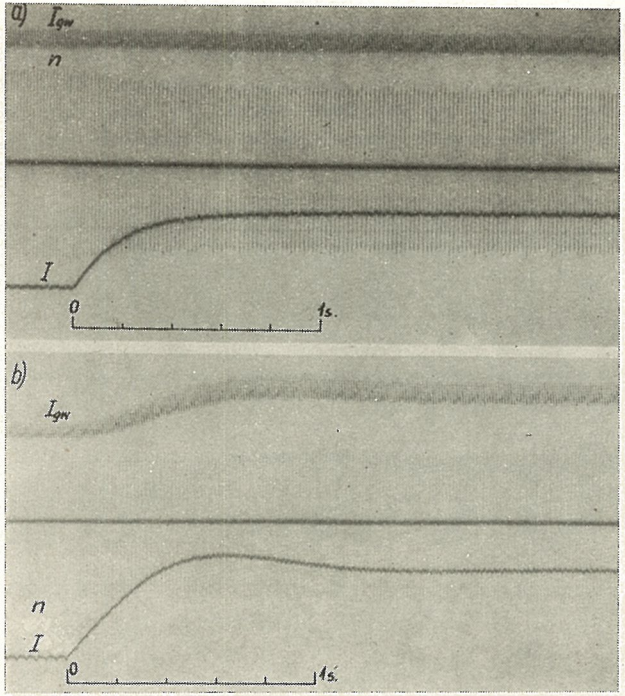
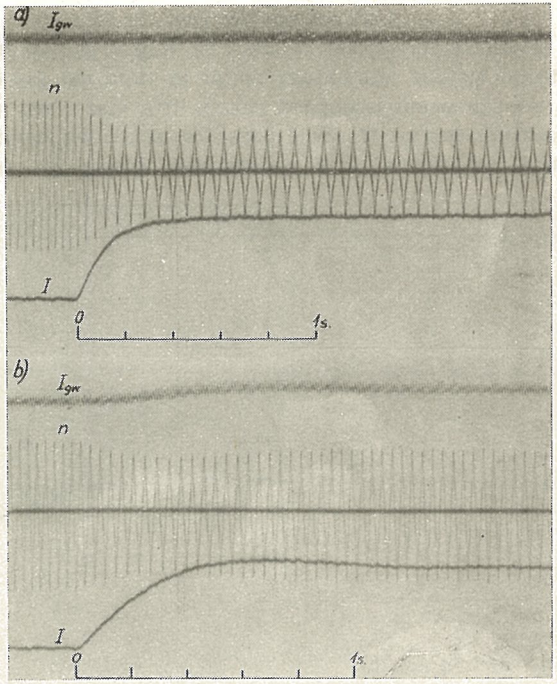
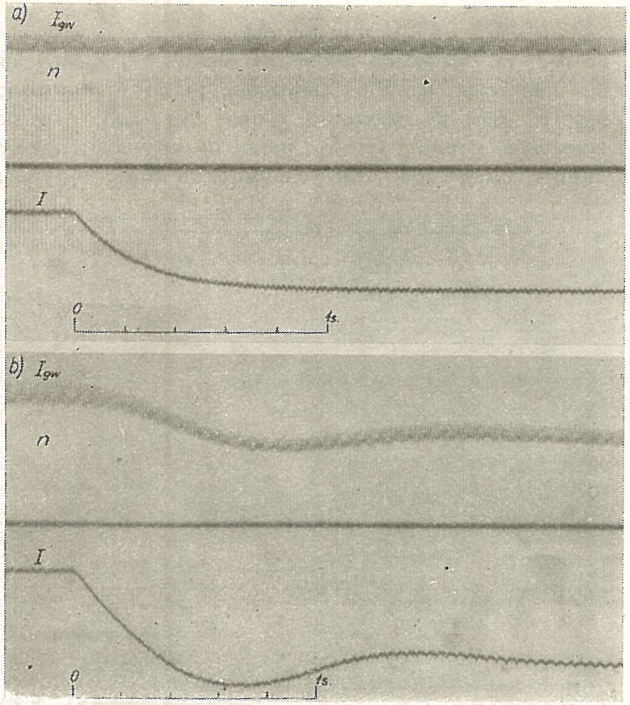


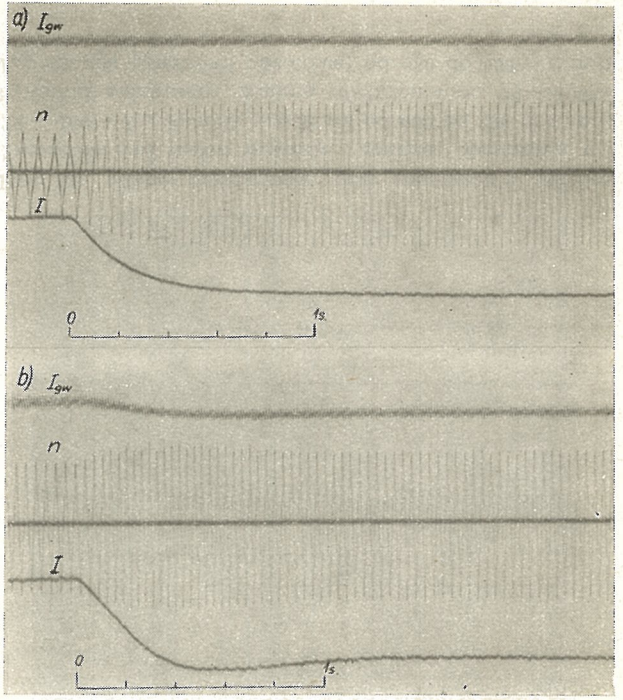
Rys. 24. Stany przejściowe przy obciążeniu silnika układu Leonarda: a) układ otwarty, zmiana obciążenia od 32 — 100% I_{zn}, spadek prędkości od 1500 do 1170 obr/min; b) układ zamknięty, zmiana obciążenia od 32 — 100% I_{zn}, spadek prędkości obrotowej od 1500 do 1460 obr/min



Rys. 25. Stany przejściowe przy obciążeniu silnika Leonarda: a) układ otwarty, zmiana obciążenia od 29 — 100% I_{zn}, spadek prędkości od 600 do 296 obr/min; b) układ zamknięty, zmiana obciążenia od 29 — 100% I_{zn}, spadek prędkości obrotowej od 600 do 500 obr/min



Rys. 26. Stany przejściowe przy odciążeniu silnika układu Leonarda: a) układ otwarty, zmiana obciążenia od 100 — 32% I_{zn}, wzrost prędkości od 1170 do 1500 obr/min; b) układ zamknięty, zmiana obciążenia od 100 — 32% I_{zn}, wzrost prędkości obrotowej od 1460 do 1500 obr/min



Rys. 27. Stany przejściowe przy odciążeniu silnika układu Leonarda: a) układ otwarty, zmiana obciążenia od 100 — 29% I_{zn}, wzrost prędkości obrotowej od 296 do 600 obr/min; b) układ zamknięty, zmiana obciążenia od 100 — 29% I_{zn}, wzrost prędkości obrotowej od 500 do 600 obr/min

c) Zmiana obciążenia silnika od 100 — 32% I_{zn} (odciążenie) przy prędkości obrotowej 1170 obr/min, odpowiadającej znamionowej wartości prądu obciążenia I_{zn} (rys. 26a).

Po odciążeniu silnika wartość prędkości obrotowej w stanie ustalonym wynosiła znów 1500 obr/min. Przebieg prądu obciążenia i prędkości obrotowej ma charakter aperiodyczny. Czas procesu przejściowego wynosi około 1,3 sec.

d) Zmiana obciążenia silnika od 100 — 29% I_{zn} (odciążenie) przy prędkości obrotowej 296 obr/min, odpowiadającej znamionowej wartości prądu obciążenia silnika I_{zn} (rys. 27a).

Po przeminięciu okresu przejściowego prędkość obrotowa silnika wynosiła znów 600 obr/min. Przebieg prądu obciążenia i prędkości obrotowej silnika ma charakter aperiodyczny. Czas trwania okresu przejściowego wynosi około 0,8 sec.

6.5. Badanie pracy modelowego układu Leonarda w stanach przejściowych w systemie zamkniętym

Pomiary przeprowadzono w układzie pokazanym na rys. 21. Układ zamknięty posiada dwa sprzężenia zwrotne: prądowe sprzężenie zwrotne dodatnie i napięciowe sprzężenie zwrotne ujemne. Pomiary przeprowadzono w tych samych warunkach jak dla układu otwartego i przy tych samych stałych parametrach. Oscylografowane były trzy wielkości: I_{gw}, n, I. Pomiary przeprowadzono dla tych samych czterech przypadków co dla układu otwartego, a mianowicie:

a) Zmiana obciążenia silnika układu Leonarda od 32 — 100% I_{zn} przy prędkości obrotowej biegu jałowego 1500 obr/min (rys. 24b). Po okresie stanu przejściowego prędkość obrotowa wynosiła 1460 obr/min. Spadek prędkości obrotowej wynosił

$$\Delta n\,\% = \frac{1500 - 1460}{1500}\,100\,\% = 3{,}3\,\% .$$

Dynamiczna wartość spadku prędkości obrotowej jest większa i występuje po upływie 0,3 sec od chwili włączenia obciążenia. Prędkość obrotowa ustala się praktycznie biorąc po upływie 1,0 sec ulegając nieznacznemu przeregulowaniu.

b) Zmiana obciążenia silnika od 29 — 100% I_{zn} przy prędkości obrotowej biegu jałowego 600 obr/min (rys. 25b). Po przeminięciu stanu przejściowego prędkość obrotowa osiągnęła wartość ustaloną równą 500 obr/min. Spadek prędkości obrotowej wynosił:

$$\Delta n\,\% = \frac{600 - 500}{600}\,100\,\% = 16{,}7\,\%$$

Dynamiczna wartość spadku prędkości obrotowej jest większa i występuje po upływie 0,3 sec od chwili włączenia obciążenia. Czas trwania procesu przejściowego wynosi około 1 sec. Również w tym przypadku ulega przeregulowaniu prąd obciążenia silnika i prąd wzbudzenia prądnicy. Przeregulowanie w tym przypadku jest mniejsze niż dla przypadku poprzedniego, a wynika to stąd, że wzmacniacz magnetyczny pracuje na innym odcinku charakterystyki $I_{gw} = f(I_{st})$, o mniejszym współczynniku wzmocnienia.

c) Zmiana obciążenia silnika od 100 — 32% I_{zn} przy prędkości obrotowej równej 1460 obr/min odpowiadającej obciążeniu znamionowemu I_{zn} (rys. 26b). Po odciążeniu silnika do wartości prądu równej 0,32 I_{zn} silnik w stanie ustalonym osiąga wartość prędkości obrotowej równą 1500 obr/min. Wszystkie trzy oscylografowane wielkości ulegają przeregulowaniu. Prędkość obrotowa ustala najszybciej swą wartość. Porównując rys. 26b z rys. 24b można stwierdzić, że czas przebiegu przejściowego przy odciążeniu silnika jest dłuższy niż przy jego obciążeniu.

d) Zmiana obciążenia silnika od 100 — 29% I_{zn} przy prędkości obrotowej 500 obr/min, odpowiadającej obciążeniu znamionowemu I_{zn} (rys. 27b). Po odciążeniu silnika do wartości prądu równej 0,29 I_{zn} prędkość obrotowa silnika w stanie ustalonym osiąga wartość równą 600 obr/min. Czas ustalenia się przebiegu przejściowego jest w tym przypadku dłuższy niż przy obciążaniu silnika (rys. 25b).

6.6. Wnioski

Jak wynika z przebiegu charakterystyk $n_s = f(I_s)$ (rys. 20), w otwartym układzie Leonarda względny spadek prędkości obrotowej przy przejściu od idealnego biegu jałowego do obciążenia znamionowego jest dość duży, wahając się od wartości 23% do 71%. Pierwsza wartość dotyczy górnej charakterystyki przy $n_o = 1910$ obr/min, druga dolnej charakterystyki przy $n_o = 600$ obr/min.

Bezwzględny spadek prędkości obrotowej waha się od $430 \div 500$ obr/min przy przejściu od idealnego biegu jałowego do obciążenia znamionowego. Przeciętnie $\Delta n = 465$ obr/min. Zakres regulacji przy przyjęciu przeciążalności prądem 2,0 ($s_d = 50\%$) wynosi

$$k_R = \frac{1460}{420} = 3{,}5.$$

Zastosowanie sprzężeń zwrotnych prądowego i napięciowego zdecydowanie polepsza sztywność charakterystyk $n_s = f(I_s)$. I tak np. na rys. 22 pokazano zespół charakterystyk dla współczynnika sprzężenia napięcio-

wego $k_n = 14{,}7$ V/110 V i współczynnika sprzężenia prądowego $k_p = 0{,}1$ A/6,5 A.

Względny spadek prędkości obrotowej na górnej charakterystyce (przy $n_o = 1890$ obr/min) wynosi 8,5 % (przy $\varphi \approx 2{,}8$), dla dolnej charakterystyki ($n_o = 620$ obr/min) wynosi tylko 11,6 % (przy $\varphi \approx 6{,}0$). Dla większości pozostałych charakterystyk względny spadek prędkości obrotowej waha się w pobliżu wartości od -2% do $+2$%.

W konkretnym układzie, w którym przeprowadzano pomiary, uzyskano stosunek prędkości obrotowych wynoszący

$$\frac{1730}{550} = 3{,}15\,,$$

przy czym dla dolnej charakterystyki przeciążalność prądem znacznie przekracza wartość 2,0. Dalszemu obniżeniu prędkości obrotowej silnika stanęły na przeszkodzie następujące przyczyny:

a) Najmniejszy możliwy do uzyskania prąd wzmacniacza magnetycznego jest $I_{a\,min}$. Prąd ten nie jest równy zeru, w związku z czym nie można uzyskać dowolnie małych *s.em.* prądnicy. Środkiem zaradczym będzie zastosowanie wzmacniacza magnetycznego w układzie mostkowym (wzgl. różnicowym), co jednocześnie umożliwi pracę nawrotną układu Leonarda.

b) Pętla histerezy prądnicy. Przy obniżaniu prędkości obrotowej *s.em.* prądnicy obniża się po górnej części pętli histerezy. Ze względu na to, iż prądnica układu badanego ma dość szeroką pętlę histerezy, jej wpływ jest bardzo znaczny. Pętla histerezy prądnicy ma również wpływ na przebieg charakterystyk silnika $n_s = f(I_s)$. Tym samym wartościom prądu I_s odpowiadają różne prędkości obrotowe. Przy obciążeniu silnika prędkości obrotowe są niższe, przy odciążeniu — wyższe. Specjalnie widać to na charakterystykach $n_s = f(I_s)$ z zastosowaniem silnego sprzężenia prądowego. Aby polepszyć przebieg charakterystyk, należy znieść wpływ pętli histerezy prądnicy.

Należy zauważyć, że do pracy w zautomatyzowanym układzie Leonarda pożądane byłoby zastosowanie prądnicy o bardziej prostoliniowej charakterystyce magnesowania, jeżeli chce się w pełni skompensować spadki prędkości obrotowej również na charakterystykach przy maksymalnych wartościach napięcia prądnicy. (W naszym przypadku charakterystyka prądnicy zbyt szybko się zakrzywia zmniejszając współczynnik nachylenia $\operatorname{tg}\beta_o = 216$ V/A na $\operatorname{tg}\beta = 44{,}5$ V/A — a więc pięciokrotnie).

Na tle uzyskanych wyników nasuwają się następujące możliwości dalszego ulepszenia badanego układu:

1. Zwiększenie zakresu regulacji prędkości obrotowej przez zastosowanie wzmacniacza magnetycznego w takim układzie, aby $I_{a\,min} = 0$ (np. w układzie mostkowym lub różnicowym).

2. Wykonanie układu znoszącego samoczynnie wpływ histerezy prądnicy.

3. Zastosowanie prądnicy o większym pułapie napięcia ze słabo nasyconym obwodem magnetycznym w zakresie normalnej pracy.

Jeśli chodzi o pracę układu w stanach przejściowych, to należy stwierdzić, że jest ona zadowalająca. Oprócz pokazanych w niniejszym artykule oscylogramów zdjęto również przebiegi stanów przejściowych wielkości I_{gw}, n, I przy dość znacznych zmianach (od 0 — 200% wartości znamionowej) zarówno wielkości zadającej (I_z), jak i wielkości zakłócającej (M_{obc}). Dla wszystkich tych przypadków oscylogramy wykazały, że układ jest stabilny. W modelowym układzie, który został zbadany, wypadkowy współczynnik wzmocnienia jest tego rzędu, że układ w rozpatrywanych warunkach pracy był stabilny. Dlatego nie wprowadzono w układzie modelowym normalnie stosowanych środków mających za zadanie zapewnienie stabilności. W ogólnym przypadku w celu zapewnienia stabilności rozpatrywanego układu należy przewidzieć we wzmacniaczu magnetycznym dodatkowe uzwojenie stabilizujące, zasilane wg jednego ze znanych schematów poprzez transformator stabilizujący lub kondensator.

Politechnika Łódzka
Katedra Maszyn Elektrycznych

А. ЧАЙКОВСКИ, М. КРЫНКЭ

СТАБИЛИЗАЦИЯ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ ДВИГАТЕЛЯ СИСТЕМЫ ГЕНЕРАТОР-ДВИГАТЕЛЬ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОДНОТАКТНОГО МАГНИТНОГО УСИЛИТЕЛЯ В КАЧЕСТВЕ ВОЗБУДИТЕЛЯ

Резюме

В статье произведён анализ работы автоматизированной системы генератор-двигатель с однотактным магнитным усилителем работающим в качестве возбудителя. В начале дан обзор основных схем системы генератор-двигатель с использованием магнитного усилителя, а также принцип действия такой схемы, в которой скорость вращения двигателя должна быть постоянной, независимо от нагрузки.

В дальнейшем выведены уравнения механических характеристик двигателя $n = f(M)$ в замкнутой системе генератор-двигатель с скоростной и вольт-амперной обратной связью. Подробно описан выбор параметров обратных связей и магнитного усилителя в зависимости от требуемого диапазона регулирования и жёсткости характеристик. В заключении приведены результаты исследований образца системы генератор-двигатель мощностью в около 1 квт с использованием магнитного усилителя в замкнутой системе с отрицательной обратной связью по напряжению и положительной по току. Представлены предложения насчёт возможного дальнейшего повышения качества систем такого рода.

A. CZAJKOWSKI, M. KRYNKE

MOTOR SPEED STABILIZATION IN THE WARD LEONARD MOTOR-GENERATOR SET WITH THE APPLICATION OF A SIMPLE MAGNETIC AMPLIFIER AS AN EXCITER

Summary

The present paper analyzes the work of an automated Ward Leonard motor generator set with a simple magnetic amplifier working as an exciter. First, a review is given of most important schemes of Ward Leonard motor generator sets with the application of a magnetic amplifier, as well as the principle of operation of such a system in which the motor speed should be constant irrespectively of load variations.

Subsequently, equations are deduced for speed torque characteristics, $n = f(M)$, in a closed-loop Ward Leonard system with tachometer and counter-emf feedback. The selection of the parameters of feedback and of the magnetic amplifier is discussed with relation to the speed range and accuracy required. Finally, the authors present the results of the investigations of the model Ward Leonard system with the rated output of the order of 1 kW, with the application of a magnetic amplifier, and with counter-emf feedback. Conclusions have been reached as to the possibility of a further improvement of such systems.

621.396.611

TADEUSZ KACZOREK

Zagadnienie rozwiązywania obwodów liniowych ze sprzężeniami indukcyjnymi między gałęziami

Rękopis dostarczono 25. 2. 1959

W artykule wyprowadzono wzory pozwalające wyznaczyć parametry układów zastępczych równoważnych układowi złożonemu z m równoległych gałęzi i jednej gałęzi szeregowej. Każda z równoległych gałęzi zawiera idealne źródło napięcia i impedancję. Między wszystkimi gałęziami występują sprzężenia o charakterze indukcyjnym. Układy zastępcze stanowią: idealne źródło napięcia i szeregowo z nim połączona impedancja lub idealne źródło prądu i równolegle z nim połączona admitancja. W szczególnym przypadku otrzymujemy wzory na zastępczy prąd (napięcie źródłowe) i zastępczą admitancję (impedancję) m równolegle połączonych gałęzi, z których każda zawiera jedno idealne źródło napięcia i impedancję. W ogólnym przypadku między wszystkimi gałęziami występują sprzężenia indukcyjne. Rozważania zilustrowano na przykładzie.

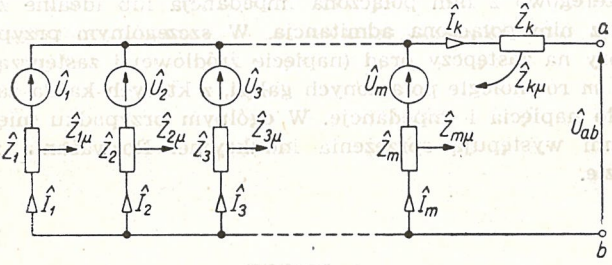
1. WSTĘP

W niektórych przypadkach przy analizie obwodów liniowych ze sprzężeniami indukcyjnymi jest celowe zastąpienie pewnych części aktywnych tych obwodów układami równoważnymi. W układzie zastępczym szeregowym idealne źródło napięcia jest połączone szeregowo z odpowiednią impedancją. W układzie zastępczym równoległym idealne źródło prądu jest połączone równolegle z odpowiednią admitancją. Możliwość zastąpienia dowolnej części aktywnej obwodu liniowego ze sprzężeniami indukcyjnymi układem równoważnym wynika bezpośrednio z twierdzenia Thevenina (lub Nortona). Potrzeba tego wyłania się między innymi przy wyznaczaniu prądu w wybranej gałęzi obwodu liniowego w oparciu o twierdzenie Thevenina. Jak wiadomo, rozważany

obwód, z wyjątkiem gałęzi, w której obliczamy prąd, zastępujemy wtedy równoważnym układem zastępczym. Układ taki składa się z idealnego źródła napięcia i szeregowo z nim połączonej impedancji. Niech zadanie polega na rozwiązaniu jedną ze znanych metod obwodu liniowego prądu sinusoidalnie zmiennego ze sprzężeniami indukcyjnymi między gałęziami. Okazuje się, że niejednokrotnie jest korzystnie pewne części aktywne w tym obwodzie zastąpić równoważnymi układami zastępczymi. Przy stosowaniu metody oczkowej układy zastępcze bierzemy w postaci idealnych źródeł napięciowych z odpowiednimi impedancjami połączonymi szeregowo. Przy metodzie węzłowej układy zastępcze przedstawiamy w postaci idealnych źródeł prądowych z równolegle z nimi połączonymi odpowiednimi admitancjami. Niżej wyprowadzimy wzory pozwalające obliczyć parametry równoważnych układów zastępczych.

2. PARAMETRY RÓWNOWAŻNYCH UKŁADÓW ZASTĘPCZYCH

Rozpatrzmy obwód jak na rys. 1, składający się z m równoległych gałęzi i z jednej gałęzi szeregowej z impedancją Z_k. Każda z równo-

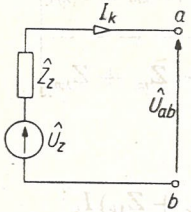


Rys. 1. Obwód liniowy ze sprzężeniami indukcyjnymi między gałęziami

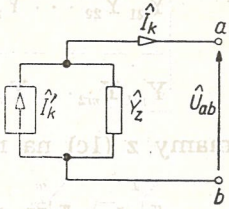
ległych gałęzi zawiera idealne źródło napięcia ($\hat{U}_l$) i impedancję ($\hat{Z}_l$). Między wszystkimi gałęziami występują sprzężenia o charakterze indukcyjnym. Dla lepszej jasności na rys. 1 nie zaznaczono wszystkich sprzężeń indukcyjnych między gałęziami, lecz tylko niektóre. Niech na zaciskach a, b przy dołączeniu do nich dowolnego aktywnego dwójnika będzie napięcie $\hat{U}_{ab}$, a w impedancji $\hat{Z}_k$ prąd $\hat{I}_k$.

Zagadnienie polega na wyznaczeniu parametrów układu zastępczego, jak na rys. 3, składającego się z idealnego źródła prądu oraz równolegle do niego przyłączonej admitancji, równoważnego układowi przedstawio-

nemu na rys. 1. Ogniwem pośrednim będzie układ przedstawiony na rys. 2, składający się z idealnego źródła napięcia i szeregowo z nim po-



Rys. 2. Obwód zastępczy równoważny obwodowi z rys. 1



Rys. 3. Obwód zastępczy z rys. 2 po zastąpieniu źródła napięcia równoważnym źródłem prądu

łączonej odpowiedniej impedancji. Dla wskazanych na rys. 1 zwrotów prądów i napięć możemy napisać

$$\hat{U}_l - \hat{U}_{ab} = \hat{Z}_l \hat{I}_l + \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq l}}^{m+1} \hat{Z}_{l\mu} \hat{I}_\mu + \hat{Z}_k \hat{I}_k + \sum_{\mu=1}^{m} \hat{Z}_{k\mu} \hat{I}_\mu \tag{1a}$$

dla $l = 1, 2, 3, \ldots, m$.

Po wyłączeniu spod znaku sumy $\sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq l}}^{m+1} \hat{Z}_{l\mu}\hat{I}_\mu$ iloczynu $\hat{Z}_{lk}\hat{I}_k$ i po przeniesieniu $(\hat{Z}_k + \hat{Z}_{lk})\,\hat{I}_k$ na lewą stronę otrzymamy

$$\hat{U}_l - \hat{U}_{ab} - (\hat{Z}_k + \hat{Z}_{lk})\hat{I}_k = \hat{Z}_l \hat{I}_l + \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq l}}^{m} \hat{Z}_{l\mu} \hat{I}_\mu + \sum_{\mu=1}^{m} \hat{Z}_{k\mu} \hat{I}_\mu \tag{1b}$$

dla $l = 1, 2, 3, \ldots, m$.

Zapisując układ równań (1b) w postaci macierzowej otrzymamy

$$\begin{vmatrix} U_1 - U_{ab} - (Z_k + Z_{1k})\, I_k \\ U_2 - U_{ab} - (Z_k + Z_{2k})\, I_k \\ U_3 - U_{ab} - (Z_k + Z_{3k})\, I_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_m - U_{ab} - (Z_k + Z_{mk})\, I_k \end{vmatrix}^{m}_{1} = \begin{vmatrix} Z_1 + Z_{k1}, & Z_{12} + Z_{k2}, & Z_{13} + Z_{k3}, & \cdots, & Z_{1m} + Z_{km} \\ Z_{21} + Z_{k1}, & Z_2 + Z_{k2}, & Z_{23} + Z_{k3}, & \cdots, & Z_{2m} + Z_{km} \\ Z_{31} + Z_{k1}, & Z_{32} + Z_{k2}, & Z_3 + Z_{k3}, & \cdots, & Z_{3m} + Z_{km} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & & & \\ Z_{m1} + Z_{k1}, & Z_{m2} + Z_{k2}, & Z_{m3} + Z_{k3}, & \cdots, & Z_m + Z_{km} \end{vmatrix}^{m}_{1} \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ I_m \end{vmatrix} \tag{1c}$$

Dla każdego realnego obwodu elektrycznego macierz kwadratowa impedancji jest macierzą nieosobliwą. Korzystając z macierzy odwrotnej impedancji w postaci

$$\overset{m}{\diagdown}\begin{vmatrix} Y_{11} Y_{12} \cdots Y_{1m} \\ Y_{21} Y_{22} \cdots Y_{2m} \\ - - - - - \\ Y_{m1} Y_{m2} \cdots Y_{mm} \end{vmatrix} = \overset{m}{\diagdown}\begin{vmatrix} Z_1 + Z_{k1}, Z_{12} + Z_{k2}, \cdots, Z_{1m} + Z_{km} \\ Z_{21} + Z_{k1}, Z_2 + Z_{k2}, \cdots, Z_{2m} + Z_{km} \\ - - - - - - - - - - - - - - - \\ Z_{m1} + Z_{k1}, Z_{m2} + Z_{k2}, \cdots, Z_m + Z_{km} \end{vmatrix}^{-1}$$

otrzymamy z (1c) na macierz prądów wyrażenie

$$\overset{1}{\underset{m}{\diagdown}}\begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_m \end{vmatrix} = \overset{m}{\diagdown}\begin{vmatrix} Y_{11} Y_{12} \cdots Y_{1m} \\ Y_{21} Y_{22} \cdots Y_{2m} \\ - - - - - \\ Y_{m1} Y_{m2} \cdots Y_{mm} \end{vmatrix} \overset{1}{\underset{m}{\diagdown}}\begin{vmatrix} U_1 - U_{ab} - (Z_k + Z_{1k}) I_k \\ U_2 - U_{ab} - (Z_k + Z_{2k}) I_k \\ - - - - - - - - - \\ U_m - U_{ab} - (Z_k + Z_{mk}) I_k \end{vmatrix} \tag{2a}$$

Z zależności (2a) mamy

$$\hat{I}_l = \sum_{\alpha=1}^{m} \hat{Y}_{l\alpha} [\hat{U}_\alpha - \hat{U}_{ab} - (\hat{Z}_k + \hat{Z}_{ak}) \hat{I}_k] \tag{2b}$$

dla $l = 1, 2, 3, \ldots, m$.

W oparciu o pierwsze prawo Kirchhoffa możemy napisać

$$\hat{I}_k = \sum_{\mu=1}^{m} \hat{I}_\mu = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\alpha=1}^{m} \hat{Y}_{\mu\alpha} [\hat{U}_\alpha - \hat{U}_{ab} - (\hat{Z}_k + \hat{Z}_{ak}) \hat{I}_k] =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\alpha=1}^{m} \hat{Y}_{\mu\alpha} (\hat{U}_\alpha - \hat{U}_{ab}) - \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\alpha=1}^{m} \hat{Y}_{\mu\alpha} (\hat{Z}_k + \hat{Z}_{ak}) \hat{I}_k . \tag{3}$$

Z zależności (3) na prąd $\hat{I}_k$ otrzymamy wyrażenie

$$\hat{I}_k = \frac{\sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\alpha=1}^{m} \hat{Y}_{\mu\alpha} (\hat{U}_\alpha - \hat{U}_{ab})}{1 + \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\alpha=1}^{m} \hat{Y}_{\mu\alpha} (\hat{Z}_k + \hat{Z}_{ak})} . \tag{4}$$

Dla obwodu przedstawionego na rys. 2 mamy natomiast na prąd $\hat{I}_k$ wyrażenie

$$\hat{I}_k = (\hat{U}_z - \hat{U}_{ab}) \hat{Y}_z . \tag{5}$$

Jeżeli obwód przedstawiony na rys. 2 ma być obwodem równoważnym obwodowi z rys. 1, to odpowiednie człony równań (4) i (5) muszą być sobie tożsamościowo równe. Porównując człony stojące przy napięciu $\hat{U}_{ab}$, z równań (4) i (5) dostaniemy

$$\hat{Y}_z = \frac{\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{m}\hat{Y}_{\alpha\mu}}{1+\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{m}\hat{Y}_{\alpha\mu}(\hat{Z}_k+\hat{Z}_{\mu k})}. \tag{6}$$

Z porównania pozostałych członów równań (4) i (5) i po uwzględnieniu zależności (6) otrzymamy

$$\hat{U}_z = \frac{1}{\hat{Y}_z}\cdot\frac{\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{m}\hat{Y}_{\mu\alpha}\hat{U}_\alpha}{1+\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{m}\hat{Y}_{\mu\alpha}(\hat{Z}_k+\hat{Z}_{\alpha k})} = \frac{\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{m}\hat{Y}_{\mu\alpha}\hat{U}_\alpha}{\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{m}\hat{Y}_{\mu\alpha}}. \tag{7}$$

Mając określone wartości $\hat{Y}_z$ i $\hat{U}_z$ łatwo już przejść do układu zastępczego, przedstawionego na rys. 3.

Z równania (5) mamy

$$\hat{I}'_k = \hat{I}_k + \hat{Y}_z\hat{U}_{ab}, \tag{5a}$$

gdzie

$$\hat{I}'_k = Y_z\hat{U}_z = \frac{\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{m}\hat{Y}_{\mu\alpha}\hat{U}_\alpha}{1+\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{m}\hat{Y}_{\mu\alpha}(\hat{Z}_k+\hat{Z}_{\alpha k})}. \tag{8}$$

Mamy zatem określone parametry ($\hat{Y}_z$, $\hat{I}'_k$ układu zastępczego, przedstawionego na rys. 3.

Jako szczególny przypadek ze wzorów (6) i (7) możemy otrzymać wzory na zastępczą admitancję i zastępcze napięcie źródłowe m równolegle połączonych gałęzi. Każda z równoległych gałęzi w ogólnym przypadku zawiera idealne źródło napięcia i szeregowo z nim połączoną impedancję. Między gałęziami występują sprzężenia indukcyjne. Przyjmując w równaniach (6) i (7)

$$\hat{Z}_k = 0, \qquad \hat{Z}_{\alpha k} = 0$$

dla $\alpha = 1, 2, 3, \ldots, m$ otrzymamy

$$\hat{Y}'_z = \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{m}\hat{Y}_{\mu\alpha}, \tag{9}$$

$$\hat{U}'_z = \frac{\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{m}\hat{Y}_{\mu\alpha}\hat{U}_\alpha}{\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{m}\hat{Y}_{\mu\alpha}}. \tag{10}$$

Wzory spotykane w literaturze [3], [6], [8], [9], określające zastępczą

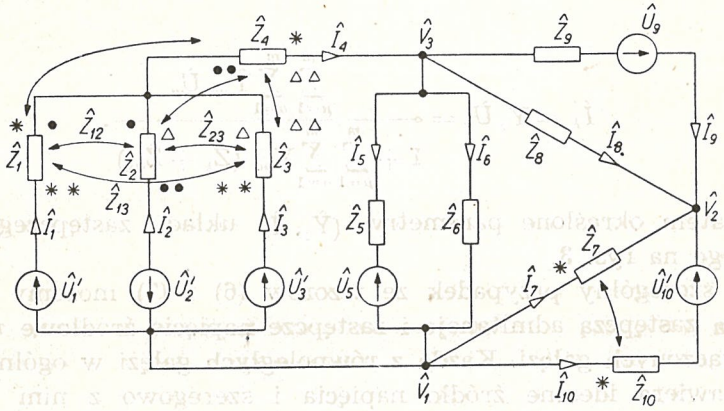
admitancję i zastępcze napięcie źródłowe układu m równoległych gałęzi aktywnych przy braku sprzężeń indukcyjnych, są szczególnymi przypadkami wzorów (9) i (10). Przyjmując we wzorach (9) i (10) $\hat{Z}_{l,\mu}$ ($l,\mu = 1, 2, 3, ..., m$) otrzymamy znane zależności

$$\hat{Y}_z'' = \sum_{\mu=1}^{m} \hat{Y}_\mu, \tag{11}$$

$$\hat{U}_z'' = \frac{\sum_{\mu=1}^{m} \hat{Y}_\mu \hat{U}_\mu}{\sum_{\mu=1}^{m} \hat{Y}_\mu} \tag{12}$$

Przykład

W obwodzie liniowym prądu sinusoidalnie zmiennego, jak na rys. 4, ze sprzężeniami indukcyjnymi między gałęziami dane są impedancje własne gałęzi $\hat{Z}_1$, $\hat{Z}_2$, $\hat{Z}_3$, $\hat{Z}_4$, $\hat{Z}_5$, $\hat{Z}_6$, Z_7, $\hat{Z}_8$, $\hat{Z}_9$, $\hat{Z}_{10}$, impedancje sprzężeń



Rys. 4. Obwód liniowy 10-gałęziowy z indukcyjnymi sprzężeniami między gałęziami

$\hat{Z}_{12}$, $\hat{Z}_{13}$, $\hat{Z}_{14}$, $\hat{Z}_{23}$, $\hat{Z}_{24}$, $\hat{Z}_{34}$ oraz wartości napięć źródłowych $\hat{U}_1'$, $\hat{U}_2'$, $\hat{U}_3'$, $\hat{U}_5'$, $\hat{U}_9'$, $\hat{U}_{10}'$. Wyznaczyć prądy w poszczególnych gałęziach obwodu w stanie ustalonym.

Rozwiązanie. Korzystając z rozważań przeprowadzonych wyżej układ złożony z gałęzi z impedancjami $\hat{Z}_1$, $\hat{Z}_2$, $\hat{Z}_3$, $\hat{Z}_4$ zastąpimy zastępczym układem równoważnym. Zastępczy układ równoważny będzie zawierał idealne źródło prądu i równolegle do niego przyłączoną admitancję. Na parametry ($\hat{Y}_{14}'$ $\hat{I}_4'$) tego układu zastępczego ze wzorów (6) i (8) otrzymamy wyrażenia

$$\hat{Y}'_{14} = \frac{\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\alpha=1}^{3}\hat{Y}_{\mu\alpha}}{1+\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\alpha=1}^{3}\hat{Y}_{\mu\alpha}(\hat{Z}_4+\hat{Z}_{\alpha 4})} =$$

$$= \frac{\hat{Y}_{11}+\hat{Y}_{12}+\hat{Y}_{13}+\hat{Y}_{21}+\hat{Y}_{22}+\hat{Y}_{23}+\hat{Y}_{31}+\hat{Y}_{32}+\hat{Y}_{33}}{\left[1+(\hat{Z}_4+\hat{Z}_{14})(\hat{Y}_{11}+\hat{Y}_{21}+\hat{Y}_{31})+(\hat{Z}_4+\hat{Z}_{24})(\hat{Y}_{12}+\hat{Y}_{22}+\hat{Y}_{32})+(\hat{Z}_4+\hat{Y}_{34})(\hat{Y}_{13}+\hat{Y}_{23}+\hat{Y}_{33})\right]}$$

$$\hat{I}'_4 = \frac{\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\alpha=1}^{3}\hat{Y}_{\mu\alpha}\hat{U}'_\alpha}{1+\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\alpha=1}^{3}\hat{Y}_{\mu\alpha}(\hat{Z}_4+\hat{Z}_{\alpha 4})} =$$

$$= \frac{\hat{U}'_1(\hat{Y}_{11}+\hat{Y}_{21}+\hat{Y}_{31})-\hat{U}'_2(\hat{Y}_{12}+\hat{Y}_{22}+\hat{Y}_{32})+\hat{U}'_3(\hat{Y}_{13}+\hat{Y}_{23}+\hat{Y}_{33})}{\left[1+(\hat{Z}_4+\hat{Z}_{14})(\hat{Y}_{11}+\hat{Y}_{21}+\hat{Y}_{31})+(\hat{Z}_4+\hat{Z}_{24})(\hat{Y}_{12}+\hat{Y}_{22}+\hat{Y}_{32})+(\hat{Z}_4+\hat{Z}_{34})(\hat{Y}_{13}+\hat{Y}_{23}+\hat{Y}_{33})\right]}$$

gdzie:

$$\hat{Y}_{11} = \frac{1}{\hat{\Delta}}[(\hat{Z}_2+\hat{Z}_{42})(\hat{Z}_3+\hat{Z}_{43})-(Z_{32}+\hat{Z}_{42})(\hat{Z}_{23}+\hat{Z}_{43})]$$

$$\hat{Y}_{12} = \frac{1}{\hat{\Delta}}[(\hat{Z}_{13}+\hat{Z}_{43})(\hat{Z}_{32}+\hat{Z}_{42})-(\hat{Z}_{12}+\hat{Z}_{42})(\hat{Z}_3+\hat{Z}_{43})]$$

$$\hat{Y}_{13} = \frac{1}{\hat{\Delta}}[(\hat{Z}_{12}+\hat{Z}_{42})(\hat{Z}_{23}+\hat{Z}_{43})-(\hat{Z}_{13}+\hat{Z}_{43})(\hat{Z}_2+\hat{Z}_{42})]$$

$$\hat{Y}_{21} = \frac{1}{\hat{\Delta}}[(\hat{Z}_{23}+\hat{Z}_{43})(\hat{Z}_{31}+\hat{Z}_{41})-(\hat{Z}_{21}+\hat{Z}_{41})(\hat{Z}_3+\hat{Z}_{43})]$$

$$\hat{Y}_{22} = \frac{1}{\hat{\Delta}}[(\hat{Z}_1+\hat{Z}_{41})(\hat{Z}_3+\hat{Z}_{43})-(\hat{Z}_{13}+\hat{Z}_{43})(\hat{Z}_{31}+\hat{Z}_{41})]$$

$$\hat{Y}_{23} = \frac{1}{\hat{\Delta}}[(\hat{Z}_{13}+\hat{Z}_{43})(\hat{Z}_{21}+\hat{Z}_{41})-(\hat{Z}_1+\hat{Z}_{41})(\hat{Z}_{23}+\hat{Z}_{43})]$$

$$\hat{Y}_{31} = \frac{1}{\hat{\Delta}}[(\hat{Z}_{21}+\hat{Z}_{41})(\hat{Z}_{32}+\hat{Z}_{42})-(\hat{Z}_2+\hat{Z}_{42})(\hat{Z}_{31}+\hat{Z}_{41})]$$

$$\hat{Y}_{32} = \frac{1}{\hat{\Delta}}[(\hat{Z}_{12}+\hat{Z}_{42})(\hat{Z}_{31}+\hat{Z}_{41})-(\hat{Z}_1+\hat{Z}_{41})(\hat{Z}_{32}+\hat{Z}_{42})]$$

$$\hat{Y}_{33} = \frac{1}{\hat{\Delta}}[(\hat{Z}_1+\hat{Z}_{41})(\hat{Z}_2+\hat{Z}_{42})-(\hat{Z}_{12}+\hat{Z}_{42})(\hat{Z}_{21}+\hat{Z}_{41})]$$

$$\hat{\Delta} = (\hat{Z}_1 + \hat{Z}_{41})[(\hat{Z}_2 + \hat{Z}_{42})(\hat{Z}_3 + \hat{Z}_{43}) - (\hat{Z}_{32} + \hat{Z}_{42})(\hat{Z}_{23} + \hat{Z}_{43})] +$$
$$- (\hat{Z}_{21} + \hat{Z}_{41})[(\hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{42})(\hat{Z}_3 + \hat{Z}_{43}) - (\hat{Z}_{32} + \hat{Z}_{42})(\hat{Z}_{13} + \hat{Z}_{43})] +$$
$$+ (\hat{Z}_{31} + \hat{Z}_{41})[(\hat{Z}_{12} + \hat{Z}_{42})(\hat{Z}_{23} + \hat{Z}_{43}) - (\hat{Z}_2 + \hat{Z}_{42})(\hat{Z}_{13} + \hat{Z}_{43})].$$

Gałęzie równoległe z impedancjami $\hat{Z}_7$, $\hat{Z}_{10}$ zastępujemy układem równoważnym, złożonym z idealnego źródła prądu i równolegle do niego przyłączoną admitancją. Parametry układu zastępczego wyznaczymy ze wzorów (9) i (10).

$$\hat{Y}'_{70} = \sum_{\mu=1}^{2}\sum_{\alpha=1}^{2} \hat{Y}'_{\mu\alpha} = \hat{Y}'_{11} + \hat{Y}'_{12} + \hat{Y}'_{21} + \hat{Y}'_{22},$$

$$\hat{I}'_{70} = \hat{Y}'_{70} \frac{\sum_{\mu=1}^{2}\sum_{\alpha=1}^{2} \hat{Y}'_{\mu\alpha}\hat{U}'_{\alpha}}{\sum_{\mu=1}^{2}\sum_{\alpha=1}^{2} \hat{Y}'_{\mu\alpha}} = (\hat{Y}'_{12} + \hat{Y}'_{22})\hat{U}'_{10}.$$

Po podstawieniu

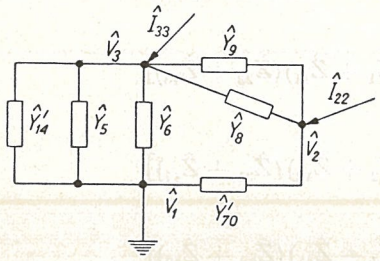
$$\hat{Y}'_{11} = \frac{\hat{Z}_{10}}{\hat{Z}_7\hat{Z}_{10} - \hat{Z}^2_{710}}, \qquad \hat{Y}'_{12} = \frac{-\hat{Z}_{710}}{\hat{Z}_7\hat{Z}_{10} - \hat{Z}^2_{710}}$$

$$\hat{Y}'_{21} = \frac{-\hat{Z}_{710}}{\hat{Z}_7\hat{Z}_{10} - \hat{Z}^2_{710}}, \qquad \hat{Y}'_{22} = \frac{\hat{Z}_7}{\hat{Z}_7\hat{Z}_{10} - \hat{Z}^2_{710}}$$

otrzymamy

$$\hat{Y}'_{70} = \frac{\hat{Z}_7 + \hat{Z}_{10} - 2\hat{Z}_{710}}{\hat{Z}_7\hat{Z}_{10} - \hat{Z}^2_{710}}, \qquad \hat{I}'_{70} = \frac{\hat{Z}_7 - \hat{Z}_{710}}{\hat{Z}_7\hat{Z}_{10} - \hat{Z}^2_{710}}\hat{U}'_{10}.$$

Zastępując w gałęziach z impedancjami Z_5, Z_9 źródła napięcia równoważnymi źródłami prądu, rozważany obwód możemy narysować w postaci jak na rys. 5. Obwód przedstawiony na rys. 5 jest obwodem liniowym bez sprzężeń między gałęziami. Wprowadzamy oznaczenia:



Rys. 5. Obwód liniowy równoważny obwodowi z rys. 4 bez sprzężeń indukcyjnych między gałęziami

$$\hat{I}_{22} = \hat{I}'_{70} + \hat{Y}_9\hat{U}'_9, \qquad \hat{I}_{33} = \hat{I}'_4 + \hat{Y}_5\hat{U}'_5 - \hat{Y}_9\hat{U}'_9,$$

$$\hat{Y}_5 = \frac{1}{\hat{Z}_5}, \qquad \hat{Y}_6 = \frac{1}{\hat{Z}_6}, \qquad \hat{Y}_8 = \frac{1}{\hat{Z}_8}, \qquad \hat{Y}_9 = \frac{1}{\hat{Z}_9}.$$

Otrzymany obwód rozwiążemy stosując metodę węzłową. Jako węzeł odniesienia przyjmujemy węzeł pierwszy ($\hat{V}_1$).

$$\begin{vmatrix} \overline{Y}'_{70} + Y_8 + Y_9, & -Y_8 - Y_9 \\ -Y_8 - Y_9, & Y'_{14} + Y_5 + Y_6 + Y_8 + Y_9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_2 \\ V_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_{22} \\ I_{33} \end{vmatrix}$$

Z ostatniego równania macierzowego mamy

$$\begin{vmatrix} V_2 \\ V_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\hat{D}} \begin{vmatrix} \overline{Y}'_{14} + Y_5 + Y_6 + Y_8 + Y_9, & Y_8 + Y_9 \\ Y_8 + Y_9, & Y'_{70} + Y_8 + Y_9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_{22} \\ I_{33} \end{vmatrix}$$

gdzie

$$\hat{D} = (\hat{Y}'_{70} + \hat{Y}_8 + \hat{Y}_9)(\hat{Y}'_{14} + \hat{Y}_5 + \hat{Y}_6 + \hat{Y}_8 + \hat{Y}_9) - (\hat{Y}_8 + \hat{Y}_9)^2.$$

Mając określone wartości potencjałów $\hat{V}_2$ i $\hat{V}_3$ możemy przystąpić do wyznaczania prądów w poszczególnych gałęziach obwodu. Dla zwrotów wskazanych na rys. 4 na prądy $\hat{I}_5$, $\hat{I}_6$, $\hat{I}_8$, $\hat{I}_9$ otrzymujemy wyrażenia:

$$\hat{I}_5 = \hat{Y}_5(\hat{V}_3 - \hat{U}'_5), \qquad \hat{I}_8 = \hat{Y}_8(\hat{V}_3 - \hat{V}_2),$$
$$\hat{I}_6 = \hat{Y}_6\hat{V}_3, \qquad \hat{I}_9 = \hat{Y}_9(\hat{V}_3 - \hat{V}_2 + \hat{U}'_9).$$

Prądy w gałęziach z impedancjami $\hat{Z}_7$ i $\hat{Z}_{10}$ obliczymy z zależności wypisanych w oparciu o prawa Kirchhoffa.

$$\hat{U}'_{10} - \hat{Z}_{10}\hat{I}_{10} - \hat{Z}_{710}\hat{I}_7 + \hat{Z}_7\hat{I}_7 + \hat{Z}_{710}\hat{I}_{10} = 0,$$
$$\hat{I}_7 + \hat{I}_{10} + \hat{I}_8 + \hat{I}_9 = 0.$$

Po rozwiązaniu tego układu równań otrzymamy

$$\hat{I}_{10} = \frac{\hat{U}'_{10} - (\hat{Z}_7 - \hat{Z}_{710})(\hat{I}_8 + \hat{I}_9)}{\hat{Z}_7 + \hat{Z}_{10} - 2\hat{Z}_{710}},$$

$$\hat{I}_7 = \frac{-\hat{U}'_{10} - (\hat{Z}_{10} - \hat{Z}_{710})(\hat{I}_8 + \hat{I}_9)}{\hat{Z}_7 + \hat{Z}_{10} - 2\hat{Z}_{710}}.$$

Prąd $\hat{I}$ znajdziemy z zależności

$$\hat{I}_4 = \hat{I}_5 + \hat{I}_6 + \hat{I}_8 + \hat{I}_9.$$

W oparciu o prawa Kirchhoffa możemy napisać

$$\hat{U}'_1 - \hat{Z}_1\hat{I}_1 - \hat{Z}_{12}\hat{I}_2 - \hat{Z}_{13}\hat{I}_3 - \hat{Z}_{14}\hat{I}_4 + \hat{Z}_2\hat{I}_2 + \hat{Z}_{21}\hat{I}_1 + \hat{Z}_{23}\hat{I}_3 + \hat{Z}_{24}\hat{I}_4 + \hat{U}'_2 = 0,$$
$$\hat{U}'_1 - \hat{Z}_1\hat{I}_1 - \hat{Z}_{12}\hat{I}_2 - \hat{Z}_{13}\hat{I}_3 - \hat{Z}_{14}\hat{I}_4 + \hat{Z}_3\hat{I}_3 + \hat{Z}_{31}\hat{I}_1 + \hat{Z}_{32}\hat{I}_2 + \hat{Z}_{34}\hat{I}_4 - \hat{U}'_3 = 0,$$
$$\hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3 - \hat{I}_4 = 0.$$

Rozwiązując ten układ równań na prądy $\hat{I}_1$, $\hat{I}_2$, $\hat{I}_3$ otrzymamy:

$$\hat{I}_1 = \frac{(\hat{U}_1'+\hat{U}_3')(\hat{Z}_{32}+\hat{Z}_{13}-\hat{Z}_{12}-\hat{Z}_3)-(\hat{Z}_{32}-\hat{Z}_{12}+\hat{Z}_{13}-\hat{Z}_3)(\hat{Z}_{14}+\hat{Z}_{13}-\hat{Z}_{24}-\hat{Z}_{23})\hat{I}_4}{(\hat{Z}_{31}+\hat{Z}_{13}-\hat{Z}_1-\hat{Z}_3)(\hat{Z}_2+\hat{Z}_{13}-\hat{Z}_{12}-\hat{Z}_{23})+(\hat{Z}_{32}+\hat{Z}_{13}-\hat{Z}_{12}-\hat{Z}_3)(\hat{Z}_1+\hat{Z}_{23}-\hat{Z}_{13}-\hat{Z}_{21})} +$$

$$+\frac{[\hat{U}_3'-\hat{U}_1'-\hat{I}_4(\hat{Z}_3-\hat{Z}_{13}+Z_{34}-\hat{Z}_{14})](\hat{Z}_2+\hat{Z}_{13}-\hat{Z}_{12}-\hat{Z}_{23})}{(\hat{Z}_{31}+\hat{Z}_{13}-\hat{Z}_1-\hat{Z}_3)(\hat{Z}_2+\hat{Z}_{13}-\hat{Z}_{12}-\hat{Z}_{23})+(\hat{Z}_{32}+\hat{Z}_{13}-\hat{Z}_{12}-\hat{Z}_3)(\hat{Z}_1+\hat{Z}_{23}-\hat{Z}_{13}-\hat{Z}_{21})},$$

$$\hat{I}_2 = \frac{(\hat{Z}_{14}+\hat{Z}_{13}-\hat{Z}_{24}-\hat{Z}_{23})\hat{I}_4-(\hat{U}_1'+\hat{U}_2')}{\hat{Z}_2+\hat{Z}_{13}-\hat{Z}_{12}-\hat{Z}_{23}}+\frac{\hat{Z}_1+\hat{Z}_{23}-\hat{Z}_{21}-\hat{Z}_{13}}{\hat{Z}_2+\hat{Z}_{13}-\hat{Z}_{12}-\hat{Z}_{23}}\hat{I}_1,$$

$$\hat{I}_3 = \hat{I}_4-\hat{I}_1-\hat{I}_2.$$

Politechnika Warszawska
Katedra Elektrotechniki Teoretycznej

WYKAZ LITERATURY

1. Le Corbeiller P.: Matrix Analysis of Electric Networks. John Wiley, 1950.
2. Gardner M. F., Barnes J. L.: Transients in Linear Systems, Vol. I, New York 1952.
3. Kerchner R., Corcoran G.: Alternating Current Circuits. New York 1955.
4. Konorski B.: Teoria dwójników i czwórników elektrycznych. PWT, Warszawa 1955.
5. Kontorowicz M.: Rachunek operatorowy i stany nieustalone w obwodach elektrycznych. PWT, Warszawa 1956.
6. Le Page I., Seely S.: General Network Analysis, New York 1952.
7. Taft W. A.: Osnowy mietodiki rasczota liniejnych elektriczeskich cepiej po zadanym ich czastotnym charaktieristikam. Wydawnictwo AN ZSRR, 1954.
8. Thompson H. A.: Alternating Current and Transient Circuit Analysis, New York 1956.
9. Zeweke T. W., Jonkin P. A.: Osnowy elektrotiechniki, część I. Gosenergoizdat, 1956.

T. КАЧОРЕК

НЕКОТОРЫЙ ВОПРОС РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ С ИНДУКТИВНОЙ СВЯЗЬЮ МЕЖДУ ВЕТВЯМИ

Резюме

В статье выведены формулы дающие возможность определения показателей эквивалентных схем равноценных схеме составленной из m параллельных ветвей и одной последовательной. Каждая из параллельных ветвей содержит идеальный источник направления и импенданс. Между всеми ветвями выступают связи индуктивного характера. Эквивалентные схемы являются идеальным источни-

ком напряжения с последовательно соединённым идмитансом. В частном случае получаем формулы для эквивалентного тока (напряжения источника) и эквивалентного адмитанса (импеданса) m параллельно соединённых ветвей, из которых каждая содержит идеальный источник напряжения и импеданс. В общем случае между всеми ветвями выступают индуктивные связи. Рассмотрение вопросов пояснено примером.

T. KACZOREK

A CERTAIN PROBLEM IN SOLVING LINEAR CIRCUITS WITH INDUCTIVE COUPLINGS BETWEEN BRANCHES

Summary

In the present paper, formulae are deduced enabling us to determine parameters of the circuits equivalent to a circuit composed of m parallel branches and one series branch. Each parallel branch contains an ideal source of voltage and impedance. Between all the branches there occur couplings of an inductive character. The equivalent circuits are composed of an ideal voltage source and the impedance connected with it in series, or an ideal current source and the impedance connected with it in parallel. In a particular case we obtain formulae for the equivalent current (source voltage) and the equivalent admitance (impedance) of m branches connected in parallel, each of them containing an ideal voltage source and impedance. In a general case, inductive couplings occur between all the branches. The considerations are illustrated on an example.

621.316.722.4

KAZIMIERZ AULEYTNER, RYSZARD WŁODARSKI

Oporowe dzielniki napięcia do pomiarów napięć udarowych

Rękopis dostarczono 27.10.1958

Omówiono zagadnienie pomiaru amplitudy i kształtu udarów pełnych i uciętych przy zastosowaniu oporowych dzielników napięcia oraz wpływ własności oporowych dzielników napięcia na możliwości określenia mierzonych wielkości z zadowalającą do celów praktycznych dokładnością.

W artykule podano także zasady pomiarów, analizę błędu pomiarów i opis badań oporowych dzielników napięcia przeprowadzonych z udziałem autorów w Laboratorium Wysokich Napięć ASEA w Szwecji w okresie zimy 1957 — 1958 roku.

1. WSTĘP

W nowoczesnej technice pomiarowej napięć i prądów udarowych, nawet w zastosowaniu do celów przemysłowych, coraz większego znaczenia nabiera sprawa uzyskania dużej dokładności wyników pomiarów. W dotychczas obowiązującej normie PN/E-05001 na koordynację izolacji, różnica między poziomem podstawowym a ochronnym wynosi 20 do 30%. Przez popełnienie więc przy pomiarze poziomu podstawowego błędu +10%, przy pomiarze zaś poziomu ochronnego błędu −10%, w niektórych przypadkach margines między tymi poziomami może zostać zredukowany niemal do zera. Wystarczy wówczas nieco dalsze ustawienie odgromnika w stosunku do obiektu chronionego, aby przeskok lub przebicie izolacji obiektu chronionego nastąpiło wcześniej niż zadziałanie odgromnika. Ponieważ dotychczasowe osiągnięcia w dziedzinie konstrukcji dzielników napięcia nie wykluczały możliwości powstawania dużego błędu pomiaru (nawet do 10%), szereg placówek naukowych i przemysłowych prowadził i prowadzi w dalszym ciągu badania zmierzające do uzyskania dzielników o jak najmniejszym błędzie pomiaru.

W ostatnich latach szczegółowe badania prowadzone były w Laboratorium Wysokich Napięć firmy szwedzkiej ASEA w Ludvice pod kierownictwem N. Hylten-Cavalliusa oraz w innych ośrodkach badawczych w Europie i w USA. Między innymi badaniami tymi zajmowali się. M. A. Romano [14], P. R. Howard [12], A. F. Rohlfs [13], F. A. Fisher [6], E. Pirktl [2] i K. W. Berger [11].

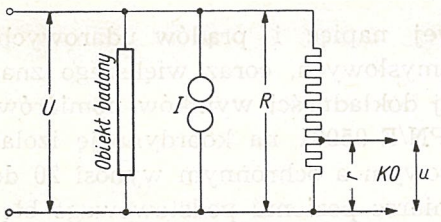
Niniejszy artykuł jest próbą syntezy wyników najnowszych badań i rozważań nad dzielnikami napięcia stosowanymi do pomiarów przebiegów udarowych. Jest on oparty na publikacjach szwedzkich, zamieszczonych w prasie technicznej, opracowaniach wewnętrznych firmy ASEA, na publikacji F. A. Fishera ogłoszonej w Transaction Paper Nr 58—37, jak również na własnych badaniach autorów przeprowadzonych wespół z mgrem O. Bleidornem w Laboratorium Wysokich Napięć w Ludvice.

2. PODSTAWY TEORETYCZNE

2.1. Zasady wykonywania pomiarów i pojęcie „odpowiedzi dzielnika"

Stosując do pomiaru dzielnik napięcia wartość mierzonego napięcia U wyznacza się mnożąc odczytaną na oscylografie lub innym przyrządzie wartość u przez przekładnię dzielnika.

Zatem $U = u\sigma = u\frac{R}{r}$ (rys. 1). W rzeczywistości w ogólnym przypadku $U = u\sigma \pm \delta$, gdzie δ — jest to poprawka dzielnika równa uchybowi dzielnika ze znakiem odwrotnym. Wartość tej poprawki może być znaczna. Jeśli nie jest znany błąd dzielnika, nie można korzystać z tego wzoru, lecz każdorazowo trzeba cechować dzielnik z oscylografem przy pomocy równolegle połączonego iskiernika i stąd pomiar obarczony jest zawsze błędem $\geqslant \pm 5\%$, który daje zazwyczaj sam iskiernik.



Rys. 1. Schemat układu pomiarowego z oporowym dzielnikiem napięcia

Źródła błędów popełnionych przy pomiarze napięć udarowych za pośrednictwem dzielnika napięcia są w ogólnym zarysie dwojakiego rodzaju.

Pierwsze — to oscylacje nakładające się na przebieg udaru na ekranie oscylografu, zniekształcające ten przebieg w stosunku do rzeczywistego i powodujące błędy przy pomiarze zarówno wartości szczytowej

udaru, jak i jego wartości chwilowych. To źródło błędów jest dobrze znane [4]; oscylacje te można różnymi sposobami wytłumić lub usunąć i stąd pochodzące błędy zmniejszyć do minimum. Normy międzynarodowe zalecają takie wytłumienie oscylacji, aby wartość ich amplitudy nie przekraczała w okolicy wartości szczytowej udaru 5% tej wartości, zaś na czole w zakresie do 50% wartości szczytowej — 10% wartości szczytowej [7].

Drugie źródło błędu pomiaru wynika z odkształcenia przebiegu udaru w dzielniku. Odkształcenie to powoduje, że impuls wychodzący z dzielnika napięcia jest inny niż wchodzący do dzielnika. Dochodzimy tu do pojęcia „odpowiedzi", które wymaga szerszego omówienia.

Wyraz „odpowiedź" jest przekładem wyrazu francuskiego „réponse" lub angielskiego „response". Czy używanie w terminologii polskiej wyrazu „odpowiedź" jest właściwe — jest to sprawa nadająca się do dyskusji. Wobec jednak braku odpowiedniego wyrazu technicznego w naszej terminologii będzie on używany w niniejszej pracy.

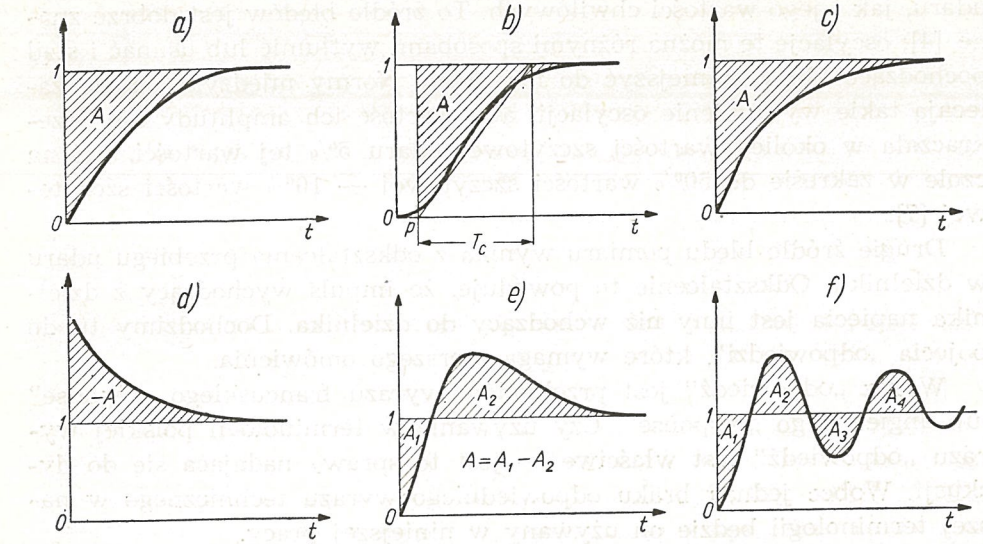
Komisja CEI, Komitet Studiów Nr 42 w swym projekcie normy z marca 1958 r., na próby wysokonapięciowe daje taką definicję pojęcia „odpowiedzi" [7]: „Jest to stosunek (G) pomiędzy zmienną na wejściu a odpowiadającą jej zmienną na wyjściu systemu pomiarowego". Zaznacza się jednak, że nie jest to — biorąc ogólnie — wartość stała, jak np. przekładnia w przekładniku (uwaga autorów), lecz jest to funkcja czasu lub częstotliwości zmiennej mierzonej.

2.2. Odpowiedź na stopień jednostkowy, czas odpowiedzi i analiza błędu przy pomiarze udarów uciętych

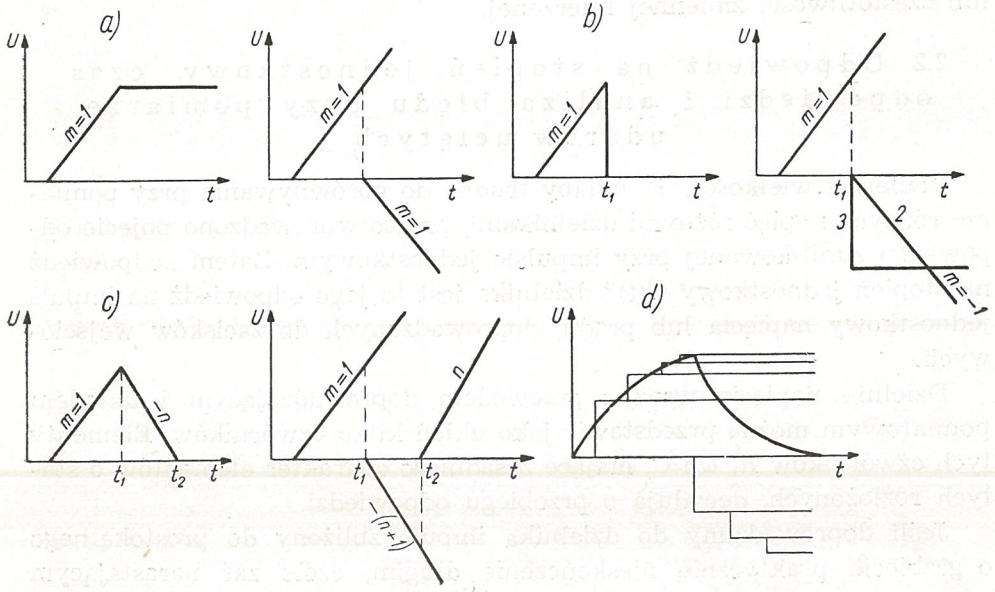
Ponieważ wielkość „G" byłaby trudna do porównywania przy pomiarze różnych napięć różnymi dzielnikami, przeto wprowadzono pojęcie odpowiedzi zunifikowanej przy impulsie jednostkowym. Zatem „odpowiedź na stopień jednostkowy $G(t)$" dzielnika jest to jego odpowiedź na impuls jednostkowy napięcia lub prądu, doprowadzanych do zacisków wejściowych.

Dzielnik napięcia wraz z przewodem doprowadzającym i układem pomiarowym można przedstawić jako układ kilku czwórników. Elementy tych czwórników R, L i C, mające zasadniczo charakter elementów o stałych rozłożonych, decydują o przebiegu odpowiedzi.

Jeśli doprowadzimy do dzielnika impuls zbliżony do prostokątnego o grzbiecie praktycznie nieskończenie długim, czole zaś narastającym w czasie w sposób skończony, to skutkiem istnienia elementów R, L, C w dzielniku tylko czoło impulsu zostanie odkształcone, a pozostała jego



Rys. 2. Różne formy przebiegu odpowiedzi



Rys. 3. Zastąpienie dowolnego przebiegu udarowego szeregiem impulsów pochyłych i prostokątnych

część o wartości ustalonej przełoży się jako wartość ustalona, zmniejszona w stosunku przekładni dzielnika. Dla uproszczenia dalszych rozważań i rysunków ogólna funkcja wejściowa, a także impuls jednostkowy zostaną przeliczone na stronę wyjściową dzielnika i oznaczone odpowiednio przez $h(t)$ lub u oraz przez 1. Tak więc wartości te są przeliczonymi na stronę wtórną funkcjami pierwotnymi przez podzielenie przez przekładnię dzielnika. Przykładając zatem na wejściu do dzielnika jednostkowy impuls prostokątny otrzymamy na wyjściu z dzielnika wartość ustaloną o amplitudzie równej jedności. Czoło jednak tego impulsu wyjściowego nie będzie wzrastało tak stromo jak przy impulsie wejściowym, lecz znacznie łagodniej. Przebieg tego stanu przejściowego będzie różny i zależny od wzajemnego stosunku elementów R, L, C w poszczególnych czwórnikach układu dzielnika.

Rysunek 2 przedstawia różne formy przebiegu odpowiedzi spotykane w praktyce [4].

Zajmiemy się odpowiedzią na impuls jednostkowy prostokątny, ponieważ każdy dowolny przebieg udarowy można przedstawić w formie pewnej liczby elementarnych impulsów prostokątnych. Można zrozumieć to z poniższych przykładów [4] i [6] zilustrowanych na rys. 3, które nie wymagają bliższych komentarzy.

Matematycznie zależność między odpowiedzią na dowolny impuls a odpowiedzią na impuls prostokątny można wyrazić poniższym wzorem przy pomocy całki Duhamela:

$$G = h(t) = \int_0^{\infty} f(\tau) \frac{d}{dt} [G(t-\tau)]\, d\tau ,$$

gdzie:

$h(t)$ — odpowiedź na impuls,

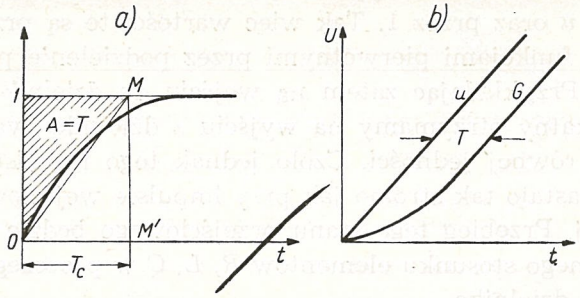
$f(\tau)$ — dowolny impuls,

$G(\tau)$ — odpowiedź dzielnika na impuls prostokątny,

$G(t-\tau)$ = $G(\tau)$ odpowiedź dzielnika na impuls prostokątny, przebiegająca od większych do mniejszych wartości τ, przesunięta o wartość t.

Znając odpowiedź dzielnika na impuls jednostkowy prostokątny można będzie określić, jak wygląda przebieg impulsu odbieranego z dzielnika dla różnych przebiegów impulsu doprowadzonego [3]. Niech będzie dany udar „u" ucięty na czole po krótkim czasie T_u. Można wtedy zastąpić czoło udaru prostą pochyloną do osi pod pewnym kątem, cały zaś udar ucięty przedstawić w postaci trójkąta. Można wykazać, że czoło odpowiedzi dzielnika „G" jest również prostą o tym samym kącie nachylenia, co czoło udaru, lecz opóźnioną w stosunku do niego o czas T. Czas ten nazywamy czasem odpowiedzi dzielnika (rys. 4).

Jak widać z rysunku 4, a na co zwrócili uwagę N. Hylten Cavallius i Romano, czas odpowiedzi dzielnika T jest równoważny pod względem wielkości i wymiaru powierzchni A zawartej pomiędzy impulsem prosto-



Rys. 4. Wyznaczenie czasu odpowiedzi dzielnika
a) odpowiedź na impuls jednostkowy, b) odpowiedź dla czoła udaru uciętego

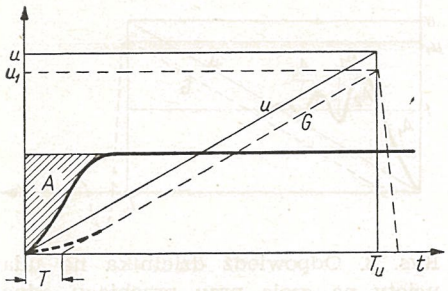
kątnym jednostkowym a odpowiedzią dzielnika na ten impuls. Gdy odpowiedź jest oscylacyjna, należy uwzględnić umowne oznaczenie powierzchni. Powierzchni leżącej poniżej prostej *1* przypisuje się znak plus, zaś powyżej — znak minus. Dlaczego powierzchni A przypisuje się wymiar czasu T, wynika to z prostego rozważania. Na rys. 4a wyprowadzono z początku układu prostą w ten sposób, że odcina ona jednakowe powierzchnie pomiędzy sobą a odpowiedzią po obu swoich stronach. Prosta ta przecina prostą *1* w punkcie M, którego rzutem na oś odciętych jest punkt M'. OM' jest odcinkiem czasu T_c, który w przybliżeniu można by nazwać czasem trwania czoła odpowiedzi. Czas T można wyznaczyć przez powierzchnię $A = T = 1 \cdot \frac{1}{2} T_c$. Widać stąd, że powierzchni A można rzeczywiście przypisać wymiar czasu, przy tym $A = \frac{T_c}{2}$. Rozważanie to nie jest ścisłe. W rzeczywistości czas trwania czoła odpowiedzi należałoby określać jak na rys. 2b. Chodzi tu jednak o zależność jakościową, a nie ilościową pomiędzy T_c i A. Ważny jest tylko stwierdzony doświadczalnie fakt, że czas opóźnienia odpowiedzi na dowolny impuls jest równoważny powierzchni A (tak go się praktycznie wyznacza z przebiegów na oscylografie), a nie to, że $A = \frac{T_c}{2}$, co nie jest ścisłe.

W przypadku odpowiedzi oscylacyjnej tłumionej, jak na rys. 2e, f, czas odpowiedzi $T = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 \ldots = \Sigma A$. Gdy $\Sigma A = 0$, również czas odpowiedzi $T = 0$ i wtedy dzielnik nie daje żadnego błędu przy pomiarze udarów uciętych po odpowiednio długim czasie do ucięcia.

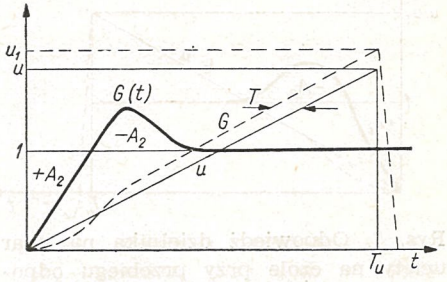
Rozważmy kilka przykładów pomiaru udaru uciętego dla różnych przebiegów odpowiedzi na stopień jednostkowy [4] i [6].

a. Odpowiedź jak na rys. 2a, b, c $A > 0$

W każdym punkcie przebieg odpowiedzi (G) będzie opóźniony w stosunku do impulsu przyłożonego (u) o czas odpowiedzi $T = A$. Mierzymy



Rys. 5. Odpowiedź dzielnika na udar ucięty na czole przy przebiegu odpowiedzi na impuls jednostkowy jak na rys. 2a; u — rzeczywista wartość amplitudy udaru uciętego, u_1 — mierzona wartość amplitudy udaru uciętego



Rys. 6. Odpowiedź dzielnika na udar ucięty na czole przy przebiegu odpowiedzi na impuls jednostkowy jak na rys. 2e ($A_2 > A_1$); u — rzeczywista wartość amplitudy udaru uciętego, u_1 — mierzona wartość amplitudy udaru uciętego

więc na dzielniku zamiast wartości u, wartość u_1. Jeśli czas do ucięcia jest równy T_u, to popełniany przy pomiarze błąd w % wyniesie

$$\delta = \frac{u - u_1}{u} 100\% = \frac{T}{T_u} 100\%.$$

Wzór ten jest słuszny dla $T_u \gg T$. Błąd popełniany przy pomiarze $\Delta u = \frac{T}{T_u} u$. Wartość napięcia mierzona na oscylografie $u_1 = u\left(1 - \frac{T}{T_u}\right)$ jest mniejsza od rzeczywistej.

b. Odpowiedź jak na rys. 2e, przy tym $A_2 > A$, czyli $T < 0$.

Błąd pomiaru wyniesie w tym przypadku $\delta = \frac{T}{T_u} 100\%$ i będzie ujemny. Wartość zmierzona na oscylografie $u_1 = u\left(1 + \frac{T}{T_u}\right)$ jest większa od wartości rzeczywistej.

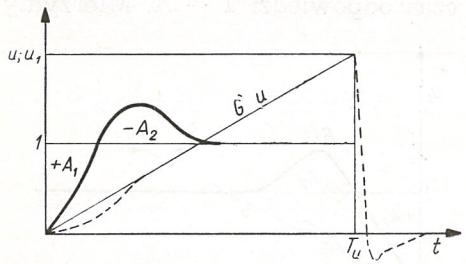
c. Odpowiedź jak na rys. 2e, lecz przy $A_2 = A_1$, czyli $T = 0$.

$\delta = 0$, zaś $u_1 = u$, czyli zmierzymy na oscylografie poprawną wartość udaru uciętego na czole (rys. 7).

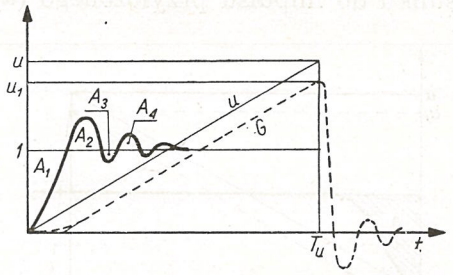
d. Odpowiedź jak na rys. 2f, przedstawiona w formie uproszczonej dla $T = \Sigma A > 0$ (rys. 8).

Wartość zmierzona na oscylografie $u_1 = u\left(1 + \frac{1}{(2\omega_r T_u)^2} \pm \varkappa \frac{1}{\omega_r T_u}\right)$, gdzie $\varkappa$ jest współczynnikiem tłumienia, przy czym $0 \leqslant \varkappa \leqslant 1$.

Interesujące będzie teraz krótkie przeliczenie, jaką wartość czasu od-



Rys. 7. Odpowiedź dzielnika na udar ucięty na czole przy przebiegu odpowiedzi na impuls jednostkowy jak na rys. 2e ($A_1 = A_2$); u — rzeczywista wartość amplitudy udaru uciętego, u_1 — mierzona wartość amplitudy udaru uciętego



Rys. 8. Odpowiedź dzielnika na udar ucięty na czole przy przebiegu odpowiedzi na impuls jednostkowy jak na rys. 2f; u — rzeczywista wartość amplitudy udaru uciętego, u_1 — mierzona wartość amplitudy udaru uciętego

powiedzi T musi mieć dzielnik, aby móc na nim wykonywać pomiary z dokładnością do 2, 3, 5 i 10%.

Zakładając, że będziemy mierzyli udary ucięte po czasie nie krótszym od 0,5 μs ($T_u = 0{,}5$ μs), otrzymamy kolejno:

błąd pomiaru $\delta = 2\,\%$ przy $T = \frac{\delta T_u}{100} = 0{,}02 \cdot 0{,}5 = 10$ mμs,

„ „ $\delta = 3\,\%$ „ $T = \frac{\delta T_u}{100} = 0{,}03 \cdot 0{,}5 = 15$ mμs,

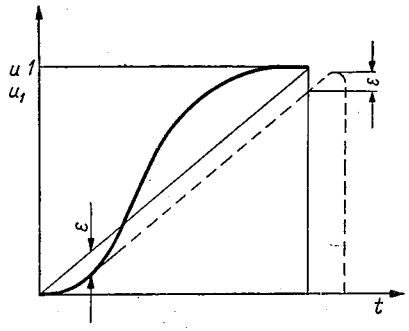
„ „ $\delta = 5\,\%$ „ $T = \frac{\delta T_u}{100} = 0{,}05 \cdot 0{,}5 = 25$ mμs,

„ „ $\delta = 10\%$ „ $T = \frac{\delta T_u}{100} = 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 50$ mμs,

Jak widać z zestawienia, dla pomiarów udarów uciętych na czole z dokładnością do 5% trzeba otrzymać czas odpowiedzi 25 mμs, co dla dzielników na napięcie powyżej 1,5 miliona woltów nie jest łatwe.

Warto tu wspomnieć, że błąd dzielnika nie zawsze będzie równy $\delta = \frac{T}{T_u} 100\%$, lecz w pewnych przypadkach może być mniejszy. Gdy na przykład odpowiedź ma przebieg taki jak na rys. 2b, tj. na początku roś-

nie wolniej, a potem szybciej niż czoło mierzonego impulsu, to po ucięciu udaru mamy jeszcze do czynienia z pewnym wzrostem odpowie-



Rys. 9. Odpowiedź dzielnika na udar ucięty na czole przebiegu odpowiedzi na impuls jednostkowy jak na rys. 2b; u — rzeczywista wartość amplitudy udaru uciętego, u_1 — mierzona wartość amplitudy udaru uciętego

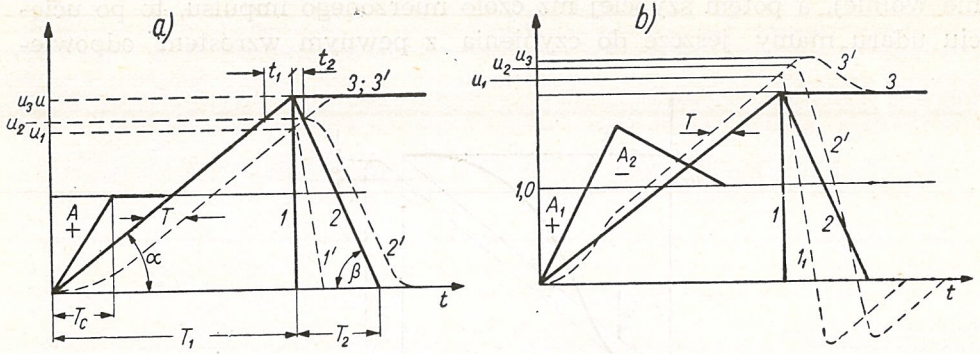
dzi [3]. Wtedy błąd $\delta = \left(\frac{T}{T_u} - \varepsilon\right)100\%$. W większości przypadków współczynnik korekcyjny ε jest jednak pomijalny.

2.3. Pomiary udarów pełnych

Dotychczasowe rozważania odnosiły się tylko do udarów uciętych na czole prostopadle do osi odciętych. Możemy jednak rozważania uogólnić uwzględniając, że ucięcie udaru nie jest natychmiastowe, lecz że jest to prosta odchylona od pionu pod pewnym kątem. W ten sposób rozważymy odpowiedź dzielnika na impuls trójkątowy, który przy doborze odpowiedniego stosunku długości czoła do grzbietu możemy zawsze doprowadzić do udaru znormalizowanego. Zmiany odpowiedzi w zależności od kąta pochylenia grzbietu udaru ilustrują rysunki 10a i 10b [6].

W przypadku „a" mamy do czynienia z dzielnikiem, który daje odpowiedź bezoscylacyjną na impuls jednostkowy prostokątny. W miarę odchylania się grzbietu udaru od pionu błąd maleje, a dla udaru o grzbiecie nieskończenie długim zbliża się do zera. Wartości mierzone na oscylografie: $u_1 < u_2 < u_3 = u$. Można z tego rysunku wnioskować, że błąd pomiaru takiego dzielnika jest tym mniejszy, im udar posiada dłuższy grzbiet.

W przypadku „b" dzielnik daje odpowiedź z przewagą oscylacji w kierunku górnym (overshoot), czyli $A_2 > A_1$. W tym przypadku błąd pomiaru rośnie w miarę wydłużania się grzbietu udaru i osiąga swoje maksimum dla udaru nieskończenie długiego. W obu przypadkach do-



Rys. 10. Odpowiedź dzielnika na udar pełny przy różnym kącie pochylenia grzbietu udaru

a) przy odpowiedzi na impuls jednostkowy całkowicie bezoscylacyjny, b) przy odpowiedzi na impuls jednostkowy z oscylacją ($A_2 > A_1$); u — rzeczywiste wartości amplitudy udaru uciętego, u_1 — mierzone wartości amplitudy udaru przy udarze uciętym, u_2 — mierzone wartości amplitudy udaru przy udarze trójkątnym, u_3 — mierzone wartości amplitudy udaru przy udarze o grzbiecie nieskończenie długim (3)

kładny przebieg odpowiedzi można wykreślić postępując zgodnie ze wskazaniami rys. 3.

Dla przypadku „a" łatwo jest wyprowadzić zależność między uchybem dzielnika a wartościami czasów trwania czoła i grzbietu udaru oraz czasem trwania czoła odpowiedzi. Wystarczy na rys. 10a określić czasy T_1, T_2 i T w sposób uproszczony. Rzeczywiste ich długości powinny być określane tak jak na rys. 11. Z rys. 10a wynika:

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= u \cdot \operatorname{tg}\alpha: \quad t_1 = \Delta u \cdot \operatorname{tg}\alpha \\ T_2 &= u \cdot \operatorname{tg}\beta: \quad t_2 = \Delta u \cdot \operatorname{tg}\beta \end{aligned}\right\}, \quad \text{gdzie } \Delta u = u - u_2 .$$

Stąd czas odpowiedzi $T = t_1 + t_2 = \Delta u \cdot \operatorname{tg}\alpha + \Delta u \cdot \operatorname{tg}\beta$,

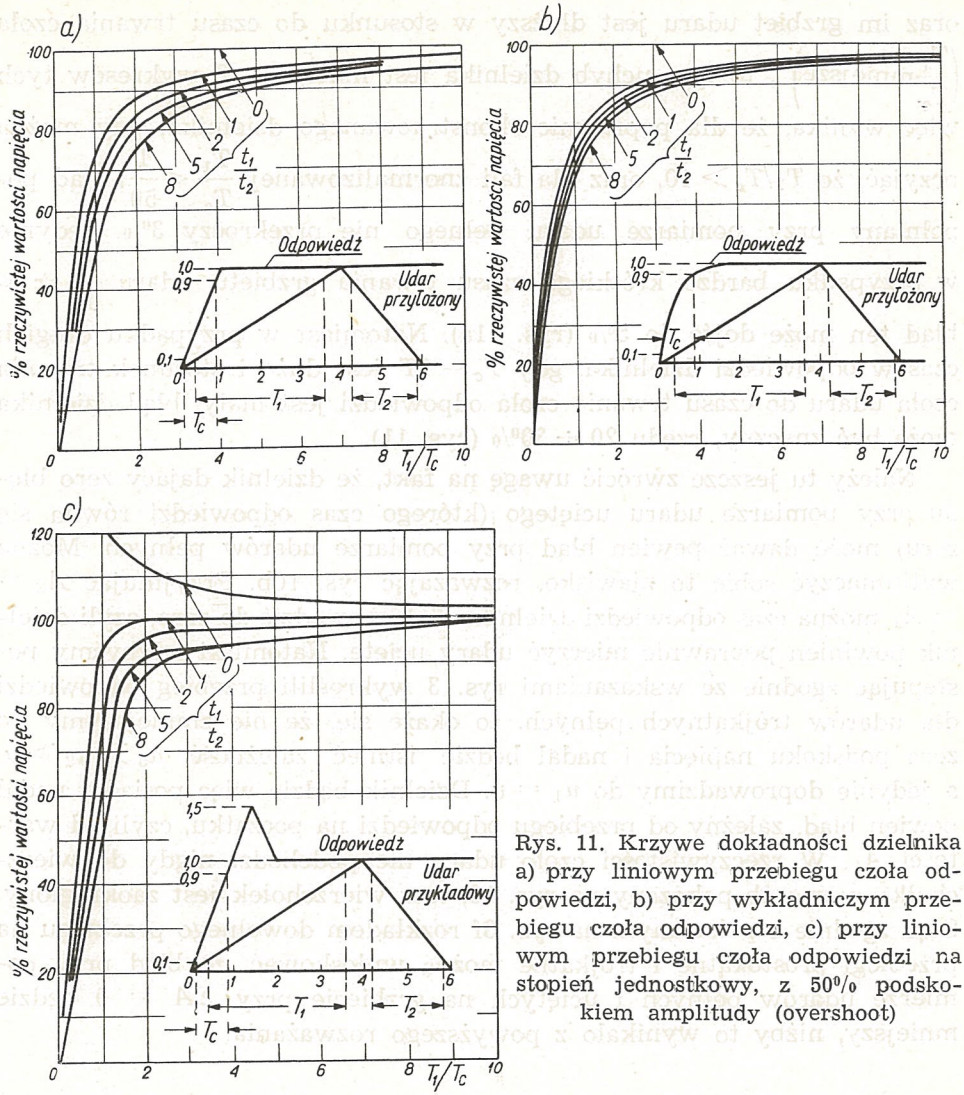
$$T = \frac{\Delta u}{u} T_1 + \frac{\Delta u}{u} T_2 = \frac{\Delta u}{u}(T_1 + T_2).$$

Procentowy błąd pomiaru wyniesie więc:

$$\frac{\Delta u}{u} 100\% = \frac{T}{T_1 + T_2} 100\% \approx \frac{T_c}{2(T_1 + T_2)} 100\% = \frac{100\%}{2\left(\frac{T_1}{T_c} + \frac{T_2}{T_c}\right)}$$

przy założeniu, że $T_c \approx 2T$.

Podobnie można by znaleźć zależności między uchybem dzielnika a czasami T_1, T_2 i T również dla innych przebiegów odpowiedzi na stopień jednostkowy. Rysunki 11a, b, c przedstawiają wykresy sporządzone



Rys. 11. Krzywe dokładności dzielnika a) przy liniowym przebiegu czoła odpowiedzi, b) przy wykładniczym przebiegu czoła odpowiedzi, c) przy liniowym przebiegu czoła odpowiedzi na stopień jednostkowy, z 50% podskokiem amplitudy (overshoot)

i opublikowane przez F. A. Fischera [6], przy czym wykres na rys. 11a odpowiada ściśle zależnościom wyprowadzonym na podstawie rys. 10a. Na osi rzędnych odkładane są wartości pomierzone w procentach wartości poprawnych (jest to stosunek $\frac{u_2}{u}$ 100% wg rys. 10a). Na osi odciętych odłożony jest stosunek T_1/T_c. Poszczególne krzywe na wykresach odnoszą się do różnych stosunków długości czoła do długości grzbietu udaru. Widać z tych przebiegów, że im czoło udaru jest dłuższe w stosunku do czasu trwania czoła odpowiedzi na impuls jednostkowy $\left(\frac{T_1}{T_2}\right.$ większe$\left.\right)$

oraz im grzbiet udaru jest dłuższy w stosunku do czasu trwania czoła $\left(\frac{T_1}{T_2}\text{mniejsze}\right)$, to tym uchyb dzielnika jest mniejszy. Z wykresów tych więc wynika, że dla poprawnie skonstruowanego dzielnika, gdy można przyjąć, że $T_1/T_c > 10$, oraz dla fali znormalizowanej $\frac{T_1}{T_2} < \frac{1}{50}$, błąd popełniany przy pomiarze udaru pełnego nie przekroczy 3%. Jedynie w przypadku bardzo krótkiego czasu trwania grzbietu udaru $\frac{T_1}{T_2} \to \infty$ błąd ten może dojść do 5% (rys. 11a). Natomiast w przypadku długich czasów odpowiedzi dzielnika, gdy $T_c = 2T$ jest duże i stosunek trwania czoła udaru do czasu trwania czoła odpowiedzi jest mały, błąd dzielnika może być znaczny, rzędu 20 ÷ 30% (rys. 11).

Należy tu jeszcze zwrócić uwagę na fakt, że dzielnik dający zero błędu przy pomiarze udaru uciętego (którego czas odpowiedzi równa się zeru) może dawać pewien błąd przy pomiarze udarów pełnych. Można wytłumaczyć sobie to zjawisko, rozważając rys. 10b. Przyjmując $A_2 = A_1$ można czas odpowiedzi dzielnika T doprowadzić do zera, czyli dzielnik powinien poprawnie mierzyć udary ucięte. Natomiast gdybyśmy postępując zgodnie ze wskazaniami rys. 3 wykreślili przebieg odpowiedzi dla udarów trójkątnych pełnych, to okaże się, że nie zmniejszymy do zera podskoku napięcia i nadal będzie istnieć zależność $u_3 > u_2 > u$, a jedynie doprowadzimy do $u_1 = u$. Dzielnik będzie więc posiadał nadal pewien błąd, zależny od przebiegu odpowiedzi na początku, czyli od wartości A_1. W rzeczywistości czoło udaru nie podchodzi nigdy do wierzchołka w sposób pokazany na rys. 10, lecz wierzchołek jest zaokrąglony. Stąd zgodnie z pokazanym na rys. 3f rozkładem dowolnego przebiegu na przebiegi prostokątne i trójkątne można wnioskować, że błąd przy pomierze udarów pełnych i uciętych na grzbiecie przy $\Sigma A = 0$ będzie mniejszy, niżby to wynikało z powyższego rozważania.

2.4. Składowe czasu odpowiedzi

Należy teraz wyjaśnić, co wpływa na wielkość czasu odpowiedzi, a tym samym na wielkość błędów pomiaru dzielnikiem. Znajomość tych przyczyn umożliwia przeprowadzanie systematycznych prac nad udoskonaleniem dzielników [3].

Otóż:

$$T = T_{m1} + T_{m2} + T_c,$$

gdzie:

T_{m1} — składowa czasu odpowiedzi spowodowana istnieniem indukcyjności w dzielniku,

T_{m2} — składowa czasu odpowiedzi ze względu na błąd pomiarowy spowodowany indukcyjnością obwodu pamiarowego (wielkość mała = 3 ÷ 5 mμs),

T_c — składowa czasu wywołana istnieniem rozłożonej pojemności doziemnej dzielnika.

Całkowity błąd (z pominięciem czynnika korekcyjnego $\varepsilon = 0$) wyniesie

$$\delta = \frac{T}{T_u} = \left(\frac{T_{m1}}{T_u} + \frac{T_{m2}}{T_u} + \frac{T_c}{T_u}\right) 100\% .$$

Przy uwzględnianiu zaś czynnika korekcyjnego ε otrzymamy, że błąd jest mniejszy, niż to wynika z sumy błędów, i wyniesie w przybliżeniu:

$$\delta = \left(\frac{T}{T_u} - \varepsilon\right) 100\ \% \approx \frac{\sqrt{T_{m1}^2 + T_{m2}^2 + T_c^2}}{T_u} 100\% .$$

Dla wykonanych dzielników rzeczywistych udział poszczególnych czynników w błędzie całkowitym przedstawia się przykładowo w następujący sposób [3] (tabl. 1):

Tablica 1

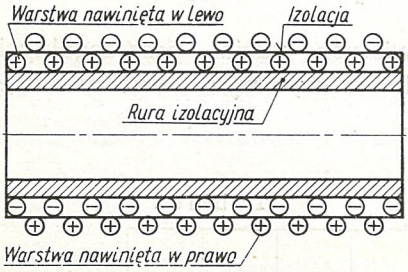
Rodzaj dzielnika \ Czas odpowiedzi w mμs	T	T_{m1}	T_{m2}	T
Małe dzielniki (krzyżowe)	25	0	3	22
„ „ (tkane)	40	15	3	22
Duże dzielniki (krzyżowe)	55	0	5	50
„ „ (tkane)	70	15	5	50

Na podstawie powyższej analizy widzimy, że przy dobrze wykonanych dzielnikach, nawiniętych krzyżowo — czas T_{m1} można doprowadzić prawie do zera, a cały błąd jest wywołany przede wszystkim prądem ładowania pojemności doziemnych dzielnika, czyli czasem T_c. Ponieważ czasu T_{m2}, jako bardzo małego, można nie brać pod uwagę, zatem rozpatrzymy dalej tylko sposoby doprowadzenia do minimum czasu T_{m1} oraz wpływania na zmniejszanie czasu T_c, czyli zmniejszanie błędów pomiarowych dzielników.

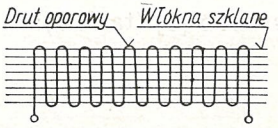
2.5. Sposoby zmniejszania błędów pomiarowych dzielników napięć

2.5.1. Zmniejszanie składowej elektromagnetycznej błędu T_{m1}

W celu zmniejszenia T_{m1} należy zmniejszyć do minimum indukcyjność dzielnika. Dlatego też między innymi robi się dzielniki napięciowe udarowe o możliwie małej oporności, gdyż wtedy wysokość dzielnika otrzymuje się niską, a długość ogólną drutu oporowego i indukcyjność mniejszą. Obecne, nowoczesne dzielniki oporowe, budowane nawet na najwyższe napięcia, nie mają oporności całkowitej większej niż 15 do 20 kΩ. Sprawa niskiej oporności i możliwie małej wysokości dzielnika jest również istotna ze względu na drugi czynnik T_c, gdyż wówczas rozkład pojemnościowy napięcia mniej odbiega od oporowego, co ułatwia kompensację błędu spowodowanego przez T_c. Ponadto stała czasu dzielnika, proporcjonalna do iloczynu RC, jest znacznie mniejsza. Utrzymanie



Rys. 12. Fragment opornika nawiniętego dwuwarstwowo-przeciwsobnie



Rys. 13. Fragment opornika tkanego

niezbyt dużej wartości oporności dzielnika, ze względu na dokładność pomiarów, uważa się w Zakładach ASEA za rzecz tak ważną, że zdecydowano w wielu generatorach udarowych raczej na zmianę oporności rozładowczych niż na podniesienie wartości oporności dzielnika ponad kilkanaście kiloomów.

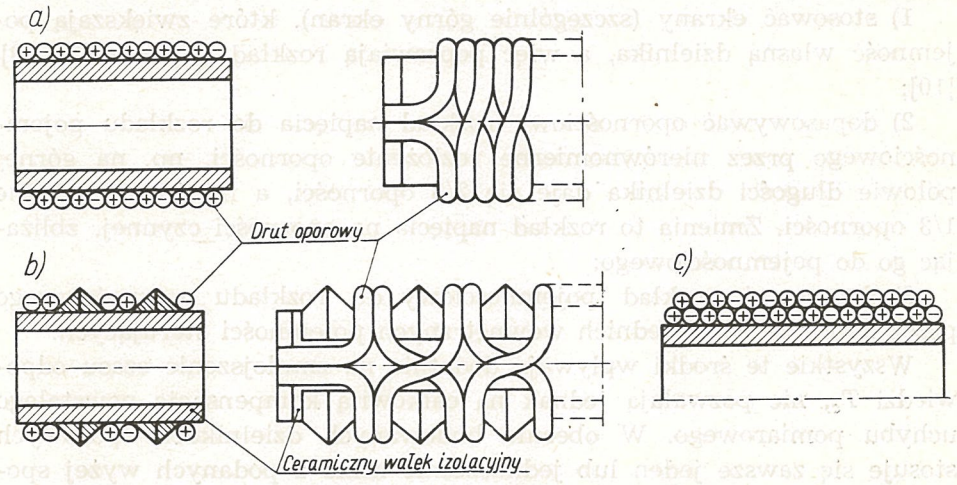
Drugim czynnikiem wpływającym na otrzymanie mniejszej wartości indukcyjności dzielnika jest odpowiednie jego nawinięcie. Z analizy badań oporników do dzielników napięcia, nawiniętych w różny sposób, wynika co następuje.

a. Oporniki nawijane dwuwarstwowo-przeciwsobnie w zastosowaniu do dzielników napięcia nie dają dobrych wyników. Na skutek różnej długości drutów nawojowych nie ma możności dokładnego zrównoważenia

poszczególnych indukcyjności każdego zwoju. Na skutek nierównych potencjałów przy nierównych indukcyjnościach obu gałęzi istnieją możliwości przebicia pomiędzy poszczególnymi warstwami.

b. Oporniki tkane nadają się wprawdzie do obwodów udarowych, jednak przy zastosowaniu do dzielników napięcia wykazują za dużą indukcyjność i ustępują znacznie typowi uzwojenia krzyżowego.

c. Oporniki krzyżowe są najlepszymi opornikami stosowanymi w dzielnikach napięcia. Dwa druty oporowe są w nich nawijane na rurze izolacyjnej jednowarstwowo, ale w dwu przeciwnych kierunkach, tak że



Rys. 14. Fragment opornika krzyżowego
a) nawiniętego równomiernie, b) nawiniętego nierównomiernie, c) nawiniętego dwuwarstwowo

ilość zwojów i ich oporność jest dokładnie taka sama, a indukcyjność jest zrównoważona dla każdego zwoju. Rysunki 14a, b, c pokazują sposoby nawijania [2].

Rozwiązanie z rys. 14c stosuje się w przypadku opornika na większy prąd, gdy trzeba dawać więcej niż jedną warstwę drutu oporowego zamiast stosowania niewygodnego przy nawijaniu drutu o większej średnicy. Wówczas każda warstwa równoważy się sama w sobie.

2.5.2. *Zmniejszanie składowej wywołanej pojemnościami doziemnymi dzielnika* T_c

Po zmniejszeniu prawie do zera wartości czasu T_{m1} cały wysiłek obecnych badań jest skoncentrowany na zmniejszeniu czasu opóźnienia odpo-

wiedzi spowodowanej pojemnościami doziemnymi dzielnika. Wysiłki te idą w kilku kierunkach:

a) Poprawienia nierównomiernego rozkładu napięcia spowodowanego pojemnościami doziemnymi w części wysokonapięciowej dzielnika. Występuje tu podobny rozkład napięcia jak dla łańcucha izolatorów, tj. wg sinh x. Uniemożliwia to korzystanie z przekładni dzielnika, wyliczanej ze stosunku równomiernie rozłożonych oporności. Przy pomiarze napięć udarowych mamy do czynienia w pierwszej chwili z pojemnościowym rozkładem napięcia. Można stosować kilka sposobów dla poprawienia tego stanu rzeczy:

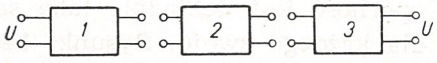
1) stosować ekrany (szczególnie górny ekran), które zwiększają pojemność własną dzielnika, a więc poprawiają rozkład napięcia [8], [9], [10];

2) dopasowywać opornościowy rozkład napięcia do rozkładu pojemnościowego przez nierównomierne rozłożenie oporności, np. na górnej połowie długości dzielnika daje się 2/3 oporności, a na dolnej połowie 1/3 oporności. Zmienia to rozkład napięcia na oporności czynnej, zbliżając go do pojemnościowego;

3) dopasować rozkład pojemnościowy do rozkładu opornościowego przez dobranie odpowiednich wewnętrznych pojemności sterujących.

Wszystkie te środki wpływają dodatnio na zmniejszenie czasu odpowiedzi T_c, nie pozwalają jednak na całkowitą kompensację powstałego uchybu pomiarowego. W obecnie budowanych dzielnikach oporowych stosuje się zawsze jeden lub jednocześnie kilka z podanych wyżej sposobów zmniejszających błędy pomiaru.

b. Dobierania tak elementów R, L, C w części niskonapięciowej dzielnika, aby kompensowały nam one opóźnienie odpowiedzi wywołane w czę-



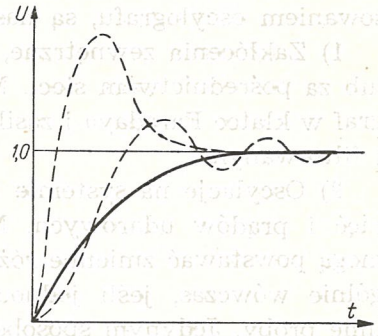
Rys. 15. Układ pomiarowy dzielnika jako trzy czwórniki

ści wysokonapięciowej. Układ pomiarowy dzielnika można przedstawić w postaci połączonych w szereg trzech czwórników (rys. 15).

Pierwszy z nich reprezentuje indukcyjność przewodu doprowadzającego i pojemność doziemną ekranu dzielnika. Drugi z nich reprezentuje oporności i indukcyjności części wysokonapięciowej dzielnika wraz z rozłożonymi pojemnościami doziemnymi. Trzeci przedstawia część niskonapięciową dzielnika.

W pierwszych dwóch czwórnikach udar ulega odkształceniu i wychodzi w formie odpowiedzi o zmienionym kształcie w stosunku do uda-

ru przyłożonego. Koncepcja kompensacji polega na takim dobraniu stałych obwodu trzeciego czwórnika, aby udar uległ w nim działaniu odwrotnemu do tego, które go odkształciło. Dąży się do poprawienia odpowiedzi przez odpowiedni dobór oporności, indukcyjności i pojemności w części niskonapięciowej [5], [8], [9] i [10]. Zmiany tych elementów wpływają rzeczywiście wyraźnie na kształt odpowiedzi, zmieniając jej kształt w szerokich granicach, jak to jest widoczne z rys. 16.



Rys. 16. Zmiany w przebiegu odpowiedzi na impuls jednostkowy, w zależności od zmian parametrów w części niskonapięciowej dzielnika

Ponieważ tą drogą można zmieniać czasy odpowiedzi od wartości dodatnich do ujemnych, wydawałoby się, że jest możliwa zupełna kompensacja uchybów dzielnika, czyli otrzymania odpowiedzi „idealnej". Niestety praktycznie nie udaje się tego osiągnąć, a to przede wszystkim z tego powodu, że kompensujemy elementami skupionymi, podczas gdy przebieg odpowiedzi jest podyktowany elementami rozłożonymi.

Streszczając uwagi dotyczące kompensacji czasu odpowiedzi T_c można stwierdzić, że dzięki poprawieniu rozkładu napięcia dzielnika i doborowi odpowiednich elementów R, L, C w części niskonapięciowej dzielnika udało się zmniejszyć czas odpowiedzi dzielnika średnich napięć (do 1200 kV) do kilkunastu μs, a więc uzyskać wynik zupełnie zadowalający.

2.6. Oscylacje występujące w obwodzie pomiarowym

Wspomniano na początku pracy, że poza błędem wynikającym z przebiegu odpowiedzi można popełnić przy pomiarze błąd na skutek istnienia oscylacji nakładających się na przebieg odpowiedzi. Można tu odróżnić dwa zagadnienia: odpowiedzi oscylacyjnej i oscylacji zakłóceniowych.

a. Odpowiedź oscylacyjna jest spowodowana niewytłumieniem oscylacji powstałych na indukcyjności i pojemności w jednym z obwodów dzielnika. Najczęściej oscylacje te powstają w pierwszym obwodzie, mianowicie na indukcyjności przewodu łączącego obiekt badany z dzielnikiem i pojemności górnego ekranu dzielnika w stosunku do ziemi. Powstający stąd oscylacyjny kształt odpowiedzi łatwo jest wytłumić przez dodatnie przed dzielnikiem bezindukcyjnego opornika, odpowiednio do-

branego do długości przewodu (zazwyczaj kilkaset omów). Drgania powstające w ostatnim obwodzie wyjściowym są wytłumiane niemal zupełnie przez zastosowanie oporności zakończeniowych, o wartości równej oporności falowej kabla.

b. Najczęściej spotykane źródła oscylacji zakłóceniowych, z którymi można spotkać się przy przeprowadzaniu pomiarów udarowych z zastosowaniem oscylografu, są następujące [4]:

1) Zakłócenia zewnętrzne, przenoszące się na oscylograf bezpośrednio lub za pośrednictwem sieci. Można im przeciwdziałać uziemiając oscylograf w klatce Faradaya i zasilając go ze źródła o napięciu staiblizowanym i filtrowanym.

2) Oscylacje na systemie uziemienia, występujące przy pomiarze napięć i prądów udarowych. Między poszczególnymi punktami uziemień mogą powstawać zmienne różnice potencjałów w czasie pomiarów, szczególnie wówczas, jeśli jednocześnie są przeprowadzane w laboratorium inne próby. Jedynym sposobem przeciwdziałania powstającym przy tym drganiom na osłonie kabla pomiarowego jest wyłożenie całego pola generatora probierczego blachą przyłączoną do miejsc wyprowadzenia uziemienia.

3) Trzecie źródło oscylacji wynika z pojemnościowego sprzężenia dzielnika z obiektami sąsiednimi bądź znajdującymi się pod napięciem, bądź uziemionymi. Im większe są ekrany dzielników, im dzielniki są wyższe i im obiekty są bliżej dzielnika, tym powstałe oscylacje są większe i tym bardziej jest odkształcona odpowiedź dzielnika. Można stwierdzić doświadczalnie [9], że zależnie od tego, czy obiekt sąsiedni znajduje się pod napięciem, czy jest uziemiany, czas odpowiedzi może zmieniać się od wartości dodatnich do ujemnych. Możliwe jest takie wyregulowanie i wykonanie dzielnika, że w przypadkach gdy obiekt sąsiedni znajdujący się pod napięciem lub uziemiony będzie znajdował się w odległości równej lub większej od wysokości dzielnika, wpływ wymienionych wyżej oscylacji może być pomijalny.

3. BADANIA DZIELNIKÓW

Badania wykonywane w czasie opracowywania konstrukcji oporowego dzielnika napięcia przeznaczonego do pomiaru udarów uciętych mają na celu znalezienie takiego rozwiązania konstrukcyjnego, które zapewni jak największą dokładność pomiarów amplitudy i kształtu impulsów.

Poniżej opisane są badania wykonane w Laboratorium Wysokich Napięć ASEA w Ludvice [8]. Badania przeprowadzone były w celu opra-

cowania konstrukcji oporowego dzielnika napięcia, który umożliwiłby wykonanie pomiarów udarów uciętych na czole po czasie równym 0,4μs z jak najmniejszym błędem pomiarowym.

Wymagana duża dokładność pomiarów impulsów wysokiego napięcia uwarunkowana jest możliwością otrzymania odpowiedniej charakterystyki „odpowiedzi" dzielnika napięcia. Dzielnik napięcia dający na jednostkowy impuls prostokątny odpowiedź o czasie równym 20 mμs i osiągający ustaloną wartość amplitudy po czasie mniejszym od 0,4 μs pozwoli na pomiar udarów uciętych na czole z czasem do przeskoku 0,4 μs z pięcioprocentowym błędem pomiaru amplitudy. Ten sposób sprawdzenia stawianych wymagań został przyjęty w metodzie badań dzielnika.

Zdecydowano przeprowadzić badania na zmniejszonym modelu dzielnika w skali 1 : 5. W przypadku pozytywnych wyników na małym modelu postanowiono sprawdzić je na modelu w skali 1 : 1 i ostatecznie zdecydować o rozwiązaniu konstrukcyjnym dzielnika.

Przeprowadzanie badań na modelach dzielnika wykonanych w zmniejszonej skali jest celowe ze względu na możliwość łatwego i szybkiego wprowadzania zmian wymiarów poszczególnych części modelu lub rozkładu oporności, a tym samym umożliwia obserwację wpływu dokonywanych zmian na jakość odpowiedzi.

Wyniki pomiarów uzyskane na zmniejszonym modelu dzielnika pozwalają określić wyniki, jakie uzyska się przy pomiarach na właściwym dzielniku napięcia.

Zależność między tymi wynikami można przedstawić następująco. Zmniejszając wymiary dzielnika np. pięciokrotnie, zmniejszamy wartość pojemności dzielnika C względem ziemi w tym samym stosunku. Pojemność tak wykonanego modelu dzielnika jest pięciokrotnie mniejsza. Ponieważ stała czasu dzielnika jest proporcjonalna do iloczynu oporności R i pojemności C, należy odpowiednio zwiększyć oporność R, aby uzyskać taką samą wartość stałej czasu modelu jak dzielnika. Dla ułatwienia obserwacji kształtu odpowiedzi dzielnika stała czasu modelu może być zwiększona przez dobranie wartości oporności R kilkakrotnie większej od wynikającej z przyjętego zmniejszenia pojemności. Oczywiście wtedy ocena odpowiedzi dzielnika na podstawie badań modelu musi być dokonana po przeliczeniu czasu odpowiedzi modelu w pewnej skali wynikającej ze zmiany pojemności C i oporności R. Jeżeli model dzielnika wykonano np. w skali 1 : 5, a skala oporności modelu i dzielnika wynosiła np. 20 : 1, to skala dla oceny czasu odpowiedzi właściwego dzielnika wyniesie 4 : 1, a więc wyniki uzyskane na modelu należy podzielić przez 4, aby uzyskać czas odpowiedzi dzielnika.

3.1. Zakres badań

Badania polegały na:

1) pomiarach rozkładu pola elektrycznego wzdłuż modelu dzielnika,

2) pomiarach przykładanego impulsu prostokątnego do modelu dzielnika.

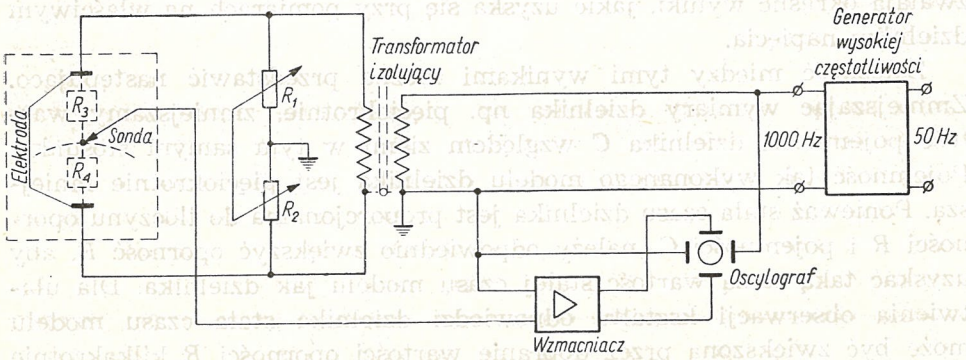
Pomiary wykonano przy różnych rozkładach oporności wzdłuż rdzenia dzielnika sprawdzając jednocześnie: wpływ średnicy górnego ekranu i jego kształtu, zmianę spowodowaną zastosowaniem dodatkowego ekranu dolnego, wpływ zastosowania izolatora w dolnej części dzielnika (pod dolnym ekranem) oraz wpływ wysokości zawieszenia dolnego ekranu i zmiany jego potencjału w stosunku do ziemi.

Wyniki pomiarów pozwoliły ustalić taką konstrukcję dzielnika, która zapewni spełnienie założonych wymagań.

3.2. Pomiary rozkładu pola

Pomiary rozkładu pola zostały wykonane w celu znalezienia pojemnościowego rozkładu napięcia wzdłuż modelu dzielnika. Pomiary wykonano w wannie elektrolitycznej.

Wanna elektrolityczna w Laboratorium Wysokich Napięć w Ludvice o wymiarach ok. 160 × 110 × 30 cm wyposażona jest w sondę wraz



Rys. 17. Schemat układu pomiarowego wanny elektrolitycznej

z układem mechanicznym umożliwiającym przesuwanie jej wzdłuż osi podłużnej i poprzecznej, znacznik do notowania położenia sondy podczas pomiaru, układ pomiarowy działający na zasadzie mostka Wheatstone'a.

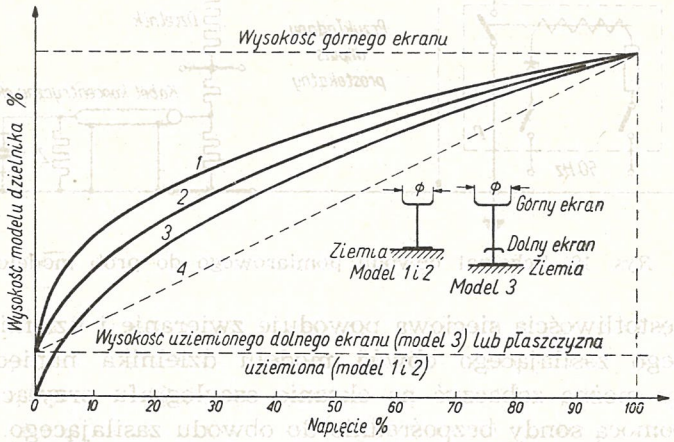
Warunkiem uzyskania właściwych wyników pomiarów w wannie jest wyeliminowanie odkształceń pola, co sprowadza się do takiego usta-

wienia wanny, aby jej ścianki i powierzchnia elektrolitu stanowiły płaszczyzny symetrii badanego obiektu.

W celu wyeliminowania innych czynników wpływających także na dokładność pomiaru użyto sondy o bardzo cienkim ostrzu, zastosowano grafitowanie powierzchni elektrod, zapewniono jednorodność elektrolitu itp.

Schemat układu pomiarowego pokazano na rys. 17.

Warunkiem równowagi układu jest stosunek oporności $R_1 : R_2 = R_3 : R_4$. Oporniki R_1 i R_2 połączone są w ten sposób, że suma oporności $R_1 + R_2$ pozostaje stale niezmienna i wynosi 1000 Ω. Jeżeli son-



Rys. 18. Pojemnościowy rozkład napięcia pomiędzy ekranami modelu oporowego dzielnika napięcia ($R \to \infty$)
1 — górny ekran ⌀ 180 mm, *2* — górny ekran ⌀ 260 mm, *3* — górny ekran Ø 300 mm, dolny ekran Ø 100 mm; *4* — liniowy opornościowy rozkład napięcia

da porusza się w ten sposób, że oscylograf wskazuje równowagę w każdym punkcie jej drogi, to linia wykreślona przez sondę jest linią ekwipotencjalną o potencjale $U\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)$.

Na rys. 18 przedstawiono wyniki pomiarów rozkładu pola elektrycznego wzdłuż modelu dzielnika.

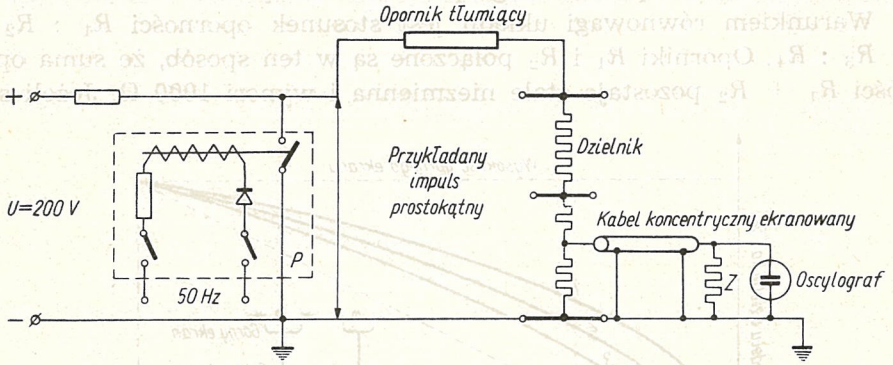
Prosta *4* obrazuje idealny rozkład pola. Krzywe *1* i *2* wyznaczono dla zastosowanych dwóch różnych górnych ekranów. Rozkład pola mierzono w tych przypadkach pomiędzy górnym ekranem a płaszczyzną odwzorowującą powierzchnię ziemi.

Krzywa *3* obrazuje rozkład pola dzielnika z górnym i dolnym ekranem. Ekran dolny nie jest uziemiony i umieszczony został na pewnej wysokości nad powierzchnią uziemioną.

3.3. Pomiary impulsu prostokątnego

W następnej kolejności wykonywania badań przeprowadzono pomiary impulsu prostokątnego przykładanego do modelu dzielnika napięcia. Schemat układu pomiarowego pokazano na rys. 19.

Impulsy prostokątne wytwarzane są za pomocą przekaźnika P (przekaźnik rtęciowy CP Clare & Co typ Hg 1002), który w sposób bezdrga-



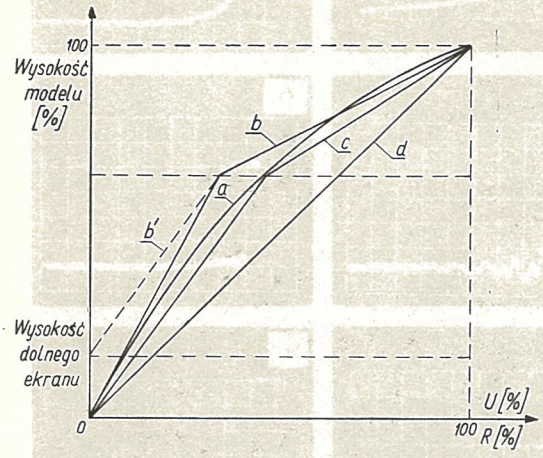
Rys. 19. Schemat obwodu pomiarowego do prób modelowych

niowy z częstotliwością sieciową powoduje zwieranie i uziemianie źródła prądu stałego zasilającego obwód modelu dzielnika napięcia. Impuls przykładany można zobaczyć na ekranie oscylografu przyłączając oscylograf za pomocą sondy bezpośrednio do obwodu zasilającego. Przyłączając oscylograf do obwodu wyjściowego z dzielnika możemy zobaczyć, po odpowiednim wzmocnieniu, odpowiedź, jaką daje dzielnik na przyłożony impuls. Przez odpowiednią synchronizację i dobranie podstawy czasu możemy otrzymać stały obraz czoła impulsu lub czoła odpowiedzi. Do pomiarów zastosowano oscylograf Tektroniks (USA) typ 535 umożliwiający rejestrowanie czasów od 0,02 μsec/działkę oraz posiadający czułość 0,01 V/działkę.

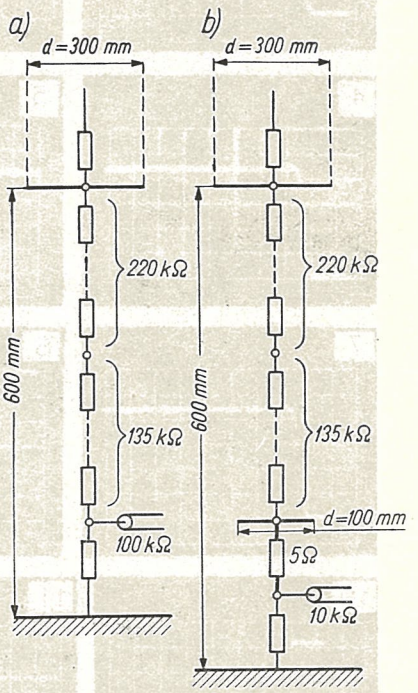
W pierwszej fazie wykonano pomiary stosując zmianę wymiarów górnego ekranu i równocześnie dla każdego wymiaru ekranu zmieniając rozkład oporności wzdłuż długości dzielnika. Rozkład oporności dobierano tak, aby: a) pokrywał się z pojemnościowym rozkładem napięcia, b) powodował większy spadek napięcia w górnej części dzielnika niż w dolnej części, c) powodował mniejszy spadek napięcia w górnej części dzielnika, d) uzyskać liniowy rozkład napięcia. Obrazuje to rys. 20.

Analogiczne pomiary przeprowadzono na modelu dzielnika z dolnym ekranem. Dolny ekran umieszczono na pewnej wysokości nad ziemią. Zmieniano wysokość zawieszenia dolnego ekranu, średnicę ekranu dolnego i górnego oraz potencjał dolnego ekranu.

Na podstawie przeprowadzonych pomiarów stwierdzono, że czas odpowiedzi może być znacznie mniejszy przez zastosowanie górnego ekranu o dużej średnicy i przez rozkład oporności powodujący przeważający spadek napięcia w górnej części dzielnika (wykres b na rys. 20). Rozwiązanie takie nastręcza jednak szereg trudności głównie ze względów



Rys. 20. Wykres rozkładu napięcia (oporności) wzdłuż modelu dzielnika. Wykres a — rozkład oporności pokrywający się z pojemnościowym rozkładem napięcia, wykres b — rozkład oporności powodujący większy spadek napięcia w górnej części dzielnika, wykres b' — jw. (b), lecz z zastosowaniem małej oporności pod dolnym ekranem, wykres c — rozkład oporności powodujący mniejszy spadek napięcia w górnej części dzielnika, wykres d — liniowy rozkład oporności

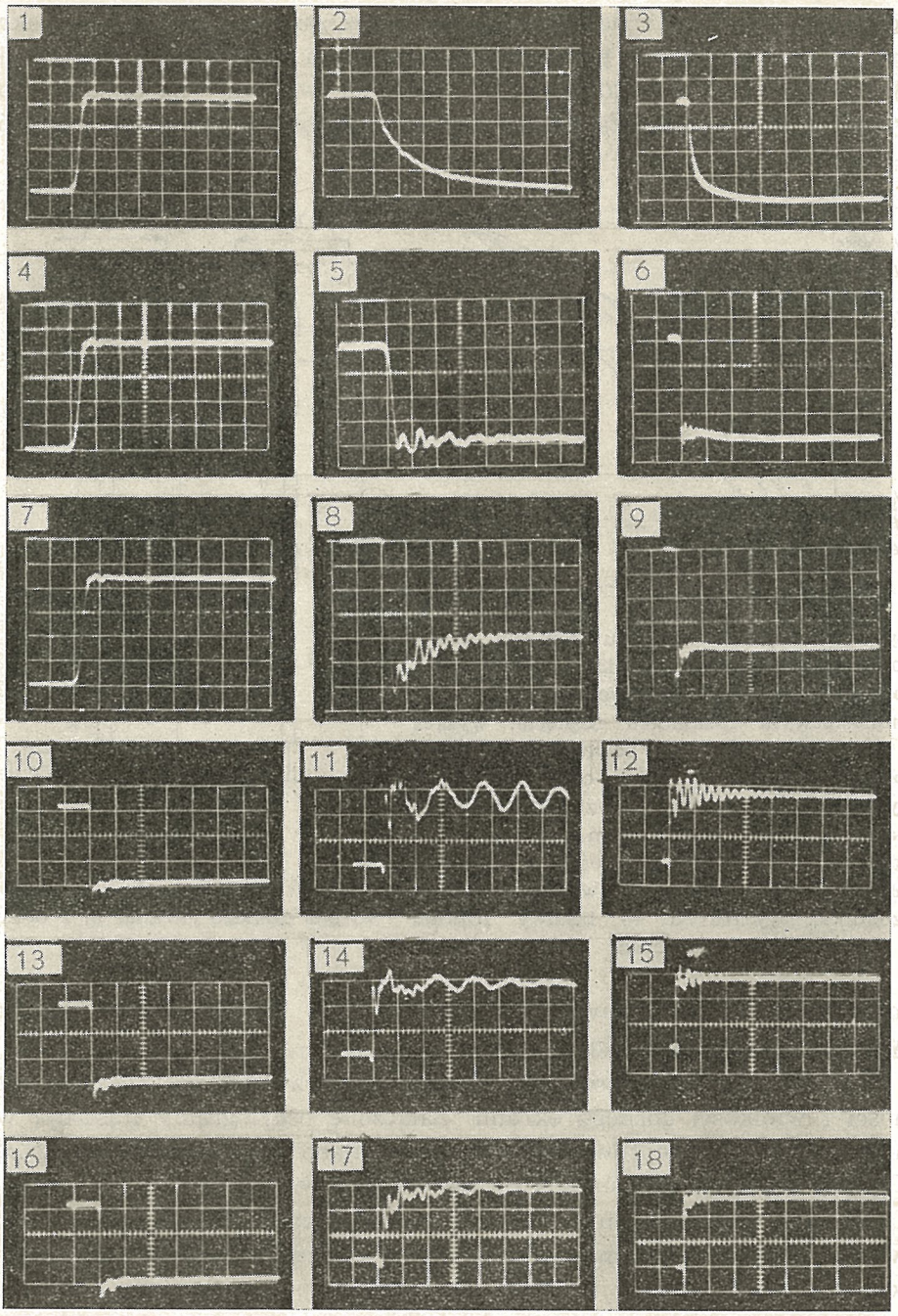


Rys. 21. Modele dzielników napięcia a) bez dolnego ekranu, b) z dolnym ekranem Ø 100 mm

mechanicznych i możliwości przeskoku przy dużym spadku napięcia w górnej części dzielnika.

Analiza wyników pozwoliła ustalić najkorzystniejszy rozkład oporności i wielkości górnego ekranu. Załączone oscylogramy ilustrują wyniki pomiarów przeprowadzonych na modelach wykonanych wg rys. 21. Tablica 2 podaje objaśnienia do oscylogramów.

W celu zlikwidowania oscylacji nakładających się na krzywą odpowiedzi dzielnika wykonano pomiary przy różnych wartościach oporności tłumiącej (oporność r na rys. 21). Długość przewodu doprowadzającego łączącego obiekt badany z dzielnikiem przyjęto wg przewidywanej odległości instalowania dzielnika od obiektu badanego. Drgania powsta-



Rys. 22. Oscylogramy pomiarów wg tabl. 2

jące w obwodzie łączącym oscylograf z dzielnikiem wytłumione zostały przez włączenie równolegle oporności równej oporności falowej łączącego kabla.

Dalsze badania miały na celu ustalenie wpływu przedmiotów obcych znajdujących się bądź pod napięciem, bądź uziemionych, w pobliżu

Tablica 2

Objaśnienie oscylogramów nr 1-18

Oscylogram nr	Impuls Odpowiedź	Podstawa czasu mμs/ działkę	Wysokość dolnego ekranu cm	Długość przewodu doprowadzającego m	Oporność tłumiąca (r) Ω
1	Impuls	100	0	1,3	—
2	Odpowiedź	100	0	„	—
3	Odpowiedź	500	0	„	—
4	Impuls	100	10	„	—
5	Odpowiedź	100	10	„	—
6	Odpowiedź	500	10	„	—
7	Impuls	100	30	„	—
8	Odpowiedź	100	30	„	—
9	Odpowiedź	500	30	„	—
10	Impuls	100	—	4,5	—
11	Odpowiedź	100	—	„	—
12	Odpowiedź	500	—	„	—
13	Impuls	100	—	„	200
14	Odpowiedź	100	—	„	200
15	Odpowiedź	500	—	„	200
16	Impuls	100	—	„	400
17	Odpowiedź	100	—	„	400
18	Odpowiedź	500	—	„	400

dzielnika. Zbliżając lub oddalając je obserwowano zmiany kształtu odpowiedzi. Ponieważ chodzi o uzyskanie właściwych wyników pomiarów niezależnie od ustawienia dzielnika, przyjmując oczywiście pewną minimalną odległość od przedmiotów otaczających, przeprowadzono ponownie dobranie odpowiedniej wielkości ekranów, wysokości ich zawieszenia oraz rozkładu oporności, dążąc tą drogą do ograniczenia obcych wpływów na dpowiedź dzielnika [9]. Na ogół dostateczne zmniejszenie wpływu otoczenia występuje przy minimalnej odległości dzielnika od obcych przedmiotów równej wysokości dzielnika.

Wspomniany poprzednio rozkład oporności dzielnika wg krzywej *b* na rys. 20 można poprawić przez zastosowanie małej oporności pod dol-

nym ekranem. Uzyskuje się tym sposobem podniesienie krzywej rozkładu napięcia (b' na rys. 20) i umożliwia nawet liniowy rozkład oporności pomiędzy ekranami, przewyższający rozkład pojemnościowy.

Korzystne jest doprowadzenie rozkładu pojemnościowego do przebiegu możliwie prostoliniowego przez zastosowanie odpowiedniego ekranu

Rys. 23. Oporowy dzielnik napięcia do pomiarów napięć udarowych produkcji ASEA, typ DVRC-3-1200/Thl. Napięcie pracy 1200 kV, oporność 14000 Ω, czas odpowiedzi < 20 mμs

górnego. Umożliwione jest wtedy stosowanie nawet liniowego rozkładu oporności części wysokonapięciowej dzielnika, która wraz z opornością pod dolnym ekranem daje wykres rozkładu napięcia przebiegający ponad wykresem rozkładu pojemnościowego.

W ujęciu analitycznym tłumaczy się to przez wprowadzenie pewnej funkcji ujemnej określającej czas T_{m1}, który może w sumie z czasem T_c dać wypadkowy czas odpowiedzi $T = 0$.

Rysunek 23 przedstawia oporowy dzielnik napięcia wykonany w ASEA o konstrukcji opracowanej z uwzględnieniem wyżej wspomnianych badań.

4. DZIELNIKI STOSOWANE DO POMIARÓW UDAROWYCH W TECHNICE ŚWIATOWEJ [1], [7] i [10]

Zarówno norma szwedzka SEN-26-1950, jak i projekt normy międzynarodowej na pomiary elektryczne wysokonapięciowe przewidują 3 do 4 typów stosowanych dzielników. Są to:

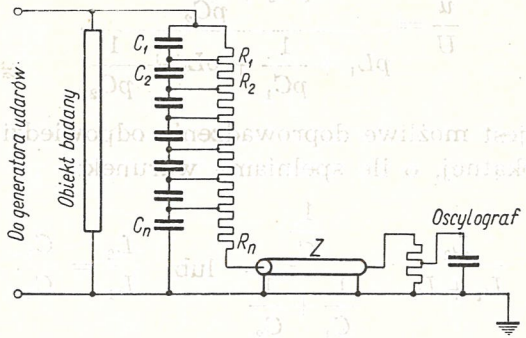
1. dzielniki oporowe,
2. dzielniki oporowe z ekranami,
3. dzielniki mieszane, oporowo-pojemnościowe,
4. dzielniki pojemnościowe.

4.1. Dzielniki oporowe i oporowe z ekranami

Dzielniki oporowe i oporowe z ekranami są dzielnikami opisanymi powyżej. Oporność R i pojemność C tych dzielników dobiera się na ogół tak, aby $RC \leqslant 2\mu s$. Dzielnik oporowy jest odpowiedni do wykonywania pomiarów udarów pełnych, ale dotychczas nie mógł być stosowany do pomiarów udarów uciętych. Dzięki zastosowaniu ekranów i udoskonaleniu tych dzielników mogą one mierzyć wszystkie udary z największą dokładnością. Dziś uważane są one za najlepsze i najprostsze pod względem konstrukcyjnym.

4.2. Dzielniki mieszane

Wartość pojemności i oporności powinna spełniać następujące warunki: $R_x\ C_x = (R_n + Z)C_n = \text{const}$, czyli rozkład oporności powinien



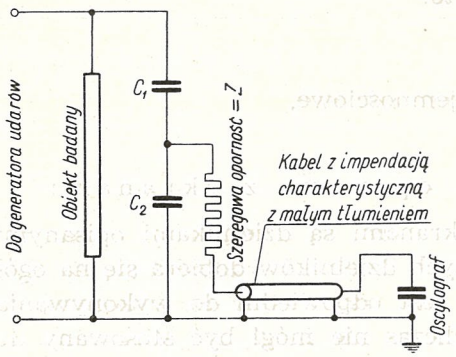
Rys. 24. Dzielnik mieszany pojemnościowo-oporowy

być dostosowany do pojemnościowego. Dobrze skonstruowany tego rodzaju dzielnik nadaje się również do pomiaru udarów uciętych, jest jednak skomplikowany i trudniejszy do wykonania.

4.3. Dzielniki pojemnościowe

Dzielnik pojemnościowy ma tę wadę, że rozłożona pojemność kabla wraz z pojemnościami C_1 i C_2 powoduje błędy polegające na drganiach.

Amplituda tych drgań jest równa $\frac{K}{C_1 + C_2} e$, gdzie e — mierzona wartość napięcia na końcu kabla. Częstotliwość tych drgań jest równa $\frac{1}{2\tau}$, gdzie τ — czas przejścia od źródła do drugiego końca kabla. Błąd ten można zmniejszyć wprowadzając na końcu kabla obwód RC.



Rys. 25. Dzielnik pojemnościowy

Dzielnik pojemnościowy nadaje się dobrze do pomiaru napięć zmiennych wysokiej częstotliwości i do pomiaru udarów długich. Natomiast do pomiarów udarów uciętych nie nadaje się, gdyż występują duże drgania na początku odpowiedzi i stąd duży błąd pomiaru. Oscylacje te powstają na pojemnościach dzielnika i indukcyjności przewodu doprowadzającego [10]. Jeśli przez L_1 nazwiemy indukcyjność tego przewodu, przez C_1 i C_2 — pojemności pierwotną i wtórną dzielnika, a przez L_2 — indukcyjność dodatkową po stronie wtórnej, to otrzymamy wyrażenie na odpowiedź dzielnika

$$\frac{u}{U} = \frac{pL_2 + \frac{1}{pC_2}}{pL_1 + \frac{1}{pC_1} + pL_2 + \frac{1}{pC_2}}.$$

Teoretycznie jest możliwe doprowadzenie odpowiedzi do funkcji jednostkowej prostokątnej, o ile spełniamy warunek:

$$\frac{L_2}{L_1 + L_2} = \frac{\frac{1}{C_2}}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \quad \text{lub} \quad \frac{L_2}{L_1} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Przy małych jednak wartościach L_1 praktycznie niemal niemożliwe jest dobranie tak małego L_2 (w mμH), aby ten warunek mógł być spełniony. Stąd w tego rodzaju dzielnikach zawsze wystąpią silne drgania w odpowiedzi, uniemożliwiające pomiary udarów stromych.

Przy wszystkich dzielnikach indukcyjność przewodów na wejściu powoduje błąd pomiarów $\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{LC}{t_u^2}$ 100%, gdzie Δ jest to błąd pomiaru, zaś t_u — czas do przeskoku [1].

5. ZAKOŃCZENIE

Istnieją duże możliwości popełniania znacznych błędów przy pomiarach udarowych, szczególnie gdy stosuje się dzielniki, które nie są bliżej znane i dokładnie sprawdzone. Dlatego zwrócenie baczniejszej uwagi na konstrukcję i badanie dzielników napięcia w naszych laboratoriach wydaje się rzeczą konieczną. Dobre dzielniki umożliwiają wykonywanie dokładnych pomiarów udarów uciętych, co pozostaje nie bez znaczenia dla szeregu ważniejszych pomiarów udarowych, przeprowadzanych w laboratoriach.

Politechnika Warszawska
Zakład Przyrządów Rozdzielczych *Zakład Kabli i Przewodów*

WYKAZ LITERATURY

1. SEN — 26 — 1950E — Voltage Tests.
2. Pirkt l E.: Biffilar Wound Resistances. The Calculation of the Inductance Value and Discussion of Different Ways of Windings. — TM-5249-(1955 r.). — Publikacja wewnętrzna ASEA.
3. Gary C.: Surge Measurements on Lowohmic Resistive Voltage Dividers — TM-9099 (1956 r.). — Publikacja wewnętrzna ASEA.
4. Hylten-Cavallius N.: Essais de choc et erreurs de mesure. — ASEA-Revue, nr 4, 1957.
5. Dillon T. Tufto: Kompensering av en spännings delares kapacitans till jord modelst en induktans. Thl 1 — Publikation — Reg 097 — 1957 r. — Publikacja wewnętrzna ASEA.
6. Fisher F. A.: Transient Response of Impulse Voltage Dividers. — Transactions Paper nr 58-37, 1958.
7. CEI — Comité d'études nr 42: Technique des essais à haute tension. Mars 1958.
8. Hylten-Cavallius N., Bleidorn O., Włodarski R.: Improvement of the Response Characteristic of Large Volgate Dividers for Rapid Impulses — A — 1031a — 1958 — protokół wewnętrzny pomiarów ASEA.
9. Hylten-Cavallius N., Auleytner K.: Essais d'un diviseur à faible resistance pour ondes de choc jusqu'a 700, 1200 et 2000 kV — valeur de crête. — A — 1069, 1069a e + 1069b. 1958 — 3 protokoły wewnętrzne pomiarów ASEA.
10. Hylten-Cavallius N.: High Voltage Measuring Devices and Measuring Errors — TM — 9184 — 1958. — Publikacja wewnętrzna ASEA.
11. Berger K. W.: Report on the Work of the Study Committee. No 8. Comparative Tests on Spark Gaps. — CIGRE 1956. Report 326.
12. Howard P. R.: Errors in Recording Surge Voltages. — Proc. IEE 99 (1952) Part 2, No 70, p. 371—383.
13. Rohlfs A. F., Kresye G. F., Fischer F. A.: The Response of Resistance Voltage Divider to Steep Front Impulse Waves. — AIEE, Conference Paper No 57—353.
14. Romano M. A.: Étude des diviseurs de tension en régime permanent. — Revue générale d'Electricité 65 (1956):5, p. 289—300.

К. АУЛЕЙТНЕР, Р. ВЛОДАРСКИ

РЕЗИСТИВНЫЕ ДЕЛИТЕЛИ НАПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЙ ИМПУЛЬСНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Резюме

В статье проводится анализ вопроса измерения амплитуды и формы импульсных напряжений с использованием резистивных делителей напряжения с достаточной для практических целей точностью. Обсуждены погрешности измерений и причины их возникновения.

В введении изложено понятие переходной характеристики („ответа") делителя, определяющей отношение входного импульса к получаемому из делителя выходному импульсу. После определения понятия „ответа" в случае входного импульса в виде единичного ступенчатого напряжения, и, в дальнейшем, времени „ответа" — авторы приводят ряд примеров переходных процессов и описывают влияние формы этих процессов на точность измерений импульсов со срезанным фронтом. Результаты этих обсуждений дают возможность определения максимальных допускаемых значений времени „ответа", которыми могут характеризоваться делители для произведения измерений импульсных напряжений с точностью в 2, 3, 5 и 10%.

В дальнейшем описано влияние формы „ответа" на точность измерений полных и срезанных в спинной части импульсов. Уменьшение времени „ответа" является условиеи получения требуемой точности. Время „ответа" можно разложить на отдельные составляющие, вносимые индуктивностью и ёмкостью делителя или индуктивностью измерительной схемы. Способы уменьшения погрешности измерения состоит в основном ограничении отдельных составляющих времени „ответа" путём подбора соответственных значений R, L и C характеризующих делитель и измерительную схему. В этой части работы, при обсуждении методов компенсации погрешностей измерений, принято также во внимание осциллации выступающие в измерительной схеме и изложены способы подавления их.

В следующей части статьи описаны испытания, проведённые в Лаборатории высоких напряжений АСЭА в Швеции во время разработки конструкции резистивного делителя напряжения для измерения импульсных напряжений срезанных на фронте с временем разряда равным 0,4 мксек.

Испытания были произведены на образце разистивного делителя напряжения. Приложены старания для получения таким путём самого лучшего подбора параметров делителя, с целью обеспечения значительной точности измерений. Результаты измерений иллюстрированы приведенными в статье осциллограммами.

В заключительной части статьи описываются вкратце другие типы делителей, применяемые в технике измерений импульсных напряжений.

K. AULEYTNER, R. WŁODARSKI

RESISTANCE VOLTAGE DIVIDERS FOR IMPULSE TESTS

Summary

The present paper analyzes the problems of measuring the amplitude and shape of impulse voltages with accuracy sufficient for practical purposes. The measuring errors and the causes of their occurrence are discussed.

The concept of „the response" of the divider, which characterizes the ratio of the input and output impulse of the divider, is discussed in the introduction. After having characterized the concept of the response to the unit step, and then the time of the response, the authors cite a number of examples of responses, and discuss the effect of the shape of these responses on the accuracy of measurement of front chopped impulses. The results of the considerations permit determination of the highest admissible values of the time of responses which can characterize dividers, so as to perform measurements of impulse voltages with an accuracy of 2, 3, 5 and 10%.

The subsequent part of the paper is concerned with the effect of the response on the accuracy of full impulse voltages and impulses chopped on the crest. The decrease in the time of the divider response is a condition of obtaining the accuracy desired. The time of the response can be divided into individual components, caused by the inductance and capacitance of the divider, or by the inductance of the measuring circuit. The methods of decreasing the measuring error mainly consist in limiting the individual components of the time of the response by means of a suitable selection of the values R, L, and C characterizing the divider and the measuring circuit. In this part of the paper, in the discussion of the methods of compensation of the measuring errors, the attention is directed to the oscillations occurring in the measuring circuit, and the ways of limiting them are given.

The subsequent part of the paper deals with the investigations carried out at the High-voltage Laboratory ASEA in Sweden, when working out the construction of a resistance voltage divider for measuring front chopped impulses, with the time to chopping equal to 0,4 μs.

The investigations were performed on a model of the resistance voltage divider. It was thus attempted to obtain the most suitable choice of the divider parameters, in order to secure a high accuracy of measurements. The measurement results are shown in the oscillograms given in the paper.

The final chapter briefly discusses other types of dividers being used in the technique of impulse tests.

621.314.7

BOHDAN MROZIEWICZ

Współczynnik dobroci tranzystora warstwowego i możliwości jego zwiększenia przez wprowadzenie pola wewnętrznego do obszaru bazy

Rękopis dostarczono 19.9.1958

W pracy omówiono zagadnienie oceny właściwości tranzystora warstwowego przy wielkich częstotliwościach. Za podstawę do oceny obrano współczynnik dobroci tranzystora. Przeprowadzono analizę wartości współczynnika dobroci tranzystorów dyfuzyjnych i rozpatrzono możliwości jego zwiększenia drogą ulepszenia konstrukcji tranzystora. Podano następnie zasadę konstrukcji tranzystorów dryftowych i porównano współczynnik dobroci tych tranzystorów ze współczynnikiem dobroci tranzystorów dyfuzyjnych. W zakończeniu skreślono kilka uwag o możliwościach praktycznego wykonania tranzystorów dryftowych.

1. KRYTERIUM OCENY WŁAŚCIWOŚCI TRANZYSTORA NA WIELKICH CZĘSTOTLIWOŚCIACH

Wielkości, która mogłaby służyć za podstawę do oceny właściwości tarnzystora na wielkich częstotliwościach, należy postawić następujące wymagania [1]:

1) powinna ona charakteryzować tylko właściwości tranzystora, nie powinna natomiast zależeć od sposobu jego włączenia i elementów obwodu współpracującego z tranzystorem,

2) powinna mieć dostatecznie jasny sens fizyczny i być łatwo określana eksperymentalnie.

Z analizy tych wymagań wynika, że szukana wielkość musi być niezmiennikiem transformacji równań czwórnika $Z\ (Y, h)$ do równań pewnego innego czwórnika $Z'\ (Y', h')$. Rozwiązanie tego problemu wskazuje, że poszukiwanym niezmiennikiem jest następujące wyrażenie [2]:

$$k_p = \frac{|Z_{21} - Z_{12}|^2}{4(R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21})} = \frac{|Z'_{21} - Z'_{12}|^2}{4(R'_{11}R'_{22} - R'_{11}R'_{21})}. \tag{1}$$

Ponieważ otrzymane wyrażenie przedstawia niezmiennik dla dowolnych transformacji od układu Z do Z', można wykazać, że jednym z możliwych wariantów transformacji jest wypadek, kiedy

$$Z' = \begin{vmatrix} Z'_{11} & 0 \\ Z'_{21} & Z'_{22} \end{vmatrix} \tag{2}$$

tzn. $Z'_{12} = 0$ (lub odpowiednio $Y'_{12} = 0$, $h'_{12} = 0$).

Warunek $Z'_{12} = 0$ oznacza, że nie ma oddziaływania między zewnętrznymi zaciskami tranzystora. Wzmacniacz o takiej właściwości nosi nazwę wzmacniacza skompensowanego. Biorąc pod uwagę warunek (2) otrzymujemy wyrażenie (1) w następującej postaci:

$$k_v = \frac{|Z'_{21}|^2}{4 R'_{11} R'_{22}}. \tag{3}$$

Przedstawia ono współczynnik maksymalnego wzmocnienia mocy skompensowanego wzmacniacza Z'. Ponieważ grupa możliwych transformacji obejmuje również i takie, które polegają na zmianie roli dowolnej z elektrod, nasz niezmiennik nie zależy od sposobu połączenia tranzystora.

Widzimy zatem, że wielkość (3) w pełni odpowiada sprecyzowanym wyżej wymaganiom i może być przyjęta za kryterium oceny tranzystora.

Z analizy układów zastępczych tranzystora włączonego zarówno z uziemioną bazą, jak i emiterem wynika, że współczynnik maksymalnego wzmocnienia mocy na wysokich częstotliwościach da się wyrazić przez następujące wyrażenie [3], [4], [5], [6]:

$$k_{p\,max} = \frac{0{,}25}{\omega^2}\left(\frac{\alpha_0\,\omega_\alpha}{r_{b'}\,C_{kb'}}\right), \tag{4}$$

gdzie:

α_0 — współczynnik wzmocnienia prądowego dla małych częstotliwości,

ω — pulsacja graniczna ze względu na α,

$r_{bb'}$ — oporność bazy,

$C_{kb'}$ — pojemność kolektora włączona zgodnie ze schematem zastępczym z rys. 1.

Oznaczając

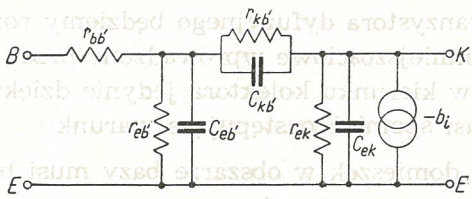
$$\frac{0{,}25\,\alpha_0\,\omega_\alpha}{r_{bb'}\,C_{kb'}} = 4\pi^2 M$$

otrzymujemy:

$$k_{p\,max} = \frac{M}{f^2}, \tag{5}$$

$$M \approx \frac{\alpha_0 f_\alpha}{25\, r_{b'} C_{kb'}}\ ^{1}). \tag{6}$$

Określony w ten sposób współczynnik M decyduje o maksymalnym wzmocnieniu tranzystora przy danej częstotliwości. Z uwagi na tę właści-



Rys. 1. Schemat zastępczy tranzystora na wielkich częstotliwościach

wość będziemy nazywali go współczynnikiem dobroci tranzystora.

Należy zwrócić uwagę, że podane wyrażenie jest słuszne jedynie dla częstotliwości zawierających się w granicach [6], [22]:

$$0{,}05 \div 0{,}1 < \frac{f}{f_\alpha} < 2\,. \tag{7}$$

Ponadto stosuje się ono jedynie do tranzystorów ze skupioną opornością bazy (tranzystor stopowy) i w normalnym zakresie prądowym.

Częstotliwość, przy której $k_{p\,max} = 1$, jest graniczną wartością częstotliwości, poza którą tranzystor przestaje być elementem wzmacniającym. Oznaczana ona jest przez f_{max} i nosi nazwę maksymalnej częstotliwości wzmocnienia bądź też maksymalnej częstotliwości generacji.

$$f_{max} = \sqrt{\frac{\alpha_o f_\alpha}{25\, r_{bb'} C_{kb'}}} = \sqrt{M} \tag{8}$$

Wyrażenie (8) może być łatwo obliczone lub też zmierzone bezpośrednio w odpowiednim układzie generacyjnym [1]. Z uwagi na tę oczywistą zaletę współczynnik dobroci M może być uznany za jeden z najważniejszych parametrów tranzystora na wielkich częstotliwościach. W dalszej części pracy posłuży on za punkt wyjścia przy porównaniu właściwości tranzystorów dyfuzyjnych i dryftowych.

---

[1]) f_α jak również szereg innych oznaczeń przyjętych w pracy, objaśniono w zestawieniu zamieszczonym na końcu artykułu.

2. TRANZYSTOR DYFUZYJNY

2.1. Analiza współczynnika dobroci M tranzystorów dyfuzyjnych z przejściami stopowymi

Pod pojęciem tranzystora dyfuzyjnego będziemy rozumieli tranzystor, w którym nośniki mniejszościowe wprowadzone przez emiter do obszaru bazy poruszają się w kierunku kolektora jedynie dzięki zjawisku dyfuzji. Tranzystor taki musi spełniać następujące warunki:

1. Koncentracja domieszek w obszarze bazy musi być stała

2. Poprzeczne pole elektryczne E pochodzące od spadku napięcia na warstwie bazy może być zaniedbane

3. Gęstość wprowadzonych nośników mniejszościowych w obszarze bazy musi być mała w porównaniu do gęstości nośników większościowych. Oznacza to, że pole przyspieszające, powstałe w wyniku zmiennej koncentracji wprowadzonych ładunków, może być pominięte i nie wpływa na wielkość stałej dyfuzji D.

Praktycznym przykładem tranzystora spełniającego w przybliżeniu wymienione warunki może być tranzystor wykonany techniką stopową, pracujący przy małych prądach. Dalsze rozważania w tym rozdziale ograniczą się do tranzystorów tego typu, przy czym wpierw zostaną omówione elementy wzoru (6), a następnie ich wpływ na współczynnik M.

2.1.1. Współczynnik wzmocnienia prądowego α_0 tranzystora dyfuzyjnego

Współczynnik wzmocnienia prądowego równa się z definicji

$$\alpha = \frac{-\partial I_k}{\partial I_e}\bigg|_{U_k = \text{const}} \tag{9}$$

Wartość α znajduje się dla tranzystora warstwowego przez rozwiązanie równania dyfuzji, rządzącego ruchem nośników przez obszar bazy. Zagadnienie to zostało rozwiązane przez wielu autorów [19], [13]. Poniżej będą przytoczone wyniki uzyskane przez Krömera [13]. Rozpatruje on równanie dyfuzji w następującej postaci:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{2}{f}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{D_p}\cdot\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{L^2}\left(p - p_a e^{\frac{2}{f}(x-a_0)}\right), \tag{10}$$

gdzie:

$$L_p = \sqrt{D_p \tau_p}$$

$$f = \frac{2kT}{eF},$$

F — natężenie pola w obszarze bazy,

$$b = b_0 + b_1 U_k e^{i\omega t}, \quad b_1 > 0$$

$$a = a_0 - a_1 U_e e^{i\omega t}, \quad a > 0,$$

$$W_b = b_0 - a_0,$$

(oznaczenia a_0 i b_0 według rys. 4).

Zakładając warunki brzegowe według Shockleya i Early'ego

$$p(a_0) = p_a e^{\frac{eU_e}{kT}} \left(1 + \frac{eU_e}{kT} e^{i\omega t}\right), \tag{11}$$

$$p(b) = p(b_0) + p'(b_0) b_1 U_k e^{i\omega t} = 0$$

oraz przyjmując $F = 0$ Krömer otrzymuje wyrażenie na α w następującej postaci:

$$\alpha = \beta \cdot \gamma = \frac{\gamma}{\cosh \frac{W_b}{\lambda}}, \tag{12}$$

gdzie:

γ — współczynnik wydajności emitera,

λ — współczynnik spełniający zależność:

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1 + i\omega\tau_p}{D_p \tau_p} = \frac{1}{L_p^2} + \frac{i\omega}{D_p}. \tag{13}$$

Dla małych częstotliwości przyjmując $\omega \to 0$ otrzymujemy:

$$\alpha_0 = \frac{\gamma_0}{\cosh \frac{W_b}{L_p}} = \gamma_0 \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{W_b}{L_p}\right)^2\right], \tag{14}$$

gdzie:

$$\gamma_0 = \frac{1}{1 + \left(\frac{D_n}{D_p}\right)\left(\frac{n_e}{p_b}\right)\left(\frac{W_b}{L_n}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_b}{\sigma_e} \cdot \frac{W_b}{L_n}},$$

σ_b, σ_e — przewodność bazy i emitera,

L_n — droga dyfuzyjna elektronów w obszarze emitera

$$L_n = \sqrt{D_n \tau_n},$$

D_n — stała dyfuzji dla elektronów,

τ_n — czas życia elektronów w obszarze emitera.

2.1.2. *Częstotliwość graniczna tranzystora dyfuzyjnego*

Częstotliwością graniczną tranzystora nazywamy częstotliwość, przy której moduł współczynnika wzmocnienia prądowego α spada o 3 dB w stosunku do swej wartości dla niskiej częstotliwości. Wartość f znajdujemy rozpatrując wyrażenie (12).

$$\alpha = \frac{\lambda}{\cosh \frac{W_b}{\lambda}}. \tag{15}$$

Ponieważ γ w pierwszym przybliżeniu nie zależy od częstotliwości i jest bliskie jedności, możemy napisać na podstawie (13)

$$\alpha = \beta = \operatorname{sech}\left[\left(1 + i\,\omega\tau_p\right)^{\frac{1}{2}} \frac{W_p}{L_b}\right]. \tag{16}$$

Jest to wyrażenie identyczne do otrzymanego przez Steela [19]. Dla przypadku $\frac{W_b}{L_p} \ll 1$, który jest zwykle spełniony dla tranzystorów dyfuzyjnych, możemy napisać:

$$\alpha = \beta = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}(1 + i\,\omega\tau_p)\frac{W_b^2}{L_p^2}}, \tag{17}$$

stąd zgodnie z definicją:

$$\omega_\alpha = \frac{2}{\tau_p}\left(\frac{L_p}{W_b}\right)^2 = \frac{2\,D_p}{W_b^2}. \tag{18}$$

Jak wynika z wyrażenia (17), α jest wielkością zespoloną. Przesunięcie fazowe φ wg Shockleya [7] wyraża się następującą zależnością:

$$\varphi \approx \operatorname{arctg}\left(-\frac{\omega}{\omega_\alpha}\right). \tag{19}$$

2.1.3. *Interpretacja fizyczna zmniejszenia α ze wzrostem częstotliwości*

Spadek α ze wzrostem częstotliwości jest konsekwencją dyfuzyjnego ruchu nośników. Z istoty tego ruchu wynika, że czas przejścia drogi emiter-kolektor przez poszczególne nośniki ulega dyspersji. Pociąga to za

sobą dyspersję faz nośników przybywających do kolektora. Określona ona jest przez następujący związek:

$$\Delta\varphi = \omega \Delta t_0, \tag{20}$$

gdzie:

$\Delta\varphi$ — różnica faz,
ω — pulsacja sygnału,
Δt_0 — różnica czasu przejścia.

Wynika stąd, że przyłożony do emitera impuls prostokątny po dojściu do kolektora straci swój pierwotny kształt. Stopień degeneracji impulsu będzie proporcjonalny do czasu przejścia nośników przez obszar bazy i może być miarą obcinania przez tranzystor składowych harmonicznych. Czas przejścia nośników może być określony podobnie jak znana zależność:

$$L_p = \sqrt{D_p \tau_p};$$

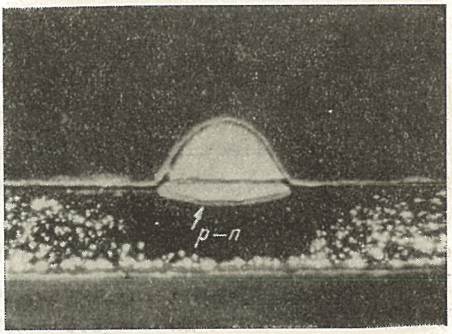
wynosi on

$$t_0 = \frac{W_b^2}{D_p}. \tag{21}$$

Biorąc pod uwagę zależność (18) znajdujemy

$$\omega_a = \frac{2}{t_0}, \tag{22}$$

$$f_a = \frac{1}{\pi t_0}.$$



Rys. 2. Obraz poprzecznego przekroju złącza p-n uzyskanego przez wtopienie indu w german typu n

Oznacza to, że skrócenie czasu przelotu nośników jest warunkiem koniecznym do podniesienia częstotliwości granicznej tranzystora. Podane wyżej uwagi dotyczyły teoretycznego tranzystora idealnego o płaskich złączach. Przeważnie kształt złącz w tranzystorach znacznie odbiega od kształtu idealnego, rys. 2. Pociąga to za sobą dodatkową dyspersję faz nośników ze względu na geometryczną różnicę długości dróg [17].

2.1.4. Oporność bazy $r_{bb'}$ tranzystora dyfuzyjnego

Wartość $r_{bb'}$ wchodząca do wyrażenia na współczynnik dobroci tranzystora (6) jest opornością bazy (base spreading resistance) włączoną zgodnie ze schematem zastępczym podanym na rys. 1. Wielkość $r_{bb'}$ można wyrazić w przybliżeniu zależnością [5], [11], [9]:

$$r_{bb}' = \frac{R}{8\pi}, \tag{23}$$

gdzie:

$$\frac{1}{R} = e\,\mu_n \int_0^W N_b\,dx = e\,\mu_n N_b W_b,$$

$$r_{bb}' = \frac{1}{8\pi e\,\mu_n N_b W_b} = \frac{\varrho_b}{8\pi W_b}. \tag{24}$$

Zgodnie z wyrażeniem (24) r_{bb}' można zmniejszyć przez zmniejszenie ϱ_b i zwiększenie W_b. Wykażemy dalej, że zmiany w tym kierunku pogarszają inne parametry występujące w wyrażeniu (6).

2.1.5. *Pojemność kolektora C_{kb}' w tranzystorze dyfuzyjnym*

Pojemność C_{kb}', zwana pojemnością bariery kolektora (depletion layer capacitance), reprezentuje efekt zmiany ładunku w barierze pod wpływem zmiany przyłożonego do niej napięcia. Jak wiadomo, obszar bariery zawiera ładunek przestrzenny pochodzący od zjonizowanych akceptorów i donorów związanych z siatką krystaliczną. Zmiana napięcia na tej warstwie powoduje zmianę jej grubości, co pociąga za sobą zmianę ładunku. Wielkość C_{kb}' zależy od sposobu zmiany koncentracji w obszarze bariery. Złącze stopowe może być z dobrym przybliżeniem uważane za miejsce nieciągłej zmiany koncentracji. Z uwagi na to, że $\varrho_b \gg \varrho_k$, przyjmujemy, że cały spadek napięcia na barierze rozciąga się w obszarze n. Biorąc to pod uwagę piszemy równanie Poissona w postaci następującej:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -e\frac{N_b}{\varepsilon}, \tag{25}$$

gdzie:

N_b — koncentracja domieszek w bazie,

ε — stała dielektryczna,

stąd dla $\frac{dU}{dx} \approx 0$ dla $x = 0$:

$$U_k = -\frac{e\,N_b}{2\,\varepsilon}x^2, \tag{25a}$$

ponieważ dla bariery $x = W_i$, więc

$$\frac{C_{kb}'}{A} = \frac{\varepsilon}{W_i} = \left(\frac{\varepsilon\,e\,N_b}{2\,U_k}\right)^{\frac{1}{2}},$$

gdzie A powierzchnia złączona kolektora.

Kładąc $\frac{1}{\varrho_b} = e\,\mu_n N_b$

otrzymujemy

$$C_{kb}' = A\left(\frac{\varepsilon}{2\,U_k\,\mu_n\,\varrho_b}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{26}$$

2.2. Zagadnienie zwiększenia współczynnika dobroci M dyfuzyjnych tranzystorów stopowych

Zgodnie z określeniem podanym w rozdz. 1 współczynnik dobroci tranzystora wyraża się następująco:

$$M = \frac{\alpha_0 f_a}{25\,r_{bb}'\,C_{kb}'},$$

przy czym:

$$\alpha_0 = \gamma_0\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{W_b}{L_p}\right)^2\right]; \quad \gamma_0 = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_b}{\sigma_e}\cdot\frac{W_b}{L_n}} \tag{28}$$

$$f_a = \frac{D_p}{\pi\,W_b^2}, \tag{29}$$

$$r_{bb}' = \frac{\varrho_b}{8\,\pi\,W_b}, \tag{30}$$

$$C_{kb}' = A\left(\frac{\varepsilon}{2\,U_k\,\mu_n\,\varrho_b}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{31}$$

Niżej rozpatrzymy możliwości zwiększenia współczynnika M poprzez dobór parametrów materiału i wymiarów geometrycznych tranzystora. Zakres tych zmian ograniczony jest przez możliwości praktycznego wykonania tranzystora oraz warunki napięciowe wynikające z konieczności zadośćuczynienia wymaganiom stawianym tranzystorowi pod względem wytrzymałości napięciowej.

2.2.1. Dyskusja warunków napięciowych

Warunki napięciowe można zapisać następująco:

$$\left.\begin{aligned} U_p &> U_{ek\,max},\\ U_a &> U_{k\,max},\\ U_z &> U_{k\,max}, \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

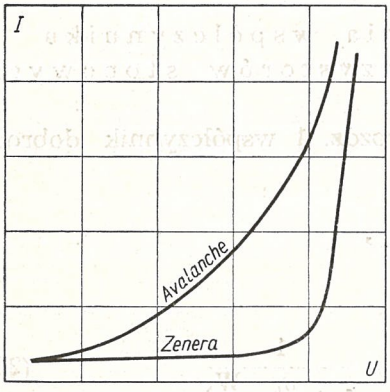
gdzie:

U_p — napięcie przebicia między emiterem i kolektorem, tzw. punch-through,

U_a — napięcie przebicia złącza (avalanche process),

U_z — napięcie Zenera.

Przebicie avalanche jest wynikiem jonizacji powstającej wskutek zderzeń nośników przebiegających przez barierę z elektronami strefy walencyjnej. Zachodzi ono wówczas, gdy napięcie przyłożone na barierę jest dostatecznie duże, aby mogła nastąpić jonizacja.



Rys. 3. Przebieg charakterystyki prądowej złącza w zakresie napięć przebicia avalanche i Zenera

Efektem Zenera określamy pewien rodzaj zimnej emisji w obszarze bariery. Występuje ona w przypadku, gdy pola w obszarze bariery są dostatecznie silne, aby wywołać podniesienie elektronów do strefy przewodzenia. Obydwa zjawiska prowadzą do szybkiego wzrostu prądu wstecznego złącza. Zewnętrznie różnią się między sobą jedynie charakterem przebiegu krzywych $I = f(U)$, rys. 3.

Pewne empiryczne formuły pozwalające ocenić te zjawiska wyrażają się następująco ([23], str. 10-2):

$$U_a = 83{,}4\ \varrho_b^{0{,}6}\ \text{[woltów]} \quad (\varrho_b > 0{,}46\ \Omega\,\text{cm}),$$
$$U_z = 112{,}5\ \varrho_b\ \text{[woltów]} \quad (\varrho_b < 0{,}46\ \Omega\,\text{cm}). \tag{33}$$

Warunki graniczne na oporności ϱ_b oznaczają, że avalanche zachodzi wcześniej niż przebicie Zenera przy opornościach większych od 0,46 Ωcm, odwrotnie — poniżej 0,46 Ωcm.

Przebicie punch-through jest wynikiem wzrostu szerokości bariery kolektora przy wzroście napięcia na barierze. Szerokość bariery wyraża się zależnością [20]:

$$d = 2\left[\frac{3\,\varepsilon\,(U_z - U_B)}{2\,ea}\right]^{\frac{1}{2}}\ \text{[cm]}, \tag{34}$$

gdzie:

U_z — napięcie zewnętrzne,

U_B — potencjał bariery,

a — gradient koncentracji;

przy czym szerokości obszarów pozostają do siebie w następującym stosunku:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{N_a}{N_d}, \quad N_a \gg N_d, \tag{35}$$

gdzie:

N_a — koncentracja akceptorów,
N_d — koncentracja donorów,
x_1 — szerokość od strony n,
x_2 — szerokość od strony p.

Oznacza to, że granice bariery przesuwają się głównie w kierunku emitera. Pociąga to za sobą zmniejszenie szerokości bazy i w przypadku granicznym zwarcie emiter-kolektor. Przebicie charakteryzuje się szybkim wzrostem prądu. Na ogół nie prowadzi ono do zniszczenia tranzystora, o ile nie nastąpiły nieodwracalne procesy termiczne. W praktyce przebicie punch-through zachodzi wcześniej od avalanche i przebicia Zenera. Ilościowo określone może być przez wyrażenie (34).Wzór praktyczny pozwalający ocenić U_p ma postać następującą [23]:

$$U_p = \frac{630\, W_b^2}{\varrho_b}\ [\mathrm{W}]. \tag{36}$$

2.2.2. Możliwości zwiększenia współczynnika M

Z porównania wyrażeń (28)...(31) wynika, że zmiana W_b i ϱ_b daje wyniki o przeciwnych znakach w odniesieniu do α_0, f itd. Podstawiamy te wartości do (27) i otrzymujemy w wyniku:

$$M = 8\sqrt{\frac{2e}{\varepsilon kT}} \cdot \frac{D_p^{\frac{3}{2}}}{AW_b\sqrt{\varrho_b}\left(1 + \frac{\varrho_e}{\varrho_b} \cdot \frac{W_b}{L_n}\right)} \sqrt{U_k}.$$

Na ogół można przyjąć, że $\frac{\varrho_e}{\varrho_b} \cdot \frac{W_b}{L_n} \ll 1$,

wówczas

$$M = 8\sqrt{\frac{2e}{\varepsilon kT}} \cdot \frac{D_p^{\frac{3}{2}}}{AW_b\sqrt{\varrho_b}} \sqrt{U_k}. \tag{37}$$

W celu zwiększenia wartości M należy zatem zmniejszyć grubość bazy W_b i powierzchnię kolektora A oraz zmniejszyć oporność materiału bazy ϱ_b. Należy natomiast zwiększyć stałą dyfuzji dziur w bazie D_p i pra-

cować przy dużych napięciach na kolektorze. Warunek dużej stałej D_p jest sprzeczny z wymaganiem w stosunku do oporności ϱ_b. Ponadto jest to parametr materiału, na który na ogół nie mamy wpływu.

Biorąc pod uwagę warunki napięciowe widzimy, że zmniejszanie W_b obniża U_p, natomiast zmniejszanie ϱ_b obniża U_a i U_z. Do uzyskania wyniku optymalnego konieczny jest zatem kompromis. Przy jego ustalaniu należy brać również pod uwagę trudności technologiczne występujące przy zmniejszaniu wymiarów tranzystora. Do najważniejszych trudności należy: uzyskanie płaskich złącz leżących obok siebie w odległości kilku μ, wykonanie złącz o małych powierzchniach przy zachowaniu współosiowości oraz uzyskanie materiału o niskiej oporności i dostatecznie dobrych pozostałych parametrów. Trudności te pociągają za sobą wzrost kosztów produkcji i praktycznie ograniczają zakres częstotliwości tranzystorów stopowych. Wartość tej częstotliwości zależy ściśle od stopnia opanowania technologii i nie przekracza na ogół kilkunastu MHz.

Dokładne przeliczenie wartości maksymalnie osiągalnego współczynnika M na podstawie podanych wzorów nie ma praktycznego znaczenia, gdyż wzory te wyprowadzono w większości przypadków dla tranzystora idealnego. W rzeczywistości wskutek nierównoległości złącz, przesunięcia czasz indowych oraz — być może — zmniejszenie stałej D_p podczas obróbki termicznej, współczynnik M może mieć wartość wielokrotnie mniejszą od obliczonej.

3. TRANZYSTOR DRYFTOWY

3.1. Zasada konstrukcji

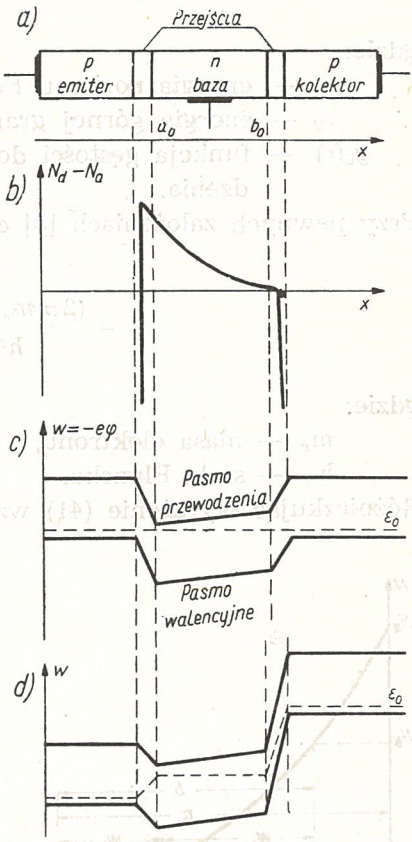
Podane wyżej uwagi wskazują na trudności występujące w technologii dyfuzyjnych tranzystorów stopowych na podwyższone częstotliwości. Rozwiązania szukać zatem należy nie w dalszym zmniejszaniu wymiarów, lecz w zmianach w sposobie działania tranzystora. Z podstawowego równania ruchu nośników

$$t_0 = \frac{W_b^2}{D_p}$$

wynika logicznie koncepcja zwiększenia stałej dyfuzji D_p. Można to uczynić przyspieszając nośniki przy pomocy wprowadzonego do obszaru bazy. Uzyskanie takiego pola przez zwiększenie napięć przyłożonych na tranzystor jest niemożliwe z uwagi na ograniczenia napięciowe omówione wyżej. Pole musi być zatem wynikiem zmiennej koncentracji ładunków w obszarze bazy. Webster wykazał, że pole pochodzące od wprowadzo-

nych nośników może zwiększyć stałą dyfuzji najwyżej dwukrotnie [1]) [21].

Pozostaje zatem jedynie droga wbudowania pola w obszar bazy przez zmianę koncentracji domieszek. Koncepcję tę rozwinął i podbudował teorią Krömer [13]. Konstrukcję tranzystora o zmiennej oporności bazy, zwanego tranzystorem dryftowym, pokazuje rys. 4. Część *c* ilustruje pasma energetyczne bez przyłożonych napięć, *d* — po przyłożeniu napięć, część *b* przedstawia przebieg koncentracji domieszek.



Rys. 4. Schemat konstrukcji tranzystora dryftowego

Łatwo wykazać, że stałe pole przyspieszające F można otrzymać w obszarze bazy, jeśli koncentracja domieszek N w tym obszarze spada eksponencjalnie w kierunku kolektora zgodnie z zależnością:

$$N(x) = N_b e^{-\frac{x}{L}} + N_0, \qquad (38)$$

gdzie:

N_b — koncentracja wprowadzonych domieszek przy emiterze,

N_0 — początkowa koncentracja domieszek (rys. 5),

x — odległość od emitera,

L — długość drogi dyfuzyjnej domieszek $L = \sqrt{Dt}$.

Mianowicie wiadomo, że

$$F = \frac{1}{q} \cdot \frac{d\varepsilon_1}{dx}, \qquad (39)$$

(gdzie ε_1 — energia dna pasma przewodnictwa), a ilość elektronów n w pasmie przewodzenia wyraża się całką:

---

[1]) Stosowanie pojęcia stałej dyfuzji przy opisywaniu ruchu nośników poruszających się w polu jest w zasadzie niezgodne z definicją tego współczynnika. Termin ten spotykany jest jednak w literaturze [21].

$$n = \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \frac{g_c(\varepsilon)\, d\varepsilon}{e^{\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)}{kT}} + 1}, \tag{40}$$

gdzie:

ε_0 — energia poziomu Fermiego,

ε_2 — energia górnej granicy pasma przewodnictwa,

$g_c(\varepsilon)$ — funkcja gęstości dozwolonych poziomów w pasmie przewodzenia.

Przy pewnych założeniach [8] całka (40) da się wyrazić następująco:

$$n = \frac{(2\pi m_e kT)^{\frac{3}{2}}}{h^2} e^{-\frac{(\varepsilon_1(x)-\varepsilon_0)}{kT}}, \tag{41}$$

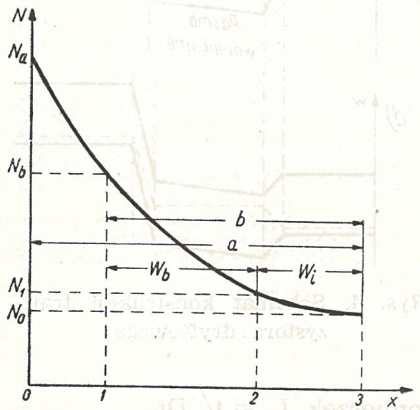
gdzie:

m_e — masa elektronu,

h — stała Plancka.

Różniczkując wyrażenie (41) względem odległości x otrzymujemy

$$\frac{dn}{dx} = -\frac{n}{kT} \cdot \frac{d\varepsilon_1}{dx},$$



Rys. 5. Rozkład koncentracji domieszek w płytce. *1* — złącze emitera, *2* — granica kolektora, *3* — granica kolektora bez napięcia

stąd oraz z (39)

$$F = -\frac{kT}{e} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{dn}{dx} = -\frac{kT}{e} \cdot \frac{1}{\varrho_b} \cdot \frac{d\varrho_b}{dx}.$$

Przy założeniu, że wszystkie atomy domieszki są zjonizowane oraz $N_0 \approx \approx 0$, znajdujemy, że jeżeli $N(x)$ spełnia (38), to

$$F = \frac{kT}{e} \cdot \frac{1}{L} = \text{const}. \tag{42}$$

Różnica potencjałów ΔV występująca w bazie wynosi:

$$\Delta V = e F W_b,$$

$$\Delta V = kT \frac{W_b}{L}. \tag{43}$$

W rozdz. 3.2.3 będzie wykazane, że $\frac{W_b}{L} = \ln \frac{N_b}{N_1}$, gdzie N_1 koncentracja

wprowadzonych domieszek przy kolektorze wg rys. 5

$$\Delta V = kT \ln \frac{N_b}{N_1}. \tag{44}$$

Aby uniknąć efektów wtórnych związanych z generacją nośników pod wpływem pola, przyjmuje się [13], że

$$\Delta V \leqslant \frac{1}{2} E_B - 6\,kT, \tag{45}$$

gdzie E_B szerokość strefy zabronionej.
Ponieważ dla germanu $E_B \approx 0{,}72$ [eV] $\approx 27\ kT$,

$$\Delta V \leqslant 8\,kT.$$

Mamy zatem warunek: $\ln \frac{N_b}{N_1} \leqslant 8$. Warunek ten jest praktycznie zawsze spełniony, gdyż osiągane stosunki $\frac{N_b}{N_1}$ wynoszą $100 \div 200$ [12]. Wartość koncentracji N_b ograniczona jest koniecznością zachowania dostatecznie dużej wydajności wstrzykiwania nośników. Zwykle wynosi ona ok. 10^{16} cm^{-3}.

3.2. Analiza współczynnika dobroci M

3.2.1. Współczynnik wzmocnienia prądowego α'_0 dla tranzystora dryftowego

Wartość α'_0 dla tranzystora dryftowego znajdujemy rozwiązując równanie dyfuzji (10) przy założeniu $F \neq 0$. Zakładając warunki brzegowe jak poprzednio oraz przyjmując, że pole spełnia warunek

$$\frac{\Delta V}{2kT} = \frac{W_b}{f} \gg 1, \tag{46}$$

Krömer otrzymał po pewnych uproszczeniach następujące wyrażenie:

$$\alpha'_0 = \gamma_0 \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{W_b}{L_p^2} f \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{f}{W_b}\right)\right] \approx \gamma_0 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{W_b}{L_p}\right)^2 \frac{f}{W_b}\right]. \tag{47}$$

Biorąc pod uwagę, że $\frac{f}{W_b} \ll 1$ zgodnie ze wzorem (46), widzimy, iż otrzymana wielkość jest większa od α_0 dla tranzystora dyfuzyjnego. Różnica rośnie ze wzrostem pola wewnętrznego F. Interpretacja fizyczna otrzymanego wyniku jest prosta. Jak będzie wykazane dalej (rozdz. 3.2.2), pole wewnętrzne w obszarze bazy powoduje znaczne skrócenie czasu przebywania nośników w tym obszarze. Dzięki temu zmniejsza

się prawdopodobieństwo rekombinacji, co pociąga za sobą wzrost współczynnika transportu β. Należy zwrócić uwagę na to, że w analizie podanej przez Krömera [13] nie uwzględnia się rekombinacji powierzchniowej. Wiadomo jednak na podstawie prac A. R. Moore i J. I. Pankove [18], że rekombinacja powierzchniowa ma istotny wpływ na wartość współczynnika tranzystorów dyfuzyjnych. Wpływ rekombinacji jest funkcją jej szybkości oraz geometrii układu elektrod.

W tranzystorze dryftowym drogi, po których poruszają się nośniki, są podyktowane przez wewnętrzne pole elektryczne. W przypadku najkorzystniejszym linie pola mogą być prostopadłe do powierzchni płytki [13]. Wpływ rekombinacji powierzchniowej jest wówczas znacznie zmniejszony. Wynika stąd, że dla tranzystorów rzeczywistych stosunek $\frac{\alpha_0'}{\alpha_0}$ będzie większy od obliczonego na podstawie równań (14) i (47).

3.2.2. *Częstotliwość graniczna tranzystora dryftowego*

Analizą wartości f' zajmowało się wielu autorów z uwagi na to, że problem jej zwiększenia leżał u podstaw koncepcji tranzytora dryftowego. Spośród dostępnych na szczególną uwagę zasługuje praca Krömera [13], Fiedotowa [12] oraz Molla i Rossa [9]. Krömer określił wartość f' bezpośrednio na podstawie częstotliwościowej zależności współczynnika α'. W wyniku otrzymał następujące wyrażenie:

$$\omega_\alpha' = \frac{2 D_p}{(W_b f^3)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2 D_p}{W_b^2}\left(\frac{W_b}{f}\right)^{\frac{3}{2}}, \tag{48}$$

gdzie $f = \frac{2kT}{eF}$.

Stosunek tej wartości do ω z (18) wynosi:

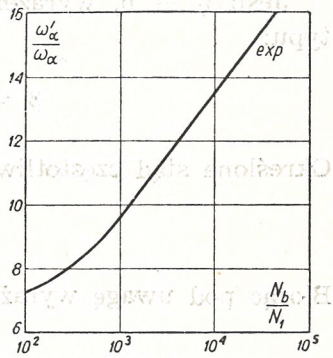
$$\frac{\omega_\alpha'}{\omega_\alpha} = \left(\frac{W_b}{f}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{W_b}{2kT} eF\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Biorąc pod uwagę wyrażenia (43) i (44) mamy:

$$\frac{\omega_\alpha'}{\omega_\alpha} = \left(\frac{1}{2} \ln \frac{N_b}{N_1}\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{49}$$

Wyrażenie (49) musimy traktować jako przybliżenie słuszne dla dużych wartości $\frac{N_b}{N_1}$. Dla $\frac{N_b}{N_1} \to 1$ stosunek (49) dąży do zera i nie może być wykorzystany do porównania obydwu typów tranzystorów.

Moll i Ross próbowali ocenić częstotliwość graniczną tranzystora dryftowego na podstawie analizy czasu przelotu nośników. Uzyskane rezultaty podali w postaci wykresu (rys. 6). Z uwagi na uproszczenia przyjęte w ich pracy wynik przedstawiony na rys. 6 możemy traktować jedynie jako jakościowy. Dodatkowym niedostatkiem tej pracy jest to, że podane wykresy odnoszą się do stosunków koncentracji większych od 10^2. Będzie wykazane w rozdz. 5, że osiągalne praktycznie stosunki $\frac{N_b}{N_1}$ nie przekraczają 200.



Rys. 6. Wykres zależności $\omega'_\alpha/\omega_\alpha$ od (N_b/N_1) otrzymanej przez Molla i Rossa

Wyniki budzące najmniej zastrzeżeń otrzymał Fiedotow. W podanej przez niego analizie zakłada się, że rozkład koncentracji domieszek w bazie wyrażony jest równaniem:

$$N(x) = N_b e^{-Kx} + N_0, \tag{50}$$

gdzie:

$K = \frac{1}{L}$ w pobliżu emitera,

$K = \frac{2}{L}$ w pobliżu kolektora.

Równanie dyfuzyjnego ruchu nośników przez obszar bazy, w którym istnieje pole elektryczne wynikające w zależności (50), można przedstawić w następującej postaci:

$$KD_p \frac{\partial p}{\partial x} - D_p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{\tau_p}[p - p_b e^{-Kx}]; \tag{51}$$

p jest tutaj koncentracją dziur w bazie.

Po rozwiązaniu tego równania otrzymujemy wartość współczynnika transportu β':

$$\beta' = \frac{I_{p(x=W_b)}}{I_{p(x=0)}} = \frac{Ze^{\eta}}{\eta\, shZ + ZchZ}, \tag{52}$$

gdzie:

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{N_b}{N_1}$$

$$Z = \sqrt{\eta^2 + \frac{1 + j\omega\tau_p}{\tau_p D_p} W_b^2}.$$

Przyjmując znane założenie $\frac{W_b}{L_p} \ll 1$ i kładąc $\omega = 0$ otrzymujemy $\beta_0 = 1$.

Jeśli $\eta = 0$, wyrażenie (52) przechodzi w podaną wyżej zależność typu:

$$\beta = \operatorname{sech}\left(\sqrt{1 + j\omega\tau_p}\,\frac{W_b}{L_p}\right). \tag{53}$$

Określona stąd częstotliwość graniczna wynosi:

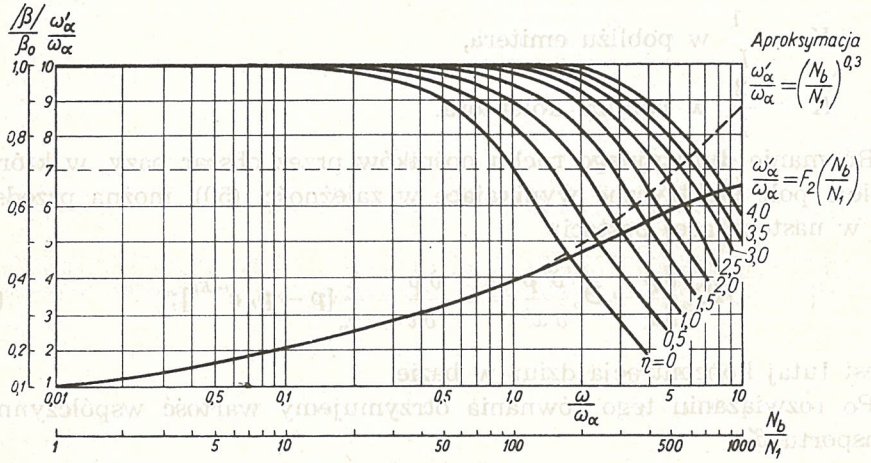
$$\omega_\alpha = \frac{2D_p}{W_b^2}.$$

Biorąc pod uwagę wyrażenie (52) możemy wykreślić rodziny krzywych

$$|\beta| = F_1\left(\frac{\omega}{\omega_\alpha}, \eta\right),$$

a następnie znaleźć stąd łatwo $\frac{\omega'_\alpha}{\omega_\alpha} = F_2\left(\frac{N_b}{N_1}\right)$.

Funkcja F_2 charakteryzuje wpływ rozkładu koncentracji domieszek



Rys. 7. Charakterystyki $\frac{|\beta|}{\beta_0} = F_1\left(\frac{\omega}{\omega_\alpha}; \eta\right)$ oraz $\frac{\omega'}{\omega_\alpha} = F_2\left(\frac{N_b}{N_1}\right)$; $\eta = \frac{1}{2}\ln\frac{N_b}{N_1}$

na częstotliwość graniczną tranzystora dryftowego. Przebieg funkcji F_1 i F_2 przedstawiono na rys. 7. Znaleziono, że otrzymana zależność $\frac{\omega'_\alpha}{\omega_\alpha} = F_2(N_b, N_1)$ może być dobrze wyrażona dla $\frac{N_b}{N_1} \leqslant 200$ przez

$$\frac{\omega'_\alpha}{\omega_\alpha} = \left(\frac{N_b}{N_1}\right)^{0,3} \tag{54}$$

Rezultaty otrzymane przez Fiedotowa różnią się od podanych przez Krömera oraz Molla i Rossa. Ścisłe porównanie wyników jest utrudnione ze względu na to, że każdy z autorów przyjąłby inny sposób zapisywania rozkładu koncentracji domieszek w bazie. Dla ilustracji zebrano je jednak w tablicy 1. Obok podano równania $N(x)$, którymi posługiwali się autorzy. Oznaczenia użyte przez Molla i Rossa wyjaśnione są na rys. 8.

Tablica 1

Zestawienie wyników otrzymanych przez Fiedotowa, Krömera oraz Molla i Rossa

$\frac{\omega_a'}{\omega_a}$ \ $\frac{N_b}{N_1}$			1	10	100	1000
Fiedotow	$N(x) = N_b e^{-\frac{x}{L}} + N_0$	$\left(\frac{N_b}{N_1}\right)^{0,3}$	1	2	4	6,6
Krömer	$N(x) = N_a e^{-\frac{eF}{kT}(x-d_0)}$	$\left(\frac{1}{2}\ln\frac{N_b}{N_1}\right)^{\frac{3}{2}}$	0	1,23	3,56	6,4
Moll i Ross	$N(x) = N_0 e^{-\frac{x}{L}} - N_1$	—	—	—	7,2	9,5

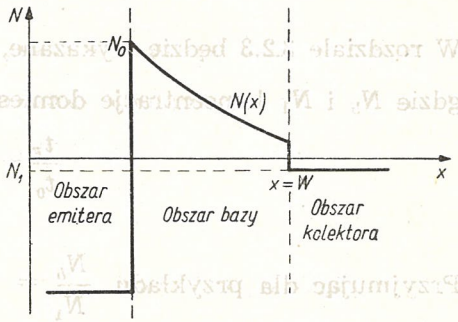
Analiza kątów fazowych φ_B' pokazuje, że przesunięcia fazowe w tranzystorze dryftowym przy częstotliwości granicznej $f\alpha$ przewyższają analogiczne przesunięcia w tranzystorze dyfuzyjnym. Biorąc pod uwagę zależności otrzymane przez Krömera możemy określić φ'_B następująco:

$$\varphi_B' = \frac{\omega W_b f}{2 D_p} = \frac{\omega}{\omega_a}\left(\frac{W_b}{f}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (55)$$

Porównując tę wartość z analogiczną wartością dla tranzystora dyfuzyjnego (19) otrzymujemy dla dostatecznie małych ω:

$$\frac{\varphi_B'}{\varphi_B} = \left(\frac{W_b}{f}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\Delta V}{2kT}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\ln\frac{N_b}{N_1}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (56)$$



Rys. 8. Rozkład koncentracji domieszek przyjęty przez Molla i Rossa

Interpretacja fizyczna

Podwyższenie częstotliwości granicznej w tranzystorze dryftowym w stosunku do tranzystora dyfuzyjnego jest bezpośrednią konsekwencją zmniejszenia czasu przelotu nośników przez obszar bazy. Aby fakt ten ująć liczbowo, znajdziemy przybliżoną wartość czasu przelotu. Dla uproszczenia zakładamy, że ruchliwość jest stała w całym obszarze bazy oraz $n \gg n_i \gg p$, i obliczamy czas przelotu uwarunkowany jedynie przez pole przyspieszające.

$$t_F = \int_0^W \frac{dx}{F(x)\,\mu_p}. \tag{57}$$

Zakładamy, że przebieg koncentracji domieszek w obszarze bazy jest eksponencjalny

$$N(x) = N_b e^{-\frac{x}{L}} + N_0,$$

wówczas biorąc pod uwagę wyrażenie (42) możemy napisać:

$$t_F = \int_0^W \frac{dx}{\frac{kT}{e} \cdot \frac{1}{L}\mu_p}.$$

Wiadomo, że $D_p = \mu_p \frac{kT}{e}$, zatem

$$t_F = \frac{L W_b}{D_p}. \tag{58}$$

Stosunek t_F do podanej poprzednio wartości t_0 dla tranzystora dyfuzyjnego (rozdz. 2.13) wynosi:

$$\frac{t_F}{t_0} = \frac{L W_b}{D_p} \cdot \frac{D_p}{W_b^2} = \frac{L}{W_b}. \tag{59}$$

W rozdziale 3.2.3 będzie wykazane, że $\frac{W_b}{L} = \ln \frac{N_b}{N_1}$,

gdzie N_b i N_1 koncentracje domieszek wg rys. 5, zatem

$$\frac{t_F}{t_0} = \frac{1}{\ln \frac{N_b}{N_1}}. \tag{60}$$

Przyjmując dla przykładu $\frac{N_b}{N_1} = 100$ otrzymujemy:

$$\frac{t_F}{t_0} = \frac{1}{4{,}6}.$$

Skrócenie czasu przelotu było myślą przewodnią koncepcji tranzystora dryftowego.

3.2.3. *Oporność bazy $r'_{bb'}$ w tranzystorze dryftowym*

Oporność bazy tranzystora dryftowego obliczamy opierając się na wyrażeniu (23):

$$\frac{1}{R} = e\mu \int_0^{W_b} N(x)\,dx .$$

Zakładając

$$N(x) = N_b e^{-\frac{x}{L}} + N_0$$

otrzymujemy

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R}\left(-\frac{L}{W_b} e^{-\frac{W_b}{L}} + \frac{L}{W_b} + \frac{N_0}{N_b}\right), \tag{62}$$

gdzie $\frac{1}{R} = e\mu N_b W_b$.

Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami (rys. 5) mamy:

$$N(W_b) = N_1 + N_0 = N_b e^{-\frac{W_b}{L}} + N_0,$$

stąd:

$$\ln\frac{N_b}{N_1} = \frac{W_b}{L}. \tag{63}$$

Podstawiając (63) do (62) i zakładając $N_1 \approx N_0$ otrzymujemy:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R}\left[\frac{1}{\ln\frac{N_b}{N_1}} + \frac{N_1}{N_b}\left(1 - \frac{1}{\ln\frac{N_b}{N_1}}\right)\right]. \tag{64}$$

Przez analogię do zależności (23) możemy napisać:

$$r'_{bb'} = \frac{R'}{8\pi}, \tag{65}$$

gdzie:

$$R' = R\,\frac{\ln\frac{N_b}{N_1}}{1 + \frac{N_1}{N_b}\left(\ln\frac{N_b}{N_1} - 1\right)}.$$

Jeśli dla porównania założymy, że koncentracje domieszek przy emiterach tranzystora dyfuzyjnego i dryftowego są równe i wynoszą N_b, to:

$$\frac{r'_{bb'}}{r_{bb'}} = \frac{\ln \frac{N_b}{N_1}}{1 + \frac{N_1}{N_y}\left(\ln \frac{N_b}{N_1} - 1\right)}. \tag{66}$$

Wyniki otrzymane przez Krömera odpowiednio są równe:

$$R' = \frac{1}{e\,\mu\, N_b\, W} \cdot \frac{\Delta V}{kT}, \tag{67}$$

$$\frac{R'}{R} = \frac{\Delta V}{kT} = \ln \frac{N_b}{N_1}.$$

3.2.4. Pojemność $C'_{kb'}$ w tranzystorze dryftowym

Wartość pojemności $C'_{kb'}$ w tranzystorze dryftowym możemy znaleźć w sposób analogiczny do przedstawionego w rozdz. 2.1.4. Trudność stanowi tu fakt, że koncentracja domieszki w obszarze bariery od strony bazy ma wartość zmienną. Uważając, że gęstość ładunku przestrzennego $\Phi(y)$ będzie odpowiadać w tym obszarze koncentracji domieszek i będzie się zmieniała wg tego samego prawa, możemy napisać

$$\Phi(y) = \frac{e}{\varepsilon} N(y), \tag{68}$$

gdzie $y = b - x$.
Wiadomo że:

$$\frac{d^2 U}{dy^2} = -\Phi(y) = -\frac{e}{\varepsilon} N(y). \tag{69}$$

W pierwszym przybliżeniu — zakładając że $\Phi(y)$ zmienia się niewiele w okolicy kolektora — możemy napisać:

$$dU = \Phi(y)\, y\, d\, y,$$

stąd

$$U = \int_0^{y_1} \frac{e}{\varepsilon} N(y)\, y\, d\, y. \tag{70}$$

Przy założeniu, że koncentracja zmienia się eksponencjalnie wg

$$N(x) = N_b e^{-Kx} + N_0,$$

mamy

$$N(y) = N_0 + N_b e^{-K(b-y)}.$$

Po podstawieniu i obliczeniu wyrażenia (70) otrzymujemy

$$U = \frac{e}{\varepsilon} N_b \left\{ \frac{N_0}{N_b} \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{e^{-Ky}}{K^2} [e^{Ky}(Ky - 1) + 1] \right\}. \tag{71}$$

Człon pierwszy w nawiasie klamrowym przedstawia działanie ładunku przestrzennego wywołanego przez koncentrację początkową N_0, człon drugi zaś charakteryzuje działanie ładunku przestrzennego wynikłego wskutek wprowadzenia donorów drogą dyfuzji.

W większości przypadków praktycznych obszar przestrzennego ładunku kolektora powinien rozciągać się w przestrzeni, gdzie wypadkowa koncentracja $N(x)$ mało różni się od początkowej koncentracji N_0. Biorąc to pod uwagę można w pierwszym przybliżeniu uważać koncentrację w obszarze ładunku przestrzennego za nie zmienioną. Wychodząc z tego założenia związek między napięciem na barierze, koncentracją i szerokością bariery można zapisać następująco:

$$U = \frac{e}{2\varepsilon} N_0 W_i^2, \tag{72}$$

gdzie W_i — szerokość bariery wg oznaczeń na rys. 5. Wyrażenie to jest analogiczne do (25a). W konsekwencji pojemność $C'_{kb'}$ tranzystora dryftowego wyrazi się zależnością:

$$C'_{kb'} = A \left(\frac{\varepsilon}{2 U_k \mu_n \varrho_b} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{73}$$

4. Porównanie współczynnika dobroci obydwu typów tranzystorów

Zakładamy, że koncentracja domieszek N_b w bazie tranzystora dyfuzyjnego równa jest koncentracji przy emiterze w tranzystorze dryftowym. Założenie to jest usprawiedliwione tym, że N_b określone jest przez warunek dużej sprawności emitera. Wynikająca stąd koncentracja jest rzędu $N_b = 10^{16}$ cm^{-3}. Z drugiej strony, z punktu widzenia minimalnej wartości $r'_{bb'}C'_{kb'}$, koncentracja N_b powinna być także równa ok. 10^{16} cm^{-3}. Zgodnie z rys. 5 koncentracja domieszek przy kolektorze w tranzystorze dryftowym wynosi N_0. W pierwszym przybliżeniu możemy przyjąć, że współczynnik dobroci tranzystora dryftowego będzie miał postać analogiczną do podanej wyżej dla tranzystora dyfuzyjnego (6):

$$M' = \frac{\alpha'_0 f'_\alpha}{25\, r'_{bb'} C'_{kb'}}. \tag{74}$$

Możemy przyjąć $\alpha_0 \approx \alpha'_0 = 1$

$$\frac{M'}{M} = \frac{f'_\alpha}{f_\alpha} \cdot \frac{r_{bb'}}{r'_{bb'}} \cdot \frac{C_{kb'}}{C'_{kb'}}. \tag{75}$$

Stosunek $\frac{C_{kb}'}{C'_{kb}}$ znajdujemy na podstawie wzorów (73) i (26);

$$\frac{C_{kb}'}{C'_{kb}} = \left(\frac{N_b}{N_0} \cdot \frac{U'_k}{U_k}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{76}$$

Maksymalne napięcia, które można przyłożyć na kolektory obydwu typów tranzystora, ograniczone są przez dopuszczalne natężenia pola w warstwie złącza. Z posiadanych dotychczas danych wynika, że natężenie krytyczne (przebijające) w cienkich złączach jest dwukrotnie większe niż w złączach szerokich [16]. Uważając zatem, że

$$E_{max} = 2\,E'_{max}, \tag{77}$$

gdzie E_{max} — krytyczne natężenie pola w złączu, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} U'_k &= E'_{max} W'_i, \quad \frac{U'_k}{U_k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{W_i'}{W_i}; \\ U_k &= E_{max} W_i, \end{aligned} \tag{78}$$

wiadomo zaś, że:

$$E = \frac{q}{2\varepsilon} N W_i,$$

zatem

$$N_b W_i = 2 N_0 W'_i,$$

stąd

$$\frac{U'_k}{U_k} = \frac{1}{4} \cdot \frac{N_b}{N_0}. \tag{79}$$

Podstawiając otrzymany wynik do (76) dostajemy:

$$\left(\frac{C_{kb}'}{C'_{kb}}\right)_{max} = \left[\frac{1}{4}\left(\frac{N_b}{N_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{N_b}{N_o}. \tag{80}$$

Wyrażenie (76) oraz (66) i (54) podstawiamy do (75)

$$\frac{M'}{M} = \frac{1}{2}\left(\frac{N_b}{N_1}\right)^{0,3} \frac{N_b}{N_0} \cdot \frac{1 + \frac{N_1}{N_b}\left(\ln\frac{N_b}{N_1} - 1\right)}{\ln\frac{N_b}{N_1}};$$

przy założeniu $N_1 \approx N_0$

$$\frac{M'}{M} = \frac{1}{2}\left(\frac{N_b}{N_1}\right)^{1,3} \frac{1 + \frac{N_1}{N_b}\left(\ln\frac{N_b}{N_1} - 1\right)}{\ln\frac{N_b}{N_1}}. \tag{81}$$

Jeśli założymy, że $\frac{N_b}{N_1} = 100$, co jest praktycznie osiągalne [1], otrzymamy $\frac{M'}{M} \approx 43$.

Uzyskany wynik jasno uzmysławia przewagę tranzystorów dryftowych nad klasycznymi już dziś tranzystorami dyfuzyjnymi.

5. UWAGI O SPOSOBIE WYKONANIA TRANZYSTORA DRYFTOWEGO

Zgodnie z tym, co powiedziano wyżej, stałe pole przyspieszające w obszarze bazy otrzymuje się wtedy, gdy koncentracja domieszek w tym obszarze zmienia się wg zależności:

$$N(x) = N_b e^{-Kx}.$$

Materiał o zmiennej koncentracji można otrzymać wieloma sposobami. Spośród możliwych metod najbardziej odpowiednią w tym przypadku jest metoda dyfuzyjna. Polega ona na wprowadzeniu domieszek do materiału drogą ich dyfuzji z zewnątrz przy podniesionej temperaturze. Równanie rządzące tym procesem ma następującą postać:

$$N(x) = N_a \, erfc\left(\frac{x+b}{2L}\right), \tag{83}$$

gdzie L — długość drogi dyfuzji, reszta oznaczeń wg rys. 5.

Można wykazać, że zależność (83) dość dobrze da się aproksymować przy pomocy funkcji [12]:

$$N(x) = N_a \exp\left[-K(x+b)\right], \tag{84}$$

przy czym:

$K = \frac{1}{L}$ w części początkowej,

$K = \frac{2}{L}$ w części końcowej.

W wyniku dyfuzji otrzymujemy zatem w materiale wbudowane stałe pole elektryczne.

Proces dyfuzji jest prosty w koncepcji, w praktyce nastręcza jednak dużo trudności. Spowodowane są one głównie przez zmiany występujące w materiale podczas obróbki termicznej. Zmiany te wiążą się z wprowadzeniem do materiału akceptorów (zwanych termicznymi), co pociąga za sobą zmniejszenie czasu życia nośników i zwiększenie lub zmniejszenie oporności właściwej.

Wyeliminowanie tych efektów wymaga starannie opracowanej obróbki termicznej oraz zachowania jak najdalej idącej czystości. Koncentracja domieszki na powierzchni materiału zależy od gęstości tej domieszki w bezpośrednim otoczeniu próbki podczas procesu oraz od temperatury, w której zachodzi dyfuzja. Maksymalna koncentracja na powierzchni z punktu widzenia przydatności materiału do celów tranzystorowych jest ograniczona przez warunek wydajności emitera i wynosi ok. 10^{16} cm^{-3}. Maksymalny stosunek koncentracji $\frac{N_b}{N_1}$ otrzymujemy w przypadku, gdy materiał w obszarze kolektora ma dużą oporność właściwą. Wynosi on zwykle $\left(\frac{N_b}{N_1}\right)_{max} \approx$ kilka $\cdot$ 10^2.

Grubość wdyfundowanej warstwy nie przekracza na ogół kilkudziesięciu μ. Praktyczny pomiar tej grubości nastręcza dużo trudności.

Dalsze procesy technologiczne związane z wykonaniem elektrod i obróbką powierzchni są zbliżne do stosowanych ogólnie w technice tranzystorów wysokiej częstotliwości.

W sumie technologia tranzystorów dryftowych jest trudna i wymaga oprócz znajomości zagadnienia również odpowiedniego wyposażenia technicznego.

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Zakład Elektroniki

WYKAZ LITERATURY

1. Fiedotow A.: — Radiotiechnika i elektronika, tom II, Nr 9, 1957.
2. Mason S. J.: — IRE Trans., 1954, CT- 1, 2, 20.
3. Drouilhet P. R.: — IRE Trans., 1955, CT-2, 2, 178.
4. Pritchard R. L.: — IRE Trans., 1955, CT-2, 2, 183.
5. Early J. M.: — Bell Syst. Techn. Journal, 1954, 33, 3, 517.
6. Giacoletto L. J.: — RCA Review, March 1954, Vol. XV.
7. Shockley W., Sparks M. and Terb: — Phys. Rev. 83, 1955, 151.
8. Seitz F.: The Modern Theory of Solids, str. 187, Mc Graw-Hill Book Comp., New York 1940.
9. Moll J. L., Ross I. M.: — PIRE, Vol. 44, Jan. 1956.
10. Knott R D., Colson I. D., Young M.R.P.: — Proc. Phys, Soc., vol. 68, część 3, Sect. B, Mar. 1, 1955, str. 182-185.
11. Early J. M.: — Bell Syst. Techn. Journal, 1953, 32, 11, 1271.
12. Fiedotow A.: — Radiotiechnika i elektronika, tom III, Nr 10, 1957.
13. Krömer H.: — Arch. elektr. Übertragung, 1954, 8, nr 5, 223; 1954, 8 nr 8, 363, 1954, 8, nr 11, 499.
14. Lee C. A.: — Bell Syst. Techn. Journal, 1956, 35, 1, 23.
15. Szotow A. P.: — Z.T.F., 1956, 26, 8, 1634.
16. Shockley W.: Electrons and Holes in Semiconductors. New York 1950.
17. Kansas R.: — PIRE, December 1954.

18. Moore A. R., Pankove J. I.: — PIRE, June 1954.
19. Steele Earl L.: — PIRE, November 1952.
20. Rosiński W.: Tranzystory i ich układy. PWT, Warszawa, 1957.
21. Webster W.: — PIRE, June 1954.
22. Guggenbühl W., Strutt M. J. O.: — Electronic & Radio Eng., July 1957.
23. Hunter L.: Handbook of Semiconductors. Mc Graw-Hill, New York 1956.

OZNACZENIA ZASTOSOWANE W ARTYKULE [1])

p, n — koncentracja dziur i elektronów
N_a, N_d — koncentracja akceptorów i donorów
N_b, N_0, N_1 — koncentracje domieszki w bazie wg oznaczeń na rysunkach
ϱ_a, ϱ_k, ϱ_e — oporność właściwa materiału bazy, kolektora i emitera
μ_p, μ_n — ruchliwość dziur i elektronów
L_p, L_n — droga dyfuzyjna nośników w bazie i emiterze
τ_p — czas życia nośników w bazie
D_p — stała dyfuzji dziur w bazie
W_p — szerokość bazy
A — powierzchnia złącza
ε — stała dielektryczna germanu
F — natężenie pola elektrycznego w bazie
t_0 — czas przelotu nośników przez obszar bazy bez udziału pola
t_F — czas przelotu przy udziale pola
f_α — częstotliwość graniczna

Б. МРОЗЕВИЧ

КОЭФФИЦИЕНТ ДОБРОТНОСТИ ПЛОСКОСТНОГО КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО ТРИОДА И ВОЗМОЖНОСТИ ЕГО УЛУЧШЕНИЯ ПУТЁМ ВВЕДЕНИЯ ВНУТРЕННЕГО ПОЛЯ В ОБЛАСТЬ БАЗЫ

Резюме

Самым соответствующим параметром характеризующим усилительные свойства кристаллического триода в диапазоне высоких частот является коэффициент добротности. Проведён подробный анализ значения этого коэффицента для диффузионных триодов изготовленных техникой сплавления, а также рассмотрены возможности его повышения путём введения конструкционно-технологических изменений. Показано, что возникающие при этом затрунения препятствуют получению повышенных значений коэффицента.

Эти заэтруднения могут быть уменьшены путём введения ускоряющего поля в область базы. Кристаллический триод с такой конструкцией называется дрейфовым триодом. Обсуждены значения коэффициента добротности дрейфовых триодов с вплавленными переходами и показано путём расчёта, что эта конструкция даёт возможность увеличить в 40 раз значение коэффициента добротности по сравнению со значением этого коэффициента для диффузионных кристаллических триодов.

В заключении описаны вкратце возможности изготовления материала с переменной концентрацией примесей с помощью их диффузии снаружи.

B. MROZIEWICZ

FIGURE OF MERIT OF THE JUNCTION TRANSISTOR AND THE POSSIBILITIES OF ITS INCREASE DUE TO THE INTRODUCTION OF A BUILT-IN FIELD INTO THE BASE REGION

Summary

The most suitable parameter for characterizing the amplifying properties of a transistor designed for high frequencies is the figure of merit. A detailed analysis of the value of this coefficient is carried out for diffusion transistors performed by means of the alloy technique, and the possibilities of increasing it by the introduction of constructional and technological changes are discussed. It is shown that the difficulties involved make it impossible to obtain high values of the coefficient.

These difficulties, however, can be reduced by a sweeping field built-in into the base region. A transistor of such a type of construction is called a drift transistor. The values of the figure of merit of drift transistors with alloy junctions are discussed, and it is calculated that such a construction makes it possible to increase 40 times the value of the figure of merit with relation to the value of the latter for diffusion transistors.

In conclusion the author briefly discusses the possibilities of making a material with a varying concentration of impurities by means of their diffusion from outside.

B. MROZIEWICZ

DER GUTEFAKTOR DES FLÄCHENTRANSISTORS UND SEINE DURCH DIE EINFÜHRUNG DES DRIFTFELDES IN DEN BASISRAUM VERGRÖSSERUNGSMÖGLICHKEITEN

Zusammenfassung

Der geeignetste Kennwert zur Befassung der verstärkenden Eigenschaften des Hochfrequenz-Transistors ist der Gütefaktor. Eine eingehende Analyse des Wertes dieses Faktors für die Shockleyschen mit der Legierungstechnik ausgeführten Transistoren ist durchgeführt worden und die Möglichkeiten der Vergrösserung dieses Faktors durch Einführung der technologischen Konstruktions-Änderungen sind untersucht worden. Man hat bewiesen, dass die dabei auftretenden Schwierigkeiten die Erzielung des grossen Wertes des Gütefaktors unmöglich machen.

Diese Schwierigkeiten können durch den Einbau des Driftfeldes in den Basisraum verringert werden.

Transistor mit solch einer Konstruktion wird Drifttransistor genannt. Die Werte des Gütefaktors der Drifttransistoren mit den legierten *pn*-Übergängen sind erörtert worden und man hat berechnet, dass diese Konstruktion eine 40-malige Vergrösserung des Wertes des Gütefaktors im Vergleich zum Wert dieses Faktors für die Shockleyschen Transistoren ermöglicht. Zur Beendigung sind die Möglichkeiten der Ausführung des Stoffes mit der veränderlichen Konzentration der Störstellen mit Hilfe der Diffusion von aussen aus kurz beschrieben worden.

---

[1]) Symbole odnoszące się do tranzystora dryftowego oznaczone są przecinkiem.

621.394.1

WIESŁAW FIJAŁKOWSKI

Zniekształcenia telegraficzne

Rękopis dostarczono 25.11.1958

Aby umożliwić ocenę technicznej jakości działania elementów połączeń telegraficznych, zostały wprowadzone pojęcia zniekształcenia modulacji i zniekształcenia odtworzenia. Opracowanie wymagań ograniczających wartość zniekształceń oraz przestrzeganie ich spełnienia miało zapewnić dobrą łączność telegraficzną, to jest takie połączenia telegraficzne, w których stopa błędów nie przekraczałaby pewnej nieznacznej wartości.

Współpracy i inicjatywie specjalistów zgrupowanych wokół Międzynarodowego Telegraficznego Komitetu Doradczego (CCIT) zawdzięczamy wprowadzenie pojęcia zniekształcenia telegraficznego do powszechnego użytku i opracowanie odpowiednich definicji. W ostatnich 30 latach obserwujemy rozwinięcie systemu pojęć związanych ze zniekształceniem, udoskonalenie określeń i dostosowanie do postępu technicznego zachodzącego w międzyczasie.

Dość dużo czasu upłynęło i możemy spojrzeć na pojęcia związane ze zniekształceniem z perspektywy historycznej. Zauważamy wtedy, że pierwotnym punktem wyjścia była zmienność opóźnień odtworzenia, następnie, że uznano, iż przy wyznaczaniu wartości zniekształcenia można się oprzeć na wydłużeniach i skróceniach odstępów znamiennych, ale ostatnio nawracamy do pierwotnej koncepcji obserwacji przesunięć momentów znamiennych, ujętej już znacznie szerzej i dokładniej i bardziej dostosowanej do aktualnych potrzeb.

Rozpatrując dotychczasowe prace CCIT na tle rozwoju telegrafii dochodzimy do wniosków określających kierunek prac, które będą prowadzone w przyszłości, mających na celu udoskonalenie pojęć zniekształceń telegraficznych.

1. ZNIEKSZTAŁCENIE A JAKOŚĆ POŁĄCZENIA TELEGRAFICZNEGO

Połączenie telegraficzne jest zupełnie dobre wtedy, gdy wszystkie znaki przechodzą przezeń bez przekłamań. W praktyce obserwujemy pewne odstępstwa od tego wymagania, stanowiące jednak w połącze-

[1]) Według artykułu W. Fijałkowski: „Histoire de distorsion télégraphique". — Journal des Télécommunications, UIT, Octobre 1958, No 10.

niach uważanych za dobre nieznaczny ułamek liczby znaków błędnie przekazanych w stosunku do liczby wszystkich znaków. Wyznaczając graniczną górną wartość tego ułamka określamy wymaganą jakość usługową połączeń. Lecz określenie takie jest oparte na wynikach przekazywania, które sprawdzamy już po utworzeniu połączenia. Zmierzenie stosunku przekłamanych znaków do wszystkich znaków przekazywanych informuje o jakości połączenia po fakcie przekazania, lecz aby na tej podstawie przewidzieć, jak się ono będzie zachowywać w przyszłości, trzeba długich obserwacji statystycznych.

Tworzenie połączeń bez wskaźników technicznych, a jedynie w oparciu o wskaźnik wynikowy przypominałoby budowanie mostów bez obliczeń wytrzymałościowych i badanie ich trwałości dopiero po zbudowaniu.

Podstawowym wskaźnikiem technicznym w telegrafii jest zniekształcenie. Praktyka wykazała, że utrzymanie zniekształceń poniżej pewnej wartości gwarantuje odpowiednią jakość połączeń, jeżeli tylko aparaty telegraficzne będą wykazywały dostateczną marżę, pod którym to pojęciem rozumiemy wartość zniekształceń, poniżej której wszystkie znaki będą z pewnością odbierane prawidłowo. Ograniczenie wartości dopuszczalnych zniekształceń wytrzymało próbę życiową. Teoria powstawania zniekształceń, ich obserwacja i pomiary są podstawą budowy i eksploatacji technicznej współczesnych urządzeń telegraficznych.

Rozbudowa urządzeń telegraficznych w ostatnich dziesiątkach lat, ich zmiana jakościowa, zastąpienie połączeń stałych połączeniami chwilowymi, rozwój na tej podstawie teleksu i genteksu [1]) są przyczyną, że pojęcie zniekształcenia zyskuje coraz bardziej na ważności ulegając przy tym modyfikacji i pogłębieniu. Pojęcie zniekształcenia, podstawowe w technice telegraficznej, w obecnej postaci nie daje się połączyć z nazwiskiem jednego specjalisty. Pojęcie zniekształcenia powstało dzięki pracy wielu specjalistów, którzy w ramach organizacyjnych CCIT, kierując się potrzebą rozwijania współpracy międzynarodowej, określili i pogłębili je. Przeglądając prace CCIT widzimy, że od lat 30 pojęcia dotyczące zniekształceń są stałym tematem dyskusji i nowych opracowań. Należy podkreślić, że w ten sposób, CCIT przyczynił się do postępu techniki telegraficznej.

2. ZNIEKSZTAŁCENIE W ZROZUMIENIU PIERWSZYCH UCHWAŁ CCIT

W zaleceniach opracowanych w roku 1931 przez CCIT czytamy [2]):

[1]) Pod teleksem rozumiemy telegrafię abonencką, a pod genteksem część telegrafii powszechnej — obie organizowane są na zasadzie zestawienia połączeń chwilowych.

[2]) Documents de la 3-e réunion du Comité Consultatif International des Communication Télégrafiques. Berne, 1931, t. II, s. 104—105.

„W każdym połączeniu telegraficznym przeprowadzona jest modulacja prądów elektrycznych na stanowisku zwanym stanowiskiem nadawczym. Prądy te zostają odebrane przez aparat odbiorczy, w zasadzie wyposażony w przekaźnik lub organ analogiczny z częścią ruchomą, której przemieszczenia są następstwem prądów telegraficznych.

Wymienione przemieszczenia powinny umożliwiać bądź przez bezpośrednią obserwację, bądź przy pomocy urządzenia tłumaczącego, uruchamianego poprzez odpowiedni mechanizm lub elektryczne organy pośredniczące, powtórzenie wierne wiadomości, której odpowiada modulacja prądów wykonana na stanowisku nadawczym.

. . . . . ,

W połączeniu telegraficznym wyposażonym w przekaźnik odbiorczy czas, który dzieli moment, w jakim przekaźnik opuszcza jeden ze styków, od odpowiadającego mu momentu modulacji, w ogólności nie jest stały. Zależy on od charakterystyki drogi przesyłowej, od czasu trwania i kolejności następstwa sygnałów poprzednio przesyłanych i od stanu regulacji przekaźnika odbiorczego w stosunku do natężenia prądu odbieranego.

Jeżeli wszystkie przesyłane sygnały składają się z wysyłań trwających pewną jednostkę elementarną lub jej wielokrotność, wtedy zakładając, że nie występują jakiekolwiek zakłócenia, można określić granicę górną i granicę dolną czasu wymienionego w ustępie poprzedzającym, rozważając wszystkie możliwe kombinacje sygnałów. Wartość różnicy między tymi granicami jest nazywana **rozproszeniem teoretycznym** połączenia przy danej elementarnej jednostce czasu.

Nieregularności działania nadajnika i zakłócenia, którym podlega połączenie, mogą spowodować zwiększenie wartości tej różnicy, którą w tym przypadku nazywać będziemy **rozproszeniem rzeczywistym**.

. . . . . ,

Stopniem zniekształcenia pewnego połączenia nazywamy stosunek rozproszenia do odstępu elementarnego (jednostkowego) wysyłania. Stosunek ten jest równy iloczynowi wartości rozproszenia (wyrażonej w sekundach) i wartości szybkości przesyłania (wyrażonej w bodach).

. . . . . ,

Zasługuje na podkreślenie, że z wyjątkiem przypadków zupełnie szczególnych nie jest możliwe wymienienie jakiegokolwiek ogólnego związku między stopniem zniekształcenia całego połączenia i stopniem zniekształcenia każdego z jego elementów. Stopień zniekształcenia pewnego elementu zależy od zespołu elementów, z którymi współpracuje, od jego względnego ustawienia w tym zespole oraz od kierunku przesyłania [1])".

Przy czytaniu powyższego tekstu prawie po trzydziestu latach od chwili jego opracowania nasuwają się następujące uwagi:

— Przemieszczenie ruchomej części odbiornika obecnie nazywamy odtworzeniem.

---

[1]) Pewnym naświetleniem postępu uczynionego od chwili sformułowania tego ostatniego ustępu jest artykuł: „Zniekształcenia wypadkowe zestawu łączy". — Przegląd Telekomunikacyjny Nr 10 z roku 1957.

— Momenty, w których przekaźnik dokonuje przemieszczania, to momenty znamienne odtworzenia.

— Czas, który upływa od momentu znamiennego modulacji do odpowiadającego mu momentu znamiennego odtworzenia, nazywamy opóźnieniem odtworzenia.

— Rozproszenie jest różnicą między maksymalnym i minimalnym opóźnieniem odtworzenia.

Uwzględniając powyższe uwagi możemy istotny sens ówczesnych zaleceń wyrazić krócej, przez zdefiniowanie, że stopień zniekształcenia tc stosunek rozproszenia do odstępu jednostkowego.

Widzimy, że w roku 1931 pojęcie zniekształcenia było ograniczone do zniekształcenia odtworzenia. Podstawą wyznaczania stopnia zniekształcenia jest badanie różnic między opóźnieniami odtworzenia i poszukiwanie ich wartości maksymalnych. Można uważać, że definicja zniekształcenia opiera się na niewłaściwym występowaniu w czasie momentów znamiennych odtworzenia.

Zniekształcenie jest w ogólności pojęciem względnym. Stopień jego można określić jedynie przez porównywanie przebiegu badanego z przebiegiem uznanym w pewnym stopniu jako wzorcowy. Ta myśl nie została wtedy, a nawet i później, wypowiedziana wyraźnie. Można jednak przypuścić, że ograniczenie zniekształcenia jedynie do odtworzenia wynikło z tego, że modulacja, która powoduje pewne odtworzenie, jest naturalnym przebiegiem odniesieniowym dla tego odtworzenia i wobec tego był to najłatwiejszy do zdefiniowania przypadek zniekształcenia.

Po zebraniu plenarnym CCIT w Pradze nastąpiła modyfikacja omawianego zalecenia. Wprowadzono określenie odtworzenia i opóźnienia odtworzenia.

Zwraca uwagę, że modulacja określona została jako podział czasu na odcinki, z pominięciem jednak podkreślenia, że podział ten jest jednocześnie związany z nacechowaniem tych odcinków czasu stanami elektrycznymi, nazwanymi w późniejszych pracach CCIT stanami znamiennymi. Oto odpowiedni ustęp zalecenia [1]):

> „Niektóre systemy telegraficzne opierają się na następującej zasadzie:
>
> Czas jest dzielony na kolejne odstępy różniące się długością i zwane **elementami modulacji**; na początku połączenia telegraficznego powoduje się w czasie każdego z tych odstępów szereg operacji tworzących **jedno wysłanie pełne.** Te wysłania są tego rodzaju, że po stronie odbiorczej płynie prąd, którego zmiany umożliwiają rozpoznanie, kiedy zaczęły się kolejne odstępy.

[1]) Documents de la 1-e réunion du Comité Consultatif International Télégraphique (CCIT). Prague, 1934, s. 190.

Momentami znamiennymi modulacji nazywamy momenty, w których zaczynają się kolejne odstępy".

Określono w sposób prosty i nieco odmienny od dotychczasowego niektóre pojęcia związane z modulacją i stworzono lepsze podstawy dla wyjaśnienia, co to jest zniekształcenie jako nieprawidłowość podziału czasu.

Cechy istotne postępu i nowości znajdujemy w określeniach zniekształcenia maksymalnego, zniekształcenia zwanego „ruchowym" i zniekształcenia przy nadawaniu. Oto odpowiednie ustępy [1]):

„Zniekształcenie maksymalne. Zniekształcenie w eksploatacji.

Gdy sygnały telegraficzne są wysyłane przy pomocy aparatu znormalizowanego, działającego z określoną szybkością, wtedy stopniem zniekształcenia maksymalnego nazywamy stopień zniekształcenia odpowiadający przesyłaniu wszystkich kombinacji wysyłania, które można by spowodować przy pomocy takich aparatów.

Stopniem zniekształcenia w eksploatacji nazywamy stopień zniekształcenia zmierzony przy przesyłaniu zdeterminowanego tekstu przez pewien czas określony.

Zniekształcenie przy nadawaniu.

W przypadku nieprawidłowej modulacji telegraficznej zniekształcenie przy nadawaniu wyznacza się przez porównanie sygnałów wysyłanych z sygnałami odtworzonymi, będącymi następstwem modulacji doskonałej".

Pojawiło się więc zastosowanie pojęcia zniekształcenia do modulacji. Wyjaśnienie jest co prawda jeszcze niejasne i zawiłe, lecz stanowi ono zdecydowane rozszerzenie zakresu zastosowań. Zawiłość jest następstwem dążenia do porównywania z odtworzeniem, przebiegiem, który wydawał się wtedy jedynie realnie uchwytnym.

Licznie wykonywane pomiary zniekształceń wykazały wtedy, że stopień zniekształcenia zdefiniowany jako największa zaobserwowana różnica między opóźnieniami odtworzenia zależy od czasu obserwacji, który im jest dłuższy, tym większe jest prawdopodobieństwo napotkania największego opóźnienia i najmniejszego opóźnienia. Zrozumienie tego faktu przejawiło się w definicji stopnia zniekształcenia ruchowego.

Zniekształcenie maksymalne jest pojęciem teoretycznym; daje się ono w praktyce rzadko zaobserwować. Zniekształcenie ruchowe jest w zasadzie niższe od zniekształcenia maksymalnego, które stanowić może dla niego wartość graniczną. Zdobyczą dociekań ówczesnych było zrozumienie, że można rozpatrywać zniekształcenia nie tylko jako wartość maksymalną.

W zaleceniach opracowanych na ostatnim przed wojną zebraniu plenarnym w roku 1936, które odbyło się w Warszawie, opuszczono niestety

1) Domuments de la 1-e réunion du Comité Consultatif International Télégraphique (CCIT). Prague, 1934, s. 191.

definicję zniekształcenia maksymalnego, które przy tej nazwie można było rozumieć jako pewnego rodzaju przeciwstawienie innym rodzajom zniekształceń, pozostawiając jednak w ogólnym określeniu stopnia zniekształcenia podkreślenie, że jest on wyznaczony największą zaobserwowaną różnicą opóźnień. Te fluktuacje wynikały zapewne z niedoceniania potrzeby rozpatrywania zniekształceń jako pewnej funkcji czasu.

Coraz powszechniejsze zastosowanie dalekopisów i wypieranie przez nie aparatów synchronicznych, w stosunku do których wprowadzono pojęcie zniekształcenia, wymagało przeanalizowania, czy nie należy do jego definicji wprowadzić pewnych zmian. Wyniki tej analizy w skończonej formie pojawiły się dopiero po wojnie, lecz już w zaleceniach warszawskich znajdujemy interesujące stwierdzenia [1]).

„...Nieregularności wykonania i niedociągnięcia regulacji aparatu arytmicznego powodują zniekształcenia przy wysyłaniu, które przejawiają się w sposób następujący:

1°. Występują przesunięcia między momentami znamiennymi modulacji powodowanej przez ten aparat i momentami zamiennymi modulacji, którą powodowałby aparat doskonały, dający sygnał rozruchowy w tym samym momencie co aparat rozpatrywany i mający stałą szybkość równą średniej szybkości tego aparatu.

2°. Występuje odchylenie szybkości modulacji aparatu od szybkości znormalizowanej 50 bodów.

W celu wyznaczenia warunków, które mają być wymagane w stosunku do aparatu dopuszczonego do ruchu można:

bądź wyznaczyć oddzielnie granicę każdego z tych powyżej zdefiniowanych przesunięć,

bądź wyznaczyć granicę zniekształcenia przy wysyłaniu sygnałów modulowanych przez aparat zakładając, że modulacją wzorcową, z którą porównuje się modulację rzeczywistą, byłaby modulacja aparatu doskonałego o szybkości modulacji równej dokładnie 50 bodom..."

Wyciągnięto wniosek z faktu, że aparaty arytmiczne mogą nie być dokładnie zsynchronizowane, że mogą działać nieco szybciej lub wolniej, niż to wynika z założonej dla nich szybkości modulacji, i uznano, że przesunięcie szybkości powoduje nieprawidłowe rozmieszczenie momentów znamiennych i że taka nieprawidłowość jest właśnie zniekształceniem.

Pozostałe sformułowania dotyczące modulacji i jej pojęć pochodnych uległy w zaleceniach uchwalonych w Warszawie pewnym zmianom, lecz zmiany te nie wniosły nic naprawdę istotnego.

3. MODULACJA BEZ ZNIEKSZTAŁCEŃ I ODSTĘPY TEORETYCZNE

Między ostatnim przed wojną zebraniem plenarnym CCIT a pierwszym po wojnie upłynęło 12 lat. Okres międzyzebraniowy obejmuje

[1]) Documents de la 5-e réunion du Comité Consultatif International Télégraphique (CCIT). Varsovie, 1936, t. II, s. 230.

przerwę w pracach CCIT spowodowaną wypadkami wojennymi. Był on jednak pomimo tej przerwy tak długi, że prawie we wszystkich pracach CCIT obserwujemy znaczny postęp, a więc również i w dziedzinie badania oraz określania jakości transmisji telegraficznej.

Przeglądając zalecenie 301 opracowane w Brukseli zauważamy, że zmiany polegają przede wszystkim na tym, że:

1) Określenie modulacji bez zniekształcenia oparte zostało na prawidłowości czasu trwania odstępów czasu, nie zaniechano jednak posługiwania się również różnicą opóźnień odtworzenia.

2) Wprowadzono pojęcie zniekształcenia arytmicznego, z dopuszczeniem rozróżnienia jego na całkowite i przy izochroniźmie.

Oto niektóre wyjątki tego zalecenia ilustrujące pierwszy punkt wymienionych zmian [1]):

„... 2⁰. Początek każdego elementu sygnału nazywany jest momentem znamiennym.

3⁰. W znormalizowanych systemach telegraficznych nie będących systemami arytmicznymi modulacja telegraficzna powodowana przez nadajnik lub odtworzenie modulacji po stronie odbiorczej jest **bez zniekształcenia** lub — inaczej mówiąc — **doskonała,** jeżeli jej momenty znamienne oddzielone są odstępami czasu równymi odstępom teoretycznym.

Jeżeli natomiast tak nie jest, a wobec tego jeżeli momenty znamienne wykazują niejednakowe przesunięcia (są opóźnione lub wyprzedzają) w stosunku do odpowiadających im momentów teoretycznych, wtedy można powiedzieć, że modulacja telegraficzna lub jej odtworzenie są zniekształcone. **Stopniem zniekształcenia modulacji** lub **odtworzenia** nazywamy wartość bezwzględną największej różnicy algebraicznej między przesunięciami wymienionymi powyżej a odstępem jednostkowym".

Jakie działały przyczyny nowych sformułowań i co one oznaczały? Na pytanie to można dać odpowiedź nawiązując do potrzeb wynikających z postępu techniki.

Posiłkowanie się wahaniami opóźnienia odtworzenia jako podstawą do obliczania zniekształceń było wygodne przy realizacji przyrządów pomiarowych, które początkowo tylko na tej zasadzie były opracowywane, lecz było zbyt wąskie przy rozważaniach teoretycznych. Stąd wynikały trudności przy określeniu zniekształceń przy nadawaniu, dla którego trzeba było niepotrzebnie zakładać dokonywanie odtworzenia.

Przy zastosowaniu telegrafii wielokrotnej nie można było uniknąć translacji, a więc w punktach leżących wzdłuż drogi przesyłania konieczne było odtworzenie i powtórne wysyłanie sygnałów. Liczba translacji przypadających na jedno połączenie wzrasta wraz z zastosowaniem ko-

[1]) Documents de la 6-e réunion du Comité Consultatif International Télégraphique (CCIT). Bruxelles, 1948, s. 32.

mutacji automatycznej przy zestawianiu połączeń. Coraz bardziej potrzebne było wyznaczanie zniekształcenia nie tylko na krańcach połączenia przy nadawaniu i odbiorze, lecz i w różnych punktach połączenia, a takie zniekształcenia nie mogły być wyznaczane przez porównywanie z sygnałami pierwotnymi, to jest z sygnałami wysyłanymi przez nadajnik.

Pomiar różnicy opóźnień odtworzenia nie był w każdym przypadku możliwy. Chciano wyznaczać stopień zniekształcenia sygnałów w czasie trwania połączenia, w różnych jego punktach, również i w takich przypadkach, gdy nadajnik wysyłał sygnały już w pewnym stopniu zniekształcone. Chciano mierzyć zmiany stopnia zniekształcenia powodowane przez elementy drogi przesyłowej, w zależności od stopnia zniekształcenia sygnałów doprowadzonych do tych elementów. We wszystkich tych przypadkach zniekształcenie zależy od warunków współdziałania nadajnika i elementów drogi przesyłowej.

Ażeby zaspokoić te potrzeby, należało wprowadzić inny sposób określania stopnia zniekształcenia opierając się na takich elementach, które mogłyby wynikać z założeń teoretycznych i być realizowane w przyrządach pomiarowych. Jak wspomniano powyżej, stopień zniekształcenia może być wyznaczany jedynie przez porównywanie sygnału badanego z pewnym innym sygnałem. W owym czasie wydawało się najłatwiejsze określanie modulacji tego sygnału odniesienia przy pomocy jej odstępów znamiennych. Założono, że taka modulacja stanowi pewnego rodzaju wzorzec, określony przez odstępy o długościach teoretycznych lub przez odstępy o długościach wynikających z obliczeń lub z pomiarów. Uznano więc, że o braku zniekształcenia świadczy prawidłowość odstępów między momentami, co już było otwartą drogą do sformułowania w roku 1953 definicji opartej wyłącznie na wydłużeniach ewentualnie skróceniach odstępów. O pewnych niedogodnościach takiego ujęcia będzie mowa dalej.

4. KONSEKWENCJE UPOWSZECHNIENIA TECHNIKI DALEKOPISOWEJ

Poprzednio we wstępie wyjaśniono, że pojęcie zniekształcenia zostało opracowane i wprowadzone w tym celu, aby przez ograniczenie odpowiednimi warunkami jego wartości i przez kontrolę ich spełniania zagwarantować pewną żądaną jakość połączenia. Stworzono narzędzie, którym posługując się uzyskano to, co było zamierzone. Lecz oczywiste jest, że spełnienie tych warunków kosztuje i to zarówno ze względu na koszty wyposażenia, jak i koszty eksploatacji. Wracając do przykładu projektowania mostu, nie nazwalibyśmy oszczędnym projektowaniem uwzględnienie zbyt dużych współczynników bezpieczeństwa, zakładanie

obciążeń całości, nie spotykanych w praktyce, lub oparcie się na niezbyt dokładnej teorii, przy której zastosowaniu obliczone naprężenia wypadałyby wyższe od występujących w rzeczywistości. W technice telegraficznej można było się obawiać analogicznych błędów. Sytuacja w telegrafii różni się jednak tym, że w połączeniach telegraficznych dopuszczamy, co prawda bardzo rzadko, pewne błędy, natomiast most musi być liczony tak, żeby się nigdy nie załamał. Uwagi powyższe uzasadniają konieczność prowadzenia takich studiów nad zniekształceniem, które umożliwiałyby ograniczanie jego wartości w sposób jak najbardziej skuteczny i ekonomiczny.

W okresie powojennym telegrafii w Europie dominuje zastosowanie dalekopisów. Proces wypierania innych aparatów zaczęty około trzydziestu lat temu został w zasadzie ukończony. Do potrzeb dalekopisów i ich właściwości dostosowuje się więc wszelki sprzęt normalny.

CCIT uwzględnił zmiany, które zaszły w technice telegraficznej, i wprowadził szczególne pojęcie zniekształcenia dostosowane do zasad działania aparatów arytmicznych. W zaleceniu 301 możemy przeczytać ustęp następujący [1]):

„... 4⁰. Przy arytmicznych systemach telegraficznych:

a) Stopniem zniekształcenia arytmicznego całkowitego pewnej modulacji lub odtworzenia nazywamy stosunek do odstępu jednostkowego znormalizowanej szybkości modulacji, wartości bezwzględnej największego przesunięcia występującego między momentami znamiennymi modulacji lub odtworzenia i odpowiadającymi im momentami teoretycznymi wyznaczonymi poprzez moment znamienny elementu rozruchowego każdego sygnału.

b) Gdy przy wyznaczaniu teoretycznych momentów znamiennych odstęp jednostkowy „średni" wynikający z rzeczywistej szybkości modulacji zastępuje odstęp jednostkowy teoretyczny odpowiadający szybkości modulacji znormalizowanej, wtedy mierzony jest stopień zniekształcenia arytmicznego przy izochronizmie".

Dalekopis jest aparatem arytmicznym, w którym właściwy sygnał odpowiadający znakowi alfabetu, zwany sygnałem alfabetowym, oddzielony jest od pozostałych sygnałów pomocniczymi sygnałami: rozruchowym i zatrzymującym. Modulacja takiego aparatu powoduje podział czasu posiadający wyraźny moment początkowy dla każdego znaku, w przeciwieństwie do aparatów działających synchronicznie, w których takiego początku jako momentu odniesienia dla rozpoczęcia podziału czasu nie znajdujemy. Powyższa właściwość dalekopisu pozwala na obliczanie stopnia zniekształcenia dla każdego sygnału oddzielnie.

W odbiorniku dalekopisu zostaje wykorzystane zaznaczenie początku każdego sygnału w celu uruchamiania jego części rejestrującej na

[1]) Documents de la 6-e réunion du CCIT. Bruxelles, 1948, s. 32.

czas jednego znaku. Odbiornik przeprowadza rozeznanie stanów znamiennych jednego sygnału w odstępach wyznaczonych szybkością aparatu odbiorczego, lecz o uruchomieniu części rozeznającej decyduje moment początku każdego nadchodzącego sygnału. Zarówno w nadajniku, jak i w odbiorniku dalekopisu mamy początek podziału czasu. Stąd bliska jest droga do idei, że niebezpieczne dla pracy odbiornika są przede wszystkim przemieszczenia momentów znamiennych w stosunku do momentów początkowych poszczególnych sygnałów. Powyższe zostało potwierdzone przy pomocy odpowiednich badań i wyrażone w definicji zniekształcenia arytmicznego.

Różnice między tak zrozumianym zniekształceniem arytmicznym a zniekształceniem izochronicznym, to jest tym, które uprzednio nazywano krótko zniekształceniem, można uzmysłowić przy pomocy następujących wzorów:

Oznaczamy przez Θ przesunięcie czasowe momentu znamiennego w stosunku do odpowiadającego mu momentu przyjętego w danym przypadku za właściwy (wzorcowy). Stopień zniekształcenia izochronicznego ogólnie możemy wyrazić wzorem:

$$\delta_i = \frac{\Theta_{max} - \Theta_{min}}{\varepsilon} 100\ \%, \tag{1}$$

gdzie przez ε oznaczono odstęp jednostkowy.

W szczególnym przypadku przesunięcie Θ to opóźnienie odtworzenia, a wtedy wzór powyższy odpowiada pierwotnemu brzmieniu określenia zniekształcenia.

Wzór na stopień zniekształcenia arytmicznego napiszemy posługując się następującymi oznaczeniami:

Θ_n — przesunięcie któregokolwiek momentu w tym samym sygnale,

Θ_1 — przesunięcie momentu rozruchowego.

Stopień zniekształcenia sygnału l określony jest wzorem:

$$\delta_{al} = \frac{|\Theta_n - \Theta_1|_{max}}{\varepsilon} 100\ \%, \tag{2}$$

a zniekształcenie maksymalne wielu przesłanych sygnałów:

$$\delta_a = \delta_{al}|_{max} \tag{3}$$

Dzięki rozpoczynaniu transmisji przy każdym sygnale od nowa, możemy dopuścić pewne różnice w szybkości nadajnika i odbiornika. Różnice takie, gdyby były nawet naprawdę minimalne, to w systemach synchronicznych narastałyby jednak stopniowo i w końcu uniemożliwiłyby prawidłowe przekazywanie. W systemie arytmicznym następuje skasowanie różnicy po każdym sygnale. Ponieważ odchylenie od szybkości nominalnej powoduje niewłaściwe rozmieszczenie momentów znamiennych,

wobec tego słuszne jest traktowanie powstałych wskutek tego przesunięć jako składowych stopnia zniekształcenia. Odchylenia szybkości odbiornika powodują, że odstępy między czynnościami rozeznania nie odpowiadają założeniom i w ten sposób zmniejszają marżę dalekopisu o wielkość proporcjonalną do odchylenia szybkości.

Wprowadzenie do teorii transmisji pojęcia zniekształcenia arytmicznego wnikliwiej uwzględniło sposób działania dalekopisów, dostosowując sposób stosowania warunków do potrzeb. Zastanówmy się nad skutkami powyższego dostosowania.

Stopień zniekształcenia arytmicznego mierzony jest dla każdego znaku oddzielnie. Czas każdego pomiaru ulega w ten sposób bardzo znacznemu skróceniu. W każdej modulacji lub odtworzeniu możemy oczekiwać, że niektóre momenty znamienne będą opóźnione lub przyspieszone w stosunku do odpowiadających im momentów wzorcowych. Natomiast prawdopodobieństwo, żeby w jednym sygnale wystąpiło największe opóźnienie i najmniejsze opóźnienie i żeby jedno z nich było opóźnieniem momentu rozruchowego, jest o wiele mniejsze i może w ogóle taki wypadek nie następować. Dlatego w wyniku pomiarów zniekształcenia arytmicznego przy synchronizmie otrzymujemy na ogół niższe wartości zniekształcenia niż przy pomiarach zniekształcenia izochronicznego. Dzięki bardziej wnikliwemu uwzględnieniu potrzeb aparatów uzyskujemy zasadniczą korzyść w postaci łatwiejszego spełnienia warunków dobrej transmisji.

Ażeby umożliwić stosowanie pojęcia zniekształcenia arytmicznego przy badaniu poszczególnych elementów drogi przesyłowej oraz przy badaniu aparatów z pominięciem ich odchyleń od szybkości nominalnej, wprowadzono stopień zniekształcenia przy synchronizmie. O różnicy między stopniem zniekształcenia arytmicznego całkowitego i stopniem zniekształcenia arytmicznego przy synchronizmie decyduje zmiana rozmieszczenia poszczególnych momentów wzorcowych. Jeżeli odchylenie szybkości dalekopisu od szybkości nominalnej wynosi ΔN, gdzie ΔN jest wielkością stosunkową, to różnice w przesunięciu wynoszą $n \cdot \Delta N \cdot \varepsilon$, a więc narastają wraz ze wskaźnikiem n. Wobec tego, że n może wynosić co najwyżej 6, różnica między stopniem zniekształcenia arytmicznego całkowitego δ_{ac} i przy synchronizmie δ_{ai} jest ograniczona wzorem:

$$\delta_{ac} - \delta_{ai} \leqslant |6\,\Delta N \cdot 100\ \%|. \tag{4}$$

Ponieważ CCIT wymaga, żeby (ΔN) nie przekraczało wartości 0,0075, więc podstawiając powyższy warunek do wzoru (4) otrzymujemy

$$\delta_{ac} - \delta_{ai} \leqslant 4{,}5\ \%. \tag{5}$$

Uwzględnienie odchylenia szybkości dalekopisu nadającego od szybkości nominalnej nie daje we wszystkich przypadkach zwiększenia stop-

nia zniekształcenia; różnica we wzorze (5) nie zawsze musi być dodatnia. Jeżeli na przykład wskutek zwiększonej szybkości nastąpiło stosunkowe przyspieszenie momentów, przy czym największemu przyspieszeniu podlegá moment 6, to może się zdarzyć, że z innych przyczyn ten właśnie moment ulega stale opóźnieniu i wtedy oba przesunięcia kompensują się częściowo lub zupełnie.

O stosunku stopnia zniekształcenia arytmicznego całkowitego do stopnia zniekształcenia arytmicznego przy synchronizmie informuje porównanie równania (2) z równaniem (6):

$$\delta_{ac,l} = \frac{|\Theta_n - \Theta_1 - n \cdot \Delta N|_{max}}{\varepsilon} 100\ \%, \qquad (6)$$

gdzie:

Θ_1 — opóźnienie odtworzenia momentu rozruchowego,

Q_n — opóźnienie momentu n, przy którym opóźnienie osiąga maksimum, przy czym wskaźnik n może być nie ten sam, co we wzorze (2),

ΔN — odchylenie stosunkowe od nominalnej szybkości.

Podsumowując uwagi dotyczące porównania zniekształceń izochronicznych i arytmicznych dochodzimy do wniosku, że:

1. Wprowadzenie zniekształceń arytmicznych jest uzasadnione lepszym dopasowaniem samego pojęcia do potrzeb i zasad działania dalekopisów.

2. Spełnienie pewnego granicznego warunku dotyczącego stopnia zniekształcenia arytmicznego jest łatwiejsze niż takiego samego co do wartości warunku dotyczącego zniekształcenia izochronicznego, ze względu na ograniczenie czasu pojedynczego pomiaru i ze względu na badanie wzajemnych przesunięć jedynie między momentem pierwszym a pozostałymi momentami tego samego znaku, a nie między wszystkimi jego momentami. Powyższe daje się szczególnie odczuć wtedy, gdy problem zniekształceń znaczniemy rozpatrywać jako problem statystyczny, problem zmieniających się w czasie stopni zniekształcenia.

Łatwiejsze do spełnienia warunki dają w rezultacie albo uproszczenie sprzętu, albo — co jest istotniejsze przy obecnych potrzebach telegrafii — możność zestawiania połączeń bardziej złożonych, w skład których wchodzi większa liczba łączy.

3. Uwzględnienie odchylenia szybkości modulacji od nominalnej powoduje, że wartości mierzonych zniekształceń mogą być o 4,5% wyższe, lecz jest to wzrost, który nie wpływa na zaostrzenie wymagań. Przeciwnie, wnikliwe podejście do sprawy pozwoliło na bardziej ekonomiczne rozplanowanie wzrostu zniekształceń (teleznieksztalceń) wzdłuż połączenia i odpowiednie wykorzystanie marży dalekopisu.

4. Wprowadzenie pomiaru stopnia zniekształceń poszczególnych znaków jako zasady badania zniekształceń arytmicznych było pierwszym krokiem w kierunku studiów nad prawami prawdopodobieństwa rozkładu stopni zniekształceń zarówno w czasie, jak i w stosunku do poszczególnych znaków alfabetu.

5. OPRACOWANIE ZBIORU DEFINICJI POJĘĆ

Od czasu zebrania w Brukseli obserwujemy zwiększone zainteresowanie zagadnieniami pojęciowymi dotyczącymi transmisji telegraficznej. W rezultacie już w Arnhem w 1953 roku nastąpiło gruntowne przeredagowanie starych zaleceń. Zalecenia B1 oraz B2 wówczas zatwierdzone składają się z czterdziestu kilku definicji. W związku z postanowieniem CCIT o opracowaniu przeglądu definicji pojęć ze zbioru zaleceń zostały usunięte w roku 1956 w Genewie definicje transmisyjne i włączone do wspomnianego przeglądu.

Między opracowaniami 1953 w Arnhem a 1956 w Genewie nie widać zasadniczych różnic, które wskazywałyby na inny sposób podchodzenia, nastąpiło jedynie uściślenie istniejących pojęć i wprowadzenie wielu nowych, tak że liczba definicji transmisyjnych przekroczyła 140. Wobec braku istotnych różnic omawiane będą dalej definicje z roku 1956, a teksty w cudzysłowach są tłumaczeniami niektórych pozycji z „Przeglądu podstawowych pojęć stosowanych w telegrafii".

Dłuższą, bo od kilku lat trwającą dyskusję na temat, co to jest modulacja telegraficzna, zakończono opracowaniem dwóch definicji, jednej bardziej ogólnej, drugiej dostosowanej specjalnie dla telegrafii alfabetowej [1]).

W określeniach podanych poniżej zwraca uwagę, że pod wyrazem modulacja możemy rozumieć zarówno następstwo pewnych stanów, a więc np. pewien przebieg zjawisk elektrycznych, jak i czynność mającą na celu spowodowanie takiego następstwa. Nie znajdujemy natomiast wzmianki, że celem modulacji, jej istotnym zadaniem jest podział czasu na odcinki i odpowiednie nacechowanie tych odcinków. Takie opracowanie definicji nie zmienia naturalnie w niczym istoty skutków i celów modulacji, które właśnie polegają na podziale czasu.

Zgodnie z propozycjami specjalistów francuskich rozszerzono pojęcie modulacji dla telegrafii alfabetowej do zmian położeń części aparatu, a więc pojęcie modulacji w tym zakresie stosowania obejmuje i przebieg

---

1) Telegrafią alfabetową nazywamy tę część telegrafii, która działa na zasadzie, że każdemu elementowi tekstu (literze, cyfrze, znakowi przestankowemu itp.) odpowiada przesłanie określonego sygnału.

czasowy mechaniczny. Uwzględniono w ten sposób wyniki dyskusji na temat wyrażenia „semacja" jako pojęcia szerszego od modulacji. Wyrażenie to zostało dopuszczone do dowolnego stosowania przez administracje.

> **„Modulacja** (Znaczenie przystosowane do potrzeb telegrafii).
>
> Zmiana w czasie jednej lub kilku określonych wielkości charakteryzujących falę elektromagnetyczną lub prąd stały, powodowana bezpośrednio (w przypadku telegrafii kopiowej) lub poprzez pewien kod (w przypadku telegrafii alfabetowej) odpowiednio do zawartości przesyłanego dokumentu".
>
> **„Modulacja telegraficzna** (Znaczenie szczególne dla telegrafii alfabetowej).
>
> a) Następstwo w czasie określonych stanów (położeń), do których przyjęcia zmusza się odpowiedni organ aparatu wysyłającego w celu utworzenia sygnałów telegraficznych; każdy stan jest skojarzony z odstępem czasu określonym trwaniem tego stanu.
>
> b) Czynność wymuszania na odpowiednim organie aparatu wysyłającego powyższego następstwa określonych stanów" [1].

Po raz pierwszy zamiast opisu odtworzenia udzielono odpowiedzi na pytanie, co to jest odtworzenie. W budowie określenia zachowana jest analogia w stosunku do określenia modulacji w przypadku telegrafii alfabetowej. Zwraca uwagę podkreślenie, że odtworzenie jest przebiegiem wtórnym w stosunku do modulacji będącej jego przyczyną. Zrozumiałe jest, że nie przewidziano możliwości, żeby uważać, że odtworzenie jest czynnością.

> **„Odtworzenie:** Następstwo stanów (położeń) zajmowanych w konsekwencji pewnej modulacji telegraficznej przez odpowiedni organ aparatu odbierającego; każdy stan jest skojarzony z odstępem czasu określonym trwaniem tego stanu" [2].

Dzięki modulacji powstają sygnały odpowiadające przesyłanym znakom. Różnią się one podziałem czasu na odcinki i elektrycznym nacechowaniem tych odcinków. Indywidualny charakter sygnałów uzyskiwany jest przez zestawienie dla każdego znaku w spsób odmienny prostych elementów. Zniekształcenie może doprowadzić do tego, że sygnał odpowiadający jednemu znakowi odpowiadać będzie w końcu bardziej innemu znakowi niż znakowi właściwemu. Zniekształcenie wyraża się tym, że elementy są nieprawidłowe, a więc przede wszystkim tym, że granice czasowe elementów ulegają przesunięciu. Ażeby zrozumieć do-

---

[1] Répertoire des définitions des termes essentiels utilisés dans le domaine des télécommunications, wydane przez UIT, Genewa, 1957, definicja 31.13 i 31.14, s. 197.

[2] jw., definicja 31.15, s. 197.

brze, co to jest zniekształcenie, należy zapoznać się z definicjami elementów sygnałów i elementów modulacji (odtworzenia) [1]:

„Element sygnału telegraficznego (w zrozumieniu ogólnym).

Każda z części stanowiących sygnał telegraficzny i różniąca się od innych przez swą naturę, wielkość, czas trwania i względne położenie (lub jedynie przez jedną lub kilka z wymienionych cech charakterystycznych)".

„Element sygnału telegraficznego (w systemach alfabetowych):

Każdy z elementów tworzących sygnał według pewnego szyfru, różniący się od innych przez swą odmienność, czas trwania i względne położenie (lub jedynie przez niektóre z tych cech charakterystycznych)".

„Element modulacji lub odtworzenia:

Stan określony, który przyjmuje odpowiedni organ aparatu wysyłającego (lub odbierającego), skojarzony z odstępem czasu określonym trwaniem tego stanu".

Z ostatniej definicji wynika, że element modulacji jest to skojarzenie pewnego stanu z jego czasem trwania. Po wyeliminowaniu czynnika czasu stan ten ma następującą nazwę i określenie [2]:

„Stany znamienne modulacji:

Określone stany przyjmowane przez odpowiedni organ aparatu wysyłającego, które charakteryzują odmienność elementów wysyłanych sygnałów telegrafii alfabetowej".

„Stany znamienne odtworzenia:

Określone stany przyjmowane przez odpowiedni organ aparatu odbiorczego, które charakteryzują odmienność elementów odbieranych sygnałów (sygnałów alfabetowych)".

W poprzednio opracowanych przez CCIT określeniach dotyczących czasowych właściwości modulacji terminem wyjściowym był moment znamienny modulacji, określony jako początek stanu znamiennego. Odstępy modulacji były odstępami czasu między momentami. Obecnie kolejność rozumowania została odwrócona. Terminem wyjściowym jest odstęp, a dopiero z niego wywodzi się moment. Ma to związek logiczny z oparciem pojęcia zniekształcenia na niewłaściwości odstępów, lecz nie wydaje się, jak już wspomniano, wygodne i słuszne [3].

„Odstęp znamienny modulacji lub odtworzenia:

Odstęp czasu, podczas którego pewien stan znamienny określony kodem i przesyłanym znakiem jest lub powinien być utrzymany".

---

[1] Répertoire des définitions des termes essentiels utilisés dans le domaine des télécommunications, wydane przez UIT, Genewa, 1957, definicje 31.02 i 31.03, s. 194 i 31.19, s. 198.

[2] Répertoire des définitions des termes essentiels utilisés dans le domaine des télécommunications, wydane przez UIT, Genewa, 1957 r., definicje 31.20 i 31.21, s. 199.

[3] jw. definicje: 31.22, 31.23 i 31.24, s. 199.

„Teoretyczny czas trwania odstępu znamiennego modulacji lub odtworzenia:

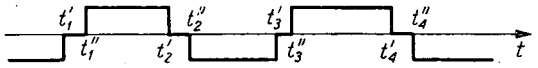
Czas trwania odpowiadający dokładnie wymaganemu przez kod czasowi trwania odstępu znamiennego przy uwzględnieniu średniej szybkości modulacji lub ewentualnie znormalizowanej szybkości modulacji".

„Momenty znamienne modulacji lub odtworzenia:

Momenty, które ograniczają odstępy znamienne modulacji (odtworzenia)".

Podane definicje mogą nastręczać pewne trudności przy wyznaczaniu odstępów i momentów znamiennych. W czasie dyskusji proponowano z tego powodu np. nazwanie momentem znamiennym moment, w którym stan znamienny osiągnął wartość w przybliżeniu ustaloną. Trudność polega na tym, że stany znamienne jeden w drugi przechodzą zazwyczaj nie momentalnie, tak że w wielu przypadkach koniec jednego stanu nie pokrywa się z początkiem drugiego. Tę drugą niejasność eliminowało dawniejsze określenie momentu znamiennego jako równoczesnego z początkiem stanu znamiennego.

Przykładem bardzo często spotykanym jest modulacja przedstawiona wykresem z rys. 1, którą otrzymujemy wtedy, gdy organem modu-



Rys. 1. Wykres modulacji powodowanej przez przekaźnik

lującym jest przekaźnik mechaniczny przyłączający raz jeden, raz drugi biegun napięcia. Czasy przerzutu jego kotwiczki manifestują się przerwami napięcia. Jeżeli przyjęto, że jeden stan znamienny to napięcie dodatnie, a drugi stan znamienny to napięcie ujemne, to przez to nie zdecydowano jeszcze, czy momentami znamiennymi są momenty t' czy momenty t''. Wątpliwość ta ma znaczenie nie tylko teoretyczne, lecz i praktyczne, ze względu na to, że zależnie od jej rozstrzygnięcia zależą np. założenia konstrukcyjne odbiornika, przyrządu do pomiaru zniekształceń.

6. ZMIANA ODSTĘPÓW PODSTAWĄ DEFINICJI

CCIT opracował określenie zniekształceń telegraficznych, które wyjaśnia, co to w ogóle jest zniekształcenie, i z tego względu określenie to powinno być podstawą wszystkich innych definicji rodzajów zniekształceń. Tymczasem tylko niektóre z nich, te właśnie które zostaną omówione w tym rozdziale, nawiązują do definicji ogólnej, inne nato-

miast na przykład dotyczące zniekształceń pojedynczych momentów, nie mieszczą się w jej ramach. Poniżej tekst określenia ogólnego [1]:

„Zniekształcenie telegraficzne modulacji lub odtworzenia:

Modulacja (lub odtworzenie) podlega zniekształceniu telegraficznemu wtedy, gdy odstępy znamienne nie mają dokładnie teoretycznego czasu trwania".

Nie ma w tej definicji jeszcze pojęcia wartości zniekształcenia, a więc nie ma również wyjaśnienia, czy jako pewną miarę zniekształcenia przyjmuje się maksymalne, czy średnie wartości odchyleń od teoretycznego czasu trwania, czy też rozpatruje się każde odchylenie oddzielnie.

Określenie dotyczące stopnia zniekształcenia izochronicznego mówi już wyraźnie, że pomiar ma polegać na poszukiwaniu maksimum wydłużenia lub skrócenia odstępów. Czas poświęcony na to poszukiwanie, to jest czas obserwacji, może mieć w niektórych przypadkach bardzo duży wpływ na wynik badania stopnia zniekształcenia [2].

„Stopień zniekształcenia izochronicznego:

Stosunek maksymalnej ze zmierzonych wartości bezwzględnych różnic między rzeczywistymi odstępami dwóch dowolnych (niekoniecznie następujących po sobie) momentów znamiennych modulacji (lub odtworzenia) a odpowiadającymi im odstępami teoretycznymi do odstępu jednostkowego.

Stopień zniekształcenia modulacji (odtworzenia) izochronicznego wyraża się zazwyczaj w procentach.

U w a g a. Wskazanie stopnia zniekształcenia powinno być uzupełniane podaniem czasu, w ciągu którego dokonane zostały obserwacje; czas ten jest w zasadzie ograniczony.

Dla dłużej trwającej modulacji (lub odtworzenia) należy uwzględnić prawdopodobieństwo, z jakim wyznaczona wartość stopnia zniekształcenia jest przekraczana".

Obecnie stosowane metody pomiaru stopnia zniekształcenia izochronicznego opierają się na jednym z dwóch założeń:

— Przy pomocy przyrządu pomiarowego na wejściu do badanego układu powodowana jest modulacja praktycznie bez zniekształceń, a na wyjściu ten sam przyrząd przeprowadza odtworzenie tejże modulacji i umożliwia obserwację zmienności opóźnień odtworzenia.

— Układ pomiarowy dzieli czas na odstępy jednostkowe takie same jak momenty jednostkowe badanej modulacji i umożliwia pomiar zmian opóźnień odtworzenia poprzez obserwację przesunięć między momentami znamiennymi modulacji badanej i momentami podziału czasu przeprowadzonego przez układ pomiarowy.

Ponieważ definicja mówi jedynie o różnicach między rzeczywisty-

[1] Répertoire des définitions des termes essentiels utilisés dans le domaine des télécommunications, wydane przez UIT, Genewa 1957 r., definicja 33.04, s. 225.

[2] jw. definicja 33.07, s. 226.

mi a teoretycznymi odstępami, więc pomiar przesunięć między odpowiadającymi sobie momentami nie jest bezpośrednim zastosowaniem definicji i tożsamość wyników pomiarów z wartościami wynikającymi z definicji wymaga teoretycznego uzasadnienia, zbędnego przy innym sformułowaniu definicji. Przykład takiego uzasadnienia można znaleźć w artykule o podstawowych pojęciach telegraficznych ogłoszonym w „Rozprawach Elektrotechnicznych" [1].

Definicja stopnia zniekształcenia arytmicznego jest również oparta na zmianach czasu trwania odstępu [2]:

„Stopień zniekształcenia arytmicznego:

Stosunek maksymalnej ze zmierzonych bezwzględnych różnic między odstępami rzeczywistymi, które dzielą którykolwiek moment znamienny modulacji (odtworzenia) od momentu znamiennego rozruchowego bezpośrednio je poprzedzającego, a odpowiadającymi im odstępami teoretycznymi do odstępu jednostkowego.

Stopień zniekształcenia modulacji (odtworzenia) arytmicznej wyraża się zazwyczaj w procentach.

Uwaga. Wskazanie stopnia zniekształcenia powinno być uzupełniane podaniem czasu, w którym dokonane zostały obserwacje, czas ten jest w zasadzie ograniczony.

Dla dłużej trwającej modulacji (lub odtworzenia) należy uwzględnić prawdopodobieństwo, z jakim wyznaczona wartość stopnia zniekształcenia jest przekraczana".

Metody pomiarów stopnia zniekształcenia arytmicznego polegają również na obserwacjach przesunięć między odpowiadającymi sobie momentami i nie są bezpośrednią realizacją definicji. Trzeba dopiero udowodnić, że stosowana metoda pomiarowa nie jest błędna [3].

Dzięki oddzieleniu poszczególnych sygnałów od siebie oraz dzięki potraktowaniu procesu nadawania i odbioru każdego znaku jako zamkniętej, samodzielnej operacji możliwa jest — jak już wspomniano — pewna różnica między szybkościami niektórych części współpracujących ze sobą dalekopisów. Dalekopis, który działa przy szybkości nieco różnej od nominalnej wymaganej szybkości, wysyła sygnały o elementach wydłużonych lub skróconych, których momenty znamienne podlegają przemieszczeniu proporcjonalnemu do wielkości odchylenia szybkości.

Zależnie od tego, czy uwzględnimy odchylenia od szybkości w wartości zniekształcenia arytmicznego, czy też nie uwzględnimy, znajduje zastosowanie jedno z dwóch następujących określeń [4]:

[1] „Rozprawy Elektrotechniczne", tom III, zesz. 2, 1957, s. 274—275.

[2] Répertoire des définitions des termes essentiels utilisés dans le domaine des télécommunications, wydane przez UIT, Genewa 1957 r., definicja 33.08, s. 227.

[3] „Rozprawy Elektrotechniczne", t. III, zesz. 2, 1957, s. 280.

[4] Répertoire des définitions des termes essentiels utilisés dans le domaine des télécommunications, wydane przez UIT, Genewa, 1957 r., definicje: 33.09 i 33.10, s. 227.

„Stopień zniekształcenia arytmicznego całkowitego:

Stopień zniekształcenia arytmicznego określony przy założeniu, że odstęp jednostkowy i odstępy teoretyczne odpowiadają dokładnie znormalizowanej szybkości modulacji.

U w a g a. Tekst jak pod definicją stopnia zniekształcenia arytmicznego".

„Stopień zniekształcenia arytmicznego przy synchronizmie lub przy średniej szybkości rzeczywistej:

Stopień zniekształcenia arytmicznego określony w założeniu, że odstęp jednostkowy i odstępy teoretyczne odpowiadają średniej rzeczywistej szybkości rozpatrywanej modulacji (lub odtworzenia).

U w a g a: Tekst jak pod definicją stopnia zniekształcenia arytmicznego".

W czterech omówionych definicjach stopnia zniekształcenia istnieją dwa momenty wspólne: pierwszy — to teoretyczność odstępów, drugi — maksimum bezwzględnych wartości różnic.

Porównywanie odstępów rzeczywistych jedynie z odstępami teoretycznymi jest pewnego rodzaju zawężeniem definicji, które na szczęście nie jest realizowane w praktyce. Poza tak ustalone ramy definicji wykraczają badania dotyczące transmisji sygnałów wstępnie zniekształconych i częściowo badania zachowania się elementów drogi przesyłowej jako pewnej funkcji różnych wartości stopnia zniekształcenia sygnałów na wejściu. Nie rozwijając bliżej powyższych wątpliwości wydaje się, że usunąć je można przez rozszerzenie znaczenia definicji albo usuwając wyrażenie „odstępy teoretyczne" i wprowadzając na jego miejsce „odstępy odniesieniowe" lub „odstępy przyjęte za wzorcowe w danym przypadku", albo przez dodanie odpowiedniej uwagi do definicji, wyjaśniającej, że wyraz „teoretyczny" należy rozumieć odpowiednio szerzej, niż to ustala definicja „teoretycznego czasu trwania odstępu znamiennego".

7. ZNIEKSZTAŁCENIE MOMENTÓW ZNAMIENNYCH

Jeżeli przyjąć jako założenie, że w wyniku modulacji następuje podział czasu, w którym momenty znamienne stanowią jakby kreski podziałowe, to wtedy zrozumiałe jest, że wadliwość modulacji, jej zniekształcenie, będzie przejawiało się w nieprawidłowości rozmieszczenia tych kresek na osi czasu.

Wynikające z obecnych definicji i stosowane obecnie powszechnie w pomiarach poszukiwanie maksymalnych przesunięć momentów znamiennych i określanie na tej podstawie stopnia zniekształcenia jest uproszczonym niepełnym działaniem dotyczącym tylko tych najbardziej przesuniętych momentów, a pomijającym przesunięcia wszystkich po-

zostałych. Postępowanie takie nie daje obrazu zniekształcenia, które w rzeczywistości co moment znamienny przyjmuje coraz inne wartości.

Dopóki w telegrafii dominowały połączenia stałe, utworzone z niezmieniającego się składu aparatów i odcinków dróg przesyłowych, dopóty uproszczony sposób limitowania zniekształceń był wystarczający i użyteczny. Lecz dla połączeń chwilowych zestawianych z coraz to innych elementów takie rozpatrywanie zniekształceń wydaje się zbyt grube i nieekonomiczne, a nawet rozrzutne. Praktyka pokazała, że można uzyskać o wiele lepsze rezultaty przy transmisji sygnałów, niż to pozwoliłoby przypuszczać sumowanie stopni zniekształceń własnych poszczególnych elementów i stąd między innymi od wielu już lat CCIT kłopocze się nad problemem opracowania reguł, na podstawie których można by przewidzieć powstawanie zniekształceń wypadkowych zestawu łączy, których zniekształcenia odpowiadają pewnym warunkom lub są statystycznie zbadane.

Jeżeli każde niewłaściwe umieszczenie momentu znamiennego w czasie uważać za zniekształcenie, to można rozpatrywać zniekształcenie jako funkcję kolejnych wskaźników w poszczególnych momentach znamiennych:

$$\delta = f(n). \tag{7}$$

Takie podejście otwiera szerokie możliwości. Między innymi można mówić o maksymalnej wartości zniekształcenia, o jego średniej, o jego wartości skutecznej (obliczanej analogicznie jak wartość skuteczna prądu) i o różnymi metodami przedstawionych krzywych rozkładu prawdopodobieństwa.

Ażeby mówić o zniekształceniu pojedynczego momentu znamiennego, trzeba wpierw ustalić dla każdego takiego momentu moment odniesienia, względem którego będzie później mierzone przesunięcie. Taki moment odniesienia, z którym pokrycie się momentu znamiennego równałoby się zerowemu stopniowi zniekształcenia, nazwany jest przez CCIT momentem idealnym i zdefiniowany w następujący sposób [1]:

„Momenty idealne modulacji lub odtworzenia:

Momenty, z którymi pokrywają się momenty znamienne w pewnych warunkach idealnych. W każdym z poszczególnych przypadków konieczne jest wskazanie, w jaki sposób jeden (lub kilka) z tych momentów idealnych jest (lub są) określony, wszystkie inne mogą być określane w stosunku do niego (lub do nich) po przesunięciu o odpowiednie odstępy teoretyczne".

1) Répertoire des définitions des termes essentiels utilisés dans le domaine des télécommunications, wydane przez UIT, Genewa, 1957 r., definicja 33.02, s. 225.

Widzimy, że dotychczas CCIT pozostawia zupełną swobodę wyboru momentów idealnych. Swoboda ta jednak, jak wynika z prac bieżących CCIT, zostanie w najbliższej przyszłości z pewnością ograniczona.

Wobec tego, że wszystkie rozważania CCIT dotyczą modulacji znormalizowanej o odstępach w zasadzie równych odstępowi jednostkowemu lub jego wielokrotności, słusznie się więc w definicji podkreśla, że wyznaczenie jednego momentu idealnego może być równoznaczne z wyznaczeniem wielu innych. Te pierwsze można by nazwać momentami idealnymi odniesieniowymi.

Znając momenty idealne i odpowiadające im momenty znamienne przebiegu badanego możemy mówić o stopniu zniekształcenia indywidualnego pewnych momentów znamiennych lub — wyrażając się krócej — o stopniu zniekształcenia momentów [1]:

> **„Stopień zniekształcenia indywidualnego pewnego momentu znamiennego modulacji lub odtworzenia:**
>
> Stosunek różnicy algebraicznej między momentem znamiennym a momentem idealnym do odstępu jednostkowego.
>
> Różnica ta jest uważana za dodatnią wtedy, gdy moment znamienny występuje później niż moment idealny.
>
> Stopień zniekształcenia indywidualnego określa się zazwyczaj w procentach".

Wprowadzenie takiej definicji jest poważnym postępem, otwierającym przed techniką telegraficzną nowe, szerokie możliwości analitycznego i szczegółowego badania zniekształceń.

Niezależnie od tej zasadniczej korzyści warto zwrócić uwagę na wprowadzenie rozróżnienia znaku stopnia zniekształcenia, co stanowi nowość i pewne przeciwstawienie dotychczas generalnie stosowanej zasadzie pomiaru bezwzględnych wartości różnic. Rozróżnienie takie może znaleźć zastosowanie i w innych przypadkach, na przykład w stosunku do zniekształceń jednostronnych, jak i zniekształceń arytmicznych.

Pomostem, co prawda jeszcze nie wykończonym, jak wynika z dalej zamieszczonych wyjaśnień, między momentem idealnym, stopniem zniekształcenia momentu a stopniem zniekształcenia izochronicznego jest pojęcie rozproszenia [2]:

> **„Czas rozproszenia, rozproszenie:**
>
> Odcinek czasu dokoła momentu idealnego pewnej modulacji lub pewnego odtworzenia, w którym pojawiają się rzeczywiste momenty znamienne tej modulacji lub tego odtworzenia".

---

[1] Répertoire des définitions des termes essentiels utilisés dans le domaine des télécommunications, wydane przez UIT, Genewa, 1957 r., definicja 33.06, s. 226.

[2] jw. definicja 33.05, s. 226.

Zbyt wielka dążność do uproszczenia spowodowała, że określenie to jest krótkie, a przez to niepełne i bez komentarzy nie może być zrozumiane.

Załóżmy, że obserwujemy przez czas T przebieg modulacji izochronicznej znormalizowanej o następujących momentach znamiennych t_1, t_2, t_4, t_6, ... t_k, t_{k+1}, ... t_l, t_{l+1} ... t_n. Przy modulacji znormalizowanej odstęp teoretyczny między momentem t_1 a momentem t_{k+1} wynosi $k\varepsilon$, gdzie ε jest odstępem jednostkowym. Powyższa uwaga wyjaśnia przyjętą zasadę numeracji momentów znamiennych, przy której po odstępach wielokrotnych nie zostaje zachowana kolejność numeracji. Zasada ta okaże się wygodna przy dalszych obliczeniach. Jeżelibyśmy przesunęli wszystkie momenty o wielokrotność odstępu jednostkowego skupiając je np. dokoła momentu t_l, to odcinek czasu obejmujący wszystkie te momenty, ograniczony najbardziej skrajnymi byłby tym, co nazywamy strefą rozproszenia, czasem rozproszenia lub po prostu rozproszeniem. Przesunięcie, któremu podlegałyby momenty mające na celu skupienie ich dokoła momentu t_l, określone jest wzorem:

$$\Delta t_k = t_k - (k - l)\,\varepsilon\,. \tag{8}$$

W szczególnym przypadku, gdybyśmy chcieli uzyskać strefę rozproszenia dokoła momentu t_1, to należałoby do wzoru powyższego podstawić $l = 1$.

Z powyższego przedstawienia wynika, że rozproszenie jest czymś niezależnym od momentu idealnego i że w definicji trzeba zaznaczyć czynność przesuwania momentów i ograniczyć pojęcie do modulacji izochronicznej znormalizowanej. Spróbujmy wobec tego zaproponować bardziej właściwy tekst definicji rozproszenia:

Rozproszenie:

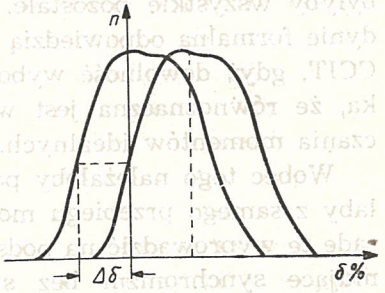
Odcinek czasu obejmujący wszystkie momenty badanego przebiegu izochronicznego znormalizowanego, przesunięte o odpowiednią wielokrotność odstępu jednostkowego i skupione dokoła jednego niepodlegającego przesunięciu.

Uwaga. *Przesunięcia momentów następują o liczbę odstępów jednostkowych, które teoretycznie oddzielają moment przesuwany od momentu, dokoła którego następuje skupienie.*

8. POSZUKIWANIE WŁAŚCIWEGO MOMENTU IDEALNEGO

Zasada zastosowana przy wyborze momentu idealnego decyduje o stopniu zniekształcenia momentu. Przesunięcie momentów idealnych odpowiadających pewnej badanej modulacji zmienia o stałą wartość wszystkie stopnie zniekształcenia momentów tej modulacji, nie wpływając przy tym na istniejące między nimi różnice.

Badanie krzywych rozkładu prawdopodobieństwa stopni zniekształcenia momentów znamiennych znajduje coraz szersze zastosowanie szczególnie w przypadkach badania typów sprzętu i badania wyników szeregowego współdziałania wielu dróg transmisyjnych i aparatów. Przesunięcie momentów idealnych powoduje przesunięcie poziomu krzywej rozkładu, bez zmiany jej kształtu, np. tak jak na rys. 2. Ustalenie jednakowych warunków wyznaczania takiej krzywej ma niemałe znaczenie dla porównywania wyników pomiarów wykonywanych przez różne zarządy przy pomocy odmiennego nieraz sprzętu pomocniczego.



Rys. 2. Przesunięcie krzywej rozkładu prawdopodobieństwa wskutek przesunięcia momentów idealnych o $\Delta\Theta$
n — liczba momentów, δ — stopień zniekształcenia momentów, $\Delta\delta = \frac{\Delta\Theta}{\varepsilon}\,100\%$ — stała różnica wartości

Dlatego w bieżącym programie prac CCIT znajduje się zagadnienie 1/9 dotyczące potrzeby i zasad wyznaczania momentu idealnego. Wydaje się, że zasady wyznaczania momentu idealnego muszą być dyskutowane oddzielnie dla modulacji arytmicznej i oddzielnie dla modulacji izochronicznej.

W pierwszym przypadku moment idealny odpowiadający momentowi rozruchowemu musi chyba pokrywać się z tym momentem. Pozostałe momenty idealne powinny znajdować się w odstępach będących wielokrotnością odstępu jednostkowego, odstępu wynikającego albo z szybkości znormalizowanej, albo z szybkości średniej, zależnie od tego, czy chcemy mówić o zniekształceniu całkowitym, czy przy synchronizmie.

Moment idealny rozruchowy stanowi pewnego rodzaju punkt odniesienia, w stosunku do którego wyznaczane są wszystkie inne momenty idealne, można więc go nazywać momentem idealnym odniesienia.

W razie takiego jak powyżej zdefiniowania momentu idealnego dla przypadku modulacji arytmicznej, musiałoby nastąpić rozdzielenie i sprecyzowanie dotychczas obowiązujących definicji stopnia zniekształcenia indywidualnego momentu znamiennego. W szczególności wydaje się, że potrzebne byłyby dwie oddzielne definicje: jedna dotycząca zniekształcenia arytmicznego całkowitego, druga dotycząca zniekształcenia arytmicznego przy synchroniźmie, obie zawierające zasady wyznaczania momentu idealnego.

W przypadku modulacji izochronicznej decyzja co do zasad wyboru pewnego momentu jako momentu idealnego nie jest łatwa. Przy roz-

patrywaniu modulacji arytmicznej mamy zawsze określone początki liczenia czasu i w stosunku do nich wyznaczamy momenty idealne. Natomiast przy modulacji izochronicznej żaden z momentów nie wykazuje odróżniającego go od innych charakteru, który uzasadniłby wybór uznania tego momentu jako początku liczenia czasu.

Jedną z możliwości bieżąco omawianych przez komisje CCIT byłoby wybranie zupełnie dowolnie jednego z momentów jako momentu idealnego, w stosunku do którego jako do momentu odniesienia wyznaczane byłyby wszystkie pozostałe. Przyjęcie takiej zasady byłoby jednak jedynie formalną odpowiedzią na pytanie wstawione do programu studiów CCIT, gdyż dowolność wyboru momentu idealnego jest tutaj tak wielka, że równoznaczna jest właściwie brakowi definicji sposobu wyznaczania momentów idealnych.

Wobec tego należałoby poszukać jakiejś innej zasady, która wynikałaby z samego przebiegu modulacji badanej. Można by na przykład zasadę tę wyprowadzić na podstawie tego, że aparaty synchroniczne utrzymujące synchronizm bez stosowania sygnałów specjalnych posiadają organy, które działają ze stałym opóźnieniem w stosunku do organów współpracującego aparatu. Średnia opóźnień odtworzenia niezależnie od występujących zniekształceń wpływa przyspieszająco lub opóźniająco na ruchy organów aparatu korygowanego, zapewniając utrzymanie synchronizmu. Z powyższej obserwacji można wywnioskować, że bez pomiaru opóźnień odtworzenia można znajdować momenty odpowiadające średniej opóźnień odtworzenia. Uogólniając można powiedzieć, że na podstawie obserwacji przebiegu zniekształconej modulacji izochronicznej można ściśle i jednoznacznie wyznaczyć szereg momentów rozmieszczonych w odstępach będących wielokrotnością odstępu jednostkowego badanego przebiegu modulacji.

9. PRAWDOPODOBIEŃSTWO PRZEKROCZENIA OKREŚLONYCH WARTOŚCI

Maksimum różnic wymienionych w określeniach stopnia zniekształcenia nie jest równoznaczne z tym maksimum, które może się pojawiać w warunkach badania. Wartości tego ostatniego zbliżają się jedynie więcej lub mniej do wartości granicznej, zależnie od czasu pomiaru i od splotu różnych innych przyczyn, np. od stosunku czasu występowania sił zakłócających i przebiegu modulacji. Wobec tego chociaż przy każdym pomiarze stopnia zniekształcenia izochronicznego lub arytmicznego mierzymy w czasie pomiaru wartość maksymalną, to jednak musimy liczyć się z tym, że wartość ta może być przekroczona o wielkość bliżej nieznaną. Słuszne jest wobec tego stwierdzenie w uwagach pod definicjami potrzeby znajomości prawdopodobieństwa przekroczenia

mierzonej wartości — prawdopodobieństwa wyznaczonego (o czym definicja już nie wspomina) za pomocą długich wielokrotnych obserwacji lub dociekań teoretycznych.

Wynik pomiaru stopnia zniekształcenia izochronicznego oraz stopnia zniekształcenia arytmicznego zależy od długości czasu obserwacji, od tego kiedy pomiar został wykonany, od tego jakim przebiegiem próbnym został przeprowadzony. Najwyższa graniczna wartość stopnia zniekształceń, która może wystąpić w określonych warunkach eksploatacyjnych, jest bardzo trudna do uchwycenia i współdziała tutaj zazwyczaj przypadek. To, co w praktyce uzyskujemy na podstawie pomiarów, jest wartością niższą od granicznej możliwej, przy czym wartość ta może być częściej lub rzadziej przekraczana. W stosunku do zmierzonej wartości można mówić o prawdopodobieństwie jej przekraczania.

Zamiast podawać warunki na wartość maksymalną stopnia zniekształcenia słuszniej i realniej jest podawać warunki określające wartość stopnia zniekształcenia i jednocześnie prawdopodobieństwo jego przekroczenia. W tym sensie CCIT opracował następujące określenie [1]):

„Stopień umowny zniekształcenia:

Stopień zniekształcenia, którego prawdopodobieństwo przekroczenia w czasie dłużej trwającej obserwacji równa się niewielkiej umówionej wartości".

Określenie to jest niezupełne, nie mówi, o jaki rodzaj zniekształcenia chodzi, i wobec tego, co należy rozumieć pod prawdopodobieństwem jego przekroczenia.

W obecnym sformułowaniu definicji stopnia zniekształcenia izochronicznego prawdopodobieństwo przekroczenia wartości mierzonej jest pojęciem opartym raczej na intuicji. Nie są określone elementy potrzebne do obliczenia prawdopodobieństwa przekroczenia i brak jest konkretnych wskazań, jak takie obliczenie należy przeprowadzić. W przypadku zniekształcenia arytmicznego pojęcie prawdopodobieństwa również nie jest dostatecznie jasne, jednak zgodnie z definicją przy pomiarze konieczne jest wyznaczanie stopnia zniekształcenia arytmicznego dla każdego sygnału oddzielnie. Stąd nasuwa się możliwość określania prawdopodobieństwa na podstawie liczby sygnałów, których zniekształcenie przekroczyło wartość zadaną, i liczby wszystkich sygnałów, których zniekształcenie było badane.

Jednak najracjonalniej jest wykorzystać do tego celu określenie stopnia zniekształcenia momentów. Przy pomocy odpowiednich przyrządów można przecież pomierzyć i zarejestrować stopień zniekształcenia każdego

---

[1]) Répertoire des définitions des termes essentiels utilisés dans le domaine des télécommunications, wydane przez UIT, Genewa, 1957 r., definicja 33.14, s. 229.

momentu znamiennego, a w każdym razie można rozsegregować zbadane momenty według ich stopni zniekształceń. W wyniku takiego pomiaru możemy podać liczbę momentów badanych i liczbę momentów, których zniekształcenie przekroczyło pewną wartość.

Chociaż myśl, żeby oprzeć definicję stopnia zniekształcenia umownego na pomiarach zniekształceń momentów, nie przejawiła się jeszcze wyraźnie w definicjach, to jednak znalazła już wyraz w zaleceniu B51 — Stopień umowny zniekształcenia [1]).

Jako podstawę opracowania zalecenia przyjęto, że wartość umownego stopnia zniekształcenia należy powiązać z takim prawdopodobieństwem przekroczenia, które nie byłoby niebezpieczne dla jakości transmisji, a więc nie byłoby przyczyną zbyt dużej liczby błędnie przekazanych znaków. Przeprowadzono więc następujące rozumowanie:

— W zaleceniu F7 CCIT [2]) ograniczył stopę błędów dla połączeń telegrafii powszechnej, telegrafii abonenckiej i połączeń dzierżawionych do 3 na 100 000 znaków przesyłanych.

— Spełnienie tego warunku zależy od tego, czy zniekształcenia wypadkowe drogi przesyłowej zostaną utrzymane dostatecznie nisko, ale zależy również i od czynników powodujących przerwy w transmisji sygnałów, np. od liczby i czasu przerw na kanałach telefonicznych użytkowanych dla telegrafii wielokrotnej.

— W obecnych warunkach eksploatacji często się zdarza, że warunek 3 na 100 000 nie jest spełniany już z powodu samych przerw w transmisji i jeśliby to wziąć pod uwagę, to w ogóle nie można by dopuszczać błędów z powodu zniekształceń. Jednak w przyszłości należy liczyć się z tym, że w następstwie energicznych akcji podejmowanych w tym kierunku nastąpi znaczne ograniczenie liczby przerw i dlatego słuszne jest już obecnie opracowanie wytycznych co do zniekształceń, które mogłyby być przyczyną pewnej części dozwolonej liczby błędów.

— Stopień umowny zniekształcenia arytmicznego powinien dotyczyć całej drogi przesyłowej, razem z aparatami telegraficznymi, i powinien być w zgodzie z marżą aparatu odbiorczego.

— Na rachunek zbyt dużych zniekształceń dopuszczono więc dwa błędnie odebrane znaki na 100 000 przesyłanych. Te sto tysięcy znaków to kilka razy więcej momentów znamiennych, których zniekształcenie będzie badane jako przesunięcie w stosunku do odpowiadających im momentów znamiennych rozruchowych, ale jednocześnie jeżeli w pewnym sygnale stopień zniekształcenia jednego momentu przekroczy wartość

[1]) Documents de 8-e assemblée plenière du Comité Consultatif International Télégraphique à Genève 1956, s. 87.

[2]) jw. s. 164.

wynikającą z marży, to już dla wyniku przekazania obojętny jest stopień zniekształcenia innych momentów tego sygnału. Wychodząc z tego rozumowania przyjęto stosunek liczby sygnałów do liczby momentów jako 1 : 2 i otrzymano zalecenie, że:

„stopień umowny zniekształcenia powinien być stopniem zniekształcenia, którego prawdopodobieństwo przekroczenia wynosi 1 : 100 000, to jest jeden przypadek pojawiania się zniekształcenia przekraczającego stopień umowny na 100 000 momentów znamiennych modulacji".

Na tle powyższych rozważań i tekstu zalecenia nasuwają się następujące uwagi:

1. Można się domyślać, że w zrozumieniu zalecenia stopień umowny zniekształcenia to stopień zniekształcenia indywidualny momentu znamiennego, mierzony metodą pomiaru zniekształceń arytmicznych, co niestety nie zostało wyraźnie powiedziane.

2. Z rozważań, które zostały podane jako uzasadnienie zalecenia, można sądzić, że umowny stopień zniekształcenia odnosi się do telezniekształcenia sygnałów przed odbiornikiem, a więc zniekształcenia spowodowanego przez nadajnik, doprowadzenia i zestaw łączy i ich warunki współpracy, oraz że mowa jest o pomiarach zniekształceń uwzględniających odchylenie nadajnika od nominalnej szybkości modulacji. Jednak możliwe jest i inne interpretowanie tekstu.

3. Stopień umowny jest pomyślany jako pewien wskaźnik pomocny przy planowaniu sieci. Dopóki nie będzie jednak opracowany związek między stopniem zniekształcenia umownym całej drogi przesyłowej i stopni umownych poszczególnych jej elementów wraz z uwzględnieniem wymagań w odniesieniu do wartości prawdopodobieństwa przekroczeń granicznych stopni zniekształcenia przyjętych dla tych elementów, dopóty możność korzystania z tego zalecenia będzie ograniczona.

4. Wydaje się, że definicja stopnia umownego zasługuje na dokładniejsze sformułowanie i ewentualne rozwinięcie na kilka definicji, takich na przykład jak:

— Stopień zniekształcenia umownego momentu znamiennego, którego prawdopodobieństwo przekroczenia określane byłoby stosunkiem liczb momentów

— Stopień zniekształcenia umownego arytmicznego, którego prawdopodobieństwo przekroczenia określone byłoby stosunkiem liczb sygnałów.

Metoda statystyczna badania zniekształceń jest jeszcze w stanie początkowego rozwoju, jednak już teraz można powiedzieć, że zastosowanie jej może oddać technice telegraficznej poważne usługi. Brak jest odpowiednich definicji i uzgodnionych warunków pomiarów, aby można było porównywać wyniki badań. Opierając się na znajomości przyczyn

powstawania zniekształceń i zasad ich pomiaru możemy „na wyczucie" powiedzieć, że graniczne wartości, które mogą być zaobserwowane na tych elementach transmisyjnych przy pomiarach izochronicznych i przy pomiarach arytmicznych są te same, lecz prawdopodobieństwo natrafienia na nie jest dużo większe przy badaniu zniekształceń izochronicznych. Porównanie liczbowe tego prawdopodobieństwa nie może być przeprowadzone na podstawie obecnie obowiązujących definicji bez ich odpowiedniego uzupełnienia i skorygowania.

Podkreślenie zależności wartości mierzonej od czasu trwania pomiaru w definicjach stopni zniekształceń jest niewątpliwym postępem w kierunku statystycznego ujęcia problemu.

10. ZASADNICZE NAWRÓCENIE DO PRZESUNIĘĆ MOMENTÓW

Jeżeli założyć, że zasady wyznaczania momentów idealnych zostaną zatwierdzone przez zebranie plenarne CCIT, to należy już teraz zastanowić się nad wyciągnięciem z tego odpowiednich korzyści. Praktyka pomiarowa zniekształceń, jak już było zaznaczone, rozwinęła się w trochę innym kierunku, niż to przewidywały ujęcia teoretyczne, co było spowodowane między innymi nieokreślonością momentów idealnych. W obecnej sytuacji nic nie stoi na przeszkodzie, aby opracować wszystkie definicje dotyczące zniekształceń na zasadzie przejawów nieprawidłowości podziału czasu, na zasadzie przesunięć momentów znamiennych w stosunku do odpowiadających im momentów idealnych. Zważywszy jednak, że dawne definicje znalazły już bardzo szerokie zastosowanie, że przyzwyczajenie nie pozwala na zmiany zbyt szybkie, wprowadzenie nowych może nastąpić jedynie poprzez czasowe zdublowanie interpretacji niektórych terminów.

Grupa ekspertów 9/I CCIT opracowała następujące trzy definicje, które mogłyby być stosowane równolegle z dotychczas obowiązującymi [1]):

„Zniekształcenie telegraficzne:

Modulacja (lub odtworzenie) jest poddana zniekształceniu telegraficznemu wtedy, gdy momenty znamienne nie pokrywają się z odpowiadającymi im momentami teoretycznymi".

„Stopień zniekształcenia izochronicznego:

Różnica algebraiczna między największym i najmniejszym stopniem zniekształcenia indywidualnego wykazywanego przez momenty znamienne modulacji izochronicznej. (Różnica ta nie zależy od zasady wyznaczania odniesieniowego momentu idealnego)".

„Stopień zniekształcenia arytmicznego:

[1]) CCITT, Période 1957/1960 Commission 9, Doc. N° 11, Groupe de Travail 9/I, Rapport sur la réunion.

Największa wartość bezwzględna stopnia zniekształcenia indywidualnego wykazywanego przez momenty znamienne modulacji arytmicznej.

Można odróżnić stopień zniekształcenia dodatni (lub stopień zniekształcenia przez opóźnienie), który wskazywałby największą wartość dodatnią zniekształcenia indywidualnego, oraz stopień zniekształcenia ujemny (lub stopień zniekształcenia przez przyspieszenie), który wskazywałby największą wartość ujemną zniekształcenia indywidualnego".

11. WNIOSKI

Zróbmy próbę zbilansowania dotychczasowego dorobku w dziedzinie definicji zniekształceń i potrzeb, które powinny stać się tematem dalszych prac.

Posiadamy definicje zniekształceń modulacji i odtworzenia oraz różne definicje stopni zniekształcenia, dostosowane do rodzaju modulacji, do technicznych właściwości aparatów telegraficznych i do szczególnych potrzeb. Według nowych propozycji definicje byłyby oparte na przesunięciach momentów znamiennych w stosunku do innych, które wyobrażamy sobie jako idealne.

Rozpatrując rzecz historycznie dochodzimy do wniosku, że nawróciliśmy do pierwotnych koncepcji, jednak już bogatsi w doświadczenie, i dlatego rozszerzyliśmy i pogłębiliśmy zagadnienie. Zaczęliśmy od zniekształceń odtworzenia. Od różnic w opóźnieniach odtworzenia przeszliśmy przez okres, w którym podstawą definicji były wydłużenia lub skrócenia odstępów, i nawróciliśmy do niewłaściwości rozmieszczenia momentów. Pojęcie zniekształcenia obejmuje obecnie zarówno modulację, jak i odtworzenie. Odchylanie szybkości aparatów od szybkości od nich nominalnie wymaganej możemy wyrażać w wartościach stopnia zniekształcenia.

Zniekształcenie nie jest — tak jak w początku określano — jedynie maksymalną wartością bezwzględną. Obecnie możemy mówić o znaku dodatnim i ujemnym zniekształceń, o wartości umownej powiązanej z wartością prawdopodobieństwa jej przekroczenia, o wartościach średnich lub skutecznych stopni zniekształceń, a nawet o jakby jego wartościach chwilowych w postaci zniekształceń momentów. Mamy możliwości głębokiej analizy praw ilościowych i jakościowych występowania zniekształceń, możemy wyznaczać krzywe rozkładu prawdopodobieństwa występowania różnych wartości zniekształceń.

Ten prawie trzydziestoletni dorobek jest, jak widać, bardzo bogaty i stanowi zasadniczą siatkę, w oparciu o którą można zaspokoić w zasadzie wszystkie aktualne potrzeby telegrafii przewodowej. Specjaliści te-

legrafii mogą porozumiewać się i osiągają dzięki temu rzeczywiście bardzo znaczną pewność łączności telegraficznej.

Przegląd historyczny definicji zniekształceń wykazał pewne luki i potrzeby precyzji, które stopniowo powinny być usuwane. Na przykład w wielu definicjach spotykamy przymiotnik „teoretyczny", jako sam przez się zrozumiały. Że tak nie jest, wspominano wiele razy w poprzednich rozdziałach. Interpretacja rzeczywista tego wyrazu jest szersza w praktyce, niż to wynika z jego właściwego sensu. Należałoby rozważyć zagadnienia następujące:

— Czy w definicjach dotyczących zniekształceń telegraficznych oparcie się na porównaniu z momentami teoretycznymi lub z odstępami teoretycznymi nie jest ograniczeniem znaczenia tych definicji. Czy nie byłoby słuszniejsze, bardziej odpowiadające intencjom, wprowadzenie mówienia o momentach odniesieniowych, momentach wzorcowych lub momentach uznanych w danych warunkach za właściwe.

Obecnie panuje tendencja, żeby oprzeć definicje zniekształceń telegraficznych na przesunięciach w stosunku do momentu idealnego. Stosunek momentów idealnych do momentów teoretycznych wymaga sprecyzowania, może np. przez ich utożsamienie, naturalnie w rozszerzonym znaczeniu przymiotnika „teoretyczny". W tych okolicznościach właściwe sformułowanie definicji momentu idealnego nabrało poważnego znaczenia. Należy się zastanowić, czy obecnego sformułowania nie można by ulepszyć. Można by na przykład rozważyć, czy wyrażone w definicji wymaganie zgodności z momentami znamiennymi, które mogłyby się pojawić w pewnych warunkach idealnych, jest dostatecznie uzasadnione.

Są jeszcze i inne punkty zasługujące na dyskusję. Oto poniżej krótki wykaz tytułem przykładu:

— Prawdopodobieństwo przekroczenia stopnia zniekształceń izochronicznych oraz stopnia zniekształceń arytmicznych.

— Dodatni i ujemny znak przed stopniem zniekształceń izochronicznych jednostronnych.

— Uściślenie definicji rozproszenia.

— Stopień zniekształcenia właściwego, jednostronnego i przypadkowego.

— Różne przypadki stopni umownych zniekształceń w zależności od tego, czy to są zniekształcenia izochroniczne, arytmiczne lub pojedynczych momentów, oraz w zależności od zasady wyznaczania prawdopodobieństwa przekroczeń.

— Warunki dotyczące stopnia zniekształcenia umownego aparatu nadawczego, doprowadzenia aparatowego, łącza, całej drogi przesyłowej, teleznieksztalcenia.

Krytyczne uwagi wypowiedziane powyżej nie powinny zmniejszyć w oczach czytelnika rzeczywiście bezspornej wartości wyników osiągniętych przez specjalistów działających w ramach organizacji współpracy międzynarodowej CCIT. Postęp techniczny nie stoi jednak w miejscu, zarejestrowanie tego postępu w definicjach jest dalszym nieprzerwanym zadaniem techników.

Politechnika Warszawska
Katedra Telegrafii

В. ФИЯЛКОВСКИ

ТЕЛЕГРАФНЫЕ ИСКАЖЕНИЯ [1)]

Резюме

Чтобы создать возможность технической оценки качества действия элементов телеграфных соединений, введено понятие искажения модуляции и искажения отображения. Разработка требований ограничивающих величину искажений и соблюдение их исполнения должны были обеспечить хорошую телеграфную связь, это значит такие телеграфные соединения, в которых степень ошибок не превышала бы некоторой небольной величины.

Благодаря инициативе и совместной работе специалистов объединенных в Международном Консультативном Комитете по делам Телеграфии (CCITT), имеем теперь возможность ввести понятие телеграфных искажений в общее пользование, а также разработание соответствующих определений. За последние 30 лет наблюдаем развитие понятий связанных с искажением, усовершенствование определений и применение в возникающим техническом прогрессе.

Произошло достаточно много времени и теперь можем посмотреть на понятия связанные с искажением с определенной исторической перспективы. Замечаем тогда, что первоначальным исходным пунктом была переменность запаздываний отображения, впоследствии признано, чтобы при определении величины искажений опереться на удлиннениях и сокращениях элементарных посылок. Тем не менее в последнее время опять приходим к первоначальной концепции наблюдения передвижения характерных моментов, понятой уже несколько шире и точнее, а также лучше приспособленной к текущим нуждам.

Рассматривая существующие в настоящее время работы CCITT на фоне развития телеграфии, приходим к выводам определяющим направление этих работ, которые будут производиться в будущим, и которые будут иметь своей целью усовершенствование понятий телеграфных искажений.

W. FIJAŁKOWSKI

TELEGRAPHIERVERZERRUNGEN [2]

Zusammenfassung

Um die Bewertung und Beurteilung der Arbeitweise von Elementen telegrafischer Nachrichtenübermittlung zu ermöglichen sind die Begfiffe der Verzerrung von Modulation und Wiedergabe eingeführt worden. Weiterhin wurden die Vorbedingungen ausgearbeitet, die das Auftreten von Verzerrungen auf ein Minimum

1) На основании статьи В. Фиялковского: „Histoire de distorsion télégraphique" помещенной в „Journal des Télécommunication", UIT, Octobre 1958, nr 10.

2) Nach dem Artikel von W. Fijałkowski: „Histoire de distorsion télégraphique" veröffentlicht in „Journal des Télécommunication", VIT, Oktober 1958, Nr 10.

begrenzen sollten. Dies sowie die Einhaltung derartiger Anforderungen sollten eine einwandfreie telegrafische Nachrichtenübermittlung gewährleisten d.h. eine derartige Nachrichtenübermittlung, bei der ein bestimmter minimaler Prozentsatz zulässiger Fehler nicht überschritten werden würde.

Der Zusammenarbeit und der Initiative einer — an das Internationale Telegrafische Beratungs Komitee (CCIT) angeschlossenen — Gruppe von Fachleuten ist es zu verdanken, dass der Begriff der Telegrafieverzerrung in den allgemeinen Gebrauch übernommen wurde sowie, dass die zur Erklärung desselben notwendigen Definitionen ausgearbeitet wurden. Innerhalb der letzten 30 Jahre kann man auch beobachten, dass sich ein — auf Verzerrungen bezügliches Begriffssystem — entwickelt hat und eine Vervollkomnung und Anpassung desselben an den — in der Zwischenzeit erfolgten — technischen Fortschritt stattgefunden hat.

Es ist bereits genügend Zeit verlaufen, um die, mit der Verzerrung verbundenen Begriffe aus der geschichtlichen Perspektive betrachten zu können. Es kann daher festgestellt werden, dass der ursprüngliche Ausgangspunkt die Veräderlichkeit der Wiederabgabeverzögerung war. Des weiteren wurde erkannt, dass man bei derartigen Bestimmungen die Verkürzungen und Verlängerungen der Modulation bezw. Wiedergabeabschnitte als Grundlage annehmen kann. In letzter Zeit greift man bei uns dagegen wiederum auf die ursprüngliche Konzeption einer Beobachtung der Verschiebung von Kennzeitpunkten zurück, die bereits bedeutend ausführlicher und genauer gefasst und mehr an die aktuellen Bedürfnisse angepasst sind.

Wenn man die bisherigen Arbeiten der CCIT — im Zussammenhang mit der Entwicklung der Telegrafie — überblickt so gelangt man zu Schlussfolgerungen, die die Richtungen für die Zukunftsarbeit aufzeigen. Es sind die Richtlinien für die Arbeiten, die ausgeführt werden müssen, um den Begriff der Telegrafieverzerrungen vollständiger auszuarbeiten und restlos klarstellen zu können.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM V · ZESZYT 4

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1959

RADA REDAKCYJNA

PROF. JANUSZ GROSZKOWSKI, PROF. JANUSZ LECH JAKUBOWSKI,
PROF. BOLESŁAW KONORSKI, PROF. IGNACY MALECKI
PROF. PAWEŁ NOWACKI, PROF. PAWEŁ SZULKIN

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor Naczelny
PROF. WITOLD NOWICKI

Sekretarz
JULIUSZ MIERZEJEWSKI

ADRES REDAKCJI

Warszawa, Politechnika, Plac Jedności Robotniczej 1,
Katedra Teletransmisji Przewodowej, Gmach Mechaniki

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
Warszawa, Miodowa 10

Nakład 650 (529 + 121)	Oddano do składania 25.IX.59.
Ark. wyd. 8,5 ark. dru. 7,5	Podpisano do druku 2.II.1960.
Pap. druk. sat. kl. III, 80 g, 70×100	Druk ukończono w lutym 1960 r.
Zamówienie nr 1716/59.	Cena zł. 25.— C-27

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

512.8:621.3.07

STANISŁAW BELLERT

Metoda operatorów liczbowych

Rękopis dostarczono 12.11.1958

Praca składa się z trzech części. W części pierwszej podana jest metoda matematyczna algebraizująca rozwiązywanie równań różnicowych. Elementami omawianej algebry są „operatory liczbowe", stanowiące specjalną kategorię liczb. W drugiej części pracy omawiane jest zagadnienie stabilności układów impulsowej regulacji. Podane są tu nowe wyniki, które mogą być wykorzystane przy projektowaniu i badaniu układów regulacji. W trzeciej części pracy przedstawiona jest pewna metoda numeryczna upraszczająca wyznaczanie przebiegów nieustalonych w układach elektrycznych pobudzanych bardziej złożonymi sygnałami. Metoda ta jest oparta na teorii wyłożonej w pierwszej części pracy.

WPROWADZENIE

Równania różnicowe spotykamy w wielu zagadnieniach fizyki, elektrotechniki a także statystyki i finansowości. Przykładem zagadnień elektrotechnicznych, w których są stosowane równania różnicowe, mogą być zagadnienia czwórników elektrycznych, filtrów, wzmacniaczy wielostopniowych oraz (i przede wszystkim) — układów impulsowych. Równania różnicowe są znane od dawna i mają swe źródło w pracach Broocksa Taylora (1717 r.) [12]. W matematyce równania różnicowe (jak również i cały rachunek różnicowy) zajmują szczególną pozycję, stojąc na pograniczu algebry i analizy.

Do analizy zbliża je duże podobieństwo do równań różniczkowych, mające swój wyraz przede wszystkim w bardzo zbliżonych do siebie klasycznych metodach rozwiązywania tych obu typów równań. Da algebry zaś fakt, że nie opierają się na pojęciu granicy. W związku z tym, równania różnicowe pod względem pojęciowym są zaliczane nie do analizy, lecz do algebry.

Właśnie ten fakt był zapewne przyczyną, że wielu matematyków już w połowie ubiegłego wieku starało się równania różnicowe rozwiązywać

metodami algebry. W związku z tym obok klasycznych metod rozwiązywania równań różnicowych, wyrosłych na gruncie analizy, pojawiają się metody „algebraiczne", zwane niekiedy „symbolicznymi" lub „operatorowymi".

Można tu przytoczyć np. pracę z roku 1871 matematyka czeskiego Studniczki [11], w której autor wyprowadzając niektóre wzory rachunku różnicowego symbol Δ traktuje nie jako symbol działania, lecz jako „liczbę", nad którą wykonuje działania arytmetyczne. Warto również podkreślić, że już w roku 1860 „metody symboliczne" rozwiązywania równań różnicowych stosował znany logik angielski Boole [3]. Metody te nie posiadały jednak ścisłego uzasadnienia i dlatego też wielu ówczesnych jak również i późniejszych matematyków ustosunkowało się do nich z dużą rezerwą.

Dla zilustrowania powyższego przytoczę słowa jednego z matematyków włoskich ubiegłego wieku, Ernesto Pascala [8].

„Przykłady podane w tym i w następnych paragrafach wzięte są z dzieła Boole'a, zwracamy wszakże uwagę na to, że autor ten, podobnie jak i większość autorów angielskich, używa najczęściej rachunków symbolicznych, bez dostatecznego uzasadnienia. Jakkolwiek przeto rachunki te w niektórych przypadkach prowadzą do rezultatu, nie można ich jednak zalecać szukającym bardziej elementarnej ścisłości analitycznej, o ile oczywiście nie znajdzie się sposób ścisłego uzasadnienia przejść symbolicznych od jednego wzoru do drugiego. Postaramy się rozwiązać wszystkie przykłady wyłączając bezwzględnie działania symboliczne".

Z powyższego zestawienia danych historycznych wynika, że metody operatorowe stosowane były w rachunku różnicowym zupełnie niezależnie od analogicznych metod w dziedzinie równań różniczkowych i co więcej, już na kilkadziesiąt lat przed pracami Heaviside'a.

Jako rzecz charakterystyczną należy podkreślić, że poprawność metody stosowanej przez Boole'a i Studniczkę została wykazana nie na drodze algebraicznej, lecz w oparciu o przekształcenia funkcjonalne i ponadto dopiero po uprzednim uzasadnieniu rachunku operatorowego Heaviside'a. W związku z tym operatorowe rozwiązywanie równań różnicowych sprowadziło się do wyznaczania transformat Laplace'owskich funkcji schodkowych, a metoda zatraciła pierwotny charakter algebraiczny oraz swoją prostotę i elegancję.

Obecnie w rachunku operatorowym zagadnienia równań różnicowych stanowią odrębny dział, który można nazwać „rachunkiem operatorowym funkcji schodkowych". Do rozwiązywania równań różnicowych stosuje się w rachunku operatorowym sumacyjne lub całkowe przekształcenia Laplace'a [4], [5]. Jakkolwiek metody te prowadzą w sposób szybki do

celu, to jednak posługiwanie się nimi wymaga znajomości specjalnych działów matematyki wyższej, a więc na przykład — poza samą teorią transformacji Laplace'a — znajomości funkcji analitycznych. Ponadto przekształcenia Laplace'a narzucają z góry ograniczenia stosowalności rachunku, tak że za jego pomocą można rozpatrywać jedynie te funkcje, które spełniają warunek zbieżności całki lub szeregu, określających te przekształcenia.

W pracy niniejszej wykazuje się, że liniowe równania różnicowe można rozwiązywać algebraicznie, bez korzystania z transformacji Laplace'a. Zamiast funkcji schodkowych rozważa się „operatory liczbowe", które stanowią specjalną kategorię liczb. Jednostką tych liczb jest operator przesunięcia q:

$$q = 0, 1, 0, 0, \ldots$$

Należy podkreślić, że praca ta jest próbą adaptacji w dziedzinie równań różnicowych interpretacji rachunku operatorowego wprowadzonej przez polskiego matematyka prof. J. Mikusińskiego.

Dzięki tej interpretacji uzyskuje się dużą prostotę metody oraz łatwość posługiwania się nią przy rozwiązywaniu zagadnień praktycznych. Metoda nie wymaga znajomości teorii transformacji Laplace'a i teorii funkcji analitycznych, dzięki czemu mogą z niej korzystać osoby nie posiadające specjalnego przygotowania matematycznego. Jednocześnie metoda staje się bardziej ogólna, gdyż nie narzuca ograniczeń na klasę rozważanych funkcji schodkowych.

Oprócz teorii w pracy tej podano również przykłady praktycznych zastosowań metody do zagadnień elektrotechniki, a w szczególności do badania układów impulsowych i do badania stanów nieustalonych. Sposób badania układów impulsowych za pomocą przedstawionej metody jest wzięty z pracy Cypkina [4], w której autor posługuje się tzw. „sumacyjnym przekształceniem Laplace'a" przyporządkowującym funkcjom schodkowym $f(n)$ funkcje zmiennej zespolonej z, zgodnie ze wzorem

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' f(n)\, e^{-zn}.$$

Metoda operatorów liczbowych wnosi tu pewne uproszczenia i większą ogólność, gdyż nie wymaga jednoczesnego stosowania dwóch przekształceń Laplace'a (sumacyjnego i całkowego). Trzeba jednak podkreślić, że badanie układów impulsowych za pomocą specjalnego aparatu matematycznego (jakim jest sumacyjne przekształcenie Laplace'a lub metoda operatorów liczbowych) jest usprawiedliwione tylko w przypadkach bardziej skomplikowanych. Przedstawiona metoda jest istotnie pożyteczna w przypadku układów z impulsowym sprzężeniem zwrotnym, nato-

miast w zagadnieniach najprostszych, gdy mamy do czynienia ze zwykłym układem impulsowym i periodycznym sygnałem wymuszającym, stosowanie jej nie upraszcza, lecz wręcz komplikuje zagadnienie. Układy z impulsowym sprzężeniem zwrotnym mają szerokie zastosowanie w układach regulacji.

Na zakończenie należy jeszcze zwrócić uwagę, że działania na operatorach liczbowych są izomorficzne z działaniami na pewnym podzbiorze operatorów Mikusińskiego, a mianowicie na operatorach postaci $a_n e^{-sn}$. W związku z powyższym podana w niniejszej pracy metoda rozwiązywania równań różnicowych może być oczywiście wyprowadzona w oparciu o rachunek operatorów Mikusińskiego. Trzeba by wówczas jednak korzystać nie z algebry, lecz z analizy operatorów, a więc z pojęciowo trudnego i abstrakcyjnego aparatu. Mamy więc tu niemal paradoksalne zjawisko: do rozwiązywania bardzo prostych pod względem pojęciowym równań różnicowych należałoby wówczas stosować bardziej abstrakcyjny i pojęciowo trudniejszy aparat matematyczny niż do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych.

Określając pojęcie zbieżności ciągu i szeregu operatorów liczbowych autor, dla zachowania prostoty wykładu, nie wprowadził pojęcia metryki i normy. Metrykę przestrzeni operatorów można prosto określić wzorem

$$\varrho(\hat{a}, \hat{b}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|a_n - b_n|}{1 + |a_n - b_n|}.$$

W oparciu o definicję metryki można wykazać, że przestrzeń operatorów liczbowych jest przestrzenią zupełną, tzn. że każdy ciąg podstawowy (spełniający warunek Cauchy'ego) operatorów liczbowych posiada granicę w zbiorze operatorów liczbowych.

Część I

PODSTAWY METODY OPERATORÓW LICZBOWYCH

1. PODSTAWY TEORETYCZNE

1.1. Pojęcie operatora liczbowego

1.1.1. Określenie operatora liczbowego

Operatorem liczbowym $\{a_n\}$ nazywać będziemy uporządkowany układ liczb o postaci:

$$\ldots 0, 0, a_{-N}, a_{-N+1}, \ldots a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots, \tag{1}$$

gdzie N jest liczbą całkowitą, wszystkie zaś wyrazy na lewo od a_{-N} są równe zeru — dla którego równość, sumę i iloczyn definiujemy następująco:

1. Definicja równości

Dwa operatory liczbowe $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ uważamy za równe i piszemy $\{a_n\} = \{b_n\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $n : a_n = b_n$.

2. Definicja sumy

Sumą dwóch operatorów liczbowych $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ nazywamy operator liczbowy $\{a_n + b_n\}$ i piszemy

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}. \tag{2}$$

3. Definicja iloczynu

Iloczynem operatorów liczbowych $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ nazywamy operator liczbowy $\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \cdot b_{n\,m}\right\}$ i piszemy:

$$\{a_n\}\{b_n\} = \left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \cdot b_{n-m}\right\}. \tag{3}$$

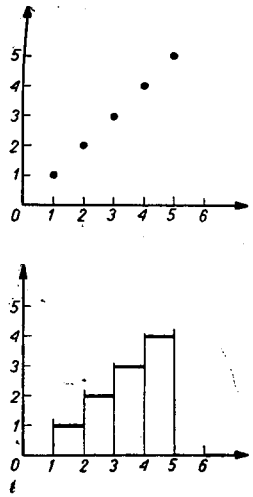
Dzięki założeniu, że jedynie skończona liczba wyrazów operatora dla wskaźników ujemnych jest różna od zera, wyraz ogólny iloczynu zawiera zawsze skończoną liczbę składników.

Operator liczbowy będziemy oznaczali symbolem $\{a_n\}$ lub krótko $\hat{a}$. Czasem też będziemy używali symboli ${}_K\{a_n\}$ lub ${}_K\hat{a}_n$. Liczbę K z lewej strony ostatnich dwóch symboli piszemy dla oznaczenia, że wszystkie wyrazy o wskaźnikach $n < K$ są równe zeru. Dla oddzielenia wyrazów o wskaźnikach ujemnych od pozostałych wyrazów używamy znaku $\llcorner$. Zamiast więc napisać np. ... 0_{-3}, 1_{-2}, 5_{-1}, 8_0, -2_1, ... piszemy ... 0, 1, 5, $\llcorner$ 8, — 2, ...

Operatorom liczbowym możemy nadać dwojaką interpretację graficzną. Możemy uważać mianowicie, że każdy wyraz a_n operatora liczbowego $\{a_n\}$ przedstawia w układzie współrzędnych prostokątnych punkt (n, a_n) lub prostokąt o wysokości a_n i o szerokości równej jedności (rys. 1).

W przypadku szczególnym, jeśli rozpatrujemy operatory, których wszystkie wyrazy odpowiadające wskaźnikom ujemnym są równe liczbie zero, wyrazy iloczynu dają się przedstawić przy pomocy iloczynu Cauchy'ego, mamy bowiem:

$$\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \left\{\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}\right\}. \tag{4}$$



Rys. 1. Geometryczna interpretacja operatora liczbowego

Z definicji sumy i iloczynu wynika natychmiast, że działania te są przemienne, łączne i rozdzielne. Mamy więc:

$$\begin{aligned} &\hat{a}\,\hat{b} = \hat{b}\,\hat{a}, \\ &\hat{a}\,(\hat{b}\,\hat{c}) = (\hat{a}\,\hat{b})\,\hat{c}, \\ &\hat{a}\,(\hat{b} + \hat{c}) = \hat{a}\,\hat{b} + \hat{a}\,\hat{c}. \end{aligned} \tag{5}$$

Operator $\hat{0} = \ldots 0, \ldots 0, \underline{\ } 0, 0, \ldots 0, \ldots$ nazywamy „operatorem zerowym".

1.2.2. Różnica i iloraz operatorów liczbowych

Niech będą dane dwa dowolne operatory liczbowe $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$. Z definicji równości i sumy wynika, że istnieje jeden i tylko jeden operator $\{x_n\}$ spełniający równanie:

$$\{b_n\} + \{x_n\} = \{a_n\}.$$

Operator ten nazywamy różnicą operatorów $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ i piszemy:

$$\{x_n\} = \{a_n\} - \{b_n\} = \{a_n - b_n\}. \tag{6}$$

Działanie wyznaczające operator $\{x_n\}$ nazywamy odejmowaniem.

Z definicji równości i iloczynu wynika, że jeśli operator $\{b_n\}$ nie jest operatorem zerowym, to istnieje jeden i tylko jeden operator $\{x_n\}$ spełniający równanie:

$$\{x_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n\}, \tag{7}$$

które dzięki przemienności działań równoważne jest równaniu:

$$\{b_n\} \cdot \{x_n\} = \{a_n\}. \tag{7a}$$

Uzasadnienie powyższego jest następujące. Założymy, że dane są dwa dowolne operatory

$$\begin{aligned} {}_p\hat{a} &= \ldots 0, 0, 0, a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots, \\ {}_k\hat{b} &= \ldots 0, 0, 0, b_k, b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, \end{aligned} \tag{8}$$

przy czym

$$a_p \neq 0, \quad b_k \neq 0.$$

Zgodnie z definicją równości i iloczynu równanie (7) jest równoważne układowi równań liniowych, który — po pominięciu równań tożsamościowo spełnionych (obie strony tych równań są identycznie równe zeru) — przyjmie następującą postać:

$$\begin{aligned} &a_{2k} = x_k b_k, \\ &a_{2k+1} = x_k b_{k+1} + x_{k+1} b_k, \\ &a_{2k+2} = x_k b_{k+2} + x_{k+1} b_{k+1} + x_{k+2} b_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{p-1} = x_k b_{p-k-1} + x_{k+1} b_{p-k-2} + \ldots + x_{p-k-1} b_k, \\ &a_p = x_k b_{p-k} + x_{k+1} b_{p-k-1} + \ldots x_{p-k} b_k, \\ &a_{p+1} = x_k b_{p-k+1} + x_{k+1} b_{p-k} + \ldots + x_{p-k+1} b_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{9}$$

Uwzględniając w układzie (9):

$$a_{2k} = a_{2k+1} = \ldots = a_{p-1} = 0$$

otrzymamy:

$$x_k = x_{k+1} = \ldots = x_{p-k-1} = 0$$

oraz:

$$x_{p-k} = \frac{a_p}{b_k}, \quad a_{p-k+1} = \frac{a_{p+1} b_k - a_p b_{k+1}}{b_k^2}, \text{ itd.}$$

Mamy więc:

$$\{x_n\} = \frac{{}_p\hat{a}}{{}_k\hat{b}} = \ldots 0, 0, x_{p-k}, x_{p-k+1}, x_{p-k+2}, x_{p-k+3}, \ldots \tag{10}$$

oraz, jeżeli: $p = -N < 0$, $K = -M < 0$, to

$$\{x_n\} = \frac{{}_{-N}\hat{a}}{{}_{-M}\hat{b}} = \ldots 0, 0, x_{-(N-M)},$$

$$x_{-(N-M)+1}, \ldots x_{-1} \llcorner x_0, \ldots x_n, \ldots. \tag{10a}$$

W szczególnym przypadku, gdy $N = M = R$, otrzymamy:

$$\{x_n\} = {}_0\hat{x} = \frac{{}_{-R}\hat{a}}{{}_{-R}\hat{b}} = \ldots 0, 0, \llcorner x_0, x_1, \ldots x_n, \ldots$$

Operator liczbowy $\{x_n\}$ określony wzorem (7) nazywamy ilorazem operatora $\{a_n\}$ przez operator $\{b_n\}$ i piszemy:

$$\{x_n\} = \{a_n\} : \{b_n\}$$

lub

$$\{x_n\} = \frac{\{a_n\}}{\{b_n\}}.$$

Działanie wyznaczające iloraz $\{a_n\} : \{b_n\}$ nazywamy dzieleniem. Iloraz istnieje i jest jednoznacznie określony wtedy i tylko wtedy, gdy dzielnik różny jest od operatora zerowego.

Tak więc na zbiorze operatorów liczbowych są jednoznacznie wykonalne cztery działania arytmetyczne z wyjątkiem dzielenia przez operator zerowy[1]). Operatory liczbowe stanowią więc ciało liczbowe.

Z rozważań powyższych wynika ponadto, że wskaźnik pierwszego niezerowego wyrazu ilorazu operatorów równy jest różnicy wskaźników pierwszych niezerowych wyrazów dzielnej i dzielnika.

1.2.3. Potęgowanie operatorów liczbowych

Symbol $\hat{a}^k$ nazywamy „katą potęgą operatora liczbowego" i definiujemy następująco:

$$\hat{a}^k = \underbrace{\hat{a}\,\hat{a}\,\hat{a}\,\ldots\,\hat{a}}_{k}. \tag{11}$$

O ile $\hat{a} \neq 0$, symbol $\hat{a}^{-k}$ nazywamy „katą ujemną potęgą operatora liczbowego" i definiujemy:

$$\hat{a}^{-k} = \frac{\ldots 0, 0, \underline{\lfloor} 1, 0, 0, \ldots}{\hat{a}^k}. \tag{12}$$

Przyjmujemy ponadto, że

$$\hat{a}^0 = \ldots 0, 0, \underline{\lfloor} 1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots. \tag{13}$$

Przyjęte wyżej definicje oraz słuszność praw przemienności, łączności i rozdzielności upoważniają nas do wykonywania działań na operatorach liczbowych analogicznie jak na liczbach.

---

[1]) Warto zaznaczyć, że gdyby z góry ograniczyć się do rozpatrywania operatorów określonych dla $n \geqslant 0$ i zdefiniować dla nich iloczyn wzorem

$$\{a_n\}\{b_n\} = \left\{\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}\, b_m\right\},$$

to dzielenie byłoby wówczas wykonalne w przypadku ogólnym tylko wtedy, gdy $b_0 \neq 0$.

Przykłady:

1. $(\hat{a}+\hat{b})(\hat{a}-\hat{b}) = \hat{a}^2 - \hat{b}^2$
2. $(\hat{a}+\hat{b})^2 = \hat{a}^2 + 2\hat{a}\hat{b} + \hat{b}^2$
3. $(\hat{a}+\hat{b})(\hat{c}+\hat{d}) = \hat{a}\hat{c} + \hat{b}\hat{c} + \hat{a}\hat{d} + \hat{b}\hat{d}$
4. $\dfrac{\hat{a}+\hat{b}}{\hat{c}+\hat{d}} = \dfrac{\hat{a}}{\hat{c}+\hat{d}} + \dfrac{\hat{b}}{\hat{c}+\hat{d}}$; $\hat{c}+\hat{d} \neq 0$
5. $\dfrac{\hat{a}}{(\hat{b}-\hat{c})(\hat{b}-\hat{d})} = \dfrac{\hat{a}}{(\hat{c}-\hat{d})(\hat{b}-\hat{c})} + \dfrac{\hat{a}}{(\hat{d}-\hat{c})(\hat{b}-\hat{d})}$; $\hat{b} \neq \hat{c}, \hat{b} \neq \hat{d}, \hat{c} \neq \hat{d}$.
6. Jeżeli $\hat{a}\cdot\hat{b} = \hat{0}$, to $\hat{a} = \hat{0}$ lub $\hat{b} = \hat{0}$.

1.2.4. Liczby a operatory liczbowe

Weźmy pod uwagę operatory liczbowe o postaci $\hat{a} = \ldots 0, 0, \llcorner a, 0, 0, \ldots$ i utwórzmy sumę, różnicę, iloczyn i iloraz takich operatorów. Zgodnie z podanymi uprzednio definicjami działań arytmetycznych, otrzymamy:

$$(\ldots 0, 0, \llcorner a, 0, 0, \ldots) + (\ldots 0, 0, \llcorner b, 0, 0, \ldots) = (\ldots 0, 0, \llcorner a+b, 0, 0, \ldots),$$
$$(\ldots 0, 0, \llcorner a, 0, 0, \ldots) - (\ldots 0, 0, \llcorner b, 0, 0, \ldots) = (\ldots 0, 0, \llcorner a-b, 0, 0, \ldots),$$
$$(\ldots 0, 0, \llcorner a, 0, 0, \ldots) \cdot (\ldots 0, 0, \llcorner b, 0, 0, \ldots) = (\ldots 0, 0, \llcorner a\cdot b, 0, 0, \ldots),$$
$$(\ldots 0, 0, \llcorner a, 0, 0, \ldots) : (\ldots 0, 0, \llcorner b, 0, 0, \ldots) = (\ldots 0, 0, \underset{\ldots}{\llcorner} \frac{a}{b}, 0, 0, \ldots). \qquad (14)$$

Wynikom z czterech działań arytmetycznych na operatorach liczbowych o postaci $a = \ldots 0, 0, \llcorner a, 0, 0, \ldots$ odpowiadają wyniki analogicznych działań na liczbach przyporządkowanych tym operatorom. Wobec tego mówimy, że zbiór wszystkich operatorów typu $\hat{a} = \ldots 0, 0, \llcorner a, 0, 0, \ldots$ jest ze względu na cztery działania arytmetyczne izomorficzny ze zbiorem liczb (rzeczywistych lub ogólniej — zespolonych).

Ze względu na tę własność operatory typu $\ldots 0, 0, \llcorner a, 0, 0, \ldots$ oznaczać będziemy tymi samymi symbolami co przyporządkowane im liczby, a zapisywać to będziemy również w postaci równania

$$\ldots 0, 0, \llcorner a, 0, 0, \ldots = a.$$

Zgodnie z powyższą umową, operator zerowy zapiszemy jako liczbę zero:

$$\{0\} = 0. \qquad (16)$$

Jeżeli z kolei w iloczynie $\{a_n\}\{b_n\}$ położymy $\{a_n\} = \ldots 0, 0, \llcorner a, 0, 0, \ldots$, to iloczyn ten możemy zapisać jako

$$\alpha\{b_n\} = \{\alpha b_n\},$$

gdzie α po lewej stronie równania jest operatorem liczbowym, natomiast po prawej stronie — liczbą.

Z (14) wynika również, że operator zerowy $\{0\}$ jest modułem dodawania, a operator 1 modułem mnożenia mamy bowiem:

$$\{a_n\} + \{0\} = \{a_n\},$$
$$\{a_n\} \cdot 1 = \{a_n\},$$

gdzie, zgodnie z (15):

$$1 = \ldots 0, 0, \ldots 0, \underline{\ } 1, 0, 0, \ldots 0, \ldots$$

1.3. Operacje przesunięcia, sumowania i różnicowania

1.3.1. Operacja przesunięcia

Operatorem przesunięcia q nazywać będziemy następujący operator liczbowy:

$$\ldots 0, 0, \underline{\ } 0, 1, 0, 0, \ldots \tag{17}$$

Zgodnie z definicją potęgowania otrzymamy:

$$\begin{aligned}
q^2 &= \ldots 0, 0, \underline{\ } 0, 0, 1, 0, 0, \ldots \\
q^k &= \ldots 0, 0, \underline{\ } 0, 0, 0, \ldots 1_k, 0_{k+1}, 0, \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
q^0 &= \ldots 0, 0, \underline{\ } 1, 0, 0, \ldots \\
q^{-1} &= \ldots 0, 1, \underline{\ } 0, 0, 0, \ldots \\
q^{-k} &= \ldots 0, \underset{k}{1}, \ldots \underset{k+1}{0}, \ldots 0, \underline{\ } 0, 0, 0, \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{18}$$

Dogodnie jest oprócz operatora q wprowadzić drugi operator przesunięcia, a mianowicie:

$$p = \ldots 0, 1, \underline{\ } 0, 0, \ldots 0, \ldots, \tag{19}$$

otrzymamy wówczas:

$$p = q^{-1}$$

oraz

$$p \cdot q = q \cdot p = 1. \tag{20}$$

Operatory, których iloczyn jest równy 1, np. p oraz q, nazywamy „operatorami odwrotnymi".

Niech będzie dany dowolny operator liczbowy $\{a_n\} = \ldots 0, 0, a_{-n}, a_{-N+1}, \ldots a_{-1}, \ldots$. Mnożenie przez operator q^k nazywać będziemy operacją przesunięcia.

Zgodnie z definicją iloczynu otrzymamy:

$$q^k\{a_n\} = \ldots 0, 0, a_{-N}, a_{-N+1}, \ldots a_{-k-1}, \underline{\ } a_{-k}, \ldots a_0, \ldots,$$
$$q^{-k}\{a_n\} = \ldots 0, 0, a_{-N}, a_{-N+1}, \ldots a_0, \ldots a_{k-1}, \underline{\ } a_k, \ldots \tag{21}$$

Jeżeli z kolei rozpatrzymy następujące dwa operatory liczbowe:

$$\{a_{n+k}\} = \ldots 0, 0, \underline{\ } a_k, a_{k+1}, \ldots a_{n+k}, \ldots,$$
$$\{a_{n+k+1}\} = \ldots 0, 0, \underline{\ } a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots a_{n+k+2}, \ldots,$$

to — biorąc pod uwagę (21) — otrzymamy:

$$q^{-1} \cdot \{a_{n+k}\} = \ldots 0, a_k, \underline{\ } a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots,$$
$$q^{-1} \cdot a_k = \ldots 0, a_k, \underline{\ } 0, 0, \ldots,$$

skąd, odejmując i podstawiając $q^{-1} = p$,

$$p\{a_{n+k}\} - pa_k = \{a_{n+k+1}\},$$

czyli:

$$\{a_{n+k+1}\} = p\{a_{n+k}\} - p\,a_k. \tag{22}$$

W szczególnym przypadku, gdy $k = 0$:

$$\{a_{n+1}\} = p \cdot \{a_n\} - p\,a_0, \tag{23}$$

Jeśli we wzorze (22) położymy $k = 1$ i uwzględnimy wzór (23), to otrzymamy:

$$\{a_{n+2}\} = p^2\{a_n\} - p^2 a_0 - p\,a_1.$$

Wykonując wielokrotnie wyżej przeprowadzone przekształcenia otrzymamy:

$$\{a_{n+k}\} = p^k\{a_n\} - p^k a_0 - p^{k-1} a_1 - \ldots - p\,a_{k-1}, \tag{24}$$

czyli:

$$\boxed{\{a_{n+k}\} = p^k\left(\{a_n\} - \sum_{n=0}^{k-1} p^{-n} a_n\right),} \tag{24a}$$

gdzie $k = 1, 2, 3, \ldots$

W szczególnym przypadku, gdy

$$a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{k-1} = 0,$$

to:

$$\{a_{n+k}\} = p^k a_n. \tag{25}$$

Podobnie, jeśli dane są dwa następujące operatory liczbowe:

$$\{a_{n-k}\} = \ldots 0, 0, \underline{\ } a_{-k}, a_{-k+1}, \ldots a_{n-k}, \ldots,$$
$$\{a_{n-k-1}\} = \ldots 0, 0, \underline{\ } a_{-k-1}, a_{-k}, \ldots a_{n-k}, \ldots, \tag{26}$$

to

$$\{a_{n-k-1}\} = q\{a_{n-k}\} + a_{-k-1}, \tag{27}$$

skąd dla przypadku, gdy $k = 0$

$$\{a_{n-1}\} = q\{a_n\} + a_{-1}. \tag{28}$$

Jeśli natomiast we wzorze (27) położymy $k = 1$ i uwzględnimy wzór (28), to otrzymamy:

$$\{a_{n-2}\} = q^2\{a_n\} + qa_{-1} + a_{-2}.$$

Wykonując wielokrotnie wyżej przeprowadzone przekształcenia otrzymamy:

$$\{a_{n-k}\} = q^k\{a_n\} + q^{k-1}a_{-1} + q^{k-2}a_{-2} + \ldots + a_{-k}$$

albo

$$\{a_{n-k}\} = p^{-k}\{a_n\} + p^{-k+1}a_{-1} + p^{-k+2}a_{-2} + \ldots + a_{-k}, \tag{29}$$

czyli

$$\boxed{\{a_{n-k}\} = p^{-k}\left(\{a_n\} + \sum_{n=1}^{k} p^n a_{-n}\right).} \tag{29a}$$

W szczególnym przypadku, gdy:

$$a_{-1} = a_{-2} = \ldots = a_{-k} = 0,$$

to

$$\{a_{n-k}\} = p^{-k}\{a_n\} = q^k\{a_n\}, \tag{30}$$

1.3.2. Operacja sumowania

W dalszych rozważaniach będziemy rozpatrywać przede wszystkim takie operatory, których wyrazy z ujemnymi wskaźnikami są równe zeru, a więc operatory typu:

$$\{x_n\} = {}_0\{x_n\} = \ldots 0, 0, \underset{\uparrow}{x_0}, x_1, \ldots x_n, \ldots$$

Umawiamy się dla prostoty operatory te zapisywać w sposób poniższy:

$$\{x_n\} = x_0, x_1, \ldots x_n, \ldots$$

Niech będzie dany następujący operator liczbowy

$$\{1\} = 1, 1, 1, \ldots 1, \ldots \tag{31}$$

Operator ten oznaczamy literą σ i nazywamy „operatorem sumacyjnym".

Na mocy definicji iloczynu otrzymamy:

$$\sigma^2 = \{1\} \cdot \{1\} = \left\{\sum_{m=0}^{n} 1\right\} = \{n+1\} = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$\sigma^3 = \sigma^2 \cdot \{1\} = \left\{\sum_{m=0}^{n} (n+1)\right\} = \left\{\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right\} = 1, 3, 6, \ldots$$

oraz ogólnie

$$\sigma^{k+1} = \{1\}^{k+1} = \left\{\binom{n+k}{k}\right\}, \tag{32}$$

gdzie k jest liczbą całkowitą, oraz

$$\binom{n+k}{k} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}{k!}.$$

Niech będzie dany z kolei dowolny operator liczbowy typu $\{a_n\} = a_0, a_1, a_2 \ldots a_n, \ldots$. Mnożenie przez operator sumacyjny nazywać będziemy „operacją sumowania".

Zgodnie z definicją iloczynu otrzymamy:

$$\{b_n\} = \{1\}\{a_n\} = \left\{\sum_{m=0}^{n} a_m 1_{n-m}\right\} = a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots \tag{33}$$

Tak więc w wyniku pomnożenia operatora liczbowego $\{a_n\}$ przez operator sumacyjny otrzymujemy nowy operator $\{b_n\}$, którego wyrazy są sumami częściowymi wyrazów operatora $\{a_n\}$, mamy bowiem:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0, \\ b_1 &= a_0 + a_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{34}$$

Operację sumowania można wykonywać wielokrotnie, na przykład dwukrotnie

$$\sigma^2\{a_n\} = \left\{\sum_{m=0}^{n}\left(\sum_{m_1=0}^{m} a_{m_1}\right)\right\}$$

lub trzykrotnie:

$$\sigma^3\{a_n\} = \left\{\sum_{m=0}^{n}\left[\sum_{m_1=0}^{m}\left(\sum_{m_2=0}^{m_1} a_{m_2}\right)\right]\right\}.$$

Przy wykonywaniu operacji wielokrotnego sumowania korzystać będziemy z następującego wzoru:

$$\sigma^{k+1} \cdot \{a_n\} = \left\{ \sum_{m=0}^{n} \binom{n-m+k}{k} a_m \right\}^{1)}. \tag{35}$$

Słuszność tego wzoru wynika natychmiast z definicji iloczynu i ze wzoru (32), mamy bowiem:

$$\sigma^{k+1} \{a_n\} = \left\{ \binom{n+k}{k} \right\} \{a_n\} = \left\{ \sum_{m=0}^{n} \binom{n-m+k}{k} a_m \right\}.$$

1.3.3. Operacja różnicowania

Operatorem różnicowym δ nazywać będziemy następujący operator liczbowy: 1, -1, 0, 0, ... 0, ...

Na mocy definicji iloczynu otrzymamy:

$$(1, -1, 0, 0, \ldots 0, \ldots)(1, 1, \ldots 1, \ldots) = 1,$$

skąd:

$$\delta = \frac{1}{\{1\}} = \frac{1}{\sigma}$$

oraz:

$$\delta \cdot \sigma = \sigma \cdot \delta = 1.$$

Wobec powyższego operatory δ i σ tworzą parę operatorów odwrotnych.

Niech będzie dany dowolny operator liczbowy $\{a_n\} = a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ Mnożenie przez operator różnicowy nazywać będziemy „operacją różnicowania".

Zgodnie z definicją iloczynu otrzymamy:

$$\{b_n\} = \delta \{a_n\} = a_0, a_1 - a_0, a_2 - a_1, \ldots a_n - a_{n-1}, \ldots,$$

czyli

$$\delta \{a_n\} = \{a_n - a_{n-1}\} = \{\Delta a_{n-1}\}.$$

Operację różnicowania można przeprowadzać wielokrotnie. Różnicę drugiego rzędu oznacza się symbolem $\{\Delta^2 a_n\}$, przy czym

---

[1] Warto zaznaczyć, że wzór (35) jest odpowiednikiem całki Cauchy'ego,

$$\int_0^t \frac{(t-\tau)^k}{k!} f(\tau)\, d\tau,$$

zastępującej k-krotne całkowanie.

$$\{\Delta^2 a_n\} = \{\Delta a_{n+1}\} - \{\Delta a_n\},$$

albo, jeśli uwzględnimy oznaczenia $\{\Delta a_{n+1}\}$ i $\{\Delta a_n\}$,

$$\{\Delta^2 a_n\} = \{a_{n+2}\} - 2\{a_{n+1}\} + \{a_n\};$$

podobnie

$$\{\Delta^3 a_n\} = \{\Delta^2 a_{n+1}\} - \{\Delta^2 a_n\},$$

skąd

$$\{\Delta^3 a_n\} = \{a_{n+3}\} - 3\{a_{n+2}\} + 3\{a_{n+1}\} - \{a_n\}$$

oraz, ogólnie,

$$\{\Delta^k a_n\} = \Delta^{k-1} a_{n+1}\} - \{\Delta^{k-1} a_n\},$$

$$\{\Delta^k a_n\} = \sum_{v=0}^{k} (-1)^v \frac{k!}{v!\,(k-v)!} \{a_{n+k-v}\}.$$

Operację różnicowania dogodnie jest wyrazić przy pomocy operatora przesunięcia. W przypadku różnicy pierwszego rzędu otrzymamy:

$$\{\Delta a_n\} = (p-1)\{a_n\} - p\,a_0,$$

następnie, w przypadku różnicy drugiego rzędu:

$$\{\Delta^2 a_n\} = p[(p-1)\{a_n\} - p\,a_0 - p\,\Delta a_0] - (p-1)\{a_n\} + p\,a_0 = (p-1)^2\{a_n\} + \\ - p(p-1)a_0 - p\,\Delta a_0$$

oraz, ogólnie,

$$\{\Delta^k a_n\} = (p-1)^k\{a_n\} - p\sum_{v=0}^{k-1} (p-1)^{k-1-v}\Delta^v a_0,$$

gdzie k jest liczbą naturalną oraz $\Delta^0 a_0 = a_0$.

Przykłady.

1. Jeśli $\{a_n\} = \{cn\}$,

to

$$\{\Delta a_n\} = \{a_{n+1}\} - \{a_n\} = c(\{n+1\} - \{n\}) = c\{n+1-n\} = c\{1\} = \{c\}$$

oraz

$$\{\Delta^2 a_n\} = \{\Delta^3 a_n\} = \ldots = 0.$$

2. Jeśli $\{a_n\} = \{e^{an}\}$,

to

$$\{\Delta a_n\} = \{e^{a(n+1)} - e^{an}\} = \{e^{an}(e^a - 1)\} = (e^a - 1)\{e^{an}\},$$
$$\{\Delta^2 a_n\} = (e^a - 1)\{e^{a(n+1)} - e^{an}\} = (e-1)^2\{e^{an}\},$$

oraz, ogólnie

$$\{\Delta^k a_n\} = (e^a - 1)^k\{e^{an}\}.$$

1.4. Pojęcie ciągu i szeregu operatorów liczbowych

Jeżeli każdej liczbie całkowitej nieujemnej k przyporządkowany jest operator liczbowy $\hat{a}_k = \{a_n\}_k$, to mamy określony ciągu nieskończony operatorów liczbowych

$$\{\hat{a}_k\} = \hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \ldots \hat{a}_k, \ldots \tag{36}$$

Operator $\hat{b} = \{b_n\}$ nazywamy granicą ciągu operatorów liczbowych $\{\hat{a}_k\}$ oraz piszemy:

$$\hat{b} = \lim_{k \to \infty} \hat{a}_k, \tag{37}$$

jeśli dla każdego n zachodzi równość

$$\lim_{k \to \infty} (a^k - b_n) = 0, \tag{38}$$

gdzie $a_n^k =$ n-ty wyraz k-tego operatora.

Ciąg operatorów liczbowych posiadający granicę nazywamy zbieżnym. Ciąg operatorów liczbowych nie posiadający granicy nazywamy rozbieżnym.

Szeregiem operatorów liczbowych $\hat{a} = \{a_n\}$ nazywamy symbol

$$\hat{a}_0 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \ldots + \hat{a}_k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{a}_k. \tag{39}$$

Operatory $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots \hat{a}_k, \ldots$ nazywamy składnikami szeregu, zaś operatory

$$\begin{aligned} S_0 &= \hat{a}_0, \\ S_1 &= \hat{a}_0 + \hat{a}_1, \\ S_2 &= \hat{a}_0 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_k &= \hat{a}_0 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \ldots + \hat{a}_k, \end{aligned} \tag{40}$$

nazywamy sumami częściowymi szeregu.

Szereg nieskończony nazywamy zbieżnym, jeżeli ciąg sum częściowych $\hat{S}_k$ jest zbieżny. Granicę ciągu sum częściowych nazywamy sumą szeregu operatorów liczbowych.

Jeżeli

$$\lim_{k \to \infty} \hat{S}_k = \hat{S}, \tag{41}$$

to piszemy

$$\hat{S} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \ldots + \hat{a}_k + \ldots, \tag{42}$$

lub

$$\hat{S} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{a}_k .$$

Niech będzie dany dowolny operator liczbowy $\{a_n\}$. Utwórzmy ciąg iloczynów $a_n\, q^n$:

$$\{a_n q^n\} = a_0 q^0, a_1 q, a_2 q^2, \ldots a_n q^n, \tag{43}$$

otrzymamy wówczas:

$$\begin{aligned} &a_0 q^0 = a_0, 0, 0, 0, \ldots 0, \ldots, \\ &a_1 q = 0, a_1, 0, 0, \ldots 0, \ldots, \\ &a_2 q^2 = 0, 0, a_2, 0, \ldots 0, \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_n q^n = 0, 0, 0, 0, \ldots 0, a_n, 0, \ldots . \end{aligned} \tag{44}$$

Zgodnie z (44) sumy częściowe ciągu (43) będą miały postać:

$$\begin{aligned} &\hat{S}_0 = a_0, 0, 0, 0, \ldots 0, \ldots, \\ &\hat{S}_1 = a_0, a_1, 0, 0, \ldots 0, \ldots, \\ &\hat{S}_2 = a_0, a_1, a_2, 0, \ldots 0, \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\hat{S}_n = a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, 0, 0, \ldots \end{aligned} \tag{45}$$

Na mocy definicji granicy ciągu operatorów liczbowych ciąg sum częściowych $\hat{S}_n$ będzie posiadał granicę i granicą tą będzie operator $\{a_n\}$:

$$\lim_{n \to \infty} \hat{S}_n = a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, a_{n+1}, \ldots = \{a_n\}, \tag{46}$$

Po uwzględnieniu (44) i (45) otrzymamy:

$$\hat{a} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n . \tag{47}$$

Dla operatora o postaci ogólnej ${}_{-N}\hat{a}_n = \ldots a_{-N}, a_{-N+1}, \ldots$ $\ldots a_{-1} \llcorner a_0, \ldots a_n, \ldots$ będzie natomiast:

$$\boxed{{}_{-N}\hat{a}_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n p^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n .} \tag{48}$$

Wobec tego każdy operator liczbowy można przedstawić w postaci szeregu potęgowego operatora przesunięcia.

Rozpatrzmy z kolei następujący szereg potęgowy:

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots \tag{49}$$

Ciąg sum częściowych tego szeregu będzie miał postać:

$$\{\hat{S}_k\} = 1, 1 + q, 1 + q + q^2, \ldots 1 + q + q^2 + \ldots + q^k, \ldots, \tag{50}$$

będzie więc:

$$\begin{aligned}
&\hat{S}_0 = 1\\
&\hat{S}_1 = 1 + q = 1, 1, 0, 0, 0, \ldots,\\
&\hat{S}_2 = 1 + q + q^2 = 1, 1, 1, 0, 0, \ldots,\\
&\hat{S}_3 = 1 + q + q^2 + q^3\, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \ldots,\\
&\hat{S}_k = 1 + q + \ldots + q^k = 1, 1, 1, 1, \ldots 1, 0, 0, \ldots,
\end{aligned} \tag{51}$$

Udowodnimy, że sumą szeregu (49) jest wyrażenie:

$$\hat{S} = \frac{1}{1 - q} = \frac{1}{1, -1, 0, 0, 0, \ldots}. \tag{52}$$

Istotnie, ponieważ:

$$(1, -1, 0, 0, 0, \ldots)(1, 1, 1, \ldots 1, \ldots) = 1,$$

to zgodnie z definicją dzielenia operatorów liczbowych otrzymamy:

$$\hat{S} = \frac{1}{1, -1, 0, 0, 0, \ldots} = 1, 1, 1, \ldots 1, \ldots = \{1\}. \tag{53}$$

Stąd na mocy definicji zbieżności ciągu operatorów liczbowych (38)

$$\lim_{k \to \infty} \hat{S}_k = \hat{S}$$

oraz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots = \frac{1}{1 - q}. \tag{54}$$

1.5. Pojęcie funkcji operatora liczbowego

Jeżeli każdemu operatorowi liczbowemu $\hat{z} = \{z_n\}$ należącemu do pewnego zbioru przyporządkowany jest inny operator liczbowy $\hat{F} = \{F_n\}$, to mówimy, że określona jest funkcja $\hat{F}(\hat{z})$ na zbiorze operatorów liczbowych.

Funkcję wykładniczą $e^{\hat{z}}$ definiujemy następującą równością

$$e^{\hat{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{z}^n}{n!}. \tag{55}$$

Szereg (55) jest zawsze zbieżny, wobec czego funkcja wykładnicza jest określona dla wszystkich operatorów $\hat{z}$.

W oparciu o definicję (55) łatwo można uzasadnić następujące związki:

$$\begin{aligned} &1.\ e^{\hat{z}_1} \cdot e^{\hat{z}_2} = e^{\hat{z}_1+\hat{z}_2}, \\ &2.\ (e^{\hat{z}})^m = e^{m\hat{z}}. \end{aligned} \tag{56}$$

W przypadku szczególnym, gdy $\hat{z} = q$, otrzymamy:

$$e^q = 1 + q + \frac{q^2}{2!} + \frac{q^3}{3!} + \ldots = \left\{\frac{1}{n!}\right\}. \tag{57}$$

Podobnie, funkcje trygonometryczne $\sin \hat{z}$, $\cos \hat{z}$ definiujemy w dziedzinie operatorów liczbowych jako sumy następujących szeregów

$$\sin \hat{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \hat{z}^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{58}$$

$$\cos \hat{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \hat{z}^{2n}}{(2n)!}.$$

Szeregi te są zawsze zbieżne, a więc $\sin \hat{z}$ i $\cos \hat{z}$ określone są dla wszystkich operatorów $\hat{z}$.

W oparciu o definicję (58) stwierdzamy, że funkcja $\sin \hat{z}$ jest nieparzysta, zaś $\cos \hat{z}$ — parzysta:

$$\begin{aligned} \sin \hat{z} &= -\sin(-\hat{z}), \\ \cos \hat{z} &= \cos(-\hat{z}). \end{aligned} \tag{59}$$

W dziedzinie operatorów liczbowych słuszny jest również wzór Eulera:

$$e \pm iz = \cos \hat{z} \pm i \sin \hat{z}. \tag{60}$$

W przypadku szczególnym, gdy $\hat{z} = q$, otrzymamy:

$$\sin q = \ldots 0, 0, 0, 1, 0, -\frac{1}{3!}, 0, \frac{1}{5!}, 0, \ldots, \tag{61}$$

$$\cos q = \ldots 0, 0, 1, 0, -\frac{1}{2!}, 0, \frac{1}{4!}, 0, -\frac{1}{6} \ldots$$

Funkcje trygonometryczne $\operatorname{tg} \hat{z}$ oraz $\operatorname{ctg} \hat{z}$ określamy przez wzory:

$$\operatorname{tg} \hat{z} = \frac{\sin \hat{z}}{\cos \hat{z}}, \qquad \operatorname{ctg} \hat{z} = \frac{\cos \hat{z}}{\sin \hat{z}}. \tag{62}$$

Funkcje hiperboliczne $\sinh \hat{z}$ i $\cosh \hat{z}$ definiujemy w dziedzinie operatorów liczbowych przez wzory:

$$\sinh \hat{z} = \frac{e^{\hat{z}} - e^{-\hat{z}}}{2}, \quad \cosh \hat{z} = \frac{e^{\hat{z}} + e^{-\hat{z}}}{2}. \tag{63}$$

Na mocy tej definicji otrzymujemy związki:

$$\sinh \hat{z} = -i \sin i\hat{z},$$

$$\cosh \hat{z} = -\cos i\hat{z}$$

oraz w przypadku szczególnym, gdy $\hat{z} = q$,

$$\sinh q = \ldots 0, 0, \underset{\sqcup}{} 0, 1, 0, \frac{1}{3!}, 0, \frac{1}{5!}, 0, \ldots,$$

$$\cosh q = \ldots 0, 0, \underset{\sqcup}{} 1, 0, \frac{1}{2!}, 0, \frac{1}{4!}, 0, \frac{1}{6!}, \ldots.$$

1.6. Przykłady operatorów wymiennych

Poniżej przytoczymy kilka ważniejszych funkcji wymiernych operatora przesunięcia. Z funkcji tych będziemy korzystali przy rozwiązywaniu zagadnień praktycznych.

1. $\{a_n\} = \{1\} = 1, 1, 1, \ldots 1, \ldots,$

biorąc pod uwagę wzór (24) otrzymamy:

$$\{1\} = p(\{1\} - 1),$$

skąd

$$\{1\} = \frac{p}{p-1} = \frac{1}{1-q}. \tag{64}$$

2. $\{a_n\} = \{n\} = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots.$

Zgodnie z (24) napiszemy:

$$\{n+1\} = p(n-0),$$

skąd:

$$\{n\} = \frac{\{1\}}{p-1}$$

oraz:

$$\{n\} = \frac{p}{(p-1)^2}. \tag{65}$$

3. $\{a_n\} = \{n^2\} = 0, 1, 4, 9, 16, \ldots$.

Zgodnie z (24) napiszemy:

$$\{(n+1)^2\} = p\{n^2\},$$

skąd:

$$\{n^2\} + 2\{n\} + \{1\} = p\{n^2\},$$

czyli:

$$\{n^2\} = \frac{\{1\} + 2\{n\}}{p-1},$$

oraz po uwzględnieniu (64) i (65):

$$\{n^2\} = \frac{p(p+1)}{(p-1)^3}; \tag{66}$$

4. $\{a_n\} = \{n^3\}$.

Zgodnie z (24) napiszemy:

$$\{(n+1)^3\} = p\{n^3\},$$

skąd:

$$\{n^3\} = \frac{3\{n^2\} + 3\{n\} + 1}{p-1}$$

oraz po uwzględnieniu wzorów (65) i (66):

$$\{n^3\} = 3\frac{p(p+1)}{(p-1)^4} + 3\frac{p}{(p-1)^3} + \frac{p}{(p-1)^2},$$

czyli:

$$\{n^3\} = \frac{p}{(p-1)^4}(p^2 + 4p + 1). \tag{67}$$

5. $\{a_n\} = \left\{\frac{n(n-1)}{2!}\right\}$.

Biorąc pod uwagę wzory (65) i (66) otrzymamy:

$$\left\{\frac{n(n-1)}{2!}\right\} = \left\{\frac{n^2}{2}\right\} - \left\{\frac{n}{2}\right\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{p(p+1)}{(p-1)^3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{(p-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{p(p+1) - p(p-1)}{(p-1)^3} = \frac{p}{(p-1)^3}. \tag{68}$$

6. $\{a_n\} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}$.

Biorąc pod uwagę, że:

$$p\left\{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\right\} = \left\{\frac{(n+1)n(n-1)}{3!}\right\}$$

oraz:

$$\left\{\frac{(n+1)n(n-1)}{3!}\right\} - \left\{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\right\} = \left\{\frac{n(n-1)}{2!}\right\},$$

otrzymamy:

$$\left\{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\right\} = \frac{1}{p-1}\left\{\frac{n(n-1)}{2!}\right\} = \frac{p}{(p-1)^4}. \tag{69}$$

7. $\{a_n\} = \{c^{an}\}$.

Zgodnie ze wzorem (24) otrzymamy:

$$\{c^{a(n+1)}\} = p(\{c^{an}\} - 1),$$

skąd:

$$\{c^{an}\}\, c^a = p\{c^{an}\} - p,$$

$$\{c^{an}\} = \frac{p}{p - c^a}, \tag{70}$$

oraz

$$\{(-c)^{an}\} = \frac{p}{p + c^a}.$$

1.7. Przykłady rozwiązywania równań różnicowych

Przykład 1.

Dane jest równanie różnicowe liniowe:

$$x_n + 2\hat{x}_{n+1} = \hat{1}; \qquad n \geqslant 0.$$

Należy wyznaczyć $\hat{X}_n$ w założeniu $X_0 = 0$.

Rozwiązanie.

Korzystając ze wzoru (24) piszemy

$$\hat{x}_n + 2(p\hat{x}_n - p x_0) = \hat{1},$$

skąd po uwzględnieniu, że $X_0 = 0$, otrzymamy:

$$\hat{X}_n = \frac{\hat{1}}{2p+1}.$$

Biorąc następnie pod uwagę zależność (64):

$$\hat{1} = \{1\} = \frac{p}{p-1},$$

mamy:

$$\hat{X}_n = \frac{p}{(p-1)(2p+1)} = \frac{\frac{1}{3}}{p-1} + \frac{\frac{1}{3}}{2p-1} =$$

$$= \frac{1}{3}\{1_{n-1}\} + \frac{1}{6}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} = \frac{1}{3}(0,1,1,1,\ldots) + \frac{1}{6}\left(0,1,-\frac{1}{2},\frac{1}{4},\ldots\right).$$

Przykład 2.

Dane jest równanie różnicowe liniowe:

$$\hat{X}_{n+4} + 2\hat{X}_{n+3} + 3\hat{X}_{n+2} + 2\hat{X}_{n+1} + \hat{X}_n = 0; \qquad n \geqslant 0.$$

Należy wyznaczyć $\hat{X}_n$ w założeniu następujących warunków początkowych

$$X_0 = X_1 = X_3 = 0, \quad X_2 = -1.$$

Rozwiązanie.

Korzystając ze wzoru (24) piszemy

$$\hat{X}_n(p^4 + 2p^3 + 3p^2 + 2p + 1) = -p^2 - 2p,$$

czyli:

$$\hat{X}_n = \frac{-p^2-2p}{(p^2+p+1)^2} = \frac{-p^2-2p}{(p-p_1)^2(p-p_2)^2} = \frac{K_1}{(p-p_1)^2} + \frac{K_2}{p-p_1} +$$

$$+ \frac{K_3}{(p-p_2)^2} + \frac{K_4}{p-p_2},$$

gdzie:

$$p_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}},$$

$$p_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}},$$

oraz:

$$K_1 = -\frac{p_1^2 + 2p_1}{(p_1 - p_2)^2} = -\frac{1}{2} = i\frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$K_3 = -\frac{p_2^2 + 2p_2}{(p_1 - p_2)^2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$K_2 = -K_4 = \frac{2}{(p_1 - p_2)^3}(p_1 + p_2 + p_1 p_2) = 0,$$

skąd, zgodnie ze wzorem (12) w tablicy operatorów liczbowych (str. 578):

$$\hat{x}_n = \frac{K_1}{(p - p_1)^2} + \frac{K_3}{(p - p_2)^2} = K_1\{(n-1)p_1^{n-2}\} + K_3\{(n-1)p_2^{n-2}\} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left\{(n-1)\sin\frac{2\pi}{3}n\right\}.$$

Przykład 3.

Dane jest równanie różnicowe „nieliniowe":

$$\hat{x}_{n+1}^2 + 2\hat{x}_{n+1} - 3 = 0, \qquad n \geqslant 0.$$

Należy wyznaczyć $\hat{X}_n$ przy założeniu $X_0 = 0$.

Rozwiązanie.

Korzystając ze wzoru (24) piszemy:

$$p^2\hat{x}_n^2 + 2p\hat{x}_n - 3 = 0,$$

skąd:

$$\hat{x}_{n1,2} = \frac{-2p \pm \sqrt{4p^2 + 12p^2}}{2p^2} = -q \pm 2q,$$

czyli:

$$\hat{x}_{n1} = -q + 2q = q = 0, 1, 0, 0, \ldots,$$
$$\hat{x}_{n2} = -q - 2q = -3q = 0, -3, 0, 0, \ldots.$$

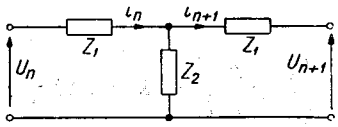
2. ZASTOSOWANIA METODY OPERATORÓW LICZBOWYCH W ZAGADNIENIACH ELEKTROTECHNIKI

2.1. Zastosowanie metody operatorów liczbowych do wyznaczania zależności energetycznych w torach łańcuchowych

2.1.1. Przykład linii łańcuchowej

Za pomocą metody operatorów liczbowych można rozwiązywać wiele zagadnień praktycznych w elektrotechnice, w fizyce teoretycznej, w statystyce itp.

Dla przykładu za pomocą metody operatorów liczbowych wyznaczymy zależności energetyczne w linii łańcuchowej składającej się z czwórników typu T.



Rys. 2. Ogniwo łańcucha czwórników symetrycznych typu T

W oparciu o prawa Kirchhoffa możemy ułożyć następujące równania:

$$\begin{aligned}(z_1 + z_2)\, i_n - z_2\, i_{n+1} - u_n &= 0,\\ z_2\, i_n - (z_1 + z_2)\, i_{n+1} - u_{n+1} &= 0.\end{aligned} \tag{71}$$

Wzory (71) przedstawiają układ dwóch jednorodnych równań różnicowych pierwszego rzędu.

Zadaniem naszym jest wyznaczyć wielkości i_n oraz u_n dla $n = 0, 1, 2, \ldots$. Zadanie to jest równoważne znalezieniu dwóch operatorów $\{i_n\}$ oraz $\{u_n\}$ spełniających

$$\begin{aligned}(z_1 + z_2)\{i_n\} - z_2\{i_{n+1}\} - \{u_n\} &= 0,\\ z_2\{i_n\} - (z_1 + z_2)\{i_{n+1}\} - \{u_{n+1}\} &= 0.\end{aligned} \tag{72}$$

Biorąc z kolei pod uwagę prawo operacji przesunięcia (24) otrzymamy:

$$\{i_{n+1}\} = p(\{i_n\} - i_0)$$

oraz: (73)

$$\{u_{n+1}\} = p(\{u_n\} - u_0),$$

gdzie i_0, u_0 = wartości brzegowe $\{i_n\}$, $\{u_n\}$ dla $n = 0$.

Uwzględniając (73) w (72) i rozwiązując układ równań algebraicznych ze względu na $\{i_n\}$ oraz $\{u_n\}$ otrzymamy:

$$\{i_n\} = \frac{p\left[p - \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right)\right] i_0 - p\frac{u_0}{z_2}}{p^2 - 2\left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right)p + 1},$$

$$\{u_n\} = \frac{p\left[p - \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right)\right] u_0 - z_2 p\left[\left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right)^2 - 1\right] i_0}{p^2 - 2\left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right)p + 1}.$$

Jeśli oznaczymy:

$$1 + \frac{z_1}{z_2} = \cosh\beta,$$

skąd:

$$\left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right)^2 - 1 = \sinh^2\beta,$$

to będzie:

$$\{i_n\} = \frac{p\left[p - \cosh\beta\right] i_0 - p\frac{u_0}{z_2}}{p^2 - 2p\cosh\beta + 1},$$

$$\{u_n\} = \frac{p\,[p - \cosh\beta]\,u_0 - p\,z_2\sinh^2\beta\,i_0}{p^2 - 2p\cosh\beta + 1}.$$

Jeśli uwzględnimy teraz wzory (23) i (24) w tablicy operatorów liczbowych — str. 578, otrzymamy:

$$\{i_n\} = i_0\{\cosh\beta n\} - \frac{u_0}{z_2\sinh\beta}\{\sinh\beta n\},$$

$$\{u_n\} = u_0\{\cosh\beta n\} - i_0 z_2\sinh\beta\{\sinh\beta n\}$$

lub

$$\{i_n\} = i_0\{\cosh\beta n\} - u_0 Y\{\sinh\beta n\}, \tag{74}$$

$$\{u_n\} = u_0\{\cosh\beta n\} - i_0 Z\{\sinh\beta n\},$$

gdzie:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{z_2\sinh\beta}.$$

Wyrażenia (74) stanowią ogólne rozwiązanie zagadnienia i zawierają stałe i_0, u_0, które należy wyznaczyć z warunków brzegowych.

Rozpatrzymy przypadek szczególny, gdy linia znajduje się w stanie zwarciowym. Założymy mianowicie, że N-ty czwórnik jest zwarty, tzn. że:

$$u_N = 0. \tag{75}$$

Uwzględniając (75) w równaniach (74) otrzymamy:

$$0 = u_0\cosh\beta N - i_0 Z\sinh\beta N,$$

skąd:

$$i_0 = \frac{u_0}{Z}\cdot\frac{\cosh\beta N}{\sinh\beta n} = u_0 Y\coth\beta N.$$

Podstawiając i_0 w równaniach (74), otrzymamy:

$$\{i_n\} = u_0 Y [\coth \beta N \{\cosh \beta n\} - \{\sinh \beta n\}] = \frac{u_0 Y}{\sinh \beta n} \{\cosh \beta (N - n)\},$$
$$\{u_n\} = u_0 [\{\cosh \beta n\} - \coth \beta N \{\sinh \beta n\}] = \frac{u_0}{\sinh \beta N} \{\sinh \beta (N - n)\}. \tag{76}$$

Jeśli linia składająca się z N czwórników znajduje się w stanie jałowym, tzn. jeśli:

$$i_N = 0,$$

to wówczas znajdziemy:

$$i_0 = u_0 Y \frac{\sinh \beta N}{\cosh \beta N} = u_0 Y \operatorname{tgh} \beta N.$$

Podstawiając i_0 w równaniach (74), otrzymamy:

$$\{i_n\} = u_0 Y [\operatorname{tgh} \beta N \{\cosh \beta n\} - \{\sinh \beta n\}] = \frac{u_0 Y}{\cosh \beta N} \{\sinh \beta (N - n)\},$$
$$\{u_n\} = u_0 [\{\cosh \beta n\} - \operatorname{tgh} \beta N \{\sinh \beta n\}] = \frac{u_0}{\cosh \beta N} \{\cosh \beta (N - n)\}. \tag{77}$$

Biorąc z kolei pod uwagę, że:

$$\lim_{N \to \infty} \left[\frac{\cosh \beta (N - n)}{\cosh \beta N}\right] = \lim_{N \to \infty} \left[\frac{e^{\beta(N-n)} + e^{-\beta(N-n)}}{e^{\beta N} + e^{-\beta N}}\right] =$$
$$= \lim_{N \to \infty} \left[\frac{e^{-\beta N} + e^{-\beta(2N-n)}}{1 + e^{-2\beta N}}\right] = e^{-\beta n} \tag{78}$$

oraz podobnie:

$$\lim_{N \to \infty} \left[\frac{\sinh \beta (N - n)}{\cosh \beta N}\right] = e^{-\beta n}, \tag{79}$$

otrzymamy znane równanie dla linii nieskończenie długiej:

$$\{i_n\} = u_0 Y \{e^{-\beta n}\},$$
$$\{u_n\} = u_0 \{e^{-\beta n}\}. \tag{80}$$

2.1.2. Przykład łańcucha izolatorów wysokonapięciowych

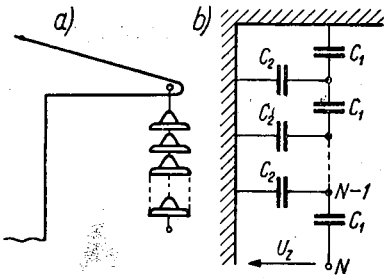
Na rysunku 3 przedstawiony jest łańcuch izolotorów wysokonapięciowych oraz wskazany jest uproszczony schemat zastępczy.

Zgodnie z prawami Kirchhoffa można łatwo ułożyć następujące równanie:

$$j\omega c_1 (u_{n+2} - u_{n+1}) = j\omega c_1 (u_{n+1} - u_n) + i\omega c_2 u_{n+1},$$

skąd:

$$\{u_{n+2}\} - 2\left(1 + \frac{c_2}{2c_1}\right)\{u_{n+1}\} + \{u_n\} = 0. \tag{81}$$



Rys. 3. Łańcuch izolatorów wysokonapięciowych

Wyrażenie (81) jest równaniem różnicowym liniowym drugiego rzędu i można go rozwiązać przy pomocy metody operatorów liczbowych.

Biorąc pod uwagę wzór (24), znajdziemy:

$$\begin{aligned} \{u_{n+1}\} &= p(\{u_n\} - u_0), \\ \{u_{n+2}\} &= p^2(\{u_n\} - u_0) - p u_1. \end{aligned} \tag{82}$$

Uwzględniając (82) w równaniu (81) i przyjmując $u_0 = 0$ otrzymamy:

$$\left[p^2 - 2\left(1 + \frac{c_2}{2c_1}\right)p + 1)\right]\{u_n\} = pu_1,$$

skąd:

$$\{u_n\} = \frac{pu_1}{p^2 - 2\left(1 + \frac{c_2}{2c_1}\right)p + 1}. \tag{83}$$

Po wprowadzeniu oznaczenia:

$$\cosh x = 1 + \frac{c_2}{2c_1},$$

$$\sinh x = \sqrt{\cosh^2 x - 1} = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}\left(1 + \frac{c_2}{4c_1}\right)}, \tag{84}$$

mamy:

$$\{u_n\} = \frac{p \sinh x}{p^2 - 2p \cosh x + 1} \cdot \frac{u_1}{\sinh x} \tag{85}$$

oraz po uwzględnieniu wzoru (23) w tablicy operatorów liczbowych

$$\{u_n\} = \frac{u_1}{\sinh x}\{\sinh xn\}. \tag{86}$$

Wielkość u_1 wyznaczamy z warunków brzegowych; zakładamy mianowicie:

$$u_N = U_z = \text{napięcie linii w stosunku do ziemi}, \tag{87}$$

co daje biorąc pod uwagę (86):

$$u_1 = U_z \frac{\sinh x}{\sinh xN}. \tag{88}$$

Uwzględniając otrzymane wyrażenie na u_1 w równaniu (86) znajdziemy:

$$\{u_n\} = \frac{U_z}{\sinh xN}\{\sinh xn\}. \tag{89}$$

Jeśli $\frac{c_2}{2c_1}$ jest małe, to $\sinh xn \approx xn$, $\sinh xN \approx xN$ oraz:

$$\{u_n\} \approx \frac{U_z}{N}\{n\} \tag{90}$$

i wówczas na wszystkich izolatorach występują równe napięcia.

Część II

ZAGADNIENIE STABILNOŚCI UKŁADÓW REGULACJI IMPULSOWEJ

1. WSTĘP

Układy regulacji można podzielić zgodnie z własnościami na
układy regulacji ciągłej,
układy regulacji przerywanej.

Do układów regulacji ciągłej zalicza się układy, w których sygnał korygujący wielkość regulowaną jest funkcją ciągłą, a obwód regulacji jest stale zamknięty. Do układów regulacji przerywnej zalicza się układy regulacji nie spełniające powyższego warunku.

Ważnym typem układów rodzaju są tzw. „układy regulacji impulsowej", a więc układy, w których zamykanie obwodu regulacji następuje okresowo. W dalszych rozważaniach ograniczymy się do badania tylko jednego typu układu regulacji impulsowej, znajdującego szerokie zastosowania w praktyce. Układ ten będziemy mogli zawsze przedstawić w postaci układu z impulsowym sprzężeniem zwrotnym (rys. 6).

Sygnał korygujący wielkość regulowaną nie jest w rozważanych układach funkcją ciągłą, lecz „składa się" z prostokątnych impulsów o jednakowej szerokości γT i występujących w równych odstępach czasu T. Załóżymy, że wysokości tych impulsów są w momentach pojawiania się proporcjonalne do wartości funkcji błędu $\delta(t) = x_2(t) - x_0(t)$, a więc do różnicy między wielkością regulowaną a wielkością zadaną.

Układy regulacji impulsowej znalazły szerokie zastosowania praktyczne, gdyż wykazują wiele zalet w stosunku do układów o działaniu ciągłym.

Podstawowym, elementarnym warunkiem prawidłowej pracy układów regulacji, a więc w szczególności także układów regulacji impulsowej, jest ich stabilność. Stabilnością układu dynamicznego nazywamy, jak wiadomo, własność polegającą na tym, że jego odpowiedź impulsowa (funkcja sygnału wyjściowego wywołanego wymuszeniem w postaci funkcji Diraca) jest funkcją „zanikającą", a więc spełnia warunek

$$\lim_{t\to\infty} k(t) = 0 . \tag{91}$$

W znanej autorowi literaturze technicznej metody badania stabilności układów impulsowych są oparte przede wszystkim na badaniu tzw. charakterystyk częstotliwościowych układu [4]. Ponieważ dla układów impulsowych eksperymentalne wyznaczanie charakterystyk częstotliwościowych jest rzeczą niemal niemożliwą, więc powyższe metody są praktycznie nieprzydatne w tych przypadkach, w których analiza układu musi być oparta na danych uzyskanych z pomiarów.

Poniżej podana jest metoda pozwalająca na określenie stabilności układu regulacji impulsowej wprost ze znajomości charakterystyki czasowej „układu otwartego". Prócz tego przeprowadzona jest analiza typowych charakterystyk czasowych, w wyniku której dochodzi się do wykresów określających „strefy stabilności" rozważanych układów impulsowej regulacji. Uzyskane wyniki pozwalają w licznych przypadkach przeprowadzić badanie stabilności prawie natychmiast ze znajomości przebiegu charakterystyki czasowej (odpowiedzi na wymuszenie jednostkowe) otwartego układu regulacji, która może być łatwo wyznaczona doświadczalnie. Należy zauważyć, że w przypadku układów o działaniu ciągłym taki sposób postępowania jest często stosowany [9].

W pracy [15] autor wykazał, że metoda operatorów liczbowych może być stosowana w zagadnieniach analizy układów impulsowych. Metoda badania układów impulsowych oparta na metodzie operatorów liczbowych jest ogólniejsza i prostsza od metody podanej w pracy [4] przez J. Z. Cypkina i korzystającej z przekształcenia

$$F(q) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) e^{-qn}, \tag{92}$$

gdzie $f(n)$ jest funkcją zmiennej całkowitej n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) oraz $F(q)$ — funkcją zmiennej zespolonej q.

Jest rzeczą oczywistą, że przekształcenie (92) można stosować tylko dla takich funkcji, które zapewniają zbieżność szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) e^{qn}. \tag{93}$$

Nie można więc przekształcać funkcji:

$$\begin{aligned} f(n) &= n!, \\ f(n) &= n^2!, \\ f(n) &= e^{n^2}, \text{ itp.} \end{aligned} \tag{94}$$

Metoda operatorów liczbowych nie narzuca natomiast żadnych ograniczeń na klasę funkcji $f(n)$.

W pracy [15] zostało uzasadnione, że „własności transmisyjne" układu impulsowego zawsze można określić za pomocą tzw. „równania układu impulsowego":

$$\{x_2(n, \varepsilon)\} = K_i(p, \varepsilon)\{x_1(n)\}, \quad 0 \leqslant \varepsilon < 1, \tag{95}$$

gdzie:

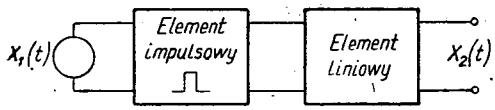
$x_2(n, \varepsilon)$ jest funkcją określającą sygnał na wyjściu układu impulsowego,

$x_1(n)$ jest ciągiem wartości sygnału wejściowego $x_1(t)$ odpowiadających momentów generowania impulsów,

$K_i(p, \varepsilon)$ jest tzw. „przepustowością impulsową" układu,

$K_i(p, \varepsilon)$ określone jest dwoma różnymi wzorami: $K_I(p, \varepsilon)$ i $K_{II}(p, \varepsilon)$, w zależności od tego, czy parametr rzeczywisty ε zawiera się w przedziale $[0, \gamma)$, czy też w przedziale $[\gamma, 1)$, gdzie γ jest ilorazem:

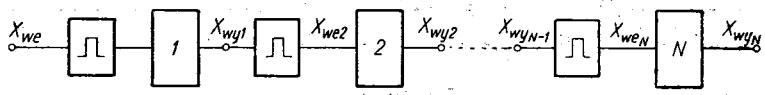
$$\gamma = \frac{\text{szerokość impulsów}}{\text{okres}}. \tag{96}$$



Rys. 4. Schemat układu impulsowego

Schemat blokowy układu impulsowego wskazany jest na rys. 4. Układ ten składa się z dwóch członów w połączeniu szeregowym, a mianowicie z tzw. „elementu impulsowego" i „elementu liniowego".

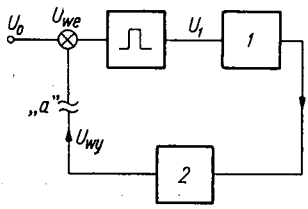
Elementem impulsowym może być klucz, przekaźnik elektromechaniczny, przekaźnik elektronowy itp. Jego zadaniem jest wykonanie przekształcenia funkcji ciągłej sygnału wejściowego $x_1(t)$ na sygnał w postaci ciągu impulsów prostokątnych o szerokościach γT i okresie T. Wysokości



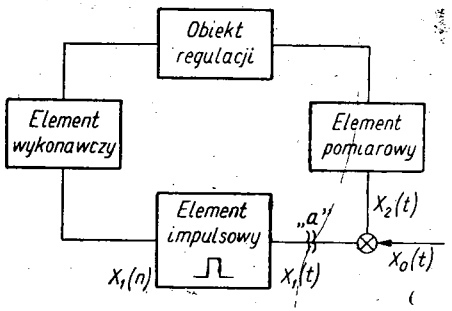
Rys. 5. Połączenie szeregowe układów impulsowych

tych impulsów w momentach pojawiania się są proporcjonalne do wartości sygnału $x_1(t)$, są więc „modulowane" funkcją $x_1(t)$.

Elementem liniowym może być dowolny liniowy układ dynamiczny, zdolny do przekazywania sygnału.



Rys. 6. Układ z impulsowym sprzężeniem zwrotnym



Rys. 7. Podstawowy schemat układu regulacji impulsowej

Układy impulsowe można łączyć zupełnie identycznie jak „zwykłe" układy dynamiczne. Między innymi możliwe jest łączenie szeregowe lub łączenie w układzie sprzężenia zwrotnego (rys. 5, 6, 7).

Można w prosty sposób wykazać, że w układzie z impulsowym sprzężeniem zwrotnym (rys. 7) między sygnałem X_2 i X_0 zachodzi następujący związek:

$$\{x_2(n,\varepsilon)\} = \frac{K_i(p,\varepsilon)}{1+K_I(p,0)}\{x_0(n)\};\ 0 \leqslant \varepsilon < 1, \tag{97}$$

gdzie $K_i(p,\varepsilon)$ jest przepustowością układu impulsowego otrzymanego przez „otwarcie" gałęzi sprzężenia zwrotnego w funkcji „a", a więc przed elementem impulsowym. Wyprowadzenie powyższego wzoru podane jest w przypisach.

Związek (97) nazywać będziemy „równaniem układu z impulsowym sprzężeniem zwrotnym", wyrażenie zaś

$$ {}_{s}K_i(p,\varepsilon) = \frac{K_i(p,\varepsilon)}{1 + K_I(p,0)} \tag{98} $$

nazywać będziemy „przepustowością" lub „funkcją charakterystyczną" układu z impulsowym sprzężeniem zwrotnym.

Każdy rozważany przez nas układ impulsowej regulacji można przedstawić w postaci układu z impulsowym sprzężeniem zwrotnym, a w związku z tym własności dynamiczne zawsze można będzie określić wzorem (97).

Autorowi ze względu na sposób przeprowadzonej analizy dogodnie jest rozróżniać tzw. układy „statyczne" i „astatyczne". Stosowanie takiego podziału układów regulacji nie jest oczywiście rzeczą konieczną.

2. OKREŚLENIE STABILNOŚCI UKŁADU REGULACJI IMPULSOWEJ ZE ZNAJOMOŚCI CHARAKTERYSTYKI CZASOWEJ UKŁADU OTWARTEGO

Rozważmy układ z impulsowym sprzężeniem zwrotnym (rys. 7). Jeżeli obwód sprzężenia zwrotnego przerwiemy przed elementem impulsowym (w punkcie a), to wówczas otrzymamy zwyczajny układ impulsowy, którego teoria została podana w pracy [15].

Napiszmy równanie układu otwartego w punkcie (a):

$$ \{x_2(n,\varepsilon)\} = K_i(p,\varepsilon)\{x_1(n)\}. \tag{99} $$

Załóżmy następnie, że na jego wejście, a więc w punkcie (a) przyłożone zostało wymuszenie w postaci funkcji jednostkowej. Wówczas na wyjściu elementu impulsowego pojawi się ciąg impulsów prostokątnych o identycznych i jednostkowych wysokościach; będzie więc

$$ \{x_1(n)\} = \{1\} = \frac{p}{p-1}, \tag{100} $$

zatem sygnał $x_2(t)$ można będzie określić wzorem

$$ \{x_2(n,\varepsilon)\} = K_i(p,\varepsilon)\frac{p}{p-1}. \tag{101} $$

Ponieważ operator liczbowy zawsze można przedstawić w postaci następującego szeregu potęgowego

$$ \{a_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^{-n}, \tag{102} $$

przeto otrzymamy

$$K_i(p,\varepsilon) = \frac{p-1}{p}\sum_{n=0}^{\infty} x_2(n,\varepsilon)p^{-n} = (1-p^{-1})\sum_{n=0}^{\infty} x_2(n,\varepsilon)\,p^{-n} =$$

$$= x_2(0,\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty}[x_2(n,\varepsilon) - x_2(n-1,\varepsilon)]\,p^{-n}. \tag{103}$$

Ze wzoru (103) można wyznaczyć tzw. charakterystykę częstotliwościową układu impulsowego. Jeżeli mianowicie zgodnie z Cypkinem charakterystykę częstotliwościową $B(j\bar{\omega},\varepsilon)$[1]) układu impulsowego określimy wzorem

$$B(j\bar{\omega},\varepsilon) = \frac{x_{2\,ust}(n,\varepsilon)}{x_1(n)} = \frac{x_{2\,ust}(n,\varepsilon)}{c\,e^{j\bar{\omega}n}}, \tag{104}$$

gdzie $x_{2\,ust}(n,\varepsilon)$ jest składową ustaloną sygnału wyjściowego $x_2(n,\varepsilon)$ oraz

$$x_1(n) = c\,e^{j\bar{\omega}n} \tag{105}$$

jest sygnałem wymuszającym, to łatwo można uzasadnić następującą własność. Charakterystyka częstotliwościowa $B(j\bar{\omega},\varepsilon)$ układu impulsowego równa jest wyrażeniu $K_i(e^{j\bar{\omega}},\varepsilon)$ otrzymanemu przez podstawienie w przepustowości impulsowej $K_i(p,\varepsilon)$ układu na miejsce operatora przesunięcia p funkcji $e^{j\bar{\omega}}$;

$$B(j\bar{\omega},\varepsilon) = K_i(e^{j\bar{\omega}},\varepsilon). \tag{106}$$

Własność powyższą można uzasadnić w oparciu o równanie układu impulsowego zakładając $x_1(n) = c\,e^{j\bar{\omega}n}$. Po dokonaniu elementarnych przekształceń otrzymujemy (141). Własność ta wynika również natychmiast ze wzoru (2 — 116) podanego w pracy Cypkina [4] i z izomorfizmu występującego między operatorami liczbowymi a sumacyjnym przekształceniem Laplace'a.

Według (104) charakterystykę częstotliwościową układu impulsowego można więc określić ze znajomości $x_2(n,\varepsilon)$:

$$B(j\bar{\omega},\varepsilon) = K_i(e^{j\bar{\omega}},\varepsilon) = x_2(0,\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty}[x_2(n,\varepsilon) - x_2(n-1,\varepsilon)]\,e^{-j\bar{\omega}n},$$

gdzie $x_2(n,\varepsilon)$ jest funkcją sygnału wyjściowego wywołanego wymuszeniem jednostkowym

$$x_1(t) = \mathbf{1}(t).$$

---

[1]) $\bar{\omega}$ oznacza tzw. „pulsację bezwymiarową"; $\bar{\omega} = \omega T$, gdzie T jest okresem występowania impulsów.

Jeżeli z kolei założymy, że rozważany (otwarty) układ impulsowy jest stabilny, dzięki czemu

$$\lim_{n\to\infty}[x_2(n,\varepsilon)-x_2(n-1,\varepsilon)]=0^{1)}, \tag{107}$$

to we wzorze (103) można będzie pominąć wszystkie wyrazy o wskaźnikach dostatecznie dużych ($n>N$), dla których

$$|x_2(n,\varepsilon)-x_2(n-1,\varepsilon)|<\delta, \tag{108}$$

gdzie za δ możemy w praktyce przyjąć np. $0{,}1k$ lub $0{,}05k$, przy czym k jest „wynikowym" wzmocnieniem w pętli sprzężenia zwrotnego. Otrzymamy wówczas wzór przybliżony:

$$K_i(e^{j\bar{\omega}},\varepsilon)\approx x_2(0,\varepsilon)+\sum_{n=1}^{N}[x_2(n,\varepsilon)\,x_2(n-1,\varepsilon)]\,e^{-j\bar{\omega}n}, \tag{109}$$

dostatecznie dokładny dla określenia stabilności zamkniętego układu regulacji impulsowej.

Zgodnie z wynikami uzyskanymi przez Cypkina [4] (str. 148 — 155), stabilność układu określamy z następującego

Twierdzenia. Układ z impulsowym sprzężeniem zwrotnym jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy charakterystyka amplitudowo-fazowa $K(e^{j\bar{\omega}}, 0)$ układu otwartego przy zmianie ω od $-\pi$ do $+\pi$ nie obejmuje punktu $-1, j0$.

Wobec powyższego metoda badania stabilności układu impulsowej regulacji w oparciu o charakterystykę czasową $x_2\ (n,\ \varepsilon)$ układu otwartego sprowadza się do

1° wyznaczenia na podstawie wzoru (109) funkcji $K(e^{j\bar{\omega}}\ ,\ 0)$ ze znajomości przebiegu charakterystyki czasowej $x_2(n, \varepsilon)$ układu otwartego,

2° wykreślenia charakterystyki amplitudowo-fazowej.

Stabilność układu okeślamy następnie korzystając z przytoczonego twierdzenia.

Charakterystykę amplitudowo-fazową $K(e^{j\bar{\omega}}\ ,0)$ najłatwiej można wyznaczyć obliczając jej składowe:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_e\,K(e^{j\bar{\omega}},0)&=x_2(0,0)+\sum_{n=1}^{N}[x_2(n,0)-x_2(n-1,0)]\cos n\bar{\omega},\\ \mathcal{I}_m\,K(e^{j\bar{\omega}},0)&=-\sum_{n=1}^{N}[x_2(n,0)-x_2(n-1,0)]\sin n\bar{\omega}.\end{aligned} \tag{110}$$

[1]) Wzór powyższy jest koniecznym, ale niedostatecznym warunkiem stabilności układu impulsowego.

Z przeprowadzonych rozważań możemy wysnuć interesujący wniosek, że o stabilności układu impulsowej regulacji decyduje tylko i wyłącznie przebieg charakterystyki czasowej $x_2(\bar{t})$ w momentach $t = \frac{\bar{t}}{T} = (n = 0, 1, 2, \ldots)$, a więc przebieg $x_2(n, 0)$. Zachowanie charakterystyki $x_2(\bar{t})$ między momentami $\bar{t} = n$ nie ma absolutnie żadnego wpływu na stabilność układu. Fakt powyższy staje się jasny, jeśli zważymy, że dzięki obecności w gałęzi sprzężenia zwrotnego elementu impulsowego obwód regulacji jest zamknięty jedynie w momentach $\bar{t} = n$.

Przebieg charakterystyki czasowej $x_2(n, \varepsilon)$ może być oczywiście wyznaczony na drodze doświadczalnej lub ewentualnie może być obliczony metodą analityczną. Należy podkreślić, że przedstawiona powyżej metoda nadaje się tylko do badania układów, które są stabilne po otwarciu gałęzi sprzężenia zwrotnego, a więc do badania układów nie zawierających np. członów o tzw. charakterystyce astatycznej.

Poniżej wykażemy, że ograniczenia tego można uniknąć w stosunkowo prosty sposób. Zauważmy mianowicie, że dla (otwartego) układu impulsowego o charakterystyce astatycznej i zawierającego tylko jeden człon całkujący zawsze musi być spełniony związek:

$$\lim_{n \to \infty} \Delta^2 x_2(n-1, \varepsilon) = 0; \qquad 0 \leqslant \varepsilon < 1, \tag{111}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \Delta^2 x_2(n-1, \varepsilon) &= \Delta [x_2(n, \varepsilon) - x_2(n-1, \varepsilon)] = \\ &= x_2(n+1, \varepsilon) - 2 x_2(n, \varepsilon) + x_2(n-1, \varepsilon), \end{aligned} \tag{112}$$

oraz $x_2(n, \varepsilon)$ jest odpowiedzią rozważanego układu impulsowego na wymuszenie jednostkowe.

Jeśli więc wzór określający $K_i(e^{j\bar{\omega}}, 0)$ przekształcimy w ten sposób, by pod znakiem sumy otrzymać wyrazy postaci $\Delta^2 x_2(n-1, 0) e^{j\bar{\omega}n}$, można będzie podobnie jak poprzednio we wzorze przybliżonym ograniczyć się do skończonej liczby składników szeregu. Przeprowadźmy mianowicie następujące rozumowanie.

Pomnóżmy obie strony wzoru (103) przez $p - 1$; otrzymamy

$$(p-1) K_i(p, \varepsilon) = (p-1) x_2(0, \varepsilon) + (p-1) \sum_{n=1}^{\infty} [x_2(n, \varepsilon) - x_2(p-1, \varepsilon)] p^{-n}, \tag{113}$$

skąd po elementarnych przekształceniach

$$\begin{aligned} (p-1) K_i(p, \varepsilon) = (p-1) x_2(0, \varepsilon) + \Delta x_2(0, \varepsilon) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta [x_2(n, \varepsilon) - x_2(n-1, \varepsilon)] p^{-n}, \end{aligned}$$

czyli

$$(p-1)K_i(p,\varepsilon)=(p-1)x_2(0,\varepsilon)+\Delta x_2(0,\varepsilon)+\sum_{n=1}^{\infty}\Delta^2 x_2(n-1,\varepsilon)p^{-n}, \tag{114}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\Delta^2 x_2(n-1,\varepsilon)&=\Delta[x_2(n,\varepsilon)-x_2(n-1,\varepsilon)]=\\&=x_2(n+1,\varepsilon)-2x_2(n,\varepsilon)+x_2(n-1,\varepsilon)\end{aligned} \tag{115}$$

oraz

$$\Delta x_2(0,\varepsilon)=x_2(1,\varepsilon)-x_2(0,\varepsilon). \tag{116}$$

Charakterystykę częstotliwościową $K(e^{j\bar{\omega}},0)$ „otwartego" układu impulsowego będzie można zatem wyrazić wzorem

$$\begin{aligned}K(e^{j\bar{\omega}},0)=\frac{1}{e^{j\bar{\omega}}-1}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta^2 x_2(n-1,0)\,e^{-j\bar{\omega}n}+\\+x_2(0,0)+\frac{\Delta x_2(0,0)}{e^{j\bar{\omega}}-1}.\end{aligned} \tag{117}$$

Dalej, korzystając ze związku (111) słusznego dla układu o charakterystyce astatycznej, możemy we wzorze powyższym opuścić wszystkie wyrazy o wskaźnikach $n>N$. Wówczas otrzymamy wzór przybliżony

$$\boxed{\begin{aligned}K(e^{j\bar{\omega}},0)\approx\frac{1}{e^{j\bar{\omega}}-1}\sum_{n=1}^{N}\Delta^2 x_2(n-1,0)\,e^{-j\bar{\omega}n}+\\+x_2(0,0)+\frac{\Delta x_2(0,0)}{e^{j\bar{\omega}}-1},\end{aligned}} \tag{118}$$

Można również wyprowadzić wzory określające składowe funkcji zespolonej $K(e^{j\bar{\omega}},0)$. Biorąc mianowicie pod uwagę oczywiste związki

$$\mathcal{R}e\left\{\frac{1}{e^{j\bar{\omega}}-1}\right\}=-\frac{1}{2};\quad \mathcal{I}m\left\{\frac{1}{e^{j\bar{\omega}}-1}\right\}=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\bar{\omega}}{2} \tag{119}$$

oraz wykorzystując wzory określające składowe iloczynu liczb zespolonych otrzymamy

$$\begin{aligned}\mathcal{R}e\,K(e^{j\bar{\omega}},0)\approx x_2(0,0)-\frac{1}{2}\Delta x_2(0,0)+\\-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\Delta^2 x_2(n-1,0)\cos\bar{\omega}n+\\-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\bar{\omega}}{2}\sum_{n=1}^{N}\Delta^2 x_2(n-1,0)\sin\bar{\omega}n,\\\mathcal{I}m\,K(e^{j\bar{\omega}},0)\approx\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\Delta^2 x_2(n-1,0)\sin\bar{\omega}n+\end{aligned} \tag{120}$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\bar{\omega}}{2}\sum_{n=1}^{N}\Delta^2 x_2(n-1,0)\cos\bar{\omega}n-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\bar{\omega}}{2}\Delta x_2(0,0). \qquad (121)$$

W oparciu o uzyskane wzory określające $Re\ K\ (e^{j\bar{\omega}}, 0)$ i $Im\ K\ (e^{j\bar{\omega}}, 0)$ można ze znajomości charakterystyki czasowej $x_2\ (n, 0)$ wyznaczyć przebieg charakterystyki amplitudowo-fazowej otwartego układu regulacji impulsowej, zawierającego człon całkujący (np. serwomotor). Znając przebieg tej charakterystyki w przedziale $\bar{\omega}\varepsilon\ [-\pi, \pi]$ możemy określić stabilność układu regulacji.

Na zakończenie omawiania powyższego zagadnienia warto jeszcze zauważyć, że znajomość wykresu charakterystyki amplitudowo-fazowej $K\ (e^{j\bar{\omega}}, 0)$ może być nie tylko przydatna do określenia stabilności układu regulacji. Z przebiegu funkcji $K\ (e^{j\bar{\omega}}, 0)$ możemy mianowicie wnioskować o stopniu stabilności i możemy również przewidzieć, jakie człony korekcyjne należy zastosować dla polepszenia jakości procesu regulacji.

3. WARUNKI STABILNOŚCI STATYCZNEGO UKŁADU REGULACJI IMPULSOWEJ O TYPOWEJ CHARAKTERYSTYCE

Podana w poprzednim rozdziale metoda może być stosowana w przypadku dowolnego statycznego lub astatycznego układu regulacji impulsowej. Mimo swej uniwersalności metoda ta posiada jednak pewną niedogodność, gdyż do zbadania stabilności układu wymaga przeprowadzenia wstępnych obliczeń. Poniżej wykazuje się, że w przypadku, gdy charakterystyka czasów $x_2\ (n, 0)$ otwartego układu impulsowej regulacji posiada charakter typowy, wskazany na rys. 8a, stabilność układu można określić bezpośrednio z przebiegu $x_2\ (n, 0)$, bez konieczności wyznaczania charakterystyki amplitudowo-fazowej $K(e^{j\bar{\omega}}, 0)$. Rozumowanie opiera się na zastąpieniu charakterystyki z rys. 8a charakterystyką uproszczoną o kształcie „liniii łamanej" z rys. 8b.

Charakterystykę uproszczoną możemy zapisać analitycznie w sposób następujący:

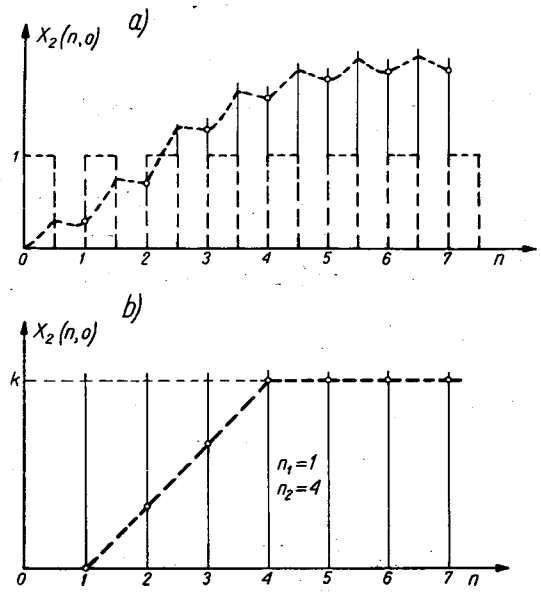
$$x_2(n,0)=\begin{cases}0;\ n<n_1\\ \dfrac{k}{n_2-n_1}(n-n_1);\ n_1\leqslant n<n_2\\ k;\ n\geqslant n_2\end{cases} \qquad (122)$$

Ponieważ sygnał wyjściowy $x_2\ (t)$ jest wywołany wymuszeniem jednostkowym $\mathbf{1}\ (t)$, więc zgodnie z podanym wzorem współczynnik k jest równy „wynikowemu" wzmocnieniu w pętli sprzężenia zwrotnego.

Korzystając z metody operatorów liczbowych uproszczoną charakterystykę x_2 $(n, 0)$ można wyrazić wzorem

$$\{x_2(n, 0)\} = \frac{k}{n_2 - n_1} \cdot \frac{p}{(p-1)^2}[p^{n_1} - p^{-n_2}], \tag{123}$$

gdzie p jest operatorem przesunięcia.



Rys. 8. Aproksymacja charakterystyki czasowej układu impulsowego za pomocą linii łamanej

Ponieważ założyliśmy, że na wejście układu załączone zostało wymuszenie jednostkowe, tzn. że

$$\{x_1(n)\} = \{1\} = \frac{p}{p-1}, \tag{124}$$

więc

$$K(p, 0) = \frac{\{x_2(n, 0)\}}{\{x_1(n, 0)\}} = \frac{k}{n_2 - n_1} \frac{p^{-n_1} - p^{-n_2}}{p-1}. \tag{125}$$

Podstawiając w powyższym wzorze na miejsce operatora przesunięcia p funkcje $e^{j\bar{\omega}}$ otrzymamy wyrażenia $K(e^{j\bar{\omega}}, 0)$ określające charakterystykę częstotliwościową otwartego układu regulacji

$$K(e^{j\bar{\omega}}, 0) = \frac{k}{n_2 - n_1} \cdot \frac{e^{-j\bar{\omega}n_1} - e^{-j\bar{\omega}n_2}}{e^{j\bar{\omega}} - 1}. \tag{126}$$

Zgodnie z przytoczonym w poprzednim rozdziale twierdzeniem granicę stabilności układu wyznaczymy z warunków

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \mathcal{R}_e K(e^{j\bar{\omega}}, 0) = -1, \\ &\text{b)}\ \mathcal{I}_m K(e^{j\bar{\omega}}, 0) = 0. \end{aligned} \tag{127}$$

W tym celu zbadamy pierwiastki równania

$$K(e^{j\bar{\omega}}, 0) + 1 = 0. \tag{128}$$

Uwzględniając w powyższym równaniu wyrażenie (126) otrzymamy

$$k(e^{-j\bar{\omega}n_1} - e^{-j\bar{\omega}n_2}) + (n_2 - n_1)(e^{j\bar{\omega}} - 1) = 0, \tag{129}$$

a stąd, po dokonaniu całego szeregu elementarnych przekształceń trygonometrycznych otrzymamy następujące związki c) i d)

$$\begin{aligned} &\text{c)}\ 2k \sin \bar{\omega}\alpha \sin \bar{\omega}\beta - (n_2 - n_1)(\cos \bar{\omega} - 1) = 0, \\ &\text{d)}\ 2k \cos \bar{\omega}\alpha \sin \bar{\omega}\beta - (n_2 - n_1) \sin \bar{\omega} = 0, \end{aligned} \tag{130}$$

gdzie $\alpha = \dfrac{n_1 + n_2}{2}$, $\beta = \dfrac{n_1 - n_2}{2}$.

Związki powyższe będziemy traktowali jako układ dwu równań z dwiema niewiadomymi: $\bar{\omega}$ i k. Dzieląc równanie c) i d) wyznaczymy niewiadomą $\bar{\omega}$:

$$\operatorname{tg} \bar{\omega}\alpha = \frac{\cos \bar{\omega} - 1}{\sin \bar{\omega}} = -\operatorname{tg} \frac{\bar{\omega}}{2}, \tag{131}$$

skąd

$$\bar{\omega}\alpha = -\frac{\bar{\omega}}{2} + (\nu + 1)\pi; \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_\nu = \frac{(\nu + 1)2\pi}{2 + n_1 + n_2}. \tag{132}$$

Następnie, na przykład z równania d), wyznaczymy niewiadomą k:

$$\begin{aligned} k = k_\nu &= (n_2 - n_1) \frac{\sin \bar{\omega}_\nu}{2 \cos \bar{\omega}_\nu \alpha \sin \bar{\omega}_\nu \beta} = \\ &= (n_2 - n_1) \frac{\sin \dfrac{(\nu + 1)2\pi}{1 + n_1 + n_2}}{2 \cos \dfrac{n_1 + n_2}{1 + n_1 + n_2}(\nu + 1)\pi \sin \dfrac{n_1 - n_2}{1 + n_1 + n_2}(\nu + 1)\pi}. \end{aligned} \tag{133}$$

Wzór powyższy można uprościć. Jeżeli mianowicie uwzględnimy oczywisty związek

$$\frac{n_1+n_2}{1+n_1+n_2}=1-\frac{1}{1+n_1+n_2}, \tag{134}$$

skąd

$$\cos\frac{n_1+n_2}{1+n_1+n_2}(\nu+1)\pi=(-1)^{\nu+1}\cos\frac{(\nu+1)\pi}{1+n_1+n_2}, \tag{135}$$

i dalej, jeśli wprowadzimy przekształcenie

$$\sin\frac{(\nu+1)2\pi}{1+n_1+n_2}=2\sin\frac{(\nu+1)\pi}{1+n_1+n_2}\cos\frac{(\nu+1)\pi}{1+n_1+n_2}, \tag{136}$$

to otrzymamy prostszy wzór określający k_ν;

$$k_\nu=(-1)^\nu(n_2-n_1)\frac{\sin\dfrac{(\nu+1)\pi}{1+n_1+n_2}}{\sin\dfrac{n_2-n_1}{1+n_1+n_2}(\nu+1)\pi}. \tag{137}$$

Wzór powyższy jest wieloznaczny i określa warunki stabilności poszczególnych składowych procesu regulacji. Ponieważ rozważamy układ z ujemnym sprzężeniem zwrotnym (które jest niezbędne w przypadku każdego układu regulacji), więc w uzyskanym wzorze interesują nas jedynie te wartości liczby ν, które przy założonym n_1 i n_2 dają dodatnie wartości współczynnika k_ν. Tak np. nie należy brać pod uwagę tych wartości ν, dla których wyrażenie

$$\frac{\nu+1}{1+n_1+n_2} \tag{138}$$

jest liczbą całkowitą. Można bowiem sprawdzić, że wówczas $k_\nu=-1$.

Dla składowej podstawowej k_0 otrzymamy następujący wzór

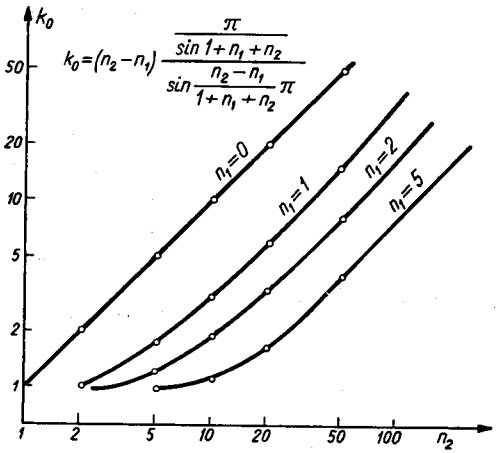
$$k_0=(n_2-n_1)\frac{\sin\dfrac{\pi}{1+n_1+n_2}}{\sin\dfrac{n_2-n_1}{1+n_1+n_2}\pi}, \tag{139}$$

Można wykazać, że wzór powyższy daje najmniejszą wartość współczynnika $k_\nu>0$. Wobec powyższego wzór (139) określa największe dopuszczalne wzmocnienie w pętli sprzężenia zwrotnego. Dla wzmocnienia $k>k_0$ układ jest niestabilny. Na rys. 9 podane są wykresy funkcji

$$k_0=f(n_1,n_2), \tag{140}$$

przy czym n_1 traktowane jest jako parametr, a n_2 — jako zmienna niezależna. Korzystając z powyższych wykresów można szybko określić stabilność statycznego układu impulsowej regulacji ze znajomości charak-

terystyki czasowej $x_2(n, 0)$ układu owartego. Można zauważyć, że k_0 nie jest funkcją stosunku czasu „opóźnienia" do czasu „ustalenia" $\frac{n_1}{n_2}$ przebiegu charakterystyki czasowej, lecz stanowi funkcję dwóch zmiennych



Rys. 9. Granice stabilności statycznego układu regulacji impulsowej

n_1 i n_2. Z przebiegu funkcji $k_0 = f(n_1, n_2)$ wynika, że przy założonym n_1 można zastosować tym większe wzmocnienie, im większe jest n_2, a więc im wolniej „narasta" charakterystyka czasowa otwartego układu. Oczywiście na szybkość narastania charakterystyki czasowej x_2 $(n, 0)$ możemy wpływać przez zmianę szerokości γ impulsów prostokątnych generowanych przez element impulsowy.

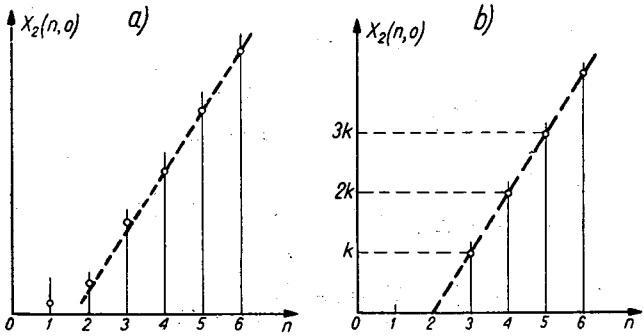
Przedstawiona metoda określenia stabilności nie wymaga przeprowadzania wstępnych obliczeń.

4. WARUNKI STABILNOŚCI ASTATYCZNEGO UKŁADU REGULACJI IMPULSOWEJ O TYPOWEJ CHARAKTERYSTYCE

Poniżej rozważone jest zagadnienie stabilności astatycznego układu regulacji impulsowej. Przeprowadzona analiza opiera się na założeniu, że przebieg charakterystyki czasowej x_2 $(n, 0)$ (odpowiedzi na wymuszenie jednostkowe) posiada charakter wskazny na rys. 10a. Charakterystyka ta może być uzyskana na drodze eksperymentalnej lub może być w prosty sposób wyznaczona metodą analityczno-wykreślną.

Należy zauważyć, że podobnie jak dla układów statycznych, o stabilności układu decyduje jedynie przebieg charakterystyki $x_2(n, \varepsilon)$ w mo-

mentach $n = 0, 1, 2, \ldots$ i $\varepsilon = 0$, a więc przebieg charakterystyki $x_2\ (n,\ 0)$. Zachowanie się charakterystyki $x_2(n, \varepsilon)$ między punktami $n = 0, 1, 2, \ldots$ nie ma natomiast absolutnie żadnego wpływu na stabilność układu. Stąd też przedstawiona metoda może być stosowana dla



Rys. 10. Aproksymacja charakterystyki czasowej astatycznego układu regulacji impulsowej za pomocą linii łamanej

stosunkowo szerokiej klasy spotykanych w praktyce astatycznych układów regulacji impulsowej.

W rozważaniach zastąpimy charakterystykę $x_2\ (n,\ 0)$ (rys. 10a) charakterystyką uproszczoną o kształcie linii prostej (rys. 10b); przyjmiemy więc

$$\{x_2(n\,,\,0)\} = \begin{cases} 0\,;\, n < n_0 \\ k\,(n - n_0)\,;\, n \geqslant n_0\,. \end{cases} \tag{141}$$

Ponieważ mamy

$$\{n\} = \frac{p}{(p-1)^2}, \tag{142}$$

będzie więc

$$\{x_2(n\,,\,0)\} = k\,\frac{p}{(p-1)^2}\,p^{-n_0}$$

oraz

$$K(p\,,\,0) = \frac{p-1}{p}\,\{x_2(n\,,\,0)\} = k\,\frac{p^{-n_0}}{p-1}. \tag{143}$$

Charakterystykę częstotliwościową otwartego układu regulacji (odpowiadającą momentom $\varepsilon = 0$) otrzymamy podstawiając na miejsce operatora przesunięcia p funkcję $e^{j\bar{\omega}}$

$$K(e^{j\bar{\omega}}\,,\,0) = k\,\frac{e^{-j\bar{\omega}n_0}}{e^{j\bar{\omega}} - 1}. \tag{144}$$

Podobnie jak w poprzednim rozdziale, granicę stabilności określimy z warunków

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \mathcal{R}_e K(e^{j\bar{\omega}}, 0) = -1, \\ &\text{b)}\ \mathcal{I}_m K(e^{j\bar{\omega}}, 0) = 0. \end{aligned} \tag{145}$$

Uwzględniając (144) otrzymamy

$$\mathcal{R}_e K(e^{j\bar{\omega}}, 0) = \mathcal{R}_e \left\{ k \frac{e^{-j\bar{\omega}n_0}}{e^{j\bar{\omega}} - 1} \right\} =$$

$$= \frac{k}{(\cos\bar{\omega} - 1)^2 + \sin^2\bar{\omega}} [\cos\bar{\omega}n_0(\cos\bar{\omega} - 1) - \sin\bar{\omega}n_0 \sin\bar{\omega}],$$

$$\mathcal{I}_m K(e^{j\bar{\omega}}, 0) = \mathcal{I}_m \left\{ k \frac{e^{-j\bar{\omega}n_0}}{e^{j\bar{\omega}} - 1} \right\} =$$

$$= -\frac{k}{(\cos\bar{\omega} - 1)^2 + \sin^2\bar{\omega}} [\cos\bar{\omega}n_0 \cdot \sin\bar{\omega} + \sin\bar{\omega}n_0(\cos\bar{\omega} - 1)].$$

Warunki a) i b) prowadzą więc do następujących równań c) i d)

$$\text{c)}\ k[\sin\bar{\omega}\sin\bar{\omega}n_0 - (\cos\bar{\omega} - 1)\cos\bar{\omega}n_0] = (\cos\bar{\omega} - 1)^2 + \sin^2\bar{\omega}, \tag{146}$$

$$\text{d)}\ \sin\bar{\omega}\cos\bar{\omega}n_0 + (\cos\bar{\omega} - 1) - \sin\bar{\omega}n_0 = 0.$$

Po dokonaniu całego szeregu elementarnych przekształceń trygonometrycznych otrzymamy równanie prostsze:

$$\begin{aligned} &\text{c')}\ k \sin\left(\bar{\omega}n_0 + \frac{\bar{\omega}}{2}\right) = 2\sin\frac{\bar{\omega}}{2}, \\ &\text{d')}\ \cos\left(\bar{\omega}n_0 + \frac{\bar{\omega}}{2}\right) = 0. \end{aligned} \tag{147}$$

Równania powyższe rozwiążemy ze względu na niewiadome $\bar{\omega}$ i k. Z d') wynika natychmiast, że

$$\bar{\omega}n_0 + \frac{\bar{\omega}}{2} = \frac{\pi}{2} + \nu\pi,$$

gdzie ν jest dowolną liczbą całkowitą.
Zatem

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_\nu = \frac{1 + 2\nu}{1 + 2n_0}\pi.$$

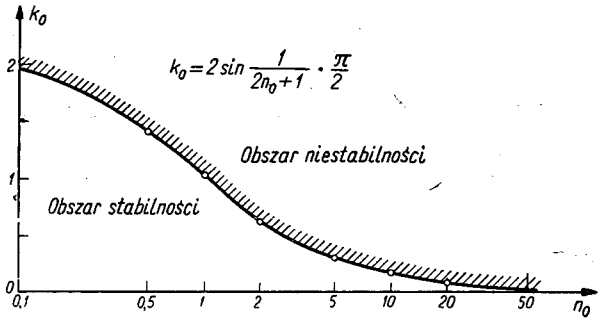
Podstawiając $\bar{\omega}_\nu$ do równania c') wyznaczymy następnie niewiadomą k

$$k = k_\nu = \frac{2 \sin \frac{\bar{\omega}}{2}}{\sin\left(\bar{\omega} n_0 + \frac{\bar{\omega}}{2}\right)} = (-1)^\nu 2 \sin \frac{1 + 2\nu}{1 + 2 n_0} \frac{\pi}{2}. \tag{148}$$

Można łatwo wykazać, że i w tym przypadku najmniejszą nieujemną wartość k_ν otrzymamy dla podstawowej składowej procesu regulacji, a więc dla $\nu = 0$. Największym dopuszczalnym nachyleniem charakterystyki czasowej x_2 $(n, 0)$ otwartego układu regulacji jest zatem k_0

$$k_0 = 2 \sin \frac{1}{1 + 2 n_0} \cdot \frac{\pi}{2}. \tag{149}$$

Na rysunku 11 podana jest właśnie funkcja $k_0 = f(n_0)$. Z przebiegu tej funkcji wnioskujemy, że największe dopuszczalne nachylenie cha-



Rys. 11. Granica stabilności układu astatycznego regulacji impulsowej

rakterystyki czasowej otwartego układu regulacji impulsowej maleje ze wzrostem n_0, a więc ze wzrostem opóźnienia wnoszonego przez układ.

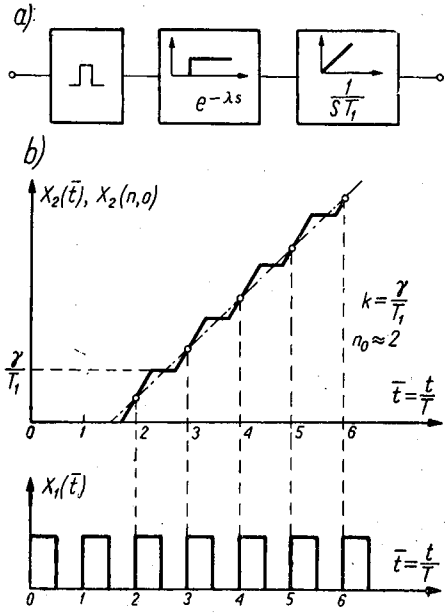
Przedstawiona wyżej metoda określenia stabilności jest dogodna przede wszystkim wówczas, gdy charakterystyka czasowa x_2 $(n, 0)$ „otwartego" układu regulacji jest wyznaczona na drodze eksperymentalnej. W przypadku, gdy z tych czy innych względów eksperymentalne wyznaczenie powyższej charakterystyki jest niemożliwe, można ją obliczyć analitycznie, na przykład metodą przedstawioną w pracy [15]. Wówczas korzystamy z równania układu impulsowego

$$\{x_2(n, 0)\} = K_I(p, 0)\{x_1(n)\}$$

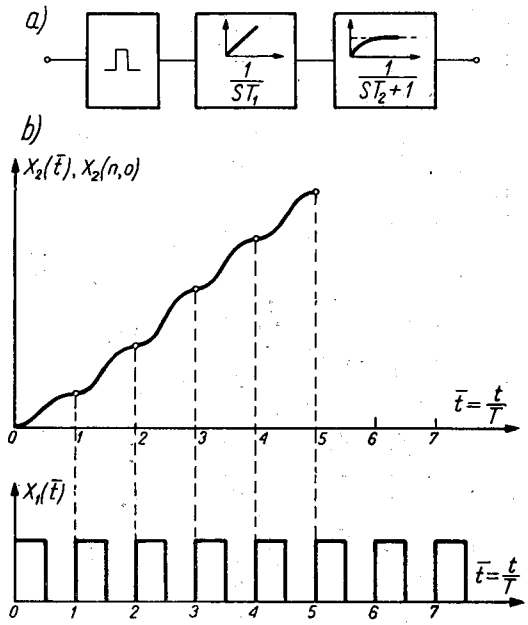
i zakładamy

$$\{x_1(n)\} = \{1\} = \frac{p}{p - 1}.$$

Charakterystykę x_2 $(n, 0)$ otwartego układu regulacji impulsowej można również wyznaczyć metodą wykreślno-analityczną, wykreślnie do-



Rys. 12. Charakterystyka czasowa impulsowego układu astatycznego z elementem opóźniającym



Rys. 13. Charakterystyka czasowa impulsowego układu astatycznego z członem inercyjnym

dając przesunięte względem siebie o okres T odpowiedzi $h_\gamma(t) = h(t) + - h(t - \gamma T)$ części liniowej układu na impulsy prostokątne o szerokości γT.

Jest oczywiste, że na nachylenie charakterystyki x_2 $(n, 0)$ możemy wpływać przez zmianę szerokości impulsów prostokątnych, a więc przez zmianę parametru γ. Łatwo przy tym zauważyć, że nachylenie x_2 $(n, 0)$ maleje ze zmniejszeniem parametru γ.

Na rysunkach 12 i 13 przedstawione są proste układy astatyczne i ich charakterystyki czasowe x_2 (t), x_2 $(n, 0)$.

Można zauważyć, że w przypadku układu z rys. 12, między nachyleniem k_0 charakterystyki x_2 $(n, 0)$ a szerokością impulsów zachodzi prosty związek

$$k_0 = \frac{\gamma}{T_1}.$$

Korzystając z powyższego wzoru, można wyznaczyć największą dopuszczalną szerokość impulsów dla układu o charakterystyce wskazanej na rys. 12. Przykładem układu o takiej charakterystyce może być układ regulacji ciśnienia gazu. Przykładem układu o charakterystyce wskazanej na rys. 13 może być układ regulacji temperatury.

Część III

OBLICZANIE PRZEBIEGÓW PRZEJŚCIOWYCH METODĄ NUMERYCZNĄ

1. WSTĘP

W zagadnieniach stanów nieustalonych często korzystamy z metod przybliżonych, na przykład wykreślno-analitycznych, które w wielu przypadkach skracają i upraszczają obliczenia. Metody te są obecnie rozwijane przez licznych autorów i znalazły szerokie zastosowania praktyczne. Szczególnie szeroko są one stosowane w automatyce, a mianowicie w zagadnieniach układów regulacji. Na szczególną uwagę zasługuje metoda podana przez radzieckiego autora D. A. Baszkirowa [2] przeznaczona do przybliżonego rozwiązywania równań równiczkowych o stałych lub zmiennych współczynnikach, metoda U. A. Baileya i tzw. „metoda momentów".

Również interesującą przybliżoną metodę obliczania przebiegów przejściowych przedstawił Tustin [13]. Jest to metoda numeryczna, w której funkcje ciągłe aproksymuje się za pomocą funkcji „zbudowanych" z funk-

cji elementarnych o kształcie trójkątów. Korzystając z takiej aproksymacji Tustin oblicza numerycznie przebiegi czasowe w układach regulacji.

Metodę Tustina można by ewentualnie (pod względem matematycznym) podporządkować zagadnieniu numerycznego obliczania odwrotnego przekształcenia Laplace'a:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\},$$

gdzie $F(s)$ jest funkcją wymierną zmiennej zespolonej s, charakteryzującą interesujące nas własności badanego układu.

W rozdziale 4 będzie uzasadnione, że zagadnienie to może być sprowadzone do zagadnienia numerycznego obliczenia równania całkowego postaci

$$\int_0^t f(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau = f_1(t),$$

gdzie $f_1(t)$ i $f_2(t)$ są danymi wielomianami zmiennej rzeczywistej t (wzory 162).

Aproksymując funkcje ciągłe $f_1(t)$ i $f_2(t)$ funkcjami schodkowymi powyższe równanie całkowe można zastąpić układem równań liniowych postaci

$$\sum_{m=0}^{n} f(m) f_2(n-m) = f_1(n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{150}$$

z których można algebraicznie wyznaczyć wartości funkcji $f(n)$.

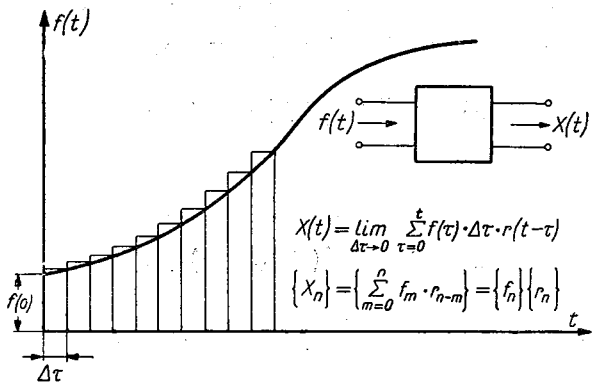
Należy zauważyć, że wyrażenie (150) określa jednoznacznie iloczyn operatorów liczbowych $f(n)$ i $f_2(n)$ w przypadku, gdy $f(n)$, $f_2(n) = 0$ dla $n < 0$. Stąd można by metodę powyższą (która stanowi metodę numeryczną obliczania splotu funkcji) uważać za jedno z zastosowań metody operatorów liczbowych.

W następnych rozdziałach podana jest metoda numeryczna obliczania przebiegów przejściowych, oparta na zastąpieniu splotu funkcji wyrażeniem (150).

W pracy podane są podstawy teoretyczne omawianej metody i przykłady zastosowań. Nie podana jest natomiast dyskusja dokładności wyników. Niewątpliwą zaletą omawianej metody jest jej duża prostota i możliwość szybkiego uzyskiwania wyników. Z drugiej strony należy podkreślić, że nie pozwala ona na przeprowadzanie dyskusji, jaki jest wpływ parametrów badanego układu na otrzymany wynik — co stanowi wadę metody. Tym niemniej w pewnych zagadnieniach praktycznych może ona oddać cenne usługi.

2. APROKSYMACJA SPLOTU FUNKCJI ILOCZYNEM OPERATORÓW LICZBOWYCH

Przypuśćmy, że na wejście dowolnego czwórnika elektrycznego o elementach liniowych przyłożone zostało napięcie o dowolnym kształcie. Napięcie to można aproksymować ciągiem elementarnych prostokątnych



Rys. 14. Aproksymacja charakterystyki czasowej czwórnika za pomocą funkcji schodkowej

impulsów, przykładanych do czwórnika w równych odstępach czasu $\Delta\tau$. Impulsy prostokątne wywołują na wyjściu czwórnika pewne elementarne przebiegi nieustalone. Napięcie wyjściowe czwórnika można rozważać jako wynik superpozycji tych elementarnych przebiegów nieustalonych (rys. 14).

Każdy prostokątny impuls napięcia o czasie trwania równym $\Delta\tau$ można wyrazić w postaci różnicy dwóch jednostkowych skoków napięcia włączanych w momentach t i $t + \Delta\tau$.

Jeżeli więc reakcję układu na skok jednostkowy oznaczymy symbolem $h(t)$, to elementarny przebieg wyjściowy $r(t)$ wywołany przyłożeniem na wejście czwórnika sygnału w postaci impulsu prostokątnego wyrazi się wzorem:

$$r(t) = h(t) - h(t - \Delta\tau). \tag{151}$$

Przyjmując z kolei $\Delta\tau = 1$ oraz $t = n + \varepsilon$, otrzymamy:

$$r(n + \varepsilon) = h(n + \varepsilon) - h(n + \varepsilon - 1), \tag{152}$$

gdzie: $n = 0, 1, 3, \ldots, 0 \leqslant \varepsilon < 1$.

Zależność (152) możemy zapisać przy pomocy operatora liczbowego:

$$\{r[n,\varepsilon]\} = \{h[n,\varepsilon]\} - \{h[n-1,\varepsilon]\} = \{\nabla h[n,\varepsilon]\}. \tag{153}$$

Jeżeli ograniczymy się do określenia tylko pewnych szczególnych punktów przebiegu $r(t)$, to możemy we wzorze (153) przyjąć, że $\varepsilon = 0$, w następstwie czego otrzymamy:

$$\{r_n\} = \{h_n\} - \{h_{n-1}\} = \{\nabla h_n\}. \tag{154}$$

Przebieg wyjściowy — zgodnie z poprzednimi rozważaniami — będzie superpozycją wszystkich elementarnych przebiegów $r(t)$ wywołanych poszczególnymi impulsami prostokątnymi. Przebieg ten da się wobec tego ująć za pomocą następującego wzoru:

$$x(t) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{\tau=0}^{t} f(\tau)\,\Delta\tau\, r(t-\tau), \tag{155}$$

skąd:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\, r(t-\tau)\, d\tau. \tag{156}$$

Wzór (156) znany jest w rachunku operatorowym pod nazwą „splotu funkcji".

Jeżeli we wozrze (155) nie przejdziemy do granicy, to otrzymamy przybliżoną wartość splotu, przy czym dokładność jest tym większa, im mniejsza jest szerokość impulsów prostokątnych, którymi aproksymujemy funkcję $f(t)$. Wartość przybliżoną splotu można przedstawić wzorem:

$$\{X[n,\varepsilon]\} = \left\{\sum_{m=0}^{n} f[m,\varepsilon] \cdot r[n-m,\varepsilon]\right\} \tag{157}$$

lub, jeśli chcemy określić jedynie pewne szczególne punkty przebiegu $X(t)$, możemy założyć $\varepsilon = 0$, wobec czego wzór (157) przyjmie postać:

$$\{X_n\} = \left\{\sum_{m=0}^{n} f_m \cdot r_{n-m}\right\}. \tag{158}$$

czyli:

$$\{x_n\} = \{f_n\}\{r_n\} \tag{159}$$

lub, po wykorzystaniu (154),

$$\{X_n\} = \{f_n\}\{\nabla h_n\}. \tag{160}$$

Jeżeli więc znamy kształt przebiegu wejściowego napięcia czwórnika — funkcji $f(t)$ — oraz jeśli znamy reakcję czwórnika na skok napięcia — funkcję $h(t)$ — to przebieg po stronie wtórnej czwórnika da się w przybliżeniu przedstawić za pomocą iloczynu operatorów liczbowych $\{f_n\}$ i $\{\nabla h_n\}$ utworzonych z funkcji $f(t)$ i $h(t)$. Podobnie jeśli mamy da-

ny dowolny dwójnik elektryczny, to znając kształt przebiegu napięcia źródła — funkcji $f(t)$ — oraz znając reakcję dwójnika na skok napięcia — funkcję $h(t)$ — możemy w przybliżeniu określić funkcję prądu dwójnika jako iloczyn operatorów liczbowych $\{f_n\}$ i $\{\nabla h_n\}$, które utworzymy z funkcji $f(t)$ i $h(t)$.

Mnożenie operatorów liczbowych najłatwiej jest wykonać stosując zapis wskazany na tablicy 1.

Tablica 1

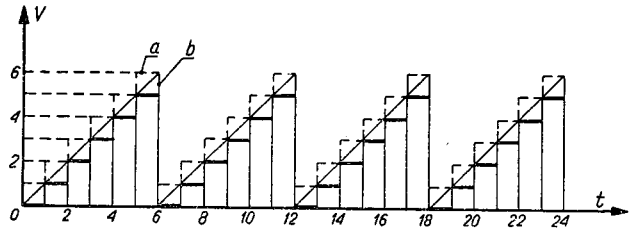
Przykład mnożenia operatorów liczbowych

$\hat{a}$	0	18	15	12	10	8	7	5
$\hat{b}$	0	1	2	3	4	5	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0
		0	18	15	12	10	8	7
			0	36	30	24	20	16
				0	54	45	36	30
					0	72	60	48
						0	90	75
							0	0
								0
$\hat{a}\ \hat{b}$	0	0	18	51	96	151	214	176

3. PRZYKŁADY

Przykład 1

Do dwójnika składającego się z elementów R, L w połączeniu szeregowym przyłączono napięcie w kształcie piły (rys. 15). Należy wyznaczyć funkcję prądu $i(t)$.



Rys. 15. Aproksymacja przebiegu trójkątnego za pomocą funkcji schodkowej z niedomiarem i z nadmiarem

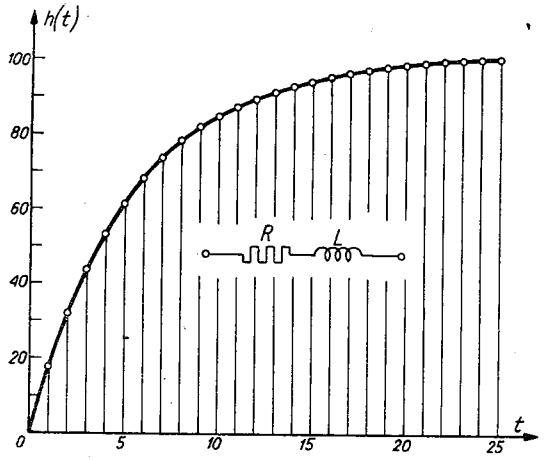
Rozwiązanie:

a) Znanymi metodami wyznaczamy reakcję układu na skok jednostkowy, otrzymamy:

$$h(t) = i = \frac{1}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{1}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right),$$

gdzie: $T = \frac{L}{R}$.

b) Znając wartości liczbowe stałych R oraz T wykreślamy na papierze milimetrowym funkcję $h(t)$, (rys. 16).



Rys. 16. Charakterystyka czasowa dwójnika RL

c) Wykreślamy również na papierze milimetrowym przebieg napięcia wymuszającego, (rys. 15).

d) Przedział czasu od momentu $t = 0$ do momentu ustalenia się przebiegu $h(t)$ dzielimy na pewną liczbę równych części (na rysunku dokonano podziału na 25 części), również oś rzędnych przebiegu $h(t)$ dzielimy na pewną liczbę równych części (na rysunku zrobiono podział na 100 części).

e) Oś czasu przebiegu $f(t)$ dzielimy w sposób identyczny z dokonanym podziałem osi czasu przebiegu $h(t)$. Oś rzędnych przebiegu $f(t)$ możemy podzielić również jedynie na równe odcinki, lecz jednak w dowolnie obranej skali.

f) Z wartości funkcji $h(t)$ tworzymy operator liczbowy — zgodnie z dokonanym podziałem; otrzymamy:

$$\{h_n\} = 0, 18, 33, 45, 55, 63, 70, 76, 81, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 96, 97, 98, 99, 99, 99 \ldots$$

g) Wyznaczamy operator różnicowy $\{\nabla h_n\}$:

$$\{\nabla h_n\} = 0, 18, 15, 12, 10, 8, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

h) Z wartości funkcji $f(t)$ tworzymy operator liczbowy

a) z niedomiarem:

$\hat{f}_1 = \{f_{1n}\} = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots$

b) z nadmiarem:

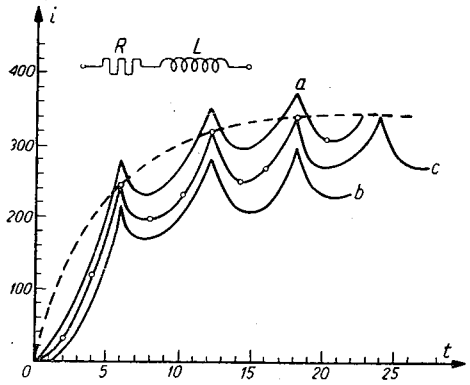
$\hat{f}_2 = \{f_{2n}\} = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4; 5, 6, \ldots\ldots$

i) „Metodą arytmetyczną" wykonujemy mnożenie operatorów:

$$a)\ \hat{X}_1 = \{\nabla h_n\}\{f_{1n}\},$$
$$b)\ \hat{X}_2 = \{\nabla h_n\}\{f_{2n}\}.$$

Operatory $\hat{X}_1$, $\hat{X}_2$ określają nam z niedomiarem i nadmiarem szukany przebieg prądowy $i(t)$.

Warto zaznaczyć, że można uniknąć wyznaczania przebiegu z nadmiarem i niedomiarem, a więc uniknąć dwukrotnego mnożenia operatorów, jeśli utworzymy operator średni $\{f_{śrn}\} = \left\{\frac{f_{1n} + f_{2n}}{2}\right\}$ i wykonamy mnożenie $\{f_{śrn}\}\{\nabla h_n\}$. W niniejszym przykładzie operator średni $f_{śrn}$ będzie miał następującą postać:



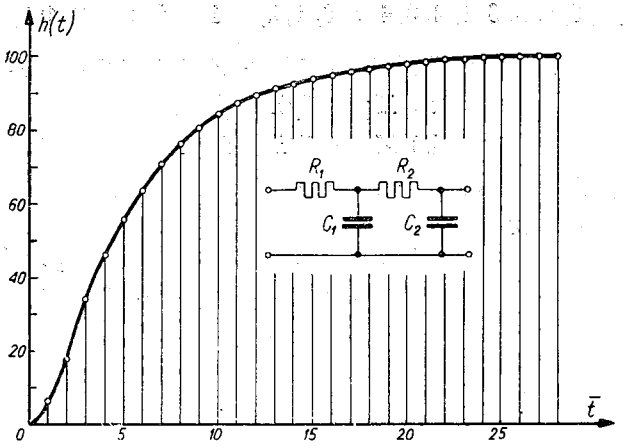
Rys. 17. Przebieg prądu w dwójniku RL, wywołany napięciem o kształcie piły. Krzywa a podaje przebieg obliczony z nadmiarem, krzywa b — z niedomiarem, a krzywa c — przebieg średni. Kółeczka oznaczają wartości prądu obliczone na drodze analitycznej

$$\hat{f}_{śrn} = \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}, \ldots\ldots$$

Na rysunku 17 podane są wykresy szukanego przebiegu prądowego, przy czym krzywa a) daje nam przebieg obliczony z nadmiarem, krzywa b) — z niedomiarem, zaś krzywa c) — przebieg średni. Otrzymane powyżej wyniki zostały sprawdzone na drodze analitycznej. Punkty przebiegu i(t) wyznaczone na drodze analitycznej oznaczono na rysunku kółeczkami.

Przykład 2

Na wejście czwórnika R, C, wskazanego na rys. 18 nadano przebieg napięcia wyprostowanego dwupołówkowego $U = |\sin \omega t|$. Należy wy-



Rys. 18. Charakterystyka czasowa dwuogniwowego czwórnika RC

znaczyć funkcję przebiegu wyjściowego $U_2(t)$ w założeniu, że czwórnik znajduje się w stanie jałowym.

Rozwiązanie

Funkcja charakterystyczna powyższego czwórnika wyraża się wzorem:

$$K(s) = \frac{1}{a s^2 + b s + 1} = \frac{1}{a(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)},$$

gdzie

$$s \hat{=} \frac{d}{dt} \hat{=} j\omega; \quad a = R_1 C_1 R_2 C_2; \quad b = R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2;$$

$$\alpha_1, \alpha_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a}.$$

Wobec powyższego odpowiedź czwórnika na wymuszenie za pomocą funkcji jednostkowej będzie

$$h(t) = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{e^{\alpha_1 t}}{\alpha_1(\alpha_1 - \alpha_2)} + \frac{e^{\alpha_2 t}}{\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1)}\right].$$

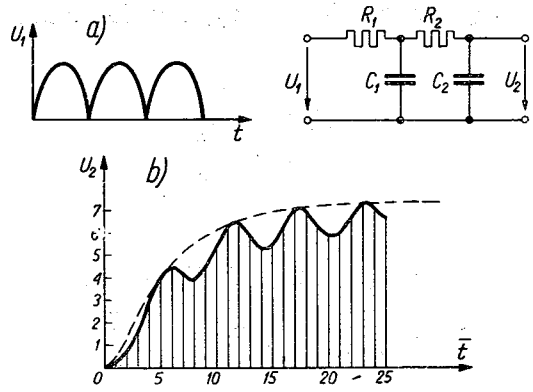
Funkcja $h(t)$ przy założeniu szczególnych wartości na R_1, R_2, C_1, C_2 podana jest na rys. 19.

Zgodnie z obranym podziałem osi odciętych i osi rzędnych otrzymujemy następujący ciąg liczbowy utworzony z wartości funkcji $h(t)$:

$\{h_n\} = 0, 6, 18, 34, 46, 54, 62, 69, 75, 80, 83, 86, 89, 91, 92, 95, 96, 97, 98, 99, \ldots\ldots$

oraz po zróżnicowaniu

$\{\nabla h_n\} = 0, 6, 12, 16, 8, 8, 7, 6, 5, 3, 3, 2, 1.5, 1.5, 1, 1, 1, 1, 0.5, 0.5, 0, 0, \ldots\ldots\ldots$



Rys. 19. Przebieg napięcia na wyjściu dwuogniwowego czwórnika RC, wywołanego napięciem sinusoidalnym, wyprostowanym, dwupołówkowym

Napięcie $U = f(t)$ zastępujemy natomiast następującym ciągiem

$$\{f_{n\,śr}\} = \left\{\frac{f_{1n} + f_{2n}}{2}\right\} = 26, 71, 97, 97, 71, 26, 71, 97, 97, 71, 26, \ldots$$

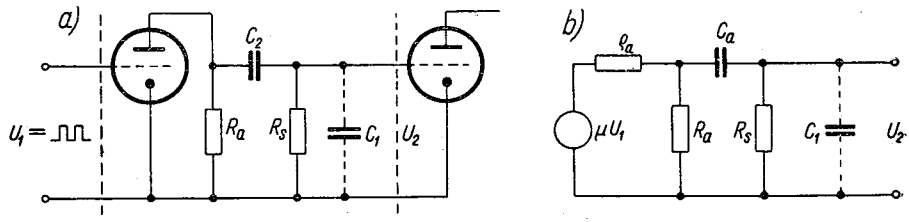
Wobec powyższego, po wykonaniu mnożenia

$\{U_2(n)\} = \{\nabla h_n\}\{f_{nśr}\} = 0, 156, 738, 1850, 3194, 4202, 4290, 4211, 4204, 4741, 5664, 6265, 6175, 5652, 5317, 5662, 6327, 6873, 6673, 6088, 5705, 6002, 6707, 7067, \ldots$

Przebieg napięcia $U_2(t)$ wskazany jest na rys. 19.

Przykład 3

Na wejście wzmacniacza oporowego wskazanego na rys. 20 nadano ciąg impulsów prostokątnych. Wyznaczyć metodą numeryczną funkcję



Rys. 20. Schemat zastępczy jednego stopnia wzmacniacza oporowego

przebiegu wyjściowego dla dwóch przypadków, a mianowicie dla przypadku wzmacniacza jednostopniowego i dwustopniowego.

Rozwiązanie

Funkcja charakterystyczna jednego stopnia wzmacniacza, w założeniu małej wejściowej pojemności lampy, będzie miała następującą postać:

$$K_1(s) = \frac{sk_0}{s + \frac{1}{T}},$$

gdzie:

$$k_0 = S_i R_0, \quad T = C_2(R_s + R_{ai});$$

$$R_{ai} = \frac{R_a \varrho_a}{R_a + \varrho_a}; \qquad R_0 = \frac{R_{ai} R_s}{R_{ai} + R_s};$$

S_i jest nachyleniem charakterystyki.

Odpowiedź układu jednego stopnia wzmacniacza na funkcję jednostkową łatwo wyznaczymy stosując np. przekształcenie Laplace'a

$$h_1(t) = L^{-1}\left\{\frac{K(s)}{s}\right\} = k_0 e^{-\frac{t}{T_2}}.$$

W przypadku wzmacniacza dwustopniowego funkcja charakterystyczna $K(s)$ będzie równa iloczynowi

$$K(s) = K_1(s) \cdot K_2(s),$$

a jeśli stopnie są identyczne

$$K(s) = K_1^2(s) = K_0^2 \frac{s^2}{\left(s + \frac{1}{T}\right)^2},$$

zatem

$$h_2(t) = L^{-1}\left\{k_0^2 \frac{s^2}{\left(s + \frac{1}{T}\right)^2}\right\} = k_0^2(1 - \alpha)\, e^{-\alpha t},$$

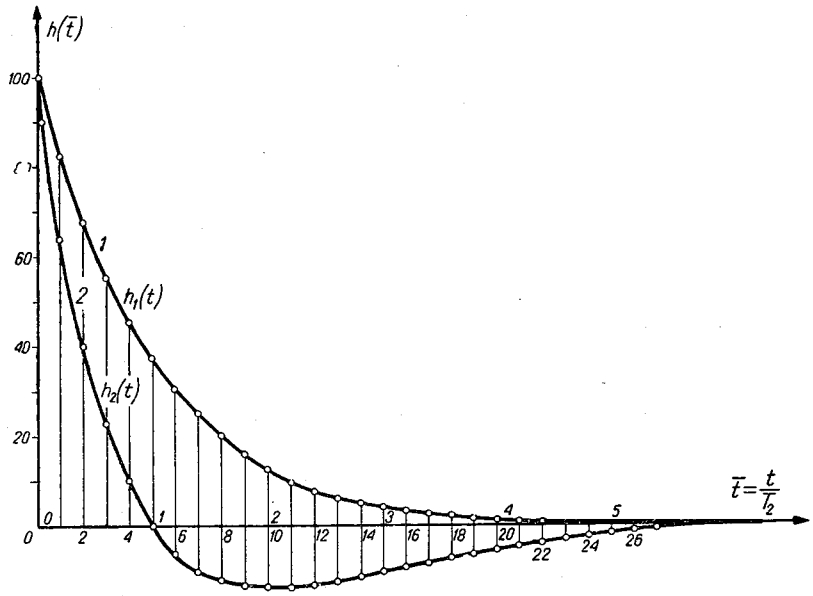
gdzie $\alpha = \frac{1}{T}$.

Na rysunku 21 podane są wykresy funkcji $h_1(t)$ i $h_2(t)$ w założeniu, że $R = 100$ kΩ, $R_a = 30$ kΩ, $R_i = 30$ kΩ, $C_2 = 30000$ pF.

Z wartości funkcji $h_1(t)$ i $h_2(t)$, zgodnie z dokonanym podziałem osi czasu i osi rzędnych, tworzymy dwa następujące ciągi liczbowe

$$\{h_{1n}\} = 100, 83, 67, 55, 45, 37, 30, 25, 10, 16, 13, 20, 8, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 0, \ldots,$$

$$\{h_{2n}\} = 100, 65, 40, 24, 10, 0, -6, -10, -12, -12.5, -13, -11, -10, -9, \ldots.$$

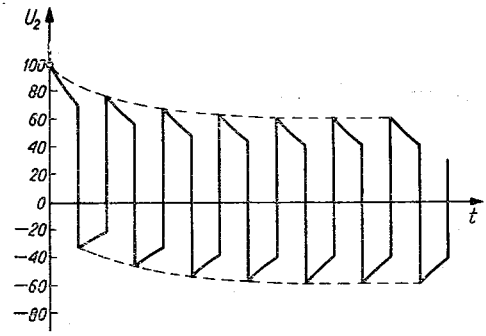


Rys. 21. Charakterystyki czasowe jedno- i dwustopniowego wzmacniacza oporowego

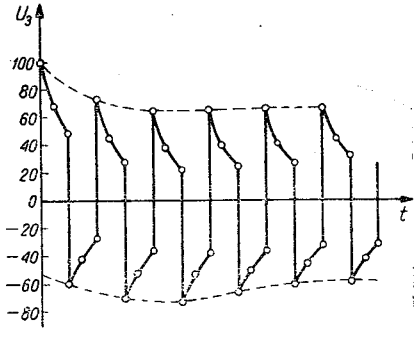
Następnie wyznaczamy $\{\nabla h_{1n}\}$ i $\{\nabla h_{2n}\}$;

$$\{\nabla h_{1n}\} = 100, -17, -16, -12, -10, -8, -7, -5, -5, -4, -3, -2, -2, -1, -1, -1, -1, 0, 0, \ldots,$$

$$\{\nabla h_{2n}\} = 100, -35, -25, -16, -14, -10, -6, -4, -2, -0.5, -0.5, 0.5, 50, 1, 1, \ldots.$$



Rys. 22. Ciąg impulsów prostokątnych po przejściu przez jednostopniowy wzmacniacz oporowy



Rys. 23. Ciąg impulsów prostokątnych po przejściu przez dwustopniowy wzmacniacz oporowy

Napięcie $h_1(t)$ zastępujemy następującym ciągiem liczbowym

$$\{f_n\} = 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \ldots .$$

Dalej w celu wyznaczenia przebiegów $U_2(t)$ i $U_3(t)$ dla wzmacniacza jedno- i dwustopniowego wykonujemy mnożenie

$$\{U_2(n)\} = \{\nabla h_{1n}\} \cdot \{f_n\}, \text{ oraz: } \{U_3(n)\} = \{\nabla h_{2n}\} \cdot \{f_n\}.$$

Wyniki przedstawione są na rysunkach 22 i 23.

4. NUMERYCZNE OBLICZANIE ODPOWIEDZI UKŁADU NA WYMUSZENIE JEDNOSTKOWE

Numeryczne obliczanie przebiegów przejściowych metodą wyłożoną w poprzednim rozdziale wymaga znajomości funkcji wymuszającej i charakterystyki czasowej $h(t)$ układu elektrycznego. Należy zauważyć, że wyznaczanie charakterystyki $h(t)$ w przypadku układów zawierających dużą liczbę elementów (dzięki czemu stopień mianownika funkcji charakterystycznej $K(s)$ układu jest wysoki) może nastręczyć poważne trudności. Jeśli więc nie zależy na dużej dokładności, korzystnie jest w tych przypadkach charakterystykę czasową $h(t)$ również obliczać metodą numeryczną. Ponieważ funkcja $h(t)$ jest związana z funkcją charakterystyczną $K(s)$ układu przekształceniem Laplace'a

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{K(s)}{s}\right\},$$

więc wyznaczanie numeryczne funkcji $h(t)$ można podporządkować zagadnieniu szerszemu, a mianowicie numerycznej metodzie obliczania wyników odwrotnego przekształcenia Laplace'a. Poniżej podana jest idea metody numerycznej obliczania przekształcenia Laplace'a, stanowiącej kontynuację metody wyłożonej w poprzednim rozdziale.

W tym przypadku, gdy $K(s)$ jest funkcją wymierną, co ma miejsce wówczas, gdy rozważany układ elektryczny składa się z elementów skupionych, mamy

$$\frac{K(s)}{s} = \frac{b_0 s^\nu + \ldots + b_\nu}{a_0 s^\mu + \ldots + a_\mu} = \frac{b_0 \dfrac{1}{s^{\mu-\nu+1}} + \ldots + b_\nu \dfrac{1}{s^{\mu+1}}}{a_0 \dfrac{1}{s} + \ldots + a_\mu \dfrac{1}{s^{\mu+1}}}.$$

Wówczas $h(t)$ spełnia poniższe równanie

$$L\{h(t)\} = \frac{L\{f_1(t)\}}{L\{f_2(t)\}}, \tag{161}$$

gdzie funkcje $f_1(t)$ i $f_2(t)$ są następującymi wielomianami:

$$f_1(t) = \frac{b_0}{(\mu-\nu)!}t^{\mu-\nu} + \frac{b_1}{(\mu-\nu+1)!}t^{\mu-\nu+1} + \ldots + \frac{b_\nu}{\mu!}t^\mu,$$

$$f_2(t) = a_0 + \frac{a_1}{1!}t + \ldots + \frac{a_\mu}{\mu!}t^\mu. \tag{162}$$

Według (161) poszukiwana funkcja $h(t)$ będzie oczywiście spełniała następujący wzór całkowy

$$\int_0^t h(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau = f_1(t),$$

który zgodnie z rozważaniami poprzedniego rozdziału możemy obliczyć w sposób przybliżony „metodą operatorów liczbowych". Zagadnienie sprowadza się mianowicie do wyznaczenia ilorazu dwóch operatorów liczbowych

$$\{h(\tau n)\} = \frac{\{f_1(\tau n)\}}{\{\nabla\varphi(\tau n)\}},$$

gdzie $\nabla\varphi(\tau n) = \varphi(\tau n) - \varphi[\tau(n-1)]$ jest ciągiem utworzonym z funkcji $\varphi(t) = \int_0^t f_2(\xi)\,d\xi$, a $f_1(\tau n)$— ciągiem wartości funkcji $f_2(t)$.

Wskazana powyżej metoda została sprawdzona przez autora niniejszej pracy na licznych przykładach praktycznych. W wyniku przeprowadzonych badań okazało się, że jest ona w zastosowaniach dogodna wówczas, gdy poszukiwana funkcja $h(t)$ jest tzw. funkcją „wolnozmienną", co ma miejsce w układach R, C lub R, L[1]). Dla uzyskania dostatecznie dokładnych rezultatów metoda powyższa wymaga jednak przeprowadzania obliczeń z dokładnością do czwartego, a nawet piątego znaku dziesiętnego, przez co obliczeń nie można wykonywać przy użyciu suwaka logarytmicznego. Metoda ta jest dogodna do obliczania operacji odwrotnej do splotu w tych przypadkach, gdy funkcje $f_1(t)$ i $f_2(t)$ są dane w postaci wykresów.

Można również w zastosowaniu do obliczania przekształcenia Laplace'a stosować tzw. „metodę momentów" [16]. Metoda ta jest przedstawiona poniżej.

---

[1]) Wpływ dokładności wyrazów-ciągów $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ na dokładność wyrazów ilorazu $\{x_n\} = \frac{\{a_n\}}{\{b_n\}}$ można w stosunkowo prosty sposób określić ze wzorów (9), zakładając $p = k = 0$.

Oznaczmy symbolem $\delta(t)$ tzw. funkcję impulsową Diraca. Funkcję tę zwykle określa się w literaturze technicznej jako granicę pewnej funkcji ciągłej $\delta(t, \lambda)$, na przykład

$$\delta(t) = \lim_{\lambda \to \infty} \delta(t,\lambda) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2 t^2} .$$

Jak wiadomo, dowolną występującą w zagadnieniach fizycznych funkcję $x(t)$ zmiennej rzeczywistej t można wyrazić za pomocą funkcji impulsowej $\delta(t)$ wzorem

$$x(t) = \frac{\int_0^\infty x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau}{\int_0^\infty \delta(t-\tau)\,d\tau}.$$

Jeżeli w powyższym wzorze funkcję impulsową $\delta(t)$ zastąpimy funkcją ciągłą $g(t)$ posiadającą dostatecznie „ostre" maksimum w punkcie $t = \tau$, to otrzymamy wzór przybliżony. Jako $g(t)$ przyjmujemy funkcję $t^n e^{-at}$

$$g(t) = t^n e^{-at} .$$

Funkcja ta posiada wartość maksymalną w punkcie $t = n/a$. Otrzymamy więc następujący związek

$$x(n/\alpha) \approx \frac{\int_0^\infty x(\tau) \cdot \tau^n e^{-\alpha\tau} d\tau}{\int_0^\infty \tau^n e^{-\alpha\tau} d\tau} = \frac{x_{an}}{n!/\alpha^{n+1}},$$

gdzie

$$x_{an} = \int_0^\infty x(\tau) \cdot \tau^n e^{-\alpha\tau}\, d\tau .$$

Okazuje się, że z powodu asymetrii funkcji $g(t)$ w otoczeniu wartości maksymalnej otrzymamy bardziej dokładny wzór, jeśli w $x(n/\alpha)$ na miejsce n położymy $n + 1$:

$$x\left(\frac{n+1}{\alpha}\right) = \frac{x_{an}}{n!/\alpha^{n+1}}. \tag{163}$$

Zauważmy, że wyrażenie x_{an} jest w prosty sposób związane z przekształceniem Laplace'a funkcji $x(t)$. Mamy mianowicie

$$\left[\frac{d^n X(s)}{d s^n}\right]_{s=a} = \frac{d^n}{d\alpha^n}\int_0^\infty x(t)\, e^{-at}\, dt = \int_0^\infty x(t)\cdot(-1)^n t^n e^{-at}\, dt =$$
$$= (-1)^n x_{an}, \tag{164}$$

gdzie $X(s)$ jest przekształceniem Laplace'a funkcji $x(t)$.

Jeżeli za α przyjmiemy liczbę rzeczywistą $\frac{1}{\tau}$

$$\alpha = \frac{1}{\tau},$$

to uwzględniając (164) w (163) otrzymamy

$$x[(n+1)\tau] \approx (-1)^n \frac{1}{n!\,\tau^{n+1}} \left[\frac{d^n X(s)}{d s^n}\right]_{s=\frac{1}{\tau}}. \tag{165}$$

Wzór powyższy określa związek między wartościami funkcji $x(t)$ w punktach τ, 2τ, ... $(n+1)\tau$ i jej obrazem Laplace'owskim $X(s)$.

Ponieważ $\left[\frac{d^n X(s)}{d s^n}\right]_{s=\frac{1}{\tau}}$ jest współczynnikiem przy n-tej potędze w rozwinięciu $X(s + 1/\tau)$

$$X(s + 1/\tau) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 \ldots + c_n s^n + \ldots,$$

więc wzór (165) można również zapisać jako

$$x[(n+1)\tau] \approx (-1)^n \frac{c_n}{\tau^{n+1}}. \tag{166}$$

Korzystając ze wzoru (166) możemy w prosty sposób wyznaczać ciąg przybliżonych wartości funkcji $x(t)$ bezpośrednio ze znajomości współczynników rozwinięcia na szereg potęgowy $X(s + 1/\tau)$. Sposób postępowania objaśnimy możliwie najprostszym przykładem. Weźmy mianowicie pod uwagę funkcję

$$X(s) = \frac{1}{s-1}.$$

Zakładając $\tau = 10^{-1}$ sec obliczamy

$$X(s + 1/\tau) = X(s+10) = \frac{1}{s+9} = \frac{1}{9} - \frac{s}{9^2} + \frac{s^2}{9^3} \ldots.$$

Mamy więc

$$c_n = (-1)^n \frac{1}{9^{n+1}}.$$

Wynik ostateczny otzymujemy natychmiast korzystając ze wzoru (107):

$$x(0,1) \approx \frac{10}{9} \approx 1{,}11\,,$$

$$x(0,2) \approx \frac{100}{81} \approx 1{,}235\,,$$

$$x(0,3) \approx \frac{1000}{730} \approx 1{,}371\,,$$

$$x(0,4) \approx \frac{10000}{6560} \approx 1{,}525\,,$$

.....

W celu sprawdzenia dokładności uzyskanego wyniku obliczamy obecnie wartości $x[(n+1)\tau]$ analitycznie. Otóż ponieważ $x(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^t$, więc

$$x(0,1) = e^{0,1} \approx 1{,}105\,,$$
$$x(0,2) = e^{0,2} \approx 1{,}222\,,$$
$$x(0,3) = e^{0,3} \approx 1{,}350\,,$$
$$x(0,4) = e^{0,4} \approx 1{,}492\,,$$
.....

Porównując wyniki otrzymane na drodze analitycznej z wynikami uzyskanymi metodą przybliżoną stwierdzamy, że maksymalny błąd obliczeń przybliżonych nie przekracza 2,5%.

W zagadnieniach praktycznych funkcja $X(s)$ posiada najczęściej postać wymierną

$$X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{\bar{b}_0 + \bar{b}_1 s + \ldots + \bar{b}_\nu s^\nu}{\bar{a}_0 + \bar{a}_1 s + \ldots + \bar{a}_\mu s^\mu}\,;\ \mu \geqslant \nu\,.$$

Aby obliczyć funkcję przesuniętą $X(s + 1/\tau)$, trzeba więc wyznaczyć rozwinięcia całego szeregu wyrażeń $\left(s + \frac{1}{\tau}\right)^m$. Korzystamy w tych obliczeniach ze wzoru Newtona

$$(a+b)^m + a^m + m a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{2!} a^{m-2} b^2 + \ldots + ma \cdot b^{m-1} + b^m\,.$$

Jeśli funkcja $X(s)$ jest wymierna, $X\left(s + \frac{1}{\tau}\right)$ jest oczywiście również funkcją wymierną:

$$X(s+1/\tau)=\frac{b_0+b_1 s+\ldots+b s^{\nu}}{a_0+a_1 s+\ldots+a s^{\mu}};\quad a_0\neq 0;\ \mu\geqslant\nu.$$

Współczynniki c_n rozwinięcia na szereg potęgowy funkcji wymiernej $X(s+1/\tau)$ można prosto obliczyć „dzieląc" (w sensie operatorów liczbowych) ciąg $\{b_n\}=b_0,\ b_1,\ldots b\nu,\ 0,\ 0$ przez ciąg $\{a_n\}=a_0,\ a_1,\ldots a,\ 0,\ 0$, mamy bowiem

$$\{c_n\}=\frac{\{b_n\}}{\{a_n\}}=\frac{b_0}{a_0},\quad \frac{a_0 b_1-b_0 a_1}{a_0^2},\ \ldots \tag{167}$$

Obliczenie ilorazu (167) wygodnie jest przeprowadzać według schematu wskazanego na tablicy 2.

Tablica 2

18; 51; 96; 151; ...	1; 2; 3; 4; ...
18; 36; 54; 72; ...	= 18; 15; 12; 10; ...
= 15; 42; 79; ...	
15; 30; 45; ...	
= 12; 34; ...	
12; 24; ...	
= 10	
10	
=	

Kończąc opis przedstawionej powyżej metody należy jeszcze zwrócić uwagę na zagadnienie doboru w obliczeniach liczby τ. Ponieważ τ jest odległością pomiędzy obliczanymi wartościami $x[(n+1)\tau]$ poszukiwanej funkcji $x(t)=L^{-1}\{X(s)\}$, więc jest oczywiste, że dokładność otrzymanego wyniku jest tym lepsza, im mniejszą obierzemy liczbę τ. Należy przy tym zauważyć, że wadliwy dobór τ może w konsekwencji doprowadzić do wręcz błędnych rezultatów, szczególnie wówczas, gdy funkcja $x(t)$ jest funkcją „szybkozmienną". Dlatego też, w przypadku gdy przed przystąpieniem do obliczeń nie mamy dostatecznych informacji o przebiegu funkcji $x(t)$, należy dla upewnienia się o poprawności uzyskanego wyniku przeprowadzić obliczenia odpowiadające dwóm różnym wartościom liczby τ (np. $\tau=1/10$ sec i $\tau=1/20$ sec). Jeżeli natomiast obliczanie przekształcenia $L^{-1}\{X(s)\}$ jest przeprowadzone w związku z rozwiązywaniem konkretnego zagadnienia fizycznego (np. w związku z wyznaczaniem odpowiedzi układu na jednostkowe wymuszenie), z warunków zadania można się dostatecznie zorientować, jaką należy obrać liczbę τ.

Dodatek

Tablica operatorów liczbowych

Lp.	$\{a_n\}$ $n \geqslant 0$	$F(p)$
1	$\{1\}$	$\frac{p}{p-1}$
2	$\{n\}$	$\frac{p}{(p-1)^2}$
3	$\{n^2\}$	$\frac{p}{(p-1)^3}(p+1)$
4	$\{n^3\}$	$\frac{p}{(p-1)^4}(p^2+4p+1)$
5	$\{n^4\}$	$\frac{p}{(p-1)^3}(p^3+11p^2+11p+1)$
6	$\{n^{(2)}\} = \left\{\frac{n(n-1)}{2!}\right\}$	$\frac{p}{(p-1)^3}$
7	$\{n^{(3)}\} = \left\{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\right\}$	$\frac{p}{(p-1)^4}$
8	$\{n^{(m)}\} = \left\{\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}\right\}$	$\frac{p}{(p-1)^{m+1}}$
9	$\{C^{an}\}$	$\frac{p}{p-C^a}$
10	$\{(-C)^{an}\}$	$\frac{p}{p+C^a}$
11	$\{nC^{a(n-1)}\}; n \geqslant 1$	$\frac{p}{(p-C^a)^2}$
12	$\{(n-1)C^{a(n-2)}\}; n \geqslant 2$	$\frac{1}{(p-C^a)^3}$
13	$\{n^2 \cdot C^{a(n-1)}\}; n \geqslant 1$	$\frac{p}{(p-C^a)^3}(p+C^a)$
14	$\{n^{(2)}C^{a(n-2)}\}; n \geqslant 2$	$\frac{p}{(p-C^a)^3}$
15	$\{n^{(m)}C^{a(n-m)}\}; n \geqslant m$	$\frac{p}{(p-C^a)^{m+1}}$
16	$\{e^{an}\}$	$\frac{p}{p-e^a}$
17	$\{e^{jxn}\}$	$\frac{p}{p-e^{jx}}$

Lp.	$\{a_n\}$ $n \geqslant 0$	$F(p)$
18	$\{\sin xn\}$	$\frac{p \sin x}{p^2 - 2p \cos x + 1}$
19	$\{\cos xn\}$	$\frac{p(p - \cos x)}{p^2 - 2p \cos x + 1}$
20	$\{\cos \pi n\} = \{(-1)^n\}$	$\frac{p}{p+1}$
21	$\{C^{an} \cdot \sin xn\}$	$\frac{C^a p \sin x}{p^2 - 2pe^a \cos x + C^{2a}}$
22	$\{C^{an} \cos xn\}$	$\frac{p(p - C^a \cos x)}{p^2 - 2p C^a \cos x + C^{2a}}$
23	$\{\sinh xn\}$	$\frac{p \sinh x}{p^2 - 2p \cosh x + 1}$
24	$\{\cosh xn\}$	$\frac{p(p - \cosh x)}{p^2 - 2p \cosh x + 1}$
25	$\{C^{an} \cosh xn\}$	$\frac{C^a p \sinh x}{p^2 - 2p C^a \cosh x + C^{2a}}$
26	$\{C^{an} \cosh xn\}$	$\frac{p(p - C^a \cosh x)}{p^2 - 2p C^a \cosh x + C^{2a}}$
27	$\frac{1}{1 - C^a}\{1 - C^{an}\}$	$\frac{p}{(p - C^a)(p - 1)}$
28	$\frac{1}{1 - C^a}\{1 - C^{a(n-1)}\}; n \geqslant 1$	$\frac{1}{(p - C^a)(p - 1)}$
29	$\frac{1}{C^{a_1} - C^a}\{C^{a_1} - C^{an}\}$	$\frac{p}{(p - C^a)(p - C^{a_1})}$
30	$\frac{\{n\}}{1 - C^a} - \frac{\{1 - C^{an}\}}{(1 - C^a)^2}$	$\frac{p}{(p - C^a)(p - 1)^2}$
31	$\left\{\frac{1}{n!}\right\}$	$e^{\frac{1}{p}} = e^q$
32	$\left\{\frac{n+1}{n!}\right\}$	$(q+1)e^q$
33	$\left\{\frac{\sin xn}{n!}\right\}$	$e^{q \cos x} \cdot \cos(q \sin x)$
34	$\left\{\frac{\cos xn}{n!}\right\}$	$e^{q \cos x} \cdot \sin(q \sin x)$
35	$\left\{\frac{\sin xn}{n}\right\}$	$\operatorname{arctg} \frac{\sin x}{p - \cos x}$

Na koniec należy zauważyć, że — zgodnie z (167) — wyłożona powyżej metoda również prowadzi do operacji analogicznej do dzielenia „operatorów liczbowych". Zastosowanie metody do wyznaczania przebiegu charakterystyki czasowej jest zilustrowane następującym przykładem.

Przykład

Wyznaczyć metodą przybliżoną odpowiedź $h(t)$ układu na wymuszenie jednostkowe, w założeniu, że funkcja charakterystyczna układu $K(s)$ wyraża się wzorem

$$K(s) = \frac{10 + 2s + 7s^2}{24 + 26s + 9s^2 + s^3}.$$

Rozwiązanie

Jak wiadomo, odpowiedź układu na jednostkowe wymuszenie jest związana z funkcją charakterystyczną $K(s)$ układu wzorem

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{K(s)}{s}\right\}.$$

Wobec powyższego, dla wyznaczenia punktów przebiegu $h(t)$ badamy wyrażenie

$$X(s) = \frac{K(s)}{s} = \frac{10 + 2s + 7s^2}{24s + 26s^2 + 9s^3 + s^4}.$$

Przyjmując $\tau = 0{,}1$ sec, obliczamy funkcję przesuniętą $X(s + 10)$; w wyniku przeprowadzonych obliczeń otrzymujemy

$$X(s + 10) = \frac{730 + 142s + 7s^2}{21840 + 7244\,s + 896\,s^2 + 49\,s^3 + s^4}.$$

Dzieląc następnie ciągi współczynników

$$\{b_n\} = 730;\ 142;\ 7;\ 0;\ 0;\ 0;\ \dots,$$

$$\{a_n\} = 21840;\ 7244;\ 896;\ 49;\ 1;\ 0;\ 0;\ 0;\ \dots,$$

otrzymujemy

$$\{c_n\} = \frac{\{b_n\}}{\{a_n\}} = 0{,}334 \cdot 10^{-1};\ 0{,}458 \cdot 10^{-2};\ 0{,}485 \cdot 10^{-3};\ 1{,}00 \cdot 10^{-4};\ 1{,}64 \cdot 10^{-5} \dots$$

Według (166) mamy więc

$$h(0{,}1) \approx \frac{0{,}334 \cdot 10^{-1}}{\tau} = 0{,}334,$$

$$h(0{,}2) \approx \frac{0{,}458 \cdot 10^{-2}}{\tau^2} = 0{,}458,$$

$$h(0,3) \approx \frac{0,485 \cdot 10^{-3}}{\tau^3} = 0,485,$$

$$h(0,4) \approx \frac{1,00 \cdot 10^{-4}}{\tau^4} = 1,00,$$

$$h(0,5) \approx \frac{1,64 \cdot 10^{-5}}{\tau^5} = 1,64,$$

.....

Przeprowadzając obliczenia w założeniu $\tau = 0,05$ sec lub posługując się metodą analityczną, możemy upewnić się, że otrzymane wyniki są dostatecznie dokładne. Po obliczeniu większej liczby punktów funkcji $h(t)$, możemy następnie narysować jej wykres.

PRZYPISY

Wyprowadzenie wzoru określającego przepustowość układu z impulsowym sprzężeniem zwrotnym

Jeżeli przepustowość impulsową układu otwartego w punkcie „a" (rys. 6) oznaczymy symbolem $K_i(p, \varepsilon)$, to otrzymamy związek

$$U_{wy}(p,\varepsilon) = \frac{1}{k_u} K_i(p,\varepsilon) \cdot U_1(p). \tag{a}$$

Równanie to słuszne jest oczywiście również dla $\varepsilon = 0$, mamy więc

$$U_{wy}(p,0) = \frac{1}{k_u} K_I(p,0)\, U_1(p). \tag{b}$$

Załóżmy, że na wejście układu zostało przyłożone wymuszenie $U_0(n, \varepsilon)$. Wówczas, jeżeli sprzężenie zwrotne jest ujemne, otrzymamy

$$U_{we}(n,\varepsilon) = U_0(n,\varepsilon) - U_{wy}(n,\varepsilon),$$

a więc również

$$U_{we}(p,\varepsilon) = U_0(p,\varepsilon) - U_{wy}(p,\varepsilon) \tag{c}$$

oraz, w momentach pojawiania się impulsów,

$$U_{we}(p,0) = U_0(p,0) - U_{wy}(p,0). \tag{d}$$

Zauważmy dalej, że U_1 jest związane z U_{we} jedynie w momentach $\varepsilon = 0$, mamy więc

$$U_1(p) = k_u U_{we}(p,0). \tag{e}$$

Uwzględniając teraz w (b) związki (d) i (e) otrzymamy

$$U_{wy}(p,0) = K_I(p,0)\,[U_0(p,0) - U_{wy}(p,0)],$$

a stąd

$$U_{wy}(p,0) = \frac{K_I(p,0)}{1 + K_I(p,0)} U_0(p,0). \tag{f}$$

Biorąc z kolei pod uwagę związek (b), znajdziemy

$$U_i(p) = \frac{k_u}{1 + K_I(p,0)} U_0(p,0),$$

skąd, po wykorzystaniu (a), otrzymamy ostatecznie

$$U_{wy}(p,\varepsilon) = \frac{K_i(p,\varepsilon)}{1 + K_I(p,0)} U_0(p,0). \tag{g}$$

Wzór (g) nazywać będziemy równaniem układu z impulsowym sprzężeniem zwrotnym.

Wyrażenie zaś

$$K_{s,i}(p,\varepsilon) = \frac{K_i(p,\varepsilon)}{1 + K_I(p,0)} \tag{h}$$

nazywać będziemy przepustowością lub „funkcją charakterystyczną" układu z impulsowym sprzężeniem zwrotnym.

Politechnika Warszawska
Katedra Teletransmisji Przewodowej

WYKAZ LITERATURY

1. Bailey U. A.: The Graphical Solution of Ordinary Differential Equations. — Philosophical Magazine, vol. 26, Nr 173, July 1938.
2. Baszkirow L. A.: Grafoanaliticzeskij mietod analiza pierechodnych processow w sistiemach awtomaticzeskowo regulirowanja. Dissjertacja. 1950.
3. Boole G.: Treatise on the Caulculus of Finite Differences. Cambridge-London 1860.
4. Cypkin J. Z.: Pieriechodnyje i ustanowiwszyjesja processy w impulsnych cjepiach. Goseniergoizdat, 1951.
5. Gardner, Barnes: Transients in Linier Systems. John Wiley, New York 1947.
6. Gelfond A. O.: Isczislenje koniecznych raznostiej. Moskwa-Leningrad 1952.
7. Mikusiński J. G.: Sur les fondements du calcul operatoire. — Studia Matematica, Wrocław 1949.
8. Pascal Ernesto: Rachunek nieskończonościowy, cz. III. Tłumaczenie polskie z roku 1897.
9. Oldenburg, Sartorius: Dinamika sistiem awtomaticzeskowo regulirowanja. Moskwa-Leningrad 1948.
10. Pogorzelski W.: Rachunek operatorowy i przekształcenie Laplace'a. P.Z.W.Sz., Warszawa 1950.
11. Studniczka F. J.: Beiträge zum Operationscalcul, Berichte 2, Abth 1871, Prag.

12. Taylor B.: The Method of Inorements. 1717.
13. Tustin A.: A Method of Analysing the Behaviour of Linear Systems in Terms of Time Series. — IEE, 1947.
14. Bellert S.: Podstawy rachunku operatorów liczbowych. — Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej, Elektryka Nr 3, Warszawa 1954.
15. Bellert S.: Zastosowanie rachunku operatorów liczbowych do badania układów impulsowych. — Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej, Elektryka Nr 4, Warszawa 1954.
16. Widder N.: The Inversion of the Laplace Integral and the Related Moment Problem. — Trans. Amer. Math. Soc., 1934.

С. БЕЛЛЕРТ

МЕТОД ЧИСЛЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Резюме

Работа состоит из трёх частей. В первой части изложен математический метод решения разностных уравнений алгебраическим путем. Элементами описываной алгебры являются „численные операторы", составляющие специальную категорию числ. Во второй части работы обсуждается вопрос стабильности схем импульсного регулирования. Приведены там новые результаты, которые могут быть использованы при проектировании и исследовании схем регулирования. В третьей части работы представлен некоторый нумерический метод упрощающий определение переходных процессов в электрических схемах возбуждаемых более сложными сигналами. Этот метод основан на теории изложенной в первой части работы.

S. BELLERT

NUMERICAL OPERATORS' METHOD

Summary

The present paper shows a mathematical method, called by the author *„numerical operators' method"*, and its practical applications. The discussed method is the algebra whose elements (numerical operators) constitute a generalization of the concept of complex number. There exists a great similarity between the algebra of numerical operators and the algebra of complex numbers. As it is known, the complex number is an ordered pair (a, b) of real numbers, for which the equality, sum and product are appropriately determined. Owing to these definitions, the complex number can always be represented in the form of the sum:

$$z = a + (0, 1) \cdot b \tag{1}$$

where the pair (0,1) is usually denoted by the letter i:

$$i = (0, 1) \tag{2}$$

The number i is called an *imaginary unit*. Similarly as complex numbers, numerical operators are also determined in terms of the definitions of equality, sum and product. Thus a numerical operator is an ordered system of complex numbers $\{a_n\}$ having the form

$$0, 0, a_{-N}, a_{-N+1} \cdots a_{-1} \underline{\ } a_0, a_1 \cdot \cdots a_n, \cdots \tag{3}$$

for which the equality, sum and product are defined as follows.

1. DEFINITION OF EQUALITY

Two numerical operators $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ are considered as equal to each other, and we write $\{a_n\} = \{b_n\}$ if and only if $a_n = b_n$ for every n.

2. DEFINITION OF SUM

The sum of two numerical operators, $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ is the numerical operator $\{a_n + b_n\}$, and we write

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}. \tag{4}$$

3. DEFINITION OF PRODUCT

The product of numerical operators, $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ is the numerical operator $\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{n-m}\right\}$ and we write

$$\{a_n\}\{b_n\} = \left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{n-m}\right\}. \tag{5}$$

A geometrical interpretation is given to numerical operators. A geometrical picture of the numerical operator is the sequence of points or the staircase function with rectangular coordinates (Fig. 1). The denotation of the numerical operator is abbreviated to the symbol $\hat{a}$. From the definitions of sum and product it follows that

$$\begin{aligned} \hat{a}\,\hat{b} &= \hat{b}\,\hat{a}, \\ \hat{a}\,(\hat{b}\,\hat{c}) &= (\hat{a}\,\hat{b})\,\hat{c}, \\ \hat{a}\,(\hat{b} + \hat{c}) &= \hat{a}\,\hat{b} + \hat{a}\,\hat{c}. \end{aligned} \tag{6}$$

Substraction and division of numerical operators is also introduced as an inverse operation of addition and multiplication. It can be shown that the above arithmetic operations are uniquely performable, except for the division by the zero operator $\{0\} = \ldots 0, 0, \ldots 0, 0, \ldots 0, \ldots$

Thus the numerical operators constitute a numerical field. The integral power is determined in a usual way as

$$\hat{a}^k = \underbrace{\hat{a}\,\hat{a} \ldots \hat{a}}_{k} \tag{7}$$

It can be shown that the equation $\hat{a}\,\hat{b} = 0$ is satisfied if and only if $\hat{a} = \hat{0}$ or $\hat{b} = \hat{0}$. The field of numerical operators, accordingly, has no zero divisors.

The numerical operators of the form

$$\dots 0, 0, |_ a, 0, 0, \dots 0,$$

on account of four arithmetic operations (Eq. 14 of section 1.1.4) are isomorphic with a set of complex numbers. Therefore, these operators are identified with complex numbers by writing

$$\dots 0, 0, |_ a, 0, 0, \dots 0, \dots = a \tag{8}$$

Among numerical operators, a particular part is played by *„the displacement operator"*, which is denoted by the letter q and determined by the formula

$$q = \dots 0, 0, |_ 0, 1, 0, 0, \dots 0, \dots \tag{9}$$

The role of the operator q is similar to the role of the imaginary unit i (2) in the theory of complex numbers, since in terms of the operator q it is possible to present any numerical operator a_n by the formula

$$\{a_n\} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n q^n . \tag{10}$$

It is worth-while to underline that the above series *is always convergent* independently of the sequence of a_n coefficients.

Formula (10) is an equivalent of formula (1) relating to the theory of complex numbers. Formula (10) is the consequence of the following properties of the operator q:

$$\begin{aligned} q^2 &= \dots 0, 0, |_ 0, 0, 1, 0, \dots 0, \dots \\ q^k &= \dots 0, 0, |_ 0, 0, \dots 0, 1, 0, \dots 0, \dots \\ q^{-1} &= \dots 0, 1 |_ 0, 0, \dots 0, \dots \end{aligned} \tag{11}$$

Thus, by multiplying the complex numebrs a_n by q^n, we simply displace them and put into appropriate places (partitions) of the sequence a_n forming thus sequence (3). Therefore, sequence (10) is always convergent.

For practical reasons, it is convenient in addition to q to introduce the operator p inverse with respect to q:

$$p = q^{-1} = \frac{1}{q}. \tag{12}$$

Numerical operators present a convenient method for the algebraic solution of differential equations, namely equations of the form

$$a_0 f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \dots + a_k f(n) = \varphi(n). \tag{13}$$

In solving this type of equations, we make use of the formula

$$\{a_{n+k}\} = p^k \{a_n\} - p^k \sum_{n=0}^{k-1} p^{-n} a_n \cdot \tag{14}$$

This formula is correct for *any sequence* $\{a_n\}$ independently of the speed of increase in the term a_n. This method is, accordingly, more general than the methods based on the Z transform and Laplace transform.

In addition to the operators p and q, the operators σ and δ are also introduced in the paper.

The operator

$$\sigma = \ldots 0, 0, \underline{|} 1, 1, 1, 1, \ldots 1, \ldots$$

has been given the name *summing operator*, because of its property

$$\sigma \{a_n\} = \left\{ \sum_{m=0}^{n} a_m \right\}$$

and the operator

$$\delta = \ldots 0, 0, \underline{|} 1, -1, 0, 0, \ldots$$

has been given the name *difference operator*, because

$$\delta \{a_n\} = \{\nabla a_n\} = \{a_n - a_{n-1}\}.$$

Besides the algebra, the author also presents the foundations of the numerical operators' analysis by introducing the concept of convergence of sequence and series, and the concept of the function of the numerical operator (Section 1.4 and 1.5).

Three kinds of applications of the discussed method to electrotechnical problems are given in the paper:

1. the investigation of energetics relations in ladder networks.
2. the investigation of sampled data systems,
3. determining transients numerically.

The application mentioned under item 3 results from the fact that, by means of the product of numerical operators, it is possible to approximate the convolution of continuous functions.

In the second part of the paper, it is shown how the numerical operators' method can be applied to the theory of sampled data control systems.

The numerical operators' method as compared with the Z-transform method gives a better generalization and at the same time introduces metodological simplifications. Original results concerning methods of investigating stability of sampled data control systems are also given in the second part of the paper.

The third part of the paper, devoted to an approximated method of investigating transients, is illustrated by many examples

621.318.322

ARKADIUSZ GÓRAL

Pomiary niektórych własności magnetycznych i dielektrycznych ferrytów magnetycznie miękkich w pasmie częstotliwości od 10 Hz do 1000 MHz

Rękopis dostarczono 9.6.1959

W pracy omówiono zależności pomiędzy pierwotnymi parametrami materiału μ_1, μ_2, ε_1, ε_2 i wielkościami wtórnymi, otrzymanymi w wyniku pomiaru impedancji wtrącanej przez próbkę w obwód pomiarowy w słabym polu wielkiej częstotliwości. Rozpatrzono główne zagadnienia techniki pomiarów w pasmie częstotliwości i w warunkach niewystępowania efektów natury żyromagnetycznej (bez obecności silnych, nałożonych pól stałych).

Podano wzory ogólne umożliwiające wyznaczenie parametrów μ_1, μ_2, oraz ε_1, ε_2 ze znanych impedencji wnoszonych przez próbkę pomiarową. Dla celów praktycznych postulowane jest stosowanie wzorów uproszczonych, otrzymanych przy założeniu małych „elektrycznych" wymiarów próbki. W zestawieniu podano wzory na obliczenie składowych μ i ε na podstawie pomiarów próbek toroidalnych w różnych układach pomiarowych o stałych skupionych i rozłożonych, przy założeniu, że długość fali elektromagnetycznej płaskiej w próbce ferrytowej jest znacznie większa od rozmiarów geometrycznych próbki. Posługując się ogólnymi własnościami układów liniowych można skontrolować uzyskane eksperymentalnie przebiegi częstotliwościowe μ i ε.

Przedyskutowano wpływ szeregu czynników na uchyb pomiaru.

1. WSTĘP

Własności magnetyczne i dielektryczne ferrytów magnetycznie miękkich określane są w zasadzie za pomocą tych samych parametrów, które charakteryzują ferromagnetyczne metale i stopy z jednej, a dielektryki nieorganiczne i organiczne z drugiej strony. Pomiary ferrytów będą zawierały te same elementy, które występują przy pomiarach metalicznych ferromagnetyków i dielektryków. Jednakże fakt, że ferryty są materiałami, których mała przewodność właściwa pozwala na zastosowa-

nie w obwodach wielkiej i ultrawielkiej częstotliwości, wysuwa na czoło pomiary ich charakterystyk częstotliwościowych.

Znajomość charakterystyk częstotliwościowych ferrytów ma duże znaczenie praktyczne, gdyż pozwala ocenić wielkość przenikalności i składowej strat materiału przy żądanej częstotliwości roboczej. Oprócz tego znajomość przebiegu spektrów magnetycznych pozwala niejednokrotnie na głębsze wniknięcie w istotę fizyczną procesów magnesowania i doprowadziła np. do wykrycia rezonansu ferromagnetycznego, co otworzyło bogatą perspektywę zastosowań ferrytów w technice mikrofalowej.

Własności dielektryczne ferrytów mają znaczenie raczej marginesowe, jeśli chodzi o ich praktyczne wykorzystanie w omawianym pasmie częstotliwości. Bardziej godny uwagi jest natomiast półprzewodnikowy charakter przewodności ferrytów, umożliwiający zastosowanie ich do produkcji termistorów. Jednak pomiary przewodności właściwej ferrytów noszą charakter raczej konwencjonalny i nie różnią się w zasadniczy sposób od analogicznych pomiarów materiałów oporowych i dielektryków.

W pracy zostaną omówione zagadnienia pomiaru przenikalności magnetycznej i stałej dielektrycznej zespolonej ferrytów w pasmie od 10 Hz do 1000 MHz.

Główny nacisk położony zostanie na pomiary przenikalności magnetycznej, jako parametru dominującego. Jak widać z obranego zakresu częstotliwości, nie będą rozpatrywane własności żyromagnetyczne ferrytów. Rozważone natomiast zostaną zagadnienia teorii i techniki pomiaru składowej rzeczywistej przenikalności i składowej strat w polach słabych, sinusoidalnie zmiennych bez nałożonych pól stałych (które w górnym zakresie omawianego pasma częstotliwości prowadzą do występowania efektów natury żyromagnetycznej).

Omówione zostaną pomiary parametrów materiałowych niezależnych od kształtu próbki, natomiast zagadnienia pomiarów wielkości umownych, jak np. przenikalność lub dobroć skuteczna, w pracy nie będą poruszane.

2. PARAMETRY FERRYTÓW W POLACH ZMIENNYCH

Określenie przenikalności magnetycznej i stałej dielektrycznej w sposób najbardziej ogólny jest możliwe, jeżeli za punkt wyjściowy posłużą odpowiednie podstawowe zależności pomiędzy wektorem magnetyzacji i wektorem pola magnetycznego i indukcji magnetycznej oraz pomiędzy wektorem polaryzacji elektrycznej, przesunięcia elektrycznego i natężenia pola elektrycznego.

Zależności te przedstawiają się jak poniżej (w układzie jednostek MKS).

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}, \tag{2—1}$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}, \tag{2—2}$$

gdzie:

$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ F/m,

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m,

$\vec{P}, \vec{D}, \vec{E}$ — wektory polaryzacji, przesunięcia elektrycznego i pola elektrycznego,

$\vec{M}, \vec{B}, \vec{H}$ — wektory magnetyzacji, indukcji magnetycznej i pola magnetycznego.

Jeżeli weźmiemy pod uwagę, że (w układzie MKS):

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \tag{2—3}$$

i

$$\vec{B} = \mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}, \tag{2—4}$$

a współczynniki $\varepsilon - 1$ i $\mu - 1$ oznaczymy:

$$\varepsilon - 1 = \varkappa_e, \tag{2—5}$$

$$\mu - 1 = \varkappa_m, \tag{2—6}$$

to otrzymamy nowe równania:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \varkappa_e \vec{E}, \tag{2—7}$$

$$\vec{M} = \varkappa_m \vec{H}. \tag{2—8}$$

Podatność dielektryczna $\varkappa_e$ ma w całym zakresie częstotliwości charakter skalarny i może być wyrażona w postaci wielkości zespolonej:

$$\varkappa_e = \varkappa_{e1} - j\varkappa_{e2}. \tag{2—9}$$

Podatność magnetyczna natomiast $\varkappa_m$ przybiera w zakresie mikrofalowym charakter wielkości tensorowej. Polder [1] podał dla monokrystalicznego ferrytu następujące wyrażenie tensora podatności magnetycznej.

$$\| \varkappa_m \| = \begin{Vmatrix} \varkappa_m & -jk & 0 \\ jk & \varkappa_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{2—10}$$

Dodatkowym zastrzeżeniem przy wprowadzeniu powyższego wzoru jest konieczność obecności silnego pola stałego (skierowanego w kierunku osi z) nasycającego ferryt przy jednoczesnej małej wartości pola zmiennego mikrofalowego. Przyjmując sinusoidalność zmian pola, możemy $\varkappa_m$ i k wyrazić w postaci wielkości zespolonych

$$\varkappa_m = \varkappa_{m1} - j\varkappa_{m2}, \tag{2—11}$$

$$k = k_1 - \gamma k_2. \tag{2—12}$$

W częstszym użyciu praktycznym są zamiast współczynników $\varkappa$ współczynniki μ i ε, które wyrazić można następująco:

$$\varepsilon = \varkappa_e + 1,$$

$$\|\mu\| = \|\varkappa_m\| + 1, \tag{2—14}$$

gdzie:

$\|\mu\|, \|\varkappa_m\|$ — odpowiednio tensory przenikalności i podatności magnetycznej,

$\mathbf{1}$ — macierz jednostkowa.

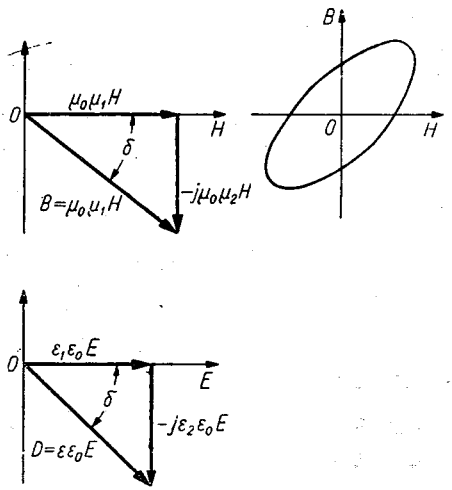
Wyrażenie (2—10) nosi charakter ogólny, jednakże w omawianym pasmie częstotliwości bez nałożonych silnych pól stałych przenikalność magnetyczną można przedstawić w postaci wielkości zespolonej:

$$\mu = \mu_1 - j\mu_2. \tag{2—15}$$

Oczywiście stała dielektryczna będzie wówczas określona przez:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 - j\varepsilon_2. \tag{2—16}$$

Wprowadzenie pojęcia przenikalności zespolonej jest równoznaczne z przyjęciem eliptycznego kształtu pętli histerezy w zakresie słabych pól,



Rys. 1. Wykresy wektorów B, H i D, E przy przesunięciu fazowym wywołanym obecnością składowych strat przenikalności i stałej dielektrycznej (μ_2 i ε_2)

w którym pojęcie przenikalności zespolonej ma w ogóle sens. Rysunek 1 przedstawia wykres wektorowy wyjaśniający znaczenie składowych rzeczywistych i urojonych przenikalności magnetycznej i stałej dielektrycznej. Składowe urojone μ_2 i ε_2 stanowią o wielkości strat energetycznych powstających w trakcie oddziaływania zmiennego pola elektromagnetycznego *EM*. Popularnie przyjęte oznaczenia współczynników strat przez tangens kąta strat znajdzie tu swój wyraz w oznaczeniach:

$$\operatorname{tg}\delta_e = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \tag{2—17}$$

$$\operatorname{tg}\delta_m = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \tag{2—18}$$

Współczynnik strat dielektrycznych tg δ_e zależny jest od wielkości przewodności materiału mierzonej prądem stałym i od właściwych strat dielektrycznych charakterystycznych dla pól elektromagnetycznych wielkiej częstotliwości. Obie te składowe strat są nierozróżnialne z punktu widzenia aparatury do pomiarów w polach elektrycznych w.cz., gdzie jest obojętne, czy mamy do czynienia z ruchem ładunków swobodnych, czy też związanych.

Współczynnik strat magnetycznych zależny jest od histerezy magnetycznej, oporności właściwej materiału i strat na opóźnienie magnetyczne.

W zakresie słabych pól, a konkretnie w zakresie ważności Rayleighowskich zależności pomiędzy B i H, posługując się szeregowym zastępczym układem cewki toroidalnej z rdzeniem z badanego materiału (rys. 2) można otrzymać współczynniki charakteryzujące poszczególne rodzaje strat:

C_h — współczynnik strat na histerezę, niezależny od częstotliwości,
C_w — współczynnik strat na prądy wirowe,
C_{op} — współczynnik strat na opóźnienie magnetyczne.

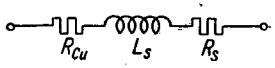
Wypadkowy tangens kąta strat będzie wyrażał się wówczas następującą zależnością

$$\operatorname{tg}\delta_m = \frac{R_s}{\omega L_s} = \frac{\mu_1}{2\pi} = [C_h \cdot B_{max} + C_w \cdot f + C_{op}], \tag{2—19}$$

gdzie:

L_s — indukcyjność zastępcza cewki (rys. 2),
R_s — oporność reprezentująca straty w rdzeniu cewki (rys. 2),
f, ω — częstotliwość i pulsacja,
B_{max} — amplituda indukcji magnetycznej.

Wzór (2—19) jest ważny dla ferrytów do częstotliwości około 20 kHz i (jak wspomniano wyżej) pól słabych. Dla indukcji powyżej 10 Gs i częstotliwości powyżej 10 ÷ 20 kHz współczynnik strat na histerezę przestaje być wielkością stałą i znajomość jego nie wystarcza do określenia strat na histerezę. Współczynnik strat na opóźnienie magnetyczne jest



Rys. 2. Schemat zastępczy szeregowy cewki z rdzeniem R_{Cu} — oporność uzwojenia, R_s — oporność szeregowa strat w rdzeniu, L_s — indukcyjność szeregowa

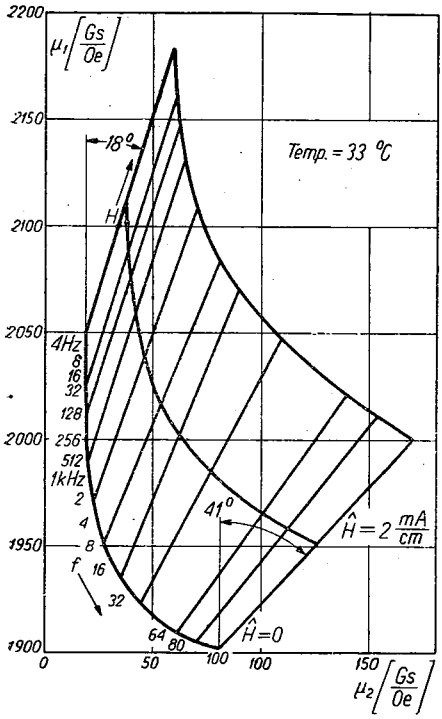
we wzorze (2—19) wielkością stałą, co również słuszne jest tylko w ograniczonym zakresie częstotliwości. Począwszy bowiem od pewnej częstotliwości współczynnik ten zaczyna gwałtownie wzrastać, tak że udział strat na opóźnienie staje się w zakresie częstotliwości radiowych dominujący. Biorąc pod uwagę, że praktycznie w zakresie wielkich i ultrawielkich częstotliwości mamy do czynienia z polami bardzo słabymi ($H_{max} \approx 1$ mOe), do określenia składowej strat wystarczy jedynie znajomość współczynnika strat na opóźnienie; przyjmujemy wówczas, że:

$$\frac{\operatorname{tg} \delta_m}{\mu_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1^2} \approx \frac{C_{op}}{2\pi}. \tag{2—20}$$

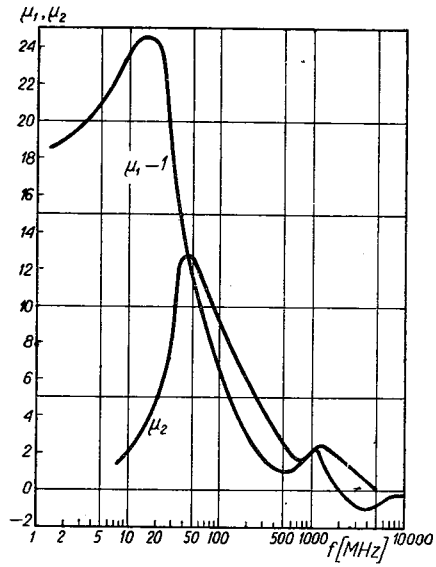
Wykresy μ_2 w funkcji częstotliwości, podawane dla określenia własności materiałów, dotyczą wielkości strat na opóźnienie w pełni charakteryzujących stratność ferrytu w pasmie wielkich częstotliwości.

Do określenia charakterystyk ferrytu w pasmie częstotliwości przyjęło się używać w zakresie częstotliwości akustycznych i nieco powyżej rodziny charakterystyk μ_1 i μ_2 zdjętych dla różnych wartości amplitudy pola zmiennego i częstotliwości w przypadku ferrytów o dużej przenikalności początkowej (rzędu 1000); natomiast dla ferrytów stosowanych przy częstotliwościach radiowych całkowicie miarodajne są krzywe zależności $\mu_1 = F_1(f)$ (krzywa dyspersji) i $\mu_2 = F_2(f)$ (krzywa absorpcji). Charakterystyki $\varepsilon_1 = \Psi_1(f)$ oraz $\varepsilon_2 = \Psi_2(f)$ przy założeniu (na ogół spełnianym w praktyce) niezależności od wielkości przyłożonego pola elektrycznego określają w pełni własności dielektryczne ferrytu w funkcji częstotliwości. Rysunki 3, 4 i 5 przedstawiają przykładowo przebiegi przenikalności zespolonej dla ferrytu o dużej przenikalności, przebiegi μ_1 i μ_2 w szerokim pasmie częstotliwości dla ferrytu o niewysokiej przenikalności, przebiegi ε_1 i ε_2 dla dwu rodzajów ferrytów — manganowo-cynkowego i niklowo-cynkowego.

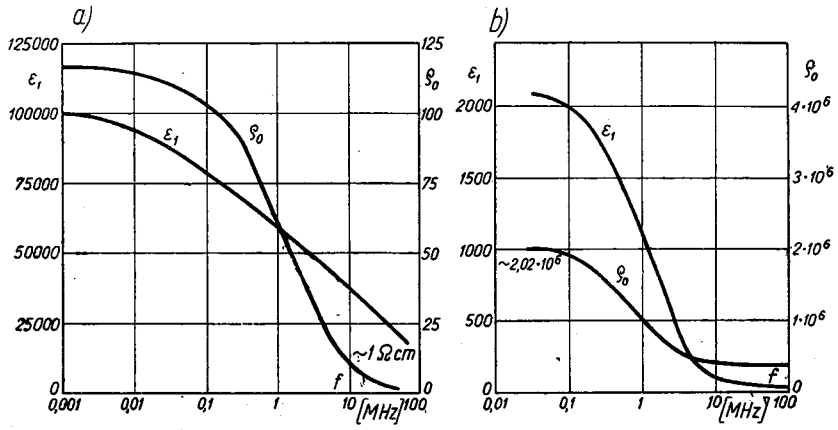
Opisany powyżej sposób ujęcia przenikalności zespolonej ferrytów



Rys. 3. Przenikalność zespolona ferrytu Ni-Zn (Siferrit) prod. firmy Siemens-Halske w zakresie 4 Hz do 120 kHz wg [14]



Rys. 4. Przebieg $(\mu_1 - 1)$ i μ_2 dla ferrytu Mg (Ferramic A) wg [7]



Rys. 5. Przebiegi ε_1 i $\dfrac{1}{\omega\varepsilon_2\varepsilon_0} = \varrho_0\omega$ w funkcji częstotliwości: a) ferryt Mn-Zn, b) ferryt Ni-Zn

jest ściśle związany z szeregowym układem zastępczym cewki z mierzonym rdzeniem toroidalnym.

Przy zastosowaniu układu równoległego (rys. 6) wzory ulegną zmianie, gdyż:

$$L_r = L_s\left(1 + \frac{1}{Q_r^2}\right), \tag{2-21}$$

$$R_r = R_s(1 + Q_r^2), \tag{2-22}$$

gdzie

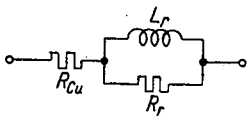
$$Q_r = \frac{\omega L_s}{R_s} = \frac{R_r}{\omega L_r} = \frac{1}{\operatorname{tg}\delta}. \tag{2-23}$$

Oznaczenia L_s, L_r i R_s, R_r wynikają z układów zastępczych (rysunki 2 i 6). Po dokonaniu szeregu przekształceń otrzymamy następujące zależności pomiędzy składowymi μ_1 i μ_2 przenikalności określonej z różnych układów zastępczych:

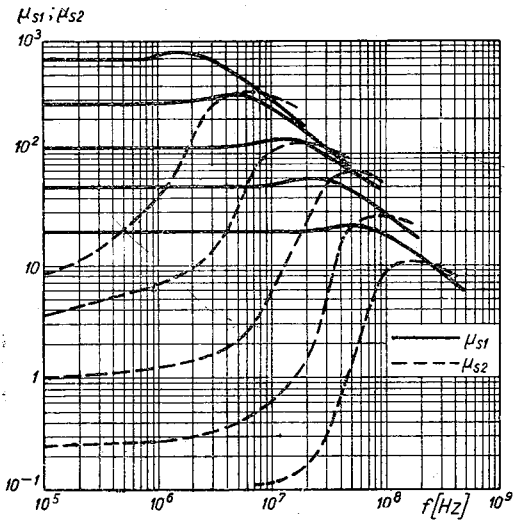
$$\mu_{1r} = \mu_{1s}\left(1 + \frac{1}{Q_r^2}\right), \tag{2-24}$$

$$\mu_{2r} = \mu_{2s}(1 + Q_r^2). \tag{2-25}$$

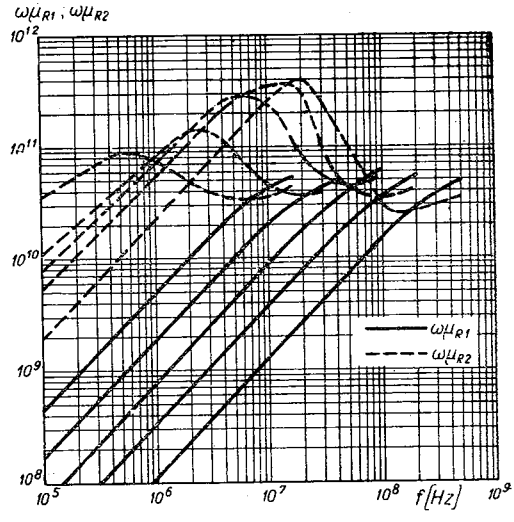
Jak widać ze wzoru dla dużych dobroci ($Q > 10$), wartości składowej rzeczywistej przenikalności szeregowej μ_{1s} i równoległej μ_{1r} nie różnią się prawie od siebie. Różnice występują dopiero przy większych częstotliwościach, gdy dobroć materiału gwałtownie maleje. Podobny sposób rozumowania prowadzi do analogicznych wniosków odnośnie składowych ε_1 i ε_2 stałej dielektrycznej. Ponieważ szeregowy układ zastępczy jest ogólnie przyjęty do wyznaczania przebiegów częstotliwościowych μ_1, μ_2 i ε_1, ε_2, więc w dalszym ciągu parametry μ i ε należy uważać za parametry szeregowe, jeśli nie zostanie specjalnie zastrzeżony inny ich sens. Przebiegi $\mu_{1s} = F_1(f)$, $\mu_{2s} = F_2(f)$ oraz $\omega\mu_{1r} = F_3(f)$ i $\omega\mu_{2r} = F_4(f)$ są przedstawione dla całej grupy materiałów ferrytowych „Ferroxcube B" firmy Philips na rysunkach 7 i 8.



Rys. 6. Zastępczy układ równoległy cewki z rdzeniem, w którym R_r i L_r odpowiednio — zastępcza równoległa oporność i indukcyjność, R_{Cu} — oporność uzwojenia



Rys. 7. Charakterystyki przenikalności w funkcji częstotliwości dla ferrytów typu Ferroxcube B firmy Philips w układzie zastępczym szeregowym



Rys. 8. Charakterystyki przenikalności zespolonej w funkcji częstotliwości dla ferrytów typu Ferroxcube B firmy Philips w układzie zastępczym równoległym

3. TEORIA POMIARU ZESPOLONEJ PRZENIKALNOŚCI I STAŁEJ DIELEKTRYCZNEJ W POLACH ZMIENNYCH WIELKIEJ CZĘSTOTLIWOŚCI

Zadaniem teorii pomiaru zespolonych parametrów μ i ε w polach w.cz. jest wyznaczenie zależności pomiędzy pierwotnymi parametrami materiału, występującymi w równaniach Maxwella, a współczynnikami, które mogą być wyznaczone przez pomiar oporności pozornej wnoszonej przez próbki z mierzonego materiału do elektrycznych obwodów pomiarowych.

Z równań Maxwella można otrzymać [2] następujące wyrażenie na impedancję płytki ferrytowej, umieszczonej w polu elektrycznym (rys. 9):

$$Z_e = \frac{la}{S} \cdot \frac{\zeta}{th\, a\gamma}, \qquad (3-1)$$

gdzie:

$S = 2ah$ — pole przekroju poprzecznego płytki,

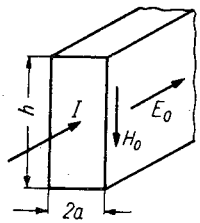
l — długość płytki,

$\gamma = \beta + j\alpha = \sqrt{j\omega\mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon}$ — stała rozchodzenia się fal elektromagnetycznych w ferrycie,

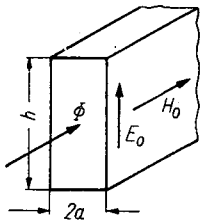
$\zeta = \frac{\gamma}{\varepsilon}$ — oporność falowa materiału,

μ, ε — zespolona przenikalność magnetyczna i stała dielektryczna,
μ_0, ε_0 — są określone we wzorach (2—1) i (2—2).

W analogiczny sposób, wychodząc z równań Maxwella, można określić impedancję wnoszoną przez rdzeń ferrytowy w obwód np. cewki, odniesioną do pojedynczego zwoju (rys. 10)



Rys. 9. Płytka ferrytowa umieszczona w polu elektromagnetycznym
I — prąd w płytce, E_0 — natężenie pola elektrycznego na powierzchni, H_0 — natężenie pola magnetycznego



Rys. 10. Płytka ferrytowa włączona w obwód magnetyczny (będąca np. rdzeniem cewki)
Φ — strumień w rdzeniu, E_0, H_0 — pole elektryczne i magnetyczne na powierzchni

$$Z_m = j\omega L = j\omega \frac{S}{l} \mu_0 \bar{\mu}; \tag{3—2}$$

we wzorze tym:
S — pole oznaczone powyżej w (3—1),
l — długość drogi magnetycznej.

Wielkość $\bar{\mu}$ we wzorze oznacza średnią przenikalność zespoloną, związaną z pierwotną przenikalnością zespoloną zależnością:

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}_1 - j\bar{\mu}_2 = \mu \frac{\operatorname{th} a\gamma}{a\gamma}; \tag{3—3}$$

a i γ mają znaczenie określone powyżej.

Dla próbek toroidalnych, najczęściej spotykanych w praktyce, wzory na wnoszoną impedancję „elektryczną" i magnetyczną przyjmą następującą postać (przy założeniu, że grubość pierścieni jest niewielka)

$$Z_e = \frac{\zeta \ln \frac{r_2}{r_1}}{4\pi \operatorname{th} a\gamma}, \tag{3—4}$$

$$Z_m = \frac{\zeta}{\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \operatorname{th} a\gamma, \tag{3—5}$$

gdzie:

r_2, r_1 — odpowiednio zewnętrzny i wewnętrzny promień pierścienia,

$2a$ — wysokość toroidu,

γ, ζ — jak poprzednio.

Jak widać ze wzorów (3—4) i (3—5), w celu wyznaczenia obu składowych μ i ε ferrytu należy rozwiązać układ dwu równań. Jeżeli równania te podzielimy stronami i pomnożymy, to otrzymamy uproszczony układ równań:

$$Z_m Z_e = \left(60 \ln \frac{r_2}{r_1}\right)^2 \frac{\mu}{\varepsilon}, \tag{3—6}$$

$$\frac{Z_m}{Z_e} = 4 \operatorname{th}^2\left(j \frac{2\pi a}{\lambda_0} \sqrt{\mu\varepsilon}\right), \tag{3—7}$$

w którym λ_0 — długość fali w powietrzu.

W równaniu (3—7) występuje tangens hiperboliczny argumentu zespolonego. Zagadnienie można rozwiązać w ten sposób, że jeśli:

$$\operatorname{th}(a + jb) = C_e^{j\varphi}, \tag{3—8}$$

wtedy

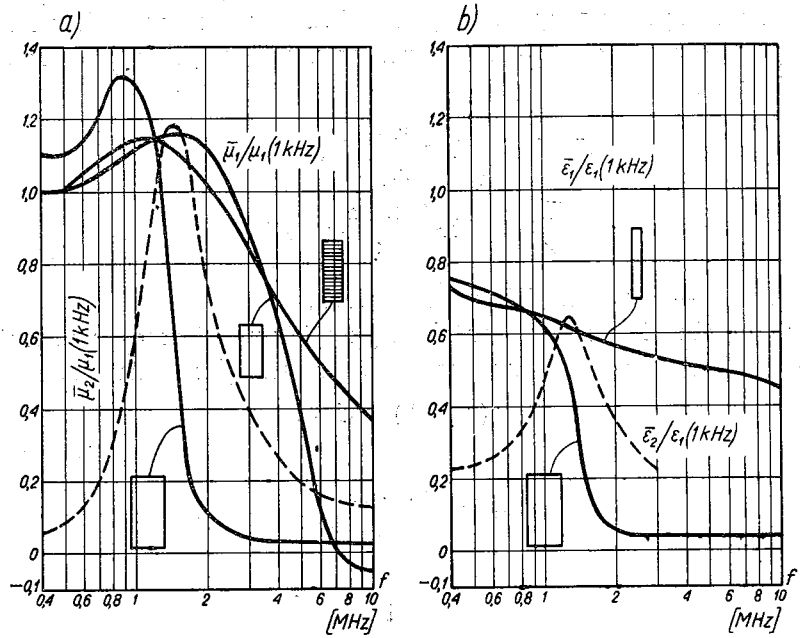
$$\operatorname{th} 2a = \frac{2C \cos\varphi}{1 + C^2}, \tag{3—9}$$

$$\operatorname{tg} 2b = \frac{2C \sin\varphi}{1 + C^2}.$$

W oparciu o powyższe zależności otrzymujemy układ czterech równań drugiego stopnia, którego rozwiązanie daje nam parametry μ_1; μ_2; ε_1; ε_2. Przy rozwiązaniu tego układu równań należy wziąć pod uwagę to, że argument tangensa z równania (3—9) może być określony jedynie z dokładnością ok. $\frac{\pi}{2}$, konieczne jest więc dysponowanie szeregiem pomiarów, aby wyznaczyć punkt, od którego należy rozpocząć rachunek. Autorem opisanej powyżej metody jest Poliwanow [3]. Brockman, Dowling i Steneck [4] rozwiązali zagadnienie dla płytek prostopadłościennych. Wzory wyprowadzone przez Brockmana, Dowlinga i Stenecka są bardzo skomplikowane i wykorzystanie ich praktyczne stoi pod znakiem zapytania, tym bardziej, że kształt próbek stosowanych przez nich do pomiarów jest mało spotykany w praktyce. Wyrażenia podane przez Poliwanowa pomimo pozornej prostoty po rozwiązaniu przedstawiają μ_1 i μ_2 oraz ε_1 i ε_2 w postaci niemniej skomplikowanej i nieprzydatnej do praktycznego zastosowania. Należy jednak podkreślić z naciskiem ogólny ich charakter, pozwalający na dokładne wyznaczenie zespolonych μ_1, μ_2 i ε_1, ε_2 na dowolnej częstotliwości, nawet w tych wypadkach, gdy dłu-

gość fali w badanym ferrycie jest współmierna z geometrycznymi wymiarami próbki.

Praktycznie z efektem rezonansu przestrzennego można spotkać się już w zakresie częstotliwości poniżej 10 MHz w przypadku niektórych



Rys. 11. Efekt rezonansu przestrzennego na rdzeniu typu Ferroxcube III wg [4] — przebiegi $\bar{\mu}_1/\mu_1$ (1 kHz) i $\bar{\varepsilon}_1/\varepsilon_1$ (1 kHz); prostokąty oznaczają rozmiary przekrojów poprzecznych próbek; μ_1 (1 kHz), ε_1 (1 kHz) przenikalności mierzone przy częstotliwości 1 kHz

ferrytów Mn-Zn o dużej przenikalności (rys. 11), posiadających jednocześnie niezwykle dużą stałą dielektryczną rzędu 10^5. Zjawisko rezonansu przestrzennego było główną przyczyną, która skłaniała do ogólnego ujęcia teorii wyznaczania zespolonych parametrów μ i ε, bowiem efekt naskórkowości magnetycznej występuje w przypadku ferrytów w stopniu niewielkim i przenikalność wyznaczona z dokładnych wzorów niewiele różni się od pomierzonej na rdzeniu toroidalnym, jeśli nie występuje rezonans przestrzenny. W praktyce dąży się do stworzenia takich warunków pomiaru, aby długość fali w próbce ferrytowej była znacznie większa od długości samej próbki w kierunku rozchodzenia się fali, traktowanej jako fala płaska. Realizacja tego warunku nie przysparza na ogół większych trudności, jeśli weźmiemy pod uwagę fakt, że ferryty stosowane w pasmie ultrawielkich częstotliwości charakteryzują się nie-

wielkimi wartościami przenikalności i stałej dielektrycznej. Ponadto wielkości te począwszy od pewnej częstotliwości silnie maleją z dalszym jej wzrostem. Omówione powyżej okoliczności sprawiają, że człony równań zawierające th $a\gamma$ można uprościć przyjmując, że:

$$\operatorname{th} a\gamma \approx a\gamma . \tag{3-10}$$

Przybliżenie to jest słuszne przy spełnieniu omówionego wyżej warunku małej „elektrycznej" długości próbki pomiarowej. W związku z tym ogólne wyrażenia określające impedancję wnoszoną przez próbkę toroidalną odpowiednio do obwodu elektrycznego i magnetycznego upraszczają się przyjmując postać następującą:

$$Z_e = \frac{1}{\mathrm{j}\, 4\pi\varepsilon_0 \varepsilon a\omega} \ln\frac{r_2}{r_1}, \tag{3-11}$$

$$Z_m = j\omega \frac{h}{2\pi} \mu_0 \mu \ln\frac{r_2}{r_1}, \tag{3-12}$$

gdzie $h = 2a$.

Wzór (3—11) obowiązuje przy założeniu symetrycznego doprowadzenia prądu, co w praktyce na ogół nie jest spotykane. W przypadku normalnie przyjętego przy pomiarach asymetrycznego doprowadzenia prądu (np. próbka toroidalna w końcu linii koncentrycznej) wzór przybierze postać:

$$Z_e = \frac{1}{j\, 2\pi\varepsilon_0 \varepsilon\omega h} \ln\frac{r_2}{r_1}. \tag{3-13}$$

Jak widać, ostatni wzór wyraża impedancję kondensatora cylindrycznego o długości osiowej wynoszącej h i o promieniach zewnętrznym i wewnętrznym r_1 i r_2. Z kolei wzór (3—12) wyraża w sposób dokładny impedancję cewki toroidalnej z rdzeniem pierścieniowym o wymiarach określonych powyżej.

3.1. Pomiary w układach o stałych skupionych

Ze wzorów (3—12) i (3—13) można obliczyć bezpośrednio wielkości zespolone μ i ε, jeśli znana jest składowa strat wnoszona przez uzwojenie pomiarowe cewki (w przypadku pomiaru magnetycznego) i przez okładki kondensatora (w przypadku pomiaru elektrycznego). Otrzymując np. w wyniku pomiarów kondensatora współosiowego z dielektrykiem ferrytowym wartości eksperymentalnie C_x i tg δ_x możemy obliczyć z nich parametry ε_1 i ε_2 w sposób podany poniżej.

Ponieważ pojemność kondensatora współosiowego wyznacza się ze wzoru [patrz wzór (3—13)]

$$C = \frac{2\pi h \varepsilon_0 \varepsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}}, \tag{3-14}$$

natomiast z pomiaru na przykład w układzie mostkowym Scheringa otrzymujemy

$$C_x = \frac{R_1}{R_2} C_z \quad \text{i} \quad \operatorname{tg}\delta_x = \frac{1}{\omega C_2 R_2},$$

gdzie R_1, R_2, C_z, R_z są elementami mostka,
więc

$$C_x = \frac{2\pi h \varepsilon_0 \varepsilon_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{C_x \ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi \varepsilon_0 h}, \tag{3-15}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \operatorname{tg} \delta_x. \tag{3-16}$$

Straty wnoszone przez okładki kondensatora współosiowego można na ogół pominąć, gdyż współczynnik strat dielektrycznych ferrytów jest co najmniej o dwa rzędy wyższy.

Nieco inaczej wygląda sprawa z pomiarem przenikalności, gdyż w tym przypadku nie da się pominąć strat w uzwojeniu pomiarowym. Straty te można wyznaczyć jednak w sposób stosunkowo prosty mierząc na tej samej częstotliwości, na której mierzony był rdzeń, indukcyjność i dobroć cewki nawiniętej na rdzeń wykonany z dobrego dielektryka (ceramika, polistyren).

Jeśli Q_c i Q_0 będą odpowiednio współczynnikami dobroci cewki z rdzeniem i bez rdzenia, a $L_c = L_s$ oraz L_0 odpowiednio wartościami indukcyjności, to możemy napisać wówczas:

$$Q_c = \frac{\omega L_s}{R_{cs}}, \quad Q_0 = \frac{\omega L_0}{R_{Cu}}.$$

Całkowita oporność strat $R_{cs} = R_{Cu} + R_s$;
w równaniu tym:

R_{Cu} — oporność strat w miedzi,

R_s — oporność szeregowa strat rdzenia,

stąd dobroć materiału rdzenia:

$$Q_r = \frac{\omega L_s}{R_s} = \frac{\omega L_s}{R_{cs} - \frac{\omega L_0}{Q_0}}.$$

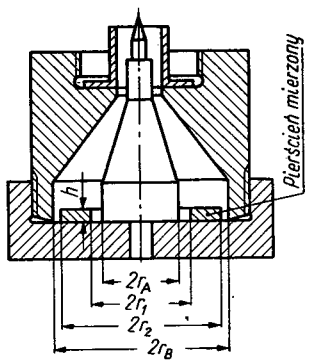
Ostatecznie otrzymamy:

$$\mu_1 = \frac{2\pi L_s}{\mu_0 h n^2 \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{L_s \cdot 10^9}{2hn^2 \ln \frac{r_2}{r_1}}, \tag{3-17}$$

$$\mu_2 = \mu_1 \operatorname{tg}\delta = \frac{R_{cs} - \frac{\omega L_0}{Q_0}}{2\omega h n^2 \ln \frac{r_2}{r_1}} 10^9, \tag{3-18}$$

n oznacza tu ilość zwojów.

Wzory (3—17) i (3—18) są słuszne w przypadku, gdy zwoje rozłożone są równomierne i ich ilość jak również przenikalność materiału sprawia, że rozproszenie strumienia magnetycznego jest pomijalnie małe. Warunki te nie są spełnione przy pomiarach na większych częstotliwościach (praktycznie powyżej 50 MHz), gdyż wymagana jest tu mała ilość zwojów ze względu na wpływ pojemności międzyzwojowej, co łącznie z niewielką wartością przenikalności daje dużą wartość strumienia rozproszenia uniemożliwiając stosowanie podstawowego wzoru (3—17). Z tego względu dla częstotliwości powyżej 50 MHz stosuje się jarzma pomiarowe jednozwojowe, otaczające równomiernie cały pierścień. Jarzmo takie zaprojektowali m. in. Baddy i Franklin [5] podając wzory, z których wyznaczyć można składową rzeczywistą przenikalności i dobroć materiału. Wzory podane są w pracy [5] bez wyprowadzeń[1]). Przy zastosowaniu



Rys. 12. Jarzmo pomiarowe jednozwojowe do pomiarów przenikalności zespolonej

jarzma jednozwojowego (rys. 12) pomiar przeprowadzać można zarówno za pomocą układów pomiarowych o stałych skupionych, jak też za pomocą linii koncentrycznej lub rezonatora. Nie wnikając bliżej w szcze-

[1]) Autorzy [5] powołują się na niepublikowane sprawozdanie Signal Corps Laboratories U. S. Army. Rozważania przeprowadzone przez autora niniejszej pracy dają w wyniku wyrażenia analogiczne do otrzymanych w [5].

góły układów, przyjmując jedynie, że w wyniku pomiaru otrzymujemy wartość indukcyjności L_s w układzie szeregowym i dobroci Q możemy przeprowadzić rozumowanie następujące. Wyobraźmy sobie, że w jarzmie pomiarowym (rys. 12) znajduje się pierścień mierzony ferrytowy. Jeżeli indukcyjność jarzma pustego wynosi L_0, to wówczas indukcyjność L_p jarzma z pierścieniem toroidalnym z ferrytu będzie składała się z sumy indukcyjności.

$$L_p = L_0 - L + L_r, \tag{3-19}$$

gdzie:

L_r — indukcyjność wnoszona przez ferryt,

L — „indukcyjność przestrzeni" zajmowanej przez pierścień ferrytowy,

L_0 — indukcyjność jarzma bez próbki.

Jeżeli teraz C_p i C_0 będą oznaczały np. wartość pojemności rezonansowej Q-metru przy pomiarze odpowiednio jarzma z próbką i jarzma pustego, to wówczas:

$$\frac{1}{\omega^2 C_p} = L_p \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{\omega^2 C_0} = L_0 \,. \tag{3-20}$$

Podstawiając powyższe do wzoru (3—19) i biorąc pod uwagę, że:

$$L = \frac{h}{2\pi} \mu_0 \ln \frac{r_2}{r_1}, \tag{3-21}$$

otrzymamy następujące wyrażenie na rzeczywistą składową przenikalności:

$$\mu_1 = 1 + \frac{C_0 - C_p}{\omega^2 C_0 C_p} \cdot \frac{10^9}{2h \ln \frac{r_2}{r_1}}. \tag{3-22}$$

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie w stosunku do dobroci (uwzględniając, że rozkład pola w korpusie jarzma po wprowadzeniu próbki nie ulega zmianie) otrzymujemy na μ_2 wyrażenie:

$$\mu_2 = (\mu_1 - 1) \frac{(Q_0 C_0 - Q_p C_p)(C_0 - C_p)}{Q_p \cdot Q_0}; \tag{3-23}$$

Q_0, Q_p są to — odpowiednio — współczynniki dobroci jarzma pustego i po wprowadzeniu próbki.

Wzór (3—22) jest niedogodny w użyciu praktycznym, gdyż do dokładnego wyznaczenia potrzebna jest dokładna znajomość częstotliwości, której uchyb względny powoduje wprowadzenie uchybu o podwójnej wartości przy obliczeniu μ_1. Można jednakże ominąć tę trudność, jeśli

[6] weźmiemy pod uwagę, że pierścień z materiału o dobrej przewodności wprowadzony zamiast rdzenia ferrytowego zmniejszy sumaryczną indukcyjność jarzma pomiarowego o „indukcyjność przestrzeni" zajmowanej przez toroid z materiału dobrze przewodzącego. Słuszność tego założenia jest zupełnie oczywista, ponieważ wewnątrz pierścienia z materiału dobrze przewodzącego pole magnetyczne praktycznie istnieć nie będzie dzięki ekranującemu wpływowi prądów wirowych. Mierząc więc dodatkowo C_m i Q_m jarzma z pierścieniem przewodzącym (np. mosiężnym) otrzymamy, opierając się na wyżej przeprowadzonym rozumowaniu, wzór na składową rzeczywistą przenikalności:

$$\mu_1 = 1 + \frac{C_m}{C_p}\left(\frac{C_0 - C_p}{C_m - C_p}\right). \tag{3-24}$$

We wzorze tym C_m oznacza pojemność rezonansową Q-metru przy pomiarze jarzma z pierścieniem dobrze przewodzącym, o jednakowych wymiarach z próbką ferrytową. Jak widać, we wzorze nie występuje częstotliwość, przy małych jednak wymiarach próbki i dużych wymiarach jarzma różnica $C_m - C_0$ może być niewielka i odczytanie jej połączone jest z dużym błędem. W tym przypadku korzystniej jest zastosować pierścień przewodzący o większych wymiarach i posługiwać się ogólną zależnością, wynikającą ze wzoru (3-12)

$$L = \frac{h}{2\pi}\mu_0\,\mu \ln\frac{r_2}{r_1} = 2h\mu \ln\frac{r_2}{r_1}\,10^{-9}. \tag{3-15}$$

Wyznaczymy zmniejszenie indukcyjności spowodowane wtrąceniem pierścienia; drogą prostych przekształceń algebraicznych otrzymamy wówczas:

$$\mu_1 = 1 + \frac{h_m \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)_m}{h_p \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)_p} \cdot \frac{C_m}{C_p}\left(\frac{C_0 - C_p}{C_m - C_0}\right), \tag{3-26}$$

gdzie:

h_m i h_p — odpowiednio grubość pierścienia przewodzącego i ferrytowego,

$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)_m$, $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)_p$ — odpowiednio stosunek promienia zewnętrznego do wewnętrznego pierścienia metalicznego i ferrytowego.

Jeżeli pomiar przeprowadza się w układzie mostkowym dającym w wyniku pomiar szeregowej L i Q, wówczas wzory przybiorą postać:

$$\mu_1 = 1 + \frac{(L_p - L_0)\,10^9}{2h \ln\frac{r_2}{r_1}}, \tag{3-27}$$

$$\mu_2 = \frac{\left(\frac{L_p}{Q_p} - \frac{L_0}{Q_0}\right)10^9}{2h \ln \frac{r_2}{r_1}}, \tag{3-28}$$

L_0 i L_p są to — odpowiednio — indukcyjności jarzma pustego i z próbką,

Q_0 i Q_p — odpowiednio — dobroć jarzma pustego i z próbką.

Uwaga. We wszystkich podanych wzorach wymiary geometryczne próbek należy podstawiać w cm.

3.2. Pomiary w obwodach o stałych rozłożonych

Powyżej częstotliwości 200 MHz przeważnie stosowane są układy pomiarowe o stałych rozłożonych, głównie linie pomiarowe koncentryczne i rezonatory.

Wyrażenia na μ_1, μ_2 i ε_1, ε_2 z pomiaru linii koncentrycznej można by otrzymać posługując się ogólnymi wzorami (3-6) i (3-7) bądź też uproszczonymi (3-12) i (3-13) i wykresem kołowym impedancji. Postępowanie takie jest jednak dosyć skomplikowane i dlatego też wzory nadające się do praktycznego wykorzystania wyprowadza się bezpośrednio dla pierścienia ferrytowego, idealnie dopasowanego do koncentrycznej linii pomiarowej, umieszczonego w końcu linii zwartej lub w odległości $\frac{\lambda}{4}$ od końca (pomiar ε_1 i ε_2).

Jeżeli założymy dodatkowo małą grubość pierścienia mierzonego [warunek (3-10)], wówczas na gruncie elementarnych rozważań dochodzimy do wniosku, że zmiana fazy fali stojącej na skutek wtrącenia próbki ferrytowej jest proporcjonalna do $(\mu_1 - 1)$; $(\varepsilon_1 - 1)$, natomiast tłumienie amplitudy jest z kolei wprost proporcjonalne do μ_2; ε_2. Miarą pierwszego jest przesunięcie minimum fali stojącej, miarą drugiego — zmiana współczynnika fali stojącej. Wyrażenia na μ_1 oraz μ_2 mają [7] postać następującą:

$$\mu_1 = \frac{\Delta_m}{h} + 1, \tag{3-29}$$

$$\mu_2 = \left(\frac{1}{\xi_p} - \frac{1}{\xi_0}\right)\frac{\lambda_0}{2\pi h}. \tag{3-30}$$

We wzorach (3-29) i (3-30) Δ_m oznacza przesunięcie minimum napięcia na linii pomiarowej z próbką w stosunku do położenia minimum napięcia w linii bez próbki.

ξ_p i ξ_0 są to — odpowiednio — współczynniki fali stojącej linii z próbką i bez próbki,

h — grubość osiowa próbki,

λ_0 — długość fali w powietrzu.

Wzory powyższe obowiązują dla próbek o małych grubościach, spełniających warunek (3-10), umieszczonych w końcu linii zwartej, w maksimum pola magnetycznego.

W celu wyznaczenia ε_1 i ε_2 próbkę umieszcza się w odległości $\frac{\gamma_0}{4}$ od końca linii zwartej, w maksimum pola elektrycznego.
Wówczas:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta_m}{h} + 1, \tag{3-31}$$

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{1}{\xi_p} - \frac{1}{\xi_0}\right)\frac{\lambda_0}{2\pi h}. \tag{3-32}$$

Zastosowane tu oznaczenia są takie same jak poprzednio.

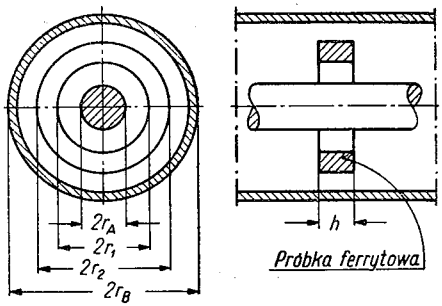
Jak zaznaczono na wstępie, wzory (3-29), (3-30), (3-31) i (3-32) obowiązują dla przypadku, gdy mierzony pierścień jest ściśle dopasowany do linii koncentrycznej. W praktyce warunek ten jest trudny do spełnienia i korzystniej jest stosować specjalne jarzmo koncentryczne o oporności falowej równej oporności falowej linii. Narzuca to jedynie warunek niezmienności stosunku $\frac{r_A}{r_B}$ (r_A i r_B — odpowiednio promień przewodu wewnętrznego i zewnętrznego) przy zachowaniu jednorodności dielektryka wypełniającego linię i jarzmo. W przypadku spełnienia powyższych warunków otrzymamy następujące wzory na składowe [13] przenikalności i stałej dielektrycznej dla pierścieni niedopasowanych

$$\mu_1 = \frac{\ln\frac{r_B}{r_A}}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \cdot \frac{\Delta_m}{h} + 1, \tag{3-33}$$

$$\mu_2 = \frac{\ln\frac{r_B}{r_A}}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \cdot \left(\frac{1}{\xi_p} - \frac{1}{\xi_0}\right)\frac{\lambda_0}{2\pi h}. \tag{3-34}$$

Rysunek 13 wyjaśnia sens zastosowanych w tych wzorach oznaczeń. Analogicznie otrzymać można dla stałej dielektrycznej:

$$\varepsilon_1 = \frac{\ln\frac{r_2}{r_1}\left[(\varepsilon_{1m}^2+\varepsilon_{2m}^2)\left(\ln\frac{r_2 r_A}{r_1 r_B}\right)+\varepsilon_{1m}\ln\frac{r_B}{r_A}\right]}{\left(\varepsilon_{1m}\ln\frac{r_A r_2}{r_B r_1}+\ln\frac{r_B}{r_A}\right)^2+\left(\varepsilon_{1m}\ln\frac{r_2 r_A}{r_1 r_B}\right)^2}, \tag{3-35}$$



Rys. 13. Przekrój współosiowego jarzma pomiarowego z próbką ferrytową

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_{2m}\ln\frac{r_2}{r_1}\ln\frac{r_B}{r_A}}{\left(\varepsilon_{1m}\ln\frac{r_A r_2}{r_B r_1}+\ln\frac{r_B}{r_A}\right)^2+\left(\varepsilon_{2m}\ln\frac{r_A r_2}{r_B r_1}\right)^2}. \tag{3-36}$$

W powyższych wzorach ε_{1m} i ε_{2m} oznaczają wartości przenikalności określone wyrażeniami (3-31) i (3-32). Pozostałe oznaczenia wynikają z rysunku 13.

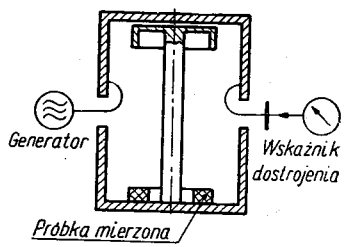
W [5] podane są wzory na składowe przenikalności magnetycznej próbki, mierzonej przy pomocy linii koncentrycznej w jarzmie, przedstawionym na rysunku 12. Oporność falowa jarzma jest przy tym równa oporności falowej linii. Wzory obliczeniowe mają następującą postać

$$\mu_1 = 1+\frac{\ln\frac{r_B}{r_A}}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{\xi_p^2}\right)\operatorname{tg}\frac{2\pi}{\lambda_0}(\Delta_m+h)}{\frac{2\pi}{\lambda_0}h\left[1+\left\{\frac{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{\lambda_0}(\Delta_m+h)}{\xi_p}\right\}^2\right]}, \tag{3-37}$$

$$\mu_2 = \frac{\left(\frac{\xi_p^2}{\xi_p^2-1}+\frac{\ln\frac{r_B}{r_A}}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\right)\left(1+\frac{\ln\frac{r_B r_1}{r_A r_2}}{\ln\frac{r_2}{r_1}\mu_1}\right)}{\frac{2\pi}{\lambda_0}h\cdot\frac{\xi_0\cdot\xi_p}{\xi_0-\xi_p}}. \tag{3-38}$$

Wzory (3-37) i (3-38) są wzorami dokładnymi. Należy zwrócić uwagę na to, że w przypadku $\xi_p \gg 1$ i $h \ll \Delta_m$ wzór (3-37) przybiera postać wzoru (3-33), a przy dodatkowym założeniu dużej przenikalności μ_1 (praktycznie powyżej 10) wzór (3-38) przekształca się we wzór (3-34). Oznaczenia w obu ostatnich wyrażeniach są identyczne z oznaczeniami przyjętymi we wzorach poprzednich.

Stosunkowo proste wzory na składowe przenikalności magnetycznej otrzymujemy przy pomiarach za pomocą rezonatora koncentrycznego, gdzie warunek rezonansu uzyskujemy zmieniając jeden z trzech parametrów: częstotliwość, długość rezonatora lub pojemność zakończającą. Ogólne warunki pomiaru są takie same jak w przypadku linii koncentrycznej, to znaczy że przy pomiarze własności magnetycznych należy umieścić pierścień mierzony w maksimum pola magnetycznego, a przy pomiarze stałej dielektrycznej w maksimum pola elektrycznego. W pierwszym przypadku na obszarze całej próbki (bardzo cienkiego pierścienia) składowa elektryczna pola praktycznie równa będzie zeru,



Rys. 14. Przekrój współosiowego rezonatora z próbką mierzoną ferrytową

natomiast w drugim przypadku składowa magnetyczna pola elektromagnetycznego będzie równa zeru. W ten sposób istnieje możliwość niezależnego wyznaczenia składowych przenikalności i stałej dielektrycznej. Dla uproszczenia wzorów stosuje się metodę trzech pomiarów, a mianowicie pomiar dla rezonatora pustego, z próbką i z wtrąconym pierścieniem z materiału dobrze przewodzącego. Pierścień przewodzący odgrywa podobną rolę jak w poprzednio opisanej metodzie pomiaru za pomocą Q-metru. Jasną jest więc rzeczą, że jeśli weźmiemy pod uwagę przypadek (rys. 14) pomiaru z zastosowaniem rezonatora, traktując częstotliwość jako zmienny parametr, to otrzymamy:

$$\mu_1 - 1 = \left| \frac{df_p}{df_m} \right|. \qquad (3-39)$$

Oznacza to, że jeśli pierścień dobrze przewodzący ma te same wymiary co pierścień mierzony, to stosunek zmiany częstotliwości rezonatora

spowodowanej wtrąceniem próbki mierzonej do zmiany częstotliwości uwarunkowanej wtrąceniem pierścienia mosiężnego wynosi ($\mu_1 - 1$). Straty przy tym są na tyle małe, to znaczy dobroć rezonatora jest tak duża, że pulsacja rezonansowa może być obliczona ze wzoru Thomsona $\left(\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right)$.

Przechodząc do przyrostów skończonych otrzymamy:

$$\mu_1 - 1 = \left| \frac{f_0 - f_p}{f_0 - f_m} \right|. \tag{3—40}$$

We wzorze tym f_0, f_p i f_m oznaczają odpowiednio częstotliwości rezonansowe rezonatora pustego, z próbką i z pierścieniem mosiężnym.

Wychodząc ze wzoru Thomsona oraz posługując się wyżej przyjętą metodą można udowodnić słuszność następującego wyrażenia:

$$\mu_1 = 1 + \left| \frac{\alpha_0 - \alpha_p}{\alpha_0 - \alpha_m} \right|, \tag{3—41}$$

gdzie:

α_0, α_p i α_m oznaczają parametry zmienne — odpowiednio — rezonatora pustego, z próbką i z pierścieniem mosiężnym.

Wzór (3-41) jest słuszny w przypadku, gdy przyrosty parametru zmiennego są niewielkie. Jeżeli nie jest spełniony warunek $\frac{\Delta\alpha}{\alpha} \ll 1$, to do wzoru (3-41) wchodzą człony wyższego rzędu. Tak na przykład w przypadku większych rozstrojeń występujących wskutek wtrącenia próbki wzór (3-40) przybierze postać:

$$\mu_1 = 1 + \frac{f_m}{f_p} \cdot \frac{f_0 - f_p}{f_m - f_0} \cdot \frac{2 + \left(\frac{f_0}{f_p} - 1\right)}{2 - \left(1 - \frac{f_0}{f_m}\right)}. \tag{3—42}$$

Składową strat μ_2 wyznaczamy wychodząc z założenia (praktycznie słusznego), że straty w korpusie rezonatora po wtrąceniu próbki nie zmienią się. Mierzymy dobroć rezonatora pustego i z próbką notując każdorazowo częstotliwość rezonansową. Wyrażenie na μ_2 przybierze wówczas postać:

$$\mu_2 = (\mu_1 - 1) \frac{\frac{Q_0 - Q_p}{Q_0 Q_p}}{\left(\frac{f_0}{f_p}\right)^2 - 1}, \tag{3—43}$$

gdzie oznaczenia są takie same jak we wzorach poprzednich.

Dobroć rezonatora wyznacza się z krzywej rezonansu. Analogiczną postać przybiera wzór przy innych parametrach zmiennych — pojemności czy długości linii.

Bliższa dyskusja warunków pomiaru, układów pomiarowych oraz błędów pomiaru zostanie przeprowadzona w rozdziale 5.

4. ZALEŻNOŚĆ POMIĘDZY CHARAKTERYSTYKĄ CZĘSTOTLIWOŚCIOWĄ SKŁADOWEJ RZECZYWISTEJ I SKŁADOWEJ UROJONEJ PRZENIKALNOŚCI MAGNETYCZNEJ I DIELEKTRYCZNEJ

W zakresie wielkich częstotliwości pomiary przenikalności przeprowadza się w polach słabych, co pozwala traktować przenikalność jako wielkość niezależną od amplitudy pola (założenie to poczynione zostało na wstępie naszych rozważań). Stosując znane zależności matematyczne dotyczące elektrycznych układów liniowych można określić (z przybliżeniem praktycznie wystarczającym) przebieg częstotliwościowy jednej ze składowych przenikalności, jeśli znana jest charakterystyka częstotliwościowa drugiej składowej. Metodę przekształcenia Fouriera zastosował w odniesieniu do składowych podatności magnetycznej Kramers [8] i podał następujące wzory:

$$\varkappa_1(f') - \varkappa_1(\infty) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{f \varkappa^2(f)}{f^2 - f'^2} df, \tag{4-1}$$

$$\varkappa_2(f') = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varkappa_1(f) - \varkappa_1(\infty)}{f^2 - f'^2} df, \tag{4-2}$$

gdzie $\varkappa_1(f')$ i $\varkappa_2(f')$ są to odpowiednio wartości składowej rzeczywistej i urojonej podatności określane przy częstotliwości f'.

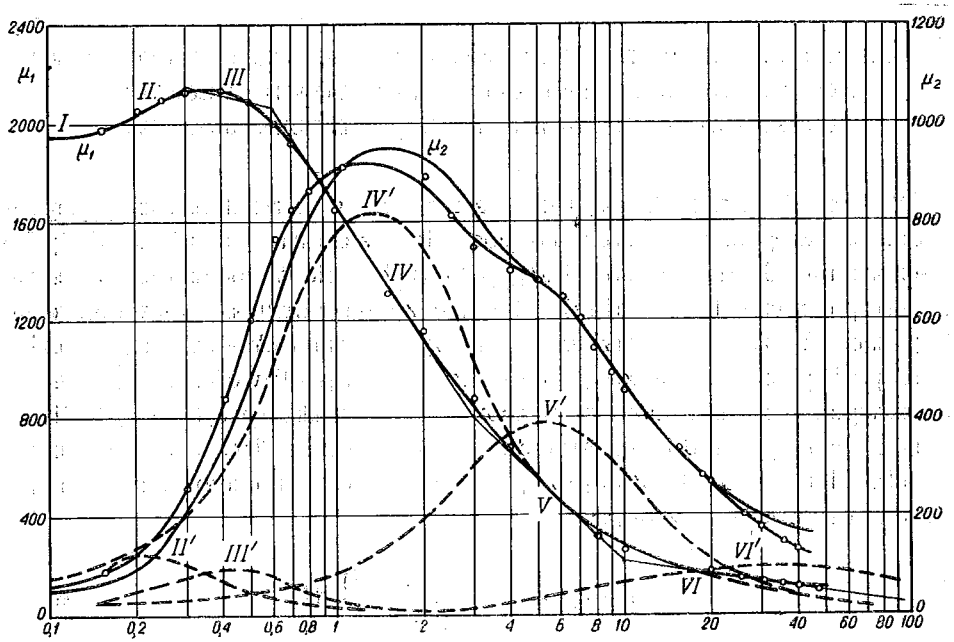
W odniesieniu do przenikalności — biorąc dodatkowo pod uwagę, że główna wartość $\int_0^\infty \frac{\mu_1(\infty)}{\omega^2 - \omega_1^2} d\omega = 0$ (ponieważ $\mu_1(\infty) \to 0$), możemy napisać:

$$\mu_1(\omega_1) - \mu_1(\infty) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega \mu_2(\omega)}{\omega^2 - \omega_1^2} d\omega, \tag{4-3}$$

$$\mu_2(\omega_1) = -\frac{2\omega_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\mu_1(\omega)}{\omega^2 - \omega_1^2} d\omega, \tag{4-4}$$

gdzie: $\mu_1(\omega_1)$ i $\mu_2(\omega_2)$ — są to odpowiednio wartości składowej rzeczywistej i urojonej przenikalności magnetycznej przy pulsacji ω_1.

Całkę występującą we wzorze (4—4) można rozwiązać metodą graficzną Bodego [9], która została wykorzystana przez autorów pracy [10]. Zasada metody graficznego całkowania prawej strony wyrażenia



Rys. 15. Charakterystyka częstotliwościowa ferrytu Ni-Zn aproksymowana odcinkami prostej. Punktami zaznaczono eksperymentalnie zdjęty przebieg $\mu_2 = F(f)$. Charakterystyki II, III, IV, V i VI oznaczają cząstkowe przebiegi $\mu_2 = F(f)$ odpowiadające poszczególnym aproksymowanym odcinkom

(4-4) jest następująca. Całą charakterystykę np. składowej rzeczywistej przenikalności $\mu_1(\omega)$ podzielić należy na szereg odcinków, z których każdy aproksymuje się prostą (rys. 15). Jeśli charakterystyka wyrażona jest w skali logarytmicznej $\mu_1 = F(\ln\omega)$, to wówczas nachylenie poszczególnych półprostych wyrazi się wzorem:

$$k_i = \frac{d\,\mu_1(\omega)}{d\,\lambda}, \tag{4—5}$$

gdzie:

$$\lambda = \ln\omega. \tag{4—6}$$

Jeśli z kolei częstotliwość wyrazimy w wielkościach względnych

$$x = \frac{\omega_{k_i}}{\omega}, \tag{4—7}$$

gdzie: ω_{ki} — pulsacja odpowiadająca początkowi odcinka aproksymującego,

to możemy wyrazić $\mu_2(\omega)$ w postaci sumy następujących całek:

$$\mu_2(\omega) = -\frac{1}{\pi}\left\{k_1\left[\int_{x_{k_1}}^{\infty} M(x)\,dx - \int_{x_{k_2}}^{\infty} M(x)\,dx\right] + k_2\left[\int_{x_{k_2}}^{\infty} M(x)\,dx + \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_{x_{k_3}}^{\infty} M(x)\,dx\right] + \ldots\right\}, \tag{4—8}$$

gdzie $M(x) = \frac{1}{x}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$.

Obliczenie całki $(x)dx$ przeprowadza się drogą rozwinięcia wyrażenia podcałkowego w szereg potęgowy, w wyniku czego otrzymamy:

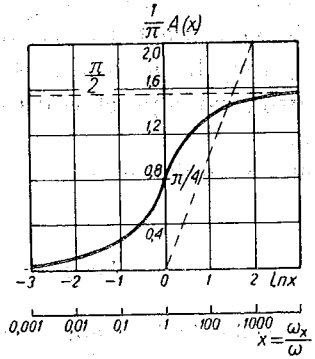
$$A(x) = \int_{x_k}^{\infty} M(x)\,dx = \frac{\pi^2}{2} - 2\left[x_k + \frac{x_k^3}{3^2} + \frac{x_k^5}{5^2} + \ldots\right] \tag{4—9}$$

dla $x_k < 1$

oraz

$$\int_{x_k}^{\infty} M(x)\,dx = 2\left[\frac{1}{x_k} + \frac{1}{3^2 x_k^3} + \frac{1}{5^2 x_k^5} + \ldots\right] \tag{4—10}$$

dla $x_k > 1$.



Rys. 16. Zależność

$$\frac{1}{\pi}A(x) = \frac{1}{\pi}\int_{x}^{\infty} \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| dx$$

wg Bodego [9]

Korzystając z gotowych wykresów funkcji $A(x)$ (rys. 16) sporządza się wykresy charakterystyk cząstkowych $\mu_2(\omega)$ odpowiadających po-

szczególnym odcinkom aproksymującym charakterystykę $\mu_1(\omega)$, a następnie sumuje się je graficznie otrzymując charakterystykę wypadkową $\mu_2(\omega)$. Reasumując stwierdzamy, że postępowanie przy określaniu charakterystyki częstotliwościowej $\mu_2(\omega)$ na podstawie znanej $\mu_1(\omega)$ ma przebieg następujący:

1. Aproksymujemy charakterystykę częstotliwościową $\mu_1(\omega)$ szeregiem półprostych.

2. Znajdujemy logarytmiczne współczynniki nachylenia k_i poszczególnych odcinków.

3. Posługując się wykresami zależności $A(x) = F(x)$ wykreślamy krzywe cząstkowe przebiegu $\mu_2(\omega)$, odpowiadające poszczególnym odcinkom.

4. Sumujemy graficznie wszystkie krzywe.

Powyższe postępowanie może być również zastosowane do wyznaczania przebiegu poszczególnych składowych $\mu(\omega)$ na podstawie znanego przebiegu modułu przenikalności w funkcji częstotliwości. Największe jednak znaczenie praktyczne ma znajomość zależności pomiędzy składowymi przenikalności, a w szczególności znajomość metody określania przebiegu częstotliwościowego składowej strat $\mu_2(\omega)$ na podstawie znanego przebiegu $\mu_1(\omega)$.

Podane wzory obowiązują przy założeniu, że funkcja

$$\mu(p) = \mu(\sigma + j\omega)$$

posiada wszystkie punkty osobliwe w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej. Ograniczenie to nie jest krępujące, gdyż realnie występujące funkcje $\mu(p)$ spełniają określony powyżej warunek[1]. Rozważania powyższe dotyczą w równym stopniu stałej dielektrycznej ferrytów.

Zastosowanie praktyczne metody ograniczone jest w zasadzie do obszarów dużych wartości składowej μ_2. W tych zakresach częstotliwości, w których μ_2 jest małe, opisany powyżej graficzno-analityczny sposób wyznaczania przebiegu $\mu_2 = F(\omega)$ jest mało dokładny.

---

[1] Pomiędzy modułem $\mu(\omega)$ a kątem fazowym przenikalności istnieje zależność:

$$\delta(\omega_1) = -\frac{2\omega_1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\ln \mu(\omega)}{\omega^2 - \omega_1^2}\, d\omega .$$

W tym przypadku funkcja $\mu(p)$ w prawej półpłaszczyźnie (włączając w to oś urojoną) nie powinna posiadać ani biegunów, ani zer, gdyż zerowa wartość dla funkcji $\mu(\omega)$ staje się nieskończonością dla funkcji $\ln[\mu(\omega)]$, a więc równoznaczna jest z osobliwością funkcji podcałkowej.

5. TECHNIKA POMIARU

Technika pomiaru przenikalności ferrytów w funkcji częstotliwości zmienia się przede wszystkim w zależności od zakresu częstotliwości pomiarowych. Ze wzrostem częstotliwości zmienia się sposób przygotowania próbki, układ pomiarowy i związane z nim postępowanie podczas pomiaru. Ulega również zmianie sposób interpretacji wyników pomiarów i jego cel. To ostatnie związane jest z charakterem przebiegu składowej strat przenikalności w funkcji częstotliwości. Poniżej zostaną omówione najważniejsze problemy techniki pomiarowej.

5.1. Przygotowanie próbek pomiarowych

Pomiar przenikalności magnetycznej jak i innych parametrów związanych z techniczną krzywą magnesowania najdogodniej przeprowadza się na rdzeniach toroidalnych, które umożliwiają bezpośrednie otrzymanie parametrów materiałowych, bez konieczności dodatkowych przeliczeń (na ogół dosyć żmudnych).

Wyznaczenie składowych stałej dielektrycznej w dość szerokim pasmie częstotliwości przeprowadza się na ogół na płytkach okrągłych (tak przyjęto w technice pomiaru dielektryków). Biorąc jednak pod uwagę dużą wartość stałej dielektrycznej ferrytów w pasmie częstotliwości pomiarowych układów o stałych skupionych, można zalecić próbkę toroidalną jako uniwersalną do przeprowadzania pomiarów własności magnetycznych i dielektrycznych ferrytów w funkcji częstotliwości. Wykonanie elektrod pomiarowych nie nastręcza przy tym trudności ze względu na mały wpływ pól brzegowych, uwarunkowany dużą stałą dielektryczną, spotykaną na ogół u ferrytów. Praktycznie dostateczną dokładność pomiaru zapewnia naniesienie okładek drogą metalizacji na powierzchnie tworzące pierścienia ferrytowego w przypadku pomiaru w układach o stałych skupionych. Przy pomiarze w linii koncentrycznej okładki kondensatora stanowią przewód zewnętrzny i wewnętrzny linii bądź przystawki pomiarowej (jarzma).

W celu przygotowania próbki do pomiaru magnetycznego należy umieścić ją w uzwojeniu pomiarowym, co w zakresie częstotliwości do 50 MHz realizuje się drogą nawinięcia uzwojenia drutem izolowanym na rdzeń. Aby uniknąć jednak wpływu strat dielektrycznych w rdzeniu, należy rdzeń bądź osłonić warstwą dielektryka o małej stratności (np. polistyren lub polietylen), bądź ekranować go cienką warstwą metaliczną tak, aby nie tworzyć zwoju zwartego. Ten ostatni sposób eliminacji wpływu własności dielektrycznych rdzenia na wyniki pomiaru posiada dodatkowe korzyści w postaci zmniejszenia efektywnej pojemności mię-

dzyzwojowej. Pojemność międzyzwojowa jest głównym czynnikiem ograniczającym zakres częstotliwości pomiarowych na rdzeniach uzwajanych wielozwojowo. Ilość zwojów pomiarowych należy określić na podstawie kompromisu pomiędzy dopuszczalną wartością rozproszenia magnetycznego (pożądana pojedyncza warstwa zwojów gęsto i równomiernie nawiniętych) a wpływem rezonansu własnego indukcyjności mierzonej próbki z pojemnościami rozproszonymi.

Praktycznie liczba zwojów zmienia się w zależności od częstotliwości pomiarowej od 100 do 4. Ta ostatnia liczba dotyczy pomiarów w pasmie 30 — 50 MHz, przy czym uzwojenie stanowi tu pasek folii, wycięty wg specjalnego szablonu, symetrycznie obejmujący rdzeń.

Powyżej częstotliwości 50 MHz stosuje się jarzmo jednozwojowe (rys. 12), obejmujące cały rdzeń mierzony. W celu wyeliminowania strat w uzwojeniu należy mieć do dyspozycji toroidy wykonane z materiałów izolacyjnych o małym kącie strat (ceramika, polistyren), których uzwojenie reprezentować może straty w uzwojeniu pomiarowym toroidów ferrytowych. Nawijając tym samym przewodem tę samą ilość zwojów co w przypadku pomiaru rdzenia ferromagnetycznego można zmierzyć oporność strat uzwojenia na dużych częstotliwościach. W przypadku jarzma jednozwojowego sytuacja jest ułatwiona, gdyż mierząc parametry pustego jarzma określamy wprost jego indukcyjność i stratność.

Naprężenia mechaniczne, które przy pomiarach niektórych ferromagnetyków metalicznych wpływają w sposób zasadniczy na wynik pomiaru, nie grają w przypadku ferrytów roli tak dużej i w realnie spotykanych warunkach pomiarowych mogą nie być brane pod uwagę. Rozmagnesowanie rdzeni przed pomiarem przeprowadza się prądem o częstotliwości sieciowej w sposób ogólnie przyjęty w technice pomiarów magnetycznych. Rozmiary toroidów mierzonych nie są ściśle określone, istotne jednak jest, aby grubość osiowa toroidu była tak mała, by spełnić warunek (3-10), tzn. — by długość fali w ferrycie była znacznie większa od grubości próbki ferrytowej (praktycznie $\frac{\lambda}{30} > h$). W przypadku pomiaru impedancji „magnetycznej" i „elektrycznej", który jest konieczny do wyznaczenia μ_1, μ_2 przy niespełnianiu warunku (3-10), należy przy pomiarze magnetycznym wziąć rdzeń o grubości podwójnej w stosunku do rdzenia użytego w pomiarze elektrycznym, co pozwoli na zachowanie stałego argumentu „th" we wzorach (3-6) i (3-7). Można to zrealizować drogą użycia dwóch rdzeni o możliwie zbliżonych własnościach.

Przy pomiarach w układzie mostka z indukcyjnością wzajemną korzystne jest nawijanie jednocześnie dwu uzwojeń, np. cienkim kabel-

kiem koncentrycznym, co pozwala na uniknięcie wpływów rozproszenia i jednocześnie dokładne określenie pojemności międzyzwojowych.

5.2. Układy pomiarowe na zakres częstotliwości 10 Hz do 100 kHz

W zakresie częstotliwości od 10 Hz do 100 kHz stosuje się głównie układy pomiarowe mostkowe i różnicowe, które pozwalają na wyznaczenie indukcyjności i tangensa kąta strat (lub oporności strat) — w przypadku pomiaru przenikalności, albo pojemności i tangensa kąta strat — w przypadku pomiaru stałej dielektrycznej. Posługując się wzorami na indukcyjność wtrącaną w obwód przez mierzony toroid (rozdział 3 — „Teoria pomiaru...") można następnie wyznaczyć wielkości μ_1, μ_2 i ε_1, ε_2.

Istnieje cały szereg rozwiązań technicznych układów mostkowych do pomiarów impedancji, które omawiane są obszernie w literaturze zagranicznej i krajowej. W zasadzie do pomiarów magnetycznych i dielektrycznych nadaje się każdy układ pomiarowy impedancji, który spełnia następujące warunki:

1) zapewnia możność wyznaczenia składowej rzeczywistej i składowej strat na określonej częstotliwości pomiarowej (pomiar selektywny);

2) zakres pomiarowy X i R (tg δ) lub Y i C układu powinien być taki, aby można było mierzyć z wystarczającą dokładnością współczynniki strat zarówno małe (tg $\delta < 0{,}01$), jak i duże (tg $\delta > 1$);

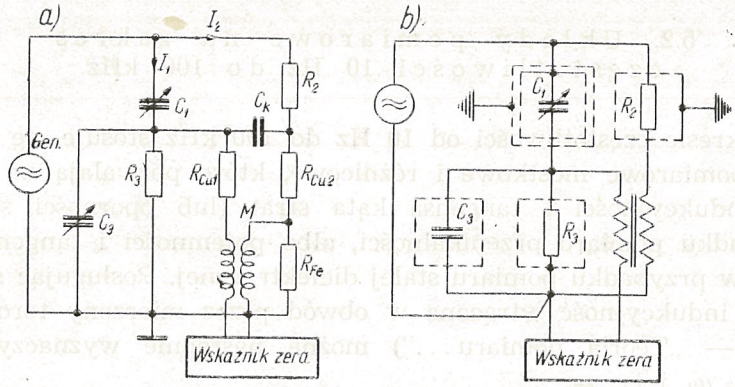
3) układ powinien zapewniać kontrolę wielkości pola pomiarowego, co jest istotne przy pomiarze własności magnetycznych ferrytów w zakresie do 100 kHz;

4) pożądane jest, aby uchyb graniczny pomiaru w danym układzie nie przekraczał dopuszczalnego błędu pomiaru przy pomiarach materiałów magnetycznych, tzn. aby uchyb pomiaru $\delta x = \dfrac{\Delta x}{x}\,100\% < 2$ oraz aby uchyb pomiaru $\delta R = \dfrac{\Delta R}{R}\,100\% < 10$.

Spośród wielu układów mostkowych wysuwa się na czoło układ mostka z indukcyjnością wzajemną [11] (rys. 17a, b). Dla równowagi mostka otrzymujemy indukcyjność wzajemną i równoległą oporność strat w postaci następujących zależności:

$$M = C_1 R_2 R_3 \left[1 + \frac{R_{Cu1}}{R_2}\left(1 - \frac{C_k}{C_1}\right) - \frac{\omega M}{R_{Fe}}\omega C_k R_{Cu1}\right], \qquad (5-1)$$

$$\frac{\omega M}{R_{Fe}} = \operatorname{tg}\delta = \omega C_3 R_3 - \omega C_k R_{Cu1}. \qquad (5-2)$$



Rys. 17. a) Układ ideowy mostka z indukcyjnością wzajemną. b) Schemat mostka z oznaczeniem ekranowania
R_{Cu1}, R_{Cu2}, oporność rzeczywista uzwojeń, R_{Fe} — oporność równoległa strat, M — indukcyjność, C_k — pojemność między pierwotnym a wtórnym uzwojeniem pomiarowym

Dla próbek o przenikalności powyżej 10 i małej wartości C_k otrzymujemy wyrażenia uproszczone:

$$M \approx C_1 R_2 R_3 \left[1 + \frac{R_{Cu1}}{R_2}\right], \qquad (5-3)$$

$$\frac{\omega M}{R_{Fe}} \approx \omega C_3 R_3. \qquad (5-4)$$

Mostek z indukcyjnością wzajemną wyróżnia się w porównaniu z innymi układami mostkowymi następującymi zaletami:

1) Oporność uzwojenia pomiarowego połączona jest w szereg z opornością wzorcową R_2. Dobierając oporność R_2 odpowiednio dużą można wyeliminować wpływ oporności uzwojenia na wynik pomiaru. Pozwala to na wyznaczanie bardzo małych wartości tg δ, co nie jest możliwe w innych układach mostkowych, w których należy wykonywać oddzielne pomiary oporności strat uzwojenia. Przy pomiarach ferrytów w zakresie częstotliwości akustycznych wartość oporu szeregowego strat rdzenia bywa w praktyce rzędu uchybu pomiarowego oporności uzwojenia, co realnie uniemożliwia wyznaczanie strat.

2) Zmiennymi członami mostka są człony pojemnościowe, znacznie łatwiejsze do wykonania i obarczone mniejszymi kątami fazowymi (wpływ oporności rzeczywistych i indukcyjności rozproszonych).

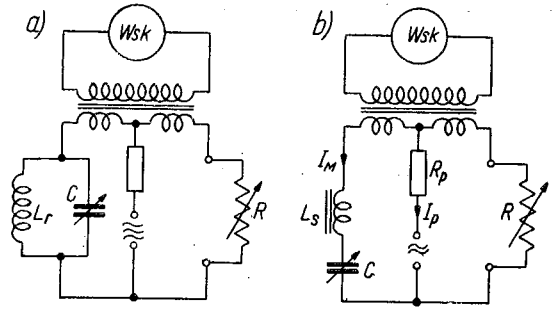
3) Zacisk generatora i wskaźnika zerowego może być wspólnie uziemiony, co eliminuje konieczność stosowania transformatorów symetryzujących. Pojemności pomiędzy elementami mostka i ekranami można traktować jako połączone równolegle z pojemnościami wzorcowymi C_1 i C_3 lub równolegle z generatorem. W pierwszym przypadku wpływ tych pojemności można uwzględnić, w drugim zaś jest on do pominięcia.

Mostek z indukcyjnością wzajemną w praktycznym wykonaniu umożliwia pomiar w zakresie od 10 Hz do 10 MHz. Przy zastosowaniu uzwojenia kablem koncentrycznym pojemność międzyuzwojeniową C_k wyznacza się ze wzoru:

$$C_k = \frac{C}{2}\left[1 - \frac{1}{12} j\omega C (R + j\omega L) + \frac{1}{180}\omega^2 C^2 (R + j\omega L) + \ldots\right] \approx \frac{C}{2}. \quad (5\text{-}5)$$

Praktycznie w zakresie do 10 MHz można pominąć wpływ oporności R i indukcyjności L kabla i pojemność C_k jest wówczas równa połowie pojemności statycznej kabla.

Kondensatory zmienne na pasmo do 100 kHz mogą być dekadowe z elementami styrofleksowymi, powyżej zaś pasma 100 kHz stosuje się kondensatory obrotowe powietrzne.



Rys. 18. Układy mostków różnicowych: a) z rezonansem równoległym, b) z rezonansem szeregowym

W zakresie do 100 kHz stosuje się oporniki drutowe bezindukcyjne, powyżej zaś warstwowe bezindukcyjne, wymienne osadzane w gniazdkach.

Bardzo dogodnie można wyznaczać indukcyjność i oporność strat szeregową zastępczą lub równoległą w układach różnicowych (rys. 18a, b) z transformatorem różnicowym.

W układzie z rezonansem szeregowym indukcyjność próbki wyznacza się ze wzoru:

$$L_s = \frac{1}{\omega^2 C}, \quad (5-6)$$

a oporność szeregowa strat

$$R_s = R. \tag{5—7}$$

W układzie z rezonansem równoległym:

$$L_r = \frac{1}{\omega^2 C}, \tag{5—8}$$

a oporność równoległa strat

$$R_r = R. \tag{5—9}$$

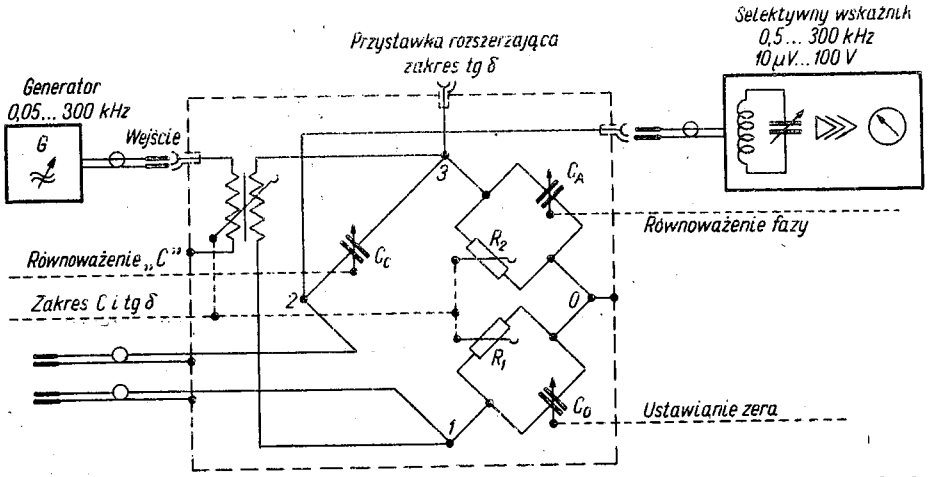
Aby wyznaczyć stratność materiału, należy uwzględnić oporność strat w miedzi. Natężenie pola pomiarowego można wyznaczyć przez pomiar spadku napięcia na oporności R_p, biorąc pod uwagę, że prąd płynący przez ten opornik wynosi

$$I_p = 2I_M, \tag{5—10}$$

gdzie I_M — prąd magnesujący.

Zarówno mostek z indukcyjnością wzajemną, jak i mostek różnicowy nadają się do wyznaczania przebiegu przenikalności zespolonej w szerokim zakresie zmian pól i częstotliwości.

Do pomiarów stałej dielektrycznej zespolonej w zakresie do 300 kHz duże zastosowanie znajduje układ mostkowy Scheringa. Rysunek 19



Rys. 19. Schemat ideowy mostka Scheringa typ VKB BN 3520 firmy Rhode-Schwarz

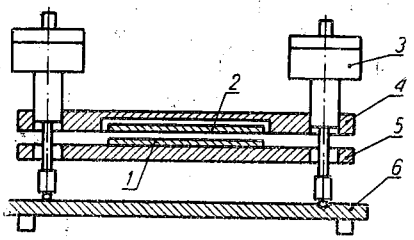
przedstawia taki układ w wykonaniu firmy Rhode-Schwarz. Z pomiaru otrzymujemy wartość pojemności wyrażoną następującą zależnością:

$$C = C_c \frac{R_2}{R_1} \tag{5—11}$$

oraz

$$\operatorname{tg}\delta = R_2 \omega C_A . \tag{5—12}$$

Ze względu na dużą na ogół wartość tg δ dla ferrytów, rozważanie problemu bezwzględnego pomiaru kąta strat jest nieistotne (odgrywa rolę w przypadku dielektryków o kącie strat poniżej $5 \cdot 10^{-4}$) i mostek Scheringa spełnia zadowalająco zadania pomiaru ε_1 i ε_2 ferrytów w pasmie do 300 kHz. W przypadku zastosowania próbki w kształcie dysku nie jest niezbędne nanoszenie specjalnych elektrod pomiarowych [12], lecz wystarczy ułożenie próbki pomiędzy dwiema tarczami (na jednej z nich) o określonej regulowanej odległości (rys. 20). Mierząc kolejno przystawkę pomiarową bez próbki i z próbką można wyznaczyć ε_1 i ε_2 (pod warunkiem, że przystawkę bez próbki doregulowujemy do pojemności przystawki z próbką) ze wzorów:



Rys. 20. Przystawka pomiarowa do wyznaczania ε_1 i tg δ w zakresie do 1 MHz
1 — próbka, *2* — elektroda niskiego potencjału, *3* — śruba mikrometryczna, *4* — elektroda ochronna, *5* — elektroda wysokiego potencjału, *6* — płyta podstawowa

$$\varepsilon_1 = \frac{h_p}{h_p - \Delta h}, \tag{5—13}$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{2}{A} \cdot \frac{\Delta G}{f} \cdot \frac{h_a^2}{h_p - \Delta h} 9 \cdot 10^{11}, \tag{5—14}$$

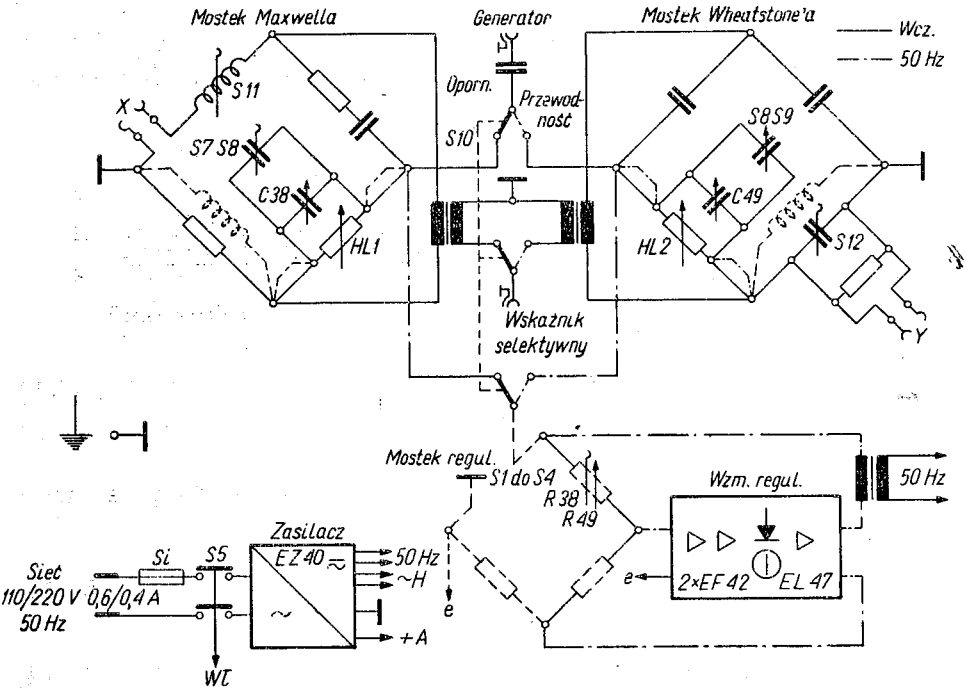
gdzie:

h_p — grubości próbki,
A — powierzchnia elektrod,
f — częstotliwość,
Δh — różnica odległości elektrod przy pomiarze z próbką i bez próbki,
ΔG — przyrost upływności wywołany wtrąceniem próbki,
$h_a = h_p - \Delta h + h_0$, zaś h_0 — długość szczeliny powietrznej przy pomiarze z próbką.

5.3. Układy pomiarowe na zakres częstotliwości od 100 kHz do 50 MHz

W zakresie częstotliwości od 100 kHz do 50 MHz stosowane są również układy mostkowe, lecz przede wszystkim w użyciu praktycznym

znajdują się układy rezonansowe. W wykonaniu fabrycznym układy mostkowe na częstotliwości radiowe nie umożliwiają w zasadzie wyznaczenia wielkości pola pomiarowego. Nie jest to jednak konieczne, gdyż — jak wspomniano wyżej — przy wyższych częstotliwościach wyznaczanie współczynników strat na histerezę, prądy wirowe i opóźnienia traci



Rys. 21. Mostek do pomiaru impedancji w zakresie od 60 kHz do 30 MHz firmy Siemens typ Re 13R218

S1: 0; 10; 20 mS. *S2*: 0 ... 12 mS. *S3*: 0 ... 12 mS. *S4*: 0 do 0,1 mS. *S5*: Wł, Wył. *S7*: 0 .. 10 μH. *S8*: 0 ... 50 μH/nF. *S9*: 0 ... 10 nF, *S10*: oporn, → przew, *S11*: 0 ... 50 Hz. *S12*: 0 ... 50 nF

praktyczny sens i zdejmuje się jedynie przebiegi częstotliwościowe składowej strat na opóźnienie μ_2 przy polu tak małym, że straty na histerezę nie odgrywają roli (praktycznie pole poniżej 5 mOe).

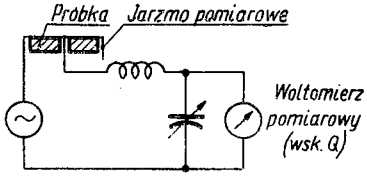
Spośród wielu układów mostkowych zostanie opisany mostek firmy Siemens-Halske (rys. 21) pracujący w zakresie od 60 kHz do 30 MHz. Mostek firmy Siemens typ Rel 3R218 składa się z dwu układów mostkowych — Maxwella i Wheatstone'a. Oba układy są starannie ekranowane i pracują ze wskaźnikiem selektywnym również tej samej firmy (Re13D317). Układ Maxwella służy do wyznaczania niewielkich oporności zespolonych. W wyniku otrzymuje się bezpośrednio wartość indukcyj-

ności i oporności szeregowej $R \pm j\omega L$. Duże oporności szeregowe mierzy się w układzie Wheatstone'a otrzymując w wyniku przewodność zespoloną zastępczą $Y = G \pm j\omega C$. Zakres pomiarowy mostka podany jest w tablicy zamieszczonej poniżej. Na uwagę zasługuje techniczne wykonanie oporników regulowanych (HL2), które stanowią termistory podgrzewane prądem o częstotliwości sieciowej. Odpowiednia wartość oporności ustawiana na mostku regulacyjnym (S_1 ... S_4) odwzorowywana jest następnie dzięki układowi automatycznej regulacji za pomocą termistora HL2.

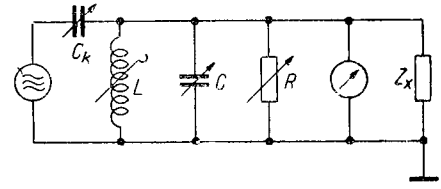
Tablica 1

		Maxwell			Wheatstone		
Zakres częstotl. MHz	od	0,06	10	20	0,06	10	20
	do	10	20	30	10	20	30
Zakres pomiaru		$X = 0{,}5$ do 32 Ω $\varphi = 0°$ do 90°			$Y = 0{,}5$ do 32 mS $\varphi = 0$ do 90°		
Pomiar R i G		R od 0,5 do 32 Ω			G = od 0,5 do 32 mS		
Błąd pomiaru		± 1% ± 2% ± 5% ± 0,05 ±0,05 ±0,05			± 1% ± 1% ± 2% ± 0,05 ± 0,05 ± 0,05		
Pomiar L i C		L od 10 nH do 60 μH			C od 5 pF do 60 nF		
Błąd pomiaru		± 1% ± 2% ± 5% ± 3nH ± 3ńH ± 3nH			± 1% ± 2% ± 5 % ± 3 pF ± 3 pF ± 3 pF		

Z układów rezonansowych wysuwają się na czoło w zastosowaniu praktycznym układy Q-metrów i układy rezonansowe mierzące metodą podstawienia. Układy Q-metrów są raczej konwencjonalne i powszech-



Rys. 22. Układ ideowy Q-metru z próbką pomiarową umieszczoną w jarzmie



Rys. 23. Układ ideowy miernika rezonansowego pracującego na zasadzie podstawiania

nie znane (rys. 22). Za pomocą nich można mierzyć współczynnik dobroci, a z odczytu pojemności rezonansowej C oblicza się indukcyjność L.

Dosyć ciekawe rozwiązanie techniczne mają mierniki rezonansowe firmy Rhode-Schwarz, które mierzą metodą podstawiania (rys. 23). Do-

prowadzając kolejno do rezonansu obwód z próbką (przy wyłączonej oporności R) i bez próbki, otrzymujemy zastępcze jego parametry w postaci:

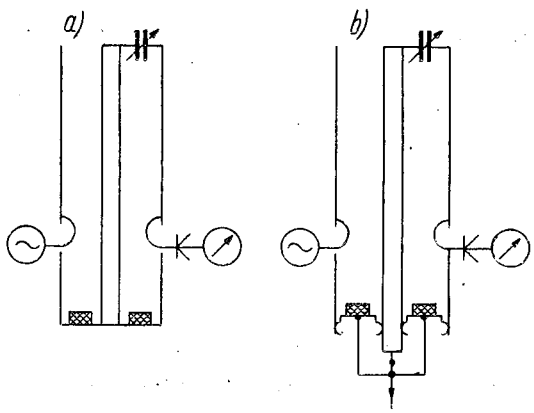
$$Y = G + j\omega C.$$

W wyniku otrzymujemy bądź bezpośrednio wartość pojemności C i oporności równoległej strat próbki $R = \frac{1}{G}$, bądź też wartość pojemności odpowiadającą indukcyjności $L = \frac{1}{\omega C}$ i oporności równoległej R. W miernikach firmy Rhode-Schwarz podzielono zakres pomiarowy od 0,1 do 100 MHz na dwa podzakresy: od 0,1 do 10 MHz (przyrząd typu VLU) oraz od 10 MHz do 100 MHz (przyrząd typu VLUK). Zakres pomiaru pojemności wynosi od 0 do 1000 pF do 10 MHz i od 0 do 100 pF do 100 MHz. Zakres pomiaru oporności od 1 kΩ do 10 MΩ. Błąd pomiaru C wynosi do 2%, błąd pomiaru R waha się od 5 — 30%.

W miernikach Rhode-Schwarza zasługuje na uwagę sposób regulacji oporności R, którą stanowi opornik transformowany przez diody tłumiące, dzięki czemu generator „widzi" zawsze na wejściu połączenia szeregowego diody i opornika (zbocznikowanego kondensatorem) oporność $R = \frac{R_w}{2}$, gdzie R_w — własna oporność opornika dla prądu stałego.

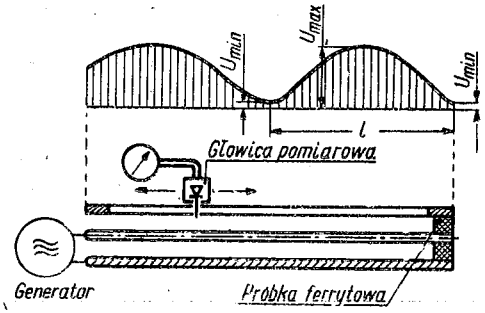
5.4. Pomiary w zakresie od 50 do 1000 MHz

W zakresie częstotliwości od 50 MHz stosowanie układów o stałych skupionych staje się bardziej kłopotliwe nie tylko ze względu na trudności wykonania samego układu (istnieją układy mostkowe pracujące



Rys. 24. Rezonator współosiowy: a) z regulowaną pojemnością, b) z regulowaną długością

do 60 MHz i Q-metry do 300 MHz), lecz ze względu na warunki pomiaru. Zastosowanie jednozwojowego jarzma pomiarowego pozwala na pomiar Q-metrem w zakresie do 200 — 250 MHz, istnieją również mierniki firmowe (Marconi) umożliwiające wyznaczenie $\operatorname{tg}\delta$ i ε_1 do 100 MHz. W zasadzie jednak powyżej 50 MHz wykonuje się pomiary prawie wyłącznie w układach o stałych rozłożonych. Do częstotliwości 300 MHz korzystne jest przy tym stosowanie rezonatora współosiowego zakończonego pojemnością lub o regulowanej długości (rys. 24). Powyżej 300



Rys. 25. Koncentryczna linia pomiarowa

MHz stosuje się pomiarowe linie koncentryczne (rys. 25). Podanych powyżej częstotliwości nie należy traktować rygorystycznie, gdyż praktycznie zawsze możliwe jest przesunięcie granicy pasma pomiarowego w górę lub w dół.

Przy pomiarze w rezonatorze współosiowym próbka umieszczona jest bezpośrednio wewnątrz rezonatora. Przy pomiarze natomiast w linii koncentrycznej na ogół trudno jest o dopasowanie wymiarów próbki do wymiarów linii i stosuje się jarmo jednozwojowe z pośrednim odcinkiem łączącym (w przypadku pomiaru ε) o oporności falowej równej oporności falowej linii.

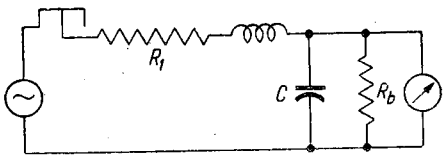
Przy pomiarze za pomocą rezonatora należy zastosować generator z precyzyjną skalą, umożliwiającą dokładne określenie odchyłek częstotliwości. Stosowanie dostrajania za pomocą kondensatora lub zmiany długości rezonatora jest raczej mniej wskazane ze względu na wpływ oporności styków, uniemożliwiający pomiar materiałów o dużej dobroci.

5.5. Wpływ układu pomiarowego na wyniki pomiaru

Zastosowany układ pomiarowy nie tylko określa dokładność pomiaru, uwarunkowaną klasą układu, lecz może zmienić w zasadniczy sposób wyniki pomiaru.

Wszystkie układy mostkowe zawierają elementy pojemnościowe, stałe i regulowane. Pojemność mostka widziana od strony próbki mierzonej

może na określonej częstotliwości doprowadzać do zjawiska rezonansu wypaczając całkowicie wynik pomiaru. W układach rezonansowych analogiczną rolę odgrywa szkodliwa pojemność układu dodająca się do pojemności własnej próbki. Na specjalną uwagę zasługuje wpływ stratności elementów wzorcowych układu pojemnościowego. W praktycznym wykonaniu na przykład kondensatory powietrzne uważa się za bezstratne. Tymczasem przy pomiarze próbek o dużym współczynniku dobro-



Rys. 26. Schemat ideowy Q-metru z uwzględnieniem upływności bocznikującej kondensator pomiarowy

ci nieuwzględnianie upływności kondensatorów pomiarowych zniekształca wynik czyniąc niemożliwe wyznaczenie bezwzględnej wartości kąta strat. Trudności te, nie występujące przy pomiarach wielkości dielektrycznych ferrytów (duża ich stratność pozwala na pominięcie wpływu stratności elementów wzorcowych), dają się odczuć przy pomiarach własności magnetycznych materiałów ferrytowych o dużej dobroci. W metodzie pomiaru np. za pomocą Q-metru nie bierze się na ogół pod uwagę upływności kondensatora i oporności wejściowej czynnej woltomierza lampowego (wskaźnika Q) (rys. 26) jak też oporności rzeczywistej doprowadzenia R_1. Po uwzględnieniu tych wpływów wzór na dobroć próbki przybierze postać:

$$Q_p = \frac{\mu_1}{\mu_1 - 1} \cdot \frac{C_0 - C_p}{C_p} \cdot \frac{1}{\frac{Q_0}{Q_p}\frac{C_0}{C_p} - \left[1 + \frac{2A}{A+1}\left(\frac{C_0}{C_p} - 1\right)\right]}, \quad (5-15)$$

$$A = \frac{1}{\omega^2 C_0^2 R_b R_1}$$

gdzie

C_0, C_p, Q_0, Q_p — odpowiednio wartości pojemności rezonansowych i dobroci pustego jarzma pomiarowego i jarzma z próbką, —

R_b — oporność bocznikująca kondensaor,

R_1 — oporność szeregowa strat.

Błąd wywołany obecnością oporności R_b może być wyeliminowany przez zastosowanie systemu strojenia bez zmiany pojemności kondensa-

tora. Jeśli bowiem potrafimy uczynić $C_0 = C_p$, to wówczas we wzorze (5—15).

$$\frac{C_0}{C_p} - 1 = 0$$

i odpada konieczność stosowania członu korekcyjnego.

Przy pomiarach w obwodach o stałych rozłożonych istotną rzeczą jest czułość układu, która przy pomiarach składowej rzeczywistej przenikalności jest jednakowa dla pomiarowej linii koncentrycznej i rezonatora wnękowego. Inaczej wygląda sprawa z pomiarem stratności, gdyż okazuje się, że dla rezonatora o tej samej dobroci (bez próbki) co linia pomiarowa względne zmiany dobroci wywołane wtrąceniem próbki są większe niż dla linii. Próbki więc o małej stratności jest wskazane mierzyć za pomocą rezonatora.

Przy pomiarach w układach rezonansowych należy baczną uwagę zwracać na wartość napięcia pomiarowego, która niejednokrotnie może być dosyć duża i może spowodować, że przebieg będzie zniekształcany przez wpływ strat na histerezę.

Wszystkie wymienione powyżej okoliczności jak też i inne, związane z konkretnym układem pomiarowym, sprawiają, że w wyniku pomiaru otrzymać można zupełnie fałszywe wyniki.

5.6. Przebieg pomiaru

Procedura pomiaru własności magnetycznych i dielektrycznych ferrytów w funkcji częstotliwości łączy w sobie zarówno czynności charakterystyczne dla pomiarów statycznych parametrów ferromagnetyków, jak i pomiarów impedancji przy wysokich częstotliwościach. Z momentów najbardziej charakterystycznych należałoby wziąć pod uwagę zagadnienie rozmagnesowania i efekt opóźnienia występujący zarówno przy pomiarach μ, jak i przy pomiarach ε. Częstokroć, aby móc zmierzyć ustaloną wartość μ czy ε, należy odczekać czas dostatecznie długi od chwili włączenia pola pomiarowego. Szczególnie silnie efekt opóźnienia magnetycznego daje się odczuć przy pomiarach charakterystyk temperaturowych. Przy pomiarach ferrytów o niewysokich przenikalnościach w pasmie w.cz. należy zwrócić uwagę na usunięcie z pola pomiaru pobliskich mas metalicznych, które mogą pozornie zwiększać składową strat przenikalności.

Jeśli chodzi o technikę wykonywania pomiarów za pomocą układów rezonansowych i obwodów o stałych rozłożonych, to należy zwrócić przede wszystkim uwagę na dokładne wyznaczenie pojemności rezonansowej, co ma szczególnie duże znaczenie przy małych różnicach pojem-

ności, występujących przy niektórych pomiarach. Dlatego jest wskazane określać wartość pojemności rezonansowej nie na podstawie maksimum wskazań woltomierza wskaźnikowego, lecz brać średnią arytmetyczną wartości pojemności, odpowiadających dwom jednakowym wychyleniom, leżącym symetrycznie na zboczach krzywej rezonansu. Przy pomiarach za pomocą linii koncentrycznej często w praktyce dla próbek o małej stratności nie można wyznaczyć współczynnika fali stojącej

$$\xi = \frac{U_{max}}{U_{mtn}}$$

z powodu niewystarczającego zakresu przyrządu. W tym przypadku korzystnie jest mierzyć kolejne wartości napięcia w punktach położonych od siebie bliżej niż ćwiartka fali. Wówczas

$$\frac{U_{max}}{U_{mtn}} = \xi = \frac{3 \cdot 10^4 \sqrt{\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2 - 1}}{\pi f (l_2 - l_1)}, \qquad (5-16)$$

gdzie:

U_2 i U_1 — napięcia w punktach odległych od siebie o $l_2 - l_1$, przy czym napięcie U_2 mierzone jest w punkcie położonym bliżej maksimum napięcia,

f — częstotliwość pomiarowa w MHz.

Metoda powyższa ma dodatkową zaletę w postaci możliwości rozszerzania zakresu pomiarowego linii w dół, gdyż nie jest tu wymagana długość linii równa co najmniej połówce fali.

Przy pomiarach za pomocą obwodów o stałych rozłożonych należy zwrócić uwagę na oporność styków, a szczególnie styków ruchomych, które wprowadzają element niestabilności pracy układu. Tym właśnie należy wytłumaczyć fakt, że najlepsze warunki pracy rezonatora współosiowego otrzymuje się wtedy, gdy częstotliwość traktujemy jako parametr zmienny.

5.7. Obliczenia

Obliczenia składowych przenikalności μ_1 i μ_2 i stałej dielektrycznej ε_1 i ε_2 przeprowadza się na podstawie wzorów wynikających z ogólnej teorii pomiaru. W praktyce spotykamy się na ogół z warunkami, że długość fali w powietrzu [z warunku (3—10)]

$$\lambda_p \gg a\sqrt{2(\varepsilon_1\mu_1 - \varepsilon_2\mu_2)}, \qquad (5-17)$$

gdzie a — wymiar próbki toroidalnej o kwadratowym przekroju. W tym przypadku korzystać można ze wzorów uproszczonych na indukcyjność i pojemność toroidu lub płytki, z których przeliczamy μ i ε.

W przypadku występowania rezonansu przestrzennego należy posługiwać się wzorami dokładnymi wychodząc z oporności „elektrycznej" i „magnetycznej" toroidu. Obliczenia w tym przypadku są niezmiernie skomplikowane. Efekt naskórkowości magnetycznej jest u ferrytów na ogół pomijalny, a występuje przeważnie wraz z efektem przestrzennym, i wpływ jego jest uwzględniony przez zastosowanie wyżej wspomnianych dokładnych wzorów. Natężenie pola magnetycznego w toroidzie obliczamy bądź z wzoru przybliżonego

$$H_{max} \approx \frac{0{,}57\, I_{sk} \cdot n}{r_2 + r_1}, \tag{5—18}$$

gdzie:

I_{sk} — wartość skuteczna prądu sinusoidalnego płynącego przez uzwojenie,

r_2, r_1 — promień zewnętrzny i wewnętrzny toroidu,

n — ilość zwojów pomiarowych,

bądź ze wzoru dokładnego, gdy stosunek grubości rdzenia do średnicy jest większy niż 0,2

$$H_{max} = \frac{0{,}2\sqrt{2}}{r_2 - r_1} \ln \frac{r_2}{r_1} I_{sk} \cdot n. \tag{5—19}$$

Oznaczenia do tego wzoru takie jak do wzoru (5—18).

Należy nadmienić, że wzory na indukcyjność podane w rozdziale 3 są wzorami dokładnymi w przeciwieństwie do przyjętego w praktyce wzoru

$$L = \frac{4n^2 h (r_2 - r_1) \mu_1}{r_2 + r_1} \cdot 10^{-9} [\mathrm{H}], \tag{5—20}$$

gdzie

h — wysokość toroidu w cm, a pozostałe oznaczenia jak wyżej.

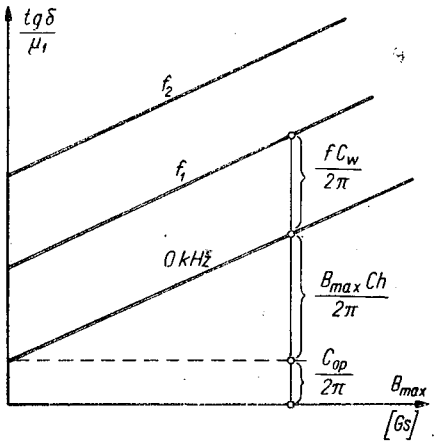
Warunek $\frac{r_2 - r_1}{r_1} < 0{,}2$ obowiązuje również w przypadku wzoru (5—20). Gdy warunek ten nie jest spełniony, wówczas należy posługiwać się wzorem

$$L = 2hn^2 \ln \frac{r_2}{r_1} \mu_1 \cdot 10^{-9}. \tag{5—21}$$

Współczynniki strat na histerezę, prądy wirowe i opóźnienie w zakresie częstotliwości do 100 kHz wyznacza się wykreślając (rys. 27) charakterystyki $\mathrm{tg}\,\delta = F(B_{max})$ przy co najmniej dwu częstotliwościach, a następnie wykreśla się trzecią ekstrapolowaną charakterystykę $\mathrm{tg}\,\delta = F(B_{max})$, odpowiadającą częstotliwości zerowej. Rysunek przedstawia

sposób graficznego wyznaczenia poszczególnych składowych. Analogiczne wyniki otrzyma się traktując częstotliwość jako zmienną, a indukcję magnetyczną jako parametr.

W tablicy zamieszczonej za tekstem są podane wzory na μ_1, μ_2 i ε_1 i ε_2 wynikające z pomiarów w różnych układach pomiarowych dla prób-



Rys. 27. Przebieg $\frac{\operatorname{tg}\delta}{\mu_1} = F(B_{max})$ przy różnych częstotliwościach. C_w, C_h, C_{op} odpowiednio współczynniki strat na prądy wirowe, histerezę i opóźnienie

bek toroidalnych (w przypadku μ_1, μ_2 oraz ε_1, ε_2) i płytek okrągłych (w przypadku ε_1 i ε_2). Podane wzory dotyczą — jak jest ogólnie przyjęte — szeregowego układu zastępczego rdzenia.

6. WNIOSKI KOŃCOWE

Przy pomiarach zespolonej przenikalności ferrytów należy dążyć do osiągnięcia takich warunków pomiaru, w których efekty przestrzenne są do pominięcia. Decydujący wpływ na błąd pomiaru ma nie tylko układ pomiarowy, lecz sposób przygotowania próbki i interpretacja otrzymanych wyników. Przy zastosowaniu jarzma pomiarowego jednozwojowego można rozszerzyć zakres częstotliwości pomiaru przenikalności w obwodach o stałych skupionych do około 200 MHz, a w dół do 10 MHz.

Pomiar stałej dielektrycznej zespolonej w funkcji częstotliwości nie napotyka na większe trudności ze względu na stosunkowo duże wartości ε występujące praktycznie w ferrytach, co pozwala na zaniedbanie wpływu pola brzegowego; duża stratność ferrytów umożliwia pominięcie wpływu upływności układu, bardzo istotnego przy pomiarze małostratnych dielektryków.

Z układów pomiarowych o stałych skupionych wysuwa się na czoło mostek z indukcyjnością wzajemną, umożliwiający bezpośredni pomiar stratności ferrytów o dużej dobroci. Układy pomiarowe o stałych rozło-

żonych stosowane są zależnie od zakresu częstotliwości pomiarowych i własności tworzywa i dla mniejszych częstotliwości pasma ukf zalecić raczej należy rezonator współosiowy, dla większych — pomiarową linię koncentryczną. Linia ta odznacza się dużą uniwersalnością, gdyż przy zastosowaniu elementów przedłużających można przeprowadzić za pomocą niej pomiary począwszy od dziesiątków MHz.

Traktując próbkę ferrytową jako element liniowy można wyznaczyć przebieg częstotliwościowy składowej urojonej μ_2 (ε_2) na podstawie znanego przebiegu składowej rzeczywistej. Daje to możność sprawdzenia prawidłowości przyjętej metodyki pomiaru zespolonych wartości μ i ε i wyznaczenia przebiegu $\mu_2(f)$ lub $\varepsilon_2(f)$ w przypadku, gdy układ pomiarowy nie pozwala na wyznaczenie dużych współczynników stratności.

Autor składa serdeczne podziękowanie p. mgrowi inż. Mieczysławowi Żbikowskiemu za przejrzenie pracy i szereg cennych uwag.

Ośrodek Badawczy Sprzętu Łączności

WYKAZ LITERATURY

1. Polder D.: Phil. Magaz., vol. 40, 1949, str. 99.
2. Poliwanow K. M.: Fiziczeskije osnowy elektrotiechniki. Goseniergoizdat, 1950.
3. Poliwanow K. M.: K tieorii opredielenja pronicajemosti mietalliczeskich fierromagnietikow i magnietodjelektrikow po dannym opytow. — Elektriczestwo Nr 3/1954, str. 19-29.
4. Brockman F. G., Dowling P. H., Steneck W. G.: Dimensional Effects Resulting from a High Dielectric Constant Found in a Ferromagnetic Ferrite. — Physical Review, vol. 77, 1950, str. 85-93.
5. Bady I., Franklin R. J.: The Measurements of Permeability and Q of Magnetic Materials in the Range 50-300 Mc. — IRE National Convention Record, vol. 15, Part 5, 1957, str. 135—146.
6. Lindenhovius H. J., Van der Breggen J. C.: Measurement of Permeability and Magnetic Losses of Nonconducting Ferromagnetic Material at High Frequencies. — Philips Research Report, vol. 3, 1948, str. 37 — 45.
7. Rado G. T., Wright R. W., Emerson W. H.: Two Mechanisms of Dispersion in a Ferrite. — Physical Review, vol. 80, 1950, str. 273 — 280.
8. Kramers H. A.: Atti del Congresso Internationale del Fisci. Como, v. 2, 1927, str. 545.
9. Bode H. W.: Circuit Analysis and Feadback Amplifiers Design. D. van Nostrand Co. Imp. N. York 1945, str. 242 — 261.
10. Poliwanow K. M., Kuznieckij W. W.: Obszczije swojstwa liniejnych sistiem. — Izwiestja Akadiemii Nauk SSSR, Sieria fiziczeskaja t. 20/56, str. 1310—1317.
11. Wilde H.: Die Vorteile der Gegeninduktivitätsmessbrücke bei ferromagnetischen Messungen. — Archiv der Elektrischen Übertragung, Bd. 6/1952, str. 354—360.

12. Lynch A. C.: A Method of Precise Measurement of Permittivity and Losses of Sheet Specimens. — Proceedings of IEE vol. 102, 1957, str. 359 — 363.
13. Conrad E. E., Porter C. S., Doctor N. J., Franklin P. J.: Extension of the "Thin-Sample Method" for the Measurement of Initial Complex Permeability and Permittivity. — Journal of Applied Physics, vol. 27, 1956, str. 346 — 350.
14. Feldtkeller R., Kolb O.: Die komplexe Permeabilität eines hochpermeablen Ferritkernes. — Zeitschrift für Angewandte Physik, Bd. 4, 1952, str. 448 — 451.

А. ГУРАЛЬ

ИЗМЕРЕНИЯ НЕКОТОРЫХ МАГНИТНЫХ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАГНИТНО-МЯГКИХ ФЕРРИТОВ В ПОЛОСЕ ЧАСТОТ ОТ 10 ГЦ ДО 1000 МГЦ

Резюме

В работе описаны зависимости между первичными параметрами материала μ_1, μ_2, ε_1, ε_2 и вторичными величинами, полученными в результате измерения импеданса вводимого испытательным образцом в измерительный контур в слабом поле высокой частоты. Рассмотрены основные вопросы измерительной техники в зависимости от частоты и в условиях отсутствия явлений гиромагнитного рода (без наличия сильных, наложенных постоянных полей).

Приведены общие фомулы дающие возможность определения параметров μ_1, μ_2 а также ε_1, ε_2 на основании известных импедансов вводимых измерительным образцом. Для практических целей предлагается использование упрощённых формул, полученных принимая незначительную „электрическую" величину испытательного образца. Приведена сводка формул для расчёта составляющих на основании измерений тороидальных образцов в разных измерительных схемах с сосредоточенными и распределёнными постоянными, принимая, что длина электромагнитной плоской волны в ферритном образце значительно больше геометрической величины самого образца. Используя общие свойства линейных схем, можно проверить полученные экспериментально частотные характеристики μ и ε.

Обсуждено влияние ряда факторов на погрешность измерения.

A. GÓRAL

MEASUREMENTS OF CERTAIN MAGNETIC AND DIELECTRIC PROPERTIES OF MAGNETICALLY SOFT FERRITES WITHIN A FREQUENCY BAND FROM 10 Hz TO 1000 MHz

Summary

Discussed in the paper are relations between the primary parameters of the material μ_1, μ_2, ε_1, ε_2 and the secondary magnitudes obtained as a result of the

measurement of the impedance inserted by the sample into the measurement circuit in a weak field of high frequency. The problems chiefly discussed concern the measurement technique in the frequency function under the conditions of the lack of gyromagnetic effects (without the presence of strong constant fields applied).

General formulae are given enabling the parameters μ_1, μ_2 and ε_1, ε_2 to be determined from the known impedances inserted by the measurement sample. For practical purposes, it has been postulated to use simplified formulae obtained under an assumption of small "electrical" dimensions of the sample. Formulae are summarized for calculating components on the basis of the measurements of toroidal samples in different measurement systems with lumped and distributed constants, the length of the plane electromagnetic wave in the ferrite sample being assumed to be considerably greater than the geometrical dimensions of the sample. In terms of the general properties of linear systems, it is possible to verify the frequency characteristics μ and ε, which have been obtained experimentally.

The influence of a number of factors on the measurement error is discussed.