POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM VIII · ZESZYT 1

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1962

RADA REDAKCYJNA

PROF. JANUSZ GROSZKOWSKI, PROF. JANUSZ LECH JAKUBOWSKI,
PROF. BOLESŁAW KONORSKI, PROF. IGNACY MALECKI
PROF. PAWEŁ NOWACKI, PROF. PAWEŁ SZULKIN

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor Naczelny
PROF. WITOLD NOWICKI

Sekretarz
JULIUSZ MIERZEJEWSKI

ADRES REDAKCJI

Warszawa, Politechnika, Plac Jedności Robotniczej 1,
Katedra Teletransmisji Przewodowej, Gmach Mechaniki

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
Warszawa, Miodowa 10

Nakład 670 (253+147)	Oddano do składania 19.I.1962
Ark. wyd. 13,5, ark. druk. 12,75	Podpisano do druku w maju 1962
Papier druk. sat. kl. III, 80 g, 70 × 100	Druk ukończono w maju 1962
Zamówienie nr 111/62.	Cena zł 25.— H-41

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

621.317.08

ZOFIA SWIEYKOWSKA

Czułość pomiaru zrównoważonym mostkiem Wheatstone'a w warunkach krytycznego tłumienia galwanometru

Rękopis dostarczono 26.5.1961

Sformułowano definicję czułości pomiaru zrównoważonym mostkiem Wheatstone'a. Wyprowadzono wzory określające czułość pomiaru w warunkach krytycznego tłumienia galwanometru. Ustalono optymalne wartości stosunków oporności gałęzi mostka dla danej oporności mierzonej i danego galwanometru na podstawie analizy zależności czułości pomiaru od tych stosunków przy założeniu krytycznego tłumienia galwanometru, jednakowej dopuszczalnej obciążalności gałęzi mostka i wykorzystania dopuszczalnej obciążalności mostka. Teoretycznie uzasadniono kryterium wyboru miejsca włączenia galwanometru w danym układzie mostkowym. Podano wytyczne dla doboru galwanometru. Wyznaczono metodą graficzną obszar galwanometrów nadających się do danego pomiaru oraz wartości oporności potrzebnych dla dopasowania galwanometru. Przeprowadzono przykładowo dla dwóch typowych rodzajów pomiaru dobór galwanometru i elementów mostka do szeregu wartości oporności mierzonych.

1. WSTĘP

Jakkolwiek zasada układu mostkowego została podana przez S. H. Christie już w 1833 r. i zastosowana do porównywania oporności w 1843 r. przez Wheatstone'a, a począwszy od 1873 r., mianowicie od Heaviside'a [10] i Maxwella [39], wiele prac poświęcono czułości pomiaru mostkiem Wheatstone'a (o czym świadczy załączony wykaz literatury, obejmujący tylko część publikacji dotyczących tego problemu), mimo to zagadnienie pozostaje nadal aktualne.

Metody mostkowe odgrywają bardzo ważną rolę w miernictwie elektrycznym, gdyż obok układów kompensacyjnych należą do najdokładniejszych metod pomiarowych. W przypadku gdy wymagana jest duża dokładność pomiaru, zagadnienie czułości pomiaru nabiera szczególnego znaczenia, gdyż uchyb nieczułości wyznacza granicę dokładności pomiaru. Oczywiste jest, że wartości, na którą układ pomiarowy nie reaguje, zmierzyć nie można. Im większa wymagana jest dokładność pomiaru, tym większa musi być i czułość pomiaru. Toteż rozważania dotyczące sposobów osiągania największej czułości mają istotne znacze-

nie przede wszystkim przy pomiarach o najwyższej dokładności, na przykład przy sprawdzaniu wzorców.

Ponieważ jedynie metoda zerowa zapewnia dużą dokładność, w pracy niniejszej rozpatrywana będzie czułość pomiaru oporności mostkiem zrównoważonym [1]).

Celem pracy jest rozpatrzenie zagadnień związanych z czułością pomiaru oporności zrównoważonym mostkiem Wheatstone'a w warunkach krytycznego tłumienia galwanometru, czyli przy dostosowaniu oporności obwodu galwanometru do jego oporności krytycznej.

W rozdz. 2 dokonano przeglądu definicji czułości spotykanych w literaturze i podano własną definicję czułości pomiaru. W rozdz. 3 na podstawie przyjętej definicji wyprowadzono wzory określające czułość pomiaru w warunkach krytycznego tłumienia galwanometru, a w rozdz. 4 uzasadniono wzory na zastępczą oporność mostka zrównoważonego. W rozdz. 5 przeanalizowano zależność pomiaru od wartości stosunków oporności gałęzi mostka dla innych założeń, niż to dotychczas stosowano. Na podstawie tej analizy ustalono wartości optymalnych stosunków oporności gałęzi mostka dla danej oporności mierzonej i danego galwanometru. W rozdz. 6 teoretycznie wyprowadzono kryterium wyboru miejsca włączenia galwanometru w danym układzie mostkowym. W rozdz. 7 podano wytyczne dla doboru galwanometru, określono obszar galwanometrów nadających się do danego pomiaru, przedstawiono graficzny sposób wyznaczenia oporności potrzebnych do dopasowania galwanometru oraz przeprowadzono przykładowo dla dwóch typowych rodzajów pomiarów dobór galwanometru i elementów mostka do szeregu wartości oporności mierzonych.

Niektóre części tej pracy (rozdz. 5 i 6) zostały opublikowane w Archiwum Elektrotechniki [54], [55].

Oryginalny wkład autorki w niniejszej pracy stanowi przede wszystkim:

a) podanie optymalnych wartości stosunków oporności gałęzi mostka dla założeń, przy których to zagadnienie dotychczas nie było rozpatrywane,

b) teoretyczne wyprowadzenie kryterium wyboru miejsca włączenia galwanometru w danym układzie mostkowym,

c) wyznaczenie metodą graficzną obszaru galwanometrów nadających się do danego pomiaru oraz oporności potrzebnych do dopasowania galwanometru do mostka,

d) określenie wskaźnika czułości galwanometru jako nowej wielkości charakteryzującej galwanometr.

---

[1]) Stan mostka, przy którym galwanometr się nie odchyla, nazywamy stanem równowagi mostka, a mostek służący do pomiaru oporności metodą zerową nazywamy mostkiem zrównoważonym.

2. DEFINICJA CZUŁOŚCI POMIARU

2.1. Definicje czułości spotykane w literaturze

W. Jaeger [12] określa czułość pomiaru odchyleniem galwanometru dla pewnej procentowej zmiany oporności (Der im Galvanometer für eine bestimmte prozentische Änderung des Widerstandes erzielte Ausschlag gilt dann als „Messempfindlichkeit" s. 311).

J. Krönert [29] wprowadza nazwę „czułość układu" (Empfindlichkeit der Schaltung) i podaje definicje w postaci wzoru:

$$\text{Czułość układu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

gdzie: x jest niezależną wielkością układu, a φ — zależną.

Czułość zaś mostka dla wskaźnika równowagi w odniesieniu do oporności R_1 (die Empfindlichkeit der Brücke für den Indikator hinsichtlich des Widerstandes R_1) określa wzorem:

$$\lim_{\Delta R_1 \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta R_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial R_1},$$

gdzie:

ΔR_1 — zmiana oporności R_1,

$\Delta \varphi$ — zmiana odchylenia wskaźnika równowagi, wywołana zmianą oporności ΔR_1.

W. Krukowski [34] analogicznie do Krönerta określa czułość kompensatora jako iloraz różniczkowy zmiany odchylenia galwanometru $d\alpha$, wywołanej zmianą napięcia kompensującego dU_c i tejże zmiany napięcia, czyli $\frac{d\alpha}{dU_c}$. Zaznacza jednak, że bardziej charakterystyczna byłaby czułość w z g l ę d n a, definiowana jako odchylenie galwanometru odpowiadające zmianie napięcia o 10^{-3}, a przy najbardziej dokładnych pomiarach nawet o 10^{-6} jego wartości.

Według J. Fischera [7], [8] dla nieskończonej oporności wskaźnika równowagi ($R_g = \infty$) miarą czułości jest napięcie na gałęzi wskaźnika równowagi ΔU_g, wywołane niezrównoważeniem mostka przez zmianę o ΔX oporności jednej gałęzi mostka X, przy czym $\Delta X \ll X$; natomiast dla skończonej wartości oporności wskaźnika równowagi ($0 < R_g < \infty$) miarą czułości jest prąd w gałęzi wskaźnika Δi_g, wywołany niezrównoważeniem mostka o ΔX.

W. Schwerdtfeger [51] określa czułość układu najmniejszą zmianą oporności, która wywołuje dostrzegalne odchylenie galwanometru (0,1 dz.).

Analogicznie E. Meyer i C. Moerder [41] za czułość mostka przyjmują procentowe niezrównoważenie mostka, które wywołuje odchylenie

galwanometru o jeden milimetr bądź o jedną działkę [Als „Brückenempfindlichkeit" bezeichnet man jene prozentuale Verstimmung $\frac{\Delta R}{R}100$, die gerade einen Ausschlag von 1 mm (1 Skalenteil) hervorruft. s. 243]. Czyli uchyb nieczułości wyrażony w procentach nazywają oni czułością mostka.

A. C. Seletzky i L. A. Zurcher [52] określają czułość mostka jednostkowym (tj. na jeden wolt napięcia doprowadzonego do mostka) napięciem „niezrównoważenia", pojawiającym się na wyjściu mostka przy małej zmianie oporności jednej z gałęzi mostka od stanu równowagi.

J. Avins [3] za czułość mostka przyjmuje zmianę napięcia na wskaźniku równowagi odniesioną do względnego niezrównoważenia $\Delta R/R$ na wolt doprowadzonego napięcia do mostka i określa ją wzorem:

$$\text{Czułość mostka} = \frac{\Delta E_g}{E_0 \Delta R/R},$$

gdzie:

ΔE_g — zmiana napięcia na wskaźniku równowagi,
E_o — napięcie doprowadzone do mostka,
$\Delta R/R$ — względne niezrównoważenie mostka.

Zarówno F. Wenner [57], jak i po nim F. K. Harris [9] posługują się łączną czułością mostka i galwanometru, jako stosunkiem zmiany odchylenia galwanometru $d\alpha$, wywołanej niezrównoważeniem mostka o ΔX, do tej względnej wartości niezrównoważenia $dX = \frac{\Delta X}{X}$, czyli $\frac{d\alpha}{dX}$.

K. B. Karandiejew [16], [17] przyjmuje czułość urządzenia pomiarowego (czuwstwitielnost izmieritielnoj ustanowki) jako iloczyn czułości układu i czułości wskaźnika równowagi i określa wzorem:

$$S = \lim \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta x} \right|_{\Delta x \to 0} = \frac{d\alpha}{dx},$$

gdzie $\Delta\alpha$ — zmiana odchylenia wskaźnika wywołana zmianą wielkości mierzonej Δx.

Obok czułości odniesionej do bezwzględnej zmiany wielkości mierzonej Karandiejew uwzględnia i czułość odniesioną do względnej zmiany.

J. N. Krotkow [26], [27] przed Karandiejewem określał czułość metody jako iloczyn czułości układu i wskaźnika równowagi. Rozpatrywał prądową i napięciową czułość układu w odniesieniu do względnej zmiany oporności równoważącej.

A. D. Niestierienko [46] rozróżnia prądową, napięciową i mocową czułość układu, jako stosunki przyrostów prądu, napięcia lub mocy, otrzymywanych na wyjściu układu na skutek zmiany jednego parametru układu, do zmiany bezwzględnej lub względnej tego parametru.

Niestierienko przyjmuje także kompletną czułość układu (kompletnaja czuwstwitielnost schiemy) jako stosunek zmiany odchylenia przyrządu do bezwzględnej lub względnej zmiany parametru układu. Ta kompletna czułość układu równa się iloczynowi czułości układu i przyrządu, jest ona jednoznaczna z pojęciem czułości urządzenia pomiarowego Karandiejewa.

Niestierienko zaznacza, że prądową, napięciową lub mocową czułość układu należy stosować do obliczeń układów, na wyjściu których znajdują się przekaźniki czy inne urządzenia, działające pod wpływem zmiany doprowadzonego prądu, napięcia lub mocy. Natomiast w układach pomiarowych, na wyjściu których znajduje się wskaźnik równowagi, miarodajną jest kompletna czułość układu.

Niestierienko wprowadza oprócz tego jeszcze pojęcie czułości właściwej (udielnaja czuwstwitielnost), którą określa jako czułość na jednostkę wielkości charakteryzującej zasilanie układu: E, U, I lub I_1.

Dla W. A. Koczana [22], [23] miarą czułości jest prąd w gałęzi wskaźnika względnie moc pobierana przez wskaźnik.

Definicje czułości wymienionych autorów zostały podane mniej więcej w porządku chronologicznym. Z dat publikacji wynika, że uczeni niemieccy zajmowali się zagadnieniami czułości głównie w latach trzydziestych, amerykańscy — w czterdziestych, a radzieccy — w pięćdziesiątych XX w.

2. Przyjęta definicja czułości pomiaru

Przyjęto za Jaegerem [12] nazwę „czułość pomiaru", gdyż uznano ją za najwłaściwszą, lepszą od takich nazw jak: „łączna czułość mostka i galwanometru", „czułość urządzenia pomiarowego", czy też „kompletna czułość układu".

Czułość najogólniej można określić jako stosunek skutku do przyczyny, którą to przyczyną może być zmiana przynajmniej jednego z parametrów układu pomiarowego, skutkiem zaś — zmiana wartości wielkości bezpośrednio obserwowanej, spowodowana zmianą tegoż parametru.

Przy pomiarze oporności mostkiem Wheatstone'a skutkiem jest zmiana odchylenia galwanometru, a przyczyną — zmiana oporności jednej z gałęzi mostka. Toteż w niniejszej pracy przyjęto następującą definicję:

Czułość pomiaru oporności zrównoważonym mostkiem Wheatstone'a jest to wartość stosunku zmiany odchylenia galwanometru, wywołanej możliwie małą — lecz większą od progowej — zmianą oporności którejkolwiek gałęzi mostka od wartości spełniającej warunek równowagi mostka, do tej względnej zmiany oporności.

Czułość pomiaru S określa więc wzór:

$$S = \frac{\Delta \alpha}{\Delta R/R} \qquad \text{dla } \Delta R \ll R, \tag{2.1}$$

gdzie:

R — wartość oporności którejkolwiek gałęzi mostka spełniająca warunek równowagi,

ΔR — nieznaczna zmiana oporności R,

$\Delta \alpha$ — zmiana odchylenia galwanometru wywołana niezrównoważeniem ΔR.

Ze wzoru (2.1) wynika, że czułość pomiaru ma ten sam wymiar co odchylenie galwanometru, czyli [dz.] lub [mm]. W dalszym ciągu niniejszej pracy czułość pomiaru będzie podawana bez wymiaru (jako liczba niemianowana).

Niektórzy autorzy [20], [29] definiują czułość w odniesieniu do bezwzględnej wartości zmiany oporności, co powoduje przy niejednakowych opornościach poszczególnych gałęzi mostka otrzymywanie różnych wartości czułości dla tego samego układu pomiarowego, w zależności od tego, w której gałęzi zostanie dokonana zmiana oporności. Należy uznać, że w danym układzie pomiarowym mamy do czynienia tylko z jedną określoną wartością czułości pomiaru, toteż właściwsze jest odnosić czułość do względnej zmiany oporności którejkolwiek gałęzi mostka.

U c h y b n i e c z u ł o ś c i jest to względna zmiana oporności gałęzi mostka (którą równoważy się mostek), wywołująca zmianę odchylenia galwanometru o jedną działkę. Uchyb nieczułości równa się więc odwrotności czułości pomiaru.

To logiczne powiązanie czułości pomiaru i uchybu nieczułości przemawia również za przyjętą definicją czułości pomiaru.

Przy dobrej optyce galwanometru można odnosić uchyb nieczułości do 0,2 działki, wówczas będzie on oczywiście pięciokrotnie mniejszy.

Najmniejszą zmianę oporności, która wywołuje najmniejszą dostrzegalną jeszcze zmianę odchylenia galwanometru (0,1 dz.) nazywamy p r o g o w ą z m i a n ą o p o r n o ś c i.

3. WYPROWADZENIE WZORÓW NA CZUŁOŚĆ POMIARU W WARUNKACH KRYTYCZNEGO TŁUMIENIA GALWANOMETRU

Na podstawie przyjętej definicji czułości pomiaru można dla każdego układu mostkowego wyznaczyć doświadczalnie czułość pomiaru, a co za tym idzie i uchyb nieczułości, przez zaobserwowanie zmiany odchylenia galwanometru, jaką wywołuje określona względna zmiana oporności którejkolwiek gałęzi mostka.

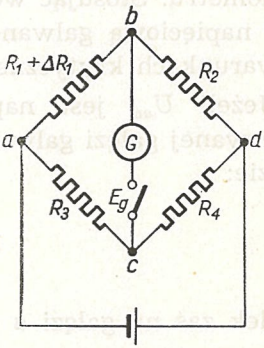
Ażeby jednak móc określić czułość pomiaru nie na drodze eksperymentalnej, trzeba znaleźć zależność między zmianą odchylenia galwanometru a wywołującą ją zmianą oporności gałęzi mostka.

Zależność ta zostanie rozpatrzona przy aperiodycznym krytycznym tłumieniu galwanometru, czyli przy dostosowaniu oporności obwodu galwanometru do jego oporności krytycznej, gdyż jedynie wtedy osiąga się dobre warunki pomiaru.

Jak wiadomo, oporność krytyczna galwanometru jest to oporność całego obwodu galwanometru, przy której galwanometr jest tłumiony aperiodycznie krytycznie, tzn. osiąga ustalone położenie bez wahań i bez pełzania. Oporność krytyczna R_o składa się z wewnętrznej oporności galwanometru R_g i z zewnętrznej oporności krytycznej R_{oz}, czyli

$$R_o = R_g + R_{oz}. \tag{3.1}$$

Gdy oporność obwodu galwanometru jest większa od oporności krytycznej, galwanometr ustala się dopiero po kilku wahnięciach (jest za mało tłumiony) — co przedłuża czas wykonywania pomiarów; w przypadku zaś, gdy oporność obwodu galwanometru jest mniejsza od oporności krytycznej, galwanometr pełza (jest zanadto tłumiony) — co utrudnia wykonanie dokładnego pomiaru.



Rys. 1. Względne niezrównoważenie mostka $\Delta R_1/R_1$ wywołuje na przerwanej gałęzi galwanometru różnicę potencjałów E_g

Stosownie do oznaczeń podanych na rys. 1 dla zrównoważonego mostka istnieje zależność:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}. \tag{3.2}$$

Wyprowadzenie mostka z równowagi przez nieznaczną zmianę oporności jednej z gałęzi mostka, na przykład zwiększenie oporności R_1 o ΔR_1, powoduje pojawienie się różnicy potencjałów E_g na przerwanej gałęzi galwanometru.

W warunkach krytycznego tłumienia odchylenie galwanometru jest proporcjonalne do czułości napięciowej galwanometru S_u i do napięcia czynnego w jego obwodzie, czyli — zgodnie z twierdzeniem Thevenina — do napięcia pojawiającego się na przerwanej gałęzi galwanometru.

Zmianę odchylenia galwanometru, spowodowaną niezrównoważeniem ΔR_1, określa więc wzór

$$\Delta\alpha = S_u E_g \,, \tag{3.3}$$

gdzie:

E_g — napięcie na przerwanej gałęzi galwanometru wywołane niezrównoważeniem ΔR_1,

S_u — czułość napięciowa galwanometru, czyli liczba działek odchylenia galwanometru przy określonej odległości skali od lusterka galwanometru (zazwyczaj jednego metra) na jednostkę różnicy potencjałów w warunkach tłumienia krytycznego, tzn., gdy oporność obwodu galwanometru jest równa jego oporności krytycznej.

Czułość napięciowa galwanometru musi być odniesiona do określonej wartości oporności jego obwodu, aby była jednoznacznie zdefiniowana. Czułość napięciową odnosi się do krytycznej oporności obwodu galwanometru, ponieważ jest to oporność najwłaściwsza dla pracy galwanometru. Stosując we wzorze na czułość pomiaru tak określoną czułość napięciową galwanometru otrzymuje się wartość czułości pomiaru w warunkach krytycznego tłumienia.

Jeżeli U_{ad} jest napięciem doprowadzonym do mostka, to przy przerwanej gałęzi galwanometru b — c, spadek napięcia na gałęzi a — b będzie:

$$U_{ab} = U_{ad}\frac{R_1 + \Delta R_1}{R_1 + \Delta R_1 + R_2},$$

spadek zaś na gałęzi a — c

$$U_{ac} = U_{ad}\frac{R_3}{R_3 + R_4}.$$

Różnica potencjałów między punktami b i c przy przerwanej gałęzi b—c będzie:

$$U_{bc} = U_{ab} - U_{ac} = U_{ad}\left(\frac{R_1 + \Delta R_1}{R_1 + \Delta R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4}\right).$$

Ze wzoru (3.2) wynika, że

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_3}{R_3 + R_4},$$

stąd

$$U_{bc} = U_{ad}\frac{R_1}{R_1 + R_2}\left(\frac{1 + \Delta R_1/R_1}{1 + \Delta R_1/(R_1 + R_2)} - 1\right).$$

Wyrażenie $\frac{1}{1+\Delta R_1/(R_1+R_2)}$ można rozwinąć w szereg

$$U_{bc} \approx U_{ad}\frac{R_1}{R_1+R_2}\left\{\left(1+\frac{\Delta R_1}{R_1}\right)\left[1-\frac{\Delta R_1}{R_1+R_2}+\left(\frac{\Delta R_1}{R_1+R_2}\right)^2-\ldots\right]-1\right\}.$$

Ponieważ $\Delta R_1 \ll R_1$, można pominąć człony potęgowe

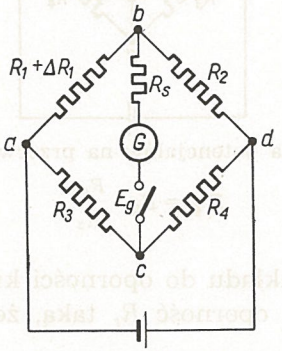
$$U_{bc} \approx U_{ad}\frac{R_1}{R_1+R_2}\left[\left(1+\frac{\Delta R_1}{R_1}\right)\left(1-\frac{\Delta R_1}{R_1+R_2}\right)-1\right].$$

Po uproszczeniu otrzymujemy ostatecznie

$$U_{bc} = U_{ad}\frac{R_2\cdot\Delta R_1}{(R_1+R_2)^2}. \tag{3.4}$$

Rozpatrzymy kolejno dwa przypadki:

1. Oporność zastępcza mostka R_z między punktami b i c jest mniejsza lub równa zewnętrznej oporności krytycznej galwanometru R_{oz}, tzn. gdy $R_z \ll R_{oz}$ (rys. 2).



Rys. 2. Dla $R_z \leqslant R_{oz}$ różnica potencjałów na przerwanej gałęzi galwanometru: $E_g = U_{bc}$

W celu dopasowania układu do oporności krytycznej galwanometru włącza się w szereg z galwanometrem taką oporność R_s, żeby $R_s + R_z = R_{oz}$.

Na otwartym wyłączniku w gałęzi galwanometru otrzymamy napięcie U_{bc} podane wzorem (3.4), które możemy rozpatrywać jako siłę elektromotoryczną E_g, działającą w obwodzie galwanometru, a więc

$$E_g = U_{bc}. \tag{3.5}$$

Po włączeniu galwanometru zgodnie z (3.3), (3.5) i (3.4) otrzymamy odchylenie

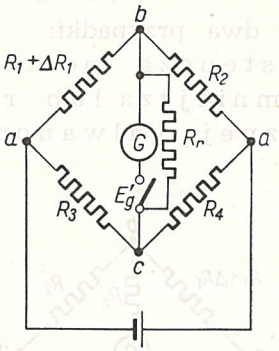
$$\Delta\alpha = S_u E_g = S_u U_{bc} = S_u U_{ad}\frac{R_2\cdot\Delta R_1}{(R_1+R_2)^2}. \tag{3.6}$$

Po podstawieniu do wzoru (2.1) $\Delta\alpha$ ze wzoru (3.6) i $\frac{\Delta R_1}{R_1}$ zamiast $\frac{\Delta R}{R}$ otrzymujemy

$$S_1 = \frac{\Delta\alpha R_1}{\Delta R_1} = S_u U_{ad} \frac{R_1 \cdot R_2}{(R_1 + R_2)^2}. \tag{3.7}$$

Jest to wzór przybliżony na czułość pomiaru w warunkach tłumienia krytycznego, gdy $R_z \leqslant R_{oz}$.

2. Oporność zastępcza mostka od strony galwanometru jest większa od zewnętrznej oporności krytycznej galwanometru, tzn. gdy $R_z > R_{oz}$ (rys. 3).



Rys. 3. Dla $R_z > R_{oz}$ różnica potencjałów na przerwanej gałęzi galwanometru:

$$E'_g = E_g \cdot \frac{R_{oz}}{R_z}$$

W celu dopasowania układu do oporności krytycznej włącza się równolegle do galwanometru oporność R_r taką, żeby

$$\frac{R_r \cdot R_z}{R_r + R_z} = R_{oz}. \tag{3.8}$$

Przy przerwanej gałęzi galwanometru i wyłączonym oporniku R_r, różnica potencjału U_{bc} określona jest wzorem (3.4). Przy wyłączonym galwanometrze, a włączonym boczniku R_r, popłynie przez bocznik prąd $I_{R_r} = \frac{U_{bc}}{R_r + R_z}$, a na przerwie w gałęzi galwanometru wystąpi różnica potencjałów E'_g równa napięciu na boczniku R_r

$$E'_g = R_r I_{R_r} = \frac{U_{bc}}{R_r + R_z} R_r. \tag{3.9}$$

Ze wzoru (3.8) wynika, że

$$\frac{R_r}{R_r + R_z} = \frac{R_{oz}}{R_z},$$

a zatem

$$E'_g = U_{bc}\frac{R_{oz}}{R_z} = E_g\frac{R_{oz}}{R_z}. \tag{3.9a}$$

Po włączeniu galwanometru zgodnie z (3.3), (3.9a) i (3.4) otrzymamy odchylenie

$$\Delta\alpha = S_u E'_g = S_u U_{bc}\frac{R_{oz}}{R_z} = S_u U_{ad}\frac{R_2\cdot\Delta R_1}{(R_1+R_2)^2}\cdot\frac{R_{oz}}{R_z}, \tag{3.10}$$

stąd — po podstawieniu (3.10) do (2.1) — wzór przybliżony na czułość pomiaru w warunkach tłumienia krytycznego dla $R_z > R_{oz}$

$$S_2 = S_u U_{ad}\frac{R_1\cdot R_2}{(R_1+R_2)^2}\cdot\frac{R_{oz}}{R_z}. \tag{3.11}$$

Wzory na czułość pomiaru zrównoważonym mostkiem Wheatstone'a w warunkach krytycznego tłumienia galwanometru (3.7) i (3.11) są wzorami przybliżonymi, są one jednak zupełnie wystarczająco dokładne w pobliżu równowagi mostka i tym dokładniejsze, im z większą czułością mamy do czynienia, gdyż tym mniejsza względna zmiana oporności jest wtedy potrzebna do wywołania odchylenia galwanometru.

Pierwszy F. Wenner [57] wyprowadził wzory na czułość, uwzględniające dopasowanie układu do oporności krytycznej galwanometru. Wzory Wennera podają wartość czułości dwa razy większą niż wyprowadzone wyżej wzory (3.7) i (3.11), gdyż Wenner za $\Delta\alpha$ brał różnicę odchylenia galwanometru dla zmiany kierunku prądu, czyli sumę dwóch odchyleń dla różnych kierunków prądu, co oczywiście powoduje dwukrotne zwiększenie czułości.

Ze wzorów (3.7) i (3.11) wynika, że czułość pomiaru zależna jest od:

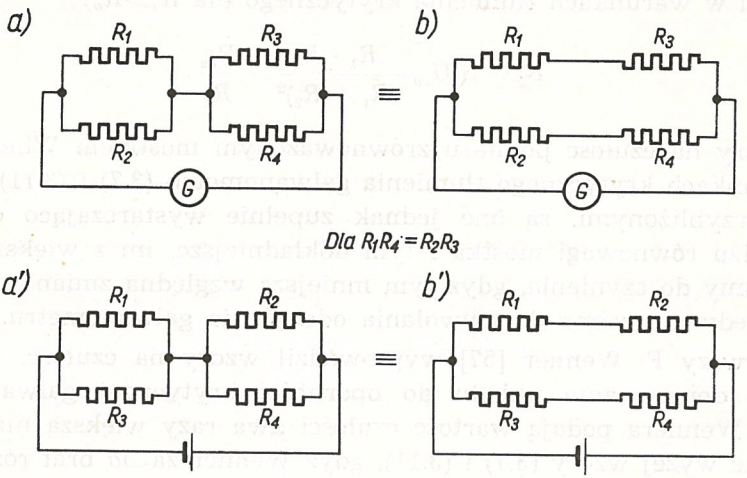
1) czułości napięciowej galwanometru,
2) napięcia doprowadzonego do mostka,
3) wartości oporności gałęzi mostka,
4) zewnętrznej oporności krytycznej galwanometru.

4. CHARAKTERYSTYCZNA CECHA ZRÓWNOWAŻONEGO MOSTKA

W zrównoważonym mostku jego oporność zastępcza na wejściu (między punktami a—d, rys. 1) jest niezależna od oporności włączonej na wyjściu, tj. oporności gałęzi galwanometru, a oporność zastępcza mostka od strony galwanometru (między punktami b—c) jest niezależna od wartości oporności gałęzi zasilającej. Stanowi to ogólniejszą cechę charakterystyczną mostka zrównoważonego niż stwierdzenie, że „mostek jest wtedy zrównoważony, gdy przez galwanometr prąd nie płynie" — gdyż chociaż mostek jest zrównoważony, tzn. spełnia warunek

równowagi $R_1R_4 = R_2R_3$, przez galwanometr może płynąć prąd, o ile w jego gałęzi będzie działać jakaś siła elektromotoryczna (np. siła termoelektryczna powstała na stykach różnych metali o niejednakowych temperaturach).

Dowodem tej właściwości zrównoważonego mostka — którą łatwo można doświadczalnie sprawdzić — jest to, że zastępcza oporność mostka od strony jednej przekątnej jest ta sama zarówno przy zwartej, jak i przerwanej drugiej przekątnej oraz, że z przyrównania wzorów na oporność zastępczą mostka dla obu tych przypadków otrzymujemy warunek równowagi mostka.



Rys. 4. Dla mostka zrównoważonego układy a i b są równoważne pod względem oporności

Oporność zastępczą mostka od strony galwanometru R_z, dla zwartej gałęzi źródła napięcia, określa wzór (rys. 4a)

$$R_z = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4}, \tag{4.1}$$

natomiast dla przerwanej gałęzi źródła napięcia (rys. 4b)

$$R_z = \frac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}. \tag{4.2}$$

Przyrównujemy (4.1) i (4.2)

$$\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{(R_1 + R_3) \cdot (R_2 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4};$$

po uproszczeniu tego równania otrzymuje się

$$R_1 R_4 - R_2 R_3 = 0,$$

co właśnie jest warunkiem równowagi mostka.

Dzięki tej charakterystycznej właściwości obliczanie oporności zastępczej mostka zrównoważonego jest bardzo uproszczone.

Oporność zastępczą mostka zrównoważonego od strony galwanometru można obliczać zarówno ze wzoru (4.1) dla zwartej gałęzi źródła napięcia, jak i ze wzoru (4.2) dla przerwanej gałęzi źródła napięcia.

Oporność zaś wejściową mostka w stanie równowagi (między punktami a—d) można obliczać według jednego z następujących dwóch wzorów:

$$R_{ad} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_4} \tag{4.3}$$

albo

$$R_{ad} = \frac{(R_1 + R_2) \cdot (R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}. \tag{4.4}$$

5. NAJKORZYSTNIEJSZY DOBÓR STOSUNKÓW OPORNOŚCI GAŁĘZI MOSTKA WHEATSTONE'A

5.1. Założenia dla optymalnego doboru oporności

Zagadnieniem najkorzystniejszego doboru oporności gałęzi mostka Wheatstone'a z punktu widzenia maksymalnej czułości pomiaru zajmowało się wielu autorów. Najobszerniej zostało ono potraktowane przez J. Fischera [7], [8] i A. D. Niestierienkę [46], którzy rozpatrywali to zagadnienie dla następujących pięciu założeń z osobna:

1. przy prądzie zasilającym o stałej wartości,
2. przy napięciu zasilającym o stałej wartości,
3. przy stałej mocy doprowadzonej do mostka,
4. przy stałym obciążeniu oporności mierzonej,
5. przy danej *SEM* i danej oporności zasilającego źródła napięcia.

Z tych założeń jedynie czwarte, wyznaczonego obciążenia oporności mierzonej, jest uzasadnione; natomiast założenie drugie ma zastosowanie ograniczone do pomiaru oporności o dużej wartości. Odnośnie do pozostałych założeń, to wydaje się, że nie mają one ogólnego znaczenia przy pomiarach oporności metodą zerową.

W rzeczywistości dopuszczalne obciążenie oporników ogranicza prąd, napięcie i moc, doprowadzone do mostka, a co za tym idzie i czułość pomiaru. Zależnie od wartości oporności gałęzi mostka możemy doprowadzić do układu prąd, napięcie i moc o różnej wartości, a zatem nie ma powodu przyjmować stałych ich wartości. Również możemy stosować różne źródła napięcia, toteż rozważania przy założeniu

jednej określonej *SEM* i określonej oporności źródła są czysto teoretyczne.

W niniejszej pracy dobór oporności gałęzi mostka jest rozpatrywany dla następujących trzech założeń o znaczeniu praktycznym:

a) pomiary wykonuje się w warunkach krytycznego tłumienia galwanometru, tzn. oporność obwodu galwanometru powinna być dopasowana do oporności krytycznej przez włączenie odpowiednich oporników,

b) dopuszczalne obciążenie oporników jest jednakowe dla wszystkich gałęzi mostka.

c) do mostka doprowadza się napięcie o takiej wartości, żeby osiągnąć dopuszczalne obciążenie przynajmniej w jednej gałęzi mostka, a w żadnej go nie przekroczyć, czyli, żeby wykorzystać dopuszczalną obciążalność mostka.

Przy tych samych założeniach przeprowadzane są rozważania w następnych rozdziałach.

5.2. Zależność czułości pomiaru od wartości stosunków oporności gałęzi mostka

Oporności poszczególnych gałęzi mostka można wyrazić w odniesieniu do oporności mierzonej R w sposób następujący:

$$R_1 = R, \quad R_2 = nR, \quad R_3 = pR, \quad R_4 = npR. \tag{5.1}$$

Zagadnienie doboru oporności mostka sprowadza się do określenia optymalnych (tj. zapewniających największą czułość pomiaru) wartości stosunków n i p.

Aby ustalić, dla jakich stosunków oporności n i p otrzymuje się maksymalną czułość pomiaru, należy zanalizować zależność czułości pomiaru od tych stosunków. W tym celu przekształcimy wzory (3.7) i (3.11) na czułość pomiaru zrównoważonym mostkiem Wheatstone'a, wprowadzając do nich zamiast oporności gałęzi mostka ich stosunki zgodnie z (5.1).

Dla przypadku, gdy oporność zastępcza mostka R_z (między punktami przyłączenia gałęzi galwanometru) jest mniejsza lub równa zewnętrznej oporności krytycznej galwanometru R_{oz}, tzn. gdy $R_z \leqslant R_{oz}$, czułość pomiaru — zgodnie z (3.7) i (5.1) — określona jest wzorem

$$S_1 = S_u U_{ad} \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} = S_u U_{ad} \frac{n}{(1+n)^2}. \tag{5.2}$$

Dla przypadku zaś, gdy $R_z > R_{oz}$

$$S_2 = S_u U_{ad} \frac{n}{(1+n)^2} \frac{R_{oz}}{R_z}. \tag{5.3}$$

We wzorze (4.1) na oporność zastępczą mostka uwzględnimy zależności (5.1)

$$R_z = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{nR(1+p)}{1+n}; \tag{5.4}$$

po podstawieniu (5.4) do (5.3) otrzymamy

$$S_2 = \frac{S_u U_{ad} R_{oz}}{R(1+n)(1+p)}. \tag{5.5}$$

Ponieważ dla przyjętych założeń również napięcie doprowadzone do mostka U_{ad} zależy od stosunków n i p, zostanie uwzględniona i ta zależność.

W oparciu o wzory (5.2) i (5.5) przeanalizujemy zależność czułości pomiaru od wszystkich możliwych wartości stosunków n i p oraz dla dowolnej wartości zewnętrznej oporności krytycznej galwanometru, rozpatrując dla $R_z \leqslant R_{oz}$ i $R_z > R_{oz}$ następujące 4 przypadki:

1) $p \geqslant 1$, $n \geqslant 1$,
2) $p \geqslant 1$, $0 < n \leqslant 1$,
3) $0 < p \leqslant 1$, $n \geqslant 1$,
4) $0 < p \leqslant 1$, $0 < n \leqslant 1$.

Przypadek 1: $p \geqslant 1$, $n \geqslant 1$

Dla tego przypadku największe obciążenie występuje w gałęzi drugiej, czyli na oporności $R_2 = nR$. Napięcie U_{nR} na tej gałęzi

$$U_{nR} = (P \cdot nR)^{1/2}$$

ogranicza i określa napięcie U_{ad} doprowadzone do mostka

$$U_{ad} = U_{nR} \frac{1+n}{n} = (1+n) \cdot \left(\frac{PR}{n}\right)^{1/2}, \tag{5.6}$$

gdzie P jest dopuszczalnym obciążeniem oporników.

Po podstawieniu U_{ad} ze wzoru (5.6) do wzorów (5.2) i (5.5) otrzymuje się:

$$S_1 = S_u \frac{(PnR)^{1/2}}{1+n}, \tag{5.7}$$

$$S_2 = S_u \frac{R_{oz}}{1+p} \left(\frac{P}{nR}\right)^{1/2}. \tag{5.8}$$

Jak widać, dla $R_z \leqslant R_{oz}$ czułość pomiaru nie zależy od p, rośnie gdy n maleje, i osiąga maksimum dla wartości granicznej $n = 1$. Dla $R_z > R_{oz}$ czułość pomiaru rośnie, gdy n i p maleją, i osiąga maksimum dla $n = 1$ i $p = 1$.

Maksymalne czułości pomiaru określają wzory:

$$S_{1\,max} = S_u \frac{(PR)^{1/2}}{2}, \tag{5.9}$$

$$S_{2\,max} = S_u \frac{R_{oz}}{2}\left(\frac{P}{R}\right)^{1/2}. \tag{5.10}$$

Przypadek 2: $p \geqslant 1$, $0 < n \leqslant 1$.

W tym przypadku napięcie U_{ad} określone jest przez napięcie dopuszczalne na gałęzi pierwszej $U_R = (PR)^{1/2}$, zgodnie ze wzorem

$$U_{ad} = (1+n)\cdot(PR)^{1/2}.$$

Wzory na czułość pomiaru przybierają następującą postać:

$$S_1 = S_u \frac{n}{1+n}(PR)^{1/2}, \tag{5.11}$$

$$S_2 = S_u \frac{R_{oz}}{1+p}\left(\frac{P}{R}\right)^{1/2}. \tag{5.12}$$

Jak widać, i tutaj również S_1 nie zależy od p, natomiast wzrasta, gdy n rośnie, i osiąga wartość maksymalną — tę samą co dla poprzedniego przypadku — dla wartości granicznej $n = 1$. Czułość pomiaru S_2 nie zależy od n, wzrasta, gdy p maleje, i osiąga maksimum wyrażone wzorem (5.10) dla $p = 1$.

Przypadek 3: $0 < p \leqslant 1$, $n \geqslant 1$.

W tym przypadku napięcie U_{ad} określone jest napięciem na gałęzi czwartej $U_{npR} = (PnpR)^{1/2}$, zgodnie ze wzorem:

$$U_{ad} = \left(\frac{1+n}{n}\right)\cdot(PnpR)^{1/2}.$$

Wzory na czułość pomiaru przybierają następującą postać:

$$S_1 = S_u \frac{(PnpR)^{1/2}}{1+n}, \tag{5.13}$$

$$S_2 = S_u \frac{R_{oz}}{1+p}\left(\frac{Pp}{nR}\right)^{1/2}. \tag{5.14}$$

Tutaj czułość S_1 wzrasta, gdy p rośnie, a n maleje, i osiąga maksimum wyrażone wzorem (5.9) dla $p = 1$ i $n = 1$. Czułość S_2 wzrasta również, gdy p rośnie, a n maleje, i osiąga jak w przypadku pierwszym maksimum wyrażone wzorem (5.10) dla $p = 1$ i $n = 1$.

Przypadek 4: $0 < p \leqslant 1$, $0 < n \leqslant 1$.

Największe obciążenie występuje w tym przypadku w gałęzi trzeciej. Napięcie U_{ad} doprowadzone do mostka określone jest napięciem $U_{pR} = (PpR)^{1/2}$ według wzoru:

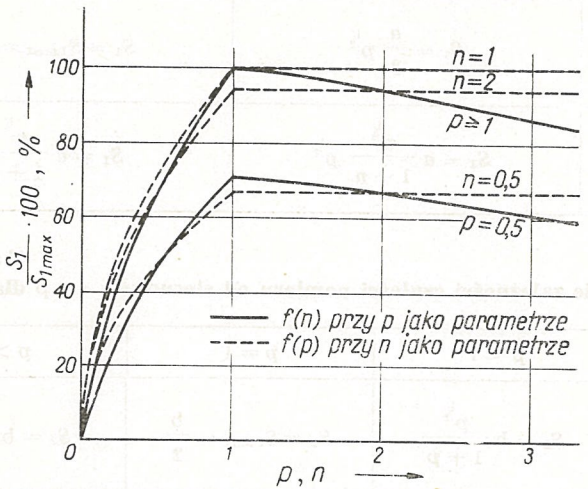
$$U_{ad} = (1+n)\cdot(PpR)^{1/2}.$$

Wzory na czułość pomiaru przybierają następującą postać:

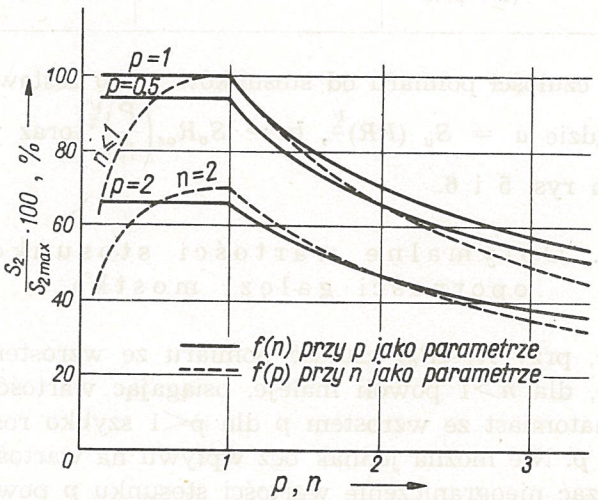
$$S_1 = S_u \frac{n}{1+n} (PpR)^{1/2}, \tag{5.15}$$

$$S_2 = S_u \frac{R_{oz}}{1+p} \left(\frac{Pp}{R}\right)^{1/2}. \tag{5.16}$$

Dla tego przypadku S_1 rośnie, gdy n i p rośnie, i dla wartości granicznych $n = 1$ i $p = 1$ osiąga maksimum — to samo co we wszystkich poprzednich przypadkach — wyrażone wzorem (5.9). Czułość pomia-



Rys. 5. Zależność czułości pomiaru od stosunków n i p dla $R_z < R_{oz}$



Rys. 6. Zależność czułości pomiaru od stosunków n i p dla $R_z > R_{oz}$

ru S_2 tak, jak w przypadku drugim, nie zależy od n, rośnie zaś z p, i dla wartości granicznej $p = 1$ osiąga maksimum — to samo co we wszystkich poprzednich przypadkach — wyrażone wzorem (5.10).

Tablica 1

Zestawienie zależności czułości pomiaru od stosunków n i p dla $R_z \leqslant R_{oz}$

	$p < 1$	$p \geqslant 1$
$n < 1$	$S_1 = a \frac{n}{1+n} p^{1/2}$	$S_1 = a \frac{n}{1+n}$
$n = 1$	$S_1 = \frac{a}{2} p^{1/2}$	$S_1 = S_{1max} = \frac{a}{2}$
$n > 1$	$S_1 = a \frac{n^{1/2}}{1+n} p^{1/2}$	$S_1 = a \frac{n^{1/2}}{1+n}$

Tablica 2

Zestawienie zależności czułości pomiaru od stosunków n i p dla $R_z > R_{oz}$

	$p < 1$	$p = 1$	$p > 1$
$n \leqslant 1$	$S_2 = b \frac{p^{1/2}}{1+p}$	$S_2 = S_{2max} = \frac{b}{2}$	$S_2 = b \frac{1}{1+p}$
$n > 1$	$S_2 = b \frac{p^{1/2}}{(1+p)n^{1/2}}$	$S_2 = \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{n^{1/2}}$	$S_2 = b \frac{1}{(1+p)n^{1/2}}$

Zależności czułości pomiaru od stosunków n i p zestawiono w tablicach 1 i 2 [gdzie $a = S_u (PR)^{1/2}$, $b = S_u R_{oz} \left(\frac{P}{R}\right)^{1/2}$] oraz przedstawiono wykreślnie na rys. 5 i 6.

5.3. Optymalne wartości stosunków oporności gałęzi mostka

Jak widać, przy $R_z < R_{oz}$ czułość pomiaru ze wzrostem n dla $n<1$ szybko rośnie, dla $n>1$ powoli maleje, osiągając wartość maksymalną dla $n = 1$; natomiast ze wzrostem p dla $p<1$ szybko rośnie, dla $p>1$ nie zależy od p. Nie można jednak bez wpływu na wartość czułości pomiaru zwiększać nieograniczenie wartości stosunku p powyżej jedności, lecz tylko do takiej wartości, przy której oporność zastępcza mostka R_z

(między punktami b i c) zrówna się z zewnętrzną opornością krytyczną galwanometru. Z tego warunku można określić maksymalną wartość stosunku p (do której czułość nie zależy od p), a mianowicie:

$$p_{max} = \frac{R_{oz}(1+n)}{nR} - 1. \tag{5.17}$$

Przy wzroście p powyżej p_{max} czułość pomiaru zaczyna maleć, gdyż przechodzi się do zakresu, gdzie czułość pomiaru jest określona wzorem (5.5), bowiem dla stosunków p większych od $p_{\max}$ R_z jest większe od R_{oz}.

Przy $R_z > R_{oz}$ czułość pomiaru dla $n \leqslant 1$ nie zależy od n, dla $n>1$ maleje (szybciej niż w poprzednim przypadku), gdy n rośnie, ze wzrostem zaś p dla $p<1$ rośnie, dla $p>1$ maleje, osiągając wartość maksymalną dla $p=1$. Wartość stosunku n poniżej jedności można zmniejszać bez wpływu na wartość czułości tylko do takiej wartości, przy której $R_z = R_{oz}$. Minimalną wartość stosunku n określa wzór następujący:

$$n_{min} = \frac{R_{oz}}{R(1+p) - R_{oz}}. \tag{5.18}$$

Poniżej wartości n_{min} czułość pomiaru zaczyna szybko maleć, gdyż przechodzi się do zakresu, gdzie $R_z < R_{oz}$ i czułość jest określona wzorem (5.2).

Z powyższych rozważań — dla przyjętych założeń — wynikają następujące trzy wnioski, dotyczące najkorzystniejszego doboru oporności gałęzi mostka Wheatstone'a dla danej oporności mierzonej i danego galwanometru:

1) gdy oporność mierzona R jest mniejsza od zewnętrznej oporności krytycznej galwanometru $R < R_{oz}$, w celu uzyskania największej czułości pomiaru należy przyjąć następujące stosunki oporności gałęzi mostka:

$$n = 1 \text{ i } 1 \leqslant p \leqslant 2\frac{R_{oz}}{R} - 1;$$

2) gdy $R = R_{oz}$, optymalne stosunki oporności gałęzi mostka są:

$$n = 1 \text{ i } p = 1,$$

3) gdy $R > R_{oz}$ i $R_z > R_{oz}$ maksymalną czułość pomiaru osiąga się przy stosunkach:

$$p = 1 \text{ i } \frac{R_{oz}}{2R - R_{oz}} \leqslant n \leqslant 1.$$

Okoliczność ta, że przy małych opornościach mierzonych można stosować stosunek oporności p większy od jedności, a przy dużych oporno-

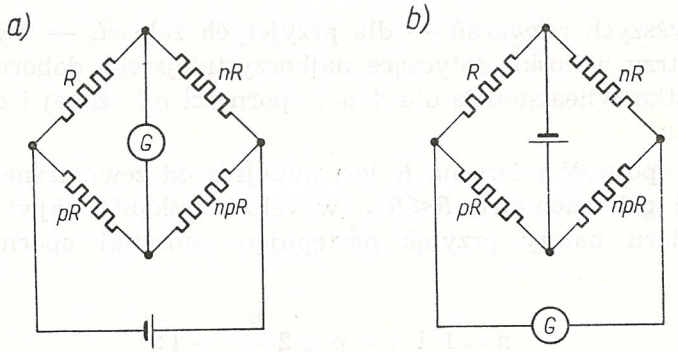
ściach mierzonych można stosować stosunek n mniejszy od jedności bez pogorszenia czułości pomiaru, jest korzystna ze względu na dogodny zakres oporników potrzebnych do pomiaru.

Można zauważyć, że dla $R<R_{oz}$ i $n = 1$ tylko przy jednej wartości $p \left(p = 2\frac{R_{oz}}{R} - 1\right)$, przy której $R_z = R_{oz}$, nie potrzeba włączać żadnej oporności dodatkowej w szereg z galwanometrem dla uzyskania tłumienia krytycznego; podobnie dla $R>R_{oz}$ i $p=1$ tylko przy wartości $n = \frac{R_{oz}}{2R - R_{oz}}$ niepotrzebne jest bocznikowanie galwanometru.

6. UMIESZCZENIE GALWANOMETRU W DANYM MOSTKU WHEATSTONE'A

6.1. Dwie możliwości umieszczenia galwanometru w mostku

Gdy dany jest układ mostka Wheatstone'a, w którym optymalne wartości stosunków oporności gałęzi z jakichkolwiek powodów nie są zachowane [1] i w mostku nie ma dwóch przeciwległych gałęzi o równej



Rys. 7. Dwie możliwości włączenia galwanometru

oporności (czyli $n \neq p$ i $np \neq 1$), wówczas aby osiągnąć większą czułość pomiaru, trzeba dokonać wyboru miejsca włączenia galwanometru w tym układzie.

Ponieważ równanie równowagi mostka można wyrazić zarówno przez $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$, jak i przez $\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}$, w zrównoważonym mostku

[1] W układzie mostkowym o zachowanych optymalnych stosunkach oporności gałęzi zamiana miejsc włączenia galwanometru i źródła napięcia nie może zwiększyć czułości pomiaru.

Wheatstone'a można wzajemnie zamienić miejsca włączenia galwanometru i źródła napięcia bez naruszenia równowagi mostka. Istnieją więc dwie możliwości włączenia galwanometru w mostku. Te dwie możliwości umieszczenia galwanometru przedstawione są na rys. 7. Z tych dwóch możliwości należy wybrać korzystniejszą, a więc taki układ, który przy dobrych warunkach pomiaru — czyli przy krytycznym tłumieniu galwanometru — będzie miał większą czułość pomiaru.

Zagadnienie korzystniejszego umieszczenia galwanometru w mostku było niejednokrotnie rozpatrywane przez różnych autorów [16], [17], [38], [39], [46], ale przy założeniu bądź stałej wartości napięcia doprowadzonego do mostka, bądź stałego poboru prądu przez mostek. Na szczególną uwagę zasługuje reguła Kottera [24], uwzględniająca dopasowanie układu do oporności krytycznej galwanometru. Reguła ta brzmi następująco: „Obliczyć oporność mostka między każdą parą przeciwległych węzłów dla przerwanej gałęzi galwanometru i źródła napięcia. Obliczyć stosunek lub odwrotny stosunek — ten, który jest mniejszy od jedności — każdej z tych oporności mostkowych do zewnętrznej oporności krytycznej galwanometru. Przyłączyć galwanometr do tej pary punktów, dla których ten stosunek jest bliższy jedności". Reguła ta jest słuszna, wymaga jednak dosyć długich obliczeń. W niniejszej pracy podano i teoretycznie wyprowądzono proste kryterium [1], umożliwiające wybór korzystniejszego miejsca włączenia galwanometru bez potrzeby uprzedniego obliczania zastępczych oporności mostka, a jedynie na podstawie wyliczenia średniej geometrycznej dwóch oporności przeciwległych gałęzi mostka. Kryterium to oparte jest na tych samych założeniach, które przyjął Kotter i w zupełności pokrywa się z jego regułą, ma jednak tę zaletę, że jest prostsze i krótszą drogą prowadzi do celu.

6.2. Kryterium wyboru miejsca włączenia galwanometru w zrównoważonym mostku

Rozpatrzymy najkorzystniejsze umieszczenie galwanometru w danym mostku przy tych samych trzech założeniach, które przyjęto dla doboru optymalnych stosunków oporności gałęzi mostka w poprzednim rozdziale (patrz str. 16).

---

[1]) Kryterium to zostało podane przez autorkę w publikacji [54], dostarczonej do Archiwum Elektrotechniki w czerwcu 1953 r. Analogiczne kryterium, lecz bez teoretycznego wyprowadzenia, podał tego samego roku w maju w AIEE Transactions P. M. Andress [2], o czym jednak autorka nie wiedziała, gdyż czasopismo to dotarło do Polski dopiero w 1954 r.

Można przyjąć następujące oznaczenia:

$$R_1 = R = R_{min},\quad R_2 = nR,\quad R_3 = pR,\quad R_4 = npR = R_{max}$$

oraz założyć $n>p\geqslant 1$, gdyż tylko dla założenia $n\neq p$ i $np\neq 1$ należy dokonać wyboru miejsca włączenia galwanometru. W przypadkach szczególnych $n=p$ lub $np=1$, gdy oporności co najmniej dwóch przeciwległych gałęzi mostka są sobie równe, wejściowe i wyjściowe oporności zastępcze mostka są jednakowe i obie możliwości włączenia galwanometru nie różnią się czułością pomiaru.

Układ, w którym źródło napięcia włączone jest między punkty połączeń dwóch oporności większych i dwóch oporności mniejszych, nazwiemy układem a (rys. 7a), natomiast układ, w którym galwanometr włączony jest między te punkty, nazwiemy układem b (rys. 7b).

Oporności zastępcze mostka zrównoważonego od strony galwanometru układów a i b, zgodnie ze wzorami podanymi w rozdziale 4, określają następujące wzory:

$$R_a = \frac{nR(1+p)}{1+n}, \tag{6.1}$$

$$R_b = \frac{pR(1+n)}{1+p}. \tag{6.2}$$

Przy założeniu $n>p\geqslant 1$ jest $R_b>R_a$, co można łatwo udowodnić. Mianowicie:

$$\frac{R_b}{R_a} = \frac{p(1+n)^2}{n(1+p)^2}, \tag{6.3}$$

a przy założeniu $n=p+q$ i $q>0$ otrzymamy:

$$\frac{R_b}{R_a} = \frac{p^3+2p^2+p^2q+p+2pq+q(p^2+pq)}{p^3+2p^2+p^2q+p+2pq+q} > 1; \tag{6.4}$$

ponieważ $q>0$ i $p\geqslant 1$, wartość licznika jest większa od wartości mianownika, a zatem $\frac{R_b}{R_a} > 1$, czyli $R_b>R_a$.

Rozpatrzymy obecnie, jakie napięcia U_a i U_b mogą być doprowadzone do układów a i b, zgodnie z założeniem określonego dopuszczalnego obciążenia oporników.

W układzie a największe obciążenie występuje w gałęzi nR; napięcie na tej gałęzi U_{nR} ogranicza i określa napięcie, które może być doprowadzone do mostka.

Dla dopuszczalnego obciążenia oporników P napięcie na gałęzi nR określa wzór:

$$U_{nR} = (P\,n\,R)^{\frac{1}{2}}.$$

Napięcie zaś U_a, które — zgodnie z założeniami — ma być doprowadzone do układu a będzie

$$U_a = U_{nR}\frac{1+n}{n} = (1+n)\left(\frac{PR}{n}\right)^{1/2}. \tag{6.5}$$

W układzie b napęcie doprowadzone do mostka jest ograniczone przez gałąź pR. Ponieważ założono, że dopuszczalne obciążenie jest jednakowe dla wszystkich gałęzi mostka, napięcie na gałęzi pR określa wzór

$$U_{pR} = (P\,p\,R)^{1/2},$$

napięcie zaś U_b, które ma być doprowadzone do układu b

$$U_b = U_{pR}\frac{1+p}{p} = (1+p)\left(\frac{PR}{p}\right)^{1/2}. \tag{6.6}$$

Po podzieleniu (6.5) przez (6.6) oraz uwzględnieniu (6.3) i (6.4) otrzymamy:

$$\frac{U_a}{U_b} = \frac{1+n}{1+p}\left(\frac{p}{n}\right)^{1/2} = \left(\frac{R_b}{R_a}\right)^{1/2} > 1, \tag{6.7}$$

czyli $U_a > U_b$. Ze wzoru (6.7) widać, że przyjęte założenia są zgodne z założeniem stałej mocy pobieranej przez mostek, wynika bowiem z niego: $\frac{U_a^2}{R_b} = \frac{U_b^2}{R_a}$, a oporność zastępcza mostka od strony źródła napięcia dla układu a równa się R_b, dla układu zaś b — równa się R_a.

W celu znalezienia kryterium wyboru miejsca włączenia galwanometru rozpatrzymy czułość pomiaru układów a i b dla wszystkich możliwych przypadków. Dla dowolnego układu mostkowego i dla dowolnej zewnętrznej oporności krytycznej galwanometru może zajść jeden z następujących trzech przypadków:

$$R_a < R_b \leqslant R_{oz},\quad R_{oz} < R_a < R_b,\quad R_a \leqslant R_{oz} < R_b.$$

Rozpatrzymy kolejno te trzy przypadki.

1) $R_a < R_b \leqslant R_{oz}$

Dla tego przypadku do obu układów odnosi się wzór (3.7) na czułość pomiaru, gdy $R_z \leqslant R_{oz}$.

Dla układu a do wzoru (3.7) podstawiamy U_a ze wzoru (6.5) za U_{ad}, R za R_1 i nR za R_2

$$S_{1a} = S_u(1+n)\left(\frac{PR}{n}\right)^{1/2}\cdot\frac{RnR}{(R+nR)^2} = S_u\frac{(PnR)^{1/2}}{1+n}. \tag{6.8}$$

Dla układu b do wzoru (3.7) podstawiamy U_b ze wzoru (6.6) za U_{ad}, R za R_1 i pR za R_2:

$$S_{1b} = S_u(1+p)\left(\frac{PR}{p}\right)^{1/2}\cdot\frac{R\cdot pR}{(R+pR)^2} = S_u\frac{(PpR)^{1/2}}{1+p}. \tag{6.9}$$

Aby przekonać się, który układ jest czulszy, dzielimy (6.8) przez (6.9)

$$\frac{S_{1a}}{S_{1b}} = \left(\frac{n}{p}\right)^{1/2} \cdot \frac{1+p}{1+n} = \frac{U_b}{U_a} = \left(\frac{R_a}{R_b}\right)^{1/2} < 1,$$

a zatem, zgodnie z $R_a < R_b$ udowodnionym uprzednio, $S_{1a} < S_{1b}$. Czyli dla przypadku $R_a < R_b \leqslant R_{oz}$ układ b jest korzystniejszy od układu a, gdyż jest czulszy.

2) $R_{oz} < R_a < R_b$

Dla tego przypadku do obu układów odnosi się wzór (3.11) na czułość pomiaru, gdy $R_z > R_{oz}$.

Dla układu a do wzoru (3.11) podstawiamy U_a za U_{ad}, R za R_1, nR za R_2 i R_a za R_z:

$$S_{2a} = S_u \frac{(PnR)^{1/2}}{1+n} \cdot \frac{R_{oz}}{R_a}. \tag{6.10}$$

Dla układu b do wzoru (3.11) podstawiamy U_b za U_{ad}, R za R_1, pR za R_2 i R_b za R_z:

$$S_{2b} = S_u \frac{(PpR)^{1/2}}{1+p} \cdot \frac{R_{oz}}{R_b}. \tag{6.11}$$

Dzielimy (6.10) przez (6.11)

$$\frac{S_{2a}}{S_{2b}} = \frac{1+p}{1+n}\left(\frac{n}{p}\right)^{1/2} \cdot \frac{R_b}{R_a} = \left(\frac{R_a}{R_b}\right)^{1/2} \cdot \frac{R_b}{R_a} = \left(\frac{R_b}{R_a}\right)^{1/2} > 1,$$

a zatem $S_{2a} > S_{2b}$. Czyli dla przypadku $R_{oz} < R_a$ układ a jest korzystniejszy od układu b.

3) $R_a \leqslant R_{oz} < R_b$

Jest to przypadek pośredni między dwoma uprzednio rozpatrywanymi.

Dla układu a czułość pomiaru określona jest wzorem (6.8), ponieważ $R_a \leqslant R_{oz}$. Dla układu b czułość pomiaru dana jest wzorem (6.11), ponieważ $R_b > R_{oz}$.

Podstawiamy wartość R_b ze wzoru (6.2) do (6.11)

$$S_{2b} = S_u \frac{(PpR)^{1/2}}{1+p} \cdot \frac{R_{oz}(1+p)}{pR(1+n)} = S_u \left(\frac{P}{pR}\right)^{1/2} \frac{R_{oz}}{1+n}. \tag{6.12}$$

Dzielimy (6.8) przez (6.12)

$$\frac{S_{1a}}{S_{2b}} = \frac{R(np)^{1/2}}{R_{oz}}; \tag{6.13}$$

z tego wynika, że dla $R_{oz} = R(np)^{1/2}$, $S_{1a} = S_{2b}$, czyli dla tej jednej wartości zewnętrznej oporności krytycznej galwanometru czułość pomiaru jest jednakowa w obu układach.

Ponieważ $R_{min}=R$, a $R_{max}=npR$,

$$R(np)^{1/2} = (R_{min} R_{max})^{1/2}. \tag{6.14}$$

Z pomnożenia wzorów (6.1) i (6.2) otrzymujemy $R_a R_b = npR^2$, czyli że $R(np) = (R_a R_b)^{1/2}$, co dowodzi, że $R_{oz} = (R_{min} R_{max})^{1/2}$ znajduje się w przedziale $<R_a R_b>$.

Ze wzorów (6.13) i (6.14) wynika, że $S_{1a}<S_{2b}$ dla $R_b>R_{oz}>R_{min}R_{max})^{1/2}$, czyli tak jak dla przypadku 1 układ b jest korzystniejszy od układu a. Natomiast $S_{1a}>S_{2b}$ dla $R_a \leqslant R_{oz}<(R_{min}R_{max})^{1/2}$, czyli tak, jak dla przypadku 2 korzystniejszy jest układ a.

Z rozważań tych wynikają następujące ostateczne trzy wnioski:

1) dla $R_{oz}<(R_{min}R_{max})^{1/2}$ czułość pomiaru jest większa w układzie a,
2) dla $R_{oz}=(R_{min}R_{max})^{1/2}$ czułość pomiaru jest jednakowa w obu układach,
3) dla $R_{oz}>(R_{min}R_{max})^{1/2}$ czułość pomiaru jest większa w układzie b.

Na podstawie powyższych wyników dochodzimy do prostego kryterium wyboru miejsca włączenia galwanometru w danym mostku Wheatstone'a, które uwzględnia dopasowanie układu do oporności krytycznej galwanometru. Aby dokonać właściwego wyboru, wystarczy znać zewnętrzną oporność krytyczną użytego do pomiaru galwanometru i oporności poszczególnych gałęzi mostka oraz obliczyć średnią geometryczną z dwóch oporności przeciwległych gałęzi mostka, bowiem o najkorzystniejszym umieszczeniu galwanometru w mostku decyduje stosunek zewnętrznej oporności krytycznej do średniej geometrycznej najmniejszej i największej oporności gałęzi mostka, czyli do średniej geometrycznej oporności dwóch przeciwległych gałęzi mostka. Szukanym kryterium jest wyrażenie:

$$\boxed{\frac{R_{oz}}{(R_{min} \cdot R_{max})^{1/2}} \lessgtr 1} \tag{6.15}$$

Jeżeli stosunek ten jest mniejszy od jedności, czyli jeżeli $R_{oz}<(R_{min}R_{max})^{1/2}$, to należy włączyć źródło napięcia między punkty połączeń dwóch oporności większych i dwóch oporności mniejszych (układ a).

Jeżeli stosunek (6.15) jest równy jedności, czyli $R_{oz}=(R_{min}R_{max})^{1/2}$, miejsce włączenia galwanometru jest dowolne, gdyż oba układy mają jednakową czułość pomiaru.

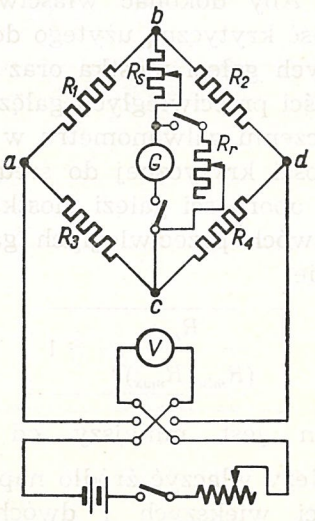
Jeżeli stosunek (6.15) jest większy od jedności, czyli $R_{oz}>(R_{min}R_{max})^{1/2}$, to należy włączyć galwanometr między punkty połączeń dwóch oporności większych i dwóch oporności mniejszych (układ b).

Innymi słowy: jeżeli zewnętrzna oporność krytyczna jest mniejsza od średniej geometrycznej dwóch przeciwległych gałęzi mostka, to włącza się galwanometr na mniejszą zastępczą oporność mostka; jeżeli zaś jest większa, to włącza się galwanometr na większą zastępczą oporność mostka. Bowiem, jak to było udowodnione (6.4), $R_b > R_a$.

Reguła Maxwell'a [39] na umieszczenie galwanometru w mostku dla założenia stałej wartości napięcia doprowadzonego do mostka, stwierdzająca, że „dla osiągnięcia większej czułości pomiaru, gdy oporność galwanometru jest większa od oporności gałęzi zasilającej, należy włączyć galwanometr między punkty połączeń dwóch oporności większych i dwóch oporności mniejszych" ma zastosowanie dla przyjętych założeń w niniejszej pracy tylko dla przypadku, gdy zewnętrzna oporność krytyczna galwanometru jest większa od średniej geometrycznej dwóch oporności przeciwległych gałęzi mostka.

6.3. Pomiarowe sprawdzenie kryterium

Wykonano pomiary w układzie podanym na rys. 8 przy tak dobieranych napięciach doprowadzanych do mostka, aby w kolejnych pomiarach maksymalne obciążenie — osiągane w jednej z gałęzi mostka — by-



Rys. 8. Układ połączeń stosowany przy pomiarach

ło jednakowe [1]. Dla dwóch możliwości włączenia galwanometru (układ *a* i *b*) porównywano czułość pomiaru przy różnych wartościach zewnętrznej oporności krytycznej galwanometru. Zamiast przełączać galwanometr

[1] Dla sprawdzenia kryterium nie potrzeba dopuszczalnie obciążać oporników, wystarczy, aby osiągane maksymalne obciążenia w układach *a* i *b* były jednakowe.

i źródło napięcia zmieniano wartości oporności poszczególnych gałęzi mostka, co przy opornikach dekadowych jest znacznie prostsze, a równoważne zmianie włączenia galwanometru.

Sprawdzenie przeprowadzono dla przypadku ogólnego $n > p \geqslant 1$, przyjmując dowolnie: $R = 10\ \Omega$, $n = 50$, $p = 10$, $(R_{min}R_{max})^{1/2} = 224\ \Omega$. Oporności zastępcze mostka dla punktów przyłączenia galwanometru obliczono według wzorów (6.1) i (6.2): $R_a \approx 108\ \Omega$, $R_b \approx 463\ \Omega$. Napięcie doprowadzone do układu a przyjęto $U_a = 2$ V, a dla układu b obliczono wg wzoru (6.7): $U_b = 0{,}966$ V.

Przy pomiarach posługiwano się galwanometrem f. AOIP o danych: $T = 2{,}3$ s, $R_g = 106\ \Omega$, wyposażonym w nastawny bocznik magnetyczny, którym można było zmieniać zewnętrzną oporność krytyczną od 1150 Ω do 70 Ω i czułość napięciową od $7{,}65 \cdot 10^4$ dz/V do $2{,}05 \cdot 10^5$ dz/V.

Dla każdego pomiaru tak dobierano wartości oporników R_s i R_r, żeby zawsze układ był dopasowany do danej oporności krytycznej galwanometru.

Porównywano czułość pomiaru dla obu możliwości włączenia galwanometru na podstawie osiąganego odchylenia galwanometru przy jednakowej procentowej zmianie oporności $\frac{\Delta R}{R} = 0{,}5\%$ jednej z gałęzi mostka po uprzednim zrównoważeniu układu. Większe odchylenie wskazuje większą czułość pomiaru. Wyniki pomiarów podano w tablicy 3.

Tablica 3

Zestawienie wyników pomiarów

Lp.	R_{oz}	Układ	R_1	R_2	P_3	R_4	R_z	R_s	R_r	U_{ad}	$\frac{\Delta R}{R}$	Δa
	Ω		Ω							V	%	dz.
1	463	a	10	500	100	5000	108	355	∞	2,00	0,5	22,5
		b		100	500		463	0	∞	0,966		46,0
2	108	a	10	500	100	5000	108	0	∞	2,00	0,5	35,0
		b		100	500		463	0	141	0,966		17,0
3	224	a	10	500	100	5000	108	116	∞	2,00	0,5	29,0
		b		100	500		463	0	436	0,966		29,0

Pierwszy pomiar wykonano dla $R_{oz} = 436\ \Omega$ (nastawionej za pomocą bocznika magnetycznego), czyli dla $R_{oz} > (R_{min}R_{max})^{1/2} = 224\ \Omega$. Zgodnie z kryterium pomiar wykazał większą czułość pomiaru dla układu b.

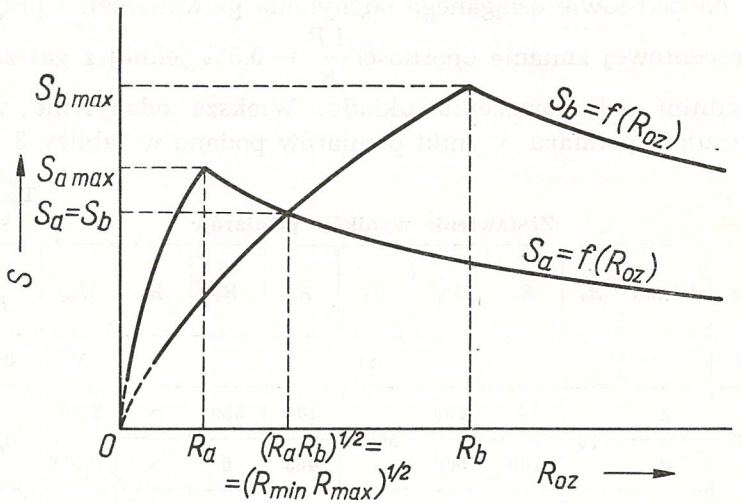
Drugi pomiar wykonano dla $R_{oz} = 108\ \Omega$, czyli dla $R_{oz} < 224\ \Omega$; zgodnie z kryterium układ a okazał się korzystniejszy.

Trzeci pomiar wykonano dla $R_{oz} = 224\ \Omega$, czyli dla $R_{oz} = (R_{min}R_{max})^{1/2}$; zgodnie z kryterium oba układy wykazały jednakową czułość pomiaru.

Jak widać, przeprowadzone pomiary w zupełności potwierdziły wyprowadzone kryterium na najkorzystniejsze umieszczenie galwanometru w mostku.

6.4. Najkorzystniejsza zewnętrzna oporność krytyczna galwanometru wyposażonego w bocznik magnetyczny

Jeżeli ma się do dyspozycji galwanometr z bocznikiem magnetycznym (takie galwanometry są obecnie często spotykane), który umożliwia zmianę zewnętrznej oporności krytycznej w granicach od R_a do R_b, to dla danego układu mostkowego można uzyskać największą czułość pomiaru przy nastawieniu bocznikiem magnetycznym $R_{oz} = R_b$ i włączeniu galwanometru między dwie oporności większe i dwie oporności mniejsze (układ *b*).



Rys. 9. Zależność czułości pomiaru dla układów a i b od zewnętrznej oporności krytycznej galwanometru, którą zmieniano za pomocą bocznika magnetycznego

Jak wiadomo, oporność krytyczna galwanometru zmienia się z kwadratem zmiany strumienia magnetycznego, natomiast czułość napięciowa galwanometru jest odwrotnie proporcjonalna do zmiany strumienia. Mamy więc następującą zależność między czułościami napięciowymi i opornościami krytycznymi dla dwóch różnych położeń bocznika magnetycznego.

$$\frac{S'_u}{S''_u} = \left(\frac{R''_o}{R'_o}\right)^{1/2}. \tag{6.16}$$

Biorąc pod uwagę powyższą zależność oraz uwzględniając wzory (3.7) i (3.11) widzimy, że czułość pomiaru dla $R_{oz}<R_z$ rośnie, gdy R_{oz} rośnie, natomiast dla $R_{oz}>R_z$ maleje, gdy R_{oz} rośnie. Dla $R_{oz} = R_z$ czułość pomiaru osiąga wartość maksymalną, jest to bowiem dla zależności czułości pomiaru od zewnętrznej oporności krytycznej punkt przejścia od funkcji rosnącej do funkcji malejącej.

Zależność czułości pomiaru dla układów a i b od zewnętrznej oporności krytycznej galwanometru, którą zmieniano za pomocą bocznika magnetycznego, podano na rys. 9. Wykres ten jasno ilustruje kryterium wyboru układu i najkorzystniejszą zewnętrzną oporność krytyczną. Czułość pomiaru w układzie b osiąga wartość maksymalną dla $R_{oz} = R_b$, podobnie czułość pomiaru w układzie a jest maksymalna dla $R_{oz} = R_a$.

Maksymalne wartości czułości pomiaru dla układów a i b otrzymamy ze wzorów (6.8) i (6.9):

$$S_{a\,max} = S'_u \frac{(PnR)^{1/2}}{1+n}, \tag{6.17}$$

gdzie S'_u jest czułością napięciową galwanometru przy zewnętrznej oporności krytycznej nastawionej bocznikiem magnetycznym na wartość R_a, tzn. dla $R_{oz} = R_a$.

$$S_{b\,max} = S''_u \frac{(PpR)^{1/2}}{1+p}, \tag{6.18}$$

gdzie S''_u jest czułością napięciową galwanometru dla $R_{oz} = R_b$.

Aby przekonać się, która z tych maksymalnych czułości jest większa, dzielimy (6.17) przez (6.18):

$$\frac{S_{a\,max}}{S_{b\,max}} = \frac{S'_u}{S''_u} \cdot \frac{1+p}{1+n}\left(\frac{n}{p}\right)^{1/2}. \tag{6.19}$$

Ze wzoru (6.16) wynika, że

$$\frac{S'_u}{S''_u} = \left(\frac{R_b+R_g}{R_a+R_g}\right)^{1/2}, \tag{6.20}$$

ze wzoru zaś (6.3) wiadomo, że

$$\frac{1+p}{1+n}\left(\frac{n}{p}\right)^{1/2} = \left(\frac{R_a}{R_b}\right)^{1/2}; \tag{6.21}$$

po podstawieniu (6.20) i (6.21) do (6.19) otrzymujemy

$$\frac{S_{a\,max}}{S_{b\,max}} = \left(\frac{R_b+R_g}{R_a+R_g}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{R_a}{R_b}\right)^{1/2} = \left(\frac{R_aR_b+R_aR_g}{R_aR_b+R_bR_g}\right)^{1/2} < 1;$$

ponieważ $R_b > R_a$, mianownik ma wartość większą od licznika, a zatem maksymalna czułość pomiaru w układzie b jest większa od maksymalnej czułości pomiaru w układzie a

$$S_{b\,max} > S_{a\,max}. \tag{6.22}$$

Widzimy więc, że optymalne warunki dla czułości pomiaru można osiągnąć stosując układ *b* i nastawiając bocznikiem magnetycznym zewnętrzną oporność krytyczną na wartość oporności zastępczej mostka między punktami przyłączenia gałęzi galwanometru, tj. na wartość R_b — co też potwierdziły dokonane pomiary (zob. tablica 3).

7. DOBÓR I DOPASOWANIE GALWANOMETRU DO MOSTKA

7.1. Charakterystyczne wielkości galwanometru decydujące o jego wyborze

Chcąc dokonać pomiaru oporności z określoną czułością należy dobrać do mostka odpowiedni galwanometr.

Trzy charakterystyczne wielkości galwanometru decydują o jego doborze do mostka, a mianowicie: czułość napięciowa, zewnętrzna oporność krytyczna i okres wahań nietłumionych.

Ponieważ większość autorów przy doborze galwanometru do mostka kierowała się wartością czułości prądowej i oporności wewnętrznej galwanometru, należy podkreślić, że chodzi tu o czułość napięciową, a nie prądową i o zewnętrzną oporność krytyczną, a nie wewnętrzną oporność galwanometru.

Meyer i Moerder [41], [42] słusznie zauważyli, że gdy prąd w przyrządzie pomiarowym zależy od oporności przyrządu — to mamy do czynienia z pomiarem napięcia.

Zgodnie z (3.3) odchylenie galwanometru jest proporcjonalne do różnicy potencjału pojawiającej się na przerwanej gałęzi galwanometru. Wzory (3.7) i (3.11) wskazują, że czułość pomiaru w warunkach krytycznego tłumienia jest wprost proporcjonalna do czułości napęciowej galwanometru.

Często — ze względu na przekazywanie maksimum mocy z mostka do galwanometru — dobierano oporność wewnętrzną galwanometru równą zastępczej oporności mostka, co jednak nie jest celowe. Ponieważ wewnętrzna oporność galwanometru jest zazwyczaj znacznie mniejsza od zewnętrznej oporności krytycznej, prowadziło to do dużego przetłumienia galwanometru oraz do uciążliwych i niedokładnych pomiarów. Jak to już było omówione w rozdz. 3, najdogodniej jest przeprowadzać pomiary przy krytycznym tłumieniu galwanometru, toteż właściwsze jest uwzględniać dopasowanie nie wewnętrznej oporności, lecz zewnętrznej oporności krytycznej galwanometru do zastępczej oporności mostka.

I wreszcie należy stosować galwanometry o możliwie krótkim okresie wahań nietłumionych, gdyż przez to skraca się czas pomiaru. Ponieważ jednak czulsze galwanometry mają dłuższe okresy wahań, przy pomiarach

wymagających dużej czułości, trzeba się godzić na dłuższy czas ustalania się galwanometru.

Zagadnienie doboru galwanometru sprowadza się więc do tego, żeby dla danego układu mostkowego i wymaganej czułości pomiaru znaleźć możliwie szybko ustalający się galwanometr o żądanej czułości napięciowej i o odpowiedniej do zastępczej oporności mostka zewnętrznej oporności krytycznej.

Rozpatrzymy przykładowo dobór galwanometru dla dwóch typowych rodzajów pomiarów, a mianowicie:

a. gdy czułość pomiaru ma być odpowiednia do wymaganej i osiągalnej dokładności pomiaru,
b. gdy dąży się do jak największej czułości pomiaru przy porównywaniu oporników wzorcowych.

7.2. Żądana czułość napięciowa galwanometru dla pomiaru oporności z określoną dokładnością

Dokładność oporników wchodzących w skład mostka wyznacza dokładność, z jaką można przeprowadzić pomiar oporności. Dla dokonania pomiaru z dokładnością wyznaczoną przez dokładność oporników, opornik równoważący układ musi mieć dostateczną liczbę dekad, aby jego wartość mogła być wyznaczona odpowiednio do tej dokładności. Ponadto czułość pomiaru powinna być taka, żeby zmiana odchylenia galwanometru wywołana zmianą o jednostkę najniższego stopnia opornika równoważącego była wyraźnie dostrzegalna. Ten ostatni warunek wynika już i z tego, że uchyb nieczułości powinien być mniejszy od dokładności pomiaru. Pomiar należy wykonywać przy czułości nie za małej ze względu na dokładność pomiaru, ale i nie za dużej, bo zbytnia czułość utrudnia tylko pomiar. Czułość pomiaru nie powinna być większa, niż tego wymaga dokładność pomiaru — czyli galwanometr powinien reagować to najmniejszą zmianę oporności, która nas interesuje, ale nic ponadto.

Jeżeli dokładność oporników wynosi 0,02%, opornik równoważący powinien mieć taką liczbę dekad, aby można dokonywać zmiany o 0,01% jego włączonej wartości. Odpowiedni będzie dokładny opornik czterodekadowy 10 (100 + 10 + 1 + 0,1) Ω, z niedawno wyznaczoną tabelką poprawek, które należy uwzględniać. Uchyb nieczułości może wynosić 0,005%, czyli wymagana czułość pomiaru jest $2 \cdot 10^4$.

Przeprowadzimy obliczenie żądanej czułości napięciowej galwanometru dla dokonania pomiarów oporności od 10 do 10^5 Ω (gdyż taki jest zakres dokładnych pomiarów mostka Wheatstone'a) przy czułości pomiaru $2 \cdot 10^4$.

Wartości oporności poszczególnych gałęzi mostka przyjmuje się na podstawie optymalnych wartości stosunków oporności, uwzględniając wartość oporności opornika równoważącego o wskazanej liczbie dekad.

Założymy, że zewnętrzna oporność krytyczna galwanometru ma być równa lub większa od zastępczej oporności mostka, ponieważ — jak to wynika ze wzorów (3.7) i (3.11) — czułość pomiaru dla $R_z \leqslant R_{oz}$ jest większa, niż dla $R_z > R_{oz}$.

W oparciu o wyprowadzone w rozdz. 5 optymalne wartości stosunków oporności gałęzi mostka należy dla $R_z \leqslant R_{oz}$ przyjąć $n = 1$ i $p \geqslant 1$. Takie też stosunki oporności gałęzi przyjmiemy dla wartości oporności mierzonych równych lub mniejszych od wartości oporności R_n opornika równoważącego. Natomiast dla oporności mierzonych większych od R_n nie możemy stosować optymalnych stosunków, gdyż trzeba przyjąć albo $n < 1$ albo $p < 1$. Z wykresu na rys. 5 widać, że dla $R_z < R_{oz}$ można otrzymać dla $n = 1$ i $p < 1$ większą czułość pomiaru, niż dla $n < 1$ i $p = 1$. Mimo to, mając na względzie tę okoliczność, że przy dużej oporności obwodu galwanometru trudno jest osiągnąć dużą czułość napięciową, w celu ograniczenia zbytniego wzrostu oporności zastępczej mostka przyjmiemy $n < 1$ i $p = 1$ dla $R > R_n$. Wobec tego opornik nastawny, którego wartość oporności R_n wynosi w naszym przypadku 10^3 Ω, należy umieścić dla pomiaru oporności $R \leqslant 10^3$ Ω w gałęzi trzeciej ($p \geqslant 1$), a dla $R > 10^3$ Ω — w gałęzi drugiej ($n < 1$).

Przyjmujemy więc ogólną zasadę umieszczania opornika równoważącego $n \leqslant 1$ i $p \geqslant 1$, czyli mamy do czynienia z przypadkiem drugim (patrz str. 18) i napięcie doprowadzone do mostka wyznaczone jest dopuszczalnym obciążeniem oporności mierzonej (umieszczonej w gałęzi pierwszej) i określone wzorem

$$U_{ad} = (1 + n)(PR)^{1/2}. \tag{7.1}$$

Ze względu na utrzymanie możliwie stałej temperatury oporników dopuszczalną obciążalność P przyjęto równą 0,1 W. Zmniejszanie dopuszczalnego obciążenia oporników powoduje zmniejszenie napięcia doprowadzonego do mostka i zwiększenie wymaganej czułości napięciowej galwanometru.

Przyjęcie wartości stosunków oporności gałęzi mostka dla danej oporności mierzonej jest jednoznaczne z określeniem oporności zastępczej mostka R_z, którą oblicza się ze wzoru (5.4).

Żądaną czułość napięciową galwanometru $S_{uż}$ dla czułości pomiaru S i założenia $R_z \leqslant R_{oz}$ oblicza się zgodnie z (5.11) według wzoru

$$S_{uż} = \frac{(1 + n)S}{n(PR)^{1/2}}. \tag{7.2}$$

Wyniki obliczeń zestawione są w tablicy 4.

Jak wynika z zestawienia, największa czułość napięciowa galwanometru potrzebna jest dla pomiaru najmniejszej oporności, tj. 10 Ω, a naj-

mniejsza czułość napięciowa galwanometru dla oporności średniej, tj. 1000 Ω (gdy $n = p = 1$). Żądana bowiem czułość napięciowa galwanometru — zgodnie z (7.2) — maleje, gdy R rośnie (jest odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka oporności mierzonej), a rośnie, gdy n maleje (wpływ stosunku n jest większy i odwrotny od wpływu R).

Tablica 4

Żądana czułość napięciowa galwanometru dla pomiaru oporności przy $S = 2 \cdot 10^4$ i $P = 0{,}1$ W

Lp.	Wartość oporności mierzonej $R = R_1$	Wartość stosunków oporności gałęzi mostka		R_2	R_3	R_4	R_z	U_{ad}	Żądana czułość napięciowa galwanometru $S_{uż}$
	Ω	n	p	Ω				V	dz/μV
1	10	1	10^2	10	$R_n = 10^3$ [1)]	10^3	505	2,0	0,040
2	10^2	1	10	10^2	$R_n = 10^3$	10^3	550	6,33	0,0126
3	10^3	1	1	10^3	$R_n = 10^3$	10^3	10^3	20,0	0,0040
4	10^4	10^{-1}	1	$R_n = 10^3$	10^4	10^3	1820	34,8	0,0069
5	10^5	10^{-2}	1	$R_n = 10^3$	10^5	10^3	1980	101,0	0,0202

[1)] R_n opornik nastawny, równoważący

Dobór galwanometru dla czułości pomiaru $S = 2 \cdot 10^4$ nie przedstawia trudności. Porównując otrzymane dane z tablicy 4 z katalogami galwanometrów można się przekonać, że jest wiele galwanometrów, i to o krótkim okresie wahań, które nadają się do pomiarów tego rodzaju.

7.3. Żądana czułość napięciowa galwanometru dla względnego porównywania oporników normalnych

Przy porównywaniu oporników normalnych metodą substytucji czułość pomiaru ma decydujące znaczenie. Układ doprowadza się do równowagi dla wzorca podstawowego, a następnie na miejsce tego wzorca włącza się opornik sprawdzany o tej samej oporności znamionowej i powtórnie równoważy się układ. Ze zmiany nastawienia opornika równoważącego oblicza się różnicę oporności między opornikami. Jest to pomiar względny i na jego wynik nie ma wpływu dokładność oporności stosunkowych i części niezmiennej opornika równoważącego, lecz jedynie istotne jest zachowanie stałości ich wartości podczas przeprowadzania porównania. Dlatego temperatura całego układu powinna być ustalona i nie-

zmienna. Cały układ pomiarowy należy umieścić w termostacie, a pomieszczenie powinno być klimatyzowane. Dopuszczalne obciążenie oporników nie może powodować ich grzania.

Dla tych względnych pomiarów istotne znaczenie ma uzyskanie maksymalnej czułości pomiaru.

Przy porównywaniu oporników normalnych czułość pomiaru powinna wynosić co najmniej 10^6. Tak duża czułość pomiaru wymaga doskonalszego układu pomiarowego, nie tylko więc ustalonej temperatury układu, lecz i lepszej jego izolacji w celu zmniejszenia prądów upływu oraz przestrzegania różnych środków ostrożności, aby otrzymywane odchylenie galwanometru było wynikiem jedynie różnicy oporności porównywanych oporników.

Analogicznie jak poprzednio przeprowadzimy obliczenia żądanej czułości napięciowej galwanometru dla porównania oporników normalnych od 10 Ω do 10^5 Ω przy czułości pomiaru 10^6 i dopuszczalnym obciążeniu oporników $P = 0{,}02$ W.

Aby przy czułości pomiaru 10^6 można było doprowadzić układ do równowagi, opornik równoważący powinien umożliwiać regulację do 10^{-6} jego włączonej wartości. Przyjmując możliwość regulacji co 0,01 Ω, opornik równoważący powinien mieć wartość 10^4 Ω.

Wyniki obliczeń zestawione są w tablicy 5.

Tablica 5

Żądana czułość napięciowa galwanometru dla porównywania oporników normalnych przy $S = 10^6$ i $P = 0{,}02$ W

Lp.	Wartość oporności porównywanej $R = R_1$	Wartość stosunków oporności gałęzi mostka		R_2	R_3	R_4	R_z	U_{ad}	Żądana czułość napięciowa galwanometru $S_{uż}$
	Ω	n	p	Ω				V	dz/μV
1	10	1	10^3	10	$R_n = 10^4$ [1)]	10^4	5005	0,893	4,47
2	10^2	1	10^2	10^2	$R_n = 10^4$	10^4	5050	2,82	1,41
3	10^3	1	10	10^3	$R_n = 10^4$	10^4	5500	8,93	0,447
4	10^4	1	1	10^4	$R_n = 10^4$	10^4	10^4	28,2	0,141
5	10^5	10^{-1}	1	$R_n = 10^4$	10^5	10^4	$1{,}82 \cdot 10^4$	49,2	0,246

[1)] R_n opornik nastawny, równoważący

Jak widać z otrzymanych wyników, do porównywania oporników normalnych trzeba stosować najczulsze galwanometry spośród obecnie produkowanych; niewiele typów galwanometrów do tego celu się nadaje.

7.4. Obszar galwanometrów nadających się do danego pomiaru oraz dopasowanie galwanometru do mostka z zastosowaniem metody graficznej

Aby galwanometr nadawał się do danego pomiaru, musi on spełniać przede wszystkim następujące dwa warunki:

1) czułość napięciowa galwanometru powinna być równa lub większa od żądanej czułości napięciowej, określonej wymaganą czułością pomiaru [wzór (7.2)]

$$S_u \geqslant S_{uż} \tag{7.3}$$

2) zewnętrzna oporność krytyczna galwanometru powinna być równa lub większa od zastępczej oporności mostka pomnożonej przez stosunek $\frac{S_{uż}}{S_u}$

$$R_{oz} \geqslant R_z \frac{S_{uż}}{S_u}. \tag{7.4}$$

W przypadku gdy $S_u = S_{uż}$, powinno więc być $R_{oz} \geqslant R_z$. Natomiast, gdy $S_u > S_{uż}$, to — aby czułość pomiaru nie była nadmierna (co ważne jest przy pomiarach rozpatrywanych w punkcie 7.2) — należy zmniejszyć napięcie działające w obwodzie galwanometru przez włączenie równoległe do galwanometru oporności R_r o takiej wartości, żeby zgodnie z (3.9)

$$\frac{S_{uż}}{S_u} = \frac{R_r}{R_r + R_z}. \tag{7.5}$$

Stąd

$$R_r = \frac{\frac{S_{uż}}{S_u} R_z}{1 - \frac{S_{uż}}{S_u}} = \frac{R_z}{\frac{S_u}{S_{uż}} - 1}. \tag{7.6}$$

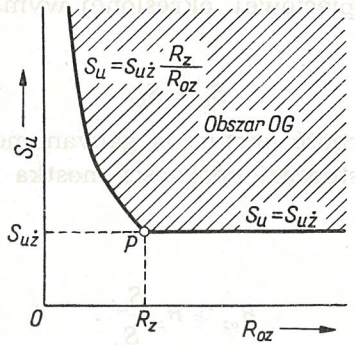
Zewnętrzna oporność krytyczna galwanometru powinna być równa lub większa od zastępczej oporności układu

$$R_{oz} \geqslant \frac{R_r R_z}{R_r + R_z} = \frac{S_{uż}}{S_u} R_z.$$

Z tego wynika, że galwanometr o większej czułości napięciowej niż żądana może mieć mniejszą zewnętrzną oporność krytyczną od zastępczej oporności mostka, gdyż przez włączenie opornika równoległego oporność układu się zmniejsza. Stanowi to wyjaśnienie warunku drugiego.

Opornik bocznikujący galwanometr R_r odgrywa rolę dzielnika napięcia — co też potwierdza tezę, że mamy do czynienia z pomiarem napięcia, a nie prądu.

Te dwa warunki można przedstawić wykreślnie. W tym celu należy sporządzić wykres przedstawiając zewnętrzną oporność krytyczną na osi odciętych, a czułość napięciową na osi rzędnych (rys. 10). Z punktu



Rys. 10. Obszar galwanometrów nadających się do pomiaru

P o współrzędnych (R_z, $S_{uż}$) prowadzi się w prawo prostą równoległą do osi odciętych. Prosta przedstawia przypadek $S_u = S_{uż}$ i $R_{oz} > R_z$. W lewo zaś od punktu P należy poprowadzić krzywą $S_u = S_{uż} \frac{R_z}{R_{oz}}$ dla $R_{oz} < R_z$, która przedstawia przypadek $S_u > S_{uż}$ i $R_{oz} = R_z \frac{S_{uż}}{S_u}$. Wyżej wspomniana prosta jak i krzywa oraz powierzchnia powyżej nich, zakreskowana na rys. 10, stanowi obszar galwanometrów nadających się do pomiaru określonego punktem P. Nazwiemy go obszarem OG.

Mając katalogowe dane galwanometrów łatwo dokonać wyboru odpowiedniego galwanometru posługując się tym wykresem.

Galwanometr nie wyposażony w bocznik magnetyczny ma tylko jedną wartość zewnętrznej oporności krytycznej i jedną wartość czułości napięciowej w warunkach tłumienia krytycznego, na wykresie będzie więc określony przez jeden punkt.

Galwanometr wyposażony w bocznik magnetyczny będzie reprezentowany na wykresie przez krzywą

$$S_u = \frac{W_s}{(R_{oz} + R_g)^{1/2}}, \tag{7.7}$$

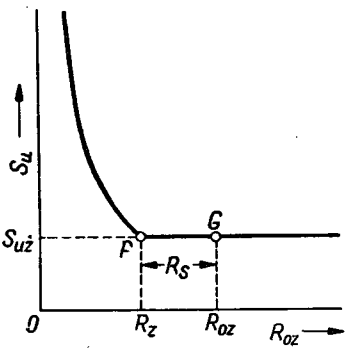
gdzie: W_s jest stałą wartością charakterystyczną dla danego galwanometru.

Ponieważ galwanometr jest tym czulszy, im większa jest oporność krytyczna, przy której można daną czułość napięciową osiągnąć, wprowadzimy nową wielkość charakteryzującą galwanometr, którą będziemy nazywać wskaźnikiem czułości W_s. Wskaźnik czułości galwanometru równa się iloczynowi czułości napięciowej i pierwiastka oporności krytycznej:

$$W_s = S_u (R_o)^{1/2}. \tag{7.8}$$

Ten wskaźnik czułości jest stałą wielkością charakterystyczną także dla galwanometru z nastawnym bocznikiem magnetycznym. Przy zmianie bowiem za pomocą bocznika czynnego strumienia magnetycznego czułość napięciowa zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do pierwiastka oporności krytycznej.

Jeżeli galwanometr spełnia podane uprzednio dwa warunki, a zatem znajduje się w obszarze OG, to za pomocą tego galwanometru można dokonać pomiaru z wymaganą czułością w warunkach tłumienia krytycznego. Jedynie galwanometry, których dane znajdują się w niewielkiej odległości od punktu P, a na krzywej granicznej aż do $R_{oz} = 0{,}8\,R_z$ (takie niedotłumienie jest nawet korzystne ze względu na krótszy czas ustalania się galwanometru), nie wymagają dopasowania do układu dodatkowymi opornikami. To zdarza się jednak rzadko. Na ogół galwanometr trzeba odpowiednio dopasować, przy czym mogą zachodzić następujące trzy przypadki:

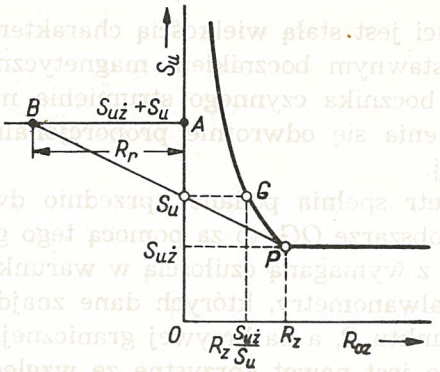


Rys. 11. Wykres dla przypadku $S_u = S_{uż}$ i $R_{oz} > R_z$

1. Galwanometr o danych $R_{oz} > R_z$ i $S_u = S_{uż}$, czyli odpowiadający punktowi G na prostej równoległej do osi odciętych i przechodzącej przez punkt P (rys. 11), wymaga dodatkowego opornika szeregowego $R_s = R_{oz} - R_z$. Na wykresie odcinek PG przedstawia, przy uwzględnieniu skali, wartość oporności opornika R_s.

2. Galwanometr o danych $R_{oz} = R_z \frac{S_{uż}}{S_u} < 0{,}8\,R_z$ i $S_u > S_{uż}$, określony punktem G na krzywej granicznej na lewo od punktu P, wymaga włą-

czenia opornika R_r równolegle do galwanometru o oporności określonej wzorem (7.6). Oporność tę można wyznaczyć również wykreślnie, jak pokazano na rys. 12. W tym celu z punktu A na osi rzędnych, w odległości $S_u + S_{uż}$ od początku układu, prowadzimy równoległą do osi odciętych w kierunku na lewo od osi rzędnych. Przez punkty P i S_u (rzędna punktu G) prowadzimy prostą, która przetnie wyżej wspomnianą



Rys. 12. Wykreślne wyznaczenie oporności R_r bocznikującej galwanometr dla przypadku $S_u > S_{uż}$ i $R_{oz} = R_z \frac{S_{uż}}{S_u}$

prostą równoległą do osi odciętych w punkcie B. Odcinek AB (odległość punktu B od osi rzędnych) przy uwzględnieniu skali przedstawia wartość oporności R_r, którą należy galwanometr zbocznikować, aby oporność zastępczą mostka zredukować do wartości zewnętrznej oporności krytycznej, a czułość pomiaru — do żądanej. Z podobieństwa dwóch trójkątów ($PS_u S_u$) i (BAS_u) wynika:

$$\frac{AB}{R_z} = \frac{S_{uż}}{S_u - S_{uż}},$$

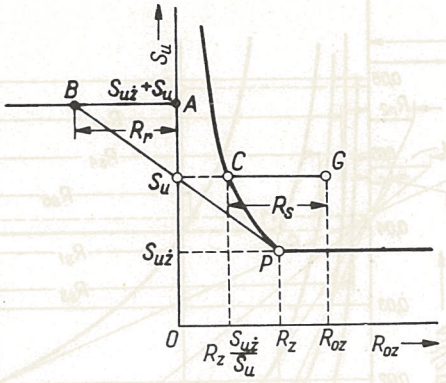
a stąd zgodnie z wzorem (7.6)

$$AB = \frac{R_z}{\frac{S_u}{S_{uż}} - 1} = R_r.$$

3. Galwanometry o danych $R_{oz} > R_z \frac{S_{uż}}{S_u}$ i $S_u > S_{uż}$, czyli znajdujące się wewnątrz obszaru OG, muszą być dopasowane i opornością równoległą i szeregową. Oporność równoległą określa wzór (7.6), a szeregową R_s wzór

$$R_s = R_{oz} - R_z \frac{S_{uż}}{S_u}. \tag{7.9}$$

Oporności te mogą być określone również wykreślnie (rys. 13). Dla wyznaczenia oporności R_s należy poprowadzić prostą równoległą do osi odciętych przez punkt G, reprezentujący dane galwanometru. Prosta ta



Rys. 13. Wykreślne wyznaczenie oporności R_r i R_s dla przypadku $S_u > S_{uż}$ i $R_{oz} > R_z \frac{S_{uż}}{S_u}$

przetnie krzywą graniczną obszaru OG w punkcie C. Odciętą punktu C jest $R_z \frac{S_{uż}}{S_u}$, a zatem odcinek CG z uwzględnieniem skali przedstawia wartość dodatkowej oporności szeregowej, bowiem

$$CG = R_{oz} - R_z \frac{S_{uż}}{S_u} = R_s,$$

co zgodne jest ze wzorem (7.9). Zaś oporność równoległą do galwanometru określa, jak w przypadku 2, odcinek AB.

To wykreślne wyznaczanie oporności równoległej i szeregowej dla dopasowania galwanometru do żądanej czułości napięciowej w warunkach krytycznego tłumienia jest analogiczne do metody podanej przez Biezunskiego i Corbisiera [4].

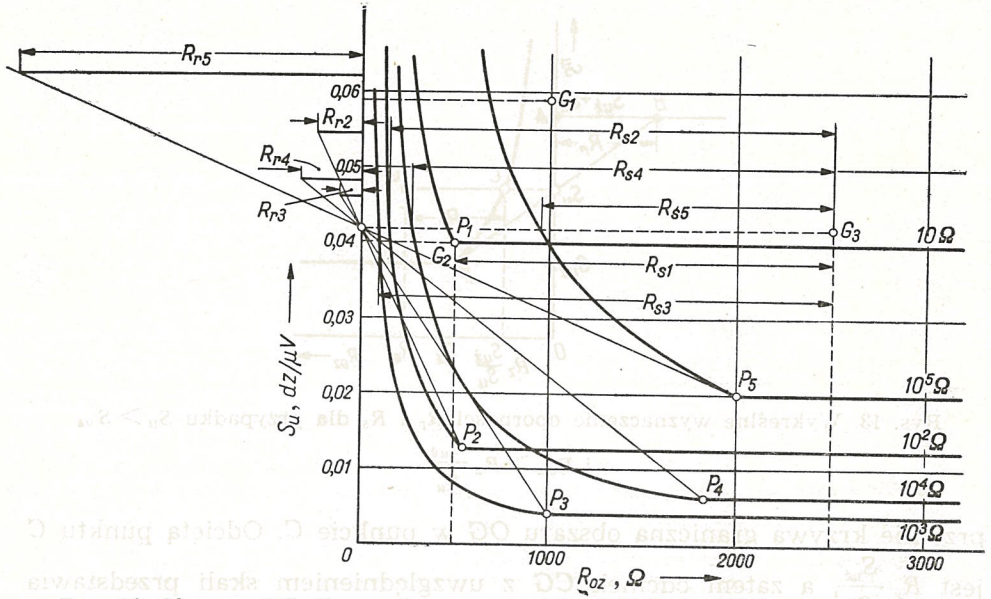
Na rys. 14 dla danych z tablicy 4 dla pomiarów oporności od 10 Ω do 10^5 Ω przy $S = 2 \cdot 10^4$ i $P = 0{,}1$ W wykreślono poszczególne obszary OG i uwzględniono następujące trzy galwanometry:

G_1 galwanometr f. Cambridge, Pot Galv. II, $T_o = 2$ s, $R_g = 1000$ Ω, $R_{oz} = 1000$ Ω, $S_u = 5{,}9 \cdot 10^4 \frac{\text{dz/m}}{\text{V}}$,

G_2 galwanometr f. H & B, II 151, $T_o = 1{,}5$ s, $R_g = 5$ Ω, $R_{oz} = 495$ Ω, $S_u = 4{,}0 \cdot 10^4 \frac{\text{dz/m}}{\text{V}}$,

G_3 galwanometr f. Leeds & Northrup, III 2285, $T_o = 1{,}5$ s, $R_g = 515$ Ω, $R_{oz} = 2500$ Ω, $S_u = 4{,}2 \cdot 10^4 \frac{\text{dz/m}}{\text{V}}$.

Z wykresu widać, że galwanometrami G_1 i G_3 można dokonać pomiarów oporności od 10 Ω do 10^5 Ω z żądaną czułością pomiaru w warunkach krytycznego tłumienia; natomiast galwanometr G_2 nie jest odpo-



Rys. 14. Obszary OG dla pomiaru oporności od 10 Ω do 10^5 Ω przy $S = 2 \cdot 10^4$ i wykreślne wyznaczenie oporności dopasowujących galwanometr G_3 do tych pomiarów

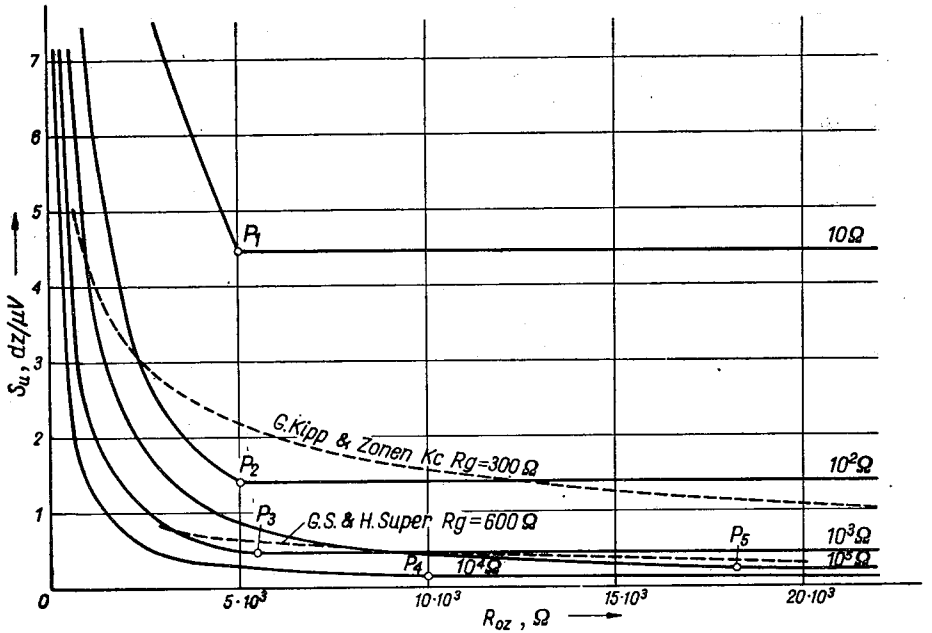
Tablica 6

Zestawienie oporności równoległych i szeregowych dla dopasowania galwanometru G_3 f. Leeds & Northrup do pomiarów oporności od 10 Ω do 10^5 Ω przy $S = 2 \cdot 10^4$

Lp.	Wartość oporności mierzonej	R_z	$S_{uż}$	R_{oz}	S_u	R_r	R_s
	Ω		dz/μ V	Ω	dz/m / μ V	Ω	
P_1	10	505	0,040	2500	0,042	—	2000
P_2	10^2	550	0,0126			236	2335
P_3	10^3	10^3	0,0040			105	2405
P_4	10^4	1820	0,0069			356	2200
P_5	10^5	1980	0,0202			1835	1547

wiedni do pomiaru oporności 10^5 Ω, można nim jednak przeprowadzić pomiary pozostałych oporności, zaś oporności 10 Ω — bez stosowania jakichkolwiek oporników dopasowujących, gdyż współrzędne galwanometru G_2 (R_{oz}, S_u) prawie pokrywają się z współrzędnymi punktu P_1 (R_z, $S_{uż}$.

Najodpowiedniejszy z tych trzech galwanometrów jest galwanometr G_3 ze względu na to, że ma on okres wahań nietłumionych T_o krótszy niż galwanometr G_1. Dla galwanometru G_3 podano w tablicy 6 oporności R_r i R_s, dopasowujące go do poszczególnych pomiarów, jak również na rys. 14 wyznaczono wykreślnie te oporności.



Rys. 15. Obszary OG dla porównania oporników normalnych od 10 Ω do 10^5 Ω przy $S = 10^6$ i charakterystyki $S_u = f(R_{oz})$ galwanometrów: f. Kipp & Zonen Kc i f. S & H Super

Na rys. 15 dla danych z tablicy 5 dla porównania oporników normalnych od 10 Ω do 10^5 Ω przy $S = 10^6$ i $P = 0{,}02$ W wykreślono poszczególne obszary OG i uwzględniono dwa galwanometry należące do najczulszych o średnim okresie wahań nietłumionych, a mianowicie:

1) galwanometr f. Kipp & Zonen, Typ Kc, dwucewkowy z nastawnym bocznikiem magnetycznym, o następujących danych cewki wyższoomowej (nadającej się lepiej do tych pomiarów):

$$T_o = 7 \text{ s}, \quad R_g = 300\ \Omega, \quad R_{oz} = 700 \div 10^5\ \Omega, \quad S_u = 5{,}0 \div 0{,}5 \frac{\text{dz/m}}{\mu\text{V}},$$

2) galwanometr f. S & H, Super, z nastawnym bocznikiem magnetycznym, $T_o = 7$ s, $R_g = 600\ \Omega$, $R_{oz} = 2900 \div 55000\ \Omega$, $S_u = 0{,}8 \div 0{,}2 \frac{\text{dz/m}}{\mu\text{V}}$.

Dla tych dwóch galwanometrów wykreślono na rys. 15 charakterystyki $S_u = f(R_{oz})$ według wzoru (7.7) dla zmiany zewnętrznej oporności krytycznej dokonanej nastawieniem bocznika magnetycznego.

Jak wynika z wykresu, galwanometr Super f. Siemens & Halske nadaje się do porównania oporników normalnych $10^3\ \Omega$, $10^4\ \Omega$ i $10^5\ \Omega$ z czułością pomiaru 10^6. Galwanometr f. Kipp & Zonen Kc jest czulszy (ma on też trzykrotnie większy wskaźnik czułości niż galwanometr Super), można nim dokonać porównania opornika normalnego $100\ \Omega$ z czułością pomiaru większą nawet od 10^6. Stosując ten galwanometr można i przy porównaniu oporności $10\ \Omega$ osiągnąć czułość pomiaru 10^6, jeżeli zwiększy się odległość skali od lusterka galwanometru do dwóch metrów lub nastawi bocznikiem magnetycznym czułość napięciową na $4{,}47\frac{\mathrm{dz/m}}{\mu\mathrm{V}}$, $R_{oz} = 950\ \Omega$, dokonując tłumienia krytycznego za pomocą odpowiedniej oporności tłumiącej włączonej w obwód drugiej cewki galwanometru.

Ponieważ przy porównywaniu oporników normalnych chodzi o możliwie największą czułość pomiaru, redukowanie czułości pomiaru, jak to było poprzednio przy pomiarach oporności z dokładnością 0,02%, jest tutaj zbędne. Nastawiając za pomocą bocznika magnetycznego odpowiednią do poszczególnych pomiarów oporność krytyczną galwanometru można osiągnąć większą czułość pomiaru niż 10^6, przy czym nie potrzeba stosować ani równoległych, ani szeregowych oporników dopasowujących. Galwanometry wyposażone w nastawny bocznik magnetyczny są bardzo dogodne do pomiarów dzięki możliwości zmiany oporności krytycznej i czułości.

Gdy do pomiaru stosuje się galwanometr, którego oporność krytyczną można zmieniać za pomocą bocznika magnetycznego, uzyskuje się największą czułość pomiaru przy nastawieniu zewnętrznej oporności krytycznej na wartość najbardziej zbliżoną do oporności zastępczej mostka, co wynika też ze wzorów (3.7) i (3.11). Dla danego galwanometru wskaźnik czułości $W_s = S_u\ (R_o)^{1/2}$ jest wartością stałą. Gdy $R_{oz} > R_z$, zmniejszenie bocznikiem strumienia magnetycznego powoduje zmniejszenie R_o i zwiększenie czułości napięciowej, a zatem według (3.7) czułość pomiaru rośnie. Gdy zaś $R_{oz} < R_z$, wzrost R_{oz} przez zwiększanie strumienia bocznikiem magnetycznym spowoduje wprawdzie zmniejszenie czułości napięciowej, ponieważ jest ona odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka R_o, jednak czułość pomiaru wzrośnie, bowiem zgodnie z (3.11) jest ona wprost proporcjonalna do R_{oz}.

8. UWAGI KOŃCOWE

Wyprowadzone w rozdziale 3 wzory (3.7) i (3.11) pozwalają rozwiązać najważniejsze zagadnienia związane z czułością pomiaru, a mianowicie:

1) dla żądanej czułości pomiaru dobrać elementy układu,
2) dla danego układu pomiarowego przewidzieć czułość pomiaru.
3) określić, jakie czynniki wpływają na zmianę czułości.

Posługując się tymi wzorami ustalono: optymalne stosunki oporności gałęzi mostka, kryterium wyboru miejsca włączenia galwanometru w danym układzie mostkowym, żądaną czułość napięciową galwanometru dla osiągnięcia określonej czułości pomiaru.

Przestrzeganie podanych wartości optymalnych stosunków oporności gałęzi mostka umożliwia osiągnięcie przy danym galwanometrze największej czułości pomiaru w warunkach krytycznego tłumienia; jest ono również celowe w przypadkach, gdzie nie jest potrzebna duża czułość pomiaru, gdyż można wtedy stosować galwanometry tańsze i odporniejsze na uszkodzenia.

Na podstawie tych najkorzystniejszych stosunków oporności można określić, w której gałęzi mostka należy umieścić opornik równoważący o wymaganej liczbie dekad.

Gdy oporność mierzona jest mniejsza od wartości oporności opornika równoważącego, opornik równoważący należy umieścić w gałęzi trzeciej, natomiast gdy oporność mierzona jest większa — opornik równoważący ze względu na większy obszar galwanometrów nadających się do pomiaru całego zakresu oporności mierzonych — lepiej jest umieścić w gałęzi drugiej (według oznaczeń gałęzi podanych na rys. 1).

Należy zauważyć, że — przy doborze elementów układu dla osiągnięcia maksymalnej czułości pomiaru przy przyjętych założeniach — wartości oporności gałęzi źródła napięcia zasilającego i wewnętrznej oporności galwanometru nie mają decydującego znaczenia i mogą być dowolne. Natomiast istotne znaczenie dla czułości pomiaru — oprócz stosunków oporności gałęzi mostka — mają: wartość napięcia doprowadzonego do mostka (określona dopuszczalnym obciążeniem oporników), czułość napięciowa i zewnętrzna oporność krytyczna użytego do pomiaru galwanometru.

Duża czułość napięciowa galwanometru jest potrzebna przy najdokładniejszych pomiarach małych oporności oraz w przypadkach, gdy wskazane jest znaczne ograniczenie prądu w oporności mierzonej.

Rozpatrywanie w warunkach krytycznego tłumienia zagadnień związanych z czułością pomiaru nie tylko jest słuszne, lecz również znacznie upraszcza obliczenia, gdyż można rozważać mostek napięciowo dla dowolnej wartości wewnętrznej oporności galwanometru. W literaturze miernictwa elektrycznego wciąż jeszcze pokutuje przekonanie, że można to czynić tylko dla $R_g \to \infty$ (pochodzi to między innymi i od Fischera [7], [8]). Autorka uważałaby za osiągnięcie, gdyby niniejsza praca przyczyniła się do usunięcia tego niesłusznego przekonania i do zaniechania stosowania uciążliwych wzorów na prąd w gałęzi galwanometru tam, gdzie to jest zbyteczne.

Politechnika Warszawska
Katedra Miernictwa Elektrycznego

WYKAZ LITERATURY

1. Andress P. M.: I. Deflection Constants of the DC Galvanometer at a Specified Damping; II. Improved Solutions of the Unbalanced Bridge Circuit. — The Review of Scientific Instruments, Vol. 24, Nr 2, Luty 1953, s. 172.
2. Andress P. M.: Sensitivity and Output Formulas for the Resistance Bridge. — AIEE Transactions, Vol. 72, Part I, maj 1953, s. 213.
3. Avins J.: A Wide Range Wheatstone Bridge. — Electronics, lipiec 1939, s. 38.
4. Biezunski G., Corbisier A.: Methode graphique de choix d'un galvanomètre à cadre mobile utilisé en détecteur de déséquilibre. — Mesures & Contrôle industriel, Nr 273, luty 1960, s. 123.
5. Discussion à propos de la sensibilité du pont de Wheatstone. — Mesures & Contrôle industriel, Nr 248, styczeń 1958, s. 45.
6. Findeisen W.: Warunki czułości mostka Wheatstone'a. — Biuletyn Naukowo-Informacyjny Koła Naukowego Elektryków Studentów P. W. Nr 5—6, Warszawa 1950, s. 48.
7. Fischer J.: Eigenschaften der Wheatstoneschen Brücke. — Elektrotechnik und Maschinenbau, 48 Jahrg., listopad 1930, s. 1060.
8. Fischer J.: Empfindlichkeit und Bemessung der Wheatstoneschen Brückenschaltung. — Zeitschrift für Instrumentenkunde, 54 Jahrg., maj 1934, 137.
9. Harris F. K.: Electrical Measurements. J. Wiley, New York 1952.
10. Heaviside O.: On the Best Arrangement of Wheatstone's Bridge for Measuring a Given Resistance with a Given Galvanometer and Battery. — Philosophical Magazine, Vol. 45, 1873, s. 114.
11. Jacobs P.: Recherche de la précision la plus grande dans les mesures au pont de Wheatstone. — Revue E-Electricité (Société Belge des Electriciens) Vol. I, Nr 10, 1955, s. 227.
12. Jaeger W.: Elektrische Messtechnik. II Aufl. Leipzig 1922.
13. Johanson G.: Über Anpassung von Brücke und Galvanometer. — AEG-Mitt., 1940, H. 9/10, s. 212.
14. Kaganow M. A.: Usłowija najwysszej czuwstwitielnosti nieurawnowieszennych mostowych schiem. — Izmier. Tiechn., 1956, Nr 2, s. 36.
15. Kaler H. von.: Angepasste Galvanometer. — Elektrie 14, 1960, H. 8, s. 298.
16. Karandiejew K. B.: Mietody elektriczeskich izmierienij. — Gosenergoizdat, 1952.
17. Karandiejew K. B.: Mostowyje mietody elektriczeskich izmierenij. — Tiechizdat Ukrainy, 1953.
18. Karandiejew K. B., Griniewicz F. B.: Czuwstwitielnost i sogłasowanije paramietrow elektroizmieritielnych ustrojstw. — Woprosy awtomatiki i izmieritielnoj tiechniki, wyp. 4, 1955.
19. Karandiejew K. B., Griniewicz F. B.: Sogłasowanije paramietrow urawnowieszennogo czetyriochpleczego mosta postojannogo toka. — Awtomaticzeskij kontrol i izmieritielnaja tiechnika, wyp. 1, 1957, s. 30.

20. Kędzierski M.: Optymalne warunki pomiaru układami mostkowymi o elektronicznych układach zerowych. — Biuletyn WAT, rok VIII, Nr XLII, 1959, s. 96.
21. Kirpatowskij S. I.: K tieorii czuwstwitielnosti izmieritielnych ustrojstw. — Naucznyje zapiski Lwowskogo politiechniczeskogo instituta, Seria elektrotiechniczeskaja, 1949, Nr 5.
22. Koczan W. A.: K woprosu o czuwstwitielnosti mostow postojannogo toka. — Izmier. Tiechn., 1957, Nr 4, s. 70.
23. Koczan W. A.: Maksimalnaja czuwstwitielnost odinarnogo mosta w rawnowiesnom sostojanii. — Izmier. Tiechn., 1959, Nr 3, s. 36.
24. Kotter R.: Location of the Galvanometer Branch for Maximum Sensitivity of the Wheatstone Bridge. — Journal of Research NBS, Vol. 40, maj 1948, RP 1884, s. 401.
25. Krapiwienskij Ł. Ł.: Usłowija naibolszej czuwstwitielnosti mosta Witstona. — Trudy Leningradskogo industrialnogo instituta, 1936.
26. Krotkow I. N.: Czuwstwitielnost elektriczeskich izmieritielnych cepiej. — Elektriczestwo, 1949, Nr 10, s. 55.
27. Krotkow I. N.: Rasczot naibolszej czuwstwitielnosti elektriczeskich izmieritielnych cepiej. — Elektriczestwo, 1951, Nr 10, s. 59.
28. Krotkow I. N.: Rasczot naibolszej czuwstwitielnosti niekotorych elektriczeskich izmieritielnych schiem. — Trudy WNIIM, Wyp. 14 (74), Elektriczeskije izmierienija, Goseniergoizdat 1953, s. 62.
29. Krönert J.: Empfindlichkeit von Schaltungen. Grundbegriffe. — Archiv für Technisches Messen, J. 022—3, listopad 1932.
30. Krönert J.: Untersuchung über die „Günstigste Schaltung". — ATM J. 022—4, grudzień 1932.
31. Krönert J.: Messbrücken. Berechnung von Gleichstrombrücken. — ATM J. 910—1, 1931.
32. Krönert J.: Empfindlichkeit von Wheatstone-Gleichstrombrücken in der Nullmethode. — ATM J. 910—2, styczeń 1933.
33. Krönert J.: Messbrücken und Kompensatoren. Oldenbourg, München 1935.
34. Krukowski W.: Die Genauigkeit der Gleichstromkompensationsmessungen und die Mittel zu ihrer Steigerung. — Annales de l'Académie des Sciences à Varsovie, tom 1,1935. poz. 123.
35. Kurieniew S. I.: O czuwstwitielnosti mostow postojannogo i pieriemiennogo toka. — Izwiestia Leningradskogo elektrotiechniczeskogo instituta, 1939, s. 133.
36. Kuryłowicz J.: Metoda kompensacyjno-różnicowa pomiaru oporności. — Arch. Elektr., Tom II, zeszyt 3—4, 1953, s. 191.
37. Lewin M. I.: Elementy tieorii i rasczota mostowych schiem. — Izmier. Tiechn. 1958, Nr 4, s. 46.
38. Łurie A. I.: Elektriczeskije izmierienija w sietiach silnogo toka. 1948.
39. Maxwell J. G.: A Treatise on Electricity and Magnetism. London 1873.
40. Metal A.: Uproszczone obliczenie czułości mostka Wheatstone'a. — Przegl. Elektr., 1950, s. 357.
41. Meyer E., Moerder C.: Spiegelgalvanometer und Lichtzeigerinstrumente. II Wyd. AK. Verlagsges. Geest & Portig, Leipzig 1957.
42. Moerder C.: Galvanometer-Auswahl beim Drehspul-Spiegelgalvanometer. — ATM J. 721—11, grudzień 1949.
43. Moerder C.: Graphische Auswahl von Drehspul-Spiegelgalvanometern. — ATM J. 721—12, luty 1950.

44. Nieczajew G. K.: O czuwstwitielnosti mostowoj schiemy. — Izmier. Tiechn. 1958, Nr 2, s. 68.
45. Niestierienko A. D.: Rasczot czuwstwitielnosti schiem nulewogo tipa. — Elektriczestwo, 1940, Nr 7 s. 49.
46. Niestierienko A. D.: Osnowy rasczota elektroizmieritielnych schiem urawnowiesziwanija. Wyd. II, Kijów 1960.
47. Oesterlin W.: Maximale Leistungsempfindlichkeit von Wheatstoneschen Brücken in der Nullmethode. — ATM J. 910—5, czerwiec 1955, s. 141.
48. Pronier M. B.: Un cas particulier dans la discussion de la sensibilité du pont de Wheatstone. — Mesures & Contrôle industriel. Nr 227, kwiecień 1956, s. 273.
49. Sawicki J.: Skompensowany mostek Wheatstone'a. — Arch. Elektr. 1958, zeszyt 3, s. 480.
50. Sawicki J.: Substytucja w skompensowanym mostku Wheatstone'a. — Arch. Elektr. 1960, zeszyt 2, s. 321.
51. Schwerdtfeger W.: Elektrische Messtechnik, IV Wyd. Leipzig 1944.
52. Seletzky A. C., Zurcher L. A.: Sensitivity of the Four-Arm Bridge. AIEE Transactions, Vol. 58, 1939, s. 723.
53. Sigorskij W. P.: K woprosu o czuwstwitielnosti izmieritielnych schiem. — Naucznyje zapiski Lwowskogo politiechniczeskogo instituta. Serija elektrotiechniczeskaja, 1949, Nr 6, s. 311.
54. Swieykowska Z.: Najkorzystniejsze umieszczenie galwanometru w mostku Wheatstone'a przy uwzględnieniu dopasowania układu do oporności krytycznej. — Arch. Elektr., 1954, Tom III, zeszyt 3, s. 311.
55. Swieykowska Z. Najkorzystniejszy dobór oporności gałęzi mostka Wheatstone'a przy uwzględnieniu dopasowania układu do oporności krytycznej. — Arch. Elektr., 1957, Tom VI, zeszyt 4, s. 733.
56. Szulce A.: Metoda mostka Wheatstone'a jako metoda odchyłowa. — Biuletyn WAT, Nr XI, Rok III, 1954, s. 63.
57. Wenner F.: Methods, Apparatus, and Procedures for the Comparison of Precision Standard Resistors. — Journal of Research NBS, Vol. 25, sierpień 1940, RP 1323, s. 229.
58. Wey R. I.: A New Treatement of the Wheatstone Bridge Network. — Wireless Engineer, Vol. XXI, Nr. 250, lipiec 1944.
59. Wyeth F. H., Higley J. B., Shirk W. H.: A Precision, Guarded Resistance Measuring Facility. — AIEE Transactions, 1958, s. 471.

З. СВЕЙКОВСКА

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ УРАВНОВЕШЕННЫМ МОСТОМ УИТСТОНА В УСЛОВИЯХ КРИТИЧЕСКОГО УСПОКОЕНИЯ ГАЛЬВАНОМЕТРА

Резюме

В настоящей работе вопросы связанные с чувствительностью измерения уравновешенным мостом Уитстона были рассмотрены в условиях критического успокоения гальванометра, то есть при согласовании сопротивления контура гальванометра и его критического сопротивления.

Принято следующее определение чувствительности измерения:

Чувствительность измерения сопротивления уравновешенным мостом Уитстона это значение отношения изменения отклонения гальванометра $\Delta\alpha$, вызванного по возможности малым, но больше порогового, изменением ΔR сопротивления какого-нибудь плеча моста от значения данного условием равновесия моста, к этому относительному изменению сопротивления:

$$S = \frac{\Delta\alpha}{\Delta R/R} \quad \text{для } \Delta R \ll R. \tag{2.1}$$

На основании принятого определения выведены формулы (3.7) и (3.11), определяющие чувствительность измерения в условиях критического успокоения гальванометра. Эти формулы дают возможность решить самые важные вопросы касающиеся чувствительности измерения, как:

1) для требуемой чувствительности измерения подобрать элементы схемы,

2) для данной мостовой схемы вычислить чувствительности измерения,

3) определить, какие факторы влияют на чувствительность измерения.

Пользуясь этими формулами, была проанализирована зависимость чувствительности измерения от значения отношений сопротивлений моста $\left(n = \frac{R_2}{R_1}, p = \frac{R_3}{R_1}\right)$ при следующих трёх предпосылках:

1) измерения производятся в условиях критического успокоения гальванометра,

2) допускаемая нагрузка сопротивлений одинакова для всех плеч моста,

3) к мосту доводится такое значение напряжения, что получается допускаемая нагрузка по крайней мере в одном плече моста, а в никаком плече она не является выше, то есть используется допускаемая нагружаемость моста.

Зависимости чувствительности измерения от отношений сопротивлений плеч моста представлены в таблицах 1 и 2, а также графически на рис. 5 и 6.

На основании анализа установлены оптимальные отношения сопротивлений плеч моста для данного измеряемого сопротивления и данного гальванометра, следующие:

1) когда измеряемое сопротивление R меньше внешнего критического сопротивления гальванометра $R < R_{oz}$, с целью получения найбольшей чувствительности измерения следует принять ниже приведенные отношения:

$$n = 1 \quad \text{и} \quad 1 \leqslant p \leqslant \left(2\frac{R_{oz}}{R} - 1\right),$$

2) когда $R = R_{oz}$, оптимальные отношения сопротивлений равны:

$$n = 1 \quad \text{и} \quad p = 1,$$

3) когда $R > R_{oz}$, максимальная чувствительность измерения достигается при отношениях:

$$p = 1 \quad \text{и} \quad \frac{R_{oz}}{2R - R_{oz}} \leqslant n \leqslant 1.$$

Соблюдение этих оптимальных отношений сопротивлений даёт возможность получения, при данном гальванометре, найбольшей чувствительности измерения в условиях критического успокоения; оно является также целесообразным в тех случаях, когда не нужна значительная чувствительность измерений, так как тогда можно применять более дешёвые и более устойчивые гальванометры.

Найболее выгодные отношения сопротивлении показывают в каком плече моста следует поместить уравновешивающее сопротивление с требуемым числом декад.

Далее, принимая такие же самые предпосылки, выведен критерий выбора найболее выгодного места включения гальванометра в данной мостовой схеме (6.15). Этим критерием является отношение внешнего критического сопротивления гальванометра к среднему геометрическому значению двух противоположных плеч моста. Критерий выбора места включения гальванометра следует применять в тех случаях, когда не соблюдены оптимальные отношения сопротивлений плеч и в мосте нет двух противоположных плеч с равным сопротивлением.

Доказано, что если критическое сопротивление гальванометра может быть изменено с помощью магнитного шунта, то найболее выгодно включить гальванометр между двумя большими и двумя меньшими сопротивлениями и установить с помощью магнитного шунта внешнее критическое сопротивление на значение эквивалентного сопротивления моста между точками включения ветви гальванометра.

На рис. 9 представлена, для обеих возможностей включения гальванометра, зависимость чувствительности измерения от внешнего критического сопротивления, которое изменялось с помощью магнитного шунта. Этот график иллюстрирует критерий выбора места включения гальванометра, а также и наиболее выгодное внешнее критическое сопротивление гальванометра.

Приведены также указания по выбору гальванометра. О выборе лрибора решает его чувствительность по напряжению и внешнее критическое сопротивление, а не чувствительность по току и внутреннее сопротивление гальванометра. Чувствительность гальванометра по напряжению S_u должна быть равна или больше требуемой чувствительности по напряжению $S_{u\dot{z}}$, вычисленной по формуле (7.2) для требуемой чувствительности измерения и допускаемой нагрузки реостатов. Внешнее критическое сопротивление гальванометра должно быть равно или больше эквивалентного сопротивления моста умноженного на отношение $\frac{S_{u\dot{z}}}{S_u}$. Эти данные, представленные на графике с координатами S_u и R_{oz}, определяют область гальванометров OG пригодных для измерения (рис. 10). На графиках рис. 11, 12 и 13 представлено графический метод определения сопротивлений для согласования гальванометра при данном измерении.

Так как чувствительность гальванометра растёт с увеличением значения критического сопротивления, при котором можно получить данную чувствительность по напряжению, автор вводит новую величину характеризирующую гальванометр, которую называет показателем чувствительноси. Показатель чувствительности является произведением чувствительности по напряжению и квадратного корня с критического сопротивления (7.8). Этот показатель имеет постоянное значение также для гальванометра с регулируемым магнитным шунтом.

Кроме того, произведён примерно для двух типовых родов измерения подбор гальванометра и элементов моста для ряда значений измеряемых сопротивлений ($10\Omega \div 10^5\Omega$). Данные для подбора гальванометра при этих измерениях представлены в таблицах 4 и 5. Области гальванометров пригодных для измерений отдельных сопротивлений представлены на рис. 14 и 15.

Обсуждение вопросов связанных с чувствительностью измерения в условиях критического успокоения гальванометра не только является обоснованным, но также значительно сокращает расчёты, так как можно рассматривать мост по напряжению для произвольного значения внутреннего сопротивления гальванометра.

Z. SWIEYKOWSKA

MEASUREMENT SENSITIVITY OF THE BALANCED WHEATSTONE BRIDGE UNDER CRITICAL DAMPING CONDITIONS OF THE GALVANOMETER

Summary

In this paper the problems concerning sensitivity of measurement of the balanced Wheatstone bridge are considered under critical damping conditions of the galvanometer, i.e. at circuit resistance of galvanometer adjusted to its critical resistance.

The following definition of measurement sensitivity is accepted:

The sensitivity of resistance measurement by means of the balanced Wheatstone bridge is the value of the ratio between the galvanometer deflection change $\Delta\alpha$, caused by a possibly small (but higher than the threshold) resistance change ΔR of any bridge arm from the value fulfilling the bridge balance condition, and this proportional resistance change.

$$S = \frac{\Delta\alpha}{\Delta R/R} \qquad \text{for } \Delta R \ll R. \tag{2.1}$$

On the basis of this definition the formulae (3.7) and (3.11) for measurement sensitivity under critical damping conditions of the galvanometer are derived, which allow to solve the following most important problems concerning measurement sensitivity:

1) to choose the bridge elements for a required measurement sensitivity,
2) to calculate the measurement sensitivity for a given bridge arrangement,
3) to determine which factors influence the sensitivity.

Using the formulae (3.7) and (3.11) the dependence of measurement sensitivity on the ratios of the resistances of the bridge arms ($n=R_2/R_1$, $p=R_3/R_1$) is analysed under the following three assumptions:

1) the measurements are performed under critical damping conditions of the galvanometer,
2) the permissible load is equal for all bridge arms,
3) the voltage applied to the bridge is of such a value, that at least in one of the bridge arms the permissible load is attained, but in none of them — exceeded, i.e. the permissible bridge rating is fully utilized.

The results of analysis are summarized in Tables 1 and 2 and represented graphically by Figs. 5 and 6.

On the basis of this analysis the optimum ratios of the bridge arms resistances have been established for a given measured resistance and a given galvanometer, namely:

1) if the measured resistance R is lower than the external critical resistance of the galvanometer $R<R_{oz}$, then in order to achieve the highest measurement sensitivity the following ratios should be chosen

$$n = 1 \text{ and } 1 \leqslant p \leqslant (2R_{oz}/R - 1),$$

2) if $R = R_{oz}$ — the optimum resistance ratios are

$$n = 1 \text{ and } p = 1,$$

3) if $R > R_{oz}$ — the maximum measurement sensitivity is obtained, when

$$p = 1 \text{ and } \frac{R_{oz}}{2R - R_{oz}} \leqslant n \leqslant 1,$$

The observance of these optimum resistance ratios enables to obtain the highest measurement sensitivity under critical damping for a given galvanometer; it is also useful where a high measurement sensitivity is not necessary, since then cheaper and more resistant galvanometers may be applied.

These optimal resistance ratios indicate in which bridge arm the balancing resistor with the required number of decades must be placed.

Further a criterion is theoretically derived for the choice of the more advantageous place for connecting the galvanometer in a given bridge arrangement (6.15). This criterion is the ratio of the external critical resistance of the galvanometer to the geometrical mean of the smallest and the largest resistance of the bridge arms, i.e. to the geometrical mean of resistances of two opposite bridge arms. The criterion for the choice of the place for connection of the galvanometer in the bridge should be applied in the case when the optimum ratios of the bridge arms resistances are not observed and when in the bridge there are no two opposite arms of equal resistance (only then one of the two possible ways of connecting the galvanometer is more advantageous).

It is shown that if the critical resistance of the galvanometer can be changed by means of a magnetic shunt, it is better to connect the galvanometer between the two larger and the two smaller resistances of the bridge and adjust the external critical resistance of the galvanometer by means of the magnetic shunt, until it is equal to the equivalent resistance of the bridge between the points of connection of the galvanometer.

Fig. 9 shows the dependence of measurement sensitivity for the two possible connections of the galvanometer on the external critical resistance changing with the magnetic shunt. The diagram illustrates both the criterion for choosing the location of the galvanometer and its best external critical resistance.

Directives for galvanometer selection are also given. The voltage sensitivity of the galvanometer and its external critical resistance (not the current sensitivity and the internal resistance) are decisive for the selection. The voltage sensitivity of the galvanometer S_u should be equal or higher than the required voltage sensitivity $S_{uż}$ calculated by the formula (7.2) for a required measurement sensitivity and a permissible load of resistors. The external critical resistance of the galvanometer should be equal or higher than the equivalent resistance of the bridge multiplied by the relation $\frac{S_{uż}}{S_u}$. These data represented on the diagram of coordinates S_u and R_{oz} (external critical resistance) determine the area OG of galvanometers suitable for a given measurement (Fig. 10). Figs. 11, 12 and 13 show the graphical method of determining the resistances for the adjustment of the galvanometer to a given measurement.

Since the galvanometer is the more sensitive, the higher is the critical resistance at which one may obtain a given voltage sensitivity, the author introduces a new characteristic magnitude for the galvanometer named sensitivity indicator. The sensitivity indicator is the product of the voltage sensitivity and the root of critical resistance (7.8). This indicator has a constant value also for a galvanometer with controlled magnetic shunt.

For two typical kinds of measurement examples of selection of the galvanometer and bridge elements, for the range of measured resistances $10\,\Omega \div 10^5\,\Omega$, are given. Data for galvanometer selection for these measurements are listed in Tables 4 and 5. The areas of galvanometers suitable for measuring these resistances are represented in Figs. 14 and 15.

The consideration of the problems concerning measurement sensitivity under critical damping conditions of the galvanometer is not only rational, it also simplifies the computations, since they may be expressed in terms of potential difference for any value of the galvanometer internal resistance.

Z. SWIEYKOWSKA

SENSIBILITÉ DE MESURE AU PONT DE WHEATSTONE À L'ÉTAT D'ÉQUILIBRE DANS LES CONDITIONS D'AMORTISSEMENT CRITIQUE DU GALVANOMÈTRE

Resumé

L'auteur établit: la définition de la sensibilité de mesure, les valeurs optima des relations des résistance des branches du pont, le critérium du choix de la place de mise en circuit du galvanomètre dans le pont, les directives pour le choix du galvanomètre, une méthode graphique de détermination du domaine des galvanomètres convenant à la mesure ainsi que des valeurs des résistances nécessaires pour ajuster l'amortissement et la sensibilité du galvanomètre. L'auteur donne une série d'exemples illustrant le choix du galvanomètre et des éléments du pont.

Z. SWIEYKOWSKA

MESSEMPFINDLICHKEIT DER ABDEGLICHENEN WHEATSTONE-BRÜCKE BEI DER KRITISCHEN DÄMPFUNG DES GALVANOMETERS

Zusammenfassung

Es wurde festgestellt: die Definition der Messempfindlichkeit; die Optimalwerte der Beziehungen der Brückenzweigwiderstände; das Wahlkriterium des günstigeren Ortes, wo der Galvanometer in der Brücke eingeschaltet sein soll; die Direktiven für die Wahl des Galvanometers; die graphische Methode zur Bestimmung des Gebietes der Galvanometers, die sich zur Messung eignen und Widerstandswerte, welche zur Anpassung des Galvanometers erforderlich sind. Es wurden zahlreiche Beispiele für die Wahl des Galvanometers und der Brückenelemente angegeben.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ

ARCHIVES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

5
XIII

TOM XIII WARSZAWA 1961 Nr 5
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE — TOM VIII — ZESZYT 1 — 1962

621.313.322

WŁADYSŁAW PASZEK

Stabilizacja napięcia bezwzbudnicowych generatorów synchronicznych przy pomocy fazowej kompoundacji wzbudzenia

Praca zawiera klasyfikację i porównanie układów fazowej kompoundacji wzbudzenia. Obliczono elementy układu kompoundacji i zamieszczono wytyczne do projektowania przy optymalnych parametrach tych elementów. Obliczenie przeprowadzono przy posłużeniu się podstawową harmoniczną prądu kompoundacji, odkształconego na skutek zjawisk komutacyjnych w obwodzie prostowniczym.

1. WARUNKI PRACY BEZWZBUDNICOWYCH GENERATORÓW SYNCHRONICZNYCH

Obok najpowszechniejszego przypadku źródła energii elektrycznej pochodzącej z silnie powiązanego systemu elektroenergetycznego zasilanego z wielu jednostek prądotwórczych, występują również typowe przypadki pracy jednego lub kilku generatorów zasilających sieć wydzieloną. Charakterystycznym przypadkiem takiej pracy są małe elektrownie położone z dala od centrum systemu i nie powiązane z tym systemem z różnych powodów. Są to np. małe elektrownie w oddalonym ośrodku rolniczym, przenośne generatory dla celów wojskowych, elektrownie okrętowe lub generatory pomocnicze służące do zasilania energią pomocniczą układów wzbudzenia dużych turbozespołów. Omówimy warunki eksploatacyjne takich generatorów na przykładzie elektrowni okrętowych oraz generatorów zasilających układy wzbudzenia dużych turbozespołów energią pomocniczą.

Warunki pracy generatorów synchronicznych zasilających sieć wyodrębnioną, z jaką mamy do czynienia w układzie energetycznym okrętu, są szczególnie trudne. Trudności te można uszeregować w następującej kolejności:

1) Moc znamionowa odbiorów asynchronicznych złożonych przeważnie z silników asynchronicznych z wirnikiem klatkowym jest współmierna z mocą znamionową generatora.

Przy bezpośrednim rozruchu powstają duże przejściowe spadki napięcia generatora. Spadki te wpływają pośrednio na pracę innych silników asynchronicznych będących już w ruchu i na pracę ich aparatury pomocniczej. Nadmierne wahania napięcia wpływają ponadto niekorzystnie na wydajność urządzeń oświetleniowych, a w przypadku zwyżek napięcia występujących przy nagłych odłączeniach zagrażają żywotności źródeł światła.

2) Z uwagi na dużą inercję regulatorów prędkości turbin lub silników napędowych generatorów przy zmianach obciążenia elektrowni występują przejściowe zmiany częstotliwości, które mają wpływ na napięcie elektrowni i pośrednio na pracę odbiorników.

3) W przypadku niesymetrii obciążenia spowodowanej nierównomiernym rozłożeniem odbiorów jednofazowych na wszystkie trzy fazy występuje niesymetria napięcia, która wpływa niekorzystnie na odbiory oświetleniowe, odbiory silnikowe i generator synchroniczny.

4) Z uwagi na przeznaczenie okrętu do pokonywania dalekich odległości w różnych warunkach klimatycznych występuje problem wpływu temperatury otoczenia na poziom stabilizowanego napięcia generatorów zasilających.

Specyficzne warunki pracy generatorów elektrowni okrętowej uzasadniają postawienie szeregu postulatów i żądań stawianych samym generatorom i ich układom stabilizacji napięcia.

a) Z uwagi na podstawowy wpływ przejściowej reaktancji X'_d generatora na zaburzeniowe zmiany napięcia elektrowni stawiane są wymagania uzyskania możliwie małych wartości tej reaktancji.

b) Z uwagi na konieczność uzyskania silnego tłumienia kołysań wirników przy pracy równoległej i małej wrażliwości generatora na niesymetrię obciążenia zachodzi konieczność stosowania silnej klatki tłumiącej. Istnienie klatki tłumiącej przyczynia się ponadto do zmniejszenia początkowej zmiany napięcia twornika $\Delta U''_g = \Delta I_g X''_d$ przy nagłych zmianach poboru prądu obciążenia. Klatka tłumiąca powoduje ponadto zmniejszenie reaktancji odwrotnej kolejności faz, dzięki czemu zmniejsza się wpływ ewentualnej niesymetrii obciążenia na zniekształcenie symetrii napięć.

c) Wymagamy dobrej jakości stabilizacji. Jakość stabilizacji określona jest przez przebieg napięcia generatora w czasie zaburzenia. Przebieg napięcia nie powinien wykazywać słabo tłumionych oscylacji. Ustalenie poziomu napięcia powinno być dokonane z ograniczonym co do wielkości jednym przeregulowaniem lub praktycznie bez przeregulowania.

d) Z uwagi na istnienie różnego od zera statyzmu regulacji prędkości maszyn napędowych generatorów, układ stabilizacji napięcia nie powinien uzależniać (względnie uzależniać tylko w małym stopniu) poziomu napięcia od nieznacznych wahań częstotliwości. Pożądane byłoby zupeł-

ne uniezależnienie stabilizowanego poziomu napięcia od wahań częstotliwości nawet przy przejściowych zmianach prędkości wirowania w czasie zaburzeń obciążenia czynnego.

e) Temperatura otoczenia oraz nagrzanie uzwojeń generatora i urządzeń stabilizacyjnych nie powinny wpływać (lub mogą wpływać tylko w znikomym stopniu) na dokładność stabilizowanego poziomu napięcia generatora.

f) Urządzenie stabilizacji napięcia powinno być łatwe do konserwacji, wstrząsoodporne, i nie wymagać wysokokwalifikowanej obsługi. Ciężar urządzenia powinien być możliwie mały.

Zwróćmy obecnie uwagę na warunki eksploatacyjne generatorów pomocniczych dużych turbozespołów w elektrowniach energetycznych.

W przypadku generatorów pomocniczych dużych turbozespołów warunki eksploatacyjne odnośnie wymaganej dokładności stabilizowanego napięcia są bardziej złagodzone, jednakże pojawiają się inne wymagania związane ze specyficznym charakterem odbiorników. Generator pomocniczy osadzony jest zwykle na wspólnym wale turbo — lub hydrogeneratora. Służy on do zasilania asynchronicznego silnika napędowego oddzielnego agregatu wzbudnicy elektromaszynowej i do zasilania energią pomocniczą wzmacniaczy układu regulacji generatora. Specyficzny przypadek pracy takich generatorów postuluje, by samowzbudzenie generatora pomocniczego następowało już przy obniżonej prędkości wirowania, w czasie rozruchu turbozespołu. Z drugiej strony pożądane jest, by przy nadmiernie powiększonej prędkości wirowania hydrogeneratora następowała utrata samowzbudzenia generatora pomocniczego w celu uchronienia silnika napędu agregatu wzbudnicy od nadmiernie dużej zwyżki prędkości wirowania. Duże chwilowe zwyżki prędkości wirowania hydrogeneratora mogą wystąpić przy nagłym wyłączeniu odbioru mocy czynnej hydrogeneratora. Zamknięcie dopływu wody do hydroturbiny przez regulator prędkości odbywa się z opóźnieniem, na skutek czego przepływ wody powoduje przejściowy rozbieg mas wirujących.

2. CHARAKTERYSTYKA REGULACJI GENERATORA

W celu sprostania wymaganiom wysuniętym w rozdziale 1 znalazły zastosowanie trzy podstawowe sposoby stabilizacji napięcia polegające na układzie regulacji [13], układzie fazowej kompoundacji wzbudzenia [2], [12] i układzie fazowej kompoundacji wzbudzenia z korektorem napięcia [4], [8], [14]. Rozwiązanie stabilizacji tylko za pomocą regulatora napięcia nastręcza duże trudności z powodu konieczności zastosowania wzmacniaczy dużych mocy o małej inercji.

Z uwagi na postulowaną łatwość konserwacji i dużą pewność działania w trudnych warunkach eksploatacyjnych predystynowane jest zastosowanie wzmacniaczy magnetycznych jako ostatniego stopnia wzmoc-

nienia regulatora. Stosowanie wzmacniacza elektromaszynowego, czyli wzbudnicy wirującej, jako ostatniego stopnia wzmocnienia regulatora jest niepożądane m. in. z powodu uciążliwej konserwacji komutatora.

Duże nadzieje rokują układy regulacji zbudowane przy wykorzystaniu sterowanych prostowników półprzewodnikowych dużych mocy na prądy rzędu kilkudziesięciu amperów, które zasilają bezpośrednio uzwojenie wzbudzenia generatora.

Zastosowanie układu fazowej kompoundacji wzbudzenia, który jest układem kompensacji podstawowej wielkości zakłócającej napięcie stabilizowane — prądu obciążenia generatora, stwarza możliwość znacznego zmniejszenia wymiarów wzmacniaczy regulatora. Regulator napięcia z wyłączeniem samego układu kompoundacji wzbudzenia bywa w tym przypadku nazywany korektorem napięcia.

Przy starannym wykonaniu układu kompoundacji możliwe jest osiągnięcie dosyć dużej dokładności stabilizacji bez zastosowania korektora, jeżeli zakłócenia uboczne nie są nadmiernie duże. Układ fazowej kompoundacji wzbudzenia zasila bezpośrednio uzwojenie wzbudzenia generatora.

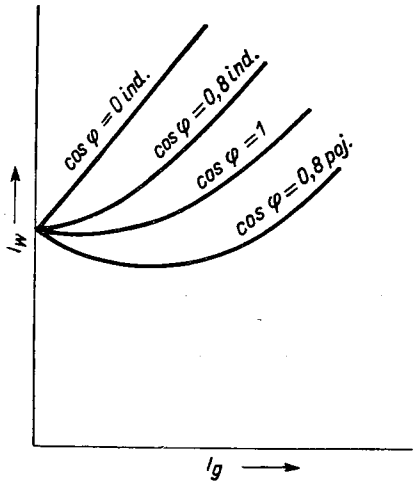
Zadaniem układu fazowej kompoundacji wzbudzenia jest dostarczenie takiego prądu wzbudzenia do uzwojenia magneśnicy generatora, jaki jest konieczny do utrzymania stałości napięcia generatora (na jego zaciskach lub w innym miejscu sieci) przy dowolnych zmianach obciążenia w granicach od biegu jałowego do znamionowego prądu twornika przy współczynniku mocy zmieniającym się w szerokim zakresie. Oczywiście z góry należy liczyć się z tym, że stałość napięcia obarczona będzie błędem wynikającym z dokładności dostosowania charakterystyk układu kompoundacji wzbudzenia do charakterystyk generatora. Granice dokładności takiego dostosowania wyznaczone są przez naturalne rozbieżności charakterystyk dwóch strukturalnie różnych objektów generatora i układu kompoundacji. Ponieważ, jak wyżej zaznaczono, układ kompoundacji wzbudzenia jest jedynie układem kompensacji podstawowej wielkości zakłócającej, rozpatrzymy i porównamy własności generatora i układu kompoundacji przy zmianach tej wielkości, tzn. przy zmianach prądu obciążenia generatora, zakładając obciążenie symetryczne. Wykażemy, że układ fazowej kompoundacji wzbudzenia przystosowany jest w sposób naturalny do dokładnej kompensacji podstawowego zakłócenia napięcia w generatorze z magneśnicą cylindryczną w stanie nienasyconym, w którym zachodzi symetria przewodności magnetycznej w osi podłużnej i poprzecznej ($X_d = X_q$).

Zapotrzebowanie prądu wzbudzenia generatora przy zmianach prądu obciążenia otrzymujemy z jego charakterystyki regulacji (rys. 1):

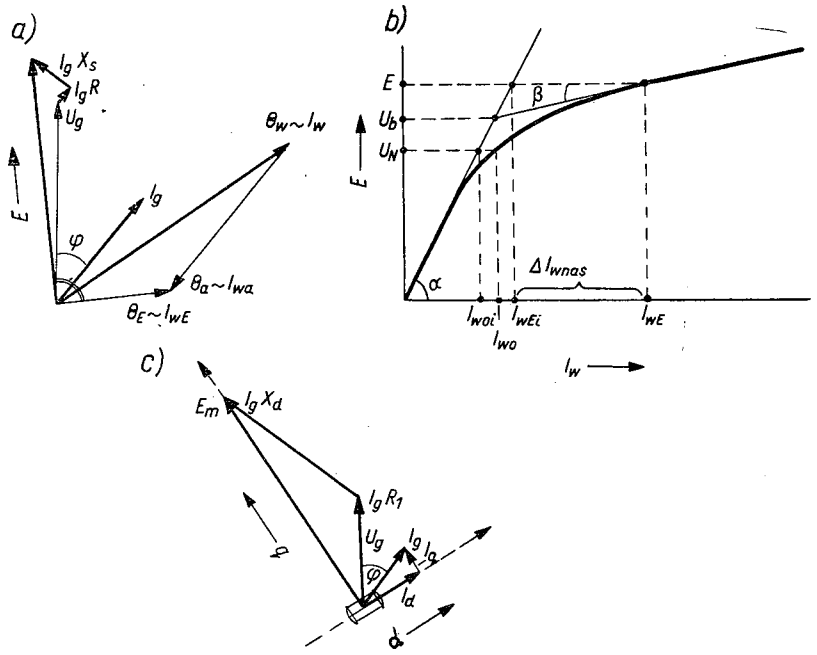
$$I_w = f(I_g) \text{ przy } \cos\varphi = \text{const.}$$

Charakterystykę tę można wyznaczyć wychodząc z wykresu wektorowego (rys. 2a) maszyny synchronicznej z biegunami utajonymi, z którego

wynika wektorowe złożenie przepływu wzbudzenia z dwóch podstawowych składników: przepływu potrzebnego do wytworzenia strumienia generatora Θ_E oraz przepływu Θ_a potrzebnego do zniesienia przepływu oddziaływania twornika maszyny synchronicznej. Zależność przepływu Θ_E



Rys. 1. Charakterystyka regulacji



Rys. 2. a) Wykres wektorowy maszyny synchronicznej z magneśnicą cylindryczną
b) Charakterystyka biegu jałowego generatora
c) Wykres wektorowy maszyny synchronicznej nienasyconej

od napięcia wewnętrznego i częstotliwości podaje charakterystyka biegu jałowego generatora, rys. 2b, której górne zakrzywienie spowodowane jest przez nasycenie w obwodzie magnetycznym generatora.

Prąd wzbudzenia generatora można przedstawić w postaci sumy geometrycznej wektora prądu I_{wE} i prądu I_{wa}

$$I_w = |\hat{I}_{wE} + \hat{I}_{wa}|. \tag{1a}$$

Prąd wzbudzenia I_{wE} potrzebny do wytworzenia napięcia wewnętrznego E możemy przedstawić jako sumę prądu I_{wEi} maszyny nienasyconej i prądu $I_{w\,nas}$ pojawiającego się przy nasyceniu.

$$I_w = \frac{I_{woi}}{U_N}\,\frac{f_N}{f}\,[\hat{U}_g + \hat{I}_g(jX_d + R_1)] + \Delta I_{w\,nas}. \tag{1b}$$

Uwzględniając budowę wykresu wektorowego otrzymamy

$$I_w = \frac{I_{woi}}{U_N}\,\frac{f_N}{f}\,[\hat{U}_g + \hat{I}_g(jX_d + R_1)] + \Delta I_{w\,nas}; \tag{2a}$$

I_{woi} — idealny prąd wzbudzenia generatora przy biegu jałowym i napięciu znamionowym, jaki wystąpiłby przy prostoliniowej charakterystyce magnesowania generatora. Prąd ten jest mniejszy od prądu I_{wo} w generatorze nasyconym. W przypadku generatora o nienasyconym obwodzie magnetycznym zachodzi równość $I_{wo} = I_{woi}$.

W większości przypadków, z wyjątkiem generatorów bardzo małej mocy, oporność czynna uzwojenia stojana R_1 jest praktycznie pomijalna w porównaniu z reaktancją synchroniczną generatora X_d.

Jeżeli napięcie wewnętrzne generatora E mieści się na prostoliniowej części charakterystyki biegu jałowego powyżej kolana charakterystyki magnesowania, dodatkową składową prądu wzbudzenia $\Delta I_{w\,nas}$ można aproksymować przy pomocy liniowej funkcji napięcia wewnętrznego E.

$$\Delta I_{w\,nas} = \left(\frac{f_N}{f}E - U_b\right)\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} - 1\right)\frac{I_{woi}}{U_N}; \tag{3}$$

stałe współczynniki U_b, α, β zależą od kształtu charakterystyki biegu jałowego. W szczególnym przypadku obciążenia generatora indukcyjną mocą bierną, napięcie wewnętrzne E jest w przybliżeniu liniową funkcją prądu obciążenia generatora

$$E \approx I_g X_s + U_g \tag{4}$$

i w konsekwencji również dodatkowa składowa prądu wzbudzenia wyrażona jest liniową zależnością od prądu obciążenia przy stałym napięciu generatora. W szczególnym przypadku pomijalnego nasycenia magnetycznego generatora otrzymamy $\Delta I_{w\,nas} = 0$ i w konsekwencji wykres wektorowy można uprościć (rys. 2c) wprowadzając napięcie magneśnicy

E_m, do którego jest proporcjonalny przepływ wzbudzenia generatora. Przy pominięciu oporności czynnej stojana otrzymamy

$$I_w = \frac{f_N}{f}\frac{E_m}{U_n} I_{wo} = \frac{f_N}{f}\frac{I_{wo}}{U_N}|\hat{U}_g + j\hat{I}_g X_d|. \tag{2b}$$

Prąd wzbudzenia możemy zatem przedstawić przy pomocy dwóch składowych: zależnej od napięcia I_w (U_g) oraz zależnej od prądu obciążenia $I_w(I_g)$.

$$I_w = I_w(U_g) + I_w(I_g).$$

Układ kompoundacji wzbudzenia powinien w analogiczny sposób uzależniać prąd wzbudzenia od prądu i kąta obciążenia generatora.

Złożenie składowych prądu wzbudzenia dokonane jest w układzie kompoundacji przez sumowanie składowej proporcjonalnej do napięcia generatora i prądu obciążenia.

Układy fazowej kompoundacji wzbudzenia można podzielić na dwa podstawowe typy: układ równoległy i układ szeregowy.

3. UKŁAD RÓWNOLEGŁY FAZOWEJ KOMPOUNDACJI WZBUDZENIA

Na rys. 3a przedstawiono podstawowy układ równoległy kompoundacji fazowej. Prąd wzbudzenia przed wyprostowaniem w prostowniku trójfazowym dwudrogowym otrzymujemy w wyniku sumowania się prądu płynącego z zacisków generatora poprzez dławik trójfazowy i prądu płynącego z wtórnej strony transformatora prądowego. Obwód transformatora prądowego jest połączony równolegle z obwodem dławika, co jest widoczne szczególnie wyraźnie na schemacie jednokreskowym układu kompoundacji wzbudzenia, rys. 3b.

Możliwe są tu dwie modyfikacje podstawowego układu równoległego, które różnią się sposobem przyłączenia dławików do generatora. W modyfikacji *A* przedstawionej na rys. 3a i 3b dławik trójfazowy jest przyłączony do generatora za transformatorem prądowym (jego napięcie zasilania równe jest napięciu odbiornika), a w modyfikacji *B* przedstawionej na rys. 3c do zacisków generatora (jego napięcie zasilania równe jest napięciu generatora).

W tym ostatnim przypadku transformator prądowy jest zasilany tylko prądem odbiornika, a nie wypadkowym prądem obciążenia generatora będącego sumą prądu odbiornika I_o i prądu dławika I_D.

Prostownik w układzie kompoundacji transformuje obwód elektryczny prądu stałego, jaki przedstawia uzwojenie wzbudzenia generatora, w obwód trójfazowy prądu zmiennego. Oporność czynna uzwojenia

wzbudzenia R_w występuje w obwodzie prądu zmiennego jako oporność sprowadzona na stronę prądu zmiennego

$$R_{w\sim} = R_w \cdot \frac{1}{k_r}.$$

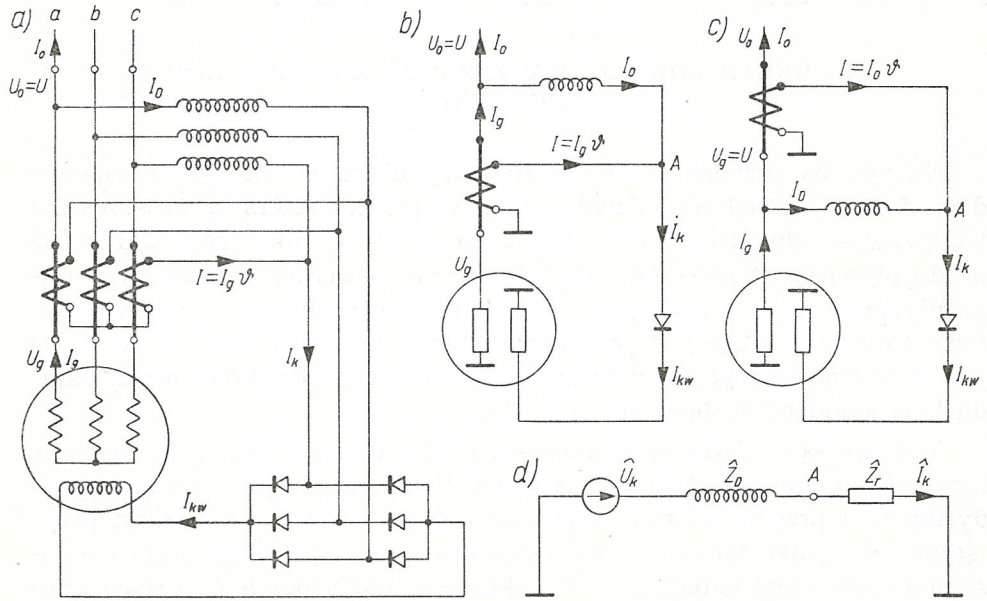
Podobnie transformujemy napięcie i prąd wzbudzenia na stronę prądu wzbudzenia

$$U_{w\sim} = U_w \cdot \frac{1}{k_u},$$

$$I_{w\sim} = I_w \cdot \frac{1}{k_i}.$$

Wartości współczynników k_r, k_u, k_i wyprowadzone są w rozdz. 9.

Komutacja prostownika powoduje odkształcenie prądu zasilania prostownika. Jeżeli ograniczymy obliczenie przebiegów prądowych do pod-



Rys. 3. a) Układ równoległy fazowej kompoundacji wzbudzenia b), c) Jednokreskowy schemat ideowy układu równoległego fazowej kompoundacji wzbudzenia (*a* — modyfikacja *A*; *b* — modyfikacja *B*) d) Jednofazowy obwód układu kompoundacji

stawowej harmonicznej prądu zasilania prostownika, okaże się, że prostownik wprowadza do obwodu prądu zmiennego również pewną oporność bierną X_p.

Prąd wyjściowy układu kompoundacji I_{kw} płynący w impedancji zastępczej (rys. 3d) obwodu prostowniczego $Z_r = R_r + jX_p$ można przedstawić w postaci

$$\hat{I}_k = \frac{\hat{U}_k}{\hat{Z}_k}, \tag{5}$$

przy czym

$$\hat{U}_k = \hat{U} + \hat{I}\hat{Z}_D = \hat{U} + \hat{I}(R_D + jX_D),$$

$$\hat{Z}_k = \hat{Z}_r + \hat{Z}_D,$$

$$\hat{Z}_r = \frac{1}{k_r}(R_w + R_p) + jX_p.$$

Napięcie zastępcze U_k jest równe zgodnie z zasadą Thevenina napięciu stanu jałowego w węźle "A" przy $Z_r \to \infty$. Napięcie U_k nazywać będziemy napięciem fazowej kompoundacji wzbudzenia. Napięcie U_k posiada składową „napięciową" U i składową „prądową" IZ_D.

Jeżeli pominiemy małą oporność czynną uzwojeń dławika R_D w porównaniu do jego oporności biernej $X_D = X$, otrzymamy

$$\hat{I}_k = \frac{\hat{U} + j\hat{I}X}{\hat{Z}_k}. \tag{6}$$

Prąd dławika otrzymamy z równania

$$\hat{I}_D = \frac{\hat{U} - \hat{I}\hat{Z}_r}{\hat{Z}_k}. \tag{7}$$

Przyjmując idealny transformator prądowy o przekładni ϑ otrzymamy

$$\hat{I} = \hat{I}_g \vartheta.$$

Napięcie U równe jest napięciu na zaciskach odbiornika U_o

$$\hat{I}_k = \frac{\hat{U}_o + j\hat{I}_g \vartheta X}{\hat{Z}_k},$$

oraz wyprostowany prąd wyjściowy układu kompoundacji

$$I_{kw} = |\hat{I}_k| k_i \tag{9}$$

i napięcie wyjściowe układu kompoundacji

$$U_{kw} = |\hat{I}_\kappa R_{w\sim}| k_u. \tag{10}$$

Porównując (8) i (9) z równaniem (2 b) określającym prąd wzbudzenia maszyny synchronicznej widzimy, że przy założeniu stałości częstotliwości $f = f_N$ oraz przy pominięciu napięcia na pierwotnej stronie transformatora prądowego, prąd wyjściowy układu kompoundacji przy właściwie dobranych parametrach odwzorowuje założenie geometrycz-

ne składowych zapotrzebowanego prądu wzbudzenia maszyny o magnesnicy cylindrycznej w stanie nienasyconym. Przy modyfikacji A zachodzą zatem następujące zależności dla prądowej i napięciowej składowej napięcia kompoundacji

$$U = U_o \approx U_g,$$
$$I = I_g \vartheta. \tag{11}$$

Prąd wyjściowy układu kompoundacji, będący równocześnie prądem wzbudzenia generatora, złożony jest z dwóch składowych proporcjonalnych do napięcia i do prądu obciążenia generatora. Składową proporcjonalną do napięcia nazywamy krótko składową napięciową, składową proporcjonalną do prądu obciążenia generatora — składową prądową.

Z warunku stabilizacji otrzymamy następujące proporcje

$$\vartheta = \frac{X_d}{X},$$
$$k_i \frac{U_o}{Z_k} = I_w(U_g), \tag{12}$$
$$k_i \frac{I_g \vartheta X}{Z_k} = I_w(I_g);$$

przyjmując $U_o = U_N$, $I_g = I_{gN}$ przy $\cos\varphi = 0_{ind}$ otrzymamy

$$\frac{U_N}{Z_k} = I_{wo\sim} = I_{wo} \frac{1}{k_i},$$

stąd

$$X = \sqrt{\left(\frac{U_N}{I_{wo\sim}} - R_r\right)^2} - X_p \tag{13}$$

oraz

$$\vartheta = (I_{wL} - I_{wo}) \frac{Z_k}{k_i I_{gN} X}.$$

W przypadku maszyny nienasyconej zachodzi zależność

$$I_{wL} - I_{wo} = I_{wo} X_d, \tag{14a}$$

gdzie I_{wL} — prąd wzbudzenia przy obciążeniu twornika prądem znamionowym, przy znamionowym napięciu i częstotliwości i współczynniku mocy $\cos\varphi = 0_{ind}$, X_d — reaktancja synchroniczna w jednostkach względnych.

W przypadku maszyny o nasyconym obwodzie magnetycznym, zakładamy, że obliczenie parametrów układu fazowej kompoundacji wzbudzenia przeprowadzimy przy założeniu dokładnej stabilizacji napięcia w dwóch punktach charakterystyki zewnętrznej: przy biegu jałowym i przy obciążeniu znamionowym prądem biernym.

W obliczeniach posłużymy się w tym celu zastępczą fikcyjną reaktancją $\underline{X}_{de}$, którą otrzymamy z uogólnienia równania (14a)

$$X_d = \frac{I_{wL} - I_{wo}}{I_{wo}}. \tag{14b}$$

Reaktancję X_p przy obliczeniach przybliżonych można pominąć jako małą w porównaniu z X. Przy takim założeniu równania (13) określają jednoznacznie wartość przekładni transformatora i reaktancji dławika. Wykazaliśmy więc, że układ równoległy kompoundacji fazowej stwarza możliwość uzyskania teoretycznie dokładnej stabilizacji napięcia generatora dla dowolnych zmian prądu i kąta obciążenia.

W przypadku modyfikacji B układu równoległego kompoundacji fazowej, napięcie zasilania dławików jest równe napięciu generatora.

$$I_k = \frac{\hat{U}_g + jI_o X\vartheta}{\hat{Z}_k}. \tag{15}$$

Przy modyfikacji B mamy zatem

$$U = U_g$$
$$I = I_o\vartheta \approx I_g\vartheta. \tag{16}$$

Przy zaniedbaniu wpływu prądu dławika na wypadkowy prąd obciążenia generatora dobór parametrów układu kompoundacji określony jest również równaniami (13). Można wykazać [8], że zarówno przy modyfikacji A, jak i B, można uzyskać ścisłą zgodność złożenia geometrycznego składowych prądu kompoundacji i zapotrzebowanego prądu wzbudzenia maszyny nienasyconej.

Dławik trójfazowy o stałej reaktancji X wykonany jest jako dławik ze szczeliną, w którym przez zmianę szczeliny można nastawić pożądaną wartość reaktancji.

Pożądany poziom napięcia generatora przy biegu jałowym nastawiamy przez dobór wartości reaktancji dławików, natomiast przez dobór przekładni pożądaną stabilizację tego napięcia przy zmianach prądu i kąta obciążenia. W rozwiązaniach pominięto oporność czynną uzwojeń dławika, która jest mała w porównaniu z reaktancją indukcyjną dławika.

Prawidłowość złożenia składowych prądu kompoundacji otrzymujemy ściśle tylko przy zachowaniu proporcji $\frac{X_D}{R_D} = \frac{X_d}{R_1}$ w dławiku i w generatorze. Należy nadmienić, że nadmiernie duża oporność czynna dławika powoduje zakłócenie prawidłowości złożenia składowej napięciowej i prądowej napięcia kompoundacji, w wyniku czego rośnie błąd stabilizacji napięcia.

W przypadku gdy rektancja dławika X majoryzuje oporność czynną obwodu kompoundacji, zmiany oporności czynnej na skutek nagrzewa-

nia się uzwojeń i prostownika wpływają w zmniejszonym stopniu na stałość napięcia stabilizowanego. Dzięki temu zostaje zmniejszona wrażliwość generatora na uboczną wielkość zakłócającą: temperaturę uzwojenia wzbudzenia i prostownika. Przyjmując duży stosunek $\frac{X}{R_r}$ w układzie kompoundacji fazowej zmniejszamy również wrażliwość układu stabilizacji na drugą uboczną wielkość zakłócającą: wpływ zmian częstotliwości na dokładność stabilizacji.

Uwzględniając wpływ częstotliwości na reaktancje układu kompoundacji fazowej otrzymamy

$$\hat{I}_k = \frac{\hat{U} + j\hat{I} X_N \frac{f}{f_N}}{j X_N \frac{f}{f_N}\left(1 - j\frac{R_r}{X_N}\frac{f_N}{f}\right)}. \tag{17}$$

Przez X_N oznaczono reaktancję X przy częstotliwości znamionowej f_N.

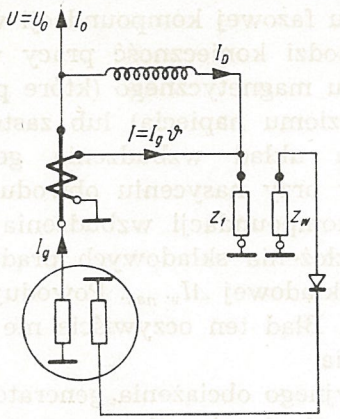
Porównując z równaniem (2b) widzimy, że w granicy przy $\frac{R_r}{X_N} \to 0$ otrzymujemy dla prądu kompoundacji i zapotrzebowanego prądu wzbudzenia tę samą zależność od częstotliwości. Na skutek niepomijalnej wartości oporności czynnej R_r napięcie generatora wzbudzenia zmniejsza się przy obniżce częstotliwości.

Jeżeli punkt pracy generatora mieści się na nienasyconej części charakterystyki magnesowania, osłabienie działania układu kompoundacji na skutek zmniejszenia częstotliwości prowadzi do utraty samowzbudzenia. Jeżeli punkt pracy generatora położony jest na lekko zakrzywionej części charakterystyki magnesowania, zmniejszenie częstotliwości powoduje przesunięcie punktu pracy w zakres obniżonego napięcia generatora.

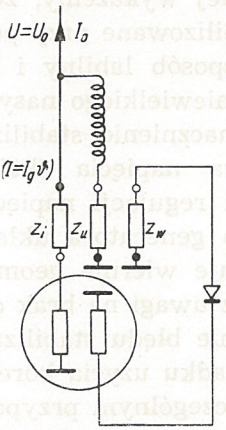
Zmianę stosunku $\frac{R_r}{X_N}$ możemy otrzymać przez przewinięcie uzwojenia wzbudzenia na większą lub mniejszą liczbę zwojów przy zachowaniu stałości przepływu wzbudzenia. Jest to przeważnie kłopotliwe. Możemy obejść się bez przewijania wprowadzając dodatkowy transformator dopasowujący, który transformuje parametry uzwojenia wzbudzenia do pożądanej wartości (rys. 4). Oczywiście odbywa się to kosztem powiększenia rozmiarów, ciężaru i kosztu urządzenia kompoundacji o dodatkowy transformator. Jeżeli dodatkowy transformator spełnia jednocześnie zadanie transformatora prądowego (rys. 5), otrzymujemy pewne zmniejszenie wymiarów w porównaniu do układu na rys. 4. Transformator jest w takim przypadku transformatorem trójuzwojeniowym, spełniającym zadanie przekładnika prądowego i transformatora dopasowującego. Nazwiemy go trójuzwojeniowym transformatorem kompoundacji. Zarówno układ na rys. 4, jak i 5 sprowadza się w ostateczności

do układu równoległego kompoundacji fazowej, który w swojej najprostszej postaci przedstawiony został na rys. 3a.

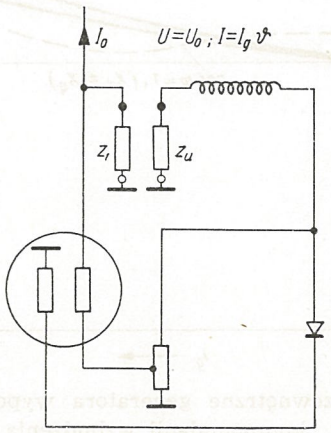
Zamiast transformatora dopasowującego przeznaczonego do transformacji parametrów uzwojenia wzbudzenia generatora można zastosować transformator napięciowy obniżający lub podwyższający napięcie gene-



Rys. 4. Równoległy układ fazowej kompoundacji wzbudzenia z transformatorem dopasowującym



Rys. 5. Równoległy układ fazowej kompoundacji wzbudzenia z trójuzwojeniowym transformatorem kompoundacji



Rys. 6. Równoległy układ fazowej kompoundacji wzbudzenia z transformatorem napięciowym i autotransformatorem prądowym

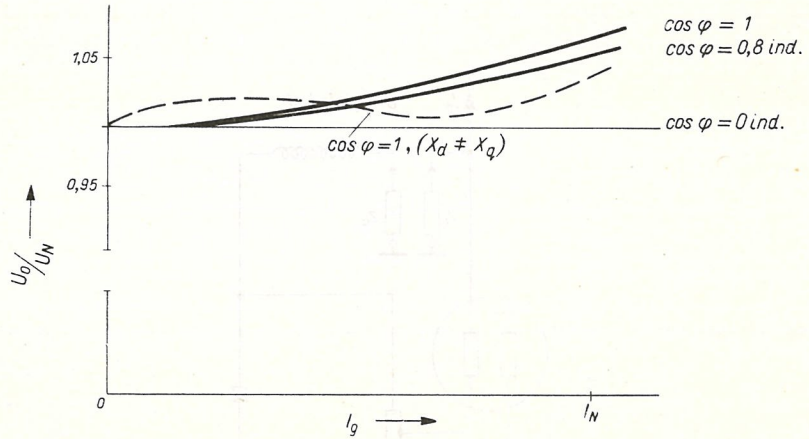
ratora rys. 6. W tym przypadku zachodzi możliwość zmniejszenia wymiarów transformatora prądowego lub napięciowego stosując połączenie autotransformatorowe. Na rys. 6 wprowadzono autotransformator prą-

dowy przeniesiony ponadto do punktu zerowego generatora, w celu zmniejszenia naprężenia izolacji głównej układu kompoundacji, połączonego galwanicznie z uzwojeniami generatora.

Prawidłowość złożenia składowych prądu wzbudzenia generatora i prądu kompoundacji występuje niestety wyłącznie w stanie nienasyconym generatora z magneśnicą cylindryczną.

Później wykażemy, że napięcie generatora w stanie nienasyconym jest stabilizowane przy pomocy układu fazowej kompoundacji wzbudzenia w sposób labilny i dlatego zachodzi konieczność pracy w stanie choćby niewielkiego nasycenia obwodu magnetycznego (które powoduje ujednoznacznienie stabilizowanego poziomu napięcia) lub zastosowania korektora napięcia (który zamienia układ wzbudzenia generatora w układ regulacji napięcia). Niestety przy nasyceniu obwodu magnetycznego generatora układ fazowej kompoundacji wzbudzenia nie odwzorowuje wiernie geometrycznego złożenia składowych prądu wzbudzenia, z uwagi na brak dodatkowej składowej $\Delta I_{w\ nas}$. Powoduje to powiększenie błędu stabilizacji napięcia. Błąd ten oczywiście nie wystąpi w przypadku użycia korektora napięcia.

W szczególnym przypadku indukcyjnego obciążenia generatora, przy którym dodatkowa składowa prądu wzbudzenia $\Delta I_{w\ nas}$ w generatorze silnie nasyconym jest liniową funkcją prądu obciążenia, zachodzi możliwość uzyskania dokładnej stabilizacji napięcia za pomocą powiększe-



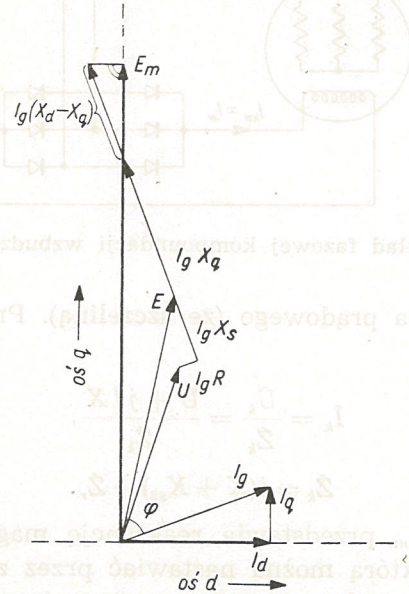
Rys. 7. Charakterystyki zewnętrzne generatora wyposażonego w układ fazowej kompoundacji wzbudzenia

nia udziału składowej prądowej w wypadkowym przepływie wzbudzenia. Na rys. 7 przedstawiono charakterystyki zewnętrzne generatora wyposażonego w układ fazowej kompoundacji wzbudzenia. Przy cos $\varphi = 0_{ind}$ uzyskano praktycznie dokładną stabilizację. Niestety przy obciążeniu o charakterze czynnym lub czynno-indukcyjnym otrzymujemy

wznoszącą charakterystykę zewnętrzną napięcia w zakresie normalnych prądów obciążenia. Przy takim obciążeniu maleje wartość zapotrzebowanej dodatkowej składowej $\Delta I_{w\ nas}$, ponieważ E jest mniejsze niż przy obciążeniu indukcyjnym.

W przypadku generatora o jawnobiegunowej budowie magneśnicy (stosowanej powszechnie jako budowy najtańszej w przypadku generatorów małej mocy i generatorów wielnobieżnych) występuje niesymetria przewodności magnetycznej w osi poprzecznej i podłużnej magneśnicy ($X_d > X_q$). Oczywiście budowa wykresu wektorowego maszyny synchronicznej z jawnymi biegunami (rys. 8) jest odmienna niż na rys. 2. Jedynie w przypadku obciążenia czysto biernego wykresy pokrywają się. Układ fazowej kompoundacji wzbudzenia nie jest przystosowany do wiernego odwzorowania geometrycznego złożenia składowych prądu wzbudzenia generatora o magneśnicy jawnobiegunowej nawet w stanie nienasyconym.

Jeżeli generator z magneśnicą jawnobiegunową wyposażymy w układ fazowej kompoundacji wzbudzenia dostrojony do dokładnej stabilizacji napięcia przy obciążeniu indukcyjnym, otrzymamy przy

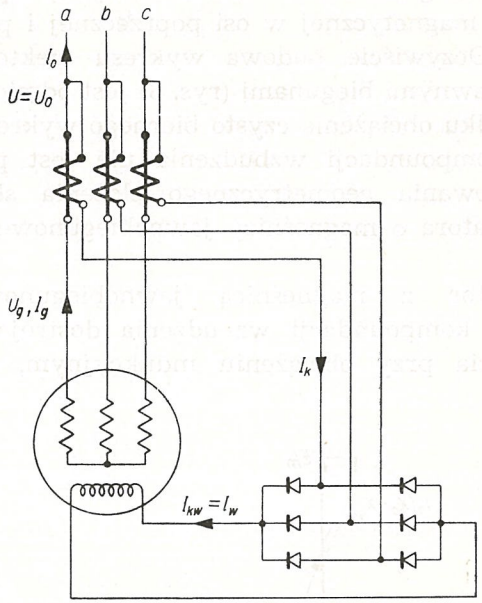


Rys. 8. Wykres wektorowy jawnobiegunowej maszyny synchronicznej w stanie nienasyconym

obciążeniu o charakterze czynnym lub czynno-indukcyjnym wznoszącą charakterystykę zewnętrzną. Efekt nasycenia i jawnobiegunowości maszyny synchronicznej sumuje się, powodując błędy stabilizacji tym większe, im większy jest stosunek $\frac{X_d}{X_q}$ oraz im większy jest stan nasycenia magnetycznego.

4. UKŁAD SZEREGOWY FAZOWEJ KOMPOUNDACJI WZBUDZENIA

Na rys. 9 przedstawiono podstawowy układ szeregowy fazowej kompoundacji wzbudzenia. Napięcie kompoundacji U_k otrzymujemy w wyniku geometrycznego sumowania napięcia generatora i napięcia wtórnej



Rys. 9. Szeregowy układ fazowej kompoundacji wzbudzenia (modyfikacja *A*)

strony transformatora prądowego (ze szczeliną). Prąd kompoundacji I_k otrzymamy z relacji

$$\hat{I}_k = \frac{\hat{U}_k}{\hat{Z}_k} = \frac{\hat{U} + j\hat{I}X}{\hat{Z}_k}, \qquad (18)$$

$$\hat{Z}_k = j(X + X_{s2}) + \hat{Z}_r.$$

Reaktacja $X = X_m$ przedstawia reaktancję magnesowania transformatora prądowego, którą można nastawiać przez zmianę szczeliny. Na rys. 11 przedstawiono schemat zastępczy transformatora prądowego po sprowadzeniu jego parametrów na stronę uzwojenia wtórnego.

Reaktancja X_{s2} przedstawia reaktancję rozproszenia wtórnej strony transformatora prądowego, którą można praktycznie zawsze pominąć w porównaniu z dominującą reaktancją X.

W równaniach pominięto małą oporność czynną uzwojeń transformatora prądowego. W przeciwieństwie do układu równoległego powiększenie oporności czynnej wtórnego uzwojenia transformatora nie powo-

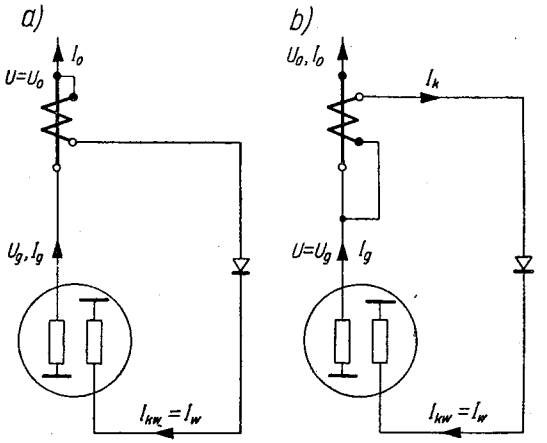
duje zakłócenia prawidłowości złożenia składowych prądu kompoundacji. Wprowadziwszy przekładnię zwojową transformatora ϑ otrzymamy

$$I = I_g \vartheta,$$

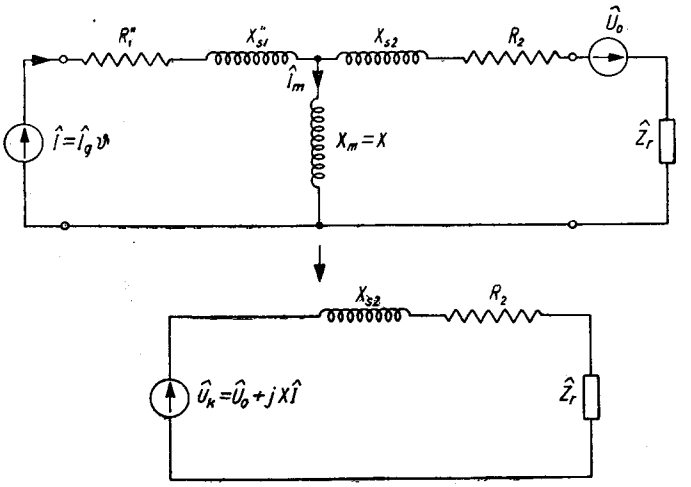
$$U = U_o,$$

analogicznie jak w układzie równoległym przy modyfikacji A.

W konsekwencji reaktancję X oraz przekładnię transformatora obliczamy przy pomocy równań (13) podobnie jak w przypadku układu równoległego.



Rys. 10. Jednokreskowy schemat ideowy szeregowego układu fazowej kompoundacji wzbudzenia
a) Modyfikacja A, b) Modyfikacja B

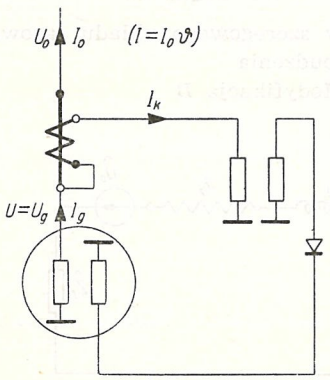


Rys. 11. Schemat zastępczy transformatora prądowego w szeregowym układzie fazowej kompoundacji wzbudzenia

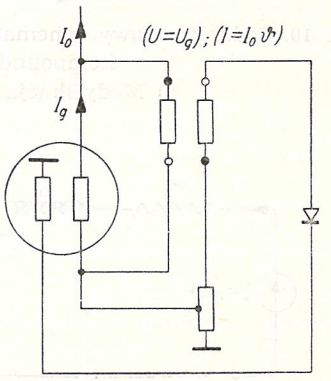
W układzie szeregowym istnieją również dwie modyfikacje różniące się sposobem przyłączenia napięcia zasilania obwodu kompoundacji. W modyfikacji A na rys. 9 i w jego odpowiedniku na schemacie jednokreskowym, rys. 10a, wykorzystano napięcie odbiornika $U_o = U$ do zasilania układu kompoundacji, a w modyfikacji B na rys. 10b napięcia twornika generatora $U = U_g$.

Reaktancja magnesowania transformatora X w układzie szeregowym jest odpowiednikiem reaktancji dławika w układzie równoległym. Dobierając odpowiednio dużą wartość stosunku reaktancji do oporności czynnej obwodu kompoundacji możemy zmniejszyć wrażliwość układu kompoundacji na wpływ temperatury uzwojenia wzbudzenia i prostownika oraz na wpływ częstotliwości. Wykażemy później, że powiększenie stosunku reaktancji do oporności czynnej łączy się z powiększeniem mocy pozornej pobieranej przez układ kompoundacji oraz z powiększeniem mocy typowej uzwojeń transformatora.

Podobnie jak w podstawowym układzie równoległym, zmiana stosunku $\frac{R_r}{X}$ jest możliwa tylko przez przewinięcie uzwojenia wzbudzenia na inną liczbę zwojów przy zachowaniu stałości przepływu wzbudzenia. Za pomocą transformatora dopasowującego możemy transformować parametry uzwojenia wzbudzenia (rys. 12) bez przewijania uzwojenia wzbudzenia. Zamiast transformatora dopasowującego można wpro-



Rys. 12. Szeregowy układ fazowej kompoundacji wzbudzenia z transformatorem dopasowującym



Rys. 13. Szeregowy układ fazowej kompoundacji wzbudzenia z transformatorem napięciowym i autotransformatorem prądowym

wadzić transformator napięciowy (rys. 13), w którym za pomocą doboru przekładni zwojowej możemy dopasować układ kompoundacji do parametrów uzwojenia wzbudzenia generatora. Na rys. 13 uwzględniono równocześnie oszczędnościowy układ autotransformatora prądowego, który przyłączony jest do punktu zerowego generatora.

W przypadku idealnego transformatora dopasowującego, oba układy kompoundacji uwidocznione na rys. 12 i 13 można sprowadzić do układu podstawowego, który zresztą jest jednocześnie układem o najmniejszej liczbie elementów (bez transformatorów dodatkowych).

5. PORÓWNANIE MOCY TYPOWYCH UZWOJEŃ ELEMENTÓW UKŁADU FAZOWEJ KOMPOUNDACJI WZBUDZENIA

Porównanie mocy typowych uzwojeń elementów układu równoległego i szeregowego fazowej kompoundacji wzbudzenia przeprowadzimy przy założeniu układu podstawowego przedstawionego na rys. 3 oraz 10. Przez moc typową uzwojeń rozumieć będziemy moce pozorne uzwojeń transformatora i dławika w stanie maksymalnego obciążenia. Założymy, że generator przeznaczony jest do pracy przy znamionowym prądzie stojana i współczynniku mocy zmieniającym się od $\cos \varphi = 1$ do $\cos \varphi = 0_{ind}$. Uwzględnimy w obliczeniach tylko oporność czynną obwodu uzwojenia wzbudzenia $R_r = R_{W\sim} = R$, wniesioną poprzez prostownik do obwodu prądu zmiennego układu kompoundacji. Pominiemy oporność czynną i bierną prostownika oraz oporność czynną uzwojeń transformatora i dławika. W celu uproszczenia analizy pominiemy również wpływ spadku napięcia po pierwotnej stronie transformatora prądowego na napięcie odbiornika. Założymy ponadto generator, dławik i transformator o nienasyconym obwodzie magnetycznym.

Przy pominięciu nasycenia, obliczenie parametrów układu kompoundacji nie uwzględnia pożądanej krotności prądu zwarcia ustalonego. Prąd zwarcia jest bowiem ujednoznaczniony przez zakrzywienie charakterystyk magnesowania generatora, dławika i transformatora.

Wyprowadzone niżej zależności można wykorzystać również w przypadku nasyconego obwodu magnetycznego generatora kładąc w miejsce reaktancji synchronicznej X_d wartość X_{de} zdefiniowaną uprzednio w równaniu 14b. Przy nasyconym obwodzie magnetycznym otrzymujemy tylko dwupunktową stabilizację napięcia na zaciskach układu: przy biegu jałowym i przy obciążeniu generatora indukcyjnym prądem znamionowym.

5.1. Układ równoległy

Jako moc typową uzwojeń transformatora prądowego definiujemy maksymalną moc pozorną obu uzwojeń transformatora. Maksymalna moc pozorna występuje przy obciążeniu indukcyjnym generatora. W celu uzyskania globalnej mocy typowej całego układu kompoundacji obliczymy moce typowe uzwojeń dławika i transformatora. Z uwagi na to, że transformator posiada dwa uzwojenia (pierwotne i wtórne), moc ty-

powa uzwojeń transformatora równa jest, zgodnie z wyżej podaną definicją, dwukrotnej mocy pozornej transformatora. Od mocy typowej uzwojeń zależą wymiary tych elementów.

Moce typowe wyrazimy w jednostkach względnych odnosząc je do mocy wzbudzenia generatora przy biegu jałowym P_{wo}.

$$\underline{S}_T = \frac{S_T}{P_{wo}} = \frac{6}{k_i}(1+\underline{X}_d)\frac{I_{wo} I_{gN} R \vartheta}{P_{wo}} = 2\underline{X}_d(1+\underline{X}_d)\sqrt{1+\left(\frac{R}{X}\right)^2} \quad (19a)$$

Wprowadzimy również względną wartość napięcia wzbudzenia przy biegu jałowym generatora $\underline{U}_{wo\sim}$ odniesioną do składowej U napięcia kompoundacji. W podstawowym układzie kompoundacji znamionowe napięcie U_N równe jest w przybliżeniu znamionowemu napięciu generatora U_{gN}.

$$\underline{U}_{wo\sim} = \frac{U_{wo}}{k_u U_{gN}}.$$

Po rozpatrzeniu stanu jałowego generatora otrzymamy

$$\underline{U}_{wo\sim} = \frac{R}{\sqrt{R^2+X^2}}. \quad (19b)$$

Po wstawieniu (19b) do (19a) otrzymamy

$$\underline{S}_T = 2\underline{X}_d(1+\underline{X}_d)\frac{1}{\sqrt{1-\underline{U}^2_{wo\sim}}}. \quad (19c)$$

Również możemy przedstawić przekładnię transformatora prądowego $\vartheta = \frac{X_d}{X}$ przy pomocy mocy wzbudzenia przy biegu jałowym odniesionej do znamionowej mocy pozornej generatora oraz względnego napięcia wzbudzenia $\underline{U}_{wo\sim}$

$$\vartheta = \frac{\underline{X}_d}{\underline{U}_{wo\sim}\sqrt{1-\underline{U}^2_{wo\sim}}}\frac{P_{wo}}{S_{gN}}.$$

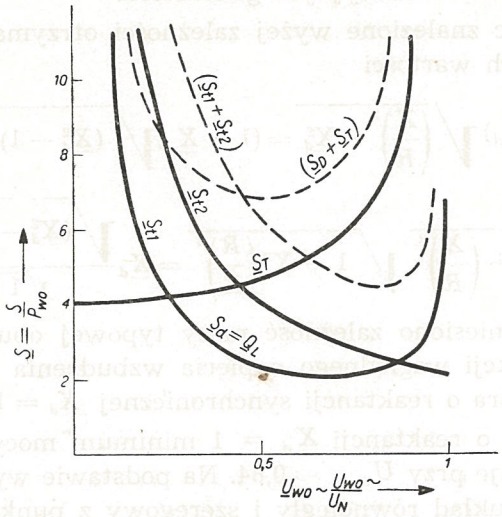
Maksymalna moc pozorna dławika występuje przy obciążeniu indukcyjnym generatora. Otrzymamy:

$$S_D = 3\left|\frac{\hat{U}_{gN} - \hat{I}_{gN}\vartheta R}{jX+R}\right|^2 X. \quad (20a)$$

Wprowadziwszy względną moc typową uzwojenia otrzymamy po przekształceniu

$$\underline{S}_D = \frac{X}{R} + \underline{X}_d^2\frac{R}{X} = \frac{(\underline{X}_d^2-1)\underline{U}_{wo\sim} + \frac{1}{\underline{U}_{wo\sim}}}{\sqrt{1-\underline{U}^2_{wo\sim}}}. \quad (20b)$$

Na rys. 14 naniesiono zależność mocy typowej uzwojeń transformatora i dławika w funkcji względnego napięcia wzbudzenia przy biegu jałowym generatora. Przyjęto względną reaktancję synchroniczną $\underline{X}_d = 1$.



Rys. 14. Wykres mocy typowych uzwojeń elementów układu fazowej kompoundacji wzbudzenia

W układzie równoległym: S_T — moc typowa uzwojeń transformatora prądowego, $S_D = Q_L$ — moc typowa uzwojenia dławika, równa maksymalnej mocy biernej pobieranej przez układ kompoundacji wzbudzenia.

W układzie szeregowym: S_{t1}, S_{t2} — moc typowa uzwojenia pierwotnego i wtórnego transformatora prądowego, Q_L — maksymalna moc bierna pobierana przez układ kompoundacji wzbudzenia.

Minimum mocy typowej $\underline{S}_{D\,min} = 2\ \underline{P}_{wo}$ dla generatora o reaktancji synchronicznej $\underline{X}_d = 1$ występuje przy $\underline{U}_{wo\sim} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Minimum sumarycznej mocy $(\underline{S}_T + \underline{S})_{min} = \frac{12}{\sqrt{3}}$ wypada przy $\underline{U}_{wo\sim} = 0{,}5$.

5.2. Układ szeregowy

Moc pozorną uzwojenia wtórnego transformatora otrzymamy z równania

$$S_{t2} = 3 \left| \frac{\hat{U} - \hat{I} R}{R + jX} jX \right| \cdot \left| \frac{\hat{U} + jX\hat{I}}{R + jX} \right|.$$

Analogicznie moc pozorna uzwojenia pierwotnego

$$S_{t1} = 3 I_m I X = 3 \left| \frac{\hat{U} - \hat{I} R}{R + jX} X \right| I .$$

Maksymalna moc pozorna określająca moc typową obu uzwojeń występuje przy obciążeniu indukcyjnym generatora.

Przekształcając znalezione wyżej zależności otrzymamy po wprowadzeniu względnych wartości

$$\underline{S}_{t2} = (1 + \underline{X}_d) \sqrt{\left(\frac{X}{R}\right)^2 + \underline{X}_d^2} = (1 + \underline{X}_d) \sqrt{(\underline{X}_d^2 - 1) + \frac{1}{\underline{U}_{wo\sim}^2}},$$

$$\underline{S}_{t1} = \underline{X}_d \sqrt{1 + \left(\frac{X}{R}\right)^2} \sqrt{1 + \underline{X}_d^2 \left(\frac{R}{X}\right)^2} = \underline{X}_d \frac{\sqrt{(\underline{X}_d^2 - 1) + \frac{1}{\underline{U}_{wo\sim}^2}}}{\sqrt{1 - \underline{U}_{wo}^2}}. \tag{21}$$

Na rys. 14 naniesiono zależność mocy typowej obu uzwojeń transformatora w funkcji względnego napięcia wzbudzenia przy biegu jałowym dla generatora o reaktancji synchronicznej $\underline{X}_d = 1$.

W generatorze o reaktancji $\underline{X}_d = 1$ minimum mocy typowej (około 4,56 $\underline{P}_{wo}$) występuje przy $\underline{U}_{wo\sim} \approx 0{,}84$. Na podstawie wykresu na rys. 14 można porównać układ równoległy i szeregowy z punktu widzenia globalnej mocy typowej uzwojeń, od których zależą wymiary użytych objektów. Przy $\underline{U}_{wo\sim} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ moce typowe uzwojeń elementów układu szeregowego i równoległego są jednakowe. W zakresie $0 < \underline{U}_{wo\sim} < \frac{1}{\sqrt{5}}$ moce typowe uzwojeń wypadają mniejsze w układzie równoległym.

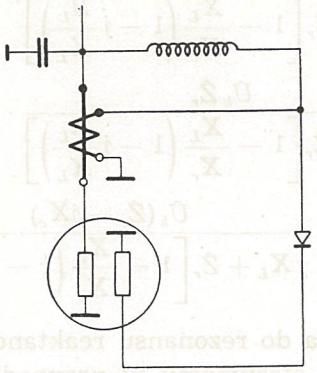
Przedział napięć wzbudzenia $\underline{U}_{wo\sim} < \frac{1}{\sqrt{5}}$ odpowiadający stosunkowi $\frac{X}{R} > 2$ bywa częściej wykorzystywany w praktyce z uwagi:

a) na zmniejszenie wpływu zależności dokładności stabilizacji od temperatury uzwojenia wzbudzenia i zmian częstotliwości,

b) na zmniejszenie inercji elektromagnetycznej generatora przy powiększonej oporności pozornej kompoundacji wprowadzonej do obwodu uzwojenia wzbudzenia poprzez prostownik.

Moc typowa uzwojenia dławika jest jednocześnie równa maksymalnej mocy biernej Q_L pobieranej z generatora przez układ fazowej kompoundacji wzbudzenia zarówno w układzie szeregowym, jak i równoległym. Pobór mocy układu kompoundacji musi być utrzymany w realnych granicach, ponieważ obciąża generator mocą pozorną. Z tego powodu wykresy przedstawione na rys. 13 tracą sens praktyczny dla bardzo dużych wartości Q_L.

Moc bierną pobieraną przez układ kompoundacji możemy zmniejszyć za pomocą baterii kondensatorów przyłączonej do zacisków wyjściowych zespołu, jak to przedstawiono na rys. 15.

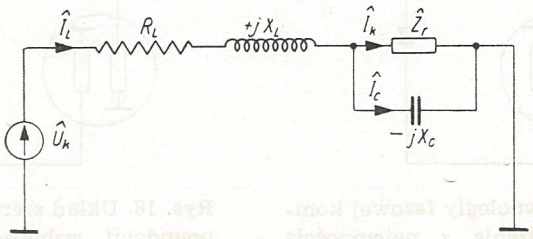


Rys. 15. Układ fazowej kompoundacji wzbudzenia z kompensacyjną baterią kondensatorów

6. WYMUSZENIE PRĄDU WZBUDZENIA

W układzie kompoundacji wzbudzenia występuje niepożądany wpływ temperatury uzwojenia wzbudzenia na zmianę jego oporności czynnej i pośrednio na zmianę prądu wzbudzenia. Wpływ ten ulega zmniejszeniu przy majoryzacji reaktancji X w obwodzie kompoundacji kosztem powiększenia mocy biernej pobieranej przez układ kompoundacji.

W granicznym, lecz z uwagi na moc pobieraną przez układ kompoundacji nierealnym przypadku, przy rosnącym do nieskończoności stosunku $\frac{X}{R}$ wpływ zmian oporności czynnej na zmianę prądu wzbudzenia nie występuje. Mówimy wtedy, że prąd wzbudzenia jest wymuszony przez układ kompoundacji. Źródło zasilania obwodu wzbudzenia można uważać wtedy za siłę prądomotoryczną. Istnieje inny znacznie ekonomiczniejszy sposób wymuszenia prądu w obwodzie wzbudzenia, który polega na wykorzystaniu zjawiska rezonansu szeregowego [1]. Weźmy pod uwagę układ na rys. 16 utworzony z reaktancji pojemnościowej X_c, indukc-



Rys. 16. Schemat ideowy układu rezonansu szeregowego

cyjnej X_L i dowolnej impedancji obciążenia Z_r. Prądy w poszczególnych gałęziach układu

$$\hat{I}_k = \frac{\hat{U}_k}{jX_L + \hat{Z}_r\left[1 - \frac{X_L}{X_c}\left(1 - j\frac{R_L}{X_L}\right)\right]},$$

$$\hat{I}_c = \frac{\hat{U}_k \hat{Z}_r}{jX_L + \hat{Z}_r\left[1 - \frac{X_L}{X_c}\left(1 - j\frac{R_L}{X_L}\right)\right]} \cdot \frac{j}{X_c}, \tag{22a}$$

$$\hat{I}_L = \hat{I}_c + \hat{I}_k = \frac{\hat{U}_k(\hat{Z}_r - jX_c)}{jX_L + \hat{Z}_r\left[1 - \frac{X_L}{X_c}\left(1 - j\frac{R_L}{X_L}\right)\right]} \cdot \frac{j}{X_c}.$$

W przypadku dostrojenia do rezonansu reaktancji indukcyjnej i pojemnościowej $X_L = X_c = X$ otrzymamy w przypadku pominięcia znikomej oporności czynnej R_L

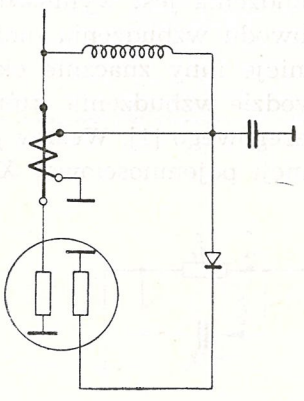
$$\hat{I}_k = \frac{\hat{U}_k}{jX}, \qquad \hat{I}_c = \frac{\hat{U}_k \hat{Z}_r}{X^2}, \qquad \hat{I}_L = \frac{\hat{U}_k(\hat{Z}_r - jX_c)}{X^2}. \tag{22b}$$

Prąd I_k nie zależy od wartości impedancji obciążenia. Moc bierna przypadająca na reaktancję pojemnościową wynosi

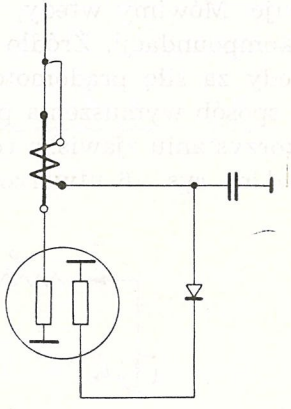
$$Q_c = I_c I_k Z_r.$$

Zjawisko rezonansu szeregowego możemy wykorzystać zarówno w układzie równoległym, jak i szeregowym fazowej kompoundacji wzbudzenia.

Na rys. 17 przedstawiono układ równoległy z trójfazową baterią kondensatorów, a na rys. 18 analogiczny układ szeregowy.



Rys. 17. Układ równoległy fazowej kompoundacji wzbudzenia z pojemnością rezonansową



Rys. 18. Układ szeregowy fazowej kompoundacji wzbudzenia z pojemnością rezonansową

Przy pominięciu oporności czynnej dławika w równoległym układzie kompoundacji i oporności uzwojeń wtórnej strony transformatora prądowego w układzie szeregowym, otrzymamy dla obydwu podstawowych układów takie samo napięcie kompoundacji jak w układzie bez pojemności rezonansowej

$$\hat{U}_k = \hat{U} + j\hat{I}X.$$

Prąd I_L obliczony w równaniu (22a) jest równy prądowi strony wtórnej przekładnika prądowego w układzie szeregowym.

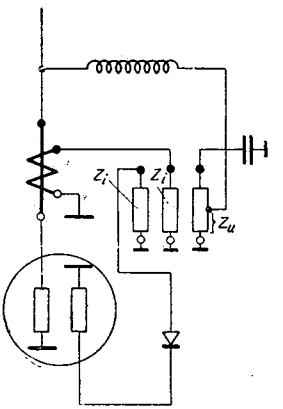
Prąd magnesujący tego transformatora I_m jest równy prądowi dławika I_D w układzie równoległym

$$\hat{I}_D = \hat{I}_m = \frac{\hat{U}(\hat{Z}_r - jX) + j\hat{I}\hat{Z}_r X}{X^2}.$$

Przy pominięciu oporności prostownika ($Z_r = R_{w\sim} = R$) otrzymamy

$$\hat{I}_D = \hat{I}_m = \frac{\hat{U}(R - jX) + jRX\hat{I}}{X^2}. \tag{23}$$

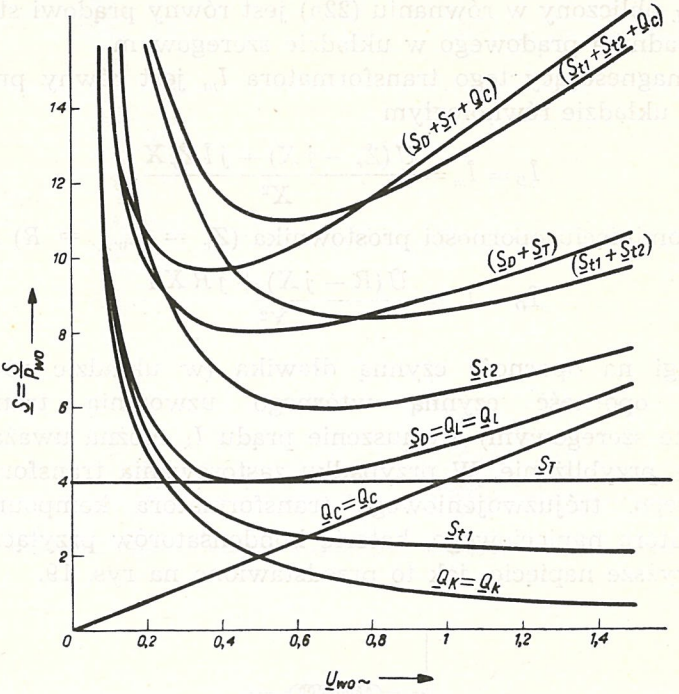
Z uwagi na oporność czynną dławika (w układzie równoległym) względnie oporność czynną wtórnego uzwojenia transformatora (w układzie szeregowym) wymuszenie prądu I_k można uważać tylko za praktyczne przybliżenie. W przypadku zastosowania transformatora dopasowującego, trójuzwojeniowego transformatora kompoundacji, lub transformatora napięciowego, baterię kondensatorów przyłączamy z reguły na wyższe napięcie, jak to przedstawiono na rys. 19.



Rys. 19. Układ fazowej kompoundacji wzbudzenia z pojemnością rezonansową i trójuzwojeniowym transformatorem kompoundacji

Na rys. 20 przedstawiono zależność względnej mocy typowej poszczególnych elementów układu kompoundacji z pojemnością rezonansową zarówno dla układu szeregowego, jak i równoległego. Przyjęto generator o reaktancji synchronicznej $\underline{X_d} = 1$.

Maksymalne moce pozorne określające moc typową poszczególnych elementów występują przy obciążeniu indukcyjnym generatora. Indukcyjna moc bierna pobierana przez dławik w układzie równoległym jest równa mocy biernej magnesowania transformatora w układzie szeregowym.



Rys. 20. Wykres mocy typowych uzwojeń elementów układu fazowej kompoundacji wzbudzenia z pojemnością rezonansową

W układzie równoległym: S_T — moc typowa uzwojeń transformatora prądowego, $S_D=Q_L$ — moc typowa uzwojeń dławika równa maksymalnej indukcyjnej mocy biernej pobieranej przez układ kompoundacji, Q_C — moc typowa kondensatorów, Q_K — maksymalna indukcyjna moc bierna pobierana z generatora przez układ kompoundacji.

W układzie szeregowym: S_t, S_{t2} — moce typowe uzwojenia pierwotnego i wtórnego transformatora prądowego, Q_l — maksymalna indukcyjna moc bierna pobierana przez układ kompoundacji, Q_c — moc typowa kondensatorów układu rezonansowego, Q_k — maksymalna indukcyjna moc bierna pobierana z generatora przez układ kompoundacji.

Moc baterii kondensatorów jest identyczna dla obu układów. Różnica mocy biernej indukcyjnej i pojemnościowej jest równa indukcyjnej wypadkowej mocy biernej pobieranej przez układ kompoundacji Q_k. Oczywiście podobnie jak na rys. 14 przydatność układu kompoundacji występuje w przedziale względnego napięcia wzbudzenia przy biegu

jałowym $\underline{U}_{wo\sim}$, przy którym indukcyjna moc bierna pobierana przez układ kompoundacji nie jest nadmiernie duża uwzględniając, że moc bierna pobierana przez układ kompoundacji obciąża uzwojenie twornika generatora. W układzie kompoundacji z pojemnością rezonansową otrzymamy z rozpatrzenia stanu jałowego generatora

$$\underline{U}_{wo\sim} = \frac{R}{X}. \tag{24}$$

Poszczególne moce typowe rezonansowego układu kompoundacji można przedstawić w postaci:
Przy układzie równoległym:

$$\begin{aligned}
&\underline{S}_D = \underline{Q}_L = \frac{X}{R}\frac{X^2 + R^2(1+\underline{X}_d)^2}{X^2} = \frac{(1+\underline{X}_d)^2\,\underline{U}^2_{wo\sim}+1}{\underline{U}_{wo\sim}},\\
&\underline{Q}_C = \frac{R}{X}(1+\underline{X}_d)^2 = (1+X_d)^2\underline{U}_{wo\sim},\\
&\underline{Q}_K = \underline{Q}_L - \underline{Q}_C = \frac{1}{\underline{U}_{wo\sim}},\\
&\underline{S}_T = 2\underline{X}_d(1+\underline{X}_d).
\end{aligned} \tag{25}$$

Przy układzie szeregowym:

$$\begin{aligned}
&\underline{S}_{t2} = (1+\underline{X}_d)\frac{X}{R}\sqrt{\left(\frac{R}{X}\right)^2+1}\sqrt{\left(\frac{R}{X}\right)^2(1+\underline{X}_d)^2+1} =\\
&\quad = \frac{1+\underline{X}_d}{\underline{U}_{wo\sim}}\sqrt{(1+\underline{U}^2_{wo\sim})[(1+\underline{X}_d)^2\,\underline{U}_{wo\sim}+1]},\\
&\underline{S}_{t1} = \underline{X}_d\frac{X}{R}\sqrt{\left(\frac{R}{X}\right)^2(1+\underline{X}_d)^2+1} = \frac{\underline{X}_d}{\underline{U}_{wo\sim}}\sqrt{(1+\underline{X}_d)^2\,\underline{U}^2_{wo\sim}+1},\\
&\underline{Q}_c = \underline{Q}_C\\
&\underline{Q}_k = \underline{Q}_K\\
&\underline{Q}_i = \underline{Q}_L
\end{aligned} \tag{26}$$

Małymi indeksami oznaczono typowe moce pozorne i typowe moce bierne w szeregowym układzie kompoundacji, a dużymi indeksami w układzie równoległym.

Przy obliczeniu mocy typowych przyjęto upraszczające założenie

$$\begin{aligned}
&\hat{Z}_r = R_{w\sim} = R,\\
&U = U_{gN}\\
&I = I_{gN}\vartheta,\\
&\vartheta = \frac{X_d}{X}.
\end{aligned}$$

Charakterystyczną cechą układu kompoundacji z pojemnością rezonansową jest to, że napięcie $\underline{U}_{wo\sim}$ może przyjmować teoretycznie dowolnie duże wartości. W odróżnieniu od układu kompoundacji bez pojemności wymuszającej możliwe są punkty pracy przy $\underline{U}_{wo\sim} > 1$. Wynika to ze zjawiska rezonansu szeregowego.

Rozbieżność przebiegu rzeczywistej charakterystyki mocy typowej od idealnej dla dużych wartości $\underline{U}_{wo\sim}$ spowodowana jest wpływem oporności czynnej dławika lub transformatora.

Znaczenie praktyczne posiadają wartości $\underline{U}_{wo\sim}$ w sąsiedztwie minimum łącznej mocy typowej uzwojeń $(\underline{S}_D + \underline{S}_T)$ bądź $(\underline{S}_{t1} + \underline{S}_{t2})$ lub też w sąsiedztwie minimum sumarycznej mocy typowej obliczonej z uwzględnieniem typowej mocy kondensatorów $(\underline{S}_D + \underline{S}_T + \underline{Q}_C v_c)$ bądź $(\underline{S}_{t1} + \underline{S}_{t2} + \underline{Q}_C v_c)$. v_c — ciężarowy lub ekonomiczny współczynnik równoważności dla kondensatorów, objaśniony w rozdz. 11.

Na skutek wymuszenia prądu w obwodzie uzwojenia wzbudzenia przez układ rezonansu szeregowego maleje stała czasowa obwodu uzwojenia wzbudzenia do znikomej wartości. W przypadku pominięcia oporności czynnej dławika w układzie równoległym, względnie oporności czynnej wtórnej strony transformatora w układzie szeregowym impedancja zastępcza układu kompoundacji widziana od strony zacisków uzwojenia wzbudzenia jest nieograniczenie wielka.

Przy uwzględnieniu oporności czynnej dławika R_L lub oporności czynnej transformatora oporność zastępcza wnoszona przez prostownik do obwodu uzwojenia wzbudzenia ma wartość skończoną. Powiększa ona łączną oporność obwodu do wartości

$$R_{ww} \approx R_w + \frac{j X_L}{1 - \frac{X_L}{X_c}\left(1 - j\frac{R_L}{X_L}\right)} k_r,$$

W przypadku dostrojenia do rezonansu $X_L = X_c = X$ otrzymamy

$$R_{ww} \approx R_w + \frac{X}{\varrho_L} k_r,$$

gdzie

$$\varrho_L = \frac{R_L}{X_L}.$$

Rozpatrzmy teraz wpływ pojemności rezonansowej na wrażliwość układu stabilizacji na zmianę częstotliwości. Zmiana częstotliwości powoduje oczywiście rozstrojenie układu rezonansowego i w konsekwencji zmianę prądu wzbudzenia. Pomijając wpływ oporności czynnej dławika ($\varrho_L \to 0$) otrzymamy po przekształceniu równania (22)

$$\hat{I}_k = \frac{\hat{U}_k}{j X_L + \hat{Z}_r \frac{(f_r + f)(f_r - f)}{f_r^2}}, \qquad f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \tag{27a}$$

Przez f_r oznaczono częstotliwość rezonansu szeregowego. Jeżeli założymy, że częstotliwość rezonansu leży w pobliżu częstotliwości znamionowej, i ograniczymy rozważania tylko do małych zmian częstotliwości $\Delta f = f - f_r$, otrzymamy

$$\hat{I}_k \approx \frac{\hat{U}_k}{j X_L \left(1 + j\, 2 \frac{\hat{Z}_r}{X_L} \frac{\Delta f}{f_r}\right)}. \tag{27b}$$

Jeżeli dobierzemy częstotliwość rezonansu nieco niżej częstotliwości znamionowej, prąd wzbudzenia będzie rósł przy zmniejszaniu częstotliwości. Efekt ten można wykorzystać do kompensacji wpływu częstotliwości na dokładność stabilizacji napięcia.

Jeżeli częstotliwość rezonansu dobierzemy przy wartości znacznie mniejszej od znamionowej (np. około 60% f_N), tracimy w dużym stopniu własności wymuszenia prądu wzbudzenia. Takie nastawienie częstotliwości rezonansowej może jednak okazać się celowe z innych względów.

Na podstawie równania (27a) możemy ocenić przebieg charakterystyki napięcia generatora przy znacznie powiększonej częstotliwości. Przy dużym wzroście częstotliwości malejąca reaktancja pojemnościowa bocznikuje uzwojenie wzbudzenia powodując obniżenie napięcia twornika generatora.

7. KOREKCJA NAPIĘCIA

W przypadku generatora o nienasyconym obwodzie magnetycznym napięcie stabilizowane przy pomocy układu fazowej kompoundacji wzbudzenia ma charakter labilny, ponieważ prąd wyjściowy układu kompoundacji $I_k k_i = I_w$ wiernie odwzorowuje złożenie składowych prądu wzbudzenia generatora przy dowolnym poziomie napięcia. Ilustruje to rys. 21a, na którym przedstawiono charakterystykę napięcia $U_g = f(I_w)$ przy $I_g = \text{const}$, $f = \text{const}$ w funkcji prądu wzbudzenia oddzielnie dla generatora i układu kompoundacji. W wypadku labilnej pracy obie charakterystyki pokrywają się. Stabilny ustalony punkt pracy może wystąpić tylko w punkcie przecięcia obu charakterystyk. Oczywiście dowolnie mała odchyłka przebiegu pokrywających się charakterystyk (np. na skutek znikomej zmiany częstotliwości) powoduje albo malenie, albo narastanie do wartości określonej przez stabilny punkt przecięcia charakterystyk generatora i układu kompoundacji wzbudzenia.

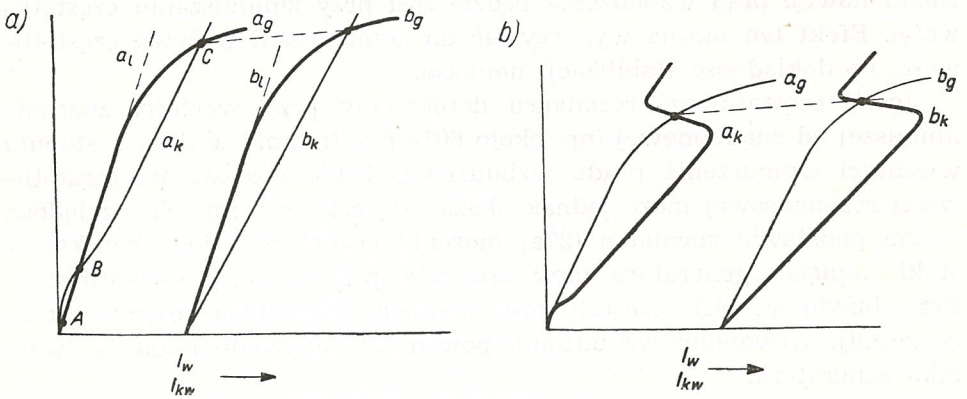
Ujednoznacznienie punktu pracy otrzymujemy

a) wykorzystując nieliniowość charakterystyki magnesowania generatora powstałą na skutek nasycenia,

b) wykorzystując nieliniowość charakterystyki kompoundacji spowodowaną przez korektor napięcia.

W przypadku a) ujednoznacznienie punktu pracy uzyskuje się kosztem pewnego obniżenia dokładności stabilizacji. Na rys. 21a przedstawiono dwa skrajne położenia charakterystyk generatora i układu kompoundacji przy biegu jałowym i przy obciążeniu znamionowym prądem biernym.

Przy starannym doświadczalnym dopasowaniu układu kompoundacji do charakterystyk generatora i silnika napędowego można uzyskać dokładność stabilizacji rzędu $\pm$ 1,5%. Do kompensacji wpływu częstotli-



Rys. 21. Charakterystyki obciążenia:
a) bez korektora napięcia, $U_g = f(I_w)$; $U_g = f(I_{kw})$ przy I_o = const; b) z korektorem napięcia, $U_g = f(I_g)$; $U_g = f(I_k)$ przy I_o = const.
Charakterystyki generatora: a_g — przy $I_o = 0$, b_g — przy $I_o = I_N$, cos $\varphi = 0_{ind}$.
Charakterystyki układu kompoundacji wzbudzenia: a_k — przy $I_o = 0$, b_k — przy $I_o = I_N$, cos $\varphi = 0_{ind}$. a_1, b_1 — przypadek labilnego poziomu napięcia

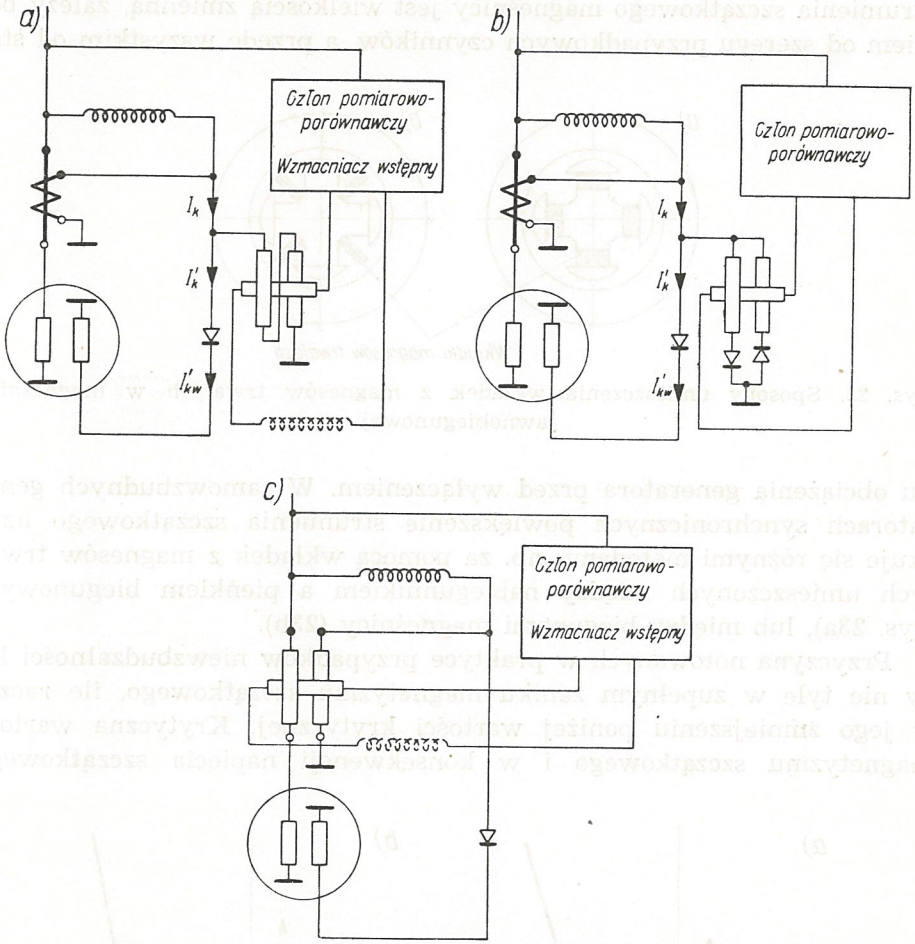
wości na poziom napięcia stabilizowanego wykorzystana może być również bateria kondensatorów układu rezonansowego, którą dostrajamy do częstotliwości rezonansu nieco niższej od częstotliwości znamionowej.

W przypadku b) zastosowanie korektora napięcia powoduje zakrzywienie charakterystyki wyjściowej układu kompoundacji, w wyniku czego otrzymujemy stabilny punkt przecięcia z charakterystyką generatora. Na rys. 21b przedstawiono charakterystykę generatora i układu kompoundacji z korektorem napięcia dla stanu biegu jałowego i obciążenia generatora znamionowym prądem biernym.

Stabilny punkt pracy ustalonej zachodzi w tym przypadku niezależnie od tego, czy ten punkt pracy mieści się na charakterystyce generatora w stanie nasycenia, czy na jego części nienasyconej.

Korektor napięcia tworzy funkcjonalnie regulator napięcia generatora. W porównaniu z normalnym regulatorem napięcia przy zestawieniu korektora z układem kompoundacji wzbudzenia otrzymamy zmniejszone moce typowe elementów składowych korektora, ponadto wystę-

puje możliwość zastosowania zupełnie prymitywnego układu regulacji złożonego w najprostszym przypadku z członu pomiarowego i jednego, a co najwyżej dwóch członów wzmacniających. Przykład rozwiązania członu wykonawczego korektora przedstawiono przy pomocy jednokreskowych schematów na rys. 22 a, b, c. Członem wykonawczym jest bądź

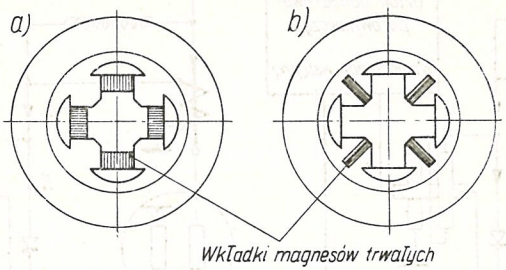


Rys. 22. Sposoby wykonania członu wykonawczego korektora napięcia: a) przy pomocy transduktora bez sprzężenia zwrotnego, b) przy pomocy transduktora z wewnętrznym sprzężeniem zwrotnym (amplistatu), c) przy pomocy transformatora nasyceniowego

transduktor bez sprzężenia zwrotnego (a), bądź transduktor w układzie amplistatu (b), bądź prądowy transformator nasyceniowy (c). Prąd magnesujący pobierany przez transduktor lub transformator nasyceniowy zmniejsza prąd wzbudzenia generatora. Prąd magnesujący sterowany jest przez człon pomiarowo-porównawczy [8].

8. SAMOWZBUDZALNOŚĆ GENERATORA

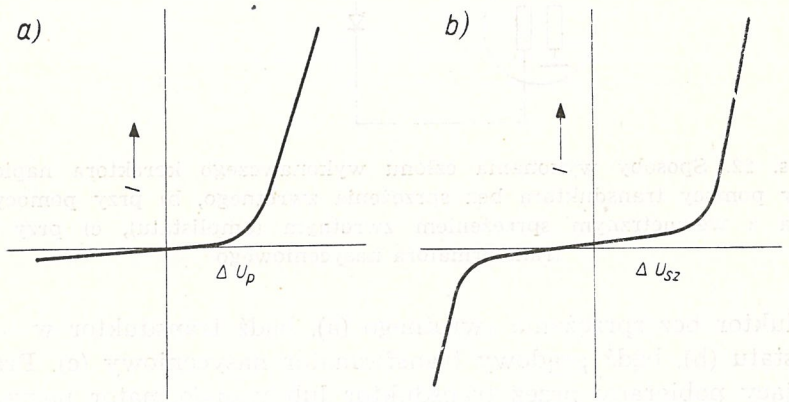
Podstawowym zadaniem stawianym układowi stabilizacji napięcia jest możliwość samowzbudzenia generatora bez pomocy dodatkowego źródła zasilania. Samowzbudzenie układu musi nastąpić zatem przy wykorzystaniu strumienia szczątkowego magneśnicy generatora. Wartość strumienia szczątkowego magneśnicy jest wielkością zmienną, zależy bowiem od szeregu przypadkowych czynników, a przede wszystkim od sta-



Rys. 23. Sposoby umieszczenia wkładek z magnesów trwałych w magneśnicy jawnobiegunowej

nu obciążenia generatora przed wyłączeniem. W samowzbudnych generatorach synchronicznych powiększenie strumienia szczątkowego uzyskuje się różnymi metodami, np. za pomocą wkładek z magnesów trwałych umieszczonych między nabiegunnikiem a pieńkiem biegunowym (rys. 23a), lub między biegunami magneśnicy (23b).

Przyczyna notowanych w praktyce przypadków niewzbudzalności leży nie tyle w zupełnym zaniku magnetyzmu szczątkowego, ile raczej w jego zmniejszeniu poniżej wartości krytycznej. Krytyczna wartość magnetyzmu szczątkowego i w konsekwencji napięcia szczątkowego



Rys. 24. Nieliniowość spadku napięcia: a) w prostowniku półprzewodnikowym, b) w kontakcie szczotka — pierścienie ślizgowe

twornika generatora określona jest przez nieliniowość charakterystyki prostowników suchych i kontaktu szczotka-pierścienie ślizgowe. Charakterystyka spadku napięcia na prostowniku w kierunku przepuszczania i spadku napięcia przejścia kontaktu szczotka-pierścień ślizgowy wykazuje istnienie napięcia progowego, poniżej którego oporność przejścia jest nadmiernie duża (rys. 24 a, b). Na skutek tego otrzymujemy deformację charakterystyki wyjściowej układu kompoundacji w obszarze małych prądów kompoundacji, którą uwidoczniono na rys. 21 a. Pierwszy stabilny punkt przecięcia A obu charakterystyk występuje przy bardzo małym napięciu generatora. Zachodzi konieczność podwyższenia napięcia do wartości leżącej powyżej drugiego punktu przecięcia B, który jest punktem niestabilnym.

Warunki samowzbudzenia można poprawić nie tylko przez zwiększenie napięcia szczątkowego, ale również innymi metodami.

a) Za pomocą pojemności rezonansowej. Jak wykazaliśmy poprzednio, zastosowanie pojemności rezonansowej dostrojonej do rezonansu z reaktancją X układu kompoundacji powoduje uniezależnienie prądu kompoundacji od wartości impedancji Z_r. W konsekwencji powiększenie oporności prostownika przy napięciu niższym od napięcia progowego nie powoduje powstania nieliniowości charakterystyki wyjściowej układu kompoundacji. Bywają stosowane pojemności dostrojone do rezonansu przy częstotliwości znacznie niższej od znamionowej, przy których samowzbudzenie następuje już przy małej prędkości generatora.

b) Za pomocą jednofazowego transformatora pomocniczego podwyższającego napięcie szczątkowe generatora. Napięcie to podwyższone do wartości większej od napięcia progowego przyłożone jest chwilowo w okresie samowzbudzenia do zacisków prostownika.

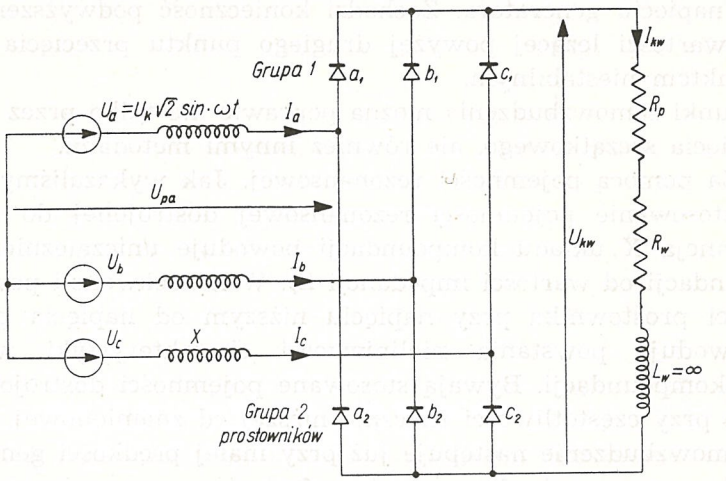
Przy odwróceniu układu twornik magneśnica, to znaczy przy nieruchomej magneśnicy, występuje mniejsza krytyczna wartość napięcia szczątkowego, ponieważ odpada nieliniowość oporności kontaktu między szczotką a pierścieniami ślizgowymi w obwodzie uzwojenia wzbudzenia.

Specyficzne warunki pracy samowzbudnych pomocniczych generatorów synchronicznych z fazową kompoundacją wzbudzenia, osadzonych na wspólnym wale z dużym hydro- lub turbogeneratorem synchronicznym postulują, aby samowzbudzenie generatora następowało już przy obniżonej częstotliwości w czasie rozruchu generatora.

Układ fazowej kompoundacji wzbudzenia posiada pojemność rezonansową nastrojoną do częstotliwości niższej od znamionowej (około 50 — 60% f_N). Samowzbudzenie następuje już przy obniżonej częstotliwości, co stwarza pełną dyspozycyjność agregatu wzbudniczego i regulatora napięcia już w czasie rozruchu. W czasie rozruchu występuje forsowanie wzbudzenia generatora pomocniczego spowodowane przez działanie układu fazowej kompoundacji wzbudzenia.

9. OBWÓD PROSTOWNICZY UKŁADU KOMPOUNDACJI BEZ POJEMNOŚCI REZONANSOWEJ

Na rys. 25 przedstawiono wyidealizowany trójfazowy obwód prostowniczy. Prostownik dwudrogowy złożony jest z dwóch grup prostowniczych *1* i *2*. Obwód prostowniczy można zastąpić układem zasilania prostownika ze źródła napięciowego, połączonego w szereg z indukcyjnością dławika. Zwróćmy uwagę na analogię naszego układu z prostow-



Rys. 25. Wyidealizowany trójfazowy obwód prostowniczy

nikiem zasilanym z transformatora prostowniczego, którego reaktancja rozproszenia jest połączona w szereg ze źródłem napięciowym. Poczynimy analogiczne uproszczenia jak w literaturze [11] poświęconej analizie transformatorów prostownikowych.

Zakładamy dla uproszczenia analizy nieograniczoną indukcyjność obwodu uzwojenia wzbudzenia. Przy takim założeniu obliczony prąd w obwodzie wzbudzenia nie będzie wykazywać tętnień prądu zmiennego.

Wyodrębniamy oporność czynną prostownika w kierunku przepuszczenia R_p poza obwód prostowniczy, łącząc go w szereg z opornością uzwojenia wzbudzenia R_w. Przy takim założeniu pominięty jest wpływ oporności czynnej prostownika na przebiegi jednoczesnej komutacji prostowników.

Rozpatrzmy kolejno trzy możliwe przypadki pracy obwodu prostowniczego różniące się sposobem komutacji prostownika:

a) przebieg bez jednoczesnej komutacji dwóch gałęzi grupy prostowników, przy którym prąd fazowy płynie przez 2/3 okresu prądu zmiennego;

b) przebieg przy jednoczesnej komutacji dwóch gałęzi grupy prostowników, przy którym prąd fazowy płynie w przewodach zasilania przez czasokres zawarty w granicach od 2/3 do pełnego okresu;

c) przebieg przy jednoczesnej komutacji dwóch gałęzi prostowników, przy którym prąd fazowy płynie w czasie całego okresu.

Przypadek a) zachodzi przy zerowej reaktancji X.

Napięcie wyprostowane (wartość średnia)

$$U_{kw} = \frac{3\sqrt{3}\sqrt{2}}{\pi} U_k. \tag{28}$$

Prąd wyprostowany (wartość średnia)

$$I_{kw} = \frac{U_{kw}}{R_w + R_p},$$

przy czym

$$R_p = 2R_{p1};$$

U_k — napięcie kompoundacji (wartość skuteczna)

R_{p1} — oporność jednej gałęzi prostownika w kierunku przepuszczania.

Prąd fazowy zasilania prostownika ma przebieg odkształcony. Z rozkładu prądu fazowego (fazy a) na szereg Fouriera

$$I_a(t) = \sum_{i=1}^{i=\infty} [B_{i\,max} \sin(i\omega t) + A_{i\,max} \cos(i\omega t)].$$

otrzymamy podstawową harmoniczną

$$B_{1\,max} = I_{kw} \frac{2\sqrt{3}}{\pi},$$

$$A_{1\,max} = 0,$$

stąd

$$I_k = \frac{B_{1\,max}}{\sqrt{2}}, \tag{29}$$

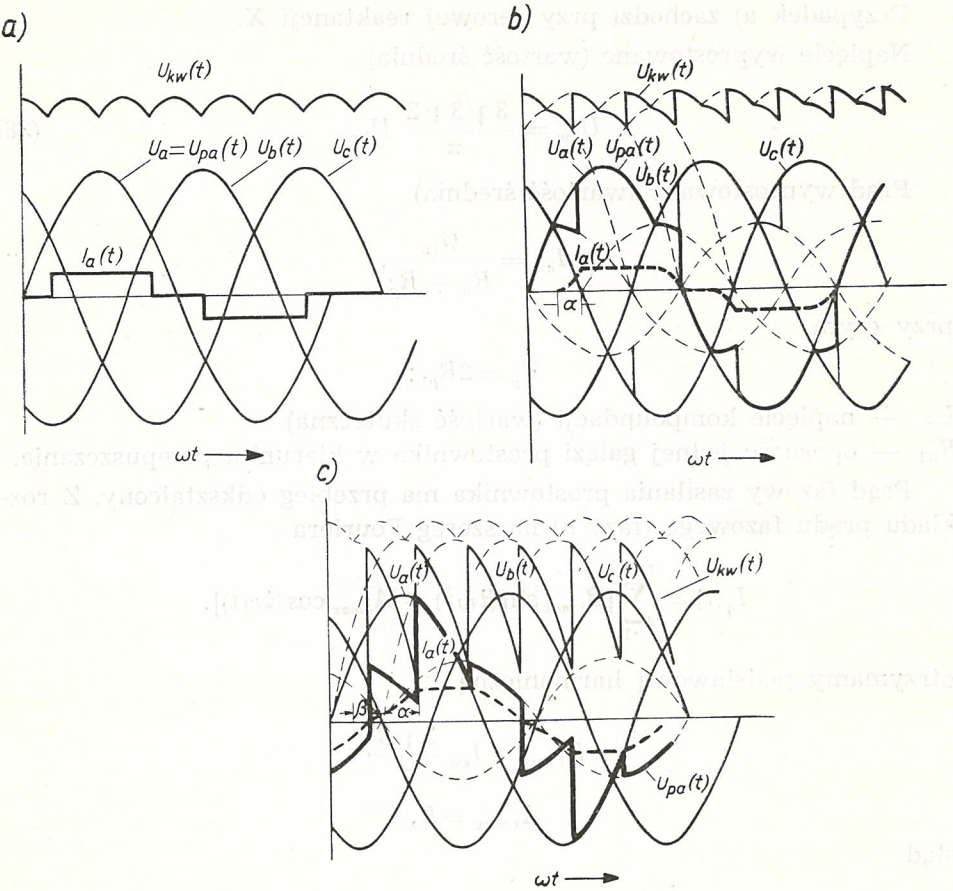
$$\hat{Z}_k = R_k = \frac{U_k}{I_k} = (R_w + R_p)\frac{\pi^2}{18}. \tag{30}$$

$$k_r = \frac{18}{\pi^2},$$

$$k_i = \frac{\pi}{\sqrt{3}\sqrt{2}},$$

$$k_u = \frac{3\sqrt{3}\sqrt{2}}{\pi}.$$

Na rys. 26 a przedstawiono czasowy przebieg napięcia zasilania prostownika $U_a(t)$, $U_b(t)$, $U_c(t)$, czasowy przebieg prądu w jednej fazie zasilania prostownika $I_a(t)$, oraz przebieg napięcia po stronie prądu stałego prostownika $U_{kw}(t)$.



Rys. 26. Przebiegi napięć i prądów w obwodzie prostowniczym

a) przy $X = 0$, b) przy $0 \leqslant X \leqslant (R_w + R_p)\frac{\pi}{9}$, c) przy $X \geqslant (R_w + R_p)\frac{\pi}{9}$, $U_{kw}(t)$ — czasowy przebieg napięcia wyprostowanego, $U_{a,b,c}$ — fazowe napięcie kompoundacji, $U_{pa}(t)$ — fazowe napięcie w punkcie przyłączenia fazy a do prostownika, $I_a(t)$ — przebieg prądu w fazie a, α — kąt komutacji prostowników, β — kąt opóźnienia komutacji prostowników

Przypadek b) zachodzi przy różnej od zera reaktancji X. Czas trwania jednoczesnej komutacji wyrażony miarą kątową wynosi α. Przy założeniu, że kąt jednoczesnej komutacji α jest zawarty w granicach $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{3}$,

otrzymamy przebiegi prądowe i napięciowe przedstawione na rys. 26b.

$$U_{kw} = U_k 3 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\,\pi}(1 + \cos\alpha),$$

$$I_{kw} = \frac{U_{kw}}{R_w + R_p}. \tag{31}$$

Prąd jednej fazy z uwzględnieniem jednoczesnej komutacji wyrażony jest przy pomocy równania
w przedziale $30° \leqslant \omega t \leqslant 30° + \alpha$

$$I_a(t) = \frac{U_k}{X}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}[\sin(\omega t - 120°) + 1], \tag{32a}$$

w przedziale $30° + \alpha \leqslant \omega t \leqslant 150°$

$$I_a(t) = I_{kw}, \tag{32b}$$

w przedziale $150° \leqslant \omega t \leqslant 150° + \alpha$

$$I_a(t) = I_{kw} - \frac{U_k}{X}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}[\sin(\omega t - 240°) + 1]. \tag{32c}$$

Z warunku ciągłości prądu w chwili zakończenia jednoczesnej komutacji otrzymamy

$$\cos\alpha = \frac{1 - \frac{3}{\pi}\frac{X}{R_w + R_p}}{1 + \frac{3}{\pi}\frac{X}{R_w + R_p}}. \tag{33}$$

Średni prąd wyprostowany możemy przedstawić w postaci

$$I_{kw} = \frac{U_k}{X}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1 - \cos\alpha). \tag{34}$$

W miarę powiększania kąta jednoczesnej komutacji α rośnie czasokres przepływu prądu fazowego. W granicy przy kącie komutacji $\alpha = 60°$ prąd fazowy płynie w ciągu całego okresu. Wystąpi to przy

$$\frac{X}{R_w + R_p} = \frac{\pi}{9}. \tag{35}$$

Pierwsza harmoniczna prądu fazowego

$$I_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{B_{1\,max}^2 + A_{1\,max}^2} \tag{36}$$

$$B_{1\,max} = I_{kw}\frac{\sqrt{3}}{\pi}(1 + \cos\alpha) = C_b I_{kw},$$

$$A_{1\,max} = I_{kw}\frac{\sqrt{3}}{\pi}\left(\frac{\sin\alpha - \alpha}{1-\cos\alpha} - \sin\alpha\right) = C_a I_{kw},$$

$$\hat{Z}_k = \frac{U_k}{I_k}(\cos\varphi + j\sin\varphi) = R_r + j(X + X_p),$$

przy czym

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{C_a}{C_b},$$

$$k_r = \frac{B_w + R_p}{R_r}, \qquad k_i = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{C_a^2 + C_b^2}}, \qquad k_u = k_i k_r.$$

Przypadek c) nastąpi przy powiększeniu stosunku $\dfrac{X}{R_w + R_p}$ powyżej wartości $\dfrac{\pi}{9}$. Kąt jednoczesnej komutacji pozostaje niezmieniony i równy $\alpha = 60°$. Następuje jedynie przesunięcie początku komutacji o kąt β. Na rys. 26c przedstawiono przebiegi napięcia fazowego wszystkich trzech faz prostownika, czasowy napięcia wyjściowego prostownika po stronie prądu stałego oraz przebieg prądu jednej fazy zasilania.

Jednoczesna komutacja prądu gałęzi a_1 i c_1 pierwszej grupy prostowniczej rozpoczyna się w chwili $\beta + 30°$. Prąd w gałęzi a_1 określony jest w przedziale $30° + \beta \leqslant \omega t \leqslant 90° + \beta$ równaniem

$$I_a(t) = \frac{U_k}{X}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}[\sin(\omega t - 120°) - \sin(\beta - 90°)], \tag{37a}$$

w przedziale $90° + \beta \leqslant \omega t \leqslant 150° + \beta$

$$I_a(t) = I_{kw}, \tag{37b}$$

w przedziale $150° + \beta \leqslant \omega t \leqslant 210° + \beta$

$$I_a(t) = I_{kw} - \frac{U_k}{X}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}[\sin(\omega t + 90° - \beta) - \sin(\beta - 120°)]. \tag{37c}$$

Z warunku ciągłości prądu dla końca jednoczesnej komutacji otrzymamy

$$\cos(\beta + 30°) = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{27}{\pi^2}\left(\dfrac{X}{R_w + R_p}\right)^2}}. \tag{38}$$

Graniczny kąt przesunięcia początku komutacji $\beta = 60°$ zachodzi przy idealnym zwarciu prostownika ($R_w + R_r = 0$).
Średnie napięcie wyprostowane wynosi

$$U_{kw} = U_k\frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cos(\beta + 30°). \tag{39}$$

Średni prąd wyprostowany

$$I_{kw} = \frac{U_k}{X}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}[\cos\beta - \cos(\beta + 60°)]. \tag{40}$$

Z analizy harmonicznej przebiegu prądu fazowego otrzymamy

$$I_a(t) = \sum_{i=1}^{i=\infty}[B_{i\,max}\sin(i\,\omega\,t + 30° + \beta) + A_{i\,max}\cos(i\,\omega\,t + 30° + \beta)],$$

$$B_{1\,max} = I_{kw}\frac{3}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right) = C_b I_{kw} \tag{41}$$

$$A_{1\,max} = I_{kw}\left[\frac{\left(\frac{3}{2\pi} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sin\beta - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{\pi}\,\frac{5}{2}\right)\cos\beta}{\sqrt{3}\sin\beta + \cos\beta} - \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right] = C_a I_{kw}.$$

Z drugiej strony mamy

$$I_k = \frac{U_k}{Z_k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{B_{1\,max}^2 + A_{1\,max}^2}.$$

Stąd możemy wyznaczyć impedancję zastępczą układu kompoundacji

$$\hat{Z}_k = Z_k[\cos(\beta + 30° - \varphi) + j\sin(\beta + 30° - \varphi)] = R_r + j(X + X_p), \tag{42a}$$

przy czym

$$Z_k = \frac{U_k}{I_{kw}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{C_a^2 + C_b^2}}, \tag{42b}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{C_a}{C_b}. \tag{42c}$$

Reaktancja indukcyjna prostownika

$$X_p = Z_k\sin(\beta + 30° - \varphi) - X. \tag{42d}$$

Po rozdzieleniu składowej rzeczywistej i urojonej impedancji Z_k otrzymamy wartość reaktancji prostownika X_p oraz współczynnik

$$k_r = \frac{R_w + R_p}{R_r}. \tag{43a}$$

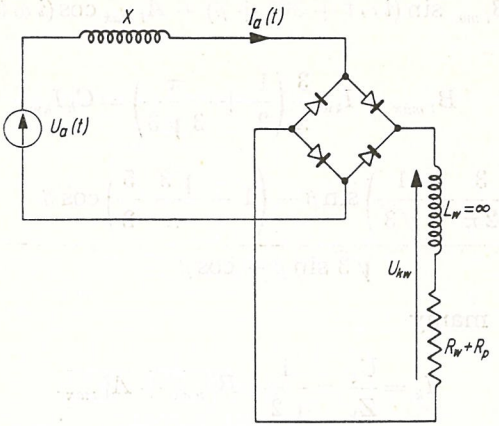
Współczynnik

$$k_i = \frac{I_{kw}}{I_k} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{C_a^2 + C_b^2}}. \tag{43b}$$

Stąd współczynnik

$$k_u = k_i k_r = \frac{R_w + R_p}{R_r}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{C_a^2 + C_b^2}}. \tag{43c}$$

Na rys. 27 przedstawiono wyidealizowany jednofazowy mostkowy obwód prostowniczy znajdujący zastosowanie w układzie fazowej kompoundacji wzbudzenia prądnicy jednofazowej. Rozpatrzymy kolejno dwa przypadki pracy jednofazowego obwodu prostowniczego różniące się sposobem komutacji prostownika.



Rys. 27. Wyidealizowany schemat jednofazowego obwodu prostowniczego

a) Przebieg bez jednoczesnej komutacji wszystkich prostowników

Przypadek taki zachodzi przy $X = 0$. Napięcie wyprostowane (wartość średnia)

$$U_{kw} = U_k \frac{\sqrt{2}\,2}{\pi}. \tag{44}$$

Prąd wyprostowany (wartość średnia)

$$I_{kw} = \frac{U_{kw}}{R_w + R_p},$$

gdzie $R_p = 2R_{p1}$.

Prąd zasilania prostownika ma przebieg odkształcony

$$I_a(t) = \sum_{i=1}^{i=\infty} [B_{i\,max} \sin(i\,\omega\,t) + A_{i\,max} \cos(i\,\omega\,t)]. \tag{45}$$

Podstawowa harmoniczna

$$B_{1\,max} = I_{kw} \frac{4}{\pi},$$

$$A_{1\,max} = 0,$$

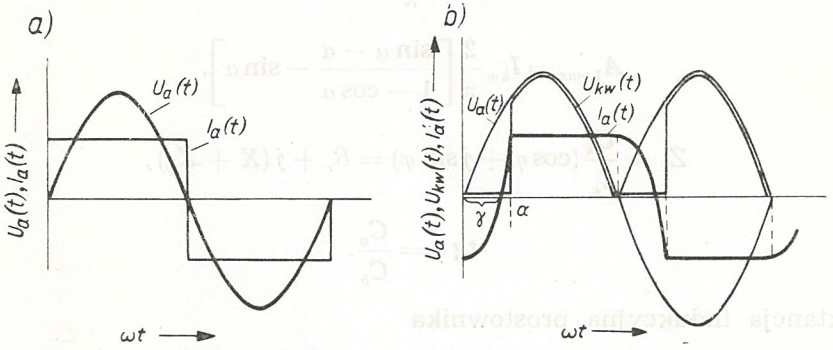
stąd

$$I_k = \frac{B_{1\,max}}{\sqrt{2}} = I_{kw} \frac{4}{\sqrt{2}\,\pi}, \tag{46}$$

$$Z_k = (R_w + R_p)\frac{\pi^2}{8},$$

$$k_r = \frac{8}{\pi^2}, \qquad k_i = \frac{\pi}{\sqrt{2}\,2}, \qquad k_u = \frac{\sqrt{2}\,2}{\pi}.$$

Na rys. 28a przedstawiono czasowy przebieg napięcia zasilania prostownika $U_k(t)$, czasowy przebieg prądu zasilania prostownika $I_a(t)$ oraz przebieg napięcia po stronie prądu stałego prostownika $U_{kw}(t)$.



Rys. 28. Przebiegi napięć i prądu w obwodzie prostowniczym
a) przy $X = 0$, b) przy $X > 0$, $U_{kw}(t)$ — czasowy przebieg napięcia wyprostowanego, $U_a(t)$ — czasowy przebieg napięcia kompoundacji, $I_a(t)$ — czasowy przebieg prądu zasilania prostownika, α — kąt jednoczesnej komutacji

b) Przebieg przy jednoczesnej komutacji prostowników

Na rys. 28b przedstawiono czasowy przebieg prądu i napięcia. Kąt jednoczesnej komutacji oznaczymy przez α.

Otrzymujemy

$$U_{kw} = U_k \cdot \frac{\sqrt{2}\,2}{\pi}(1 + \cos\alpha). \tag{47}$$

Prąd zasilania prostownika określony jest równaniem
w przedziale $0 \leqslant \omega t \leqslant \alpha$

$$I_a(t) = \frac{U_k}{X}\sqrt{2}\,(1 - \cos\omega t) - I_{kw}, \tag{48a}$$

w przedziale $\alpha \leqslant \omega t \leqslant 180°$

$$I_a(t) = I_{kw}. \tag{48b}$$

Z warunku ciągłości prądu w momencie zakończenia jednoczesnej komutacji otrzymamy

$$\cos\alpha = \frac{\pi(R_w + R_p) - 2X}{2X + (R_w + R_p)\pi}. \tag{49}$$

Średni prąd wyprostowany można przedstawić w postaci

$$I_{kw} = \frac{U_k}{X} \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \cos \alpha). \tag{50}$$

Pierwsza harmoniczna prądu zasilania

$$I_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{B_{1\,max}^2 + A_{1\,max}^2},$$

$$B_{1\,max} = I_{kw} \frac{2}{\pi} (1 + \cos \alpha),$$

$$A_{1\,max} = I_{kw} \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin \alpha - \alpha}{1 - \cos \alpha} - \sin \alpha \right],$$

$$\hat{Z}_k = \frac{U_k}{I_k} (\cos \varphi + j \sin \varphi) = R_r + j (X + X_p),$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{C_a}{C_b}.$$

Reaktancja indukcyjna prostownika

$$X_p = Z_k \sin \varphi - X. \tag{51a}$$

$$k_r = \frac{R_w + R_p}{R_r}, \qquad k_i = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{C_a^2 + C_b^2}}, \qquad k_u = k_r k_i.$$

10. OBWÓD PROSTOWNICZY ZASILANY ZE ŹRÓDŁA PRĄDOWEGO

W rozdziale 9 założyliśmy w celu uproszczenia analizy zjawisk komutacyjnych w prostownikach, że indukcyjność uzwojenia wzbudzenia L_w jest nieograniczenie duża, na skutek czego tętnienia prądu w odbiorniku nie występują. W szczególnym przypadku gdy reaktancja X układu kompoundacji oraz napięcie kompoundacji U_k rośnie nieograniczenie, nie możemy utrzymać tego upraszczającego założenia. Przy powiększaniu reaktancji X indukcyjność odbiornika L_w staje się bowiem teoretycznie współmierna, mniejsza i w granicy nawet pomijalnie mała w porównaniu z indukcyjnością dławika. Przy rosnącej nieograniczenie reaktancji X zasilanie prostownika upodabnia się do źródła prądowego o wymuszonym prądzie kompoundacji. Zachodzi to w szczególności przy zastosowaniu pojemności rezonansowej w układzie kompoundacji.

Rozpatrzymy przebiegi napięcia i prądu wyprostowanego przy posłużeniu się schematem zastępczym przedstawionym na rys. 29.

Dla uproszczenia analizy założymy idealne prostowniki oraz odbiornik o charakterze czynno-indukcyjnym, przyłączony do prostownika po stronie prądu wyprostowanego.

Prądy zasilania prostownika są symetryczne

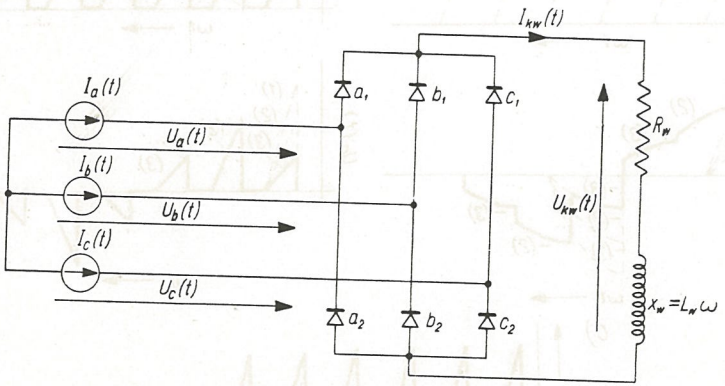
$$I_a(t) = I_{max} \sin(\omega t),$$
$$I_b(t) = I_{max} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), \tag{52}$$
$$I_c(t) = I_{max} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right).$$

Napięcie na odbiorniku $U_{kw}(t)$ otrzymamy z równania

$$U_{kw}(t) = I_{kw}(t) R_w + X_w \frac{d I_{kw}(t)}{d(\omega t)}. \tag{53}$$

Szósta część jednego okresu prądu zasilania stanowi okres zmienności prądu i napięcia na prostowniku. Charakter przebiegów jest uzależniony od wartości kąta obciążenia φ

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_w}{R_w} = \frac{1}{\varrho}. \tag{54}$$



Rys. 29. Wyidealizowany schemat trójfazowego obwodu prostowniczego zasilanego ze źródła prądowego

Przy kącie obciążenia $\varphi \leqslant \frac{\pi}{3}$ nie występuje jednoczesna komutacja obu grup prostowniczych i prąd odbiornika ma przebieg przedstawiony na rys. 30a.

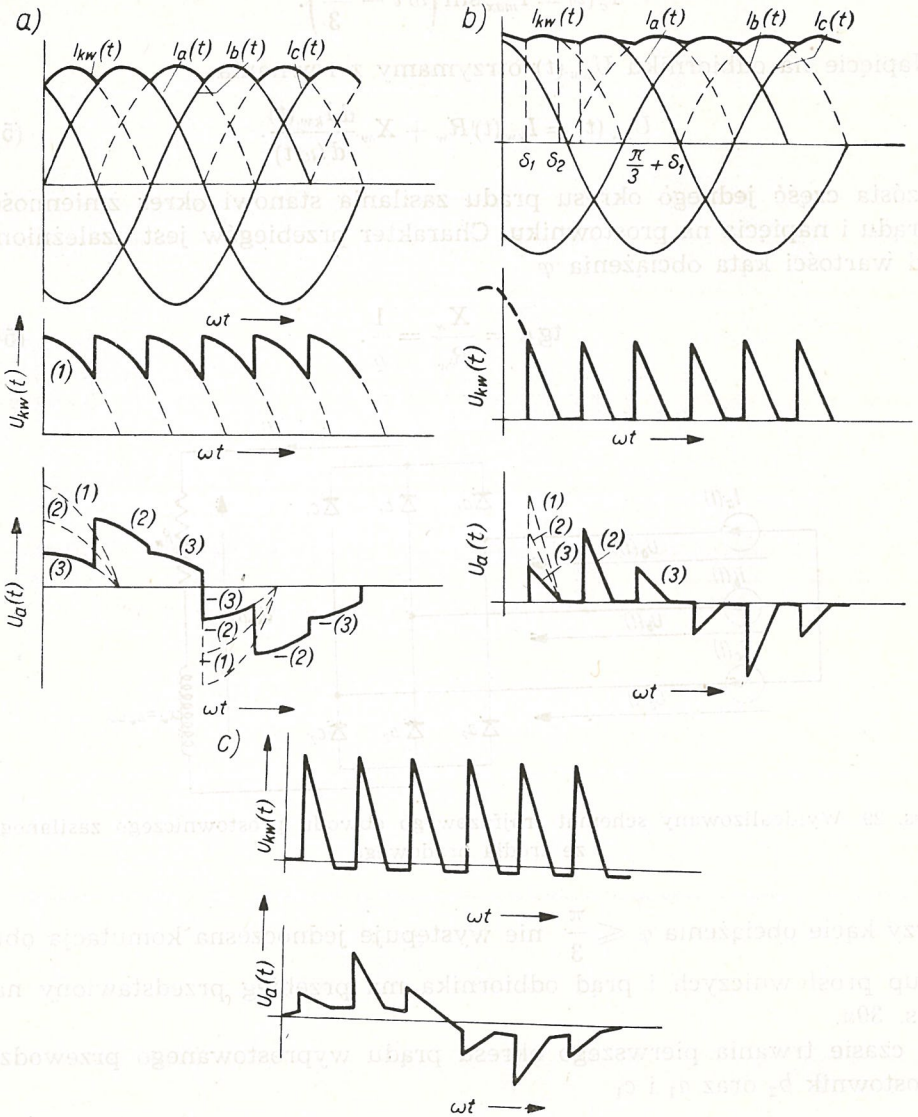
W czasie trwania pierwszego okresu prądu wyprostowanego przewodzi prostownik b_2 oraz a_1 i c_1

$$I_{kw}(t) = I_b(t),$$
$$U_{kw}(t) = I_{max} Z_w \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} + \varphi\right), \tag{55}$$
$$Z_w = \sqrt{R_w^2 + X_w^2}.$$

Napięcie $U_{kw}(t)$ jest jednocześnie równe napięciu międzyprzewodowemu faz a — b, oraz c — b.

$$U_{kw}(t) = U_a(t) - U_b(t) = U_c(t) - U_b(t). \tag{56}$$

Napięcie międzyprzewodowe faz a — c równa się zero. Uwzględniając symetrię źródła zasilania otrzymamy napięcia fazowe wychodzące ze



Rys. 30. a) Przebiegi prądów i napięć w prostowniku przy $\varphi \leqslant \frac{\pi}{3}$,

b) Przebiegi prądów i napięć w prostowniku przy $\varphi \geqslant \frac{\pi}{3}$,

c) Przebiegi napięć prostownika przy przybliżonym uwzględnieniu oporności czynnej prostowników w kierunku przepuszczania

środka ciężkości trójkąta napięć międzyprzewodowych. Z uwagi na degenerację trójkąta napięć międzyprzewodowych otrzymamy

$$U_a(t) = -\frac{1}{3} I_{max} Z_w \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} + \varphi\right),$$
$$U_b(t) = \frac{2}{3} I_{max} Z_w \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} + \varphi\right), \tag{57}$$
$$U_c(t) = -\frac{1}{3} I_{max} Z_w \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} + \varphi\right).$$

W następnych okresach napięcia wyprostowanego zmieniają się kolejno okresy przewodzenia prostowników. Na rys. 30a zaznaczono czasowy przebieg napięcia fazy a.
Średni prąd wyprostowany wynosi

$$I_{kw} = I_{max} \frac{3}{\pi}.$$

Stąd

$$k_i = \frac{I_{kw}\sqrt{2}}{I_{max}} = \frac{\sqrt{2}\,3}{\pi I_{max}} \int_0^{\pi/3} I_{kw}(t)\, d(\omega t). \tag{58}$$

Z rozkładu napięcia fazowego na szereg Fouriera

$$U_a(t) = \sum_{i=1}^{i=\infty} [B_{i\,max} \sin(i\,\omega t) + A_{i\,max} \cos(i\,\omega t)]$$

otrzymamy podstawową harmoniczną napięcia fazowego

$$U_{a1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{B_{1\,max}^2 + A_{1\,max}^2}, \tag{59}$$

$$k_u = \frac{U_{kw}}{U_{a1}} = \frac{I_{kw} R_w \sqrt{2}}{\sqrt{B_{1\,max}^2 + A_{1\,max}^2}},$$

$$k_r = \frac{k_u}{k_i}.$$

Przy kącie obciążenia $\varphi > \frac{\pi}{3}$ napięcie na odbiorniku $U_{kw}(t)$ oraz napięcie fazowe przechodzi przez zero w chwili $\omega t = \delta_2 = \frac{2\pi}{3} - \varphi$. W chwili przejścia napięcia przez zero następuje jednoczesna komutacja obu grup prostowników, która zmienia charakter przebiegów prądowych i napięciowych (rys. 30b). Przy jednoczesnej komutacji następuje odcięcie ukła-

du zasilania od odbiornika. Prąd odbiornika spełniając od tej chwili równanie

$$U_{kw}(t) = 0$$

ma malejący przebieg wykładniczy. Prąd ten nazwiemy prądem wyrównawczym. Prąd wyrównawczy utrzymuje się tak długo, jak długo jest on większy od prądu wymuszonego przez źródło zasilania. Przebieg prądu wyrównawczego jest styczny do przebiegu prądu wymuszonego w chwili $\omega t = \delta_2$. Od chwili $\omega t = \delta_1 + \frac{\pi}{3}$, w której prąd wyrównawczy zrówna się z wymuszonym prądem zasilania, prąd odbiornika jest określony ponownie przez prąd zasilania:
w przedziale $\delta_1 \leqslant \omega t \leqslant \delta_2$

$$I_{kw}(t) = -I_b(t),$$

w przedziale $\delta_2 \leqslant \omega t \leqslant \frac{\pi}{3} + \delta_1$

$$I_{kw}(t) = I_{wyr}(t) = -I_{max} \sin\left(\delta_2 - \frac{2\pi}{3}\right) e^{-\varrho(\omega t - \delta_2)}. \tag{60}$$

Z porównania prądu wyrównawczego i prądu zasilania przy końcu jednoczesnej komutacji otrzymamy równanie wyznaczające kąt δ_1

$$-I_{max} \sin\left(\delta_2 - \frac{2\pi}{3}\right) e^{\varrho - \left(\frac{\pi}{3} + \delta_1 - \delta_2\right)} = I_{max} \sin\left(\delta_1 + \frac{\pi}{3}\right). \tag{61}$$

Rozwiązanie równania (61) można przeprowadzić metodą wykreślną lub przy pomocy maszyny liczącej w celu sporządzenia wykresu $\delta_1 = f(\delta_2)$. Przy jednoczesnej komutacji prostowników napięcie na odbiorniku oraz napięcie fazowe równe jest zeru. Na rys. 30b przedstawiono przebieg napięcia odbiornika i napięcia fazy a.
Z analizy przebiegu napięć fazowych $U_a(t)$, $U_b(t)$, $U_c(t)$ otrzymamy

$$B_{1\,max} = I_{max} R_w \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{1+\varrho^2}}{\varrho} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \left[\left(-\frac{1}{3}\right) \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} + \varphi\right) \sin \omega t + \right.$$

$$+ \frac{2}{3} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3} + \varphi\right) \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} + \varphi\right) \sin\left(\omega t + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{2\pi}{3}\right)\right] d(\omega t), \tag{62}$$

$$A_{1\,max} = I_{max} R_w \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{1+\varrho^2}}{\varrho} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \left[\left(-\frac{1}{3}\right) \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} + \varphi\right) \cos \omega t + \right.$$

$$+ \frac{2}{3} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3} + \varphi\right) \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} + \varphi\right) \cos\left(\omega t + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{2\pi}{3}\right)\right] d(\omega t).$$

Obliczymy wartości współczynników k_i i k_u dla małych wartości ϱ występujących w przypadku, gdy odbiornikiem jest obwód uzwojenia wzbudzenia.

$$\varrho = \frac{R_w}{X_w} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \approx \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \approx \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Dla małych wartości ϱ możliwe jest rozwiązanie równania metodą analityczną. Kąty δ_1 i δ_2 zbliżone są do wartości $\frac{\pi}{6}$.

Wprowadzimy oznaczenia

$$\delta_1 = \frac{\pi}{6} - \vartheta_1,$$

$$\delta_2 = \frac{\pi}{6} + \vartheta_2.$$

Otrzymamy

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \varrho$$

$$\vartheta_2 = \varrho.$$

Równanie (61) przyjmie postać przybliżoną przy $\varrho \to 0$:

$$1 - \vartheta_1^2 = (1 - \varrho^2)\left[1 - 2\varrho\left(\frac{\pi}{3} - \varrho - \vartheta_1\right)\right]. \tag{63}$$

Stąd

$$\vartheta_1 = -\varrho + \sqrt{\varrho \frac{2\pi}{3}}, \tag{64}$$

$$k_i = \frac{3\sqrt{2}}{\pi I_{max}} \int_0^{\pi/3} I_{kw}(t)\, d(\omega t) = \sqrt{2}, \tag{65}$$

$$B_{1max} = I_{max} R_w \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{1+\varrho^2}}{\varrho} \int_{-\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left[\left(-\frac{1}{3}\right)\sin(x-\varrho)\sin(30^\circ + x) + \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{2}{3}\right)\sin(x-\varrho)\cos X + \frac{1}{3}\sin(x-\varrho)\sin(x-30^\circ)\right] dx = \tag{66}$$

$$= I_{max} R_w \frac{2\sqrt{1+\varrho^2}}{3},$$

$$A_{1max} = 0,$$

$$k_u = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\varrho^2}} \approx \frac{3\sqrt{2}}{2+\varrho^2}, \tag{67}$$

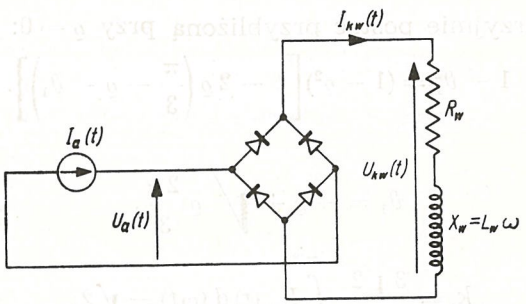
$$k_r \approx \frac{3}{2+\varrho^2}.$$

Wprowadzając powyższe zależności pominęliśmy oporność prostowników w kierunku przepuszczania. Przy małym współczynniku ϱ możemy stosunkowo łatwo uwzględnić wpływ oporności prostownika zważywszy, że w przeważającej części okresu występuje prąd wyrównawczy w obwodzie obciążenia. Na rys. 30c przedstawiono przebiegi napięcia $U_{kw}(t)$ oraz $U_a(t)$ przy uwzględnieniu oporności prostownika. Przy stałej wartości oporności prostownika spadek napięcia na prostownikach wytworzony przez prąd wyrównawczy nie wpływa na napięcie fazowe, z drugiej strony spadek napięcia na prostownikach wytworzony przez prąd zasilania nie zmienia napięcia na odbiorniku. Otrzymamy zatem skorygowaną wartość współczynnika

$$k'_u = \frac{k_u}{1 + \frac{k_u}{k_i}\frac{R_{p1}}{2R_w}},$$

$$k'_i = k_i,$$

gdzie R_{p1} — oporność jednej gałęzi prostownika w kierunku przepuszczania.



Rys. 31. Wyidealizowany schemat jednofazowego obwodu prostowniczego zasilanego ze źródła prądowego

Rozpatrzmy teraz jednofazowy układ prostowniczy (rys. 31) zasilany ze źródła prądowego o sinusoidalnej zmienności

$$I_a(t) = I_{max} \sin \omega t. \tag{68}$$

W odróżnieniu od układu trójfazowego zjawisko jednoczesnej komutacji występuje przy każdej wartości kąta obciążenia $\varphi > 0$.

Otrzymamy

w przedziale $\delta_1 \leqslant \omega t \leqslant \delta_2 = \pi - \varphi$

$$I_{kw}(t) = I_a(t) = I_{max} \sin \omega t, \tag{69}$$

$$U_{kw}(t) = I_{max} Z_w \sin(\omega t + \varphi); \tag{70}$$

w przedziale $\delta_2 \leqslant \omega t \leqslant \pi + \delta_1$

$$I_{kw}(t) = I_{wyr}(t) = I_{max} \sin \varphi \, e^{-\varrho(\pi - \delta_2 + \omega t)}. \tag{71}$$

Uwzględniając, że przy końcu jednoczesnej komutacji prąd odbiornika obliczony z równania (69) i (71) jest identyczny, otrzymamy równanie określające kąt δ_1

$$\sin\delta_1 = \sin\delta_2\, e^{-\varrho(\pi-\delta_2-\delta_1)}, \tag{72}$$

$$I_{kw} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} I_{kw}(t)\,d(\omega t) = \frac{I_{max}}{\pi}\left[\int_{\delta_1}^{\delta_2}\sin\omega t\,d(\omega t) + \int_{\delta_2}^{\pi+\delta_1}\sin\delta_2\, e^{-\varrho(\pi-\delta_2+\omega t)}\,d(\omega t)\right] =$$

$$= \frac{I_{max}}{\pi}\left[\frac{\sqrt{1+\varrho^2}-\sin\delta_1}{\varrho} + \cos\delta_1\right] \tag{73}$$

Obliczenie współczynników k_u i k_i ograniczymy do przypadku odbiornika o małej wartości $\varrho \to 0$.

$$\delta_1 = \frac{\pi}{2} - \vartheta_1,$$

$$\delta_2 = \frac{\pi}{2} + \vartheta_2,$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \varrho.$$

Równanie (71) przyjmie postać przybliżoną

$$1 - \vartheta_1^2 = (1-\varrho^2)[1 - 2\varrho(\pi - \varrho - \vartheta_1)]. \tag{74}$$

Otrzymamy

$$\vartheta_1 = -\varrho + \sqrt{\varrho 2\pi}, \tag{75}$$

$$I_{kw} = I_{max}, \tag{76}$$

$$k_i = \sqrt{2},$$

$$B_{1\,max} = I_{max} R_w \frac{2}{\pi}\int_{-\vartheta_1}^{\vartheta_2}\sin(\varrho - x)\cos x\,dx = I_{max} R_w 2\sqrt{1+\varrho^2}, \tag{77}$$

$$A_{1\,max} = 0,$$

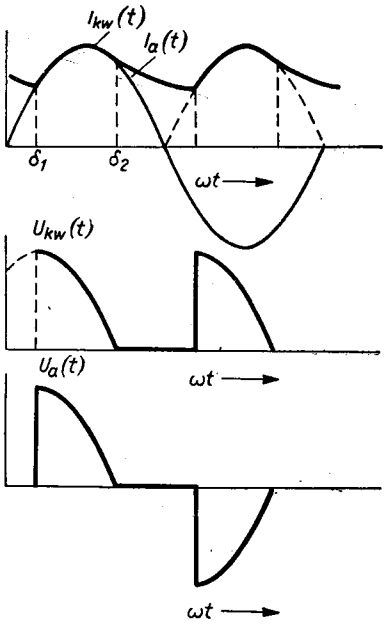
$$k_u = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\varrho^2}} \approx \frac{\sqrt{2}}{2+\varrho^2}, \tag{78}$$

$$k_r \approx \frac{1}{2+\varrho^2} \tag{79}$$

Na rys. 32 przedstawiono przebiegi prądu i napięcia prostownika. Jeżeli uwzględnimy w sposób przybliżony wpływ oporności prostowników w kierunku przepuszczenia na współczynnik k_u', otrzymamy

$$k_u' = \frac{k_u}{1 + \dfrac{k_u}{k_i}\dfrac{R_{p1}}{R_w}}. \tag{80}$$

Jeśli prostownik obciążony odbiornikiem o dużej indukcyjności jest zasilany ze źródła prądowego, napięcie fazowe ulega znacznie silniejszemu odkształceniu w porównaniu z analogicznym odkształceniem prądu obciążenia prostownika przy zasilaniu go ze źródła napięciowego. Przy



Rys. 32. Przebiegi prądu i napięcia prostownika

$\varrho \to 0$ skuteczna wartość napięcia fazowego rośnie nieograniczenie przy skończonej wartości podstawowej harmonicznej [6]. W związku z tym przy posłużeniu się współczynnikami k_u, k_i, k_r obliczonymi z rozkładu harmonicznego napięcia fazowego otrzymujemy mniejszą zgodność obliczeń z doświadczeniem. Dokładność wyników powyższych obliczeń zmniejszona jest ponadto na skutek zastąpienia uzwojenia wzbudzenia maszyny synchronicznej szeregowym układem indukcyjności i oporności czynnej. Założenie zasilania prostownika ze źródła prądowego jest również uproszczeniem, ponieważ w rzeczywistości oporność zastępcza układu kompoundacji z pojemnością rezonansową nie jest nieograniczenie duża, lecz ma, jak to wykazaliśmy, wartość skończoną. W przypadku zastosowania korektora napięcia z równolegle przyłączonym członem wykonawczym tracimy jeszcze bardziej własności źródła prądowego, ponieważ maleje oporność zastępcza układu zasilania prostownika.

Pominięta w rozważaniach reaktancja magnesowania transformatora prądowego względnie reaktancja magnesowania transformatora dopasowującego (o ile został zastosowany) powoduje analogiczne działanie bocznikujące. Reaktancje magnesowania transformatora ulegające

zmniejszeniu na skutek nasycenia, przy dużym wzroście napięcia wpływają korzystnie na pracę układu, ponieważ ograniczają szczytowe wartości napięcia przyłożonego do prostownika i chronią go w ten sposób od nadmiernych przepięć.

11. WYTYCZNE DO PROJEKTOWANIA UKŁADÓW FAZOWEJ KOMPOUNDACJI WZBUDZENIA

1. Układ kompoundacji bez pojemności rezonansowej

Opracowanie wytycznych ograniczymy do trójfazowego układu równoległego, który wykazuje lepsze własności regulacyjne w stanie nieustalonym od układu szeregowego [8]. Podstawą do wyboru parametrów układu kompoundacji powinien być dobór optymalnej wartości napięcia $\underline{U}_{wo\sim}$. Przy optymalnej wartości $\underline{U}_{wo\sim}$ występuje minimum łącznej mocy typowej układu kompoundacji lub minimum ciężaru elementów.

W celu określenia optymalnej wartości $\underline{U}_{wo\sim}$ musimy założyć sobie układ kompoundacji. Układ podstawowy składa się z dwu elementów: transformatora prądowego i dławika. Łączna moc typowa uzwojeń tych dwóch elementów równa się sumie $S_T + S_D$. Optimum wartości $\underline{U}_{wo\sim}$ otrzymujemy w pobliżu minimum łącznej mocy typowej. Uproszczone wzory na moc typową uzwojeń transformatora i dławika wyprowadzono w rozdz. 5 przy pominięciu reaktancji prostownika X_p, kosztem dokładności obliczeń. Przy projektowaniu układu kompoundacji musimy uwzględnić reaktancję prostownika X_p. Uwzględnienie reaktancji prostownika prowadzi do uściślenia wyrażeń określających moc typową uzwojeń transformatora i dławika.

Wprowadziwszy $\varkappa = \frac{X_p}{X}$ otrzymamy

$$\underline{S}_T = 2(1 + \underline{X}_d)\underline{X}_d \sqrt{1 + \left(\varkappa \frac{X}{R}\right)^2} \sqrt{\left(\frac{R}{X}\right)^2 + (1 + \varkappa)^2}, \tag{81a}$$

$$\underline{S}_D = (1 - \underline{X}_d \varkappa)^2 \frac{X}{R} + \underline{X}_d^2 \frac{R}{X}, \tag{82a}$$

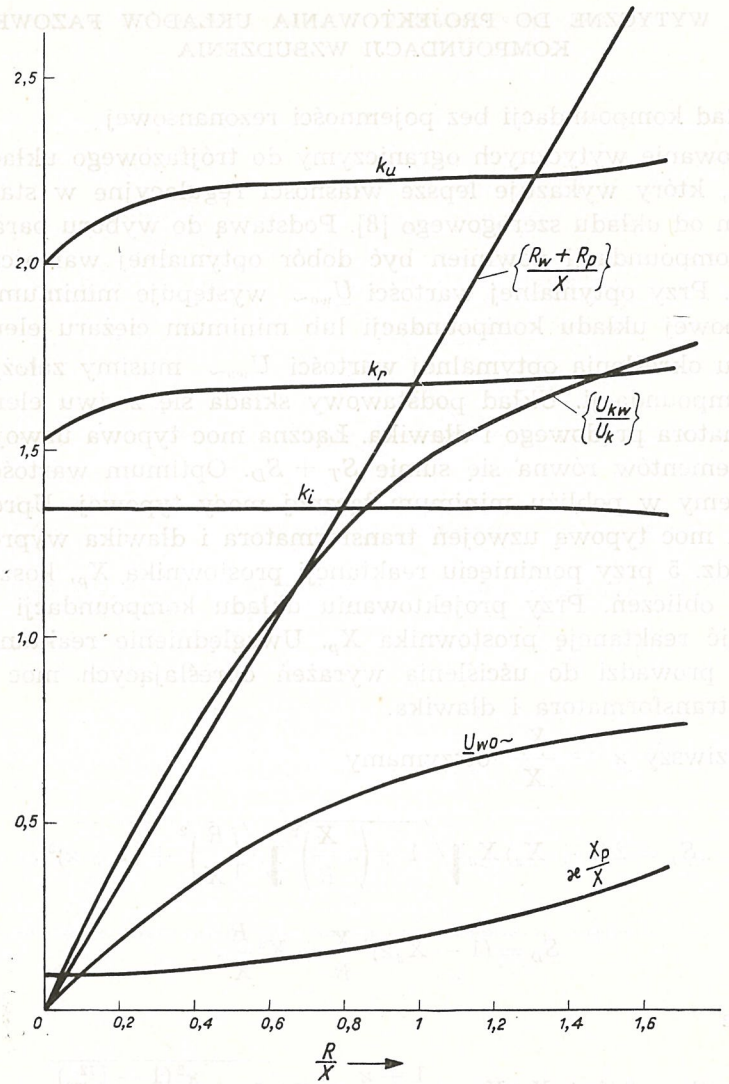
względnie

$$\underline{S}_T = 2(1 + \underline{X}_d)\underline{X}_d \frac{1 + \varkappa}{\sqrt{1 - \underline{U}_{wo\sim}^2}} \sqrt{1 + \frac{\varkappa^2(1 - \underline{U}_{wo}^2)}{\underline{U}_{wo\sim}^2}}, \tag{81b}$$

$$\underline{S}_D = \frac{1 + \varkappa}{\sqrt{1 - \underline{U}_{wo\sim}^2}} \left[\underline{X}_d^2 \underline{U}_{wo\sim} + \left(\frac{1 - \varkappa \underline{X}_d}{1 + \varkappa}\right)^2 \left(\frac{1}{\underline{U}_{wo\sim}} - \underline{U}_{wo\sim}\right) \right]. \tag{82b}$$

W granicy $\varkappa \to 0$ wypadają identyczne zależności jak w równaniu (19c) i (20b).

Z uwagi na uwikłaną zależność reaktancji prostownika od parametrów układu kompoundacji wyznaczenie zależności mocy typowej w funkcji napięcia $\underline{U}_{wo\sim}$ musimy poprzedzić obliczeniem obwodu pro-



Rys. 33. Wykres pomocniczy

stowniczego w celu wyznaczenia współczynnika $\varkappa$. Wartość współczynnika $\varkappa = f(\underline{U}_{wo\sim})$ otrzymujemy z wykresu pomocniczego sporządzonego na podstawie analizy obwodu prostowniczego.

Na rys. 33 przedstawiono wykres pomocniczy zawierający charakterystyki

$$k_u, k_i, k_r = f\left(\frac{R}{X}\right),$$

$$\left\{\frac{R_w + R_p}{X}\right\} = f\left(\frac{R}{X}\right),$$

$$\left\{\frac{U_{kw}}{U_k}\right\} = f\left(\frac{R}{X}\right),$$

$$U_{wo\sim} = f\left(\frac{R}{X}\right),$$

$$\varkappa = f\left(\frac{R}{X}\right),$$

Wykresy przedstawione na rys. 33 są podstawą do zaprojektowania układu kompoundacji. Przy sporządzaniu wykresów posłużono się równaniami obwodu prostowniczego przy ograniczeniu się do przedziału $0 \leqslant \frac{R_w + R_p}{X} \leqslant \frac{9}{\pi}$. Wartości $\frac{R_w + R_p}{X}$ mieszczące się poza zakresem tego przedziału nie mają znaczenia praktycznego. Wykresy sporządzono na podstawie następujących równań określających, wyprowadzonych w rozdz. 9:

$$\cos(\beta + 30°) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2{,}73\left(\frac{X}{R_w + R_p}\right)^2}} \quad \text{(z równ. 38).}$$

Stąd obliczono β dla bieżących wartości $\frac{X}{R_w + R_p}$

$$\frac{U_{kw}}{U_k} = \frac{R_w + R_p}{X} 1{,}225\,[\cos\beta - \cos(\beta + 60°)] \quad \text{(z równ. 40),}$$

$$C_a = \frac{1{,}038\sin\beta + 0{,}38\cos\beta}{1{,}73\sin\beta + \cos\beta} - 0{,}552 \quad \text{(z równ. 41b),}$$

$$C_b = 1{,}0547 \quad \text{(z równ. 41a),}$$

$$\frac{Z_k}{X} = \frac{2X}{\sqrt{3}\sqrt{C_a^2 + C_b^2}} \cdot \frac{1}{\cos\beta - \cos(\beta + 60°)} \quad \text{(z równ. 40, 42a,b),}$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{C_a}{C_b} \quad \text{(z równ. 42c),}$$

$$\varkappa = \frac{X_p}{X} = \frac{Z_k}{X}[\sin(\beta + 30° - \varphi) - 1] \quad \text{(z równ 42d),}$$

$$\frac{R}{X} = \frac{Z_k}{X}\cos(\beta + 30° - \varphi), \quad \text{(z równ. 42a)}$$

$$k_r = \frac{R_w + R_p}{R} = \left\{\frac{R_w + R_p}{X}\right\}\left\{\frac{X}{R}\right\}, \tag{83}$$

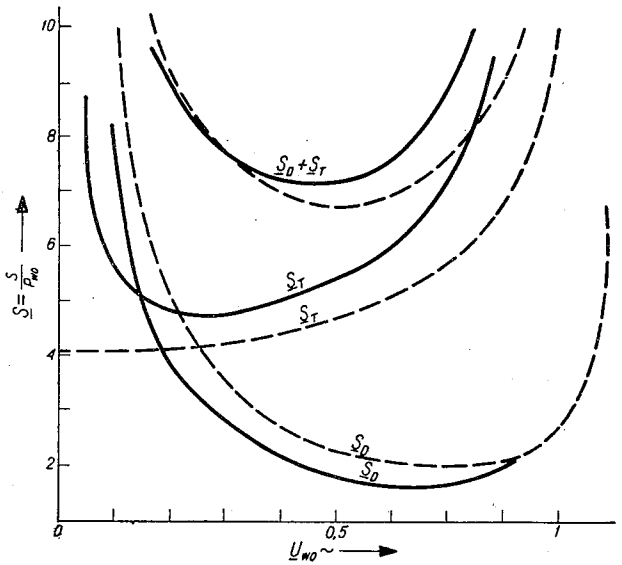
$$k_i = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{C_a^2 + C_b^2}} \quad \text{(z równ. 43b)},$$

$$k_u = k_r k_i \quad \text{(z równ. 43c)},$$

$$\underline{U}_{wo\sim} = \frac{\frac{R}{X}}{\sqrt{\left(\frac{R}{X}\right)^2 + (1+\varkappa)^2}}, \tag{84}$$

$$\frac{X}{R} = \frac{1}{1+\varkappa}\,\frac{\sqrt{1 - \underline{U}_{wo\sim}^2}}{\underline{U}_{wo\sim}}.$$

Na podstawie wykresu pomocniczego można otrzymać dla każdej wartości $\underline{U}_{wo\sim}$ współczynnik $\varkappa$ wchodzący do równania (81) i (82). Dla $\underline{U}_{wo\sim}$zawartego w przedziale od 0 do około 0,3 współczynnik $\varkappa$ jest zbliżony do 0,1. W celu wyznaczenia optymalnej wartości $\underline{U}_{wo\sim}$ sporządzamy wykres mocy typowej uwzględniając założoną reaktancję X_d generatora.



Rys. 34. Wykres mocy typowej uzwojeń podstawowego układu fazowej kompoundacji wzbudzenia

Na rys. 34 przedstawiono zależność mocy typowej uzwojeń transformatora i dławika w funkcji $\underline{U}_{wo}$ przy uwzględnieniu reaktancji prostownika przyjmując generator o reaktancji $\underline{X}_d = 1$. Uwzględnienie reaktancji prostownika prowadzi do rosnącej rozbieżności mocy transformatora

przy malejącej wartości $\underline{U}_{wo\sim}$. Dla porównania zaznaczono linią przerywaną odnośne wykresy obliczone przy pominięciu reaktancji prostownika. Z wykresu wypada napięcie optymalne $\underline{U}_{wo\sim opt} \approx 0{,}43$. W przypadku gdy projektujemy zarówno uzwojenie wzbudzenia generatora (o niskim napięciu twornika), jak i układ kompoundacji, obieramy najprostszy układ przedstawiony na rys. 3. W układzie tym otrzymamy

$$R_w + R_p = \left\{\frac{U_{kw}}{U_k}\right\} \frac{U_{gN}}{P_{wo}}, \tag{86}$$

$$P_{wo} = P_{wow}\left(1 + \frac{R_p}{R_w}\right),$$

przy czym P_{wow} — idealna moc wzbudzenia przy biegu jałowym bez uwzględnienia oporności prostownika w kierunku przepuszczania. Przy zastosowaniu prostowników selenowych możemy przyjąć przeciętnie

$$\frac{R_p}{R_w} \approx 0{,}2 \ldots 0{,}3.$$

Znając oporność uzwojenia wzbudzenia R_w, w [Ω], średnią długość zwoju uzwojenia l_w w [cm] i objętość miedzi uzwojenia V_w w [cm³] otrzymamy przekrój drutu q_w w [mm²] oraz liczbę zwojów uzwojenia wzbudzenia z_w

$$q_w = \frac{V_w 10^{-2}}{\gamma_{cu} R_w}, \tag{87a}$$

$$z_w = \frac{V_w}{l_w q_w}, \tag{87b}$$

przy czym γ_{cu} — przewodność właściwa uzwojenia wzbudzenia w $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{mm^2\,\Omega}}\right]$ przy maksymalnym nagrzaniu uzwojenia.

Reaktancja dławika

$$X = R_w\left(1 + \frac{R_p}{R_w}\right)\frac{1}{\left\{\frac{R_w + R_p}{X}\right\}}. \tag{88a}$$

Przekładnia transformatora prądowego z równ. (12)

$$\vartheta = \frac{X_d}{X}. \tag{88b}$$

Wartości ujęte w nawias klamrowy otrzymujemy z wykresu na rys. 33. Ponieważ z reguły mamy do czynienia z generatorem o nasyconym obwodzie mgnetycznym, układ kompoundacji daje błędy stabilizacji napięcia. Korektor napięcia koryguje błędy stabilizacji. Jeżeli człon wykonawczy korektora działa jednokierunkowo w kierunku zmniejszenia wysterowania uzwojenia wzbudzenia, narzucamy układowi kompoundacji zadanie dokładnej stabilizacji w punkcie biegu jałowego i w punkcie znamionowego obciążenia przy $\cos\varphi = 0_{ind}$. Warunek dwupunktowej

dokładnej stabilizacji będzie spełniony, jeśli do równań określających parametry układu kompoundacji wstawimy zastępczą reaktancję $\underline{X}_{d}$ obliczoną ze wzoru (14b)

$$\underline{X}_{de} = \frac{I_{wL} - I_{wo}}{I_{wo}}.$$

Prąd strony wtórnej transformatora

$$I = I_{gN}\vartheta.$$

Napięcie fazowe strony wtórnej transformatora

$$U_T = \frac{S_T}{6I},$$

względnie

$$U_T = \frac{I_{wL}}{k_i}\sqrt{\left(\frac{R_w + R_p}{k_r}\right)^2 + (\varkappa X)^2}.$$

Prąd fazowy dławika

$$I_D = \sqrt{\frac{S_D}{3X}},$$

względnie

$$I_D = \frac{U_{gN}}{X}\sqrt{\frac{(1 - \underline{X}_{de}\varkappa)^2 + \left(\underline{X}_{de}\frac{R}{X}\right)^2}{\left(\frac{R}{X}\right)^2 + (1 + \varkappa)^2}}.$$

Napięcie fazowe dławika

$$U_D = I_D X = \sqrt{\frac{S_D X}{3}}.$$

W przypadku generatora, którego liczba zwojów uzwojenia wzbudzenia nie może ulec zmianie, dokonujemy zmiany parametrów obwodu wzbudzenia za pomocą transformatora dopasowującego (rys. 4), transformatora napięciowego (rys. 6) lub trójuzwojeniowego transformatora kompoundacji (rys. 5). Tok obliczeń układu kompoundacji jest analogiczny jak w przypadku układu podstawowego. W układzie kompoundacji przedstawionym na rys. 4 przekładnia zwojowa transformatora dopasowującego

$$\vartheta_d = \frac{z_1}{z_w} = \left\{\frac{U_{kw}}{U_k}\right\}\frac{U_{gN}}{\sqrt{P_{wo} R_w\left(1 + \frac{R_p}{R_w}\right)}}, \tag{89a}$$

reaktancja dławika

$$X = R_w\left(1 + \frac{R_p}{R_w}\right)\vartheta^2\frac{1}{\left\{\frac{R_w + R_p}{X}\right\}}. \tag{89b}$$

W układzie kompoundacji przedstawionym na rys. 6 otrzymamy przekładnię zwojową transformatora napięciowego

$$\vartheta_u = \frac{z_1}{z_u} = U_{gN}\left\{\frac{U_{kw}}{U_k}\right\}\frac{1}{\sqrt{P_{wo}R_w\left(1+\frac{R_p}{R_w}\right)}} \tag{90a}$$

oraz reaktancję dławika

$$X = R_w\left(1+\frac{R_p}{R_w}\right)\frac{1}{\left\{\frac{R_w+R_p}{X}\right\}}. \tag{90b}$$

W układzie przedstawionym na rys. 5 otrzymamy przekładnię zwojową trójuzwojeniowego transformatora kompoundacji

$$\vartheta_{uw} = \frac{z_u}{z_w} = \left\{\frac{U_{kw}}{U_k}\right\}\frac{U_{gN}}{\sqrt{P_{wo}R_w\left(1+\frac{R_p}{R_w}\right)}}, \tag{91a}$$

$$\vartheta_{iu} = \frac{z_i}{z_u} = \frac{\underline{X}_{de}}{X}\frac{U_{gN}}{I_{gN}}, \tag{91b}$$

$$X = R_w\left(1+\frac{R_p}{R_w}\right)\vartheta_{uw}^2\frac{1}{\left\{\frac{R_w+R_p}{X}\right\}}. \tag{91c}$$

Wartości optymalnego napięcia $\underline{U}_{wo\sim}$ otrzymamy przy minimum mocy typowej uzwojeń wszystkich transformatorów i dławika. Prócz mocy typowej transformatora prądowego i dławika występuje w takich układach pochodnych moc transformatora dopasowującego i transformatora napięciowego. Moc typową uzwojeń (uzwojenia pierwotnego i wtórnego) transformatora dopasowującego S_{td} możemy przedstawić w postaci

$$\underline{S}_{td} = \frac{S_{td}}{P_{wo}} = 2(1+\underline{X}_{de})^2\sqrt{1+\left(\varkappa\frac{X}{R}\right)^2}. \tag{92a}$$

względnie

$$\underline{S}_{td} = 2(1+\underline{X}_{de})^2\sqrt{1-\left(\frac{\varkappa}{1+\varkappa}\right)^2+\left(\frac{\varkappa}{1+\varkappa}\right)^2\frac{1}{\underline{U}_{wo\sim}^2}}. \tag{92b}$$

Moc typową uzwojeń (uzwojenia pierwotnego i wtórnego) transformatora napięciowego S_{tn} otrzymamy z równania

$$\underline{S}_{tn} = \frac{S_{tn}}{P_{wo}} = 2\sqrt{1+\left[\frac{X}{R}(1+\varkappa)\right]^2}\sqrt{(1-\underline{X}_{de}\varkappa)^2+\left(\underline{X}_{de}\frac{R}{X}\right)^2}, \tag{93a}$$

względnie

$$\underline{S}_{tn} = \frac{2}{\underline{U}_{wo\sim}\sqrt{1-\underline{U}_{wo\sim}^2}}\sqrt{(1+\underline{X}_{de}\varkappa)^2+[\underline{X}_{de}^2-1+2\varkappa\underline{X}_{de}(\underline{X}_{de}+1)]\underline{U}_{wo\sim}^2}. \tag{93b}$$

Moc typowa uzwojeń trójuzwojeniowego transformatora kompoundacji jest sumą mocy pozornych wszystkich trzech uzwojeń

$$\underline{S}_{tk} = \frac{S_{tk}}{P_{wo}} = (1 + \underline{X}_{de}) \sqrt{1 + \left(\varkappa \frac{X}{R}\right)^2} \left[1 + \underline{X}_{de} + \right.$$
$$\left. + \sqrt{(1 - \underline{X}_{de}\varkappa)^2 + \left(\underline{X}_{de} \frac{R}{X}\right)^2} + \underline{X}_{de} \sqrt{\left(\frac{R}{X}\right)^2 + (1 + \varkappa)^2}\right], \tag{94a}$$

względnie

$$\underline{S}_{tk} = \frac{(1 + \underline{X}_{de}) \sqrt{\left(\frac{\varkappa}{1+\varkappa}\right)^2 + \left[1 - \left(\frac{\varkappa}{1+\varkappa}\right)^2\right] \underline{U}_{wo\sim}}}{\underline{U}_{wo\sim} \sqrt{1 - \underline{U}_{wo\sim}^2}} [\underline{X}_{de}(1 + \varkappa) + \tag{94b}$$
$$+ (1 + \underline{X}_{de}) \sqrt{1 - \underline{U}_{wo\sim}^2} + \sqrt{(1 - \underline{X}_{de}\varkappa)^2 + \underline{U}_{wo\sim}^2 [(\underline{X}_{de}^2 - 1) + 2\underline{X}_{de}\varkappa(1 + \underline{X}_{de})]}]$$

Przy założeniu idealnych transformatorów (bez rozproszeń i o pomijalnie małym prądzie magnesującym) moc bierna pobierana przez układ kompoundacji jest równa sumie mocy pozornej dławika i mocy biernej traconej na reaktancji prostownika

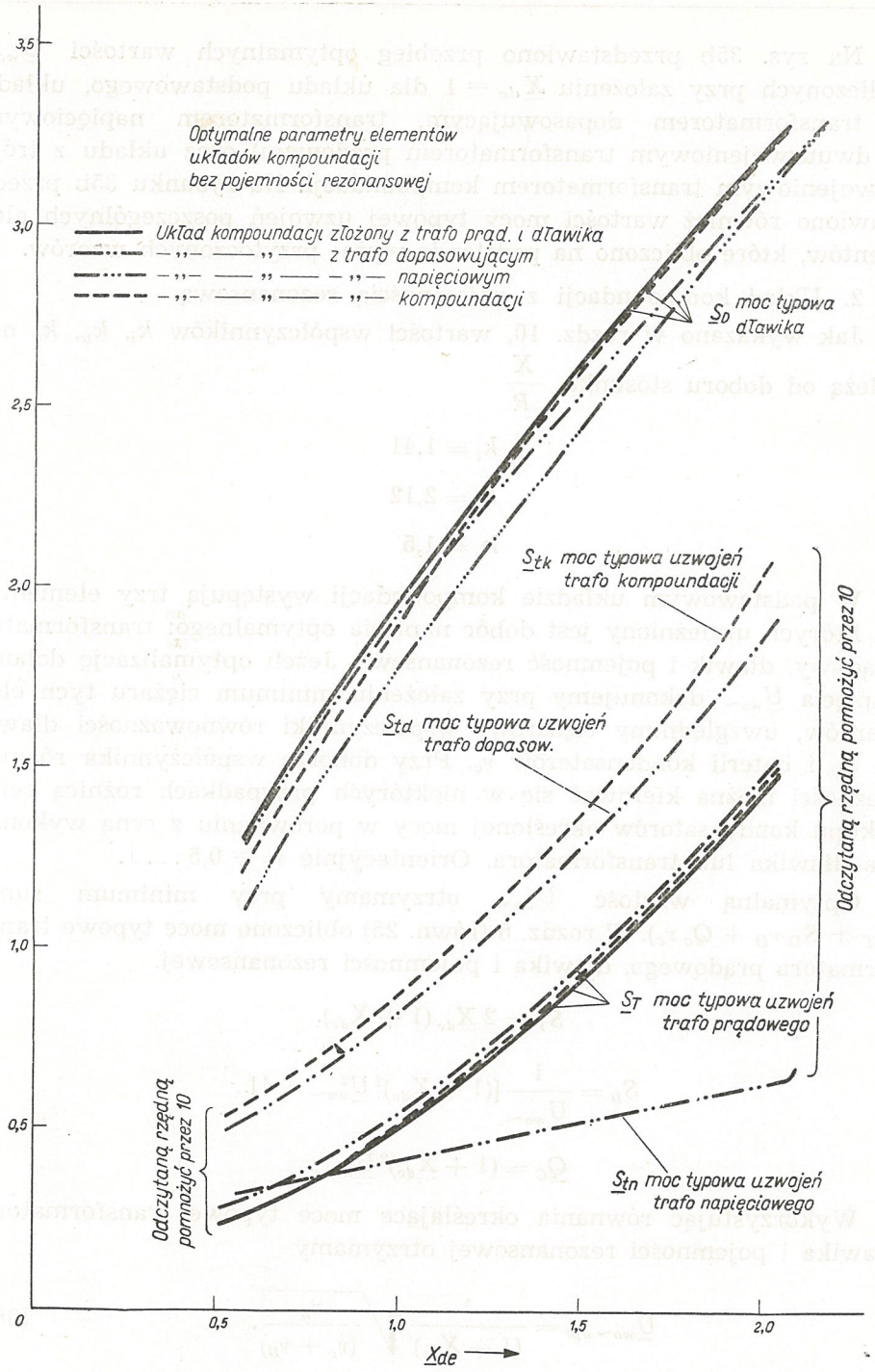
$$\underline{Q}_K = \frac{S_D + Q_p}{P_{wo}} = (1 - \varkappa \underline{X}_{de})^2 \frac{X}{R} + \underline{X}_{de}^2 \frac{R}{X} + (1 + \underline{X}_{de})^2 \varkappa \frac{X}{R}, \tag{95a}$$

względnie

$$\underline{Q}_K = \frac{1 + \varkappa}{\sqrt{1 - \underline{U}_{wo\sim}^2}} \left[\underline{X}_{de}^2 \underline{U}_{wo\sim} + \left(\frac{1 - \varkappa \underline{X}_{de}}{1 + \varkappa}\right)^2 \left(\frac{1}{\underline{U}_{wo\sim}} - \underline{U}_{wo\sim}\right)\right] + \tag{95b}$$
$$+ (1 + \underline{X}_{de}) \frac{\varkappa}{1 + \varkappa} \frac{\sqrt{1 - \underline{U}_{wo\sim}^2}}{\underline{U}_{wo\sim}}$$

Moc typową poszczególnych elementów składowych zdefiniowaliśmy uprzednio jako maksymalną moc pozorną uzwojeń tych elementów przy indukcyjnym obciążeniu generatora prądem znamionowym.

Dobór optymalnych parametrów układu kompoundacji można zmodyfikować kierując się nie minimalną mocą pozorną uzwojeń, lecz minimalnym ciężarem elementów. Ciężar dławików i transformatorów jest wprawdzie monotoniczną funkcją mocy pozornej uzwojeń, jednakże możemy uwzględnić różnice tej zależności dla transformatora i dławika wynikające z innej budowy tych elementów za pomocą pewnego ciężarowego współczynnika równoważności dławika. W konsekwencji w podstawowym układzie kompoundacji fazowej złożonym z transformatora prądowego i dławika optimum napięcia $\underline{U}_{wo\sim}$ z punktu widzenia minimum ciężaru występuje przy minimum wyrażenia $(S_D \cdot \nu_D + S_T)$. Współczynnik ν_D jest na ogół zbliżony do jedności.



Rys. 35a. Wykres mocy typowych w funkcji reaktancji $_{de}$ dla układu podstawowego, układu z transformatorem dopasowującym, transformatorem napięciowym oraz układu z trójuzwojeniowym transformatorem kompoundacji

Na rys. 35b przedstawiono przebieg optymalnych wartości $\underline{U}_{wo\sim}$ obliczonych przy założeniu $\underline{X}_{de} = 1$ dla układu podstawowego, układu z transformatorem dopasowującym, transformatorem napięciowym (z dwuuzwojeniowym transformatorem prądowym) oraz układu z trójuzwojeniowym transformatorem kompoundacji. Na rysunku 35b przedstawiono również wartości mocy typowej uzwojeń poszczególnych elementów, które obliczono na podstawie wyżej przytoczonych wzorów.

2. Układ kompoundacji z pojemnością rezonansową

Jak wykazano w rozdz. 10, wartości współczynników k_i, k_u, k_r nie zależą od doboru stosunku $\frac{X}{R}$

$$k_i = 1{,}41$$

$$k_u = 2{,}12$$

$$k_r = 1{,}5$$

W podstawowym układzie kompoundacji występują trzy elementy, od których uzależniony jest dobór napięcia optymalnego: transformator prądowy, dławik i pojemność rezonansowa. Jeżeli optymalizację doboru napięcia $\underline{U}_{wo\sim}$ dokonujemy przy założeniu minimum ciężaru tych elementów, uwzględnimy ciężarowe współczynniki równoważności dławika ν_D i baterii kondensatorów ν_c. Przy doborze współczynnika równoważności można kierować się w niektórych przypadkach różnicą ceny zakupu kondensatorów określonej mocy w porównaniu z ceną wykonania dławika lub transformatora. Orientacyjnie $\nu_c = 0{,}5 \ldots 1$.

Optymalną wartość $\underline{U}_{wo\sim}$ otrzymamy przy minimum sumy $(S_T + S_D \nu_D + Q_c \nu_c)$. W rozdz. 6 (równ. 25) obliczono moce typowe transformatora prądowego, dławika i pojemności rezonansowej.

$$\underline{S}_T = 2\,\underline{X}_{de}(1 + \underline{X}_{de}).$$

$$\underline{S}_D = \frac{1}{\underline{U}_{wo\sim}}[(1 + \underline{X}_{de})^2\,\underline{U}^2_{wo\sim} + 1].$$

$$\underline{Q}_C = (1 + \underline{X}_{de})^2\,\underline{U}_{wo\sim}.$$

Wykorzystując równania określające moce typowe transformatora, dławika i pojemności rezonansowej otrzymamy

$$\underline{U}_{wo\sim\,opt} = \frac{1}{(1 + \underline{X}_{de})}\sqrt{\frac{\nu_D}{(\nu_c + \nu_D)}}, \tag{96a}$$

$$R_w = \frac{(\underline{U}_{wo\sim} k_u U_{gN})^2}{P_{wo}\left(1 + \frac{R_p}{R_w}\right)}, \tag{96b}$$

$$X = \frac{R_w\left(1+\frac{R_p}{R_w}\right)}{k_r \underline{U}_{wo\sim}}, \tag{96c}$$

$$\vartheta = \frac{\underline{X}_{de}}{X}\frac{U_{gN}}{I_{gN}}. \tag{96d}$$

Prąd i napięcie dławika możemy obliczyć wychodząc z mocy typowej S_D

$$I_D = \sqrt{\frac{S_D}{3X}},$$

$$U_D = \sqrt{\frac{S_D X}{3}},$$

względnie z równania

$$I_D = \frac{U_{gN}}{X}\sqrt{(1+\underline{X}_{de})^2\frac{R}{X}+1},$$

$$U_D = I_D X.$$

Jeżeli dane nawojowe wzbudzenia generatora są z góry narzucone, dopasowanie układu kompoundacji do warunków optymalnych uzyskamy za pomocą:

a) transformatora dopasowującego,
b) transformatora napięciowego,
c) trójuzwojeniowego transformatora kompoundacji.

W przypadku a)

$$\vartheta_d = \frac{z_1}{z_w} = \frac{\underline{U}_{wo\sim} k_u U_{gN}}{\sqrt{P_{wo} R_w\left(1+\frac{R_p}{R_w}\right)}}, \tag{98a}$$

$$X = \frac{R_w\left(1+\frac{R_p}{R_w}\right)\vartheta_d^2}{k_r \underline{U}_{wo\sim}}. \tag{98b}$$

W przypadku b)

$$\vartheta_u = \frac{z_1}{z_w} = \frac{\underline{U}_{wo\sim} k_u U_{gN}}{\sqrt{P_{wo} R_w\left(1+\frac{R_p}{R_w}\right)}}, \tag{99a}$$

$$X = \frac{R_w\left(1+\frac{R_p}{R_w}\right)}{k_r \underline{U}_{wo\sim}}. \tag{99b}$$

W przypadku c)

$$\vartheta_{uw} = \frac{z_1}{z_u} = \frac{\underline{U}_{wo\sim} k_u U_{gN}}{\sqrt{P_{wo} R_w \left(1 + \frac{R_p}{R_w}\right)}}, \tag{100a}$$

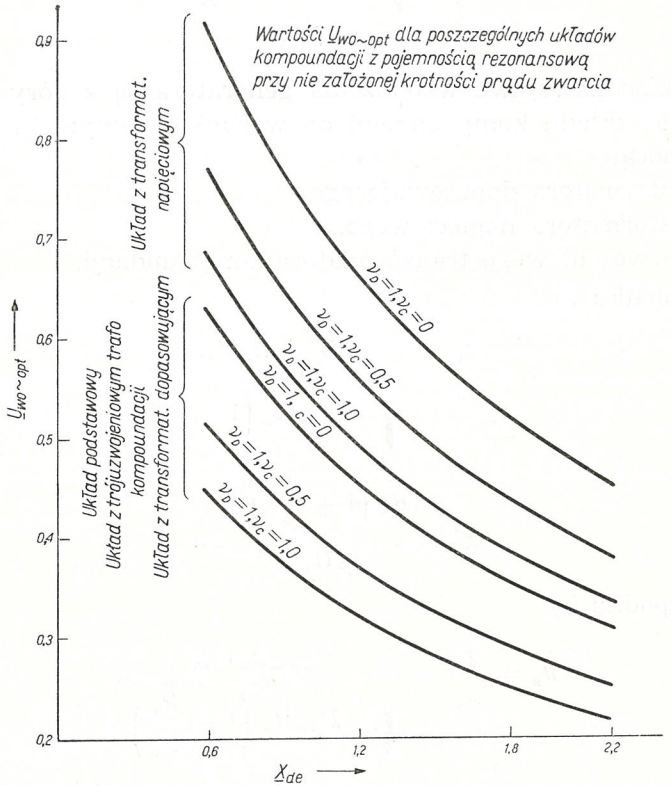
$$\vartheta_{iu} = \frac{z_i}{z_u} = \frac{\underline{X}_{de}}{X} \cdot \frac{U_{gN}}{I_{gN}} \tag{100b}$$

$$X = \frac{R_w \vartheta_{uw}^2 \left(1 + \frac{R_p}{R_w}\right)}{k_r \underline{U}_{wo\sim}}. \tag{100c}$$

Prąd w uzwojeniu napięciowym transformatora

$$I_u = \frac{U_{gN}}{X}. \tag{100d}$$

W odróżnieniu od układu kompoundacji bez pojemności rezonansowej prąd w uzwojeniu napęciowym nie jest równy prądowi dławika.



Rys. 35b. Charakterystyka optymalnego napięcia $\underline{U}_{wo\sim}$ dla podstawowego układu fazowej kompoundacji wzbudzenia, układu z transformatorem dopasowującym, transformatorem napięciowym i trójuzwojeniowym transformatorem kompoundacji

W układach kompoundacji pochodnych od układu podstawowego optymalne napięcie $\underline{U}_{wo\sim}$ otrzymamy przy minimum łącznej mocy typowej składowych elementów układu.

Moc typowa uzwojeń transformatora dopasowującego

$$\underline{S}_{td} = 2(1 + \underline{X}_{de})^2. \tag{101}$$

Moc typowa uzwojeń transformatora napięciowego

$$\underline{S}_{tn} = 2\sqrt{(1 + \underline{X}_{de})^2 + \frac{1}{\underline{U}^2_{wo\sim}}}\,. \tag{102}$$

Moc typowa uzwojeń trójuzwojeniowego transformatora kompoundacji

$$\underline{S}_{tk} = 2(1 + \underline{X}_{de})^2. \tag{103}$$

W przypadku a) i c) optymalna wartość napięcia $\underline{U}_{wo\sim}$ wypada taka sama jak przy układzie podstawowym. W przypadku b) napięcie $\underline{U}_{wo\sim\,opt}$ otrzymamy przy minimalnej mocy typowej $(\underline{S}_D \nu_D + \underline{S}_{tn} + Q_c \nu_c)$. Ponieważ ogólna postać równania określającego optymalną wartość napięcia $\underline{U}_{wo\sim}$ jest bardziej skomplikowana aniżeli w przypadku a) i c), wygodniej jest posłużyć się wykresem przedstawionym na rys. 35b, który obliczono dla trzech szczególnych wartości ν_c.

12. PRĄD ZWARCIA SYMETRYCZNEGO GENERATORA, WSPÓŁCZYNNIK PRZEWYMIAROWANIA ELEMENTÓW UKŁADU FAZOWEJ KOMPOUNDACJI WZBUDZENIA

Przy obliczeniach układu kompoundacji zakładaliśmy, że zarówno transformator prądowy, jak i transformator dopasowujący pracują w zakresie prostoliniowej charakterystyki magnesowania. Pomijaliśmy również reaktancję magnesowania tych transformatorów traktując je jako transformatory idealne. Błędy wynikające z tego uproszczenia przy obliczeniu przekładni zwojowych są nieduże.

Przy dużym napięciu wzbudzenia generatora, jakie występuje przy zwarciu symetrycznym generatora, nasycenie obwodu magnetycznego nie może zostać pominięte. Nasycenie transformatorów i dławika ujednoznacznia wartość prądu zwarcia generatora. Znajomość ustalonego prądu zwarcia generatora jest konieczna z uwagi na dobór napięcia zaworowego prostownika kompoundacji. Przeważnie dobieramy krotność prądu zwarcia twornika generatora I_{gz}/I_{gN} w granicach (4 — 5).

Przy dużym prądzie zwarcia otrzymuje się szybkie przebiegi odbudowy napięcia twornika po ustąpieniu zwarcia. Wartość prądu zwarcia można wyznaczyć wykreślnie jako punkt przecięcia charakterystyki zwarcia generatora $I_{gz} = f(I_w)$ oraz charakterystyki układu kompoundacji $I_{gz} = f(I_{kw})$ rys. 36a, którą wyznaczymy na podstawie schematu zastępczego przedstawionego na rys. 36b. Charakterystykę $I_{g2} = f(I_{kw})$

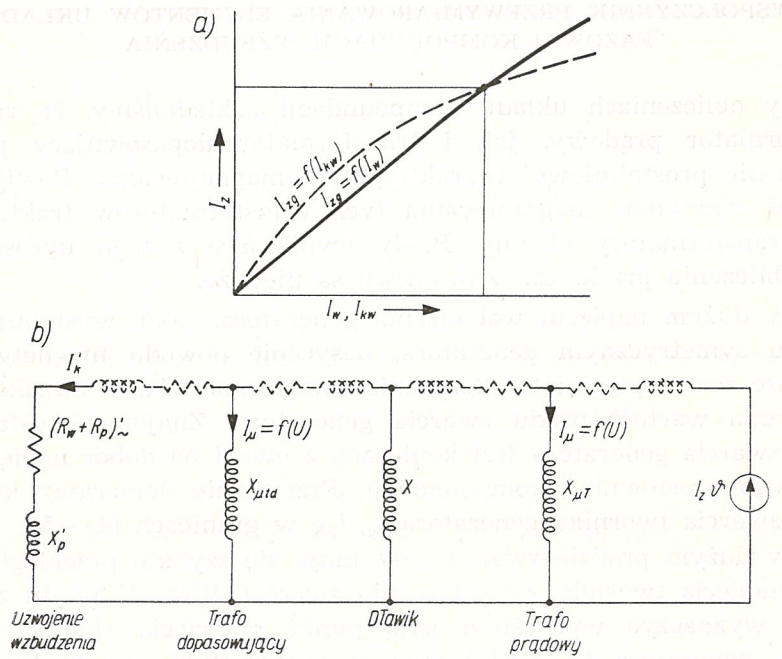
sporządzamy wychodząc z założonych bieżących wartości I_{kw}. Prąd magnesujący transformatora odczytujemy z charakterystyki magnesowania transformatora, dającej związek podstawowych harmonicznych prądu magnesującego i napięcia.

Posługując się schematem zastępczym można uwzględnić reaktancję rozproszeń i oporności czynne uzwojeń, które zaznaczono na schemacie linią przerywaną. Jeżeli obwód magnetyczny jest zbudowany z blach anizotropowych, można dla początkowych obliczeń posłużyć się wyidealizowaną prostokątną charakterystyką magnesowania (o indukcji nasycenia $\pm B_n$), dającą związek podstawowych harmonicznych strumienia i przepływu.

Stosunek indukcji nasycenia B_{tn} w transformatorze (dopasowującym, trójuzwojeniowym transformatorze kompoundacji bądź transformatorze prądowym) do indukcji B_{tL} przy znamionowym obciążeniu indukcyjnym generatora określa współczynnik przewymiarowania ξ_t obwodu magnetycznego transformatora, konieczny do uzyskania pożądanego prądu zwarcia symetrycznego

$$\xi_t = \frac{B_{tn}}{B_{tL}} = \frac{I_{gz}}{I_{gN}} \frac{I_{woi}}{I_{wo}} \frac{\underline{X}_d}{1 + \underline{X}_{de}} \quad (1{,}05 \ldots 1{,}15); \tag{104}$$

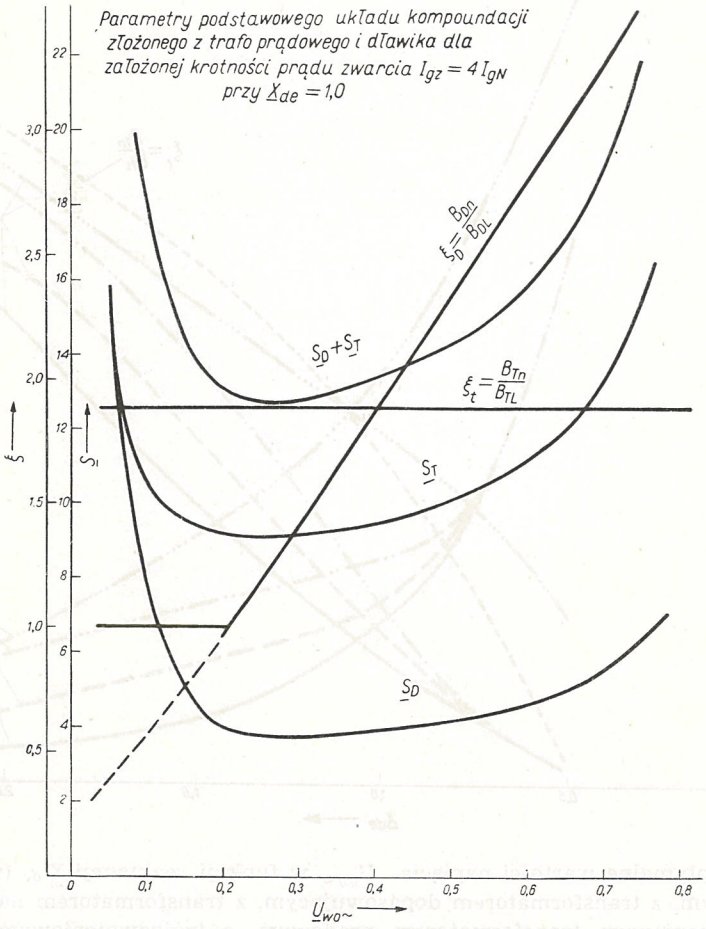
$\underline{X}_d$ — oznacza reaktancję synchroniczną nienasyconą generatora w jednostkach względnych. Współczynnik 1,05... 1,15 uwzględnia rozbież-



Rys. 36. a) Charakterystyka układu kompoundacji i zwarcia generatora, b) Jednofazowy schemat zastępczy obwodów układu kompoundacji przy zwarciu generatora

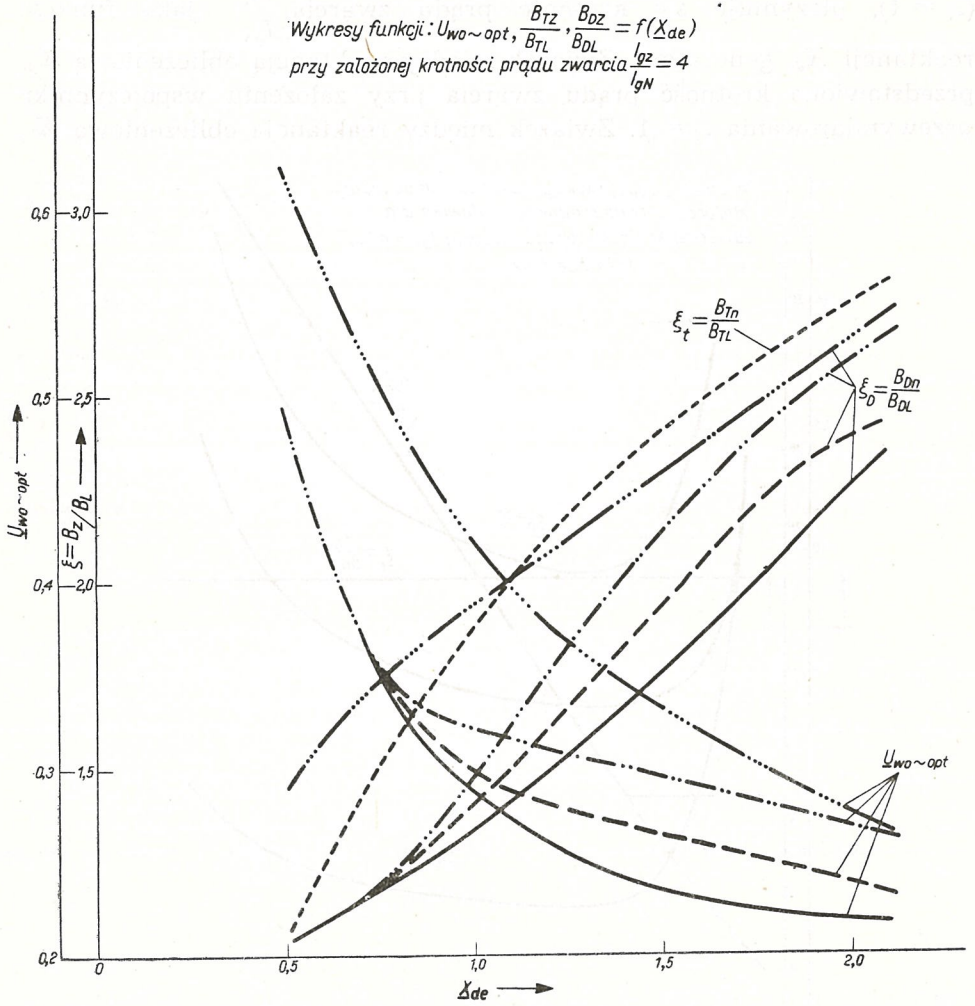
ność rzeczywistej charakterystyki magnesowania anizotropowego obwodu magnetycznego transformatora od charakterystyki wyidealizowanej.

Jeżeli współczynnik ξ_t wypada większy od jedności, musimy uwzględnić wpływ przewymiarowania obwodu magnetycznego transformatora na moc obliczeniową transformatora $S_{to} = S_t \cdot \xi_t$. Od mocy obliczeniowej zależą wymiary geometryczne oraz ciężar transformatora. Przy założeniu, że przy obciążeniu indukcyjnym transformator jest nasycony ($\xi_t = 1$), otrzymuje się krotność prądu zwarcia $\frac{I_{gz}}{I_{gN}}$ jako funkcję reaktancji $\underline{X}_{de}$ generatora. Związek między reaktancją obliczeniową X_{de} przedstawiono krotność prądu zwarcia przy założeniu współczynnika przewymiarowania $\xi_t = 1$. Związek między reaktancją obliczeniową $\underline{X}_{d_e}$



Rys. 37. Charakterystyki mocy obliczeniowych elementów podstawowego układu kompoundacji bez pojemności rezonansowej, obliczone z uwzględnieniem współczynnika przewymiarowania obwodu magnetycznego ξ_t i ξ_D. Założono $v_D = 1$, $\underline{X}_{d\tilde{e}} = 1$, $\underline{X}_s = 0{,}125$ oraz normalną charakterystykę magnesowania

i reaktancją synchroniczną nienasyconą $\underline{X}_d$ potrzebny do sporządzenia wykresu otrzymano posługując się normalną charakterystyką magnesowania maszyn synchronicznych [5] i przyjmując względną reaktancję rozproszenia $\underline{X}_s = 0{,}125$. Przy obliczeniu dławika uwzględniamy analogiczny współczynnik przewymiarowania obwodu magnetycznego ze względu na pożądany prąd zwarcia generatora przyjmując wyidealizo-



Rys. 38a. Optymalne wartości napięcia $\underline{U}_{wo\sim}$ w funkcji reaktancji $\underline{X}_{de}$ (w układzie podstawowym, z transformatorem dopasowującym, z transformatorem napięciowym i dwuuzwojeniowym transformatorem prądowym, z trójuzwojeniowym transformatorem kompoundacji). Założono $\nu_D = 1$, $\frac{I_{gz}}{I_{gN}} = 4$, $\underline{X}_s = 0{,}15$ oraz normalną charakterystykę magnesowania. Układ kompoundacji bez pojemności rezonansowej. Przyporządkowanie linii do odnośnych układów jak na rys. 35a

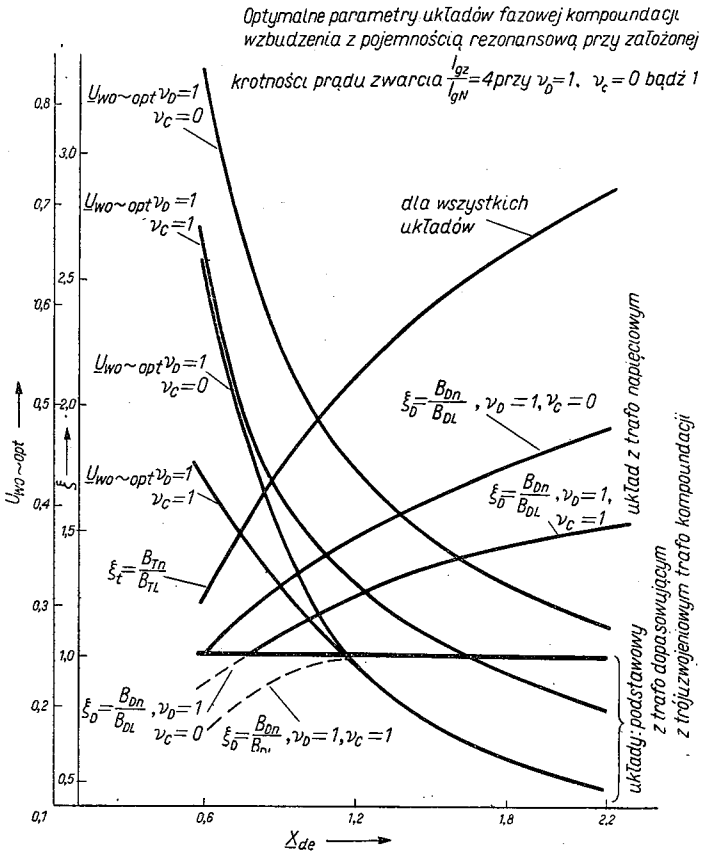
waną charakterystykę magnesowania. W układzie kompoundacji bez pojemności rezonansowej otrzymamy

$$\xi_D = \frac{B_{Dn}}{B_{DL}} = \frac{B_{tn}}{B_{tL}} \sqrt{\frac{S_{td}}{2\,S_D} \sqrt{\left(\frac{R}{X}\right)^2 + \varkappa^2}}, \tag{105a}$$

względnie

$$\xi_D = \frac{B_{tn}}{B_{tL}} \sqrt{\frac{S_{td}}{2 S_D} \sqrt{\frac{(1+2\varkappa)\underline{U}^2_{wo\sim} + \varkappa^2}{1 - \underline{U}^2_{wo\sim}}}}.$$

Jeżeli współczynnik ξ_D wypada większy od jedności, musimy uwzględnić wpływ przewymiarowania obwodu magnetycznego na moc obliczeniową dławika $S_{Do} = S_D\,\xi_D$, która określa jego wymiary oraz ciężar.



Rys. 38b. Układ kompoundacji z pojemnością rezonansową (założono szczególne wartości współczynnika $\nu_c = 0$, $\nu_c = 0{,}5$, $\nu_c = 1$)

W układzie kompoundacji z pojemnością rezonansową otrzymamy:

$$\frac{B_{Dn}}{B_{DL}} = \frac{B_{tn}}{B_{tL}} \sqrt{\frac{S_{td}}{2S_D}} \underline{U}_{wo\sim} . \tag{106}$$

Współczynnik ξ_t dla układu z pojemnością rezonansową i bez pojemności jest jednakowy. Współczynnik przewymiarowania baterii kondensatorów ξ_c jest określony przez stosunek napięcia przy zwarciu prądnicy do napięcia przy obciążeniu indukcyjnym. Współczynniki przewymiarowania ξ_c i ξ_t są sobie równe.

Przy założonej krotności prądu zwarcia obliczenie optymalnej wartości $\underline{U}_{wo\sim}$ należy przeprowadzić kierując się minimalną sumaryczną mocą obliczeniową elementów z uwzględnieniem ciężarowych bądź ekonomicznych współczynników równoważności dławika ν_D i kondensatorów ν_c. Na rys. 37 przedstawiono charakterystyki mocy obliczeniowej elementów podstawowego układu kompoundacji bez pojemności rezonansowej dla generatora o względnej reaktancji $\underline{X}_{de} = 1$ przy założeniu jego normalnej charakterystyki magnesowania, względnej reaktancji rozproszenia $\underline{X}_s = 0{,}125$, reaktancji $\underline{X}_{de} = 1$, krotności prądu zwarcia $\frac{I_{gz}}{I_{gN}}$ oraz współczynnika $\nu_D = 1$.

Na rys. 38a i b przedstawiono charakterystykę optymalnych wartości napięcia $\underline{U}_{wo\sim}$ w funkcji rektancji $\underline{X}_{de}$ dla układu podstawowego, układu z transformatorem dopasowującym, z transformatorem napięciowym i trójuzwojeniowym transformatorem kompoundacji. Rys. 38a odnosi się do układu bez pojemności rezonansowej, rys. 38b do układu z pojemnością.

WYKAZ LITERATURY

1. Gadek K.: Zur Auslegung von Strom und Spannungsadditionsschaltung zur Kompoundierung von Synchronmaschinen. — E. u. M. Heft 6, Jahrgang 74, 1957.
2. Britten H. H., Plette D. L.: A Static Exciter for Aircraft Generators. — A. I. E. E. Tr., 1958.
3. Droste E., Janzen H.: Driephasige Transduktoren für die zusätzliche Spannungsregelung kompoundierter Synchrongeneratoren. — AEG Mittl. 10/11, 1959.
4. Lang A.: Erregermaschinenlose Synchrongeneratoren mit geregelter Kompoundierung. — AEG Mitteil. 1/2, 1955.
5. Kołek W., Praca turbogeneratora w systemie elektroenergetycznym. PWT, 1956.
6. Kurdani J. C., Homeriki O. K.: Rabota triechfaznogo wypriamitjela pri jego pitani ot transformatorów toka. — Elektriczestwo 3, 1954.
7. Mieszczaninow P. A.: Fazowaja schiema kompoundirowanja elektromagnitnym korrektorom. — Elektriczeskije Stancji 4, 1953.
8. Paszek W.: Stabilizacja napięcia samowzbudnych generatorów synchronicz-

nych, Praca habilitacyjna. — Gliwice 1960.
9. Paszek W.: Sposoby powiększania szybkości regulacji napięcia generatorów synchronicznych. — Arch. Aut. i Telemech. 2, 1960.
10. Renz E.: Anwendung von Transduktoren für die Spannungsregelung erregermaschinenloser Generatoren. — AEG Mittl. 10/11, 1959.
11. Rissik H.: Mercury Arc Current Converters. J. Pitman, London 1947.
12. Storm H. F.: Static Magnetic Exciter for Synchronous Alternators. — AIEE Trans. 70, 1951.
13. Thrige: Autovoltgeneratoren — Odense — Dänmark (publikacja firmowa), 1958.
14. Wunderlin V.: Synchrongeneratoren mit geregelter Kompoundierung. — BBC Mitteil. 10, 1959.
15. Wilesow D., W., Riabinin I. A.: Wybor gławnych paramietrow schiem. wozbużdienja samowzbużdajuszczichsja sinchronnych gienieratorow. — Elektriczestwo 3, 1960.

В. ПАШЕК

СТАБИЛИЗАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЯ БЕЗВОЗБУДИТЕЛЬНЫХ СИНХРОННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ С ПОМОЩЬЮ ФАЗОВОГО КОМПАУНДОВАНИЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ

Резюме

Усовершенствование технологии сухих выпрямителей вызвало в последние годы развитие конструкции безвозбудительных синхронных генераторов, снабжённых схемами фазового компаундования возбуждения. Проведено сравнение разных решений схем компаундования возбуждения после приведения этих схем к основной последовательной или параллельной схеме разновидности *A* или *B*.

Напряжение компаундования приложенное к выпрямительной цепи имеет две состовляющие: одну составляющую пропорциональную к напряжению на приёмнике и вторую составляющую пропорциональную к току генератора (при разновидности *A*) или же пропорциональную к току приёмника (при разновидности *B*).

Кроме классификации схем фазового компаундования возбуждения на параллельную схему (более выгодную из-за лучших регулировочных свойств в неустановившемся режиме) и последовательную схему, приведена классификация на схемы с резонансной ёмкостью и схемы без ёмкости.

Сравнивая потребляемый ток возбуждения генератора и выходного тока схемы компаундования показано, что схема фазового компаундования возбуждения правильно отображает геометрическое сложение составляющих потребительного тока возбуждения генератора с неявновыраженными полюсами, с магнитным контуром без насыщения.

Насыщение или явно-выраженные полюсо вызывают погрешность стабилизации. Расчёт схемы компаундования проводится в этом случае, принимая двухточечную стабилизацию при холостом ходе, а также при нагрузке номинальным током и с коэффициентом мощности $\cos \varphi = 0_{ind.}$

Погрешности стабилизации в промежуточных рабочих точках устраняются корректором напряжения.

В схеме с резонансной ёмкостью получается, по сравнению со схемой без ёмкости, более независимое от температуры обмоток значение тока и сокращение периодов регулирования. Выпрямительный контур вызывает искажение формы тока в контуре компаундования по стороне переменного тока. Расчёт схемы произведен ограничиваясь к анализу основной гармоники тока компаундования. В схеме компаундования без резонансной ёмкости выпрямитель вносит в контур компаундования индуктивное сопротивление.

Сравнение основных схем фозового компаундования возбуждения произведено из точки зрения максимальных мощностей обмоток дросселей и трансформаторов и мощностей конденсаторов, определяющих типовую мощность этих элементов. Максимальные мощности выступают при индуктивной нагрузке генератора.

На основании выведенных зависимостей между параметрами генератора и типовыми мощностями отдельных элементов схеми компаундования разработаны указания по проектированию этих элементов, из точки зрения их оптимального подбора. В качестве критерия оптимализации принято минимальное значение веса элементов схемы компаундования, который зависит от типовой мощности этих элементов. Если заранее принято кратность установленного тока короткого замыкания для схемы компаундования следует учесть коэффициент изменения размеров магнитного контура дросселя и трансформатора, а также изменения сопротивляемости конденсаторов по напряжению.

Представлены всомогательные диаграммы для проектирования схемы фазового компаундования возбуждения и производных схем (с согласовующим трансформатором, с трансформатором напряжения и с трёхобмоточным трансформатором компаундования).

W. PASZEK

SPANNUNGSSTABILISIERUNG ERREGERMASCHINENLOSER SYNCHRONGENERATOREN MITTELS PHASENKOMPOUNDIERUNG

Zusammenfassung

Die Vervollkommnung der Technologie betriebssicherer Trockengleichrichter ermöglichte die Entwicklung erregermaschinenloser Synchrongeneratoren mit Phasenkompoundierung der Erregung. In der Arbeit werden verschiedene Lösungen der Kompoundierungsschaltung untersucht nach Zurückführung zur Parallel — beziehungsweise Reihengrundschaltung, der Modifikation *A* oder *B*.

Die den Gleichrichter speisende Kompoundierungsspannung setzt sich aus zwei Komponenten zusammen: bei der Modifikation A aus einer der Verbraucherspannung proportionalen und einer dem Generatorstrom proportionalen Komponente, beziehungsweise bei der Modifikation *B* aus einer der Generatorspannung proportionalen und einer dem Verbrauchstrom proportionalen Komponente. Ausser dieser Unterleitung auf Parallelschaltung (die eine vorteilhaftere Schaltung wegen besserer Regeleigenschaften im transienten Zustand ist) und Reihenschaltung werden die Schaltungen auf solche mit oder ohne Resonanzkapazität unterteilt.

Durch Vergleich des Ausgangsstromes der Kompoundierungsschaltung mit dem benötigten Erregerstrom wird erwiesen, dass die Kompoundierungsschaltung die Komponentenzerlegung des Erregerstromes einer ungesätigten Vollpolmaschine treu abbildet.

Die magnetische Sättigung sowie die Ausprägung der Pole verursachen Fehler der Spannungsstabilisierung. Die Berechnung der Kompoundierungsschaltung geht von der zweipunktigen Spannungsstabilisierung aus: im Leerlauf und bei der induktiven Nennstrombelastung. Zwischen diesen zwei Punkten wird die Spannungsänderung des Generators mit Hilfe einer vereinfachten Regelschaltung des Spannungskorrektors beseitigt.

Bei Anwendung der Resonanzkapazität erlangt man grössere Unabhängigkeit des Erregerstromes von der Wicklungstemperatur, sowie merkbare Verkürzung der Ausregelzeit. Der Gleichrichter verursacht eine Verzerrung des Kompoundierungswechselstromes. Die Berechnung der Schaltung stützt sich auf der Grundwelle des Kompoundierungsstromes. Wird die Resonanzkapazität nicht angewendet, dann trägt der Gleichrichter eine induktive Reaktanz in den Kompoundierungsstromkreis hinein.

Die Kompoundierungsgrundschaltungen werden untersucht in Bezug auf maximale Scheinleistung der Wicklungen des Transformators und der Drossel und Scheinleistung des Kondensators, die die Typenleistung dieser Schaltungselemente bestimmen.

Auf Grund hergeleiteter Beziehungen zwischen den Kenndaten des Generators und der Typenleistung einzelner Schaltungselemente werden Richtlinien für die Berechnung optimaler Grössen dieser Elemente bei ihrem Gewichtsminimum ausgearbeitet. Falls das erwünschte Kurzschlussverhältnis vorausgesetzt wird, muss der Überdimensionierungskoeffizient des magnetischen Kreises der Drossel und des Transformators, sowie der Spannungsfestigkeit des Kondensators mit in die Rechnung getragen werden.

Es werden Diagramme beigefügt, die bei Berechnung der Kompoundierungsgrundschaltung sowie ihrer Ableitungen (Schaltung mit einem Anpassungstransformator, mit einem Spannungswandler, mit einem Dreiwicklungskompoundierungstransformator) behilflich sind.

W. PASZEK

VOLTAGE STABILISATION OF ALTERNATORS BY MEANS OF A PHASE COMPOUND-EXCITATION

Summary

The compounding system after deducing them to the basic series — or parallel-system have been considered in this paper. To the calculation of the elements of the compounding system the basic harmonic of the deformed compounding current was used.

The directives for designing the elements at minimum of their weight have been worked out. At proposed short circuit ratio the coefficient of the elements overdimensioning was taken into consideration. The paper includes auxiliary diagrams used for designing of the basic compounding system and its derivatives.

W. PASZEK

STABILISATION DE LA TENSION DES ALTERNATEURS SANS EXCITATRICES À L'AIDE DE LA PHASE SENSIBLE COMPOUNDAGE-EXCITATION

Resumé

On s'occupe des systèmes de compoundage après les avoir réduits aux circuits en série ou en parallel. En calculant les éléments du systeme on utilise la première harmonique du courant deformé du compoundage.

On a établi des indications pour calculer des éléments du système du poids minimum. En supposant l'intensité du courant de court-circuit on a introduit le coefficient du surdimensionnement des éléments. Le travail contient les diagrammes qui facilitent le calcul du système de base du compoundage ainsi que celui de ses dérivations.

621.3.082.4

JANUSZ KACPROWSKI

Teoretyczne podstawy syntezy samogłosek polskich w rezonansowych układach formantowych[1])

Rękopis dostarczono 31.8.1961

Praca zawiera omówienie teoretycznych podstaw procesu syntezy samogłosek w rezonansowych układach formantowych, których zastosowanie w systemach teletransmisyjnych o ograniczonym pasmie częstotliwości przesyłanych wydaje się obecnie całkowicie realne.

W oparciu o uproszczony model anatomiczny efektorów artykulacyjnych naturalnego organu mowy przy wymawianiu samogłosek wyznaczono postać analityczną funkcji przenoszenia $H(s)$ elektrycznego układu zastępczego i wykazano, że bieguny sprzężone $s_i s_i^*$ tej funkcji odpowiadają w sposób jednoznaczny zakresom formantowym samogłoski, podlegającej syntezie. Wyznaczono analityczne postaci funkcji źródła tonu krtaniowego $U(s)$ i funkcji promieniowania ust $Z_p(s)$ oraz wyprowadzono ogólne wyrażenie typu $P(s) = U(s) \cdot H(s) \cdot Z_p(s)$ na ciśnienie akustyczne fali dźwiękowej odpowiadającej dźwiękom samogłoskowym. Przedyskutowano możliwości aproksymowania funkcji $P(s)$ w układach elektrycznych o stałych skupionych, w postaci n obwodów rezonansowych połączonych szeregowo lub równolegle.

W zakończeniu przedyskutowano wstępnie korzyści, jakie z punktu widzenia zwiększenia przepustowości informacyjnej kanałów łączności dać może zastosowanie rezonansowych syntezatorów formantowych w układach teletransmisyjnych.

1. WSTĘP

Proces syntezy dźwięków mowy polega na świadomym wytwarzaniu za pomocą środków technicznych ściśle określonych przebiegów dźwiękowych, którym człowiek o normalnym słuchu potrafi przypisać założone z góry znaczenie fonetyczne. Z punktu widzenia zastosowań telekomunikacyjnych synteza mowy jest jednym z dwóch etapów złożonego

[1]) Pracę wykonano podczas czasowego pobytu autora w Research Laboratory of Electronics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., oraz w Communication Sciences Laboratory, University of Michigan, Ann Arbor, Michigan.

procesu analizy-syntezy, który — zastosowany w urządzeniach teletransmisyjnych — pozwala zwiększyć efektywność wykorzystania systemów łączności przystosowanych do przesyłania informacji kodem fonetycznym.

Proces analizy mowy, rozumiany w użytym tu znaczeniu, przeprowadzany jest w sposób ciągły po stronie nadawczej łącza i polega na wydzielaniu ze złożonego sygnału elektrycznego, odpowiadającego pierwotnemu sygnałowi akustycznemu, zespołu ściśle określonych parametrów, które w sposób jednoznaczny określają poszczególne fonemy, zawierając w sobie ich najważniejsze cechy dystynktywne. Wypadkowe widmo częstotliwościowe tych parametrów, z których każdy jest wolnozmienną funkcją czasu, jest wielokrotnie węższe od widma sygnału pierwotnego, co pozwala na znaczne zwiększenie przepustowości łącza. Parametry te, przesłane w postaci sygnałów sterujących dowolnym ze znanych systemów łączności, uruchamiają po stronie odbiorczej łącza odpowiednie urządzenie syntezujące, którego zadaniem jest odtworzenie pierwotnego sygnału akustycznego. Podstawowym kryterium jakości kompletnego urządzenia nadawczo-odbiorczego jest w tym przypadku zrozumiałość przesyłanych informacji, jakkolwiek nie ma zasadniczych przesłanek, które z góry wykluczałyby możliwość stosowania — w miarę postępu technicznego w omawianej dziedzinie — kryteriów ostrzejszych opartych na pojęciu naturalności lub wierności odtwarzania mowy.

W licznych pracach teoretycznych i eksperymentalnych z zakresu akustyki fonetycznej, dotyczących akustycznej i fonetycznej struktury dźwięków mowy wykazano (patrz np. [5], [30], [35], [36], [38]), że podstawowe cechy dystynktywne samogłosek można określić za pomocą niewielkiej liczby prostych i — co ważniejsze — technicznie wyznaczalnych parametrów, opisujących właściwości rezonansowe akustycznego układu przemysłowego, jakim jest organ mowy. Stwierdzenie to dało podstawę do prac technicznych nad konstrukcją układów do syntezy samogłosek w oparciu o zasadę kodowania formant [4], [17], [25], [55].

Celem niniejszej pracy jest teoretyczna analiza warunków pracy rezonansowych układów formantowych, przeznaczonych do syntezy samogłosek polskich. Zgodnie z założeniem, rozważania będą ograniczone do syntezy dźwięków samogłoskowych przede wszystkim z tego względu, że ich stosunkowo prosta struktura akustyczna jest już dostatecznie znana, czego nie można stwierdzić w przypadku większości dźwięków spółgłoskowych, których mechanizm wytwarzania jest znacznie bardziej skomplikowany. Podane będzie również wstępne obliczenie ilości informacji zawartych w sygnałach formantowych w celu zorientowania się, jakiego rzędu zysk mogą one przynieść z punktu widzenia zwiększenia przepustowości kanałów łączności w porównaniu z systemami telefonii naturalnej i systemami typu Vocoder.

Problem wytwarzania w sposób sztuczny dźwięków podobnych do dźwięków mowy naturalnej, a więc proces syntezy mowy, interesował ludzi od dawna. Pierwsze próby idące w tym kierunku poczyniono już w wieku XI [41]. Von Kempelen skonstruował w roku 1791 model analogowej maszyny mówiącej, która odtwarzała w sposób funkcjonalny poszczególne układy akustyczne naturalnego organu mowy za pomocą urządzeń pneumatycznych [28], [49]. W roku 1829 Willis wytwarzał dźwięki zbliżone do dźwięków samogłoskowych za pomocą zespołu piszczałek organowych [56]. Uwieńczoną pozytywnymi wynikami syntezę samogłosek w układach rezonantorów akustycznych pobudzanych do drgań za pomocą widełek stroikowych (kamertonów) prowadził Helmholtz w roku 1872 [24]. Prace te, jakkolwiek interesujące z akustycznego punktu widzenia, i wyjaśniające wiele nieznanych wówczas procesów mechanizmu mowy i akustycznej struktury samogłosek, miały charakter fragmentaryczny i nie były związane z syntezą mowy stosowaną do celów jej przesyłania w czasie lub przestrzeni. Pierwszym syntezatorem elektrycznym, przystosowanym do wytwarzania oderwanych samogłosek w stanie statycznym (ustalonym), był syntezator Stewarta z roku 1922 [46].

Datą przełomową w dziedzinie teorii i konstrukcji syntezatorów elektrycznych jest rok 1936, kiedy Dudley stworzył zasadę Vocodera [6], [7], [8], który był pierwszym tego typu urządzeniem przeznaczonym do przesyłania sygnałów mowy kanałem o zmniejszonej przepustowości. Ostatnie dziesięciolecie charakteryzuje się niezwykle intensywnym rozwojem prac badawczych, zarówno teoretycznych, jak i eksperymentalnych, w dziedzinie syntezy mowy. W roku 1950 Dunn stworzył pierwszy elektryczny układ analogowy odtwarzający funkcjonalne działanie naturalnego organu mowy w stanie statycznym [10]. Udoskonalonymi układami analogowymi podobnego typu są zbudowane w roku 1953 i stosowane z powodzeniem do chwili obecnej przy badaniach z zakresu akustyki fonetycznej syntezatory analogowe Fanta (tzw. LEA) [11] oraz Stevensa, Kasowskiego i Fanta [45]. Doniosłym osiągnięciem w dziedzinie konstrukcji syntezatorów analogowych jest opracowany przez grupę M.I.T. [1] dynamiczny syntezator analogowy przystosowany do sterowania elektrycznego (tzw. DAVO) za pomocą sygnałów parametrycznych i dający bardzo realistyczne i naturalne wytwarzanie w sposób ciągły grup dźwięków samogłoskowych i spółgłoskowych [39], [40].

---

[1] Research Laboratory of Electronics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.

Jednocześnie w kilku ośrodkach badawczych [1] prowadzone są równolegle interesujące prace nad teorią i konstrukcją rezonansowych syntezatorów formantowych o stałych skupionych [12], [17], które z punktu widzenia ich ewentualnych zastosowań w urządzeniach teletransmisyjnych o ograniczonym pasmie częstotliwości przesyłanych są znacznie bardziej realne niż syntezatory analogowe o stałych rozłożonych; te ostatnie przeznaczone są głównie do prac badawczych w zakresie akustyki mowy, oddając zresztą cenne usługi przy opracowywaniu teorii i konstrukcji syntezatorów rezonansowych o stałych skupionych.

2. ANALIZA AKUSTYCZNYCH PARAMETRÓW EFEKTORÓW ARTYKULACYJNYCH PRZY WYTWARZANIU DŹWIĘKÓW SAMOGŁOSKOWYCH

2.1. Mechanizm wytwarzania samogłosek

Ciśnienie akustyczne $p(t)$ fali głosowej odpowiadającej dźwiękom mowy można interpretować w ujęciu klasycznej teorii układów linearnych jako odpowiedź biernego akustycznego układu transmisyjnego na sygnał wzbudzający, pochodzący z jednego lub kilku źródeł energii akustycznej. W związku z tym charakter fizyczny fali głosowej można określić w sposób jednoznaczny, mając dane charakterystyki częstotliwościowe źródła, układu przesyłowego oraz układu promieniującego energię akustyczną w przestrzeń. Charakterystakami tymi są: funkcja wzbudzająca źródła $U(s)$, funkcja przenoszenia układu $H(s)$ oraz funkcja $Z_p(s)$, określająca warunki promieniowania energii akustycznej przez otwór ust i nosa.

Ogólne wyrażenie na ciśnienie akustyczne p fali głosowej przybiera zatem w ujęciu rachunku operatorowego Laplace'a postać:

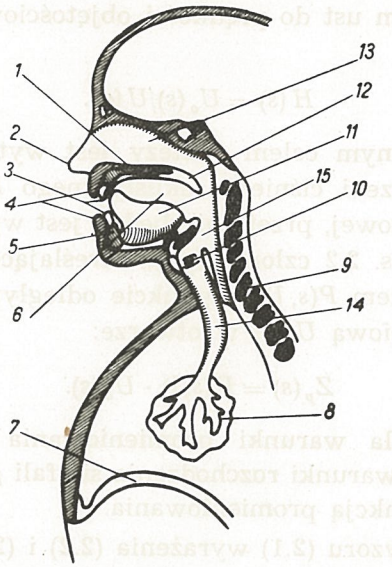
$$P(s) = \mathcal{L}\{p(t)\} = U(s) \cdot H(s) \cdot Z_p(s), \tag{2.1}$$

gdzie $s = \sigma + j\omega$ jest częstotliwością zespoloną.

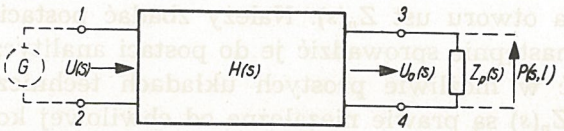
Ograniczając rozważania do dźwięków samogłoskowych wytwarzanych w sposób ciągły, a więc w stanie ustalonym, można wyrażeniu (2.1) nadać prostą interpretację schematową, wychodząc z anatomicznego modelu organu mowy, podanego na rys. 2.1. Ponieważ w przypadku samogłosek jedynym źródłem energii są struny głosowe pobudzone do

[1] Głównie: Royal Institute of Technology, Speech Transmission Laboratory, Stockholm; Research Laboratory of Electronics, MIT, Cambridge, Massachusetts; Communication Sciences Laboratory, University of Michigan, Ann Arbor; Bell Telephone Laboratories, Murray Hill, N. Y.; General Post Office, Dollis Hill, Londyn; Haskins Laboratories, New York, N. Y.; Joint Speech Research Unit, Ruislip Eastcoat, Kent, W. Brytania.

drgań strumieniem powietrza wypływającego z płuc, a wnęka nosowa jest oddzielona języczkiem i promieniowanie energii akustycznej na zewnątrz odbywa się niemal wyłącznie przez otwór ust, przeto anatomiczny model organu mowy podany na rys. 2.1 można przedstawić w postaci uproszczonego, lecz tym niemniej odpowiadającego warunkom rzeczywistym układu zastępczego na rys. 2.2.



Rys. 2.1. Anatomiczny model organu mowy
1 — podniebienie twarde, *2* — nos, *3* — zęby, *4* — wargi, *5* — dolna szczęka, *6* — wnęka jamy ustnej, *7* — przepona, *8* — płuca, *9* — kręgosłup, *10* — struny głosowe, *11* — język, *12* — języczek tylni, *13* — wnęka nosowa, *14* — tchawica, *15* — krtań



Rys. 2.2. Elektryczny schemat zastępczy naturalnego organu mowy

Na rysunku tym symbol G oznacza generator tonu krtaniowego, przedstawiony w postaci źródła prądowego o stałej wydajności prędkości objętościowej $U(s) \triangleq u(t)$. Założenie to uzasadnione jest tym, iż maksymalna powierzchnia otworu szczeliny strun głosowych jest znacznie mniejsza od minimalnej powierzchni przekroju krtani, w związku z czym akustyczna impedancja wewnętrzna generatora tonu krtaniowe-

go G jest bardzo duża w porównaniu z akustyczną impedancją wejściową obciążającego go układu przesyłowego, przedstawionego na schemacie w postaci czwórnika 1 - 2 - 3 - 4. Właściwości transmisyjne tego czwórnika, określone jego funkcją przenoszenia $H(s)$, odpowiadają właściwościom transmisyjnym wnęk krtani i jamy ustnej i zależą od ich wymiarów i chwilowej konfiguracji geometrycznej. Funkcję przenoszenia $H(s)$ efektorów artykulacyjnych naturalnego organu mowy definiuje się jako stosunek operatorowy prędkości objętościowej $U_o(s)$ w otworze wylotowym ust do prędkości objętościowej $U(s)$ w szczelinie strun głosowych:

$$H(s) = U_o(s)/U(s). \tag{2.2}$$

Ponieważ ostatecznym celem syntezy jest wytworzenie w określonym punkcie przestrzeni ciśnienia akustycznego $P(s)$ odpowiadającego ciśnieniu $p(t)$ fali głosowej, przeto niezbędne jest wprowadzenie do układu zastępczego na rys. 2.2 członu $Z_p(s)$, określającego związek operatorowy między ciśnieniem $P(s, l)$ w punkcie odległym o l od otworu ust a prędkością objętościową $U_o(s)$ w otworze:

$$Z_p(s) = P(s, l) \cdot U_o(s). \tag{2.3}$$

Funkcja $Z_p(s)$ określa warunki promieniowania energii akustycznej przez otwór ust oraz warunki rozchodzenia się fali głosowej w przestrzeni i nazwana jest funkcją promieniowania.

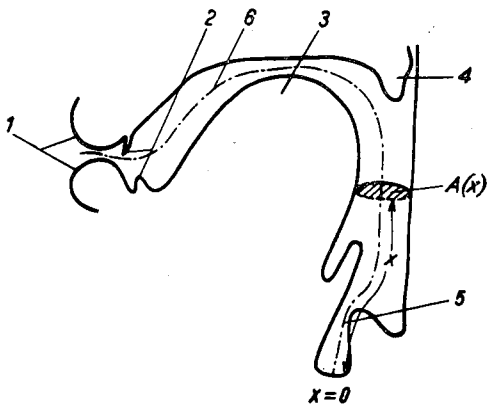
Podstawiając do wzoru (2.1) wyrażenia (2.2) i (2.3) otrzymuje się:

$$P(s) = U(s) \cdot \frac{U_o(s)}{U(s)} \cdot \frac{P(s,l)}{U_o(s)} = P(s, l). \tag{2.4}$$

Zagadnienie techniczne syntezy mowy sprowadza się zatem do odtworzenia w układach zastępczych funkcji źródła tonu krtaniowego $U(s)$, funkcji przenoszenia biernych efektorów artykulacyjnych $H(s)$ i funkcji promieniowania otworu ust $Z_p(s)$. Należy zbadać postacie funkcji $U(s)$, $H(s)$ i $Z_p(s)$, a następnie sprowadzić je do postaci analitycznych dających się zrealizować w możliwie prostych układach technicznych. Postacie funkcji $U(s)$ i $Z_p(s)$ są prawie niezależne od chwilowej konfiguracji geometrycznej i struktury akustycznej efektorów artykulacyjnych przedstawionych na rys. 2.2 w postaci czwórnika 1-2-3-4 i w pierwszym przybliżeniu można je uważać za czynniki stałe we wzorze ogólnym (2.1). Czynnikiem decydującym o akustycznych cechach dystynktywnych danej samogłoski i określającym jej znaczenie fonetyczne jest chwilowa postać funkcji przenoszenia $H(s)$, zmieniająca się w sposób ciągły wraz ze zmianami ukształtowania efektorów artykulacyjnych. Wyznaczenie i aproksymowanie postaci funkcji $H(s)$ jest zatem punktem wyjściowym w technicznych zagadnieniach syntezy samogłosek.

2.2. Analiza transmisyjnych właściwości efektorów artykulacyjnych

Na rys. 2.3 podano uproszczony przekrój anatomiczny efektorów artykulacyjnych (w płaszczyźnie symetrii głowy) przy wymawianiu samogłosek. Modelem akustycznym układu jest rura o długości $l \approx 17$ cm i o niejednostajnym przekroju, którego powierzchnia $A(x)$ zmienia się w sposób ciągły w funkcji odległości x od wlotu. W naturalnych warunkach anatomicznych funkcja $A(x)$ może przybierać wartości od części centymetra kwadratowego do około 17 cm². W interesującym zakresie częstotliwości od kilkudziesięciu herców do około 5000 Hz wymiary poprzeczne rury są małe w porównaniu z długością fali dźwiękowej w powietrzu, w związku z czym można ograniczyć rozważania do przypadku



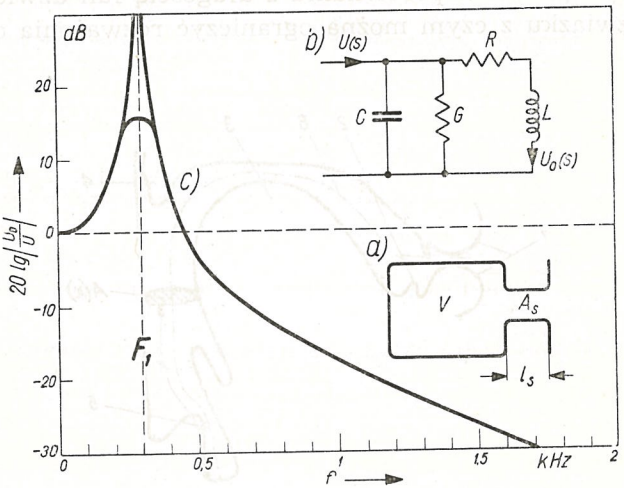
Rys. 2.3. Uproszczony przekrój anatomiczny organu mowy przy wymawianiu samogłosek
1 — wargi, *2* — zęby, *3* — język, *4* — języczek tylni, *5* — krtań, *6* — wnęka jamy ustnej

fali płaskiej rozchodzącej się w rurze o niejednostajnym przekroju. Przy tym założeniu wartości skuteczne ciśnienia akustycznego $P(x)$ i prędkości objętościowej $U(x)$ są funkcjami tylko jednej współrzędnej przestrzennej — odległości x od początku układu, to jest od szczeliny strun głosowych. Od strony wlotu, tj. w punkcie $x = 0$, rura jest zamknięta dużą impedancją wewnętrzną generatora krtaniowego, wylot jej natomiast w punkcie $x = l$ jest otwarty i obciążony impedancją promieniowania otworu ust.

Zagadnienie sprowadza się zatem do określenia funkcji przenoszenia rury o długości $l \approx 17$ cm i niejednostajnym przekroju $A(x)$, zamkniętej u wlotu ($x = 0$) i otwartej u wylotu ($x = l$).

2.3. Aproksymacja w postaci układu o stałych skupionych

Najbardziej radykalnym uproszczeniem układu jest traktowanie go jako układu o stałych skupionych, tj. o długości l znacznie mniejszej od aktualnej długości fali dźwiękowej, a więc w zakresie częstotliwości, gdzie $l < \lambda/8$, czyli $f < c/8l$. Założenie to jest w rozpatrywanym przypadku uzasadnione do częstotliwości rzędu 300 Hz. W tych warunkach model akustyczny (rys. 2.3) sprowadza się do prostego rezonatora Helm-



Rys. 2.4. Aproksymacja anatomicznego modelu organu mowy w postaci pojedynczego rezonatora Helmholtza o stałych skupionych
a) schemat akustyczny rezonatora, b) elektryczny schemat zastępczy, c) amplitudowa charakterystyka przenoszenia układu

holtza (rys. 2.4-a) złożonego z wnęki o objętości V oraz szyjki o długości l_s i przekroju A_s. Schemat zastępczy rezonatora podano na rys. 2.4-b. Funkcja przenoszenia układu

$$H(s) = \frac{U_o(s)}{U(s)} = \frac{1}{LCs^2 + (RC + GL)s + GR + 1} = \frac{\omega_0^2}{(s - s_1)(s - s_2)}, \tag{2.5}$$

gdzie $\omega_0^2 = 1/LC$.
Gdy tłumienie układu jest mniejsze od krytycznego, tj. gdy

$$\frac{GR + 1}{LC} > \frac{1}{4}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)^2, \tag{2.6}$$

równanie kwadratowe $s^2 + \frac{RC+GL}{LC}s + \frac{GR+1}{LC} = 0$ ma pierwiastki zespolone sprzężone

$$s_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right) + j\sqrt{\frac{GR+1}{LC} - \frac{1}{4}\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)^2} =$$

$$= \sigma_1 + j\sqrt{\omega_{01}^2 - \sigma_1^2} = \sigma_1 + j\omega_1, \tag{2.7-a}$$

$$s_2 = s_1^* = -\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right) - j\sqrt{\frac{GR+1}{LC} - \frac{1}{4}\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)^2} =$$

$$= \sigma_1 - j\sqrt{\omega_{01}^2 + \sigma_1^2} = \sigma_1 - j\omega_1, \tag{2.7-b}$$

gdzie $\omega_{01} = \frac{GR+1}{LC}$.

Straty rezonatora odpowiadającego wnękom naturalnego organu mowy są zazwyczaj małe: $GR \ll 1$, współczynnik dobroci układu

$$Q \approx \frac{\omega_o}{2\sigma} \geqslant 10, \qquad \omega_{01}^2 \approx \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \geqslant \frac{1}{4}\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)^2.$$

W tych warunkach częstotliwość rezonansowa układu równa się

$$F_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} \approx \frac{\omega_{01}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \tag{2.8}$$

a szerokość charakterystyki rezonansowej układu odpowiadająca połowie masy wydzielonej wynosi

$$\Delta F_1 = -\frac{\sigma_1}{\pi} = \frac{R}{2\pi L} + \frac{G}{2\pi C}. \tag{2.9}$$

Moduł funkcji przenoszenia (2.5) można wyrazić jako

$$\left|H(j\omega)\right| = \left|\frac{U_0(j\omega)}{U(j\omega)}\right| \approx \frac{\omega_0^2}{(\omega+\omega_0)\left[(\omega-\omega_0)^2+\sigma_1^2\right]^{1/2}} =$$

$$= \frac{F_1^2}{(f+F_1)\left[(f-F_1)^2 + \frac{1}{4}(\Delta F_1)^2\right]^{1/2}}. \tag{2.10}$$

Równanie (2.10) służyło jako podstawa do wykreślenia charakterystyki rezonansowej układu $|H(f)| = 20 \lg |U_o/U| = f(f/F_1)$ na rys. 2.4-c.

Przeciętna objętość sumaryczna wnęk naturalnego organu mowy mężczyzny $V \approx 75$ cm^3, czemu odpowiada podatność akustyczna $C = V/\varrho_o \cdot c^2 = 5{,}3 \cdot 10^{-5}$ dyn/cm^5. Przyjmując orientacyjnie efektywną długość otworu ust $l_s = 3$ cm i jego średnią powierzchnię przekroju $A_s = 0{,}9$ cm^2, co w przybliżeniu odpowiada geometrycznej konfiguracji

układu warg przy wymawianiu samogłoski "u" [22], otrzymuje się wartość masy akustycznej $L = \frac{\varrho_0 l_s}{A_s} \approx 4{,}0 \cdot 10^{-3}$ g/cm^4. Ze wzoru (2.8) otrzymuje się

$$F_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{C}{2\pi}\sqrt{\frac{A_s}{l_s V}} \approx 300 \text{ Hz}.$$

Wartość ta odpowiada w przybliżeniu średniej wartości częstotliwości pierwszej formanty $F1$ w przypadku samogłoski "u' wymawianej przeciętnym głosem męskim.

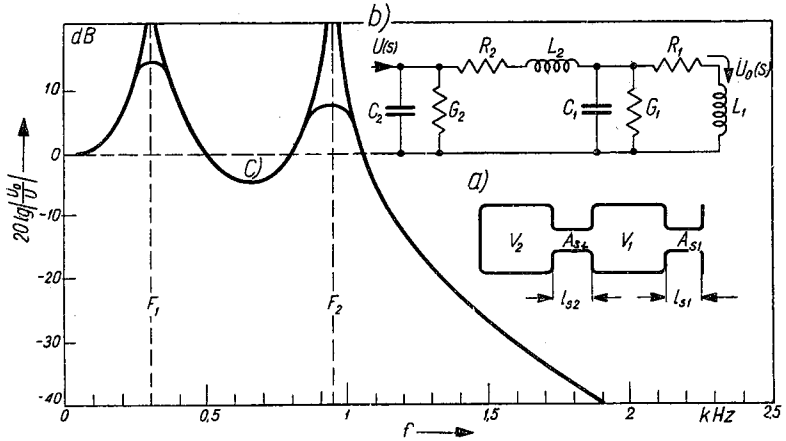
Z przytoczonych rozważań wynika, że charakterystykę przenoszenia organu mowy, traktowanego jako prosty rezonator Helmoltza o stałych skupionych, można opisać w sposób jednoznaczny za pomocą jednego z trzech następujących układów parametrów:

a) *geometrycznych*: objętości V wnęk krtani i jamy ustnej i wymiarów geometrycznych (l_s, A_s) otworu wylotowego ust, przy uwzględnieniu strat układu,

b) *akustycznych*: podatności C i masy akustycznej L oraz oporności R i przewodności G strat rezonatora,

c) *matematycznych*: częstotliwości zespolonej $s_1 s_1^* = \sigma_1 \pm j\omega_1$ określającej położenie biegunów funkcji przenoszenia (2.5).

Aproksymacja funkcji przenoszenia $H(s)$ organu mowy w postaci charakterystyki częstotliwościowej pojedynczego rezonatora Helmholtza jest uproszczeniem zbyt daleko idącym i nie może służyć za podstawę do rozwiązań technicznych, gdyż jest słuszna w bardzo ograniczonym za-



Rys. 2.5. Aproksymacja anatomicznego modelu organu mowy w postaci dwóch sprzężonych rezonatorów Helmholtza o stałych skupionych
a) schemat akustyczny rezonatorów, b) elektryczny schemat zastępczy, c) amplitudowa charakterystyka przenoszenia układu

kresie częstotliwości $f < 300 \div 500$ Hz, a ponadto uwzględnia tylko jeden zakres formantowy samogłoski, co nie jest wystarczające do jej zidentyfikowania. Natomiast przedstawienie organu mowy w postaci układu złożonego z n rezonatorów sprzężonych pozwala na przybliżoną analizę jego właściwości transmisyjnych w n - krotnie szerszym zakresie częstotliwości, w założeniu, że jak poprzednio każdy z rezonatorów jest układem o stałych skupionych. Na rys. 2.5 przedstawiono model organu mowy w postaci dwóch rezonatorów sprzężonych o stałych $G_1R_1L_1C_1$ i $G_2R_2L_2C_2$. Uproszczenie takie jest dopuszczalne w zakresie częstotliwości do około 1000 Hz i można je stosować w przypadku samogłosek tylnych, kiedy układ efektorów artykulacyjnych jest wyraźnie podzielony językiem na dwie wnęki: przednią (V_1) zakończoną otworem wylotowym warg (l_{s1}, A_{s1}) i tylną (V_2) sprzężoną z przednią za pośrednictwem przewężenia (l_{s2}, A_{s2}) między językiem i podniebieniem.

Funkcja przenoszenia układu

$$H(s) = \frac{U_0(s)}{U(s)} = \frac{\omega_{01}^2 \cdot \omega_{02}^2}{s^4 + as^4 + bs^2 + cs + d}, \tag{2.11}$$

gdzie: $\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}$ i $\omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}$ oznaczają częstotliwości rezonansowe własne poszczególnych rezonatorów pracujących niezależnie,

$$a = \frac{R_2}{L_2} + \frac{R_1}{L_1} + \frac{G_1}{C_1} + \frac{G_2}{C_2},$$

$$b = \frac{R_1G_1 + 1}{L_1C_1} + \frac{R_2G_2 + 1}{L_2C_2} + \frac{R_1G_2}{L_1C_2} + \frac{R_2G_1}{L_2C_1} + \frac{G_1G_2}{C_1C_2} + \frac{R_1R_2}{L_1L_2} + \frac{1}{C_1L_2},$$

$$c = \frac{R_1(R_2G_2 + 1)}{L_1L_2C_2} + \frac{G_2(R_1G_1 + 1)}{L_1C_1C_2} + \frac{R_1 + R_2 + R_1R_2G_1}{L_1L_2C_1} + \frac{G_1 + G_2 + G_1G_2R_2}{L_2C_1C_2},$$

$$d = \frac{1 + R_1G_1 + R_2G_2 + R_1G_2 + R_1R_2G_1G_2}{L_1C_1L_2C_2}.$$

Wyrażenie (2.11) ma skomplikowaną postać algebraiczną i jego ścisła analiza jest dość uciążliwa, a ponadto nie daje w wyniku prostej interpretacji fizycznej. O charakterze zjawisk można się jednak zorientować dostatecznie, traktując układ jako bezstratny. W tym przypadku:

$$a = 0, \quad b = \frac{1}{L_1C_1} + \frac{1}{L_2C_2} + \frac{1}{L_2C_1} = \omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 + \frac{1}{L_2C_1};$$

$$c = 0, \quad d = \frac{1}{L_1C_1L_2C_2} = \omega_0^2 \cdot \omega_{02}^2,$$

i równanie (2.11) sprowadza się do postaci:

$$H(s) = \frac{\omega_{01}^2 \cdot \omega_{02}^2}{s^4 + bs^2 + d} = \frac{\omega_{01}^2 \cdot \omega_{02}^2}{(s^2 - s_1^2)(s^2 - s_2^2)} = \frac{\omega_{01}^2 \cdot \omega_{02}^2}{(s + j\omega_1)(s - j\omega_1)(s + j\omega_2)(s - j\omega_2)}, \tag{2.12}$$

gdzie:

$$\omega_{1,2} = \left[\frac{\omega_a^2}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega_a^4}{4} - \omega_b^4}\right]^{1/2},$$

$$\omega_a^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{1}{L_1C_1} + \frac{1}{L_2C_2} + \frac{1}{L_2C_1} = \omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 + \frac{1}{L_2C_1},$$

$$\omega_b^4 = \omega_1^2 \cdot \omega_2^2 = \frac{1}{L_1C_1L_2C_2} = \omega_{01}^2 \cdot \omega_{02}^2.$$

Ze wzoru (2.12) wynika, że funkcja przenoszenia układu dwóch rezonatorów sprzężonych ma dwie pary biegunów sprzężonych, które w szczególnym przypadku rezonatorów bezstratnych leżą na osi urojonej, w płaszczyźnie częstotliwości zespolonej $s = \sigma + j\omega$, gdyż zgodnie z założeniem upraszczającym $\sigma_1 = \sigma_2 \approx 0$. Wykres modułu funkcji przenoszenia $|H(f)| = 20 \lg |U_0/U|$ podany na rys. 2.5-c jest zatem sumą rzędnych dwóch wykresów o kształcie jak na rys. 2.4-c, z tym jednak zastrzeżeniem, że częstotliwości rezonansowe F_1 i F_2 układu, odpowiadające biegunom funkcji $H(s)$, nie są od siebie niezależne, gdyż:

$$F_1^2 + F_2^2 = \frac{1}{4\pi^2}\left[\frac{1}{L_1C_1} + \frac{1}{L_2C_2} + \frac{1}{L_2C_1}\right] = \frac{1}{4\pi^2}\left[\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 + \frac{1}{L_2C_1}\right], \tag{2.13-a}$$

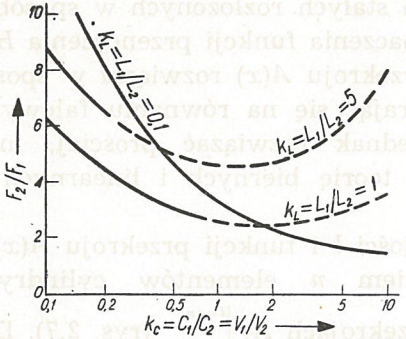
$$F_1 \cdot F_2 = \frac{1}{4\pi^2}\left[\frac{1}{L_1C_1L_2C_2}\right]^{1/2} = \frac{1}{4\pi^2}[\omega_{01}^2 \cdot \omega_{02}^2]^{1/2} = F_{01} \cdot F_{01}. \tag{2.13-b}$$

Jedynie w teoretycznym przypadku niezależnej pracy obu rezonatorów, kiedy nie są one ze sobą sprzężone, czemu odpowiada podział efektorów artykulacyjnych na dwie wnęki, połączone ze sobą bardzo wąskim przewężeniem między językiem i podniebieniem, a masa akustyczna sprzęgająca L_2 jest bardzo duża ($L_2 \to \infty$),

$$F_1 \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1C_1}} = F_{01} \quad \text{oraz} \quad F_2 \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2C_2}} = F_{02}.$$

W przypadku ogólnym, kiedy masa L_2 ma wartość skończoną, częstotliwość pierwszego rezonansu (F_1) ulega obniżeniu, a drugiego (F_2) podwyższeniu, z tym jednak, że ich iloczyn $F_1 \cdot F_2 = F_{01} \cdot F_{02} = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{L_1C_1L_2C_2}}$

$= \text{const}$, czyli $\frac{F_{01}}{F_1} = \frac{F_2}{F_{02}}$. To przesunięcie częstotliwości jest tym większe, im silniejsze jest sprzężenie obu wnęk, tzn. im stosunek L_1/L_2 jest większy. W tych warunkach częstotliwości obu rezonansów: F_1 i F_2 zależą od wszystkich parametrów układu L_1, C_1, L_2 i C_2. Na rys. 2.6 poda-



Rys. 2.6. Stosunek częstotliwości rezonansowych F_2/F_1 rezonatorów sprzężonych, w zależności od stosunku ich objętości $k_c = C_1/C_2 = V_1/V_2$, przy różnych sprzężeniach obu rezonatorów ($k_L = L_1/L_2 = 0{,}1$; 1; 5). Krzywe ciągłe: $F_{01} > F_{02}$. Krzywe przerywane: $F_{01} < F_{02}$

no wykres, przedstawiający wartości stosunku F_2/F_1 w funkcji stosunku podatności $k_c = C_1/C_2 = V_1/V_2$ obu wnęk: przedniej i tylnej, przy różnych stopniach sprzężenia rezonatorów, określonych stosunkiem $k_L = L_1/L_2$.

Analizując wykresy na rys. 2.6 należy pamiętać, że zgodnie z definicją zawsze $F_1 < F_2$, natomiast $F_{01} < F_{02}$ lub $F_{01} > F_{02}$, zależnie od stosunku wielkości parametrów układu; F_1 i F_2 oznaczają odpowiednio częstotliwość rezonansową pierwszą (niższą) i drugą (wyższą). Części ciągłe krzywych na rys. 2.6 odpowiadają zakresowi $F_{01} > F_{02}$, a części kreskowane — zakresowi $F_{01} < F_{02}$.

Małe wartości stosunku $k_c = \frac{C_1}{C_2} = \frac{V_1}{V_2}$ odpowiadają ukształtowaniu organu mowy przy wymawianiu samogłosek tzw. przednich (”i”, ”e”), kiedy objętość wnęki tylnej jest duża, a przedniej mała; samogłoski te cechuje duży stosunek częstotliwości formant F_1/F_2. Samogłoski tylne natomiast (”a”, ”o”), kiedy stosunek V_1/V_2 jest duży, charakteryzują się małym stosunkiem częstotliwości formant F_2/F_1, o ile oczywiście sprzężenie obu wnęk nie jest zbyt silne.

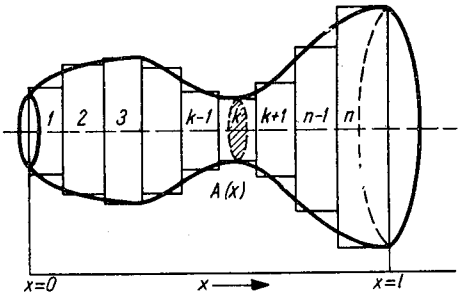
Analiza modelu organu mowy w postaci dwóch rezonatorów sprzężonych dowodzi jednocześnie, że dawniejsze teorie wiążące częstotliwości danej formanty (F_1 lub F_2) samogłoski wyłącznie z rezonansem określonej wnęki: przedniej lub tylnej, są niesłuszne, co potwierdziły badania szczegółowe [5], [10].

2.4. Aproksymacja w postaci układu o stałych rozłożonych w sposób ciągły

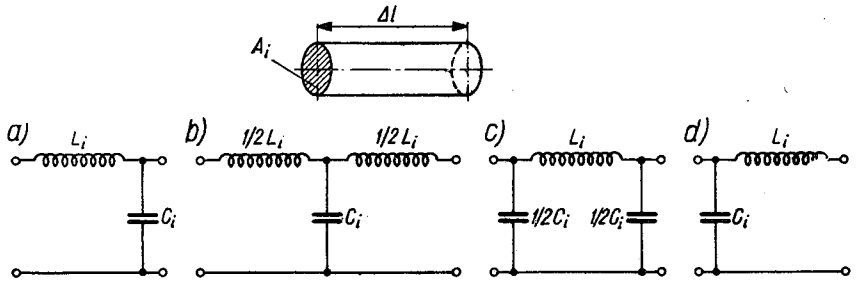
Sprowadzanie zastępczego schematu organu mowy do postaci układu o stałych skupionych ma ograniczony zakres stosowalności; bardziej ogólnym i znacznie dokładniejszym ujęciem zagadnienia jest stworzenie układu zastępczego o stałych rozłożonych w sposób ciągły.

Zagadnienie wyznaczenia funkcji przenoszenia $H(s)$ rury o długości l i niejednostajnym przekroju $A(x)$ rozwiązał w sposób najbardziej ogólny Weibel [55] opierając się na równaniu falowym Webstera. Zagadnienie to można jednak rozwiązać prościej, metodą aproksymacji, w oparciu o ogólną teorię biernych i linearnych układów elektrycznych.

Daną rurę o długości l i funkcji przekroju $A(x)$ można zastąpić kaskadowym połączeniem n elementów cylindrycznych o długości $\Delta l = \frac{l}{n} = \text{const}$ i przekrojach $A_i \Big|_{i=1}^{i=n}$ (rys. 2.7). Dowolny i-ty element rury o długości $l_i = \Delta l = \frac{l}{n}\Big|_{n\to\infty}$ i przekroju $A_i = \text{const}$ można przedstawić w postaci dowolnego z czterech układów zastępczych przedsta-



Rys. 2.7. Przedstawienie rury o długości l i funkcji przekroju $A(x)$ w postaci kaskadowego połączenia n elementów cylindrycznych

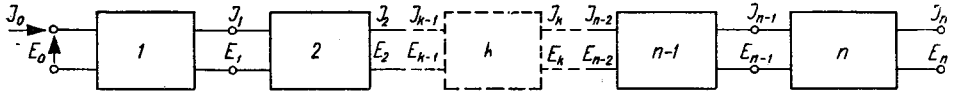


Rys. 2.8. Rura cylindryczna i jej cztery równoważne układy zastępcze a) układ ┐, b) układ T, c) układ Π, d) układ Γ

wionych na rys. 2.8. Elementy L_i i C_i układów zastępczych a÷d odpowiadają masie akustycznej i podatności akustycznej i-tego elementu rury:

$$L_i = \frac{1}{k} \cdot \frac{\varrho_0 \cdot \Delta l}{A_i} \quad \text{oraz} \quad C_i = k \frac{A_i \cdot \Delta l}{\varrho_0 \cdot C^2}, \tag{2.14-a,b}$$

gdzie współczynnik k zależy od wybranych układów jednostek akustycznych i elektrycznych. Rozpatrywaną rurę można zatem przedstawić w postaci kaskadowego połączenia n elementarnych czwórników elektrycznych LC typu $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{\Pi}$ lub $\mathbf{\Gamma}$ o właściwościach filtru dolnoprzepustowego (rys. 2.9). Każdy z elementarnych czwórników może być



Rys. 2.9. Układ zastępczy rury o niejednostajnym przekroju, przedstawiony w postaci kaskadowego połączenia n czwórników elementarnych

traktowany jako układ o stałych skupionych, gdyż liczbę n ogniw łańcucha można zawsze uczynić dostatecznie dużą na to, aby warunek $\Delta l = \frac{l}{n} \ll \lambda$ był spełniony w dowolnym zakresie częstotliwości. Wobec tego każdy z czwórników da się opisać równaniem typu:

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} E_2 \\ I_2 \end{bmatrix}, \tag{2.15}$$

w którym znaczenia fizyczne elementów macierzy $\mathbf{M}$ są następujące:

$$\mathbf{A} = \left.\frac{E_1}{E_2}\right|_{I_2=0} \qquad \mathbf{B} = \left.\frac{E_1}{I_2}\right|_{E_2=0}$$

$$\mathbf{C} = \left.\frac{I_1}{E_2}\right|_{I_2=0} \qquad \mathbf{D} = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{E_2=0}.$$

Elementy $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ macierzy $\mathbf{M}$ można wyznaczyć dla każdego z czterech elementarnych czwórników $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{\Pi}$ lub $\mathbf{\Gamma}$ w zależności od wartości parametrów LC układu. Zestawienie podano w tablicy 2.1. Kaskadowe połączenie n czwórników określonych macierzami łańcuchowymi $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2 \ldots$ $\mathbf{M}_k \ldots$ $\mathbf{M}_{n-1}$, $\mathbf{M}_n$ można sprowadzić do czwórnika zastępczego opisanego macierzą $\mathbf{M}^{(n)}$ gdzie

$$\mathbf{M}^{(n)} = \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 \cdot \ldots \mathbf{M}_k \cdot \ldots \mathbf{M}_{n-1} \cdot \mathbf{M}_n = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(n)} & \mathbf{B}^{(n)} \\ \mathbf{C}^{(n)} & \mathbf{D}^{(n)} \end{bmatrix}. \tag{2.16}$$

Tablica 2.1

Wartości elementów macierzy łańcuchowej M czwórników elementarnych typu Γ, T, Π i Γ z rys. 2.8 w zależności od elementów *LC* układu

Element macierzy **M**	Typ czwórnika			
	Γ	T	Π	Γ
A	LCs^2+1	$\frac{1}{2}LCs^2+1$	$\frac{1}{2}LCs^2+1$	1
B	Ls	$Ls\left[\frac{1}{4}LCs^2+1\right]$	Ls	Ls
C	Cs	Cs	$Cs\left[\frac{1}{4}LCs^2+1\right]$	Cs
D	1	$\frac{1}{2}LCs^2+1$	$\frac{1}{2}LCs^2+1$	LCs^2+1

Element $\mathbf{A}^{(n)}$ macierzy $\mathbf{M}^{(n)}$ czwórnika zastępczego zgodnie z jego znaczeniem fizycznym wyraża stosunek: $\mathbf{A}^{(n)}=\left.\frac{E_1}{E_n}\right|_{I_n=0}$, a więc jego odwrotność $(\mathbf{A}^{(n)})^{-1}$ jest napięciową funkcją przenoszenia zastępczego układu organu mowy, przedstawionego w postaci połączenia n odcinków rur o długościach $\Delta l=\left.\frac{l}{n}\right|_{n\to\infty}=$ const i stopniowo zmieniających się przekrojach.

Oznaczając elementy macierzy $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \ldots \mathbf{M}_k \ldots \mathbf{M}_n$ ich kolejnymi numerami według schematu

$$\mathbf{M}_k=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_k & \mathbf{B}_k\\ \mathbf{C}_k & \mathbf{D}_k\end{bmatrix}, \tag{2.17}$$

otrzymuje się po przemnożeniu:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}^{(1)}=A_1\\
&\mathbf{A}^{(2)}=A_1A_2+B_1C_2\\
&\mathbf{A}^{(3)}=A_1A_2A_3+B_1C_2A_3+A_1B_2C_3+B_1D_2C_3\\
&\mathbf{A}^{(4)}=A_1A_2A_3A_4+B_1C_2A_3A_4+A_1B_2C_3A_4+B_1D_2C_3A_4+A_1A_2B_3C_4+\\
&\quad+B_1C_2B_3C_4+A_1B_2D_3C_4+B_1D_2D_3C_4 \text{ itd.}\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mathbf{A}^{(n)}=A_1A_2A_3A_4\ldots A_n+\ldots
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Elementy $\mathbf{A}_i$ $\mathbf{B}_i$ $\mathbf{C}_i$ $\mathbf{D}_i$ macierzy $\mathbf{M}_i$ można wyrazić przez parametry LC dowolnego typu czwórnika według zestawienia w tablicy 2.1; zastosujmy czwórnik typu T (rys. 2.8-a), gdyż jego *napięciowa* funkcja przenoszenia $H = (\mathbf{A}^{(n)})^{-1} = \left.\frac{E_n}{E_1'}\right|_{I_n=0}$ na zasadzie przeciwstawności formalnie odpowiada wyznaczonej w rozdziale 2.3 *prądowej* funkcji przenoszenia $H = \frac{U_o}{U}$ rozpatrywanego czwórnika akustycznego typu Γ (rys. 2.4 i 2.5).

Podstawiając dane z kolumny 1 tablicy 2.1:

$$\mathbf{A}_i = L_iC_is^2 + 1,\ \mathbf{B}_i = L_is,\ \mathbf{C}_i = C_i\,s,\ \mathbf{D}_i = 1,$$

na podstawie wzoru (2.18) mamy:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{(4)} = {} & (L_1C_1s^2+1)\cdot(L_2C_2s^2+1)\cdot(L_3C_3s^2+1)\cdot(L_4C_4s^2+1)+\\ & + L_1sC_2s\cdot(L_3C_3s^2+1)\cdot(L_4C_4s^2+1)+\\ & + (L_1C_1s^2+1)\cdot L_2sC_2s\cdot(L_4C_4s^2+1)+L_1sC_3s\cdot(L_4C_4s^2+1)+\\ & + (L_1C_1s^2+1)\cdot(L_2C_2s^2+1)\cdot L_3sC_4s+L_1sC_2sL_3sC_4s+\\ & + (L_1C_1s^2+1)\cdot L_2sC_4s+L_1sC_4s,\end{aligned} \tag{2.19}$$

a po uporządkowaniu:

$$\mathbf{A}^{(4)} = as^8 + bs^6 + cs^4 + ds^2 + e. \tag{2.20}$$

Funkcja przenoszenia $H(s) = \frac{E_4(s)}{E_1(s)}$ układu złożonego z czterech czwórników elementarnych wyraża się wzorem:

$$H(s) = (\mathbf{A}^{(4)})^{-1} = \frac{1}{as^8 + bs^6 + cs^4 + ds^2 + e} = \frac{\frac{1}{L_1C_1L_2C_2L_3C_3L_4C_4}}{s^8 + b_0s^6 + c_0s^4 + d_0s^2 + e_0}, \tag{2.21}$$

gdzie:

$$b_0 = \frac{1}{L_1C_1} + \frac{1}{L_2C_2} + \frac{1}{L_3C_3} + \frac{1}{L_4C_4} + \frac{1}{L_2C_1} + \frac{1}{L_4C_3},$$

$$\begin{aligned}c_0 = {} & \frac{1}{L_1C_1L_2C_2} + \frac{1}{L_1C_1L_3C_3} + \frac{1}{L_1C_1L_4C_4} + \frac{1}{L_2C_2L_3C_3} +\\ & + \frac{1}{L_2C_2L_4C_4} + \frac{1}{L_3C_3L_4C_4} + \frac{1}{L_1C_1L_3C_2} + \frac{1}{L_1C_1L_4C_3} +\\ & + \frac{1}{L_2C_2L_3C_1} + \frac{1}{L_2C_2L_4C_3} + \frac{1}{L_3C_3L_4C_2} + \frac{1}{L_2C_1L_3C_3} +\\ & + \frac{1}{L_2C_1L_4C_4} + \frac{1}{L_3C_2L_4C_4} + \frac{1}{L_2C_1L_4C_3},\end{aligned}$$

$$d_0 = \frac{1}{L_1C_1L_2C_2L_3C_3} + \frac{1}{L_1C_1L_2C_2L_4C_4} + \frac{1}{L_1C_1L_3C_3L_4C_4} +$$
$$+ \frac{1}{L_2C_2L_3C_3L_4C_4} + \frac{1}{L_1C_1L_3C_2L_4C_4} + \frac{1}{L_1C_1L_2C_2L_4C_3} +$$
$$+ \frac{1}{L_1C_1L_3C_3L_4C_2} + \frac{1}{L_2C_1L_3C_3L_4C_4} + \frac{1}{L_2C_1L_3C_2L_4C_4} +$$
$$+ \frac{1}{L_2C_1L_3C_2L_4C_3},$$
$$e_0 = \frac{1}{L_1C_1L_2C_2L_3C_3L_4C_4}.$$

Równanie

$$s^8 + b_0s^6 + c_0s^4 + d_0s^2 + e_0 = 0 \tag{2.22}$$

ma 4 pary pierwiastków sprzężonych:

$$s_1,\ s_1^* = \pm j\omega_1;\quad s_2,\ s_2^* = \pm j\omega_2;$$
$$s_3,\ s_3^* = \pm j\omega_3;\quad s_4,\ s_4^* = \pm j\omega_4.$$

Oznaczając:

$$\frac{1}{L_1C_1} = \omega_{01}^2;\quad \frac{1}{L_2C_2} = \omega_{02}^2;\quad \frac{1}{L_3C_3} = \omega_{03}^2;\quad \frac{1}{L_4C_4} = \omega_{04}^2,$$

mamy:

$$H(s) = \frac{E_4}{E_1} = \frac{\omega_{01}^2 \cdot \omega_{02}^2 \cdot \omega_{03}^2 \cdot \omega_{04}^2}{(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_2^2)(s^2+\omega_3^2)(s^2+\omega_4^2)}. \tag{2.23}$$

Funkcja $H(s)$ nie ma zer, ma natomiast cztery pary biegunów sprzężonych, odpowiadających pierwiastkom równania (2.22). Przemnażając czynniki w mianowniku równania (2.23) otrzymuje się wynik

$$s^8 + (\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2+\omega_4^2)s^6 +$$
$$+ (\omega_1^2\omega_2^2+\omega_1^2\omega_3^2+\omega_1^2\omega_4^2+\omega_2^2\omega_3^2+\omega_2^2\omega_4^2+\omega_3^2\omega_4^2)s^4 +$$
$$+ (\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2+\omega_1^2\omega_2^2\omega_4^2+\omega_1^2\omega_3^2\omega_4^2+\omega_2^2\omega_3^2\omega_4^2)s^2 +$$
$$+ \omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2\omega_4^2 = 0, \tag{2.24}$$

który tożsamościowo równa się wyrażeniu (2.22). Zatem:

$$b_0 = \omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2+\omega_4^2,$$
$$c_0 = \omega_1^2\omega_2^2+\omega_1^2\omega_3^2+\omega_1^2\omega_4^2+\omega_2^2\omega_3^2+\omega_2^2\omega_4^2+\omega_3^2\omega_4^2,$$
$$d_0 = \omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2+\omega_1^2\omega_2^2\omega_4^2+\omega_1^2\omega_3^2\omega_4^2+\omega_2^2\omega_3^2\omega_4^2,$$
$$e_0 = \omega_1^2 \cdot \omega_2^2 \cdot \omega_3^2 \cdot \omega_4^2.$$

Ponieważ b_0, c_o, d_o oraz e_0 są funkcjami wszystkich parametrów $L_1L_2L_3L_4C_1C_2C_3C_4$, przeto wynika stąd ważny z punktu widzenia technicznych zagadnień syntezy następujący

Wniosek: Mając dane parametry $L_iC_i\Big|_{i=1}^{i=n}$ układu, można wyznaczyć bieguny s_i, $s_i^*\Big|_{i=1}^{i=n}$ funkcji przenoszenia, a więc tym samym określić ją w sposób jednoznaczny. Natomiast postępowanie odwrotne jest niemożliwe; mając daną funkcję przenoszenia organu mowy, określoną np. częstotliwościami F_1, F_2, F_3 ... F_n n pierwszych formant, nie można metodą analityczną odtworzyć tej funkcji w sposób jednoznaczny w układzie n czwórników LC.

Zagadnieniu wyznaczenia funkcji przenoszenia układu, złożonego z łańcuchowego połączenia czterech ogniw LC typu dolnoprzepustowego, poświęcono sporo miejsca, ponieważ układ ten stanowi podstawę teoretyczną działania wszystkich niemal rezonansowych syntezatorów formantowych o stałych skupionych. Odtworzenie funkcji przenoszenia biernych efektorów artykulacyjnych przy wymawianiu samogłosek sprowadza się mianowicie do odtworzenia kilku pierwszych — zazwyczaj czterech — zakresów formantowych, które w sposób dostateczny określają akustyczne cechy dystynktywne każdej samogłoski. Jak wykazała przeprowadzona analiza, funkcję przenoszenia akustycznego układu naturalnego (anatomicznego) określoną na przykład czterema zakresami formantowymi *F1*, *F2*, *F3* i *F4* można z powodzeniem odtworzyć w układzie zastępczym, złożonym z czterech połączonych łańcuchowo ogniw LC typu dolnoprzepustowego, o ile poszczególne ogniwa będą od siebie odseparowane np. za pomocą wzmacniaczy międzystopniowych tak, aby nie oddziaływały na siebie wzajemnie. Położenie pary biegunów sprzężonych każdego członu LC w płaszczyźnie częstotliwości zespolonej jest w tym przypadku niezależne od położenia par biegunów członów pozostałych.

Należy jednak pamiętać, że rozpatrywany układ nie jest w tym przypadku uproszczonym modelem analogowym naturalnego organu mowy, gdyż żaden z członów LC nie zastępuje określonej części geometrycznej układu naturalnego, lecz jedynie odtwarza określony zakres charakterystyki przenoszenia tego układu, a mianowicie zakres jednej z formant.

2.5. Ogólna postać analityczna funkcji przenoszenia efektorów artykulacyjnych przy wymawianiu samogłosek

Równanie (2.21) określa funkcję przenoszenia $H(s)$ układu łańcuchowego złożonego z czterech ogniw LC typu dolnoprzepustowego. Prze-

prowadzając analogiczne obliczenia dla coraz większej ilości ogniw n otrzymuje się wyrażenie ogólne na funkcję przenoszenia rury o długości l i przekroju niejednostajnym $A(x)$, zastąpionej łańcuchowym połączeniem n odcinków rur cylindrycznych o długości $\Delta l = \frac{l}{n}$ każdy i przekrojach $A_i \Big|_{i=1}^{i=n}$. Równanie to ma postać:

$$H^{(n)}(s) = \frac{U_{on}(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{a_{2n}s^{2n} + a_{2n-2}s^{2n-2} + \ldots a_2 s^2 + a_0} =$$

$$= \frac{K_n}{s^{2n} + b_{2n-2}s^{2n-2} + \ldots + b_2 s^2 + K_n} =$$

$$= \frac{K_n}{(s - s_1)(s - s_1^*)(s - s_2)(s - s_2^*)\ldots(s - s_n)(s - s_n^*)}. \tag{2.25}$$

gdzie $K_n = s_1 \cdot s_1^* \cdot s_2 \cdot s_2^* \ldots s_n \cdot s_n^*$.

Zwiększanie ilości ogniw do nieskończoności ($n \to \infty$), a więc skracanie długości elementarnych odcinków rur: $\lim_{n\to\infty} \Delta l = \lim_{n\to\infty} \frac{l}{n} = 0$, sprowadza się do wyznaczenia funkcji przenoszenia rury o długości l i przekroju niejednostajnym $A(x)$, traktowanej jako układ o stałych rozłożonych w sposób ciągły; funkcja $H(s)$ ma postać:

$$H(s) = \frac{U_o(s)}{U(s)} = \frac{\prod_{i=1}^{\infty} s_i \cdot s_i^*}{\prod_{i=1}^{\infty} (s - s_i)(s - s_i^*)}. \tag{2.26}$$

Interpretacja wyrażenia (2.26) jest następująca: funkcja przenoszenia organu mowy $H(s) = \frac{U_o(s)}{U(s)}$ podczas wymawiania samogłosek spełnia warunki:

a) ma nieskończony szereg par biegunów sprzężonych w płaszczyźnie częstotliwości zespolonej,

b) nie ma zer,

c) wartość funkcji przy częstotliwości $s = 0$ równa się 1.

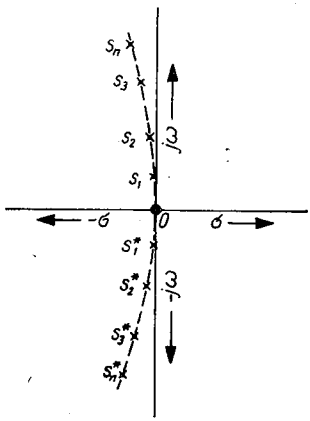
Poszczególne pary biegunów odpowiadają kolejnym zakresom formantowym $F1, F2, F3 \ldots F_\infty$ danej samogłoski, a ich położenie na płaszczyźnie $s = \sigma + j\omega$ zależy od wymiarów i chwilowej konfiguracji geometrycznej wnęk organu mowy oraz od strat układu. Ponieważ straty energii są w tym przypadku niewielkie, przeto bieguny s_i, s_i^* leżą z reguły blisko osi urojonej, a typowy ich rozkład ma postać jak na rys 2.10, na którym $s_1, s_1^* = -\sigma_1 \pm j\omega_1$, $s_2, s_2^* = -\sigma_2 \pm j\omega_2$, ... $s_n, s_n^* = -\sigma_1 \pm j\omega_n$.

Położenie pary biegunów s_i, s_i^* na płaszczyźnie $s = \sigma \pm j\omega$ całkowicie i jednoznacznie określa charakterystykę przenoszenia naturalnego organu mowy, gdyż:

$$F_i = \frac{\omega_i}{2\pi}, \tag{2.27-a}$$

$$\Delta F_i = -\frac{\sigma_i}{\pi}, \tag{2.27-b}$$

gdzie F_i jest częstotliwością kolejnej formanty F_i, a ΔF_i określa szerokość krzywej rezonansowej w zakresie tej formanty na wysokości -3 dB w stosunku do jej wierzchołka.



Rys. 2.10. Przykład rozmieszczenia biegunów funkcji $H(s)$ w płaszczyźnie częstotliwości zespolonej

Należy podkreślić z naciskiem, że funkcja przenoszenia $H(s)$ określona wzorem (2.26) określa właściwości transmisyjne organu mowy wyłącznie w przypadku samogłosek, kiedy spełnione są następujące warunki:

a) źródłem energii jest generator tonu krtaniowego o dużej impedancji wewnętrznej, włączony na początku układu ($x = 0$),

b) promieniowanie energii akustycznej na zewnątrz odbywa się wyłącznie przez otwór ust, stanowiący naturalne zakończenie organu mowy i obciążający układ przesyłowy (rurę) w punkcie $x = l$ impedancją promieniowania.

W tych warunkach wymienione wyżej właściwości funkcji przenoszenia $H(s)$ układu stają się oczywiste, gdyż:

a) Falowód akustyczny (rura) jako układ o stałych rozłożonych w sposób ciągły musi mieć nieskończony szereg własnych częstotliwości rezonansowych.

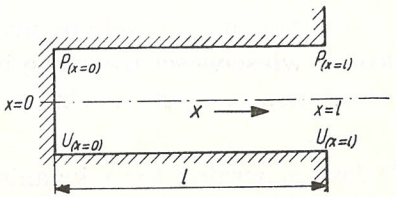
b) Bieguny funkcji przenoszenia odpowiadają w tym przypadku własnym częstotliwościom rezonansowym rury zamkniętej na początku ($x=0$) i otwartej na końcu ($x=l$) i zasilanej ze źródła o stałej wydajności prędkości objętościowej $U(s)$ włączonego na początku układu ($x = 0$); zera funkcji przenoszenia mogłyby się pojawić jedynie w tym przypadku, gdyby przekrój rury $A(x)$ przynajmniej w jednym punkcie jej długości równał się zeru, co przy wymawianiu samogłosek nie może nastąpić.

c) Warunek $H(s = 0) = 1$ odpowiada stałemu przepływowi ośrodka przez rurę i wyraża po prostu prawo ciągłości strugi w postaci $U_c(s=0) = U(s=0)$.

2.6. Model naturalnego organu mowy w postaci rury o przekroju jednostajnym

Najbardziej uproszczonym modelem organu mowy jest rura o długości l i stałym przekroju A = const. Model ten nie ma znaczenia praktycznego przy syntezie samogłosek, często jednak bywa stosowany przy rozpatrywaniu układów bardziej skomplikowanych.

Jeżeli maksymalny wymiar poprzeczny rury $d < \frac{\lambda}{4}$ czyli $f < \frac{c}{4d}$, to drgania poprzeczne można pominąć i ograniczyć rozważania do przypadku fali płaskiej rozchodzącej się w rurze jednorodnej, zamkniętej na początku ($x = 0$), a otwartej na końcu ($x = l$); układ taki podano na rys. 2.11. Wychodząc z ogólnych równań falowodu akustycznego w postaci



Rys. 2.11. Teoretyczny model organu mowy w postaci rury jednorodnej zamkniętej na początku ($x = 0$) i otwartej na końcu ($x = l$)

$$\begin{bmatrix} P_{(x=0)} \\ U_{(x=0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \Gamma & Z_0 \sinh \Gamma \\ \frac{1}{Z_0} \sinh \Gamma & \cosh \Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{(x=l)} \\ U_{(x=l)} \end{bmatrix}, \tag{2.28}$$

gdzie:

$Z_0 = \frac{\varrho_0 C}{A}$ jest opornością falową rury,

$\Gamma = \gamma l = (\alpha + j\beta) l$ jest tamownością falową rury,

można wyznaczyć funkcję przenoszenia układu w postaci operatorowej przy pominięciu impedancji promieniowania otwartego końca rury jako:

$$H(s) = \frac{U_{(x=l)}}{U_{(x=0)}} = \frac{1}{\cosh \Gamma} = \frac{1}{\cosh\left[\alpha l + s\frac{l}{c}\right]} = \frac{K}{\prod_{i=1}^{\infty}(s - s_i)(s - s_i^*)}. \quad (2.29)$$

W tym przypadku $\Gamma = \alpha l + s\frac{l}{c}$, gdzie:

$\alpha = \frac{1}{2c}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)$ jest współczynnikiem tłumienia fali w rurze, $L = \frac{\varrho_0}{A}$ jest masą akustyczną na jednostkę długości rury [g·cm^{-5}], $C = \frac{A}{\varrho_0 C^2}$ jest podatnością akustyczną na jednostkę długości rury [cm^3.s^2.g^{-1}], R jest współczynnikiem strat wzdłużnych (tarciowych) falowodu [g.s^{-1}.cm^{-5}], zaś G jest współczynnikiem strat poprzecznych falowodu wskutek przewodnictwa cieplnego [cm^{3}sg^{-1}].

Współczynnikom strat R i G można przypisać konkretne znaczenie fizyczne, wychodząc z teorii propagacji fal dźwiękowych w rurach stratnych.

Współczynnik R uwzględnia w tym przypadku straty tarciowe w warstwie ośrodka stykającej się bezpośrednio ze ściankami falowodu i przedstawia sobą jednostkową oporność szeregową o wartości

$$R = \frac{S}{2A^2}(2\mu\omega\varrho_0)^{1/2}, \quad (2.30)$$

gdzie:

S [cm] jest obwodem powierzchni przekroju A[cm^2] falowodu,

μ jest współczynnikiem lepkości ośrodka (dla powietrza $\mu = 1{,}84 \cdot 10^{-4}$ [g.cm^{-1}.s^{-1}]).

W przypadku falowodu o przekroju kołowym i promieniu r

$$S/2A = 1/r, \quad (2.31)$$

wobec czego

$$R = \frac{1}{Ar}(2\mu\omega\varrho_0)^{1/2} \quad [\text{g.s}^{-1}.\text{cm}^{-5}], \quad (2.32)$$

gdzie r jest promieniem przekroju falowodu [cm].

Współczynnik G uwzględnia straty wskutek przewodnictwa cieplnego między ośrodkiem i ściankami rury i przedstawia sobą jednostkową oporność poprzeczną (upływność) o wartości:

$$G = S(\varkappa - 1)\frac{\omega^2}{\varrho_0 c^2}\left[\frac{K_h}{2\omega c_p \varrho_0}\right]^{1/2} \quad [\mathrm{cm^3.s.g^{-1}}], \tag{2.33}$$

gdzie K_h jest współczynnikiem przewodności cieplnej ośrodka, zaś $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$ jest stosunkiem ciepła właściwego ośrodka przy stałym ciśnieniu do ciepła właściwego przy stałej objętości. W przypadku powietrza w normalnych warunkach atmosferycznych ($t = 20°\mathrm{C}$, $P_0 = 1$ atm)

$$R = \frac{1{,}66 \cdot 10^{-3} f^{1/2}}{A(2A/S)} \quad [\mathrm{gs^{-1}\ cm^{-5}}], \tag{2.34-a}$$

$$G = S\frac{0{,}91 \cdot 10^{-5} f^{1/2}}{c} \quad [\mathrm{cm^3\ s\ g^{-1}}]. \tag{2.34-b}$$

Impedancja falowa rury

$$Z = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = Z_0\left[1 - j\frac{\alpha_R}{\beta} + j\frac{\alpha_G}{\beta}\right]. \tag{2.35}$$

Tamowność falowa rury

$$\Gamma = l\sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = l(\alpha + j\beta) = l[(\alpha_R + \alpha_G) + j\beta], \tag{2.36}$$

gdzie:

$$\alpha_R = \frac{R}{2Z_0},$$

$$\alpha_G = \frac{GZ_0}{2},$$

$$Z_0 = \sqrt{L/C} = \frac{\varrho_0 c}{A},$$

$$\beta = \frac{\omega}{c} = \omega\sqrt{LC}.$$

Na podstawie tych wyrażeń współczynnik tłumienia fali w rurze określa się jako:

$$\begin{aligned} \alpha_R &= \frac{1}{c}\cdot\frac{R}{2L} = \frac{R\cdot A}{2\varrho_0 c}, \\ \alpha_G &= \frac{1}{c}\cdot\frac{G}{2C} = \frac{G\cdot\varrho_0 c}{2A}. \\ \alpha &= \alpha_R + \alpha_G = \frac{1}{2c}\left[\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right]. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Bieguny funkcji przenoszenia $H(s)$ (2.29) odpowiadają częstotliwościom zespolonym $s_i = \sigma_i + j\omega_i$, przy których spełniony jest warunek

$$\cosh \Gamma(s) = 0, \tag{2.38}$$

czyli

$$\Gamma(s) = \pm j(2n-1)\frac{\pi}{2}, \tag{2.39}$$

$n = 0; 1; 2; 3 \ldots$ itd.

Rozwiązując równanie

$$\cosh \Gamma(s) = \cosh\left[\alpha l + s\frac{l}{c}\right] = \cosh\left[\alpha l + (\sigma_i + j\omega_i)\frac{l}{c}\right] = 0, \tag{2.40}$$

czyli

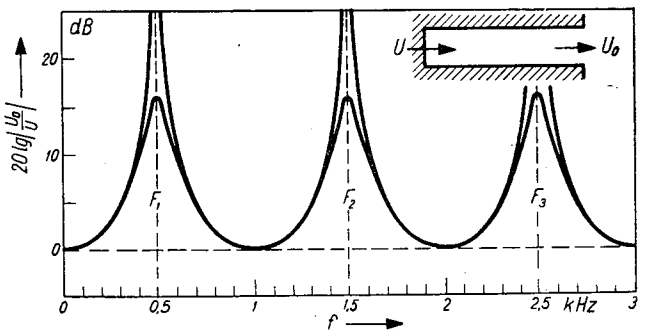
$$\alpha l + \sigma_i \cdot \frac{l}{c} + j\omega_i \frac{l}{c} = \pm j(2n-1)\frac{\pi}{2}, \tag{2.41}$$

można wyznaczyć częstotliwości drgań własnych rury F_i oraz szerokości krzywych rezonansowych ΔF_i jako

$$\boxed{F_i = \frac{\omega_i}{2\pi} = \pm\frac{1}{4}(2n-1)\frac{c}{l},} \tag{2.42-a}$$

$$\boxed{\Delta F_i = -\frac{\sigma_i}{\pi} = \frac{\alpha c}{\pi}.} \tag{2.42-b}$$

Jeżeli długość rury równa się przeciętnej długości anatomicznego modelu naturalnego organu mowy, to $l \approx 17$ cm i $F_i = (2n - 1)$ 500 Hz, czyli $F_1 = 500$ Hz, $F_2 = 1500$ Hz, $F_3 = 2500$ Hz itd.



Rys. 2.12. Amplitudowa charakterystyka przenoszenia $|H(s)| = 20\lg\left|\frac{U_0}{U}\right| = f(f)$ rury o długości $l = 17$ cm i stałym przekroju

Stała K we wzorze (2.29) przy małych stratach układu

$$K = \frac{1}{\cosh \alpha l} \approx 1 . \tag{2.43}$$

Amplitudowa charakterystyka przenoszenia $|H(s)| = 20 \lg \left|\frac{U}{U}\right| = f(f)$ rury o przekroju stałym i długości $l = 17$ cm podana jest na rys. 2.12. Charakterystykę tę wykreślono dodając rzędne charakterystyk o kształcie jak na rys. 2.4-c i o częstotliwościach rezonansowych równych kolejno $F_1 = 500$ Hz, $F_2 = 1500$ Hz, $F_3 = 2500$ Hz, $F_4 = 3500$ Hz itd., $F_n = (2_n - 1)$ 500 Hz, przy czym dla uproszczenia założono, że szerokość pasm poszczególnych charakterystyk są jednakowe i równe $\Delta F_1 = \Delta F_2 = \Delta F_3 = \ldots = \Delta F_n = 100$ Hz.

Wykreślona w ten sposób charakterystyka, odpowiadająca funkcji przenoszenia (2.29), ma następujące właściwości:

a) Wartości rzędnych przy częstotliwościach rezonansowych F_1, F_2, $F_3 \ldots F_n$ są jednakowe;

b) Wartości rzędnych przy częstotliwości $f = 0$ oraz przy częstotliwościach leżących między częstotliwościami rezonansowymi, tj. przy $f \approx 1000$ Hz; 2000 Hz; 3000 Hz itd. odpowiadają poziomowi 0 dB, czyli $|U_o/U| = 1$;

c) Odległości (w liniowej skali częstotliwości między kolejnymi częstotliwościami rezonansowymi są jednakowe, zależą jedynie od całkowitej długości rury i wynoszą: $(F_2—F_1) = (F_3—F_2) = \ldots = (F_n—F_{n-1}) = \frac{c}{2l}$;

d) Skracanie rury powoduje obniżenie i zagęszczenie rozmieszczenia częstotliwości rezonansowych, a wydłużenie rury — ich podwyższenie i rozrzedzenie.

Omówiony model naturalnego organu mowy w postaci rury o stałym przekroju i długości $l = 17$ cm jest oczywiście modelem teoretycznym, który nie odpowiada warunkom rzeczywistym, jednak pozwala na wyciągnięcie ważnych wniosków ogólnych. Model ten został umownie przyjęty w pracach badawczych jako wzorzec znormalizowanej samogłoski neutralnej ∃.

Przy danej konfiguracji geometrycznej efektorów artykulacyjnych określonej funkcją przekroju $A(x)$, odpowiadającej konkretnej samogłosce, funkcja przenoszenia $H(s)$ opisana równaniem (2.29) zachowuje oczywiście swoją postać z tą jedynie różnicą, że częstotliwości rezonansowe F_1, $F_2 \ldots F_n$ i szerokości pasm ΔF_1, $\Delta F_2 \ldots \Delta F_n$ przybierają wartości zależne od postaci funkcji przekroju $A(x)$ i odpowiadają nowym położeniom biegunów $s_i = \sigma_i \pm j\omega_i$ funkcji $H(s)$ w płaszczyźnie często-

tliwości zespolonej. Samogłosce "a" odpowiadają np. wartości $F_1 \approx 800$ Hz, $F_2 \approx 1200$ Hz, $F_3 \approx 2400$ Hz, $F_4 \approx 3500$ Hz, samogłosce „u" — $F_1 \approx$ 380 Hz, $F_2 \approx 800$ Hz, $F_3 \approx 2000$ Hz, $F_4 \approx 3500$ Hz itd. [26], [27].

Częstotliwości formantowe odpowiadają zawsze częstotliwościom drgań własnych falowodu, utworzonego przez tor akustyczny naturalnego organu mowy i nie zależą od postaci funkcji wzbudzającej $U(s)$ generatora tonu krtaniowego. Znając zatem częstotliwości formant F_1, F_2, $F_3 \ldots F_n$ i szerokości pasm ΔF_1, ΔF_2, $\Delta F_3 \ldots \Delta F_n$ można w oparciu o wzory (2.42-a) i (2.42-b) wyznaczyć bieguny $s_i = \sigma_i \pm j\omega_i$ funkcji przenoszenia $H(s)$ i tym samym określić ją w sposób analityczny jednoznacznie, stwarzając w ten sposób podstawę do odtworzenia kształtu tej funkcji w technicznym układzie syntezy.

2.7. Aproksymacja funkcji przenoszenia $H(s)$ za pomocą funkcji o skończonej ilości par biegunów sprzężonych

Z poprzednich rozważań teoretycznych wynika, że w przypadku samogłosek funkcja przenoszenia $H(s)$ efektorów artykulacyjnych, traktowanych zgodnie z warunkami rzeczywistymi jako układ akustyczny o stałych rozłożonych w sposób ciągły, ma nieskończony szereg par biegunów sprzężonych, odpowiadających kolejnym formantom danej samogłoski i bez względu na postać analityczną funkcji $A(x)$ może być określona wzorem ogólnym

$$H(s) = \frac{K}{(s - s_1)(s - s_1^*)(s - s_2)(s - s_2^*) \ldots (s - s_\infty)(s - s_\infty^*)} = \frac{\prod_{i=1}^{\infty} s_i s_i^*}{\prod_{i=1}^{\infty} (s - s_i)(s - s_i^*)}. \tag{2.44}$$

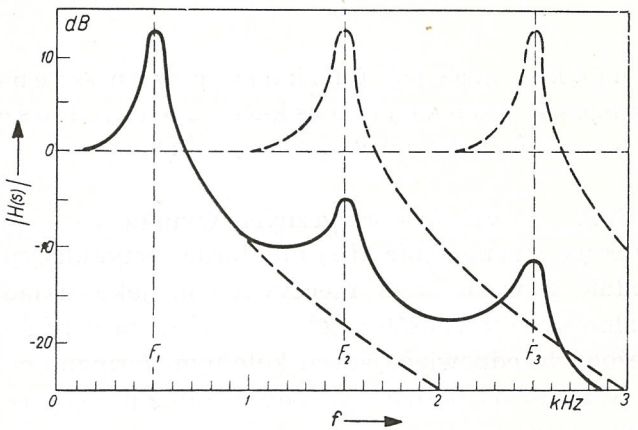
Liczne prace eksperymentalne z zakresu akustyki fonetycznej wykazały [5], [35], [36], [38], że charakter fonetyczny dźwięków samogłoskowych, obejmujący ich podstawowe cechy dystynktywne, określony jest dostatecznie dokładnie przez kształt amplitudowej charakterystyki przenoszenia w zakresie pierwszych trzech lub czterech formant, czyli że akustyczne i fonetyczne cechy danej samogłoski można określić w sposób jednoznaczny za pomocą czterech par biegunów sprzężonych $s_1 s_1^*$, $s_2 s_2^*$, $s_3 s_3^*$, $s_4 s_4^*$ funkcji przenoszenia $H(s)$, opisujących częstotliwości średnie i szerokości pasm czterech pierwszych zakresów formantowych. Można by stąd wyciągnąć pozornie słuszny wniosek, że za podstawę

układu syntezy samogłosek można przyjąć układ o funkcji przenoszenia o skończonej ilości par biegunów sprzężonych, określonej wzorem

$$H(s) = \frac{\prod_{i=1}^{4} s_i s_i^*}{\prod_{i=1}^{4} (s - s_i)(s - s_i^*)}, \tag{2.45}$$

dającej się stosunkowo łatwo zrealizować w praktyce.

Aby sprawdzić słuszność tego wniosku, na rys. 2.13 powtórzono proces graficznego sumowania poszczególnych charakterystyk rezonansowych z rys. 2.4-c, z tym jednak, że w przeciwieństwie do metody sumowania przyjętej na rys. 2.12, ograniczono się do trzech pierwszych czę-



Rys. 2.13. Amplitudowe charakterystyki przenoszenia $|H(s)| = 20 \lg \left| \frac{U_o}{U} \right| = f(f)$ rury o długości $l = 17$ cm i stałym przekroju, przy uwzględnieniu tylko trzech pierwszych częstotliwości drgań własnych

stotliwości rezonansowych $F_1 = 500$ Hz, $F_2 = 1500$ Hz, $F_3 = 2500$ Hz rury o długości $l = 17$ cm i jednostajnym przekroju, pomijając tym samym wszystkie wyższe bieguny funkcji $H(s)$ poczynając od $s_4 s_4^*$ włącznie. Z porównania otrzymanej w ten sposób charakterystyki z charakterystyką z rys. 2.12 wynika, że pominięcie wyższych biegunów funkcji $H(s)$ od $s_k s_k^*$ do $s_\infty s_\infty^*$ nie tylko eliminuje częstotliwości rezonansowe $F_k, F_{k+1} \ldots F_\infty$, co zgodnie z wynikami badań eksperymentalnych byłoby z punktu widzenia syntezy dopuszczalne i uzasadnione, lecz także zmienia kształt amplitudowej charakterystyki przenoszenia układu $H(s)$ w zakresie formant niższych, od F_1 do F_{k-1}, zmieniając tym samym w sposób istotny akustyczne i fonetyczne cechy samogłoski podlegającej syntezie. Jedynym środkiem zaradczym, eliminującym skutki tego niepożądanego zjawiska przy aproksymowaniu funkcji przenoszenia $H(s)$ za pomocą skończonej ilości par biegunów jest wprowadzenie do wzoru

(2.45) współczynnika korekcyjnego, uwzględniającego wpływ pominiętych wyższych biegunów, od $s_k s_k^*$ do $s_\infty s_\infty^*$ na kształt charakterystyki w zakresie biegunów niższych, od $s_1 s_1^*$ do $s_{k-1} s_{k-1}^*$ włącznie.

Współczynnik korekcyjny można wyznaczyć w rozpatrywanym przypadku rury o stałym przekroju w sposób następujący. Amplitudowa charakterystyka funkcji przenoszenia (2.44) wyraża się wzorem

$$|H(\omega)| = \left| \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty} [1 - j\omega/(\sigma_i + j\omega_i)]\,[1 - j\omega/(\sigma_i - j\omega_i)}} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty} \left[1 - j\,\omega/(\sigma_i + j\,\omega_i) - j\,\omega/(\sigma_i - j\,\omega_i) - \frac{\omega^2}{\sigma_i^2 + \omega_i^2} \right]} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty} \left[1 - 2\,j\,\frac{\omega\,\sigma_i}{(\sigma_i^2 + \omega_i^2)} - \frac{\omega^2}{(\sigma_i^2 + \omega_i^2)} \right]} \right| = \left| \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty} \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0i}^2} - 2\,j\,\frac{\sigma_i\,\omega}{\omega_{0i}^2} \right]} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty} [1 - x_i^2 + j\,\delta_i\,x_i]} \right| = \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty} [(1 - x_i^2)^2 + \delta_i^2\,x_i^2]^{1/2}}, \tag{2.46}$$

gdzie:

$$x_i = \frac{\omega}{\omega_{0i}} = \frac{f}{F_{0i}} \approx \frac{f}{F_i},$$

$$\delta_i = -2\sigma_i/\omega_{0i} \approx \frac{\Delta F_i}{F_i},$$

$$\omega_{0i} = (\sigma_i^2 + \omega_i^2)^{1/2} \approx \omega_i.$$

Uwzględniając we wzorze (2.46) tylko k pierwszych biegunów ($i = 1; 2; 3; \ldots k$) mamy:

$$|H_k(\omega)| = \frac{1}{\prod_{i=1}^{k} [(1 - x_i)^2 + \delta_i^2\,x_i^2]^{1/2}}. \tag{2.47}$$

Współczynnik korekcyjny $|K_k(\omega)|$ wyrażający wpływ pominiętych we wzorze (2.47) wyższych biegunów (od s_{k+1}, s_{k+}^* do s_∞, s_∞^*) na kształt amplitudowej charakterystyki przenoszenia układu można wyznaczyć ze wzorów (2.46) i (2.47) jako:

$$|K_k(\omega)| = \frac{|H(\omega)|}{|H_k(\omega)|} = \frac{\prod_{i=1}^{k} [(1 - x_i^2)^2 + \delta_i^2\,x_i^2]^{1/2}}{\prod_{i=1}^{\infty} [(1 - x_i^2)^2 + \delta_i^2\,x_i^2]^{1/2}} =$$

$$= \frac{1}{\prod_{=k+1}^{\infty} [(1 - x_i^2)^2 + \delta_i^2\,x_i^2]^{1/2}} \approx \frac{1}{\prod_{i=k+1}^{\infty} [1 - x_i^2]}. \tag{2.48}$$

Uproszczenie zastosowane we wzorze (2.48) polega na pominięciu pod znakiem iloczynu składnika $\delta_i^2 x_i^2 \approx \left(\frac{\Delta F_i}{F_i}\right)^2 \cdot \left(\frac{f}{F_i}\right)^2$, który przybiera wartości znaczące jedynie przy częstotliwościach bliskich częstotliwościom $F_i\big|_{i=k+1}^{\infty}$, a więc wpływa tylko na wysokość wierzchołków charakterystyki przenoszenia w zakresie formant wyższych od F_k, czyli nie uwzględnionych we wzorze (2.47). Fant [14] obliczył przybliżone wartości względne współczynnika $|K_k(\omega)|$ dla przypadku rury o długości $l = 17$ cm i przekroju stałym, której częstotliwości rezonansowe $F_1 = 500$ Hz, $F_2 = 1500$ Hz, $F_3 = 2500$ Hz, $F_4 = 3500$ Hz określone są wzorem ogólnym $F_i = (2i - 1)\frac{c}{4l} = (2i - 1)\cdot 500$ Hz, otrzymując wynik:

$$K_k = 20 \lg_{10} |K_k(\omega)| \approx 20 \lg_{10} e \left\{ \left[\frac{\pi^2}{8} - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(2i-1)^2} \right] x_i^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left[\frac{\pi^4}{96} - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(2i-1)^4} \right] x_i^4 \right\} \quad [\text{dB}], \tag{2.49}$$

gdzie $x_1 = \frac{f}{F_1} = 4f\frac{l}{c}$.

Poprawkę tę należy wprowadzić do wzoru (2.47) jedynie w pasmie częstotliwości obejmującym zakresy formant od F_1 do F_k włącznie, gdyż powyżej tego pasma wzór (2.47) przestaje obowiązywać. Zasadniczo jako górną granicę częstotliwości współczynnika korekcyjnego K_k przyjmuje się częstotliwość średnią arytmetyczną częstotliwości F_k i F_{k+1}.

Jakkolwiek współczynnik korekcyjny K_k (2.49) wyprowadzony został dla szczególnego przypadku samogłoski neutralnej ∃ o częstotliwościach formant równych nieparzystym wielokrotnościom 500 Hz, to jednak z powodzeniem może on być stosowany do wszystkich innych samogłosek; popełniony przy tym błąd jest tym mniejszy, im mniejsze jest przesunięcie formant $F_{k+1} \ldots F_\infty$ danej samogłoski z położeń neutralnych $(2k+1)\cdot 500$ Hz.

Obliczone przez Fanta wartości liczbowe współczynnika K_k na podstawie wzoru (2.49) wynoszą:

$$K_2 = 20 \log_{10}|K_2(\omega)| = 1{,}06\, x_1^2 + 0{,}0102\, x_1^4 \quad [\text{dB}],$$

$$K_3 = 20 \log_{10}|K_3(\omega)| = 0{,}72\, x_1^2 + 0{,}0033\, x_1^4 \quad [\text{dB}],$$

$$K_4 = 20 \log_{10}|K_4(\omega)| = 0{,}54\, x_1^2 + 0{,}00143\, x_1^4 \quad [\text{dB}],$$

gdzie $x_1 = f/F_1$.

Funkcję przenoszenia dowolnej samogłoski można zatem aproksymować w zakresie pierwszych k formant za pomocą wzoru

$$H_k(s) = \frac{K_k(s)}{\prod_{i=1}^{k} [(s/s_i - 1)(s/s_i^* - 1)]}, \tag{2.50}$$

w którym częstotliwości zespolone biegunów $s_i = \sigma_i + j\omega_i$ określają częstotliwości $F_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$ kolejnych formant i ich szerokości pasm $\Delta F_i = -\frac{\sigma_i}{\pi}$ na poziomie -3 dB poniżej wierzchołka krzywej rezonansowej.

3. FUNKCJA ŹRÓDŁA GENERATORA TONU KRTANIOWEGO

3.1. Założenia ogólne

Wyznaczywszy ogólną postać analityczną funkcji przenoszenia $H(s)$ naturalnego organu mowy przy wymawianiu samogłosek, należy z kolei zbadać postacie analityczne dwóch pozostałych czynników we wzorze (2.1):

$$P(s) = U(s) \cdot H(s) \cdot Z_p(s), \tag{3.1}$$

a mianowicie: funkcji źródła tonu krtaniowego $U(s)$ i funkcji promieniowania otworu ust $Z_p(s)$. Pomimo tego, że:

a) postać funkcji przenoszenia nie zależy od postaci funkcji źródła $U(s)$,

b) funkcja źródła $U(s)$ i funkcja promieniowania są w pierwszym przybliżeniu niezależne od akustycznych i fonetycznych cech dystynktywnych wymawianej samogłoski i mają charakter czynników stałych we wzorze (3.1),

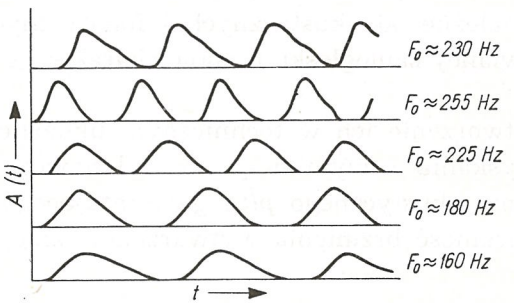
to jednak odtworzenie ich w technicznym układzie syntezatora jest niezbędne do uzyskania w wyniku syntezy właściwego przebiegu czasowego fali ciśnienia akustycznego $p(t)$, gwarantującego dostateczną zrozumiałość i naturalność brzmienia wytwarzanej samogłoski.

3.2. Mechanizm wytwarzania tonu krtaniowego

Informacje dotyczące dokładnej fizycznej struktury fali tonu krtaniowego, jakie znaleźć można w literaturze światowej, są raczej skąpe mimo, że zagadnieniu temu poświęcono szereg prac doświadczalnych, zapoczątkowanych przez Wheatstone'a, Helmholtza, Königa i innych. Przyczyny tego stanu rzeczy należy doszukiwać się przede wszystkim w trudnościach natury technicznej i pomiarowej, jakie nastręczało wyznaczanie fizycznych parametrów fali krtaniowej na drodze bezpośredniej, przy użyciu stosunkowo prymitywnej aparatury pomiarowej. Z tego względu wyniki prac cytowanych poprzednio autorów, podobnie jak i autorów współczesnych (Trendelenburg, Wullstein, Hartmann [23], [52], [53], [54], Tarnóczy [47], [48], [50], uzyskiwane głównie na drodze pomiarów optycznych, mają charakter przybliżony i orientacyjny.

Znacznie bardziej dokładne i szczegółowe wyniki dają badania drgań strun głosowych oparte na pomiarach powierzchni szczeliny strun głosowych przy zastosowaniu techniki szybkich zdjęć fotograficznych, zapoczątkowane przez Farnswortha w Laboratoriach Bella [36], a następnie kontynuowane przez Fletchera [21], Moore'a, von Ledena i Timckego [33], [51]). Wyniki prac eksperymentalnych i ich analiza teoretyczna, przeprowadzone między innymi przez Van den Berga [2], pozwoliły na wyznaczenie przybliżonego związku między charakterystyką czasową prędkości objętościowej $U(t)$ w szczelinie strun głosowych, a funkcją powierzchni tej szczeliny $A(t)$ jako wielkością mierzoną bezpośrednio. Jednocześnie wyjaśniony został przynajmniej częściowo mechanizm wytwarzania tonu krtaniowego.

Źródłem tonu krtaniowego są struny głosowe wprawiane w drgania mechaniczne przez nadciśnienie wytwarzane w płucach. Szczelina strun głosowych na długość rzędu 12 mm, a jej maksymalna szerokość przy średniej intensywności głosu jest rzędu 2,5 mm; głębokość szczeliny waha się w granicach od 2 do 5 mm. Generacyjnego działania strun głosowych nia należy tłumaczyć promieniowaniem energii akustycznej przez ich drgające powierzchnie; jest to efekt uboczny i przy analizie tonu krtaniowego nie gra roli znaczącej. Działanie strun głosowych sprowa-

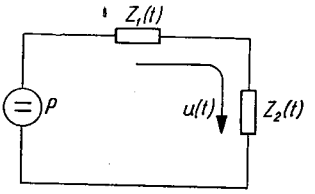


Rys. 3.1. Typowe charakterystyki czasowe powierzchni otworu szczeliny strun głosowych $A(t) = f(t)$ [według danych Bell Telephone Labs.]

dza się niemal wyłącznie do modulowania strumienia powietrza wypływającego z płuc przez szczelinę o okresowo zmiennej powierzchni otworu, określonej funkcją $A(t)$ (rys. 3.1).

Elektryczny układ zastępczy generatora tonu krtaniowego można przedstawić w postaci schematu podanego na rys. 3.2, gdzie źródło napięcia stałego P symbolizuje nadciśnienie wytwarzane w płucach, a $Z_1(t)$ i $Z_2(t)$ są odpowiednio impedancją akustyczną szczeliny strun głosowych i impedancją wejściową wnęk krtani i jamy ustnej. Wobec tego, że $Z_1(t) \gg Z_2(t)$, o charakterze funkcji prędkości objętościowej ośrodka $U(t)$ decyduje w pierwszym przybliżeniu postać funkcji impedancji szczeliny $Z_1(t)$.

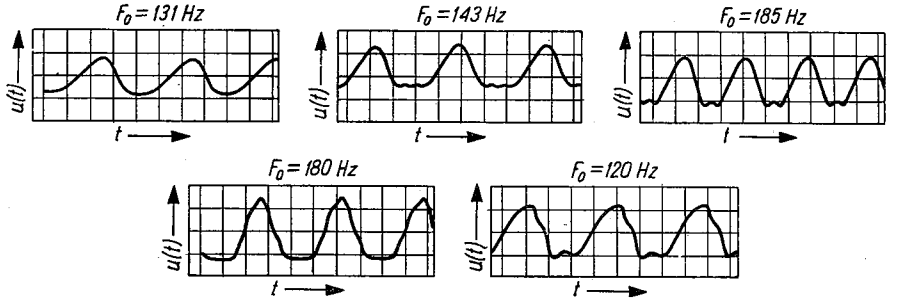
Badania eksperymentalne Van den Berga [2] wykazały, że impedancja otworu strun głosowych, traktowana jako szczelina prostokątna o długości b, szerokości a i głębokości l jest funkcją zarówno powierzchni



Rys. 3.2. Zastępczy układ elektryczny generatora tonu krtaniowego

otworu $A = a \cdot b$, jak i prędkości cząsteczkowej $V = \frac{U}{A}$ ośrodka, ma zatem charakter nielinearny; z tego względu wyznaczenie dokładnej postaci funkcji prędkości objętościowej $U(t)$ w szczelinie w zależności od funkcji powierzchni szczeliny $A(t)$ jest trudne, wymaga stosowania szeregu założeń upraszczających i nie daje dokładnych wyników.

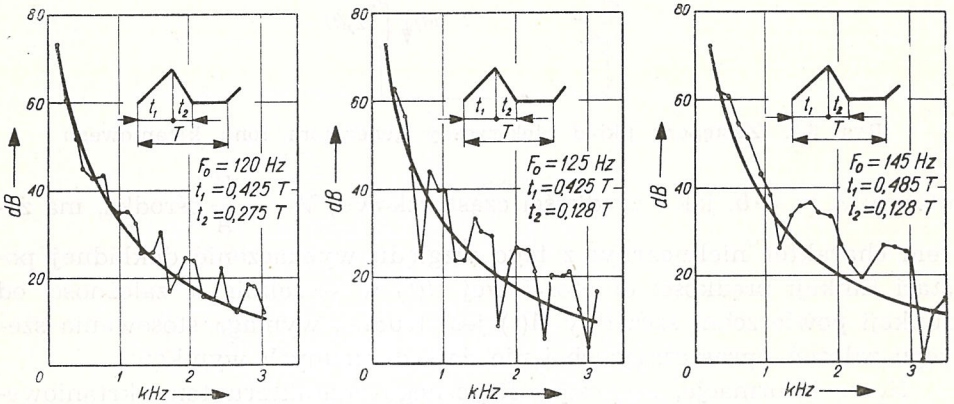
Nowe informacje, dotyczące fizycznego charakteru tonu krtaniowego, dały prace R. L. Millera [31], [32]. W przeciwieństwie do metod stosowanych poprzednio, autor ten badania swoje oparł na bezpośrednim pomiarze charakterystyki czasowej fali tonu krtaniowego. Pomiary polegały na oscyloskopowej rejestracji fali ciśnienia $p(t)$, odpowiadającej różnym dźwiękom samogłoskowym, po skompensowaniu wpływu rezonansów własnych wnęk krtani i jamy ustnej, określonych funkcją przenoszenia $H(s)$, przez włączenie do układu pomiarowego czwórnika o właściwościach transmisyjnych przeciwstawnych do funkcji przenoszenia $H(s)$ odpowiadającej badanej samogłosce.



Rys. 3.3. Charakterystyki czasowe $u(t)$ prędkości objętościowej w szczelinie strun głosowych, według Millera [31], [32]

Typowe charakterystyki czasowe funkcji $u(t)$ tonu krtaniowego pomierzone przez Millera podano na rys. 3.3, a na rys. 3.4 — obliczone za pomocą analizy Fouriera widma amplitud impulsów tonu krtaniowego o różnych częstotliwościach podstawowych F_o, aproksymowanych do po-

staci trójkątów o różnym stosunku czasu narastania impulsu t_1 do czasu zaniku t_2. Z analizy wykresów wynika, że obwiednia widma harmonicznych tonu krtaniowego ma przebieg nieregularny, zwłaszcza jeżeli się uwzględni fakt, że otrzymane wyniki dotyczą przebiegów czasowych wyidealizowanych. W rzeczywistości wpływ zaokrągleń kątów funkcji



Rys. 3.4. Obliczone widma amplitudowe aproksymowanych impulsów tonu krtaniowego

$u(t)$ jeszcze bardziej komplikuje charakter widma. Ogólnie biorąc, widmo impulsu trójkątnego ma charakter cykliczny, określony funkcją $A(nx) = \frac{\sin nx}{n^2x^2}$ lub $A(nx) = \frac{\sin^2 nx}{n^2 x^2}$. Do celów odtworzenia widma harmonicznych tonu krtaniowego w układzie technicznym wystarczy jednak określić średnie nachylenie widma, które zgodnie z podanymi wyżej wynikami jest proporcjonalne do n^{-2}, gdzie n jest rzędem harmonicznej, a na wykresach rys. 3.4 odpowiada stromości opadania — 12 dB na oktawę.

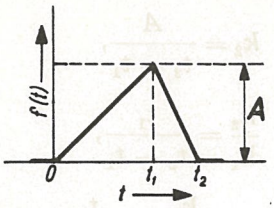
3.3. Aproksymacja funkcji źródła tonu krtaniowego w układach impulsowych

Załóżmy, że pojedynczy impuls tonu krtaniowego ma kształt trójkątny (rys. 3.5) opisany funkcją $f(t)$ spełniającą warunki:

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 && t < 0 \\ f(t) &= A\frac{t}{t_1} = k_1 t && 0 < t < t_1 \\ f(t) &= A \cdot \left(1 - \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\right) && t_1 < t < t_2 \\ f(t) &= 0 && t > t_2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Funkcję $f(t)$ można przedstawić w postaci sumy czterech funkcji

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + f_4(t), \tag{3.3}$$



Rys. 3.5. Aproksymacja impulsu krtaniowego w postaci trójkąta

spełniających warunki:

$$\text{I} \quad \begin{cases} f_1(t) = 0 & t < 0 \\ f_1(t) = A \cdot \dfrac{t}{t_1} = k_1 t & t > 0 \end{cases} \tag{3.3-a}$$

$$\text{II} \quad \begin{cases} f_2(t) = 0 & t < t_1 \\ f_2(t) = -A \cdot \dfrac{(t - t_1)}{t_1} = k_1(t - t_1) & t > t_1 \end{cases} \tag{3.3-b}$$

$$\text{III} \quad \begin{cases} (f_3 t) = 0 & t < t_1 \\ f_3(t) = -A \cdot \dfrac{(t - t_1)}{(t_2 - t_1)} = k_2(t - t_1) & t > t_1 \end{cases} \tag{3.3-c}$$

$$\text{IV} \quad \begin{cases} f_4(t) = 0 & t < t_2 \\ f_4(t) = A \cdot \dfrac{(t - t_2)}{(t_2 - t_1)} = k_2(t - t_2) & t > t_2 \end{cases} \tag{3.3-d}$$

Transformata Laplace'a funkcji $f(t)$ ma postać:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = F_1(s) + F_2(s) + F_3(s) + F_4(s) =$$

$$= k_1 \frac{1}{s^2} - k_1 e^{-st_1} \cdot \frac{1}{s^2} - k_2 e^{-st_1} \frac{1}{s^2} + k_2 e^{-st_2} \frac{1}{s^2} =$$

$$= k_1 \cdot \frac{1 - e^{-st_1} - (k_2/k_1)\, e^{-st_1} + (k_2/k_1)\, e^{-st_2}}{s^2} =$$

$$= k_1 \cdot \frac{(k_2/k_1)\, e^{-st_2} - (1 + k_2/k_1)\, e^{-st_1} + 1}{s^2} =$$

$$= \frac{A}{t_1} \frac{\dfrac{t_1}{t_2 - t_1} \cdot e^{-st_2} - \dfrac{t_2}{t_2 - t_1} \cdot e^{-st_1} + 1}{s^2}, \tag{3.4}$$

gdzie:

$$k_1 = \frac{A}{t_1},$$

$$k_2 = \frac{A}{t_2 - t_1},$$

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{t_1}{t_2 - t_1},$$

$$1 + \frac{k_2}{k_1} = \frac{t_2}{t_2 - t_1}.$$

Zera funkcji $F(s)$ odpowiadają pierwiastkom równania:

$$\frac{t_1}{t_2 - t_1} \cdot e^{-st_2} - \frac{t_2}{t_2 - t_1} \cdot e^{-st_1} + 1 = 0. \tag{3.5}$$

Rozmieszczenie zer funkcji $F(s)$ w płaszczyźnie częstotliwości zespolonej $s = \sigma + j\omega$ zależy od kształtu funkcji $f(t)$ określonego wielkością t_1 i stosunkiem t_2/t_1 przy danej wysokości impulsu A.
Załóżmy, że $t_2/t_1 = n$, gdzie n jest dowolną liczbą rzeczywistą i dodatnią, większą od jedności. Wówczas równanie (3.5) przybiera postać:

$$\frac{t_1}{t_2 - t_1} \cdot e^{-snt_1} - \frac{t_2}{t_2 - t_1} \cdot e^{-st_1} + 1 = 0. \tag{3.6}$$

Pierwiastki równania (3.6) odpowiadają wartościom s spełniającym jednocześnie następujące warunki (a) i (b):

a) $e^{-st_1} = 1$, czyli $s = \pm jk\frac{2\pi}{t_1}$, gdzie $k = 0; 1; 2; 3\ldots$

b) $e^{-snt_1} = 1$, czyli $s = \pm j\frac{k}{n} \cdot \frac{2\pi}{t_1}$, gdzie $k = 0; 1; 2; 3\ldots$

lub:

a) $s = 0; \pm j\frac{2\pi}{t_1}; \pm 2j\frac{2\pi}{t_1}; \pm 3j\frac{2\pi}{t_1}; \ldots . \pm kj\frac{2\pi}{t_1};$

b) $s = \pm j\frac{1}{n} \cdot \frac{2\pi}{t_1}; \pm j\frac{2}{n} \cdot \frac{2\pi}{t_1}; \pm j\frac{3}{n} \cdot \frac{2\pi}{t_1}; \ldots . \pm j\frac{k}{n} \cdot \frac{2\pi}{t_1};$

czyli:

$$\boxed{s = \pm j\frac{k}{n} \cdot \frac{2\pi}{t_1} = \pm jk \cdot \frac{2\pi}{t_2},} \tag{3.7}$$

gdzie jak poprzednio $k = 0; 1; 2; 3; \ldots . \infty$; $n = t_2/t_1 > 1$.

Funkcja $F(s)$ ma zatem nieskończony szereg zer położonych na osi urojonej, odpowiadających wybranym harmonicznym okresu trwania impulsu $f_0 = \frac{1}{t_2}$, tym mianowicie, dla których stosunek k/n jest liczbą całkowitą: $k/n = 0; 1; 2; 3; \ldots\ldots$

Rozwiązanie równania (3.6) i wyznaczenie zer funkcji (3.4) upraszcza się znacznie w pewnych przypadkach szczególnych, z których będzie rozpatrzony poniżej przypadek A:

A. *Impuls trójkątny symetryczny:* $t_2 = 2t_1$

Równanie (3.6) sprowadza się w tym przypadku do postaci:

$$e^{-2st_1} - 2e^{-st_1} + 1 = 0. \tag{3.8}$$

Podstawiając: $e^{-st_1} = x$, mamy:

$$x^2 - 2x + 1 = 0, \tag{3.9}$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{0} = 1,$$

$$e^{-st_1} = 1; \quad st_1 = \pm jk2\pi, \quad \text{gdzie} \quad k = 0; 1; 2; 3 \ldots$$

i stąd

$$\boxed{s = \pm jk\frac{2\pi}{t_1} = \pm j\,2k\frac{2\pi}{t_2}.} \tag{3.10}$$

Ten sam wynik można otrzymać bezpośrednio ze wzoru gólnego (3.7).

B. *Impuls wykładniczy*

Impuls krtaniowy zastępowany bywa niekiedy w układach syntezy impulsem wykładniczym o postaci:

$$f(t) = A \cdot e^{-at}, \qquad (a > 0). \tag{3.11-a}$$

W tym przypadku

$$F(s) = A\frac{1}{s+a}. \tag{3.11-b}$$

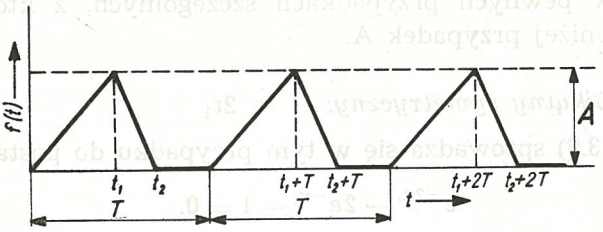
C. *Impuls prostokątny*

W przypadku impulsu prostokątnego o wysokości A i szerokości a, spełniającego warunki:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad t < 0 \\ A & \text{gdy} \quad 0 < t < a \\ 0 & \text{gdy} \quad a < t \end{cases} \tag{3.12-a}$$

$$F(s) = \frac{1 - e^{-as}}{s}. \tag{3.12-b}$$

Ton krtaniowy składa się z ciągu impulsów trójkątnych, opisanych funkcją $f(t)$ [wzór (3.2)] o częstotliwości powtarzania $f = \frac{1}{T}$ [rys. 3.6]. Transformatę Laplace'a funkcji $f(t)$ przedstawiającej ciąg impulsów można wyrazić następująco:



Rys. 3.6. Aproksymacja fali tonu krtaniowego w postaci ciągu impulsów trójkątnych

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st}\, dt =$$

$$= \int_0^{t_2} f(t) \cdot e^{-st}\, dt + \int_T^{T+t_2} f(t) \cdot e^{-st}\, dt + \int_{2T}^{2T+t_2} f(t) \cdot e^{-st}\, dt + \ldots$$

$$= \left[1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \ldots + e^{-(n-1)sT}\right] \int_0^{t_2} f(t) \cdot e^{-st}\, dt =$$

$$= \frac{1 - e^{-nsT}}{1 - e^{-sT}} \cdot \int_0^{t_2} f(t) \cdot e^{-st}\, dt. \tag{3.13}$$

Całka $\int_0^{t_2} f(t)e^{-st}\, dt$ we wzorze (3.13) określa transformatę Laplace'a pojedynczego impulsu, wyznaczoną dla impulsu trójkątnego wzorem ogólnym (3.4). Przy dostatecznie dużej ilości impulsów n wyraz e^{-nsT} we wzorze (3.13) staje się pomijalnie mały wobec jedności i ostatecznie wzór (3.13) przybiera postać:

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \cdot \frac{A}{t_1} \cdot \frac{\frac{t_1}{t_2 - t_1} \cdot e^{-st_2} - \frac{t_2}{t_2 - t_1} \cdot e^{-st_1} + 1}{s^2}. \tag{3.14}$$

Wzór (3.14) wyraża zatem w postaci operatorowej funkcję źródła tonu krtaniowego $U(s)$, przedstawionego jako ciąg impulsów trójkątnych o amplitudzie A, czasie narastania t_1, czasie zaniku $t_2 - t_1$ i częstotliwości powtarzania $F_0 = \frac{1}{T}$.

Funkcja źródła tonu krtaniowego przedstawionego jako ciąg impulsów wykładniczych $f(t) = A \cdot e^{-at}$ o częstotliwości powtarzania $F_0 = \frac{1}{T}$ i o czasie zaniku znacznie mniejszym od T ma odpowiednio postać:

$$F_1(s) = \frac{1}{(s+a)} \cdot \frac{1}{(1-e^{-sT})}, \tag{3.15}$$

a funkcja źródła w przypadku impulsów prostokątnych o amplitudzie A, szerokości a i częstotliwości powtarzania $F_0 = \frac{1}{T}$

$$F_2(s) = \frac{1-e^{-as}}{s} \cdot \frac{1}{(1-e^{-sT})}. \tag{3.16}$$

3.4. Aproksymowanie funkcji źródła tonu krtaniowego w technicznych układach syntezy

Funkcja źródła tonu krtaniowego $U(s)$ aproksymowana w postaci ciągu impulsów trójkątnych i wyrażona wzorem (3.14) ma jeden biegun podwójny $s = 0$ w początku układu oraz nieskończony szereg zer sprzężonych, położonych na osi urojonej i odpowiadających harmonicznym $k \cdot \frac{1}{t_2}$ okresu trwania impulsu, gdzie k zależy od przyjętego kształtu impulsu [patrz wzór (3.7)]. Występowanie zer funkcji źródła jest zjawiskiem drugorzędnym, gdyż wyraża ono jedynie zachodzącą przy pewnych kształtach impulsu okresowość wahań amplitud widma. W zastosowaniach technicznych syntezy interesuje nas przede wszystkim średni kształt obwiedni widma, który określony jest biegunem funkcji $U(s)$ i w rozpatrywanym przypadku odpowiada charakterystyce amplitudowej opadającej ze stromością —12 dB na oktawę. Funkcję źródła można zatem wyrazić w postaci przybliżonej, określonej wzorem

$$U(s) \approx \frac{K}{(1-e^{-sT}) \cdot (s-0)^2}, \tag{3.17}$$

w którym:

$K = U(0)$ jest rzeczywistym współczynnikiem stałym, proporcjonalnym do składowej stałej objętościowej prędkości przepływu powietrza przez szczelinę strun głosowych,

$s = \sigma + j\omega$ jest częstotliwością zespoloną,

$\frac{1}{T} = F_0$ jest częstotliwością powtarzania impulsów krtaniowych i odpowiada podstawowej częstotliwości drgań własnych strun głosowych.

Częstotliwość podstawowa tonu krtaniowego F_0 zależy głównie od struktury anatomicznej i budowy (wymiarów geometrycznych) strun głosowych i określa cechy indywidualne głosu danego osobnika. Częstotliwość tonu krtaniowego F_0 nie zależy od wymawianej samogłoski i może być uważana za czynnik stały przynajmniej przy syntezie samogłosek w stanie ustalonym. Natomiast podczas ciągłego procesu syntezy mowy częstotliwość F_0 ulega pewnym niewielkim wahaniom w stanach przejściowych i z tego względu kontrola częstotliwości F_0 za pomocą osobnego sygnału sterującego, w technicznych układach syntezy wydaje się być konieczna. Średnia wartość częstotliwości F_0 przeciętnego głosu męskiego jest rzędu 125 Hz, kobiecego jest o około oktawę wyższa. Chcąc jednak odtworzyć cechy indywidualne pełnej skali głosów męskich, kobiecych i dziecinnych należy liczyć się z wielkościami F_0 zawartymi w granicach od około 60 Hz do około 300 Hz.

W technicznych zagadnieniach syntezy wybór najbardziej właściwej postaci funkcji źródła $U(s)$ nie jest krytyczny i w niewielkim tylko stopniu wpływa na zrozumiałość wytwarzanych samogłosek. Z drugiej strony brak jest dotychczas dostatecznie uzasadnionych przesłanek doświadczalnych i teoretycznych, które przemawiałyby za wyborem ściśle określonej postaci funkcji $U(s)$; poszczególni eksperymentatorzy zazwyczaj dobierają kształt funkcji źródła metodą kolejnych prób, opierając się na kryterium naturalności brzmienia samogłosek, ocenianej w wyniku badań subiektywnych. Fant [14] stosował znormalizowane źródło tonu krtaniowego, którego funkcja $U(s)$ ma jeden biegun podwójny rzeczywisty w punkcie $s_{01} = s_{02} = s_0 = -2\pi \cdot 100$ Hz; odpowiada to charakterystyce o postaci:

$$U(s) = \frac{U(0)}{(s - s_0)^2}, \tag{3.18}$$

a więc o obwiedni niemal stałej w zakresie częstotliwości poniżej 100 Hz, a następnie opadającej ze stromością —12 dB na oktawę zgodnie ze wzorem teoretycznym (3.17). Na ogół jednak dobierany eksperymentalnie i stosowany w praktyce kształt obwiedni widma tonu krtaniowego jest bardziej skomplikowany i określany bywa funkcją

$$U(s) = \frac{U(0)}{\prod_{i=1}^{3} (s - s_i)} \cdot \frac{1}{(1 - e^{-sT})} \tag{3.19}$$

o trzech biegunach s_1, s_2 i s_3 położonych na ujemnej osi rzeczywistej w płaszczyźnie $s = \sigma + j\omega$. Dwa pierwsze bieguny s_1 i s_2 leżą zazwyczaj poniżej wartości $s = -2\pi \cdot 200$ Hz, a trzeci w okolicy $s = 2\pi \cdot 2000$ Hz. Flanagan [18] zaleca stosowanie funkcji $U(s)$ o trzech biegunach położonych na osi rzeczywistej w punktach: $s_1 = -2\pi \cdot 150$ Hz, $s_2 = -2\pi \cdot 400$ Hz oraz $s_3 = -2\pi \cdot 1500$ Hz. Otrzymana w ten spo-

sób charakterystyka amplitudowa widma jest prawie płaska w zakresie od 50 Hz do 150 Hz, a opada ze stromością −6 dB na oktawę w zakresie 150 Hz ÷ 400 Hz, −12 dB na oktawę w zakresie 400 Hz ÷ 1500 Hz i −18 dB na oktawę powyżej 1500 Hz.

Należy zaznaczyć, że kształt amplitudowej charakterystyki widma tonu krtaniowego w zakresie wyższych częstotliwości zależy w pewnym stopniu od intensywności głosu; zwiększenie intensywności powoduje na ogół zmniejszenie stromości opadania powyżej 2000 Hz.

Realizacja techniczna generatora tonu krtaniowego sprowadza się zatem najczęściej do konstrukcji generatora impulsów o częstotliwości powtarzania F_0 stałej (lub przestrajanej sygnałem sterującym) i o odpowiednio dobranym kształcie, który w wyniku rozkładu na szereg Fouriera pozwala osiągnąć założoną charakterystykę amplitudową widma. Wobec braku bardziej dokładnych danych eksperymentalnych dotyczących akustycznej struktury samogłosek polskich, pierwsze próby syntezy, przeprowadzane w Pracowni Elektroakustyki Zakładu Badania Drgań IPPT PAN, oparte są na zastosowaniu ciągu impulsów trójkątnych i piłozębatych o charakterystykach opadających odpowiednio ze stromością −12 dB na oktawę. Dobór najbardziej właściwego dla samogłosek polskich kształtu widma dokonany będzie na drodze eksperymentalnej przez wprowadzanie do układu członów filtru dolnoprzepustowego typu RC, z których każdy wprowadza do funkcji źródła $U(s)$ dodatkowy biegun położony na osi rzeczywistej w punkcie $s_i = -\frac{1}{R_i C_i}$ i powoduje zwiększenie stromości opadania charakterystyki widma o dodatkowe −6 dB na oktawę powyżej częstotliwości $f_i = \frac{1}{2\pi R_i C_i}$.

4. FUNKCJA PROMIENIOWANIA

4.1. Założenia ogólne

Trzecim czynnikiem we wzorze ogólnym (2.1) lub (3.1) jest funkcja promieniowania $Z_p(s)$ definiowana jako stosunek operatorowy ciśnienia akustycznego $P(s)$ w określonym punkcie przestrzeni (najczęściej na osi ust) do prędkości objętościowej $U_o(s)$ w otworze ust:

$$Z_p(s) = \frac{P(s)}{U_0(s)}. \tag{4.1}$$

Podobnie jak funkcja źródła tonu krtaniowego $U(s)$, funkcja promieniowania $Z_p(s)$ w niewielkim tylko stopniu zależy od akustycznej struktury wymawianej samogłoski i z tego względu może być traktowana jako czynnik stały we wzorze (2.1) lub (3.1), jednak jej analityczne wy-

znaczenie i aproksymowanie w układzie technicznym jest niezbędne w procesie syntezy. Z zagadnieniem wyznaczenia funkcji $Z_p(s)$ łączy się zagadnienie pochodne, a mianowicie zagadnienie wyznaczenia akustycznej impedancji promieniowania otworu ust, gdyż impedancja ta stanowi obciążenie akustycznego układu przesyłowego, jakim jest naturalny organ mowy, i z tego względu wpływa w pewnym stopniu na jego właściwości transmisyjne, określone funkcją przenoszenia $H(s)$.

Zagadnienie wyznaczenia funkcji promieniowania $Z_p(s)$ można rozwiązać analitycznie przyjmując, że uproszczonym modelem akustycznym nadajnika naturalnego organu mowy jest klasyczne źródło dźwięku w jednej z trzech pozostających do wyboru postaci:

a) kuli pulsującej (źródła punktowego),
b) tłoka drgającego w obudowie płaskiej,
c) tłoka drgającego w obudowie kulistej.

Ostateczny wybór charakterystyki promieniowania powinien być oczywiście oparty na sprawdzonej zgodności obliczonej charakterystyki promieniowania z rzeczywistą, pomierzoną eksperymentalnie charakterystyką promieniowania ust.

Zagadnieniem wyznaczania rozkładu ciśnienia akustycznego w przestrzeni otaczającej głowę ludzką zajmowali się Dunn i Farnsworth [9], a otrzymane przez nich wyniki pomiarów miały w pewnym sensie charakter klasyczny i przez szereg lat były cytowane w literaturze. Ostatnio zagadnienie to podjął Flanagan [20], dokonując szczegółowych pomiarów pola akustycznego w przestrzeni otaczającej głowę mówiącego. Pomiary przeprowadzono przy użyciu makiety, odtwarzającej stojącego mężczyznę średniego wzrostu, w ubraniu. Otrzymane wyniki autor porównał następnie z wynikami obliczonymi dla nadajnika klasycznego w postaci źródła punktowego (kuli pulsującej) o takiej samej wydajności $Q_o = 30$ cm^3/s $=$ const oraz z wynikami obliczeń Morse'a [34] dotyczącymi źródła w postaci tłoka drgającego w obudowie kulistej o promieniu 9 cm; ten ostatni typ nadajnika ze względu na swoją konfigurację geometryczną i przyjęte wymiary powinien najbardziej dokładnie odtwarzać warunki naturalne.

Z porównania wynika jednak, że stosowanie tak skomplikowanego modelu nadajnika nie jest celowe, gdyż odtwarza on gorzej warunki naturalne niż prosty i dający się znacznie łatwiej obliczyć model klasyczny w postaci źródła punktowego. Prawdopodobnie przyczyną tego stanu rzeczy są znaczne asymetrie układu głowy i ciała ludzkiego, które w przypadku modelu Morse'a nie zostały wzięte pod uwagę.

W szczególności Flanagan wykazał, że:

a) Charakterystyki kierunkowości promieniowania makiety ciała ludzkiego, pomierzone w płaszczyznach: pionowej i poziomej, przechodzących przez otwór ust, zastąpiony wylotem rurki o przekroju 2 cm^3

i stałej wydajności prędkości objętościowej $Q_o = 30$ cm³/s, w zakresie częstotliwości od 250 Hz do 4000 Hz i w granicach kąta $\pm 60^\circ$ w stosunku do osi otworu nie różnią się bardziej niż o ± 3 dB od charakterystyk promieniowania kuli pulsującej o promieniu $r \ll \frac{\omega}{c}$ umieszczonej w punkcie, gdzie poprzednio znajdował się wylot modelu ust, i że zgodność ta jest lepsza niż w przypadku tłoka w obudowie kulistej.

b) Malenie ciśnienia w funkcji odległości zachodzi ze stromością —6 dB przy dwukrotnym zwiększeniu odległości, a więc odpowiada źródłu punktowemu.

c) Wzrost ciśnienia w określonym punkcie na osi ust w funkcji częstotliwości wynosi +7 dB na oktawę, a więc jest nieco większy niż w przypadku źródła punktowego (+ 6 dB na oktawę), lecz mniejszy niż w przypadku tłoka w obudowie kulistej (+ 8 dB na oktawę).

d) Przesunięcia fazowe ciśnienia akustycznego w funkcji kąta w granicach $\pm 60^\circ$, mierzone w stosunku do ciśnienia na osi symetrii otworu ust, nie przekraczają 15°, dla źródła punktowego byłyby oczywiście równe zeru.

e) Bezwzględne wartości przesunięcia fazowego ciśnienia akustycznego na osi symetrii otworu ust w odległości 30 cm od wylotu, mierzone w stosunku do fazy prędkości objętościowej w otworze, przy częstotliwościach 250; 500; 1000; 2000 i 4000 Hz wynoszą odpowiednio + 12°; −67°; −220°; −570°; i −1180°, a więc niewiele różnią się od przesunięć fazowych dla źródła punktowego, które w tych samych warunkach wynoszą +10°; −71°; −232°; −553° i −1195°.

Z tych względów wydaje się rozwiązaniem najbardziej uzasadnionym, a jednocześnie najprostszym aproksymowanie funkcji promieniowania $Z_p(s)$ w oparciu o funkcję promieniowania źródła punktowego w postaci kuli pulsującej.

4.2. Aproksymowanie impedancji promieniowania otworu ust za pomocą klasycznych źródeł dźwięku

Impedancje promieniowania trzech rozpatrywanych tu klasycznych źródeł dźwięku wyrażają się następująco [1].

A. *Kula pulsująca o promieniu r*

a) Mechaniczna impedancja promieniowania:

$$Z_m = \varrho_0 c\, 4\pi r^2 \cdot \frac{jkr}{1 + jkr}. \tag{4.2-a}$$

b) Znormalizowana impedancja promieniowania:

$$z_n = \frac{Z_m}{\varrho_0 c\, 4\pi r^2} = \frac{jkr}{1 + jkr} = \frac{(kr)^2}{1 + (kr)^2} + j\frac{kr}{1 + (kr)^2}. \tag{4.2-b}$$

c) Akustyczna impedancja promieniowania:

$$Z_a = z_n \cdot \frac{\varrho_0 \cdot c}{4\pi r^2} = \frac{\varrho_0 \cdot c}{4\pi r^2} \cdot \frac{(kr)^2}{1+(kr)^2} + j\frac{\varrho_0 c}{4\pi r^2} \cdot \frac{kr}{1+(kr)^2} = R_{ap} + jX_{ap}. \tag{4.2-c}$$

W rozpatrywanym zakresie częstotliwości warunek $kr = \frac{2\pi}{\lambda} r \ll 1$ jest zawsze spełniony [1], w związku z czym:

$$Z_a \approx 0{,}08\frac{\varrho_0}{c}\omega^2 + j\,0{,}08\frac{\omega\varrho_0}{r} = R_a + j\omega M_a, \tag{4.2-d}$$

gdzie:

$$R_a = 0{,}08\frac{\varrho_0}{c}\omega^2, \tag{4.2-e}$$

$$M_a = 0{,}08\frac{\varrho_0}{r}. \tag{4.2-f}$$

B. *Tłok drgający płaski o powierzchni kołowej i promieniu r, umieszczony w odgrodzie płaskiej nieskończenie wielkiej*

a) Mechaniczna impedancja promieniowania:

$$Z_m = \varrho_0 c\pi r^2[1 - J_1(2kr)/kr] + j\frac{\varrho_0 c\pi r^2}{2(kr)^2} \cdot K_1(2kr), \tag{4.3-a}$$

gdzie:

$$J_1(2kr) = \frac{2kr}{2} - \frac{(2kr)^3}{2^2\cdot 4} + \frac{(2kr)^5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6} - \frac{(2kr)^7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8} + \ldots$$

$$K_1(2kr) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(2kr)^3}{3} - \frac{(2kr)^5}{3^2\cdot 5} + \frac{(2kr)^7}{3^2\cdot 5^2\cdot 7} - \ldots\right].$$

b) Znormalizowana impedancja promieniowania:

$$z_n = \frac{Z_m}{\varrho_0 c\pi r^2} = [1 - J_1(2kr)/kr] + j\frac{1}{2(kr)^2} \cdot K_1(2kr). \tag{4.3-b}$$

---

[1] Maksymalna powierzchnia otworu ust przy wymawianiu samogłosek przybiera wartość rzędu od $A = 0{,}9$ cm² (samogłoska "u") do $A = 5{,}0$ cm² (samogłoska "a") — patrz np. [22]. Wynika stąd, że promień kuli pulsującej o powierzchni równej maksymalnej powierzchni otworu ust równa się $r_k = 0{,}65$ cm, a promień tłoka o powierzchni kołowej $r_t = 1{,}3$ cm. W obu przypadkach warunek $kr = \frac{2\pi}{\lambda} r \ll 1$ jest spełniony w zakresie częstotliwości $f \leqslant 4000$ Hz.

c) Akustyczna impedancja promieniowania:

(4.3-c)

$$Z_a = z_n \cdot \frac{\varrho_0 c}{\pi r^2} = \frac{\varrho_0 c}{\pi r^2}[1 - J_1(2kr)/kr] + j\frac{\varrho_0 c}{2(kr)^2 \pi r^2} \cdot K_1(2kr) = R_a + jX_a.$$

W zakresie częstotliwości, gdzie $kr \ll 1$

$$Z_a \approx 0{,}159 \frac{\varrho_0}{c}\omega^2 + j\omega \cdot 0{,}270 \frac{\varrho_0}{r} = R_a + j\omega \cdot M_a, \tag{4.3-d}$$

gdzie:

$$R_a = 0{,}159 \frac{\varrho_0}{c}\omega^2, \tag{4.3-e}$$

$$M_a = 0{,}270 \frac{\varrho_0}{r}. \tag{4.3-f}$$

C. *Tłok drgający płaski o promieniu r_0 w obudowie kulistej o promieniu a*

Impedancję promieniowania tego nadajnika (rys. 4.1) obliczył Morse [34], otrzymując następujące wyniki:

a) Mechaniczna impedancja promieniowania:

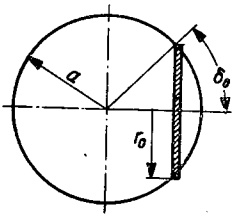
$$Z_m = \varrho_0 c \cdot 4\pi a^2 \sin^2\left(\frac{\delta_0}{2}\right) \cdot [\Theta + j\chi]. \tag{4.4-a}$$

b) Znormalizowana impedancja promieniowania:

$$z_n = \Theta + j\chi. \tag{4.4-b}$$

c) Akustyczna impedancja promieniowania:

$$Z_a = \frac{\varrho_0 c}{4\pi r^2}[\Theta + j\chi] = R_a + j\omega M_a, \tag{4.4-c}$$



Rys. 4.1. Model nadajnika w postaci tłoka płaskiego drgającego w obudowie kulistej

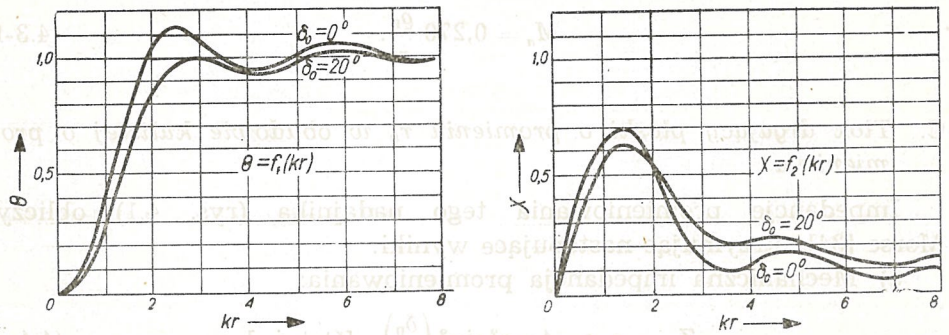
gdzie: $r = a \cdot \sin\frac{\delta_0}{2}$ jest zastępczym promieniem tłoka. Wykresy funkcji $\Theta = f_1(kr)$ i $\chi = f_2(kr)$ dla wartości kąta $\delta_0 = 0°$ i $\delta_0 = 20°$ po-

dano na rys. (4.2). Podobnie jak w omówionych poprzednio przypadkach A i B, w zakresie, gdy $kr \ll 1$, funkcję Z_a (4.4-c) można przedstawić w postaci przybliżonej, gdzie

$$R_a \approx k_1 \cdot \frac{\varrho_0}{c} \omega^2, \tag{4.4-d}$$

$$M_a \approx k_2 \cdot \frac{\varrho_0}{r}, \tag{4.4-e}$$

a k_1 i k_2 są współczynnikami stałymi.



Rys. 4.2. Charakterystyki składowej rzeczywistej Θ (wykres z lewej strony) i składowej urojonej χ (wykres z prawej strony) znormalizowanej impedancji promieniowania tłoka płaskiego o promieniu r_o w obudowie kulistej i promieniu a, w funkcji stosunku $kr = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \frac{\delta_o}{2}$, przy dwóch różnych wartościach $\delta_0 = 0°$ i $\delta_0 = 20°$ (według [34])

We wszystkich zatem rozpatrzonych poprzednio przypadkach A, B i C, akustyczną impedancję promieniowania rozpatrywanych nadajników klasycznych w zakresie częstotliwości, gdzie $kr \ll 1$, można przedstawić w postaci szeregowego połączenia oporności rzeczywistej $R_a = k_1 \cdot \frac{\varrho_0}{c} \omega^2$ i masy akustycznej $L_a = k_2 \cdot \frac{\varrho_0}{r}$ (zob. rys. 4.3.-a):

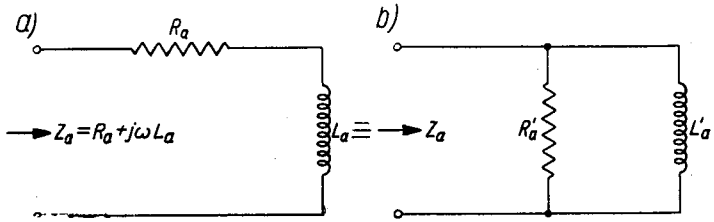
$$Z_a = R_a + j\omega L_a = k_1 \frac{\varrho_0}{c} \omega^2 + j\omega k_2 \frac{\varrho_0}{r}, \tag{4.5}$$

gdzie k_1 i k_2 są bezwymiarowymi współczynnikami liczbowymi stałymi, charakterystycznymi dla danego typu nadajnika.

Należy zwrócić uwagę na to, iż w zastępczym układzie szeregowym (rys. 4.3-a) składowa rzeczywista R_a impedancji promieniowania w zakresie, gdy $kr \ll 1$ jest wprost proporcjonalna do ω^2 i nie zależy od wy-

miarów nadajnika r. Zastępując układ szeregowy układem równoległym (rys. 4.3-b) o takiej samej impedancji Z_a, w którym $L_a' = L_a$, lecz

$$R_a' \approx \frac{\omega^2 L_a^2}{R_a} = \frac{(k_2)^2}{k_1} \cdot \frac{\varrho_0^2 \omega^2 c^2}{r^2 \varrho_0 \omega^2} = k_3 \cdot \frac{\varrho_0 c}{r^2}, \tag{4.6}$$



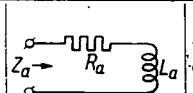
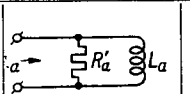
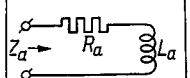
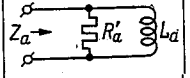
Rys. 4.3. Zastępcze układy: szeregowy (a) i równoległy (b) impedancji promieniowania Z_a trzech rozpatrywanych klasycznych źródeł dźwięku

można uczynić składową rzeczywistą R_a' impedancji promieniowania niezależną od częstotliwości, lecz odwrotnie proporcjonalną do promienia nadajnika r.

Zestawienie otrzymanych wyników dla przypadku kuli pulsującej o promieniu r i tłoka płaskiego kołowego o promieniu r w odgrodzie płaskiej nieskończenie wielkiej podano w tablicy 4.1.

Tablica 4.1

Zestawienie impedancji promieniowania kuli pulsującej i tłoka drgającego w obudowie płaskiej nieskończenie wielkiej, w zakresie częstotliwości $kr \ll 1$

Typ nadajnika	Zastępcza impedancja promieniowania		Wartości elementów		
	Układ szeregowy	Układ równoległy	$R_a = k_1 \frac{\varrho_0}{c} \omega^2$	$L_a = k_2 \frac{\varrho_0}{r}$	$R_a' = k_3 \frac{\varrho_0 c}{r^2}$
Kula pulsująca o promieniu r	 $Z_a = R_a + sL_a$	 $Z_a = \frac{R_a' \cdot sL_a}{R_a' + sL_a}$	$k_1 = 0{,}08$	$k_2 = 0{,}08$	$k_3 = 0{,}08$
Tłok drgający płaski kołowy o promieniu r w odgrodzie płaskiej nieskończenie wielkiej	 $Z_a = R_a + sL_a$	 $Z_a = \frac{R_a' \cdot sL_a}{R_a' + sL_a}$	$k_1 = 0{,}159$	$k_2 = 0{,}270$	$k_3 = 0{,}459$

4.3. Aproksymowanie funkcji promieniowania $Z_p(s)$ w układzie technicznym

W celu wyznaczenia ogólnej postaci analitycznej funkcji promieniowania $Z_p(s) = \frac{P(s)}{U_o(s)}$ ust można się oprzeć na dowolnym z rozpatrywa-

nych poprzednio typów źródeł dźwięku, gdyż wyznaczone w ten sposób funkcje promieniowania będą się różniły jedynie współczynnikami stałymi. Przyjmując za punkt wyjścia zastępczą impedancję promieniowania w układzie równoległym (rys. 4.3-b), gdyż wtedy R_a' nie zależy od częstotliwości, otrzymuje się następujące wyrażenie na moc akustyczną N_a wypromieniowaną przez otwór ust o promieniu r, przy prędkości objętościowej $U_o(s)$ w otworze:

$$N_a = U_o^2(s)\frac{R_a' \cdot L_a^2 \cdot s^2}{(R_a' + L_a s)^2}. \tag{4.7}$$

Moc ta, przy pominięciu strat, równa się mocy akustycznej na powierzchni kulistej, przechodzącej przez punkt odległy o l od otworu ust; jeżeli w punkcie l panuje ciśnienie $P(s,l)$, to:

$$N_a = \frac{P^2(s,l)}{\varrho_0 c} \cdot 4\pi l^2. \tag{4.8}$$

Na podstawie wzorów (4.7) i (4.8):

$$Z_p(s) = \frac{P(s,l)}{U_o(s)} = \frac{L_a s}{R_a' + L_a s} \cdot \left[\frac{\varrho_0 c}{4\pi l^2} R_a'\right]^{1/2} = k\frac{L_a s}{R_a' + L_a s} =$$

$$= k\frac{s}{s + \dfrac{R_a'}{L_a}} = k\frac{(s-0)}{(s-s_p)}, \tag{4.9}$$

gdzie: $k = \dfrac{\varrho_0 c}{2 l r} \cdot \sqrt{\dfrac{k_3}{\pi}}$ jest współczynnikiem stałym zależnym od powierzchni otworu ust (r), odległości rozpatrywanego punktu przestrzeni od otworu (l), stałych fizycznych ośrodka ($\varrho_o c$) i typu zastępczego źródła dźwięku (k_3 — zob. tablica 4.1).

Funkcja $Z_p(s)$ określona wzorem (4.9) ma jedno zero w punkcie $s=0$ oraz jeden biegun na osi rzeczywistej w punkcie $s_p = -\dfrac{R_a'}{L_a} = -\dfrac{k_3}{k_2} \cdot \dfrac{c}{r}$. Położenie tego bieguna na osi rzeczywistej zależy od powierzchni otworu ust, która zmienia się w zależności od wymawianej samogłoski.

Przy największej nawet powierzchni otworu ust $A = 5$ cm^2, odpowiadającej samogłosce "a", biegun funkcji $Z_p(s)$ leży w zakresie $s_p < -2\pi \cdot 4000$ Hz; mówiąc inaczej, zmiana położenia bieguna funkcji $Z_p(s)$ odpowiadająca zmianie powierzchni otworu ust w niewielkim tylko stopniu wpływa na zmianę charakterystyki amplitudowej widma samogłosek w zakresie częstotliwości poniżej 4000 Hz. Z tego względu w technicznych zastosowaniach syntezy funkcja promieniowania $Z_p(s)$ określona wzorem

$$Z_p(s) = k\frac{s}{(s-s_p)} \cdot K(s) \tag{4.10}$$

może być traktowana jako czynnik stały we wzorze ogólnym (2.1) lub (3.1). Współczynnik $K(s)$ we wzorze (4.10) odtwarza właściwości kierunkowe ust w funkcji częstotliwości i zgodnie z pomiarami Flanagana [20] powinien mieć charakter rosnący ze stromością + 6 dB na oktawę, a według Fanta [14] rośnie od zera przy $f = 300$ Hz do około + 6 dB przy $f = 5000$ Hz.

Wyznaczywszy postać analityczną funkcji promieniowania $Z_p(s)$ w oparciu o model nadajnika w postaci kuli pulsującej o powierzchni $A_k = 4\pi r_k^2$ lub tłoka drgającego o powierzchni $A_t = \pi r_t^2$ w odgrodzie nieskończenie wielkiej, należy z kolei sprawdzić, czy oba te modele mogą być stosowane równorzędnie przy obliczaniu impedancji promieniowania otworu ust, obciążającej układ akustyczny naturalnego organu mowy.

Aby się o tym przekonać, należy porównać impedancję promieniowania obu układów w założeniu, że $A_k = A_t$ jest równe powierzchni otworu ust. Z równości powierzchni $A_k = 4\pi r_k^2 = A_t = \pi r_t^2$ wynika stosunek promieni obu nadajników: $r_k = 0{,}5\, r_t$.

Zakładając, że $A_k = A_t = 0{,}9$ cm^2 (samogłoska "u"), mamy

$r_t = 0{,}50$ cm i $r_k = 0{,}25$ cm,

zaś dla $A_k = A_t = 5{,}0$ cm^2 (samogłoska "a") odpowiednio

$r_t = 1{,}3$ cm i $r_k = 0{,}65$ cm.

We wszystkich tych przypadkach warunek $kr \ll 1$ jest spełniony w zakresie częstotliwości $f \ll 4000$ Hz. Przypadek trzeci, dotyczący tłoka o promieniu $r = a \cdot \sin\frac{\delta_0}{2}$ w obudowie kulistej o promieniu a nie będzie tu rozpatrywany, ponieważ w normalnych warunkach (głowa ludzka) $a \approx 9$ cm, $\delta_o \approx 5°$, $r/a = \sin\frac{\delta_0}{2} \approx 0{,}05 \ll 1$, w związku z czym otrzymane wyniki byłyby takie same jak w przypadku tłoka w odgrodzie płaskiej.

W tablicy 4.2 podano zestawienie obliczeń znormalizowanej impedancji promieniowania z_n kuli pulsującej o promieniu $r_k = 0{,}65$ cm i tłoka o promieniu $r_t = 1{,}3$ cm, co w obu przypadkach odpowiada powierzchni otworu ust $A = 5{,}0$ cm^2 (samogłoska "a").

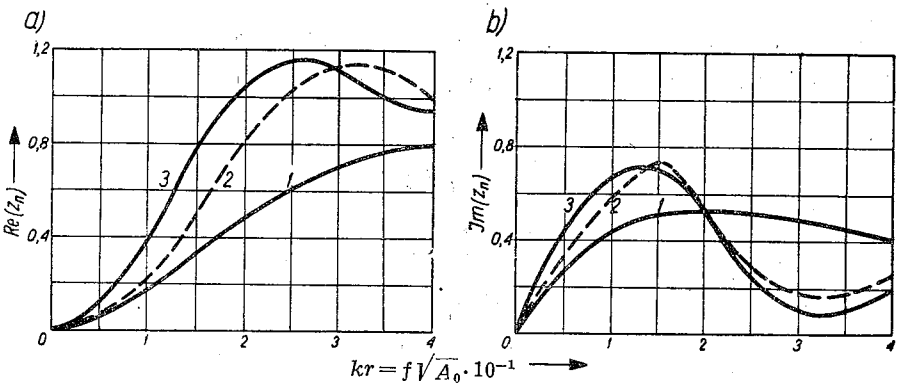
Z zestawienia wynika, że znormalizowana impedancja promieniowania tłoka w odgrodzie płaskiej nieskończenie wielkiej (lub tłoka w obudowie kulistej $r \ll a$) jest w całym zakresie częstotliwości mniej więcej dwukrotnie większa od znormalizowanej impedancji promieniowania kuli pulsującej o takiej samej powierzchni. W takim samym stosunku pozostają do siebie oczywiście wielkości akustycznych impedancji promieniowania Z_a obu porównywanych układów.

Tablica 4.2

Zestawienie obliczeń znormalizowanej impedancji promieniowania z_n kuli pulsującej ($r_k = 0{,}65$ cm) i tłoka drgającego ($r_t = 1{,}3$ cm) w odgrodzie płaskiej nieskończenie wielkiej

Częstotliwość [Hz]	Kula pulsująca (4.2-b)		Tłok w odgrodzie płaskiej (4.3-b)	
	$kr_k = \frac{2\pi}{\lambda} r_k$	$z_n = \frac{(kr)^2}{1+(kr)^2} + j\frac{kr}{1+(kr)^2}$	$kr_t = \frac{2\pi}{\lambda} r_t$	$z_n = \left[1 - \frac{J_1(2kr)}{kr}\right] + j\frac{K_1(2kr)}{2(kr)^2}$
425	0,05	$0{,}0025 + j\ 0{,}050$	0,10	$0{,}005 + j\ 0{,}085$
850	0,10	$0{,}010 + j\ 0{,}099$	0,20	$0{,}020 + j\ 0{,}168$
1700	0,20	$0{,}038 + j\ 0{,}192$	0,40	$0{,}078 + j\ 0{,}325$
3400	0,40	$0{,}138 + j\ 0{,}345$	0,80	$0{,}300 + j\ 0{,}571$

Na tej podstawie wyciągnąć można wniosek, że wybór właściwego modelu źródła dźwięku przy aproksymowaniu impedancji promieniowania wylotu ust jest istotny i powinien być dokonany na podstawie dodatkowych badań eksperymentalnych, obejmujących pomiar impedancji promieniowania otworu ust w warunkach normalnych.



Rys. 4.4. Składowa rzeczywista (a) i urojona (b) znormalizowanej impedancji promieniowania $z_n = Z_a \cdot \frac{A}{\varrho_0 c}$ kuli pulsującej o promieniu $r = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}$ (1), tłoka o promieniu $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$ w odgrodzie płaskiej nieskończenie wielkiej (2) i tłoka o promieniu $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \ll a$ w obudowie kulistej o promieniu $a = 9$ cm (3) w funkcji wielkości $f\sqrt{A} \cdot 10^{-4}$, gdzie A [cm²] jest powierzchnią otworu ust

Jeśli chodzi natomiast o wybór właściwego modelu nadajnika przy aproksymowaniu funkcji promieniowania $Z_p(s)$ otworu ust, to wybór ten nie jest krytyczny, jakkolwiek wyniki najbardziej odpowiadające warunkom rzeczywistym daje przyjęcie jako modelu kuli pulsującej.

Na rys. 4.4 podano charakterystyki częstotliwościowe składowej rzeczywistej (a) i składowej urojonej (b) znormalizowanej impedancji promieniowania trzech rozpatrywanych poprzednio źródeł dźwięku w zakresie częstotliwości do $kr = 4$.

5. ZALEŻNOŚĆ KSZTAŁTU OBWIEDNI AMPLITUDOWEJ CHARAKTERYSTYKI WIDMA SAMOGŁOSEK OD POSTACI FUNKCJI PRZENOSZENIA $H(s)$

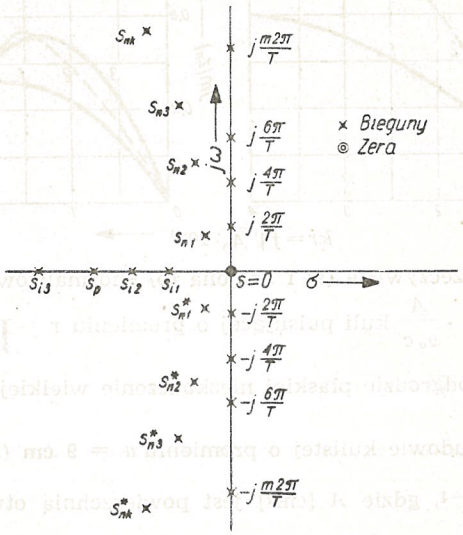
5.1. Analiza graficzna

Podstawiając do wzoru ogólnego (2.1) lub (3.1) wyznaczone poprzednio analityczne postaci funkcji źródła $U(s)$ (3.19), funkcji przenoszenia $H(s)$ (2.50) oraz funkcji promieniowania $Z_p(s)$ (4.10) otrzymuje się pełne

rozwinięcie wyrażenia na transformatę ciśnienia akustycznego $P(s,l)$ w punkcie odległym o l od otworu ust:

$$P(s,l) = U(s) \cdot H(s) \cdot Z_p(s) = \frac{U(0)}{(1-e^{-sT}) \prod_{i=1}^{3} (s - s_i)} \cdot \frac{K_k(s)}{\prod_{i=1}^{k} [(s/s_i - 1)(s/s_i^* - 1)]} \cdot \frac{s\,k\,K(s)}{(s - s_p)}. \tag{5.1}$$

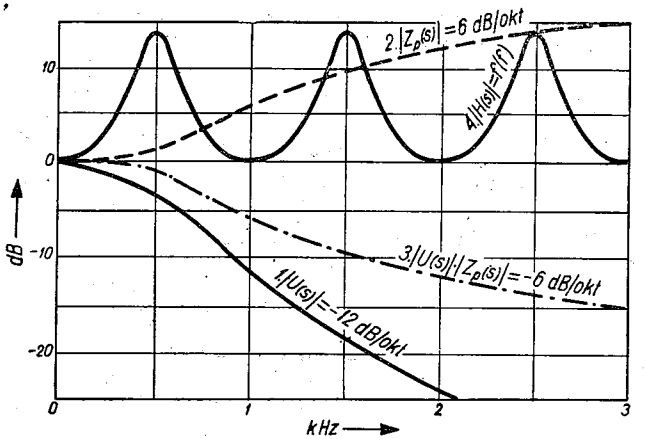
Przykład rozmieszczenia biegunów i zer funkcji $P(s,l)$ na płaszczyźnie częstotliwości zespolonej $s = \sigma + j\omega$ podano na rys. 5.1.



Rys. 5.1. Przykład rozmieszczenia biegunów i zer funkcji $P(s,l)$ na płaszczyźnie częstotliwości zespolonej

Traktując, zgodnie z poprzednimi rozważaniami, funkcje $U(s)$ i $Z_p(s)$ jako czynniki stałe we wzorze (5.1), załóżmy, że funkcja źródła określona jest jednym biegunem podwójnym w początku układu ($s_1 = s_2 = 0$), a więc, że amplitudowa charakterystyka widma tonu krtaniowego składa się z prążków odpowiadających kolejnym harmonicznym częstotliwości podstawowej F_0 o amplitudach malejących odwrotnie proporcjonalnie do częstotliwości, czyli -12 dB na oktawę. Załóżmy dalej, że obwiednia amplitudowej charakterystyki promieniowania rośnie proporcjonalnie do pierwszej potęgi częstotliwości w zakresie $f < -\frac{s_p}{2\pi}$, czemu odpowiada funkcja promieniowania $Z_p(s)$ określona jednym zerem w początku układu i jednym biegunem na osi rzeczywistej w punkcie $-s_p$. Iloczyn czynników niezmiennych $|U(s)| \cdot |Z_p(s)|$ we wzorze (5.1) odpowiada zatem iloczynowi (w skali liniowej) lub sumie (w skali logarytmicznej) rzędnych obu charakterystyk i w rozważanym przypadku

uproszczonym wyraża się charakterystyką wypadkową malejącą ze stromością −6 dB na oktawę (krzywe *1*, *2* i *3* na rys. 5.2).



Rys. 5.2. Założone charakterystyki amplitudowe funkcji źródła $|U(s)| \doteq -$ 12 dB na oktawę (*1*), funkcji promieniowania $|Z_p(s)| \doteq +$ 6 dB na oktawę (*2*), iloczynu funkcji $|U(s)| \cdot |Z_p(s)| \doteq -$ 6 dB na oktawę (*3*) oraz funkcji przenoszenia $|H(s)|$ (*4*)

Niech funkcja przenoszenia $H(s)$ odpowiada teoretycznemu przypadkowi rury o stałym przekroju i długości $l = 17$ cm, a więc ma nieskończony szereg par biegunów sprzężonych $s_i = \left|\sigma_i \pm j\omega_i\right|_{i=1}^{\infty}$ odpowiadających kolejnym częstotliwościom harmonicznym drgań własnych układu F_i, gdzie

$$F_i = \frac{\omega_i}{2\pi} = \frac{1}{4}(2i-1)\frac{c}{l} = (2i-1)\cdot 500 \text{ Hz} =$$

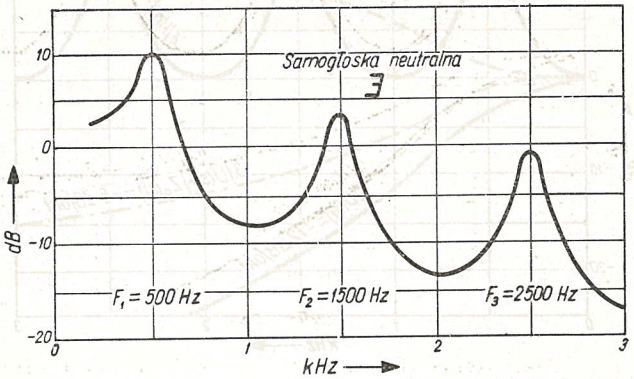
$$= 500;\ 1500;\ 2500;\ 3500 \text{ itd. [Hz]},$$

$i = 1; 2; 3 \ldots . \infty$.

Charakterystyka ta, odpowiadająca funkcji przenoszenia $H(s)$ w przypadku samogłoski neutralnej "ɘ" podana była na rys. 2.12 i jest powtórzona na rys. 5.2 jako krzywa *4*. Charakterystyka obwiedni widma samogłoski powstaje jako suma rzędnych charakterystyk *4* i *3* z rys. 5.2 i podana jest na rys. 5.3.

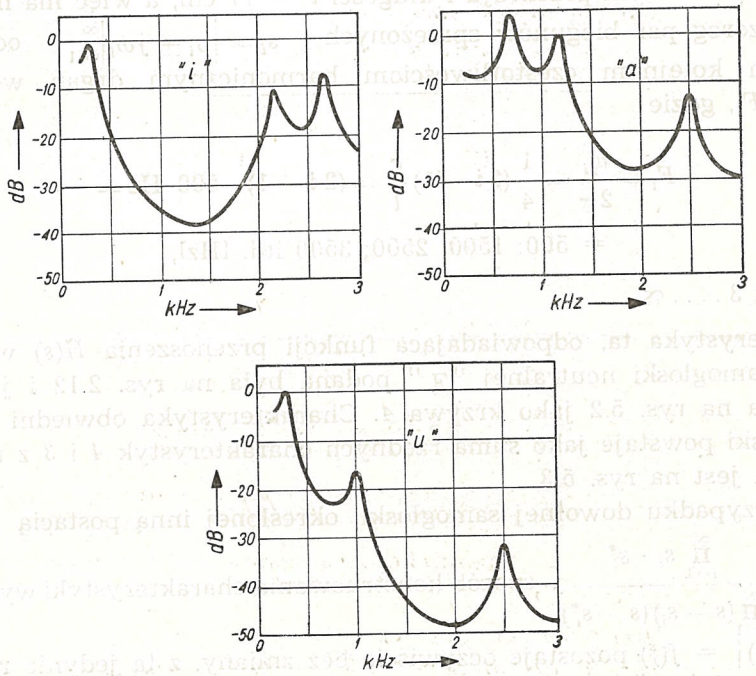
W przypadku dowolnej samogłoski, określonej inną postacią funkcji $H(s) = \dfrac{\prod_{i=1}^{\infty} s_i \cdot s_i^*}{\prod_{i=1}^{\infty}(s-s_i)(s-s_i^*)}$, sposób konstruowania charakterystyki wypadkowej $|P(s)| = f(f)$ pozostaje oczywiście bez zmiany, z tą jedynie różnicą, że przy pozostałych czynnikach stałych kształt charakterystyki $|H(s)|$

i $|P(s)|$ określony będzie innymi częstotliwościami rezonansowymi $F_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$ i innymi szerokościami krzywych rezonansowych $\Delta F_i = -\frac{\sigma_i}{\pi}$. Na rys. 5.4 podano przykłady wykreślonych w ten sposób widm samogłosek "i", "a" oraz "u".



Rys. 5.3. Amplitudowa charakterystyka obwiedni widma samogłoski neutralnej ə otrzymana na podstawie rysunku 5.2

Z przytoczonych rozważań wynika, że proces syntezy samogłoski, określonej dostatecznie trzema lub czterema pierwszymi zakresami formantowymi, wymaga znajomości trzech lub czterech par wielkości



Rys. 5.4. Przykłady charakterystyk obwiedni widma samogłosek "i", "a" oraz "u"

sprzężonych $s_i = \left|\sigma_i \pm j\,\omega_i\right|_{i=1}^{i=4}$, a mianowicie biegunów funkcji przenoszenia $H(s)$, które wyznaczają wielkości częstotliwości formantowych F_1, F_2, F_3 (oraz ewentualnie F_4), i określają względne wysokości wierzchołków zakresów formantowych. Innymi słowy, proces syntezy mowy w przypadku samogłosek w układzie technicznym wymaga stosowania 6 lub 8 funkcji parametrycznych, określających czasowe zmiany 6 lub 8 wielkości częstotliwości rezonansowych F_1, F_2, F_3 i ewentualnie F_4, oraz wysokości wierzchołków krzywych rezonansowych A_1, A_2, A_3 i ewentualnie A_4 w zakresie poszczególnych formant.

Korzyści wynikające ze stosowania syntezy formantowej samogłosek w porównaniu z ich syntezą opartą na wyznaczaniu wielkości amplitud prążków widma, odpowiadających kolejnym harmonicznym nF_0 częstotliwości podstawowej tonu krtaniowego F_0 są oczywiste. Zakładając $F_0 \approx 125$ Hz i całkowitą szerokość widma samogłosek równą 4000 Hz, można łatwo obliczyć, że ten drugi system syntezy wymagałby ciągłej kontroli $n = \frac{4000}{125} = 32$ parametrów, w porównaniu z 6 lub 8 parametrami przy syntezie formantowej. Fakt ten uzasadnia między innymi celowość stosowania syntezy formantowej w urządzeniach telekomunikacyjnych w celu zmniejszenia objętości sygnału przesyłanego i zwiększenia przepustowości kanałów łączności.

Na podstawie graficznej syntezy widma samogłosek (rys. 5.2, 5.3 i 5.4) można stwierdzić interesujący fakt, który ma duże znaczenie w technicznych zagadnieniach syntezy samogłosek. Zmieniając mianowicie — przy pozostałych parametrach niezmiennych — częstotliwość choćby jednej formanty, np. *F1* na rys. 5.2, zmienia się tym samym wysokość amplitud formant we wszystkich wyższych zakresach formantowych, w danym przypadku od *F2* do F_∞. Zjawisko to pozwala przypuszczać, że względne wartości amplitud poszczególnych formant są zależne od częstotliwości wszystkich formant danej samogłoski, i że zmiana częstotliwości z F_1, F_2, F_3, F_4 .... F_n na F_1', F_2', F_3', F_4', ... F_n' odpowiadające innej samogłosce, powoduje zmianę wartości amplitud z A_1, A_2, A_3, A_4, ... A_n na A_1', A_2', A_3', A_4' itd..... A_n', charakteryzujące nową samogłoskę. Sytuacja taka byłaby bardzo korzystna, gdyż pozwalałaby na zmniejszenie o połowę ilości funkcji parametrycznych przy syntezie w układach technicznych i stosowanie jako wyłącznych parametrów, określających daną samogłoskę, częstotliwości trzech lub czterech pierwszych formant F_1, F_2, F_3 i ewentualnie F_4.

Należy zbadać zatem to zjawisko z analitycznego punktu widzenia, przyjmując w celu uproszczenia analizy matematycznej, że impuls tonu krtaniowego jest impulsem jednostkowym Diraca.

5.2. Odpowiedź układu określonego funkcją przenoszenia $H(s)$ na impuls jednostkowy

Na rys. 5.5 przedstawiono prosty szeregowy obwód rezonansowy *RLGC*.

Niech funkcja wzbudzająca $e_1(t)$ ma postać impulsu jednostkowego:

$$e_1(t) = 0 \qquad (t < 0)$$
$$e_1(t) = \infty \qquad (t = 0)$$
$$e_1(t) = 0 \qquad (t > 0),$$

którego transformata Laplace'a $E_1(s) = \mathcal{L}\{e_1(t)\} = 1$.

Funkcja przenoszenia układu wyraża się wzorem

$$H(s) = \frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \frac{1}{LC\,s^2 + (RC + GL)\,s + GR + 1} = \frac{1/LC}{s^2 + \dfrac{RC + GL}{LC}\,s + \dfrac{GR + 1}{LC}} \tag{5.2}$$

i w przypadku, gdy tłumienie układu jest znacznie mniejsze od krytycznego, to jest, gdy

$$\frac{1}{4}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right) < \frac{GR + 1}{LC} \tag{5.3-a}$$

oraz

$$RG \ll 1 \tag{5.3-b}$$

da się przedstawić w postaci

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{(s - s_1)(s - s_1^*)} \approx \frac{s_1 s_1^*}{(s - s_1)(s - s_1^*)}, \tag{5.4}$$

gdzie:

$$\omega_0 = \frac{1}{LC} \approx \sigma^2 + \omega^2 = s_1 s_1^*,$$

$$\sigma = -\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right),$$

$$\omega = \sqrt{\frac{GR + 1}{LC} - \frac{1}{4}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2},$$

$$s_1,\ s_1^* = -\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right) \pm j\sqrt{\frac{GR + 1}{LC} - \frac{1}{4}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)^2} = \sigma \pm j\,\omega.$$

Ponieważ $E_1(s) = 1$, przeto odpowiedź układu na impuls jednostkowy ma postać:

$$e_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{E(s)\} = \frac{s_1 \cdot s_1^*}{s_1 - s_1^*} \cdot e^{s_1 t} + \frac{s_1 \cdot s_1^*}{s_1^* - s_1} \cdot e^{s_1^* t} = \left[\frac{\sigma^2 + \omega^2}{\omega}\right] \cdot e^{\sigma t} \cdot \sin \omega t, \tag{5.5}$$

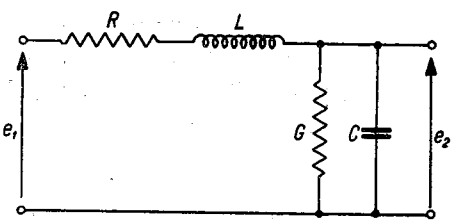
gdzie jak poprzednio:

$$\sigma = -\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right),$$

$$\omega = \sqrt{\frac{GR+1}{LC} - \frac{1}{4}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)^2},$$

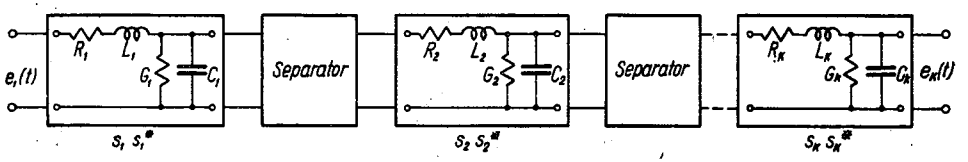
$$\sigma^2 + \omega^2 = \frac{GR+1}{LC}.$$

Napięciowa funkcja przenoszenia $H(s)$ pojedynczego obwodu rezonansowego szeregowego (5.4) ma taką samą postać analityczną, jak do-



Rys. 5.5. Prosty szeregowy obwód rezonansowy *RLGC*

wolny kolejny czynnik funkcji przenoszenia $H(s)$ naturalnego organu mowy, określonej wzorem (2.26). Wynika stąd, że funkcję przenoszenia efektorów artykulacyjnych przy wymawianiu samogłosek, określoną



Rys. 5.6. Schemat blokowy rezonansowego syntezatora formantowego w układzie łańcuchowym

wzorem (2.50), można odtworzyć w postaci łańcuchowego połączenia k elementarnych obwodów rezonansowych z rys. 5.5, z których każdy określony jest funkcją przenoszenia typu (5.4) i które nie są z sobą sprzężone, tzn. są od siebie wzajemnie odseparowane np. za pomocą

wzmacniaczy separacyjnych. Schemat elektryczny takiego układu jest podany na rys. 5.6.

Funkcję przenoszenia $H(s)$ takiego układu można przedstawić w postaci

$$H(s) = \frac{E_K(s)}{E_1(s)} = \frac{\prod_{i=1}^{k} s_i s_i^*}{\prod_{i=1}^{k} (s - s_i)(s - s_i^*)} = \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{A_i}{(s - s_i)} + \frac{A_i^*}{(s - s_i^*)} \right], \tag{5.6}$$

gdzie A_i i A_i^* określają widma funkcji $H(s)$ w punktach $s = s_1$ oraz $s_i = s_i^*$ i wyrażają się wzorami:

$$A_i = \left. \frac{(s - s_i) \prod_{n=1}^{k} s_n \cdot s_n^*}{\prod_{n=1}^{k} (s - s_n)(s - s_n^*)} \right|_{s = s_i}, \tag{5.7-a}$$

$$A_i^* = \left. \frac{(s - s_i^*) \prod_{n=1}^{k} s_n \cdot s_n^*}{\prod_{n=1}^{k} (s - s_n)(s - s_n^*)} \right|_{s = s_i^*}. \tag{5.7-b}$$

Napięcie wyjściowe $e_k(t)$ takiego układu odpowiada zatem prędkości objętościowej $U_o(t)$ w otworze wylotowym ust, w założeniu, że pojedynczy impuls tonu krtaniowego $U(t)$ jest impulsem jednostkowym Diraca.

Stosując odwrotne przekształcenie Laplace'a do funkcji (5.6) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} u_o(t) \triangleq e_k(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{E_1(s) \cdot H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \\ &= \sum_{i=1}^{k} 2|A_i| e^{\sigma_i t} \cdot \sin(\omega_i t + \Phi_i), \end{aligned} \tag{5.8}$$

gdzie:

$$|A_i| = \left| \frac{(s - s_i) \prod_{n=1}^{k} s_n \cdot s_n^*}{\prod_{\substack{n=1 \\ (n \neq i)}}^{k} (s - s_n)(s - s_n^*)} \cdot \frac{1}{2 j \omega_i} \right| = \frac{C_K}{2 \omega_i \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^{k} A_{ni} \cdot B_{ni}}, \tag{5.8-a}$$

$$\Phi_i = \sum_{n=1}^{k} \varphi_{ni} + \sum_{n=1}^{k} \psi_{ni}. \tag{5.8-b}$$

We wzorach (5.8-a) i (5.8-b) zastosowano następujące oznaczenia:

$$C_K = \prod_{i=1}^{k} s_i \cdot s_i^* \approx \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{L_i \cdot C_i},$$

$$A_{ni} = \sqrt{(\sigma_n - \sigma_i)^2 + (\omega_n - \omega_i)^2}, \quad (i \neq n)$$

$$B_{\substack{ni \\ (i\neq n)}} = \sqrt{(\sigma_n - \sigma_i)^2 + (\omega_n + \omega_i)^2},$$

$$\varphi_{\substack{ni \\ (i\neq n)}} = -\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega_n - \omega_i}{\sigma_n - \sigma_i},$$

$$\Psi_{\substack{ni \\ (i\neq n)}} = -\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega_n + \omega_i}{\sigma_n - \sigma_i}.$$

5.3. Interpretacja fizyczna

Interpretacja fizyczna otrzymanych wyników jest następująca. Prędkość objętościowa $u_0(t)$ w otworze wylotowym ust [1] jest sumą sinusoid tłumionych o częstotliwościach ω_i i współczynnikach tłumienia σ_i, odpowiadających drganiom własnym wnęk organu mowy. Ponieważ współczynniki tłumienia σ_i efektorów artykulacyjnych w zakresie niższych formant są rzędu 300 s^{-1}, co równa się stałej czasowej zanikania drgań rzędu 3 ms, a przeciętna częstotliwość powtarzania impulsów krtaniowych w przypadku głosu męskiego jest równa około 125 Hz, zatem odległość (w skali czasu) między poszczególnymi impulsami jest około 3 razy większa niż stała czasu zanikania drgań. Amplitudy początkowe $|A_i|$ i przesunięcia fazowe Φ_i poszczególnych drgań składowych są zależne od częstotliwości $\omega_i\Big|_{i=1}^{\infty}$ i współczynników tłumienia $\sigma_i\Big|_{i=1}^{\infty}$ wszystkich innych drgań składowych [patrz wzory (5.8-a) i 5.8-b)], z czego wynika, że zmiana położenia choćby jednego bieguna $s_i = \sigma_i \pm j\omega_i$ funkcji przenoszenia $H(s)$ efektorów artykulacyjnych pociąga za sobą odpowiednią zmianę amplitud (i faz) drgań własnych we wszystkich pozostałych zakresach formantowych. Ponieważ współczynniki tłumienia σ_i poszczególnych drgań własnych, określające szerokość pasm ΔF_i zakresów formantowych $\left(\Delta F_i = -\frac{\sigma_i}{\pi}\right)$ na poziomie -3 dB poniżej wierzchołka są w przypadku dźwięków samogłoskowych praktycznie stałe [3], przeto wynika stąd bardzo ważny z technicznego punktu widzenia

Wniosek: Przy syntezie samogłosek w formantowych układach rezonansowych połączonych kaskadowo (łańcuchowo) położenie biegunów $s_i s_i^*$ funkcji przenoszenia $H(s)$ określa nie tylko częstotliwości formant $F_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$, ale i względne wysokości wierzchołków poszczególnych zakresów formantowych.

Wniosek ten staje się oczywisty skoro uwzględni się fakt, iż wyznaczone poprzednio we wzorze (5.8-a) wielkości poszczególnych amplitud

[1] W założeniu, że pojedynczy impuls prędkości objętościowej tonu krtaniowego jest impulsem jednostkowym Diraca.

$|A_i|$ drgań składowych o pulsacjach ω_i są bezpośrednio związane z wysokościami wierzchołków funkcji przenoszenia $H(s)$ w zakresie danej formanty F_i. Wyznaczając mianowicie ze wzoru (5.6) określającego $H(s)$ amplitudę funkcji przenoszenia $|E_n|$ przy częstotliwości $s_n = j\omega_n$ otrzymujemy:

$$|E_n| = \left| \frac{\prod_{i=1}^{k} s_i \cdot s_i^*}{\prod_{i=1}^{k} (s - s_i)(s - s_i^*)} \right|_{s = j\omega_n} \tag{5.9}$$

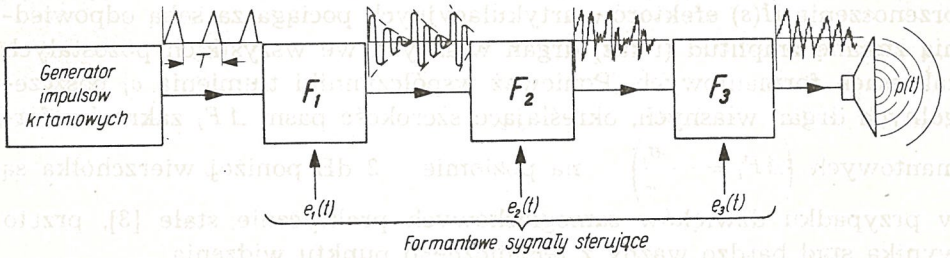
i porównując tę wartość z wyrażeniami (5.8-a) na amplitudę początkową $|A_n|$ drgań własnych o częstotliwości $F_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$

$$|A_n| = \left| \frac{(s - s_n) \prod_{i=1}^{k} s_i \cdot s_i^*}{\prod_{i=1}^{k} (s - s_i)(s - s_i^*)} \right|_{s = s_n}$$

widzimy, że gdy $\sigma_n \ll \omega_n$, to

$$\boxed{|A_n| \approx \sigma_n \cdot |E_n|.} \tag{5.10}$$

Schemat ideowy syntezatora formantowego w połączeniu łańcuchowym, przy ograniczeniu syntezy do 3 pierwszych formant ($k = 3$) ma zatem postać jak na rys. 5.7.



Rys. 5.7. Schemat ideowy syntezatora formantowego w układzie łańcuchowym przy zastosowaniu trzech obwodów rezonansowych

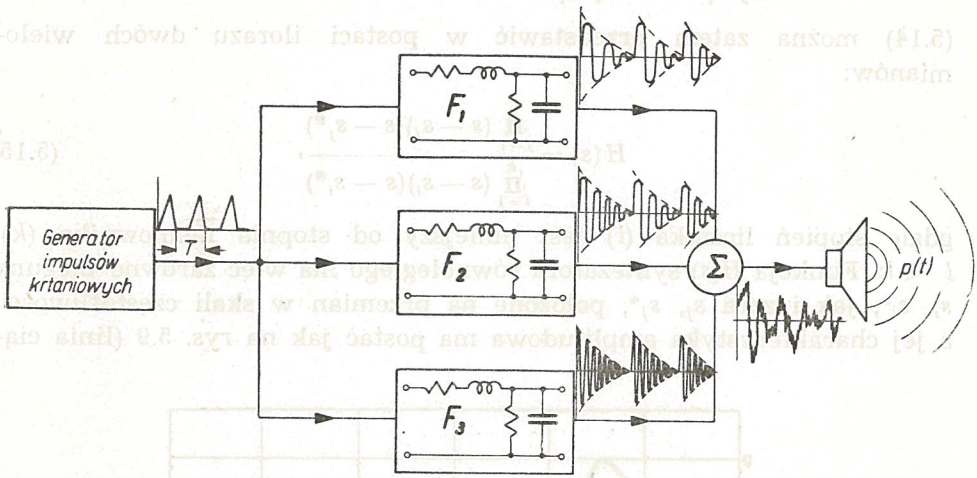
Fant [13] przeprowadził szczegółowe pomiary względnych poziomów wierzchołków poszczególnych zakresów formantowych samogłosek angielskich i szwedzkich i porównał je z wartościami uzyskanymi na drodze syntezy graficznej, omówionej w rozdziale 5.1. Uzyskana zgodność wyników pomiarów i obliczeń potwierdza słuszność teorii, w myśl której częstotliwości poszczególnych formant określają również względne wysokości wierzchołków obwiedni widma samogłosek przy syntezie w układach łańcuchowych.

5.4. Formantowe układy rezonansowe w połączeniu równoległym

Na rys. 5.8 przedstawiono schemat ideowy odmiennego typu syntezatora formantowego, w którym obwody rezonansowe $R_i L_i G_i C_i\big|_{i=1}^{k}$ określone funkcjami przenoszenia typu

$$H_i(s) = \frac{s_i \cdot s_i^*}{(s - s_i)(s - s_i^*)} \tag{5.11}$$

pracują w połączeniu równoległym, zasilane ze wspólnego generatora impulsów krtaniowych $u(t) \triangleq U(s)$. Napięcia wyjściowe poszczególnych



Rys. 5.8. Schemat ideowy syntezatora formantowego w układzie równoległym przy zastosowaniu trzech obwodów rezonansowych

obwodów zostają zsumowane w układzie sumującym, a napięcie wypadkowe

$$u_o(t) = \sum_{i=1}^{k} u_{oi}(t) \tag{5.12}$$

jest napięciem wyjściowym układu syntezy.
W tym przypadku

$$u_o(t) \triangleq \mathcal{L}^{-1}\{U_o(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{U_{o1}(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{U_{o2}(s)\} + \ldots + \mathcal{L}^{-1}\{U_{ok}(s)\} = \sum_{i=1}^{k}\left[B_i\left(\frac{\sigma_i^2 + \omega_i^2}{\omega_i}\right) e^{\sigma_i t} \cdot \sin \omega_i t\right], \tag{5.13}$$

gdzie współczynniki $B_i\big|_{i=1}^{i=k}$ określają stosunki, w jakich poszczególne napięcia wyjściowe obwodów rezonansowych podlegają sumowaniu. Wzór (5.13) wskazuje, że amplituda każdej sinusoidy

tłumionej określona jest wyłącznie przez jej własną częstotliwość ω_i i współczynnik tłumienia σ_i i nie zależy od częstotliwości obwodów pozostałych — a więc od częstotliwości innych formant samogłoski, podlegającej syntezie.

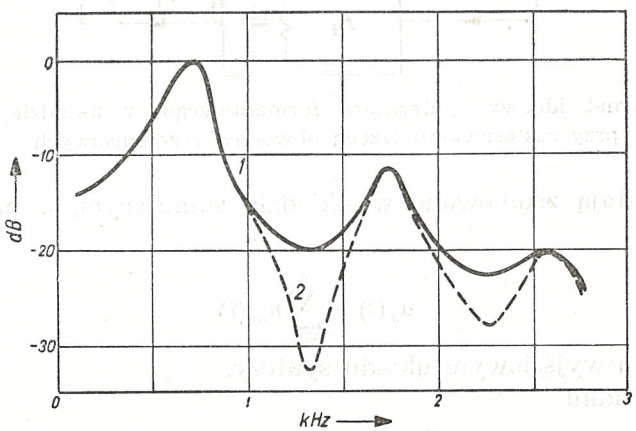
Transformata Laplace'a funkcji przenoszenia układu syntezatora równoległego wyraża się zgodnie ze wzorem (5.13) jako

$$H(s) = \sum_{i=1}^{k} \frac{B_i s_i s_i^*}{(s - s_i)(s - s_i^*)} = \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{C_i^*}{(s - s_i)} + \frac{C_i^*}{(s - s_i^*)} \right], \tag{5.14}$$

gdzie $C_i = B_i \frac{s_i s_i^*}{2 j \omega_i} = B_i \frac{\sigma_i^2 + \omega_i^2}{2 j \omega_i}$ jest funkcją jedynie σ_i i ω_i. Równanie (5.14) można zatem przedstawić w postaci ilorazu dwóch wielomianów:

$$H(s) = \frac{\prod_{j=1}^{l} (s - s_j)(s - s_j^*)}{\prod_{i=1}^{k} (s - s_i)(s - s_i^*)}, \tag{5.15}$$

gdzie stopień licznika (l) jest mniejszy od stopnia mianownika (k), $l < k$. Funkcja $H(s)$ syntezatora równoległego ma więc zarówno bieguny s_i, s_i^*, jak i zera s_j, s_j^*, położone na przemian w skali częstotliwości, a jej charakterystyka amplitudowa ma postać jak na rys. 5.9 (linia cią-



Rys. 5.9. Przykład amplitudowej charakterystyki przenoszenia syntezatora formantowego
1 — syntezator w układzie łańcuchowym, *2* — syntezator w układzie równoległym

gła) i odpowiada w przybliżeniu samogłosce "ae", przy czym amplitudy poszczególnych formant zostały indywidualnie dobrane w celu uzyskania maksymalnej zrozumiałości. Na tym samym rysunku linią przerywaną podano widmo amplitudowe tej samej samogłoski, wytworzonej

w syntezatorze łańcuchowym, kiedy amplitudy poszczególnych formant są automatycznie wyznaczone przez ich częstotliwości. Z porównania obu charakterystyk wynika, że syntezatory łańcuchowe wierniej odtwarzają charakterystykę przenoszenia efektorów artykulacyjnych przy wymawianiu samogłosek niż syntezatory równoległe, które wymagają stosowania korekcji eliminującej zera funkcji $H(s)$, a ponadto mają dwukrotnie większą ilość parametrów przestrajanych, i poza zmianą częstotliwości F_1, F_2, $F_3 \ldots$ F_k obwodów rezonansowych muszą być dodatkowo sterowane sygnałami, kontrolującymi wielkości amplitud C_1, C_2, $C_3 \ldots C_k$ drgań składowych (5.14). W syntezatorach łańcuchowych — jak to wykazano poprzednio — amplitudy A_1, A_2, $A_3 \ldots A_k$ poszczególnych drgań składowych i wysokości wierzchołków formant E_1, E_2, $E_3 \ldots E_k$ automatycznie przybierają właściwe wartości przy przestrajaniu częstotliwości obwodów rezonansowych F_1, F_2, $F_3 \ldots F_k$.

Należy jednak pamiętać, że rozważania te są słuszne jedynie w przypadku syntezy samogłosek, kiedy funkcja przenoszenia $H(s)$ nie ma zer. Sytuacja zmienia się w przypadku spółgłosek, kiedy ze względu na konfigurację efektorów artykulacyjnych i sposób ich pobudzania funkcja przenoszenia $H(s)$ charakteryzuje się istnieniem zarówno biegunów, jak i zer. W tym przypadku syntezatory równoległe o funkcji przenoszenia określonej wzorem (5.15) lepiej spełniają swe zadanie.

6. TEORETYCZNE GRANICE ZMNIEJSZANIA OBJĘTOŚCI SYGNAŁU W SYSTEMACH TRANSMISYJNYCH OPARTYCH NA ZASADZIE KODOWANIA FORMANT

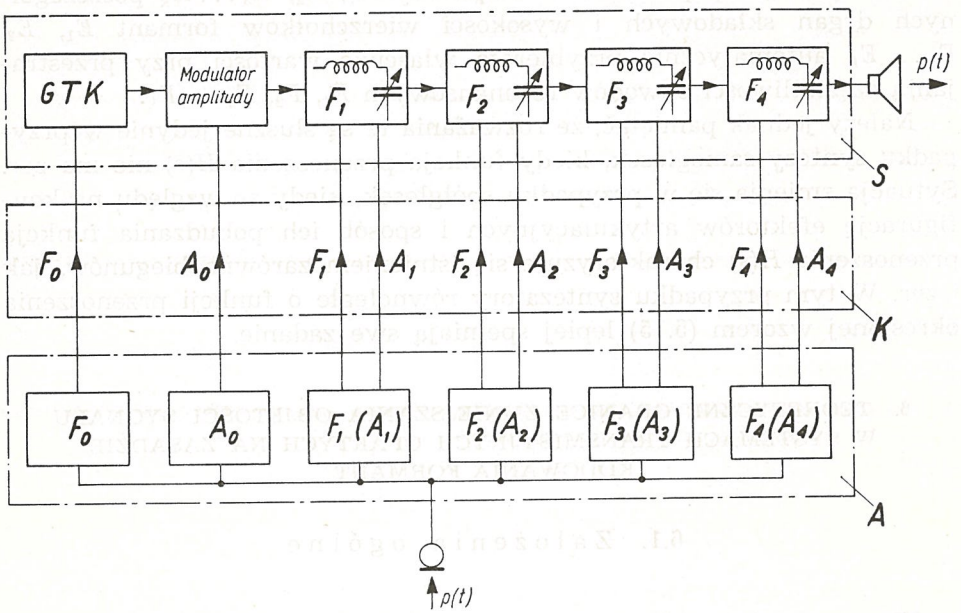
6.1. Założenia ogólne

W poprzedniej części pracy podano w skrócie podstawy teoretyczne syntezy samogłosek w rezonansowych układach formantowych. Prace eksperymentalne prowadzone w ostatnim dziesięcioleciu równolegle w kilku ośrodkach badawczych [1] wykazały, że za pomocą rezonansowych syntezatorów formantowych, sterowanych odpowiednio ukształtowanymi sygnałami kontrolnymi, można wytwarzać dźwięki lub grupy dźwięków o założonym z góry znaczeniu fonetycznym. Prowadzone są również — chociaż dopiero w stadium początkowym — prace nad układami do automatycznej ekstrakcji z sygnału mowy naturalnej for-

[1] Głównie: Speech Transmission Laboratory, Royal Academy of Technology, Stockholm; Research Laboratory of Electronics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.; Haskins Laboratories, New York; Bell Telephone Laboratories, Murray Hill N. Y.; Communication Sciences Laboratory, University of Michigan, Ann Arbor; Signal Research and Development Establishment, Christchurch, Hants.

mantowych funkcji parametrycznych, które mogłyby być następnie użyte do sterowania syntezatora. Współpracujące ze sobą układy analizatora (po stronie nadawczej łącza) i syntezatora (po stronie odbiorczej łącza) stanowią podstawę systemów teletransmisyjnych o ograniczonej wstędze częstotliwości, działających na zasadzie kodowania formant.

Należy z kolei ustalić przynajmniej orientacyjnie, jakich realnych korzyści można się spodziewać przy ograniczaniu pasma częstotliwości w systemach tego typu i czy mogą one przynieść zysk w porównaniu z systemami typu Vocoder, znanymi od dawna [6], [7], [8].



Rys. 6.1. Schemat blokowy układu transmisyjnego działającego na zasadzie analizy-syntezy formantowej
A — analizator, K — kanał łączności, S — syntezator

Za podstawę obliczeń przyjęty będzie najprostszy układ transmisyjny, oparty na zasadzie ciągłej analizy-syntezy formantowej, którego schemat ideowy podano na rys. 6.1.

Po stronie nadawczej łącza sygnał mowy naturalnej poddany zostaje w analizatorze procesowi analizy, w wyniku którego wydzielone zostają z niego sygnały sterujące w postaci napięć stałych, których wielkość jest proporcjonalna do wielkości parametrów formantowych sygnału pierwotnego, określających odpowiednio: częstotliwości F_0 i amplitudę A_0 impulsów tonu krtaniowego oraz częstotliwości F_1, F_2, F_3 i F_4 oraz amplitudy A_1, A_2, A_3 i A_4 pierwszych czterech formant danego dźwięku mowy (fonemu). Sygnały formantowe, z których każdy jest wolno-

zmienną funkcją czasu o częstotliwości odpowiadającej częstotliwości zmian konfiguracji geometrycznej efektorów artykulacyjnych, przesyłane są dowolnym systemem łączności do syntezatora po stronie odbiorczej łącza, gdzie sterują odpowiednie elementy układu syntezy. Podany schemat traktować należy jako przykład jednego z wielu możliwych systemów rozwiązań technicznych, które różnić się mogą między sobą zarówno ilością, jak i rodzajem sygnałów sterujących syntezator.

6.2. Ilość informacji zawarta w naturalnym sygnale mowy

Ogólnie biorąc, dźwięki mowy są nośnikami trzech rodzajów informacji [30]:

a) *Informacji lingwistycznych*, które dotyczą wyłącznie treści przesyłanej wiadomości, umożliwiając identyfikację elementów informacyjnych w kodzie fonetycznym: fonemów, morfemów, wyrazów, zdań itd.;

b) *Informacji socjo-lingwistycznych*, na podstawie których odbiorca wiadomości może określić z pewną dokładnością pochodzenie geograficzne i społeczne, a nawet środowisko kulturalne nadawcy wiadomości;

c) *Informacji personalnych*, które zawierają dane dotyczące indywidualnych cech akustycznych głosu nadawcy i które zależą od fizycznych parametrów jego efektorów artykulacyjnych (organu mowy); informacje te pozwalają odbiorcy wiadomości identyfikować osobę nadawcy, oraz określić jego chwilowy stan emocjonalny.

Nośnikiem tych informacji jest w przypadku rozmowy bezpośredniej fala dźwiękowa $p(t)$, a w przypadku mowy przesyłanej dowolnym systemem telefonii naturalnej — sygnał elektryczny $s(t)$ będący mniej lub bardziej dokładnym odźwierciadleniem czasowego przebiegu ciśnienia akustycznego $p(t)$. Należy przynajmniej orientacyjnie określić ilość informacji zawartą w sygnale fonicznym odpowiadającym mowie naturalnej.

Do zagadnienia tego można podejść w różny sposób. Zakładając, że sygnał $s(t)$ jest dowolną funkcją czasu, lecz o częstotliwości ograniczonej zarówno akustycznymi właściwościami organu mowy nadawcy, jak i percepcyjnymi właściwościami słuchu odbiorcy, można go przedstawić — zgodnie z twierdzeniem Shannona [42], [43] i Kotielnikowa [29] — w postaci skończonego zbioru $n = 2F_{max}T$ liczb, odpowiadających chwilowym wartościom funkcji $s(t)$, wyznaczonym w momentach czasu odległych od siebie o $\Delta t = \frac{1}{2F_{max}}$, gdzie F_{max} oznacza maksymalną częstotliwość graniczną sygnału, a T — czas jego trwania. Każda z n wartości chwilowych sygnału może przybierać teoretycznie wartości od zera do ∞; uwzględniając jednak fizjologiczne właściwości percepcyjne słuchu ludzkiego, który w całym zakresie częstotliwości słyszalnych odczuwa

maksymalną ilość $m \approx 130$ przyrostów poziomu głośności sygnału, a jednocześnie zakładając, że $F_{max} \approx 14.000$ Hz, można ocenić orientacyjnie maksymalną ilość informacji (na jednostkę czasu) zawartą w fonicznym sygnale skwantowanym jako

$$I = n \log_2 m = 2 \cdot 14 \cdot 10^3 \cdot \log_2 130 \approx 200 \cdot 10^3 \text{[bit/s]}. \quad (6.1)$$

W systemach telekomunikacyjnych o dobrej jakości ilość poziomów kwantowania $m = 128$, a maksymalna częstotliwość „próbkowania" sygnału $\frac{1}{\Delta t} = 2F_{max} = 8000$ Hz, czemu odpowiada zawartość informacji w sygnale (na jednostkę czasu) rzędu

$$I = 8 \cdot 10^3 \cdot \log_2 128 \approx 56 \cdot 10^3 \text{[bit/s]}. \quad (6.2)$$

Maksymalną ilość informacji w sygnale fonicznym, obliczoną wzorem teoretycznym (6.1), można zmierzyć eksperymentalnie: stwierdzono, że pełną naturalność odtwarzania mowy, dającą złudzenie słyszenia bezpośredniego, można uzyskać w układzie transmisyjnym o szerokości pasma $\Delta F \approx 12 \div 14$ kHz przy stosunku sygnału do szumów $S/N \approx 45 \div 50$ dB, czemu odpowiada przepustowość kanału łączności rzędu

$$I = \Delta F \cdot \log_2(1+S/N) \approx 200 \cdot 10^3 \text{ [bit/s]} \quad (6.3)$$

zgodnie z wartością obliczoną we wzorze (6.1). Kanał łączności o takiej przepustowości zapewnia niemal niezniekształcone przesyłanie informacji lingwistycznych, socjo-lingwistycznych i personalnych.

W praktyce telekomunikacyjnej (radiokomunikacja, telefonia) ze względów ekonomiczno-technicznych rezygnuje się z warunku naturalności odtwarzania mowy; podstawowym kryterium jakości transmisji jest w tym przypadku zrozumiałość wiadomości. Łączność ogranicza się wtedy w zasadzie do łączności informacyjno-technicznej, to jest do poprawnego odebrania elementów fonetycznych, tworzących wiadomości. Wiadomo z kolei, że rozszerzanie pasma częstotliwości przesyłanych powyżej granicy $\Delta F \approx 7000$ Hz i zwiększanie stosunku sygnału do szumów powyżej granicy $S/N \approx 24$ dB nie powoduje istotnego zwiększania zrozumiałości mowy; wynika stąd, że przepustowość kanału łączności rzędu

$$I = 7 \cdot 10^3 \log_2(1+10^{2,4}) \approx 56 \cdot 10^3 \text{ [bit/s]} \quad (6,4)$$

traktować należy orientacyjnie jako maksymalną z punktu widzenia wymagań bezbłędnego odbioru wiadomości w kodzie fonetycznym. Stosowana w praktyce przepustowość informacyjna kanałów teletransmisyjnych średniej jakości o szerokości pasma od 300 Hz do 3400 Hz (tzn. $\Delta F \approx 3000$ Hz) i stosunku sygnału do szumów $S/N \approx 30$ dB wynosi

$$I = 3 \cdot 10^3 \cdot \log_2(1+10^3) \approx 30 \cdot 10^3 \text{ [bit/s]} \quad (6.5)$$

przy zrozumiałości procentowej rzędu $85 \div 90\%$ (przy braku innych czynników ubocznych, wpływających ujemnie na jakość transmisji).

Zagadnienie obliczania zawartości informacji w sygnale mowy można jednak ująć w inny sposób, przyjmując za elementy kodu fonetycznego fonemy danego języka. Ilość fonemów w języku polskim wynosi około 40, a więc zawartość informacji równa się

$$H = \log_2 40 = 5{,}33 \quad \text{[bit/fonem]}. \tag{6.6}$$

Zakładając jednakowe prawdopodobieństwo występowania wszystkich fonemów $p_i \Big|_{i=1}^{i=40} = 0{,}025$ można określić każdy fonem przez 6 cech binarnych. Przy maksymalnej prędkości przesyłania informacji w naturalnym kodzie fonetycznym rzędu 10 fonemów na sekundę, otrzymuje się niezbędną przepustowość kanału łączności rzędu

$$I' = H \cdot 10 \approx 54 \quad \text{[bit/s]}. \tag{6.7}$$

W rzeczywistości wartość ta może być jeszcze mniejsza, jeżeli się uwzględni fakt, że prawdopodobieństwa występowania poszczególnych fonemów w mowie ciągłej nie są jednakowe. Zagadnienie to badała na płaszczyźnie języka polskiego M. Steffen [44], określając względną częstość występowania głosek polskich i wyznaczając w ten sposób prawdopodobieństwo p_i poszczególnych fonemów. Wykorzystując uzyskane dane liczbowe można określić ilość informacji jako

$$H' = -\sum_{i=1}^{40} p_i \cdot \log_2 p_i \approx 4 \cdot 74 \text{ [bit/fonem]} \tag{6.8}$$

i

$$I' = H' \cdot 10 \approx 48 \text{ [bit/s]}. \tag{6.9}$$

Wartość ta odpowiada w przybliżeniu przepustowości kanału o szerokości pasma $\Delta F = 5$ Hz i stosunku sygnału do szumów $S/N \approx 30$ dB.

Różnica między niezbędną przepustowością kanału łączności przy przesyłaniu sygnału $s(t)$ odpowiadającego fali ciśnienia akustycznego $p(t)$ w stosowanych obecnie systemach teletransmisyjnych telefonii naturalnej [$I > 30 \cdot 10^3$ bit/s, zob. wzory (6.1) ÷ (6.5)], a przepustowością kanału niezbędną do przesłania wiadomości w systemie kodowania fonemów [$I' \approx 50$ bit/s] jest ogromna, co uzasadnia celowość prac badawczych mających na celu poszukiwanie nowych, bardziej efektywnych i ekonomicznych systemów kodowania przy przesyłaniu informacji słownych.

Dla porównania należy podać, że w systemach teletransmisyjnych typu Vocoder przy ilości kanałów rzędu 10 ÷ 12 o szerokości około 25 Hz każdy, szerokość całego pasma wynosi do 300 Hz, a więc jest równa 0,1 szerokości normalnego kanału telefonii naturalnej. Przy częstotliwości próbkowania sygnału 50 razy na sekundę ilość informacji w syntezatorach tego typu jest rzędu 2200 bit/s przy zrozumiałości od

83 do 85%. W syntezatorach typu Vocoder osiąga się zatem mniej więcej dziesięciokrotne zwężenie pasma częstotliwości i 12 ÷ 15-krotną kompresję objętości sygnału w porównaniu z systemami telefonii naturalnej.

6.3. Ilość informacji zawarta w sygnałach sterujących rezonansowe syntezatory formantowe

Załóżmy, że rozpatrywany układ transmisyjny (rys. 6.1) wymaga sterowania syntezatora za pomocą 10 funkcji parametrycznych, kontrolujących następujące parametry układu:

1. Częstotliwość podstawową F_0 generatora tonu krtaniowego,
2. Amplitudę A_0 generatora tonu krtaniowego,
3. Częstotliwości F_1, F_2, F_3 i F_4 obwodów rezonansowych, odtwarzających cztery pierwsze zakresy formantowe,
4. Amplitudy A_1, A_2, A_3 i A_4 czterech pierwszych zakresów formantowych.

Układ taki przystosowany byłby w zasadzie do syntezy wszystkich dźwięków samogłoskowych i tylko niektórych spółgłosek. W celu przystosowania układu do syntezy przynajmniej większości spółgłosek, należałoby wprowadzić dodatkowo co najmniej jedną funkcję parametryczną, kontrolującą:

5. Amplitudę napięcia wyjściowego generatora szumów.

Każdy z sygnałów sterujących jest wolnozmienną funkcją czasu o częstotliwości odpowiadającej częstotliwości zmian konfiguracji geometrycznej efektorów artykulacyjnych i może być przedstawiony w postaci funkcji napięcia $u(t)$, której wartości chwilowe są proporcjonalne do kontrolowanego parametru układu syntezy. Maksymalna żądana dokładność odtworzenia przebiegu czasowego funkcji parametrycznych $u(t)$ zależy oczywiście od psychoakustycznych właściwości percepcyjnych słuchu, który reaguje na pewne progowe (przyrostowe) wartości parametrów akustycznych określających cechy dystynktywne danego fonemu. Wstępne badania eksperymentalne przeprowadzone przez Flanagana [19] wykazały, że ledwie dostrzegalne, progowe wartości przyrostowe częstotliwości tonu krtaniowego F_0 i częstotliwości $F_1 \div F_4$ czterech pierwszych formant samogłoski, odczuwane przez słu-

chaczy jako zmiany jej brzmienia fonetycznego, w przypadku głosu męskiego wynoszą odpowiednio:

$$F_0: \pm 1\ \text{Hz},$$
$$F_1: \pm 20\ \text{Hz},$$
$$F_2: \pm 50\ \text{Hz},$$
$$F_3: \pm 75\ \text{Hz},$$
$$F_4: \pm 75\ \text{Hz}.$$

Wynika stąd, że kwantowanie sygnałów, kontrolujących F_0, F_1, F_2, F_3 i F_4, skokami mniejszymi od: $\Delta F_0 = 2$ Hz, $\Delta F_1 = 40$ Hz, $\Delta F_2 = 100$ Hz, $\Delta F_3 = 150$ i $\Delta F_4 = 150$ Hz jest niecelowe. Ponieważ częstotliwość F_0 oraz częstotliwości czterech pierwszych formant samogłosek leżą w zakresach [14]:

$$F_0: \quad 80 \div 160\ \text{Hz},$$
$$F_1: \quad 150 \div 850\ \text{Hz},$$
$$F_2: \quad 500 \div 2500\ \text{Hz},$$
$$F_3: 1500 \div 3500\ \text{Hz},$$
$$F_4: 2500 \div 4500\ \text{Hz},$$

przeto maksymalna ilość poziomów kwantowania m odpowiednich sygnałów sterujących wynosi:

$$m(F_0) = \frac{F_{0\,max} - F_{0\,min}}{\Delta F_0} = 40, \quad \text{czyli} \quad H(F_0) = \log_2 40 = 5{,}3\ \text{bit},$$

$$m(F_1) = \frac{F_{1\,max} - F_{1\,min}}{\Delta F_1} = 18, \quad \text{czyli} \quad H(F_1) = \log_2 18 = 4{,}2\ \text{bit},$$

$$m(F_2) = \frac{F_{2\,max} - F_{2\,min}}{\Delta F_2} = 20, \quad \text{czyli} \quad H(F_2) = \log_2 20 = 4{,}3\ \text{bit}$$

$$m(F_3) = \frac{F_{3\,max} - F_{3\,min}}{\Delta F_3} = 14, \quad \text{czyli} \quad H(F_3) = \log_2 14 = 3{,}8\ \text{bit},$$

$$m(F_4) = \frac{F_{4\,max} - F_{4\,min}}{\Delta F_4} = 14, \quad \text{czyli} \quad H(F_4) = \log_2 14 = 3{,}8\ \text{bit}.$$

Podobne badania wykazały, że ledwo odczuwalne przez słuchaczy, przyrostowe (progowe) zmiany amplitudy czterech pierwszych formant samogłosek wynoszą:

$$\Delta A_1 = \pm 1\ \text{dB}, \quad \text{czyli} \quad 2\ \text{dB}$$
$$\Delta A_2 = \pm 3\ \text{dB}, \quad \text{czyli} \quad 6\ \text{dB}$$
$$\Delta A_3 = \pm 5\ \text{dB}, \quad \text{czyli} \quad 10\ \text{dB}$$
$$\Delta A_4 = \pm 5\ \text{dB}, \quad \text{czyli} \quad 10\ \text{dB}$$

Ponieważ maksymalne zakresy zmian amplitud formant A_1, A_2, A_3 i A_4 wynoszą:

$$A_1: 5 \text{ dB},$$
$$A_2: 20 \text{ dB}.$$
$$A_3: 20 \text{ dB},$$
$$A_4: 20 \text{ dB},$$

przeto ilość poziomów kwantowania sygnałów kontrolujących amplitudy kolejnych formant może być następująca:

$$m(A_1) = \frac{5}{2} \approx 3, \quad \text{czyli} \quad H(A_1) = \log_2 3 = 1{,}6 \text{ bit},$$

$$m(A_2) = \frac{20}{6} \approx 4, \quad \text{czyli} \quad H(A_2) = \log_2 4 = 2{,}0 \text{ bit},$$

$$m(A_3) = \frac{20}{10} = 2, \quad \text{czyli} \quad H(A_3) = \log_2 2 = 1{,}0 \text{ bit},$$

$$m(A_4) = \frac{20}{10} = 2, \quad \text{czyli} \quad H(A_4) = \log_2 2 = 1{,}0 \text{ bit}.$$

Zestawienie wyników obliczeń podano w tablicy 6.1. W ostatniej kolumnie tablicy zestawiono ilość informacji na jednostkę czasu w poszczególnych sygnałach formantowych.

Z badań eksperymentalnych wynika, że podczas normalnej rozmowy czas trwania fonemu w stanie ustalonym wynosi około 25 ms; uwzględniając jednak stany przejściowe między poszczególnymi fonemami, zachodzące w czasie rzędu 50 ms, należy stosować częstotliwość próbkowania sygnału nie mniejszą od 20 razy na sekundę ($\Delta t = 50$ ms). Na tej podstawie określono ilość informacji na jednostkę czasu I jako:

$$I[\text{bit/s}] = H[\text{bit}] \cdot \frac{1}{\Delta t}[\text{s}^{-1}] = \frac{H}{\Delta t}[\text{bit/s}]. \tag{6.10}$$

Należy podkreślić, że w tablicy 6.1 nie uwzględniono ilości informacji zawartych w sygnałach sterujących amplitudę tonu krtaniowego [$H(A_o)$ i $I(A_o)$] oraz amplitudę szumów [$H(A_{sz})$ i $I(A_{sz})$], gdyż brak jest na ten temat danych eksperymentalnych. Istnieją jednak podstawy do przypuszczenia, że ilość informacji zawarta w każdym z tych sygnałów jest tego rzędu, co ilość informacji w sygnale sterującym amplitudę pierwszej formanty, czyli jest równa:

$$H(A_0) = 1{,}6 \text{ [bit]}, \quad I(A_0) = 32 \text{ [bit/s]}, \tag{6.11-a}$$

$$H(A_{sz}) = 1{,}6 \text{ [bit]}, \quad I(A_{sz}) = 32 \text{ [bit/s]}. \tag{6.11-b}$$

Całkowita ilość informacji, zawarta we wszystkich sygnałach formantowych, wynosiłaby zatem:

$$H_c = \sum H \approx 30 \text{ [bit]}. \tag{6.12-a}$$

i odpowiednio

$$I_c = \sum I \approx 600 \text{ [bit/s]}, \tag{6.12-b}$$

a więc byłaby około 50 razy mniejsza od ilości informacji na jednostkę czasu w przypadku systemów telefonii naturalnej ($H'_c \approx 30.000$ [bit/s]), i około $3 \div 4$ razy mniejsza od ilości informacji na jednostkę czasu w przypadku klasycznych systemów typu Vocoder ($H_c'' \approx 1800 \div 2200$ [bit/s]).

Tablica 6.1

Ilości informacji w częstotliwościowych i amplitudowych sygnałach formantowych obliczone na podstawie wyników pomiarów psychoakustycznych

Parametr		Wielkość poziomu kwantowania	Ilość poziomów kwantowania [m]	Ilość informacji	Ilość informacji na 1 s
				H [bit]	I [bit/s]
Ton krtaniowy	F_0	$\Delta(F_0) = 2$ Hz	$m(F_0) = 40$	5,3	106
	A_0	$\Delta(A_0) = —$	$m(A_0) = —$	—	—
Pierwsza formanta	F_1	$\Delta(F_1) = 40$ Hz	$m(F_1) = 18$	4,2	84
	A_1	$\Delta(A_1) = 2$ dB	$m(A_1) = 3$	1,6	32
Druga formanta	F_2	$\Delta(F_2) = 100$ Hz	$m(F_2) = 20$	4,3	86
	A_2	$\Delta(A_2) = 6$ dB	$m(A_2) = 4$	2,0	40
Trzecia formanta	F_3	$\Delta(F_3) = 150$ Hz	$m(F_3) = 14$	3,8	76
	A_3	$\Delta(A_3) = 10$ dB	$m(A_3) = 2$	1,0	20
Czwarta formanta	F_4	$\Delta(F_4) = 150$ Hz	$m(F_4) = 14$	3,8	76
	A_4	$\Delta(A_4) = 10$ dB	$m(A_4) = 2$	1,0	20
Razem:			$\sum =$	$H = 27{,}0$ [bit]	$I = 540$ [bit/s]

Dane te dotyczą syntezatora, w którym zastosowano sygnały, sterujące wielkości amplitud poszczególnych formant (A_1, A_2, A_3, A_4). Stosując jednak syntezator formantowy w układzie łańcuchowym, w którym informacje dotyczące wielkości amplitud formant są zbyteczne (patrz

rozdział 5.3), można by zmniejszyć ilość informacji, obliczoną poprzednio, o sumę

$$\sum_{i=1}^{4} I(A_i) \approx 110\,[\text{bit/s}],$$

otrzymując ostatecznie

$$I_c \approx 500\,[\text{bit/s}], \tag{6.13}$$

a więc zmniejszyć objętość sygnału 60 razy w stosunku do systemów telefonii naturalnej, a $4 \div 5$ razy w stosunku do systemów Vocoder.

Flanagan [16] próbował obliczyć szerokość pasma częstotliwości, niezbędną do niezniekształconego przesłania funkcji parametrycznych, otrzymując szerokość pasm poszczególnych sygnałów rzędu $8 \div 9$ Hz, co w rozważanym tu systemie dawałoby wypadkową szerokość pasma rzędu $90 \div 100$ Hz, a więc 30 razy mniejszą od szerokości pasma telefonicznego. Wydaje się jednak, że otrzymane przez niego wyniki obliczeń są zbyt optymistyczne, i że w praktyce trzeba liczyć się z szerokościami pasm rzędu 20 Hz, co dawałoby wypadkową szerokość pasma $\Delta F = 20$ Hz $\cdot$ 11 $=$ 220 Hz przy stosowaniu kontroli amplitud formant A_1, A_2, A_3, i A_4, a $\Delta F = 20$ Hz $\cdot$ 7 $=$ 140 Hz przy stosowaniu syntezatora w układzie łańcuchowym.

Te wstępne obliczenia potwierdzają celowość intensywnego kontynuowania prac nad syntezą mowy w rezonansowych układach formantowych, pod kątem ich ewentualnych zastosowań w urządzeniach teletransmisyjnych o ograniczonym pasmie częstotliwości i zmniejszonej objętości sygnału.

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Zakład Badania Drgań

WYKAZ LITERATURY

1. Beranek L. L.: Acoustics. Wyd. Mc Graw Hill, 1954, London.
2. Van den Berg J. W.: Subglottis Pressure and Vibrations of the Vocal Cords. Folia Phoniatrica, t. 9, s. 65—71 (1957).
3. Bogert B. P.: On the Bandwidth of Vowel Formant. JASA, t. 25, s. 791—792, (1953).
4. Chang S. H.: Two Schemes for Speech-Band Compression. JASA, t. 28, s. 565—572 (1956).
5. Chiba T. i Kajiya M.: The Vowel — Its Nature and Structure. Toklo — Kaiseikan Publishing Company, Ltd. Tokyo, 1941.
6. Dudley H. W.: Synthesizing Speech. Bell Labs. Record, t. 15, s. 98—102 (1936).
7. Dudley H. W.: Remarking Speech. JASA, t. 11, s. 169—177 (1939).
8. Dudley H. W., Riesz R. R. i Watkins S. S. A.: A Synthetic Speaker. J. Franklin Inst., t. 227, s. 739 (1939).
9. Dunn H. K., Farnsworth J.: Exploration of Pressure Field Around the Human Head During Speech. JASA, t. 10 s. 184—199 (1939).

10. Dunn H. K.: The Calculation of Vowel Resonances and an Electrical Vocal Tract. JASA, t. 22, s. 740—753 (1950).
11. Fant C. G. M.: Ingen Vetensk, Akad. Stockholm, t. 24, s. 331—337 (1953).
12. Fant C. G. M. Speech Communication Research, IVA, Royal Swedish Academy of Engineering Sciences, t. 24, s. 331—337 (1953).
13. Fant C. G. M.: On the Predictability of Formant Levels and Spectrum Envelopes from Formant Frequencies. For Roman Jakobson, s'Gravenhage, s. 109—120 (1956).
14. Fant C. G. M.: Acoustic Analysis and Synthesis of Speech with Application to Swedish. Ericsson Technics, Nr 1 (1959).
15. Farnsworth D. W.: High Speed Motion Pictures of the Vocal Cords. Bell Labs. Record, t. 18. s. 203 (1940).
16. Flanagan J. L.: Band Width and Channel Capacity Necessary to Transmit the Formant Information of Speech, JASA, t. 28, s. 592—596 (1956).
17. Flanagan J. L. i House A. S.: Development and Testing of a Formant-Coding Speech Compression System. JASA, t. 28, s. 1099—1106 (1956).
18. Flanagan J. L.: Note of the Design of „Terminal-Analog" Speech Synthesizers. JASA, t. 29, s. 306 (1957).
19. Flanagan J. L.: Estimates of the Maximum Precision Necessary in Quantizing Certain „Dimensions" of Vowel Sounds, JASA, t. 29, s. 533—534 (1957).
20. Flanagan J. L.: Analog Measurements of Sound Radiation from the Mouth. JASA, t. 32, s. 1613—1620 (1960).
21. Fletcher W. W.: A Study of Internal Laryngeal Activity in Relation to Vocal Intensity. Dysertacja naukowa. Northwestern University (1950).
22. Fujimura O.: High-Speed Motion Pictures Study of the Movement of the Lips. Quart. Progr. Rept., Res. Lab. of Electronics, MIT, Nr 56, s. 174—180 (1960).
23. Hartmann W. i Wullstein H.: Arch. Ohren — , Nasen — , Kehlkopfh., s. 144—348 (1938).
24. Helmholtz H. L. F.: Die Lehre von den Tonempfindungen als Physiologische Grundlage für die Theorie der Musik. Vieweg, Braunschweig (1873).
25. Howard C. R.: Speech Analysis-Synthesis Scheme Using Continuous Parameters. JASA, t. 28, s. 1091—1098 (1956).
26. Jassem W.: The Formants of Sustained Polish Vowels, The Study of Sounds, s. 335—349, Tokyo, 1941.
27. Jassem W.: Wstępna analiza spektrograficzna głosek polskich. Rozprawy Elektrotechniczne, t. VI, Nr 3, s. 333—361 (1960).
28. Von Kempelen W.: Le mechanisme de la parole suivi d'une description d'une machine parlante. Vienna (1791).
29. Kotielnikow W. A.: O propusknoj sposobnosti "efira" i prowołoki w elektroswiazi. Izd. Red. Upr. Swiazi RKKA, (1933).
30. Ladefoged P. i Broadbent D. E.: Information Conveyed by Vowels. JASA, t. 29, s. 98—104 (1957).
31. Miller R. L.: Nature of the Vocal Cord Wave. JASA, t. 28, s. 159 (1956).
32. Miller R. L.: Nature of the Vocal Cord Wave. JASA, t. 31, s. 667 (1959).
33. Moore P. i von Leden H.: Sound Film — The Larynx and Voice — The Function of the Normal Larynx (1956).
34. Morse P. M.: Vibration and Sound. Wyd. Mc Graw-Hill Book Co., Inc., wyd. 2, s. 321—326 (1948).
35. Peterson G. E. i Barney H. L.: Control Methods Used in a Study of Vowels. JASA, t. 24, s. 175—184 (1952).

36. Peterson G. E.: The Information-Bearing Elements of Speech. JASA, t. 24, s. 629—637 (1952).
37. Peterson G. E.: Parameters of Vowel Quality. Jour. of Speech and Hearing Research, t. 4, s. 10—29 (1961).
38. Potter R. K. i Steinberg J. C.: Toward the Specification of Speech. JASA, t. 22, Nr 6, s. 807—820 (1950).
39. Rosen G.: Dynamic Analog Speech Synthesizer. JASA, t. 30, s. 201—209 (1958).
40. Rosen G.: Dynamic Analog Speech Synthesizer. Techn. Report Nr 353, MIT, Research Laboratory of Electronics (1960).
41. Russell G. O.: The Vowel. Ohio University Press, Columbus, Ohio (1928).
42. Shannon C. E.: A Mathematical Theory of Communication. Bell System Techn. Journ., t. 27 (1948).
43. Shannon C. E.: Communication in the Presence of Noise. Proc. IRE, t. 37, s. 10—21 (1949).
44. Steffen M.: Częstość występowania głosek polskich. — Biuletyn Polskiego Towarzystwa Językoznawczego, t. XVI, s. 145 i nast.
45. Stevens K. N., Kasowski S. i Fant C. G. M.: An Electrical Model of the Vocal Tract. JASA, t. 22, 734—742 (1953).
46. Stewart J. Q.: An Electrical Analog of the Vocal Organs. Nature, t. 110, s. 311—312 (1922).
47. Tarnóczy T.: Akust. Zeitschrift, t. 8, s. 22 (1943).
48. Tarnóczy T.: Arch. Sprach — Stimmphysiol., t. 6, s. 75 (1945).
49. Tarnóczy T. i Dudley H.: Speaking Machine of Wolfgang von Kempelen. JASA, s. 22, s. 151—166 (1950).
50. Tarnóczy T.: The Opening Time and Opening Quotient of the Vocal Cords During Phonation. JASA, t. 23, s. 42—44 (1951).
51. Timcke, von Leden i Moore: AMA. Archiv Otolaryng., t. 68, s. 1—19 (1958).
52. Trendelenburg W. i Wullstein H.: Berl. Ber., s. 399 (1935).
53. Trendelenburg W. i Hartmann W.: Berl. Ber., s. 391 (1937).
54. Trendelenburg F. i W.: Berl. Ber. s. 265 (1937).
55. Weibel E. S.: Vowel Synthesis by Means of Resonant Circuits. JASA, t. 22, s. 858—865 (1955).
56. Willis R.: On Vowel Sounds and on Reed Organ Pipes. Trans. Cambridge Phil. Soc., t. 3, s. 231—268 (1929).

Я. КАЦПРОВСКИ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СИНТЕЗА ПОЛЬСКИХ ГЛАСНЫХ В РЕЗОНАНСНЫХ ФОРМАНТОВЫХ СХЕМАХ [1])

Резюме

Работа содержит описание теоретических основ процесса синтеза гласных в резонансеых формантовых схемах, применение которых в системах передачи с ограниченной полосой передаваемых частот кажется теперь вполне реальным.

[1]) Работа была проведена в период временного пробывания автора в Исследовательской лаборатории электроники Массачуссетского технологического института, Кэмбридж, Масс., а также в Лаборатории вопросов связи, Университета Мичигэн, Энн Арбор, Мичигэн.