

Podamy najpierw kilka pojęć wstępnych.

O ciągu podstawowym $\{f_n(t)\}$ będziemy mówić, że jest ciągiem rzędu wykładniczego, jeśli:

- 1) istnieją $\mathcal{L}$ -transformaty $\mathcal{L} f_n(t)$ ¹⁾ wszystkich wyrazów $f_n(t)$;
- 2) istnieje taka liczba $k \geq 0$, że ciąg $\{F_n(t)\}$, gdzie $F_n(t)$ jest wyrażone przez (92) jest niemal jednostajnie zbieżny w przedziale $[0, +\infty)$ do funkcji $F(t)$ i przy tym istnieją takie liczby $M > 0$ i $a \geq 0$ niezależne od n , że przy: $0 \leq t < +\infty$

$$|F_n(t)| \leq Me^{at}. \quad (102)$$

Dystrybucję f będziemy nazywać dystrybucją rzędu wykładniczego, jeśli można ją przedstawić w postaci $f = [f_n(t)]$, gdzie $\{f_n(t)\}$ jest ciągiem rzędu wykładniczego.

Jeśli $f(t)$ jest dystrybucją rzędu wykładniczego, to wprost z określenia wynika, że:

$$f(t) = F^{(k)}(t)$$

(różniczkowanie dystrybucyjne), a przy tym funkcja ciągła $F(t)$, do której jest zbieżny ciąg $\{F_n(t)\}$ określony przez (92) — wobec (102) — spełnia także nierówność:

$$|F(t)| \leq Me^{at}, \quad (103)$$

tzn. jest rzędu wykładniczego.

Można wykazać [16], że jest i odwrotnie, tzn. jeśli $F(t)$ jest funkcją ciągłą spełniającą w przedziale $[0, +\infty)$ nierówność (103), to każda jej pochodna dystrybucyjna $F^{(k)}(t)$ jest dystrybucją rzędu wykładniczego.

Wynika stąd natychmiast, że jeżeli f jest dystrybucją rzędu wykładniczego, to dystrybucja f' jest też rzędu wykładniczego.

Jeśli $f(t)$ jest funkcją ciągłą i istnieje $\mathcal{L} f(t)$, to zgodnie ze znanym twierdzeniem z rachunku operatorowego²⁾ mamy:

$$\left| \int_0^t f(\tau) d\tau \right| \leq Me^{at}, \quad (104)$$

a więc dystrybucja $[f(t)]$ jest rzędu wykładniczego.

Ponieważ każda funkcja $f(t)$ lokalnie całkowalna może być przedstawiona w postaci (96), a przy tym $\int_0^t f(\tau) d\tau$ jest funkcją ciągłą, spełniającą warunek (104), więc $f(t)$, jako pochodna, jest też rzędu wykładniczego.

¹⁾ Transformatę Laplace'a funkcji $f_n(t)$ będziemy oznaczać symbolem $\mathcal{L} f_n(t)$ pozostawiając symbol $\mathcal{L}[f_n(t)]$ na oznaczanie $\mathcal{L}$ -transformaty dystrybucji $[f_n(t)]$.

²⁾ Na przykład G. Doetsch „Handbuch d. Laplace — Transformation”, t. I, str. 87.

Widzimy stąd, że zbiór dystrybucji rzędu wykładniczego zawiera w sobie zbiór wszystkich funkcji $\mathcal{L}$ -transformowalnych traktowanych jako dystrybucje.

Możemy teraz określić $\mathcal{L}$ -transformatę dystrybucji rzędu wykładniczego [16].

Jeśli f jest dystrybucją rzędu wykładniczego, tzn. można ją przedstawić w postaci $f = [f_n(t)]$, gdzie $\{f_n(t)\}$ jest ciągiem rzędu wykładniczego, to $\mathcal{L}$ -transformatę dystrybucji f definiujemy jako:

$$\mathcal{L}f = \mathcal{L}[f_n(t)] \stackrel{df}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}f_n(t). \quad (105)$$

Założmy, że $f = [f_n(t)]$ jest dystrybucją rzędu wykładniczego. Ponieważ między funkcjami $f_n(t)$ i $F_n(t)$ zachodzi związek (93) i $\mathcal{L}f_n(t)$ istnieje, wobec tego mamy:

$$\mathcal{L}f_n(t) = s^k \mathcal{L}F_n(t). \quad (106)$$

Nietrudno jest wykazać (szczegóły pomijamy), iż wobec nierówności (102) i zbieżności niemal jednostajnej $F_n(t) \rightrightarrows F(t)$ mamy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}F_n(t) = \mathcal{L}F(t).$$

i wobec tego:

$$\mathcal{L}f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}f_n(t) = s^k \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}F_n(t) = s^k \mathcal{L}F(t). \quad (107)$$

Związek (107) dowodzi, iż każda dystrybucja rzędu wykładniczego posiada $\mathcal{L}$ -transformatę i że transformata ta ma zawsze postać: $\mathcal{L}f(t) = s^k \mathcal{L}F(t)$, gdzie $\mathcal{L}F(t)$ jest transformatą pewnej funkcji ciągłej rzędu wykładniczego.

Z równości (107) wynika także, że jeśli $\{f_n(t)\} \sim \{g_n(t)\}$ i oba te ciągi są ciągami rzędu wykładniczego, to $\lim \mathcal{L}f_n(t) = \lim \mathcal{L}g_n(t)$, a więc transformata dystrybucji nie zależy od wyboru ciągu ją reprezentującego.

Ze związku (107) można także wyprowadzić zasadniczej wagi twierdzenie: jeśli $f(t)$ jest dowolną dystrybucją rzędu wykładniczego, to:

$$\mathcal{L}f'(t) = s \mathcal{L}f(t). \quad (108)$$

Przedstawimy ideę dowodu (108). Z założenia wynika, że $\mathcal{L}f(t)$ można przedstawić w postaci (107). Z drugiej strony można zawsze tak dobrać ciąg $\{\Phi_n(t)\}$: $\Phi_n(t) \rightrightarrows F(t)$, $\Phi_n(t) \in C^{k+1}(0, +\infty)$, $|\Phi_n(t)| \leq Me^{at}$, $\Phi_n(0) = \Phi'_n(0) = \dots = \Phi_n^{(k)}(0) = 0$, aby: $\Phi_n^{(k+1)}(t) = \varphi_n(t)$, $f'(t) = [\varphi_n(t)]$ i $\mathcal{L}\varphi_n(t)$ istniały.

Zgodnie ze (107) będzie wówczas:

$$\mathcal{L}f'(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}\varphi_n(t) = s^{k+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}\Phi_n(t) = s^{k+1} \mathcal{L}F(t) = s \mathcal{L}f(t),$$

a więc (108).

Zwróćmy jeszcze uwagę na oczywiste własności, iż jeśli f i g są dowolnymi dystrybucjami rzędu wykładniczego, a k dowolną liczbą, to:

$$\mathcal{L}(f + g) = \mathcal{L}f + \mathcal{L}g; \quad \mathcal{L}kf = k \mathcal{L}f, \quad (109)$$

a więc $\mathcal{L}$ -przekształcenie pozostaje liniowe.

Rozpatrzmy kilka prostych przykładów.

a) Niech $f(t)$ będzie dowolną funkcją ciągłą $\mathcal{L}$ -transformalną. Przyjmując: $f_n(t) = f(t)$, $F_n(t) = F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$, mamy zgodnie ze (107):

$$\mathcal{L}[f(t)] = s \mathcal{L}F(t) = s \frac{1}{s} \mathcal{L}f(t) = \mathcal{L}f(t), \quad (110)$$

a więc $\mathcal{L}$ -transformata dystrybucji $[f(t)]$ jest identyczna z $\mathcal{L}$ -transformatą funkcji $f(t)$.

Analogiczny wniosek można łatwo wyprowadzić dla funkcji $f(t)$ lokalnie całkowalnej.

b) Ponieważ ($a \geq 0$):

$$\mathcal{L}\mathbf{1}(t-a) = \frac{1}{s} e^{-as}, \quad (111)$$

więc zgodnie ze (108):

$$\mathcal{L}\delta(t-a) = \mathcal{L} \frac{d}{dt} \mathbf{1}(t-a) = s \mathcal{L}\mathbf{1}(t-a) = e^{-as}, \quad (112)$$

w szczególności:

$$\mathcal{L}\delta(t) = 1 \quad (113)$$

Analogicznie dostajemy:

$$\mathcal{L}\delta^k(t-a) = s^k e^{-as}; \quad \mathcal{L}\delta^{(k)}(t) = s^k. \quad (114)$$

c) Sprawdźmy związek (108) dla pochodnej dystrybucyjnej $[f(t)]'$ funkcji ciągłej $f(t)$, wyrażonej wzorem (99). Założenia przyjmujemy te same, co w rozdz. 3.5 f). Mamy zgodnie z (99) i (109):

$$\mathcal{L}[f(t)]' = \mathcal{L}[f'(t)] + f(0) \mathcal{L}\delta(t),$$

przy czym wobec (109):

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \mathcal{L}f'(t) = s \mathcal{L}f(t) - f(0).$$

Uwzględniając (113) mamy ostatecznie:

$$\mathcal{L}[f(t)]' = s \mathcal{L}f(t) - f(0) + f(0) = s \mathcal{L}f(t) = s \mathcal{L}[f(t)] \quad (115)$$

zgodnie ze (108).

2.7. Splot dystrybucji w przedziale $[0, +\infty)$

Na zakończenie krótko omówimy jeszcze kilka podstawowych zagadnień dotyczących splotu dystrybucji w przedziale $[0, +\infty)$.

Jeśli $f(t)$ i $g(t)$ są funkcjami określonymi w przedziale $[0, +\infty)$ (lub określonymi na całej osi i równymi zero przy $-\infty < t < 0$), to ich splot ma postać ($t \geq 0$):

$$f(t) \star g(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau. \quad (116)$$

Niech $\{f_n(t)\}$ i $\{g_n(t)\}$ będą dwoma dowolnymi ciągami podstawowymi. Wówczas nietrudno jest sprawdzić, że ciąg $\{w_n(t)\}$, gdzie:

$$w_n(t) = f_n(t) \star g_n(t), \quad (117)$$

jest też ciągiem podstawowym.

Jeśli więc: $f = [f_n(t)]$ i $g = [g_n(t)]$ są dwoma dowolnymi dystrybucjami, to ich splotem $w = f \star g$ będziemy nazywać dystrybucję [16]:

$$w = [w_n(t)], \quad (118)$$

gdzie $w_n(t)$ jest określone przez (117).

Można łatwo sprawdzić, że tak określony splot dystrybucji zachowuje formalnie wszystkie własności splotu funkcji ciągłych i sprowadza się do zwykłego splotu, gdy f i g są funkcjami ciągłymi.

W szczególności słuszne są następujące proste zależności [16] (por. 1.8; dowody pomijamy):

$$(f \star g)' = f' \star g = f \star g', \quad (119)$$

$$f \star \delta = \delta \star f = f, \quad (120)$$

$$f \star \delta^{(n)} = \delta^{(n)} \star f = f^{(n)}, \quad (121)$$

gdzie f i g są dowolnymi dystrybucjami (różniczkowanie dystrybucyjne!) oraz (twierdzenie Borela, por. 1.8)

$$\mathcal{L}(f \star g) = \mathcal{L}f \cdot \mathcal{L}g, \quad (122)$$

jeśli f i g są dystrybucjami rzędu wykładniczego.

CZĘŚĆ II — ZASTOSOWANIA

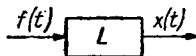
3. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE OBWODÓW

Równania różniczkowe obwodów układane na podstawie praw Kirchhoffa nie dadzą się w ogólnym przypadku rozpatrywać w sposób poprawny na gruncie klasycznej teorii równań różniczkowych (tj. w dziedzinie funkcyjnej) i dla ścisłego traktowania wymagają sformułowania dystrybucyjnego.

Dla przykładu niech L (rys. 6) oznacza dowolny układ transmisyjny liniowy opisywany równaniem:

$$\sum_{k=0}^n a_k x^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^m b_k f^{(k)}(t), \quad (123)$$

które można uzyskać przez formalne rugowanie niewiadomych z układu równań wynikającego z praw Kirchhoffa. Równanie (123) jest tylko wte-



Rys. 6. Układ transmisyjny liniowy

dy równaniem różniczkowym „funkcyjnym” (tj. w klasycznym rozumieniu), jeśli wymuszenie $f(t)$ jest klasy C^m (względnie klasy C^{m-1} z przedziałami regularną m -tą pochodną), a więc tylko w sztucznie wyodrębnionym przypadku szczególnym. Ogólnie biorąc, przy dowolnym wymuszeniu $f(t)$ równanie (123) traci sens w dziedzinie funkcyjnej, jednakże w pełni sens ten zachowuje jako równanie dystrybucyjne, tj. przy traktowaniu wymuszenia $f(t)$ i rozwiązania $x(t)$ jako dystrybucji.

Podstawowe znaczenie dla teorii obwodów liniowych ma zatem równanie¹⁾:

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)x(t) = f(t), \quad (124)$$

gdzie:

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad (125)$$

w którym zarówno $f(t)$, jak i $x(t)$ są dystrybucjami.

Omówimy pokrótce niektóre własności równań typu (124) i ich zastosowania.

¹⁾ W pracy [8] rozpatrzone są obszernie równania różniczkowo-całkowe obwodów typu:

$$A x'(t) + B x(t) + C \int_0^t x(\tau) d\tau = f(t)$$

oraz ich rozwiązania w przypadku, gdy prawa strona $f(t)$ jest dystrybucją.

3.1. Rozwiązanie elementarne

Równanie (124) przy $a_k = \text{const}$ można przedstawić w postaci równania spłotowego:

$$\alpha \star x = f, \quad (126)$$

gdzie:

$$\alpha = P\left(\frac{d}{dt}\right)\delta = \sum_{k=0}^n a_k \delta^{(k)}(t). \quad (127)$$

Rozwiązaniem elementarnym równania (126)¹⁾ nazwiemy każdą dystrybucję h spełniającą równanie

$$\alpha \star h = \delta. \quad (128)$$

Rozwiązanie elementarne jest określone z dokładnością do rozwiązań równania:

$$\alpha \star x = 0, \quad (129)$$

a więc w naszym przypadku [tj. gdy α jest wyrażone przez (117)] z dokładnością do rozwiązania ogólnego równania jednorodnego:

$$\sum_{k=0}^n a_k x^{(k)}(t) = 0. \quad (130)$$

Jeśli h jest rozwiązaniem elementarnym (126), to wówczas²⁾ zgodnie ze (128) mamy:

$$\alpha \star (h \star f) = (\alpha \star h) \star f = \delta \star f = f,$$

a więc

$$x = h \star f \quad (131)$$

jest rozwiązaniem równania (126).

Przypadkami szczególnymi rozwiązania elementarnego są funkcje Greena przy rozmaicie formułowanych problemach granicznych.

¹⁾ Podstawiając za α rozmaite dystrybucje można w postaci (126) zapisywać rozmaite typy równań. Do wszystkich takich równań można odnieść pojęcie rozwiązania elementarnego i wynikające z niego wnioski [35]. Na przykład, jeśli

$$\alpha = \sum a_k \delta(t - t_k),$$

to równanie (126) jest równaniem różnicowym, a przy

$$\alpha = a(t) + \delta(t)$$

równaniem całkowym.

²⁾ Wymaga to założenia o istnieniu spłotu $h \star f$, a więc np. założenia, że f jest dystrybucją o nośniku ograniczonym.

Zwracamy uwagę na to, że zagadnienia rozwiązywania równań różniczkowych dystrybucyjnych typu (124) o stałych współczynnikach sprowadzają się w zasadzie do wyznaczania w dziedzinie dystrybucji rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego (124). Można bowiem pokazać [11], że równanie-jednorodne

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)x(t) = 0 \quad (132)$$

nie posiada w dziedzinie dystrybucji żadnych innych rozwiązań prócz klasycznych, a więc jego dystrybucyjne rozwiązanie ogólne jest identyczne z klasycznym.

3.2. Przykłady

Postaramy się teraz na kilku bardzo prostych przykładach objaśnić metody i specyfikę wyznaczania rozwiązań równań dystrybucyjnych (np. rozwiązań elementarnych) w różnych ujęciach.

a) Bezpośrednie wyznaczanie rozwiązania elementarnego. Rozpatrzmy równanie (124) i znajdziemy jego rozwiązanie elementarne, tj. rozwiązanie równania ($a_n \neq 0$).

$$\sum_{k=0}^n a_k h^{(k)}(t) = \delta(t). \quad (133)$$

Niech funkcje $u_1(t)$, $u_2(t)$, ..., $u_n(t)$ stanowią układ fundamentalny rozwiązań równania jednorodnego. Rozwiązania równania (133) można wówczas poszukiwać w postaci funkcji:

$$h(t) = \begin{cases} h_1(t) = \sum_{\nu=1}^n c_\nu u_\nu(t); & t < 0 \\ h_2(t) = \sum_{\nu=1}^n d_\nu u_\nu(t); & t > 0 \end{cases} \quad (134)$$

i tak dobrać stałe c_ν i d_ν , aby spełnione były warunki:

$$h_1(0) = h_2(0); \quad h_1'(0) = h_2'(0); \quad \dots; \quad h_1^{(n-2)}(0) = h_2^{(n-2)}(0); \quad (135)$$

$$h_2^{(n-1)}(0) - h_1^{(n-1)}(0) = \frac{1}{a_n}.$$

Przy spełnieniu warunków (135) funkcja $h(t)$ określona przez (134) spełnia równanie (133). Aby to sprawdzić, obliczamy funkcjonal:

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k h^{(k)}, \varphi \right) = \sum_{k=0}^n a_k (h^{(k)}, \varphi).$$

Wobec (134) i (135) mamy:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} a_k (h^{(k)}, \varphi) &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_{-\infty}^{+\infty} h^{(k)}(t) \varphi(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^0 \sum_{k=0}^{n-1} a_k h_1^{(k)}(t) \varphi(t) dt + \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k h_2^{(k)}(t) \varphi(t) dt \end{aligned}$$

oraz — por. (20) —

$$\begin{aligned} a_n (h^{(n)}, \varphi) &= a_n (h^{(n-1)}, -\varphi') = -a_n \int_{-\infty}^0 h_1^{(n-1)}(t) \varphi'(t) dt + \\ &- a_n \int_0^{\infty} h_2^{(n-1)}(t) \varphi'(t) dt = a_n [h_2^{(n-1)}(0) - h_1^{(n-1)}(0)] \varphi(0) + \\ &+ a_n \int_{-\infty}^0 h_1^{(n)}(t) \varphi(t) dt + a_n \int_0^{\infty} h_2^{(n)}(t) \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Łącząc razem otrzymane wyniki dostajemy uwzględniając (135):

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^n a_k h^{(k)}, \varphi \right) &= \varphi(0) + \int_{-\infty}^0 \sum_{k=0}^n a_k h_1^{(k)}(t) \varphi(t) dt + \\ &+ \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k h_2^{(k)}(t) \varphi(t) dt = \varphi(0), \end{aligned}$$

a więc — por. (8) — równanie (133) jest istotnie spełnione.

Jeśli oznaczymy: $c_\nu - d_\nu = g_\nu$, to z warunków (135) wynika układ równań liniowych dla różnic g_ν :

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n g_\nu u_\nu(0) &= 0; \quad \sum_{\nu=1}^n g_\nu u'_\nu(0) = 0; \quad \dots; \quad \sum_{\nu=1}^n g_\nu u_\nu^{(n-2)}(0) = 0; \\ \sum_{\nu=1}^n g_\nu u_\nu^{(n-1)}(0) &= -\frac{1}{a_n} \end{aligned}$$

posiadający zawsze jednoznaczne rozwiązanie.

Rozwiązanie elementarne (134) nie jest więc określone jednoznacznie (por. 3.1), lecz jedynie z dokładnością do rozwiązań równania jednorodnego.

Na przykład dla obwodu szeregowego RL , tj. dla równania:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \delta(t), \quad (136)$$

mamy:

$$u_1(t) = e^{-\frac{R}{L}t}; \quad c_1 - d_1 = -\frac{1}{L}$$

i wobec tego rozwiązanie elementarne ma postać

$$i(t) = c_1 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \mathbf{1}(t), \quad (137)$$

gdzie c_1 jest stałą dowolną. Gdyby zażądać spełnienia warunku: $i(0-) = 0$, wówczas $c_1 = 0$ i dostajemy:

$$i(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t}, \quad (138)$$

tj. funkcję Greena dla problemu początkowego.

Warunek: $i(0-) = 0$ jest równoznaczny tutaj z warunkiem, aby $i(t) = 0$ przy $-\infty < t < 0$ [por. 3.2c)].

b) Przekształcenie Fouriera dla przedziału $(-\infty, +\infty)$. Zastosujemy do równania (126) z prawą stroną równą $\delta(t)$, przekształcenie Fouriera (por. 1.8). Otrzymamy:

$$\tilde{\alpha} \tilde{x} = 1 \quad (139)$$

lub — wobec (127) i (67) —

$$P(i\omega) \tilde{x} = 1. \quad (140)$$

Równanie (140) ma zawsze (por. [12]) rozwiązanie w postaci:

$$\tilde{x} = \frac{1}{P(i\omega)}, \quad (141)$$

jednakże nie jest ono jedyne. Powodem tego jest fakt, iż mogą istnieć dystrybucje różne od zera, spełniające równanie:

$$P(i\omega) \tilde{x} = 0$$

lub, co na jedno wychodzi¹⁾ (por. 3.1):

¹⁾ Przypominamy, iż chodzi tu o dystrybucyjny odpowiednik splotu w przedziale $(-\infty, +\infty)$. Jak wiadomo ([22], str. 123), już nawet w dziedzinie funkcji ciągłych w przedziale $-\infty < t < +\infty$ nie obowiązuje twierdzenie Titchmarsha, tzn. równość: $f * g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = 0$ może być spełniona także w przypadku, gdy żadna z funkcji f i g nie jest równa zeru.

$$\alpha \star x = 0.$$

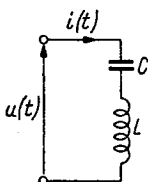
Rozpatrzmy najprostszy przykład. Równanie obwodu LC (rys. 7) ma postać

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = u(t)$$

lub

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + a^2 q = u_1(t),$$

gdzie $q(t)$ jest ładunkiem kondensatora, $u_1(t) = \frac{1}{L} u(t)$, $a^2 = \frac{1}{LC}$.



Rys. 7. Obwód LC pobudzany napięciowo

Poszukując rozwiązania elementarnego poddajemy równanie:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + a^2 q = \delta(t) \quad (143)$$

przekształceniu Fouriera. Dostaniemy:

$$(-\omega^2 + a^2) \tilde{q} = 1. \quad (144)$$

Rozwiązanie równania (144) ma postać:

$$\tilde{q} = \frac{1}{-\omega^2 + a^2} + k_1 \delta(\omega + a) + k_2 \delta(\omega - a), \quad (145)$$

bowiem przy dowolnych stałych k_1 i k_2 zgodnie z (17):

$$k_1 (-\omega^2 + a^2) \delta(\omega + a) = k_1 (-a^2 + a^2) \delta(\omega + a) = 0,$$

$$k_2 (-\omega^2 + a^2) \delta(\omega - a) = k_2 (-a^2 + a^2) \delta(\omega - a) = 0.$$

Odróżnia to w sposób istotny spłot w przedziale $(-\infty, +\infty)$ od spłotu w przedziale $(0, +\infty)$, gdyż w tym ostatnim przypadku równość

$$f \star g = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau = 0$$

może być spełniona tylko wtedy, gdy któraś z funkcji f lub g jest tożsamościowo równa zeru (twierdzenie Titchmarsh'a, [22]).

Wyrażenie (145) można przepisać w postaci:

$$\tilde{q} = \frac{1}{a} \left[\frac{a}{-\omega^2 + a^2} + i \frac{\pi}{2} \delta(\omega + a) - i \frac{\pi}{2} \delta(\omega - a) \right] + \\ + c_1 \pi [\delta(\omega + a) + \delta(\omega - a)] + c_2 \pi [\delta(\omega + a) - \delta(\omega - a)],$$

a stąd wobec (64)¹⁾

$$q(t) = \frac{1}{a} \sin at \cdot \mathbf{1}(t) + c_1 \cos at + c_2 \sin at, \quad (146)$$

gdzie c_1 i c_2 są stałymi dowolnymi. Przyjmując: $q(0-) = q'(0-) = 0$ dostaniemy: $c_1 = c_2 = 0$, a więc rozwiązanie elementarne (146) przechodzi w funkcję Greena dla problemu początkowego:

$$q(t) = \frac{1}{a} \sin at \cdot \mathbf{1}(t). \quad (147)$$

Warunek: $q(0-) = q'(0-) = 0$ jest tutaj równoznaczny z warunkiem, aby: $q(t) = 0$ przy $-\infty < t < 0$ [por. 3.2c].

c) Przekształcenia Laplace'a dla przedziału $[0, +\infty)$. Rozpatrzmy teraz równanie (124) lub (126) przyjmując, że chodzi teraz o dystrybucje określone w przedziale $[0, +\infty)$ (por. 2.5 — 2.9).

Zgodnie z przyp. 3 na str. 398 jest to równoznaczne z przyjmowaniem, że $x(t) = 0$ oraz $f(t) = 0$ przy $-\infty < t < 0$. W tym przypadku więc automatycznie narzuca się warunki początkowe zerowe:

$$x(0-) = x'(0-) = \dots = x^{(n-1)}(0-) = 0. \quad (148)$$

Dokonując teraz przekształcenia Laplace'a równania (126) z prawą stroną równą $\delta(t)$ dostaniemy [por. (113), (122)]

$$\mathcal{L} a \cdot \mathcal{L} x = 1 \quad (149)$$

lub wobec (127) i (114):

$$P(s) \mathcal{L} x = 1.$$

Równanie to posiada dokładnie jedno rozwiązanie:

$$\mathcal{L} x = \frac{1}{P(s)} \quad (150)$$

¹⁾ Korzystamy tu ze związku:

$$\mathcal{F} \sin at \cdot \mathbf{1}(t) = \frac{a}{-\omega^2 + a^2} + i \frac{\pi}{2} [\delta(\omega + a) - \delta(\omega - a)],$$

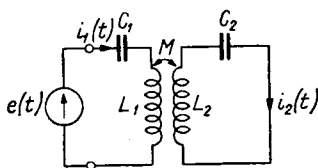
o którym będzie mowa w rozdz. 4.1 — wzór (194).

będące zawsze $\mathcal{L}$ -transformatą w zwykłym sensie (tj. funkcyjnym). Rozwiązanie elementarne ma więc postać:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} P(s) \quad (151)$$

i znika, zgodnie z poprzednimi uwagami, przy $t < 0$.

Opisane postępowanie nie różni się rachunkowo niczym od „normalnego” rozwiązywania równania przy pomocy rachunku operatorowego z formalnym wprowadzeniem transformat δ -funkcji i jej pochodnych [26].



Rys. 8. Dwa obwody sprzężone

Dla przykładu rozpatrzmy układ jak na rys. 8, którego równania (por. G. Doetsch „Handbuch d. Laplace Transformation” t. II, str. 319) względem ładunków q_1 i q_2 obu kondensatorów można napisać w postaci ($t \geq 0$):

$$L_1 q_1'' + \frac{1}{C_1} q_1 + M q_2'' = e(t), \quad (152)$$

$$M q_1'' + L_2 q_2'' + \frac{1}{C_2} q_2 = 0$$

lub przy założeniu sprzężenia idealnego ($M^2 = L_1 L_2$):

$$\frac{1}{C_1} q_1 - \frac{M}{L_2 C_2} q_2 = e(t), \quad (153)$$

$$M q_1'' + L_2 q_2'' + \frac{1}{C_2} q_2 = 0.$$

Traktując równanie (153) dystrybucyjnie zapiszemy je w postaci (używamy symboliki stosowanej w rozdz. 2.5):

$$\frac{1}{C_1} [q_1] - \frac{M}{L_2 C_2} [q_2] = [e(t)], \quad (154)$$

$$M [q_1'] + L_2 [q_2'] + \frac{1}{C} [q_2] = 0.$$

Różnicując (dystrybucyjnie) pierwsze z tych równań dostajemy:

$$\frac{1}{C_1} [q_1]'' - \frac{M}{L_2 C_2} [q_2]'' = [e(t)]''. \quad (155)$$

Jeśli przyjmiemy — por. (99) —

$$[q_1]'' = [q_1']; \quad [q_2]'' = [q_2'], \quad (156)$$

to jest to równoznaczne z przyjęciem warunków początkowych zerowych zgodnie z ogólną uwagą o dystrybucjach w przedziale $[0, +\infty)$ — por. 2.5. Dostajemy wówczas ze (154) i (155):

$$[q_2]'' + a^2 [q_2] = -k M [e(t)]'', \quad (157)$$

gdzie:

$$a^2 = \frac{1}{L_1 C_1 + L_2 C_2}; \quad k = C_1 C_2 a^2.$$

Dokonując przekształcenia Laplace'a równania (157) dostajemy zgodnie ze (115) —

$$(s^2 + a^2) \mathcal{L}[q_2] = -k M s^2 \mathcal{L}[e(t)]$$

lub:

$$\mathcal{L}[q_2] = -k M \mathcal{L}[e(t)] + k M a \frac{a}{s^2 + a^2} \mathcal{L}[e(t)].$$

Zgodnie z twierdzeniem Borela (122) otrzymujemy ostatecznie przy $t \geq 0$:

$$q_2(t) = -k M e(t) + k M a e(t) \star \sin at \quad (158)$$

przy dowolnej dystrybucji $e(t)$ rzędu wykładniczego.

Przy $t < 0$ jest oczywiście $q_2(t) = 0$, a więc: $q_2(0-) = q_2'(0-) = 0$.

Do równania (157) można także wprowadzić niezerowe warunki początkowe. Przyjmując zamiast (156) zgodnie z (99) relacje:

$$\begin{aligned} [q_1'] &= [q_1]'' - q_1'(0) \delta(t) - q_1(0) \delta'(t), \\ [q_2'] &= [q_2]'' - q_2'(0) \delta(t) - q_2(0) \delta'(t) \end{aligned} \quad (159)$$

dostaniemy ze (154) i (155) (por. [16]) równanie:

$$\begin{aligned} [q_2]'' + a^2 [q_2] &= -k M [e(t)]'' + \\ &+ \frac{k}{C_1} (M q_1'(0) + L_2 q_2'(0)) \delta(t) + \frac{k}{C_1} (M q_1(0) + L_2 q_2(0)) \delta'(t), \end{aligned}$$

które po transformacji Laplace'a i rozwiązaniu względem $\mathcal{L}[q_2]$ przybiera postać:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[q_2] &= -k M \mathcal{L}[e(t)] + k M a \frac{a}{s^2 + a^2} \mathcal{L}[e(t)] + \\ &+ \frac{k}{a C_1} (M q_1'(0) + L_2 q_2'(0)) \frac{a}{s^2 + a^2} + \frac{k}{C_1} (M q_1(0) + L_2 q_2(0)) \frac{s}{s^2 + a^2}. \end{aligned} \quad (160)$$

Dostajemy stąd przy $t \geq 0$:

$$q_2(t) = -k M e(t) + k M a e(t) * \sin at + \\ + \frac{k}{a C_1} (M q_1'(0) + L_2 q_2'(0)) \sin at + \frac{k}{C_1} (M q_1(0) + L_2 q_2(0)) \cos at. \quad (161)$$

Łatwo zauważyć, że do równania (160) i rozwiązania (161) można dojść bezpośrednio ze (152) stosując normalne przekształcenie Laplace'a. Uwidocznia się tu wyraźnie cenna właściwość rachunku operatorowego, który prowadzi do poprawnego wyniku niezależnie od tego, czy problem wyjściowy był postawiony poprawnie, np. dystrybucyjnie, czy tylko formalnie.

3.3. Równania o zmiennych współczynnikach

Podobnie jak równanie (132) również równanie jednorodne ze zmiennymi współczynnikami o postaci:

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t) x^{(n-1)} + \dots + a_0(t) x = 0 \quad (162)$$

nie posiada w dziedzinie dystrybucyjnej żadnych innych rozwiązań prócz klasycznych [11], przy założeniu, że współczynniki $a_{n-1}(t), \dots, a_0(t)$ są funkcjami klasy C^∞ (wówczas ich iloczyn przez dowolną dystrybucję są też dystrybucjami — por. 1.4d)¹⁾.

Jeśli jednak założenie to nie jest spełnione, np. w przypadku, gdy przy najwyższej pochodnej występuje współczynnik $a_n(t)$ mający punkty zerowe — jednorodne równanie liniowe może w dziedzinie dystrybucyjnej posiadać dodatkowe rozwiązania.

Rozpatrzmy proste przykłady. Równanie $(-\infty < t < +\infty)$:

$$t^2 \frac{dx}{dt} = 0 \quad (163)$$

ma w dziedzinie klasycznej rozwiązanie ogólne w postaci dowolnej funkcji stałej: $x = c$, podczas gdy w dziedzinie dystrybucyjnej równanie to spełniają dystrybucje:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 1(t); \quad x_3 = \delta(t)$$

liniowo od siebie niezależne i rozwiązanie ogólne w dziedzinie dystrybucji ma postać:

$$x = C_1 + C_2 1(t) + C_3 \delta(t). \quad (164)$$

¹⁾ Równania różniczkowe, których współczynniki są dystrybucjami, rozpatrzono przy pewnych założeniach w pracy [18].

Analogicznie, równanie $(-\infty < t < +\infty)$:

$$\sin at \frac{dx}{dt} = 0 \quad (165)$$

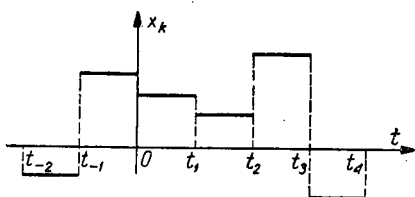
posiada w dziedzinie dystrybucyjnej obok klasycznego rozwiązania: $x = c$ nieskończenie wiele rozwiązań x_k liniowo niezależnych:

$$x_k = 1 \left(t - k \frac{\pi}{a} \right), \quad (166)$$

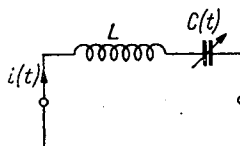
a więc np. rozwiązaniem równania (165) jest każda funkcja schodkowa przedstawiona na rys. 9 przy dowolnych wartościach skoków w punktach $t_k = k \frac{\pi}{a}$. Rozwiązanie równania (165) może być zatem okresowe o okresie $T = \frac{2\pi}{a}$ lub wielokrotnie większym. Na przykład funkcja okresowa:

$$x(t) = \begin{cases} 1; & t_{2k} < t < t_{2k+1} \\ -1; & t_{2k+1} < t < t_{2(k+1)} \end{cases}$$

jest rozwiązaniem (dystrybucyjnym) równania (165).



Rys. 9. Funkcja schodkowa x_k określona wzorem (166)



Rys. 10. Obwód parametryczny LC

Ważnym w praktyce przypadkiem równań o zmiennych współczynnikach są równania o współczynnikach nieciągłych, przedziałami stałych. Równania takie, występujące w problemach przełączania lub skokowej zmiany wartości parametrów podczas pracy układu, mogą być również z powodzeniem rozwiązywane w ujęciu dystrybucyjnym.

Dla przykładu rozpatrzmy zagadnienie rezonansu parametrycznego. W obwodzie LC jak na rys. 10 pojemność kondensatora zmienia się okresowo skokami w ten sposób, że jej odwrotność $S(t)$ jest równa

$$\frac{1}{C(t)} = S(t) = \begin{cases} S_0 + \Delta S_1; & kT < t < kT + \frac{T}{2} \\ S_0 - \Delta S_2; & kT + \frac{T}{2} < t < (k+1)T, \end{cases}$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą. Równanie obwodu (względem ładunku q kondensatora) ma zatem postać:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + S(t) q = 0$$

lub

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \Omega^2(t) q = 0, \quad (167)$$

gdzie:

$$\Omega^2(t) = \begin{cases} \Omega_1^2 = (\Omega_0 + \Delta \Omega_1)^2 = \frac{S_0 + \Delta S_1}{L}; & kT < t < kT + \frac{T}{2} \\ \Omega_2^2 = (\Omega_0 - \Delta \Omega_2)^2 = \frac{S_0 - \Delta S_2}{L}; & kT + \frac{T}{2} < t < (k+1)T. \end{cases} \quad (168)$$

Problem rozwiązania równania (167) ograniczymy do poszukiwania rozwiązania okresowego. Wobec nieciągłości elastancji $S(t)$ w punktach kT oraz $kT + \frac{T}{2}$ rozwiązanie okresowe możemy przewidywać w postaci:

$$q(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_0(t - kT) = q_0(t) \star \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT), \quad (169)$$

gdzie $q_0(t)$ jest przebiegiem $q(t)$ w granicach jednego okresu, przy czym $q_0(t)$ można przewidywać w postaci (por. np. [5]):

$$q_0(t) = A(t) \left[1(t) - 1\left(t - \frac{T}{2}\right) \right] + B(t) \left[1\left(t - \frac{T}{2}\right) - 1(t - T) \right], \quad (170)$$

gdzie $A(t)$ i $B(t)$ są nieznanymi funkcjami odpowiednio regularnymi.

Z racji okresowości współczynnika $\Omega^2(t)$ wyrażonego wzorem (168) do tego, aby $q(t)$ było rozwiązaniem równania (167), wystarczy, aby $q_0(t)$ spełniało to równanie przy $0 < t < T$. Podstawiając (170) do (167) — różniczkowanie dystrybucyjne! — dostaniemy równanie:

$$\begin{aligned} (A'' + \Omega_1^2 A) \left[1(t) - 1\left(t - \frac{T}{2}\right) \right] + (B'' + \Omega_2^2 B) \left[1\left(t - \frac{T}{2}\right) - 1(t - T) \right] + \\ + 2A' \delta(t) - 2B' \delta(t - T) + 2(B' - A') \delta\left(t - \frac{T}{2}\right) + \\ + A \delta'(t) - B \delta'(t - T) + (B - A) \delta'\left(t - \frac{T}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Równanie to powinno być spełnione tożsamościowo, co prowadzi do warunków (uwzględniamy tu „połączenia” z sąsiednimi przedziałami):

$$A'' + \Omega_1^2 A = 0; \quad B'' + \Omega_2^2 B = 0 \quad (171)$$

$$\left. \begin{aligned} A(0) &= B(T); & A\left(\frac{T}{2}\right) &= B\left(\frac{T}{2}\right) \\ A'(0) &= B'(T); & A'\left(\frac{T}{2}\right) &= B'\left(\frac{T}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (172)$$

Równania (171) dają:

$$\begin{aligned} A(t) &= A_1 \cos \Omega_1 t + A_2 \sin \Omega_1 t, \\ B(t) &= B_1 \cos \Omega_2 t + B_2 \sin \Omega_2 t, \end{aligned} \quad (173)$$

przy czym stałe A_1, A_2, B_1, B_2 należy wyznaczyć z czterech równań (172). Dyskusja istnienia rozwiązań tych równań jest jednocześnie dyskusją istnienia rozwiązania okresowego o postaci (169). Układ równań (172) jest układem jednorodnym względem stałych A_1, A_2, B_1, B_2 , posiada więc rozwiązanie niezerowe, gdy jego wyznacznik charakterystyczny jest równy zeru. Prowadzi to do warunku (rachunki pomijamy):

$$(\Omega_1 + \Omega_2)^2 \sin^2(\Omega_1 + \Omega_2) \frac{T}{4} = (\Omega_1 - \Omega_2)^2 \sin^2(\Omega_1 - \Omega_2) \frac{T}{4}, \quad (174)$$

który jest jednocześnie warunkiem istnienia rozwiązania okresowego o postaci (169). Jeśli przyjąć:

$$\Delta \Omega_1 = \Delta \Omega_2 = \Delta \Omega,$$

wówczas warunek (174) sprowadza się do warunku:

$$\Omega_0^2 \sin^2 \Omega_0 \frac{T}{2} = (\Delta \Omega)^2 \sin^2 \Delta \Omega \frac{T}{2}. \quad (175)$$

Równanie (175) jest np. spełnione, gdy

$$\Delta \Omega = \frac{2\pi}{T} = \omega$$

oraz

$$\Omega_0 = k \frac{2\pi}{T} = k\omega$$

przy $k \geq 2$.

Na przykład przy $k = 2$ dostajemy ze (172):

$$B_1 = A_1; \quad B_2 = \frac{\Omega_1}{\Omega_2} A_2,$$

a więc dwie stałe (A_1 i A_2) pozostają nie wyznaczone. Można je wyznaczyć z warunków początkowych.

4. CHARAKTERYSTYKI UKŁADÓW LINIOWYCH

Postaramy się teraz chociaż fragmentarycznie pokazać, w jakim stopniu dystrybucje ingerują w zagadnienia opisu i wyznaczania właściwości układu liniowego na podstawie jego charakterystyk częstotliwościowych.

4.1. Charakterystyki częstotliwościowe i ich związek z funkcją przenoszenia

Niech $F(s)$ będzie dowolną funkcją $s = \alpha + i\omega$ holomorficzną przy $\Re s = \alpha > 0$ oraz

$$F(s) = U(\alpha, \omega) + iV(\alpha, \omega), \quad (176)$$

gdzie:

$$U(\alpha, \omega) = \Re F(s), \quad V(\alpha, \omega) = \Im F(s).$$

Założmy, że przy $\alpha \rightarrow 0$ w prawej półpłaszczyźnie:

$$U(\alpha, \omega) \rightrightarrows U(\omega); \quad V(\alpha, \omega) \rightrightarrows V(\omega), \quad (177)$$

z czego już wynika, że funkcje $U(\omega)$ i $V(\omega)$ są ciągłe. Istnieje wówczas funkcja brzegowa o postaci:

$$F(i\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} F(s) = U(\omega) + iV(\omega). \quad (178)$$

Traktując funkcje $U(\alpha, \omega)$ i $V(\alpha, \omega)$ jako funkcje ω ($-\infty < \omega < +\infty$) z parametrem α ($\alpha > 0$) mamy:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+} U(\alpha, \omega) = U(\omega); \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0+} V(\alpha, \omega) = V(\omega), \quad (179)$$

przy czym — zgodnie ze (177) — granice (179) są słuszne zarówno w zwykłym, jak i dystrybucyjnym sensie.

Różniczkując teraz k -krotnie (176) dostaniemy:

$$F^{(k)}(s) = (-i)^k \left[\frac{\partial^k}{\partial \omega^k} U(\alpha, \omega) + i \frac{\partial^k}{\partial \omega^k} V(\alpha, \omega) \right], \quad (180)$$

przy czym ze (177) oraz twierdzenia o różniczkowaniu ciągu dystrybucji — por. (33), a także [18] — dostaniemy:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{\partial^k}{\partial \omega^k} U(\alpha, \omega) &= U^{(k)}(\omega) \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{\partial^k}{\partial \omega^k} V(\alpha, \omega) &= V^{(k)}(\omega) \end{aligned} \right\}, \quad (181)$$

przy czym zarówno granice w lewych stronach, jak i pochodne w pra-

wych stronach — są dytrybucyjne! Widzimy zatem, że dla funkcji holomorficznej $F^{(k)}(s)$ istnieje dystrybucja brzegowa o postaci:

$$F^{(k)}(i\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} F^{(k)}(s) = (-i)^{(k)} [U^{(k)}(\omega) + iV^{(k)}(\omega)]. \quad (182)$$

Rozpatrzmy teraz dowolny układ liniowy (przedstawiony schematycznie na rys. 6) o funkcji przenoszenia:

$$K(s) = P(\alpha, \omega) + iQ(\alpha, \omega) \quad (183)$$

holomorficznej przy $\operatorname{Re} s > 0$ i założymy, że istnieje taka k -ta funkcja pierwotna $F(s) = U(\alpha, \omega) + iV(\alpha, \omega)$ względem $K(s)$ — tzn. $F^{(k)}(s) = K(s)$ —, dla której spełnione są warunki (177). Wówczas charakterystyka częstotliwościowa układu $K(i\omega)$ jest określona jako dystrybucja brzegowa:

$$K(i\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} K(s) = P(\omega) + iQ(\omega), \quad (184)$$

a charakterystyka rzeczywista $P(\omega)$ i charakterystyka urojona $Q(\omega)$ są, ogólnie biorąc, dystrybucjami, które można — porównując (184) i (182) — przedstawić w postaci:

$$P(\omega) = \mathcal{R}_e [(-i)^k [U^{(k)}(\omega) + iV^{(k)}(\omega)]], \quad (185a)$$

$$Q(\omega) = \mathcal{I}_m [(-i)^k [U^{(k)}(\omega) + iV^{(k)}(\omega)]]. \quad (185b)$$

Podamy teraz kilka prostych przykładów.

a) Rozpatrzmy układ całkujący o funkcji przenoszenia $K(s) = \frac{1}{s}$, $\operatorname{Re} s > 0$. Biorąc:

$$F(s) = s \ln s - s \quad (186)$$

mamy: $F''(s) = \frac{1}{s}$ oraz: $F(s) = U(\alpha, \omega) + iV(\alpha, \omega)$, przy czym:

$$U(\alpha, \omega) = \alpha (\ln \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} - 1) - \omega \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha},$$

$$V(\alpha, \omega) = \omega (\ln \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} + 1) + \alpha \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha}.$$

Łatwo sprawdzić, że:

$$U(\alpha, \omega) \Rightarrow U(\omega) = -\frac{\pi}{2} |\omega|,$$

$$V(\alpha, \omega) \Rightarrow V(\omega) = -\omega + \omega \ln |\omega|.$$

Zgodnie ze (185) dostajemy teraz charakterystykę rzeczywistą i urojoną układu w postaci:

$$\begin{aligned} P(\omega) &= -U''(\omega) = \pi \delta(\omega), \\ Q(\omega) &= -V''(\omega) = -\frac{1}{\omega}, \end{aligned} \quad (187)$$

a więc charakterystyka częstotliwościowa ma postać:

$$K(i\omega) = P(\omega) + iQ(\omega) = \pi \delta(\omega) - \frac{i}{\omega}. \quad (188)$$

Ponieważ funkcja przejściowa¹⁾ $k(t)$ jest równa:

$$k(t) = \mathcal{L}^{-1}K(s) = \mathbf{1}(t), \quad (189)$$

więc

$$K(i\omega) = \mathcal{F}k(t), \quad (190)$$

co w naszym przypadku prowadzi do zależności:

$$\mathcal{F}\mathbf{1}(t) = \pi \delta(\omega) - \frac{i}{\omega}, \quad (191)$$

którą można uzasadnić bezpośrednio (por. [11]). Przekształcenie Fouriera rozumie się tu oczywiście w sensie dystrybucyjnym (por. 1.8).

Przez dalsze różniczkowanie dystrybucyjne można otrzymać wyrażenie dla $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ w przypadku funkcji przenoszenia będących pochodnymi funkcji $K(s) = \frac{1}{s}$.

b) Dla układu o funkcji przenoszenia:

$$K(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \quad (192)$$

mamy: $K(s) = K_1(s) + K_2(s)$, gdzie:

$$K_1(s) = \frac{A}{s - i\omega_0}; \quad K_2(s) = -\frac{A}{s + i\omega_0}; \quad A = -\frac{i}{2}.$$

Charakterystyki częstotliwościowe odpowiadające funkcjom przenoszenia $K_1(s)$ i $K_2(s)$ dostaniemy od razu ze wzoru (188) uwzględniając odpowiednio zamianę ω na $\omega - \omega_0$ lub $\omega + \omega_0$:

¹⁾ Terminologię i oznaczenia przyjęto zgodnie z książką R. Kulikowski „Wstęp do syntezy liniowych układów elektrycznych”, PWN, Warszawa 1957.

$$K_1(i\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} K_1(s) = -\frac{1}{\omega + \omega_0} - i\frac{\pi}{2}\delta(\omega - \omega_0),$$

$$K_2(i\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} K_2(s) = \frac{1}{\omega + \omega_0} + i\frac{\pi}{2}\delta(\omega + \omega_0)$$

i wobec tego:

$$K(i\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} K(s) = \frac{\omega_0}{-\omega^2 + \omega_0^2} + i\frac{\pi}{2}[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \quad (193)$$

lub:

$$P(\omega) = \frac{\omega_0}{-\omega^2 + \omega_0^2}; \quad Q(\omega) = \frac{\pi}{2}[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)].$$

Ponieważ wobec (192) funkcja przejściowa jest równa:

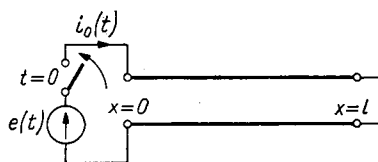
$$k(t) = \mathcal{L}^{-1}K(s) = \sin \omega_0 t \cdot \mathbf{1}(t),$$

wobec tego zgodnie ze (190) dostajemy zależność:

$$\mathcal{F} \sin \omega_0 t \cdot \mathbf{1}(t) = \frac{\omega_0}{-\omega^2 + \omega_0^2} + i\frac{\pi}{2}[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)], \quad (194)$$

z której korzystaliśmy już w p. 3.2c) (por. przypisek na str. 411).

c) Pokażemy teraz, w jaki sposób wynikami poprzedniego przykładu można się posłużyć przy wyznaczaniu charakterystyki częstotliwościowej układu o przestępnej funkcji przenoszenia.



Rys. 11. Linia bez strat o długości l pobudzana napięciowo

Rozważmy linię długą bez strat o skończonej długości l , np. zwartą na końcu, zasilaną na początku z bezoporowego źródła napięciowego o sile elektromotorycznej $e(t)$ (por. rys. 11). Równanie operatorowe dla transformaty prądu wzdłuż linii ma postać¹⁾:

$$\mathcal{L} i_x = \frac{\mathcal{L} e}{\varrho} \frac{\operatorname{ch} \gamma(l-x)}{\operatorname{sh} \gamma l}, \quad (195)$$

¹⁾ Na przykład M. J. Kontorowicz „Rachunek operatorowy i stany nieustalone w obwodach elektrycznych”, Warszawa 1956.

gdzie:

$$\varrho = \sqrt{\frac{L}{C}}; \quad \gamma = s\sqrt{LC}.$$

Dla prądu $i_0(t)$ na początku linii ($x = 0$) mamy zatem:

$$\mathcal{L} i_0 = \mathcal{L} e \cdot K(s),$$

gdzie ($\lambda = l\sqrt{LC}$):

$$K(s) = \frac{1}{\varrho} \operatorname{cth} \lambda s. \quad (196)$$

Rozpatrywać będziemy układ o funkcji przenoszenia $K(s)$ wyrażonej przez (196). Funkcja (196) jest meromorficzna i posiada bieguny (rzędu pierwszego) w punktach, w których:

$$\operatorname{sh} \lambda s = \frac{1}{i} \sin i \lambda s = 0,$$

tzn. w punktach:

$$s_k = i k \frac{\pi}{\lambda} = i \omega_k \quad (197)$$

leżących na osi urojonej, przy czym:

$$\operatorname{res}_{s=s_k} K(s) = \frac{1}{\varrho \lambda} = \frac{1}{l L}. \quad (198)$$

Wyrażenia dla charakterystyki częstotliwościowej $K(i\omega)$ można zatem poszukiwać w postaci:

$$K(i\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} K(s) = K_R(i\omega) + K_S(i\omega), \quad (199)$$

gdzie: $K_R(i\omega)$ jest częścią regularną, tj. funkcją określoną przy $\omega \neq \omega_k$, $K_S(i\omega)$ jest częścią singularną — dystrybucją skupioną w punktach $\omega = \omega_k$.

Wyznaczenie części regularnej nie przedstawia trudności, bowiem wobec własności funkcji $K(s)$ mamy:

$$K_R(i\omega) = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0+ \\ \omega \neq \omega_k}} K(s) \Big|_{\substack{s=i\omega \\ \omega \neq \omega_k}} = -\frac{i}{\varrho} \operatorname{ctg} \lambda \omega.$$

Dla wyznaczenia części singularnej można skorzystać z tego, że w otoczeniu pierścieniowym każdego punktu $s = s_k$, tj. przy $0 < |s - s_k| < \frac{\pi}{\lambda}$, można funkcję $K(s)$ przedstawić w postaci:

$$K(s) = \frac{1}{l L} \cdot \frac{1}{s - s_k} + K_k(s),$$

przy czym część $K_k(s)$ jest regularna, wobec czego w otoczeniu punktu $s_k = i\omega_k$ część singularna pochodzi tylko od składnika $\frac{1}{s - s_k}$. Zgodnie ze (188) dostajemy więc:

$$K_{sk}(i\omega) = \frac{1}{lL} \pi \delta(\omega - \omega_k),$$

a zatem:

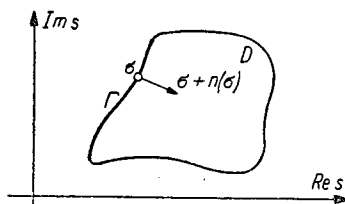
$$K_s(i\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} K_{sk}(i\omega) = \frac{1}{lL} \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_k).$$

Otrzymujemy więc ostatecznie zgodnie ze (199):

$$K(i\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} K(s) = \frac{\pi}{lL} \left\{ \delta(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty} [\delta(\omega + \omega_k) + \delta(\omega - \omega_k)] \right\} - \frac{i}{\varrho} \operatorname{ctg} \lambda \omega. \quad (200)$$

4.2. Rozkłady brzegowe funkcji holomorficznych

Jak wiadomo, i jak pokazaliśmy na przykładach, w przypadku funkcji holomorficznej w obszarze na brzegu tego obszaru rozkład brzegowy może nie być funkcją, lecz dystrybucją. Rodzi to koncepcję wprowadzenia pewnego rodzaju „dystrybucji” jako rozkładów granicznych funkcji holomorficznych w obszarze. Ponieważ tego rodzaju ujęcie, aczkolwiek mogące wywołać takie czy inne wątpliwości, wydaje się dogodne dla rozważań na płaszczyźnie zmiennej zespolonej, a więc związanych z charakterystykami częstotliwościowymi — podamy krótko za B. Grossem [14] podstawy takiego ujęcia.



Rys. 12. Obszar D i część jego brzegu Γ

Niech Γ oznacza łuk regularny w płaszczyźnie zmiennej zespolonej $s = a + i\omega$, $n = n(\sigma)$ — wektor jednostkowy normalny do linii Γ w punkcie σ tej linii, oraz $F(s)$ — funkcję holomorficzną w pewnym obszarze D (rys. 12), którego częścią brzegu jest linia Γ .

Niech $\varepsilon > 0$. Wówczas dla dostatecznie małych ε , $\sigma + \varepsilon n \in D$ i przy ustalonym σ granica

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(\sigma + \varepsilon n) \quad (201)$$

(o ile istnieje) wyznacza wartość brzegową $F(\sigma)$. Niezależnie od tego, czy przy zmiennym σ rozkład brzegowy $F(\sigma)$ jest funkcją, czy też nie, jest on jednoznacznie określony przez funkcję holomorficzną $F(\sigma + \varepsilon n)$. Dla rozkładu tego Gross wprowadził nazwę **spektrum** i oznaczenie:

$$\langle F(\sigma) \rangle = \langle \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(\sigma + \varepsilon n) \rangle. \quad (202)$$

Jeśli $F(s)$ jest na łuku Γ funkcją regularną, to oczywiście

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(\sigma + \varepsilon n) = F(\sigma)$$

i spektrum $\langle \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(\sigma + \varepsilon n) \rangle$ utożsamia się z funkcją $F(\sigma)$:

$$\langle \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(\sigma + \varepsilon n) \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(\sigma + \varepsilon n) = F(\sigma). \quad (203)$$

Można teraz w oparciu o podstawowe własności funkcji holomorficzych w obszarze zdefiniować pojęcie pochodnej i całki spektrum.

Jeśli $F(s)$ jest funkcją holomorficzną w D , to $G(s) = \frac{dF}{ds}$ jest także holomorficzną w D . Wobec tego pochodną spektrum $\langle \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(\sigma + \varepsilon n) \rangle$ można określić [14] jako:

$$\frac{d}{d\sigma} \langle \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(\sigma + \varepsilon n) \rangle \stackrel{df}{=} \langle \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(\sigma + \varepsilon n) \rangle. \quad (204)$$

Wynika stąd, że każde spektrum ma pochodną, która w przypadku, gdy funkcja $F(s)$ jest regularna na łuku Γ , jest identyczna z pochodną $F'(s)$ na tym łuku.

Analogicznie można określić całkę-wzdłuż linii Γ :

$$\int_{\Gamma} \langle \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(\sigma + \varepsilon n) \rangle d\sigma \stackrel{df}{=} \langle \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} F(\sigma + \varepsilon n) d\sigma \rangle. \quad (205)$$

Sumę i iloczyn przez stałą można określić jako:

$$\begin{aligned} & \langle \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [F_1(\sigma + \varepsilon n) + F_2(\sigma + \varepsilon n)] \rangle \stackrel{df}{=} \\ &= \langle \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_1(\sigma + \varepsilon n) \rangle + \langle \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_2(\sigma + \varepsilon n) \rangle, \end{aligned} \quad (206)$$

$$\langle \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c F(\sigma + \varepsilon n) \rangle \stackrel{df}{=} c \langle \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(\sigma + \varepsilon n) \rangle. \quad (207)$$

Szczególne znaczenie dla teorii obwodów ma przypadek, gdy linia Γ jest osią urojoną, a obszar D — prawą półpłaszczyzną. Wówczas jeśli $F(s)$ jest funkcją holomorficzną przy $\operatorname{Re} s > 0$, to wyznaczone przez tę funkcję spektrum pokrywa się z jej rozkładem brzegowym wzdłuż osi

urojonej:

$$\langle F(i\omega) \rangle = \langle \lim_{a \rightarrow 0+} F(a + i\omega) \rangle. \quad (208)$$

Jeśli więc $F(s)$ jest funkcją przenoszenia układu liniowego, to spektrum (208) określa bezpośrednio charakterystykę częstotliwościową tego układu. Pisząc $F(s)$ w postaci:

$$F(s) = F_1(a, \omega) + i F_2(a, \omega)$$

można (208) rozłożyć na część rzeczywistą i urojoną odpowiadające charakterystyce rzeczywistej i urojonej:

$$\begin{aligned} \langle F(i\omega) \rangle &= \langle \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_1(a, \omega) \rangle + i \langle \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_2(a, \omega) \rangle = \\ &= \langle F_1(\omega) \rangle + i \langle F_2(\omega) \rangle. \end{aligned} \quad (209)$$

Pozwala to na wprowadzenie pewnego wygodnego w praktyce formalizmu rachunkowego. Jeśli np. $F(s)$ jest funkcją przenoszenia układu liniowego, spełniającą pewne założenia, to przy $\operatorname{Re} s > 0$ mamy:

$$F(a + i\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_2(a, u)}{u - \omega} du + i F_2(\sigma, \omega), \quad (210)$$

a więc przy $a \rightarrow 0$ dostajemy w postaci spektrów:

$$\begin{aligned} \langle F(i\omega) \rangle &= \langle \lim_{a \rightarrow 0+} F(a + i\omega) \rangle = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle F_2(u) \rangle \frac{du}{u - \omega} + i \langle F_2(\omega) \rangle. \end{aligned} \quad (211)$$

*Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Zakład Teorii Łączności*

WYKAZ LITERATURY

1. Bladel van J.: Distributions Vectorielles. — Annales des Télécommunications, 1960, nr 3—4, str. 71—76.
2. Borok W. M.: Reszenije zadaczi Koszi dla niekatorych tipow sistiem linejnych urawnienij w czastnych proizwodnych. — DAN SSSR, XCVII, 1954, nr 6.
3. Bouix M.: Application des distributions aux équations de Maxwell et de Helmholtz. — Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 19.5.1958, str. 2858—2860.
4. Bouix M.: Les distributions d'une variable. Relations entre deux définitions, dérivation, intégration. — Annales des Télécommunications, 1959, nr 9—10, str. 236—255.
5. Clavier P. A.: Some Applications of the Laurent Schwartz Distribution Theory to Networks Problems. — Proc. Symposium on Modern Network Synthesis, Pol. Inst. of Brooklyn, 1955.
6. Dirac P. A. M.: The Principles of Quantum Mechanics, Oxford 1947.
7. Doležal V.: O systémech lineárních integrodiferenciálních rovnic v technických problémech. — Aplikace Matematiky, 4, 1959, nr 1, str. 1—17.
8. Doležal V.: O použití distribucí v teorii lineárních dynamických soustav. — Aplikace Matematiky, 4, 1959, nr 6, str. 405 — 440.

9. Doležal V., Kurzweil J.: O distribucích. — Slaboproudý Obzor, 20, 1959, nr 1.
10. Gelfand J. M., Sziłow G. E.: Preobrazowanija Furie bystro rastuszczich funkcyj i woprosy jedinstwiennosti reszenija zadaczi Koszi. — Usp. Mat. Nauk, VIII, 1953, nr 6.
11. Gelfand J. M., Sziłow G. E.: Obobszczennyje funkcji i diejstwija nad nimi. Moskwa 1958.
12. Gelfand J. M., Sziłow G. E.: Prostranstwa osnovnych i obobszczennyh funkcji. Moskwa 1958.
13. Gelfand J. M., Sziłow G. E.: Niekotoryje woprosy teorii differencjalnych urawnienij. Moskwa 1958.
14. Gross B.: Lineare systeme. Suppl. al vol. III, serie X del Nuovo Cimento. 1956, nr 2, 1 sem.
15. Halperin J.: Introduction to the Theory of Distributions. Toronto 1952 (lub tłumaczenie rosyjskie, Moskwa 1954).
16. Korevaar J.: Distributions Defined from the Point of View of Applied Mathematics. — Indagationes Mathematicae, 17, 1955, str. 368, 379, 483, 494, 663.
17. König H.: Neue Begründung der Theorie der „Distributionen“ von L. Schwartz. — Math. Nachrichten, 9, 1953, str. 130 — 148.
18. Kurzweil J.: Linear Differential Equations with Distributions as Coefficients. — Bull. de l'Acad. Polonaise des Sciences, série des sci. math., astr. et phys., VII, 1959, nr 9, str. 557 — 560.
19. Macdonald J. R., Brachman M. K.: Linear-System Integral Transform Relations. — Rev. Modern Phys., 28, 1956, nr 4.
20. Mikusiński J.: Sur la méthode de généralisation de M. Laurent Schwartz et sur la convergence faible. — Fund. Math. 35, 1948, str. 235 — 239.
21. Mikusiński J.: Une définition de distribution. — Bull. Acad. Pol. Sc. Cl. III, t. III, 1955, nr 11.
22. Mikusiński J.: Rachunek operatorów. Warszawa 1957 (wyd. II).
23. Mikusiński J.: Sur les notions de distribution et d'opérateur. — Bull. Acad. Pol. Sc. Cl. III, t. VI, 1958, nr 12.
24. Mikusiński J., Sikorski R.: The Elementary Theory of Distributions (I). — Rozprawy Matematyczne XII, Warszawa 1957 (lub tłumaczenie rosyjskie, Moskwa 1959).
25. v. der Pol B.: On the Operational Solution of Linear Differential Equations and an Investigation of the Properties of these Solutions. — Phil. Mag., 8, 1929, str. 861 — 878.
26. v. der Pol B., Bremmer H.: Operational Calculus Based on the Two-Sided Laplace Integral. Cambridge 1950 (lub tłum. rosyjskie, Moskwa 1952).
27. Schwartz L.: Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier, et applications mathématiques et physiques. — Ann. Univ. Grenoble, 21, 1945, str. 57—74.
28. Schwartz L.: Théorie des distributions I. Paris 1950.
29. Schwartz L.: Théorie des distributions II. Paris 1951.
30. Schwartz L.: Transformations de Laplace. „Les Cours de Sorbonne“, Méthodes Mathématiques de la Physique, VI, 1956, ODU.
31. Soboleff S.: Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques normales. — Recueil Math. 1, 1936, str. 39 — 71.

32. Stiefel E.: Einführung in die Theorie der verallgemeinerten Funktionen (Distributionen). — Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins, 1957, nr 15, str. 665 — 670.
33. Sziłow G. E.: Obobsczennyye funkcji i ich priloženija w analizie. — Usp. Mat. Nauk, XI, 1956, nr 6.
34. Temple G.: Theories and Applications of Generalized Functions. — Journ. London Math. Soc., 28, 1953, str. 134 — 148.
35. Temple G.: The Theory of Generalized Functions. — Proc. Royal Soc. London ser. A, 228, 1955, str. 175—190.

Е. ОСЕВСКИ

ЗНАЧЕНИЕ И ПРИМЕНЕНИЯ ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЙ В ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

Резюме

Работа состоит из двух частей.

Первая часть посвящена математическим основам теории обобщённых функций одной переменной. Здесь обсуждены основные сведения касающиеся обобщённых функций Шварца, как и обобщённых функций Микулинского. Особое внимание обращено на вопросы преобразования Фурье и Лапласа в области обобщённых функций, имеющие основное значение в теории цепей.

В пар. 1.9 обсуждено преобразование Фурье для обобщённых функций Шварца на всей оси, определяемое на основании формулы Парсеваля. Согласно Корэваару [16] введено в пар. 2.6 преобразование Лапласа обобщённых функций экспоненциального порядка в промежутке $[0, +\infty]$. Это даёт возможность расширения области применения операционного исчисления на обобщённые функции.

Во второй части дается обзор избранных вопросов по теории цепей, обсуждаемых и решаемых с помощью обобщённых функций. 3-я глава посвящена дифференциальным уравнениям линейных цепей с сосредоточенными постоянными. Показано особенно, что для описания линейной системы в области времени функциональный аппарат вообще говоря, недостаточен, а получаемые уравнения приобретают полный смысл лишь на основе обобщённых функций. Определению элементарных решений, которое является основным вопросом из вышеуказанной области, посвящены пар. 3.1 и 3.2; в них приведены примеры непосредственного определения элементарного решения, а также определения с помощью преобразований Фурье и Лапласа в области обобщённых функций.

В пар. 3.3 представлены вопросы возникающие при обсуждении линейных уравнений с переменными коэффициентами на основе обобщённых функций, то есть вопросы из области линейных параметрических цепей. Эти рассуждения иллюстрированы примером параметрического резонанса в контуре LC.

В пар. 4.1 обсуждены зависимости между функцией передачи линейной системы

$$F(s) = U(\alpha, \omega) + iV(\alpha, \omega)$$

$$(s = \alpha + i\omega, \quad \text{Re } s > 0)$$

и ее частотной характеристикой

$$F(i\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} F(s) = U(\omega) + iV(\omega)$$

при чём показано, что выступающий здесь предельный переход в общем случае нужно понимать в смысле обобщённых функций. Приведены примеры так для систем со сосредоточенными, как и с распределёнными постоянными, имеющих частотные характеристики в виде обобщённых функций и определены эти характеристики.

J. OSIOWSKI

SIGNIFICANCE AND APPLICATIONS OF DISTRIBUTIONS IN THE CIRCUIT THEORY

Summary

The paper is composed of two parts.

The first part is devoted to mathematical foundations of the distributions theory of one variable. Basic information concerning the distributions by Schwartz as well as by Mikusiński is presented here. Particular attention is paid to the problem of Fourier and Laplace transformation in the field of distributions as being of essential significance to the circuit theory.

Section 1.9 deals with the Fourier transformation for Schwartz's distributions on the whole axis, which is defined in terms of Parseval's formula. The Laplace transformation of the exponential order distributions in the interval $(0, +\infty)$ according to Korevaar [16] is given in Section 2.6. This makes it possible to extend the applicability range of the operational calculus to the distributions.

The second part contains a review of selected problems of the circuit theory, which are treated and solved in terms of distributions. Chapter 3 is devoted to differential equations of linear circuits with lumped constants. In particular it is shown that the analysis in the field of functions is not — generally speaking — sufficient for a description of a linear system in the time domain, and the obtained equations acquire a full sense only in terms of distributions. Chapters 3.1 and 3.2 are devoted to the basic problem in this domain, namely to finding elementary solutions. Examples are given here for direct determination of an elementary solution and for determination of a solution by means of the Fourier and Laplace transformation in the domain of distributions.

Chapter 3 deals with the problems occurring in the distributional treatment of linear equations with variable coefficients, that is, in the field of parametrical circuits. The discussion is illustrated by the example of parametric resonance in the LC circuit.

Chapter 4.1 discusses the relations between the transfer function of the linear system

$$F(s) = U(\alpha, \omega) + iV(\alpha, \omega)$$

($s = \alpha + i\omega$, $\operatorname{Re} s > 0$) and its frequency characteristic

$$F(i\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} F(s) = U(\omega) + iV(\omega).$$

It has been shown here that the tending to the limit is — in a general case — of distributional character. Examples are given for systems with lumped and distributed constants which have distributional frequency characteristics, and these characteristics are determined.

621.3.013.24

JERZY OWCZAREK

O sumowaniu dwóch pól oscylacyjnych

Rękopis dostarczono dnia 19.10.1959

W artykule rozpatrywane są pola oscylacyjne sinusoidalnie zmienne o jednakowej częstotliwości oscylacji. Analiza ich sumowania jest przeprowadzona przy wykorzystaniu metody badania krzywej stożkowej drugiego stopnia na płaszczyźnie. Może ona stanowić pewne uzupełnienie stosowanej zazwyczaj metody rozpatrywania omawianego zagadnienia, sprowadzającej się do rozkładania pól oscylacyjnych na przeciwbieżne pola kołowe [1], [2], [4], [6]. Podstawowe wnioski otrzymane za pomocą obydwu metod analizy pokrywają się oczywiście ze sobą, z tym, że metoda zastosowana przez autora pozwala dodatkowo na określenie położenia osi symetrii powstającego pola eliptycznego względem kierunków pól składowych i stwierdzenie, że kształtu pola eliptycznego spowodowanego nieodpowiednością kątów przesunięcia wektorów pól składowych w przestrzeni i czasie nie można zbliżyć do kołowego przez zmianę wartości maksymalnych strumieni składowych. Te dodatkowe wnioski, w szczególności ostatni, który nie jest intuicyjnie oczywisty, mogą być przydatne przy rozpatrywaniu jednofazowych maszyn elektrycznych, między innymi silników z dzielonym strumieniem (z biegunem ekranowanym częściowo za pomocą zwartego zwoju), o kształcie pola poprawianym za pomocą dodatkowych uzwojeń [5].

Przeprowadzona matematyczna i graficzna analiza zagadnienia pozwoliła na wyciągnięcie szeregu wniosków wyczerpująco określających wszystkie możliwe przypadki wzajemnego stosunku parametrów sumowanych pól.

1. WSTĘP

Uzwojenie, przez które płynie sinusoidalnie zmienny prąd, wytwarza sinusoidalnie zmienny oscylujący strumień magnetyczny skierowany wzdłuż osi geometrycznej tego uzwojenia. Pole magnetyczne w pewnym obszarze może być wytworzone przez dwa uzwojenia przesunięte względem siebie w przestrzeni i zasilane prądami zmiennymi przesuniętymi względem siebie w czasie, czyli — jak mówimy — przesuniętymi w fazie. Wypadkowe pole magnetyczne w tym obszarze może być określone drogą

matematycznego lub wykreślnego sumowania wartości chwilowych pól składowych.

Kształt i chwilowa prędkość kątowna wypadkowego pola magnetycznego zależą od wzajemnego stosunku maksymalnych wartości składowych strumieni oraz kątów ich przesunięcia względem siebie w czasie i w przestrzeni. Możliwe są następujące przypadki wzajemnych stosunków tych parametrów:

1. Jednakowa wielkość strumieni i kąt przesunięcia osi uzwojeń w przestrzeni równy kątowi przesunięcia fazowego strumieni.
2. Jednakowa wielkość strumieni i kąt przesunięcia osi uzwojeń w przestrzeni nierówny kątowi przesunięcia fazowego strumieni.
3. Niejednakowa wielkość strumieni i kąt przesunięcia osi uzwojeń w przestrzeni równy kątowi przesunięcia fazowego strumieni.
4. Niejednakowa wielkość strumieni i kąt przesunięcia osi uzwojeń w przestrzeni nierówny kątowi przesunięcia fazowego strumieni.

Dla wyczerpania wszystkich możliwych przypadków należy jeszcze w każdej z wymienionych czterech możliwości uwzględnić zwrot wektorów. Mianowicie, przy danym kącie przesunięcia osi uzwojeń w przestrzeni α , dodatnie kierunki wektorów składowych strumieni mogą tworzyć ze sobą kąty α oraz $(180^\circ - \alpha)$.

W pierwszej z podanych czterech możliwości można wyodrębnić ważny ze względu na zastosowania praktyczne przypadek szczególny przesunięcia strumieni w przestrzeni i w fazie o kąt 90° .

Ostatni z podanych przypadków wzajemnych stosunków parametrów (czwarty) jest przypadkiem najogólniejszym i drogą odpowiednich podstawień do wyprowadzonych dla niego wzorów można otrzymać zależności określające każdą z poprzednich możliwości. W tej właśnie kolejności zostaną podane rozważania matematyczne przeprowadzone metodą sumowania geometrycznego. Metoda ta została obrana zamiast stosowanej często prostszej metody składowych symetrycznych z tego względu, że pozwala na określenie kierunku osi symetrii wypadkowego eliptycznego pola magnetycznego i tym samym na wyciągnięcie dalej idących wniosków.

Niezależnie od tego zostanie przytoczona wykreślna metoda rozwiązania zagadnienia. Jej przeznaczeniem będzie potwierdzenie i ilustracja ogólniejszego wyprowadzenia matematycznego oraz przejrzyste wykazanie słuszności wniosków, których wyrażenie matematyczne byłoby niejasne wskutek skomplikowanej i zawilej postaci określających te wnioski wzorów.

We wszystkich dalszych rozważaniach kąty przesunięcia przestrzennego strumieni są traktowane jako kąty elektryczne.

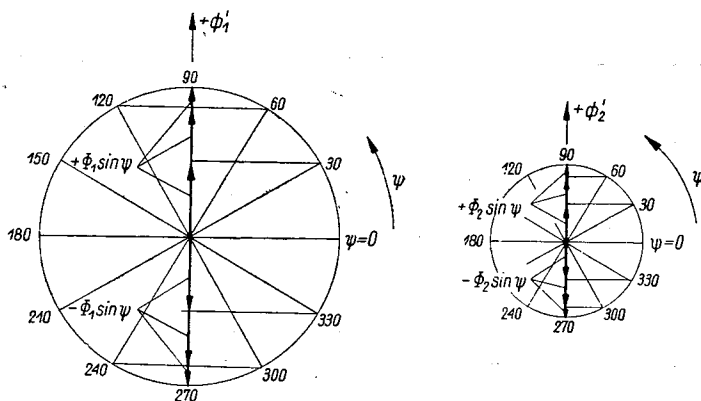
2. ZASADA KONSTRUKCJI WYKREŚLNYCH

Wartości chwilowe sinusoidalnie zmiennych składowych strumieni ϕ_1 i ϕ_2 przesuniętych względem siebie w fazie o kąt φ wyrażą się wzorami:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \Phi_1 \sin \omega t \\ \phi_2 &= \Phi_2 \sin (\omega t - \varphi),\end{aligned}\quad (1)$$

gdzie Φ_1 i Φ_2 odpowiednio wartości maksymalne składowych strumieni.

Sinusoidalnie zmienne przebiegi oscylacyjne $\phi'_1 = \Phi_1 \sin \psi$ $\phi'_2 = \Phi_2 \sin \psi$ można przedstawić wykresnie jak na rysunku 1, gdzie założono $\Phi_1 = 2 \Phi_2$.



Rys. 1. Wartości chwilowe oscylacyjnych pól składowych ϕ'_1 i ϕ'_2 przy $\Phi_1 = 2 \Phi_2$

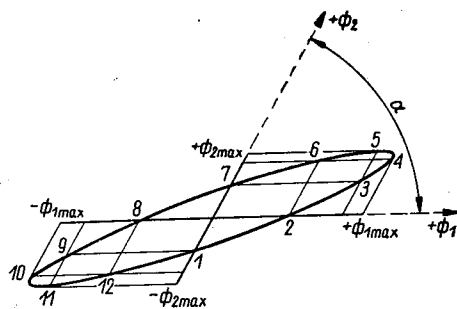
Jeżeli osie uzwojeń wytwarzających wspomniane składowe strumienie są przesunięte w przestrzeni względem siebie o kąt α , to kształt pola wypadkowego w przestrzeni można znaleźć odkładając kolejne chwilowe wartości tych strumieni wzdłuż osi odpowiednich uzwojeń i sumując je. Dla ułatwienia takiego sumowania, którego przykład podany jest dla przypadku $\Phi_1 = 2 \Phi_2$, $\alpha = 60^\circ$, $\varphi = 30^\circ$ na rysunku 2, wygodnie jest ułożyć następującą tabelkę:

$\omega t =$	0°	30°	60°	90°	120°
$\phi_1 =$	0	$\Phi_1 \sin 30^\circ$	$\Phi_1 \sin 60^\circ$	$\Phi_1 \sin 90^\circ$	$\Phi_1 \sin 120^\circ$
$\phi_2 =$	$-\Phi_2 \sin 30^\circ$	0	$\Phi_2 \sin 30^\circ$	$\Phi_2 \sin 60^\circ$	$\Phi_2 \sin 90^\circ$

Odczytane z tabelki tej wartości brane są odpowiednio kolejno z rys. 1, odmierzane na kierunkach osi uzwojeń i sumowane.

W rozpatrzonym przypadku otrzymaliśmy pole wypadkowe wirujące. Miejscem geometrycznym końca wypadkowego wektora jest elipsa.

Według podanej zasady wykonano wszystkie dalsze rysunki ilustrujące sumowanie pól składowych ϕ_1 i ϕ_2 .



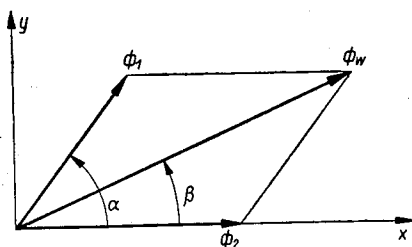
Rys. 2. Sumowanie pól oscylacyjnych ϕ_1 i ϕ_2 przy $\phi_1 = 2 \phi_2$, $\alpha = 60^\circ$, $\varphi = 30^\circ$

Wykreślna metoda sumowania pól, aczkolwiek nadzwyczaj prosta, jest niewygodna, gdyż pozwala na uzyskiwanie wyników jedynie dla wybranych przypadków szczególnych, którymi dysponując trudno jest wyciągać wnioski uogólniające. Z tego względu za podstawę rozważań przyjęto wyprowadzenie matematyczne.

3. WYPROWADZENIE WZORÓW OKREŚLAJĄCYCH KSZTAŁT POLA WYPADKOWEGO

3.1. Kształt pola wypadkowego

Rozpatrujemy najogólniejszy przypadek sumowania pól składowych występujący przy wzajemnych stosunkach parametrów wymienionych w przypadku 4 (punkt 1).



Rys. 3. Przypadek ogólny sumowania wektorów dwóch oscylacyjnych pól składowych

Zakładamy więc: $\phi_1 \neq \phi_2$; $\alpha \neq \varphi$ i rysujemy wykres wektorowy na rys. 3, również w postaci najogólniejszej. ϕ_w na tym rysunku przedstawia

w postaci ogólnej wektor otrzymywanego z sumowania wypadkowego pola.

Równanie rzutów wypadkowego wektora ϕ_w na obydwie osie wyrażą się wzorami (2):

$$\begin{aligned}x &= \phi_1 \cos \alpha + \phi_2, \\y &= \phi_1 \sin \alpha.\end{aligned}\quad (2)$$

Po podstawieniu wartości z (1) i elementarnych przekształceniach otrzymamy:

$$x = (\Phi_1 \cos \alpha + \Phi_2 \cos \varphi) \sin \omega t - (\Phi_2 \sin \varphi) \cos \omega t, \quad (3)$$

$$y = (\Phi_1 \sin \alpha) \sin \omega t. \quad (4)$$

Dla znalezienia miejsca geometrycznego końca wypadkowego wektora rugujemy zmienny w czasie parametr ωt podstawiając do (3) wartości (5) określone z (4).

$$\begin{aligned}\sin \omega t &= \frac{y}{\Phi_1 \sin \alpha}, \\ \cos \omega t &= \sqrt{1 - \frac{y^2}{\Phi_1^2 \sin^2 \alpha}};\end{aligned}\quad (5)$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned}x &= \left[\frac{\Phi_1 \cos \alpha + \Phi_2 \cos \varphi}{\Phi_1 \sin \alpha} \right] y - \Phi_2 \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{y^2}{\Phi_1^2 \sin^2 \alpha}}; \\ \Phi_2 \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{y^2}{\Phi_1^2 \sin^2 \alpha}} &= \left[\frac{\Phi_1 \cos \alpha + \Phi_2 \cos \varphi}{\Phi_1 \sin \alpha} \right] y - x.\end{aligned}$$

Równanie podnosimy stronami do kwadratu i po przekształceniach otrzymujemy:

$$\begin{aligned}x^2 - 2 \frac{\Phi_1 \cos \alpha + \Phi_2 \cos \varphi}{\Phi_1 \sin \alpha} x y + \frac{\Phi_1^2 \cos^2 \alpha + 2 \Phi_1 \Phi_2 \cos \alpha \cos \varphi + \Phi_2^2}{\Phi_1^2 \sin^2 \alpha} y^2 + \\ - \Phi_2^2 \sin^2 \varphi = 0.\end{aligned}\quad (6)$$

Jeżeli oznaczmy:

$$\begin{aligned}A &= 1, \\ B &= 2 \frac{\Phi_1 \cos \alpha + \Phi_2 \cos \varphi}{\Phi_1 \sin \alpha}, \\ C &= \frac{\Phi_1^2 \cos^2 \alpha + 2 \Phi_1 \Phi_2 \cos \alpha \cos \varphi + \Phi_2^2}{\Phi_1^2 \sin^2 \alpha}, \\ F &= \Phi_2^2 \sin^2 \varphi,\end{aligned}\quad (7)$$

to otrzymane równanie linii drugiego stopnia (6) możemy przepisać w postaci ogólnej:

$$A x^2 - B x y + C y^2 - F = 0.$$

Z otrzymanej najogólniejszej dla rozpatrywanego zagadnienia postaci równania (brak pierwszej potęgi zmiennej przy współczynnikach) możemy wyciągnąć wniosek wspólny dla wszystkich przypadków wzajemnych stosunków parametrów:

Linia wyrażona równaniem (6) ma środek symetrii, który leży w początku układu współrzędnych.

Badamy wyróżnik linii:

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= 4 \frac{\Phi_1^2 \cos^2 \alpha + 2 \Phi_1 \Phi_2 \cos \alpha \cos \varphi + \Phi_2^2 \cos^2 \varphi}{\Phi_1^2 \sin^2 \alpha} + \\ &- 4 \cdot 1 \frac{\Phi_1^2 \cos^2 \alpha + 2 \Phi_1 \Phi_2 \cos \alpha \cos \varphi + \Phi_2^2}{\Phi_1^2 \sin^2 \alpha} = \\ &= 4 \frac{\Phi_2^2 (\cos^2 \varphi - 1)}{\Phi_1^2 \sin^2 \alpha} = - \left(2 \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} \right)^2. \end{aligned}$$

Przy dowolnych wartościach i znakach czynników zawartych w nawiasie ich iloczyn po podniesieniu do kwadratu pozostanie dodatni, a więc wyróżnik $B^2 - 4AC < 0$. Stąd wniosek ważny również dla wszystkich przypadków wzajemnych stosunków parametrów:

Otrzymane równanie (6) linii drugiego stopnia w najogólniejszym przypadku przedstawia elipsę.

Dla wyeliminowania członu Bxy równania (6), a tym samym znalezienia kierunku osi symetrii — półosi elipsy — obracamy układ współrzędnych o kąt γ określony wzorem:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} 2\gamma &= \frac{A - C}{B} = \frac{(\Phi_1^2 \sin^2 \alpha - \Phi_1^2 \cos^2 \alpha - 2 \Phi_1 \Phi_2 \cos \alpha \cos \varphi - \Phi_2^2) \Phi_1 \sin \alpha}{2 \Phi_1^2 \sin^2 \alpha (\Phi_1 \cos \alpha + \Phi_2 \cos \varphi)} = \\ &= - \frac{\Phi_1^2 \cos 2\alpha + 2 \Phi_1 \Phi_2 \cos \alpha \cos \varphi + \Phi_2^2}{\Phi_1^2 \sin 2\alpha + 2 \Phi_1 \Phi_2 \sin \alpha \cos \varphi}. \end{aligned} \quad (8)$$

Po znalezieniu wartości kąta γ ze wzoru (8) można określić współczynniki równania (6) w nowym układzie współrzędnych z zależności (9):

$$\begin{aligned} A' &= \frac{1}{2} (A + C) + \frac{1}{2} B \sin 2\gamma + \frac{1}{2} (A - C) \cos 2\gamma, \\ C' &= \frac{1}{2} (A + C) - \frac{1}{2} B \sin 2\gamma - \frac{1}{2} (A - C) \cos 2\gamma. \end{aligned} \quad (9)$$

Nową postać równania (6)

$$A' x^2 + C' y^2 - F = 0$$

można przedstawić inaczej:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{F}{A'}}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{\frac{F}{C'}}}\right)^2 = 1. \quad (10)$$

Postać wzoru (10) umożliwia określenie długości obydwu półosi elipsy wynoszących odpowiednio:

$$\sqrt{\frac{F}{A'}} \quad \text{oraz} \quad \sqrt{\frac{F}{C'}}. \quad (11)$$

Dla uwzględnienia przypadku przeciwnego zwrotu jednego z wektorów składowych należy w otrzymanych zależnościach podstawić zamiast α wartość $180^\circ - \alpha$. W czwartym przypadku wzajemnych stosunków parametrów nie pociągnie to za sobą zmiany charakteru otrzymanej krzywej, która pozostanie elipsą, jedynie o innych długościach i kierunkach półosi.

Dla wyczerpania pozostałych możliwości mogących wystąpić w omawianym przypadku wzajemnych stosunków parametrów należy jeszcze rozważyć kształt pola przy α i φ równych zero. Przypadek przy $\alpha = 0$ — dwóch pól oscylujących wzdłuż jednego kierunku, sprowadza się do ich algebraicznego sumowania i daje oczywiście pole oscylacyjne o stałym kierunku w przestrzeni. W przypadku braku przesunięcia fazowego między polami składowymi — $\varphi = 0$ wartości współczynników wyrażonych wzorami (7) przedstawia się jak następuje:

$$A = 1; \quad B = 2 \frac{\Phi_1 \cos \alpha + \Phi_2}{\Phi_1 \sin \alpha}; \quad C = \left(\frac{\Phi_1 \cos \alpha + \Phi_2}{\Phi_1 \sin \alpha} \right)^2; \quad F = 0,$$

a równanie (6):

$$\left(x + \frac{\Phi_1 \cos \alpha + \Phi_2}{\Phi_1 \sin \alpha} y \right) = 0;$$

przedstawia ono i w tym przypadku prostą — mimo istnienia przesunięcia pól składowych w przestrzeni otrzymujemy również liniowe pole oscylacyjne o stałym kierunku w przestrzeni.

Z rozpatrzenia otrzymanej postaci wzorów wynika ponadto, że: *dany kształt i położenie elipsy, otrzymane przy pewnych wartościach kątów α_n i φ_n zostaną zachowane przy wartościach tych kątów odpowiednio $(180 - \alpha_n)$ i $180 - \varphi_n$* . (Porównaj rysunki 4, 5 i 7).

Rozważania dotyczące czwartego przypadku wzajemnych stosunków parametrów ilustrują konstrukcje wykreślne podane na rys. 4 (z wyjątkiem konstrukcji na rysunku 4c dotyczącej przypadku 3). Wykonane

są one dla $\alpha = \text{const}$, kilku wartości φ oraz obydwu możliwych przypadków zwrotów wektorów.

Dla otrzymania zależności obowiązujących w trzecim przypadku wzajemnych stosunków parametrów wystarczy do wzorów (6) do (10) podstawić $\alpha = \varphi$.

Wartości współczynników A , B , C i F wyniosą dla tego przypadku:

$$\begin{aligned} A_3 &= 1, \\ B_3 &= 2 \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{\Phi_1} \operatorname{ctg} \varphi, \\ C_3 &= \frac{\Phi_1^2 \cos^2 \varphi + 2 \Phi_1 \Phi_2 \cos^2 \varphi + \Phi_2^2}{\Phi_1^2 \sin^2 \varphi}, \\ F_3 &= \Phi_2^2 \sin^2 \varphi. \end{aligned} \quad (12)$$

Kąt określający kierunek półośi elipsy:

$$\operatorname{ctg} 2 \gamma_3 = \frac{\Phi_1^2 \cos 2 \varphi - 2 \Phi_1 \Phi_2 \cos^2 \varphi - \Phi_2^2}{(\Phi_1^2 + \Phi_1 \Phi_2) \sin 2 \varphi}. \quad (13)$$

Współczynniki A'_3 i C'_3 można obliczyć ze wzorów (9) z tym, że podstawiać należy znaczenia z wyrażeń (12) i (13), otrzyma się więc nowe wartości dla tych współczynników.

Długości półośi elipsy można obliczyć ze wzorów (11) podstawiając znaczenia z wyrażeń (12) i (13) i nowe wartości A'_3 i C'_3 .

Zmiana zwrotu jednego z wektorów strumieni (podstawienie do wzorów wartości $180^\circ - \alpha$ zamiast α) tak samo jak i w czwartym przypadku wzajemnych stosunków parametrów nie zmieni charakteru krzywej, a jedynie długość i położenie jej półośi.

Konstrukcja wykreslna odpowiadająca przypadkowi 3 podana jest na rys. 4c.

Dla otrzymania zależności obowiązujących w drugim przypadku wzajemnych stosunków parametrów podstawiamy do wzorów (7) do (10) wartości $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$ przy zachowaniu $\alpha \neq \varphi$.

Współczynniki A_2 , B_2 , C_2 i F_2 otrzymamy ze wzorów (7):

$$\begin{aligned} A_2 &= 1, \\ B_2 &= 2 \frac{\cos \alpha + \cos \varphi}{\sin \alpha}, \\ C_2 &= \frac{\cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \cos \varphi + 1}{\sin^2 \alpha}, \\ F_2 &= \Phi^2 \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Kierunki osi symetrii otrzymamy ze wzoru (8):

$$\operatorname{ctg} 2\gamma_2 = -\frac{\cos 2\alpha + 2\cos\alpha\cos\varphi + 1}{\sin 2\alpha + 2\sin\alpha\cos\varphi} = -\frac{2\cos\alpha(\cos\alpha + \cos\varphi)}{2\sin\alpha(\cos\alpha + \cos\varphi)} = -\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\text{stad} \quad 2\gamma_2 = -\alpha; \quad \gamma_2 = -\frac{\alpha}{2},$$

czyli oś symetrii elipsy leży na dwusiecznej kąta α między kierunkami strumieni. Druga oś symetrii jako prostopadła do znalezionej znajdzie się na dwusiecznej kąta dopełniającego ($180^\circ - \alpha$).

Współczynniki A'_2 i C'_2 określimy podstawiając do (9) wartości A_2 , B_2 , C_2 i γ_2 . Po przekształceniach otrzymamy:

$$A'_2 = \frac{(\cos\alpha\cos\varphi + 1) - (\cos\alpha + \cos\varphi)}{\sin^2\alpha},$$

$$C'_2 = \frac{(\cos\alpha\cos\varphi + 1) + (\cos\alpha + \cos\varphi)}{\sin^2\alpha}.$$

Długości pól elipsy wynikną z podstawienia F_2 , A'_2 i C'_2 do (11).

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{F_2}{A'_2}} &= \sqrt{\frac{\Phi^2 \sin^2\varphi \cdot \sin^2\alpha}{(\cos\alpha\cos\varphi + 1) - (\cos\alpha + \cos\varphi)}} = \frac{\Phi \sin\varphi \sin\alpha}{(\cos\alpha - 1)(\cos\varphi - 1)} = \\ &= \frac{4\Phi \sin\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\varphi}{2} \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2} \sin\frac{\alpha}{2}} = 2\Phi \cos\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{F_2}{C'_2}} = \sqrt{\frac{\Phi^2 \sin^2\varphi \sin^2\alpha}{(\cos\alpha\cos\varphi + 1) + (\cos\alpha + \cos\varphi)}} = 2\Phi \sin\frac{\varphi}{2} \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Równanie elipsy dla drugiego przypadku wzajemnych stosunków parametrów otrzymamy podstawiając znalezione długości pól elipsy do (10):

$$\left(\frac{x}{2\Phi \cos\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{2\Phi \sin\frac{\varphi}{2} \sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = 1. \quad (14)$$

Zmiana zwrotu wektora jednego ze strumieni nie zmienia kierunków osi symetrii, gdyż te wzajemnie prostopadłe kierunki pozostaną na dwusiecznych kątów między wektorami strumieni. Równanie elipsy (14) zmienia się natomiast w następujący sposób:

$$\left(\frac{x}{2\Phi \cos\frac{\varphi}{2} \sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{2\Phi \sin\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = 1. \quad (15)$$

Konstrukcja wykreslna, odpowiadająca drugiemu przypadkowi podana jest na rys. 5 (z wyjątkiem konstrukcji z rysunku 5c dotyczącej pierwszego przypadku).

Dla otrzymania zależności obowiązujących w pierwszym przypadku wzajemnych stosunków parametrów wystarczy do wzorów dla drugiego przypadku podstawić dalszy warunek $\alpha = \varphi$.

Kierunek osi symetrii — półosi elipsy — pozostanie bez zmiany, a mianowicie:

$$\nu_1 = -\frac{\alpha}{2} = -\frac{\varphi}{2}.$$

Równanie elipsy z określonymi długościami półosi przy kącie między dodatnimi kierunkami wektorów pól składowych wynoszącym α otrzymamy ze wzoru (14):

$$\left(\frac{x}{2\Phi \cos^2 \frac{\varphi}{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{2\Phi \sin^2 \frac{\varphi}{2}}\right)^2 = 1. \quad (16)$$

Natomiast przy zmianie zwrotu jednego z wektorów, czyli przy kącie między dodatnimi kierunkami wektorów pól składowych wynoszącym $180^\circ - \alpha$, równanie elipsy otrzymamy odpowiednio ze wzoru (15):

$$\left(\frac{x}{2\Phi \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{2\Phi \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}\right)^2 = 1,$$

czyli

$$\left(\frac{x}{\Phi \sin \varphi}\right)^2 + \left(\frac{y}{\Phi \sin \varphi}\right)^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = (\Phi \sin \varphi)^2. \quad (17)$$

Otrzymane równanie (17) jest równaniem koła o długości promienia wynoszącej $\Phi \sin \varphi$.

Kilka przykładów powstawania takiego pola podano na rysunku 6. Wniosek:

W przypadku sumowania dwóch pól oscylacyjnych o jednakowej wartości maksymalnej strumienia, przesuniętych w przestrzeni o kąt $(180 - \alpha)^\circ$ i w fazie o kąt $\varphi = \alpha$ otrzymuje się wirujące pole kołowe o promieniu równym iloczynowi wartości maksymalnej strumienia każdego z pól składowych przez sinus kąta przesunięcia w fazie i przestrzeni.

Z rozpatrzenia postaci wzoru (17) wynika, że najkorzystniejszy jest przypadek wzajemnego przesunięcia pól, przy którym $\alpha = \varphi = 90^\circ$, gdyż wtenczas wirujący promień pola kołowego jest największy — równy war-

tości maksymalnej strumienia każdego z obydwu jednakowych pól składowych. Równanie koła przyjmuje postać:

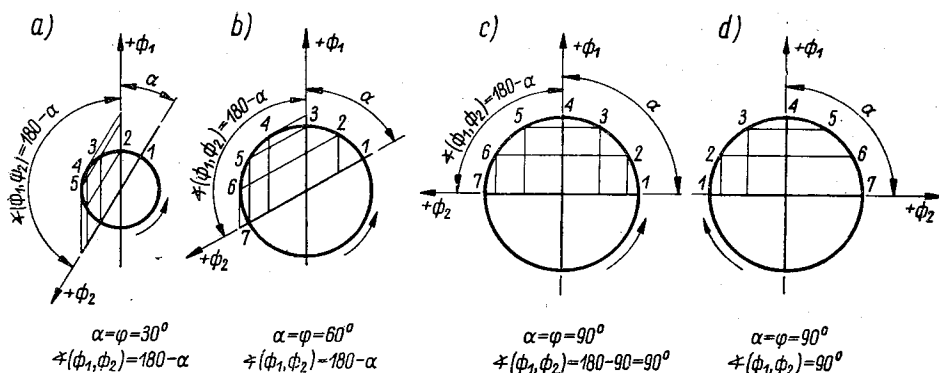
$$x^2 + y^2 = \Phi^2. \quad (18)$$

Należy podkreślić, że w tym i tylko w tym przypadku szczególnym można mówić o powstawaniu pola kołowego przy sumowaniu dwóch oscylacyjnych pól składowych o jednakowych przesunięciach kątowych w przestrzeni i w czasie.

Przy dowolnym przesunięciu różnym od 90° dla otrzymania pola kołowego konieczne jest spełnienie warunku

$$\varphi = 180^\circ - \alpha. \quad (19)$$

Również tylko w przypadku $\varphi = \alpha = 90^\circ$ zmiana kierunku jednego z pól na przeciwny (odwrócenie wektora o 180°) spowoduje wirowanie nie zmienione co do wielkości i kształtu pola kołowego w przeciwnym kierunku (rysunki 6c i 6d). W przypadku pola kołowego otrzymanego z su-



Rys. 6. Powstawanie wypadkowego pola kołowego

mowania dwóch oscylacyjnych pól składowych o dowolnym przesunięciu różnym od 90° [przy spełnionym warunku (19)] odwrócenie kierunku jednego z wektorów pól składowych o 180° spowoduje powstanie pola wirującego w przeciwnym kierunku, ale o kształcie eliptycznym (rys. 5e). Jeżeli zmiana zwrotu jednego z wektorów nastąpi przy polu eliptycznym, otrzymane nowe pole, wirujące w przeciwnym kierunku, będzie w ogólnym przypadku również eliptyczne. Przy $\Phi_1 \neq \Phi_2$ nastąpi zmiana kształtu i kierunku półosi, chyba że $\varphi = 90^\circ$ (rys. 4). Przy $\Phi_1 = \Phi_2$ nastąpi tylko zmiana kształtu również z wyjątkiem przypadku $\varphi = 90^\circ$; może również nastąpić spełnienie warunku (19) i wtedy wyjściowe pole eliptyczne zamieni się oczywiście w przeciwnie wirujące — kołowe (rys. 5).

Drogą dalszej matematycznej analizy wzoru (6) można udowodnić, że w przypadku pola eliptycznego dłuższa półoś elipsy przy $\varphi < 90^\circ$ będzie znajdowała się wewnątrz kąta zawartego między dodatnimi kierunkami zwrotu wektorów składowych strumieni, a krótsza — wewnątrz kąta dopełniającego, a przy $\varphi > 90^\circ$ — na odwrót. Jeżeli $\Phi_1 = \Phi_2$, to jak wykazano przy rozpatrywaniu drugiego przypadku wzajemnego stosunku parametrów, dłuższa półoś będzie leżała na dwusiecznej odpowiedniego kąta; jeżeli $\Phi_1 > \Phi_2$, to między dwusieczną a kierunkiem strumienia Φ_1 o większej wartości maksymalnej, i to tym bliżej niego, im większa jest różnica między Φ_1 i Φ_2 . Matematyczny dowód tego stwierdzenia jest nie-trudny, ale długi i żmudny, a postać uzyskanych wyników nie jest przejrzysta i wymaga dodatkowych omówień. Wobec tego zamiast dowodu matematycznego zostanie przytoczona konstrukcja wykreślna ilustrująca omówione zjawisko, podana na rys. 7.

Z powyższego wnioskujemy:

Kształtu pola eliptycznego spowodowanego nieodpowiedniością kątów α i φ nie można zbliżyć do kołowego drogą zmiany wzajemnego stosunku wartości maksymalnych strumieni składowych. Każda taka zmiana będzie prowadziła wyłącznie do wydłużenia dłuższej, a nigdy krótszej półosi elipsy. Wniosek ilustruje porównanie odpowiednich pozycji rysunków 4 i 5.

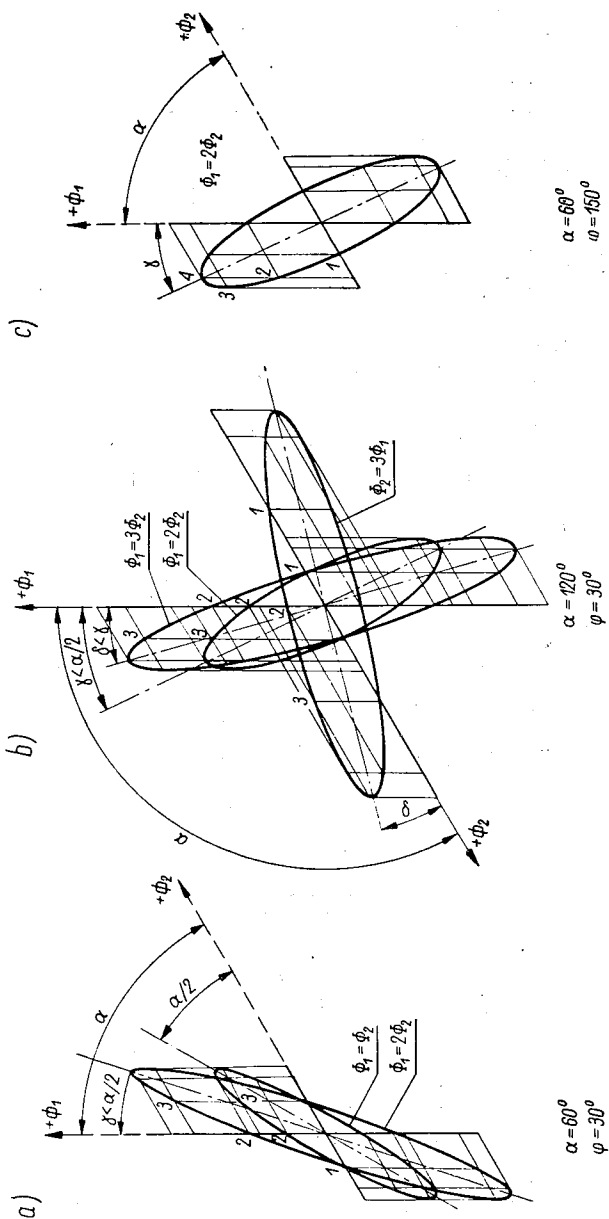
Lub inaczej:

Przy danej nieodpowiedności kątów α i φ największe zbliżenie się do pola kołowego (uzyskanie najmniejszej różnicy długości półosi elipsy) można osiągnąć przy równych wartościach maksymalnych strumieni składowych $\Phi_1 = \Phi_2$.

Powyższe rozważania dotyczące zjawisk spowodowanych zmianą zwrotu jednego z wektorów oraz dotyczące położenia półosi elipsy wypadkowego pola w przestrzeni względem kierunków oscylacji pól składowych można przeprowadzać tylko na podstawie geometrycznej metody dodawania pól. W szczególności ostatnie dwa ważne wnioski otrzymane jako podsumowanie tych rozważań nie mogą być otrzymane przy stosowaniu metody zastępowania sumowanych pól pulsacyjnych przeciwbieżnymi polami kołowymi.

Przypadek szczególny $\alpha = 90^\circ$.

Przypadek ten często występuje w praktyce w maszynach zasilanych z sieci jednofazowej zaopatrzonych w uzwojenie pomocnicze przesunięte względem głównego w przestrzeni z reguły o 90° elektrycznych. Podstawiając $\alpha = 90^\circ$ do wzorów otrzymanych dla poszczególnych przypadków wzajemnych stosunków parametrów można stwierdzić, jaki kształt pola



Rys. 7. Położenie dłuższej osi elipsy w stosunku do dodatnich kierunków pól składowych

otrzyma się przy rozmaitych stosunkach wielkości strumieni i ich przesunięć w fazie względem siebie.

Dla przypadku 4

Wartości współczynników (7) i kąta przesunięcia półosi elipsy wyniosą odpowiednio:

$$\begin{aligned} A_{04} &= 1, & F_{04} &= \Phi_2^2 \sin^2 \varphi, \\ B_{04} &= 2 \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \cos \varphi, & \operatorname{ctg} 2\gamma &= -\frac{\Phi_2^2 - \Phi_1^2}{2\Phi_1 \Phi_2 \cos \varphi}, \\ C_{04} &= \frac{\Phi_2^2}{\Phi_1^2}, \end{aligned}$$

Wartości A'_{04} i C'_{04} można obliczyć ze wzorów (9) podstawiając A_{04} ; B_{04} ; C_{04} . Długości półosi — ze wzoru (14), po podstawieniu F_{04} ; A'_{04} i C'_{04} .

Z wyników wnioskujemy, że przy różnych wielkościach strumieni $\Phi_1 \neq \Phi_2$ i $\varphi \neq 90^\circ$ otrzymamy pole eliptyczne o dłuższej półosi leżącej między dodatnimi kierunkami pól składowych, bliżej kierunku pola o większej wartości maksymalnej strumienia. Przypadek odpowiedniego wzajemnego stosunku parametrów można znaleźć na rys. 8a.

Dla przypadku 3

Wartości współczynników (7) wyniosą:

$$\begin{aligned} A_{03} &= 1, & C_{03} &= \frac{\Phi_2^2}{\Phi_1^2}, \\ B_{03} &= 0, & F_{03} &= \Phi_2^2. \end{aligned}$$

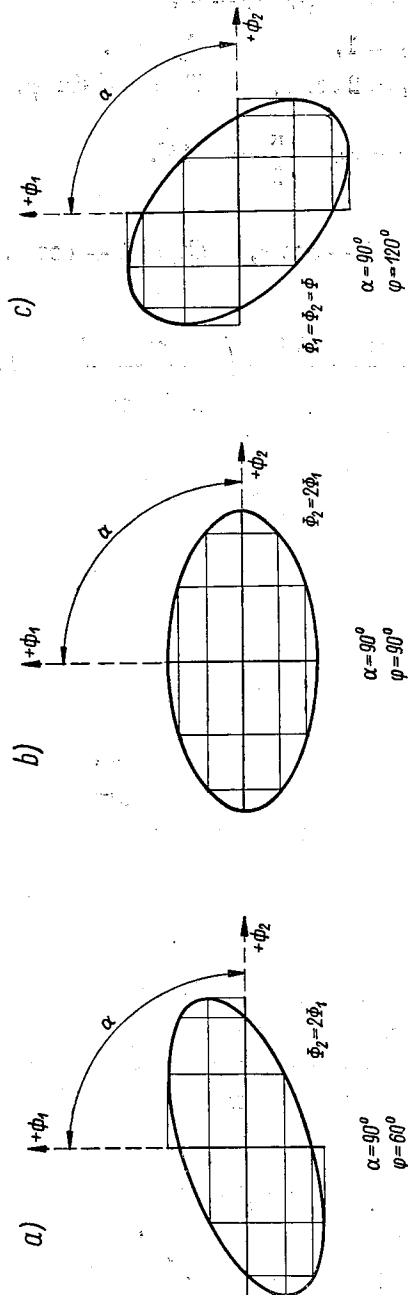
Ze względu na to, że $B_{03} = 0$ [brak członu B_{xy} w ogólnej postaci równania (6)], półosie elipsy leżą na osiach współrzędnych oraz $A' = A$ i $C' = C$, a długości półosi wynoszą odpowiednio:

$$\sqrt{\frac{F_{03}}{A'_{03}}} = \Phi_2, \quad \sqrt{\frac{F_{03}}{C_{03}}} = \Phi_1,$$

równanie elipsy:

$$\left(\frac{x}{\Phi_2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\Phi_1}\right)^2 = 1.$$

A więc przy różnych wielkościach strumieni $\Phi_1 \neq \Phi_2$ oraz $\alpha = 90^\circ$ otrzymujemy pole eliptyczne o półosiach leżących na osiach współrzędnych i równych odpowiednio wielkościom wartości maksymalnych strumieni składowych. Przypadek ten ilustruje rys. 8b.

Rys. 8. Kształty pola wypadkowego w przypadku $\alpha = 90^\circ$

Dla przypadku 2

Wartości współczynników (7) wyniosą:

$$\begin{aligned} A_{02} &= 1, & C_{02} &= 1, \\ B_{02} &= 2 \cos \varphi, & F_{02} &= \Phi^2 \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Kąt obrotu półośi elipsy $\gamma = -\frac{\alpha}{2} = -45^\circ$.

Współczynniki (9)

$$A'_{02} = 1 - \cos \varphi, \quad C'_{02} = 1 + \cos \varphi,$$

równanie elipsy:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2} \Phi \cos \frac{\varphi}{2}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2} \Phi \sin \frac{\varphi}{2}} \right)^2 = 1.$$

Przy równych wartościach strumieni $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$ i $\varphi \neq 90^\circ$ otrzymujemy pole eliptyczne o półośiach leżących na dwusiecznych kąta przestrzennego między strumieniami i równych odpowiednio $\sqrt{2} \Phi \cos \frac{\varphi}{2}$

oraz $\sqrt{2} \Phi \sin \frac{\varphi}{2}$.

Odpowiednia ilustracja — rys. 8c.

Dla przypadku 1

Zależności przy $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$ oraz $\varphi = \alpha = 90^\circ$, przy których otrzymuje się najkorzystniejsze pole kołowe, zostały już rozpatrzone przy wprowadzaniu wzoru (18) i zilustrowane rysunkiem 6c i 6d.

3.2. Prędkość kątowna pola wirującego

Dla określenia chwilowej prędkości kątowej wektora wypadkowego pola wirującego ϕ_w (rys. 3) należy zbadać zmianę w czasie kąta jego wychylenia względem jakiejkolwiek stałej osi, na przykład osi x układu współrzędnych. Jeżeli oznaczmy ten kąt przez β jak na rys. 3, to możemy napisać:

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{x}{y},$$

a podstawiając wartości x i y z (3) i (4) otrzymamy:

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{x}{y} = \frac{\Phi_1 \cos \alpha + \Phi_2 \cos \varphi}{\Phi_1 \sin \alpha} - \frac{\Phi_2 \sin \varphi}{\Phi_1 \sin \alpha} \operatorname{ctg} \omega t; \quad (20)$$

oznaczając:

$$m = \frac{\Phi_1 \cos \alpha + \Phi_2 \cos \varphi}{\Phi_1 \sin \alpha}, \quad (21)$$

$$n = \frac{\Phi_2 \sin \varphi}{\Phi_1 \sin \alpha} \quad (22)$$

możemy wyrażenie (20) przepisać w postaci:

$$\operatorname{ctg} \beta = m + n \operatorname{ctg} \omega t. \quad (23)$$

Dla znalezienia prędkości zmiany kąta β , a tym samym prędkości kątowej wektora ϕ_w , różniczkujemy wyrażenie (20) względem ωt :

$$-\frac{1}{\sin^2 \beta} \cdot \frac{d\beta}{d(\omega t)} = -\frac{\Phi_2 \sin \varphi}{\Phi_1 \sin \alpha} \cdot \frac{1}{\sin^2 \omega t};$$

$$(1 + \operatorname{ctg}^2 \beta) \frac{d\beta}{d(\omega t)} = \frac{\Phi_2 \sin \varphi}{\Phi_1 \sin \alpha} (1 + \operatorname{ctg}^2 \omega t),$$

stąd:

$$\frac{d\beta}{d(\omega t)} = \frac{\Phi_2 \sin \varphi}{\Phi_1 \sin \alpha} \cdot \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \omega t}{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta};$$

podstawiając (22) i (23) otrzymamy:

$$\frac{d\beta}{d(\omega t)} = n \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \omega t}{1 + (m + n \operatorname{ctg} \omega t)^2}. \quad (24)$$

Z równania (24) wynika, że ponieważ $\frac{d\beta}{d(\omega t)} \neq \text{const}$, prędkość kątowa wektora ϕ_w w rozpatrywanym ogólnym przypadku, gdy jego koniec opisuje elipsę, nie jest jednostajna.

W przypadku pola kołowego, czyli jak udowodniono przy $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$ oraz $\varphi = 180^\circ - \alpha$, wyrażenia (21) i (22) przyjmą odpowiednio postać:

$$m_0 = \frac{\Phi(-\cos \varphi) + \Phi \cos \varphi}{\Phi \sin \varphi} = 0,$$

$$n_0 = \frac{\Phi \sin \varphi}{\Phi \sin \varphi} = 1,$$

wobec czego wzór (24):

$$\frac{d\beta_0}{d(\omega t)} = 1 \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \omega t}{1 + \operatorname{ctg}^2 \omega t} = 1,$$

skąd $\frac{d\beta_0}{d(\omega t)} = \text{const}$; prędkość kątowna wektora ϕ_w w przypadku, gdy jego koniec opisuje koło, jest jednostajna i jak wynika ze wzoru (23):

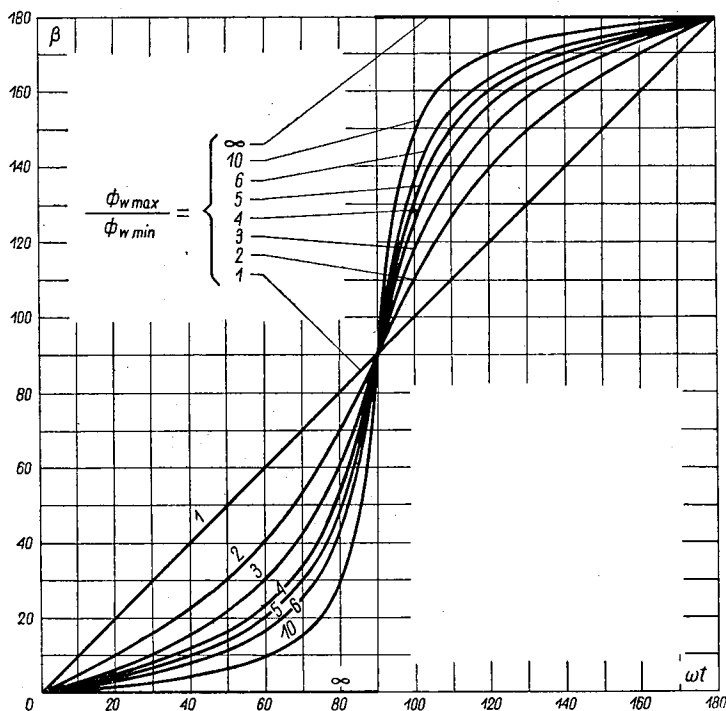
$$\text{ctg } \beta_0 = \text{ctg } \omega t,$$

czyli

$$\beta_0 = \omega t,$$

odpowiada ona pulsacji obydwu pól składowych.

Można udowodnić, że nierównomierność obrotu wektora wypadkowego ϕ_w zależy od stosunku długości półosi elipsy. Jeżeli kąty β i ωt od-



Rys. 9. Zależność kąta obrotu wektora pola wypadkowego β od pulsacji pól składowych ωt

kładać od jednej i tej samej osi, to ich wzajemną zależność można, podobnie jak w [2], wyrazić wzorem:

$$\text{ctg } \beta = \frac{\phi_{w \max}}{\phi_{w \min}} \text{ctg } \omega t, \quad (25)$$

gdzie $\phi_{w \max}$ i $\phi_{w \min}$ odpowiadają oczywiście długościom większej i mniejszej półosi elipsy.

Zależność (25) przy różnych stosunkach $\frac{\phi_{w \max}}{\phi_{w \min}}$ najwyraźniej można przedstawić graficznie, jak na rys. 9. Graniczne wartości stosunków $\frac{\phi_{w \max}}{\phi_{w \min}}$ równe 1 i ∞ ilustrują przypadki zwyrodnienia elipsy, a mianowicie odpowiednio:

1 — przypadek pola kołowego — półosie elipsy stają się równe sobie i przekształcają się w promienie koła, a wektor pola wiruje jednostajnie z prędkością kątową $\beta_0 = \omega t$,

2 — przypadek pola oscylacyjnego — jedna z osi elipsy kurczy się do zera, elipsa wyradza się do postaci prostej — drugiej osi — wzdłuż której oscyluje wektor pola przy $\beta = 0$ do wartości $\omega t = 90^\circ$ w jednym kierunku, a od tej wartości — w przeciwnym, czyli przy $\beta = 180^\circ$.

Możemy sformułować ostatni wniosek:

Prędkość wirowania wektora wypadkowego w przypadku pola kołowego jest jednostajna i równa pulsacji pól składowych.

Prędkość wirowania wektora wypadkowego w przypadku pola eliptycznego jest niejednostajna i to tym bardziej, im większa jest różnica długości półosi elipsy pola.

Politechnika Warszawska
Zakład Maszyn Elektrycznych

WYKAZ LITERATURY

1. Bödefeld Th., Sequenz H.: Elektrische Maschinen. Springer, 1952.
2. Dubicki B.: Maszyny elektryczne, tom II, PWN, 1953.
3. Pogorzelski W.: Geometria analityczna. PWN, 1951.
4. Pustola J., Śliwiński T.: Małe silniki jednofazowe. PWT, 1959.
5. Sequenz H.: Sonderbauarten von Kleinstmotoren. — E. u. M., 1944, Nr 27/28.
6. Staniewicz L.: Teoria prądów zmiennych. „Czytelnik”, 1951.

Е. ОВЧАРЕК

О СЛОЖЕНИИ ДВУХ ПУЛЬСИРУЮЩИХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Резюме

В статье произведён анализ сложения двух пульсирующих магнитных полей одинаковых по частоте. Сложение произведено по методам аналитической геометрии. Изложенный в статье метод может считаться пополнением обычно применяемого метода разложения пульсирующего поля на два вращающиеся встречно поля.

Анализ проведен для наиболее общего случая комбинаций параметров слагаемых полей — формулы (1) до (11) и (20) до (24) — а потом для всех возможных частных случаев. Важнейшие из полученных заключений следующие:

Магнитное поле полученное из сложения двух пульсирующих полей взаимно сдвинутых во времени и пространстве, в наиболее общем случае комбинации параметров этих полей, является вращающимся полем эллиптической формы.

Для получения кругового вращающегося магнитного поля составляющие пульсирующие поля должны быть одинаковыми по величине максимальных значений магнитного потока, а углы сдвига во времени φ и пространстве α должны удовлетворять условию выраженному формулой (19): $\varphi = 180 - \alpha$.

Наиболее выгодным является случай взаимного сдвига пульсирующих полей на углы $\varphi = \alpha = 90^\circ$. Только в этом случае можно сказать, что круговое вращающееся поле получается из сложения пульсирующих полей сдвинутых во времени и пространстве на один и тот же угол. Также только в этом случае изменение направления одного из векторов слагаемых пульсирующих полей на противоположное вызывает вращение в обратном направлении не измененного по величине и форме кругового вращающегося магнитного поля.

В случае эллиптической формы поля большая полуось эллипса находится всегда внутри угла между положительными направлениями векторов слагаемых полей. Если максимальные значения магнитных потоков этих полей одинаковы — то она находится на биссектрисе этого угла; если они различны — то между ней и направлением большего магнитного потока. Поэтому эллиптическую форму поля, вызванную несоответствием углов, нельзя приблизить к круговой путем изменения соотношения максимальных значений слагаемых потоков. При данном несоответствии углов α и φ наибольшего приближения к круговой форме поля можно достигнуть в условиях одинаковых максимальных значениях потоков.

Рассмотрены условия выступающие во время часто встречаемого в практике частного случая смещения слагаемых полей в пространстве на 90 электрических градусов.

Доказано, что скорость вращения вектора результирующего поля в случае его круговой формы равномерна и равняется пульсации слагаемых полей, а в случае эллиптической формы — неравномерна и тем более, чем больше разность длины полуосей эллипса поля.

Математические рассуждения пополнены графическими конструкциями. Некоторые тезисы и заключения иллюстрированы рисунками помогающими понять их смысл.

J. OWCZAREK

ON THE SUMMATION OF TWO OSCILLATION FIELDS

Summary

The paper deals with oscillation fields varying sinusoidally with the same frequency of oscillation. The analysis of their summing is carried out by using the method of investigating a curve of the second degree. This method can constitute a certain supplement of the method usually applied to the problem in question,

which consists in distributing oscillation fields into two circular fields rotating in opposite directions.

The analysis is carried out for the most general case of the combination of parameters — Formulae (1) to (11) and (20) to (24) — and for any possible particular cases. The more important conclusions reached in the paper are as follows.

The field obtained by summing two oscillation fields displaced with respect to each other in space and in phase is in the most general case of the combination of parameters of component fields a rotating field of an elliptical shape.

To obtain a circular field, the component oscillation field should be equal with respect to the maximum value of fluxes, and the displacement angles in space α and in phase φ should satisfy the condition determined by the equation (19), that is $\varphi = 180 - \alpha$.

The most advantageous case of displacements is the case when $\alpha = \varphi = 90^\circ$, and only in this case we may speak of equal displacements of oscillation fields in space and in phase, as required for obtaining a circular field. Only in this case, too, a shift of the direction of one the component fields causes the rotation of the resultant circular field in the opposite direction, the field being unchanged as to its shape and size.

In the case of the elliptical field, for $\varphi < 90^\circ$, the longer semi-axis of the ellipsis lies inside the angle contained between the positive directions of the component field vectors, and for $\varphi > 90^\circ$ — inside the supplementary angle; if the maximum values of the component fluxes are equal — then on the bisector of that angle; if they are not equal — then between the bisector and the direction of the field with a greater maximum value of the flux. In connection with the above, it is not possible to approximate the shape of the elliptic field, caused by non-satisfying the condition (18), to a circular shape by means of a change in the relation of maximum values of component fluxes. For a given inadequateness of the angles α and φ , the best approximation to the circular field can be obtained at equal maximum values of the component fluxes.

Relations are discussed which hold for the case to be often met in practice, namely for a particular displacement of the component fluxes in space by 90 electric degrees.

It is proved that the rotation velocity of the resultant vector in the case a circular field is uniform and equal to the angular velocity of the component oscillation fields, while in the case of elliptical field it is non-uniform and the more such, the greater is the difference of the lengths of the elliptical semi-axis.

Mathematical considerations are completed with graphical constructions. Some theorems and conclusions are illustrated with drawings making it possible to realize better their sense.

ZBIGNIEW KACZKOWSKI

621.318.1

Ferryty magnetostrykcyjne o dużej dobroci mechanicznej

Rękopis dostarczono 30.10.1959

Podano podstawowe definicje wielkości określających własności magnetostrykcyjne materiałów magnetycznych. Przykładowo omówiono zagadnienia dobroci mechanicznej ferrytów Ni-Zn na tle innych własności magnetomechanicznych. Zestawiono dane magnetyczne i magnetostrykcyjne ferrytów o dużej dobroci mechanicznej (tablice 1 i 2). Omówiono zagadnienie stałości dobroci w funkcji częstotliwości oraz zagadnienie stałości wielkości magnetomechanicznych w funkcji temperatury.

1. WSTĘP

O przydatności materiału magnetycznego na przetwornik magnetostrykcyjny stanowią jego własności magnetyczne, elektryczne, mechaniczne i magnetomechaniczne. Aby materiał był dobrym przetwornikiem, musi mieć dużą indukcję nasycenia B_s , dużą przenikalność μ , dużą oporność właściwą ρ , dostatecznie dużą wytrzymałość mechaniczną, duży współczynnik statyczny magnetostrykcji λ , duży współczynnik sprzężenia magnetomechanicznego k , dużą czułość A oraz w większości zastosowań powinien odznaczać się dużą dobrocią mechaniczną i magnetyczną. Ważnym ponadto zagadnieniem jest stałość tych wielkości w zakresie temperatur pracy, a w związku z tym pożądana jest duża temperatura Curie stosowanych materiałów.

Zjawisko magnetostrykcji polega na zmianie wymiarów i kształtu oraz własności mechanicznych pod wpływem przyłożonego pola magnetycznego (zjawiska: Joule'a, Wiedemanna i Guillemina), lub odwrotnie, na zmianie własności magnetycznych pod wpływem naprężeń (zjawisko Villariego). Zjawiska te zostały omówione szerzej w wielu publikacjach zagranicznych [1], [2], [3] oraz kilku polskich [4], [5], [6], a tu zostaną podane tylko podstawowe definicje wielkości magnetomechanicznych, niezbędne do zrozumienia omawianego zagadnienia.

2. WIELKOŚCI MAGNETOSTRYKCYJNE MATERIAŁU

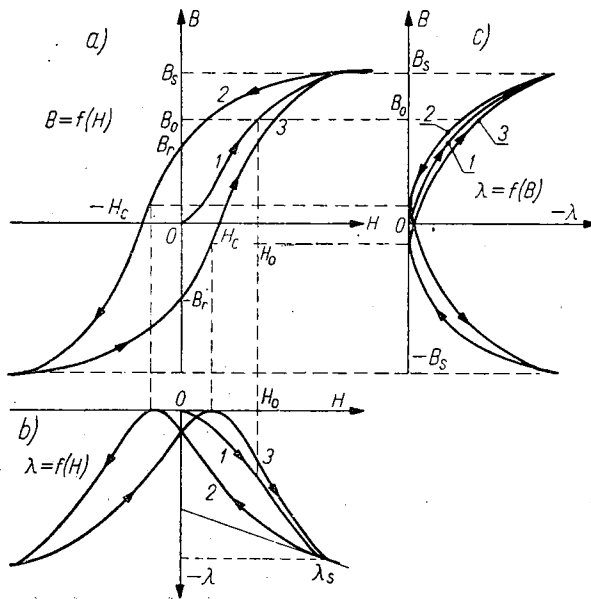
Materiał pod względem magnetostrykcyjnym określony jest przez współczynnik magnetostrykcji statycznej λ , współczynnik sprzężenia magnetomechanicznego k , czułość magnetostrykcyjną (naprężeń) Δ , przenikalność odwracalną μ i moduł Younga E .

Zespół tych wielkości wchodzi w skład równań magnetostrykcyjnych, w których przyjęto jako wielkości pierwotne natężenie pola magnetycznego H i naprężenia σ , a jako wielkości wtórne: indukcję B i wydłużenia względne λ [4], [5], [6].

Współczynnik magnetostrykcji statycznej λ określa względną zmianę długości badanej próbki wywołaną polem magnetycznym.

$$\lambda = \frac{\Delta l}{l} = f(H) \quad [10^{-6}] \quad (1)$$

Na rys. 1 podano wykres $B = f(H)$ i odpowiadające mu wykresy: $\lambda = f(H)$



Rys. 1. Krzywa pierwotna magnesowania oraz pętla histerezy magnetycznej (a) i odpowiadające im: krzywa pierwotna i krzywa motyla magnetostrykcji (b). Na rys. 1c podano przerzutowany przez krzywe magnesowania wykres współczynnika magnetostrykcji $\lambda = f(B)$.

i $\lambda = f(B)$. Podobnie jak indukcja statyczny współczynnik magnetostrykcji osiąga przy pewnej wartości pola H nasycenie i zwykle tę wartość (λ_s) podaje się przy określaniu materiału.

Magnetostrykcyjną czułość naprężeń Δ określa się jako pochodną cząstkową z indukcji względem naprężeń przy stałym polu H i zwykle podaje się przy remanencji (Δ_r) lub przy k_m (wyjaśnienie poniżej) (Δ_{k_m})

$$\Delta = \left(\frac{\partial B}{\partial \sigma} \right)_H \quad [\mu \text{ Gs cm}^2/\text{dyna}]. \quad (2)$$

Przenikalność odwracalną próbki przy stałych naprężeniach (swobodnej) oraz przenikalność odwracalną próbki zamocowanej (przy stałym λ) określają zależności:

$$\mu_\sigma = \left(\frac{\partial B}{\partial H} \right)_\sigma \quad [\text{Gs/Oe}], \quad (3)$$

$$\mu_\lambda = \left(\frac{\partial B}{\partial H} \right)_\lambda \quad [\text{Gs/Oe}]. \quad (4)$$

Natomiast dynamiczny moduł Younga przy stałym polu E_H i stałej indukcji E_B określają zależności:

$$E_H = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} \right)_H \quad [10^{12} \text{ dyn/cm}^2], \quad (5)$$

$$E_B = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} \right)_B \quad [10^{12} \text{ dyn/cm}^2]. \quad (6)$$

Wielkości μ , Δ i $1/E$ są współczynnikami równań magnetostrykcyjnych.

Inną wielkością, nie wchodzącą bezpośrednio w skład równań magnetostrykcyjnych, ale silnie związaną z wielkościami magnetomechanicznymi, jest współczynnik sprzężenia magnetomechanicznego k , którego kwadrat jest określany w przypadku nadajników magnetostrykcyjnych jako stosunek energii magnetycznej przetwarzanej na mechaniczną do całej energii magnetycznej, lub w przypadku odbiorników, jako stosunek energii magnetycznej przetwarzanej z mechanicznej do całkowitej energii mechanicznej dostarczonej do przetwornika.

Po odpowiednich przekształceniach otrzymuje się następującą zależność:

$$k^2 = \frac{\mu_\sigma - \mu_\lambda}{\mu_\sigma} = \frac{1/E_H - 1/E_B}{1/E_H}. \quad (7)$$

Współczynnik k i pozostałe współczynniki magnetostrykcyjne powiązane są następującą zależnością:

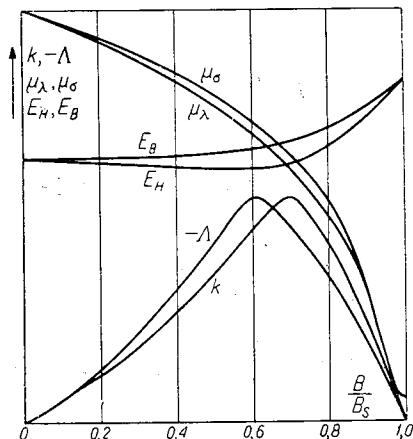
$$k^2 = \frac{\Delta^2 E_H}{4 \pi \mu_\sigma}. \quad (8)$$

Podaje się wartości k maksymalne (k_m) i przy remanencji (k_r). Obok tych

wielkości spotyka się również w literaturze określenie stałej magnetostrykcji [8], [9]

$$h = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial B} \right)_\lambda. \quad (9)$$

Na rys. 2 podano charakterystyki k , Λ , μ_σ i μ_λ , E_H i E_B w funkcji indukcji względnej przy pracy na pierwotnej krzywej magnesowania. Op-



Rys. 2. Przebieg charakterystyk współczynnika sprzężenia magnetomechanicznego k , czułości naprężeń Λ , przenikalności odwracalnych próbki swobodnej μ_σ i zamocowanej μ_λ oraz modułów Younga przy stałej indukcji E_B i przy stałym natężeniu pola E_H w funkcji względnego podmagnesowania przy pracy na pierwotnej krzywej magnesowania ferrytów

imum k_m wypada przy $B_0 = 0,7 B_s$ dla drgań wzdłużnych (i nieco więcej dla drgań skrętnych). Optimum czułości wypada przy $B = 0,6 B_s$. Zwykle współczynnik k przy remanencji $k_r = 0,6 \div 0,9 k_m$, a $B_r = 0,3 \div 0,6 B_s$.

Przy pracy na pętli histerezy na skutek histerezy magnetostrykcyjnej zazwyczaj współczynnik $k = 0$ przy $B = 0,1 \div 0,15 B_s$ dla górnej części pętli (krzywa 2 na rys. 1).

3. DOBROĆ MECHANICZNA

Dobroć mechaniczna odgrywa ważną rolę w większości typów przetworników magnetostrykcyjnych, a w niektórych z nich, np. filtrach, jest wielkością decydującą o przydatności ferrytu.

Materiał magnetostrykcyjny umieszczony w polu magnetycznym zmienia swoje wymiary, przy czym względne zmiany są rzędu 10^{-5} . Ten sam materiał umieszczony w zmiennym polu magnetycznym nałożonym na

stałe drga z częstotliwością pola zmiennego (lub jego harmonicznym), wytwarzając fale dźwiękowe (od kilkunastu Hz do kilkunastu MHz). Amplituda tych drgań A , zależna od wymiarów przetwornika (np. od długości l) i współczynnika magnetostrykcji λ

$$A = \lambda l \quad [10^{-6} \text{ cm}] \quad (10)$$

jest niewielka (zwykle ułamki mikrona) i wytwarzana tą drogą energia akustyczna jest znikomo mała, z wyjątkiem pewnych uprzywilejowanych częstotliwości, przy których przetwornik wpada w rezonans mechaniczny. Amplituda drgań przy częstotliwości rezonansowej A_r , zależna od własności sprężystych, masy i wymiarów rezonatora oraz od obciążenia, zostaje wielokrotnie zwiększona przewyższając amplitudę drgań poza rezonansem nawet dziesiątki tysięcy razy. Ze wzrostem amplitudy drgań wzrastają naprężenia tak, że dalszemu zwiększaniu A stoi na przeszkodzie wytrzymałość mechaniczna materiału. W przypadku ferrytów wielkością ograniczającą jest wytrzymałość na rozciąganie, która jest o rząd wielkości mniejsza od wytrzymałości na ściskanie [7].

Wielkością ujmującą matematycznie zjawisko wzrostu amplitudy drgań przy częstotliwości f_r jest dobroć mechaniczna Q_m materiału.

$$Q_m = \frac{A_r}{A} = \frac{2 \pi f_r M}{R}, \quad (11)$$

gdzie:

M — masa równoważna (dla przetwornika prętowego półfalowego równa 1/2 masy przetwornika),

R — oporność mechaniczna.

Dobroć mechaniczna Q_m mówi o stosunku energii przekazywanej w drganiach E_d do energii strat w każdym cyklu E_s .

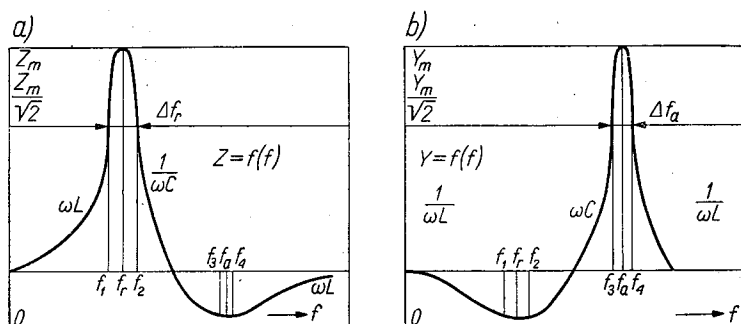
$$\frac{Q_m}{2 \pi} = \frac{E_d}{E_s}$$

Jednostkowa moc mechaniczna (moc P na jednostkę objętości V) wytwarzana w przetworniku magnetostrykcyjnym jest wprost proporcjonalna do częstotliwości rezonansowej i dobroci mechanicznej przetwornika,

$$\frac{P}{V} = a Q f_r,$$

gdzie a — współczynnik proporcjonalności zależny od własności magnetostrykcyjnych materiału.

Dobroć mechaniczną określa się na podstawie pomiarów elektrycznych, podobnie jak dobroć elektryczną, wyznaczając ją z szerokości krzywej rezonansu. W przypadku drgań magnetostrykcyjnych wyróżnia się dobroć mechaniczną przy stałej indukcji Q_{mB} i dobroć przy stałym natężeniu pola



Rys. 3. Impedancja (a) i admitancja (b) nieobciążonego przetwornika magnetostrykcyjnego w paśmie zawierającym częstotliwość rezonansu i antyrezonansu mechanicznego przy stałym podmagnesowaniu B_0 (lub przy remanencji B_r)

Q_{mH} , przy czym Q_{mH} wyznacza się z krzywej rezonansowej impedancji, a Q_{mB} z krzywej antyrezonansowej admittancji. Na rys. 3 przedstawiono odpowiednie wykresy z zaznaczeniem charakterystycznych wielkości. Dobroć Q_{mH} wyznacza się z następujących zależności:

$$Q_{mH} = \frac{f_r}{\Delta f_r} = \frac{f_r}{f_2 - f_1}, \quad (12)$$

gdzie:

$$Z_{f_1} = Z_{f_2} = \frac{Z_m}{\sqrt{2}}, \quad (13)$$

i odnosi się do odpowiednich amplitud drgań.

$$\text{Dobroć } Q_{mB} = \frac{f_a}{\Delta f_a} = \frac{f_a}{f_4 - f_3}, \quad (14)$$

gdzie

$$Y_{f_3} = Y_{f_4} = \frac{Y_m}{\sqrt{2}}. \quad (15)$$

Dobroć mechaniczną można także wyznaczyć z kół admittancji lub reaktancji [10], jednak szersze omówienie zagadnienia pomiarów i wyznaczania dobroci wykracza poza ramy tego artykułu. Należy zaznaczyć, że dobroć mechaniczna mówi o stosunku składowej urojonej do rzeczywistej i występuje w wielkościach zespolonych sprężystości

$$\frac{1}{\hat{E}_H} = \frac{1}{E_H} \left(1 - \frac{j}{Q_{mH}} \right), \quad (16)$$

$$\frac{1}{\hat{E}_B} = \frac{1}{E_B} \left(1 - \frac{j}{Q_{mB}} \right), \quad (17)$$

podobnie jak dobroć magnetyczna jako czynnik przenikalności zespolonej

$$\hat{\mu} = \mu \left(1 - \frac{j}{Q_{\mu}} \right). \quad (18)$$

Dobrocie te powiązane są ze współczynnikiem sprzężenia magnetomechanicznego następującym wzorem przybliżonym [11]

$$k^2 \approx \frac{\frac{1}{Q_{mH}} - \frac{1}{Q_{mB}}}{\frac{1}{Q_{\mu\lambda}}}. \quad (19)$$

4. WARUNKI STAWIANE FERRYTOM MAGNETOSTRYKCYJNYM STOSOWANYM W FILTRACH

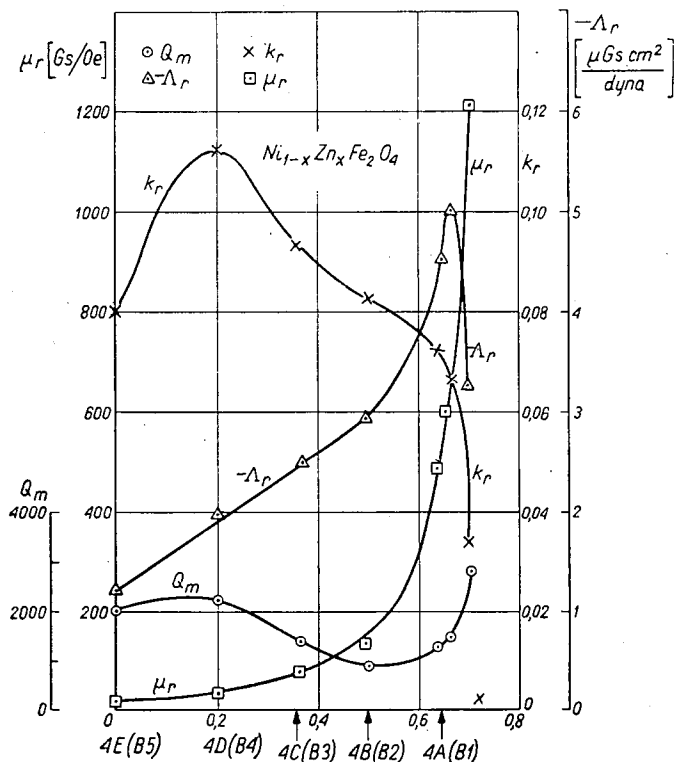
Ferryty magnetostrykcyjne znalazły zastosowanie w przetwornikach ultradźwiękowych (nadajniki i odbiorniki), filtrach mechanicznych i magnetostrykcyjnych, stabilizatorach częstotliwości, wzmacniaczach parametrycznych oraz w magnetostrykcyjnych liniach opóźniających.

Ferryty stosowane w filtrach mechanicznych podobnie jak materiały metaliczne powinny mieć duży współczynnik magnetostrykcji λ , duży współczynnik sprzężenia magnetomechanicznego k i możliwie dużą przenikalność. Częstotliwość rezonansu ferromagnetycznego powinna być odśunięta możliwie daleko od częstotliwości pracy. Ferryty w tego rodzaju filtrach stosowane są do pobudzania drganiami mechanicznymi pozostałych elementów filtru. Z tego powodu dobroć przetworników wzbudzających powinna być raczej mała, aby w przypadku zmian parametrów przetwornik taki mógł nadal skutecznie pracować. Natomiast w filtrach magnetostrykcyjnych obok dużych wartości k , μ i Δ bardzo ważną wielkością jest selektywność elementu, a w związku z tym pożądana jest możliwie największa dobroć mechaniczna i elektryczna. Ponieważ zmiany warunków pracy w tego rodzaju urządzeniach są niedopuszczalne, warunkiem decydującym o przydatności ferrytu jest stałość jego wielkości magnetycznych (μ), mechanicznych (f_r , f_a , E_H i E_B) i wynikająca z tych warunków stałość współczynnika sprzężenia magnetomechanicznego k . Stałość tych wielkości określa się przez temperaturowe współczynniki względnych zmian częstotliwości rezonansowej i antyrezonansowej, przenikalności, współczynnika k , modułu Younga oraz długości l . We wszystkich przetwornikach współczynniki te powinny być jak najmniejsze w zakresie normalnych temperatur pracy (20 — 50°C).

Bardziej szczegółowo zagadnienie temperaturowych zmian z podaniem definicji matematycznych zostanie podane w punkcie 8.

5. DOBROĆ MECHANICZNA FERRYTÓW NIKLOWO-CYNKOWYCH PRODUKOWANYCH MASOWO NA TLE WIELKOŚCI MAGNETOMECHANICZNYCH

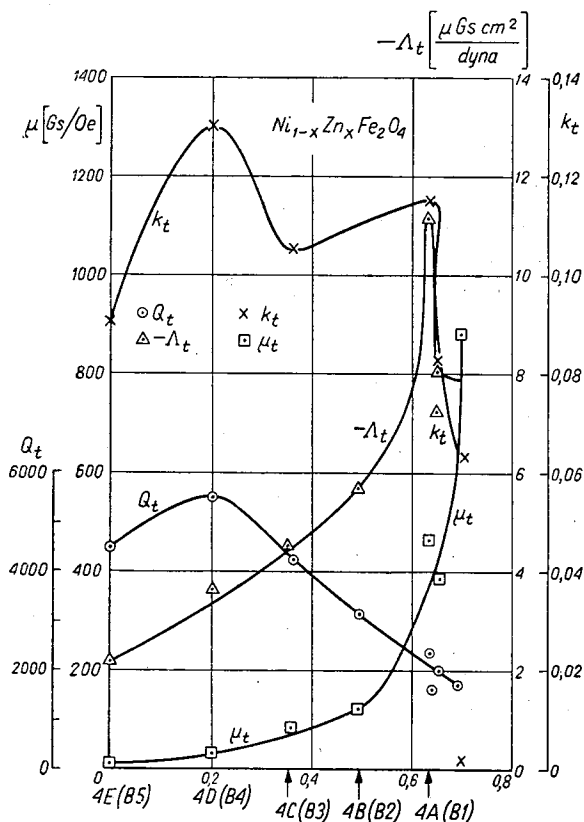
Dobroć mechaniczna ferrytów magnetostrykcyjnych jest znacznie większa (często o dwa rzędy wielkości) od Q_m tradycyjnych materiałów metalicznych takich, jak nikiel czy permaloje. Pozostałe własności magnetostrykcyjne ferrytów nie ustępują własnościom materiałów metalicznych. Wadą ferrytów jest ich niska indukcja nasycenia (2,5 — 5 kGs) i kruchość. Natomiast wielką zaletą ferrytów jest ich duża oporność właściwa,



Rys. 4. Dobroć mechaniczna Q_{mH} , czułość naprężeń Δ_r , przenikalność odwracalna μ_r i współczynnik sprzężenia magnetomechanicznego k_r przy remanencji dla drgań wzdlużnych o $f_r = 60 \div 75$ kHz w funkcji zawartości cynku ferrytów $\text{Ni}_{1-x}\text{Zn}_x\text{Fe}_2\text{O}_4$ (ferrytów handlowych Philipsa) wg wyników podanych przez van der Burgta [12]. Badano próbki toroidalne o średniej średnicy 2,4 cm i wysokości 0,4 cm wypalane w 1275°C przez 2 godziny w powietrzu

często o 10 rzędów wielkości większa niż materiałów metalicznych, pozwalająca na stosowanie przetworników ferrytowych w zakresie do kilku MHz. Dobroć mechaniczna ferrytów magnetostrykcyjnych przybiera wartości od kilkuset do kilku tysięcy, dochodząc do 20000, natomiast dobroć

niklu, permaloju i hiperco nie przewyższa 150, a jedynie dobroć stopu Ni Span C dochodzi do 16000. Dobroć mechaniczna handlowych ferrytów niklowo-cynkowych dla drgań wzdluznych Q_m zmierzona przy remanencji zmienia się w zakresie od 900 do 3000, osiągając minimum dla ferrytów typu 4B ($\text{Ni}_{0,5}\text{Zn}_{0,5}\text{Fe}_2\text{O}_4$), a maksimum dla ferrytu o składzie $\text{Ni}_{0,3}\text{Zn}_{0,7}\text{Fe}_2\text{O}_4$. Dla tych samych ferrytów Ni-Zn maksimum dobroci



Rys. 5. Wielkości magnetomechaniczne μ_t , Δ_t , Q_t , k_t dla drgań skrętnych przy indukcji optymalnej $B_o = 0,7 B_s$ w funkcji zawartości Zn ferrytów $\text{Ni}_{1-x}\text{Zn}_x\text{Fe}_2\text{O}_4$ wg van der Burgt [12]. Pomiary wykonano na próbkach badanych poprzednio dla drgań wzdluznych (rys. 4)

mechanicznej dla drgań skrętnych (torsyjnych) $Q_t = 5600$ wypada dla ferrytu 4D ($\text{Ni}_{0,8}\text{Zn}_{0,2}\text{Fe}_2\text{O}_4$), spadając do 1700 dla ferrytu $\text{Ni}_{0,3}\text{Zn}_{0,7}\text{Fe}_2\text{O}_4$. Równocześnie inne wielkości magnetyczne i mechaniczne pomierzone przy remanencji w przypadku drgań wzdluznych zmieniały się w następujących granicach: przenikalność od 18 dla 4E ($\text{Ni Fe}_2\text{O}_4$) do 1200Gs/Oe dla ferrytu $\text{Ni}_{0,3}\text{Zn}_{0,7}\text{Fe}_2\text{O}_4$; współczynnik k_r od 0,03 dla tego ostatniego składu do 0,11 dla 4D; czułość Δ_r od $-1,2$ dla 4E do -5μ

Gs cm²/dynę dla 4A (Ni_{0,36}Zn_{0,64}Fe₂O₄). Odpowiednie wykresy podające zależność omawianych wielkości od składu w ferrytach Ni-Zn podano na rys. 4 dla drgań wzdlużnych i na rys. 5 dla drgań skretnych, przy czym te ostatnie pomierzone zostały przy indukcji optymalnej $B_o = 0,7B_s$. Porównywane próbki miały kształt toroidów o $d_s = 2,4$ cm i $h = 0,4$ cm i wypalane były w 1275°C w powietrzu przez okres 2 godzin. W przypadku drgań skretnych maksimum $k_t = 0,13$ wypadało w tym samym punkcie co maksimum dobroci (4D), natomiast maksimum $\Delta_t = -11,2$ u Gs cm²/dynę pomierzono dla ferrytu 4A, a maksimum przenikalności $\mu_t = 880$ podobnie jak dla drgań wzdlużnych dla ferrytu Ni_{0,3}Zn_{0,7}Fe₂O₄. Należy zaznaczyć, że indukcja nasycenia ferrytów Ni-Zn zmienia się w zakresie od 2,6 do 4,7 kGs osiągając maksimum dla ferrytu 4C (Ni_{0,64}Zn_{0,34}Fe₂O₄), a odpowiednio B_r zawiera się w granicach 1,1 do 2,4 kGs. Natomiast magnetostrykcja nasycenia λ_s jest funkcją monotonicznie opadającą ze wzrostem cynku od $-26 \cdot 10^{-6}$ do $-2 \cdot 10^{-6}$ w omawianym zakresie składów. Natężenie koercji H_c monotonicznie wzrasta od 0,2 do 1,4 Oe i podobnie moduł Younga wzrasta od $E_H = 0,89 - 0,93$ (dla 4E) do $1,8 \cdot 10^{12}$ dyn/cm². Moduł sztywności G_H zmienia się podobnie od 0,36 do $0,68 \cdot 10^{12}$ dyn/cm². Prędkość dźwięku w omawianym zakresie rośnie z zawartością cynku od 4700 m/s do 6000 m/s dla drgań wzdlużnych i od 2900 do 3700 dla drgań skretnych. Gęstość wzrasta z zawartością cynku od 4 do 5 g/cm³. Temperatura Curie spada ze wzrostem cynku od 595°C dla ferrytu niklowego do 85° dla Ni_{0,3}Zn_{0,7}Fe₂O₄. Współczynnik Poissona niewiele odbiega od 0,29 w omawianym przedziale. Oporność właściwa ρ jest większa od $10^5 \div 10^6$ Ω cm. Współczynniki temperaturowe przenikalności F maleją od wartości $16 \div 40 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$ dla 4E do $6 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$ dla $x = 0,7$. Współczynniki temperaturowe częstotliwości rezonansowej i antyrezonansowej $\alpha_{\Delta f}$ zmieniają się od $50 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$ dla 4E do $40 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$ dla 4A osiągając po drodze maksimum ($77 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$) dla 4C. Powyższe zestawienia dotyczące materiałów handlowych o porowatości od 9 do 22% wykonano na podstawie wyników opublikowanych przez Poppera [8] i van der Burgt [12] w 1953 r.

Własności magnetomechaniczne w ciągu ostatnich lat zostały znacznie polepszone przez udoskonalenie procesu technologicznego [13], [14], zmniejszenie porowatości przez dodanie domieszek kobaltu [11], [15] lub miedzi [16]. Ponieważ przebieg krzywych niewiele został zmieniony, a jedynie nastąpiło ich przesunięcie w układzie współrzędnych (z uprzywilejowaniem ferrytu niklowego) polepszające μ , k i Δ , a obniżające porowatość oraz współczynniki temperaturowe [11], ze względu na niepełne dane porzeczano tu na podaniu przykładowym wyników dla materiałów handlowych.

6. FERRYTY MAGNETOSTRYKCYJNE O DUŻEJ DOBROCI MECHANICZNEJ

Najlepsza uzyskana dobroć ferrytów magnetostrykcyjnych osiągnęła wartość 20000 [16]. W przetwornikach magnetostrykcyjnych w większości zastosowań wystarcza już dobroć od kilkudziesięciu do kilkuset (w wodzie $Q_m \approx 50$). W zastosowaniach specjalnych pożądana jest dobroć dużo większa, przy czym dopuszczalne granice są bardzo szerokie, od około 1000 do kilkunastu tysięcy. Autor przyjmuje umownie, że granice małej dobroci zawierają się w granicach od 1 do 200 i tu znajdzie się dobroć większości tradycyjnych materiałów metalicznych (nikiel, permaloje, itp.), *średnia dobroć* zawierać się będzie w zakresie od 200 do 2000 i będzie się odnosić do większości handlowych ferrytów, *duża dobroć* zostanie objęta granicami od 2000 do 5000 i w tym przedziale będą reprezentowane pozostałe ferryty handlowe oraz ferryty specjalne, przy czym ferryty te w zasadzie spełniają największe wymagania stawiane im z punktu widzenia konstrukcyjnego; ostatni przedział to materiały o *bardzo dużej dobroci mechanicznej* zawierającej się w granicach od 5000 w górę, przy czym największa w chwili obecnej pomierzona jej wartość nie przekracza 20000.

Ferryty tej ostatniej grupy wytworzone są na drodze laboratoryjnej i podawane są jako ciekawostki techniczne, lecz w przyszłości znajdą na pewno szersze zastosowanie. Materiały o małej i średniej dobroci znalazły powszechne zastosowania w przetwornikach ultradźwiękowych, natomiast ferryty o średniej i dużej dobroci mechanicznej stosuje się w filtrach mechanicznych i magnetostrykcyjnych. Ponieważ ferryty o średniej dobroci zostały w zasadzie omówione w rozdziale 5, obecnie zostaną omówione ferryty o dużej dobroci mechanicznej. Dobroć taką osiągają niektóre spośród materiałów handlowych (np. ferryty 4E i 4D) dla drgań wzdłużnych i prawie wszystkie składy Ni-Zn dla drgań skrętnych.

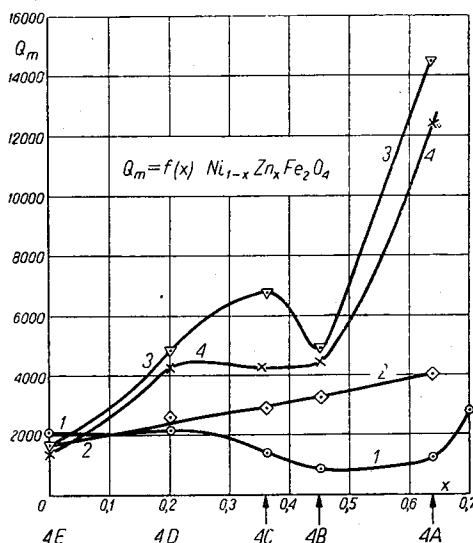
Dobroć mechaniczna zależy od składu chemicznego materiału, od jego struktury, kształtu, od jego przeszłości mechanicznej, termicznej i magnetycznej i wielu innych czynników, nie zawsze jeszcze dobrze zbadanych. Dobroć mechaniczna ferrytu maleje ze spadkiem oporności właściwej ferrytu.

Materiały metaliczne posiadające duże straty na prądy wirowe spowodowane małą opornością właściwą (o 10 rzędów mniejszą niż ferrytów) mają małą dobroć, przy czym dodatkowo na jej zmniejszenie wpływa tarcie mechaniczne blaszek, z których wykonany jest rdzeń przetwornika. Na dobroć ferrytu ma wpływ charakter jonowy chemicznych wiązań ferrytu. W zjonizowanym kryształe można oczekiwać mniejszego tłumienia mechanicznego dzięki mniejszemu plastycznemu płynięciu niż w metalach.

Wartość dobroci jest ściśle związana ze strukturą materiału i zależy od temperatury i przebiegu wypalania i od ich wpływu na rozrost ziarna, porowatość, powstawanie szczelin itp. W ferrytach wysoko i zbyt długo wypalanych następuje rekrytalizacja i przejście tlenków Fe_2O_3 w Fe_3O_4 . Jony Fe^{2+} powodują dyfuzję elektronową, co wpływa na wzrost strat magnetycznych i mechanicznych.

Dobroć mechaniczna maleje ze wzrostem krystalizacji, ze zmniejszeniem stopnia czystości i jednorodności materiału. Równocześnie ze zmniejszaniem się dobroci mechanicznej maleje dobroć magnetyczna.

Pomierzona wartość dobroci jest zwykle niższa niż rzeczywista, gdyż dobroć zależy od sposobu zamocowania badanej próbki, a nigdy nie da



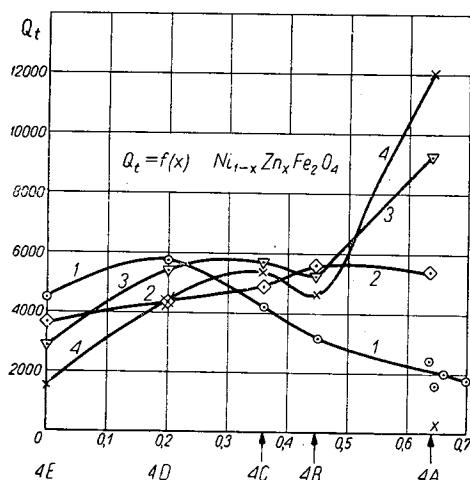
Rys. 6. Ferryty Ni-Zn o dużej dobroci mechanicznej dla drgań wzdłużnych wg wyników van der Burgt [12] i Poppera [8]. Krzywą 1 powtórzone dla porównania z rys. 4. Krzywa 2 przedstawia dobroć takich samych toroidów jak w przypadku krzywej 1, ale wyżarzanych w 1225 — 1275°C przez 2 godziny w atmosferze tlenu. Krzywa 3 jest wykresem dobroci rurek cienkościennych o długości 4,9 cm, średnicy 2 mm i grubości ścianek 1 mm wypalanych w 1225 — 1275°C przez 1 godzinę w atmosferze tlenu, przy czym pomiary wykonano nie przy remanencji jak w przypadku krzywych 1 i 2, a przy $B_0 = 0,7B_s$ i $f = 40 \div 60$ kHz. Krzywa 4 odnosi się do rurek różniących się od poprzednich (krzywa 3) średnicą $d_s = 4$ mm

się uniknąć całkowicie tarcia, które tłumi rezonans. Wielkości pomierzone zależą od wielkości pola podmagnesowującego.

Van der Burgt otrzymał próbki o bardzo dużej dobroci mechanicznej drogą następującego procesu technologicznego [12]: Tlenki wyjściowe starannie wymieszane, następnie wypalone dały jednorodny skład, który wyprasowany został w postaci cienkościennych rurek i wypalony w tempe-

raturze 1225—1275°C w atmosferze tlenu przez okres 1 godziny. Wystąpiła niewielka rekrytalizacja i nieznaczna zamiana tlenków żelazowych na żelazowe. Po odpowiedniej obróbce mechanicznej i cieplnej osiągnięto jednorodność wewnętrznych naprężeń. W wyniku otrzymano próbki o dobroci dochodzącej do 15 000.

Na rysunkach 6 i 7 podano wyniki pomiarów dobroci próbek rurkowych cienkościennych (krzywe 3 i 4) otrzymanych tą metodą. Pomiaru wykonano przy indukcji optymalnej $B_o = 0,7B_s$ przy $f = 40 - 60$ kHz. Krzywe 1 są wykresami Q_m i Q_t z rysunków 4 i 5 i podano je dla porównania. Krzywa 2 na rys. 6 przedstawia dobroć mechaniczną przy remanencji toroidów (dane — patrz krzywa 1) wyżarzanych w 1225 — 1275°C przez 2 godziny w atmosferze tlenu.



Rys. 7. Ferryty Ni-Zn o dużej dobroci mechanicznej dla drgań skrętnych (wg [8] i [12]). Pomiaru wykonano dla próbek omówionych poprzednio (rys. 6)

Z przebiegu krzywych wynika, że maksymalne wartości dobroci $Q_m > 10\,000$ uzyskano dla ferrytów o dużej przenikalności (4A), podczas gdy w zakresie między 4D a 4B ($x=0,2 - 0,5$) dobroć jest prawie stała utrzymując się na poziomie między 4000 a 6000, natomiast dobroć ferrytów niklowych (4E) zwykle nie przewyższa 2000.

Dodanie niewielkiej ilości kobaltu (zależnie od składu do około 3%) do ferrytów Ni-Zn, polepszające własności magnetomechaniczne i ich stałość w funkcji temperatury, również wpływa na zwiększenie Q_m i Q_μ . Oznacza to, że zmniejszenie anizotropii krystalicznej zwiększa odwracalność procesów magnetycznych (obroty wektorów magnetyzacji domen), co daje w efekcie spadek strat. Dobroć mechaniczna ferrytów Ni-Zn-Co jest zazwyczaj wyższa od 2000, dochodząc do 8000 [11]. W tablicy 1 podano

Ferryty magnetostrykcyjne

Pomiary wykonano dla drgań wzdluznych (a) i skrotnych (b)
ktorej wystepuje

Material	Symbol	Jednostki	Rodzaj pomiarów	(BaO) 6(Fe ₂ O ₃)	17,5(Fe ₂ Li ₁₀)O] 32,5(ZnO)50(Fe ₂ O ₃)	27(MnO)20(ZnO) 53(Fe ₂ O ₃)
Indukcja nasycenia	B_s	kG		B_r 2	3,8	4,65
Gęstość	γ	$\frac{g}{cm^3}$		4,64	4,50	4,93
Współczynnik sprzężenia magneto-mechan.	k_r		ac	<0,001	0,013	0,0015
	k_m		ad			0,001
	k_t		bd			
Moduł Younga lub moduł sztywn.	E_H	10^{12} $\frac{dyn}{cm^2}$	ac	1,45	1,13	1,64
	G_H		ad bd	0,58		0,614
Przenikalność początkowa i odwracalna	μ_p	$\frac{Gs}{Oe}$	ac	165	315	1230
	μ_r		ad	125	240	1180
	μ_z		bd			750
Dobroć mechaniczna	Q_m		ac	3000	3300	3300
	Q_t		ad bd	3000		5400
Współczynnik magnetostrykcji nasycenia	λ_s	10^{-6}		- 5	- 8	- 0,5
Inne wielkości	Wielkość Wartość			ν_H 0,25	ν_H 0,31	ν_H 0,33
	Wielkość Wartość			H_c 2500	T_c 640	M_c 0,3
	Uwagi	1.		2	2	2
	Źródła			[8] i [11]	[7], [11]	[8], [11]

1. Czułość naprężeń - $\Delta \left[\frac{\mu Gs \text{ cm}^2}{dyna} \right]$, współczynnik Poissona przy stałym polu ν_H , temperatura Curie T_c [°C], H_c natężenie koercji [Oe], B_r - indukcja remanencji [kGs], α_d współczynnik cieplny względnych zmian częstotliwości ($10^{-6}/^\circ\text{C}$).

Tablica 1

o dużej dobroci mechanicznej

przy remanencji (c) lub indukcji optymalnej B_{opt} , przy maksimum k (d)

$\begin{smallmatrix} 45(NiO) \\ 55(Fe_2O_3) \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 55(NiO) \\ 45(Fe_2O_3) \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} (NiO)_{0,95}(CuO)_{0,05} \\ Fe_2O_3 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} (NiO)_{0,85}(CuO)_{0,15} \\ Fe_2O_3 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} (NiO)_{0,994}(CoO)_{0,15} \\ Fe_2O_3 \end{smallmatrix}$	7 A1	7 A2
		2,9	2,6	3,0	3,2	3,2
4,8	4,8	5,1	5,0	5,1	5,2	5,2
0,15		0,21	0,22	0,20	0,20 0,30	0,19 0,25
1,6	1,7	1,55	1,6		1,7 0,6	1,75 0,62
28	23	40	30	18	40 45	60 50
>2000	>2000	>2000	>2000	>2000	>2500	>2500
		- 28	- 28	- 27	- 27	- 27
				- 1 1,8	ν 0,40	ν 0,40
				T_c 595	T_c 530	T_c 530
3	3	4	4			
[14]	[14]	[16]	[16]	[7]	[17]	[17]

2. próbki toroidalne na $f_r = 60 - 75$ kHz.

3. próbki toroidalne wypalane w 1400°C 3 godz. w powietrzu d_2 3 cm, przekrój $0,25 \times 0,5$ cm²

4. próbki prętowe $5 \times 5 \times 60$ mm³ wypalane w 1350°C i studzone w powietrzu.

Magnetostrykcyjne ferryty niklowo-cynkowe $Ni_{1-x}Zn_xFe_2O_4$ (składy

Pomiary wykonano dla drgań wzdluznych (a) i skretnych (b) przy remanencji (c)

0,36				0,50					0,64				
4C B3				4B B2					4A B1				
		4,03		4,4				4,17	3,7			3,67	
4,8	4,8	4,2	4,7	4,85	5,27	4,8	4,8	4,5	4,9	4,8	4,8	4,9	
0,096	0,089	0,067	0,09	0,082	0,1	0,065	0,062	0,049	0,072	0,089	0,085	0,055	
	0,105	0,103		0,05	0,110			0,084	0,082				0,03
1,37	1,39	1,06	1,40	1,53	1,85	1,17	1,19	1,13	1,62	1,61	1,56	1,42	
	0,51	0,52		0,42	0,59		0,45	0,45	0,43		0,62	0,61	0,59
		85	220	219	330			250	706			650	
		70		140	290			170	492				430
		96		128	250			470	480				
6750	4300	2860	>2000	920	>2000	4900	4400	3300	1260	14500	12400	4000	
	5700	5400		4900		3150	5300	4060	5500		2450		9300
		—15			—9			—7	—5			—4	
		B_r 2,3			$-A_r$ 4,3			B_r 2,4	$-A_t$ 11,2			B_r 1,7	
ν_H 0,33	ν_H 0,34				ν_H 0,35	ν_H 0,30	ν_H 0,31		ν_H 0,305	ν_H 0,32	ν_H 0,33	T_C 200	
3	4			2		3	4		2				
[11]	[11]	[8]	[14]	[11]	[13]	[11]	[11]	[8]	[11]	[11]	[11]	[8]	

1. patrz tablica 1.

2. próbki toroidalne $D_s = 2,4$ cm, $h = 4$ mm, wypalane w 1275°C w powietrzu przez 2 godziny.

T a b l i c a 2

handlowe) o dużej dobroci mechanicznej

lub indukcji optymalnej B_{opt} (d). Wielkości i jednostki jak w tablicy 1.

X	0						0,2						
Symbol	Rodzaj pomiar.	4E B5						4D B4					
B_s	—	2,6			2,4		4,2				3,55		4,7
γ	—	4,20	5,2	5,0	4,0	4,8	4,76	5,2	4,9	4,9	4,1	4,6	4,85
k_r	ac	0,08	0,15		0,049		0,112	0,125			0,049		0,093
k_m	ad		0,21	0,095		0,17		0,17	0,103	0,110		0,13	
k_t	bd	0,09		0,074	0,078		0,13		0,088	0,094	0,095		0,105
E_H	ac	0,93	1,75		0,89		1,37	1,78			0,95		1,50
	ad			0,75		1,55			1,19	1,27		1,50	
G_H	bd	0,36		0,31	0,36		0,54		0,46	0,49	0,37		0,59
μ_p	—	24	44		17	56	85	117			45	112	168
μ_r	ac	19	34		11		36	85			35		
μ_t	bd	16			11,5		35				56		86
Q_m	ac	2040			1575		2150				2660		1430
	ad		2000	1560		>2000		>2000	4800	4350		>2000	
Q_t	bd	4450		2800	3600		5650		5400	4400	4300		4250
λ_s		—26	—26		—22		—21	—20			—18		—16
1		P 21	— A_r 2,2	P 6	B_r 1,1	α_{df} <50	— A_t 3,7	— A_r 3,1			B_r 1,8		— A_t 4,4
		ν_H 0,29	ν_H 0,34	ν_H 0,20			ν_H 0,29	ν_H 0,33	ν_H 0,30	ν_H 0,31			
Uwagi	2			3		5	2		3	4		5	2
Źródła	[11]	[13]	[11]	[8]	[14]	[11]	[13]	[11]	[11]	[8]	[14]	[11]	

3. próbki rurkowe $d_s = 2$ mm, $h = 4,9$ cm., $g = 1$ mm, wypalane w 1225–1275°C w atmosferze tlenu przez 2 godz., $f_r = 40$ –60 kHz, $f_t = 25$ –35 kHz.

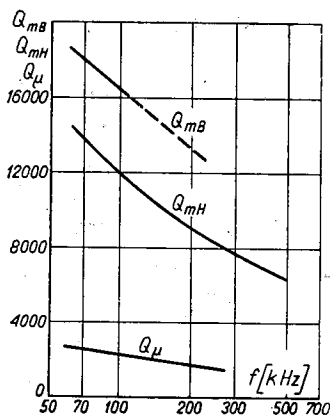
4. próbki rurkowe jak w poz. 3, tylko $d_s = 4$ mm,

5. toroidy wypalane w 1400°C.

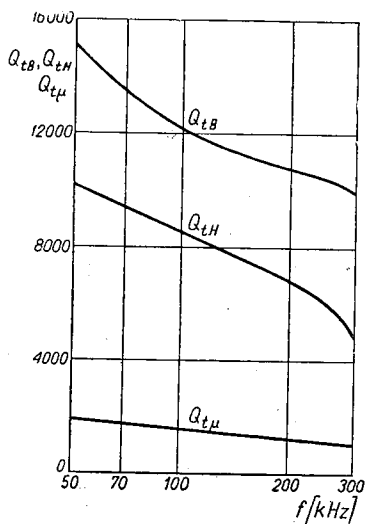
zestawienie dla ferrytów o dużej dobroci mechanicznej, przy czym ferryty niklowo-cynkowe o składach handlowych, tzn. 4A, 4B, 4C, 4D wg oznaczeń Philipsa lub B1, B2, B3, B4 wg oznaczeń Mullarda zostały wydzielone w osobnej tablicy (tablica 2). Poza dobrocią podano wartości przenikalności odwracalnej, współczynnika sprzężenia magnetomechanicznego k oraz innych charakterystycznych wielkości. W niektórych pozycjach podano dane charakteryzujące próbki, na których uzyskano powyższe wyniki.

7. CHARAKTERYSTYKI CZĘSTOTLIWOŚCIOWE DOBROCI MECHANICZNEJ FERYTÓW Ni-Zn

Ferryty o małej i średniej przenikalności (x do 0,4 Zn) posiadają prawie stałą dobroć mechaniczną i magnetyczną w szerokim zakresie częstotliwości ultradźwiękowych (30 kHz — 300 kHz), natomiast dobroć materiałów o wyższej przenikalności maleje trzykrotnie od 15000 przy $f_r = 30$ kHz do 5000 przy $f_r = 0,5$ MHz dla drgań wzdłużnych, a prawie



Rys. 8. Charakterystyki dobroci mechanicznych Q_{mH} i Q_{mB} oraz magnetycznej Q_{μ} ferrytu 4A dla drgań wzdłużnych w funkcji częstotliwości [12]



Rys. 9. Charakterystyki dobroci mechanicznych Q_{tH} i Q_{tB} oraz magnetycznej $Q_{t\mu}$ ferrytu 4A dla drgań skrętnych w funkcji częstotliwości [12]

trzykrotnie dla drgań skrętnych. Nieco mniej maleje dobroć magnetyczna. Na rysunkach 8 i 9 podano wg van der Burgt [12] wykresy dobroci mechanicznych przy stałym polu i przy stałej indukcji oraz dobroci magnetycznej próbki w funkcji częstotliwości dla drgań wzdłużnych i dla drgań skrętnych. Pomiary wykonano na próbkach rurkowych, wykorzy-

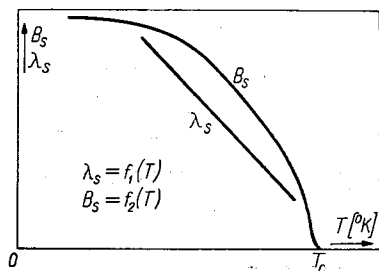
stując nieparzyste wielokrotne częstotliwości rezonansowej, przy czym na jednej próbce wykonano pomiary zarówno dla drgań wzdluznych, jak i skrotnych. Wartości dobroci mechanicznej pomierzone przy nieparzystych harmonicznym drgań wzdluznych mają ograniczone znaczenie, gdyż wywołana magnetostrykcyjnie polaryzacja „ruchowa” w każdej połówce fali jest przeciwna w odniesieniu do „ruchowej” polaryzacji sąsiednich połówek tak, że zarówno dynamiczny współczynnik demagnetyzacji, jak i skuteczna dobroć magnetyczna zależą od rzędu harmonicznej. Natomiast skuteczna wartość pierwotnej dobroci magnetycznej jest wyznaczona za pomocą okresowych drgań, które nie zmieniają znaku wzdluz osi w całym zakresie mierzonych częstotliwości. Wynika z tego, że słuszne wnioski co do zależności pomiędzy zmianami dobroci magnetycznej i mechanicznej w funkcji częstotliwości wyciągać można jedynie z pomiarów na próbkach rurkowych drgających skrotnie na nieparzystych harmonicznym, gdzie zarówno „ruchowa” polaryzacja, jak i polaryzacja stosowana przy pomiarach strat magnetycznych (odwrotnie proporcjonalnych do dobroci) są skierowane obwodowo.

Zmiany dobroci mechanicznej i elektrycznej wynikają z tego, że punkt pracy zbliża się do częstotliwości rezonansu ferromagnetycznego (dla ferrytów Ni-Zn o dużej μ $f_r \approx 10$ MHz).

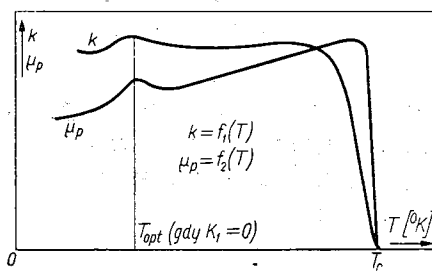
Dla ferrytów o małej i średniej przenikalności rezonans ferromagnetyczny wypada odpowiednio przy wyższych częstotliwościach.

8. ZAGADNIENIE STAŁOŚCI WIELKOŚCI MAGNETOMECHANICZNYCH W FUNKCJI TEMPERATURY

Podobnie jak indukcja nasycenia, zmienia się w funkcji temperatury współczynnik statyczny magnetostrykcji nasycenia osiągając wartość zerową w temperaturze Curie T_c . Na rys. 10 podano odpowiednie wykresy



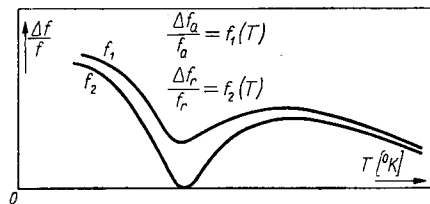
Rys. 10. Indukcja nasycenia B_s i magnetostrykcja nasycenia λ_s w funkcji temperatury



Rys. 11. Przenikalność początkowa μ_p i współczynnik sprzężenia magnetomechanicznego k ferrytów w funkcji temperatury

$B_s = f_1(T)$ i $\lambda_s = f_2(T)$. O zjawisku tym przypominano z tego powodu, że wiele typów ferrytów ma stosunkowo niską temperaturę Curie (np. dla $\text{Ni}_{0,3}\text{Zn}_{0,7}\text{Fe}_2\text{O}_4$ $T_c = 85^\circ\text{C}$) i w praktycznych zastosowaniach może zaistnieć niebezpieczeństwo zbliżenia się do tej temperatury, co spowodowałoby gwałtowne zmiany własności magnetycznych i magnetostrykcyjnych.

Równocześnie w funkcji temperatury zmieniają się tak ważne wielkości, jak częstotliwość rezonansu i antyrezonansu mechanicznego, współczynnik sprzężenia magnetomechanicznego k , przenikalność odwracalna μ , wymiary przetwornika, moduł Younga (a więc z nim także i dobroć mechaniczna) i inne wielkości magnetomechaniczne. Na rys. 11 podano typowy dla ferrytów wykres przenikalności początkowej w funkcji temperatury. Pierwsze maksimum przenikalności, nie zawsze wyraźne, występuje w przypadku, gdy stała anizotropii kryształu $K_1 = 0$, następne maksimum występuje w pobliżu temperatury Curie. Na tym samym rysunku podano wykres współczynnika $k = f_1(T)$, przy czym maksimum k występuje przy $K_1 = 0$. Względne zmiany częstotliwości rezonansu i anty-



Rys. 12. Częstotliwości rezonansu i antyrezonansu mechanicznego ferrytów w funkcji temperatury

rezonansu mechanicznego wykazują w funkcji temperatury minimum, którego wielkość i położenie na wykresie zależy od składu i obróbki technologicznej ferrytu (rys. 12).

Przetworniki magnetostrykcyjne pracujące zazwyczaj w zakresie temperatur od 20 do 50°C wymagają w wielu przypadkach dużej stałości wielkości magnetomechanicznych w zakresie temperatur pracy. Zmiany: f_r , f_a , μ , k , $1/E$ i l określają temperaturowe współczynniki przyrostowe tych wielkości:

$$\alpha_{f(r,a)} = \frac{\Delta f_{(r,a)}}{f_{(r,a)} \Delta T} \quad [10^{-6}/^\circ\text{C}], \quad (20)$$

$$\alpha_\mu = \frac{\Delta \mu}{\mu \Delta T} \quad [10^{-6}/^\circ\text{C}], \quad (21)$$

$$\alpha_k = \frac{\Delta k}{k \Delta T} \quad [10^{-6}/^{\circ}\text{C}], \quad (22)$$

$$\alpha_{(1/E)} = \frac{\Delta(1/E)}{1/E \Delta T} \quad [10^{-6}/^{\circ}\text{C}], \quad (23)$$

$$\alpha_l = \frac{\Delta l}{l \Delta T} \quad [10^{-6}/^{\circ}\text{C}]. \quad (24)$$

W zasadzie zgodnie z regułami matematycznymi powinny być brane pod uwagę przedziały temperatur, w których funkcja $y = f(T)$ jest monotoniczna i wtedy Δy byłoby różnicą rzędnych dla krańców przedziału, a ΔT szerokością przedziału. Zawężenie przedziału zaprowadziłoby w granicy do pochodnej. Ponieważ z jednej strony praktyczne wyznaczanie pochodnych w wielu przypadkach byłoby nieco skomplikowane, a z drugiej nie zawsze chodzi o znajomość zmian omawianych wielkości w danych punktach, a raczej w danych przedziałach pracy, w praktyce przyjęto, że rozpatruje się zmiany wielkości magnetomechanicznych w przedziale o granicach $20^{\circ} - 50^{\circ}\text{C}$. Często jednak omawiane wielkości posiadają ekstrema w tym przedziale, przy czym może się zdarzyć, że ekstremum wypadnie w okolicach środka przedziału, a Δy będzie równe zeru, a więc przy bardzo wielkich zmianach wewnątrz przedziału współczynnik temperaturowy byłby równy zeru. Dlatego umownie przyjęto, że symbol Δy oznacza różnicę między wartością maksymalną a minimalną funkcji, zawartą w przedziale ΔT , przy czym przyjęto jako wielkości odniesienia przy wartościach względnych wielkość danej funkcji przy temperaturze 20°C (y_{20}). W związku z tym wzory (20) — (24) przyjmą w tych warunkach postać:

$$\alpha_{fr} = \frac{f_{r \max} - f_{r \min}}{f_{r 20} (50 - 20)} = \frac{f_{r \max} - f_{r \min}}{30 f_{r 20}} \quad [10^{-6}/^{\circ}\text{C}], \quad (25)$$

$$\alpha_{fa} = \frac{f_{a \max} - f_{a \min}}{30 f_{a 20}} \quad [10^{-6}/^{\circ}\text{C}], \quad (26)$$

$$\alpha_{\mu} = \frac{\mu_{p \max} - \mu_{p \min}}{30 \mu_{p 20}} \quad [10^{-6}/^{\circ}\text{C}], \quad (27)$$

$$\alpha_k = \frac{k_{\max} - k_{\min}}{30 k_{20}} \quad [10^{-6}/^{\circ}\text{C}] \quad (28)$$

$$\alpha_{(1/E)} = \frac{1/E_{\min} - 1/E_{\max}}{30 \cdot 1/E_{20}} \quad [10^{-6}/^{\circ}\text{C}], \quad (29)$$

$$\alpha_l = \frac{l_{\max} - l_{\min}}{30 l_{20}} \quad [10^{-6}/^{\circ}\text{C}], \quad (30)$$

przy czym zależności (25), (26), (29) i (30) są powiązane następującymi równaniami:

$$\alpha_{fr} = \frac{1}{2} [\alpha_i - \alpha_{(1/E_H)}] \quad [10^{-6}/^{\circ}\text{C}] \quad (31)$$

$$\alpha_{fa} = \frac{1}{2} [\alpha_i - \alpha_{(1/E_B)}] \quad [10^{-6}/^{\circ}\text{C}]. \quad (32)$$

Spotyka się również w literaturze współczynnik przenikalności F definowany następującą zależnością:

$$F = \alpha_{\mu} \frac{\mu_v}{\mu_p}, \quad [10^{-6}/^{\circ}\text{C}] \quad (33)$$

gdzie μ_v — przenikalność próżni.

Szersze omówienie wyników pomiarów podanych współczynników wykracza poza ramy tego artykułu. Zostaną tu tylko podane przykładowo wartości niektórych współczynników.

Współczynnik termiczny zmiany współczynnika sprężystości $\alpha_{(E/1)}$ dla ferrytów Ni-Zn (w zakresie od 0 do 0,5 Zn) bez kobaltu zmienia się od 150 do $180 \cdot 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$, natomiast większości metalicznych materiałów (z wyjątkiem elinwaru i Ni Span C) zawiera się w granicach $200 - 600 \cdot 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$. Zmiany częstotliwości rezonansowej ferrytów Ni-Zn bez domieszek (lub zanieczyszczeń) kobaltu wynoszą od -70 do $-85 \cdot 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$, gdyż ich cieplny współczynnik wydłużenia liniowego wynosi $\sim 7 \cdot 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$. Handlowe ferryty Ni-Zn mają w tym samym zakresie współczynnik cieplny częstotliwości rezonansowej od -50 do $-65 \cdot 10^{-6}$; zmniejszenie współczynnika wynika z powodu zanieczyszczeń ferrytów Ni-Zn kobaltom, którego zawartość w handlowych tlenkach i węglanach niklu dochodzi przeważnie do 0,5 — 1% (molowych). Dobranie optymalnej ilości kobaltu różnej dla różnych składów Ni-Zn (zmieniającej się od 1,1—2,2% Co) powoduje obniżenie α_f do wartości poniżej $10 \cdot 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$. Również współczynnik temperaturowy przenikalności F po dobraniu optymalnej zawartości kobaltu w ferrytach $(\text{Ni}_{1-x}\text{Zn}_x)_{1-y}\text{Co}_y\text{Fe}_2\text{O}_4$ (gdzie $y_{\mu\text{opt}} = 0,014 - 0,03$) maleje pięciokrotnie [11]. Podobne wielkości temperaturowych współczynników uzyskano dla ferrytów litowo-kobaltowych przy domieszce kobaltu około 0,9%, a w ferrytach Li-Zn-Co o zawartości Zn do 50% optymalna domieszka kobaltu dla minimum zmian częstotliwości rezonansowych wynosi od 0,9 do 2,5% (molowych) [11].

9. WNIOSKI

Niewielkie zmiany temperaturowe wielkości magnetomechanicznych ferrytów Ni-Zn i Li-Zn o optymalnych domieszkach kobaltu pozwalają na stosowanie tych ferrytów w filtrach magnetostrykcyjnych w zakresie czę-

stotliwości do około 1 MHz, gdyż dobroć ich jest większa od 2000 i dochodzi do 8000, a inne własności magnetomechaniczne są często dwukrotnie lepsze od własności ferrytów handlowych. Stosowanie domieszek miedzi również polepsza własności magnetomechaniczne ferrytów ($Q_m = 2000 \div 20\,000$). Na wielkość dobroci ma wpływ również sposób obróbki technologicznej.

*Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Zakład Elektroniki*

WYKAZ LITERATURY

1. Bozorth R. M.: *Ferromagnetism*. III ed. van Nostrand, New York 1955.
2. Lee E. W.: *Magnetostriction and Magnetomechanical Effect*. — *Reports on Progress in Physics*, vol. 18 (1955), 184—229.
3. Bates L. F.: *Modern Magnetism*. III ed. Cambridge University Press, 1951.
4. Smoliński A.: Zjawisko magnetostrykcji i materiały magnetostrykcyjne. — *Rozprawy Elektrotechniczne*, tom V (1959), zeszyt 2, 211—237.
5. Kaczkowski Z., Smoliński A.: Ferryty magnetostrykcyjne. — *Zeszyty Problemowe Nauki Polskiej*, nr 20, 1960.
6. Kaczkowski Z., Smoliński A.: Ferryty magnetostrykcyjne i ich zastosowania. — *Rozprawy Elektrotechniczne*, tom VI (1960), zeszyt 1/2, 77—105.
7. van der Burgt C. M.: Performance of Ceramic Ferrite Resonators as Transducers and Filter Elements. — *Journal Acoustical Society of America*, vol. 28 (1956), 1020—1032.
8. Popper P.: *The Magnetostriction of Ferrites, Soft Magnetic Materials for Telecommunications*. C. E. Richards and A. C. Lynch, Pergamon Press, London 1953, 322—332.
9. Clark C. A.: The Dynamic Magnetostriction of Nickel-Cobalt Alloys. — *British Journal of Applied Physics*, vol. 7 (1956), 10, 355—360.
10. Nødtvedt H.: Some Remarks on the Analysis of Magnetostrictive Transducers. — *Acoustica*, vol. 4, (1954), 432—438.
11. van der Burgt C. M.: Controlled Temperature Dependence Permeability and Elasticity of Various Cobalt-Substituted Ferrites. — *Philips Research Reports*, vol. 12 (1957), 2, 97—122.
12. van der Burgt C. M.: Dynamical Physical Parameters of the Magnetostrictive Excitation of Extensional and Torsional Vibrations in Ferrites. — *Philips Research Reports*, vol. 8 (1953), 91 — 132.
13. Golamina I. P.: Application of Ferrites to Electroacoustic Transducers. *Proceedings of the Symposium on Electroacoustic Transducers* — Krynica 1958, PWN, Warszawa 1961 (w druku).
14. Kikuchi Y., Tsuya N., Shimizu H. i inni: Study on Ferrites for the Use in Magnetostriction Vibrator. Part I — Ni-Zn Ferrite. — *Sci Reports RITU (B)*, vol. 7 (1958), 1, 1—7.
15. Ferebee S. F., Davis C. M.: Effect of Divalent on Substitutions on Magnetomechanical Properties of Nickel Ferrite. — *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 30 (1958), 8, 747—750.

16. Kikuchi Y., Tsuya N., Shimizu H. i inni: Study on Ferrites for the Use in Magnetostriction Vibrator. Part II — Ni-Cu Ferrite. — Sci. Reports RITU (B), vol. 7 (1955), 3, 171—178.
17. van der Burgt C. M.: Ferroxcube 7A1 and 7A2, New Ceramic Piezomagnetic Materials for Ultrasonic Power Transducers. — Matronics, No 15, 1958, 273—304.

3. КАЧКОВСКИ

МАГНИТОСТРИКЦИОННЫЕ ФЕРРИТЫ СО ЗНАЧИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ ДОБРОТНОСТЬЮ

Резюме

Приведены основные определения величин характеризующих магнито-стрикционные свойства магнитных материалов. Обсуждён, в качестве примера, вопрос механической добротности ферритов Ni—Zn на фоне других магнито-механических свойств. Составлена сводка магнитных и магнито-стрикционных параметров ферритов со значительной механической добротностью (таб. 1 и 2). Обсуждён вопрос стабильности добротности в зависимости от частоты, а также вопрос стабильности магнито-механических величин в зависимости от температуры.

Z. KACZKOWSKI

MAGNETOSTRICTIVE FERRITES WITH A HIGH MECHANICAL QUALITY FACTOR

Summary

Basic definitions for the magnitudes determining magnetostrictive properties of magnetic materials are given. The problem of the mechanical Q factor of Ni-Zn ferrites as compared with other magneto-mechanical properties is discussed by way of example. Magnetical and magnetostrictive properties of ferrites with a high mechanical Q factor are compared (Table 1 and 2).

The problem of stability of the Q factor in the frequency function is considered, and that of stability of magneto-mechanical magnitudes in the function of temperature is also discussed.

621.317.44

JAN KULIKOWSKI, MACIEJ NAŁĘCZ

Podstawowe właściwości transduktorowych czujników magnetycznych o wyjściu impulsowym

Rękopis dostarczono 11.1.1960

Artykuł omawia transduktorowe czujniki magnetyczne o wyjściu impulsowym przeznaczone do pomiaru stałych pól magnetycznych o minimalnym natężeniu około 10^{-3} — 10^{-2} A/m. Wyprowadzono wzór na napięcie wyjściowe w funkcji natężenia mierzonego pola magnetycznego oraz na czułość napięciową, przy zasilaniu napięciem sinusoidalnym, a następnie prądem sinusoidalnym. Wykazano, że rodzaj zasilania a także wahania napięcia zasilającego nie wpływają na wartość średnią napięcia wyjściowego oraz czułości napięciowej. Na zakończenie podano zarys metody projektowania transduktorowych czujników magnetycznych w oparciu o literaturę [2], [3] oraz doświadczenia własne.

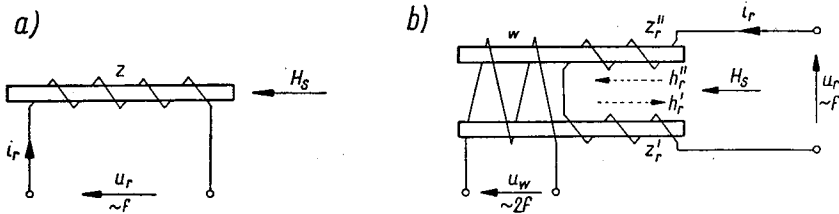
1. WSTĘP

Czujniki magnetyczne, które mogą być nazwane transduktorowymi w nawiązaniu do zasady ich działania, są stosowane jako elementy pomiarowe małych natężeń stałych pól magnetycznych rzędu 10^{-3} — 10^{-2} A/m. Znalazły one wiele zastosowań i opisane zostały w licznych publikacjach, których znaczną część wymienia artykuł [1].

Poniżej przedstawiono analizę podstawowych właściwości czujników magnetycznych: zależność czułości napięciowej od natężenia mierzonego pola magnetycznego oraz od rodzaju zasilania.

2. BUDOWA CZUJNIKÓW MAGNETYCZNYCH

Uzwojenia czujników magnetycznych nawinięte są na rdzeniach w kształcie prętów (lub pasków) z materiału ferromagnetycznego. Na rysunkach 1a i 1b pokazane są typowe czujniki magnetyczne, pierwszy (a) jednordzeniowy, drugi (b) dwurdzeniowy. Rdzeń ferromagnetyczny czujnika w kształcie pręta stanowi tzw. „otwarty” obwód magnetyczny, gdyż



Rys. 1. Czujniki magnetyczne: jednordzeniowy (a) i dwurdzeniowy (b)

linie pola magnetycznego zamykają się przez powietrze. Względną przenikalność magnetyczną takiego obwodu oblicza się korzystając ze związku:

$$\frac{1}{\mu_{ob}} = \frac{1}{\mu_k} + \frac{1}{\mu}, \quad (1)$$

gdzie:

- μ_{ob} — względna przenikalność magnetyczna obwodu,
- μ_k — względna przenikalność magnetyczna kształtu rdzenia,
- μ — względna przenikalność magnetyczna materiału rdzenia.

Jeżeli założy się, że rdzeń zrobiony jest z materiału o dużej przenikalności (maksymalnej) i spełniony jest warunek:

$$\mu_k \ll \mu, \quad (2)$$

to otrzymuje się

$$\mu_{ob} \approx \mu_k. \quad (3)$$

Ostatnia zależność jest przybliżona i oznacza, że przenikalność otwartego obwodu magnetycznego określona jest głównie przez przenikalność kształtu rdzenia, a ta z kolei zależy od wymiarów geometrycznych rdzenia oraz od sposobu nawinięcia uzwojenia na rdzeniu.

Rozenblat [2], [3] podaje następujący wzór na przenikalność kształtu:

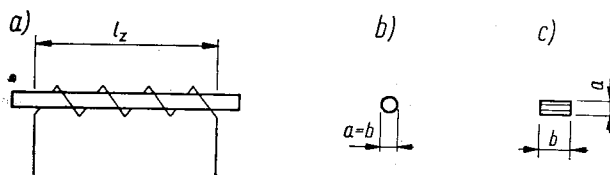
$$\mu_k = \frac{\pi \left(l^2 - \frac{c}{3} l_z^2 \right)}{4S \left(\ln \frac{k \cdot l}{a + b} - 1 \right)}, \quad (4)$$

gdzie:

- l — długość rdzenia,
- l_z — długość uzwojenia na rdzeniu,
- S — czynny przekrój poprzeczny rdzenia,
- a, b — wymiary rdzenia jak na rys. 2,
- k, c — współczynniki, których wartości podano poniżej.

Przekrój rdzenia	k	c
kołowy (rys. 2b)	2,4	0,8.. 0,85
prostokątny (rys. 2c)	$4 - 0,732 \cdot 1 - e^{-5,5 \frac{a}{b}}$	0,75

Ze wzoru (4) wynika, że przenikalność kształtu jest w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalna do przekroju rdzenia, a wprost proporcjonalna



Rys. 2. Kształt rdzenia czujnika magnetycznego

do kwadratu jego długości. Z uwagi na dość skomplikowany charakter wzoru (4) w obliczeniach orientacyjnych wygodnie jest posłużyć się przybliżonym wzorem [3]:

$$\mu_k = 0,14 \frac{l_z^2}{S}. \quad (5)$$

Z przytoczonych wyżej rozważań wynika, że przenikalność magnetyczna obwodu otwartego jest stała i określona przez przenikalność kształtu w zakresie, w którym spełniony jest warunek (2). Oznacza to, że charakterystyka magnesowania otwartego obwodu magnetycznego jest linią prostą w zakresie dużych przenikalności materiału.

Przy rosnącym natężeniu pola magnetycznego charakterystyka magnesowania przechodzi w część o małej przenikalności różniczkowej materiału (μ_{nas}), czyli:

$$\mu_k > \mu_{nas}, \quad (6)$$

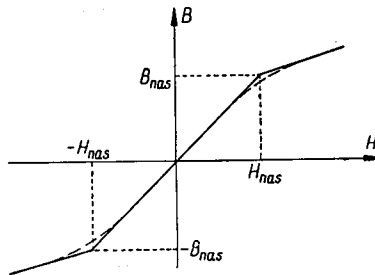
i część tę można zastąpić również prostą. Wartość μ_{nas} biera się dla maksymalnego natężenia pola magnetycznego wytworzonego w rdzeniu. Charakterystyka magnesowania otwartego obwodu magnetycznego składa się więc z odcinków prostych (rys. 3), dla których współczynniki kątowe są przenikalnościami magnetycznymi różniczkowymi, odpowiednio (MKSA): $\mu_0 \cdot \mu_1$ oraz $\mu_0 \cdot \mu_2$, gdzie $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m jest przenikalnością magnetyczną próżni. Rzeczywista charakterystyka magnesowania (rys. 3 — linia przerywana) odbiega od założonej tylko w części stanowiącej przejście między odcinkami (zagięcie charakterystyki), co praktycznie nie wpływa na wyniki obliczeń.

Przy założeniu, że spełnione są warunki (2) i (6) przenikalności μ_1 i μ_2 można określić w następujący sposób:

$$\mu_1 = \mu_k, \quad (7)$$

$$\mu_2 = \mu_{nas}. \quad (8)$$

Powyższe można zilustrować następującym przykładem: posiadany materiał ma względną przenikalność różniczkową maksymalną $\mu_{max} = 50000$,



Rys. 3. Charakterystyka magnesowania obwodu czujnika
— założona, - - - rzeczywista

a odpowiednia przenikalność w zakresie natężenia pola 650 A/m $\mu_{nas} = 80$. Jeśli zaprojektowany zostanie rdzeń o przenikalności kształtu $\mu_k = 1000$, to można przyjąć, że:

$$\mu_1 = \mu_k = 1000, \quad \mu_2 = \mu_{nas} = 80.$$

3. ZASADA DZIAŁANIA

Najprostszym czujnikiem magnetycznym jest dławik, którego uzwojenie nawinięte jest na rdzeniu w kształcie pręta (rys. 1a). Zakładamy, że charakterystyka magnesowania tego obwodu przebiega jak na rys. 3 i pomijamy straty w żelazie.

Uzwojenie czujnika z (rys. 1a) może być zasilane napięciem sinusoidalnie zmiennym lub prądem o przebiegu sinusoidalnym; wielkości te nazwiemy odpowiednio napięciem roboczym u_r oraz prądem roboczym i_r . W przypadku zasilania napięciem roboczym sinusoidalnie zmiennym przebieg indukcji magnetycznej w rdzeniu b_r jest również sinusoidalny, jeśli pominie się wpływ rozprożeń i oporności uzwojenia. Jeśli amplituda indukcji magnetycznej przekroczy wartość B_{nas} (zagięcie krzywej magnesowania), to przebieg pola magnetycznego w rdzeniu, a zatem także prądu roboczego, będzie odkształcony i będzie zawierać nieparzyste harmoniczne. Jeśli jednak czujnik magnetyczny wprowadzony zostanie w stałe pole magnetyczne, którego natężenie wzdłuż osi czujnika wynosi H_s , to w przebiegu prądu roboczego pojawią się również parzyste harmoniczne. Wartość każdej z tych parzystych harmonicznych jest proporcjonalna do natężenia pola magnetycznego H_s .

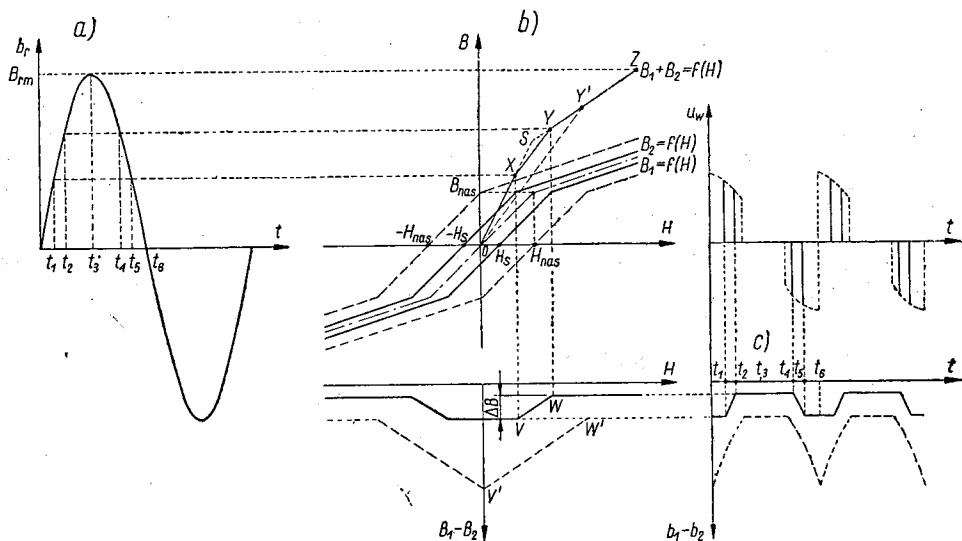
Jeśli czujnik zasilany jest prądem roboczym sinusoidalnie zmiennym, to przebieg natężenia pola magnetycznego w rdzeniu h_1 ma przebieg również sinusoidalny i jeśli jego amplituda przekroczy wartość H_{nas} , to przebieg indukcji stanie się odkształcony i będzie zawierać nieparzyste harmoniczne. Gdy czujnik wprowadzony zostanie w pole magnetyczne o natężeniu H_s , to przebieg indukcji w czasie zawierać będzie parzyste harmoniczne. Zatem napięcie na zaciskach czujnika, jako wprost proporcjonalne do pochodnej indukcji magnetycznej, będzie posiadać również parzyste harmoniczne, których wartości będą proporcjonalne do natężenia pola magnetycznego H_s .

Należy podkreślić, że w obu wymienionych przypadkach obecność parzystych harmonicznych prądu czy napięcia roboczego uzależniona jest ściśle od istnienia stałego pola magnetycznego. Jeśli składowa tegoż pola wzdłuż osi czujnika wynosi zero, to parzyste harmoniczne nie występują. Można więc odfiltrować dowolną parzystą harmoniczną z prądu lub napięcia roboczego, zależnie od sposobu zasilania czujnika i jej wartość uważać za miarę natężenia pola magnetycznego H_s . Jeśli zmieni się biegunowość pola magnetycznego H_s , to nastąpi również zmiana znaku wszystkich parzystych harmonicznych.

Należy jednak stwierdzić, że wartości poszczególnych parzystych harmonicznych są małe w porównaniu z wartością pierwszej harmonicznej; wynikają stąd wysokie wymagania odnośnie selektywności filtrów lub wzmacniaczy selektywnych. W związku z trudnością odfiltrowania parzystych harmonicznych w czujniku jednordzeniowym, często stosuje się czujniki dwurdzeniowe, w których nieparzyste harmoniczne równoważą się.

Przedstawiony na rys. 1b czujnik dwurdzeniowy posiada dwa uzwojenia robocze z'_1 , z''_1 oraz uzwojenie wyjściowe z_w , obejmujące oba rdzenie. Uzwojenia robocze są nawinięte i połączone w taki sposób, by w danej chwili natężenie pola magnetycznego wytworzone przez prąd roboczy w pierwszym rdzeniu h'_1 było zgodne z polem magnetycznym H_s , podczas gdy pole magnetyczne w drugim rdzeniu h''_1 przeciwnie w stosunku do H_s . Założono, że oba rdzenie mają charakterystyki magnesowania jak na rys. 3, oraz w początkowych rozważaniach przyjęto, że umieszczone są z dala od siebie tak, że pole magnetyczne jednego rdzenia nie zamyka się przez rdzeń drugi i odwrotnie. Wskutek istnienia stałego pola magnetycznego H_s charakterystyki obu rdzeni przesuną się o tę wartość względem początku układu współrzędnych, jednak w kierunkach przeciwnych, co wynika ze sposobu nawinięcia uzwojeń roboczych (rys. 4b). Wypadkowa charakterystyka magnesowania obu rdzeni $B_1 + B_2 = f(H)$, związana z obu uzwojeniami roboczymi, wyznaczona jest

przez dodanie rzędnych charakterystyk obu rdzeni. Charakterystyka wypadkowa jest, jak to widać z rys. 4b, zależna od wartości H_s ; składa się ona z trzech odcinków OX, XY, YZ, przy czym nachylenie odcinka OX



Rys. 4. Graficzny sposób znalezienia przebiegu napięcia wyjściowego przy sinusoidalnym zasilaniu napięciowym

odpowiada względnej przenikalności magnetycznej $2\mu_1$, odcinka XY $\mu_1 + \mu_2$, oraz odcinka YZ $2\mu_2$. Gdy $H_s = 0$, to punkty X i Y schodzą się w punkcie S, natomiast gdy $H_s = H_{nas}$, punkt X pokrywa się z początkiem układu współrzędnych, a punkt Y znajduje się w punkcie Y'.

Jak wynika z rys. 1b, uzwojenie wyjściowe skojarzone jest z różnicą strumieni magnetycznych w obu rdzeniach, dlatego też uzwojeniu temu odpowiada charakterystyka wynikająca z odejmowania rzędnych charakterystyk obu rdzeni, czyli $B_1 - B_2 = f(H)$. Charakterystyka ta (rys. 4b) składa się z dwóch odcinków poziomych oraz trzeciego VW, którego nachylenie odpowiada względnej przenikalności magnetycznej $\mu_1 - \mu_2$. Gdy $H_s = 0$, to charakterystyka $B_1 - B_2 = f(H)$ pokrywa się z osią odciętych, a wraz ze wzrostem H_s powiększa się długość odcinka VW i gdy $H_s = H_{nas}$ znika środkowy odcinek poziomy.

Jako pierwszy przypadek rozpatrzono czujnik zasilany napięciem o przebiegu sinusoidalnie zmiennym. Założono, że wtedy przebieg indukcji magnetycznej roboczej b_r jest również sinusoidalny (rys. 4a):

$$b_r = B_{rm} \sin \omega t, \quad (9)$$

gdzie:

b_r — wartość chwilowa indukcji magnetycznej roboczej,

B_{rm} — amplituda indukcji magnetycznej roboczej,

ω — pulsacja napięcia roboczego.

Aby otrzymać graficznie przebieg czasowy napięcia wyjściowego, należy rzutować wartości b_r , odpowiadające kolejnym czasom t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 i t_6 , na charakterystykę $B_1 - B_2 = f(H)$. Otrzymane w ten sposób wartości $b_1 - b_2$, odpowiadające kolejnym czasom t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 i t_6 , wykreślono na rys. 4c. Przebieg czasowy napięcia wyjściowego u_w można otrzymać z zależności (układ MKSA):

$$u_w = z_w S \frac{d(b_1 - b_2)}{dt}, \quad (10)$$

gdzie:

z_w — liczba zwojów uzwojenia wyjściowego,

S — czynny przekrój poprzeczny jednego rdzenia.

Jak wynika z rys. 4, przebieg $b_1 - b_2$ w czasie jest następujący w przedziałach czasowych $t_1 \div t_2, t_4 \div t_5$:

$$b_1 - b_2 = -2\mu_0\mu_1 H_s + \mu_0 \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} B_{rm} \sin \omega t, \quad (11)$$

w przedziałach $0 \div t_1, t_5 \div t_6$:

$$b_1 - b_2 = -2\mu_0\mu_1 H_s, \quad (11a)$$

w przedziale $t_2 \div t_4$:

$$b_1 - b_2 = -2\mu_0\mu_2 H_s. \quad (11b)$$

Z wykresu na rys. 4b można wyznaczyć wartości graniczne czasu t_1 i t_2 :

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{2\mu_0\mu_1(H_{nas} - H_s)}{B_{rm}}, \quad (12)$$

$$t_2 = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{2\mu_0\mu_1 H_{nas} + 2\mu_0\mu_2 H_s}{B_{rm}}, \quad (13)$$

pod warunkiem, że:

$$B_{rm} \geq 2\mu_0\mu_1 H_{nas} + 2\mu_0\mu_2 H_s. \quad (14)$$

Przebieg napięcia wyjściowego (rys. 4d) w przedziałach $t_1 \div t_2$ i $t_4 \div t_5$ otrzymuje się podstawiając (11) do (10):

$$u_w = z_w S B_{rm} \mu_0 \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cos \omega t. \quad (15)$$

Wartość średnia napięcia wyjściowego wynosi:

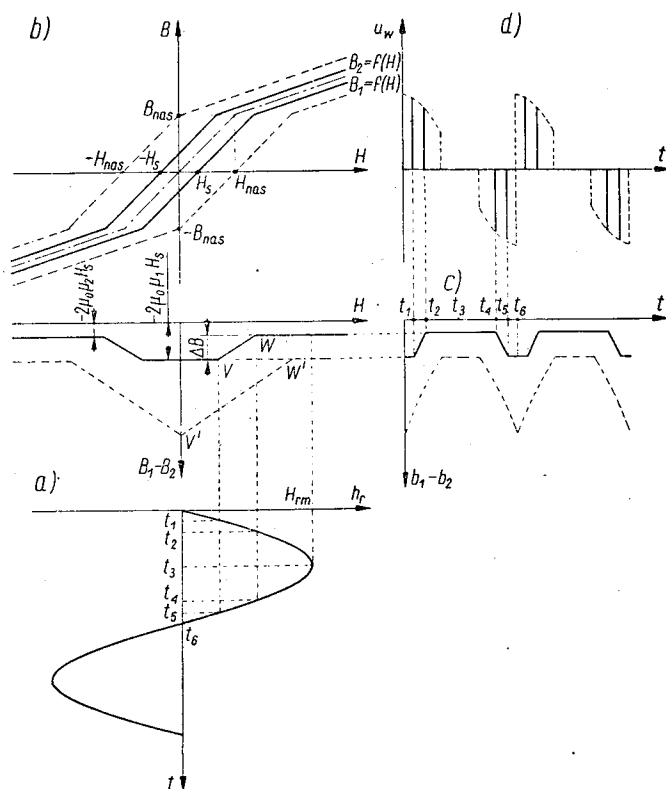
$$U_w = \frac{2\omega}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} u_w dt = \frac{2\omega z_w S B_{rm} \mu_0}{\pi} \cdot \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} [\sin \omega t]_{t_1}^{t_2}, \quad (16)$$

$$U_w = 4 f z_w S B_{rm} \mu_0 \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{2(\mu_1 + \mu_2) H_s}{B_{rm}} \quad (17)$$

i ostatecznie:

$$U_w = 8 f z_w S \mu_0 (\mu_1 - \mu_2) H_s. \quad (18)$$

Jako drugi przypadek rozważony będzie czujnik zasilany prądem roboczym sinusoidalnie zmiennym. Przebieg czasowy natężenia pola



Rys. 5. Graficzny sposób znalezienia przebiegu napięcia wyjściowego przy sinusoidalnym zasilaniu prądowym

magnetycznego wywołanego przez ten prąd jest oczywiście sinusoidalny (rys. 5a):

$$h_r = H_{rm} \sin \omega t, \quad (19)$$

gdzie:

h_r — wartość chwilowa natężenia pola magnetycznego roboczego,

H_{rm} — amplituda natężenia pola magnetycznego roboczego.

Rozwiązanie graficzne w tym przypadku jest prostsze niż poprzednio, gdyż nie jest potrzebna charakterystyka wypadkowa obwodu. Należy rzu-

tować wartości h_r , odpowiadające kolejnym czasom t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 i t_6 , na charakterystykę $B_1 - B_2 = f(H)$ i otrzymane wartości $b_1 - b_2$ wykreślić w funkcji czasu (rys. 5c). Przebieg ten będzie następujący: w przedziałach czasowych $t_1 \div t_2, t_4 \div t_5$:

$$b_1 - b_2 = 2 \mu_0 \mu_1 H_s + \mu_0 (\mu_1 - \mu_2) H_{rm} \sin \omega t, \quad (20)$$

w przedziałach $0 \div t_1, t_5 \div t_6$:

$$b_1 - b_2 = -2 \mu_0 \mu_1 H_s, \quad (20a)$$

w przedziale $t_2 \div t_4$:

$$b_1 - b_2 = -2 \mu_0 \mu_2 H_s. \quad (20b)$$

Wartości graniczne czasu t_1, t_2 można wyznaczyć z zależności:

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{H_{nas} - H_s}{H_{rm}}, \quad (21)$$

$$t_2 = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{H_{nas} + H_s}{H_{rm}},$$

pod warunkiem, że

$$H_{rm} \geq H_{nas} + H_s. \quad (22)$$

Przebieg napięcia wyjściowego (rys. 5d) w przedziałach $t_1 \div t_2, t_4 \div t_5$ otrzymuje się podstawiając (20) do (10):

$$u_w = z_w S H_{rm} \mu_0 (\mu_1 - \mu_2) \cos \omega t. \quad (23)$$

Wartość średnia napięcia wyjściowego wynosi:

$$U_w = \frac{2 \omega}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} u_w dt = \frac{2 \omega z_w S H_{rm} \mu_0 (\mu_1 - \mu_2)}{\pi} [\sin \omega t]_{t_1}^{t_2}, \quad (24)$$

$$U_w = 4 f z_w S H_{rm} \mu_0 (\mu_1 - \mu_2) \left[\frac{H_{nas} + H_s}{H_{rm}} - \frac{H_{nas} - H_s}{H_{rm}} \right] \quad (25)$$

i ostatecznie:

$$U_w = 8 f z_w S \mu_0 (\mu_1 - \mu_2) H_s. \quad (26)$$

Wynik ten jest identyczny z wynikiem uzyskanym poprzednio (18).

4. CZUŁOŚĆ NAPIĘCIOWA CZUJNIKA

Należy zauważyć, że napięcie wyjściowe ma przebieg impulsowy, składający się z wycinków cosinusoidy, i częstotliwość podstawowa tego napięcia jest dwukrotnie większa niż częstotliwość napięcia roboczego. Rozkładając na szereg Fouriera przebiegi określone wzorami (15) i (23)

otrzymuje się harmoniczne, które w stosunku do napięcia roboczego są harmonicznymi parzystymi. Wszystkie parzyste harmoniczne związane są ścisłą zależnością z natężeniem pola magnetycznego H_s ; gdy $H_s = 0$, to ich wartość wynosi również zero. Czujniki magnetyczne, które wykorzystują jedną z parzystych harmonicznych, nazywać będziemy czujnikami o wyjściu selektywnym, gdyż w aparaturze muszą istnieć filtry lub wzmacniacze selektywne, wzmacniające wybraną parzystą harmoniczną. W dotychczasowych publikacjach wymienionych w poprzednim artykule [1] istnieją opisy wykorzystania tylko drugiej harmonicznej w napięciu wyjściowym i czujniki te określa się jako „typu drugiej harmonicznej”. Czujniki magnetyczne o wyjściu selektywnym będą przedmiotem innego artykułu [4].

W dalszej części omówione będą czujniki magnetyczne, w których wykorzystuje się wartość średnią lub połowę wartości średniej) napięcia wyjściowego. Czujniki te nazywać będziemy czujnikami o wyjściu impulsowym, z uwagi na kształt napięcia wyjściowego. Czujniki te na ogół nie wymagają tak skomplikowanej aparatury elektronowej jak czujniki o wyjściu selektywnym.

Analizując wzory (18) i (26) stwierdzić można, że wartość średnia napięcia wyjściowego jest wprost proporcjonalna do natężenia stałego pola magnetycznego H_s . Należy również zaznaczyć że wraz ze zmianą biegunowości pola H_s zmienia się znak przebiegu napięcia wyjściowego. Ażeby więc wykorzystać tę cechę, stosuje się często do pomiaru napięcia wyjściowego przyrząd magnetoelektryczny z prostownikiem fazowym. Układ taki (rys. 9) zmienia wskazanie na przeciwne wraz ze zmianą biegunowości H_s i mierzy połowę wartości średniej napięcia wyjściowego, czyli:

$$U_w = 4 f z_w S \mu_0 (\mu_1 - \mu_2) H_s. \quad (27)$$

Należy dodać, że prostownik fazowy eliminuje wpływ nieparzystych harmonicznych, które pojawiają się, gdy rdzenie czujnika nie są jednakowe. Można wprowadzić pojęcie czułości napięciowej czujnika magnetycznego o wyjściu impulsowym jako:

$$\sigma_u = \frac{d U_w}{d H_s}; \quad (28)$$

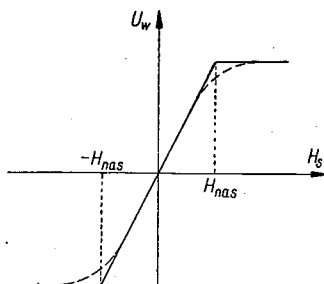
zakładając wykorzystanie połowy wartości średniej otrzymuje się:

$$\sigma_u = 4 f z_w S \mu_0 (\mu_1 - \mu_2). \quad (29)$$

Wzór (29) określa czułość napięciową jako stałą charakterystyczną dla danej konstrukcji i częstotliwości zasilania czujnika. Oznacza to, że czujniki o wyjściu impulsowym mają jednakową czułość dla różnych

wartości H_s , czyli przyrząd magnetoelektryczny, który mierzy napięcie U_w a wyskalowany jest w jednostkach natężenia pola magnetycznego, ma skalę równomiernie zagęszczoną.

Czujniki o wyjściu impulsowym charakteryzują się więc liniowością wskazań. Analizując dokładniej wykresy na rys. 4 i 5 można dojść do wniosku, że dla natężeń pola magnetycznego H_s większych niż wartość H_{nas} — napięcie wyjściowe nie zwiększa się. Pokazuje to rys. 6. Teoretycznym zakresem pomiarowym czujnika jest więc wartość, odpowiadają-



Rys. 6. Napięcie wyjściowe w funkcji natężenia stałego pola magnetycznego
 ——— charakterystyka teoretyczna, - - - - - charakterystyka rzeczywista

ca natężeniu pola magnetycznego, przy którym rozpoczyna się nasycenie rdzenia. Według założonej charakterystyki magnesowania, złożonej z odcinków prostych, zakresem pomiarowym czujnika jest H_{nas} , praktycznie jednak z uwagi na łagodne przejście w okolicy zagięcia charakterystyki wartość ta jest nieco mniejsza niż H_{nas} .

Identyczność wzorów (18) i (26) prowadzi do wniosku, że wartość średnia napięcia wyjściowego czujnika nie zależy od rodzaju zasilania, czyli od tego, czy napięcie robocze ma przebieg sinusoidalny w czasie, czy też prąd roboczy zmienia się sinusoidalnie. Okazuje się, że wniosek ten można rozszerzyć i stwierdzić, że napięcie wyjściowe nie ulegnie zmianie, jeśli zarówno napięcie robocze, jaki prąd roboczy będą przebiegami odkształconymi.

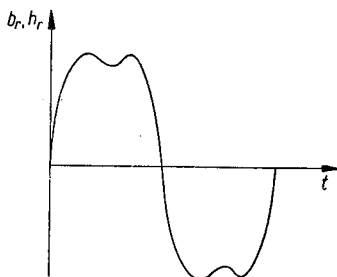
Wynika to z porównania zależności (16) i (10) oraz (24) i (10), które prowadzą do identycznego rezultatu w obu przypadkach:

$$U_w = 4 f z_w S [b_1 - b_2]_{t_1}^{t_2} = 4 f z_w S \Delta B. \quad (30)$$

Widać stąd, że wartość średnia napięcia wyjściowego zależy od zmiany różnicy indukcji w obu rdzeniach, a ta zależy tylko od wartości H_s (rys. 4b i 5b). Wartość średnia napięcia wyjściowego nie zależy od tego, w jaki sposób zmienia się indukcja magnetyczna robocza, czy pole magnetyczne robocze w rdzeniu, z zastrzeżeniem, by oba te przebiegi nie posiadały

składowej stałej oraz by w ciągu jednego półokresu ich przebieg zawierał tylko jedno ekstremum. Dla przykładowo pokazanego przebiegu na rys. 7 wzory (16) i (24) są niesłuszne w ogólnym przypadku.

Kolejnym ograniczeniem kształtu przebiegów b_r i h_r jest wymaganie, by nie zawierały one parzystych harmonicznych. Jakkolwiek powyższe parzyste harmoniczne w przedstawionym układzie czujnika powinny kompensować się, jednak wskutek nieidentyczności obu rdzeni czujnika



Rys. 7. Funkcje $b_r = f(t)$ lub $h_r = f(t)$ niepożądane ze względu na działanie układu

(co praktycznie występuje) parzyste harmoniczne zasilania wpływają na wartość U_w , a tym samym fałszują pomiar. Poza wymienionymi ograniczeniami przebiegi b_r i h_r mogą być dowolnie odkształcone, gdyż ich kształt nie wpływa na czułość napięciową czujnika.

Przeprowadzone działania matematyczne doprowadziły do wyeliminowania B_{rm} ze wzoru (18) oraz H_{rm} ze wzoru (26). Oznacza to niezależność czułości napięciowej czujnika od wahań napięcia zasilającego w obu przypadkach. Jest to bardzo cenna zaleta czujnika o wyjściu impulsowym, gdyż stosowanie stabilizatora staje się zbędne. Należy jednak pamiętać, że niezależność czułości napięciowej występuje tylko przy ograniczonym zakresie zmian napięcia zasilającego.

W przypadku zasilania czujnika napięciem sinusoidalnym wzór (18) jest słuszny, gdy spełniony jest warunek (14). Jeśli czujnik ma pracować na pełnym zakresie pomiarowym, tzn. $H_s = H_{nas}$, to warunek (14) przyjmie postać:

$$B_{rm} \geq 2 \mu_0 (\mu_1 + \mu_2) H_{nas}, \quad (31)$$

oznacza to, że wartość skuteczna napięcia roboczego nie powinna być mniejsza niż:

$$(U_r)_{min} = 4 \cdot 4,44 f z_r S \mu_0 (\mu_1 + \mu_2) H_{nas}; \quad (32)$$

w przypadku drugim, przy prądzie sinusoidalnie zmiennym, wzór (26) jest słuszny, gdyż spełniony jest warunek (22). Zakładając pracę czujni-

ka w zakresie $H_s = H_{nas}$, otrzymuje się nowy warunek słuszności wzoru (26):

$$H_{rm} \geq 2 H_{nas}. \quad (33)$$

Oznacza to, że wartość skuteczna prądu roboczego nie powinna być mniejsza niż:

$$(I_r)_{min} = \frac{2 H_{nas} l}{\sqrt{2} z_r}, \quad (34)$$

gdzie: l — długość rdzenia czujnika.

Jest rzeczą korzystną ustalić napięcie robocze czy prąd roboczy znacznie powyżej wartości minimalnych, ażeby zabezpieczyć prawidłowe działanie czujnika.

Zwiększenie wartości napięcia czy prądu roboczego jest korzystne również z innego powodu. Rzeczywiste magnesowanie rdzenia czujnika nie przebiega po krzywej magnesowania, lecz po pętli histerezy. W związku z tym czujnik magnetyczny mierzący duże natężenie pola magnetycznego H_s , po usunięciu go z tego pola zachowuje magnetyzm szczątkowy, który jest równoważny pewnemu H_s , a więc istnieć będzie pewne napięcie wyjściowe mimo, że powinno być ono równe zeru. W przypadku zasilania napięciowego w pierwszej chwili po włączeniu obserwuje się zjawisko uderu prądu magnesującego, tak samo jak przy załączaniu transformatora. Taki prąd jest równoważny dużemu H_s i może również spowodować pewne namagnesowanie czujnika, a więc i fałszywy sygnał napięciowy na wyjściu. Takie zjawisko niestabilności zera znacznie maleje, gdy wzrasta natężenie pola magnetycznego roboczego, gdyż wtedy rdzenie są dokładniej przemagnesowywane.

Podsumowując można stwierdzić, że czujniki o wyjściu impulsowym posiadają następujące zalety:

- a) zależność liniową między wartością średnią napięcia wyjściowego a natężeniem pola magnetycznego H_s ,
- b) niezależność czułości napięciowej od rodzaju zasilania,
- c) niezależność czułości napięciowej od wahań napięcia roboczego lub prądu roboczego,
- d) możliwość ograniczenia niestabilności zera przez zwiększenie prądu roboczego bez zmniejszenia czułości napięciowej,
- e) nie wymagają na ogół skomplikowanej aparatury.

Wymienionych zalet nie posiadają czujniki o wyjściu selektywnym. Jako zasadniczą wadę czujników o wyjściu impulsowym w porównaniu z czujnikami o wyjściu selektywnym należy wymienić mniejszą czułość i wyższy poziom szumów ograniczający najmniejsze natężenie stałego pola magnetycznego H_s , które może być zmierzone.

5. OKREŚLENIE WIELKOŚCI NAPIĘCIA WYJŚCIOWEGO PRZY PROJEKTOWANIU CZUJNIKA

W dalszych rozważaniach określać będziemy napięcie wyjściowe według wzoru (27); oznacza to, że wykorzystuje się połowę wartości średniej przebiegu u_w . Wzór (27) zawiera różnicę przenikalności $\mu_1 - \mu_2$, przy czym przenikalność μ_2 jest trudna do ujęcia obliczeniowego. Dlatego też dla celów praktycznych można ją wyeliminować przez wprowadzenie współczynnika przenikalności nasycenia $k_{\mu nas}$:

$$k_{\mu nas} = 1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad (35)$$

a więc:

$$\mu_1 - \mu_2 = \mu_1 k_{\mu nas}. \quad (36)$$

W praktyce współczynnik ten może przybierać wartości od 0,7 (gdy $\mu_2 = 0,3\mu_1$) do 1 (gdy $\mu_2 = 0$). Większość autorów upraszcza rozważania przyjmując $\mu_2 = 0$.

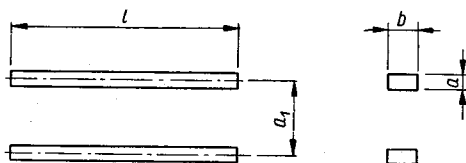
Dotychczasowe wzory wyprowadzone były przy założeniu, że oba rdzenie czujnika są od siebie znacznie oddalone. W rzeczywistości tak nie jest, a zbliżenie rdzeni wpływa na zmniejszenie czułości. Wpływ ten można uwzględnić wprowadzając współczynnik czułości k_{cz} , który wynosi [3]:

$$k_{cz} = \frac{1}{2} (2 - e^{-a_1/c_1}), \quad (37)$$

$$c_1 = 2b \left(\ln \frac{kl}{a+b} - 1 \right), \quad (38)$$

gdzie:

- a_1 — odległość między rdzeniami czujnika,
- a, b — wymiary rdzenia według rys. 8,
- k — współczynnik określony poprzednio,
- c_1 — stała dla danego rdzenia.



Rys. 8. Kształt czujnika dwurdzeniowego

W praktyce współczynnik czułości przybiera wartości od 0,5 (gdy rdzenie są bardzo blisko) do 1 (gdy rdzenie są dość daleko od siebie).

Po uwzględnieniu współczynników $k_{\mu_{nas}}$ i k_{cz} wzór (27) przyjmuje postać:

$$U_w = 4 f z_w S \mu_0 \mu_1 k_{cz} k_{\mu_{nas}} H_s, \quad (39)$$

a po podstawieniu jako μ_1 przenikalności kształtu (7) określonej wzorem (5):

$$U_w = 0,56 f z_w l^2 \mu_0 k_{cz} k_{\mu_{nas}} H_s. \quad (40)$$

We wzorze powyższym uderza fakt, że napięcie U_w nie zależy od przekroju poprzecznego czujnika S , w rzeczywistości napięcie wyjściowe, a więc i czułość czujnika, zależy w pewnym stopniu od przekroju, co odzwierciedla dokładniejszy wzór na przenikalność kształtu (4). Nawet gdyby założyć całkowitą niezależność czułości czujnika od przekroju, to przekrój nie może być dowolnie mały, gdyż od niego zależy zakres pomiarowy czujnika, który teoretycznie równy jest H_{nas} . Istnieje bowiem związek (rys. 3):

$$H_{nas} = \frac{B_{nas}}{\mu_0 \mu_1}; \quad (41)$$

po podstawieniu $\mu_1 = \mu_k$ oraz (5):

$$H_{nas} = \frac{B_{nas} S}{0,14 \mu_0 l^2}. \quad (42)$$

W praktyce zakres pomiarowy czujnika określony przez H_{nas} nie powinien być mniejszy niż wypadkowa natężenia ziemskiego pola magnetycznego (około 40 A/m), aby rdzenie nie były nasycane przez pole ziemskie. Oprócz tego największego zakresu może istnieć kilka mniejszych podzakresów. Najkorzystniejszymi materiałami do budowy rdzeni są permalloye o dużej początkowej przenikalności magnetycznej (supermalloy, stop 1040, permalloy molibdenowy, mumetal itp.), dla których można przyjąć średnio $B_{nas} = 0,5 \text{ Wb/m}^2$.

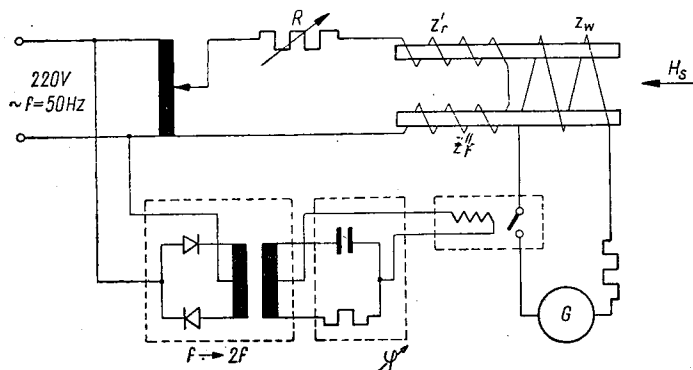
Przy założeniu, że $H_{nas} = 100 \text{ A/m}$ otrzymuje się wskazówkę, że należy tak projektować czujnik, aby przenikalność kształtu $\mu_k \leq 4000$.

Należy nadmienić, że przy zbliżeniu rdzeni czujnika maleje wartość prądu roboczego i_r przy niezmiennym napięciu roboczym, co pozwala na obliczanie uzwojenia na mniejszy prąd niż określony według wzoru (34), przy rdzeniach znacznie oddalonych od siebie.

6. UKŁAD POMIAROWY

Wyprowadzone w niniejszej pracy zależności sprawdzone zostały w układzie pomiarowym jak na rys. 9. Napięcie wyjściowe mierzone jest

przez galwanometr odpowiednio wyskalowany (w jednostkach napięcia) i połączony w szereg z prostownikiem fazowym. Jako prostownik fazowy użyty został prostownik mechaniczny wzbudzony napięciem o częstotli-



Rys. 9. Uproszczony schemat układu pomiarowego

wości dwukrotnie większej niż częstotliwość zasilania czujnika magnetycznego. Do regulacji „fazy prostowania” służy specjalny przesuwnik fazowy.

Czujnik magnetyczny może być zasilany napięciem roboczym sinusoidalnie zmiennym, gdy oporność dodatkowa w obwodzie roboczym $R=0$, lub też w przypadku dużej oporności R przebieg prądu roboczego można uważać za sinusoidalny. Dla wartości pośrednich oporności dodatkowej zarówno napięcie robocze, jak i prąd roboczy są nie sinusoidalne.

Badania przeprowadzone w Zakładzie Elektrotechniki IPPT PAN na wielu czujnikach potwierdziły wniosek, że wartość średnia napięcia wyjściowego nie zależy od rodzaju zasilania [wzór (30)], a także w pewnych granicach od wahań napięcia zasilającego oraz, że istnieje liniowa zależność między tym napięciem, a natężeniem mierzonego pola magnetycznego (z wyjątkiem natężeń bliskich H_{nas} , jak to pokazuje rys. 6).

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Zakład Elektrotechniki

WYKAZ LITERATURY

1. Nowacki P. J., Nałęcz M., Kulikowski J.: Pomiar małych stałych pól magnetycznych czujnikiem magnetycznym. — Rozprawy Elektrotechniczne, t. IV, z. 3, 1958, str. 323—349.
2. Rozenblat M. A.: Koefficienty rozmagnicziwania stierżniej высокой проницаемости. — Журнал Технической Физики, t. XXIV, wyp. 4, 1954, str. 637—661.

3. Rozenbłat M. A.: K rozszczetu magnitomodulacyjnych датчиков напряжённости магнитного поля. — *Elektriczestwo*, nr 7, 1957, str. 24—31.
4. Kulikowski J.: Czułość napięciowa transduktorowych czujników magnetycznych. — *Archiwum Automatyki i Telemechaniki*, t. IV, z. 3, 1960, str. 329—354.

Я. КУЛИКОВСКИ, М. НАЛЭНЧ

ПРИНЦИПЫ МАГНИТОМОДУЛЯЦИОННЫХ ДАТЧИКОВ НАПРЯЖЁННОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ, С ПИКОВЫМ ВЫХОДОМ

Резюме

В статье обсуждаются магнитомодуляционные датчики напряжённости магнитного поля, с пиковым выходом, которые применяются для измерений незначительных постоянных магнитных полей с минимальной напряжённостью порядка 10^{-3} А/м. Принята 3-участковая аппроксимация кривой намагничивания (рис. 3). Выведены формулы на выходное напряжение (15, 23) и получено, что среднее значение выходного напряжения прямо пропорционально к напряжённости измеряемого магнитного поля (H_s), для значений меньше H_{nas} (18), (26), (рис. 6).

Среднее значение выходного напряжения независимо от способа питания: является ли напряжение синусоидально переменным, имеет ли питающий ток синусоидальный ход (30). Питающие напряжение или ток могут иметь несинусоидальный ход, но не должны содержать постоянную составляющую, или же чётные гармоники и они не могут иметь такой вид, как на рис. 7. Также небольшие изменения амплитуды питающего напряжения не влияют на среднее значение выходного напряжения. Формула (28) определяет чувствительность по напряжению магнитомодуляционных датчиков напряжённости магнитного поля с пиковым выходом.

В заключении выведены формулы на половину среднего значения выходного напряжения (40), а также на измерительный диапазон (42), в зависимости от геометрических габаритов датчика. С целью измерения выходного напряжения использован магнитозлектрический прибор соединённый с механическим фазочувствительным выпрямителем (рис. 9).

J. KULIKOWSKI, M. NAŁĘCZ

PRINCIPLES OF FLUX-GATE MAGNETOMETERS WITH ALL-EVEN HARMONIC OUTPUT

Summary

The paper deals with flux-gate magnetometers with all-even harmonic pulse output which are used for measuring direct magnetic fields of the smallest intensity about 10^{-3} A/m. It is assumed that the magnetization characteristic is a curve

composed of three straight lines (Fig. 3). Formulas of the output voltage (Eqs. 15, 23) are carried out. It is confirmed that the average value of the output voltage is a linear function of the magnetic field intensity (H_s) for values smaller than H_{nas} (Eqs. 18, 26), (Fig. 6).

The average value of the output voltage is independent on whether the magnetometer is excited by a sinusoidal voltage or by a sinusoidal current (Eq. 30). Waveforms of the excitation voltage or the excitation current may be nonsinusoidal, but they can have neither direct and even harmonic components nor a shape as shown in Fig. 7. Small changes of the excitation voltage amplitude have no influence on the average value of the output voltage too. The voltage sensitivity of flux-gate magnetometers with all-even harmonic output is defined by Eq. 28.

Finally useful formulas of the half-average value of the output voltage (Eq. 40) and the range of measuring (Eq. 42) as a function of the magnetometer size are given. A moving-coil galvanometer connected with a mechanical phase-sensitive rectifier was used to measure the output voltage (Fig. 9).

621.313.33:621.317.384

FELIKS ANDRZEJEWSKI, ZBIGNIEW ORZESZKOWSKI

Nowa metoda wyznaczania strat w uzwojeniach wirników maszyn asynchronicznych

Rękopis dostarczono 19.6.1959

W artykule podana jest metoda wyznaczania strat w uzwojeniach wirników maszyn asynchronicznych przez pomiar mocy zwarcia przy zmiennej częstotliwości zasilania; przez ekstrapolację otrzymanych krzywych wyznacza się moc zwarcia dla częstotliwości równej zeru i stąd wielkość strat w wirniku. Przeanalizowany jest wpływ oporności indukcyjnych magnesowania i rozproszenia na błąd pomiaru. Podany jest przyczynek uzupełniający metodę wyznaczania temperatury wirników maszyn asynchronicznych z pomiaru poślizgu [2]. Przytoczono przykłady liczbowe i podano wyniki pomiarów. Przeprowadzono analizę dokładności metody.

1. WSTĘP

Znajomość strat w uzwojeniach wirników maszyn asynchronicznych wiąże się z jednej strony z określeniem współczynnika sprawności, a z drugiej z temperaturą, do jakiej nagrzewają te straty uzwojenie. Dokładne wyznaczenie tych strat na drodze pomiarowej jest ważne szczególnie w drugim przypadku.

Obecnie straty w uzwojeniach określa się na podstawie obliczonego lub wyznaczonego z wykresu poślizgu lub też poślizg ten wyznacza się na podstawie prób przy obciążeniu maszyny. W pierwszym przypadku dokładność wyznaczania jest niewielka, w drugim zaś konieczne jest obciążenie maszyny mocą znamionową, co w przypadku dużych mocy wymaga dużych i kosztownych urządzeń hamujących, powoduje duże zużycie energii i sam pomiar jest trudny do wykonania. Podana przez autorów metoda wyznacza bezpośrednio straty w uzwojeniu i sprowadza się do pomiarów na zahamowanej maszynie prądami znacznie mniejszymi od znamionowych, a więc nie zużywa praktycznie większych mocy, ani też nie wymaga specjalnych urządzeń pomocniczych.

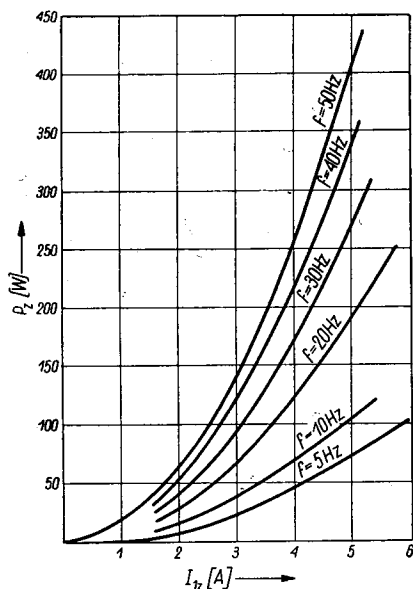
Bezpośredni pomiar strat umożliwia dokładne wyznaczenie poślizgu dla każdego dowolnego obciążenia maszyny. Znajomość poślizgów dla do-

wolnych warunków pracy pozwala w połączeniu z metodą podaną w [2] wyznaczyć w sposób łatwy i prosty temperaturę wirnika dla dowolnych warunków pracy maszyny.

Przy pomocy tej metody zostały wyznaczone straty dla szeregu dużych maszyn w Zakładzie M-5. Otrzymane wyniki (przytoczone w tekście) pokrywają się z wynikami otrzymanymi przy innych sposobach pomiarów.

2. ZASADA POMIARU STRAT W UZWOJENIU WIRNIKA

Przy zahamowanym wirniku silnika mierzy się moc zwarcia P_z jako funkcję prądu stojana I_{1z} przy zmiennej częstotliwości zasilania $f = \text{var}$;



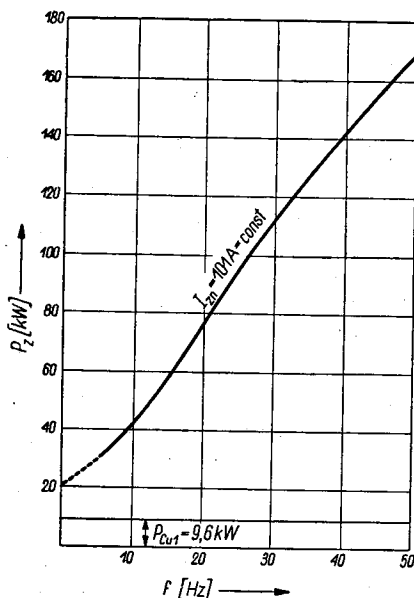
Rys. 1. Zależność mocy zwarcia w funkcji prądu stojana $P_z = \varphi(I_{1z})$ przy różnych częstotliwościach f ; charakterystyka zdjęta dla maszyny z wirnikiem klatkowym z prętami trapezowymi wysokości $h = 5,5$ cm, moc 1000 kW, $n = 3000$ obr/min, napięcie 6000 V

zależności takie przedstawione są na rys. 1. Najniższa wartość częstotliwości, jaką można jeszcze pomierzyć, wynosi $f \approx 5$ Hz. Pomiar przeprowadza się prądem małym, wynoszącym kilka do kilkunastu procent prądu znamionowego. Moc zwarcia jest wtedy mała i silnik badany nie nagrzewa się w czasie pomiaru, a prądnica zasilająca może być małej mocy i o niskim napięciu. Stosowanie małych prądów pomiarowych pozwala ponadto na użycie bezpośredniego układu pomiarowego, bowiem transformatory prądowe przy niskich częstotliwościach dają duże uchyby.

Na podstawie zależności podanych na rys. 1 wyznacza się moc zwarcia w funkcji częstotliwości $P_z = \varphi(f)$, przy stałej wartości prądu $I_{1z} = \text{const}$. Uzyskane w ten sposób wartości mocy P_z należy następnie przeliczyć na wartości P_{zn} odpowiadające prądowi znamionowemu wirnika na podstawie wzoru

$$P_{zn} = P_z \left(\frac{I_{1z}}{I_{1zn}} \right)^2 = \varphi(f). \quad (1)$$

Prąd I_{1zn} jest tej wielkości, aby przy zwarcu płynął w uzwojeniu wirnika prąd odpowiadający znamionowym warunkom pracy maszyny. Za-



Rys. 2. Zależność mocy zwarcia od częstotliwości $P_z = \varphi(f)$ przy $I_{zn} = 101 \text{ A} = \text{const}$; charakterystyka zdjęta dla maszyny z wirnikiem klatkowym z prętami trapezowymi o wysokości $h = 5,5 \text{ cm}$, moc 1000 kW , $n = 3000 \text{ obr/min}$, napięcie 6000 V

leżność (1) jest przedstawiona na rys. 2. Ekstrapolując część krzywej $P_{zn} = \varphi(f)$ od $f \approx 5 \text{ Hz}$ do $f = 0$, tzn. do przecięcia się z osią rzędnych otrzymamy całkowite straty w uzwojeniach maszyny

$$P_{zn} = P_{zno} = P_{Cu1} + P_{Cu2}, \quad (2)$$

a po odjęciu strat w uzwojeniu stojana

$$P_{Cu1} = 3 R_{1f} I_{1zn}^2$$

straty w uzwojeniu wirnika wynoszą

$$P_{Cu2} = P_{zno} - 3 R_{1f} I_{1zn}^2. \quad (3)$$

Ponieważ pomiar dokonywany jest małym prądem, więc przyjmujemy, że uzwojenie nie nagrzewa się, a zatem do wzoru wstawia się wartość oporności R_{1f} odpowiadającej temperaturze otoczenia t_0 , przez co i straty P_{Cu2} są wyznaczone dla temperatury t_0 . Tak wyznaczone straty należy przeliczyć dla żądanej temperatury t według wzoru:

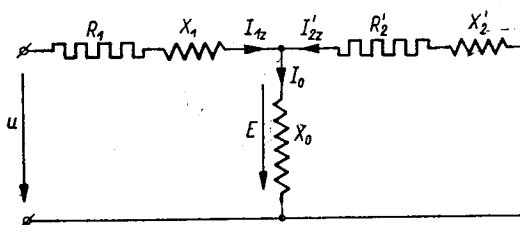
$$P_{Cu2(t)} = P_{Cu2(t_0)} \left[1 + \frac{1}{\alpha t_0} (t - t_0) \right]. \quad (4)$$

W ten sam sposób można wyznaczyć P_{Cu2} dla dowolnego obciążenia, wprowadzając w tym celu do równania (1) wartość prądu I_{1zn} , odpowiadającą temu obciążeniu.

3. TEORETYCZNE PODSTAWY POMIARU

3.1. Wyznaczenie oporności R'_{2p} i określenie wpływu oporności X'_2 i X_0 na pomierzoną wartość R'_p

Przy wyznaczeniu strat P_{Cu2} korzysta się z zależności $P_{zn} = \varphi(f)$ wyznaczonej przy $I_{1zn} = \text{const}$, a zatem funkcja ta w innej skali przedstawia sumę oporności jako funkcję częstotliwości



Rys. 3. Uproszczony schemat zastępczy dla maszyny asynchronicznej

$$R_p = R_{1p} + R'_{2p} = \frac{P_{zn}}{3 I_{1zn}^2} = \varphi(f). \quad (5)$$

Pomierzoną wartość oporności wirnika otrzymamy więc ze wzoru

$$R'_{2p} = \frac{P_{zn}}{3 I_{1zn}^2} - k R_{1p}, \quad (6)$$

gdzie: k — współczynnik uwzględniający wypychanie prądu w przewodach stojana; dla małych wysokości prętów i niewielkich wartości f , współczynnik $k = 1$. Indeksy p oznaczają wartości pomierzone oporności.

Z uproszczonego schematu zastępczego silnika w stanie zwarcia podanego na rys. 3, otrzymamy całkowitą oporność

$$\hat{Z} = \hat{Z}_1 + \frac{\hat{Z}_0 \hat{Z}'_2}{\hat{Z}_0 + \hat{Z}'_2} \quad (7)$$

i oporność czynną

$$R_p = \operatorname{Re}(\hat{Z}) = R_{1p} + \frac{R'_2}{\left(\frac{R'_2}{X_0}\right)^2 + \left(1 + \frac{X'_2}{X_0}\right)^2},$$

oraz pomierzoną oporność czynną wirnika

$$R'_{2p} = R_p - R_{1p} = \frac{R'_2}{\left(\frac{R'_2}{X_0}\right)^2 + \left(1 + \frac{X'_2}{X_0}\right)^2}, \quad (8)$$

gdzie: R'_2 jest wartością rzeczywistą oporności czynnej wirnika.

Z wyrażenia (8) wynika, że wartość pomierzona R'_{2p} jest mniejsza od wartości rzeczywistej R'_2 , tzn. że występuje uchyb ujemny, który jest tym większy, im bardziej mianownik jest większy od jedności.

Stosunek $\frac{R'_2}{X_0}$, jak wynika z pomiarów i obliczeń, dla dużych maszyn asynchronicznych, wynosi przy $f = 50$ Hz około 0,01 — 0,02, zaś przy $f = 5$ Hz, a więc przy najniższej częstotliwości, przy jakiej można jeszcze dokonać pomiaru, około 0,03 — 0,06 (R'_2 maleje około 3-krotnie, a f około 10-krotnie); ostatecznie człon $\left(\frac{R'_2}{X_0}\right)^2 \approx 0$ i można go we wzorze (8) pominąć, a wówczas otrzymamy

$$R'_{2p} = \frac{R'_2}{\left(1 + \frac{X'_2}{X_0}\right)^2} = \frac{R'_2}{\left(1 + \frac{L'_2}{L_0}\right)^2}. \quad (9)$$

Na skutek nierównomiernego rozkładu prądu w przekroju pręta, rozkład indukcji w funkcji wysokości nie jest prostoliniowy. Stąd wynika, że indukcyjność rozproszenia L'_2 jest mniejsza dla dużych częstotliwości niż dla małych.

Całkowita oporność indukcyjna rozproszenia wirnika X'_2 składa się z dwóch wielkości, jednej — w której nie zachodzi zjawisko wypierania prądu X'_{2s} (części pręta w kanałach wentylacyjnych i pierścienie zwierające), oraz drugiej — w której to zjawisko występuje X'_{2v} (części pręta umieszczone w żelazie), a więc można napisać

$$X'_2 = X'_{2s} + X'_{2v}.$$

Ponieważ

$$X'_{2v} = k_x X'_{2ss},$$

więc

$$X'_2 = X'_{2s} + k_x X'_{2ss},$$

gdzie:

k_x — współczynnik zmiany oporności indukcyjnej spowodowanej wypieraniem prądu ($k_x \leq 1$),

X'_{2ss} — oporność indukcyjna części prętów będących w żelazie, gdyby nie było zjawiska wypierania.

Na podstawie wyników liczbowych dla wykonanych maszyn o różnych wysokościach i kształtach prętów zostały określone wartości X'_2 dla wartości częstotliwości $f = 50$ Hz i najniższej wartości, jaką można uzyskać pomiarowo, $f \approx 5$ Hz;

1. przekrój pręta 5×55 mm

$$f = 50 \text{ Hz}, X'_{2(50)} = 3,05 + 2,93 \cdot 0,305 = 3,95 \Omega,$$

$$f = 5 \text{ Hz}, X'_{2(5)} = 3,05 + 2,93 = 5,98 \Omega,$$

2. przekrój pręta 4×40 mm

$$f = 50 \text{ Hz}, X'_{2(50)} = 7,29 + 5,8 \cdot 0,42 = 9,73 \Omega,$$

$$f = 5 \text{ Hz}, X'_{2(5)} = 7,29 + 5,8 = 13,09 \Omega,$$

3. przekrój pręta 3×30 mm

$$f = 50 \text{ Hz}, X'_{2(50)} = 3,2 + 3,47 \cdot 0,55 = 5,1 \Omega,$$

$$f = 5 \text{ Hz}, X'_{2(5)} = 3,2 + 3,47 = 6,67 \Omega,$$

4. dla pręta trapezowego $\frac{(3 + 9,1)}{2} \cdot 55$ mm

$$f = 50 \text{ Hz}, X'_{2(50)} = 1,41 + 2,485 \cdot 0,69 = 3,122 \Omega,$$

$$f = 5 \text{ Hz}, X'_{2(5)} = 1,41 + 2,485 = 3,895 \Omega,$$

5. dwie klatki każda o $\varnothing 13,0$ mm, łączna wysokość żłobka $h_z = 45$ mm.

$$f = 50 \text{ Hz}, X'_{2(50)} = 2,32 + 2,56 \cdot 0,137 = 2,67 \Omega,$$

$$f = 5 \text{ Hz}, X'_{2(5)} = 2,32 + 2,56 = 4,88 \Omega.$$

W warunkach pomiaru, tzn. przy zwarcu, indukcja jest znacznie mniejsza niż w warunkach pracy znamionowej. Rozpatrzmy najpierw wielkości poszczególnych parametrów przy $f = 50$ Hz. Jeżeli przez uzwojenie stojana płynie prąd znamionowy, to napięcie zwarcia wynosi $(20 \div 30)\% U_n$, a SEM stojana E_z , jak to potwierdziły pomiary, wynosi średnio $0,5 U_z$, wobec tego $E_z = (10 \div 15)\% U_n$. W takim samym stosunku zmienia się strumień przy zwarcu Φ_z , w porównaniu do jego wartości znamionowej $\Phi_z = (10 \div 15)\% \Phi_n$. Ze statystyki mamy dla prądu I_μ w warunkach znamionowych dla dużych maszyn wartość $I_\mu = (25 \div 45)\% I_n$.

Przyjmując najpierw, że prąd magnesujący zmienia się proporcjonalnie do SEM, otrzymamy przy zwarcu

$$I_{\mu z} = (0,1 \cdot 0,25 \div 0,15 \cdot 0,45) I_n = (0,025 \div 0,068) I_n = (2,5 \div 6,8) \% I_n,$$

a ponieważ wtedy obwód magnetyczny stojana nie jest nasycony (indukcja rzędu 3000 Gs), więc otrzymamy mniejsze wartości prądu $I_{\mu z}$ niż otrzymane wyżej średnio o 20 ÷ 40%, co uwzględniając otrzymamy rzeczywiste wartości prądu magnesującego przy zwarcu

$$I_{\mu z} = \frac{1}{1,2 \div 1,4} (2,4 \div 6,8) \% I_n = (2,0 \div 5,3) \% I_n.$$

Mając wartości prądu magnesującego przy pracy znamionowej i zwarcu

$$\frac{I_{\mu 0}}{I_{\mu z}} = \frac{0,25 \div 0,45}{0,02 \div 0,055} = 12,5 \div 8,2$$

oraz wartości SEM

$$\frac{E_n}{E_z} = \frac{1}{0,1 \div 0,15} = 10,0 \div 6,7$$

otrzymamy wartości oporności indukcyjnych X_0 w granicach od znamionowego obciążenia do zwarcia przy $f = 50$ Hz

$$\frac{X_{0n}}{X_{0z}} = \frac{E_n}{E_z} \cdot \frac{I_{\mu z}}{I_{\mu 0}} = (10,0 \div 6,7) \left(\frac{1}{12,5} \div \frac{1}{8,2} \right) = 0,80 \div 0,82.$$

Z otrzymanych wartości wynika, że oporność X_0 przy zwarcu jest średnio o około 20% większa niż przy pracy znamionowej.

Rozpatrzmy teraz zmianę prądu magnesującego przy zwarcu $I_{\mu z}$ dla różnych częstotliwości. Przebieg funkcji $U_z = \varphi(I_z)$ i $U_z = \varphi(f)$, a więc i E_z , jest w przybliżeniu liniowy (przy $f = 0$, $E_z = 0$), wobec tego

$$c B_z = \frac{E_z}{f} = \text{const};$$

indukcja przy zwarcu B_z jest stała dla wszystkich f , a zatem $I_{\mu z} = \text{const}$ i $L_0 = \text{const}$.

Wyznamy teraz dla tych samych maszyn, dla których wyznaczono poprzednio X'_2 , wartości oporności X_0 ;

1. $X_0 \approx \frac{E}{I_\mu} = \frac{3300}{25} \approx 118 \Omega,$
2. $X_0 \approx 161 \Omega,$ 3. $X_0 \approx 124 \Omega,$
4. $X_0 \approx 68 \Omega,$ 5. $X_0 \approx 78 \Omega.$

Określmy teraz dla poszczególnych wartości X'_2 i X_0 odpowiednie stosunki dla $f = 50$ Hz i $f = 5$ Hz, uwzględniając 20% wzrost X_0 przy zwarciu

$$1. \quad f = 50 \text{ Hz} \quad \left(1 + \frac{3,95}{1,2 \cdot 118}\right)^2 = 1,056;$$

$$f = 5 \text{ Hz} \quad \left(1 + \frac{5,98}{1,2 \cdot 118}\right)^2 = 1,085;$$

$$2. \quad f = 50 \text{ Hz} \quad \left(1 + \frac{9,73}{1,2 \cdot 161}\right)^2 = 1,1;$$

$$f = 5 \text{ Hz} \quad \left(1 + \frac{13,09}{1,2 \cdot 161}\right)^2 = 1,142;$$

$$3. \quad f = 50 \text{ Hz} \quad \left(1 + \frac{5,1}{1,2 \cdot 124}\right)^2 = 1,086;$$

$$f = 5 \text{ Hz} \quad \left(1 + \frac{6,67}{1,2 \cdot 124}\right)^2 = 1,094;$$

$$4. \quad f = 50 \text{ Hz} \quad \left(1 + \frac{3,122}{1,2 \cdot 68}\right)^2 = 1,08;$$

$$f = 5 \text{ Hz} \quad \left(1 + \frac{3,895}{1,2 \cdot 68}\right)^2 = 1,097;$$

$$5. \quad f = 50 \text{ Hz} \quad \left(1 + \frac{2,67}{1,2 \cdot 78}\right)^2 = 1,06;$$

$$f = 5 \text{ Hz} \quad \left(1 + \frac{4,88}{1,2 \cdot 78}\right)^2 = 1,107.$$

Jak z tych danych liczbowych wynika, przy częstotliwości $f = 5$ Hz wzrasta wartość mianownika w stosunku do wartości przy $f = 50$ Hz o kilka procent, a zatem uchyb względny rośnie. Ponieważ jednak większy uchyb odnosi się do mniejszej wartości strat, a mniejszy uchyb do większej, więc uchyb bezwzględny w kW będzie znacznie mniejszy dla strat przy małej częstotliwości niż przy dużej, tzn. że uchyb bezwzględny strat maleje wraz ze zmniejszaniem częstotliwości.

Istnieje jeszcze jeden czynnik wpływający na zmniejszenie omówionych uchybów. Przy pomiarze P_z watomierze wskazują jednocześnie straty w stojanie i wirniku, które przy niskich częstotliwościach ($f \approx 0$) są mniej więcej równe sobie i w związku z tym błąd metody [mianownik w równaniu (9)] odniesiony do całości zmniejsza się prawie dwukrotnie i leży w granicach uchybów przyrządów.

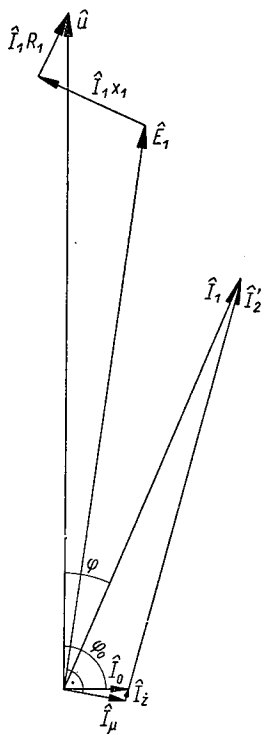
Przy pomiarze mocy P_z mierzy się również straty na histerezę i prądy wirowe w stojanie i wirniku, jednakże ze względu na bardzo małą war-

tość indukcji przy zwarcu są one nieznaczne i maleją jeszcze ze zmniejszaniem częstotliwości, tak że gdy $f \rightarrow 0$ $P_s \rightarrow 0$. Dla $f > 0$ straty te dają uchyby o znaku przeciwnym do znaku uchybów występujących z równania (9) i znoszą się częściowo.

Ze względu na wszystkie wyżej omówione czynniki autorzy nie wprowadzili współczynników korygujących uchyby metody gdyż są one pomijalnie małe, a słuszność tego potwierdziły pomiary.

3.2. Wyznaczenie prądu stojana I_{1z} przy zachowaniu znamionowej wartości prądu wirnika $I'_{2n} = \text{const}$

Prąd wirnika I'_2 występujący przy znamionowym obciążeniu maszyny



Rys. 4. Wykres wektorowy maszyny asynchronicznej

można wyznaczyć z wykresu kołowego lub też analitycznie z wykresu wektorowego (rys. 4) na podstawie wzoru

$$I_2'^2 = I_0^2 + I_1^2 - 2 I_1 I_0 \cos(\varphi_0 - \varphi), \quad (10)$$

do czego potrzebna jest znajomość wielkości U , I_1 , I_0 , φ , φ_0 . Dla takiej wartości prądu I_2' muszą być obliczone straty P_{Cu2} w wirniku.

W dalszym ciągu zagadnienie sprowadza się do wyznaczenia takiego prądu stojana I_{1z} , aby uzyskać żądany prąd wirnika I'_2 określony wzorem (10). W tym celu należy wyznaczyć drugi składnik sumy geometrycznej, tzn. prąd magnesujący przy zwarcu $I_{\mu z}$.

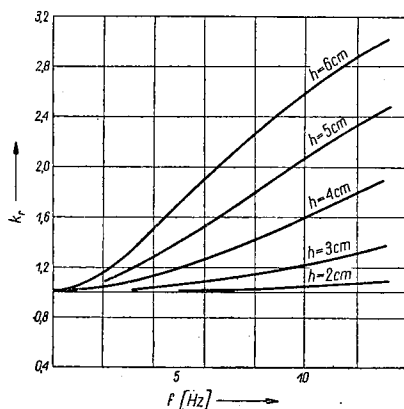
W czasie badania maszyny (stan zwarcia) prąd magnesujący $I_{\mu z}$ jest znacznie mniejszy niż w warunkach pracy znamionowej i jak było wykazane poprzednio $I_{\mu z} = \text{const}$ przy $f = \text{var}$ $I_{\mu z} = (2,0 \div 5,5)^{0,0} \cdot I_{1n}$. Biorąc pod uwagę, że dla dużych maszyn SEM przy zwarcu E_z jest praktycznie w fazie z napięciem zwarcia U_z (różnica mniejsza niż 5°) otrzymamy

$$I'_2 = I'_{2z} = \sqrt{I_{1z}^2 - I_{\mu z}^2} = \sqrt{I_{1z}^2 - (0,015 \div 0,045)^2 I_{1n}^2} \approx I_{1zn}.$$

Jak wynika z powyższej analizy, można przyjąć przy zwarcu, że prąd, który należy przyłożyć do stojana, jest równy prądowi znamionowemu wirnika, którego wartość jest wyznaczona wzorem (10).

3.3. Ekstrapolacja krzywej $P_z = \varphi(f)$

Ostatni punkt, jaki można jeszcze uzyskać z pomiaru, odpowiada częstotliwości $f \approx 5$ Hz. Przy niższych wartościach występują duże uchyby.



Rys. 5. Zależność współczynnika $k_r = \frac{R_{zm2}}{R_{st2}}$ uwzględniająca wpływ wypierania prądu na oporność czynną wirnika w funkcji częstotliwości f dla różnych wysokości prętów h

Wobec tego część krzywej od $f \approx 5$ Hz do $f = 0$ Hz trzeba wyznaczyć przez ekstrapolację, co jest możliwe ze względu na to, że teoretyczny przebieg jest znany.

Ogólny wzór wyrażający zależność oporu od częstotliwości jest następujący

$$k_r = \frac{R_{zm}}{R_{st}} = \xi \frac{\operatorname{sh} 2\xi + \sin 2\xi}{\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\xi}, \quad (11)$$

gdzie:

$$\xi = 2\pi h \sqrt{\frac{b_p}{b_z} \frac{f}{\varrho \cdot 10^5}},$$

b_p, b_z — szerokość pręta i żłobka [cm],

ϱ — oporność właściwa [$\Omega \text{ mm}^2/\text{m}$],

h — wysokość pręta [cm].

Na rys. 5 podane są funkcje $k_r = \varphi(f)$ dla $h = 2, 3, 4, 5, 6 \text{ cm}$. Jeżeli $0 \leq \xi \leq 1$, to wówczas zamiast wzoru (11) można stosować wzór uproszczony

$$k_r = 1 + \frac{4}{45} \xi^4 = 1 + \frac{4}{45} (2\pi h)^4 \cdot \left(\frac{b_p}{b_z \varrho 10^5} \right)^2 f^2, \quad (12)$$

z którego wynika, że zmiana oporności w funkcji częstotliwości ma przebieg paraboliczny.

Znajdziemy teraz dla różnych wysokości h częstotliwość f , dla której będzie spełniony warunek $\xi \approx 1$, to znaczy miejsce, od którego będzie można krzywą $P_z = \varphi(f)$ przedłużyć wg wyrażenia (12). Przyjmując, jak to jest stosowane w dużych maszynach, że $b_z = b_p + 0,05 \text{ [cm]}$ otrzymamy, że dla wysokości $h = 4 \div 6 \text{ cm}$, częstotliwość, od której zaczyna się parabola, wynosi odpowiednio $f \approx 4 \div 2 \text{ Hz}$. Dla dużych wysokości h należy więc krzywą ekstrapolować do $f = 2 \text{ Hz}$ według poprzedniego przebiegu, a następnie zastąpić parabolą. Należy zaznaczyć jeszcze, że dla $h = 2 \text{ cm}$ wartość k_r otrzymaną dla $f = 5 \text{ Hz}$ można przyjąć z wystarczającą dokładnością i dla $f = 0$; dla $h = 3 \text{ cm}$ krzywą można przedłużyć według prostej.

4. WYZNACZANIE POŚLIZGU I TEMPERATURY WIRNIKA

Opierając się na pomiarowym wyznaczeniu strat w uzwojeniu wirnika można wyznaczyć jeszcze poślizg oraz temperaturę uzwojenia.

4.1. Wyznaczenie poślizgu przy dowolnym obciążeniu

Poślizg maszyny wyraża wzór

$$s = \frac{P_{Cu2}}{P_{12}} = \frac{P_{Cu2}}{P_1 - P_z - P_{Cu1}} = \frac{P_{Cu2}}{P_2 + P_m + P_d + P_{Cu2}}.$$

Ponieważ w maszynach dużych mocy, a więc o wysokich sprawnościach $P_1 \gg P_z + P_{Cu1}$ oraz $P_2 \gg P_m + P_d + P_{Cu2}$, więc można napisać

$$s \approx \frac{P_{Cu2}}{P_1} \approx \frac{P_{Cu2}}{P_2}.$$

Po podstawieniu do równania (1) odpowiedniej wartości I_{1zn} dla pewnej wartości obciążenia wyznacza się odpowiadającą mu wartość strat P_{Cu2} i poślizg. Przy pomiarach mocy zwarcia małymi prądami, wirnik będzie miał temperaturę otoczenia i dla niej będzie również wyznaczony poślizg. Jeżeli znana jest temperatura wirnika w stanie nagrzanym, to ze wzoru (4) można wyznaczyć dla niej straty P_{Cu2} oraz poślizg.

4.2. Wyznaczanie temperatury wirnika

Przyrost temperatury wirnika można wyznaczyć na podstawie pomiaru poślizgu w stanie zimnym i nagrzanym [2] ze wzoru

$$\vartheta = \left[\left(\frac{E_c}{E_o} \right)^2 \frac{s_c}{s_o} \cdot \frac{1 - s_c}{1 - s_o} - 1 \right] (235 + t_o),$$

gdzie:

E_o, E_c — SEM stojana w stanie zimnym i nagrzanym,

s_o, s_c — poślizg w stanie zimnym i nagrzanym,

t_o — temperatura uzwojenia w stanie zimnym równa temperaturze otoczenia.

Poślizg w stanie zimnym można wyznaczyć na podstawie pomiaru P_{Cu2} opisanego wyżej. Wyznaczając opisanym wyżej sposobem P_{Cu2} dla różnych obciążeń można wyznaczyć funkcje $s_o = f(P_2)$ lub $s_o = f(P_1)$.

Poślizg s_c w stanie nagrzanym przy pracy maszyny wyznacza się jedną ze znanych metod pomiarowych, jak np. stroboskopową, przyrządem magnetoelektrycznym z cewką-sondą, oscylografem itp.

Na podstawie pomiarów stwierdzono [2], że stosunek $\left(\frac{E_c}{E_o} \right)^2$ w dużych granicach zmian temperatury nie wiele się zmienia i jest bliski jedności.

W opisaney metodzie wyznaczania temperatury wirników [2], poślizg mierzono bezpośrednio po rozruchu s_z , a dla wyznaczenia poślizgu w stanie zimnym s_o trzeba było stosować metodę rachunkowo-wykreślną. Na podstawie obecnie opisaney metody pomiaru P_{Cu2} wyznaczenie s_o na podstawie wyżej podanych wzorów znacznie się upraszcza. Pozwala to jeszcze na wyznaczenie nagrzania wirnika w czasie rozruchu przez pomiar poślizgu bezpośrednio po rozruchu. Można również wyznaczyć przyrost temperatury ϑ_c przy dowolnych obciążeniach i w dowolnym czasie bez względu na sposób rozruchu. Jeżeli maszyna jest obciążona przez dłuższy czas jedna-

kowo, można także zdjąć charakterystykę grzania wirnika jako funkcję czasu.

5. WYNIKI POMIARÓW I OBLICZEŃ

Rozpatrzone będą tu dwa przykłady liczbowe dla zilustrowania toku obliczeń i porównania wyników.

Przykład 1. Silnik asynchroniczny głębokożłobkowy trapezowy $h = 5,5$ cm o mocy 1000 kW, 6000 V, $n = 3000$ obr/min, $I_1 = 110$ A, $I_0 = 22$ A, $\cos \varphi = 0,9$, $\cos \varphi_0 = 0,11$, $\varphi = 25^\circ 48'$, $\varphi_0 = 84^\circ 12'$. Obliczenie prądu wirnika

$$\begin{aligned} I'_2 &= \sqrt{I_1^2 + I_0^2 - 2 I_1 I_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} = \\ &= \sqrt{110^2 + 22^2 - 2 \cdot 110 \cdot 22 \cdot \cos 58^\circ 24'} = 101 \text{ A.} \end{aligned}$$

W celu uniknięcia w czasie pomiaru nagrzania uzwojenia pomiar mocy zwarcia w funkcji prądu przy $f = \text{const}$ ($P_z = \varphi(I_{1z})$), rys. 1, przeprowadzono małymi prądami $I_1 = 4$ A oraz $I_1 = 5$ A, a przy wyznaczaniu funkcji $P_z = \varphi(f)$, rys. 2, przeliczono wyniki na prąd $I_{1z} = 101$ A. Po ekstrapolacji otrzymano dla $f = 0$ moc zwarcia $P_z = 20,1$ kW. Przy pomiarze małym prądem można przyjąć, że temperatura uzwojenia była równa temperaturze otoczenia $t_0 = 15^\circ\text{C}$. Pomierzona oporność fazy stojana wynosi $R_{15} = 0,3147 \Omega$.

Straty w uzwojeniu stojana przy $I_{1z} = 101$ A wynoszą

$$P_{Cu1(15)} = 3 \cdot 0,3147 \cdot 101^2 = 9,6 \text{ kW,}$$

a straty w miedzi wirnika

$$P_{Cu2(15)} = 20,1 - 9,6 \approx 10,5 \text{ kW.}$$

Przy nagrzaniu wirnika do temperatury $t = 75^\circ\text{C}$ otrzymamy

$$P_{Cu2(75)} = 10,5 \left[1 + \frac{1}{235 + 15} (75 - 15) \right] = 12,6 \text{ kW.}$$

Poślizg dla temperatury wirnika $t = 75^\circ\text{C}$ wynosi

$$s = \frac{P_{Cu2(75)}}{P_2 + P_m + P_d + P_{Cu2(75)}} = \frac{12,6}{1000 + 15 + 5 + 12,6} = 0,0122.$$

Poślizg przy obciążeniu znamionowym dla $t_0 = 15^\circ\text{C}$ wynosi

$$s_0 = \frac{10,5}{1000 + 5 + 15 + 10,5} = \frac{10,5}{1030,5} \approx 0,0101.$$

W czasie prób obciążenia mocą znamionową, bezpośrednio po rozruchu pomierzony poślizg wynosił $s_r = 0,0107$, a po 1,5 godz pracy był równy $s = 0,0118$.

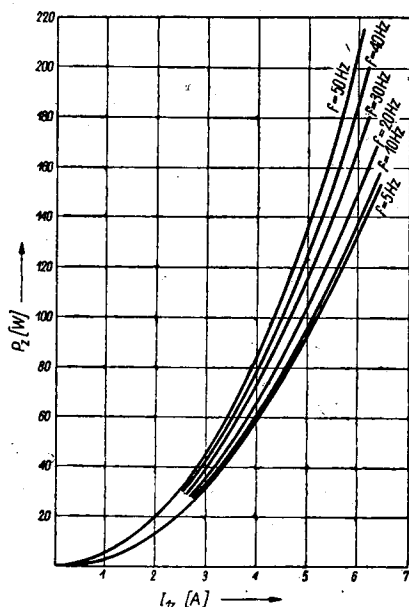
Przyrost temperatury wirnika po rozruchu

$$\vartheta_r = \left[\left(\frac{E_c}{E_0} \right)^2 \frac{s_c}{s_0} \cdot \frac{1 - s_c}{1 - s_0} - 1 \right] (235 + t_0) =$$

$$= \left[0,995 \cdot \frac{0,0107}{0,0101} \cdot \frac{0,9893}{0,9899} - 1 \right] (235 + 15) = 0,055 \cdot 250 \approx 14^\circ\text{C},$$

a temperatura wirnika wynosi

$$t_r = 14 + 15 = 29^\circ\text{C}.$$



Rys. 6. Zależność mocy zwarcia w funkcji prądu stojana $P_z = \varphi(I_{1z})$ przy różnych częstotliwościach f ; charakterystyka zdjęta dla maszyny z wirnikiem pierścieniowym o prętach wysokości $h = 1,3$ cm, moc 800 kW, $n = 375$ obr/min, napięcie 6000 V

Po 1,5 godz pracy przyrost temperatury wynosi

$$\vartheta_c = \left[0,994 \frac{0,0118}{0,0101} \cdot \frac{0,982}{0,989} - 1 \right] (235 + 15) = 0,152 \cdot 250 = 38^\circ\text{C},$$

a temperatura wirnika

$$t_c = 38 + 15 = 53^\circ\text{C}.$$

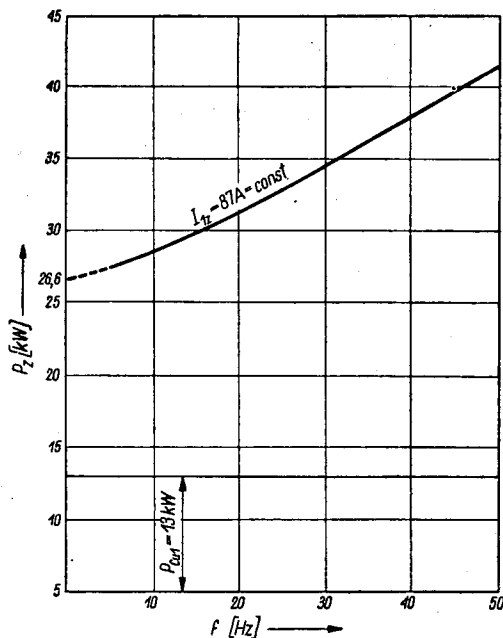
Przykład 2. Silnik asynchroniczny pierścieniowy o mocy 800 kW 6000 V, $n = 375$ obr/min, $I_1 = 103,5$ A, $I_0 = 45,1$ A, $\cos \varphi = 0,805$, $\cos \varphi_0 = 0,0495$, $\varphi = 36^\circ 20'$, $\varphi_0 = 87^\circ 10'$.

Prąd wirnika

$$I'_2 = \sqrt{103,5^2 + 45,1^2 - 2 \cdot 103,5 \cdot 45,1 \cos 50^\circ 50'} = 87 \text{ A}.$$

Przy zwarcu $I_{1z} = I'_2 = 87 \text{ A}$.

Zależność $P_z = \varphi(f)$ (rys. 6 i 7) wyznaczono przy prądach $I_1 = 5$ i 6 A , a więc temperatura uzwojenia była równa temperaturze otoczenia



Rys. 7. Zależność mocy zwarcia od częstotliwości $P_z = \varphi(f)$ przy $I_{zn} = 87 \text{ A} = \text{const}$; charakterystyka zdjęta dla maszyny z wirnikiem pierścieniowym o prętach wysokości $h = 1,3 \text{ cm}$, moc 800 kW , $n = 375 \text{ obr/min}$, napięcie 6000 V

$t_o = 20^\circ\text{C}$. Po ekstrapolacji krzywej P_z dla $f = 0$ otrzymano moc zwarcia $P_z = 26,6 \text{ kW}$.

Straty w uzwojeniu stojana przy oporności fazy $R_{20} = 0,573 \Omega$ wynoszą:

$$P_{Cu1(20)} = 3 \cdot 0,573 \cdot 87^2 = 13,0 \text{ kW},$$

a straty w uzwojeniu wirnika

$$P_{Cu2(20)} = 26,6 - 13,0 = 13,6 \text{ kW}.$$

Przy nagrzaniu do $t = 95^\circ\text{C}$ straty w wirniku wynoszą

$$P_{Cu2(95)} = 13,6 \left[1 + \frac{1}{235 + 20} (95 - 20) \right] = 17,6 \text{ kW}.$$

Poślizg

$$s = \frac{P_{Cu2(95)}}{P_2 + P_m + P_d + P_{Cu2(95)}} = \frac{17,6}{800 + 3,6 + 4,0 + 17,6} = 0,0213.$$

W poniższej tablicy zestawionych jest kilka wyników z przeprowadzonych pomiarów normalnie stosowaną metodą przez pomiar poślizgu ($P_{Cu2} = P_{12} \cdot s$) i metodą autorów.

Moc kW	Rodzaj uzwojenia wirnika	Obroty	Straty okreś- lone z poślizgu I	Straty określone metodą autorów II	Uchyb $\Delta\% = \frac{II - I}{I}$
800	pierścień	375	17,3	17,6	+ 1,7
1 000	głębokożłobkowy	1 000	10,0	10,1	+ 1,0
500	„	750	9,0	8,7	- 3,3
1 000	głębokożłobkowy trapezowy	3 000	12,7	12,8	+ 0,8
570	głębokożłobkowy	750	9,9	9,7	+ 2,0
800	„	1 000	8,7	8,4	- 3,5
400	„	500	4,2	4,3	+ 2,4

6. ANALIZA DOKŁADNOŚCI POMIARU

Na dokładność pomiaru przy wyznaczaniu strat w uzwojeniu wirnika mają wpływ następujące uchyby:

a) przypadkowe, b) systematyczne, w których zawarte są błędy wskazań przyrządów pomiarowych oraz błędy samej metody pomiarowej.

W przypadku pomiarów technicznych, uchybów przypadkowych, jako znacznie mniejszych od uchybów systematycznych, można nie brać pod uwagę w dalszych rozważaniach. Należy jednak wziąć pod uwagę, że największe uchyby przypadkowe wystąpią przy pomiarze mocy zwarcia małymi częstotliwościami ($f = 5 \div 10$ Hz) dlatego, że zaczynają już wtedy występować wahania wskazań przyrządów.

Dla uzyskania więc pewnych wyników pomiarowych główny nacisk należy kłaść na zmniejszenie uchybów systematycznych. Ze względu na to, że pomiar mocy wykonywany jest w układzie dwóch watomierzy, a współczynnik mocy zależnie od częstotliwości i takich parametrów maszyny, jak P_n , n , I_0 itp. waha się od 0,1 do 0,7, jest celowe stosować watomierze dające pełne wskazania przy $\cos \varphi = 0,5$.

Jak już wyżej wspomniano, pomiar zwarcia powinien być przeprowadzony małymi prądami dla uniknięcia nagrzania maszyny jak również dla uniknięcia konieczności stosowania transformatorów mierniczych, które przy pomiarach niskimi częstotliwościami dają znaczne uchyby. Jednakże przy pomiarze małymi prądami występują małe moce i wówczas należy stosować poprawki uwzględniające moc pobieraną przez przyrządy pomiarowe.

Przyczyny występowania uchybów systematycznych na skutek błędów metody omówione były w punkcie 3; należą do nich:

- a) niedokładność wyznaczenia wielkości prądu I_{1zn} ,
- b) niedokładność wynikająca z istnienia członu $\left(1 + \frac{X'_2}{X_0}\right)^2$ w mianowniku wzoru (9),
- c) niedokładność ekstrapolacji krzywej $P_z = \varphi(f)$.

Prąd I_{1zn} występuje w wyrażeniu na straty P_{Cu2} w drugiej potęgze, więc należy go wyznaczać z dużą starannością w oparciu o dokładnie określone wielkości I_1 , I_0 , φ , φ_0 .

W punkcie 3 określona była wartość składnika $\left(1 + \frac{X'_2}{X_0}\right)^2$ i uzasadniono pominięcie poprawek wynikających z istnienia tego członu przy wyznaczaniu funkcji $P_z = \varphi(f)$. W przypadkach maszyn o mniejszych mocach stosunek $\frac{X'_2}{X_0}$ może mieć znaczną wartość i wówczas należy go uwzględnić w postaci odpowiedniej poprawki.

Wyznaczenie strat w uzwojeniu P_{Cu2} wykonuje się sposobem pomiarowo-graficznym. W celu dokładnego wyznaczenia przebiegu $P_z = \varphi(f)$ należy funkcję tę wyznaczać na podstawie kilku różnych wartości prądu I_{1zn} , przez co uzyskuje się większą liczbę punktów wyznaczających krzywą mocy zwarcia P_z .

Ekstrapolację funkcji $P_z = \varphi(f)$ do $f = 0$ powinno się przeprowadzać zgodnie z przebiegiem podanym w punkcie 3.3.

Ponieważ pomiar opiera się na wyznaczeniu kilku wielkości niezależnych, mierzonych pośrednio, średni uchyb systematyczny pomiaru P_{Cu2} jest określony równaniem

$$\Delta P_{Cu2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n [\Delta X f(X_1 + X_2 + \dots + X_n)]^2},$$

gdzie: ΔX — uchyb systematyczny średni wyznaczenia każdej z wielkości wpływającej na wynik pomiaru.

Przy spełnieniu warunków podanych wyżej uchyb ΔP_{Cu2} będzie zawarty w granicach

$$\Delta P_{Cu2} \% = \pm (2 \div 3) \%.$$

Wyznaczenie poślizgu s_0 , odpowiadającego pomierzonej wartości P_{Cu2} , obarczone będzie uchybem tej samej wielkości, natomiast wyznaczenie nagrzania wirnika będzie obarczone błędem nieco większym, ponieważ na dokładność pomiaru ϑ_c ma wpływ również dokładność wyznaczenia poślizgu s_c w stanie nagrzany.

Z powyższych wywodów widać, że występujące tu uchyby pomiarowe nie przekraczają wartości dopuszczalnych przez PN/E przy wyznaczaniu sprawności (co wiąże się z P_{Cu2}), poślizgu i nagrzania.

Politechnika Wrocławska

Katedra Maszyn Elektrycznych — Katedra Pomiarów Elektrycznych

WYKAZ LITERATURY

1. Richter R.: Elektrische Maschinen, Bd I und IV. J. Springer, Berlin 1950.
2. Andrzejewski F., Orzeszkowski Zb.: Wyznaczanie temperatury wirników maszyn asynchronicznych z pomiarów poślizgu. — Archiwum Elektrotechniki, zeszyt 2, 1959.
3. Przeździecki F.: Wyznaczanie zmienności parametrów silników asynchronicznych klatkowych. — Wiad. Techn.-Ekonom. M-5, nr 3, 1959.

Ф. АНДЖЕЕВСКИ, З. ОЖЕШКОВСКИ

НОВЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОТЕРЬ В ОБМОТКАХ РОТОРОВ АСИНХРОННЫХ МАШИН

Резюме

В статье изложен метод определения потерь в обмотках роторов асинхронных двигателей путём измерения мощности короткого замыкания при переменной частоте питания.

Существующие потери в обмотках роторов можно определить расчетным путём, взять из графика скольжения или получить из значения скольжения найденного экспериментально во время испытания нагруженного двигателя.

В первом случае точность определения потерь: невелика, во второй необходимо нагрузить двигатель номинальной мощностью, что, в случае больших мощностей, требует применения дорогих и крупных тормозящих устройств, а кроме того приводит к большим затратам энергии; следует также отметить, что и само измерение очень трудно.

Разработанный авторами метод требует лишь измерения потерь на неподвижном двигателе при использовании токов значительно меньше чем номинальные. В связи с этим предлагаемый метод является простым, практически не использует больших мощностей и не требует специальных вспомогательных устройств.

Принцип измерения заключается в том, что, при неподвижном роторе двигателя, определяется мощность короткого замыкания P_z в качестве функции тока статора I_{1z} при переменной частоте питания $f = \text{var}$. Такие зависимости представлены на рис. 1. Самое низкое значение частоты, какое можно ещё измерить, составляет $f \approx 5$ Hz. Измерение проводится при малом токе, составляющем несколько процентов от величины номинального тока. Мощность

короткого замыкания является тогда незначительной, а испытуемый двигатель не нагревается во время испытания, кроме того можно применить питающий генератор малой мощности и с небольшим напряжением. Использование при измерениях потерь малых токов позволяет применить непосредственную измерительную систему, так как трансформаторы тока при низких частотах имеют большие погрешности.

Приведенные на рис. 1 зависимости определяют мощность короткого замыкания как функцию частоты $P_z = \varphi(f)$ при постоянной величине тока $I_{1z} = \text{const}$. Получена таким образом величина мощности P_z пересчитывается на номинальную мощность P_{zn} , соответствующую номинальной мощности ротора, на основании формулы (1). Ток статора I_{1zn} должен иметь такое значение, чтобы, при коротком замыкании, в обмотках находился ток соответствующий номинальному. Зависимость (1) представлена на рис. 2. Экстраполируя часть кривой $P_{zn} = \varphi(f)$ от $f \approx 5 \text{ Hz}$ до $f = 0$, то есть до пересечения с осью координат, получает полные потери в обмотках двигателя по формуле (2); отнимая потери в обмотках статора, потери в обмотках ротора можно определить по формуле (3).

Так как измерение проводится при малом токе, принято, что обмотка не нагревается и потери P_{Cu2} определены при температуре окружающей среды. Пересчет потерь для различных температур можно осуществить с помощью формулы (4).

В пункте 3.1 рассмотрено влияние индуктивных сопротивлений X'_2 и X_0 на значение сопротивления ротора R'_{2p} , которым определяется величина мощности короткого замыкания при постоянном значении тока I_{1z} . Влияние этих индуктивных сопротивлений выражается членом $\left(1 + \frac{X'_2}{X_0}\right)^2$. На основании численных данных для крупных асинхронных двигателей вычислено значение вышеуказанного члена при различных частотах.

В пункте 3.2 определено ток статора I_{1z} при соблюдении номинального тока ротора $I_{2n} = \text{const}$. В результате анализа было получено, что, при коротком замыкании (в условиях измерения), ток статора равен току ротора полученному из формулы (10).

В пункте 3.3 построено кривую из которой экстраполированием получаем функцию $P_z = \varphi(f)$ до $f = 0$. Эта кривая представляет собой параболу, форм. (12).

В пункте 4 определены скольжение при произвольной нагрузке, а также температуры; эти два параметра связаны с потерями в обмотках ротора.

В пункте 5 приведены результаты измерений и расчетов, пояснены двумя расчетными примерами.

В пункте 6 приведен анализ точности, из которого следует, что погрешности измерений находятся в пределах $\pm (2 \div 3)\%$.

F. ANDRZEJEWSKI, ZB. ORZESZKOWSKI

NEUE MESSMETHODE ZUR BESTIMMUNG DER ROTORSTROMWÄRMEVERLUSTE VON DREHSTROMMOTOREN

Inhaltsangabe

Im Artikel ist eine Messmethode angegeben, welche die Bestimmung der Rotorstromwärmeverluste durch Kurzschlussversuch bei variabler Periodenzahl ermöglicht.

Zur Zeit bestimmt man die Verluste in Läuferwicklungen auf Grund des Schlupfes der berechnet, auf Grund des Kreisdiagramms bestimmt oder bei Belastung gemessen wird. Im ersten Falle ist die Bestimmung der Schlüpfung ungenau, im zweiten muss die Messung bei Vollbelastung durchgeführt werden, was bei grösseren Maschinen grosse und kostbare Bremseinrichtungen verlangt, grosse Energieverluste veranlasst und schwer auszuführen ist.

Das Prinzip der durch die Verfasser angegebenen Methode beruht auf der Messung der beim Kurzschlussversuch aufgenommenen Leistung P_z als Funktion des Ständerstromes I_{1z} , bei variabler Periodenzahl $f = \text{var.}$ Den Kurvenverlauf zeigt Abb. 1. Die kleinste Messfrequenz, bei der die Messung noch durchführbar ist, beträgt $f = 5$ Hz. Die Statorspannung ist so geregelt, dass der im Ständer fließende Strom etwa einige zehn Prozenten des Nennstromes beträgt. Da die Kurzschlussleistung klein ist erwärmt sich nicht die Maschine während des Versuches und der Hilfsgenerator kann klein sein. Kleiner Messstrom ermöglicht die direkte Leistungsmessung, also ohne Verwendung von Messwandlern, die bei kleiner Periodenzahl grosse Leistungsmessfehler verursachen.

Auf Grund der in Abb. 1 angegebenen Charakteristiken bestimmt man die Kurzschlussleistung als Funktion der Frequenz $P_z = \varphi(f)$ bei konstantem Ständerstrom $I_{1z} = \text{const.}$ Die auf diese Weise erlangten P_z — Grössen sind mit Hilfe von Gl. (1) auf die Verluste P_{zn} umgerechnet. Der Ständerstrom I_{1zn} ist so gross, dass beim Kurzschlussversuch der Nennstrom im Rotor fließt. Den Verlauf der Kurve $P_{zn} = \varphi(f)$ beim $I_{1zn} = \text{const.}$ stellt der Abb. 2 Die Kurve ist von $f = 5$ Hz bis $f = 0$ Hz. extrapoliert. Auf der Ordinatenachse findet man die ganzen Stromwärmeverluste Gl. (2) und wenn man die Ständerkupferverluste abnimmt, bekommt man die Rotorstromwärmeverluste P_{Cu2} Gl. (3).

Da die Messung bei kleinem Strom durchgeführt ist, erwärmt sich die Maschine nicht, so dass die Verluste P_{Cu2} der Umgebungstemperatur entsprechen; die Umrechnung auf die verlangte Temperatur erfolgt mit Hilfe von Gl. (4).

Im Abschnitt 3.1. ist der Einfluss der Reaktanzen X'_2 und X_0 auf die Genauigkeit der Messung des Rotorstromwiderstandes R'_{2p} besprochen; beim $I_{1z} = \text{const.}$ ist R'_2 der Kurzschlussleistung proportional. Der Einfluss von diesen induktiven Widerständen stellt sich in Form $\left(1 + \frac{X'_2}{X_0}\right)^2$ dar. Auf Grund von technischen Daten der grossen Asynchronmotoren sind die Grössen dieses Gliedes bei verschiedener Periodenzahl bestimmt.

Im Abschnitt 3.2. ist bestimmt der Ständerstrom I_{1zn} beim Einhalten des Nennwertes von Rotorstrom $I'_{2n} = \text{const.}$ Die Analyse zeigt, dass der Ständerstrom während der Messung (Kurzschlussversuch) dem reduzierten Rotorstrom gleich ist. Gl. (10).

Im Abschnitt 3.3. ist die Kurve bestimmt, nach welcher man die Extrapolation der Funktion $P_z = \varphi(f)$ bis $f = 0$ Hz. durchführen muss. Diese Kurve stellt eine Parabel dar. Gl. (12).

Im Abschnitt 4. ist der Schlupf und die Rotortemperatur bei beliebiger Belastung bestimmt; beide Parameter stehen mit den Rotorstromwärmeverlusten in Zusammenhang.

Im Abschnitt 5. sind die Mess- und Berechnungsergebnisse angegeben.

Die Analyse der Messgenauigkeit im Abschnitt 6. ergab, dass der wahrscheinliche Fehler ungefähr $\pm (2 \div 3)\%$ beträgt.

621.317.333.8

WŁADYSŁAW KUŹNIAR

Nowy przyrząd elektroniczny do pomiaru uderów

Rękopis dostarczono 30.10.1959

Metoda pomiaru opiera się na odwróconej zasadzie spektrografu mas. Strumień elektronów, przyspieszony mierzonym napięciem, odchyła się w poprzecznym polu magnetycznym lub elektrycznym i z odchylenia wnioskuje się o napięciu przyspieszającym. Możliwe są różne warianty metody. Jeden z nich, odchylenie magnetyczne i pomiar odchylenia na poprzecznym ekranie fluoryzującym, wypróbowano doświadczalnie. Inne omówiono teoretycznie. Przeanalizowano właściwości metody i przyczyny uchybów pomiaru. Prototyp przyrządu pomiarowego wyzyskuje lampę oscyloskopową 13 ŁM 31 i pozwala na pomiar napięć uderowych do 20 kV. Dokładność pomiaru napięcia statycznego zależy od cechowania i daje się sprowadzić do około 0,5%. Pomiaru bardzo krótkich uderów o czasie połówkowym rzędu 0,2 μ s wykazały rozrzut do około 6%, ale uchyby średnie σ nie przekroczyły 3% dla pojedynczych uderów. Przy powtórzeniu 2 ... 3 uderów na jeden pomiar można osiągnąć znacznie lepszą dokładność. Przyrząd posiada dość dużą oporność (kilka M Ω) i małą pojemność (50 pF) i nadaje się do masowych, szybkich pomiarów w badaniach modelowych przepięć w urządzeniach elektrycznych.

1. WSTĘP

Badania udarowe wymagają dokładnych pomiarów wartości szczytowej oraz parametrów czasowych uderów pełnych i uciętych, powtarzalnych i jednorazowych. Często są pożądane pomiary najwyższych napięć, rzędu kilkuset czy kilku tysięcy kilowoltów, a czasem pomiary napięć stosunkowo niskich, ale między punktami znajdującymi się na wysokim napięciu względem ziemi. Pomiar powinien być oczywiście łatwy i szybki ze względu na bieżącą kontrolę prowadzonych prób. Są to wymagania trudne i nie ma obecnie przyrządu, który spełniałby je całkowicie.

Największe możliwości daje oscylograf elektroniczny szybkopiszący. Do ujemnych stron oscylografu [1] należy stosunkowo długi czas między pomiarem a odczytaniem wyniku, spowodowany koniecznością rejestra-

cji fotograficznej, niezbyt wielka dokładność, a ponadto dość skomplikowana budowa. Są przykłady ograniczenia uchybów poniżej 1% [1.2] przez użycie oscylografu jako przyrządu zerowego przy kompensacji uderów napięciem stałym. Pomiaru takie są jednak bardzo kłopotliwe, wymagają wielokrotnego powtarzania uderów i nie nadają się do szerszego stosowania w codziennej praktyce laboratoryjnej. Ograniczenie dokładności oscylografu wynika między innymi ze współpracy z dzielnikiem napięcia. Próbowano uniknąć dzielnika przez dostosowanie oscylografu do bezpośredniego pomiaru wysokich napięć. Dawniejsze konstrukcje [1.10] nie nadają się jednak do napięć niższych, a nowsze [1.6] mają po prostu dzielnik wbudowany w rurę oscylografu, co wcale nie zapewnia większej dokładności.

Do pomiaru wartości szczytowej napięcia, gdy kształt uderu jest znany, stosuje się często iskiernik kulowy. Pomiar iskiernikiem jest jednak nie tylko mało dokładny [1.2], [2], ale również bardzo czasochłonny (zasada 50% przy wolno powtarzanych uderach). Dla uderów jednorazowych iskiernik nie nadaje się w ogóle.

Od dawna znane w różnych odmianach [3] metody prostownikowo-kondensatorowe pozwalają na pomiar wartości szczytowej pojedynczych uderów. Pomiaru są łatwe i szybkie, ale uchyby ocenia się na kilka procent dla uderów pełnych, a dla uderów uciętych nawet na kilkanaście procent. Układy te wymagają zwykle dzielnika napięcia.

Szereg rozwiązań z układami lamp radiowych [4] opracowano głównie dla potrzeb miernictwa radiotechnicznego, z reguły dla niskich napięć i znacznych częstotliwości powtarzania impulsów.

Z powyższego pobieżnego przeglądu wynika, że problem dokładnych i wygodnych w użyciu przyrządów pomiarowych w technice uderowej jest jeszcze otwarty. Coraz częściej rezygnuje się z uniwersalności oscylografu na korzyść łatwych i szybkich pomiarów wartości szczytowej uderów. Praca niniejsza przedstawia nową metodę pomiaru napięć szczytowych, którą można stosować również do oscylografowania uderów, a także do napięć statycznych. W pracy ograniczono się do zbadania prototypu przyrządu na stosunkowo niewysokie napięcie, do kilkunastu kilowoltów, i wyłącznie do pomiaru napięcia maksymalnego. Inne możliwości metody omówiono tylko teoretycznie, bez prób laboratoryjnych.

2. ZASADA DZIAŁANIA

Opracowana metoda opiera się na działaniu spektrografu mas. W spektrografie pomiar prędkości cząsteczek rozpędzonych znanym napięciem służy do określenia masy i ładunku tych cząsteczek. Odwrotnie, znając masę i ładunek elektronów, można z ich prędkości obliczyć napięcie przy-

spieszające. Dla określenia wartości szczytowej uderu trzeba zmierzyć największą prędkość elektronów.

Spośród kilku różnych sposobów stosowanych w spektrografach [5] najwygodniejszy i najwłaściwszy wydaje się sposób polegający na wprowadzeniu strumienia elektronów do poprzecznego pola magnetycznego lub elektrycznego. Strumień ulega w tym polu ugięciu i rozszczepieniu, które zależą od prędkości i masy cząsteczek. Pomiar ugięcia można wykonać na ekranie fluoryzującym albo też przez zbieranie cząsteczek w specjalnych kolektorach [5.3], [8], [9]. Układ z kolektorami pozwala zastosować sygnalizację (np. optyczną) wskazującą graniczny kolektor trafiony przez najszybsze elektrony, przy czym sygnały można łatwo zatrzymać na dłuższy okres czasu i nie trzeba się spieszyć z ich odczytaniem. Mankamentem takiego układu jest podział na skończoną, niezbyt wielką liczbę przedziałów napięciowych o szerokości zależnej od kolektorów oraz skomplikowana budowa. Zapis na ekranie fluoryzującym daje pomiar ciągły, bez podziału na stopnie określonej szerokości, wymaga jednak bardzo szybkiego odczytania w czasie poświaty ekranu lub też rejestracji fotograficznej, która uniemożliwia natychmiastową kontrolę wyników. Radykalnej poprawy w tym względzie można się spodziewać po zastosowaniu ekranów z bardzo długą poświatą lub z „pamięcią elektrostatyczną”. Opisy w literaturze [6] świadczą o stosunkowo prostym sposobie uzyskania ekranów, zatrzymujących zapis na okres wielu minut. Odpada wtedy konieczność (choć pozostaje możliwość) rejestracji fotograficznej, a jednocześnie unika się uchybów spowodowanych pośpieszonym pomiarem w czasie krótkotrwałej poświaty zwykłego ekranu fluoryzującego. Niestety ekrany tego typu są jeszcze trudno dostępne.

Określanie prędkości cząsteczek w spektrografach dokonuje się również przez pomiar czasu przelotu tych cząsteczek przez znaną drogę. Jedną z tych metod [7] stosowana była do dokładnego (0,1%) wyznaczenia napięcia początkowego kilku reakcji jądrowych. Nadaje się ona również do pomiaru szczytowego napięcia uderowego, ale tylko dla uderów powtarzanych, gdyż jest to metoda zerowa, polegająca na „odfiltrowaniu” najszybszych cząsteczek.

Jeszcze inna metoda, stosowana przez Trillata i Barrauda [8] do pomiaru napięć statycznych, polega na określeniu prędkości elektronów z kąta ich ugięcia w siatce krystalicznej. Metoda ta mogłaby być użyta również do uderów, ale wymaga rejestracji fotograficznej i nie rokuje nadziei na łatwe i szybkie określanie napięcia.

Trudności w uzyskaniu lub zbudowaniu we własnym zakresie specjalnych układów opisanych w literaturze spowodowały, że zbadano projektowaną metodę na zwykłej lampie oscyloskopowej. Była to radziecka

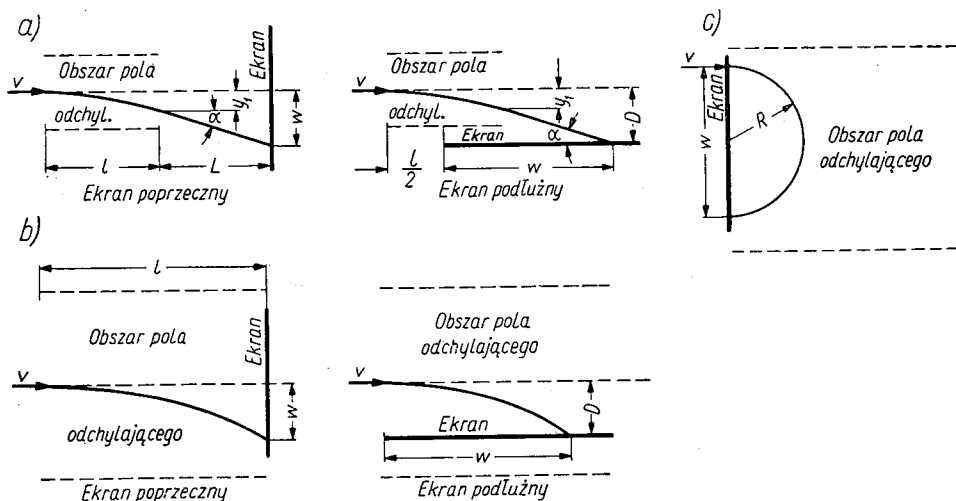
lampa radarowa 13ŁM31 o znamionowym napięciu przyspieszającym 4 ... 7,7 kV, z ekranem o długiej poświacie, o odchyłaniu i ogniskowaniu magnetycznym. Praktyczna możliwość uzyskania takiej a nie innej lampy zdecydowała w głównej mierze o zakresie przeprowadzonych prób laboratoryjnych. Mimo tych ograniczeń rozważania teoretyczne przeprowadzono dalej również dla innych układów odchyłowych w celu porównania ich zalet i wad.

Odchyłanie magnetyczne strumienia elektronów i pomiar wprost na ekranie fluoryzującym stosowali do napięć statycznych W. Ehrenberg i H. Hirsch [9]. Uzyskali oni bez specjalnych zabiegów dokładność około 3% dla napięcia stałego a nieco gorszą dla napięcia zmiennego. Projektując użycie tej metody do napięć udarowych spodziewano się uzyskać podobną dokładność mimo trudności związanych z krótkim czasem udarów, a to głównie przez staranne zmniejszenie uchybów przy napięciu statycznym.

3. ZALEŻNOŚCI DLA RÓŻNYCH UKŁADÓW ODCHYŁOWYCH

3.1. Założenia i zależności podstawowe

Rozważana zasada pomiaru polega na przyspieszeniu strumienia elektronów mierzonym napięciem, odchyleniu strumienia poprzecznym polem i odczytaniu na fluoryzującym ekranie wychyleń odpowiadającego



Rys. 1. Schematy omawianych układów odchyłowych

- a) Ekran poza polem odchylającym, b) Ekran wewnątrz pola odchylającego, c) Odchyłanie magnetyczne o kąt 180°

najwyższym elektronom. Dla określenia napięcia ze zmierzonego odchylenia potrzebna jest znajomość zależności funkcyjnej tych dwu wielkości. Wpływa na nią rodzaj pola odchyłającego, a także usytuowanie ekranu względem tego pola oraz względem osi optycznej przyrządu. W związku z tym wzięto w rachubę następujące warianty: a) odchyłanie magnetyczne, b) odchyłanie elektrostatyczne, a w każdym z nich 1) ekran podłużny — równoległy do osi optycznej lampy, 2) ekran poprzeczny — prostopadły do osi. Te cztery kombinacje podwojono jeszcze zakładając umieszczenie ekranu wewnątrz pola odchyłającego lub też poza nim. Oprócz tego w grę wchodzi jeszcze przypadek odchyłania magnetycznego o 180° stosowany dość często w spektrografach. Analogiczny do niego przypadek odchyłania elektrostatycznego o 90° , opisany przez G. A. Harrowera [5.4] w zastosowaniu do spektrografu, nie nadaje się raczej do pomiaru wysokich napięć, gdyż wymaga napięcia odchyłającego, równego około 0,6 napięcia mierzonego.

Tablica 1

Zestawienie zależności teoretycznych dla różnych układów odchyłowych

E k r a n		O d c h y ł a n i e	
		m a g n e t y c z n e	e l e k t r o s t a t y c z n e
Poza polem odchyłającym	Poprzeczny	$w = 1 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + L \operatorname{tg} \alpha \approx F_m H l \left(\frac{1}{2} + L \right)$	$w = F_e K l \left(\frac{1}{2} + L \right)$
	Podłużny	$w = \frac{1}{2} + \left(D - l \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \approx \frac{D}{F_m H l}$	$w = \frac{D}{F_e K l}$
W polu odchyłającym	Poprzeczny	$w = 1 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \approx \frac{1}{2} F_m H l^2$	$w = \frac{1}{2} F_e K l^2$
	Podłużny	$w = \sqrt{D \left(\frac{2}{F_m H} - D \right)} \approx \sqrt{\frac{2D}{F_m H}}$	$w = \sqrt{\frac{2D}{F_e K}}$
	Odchyłanie o kąt 180°	$w = \frac{2}{F_m H}$	
Jednostki: cm, A/cm, kV/cm, 1/A, 1/kV, kV, cm/s		$F_m = \frac{4\pi ac}{\sqrt{aU(1+aU)}} 10^{-12}$ $\sin \alpha = F_m H l$	$F_e = \frac{1+2aU}{U(1+aU)}$

Schematy omawianych układów odchyłowych podaje rys. 1, a zależności matematyczne dla nich — tablica 1. Użyto tu następujących symboli:

w — wychylenie strumienia na ekranie, cm,

l — długość obszaru działania pola odchyłającego, cm,

L — odległość ekranu poprzecznego od końca obszaru pola odchyłającego, cm,

D — odległość ekranu podłużnego od osi optycznej lampy, cm,

a — kąt odchylenia strumienia przy końcu pola odchyłającego,

H — natężenie magnetycznego pola odchyłającego, A/cm,

K — natężenie elektrycznego pola odchyłającego, kV/cm,

$$F_m = \frac{4 \pi a c}{\sqrt{a U (1 + a U)}} 10^{-12} = \frac{3,682 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{a U (1 + a U)}} \quad [1/A] \quad (1)$$

funkcja napięcia przy odchyłaniu magnetycznym,

$$F_e = \frac{1 + 2 a U}{2 U (1 + a U)} \quad [1/kV] \quad (2)$$

funkcja napięcia przy odchyłaniu elektrostatycznym,

$$a = \frac{q \cdot 10^{10}}{2 m_0 c^2} = 9,7846 \cdot 10^{-4} \quad [1/kV], \quad (3)$$

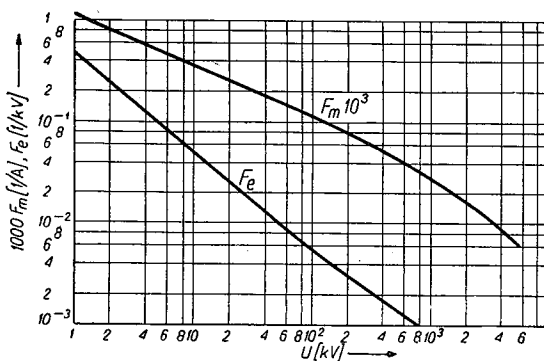
q — ładunek elektronu, As,

m_0 — masa spoczynkowa elektronu, g,

c — prędkość światła, cm/s,

U — napięcie przyspieszające, kV.

Wartości funkcji $F_m(U)$ i $F_e(U)$ podaje rys. 2.



Rys. 2. Wartości funkcji $F_e(U)$ i $1000 F_m(U)$.

Przy wyprowadzaniu zależności liczone się z pomiarem wysokich napięć bez pośrednictwa dzielnika, a zatem z dużymi prędkościami elektronów, porównywalnymi z prędkością światła. W związku z tym, uwzględniono zmianę masy elektronów z prędkością, a pominięto początkową, termiczną prędkość elektronów emitowanych z żarzonej katody. Z równania energii:

$$q U = (m - m_0) c^2 \quad (4)$$

wynika prędkość elektronu:

$$v = \frac{2c}{1 + 2aU} \sqrt{aU(1 + aU)} \quad [\text{cm/s}] \quad (5)$$

oraz jego masa:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0(1 + 2aU) \quad [\text{g}] \quad (6)$$

Do obliczeń wychylenia w przyjęto szereg założeń upraszczających:

1) Strumień elektronów jest skupiony na osi optycznej lampy, posiada stałą prędkość v w kierunku tej osi i wchodzi w pole odchylające ściśle prostopadłe do kierunku jego natężenia. Pominięto więc zbieżność strumienia wywołaną ogniskowaniem oraz jego wymiary poprzeczne.

2) Pole odchylające ma stałe natężenie i nie wychodzi poza przyjęty obszar działania (rys. 1). Pominięto więc pole rozproszone, które w każdym konkretnym przyrządzie niewątpliwie istnieje mimo ekranowania i mimo odpowiedniego ukształtowania cewek względnie elektrod wytwarzających to pole.

3) Pominięto dodatkową zmianę masy elektronu, spowodowaną przez działanie elektrycznego pola odchylającego. Uproszczenie to jest usprawiedliwione tym, że napięcie odchylające jest małe w porównaniu z mierzonym i działa pod kątem prostym do niego, a więc daje tylko bardzo mały przyrost prędkości wypadkowej elektronu.

W oparciu o te założenia przyjęto, że w polu magnetycznym elektron porusza się po łuku koła o promieniu:

$$R = \frac{mv}{q\mu_0 H} = \frac{1}{F_m H} \quad [\text{cm}], \quad (7)$$

a w polu elektrycznym po paraboli:

$$x = vt, \quad y = \frac{qK}{m} \cdot \frac{t^2}{2} \quad [\text{cm}] \quad (8)$$

oraz że poza przyjętym obszarem pola porusza się po linii prostej. Stąd uzyskano zależności dla wychylenia w podane w tablicy 1, przy czym dla odchylenia magnetycznego podano je w dwóch postaciach, dokładnej i przybliżonej. Przybliżenia oparte na dodatkowym założeniu, że kąt odchylenia jest niewielki i że wobec tego

$$\operatorname{tg} a \approx \sin a \approx a, \quad (9)$$

pozwoliły ujednolicić zależności dla obu rodzajów pola odchylającego. W rezultacie, oznaczając ogólnie funkcję napięcia F_m lub F_e przez F oraz

natężenie pola odchylającego H lub K przez N , można wszystkie te zależności przedstawić jednym wzorem:

$$w = A (F N)^k, \quad (10)$$

w którym:

$k = 1$ dla ekranu poprzecznego,

$k = -1/2$ dla ekranu podłużnego wewnątrz pola odchylającego,

$k = -1$ dla ekranu podłużnego poza polem odchylającym i dla odchylenia magnetycznego o 180° ,

A — współczynnik stały.

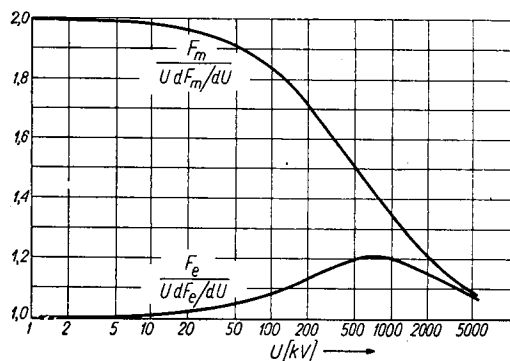
Różniczkując wyrażenie (10) otrzymuje się:

$$\frac{dw}{kw} = \frac{dF}{F} + \frac{dN}{N}. \quad (11)$$

Uwzględniając zaś, że F jest funkcją U , zamieniając różniczki na różnice oraz biorąc wartości bezwzględne, otrzymuje się wyrażenie dla uchybu granicznego:

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{F}{U dF/dU} \left(\frac{\Delta w}{kw} + \frac{\Delta N}{N} \right). \quad (12)$$

Widać stąd, że w przypadku ekranu podłużnego umieszczonego wewnątrz pola odchylającego, to jest przy $|k| = 1/2$, uchyb pomiaru wychy-



Rys. 3. Wartości funkcji określonych zależnościami (13) i (14)

lenia $\frac{\Delta w}{w}$ ma dwa razy większy wpływ na dokładność niż we wszystkich innych przypadkach, gdy $|k| = 1$. Przemawia to oczywiście na niekorzyść tego układu.

Dość istotne wnioski wyciąga się badając współczynnik znajdujący się przed nawiasem w wyrażeniu (12). Mianowicie dla odchyłania magnetycznego współczynnik ten przyjmuje postać:

$$\frac{F_m}{U d F_m / d U} = 2 \frac{1 + a U}{1 + 2 a U}, \quad (13)$$

a wartość jego zmienia się od 2 przy $U = 0$ do 1 przy $U = \infty$ (zob. rys. 3). Dla odchyłania elektrycznego zaś jest:

$$\frac{F_e}{U d F_e / d U} = \frac{1 + 3 a U + 2 a^2 U^2}{1 + 2 a U + 2 a^2 U^2}. \quad (14)$$

Wartości liczbowe tego współczynnika rosną od 1 przy $U = 0$ do 1,21 przy $U = 732$ kV, a następnie znowu maleją do 1 dla $U = \infty$ (rys. 3).

Widać stąd, że przy odchyłaniu elektrostatycznym można się spodziewać około 2 razy mniejszych uchybów. Dopiero przy bardzo wysokich napięciach, rzędu 1000 kV, różnica między obu systemami zanika.

3.2. Ogniskowanie strumienia elektronów

Ostrość plamki na ekranie fluoryzującym jest ważnym czynnikiem wpływającym w znacznym stopniu na dokładność pomiaru. Dobre zogniskowanie strumienia elektronów jest tu trudniejsze niż np. w oscylografie, w którym napięcie przyspieszające jest stałe. Dla zachowania ostrej plamki przy zmieniającym się napięciu potrzebne są soczewki elektrostatyczne zasilane z dzielnika napięciem proporcjonalnym do przyspieszającego. Przy niższych napięciach nie stanowi to zbyt komplikacji, ale przy wysokich dzielnik byłby dość kłopotliwy. Dlatego celowe wydaje się rozpatrzenie możliwości ogniskowania magnetycznego.

Ogniskowa soczewki magnetycznej zależy od prędkości elektronów:

$$f = \frac{4 m^2 v^2}{\mu_0^2 q^2 k} = \frac{2,87 \cdot 10^4}{k} U(1 + a U) \quad [\text{cm}], \quad (15)$$

μ_0 — przenikalność magnetyczna próżni,

$$k = \int_{x_1}^{x_2} H_x^2 dx,$$

H_x — natężenie pola magnetycznego wzdłuż osi X ,

x_1, x_2 — granice działania pola,

pozostałe symbole mają znaczenia podane poprzednio.

Napięcie trzeba zatem podzielić na kilka zakresów i w każdym z nich dopasować ogniskowanie do jednej tylko, pośredniej wartości, godząc się z nieco gorszym ogniskowaniem przy innych napięciach w tym za-

kresie. Szerokość zakresów zależy głównie od dwóch czynników: od umieszczenia ekranu i od wysokości napięcia. Na ekranie podłużnym (rys. 1) odległość między plamką a soczewką rośnie w miarę wzrostu napięcia. Na przykład przy odchyłaniu elektrostatycznym (zob. tablica 1):

$$w = \frac{D}{F_e Kl} = \text{const} \frac{U(1 + aU)}{1 + 2aU} \quad (16)$$

wychylenie, a więc i odległość plamki na ekranie od soczewki rośnie tylko trochę wolniej niż ogniskowa (15). Natomiast na ekranie poprzecznym przy wzroście napięcia plamka zbliża się od osi optycznej, a więc maleje jej odległość od soczewki. Na tej podstawie można się spodziewać, że w przypadku ekranu podłużnego dopuszczalne są szersze zakresy pomiarowe.

Na wielkość plamki na ekranie wpływa też kąt, pod którym strumień pada na ekran. Im mniejszy jest ten kąt, tym bardziej rozmytą plamkę daje nawet dobrze zogniskowany strumień. Pod tym względem przewagę mają ekrany poprzeczne (rys. 1), przy których łatwiej jest o zachowanie większych kątów. Z grubym przybliżeniem można wyprowadzić następujące, orientacyjne zależności dla szerokości plamki:

na ekranie poprzecznym:

$$\Delta w = d \left(1 - \frac{L + l/2}{f \cos \alpha} \right), \quad (17)$$

a na ekranie podłużnym

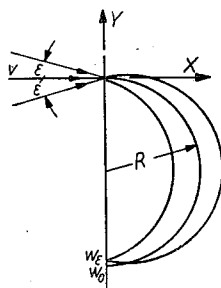
$$\Delta w = \frac{d}{\text{tg } \alpha} \left(1 - \frac{D}{f \sin \alpha} \right). \quad (18)$$

Literą d oznaczono tu średnicę strumienia na wejściu do soczewki. Z zależności tych wynika, że w przypadku ekranu podłużnego szerokość plamki rośnie nieograniczenie przy wzroście napięcia (maleje $\text{tg } \alpha$, rośnie f). Natomiast w przypadku ekranu poprzecznego szerokość plamki wprawdzie też rośnie, lecz do wartości skończonej, równej d . Ta okoliczność wyrównuje mniej więcej wady i zalety obu typów ekranów i powoduje, że trudno jest stwierdzić na drodze wyłącznie teoretycznej zdecydowaną przewagę jednego czy drugiego ekranu.

Wpływ wysokości napięcia na dopuszczalną szerokość zakresu pomiarowego polega na tym, że przy wyższym napięciu zachodzi silniejsze przyciąganie się wzajemne „nitek prądu” [10], co kompensuje w pewnym stopniu elektrostatyczne odpychanie się elektronów i ułatwia zogniskowanie. W zbudowanym przyrządzie pomiarowym stwierdzono doświadczalnie, że już przy około 10 kV nawet dość znaczne zmiany napięcia nie powodują poważnego rozmycia plamki. Dokładny dobór prądu w cewce

ogniskującej nie jest już tak ważny, jak przy niższym napięciu przyspieszającym. Prawdopodobnie więc w przyrządach przeznaczonych do niższych napięć korzystniejsze byłyby soczewki elektrostatyczne zasilane z odpowiedniego dzielnika (sterowane samoczynnie), natomiast w przyrządach na wyższe napięcia można z powodzeniem stosować soczewki magnetyczne z dość grubą regulacją prądu w cewkach. Jedynie w przypadku stosowania przyrządu do oscylografowania uderów (rozd. 4) celowe byłoby użycie sterowanych soczewek elektrostatycznych nawet dla wyższych napięć, ze względu na zachowanie ostrego zapisu w ciągu całego uderu, a nie tylko w pobliżu szczytu.

Specjalne własności, jeśli chodzi o ogniskowanie, ma przypadek odchyłania magnetycznego o kąt 180° . Mianowicie pole odchyłające powoduje tu pewnego rodzaju dodatkowe ogniskowanie, które zmniejsza szerokość plamki w kierunku mierzonego wychylenia w (rys. 4). Elektro-



Rys. 4. Dodatkowe ogniskowanie przy odchyłaniu magnetycznym o 180°

ny, które wchodzi w pole odchyłające w jednym punkcie i tworzą z osią X jednakowe kąty $\pm \epsilon$ w płaszczyźnie X, Y , schodzą się na ekranie znowu w jednym punkcie. Dla różnych kątów punkty te są różne (rys. 4), ale przy niewielkich wartościach ϵ różnica jest bardzo mała:

$$w_0 - w_e = 2R(1 - \cos \epsilon) \approx R\epsilon^2. \quad (19)$$

Oczywiście elektrony biegnące w innych płaszczyznach, przechodzących przez oś Y , ale nie prostopadłych do wektora H (do osi Z), zataczają łuki o mniejszych promieniach R odpowiednio do mniejszej prędkości składowej prostopadłej do H , a zarazem otrzymują dodatkowe przesunięcie wzdłuż osi Z (prostopadle do rys. 4). To działanie pola poprawia ostrość plamki i ułatwia pomiar w . Dodatkową zaletą jest fakt, że strumień pada na ekran niemal prostopadle. W rezultacie układ taki rokuje najlepsze perspektywy na dokładność pomiarów, co znajduje potwierdzenie w literaturze dotyczącej spektrografów [5], jak też w pracy M. E. Hainego i M. W. Jervisa [11], w której taki właśnie układ wyzyskano do bardzo dokładnej (0,1 V) stabilizacji wysokiego napięcia (50 kV).

4. INNE WŁASNOŚCI METODY POMIAROWEJ

4.1. Wpływ czasu na pomiar

Czas trwania oraz kształt krzywej udaru wpływają na pomiar wartości szczytowej napięcia w dwojaki sposób. Przede wszystkim od czasu trwania wartości szczytowej zależy ilość energii wydzielona przez strumień na ekranie fluoryzującym, od niej zaś zależy jasność i czas poświaty ekranu. Im krótszy udar, tym trudniej jest pomierzyć wychylenie promienia na ekranie i tym bardziej jest pożądane powtórzenie kilku uderów dla uzyskania dokładnego pomiaru. Dla pomiaru bardzo krótkich i niepowtarzalnych uderów konieczne jest stosowanie rejestracji fotograficznej lub specjalnych ekranów o bardzo długiej poświacie.

Drugi rodzaj wpływu czasu na pomiar może zachodzić w przypadku przebiegów bardzo szybkozmennych, w których może dać się odczuć bezwładność elektronów. Jest to szczególnie prawdopodobne przy pomiarze stosunkowo niskich napięć za pomocą przyrządu przystosowanego do napięć wysokich, który posiada znaczny odstęp między katodą a anodą. Jeżeli czas przelotu elektronu od katody do anody jest porównywalny z czasem zmiany napięcia mierzonego, to prędkość końcowa elektronu nie odpowiada wartości chwilowej napięcia, lecz jakiejś wartości średniej.

W celu zorientowania się w rzędach wielkości, jakie wchodzi tu w rachubę, obliczamy czas przelotu elektronów przy upraszczającym założeniu jednostajnego rozkładu napięcia między katodą a anodą:

$$U_x = \frac{U}{L} x = K \cdot x. \quad (20)$$

Elektron po przebiegnięciu drogi x od katody osiąga według (5) prędkość v_x :

$$v_x = \frac{2c}{1 + 2aKx} \sqrt{aKx(1 + aKx)} = \frac{dx}{dt}, \quad (21)$$

Stąd czas przelotu odcinka x :

$$t_x = \int_0^x \frac{dx}{v_x} = \frac{1}{aKc} \sqrt{aKx(1 + aKx)}. \quad (22)$$

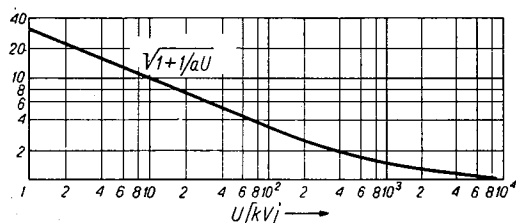
a czas przelotu drogi L od katody do anody:

$$t = \frac{L}{c} \sqrt{1 + 1/aU}. \quad (23)$$

Wartości funkcji $\sqrt{1 + 1/aU}$ dla różnych napięć U podano na wykresie 5.

Na podstawie tych danych łatwo sprawdzić, że przy odległości katoda — anoda $L = 20$ cm (co odpowiada górnej granicy napięcia rzędu 1000 kV),

dla napięcia	$U = 1$	10	100	1000	kV
czas przelotu	$t = 22$	6,6	2,24	0,95	10^{-9} s.



Rys. 5. Wartości funkcji $\sqrt{1 + 1/aU} = f(U)$

Nawet więc przy zupełnie niskich napięciach czas przelotu jest tak mały, że poważniejszych uchybów można oczekiwać jedynie dla bardzo wielkich częstotliwości, rzędu tysięcy megaherców, lub wyjątkowo gwałtownych zmian napięcia uderowego.

4.2. Zastosowanie do oscylografowania uderów

Jak już wspomniano na wstępie, omawiana metoda nadaje się również do oscylografowania uderów. W tym celu zamiast stałego pola odchyłającego należy dać pole wirujące o stałej wartości natężenia. Zależnie od prędkości wirowania pola można uzyskać różne skale czasowe. Na ekranie poprzecznym otrzymuje się oscylogram o współrzędnych biegunowych, zaś na podłużnym, o kształcie rury obejmującej oś optyczną lampy, oscylogram ze współrzędnymi prostokątnymi i z liniową skalą czasu. Można oscylografować zarówno przebiegi krótkotrwałe, jak i długotrwałe przy tej samej skali czasowej, ponieważ oś czasu daje linię zamkniętą. Oczywiście przebieg trwający dłużej niż jeden obrót pola odchyłającego zostaje zapisany kilkakrotnie w tym samym miejscu ekranu.

W porównaniu ze zwykłym oscylografem przyrząd ma dwie dość istotne zalety. Po pierwsze nie wymaga synchronizacji z mierzonym napięciem. Dopóki nie ma napięcia, nie ma plamki na ekranie, bo nie ma w ogóle strumienia elektronów. Po drugie nie potrzeba osobnego źródła wysokiego napięcia przyspieszającego — napięciem przyspieszającym

jest napięcie mierzone. Daje to w rezultacie dość poważne uproszczenie budowy oscylografu.

Oscylograf taki ma też kilka wad w porównaniu ze zwykłym:

a) Brak linii zerowej

Przy zbyt niskim napięciu strumień elektronów nie wychodzi w ogóle poza pole odchylające i nie dociera do ekranu fluoryzującego. Pozostaje więc pewna strefa napięcia na początku i na końcu udaru, nie zapisana na ekranie.

b) Oscylografowanie tylko napięcia jednego znaku

Zapis na ekranie jest możliwy tylko wtedy, gdy anoda przyrządu ma dodatnie napięcie względem katody. Przy oscylografowaniu napięcia zmieniającego znak zostają zapisane tylko części krzywej leżące po jednej stronie linii zerowej.

c) Odształcenie krzywej udaru

Różnice w czasie przelotu elektronów, które wynikają ze zmian napięcia mierzonego, powodują skracanie czoła i wydłużanie grzbietu udaru na oscylogramie. Czasy, które tu wchodzi w rachubę, są nieco dłuższe od rozpatrywanych w rozdz. 4.1, gdyż chodzi o przelot na dłuższej drodze katoda — ekran, zamiast drogi katoda — anoda. Mimo to można przyjąć, że pominiawszy najniższe części krzywej udaru, które i tak nie są odtworzone na oscylogramie, skrócenie czoła lub wydłużenie grzbietu nie będzie większe niż o kilka nanosekund, a więc co najwyżej o kilka dziesiątych procentu dla czoła $1 \mu s$.

d) Zmienna szerokość linii oscylogramu

Zgodnie z rozważaniami w rozdz. 3.2 przy ogniskowaniu magnetycznym szerokość plamki na ekranie zmienia się w zależności od mierzonego napięcia. W związku z tym dobre zogniskowanie strumienia można uzyskać tylko dla pewnej wartości napięcia, poniżej zaś i powyżej plamka ulega coraz silniejszemu rozmyciu. Jak już wspomniano przedtem, można uniknąć tej wady stosując soczewki elektrostatyczne sterowane mierzonym napięciem.

4.3. Plama jonowa

Katoda tlenkowa, stosowana w lampach oscyloskopowych, emituje nie tylko elektrony, ale i pewną ilość jonów, które posiadają znacznie większą masę i w rezultacie są słabiej odchylane niż elektrony. W związku z tym powstaje pytanie, czy świecenie ekranu spowodowane przez strumień jonów nie przeszkodzi w pomiarach.

Dla obliczenia prędkości lub wychylenia strumienia jonów można się posługiwać zależnościami wyprowadzonymi dla elektronów (rozdz. 3),

zmieniając jedynie wartość stałej a . Mianowicie, dla jonów o masie $M_0 = 1837 m_0$ i o ładunku $Q = nq$ otrzymuje się:

$$a_j = \frac{an}{1837} = n \cdot 5,33 \cdot 10^{-7} \quad [1/\text{kV}]. \quad (24)$$

Prędkość jonu przy danym napięciu przyspieszającym wypada więc około $\sqrt{1837/n}$ razy mniejsza, a w to samo miejsce ekranu padają jony przyspieszone napięciem około $1837/n$ razy niższym niż elektrony.

Wynika stąd, że nawet gdyby katoda emitowała taką samą ilość jonów co elektronów, świecenie danego miejsca ekranu byłoby w głównej mierze spowodowane elektronami. Ponieważ zaś emisja jonów jest znacznie słabsza od emisji elektronów (stosunek prądów rzędu 10^{-5} , [10]) nie zachodzi obawa, by strumień jonów mógł wyraźnie utrudniać pomiary. W zbudowanym przyrządzie nie zaobserwowano żadnych śladów plamy jonowej.

4.4. Odczytywanie skali przyrządu

Omawiana metoda nadaje się do pomiaru napięcia zmiennego, stałego lub udarowego zarówno symetrycznego, jak i niesymetrycznego względem ziemi. Wynika stąd, że ekran fluoryzujący, znajdujący się w pobliżu anody, można uziemić tylko przy pomiarze napięcia ujemnego. Odczytywanie wychylenia na ekranie musi więc w wielu przypadkach odbywać się z odległości zabezpieczającej obserwatora od zetknięcia z ekranem. Jest to oczywiście wada metody.

Przy bardzo wysokich napięciach należy umieścić obserwatora w klatce Faradaya na potencjale anody lub odczytywać skalę przyrządu przez lunetę. Zastosowanie lunety jest wskazane również ze względu na uniknięcie paralaksy, która, przy grubej ścianie szklanej lampy, może być przyczyną poważnych uchybów.

5. OPIS WYKONANEGO PRZYRZĄDU

5.1. Zastosowana lampa.

Górna granica mierzonego napięcia

Jak już wspomniano wcześniej, omawianą metodę pomiarową wypróbowano praktycznie na lampie oscyloskopowej 13 ŁM 31. Lampa ta posiada ogniskowanie i odchyłanie magnetyczne, a zatem tylko ten wariant można było zbadać doświadczalnie. Ekran lampy ma przedłużoną poświatę i daje światło jasnozielone, co ułatwia obserwację wzrokową. Znamionowe napięcie przyspieszające według metryki lampy jest 4 ... 7,7 kV.

Spodziewano się, że przy uderzeniach można będzie przykładać do lampy znacznie wyższe napięcia. Stiekolnikow [12] podaje, że stosował napięcia około 9 razy wyższe od znamionowego. Próbowano więc znaleźć w literaturze dane, na podstawie których można by oszacować maksymalne dopuszczalne napięcie uderzeniowe bezpieczne dla lampy. Niestety literatura dotycząca pracy katody tlenkowej w warunkach uderzeniowych [13] zajmuje się prawie wyłącznie problemem uzyskania jak największych prądów emisji, a tylko w bardzo niewielkim stopniu sprawą wytrzymałości napięciowej. Wynika to między innymi z faktu, że na wytrzymałość napięciową wpływają zjawiska prądowe w katodzie, które z kolei zależą od całego szeregu elementarnych czynników, takich jak na przykład skład chemiczny tlenku katody, stopień zanieczyszczenia tego tlenku, a także metalowego rdzenia katody, sposób i dokładność aktywowania emitera, stopień jego zestarzenia, temperatura pracy itp. W rezultacie zjawiska ograniczające maksymalne dopuszczalne napięcie są bardzo skomplikowane i nie ma obecnie teorii, która potrafiłaby je wyczerpująco opisać i pozwoliłaby na wyciągnięcie praktycznych wniosków.

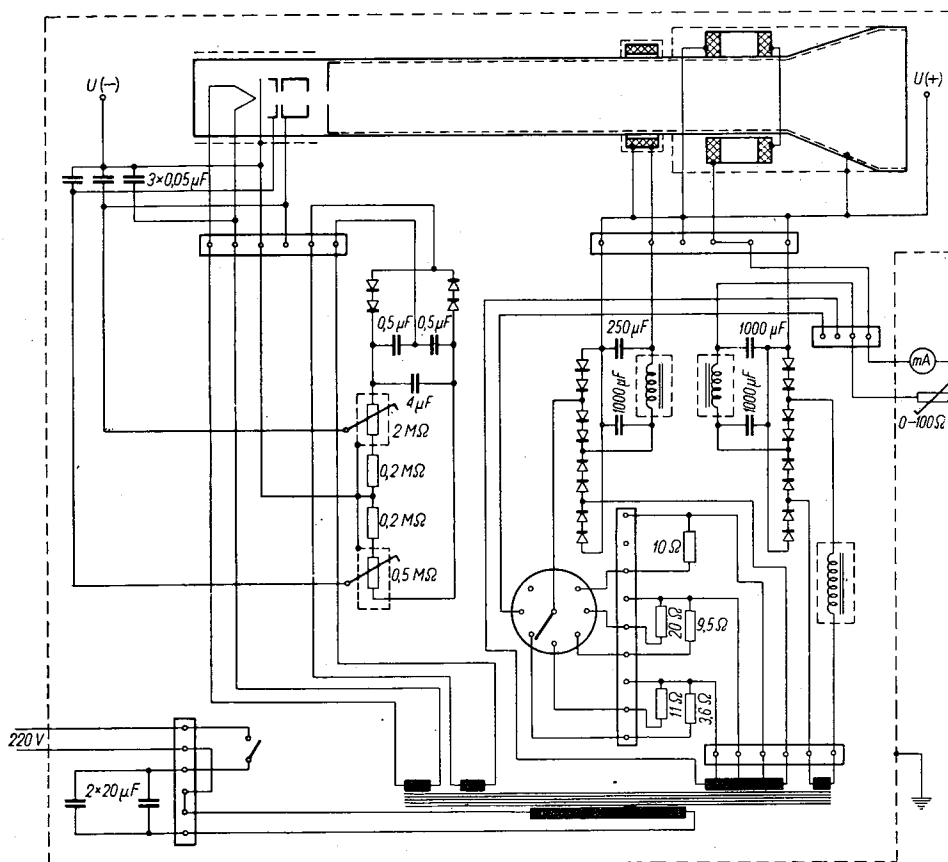
Pozostało zatem jedynie doświadczalne sprawdzenie. Wykonano to przy uderzeniach ujemnych i dodatnich o kształcie zbliżonym do normalnego $1/50 \mu s$. Dla ograniczenia skutków przeskoku w szereg z lampą włączono opornik. Podnosząc stopniowo napięcie uderzeniowe doprowadzono do pojedynczego przeskoku w lampie, który stwierdzono wzrokowo jako rozbłysnięcie całego jej wnętrza. Następnie, po odłączeniu lampy, zmierzono to napięcie iskiernikiem kulowym. Uzyskano w ten sposób 19 kV przy uderzeniu ujemnym na katodzie oraz 18 kV przy uderzeniu dodatnim na anodzie. Obawiając się uszkodzenia lampy nie powtarzano pomiarów, jak również nie sprawdzano wytrzymałości przy napięciu stałym.

W trakcie dalszych prac nad przyrządem doszło jeszcze raz, przypadkowo, do wyładowania w lampie. Zaszło to przy próbie cechowania przyrządu napięciem zmiennym 50 Hz. Przeskok nastąpił wtedy przy napięciu około $6 kV_{max}$. Tak niska wartość napięcia każe przypuszczać, że wyładowanie zaszło w czasie ujemnego półokresu napięcia na anodzie, kiedy zgodnie z teorią [13.4] zanika ujemny ładunek przestrzenny przy katodzie i przestaje chronić katodę przed bezpośrednim działaniem pola anody. To zjawisko w poważnym stopniu ogranicza stosowanie przyrządu do pomiaru napięć zmiennych.

5.2. Układy zasilające

Elektryczne obwody pomocnicze przyrządu dzielą się na dwie grupy (rys. 6). Pierwsza z nich, obejmująca żarzenie katody oraz zasilanie modulatora i pierwszej anody, znajduje się zasadniczo na potencjale katody.

Druga, na potencjale anody, zawiera cewkę ogniskującą i cewkę odchyłającą wraz z ich zasilaniem. Obie te grupy obwodów elektrycznych muszą posiadać izolację zarówno między sobą, jak względem ziemi, przy-



Rys. 6. Schemat elektryczny przyrządu

stosowaną do najwyższego mierzonego napięcia. Wobec stosunkowo niskiego napięcia wytrzymywanego przez lampę (około 18 kV, zob. 5.1) zdecydowano się na zasilanie całości z sieci za pośrednictwem transformatora izolującego. W urządzeniach na wyższe napięcie korzystniejsze byłoby zasilanie z baterii anodowej i akumulatorów, gdyż transformator wypadłby zbyt duży. Zastosowano transformator suchy z izolacją powietrzną. Konstrukcja taka w porównaniu z olejową zwiększa wprowadzie rozproszenie, ale za to zmniejsza pojemność wypadkową przyrządu. Zmniejszenie pojemności było szczególnie pożądane wobec proponowanego zastosowania przyrządu do pomiarów modelowych.

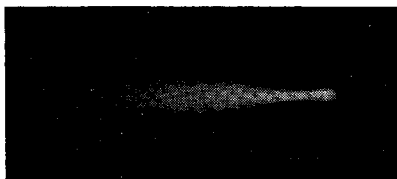
Transformator pełni również rolę stabilizatora napięcia. W tym celu zwymiarowano go tak, by pracował przy znacznym nasyceniu żelaza, a w szereg z uzwojeniem pierwotnym załączono kondensator o dobranej odpowiednio pojemności. Stabilizacja ta zmniejsza wahania wartości skutecznej napięcia odbieranego około 6 ... 7-krotnie w stosunku do wahań napięcia sieci.

Napięcie na modulator i pierwszą anodę podaje się z dwóch potencjometrów połączonych szeregowo i zasilanych z suchych prostowników w układzie prostującym pełnookresowym z podwajaniem napięcia. Duża stała czasowa RC układu zapewnia dobre wygładzenie napięcia wyprostowanego. Po stronie anody są dwa obwody — ogniskowanie i odchyłanie z osobnymi układami prostującymi i wygładzającymi. Oba obwody mają jeden punkt wspólny, połączony z anodą lampy. Prąd w cewce ogniskującej zmienia się przez przełączanie zaczipów transformatora i oporników szeregowych. Prąd w cewce odchyłającej ustawia się za pomocą oporników dekadowych.

W celu zwiększenia dokładności pomiarów obwód cewki odchyłającej otrzymał dodatkową stabilizację prądową. Uzyskano ją przez wprowadzenie cewki z otwartym rdzeniem magnetycznym w szereg z prostownikami po stronie prądu zmiennego. Cewka pracuje na samym początku charakterystyki magnesowania rdzenia, a więc przy wzroście prądu rośnie jej indukcyjność. Łącznie z opisaną wyżej stabilizacją napięciową uzyskano około 30-krotne zmniejszenie wahań prądu w stosunku do wahań napięcia sieci. Zmiana napięcia sieci o 10% powoduje zmianę prądu w cewce odchyłającej o około 0,3%.

5.3. Pomiar wychylenia strumienia na ekranie

Wychylenie strumienia na ekranie przy napięciu stałym najwygodniej jest mierzyć od środka plamki. Przy dobrym zogniskowaniu otrzymuje się małą, okrągłą plamkę, której środek można wyznaczyć łatwo



Rys. 7. Plamka na ekranie przyrządu przy napięciu udarowym

i dostatecznie dokładnie. W przypadku napięcia zmiennego lub udarowego strumień nie daje okrągłej plamki, lecz przesuwają się szybko od krawędzi ekranu do punktu odpowiadającego maksymalnemu napięciu i z po-

wrotem. Na ekranie o długiej poświacie otrzymuje się więc linię (rys. 7) i pomiar możliwy jest tylko względem jej krańca. W związku z tym szczególnie ważne jest dobre zogniskowanie oraz stałość wszystkich czynników, które wpływają na średnicę plamki.

Dążąc do uzyskania możliwie dużej dokładności, do pomiaru wychylenia zastosowano podziałkę milimetrową z noniusem, który daje dziesięte części milimetra. Suwak z noniusem posiada wskazówkę z cienkiego drutu. Dokonując pomiaru przesuwa się najpierw wskazówkę na krawędź plamki, co daje się wykonać stosunkowo szybko, jeszcze w czasie poświaty ekranu. Następnie można już bez pośpiechu odczytać wychylenie na podziałce.

Niebezpieczeństwo paralaksy zmniejszono przez wstawienie lusterka między ekran a wskazówkę noniusza. Przy pomiarze napięcia stałego pozwala to na znaczną dokładność. Pomiar napięcia udarowego obarczony jest oczywiście większymi uchybami ze względu na pośpiech przy ustawianiu wskazówki i jest w rezultacie zależny częściowo nie tylko od czasu poświaty ekranu, ale i od indywidualnych cech obsługującego.

W przyrządzie mierzy się położenie plamki względem umownego punktu zerowego umieszczonego przy lewej krawędzi ekranu. Dzięki temu wyższym napięciom odpowiadają większe wychylenia i odczyt podziałki jest wygodny. Dla mierzonego w ten sposób wychylenia przyjęto oznaczenie s [cm]. Tą wielkością jest najwygodniej posługiwać się w praktyce. Jedynie w rozważaniach teoretycznych operuje się wielkością w (zob. rys. 1), czyli odchyleniem od osi optycznej lampy. Związek między nimi jest prosty:

$$w = s_0 - s. \quad (25)$$

Symbolem s_0 oznaczono odległość między osią optyczną a zerem podziałki milimetrowej.

5.4. Obudowa i ekranowanie przyrządu

Lampa oscyloskopowa wraz z pomocniczymi obwodami jest zmontowana na izolacyjnych płytach z papieru bakelizowanego i zamocowana na konstrukcji z aluminiowego kątownika. Wewnątrz pudła mieści się również transformator zasilający i kondensatory do stabilizacji napięcia. W trakcie próbnych pomiarów potwierdziły się przypuszczenia o konieczności starannego ekranowania lampy. Zastosowano podwójne ekranowanie. Jeden ekran założono na samą lampę, drugi stanowi blaszana obudowa całego aparatu. Zadaniem ich jest osłona od zewnętrznych pól elektrycznych i magnetycznych. Ponadto ekranowano też poszczególne ele-

menty zasilające, umieszczone wewnątrz przyrządu. Szczególnie starannej osłony magnetycznej wymagał transformator zasilający z uwagi na silne pole rozproszone i niewielką odległość od lampy.

Na przedniej ścianie przyrządu znajduje się otwór umożliwiający obserwację ekranu, napęd suwaka do pomiaru wychylenia, przełącznik zakresów pomiarowych, regulacja jasności i wyłącznik zasilania. Umieszczono tu również zacisk uziemiający obudowę, by obsługujący mógł się w każdej chwili przekonać o uziemieniu. Aparat jest przystosowany do ustawiania przy siatce otaczającej pole probiercze. W tylnej ścianie obudowy znajdują się otwory dla prostych przepustów laboratoryjnych z papieru bakelizowanego, które pozwalają na przejście mierzonego napięcia przez oka siatki. Przepusty są dwa — górny do katody, dolny do anody. Przy pomiarach napięcia niesymetrycznego jeden z nich należy połączyć z gniazdkiem wtykowym w obudowie przyrządu w celu uziemienia.

6. CECHOWANIE PRZYRZĄDU

6.1. Problem cechowania napięciem stałym

Zależności matematyczne z tablicy 1 wiążą wychylenie w napięciem przyspieszającym U oraz z wymiarami lampy i natężeniem pola odchyłającego. Wyprowadzając je poczyniono jednak szereg założeń upraszczających (zob. 3.1) i dlatego poleganie na nich bez eksperymentalnego sprawdzenia byłoby ryzykowne. Szczególnie trudno jest ściśle określić rozkład natężeń H pola wytworzonego przez cewkę odchyłającą, a w związku z tym określić wymiary l i L wchodzące do wzorów (por. rys. 1). Dlatego konieczne jest wycechowanie przyrządu.

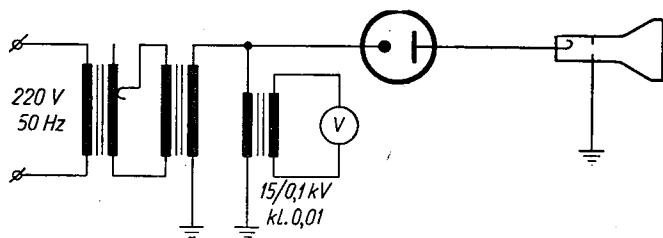
Najwygodniej cechować przyrząd napięciem statycznym, gdyż łatwo mierzy się wtedy dokładnie przyłożone napięcie oraz wychylenie plamki na ekranie. Przeciwnie tej koncepcji wysuwają się jednak pewne zastrzeżenia oparte na literaturze. Chodzi o to, że przynajmniej w przypadku diody z katodą tlenkową, mechanizm emisji elektronów przy napięciu stałym jest nieco inny niż przy napięciu udarowym. Przy napięciu stałym w grę wchodzi prawie wyłącznie emisja z powierzchni katody [13.1], podczas gdy w warunkach krótkotrwałych impulsów w emisji biorą udział również głębsze warstwy tlenku. Powstają przy tym spadki napięcia wewnątrz emitera, które powodują, że elektrony emitowane posiadają niejednakowe prędkości. Loosjes, Vink i Jansen [13.5, 6, 7] stwierdzili różnice energii elektronów sięgające 170 eV przy całkowitym napięciu impulsu rzędu 1000 V. Najszybsze elektrony w ich doświadczeniach

wykazywały energię o około 5 eV mniejszą od wynikającej z pełnego napięcia.

Wydaje się, że układ 4-elektrodowy zastosowanej lampy escyloskopowej przedstawia się znacznie korzystniej od układu 2-elektrodowego, do którego odnoszą się powyższe dane. Dodatkowe, dość znaczne pojemności (rys. 6), włączone między elektrody pomocnicze a katodę, powinny łagodzić przebiegi nieustalone w pobliżu katody i zbliżać je do warunków statycznych. Przypuszczalnie więc w tych warunkach cechowanie przyrządu napięciem stałym jest dopuszczalne. Oczywiście pożądane jest sprawdzenie doświadczalne tego przypuszczenia, o czym będzie jeszcze mowa w dalszych rozdziałach.

6.2. Cechowanie i obliczenie uchybów granicznych

Cechowanie przyrządu wykonano w układzie, którego schemat przedstawia rys. 8. Użycie napięcia pulsującego podyktowane było dążeniem do jak najlepszego upodobnienia warunków pomiaru przy cechowaniu



Rys. 8. Układ cechowania napięciem pulsującym

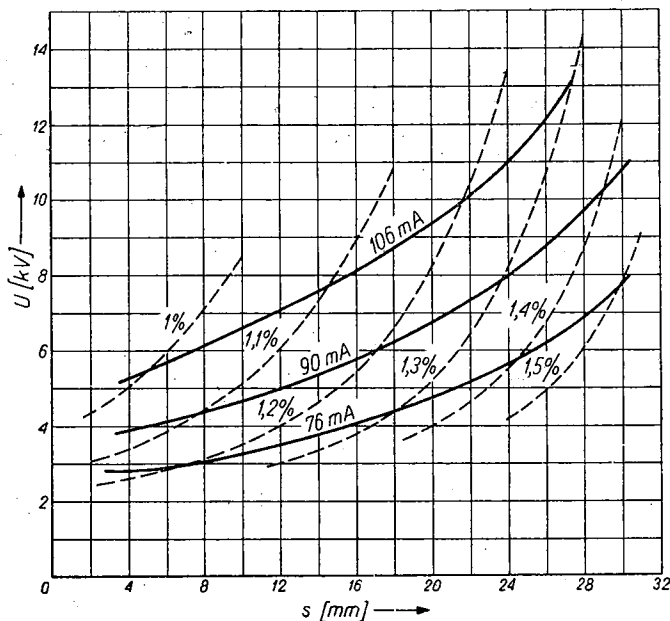
do warunków uderowych. Pomiar napięcia odbywał się przed kenotronem za pomocą transformatora wzorcowego 15/0,1 kV klasy 0,01‰ i woltomierza klasy 0,5‰.

Przed cechowaniem sprawdzono kształt krzywej napięcia zmiennego, aby zmniejszyć uchyby, które mogłyby powstać przy przeliczaniu wskazań woltomierza na wartość szczytową. Dla uzyskania dokładniejszych wyników oscylografowano prąd pojemnościowy, który, jako proporcjonalny do pochodnej napięcia, daje wyraźniejszy wpływ wyższych harmonicznych. Analiza oscylogramu wykazała, że współczynnik szczytu krzywej napięcia można przyjąć $\sqrt{2}$, czyli że praktycznie wpływ wyższych harmonicznych jest pomijalny.

Dla pewności sprawdzono również spadek napięcia w kenotronie. W tym celu wykonano kilka pomiarów porównawczych przed i za keno-

tronem. Nie stwierdzono przy tym mierzalnych różnic, nawet przy najjaśniejszej plamce (przy największym prądzie pobieranym przez przyrząd).

Zdjętą charakterystykę pomiarową $U = f(s)$ przyrządu pokazano na rys. 9. Na tym samym rysunku wykreślono krzywe określające granicz-



Rys. 9. Charakterystyki przyrządu

Linie ciągłe — charakterystyki pomiarowe $U = f(s)$, linie przerywane — uchyby graniczne wg zależności (26)

ne uchyby przyrządu wynikające z tej charakterystyki pomiarowej. Uchyby te obliczono według zależności (12) z uwzględnieniem (13):

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{2(1 + aU)}{1 + 2aU} \left(\frac{\Delta w}{w} + \frac{\Delta i}{i} \right). \quad (26)$$

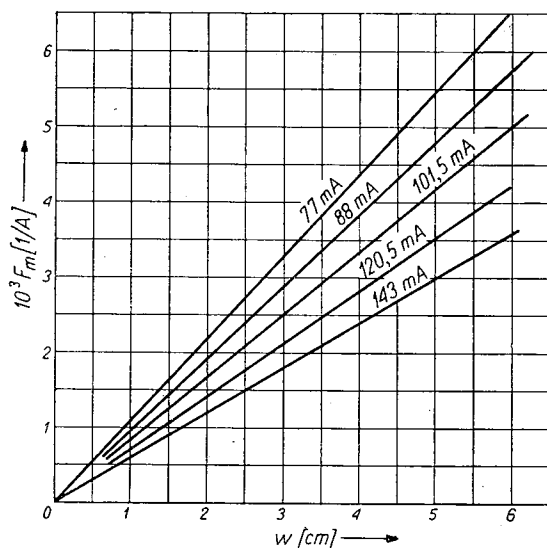
Do obliczeń przyjęto $\Delta w = 0,2$ mm, $w = s_0 - s = 70 - s$ mm oraz $\Delta i = 0,2$ mA. W wyniku uzyskano uchyby rzędu 1 ... 1,5% w przeważającym obszarze pomiarów. Obliczenia te należy traktować jako nieco pesymistyczne, przynajmniej w odniesieniu do pomiarów wykonywanych w trakcie niniejszej pracy. Przy wszystkich pomiarach stosowano bowiem jeden i ten sam miliamperomierz dla kontroli prądu odchylającego, pracowano na tym samym jego zakresie i w mniej więcej stałej temperaturze otoczenia. Wskazówkę jego ustawiano zawsze na pełną działkę skali zmniejszając w ten sposób do minimum niepewność jej odczytu. Stwierdzono

doświadczalnie, że stosunkowo łatwo można było zauważyć zmianę prądu odchylającego o około 0,1 mA. Można więc przypuszczać, że powtarzalność nastawienia prądu odchylającego była lepsza niż 0,2 mA. Podobnie odczyty wychylenia plamki na ekranie przy pomiarach napięcia statycznego wykonywano prawdopodobnie dokładniej niż przyjęto w obliczeniu ($\Delta w = 0,2$ mm).

Mimo tych zastrzeżeń obliczenia do rys. 9 wykonano przy założeniach bardziej pesymistycznych, licząc się z tym, że przy normalnym użytkowaniu przyrządu staranność w zachowaniu wszystkich warunków dokładności będzie niewątpliwie mniejsza niż w pomiarach sprawdzających. Rysunek ma bowiem służyć jako orientacja dla użytkownika przyrządu.

6.3. Sprawdzenie rozrzutu przy pomiarach napięcia stałego

W celu doświadczalnego sprawdzenia rozrzutu pomiarów i porównania go z uchybami granicznymi obliczonymi w poprzednim rozdziale, wykonano kilkadziesiąt ($n = 39$) pomiarów $U = f(s)$ w układzie podob-



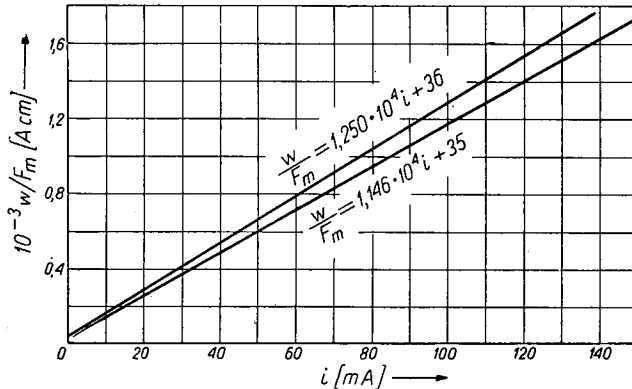
Rys. 10. Charakterystyki przyrządu $F_m = f(w)$

nym do rys. 8, ale z wygładzeniem napięcia za pomocą kondensatora o dużej pojemności. Mierzono tym razem wychylenie środka plamki, żeby sprawdzić również zgodność wyprowadzonych zależności teoretycz-

nych z rzeczywistością. Po przeliczeniu wychylenia s na w [wg (25)] oraz U na F_m [wg (1)] wykonano wykresy $F_m = f(w)$ dla różnych prądów odchyłających (rys. 10). Okazało się, że są to zależności z dużą dokładnością liniowe, zgodnie z uproszczonym wyrażeniem matematycznym (tablica 1):

$$w = F_m H l (l/2 + L). \quad (27)$$

Następnie obliczono dla każdego zakresu pomiarowego średnią wartość stosunku w/F_m i naniesiono je na wykres (rys. 11) w funkcji prądu



Rys. 11. Charakterystyki przyrządu $\frac{w}{F_m} = f(i)$

odchyłającego. Matematyczna aproksymacja liniowa tych punktów, obliczona metodą Mayer-Campbella [14] daje równanie:

$$w/F_m = 1,146 \cdot 10^4 i + 35 \quad [\text{A cm}].$$

Prosta ta nie przechodzi przez początek układu, jest więc niezgodna z zależnością, którą otrzymuje się z (27) przez podstawienie $H = ki$:

$$w/F_m = k l (l/2 + L) i. \quad (28)$$

Przesunięcie jest jednak znikomo małe (rys. 11) i wynika raczej tylko z uchybów pomiarowych lub też częściowo z przesuwającego działania cewki ogniskującej.

Obliczenia powyższe pozwalają na przedłużenie charakterystyki pomiarowej przyrządu w kierunku wyższych napięć, to znaczy w kierunku mniejszych wartości F_m i większych prądów odchyłających. Jest to tym bardziej korzystne, że wykonywanie cechowania przy wyższym napięciu stałym może być niebezpieczne dla lampy oscyloskopowej ze względu na wypalanie ekranu, grzanie katody itp.

Dla dokładniejszego zbadania charakterystyki przyrządu wykonano jeszcze jedną serię pomiarów ($n = 34$) w takich samych warunkach, ale

cewkę odchylającą wraz z jej osłoną magnetyczną odsunięto od ekranu fluoryzującego o 0,8 cm. Uzyskaną z tych pomiarów prostą

$$w/F_m = 1,250 \cdot 10^4 i + 36 \quad [\text{A cm}]$$

naniesiono na wspólny wykres na rys. 11. Pomiary te wskazują na konieczność starannego unieruchomienia cewki odchylającej, gdyż nawet stosunkowo drobne jej przesunięcie powoduje dość znaczną zmianę charakterystyki pomiarowej.

Uzyskane wyniki pozwalają też obliczyć w przybliżeniu wartości L , l , k wchodzące w stałą przyrządu (28). Mianowicie biorąc z pomiaru na przyrządzie wartość: $l + L = 16$ cm, przesunięcie o 0,8 cm i obliczone wartości stałej: $1,146 \cdot 10^4$ cm oraz $1,250 \cdot 10^4$ cm z obu serii pomiarowych, otrzymuje się układ równań, których rozwiązanie daje: $l = 14,2$ cm, $L = 1,8$ cm, $k = 90,5 \text{ cm}^{-1}$. Z charakteru równań wynika, że są to wartości mało dokładne — zmiana stałej przyrządu na 3 miejscu po przecinku daje znaczną zmianę l . Pozwalają one jednak zorientować się w rzędzie wartości natężenia pola $H = ki$ oraz wskazują, że działanie tego pola sięga dość daleko poza cewkę odchylającą. Długość cewki wynosi bowiem 7 cm, a obliczono $l = 14$ cm. Dokładniejsze wyniki można by uzyskać dając większe przesunięcie cewki między jedną a drugą serią pomiarów, jednak brak miejsca nie pozwolił na to.

W dalszym ciągu analizy obliczono dla każdego pomiaru odchyłkę:

$$\Delta = \frac{(w/F_m) - (w/F_m)_{sr}}{(w/F_m)_{sr}} 100\% \quad (29)$$

oraz jej kwadrat (Δ^2). Operowanie odchyłkami względnymi pozwoliło na łączne potraktowanie wszystkich ($n = 73$) pomiarów z obu serii. Następnie znaleziono średnie odchyłki poszczególnych pomiarów:

$$\eta = \frac{\sum |\Delta|}{n} = \frac{24}{73} = 0,329\%$$

oraz

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum \Delta^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{12,262}{72}} = 0,4 \text{ } 2\%.$$

Stosunek tych dwóch wielkości: $\eta/\sigma = 0,798$ wykazuje bardzo dobrą zgodność z jego wartością teoretyczną, która dla normalnego rozkładu gaussowskiego wypada 0,7979. Zgodność ta upoważnia do zastosowania współczynników teoretycznych dla obliczenia odchyłki prawdopodobnej ϱ (prawdopodobieństwo 0,5):

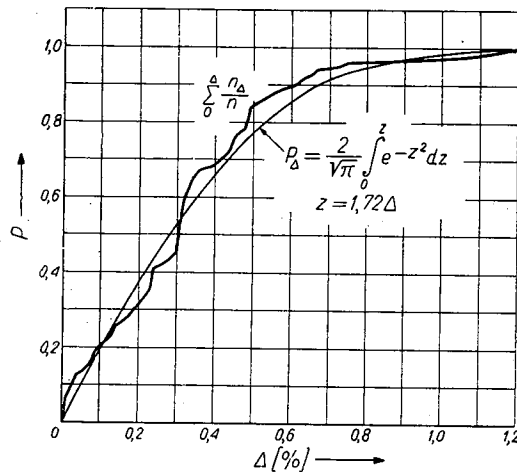
$$\varrho = 0,6745 \sigma = 0,278\%$$

oraz stałej h krzywej całkowej:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z^2} dz, \quad z = h \Delta, \quad (30)$$

$$h = \frac{0,7071}{\sigma} = 1,72.$$

Tę krzywą (30) pokazano na rys. 12 (linia ciągła) łącznie z krzywą uzyskaną bezpośrednio przez sumowanie częstości występowania poszczególnych



Rys. 12. Charakterystyka rozrzutu przy pomiarach napięcia stałego. Częstość występowania uchybów mniejszych lub równych odciętej

nych odchyłek $|\Delta|$ mniejszych lub równych odciętej (linia łamana).

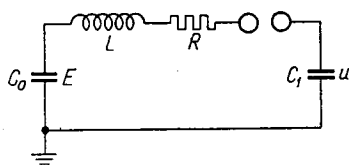
Omówione pomiary i obliczenia nasuwają dość optymistyczne wnioski co do dokładności metody przy pomiarze napięcia stałego. Średnie odchyłki, na które mają wpływ głównie niedokładności odczytu skali oraz wahania prądu odchyłającego, wypadają dla pojedynczego pomiaru około 0,3%, przy czym około 85% odchyłek nie przekracza wartości 0,5%. Rozrzut pomiarów mieści się dobrze wewnątrz uchybów granicznych określonych w rozdziale 6.2.

7. UDAROWE POMIARY SPRAWDZAJĄCE

7.1. Metoda pomiarów

Decydującym sprawdzianem dla oceny przydatności metody oraz zbudowanego przyrządu jest określenie dokładności pomiarów przy udarach. Jest to tym bardziej konieczne, że — jak już wspomniano wyżej —

na podstawie literatury można by mieć wątpliwości, czy cechowanie napięciem stałym jest dopuszczalne. Należało więc wykonać pomiary napięć uderowych i porównać je z pomiarami wykonanymi inną, dokładną metodą, którą można by uważać za wzorcową. Niestety nie dysponowano gotowym układem, a próby zmontowania metody kompensacyjnej według schematu Rabusa [3.5] nie powiodły się z powodu braku odpowiedniego przyrządu zerowego, który zapewniłby pożądaną dokładność. Dlatego zdecydowano się na porównanie pomiarów z obliczeniem. W tym celu zbudowano dwa generatory uderowe, które umożliwiły wytwarzanie dość różnorodnych uderów, a jednocześnie zapewniały dokładne obliczenie wartości szczytowej napięcia.



Rys. 13. Schemat generatora uderów oscylacyjnych

Pierwszy układ przedstawiono na rys. 13. Kondensator o pojemności C_0 [μF] naładowany do napięcia E [kV] załącza się po zapłonie iskiernika na układ szeregowy L [μH], R [Ω] i C_1 [μF]. Elementy układu dobrane są tak, że dają przebieg oscylacyjny. Oscylacje odbywają się dokoła poziomu ustalonego, wynikającego z podziału ładunku na dwie równoległe połączone pojemności ($C_0 + C_1$). Po każdym uderze zwiera się pojemność C_1 , żeby uniemożliwić pozostanie na niej ładunku, który odkształcałby następny uder.

Dla takiego układu otrzymuje się następujące wyrażenie matematyczne:

$$\frac{u}{E} = \frac{C_0}{C_0 + C_1} \left[1 - \sqrt{\frac{R^2}{4\omega^2 L^2 + 1}} e^{-\frac{Rt}{2L}} \sin(\omega t + \alpha) \right], \quad (31)$$

w którym:

$$\omega = \frac{R}{2L} \sqrt{\frac{4L}{R^2 C} - 1},$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{2\omega L}{R},$$

$$C = \frac{C_0 C_1}{C_0 + C_1},$$

u — napięcie na pojemności C_1 .

Maksimum napięcia u występuje w momencie:

$$t_m = \frac{\pi}{\omega} \quad (32)$$

i daje się wyrazić zależnością:

$$\frac{u_m}{E} = \frac{C_0}{C_0 + C_1} \left[1 + e^{\frac{-\pi}{\sqrt{X-1}}} \right], \quad (33)$$

w której wprowadzono skrót:

$$X = \frac{4L}{R^2 C} > 1. \quad (34)$$

Dokładność, z jaką można obliczyć maksymalne napięcie według (33), zależy od dokładności pomiaru pojemności C_0 i $C_0 + C_1$ oraz od dokładności obliczenia funkcji wykładniczej, co z kolei zależy od parametru X . Pomiar pojemności nie przedstawia specjalnych kłopotów. Można na przykład na mostku Scheringa wyznaczyć wprost stosunek C_1/C_0 , co pozwoli na bardzo dokładne obliczenie współczynnika:

$$\frac{C_0}{C_0 + C_1} = \frac{1}{1 + C_1/C_0}.$$

Drugi czynnik, a mianowicie $f(X) = 1 + e^{\frac{-\pi}{\sqrt{X-1}}}$, przedstawia się również dość korzystnie mimo trudności z dokładnym wyznaczeniem wartości parametru X . Dla przedyskutowania warunków dokładnego obliczenia tej funkcji wygodnie jest znaleźć zależność:

$$\frac{\Delta f(X)}{f(X)} = \varphi(X) \frac{\Delta X}{X}. \quad (35)$$

Funkcja pomocnicza $\varphi(X)$, spełniająca powyższe równanie, wyraża się następująco:

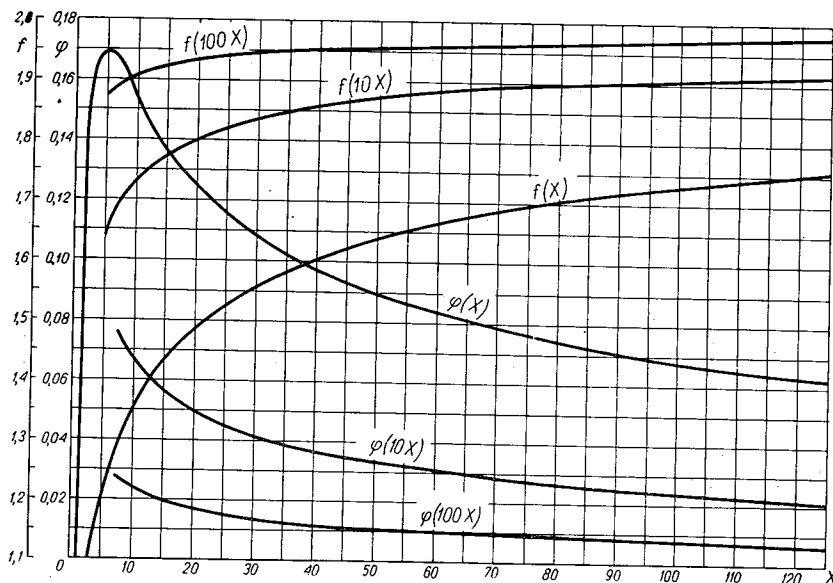
$$\varphi(X) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{X}{(X-1)^{3/2}} \cdot \frac{1}{1 + e^{\frac{\pi}{\sqrt{X-1}}}}. \quad (36)$$

Przebieg $f(X)$ i $\varphi(X)$ w zależności od X pokazano na rys. 14. Widać tu, że dobierając odpowiednio dużą wartość parametru można wyznaczyć $f(X)$ z dużą dokładnością. Na przykład przy $X = 6000$ jest $\varphi(X) = 0,01$, a zatem uchyb względny $\Delta f/f$ otrzymuje się około 100 razy mniejszy od uchybu $\Delta X/X$. Ma to oczywiście poważne znaczenie, gdyż dokładne określenie parametru X jest dość trudne ze względu na składniki obwodu nie dające się pomierzyć ani dokładnie obliczyć.

Z zależności (34) wynika:

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta L}{L} + 2 \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta C}{C}, \quad (37)$$

Indukcyjność dławika można dostatecznie dokładnie zmierzyć, jednak nie da się tego samego zrobić z indukcyjnością wewnętrzną kondensatorów i indukcyjnością rozproszoną całego obwodu. Z tego względu celo-



Rys. 14. Wartości funkcji $\varphi(X)$ i $f(X)$

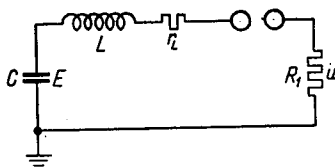
we jest wstawienie dużej indukcyjności L skupionej w dławiku. Podobnie przedstawia się sprawa z opornością czynną obwodu. W czasie wyładowania wchodzi w grę nieokreślona oporność iskry, oporności wewnętrzne kondensatorów, wpływ naskórkowości itp., których nie da się dokładnie wyznaczyć. Dla zmniejszenia uchybu $\Delta R/R$ należy więc wstawić dość dużą wartość R skupioną i możliwie dokładnie zmierzoną. Należy tu jednak pamiętać, że zwiększenie R pociąga za sobą zmniejszenie wartości X , a tym samym wzrost funkcji $\varphi(X)$, czyli pogorszenie „przebiegu uchybów”. Również pojemność układu może być przyczyną dodatkowego uchybu w obliczeniu. W warunkach uderowych trzeba się liczyć ze zmianą stałej dielektrycznej kondensatorów, z ulotem i z silniejszym wpływem sprzężeń z otoczeniem generatora, aniżeli w czasie pomiarów na mostku przy niezbyt wielkiej częstotliwości i niskim napięciu.

Dobór parametrów obwodu musi uwzględniać jeszcze czas trwania udaru oraz tłumienie oscylacji. Oba te czynniki mają wpływ na ostrość prób sprawdzających. Słabe tłumienie oscylacji sprawia, że najdalej wysunięta krawędź plamki na ekranie, odpowiadająca maksymalnemu napięciu, świeci stosunkowo słabo i niknie na tle znacznie dłużej naświetlonych, jaśniejszych dalszych części, odpowiadających następnym szczytom oscylacji. Zjawisko to utrudnia dokładny pomiar. Co do wpływu czasu, to jest on właśnie główną niewiadomą i sprawdzenie jego jest podstawowym celem pomiarów. Z tego względu w pomiarach sprawdzających zastosowano czasy t_m (liczone od początku do szczytu udaru) od około 35 μs do około 0,2 μs .

Dobierając pojemność C_1 należy się liczyć również z obciążeniem układu przez badany przyrząd pomiarowy. Przyrząd ten przedstawia sobą pewną pojemność (rzędu 50 pF) oraz upływność o charakterze nieliniowym (strumień elektronów). Pojemność nie stanowi przyczyny dodatkowych komplikacji, gdyż łatwo ją uwzględnić przy pomiarze C_1 . Natomiast oporności czynnej przyrządu w warunkach udarowych nie da się wyznaczyć, gdyż zależy ona zarówno od jasności plamki, jak i od chwilowej wartości napięcia mierzonego. Oporności tej nie uwzględniono przy wyprowadzaniu zależności matematycznych. Można oszacować jej wpływ obliczając w przybliżeniu ładunek, który odpłynie przez nią do ziemi w czasie t_m . Pomijając zmiany prądu otrzymuje się

$$\Delta u = \frac{\Delta q}{C_1} \approx \frac{i t_m}{C_1}. \quad (38)$$

Wynika stąd wniosek, że skracanie czasu t_m należy uzyskiwać raczej przez zmniejszanie indukcyjności obwodu, a nie przez zmniejszanie pojemności. W ten sposób można bowiem zachować małą wartość stosun-



Rys. 15. Schemat generatora ударов аperiodycznych

ku t_m/C_1 , czyli małe Δu . Oczywiście i w tym przypadku nie wolno zapominać, że duże C i małe L obwodu prowadzi do małej wartości X i daje niekorzystną „przekładnię uchybów” $\varphi(X)$.

W próbach wykonanych w trakcie niniejszej pracy, przy czasach $t_m = 35 \mu\text{s}$ zastosowano pojemność $C_1 = 0,25 \mu\text{F}$, a przy $t_m = 0,2 \mu\text{s}$ $C_1 = 0,000350 \mu\text{F}$. Nawet przy założeniu wygórowanej wartości prądu

$i = 1$ mA spadki napięcia wynosiły ułamki wolta ($\Delta u = 0,14 \dots 0,6$ V). Wobec wartości u_m rzędu kilku kilowoltów ubytek ten był więc całkowicie pomijalny.

Drugi układ, w którym wykonano również pomiary sprawdzające, pokazano na rys. 15. Kondensator o pojemności C [μ F] naładowany do napięcia E [kV] rozładowuje się w obwodzie szeregowym L [μ H] i R [Ω]. Elementy układu dobrano tak, by otrzymać przebieg aperiodyczny:

$$X = \frac{4L}{R^2C} < 1. \quad (39)$$

Napięcie u_R [kV] na oporności czynnej obwodu wyraża się zależnością:

$$u_R = \frac{2E}{\sqrt{1-X}} e^{\frac{-Rt}{2L}} \sinh \frac{R\sqrt{1-X}}{2L} t \quad (40)$$

i osiąga maksimum:

$$u_{Rm} = \frac{2E}{1 + \sqrt{1-X}} e^{-\frac{1-\sqrt{1-X}}{2\sqrt{1-X}} \ln \frac{1+\sqrt{1-X}}{1-\sqrt{1-X}}} \quad (41)$$

w momencie

$$t_m = \frac{L}{R\sqrt{1-X}} \ln \frac{1 + \sqrt{1-X}}{1 - \sqrt{1-X}}. \quad (42)$$

Dla określenia dokładności, z jaką można obliczyć to napięcie, znajdziemy znowu „przekładnię uchybów”, czyli funkcję

$$\Psi(X) = \frac{X}{2(1-X)} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-X}} \ln \frac{1 + \sqrt{1-X}}{1 - \sqrt{1-X}} \right] \quad (43)$$

spełniającą równanie:

$$\frac{\Delta u_{Rm}}{u_{Rm}} = \Psi(X) \frac{\Delta X}{X}. \quad (44)$$

Przebieg tej funkcji, jak również przebieg napięcia u_{Rm} w zależności od parametru X pokazano na rys. 16.

Przy sprawdzaniu przyrządu mierzy się napięcie stałe E przed wyładowaniem oraz napięcie maksymalne na oporniku R_1 . Napięcie to jest oczywiście niższe od u_{Rm} ze względu na oporności rozproszone układu pomiarowego. W ostatecznym obliczeniu należy to uwzględnić przyjmując:

$$u_m = u_{Rm} \frac{R_1}{R}, \quad (45)$$

gdzie:

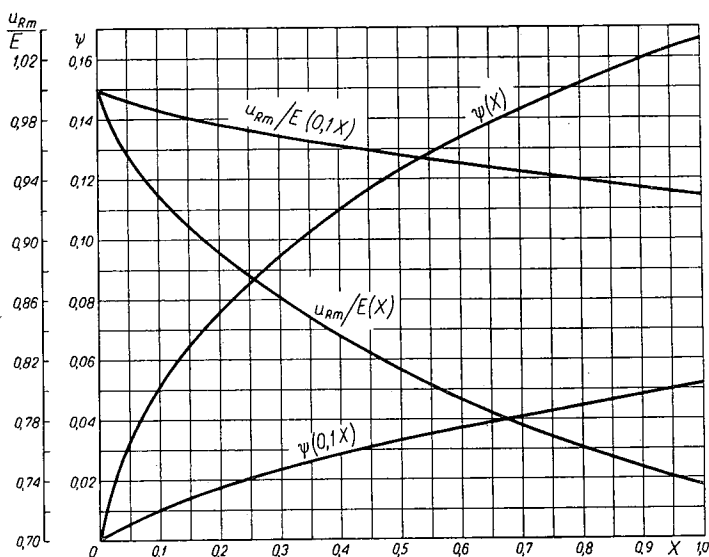
$R = R_1 + r_L + r$ — całkowita oporność obwodu,

R_1 — oporność skupiona według schematu rys. 15,

r_L — oporność dławika i przewodów łączących,

r — dodatkowe oporności czynne.

W tym układzie celowe jest stosowanie dużej oporności R_1 nie tylko ze względu na dokładność powyższego „dzielnika opornościowego”, w któ-



Rys. 16. Wartości funkcji $\Psi(X)$ i $\frac{u_{Rm}}{E} = f(X)$

rym występują nieokreślone oporności r , ale również ze względu na „przekładnię uchybów”, gdyż funkcja $\Psi(X)$ maleje wraz ze zmniejszaniem parametru X . Ograniczenie maksymalnej wartości R_1 wynika z wpływu pojemności i oporności czynnej przyrządu pomiarowego. Należy się liczyć ze stałą czasową typu RC , która zniekształcałaby udar, oraz z bocznikowaniem R_1 przez oporność. Wobec dużej oporności i małej pojemności przyrządu nie stanowi to jednak poważnego ograniczenia.

Indukcyjność L powinna być jak najmniejsza ze względu na parametr X . Cewka w obwodzie jest jednak konieczna dla uzyskania odpowiedniego czasu t_m i dla zmniejszenia uchybu $\Delta L/L$ wynikającego z rozproszonych i trudnych do zmierzenia indukcyjności układu. Duża pojemność C , podobnie jak R_1 sprzyja zmniejszeniu funkcji $\Psi(X)$, a zatem ułatwia uzyskanie większej dokładności obliczeń.

W celu porównania wpływu czasu przy obu kształtach udarów oscylacyjnym i aperiodycznym trzeba było przyjąć jakiś wspólny parametr

czasowy, gdyż czas czoła t_m nie jest miarodajny dla dokładności pomiaru. Zdecydowano się na operowanie czasem połówkowym uderów T_p . Dla uderów oscylacyjnych z wystarczającą dokładnością można przyjąć dla pierwszej fali napięcia równość:

$$T_p \approx t_m, \quad (46)$$

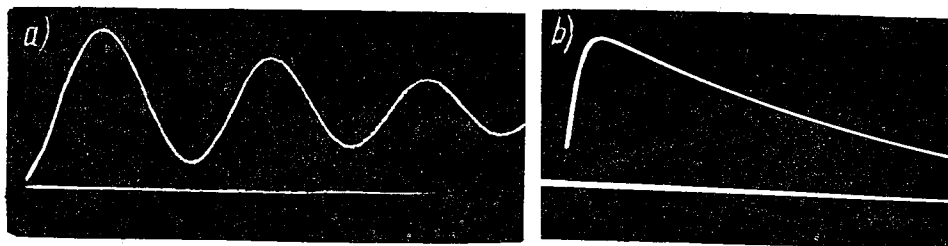
gdyż tłumienie oscylacji jest stosunkowo słabe i wpływ jego w ciągu tego okresu czasu można pominąć, biorąc w rachubę tylko funkcję sinusoidalną. Dla uderów aperiodycznych przyjęto w przybliżeniu:

$$T_p \approx T_{pu} - \frac{t_m}{2}, \quad (47)$$

gdzie T_{pu} oznacza czas do półszczytu uderu liczony według przybliżonej zależności:

$$T_{pu} \approx \frac{-2L}{R(1 - \sqrt{1 - X})} \ln \left(\frac{u_{rm}}{E} \cdot \frac{\sqrt{1 - X}}{2} \right). \quad (48)$$

Przykładowe oscylogramy uderów pokazano na rys. 17.



Rys. 17. Przykłady oscylogramów
a) Udar oscylacyjny, b) Udar aperiodyczny

W obu omówionych układach sprawdzanie przyrządu polega na wyznaczeniu z pomiarów stosunku u_m/E i porównaniu go z wartością obliczoną. W ten sposób sprawdza się jedynie zgodność pomiarów napięć uderowych z pomiarami napięcia stałego. W naszym przypadku wystarcza to całkowicie, gdyż ostatecznie uzależnia się dokładność pomiarów od dokładności cechowania przyrządu napięciem stałym.

7.2. Wyniki pomiarów

Wykonano 10 serii pomiarów, 7 serii przy uderach oscylacyjnych oraz 3 serie przy uderach aperiodycznych. Poszczególne serie różniły się od siebie parametrami obwodu uderowego i czasem połówkowym T_p uderu. Wewnątrz każdej serii zmieniano napięcie ładowania generatora oraz

Tablica 2

Zestawienie danych charakterystycznych obwodów udarowych oraz wyników pomiarów

Nr serii	X	$\varphi(X)$ $\psi(X)$	$\left(\frac{u_m}{E}\right)_{obl}$	T_p	n	$ \Delta _{max}$	η	σ
—	—	—	—	μs	—	%	%	%
udary oscylacyjne								
1	4030	0,012	1,356	35,1	8	1,99	0,92	1,31
2	1925	0,018	1,343	25,6	12	2,83	1,02	1,35
3	387	0,036	1,288	9,45	20	5,44	1,47	2,09
4	2022	0,017	1,905	0,53	6	6,30	1,83	3,11
5	3950	0,012	1,936	0,38	6	2,32	1,71	1,97
6	876	0,025	1,873	0,34	6	4,16	1,94	2,52
7	1625	0,019	1,911	0,24	10	6,33	1,93	3,03
udary aperiodyczne								
1	0,0817	—0,044	0,930	42,9	6	0,94	0,60	6,78
2	0,0975	—0,050	0,927	29,8	9	2,03	1,11	1,21
3	0,0998	—0,050	0,9265	23,0	9	2,50	0,998	1,39

Oznaczono tu: X, $\varphi(X)$, $\psi(X)$ — według zależności podanych w rozdziale 7. 1,
 $(u_m/E)_{obl}$ — stosunek określony z obliczeń,
 T_p — czas połówkowy udaru wg (46), (47), (48),
n — liczba pomiarów,
 $\Delta = \frac{(u_m/E)_{pom} - (u_m/E)_{obl}}{(u_m/E)_{obl}} 100\%$,
 $(u_m/E)_{pom}$ — stosunek określony z pomiarów,
 $\eta = \frac{\sum |\Delta|}{n} \%$,
 $\sigma = \sqrt{\frac{\sum \Delta^2}{n-1}} \%$.

prąd odchylający. Dane charakterystyczne obwodów udarowych oraz uzyskanych wyników pomiarów zestawiono w tablicy 2.

Rozrzut pomiarów jest dość znaczny. Maksymalne odchyłki zmierzonej wartości u_m/E odbiegają od wartości obliczonej często o 2 ... 3%, a przy bardzo krótkich uderzeniach nawet o 6%. Składa się na to szereg przyczyn. Jedną z nich jest fakt, że dla znalezienia stosunku u_m/E wykonywano dwa oddzielne pomiary (u_m i E). W przypadkach przeciwnych znaków uchybów obu pomiarów (np. za duże E i za małe u_m lub odwrotnie) powstawały więc zwiększone odchyłki i zwiększył się przez to rozrzut uzyskanych wyników.

Można by zmniejszyć ten rozrzut mierząc napięcie stałe inną metodą, np. taką, jaką zastosowano przy cechowaniu przyrządu. Sądząc z rozważań nad dokładnością pomiaru napięcia stałego (rozdz. 6) należy przy-

puszczać, że nie dałoby to jednak bardzo radykalnego zmniejszenia rozrzutu, a za to skomplikowałoby układ pomiarowy. Dlatego zrezygnowano z tej możliwości i mierzono również napięcie ładowania generatora tym samym przyrządem.

Jako jeszcze jedną przyczynę rozrzutu pomiarów należy wymienić wahania napięcia zasilającego. Mimo zachowania wszelkich dostępnych środków ostrożności wahania te niewątpliwie zachodziły. Niestety nie dysponowano odpowiednim stabilizatorem napięcia. Uchyby wynikające z tej przyczyny powinny mieć na ogół znak dodatni. Napięcie stałe E mierzono bowiem przed rozładowaniem generatora. Mógł on więc w czasie między pomiarem E a rozładowaniem i pomiarem u_m doładować się i dać w wyniku większą wartość u_m . Poważniejsze obniżenie napięcia w tym czasie było raczej mało prawdopodobne ze względu na stosunkowo duże pojemności i brak ulotu.

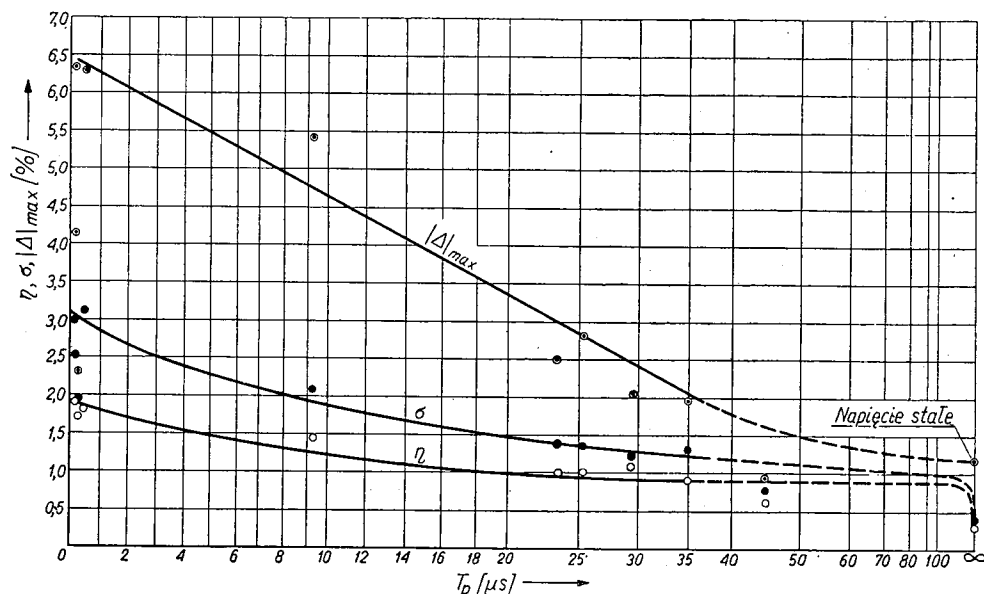
Szczegółowsza analiza uzyskanych wyników wskazuje dość wyraźną przewagę uchybów ujemnych. Mierzono przeważnie mniej, niż wynikało z obliczenia. Jest to zgodne z przewidywaniem, gdyż łatwo można wyliczyć kilka przyczyn takich właśnie zaniżonych wyników.

Jedną z nich jest stwierdzona doświadczalnie tendencja do pomiaru zbyt dużej wartości E . Mianowicie przy długotrwałym naświetlaniu ekranu przy napięciu stałym poszczególne ziarna warstwy fluoryzującej oddają sobie wzajemnie część energii uzyskanej od strumienia elektronów. Plamka na ekranie rozszerza się i pomiar położenia jej krańca daje w wyniku zbyt dużą wartość napięcia. Przy pomiarach udarowych zachodzi zjawisko odwrotne. Mianowicie przy niezupełnie dokładnym zogniskowaniu strumienia krawędzi plamki znikają na tle znacznie jaśniejszego jej środka. Powoduje to tendencję do uzyskiwania z pomiaru mniejszej wartości u_m . Obie przyczyny działają razem w kierunku zmniejszenia pomierzonego stosunku u_m/E .

Dalszą przyczyną zaniżonych pomiarów mogą być niedokładności obliczeń wynikające z pominięcia rozproszonych indukcyjności i oporności generatora udarów. W obu układach pominięcie tych składników obwodu daje wygórowane wartości $(u_m/E)_{obl}$. Uchyby te z pewnością nie są poważne, gdyż we wszystkich przypadkach starano się o zachowanie możliwie korzystnej „przekładni uchybów” [małe $\varphi(X)$ i $\Psi(X)$], niemniej można im przypisać wartości 0,1 ... 0,2%.

W tym samym kierunku zaniżania zmierzonego stosunku u_m/E działają spadki napięcia w półprzewodzącej katodzie, sugerowane przez literaturę (por. 6.1). Wykrycie ich, a tym bardziej określenie ich wartości okazało się jednak niemożliwe wobec znacznej liczby innych przyczyn uchybów.

Rysunek 18 ilustruje zależność uchybów od czasu połówkowego T_p ударов. Wykonano go na podstawie tablicy 2. Jak widać, nie tylko



Rys. 18. Charakterystyki rozrzutu pomiarów w funkcji czasu połówkowego ударов

średnie uchyby poszczególnych pomiarów η i σ , ale nawet uchyby maksymalne $|\Delta|_{max}$ znalezione w każdej serii pomiarowej dość dobrze układają się wzdłuż linii ciągłych, mimo że serie te zawierały nierówne i stosunkowo małe liczby pomiarów. Na tym samym rysunku umieszczono też wyniki uzyskane przy pomiarach napięcia stałego, podane w rozdziale 6.3. Naniesiono je nad odciętą $T_p = \infty$ jako wartość graniczną, do której zmierzają uchyby w miarę wydłużania czasu. Wydaje się, że punkty te nieźle pasują do całości wykresu.

Na rys. 18 stwierdzamy dość szybki wzrost uchybów przy skracaniu czasu T_p . Wzrost ten wynika nie tylko z krótszego naświetlenia ekranu, a więc słabszej poświaty, ale związany jest również z oscylacyjnym kształtem ударов. Można przypuszczać, że gdyby najkrótsze udary miały przebieg aperiodyczny, dokładność pomiaru byłaby nieco lepsza i uchyby mniej zależałyby od czasu. Wynika to stąd, że napięcie ustalone po wytłumieniu oscylacji było znacznie niższe od napięcia szczytowego, a zatem dawało bardzo dużą, źle zogniskowaną plamkę, rozświetlającą cały ekran przyrządu. Plamka ta zamazywała i przyćmiewała ślady pozostałe na ekranie po napięciu szczytowym i utrudniała w ten sposób jego pomiar. Niedogodność tę można by wyeliminować przez obcięcie

udaru możliwie tuż po szczycie. Kłopoty z synchronizacją obcinania i obawa przed nieprzewidzianymi wpływami układu obcinającego na dokładność obliczeń (dodatkowe elementy w obwodzie, sprzężenia itp.) spowodowały, że zaniechano tego.

Na zakończenie należy zwrócić uwagę na jeszcze jeden szczegół. Przy pomiarach pojedynczych, a zwłaszcza krótkich udarów, dokładność pomiaru wychylenia plamki zależy od pierwotnego położenia wskazówki przyrządu. W przypadku gdy dla dokonania pomiaru wystarczy wykonać tylko bardzo niewielkie przesunięcie wskazówki, dokładność ustawienia jest z reguły znacznie lepsza niż w przypadku, gdy konieczne jest znaczne przesunięcie. Ten fakt sprawia, że już po jednorazowym powtórzeniu udaru ustawienie wskazówki można uważać za zupełnie dokładne. Pomiaru sprawdzające, o których mowa wyżej, były w zasadzie pomiarami pojedynczych udarów, były jednak wykonywane w warunkach nieco ułatwionych. Na podstawie pomiaru E oraz na skutek niezbyt wielkich zmian napięcia między sąsiednimi pomiarami można było z góry przewidzieć i dość dokładnie określić wychylenie plamki. Tego rodzaju „okoliczności łagodzące” występują jednak również w praktycznym zastosowaniu przyrządu, np. przy masowych pomiarach w próbach modelowych.

8. WNIOSKI KOŃCOWE O METODZIE I WYKONANYM PRZYRZĄDZIE

W pracy niniejszej zbadano teoretycznie i praktycznie metodę pomiaru napięć udarowych opartą na zasadzie spektrografu mas i stosowaną już uprzednio [9] do pomiaru napięć statycznych. Prototyp przyrządu pomiarowego okazał się stosunkowo prosty w obsłudze i tani, a przy tym dość dokładny.

W ogólnej klasyfikacji należało by umieścić tę metodę pomiędzy precyzyjnymi metodami zerowymi a prostymi metodami odchyłowymi, z tym jednak zastrzeżeniem, że przewyższa je wszystkie swoją uniwersalnością. Ten sam przyrząd może mierzyć wszystkie rodzaje napięcia: statyczne i udarowe, symetryczne i niesymetryczne względem ziemi. Należy też podkreślić, że istnieją już stosunkowo proste środki techniczne, których zastosowanie zwiększyłoby dokładność pomiarów przy udarach i znacznie je ułatwiło. Chodzi tu o wspomniane uprzednio ekrany z „pamięcią”, które wyeliminowałyby całkowicie uchyby związane z pośpiechem odczytu przy udarach.

Uniwersalność przyrządu można powiększyć stosując wirujące pole odchylające, dzięki czemu może on pełnić rolę oscylografu. Oscylograf taki posiada kilka zalet w porównaniu ze zwykłym. Do tego celu koniecz-

na jest jednak lampa z ogniskowaniem elektrostatycznym sterowanym przez napięcie mierzone, gdyż soczewki magnetyczne zapewniają dobre ogniskowanie jedynie w wąskich zakresach napięć. Brak takiej lampy na wyższe napięcie przyspieszające spowodował, że nie wypróbowano tej możliwości praktycznie w niniejszej pracy.

Ogniskowanie elektrostatyczne umożliwiłoby również stosowanie przyrządu do pomiaru pojedynczych, niepowtarzalnych udarów, na przykład przepięć atmosferycznych, i to tym łatwiej, że nie wymaga on synchronizacji z udarem. Oczywiście należało by go w tym celu uzupełnić przystawką fotograficzną. Przyrząd z soczewką magnetyczną można stosować tylko w pomiarach laboratoryjnych, w których można powtórzyć udar albo z góry przewidzieć przybliżoną wartość napięcia szczytowego i na tej podstawie dobrać odpowiednie ogniskowanie. Wąskie zakresy dobrego ogniskowania utrudniają dość poważnie pomiary, należy jednak zaznaczyć, że zakresy te wyraźnie się rozszerzają w miarę wzrostu napięcia. W zbudowanym przyrządzie daje się to zauważyć już przy około 10 kV. Plamka na ekranie jest wtedy dostatecznie jasna i ostra nawet przy niezupełnie dokładnym doborze prądu w soczewce. Można więc przypuszczać, że w przyrządzie przystosowanym do wyższych napięć wymagania co do ogniskowania nie byłyby bardzo ostre nawet przy soczewkach magnetycznych.

Przyrząd pomiarowy zbudowany w trakcie niniejszej pracy posiada stosunkowo niskie napięcie zwrotne. Przy dodatnim napięciu na katodzie wytrzymałość układu wybitnie maleje i przeskoki zachodzą już przy około 6 kV. Ogranicza to w poważnym stopniu pomiary napięcia zmiennego. Oczywiście nie należy tego uważać za ogólną wadę metody pomiarowej, gdyż jest to jedynie sprawa odpowiedniej konstrukcji katody.

Dość wąski zakres pomiarowy powoduje, że prototyp przyrządu znajduje zastosowanie głównie w badaniach przepięć na modelach stacji energetycznych. Badania modelowe, prowadzone w Katedrze Wysokich Napięć Politechniki Gdańskiej, operują udarami rzędu kilkunastu kilowoltów i wymagają dokonywania wielkiej liczby pomiarów. Istotną rolę gra tu oczywiście kształt przepięć powstających w różnych punktach stacji, niezbędny jest więc oscylograf szybkopiszący. Po sprawdzeniu jednak kształtu udarów można następnie wykonywać masowe pomiary wartości szczytowych napięć znacznie szybciej i wygodniej przy użyciu tego przyrządu. Oszczędza się przy tym i na materiale fotograficznym i na czasie, nie tracąc na dokładności.

Przyrząd ten może również wypełnić lukę, jaka powstaje często między zakresami przyrządów pomiarowych niskonapięciowych a zakresami przyrządów przeznaczonych do napięć wysokich i to nie tylko w pomia-

rach uderowych, lecz i statycznych. Właśnie te napięcia rzędu kilku czy kilkunastu kilowoltów są często za wysokie dla jednych, a jednocześnie za niskie dla innych przyrządów. Warto też podkreślić, że przy ograniczeniu jasności plamki można uzyskać stosunkowo dużą oporność wewnętrzną przyrządu, rzędu megaomów. W wielu przypadkach stanowi to poważną zaletę.

Nic nie stoi na przeszkodzie we współpracy przyrządu z opornościowym dzielnikiem napięcia. Można w ten sposób rozszerzyć zakres jego stosowalności i to tym łatwiej, że dzielnik może mieć kilkakrotnie mniejszą przekładnię w porównaniu z wymaganą dla oscylografu. Dzięki temu łatwiej jest zapewnić mu pożądaną dokładność. Rozwiązanie takie byłoby jednak w pewnym sensie odstępstwem od pierwotnych założeń, gdyż jedną z podstawowych zalet metody jest możliwość użycia jej do bezpośredniego pomiaru najwyższych napięć. Oczywiście problem, do ilu kilowoltów opłaca się budować lampę oscyloskopową, a od ilu stosować dodatkowy dzielnik, nie da się rozstrzygnąć na podstawie tej pracy. Należało by go opracować oddzielnie w oparciu o doświadczenie przy budowie specjalnych lamp wysokonapięciowych. W pracy niniejszej nie było to możliwe głównie z powodu braku odpowiednio wyposażonego laboratorium próżniowego.

Celem pracy było możliwie pełne i obiektywne naświetlenie wszystkich wad i zalet omawianej metody pomiarowej. Niestety znaczną część jej właściwości można było omówić wyłącznie teoretycznie, bez laboratoryjnego, doświadczalnego sprawdzenia. Problem nie został więc całkowicie wyczerpany. Uzyskano wprawdzie przyrząd pomiarowy dość dokładny i o dość szerokim zastosowaniu laboratoryjnym, ale nie wyzyskano w nim wszystkich możliwości metody i nie wypróbowano szeregu wariantów, które przynajmniej teoretycznie zdają się gwarantować jeszcze lepsze rezultaty. Bardzo możliwe, że zbadany doświadczalnie wariant jest nawet jednym z najmniej obiecujących. Złożyło się na to szereg różnych i czasem nawet nie wspólnego z tematem nie mających przyczyn. Tym bardziej jednak wydaje się konieczne podkreślenie, że metoda warta jest szerszego zainteresowania i może jeszcze pełniejszego zbadania laboratoryjnego.

W zakończeniu autor pragnąłby serdecznie podziękować Promotorowi prof. drowi inż. St. Szporowi, a także wszystkim Kolegom i Współpracownikom z Katedry Wysokich Napięć i Przyrządów Rozdzielczych Politechniki Gdańskiej za cenne rady oraz za pomoc w pracach laboratoryjnych.

WYKAZ LITERATURY

- 1.1. Angelini M.: Diviseurs de tension et câbles retardateurs dans l'enregistrement oscillographique des phénomènes transitoires rapides. — Bull. ASE 32 (14.1941), 305.
- 1.2. Berger K., Robinson B. C.: Absolute Eichung von Kugelfunkentrecken mit dem K-O als Nullinstrument. — Bull. ASE 31 (1940), 157.
- 1.3. Goosens R. F., Provoost P. G.: Fehlerquellen bei der Registrierung hoher Stossspannungen mit dem K-O. — Bull. ASE 37 (19.1946), 175.
- 1.4. Hardy D. R., Jacson B., Feinberg R.: The Recording of High-Speed Single Stroke Electrical Transients. — Electronic Engng 28 (1.1956), str. 8, 28 (2.1956), 75.
- 1.5. Heller B., Veverka A.: Děliče napětí pro snímání přechodových zjevů pomoci katodového oscilografu. — Elektr. Obzor 38 (1949), 53.
- 1.6. Hergenrother R. C., Rudenberg H. G.: A Direct Reading Oscilloscope for 100-kV Pulses. — PIRE 41 (1953), 896.
- 1.7. Hlávka J.: Chyby registrace přechodových zjevů katodovým oscilografem. — Elektr. Obzor 38 (1949), 60.
- 1.8. Howard P. R.: Errors in Recording Surge Voltages. — PIRE II 99 (1952), str. 371.
- 1.9. Paszin M. F.: Dieľteli napriaženija dla gienieratora impulsnych napriaženij bolszoj moszcznosti. — Elektryczestwo (5.1956), 26.
- 1.10. Raske W.: Messteiler für hohe Stossspannungen. — Archiv f. Elektr. (1937), 653
- 1.11. Robinson G., Van Allen R.: Precision Measurement with a Cathode Ray Oscilloscope. — Rev. Sci. Instrum. 23 (1952), 701.
- 2.1. Cooper R.: A note on the Measurement of Short-Duration Recurrent Voltage Impulses by Means of Spark-Gaps. — JIEE II 95 (1948), 378.
- 2.2. Hardy D. R., Broadbent T. E.: The Effect of Irradiation on the Calibration of 2-cm Diameter Sphere-Gaps. — PIRE II 101 (1954), 438.
- 2.3. Meek J. M.: The Calibration of Uniform-Field Spark-Gaps in Air. — PIRE II 98 (1951), 362.
- 3.1. Bowdler G. W.: Measurement on Impulse Voltages with a Ballistic Galvanometer. — JIEE II 89 (12.1942), 555.
- 3.2. Böhm H.: Spitzenspannungsmessung kurzzeitiger Einzelimpulse. — ATM V-3383-1, 164 (1949), T. 73—4.
- 3.3. Debus K., Hueter E.: Über die Bestimmung der Kennwerte von Spannungsstößen mit anzeigenden Messgeräten. — ETZ (II 1940), 797.
- 3.4. De Gruyter E.: Impulsmessung mit Gleichrichtern in Scheitelspannungs Messschaltung. — Bull. ASE 45 (1954), 61.
- 3.5. Rabus W.: Messung von Überspannungen und Stossspannungen mit Hochvakuumventil und elektrostatischem Spannungsmesser. — ETZ 74 (1953), 676.
- 3.6. Rabus W.: Scheitelspannungsmessung mit Hochvakuum-Gleichrichtern und elektrostatischem Voltmeter. — ATM V-3383-3 (4.1955).
- 4.1. Brückmann R. E.: Peak-Reading Voltmeter. — Radio-Electronic Engng (8.1952), 12 i 27.
- 4.2. Lorent M.: Electronic Peak-Reading Kilovoltmeter. — Electronic Engng 25 (1953), 243.
- 4.3. Mamynin B. A.: Izmiereniye pieriodiczeskich impulsnych napriaženij i tokow priedielno maloј wielicziny. — ŽTF 26 (3.1956), 652.

- 4.4. Rado G. T., Johnson M. H., Maloof M.: A Single Pulse Voltmeter. — *Rev. Sci. Instrum.* 20 (1949), 927.
- 4.5. Rudin R.: A Direct Reading Pulse Length Meter and Shape Analyser. — *Rev. Sci. Instrum.* 20 (1949), 467.
- 4.6. Saxe R. F.: Automatic Control and Display in Impulse Testing. — *PIEE B* 102 (1955), 371.
- 4.7. Wijnberg L.: Peak Pulse Brightness Photometer. — *Rev. Sci. Instrum.* 27 (1956), 94.
- 4.8. Yu Y. P.: An Improved Peak Voltmeter for Pulses. — *Rev. Sci. Instrum.* 19 (1948), 447.
- 5.1. Allison S. K., Frankel S. P. F. i inni: Construction and Calibration of a Cylindrical Electrostatic Analyser. — *Rev. Sci. Instrum.* 20 (1949), 735.
- 5.2. Braunbeck J.: Messungen an Elementarteilchen. — *Radiotechnik* 21 (1955), str. 36.
- 5.3. Chartman B. G., Leontiewa I. N. i inni: Amplitudnyj analizator impulsow s elektronno-luczewoj trubkoj. — *ZETF* 28 (1955), 699.
- 5.4. Harrower G. A.: Measurement of Electron Energies by Deflection in a Uniform Electric Field. — *Rev. Sci. Instrum.* 26 (1955), 850.
- 5.5. Hintenberger H.: Die Massenspektroskopie und ihre Anwendungen. — *VDI-Z.* 97 (1955) Nr 24, str. 817.
- 5.6. Inghram M. G.: Modern Mass Spectroscopy. — *Adv. Electronics* 1 (1948), 219.
- 5.7. Möllstedt G., Heise F.: The Electrostatic Lens as High Resolving Power Velocity Analyser. — *Phys. Bull.* 5 (1949), 80.
- 5.8. Sonin A. A.: Amplitudnyje analizatory impulsow napriazhenija. — *Uspiechi Fiziczeskich Nauk* 54 (1954), 619.
- 5.9. Titterton E. W., Wilson R. S.: Pulse Amplitude Analysis in Nuclear Physics. — *JBIRE* 13 (1953), 173.
- 6.1. Anonim: Electron Picture Tube Stores Bright Halftone Pictures. — *Electr. Engng* 73 (1954), 582.
- 6.2. Anonim: Images Stored for Longer Periods. — *Engineering* 186 (1953), 802.
- 6.3. Knoll M., Randmer J.: Charge-Picture Storage Tubes with Storage Grid. — *Arch. elektr. Übertragung* 4 (7.1950), 238.
- 6.4. Webley R. S., Lubszyński H. G., Lodge J. A.: *PIEE B* 102 (1955), 401.
- 7.1. Altar W., Garbuny M.: Absolute Speed Gauge for High Voltage Particles. — *Phys. Rev.* 76 (1949), 496.
- 7.2. Bennett W. H.: Radiofrequency Mass Spectrometer. — *J. Appl. Phys.* 21 (1950) 143.
- 7.3. Shoupp W. E., Jennings B., Jones W.: An Absolute Calibration of the $\text{Li}^7(p, n)$ Threshold Voltage. — *Phys. Rev.* 76 (8.1949), 502.
8. Trillat J. J., Barraud J.: Mesure des hautes tensions de crête par diffraction d'électrons. — *Rev. Gén. Electr.* (7.1947), 310.
9. Ehrenberg W., Hirsch H.: An Electronic Voltmeter for High Voltages. — *J. Sci. Instrum.* 20 (1943), 161.
10. Muliarow M. J.: Elektronno-luczewyje pribory. — *Gosenergoizdat*, 1954.
11. Haine M. E., Jervis W. W.: The Use of Electron Velocity Analyser to Stabilize a 50 kV Direct Voltage Source to a few Parts in a Million. — *PIEE B* 102 (1955), 265.

12. Stiekolnikow I. S., Mieżujewa W. W.: Oscillograf s pierienapriazennym impulsnym pitanijem. — *Elektriczestwo* (11.1948), 60.
- 13.1. Biguenett C.: Fonctionnement des cathodes à oxydes en régime transitoire. — *Vide* 4 (1949), 661.
- 13.2. Coomes E. A.: The Pulsed Properties of Oxide Cathodes. — *J. Appl. Phys.* 17 (8.1946), 648.
- 13.3. Deb S.: Decay of Emission from an Oxide-Coated Cathode Due to Adsorption of Matter from the Anode. — *JBIRE* 14 (4.1954), 1957.
- 13.4. Herrmann G., Wagner S.: Oksidnyj katod. — *Gos. Izd. Techn. Teor. Lit.*, 1949.
- 13.5. Loosjes R., Jansen C. G. J.: Distribution anormale des vitesses des électrons émis par une cathode à oxydes en régime d'impulsions. — *Vide* 7 (1.1952), 1131.
- 13.6. Loosjes R., Vink H. J., Jansen C. G. J.: The Potential Distribution in Pulsed Oxide-Coated Cathodes. — *J. Appl. Phys.* 21 (4.1950), 350.
- 13.7. Loosjes R., Vink H. J., Jansen C. G. J.: Thermionic Emitters under Pulsed Operation. — *Philips Techn. Rev.* 13 (6. 1952), 337.
- 13.8. Nergaard L. S.: Studies of the Oxide Cathode. — *RCA Rev.* 13 (12.1952), str. 464.
- 13.9. Prileżajewa I. N., Liwszic W. W., Spiwak G. W.: Ob elektronno-opticheskom izuczenii niestacionarnoj emisii oksidnowo katoda w wakuumie i w gazie. — *ŽTF* 25 (1.1955), 97.
14. Weise E., Platzer G.: Genauigkeit und Zeitaufwand bei Ausgleichverfahren. — *Z. techn. Physik* (1939), 59.

В. КУЗЬНЯР

НОВЫЙ ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВОЙ ПРИБОР ДЛЯ ИМПУЛЬСНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Резюме

Метод измерения основан на „опрокинутом” принципе масс-спектрографа. Электронный луч, ускоренный измеряемым напряжением, отклоняется поперечным магнитным или электрическим полем и по величине отклонения можно судить об ускоряющем напряжении. Возможны разные варианты метода. Один из них, магнитное отклонение и измерение отклонения на поперечном, флуоресцирующем экране, испытано на опыте. Другие варианты обсуждаются теоретически. Дан анализ особенностей метода и источников погрешностей измерения. Макет измерительного прибора, собранного на осциллографической трубке 13 ЛМ 31, даёт возможность измерять импульсные напряжения до 20 кв. Точность измерения статического напряжения зависит от градуировки прибора и может быть повышена до около $\pm 0,5\%$. Измерения амплитуды очень коротких импульсов, длительностью в около 0,2 мксек, дали разброс до около $\pm 6\%$, но средняя погрешность для одиночных импульсов не превысила $\pm 3\%$. Повторяя 2—3 импульса при одном измерении, можно получить более высокую точность. Прибор имеет относительно большое сопротивление (несколько мегом) и малую емкость (около 50 пф). Таким образом он может применяться для скоростных массовых измерений напряжения при исследованиях моделей высоковольтных установок.

W. KUŹNIAR

A NEW ELECTRONIC DEVICE FOR SURGE VOLTAGE MEASUREMENT

Summary

The method considered in this paper is based on a reversed mass-spectrograph principle; it was already applied by W. Ehrenberg and H. Hirsch [9] to constant voltage measurements. The electronic beam accelerated by an unknown voltage deviates in a known magnetic or electrostatic field. Its deviation from the optical axis is measured on a fluorescent screen and the speed of electrons is calculated therefrom. There are some modifications possible in a practical arrangement (Fig. 1). The screen may be parallel or perpendicular to the main accelerating field and may be inside (Fig. 1b) or outside the deflecting field (Fig. 1a). A 180° magnetic deflection may also be applied (Fig. 1c).

Mathematical relations between the deflection w and other parameters for all these arrangements are given in Table 1 and the symbols used are as follows:

l, L, D — cm — dimensions easy to read from Fig. 1,

α — angle of deflection,

H — A/cm, K — kV/cm — strength of deflecting field,

F_m — $1/A$, F_e — $1/kV$ — functions of voltage U at magnetic (Eq. 1) or electrostatic (Eq. 2) deflection, respectively,

a — $1/kV$ — constant (Eq. 3),

q — As — charge of one electron,

m_0 — g — mass of an electron at zero velocity,

c — cm/s — light velocity.

Setting N instead of K , or H and F instead of F_m or F_e , one may reduce all the relations to one expression 10, in which

A — constant depending upon geometrical dimensions,

$k = 1$ — for a perpendicular screen,

$-1/2$ — for a parallel screen inside the deflecting field,

-1 — for a parallel screen outside the deflecting field, and for 180° magnetic deflection.

The usual mathematical analysis leads to the formula 12 for maximum errors. It indicates, that in the case of a parallel screen inside the field, where $|k| = 1/2$, the accuracy of w -measurement is twice as important as in other cases. Further analysis of the coefficient $\frac{F}{U dF/dU}$ (Eq. 12) for both the magnetic and electrostatic deflection gives the formulas 13 and 14 respectively, the numerical values of which plotted against U are shown in Fig. 3. It is evident, that electrostatic deflection enables near twice as high accuracy as the magnetic deflection.

The question of focusing the beam is very important, especially for the case of surge voltage. The focus of a magnetic lens elongates with the rise of electron velocity and the spot becomes unsharp. Electrostatic lenses fed by suitable parts of the accelerating voltage by means of a divider give constant focusing, but the divider for high tension is a big device and complicates the arrangement. Also the angle at which the beam falls on to the screen plays an important role in accu-

racy to be obtained. More detailed considerations lead to the following conclusions:

a) In low-voltage arrangements, electrostatical lenses fed from a divider are preferable, whereas in high voltage equipment, magnetic lenses maintained by manual control are sufficient.

b) The long parallel screen induces small angles of beam falling and thus causes somewhat greater errors of deflection measurements.

c) The 180° magnetic deflection has great advantages. The beam falls normally to the screen and the deflecting field causes a kind of additional focusing of the spot.

It is possible to apply the method to oscillographing the shape of surge by making the deflecting field rotatory. The advantages of such an oscillograph as compared with a usual one are as follows:

- 1) absence of a special source of high accelerating voltage,
- 2) avoidance of any complicated device synchronizing the beam with the surge,
- 3) a linear, infinite scale of time.

The disadvantages are, however, as follows:

- 1) absence of the zero line, since at zero voltage no electron beam exists,
- 2) oscillographing of one sign only of the oscillatory voltage, because the device works exclusively at the negative potential on the cathode,
- 3) the variation of line width according to the variation of voltage, except for the case of electrostatic lenses steered by the measured voltage.

The method suits to measuring all kinds of voltages: direct, alternating and surge, either symmetrical or not. The screen being at the anode potential may be earthed only when measuring a negative, unsymmetrical voltage. Therefore the reading must be taken for the most part from a safe distance. This is inconvenient and must be regarded as a disadvantage of this method. While measuring very high voltages, the observer must be placed inside the Faraday's cage or he must use a telescope. The telescope makes it possible to minimize the errors due to parallax.

The prototype of the measuring device, built in order to prove practically the properties of the method, utilizes an oscilloscoping tube 13 LM 31, designed for magnetic focusing and deflecting. Its screen is perpendicular to the axis and has a long-duration phosphorescence which facilitates the recording of short surges. The internal break-down voltage measured by $1/50 \mu\text{s}$ surges is 18 kV, however, if a negative potential is applied to the anode, the breakdown occurs at 6 kV crest voltage. So the possibility of a.c. voltage measurement is limited.

The electrical scheme of the whole equipment is shown in Fig. 6. The feeding transformer working at very high saturation of the core and connected in series with a condenser of suitable capacitance, stabilizes the rms value of voltage, the stabilizing coefficient being 6 ... 7. The current in deflecting circuit is additionally stabilized by a coil with an unsaturated, open core. The ratio of current variations to those of the grid voltage is about 1/30. All parts of the circuit and the tube itself are thoroughly screened from the magnetic and electric fields.

The measurement of spot deflection on the fluorescent screen is made by using a sliding scale which enables reading up to 0,1 mm. When a transient voltage should be recorded, a pointer coupled with the sliding scale is to be set at the spot edge before it disappears. It is possible to do it quickly enough. Afterwards one can read the scale without any hurry. It is convenient to measure not the

deflection w (Fig. 1) but the distance s from the spot to the zero point of the scale, which is placed at the left edge of the screen. The relation between w and s is given by equation 25, in which s_0 means the distance from zero point to the optical axis of the tube. The errors due to parallax are minimized by a mirror set between the pointer and the fluorescent screen.

The curves $U = f(s)$ measured at a constant voltage according to Fig 8 are shown in Fig. 9. The maximum-error curves, calculated from Eq. 26 by substituting $\Delta w = 0,2$ mm and $\Delta i = 0,2$ mA, are plotted in the same figure. The resulting maximum errors are in good agreement with those obtained in 73 measurements as plotted in Fig. 12. The smooth line in Fig. 12 is calculated from Eq. 30 and the broken one is obtained directly by summing up the number of errors involved, being less or equal to the value of Δ -abscissa. The mean errors obtained are:

$$\eta = \frac{\Sigma(\Delta)}{n} = 0,329\%$$

and

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma \Delta^2}{n-1}} = 0,412\%.$$

About 85% of errors are not greater than 0,5%.

The calculations based on these records prove a good agreement with the theoretical formula 27. The deflections w plotted against F_m (Fig. 10) give a smooth straight line, and so do also the ratios w/F_m plotted against the deflecting current i (Fig. 11). It is a very important matter as it enables to extend the measuring characteristics towards higher voltages admissible at short surges, but perilous to the tube for longer periods, as needed by constant voltage measurement.

In continuing the investigations of the method some surge voltage measurements were made. The records were compared with crest voltage calculations of surges produced in two circuits shown in Fig. 13 and 15. The first circuit gives oscillating surges and the second nonperiodical ones. They are shown by oscillograms in Fig. 17. A high accuracy of crest voltage calculations was secured by a suitable choice of the parameter X (Eqs. 34 and 39) so as to get small values of the so called „error transformer functions” $\varphi(X)$ (Eqs. 35, 36) and $\psi(X)$ (Eqs. 43, 44). These functions are shown in Fig. 14 and 16 respectively, from which it is evident that e.g. at $X = 6000$ $\varphi(X) = 0,01$ (Fig. 14) and the error of the crest value calculation is 100 times less than $\Delta X/X$ (see Eq. 35). This is very important since the precise determination of X is impossible because of the unmeasurable stray inductances, capacitances and resistances of the circuit.

In Fig. 18 there are mean errors η , σ , and maximum errors $|\Delta|_{\max}$, found in all ten series of records, plotted against T_p — the time of half-crest value duration of the surges. Above the abscissa $T_p = \infty$ there are marked error values obtained by constant voltage measurements. Apparently the dispersion of records is great especially at very short surges; the maximum errors reach about 6%, but σ does not exceed 3%.

There is a lot of factors causing the dispersion of records. One of them is the fact that to obtain one value of u_m/E (crest voltage to feeding voltage) two separate measurements were made; u_m and E being measured by the same device. Another factor was the unstableness of the feeding voltage. There was no stabilizer available and the rise up of voltage was possible between measuring E and u_m .

The shortest oscillatory surges were extraordinarily difficult to record. After the extinction of oscillations there remains a low steady state voltage. The spot caused by them being unfocused enlightens the whole screen and eclipses the spot caused by the crest voltage. It would be possible to overcome this obstacle by chopping the surge soon after the crest but the cut off set is not used because it may disturb the accuracy of crest voltage calculations since it introduces new and unstable stray capacitances.

It seems necessary to emphasize that all the errors considered above concern single surge recording. By repeating two or three surges for one record it is possible to reduce the errors significantly.

The prototype device has a small capacitance (about 50 pF) a rather great resistance (some MΩ-s) and is applicable in model tests of atmospheric overvoltages in electrical equipments.

ALOJZY SPICHALSKI

Wpływ skaz na rozkład pola w szynie kolejowej i wytyczne dla defektoskopii magnetycznej¹⁾

1. ANALITYCZNE WYZNACZANIE POLA W SZTABIE PROSTOKĄTNEJ Z CIENKĄ SZCZELINĄ POPRZECZNĄ

Spośród skaz w szynach najczęstsze i najniebezpieczniejsze są cienkie skazy poprzeczne zmęczeniowe. W celu wykrywania ich wykorzystuje się zjawisko deformacji wzdłużnego pola prądowego lub magnetycznego. Za wskaźniki deformacji pola można uważać maksymalny stopień niejednostojności pola przy powierzchni szyny oraz średni zasięg skazy.

W celu uproszczenia zagadnienia rozpatruje się najpierw rozkład pola w zastępczej sztabie prostokątnej z cienką szczeliną u dołu. Drogą stopniowych przekształceń konforemnych otrzymuje się wzór na strukturę pola, z którego oblicza się wskaźniki deformacji na górnej i dolnej powierzchni sztaby. Dla skaz mniejszych od 15% przekroju sztaby stosować można wzory przybliżone. Rozważania dają się rozszerzyć dla skazy w położeniu środkowym i górnym. Wyniki ujęto tabelarycznie i graficznie. Skaza w położeniu dolnym, stanowiąca ósmą część przekroju sztaby, czyli 12,5% wywołuje stopień niejednostojności pola równy 1,96%, a jej średni zasięg wynosi nieco ponad połowę wysokości sztaby.

1. WSTĘP

Przy konstrukcji defektoskopu szynowego do wykrywania wad wewnętrznych w szynach kolejowych na czoło zagadnień wysuwa się deformacja pola prądowego i magnetycznego w otoczeniu wykrywanych wad materiałowych. Z punktu widzenia defektoskopii wady w szynie można podzielić następująco:

¹⁾ Całość pracy składa się z pięciu części. W niniejszym zeszycie zamieszczono trzy z nich. W zeszycie następnym będą opublikowane: część czwarta „Właściwości defektoskopii magnetycznej w porównaniu z prądową” oraz część piąta „Praca czujnika cewkowego w polu magnetycznym przy defektoskopii szynowej”.

a) Jamy usadowe. Występują one bądź w postaci pojedynczego otworu, bądź też jako szereg nieciągłości wewnętrznych wypełnionych zwykłą żuźlem.

b) Pęknięcia. Pojawiają się one najczęściej w czasie pracy jako skazy zmęczeniowe w płaszczyźnie poprzecznej. Grupują się w pobliżu bardzo drobnych nieciągłości, rzadziej wypełnionych żuźlem, pęcherzy gazowych i zanieczyszczeń. Szczególnie wydzielenie fosforu jest przyczyną kruchości i pęknięć tak przy walcowaniu, jak i podczas eksploatacji.

c) Nieciągłość struktury. Na skutek różnej zawartości węgla, fosforu i siarki w górnej i dolnej części wlewka wystąpić mogą po walcowaniu skupiska o różnym składzie chemicznym, a zatem nierównomierność przewodności elektrycznej i przenikalności magnetycznej. Zjawisko takie wiąże się również z transkrystalizacją, czyli występowaniem kryształów słupkowych w czasie krzepnięcia [6].

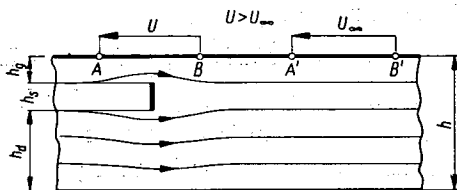
Szyna dostarczona do eksploatacji powinna być wolna od większych jam usadowych i pęknięć. Drobne natomiast skazy w miejscach zanieczyszczeń i nieciągłości struktury stopniowo powiększają się w czasie ruchu przybierając niebezpieczne rozmiary. Najczęstsze i najniebezpieczniejsze są pęknięcia poprzeczne i na nie właśnie powinna być uczulona metoda wykrywania skaz w szynie kolejowej.

Tej samej wielkości skaza umieszczona w stopce szyny jest na ogół bardziej niebezpieczna niż położona w główce lub szyjce. Pewną miarą niebezpieczeństwa skazy może być rzut jej powierzchni na poprzeczny przekrój szyny. Stosunek powierzchni tego rzutu s do całkowitej powierzchni szyny S określamy jako względną wielkość skazy: $\varepsilon_s = s/S$. Za niebezpieczną dla ruchu uważa się w kolejnictwie skazę o względnej wielkości 10%. Tej wielkości skazę defektoskop powinien wykrywać w sposób niezawodny i to w czasie ruchu z prędkością 10 km/godz. Zmniejszenie szybkości wykrywania jest dopuszczalne jedynie wtedy, gdy istnieje możliwość łatwego usunięcia defektoskopu z toru kolejowego.

1.2. Zasada defektoskopii prądowej i magnetycznej

W celu wykrywania skaz wykorzystuje się zjawisko deformacji pola prądowego lub magnetycznego w sąsiedztwie skazy. Pole prądowe charakteryzuje się wektorem natężenia pola $\vec{K}$ względnie gęstością prądu $\vec{\sigma}$, pole magnetyczne wektorem natężenia pola $\vec{H}$ względnie indukcją magnetyczną $\vec{B}$. W ośrodku izotropowym jest $\vec{\sigma} = \gamma \cdot \vec{K}$ oraz $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$. W zdrowej szynie pole ma przebieg jednostajny. Natężenie pola w szynie i tuż nad jej powierzchnią nie zmienia się w czasie jazdy defektoskopu, jeśli prąd I względnie strumień magnetyczny Φ , przewodność γ względnie prze-

nikalność μ zachowują stałość w czasie. Skaza deformuje pole, jak pokazano na rysunku 1.



Rys. 1. Deformacja pola prądowego pod wpływem skazy

Napięcie zarówno elektryczne, jak i magnetyczne rośnie.

$$U_e = \int_A^B \vec{K} \cdot d\vec{l}; \quad U_m = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{l}.$$

Czujniki elektryczne, a częściowo i magnetyczne reagują na różnicę napięcia w stosunku do napięcia w miejscu zdrowym, mianowicie: $\varepsilon_U = \frac{U - U_\infty}{U_\infty}$, gdzie U — napięcie poza zasięgiem skazy. Stosunkowy przyrost napięcia jest zwykle mniejszy od względnego przyrostu gęstości prądu w polu prądowym lub przyrostu indukcji w polu magnetycznym. Te względne przyrosty gęstości prądu oraz indukcji magnetycznej określać będziemy jako stopień niejednostajności pola prądowego, względnie magnetycznego:

$$\varepsilon_\sigma = \frac{\sigma - \sigma_\infty}{\sigma_\infty}; \quad \varepsilon_B = \frac{B - B_\infty}{B_\infty}. \quad (1)$$

Stopień niejednostajności pola przy powierzchni szyny jest istotnym czynnikiem, od którego zależy wielkość impulsu czujnika wykrywającego skazę.

W polu prądowym nawet bardzo cienka skaza przedstawia dla prądu oporność praktycznie nieskończenie dużą, natomiast w polu magnetycznym opór magnetyczny cienkich pęknięć może mieć duży wpływ na rozkład pola, które stosunkowo łatwo przenika przez cienkie skazy, gdyż względna maksymalna przenikalność magnetyczna stali szynowej wynosi tylko około 500. Pole prądowe wykrywa więc skuteczniej cienkie pęknięcia poprzeczne niż pole magnetyczne.

1.3. Struktura pola w sztabie prostokątnej

Pole prądowe charakteryzuje się wektorem gęstości prądu $\vec{\sigma}$ lub natężenia pola $\vec{K}$. Podstawowe równania wektorowe takiego pola znane są

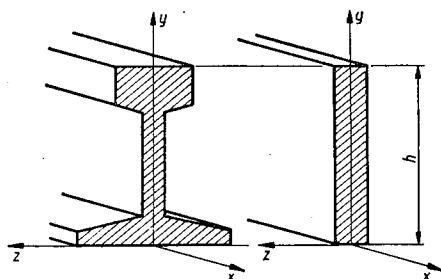
w literaturze [7] w postaci:

$$\operatorname{div} \bar{\sigma} = 0, \quad \operatorname{rot} \bar{K} = 0, \quad \bar{\sigma} = \gamma \cdot \bar{K};$$

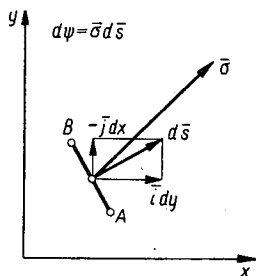
analogicznie jest dla pola magnetycznego:

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \bar{H} = 0, \quad \bar{B} = \mu \cdot \bar{H}.$$

Równania powyższe z uwzględnieniem warunków brzegowych, jakie zaistnieją w obecności szkazy, pozwalają obliczyć rozkład pola w szynie. Dla rzeczywistego przekroju szyny obliczenia te są jednak praktycznie nie-



Rys. 2. Zastąpienie szyny sztabą prostokątną



Rys. 3. Wyznaczenie przyrostu strumienia

możliwe. Rozpatrzmy więc zjawiska najpierw na przykładzie płaskiej sztaby prostokątnej o wysokości równej wysokości szyny, jak na rysunku 2. Znika wówczas składowa pola w kierunku osi z i otrzymuje się pole płaskie, gdzie gęstość prądu i natężenie pola wyniosą:

$$\bar{\sigma} = \vec{i} \cdot \sigma_x + \vec{j} \cdot \sigma_y \quad \text{oraz} \quad \bar{K} = \vec{i} \cdot K_x + \vec{j} \cdot K_y.$$

Podstawowe zaś równania pola przybiorą postać:

$$\operatorname{div} \bar{\sigma} = \nabla \cdot \bar{\sigma} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \bar{K} = \nabla \times \bar{K} = \frac{\partial K_y}{\partial x} - \frac{\partial K_x}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Elementarny strumień wektora gęstości prądu $\bar{\sigma}$, objęty powierzchnią $d\vec{s}$ zgodnie z rysunkiem 3 wyraża prąd przepływający przez tę powierzchnię:

$$d\psi = \bar{\sigma} \cdot d\vec{s} = [\vec{i} \cdot \sigma_x + \vec{j} \cdot \sigma_y] [\vec{i} \cdot dy - \vec{j} \cdot dx] = -\sigma_y \cdot dx + \sigma_x \cdot dy. \quad (4)$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym do tego, aby wyrażenie (4) było różniczką zupełną, jest spełnienie zależności (2). Wobec tego funkcja ψ pozwala wyrazić składowe gęstości prądu jako:

$$\sigma_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \sigma_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (5)$$

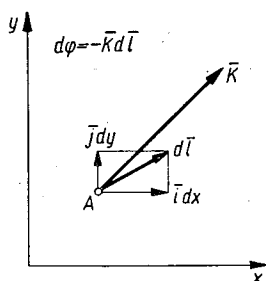
oraz:

$$\bar{\sigma} = \bar{i} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \bar{j} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (6)$$

Prąd zaś przepływający przez dowolny przekrój $A-B$ zależy jedynie od różnicy funkcji ψ w punktach A i B .

$$I = \int_A^B \bar{\sigma} \cdot d\bar{s} = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A \quad \text{oraz} \quad \oint \bar{\sigma} \cdot d\bar{s} = 0.$$

Linia $\psi = \text{const}$ jest w każdym punkcie styczna do wektora gęstości prądu, co wynika z równania (4) dla $d\psi = 0$. Skalarną funkcję ψ , pozwalającą wyznaczyć zarówno prąd, jak i gęstość prądu pola bezźródłowego bę-



Rys. 4. Wyznaczenie przyrostu potencjału

dziemy nazywaliśmy funkcją prądu lub funkcją gęstości prądu, a w polu magnetycznym funkcją strumienia lub funkcją indukcji.

W polu określonym wektorem $\vec{K}$ lub $\vec{H}$ elementarna praca potrzebna do transportu jednostki ładunku na długości odcinka $d\vec{l} = \bar{i} \cdot dx + \bar{j} \cdot dy$ jest miarą napięcia na tym odcinku. Stosownie do rysunku 4 mamy:

$$\begin{aligned} d\varphi &= -\vec{K} \cdot d\vec{l} = -[\bar{i} \cdot K_x + \bar{j} \cdot K_y][\bar{i} \cdot dx + \bar{j} \cdot dy] = \\ &= -[K_x \cdot dx + K_y \cdot dy]. \end{aligned} \quad (7)$$

Zgodnie ze wzorem (3) wyrażenie (7) jest różniczką zupełną. Wobec tego analogicznie jak poprzednio natężenie:

$$\begin{aligned} K_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad K_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \vec{K} &= -\left[\bar{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] = -\nabla \varphi, \end{aligned} \quad (8)$$

a napięcie:

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{K} \cdot d\vec{l} = \int_B^A d\varphi = \varphi_A - \varphi_B \quad \text{oraz} \quad \oint \vec{K} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Linia $\varphi = \text{const}$ jest w każdym punkcie prostopadła do wektora natężenia pola, co wynika z równania (7) dla $d\varphi = 0$. Skalarną funkcję φ , pozwalającą wyznaczyć natężenie i napięcie pola bezwiorowego, nazywa się potencjałem.

Funkcje ψ i φ mają następujące własności. Na podstawie wzoru $\bar{\sigma} = \gamma \cdot \bar{K}$ i zależności (5) i (8) można wypisać:

$$\sigma_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \sigma_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (9)$$

Różniczkując pierwsze równanie względem y a drugie względem x otrzymamy:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad \text{czyli} \quad \nabla^2 \psi = 0.$$

Po zmianie kolejności różniczkowania będzie:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \text{czyli} \quad \nabla^2 \varphi = 0.$$

Są to więc funkcje harmoniczne i sprzężone. Znając jedną z nich można określić drugą. Na podstawie równania (7) jest:

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \int_0^A [-K_x \cdot dx - K_y \cdot dy] + \varphi_0 = \\ &= \frac{1}{\gamma} \int_0^A \left[-\frac{\partial \psi}{\partial y} dx + \frac{\partial \psi}{\partial x} dy \right] + \varphi_0. \end{aligned}$$

Z równania (4) otrzymuje się analogicznie:

$$\psi_A = \gamma \cdot \int_0^A \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} dx - \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy \right] + \psi_0.$$

Struktura pola jest wyznaczona w szabie prostokątnej przez jedną z funkcji sprzężonych prądu lub potencjału oraz przewodność γ .

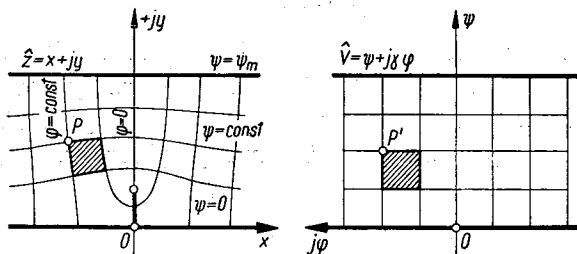
Równania (9) stanowią warunki Cauchy'ego na regularność następującej funkcji zmiennej zespolonej:

$$\hat{V} = \psi + j\gamma\varphi = F(\hat{z}), \quad (10)$$

gdzie $\hat{z} = x + jy$.

Stosownie do rysunku 5 funkcja $\hat{V} = F(\hat{z})$ odwzorowuje konforemnie badany obszar szabły ze skazą „z” na pas „V”. Dolny brzeg obszaru szabły odwzorowuje się jako $\psi = 0$, a górny jako $\psi = \psi_m$. Przyjmujemy poza tym $\varphi = 0$ dla $x = 0$. Dla każdego punktu obszaru „z”, w szczególności

np. węzła siatki prostokątnej P funkcja odwzorowania pozwala wyznaczyć odpowiadający punkt P' obszaru „ V ” o współrzędnych ψ i φ . Zależność odwrotna: $z = f(\hat{V})$ umożliwia bezpośrednio wykreślenie linii stałego strumienia i potencjału w sztabie jako siatki krzywoliniowej.



Rys. 5. Odwzorowanie sztaby z wcięciem na pas

Wektor gęstości prądu w postaci symbolicznej wyniesie z równania (6)

$$\hat{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - j \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$\hat{\sigma} = -j \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} + j \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] = -j \hat{\nabla} \psi \quad (11)$$

lub z równania (8)

$$\hat{\sigma} = \gamma \bar{K} = -\gamma \hat{\nabla} \varphi. \quad (11a)$$

Gradyenty $\hat{\nabla} \psi$ i $\hat{\nabla} \varphi$ są wzajemnie prostopadłe, gdyż z (11) i (11a) wynika: $\gamma \hat{\nabla} \varphi = j \hat{\nabla} \psi$. Gęstość prądu można także obliczyć z pochodnej funkcji odwzorowania:

$$\hat{V}'(\hat{z}) = \frac{\partial \psi}{\partial x} + j \cdot \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} - j \frac{\partial \psi}{\partial y} = \check{\nabla} \psi.$$

Równanie (11) przekształci się jako:

$$\hat{\sigma} = -j \cdot \check{V}'(\hat{z}). \quad (11b)$$

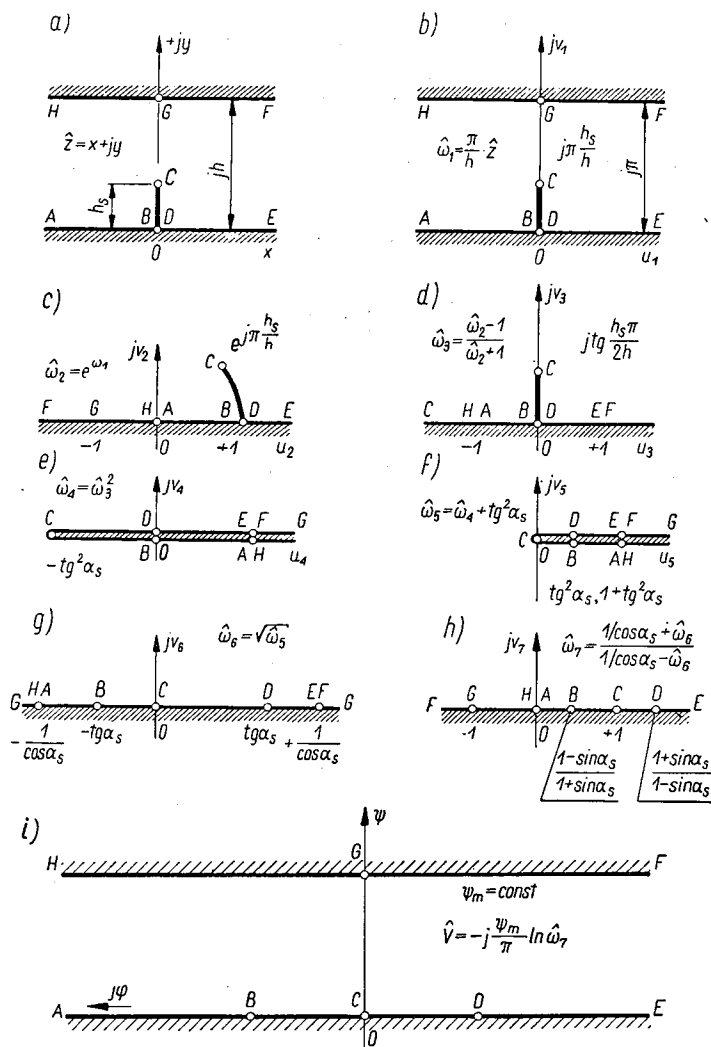
Trudność zagadnienia polega na znalezieniu drogą analityczną skomplikowanej zwykle funkcji odwzorowania i obliczenia za jej pomocą poszczególnych wartości ψ i φ w punktach węzłowych siatki. W ogólnym przypadku jak na rysunku 1 skaza poprzeczna deformuje pole przy powierzchni w zależności od jej względnej wielkości h_s/h , odległości pionowej górnej krawędzi skazy h_g/h i odległości poziomej od płaszczyzny skazy x/h . Stopień niejednorodności pola na górnej powierzchni sztaby wyrazi się więc jako:

$$\varepsilon_B = f\left(\frac{h_s}{h}, \frac{h_g}{h}, \frac{x}{h}\right).$$

Stosunkowo proste odwzorowanie otrzymuje się jedynie dla skazy w położeniu dolnym, środkowym i górnym.

1.4. Odwzorowanie skazy w położeniu dolnym

Zadaniem naszym jest odwzorować dany obszar „z” na rys. 6a na pas o szerokości ψ_m tak, aby punkty A, H i E, F leżały w nieskończoności, analogicznie jak w obszarze początkowym. Funkcja wykładnicza przekształca pas poziomy o szerokości π na półpłaszczyznę górną. Dlatego



Rys. 6. Kolejność stopniowego przekształcania sztaby ze skazą w położeniu dolnym

przekształcimy najpierw początkowy obszar „ z ” na podobny, ale o szerokości π — stosownie do rysunku 6b — za pomocą odwzorowania (wzorujemy się przy tym na podobnym zagadnieniu z hydrodynamiki [1]):

$$\hat{\omega}_1 = \frac{\pi}{h} \hat{z}.$$

Funkcja wykładnicza odwzorowuje obszar „ ω_1 ” na półpłaszczyznę górną z wcięciem łukowym, jak widać na rysunku 6c.

$$\hat{\omega}_2 = \exp \hat{\omega}_1 = \exp \frac{\pi}{h} \hat{z}.$$

Z kolei odwzorowanie homograficzne przekształca wcięcie łukowe na proste stosownie do rysunku 6d:

$$\hat{\omega}_3 = \frac{\hat{\omega}_2 - 1}{\hat{\omega}_2 + 1} = \frac{\exp \hat{\omega}_1 - 1}{\exp \hat{\omega}_1 + 1} = \operatorname{tgh} \frac{\hat{\omega}_1}{2} = \operatorname{tgh} \frac{\pi \hat{z}}{2h} = \operatorname{tgh} \alpha_z.$$

W celu zlikwidowania kątów w punktach B i D korzystamy z odwzorowania jak na rysunku 6e:

$$\hat{\omega}_4 = \hat{\omega}_3^2 = \operatorname{tgh}^2 \alpha_z.$$

Następnie przesuwamy początek układu do punktu C o odciętej:

$$- \operatorname{tgh}^2 \frac{\pi \cdot h_s}{2h} = - \operatorname{tgh}^2 \alpha_s. \text{ Otrzymujemy zgodnie z rysunkiem 6f:}$$

$$\hat{\omega}_5 = \hat{\omega}_4 + \operatorname{tgh}^2 \alpha_s = \operatorname{tgh}^2 \alpha_z + \operatorname{tgh}^2 \alpha_s.$$

Stosownie do rysunku 6g wracamy ponownie do półpłaszczyzny górnej przez podstawienie:

$$\hat{\omega}_6 = \sqrt{\hat{\omega}_5} = \sqrt{\operatorname{tgh}^2 \alpha_z + \operatorname{tgh}^2 \alpha_s}.$$

Odcięte punktów HA i EF wynoszą tu odpowiednio — $1/\cos \alpha_s$ oraz $+1/\cos \alpha_s$. Odcinek ABCD odpowiadający dolnej krawędzi początkowego obszaru przekształcamy na pół dodatnią półpłaszczyzny górnej przez odwzorowanie homograficzne jak na rysunku 6h:

$$\hat{\omega}_7 = \frac{1/\cos \alpha_s + \hat{\omega}_6}{1/\cos \alpha_s - \hat{\omega}_6} = \frac{1 + \cos \alpha_s \sqrt{\operatorname{tgh}^2 \alpha_z + \operatorname{tgh}^2 \alpha_s}}{1 - \cos \alpha_s \sqrt{\operatorname{tgh}^2 \alpha_z + \operatorname{tgh}^2 \alpha_s}}.$$

Ostatecznie przekształcamy półpłaszczyznę górną na pas o szerokości ψ_m przyjmując zwroty osi rzeczywistej i urojonej jak na rysunku 6i. Otrzymujemy:

$$\hat{V} = -j \frac{\psi_m}{\pi} \cdot \ln \hat{\omega}_7,$$

$$\hat{V} = -j \frac{\psi_m}{\pi} \cdot \ln \frac{1 + \cos \alpha_s \sqrt{\operatorname{tgh}^2 \alpha_z + \operatorname{tgh}^2 \alpha_s}}{1 - \cos \alpha_s \sqrt{\operatorname{tgh}^2 \alpha_z + \operatorname{tgh}^2 \alpha_s}}. \quad (12)$$

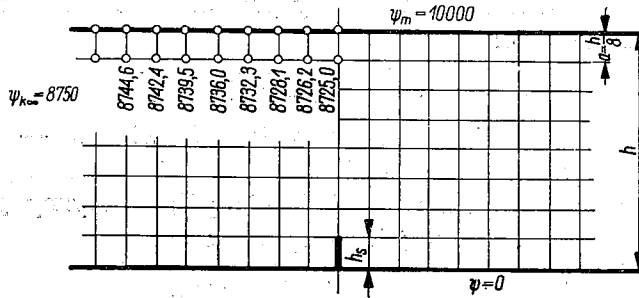
Funkcja odwzorowania pola, krótko — funkcja pola, pozwala każdemu punktowi $\hat{z}$ obszaru „z” podporządkować odpowiadający mu punkt w obszarze „V”, czyli znaleźć współrzędne ψ i φ . Odwrotna funkcja pola $\hat{z} = f(\hat{V})$ pozwalająca określić współrzędne linii prądu i potencjału $\psi = \text{const}$ oraz $\varphi = \text{const}$ da się przedstawić następująco:

$$\hat{z} = \frac{2 \cdot h}{\pi} \cdot \text{Artgh} \left[\frac{1}{\cos \alpha_s} \sqrt{\text{tgh}^2 j \frac{\pi \hat{V}}{2 \cdot \psi_m} - \sin^2 \alpha_s} \right], \quad (13)$$

We wzorach (12) i (13) $\alpha_s = \frac{\pi h_s}{2h}$ oraz $\alpha_z = \frac{\pi \hat{z}}{2h}$.

Obok stosunkowo prostej metody stopniowego przekształcania obszaru początkowego istnieje metoda ogólniejsza, pozwalająca na odwzorowanie obszarów wielokątnych na półpłaszczyznę górną i odwrotnie za pomocą całki Christoffel-Schwarza. Metoda ta daje identyczne rozwiązanie, ale na nieco dłuższej drodze.

W obliczeniach praktycznych interesować nas będzie pole na górnej powierzchni sztaby, gdzie założyć można $\psi_m = 10000$ jednostek oraz pole w sąsiedztwie określone przez ψ_K . Dzielimy wysokość sztaby h na 8 różnych części i wprowadzamy siatkę kwadratową o boku $a = \frac{h}{8}$. Współ-



Rys. 7. Węzłowe wartości funkcji prądu dla skazy w położeniu dolnym $h_s/h = 1/8$

rzędne pola ψ i φ obliczymy dla $y/h = 1$ wzgl. $7/8$ oraz dla x/h od 0 do $7/8$ w odstępach co $1/8$.

Jeśli wysokość skazy $h_s = 0$, to równanie (12) przybierze postać pola równomiernego, jakie istnieje w znacznym oddaleniu od skazy:

$$\hat{V}_\infty = \psi_m \frac{y}{h} - j \cdot \psi_m \frac{x}{h} = \psi_\infty + j \cdot \gamma \varphi_\infty.$$

Stąd

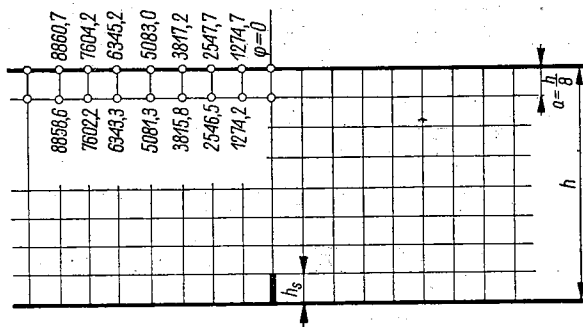
$$\psi_{\infty} = \psi_m \frac{y}{h} \text{ oraz } \varphi_{\infty} = -\frac{1}{\gamma} \psi_m \frac{x}{h}. \quad (14)$$

Skaza deformuje równomierność pola. Na pole początkowe $\hat{V}_{\infty}$ nakłada się niejako pole dopełniające $\hat{V}_s$ wywołane obecnością skazy.

$$\hat{V} = \hat{V}_{\infty} + \hat{V}_s. \quad (15)$$

Na rysunkach 7 i 8 wpisano węzłowe wartości funkcji ψ i $\varphi\gamma$ dla $\psi_m = 10000$ jednostek. Wartości węzłowe funkcji ψ pozwalają obliczyć interesujący nas stopień niejednostajności, czyli zniekształcenia pola, wyrażony wzorem (1). Dla składowej poziomej gęstości prądu będzie:

$$\varepsilon_{\sigma} = \frac{\sigma_x - \sigma_{x\infty}}{\sigma_{x\infty}}.$$



Rys. 8. Węzłowe wartości potencjału dla skazy w położeniu dolnym $h_s/h = 1/8$

Zastępując we wzorze (5) pochodną cząstkową stosunkiem przyrostów otrzymujemy:

$$\sigma_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\psi_m - \psi_K}{a}$$

i analogicznie:

$$\sigma_{x\infty} = \frac{\psi_m - \psi_{K\infty}}{a}.$$

Ostatecznie:

$$\varepsilon_{\sigma} = \frac{\psi_{K\infty} - \psi_K}{\psi_m - \psi_K}. \quad (16)$$

W analogiczny sposób można by korzystać z przyrostów potencjału na podstawie wzoru (8).

Obliczony ze wzoru (16) stopień niejednostajności pola zestawiono w tabelicy 1.

Tablica 1

Stopień niejednostajności pola dla skaży w położeniu dolnym [‰]

$$\epsilon_{\sigma} = f\left(\frac{x}{h}\right) \text{ dla } y = h, h_s = h/8.$$

x/h	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8
Wzór (16)	1,96	1,87	1,68	1,40	1,11	0,83	0,60	0,43
Wzór (18)	1,96	1,88	1,68	1,39	1,10	0,83	0,60	0,43

1.5. Stopień niejednostajności pola i średni zasięg skaży

Stopień niejednostajności pola obliczony z wartości węzłowych jest obarczony uchybem na skutek zastąpienia pochodnej stosunkiem przyróżstów skończonych. Dokładną jego wartość oblicza się za pośrednictwem równania (11b). Pochodną funkcji pola (12) przedstawić można ostatecznie jako:

$$\hat{V}'(z) = \frac{-j\psi_m}{h \cdot \cos \alpha_s \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_s \cdot \operatorname{cth}^2 \alpha_z}}.$$

Dla punktów na górnej powierzchni sztaby jest $\hat{z} = x + jh$ i wtedy:

$$\operatorname{cth} \alpha_z = \operatorname{cth} \frac{\pi}{2 \cdot h} (x + jh) = -\operatorname{th} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{h} = -\operatorname{th} \alpha_x.$$

Gęstość prądu przy powierzchni sztaby wyniesie zatem stosownie do równania (11b)

$$\sigma_g = \frac{\psi_m}{h \cdot \cos \alpha_s \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_s \cdot \operatorname{th}^2 \alpha_x}}. \quad (17)$$

Dla $\sigma_{g\infty} = \frac{\psi_m}{h}$ stopień niejednostajności pola zgodnie ze wzorem (1) wyrazi się jako:

$$\epsilon_{\sigma} = \frac{1}{\cos \alpha_s \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_s \cdot \operatorname{th}^2 \alpha_x}} - 1. \quad (18)$$

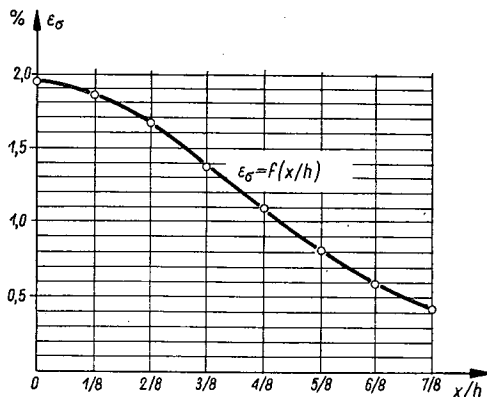
Największy stopień niejednostajności pola otrzymuje się nad skażą dla $x = 0$.

$$\epsilon_{\sigma 0} = \frac{1}{\cos \alpha_s} - 1. \quad (19)$$

Dla małych skaż jest w przybliżeniu:

$$\epsilon_{\sigma 0} \approx 1,25 \left[\frac{h_s}{h} \right]^2. \quad (19a)$$

Przebieg stopnia niejednostajności pola wyrażony wzorem (18) wpisano dla porównania w tablicy 1 i przedstawiono wykreślnie na rysunku 9.



Rys. 9. Stopień niejednostajności pola dla skazy w położeniu dolnym dla $y = h$ oraz $h_s = h/8$

Nie różni się on praktycznie od obliczonego na podstawie węzłowych wartości funkcji prądu ψ w siatce o boku $a = h/8$.

Wartości stopnia niejednostajności pola tuż nad skazą określone wzorem (19) i (19a) zestawiono w tablicy 2.

Tablica 2

Maksymalny stopień niejednostajności pola w zależności od względnej wielkości skazy

h_s/h		0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30
$\varepsilon_{\sigma 0}$	wg (19)	0	0,31	1,25	2,84	5,15	8,24	10,45
	%	0	0,31	1,25	2,82	5,00	7,80	11,22

Z porównania widać, że dla względnej wartości skazy $h_s/h = 0,2$ uchyb zaokrąglenia nie przekracza 3%, a dla $h_s/h = 0,15$ tylko 0,7%. Na podstawie doświadczeń w wannie elektrolitycznej przekonaliśmy się, że zależność kwadratowa (19a) utrzymuje się także w dowolnym miejscu dla rzeczywistego profilu szyny z tym, że zamiast współczynnika 1,25 wchodzi inny współczynnik, zależny od profilu i miejsca położenia skazy.

Obok maksymalnego zniekształcenia pola nad miejscem skazy ważny dla defektoskopii jest również jej średni zasięg. Jest to odległość od skazy w kierunku poziomym na powierzchni, gdzie stopień niejednostajności pola spada do połowy. Średni zasięg skazy obliczamy z równania:

$$\frac{\varepsilon_\sigma}{\varepsilon_{\sigma 0}} = \frac{1}{2}$$

Po podstawieniu wzorów (18) i (19) i rozwiązaniu średni zasięg skazy wyrazi się następującym wzorem:

$$\frac{x_{sr}}{h} = \frac{2}{\pi} \cdot \text{Arth} \frac{1}{\text{tg } \alpha_s} \sqrt{\left[\frac{2}{\cos \alpha_s + 1} \right]^2 - 1}. \quad (20)$$

Dla małych skaz, jeśli h_s/h nie przekracza 10%, otrzymamy przy szeregu uproszczeń w przybliżeniu stałą wartość: $\frac{x_{sr}}{h} = 0,562$. W miarę zwiększania się skazy jej średni zasięg nieco maleje. Zależność tę przedstawiono w tablicy 3.

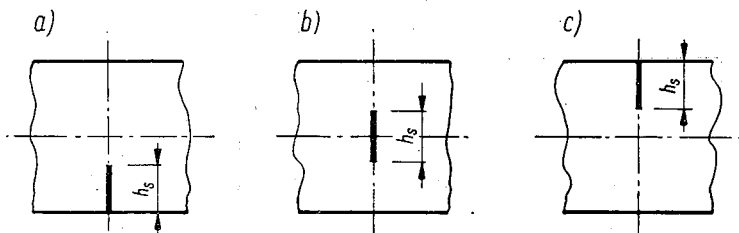
Tablica 3

Średni zasięg skazy w zależności od jej względnej wielkości

$\frac{h_s}{h}$	0	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
$\frac{x_{sr}}{h}$	0,562	0,558	0,551	0,542	0,536	0,526	0,506	0,494	0,460

Dla skaz spotykanych w praktyce i położonych w dolnej części sztaby średni zasięg jest praktycznie stały i przekracza nieco połowę wysokości sztaby.

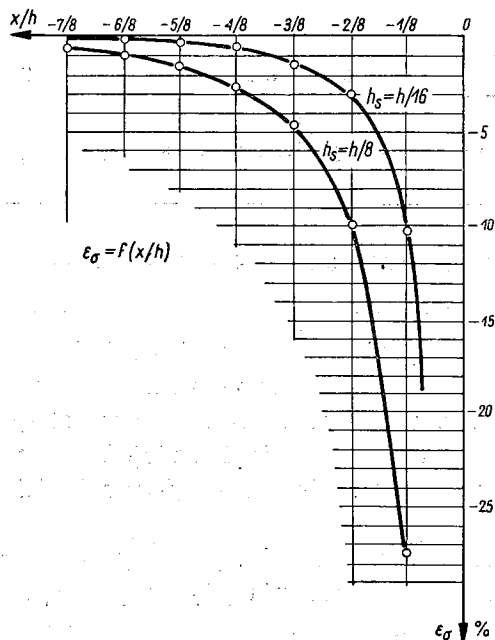
Zajmiemy się teraz przypadkiem, gdy skaza z położenia dolnego przesuwają się w górę ku powierzchni. Z ciągłości przebiegu wyodrębnić moż-



Rys. 10. Skaza w położeniach specjalnych

na przypadki specjalne, gdy skaza z położenia dolnego znajdzie się w środku sztaby, a następnie przyjmie położenie górne jak na rys. 10. W położeniu środkowym strumień opływa skazę symetrycznie do linii poziomej przechodzącej przez środek skazy. Przypadek ten da się więc sprowadzić do poprzedniego. Zakładając na linii środkowej $\psi = 0$ otrzymamy na powierzchni szyny $\psi_m/2$ oraz dwukrotne zmniejszenie zarówno wysokości sztaby, jak i skazy. W tych warunkach wzory na gęstość prądu (17) i maksymalny stopień niejednostajności pola nad skazą (19) pozostają bez zmian. Zmniejszy się jedynie dwukrotnie średni zasięg skazy, wyrażony wzorem (20).

Przebieg pola w położeniu górnym c) jest symetryczny do przebiegu pola w dolnym położeniu skazy a). Zamiast rozpatrywać stopień niejednorodności pola na górnej powierzchni w przypadku c) rozpatrzmy tę



Rys. 11. Stopień niejednorodności pola przy skazie w położeniu górnym dla $h_s = \frac{h}{8}$ i $h_s = \frac{h}{16}$

niejednorodność na dolnej powierzchni w przypadku a). Wzór na gęstość prądu przy dolnej powierzchni zmieni się nieco w porównaniu ze wzorem (17), gdyż będzie tu $\hat{z} = x$, więc $\text{cth } \alpha_z = \text{cth } \alpha_x$, a zatem:

$$\varepsilon_\sigma = \frac{1}{\cos \alpha_s \sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha_s \cdot \text{cth}^2 \alpha_x}} - 1. \quad (21)$$

Stopień niejednorodności pola wypada tu ujemny, a dla $x = 0$ mamy $\varepsilon_{\sigma 0} = -1$. Na rysunku 11 przedstawiono przebieg stopnia niejednorodności pola dla skazy w położeniu górnym, a w tablicy 4 zestawiono poszczególne wartości.

Dla oceny wpływu wielkości skazy na stopień niejednorodności pola powtórzyliśmy obliczenia zakładając skazę dwukrotnie mniejszą. Nad skazą w położeniu górnym stopień niejednorodności niezależnie od wielkości skazy wynosi stale -100% . Przyczyną tego zjawiska jest to, że gęstość prądu wewnątrz kąta prostego przy narożu jest równa zero. Wykrywalność skazy nie zależy jednak wyłącznie od stopnia niejednorodności

Tablica 4

Stopień niejednostajności pola
dla skazy w położeniu górnym wyrażony w %
 $\varepsilon_\sigma = f\left(\frac{x}{h}\right)$ dla $y = h$, $h_s = h/8$ i $h_s = h/16$

x/h	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8	8/8
dla $h_s = \frac{h}{8}$	-100	-28,5	-10,0	-4,5	-2,5	-1,5	-1,0	-0,6	-0,4
dla $h_s = \frac{h}{16}$	-100	-10,3	-3,0	-1,4	-0,7	-0,4	-0,22	-0,12	-0,05

pola. W zależności od rodzaju i konstrukcji czujnika wykrywającego duży wpływ może tu mieć sam rozkład pola na powierzchni, w szczególności średni zasięg skazy. W położeniu dolnym przy stałym prawie zasięgu skazy o wykrywalności decydował stopień niejednostajności, tu natomiast przy stałym stopniu niejednostajności o wykrywalności decyduje głównie zasięg.

W odległości średniego zasięgu skazy mamy $\varepsilon_\sigma = -0,5$. Podstawiając tę wartość do równania (21) otrzymamy:

$$\frac{x_{sr}}{h} = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arcth} \left[\operatorname{ctg} \alpha_s \sqrt{\frac{4}{\cos^2 \alpha_s} - 1} \right]. \quad (22)$$

Dla małych skaz, gdy h_s/h nie przekracza 10%, średni zasięg skazy można wyrazić wzorem przybliżonym:

$$\frac{x_{sr}}{h} = 0,58 \frac{h_s}{h}. \quad (22a)$$

Pewnym miernikiem wykrywalności skaz może być iloczyn stopnia niejednostajności pola i średniej rozpiętości skazy. Iloczyn ten $\varepsilon_{\sigma 0} \frac{x_{sr}}{h}$ wynosi

dla skazy 10-procentowej ze wzorów (19a), (20), (21) i (22a)
w położeniu dolnym: $1,25 \cdot 10^{-2} \cdot 0,558 = 70 \cdot 10^{-4}$,
w położeniu górnym: $-1 \cdot 0,058 = -580 \cdot 10^{-4}$.

Wykrywalność skazy 10-procentowej w sztabie prostokątnej jest dla położenia górnego przeszło 8 razy większa niż dla położenia dolnego.

1.6. Uwagi końcowe

Analityczne wyznaczenie przebiegu pola daje się przeprowadzić stosunkowo prosto jedynie dla trzech zasadniczych położzeń skazy u dołu,

w środku i na górze szyny. Struktura pola w sztabie prostokątnej odbiega przy tym zasadniczo od struktury w szynie rzeczywistej. Znaczenie metody analitycznej opiera się jednak na następujących właściwościach.

a) Metoda ta w pewnym stopniu obrazuje przebieg pola w główce szyny przy położeniu skazy w górnej, środkowej i dolnej części główki, którą można w przybliżeniu rozpatrywać niezależnie od szyjki i stopki.

b) Metoda analityczna jest metodą ścisłą i pozwala skontrolować wyniki otrzymane doświadczalnie przy pomiarach w wannie elektrolitycznej, która może być następnie użyta do odwzorowania rzeczywistego przekroju szyny.

c) Przez porównanie z metodą analityczną można też przeprowadzić dyskusję dokładności metody numerycznej, która w skomplikowanych przypadkach znacznie szybciej prowadzi do celu z wystarczającą dla praktyki dokładnością do czterech liczb znaczących.

WYKAZ LITERATURY

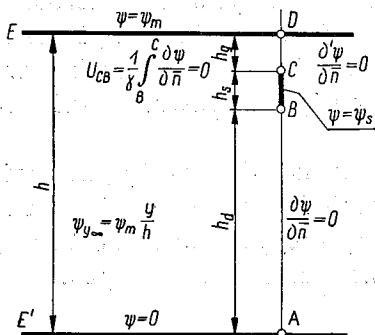
1. Fuks B. A., Szabat B. W.: Funkcje zmiennej zespolonej. PWN, Warszawa 1954.
2. Goworkow W. A.: Elektricheskie i magnitnyje pola. Swiazizdat, Moskwa 1951.
3. Jellinghaus W.: Procédés magnetiques et électriques de contrôle non destructif des pièces métalliques. — *Métaux Corros.*, t. 27, N 317, stycz. 52, str. 34.
4. Kocańda S.: Wykrywanie wad metali metodą magnetyczną. PWT, Warszawa 1957.
5. Leja F.: Teoria funkcji analitycznych. PWN, Warszawa 1957.
6. Murski C. i O'Donnell R.: Wady wyrobów walcowanych. WGH, Katowice 1955.
7. Nejman L. R., Kałantarow P. L.: Teorieticheskie osnovy elektrotechniki, cz. III. Leningrad — Moskwa 1948.
8. Walley J. W.: A Permanent-Magnet Crack Detektor. — *Engineering*, t. 176, Nr 4362, lipiec 1953.

2. NUMERYCZNE WYZNACZANIE STRUKTURY POLA W SZTABIE PROSTOKĄTNEJ PRZY SKAZIE POPRZECZNEJ W POŁOŻENIU DOWOLNYM

Dla skazy położonej dowolnie metoda analityczna jest zbyt skomplikowana. Prostsza jest tu metoda numeryczna, oparta na różnicowym równaniu pola regularnego w siatce kwadratowej. Wyznaczenie struktury pola drogą iteracji jest proste, ale zbyt wolne. Znacznie szybciej prowadzi do celu indywidualny względnie grupowy rozdział poprawek, zwłaszcza w połączeniu z metodą pola dopełniającego. Z kolei rozważa się dokładność metody numerycznej, uchyb od poprawek szczątkowych, od niewypełnienia warunków brzegowych, szczególnie jednak uchyb od niedostatecznego zagęszczenia siatki. Wymagana dokładność do czterech cyfr znaczących może być spełniona przez wprowadzenie składnika węzłowego, eliminującego wpływ niedostatecznego zagęszczenia siatki. Wyznaczono strukturę pola dla kilku pośrednich położení skazy, a wyniki przedstawiono wykreślnie.

2.1. Wstęp

Przy wyznaczaniu rozkładu pola prądowego w szynie kolejowej z cienką skazą poprzeczną zastępuje się w pierwszym przybliżeniu rzeczywisty przekrój szyny przekrojem prostokątnym o tej samej wysokości. Anality-



Rys. 1. Skaza poprzeczna w położeniu dowolnym

czne obliczenie pola daje proste wyniki jedynie wtedy, gdy skaza graniczy z dolnym lub górnym brzegiem bądź znajduje się w samym środku. W ogólnym przypadku, rys. 1, otrzymuje się obszar dwuspójny, który dla skazy poprzecznej można przedstawić jako jednospójny o określonej wartości funkcji prądu na brzegach.

Na brzegu dolnym $E'A$ mamy $\psi = 0$, na górnym funkcja prądu przyjmuje maksymalną, umowną wartość, np. $\psi_m = 10000$. Wzdłuż brzegów przewodzących AB i CD ze względów symetrii panuje stały potencjał, który zakładamy równy zero. Ostatni warunek można także przedstawić

w postaci: $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$, gdzie $\bar{n}$ oznacza wektor jednostkowy prostopadły do

brzegu obszaru w danym punkcie. Strumień wzdłuż skazy jako brzegu nieprzewodzącego jest stały, ale nie znamy jego wartości. Różnica potencjałów między punktami B i C równa się zero. Wynika stąd dodatkowy warunek:

$$U_{CB} = \frac{1}{\gamma} \int_B^C \frac{\partial \psi}{\partial n} d\bar{\tau} = 0.$$

Znamy także gęstość prądu w nieskończoności na lewo od skazy dla grubości sztaby równej przyjętej jednostce: $\sigma_\infty = \psi_m/h$ oraz funkcję prądu:

$$\psi_y = \psi_m \cdot \frac{y}{h}.$$

Z wartości funkcji prądu oraz jej pochodnej w kierunku normalnym

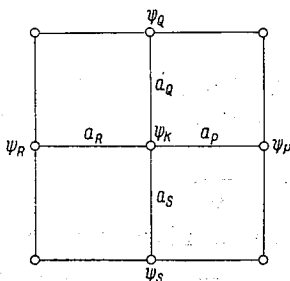
do brzegu należy teraz wyznaczyć wartość funkcji prądu wewnątrz określonego obszaru.

W postawionym zagadnieniu mamy do czynienia na części brzegu z warunkami Dirichleta, a na części z warunkami Neumanna. Dochodzi się tu do równań całkowych, których przybliżone rozwiązanie można uzyskać przez rozwiązanie układu równań algebraicznych liniowych z wieloma niewiadomymi.

2.2. Poprawki węzłowe w polu regularnym

W przeciwieństwie do metod analitycznych, które dają rozwiązanie jedynie w poszczególnych przypadkach, metoda numeryczna jest znacznie

$$a_p = a_q = a_R = a_S = a$$



Rys. 2. Fragment siatki prostokątnej

100	60	50	40	40
100	80	60	50	40
	-40/4	-10/4	-20/4	
100	60	50	40	30
	+20/4	-15/4	-10/4	
100	30	25	20	10
	+33/4	0	-5/4	
100	0	0	0	0

Rys. 3. Przykład obliczania poprawek

ogólniejsza i daje rozwiązanie z dostateczną dla praktyki dokładnością, np. do czterech cyfr znaczących. W równaniu Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

pochodne zastępujemy stosunkiem przyrostów skończonych, pokrywając obszar siatką o oczkach w postaci kwadratów z oznaczeniem jak na rysunku 2, przedstawiającym fragment takiej siatki, gdzie: $a_P = a_Q = a_R = a_S = a$. Możemy ją stosować w obszarach, w których brzegi tworzą kąty proste i są wielokrotnością przyjętego boku siatki a . Inne obszary wygodnie jest pokryć zastępczym obszarem prostokątnym tak, by obszar badany mieścił się w nim całkowicie. Warunki brzegowe obszaru zastępczego otrzymujemy z odpowiednich wzorów interpolacyjnych.

Po podstawieniu danych z rysunku 1 przepisujemy równanie Laplace'a w postaci różnicowej:

$$2 \frac{\frac{\psi_P - \psi_K}{a_P} - \frac{\psi_K - \psi_R}{a_R}}{a_P + a_R} + 2 \frac{\frac{\psi_Q - \psi_K}{a_Q} - \frac{\psi_K - \psi_S}{a_S}}{a_Q + a_S} = 0.$$

Dla oczek kwadratowych będzie:

$$\psi_K = \frac{\psi_P + \psi_Q + \psi_R + \psi_S}{4}.$$

Początkowe wartości funkcji prądu ψ_K można przyjmować dowolnie, najlepiej jednak po wykreśleniu przybliżonego obrazu pola, np. znaną metodą podobieństwa oczek prądowo-potencjalnych. Następnie dla każdego węzła obliczamy poprawkę:

$$p = \frac{\psi_R + \psi_Q + \psi_R + \psi_S}{4} - \psi_K,$$

$$p = \frac{\sum \psi - 4 \psi_K}{4} = p_\psi.$$

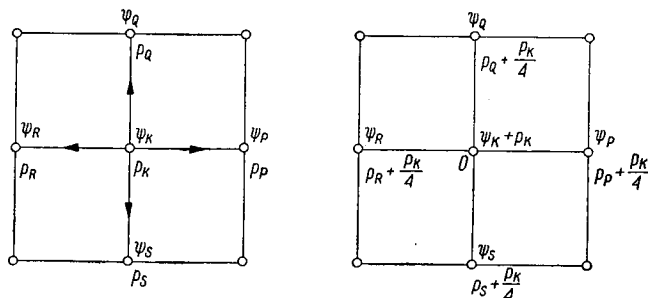
Warunkiem regularności pola jest więc:

$$p = p_\psi = 0. \quad (1)$$

Poprawkę p_ψ wpisujemy poniżej przyjętej początkowo wartości ψ_K jak w prostym przykładzie na rysunku 3. Dla węzła środkowego $\psi = 50$

$$\text{mamy np. } p_\psi = \frac{60 + 60 + 40 + 25 - 4 \cdot 50}{4} = -\frac{15}{4}.$$

W literaturze znany jest sposób rozwiązywania równań różnicowych drogą iteracji [1], [2], [5]. W odniesieniu do równania Laplace'a z pierwotnie przyjętego rozkładu funkcji ψ_{1K} tworzy się rozkład nr 2, w którym dla każdego węzła wpisuje się nową wartość, równą średniej arytmetycznej czterech węzłów sąsiednich, a następnie tworzy analogicznie układ nr 3 itd., aż układ n -ty będzie z wystarczającą dla praktyki dokładnością równy $(n-1)$ -emu. Metoda iteracji jest równoważna z dodawaniem poprawek węzłowych, wyznaczaniem nowych, powtórным dodawaniem itd.



Rys. 4. Przesuw poprawek do węzłów powiązanych

Sposób taki jest prosty, ale powolna zbieżność układów wymaga niekiedy ponad 100 iteracji w celu uzyskania dokładności do czterech liczb znaczących. Dodanie bowiem poprawki p_K w jakimkolwiek węźle pociąga

wzrost poprawek w węzłach sąsiednich, gdzie oblicza się je z uwzględnieniem wartości funkcji ψ_K dla tego węzła. Zależność tę przedstawiono na rysunku 4. W czterech węzłach sąsiednich, powiązanych z pierwotnym, pojawia się po dodaniu poprawki jej czwarta część na nowo. Po dodaniu poprawki do wartości funkcji w węźle pierwotnym należy zatem jej czwartą część dodać od razu do poprawek we wszystkich węzłach z nim powiązanych. Węzeł nie sąsiadujący z brzegiem obszaru posiada w zwykłej siatce cztery powiązane z nim węzły, sąsiadujący z brzegiem trzy, a w pobliżu naroża tylko dwa. Na brzegach o określonej wartości funkcji

	0	0	0	0	0	0
	+7/4	+6/4	+5/4	+3/4	+2/4	0
7	6	5	3	2	0	0
0	+2/4	0	+2/4	-2/4	+2/4	
16	14	11	7	3	0	0
-2/4	0	-1/4	0	+2/4	+3/4	
27	23	17	11	5	0	0
0	+1/4	0	-1/4	0	+5/4	
46	35	23	14	6	0	0
-1/4	-2/4	+1/4	0	+2/4	+6/4	
86	46	27	16	7	0	0
-160	-1/4	0	-2/4	0	+7/4	
4						

Rys. 5. Przykład rozdziału poprawki $p_0 = +160/4$

ψ poprawki bowiem nie występują. Pomimo dodawania poprawek w węzłach nie sąsiadujących z brzegiem, suma ich pozostaje bez zmian, następuje jedynie przesuwanie ich ku brzegom obszaru i dopiero dodawanie poprawek w węzłach sąsiadujących z brzegiem zmniejsza ich sumę w obszarze.

Jednostkowy przesuw poprawek rozpoczyna się od węzła o największej poprawce i kontynuuje tam przede wszystkim, gdzie poprawki są największe. Po kilku operacjach poprawki wyrównują się, przyjmując zbliżone wartości tego samego znaku. Po wielokrotnych operacjach można poprawki prawie całkowicie przesunąć z wnętrza obszaru na brzeg o określonych wartościach funkcji. Umownie będziemy uważać obszar jako wolny od poprawek, jeśli zarówno w całym obszarze, jak i dowolnej jego części będzie spełniony warunek:

$$|p| \leq 1 \quad \text{oraz} \quad \sum p \leq 5. \quad (2)$$

Założmy teraz w dostatecznie dużym obszarze pole zerowe, to jest takie, w którym wewnątrz — a więc także i na brzegach — jest wszędzie $\psi = 0$. W środkowym punkcie S tego obszaru, jak na rysunku 5, zerową poprawkę można uważać za sumę dwóch jednakowych liczb o różnych znakach, np. $p_0 = 40 - 40$. Zachowując stałą poprawkę węzłową $p'_0 = -40$

przesuwamy jej dopełnienie $p'' = +40$ na skraj dowolnego, np. kwadratowego podobszaru, obejmującego punkt S i mieszczącego się całkowicie w obszarze początkowym. Na skutek przesuwania poprawek powstało pole dopełniające, którego przebieg dla ćwiartki kwadratu pokazano na rysunku 5. Wnętrze jego poza punktem S i skrajem, jako wolne od poprawek, spełnia warunek (2), gdyż $\sum p = +\frac{4}{4}$. W punkcie S pozostało $p'_0 = -\frac{160}{4}$, a na skraju pełnego kwadratu jest: $\sum p = +\frac{156}{4}$.

Dodajmy teraz do wartości funkcji ψ wewnątrz podobszaru i jego skraju poprawkę p_d . Poprawki wewnątrz podobszaru nie ulegną zmianie, jedynie zmniejszą się poprawki na skraju. W węzłach na skraju, posiadających poza podobszarem jeden, dwa lub trzy punkty powiązane, zmniejszenie wyniesie odpowiednio: $p_d \frac{1}{4}$, $p_d \frac{2}{4}$ lub $p_d \frac{3}{4}$. Dla pewnej wartości p_d suma nowych poprawek na skraju będzie równa zeru. Nastąpi jednak przesunięcie poprzedniego skraju o jeden bok siatki, a suma poprawek na nowym skraju wyniesie znowu: $\sum p \approx +40$. Po łatwym przesunięciu niektórych poprawek wewnątrz rozszerzonego podobszaru z wyjątkiem punktu S spełniać będzie warunki (2).

Za każdym dalszym rozszerzeniem podobszaru prostokątnego o jeden bok siatki do pierwotnej ilości n punktów węzłowych przybywa 8 nowych. Średnia wartość poprawki na skraju rozszerzanego podobszaru wyniesie przy każdorazowym przesunięciu:

$$\frac{\sum p}{n}, \frac{\sum p}{n+8}, \frac{\sum p}{n+2 \cdot 8}, \dots \frac{\sum p}{n+k \cdot 8}.$$

Suma tych poprawek doda się do wartości funkcji ψ w węzłach początkowego podobszaru. Dla każdego z węzłów przyrost wyniesie:

$$\Delta \psi = \sum p \left| \frac{1}{n} + \frac{1}{n+8} + \frac{1}{n+2 \cdot 8} - \dots + \frac{1}{n+k \cdot 8} \right|. \quad (3)$$

Łatwo udowodnić, że podobnie jak szereg harmoniczny przyrost $\Delta \psi$ rośnie nieograniczenie, gdy k zdąży do nieskończoności. W miarę rozszerzania skraj podobszaru zejdzie się jednak z brzegiem, na którym funkcja prądu jest już wyraźnie określona i nie ma poprawek. W ten sposób przesuwają się poprawki grupowo, co znacznie prędzej prowadzi do celu niż przesuw jednostkowy, zwłaszcza wówczas, gdy poprawki mają zbliżone wartości tego samego znaku.

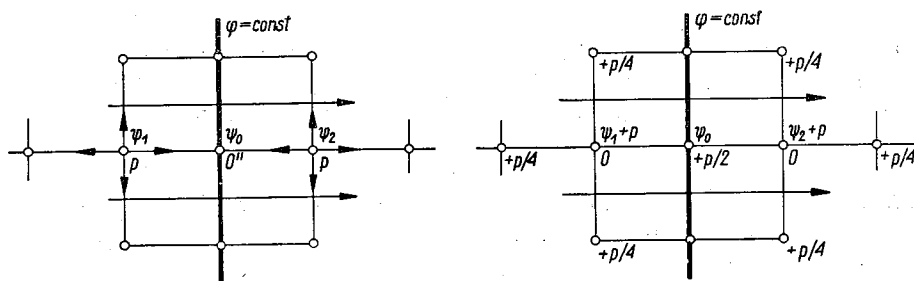
Załóżmy teraz, że w pewnym obszarze znamy przybliżony rozkład pola, które uważać chcemy za regularne, to jest spełniające równanie Laplace'a. W jednym lub więcej węzłach występują jednak znaczne po-

prawki. Możemy wówczas w takim samym obszarze przyjąć pole zerowe i rozprowadzić poprzednie poprawki, zostawiając w węzłach poprawki stałe odwrotnego znaku. W rezultacie otrzymamy pole dopełniające z poprawkami tej samej wartości, ale odwrotnego znaku w polu pierwotnym. Superpozycja pola pierwotnego i dopełniającego da poprawne i regularne pole wypadkowe. Obok jednostkowego i grupowego przesuwu poprawek metoda pola dopełniającego nadaje się zwłaszcza tam, gdzie poprawki są znaczne, ale nieliczne.

Wartość funkcji pola dopełniającego w danym węźle zależy nie tylko od występującej tam poprawki w polu pierwotnym, lecz głównie od poprawek w węzłach sąsiednich i odległości danego węzła od brzegów obszaru. Wartość funkcji pola dopełniającego może nawet przeszło 100-krotnie przekraczać wartość początkowej poprawki węzłowej. Zjawisko to tłumaczy zbyt wolną zbieżność poszczególnych iteracji przy wyznaczaniu pola tą metodą. Najszybciej prowadzi do celu metoda grupowego przesuwu poprawek, którą zajmemy się jeszcze po rozpatrzeniu wpierw warunków brzegowych.

2.3. Wpływ warunków brzegowych

Warunek brzegowy obszaru określany bywa przez wartość funkcji harmonicznego (zagadnienie Dirichleta), jej pochodną w kierunku normalnym



Rys. 6. Fragment siatki w sąsiedztwie brzegu doskonale przewodzącego

(zagadnienie Neumanna), a rzadziej przez kombinację obu tych wielkości w tak zwanym trzecim zagadnieniu brzegowym. Dla obszaru podanego we wstępie interesują nas głównie dwa skrajne wypadki: brzeg doskonale przewodzący i całkowicie nieprzewodzący.

a) Brzeg doskonale przewodzący charakteryzuje się zależnością $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$. Linie pola są tu prostopadłe do ekwipotencjalnej linii brzegowej. W na-

szym wypadku składowa gęstości prądu wzdłuż linii brzegowej równa się zeru.

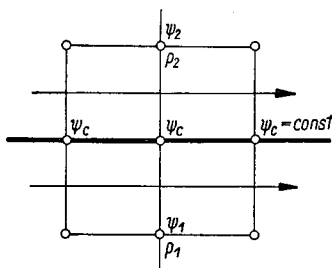
$$\sigma_t = -\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0.$$

Dla siatki o boku a gęstość tę oblicza się w granicznym punkcie „0” jako średnią z danych po obu stronach linii brzegowej, mianowicie z rysunku 6:

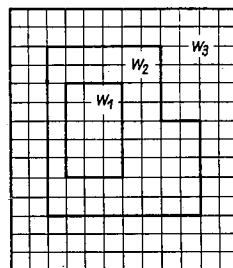
$$\bar{\sigma}_t = \frac{(\psi_1 - \psi_0) + (\psi_0 - \psi_2)}{2a} = \frac{\psi_1 - \psi_2}{2a}.$$

Dla $\bar{\sigma}_t = 0$ jest więc: $\psi_1 = \psi_2$.

Pole w rozpatrywanym obszarze nie ulegnie więc zmianie, gdy po odrzuceniu prostej ekwipotencjalnej linii brzegowej prawą część obszaru zastąpimy symetrycznym przebiegiem funkcji prądu. Dodanie poprawki p w punkcie dla ψ_1 obok linii brzegowej łączy się zatem z dodaniem po-



Rys. 7. Fragment siatki w sąsiedztwie brzegu całkowicie nieprzewodzącym



Rys. 8. Podział części obszaru ω na pasy $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$

prawki w punkcie dla ψ_2 . Po dodaniu poprawek w obu węzłach na linii brzegowej wystąpi niejako spiętrzenie przesuniętych poprawek i będzie $\frac{p}{4} + \frac{p}{4} = \frac{p}{2}$. Pole dopełniające doznaje tu jak gdyby odbicia, a suma poprawek w obszarze nie ulegnie zmianie. Rysunek 6 przedstawia fragment siatki w sąsiedztwie brzegu doskonale przewodzącego.

b) Analogiczny rysunek 7 przedstawia obraz pola w pobliżu brzegu całkowicie nieprzewodzącego. Linie prądu są tu styczne do linii brzegowej o stałej wartości funkcji ψ_0 . Składowa gęstości prądu prostopadła do linii brzegowej:

$$\bar{\sigma}_n = \frac{\partial \psi}{\partial l} = 0.$$

Przebieg pola w rozpatrywanym obszarze nie zmieni się, jeśli po odrzuceniu linii brzegowej damy pole uzupełniające takie, aby było:

$$\psi_c = \frac{2 \cdot \psi_c + \psi_1 + \psi_2}{4},$$

czyli

$$\psi_2 = \psi_c + (\psi_c - \psi_1)$$

oraz:

$$p_2 = -p_1.$$

Po dodaniu poprawek w obu węzłach poprawki przeniesione na linię brzegową posiadają znaki różne i znoszą się.

2.4. Grupowy przesuw poprawek

Jednostkowy przesuw poprawek węzłowych szybko prowadzi do celu tam, gdzie poprawki mają w obszarze na przemian znaki dodatnie i ujemne, a suma ich jest bliska zeru. Po pewnej ilości przesunięć obszar rozpada się na większe części, w których poprawki są wyrównane, to jest nie wykazują większych różnic. Dalszy przesuw jednostkowy poprawek, zwłaszcza w znaczniejszym oddaleniu od brzegów, dla spełnienia nierówności (2) jest mimo wszystko dosyć żmudny. W takich warunkach znacznie szybciej prowadzi do celu grupowy przesuw poprawek.

Niech w części obszaru ω występują poprawki tego samego znaku. Na granicy rozpatrywanej części poprawki są bliskie zeru, a otoczenie składa się z podobnych części o wyrównanych poprawkach. Suma poprawek w całym obszarze jest bliska zeru. W rozpatrywanej części obszaru ω i na jej brzegach zwiększamy wartość funkcji dla poszczególnych węzłów o p_d . W węzłach na prostoliniowej części brzegów poprawki zmniejszą wówczas o $p_d/4$, w punktach narożnych zewnętrznych o $2p_d/4$, natomiast w punktach narożnych wewnętrznych oraz wewnątrz części obszaru ω pozostają bez zmian. Oznaczmy przez m ilość punktów na brzegu części ω , licząc węzły naroży zewnętrznych podwójnie i wykluczając naroża wewnętrzne. Dla pewnej wartości p_d całkowite zmniejszenie poprawek na brzegu będzie równe sumie poprawek w części ω .

$$\frac{m \cdot p_d}{4} = \sum^{\omega} p,$$

stąd

$$p_d = \frac{4 \sum^{\omega} p}{m}. \quad (4)$$

W części obszaru ω wraz z brzegiem suma poprawek będzie więc równa zeru. Jeśli część ta jest nieduża, to nierównomierność poprawek łatwo

tu wyrównać przesuwem jednostkowym, jeśli jednak część ta zajmuje dosyć znaczną powierzchnię, to najpraktyczniej podzielić ją na kilka, np. trzy pasy ω_1 , ω_2 , ω_3 , stosownie do rysunku 8. Sumy poprawek w poszczególnych pasach powinny być możliwie jednakowe i równomiernie rozłożone, to znaczy tam, gdzie poprawki są mniejsze, pas powinien być szerszy, i odwrotnie. Poprawki przesuwamy z pasa ω_1 na ω_2 , a następnie z ω_2 na ω_3 i z ω_3 na zewnątrz części obszaru ω . Całkowity przyrost funkcji w pasie ω_1 jest sumą przyrostów dla poszczególnych przesunięć:

$$\Delta \psi_{\omega_1} = 4 \left[\frac{\sum_{\omega_1} p}{m_1} + \frac{\sum_{\omega_1 + \omega_2} p}{m_2} + \dots + \frac{\sum_{\omega} p}{m_k} \right],$$

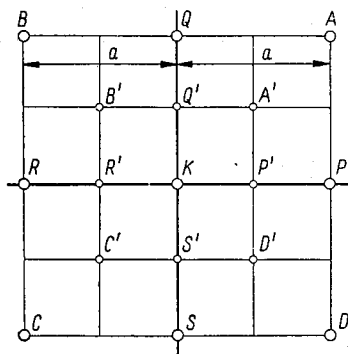
Ogólnie:

$$\Delta \psi_{\omega_1} \approx 4 \frac{\sum_{\omega} p}{k} \left[\frac{1}{m_1} + \frac{2}{m_2} + \dots + \frac{k}{m_k} \right]. \quad (5)$$

Jeśli suma poprawek w całkowitym obszarze jest znaczna, to najwygodniej jest przesunięciem poza brzegi doprowadzić sumę poprawek do zera, a później dopiero zastosować przesuw grupowy dla poszczególnych części obszaru. Przesuwem jednostkowym będzie można dojść stosunkowo szybko do wyrugowania poprawek, tak że spełnione będą warunki (2).

2.5. Główne źródła uchybów

Obraną dowolnie maksymalną wartość ψ_m funkcja harmoniczna może przyjmować jedynie na brzegu obszaru. W naszym przypadku, jak na



Rys. 9. Fragment siatki pierwotnej i dwukrotnie zagęszczonej

rysunku 1, wartość ta występuje na linii górnej. Ta przyjęta wartość ma duży wpływ na dokładność wyznaczenia rozkładu pola. Na początku za-

kłada się mniejszą wartość, np. $\psi_m = 100$. Po przesunięciu poprawek na brzegi i spełnieniu warunku (2) powiększamy ją do $\psi_m = 1000$, a następnie do $\psi_m = 10000$. Uchyb z powodu obecności poprawek szcztątkowych oblicza się ze wzoru (5). Zależy on głównie od sumy tych poprawek i odległości brzegów, a w mniejszym dopiero stopniu od poszczególnych wartości i rozmieszczenia poprawek w obszarze. Uchyb od poprawek szcztątkowych daje się dowolnie zmniejszać przez przyjęcie większej wartości maksymalnej ψ_m . Zmniejszanie takie traci jednak sens, gdy występują inne uchyby znacznie większe.

Takim dalszym uchybem może być uchyb od niedostatecznego zagęszczenia siatki. Na rysunku 9 przedstawiono fragment siatki. W punktach P, Q, R, S , oraz A, B, C, D i w środku K znana jest wartość funkcji ψ . W punktach tych spełnia się równanie (1) i warunki (2). Uchyb od poprawek szcztątkowych można więc uważać za pomijalny. Zagęszczamy teraz siatkę dwukrotnie wyznaczając wartości funkcji w punktach środkowych A', B', C', D' i P', Q', R', S' , zgodnie z warunkiem regularności pola. Następnie kontrolujemy tę regularność w punkcie K dla siatki podwójnie zagęszczonej. Będzie w szczególności:

$$\psi_{A'} = \frac{\psi_P + \psi_Q + \psi_K + \psi_A}{4}$$

i analogicznie dla punktów B', C', D' oraz

$$\psi_{P'} = \frac{\psi_P + \psi_Q + \psi_{D'} + \psi_{A'}}{4} = \frac{6\psi_P + 6\psi_K + \psi_Q + \psi_S + \psi_A + \psi_D}{16}$$

i analogicznie dla punktów Q', R', S' . Po podstawieniu i przekształceniu otrzymujemy jako warunek regularności pola w siatce zagęszczonej:

$$\psi_{P'} + \psi_{Q'} + \psi_{R'} + \psi_{S'} - 4\psi_K = 2 \frac{\Sigma \psi - 4\psi_K}{4} + \frac{1}{2} \frac{\Sigma \psi^* - 4\psi_K}{4} = 0,$$

gdzie:

$$\Sigma \psi = \psi_P + \psi_Q + \psi_R + \psi_S,$$

$$\Sigma \psi^* = \psi_A + \psi_B + \psi_C + \psi_D.$$

Warunek regularności pola możemy wyrazić w postaci:

$$\frac{\Sigma \psi - 4\psi_K}{4} + \frac{1}{4} \frac{\Sigma \psi^* - 4\psi_K}{4} = 0 \quad (6)$$

lub w skrócie:

$$p = p_\psi + p'_\psi = 0, \quad (6a)$$

gdzie:

$$p_{\psi} = \frac{\psi_P + \psi_Q + \psi_R + \psi_S - 4\psi_K}{4},$$

$$p'_{\psi} = \frac{1}{4} \frac{\psi_A + \psi_B + \psi_C + \psi_D - 4\psi_K}{4}.$$

Wyrażenie p'_{ψ} jest składnikiem węzłowym w punkcie K, pochodzącym od niedostatecznego zagęszczenia pola w porównaniu z siatką dwukrotnie zagęszczoną. Przy dalszym dwukrotnym zagęszczeniu, a więc w siatce 4-krotnie zagęszczonej będzie:

$$p = p_{\psi} + 1,2 p'_{\psi} = 0. \quad (6b)$$

Jeszcze dalsze zagęszczenia wprowadzają już nieistotne zmiany. Można też obliczyć wartość składnika węzłowego od niedostatecznego zagęszczenia siatki rozwijając funkcję w szereg Taylora.

$$\psi_P = \psi_K + \frac{a}{1} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_K + \frac{a^2}{2!} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right]_K + \frac{a^3}{3!} \left[\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \right]_K + \frac{a^4}{4!} \left[\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} \right]_{\xi_1},$$

$$\psi_R = \psi_K - \frac{a}{1} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_K + \frac{a^2}{2!} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right]_K - \frac{a^3}{3!} \left[\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \right]_K + \frac{a^4}{4!} \left[\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} \right]_{\xi_2}.$$

Stąd:

$$\psi_P + \psi_R = 2\psi_K + a^2 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right]_K + \frac{a^4}{4!} \left[\left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} \right)_{\xi_1} + \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} \right)_{\xi_2} \right]$$

i analogicznie:

$$\psi_Q + \psi_S = 2\psi_K + a^2 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right]_K + \frac{a^4}{4!} \left[\left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right)_{\eta_1} + \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right)_{\eta_2} \right].$$

Po dodaniu otrzymamy:

$$\psi_P + \psi_Q + \psi_R + \psi_S = 4\psi_K + a^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_K + \frac{a^4}{4!} \left[\left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} \right)_{\xi_1} + \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} \right)_{\xi_2} + \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right)_{\eta_1} + \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right)_{\eta_2} \right].$$

W skrócie: $\Sigma \psi = 4\psi_K + a^2 \nabla^2 \psi_K + \frac{a^4}{4!} R_K.$

W celu przybliżonego oszacowania reszty wyrażenie R_K w nawiasie przedstawimy przez czwartą pochodną w punkcie K, a następnie przez różnice czwartego rzędu.

$$R_K \approx 2 \left[\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right]_K \approx 2 \frac{\Delta_x^{IV} \psi + \Delta_y^{IV} \psi}{\left(\frac{a}{2} \right)^4}.$$

Po podstawieniu w poprzednie równanie i założeniu pola regularnego ($\nabla^2 \psi_K = 0$) będzie:

$$\Sigma \psi = 4 \psi_K + \frac{4}{3} (\Delta_x^{\text{IV}} \psi + \Delta_y^{\text{IV}} \psi)_K.$$

Różnice czwartego rzędu w punkcie K stosownie do rysunku 9 dają się przedstawić jako:

$$\Delta_x^{\text{IV}} \psi = \psi_R - 4 \psi_{R'} + 6 \psi_K - 4 \psi_{P'} + \psi_P,$$

$$\Delta_y^{\text{IV}} \psi = \psi_S - 4 \psi_{S'} + 6 \psi_K - 4 \psi_{Q'} + \psi_Q.$$

Po podstawieniu i przekształceniu otrzymamy prostą zależność:

$$p = p_\psi + \frac{8}{7} p'_\psi = 0. \quad (6c)$$

Wzory (6b) i (6c) różnią się nieznacznie, przy czym niedokładność wzoru (6c) pochodzi od przybliżonego oszacowania reszty przez czwarte różnice funkcji ψ w punkcie K . Równanie (6c) jest dokładniejsze od wzoru (1), na którym opiera się metoda iteracji i jednostkowego przesuwu poprawek.

Przybliżony wzór (1) stosować można jedynie wtedy, gdy dodatkowy składnik od niedostatecznego zagęszczenia siatki spełnia warunki (2). W szczególności w odniesieniu do wzoru (6a) dla $p_\psi \approx 0$ powinno być

$$|p'_\psi| < 1 \quad \text{ i } \quad \sum p'_\psi < 5. \quad (7)$$

Składnik p'_ψ będzie tym większy, im bardziej nierównomierne jest pole w otoczeniu punktu K oraz im większą chcemy uzyskać dokładność uwarunkowaną przyjęciem maksymalnej wartości funkcji ψ_m . Wszędzie tam, gdzie warunki (7) nie spełniają się, należy przechodzić na siatkę dwukrotnie zagęszczoną, a później zagęszczać dalej. Sposób ten prowadzi zwykle do zbyt dużej ilości zagęszczeń, które bardzo utrudniają dokładne wyznaczenie pola.

Dokładniejszy wzór (6a) jest dopuszczalny, gdy przyrost składnika od zagęszczenia stosownie do wzoru (6b) spełnia warunki (2).

$$0,2 |p'_\psi| < 1 \quad \text{ i } \quad 0,2 \sum p'_\psi < 5. \quad (7a)$$

Nierówność (7a) przyjąć można jako kryterium zagęszczenia siatki dla wzoru (6a). Jeśli w części obszaru o najgęstszej siatce znajdzie się kilka węzłów, gdzie warunki (7a) będą przekroczone, to zamiast wprowadzać dalsze zagęszczenie można posłużyć się wzorem dokładniejszym (6b).

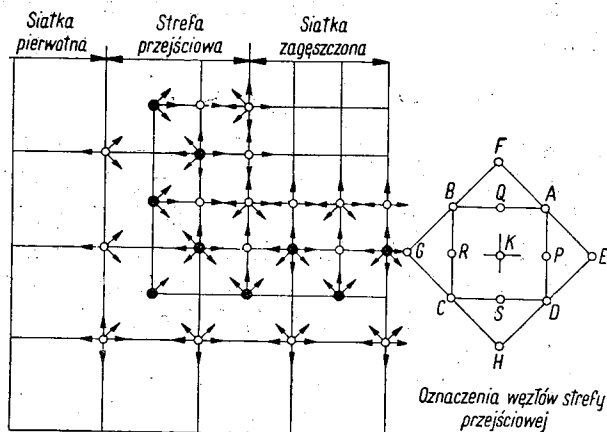
Obok uchybów od poprawek szcątkowych i niedostatecznego zagęszczenia siatki występują jeszcze uchyby od niewypełnienia warunków brzegowych. Mogą one powstać np. w obszarze przedstawionym na ry-

sunku 1. Teoretycznie rozciąga się on do nieskończoności. W rzeczywistości jednak brzeg EE' jest odpowiednio oddalonym brzegiem sztucznym, a poprawki tam występujące powinny być na tyle małe, by pochodzące od nich pole dopełniające nie zmieniało pola głównego w określonym obszarze więcej niż np. jednostka funkcji ψ .

Jeśli w obszarze jak na rysunku 1 wprowadzić siatkę o boku równym $1/8$ jego wysokości i na brzegu EE' oddalonym od skazy o 12 kratek przyjąć w każdym węźle poprawkę równą 1, to w środku linii brzegowej pole dopełniające wyniesie blisko 6 jednostek i dopiero w odległości poziomej od skazy równej 7 kratkom maleje do 1. Zasięg pola dopełniającego rośnie ze wzrostem szerokości pasa, wyrażonego ilością boków siatki. Zamiast rozciągać nadmiernie obszar korzystniej jest zwykle poprzestać na większych poprawkach, wyznaczyć pole dopełniające i dodać je do pola poprzedniego.

2.6. Zagęszczenie siatki i rozdział poprawek

Jeśli w części obszaru warunki (7a) zostaną przekroczone, to należy tam zagęścić pierwotną siatkę. Przebieg takiego zagęszczenia przedsta-



Rys. 10. Dwukrotne zagęszczenie siatki i oznaczenia węzłów strefy przejściowej

wiony jest na rysunku 10. Na granicy siatki pierwotnej i zagęszczonej powstaje strefa przejściowa. Za podstawę obliczenia pola bierzemy wzór (6a).

$$p = p_p + p'_p = 0.$$

W siatce pierwotnej i zagęszczonej składniki węzłowe oblicza się normalnie jak przy wzorze (6a). W strefie przejściowej dla węzłów pogrubio-

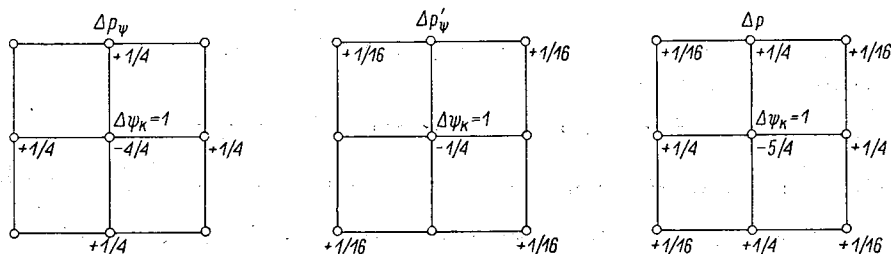
nych wyznacza się je stosownie do rysunku jako:

$$p_{\psi} = \frac{\psi_A + \psi_B + \psi_C + \psi_D - 4\psi_K}{4},$$

$$p'_{\psi} = \frac{1}{4} \frac{\psi_E + \psi_F + \psi_G + \psi_H - 4\psi_K}{4}.$$

Brakujący węzeł w składniku od zagęszczenia siatki zastępuje się średnią arytmetyczną funkcji w czterech węzłach otaczających węzeł brakujący.

Powiększenie funkcji w węźle K o jednostkę powoduje wzrost składników p_{ψ} i p'_{ψ} według schematu na rysunku 11. Wartość funkcji ψ_K należy tak zmienić, aby poprawka p w węźle K zmniejszyła się. Nastąpi



Rys. 11. Wpływ przyrostu funkcji strumienia na przyrosty składników węzłowych

wtedy jej przesunięcie w kierunku węzłów powiązanych ze składnikami p_{ψ} i p'_{ψ} . Jednostkowe i grupowe przesuwanie poprawek zepchnie je ostatecznie na brzeg obszaru o stałej wartości funkcji ψ .

Nasuwa się teraz następujący tok wyznaczenia rozkładu pola z dokładnością do czterech cyfr znaczących.

a) Badany obszar należy pokryć siatką jednolitą o dosyć dużym boku a . Jednostkowym i grupowym przesuwem uwalniamy obszar od poprawek węzłowych najprzód dla $\psi_m = 1000$, a następnie dla $\psi_m = 10000$ tak, że równanie różnicowe (1) $p = p_{\psi} = 0$ spełnia się wszędzie przy zachowaniu warunku (2).

b) Następnie obliczamy składnik p'_{ψ} wg (6a) i stosownie do wzoru (7a) zagęszczamy siatkę w tej części obszaru, gdzie $|p'_{\psi}| > 5$. W tym celu dla oznaczeń jak na rysunku 9 wyznaczamy wartości funkcji ψ w węzłach środkowych A', B', C', D' i P', Q', R', S' . Poprzednio obliczone wartości składników p'_{ψ} stają się w siatce zagęszczonej o boku $a/2$ zwykłymi składnikami węzłowymi p_{ψ} . Z kolei można siatkę zagęszczać dalej otrzymując bok długości $a/4$. We wszystkich węzłach obliczamy i wpisujemy poprawkę $p = p_{\psi} + p'_{\psi}$. Dalsze komplikujące zagęszczenia pomijamy już obliczając składnik p'_{ψ} dla wartości powyżej 20/4 ze wzoru dokładniejszego (6b) lub (6c).

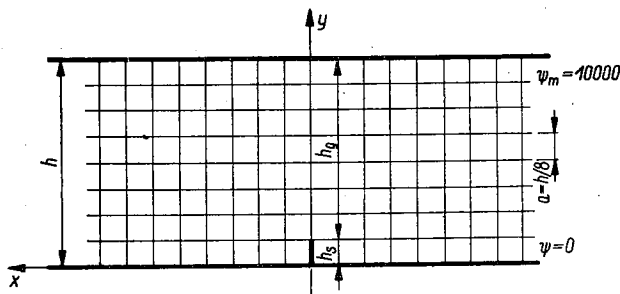
c) Przesuwu poprawek dokonuje się najprościej metodą pola dopełniającego. W tym celu na osobnym arkuszu wpisujemy w poszczególnych węzłach odwrotne wartości wyznaczonych poprawek. Zwykle zaś poprawki przesuwamy jednostkowo i grupowo na brzegi obszaru, stosownie do schematu na rysunku 11, przy czym dla mniejszych poprawek można opuścić człon $\Delta\psi/16$ w narożach kwadratu. Powstałe w ten sposób pole dopełniające wraz z wartościami odwrotnych poprawek dodaje się do pola zasadniczego. Otrzymane i skontrolowane pole wypadkowe jest rozwiązaniem naszego zagadnienia.

2.7. Wpływ skazy poprzecznej na rozkład pola w sztabie prostokątnej

Strukturę pola w sztabie prostokątnej wyznaczamy dla oznaczeń jak na rysunku 12 i założeń:

$$h_s/h = 1/8, \quad \psi_m = 10000, \quad a = h/8.$$

Obliczenia rozpoczynamy od dolnego położenia skazy $(h_s = \frac{7}{8} h)$. Istniejące w tym wypadku rozwiązanie analityczne pozwoli sprawdzić dokładność metody numerycznej. Obraz pola bez wpływu niedostatecz-



Rys. 12. Oznaczenia dla struktury pola w sztabie prostokątnej przy skazy u dołu sztabu

nego zagęszczenia siatki dla $p = p_\psi = 0$ pokazany jest w sąsiedztwie skazy i dalszym otoczeniu na rysunkach 13 i 14. Istotny dla defektoskopii stopień niejednostajności pola przy górnej powierzchni oblicza się w polu prądowym z gęstości prądu σ w najbliższym sąsiedztwie powierzchni i gęstości σ_∞ w tej samej odległości od powierzchni, ale z dala od skazy.

Mamy:

$$\sigma = \frac{\psi_m - \psi_K}{a}, \quad \sigma_\infty = \frac{\psi_m - \psi_{K\infty}}{a}.$$

Stopień niejednostajności pola:

$$\sigma_s = \frac{\sigma - \sigma_\infty}{\sigma_\infty} = \frac{\psi_{K\infty} - \psi_K}{\psi_m - \psi_K} \quad (8)$$

$\psi_m = 10000$

8750	8749	8748	8747	8746	8744	8741	8738
-1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	0
7500	7499	7497	7495	7492	7488	7483	7477
-1	-2	0	-1	0	+1	+1	0
6250	6248	6246	6243	6239	6234	6227	6218
-2	+1	0	+1	+1	0	0	-2
5000	4498	4996	4993	4988	4982	4973	4961
-2	0	-1	-2	0	-1	+1	-1
3750	3748	3746	3743	3738	3732	3723	3709
-2	+1	0	0	+2	+1	0	+1
2500	2499	2497	2495	2491	2486	2478	2465
-1	-2	0	-2	0	-1	-1	-1
1250	1249	1248	1247	1245	1242	1237	1229
0	+1	+1	0	0	0	+1	+1

$\psi = 0$

	2931	2888	2851	2836
	+1	+2	0	-2
	2582	2527	2488	
	-2	+1	+2	
2287	2220	2184	2150	2126
0	-1	0	+1	-1
	1931	1888	1839	1789
	+1	-2	0	0
1658	1560	1495	1420	1345
+1	0	+1	+1	+1
	1308	1245	1162	1052
	0	+1	-1	+2
1063	951	855	712	475
0	+1	-1	0	+1
	741	681	594	466
	+2	0	0	-1
514	438	374	283	158
0	+2	0	0	-1
	238	214	181	134
	0	+1	-2	+1
				0

$\psi = 500$

$\psi = 0$

Rys. 13. Fragment pola w bezpośrednim otoczeniu skazy oraz w pobliżu umownego brzegu bez uwzględnienia zagęszczenia siatki. Poprawki obliczono ze wzoru (1). Mianownik równy 4 opuszczono

Obliczony na podstawie wzoru (8) i rysunku 14 rozkład stopnia niejednostajności pola porównano z wynikami otrzymanymi ścisłą drogą analityczną i zestawiono w tablicy 1. Względny uchyb obliczeń numerycz-

			9364 +0	9363 0	9362 0	9361 +2	9361 0	9361 0
8738	8734	8730		8726	8724	8723	8722	8722
0	+1	-1		-1	+1	-1	+1	-1
			8091 +1	8088	8086	8084	8083	8082
7477	7469	7459		+1	-1	0	-2	+1
0	-1	+2		+2	-1	-1	-1	0
			6818 -2	6812	6807	6802	6799	6798
6218	6205	6189		-1	-2	+1	+1	0
-2	-1	-1		0	-1	-1	-2	+1
			5542 +2	5531	5521	5513	5507	5505
4961	4943	4919		+1	+1	-1	0	-1
-1	+1	+1		0	0	-1	0	-1
			4268 +0	4249	4229	4211	4197	4192
				-1	0	-2	0	0
3709	3688	3655		3608	3580	3552	3530	3522
+1	-2	+2		-2	0	+1	+2	0
			3002 +0	2970	2931	2888	2851	2836
2465	2443	2406		0	+1	+2	0	-2
-1	+2	+1		0	0			2118
			1765 +2	1723	1658	1560		
1229	1215	1188		-1	+1			
+1	0	-2		0	0			
			579 +1	555	514	438		
				+2	0			

ψ = 0

ψ = 0

Rys. 14. Fragment pola w dalszym sąsiedztwie skazy bez uwzględnienia wpływu niedostatecznego zagęszczenia siatki. Przy poprawkach opuszczono mianownik = 4

Tablica 1

Rozkład stopnia niejednostajności pola w sztabie prostokątnej dla skazy $h_s = h/8$ w położeniu dolnym $\left(h_g = \frac{7}{8} h\right) \varepsilon_s = f\left(\frac{x}{h}\right) \%$

Odległość x/h	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8	8/8
Metoda analityczna	1,96	1,88	1,68	1,39	1,10	0,83	0,61	0,43	0,30
Metoda numeryczna	2,24	2,16	1,92	1,60	1,28	0,96	0,72	0,48	0,32

nych wynosi dla $x/h = 0$ prawie 14,3%, a średnio dla całego rozkładu około 15%.

Stosunkowo duży uchyb wyników pochodzi stąd, że w liczniku wyrażenia (8) występuje różnica dwóch zbliżonych wartości. W celu dokład-

$\psi_m = 10000$

$n = 10000$

8750	8749	8748	8747	8746	8744	8742	8739
-1	+1	+1	+1	-1	+1	0	+1
7500	7499	7497	7495	7492	7489	7485	7479
-1	-2	0	-1	+1	0	-1	0
6250	6248	6246	6243	6239	6235	6229	6220
-2	+1	0	+1	+2	0	-1	+1
5000	4498	4996	4993	4988	4983	4975	4964
-2	0	-1	-2	+2	-1	+1	-1
3750	3748	3746	3743	3739	3733	3725	3712
-2	+1	0	+1	-1	+1	-1	+1
2500	2499	2497	2495	2491	2486	2479	2467
-1	-2	0	-2	+1	+1	0	+2
1250	1249	1248	1247	1245	1242	1238	1231
0	+1	+1	0	0	+1	0	0

$\psi = 0$

	2942	2902	2867	2852	
		2594	2543	2505	
		0+1	-2+0	+1-1	
2298		2234	2199	2167	2135
		-1+1	+2+0	+1+1	+4-6
		1944	1901	1854	1806
		-1+1	+2-0	0-1	-2+0
1669		1574	1510	1436	1365
		-2+1	+1-2	+5-5	+1-2
		1319	1258	1177	1068
		+2-1	0+0	-1+0	+3-4
					+61
					-59
					+125
1073		962	871	735	509
		+4-6	-4+3	-14	-94
				+14	+96
		750	691	606	478
		+1-3	-1+1	-4+2	-3+2
					+26
					-27
					159
$\psi = 500$	521	445	380	288	200
		0-2	+2+0	+1-3	+5-6
		241	217	183	136
		+2-1	+1+0	+1+0	0-1
					+3-1
$\psi = 0$					

Rys. 15. Fragment pola w bezpośrednim otoczeniu skazy oraz w pobliżu umownego brzegu z uwzględnieniem zagęszczenia siatki. Składniki poprawek obliczano ze wzoru (6c). Mianownik równy 4 opuszczono

niejszego wyznaczenia pola obliczono składniki węzłowe p'_v stosownie do wzoru (6c) i utworzone z nich pole dopełniające. Przez superpozycję pola dopełniającego otrzymano poprawny rozkład przedstawiony na ry-

sunkach 15 i 16, a wyniki obliczeń pokrywają się tu całkowicie z metodą analityczną.

Ze względu na symetrię otrzymany rozkład pola jest ważny także

$\psi_m = 10000$

			+ 9365 +1	9364 +1	9363 +2	9363 0	9363 -1	9363 -1
8739	8736	8732		8729 -2	8727 +1	8726 0	8725 +1	8725 0
	-1	0	+ 8095 0	8093 -1	8091 -2	8089 -2	8087 +1	8087 -2
7479	7472	7463		7456 -2	7453 -2	7450 -1	7448 -2	7447 0
	-1	+2	+ 6823 0	6818 -1	6813 0	6809 0	6806 +1	6805 0
6220	6209	6194		6179 0	6172 +1	6167 -2	6163 -1	6161 +2
	-2	+1	+ 5550 -2	5539 +2	5530 0	5522 0	5517 -2	5515 -2
4964	4948	4926		4899 -1	4885 +2	4874 -1	4866 0	4863 +1
	0-1	-1-1	+ 4276 0+1	4258 -1-0	4239 0-0	4222 0-0	4210 -2+0	4205 0+0
3712	3693	3662		3617 -1	3591 0	3565 -2	3545 -1	3537 +2
	-2-0	+2-1	+ 3011 -2+1	2980 -1-0	2942 +3-1	2902 0-2	2867 -2+1	2852 -3+4
2467	2448	2414		2349 -2	2298 +2	2234 -1	2167 +2	2135 -1
	0+2	-2+3	+ 1772 +2-1	1732 -3+1	1669 +1+1	1574 -2	$\psi = 2000$	
1231	1218	1193		1134 +7	1073 -6	962 +5		
	0+2	-5+7	+ 581 +3-2	559 0+3	521 -7+5	445 -2	$\psi = 0$	

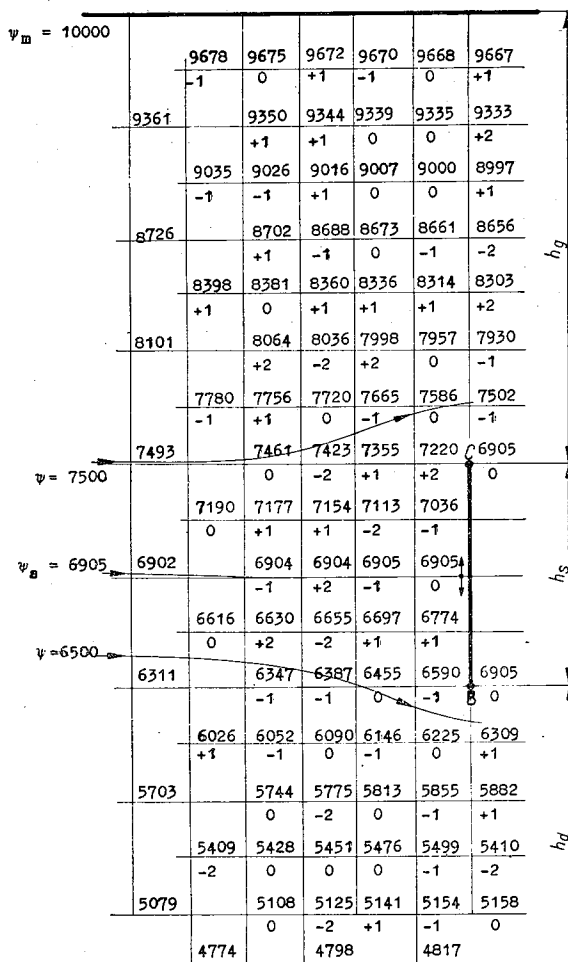
Rys. 16. Fragment pola w dalszym sąsiedztwie skazy z uwzględnieniem zagęszczenia siatki. Składniki poprawek obliczano ze wzoru (6c). Mianownik równy 4 opuszczono

dla skazy w położeniu górnym, to jest dla $h_g = 0$, z tym, że węzłowe wartości funkcji ψ będą dopełnieniem poprzednich do 10000.

W analogiczny sposób obliczono rozkład pola przy pionowym położeniu skazy dla h_g w odstępach co $\frac{1}{8} h$. Dochodzi tu jedynie dodatkowy warunek ważny w sąsiedztwie skazy i podany na wstępie:

$$U_{CB} = \int_B^C \frac{\partial \psi}{\partial n} d\bar{l} = 0.$$

Warunek ten wyraża poprawkę dla ψ_s , to jest funkcji prądu opływającego skazę. Jako przykład podajemy fragment rozkładu pola w pobliżu

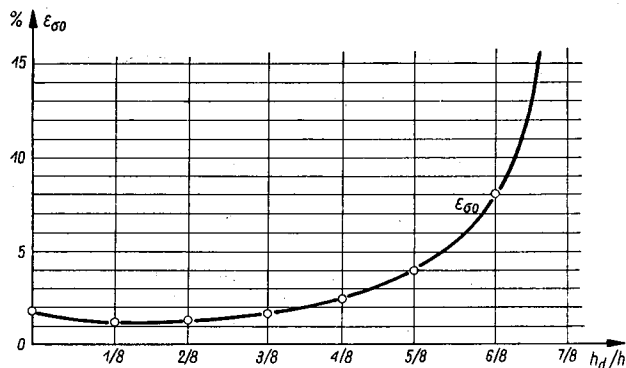


Rys. 17. Fragment rozkładu pola w pobliżu skazy dla $h_g = \frac{2}{8} h$

skazy dla $h_g = \frac{2}{8} h$, rys. 17. Poprzedni warunek wyrazi się tu w postaci:

$$p = \sum_B^C (\psi - \psi_s) = 0,$$

Na rysunku 18 przedstawiono przebieg stopnia niejednostajności pola nad skażą, gdy wędruje ona od dołu do góry zachowując stałą wielkość. Charakterystyczny jest szybki spadek niejednostajności pola od 1,96‰ do 1,30‰. Tłumaczy się to bocznikującym działaniem zdrowej, dolnej



Rys. 18. Stopień niejednostajności pola na górnej powierzchni sztaby, gdy skaża wędruje od dołu do góry $\epsilon_{\sigma_0} = f\left(\frac{h_d}{h}\right)$ dla $h_s/h = 1/8$, $x/h = 0$

części sztaby. Dopiero w połowie wysokości wraca początkowa wartość, po czym szybko rośnie do 100‰ dla położenia górnego.

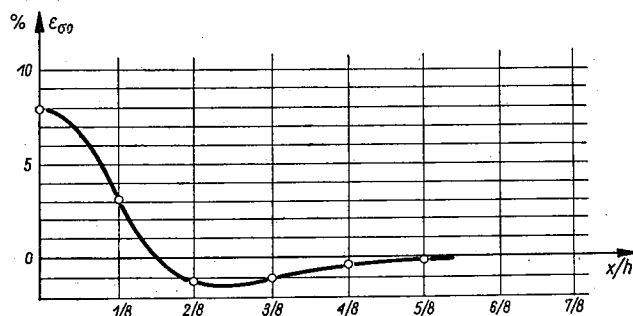
Charakterystyczny jest również rozkład stopnia niejednostajności pola w odległości poziomej, gdy znajduje się ona blisko górnej powierzchni sztaby. Zależność tę $\epsilon_{\sigma} = f\left(\frac{x}{h}\right)$ dla tej samej względnej wielkości skaży i $h_d/h = 6/8$ pokazano na rysunku 19. Od początkowo dużej wartości 8,0‰ stopień niejednostajności pola zanika już w pobliżu $x/h = 3/16$, po czym przyjmuje najniższą wartość ujemną -1,4‰ w odległości $x = \frac{5}{16}h$. Zjawisko to można wykorzystać do konstrukcji czujnika o zmniejszonej czułości wykrywania drobnych skaż powierzchniowych.

Pozostaje jeszcze określenie wpływu wielkości skaży na wartość stopnia niejednostajności pola. Przy wyznaczaniu rozkładu pola za pole początkowe przyjmuje się często pole jednostajne. W sąsiedztwie skaży wystąpią wtedy nieliczne, ale znacznej wartości poprawki. Wielkość pola dopełniającego i stopień niejednostajności ϵ_{σ} są w przybliżeniu proporcjonalne do sumy tych poprawek Σp . Zarówno ich ilość, jak i średnia wartość rosną proporcjonalnie do wielkości skaży $\frac{h_s}{h}$. Stąd:

$$\epsilon_{\sigma} = c' \sum p = c \left[\frac{h_s}{h} \right]^2. \quad (9)$$

Dla skaz w położeniu dolnym zależność powyższa daje się wyprowadzić analitycznie, gdy $\frac{h_s}{h} < 0,15$, w postaci:

$$\varepsilon_\sigma = 1,25 \left[\frac{h_s}{h} \right]^2.$$



Rys. 19. Rozkład stopnia niejednorodności pola na górnej powierzchni wzdłuż szyny

$$\varepsilon_{\sigma_0} = f\left(\frac{x}{h}\right) \text{ dla } h_d/h = 6/8, h_s/h = 1/8$$

2.8. Uwagi końcowe

Metoda numeryczna wyznaczania pola daje się zastosować tam, gdzie analityczne ujęcie napotyka duże trudności lub jest wprost niemożliwe. Rozwiązanie analityczne rozkładu jak na rysunkach 16 i 17 z dokładnością do czterech cyfr znaczących zajmuje więcej czasu niż rozwiązanie numeryczne, które przy stosowaniu grupowego przesuwu poprawek i pola dopełniającego nie przekracza 80 godzin.

Doświadczalne sposoby, jak metoda odwzorowania pola prądowego w profilowanych arkuszach blachy lub wannie elektrolitycznej są około 10 razy szybsze, ale za to wartości węzłowe dają się wyznaczyć jedynie z dokładnością do trzech cyfr znaczących.

W rozważaniach ograniczyliśmy się do obszarów jednospójnych o bokach załamanych pod kątem prostym, będących wielokrotnością boku siatki. Odpowiednie wzory interpolacyjne pozwalają jednak rozszerzyć nasze rozważania na dowolny obszar i warunki brzegowe, posiadający jednoznaczne rozwiązanie.

Znaczenie metody numerycznej polega na tym, że daje się ona dostosować do wyznaczenia pól prądowych o zmiennej przewodności elektrycznej i pól magnetycznych o przenikalności magnetycznej zależnej od nasycenia przez wprowadzenie dodatkowych składników węzłowych. Natomiast doświadczalne przedstawienie takich pól jest bardzo utrudnione albo nawet wprost niemożliwe.

WYKAZ LITERATURY

1. Collatz L.: Bemerkungen zur Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren bei partiellen Differentialgleichungen. — Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, t. 13, 1933, str. 56—57.
2. Gerschgorin S. A.: Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen. — Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, t. 10, 1930, str. 372—382.
3. Goworkow W. A.: Raschiot elektriceskich i magnitnych polej po mietodu potencjalnoj sietki. — Elektricziestwo nr 3, 1949, i nr 7, 1951.
4. Ollendorf F.: Berechnung magnetischer Felder. Springer Verlag, Wien 1952.
5. Panow D. J.: Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych. PWN, Warszawa 1955.
6. Pietrowski J.: Równania różniczkowe cząstkowe. PWN, Warszawa 1955.
7. Weigand: Die angenäherte Berechnung ebener und rotationssymmetrischer Potentialfelder mit Hilfe des Differenzenverfahrens. — VEB Verlag Technik, Berlin 1953.
8. Collatz: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Springer, Berlin 1951.
9. Miln W. E.: Numerical Solution of Differential Equations. New York — London 1953.

3. DOŚWIADCZALNE ODWZOROWANIE POLA W SZYNIE KOLEJOWEJ S49 W ZALEŻNOŚCI OD WIELKOŚCI I POŁOŻENIA SKAZY

Wyznaczenie struktury pola w szynie o rzeczywistym przekroju jest możliwe jedynie za pomocą siatki sześcienniej. Dla siatki płaskiej należy wprowadzić przybliżone założenie zmiennej przewodności proporcjonalnej do szerokości profilu.

Najprościej wyznacza się przeto strukturę pola w szynie doświadczalnie za pośrednictwem wanny elektrolitycznej. Jako wskaźnika zerowego użyto galvanometru statycznego z prostownikiem wibracyjnym. Podany układ pozwala na pomiar potencjału i natężenia pola. Najmniejszy mierzalny jeszcze stopień niejednostajności pola wynosi ok. 10^{-3} .

Pomiary potwierdziły dotychczasowe obliczenia struktury pola w sztabie prostokątnej. Rozkład niejednostajności pola przy powierzchni szyny, zależny od względnej wielkości skazy i jej położenia, różni się praktycznie od rozkładu dla sztaby jedynie wtedy, gdy skaza mieści się w stopce lub dolnej części szyjki. Zależność stopnia niejednostajności pola od względnej wielkości skazy podano w postaci wzoru empirycznego. Dla dalszych badań wprowadzono dwie zasadnicze skazy wzorcowe: jedną w dolnej części główki, drugą w stopce szyny.

Zasada defektoskopii prądowej z czujnikiem napięciowym wymaga stosowania dużego prądu przepływającego w szynie, powyżej 2 kA. Pociąga to stosowanie ciężkiej i drogiej aparatury pomiarowej. Droga tą można jednak wykrywać bardzo cienkie skazy w odróżnieniu od metody magnetycznej.

3.1. Wstęp

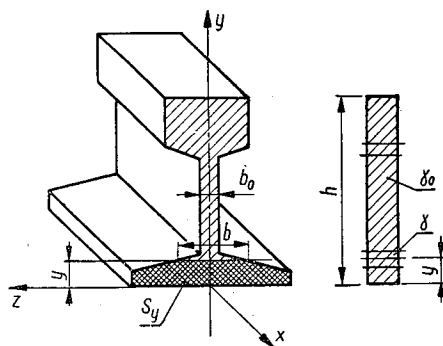
W rozważaniach nad przebiegiem pola w szynie można w pierwszym przybliżeniu rzeczywisty przekrój szyny zastąpić przekrojem prostokątnym o tej samej wysokości co szyna. W zależności od wielkości skazy h_s w stosunku do wysokości szyny h , czyli od względnej wielkości skazy $\varepsilon_s = h_s/h$, wyznacza się rozkład pola drogą analityczną lub numeryczną za pomocą siatki płaskiej. Przebieg pola w rzeczywistym przekroju daje się także wyznaczyć drogą numeryczną, ale za pośrednictwem przestrzennej siatki potencjałów. W szczególności dla środka sześciangu poprawka węzłowa powinna równać się zeru.

$$p = \frac{\Sigma \varphi - 6 \varphi_K}{6} = 0, \quad (1)$$

gdzie: $\Sigma \varphi$ wyraża sumę wartości potencjałów w środkach poszczególnych ścian, a φ_K wartość potencjału w środku sześciangu. Żmudne obliczenia uniemożliwiają jednak stosowanie metody siatki przestrzennej i z konieczności trzeba poprzestać na metodach przybliżonych.

3.2. Metoda sztabki o zmiennej przewodności

W metodzie tej zastępujemy rzeczywisty przekrój szyny przekrojem prostokątnym o tej samej wysokości, ale o zmiennej przewodności wła-



Rys. 1. Zastąpienie szyny kolejowej sztabą prostokątną o zmiennej przewodności

$$\text{właściwej } \gamma = \gamma_0 \frac{b}{b_0}$$

ściwej, proporcjonalnej do szerokości profilu szyny b . Stosownie do rysunku 1 za przewodność odniesienia przyjmujemy przewodność szyski γ_0 . Wtedy przewodność w dowolnym miejscu sztabki zastępczej wyniesie:

$$\gamma = \gamma_0 \frac{b}{b_0}. \quad (2)$$

Należy teraz znaleźć zależność dla funkcji prądu ψ_K w polu płaskim przy zmiennej przewodności γ .

Przybliżenie tej metody polega na tym, że w polu płaskim mogą występować jedynie składowe gęstości prądu w kierunku dwóch osi, np. σ_x i σ_y . Tymczasem w szynie przy każdej zmianie szerokości jej profilu składowej gęstości σ_y towarzyszy śladowa σ_x . Opisany niżej sposób sztabki niejednorodnej daje tym pewniejsze wyniki, im mniejsze i łagodniejsze jest stopniowanie przekroju oraz im mniejsza jest wartość składowej σ_y , z którą wiąże się wystąpienie składowej σ_x .

Traktując gęstość prądu jako wektor otrzymujemy:

$$\bar{\sigma} = \bar{i} \sigma_x + \bar{j} \sigma_y.$$

Wprowadzając w polu bezźródłowym funkcję prądu ψ , możemy napisać:

$$\bar{\sigma} = \bar{i} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \bar{j} \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

$$\text{Stąd natężenie pola } \bar{K} = \frac{\bar{\sigma}}{\gamma} = \bar{i} \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} - \bar{j} \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = \bar{i} K_x + \bar{j} K_y.$$

Wektor natężenia pola $\bar{K}$ jest bezwirowy, czyli $\text{rot } \bar{K} = 0$,

$$\frac{\partial K_y}{\partial x} - \frac{\partial K_x}{\partial y} = 0,$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] = 0.$$

Po zróżniczkowaniu i pomnożeniu przez γ otrzymujemy następujące równanie różniczkowe:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{\gamma} \left[\frac{\partial \gamma}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] = 0. \quad (3)$$

Dla obliczeń numerycznych należy powyższe równanie przekształcić na różnicowe. Zgodnie z rysunkiem 2 przedstawiającym fragment siatki pola założmy $a_P = a_Q = a_R = a_S = a$ i dalej:

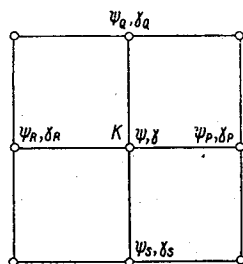
$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\gamma_P - \gamma_R}{2a} = \frac{\Delta_x \gamma}{a}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial y} = \frac{\gamma_Q - \gamma_S}{2a} = \frac{\Delta_y \gamma}{a},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\psi_P - \psi_R}{2a} = \frac{\Delta_x \psi}{a}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\psi_Q - \psi_S}{2a} = \frac{\Delta_y \psi}{a},$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\frac{\psi_P - \psi_K}{a} - \frac{\psi_K - \psi_R}{a}}{a} = \frac{\psi_P + \psi_R - 2\psi_K}{a^2}.$$

Podobnie:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\psi_Q + \psi_S - 2\psi_K}{a^2},$$



Rys. 2. Fragment siatki pola

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \approx \frac{\psi_P + \psi_Q + \psi_R + \psi_S - 4\psi_K}{a^2} = \frac{\Sigma \psi - 4\psi_K}{a^2}.$$

Po podstawieniu powyższych wyrażeń do równania (3) i pomnożeniu przez $a^2/4$ otrzymujemy:

$$\frac{\Sigma \psi - 4\psi_K}{4} - \frac{1}{4} \left[\Delta_x \psi \frac{\Delta_x \gamma}{\gamma} + \Delta_y \psi \frac{\Delta_y \gamma}{\gamma} \right] = 0. \quad (4)$$

Oznaczając pierwszy składnik jako p_ψ , a drugi jako p_γ , możemy ich sumę, czyli poprawkę węzłową p , przedstawić w postaci:

$$p = p_\psi + p_\gamma = 0. \quad (4a)$$

Przewodność szyny nie zmienia się w kierunku x , więc $\Delta_x \gamma = 0$, a zatem:

$$p_\gamma = - \frac{\Delta_y \psi}{4} \cdot \frac{\Delta_y \gamma}{\gamma}. \quad (5)$$

Nasuwa się tu następujący tok obliczania:

a) Jako pole wyjściowe przyjmujemy pole panujące w szynie w miejscu dostatecznie oddalonym od skazy. Dla pola takiego funkcja prądu wyraża się jako:

$$\psi = \int_0^y \sigma_x b \, dy.$$

Po podstawieniu $\sigma_x = \psi_m/S$ będzie:

$$\psi = \psi_m \frac{\int_0^y b \, dy}{S} = \psi_m \frac{S_y}{S},$$

gdzie:

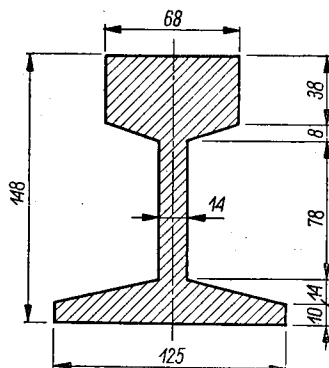
ψ_m — dowolnie obrany całkowity prąd płynący w szynie,

S_y — przekrój szyny od stopki do wysokości y ,

S — całkowity poprzeczny przekrój szyny.

Pole to spełnia zasadnicze równanie różnicowe (4a). Należy tylko obliczyć i wpisać poprawkę p_r wg wzoru (5).

b) Zakładamy następnie określoną skazę, np. nacięcie od stopki równe



Rys. 3. Uproszczony profil modelowy szyny kolejowej S49

1/16 wysokości szyny. Skaza taka dla szyny z rys. 3 wykazuje w stosunku do przekroju poprzecznego szyny względną wielkość: $\varepsilon_s = \frac{s}{S} = 0,18$.

Na brzegach skazy musi być $\psi = 0$. W sąsiadujących z brzegiem skazy węzłach wystąpią więc poprawki węzłowe, które trzeba rozprowadzić. Powstanie wtedy pole dopełniające od skazy, nakładające się na pole zasadnicze. Otrzymane w ten sposób pole wypadkowe jest pierwszym przybliżeniem szukanego pola.

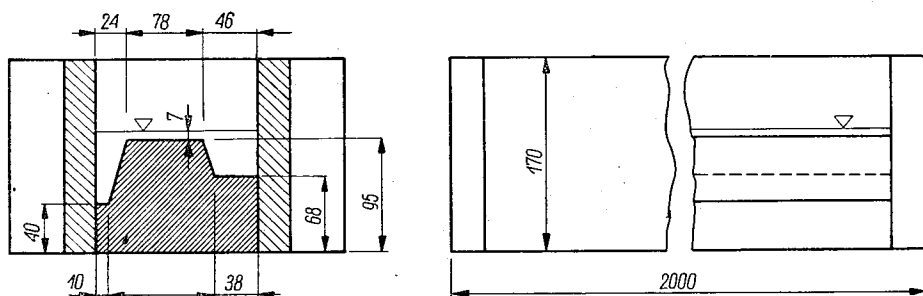
c) W polu wypadkowym poprawki od przewodności obliczone dla pola wyjściowego ulegają zmianie wg wzoru (5). Przyrosty tych poprawek dają nowe pole dopełniające, które łącznie z polem poprzednim stanowi drugie, już wystarczająco dokładne przybliżenie szukanego pola.

3.3. Odwzorowanie w wannie elektrolitycznej

Znacznie szybsza i dostatecznie dokładna jest metoda odwzorowania pola w wannie elektrolitycznej o przekroju odpowiadającym połowce szyny po przecięciu jej wzdłuż pionowej płaszczyzny symetrii. Obieramy przekrój szyny dla typu S49. Typ ten najnowszy i najcięższy jest obok typu lżejszego S42 walcowany dla potrzeb PKP [3].

W uproszczonym profilu modelowym jak na rysunku 3 opuszczono zaokrąglenia, lekkie zgrubienie główki ku górze i załamanie górnej powierzchni stopki. Zamodelowany przekrój wynosi $62,3 \text{ cm}^2$, a rzeczywisty przekrój szyny $62,48 \text{ cm}^2$.

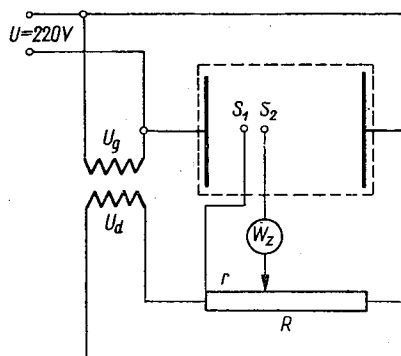
Do modelu w kształcie korytka dolewa się zwykłej wody wodociągowej, tak by odległość między poziomem wody a górnym brzegiem profi-



Rys. 4. Szkic wanny elektrolitycznej do odwzorowania pola prądowego w szynie kolejowej

lowanego klocka wynosiła połowę grubości szynki, to jest 7 mm, jak to widać na rys. 4. Elektrody z blachy aluminiowej o przekroju szyny znajdują się w odległości ok. 2 metrów.

Podany wyżej na rysunku 5 układ kompensacyjny do pomiaru natężenia pola elektrycznego, a więc i gęstości prądu przy stałej przewodności



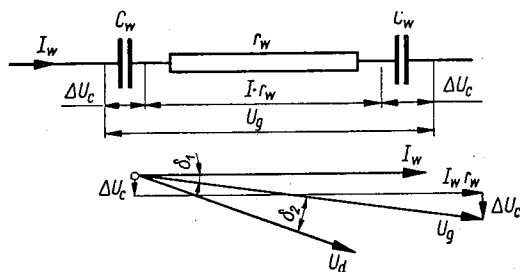
Rys. 5. Schemat układu kompensacyjnego do pomiaru zniekształcenia pola prądowego w wannie elektrolitycznej

elektrolitu, jest znany w literaturze [4]. Ograniczymy się tu do podania najkorzystniejszych warunków pomiaru.

Z chwilą przyłożenia napięcia na elektrody następuje przepływ prądu i pojawia się SEM polaryzacji. Jej czas powstawania i zanikania jest duży

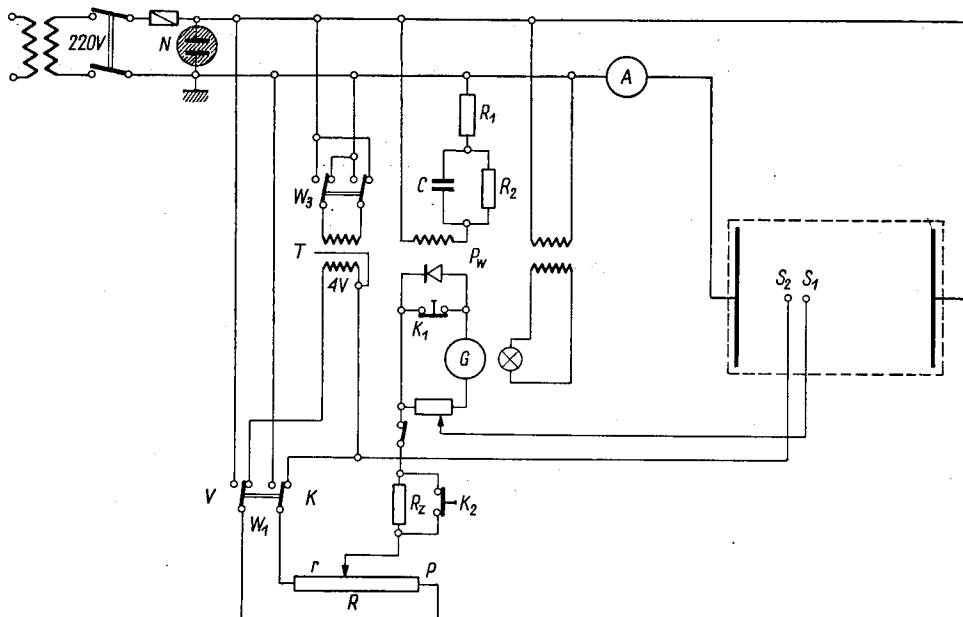
w porównaniu z okresem prądu sieciowego. Zmienna SEM polaryzacji będzie zatem opóźniać się względem prądu zasilającego wannę prawie o ćwierć okresu podobnie jak spadek napięcia na kondensatorze. Układ zastępczy wanny wygląda więc jak na rysunku 6.

Spadek napięcia na sondzie jako będący w fazie z prądem będzie przyspieszony względem napięcia zasilania o kąt δ_1 . Natomiast napięcie na dzielniku wskutek uchybu kąтового transformatora napięciowego T bę-



Rys. 6. Układ zastępczy wanny elektrolitycznej i wykres wskazowy

dzie opóźnione w stosunku do napięcia zasilającego o kąt δ_2 . Wypadkowy kąt między napięciem kompensowanym i kompensującym wyniesie $\delta = \delta_1 + \delta_2$. Ten kąt wypadkowy rzędu 5° utrudnia osiągnięcie równowagi



Rys. 7. Schemat elektryczny wanny elektrolitycznej do pomiaru potencjału i natężenia pola elektrycznego

układu przy użyciu galwanometru wibracyjnego jako wskaźnika zerowego. Dla pełnej równowagi konieczny jest kondensator regulowany, który bocznikuje część dzielnika napięcia. Kondensator ten jest zbędny przy zastosowaniu jako wskaźnika zerowego galwanometru statycznego z prostownikiem wibracyjnym. Układ taki jest poza tym wielokrotnie czulszy niż przy użyciu galwanometru wibracyjnego, dwukierunkowy i mniej wrażliwy na wstrząsy. Powstaje tu jednak nowa trudność. Niejednorodność pręcików sondy wywołuje w zetknięciu z elektrolitem różnicę występujących SEM, która jest źródłem prądu stałego przepływającego przez galwanometr. Aby temu zaradzić, zastosowano układ jak na rysunku 7.

W układzie powyższym styki prostownika są normalnie zwarte kluczem K_1 . Różnica SEM występująca na pręcikach sondy rozładowuje się poprzez galwanometr. Po pewnym czasie zanika prąd galwanometru, a wskazówka zajmuje położenie zerowe lub prawie zerowe. Należy teraz tak wyregulować styk dzielnika, by po wyłączeniu klucza K_1 wskazówka galwanometru zachowała poprzednie położenie. Rysunek 7 przedstawia kompletny schemat układu pomiarowego wanny umożliwiający pomiar nie tylko natężenia pola, ale i rozkładu potencjałów przez przełączenie przełącznika W_1 z pozycji K na pozycję V . Przewidziano tu zmianę kierunku prądu zasilającego przełącznikiem W_3 , wyregulowanie fazy napięcia sterującego korektorem R_1 , R_2 , C , zabezpieczenie galwanometru oporem R_z i kluczem K_2 . Transformator T powinien mieć bardzo dobrą izolację, by ustrzec się od prądu upływu. Prąd taki łatwo wykryć galwanometrem po przerwaniu sondy S_2 . Nie może on w żadnym wypadku płynąć przez dzielnik napięcia i dlatego wskazane jest ekranowanie tego transformatora jak na rysunku. Przy stosunkowo dużym prądzie zasilania wanny prąd upływu nie zmienia praktycznie przebiegu pola w wannie.

Pomiar natężenia pola przy zasilaniu prądem zmiennym charakteryzują następujące wielkości:

a) Natężenie pola elektrycznego przy napięciu $U = 220$ V i długości wanny $l = 2$ m — $K = U/l = 110$ V/m.

b) Gęstość prądu przy prądzie zasilania $I = 45 \cdot 10^{-3}$ A oraz przekroju profilu $\frac{S}{2} = 31,1 \cdot 10^{-4}$ m² — $\sigma = 2I/S = 14,4$ A/m².

c) Oporność właściwa elektrolitu — $\varrho = \frac{K}{\sigma} = 7,65$ Ω m = 765 Ω cm.

d) Zakres pomiaru natężenia pola przy napięciu dzielnika $U_d = 4$ V i odstępach pręcików $d = 5 \cdot 10^{-3}$ m — $K_m = \frac{U_d}{d} = 800$ V/m.

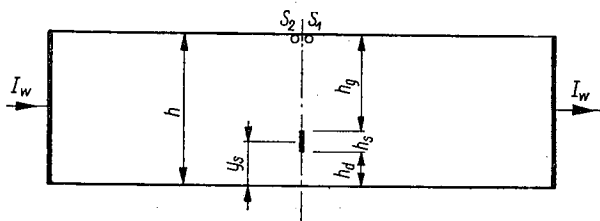
Układ pozwala więc na pomiar natężenia pola zwiększonego $800/110 = 7,26$ razy w stosunku do pola równomiernego.

Wektor natężenia pola w kierunku linii łączącej środki pręcików sondy oblicza się dla równowagi ($i_g = 0$):

$$\bar{K} = \bar{K}_m \frac{r}{R}, \quad (6)$$

gdzie: r/R wyraża stosunek oporów dzielnika, a $K_m = U_d/d$ największe natężenie mierzalne.

Natężenie pola równomiernego w wannie wyniesie: $\bar{K}_\infty = \bar{K}_m \frac{r_\infty}{R}$. Po włożeniu do wanny płytki bakelitowej imitującej odpowiedni rodzaj ska-



Rys. 8. Odwzorowanie skazy w wannie elektrolitycznej

zy jak na rysunku 8 nastąpi przy powierzchni szyny wzrost natężenia pola do wartości: $\bar{K}_x = \bar{K}_m \frac{r_x}{R}$. Stopień zniekształcenia pola jako względny przyrost natężenia ε_K lub względny przyrost gęstości prądu ε_σ przy zachowaniu stałej przewodności właściwej wyrazi się więc wzorem:

$$\varepsilon_\sigma = \varepsilon_K = \frac{\bar{K}_x - \bar{K}_\infty}{\bar{K}_\infty} = \frac{\Delta r}{r_\infty}. \quad (7)$$

Dokładność pomiaru stopnia zniekształcenia zależy tu przede wszystkim od uchybu nieczułości δ_n . Uchyb ten określa się stosunkową zmianą wielkości mierzonej, wywołującą dostrzegalne wychylenie wskazówki galvanometru o k -tą część działki.

Najmniejsza mierzalna zmiana oporności r_∞ ograniczona nieczułością układu wyniesie zatem:

$$(\Delta r)_{\min} = \delta_{n(r_\infty)} \cdot r_\infty.$$

Stosunkowy uchyb nieczułości przy pomiarze stopnie niejednostajności pola będzie więc:

$$\delta_n(\varepsilon_\sigma) = \frac{(\Delta r)_{\min}}{\Delta r} = \frac{\delta_{n(r_\infty)}}{\varepsilon_\sigma}.$$

Założmy, że przy stopniu niejednostajności pola $\varepsilon_\sigma = 10^{-3}$ chcemy jego uchyb ograniczyć do 10%. Wtedy powinno być: $\delta_{n(r_\infty)} \leq 10^{-4}$. Tego rzędu uchyb nieczułości jest już trudno osiągalny.

W układzie kompensacyjnym jak na rysunku 5 przyrosty oporności dzielnika i napięcia są proporcjonalne. Uchyb nieczułości przy pomiarze obu tych wielkości jest więc jednakowy. Oznaczamy go symbolem δ_n . Daje się on wyznaczyć pomiarowo na podstawie podanej wyżej definicji, względnie obliczyć z danych układu.

W stanie równowagi napięcie między pręcikami sondy U_x równa się napięciu na oporności r dzielnika U_r . Zmiana tego napięcia ΔU_r wywołuje wychylenie α działek galwanometru o oporności R_g i stałej prądowej C_i . Stąd uchyb nieczułości układu przy wychyleniu o k -tą część działki:

$$\delta_n = \frac{\Delta U_r}{U_r \alpha} k. \quad (8)$$

Przy różnicy kompensujących się napięć ΔU_r w obwodzie galwanometru popłynie prąd:

$$i_g = C_i \alpha = \frac{\Delta U_r}{R_g + R_z},$$

czyli: $\Delta U_r = C_i \alpha (R_g + R_z)$, gdzie R_z — opór zastępczy.

Napięcie między pręcikami sondy możemy wyrazić przez natężenie pola K_∞ i odstęp pręcików $U_r = U_\infty = K_\infty d$. Po podstawieniu tych wyrażeń do wzoru (8) otrzymamy:

$$\delta_n = \frac{C_i (R_g + R_z)}{K_r d} k. \quad (8a)$$

Wartości we wzorze (8a) należy tak dobrać, by uzyskać mały uchyb nieczułości. Przy doborze galwanometru jednakowego typu produkcji mamy w przybliżeniu: $C_i^2 R_g = \text{const}$ i wtedy otrzymujemy $\delta_{n \min}$ dla $R_g = R_z$.

Oporność zastępcza układu od strony zacisków galwanometru R_z jest sumą oporności zastępczej wanny od strony pręcików i oporności zastępczej dzielnika $R_z = R_{wz} + R_{dz}$.

Oporność zastępcza wanny od strony pręcików daje się pomierzyć mostkiem prądu zmiennego po wyłączeniu zasilania i zwarcu elektrod. Pomiaru dokonano przy położeniu sondy w środku wanny nad górnym brzegiem dla następujących danych:

Średnica pręcików grafitowych $d_s = 1$ mm, odstęp pręcików $d = 5$ mm, głębokość zanurzenia 30 mm, oporność właściwa elektrolitu $\rho = 7,65$ [Ω m], długość wanny 2 m, przekrój $S/2 = 31,1$ cm².

W tych warunkach oporność wynosiła $R_{wz} = 350 \Omega$. Oporność zastępcza dzielnika zależy od wielkości mierzonych.

$$R_{dz} = \frac{r(R - r)}{R}.$$

Dla $K_{\infty} = 110 \text{ V/m}$, $d = 5 \text{ mm}$, $U_d = 4 \text{ V}$, $R = 10000 \text{ } \Omega$ oporność pomiarowej części dzielnika: $r = R \frac{K_{\infty} \cdot d}{U_d} = 1380 \text{ } \Omega$, a oporność zastępcza

$$R_{dz} = \frac{r(R - r)}{R} = 1190 \text{ } \Omega.$$

W tych warunkach całkowita oporność zastępcza $R_z = 1540 \text{ } \Omega$.

W układzie zastosowano galwanometr z plamką świetlną o danych: $C_i = 3 \cdot 10^{-8} \text{ A/dz}$, $R_g = 1000 \text{ } \Omega$. Po podstawieniu otrzymanych wartości do wzoru (8a) uchyb nieczułości wyniesie $\delta_n = 1,4 \cdot 10^{-4}$. Taką samą prawie wartość otrzymano z pomiarów.

Dalsze zmniejszenie uchybu nieczułości jest możliwe przy użyciu dzielnika o mniejszej oporności, np. $R = 1000 \text{ } \Omega$ i oporności najmniejszej dekady $10 \cdot 0,1 \text{ } \Omega$. Czułość poprawia się także przy obniżeniu oporności elektrolitu i równoczesnym użyciu galwanometru o mniejszej oporności wewnętrznej. Inne uchyby pomiarowe, zwłaszcza dla pomiaru małych niejednostajności pola, są praktycznie bez znaczenia.

3.4. Pomiar stopnia niejednostajności pola w szynie

Przy odwzorowaniu konforemnym sztaby prostokątnej ze skazą poprzeczną w położeniu dolnym okazuje się, że maksymalna wartość stopnia niejednostajności pola na powierzchni $\varepsilon_{0\sigma}$ rośnie proporcjonalnie do kwadratu względnej wielkości skazy $\frac{h_s}{h}$. W szczególności dla $h_s/h < 0,15$ otrzymuje się wzór:

$$\varepsilon_{0\sigma} = 1,25 \left(\frac{h_s}{h} \right)^2.$$

Pomiary w wannie elektrolitycznej wykazują, że podobna zależność zachodzi dla skazy w dowolnym miejscu sztaby, a także i dla szyny o naturalnym profilu. W ogólnym przypadku będzie więc:

$$\varepsilon_{0\sigma} = C_s \left(\frac{s}{S} \right)^2, \quad (9)$$

gdzie:

s — powierzchnia skazy,

S — przekrój szyny.

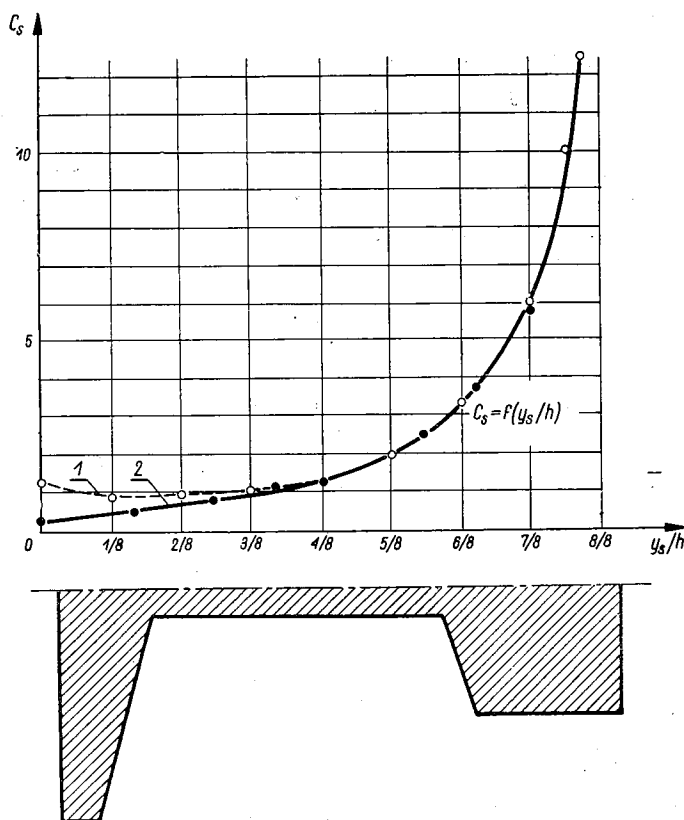
Współczynnik oddziaływania skazy C_s zależy głównie od odległości skazy od powierzchni szyny, a w małym tylko stopniu od kształtu skazy. Dla skaz objętościowych, np. owalnych, za powierzchnię skazy należy

przyjmować rzut jej na powierzchnię przekroju szyny. Działanie owalnych skaz pionowych w stopce i szyjce nie różni się ilościowo od cienkich skaz poprzecznych. Skazy owalne w główce dają zwykle nieco większy stopień niejednorodności pola i posiadają większy zasięg od tej samej wielkości skaz poprzecznych.

Skazy przekraczające 15% przekroju sztaby wywołują wyraźnie większy stopień niejednorodności pola niż ze wzoru (9).

Odwzorowanie skazy w wannie elektrolitycznej dla sztaby prostokątnej i oznaczeniach jak na rys. 8 dało wyniki przedstawione na rysunku 9 dla przypadku a) $C_s = f\left(\frac{y_s}{h}\right)$.

Dla odwzorowywania skaz w rzeczywistym przekroju szyny przyjmowano w stopce i szyjce skazy stanowiące 10% przekroju szyny, a w główce tylko 5%. W stopce odwzorowano sześć rozmaitych skaz, w szyjce i główce po trzy, a prócz tego po jednej między stopką i szyjką oraz



Rys. 9. Współczynnik odwzorowania skazy
1 — w sztabie prostokątnej, 2 — w szynie kolejowej S49

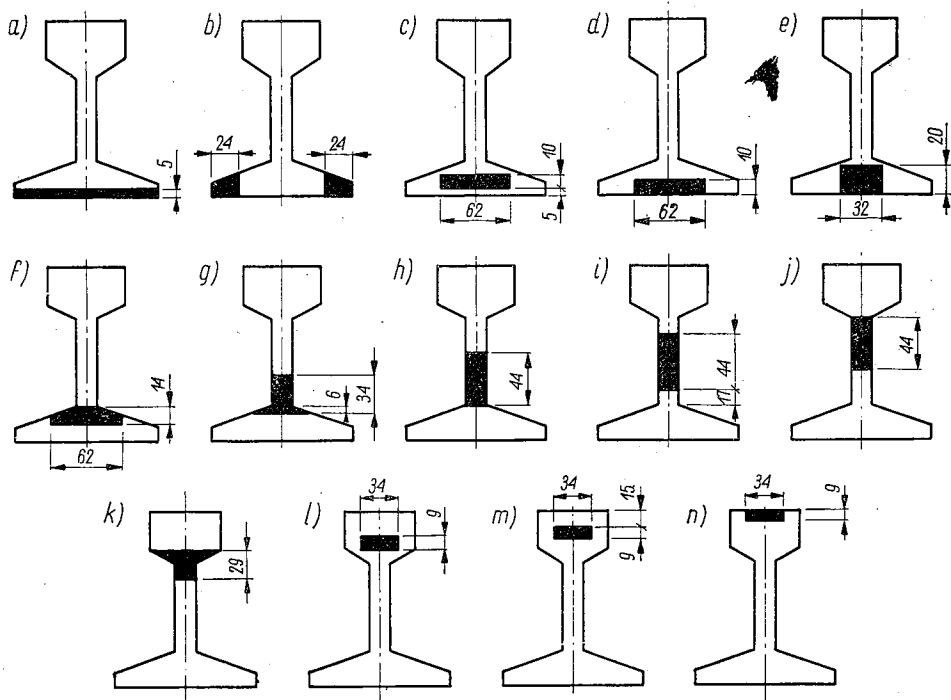
Tablica 1

Nr rysunku	Stopień niejednostajności $\varepsilon_\sigma \text{ ‰}$	Współczynnik oddziaływania skazy C_s	Uwagi
Skazy w stopce $\varepsilon_s = 10^0 \text{ ‰}$			Dla skaz w stopce można przyjmować średnio: $\varepsilon_\sigma = 0,31 \text{ ‰}$ $C_s = 0,31$
10a	0,26	0,26	
10b	0,26	0,26	
10c	0,27	0,27	
10d	0,30	0,30	
10e	0,35	0,35	
10f	0,40	0,40	
Skaza w przejściu między stopką a szyjką $\varepsilon_s = 10^0 \text{ ‰}$			
10g	0,50	0,50	
skazy w szyjce $\varepsilon_s = 10^0 \text{ ‰}$			
10h	1,06	1,06	
10i	1,3	1,3	Średnio dla skaz w szyjce jest: $C_s = 1,45$
10j	2,0	2,0	
Skaza w przejściu między szyjką a główką $\varepsilon_s = 10^0 \text{ ‰}$			
10k	2,4	2,4	
Skazy w główce $\varepsilon_s = 5^0 \text{ ‰}$			
10l	0,96	3,84	
10m	1,4	5,6	Skazy w główce odznaczają się dużą różnorodnością dużych współczynników C_s
10n	3,9	15,6	

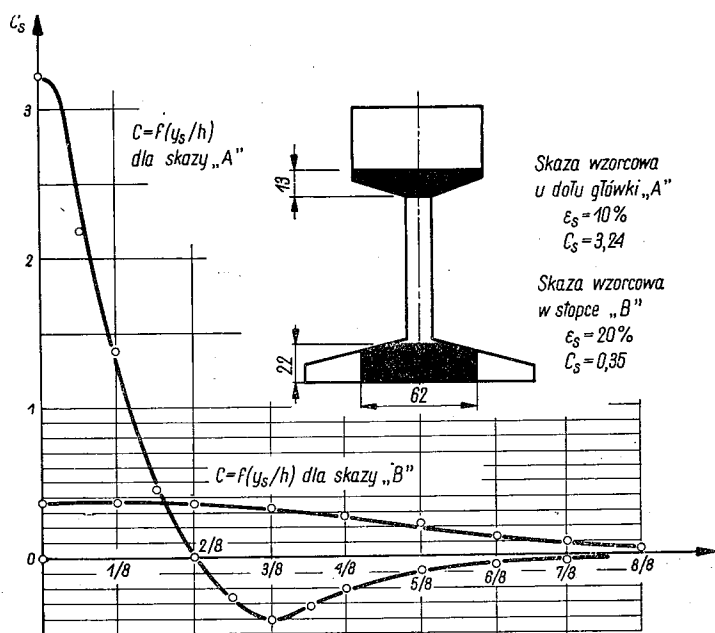
między szyjką a główką. Wyniki zestawiono w tablicy 1, stosownie do rys. 10.

W porównaniu ze sztabą prostokątną współczynnik oddziaływania skazy jest jak widać na rysunku 9 (krzywa 2) około 4 razy mniejszy dla stopki. Natomiast w górnej części szyjki oraz w główce szyny różnice są nieznaczne.

Obok stopnia niejednostajności pola i współczynnika oddziaływania skazy duży wpływ na wykrywalność posiada rozkład tych wielkości na powierzchni szyny w oddaleniu od skazy. Zasięg oddziaływania skazy charakteryzuje odległość, w której stopień niejednostajności spada do połowy. Odległość tę będziemy nazywać średnim zasięgiem skazy X_{sr}/h .



Rys. 10. Różne położenia skaz poprzecznych w szynie kolejowej

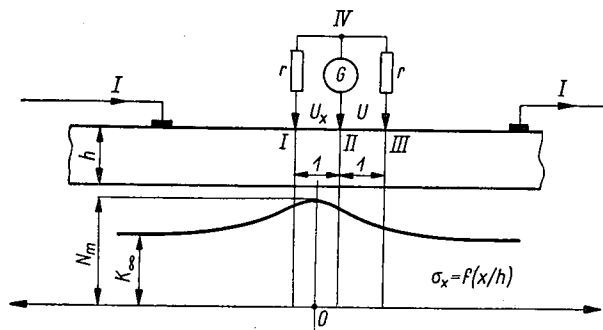


Rys. 11. Zależność współczynnika oddziaływania skazy od położenia — szyna kolejowa typu S49

Rysunek 11 przedstawia dwie skazy wzorcowe w główce „A” i w stopce „B” wraz z przebiegiem współczynnika oddziaływania skazy. Średni zasięg skazy wynosi dla główki nieco poniżej $\frac{1}{8}h$, a dla stopki ok. $\frac{6}{8}h$. Wykrywalność skaz w polu prądowym w jednakowych warunkach zależy nie tylko od stopnia niejednostajności pola względnie współczynnika oddziaływania C_s , lecz także od średniego zasięgu skazy. Obok przeszło 9 razy większego współczynnika oddziaływania skaza w główce posiada przeszło 6 razy mniejszy zasięg średni, a wykrywalność proporcjonalna w przybliżeniu do iloczynu $C_s \cdot X_{sr}/h$ jest dla główki tylko około 1,5 razy większa. Prócz tego skaza w główce daje na pewnej odległości ujemny stopień zniekształcenia pola. Odpowiednio długi czujnik przeznaczony dla skazy w stopce będzie wykazywał tylko nieco większą czułość dla takiej samej wielkości skazy w główce, gdy tymczasem czujnik krótki, przeznaczony dla skazy w główce może praktycznie nie reagować na takiej samej wielkości skazę w stopce. Ze względu na zróżnicowanie skaz należy zatem stosować dwa czujniki: jeden uczulony na skazy w główce, drugi na skazy w stopce. Ten sam wniosek dotyczy także defektoskopii magnetycznej.

3.5. Czujnik napięciowy

W defektoskopii prądowej przesyła się przez szynę prąd stały, a czujnik napięciowy, na przykład w postaci galwanometru lampowego, reaguje



Rys. 12. Zasada defektoskopu prądowego z czujnikiem napięciowym

je na napięcie galwanometru U_g stosownie do rysunku 12. Z równania węzłowego w punkcie IV mamy:

$$U_g \left[\frac{2}{r} + \frac{1}{R_g} \right] - \frac{U_x - U}{r} = 0.$$

Stąd:

$$U_g = \frac{U_x - U}{2 + \frac{r}{R_g}}. \quad (10)$$

Z drugiej strony jest:

$$\frac{U_x - U}{U} = \frac{\int_I^{II} -K_x dx - \int_{II}^{III} -K_x dx}{\int_{II}^{III} -K_x dx} = \eta_{cz} \frac{K_m - K_\infty}{K_\infty} = \eta_{cz} \varepsilon_\sigma.$$

Sprawność czujnika η_{cz} zależy od jego konstrukcji, w szczególności od jego długości związanej z umiejscowieniem skazy. Najkorzystniejsza długość czujnika równa się w przybliżeniu wysokości główki dla skazy w główce ($l_A = 4,6$ cm) oraz wysokości szyny dla skazy w stopce ($l_B = 15$ cm). Dla wskaźnika elektronowego jest: $r/R_g = 0$, więc po podstawieniu wzór (10) przekształci się:

$$U_g = \frac{U \eta_{cz} \varepsilon_\sigma}{2}.$$

Podstawmy jeszcze $U \approx \frac{Il_A \varrho_{sz}}{S}$, a otrzymamy ostatecznie:

$$U_g = \frac{Il_A \varrho_{sz} \eta_{cz} \varepsilon_\sigma}{2S}. \quad (10a)$$

Przyjmujemy teraz:

Najmniejszy wykrywalny stopień niejednostajności pola $\varepsilon_\sigma = 2 \cdot 10^{-3}$.

Odstęp styków czujnika uczulonego na skazy w dolnej części główki $l_A = 4,6 \cdot 10^{-2}$ m.

Szacunkowa sprawność czujnika $\eta_{cz} = 0,5$.

Przekrój szyny $S = 62,5 \cdot 10^2$ mm².

Oporność właściwa stali szynowej $\varrho_{sz} = 0,13 \frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}}$.

Najmniejsze napięcie na wejściu wskaźnika elektronowego $U_g = 10^{-6}$ V.

Dla przyjętych wartości otrzymujemy, że prąd płynący przez szynę nie może być mniejszy od $2,1 \cdot 10^3$ A. W przedstawionej na rysunku 12 defektoskopii prądowej są duże trudności w uzyskaniu przepływu tak dużego prądu oraz z otrzymaniem odpowiedniej czułości napięciowej wskaźnika elektronowego bez wpływu ubocznych zakłóceń.

Z tego powodu w defektoskopii prądowej stosuje się raczej czujnik magnetyczny. Prąd w szynie wywołuje bowiem na zewnątrz szyny pole

magnetyczne, którego zniekształcenie zależy od zniekształcenia pola prądowego. Zamiast czujnika napięciowego można zatem użyć czujnika magnetycznego. W najprostszej postaci może to być cewka poruszająca się tuż przy powierzchni szyny. W zależności od stopnia zniekształcenia pola i szybkości posuwu indukuje się w takiej cewce SEM, odpowiednio wzmacniana i uruchamiająca urządzenie sygnalizacyjne. Po raz pierwszy zastosował w kolejnictwie francuskim defektoskopię prądową w ruchu inżynier Sperry. Prąd zasilający wynosił 2,5 kA przy napięciu 2 V. Obecnie w badaniach ruchowych stosuje się defektoskopię magnetyczną, a prądowa zachowała się jedynie dla prób kontrolnych w czasie postoju. Źródła francuskie [6] podają, że przy prądzie w szynie 1500 A wykrywa się skazy w główce powyżej 5% przekroju główki. Zakładając, że przekrój główki stanowi 47% całkowitego przekroju szyny, otrzymujemy w stosunku do całkowitego przekroju szyny względną wielkość skazy $\varepsilon_s = 2,4\%$. Stopień niejednostajności pola ze wzoru (9) dla $C_s = 3,24$ przy skazie w dolnej części główki wynosi: $\varepsilon_\sigma = 0,19\%$. Dla porównania przypominamy, że na rysunku 11 dla skazy wzorcowej „A” mieliśmy $\varepsilon_\sigma = 3,24\%$. Wykrywanie tak małych zniekształceń pola jest wprawdzie teoretycznie możliwe, ale w praktyce wątpliwe z powodu różnych zakłóceń przypadkowych, wynikających z częstych zmian struktury szyny.

3.6. Uwagi końcowe

Wadą defektoskopii prądowej jest duży koszt i ciężar zarówno aparatury wykrywającej, jak i wozu, trudność wykonania styków oraz uzyskania dużego wzmocnienia bez wpływu zakłóceń ubocznych.

Do zalet tej metody należy zaliczyć całkowite omijanie przez prąd nawet najcieńszych pęknięć poprzecznych oraz mały wpływ zakłóceń przypadkowych od wstrząsów i nieciągłości struktury w porównaniu np. z metodą magnetyczną.

Metoda prądowa jako metoda kontrolna w czasie postoju jest obecnie również wypierana przez defektoskopię ultradźwiękową. Zasadnicze równania i zależności stopnia niejednostajności pola ważne są w przybliżeniu także dla pola magnetycznego. Podkreślić jeszcze wypada, że metoda prądowa nadaje się jedynie do wykrywania skaz w główce szyny. Wszelkie próby przystosowania jej do wykrywania skaz w stopce jakkolwiek teoretycznie możliwe zawiodły jednak w praktyce.

WYKAZ LITERATURY

1. Bolhar Nordenkampf F.: Das magnetische Feld im Eisen und seine Ermittlung am Modell im elektrolitischen Trog. — Elektrotechnik und Maschinenbau nr 23, grudzień 1955, str. 562.
2. Mc Donald D.: The Electrolytic Analogue in the Design of High Voltage Power Transformers. — PIEEE, vol. 100 (1953), p. II, s. 145.
3. Koczorowski A.: Szyny. Kolejowe służba drogowa nr 2. Wydawnictwa Komunikacyjne, Warszawa 1955.
4. Sander K., Yates Y.: The Accurate Mapping of Electric Fields in an Electrolytic Tank. — PIEEE, vol. 100 (1953), p. II, s. 167.
5. Turiczin A. M.: Pomiarы elektryczne wielkości nieelektrycznych. PWT., Warszawa 1957.
6. Deutch: La voiture de contrôle des rails de la SNCF. — Revue générale des chemins de fer. Maj 1954.

A. СПИХАЛЬСКИ

ВЛИЯНИЕ ИЗЪЯНОВ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ В ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЙ РЕЛЬСЕ И УКАЗАНИЯ ДЛЯ МАГНИТНОЙ ДЕФЕКТОСКОПИИ

Резюме

1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ СТЕРЖНЕ С ТОНКОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ ЦЕЛЬЮ

Среди изъянов выступающих в рельсах, наиболее частыми и опасными являются тонкие поперечные изъяны возникающие из-за усталости материала. С целью обнаружения таких изъянов используется явление деформации продольного токового или же магнитного поля. В качестве показателей деформации поля можно принять максимальную степень неравномерности поля при наверхности рельсы, а также среднюю протяжённость изъяна.

С целью упрощения вопроса раньше всего рассматривается распределение поля в опытном прямоугольном стержне с тонким изъяном снизу. Путём очередных конформных преобразований получается формула на структуру поля, на основании которой рассчитываются показатели деформации на верхней и нижней поверхности стержня. В случае изъянов величиною меньше чем 15% сечения стержня можно применять приближенные формулы. Рассуждения можно распространить на изъяны в среднем и верхнем положении. Результаты приведены в виде таблиц и графиков. Изъян в нижнем положении, составляющий одну восьмую часть сечения стержня, то есть 12,5%, вызывает степень неравномерности поля равную 1,96%, а её средний радиус достигает немного выше половины высоты стержня.

2. ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОЛЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ СТЕРЖНЕ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗЪЯНЕ В ПРОИЗВОЛЬНОМ ПОЛОЖЕНИИ

Применение аналитического метода в случае изъяна находящегося в произвольном положении является слишком сложным. Более простым является

численный метод, основан на разностном уравнении регулярного поля в квадричной сетке. Определение структуры поля путём итерации является несложным, но слишком медленным. Намного быстрее приводит к цели индивидуальное или групповое распределение поправок особенно совместно с методом дополняющего поля. Далее обсуждаются точность численного метода, погрешность из-за остаточных поправок, из-за несоблюдения береговых условий и, особенно, погрешность из-за недостаточной густоты сетки. Требуемая точность порядка до четырёх цифр может быть получена путём введения узлового слагаемого, устраняющего влияние недостаточной густоты сетки. Определено структуру поля в нескольких промежуточных положениях изъяна, а результаты представлены в графическом виде.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ВОСПРОИЗВЕДЕНИЕ ПОЛЯ В ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЙ РЕЛЬСЕ S49 В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ВЕЛИЧИНЫ И ПОЛОЖЕНИЯ ИЗЪЯНА

Определение структуры поля в рельсе с действительным сечением возможно лишь с помощью кубической сетки. При плоской сетке следует принять приближенное положение, что переменная проводимость пропорциональна к ширине профиля.

Проще всего, учитывая вышеуказанное, структура поля в рельсе определяется экспериментальным путём применяя электролитическую ванну. В качестве нулевого индикатора использован статический гальванометр с вибрационным выпрямителем. Приведенная схема дает возможность измерения потенциала и напряжённости поля. Самая малая, ещё измеряемая, степень неравномерности поля составляет ок. 10^{-3} .

Измерения подтвердили до сих пор проводимые расчёты структуры поля в прямоугольном стержне. Распределение неравномерности поля при поверхности рельсы, зависимое от относительной величины изъяна и его положения, отличается практически от распределения в стержне только лишь тогда, когда изъян находится в стопе или в нижней части шейки. Зависимость степени неравномерности поля от относительной величины изъяна приведена в виде эмпирической формулы. Для дальнейших испытаний введены два основных опытных изъяна: один в нижней части головки, другой в стопе рельсы.

Принцип токовой дефектоскопии с датчиком напряжения требует применения значительного тока проходящего в рельсе — выше 2 ка. Это, в свою очередь, требует использования тяжёлой и дорогой измерительной аппаратуры. Таким путём, в отличие от магнитного метода, можно обнаружить весьма тонкие изъяны.

A. SPICHALSKI

INFLUENCE OF FLAWS ON THE FIELD DISTRIBUTION IN THE RAILWAY BAR AND DIRECTIONS FOR MAGNETICAL FLAW DETECTION

Summary

1. ANALYTICAL DETERMINATION OF THE FIELD IN A RECTANGULAR BAR WITH A THIN TRANSVERSE CRACK

The most dangerous flaws and the most often occurring in rails are thin transverse fatigue flaws. The phenomenon of deformation of the longitudinal current

field or magnetic field is used for the detection of such flaws. The maximum degree of the field inhomogeneity on the surface of the rail and the average range of the flaw positions can be considered as indices of the field deformation.

For the sake of simplification, the field distribution is first considered in an equivalent rectangular bar with a thin flaw at the bottom. By way of gradual transformations a formula is obtained for the field structure, from which the indices of deformation are calculated for the upper and lower surface of the bar. For flaws smaller than 15% of the bar cross-section, it is possible to apply approximated formulae. The discussion can be extended to a flaw in the middle position and in the upper position. The results are presented graphically and in tables. A flaw in the lower position constituting the eighth part of the cross-section, that is 12,5%, causes the degree of field inhomogeneity equal to 1.96%, and its average range is a little over the half of the bar height.

2. NUMERICAL DETERMINATION OF THE FIELD STRUCTURE IN A RECTANGULAR BAR WITH A TRANSVERSE FLAW IN ANY POSITION

In the case of a flaw in an arbitrary position, the analytic method is too complicated. The numerical method based on the difference equation of the regular field in a square network is much simpler here. Determination of the field structure by means of iteration is simple but too slow. Much more efficient is an individual or group division of corrections, especially when combined with the method of the supplementing field. Considerations are carried out as to the accuracy of the numerical method, the deviation from residual corrections, from non-satisfying the boundary conditions, and in particular the deviation from an insufficient density of the network. The required accuracy up to four significant figures can be satisfied by means of introducing a node component eliminating the influence of the insufficient density of the network. The field structure is determined for a few middle positions of the flaw, and the results are represented graphically.

3. EXPERIMENTAL REPRODUCTION OF THE FIELD IN THE RAILWAY BAR S49 IN RELATION WITH THE SIZE AND POSITION OF THE FLAW

Determination of the field structure in a railway bar of real cross-section is possible only by means of a cubic grid. For a flat grid, it is necessary to introduce an approximated assumption of a changeable conductivity proportional to the width of the profile.

Thus, the field structure in a railway bar can be determined in the simplest way experimentally by means of an electrolytic tank. A static galvanometer with a vibration rectifier was used as the zero index. The given system enables the measurement of the electric potential and field strength to be performed. The least measurable degree of inhomogeneity of the field amounts to about 10^{-3} .

The measurements have confirmed the calculations of the field structure made so far in a rectangular bar. The distribution of the field inhomogeneity near the

surface of the bar is dependent on the relative size of the flaw and its position, and it differs practically from the distribution for the bar only when the flaw is located in the rail base or in the rail web. The dependence of the degree of the field inhomogeneity on the relative size of the flaw is given in the form of an empiric formula. For further investigations, two principal standard flaws have been introduced: one in the lower part of the rail head, and the other one in the rail base.

The principle of current flaw detection with a voltage gauge requires the application of a high current (above 2 kA), flowing in the bar. This involves the application of an expensive measurement apparatus. By this method, however, it will be possible to detect very thin flaws conversely to the magnetical method.

REDAKCJA

zawia damia

P. T. CZYTELNIKÓW

że już od dn. 15.XI.60 r. zamówienia na prenumeratę na rok 1961 przyjmują:

Centrala Kolportażu „Ruch”, Warszawa, Srebrna 12
konto PKO nr. 1-6-100.020.

oraz w całym kraju urzędy pocztowe, listonosze i delegatury „Ruchu”

Tylko prenumerata zapewnia regularne otrzymywanie czasopisma.

Cena rocznego abonamentu wynosi zł. 100.—, półrocznie zł. 50.—.

