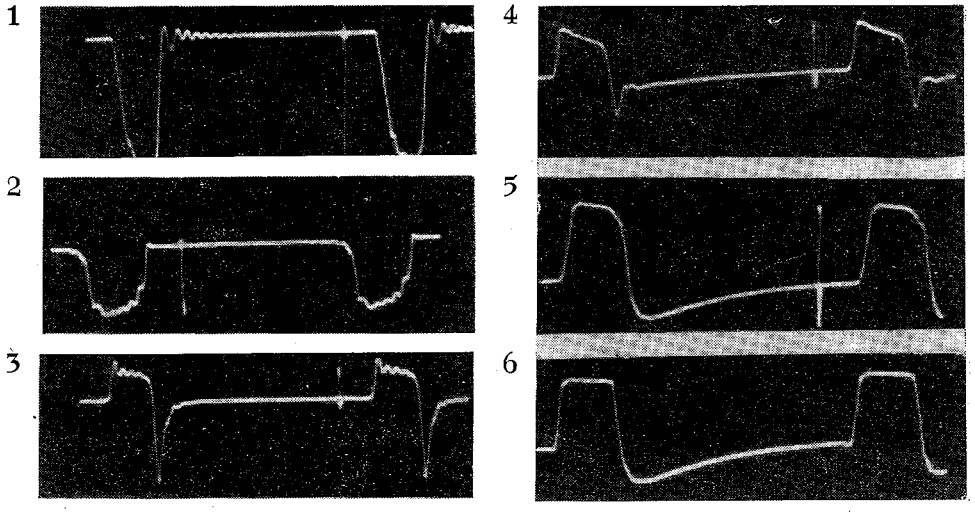
STRATY MOCY NA TRANZYSTORZE

W pracy impulsowej, gdy w czasie trwania impulsów napięcie U_{kb} jest dodatnie a zarazem bliskie zeru, występują trudności z określeniem mocy traconej na tranzystorze. Stosowanie wzorów typu $P_{śr} = \frac{1}{T}\int_0^T (U_k i_k + U_e i_e)\, dt$ jest utrudnione ze względu na różne znaki prądów i_e oraz i_k. Ebers i Miller [10] podają następujący wzór na wartość chwilową mocy traconej w tranzystorze:

$$P_{strat} = U_{ek} i_k + i_b^2 r_B.$$

Stosowanie powyższego wzoru jest jednak utrudnione ze względu na niewystarczającą znajomość napięcia U_{ek} oraz oporności r_B w czasie trwania impulsu.

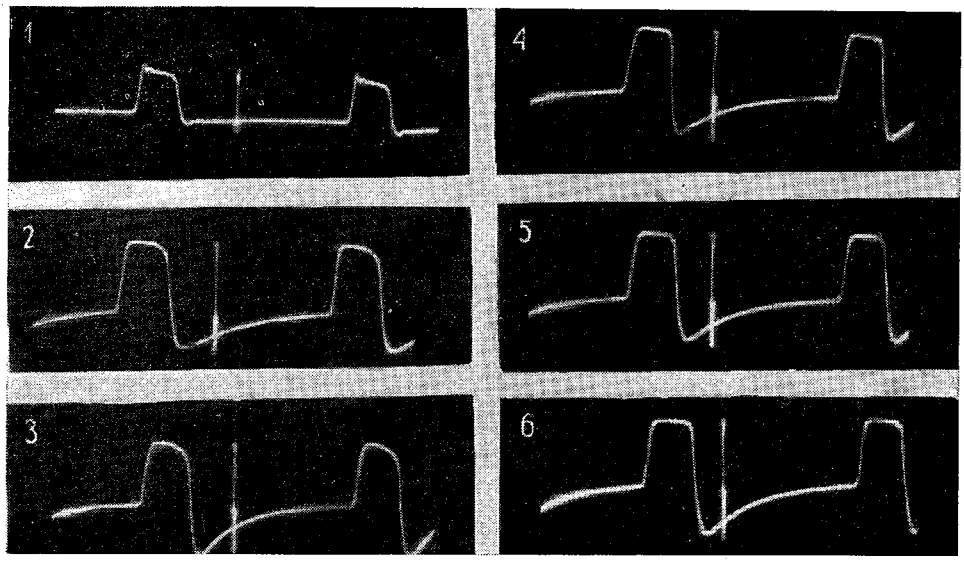
Na rysunku 26 podane są oscylogramy napięć i prądów tranzystora pracującego w układzie *WB*. Dla porównania pokazany jest przebieg napięcia U_{ek} w funkcji czasu.



Rys. 26. Oscylogramy napięć i prądów tranzystora pracującego w układzie *WB*

Szerokość impulsów 2 μs. 1 Prąd— I_e amplituda ok. 18 mA; 2. Prąd — I_k amplituda ok. 12 mA; 3. Prąd — I_b amplituda ok. 6 mA; 4. Napięcie wejściowe, amplituda ok. 1V; 5. Napięcie U_{kb} amplituda ok. 9V; 6. Napięcie U_{ke} amplituda ok. 9V

Na rysunku 27 pokazany jest kształt impulsów po przejściu przez kolejne stopnie. Jak widać, każdy stopień wprowadza opóźnienie rzędu 0,2 ÷ ÷ 0,25 μsec. łączne opóźnienie po pięciu stopniach wynosi około 1,2 μsec.



Rys. 27. Kształt impulsów po przeejściu przez kolejne stopnie

Szerokość impulsów 2 μs. Pionowa kreska znajduje się zawsze w tym samym miejscu w czasie. 1. Napięcie na wejściu pierwszego stopnia; 2—6. Napięcia na wyjściach odpowiednio od pierwszego do piątego stopnia.

Kształt oglądanych przebiegów jest nieco popsuty przez wzmacniacz oscyloskopu (pasmo 3 MHz) oraz dołączoną równolegle do układu pojemność oscyloskopu (dla oscyloskopu firmy Furzehill około 100 pF).

4.4. Przerzutnik dynamiczny [1])

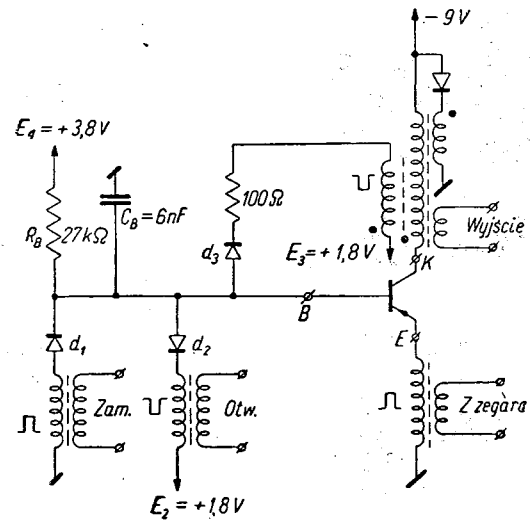
Obok wzmacniacza impulsowego przerzutnik jest podstawowym elementem maszyny cyfrowej. Przerzutnik jest układem o dwu wyróżnionych stanach, którym można przyporządkować cyfry układu dwójkowego: 0 i 1. W przerzutniku dynamicznym stanem 1 jest obecność ciągu impulsów na wyjściu, stanem 0 brak ciągu impulsów na wyjściu (albo odwrotnie).

Przerzutnik dynamiczny jest właściwie wzmacniaczem impulsowym rozbudowanym, na który przyłożony jest ciąg impulsów z zegara. Dobór potencjałów stałych jest taki, że wzmacniacz jest początkowo odcięty i na wyjściu nic się nie pojawia. Pojedynczy impuls przyłożony do odpowiedniego punktu układu odtyka wzmacniacz, który następnie pozostaje w stanie odetkania (ciąg impulsów zegarowych na wyjściu) dzięki impulsom podtrzymującym, podawanym z wyjścia na wejście. Odcięcie następuje po przyłożeniu pojedynczego impulsu na inny punkt układu.

Schemat przerzutnika pokazany jest na rys. 28.

[1]) Podobnie jak w rozdz. 4.3 dokładniejszy projekt znajduje się w dokumentacji ZAM. Por. [19].

Początkowo potencjał punktu B (baza tranzystora, napięcie na kondensatorze C_B) jest określony przez dzielnik napięcia R_{D2} i R_B oraz różnicę potencjałów $E_4 - E_2$. W przybliżeniu $U_B = E_2 = +1{,}8$ V. Ponieważ $U_B > 0$, a amplituda ciągu impulsów z zegara e_e jest mniejsza od U_B, więc tranzystor jest odcięty. Przerzutnik zostaje otwarty w czasie przerwy

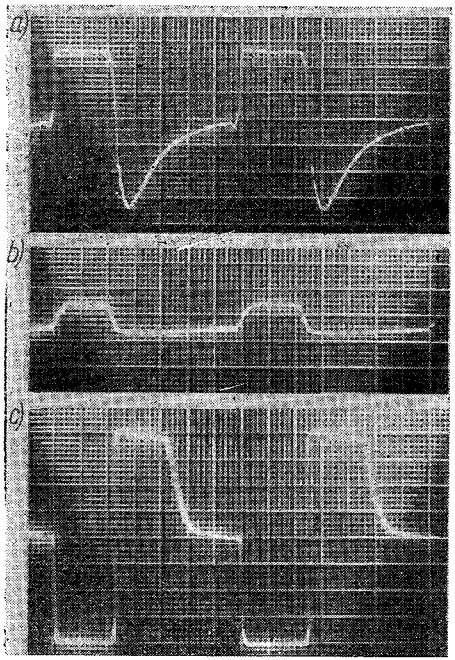


Rys. 28. Przerzutnik dynamiczny na tranzystorze

między impulsami zegarowymi impulsem „Otw" obniżającym potencjał „katody" diody D_2 do zera. Impuls ten ma za zadanie rozładować kondensator C_B przez diodę D_2 od napięcia E_2 również do zera. Stała czasu $R_B C_B$ jest na tyle duża, że najbliższy impuls zegarowy wysteruje tranzystor — pojawi się impuls na wyjściu, a ujemny impuls na uzwojeniu w pętli sprzężenia zwrotnego rozładuje ponownie kondensator C_B poprzez diodę D_3 (kondensator C_B jest ładowany do napięcia dodatniego, zatykającego tranzystor prądem I_b płynącym w czasie trwania impulsu). Kolejne impulsy zegarowe pojawiając się na wyjściu tranzystora równocześnie podtrzymują stan przewodzenia utrzymując blisko zera potencjał kondensatora C_B. Tranzystor odcina impuls „Zam", który ładuje kondensator C_B poprzez diodę D_1 do napięcia $E_2 = +1{,}8$ V.

Czułym punktem układu jest punkt B. Przebieg napięcia w tym punkcie w dużym stopniu zależy od wielkości C_B. Zwiększenie pojemności C_B wymaga dostarczania większej energii w czasie otwierania i zamykania przerzutnika, zmniejszenie — zmniejsza ze względu na ograniczenia co do R_B wielkość stałej czasu $R_B C_B$. Pojemność C_B jest tak wybrana, iż dzięki

zmianom napięcia na niej tranzystor jest chroniony przed przeciążeniem a przerzutnik może wysterować sześć identycznych stopni.



Rys. 29. Przebiegi czasowe w przerzutniku dynamicznym

Skala 1 V/cm i 2 μs/cm. a) Napięcie na emiterze; b) Napięcie na bazie; c) Napięcie wyjściowe (po przekładni)

Górna wartość oporności R_B określona jest dopuszczalnym, płynącym przez nią w czasie zamknięcia przerzutnika, prądem. Powinien być spełniony warunek:

$$R_B < \frac{E_4 - E_2}{|I_{e0} + I_{k0} + I_{D_1 0}|}.$$

W przeciwnym przypadku diody D_2 i D_3 zostaną odcięte, a potencjał bazy tranzystora może być zbyt niski. Stąd wynikają ograniczenia prądów początkowych tranzystora oraz prądu wstecznego diody D_1. Zakładając, że suma tych prądów nie przekracza 75 μA, otrzymujemy, iż dla $E_4 - E_2 = 2$ V $R_{B\,\max} \approx 27$ kΩ. Pozostałe elementy przerzutnika oparte są na elementach wzmacniacza impulsowego. Mniejsza niż we wzmacniaczu indukcyjność główna transformatora oraz dodatkowe połączone poprzez diodę do −9 V uzwojenie obcinające pozwalają na sterowanie następnych stopni również przerzutem napięcia na transformatorze wyjściowym. (Napięcie $U_{L\,\min}$ na rysunku 21a).

4.5. Wnioski

Analiza przeprowadzona w rozdz. 2 oraz badania pierwszych układów (rozdziały 4.3 i 4.4) potwierdzają na ogół celowość wykorzystania tranzystorów w układach impulsowych. Oczywiście tranzystory posiadają wady utrudniające stosowanie, ewentualnie zwężające zakres wykorzystania tranzystorów. Do pierwszych należy rozrzut parametrów; wprawdzie praca z przesterowaniem zmniejsza wpływ rozrzutu, niemniej jednak konieczna jest selekcja tranzystorów pod względem częstotliwości granicznej oraz prądów początkowych. Do wad drugiej grupy należy m. in. niski poziom mocy wyjściowej, który utrudnia sterowanie układów lampowych i ferrytowych. Dostępne obecnie tranzystory (por. 4.3) umożliwiają wytwarzanie impulsów o szerokości do 1 μs (2 μs) i mocy wyjściowej rzędu

100 mW. Dalsze przyspieszenie przebiegów wymaga zastosowania tranzystorów o częstotliwości granicznej równej ok. 5 MHz; zwiększenie mocy wyjściowej uzależnione jest od zwiększenia dopuszczalnych napięć U_{k0} oraz prądów $I_{k\,max}$. Poza tym lepsze tranzystory pozwolą na zwiększenie w przerzutniku dynamicznym oporności R_B i zmniejszenie pojemności C_B (rys. 28). Dalszy rozwój układów tranzystorowych wymaga — poza lepszymi tranzystorami — posiadania diod o bardzo małej oporności w kierunku przewodzenia (w stosunku do oporności wejściowej tranzystorów) oraz miniaturowych elementów R i C. Badania nad pracą impulsową tranzystorów, a w szczególności nad zagadnieniami z rozdz. 4.2, nie są jeszcze oczywiście zakończone.

Chciałbym w tym miejscu podziękować p. prof. J. Groszkowskiemu, p. docentowi R. Marczyńskiemu oraz p. prof. W. Rosińskiemu za kierownictwo nad pracę i poczynione uwagi, p. mgrowi Z. Sawickiemu za dużą pomoc w opracowaniu układów impulsowych i poczynione uwagi oraz p. mgrowi J. Tyszce za b. staranne pierwsze czytanie rękopisu.

Zakład Aparatów Matematycznych
Polskiej Akademii Nauk

WYKAZ LITERATURY

Książki

1. Hunter L. i in.: Handbook of Semiconductor Electronics. Mc Graw Hill-Book, 1956.
2. Lo A. W., Endres R. O., Zawels J.: Transistor Electronics. Prentice Hall, 1956.
3. Shockley W.: Elektrony i dziury w półprzewodnikach. PWT, Warszawa 1956.
4. Rosiński W.: Tranzystory i ich układy. PWT, Warszawa 1957.
5. Crank I.: The Mathematics of Diffusion. At the Clarendon Press, Oxford 1956.
6. Shea R. F.: Transistor circuit engineering. John Wiley & Sons, 1957.

Artykuły

7. Early J. M.: Effects of Space-charge Layer Widening in Junction Transistors. — PIRE, Nov. 52, p. 1401.
8. Moll J. L. i Ebers J. J.: Large Signal Behavior of Junction Transistors. — PIRE, Dec. 1954.
9. Moll J. L.: Large Signal Transient Response of Junction Transistors. — PIRE, Dec. 54.
10. Ebers J. J. i Miller S. L.: Design of Alloyed Junction Germanium Transistors for High-Speed Switching. — BSTJ, July 55.
11. Wolfendale E., Morgan L. P. i Stephenson W. L.: The Junction Transistor as a Computing Element. — Electronic Eng. I i II, 57.
12. Felker: Performance of TRADIC Transistor Digital Computer. — Proc. of the Eastern Joint Comput. Conference AJEE, Philadelphia, Dec. 54.
13. Bothwell T. P., Booth G. W. i English E. P.: A Junction — Transistor with High Speed Carry. — Transistors I RCA 1956.
14. Deuitch D. E.: Junction Transistor Switching Characteristics. — Transistors I. RCA 1956.

15. Giacoletto L. J.: Performance of a Radio — Freq. Alloy Junct. Transistor in Different Circuit. — Transistors I.
16. Waltz M. C.: On Some Transients in the Pulse Response of P. C. Germanium Diodes. — PIRE, Nov. 52.
17. Early J. M.: Design Theory of Junction Transistors. — BSTJ, Nov. 53.
18. Jankowski T.: Wzmacniacz impulsowy na tranzystorze. Dokumentacja ZAM, 1957.
19. Dziedzic W., Jankowski T., Pelc J., Sawicki Z.: Przerzutnik dynamiczny na tranzystorze. — Dokumentacja ZAM, 1958.

Т. ЯНКОВСКИ

РАБОТА КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ТРИОДОВ В ИМПУЛЬСНОМ РЕЖИМЕ ИЗБРАНЫЕ ВОПРОСЫ

Резюме

В настоящей работе обсуждаются вопросы возбуждения кристаллических триодов, применяемых в вычислительных цифровых машинах, значительными сигналами. Приведены и сравнены с экспериментальными результатами временные зависимости между входными и выходными токами, а также зависимости между напряжениями и токами результирующие из решения уравнения диффузии. В заключительной части сделаны попытки уточнения требований относительно кристаллических триодов работающих в импульсном режиме; в дальнейшем приведены типические импульсные схемы с кристаллическими триодами, применяемые ЗАМ (Отдел математической аппаратуры Польской академии наук).

T. JANKOWSKI

TRANSISTORS IN PULSE OPERATION

Summary

Problems connected with large signal driving of transistors working in digital computers are discussed in this paper. Time relations between input and output currents are given and compared with experimental results, as well as the dependances between voltages and currents resulting from the solution of the diffusion equation. Subsequently the author tried to determine the requirements to be met by pulse operated transistors. In the last part of the paper typical transistor pulse circuits applied in the Institute of Mathematical Instruments (ZAM) are given.

WARUNKI PRENUMERATY CZASOPISM

„ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE"

Kwartalnik

Cena w prenumeracie zł 100.— — rocznie
„ 50.— — półrocznie

Zamówienia i wpłaty przyjmują:
1. Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw „Ruch", Warszawa, ul. Srebrna 12, konto PKO Nr 1-6-100.020.
2. Urzędy pocztowe.
Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę — 40% drożej. Zamówienia dla zagranicy przyjmuje Przedsiębiorstwo Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych „Ruch", Warszawa, ul. Wilcza 46, konto PKO Nr 1-6-100.024. Bieżące numery do nabycia w niżej podanych placówkach „Ruchu", w księgarniach naukowych „Dom Książki", we Wzorcowni ORWN PAN, oraz we Wzorcowni PWN.
Informacji w sprawie sprzedaży egzemplarzy z poprzednich lat udziela Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw „Ruch", Dział Handlowy, Warszawa, ul. Srebrna 12.

PLACÓWKI „RUCHU"

Warszawa, ul. Nowopiękna 3
Warszawa, ul. Nowy Świat 72 — Pałac Staszica
Warszawa, ul. Wiejska 14
Białystok, Lipowa 1
Bielsko Biała, skl. nr. 1, ul. Lenina 7
Bydgoszcz, ul. Armii Czerwonej 2
Bytom, sklep nr. 39, Pl. Kościuszki
Chorzów, ul. Wolności 54
Ciechocinek, kiosk nr. 4 „Pod Grzybkiem"
Częstochowa, II Aleja 26
Gdańsk, ul. Długa 33/34
Gdynia, ul. Świętojańska 9
Gliwice, ul. Zwycięstwa 47
Gniezno, ul. Mieczysława 31
Grudziądz, ul. Mickiewicza sklep nr. 5
Inowrocław, ul. Marchlewskiego 3
Jelenia Góra, ul. 1-go Maja 1
Kalisz, ul. Śródmiejska 3
Katowice Zach., 3-go Maja 28
Kielce, ul. Sienkiewicza 22
Koszalin, ul. Zwycięstwa 38
Kraków, Rynek Główny 32
Krynica, Stary Dom Zdrojowy
Lublin, Krak. Przedmieście 72
Nowy Sącz, ul. Jagiellońska 10
Łódź, ul. Piotrkowska 200
Olsztyn, Pl. Wolności (kiosk)
Opole, Rynek — sklep nr. 76
Ostrów Wlkp., ul. Partyzancka 1
Płock, ul. Tumska, kiosk nr. 270
Poznań, ul. Dzierżyńskiego 1
Poznań, ul. Głogowska 66
Poznań, ul. 27-go Grudnia 4
Przemyśl, Pl. Konstytucji 9
Radom, ul. Moniuszki 5
Rzeszów, ul. Kościuszki 5
Sopot, ul. Monte Cassino 32
Sosnowiec, ul. 22-go Lipca 30
Szczecin, Al. Piastów — róg Jagiellońskiej
Toruń, Rynek Staromiejski 9
Wałbrzych, ul. Wysockiego obok pl. Grunwaldzkiego
Włocławek, Pl. Wolności—róg ul. 3 Maja
Wrocław, Pl. Kościuszki, kiosk nr. 9
Zabrze, Pl. 24-go Stycznia, pkt. nr. 50
Zakopane, ul. Krupówki 51
Zielona Góra, ul. Świerczewskiego 38

KSIĘGARNIE NAUKOWE „DOM KSIĄŻKI"

Warszawa, ul. Krak. Przedm. 7
Kraków, ul. Podwale 6
Łódź, ul. Piotrkowska 102a
Poznań, ul. Armii Czerwonej 69
Wrocław, Rynek 60

Ośrodek Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN Warszawa, Pałac Kultury i Nauki (Wzorcownia)
Wzorcownia PWN, Warszawa, ul. Miodowa 10

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM V · ZESZYT 2

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1959

RADA REDAKCYJNA

PROF. JANUSZ GROSZKOWSKI, PROF. JANUSZ LECH JAKUBOWSKI,
PROF. BOLESŁAW KONORSKI, PROF. IGNACY MALECKI,
PROF. PAWEŁ NOWACKI, PROF. PAWEŁ SZULKIN

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor Naczelny

PROF. WITOLD NOWICKI

Sekretarz

JULIUSZ MIERZEJEWSKI

ADRES REDAKCJI

Warszawa, Politechnika, Plac Jedności Robotniczej 1,
Katedra Teletransmisji Przewodowej, Gmach Mechaniki

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
Warszawa, Miodowa 10

Nakład 530+130.	Oddano do składania 29.IV.59.
Ark. wyd. 11,25, druk. 10,—	Podpisano do druku 11.IX.59.
Pap. druk. sat. kl. III, 80 g, 70×100	Druk ukończono we wrześniu 1959 r.
Zamówienie nr 751/59.	Cena zł. 25 W-7

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

621.3.048

MIECZYSŁAW PLUCIŃSKI

Polaryzacja warstwowa podstawy teoretyczne — Wnioski praktyczne

Rękopis dostarczono 25.9.1958

W pracy przedstawiono teoretyczne i fizykalne podstawy polaryzacji warstwowej przy prądach stałym i zmiennym. Ujęcie matematyczne teorii opiera się o prosty model dielektryka dwuwarstwowego. Wyprowadzone zależności są następnie uogólnione na dielektryk wielowarstwowy. Podano możliwości praktycznego wykorzystania rozważań teoretycznych i fizykalnych do badań nieniszczących i oceny stanu izolacji transformatorów i przede wszystkim maszyn wysokonapięciowych.

1. WSTĘP

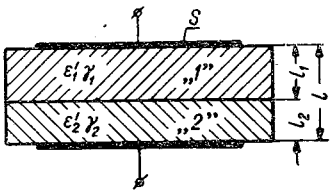
Izolacja maszyn elektrycznych i transformatorów jest z reguły izolacją niejednorodną, warstwową (np. taśma mikropapierowa używana do wykonania izolacji głównej uzwojeń stojanów maszyn elektrycznych). Rozmaite objętości i warstwy takiej izolacji w różnych warunkach eksploatacji mają różne przewodności elektryczne (np. przy różnych stopniach zawilgocenia izolacji) przy stosunkowo małej zmianie pojemności warstw. W tego rodzaju niejednorodnych dielektrykach warstwowych, o określonej przewodności elektrycznej i przenikalności dielektrycznej warstw, powstaje tak zwana polaryzacja warstwowa[1]) będąca polaryzacją w skali makroskopowej w odróżnieniu od polaryzacji elektronowej, atomowej (jonowej) i dipolowej (położeniowej), występujących w skali atomowej i cząsteczkowej.

Wpływ polaryzacji elektronowej i atomowej na własności dielektryków występuje odpowiednio przy częstotliwościach optycznych (świetlnych) i radiowych. Polaryzacja dipolowa najczęściej wpływa na zmianę właściwości dielektrycznych w zakresie częstotliwości akustycznych, choć są przypadki, że występuje już przy częstotliwościach przemysłowych, to znaczy

[1]) W języku angielskim: Interfacial polarization albo space-charge polarization; w języku rosyjskim: strukturnaja polarizacija.

przy tych częstotliwościach, przy których występuje wpływ polaryzacji warstwowej. W dalszych rozważaniach przyjmiemy, że w interesujących nas zakresach częstotliwości przemysłowych (do 100 Hz) oraz temperatur roboczych nie występuje zmiana właściwości dielektrycznych w związku z polaryzacją dipolową, atomową i elektronową.

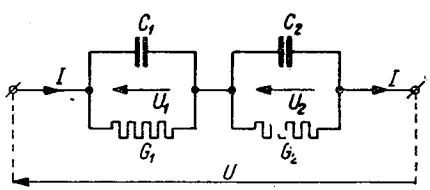
W najprostszym przypadku niejednorodny, warstwowy dielektryk można przedstawić w postaci kondensatora dwuwarstwowego (rys. 1), którego jednorodne (z założenia) warstwy mają przenikalności dielektryczne ε'_1 oraz ε'_2 i przewodności elektryczne γ_1 oraz γ_2. Model taki pozwoli nam wyjaśnić właściwości polaryzacji warstwowej i jej wpływ na własności izolacji warstwowej niezależnie od innych rodzajów polaryzacji przy założeniu, że przenikalności ε'_1 oraz ε'_2 nie są funkcjami ani częstotliwości (w interesującym nas zakresie), ani temperatury.



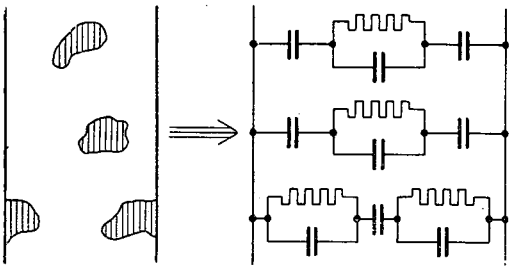
Rys. 1. Model niejednorodnego dwuwarstwowego dielektryka; S — powierzchnia elektrody

Przyjęty model dielektryka (wg Maxwella) można zastąpić schematem zastępczym podanym na rys. 2.

Model ten może być uważany jako szczególny przypadek przypadku bardziej ogólnego (wg Wagnera), podanego na rys. 3. W tym przypadku materiał może składać się z dwóch składników: jednego — mającego na przykład przewodność elektryczną równą praktycznie zeru, i drugiego — posiadającego wyraźną przewodność elektryczną.



Rys. 2. Schemat zastępczy niejednorodnego, dwuwarstwowego dielektryka; $G_1 = \frac{\gamma_1 S}{l_1}$; $G_2 = \frac{\gamma_2 S}{l_2}$; $C_1 = \frac{\varepsilon' S}{\quad}$; $C_2 = \frac{\varepsilon' S}{l_2}$



Rys. 3. Model i schemat zastępczy dobrego dielektryka z wtrąceniami o dużej przewodności elektrycznej

W celu wyjaśnienia zjawisk elektrycznych zachodzących w przyjętym do dalszych rozważań modelu (rys. 1) dielektryka rozpatrzymy zachowanie się takiego dielektryka przy włączeniu na napięcie stałe oraz przy włączeniu na napięcie zmienne sinusoidalne.

2. POLARYZACJA WARSTWOWA PRZY PRĄDZIE STAŁYM

W chwili włączenia ($t = 0$) niejednorodnego, dwuwarstwowego dielektryka na napięcie stałe wartości indukcji elektrycznych w warstwach będą sobie równe, to jest:

$$\overline{D}_1^{(0)} = \overline{D}_2^{(0)},$$

a więc wartości natężenia pola elektrycznego w warstwach będą początkowo zależeć tylko od pojemności warstw, czyli:

$$\frac{\overline{K}_1^{(0)}}{\overline{K}_2^{(0)}} = \frac{\varepsilon_2'}{\varepsilon_1'}, \quad \text{bo } \overline{D} = \varepsilon' \overline{K}.$$

Rozkład napięć na warstwach będzie następujący:

$$U_1' = \frac{\varepsilon_2 l_1}{\varepsilon_1' {}_2 + \varepsilon_2'} U \quad \text{oraz} \quad U_2^{(0)} = \frac{\varepsilon_1' l_2}{\varepsilon_1' l_2 + \varepsilon_2' l_1} U, \tag{1}$$

gdyż $U = U_1^{(0)} + U_2^{(0)} = K_1^{(0)} l_1 + K_2^{(0)} l_2$.

W stanie ustalonym ($t \to \infty$) rozkład pola elektrycznego w warstwach jest określony przez przewodności elektryczne warstw, gdyż gęstości prądu w obu warstwach będą sobie równe, to jest:

$$\overline{J}_1^{(\infty)} = \overline{J}_2^{(\infty)}.$$

Wynika z tego, że:

$$\frac{\overline{K}_1^{(\infty)}}{\overline{K}_2^{(\infty)}} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \quad \text{bo } \overline{J} = \gamma \overline{K};$$

równocześnie indukcje elektryczne warstw będą różne, to jest:

$$\overline{D}_1^{(\infty)} \neq \overline{D}_2^{(\infty)}.$$

Rozkład napięć na warstwach będzie następujący:

$$U_1^{(\infty)} = \frac{\gamma_2 l_1}{\gamma_1 l_2 + \gamma_2 l_1} U \quad \text{oraz} \quad U_2^{(\infty)} = \frac{\gamma_1 l_2}{\gamma_1 l_2 + \gamma_2 l_1} U, \tag{2}$$

gdyż $U = U_1^{(\infty)} + U_2^{(\infty)} = K_1^{(\infty)} l_1 + K_2^{(\infty)} l_2$.

Na powierzchni między warstwami dielektryka zgromadzi się ładunek elektryczny, którego gęstość powierzchniowa będzie równa:

$$\sigma = D_1^{(\infty)} - D_2^{(\infty)} = \frac{\varepsilon_1' \gamma_2 - \varepsilon_2' \gamma_1}{\gamma_1 l_2 + \gamma_2 l_1} U,$$

bo $D_1^{(\infty)} = \varepsilon_1' \frac{U_1^{(\infty)}}{l_1}$ oraz $D_2^{(\infty)} = \varepsilon_2' \frac{U_2^{(\infty)}}{l_2}$.

Jeśli $D_1^{(\infty)} > D_2^{(\infty)}$, to jest gdy $\frac{\varepsilon_1'}{\varepsilon_2'} > \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, ładunek na powierzchnię między warstwami dochodzi przez drugi dielektryk „2", jeśli zaś $D_1^{(\infty)} < D_2^{(\infty)}$, to jest gdy $\frac{\varepsilon_1'}{\varepsilon_2'} < \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, ładunek dochodzi przez pierwszy dielektryk „1".

Gromadzenie się ładunku elektrycznego na granicy warstw nazwano zjawiskiem polaryzacji warstwowej. Inaczej i raczej ogólniej zjawisko to można nazwać polaryzacją w miejscach nieciągłości dielektryka. W szczególnym przypadku, gdy $\frac{\varepsilon_1'}{\varepsilon_2'} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, to jest gdy $\sigma = 0$ — zjawisko polaryzacji warstwowej nie występuje.

Zjawisko polaryzacji warstwowej jest niewątpliwie związane z poborem energii ze źródła napięcia elektrycznego koniecznej do wykonania pracy przesunięcia ładunków elektrycznych —mówimy w takim przypadku o występowaniu absorbcji dielektrycznej.

Aby wyjaśnić zjawiska zachodzące w stanie przejściowym, to jest w okresie czasu między $t = 0$ a $t = \infty$, rozpatrzymy schemat zastępczy podany na rys. 2.

Prąd płynący przez dielektryk dwuwarstwowy jest równy:

$$I_t = C_1 \frac{dU_{1t}}{dt} + G_1 U_{1t} \quad \text{lub} \quad I_t = C_2 \frac{dU_{2t}}{dt} + G_2 U_{2t}$$

i równocześnie

$$U = U_1 + U_2 = \text{const.}$$

Rozwiązując te trzy równania otrzymujemy

$$U_{1t} = \left[\frac{G_2}{G_1 + G_2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + \frac{C_2}{C_1 + C_2} e^{-\frac{t}{\tau}}\right] U, \tag{3a}$$

$$U_{2t} = \left[\frac{G_1}{G_1 + G_2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + \frac{C_1}{C_1 + C_2} e^{-\frac{t}{\tau}}\right] U, \tag{3b}$$

$$I_t = \left[G_s\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + G_\infty e^{-\frac{t}{\tau}}\right] U, \tag{4}$$

gdzie $\tau = \frac{C_1 + C_2}{G_1 + G_2}$ jest stałą czasową (czasem relaksacji) układu, zaś

$G_s = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$ oraz $G_\infty = \frac{C_1^2 G_2 + C_2^2 G_1}{(C_1 + C_2)^2}$ odpowiednio zastępczymi przewodnościami dla czasów $t = \infty$ oraz $t = 0$.

Dla czasu $t = 0$ mamy prąd $I_{(t=0)} = G_\infty U$, a dla czasu $t = \infty$ mamy

prąd $I_{(t=\infty)} = G_s U$. W związku z występowaniem zjawiska polaryzacji warstwowej przewodność elektryczna układu zmienia się w czasie mimo przłożenia do układu stałego napięcia U o niezmiennej wartości w czasie.

Przewodność G_∞ można określić jako przewodność dynamiczną układu, zaś przewodność G_s — jako przewodność statyczną układu. Warto tu zauważyć, że różnica:

$$G_\infty - G_s = \frac{(C_1G_2 - C_2G_1)^2}{(G_1G_2)(C_1C_2)^2}$$ jest zawsze większa od zera, z wyjątkiem szczególnego przypadku: $\frac{C_1}{C_2} = \frac{G_1}{G_2}$, dla którego $G_\infty - G_s = 0$. Ten szczególny przypadek został już uprzednio omówiony; jest to przypadek, gdy prąd ustala się od razu i nie zachodzi zjawisko absorbcji dielektrycznej.

Pojemność dielektryka warstwowego przy długotrwałym ładowaniu prądem stałym (oznaczmy tę pojemność przez C_s) może znacznie przekraczać wartość pojemności wynikającej z wymiarów geometrycznych i przenikalności dielektrycznych warstw dielektryka, to jest pojemności równej:

$$C_\infty = \frac{C_1C_2}{C_1C_2}\ ^{1)}.$$

Przyczyną powyższego zjawiska jest to, że w końcu ładowania energia pola elektrycznego koncentruje się w warstwie o małej przewodności elektrycznej i jeżeli np. $G_1 \ll G_2$, to $C_s \approx C_1$. Jeżeli pierwsza warstwa jest cienka, to pojemność jej jest duża, podczas gdy pojemność C_∞ będzie w przybliżeniu równa pojemności C_2 warstwy grubej. W rezultacie stosunek $\frac{C_s}{C_\infty}$ będzie równy w przybliżeniu stosunkowi $\frac{l_2}{l_1}$, to jest równy stosunkowi grubości warstwy o dużej przewodności elektrycznej do grubości warstwy o małej przewodności elektrycznej.

Przebieg zmienności prądu w czasie ładowania niejednorodnego, warstwowego dielektryka, zgodnie z równaniem (4), podaje rys. 4.

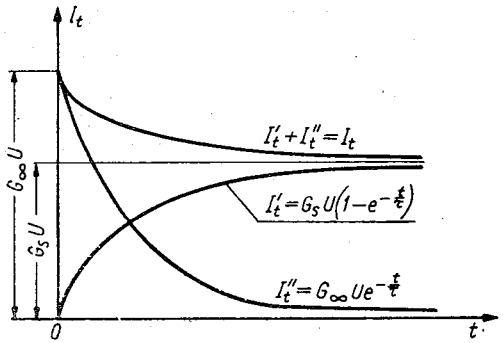
Jak wiadomo, jednym z typowych pomiarów izolacji transformatorów oraz maszyn elektrycznych jest pomiar oporności izolacji przy pomocy prądu stałego 500 do 10000 V po 15 sekundach i 60 sekundach (ewentualnie po 1 i 10 minutach) oraz określenie stosunku:

$$\frac{R_{(t=60)}}{R_{(t=15)}} = \frac{R_{60}}{R_{15}},$$

na podstawie którego sądzi się o stopniu zawilgocenia izolacji.

---

[1]) Sens przyjętych znaczków: „s" oraz „∞" przy symbolach C i G zostanie wyjaśniony później.



Rys. 4. Prąd ładowania kondensatora warstwowego, załączonego na napięcie prądu stałego

Jeżeli w rozpatrywanym przez nas układzie oznaczymy: $R_1 = \frac{1}{G_1}$ i $R_2 = \frac{1}{G_2}$ oraz $R_s = \frac{1}{G_s}$ i $R_\infty = \frac{1}{G_\infty}$, to otrzymamy, że:

$$R_s = \frac{1}{G_s} = R_1 + R_2 \quad (\text{dla } t = \infty),$$

$$R_\infty = \frac{1}{G_\infty} = \frac{(C_1 + C_2)^2 R_1 R_2}{C_1^2 R_1 + C_2^2 R_2} \quad (\text{dla } t = 0),$$

oraz

$$R_s - R_\infty = \frac{(C_1 R_1 - C_2 R_2)^2}{C_1^2 R_1 + C_2^2 R_2} \geqslant 0 \text{ zawsze!}$$

Widzimy, że w przypadku niejednorodnego, warstwowego dielektryka w czasie długotrwałego ładowania prądem stałym (np. za pomocą wysokonapięciowego omomierza korbkowego) oporność izolacji stopniowo rośnie od wartości R_∞ do wartości R_s (tylko w przypadku $\frac{C_1}{C_2} = \frac{R_2}{R_1}$ oporność ustala się od razu). Ta zmiana oporności w czasie powstaje w wyniku absorbcji dielektrycznej, spowodowanej polaryzacją warstwową lub wyłączoną z naszych rozważań polaryzacją dipolową. Stosunek:

$$\frac{R_s}{R_\infty} = \frac{R_{(t=\infty)}}{R_{(t=0)}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \cdot \frac{C_1^2 R_1 + C_2^2 R_2}{(C_1 + C_2)^2}$$

można określić jako teoretyczny wskaźnik absorbji dielektrycznej w odróżnieniu od praktycznego wskaźnika absorbcji dielektrycznej, będącego stosunkiem: $\frac{R_{60}}{R_{15}}$ (względnie $\frac{R_{600}}{R_{60}}$ — jak zalecają źródła amerykańskie).

W niejednorodnym, warstwowym dielektryku przewodności elektryczne warstw mają w praktyce zawsze różny rząd wielkości, a więc gdy na przykład $G_2 \gg G_1$, to

$$\tau = \frac{C_1 + C_2}{G_2} = (C_1 + C_2) R_2 .$$

Załóżmy, że rozpatrujemy dielektryk warstwowy — mika-papier. Przyjmując, że

$$C_1 = C_2 \text{ (przy różnych grubościach warstw)},$$

$$\varepsilon_1' = 5\,\varepsilon_0 \text{ (mika)},$$

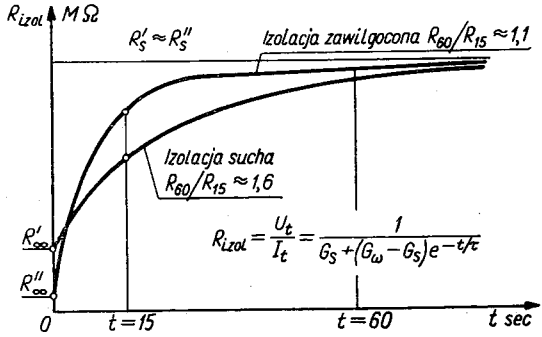
$$\gamma_{2s} = 10^{-12} \frac{1}{\Omega\,\mathrm{cm}} \text{ (izolacja sucha)}$$

oraz

$$\gamma_{2w} = 10^{-8} \frac{1}{\Omega\,\mathrm{cm}} \text{ (izolacja zawilgocona)}$$

i pamiętając, że

$$\varepsilon_0 \approx \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4\pi} 10^{-9} \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} = 8{,}86 \cdot 10^{-14} \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{cm}},$$ dla izolacji suchej mamy: $\tau_s = 0{,}9 \cdot 10^{-2}$ sec, a więc $\frac{R_{60}}{R_{15}}$ — duże, zaś dla izolacji zawilgoconej odpowiednio mamy $\tau_w = 0{,}9 \cdot 10^{-6}$ sec, a więc $\frac{R_{60}}{R_{15}}$ — małe. Dla obu przypadków (izolacja sucha, izolacja zawilgocona) przebiegi zmienności oporności izolacji w czasie długotrwałego ładowania prądem stałym



Rys. 5. Zmiana oporności izolacji w czasie długotrwałego ładowania prądem stałym

ilustruje rys. 5, na którym jednak przyjęto o wiele większe stałe czasowe niż w powyższym przykładzie liczbowym.

Warto tu jeszcze zauważyć, że przy wzroście temperatury dielektryka warstwowego stała czasowa τ maleje, ponieważ dielektryki posiadają przede wszystkim przewodność jonową wzrastającą z temperaturą (np. $\gamma = \gamma_0 e^{a\Theta}$).

3. POLARYZACJA WARSTWOWA PRZY PRĄDZIE ZMIENNYM

Dla prądu zmiennego, rozpatrując schemat zastępczy podany na rys. 2, można napisać

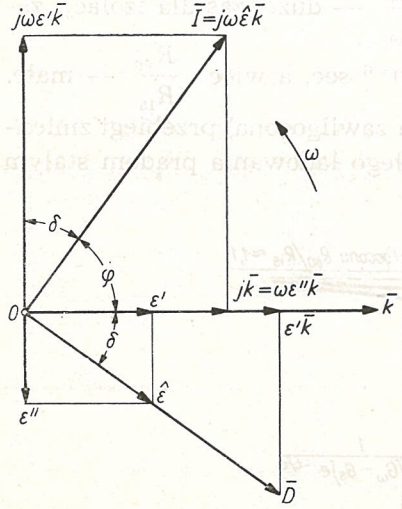
$$\hat{Y} = \frac{\hat{I}}{\hat{U}} = \frac{\hat{Y}_1 \hat{Y}_2}{\hat{Y}_1 + \hat{Y}_2},$$

gdzie: $\hat{Y}_1 = G_1 + j\omega C_1$, zaś $\hat{Y}_2 = G_2 + j\omega C_2$, i wobec tego, że

$$\tau = \frac{C_1 + C_2}{G_1 + G_2},$$

przewodność pozorna układu jest:

$$\hat{Y} = \frac{(G_1 + j\omega C_1)(G_2 + j\omega C_2)}{(G_1 + G_2)(1 + j\omega\tau)}. \qquad (5)$$



Rys. 6. Wykres wektorowy

Ogólnie, przy prądzie zmiennym dla dielektryka posiadającego przenikalność dielektryczną ε' oraz przewodność elektryczną γ, możemy napisać, że gęstość prądu płynącego przez dielektryk przy natężeniu pola elektrycznego $\bar{K} = \bar{K}_0 e^{j\omega t}$ jest

$$\bar{J} = \varepsilon' \frac{\partial \bar{K}}{\partial t} + \gamma \bar{K}$$

lub

$$\bar{J} = j\omega\varepsilon'\bar{K} + \gamma\bar{K} = j\omega\left(\varepsilon' - j\frac{\gamma}{\omega}\right)\bar{K} = j\omega(\varepsilon' - j\varepsilon'')\bar{K} = j\omega\hat{\varepsilon}\bar{K},$$

gdzie $\hat{\varepsilon} = \varepsilon' - j\varepsilon''$ jest zespoloną przenikalnością dielektryczną. Część uro-

jona zespolonej przenikalności dielektrycznej jest proporcjonalna do mocy elektrycznej traconej w dielektryku, bo:

$$\Delta P = \frac{1}{2}\gamma K_0^2 = \frac{1}{2}\omega\varepsilon'' K_0 \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^3}\right].$$

Z wykresu wektorowego (rys. 6) widzimy, że $\mathrm{tg}\varphi = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}$, zaś współczynnik stratności dielektrycznej $\mathrm{tg}\delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$. A więc w naszym przypadku, traktując rozpatrywany dielektryk warstwowy jako całość, możemy napisać:

$$\hat{I} = (j\omega\varepsilon' + \omega\varepsilon'')\frac{C_0}{\varepsilon_0}\hat{U} = j\omega\hat{\varepsilon}\frac{C_0}{\varepsilon_0}\hat{U} = j\omega\hat{\varepsilon}_r C_0 \hat{U},$$

gdzie

$\hat{\varepsilon}_r = \frac{1}{\varepsilon_0}(\varepsilon' - j\varepsilon'')$; $C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{l}$ pojemność geometryczna dielektryka; $l = l_1 + l_2$ (patrz rys. 1);

stąd

$$\hat{Y} = \frac{\hat{Y}}{\hat{U}} = j\omega\hat{\varepsilon}_r C_0 = j\omega(\varepsilon_r' - j\varepsilon_r'')C_0. \tag{6}$$

Rozwijając i porządkując równanie (5) otrzymujemy:

$$\hat{Y} = j\omega C_0 \left[\frac{\dfrac{\omega^2 C_1 C_2 (C_1 + C_2)}{C_0 (G_1 + G_2)^2} + \dfrac{C_1 G_2^2 + C_2 G_1^2}{C_0 (G_1 + G_2)^2}}{1 + \omega^2\tau^2} + \right.$$

$$\left. - j\frac{\dfrac{G_1 G_2}{\omega C_0 (G_1 + G_2)} + \dfrac{\omega (C_1^2 G_2 + C_2^2 G_1)}{C_0 (G_1 + G_2)^2}}{1 + \omega^2\tau^2}\right]. \tag{7}$$

Porównując otrzymane równanie (7) z równaniem (6) mamy:

$$\varepsilon_r' = \frac{\dfrac{\omega^2 C_1 C_2 (C_1 + C_2)}{C_0 (G_1 + G_2)^2} + \dfrac{C_1 G_2^2 + C_2 G_1^2}{C_0 (G_1 + G_2)^2}}{1 + \omega^2\tau^2} = \frac{C_s + C_\infty \omega^2\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2}. \tag{8}$$

Część rzeczywista (ε'_r) zespolonej przenikalności dielektrycznej względnej zmienia się od wartości statycznej ($\omega = 0$):

$$\varepsilon_{rs}' = \frac{C_s}{C_0},$$

gdzie

$$C_s = \frac{C_1 G_2^2 + C_2 G_1^2}{(G_1 + G_2)^2},$$

do wartości optycznej ($\omega = \infty$):

$$\varepsilon'_{r\infty} = \frac{C_\infty}{C_0},$$

gdzie

$$C_\infty = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2},$$

czyli

$$\varepsilon'_r = \frac{\varepsilon'_{rs} + \varepsilon'_{r\infty}\omega^2\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2} = \varepsilon'_{r\infty} + \frac{\varepsilon'_{rs} - \varepsilon'_{rs}}{1 + \omega^2\tau^2}. \tag{9}$$

W dielektryku warstwowym wartość „optyczna" składowej ε'_r ustala się praktycznie już przy częstotliwościach akustycznych, a więc przy stosunkowo niewielkiej wartości ω.

Dla zewnętrznego obserwatora nasz dielektryk warstwowy jest dielektrykiem (traktując go jako całość) o przenikalności dielektrycznej względnej równej ε'_r.

Podobnie część urojona zespolonej przenikalności dielektrycznej względnej, czyli inaczej współczynnik rozpraszania energii, jest:

$$\varepsilon''_r = \frac{\dfrac{G_1 G_2}{\omega C_0 (G_1 + G_2)} + \dfrac{\omega (C_1^2 G_2 + C_2^2 G_1)}{C_0 (G_1 + G_2)^2}}{1 + \omega^2\tau^2} =$$

$$= \frac{G_1 G_2}{\omega C_0 (G_1 + G_2)} + \frac{\dfrac{(C_1^2 G_2 + C_2^2 G_1)\omega\tau}{C_0 (G_1 + G_2)^2 \tau} - \dfrac{G_1 G_2}{\omega C_0 (G_1 + G_2)}\omega^2\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2} =$$

$$= \frac{G_s}{\omega C_0} + \frac{\dfrac{G_\infty}{\omega C_0}\omega^2\tau^2 - \dfrac{G_s}{\omega C_0}\omega^2\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2} = \frac{G_s + G_\infty \omega^2\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2}, \tag{10}$$

gdzie wartości G_s oraz G_∞ są identyczne z przyjętymi już uprzednio i odpowiadają odpowiednio wartościom przewodności elektrycznej przy $\omega = 0$ oraz $\omega = \infty$. Wprowadzając do równania (10) wielkości ε'_{rs} i $\varepsilon'_{r\infty}$ oraz zastępując wyrażenie $\dfrac{G_s}{\omega C_0}$ przez $\dfrac{\gamma}{\omega\varepsilon_0} = \dfrac{\gamma^s/l}{\omega^{\varepsilon_0 S}/l} = \dfrac{G_s}{\omega C_0}$, gdzie γ jest wy-

padkową statyczną przewodnością elektryczną dwuwarstwowego dielektryka, otrzymamy

$$\varepsilon_r'' = \frac{\gamma}{\omega\varepsilon_0} + \frac{(\varepsilon_{rs}' - \varepsilon_{r\infty}')\,\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}. \tag{11}$$

Wyrażenie na współczynnik rozpraszania energii ε_r'' składa się z dwu części, jednej — związanej ze zjawiskiem absorbcji dielektrycznej, oraz drugiej — związanej z przewodnością elektryczną dielektryka.

Wyrażenia na ε_r' oraz ε_r'' (z pominięciem części związanej z przewodnością elektryczną) formalnie są identyczne z odpowiednimi wyrażeniami wyprowadzonymi przez Debye'a w jego teorii polaryzacji dipolowej.

Z wyprowadzonych powyżej rozważań możemy równocześnie stwierdzić, że: $(C_s - C_\infty) = (G_\infty - G_s)\,\tau$, czyli $\tau = \dfrac{C_s - C_\infty}{G_\infty - G_s}$, czego niewątpliwie należało się spodziewać (także $\tau = \dfrac{C_1 + C_2}{G_1 + G_2}$). Zespolona przenikalność dielektryczna naszego układu jest wobec tego równa:

$$\hat{\varepsilon}_r = \left(\varepsilon_{r\infty}' + \frac{\varepsilon_{rs}' - \varepsilon_{r\infty}'}{1+\omega^2\tau^2}\right) - j\left[\frac{(\varepsilon_{rs}' - \varepsilon_{r\infty}')\,\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2} + \frac{\gamma}{\omega\varepsilon_0}\right] =$$

$$= \varepsilon_{r\infty}' + \frac{\varepsilon_{rs}' - \varepsilon_{r\infty}'}{1+j\omega\tau} - j\frac{\gamma}{\omega\varepsilon_0}. \tag{12}$$

Wypadkowa przewodność pozorna układu według rys. 2 jest ostatecznie równa:

$$\hat{Y} = j\omega\hat{\varepsilon}_r C_0 = G_s + j\omega C_\infty + j\omega\frac{C_s - C_\infty}{1+j\omega\tau} = \hat{Y}_1' + \hat{Y}_2' + \hat{Y}_3'. \tag{13}$$

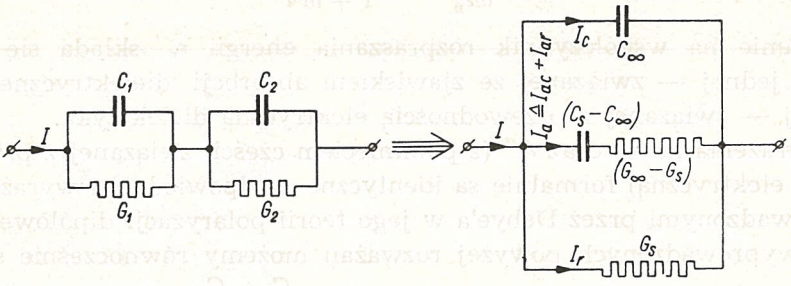
Przewodność $\hat{Y}'_3$ można przekształcić następująco:

$$Y_3' = j\omega\frac{C_s - C_\infty}{1+j\omega\tau} = \frac{1}{\dfrac{1}{G_\infty - G_s} - j\dfrac{1}{\omega(C_s - C_\infty)}},$$

a więc przewodność $\hat{Y}_3'$ składa się z dwóch oporności: $\dfrac{1}{G_\infty - G_s}$ oraz $\dfrac{1}{\omega(C_s - C_\infty)}$ połączonych szeregowo. W ten sposób schemat zastępczy (rys. 2) rozpatrywanego dielektryka dwuwarstwowego przekształca się w schemat zastępczy podany na rys. 7.

Wyrażenie (13) możemy napisać w postaci: $\hat{Y} = G_s + j\omega C_\infty + \dfrac{j\omega a C_\infty}{1+j\omega\tau}$, która pozwala wyznaczyć współczynnik $a = \dfrac{C_s - C_\infty}{C_\infty}$, będący miarą zmia-

ny pojemności układu w funkcji częstotliwości. Zjawisko zmniejszania się pojemności ze wzrostem częstotliwości w dielektrykach, w których występuje polaryzacja dielektryczna (warstwowa i inne) lub zjawisko zmniej-



Rys. 7. Przekształcony schemat zastępczy dielektryka dwuwarstwowego

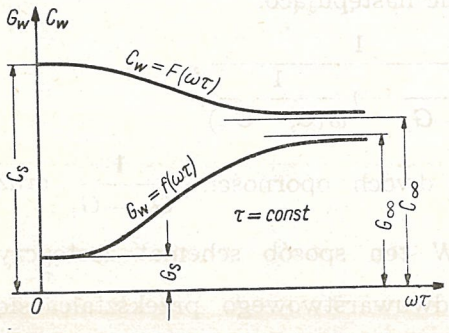
szania się wielkości ε', nosi nazwę d y s p e r s j i d i e l e k t r y c z n e j. Współczynnik a może być przedstawiony także w postaci:

$$a = \frac{\varepsilon'_{rs} - \varepsilon'_{r\infty}}{\varepsilon'_{r\infty}}.$$

Wyrażeniu (13) można także nadać postać:

$$\hat{Y} = \left[G_s + \frac{(G_\infty - G_s)\omega^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}\right] + j\omega\left[C_\infty + \frac{(C_s - C_\infty)}{1+\omega^2\tau^2}\right] = G_w + j\omega C_w, \quad (14)$$

gdzie $G_w = \frac{G_s + G_\infty\omega^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}$ oraz $C_w = \frac{C_s + C_\infty\omega^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}$ określa się odpowiednio jako przewodność względnie pojemność wypadkową układu. Zmienność przewodności i pojemności wypadkowych rozpatrywanego układu w funkcji częstotliwości (lub w funkcji $\omega\tau$ przy $\tau = \text{const}$) podaje rys. 8.



Rys. 8. Zmienność przewodności i pojemności wypadkowych dielektryka warstwowego w funkcji częstotliwości

Zmienność pojemności wypadkowej w funkcji częstotliwości dielektryków warstwowych, niejednorodnych, wykorzystuje się do pomiarów zawilgocenia izolacji elektrycznej (zob. np. Sorokiewicz — Pomiar zawilgocenia izolacji elektrycznej metodą dwu różnych częstotliwości. Zeszyty Naukowe Pol. Wrocł. Nr 3 — Elek-

tryka II — 1954). Przenikalność dielektryczna wypadkowa (pojemność wypadkowa) jest funkcją częstotliwości i stałej czasowej, gdyż

$$\varepsilon_r' = \varepsilon_\infty' + \frac{\varepsilon_{rs}' - \varepsilon_{r\infty}'}{1+\omega^2\tau^2} \left(\text{lub } C_w = C_\infty + \frac{C_s - C_\infty}{1+\omega^2\tau^2}\right).$$

Izolacja w stanie suchym jest bardziej jednorodna, ponieważ przewodności poszczególnych warstw są bardzo małe. Zawilgocone części izolacji (np. papier w dielektryku warstwowym) mają zwiększoną przewodność (10 do 100 razy) wskutek rozpuszczania się w wodzie resztek kwasów i zasad, lecz równocześnie pojemność tych warstw także rośnie wskutek dużej przenikalności dielektrycznej wody. W efekcie stała czasowa układu $\tau = \frac{C_1 + C_2}{G_1 + G_2}$ praktycznie nie zmienia się.

Pomiar pojemności C_w wykonuje się przy dwóch częstotliwościach, np. 2 Hz oraz 50 Hz i ze stosunku $\frac{C_w(2\text{Hz})}{C_w(50\text{Hz})}$ przy stałej temperaturze sądzi się o stopniu zawilgocenia izolacji. Im izolacja jest bardziej zawilgocona, tym stosunek ten jest większy (dla izolacji wysuszonej nie powinien przekraczać wartości 1,04).

Metoda powyższa daje dobre wyniki w przypadkach izolacji, którą w stanie wysuszonym można uważać praktycznie za jednorodną (np. papier nasycony olejem transformatorowym, zaimpregnowana tkanina lub preszpan itp.). Jeżeli izolacja jest bardzo niejednorodna również w stanie suchym (np. izolacja klasy B maszyn elektrycznych), to metoda pojemnościowa nie jest skuteczna.

Prąd wypadkowy płynący przez rozpatrywany układ, rozłożony na wszystkie składowe (patrz rys. 7), otrzymujemy bezpośrednio z równania (14):

$$\hat{I} = \hat{Y}\hat{U} = \left[G_s + \frac{(G_\infty - G_s)\omega^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}\right]\hat{U} + j\omega\left[C_\infty + \frac{(C_s - C_\infty)}{1+\omega^2\tau^2}\right]\hat{U}, \qquad (15)$$

czyli

$$\hat{I} = \hat{I}_r + \hat{I}_{ar} + \hat{I}_c + \hat{I}_{ac},$$

gdzie:

$\hat{I}_r = G_s\hat{U}$ jest prądem przewodzenia,

$\hat{I}_c = j\omega C_\infty \hat{U}$ jest prądem ładowania,

$\hat{I}_a = \hat{I}_{ar} + \hat{I}_{ac} = j\omega \frac{(C_s - C_\infty)}{1+j\omega\tau}\hat{U}$ jest prądem absorbcyjnym, posiadającym składowe czynną i bierną:

$$\hat{I}_{ar} = \frac{(G - G_s)\omega^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}\hat{U}$$

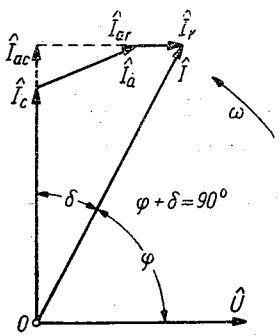
oraz

$$\hat{I}_{ac} + j\omega \frac{C_s - C_\infty}{1 + \omega^2\tau^2}\hat{U}.$$

Prąd absorbcyjny nie popłynie, gdy $C_\infty = C_s$, to jest gdy $\frac{C_1}{C_2} = \frac{G_1}{G_2}$, a także gdy $\omega = 0$.

Wykres wskazowy prądów składowych podaje rys. 9.

Dla stanu przejściowego równanie prądu płynącego przez rozpatrywany układ można między innymi otrzymać posługując się wyrażeniem (13), podstawiając $j\omega \equiv \frac{d}{dt}$ i mnożąc całe wyrażenie przez $U_t = \sqrt{2}Ue^{j(\omega t + \Psi)}$. Otrzymujemy wtedy:



Rys. 9. Wykres wskazowy składowych prądu płynącego przez dielektryk warstwowy

$$\frac{dI_t}{dt} + \frac{1}{\tau}I_t = C_\infty \frac{d^2U_t}{dt^2} + \left(G_s + \frac{1}{\tau}C_s\right)\frac{dU_t}{dt} + \frac{1}{\tau}G_sU_t.$$

W szczególnym przypadku, gdy $U_t = U = \text{const}$, równanie (16) przyjmuje postać równania (4), jeśli $I_{(t=0)} = G_\infty U$.

W ewentualnych dalszych rozważaniach raczej bardziej interesujące byłoby równanie różniczkowe tylko prądu absorbcyjnego niż równanie (16) prądu całkowitego. Równanie różniczkowe prądu absorbcyjnego ma postać:

$$\frac{dI_t}{dt} + \frac{1}{\tau}I_t = \frac{C_s - C_\infty}{\tau} \cdot \frac{dU_t}{dt},$$

gdzie $\tau = \frac{C_s - C_\infty}{G_\infty - G_s}$.

Równanie to pozwoli nam później wyjaśnić stronę fizykalną zmienności tg δ_2 w funkcji częstotliwości.

Strata mocy w naszym układzie

$$\Delta P = U^2\left[G_s \frac{(G_\infty - G_s)\omega^2\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2}\right] = U^2\left[G_s + \frac{\omega(C_s - C_\infty)\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}\right]$$

może być dużo większa (praktycznie nawet 100-krotnie) od obliczonej tylko z ustalonego stałego prądu upływu i równej U^2G_s.

Współczynnik stratności dielektrycznej $\operatorname{tg}\delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$, najprościej można określić z równania (14):

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{G_s + G_\infty \omega^2\tau^2}{\omega(C_s + C_\infty \omega^2\tau^2)}.$$

Przy założeniu, że G_s, G_∞, C_s oraz C_∞ nie zależą od częstotliwości, widzimy, że gdy:

$$\omega = 0, \text{ to } \operatorname{tg}\delta = \infty\,(\delta = 90°),$$

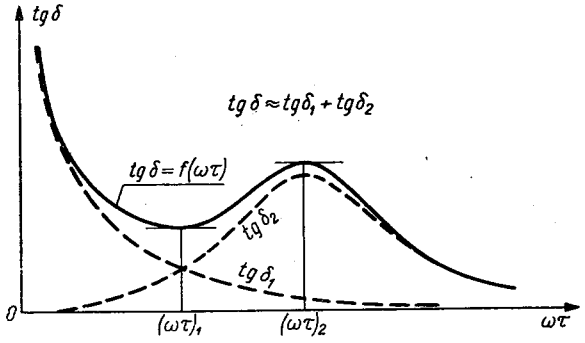
$$\omega = \infty, \text{ to } \operatorname{tg}\delta = 0\,(\delta = 0°);$$

poza tym w granicach $0 < \omega < \infty$ współczynnik stratności dielektrycznej ma jedno minimum i jedno maksimum występujące przy:

$$(\omega\tau)_{1,2} = \sqrt{\frac{(C_sG_\infty - 3C_\infty G_s) \pm \sqrt{(C_sG_\infty - 3C_\infty G_s)^2 - 4G_sG_\infty C_sC_\infty}}{2G_\infty C_\infty}}.$$

Zmienność współczynnika stratności dielektrycznej w funkcji częstotliwości (lub w funkcji $\omega\tau$ przy $\tau = \text{const}$) przedstawia rys. 10.

Wartość $\operatorname{tg}\delta_1 = \frac{G_s}{\omega C_\infty}$ (przy pominięciu gałęzi z prądem absorbcyjnym według rys. 7) maleje z częstotliwością, gdyż jest związana z przewodno-



Rys. 10. Zmienność $\operatorname{tg}\delta = f(\omega\tau)$ dielektryka warstwowego przy stałej temperaturze, to jest przy $\tau = \text{const}$

ścią rzeczywistą (przede wszystkim jonową) dielektryka warstwowego.

Wartość $\operatorname{tg}\delta_2 = \frac{(C_s - C_\infty)\omega\tau}{C_s + C_\infty\omega^2\tau^2}$ (przy pominięciu gałęzi z prądem przewodzenia wg rys. 7) ze wzrostem częstotliwości przechodzi przez maksimum, które występuje przy $\omega\tau = \sqrt{\frac{C_s}{C_\infty}}$ lub przy $\frac{1}{2}T = \pi\sqrt{\frac{C_\infty}{C_s}}\tau$, a więc wówczas, gdy półokres drgań napięcia równa się w przybliżeniu (bo $C_\infty <$

$< C_s$ zawsze) stałej czasowej układu. Przy $\omega\tau = \sqrt{\frac{C_s}{C_\infty}}$ półokres drgań napięcia jest jeszcze nieco większy niż τ i pojemność $C_{dod} = C_s - C_\infty$ zdąży się naładować w ciągu półokresu i stąd straty są największe. Przy $\omega\tau > \sqrt{\frac{C_s}{C_\infty}}$ pojemność C_{dod} nie zdąży się naładować, straty w ciągu półokresu są małe, a $\mathrm{tg}\delta_2$ maleje na skutek wzrostu prądu pojemnościowego ze wzrostem częstotliwości. Przy $\omega\tau < \sqrt{\frac{C_s}{C_\infty}}$ straty i $\mathrm{tg}\delta_2$ maleją z powodu małej liczby ładowań i wyładowań w ciągu jednej sekundy, zwiększenie zaś czasu trwania jednego ładowania i wyładowania nie kompensuje tego zmniejszenia.

Otrzymany przebieg krzywej $\mathrm{tg}\delta = f(\omega\tau)$ wyraźnie wskazuje na to, że pomiary $\mathrm{tg}\delta$ różnych niejednorodnych materiałów warstwowych mogą być ze sobą porównywane tylko w przypadku wykonywania pomiarów przy tej samej częstotliwości oraz oczywiście i innych identycznych parametrach pomiarowych. Pomiary przy $f = 1000$ Hz, często wykonywane zamiast pomiarów przy $f = 50$ Hz, nie powinny być uważane za wystarczająco miarodajne — szczególnie przy badaniu materiałów zawilgoconych.

4. DYSPERSJA DIELEKTRYCZNA — UOGÓLNIENIE PRZYJĘTYCH ZAŁOŻEŃ

Wyjaśnienie zjawiska dyspersji dielektrycznej, to jest zmiany wartości przenikalności dielektrycznej (ε'_r) od wartości statycznej (ε'_{rs}) do wartości optycznej ($\varepsilon'_{r\infty}$) lub zmiany pojemności wypadkowej od C_s do C_∞ w funkcji częstotliwości, dla rozpatrywanego przypadku jest następujące:

Z punktu widzenia molekularnego optyczna stała dielektryczna dwuwarstwowego dielektryka

$$\varepsilon'_{r\infty} = \frac{C_\infty}{C_0} = \frac{C_1 C_2}{C_0(C_1 + C_2)} = \frac{\frac{l}{\varepsilon_0}}{\frac{l_1}{\varepsilon'_1} + \frac{l_2}{\varepsilon'_2}}$$

jest określona przez rzeczywiste, statyczne (praktycznie niezależne od częstotliwości nas interesujących) przenikalności obu warstw (ε'_1, ε'_2), wynikające z polaryzacji elektronowej, atomowej i dipolowej, zachodzących w czasach rzędu $10^{-16} \div 10^{-10}$ sec, to jest w bardzo małej części okresu częstotliwości przemysłowych.

Statyczna przenikalność dielektryczna względna dwuwarstwowego dielektryka

$$\varepsilon'_{rs} = \frac{C_s}{C_0} = \frac{C_\infty}{C_0}\left(1 + \frac{C_s - C_\infty}{C_\infty}\right) = \frac{C_\infty}{C_0}\left[1 + \frac{(C_1G_2 - C_2G_1)^2}{C_1C_2(G_1 + G_2)^2}\right],$$

czyli

$$\varepsilon'_{rs} = \varepsilon'_{r\infty}\left[1 + l_1 l_2 \frac{\left(\frac{1}{\gamma_1}\sqrt{\frac{\varepsilon'_1}{\varepsilon'_2}} - \frac{1}{\gamma_2}\sqrt{\frac{\varepsilon'_2}{\varepsilon'_1}}\right)^2}{\left(\frac{l_1}{\gamma_1} + \frac{l_2}{\gamma_2}\right)^2}\right]$$

jest większa niż optyczna, ponieważ warstwy pierwsza i druga zawierają ruchome nośniki ładunków elektrycznych o gęstości N_1 i N_2 [m^{-3}] przenoszące ładunki q_1 i q_2 z ruchliwością b_1 i b_2.

W związku z tymi przewodnościami:

$$\gamma_1 = N_1 q_1 b_1 \quad \text{i} \quad \gamma_2 = N_2 q_2 b_2,$$

ładunki gromadzą się na styku obu warstw tak długo, dopóki nie ustali się statyczny przepływ prądu w wyniku statycznej przewodności:

$$\gamma = \frac{l}{\frac{l_1}{\gamma_1} + \frac{l_2}{\gamma_2}}.$$

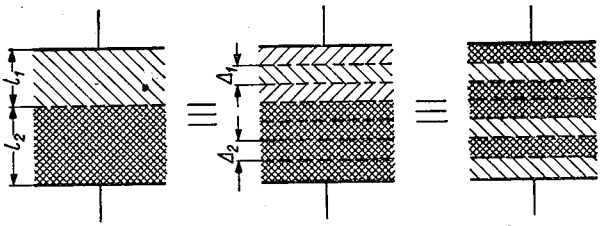
Ze wzrostem częstotliwości polaryzacja warstwowa zanika, wypadkowa przenikalność dielektryczna $\varepsilon'_r = f(\omega)$ osiąga wartość równą

$\frac{\varepsilon'_{rs} + \varepsilon'_{r\infty}}{2}$ przy $\omega = \frac{1}{\tau}$.

Stałą czasową τ można także napisać analogicznie do powyższych równań następująco:

$$\tau = \frac{C_1 + C_2}{G_1 + G_2} = \frac{C_s - C_\infty}{G_\infty - G_s} = \frac{\varepsilon'_1\varepsilon'_2}{\gamma_1\gamma_2} \cdot \frac{\frac{l_1}{\varepsilon'_1} + \frac{l_2}{\varepsilon'_2}}{\frac{l_1}{\gamma_1} + \frac{l_2}{\gamma_2}} = \frac{\varepsilon'_1\varepsilon'_2}{\gamma_1\gamma_2} \cdot \frac{\gamma}{\varepsilon'_\infty}; \quad \varepsilon'_\infty = \varepsilon'_{r\infty}\varepsilon_0.$$

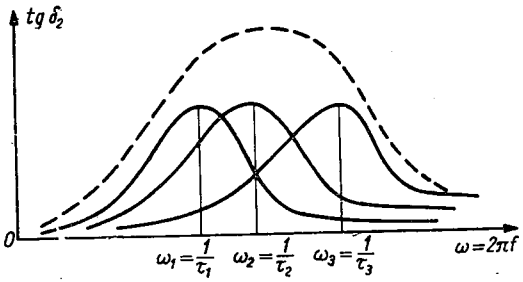
Jeżeli każdą warstwę „1" oraz „2" dielektryka dwuwarstwowego podzielimy odpowiednio na n_1 oraz n_2 różnych podwarstw o grubościach Δ_1 oraz Δ_2, to w naszych dotychczasowych rozważaniach nic nie ulegnie zmianie. W otrzymanych równaniach zastąpimy tylko l_1 oraz l_2 odpowiednio przez $n_1\Delta_1$ oraz $n_2\Delta_2$. Możemy następnie (rys. 11) wymieszać podwarstwy „1" i „2" w dowolny sposób. Ponieważ wypadkowa oporność (wzgl. przewodność) pozorna dielektryka przy tym wymieszaniu nie ulegnie zmianie, więc i wszystkie dotychczas wyprowadzone zależności (szczególnie równanie dla $\hat{\varepsilon}_r$) pozostaną nadal słuszne.



Rys. 11. Elektryczna równowartość dwu- i wielowarstwowego kondensatora (względna zawartość i kształt obu materiałów jednakowe we wszystkich przypadkach)

Podział na podwarstwy można by kontynuować aż do grubości molekularnych — uzyskalibyśmy w ten sposób przejście od polaryzacji warstwowej do polaryzacji atomowej pod warunkiem, że ta ostatnia podlega tylko zjawisku relaksacji, a nie zjawisku rezonansu.

Jeśli zamiast dwuwarstwowego kondensatora rozpatrzymy kondensator złożony z $(n+1)$ warstw o różnych przewodnościach elektrycznych (γ)



Rys. 12. Współczynnik stratności dielektrycznej $\mathrm{tg}\delta_2 = f(\omega)$ dielektryka wielowarstwowego o różnych przewodnościach elektrycznych γ oraz o różnych przenikalnościach dielektrycznych ε'

i różnych przenikalnościach dielektrycznych (ε'), to stwierdzimy, że taki kondensator będzie miał n stałych czasowych. Otrzymamy więc bardzo szerokie (rys. 12) maksimum współczynnika stratności dielektrycznej w funkcji częstotliwości.

5. WPŁYW TEMPERATURY ORAZ NATĘŻENIA POLA ELEKTRYCZNEGO

Przewodność elektryczna materiału izolacyjnego (przewodność jonowa) spowodowana jest w istocie rzeczy przez zawarte w nim obce składniki oraz wady samego materiału. W pierwszym przypadku przewodność materiału spowodowana jest przez zanieczyszczenia o charakterze elektro-

litu. Wykazuje on zwykle stan nasycenia, choć podwyższona temperatura wpływa korzystnie na wzrost przewodności. Przewodność ta z drugiej strony jest prawie niezależna od natężenia pola elektrycznego.

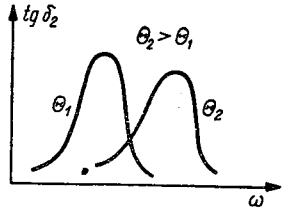
Druga część przewodności materiału pochodzi od błędów siatki przestrzennej oraz od spontanicznie powstającej jonizacji i zależy w bardzo znacznym stopniu od natężenia pola elektrycznego.

Wzór na przewodność elektryczną, uwzględniający wpływ obu czynników, ma na ogół postać:

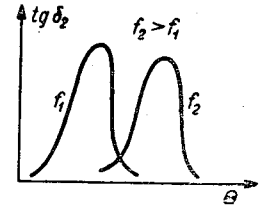
$$\gamma = \gamma_0 e^{\left(a, \Theta - \frac{b}{K}\right)},$$

choć można go napisać również i w postaci szeregu innych zależności (tutaj a oraz b są stałymi określającymi materiał dla pewnych zakresów temperatury Θ i natężenia pola elektrycznego K). W interesujących nas zakresach temperatur i natężeń pola elektrycznego — przewodność materiału izolacyjnego rośnie.

Wpływ wzrastającej temperatury na polaryzację warstwową (również na polaryzację dipolową) polega na osłabieniu sił przeciwstawiających się ruchowi nośników ładunków elektrycznych i przez to zwiększa częstotli-



Rys. 13. Zależność $tg\delta_2 = f(\omega)$ przy różnych temperaturach



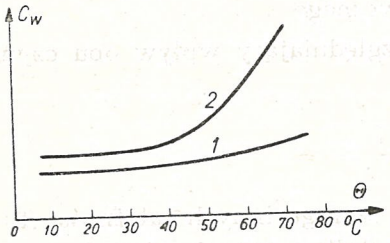
Rys. 14. Zależność $tg\delta_2 = f(\Theta)$ przy różnych częstotliwościach

wość (bo maleje stała czasowa układu), przy której występuje maksimum $tg\delta_2$, nie zmieniając praktycznie wartości ε'_r oraz $tg\delta$.

Zależność pojemności wypadkowej oraz $tg\delta$ o dtemperatury, wpływającej na wartość stałej czasowej τ, jest taka sama jak zależność od częstotliwości, gdyż do wzorów na C_w oraz $tg\delta$ wchodzi iloczyn $\omega\tau$. Wskutek tego przy wzroście częstotliwości maksimum $tg\delta$ w zależności od temperatury przesuwa się w stronę większych temperatur, zaś maksimum $tg\delta$ w zależności od częstotliwości przy wzroście temperatury przesuwa się w stronę większych częstotliwości (rys. 13 i 14).

Zmienność pojemności wypadkowej w funkcji temperatury można również wykorzystać do oceny stopnia zawilgocenia izolacji (rys. 15).

Wzrost temperatury zwiększa rozpuszczalność resztek kwasu i zasad w wodzie i różnica w przewodnościach elektrycznych przy różnych temperaturach występuje bardzo wyraźnie. Przy zwiększeniu temperatury stała czasowa wyraźnie maleje, a pojemność wypadkowa rośnie: $C_w \approx C_s$, zaś przy niskiej temperaturze stała czasowa jest duża i $C_w \approx C_\infty$.



Rys. 15. Przebieg zależności pojemności dielektryka warstwowego od temperatury dla izolacji suchej (1) i wilgotnej (2)

Zmiana różnicy $C_s - C_\infty$ (względnie $\varepsilon'_{rs} - \varepsilon'_{r\infty}$) w czasie eksploatacji materiału izolacyjnego może służyć za jedno z kryteriów oceny stopnia pogorszenia się izolacji. Obniżenie dobroci izolacji jest najczęściej powodowane zawilgoceniem oraz tworzeniem się porów, ułatwiających dostęp wilgoci. Dodatkowa wilgoć zwiększa różnicę $C_s - C_\infty$ w związku z dużą przenikalnością dielektryczną wody i dodatkowymi wolnymi jonami. Wzrasta również najczęściej częstotliwość, przy której występuje maksimum $\mathrm{tg}\delta_2$.

Pory powodują czynniki chemiczne i mechaniczne. Pory umożliwiają powstanie jonizacji między powierzchniami ograniczającymi. Intensywna jonizacja na tych powierzchniach wywołuje ich zwęglenie i utlenienie i w rezultacie wzrost różnicy $C_s - C_\infty$.

Wpływ wzrostu natężenia pola elektrycznego (zwiększenie przyłożonego napięcia) na polaryzację warstwową polega na jej wzmożeniu z powodu wzrostu liczby wolnych jonów i elektronów. Zwiększa to ogólnie mówiąc $\mathrm{tg}\delta$ oraz zmniejsza oporność izolacji mierzoną przy prądzie stałym. A więc i tutaj ze zmiany różnicy $C_s - C_\infty$ w czasie można sądzić o możliwości zmniejszenia się wytrzymałości dielektrycznej izolacji.

Jakiekolwiek obniżenie wytrzymałości dielektrycznej dielektryka może więc być wykryte przez pomiar zmian w polaryzacji warstwowej zachodzących w czasie. Pomiary takie najprościej wykonuje się przy prądzie stałym. Z krzywych zmian prądu i oporności w funkcji czasu (rys. 4 i 5) można odczytać G_s, G_∞ oraz τ i następnie obliczyć: $C_s - C_\infty = (G_\infty - G_s)\tau$.

6. ZAKOŃCZENIE

Znajomość zagadnień związanych ze zjawiskiem polaryzacji warstwowej jest podstawą opracowania profilaktycznych badań izolacji wysokonapięciowej. Badania profilaktyczne pozwalają pośrednio oszacować zmianę wartości wytrzymałości dielektrycznej izolacji w czasie. Badania te polegają między innymi na pomiarze współczynnika stratności dielektrycznej,

pojemności, prądu absorbcyjnego, oporności izolacji w funkcji napięcia, temperatury, czasu itp. Na podstawie przeprowadzonych pomiarów wyciąga się wnioski o stopniu zestarzenia się izolacji, jej zawilgoceniu, zanieczyszczeniach oraz uszkodzeniach izolacji. Większość takich wniosków została szczegółowo omówiona powyżej na tle zjawiska i zmian zachodzących w polaryzacji warstwowej.

Politechnika Śląska
Katedra Maszyn Elektrycznych

WYKAZ LITERATURY

1. Böning P.: Elektrotechnische Isolierstoffe. Braunschweig 1938.
2. Debye P.: Polar Molecules. New York 1945.
3. Field R. F.: The Basic for the Nondestructive Testing of Insulation.-Trans. AIEE, vol. 60, 1941.
4. Gemant A.: Elektrophysik der Isolierstoffe. Berlin 1931.
5. Heller B., Veverka A.: Elektrická Pevnost. Praha 1957.
6. Hippel A. R.: Dielectric and Waves. New York 1954.
7. Sillars R. W.: The Properties of a Dielectric Containing Semiconducting Particles of Various Shapes. — Journ. IEE, vol. 80, 1937.
8. Sirotinskij L. I.: Tiechnika wysokich napriażenij, cz. II. Moskwa 1953.
9. Skanawi G. I.: Fizika dielektrikow. Moskwa 1958.
10. Wagner K. W.: Die Isolierstoffe der Elektrotechnik. Berlin 1924.

М. ПЛЮЦИНЬСКИ

МНОГОСЛОЙНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ — ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАКЛЮЧЕНИЯ

Резюме

В работе описаны теоретические и физические основы явления структурной поляризации в многослойных материалах при постоянном и переменном токах. Математический анализ явления относится к простой модели двухслойного диэлектрика. В дальнейшем этот анализ обобщён для многослойного диэлектрика. Автор указывает на практические возможности использования теоретических и физических толкований проблемы для неразрушающих испытаний и оценки состояния изоляции трансформаторов и высоковольтных машин.

M. PLUCIŃSKI

LA POLARISATION INTERFACIALE BASES THÉORIQUES — CONCLUSIONS PRATIQUES

Résumé

L'article s'occupe avec les relations fondamentales, théoriques et physiques de la polarisation interfaciale des isolants. L'analyse mathématique est basée sur un modèle simple d'un diélectrique à deux couches. Les relations sont généralisées pour les isolants à couches multiples. L'auteur demontre la possibilité d'une application pratique de la théorie pour les essais non-destructifs et pour l'évaluation de l'état des isolants des transformateurs et machines à haute tension.

621.318.322:621.3.083

MACIEJ NAŁĘCZ, BARBARA OSUCHOWSKA

Metoda ferrometryczna badania własności materiałów magnetycznych

Rękopis dostarczono 11.8.1958

W artykule podano podstawy teoretyczne pomiaru własności materiałów magnetycznych metodą ferrometryczną. Omówiono niektóre układy ferrometrów. Praca została zilustrowana wynikami pomiarów przeprowadzonych w Zakładzie Elektrotechniki PAN.

1. WSTĘP

Artykuł ten ma na celu bliższe zapoznanie czytelnika z ferrometryczną metodą pomiaru własności magnetycznych ferromagnetyków; w literaturze krajowej są na ten temat jedynie fragmentaryczne wzmianki.

Metoda ferrometryczna, stosowana przy prądzie zmiennym, pozwala określić typowe parametry magnetyczne badanego materiału (zazwyczaj małej próbki pierścieniowej lub pasków z arkusza blachy, ujętych w specjalnym jarzmie), stwarzając mu przy pomiarze takie warunki, w jakich normalnie pracuje.

Pierwsze wzmianki o metodzie ferrometrycznej znajdujemy w szeregu prac W. Thala [25], [26], [27], [28], [29], [30] z lat 1934—35.

W. Thal oraz L. Triau [31] podają układ do pomiaru tą metodą oraz opis pierwszej konstrukcji ferrometru dynamicznego firmy Siemens-Halske [21], [22]. Wiele innych prac podkreśla zalety tej metody; coraz szersze staje się jej zastosowanie. Szereg autorów opisuje układy stwarzające obecnie duże możliwości pomiarowe [5], [7], [8], [9], [11], [17], [18], [19], [20].

W artykule podano podstawy teoretyczne metody ferrometrycznej, jak również zilustrowano je w części drugiej wynikami pomiarów.

2. ZASADA POMIARU

2.1. Określenie wartości chwilowych funkcji okresowej na podstawie jej wartości średniej

Zasada pomiaru metodą ferrometryczną polega na tym, że na podstawie wskazań miernika wartości średniej wnioskujemy o wartości chwilowej mierzonej indukcji magnetycznej lub natężenia pola magnetycznego.

Indukcję lub natężenie pola magnetycznego możemy przedstawić jako funkcję okresową $y(t)$ w postaci następującej:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot \sin(k\omega t + \alpha_k), \tag{1}$$

gdzie:

A_k — amplituda k-tej harmonicznej,
α_k — kąt przesunięcia fazowego k-tej harmonicznej,
ω — częstotliwość kątowa podstawowej harmonicznej.

Pochodna tej funkcji wynosi:

$$y'(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot k\omega \cdot \cos(k\omega t + \alpha_k), \tag{2}$$

wartość średnia dla połowy okresu pochodnej

$$(Y')_{śr} = \frac{2}{T} \int_{t}^{t+\frac{T}{2}} y'\,dt = \frac{2}{T} \int_{t}^{t+\frac{T}{2}} \left[\sum_{k=1}^{n} A_k \cdot k\omega \cdot \cos(k\omega t + \alpha_k)\right] dt$$

$$(Y')_{śr} = \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{n} A_k \left[\sin(k\omega t + \alpha_k + k\omega \frac{T}{2} - \sin(k\omega t + \alpha_k)\right] =$$

$$= \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{n} A_k [\sin(k\omega t + \alpha_k) \cos k\pi - \sin(k\omega t + \alpha_k)], \tag{3}$$

gdyż

$$\sin \frac{k\omega T}{2} = \sin k\pi = 0 \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Dla nieparzystych harmonicznych ($k = 1, 3, 5, \ldots$)

$$\cos k\pi = -1$$

i

$$(Y')_{śr} = -\frac{2\omega}{\pi} \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot \sin(k\omega t + \alpha_k) = -\frac{2\omega}{\pi} y(t), \tag{4}$$

a więc

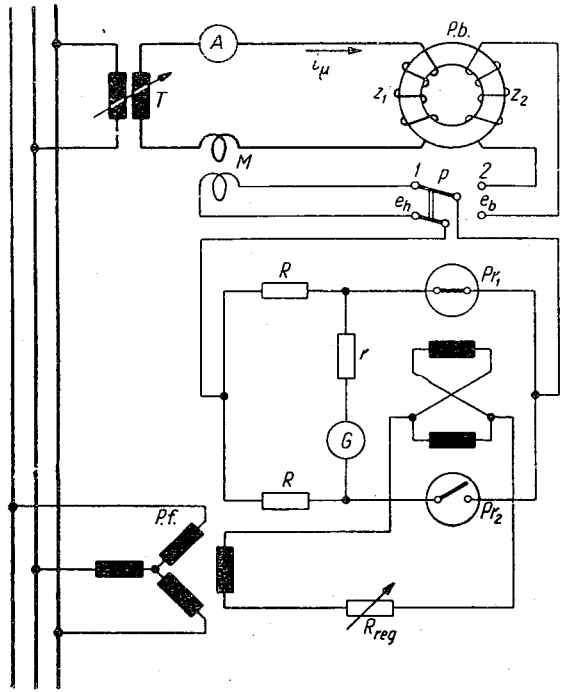
$$y(t) = -\frac{\pi}{2\omega}(Y')_{śr}. \tag{5}$$

Z równania (5) widzimy, że wartość chwilowa badanej funkcji w chwili t jest proporcjonalna do wartości średniej pochodnej tej funkcji wyznaczonej dla przedziału czasu $(t, t + \frac{T}{2})$.

Metoda ta jest słuszna dla przebiegów zawierających jedynie nieparzyste harmoniczne; posługując się nią nie można więc badać próbek z podmagnesowaniem składową stałą.

2.2. Elementy ferrometru

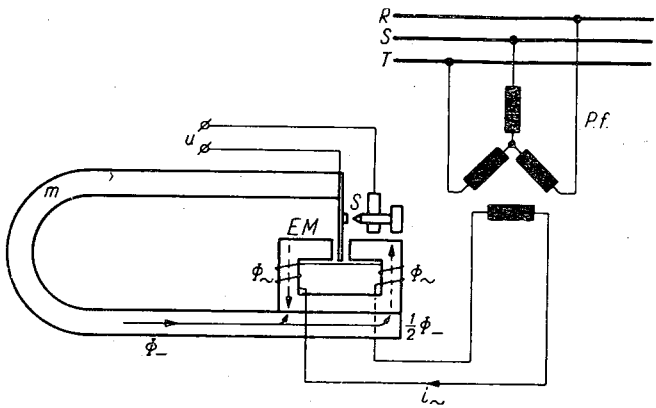
Podstawowy schemat ferrometru przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Podstawowy schemat ferrometru. *P. f.* — przesuwnik fazowy, Pr_1 i Pr_2 — prostowniki mechaniczne, M — indukcyjność wzajemna, T — autotransformator, *P.b.* — badana próbka o uzwojeniach z_1 i z_2, G — miernik, A — amperomierz w obwodzie magnesującym, p — przełącznik

Przesuwnik fazowy. Przesuwnik fazowy *P. f.* pozwala na dowolną regulację kąta fazowego między napięciem źródła prądu zmiennego zasilającego uzwojenie pierwotne próbki a napięciem wzbudzenia prostowników mechanicznych.

Wektoromierz. Wektoromierz składa się z przesuwnika fazowego *P. f.* oraz układu mostkowego złożonego z dwóch prostowników mechanicznych Pr_1 i Pr_2, dwóch oporników R i miernika wartości średniej G. Na rys. 2



Rys. 2. Schemat prostownika mechanicznego

przedstawiono schemat prostownika mechanicznego. Zasada działania polega na oddziaływaniu pola magnetycznego na ruchomą zworę z umieszczonym na niej stykiem s. Z chwilą gdy strumień wypadkowy Φ_w jest większy w prawym nabiegunniku elektromagnesu EM ($\Phi_w = \frac{1}{2}\Phi_- + \Phi_\sim$), nastąpi przyciągnięcie zwory do prawego nabiegunnika, a więc zamknięcie obwodu. W drugiej połowie okresu strumień $\Phi_\sim$ zmienia kierunek; następuje rozwarcie styków.

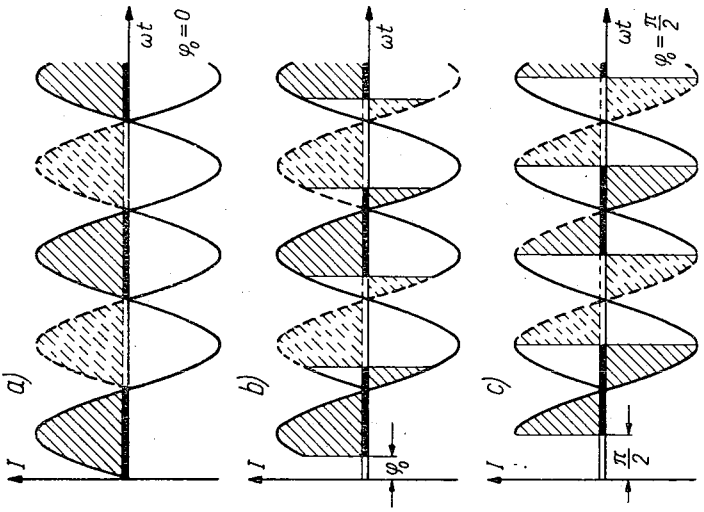
Strumień Φ_- jest wytworzony przez magnes trwały m. Rozgałęzia się on w elektromagnesie na połowy ($\frac{1}{2}\Phi_-$).

Czas pomiędzy zamknięciem i otwarciem styków prostownika mechanicznego, który powinien trwać pół okresu, ulega wahaniom na ogół o ± 5‰. Zwarcie lub rozwarcie styków powoduje włączenie lub wyłączenie napięcia u. Jest ono doprowadzone do układu prostowników mechanicznych z zacisków cewki indukcyjności wzajemnej M lub wtórnego uzwojenia badanej próbki.

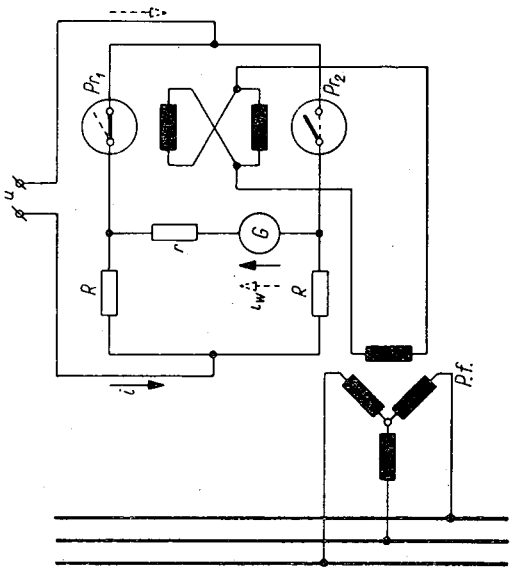
Fazę włączania i wyłączania tego napięcia można regulować przy pomocy przesuwnika fazowego (rys. 2).

W układzie przedstawionym na rys. 1 pracują na przemian dwa prostowniki mechaniczne. Działanie i zasadę ich współpracy wyjaśniają rysunki 3 i 4.

Rozpatrzmy pracę jednego prostownika Pr_1 (rys. 3) przy otwartych stykach prostownika Pr_2. Załóżmy, że w chwili zwarcia styków Pr_1 napię-



Rys. 4. Działanie prostownika mechanicznego przy różnych przesunięciach fazowych φ_0



Rys. 3. Układ współpracy prostowników mechanicznych Pr_1 i Pr_2

cie u miało fazę $\varphi_0 = 0$ (rys. 4a). Przy pominięciu oporności przejścia oraz uwzględnieniu oporności r miernika można napisać

$$i = u \frac{2R + r}{R(r + R)}. \tag{6}$$

Prąd wskazywany przez miernik wynosi wówczas

$$i_w = \frac{u}{r + R}. \tag{7}$$

Załóżmy początkowo, że napięcie u doprowadzone do zacisków wektoromierza ma przebieg sinusoidalny. (Oznaczałoby to, że w danym przypadku wielkość mierzona, np. natężenie pola lub indukcja magnetyczna, ma przebieg cosinusoidalny).

Wartość średnia prądu i_w w pierwszym półokresie wynosi (rys. 4b)

$$I'_{w\,śr} = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\pi} \frac{U_m}{r + R} \sin x \, dx = \frac{2}{\pi(r + R)} U_m \cos \varphi_0. \tag{8}$$

Rozpatrywaliśmy dotąd pracę prostownika mechanicznego Pr_1. Zamkniętym stykom Pr_1 odpowiadają gęsto zakreskowane powierzchnie sinusoid na rys. 4.

W następnym półokresie w chwili rozwarcia styków Pr_1 zaczyna działać prostownik Pr_2. Wartość średnia prądu płynącego przez miernik wynosi dla drugiego półokresu (pola zakreskowane liniami przerywanymi):

$$I''_{w\,śr} = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_0+\pi}^{\varphi_0+2\pi} \frac{U_m}{r + R} \sin x \, dx = -\frac{2}{\pi(r + R)} U_m \cos \varphi_0. \tag{9}$$

W pierwszym półokresie wartość średnia prądu $I'_{wśr}$ płynącego przez miernik jest dodatnia (8), w drugim zaś ujemna (9). Ponieważ w drugim półokresie zamiast styków Pr_1 zamknięte są styki Pr_2, kierunek składowej stałej prądu płynącego przez miernik nie ulega zmianie.

$$I_{w\,śr} = \frac{2}{\pi(r + R)} U_m \cos \varphi_0. \tag{10}$$

W zależności od kąta φ_0 nastawionego na przesuwniku fazowym można otrzymać na mierniku wychylenie maksymalne (rys. 4a), pośrednie (rys. 4b), zerowe (rys. 4c).

Obwód magnetyczny. Obwód magnetyczny składa się z autotransformatora T regulującego prąd w obwodzie magnesującym cewki indukcyjności wzajemnej M, próbki z uzwojeniem z_1 oraz amperomierza A (rys. 1).

Wartość chwilową natężenia pola magnetycznego $h(t)$ w próbce (przełącznik p w położeniu *1*) określamy według wzoru

$$h(t) = \frac{z_1}{l} i_\mu(t), \tag{11}$$

gdzie:

$i_\mu(t)$ — wartość chwilowa prądu magnesującego,
z_1 — liczba pierwotnych zwojów próbki,
l — średnia długość obwodu magnetycznego.

W celu określenia $h(t)$ lub $i_\mu(t)$ należy przeprowadzić następujące operacje:

a. Wyznaczenie pochodnej $\frac{di_\mu}{dt}$

Do tego celu służy cewka indukcyjności wzajemnej M, w której uzwojeniu wtórnym indukuje się siła elektromotoryczna

$$e_h = -M\frac{di_\mu}{dt}. \tag{12}$$

Stąd określamy

$$\frac{di_\mu}{dt} = -\frac{1}{M} e_h = -i_{wh}\frac{r+R}{M}, \tag{13}$$

gdzie i_{wh} — prąd płynący przez miernik,
gdyż (7)

$$e_h = i_{wh}(r+R). \tag{14}$$

b. Wyznaczenie wartości chwilowej prądu $i_\mu(t)$ jako proporcjonalnej do wartości średniej pochodnej $\frac{di_\mu}{dt}$.

Zgodnie z zależnością (5) mamy:

$$i_\mu(t) = \frac{\pi}{2\omega} \cdot \frac{r+R}{M} I_{wh\acute{s}r}. \tag{15}$$

Po uwzględnieniu (11) otrzymujemy

$$h(t) = \frac{\pi(r+R)}{2\omega M} \cdot \frac{z_1}{l} I_{wh\acute{s}r} = c_h \cdot I_{wh\acute{s}r}, \tag{16}$$

gdzie c_h — stała.

Wartość chwilową indukcji magnetycznej $b(t)$ w próbce (przełącznik p w położeniu *2*) określamy z zależności

$$e_b = -z_2\frac{d\Phi}{dt},$$

gdzie:

e_b — siła elektromotoryczna wzbudzona w uzwojeniu wtórnym próbki,

z_2 — liczba wtórnych zwojów próbki,

Φ — strumień magnetyczny w próbce.

Dla określenia $b\,(t)$ lub $\Phi\,(t)$ należy przeprowadzić następujące operacje:

a. Wyznaczenie pochodnej $\frac{d\Phi}{dt}$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{z_2} e_b .$$

b. Wyznaczenie wartości chwilowej strumienia $\Phi(t)$ jako proporcjonalnej do wartości średniej pochodnej $\frac{d\Phi}{dt}$, zgodnie z zależnością (5)

$$\Phi\,(t) = \frac{\pi}{2\omega} \cdot \frac{E_{b_{śr}}}{z_2} . \tag{17}$$

Po uwzględnieniu, że $\Phi(t) = b(t) \cdot s$ (gdzie s — przekrój badanej próbki), oraz zależności (7), otrzymamy ostatecznie

$$E_{b_{śr}} = E_{wb_{śr}} \frac{r+R}{r}, \tag{18}$$

a więc

$$b\,(t) = \frac{\pi}{2\,\omega z_2 s} \cdot \frac{r+R}{r} E_{wb_{śr}} = c_b\, E_{wb_{śr}}, \tag{19}$$

gdzie c_b — stała.

2.3. Wyznaczenie pętli histerezy, strat magnetycznych i krzywej magnesowania badanego materiału

Układ pomiarowy, którego ideowy schemat przedstawiono na rys. 1, pozwala wyznaczyć zgodnie z zależnością (16) i (19) odpowiadające sobie wartości chwilowe natężenia pola $h(t)$ i indukcji magnetycznej $b(t)$ przez bezpośredni pomiar wartości średniej prądu płynącego przez miernik.

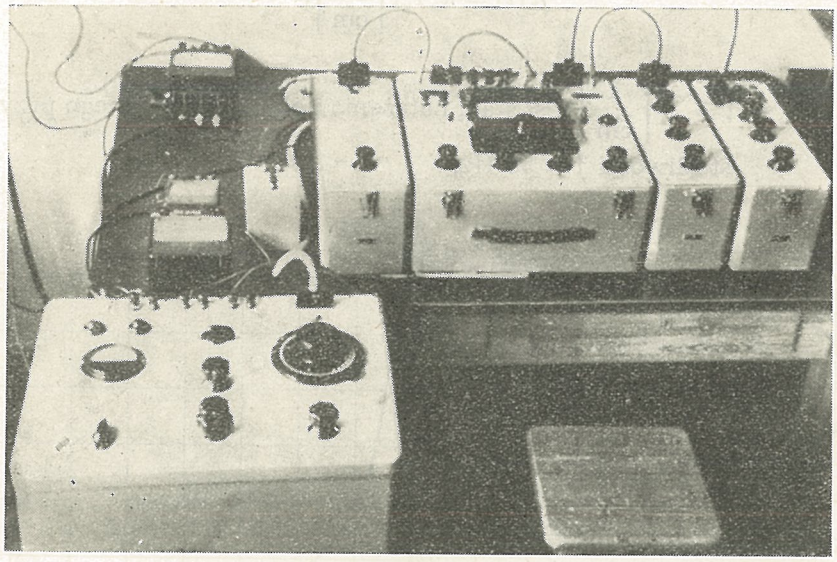
Przeprowadzając pomiary przy różnych położeniach przesuwnika fazowego, a więc dla różnych kątów przesunięcia fazowego napięcia zasilającego uzwojenia wzbudzające prostowników mechanicznych, można otrzymać szereg odpowiadających sobie wartości chwilowych $h(t)$ i $b(t)$. Pozwalają one na wykreślenie pętli histerezy $B = f(H)$ (rys. 9 oraz 10 i 11 — krzywe *1*).

Z pola pętli przy określonej indukcji maksymalnej B_m wyznacza się całkowite straty magnetyczne (na prądy wirowe i histerezę).

Krzywą magnesowania badanego materiału określa się jako miejsce geometryczne wierzchołków szeregu pętli histerezy, zdejmowanych przy różnych indukcjach maksymalnych (rys. 7 oraz tablica 1, kolumna 5 i 6).

3. POMIARY

Podane tu przykładowo pomiary wykonano w Zakładzie Elektrotechniki PAN na nowoczesnym ferrometrze Siemensa (rys. 5) przy częstotliwości technicznej. Przyrząd ten w porównaniu z układem omówionym powyżej jest bardziej skomplikowany i ma szereg dodatkowych urządzeń [7], [8], [9].



Rys. 5. Ferrometr Siemensa

Należą do nich: filtry 50 Hz i 150 Hz, przekładnik kompensacyjny, układ do badania prostowników mechanicznych oraz jarzmo pomiarowe.

Przy pomocy ferrometru Siemensa można badać materiały magnetyczne w postaci uzwojonych próbek pierścieniowych, rdzeni transformatorowych oraz próbek złożonych z prostokątnych pasków blachy umieszczonych w jarzmie.

Pomiary wykonano na mumetalowej próbce pierścieniowej o następujących danych:

wymiary (po uwzględnieniu współczynnika wypełnienia = 0,9)

$h = 2{,}65$ cm,

$d = 1{,}25$ cm,

przekrój $s = h \cdot d = 3{,}32$ cm^2,

średnia długość obwodu magnetycznego $l = 21{,}5$ cm,

ciężar próbki $G = 0{,}5$ kG,
liczby zwojów obu uzwojeń: $z_1 = 57$, $z_2 = 46$.

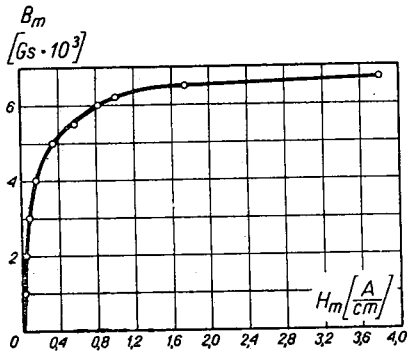
3.1. Zależności podstawowe

W ferrometrze Siemensa tak dobrano elementy obwodów pomiarowych, że zarówno stała natężenia pola magnetycznego, jak i indukcji magnetycznej zależą tylko od parametrów badanej próbki i od częstotliwości [8]. Dlatego też wartość chwilowa natężenia pola

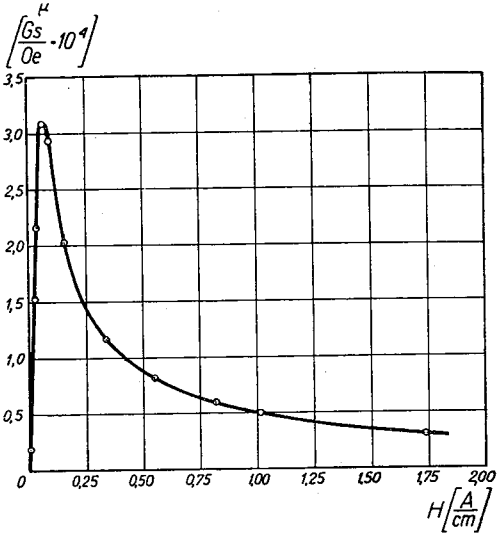
$$h(t) = k_h I_{wh} \left[\frac{\text{A}}{\text{cm}}\right], \tag{20}$$

gdzie:

$k_h = \sqrt{2}\,\frac{z_1}{l}\left[\frac{1}{\text{cm}}\right]$ jest stałą natężenia pola magnetycznego przy częstotliwości $f = 50$ Hz,



Rys. 6. Charakterystyka magnesowania $B_m = f(Hm)$



Rys. 7. Zależność $\mu = f(H)$. Przenikalność maksymalna $\mu_m = 30800$ $\frac{\text{Gs}}{\text{Oe}}$

I_{wh} [A] — wartość skuteczna prądu płynącego przez miernik,
oraz

$$b(t) = k_b E_{wb} \cdot 10^8 \text{ [Gs]}, \tag{21}$$

gdzie:

$k_b = \frac{1}{4{,}44\, z_2 f s}\, 10^8 \approx \frac{45}{z_2 s}\, 10^4 \left[\frac{\text{Gs cm}^2}{\text{V}}\right]$ jest stałą indukcji magnetycznej przy częstotliwości $f = 50$ Hz,

E_{wb} [V] — wartość skuteczna napięcia mierzonego przez miernik.

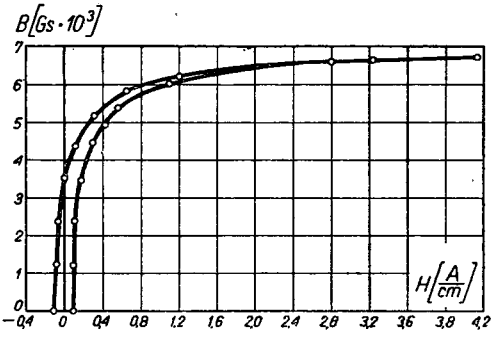
Dla badanej próbki

$$k_h = 3{,}74\,\frac{1}{\text{cm}}, \qquad k_b = 2950\,\frac{\text{Gs cm}^2}{\text{V}}.$$

Na rysunku 6 przedstawiono charakterystykę magnesowania $B_m = f(H_m)$, zaś na rys. 7 — zależność przenikalności magnetycznej od natężenia pola $\mu = f(H)$.

$$\mu = \frac{B_m}{1{,}256\,H_m}\left[\frac{\text{Gs}}{\text{Oe}}\right]. \tag{22}$$

Na rysunku 8 wykreślono pętlę histerezy $B = f(H)$ badanego materiału, osiągając indukcję nasycenia $B_s = 6790$ Gs.

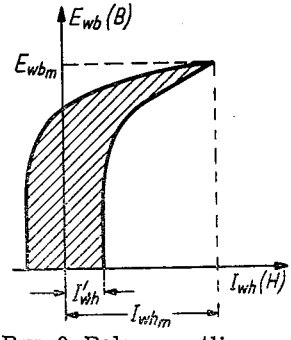


Rys. 8. Pętla histerezy $B = f(H)$ przy indukcji nasycenia $B_s = 6790$ Gs. Natężenie powściągające $H_c = 0{,}101\,\frac{\text{A}}{\text{cm}}$, pozostałość magnetyczna $B_r = 3540$ Gs

3.2. Metody pomiaru stratności

Stosując metodę ferrometryczną przy prądzie zmiennym, z reguły określamy straty energetyczne w badanym materiale jedną z podanych poniżej metod. Należą do nich: metoda planimetrowania i metoda dwóch współrzędnych.

Metoda planimetrowania. Wykreślając zależność $E_{wb} = f(I_{wh})$ otrzymuje się tak zwaną pętlę mocy, której pole odpowiada mocy pobieranej przez próbkę. Moc tę wyznacza się przez planimetrowanie pola objętego krzywą $E_{wb} = f(I_{wh})$. Na rys. 9 przedstawiono połowę pętli mocy.



Rys. 9. Połowa pętli mocy $E_{wb} = f(I_{wh})$

Moc pobierana przez próbkę wynosi:

$$P = \frac{2}{T} \int_{t}^{t+\frac{T}{2}} u_\mu i_\mu \, dt, \tag{23}$$

gdzie:

$_\mu = \sqrt{2}\, I_{wh}$

oraz

u_μ — napięcie na uzwojeniu pierwotnym badanej próbki wyznaczone z zależności

$$E_{wb} = 1{,}11\, E_{wb_{śr}} = 1{,}11 \frac{2}{T} \cdot \frac{z_2}{z_1} \int_{t}^{t+\frac{T}{2}} u_\mu \, dt,$$

skąd

$$u_\mu = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{T}{4{,}44} \cdot \frac{d\, E_{wb}}{dt}.$$

Zależność powyższa jest uwarunkowana takim doborem oporności poszczególnych zakresów pomiarowych, że wskazana przez miernik wartość E_{wb} jest 1,11 razy większa od wartości średniej $E_{wb_{śr}}$. Dzięki temu przy przebiegach sinusoidalnych maksymalna wartość wskazywana odpowiada wartości skutecznej napięcia U [8].

Ostatecznie więc

$$P = \frac{2\sqrt{2}}{4{,}44} \cdot \frac{z_1}{z_2} \oint I_{wh} \, dE_{wb} = 0{,}636 \frac{z_1}{z_2} \oint I_{wh} \, dE_{wb}, \tag{24}$$

gdzie $\oint I_{wh} dE_{wb}$ odpowiada polu objętemuprzez połowę pętli mocy. Planimetrując otrzymujemy:

$$P = 0{,}636\, ab \cdot S \frac{z_1}{z_2} [\mathrm{W}], \tag{25}$$

gdzie:

a — skala na osi napięcia $\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{mm}}\right]$,

b — skala na osi natężenia prądu $\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{mm}}\right]$,

S — pole powierzchni połowy pętli mocy [mm^2];

stratność

$$p = \frac{P}{G}\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{kG}}\right]. \tag{26}$$