Согласно с принятым теперь методом, упрощённая анатомическая модель натурального органа речи при произношении гласных представлена в виде электрической эквивалентной схемы, функция передачи которой отображает функцию передачи $H(s)$ пассивных артикуляционных эфекторов. Доказано, что функция передачи $H(s)$ в случае гласных имеет бесконечный ряд пар сопряжённых полюсов s_i, $s_i^* = \sigma_i \pm j\omega_i$, которых распределение на плоскости комплексной частоты $s = \sigma + j\omega$ зависит от временного геометрического расположения натурального органа речи и определяет однозначным образом акустические отличительные свойства гласных, выраженные частотами формант и формой характеристики передачи в отдельных формантовых диапазонах. Описаны методы приближения функции $H(s)$ в электрической эквивалентной схеме с оконченным количеством пар сопряжённых полюсов s_i, $s_i^* = \sigma_i \pm j\omega_i$, представленной в виде последовательного или параллельного соединения простых последовательных резонансных контуров *RLCG* и на основании этого сравнены две системы синтеза: параллельная и последовательная, одновременно доказывая несомненное превосходство последовательной системы по крайней мере для целей синтеза гласных.

Действуя подобным образом, выведен аналитический вид функции источника гортанного тона $U(s)$ и функции излучения $Z_p(s)$ натурального органа речи и проведён анализ возможностей приближения этих функций в электрических схемах. Подробно исследована возможность приближения функции источника гортанного тона рядом треугольных импульсов с соответственно подобранной формой и частотой следования. Видено общее выражение для акустического давления $P(s) = U(s) \cdot H(s) \cdot Z_p(s)$ звуковой волны, соответствующей гласным звукам и, на основании этого, сделаны некоторые выводы, касающиеся технического осуществления формантовых синтезаторов с сосредоточенными постоянными.

В заключительной части работы проведён вступительный анализ тех достоинств, какие, из точки зрения уплотнения каналов связи, могут поличиться путём применения формантовых синтезаторов в системах передачи с ограниченной полосой передаваемых частот.

J. KACPROWSKI

THEORETICAL FUNDAMENTALS OF POLISH VOWELS SYNTHESIS BY MEANS OF RESONANT FORMANT SYNTHESIZERS [1)]

Summary

It seems, that the speech compression systems based on formant coding methods may be quite feasable from engineering point of view. The aim of this paper is to summarise the most important theoretical fundamentals of vowel synthesis by means of "terminal—analog" speech synthesizers.

The simplified anatomic model of the human vocal tract is given in the form of an electrical equivalent circuit emploing simple uncoupled resonant circuits, whose transfer function $H(s)$ is similar to that of the human vocal tract by production of vowel sounds. The transfer function $H(s)$ has an infinit series of complex conjugate poles s_i, $s_i^* = \sigma_i \pm j\omega_i$ which correspond to the natural resonance

[1)] This paper was written during the temporary stay of the author at the Research Laboratory of Electronics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass. and at the Communication Sciences Laboratory, University of Michigan, Ann Arbor, Michigan.

frequencies of the vocal tract and describe the formant frequencies and formant band-widths of the vowel to be synthesized.

The methods of approximating the function $H(s)$ by means of simple equivalent circuits having a finite number of complex conjugated poles are discussed. It is shown that such an equivalent circuit, the so-called "terminal-analog" speech synthesizer, may be built up either by cascade or parallel connection of simple, electronically tuned resonators; both systems have been compared and it is shown, that the cascade synthesizers give better results as far as the synthesis of vowel sounds is being considered.

Following in the similar manner, the source function $U(s)$ having the properties of glottal source as well as the radiation function $Z_p(s)$ simulating the radiation characteristics of the human mouth by means of electrical equivalent circuits have been discussed.

The special case of approximating the source function by means of repetitive triangle pulses has been discussed in detail.

The complete mathematical expression for the soundpressure wave $P(s) = U(s) \cdot H(s) \cdot Z_p(s)$ corresponding to the vowel sounds has been derived; in this connection some technical suggestions concerning the design of lumped-constant resonant formant synthesizer for vowel production have been given.

In the last chapter of the paper an attampt is made to compute the gain in speech frequency band-width and channel capacity, when using the resonant formant synthesizers in speech transmission systems.

J. KACPROWSKI

BASES THÉORIQUES DE LA SYNTHÈSE DES VOCALES POLONAISES DANS LES SYNTHÉSATEURS À RÉSONANCE DE FORMANTES

Resumé

Le travail contient la discussion théorique des bases du procédé de la synthèse des vocales dans les synthésateurs de formantes, l'application desquelles dans des systèmes de transmission à la bande de fréquence limitée paraît à présent réel.

Une discussion préliminaire a été exécutée du gain, qui peut être obtenu au point de vue d'économique de transmission des informations par les systèmes à bande de fréquence limitée.

J. KACPROWSKI

THEORETISCHE GRUNDLAGEN DER SYNTHESE DER POLNISCHEN VOKALE MIT HILFE DER RESONANZ-SYNTHESATOREN DER FORMANTEN

Zusammenfassung

Das vereinfachte anatomische Modell des natürlichen menschlichen Sprachorgans beim Aussprechen der polnischen Vokale wurde in der Form einer elektrischen Ersatzschaltung dargestellt. Es wurde gezeigt, dass die konjugierten imaginären Pole s_i, $s_i^* = \sigma_i + j\omega_i$ der Übertragungsfunktion $H(s)$ dieser Ersatzschaltung und die Dislokation der Pole in der komplexen Frequenzebene $s = \sigma + j\omega$ den Eigen-

werten der natürlichen Resonanzfrequenzen des Sprachorgans entsprechen und nicht nur die Formantfrequenzen, sondern auch die Formantbandbreiten des betrachteten Vokals beschreiben.

Die Funktion $U(s)$ der natürlichen menschlichen Larynx-Quelle und die Strahlungsfunktion $Z_p(s)$ der menschlichen Mundöffnung wurden in der analytischen Form dargestellt. Der allgemeine vollständige mathematische Ausdruck für die Schalldruckwelle $P(s) = U(s) \cdot H(s) \cdot Z_p(s)$ des beliebigen Vokals wurde ausgeführt. Es wurde gezeigt, auf welche Weise die Funktion $P(s)$ mit Hilfe einiger einfacher parallel- oder kettenweise verbundener Resonanzkreise mit räumlich zusammengesetzten Konstanten *RLCG* approximativ nachgebildet werden kann.

Es wurde versucht den Gewinn in der Frequenzbandbreite und in der Informationskapazität der Fernmeldekanäle im Falle der Anwendung der obenerwähnten Systeme der Sprachsynthese in fernmeldetechnischen Anlagen zu berechnen.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM VIII · ZESZYT 2

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1962

RADA REDAKCYJNA

PROF. JANUSZ GROSZKOWSKI, PROF. JANUSZ LECH JAKUBOWSKI,
PROF. BOLESŁAW KONORSKI, PROF. IGNACY MALECKI
PROF. PAWEŁ NOWACKI, PROF. PAWEŁ SZULKIN

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor Naczelny
PROF. WITOLD NOWICKI

Sekretarz
JULIUSZ MIERZEJEWSKI

ADRES REDAKCJI

Warszawa, Politechnika, Plac Jedności Robotniczej 1,
Katedra Teletransmisji Przewodowej, Gmach Mechaniki

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
Warszawa, Miodowa 10

Nakład 670 (523 + 147)	Oddano do składania 1.III.1962
Ark. wyd. 9,25, ark. druk. 8,25 + wkładka	Podpisano do druku w czerwcu 1962
Papier druk. sat. kl. III, 80 g, 70 × 100	Druk ukończono w czerwcu 1962
Zamówienie nr 408/62	Cena zł 25.— H-47

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

621.313—181.4:621.317.08

JERZY OWCZAREK

Badania maszyn miniaturowych

Rękopis dostarczono 17.7.1961 r.

W artykule zestawiono metody pomiarów częstotliwości, prędkości obrotowej, napięcia, prądu, mocy elektrycznej i mechanicznej, zebrane lub opracowane oryginalnie przez autora pod kątem przydatności do specyfiki badań maszyn miniaturowych. Podzielono je na ruchowe i badawcze. Jako podstawę przyjęto założenie, że pomiary ruchowe powinny charakteryzować się prostotą i nieco mniejszą dokładnością, zaś badawcze mogą być bardziej skomplikowane i wymagać droższej aparatury, jednak uzyskiwane dokładności pomiaru nie mogą być mniejsze niż w klasie 0,2.

1. SPECYFIKA BADAŃ

Wyniki obliczeń w przypadku maszyn miniaturowych są z reguły obarczone większym błędem względnym niż w przypadku maszyn normalnych. Spowodowane to jest większym wpływem koniecznych założeń upraszczających, stosowanych podczas przeliczeń, i wpływem przyczyn technologicznych. Obydwa te czynniki, których wielkość wpływu może być pominięta wobec mocy większych maszyn, w przypadku maszyn miniaturowych powodują znaczne rozbieżności charakterystyk obliczeniowych i rzeczywistych. Do ustalenia przydatności danego typu lub egzemplarza maszyny miniaturowej do stawianych jej wymagań lub określenia charakterystyk układu, w którym ona będzie pracowała, niezbędna jest dokładna znajomość jej rzeczywistych parametrów i charakterystyk. Dlatego badania, jako jedyna droga ich określenia w przypadku maszyn miniaturowych, odgrywają znacznie ważniejszą rolę, niż w przypadku maszyn normalnych.

Rozwój produkcji maszyn miniaturowych, podyktowany rosnącym zapotrzebowaniem na nie ze strony automatyki i przemysłu, wyprzedził rozwój metod przystosowanych do ich badania.

Miniaturowe maszyny elektryczne nie mogą być na ogół badane przy użyciu normalnie stosowanych metod pomiarowych, gdyż w większości przypadków moce pobierane przez układ pomiarowy są współmierne z mocą badanej maszyny, co zmienia zasadniczo warunki jej pracy. Szczególnie wyraźnie widać to na przykład w przypadkach pomiarów mocy lub obrotów.

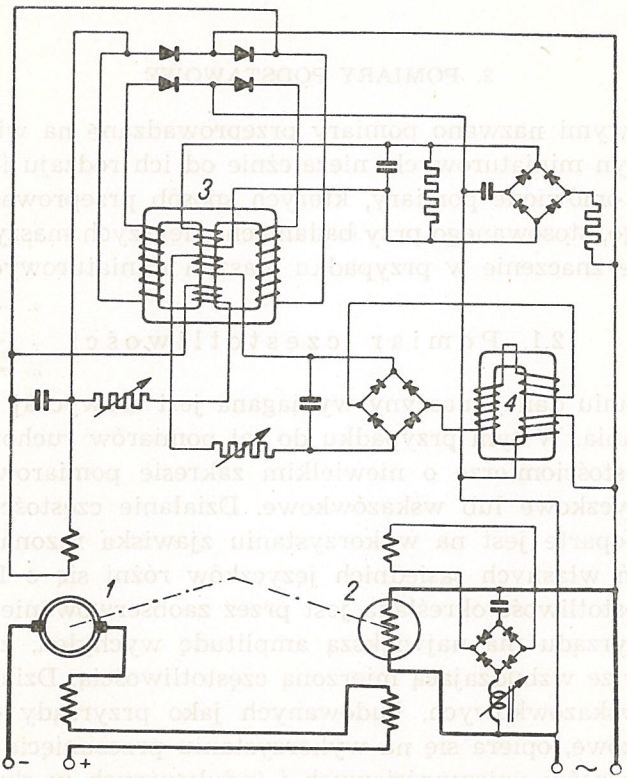
Staje się więc niezbędne wytypowanie lub opracowanie metod pomiarowych przydatnych do stosowania w przypadku maszyn miniaturowych. Wszystkie te metody ze względu na stawiane im wymagania można podzielić na dwie podstawowe grupy. Pomiary ruchowe, stosowane w warunkach odbioru i eksploatacji maszyn mogą mieć mniejszą, w rozsądnych granicach, dokładność, ale powinny być możliwie najprostsze w zastosowaniu. Pomiary badawcze mogą być nieco bardziej skomplikowane lub wymagać zastosowania droższej aparatury, ale powinny zapewniać uzyskanie wystarczająco dokładnych wyników pomiarów poszczególnych parametrów wykonanych maszyn miniaturowych. Takie wyniki mogą nie tylko precyzyjnie scharakteryzować daną maszynę, lecz również stanowić kryterium oceny przydatności i dokładności zastosowanej metody obliczenia lub poszczególnych jej wzorów, co jest szczególnie cenne w przypadku maszyn miniaturowych, wymagających zawsze stosowania empirycznych współczynników korekcyjnych.

Miniaturowe maszyny elektryczne są wykonywane do pracy przy różnych częstotliwościach zasilania. Powinno to być również uwzględnione przy typowaniu lub opracowywaniu niektórych metod pomiarowych, o ile mają być one do pewnego stopnia uniwersalnymi dla rozpatrywanego rodzaju maszyn. Najczęściej spotykane jest w praktyce zasilanie albo prądem stałym, albo o częstotliwościach 50, 60, 333, 400 i 500 Hz.

Do badania maszyn miniaturowych należy więc przewidzieć zasilacze. W przypadku prądu stałego mogą to być akumulatory, prądnice prądu stałego lub prostowniki. Otrzymywane stałe napięcie nie powinno w miarę możliwości zawierać składowej zmiennej. W przypadku zasilania z akumulatora warunek ten jest spełniony automatycznie, napięcie otrzymywane z prądnicy nie zawiera przeważnie składowej zmiennej, której wielkość przekracza dopuszczalne wartości, natomiast przy zasilaniu z prostownika należy przewidzieć filtry odpowiednie do układu prostownika, ograniczające wartość składowej zmiennej do dopuszczalnej wielkości. W przypadku prądu zmiennego zasilanie jest możliwe z sieci ze specjalnych, ściśle dopasowanych do potrzebnej częstotliwości prądnic lub przetwornic, bądź też z uniwersalnego zespołu przetwornicy częstotliwości napędzanej silnikiem o regulowanej prędkości obrotowej. Do pokrycia całego wspomnianego zakresu częstotliwości wystarczają w praktyce dwa uniwersalne zespoły przetwornic częstotliwości o zakresach $10 \div 100$ Hz oraz $100 \div 600$ Hz. Podczas większości pomiarów wymagana jest stałość założonej częstotliwości zasilania. Z tego względu, szczególnie przy zasilaniu ze źródeł o mocy znamionowej niewiele przekraczającej pobieraną do badań, korzystne jest stosowanie stabilizatorów częstotliwości. Rysunek 1 przedstawia przykładowy układ takiego stabilizatora częstotliwości i napięcia, zbudowanego z wykorzystaniem wzmacniacza magnetycznego dla dwumaszynowej przetwornicy częstotliwości.

Różnorodność dziedzin zastosowania maszyn miniaturowych powoduje konieczność stosowania gęstego szeregu napięć znamionowych. Dla prądu stałego najczęściej spotykane wartości napięć są 12, 24, 27, 30, 50, 110 i 220 V; dla prądu zmiennego — 6, 24, 36, 42, 110, 220 i 380 V.

Do wykonywania badań potrzebne jest napięcie regulowane w granicach od 0 do 1,3 U_n badanej maszyny. Ten warunek określa górną granicę napięcia zasilacza dla danej maszyny. Możliwość regulacji napięcia zapewnia w przypadku prądu stałego potencjometr oporowy lub inny dzielnik napięcia o regulowanym stosunku podziału. W przypadku prądu zmiennego — regulator indukcyjny, transformator lub autotrans-



Rys. 1. Układ do stabilizacji napięcia i częstotliwości przetwornicy

formator, ewentualnie również potencjometr lub dzielnik napięcia. Przy zasilaniu prądem zmiennym należy zwrócić uwagę na to, że sinusoidalna krzywa napięcia zasilającego powinna być możliwie nieodkształcona— zawartość wyższych harmonicznych mniejsza od 5%. Źródła napięcia niewielkiej mocy oraz urządzenia regulacyjne powodują często znacznie większe odkształcenia krzywej napięcia. Staje się wtedy celowe stosowanie filtrów, eliminujących napięcia wyższych harmonicznych, chyba że maszyna jest przewidziana do pracy przy zasilaniu z tego samego źródła, które jest wykorzystywane podczas badania.

Wymieniony zakres napięć znamionowych zarówno dla prądu stałego, jak i zmiennego z praktycznie najwygodniejszą możliwością regulacji mogą pokryć po dwa uniwersalne zasilacze o napięciach regulowanych od 0 do 50 V i od 0 do 300 V.

Przy pomiarach wymagających niezmiennej wartości napięcia korzystne jest stosowanie nieodkształcającego, ewentualnie nawet filtrującego stabilizatora napięcia.

Moc zasilacza powinna wynosić co najmniej podwójną wartość mocy pobieranej przez badaną maszynę. Wobec ograniczonej mocy maszyn miniaturowych warunek ten nie nastręcza w praktyce poważniejszych trudności.

2. POMIARY PODSTAWOWE

Podstawowymi nazwano pomiary przeprowadzane na większości badanych maszyn miniaturowych, niezależnie od ich rodzaju i przeznaczenia. Zostaną omówione pomiary, których sposób przeprowadzenia różni się od znanego, stosowanego przy badaniach większych maszyn, lub które mają większe znaczenie w przypadku maszyn miniaturowych.

2.1. Pomiar częstotliwości

Przy badaniu danej maszyny wymagana jest zazwyczaj stała częstotliwość zasilania. W tym przypadku do jej pomiarów ruchowych można stosować częstościomierze o niewielkim zakresie pomiarowym, jak na przykład językowe lub wskazówkowe. Działanie częstościomierzy językowych oparte jest na wykorzystaniu zjawiska rezonansu. Częstotliwość drgań własnych sąsiednich języczków różni się o 1 lub $^1/_2$ Hz. Mierzona częstotliwość określana jest przez zaobserwowanie, który z języczków przyrządu ma największą amplitudę wychyleń, znajdując się w rezonansie ze wzbudzającą mierzoną częstotliwością. Działanie częstościomierzy wskazówkowych, budowanych jako przyrządy elektrodynamiczne krzyżowe, opiera się na wykorzystaniu przesunięcia napięć przy pomocy elementów pojemnościowych i indukcyjnych w skrzyżowanych cewkach pomiarowych i otrzymywanej dzięki odpowiedniej konstrukcji proporcjonalności wychylenia wskazówki do kwadratu częstotliwości. Dokładność częstościomierzy językowych jest niewielka, wskazówkowych — nieco lepsza.

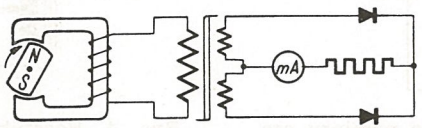
Przy pomiarach ruchowych można również korzystać z przyrządu do pomiaru częstotliwości z elektronowym wskaźnikiem strojenia, „magicznym okiem". Zasada działania tego przyrządu oparta jest na wykorzystaniu metody zerowej pomiaru przy dostrajaniu sygnałowego generatora do wartości mierzonej częstotliwości. Napięcie o badanej częstotliwości i napięcie o wzorcowej częstotliwości otrzymane z generatora zostają

zmieszane, a otrzymane napięcie o częstotliwości różnicowej zostaje doprowadzone do siatki sterującej „oka magicznego". Listki „oka" drgają z tą częstotliwością. Przestrajając generator uzyskuje się zanik drgań listków „oka", co jest wskazaniem, że częstotliwość napięcia generatora została zrównana z mierzoną. Znalezioną wartość częstotliwości odczytuje się na skali generatora sygnałowego. Uchyb pomiaru częstotliwości przy pomocy takiego częstościomierza wynosi $1 \div 1{,}5\%$.

Jeżeli potrzebny jest pomiar znacznych zmian częstotliwości, można stosować wskazówkowe częstościomierze elektroniczne. Zakres pomiarowy tych przyrządów jest bardzo szeroki, ale dokładność pomiarów niewielka: uchyb pomiaru przekracza 5 i więcej procent. Takie częstościomierze mogą być zatem traktowane raczej jako wskaźniki, a nie mierniki.

Osobną grupę stanowią metody pośredniego pomiaru częstotliwości, oparte na pomiarach parametrów proporcjonalnych do niej. Mierzona częstotliwość może być przekształcana na odpowiednie wartości prądu lub napięcia.

Indeowy układ do pomiaru częstotliwości za pośrednictwem pomiaru prądu podany jest na rys. 2. Jako generator mierzonej częstotliwości w układzie jest zastosowana przykładowo prądniczka z trwałym magne-



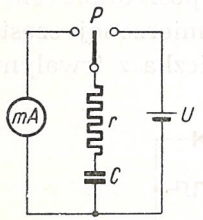
Rys. 2. Układ do pomiaru częstotliwości za pośrednictwem pomiaru prądu

sem. Podstawowymi elementami układu są transformator ze rdzeniem z materiału typu permaloyowego, pracujący na zasadzie dławika nasycanego, prostowniki stykowe i miernik prądu stałego. Konstrukcja transformatora zapewnia transformację przebiegów napięcia o mierzonej częstotliwości na szereg impulsów zmiennego znaku o stałej w przybliżeniu wielkości i zależnej od częstotliwości liczbie w jednostce czasu. Otrzymane impulsy po wyprostowaniu zostają zmierzone przez miernik prądu. Ponieważ wielkość impulsów jest w przybliżeniu stała, więc wskazania miernika są proporcjonalne do ich liczby w jednostce czasu, a tym samym do mierzonej częstotliwości. Przy stosowaniu tej metody uchyb pomiaru nie przekracza 1% przy wahaniach parametrów wejściowych w granicach 20%.

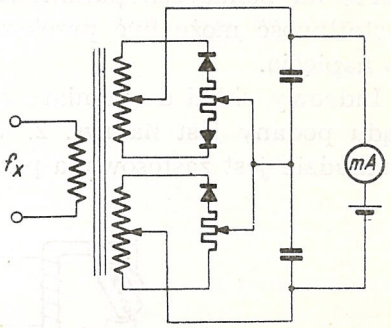
Inny rodzaj przekształtnika częstotliwości pracującego na zasadzie układu Maxwella podany jest na rys. 3. Jeżeli przełącznik p pracuje synchronicznie z mierzoną częstotliwością f_x, to kondensator C kolejno ładuje się ze wzorcowego źródła napięcia stałego U i rozładowuje się

przez miliamperomierz. Wartość średnia prądu mierzonego przezeń jest proporcjonalna do pojemności C, napięcia U i częstotliwości f_x, a ponieważ pierwsze dwa składniki są stałe, zmierzony prąd może być miernikiem częstotliwości f_x. Warunkiem należytego działania przekształtnika jest, aby stała czasu ładowania kondensatora C była 7 do 10-krotnie krótsza od połowy okresu mierzonej częstotliwości. Przy zachowaniu tego warunku uchyb przekształcenia częstotliwości nie przekracza 0,035%, a dokładność układu jest określona klasą zastosowanego miliamperomierza.

Schemat bezstykowego przekształtnika, w którym wyeliminowano element ruchomy, jakim jest przełącznik p na rys. 3 podaje rys. 4. Rolę przełącznika spełniają prostowniki selenowe. Dwa kondensatory podwajają mierzoną wartość prądu. Przy zestawianiu układu należy stosować



Rys. 3. Przekształtnik do pomiaru częstotliwości w układzie Maxwella



Rys. 4. Bezstykowy przekształtnik do pomiaru częstotliwości

wysokostabilne mikowe kondensatory z możliwie małym współczynnikiem temperaturowym. Przy odpowiednim dobraniu elementów przekształtnika uchyb pomiaru może być utrzymany w tych samych granicach, co w poprzednio omówionym rozwiązaniu. Po dłuższej eksploatacji uchyb układu przekształcającego może wzrosnąć do 0,1% stając się współmiernym z uchybem przyrządu; dlatego wskazane jest okresowo korygować przekształtnik przy pomocy generatora wzorcowej częstotliwości.

Zwiększenie dokładności określenia częstotliwości potrzebne czasem przy pomiarach badawczych możliwe jest przy zastosowaniu mostkowej metody pomiaru częstotliwości, metod pomiarowych polegających na porównaniu mierzonej częstotliwości ze wzorcową lub metod licznikowych.

Przy pomocy mostka Robinsona, rys. 5, można mierzyć cały zakres częstotliwości potrzebnych przy badaniu maszyn miniaturowych uzyskując ograniczenie uchybu systematycznego pomiaru do wartości nie większej od 0,1%, pod warunkiem użycia odpowiednio dokładnych oporników

i kondensatorów. Przy zestawieniu mostka należy zachować warunki: $C_1 = C_2 = C$, $R_1 = R_2 = R$, $R_4 = \frac{1}{2} R_3$. Równanie równowagi mostka przyjmie w tym przypadku postać:

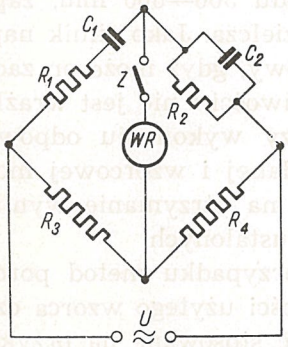
$$\frac{1}{\omega C} - \omega C R^2 = 0. \tag{1}$$

Mostek równoważymy regulując jednocześnie wartość oporności oporników R_1 i R_2, tak aby przez cały czas był zachowany wspomniany warunek $R_1 = R_2$. Po zrównoważeniu mostka można obliczyć częstotliwość ze wzoru

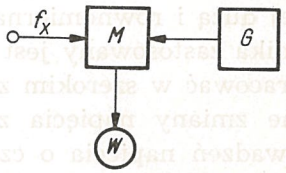
$$f = \frac{1}{2\pi RC}. \tag{2}$$

Metoda mostkowa może być stosowana przy pomiarze wartości częstotliwości niezmiennej w czasie.

Przypadek zastosowania porównawczej metody różnicowej przy pomiarze częstotliwości można rozpatrzyć na przykładzie przyrządu wskazówkowego, którego zasadę działania ilustruje schemat podany na rys. 6. Podstawowymi zespołami przyrządu są: generator wzorcowej częstotliwości G, mieszacz M i przyrząd wskazówkowy W. Napięcie o badanej częstotliwości f_x i napięcie wzorcowe o dużej stabilności częstotliwości z generatora G doprowadzone są do mieszacza M. Tu ich częstotliwości zostają sprowadzone do jednakowego rzędu wielkości za pomocą powielaczy lub dzielników częstotliwości i zmieszane. Z mieszacza i układu odpowiednich filtrów otrzymuje się napięcie o częstotliwości stanowiącej różnicę częstotliwości przekształconych napięć badanego i generatora częstotliwości wzorcowej. Poprzez wzmacniacz mocy zasila ono przyrząd wskazówkowy W, którego budowa pokazana jest na rys. 7.



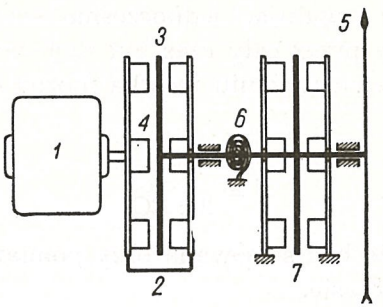
Rys. 5. Układ mostkowy Robinsona do pomiaru częstotliwości



Rys. 6. Układ do pomiaru częstotliwości metodą różnicową

Silnik synchroniczny *1* obraca zespół magnetyczny *2* z prędkością proporcjonalną do częstotliwości napięcia zasilającego. W szczelinie mię-

dzy trwałymi magnesami 3 zespołu umieszczona jest tarcza aluminiowa 4. Przy obrotach zespołu magnetycznego w tarczy indukują się prądy wirowe, wytwarzające wespół z polem wirujących magnesów trwałych moment obrotowy porywający tarczę 4. Na wspólnej z nią osi umieszczone są: tarcza tłumika magnetycznego 7 i wskazówka przyrządu 5. Kąt obrotu osi jest ograniczony sprężynką zwrotną 6. Dzięki takiej konstruk-



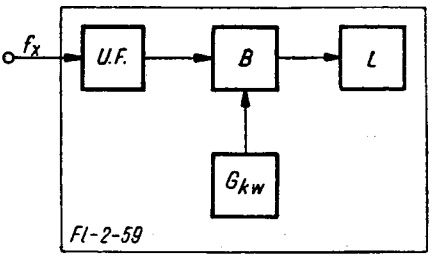
Rys. 7. Budowa wskaźnika częstotliwości różnicowej

cji miernik może mieć podziałkę liniową, obejmującą kąt obrotu wskazówki bliski do 360°, co przy umiarkowanej długości wskazówki pozwala wykorzystać roboczą długość podziałki rzędu 500—800 mm, zapewniającą jej dużą i równomierną zdolność rozdzielczą. Jako silnik napędowy wskaźnika zastosowany jest silnik histerezowy, gdyż może on zadowalająco pracować w szerokim zakresie częstotliwości i nie jest wrażliwy na znaczne zmiany napięcia zasilającego. Przy wykonaniu odpowiednich wyprowadzeń napięcia o częstotliwości badanej i wzorcowej mogą być jednocześnie oscylografowane, co pozwala na otrzymanie wyniku ciągłego pomiaru częstotliwości w stanach nieustalonych.

Dokładność pomiaru częstotliwości w przypadku metod porównawczych zależy przede wszystkim od dokładności użytego wzorca częstotliwości. Jako wzorce częstotliwości mogą być stosowane na przykład generatory elektroniczne ze stabilizowaną częstotliwością, dokładniejsze od nich generatory kamertonowe, których dodatkową zaletą jest niewielka zmienność właściwości wskutek starzenia się, najdokładniejsze generatory kwarcowe, nie podlegające praktycznie starzeniu itp. Częstotliwość wzorcową otrzymywaną z generatora wzorcowego można zwielokrotnić lub podzielić w określonych stosunkach liczbowych bez wprowadzenia dodatkowego uchybu. Przy pomiarach porównawczych częstotliwości niewiele różniących się od częstotliwości wzorcowej otrzymanej z generatora kamertonowego, ewentualnie odpowiednio podzielonej lub powielonej, można otrzymać wynik obarczony uchybem systematycznym rzędu 0,1%, a w przypadku stosowania dokładniejszego generatora kwarcowego — rzędu 0,05%.

Porównawcza metoda pomiaru częstotliwości realizowana przy pomocy przyrządu o omówionym układzie może być stosowana do pomiarów wartości ustalonych i wartości chwilowych częstotliwości oraz do pomiarów ciągłych w stanach nieustalonych, przy zapewnieniu dokładności praktycznie wystarczającej przy wszystkich przypadkach pomiarów badawczych.

Częstotliwość w zakresie potrzebnym przy badaniu maszyn miniaturowych można mierzyć również przy użyciu cyfrowych liczników impulsów. Takie przyrządy pozwalają na określanie liczby okresów badanego przebiegu w jednostce czasu, względnie na określenie czasu trwania znanej liczby okresów badanego przebiegu. Podstawowymi elementami tych przyrządów są generator kwarcowy wzorcowej częstotliwości, układy formujące impulsy wejściowe i wzorcowe, układ bramkowy i elektroniczne liczniki cyfrowe. Zasadę działania omawianego licznika impulsów rozpatrzymy na ideowych schematach blokowych produkowanego obecnie



Rys. 8. Układ połączeń falomierza Fl 2-59 do pomiaru częstotliwości

w kraju falomierza liczącego Fl-2-59, którego układ połączeń do pomiaru częstotliwości — czyli liczby impulsów w określonym odcinku czasu — podano na rys. 8.

Napięcie o mierzonej częstotliwości f_x przekształcone na impulsy w układzie formującym *U.F.* podawane jest na licznik *L* w czasie t_w otwarcia bramki *B*. Otwarcie bramki jest sterowane generatorem kwarcowym G_{kw} spełniającym w tym przypadku rolę wzorca czasu o dużej stałości i dokładności. Licznik wykazuje całkowitą liczbę n przepuszczonych impulsów, stąd mierzona częstotliwość

$$f_{x_{śr}} = \frac{n}{t_w}. \tag{3}$$

Czas pomiaru t_w można obrać równy od 10^{-3} do 10^2 sec. Odczytywany wynik otrzymujemy bezpośrednio w hercach przy uwzględnieniu liczby miejsc dziesiętnych zależnej od obranej wartości t_w.

Cyfrowy licznik elektroniczny nie powoduje uchybów. Uchyb względny wzorca czasu przy stosowaniu generatora kwarcowego wynosi $\frac{\Delta t}{t} = 10^{-5}$. Uchyb bezwzględny powodowany przez układ bramkowy

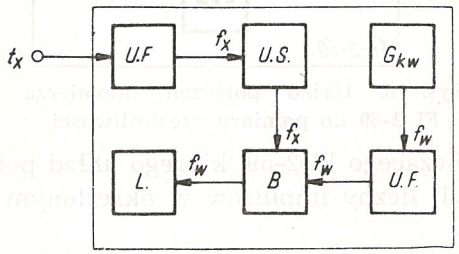
wynikający z zasady jego działania wynosi $\Delta n = \pm 1$. Całkowity procentowy uchyb względny pomiaru częstotliwości $\frac{\Delta f_x}{f_x} \cdot 100\%$ przy uwzględnieniu tych wartości wyniesie

$$\frac{\Delta f_x}{f_x} \cdot 100\ \% = \pm \left(\frac{100}{t_w f_x} + 10^{-3} \right) \%. \tag{4}$$

Z postaci wzoru wynika, że dokładność pomiaru wzrasta ze wzrostem częstotliwości. Dla niższych częstotliwości spotykanych przy zasilaniu miniaturowych silników elektrycznych uzyskanie uchybu mniejszego od 0,1% jest możliwe tylko przy długich czasach pomiaru, co jest oczywiście bardzo niewygodne. Dla tych częstotliwości zwiększenie dokładności pomiaru można uzyskać mierząc czas trwania m okresów badanego przebiegu.

Układ połączeń do pomiaru czasu trwania m okresów badanego przebiegu podano na rys. 9.

Napięcie o mierzonej częstotliwości f_x przekształcone na impulsy w układzie formującym *U.F.* powoduje przy pomocy układu sterującego *U.S.* otwarcie układu bramkowego *B* podczas $m = 1$, 10 lub 100 pełnych okresów. Przez czas otwarcia układ bramkowy przepuszcza impulsy



Rys. 9. Układ połączeń falomierza Fl 2-59 do pomiaru czasu trwania okresu mierzonego napięcia

o znanej częstotliwości f_w otrzymanej z generatora kwarcowego. Całkowita liczba n przepuszczonych impulsów o częstotliwości f_w, która powinna znacznie przewyższać mierzoną częstotliwość f_x, jest zliczana przez licznik *L*. Czas trwania okresu mierzonej częstotliwości jest określony jako:

$$t_x = \frac{n}{m f_w}. \tag{5}$$

Częstotliwość wzorcowa f_w jest tak dobrana, aby cyfrowy wynik odczytywany z licznika miał wymiar czasu. Jednostki pomiarowe $t_w = \frac{1}{f_w}$ wynoszą od 10^{-4} do 10^{-6} sekundy.

Całkowity procentowy uchyb względny pomiaru czasu trwania okresu $\frac{\Delta t_x}{t_x} \cdot 100\%$ przy uwzględnieniu omówionej dokładności poszczególnych elementów falomierza oraz tego, że układ otwierający bramkę na czas m okresów nie daje uchybu, wyrazi się wzorem:

$$\frac{\Delta t_x}{t_x} \cdot 100\ \% = \pm\left(\frac{100\, t_w}{m\, t_x} + 10^{-3}\right)\%. \qquad (6)$$

Mierzoną częstotliwość można w tym przypadku określić jako odwrotność otrzymanej wartości t_x.

Przy określaniu częstotliwości przez pomiar czasu trwania jednego lub 10 jej okresów można przy czasie pomiaru od 1 do 10 μs utrzymać uchyb pomiaru w granicach nie przekraczających 0,006%.

Licznik falomierza Fl-2-59 może być sprzęgnięty z drukarką umożliwiającą automatyczny zapis wyników pomiaru co 0,2 do 5 sekund.

Falomierz Fl-2-59 został rozpatrzony jako przykładowy do wytłumaczenia metody pomiaru dlatego, że jest produkowany w kraju i może być łatwo otrzymany. W zasadzie jednak jest on przeznaczony do pomiaru częstotliwości wyższych od spotykanych przy badaniach maszyn miniaturowych. Dla interesujących nas niższych częstotliwości można zbudować liczniki oparte na tej samej zasadzie działania i zapewniające możliwość uzyskania równie dokładnych wyników bezpośredniego pomiaru częstotliwości. Konstruowane obecnie liczniki tego rodzaju są znacznie mniejsze i lżejsze od Fl-2-59 dzięki możliwości stosowania nowocześniejszych, często miniaturyzowanych rozwiązań poszczególnych elementów przyrządu.

Metoda pomiaru częstotliwości przy pomocy liczników impulsów może być stosowana do pomiaru wartości średnich i chwilowych częstotliwości w stanie ustalonym. Przy automatyzacji zapisu można otrzymywać wyniki pomiaru w odstępach co 0,2 i więcej sekundy, a przy wykonaniu odpowiednich wyprowadzeń i jednoczesnym oscylografowaniu impulsów wzorcowych i mierzonych również w stanach nieustalonych. Ta metoda pomiaru zapewnia najwyższą osiągalną dotychczas dokładność pomiaru częstotliwości.

2.2. Pomiar prędkości obrotowej

Większość stosowanych zazwyczaj metod pomiarów prędkości obrotowej powoduje pewne obciążenie wału badanej maszyny. W przypadku miniaturowych maszyn, jeżeli obciążenie wału miernikiem obrotów jest współmierne z mocą maszyny, występują trudności związane ze zmianą warunków jej pracy przez układ pomiarowy. Prowadzi to do konieczności selekcji metod pomiarowych pod tym względem. W przypadku

badania maszyn miniaturowych zostają więc od razu wyeliminowane wszystkie metody z zastosowaniem mechanicznych obrotomierzy, liczników obrotów i prądniczek tachometrycznych, o dostrzegalnej bezwładności ruchomego układu pomiarowego i tarciu w łożyskach. Pozostają metody powodujące mniejsze obciążenie wału badanej maszyny lub nie powodujące go zupełnie. Są to praktycznie metody częstotliwościowe i stroboskopowe. Obydwie one mogą być stosowane zarówno przy pomiarach ruchowych, jak i badawczych, z tym, że przy tych ostatnich powinny zapewniać wyższą dokładność, co jest osiągane kosztem skomplikowania i podrożenia stosowanej aparatury.

METODY STROBOSKOPOWE

Stroboskopy używane do pomiaru prędkości obrotowej można podzielić na błyskowe — wyposażone w okresowo migające źródło światła, i mechaniczne — wyposażone w wirującą tarczę z otworami, przesłaniającą okresowo okular przyrządu. Przykładowy uproszczony schemat stroboskopu błyskowego z lampą neonową użytą jako źródło światła podany jest na rys. 10, a stroboskopu mechanicznego na rys. 11.

Zasada pomiaru niezależnie od rodzaju użytego stroboskopu polega na dobraniu i pomierzeniu częstotliwości błysków lampy oświetlającej mierzony obiekt lub odsłaniania się otworu okularu, przy której występuje tak zwany efekt stroboskopowy — pozorne zatrzymanie się obserwowanego wirującego elementu. Przy znanej częstotliwości f błysków lub odsłonień okularu na minutę efekt pozornego zatrzymania się obserwowanego wirującego elementu wystąpi dla prędkości obrotowych wyrażonych wzorem:

$$n = k \cdot f_{\frac{1}{\min}} \quad \text{obr/min}, \tag{7}$$

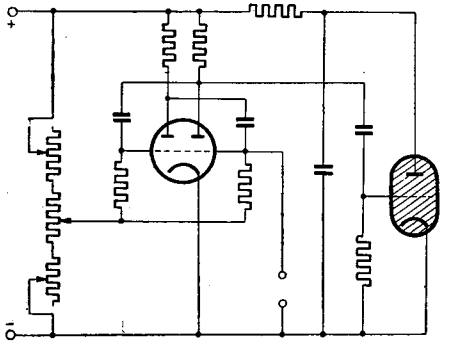
gdzie k = 1, 2, 3, ...

Jeżeli częstotliwość błysków lub odsłonień okularu wyrażona jest w Hz (okresach na sekundę), to wzór przyjmie oczywiście postać

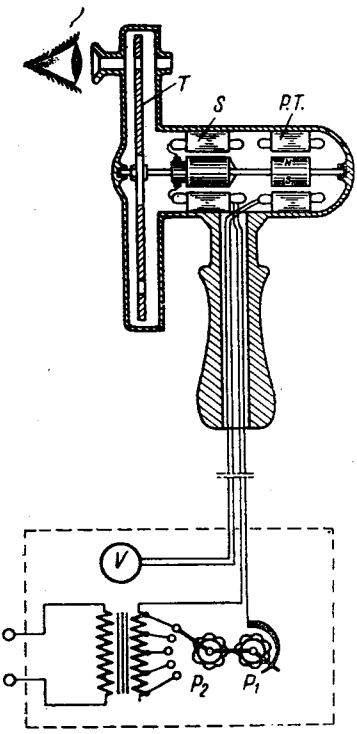
$$n = 60 \cdot k \cdot f_{\text{Hz}} \quad \text{obr/min}. \tag{8}$$

Z budowy wzoru wynika, że pomiar liczby obrotów na minutę za pomocą określenia częstotliwości, przy której występuje efekt stroboskopowy, nie jest jednoznaczny, gdyż pozorne zatrzymanie się wirującego elementu występuje przy kolejnych wielokrotnościach stosunku częstotliwości i obrotów. Dla ułatwienia obserwacji na wirującym elemencie wykonuje się zazwyczaj znak w postaci kreski lub barwnego punktu, który jest obserwowany przy dopasowywaniu częstotliwości stroboskopu.

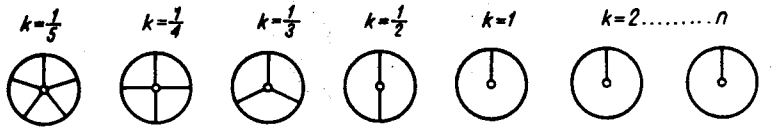
Należy zaznaczyć, że w przypadku gdy f i n spełniają wzór (7) przy k stanowiącym odwrotność liczby całkowitej: $k = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots$, to obserwujemy pozornie unieruchomione zwielokrotnienie znaku na wirującym elemencie o krotności równej mianownikowi ułamka oznaczonego jako k, jak na rys. 12. Przy $k = 1$ mamy właściwy odczyt i widzimy znak pojedynczo. Przy $k = 2, 3, \ldots n$ widzimy znak również pojedynczo i ten właśnie przypadek może najłatwiej spowodować błędne określenie prędkości obrotowej przy stroboskopowym pomiarze. Przy liczbie n obrotów



Rys. 10. Ideowy schemat stroboskopu błyskowego



Rys. 11. Schemat stroboskopu mechanicznego. T — wymienna tarcza z otworami, S — silnik szeregowy, $P.T.$ — prądniczka tachometryczna, P_1 i P_2 — przełączniki do regulacji prędkości obrotowej silnika S, V — woltomierz wyskalowany w obrotach na minutę



Rys. 12. Obraz efektu stroboskopowego przy promieniowej kresce na wale, w zależności od znaczenia współczynnika k

na minutę nieco mniejszej od kf, gdy k jest dowolną liczbą całkowitą lub jej odwrotnością, obserwujemy pozorny obrót jednego z obrazów podanych na rys. 12 z różnicową prędkością w kierunku przeciwnym do rzeczywistych obrotów wirującego elementu, przy nieco większej — w kierunku zgodnym.

Podstawową zaletą pomiarów stroboskopowych wykonywanych zgodnie z opisanym najprostszym postępowaniem jest całkowity brak jakiegokolwiek obciążenia badanego elementu wirującego. Wadami tego postępowania są subiektywność oceny wyniku i niepewność co do jego jednoznaczności.

Wieloznaczność wyniku można wyeliminować za pomocą dwu- lub kilkakrotnej obserwacji pozornego zatrzymania się badanego wirującego ciała przy rozmaitych wybranych częstotliwościach i rozwiązania odpowiedniej liczby równań z tylomaż niewiadomymi. Jeżeli na przykład uwzględnimy dwa kolejne efekty stroboskopowe przy malejącej stopniowo częstotliwości stroboskopu, przy czym $f_1 > f_2$, to właściwą częstotliwość f_x, przy której współczynnik k ze wzorów (7) i (8) będzie równał się 1, będziemy mogli określić z równania:

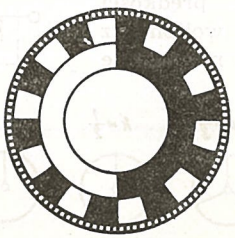
$$f_x = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 - f_2}, \tag{9}$$

przy uwzględnieniu zaś częstotliwości dowolnego efektu f_1 i n — tego kolejnego f_n — ze wzoru

$$f_x = \frac{f_1 \cdot f_n \cdot (n-1)}{f_1 - f_n}. \tag{10}$$

Przy takim postępowaniu trzeba utrzymywać stałe obroty badanego obiektu przez dłuższy czas, potrzebny do przeprowadzenia kolejnych obserwacji, i przeprowadzać kilka pomiarów. Natychmiastowy odczyt wyniku jest niemożliwy.

Następnym sposobem wyeliminowania wieloznaczności jest mocowanie na wale badanej maszyny specjalnych tarcz z nakreślonymi na nich koncentrycznymi przerywanymi pierścieniami o różnej podziałce. Rysu-



Rys. 13. Tarcza o podziałkach 1, 10 i 100 do mocowania na badanym wale przy pomiarach stroboskopowych

nek takiej tarczy o podziałkach 1, 10 i 100 jest pokazany na rys. 13. Przy właściwej częstotliwości błysków wszystkie pierścienie znajdują się jednocześnie w pozornym bezruchu. Trudności występujące przy tym sposobie postępowania to konieczność dokładnie centrycznego mocowania

tarcz na badanym wale i zachowania dostatecznej szerokości poszczególnych, wykreślonych na niej pierścieni, co prowadzi do zwiększenia wymiarów tarczy i, wobec tego, obciążenia badanego wału. Dla uniknięcia tej ostatniej wady można stosować modyfikację postępowania, polegającą na mocowaniu na badanym wale małej tarczki sterującej miganie światła, a tarczy z pierścieniami na pomocniczym silniku synchronicznym o wzorcowej prędkości obrotowej. Wadą tej modyfikacji jest komplikacja układu i wprowadzenie dodatkowego źródła błędów, jakim jest silnik wzorcowy.

W przypadku korygowania stroboskopowych metod pomiarowych celem zapewnienia jednoznaczności otrzymywanego wyniku i obiektywności jego oceny, na wał badanej maszyny musimy nałożyć taką lub inną tarczę. Stanowi ona przeważnie niewielkie obciążenie, które w wielu przypadkach może być uważane za pomijalne. Jednakże w przypadku maszyn szybkoobrotowych o najmniejszych mocach, rzędu ułamków wata, należy oszacować, czy tarcie o powietrze i moment wentylatorowy zastosowanej tarczy nie wprowadzą dodatkowego uchybu pomiaru, który zniweczy zalety korygowania metody przez jej zastosowanie. Dodatkowe obciążenie powodowane przez zastosowaną tarczę można określić mierząc moment jej tarcia o powietrze przy pomocy hamownicy maszynowej (patrz rozdz. 2.5) pracującej jako silnik i przeliczyć pobieraną moc ze wzoru.

$$P = 1{,}027 : 10^{-5}\, M \cdot n \qquad [W]. \tag{11}$$

Dokładność pomiaru otrzymywana przy stosowaniu metod stroboskopowych zależy od omówionej dokładności odczytu i dokładności określenia częstotliwości samego stroboskopu. W stroboskopach błyskowych zmienna częstotliwość migania światła uzyskiwana jest przeważnie przez zastosowanie układów lamp elektronowych, oporników i kondensatorów. Elementy tych układów nie zawsze zachowują stałość właściwości fizycznych w czasie, co powoduje obniżenie klasy dokładności przyrządu i konieczność okresowego, stosunkowo kłopotliwego, skalowania. Praktycznie osiągalna dokładność pomiarów waha się w granicach określonych uchybem od 1 do 3%. Stroboskopy mechaniczne są prostsze w budowie i obsłudze i nie wymagają tak częstego skalowania. Przy ich stosowaniu również trudno uzyskać uchyb pomiaru mniejszy od około 1%. Takie rozwiązania stroboskopów mogą więc być stosowane do pomiarów ruchowych.

Ponadto istnieją również rozwiązania stroboskopów, których częstotliwość własna jest mierzona przez porównanie ze wzorcową otrzymywaną z generatorów kamertonowo-lampowych lub kwarcowych. Pomiary przy ich stosowaniu mogą być prowadzone zgodnie z podanymi wyżej metodami postępowania z zachowaniem ich zalet i wad, a uzyskiwana dokładność wyników określona jest maksymalnym uchybem systema-

tycznym rzędu ± 0,2%. Takie rozwiązania przyrządów stroboskopowych mogą być stosowane do niektórych pomiarów badawczych.

Metody stroboskopowe zarówno przy dokładnościach wymaganych przy pomiarach ruchowych, jak i badawczych nie pozwalają na otrzymywanie wyników pomiaru prędkości obrotowej w stanach nieustalonych.

METODY CZĘSTOTLIWOŚCIOWE

Przy częstotliwościowych metodach pomiaru wał badanej maszyny steruje nadajnikiem częstotliwości. Otrzymana z nadajnika częstotliwość zostaje zmierzona, a na podstawie wyniku oblicza się prędkość obrotową.

Nadajniki częstotliwości można podzielić na wykorzystujące zjawisko zmiany strumienia magnetycznego, przerywania promienia świetlnego i zmiany natężenia odbitego strumienia świetlnego.

Nadajnik częstotliwości ze zmiennym strumieniem magnetycznym składa się z obwodu magnetycznego, w którego polu obraca się wirnik sprzężony z badanym wałem, a skonstruowany tak, że jego obrót powoduje zmianę przewodności na drodze strumienia magnetycznego nadajnika. Zasadę konstrukcji najprostszego nadajnika częstotliwości tego typu podaje rys. 14. Wirnik nadajnika w kształcie elipsy o 2- do 3-krotnej różnicy długości osi osadzony na badanym wale obraca się w kołowym wycięciu zwory, w której uzwojenie prądu stałego wzbudza strumień magnetyczny. Obrót wirnika powoduje zmianę przewodności magnetycznej drogi strumienia. Strumień pulsuje z częstotliwością proporcjonalną do liczby obrotów badanego wału indukując w uzwojeniu wyjściowym zmienną siłę elektromotoryczną. Częstotliwość wyjściowego napięcia f jest mierzona częstościomierzem, a na podstawie otrzymanego wyniku oblicza się obroty badanego wału ze wzoru

$$n = 30 f, \tag{12}$$

gdzie:

n — szukana prędkość obrotowa w obrotach na minutę,

f — zmierzona częstotliwość w hercach.

Częstościomierz może być również wyskalowany bezpośrednio w obrotach na minutę.

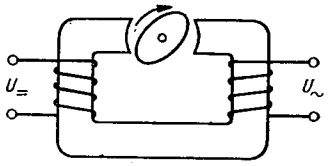
W wielu przypadkach, ze względu na zakresy pomiarowe posiadanych częstościomierzy lub dysponowaną częstotliwość wzorcową stabilizowanego generatora częstotliwości wzorcowej, wygodniej mierzyć częstotliwości wyższe od otrzymanych z nadajnika o omówionej najprostszej konstrukcji. Zwielokrotnienie częstotliwości nadajnika jest możliwe przy wykonaniu uzębienia o jednakowej podziałce na cylindrycznym wirniku i kołowym wycięciu zwory, rys. 15.

Wzór do określania mierzonej liczby obrotów na minutę z otrzymanej częstotliwości nadajnika ma w tym przypadku postać:

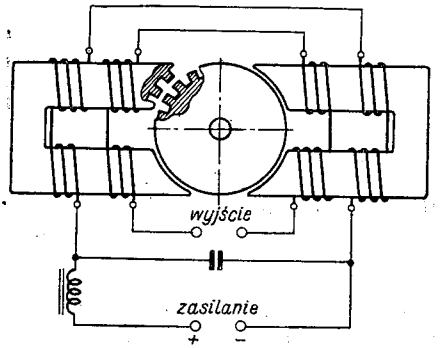
$$n = \frac{60\,f}{z}, \tag{13}$$

gdzie z liczba zębów wyciętych na wirniku.

Jeżeli wirnik ma 60 zębów, wyjściowa częstotliwość w Hz jest równa liczbowo obrotom na minutę napędzającego nadajnik wału.



Rys. 14. Nadajnik częstotliwości o zmiennym strumieniu magnetycznym



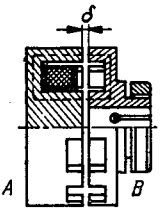
Rys. 15. Nadajnik zwielokrotnionej częstotliwości o zmiennym strumieniu magnetycznym

Rozwiązanie nadajnika z czołowym wirnikiem, pokazane na rys. 16, eliminuje tarcie w łożyskach między stojanem i wirnikiem występujące w nadajnikach omówionych poprzednio, zmniejszając obciążenie badanego wału. Na wale badanej maszyny osadzana jest część B nadajnika stanowiąca jego wirnik. Część A — stojan z uzwojeniami wzbudzenia i wyjściowym — wykonana jako oddzielny element jest dosuwana do wirnika na statywie o wysokości regulowanej w zależności od położenia wału z zachowaniem możliwie centrycznego położenia i szczeliny δ. Nadajnik o wymiarach jak na rysunku wykonanym w skali 1 : 1 pobiera moc rzędu 0,2 mW.

Nadajniki o zmiennym strumieniu magnetycznym powinny być zasilane przez układ filtrujący, na przykład zestawiony z dławika i kondensatora, jak na rys. 15. Dzięki niemu obwód wzbudzenia stanowi dużą oporność dla indukowanych sił elektromotorycznych dużej częstotliwości, wskutek czego wzrasta moc wyjściowa nadajnika i polepsza się kształt krzywej wyjściowego napięcia, który nie różni się praktycznie od sinusoidy o amplitudzie niewiele zmieniającej się ze zmianą częstotliwości. W przypadku gdy przy zmianie prędkości obrotowej badanej maszyny poza zmianą częstotliwości zmienia się również w dostrzegalny sposób napięcie otrzymywane z nadajnika, co może utrudniać pomiar, należy

zastosować wzmacniacz sygnału nadajnika o charakterystyce wzmocnienia zależnej od częstotliwości tak, aby uzyskać możliwie stałą amplitudę mierzonego wzmocnionego napięcia.

Istnieje również grupa przyrządów do pomiaru prędkości obrotowej pracujących na zasadzie wykorzystywania metody częstotliwościowej przy pośrednim pomiarze częstotliwości przekształconej na inne wielkości fizyczne. Na przykład przyrząd zestawiony z nadajnika częstotliwości



Rys. 16. Nadajnik częstotliwości o zmiennym strumieniu magnetycznym z czołowym wirnikiem

o wirniku w postaci magnesu trwałego i miliamperomierza jako miernika przekształconej częstotliwości, którego schemat podany jest na rys. 2. Przy odpowiedniej miniaturyzacji jego elementów obciążenie badanej maszyny nadajnikiem tego przyrządu podczas pomiaru jest rzeczywiście bardzo małe, a sam przyrząd wygodny i łatwo przenośny. Pozwala on na mierzenie prędkości obrotowej z uchybem około 1% przy niezbyt częstym cechowaniu. Inne przyrządy tego typu mogą być zestawiane z rozmaitych nadajników częstotliwości oraz przekształtników pracujących na zasadach omównonych w rozdz. 2.1.

Nadajnik częstotliwości wykorzystujący przerywanie strumienia świetlnego budowany jest w ten sposób, że na wał badanej maszyny nakładana jest tarcza z otworami; po jednej stronie tarczy na promieniu otworów umieszczone jest źródło światła, a po drugiej fotokomórka. W chwilach gdy między źródłem światła a fotokomórką znajduje się otwór tarczy, fotokomórka daje impuls siły elektromotorycznej. Zmierzenie częstotliwości impulsów proporcjonalnej do liczby obrotów na minutę badanego wału przy uwzględnieniu liczby otworów w tarczy pozwala na obliczenie badanej prędkości obrotowej wału ze wzoru (13), jeżeli jako z podstawimy liczbę otworów na obwodzie tarczy. Wykonując liczbę otworów krotną 6 możemy otrzymać wygodną stałą do przeliczania otrzymanej częstotliwości na liczbę obrotów na minutę.

Opisane nadajniki częstotliwości stanowią niewielkie obciążenie wału badanej maszyny, a metoda częstotliwościowego pomiaru prędkości obrotowej pozwala na osiągnięcie dużej dokładności wyników. Z tego względu są one godne polecenia do pewnych granic minimalnej mocy i maksymalnych obrotów. W przypadku najmniejszych maszyn minia-

turowych szybkoobrotowych, to obciążenie wału nie zawsze może być pominięte, zarówno ze względu na tarcie o powietrze i moment wentylatorowy wirnika lub tarczy nadajnika, jak i ze względu na zmianę momentu bezwładności badanego układu ruchomego, co wpływa szczególnie na wyniki pomiarów w stanach nieustalonych. W tych przypadkach wskazane jest stosowanie nadajnika wykorzystującego zmianę natężenia strumienia świetlnego odbitego od badanego elementu wirującego.

Przygotowanie badanej maszyny do pomiaru przy wykorzystaniu takiego nadajnika ogranicza się wyłącznie do zaczernienia części obwodu jej wału lub innego elementu wirującego, przewidzianego do sterowania nadajnika. W ten sposób zostaje spełnione wymaganie całkowitego braku obciążenia badanej maszyny (brak sprzężenia z jakimkolwiek ruchomym elementem pomiarowym).

Nadajnik częstotliwości zawiera fotokomórkę oporową reagującą na natężenie światła odbitego od wirującego elementu oraz żarówkę oświetlającą ten element, zaopatrzone w odpowiednie układy optyczne. Podczas wirowania zaczernienie części wirującego elementu powoduje modulację napięcia w obwodzie fotokomórki z częstotliwością proporcjonalną do liczby jego obrotów, mierzoną przez układ pomiarowy częstościomierza i przeliczaną następnie na szukaną prędkość obrotową.

Dokładność pomiaru prędkości obrotowej zależy od dokładności nadajnika i dokładności miernika częstotliwości. Żaden z omówionych nadajników nie wprowadza bezpośredniego uchybu częstotliwości względem prędkości obrotowej, co jest cechą charakterystyczną częstotliwościowej metody pomiaru. Niektóre z nadajników wprowadzają uchyb pomiaru jedynie pośrednio, przez zmianę warunków pracy badanej maszyny z powodu obciążenia jej własnym momentem oporowym.

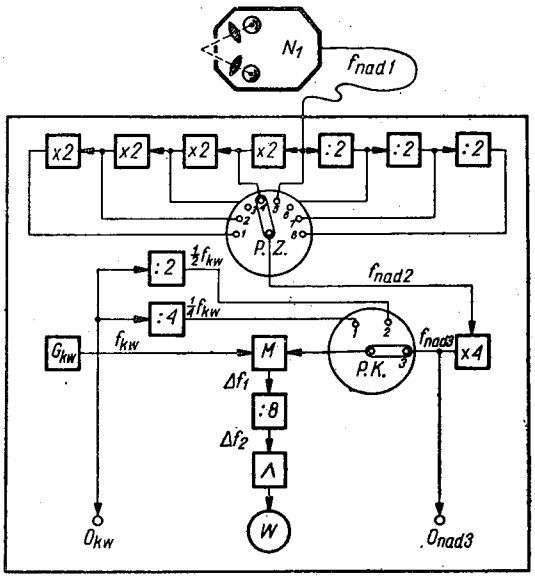
Częstotliwość napięcia otrzymanego z nadajnika jest mierzona metodami omówionymi w rozdz. 2.1. Przy kojarzeniu nadajnika z miernikiem częstotliwości należy uwzględniać dokładność obydwu i zamierzone przeznaczenie pomiaru. Tak dla pomiarów ruchowych stosujemy najprostsze nadajniki ze zmiennym polem magnetycznym lub z przerywanym promieniem świetlnym oraz wskazówkowe lub elektroniczne mierniki częstotliwości, które mogą być wyskalowane w obrotach na minutę dla umożliwienia bezpośredniego odczytu wyniku pomiaru prędkości obrotowej. Znamionowy uchyb systematyczny takich układów pomiarowych zawiera się w granicach $1{,}5 \div 3\%$. Mierzenie częstotliwości przy pomocy przyrządów ze strojonymi generatorami zmiennej częstotliwości wzorcowej i wskaźnikami umożliwiającymi stosowanie metody zerowej pomiaru, jak np. „magiczne oko" lub inny przyrząd zerowy pozwala na osiągnięcie zmniejszenia procentowego uchybu systematycznego do granic $1 \div 1{,}5\%$.

Podniesienie dokładności pomiaru do wartości systematycznych uchybów względnych rzędu $0{,}1 \div 1\%$ jest możliwe przy zastosowaniu

nadajników obciążających badaną maszynę w pomijalnym stopniu i dokładniejszych generatorów o stabilizowanej częstotliwości, np. kamertonowych, i różnicowej metodzie pomiaru częstotliwości przy pomocy przyrządów o układzie podanym na rys. 6.

Z osiągnięciem zmniejszenia uchybu do rzędu 1% dziedzinę pomiarów ruchowych, a jednocześnie dziedzinę stosowania nadajników o zmiennym strumieniu magnetycznym i przerywanym promieniu świetlnym można uważać za wyczerpaną. Do pomiarów badawczych nie należy bowiem stosować nadajników obciążających bodaj w nieznacznej mierze badaną maszynę i mogących przez to wpływać na zwiększenie uchybu pomiaru. Do pomiarów badawczych stosujemy więc z reguły nadajnik z fotokomórką reagującą na światło odbite od wirującego elementu badanej maszyny.

Częstotliwość otrzymanego z nadajnika napięcia może być po odpowiednich przekształceniach porównywana ze wzorcową — z generatora kwarcowego — metodą różnicową, omówioną w rozdz. 2.1. Układ przyrządu pozostaje taki sam jak na rys. 6, z tym, że mierzona częstotliwość otrzymywana jest z nadajnika fotoelektrycznego. Na rys. 17 uwidocznio-



Rys. 17. Schemat przyrządu do różnicowego pomiaru prędkości obrotowej z generatorem na jedną częstotliwość wzorcową

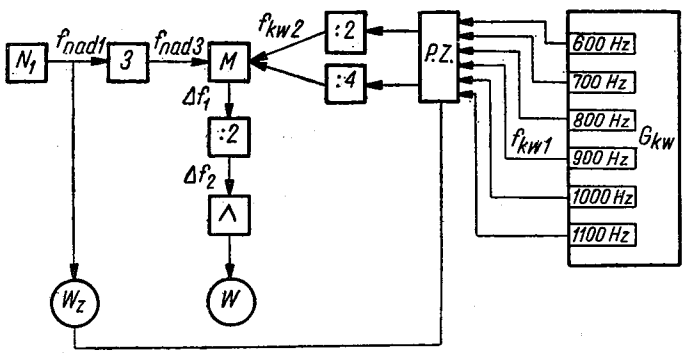
ny jest schemat blokowy przyrządu omawianej konstrukcji przystosowanego do pomiaru prędkości obrotowej w zakresie 125 ÷ 32000 obr/min przy uchybie nie przekraczającym 0,1%. Przyrząd zaopatrzony jest w generator kwarcowy G_{kw} dający częstotliwość wzorcową 500 Hz, dziel-

niki i powielacze napięcia, których krotność podana jest na rysunku, przełącznik zakresów *P.Z.* sprowadzający mierzoną częstotliwość do wąskiego zakresu $33^1/_3 \div 66^2/_3$ Hz i kontrolny *P.K.* umożliwiający samokontrolę przyrządu dwoma częstotliwościami wzorcowymi 125 i 250 Hz i pomiar. Ponadto przyrząd zawiera mieszacz *M*, wzmacniacz >, przyrząd wskazówkowy *W* o konstrukcji podanej na rys. 7 i wyprowadzenia do oscylografowania w czasie pomiarów stanów nieustalonych *O*.

W zależności od zakresu mierzonych obrotów przypadającego na daną częstotliwość wzorcową otrzymywaną z generatora kwarcowego — pomiar prędkości obrotowej można wykonać przy uchybie utrzymanym w granicach $0{,}1 \div 0{,}3\%$. Taka dokładność pomiaru odpowiada wymaganiom stawianym zazwyczaj dokładności stabilizacji prędkości obrotowej silników miniaturowych w układach automatycznej regulacji.

Uchyb pomiaru maleje w miarę zwężania zakresu pomiarowego. Stąd rozpowszechnienie konstrukcji przyrządów tego rodzaju wyposażonych w generatory kwarcowe na kilka częstotliwości wzorcowych.

Przykład schematu blokowego takiego przyrządu z podwójnym wskaźnikiem, dającym wskazanie zgrubne — określające zakres i dokładne — które po dodaniu do zgrubnego pozwala na określenie mierzonej prędkości obrotowej z dużą dokładnością, podany jest na rys. 18. Jego



Rys. 18. Schemat przyrządu do różnicowego pomiaru prędkości obrotowej z generatorem na kilka częstotliwości wzorcowych

zakres pomiarowy $1000 \div 10000$ obr/min, a uchyb $0{,}05 \div 0{,}1\%$ w zależności od zakresu pomiarowego. Dokładniejsze omówienie konstrukcji i zasady działania przyrządów z rys. 17 i 18 można znaleźć w artykule autora [15].

Przyrządy różnicowe konstruowane są z reguły tak, że umożliwiają samokontrolę dokładności wskazań przy wykorzystaniu własnych generatorów częstotliwości wzorcowej i nie wymagają stosowania dodatkowych obcych urządzeń do sprawdzania i skalowania.

Częstotliwościowy pomiar prędkości obrotowej z dużą dokładnością przy wykorzystaniu nadajnika reagującego na zmiany natężenia odbitego strumienia świetlnego może być wykonywany również przy pomocy licznika impulsów, jak na przykład falomierza liczącego Fl-2-59 w układzie z rys. 9. Aby otrzymać wynik pomiaru w obrotach na minutę, trzeba 60 podzielić przez otrzymany wynik cyfrowy czasu trwania okresu wyrażony w sekundach.

Przyrząd wykorzystujący zasadę licznika impulsów skonstruowany specjalnie do pomiaru prędkości obrotowej z zastosowaniem częstotliwości wzorcowej generatora kwarcowego 16666,6·Hz, stanowiącej krotność odwrotności 60, pozwala na odczytywanie cyfrowego wyniku pomiaru prędkości obrotowej wyrażonego w obrotach na minutę. Jego wymiary i koszt są znacznie mniejsze, niż falomierza liczącego Fl-2-59.

Przy pomiarach prędkości obrotowej z wykorzystaniem liczników impulsów możliwe jest określenie pełnego zakresu prędkości spotykanych przy badaniach maszyn miniaturowych. Czasy pomiarów są bardzo krótkie, rzędu czasu trwania jednego obrotu. Otrzymany wynik może więc być uważany za wartość chwilową mierzonej wielkości. Możliwe jest przeprowadzenie pomiarów w stanach nieustalonych. Uchyb pomiaru może być utrzymany w granicach poniżej 0,01%. Możliwa jest również samokontrola przyrządów.

Częstotliwościowe metody pomiaru prędkości obrotowej są na ogół dokładniejsze od stroboskopowych, uzyskiwane wyniki są jednoznaczne i obiektywne, pomiary mogą być wykonywane przy ustalonych i nieustalonych prędkościach obrotowych. Ponieważ ponadto samo przeprowadzenie pomiaru i obsługa przyrządów są również prostsze, więc częstotliwościowe metody pomiaru powinny być zalecane przede wszystkim zarówno do ruchowych, jak i badawczych pomiarów maszyn miniaturowych.

2.3. Pomiary napięcia i prądu

Pomiary ruchowe napięcia i prądu mogą być wykonywane w zasadzie przyrządami klasy 0,5 lub 0,2. Pomiary badawcze — przyrządami co najmniej klasy 0,2.

W przypadku prądu stałego najlepszymi do pomiarów są przyrządy magnetoelektryczne ze względu na minimalny własny pobór mocy. Woltomierze o możliwie dużej i amperomierze o możliwie małej oporności wewnętrznej pozwalają na przeprowadzanie pomiarów prądu i napięcia z dokładnością określoną klasą stosowanych przyrządów, najczęściej bez konieczności uwzględniania poprawek na własny pobór mocy układu pomiarowego. Do pomiarów badawczych można używać tych samych typów przyrządów o klasie 0,2 z ewentualnym uwzględnieniem poprawek

na pobór własny i zmianę rozpływu prądów, spowodowaną układem pomiarowym. Obliczenie tych poprawek przy prądzie stałym jest nadzwyczaj proste. Przy szczególnie dokładnych pomiarach można stosować komepnsacyjną metodę pomiaru. Jej zasada polega na kompensacji mierzonej siły elektromotorycznej lub dokładnie określonej jej części przy pomocy pomocniczej siły elektromotorycznej otrzymanej ze wzorcowego źródła. Pomiar odbywa się całkowicie bez poboru mocy i nie wprowadzą żadnych zniekształceń do badanego obwodu.

Kompensacyjna metoda pomiaru jest najdokładniejsza, ale stosunkowo skomplikowana i wymaga drogiego wyposażenia przyrządowego. Uzyskiwana dokładność pomiaru napięcia i prądu w zależności od zastosowanego kompensatora może osiągnąć klasę 0,05%.

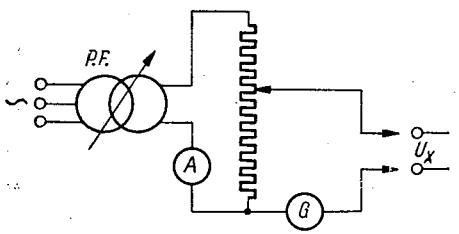
W przypadku prądu zmiennego o częstotliwości przemysłowej lub niewiele różniącej się od niej, do ruchowych pomiarów napięcia i prądu mogą być stosowane przyrządy magnetoelektryczne z prostownikiem, charakteryzujące się również minimalnym własnym poborem mocy. Przy wyższych częstotliwościach lepszą dokładność pomiaru mogą zapewnić przyrządy elektrodynamiczne, ewentualnie przecechowane przy częstotliwości aktualnie mierzonych wielkości. Do praktycznego uniknięcia poboru mocy przez woltomierz stosowane bywają uniwersalne woltomierze lampowe, należy jednak w tym przypadku pamiętać, że uchyb własny takiego miernika niezależnie od wartości podanej na jego skali rzadko jest mniejszy od 3%, chociażby ze względu na zmienność w czasie parametrów oporowych indukcyjnych i pojemnościowych elementów składowych przyrządu (starzenie się). Do pomiarów badawczych przyrządy w klasie 0,2 powinny być przecechowane przy aktualnie potrzebnej częstotliwości, a w wielu przypadkach powinny być również uwzględnione poprawki spowodowane poborem własnym i zmianą rozpływu prądów wprowadzoną przez układ pomiarowy. Przy obliczaniu tych poprawek należy uwzględniać nie tylko czynne, lecz i bierne oporności przyrządów, gdyż ich pominięcie nie pozwoli na wyeliminowanie tzw. uchybu fazowego, który może wyraźnie zniekształcić ostateczny wynik pomiaru. Przy dokładniejszych pomiarach można również przy prądzie zmiennym zastosować kompensacyjną metodę pomiaru. Jednakże w tym przypadku jest ona znacznie bardziej skomplikowana niż przy prądzie stałym i wymaga kilku dodatkowych elementów składowych w układzie kompensatora, przede wszystkim zaś przesuwnika fazowego.

Kompensacyjna metoda pomiaru sprowadza się do wzajemnego zrównoważenia dwu *s.em.* prądu zmiennego. Kompensatory prądu zmiennego, przeznaczone do spełnienia tego zadania, można podzielić na pracujące w biegunowym lub prostokątnym układzie współrzędnych.

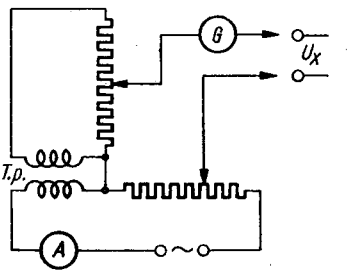
Schemat ideowy kompensatora w układzie współrzędnych biegunowych podany jest na rys. 19. Głównym elementem kompensatora jest przesuwnik fazowy, który może być zasilany trójfazowo jak na rys. 19

lub przy odpowiednio zmienionej konstrukcji — jednofazowo. Napięcie o regulowanym kierunku, otrzymywane z niego, przykłada się do dokładnego bezindukcyjnego opornika. Otrzymany z opornika potencjometrycznie spadek napięcia o odpowiednio nastawionym kierunku, kompensuje mierzone napięcie U_x. Prąd płynący przez opornik, zwany prądem pomocniczym, mierzony jest przy pomocy amperomierza. Osiągnięcie stanu kompensacji wskazuje galwanometr wibracyjny lub przyrząd równoważny. W tym stanie nie jest pobierany prąd z mierzonego układu, pomiar odbywa się więc bez poboru mocy z niego. Jednocześnie, zarówno trój-, jak i jednofazowo zasilane kompensatory pozwalają na uzyskanie dużej dokładności pomiarów i mogą być stosowane w zakresie częstotliwości 15 ÷ 110 Hz.

Schemat ideowy kompensatora w układzie współrzędnych prostokątnych pozwalający na pomiar napięć przesuniętych w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych, co wystarcza przy badaniach maszyn elektrycznych podany jest na rys. 20. Zasada działania tego kompensatora opiera



Rys. 19. Schemat kompensatora zmienno-prądowego w układzie współrzędnych biegunowych

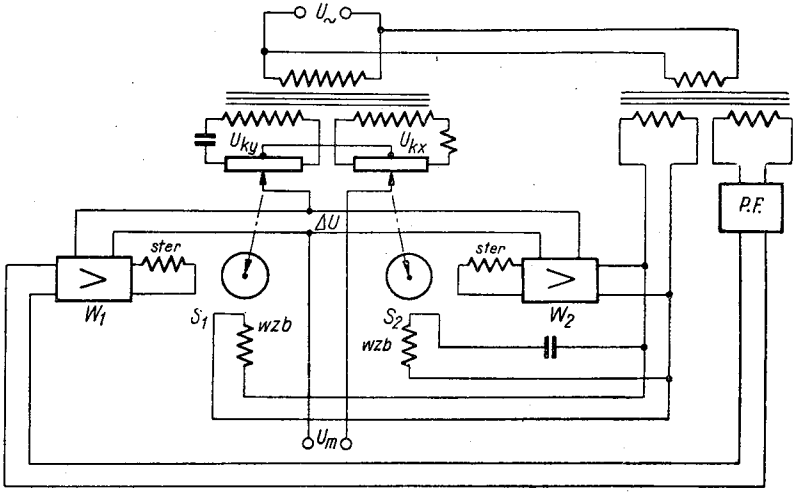


Rys. 20. Schemat kompensatora zmienno-prądowego w układzie współrzędnych prostokątnych

się na wykorzystaniu w charakterze przesuwnika fazowego transformatora powietrznego *T.p.* o stałym przesunięciu faz napięć o 90°. Kompensacja przeprowadzana jest w dwóch obwodach z opornikami potencjometrycznymi, w których siły elektromotoryczne są przesunięte względem siebie o kąt prosty — tworząc prostokątny układ współrzędnych. Za pomocą manipulacji potencjometrami w obwodach obydwu składowych osiąga się bezprądowy stan kompensacji. Z położeń potencjometrów można obliczyć moduł i fazę mierzonego napięcia względem osi układu współrzędnych. Pomiar odbywa się również bez poboru mocy z mierzonego układu i odznacza się dużą dokładnością. Kompensator może być używany w zakresie częstotliwości 15 ÷ 2500 Hz z tym, że dla zmiennej częstotliwości powinien on być zaopatrzony w specjalny opornik dopasowujący.

W kompensatorach pracujących w układzie współrzędnych prostokątnych przesunięcie składowych kompensujących o 90° może być osiąg-

nięte również przez zastosowanie w poszczególnych obwodach elementów pojemnościowych i indukcyjnych. Możliwa jest również automatyzacja pomiaru. Schemat automatycznego kompensatora o takiej budowie podany jest na rys. 21. Jego zasada działania jest następująca. Napięcie kompensujące U_k jest rozkładane na składowe U_{kx} i U_{ky} wzdłuż kierunków prostopadłych osi współrzędnych przy pomocy transformatora, którego obydwa wtórne obwody zawierają dodatkowe elementy indukcyjne lub pojemnościowe. Różnica mierzonego i kompensującego napięcia $\Delta\hat{U} = \hat{U}_m - \hat{U}_k$ podawana jest na dwa fazoczułe wzmacniacze W_1 i W_2, które zasilają odpowiednimi sygnałami uzwojenia sterujące dwufazowych silników wykonawczych S_1 i S_2. Silniki wykonawcze napędzają suwaki



Rys. 21. Schemat automatycznego kompensatora w układzie IV ćwiartek współrzędnych prostokątnych

potencjometrów zmieniających wielkości amplitudy napięć kompensujących $\hat{U}_{kx}$ i $\hat{U}_{ky}$ do chwili zaniku napięcia różnicowego $\Delta\hat{U}$. Mierzone napięcie zrównane z kompensującym może być wtenczas określone co do wielkości i fazy z położenia suwaków potencjometrów i prądu lub napięcia kompensującego.

Ponieważ zarówno silniki, jak i wzmacniacze są elementami fazoczułymi, więc fazoczułość wejściową zespołów wzmacniacz-silnik można określić pewnymi wypadkowymi wektorami $\hat{A}_1$ i $\hat{A}_2$. Silniki wykonawcze będą obracały się przy zgodności składowych napięcia różnicowego $\Delta\hat{U}$ odpowiednio z $\hat{A}_1$ lub $\hat{A}_2$. Dyskusja wpływu przesunięć fazowych α_1 między kierunkami $\hat{A}_1$ i $\hat{U}_{kx}$ oraz α_2 — między $\hat{A}_2$ i $\hat{U}_{ky}$, a więc przypadku, gdy zarówno $\hat{U}_{kx}$, jak i $\hat{U}_{ky}$ uruchamia obydwa silniki wykonawcze wykazuje, że układ może być stabilny przy $\alpha \leqslant 50°$. Czas automatycznej kompensacji, jak wykazały próby, prawie nie zależy od α przy jego zmia-

nach w podanych granicach. Stwierdzono również, że dla należytego działania automatycznego układu wystarcza wielkość kąta między $\hat{A}_1$ i $\hat{A}_2$ większa od 20°.

Ze względu na to, że dokładne pokrywanie się kierunków $\hat{A}$ i $\hat{U}$ oraz prostopadłość $\hat{A}_1$ i $\hat{A}_2$ nie są konieczne, przesuwniki fazowe w obwodach wzmacniaczy i silników mogą być odpowiednio proste i nie wymagać regulacji przy zmianach częstotliwości i amplitudy napięcia zasilającego. Doświadczenie wykazuje, że czas kompensacji przy pomocy omówionego rozwiązania automatycznego kompensatora wynosi kilka sekund, a oscylograficzny wykres drogi kompensacji jest zbliżony do optymalnego prostoliniowego kształtu.

Dokładność metody kompensacyjnej zależy od dokładności pomiaru prądu pomocniczego. Wobec braku wzorcowego źródła napięcia dla prądu zmiennego, w celu osiągnięcia podobnego rzędu dokładności pomiaru co przy kompensatorach prądu stałego, stosuje się przekształcenie kompensatora prądu zmiennego w komparator — przyrząd porównujący pośrednio wartość kompensowanego napięcia zmiennego z dającym się dokładnie wyznaczyć napięciem prądu stałego. Komparatory do dokładnego pomiaru napięć zmiennych są budowane w kraju i importowane. Są to przyrządy o stosunkowo skomplikowanej budowie i wysokiej cenie.

2.4. Pomiar mocy elektrycznej

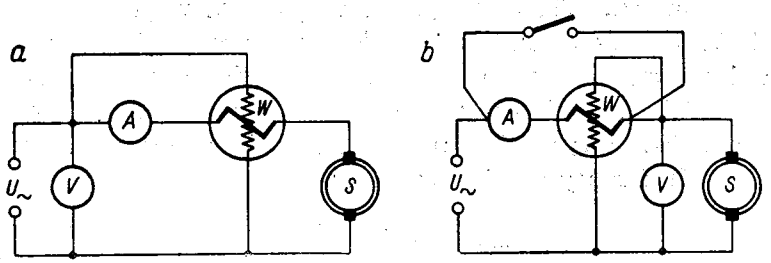
Trudność pomiaru mocy elektrycznej w przypadku maszyn miniaturowych polega na tym, że mierzone moce są współmierne z mocami pobieranymi przez układ przyrządów pomiarowych. Dlatego ten układ powinien spełniać pewne dodatkowe warunki.

W przypadku pomiaru mocy prądu stałego z układu pomiarowego klasycznej metody można wyeliminować watomierz. Jeżeli ponadto jako amperomierza i woltomierza użyje się przyrządów magnetoelektrycznych odpowiednio wysokiej klasy, to w większości przypadków własne zużycie mocy przez układ pomiarowy można będzie pominąć, a ewentualne obliczenie poprawek jest dla tego układu również nadzwyczaj proste. Przy prądzie stałym pomiary mocy elektrycznej do rzędu ułamków wata można w takim układzie przeprowadzać z dokładnością określoną klasą zastosowanych przyrządów.

W przypadku prądu zmiennego trzy przyrządy wchodzące w skład układu klasycznej metody pomiaru mocy można połączyć osiemnastoma sposobami. Przy układzie pomiarowym zestawionym z konwencjonalnych przyrządów, składającym się z obwodów napięciowego i prądowego, podczas jednoczesnego pomiaru napięcia prądu i mocy otrzymujemy uchyb pomiaru w jednym obwodzie wskutek poboru mocy przez drugi obwód. Wielkość własnego poboru mocy nie jest jednakowa dla rozmaitych przy-

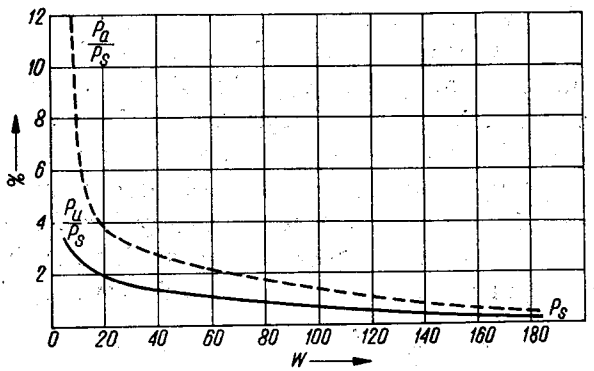
rządów, dlatego dokładność układu będzie zależała od miejsca włączenia poszczególnych mierników. Można zestawić układ pomiarowy o minimalnym własnym poborze mocy, który można pominąć wobec mierzonej mocy, lub jeżeli mierzona moc jest tak mała, że wobec niej nie można pominąć własnego poboru żadnego z obwodów pomiarowych, układ należy zestawić tak, aby można było najwygodniej obliczyć poprawkę.

Ogólnie mniejszym poborem mocy odznaczają się obwody prądowe. W przypadku zestawienia układu o minimalnym własnym poborze powinny one być przyłączane bezpośrednio do zacisków badanego silnika, jak na rys. 22a.



Rys. 22. Klasyczne układy do pomiaru mocy pobranej przez silnik miniaturowy a) o minimalnym poborze własnym, b) o najprostszej poprawce

Granica mocy, poniżej której układ o minimalnym własnym poborze nie powinien być stosowany ze względu na uchyb, powinna być określana dla danego zestawu przyrządów pomiarowych drogą dyskusji ich własnego poboru. Dla przykładu na rys. 23 przytoczony jest wykres stosunku



Rys. 23. Wykres stosunku własnego poboru mocy napięciowych i prądowych obwodów pomiarowych do mocy badanego silnika

własnego poboru mocy obwodów prądowych P_a i napięciowych P_u przeciętnego zestawu przyrządów laboratoryjnych do mocy badanego przy ich użyciu silnika P_s. Jeżeli założymy wymaganą dokładność pomiaru w klasie 1÷1,5, to z wykresu widzimy, że przy stosowaniu omawianego

zestawu przyrządów połączonego w układ o minimalnym własnym poborze możemy mierzyć z tą dokładnością silniki o mocy powyżej 120 W.

Do badania mniejszych silników z tą dokładnością musimy zastosować układ z poprawkami; najwygodniej zestawiać go tak, aby trzeba było obliczać poprawki dla obwodów napięciowych, gdyż ich oporności mogą być przeważnie uważane za czysto czynne, a podczas pomiarów przy stałym napięciu obliczona poprawka jest stała dla wszystkich odczytów.

W ten sposób przy zastosowaniu układu z poprawkami napięciowe układy pomiarowe powinny być przyłączone bezpośrednio do zacisków silnika jak na rys. 22b. Jak wynika z rysunku, napięcie na zaciskach silnika jest mierzone z dokładnością określoną wyłącznie klasą przyrządu, bez uchybu spowodowanego przez układ pomiarowy, natomiast pomierzone wartości prądu i mocy są większe od rzeczywistych o wartości prądu i mocy pobrane przez napięciowe obwody pomiarowe. Rzeczywiste wartości prądu i mocy silnika wynoszą:

$$I_s = I_A - U_s \frac{R_v + R_{vw}}{R_v \cdot R_{vw}}, \tag{14}$$

$$P_s = P_W - U_s^2 \frac{R_v + R_{vw}}{R_v \cdot R_{vw}}. \tag{15}$$

Moc pobieraną przez obwody napięciowe można określić przed pomiarem zasilając układ pomiarowy przy odłączonym silniku, zaś spadek napięcia na obwodzie prądowym można zmierzyć również przy odłączonym silniku na zaciskach zwieracza tego obwodu.

Prąd w napięciowym obwodzie pomiarowym jest praktycznie czynny, wprowadzenie poprawek bez uwzględnienia przesunięcia fazowego prądu silnika o znacznej składowej indukcyjnej może prowadzić do popełnienia dodatkowych błędów. Wyjaśnia to rys. 24, na którym podano wykres wektorowy prądów i napięć układu pomiarowego z poprawkami. Przez i oznaczono sumaryczny prąd napięciowych obwodów pomiarowych, przez U_s i I_s — napięcie i prąd silnika. Z wykresu wynika, że uchyb spowodowany algebraicznym odejmowaniem prądu napięciowych obwodów pomiarowych od prądu pomierzonego amperomierzem wyniesie:

$$I_s - (I_A - i) = CD = CB + BD. \tag{16}$$

Wyrażając CB i BD przez I_s, i oraz funkcje kątów φ i $\Delta\varphi$ po przekształceniach i przyjęciu niezbędnych założeń upraszczających otrzymamy

$$I_s = I_A - k_1 i, \tag{17}$$

gdzie

$$k_1 = \frac{i - CD}{i} = \cos(\varphi - \Delta\varphi) - \frac{i \cdot \cos(\varphi - \Delta\varphi) \sin^2(\varphi - \Delta\varphi)}{2(I_A - i)}. \tag{18}$$

Wartości prądu badanego silnika, przy których należy wprowadzać poprawkę z uwzględnieniem fazy, określa wymagana dokładność pomiaru. Jeżeli uchyb nie powinien przekraczać na przykład 2,5%, to przy prądzie znamionowym badanego silnika I_{szn} powinno być:

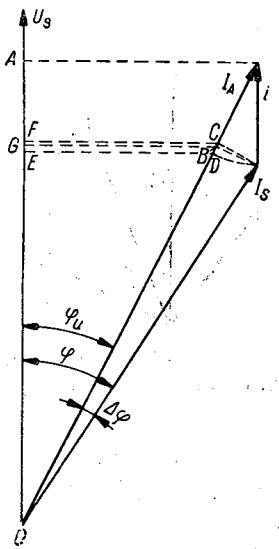
$$\frac{CD}{I_{szn}} \leqslant 0{,}025.$$

Po podstawieniu wartości CD z poprzedniego równania i rozwiązaniu nierówności względem I_{szn} otrzymamy:

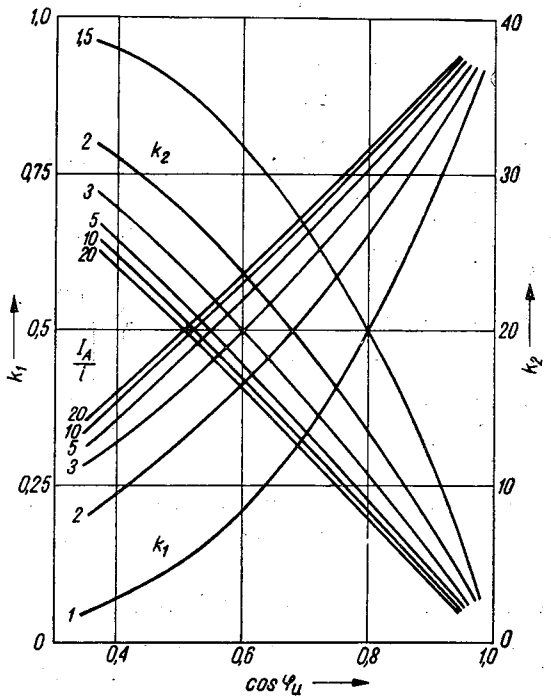
$$I_{szn} \geqslant k_2 i, \tag{19}$$

gdzie $k_2 = 40\ (1 - k_1)$.

Tak więc, jeżeli iloczyn prądu napięciowych obwodów pomiarowych przez współczynnik k_2 jest większy od znamionowego prądu badanego



Rys. 24. Wykres wektorowy prądów i napięć dla geometrycznego obliczania poprawek



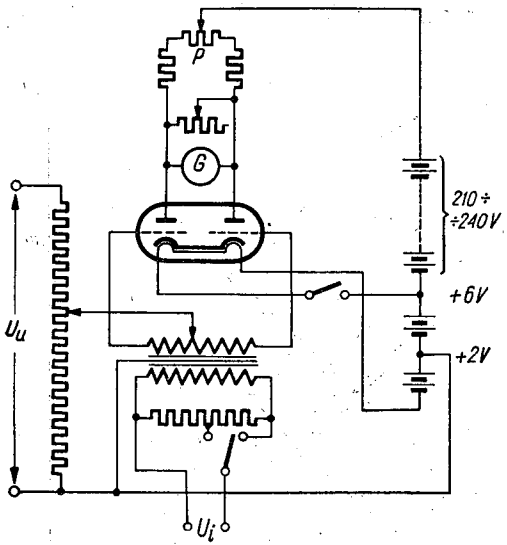
Rys. 25. Wykres współczynników k_1 i k_2

silnika, poprawkę należy wprowadzać z uwzględnieniem fazy. Na rysunku 25 podano wykresy współczynników k_1 i k_2 w funkcji współczynnika mocy dla kilku wartości stosunku $\frac{I_A}{i}$.

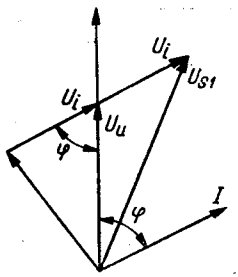
Dla silników o szczególnie małych mocach, mających z reguły niski współczynnik mocy, uchyb określenia prądu I_s, nie patrząc na uwzględ-

nienie fazy przy wprowadzeniu poprawek, będzie przekraczał 1%. Jest to spowodowane przyjęciem założeń upraszczających, koniecznych przy określaniu współczynnika k_1. Można przeliczyć na przykład, że dla silnika o prądzie I_s równym prądowi i układu pomiarowego i współczynniku mocy $\cos\varphi = 0{,}5$ uchyb pomiaru prądu I_s przy uwzględnieniu poprawki fazowej wyniesie 1,4%; bez uwzględnienia przesunięć fazowych ten sam uchyb wyniósłby 26,8%.

Podstawową trudnością występującą przy stosowaniu klasycznej metody pomiaru mocy jest ograniczona produkcja watomierzy konwencjonalnej konstrukcji z obwodami prądowymi na odpowiednio małe prądy, pozwalających na wystarczająco dokładne pomiary przy zmianach $\cos\varphi$



Rys. 26. Schemat watomierza elektronicznego



Rys. 27. Wykres wektorowy napięć w watomierzu z rys. 26

w szerokach granicach, jak to ma miejsce podczas badań silnika w pełnym zakresie jego pracy, od stanu jałowego do zwarcia. Istniejące nieliczne konstrukcje zagraniczne watomierzy pobierają z układu pomiarowego najwięcej mocy.

W celu zmniejszenia własnego poboru mocy stosuje się specjalne konstrukcje watomierzy, jak na przykład elektroniczne.

Przykład rozwiązania układu watomierza elektronicznego do pomiaru mocy w zakresie od ułamków do kilku watów przy zakresie częstotliwości 50÷500 Hz podaje rys. 26. Przyrząd działa na następującej zasadzie. Na siatki podwójnej triody doprowadza się napięcia U_u i U_i proporcjonalne do mierzonych napięcia U i prądu I. Jedno z tych napięć w podanym przypadku U_u doprowadzane jest do obydwu siatek w zgodnej,

a drugie U_i w przeciwnej fazie. Jeżeli wypadkowe napięcia na siatkach oznaczymy przez U_{s1} i U_{s2}, to zgodnie z wykresem wektorowym na rys. 27 możemy napisać:

$$U_{s1}^2 = U_u^2 + U_i^2 + 2\,U_u \cdot U_i \cos\varphi,$$
$$U_{s2}^2 = U_u^2 + U_i^2 - 2\,U_u \cdot U_i \cos\varphi. \tag{21}$$

Ze względu na to, że punkt pracy lampy leży na parabolicznym odcinku charakterystyki, zależność prądu anodowego od napięcia siatek może być z dostateczną dokładnością wyrażona wielomianem trzeciego stopnia względem napięć siatkowych

$$i_{a1} = a_0 + a_1 U_{s1} + a_2 U_{s1}^2 + a_3 U_{s1}^3,$$
$$i_{a2} = a_0 + a_1 U_{s2} + a_2 U_{s2}^2 + a_3 U_{s3}^3. \tag{22}$$

Galwanometr włączono w przekątną układu mostkowego, więc przez galwanometr popłynie prąd stanowiący różnicę składowych stałych prądów anodowych. Ponieważ składniki wielomianu o nieparzystych potęgach nie dają składowych stałych, pozostają składniki

$$a_0, \quad a_2 U_{s1}^2, \quad a_2 U_{s2}^2.$$

Składowa stała prądu a_0 zostaje skompensowana przy pomocy potencjometru P (zerowanie), a różnica

$$i_{a1} - i_{a2} = a_2 U_{s1}^2 - a_2 U_{s2}^2 = a_2\, 4 \cdot U_u \cdot U_i \cos\varphi = kP_{czynna} \tag{23}$$

spowoduje wychylenie wskazówki galwanometru G proporcjonalnie do mierzonej mocy czynnej. W przypadku jeżeli przebiegi U_u i U_i będą niesinusoidalne, przyrząd zmierzy pełną moc czynną wszystkich harmonicznych.

Przed każdym pomiarem watomierz należy skalować przez pomierzenie mocy wydzielonej w oporniku wzorcowym R_{wz}, do którego przyłożono napięcie wzorcowe U_{wz}. Z otrzymanego wychylenia α działek określa się stałą przyrządu wg wzoru

$$k = \frac{U_{wz}^2}{R_{wz} \cdot \alpha} [\mathrm{W/dz}]. \tag{24}$$

Watomierz elektroniczny nie pobiera praktycznie mocy z mierzonego układu, jednak jego własny systematyczny uchyb procentowy wynosi 2÷3% . Nie eliminuje on również konieczności wprowadzania poprawek uwzględniających własne zużycie pozostałych przyrządów układu.

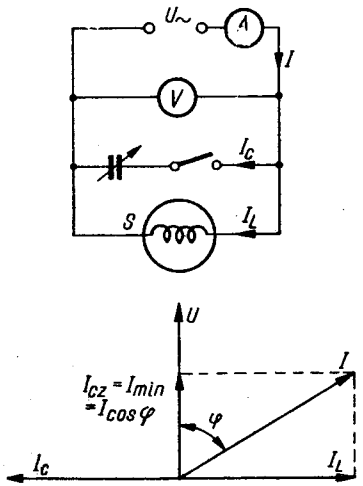
Następną specjalną konstrukcją watomierza do pomiaru małych mocy jest rozwiązanie z ruchomą cewką obwodu prądowego i nieruchomą z posobnikiem – napięciowego — odwrotnie niż w zwykłych rozwiązaniach. Opracowany w Związku Radzieckim przez МЭИ model takiego

watomierza z zakresami prądowymi 100 i 200 mA przy napięciowych 120 i 240 V ma własny pobór mocy przez obwód prądowy odpowiednio 0,34 i 0,17%.

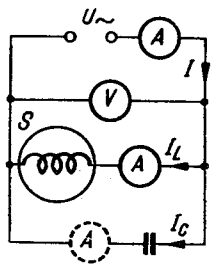
Istnieje szereg sposobów przystosowywania watomierzy o większych mocach znamionowych do pomiarów mniejszych mocy, jednakże wszystkie te sposoby wprowadzają znaczne i trudne do obliczenia uchyby, tak że ich stosowanie nie może być polecane.

Możemy więc stwierdzić, że pomimo znacznego skomplikowania klasycznej metody pomiaru mocy pobranej w przypadku silników miniaturowych, nie udaje się zapewnić zmniejszenia uchybu pomiaru poniżej $\pm 1{,}5 \div 2\%$ nawet przez stosowanie specjalnych układów i mierników.

Metoda pomiaru mocy pobranej przez silnik miniaturowy amperomierzem przy zastosowaniu pomocniczej pojemności opiera się na zasadzie kompensacji indukcyjnej składowej prądu obciążenia za pomocą składowej pojemnościowej wytworzonej przez kondensator. Układ połączeń dla pomiarów tą metodą z kondensatorem o regulowanej pojemności wraz z wykresem wektorowym prądów podany jest na rys. 28. Z wykresu wektorowego układu wynika, że minimalna wartość prądu



Rys. 28. Układ do pomiaru mocy pobranej przy pomocy amperomierza i zmiennej pojemności



Rys. 29. Układ do pomiaru mocy pobranej przy pomocy amperomierzy i stałej pojemności

wskazywanego przez amperomierz przy zmianie pojemności dodatkowego kondensatora odpowiada prądowi czynnemu pobieranemu przez mierzony obiekt. W przypadku zastosowania jednego kondensatora o stałej pojemności układ pomiarowy należy zestawić według rys. 29 i pomierzyć prąd płynący przez maszynę I_L oraz prąd całkowity I. Jeżeli założyć, że zastosowany kondensator może być uważany za idealny (bez strat), to płynący przezeń prąd można obliczyć jako $I_c = U \cdot \omega C$. Można również zmierzyć

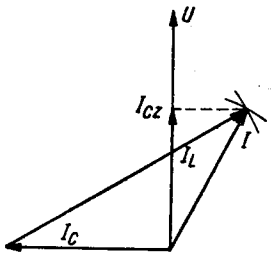
bezpośrednio ten prąd trzecim amperomierzem włączonym w gałąź układu zawierającą stałą pojemność. Składowa czynna prądu I_{cz} płynąca przez badany silnik miniaturowy S może być określona ze wzoru 25 wynikającego z wykreślnej konstrukcji wektorowej podanej na rys. 30, a pobrana przezeń moc obliczona jako iloczyn tej wartości I_{cz} przez napięcie na zaciskach maszyny. Dokładność pomiaru zależy od klasy zastosowanych mierników i dokładności konstrukcji wykreślnej.

$$I_{cz} = \sqrt{I_L^2 - \left(\frac{I_L^2 + I_{cz}^2 - I^2}{2\,I_{cz}}\right)^2}. \tag{25}$$

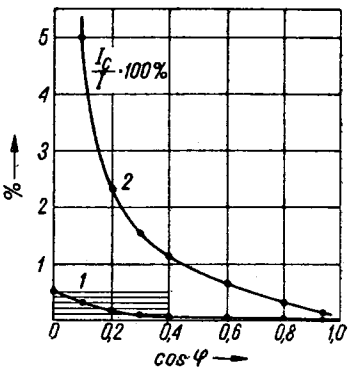
Moc określona przez pomiar przy pomocy dodatkowej pojemności jest większa od rzeczywistej o wielkość strat czynnych w kondensatorze, proporcjonalnych do prądu upływu kondensatora. Stosunek tego prądu do prądu całkowitego I płynącego w układzie pomiarowym zależy od kąta stratności zastosowanego kondensatora $\operatorname{tg}\delta$ i współczynnika mocy badanej maszyny $\cos\varphi$ i może być wyliczony ze wzoru:

$$I_{cstr} = \operatorname{tg}\delta \cdot \operatorname{tg}\varphi \cdot I. \tag{26}$$

Na podstawie wartości $\operatorname{tg}\delta$, która powinna być znana dla zastosowanego kondensatora, można w miarę potrzeby każdorazowo obliczyć poprawkę uchybu wprowadzanego przez upływność kondensatora. Przyjmując przeciętne wartości $\operatorname{tg}\delta$ dla kondensatorów mikowych 0,0003, a dla papierowych 0,005 podano przykładowo na rys. 31 zależność procentowego sto-



Rys. 30. Konstrukcja wykresu wektorowego dla określenia składowej czynnej pobieranego prądu



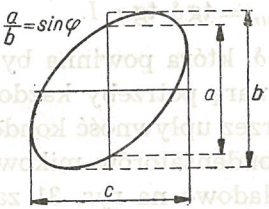
Rys. 31. Orientacyjny wykres poprawki na upływność kondensatorów. Krzywa *1* — mikowych, krzywa *2* — papierowych

sunku prądu strat dielektrycznych kondensatora I_{cstr} do prądu płynącego w układzie I w zależności od współczynnika mocy mierzonej maszyny $\cos\varphi$. Wykres ułatwia zorientowanie się w rzędzie wielkości uchybu,

zależnie od wymienionych parametrów, i w potrzebie obliczania poprawek na stratność kondensatora w poszczególnych konkretnych przypadkach pomiarów.

Dalsze zwiększenie dokładności pomiaru może być osiągnięte przez eliminowanie uchybu układu drogą uwzględniania rozpływu prądów i spadków napięć w zastosowanym schemacie połączeń. Przy stosowaniu omówionej metody pomiaru z dodatkową pojemnością otrzymuje się zazwyczaj wynikowy uchyb pomiaru rzędu jednego do kilku procent w zależności od układu, klasy przyrządów i stopnia uwzględnienia poprawek.

Oscyloskopowa metoda pomiaru stosowana przy badaniach kilkuwatowych silników polega na określaniu pobieranych przez nie mocy przy pomocy figur Lissajou, pozwalających na określenia kąta przesunięcia fazowego φ między napięciem i prądem badanego silnika. Do jednej pary płyt odchyłowych oscyloskopu doprowadzane jest napięcie proporcjonalne do prądu silnika. Otrzymywane jest ono jako spadek napięcia wywołany



Rys. 32. Określenie kąta φ na podstawie figury Lissajou

tym prądem na niewielkim oporniku czynnym włączonym w obwód zasilania. Do drugiej pary płyt odchyłowych doprowadzane jest napięcie panujące na zaciskach silnika lub jego część zdjęta z dzielnika napięcia. Na ekranie oscyloskopu ukazuje się figura Lissajou mająca w ogólnym przypadku — przy sinusoidalnych przebiegach przyłożonych napięć — kształt elipsy. Kąt przesunięcia fazowego między prądem i napięciem można obliczyć z zależności $\sin\varphi = \frac{a}{b}$, gdzie a i b określa się jak na rys. 32. Moc pozorną P_p określa się albo ze wskazań amperomierza i woltomierza w układzie pomiarowym, albo z przeliczenia iloczynu wielkości odcinków b i c przez odpowiednie współczynniki wzmocnienia oscyloskopu i współczynniki proporcjonalności napięć przyłożonych do płyt oscyloskopu do wartości napięcia i prądu silnika. Moc czynną otrzymamy z pomnożenia P_p przez cosinus kąta φ określonego w omówiony poprzednio sposób. Oscyloskopowa metoda pomiaru mocy pobranej jest nadzwyczaj prosta, jednakże może być traktowana jedynie jako dająca orientacyjne wyniki, zarówno ze względu na małą dokładność samego oscyloskopu, jak i odczytu wymiarów osi otrzymanej na ekranie figury

Lissajou. W przypadku jej stosowania należy liczyć się z uchybem pomiaru rzędu kilku, a nawet kilkunastu procent.

Metoda pomiaru mocy pobranej z zastosowaniem wzmacniacza-przesuwnika fazowego ogranicza pobór mocy klasycznego układu amperomierza, woltomierza i watomierza. Wzmacniacz-przesuwnik fazowy jest urządzeniem lampowym umożliwiającym obrót wektora napięcia o 90° i wzmocnienie wartości napięcia w określonym stosunku. Urządzenie ma dużą oporność wejściową przy wyjściu przystosowanym prądowo do obciążania zwykłymi miernikami o stosunkowo dużych poborach mocy własnej i większych zakresach mierzonych parametrów niż potrzebne przy bezpośrednim pomiarze. Dzięki stosowaniu wzmacniacza-przesuwnika fazowego moc pobierana przez przyrządy pomiarowe zostaje dostarczona spoza układu. Poprawki na własne zużycie zostają wyeliminowane, przy jednoczesnym wprowadzeniu uchybów samego przesuwnika, specjalnego przyrządu elektronicznego o skomplikowanej budowie, wymagającego specjalnego źródła zasilania, i stosunkowo kłopotliwego w eksploatacji z powodu potrzeby każdorazowego skalowania przed użyciem kilku jego obwodów pomiarowych. Metoda sprowadza się praktycznie albo do nieco ulepszonej klasycznej, albo — przy odpowiednim postępowaniu pozwalającym na wyeliminowanie watomierza przez odwracanie kierunku napięcia — do dwu kolejnych pomiarów. Uchyb pomiaru przy tej metodzie pomiaru jest również rzędu kilku procent.

Z przytoczonego zestawienia ruchowych metod pomiarowych wynika, że wszystkie one charakteryzują się stosunkowo niewielką dokładnością. Dotyczy to zarówno metod, przy których zużycie mocy przez układ jest znaczne i uwzględniane przez stosowanie poprawek, jak i metod, przy których to zużycie jest pomijalne — gdyż w tych przypadkach omówione urządzenia i przyrządy pomiarowe nie są z kolei dostatecznie dokładne.

Do pomiarów badawczych należy stosować dokładniejsze metody, nie powodujące zupełnie własnego poboru mocy przez układ pomiarowy, a więc kompensacyjne, przy których można otrzymać mierzone napięcia i prądy w postaci geometrycznej, co pozwala na obliczanie mocy. Tak więc wartości przesunięć wektorów określane przy pomocy przesuwników fazowych kompensatorów muszą być w tym przypadku uwzględniane, a dokładność ich określenia wpływa na dokładność pomiaru mocy. Kompensacyjne pomiary mocy pobranej można przeprowadzać stosując obydwa rodzaje kompensatorów omówione w rozdz. 2.3.

Schemat ideowy układu do pomiaru mocy z kompensatorem w układzie współrzędnych biegunowych podany jest na rys. 33.

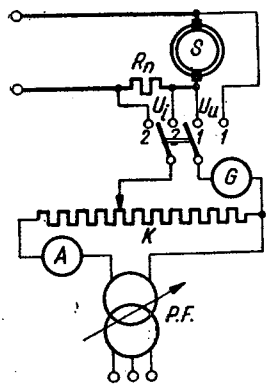
Pomiary polegają na kolejnej kompensacji napięć U_u i U_i. Każdorazowo notowane jest położenie przesuwnika fazowego PF i wartość skompensowanego napięcia przeliczona z wielkości prądu pomocniczego, mierzonego amperomierzem A lub odpowiednim układem komparatora i ze stosunku oporności kompensatora K.

Wartość napięcia na zaciskach silnika U_u jest w ten sposób określona bezpośrednio. Wartość pobieranego przez silnik prądu może być przeliczona ze spadku napięcia U_i na oporniku wzorcowym R_n. Przesunięcie fazowe między napięciem i prądem może być określone z różnicy położeń kątowych przesuwnika fazowego *PF* podczas obydwu pomiarów. W ten sposób zostają wyznaczone wszystkie elementy potrzebne do określenia mocy pobranej przez silnik *S*.

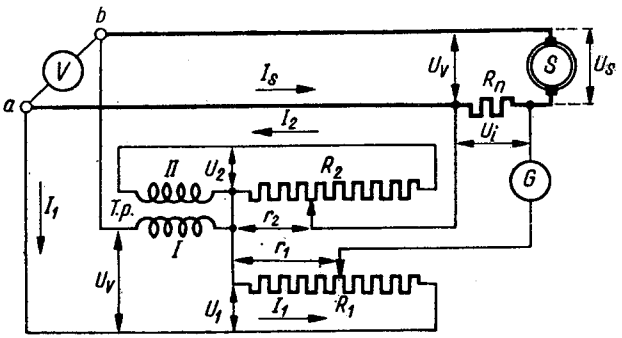
Podana metoda jest bardzo prosta, co jest jej podstawową zaletą. Wadami metody są niejednoczesność pomiaru napięcia i prądu — co zmusza do stosowania stabilizacji napięcia zasilającego, szczególnie trudnej przy zmianach jego wartości koniecznych podczas badania silnika — oraz potrzeba zachowania dużej dokładności wskazań kątowych przesuwnika fazowego — pociągającą za sobą konieczność częstego skomplikowanego skalowania.

Wyniki pomiaru mocy pobranej przez badany silnik miniaturowy mogą więc okazać się obarczonymi uchybem większym od określonego klasą dokładności samego kompensatora, co nie występowało przy pomiarach napięcia lub prądu przy zastosowaniu tego samego kompensatora (patrz rozdz. 2.3).

Specjalny przyrząd do pomiaru mocy pobranej przez silnik miniaturowy z wykorzystaniem kompensatora w układzie współrzędnych prostokątnych, którego schemat ideowy podany jest na rys. 34, eliminuje wady omówionej metody pomiaru z zastosowaniem kompensatora w układzie współrzędnych biegunowych.



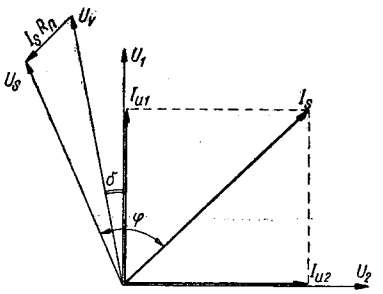
Rys. 33. Schemat układu do pomiaru mocy z kompensatorem w układzie współrzędnych biegunowych



Rys. 34. Schemat układu do pomiaru mocy z kompensatorem w układzie współrzędnych prostokątnych

Pomiary polegają na kompensacji spadku napięcia U_i na bezindukcyjnym i bezpojemnościowym oporniku wzorcowym R_n. Odczytuje się wartości r_1 i r_2 odcięte na opornikach R_1 i R_2 kompensatora oraz wartość

napięcia U_V wskazanego na woltomierzu V. Woltomierz V jest przyłączony do zacisków zasilacza, a więc nie wprowadza zmian do mierzonego układu. Wykres wektorowy napięć i prądów w układzie pomiarowym z rys. 34 przedstawiony jest na rys. 35. Można udowodnić [14], że z odczytanych wartości przy znajomości pewnych stałych charakterystycz-



Rys. 35. Wykres wektorów napięć i prądów w układzie pomiarowym z rys. 34

nych przyrządu — c_1, c_2, $\delta°$ i R_n dadzą się obliczyć napięcie na zaciskach silnika U_s, płynący przezeń prąd I_s i kąt przesunięcia między nimi φ. Obliczenia te wykonuje się przy kolejnym wykorzystaniu następujących wzorów:

$$I_{u1} = c_1 r_1 U_v,$$

$$I_{u2} = c_2 r_2 U_v,$$

$$I_s = \sqrt{I_{u1}^2 + I_{u2}^2}, \tag{27}$$

$$A° = \operatorname{arctg} \frac{I_{u2}}{I_{u1}} + \delta°,$$

$$B° = \operatorname{arctg}\left(\frac{U_v - I_s R_n}{U_v + I_s R_n} \cdot \operatorname{ctg} \frac{A°}{2}\right),$$

$$U_s = U_v \cdot \frac{\sin A°}{\cos\left(B° - \dfrac{A°}{2}\right)}, \tag{28}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{A°}{2} - B°. \tag{29}$$

Znajomość wartości U_s, I_s oraz φ — wzory (27), (28), (29) — określonych bez poboru mocy z mierzonego układu i wprowadzania doń jakichkolwiek zniekształceń — pozwala na określenie wartości mocy pobranej, jej składowych i współczynnika mocy z dokładnością określoną klasą kompensatora i dokładnością przeliczeń.

Konstrukcja przyrządu eliminuje potrzebę pomiaru prądu pomocniczego, nastręczającego jak wspomniano największe trudności w przypadku kompensatorów, ewentualnie komparatorów prądu zmiennego. Pomiar kątów przy stosowaniu metody kompensacji we współrzędnych biegunowych – drugie źródło poważniejszych uchybów — zostaje zastąpiony obliczeniem. Pomiary napięcia i prądu przeprowadzane są jednocześnie. Przy należytym wykonaniu przyrządu częste skalowania kontrolne nie są potrzebne. Wykonanie pomiaru jest jeszcze prostsze niż przy posługiwaniu się kompensatorem w układzie współrzędnych biegunowych, gdyż wymaga o połowę mniejszej liczby czynności (kompensacja jednokrotna zamiast dwukrotnej) i odczytu tylko 3 mierzonych wartości. Napięcie zasilające i współczynnik mocy zmieniają się podczas badań silnika w bardzo szerokich granicach. Niezależność postępowania i uzyskiwanych dokładności pomiarów predestynuje szczególnie omawiany przyrząd do pomiarów badawczych maszyn miniaturowych. Decydującą jego zaletą jest możliwość uzyskania najmniejszego w stosunku do innych metod pomiarowych uchybu systematycznego pomiaru mocy, nie przekraczającego praktycznie 0,1—0,2%.

Pewną niewygodą metody są stosunkowo skomplikowane przeliczenia. Można je jednak wykonywać po ukończeniu pomiarów. Ponadto dla stosowania metody trzeba zaopatrzyć się w specjalny, stosunkowo drogi przyrząd o skomplikowanej budowie. Jednakże dopiero dzięki niemu możliwe jest uzyskiwanie wyników pomiarów najbardziej zbliżonych do rzeczywistości z powodu swej dokładności.

2.5. Pomiar mocy mechanicznej

Określenie mocy mechanicznej odbywa się przez pomiar momentu obrotowego i przeliczenie z otrzymanego wyniku wielkości mocy. Liczbowe zależności mocy oddanej przez silnik P_2 [W] rozwijanego przezeń momentu M [cmG] i prędkości obrotowej n [obr/min] określone są wzorami:

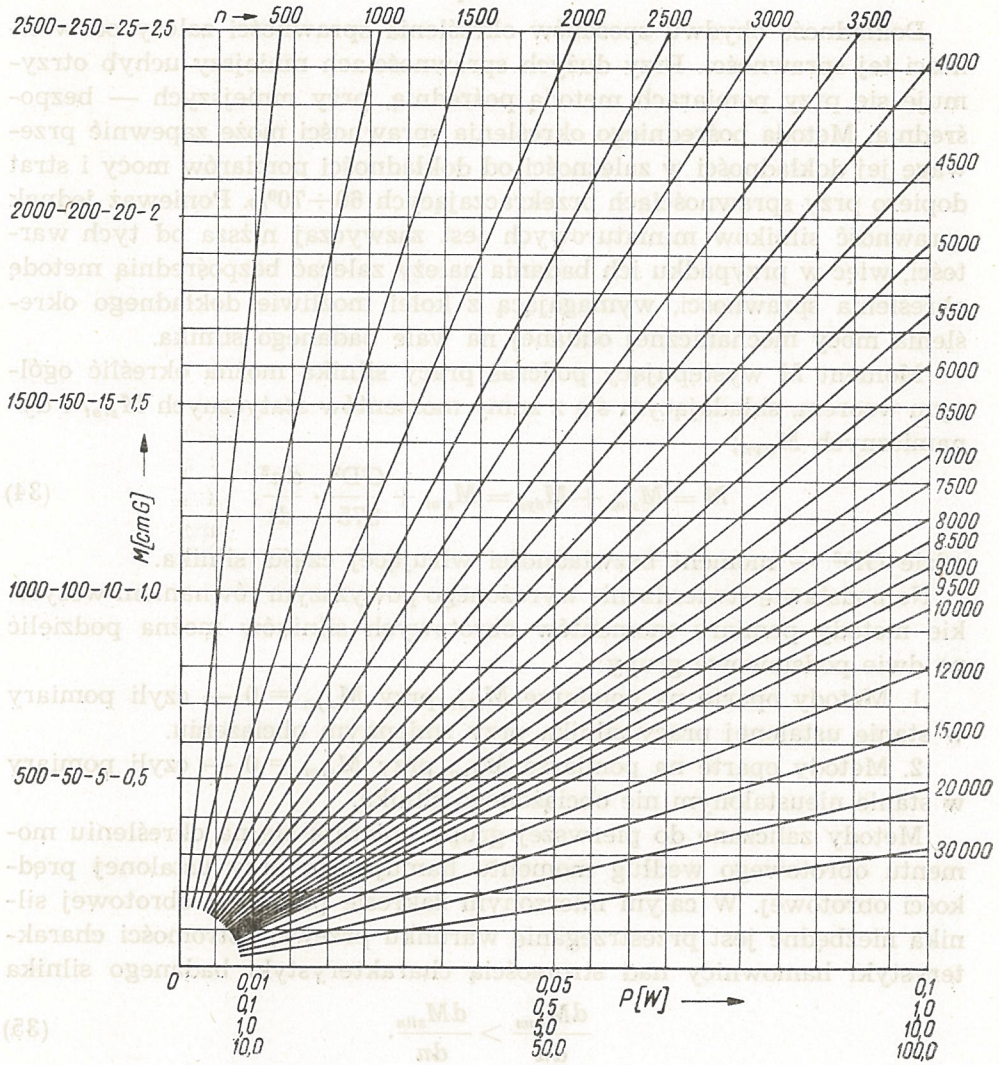
$$P = 1{,}027 \cdot 10^{-5} M \cdot n, \tag{30}$$

$$M = 97300 \frac{P}{n}. \tag{31}$$

Wykres $M = f(P)$ przy $n = \text{const}$ dla mocy od 0,1 do 100 W przy prędkościach obrotowych w granicach 500÷30000 obr/min ułatwiający wzajemną zamianę tych wielkości podany jest na rys. 36.

Znajomość całego przebiegu charakterystyki momentów silnika jest niezbędna zarówno przy projektowaniu, modernizacji i budowie maszyn miniaturowych, jak i przy dobieraniu silnika do wymagań napędzanego urządzenia. Szczególnie ważne jest określenie wartości momentu minimalnego i odpowiadającej mu prędkości obrotowej oraz momentu rozruchowego.

Z pomiarem mocy mechanicznej wiąże się również wyznaczenie sprawności silnika — stosunku mocy oddanej do pobieranej, którą można określać w sposób bezpośredni lub pośredni. Przy bezpośrednim określaniu



Rys. 36. Wykres współzależności mocy i momentu

sprawności mierzymy moc pobraną P_1 i oddaną P_2, a sprawność η obliczamy ze wzoru:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}. \tag{32}$$

Przy pośrednim określaniu sprawności mierzymy moc pobraną i poszczególne straty, obliczamy sumę wszystkich występujących strat $\Sigma\Delta P$, a sprawność η otrzymujemy ze wzoru:

$$\eta = \frac{P_1 - \Sigma\Delta P}{P_1}. \tag{33}$$

Dokładność obydwu sposobów określenia sprawności zależy od wielkości tej sprawności. Przy dużych sprawnościach mniejszy uchyb otrzymuje się przy pomiarach metodą pośrednią, przy mniejszych — bezpośrednią. Metoda pośredniego określenia sprawności może zapewnić przewagę jej dokładności w zależności od dokładności pomiarów mocy i strat dopiero przy sprawnościach przekraczających 60÷70%. Ponieważ jednak sprawność silników miniaturowych jest zazwyczaj niższa od tych wartości, więc w przypadku ich badania należy zalecać bezpośrednią metodę określenia sprawności, wymagającą z kolei możliwie dokładnego określenia mocy mechanicznej oddanej na wale badanego silnika.

Moment M występujący podczas pracy silnika można określić ogólnym wzorem, składającym się z sumy momentów statycznych M_{stat} i dynamicznych M_{dyn};

$$M = M_{stat} + M_{dyn} = M_{stat} + \frac{GD^2}{375} \cdot \frac{dn^2}{dt}, \tag{34}$$

gdzie GD^2 — moment bezwładności wirującej części silnika.

Na podstawie stwierdzenia wyrażonego powyższym równaniem wszystkie metody pomiaru momentów obrotowych silników można podzielić na dwie podstawowe grupy:

1. Metody oparte na pomiarze M_{stat} przy $M_{dyn} = 0$ — czyli pomiary w stanie ustalonej pracy silnika przy zmiennym obciążeniu.

2. Metody oparte na pomiarze M_{dyn} przy $M_{stat} = 0$ — czyli pomiary w stanie nieustalonym nie obciążonego silnika.

Metody zaliczane do pierwszej grupy opierają się na określeniu momentu obrotowego według momentu hamującego przy ustalonej prędkości obrotowej. W całym mierzonym zakresie prędkości obrotowej silnika niezbędne jest przestrzeganie warunku przewagi stromości charakterystyki hamownicy nad stromością charakterystyki badanego silnika

$$\frac{dM_{ham}}{dn} > \frac{dM_{siln}}{dn}. \tag{35}$$

Ten warunek dla całej charakterystyki momentów lub jej części spełniają poszczególne typy hamownic. Przy ich zastosowaniu określenie charakterystyki momentów przeprowadza się na zasadzie znajdowania poszczególnych kolejnych jej punktów. Trudnością występującą przy stosowaniu tych metod jest możliwość nadmiernego nagrzania się silnika, szczególnie w zakresie małych prędkości obrotowych, przy których może występować prąd zbliżony do rozruchowego, a więc zazwyczaj znacznie

większy od znamionowego. To nadmierne nagrzanie się silnika może spowodować nie tylko zniekształcenie rzeczywistego przebiegu krzywej momentu wskutek temperaturowej zmiany oporności jego uzwojeń, lecz nawet niebezpieczeństwo spalenia silnika. Dlatego pomiary momentu należy wykonywać możliwie szybko, co powinna ułatwiać konstrukcja zastosowanej hamownicy.

Metody zaliczane do drugiej grupy opierają się na określeniu momentu obrotowego według przyspieszenia występującego podczas rozruchu nie obciążonego silnika. Przyspieszenie można określać mierząc zmianę naprężeń wywołanych przy rozpędzaniu bezwładnych mas i przekształcając ją na zmianę wielkości elektrycznej, jak pojemność, indukcyjność, przewodność magnetyczna lub bezpośrednio siła elektromotoryczna. Można również określać przyspieszenie drogą pomiaru i następnego różniczkowania prędkości obrotowej. Pomiar prędkości obrotowej powinien być wykonany przy pomocy prądniczki tachometrycznej. W przypadku maszyn miniaturowych prądniczki tachometryczne prądu stałego, najwygodniejsze ze względu na łatwe do późniejszego różniczkowania napięcie wyjściowe, nie mogą być zalecane z powodu tarcia szczotek i zniekształceń pomiaru wprowadzanych przez przebiegi komutacyjne. Dobre wyniki daje natomiast urządzenie zbudowane analogicznie do dwufazowego silnika wykonawczego z wirnikiem kubkowym.

Na stojanie urządzenia umieszczone są dwa uzwojenia przesunięte względem siebie o 90°. Jedno z uzwojeń — wzbudzające — jest zasilane prądem stałym, a do drugiego — pomiarowego — jest przyłączony przyrząd rejestrujący, na przykład oscylograf pętlicowy. Podczas obracania się wirnika kubkowego ze zmienną prędkością obrotową, co ma miejsce przy rozruchu, indukują się w nim siły elektromotoryczne proporcjonalne do prędkości obrotowej:

$$E_1 = cn. \tag{36}$$

Pod wpływem tych sił elektromotorycznych płyną w każdym elemencie wirnika prądy, które sumując się powodują powstanie strumienia magnetycznego Φ_2, zależnego również od prędkości obrotowej. Kierunek tego strumienia pokrywa się z osią uzwojenia pomiarowego. Przy zmianie Φ_2 indukuje się w uzwojeniu pomiarowym siła elektromotoryczna

$$E_2 = -z_2 \frac{d\Phi_2}{dt} = f(t). \tag{37}$$

Krzywa E_2 zostaje zapisana przez oscylograf pętlicowy. Przez odpowiedni dobór parametrów konstrukcyjnych urządzenia [20] — można otrzymać prawie prostoliniową zależność Φ_2 od n, wskutek czego zapisana przez oscylograf krzywa może być wyrażona wzorem:

$$E_2 = c_1 \frac{dn}{dt} = f(t). \tag{38}$$

Jeżeli znamy moment bezwładności badanego silnika GD^2, to zapisaną krzywą można wyskalować w wartościach momentu obrotowego otrzymując zależność

$$M_{dyn} = f(t)$$

zdjętą podczas rozruchu silnika.

Dla polepszenia warunków pomiaru i jego dokładności zaleca się sztywne sprzężenie badanego silnika i urządzenia pomiarowego z dodatkową masą zamachową, przedłużającą czas rozruchu i stosowanie specjalnej konstrukcji galwanometrycznej pętlicy oscylografu. Dla uniknięcia wpływów przebiegów nieustalonych na krzywą $M = f(t)$ oscylografowanie odbywa się przy pracy silnika ze zmianą kierunku wirowania, przy czym dokładnie określa się punkt odpowiadający momentowi rozruchowemu ($n = 0$). Wyznaczenie skali krzywej $M = f(t)$ może być wykonane według momentu rozruchowego zmierzonego przy pomocy dowolnego urządzenia hamującego, umożliwiającego określenie jego wartości liczbowej. Dobór wielkości masy zamachowej i parametrów elektrycznych obwodu rejestrującego powinien zapewnić spełnienie szeregu dodatkowych warunków omówionych w [20].

Poza zapisem krzywej $M_{dyn} = f(t)$ potrzebna jest znajomość zależności $n = f(t)$. Można ją jednocześnie zapisać wykorzystując prądniczkę tachometryczną, najlepiej również o konstrukcji dwufazowej z wirnikiem kubkowym. Uzwojenie wzbudzenia takiej prądnicy zasila się prądem zmiennym o określonej częstotliwości, a na uzwojeniu pomiarowym otrzymuje się siłę elektromotoryczną o tej samej częstotliwości i amplitudzie proporcjonalnej do prędkości obrotowej. Zapis zależności $n = f(t)$ jest wygodniejszy przy wyprostowaniu napięcia otrzymanego na uzwojeniu pomiarowym prądnicy tachometrycznej.

Z zapisanych przy pomocy oscylografu krzywych $M = f(t)$ i $n = f(t)$ można otrzymać krzywą $M_{dyn} = f(n)$, a ponieważ pomiary przeprowadza się przy biegu jałowym silnika, czyli przy $M_{stat} = 0$, więc ta zależność jest jednocześnie szukaną charakterystyką momentu silnika w funkcji obrotów.

Pomiary przy zastosowaniu opisanej metody najwygodniej przeprowadzać przy pomocy urządzenia podobnego do dwufazowego silnika wykonawczego stanowiącego konstrukcyjną całość z dwufazową prądniczką tachometryczną. Przykład układu pomiarowego z urządzeniem o takiej konstrukcji podaje rys. 37.

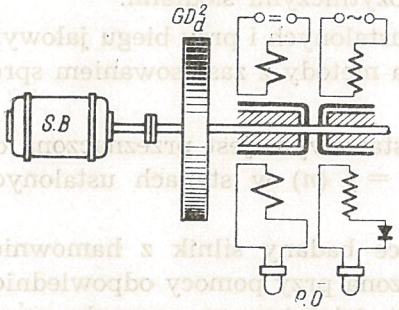
Ze względu na to, że pomiary odbywają się praktycznie przy biegu jałowym badanego silnika, mimo pewnego przedłużenia czasu rozruchu przez dodatkową masę zamachową zostaje wyeliminowane niebezpieczeństwo przegrzania silnika. Jednakże uzyskiwana dokładność przy tej metodzie pomiaru nie jest wysoka. Składają się na to nieścisła prostoliniowość zależności $\Phi_2 = f(n)$, uchyby własne oscylografu pętlicowego,

uchyby przy skalowaniu otrzymanej krzywej i przy przeliczeniu zależności $M = f(t)$ i $n = f(t)$ na zależność $M = f(n)$. Praktycznie trudno uzyskać zmniejszenie uchybu charakterystyki poniżej 3÷5%.

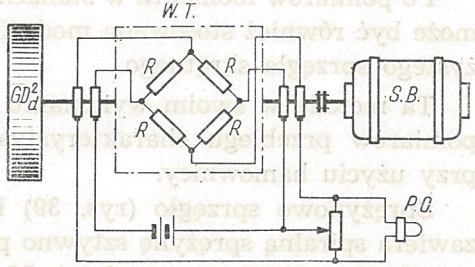
Metoda wymaga stosowania specjalnego wyposażenia i może być zalecana do seryjnych badań ruchowych, gdyż urządzenie musi być każdorazowo zaprojektowane dla określonego pod względem parametrów rodzaju silników.

Aktualnie prowadzone są próby dostosowania do pomiaru momentu maszyn miniaturowych w stanach nieustalonych metody tensometrycznej, znanej i stosowanej dotychczas wyłącznie do większych silników. Możliwość rozpoczęcia takich prób powstała dzięki temu, że przystąpiono do produkcji zminiaturyzowanych wykonań tensometrów o długości bazy 5 mm.

Zasada pomiaru momentu tą metodą polega na przekształceniu przy pomocy tensometru naprężeń sprężystych wału skręcanego przez badany silnik przy rozruchu w napięcia elektryczne rejestrowane przy pomocy oscylografu. Podczas pomiaru dla zwiększenia rejestrowanych naprężeń skręcających, przedłużenia czasu rozruchu, wyeliminowania zakłócającego wpływu elektromagnetycznych przebiegów przejściowych i drgań własnych wirnika, badany silnik poprzez wałek z tensometrami jest sprzęgany z odpowiednio dobieraną dodatkową masą zamachową GD_d^2. Schemat układu pomiarowego metody pokazany jest na rys. 38. Na schemacie uwidoczniono jeden z możliwych układów połączenia tensometrów w postaci mostka równobocznego zasilanego prądem stałym poprzez urządzenie stykowe z pierścieni ślizgowych i szczotek. Przy braku momentu



Rys. 37. Układ do pomiaru momentu przy pracy nieustalonej badanego silnika



Rys. 38. Układ do pomiaru momentu przy pomocy tensometrów

skręcającego napięcie na wyjściowej przekątnej mostka rejestrowane przez pętlicę oscylografu równa się zeru. Przy włączeniu badanego silnika *SB*, wałek z tensometrami *WT* zostaje poddany działaniu momentu skręcającego powodującego rozciąganie i ściskanie przyklejonych do niego tensometrów, umieszczonych w odpowiednio przeciwległych gałęziach

mostka, skierowanych wzdłuż głównych kierunków występowania tych naprężeń.

Tensometry otrzymują odpowiednio przyrosty oporności $+\Delta R$ i $-\Delta R$ proporcjonalne do naprężeń skręcających, co prowadzi do pojawienia się odpowiedniego napięcia na wyjściu mostka, rejestrowanego przez pętlicę oscylografu *PO*. Przy podanym mostkowym układzie tensometrów są całkowicie wyeliminowane wpływy temperaturowe oraz zakłócające naprężenia osiowe, zginające i poprzeczne.

Przy określaniu przebiegu momentu silnika $M = f(t)$ należy pamiętać, że część jego jest zużywana na przyspieszanie masy zamachowej wirnika silnika GD_w^2, a pozostała jest przekazywana masie dodatkowej GD_d^2 poprzez wał tensometryczny. Tylko ta ostatnia część momentu — M_d — jest rejestrowana przez oscylograf. Dlatego w celu określenia całkowitej wartości momentu M otrzymany oscylograficznie wynik powinien być przeliczony z zależności

$$M = \frac{GD_w^2 + GD_d^2}{GD_d^2} M_d. \tag{41}$$

Przy zdejmowaniu charakterystyki momentu w czasie rozruchu opisanym sposobem oscylografuje się jednocześnie przebiegi napięcia prądu i prędkości obrotowej, charakterystykę $M = f(n)$ przelicza się na podstawie pomierzonych danych.

Przy odpowiedniej pracy urządzenia stykowego, decydującej o jakości wyników, metoda tensometryczna pozwala otrzymać stosunkowo dokładny przebieg charakterystyki momentów z uwidocznieniem jej rzeczywistego kształtu wraz z ewentualnymi pasożytniczymi siodłami.

Po pomiarów momentu w stanach nieustalonych i przy biegu jałowym może być również stosowana modyfikacja metody z zastosowaniem sprężystego sprzęgła skrętnego.

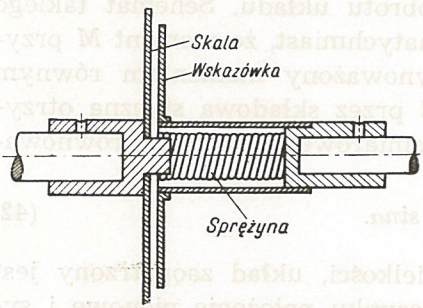
Ta metoda w swoim wykonaniu podstawowym jest przeznaczona do pomiarów przebiegu charakterystyki $M = f(n)$ w stanach ustalonych przy użyciu hamownicy.

Sprężynowe sprzęgło (rys. 39) łączące badany silnik z hamownicą zawiera spiralną sprężynę sztywno połączoną przy pomocy odpowiednich końcówek z obydwoma wałami. Moment działający na sprzęgło powoduje skręcenie sprężyny o pewien proporcjonalny do niego kąt. Dla pomierzenia tego kąta skręcenia obydwa wały zaopatrzone są w tarcze, których sposób umocowania widoczny jest na rysunku. Tarcza umieszczona na wale hamownicy ma na obwodzie równomierną podziałkę, a tarcza umocowana na wale badanego silnika jest wykonana z przezroczystego tworzywa i niesie na sobie wskazówkę uwidoczniającą kąt skręcenia się tarcz względem siebie. Ze względu na to, że obydwie tarcze wirują razem z wałami, odczyt kąta może być wykonany tylko metodą stroboskopową.

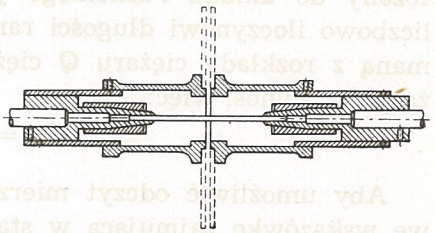
Przerywacz sterujący częstotliwość błysków lampy stroboskopowej najwygodniej jest napędzać bezpośrednio wałem hamownicy.

Przy odpowiednim wykonaniu sprzęgła skrętnego [1] można uzyskać dokładność pomiaru momentu określoną uchybem rzędu 1,5÷2%.

Sprężyna pomiarowa może być zastąpiona drążkiem skrętnym, a odczyt stroboskopowy — fotometrycznym, z ewentualną możliwością bezpośredniego oscylograficznego zapisu krzywej momentu. Taka modyfikacja sprzęgła uwidoczniona jest na rys. 40. Nieprzezroczyste tarcze sprzęgła są zaopatrzone w pokrywające się w czasie spoczynku otwory,



Rys. 39. Sprzęgło sprężynowe



Rys. 40. Sprzęgło z drążkiem skrętnym

które przesuwają się względem siebie pod wpływem mierzonego momentu. Wielkość tego przesunięcia jest mierzona przez określenie zmiany natężenia wiązki światła przechodzącej przez otwory w wirujących tarczach.

Jeżeli przy tej modyfikacji wykonania sprzęgła zamiast hamownicy sprząc z silnikiem masę zamachową w celu przedłużenia czasu jego rozruchu i zastosować zapis oscylograficzny, omawiana metoda będzie mogła być używana do pomiaru momentu w stanie nieustalonym i przy biegu jałowym.

Do bezpośredniego zapisania zależności $M = f(n)$ przy pomocy oscylografu katodowego na jedną parę płyt podaje się napięcie proporcjonalne do fotometrycznie pomierzonego natężenia światła, a na drugą — proporcjonalne do prędkości obrotowej, otrzymane z dodatkowo przyłączonej prądnicy tachometrycznej.

Przy wykonywaniu pomiarów przy pomocy sprzęgła sprężynowego ze względu na jego właściwości charakterystyczne należy stosować postępowanie podane w [1].

Rozpatrzone metody pomiaru momentu w stanie nieustalonym ze względu na dokładność mogą być zaliczone do grupy pomiarów ruchowych. Są one szczególnie wygodne przy badaniach seryjnych maszyn ustalonego typu, a więc w warunkach fabrycznych, tym bardziej, że pozwalają na szybkie uzyskiwanie wyników przy niezbyt skomplikowa-

nej obsłudze urządzeń, nie wymagającej angażowania wysokokwalifikowanego personelu.

Najszersze rozpowszechnienie znalazły metody oparte na pomiarze momentów w stanach ustalonych przy pomocy hamownic rozmaitych typów mimo wspomnianych trudności występujących przy ich stosowaniu. Przy stosowaniu większości hamownic pomiar momentu odbywa się bądź metodą wychyłową, bądź zerową.

Zasada pomiaru momentu metodą wychyłową polega na tym, że mierzony moment powoduje wychylenie układu ruchomego wyważonego statycznie, a następnie zaopatrzonego w ciężarek o znanej masie Q, umieszczony w znanej odległości l od osi obrotu układu. Schemat takiego układu podaje rys. 41. Wynika z niego natychmiast, że moment M przyłożony do układu ruchomego jest równoważony momentem równym liczbowo iloczynowi długości ramienia l przez składową styczną otrzymaną z rozkładu ciężaru Q ciężarka pomiarowego. Moment równoważący M_h wynosi więc:

$$M_h = Q \cdot l \cdot \sin\alpha. \tag{42}$$

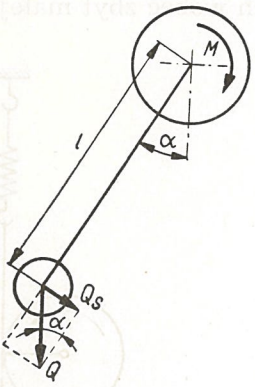
Aby umożliwić odczyt mierzonej wielkości, układ zaopatrzony jest we wskazówkę zajmującą w stanie spoczynku położenie pionowe i symetryczną skalę z zerem pośrodku, naniesioną na nieruchomym wycinku kołowym, umieszczonym nad osią obrotu układu. Podziałka skali może być sinusoidalna lub równomierna. W pierwszym przypadku odczytywane wartości po ewentualnym pomnożeniu przez odpowiednią stałą mogą wyrażać wielkość mierzonego momentu, w drugim — dla określenia momentu trzeba posłużyć się odpowiednią krzywą cechowania.

Zmiana zakresu pomiaru przy wychyłowej metodzie pomiaru jest możliwa zarówno przez zmianę masy ciężarka (ciężarki wymienne lub składane), jak i przez zmianę odległości jego zamocowania od osi obrotu układu. Należy dążyć do takiego stosunku zmian obydwu tych wielkości, przy których stałe przeliczeniowe skal lub krzywych cechowania byłyby wygodne do stosowania — i najlepiej wyrażone liczbami całkowitymi.

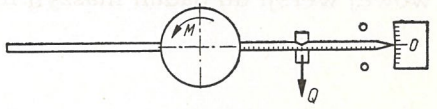
Należy zwrócić specjalną uwagę na to, aby układ wychyłowy po zdjęciu ciężarka pomiarowego był statycznie wyważony i znajdował się w równowadze obojętnej względem swojej osi obrotu.

Zasada pomiaru metodą zerową polega na tym, że na osi, na którą działa mierzony moment, umocowana jest belka wyważona w ten sposób, że przy braku mierzonego momentu ustawia się poziomo, co uwidocznia zgodność umocowanej na niej wskazówki z nieruchomą skalą — jak na rys. 42. Kąt obrotu belki jest ograniczony zderzakami do kilku stopni. Belka jest wyskalowana w jednostkach odległości od osi obrotu, a po tej skali może przesuwać się ciężarek Q. Pomiar momentu odbywa się przy jego zrównoważeniu przez przesuwanie ciężarka do momentu zajęcia przez belkę poziomego położenia, wartość momentu oblicza się jako

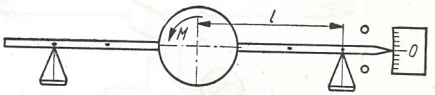
iloczyn ciężaru zastosowanego ciężarka przez jego odległość do osi obrotu belki odczytaną ze skali. Zmiana zakresu pomiaru odbywa się przez zmianę masy przesuwanego ciężarka. Modyfikacją wykonania urządzenia jest zaopatrzenie belki w szalkę do obciążania odważnikami, umieszczoną w określonej odległości od osi obrotu belki (rys. 43). W tym przypadku zmiana zakresu pomiaru może być osiągnięta przez zmianę odległości zamocowania szalki. Również i przy urządzeniu do pomiaru momentu metodą zerową należy skrupulatnie przestrzegać dokładnego wyważenia



Rys. 41. Zasada pomiaru momentu metodą wychyłową



Rys. 42. Zasada pomiaru momentu metodą zerową. Rozwiązanie z przesuwnym ciężarkiem



Rys. 43. Zasada pomiaru momentu metodą zerową. Rozwiązanie z odważnikami

belki bez ciężarka obciążającego. W przypadku modyfikacji z szalką wyważyć należy układ przy każdym z położeń zakresowych szalki, ewentualnie stosować szalkę o określonym ciężarze, uwzględnianym przy przeliczeniu momentu.

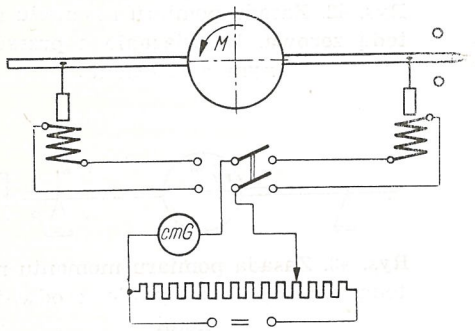
W urządzeniach do pomiaru momentu metodą zerową łożyska kulkowe układu ruchomego mogą być zastąpione pryzmami stalowymi analogicznymi do stosowanych w precyzyjnych wagach analitycznych lub taśmami sprężystymi, na których podwieszana jest belka. Takie rozwiązania łożyskowania eliminują wpływ tarcia występujący normalnie przy stosowaniu łożysk kulkowych.

Obsługa urządzenia do pomiaru momentu metodą zerową jest bardziej kłopotliwa niż urządzenia do jego pomiaru metodą wychyłową, z drugiej strony metoda zerowa może być dokładniejsza, szczególnie przy zastosowaniu beztarciowego łożyskowania. Znaczne uproszczenia obsługi może zapewnić rozwiązanie podane na rys. 44. Zamiast szalek z odważnikami zastosowano tu stalowe rdzenie wciągane przez cewki zasilane prądem stałym, mierzonym przez przyrząd wycechowany bezpośrednio w jednostkach momentu. Cechowanie przyrządu odbywa się przez obciążanie ramienia przeciwległego cechowanej cewce znanym ciężarkiem umieszczonym na znanym ramieniu i zaznaczanie odpowiedniej wartości momentu

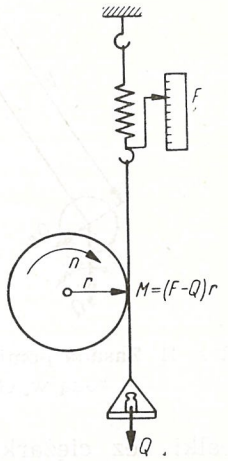
na skali przyrządu według położenia jego wskazówki przy przepływie prądu, potrzebnego dla sprowadzenia ramienia do zerowego położenia równowagi.

Ważnym parametrem każdej hamownicy jest jej czułość — minimalny moment, którego przyłożenie do ruchomego układu hamownicy wywoła dostrzegalne jego odchylenie od poprzedniego położenia równowagi.

Za najprostszą hamownicę można uważać urządzenie przedstawione na rys. 45. Jest to mechaniczny hamulec cierny z wagą sprężynową, stanowiący odmianę hamulca Prony'ego, nie stosowanego w swej podstawowej wersji do badań maszyn miniaturowych wobec zbyt małej czułości



Rys. 44. Zasada pomiaru momentu metodą zerową. Rozwiązanie z elektromagnesami



Rys. 45. Hamulec cierny

i dokładności oraz trudności precyzyjnej regulacji docisku szczęk hamujących. Na wale badanego silnika umieszczone jest koło pasowe owinięte nicią, której górny koniec umocowany jest do wagi sprężynowej, a dolny zakończony szalką, przeznaczoną do obciążania odważnikami. Moment na wale badanego silnika M określa się ze wzoru

$$M = (F - Q)r, \tag{43}$$

gdzie:

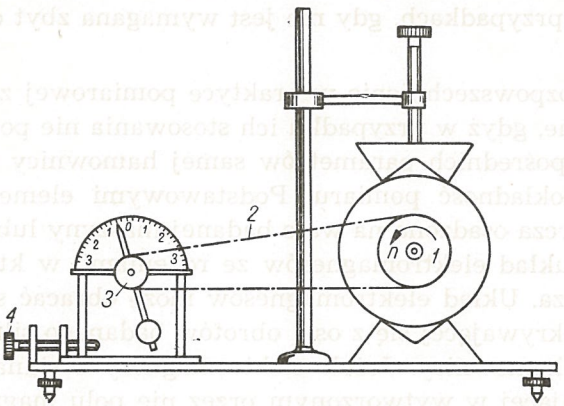
F — wskazanie wagi sprężynowej,

Q — ciężar szalki z odważnikiem,

r — promień kółka pasowego powiększony o połowę grubości nici.

Jedyną zaletą opisanego urządzenia jest jego prostota. Dokładność pomiaru jest jednakże niewielka. Ponadto tego rodzaju hamulec może być stosowany do silników o mocy wyjściowej do około 10 W, gdyż przy większych mocach nieuniknione nagrzewanie się kółka i nici powoduje zmiany współczynnika tarcia między nimi i niestateczną pracę hamownicy.

Następną hamownicą cierną przystosowaną do pomiaru nieco większych momentów jest hamownica taśmowa, której schemat uwidoczniono na rys. 46. Hamownica składa się z układu do pomiaru momentu metodą wychyłową i uchwytu do mocowania badanego silnika. Na wał badanego silnika nakłada się koło pasowe *1* łączone bawełnianą taśmą cierną *2* z kołem pasowym *3* układu do pomiaru momentu. Taśma jest przymocowana do koła *3*, tak że poślizg między nimi jest uniemożliwiony. Naciąg taśmy



Rys. 46. Hamownica taśmowa

reguluje się przez przesuwanie całego układu względem uchwytu silnika przy pomocy śruby naciągowej *4*. Układ pomiarowy wychyla się z położenia równowagi do momentu, gdy siły tarcia między taśmą i kołem pasowym *1* nie zostaną zrównoważone. Wielkość momentu obrotowego silnika określa się z kąta wychylenia układu ruchomego odczytywanego na jego skali.

Zakresy pomiaru można zmieniać przez zmianę odległości zamocowania ciężarka układu pomiarowego od osi jego obrotu i zmianę jego ciężaru jak zwykle przy wychyłowej metodzie pomiaru momentu, a ponadto przez zmianę średnicy koła pasowego *1*. Moment na wale silnika M_s związany jest bowiem z momentem odczytanym z położenia układu pomiarowego M_h zależnością:

$$M_s = M_h \cdot \frac{r_s}{r_h}, \tag{44}$$

gdzie r_s i r_h odpowiednio promienie kół pasowych silnika i urządzenia pomiarowego hamownicy.

Dla polepszenia warunków pomiaru należy przed rozpoczęciem badań tak dobrać zakres pomiarowy hamownicy, aby przy maksymalnym momencie rozwijanym przez badany silnik otrzymać wychylenie układu pomiarowego o kąt możliwie zbliżony do maksymalnego (90°).

Hamownicę taśmową można stosować do badania silników o mocach do około 300 W w szerokim zakresie prędkości obrotowych. Przy badaniach silników o mocach ponad 100 W zaleca się smarowanie trących się powierzchni smarem grafitowym.

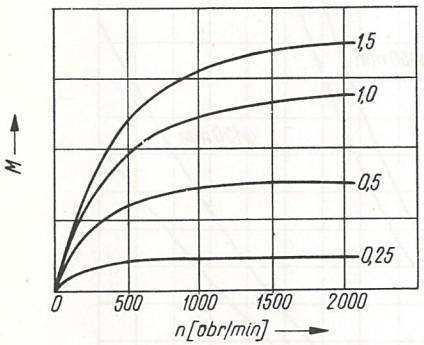
Obydwie opisane hamownice mechaniczne pozwalają na zdejmowanie krzywej momentu w funkcji prędkości obrotowej tylko w statecznym zakresie pracy silnika. Dlatego mogą być one zalecane przede wszystkim do obciążania silników mocą znamionową przy ich badaniach pod obciążeniem i to w przypadkach, gdy nie jest wymagana zbyt duża dokładność pomiaru.

Szerokie rozpowszechnienie w praktyce pomiarowej znalazły hamownice indukcyjne, gdyż w przypadku ich stosowania nie potrzeba uwzględniać żadnych pośrednich parametrów samej hamownicy i łatwo określić uzyskiwaną dokładność pomiaru. Podstawowymi elementami tych hamownic są: tarcza osadzona na wale badanej maszyny lub sztywno sprzężona z nim i układ elektromagnesów ze rdzeniami, w których szczelinie wiruje ta tarcza. Układ elektromagnesów może obracać się o pewien kąt dookoła osi pokrywającej się z osią obrotów badanego silnika i związanej z nim tarczy hamownicy. Jeżeli elektromagnesy zostaną wzbudzone, to w tarczy wirującej w wytworzonym przez nie polu magnetycznym będą indukowały się prądy wirowe. Te prądy we współdziałaniu ze strumieniem magnesów wytworzą moment usiłujący obrócić układ elektromagnesów w kierunku zgodnym z kierunkiem wirowania tarczy, podobnie jak to ma miejsce w poślizgowym sprzęgle elektromagnetycznym. Mierząc moment działający na układ elektromagnesów metodą wychyłową lub zerową możemy określić moment silnika napędzającego tarczę, różniący się od niego o wielkość momentów strat.

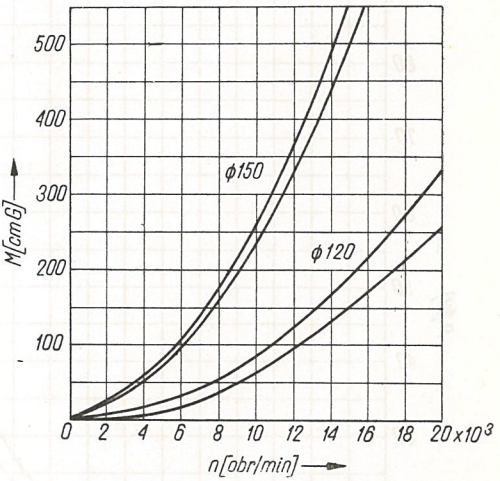
W przypadku hamownic przeznaczonych do badania maszyn miniaturowych najlepsze okazały się konstrukcje z tarczą z materiału niemagnetycznego o możliwie dużej przewodności elektrycznej, jak na przykład miedź lub aluminium. Elektromagnesy hamownicy są wzbudzane regulowanym prądem stałym. Od natężenia tego prądu i prędkości obrotowej tarczy zależy wielkość momentu hamującego rozwijanego przez hamownicę. Przykładowy kształt charakterystyk tego momentu podany jest na rys. 47. Z rysunku widać, że moment hamownicy przy danym prądzie wzbudzenia poczynając od pewnej prędkości obrotowej jest stały, co stanowi charakterystyczną cechę tego typu hamownic. Na kształt charakterystyk, a w szczególności na położenie początku jej poziomego odcinka, można wpływać przez dobór parametrów mechanicznych i materiałów.

W przypadku hamownic przeznaczonych do badania maszyn miniaturowych trzeba zwrócić szczególną uwagę na kilka osobliwości konstrukcyjnych, od których zależy ich czułość i dokładność.

Należy mianowicie wyeliminować zakłócające momenty od przewodów doprowadzających prąd do cewek elektromagnesów w hamownicach wychyłowych przez stosowanie możliwie wysokiego napięcia zasilania pozwalającego na zmniejszenie natężenia prądu magnesującego przy tym samym uzyskiwanym strumieniu magnetycznym, co prowadzi do zmniejszenia przekroju i sztywności przewodów doprowadzających; odpowiednio przemyślanego podwieszenia tych przewodów, ewentualnie skręconych w spiralę; styków rtęciowych składających się z korytkowych naczyń z materiału izolacyjnego wypełnionego rtęcią, w której poruszają się nożowe kontakty ruchomej części hamownicy. W pewnych przypadkach stosuje się również zamiast elektromagnesów magnesy trwałe, przy czym regulacja momentu hamującego osiągana jest przez zmianę szczeliny



Rys. 47. Charakterystyki momentów hamownicy indukcyjnej

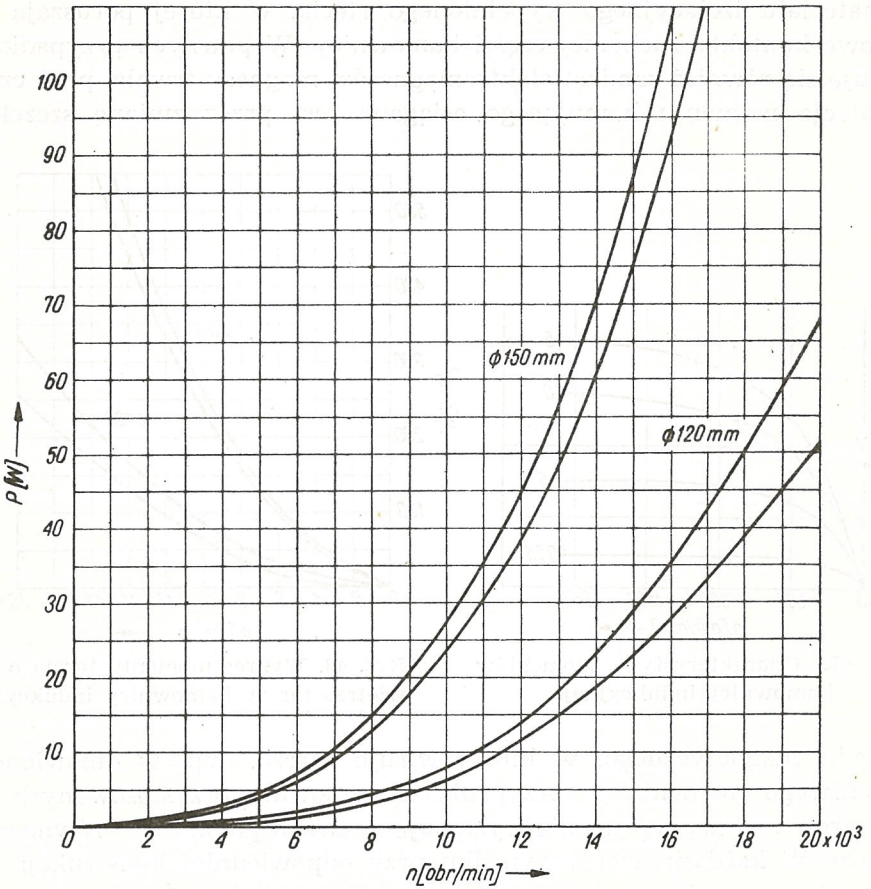


Rys. 48. Wykres momentu tarcia o powietrze tarczy hamownicy indukcyjnej

obwodu magnetycznego, w której wiruje tarcza. Wpływ omówionego szkodliwego momentu w przypadkach hamownic przystosowanych do pomiarów metodą zerową nie występuje w chwili pomiaru — równowagi układu. W każdym więc przypadku przy odpowiedniej konstrukcji lub postępowaniu wpływ momentu od przewodów zasilających magnesy można całkowicie wyeliminować.

Natomiast moment przenoszony na układ pomiarowy hamownicy jest zawsze mniejszy od momentu badanego silnika o moment tarcia tarczy hamownicy o powietrze. Wartość tego momentu dla danej tarczy w funkcji obrotów można pomierzyć przy pomocy hamownicy elektromaszynowej w sposób, który zostanie podany przy jej omawianiu. Ponieważ ten moment tarcia nie jest przenoszony na układ ruchomy hamownicy, a jego wielkość w przypadku maszyn miniaturowych, szczególnie szybkoobrotowych, jest porównywalna z wielkością momentu na wale, to nieuwzględ-

dnienie jego wpływu może wprowadzić duży uchyb przy ocenie wyniku pomiaru. Moment tarcia o powietrze zależy przede wszystkim od prędkości obrotowej i średnicy tarczy. Na rys. 48 podane są przykładowo wykresy krzywych momentów tarcia o powietrze w funkcji obrotów dla często spotykanych średnic tarcz ⌀ 120 mm i ⌀ 150 mm. Z wartości momentów tarcia można przeliczyć moc pobieraną przez tarczę. Odpowiednie wykresy dla tych samych średnic tarcz podane są na rys. 49.



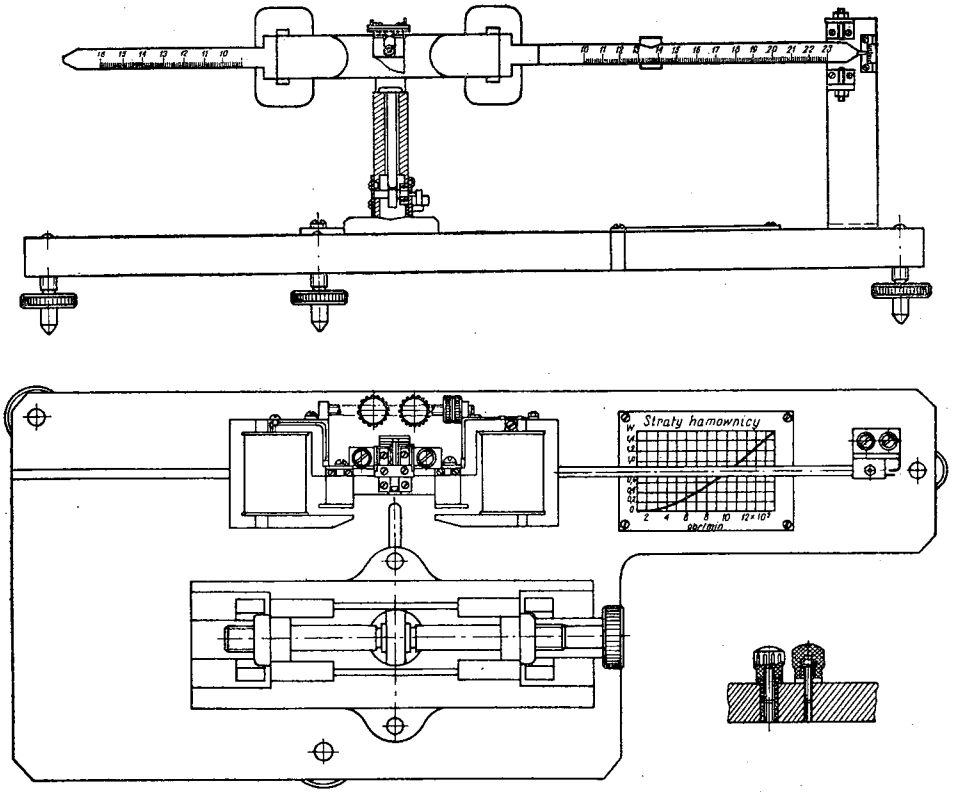
Rys. 49. Wykres poboru mocy na tarcie o powietrze przez tarczę hamownicy indukcyjnej

Tarcza powinna być dokładnie wyważona, a jej uchwyt do mocowania na wałku badanego silnika należy skonstruować tak, aby nie wprowadzał dodatkowego niewyważenia.

Każdą tarczę należy co pewien czas przecechować na odpowiednio czułej hamownicy elektromaszynowej, gdyż jak wykazały doświadczenia nieuchwytne indywidualne różnice gładkości, wichrowatości i wyważenia, występujące pomiędzy pozornie jednakowymi tarczami, powodują

rozrzut wyników około ± 10% względem wartości średniej, co uwzględniono na rysunkach 48 i 49.

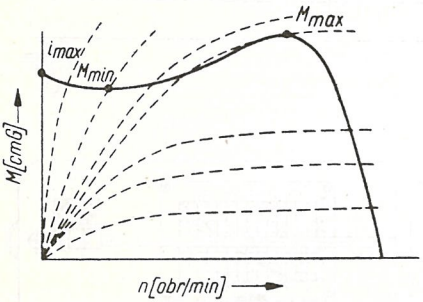
Moment tarcia spoczynkowego w łożyskach układu pomiarowego hamownicy można określić odchylając delikatnie układ ruchomy z położenia równowagi kolejno w obydwie strony i obserwując niedokładność powrotu do położenia zerowego. Średnia wartość otrzymanych odchyleń określi poszukiwany moment. Moment tarcia spoczynkowego w łożyskach może być wyeliminowany w hamownicach przystosowanych do pomiarów metodą zerową przez zastąpienie tych łożysk pryzmatami oporowymi analogicznymi do stosowanych w wagach analitycznych. Dla



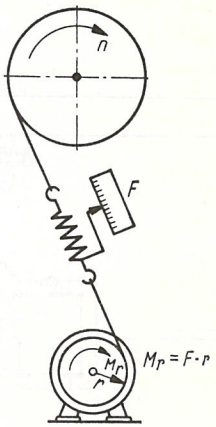
Rys. 50. Konstrukcja hamownicy indukcyjnej zerowej na pryzmatach

ochrony pryzmatów przed stępieniem należy przewidzieć urządzenie aretujące, wzorowane na konstrukcji wag. Przykład udanego rozwiązania hamownicy do zerowej metody pomiarów na pryzmatach o tarczy ϕ 75 mm podany jest na rys. 50. Wykonano ją do pomiaru momentów od 30 do 300 cmG przy czułości 0,2 cmG, i uchybie pomiaru rzędu 1÷3% w zależności od dokładności cechowania strat na tarcie tarczy o powietrze.

Hamownice indukcyjne poza elementarnym zadaniem obciążania silnika w dowolnym punkcie na statecznej części jego charakterystyki momentu mogą być również użyte do zorientowania się w wielkości takich charakterystycznych punktów na niestatecznej części charakterystyki, jak momenty maksymalny, minimalny i rozruchowy. Dla wyznaczenia momentu maksymalnego należy przy stopniowym zwiększaniu prądu wzbudzenia cewek elektromagnesów hamownicy obserwować wskazania amperomierza włączonego w obwód zasilania badanego silnika. Odczyt momentu maksymalnego należy przeprowadzić w chwili, gdy wskazówka amperomierza zaczyna pełzać przy niezmiennym wzbudzeniu elektromagnesów. Moment minimalny określamy wzbudzając maksymalnie elektromagnesy hamownicy, co odpowiada najbardziej stromemu przebiegowi jej charakterystyki (linia i_{max} na rys. 51) przy nieruchomym badanym silniku. Następnie uruchamiamy badany silnik, który utknie



Rys. 51. Zdejmowanie krzywej momentu badanego silnika przy pomocy hamownicy indukcyjnej



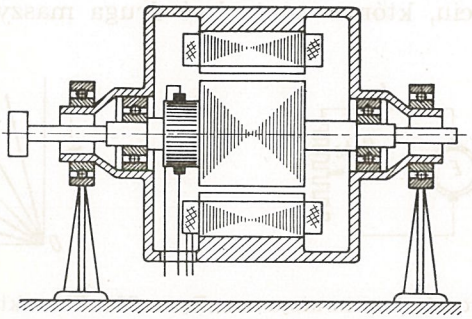
Rys. 52. Pomiar momentów rozruchowych

w punkcie przecięcia się jego charakterystyki z krzywą i_{max}; zmniejszając prąd wzbudzenia elektromagnesów możemy zdjąć odcinek niestatecznej części charakterystyki momentu silnika od tego punktu do chwili wzajemnej styczności charakterystyk silnika i hamownicy, gdy pomiary stają się niepewne. Na tym odcinku znajdzie się wartość momentu minimalnego M_{min}. Moment rozruchowy możemy zmierzyć łącząc ze sobą sztywno tarczę i układ magnesów przy pomocy specjalnego zacisku lub kołka. Aby wykryć ewentualne nierównomierności momentu rozruchowego w zależności od wzajemnego położenia stojana i wirnika badanego silnika, można przeprowadzić kilka pomiarów mocując tarczę z układem magnesów każdorazowo w innym położeniu.

Określenie momentu rozruchowego dla praktycznie dowolnego wzajemnego położenia stojana i wirnika, a w szczególności dokładne wy-

chwycenie minimalnej wartości tego momentu pozwala przeprowadzić specjalne urządzenie nie wymagające kilkakrotnych mocowań badanego wału. Urządzenie składa się z pomocniczego silnika przekładniowego o bardzo małej wyjściowej prędkości obrotowej i zmiennym kierunku wirowania, zaopatrzonego w bęben, i drugiego bębna mocowanego na wale badanego silnika. Obydwa bębny są łączone ze sobą sznurkiem poprzez dynamometr sprężynowy jak na rys. 52. Silnik pomocniczy obraca się w kierunku przeciwnym względem badanego, wolno ciągnie dynamometr i pozwala na zaobserwowanie i pomierzenie wszystkich wartości momentu rozruchowego występujących podczas pełnego obrotu wirnika względem stojana.

Podstawowymi zaletami hamownic indukcyjnych są: łatwość ich obsługi z możliwością bezpośredniego odczytywania wartości mierzonego momentu na skali hamownicy lub odpowiednio wycechowanego amperomierza; stosunkowo duża dokładność pomiaru i czułość urządzenia, szczególnie w przypadku stosowania metody zerowej; możliwość płynnej zmiany obciążenia badanego silnika przez zmianę prądu wzbudzenia elektromagnesów; łatwość zmiany zakresu pomiarowego, ograniczonego jedynie dopuszczalnym prądem w cewkach elektromagnesów, nasyceniem ich obwodu magnetycznego i nagrzewaniem się tarczy, które może wywołać jej deformację zniekształcającą wyniki pomiarów. Wadami na-



Rys. 53. Zasada budowy hamownicy maszynowej

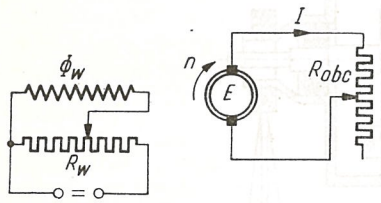
tomiast hamownic indukcyjnych są: zmniejszenie się momentu hamującego przy małych prędkościach obrotowych i niemożliwość stosowania tych hamownic do wolnoobrotowych maszyn; występowanie wibracji tarczy przy dużych prędkościach obrotowych i niemożliwość dokładnego zdjęcia całego niestatecznego zakresu charakterystyki momentów badanego silnika.

Następnym rodzajem hamownic są hamownice maszynowe. Są to maszyny elektryczne ze stojanem ułożyskowanym w specjalnych podporach w sposób uwidoczniony na rys. 53, pozwalający na jego wychylanie się pod wpływem momentu powstającego podczas pracy między wirnikiem

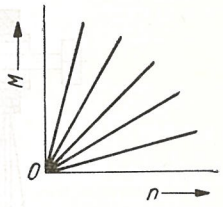
i stojanem. Ten moment może być mierzony metodą wychyłową lub zerową, analogicznie jak w przypadku hamownic indukcyjnych. Hamownice maszynowe mogą być stosowane zarówno przy pracy prądnicowej, jak i silnikowej. Przy pracy prądnicowej hamownica pobiera moc mechaniczną od badanego silnika i przetwarza ją na moc elektryczną, która następnie jest zamieniana w inny rodzaj energii poza układem pomiarowym (na przykład w energię cieplną wywiązującą się w opornikach obciążających prądnicę). Przy pracy silnikowej hamownica napędza badane urządzenie, a wykazany przez nią moment równa się momentowi oporowemu tego urządzenia. W ten sposób przy pomocy hamownicy maszynowej można pomierzyć na przykład straty mechaniczne silnika, przekładni, giętkiego wału lub moce pobierane przez tarcze hamownic indukcyjnych na tarcie o powietrze. W tym ostatnim przypadku ze względu na charakter pomiaru przeznaczonego do cechowania innego urządzenia pomiarowego należy zwrócić szczególną uwagę na właściwe dobranie hamownicy pod względem kształtu charakterystyk, czułości i zakresu mierzonych momentów.

Właściwości i charakterystyki hamownicy zależą od rodzaju zastosowanej do jej budowy maszyny.

Bocznikowa hamownica prądu stałego w zakresie pracy prądnicowej może pracować na opornik obciążający, w którym dostarczana energia elektryczna jest zamieniana na ciepło, lub współpracować ze źródłem o zmiennym napięciu, którym może być druga maszyna prądu stałego.



Rys. 54. Układ połączeń hamownicy bocznikowej dla pracy prądnicowej na opornik obciążający

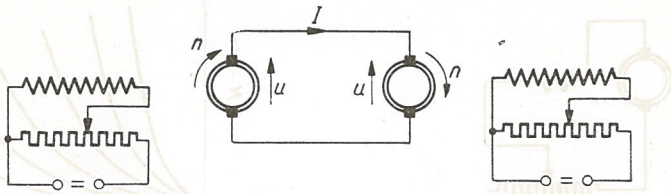


Rys. 55. Charakterystyki hamownicy w układzie z rys. 54

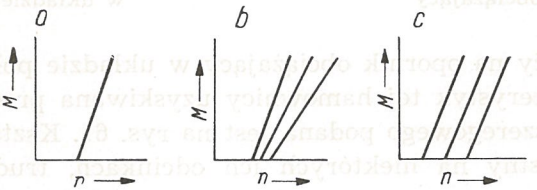
W pierwszym przypadku układ połączeń hamownicy będzie taki jak na rys. 54, a rodzina charakterystyk, jak na rys. 55. Nachylenie charakterystyki $M = f(n)$ hamownicy można zwiększać zwiększając wzbudzenie maszyny i zmniejszać zwiększając opór obciążenia. Regulacja jest wygodna i płynna. Możliwe jest łatwe zdjęcie odcinków charakterystyki badanej maszyny spełniających równanie (35).

W drugim przypadku — przy współpracy hamownicy ze źródłem o zmiennym napięciu jej układ połączeń przedstawi się jak na rys. 56, a charakterystyki jak na rys. 57, z tym, że na rys. 57a podano podstawo-

wą charakterystykę przy stałych wybranych wartościach wzbudzenia hamownicy i napięcia współpracującej maszyny, na rys. 57b rodzina charakterystyk jest otrzymywana przy zmianie wzbudzenia hamownicy, a na rys. 57c — przy zmianie napięcia współpracującej maszyny (na przykład przez zmianę jej wzbudzenia). Z postaci charakterystyk podanych na rys. 57 widzimy, że w tym drugim przypadku pracy prądnicowej hamownicy bocznikowej kosztem skomplikowania układu

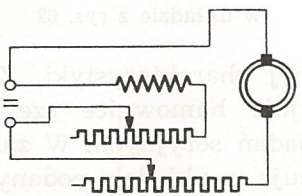


Rys. 56. Układ połączeń hamownicy bocznikowej współpracującej ze źródłem zmiennego napięcia

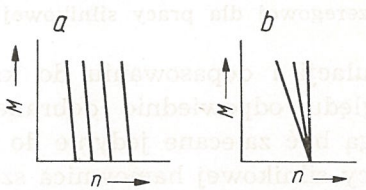


Rys. 57. Charakterystyki hamownicy w układzie z rys. 56

przez zastosowanie dodatkowego zespołu prądnicowego uzyskaliśmy możliwość równoległego przesuwania charakterystyki hamownicy wzdłuż osi n z jednoczesną możliwością pewnych zmian jej stromości. Stromość charakterystyki hamownicy może być znacznie większa niż w poprzednim przypadku — pracy na opornik obciążający, szczególnie przy większych prędkościach obrotowych. Do pracy silnikowej hamownicę bocznikową



Rys. 58. Układ połączeń hamownicy bocznikowej dla pracy silnikowej

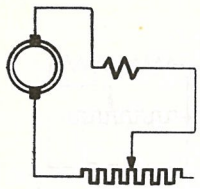


Rys. 59. Charakterystyki hamownicy w układzie z rys. 58

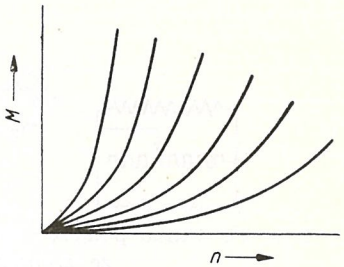
należy łączyć zgodnie ze schematem podanym na rys. 58. Jej charakterystyki przy tej pracy są uwidocznione na rys. 59. Na rys. 59a przytoczona jest rodzina otrzymywana przy regulowaniu prądu wzbudzenia hamownicy — charakterystyka przesuwa się równolegle w kierunku mniejszych

prędkości obrotowych przy wzroście prądu wzbudzenia, zaś na rys. 59b — rodzina otrzymywana przy regulowaniu opornika w obwodzie wirnika — wzrost oporności tego opornika powoduje zwiększenie pochylenia charakterystyki.

Szeregowa hamownica prądu stałego w zakresie pracy prądnicowej wobec znacznej zmienności wytwarzanego napięcia stosowana jest za-

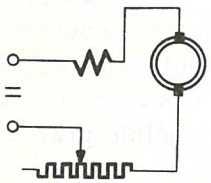


Rys. 60. Układ połączeń hamownicy szeregowej dla pracy prądnicowej na opornik obciążający

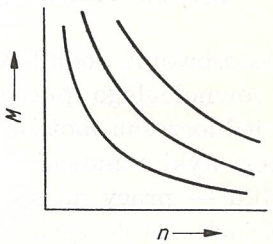


Rys. 61. Charakterystyki hamownicy w układzie z rys. 60

zwyczaj do pracy na opornik obciążający w układzie połączeń z rys. 60. Rodzina charakterystyk tej hamownicy uzyskiwana przez zmianę oporności opornika szeregowego podana jest na rys. 61. Kształt tych charakterystyk, korzystny na niektórych ich odcinkach, trudno poddaje się



Rys. 62. Układ połączeń hamownicy szeregowej dla pracy silnikowej

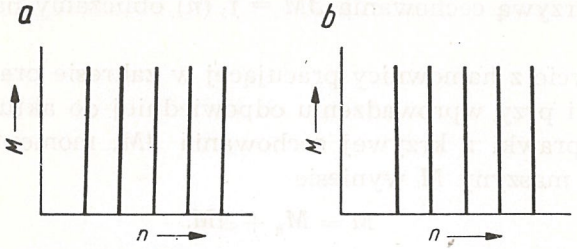


Rys. 63. Charakterystyki hamownicy w układzie z rys. 62

regulacji i dopasowaniu do kształtu badanej charakterystyki. Z tego względu odpowiednio dobrane konstrukcyjnie hamownice szeregowe mogą być zalecane jedynie do ruchowych badań seryjnych. W zakresie pracy silnikowej hamownica szeregowa pracuje w układzie podanym na rys. 62 i ma charakterystyki uwidocznione na rys. 63.

Hamownica prądu zmiennego zbudowana na bazie trójfazowej maszyny indukcyjnej zasilanej regulowaną częstotliwością pozwala na wyeliminowanie uchybów wprowadzanych przez szczotki maszyn prądu stałego. W zakresie pracy prądnicowej uzwojenia stojana są zasilane częstotliwością wytwarzającą pole magnetyczne wirujące wolniej niż wirnik sprzężony z badaną maszyną. Jeżeli więc zasilić uzwojenia stojana

zmienną częstotliwością z przetwornicy dwumaszynowej o regulowanej prędkości obrotowej lub z generatora elektronicznego ze wzmacniaczem, to w zakresie prądnicowej pracy hamownicy dla poszczególnych prędkości obrotowych można otrzymać rodzinę charakterystyk uwidocznioną na rys. 64a. W zakresie silnikowej pracy hamownica ma sztywne charakterystyki trójfazowego silnika indukcyjnego pokazane na rys. 64b, przesuwane wzdłuż osi prędkości obrotowych również przy pomocy zmian częstotliwości. Prostoliniowość i duża stromość charakterystyk w obydwu



Rys. 64. Charakterystyki hamownicy prądu zmiennego zasilanej zmienną częstotliwością

zakresach pracy jest cenną zaletą hamownicy zapewniającą jej dużą stabilność przy jednoczesnej łatwości regulacji przez zmianę jednego tylko parametru — częstotliwości zasilania. Kształt charakterystyk i brak wpływu tarcia szczotek, który może zniekształcić wyniki pomiarów, czynią z omawianego typu hamownicy sprzęt godny polecenia do precyzyjnych zarówno w ich części statecznej, jak i niestatecznej.

Najkorzystniejszy kształt charakterystyk mają hamownica bocznikowa prądu stałego współpracująca z regulowanym źródłem napięcia i hamownica prądu zmiennego zasilana regulowaną częstotliwością. Pozwalają one w większości spotykanych praktycznie przypadków na zdejmowanie całego przebiegu badanych charakterystyk momentu zarówno w ich części statecznej, jak i niestatecznej.

Moment wskazywany przez hamownicę jest sumą momentów elektromagnetycznego współdziałania pól wirnika i stojana, momentów oporowych tarcia szczotek i w łożyskach i momentu od wiru powietrznego wywołanego wirnikiem, a porywającego stojan. Przy prądnicowej pracy hamownicy wszystkie te momenty są skierowane zgodnie, a moment mierzony na stojanie hamownicy równa się całkowitemu momentowi otrzymanemu przez hamownicę od badanej maszyny.

Przy silnikowej pracy hamownicy momenty oporowe odejmują się od elektromagnetycznego i mierzony moment równa się oddanemu przez hamownicę badanemu urządzeniu. Jednakże w hamownicy występują pewne straty własne, które powinny być uwzględniane przy prowadzeniu pomiarów. Uchyb spowodowany tymi stratami można wyeliminować stosując odpowiednie poprawki ujęte zazwyczaj w postaci krzywej ce-

chowania danej hamownicy. Krzywą cechowania łatwo ustalić przy pomocy pomiarów. Nie wzbudzoną hamownicę napędzamy silnikiem. Mierzymy moc pobraną przez silnik P_s, a z wychylenia hamownicy określamy przekazaną jej moc P_h. Następnie odłączamy silnik od hamownicy i mierzymy moc P_{so} pobraną przez niego przy tej samej prędkości obrotowej n co podczas współpracy z hamownicą. Poprawkę obliczamy ze wzoru:

$$\Delta P = P_s - (P_{so} + P_h). \tag{45}$$

Krzywa zależności $\Delta P = f(n)$ będzie krzywą cechowania hamownicy. Ewentualną krzywą cechowania $\Delta M = f_1(n)$ obliczamy na podstawie zależności (31).

Przy odczycie z hamownicy pracującej w zakresie pracy prądnicowej momentu M_h i przy wprowadzeniu odpowiedniej do aktualnej prędkości obrotowej poprawki z krzywej cechowania ΔM, moment oddawany na wale badanej maszyny M wyniesie

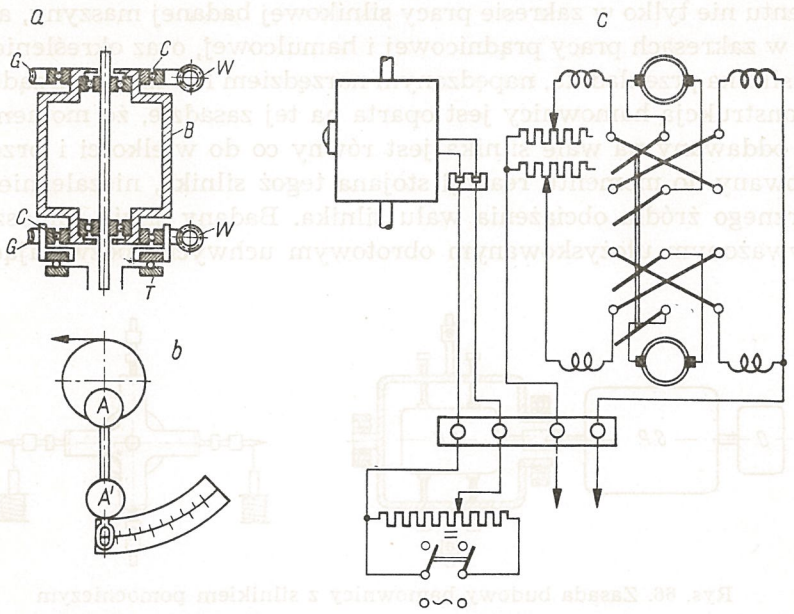
$$M = M_h + \Delta M. \tag{46}$$

Przy wykorzystywaniu hamownicy w zakresie pracy silnikowej we wzorze na moment na wale znak + należy zastąpić znakiem −.

Podstawowym parametrem decydującym o dokładności pomiaru mocy mechanicznej przez hamownicę jest jej czułość. Zależy ona przede wszystkim od tarcia w łożyskach układu wychyłowego lub ewentualnego dodatkowego układu pomiarowego (zob. np. rys. 65b). To tarcie zostaje praktycznie wyeliminowane w przypadku stosowania łożyskowania na pryzmatach lub podwieszenia układu ruchomego na giętkich taśmach. Jednakże w przypadku hamownic maszynowych stosowanie łożysk kulkowych o znacznym tarciu, szczególnie statycznym, jest najczęściej nieuniknione.

Metodą wyeliminowania tarcia statycznego łożysk kulkowych jest zastosowanie napędzania pośrednich pierścieni łożysk oporowych hamownicy w przeciwnych kierunkach ze stałą prędkością obrotową rzędu 50 obr/min. Ta prędkość przekracza znacznie normalne prędkości występujące przy ruchach hamownicy, spowodowanych mierzonymi momentami. Zasadę rozwiązania łożyskowania przy stosowaniu tej metody, uwidocznioną na rys. 65a, podamy na przykładzie hamownicy o pionowym układzie wału. Łożyska C kadłuba hamownicy B osadzone są w ślimacznicach G napędzanych przez przekładnię ślimakową W dwoma silnikami pomocniczymi. Kadłub wraz ze swymi łożyskami opiera się na łożysku oporowym T umocowanym na pionowej podstawie hamownicy, do której mocowany jest również badany silnik. Cały układ łożyskowy jest bardzo dokładnie obrobiony, obie ślimacznice G są wykonane z laminatu fenolowego dla możliwego zmniejszenia hałasu i wibracji przekładni. Doświadczenia wykazują, że przy tej metodzie łożyskowania czułość znacznie wzrasta: przy nieruchomych łożyskach moment tarcia spoczynkowego pozwala zaobserwować martwą strefę wychylenia hamownicy,

rzędu $\pm 5 \div 6$ działek, która po uruchomieniu napędu łożysk maleje do niedostrzegalnej wartości. Cylindryczna część kadłuba hamownicy połączona jest linką z bębnem układu wychyłowego (rys. 65b) o stałym ciężarku A, i wymiennym A'. Układ wychyłowy jest łożyskowany przy pomocy precyzyjnego łożyska ostrzowego w kamieniach. Na rys. 65c przytoczony jest schemat elektryczny napędu łożysk i zasilania omawia-



Rys. 65. Elektromaszynowa hamownica w układzie pionowym z napędzanymi bieżniami łożysk kulkowych zasilana zmienną częstotliwością
a — schemat ułożyskowania, b — pomiarowy układ wychyłowy, c — schemat elektryczny stanowiska hamownicy

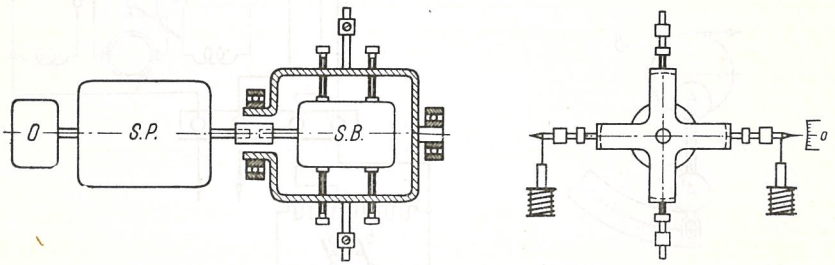
nej hamownicy, zbudowanej jako maszyna indukcyjna zasilana ze źródła napięcia o zmiennej częstotliwości i przeznaczonej do badań silników pionowych o mocach nie przekraczających 50 W przy prędkościach obrotowych do 7200 obr/min. Konstrukcja opisanej hamownicy, pozwalającej na wykonywanie pomiarów obarczonych uchybem nie przekraczającym 0,5% przy czułości rzędu 0,5 cmG, nie jest trudna do zrealizowania, wymaga jedynie precyzyjnej obróbki części mechanicznej.

Podstawowymi zaletami hamownic maszynowych są: możliwość ciągłej regulacji obciążenia badanej maszyny na drodze elektrycznej; niezależność obciążenia od zmian zewnętrznych parametrów (jak współczynnik tarcia w przypadku hamownic mechanicznych lub tarcia o powietrze w przypadku hamownic indukcyjnych); łatwość odprowadzania energii pobieranej od badanego silnika poza układ pomiarowy; możliwość mierzenia momentów oporowych badanego urządzenia.

Największą wadą natomiast jest znaczne skomplikowanie budowy, a w związku z tym cena urządzenia, rosnąca proporcjonalnie do dokładności uzyskiwanych wyników.

Następny rodzaj hamownic — hamownice z pomocniczym silnikiem wymuszającym zadaną prędkość obrotową badanej maszyny — charakteryzują się dużą uniwersalnością przy możliwości osiągnięcia najdokładniejszych wyników pomiarów. Te hamownice umożliwiają wygodny pomiar momentu nie tylko w zakresie pracy silnikowej badanej maszyny, ale również i w zakresach pracy prądnicowej i hamulcowej, oraz określenie obciążenia silnika przekładnią, napędzanym narzędziem lub innym urządzeniem.

Konstrukcja hamownicy jest oparta na tej zasadzie, że moment obrotowy oddawany na wale silnika jest równy co do wielkości i przeciwnie skierowany do momentu reakcji stojana tegoż silnika, niezależnie od zewnętrznego źródła obciążenia wału silnika. Badany silnik umieszcza się w wyważonym ułożyskowanym obrotowym uchwycie, pozwalającym na

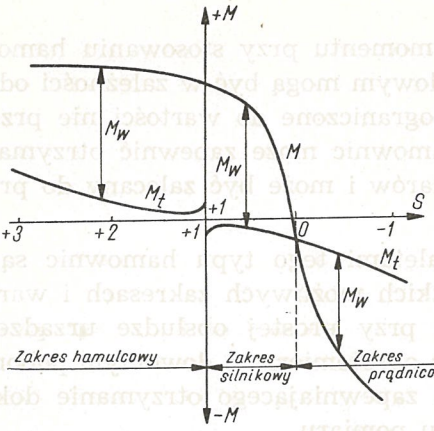


Rys. 66. Zasada budowy hamownicy z silnikiem pomocniczym

zmierzenie wspomnianego momentu reakcji stojana. Wał badanego silnika sprzęga się z pomocniczym silnikiem o znacznie większej mocy i regulowanej prędkości obrotowej przy obydwu kierunkach wirowania. Zasadę konstrukcji hamownicy ilustruje rys. 66, gdzie *SB* — silnik badany, *SP* — silnik pomocniczy, *O* — obrotomierz, *U* — uchwyt do mocowania badanego silnika z ułożyskowaniem, śrubami zaciskowymi i ciężarkami do wyważania.

Pomiar momentu działającego na stojan badanego silnika metodą wychyłową lub zerową (w zależności od konstrukcji hamownicy) przeprowadza się po uruchomieniu silników badanego i pomocniczego. Zmieniając przy pomocy pomocniczego silnika wymuszone prędkości obrotowe obydwu sprzężonych ze sobą maszyn, można zdjąć cały przebieg krzywej momentów badanego silnika dla poszczególnych zakresów jego pracy. Przykładem takiej krzywej dwufazowego silnika wykonawczego jest krzywa *M* z rys. 67, na którym zaznaczono zakresy pracy hamulcowej, silnikowej i prądnicowej badanej maszyny. Momenty tarcia występujące w badanym silniku i moment spowodowany oporem powietrza można pomierzyć w funkcji obrotów napędzając badany silnik odłączony

od zasilania. Te momenty oporowe mierzone dla obydwu kierunków wirowania badanego silnika podane są również na rys. 67 pod postacią krzywych M_t. Moment wewnętrzny maszyny M_w może być określony przez sumowanie momentów M i M_t z uwzględnieniem kierunku ich działania, jak to widać również na rys. 67.



Rys. 67. Typowe charakterystyki momentu dwufazowego silnika wykonawczego w funkcji poślizgu, zdjęte hamownicą z silnikiem pomocniczym

Momenty oporowe urządzeń pomocniczych napędzanych przez badany silnik, jak na przykład sprzężonych z nim przekładni, określa się w ten sam sposób, co momenty oporowe tarcia w łożyskach i o powietrze — napędzając badany silnik bez włączenia jego zasilania.

Przy odpowiednim dobraniu silnika pomocniczego dzięki możliwości wymuszenia dowolnej prędkości obrotowej badanego silnika rodzinę charakterystyk $M = f(n)$ hamownicy można traktować jako szereg równoległych pionowych prostych. Taka postać charakterystyk jest najkorzystniejsza ze wszystkich rozpatrzonych poprzednio, gdyż dzięki niej możliwe jest zdjęcie dowolnego punktu badanej charakterystyki praktycznie niezależnie od jej nachylenia w sąsiedztwie tego punktu.

Prędkość obrotową można mierzyć obrotomierzem pobierającym nawet znaczną moc, gdyż dostarcza jej pomocniczy, a nie badany silnik. Jedynym wymaganiem stawianym obrotomierzowi jest możliwie duża jego dokładność.

Pomocniczy silnik napędowy powinien zapewnić zachowanie stałej wybranej prędkości obrotowej niezależnej od momentu badanego silnika. Może on być dowolnego rodzaju, byle umożliwiał łatwą regulację prędkości obrotowej w granicach od zera do maksymalnej — przekraczającej możliwą dla badanego silnika — oraz zmianę kierunku wirowania. Dobre spełnienie tych wymagań zapewnia również stosowanie przekładni hydraulicznej napędzanej silnikiem o stałej prędkości obrotowej. Wymagana

moc wyjściowa pomocniczego silnika P_p (przy ewentualnym uwzględnieniu przekładni) może być określona z zależności:

$$P_p \geqslant 1{,}027\,(M_{b\,max} + M_{t\,max}) \cdot 10^{-5}\ [\mathrm{W}], \tag{47}$$

gdzie $M_{b\,max}$ i $M_{t\,max}$ — momenty silnika badanego i obrotomierza przy maksymalnej prędkości obrotowej w zakresie hamowania badanego silnika.

Uchyby pomiaru momentu przy stosowaniu hamownicy z pomocniczym silnikiem napędowym mogą być w zależności od konstrukcji i wykonania hamownicy ograniczone do wartości nie przekraczającej 0,5%. Tak więc ten typ hamownic może zapewnić otrzymanie najdokładniejszych wyników pomiarów i może być zalecany do przeprowadzania pomiarów badawczych.

Podstawowymi zaletami tego typu hamownic są: duża dokładność pomiarów we wszystkich możliwych zakresach i warunkach pracy maszyn miniaturowych przy prostej obsłudze urządzenia pomiarowego; możliwość stosowania obrotomierza o dowolnym poborze mocy, co umożliwia wybranie typu zapewniającego otrzymanie dokładnego i łatwego do odczytania wyniku pomiaru.

Za wady hamownicy z pomocniczym silnikiem napędowym mogą być uważane znaczne skomplikowanie budowy i wysoki koszt oraz konieczność wyjątkowo starannej konserwacji. Jednakże cechy te są praktycznie właściwe wszystkim precyzyjnym urządzeniom pomiarowym.

Politechnika Warszawska
Katedra Maszyn Elektrycznych

WYKAZ LITERATURY

1. Чечет Ю. С.: Исследование электрических микромашин. — МЭИ, 1953.
2. Drewnowski K.: Pomiary elektryczne. — PWN, 1959.
3. Duff J. E.: A High Precision Dynamometer for Small Motor Measurements.— Trans. A.I.E.E., 1947, vol. 66.
4. Früngel F.: Die Technik stroboskopischer Messgeräte. — Arch. Techn. Mess,. 1959, Nr 277, 278.
5. Fuliński W., Gotszlak R.: Kompensatory prądu zmiennego i ich krajowe wykonanie. — PAK, 1959, Nr 9.
6. Harassek Z., Kazański J.: Elektronowy miernik prędkości obrotowej. — Przegląd Elektrotechniczny, 1960, Nr 5.
7. Hermann P. K.: Stroboskopische Drehzahlmessungen. — ETZ-A, 1953, Bd 24.
8. Hupp R. L., Suhr F. W.: A Quadrature Phase Shift Voltage Transformer Device and its Applications. — Trans. A.I.E.E., 1952, vol. 71, Part III.
9. Кочубиевский Ф. Д.: Простой способ измерения малой мощности переменного тока. — Электр., 1954, № 5.
10. Krukowski W.: Der Wechselstromkompensator. — Springer, 1920.

11. Latek W.: Badanie maszyn elektrycznych. — T. I i II, PWN, 1952/57.
12. Лавринович Л. Л., Барсуков И. А., Каган С. М.: Повышение точности измерения некоторых параметров электрических машин. — Вестн. Электропром., 1961, № 2.
13. Миренский М.: Измерение малой мощности переменного тока при помощи амперметра. — Электр., 1950, № 9.
14. Owczarek J.: Dokładny pomiar mocy pobranej przez silnik miniaturowy z zastosowaniem kompensatora w układzie współrzędnych prostokątnych. — Arch. Elektrot., 1961, t. X, z. 1.
15. Owczarek J.: Dokładny pomiar prędkości obrotowej silnika miniaturowego. — Rozpr. Elektrot., 1961, z. 3.
16. Patton H. W.: An Accurate Magnetic Tachometer. — Proceed. of the National Electronics Conference, 1955, vol. 11.
17. Porządkowski E.: Falomierz liczący mod. Fle 155. — Zesz. Nauk. P. W. Elektr., 1957, Nr. 14.
18. Querques A., Stella M.: Un dispositivo par la prova di motori piccola potenza. — Elettrotecnica, 1954, Nr 5.
19. Reinhardt Fr.: Stroboskopische Drehzahlmessungen. — Arch. f. Techn. Mess., 1953, Sept.
20. Синельников Е. М., Сомихина Г. С.: Измерение вращающих моментов асинхронных двигателей при разбеге. — Электр., 1950, № 7.
21. Столов Л. И., Калинкин Г. И.: Испытание микромашин методом вспомогательного двигателя. — Электр., 1958, № 1.
22. Утямышев Р. И.: Точный прибор для измерения угловой скорости микродвигателей. — Приборостроение, 1958, № 5.
23. Wambeck S. H., Stein W. A.: A Special Dynamometer for Testing Small Motors. — Electr. Engrg., 1952, June.
24. Захарян В. М.: Некоторые вопросы методики испытания малых электродвигателей. — Вестн. Электр., 1959, № 3, 1960, № 9.

E. ОВЧАРЕК

ИССЛЕДОВАНИЕ МИКРОМАШИН

Резюме

В случае исследования микромашин результаты измерений играют большую роль, чем в случае других машин, являясь не только пополнением расчетов, но во многих случаях и основой проверки вычислительных методов. В статье систематически изложены методы измерения основных параметров микромашин преимущественно значительно отличающиеся от методов применяемых при исследовании больших машин. Отличительной чертой обсуждаемых методов исследования является необходимость разработки специальных приемов, обеспечивающих отсутствие нагрузки машины измерительной схемой, так как мощность потребляемая обычными схемами становится соизмеримой с мощностью испытываемой микромашины. Рассмотронные методы измерений основных параметров машин разделены на две основные группы — производственных испытаний менее точных, но отличающихся простотой манипуляции и оборудования и — исследовательских испытаний самых точных, но

более сложных и требующих применения специальных приборов. Весь материал подразделен на части относящиеся к исследованию отдельных параметров.

В части посвященной измерениям частоты обсуждены резонансные стрелочные и электронные частотомеры, сравнительные мостовые и разностные методы измерения, а также цифровые счетчики, обеспечивающие точность измерения определенную систематической ошибкой не превышающей 0,01%.

В части посвященной измерению скорости вращения констатировано, что для микромашин применимы исключительно стробоскопический и частотный методы измерения, а также цифровые счетчики, обеспечивающие точность оптические и механические стробоскопы и приемы при их применении, а также датчики и индикаторы частоты соответствующей измеряемой скорости вращения. В заключение описан прибор использующий фотоэлектрический датчик и декатронный счетчик стабилизированный эталонным кварцевым генератором, позвеляющий снизить систематическую ошибку измерений до значений меньших от 0,01%.

При обсуждении измерения тока и напряжения приведены условия, которым должны удовлетворять измерительные приборы обычной конструкции и более целесообразные в применении для микромашин компенсационные методы измерения этих величин в системах полярных и прямоугольных координат. В случае применения компенсаторов систематические ошибки измерения тока и напряжения не превышают 0,05%.

Измерение электрической мощности рассмотрено на примере измерения мощности потребляемой микродвигателем. Обсуждена классическая измерительная схема с приведением требований предъявляемых приборам и способов вычисления поправок; далее указаны пути для улучшения этой схемы и отдельных ее компонентов. Группа методов производственных испытаний пополнена специальными схемами, как например схемой с использованием амперметров и емкостей, осцилоскопа или фазовращателя-усилителя. Для исследовательских испытаний предлагается схема, разработанная автором, с измерительным прибором специальной конструкции обоснованной на принципе компенсатора. Систематическая ошибка измерения при применении этого прибора не превышает 0,1%.

Измерения механической мощности вызывают значительные затруднения при исследовании микромашин. Они необходимы для определения столь важных параметров как коэффициент полезного действия и нагрузочные характеристики с характеристикой момента включительно. Предлагаемые методы измерения этой мощности разделены на применяемые в течение переходных и установившихся режимов работы исследуемой машины и поочередно рассмотрены с обсуждением свойственных им преимуществ, недостатков и получаемых точностей измерения. В частности обсуждена конструкция тормозных устройств, применяемых часто при испытании двигателей в установившемся режиме работы несмотря на основной недостаток этой группы методов, которым является продолжительность процесса измерения создающая угрозу перегрева испытуемой машины. Рассмотрены фрикционные, индукционные и электромашинные тормозные устройства, а также тормоз со вспомогательным двигателем. При соблюдении соответственных требований по отношению к его конструкции можно ограничить систематическую ошибку измерения механической мощности до 0,5% и вести работу в направлении автоматизации измерения, благодаря которой имеются перспективы сокращения продолжительности процесса измерения, а тем самым уменьшения опасности перегрева.

J. OWCZAREK

ESSAIS DES MICROMOTEURS

Resumé

La détermination exacte des caractéristiques des micromoteurs est possible avant tout au moyen des mesures, car les résultats des calculs sont chargés toujours d'une erreur importante. Les micromoteurs électriques ne peuvent pas être étudiés en général au moyen des méthodes de mesure utilisées pour les moteurs plus grands, car pour la plupart des cas, les puissances nécessaires pour le système de mesure sont commensurables avec celles pour le micromoteur étudié; cette circonstance change considérablement les conditions du travail du moteur.

Pour cette raison il faut indiquer ou élaborer les méthodes de mesure propres précisées pour le cas des micromoteurs. Le présent ouvrage est destiné à accomplir la tâche mentionnée ci-dessus. Les méthodes de mesure de la fréquence, de la vitesse de rotation, de la tension, du courant, de la puissance électrique et mécanique sont partiellement prises de a littérature et partiellement ce sont les méthodes originelles élaborées par l'auteur. Les méthodes utilisées pour déterminer une caractéristique particulière sont classifiées en deux groupes — les méthodes de trafic et celles de recherches. On a accepté pour base de la classification la simplicité et la précision pas si grande concernant les méthodes de trafic, ainsi qu'une complication élevée et les frais augmentés des appareils concernant les méthodes de recherches; mais en tout cas la prècision des mesures ne peut pas devenir plus petite que de classe 0,2.

J. OWCZAREK

UNTERSUCHUNG VON KLEINSTMASCHINEN

Zusammenfassung

Eine genaue Parameterbestimmung der Kleinstmaschinen ist vor allem durch Messungen möglich, weil ihre Ergebnisse durch Berechnungen gewöhnlich erheblichen Fehler aufweisen. Die elektrischen Kleinstmaschinen können im allgemeinen nicht durch Messverfahren geprüft werden, welche zur Untersuchung der grösseren Maschinen verwendbar sind, weil meistenteils die Leistung der Messchaltung vergleichbar ist mit der Leistung der geprüften Maschine, wodurch ihre Arbeitsbedingungen grundsätzlich verändert werden.

In diesem Aufsatz sind spezielle Messverfahren zusammengestellt worden, welche sich zur Untersuchung der Speisefrequenz, der Umdrehungsgeschwindigkeit, der Spannung, des Stromes, der Stromstärke und der mechanischen Kraft der Kleinstmaschinen eignen. Diese Messverfahren sind in zwei Gruppen geteilt. Erstens in einfachere aber wenig genaue — Betriebsmessverfahren und zweitens in kompliziertere aber genauere — Untersuchungsmessverfahren.

J. OWCZAREK

TESTING OF MICROMACHINES

Summary

In the case of micromachines testing plays a greater role than in the case of other machines, being not only an important supplement to computation but also the basis for the correction of computing methods. A systematic comparison of methods of fun-

damental measurements suitable for the testing of micromachines differing considerably from those used in the case of larger machines and described in the appropriate manuals was given in the paper. The specific character of the above mentioned testing lies in the necessity of selecting and working out measuring methods not loading the very tested machine because the power consumption by conventional methods becomes commensurable with the power of a micromachine. The above described measurement methods of the most important parameters are divided into two principal groups namely: industrial measurements less exact but simpler and demanding an uncomplicated instrument equipment, and testing measurements, the most exact, more complicated and requiring special instruments. The material was divided into parts concerning the measurement of respective parameters.

In the part realing with frequency measurement resonance, indicator and electronic frequency meters were discussed as well as comparative methods, indirect, bridge, differential and meter ones which can secure the accuracy of a measurement, denoted by an error less than 0.01%.

It was stated in the part referring to the measurement of rotary velocity that in the case fo micromachines only stroboscopic and frequency methods ont effecting a detectable loading of the examined shaft can be used and they were examined successively.

Flash and mechanical stroboscopes were discussed, the procedure while applying them as well as transmitters and frequency meters of frequency proportional to the rotary velocity that is being measured. Finally an instrument utilizing a photocell and a quartz stabilized meter was discussed limiting the error of rotary velocity measurement to less than 0.01%.

When considering voltage and current measurements the conditions which should be fulfilled by the conventional instruments and more rational, in the case of micromachines methods of compensation measurement of these magnitudes in the configurations of polar and rectangular coordinates were discussed. The principle of the automation of a compensator has also been given. When using compensators the error of voltage and current measurement does not exceed 0.05%.

The measurement of the electric power was analized on the basis of measurement of power consumed by a micromotor. The classical measurement set was discussed and the requirements to be fulfilled by instruments and methods of computing corrections were given. This was followed by suggesting the ways to improve this set and its constituent parts. The branch of movement methods was completed by special sets like e.g. ammeters and capacitors, cathode-ray osciloscope and amplifier-phase shifter. For testing measurement the author's set with a meter of a special design was suggested; it is based on the compensation method. Using this set the measurement error does not exceed 0.1%.

The methods of mechanical power measurement offering the greatest difficulties while examining micromachines, and necessary while defining such important parameters efficiency and the load curve together with the characteristic of motor moments, were divided into these applied in unstable and stable states of its performance and were successively discussed; their merits, shortcomings and obtained accuracy were given. A particular attention was paid to the design of brakes used in testing motors in stable states in spite of the essential disadvantage of these group oof methods, i.e. the exceeding length of a measurement causing the danger of overheating the machine under test. Following brakes: friction, induction, generator and auxiliary motor brakes were analised. Using the suitable designs of the latter one can obtain a reduction of the measurement error below 0.5% and one can also undertake the experiments in the automation of measurement cutting down its time and so decreasing the influence of the mainm shortcoming of measurement methods in the stable state of the work of the motor under test.

621.397

STEFAN KONARSKI

Widzenie obrazów w trzech wymiarach Telewizja stereoskopowa

Rękopis dostarczono 16.3.1961

Omówiono pokrótce zasady widzenia przestrzennego oraz opisano układy optyczne umożliwiające odtwarzanie trzeciego wymiaru scen oglądanych. Następnie omówiono podstawowe podzespoły wchodzące w skład systemu telewizji przestrzennej uzależniając je od metod podziału stereopary. Podano podstawowe układy blokowe systemów służących do przesyłania na odległość obrazów przestrzennych oraz przeanalizowano niektóre właściwości transmisji obrazu przestrzennego z punktu widzenia jakości efektu stereoskopowego.

1. ZASADY ODBIORU OBRAZÓW W TRZECH WYMIARACH

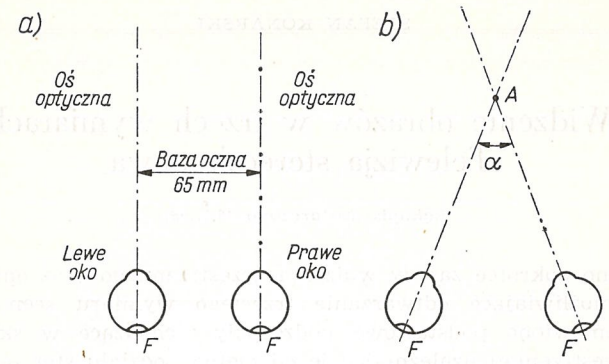
Stereoskopowe albo trójwymiarowe widzenie sprowadza się do określania cech objętościowych samego przedmiotu oglądanego (jego plastyki), jak i do określania przestrzennego rozmieszczenia przedmiotów w naturze (głębi przestrzeni).

Rozróżniamy tzw. widzenie jednooczne oraz widzenie obuoczne. Patrząc jednym okiem jesteśmy w stanie odnosić wrażenie trójwymiarowości przedmiotów jedynie dzięki temu, że mamy możność porównywać nasze doznania wzrokowe z czynnikami fizjologicznymi, jakie przy tym zachodzą w samym oku. Są to: pamięć wzrokowa, odczucie różnicy napięcia mięśni w oku przy dopasowywaniu soczewki do żądanej ostrości oraz porównywanie położenia danego przedmiotu z innymi przedmiotami znanymi.

W widzeniu obuocznym podstawową rolę odgrywa baza oczna — odległość między osiami optycznymi przy oglądaniu przedmiotów odległych (rys. 1a). U różnych ludzi baza oczna jest różna; jako średnią przyjmujemy odległość 65 mm i uznajemy ją za wartość stałą.

Rzutując odległy przedmiot na środkowe części siatkówek oczu F, będziemy widzieli dany przedmiot jako pojedynczy. Jeżeli jednak ten przedmiot przybliżyć, to oczy, w celu dokładnego przyjrzenia mu się, mimo woli obrócą się w swoich orbitach i osie optyczne przetną się na oglądanym przedmiocie A (rys. 1b), przy czym przedmiot będzie widziany przez nas w dalszym ciągu jako pojedynczy.

Kąt α, pod jakim przetną się osie optyczne, nazywa się kątem konwergencji (sprowadzenia na jeden punkt). Każdemu położeniu przedmiotu odpowiada określony kąt konwergencji, czemu towarzyszy



Rys. 1. Obuoczne widzenie przedmiotów a) odległych, b) bliskich

praca mięśni na obrót gałki ocznej. Porównanie w naszej świadomości napięcia mięśni odpowiadającego różnym kątom konwergencji daje nam wyobrażenie o odległości, na jakiej znajduje się obserwowany obiekt.

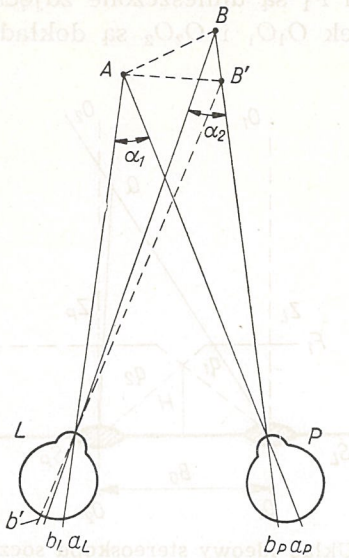
Przy zmianie odległości rozpatrywanego obiektu zachodzi nie tylko konwergencja, ale również akomodacja, to jest zmiana promienia krzywizny soczewki ocznej. Ta ostatnia zapewnia wytworzenie ostrego obrazu na siatkówce przy różnej odległości od oka przedmiotów obserwowanych. Konwergencja i akomodacja powodują zmianę średnicy źrenicy, która kurczy się wzraz ze zbliżaniem się oglądanego przedmiotu. Zjawisko to zmniejsza aberację sferyczną, a więc wyostrza obraz na siatkówce.

W ten sposób ze zmianą odległości obserwacji występują jednocześnie i mimowolnie ruchy trzech rodzajów mięśni: kierujących obrotem gałki ocznej, krzywizną soczewki i średnicą źrenicy. Należy tu wskazać na jednoczesność występowania konwergencji i akomodacji, tzn. że każdemu kątowi konwergencji odpowiada określone napięcie akomodacji, i odwrotnie.

Podstawową własnością widzenia obuocznego jest to, że lewe i prawe oko patrzy na dany szczegół z różnych punktów, odległych o długość bazy ocznej (rys. 2). W wyniku tego obrazy tego szczegółu powstałe na siatkówkach nie układają się w tych samych punktach siatkówki w stosunku do ich środków, lecz różnią się w zależności od odległości tego szczegółu od oczu.

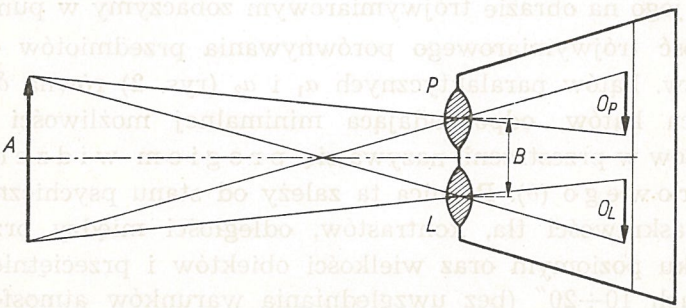
Powstała w ten sposób różnica położenia projekcji przedmiotu na obu siatkówkach jest obiektywną miarą odległości oglądanego przedmiotu. Ta „obiektywna miara" widzenia obuocznego jest podstawą konstrukcji przyrządów stereoskopowych.

Przyrządy stereoskopowe budowane są w postaci teleskopów, lornetek pryzmatycznych, stereoskopów zwierciadlanych i pryzmatycznych.



Rys. 2. Określanie progu widzenia trójwymiarowego

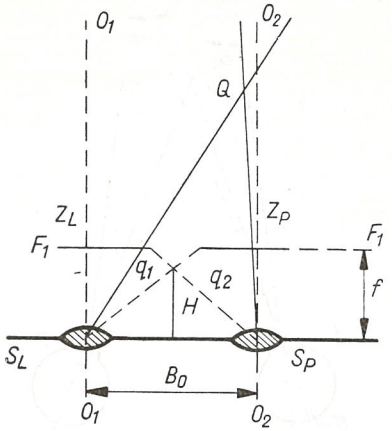
Aby sztucznie wytworzyć obraz stereoskopowy, trzeba sporządzić dwa zdjęcia obiektu, tzw. s t e r e o p a r ę, z dwóch ustalonych pozycji o pewnej bazie w kierunku poziomym, a następnie móc je odtwarzać oddzielnie przez lewe i prawe oko.



Rys. 3. Zasadniczy układ optyczny stereoskopowego aparatu fotograficznego; *P* i *L* — obiektywy (lewy i prawy), *B* — baza, *A* — przedmiot fotografowany, O_P i O_L — zdjęte obrazy

Do sporządzania stereopary służy stereoskopowy aparat fotograficzny (rys. 3). Różni się on od zwykłego aparatu tym, iż posiada dwa obiektywy, prawy i lewy, odległe o wielkość bazy *B*. Dzięki temu otrzymujemy dwa obrazy przedmiotu zdjęte z dwu różnych punktów. Przy fotografowaniu przedmiotów odległych baza powinna być większa.

Do stereoskopowego odtwarzania tak uzyskanej stereopary może służyć np. stereoskop soczewkowy (rys. 4). Posiada on dwie soczewki S_L i S_P, zmontowane w odległości równej bazie ocznej Bo, przed którymi w płaszczyźnie ogniskowych F_1 są umieszczone zdjęcia, prawe Z_P i lewe Z_L. Osie optyczne soczewek O_1O_1 i O_2O_2 są dokładnie równoległe. Między



Rys. 4. Układ ideowy stereoskopu soczewkowego

nimi stawia się zasłonkę H do rozdzielenia obrazów albo też dobiera się soczewki z małymi kątami widzenia, ażeby lewe oko nie dostrzegło prawego zdjęcia Z_P, a prawe oko lewego zdjęcia Z_L.

Jeżeli jakiś punkt na zdjęciach znajduje się w położeniach q_1 i q_2, to położenie jego na obrazie trójwymiarowym zobaczymy w punkcie Q.

Zdolność trójwymiarowego porównywania przedmiotów określa się różnicą tzw. kątów paralaktycznych α_1 i α_2 (rys. 2) równą $\delta = \alpha_1 - \alpha_2$. Ta różnica kątów, odpowiadająca minimalnej możliwości określania przedmiotów w przestrzeni, nazywa się p r o g i e m w i d z e n i a t r ó j w y m i a r o w e g o (δ). Różnica ta zależy od stanu psychicznego obserwatora, jaskrawości tła, kontrastów, odległości między przedmiotami w kierunku poziomym oraz wielkości obiektów i przeciętnie waha się w granicach $10 \div 20''$ (bez uwzględniania warunków atmosferycznych).

Istnieje pewna maksymalna odległość, tzw. p r o m i e ń s t e r e o s k o p o w e g o w i d z e n i a r_o, z jakiej jesteśmy jeszcze w stanie rozpoznawać bryłowatość przedmiotów: $r_o = B_o/\delta$. Z zależności tej widać, że promień r_o jest wprost proporcjonalny do długości bazy ocznej i odwrotnie proporcjonalny do progu trójwymiarowego widzenia. Podstawiając graniczne wartości i uwzględniając wpływ atmosfery wartość promienia stereoskopowego widzenia wyniesie ok. 1 km. Jest to granica widzenia przestrzeni dla bazy 65 mm, jaką posiada ludzki wzrok.

Z powyższego wynika, że aby z pomocą przyrządu stereoskopowego można było lepiej rozpoznawać bryłowatość niż okiem nie uzbrojonym, stosunek jego bazy B do bazy ocznej B_o (B/B_o) powinien być możliwie duży. Drugą cechą, która charakteryzuje jakość przyrządu stereoskopowego, jest powiększenie kątowe γ, określające zdolność rozróżniania szczegółów jako dwu odrębnych punktów. W ten sposób próg stereoskopowego widzenia dla oka δ jest mniejszy o stosunek δ/γ, czyli oko przy pomocy takiego przyrządu może rozróżniać szczegóły znajdujące się w kącie γ razy mniejszym. Przez analogię, promień stereoskopowego widzenia dla przyrządu $r = \dfrac{B}{\delta/\gamma} = r_o \cdot \dfrac{B}{B_o} \cdot \gamma$,

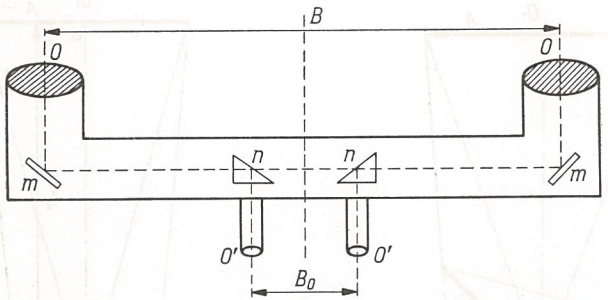
gdzie:

r_o — promień stereoskopowego widzenia dla oka,

B — baza przyrządu stereaskopowego,

γ — powiększenie kątowe przyrządu.

Wielkość $\dfrac{B}{B_o} \cdot \gamma$ nazywamy p l a s t y c z n o ś c i ą p r z y r z ą d u; przyrząd ma tym lepsze właściwości stereoskopowe, im wartość jego plastyczności jest większa.



Rys. 5. Teleskop stereoskopowy: O — soczewki, O' — okulary, m i n — zwierciadła odbijające, B_o — baza oczna, B — baza obserwowania

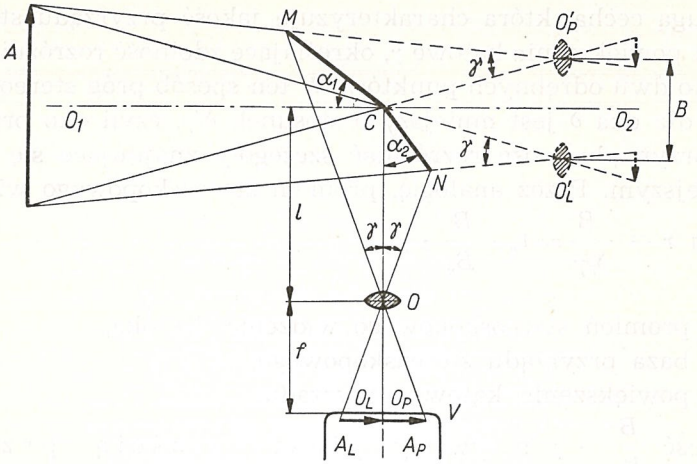
Teleskop stereoskopowy przedstawiony na rys. 5 posiada plastyczność stereoskopową ponad 100, a lornetka pryzmatyczna ok. 10. Tak więc przyrządy stereoskopowe w znacznym stopniu powiększają zdolność stereoskopowego widzenia przestrzeni.

2. PODSTAWOWE ELEMENTY WCHODZĄCE W SKŁAD SYSTEMU TELEWIZJI PRZESTRZENNEJ

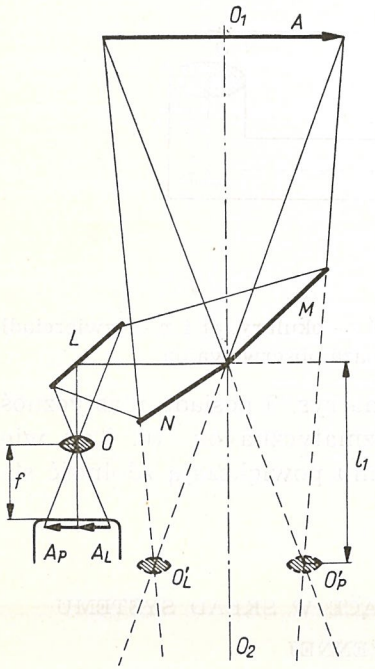
2.1. S t e r e o s k o p o w a k a m e r a t e l e w i z y j n a

Ogólne wymagania techniczne stawiane kamerze stereoskopowej nie różnią się zasadniczo od wymagań, jakie stawiamy kamerom zwykłym. Jedną z typowych jest k a m e r a z jednym obiektywem O. W celu uzy-

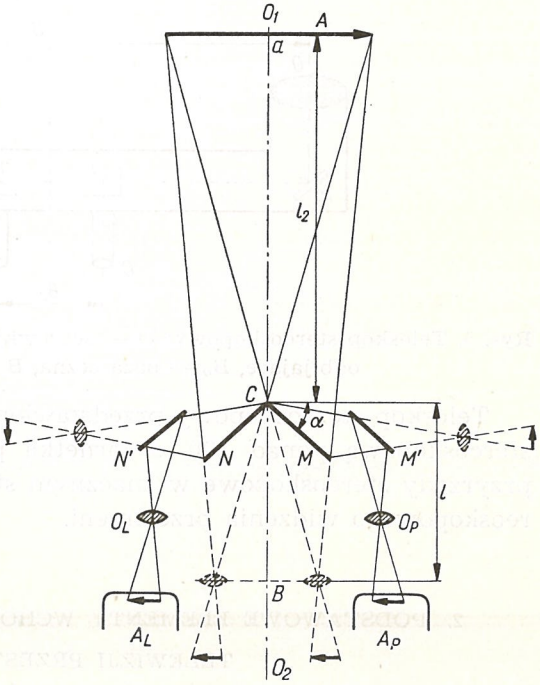
skiwania dwu obrazów stereopary (lewego i prawego), kamera jest zaopatrzona w przystawkę optyczną. Taką przystawkę stanowi rozdzielacz



Rys. 6. Układ optyczny kamery z jednym obiektywem i rozdzielaczem zwierciadlanym



Rys. 7. Układ optyczny kamery z jednym obietywem i trzema zwierciadłami

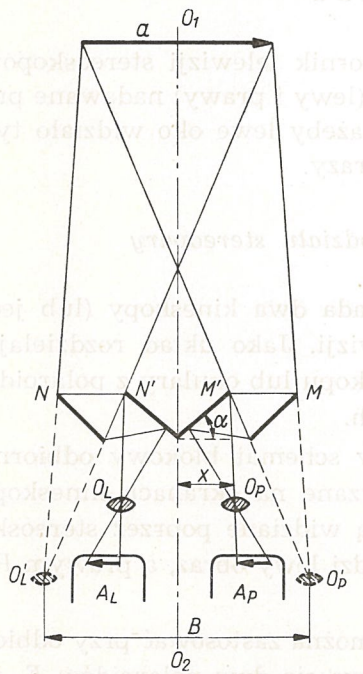


Rys. 8. Układ optyczny kamery z dwoma lampami analizującymi i rozdzielaczem zwierciadlanym

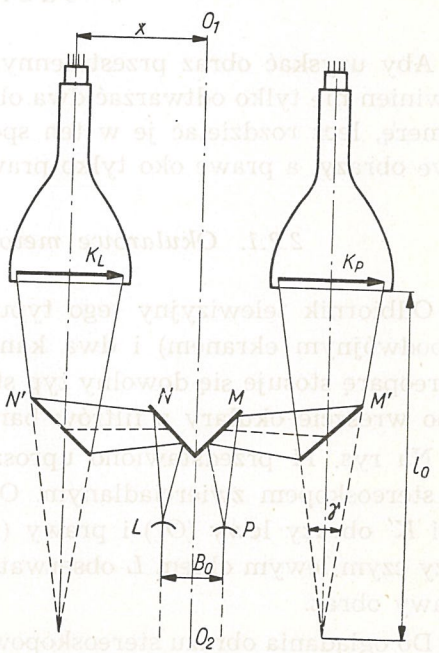
zwierciadlany lub pryzmatyczny. Na rys. 6 jest przedstawiony układ optyczny takiej kamery z rozdzielaczem zwierciadlanym stanowiącym

dwa zwierciadła M i N. Za pomocą tych zwierciadeł uzyskujemy dwa pozorne obiektywy O'_L i O'_P. Odległość między środkami tych obiektywów stanowi bazę transmisji B, która zależy od kąta nachylenia α zwierciadeł do osi optycznych O_1O_2 układu zwierciadlanego i osi obiektywu CO. Bazę transmisji można regulować zarówno przez zmianę kąta α, jak też i odległości l obiektywu od styku dwu zwierciadeł. Rozdzielone w ten sposób przez obiektywy O'_L i O'_P obrazy stereopary są analizowane przez fotokatody lamp analizujących A_L i A_P. Konieczność prowadzenia takiej kamery przez operatora równolegle do analizowanej sceny usuwa się przez zestawienie dodatkowego zwierciadła pod określonym kątem do osi optycznej OC. W tym przypadku układ optyczny kamery przybiera postać pokazaną na rys. 7, gdzie L — dodatkowe zwierciadło.

Jeżeli istnieje potrzeba stosowania dwu oddzielnych lamp analizujących, np. w systemach dwukanałowych, wówczas stosujemy k a m e r ę z d w o m a o b i e k t y w a m i i rozdzielaczem zwierciadlanym z pomocniczymi zwierciadłami M' i N' lub pryzmatami o odpowiadających im



Rys. 9. Układ teleskopowy kamery



Rys. 10. Układ optyczny wizjera elektronowego

powierzchniach odbijających. Z rys. 8 widać, iż zwierciadła pomocnicze są ustawione równolegle do zwierciadeł zasadniczych.

Zmieniając parami zwierciadła zasadnicze na pomocnicze i odwracając układ z rys. 8 otrzymamy teleskopowy układ zwierciadlany (rys. 9).

Kamera w takim wykonaniu charakteryzuje się dużą bazą transmisji oraz małymi wymiarami, tak więc można dokonywać analizy sceny z dużo większych odległości przy zachowaniu jeszcze efektu stereoskopowego.

Niemniej ważną częścią składową kamery jest tzw. wizjer służący do bezpośredniej kontroli obrazu nadawanego przez operatora. W tym celu stosuje się wizjer elektronowy. Składa się on z dwu kineskopów (lub jednego z dwoma rastrami) powiązanych konstrukcyjnie z prostym stereoskopem (rys. 10). Stereoskop składa się z dwóch zwierciadeł zasadniczych (N i M) i dwóch pomocniczych (N' i M'), umieszczonych pod kątem 45° do osi optycznej. Są one umocowane na stałe, z wyjątkiem jednego ze zwierciadeł pomocniczych (np. M'), które może obracać się dookoła osi poziomej, prostopadłej do płaszczyzny rysunku. Umożliwia to ustawienie wizjera na najlepszy dla oczu operatora efekt stereoskopowy.

2.2. Rozdzielacze obrazów — podział stereopary w odbiorniku

Aby uzyskać obraz przestrzenny, odbiornik telewizji stereoskopowej powinien nie tylko odtwarzać dwa obrazy (lewy i prawy) nadawane przez kamerę, lecz rozdzielać je w ten sposób, ażeby lewe oko widziało tylko lewe obrazy, a prawe oko tylko prawe obrazy.

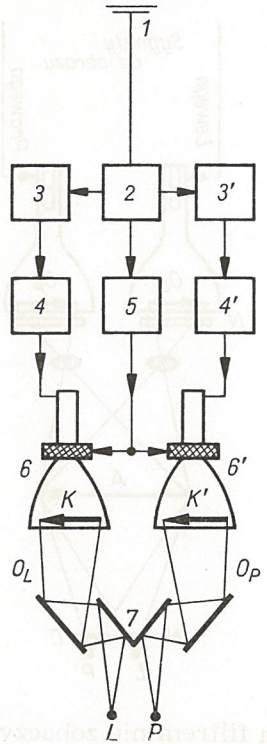
2.2.1. Okularowe metody podziału stereopary

Odbiornik telewizyjny tego typu posiada dwa kineskopy (lub jeden z podwójnym ekranem) i dwa kanały wizji. Jako układ rozdzielający stereoparę stosuje się dowolny typ stereoskopu lub okulary z polaroidów, albo wreszcie okulary z filtrów barwnych.

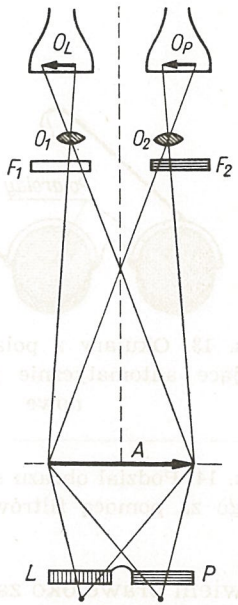
Na rys. 11 przedstawiono uproszczony schemat blokowy odbiornika ze stereoskopem zwierciadlanym. Odtwarzane na ekranach kineskopów K i K' obrazy lewy (O_L) i prawy (O_P) są widziane poprzez stereoskop, przy czym lewym okiem L obserwator widzi lewy obraz, a prawym P — prawy obraz.

Do oglądania obrazu stereoskopowego można zastosować przy odbiorze okulary z polaroidów. Do tych celów używa się dwu polaroidów F_1 i F_2 (rys. 12) o płaszczyznach polaryzacji wzajemnie prostopadłych, które umieszcza się przed ekranami lamp obrazowych. Na ekranie A otrzymamy obrazy prawy i lewy, przy czym składają się one ze światła spolaryzowanego liniowo, prostopadle względem siebie. Obserwator posługuje się okularami z takich samych polaroidów, przy czym dla lewego oka L płaszczyzna polaryzacji jest równoległa do płaszczyzny polaryzacji po-

laroidu F_1, a dla prawego P — do płaszczyzny polaroidu F_2. Przez takie okulary obserwator zobaczy na ekranie A lewym okiem tylko lewy obraz O_L, a prawym tylko prawy O_P, ponieważ polaroidy F_1 i L oraz F_2 i P są równoległe, a F_1 i P oraz F_2 i L — skrzyżowane. Stosując polaroidy do celów telewizyjnych trzeba wziąć pod uwagę to, by między obserwatorem i lampą obrazową nie było środowiska depolaryzującego. W przypadku aparatu projekcyjnego należy zwrócić uwagę na to, żeby ekran nie miał właściwości depolaryzujących. Poza tym płaszczyzny polaroidów



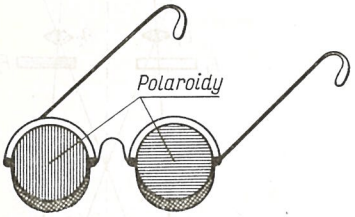
Rys. 11. Układ odbiornika ze stereoskopem zwierciadlanym: *1* — antena odbiorcza, *2* — wzmacniacz wielkiej częstotliwości, *3* i *3'* — filtry elektryczne kanałów lewego i prawego, *4* i *4'* — wzmacniacze wizji, *5* — urządzenia synchronizujące i odchylające, *K* i *K'* (*6* i *6'*) — kineskopy, *7* — przystawka optyczna



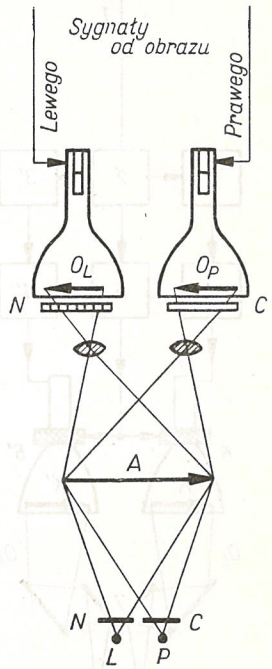
Rys. 12. Podział obrazu telewizyjnego za pomocą okularów

obserwatora i lamp obrazowych muszą być stale równoległe. W przeciwnym razie (np. na skutek pochylenia głowy) płaszczyzny polaryzacji rozejdą się. Kąt między płaszczyznami nie powinien przekraczać 4°. Aby tego uniknąć, polaroidy w okularach umieszcza się na zawiasach (rys. 13), aby pod działaniem siły ciężkości przyjmowały stale położenie pionowe.

Polaroidy ustawiane przed kineskopem i obserwatorem można zastąpić filtrami barwnymi (o dwu barwach dopełniających). Załóżmy, że lewy i prawy obraz (rys. 14) jest rzutowany na jeden ekran przez kolorowe filtry N i C dwóch dopełniających barw, np. niebieskiej i czerwonej. Obserwator posługuje się okularami z takich samych filtrów; filtr dla lewego oka powinien być takiego samego koloru jak lewy obraz O_L (w naszym przypadku niebieski), zaś dla prawego — jak dla obrazu O_P (tzn. czerwony). Przy takim rozmieszczeniu filtrów otrzymamy podział obra-



Rys. 13. Okulary z polaroidów utrzymujące automatycznie położenie pionowe



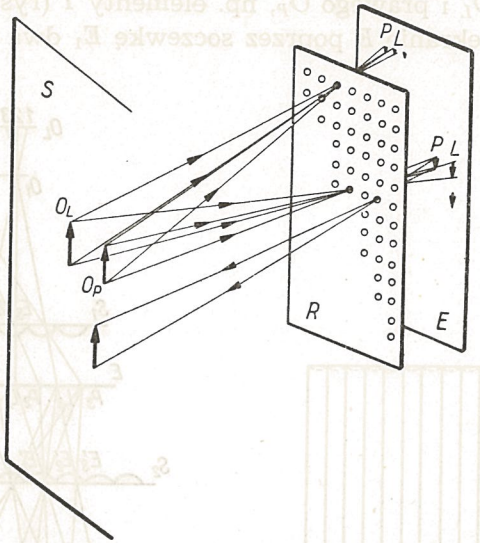
Rys. 14. Podział obrazu stereoskopowego za pomocą filtrów barwnych

zów, bowiem prawe oko zasłonięte czerwonym filtrem nie zobaczy obrazu niebieskiego (lewego), a lewe oko zasłonięte filtrem niebieskim nie zobaczy obrazu czerwonego (prawego). Ten sposób podziału obrazu jest nadzwyczaj prosty i obserwator może wykonywać dowolne ruchy. Jednakże podwójne filtry z kolorowego szkła albo z barwionej żelatyny pochłaniają dużo światła.

2.2.2. Ekranowe metody podziału stereopary

Podział obrazów bez pomocy okularów dokonuje się bezpośrednio na ekranie aparatu projekcyjnego lub na ekranie kineskopu i dlatego jest on wspólny dla wszystkich widzów. Zastanowimy się jedynie nad niektórymi typami tego rodzaju urządzeń znanych pod nazwą e k r a n ó w r a s t r o w y c h. Z rozważań wynika, że aby uzyskać efekt stereosko-

powy przy podziale obrazów za pomocą ekranów rastrowych, promienie od prawego i lewego obrazu powinny przejść dwukrotnie przez ekran rastrowy zanim dotrą do oka obserwatora. Układy rastrowe stanowią mnóstwo drobnych elementów optycznych rozłożonych na płaszczyźnie.



Rys. 15. Zasada działania siatki rastrowej

Tzw. siatka rastrowa ma postać powierzchni dziurkowanej R (rys. 15); rzutując przez taką siatkę obrazy stereopary — lewy O_L i prawy O_P na ekran E otrzymamy na ekranie obrazy O_P i O_L w ilości równej liczbie otworów w rastrze.

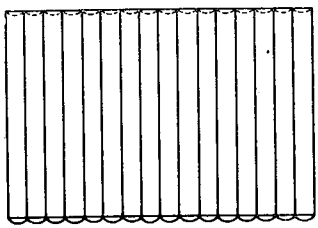
Istnieją również tzw. systemy rastrowe szczelinowe, tworzące siatkę składającą się z równoległych pasków na przemian przezroczystych i nieprzezroczystych tworzących raster pionowy.

Za pomocą takiego systemu rastrowego z ekranem odbijającym możemy uzyskiwać obrazy stereoskopowe tylko w tych urządzeniach telewizyjnych, które są przystosowane do projekcji. W odbiorniku telewizyjnym natomiast, aby móc oglądać obraz naprzeciw odbiornika, należy stosować ekran półprzezroczysty. Siatka rastrowa w tym przypadku z ekranem półprzezroczystym nie spełni swego zadania, gdyż widz zarówno lewym, jak i prawym okiem będzie widział obrazy lewe i prawe stereopary. Ażeby zasłonić wszystkie obrazy prawe dla lewego oka, i odwrotnie, należy zastosować dodatkową siatkę rastrową.

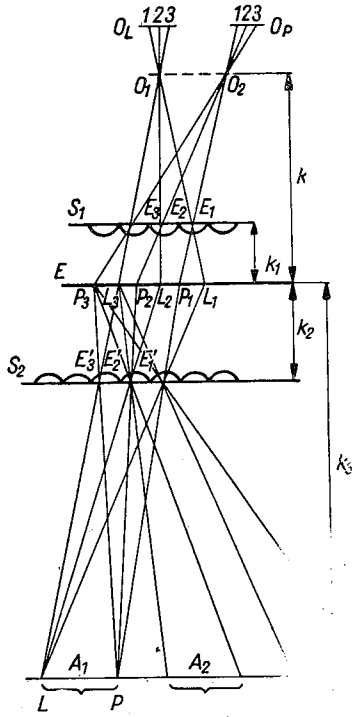
Wadą siatek rastrowych jest dwu- trzykrotna strata światła z powodu tego, iż zaledwie niewielką część całej płaszczyzny zajmują szczeliny. Bardziej wydajne są tzw. ekrany soczewkowe. Jest to przezroczysty ekran z umieszczonymi na nim pionowo wieloma soczewkami cylindrycz-

nymi (bądź stożkowymi) o wymiarach takich, że rastrowa struktura ekranu utworzona przez nie odpowiada liniowej strukturze wybierania obrazu.

Rozpatrzmy podział obrazu za pomocą ekranów cylindrycznych (rys. 16). Weźmy pod uwagę dwa odpowiadające sobie elementy obu obrazów, lewego O_L i prawego O_P, np. elementy *1* (rys. 17). Zauważymy, że tworzą one na ekranie E poprzez soczewkę E_1 dwa odpowiadające im



Rys. 16. Siatka rastrowa z soczewek cylindrycznych



Rys. 17. Podział obrazu stereoskopowego za pomocą siatki cylindrycznej

obrazy „L_1" i „P_1". Tak samo i elementy *2* tworzą poprzez soczewkę E_2 dwa odpowiednie obrazy „L_2" i „P_2", zaś poprzez soczewkę E_3 — obrazy „L_3" i „P_3" itd. Elementy rozmieszczone na odpowiadających sobie prostych pionowych lewego i prawego obrazu są rzutowane wzdłuż odpowiednich prostych na ekranie E.

W ten sposób obraz stereoskopowy O_LO_P utworzy na ekranie dwa pionowe, ułożone kolejno rastry, przy czym paski pochodzące od prawego obrazu będą leżeć na lewo od pasków lewego obrazu.

Jeżeli obserwator znajduje się w płaszczyźnie A, to żeby mógł on widzieć lewym okiem tylko lewy raster ekranu E, a prawym tylko prawy, należy pomiędzy obserwatorem i ekranem E umieścić drugi soczewkowy ekran S_2. Wtedy obserwator w punkcie A_1 zobaczy lewym okiem poprzez soczewki E'_1, E'_2, E'_3, lewy raster L_1, L_2, L_3, a prawym przez te same soczewki zobaczy prawy raster P_1, P_2, P_3. Drugi obserwator

w punkcie A_2 zobaczy to samo, tylko przez inne soczewki; tak np. elementy „P_3", „L_3" — poprzez soczewkę E_2'. W ten sposób każdy obserwator znajdujący się w płaszczyźnie pionowej A będzie widział na ekranie E obraz trójwymiarowy.

Rozpatrzymy obecnie rozmieszczenie poszczególnych rastrów cylindrycznych S_1 i S_2 od obiektywów, ekranu E i odległości od widzów A (rys. 17).

Odległość k_1 ustawienia pierwszego rastra S_1 od ekranu E oblicza się z zależności

$$k_1 = \frac{k}{1+\gamma},$$

gdzie:

k — odległość od ekranu do obiektywów,

γ — powiększenie kątowe soczewki cylindrycznej.

Cały układ projektuje się w ten sposób, by ekran soczewkowy S_1 znajdował się jak najbliżej ekranu E, ze względu na natężenie światła w układzie. Dlatego też zwykle ekran E i S_1 umieszcza się w jednej przezroczystej ramce ustawionej wewnątrz kineskopu.

Ustawienie ekranu soczewkowego S_2 zależy od odległości k_3 widzów od ekranu E

$$k_2 = \frac{k_1}{k} \cdot k_3$$

W szczególnym przypadku, gdy $k_3 = k$, siatki rastrowe są oddalone od ekranu na taką samą odległość ($k_1 = k_2$).

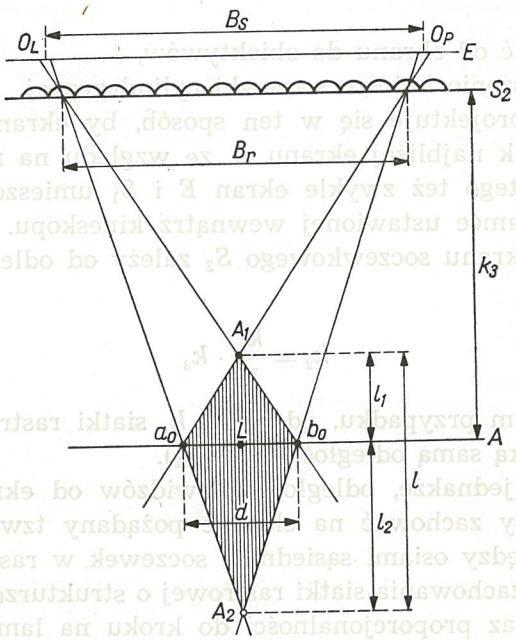
W ogólności jednakże, odległość k_3 widzów od ekranu dobiera się w ten sposób, by zachować na ekranie pożądany tzw. krok rastru m i odległość n między osiami sąsiednich soczewek w rastrach; narzucone to jest potrzebą zachowania siatki rastrowej o strukturze liniowej obrazu telewizyjnego oraz proporcjonalności do kroku na lampie analizującej.

Pewną wadę rozpatrywanych rastrów cylindrycznych stanowi konieczność rozmieszczenia widzów w płaszczyźnie pionowej (np. jeden szereg siedzących, a drugi stojących tuż za nimi), co w dużym stopniu ogranicza ich liczbę. Jednakże taki układ może być wykorzystany w odbiornikach indywidualnych. Strefa widzenia rastrowego ekranu złożonego z soczewek cylindrycznych jest ograniczona powierzchnią a_oA_1, b_oA_2 (rys. 18). Dowolny element obrazu k na ekranie E przedstawia geometrycznie rzut poprzez cylindryczną soczewkę ekranu S_2 czynnego otworu obiektywu. Dlatego szerokość strefy widzenia a_ob_o dla każdego oka (jeśli odległość obserwatora od ekranu E jest równa odległości od obiektywu) będzie równa czynnemu otworowi rzutującego obiektywu d, ponieważ przy przesunięciu oka poza granice a_ob_o będą już widziane sąsiednie elementy obrazu przeznaczone dla drugiego oka. Wartość d nie może przewyższać więcej niż dwukrotnie bazy ocznej (130 mm), ponie-

waż obok rombu dla lewego oka leży romb strefy widzenia prawego oka i przy najmniejszym ruchu głowy jedno oko będzie przechodzić do strefy widzenia drugiego oka. Głębokość strefy widzenia L można znaleźć z rys. 18 w sposób następujący:

$$L = L_1 + L_2 \approx \frac{2d \cdot k_3}{B_r}.$$

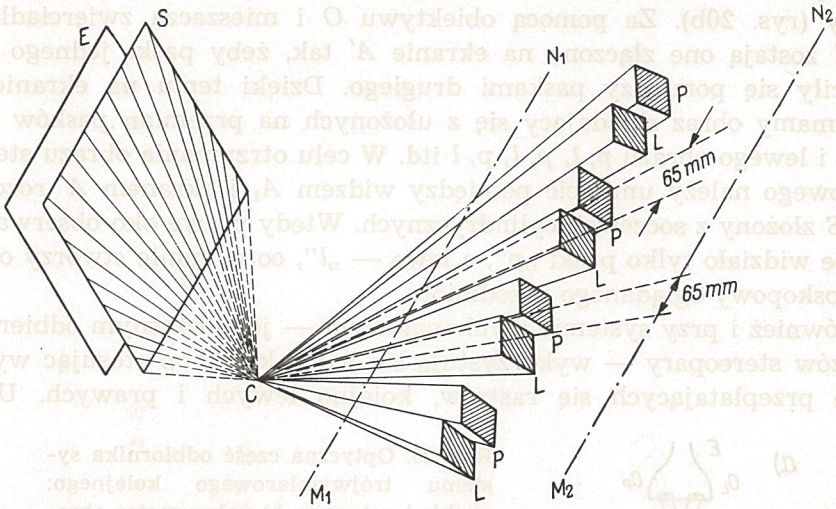
Jak z powyższego wynika, obserwatorzy będą mieli możliwość ruchu głowy w ograniczonych przestrzeniach o kształcie rombów rozmieszczonych na pionowej płaszczyźnie A.



Rys. 18. Określenie strefy widzenia dla rastru cylindrycznego

Są stosowane również ekrany rastrowe z soczewek stożkowych, które umożliwiają rozszerzenie audytorium widzów. Mają one główne zastosowanie w filmie stereoskopowym; ze względu na brak miejsca nie będziemy tu ich omawiać, tym bardziej że metody analizy tych układów są podobne jak dla rastrów cylindrycznych. Na rys. 19 pokazano rozkład stref widzenia takich układów dla szeregu widzów, gdzie przez L jest oznaczona lewa strefa widzenia dla każdego z nich, a przez P — prawa strefa widzenia. Jeżeli dla jakiegoś rzędu przyjmiemy odległość między środkami stref widzenia L i P równą 65 mm, to tutaj widzowie mają stosunkowo dużą swobodę ruchów głową. To samo będzie aktualne i dla bardziej oddalonych rzędów. Jednak ze zbliżaniem się do ekranu ruchy głową będą coraz bardziej ograniczone i na linii M_1N_1, gdzie baza oczna

wychodzi poza skrajne krawędzie lewej i prawej strefy, widz zupełnie straci możliwość widzenia stereoskopowego. W ten sposób przestrzeń pomiędzy punktem C i linią M_1N_1 okazuje się przy obserwacji stereoskopowej martwą przestrzenią i zajmuje około 1/3 całej strefy widzenia.



Rys. 19. Strefy widzenia dla siatki rastrowej z soczewek stożkowych: LP — widzowie, linie M_1N_1 i M_2N_2 określają obszar, w którym występuje efekt stereoskopowy, S — siatka rastrowa nałożona na ekran E

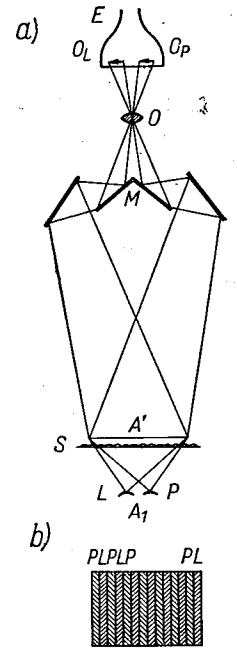
Druga granica leży na linii M_2N_2, gdzie krawędzie wewnętrzne lewego i prawego ostrosłupa rozchodzą się na odległość większą niż długość bazy ocznej.

Rastrowy podział obrazów za pomocą soczewkowych ekranów ma niewątpliwe zalety w stosunku do podziału obrazów za pomocą okularów, ale niemniej opisane tu współczesne metody takiego podziału mają jednak szereg braków, jak mała strefa widzenia, nierównomierność porcji energii dochodzących do lewego i prawego oka. Szczególnie szkodliwie wpływa oddziaływanie ramki. Jest to niedogodność towarzysząca wszystkim sposobom podziału obrazów. Istota zagadnienia jest w tym, że obraz trójwymiarowy powinien rozciągać się w przestrzeni tak samo poza ekranem, jak i przed nim. Ramka powinna przedstawić coś w rodzaju okna, przez które ogląda się obraz trójwymiarowy. Dla scen rozgrywających się za ekranem nie ma trudności. Natomiast ramka będzie przeszkadzać tym szczegółom obrazu, które są widoczne na jej tle, jak gdyby się znajdowały w sali widowiskowej. Należy dokonać pewnego wysiłku woli, żeby oderwać obraz przedmiotu od ramki i widzieć stereoskopowo również i w tej części sceny. Omówione braki są mniej dostrzegalne w miarę zmniejszania obserwowanego ekranu.

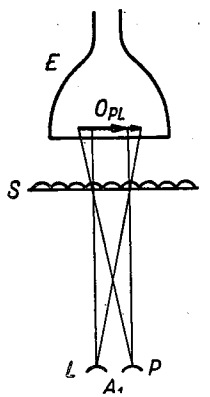
2.3. Uproszczenia systemów podziału stereopary obrazu telewizyjnego

W systemie kolejnym nadawania obrazów składowych stereopary budowa optyczna odbiornika z jedną lampą jest pokazana na rys. 20a. Obrazy O_P i O_L na ekranie kineskopu E będą stanowić dwa oddzielne rastry (rys. 20b). Za pomocą obiektywu O i mieszacza zwierciadlanego M zostają one złączone na ekranie A' tak, żeby paski jednego rozmieściły się pomiędzy paskami drugiego. Dzięki temu na ekranie A' otrzymamy obraz składający się z ułożonych na przemian pasków prawego i lewego obrazu p, l, p, l, p, l itd. W celu otrzymania obrazu stereoskopowego należy umieścić pomiędzy widzem A_1 i ekranem A' rozdzielacz S złożony z soczewek cylindrycznych. Wtedy prawe oko obserwatora będzie widziało tylko paski „p", a lewe — „l", co w sumie stworzy obraz stereoskopowy oglądanego przedmiotu.

Również i przy systemie dwukanałowym — jednoczesnym odbieraniu obrazów stereopary — wykorzystuje się jeden kineskop stosując wybieranie przeplatających się rastrów, kolejno lewych i prawych. Układ



Rys. 20. Optyczna część odbiornika systemu trójwymiarowego kolejnego: a) układ optyczny, b) pełny raster obrazu stereoskopowego



Rys. 21. Część optyczna odbiornika systemu trójwymiarowego przy bezpośredniej obserwacji obrazu

optyczny takiego odbiornika przedstawiony jest na rys. 21 Samo urządzenie odbiorcze jest przydatne zarówno przy jednoczesnym, jak i kolejnym nadawaniu obrazów stereopary.

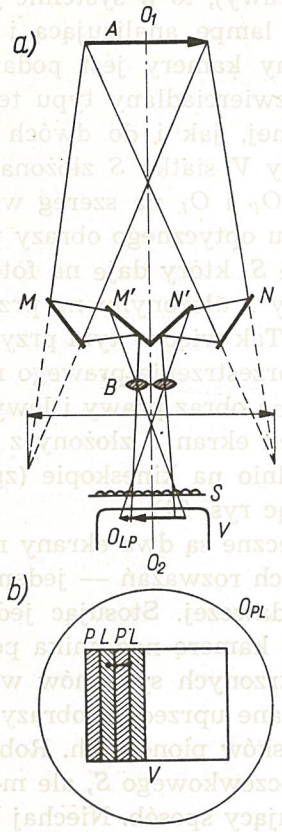
Zastanowimy się obecnie nad pewną modyfikacją systemów służących do podziału obrazu. Mianowicie specyfika telewizyjnego nadawania obrazu dopuszcza przeniesienie jednej z siatek rastrowych, w naszym przy-

padku S_1, z odbiornika do kamery nadawczej. Co więcej, siatka ta może być pominięta w ogóle, jeżeli zastosować tzw. wybieranie pionowe (zamiast poziomego) i na ekranie odbiorczym E uzyskać pionowe paski kolejno następujących po sobie obrazów lewych i prawych stereopary.

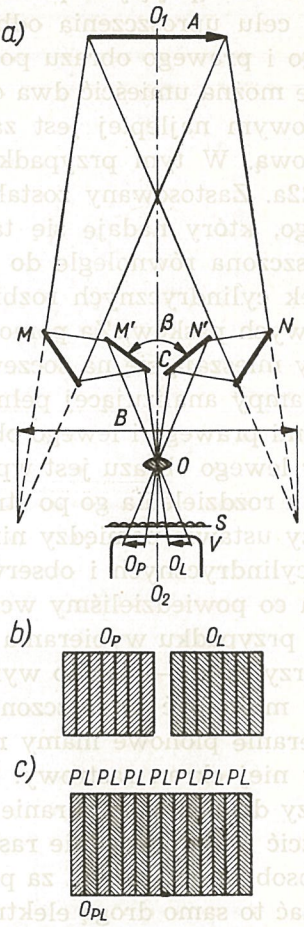
W celu uproszczenia odbiornika można dokonać połączenia rastrów lewego i prawego obrazu po stronie nadawczej. Jeżeli na jednej lampie będzie można umieścić dwa obrazy (lewy i prawy), to w systemie jednokanałowym najlepiej jest zastosować jedną lampę analizującą i jedną obrazową. W tym przypadku układ optyczny kamery jest podany na rys. 22a. Zastosowany został tu rozdzielacz zwierciadlany typu teleskopowego, który nadaje się tak samo do jednej, jak i do dwóch lamp. Umieszczona równolegle do fotokatody lampy V siatka S złożona z soczewek cylindrycznych rozbije każdy obraz O_P i O_L na szereg wąskich pionowych pasków. Za pomocą takiego układu optycznego obrazy prawy i lewy mieszają się na soczewkowym ekranie S, który daje na fotokatodzie lampy analizującej pełny raster pionowy z ułożonymi na przemian paskami prawego i lewego obrazu (rys. 22b). Tak więc w tym przypadku raster lewego obrazu jest wpisany w wolne przestrzenie prawego rastru. W celu rozdzielenia go po stronie odbiorczej na obraz prawy i lewy, wystarczy ustawić pomiędzy nim i widzem jeden ekran S złożony z soczewek cylindrycznych i obserwować bezpośrednio na kineskopie (zgodnie z tym co powiedzieliśmy wcześniej omawiając rys. 21).

W przypadku wybierania poziomego konieczne są dwa ekrany rastrowe, przy czym — jak to wynika z poprzednich rozważań — jeden z rastrów może być umieszczony po stronie nadawczej. Stosując jednakże wybieranie pionowe mamy możność uprościć kamerę nadajnika pomijając w niej ekran rastrowy. Z analizy rozpatrzonych systemów wynika, że przy dzieleniu na ekranie potrzeba nadawane uprzednio obrazy przekształcić na odpowiednie rastry złożone z pasków pionowych. Robiliśmy to sposobem optycznym za pomocą ekranu soczewkowego S, ale możemy uzyskać to samo drogą elektryczną w następujący sposób. Niechaj będzie użyta do transmisji kamera, której część optyczną bez ekranu przedstawia rys. 23a. Wybieranie pionowe prawego O_P i lewego O_L obrazu odbywa się normalnie linia za linią, bez żadnych odstępów (rys. 23b). Aby otrzymać pełny rastr w urządzeniu odbiorczym, wybieranie powinno być nieco inne, a mianowicie: strumień wybierający powinien zostawiać pomiędzy sąsiednimi liniami odstępy równe szerokości linii. Wtedy, kiedy strumień lampy analizującej wybiera prawy obraz, strumień kineskopu przejdzie po całym obrazie i na początku nadawania lewego obrazu powinien zawrócić na pierwszą linię (rys. 23c) i wpisać linie lewego obrazu pomiędzy liniami prawego. Czas powrotu strumienia w odbiorniku powinien być zgodny z czasem wybierania przestrzeni między obrazem prawym i lewym w lampie analizującej. Przy opisanym wybieraniu pionowym część optyczna odbiornika pozostaje bez zmiany, jak na rys. 21.

Zastosowanie metody rozdzielania obrazów na ekranie wymaga bardzo stabilnego ułożenia rastru na kineskopie. W przeciwnym przypadku niewielkie przesunięcie go w kierunku poziomym może spowodować utratę



Rys. 22. Kamera telewizyjna systemu trójwymiarowego kolejnego: a) część optyczna, b) pełny raster obrazu



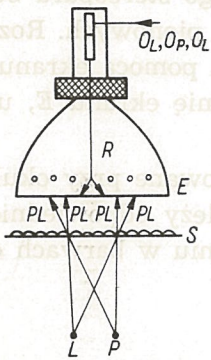
Rys. 23. Kamera telewizyjna systemu trójwymiarowego z jednym obiektywem: a) układ optyczny, b) rastry obrazów kamery, c) usytuowanie rastru w odbiorniku

efektu stereoskopowego i żeby otrzymać go z powrotem, obserwator musi zmienić pozycję.

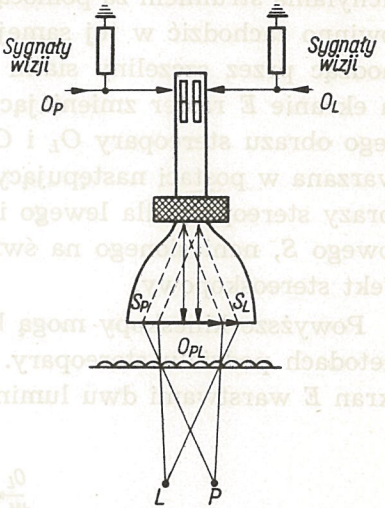
2.4. Kineskop stereoskopowy

Istnieje możliwość uzyskania obrazu stereoskopowego nie na ekranie projekcyjnym *E*, jak poprzednio podawano, lecz bezpośrednio na ekranie kineskopu. Jest to możliwe dzięki stosowaniu specjalnych kineskopów.

Na rys. 24 przedstawiono tzw. kineskop z elektrycznym przesunięciem strumienia. Kineskop taki w połączeniu z ekranem rastrowym S pozwala na odbiór obrazów trójwymiarowych. Przy wybieraniu pionowym strumień elektronowy, przechodząc pomiędzy pręcikami siatki R, do których zostało przyłożone zmienne napięcie sterujące U_S, utworzy raster na przykład lewego obrazu. Przy następnym obrazie napięcie U_S zmieni znak i strumień elektronowy utworzy raster prawego obrazu. Proces ten będzie się powtarzał, o ile okres napięcia sterującego U_S jest równy czasowi transmisji obu obrazów składowych. Widz, oglądający wskazany raster poprzez ekran soczewkowy S, dostrzeże go w postaci trójwymiarowego obrazu transmitowanych przedmiotów. Takie same rezultaty otrzymuje się przy wybieraniu poziomym. W tym celu okres sterującego napięcia U_S powinien być odpowiednio równy czasowi nadawania obrazu, linii lub elementu, zależnie od sposobu tworzenia rastru.



Rys. 24. Odtworzenie obrazów trójwymiarowych za pomocą elektrycznego formowania rastru



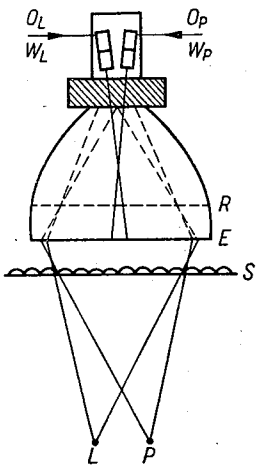
Rys. 25. Układ optyczny odbiornika telewizyjnego z kineskopem dwustrumieniowym systemu trójwymiarowego jednoczesnego

Do odbioru dwóch obrazów przy wybieraniu pionowym może być wykorzystany kineskop dwustrumieniowy (rys. 25) pracujący w systemie jednoczesnym. Sygnały wizyjne każdego obrazu doprowadza się do elektrod sterujących wyrzutnie elektronowe odpowiednich strumieni, które odtwarzają jednocześnie i równolegle pełny raster złożony z pasków prawego i lewego obrazu.

W systemach jednoczesnych do trójwymiarowego odtwarzania obrazów mogą być również zastosowane inne typy kineskopów.

Na rys. 26 jest pokazany kineskop z siatką rastrową R, mającą przecięcia pionowe (prostopadle do płaszczyzny rysunku). Dwie wyrzutnie elektronowe W_L i W_P są ustawione pod określonym kątem w ten sposób, że oba strumienie elektronowe przecinają się w płaszczyźnie siatki rastrowej R umieszczonej wewnątrz lampy przed ekranem E. W procesie odchylania strumieni za pomocą pola magnetycznego przecięcie strumieni powinno zachodzić w tej samej płaszczyźnie. Tak więc strumienie przechodząc przez szczeliny siatki R pod różnymi kątami będą odtwarzać na ekranie E raster zmieniających się kolejno elementów prawego i lewego obrazu stereopary O_L i O_P. W wyniku tego stereopara będzie odtwarzana w postaci następujących po sobie linii pionowych. Rozdzielając obrazy stereopary dla lewego i prawego oka za pomocą ekranu soczewkowego S, naniesionego na świecącą powierzchnię ekranu E, uzyskamy efekt stereoskopowy.

Powyższe kineskopy mogą być również stosowane przy okularowych metodach podziału stereopary. W tym celu należy odpowiednio pokryć ekran E warstwami dwu luminoforów o świeceniu w barwach dopełnia-



Rys. 26. Schemat kineskopu dwustrumieniowego z ekranem rastrowym

jących. Sposób podziału ekranu na kolejno zmieniające się paski barwne zależy od sposobu tworzenia rastru w danym rozwiązaniu koncepcyjnym systemu. Ponadto należy usunąć ekran soczewkowy S, a w zamian za to widzowie powinni być zaopatrzeni w odpowiadające wybranym dwu barwom dopełniającym okulary barwne.

3. PRZESYŁANIE OBRAZÓW PRZESTRZENNYCH NA ODLEGŁOŚĆ

3.1. Ogólne omówienie układów służących do przesyłania na odległość obrazów w telewizji przestrzennej

Z poprzednich rozważań wynika, że istnieje wiele sposobów realizacji systemu telewizji przestrzennej, zależnie od wyboru podzespołów optycznych i urządzeniowych. I tak można dokonać podziału na systemy z rozdzielaniem obrazów za pomocą okularów, na systemy, w których wykorzystuje się różnorakie ekrany rastrowe, na systemy wykorzystujące różne rozwiązania układów optycznych zarówno od strony nadawczej, jak i odbiorczej.

Obecnie przedyskutujemy system telewizji przestrzennej z punktu widzenia sposobu przesyłania i odbioru obrazów stereoskopowych. W tym celu umówimy się co do niektórych terminów z zakresu wybierania obrazu w telewizji przestrzennej.

Składowe obrazu stereoskopowego O_L i O_P będziemy nazywali „obrazem" (lewym lub prawym). Suma ich tworzy pełny „obraz stereoskopowy". Przy wybieraniu międzyliniowym będziemy rozróżniać pole nieparzyste i pole parzyste odpowiednich obrazów (lewego, prawego i stereoskopowego). W związku z tym będziemy rozróżniać termin „pole stereoskopowe" (obrazu stereoskopowego) i „pole" (obrazu składowego).

Wprowadzimy oznaczenie czasu nadawania w sekundach:

t_1 — czas nadawania jednego pola (lewego lub prawego);

t_2 — czas nadawania jednego pola stereoskopowego ($t_2 = 2t_1$);

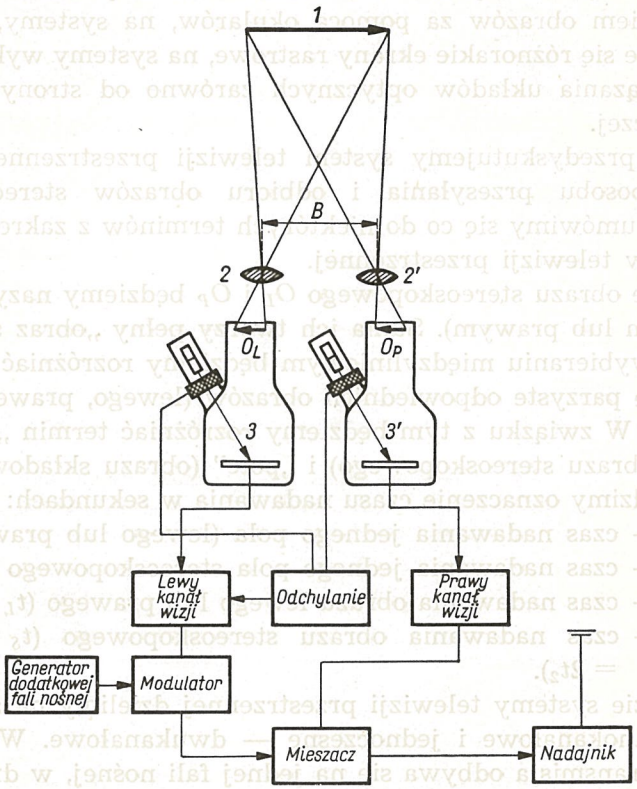
t_L i t_P — czas nadawania obrazu lewego lub prawego ($t_L = t_P = 2t_1$);

t_S — czas nadawania obrazu stereoskopowego ($t_S = t_L + t_P = 2t_2$).

W zasadzie systemy telewizji przestrzennej dzielimy na systemy kolejne — jednokanałowe i jednoczesne — dwukanałowe. W pierwszym przypadku transmisja odbywa się na jednej fali nośnej, w drugim — na dwóch falach nośnych równocześnie lub na dodatkowych falach nośnych. W obu przypadkach można stosować wybieranie pionowe, co — jak wiadomo — może uprościć realizację efektu stereoskopowego.

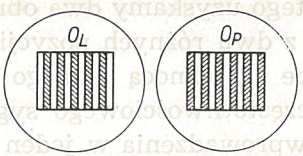
Na rys. 27 przedstawiono układ blokowy urządzenia nadawczego w systemie jednoczesnym. Obiekt nadawany (*1*) jest rzutowany na fotokatody lamp analizujących (*3* i *3'*) poprzez obiektywy (*2* i *2'*) o bazie transmisji *B*. W wyniku tego uzyskamy dwa obrazy (O_L i O_P) nadawanego obiektu „widzianego" z dwu różnych pozycji. Uzyskane w ten sposób dwa obrazy są przesyłane za pomocą jednego nadajnika po uprzednim dokonaniu rozdzielenia częstotliwościowego sygnałów od lewego i prawego obrazu za pomocą wprowadzenia w jeden z kanałów nośnej dodatkowej. W ten sposób każdy z kanałów pracuje w warunkach telewizji

dwuwymiarowej (przy założeniu tej samej ilości linii). Jeżeli jako układ optyczny kamery zastosujemy rozdzielacz zwierciadlany D z ekranem soczewkowym S, to obrazy składowe są przetwarzane na rastry z pasków pionowych (rys. 28). Na rysunku rastry prawego i lewego obrazu mają jednakowe odstępy, przesunięte wzajemnie o jeden pasek pionowy. Możemy więc umieścić obydwa rastry na fotokatodzie jednej lampy analizującej, w ten sposób będziemy mogli system jednoczesny zrealizować na jednej lampie strumieniowej, zgodnie z układem optycznym z rys. 22.



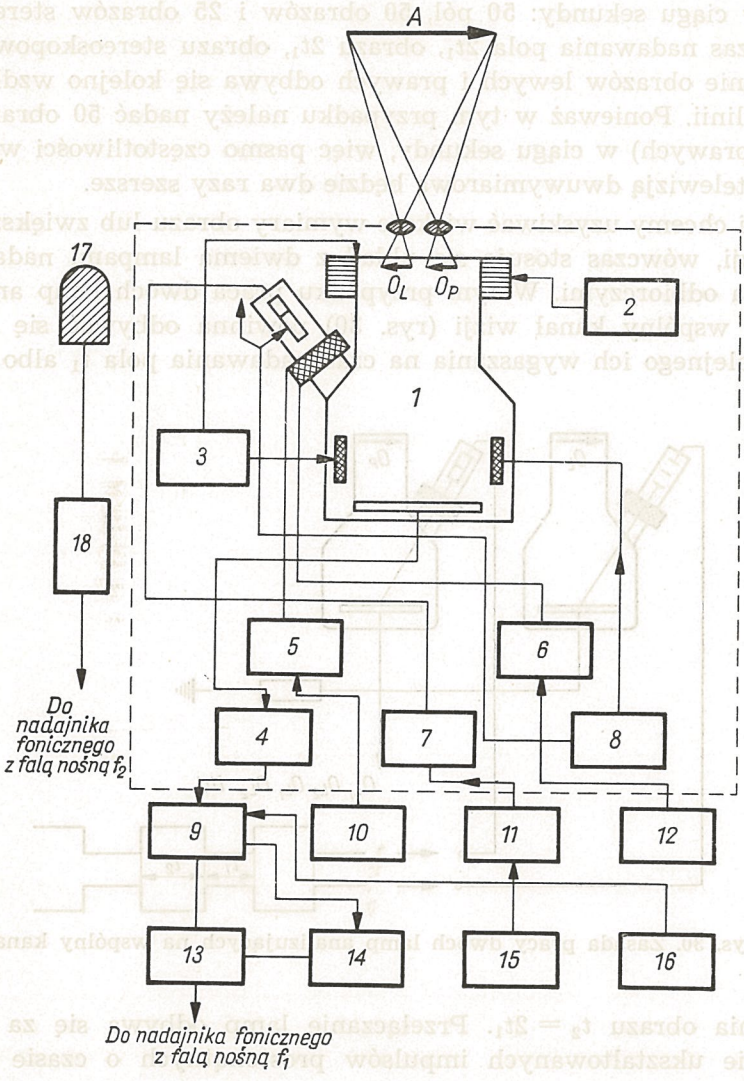
Rys. 27. Uproszczony układ blokowy nadajnika w systemie jednoczesnym telewizji przestrzennej

Kolejny sposób nadawania stereopary polega na kolejnym nadawaniu zmieniających się na przemian obrazów lewych i prawych. System taki może pracować zarówno na jednej, jak i dwu lampach analizujących.



Rys. 28. Rastry obrazów stereopary w postaci pasków pionowych

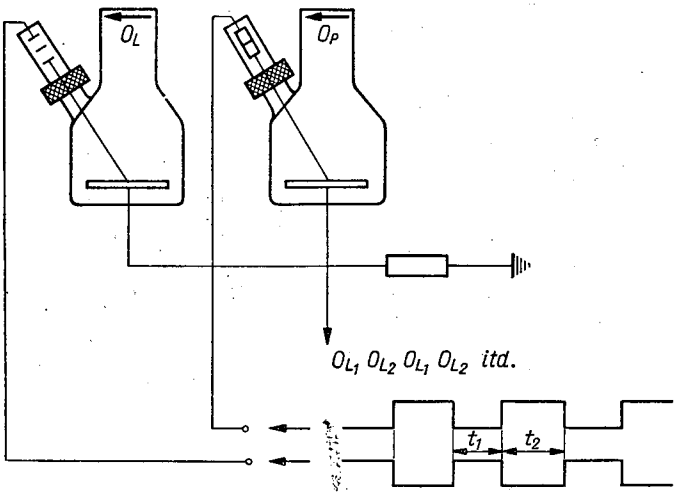
Na rys. 29 przedstawiono schemat blokowy kolejnego systemu telewizji trójwymiarowej z jedną lampą analizującą. Bloki *1*—*8* mieszczą się w kamerze. Optyczna część kamery składa się z dwu obiektywów. Można



Rys. 29. Układ blokowy nadajnika w systemie kolejnym telewizji przestrzennej: *1* — lampa analizująca, *2* — zasilanie soczewki ogniskującej, *3* — napięcie przyspieszające obraz elektronowy, *4* — przedwzmacniacz sygnału wizyjnego, *5* — wzmacniacz odchylania pionowego, *6* — wzmacniacz odchylania poziomego, *7* — wzmacniacz impulsów gaszących, *8* — zasilanie kamery, *9* — wzmacniacz wizyjny, *10* — generator odchylania pionowego, *11* — formowanie impulsów gaszących, *12* — generator odchylania poziomego, *13* — liniowy wzmacniacz wizyjny, *14* — urządzenie kontrolne, *15* — generator impulsów, *16* — generator retuszu, *17* — mikrofon, *18* — kanał dźwięku towarzyszącego

również stosować układ optyczny z jednym obiektywem i rozdzielaczem zwierciadlanym analogicznie do rys. 6 lub 7. Podobnie jak w telewizji dwuwymiarowej, wystarczy nadawać w ciągu sekundy 25 pól i obrazów, aby nie wystąpił efekt migotania. Wychodząc z tego warunku, należy nadać w ciągu sekundy: 50 pól, 50 obrazów i 25 obrazów stereoskopowych; czas nadawania pola $2t_1$, obrazu $2t_1$, obrazu stereoskopowego $2t_1$. Wybieranie obrazów lewych i prawych odbywa się kolejno wzdłuż tych samych linii. Ponieważ w tym przypadku należy nadać 50 obrazów (lewych i prawych) w ciągu sekundy, więc pasmo częstotliwości w porównaniu z telewizją dwuwymiarową będzie dwa razy szersze.

Jeżeli chcemy uzyskiwać większe wymiary obrazu lub zwiększać bazę transmisji, wówczas stosuje się układ z dwiema lampami nadawczymi i dwiema odbiorczymi. W tym przypadku praca dwóch lamp analizujących na wspólny kanał wizji (rys. 30) powinna odbywać się kolejno, drogą kolejnego ich wygaszania na czas nadawania pola t_1 albo na czas



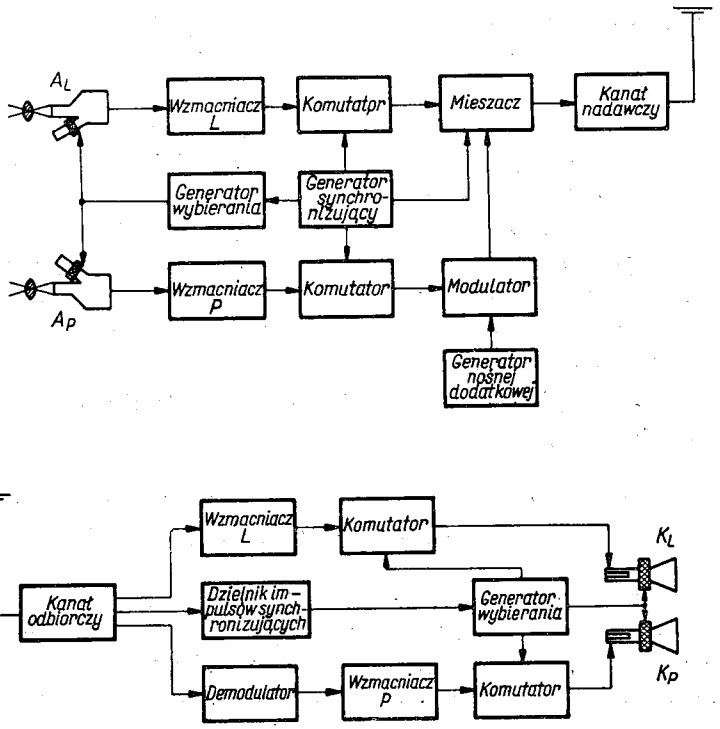
Rys. 30. Zasada pracy dwóch lamp analizujących na wspólny kanał

nadawania obrazu $t_2 = 2t_1$. Przełączanie lamp odbywa się za pomocą specjalnie ukształtowanych impulsów prostokątnych o czasie trwania równym t_2.

Można wyeliminować potrzebę stosowania wymienionych impulsów prostokątnych do przełączania obrazów w systemie jednokanałowym wówczas, jeżeli zastosować wybieranie pionowe. Układy elektryczny i optyczny urządzenia nadawczego będą analogiczne jak na rys. 29 i 7. Wadą takiego pionowego wybierania jest pogorszenie warunku migotania, gdyż czas poświaty ekranu ogranicza się do czasu nadawania jednego pola.

Rozpatrując sposoby telewizyjnego przesyłania obrazów przestrzennych widzieliśmy, że przy zastosowaniu standartowej ilości linii pasmo częstotliwości poszerza się dwukrotnie w porównaniu z telewizją dwuwymiarową. Istnieje jednakże wiele sposobów zawężania pasma częstotliwości w kanale przesyłowym.

Jednym ze sposobów zawężania pasma częstotliwości dwukrotnie jest zastosowane wybieranie obrazu z tzw. przerywaniem linii. W wyniku takiego wybierania struktura rastru obrazu telewizyjnego będzie nie liniowa, a punktowa. Można również dokonywać przerywania obrazu nie



Rys. 31. Układ blokowy systemu telewizji przestrzennej z wybieraniem punktowym: a) urządzenia nadawcze, b) urządzenia odbiorcze

tylko w płaszczyźnie poziomej lecz i pionowej. Zachowując wybieranie międzyliniowe i przerywając wybieranie linii co jeden element uzyskujemy tzw. r a s t e r p u n k t o w y. Taki sposób wybierania wymaga dodatkowego urządzenia w postaci e l e k t r o n o w e g o k o m u t a t o r a, który generuje impulsy w celu kolejnego włączania i wyłączania kanału wizji. Komutatory są umieszczone w nadajniku i odbiorniku i pracują synchronicznie.

Na rys. 31a przedstawiono układ blokowy nadajnika w systemie telewizji przestrzennej z wybieraniem punktowym. Na wyjściu lamp anali-

zujących A_L i A_P uzyskujemy sygnały obrazu lewego i prawego, które po wzmocnieniu są przesyłane na komutatory. Za pomocą tych ostatnich w okresie wybierania pierwszego pola z obrazu lewego i prawego są wybierane tylko na przykład nieparzyste elementy nieparzystych linii, a w okresie wybierania drugiego pola — parzyste elementy powyższych linii. W okresie trzeciego i czwartego pola są wybierane parzyste i nieparzyste elementy parzystych linii. Tak więc w każdym kanale obraz jest nadawany w okresie czasu nadawania czterech pól, co przy 50 polach na sekundę daje 12,5 obrazów. W wyniku tego pasmo częstotliwości w każdym kanale skraca się podwójnie. Sygnały z obu kanałów są przesyłane następnie do mieszacza, przy czym z jednego kanału bezpośrednio, a z drugiego w postaci modulowanych drgań nośnej dodatkowej. Mieszanina ta, zajmująca standartowe pasmo częstotliwości, jest przesyłana następnie na kanał nadawczy.

Na rys. 31b przedstawiono układ blokowy odbiornika. Sygnały odebrane przez kanał odbiorczy po detekcji są rozdzielane za pomocą filtrów elektrycznych i skierowywane do lewego i prawego kanału, przy czym sygnały obrazu prawego są detekowane w demodulatorze drugi raz. Ponieważ praca komutatorów w nadajniku i odbioniku jest zsynchronizowana za pomocą impulsów linii, więc przechodzące przez nie sygnały na kineskopy K_L i K_P odpowiadają w danej chwili nadawczym sygnałom lewego i prawego obrazu. Optyczny układ odbiornika spełniający zadanie rozdzielania obrazów stereopary może być przyjęty dowolnie z opisanych poprzednio układów.

3.2. Niektóre właściwości transmisji obrazu przestrzennego

Obraz trójwymiarowy w porównaniu z obrazem dwuwymiarowym daje walory plastyczności obrazu i głębi transmitowanej sceny. Szczególnie efektownie odczuwa się to przy ruchu obiektów sceny nadawanej w kierunku kamer, gdzie widz odnosi wrażenie, że poruszający się obiekt przesuwa się pomiędzy nim a ekranem. Takie samo wrażenie odbiera się, gdy podczas oglądania obrazu następuje szybka zmiana bazy transmisji. Wskutek tego transmitowana scena wydaje się zbliżać do widza, przy powiększaniu bazy, lub oddalać — przy zmniejszaniu bazy.

Przy rozpatrywaniu trójwymiarowych obrazów telewizyjnych powstaje szerego osobliwości, które nie mają miejsca ani w zwykłych obrazach telewizyjnych, ani w stereoskopowych zdjęciach fotograficznych. Te osobliwości powstają w następstwie wzajemnego oddziaływania różnych zniekształceń, właściwych transmisji telewizyjnej w obrazach dla lewego i prawego oka. Zaliczając do tego rodzaju zniekształceń nieliniowość napięć odchylających, fluktuacje, niestabilność jaskrawości obrazu telewizyjnego oraz rozmiarów i położenia rastru należy zauważyć, że

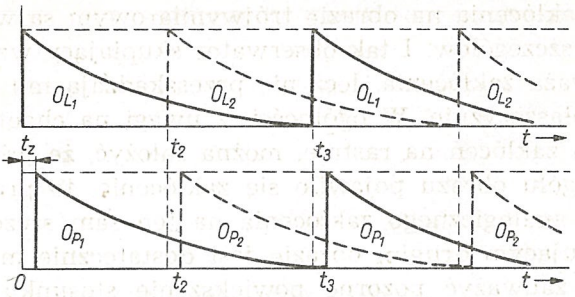
dostrzegalność tych zniekształceń przy telewizji trójwymiarowej znacznie różni się od ich dostrzegalności na obrazie dwuwymiarowym.

Zakłócenia spowodowane różnymi fluktuacjami w torze elektrycznym są znacznie mniej widoczne na obrazie trójwymiarowym. Podczas gdy zakłócenia na obrazie dwuwymiarowym są nierozłącznie związane ze szczegółami, w obrębie których powstały, i są dostrzegalne w tej samej płaszczyźnie, zakłócenia na obrazie trójwymiarowym są widziane niezależnie od jego szczegółów. I tak obserwator skupiający wzrok na jakimś szczególe zauważa zakłócenia, lecz nie przeszkadzają mu one, ponieważ leżą w innej płaszczyźnie. W ogólności, z uwagi na chaotyczny rozkład fluktuacyjnych zakłóceń na rastrze, można założyć, że jeżeli na miejscu pewnego szczegółu obrazu pojawiło się zakłócenie, to prawdopodobieństwo trafienia analogicznego zakłócenia na ten sam szczegół w bezpośrednio następującym drugim obrazie jest dostatecznie małe.

Dające się zauważyć pozorne powiększenie stosunku sygnałów do szumów dla obrazów trójwymiarowych w telewizji w porównaniu z obrazem dwuwymiarowym tłumaczy się większą zdolnością rozdzielczą układu. Potwierdza to doświadczenie, że pozorna dokładność obrazu w widzeniu przestrzennym w znacznym stopniu powiększa się. Poza tym, jeżeli jakość lewego i prawego obrazu składowego jest różna, to obraz przestrzenny ma jokość zbliżoną do lepszego z nich.

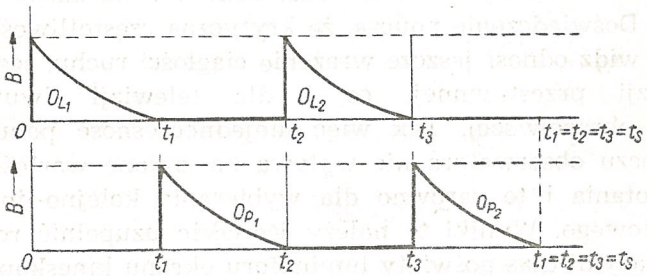
Przy odtwarzaniu obrazu przestrzennego zachodzi zjawisko oddzielnego oświetlenia każdej siatkówki oka, ponieważ na każde z nich pada inny obraz. Doświadczenie poucza, że krytyczna częstotliwość migotania, przy której widz odnosi jeszcze wrażenie ciągłości ruchu, jest taka sama dla telewizji przestrzennej, co i dla telewizji dwuwymiarowej (od 16—24 obrazów/sec). Tak więc niejednoczesność pobudzenia obu siatkówek oczu obserwatora nie wpływa na zmianę wartości liczbowej zaniku migotania i to zarówno dla wybierania kolejno-liniowego, jak i międzyliniowego. Wyniki te należy jednakże uzupełnić rozważaniami uwzględniającymi czas poświaty luminoforu ekranu kineskopu oraz straty światła w polaroidach lub filtrach barwnych. Charakterystyki świetlne w funkcji czasu dla kineskopów są zależne od sposobu wybierania obrazu. Tak np. dla odbiornika w systemie kolejnym zmiana jaskrawości ekranu kineskopu dla lewego i prawego obrazu w czasie nadawania każdego ze składowych stereopary jest przedstawiona na rys. 32. Chwila pobudzenia dowolnego elementu prawego obrazu O_P w stosunku do odpowiadającego mu lewego obrazu O_L jest przesunięta o odcinek czasu t_z wybierania jednej linii każdego obrazu. Indeksy *1* i *2* przy O_L i O_P oznaczają nieparzyste i parzyste pola obrazu. Jak wynika z faktu potwierdzonego doświadczalnie, bodźce powodujące pobudzenie pewnych sąsiednich elementów siatkówki sumują się w jakiś sposób w naszym mózgu. Tak samo przy widzeniu obuocznym czułość jest większa niż przy widzeniu jednym okiem. Tak więc jaskrawość pozorna obrazu stereoskopowego wybieranego

w czasie t_s będzie dwukrotnie większa od jaskrawości pozornej każdego obrazu składowego. Ponieważ zaś wybieranie obrazów składowych jest zrealizowane tak, że podniety jaskrawości obrazów składających się na stereoparę zwiększają poświatę ekranu kineskopu dwukrotnie, uzyskamy więc lepsze warunki na krytyczną częstotliwość migotania. W systemie



Rys. 32. Zmiana jaskrawości ekranu kineskopu w systemie podczas nadawania każdego ze składowych stereopary

natomiast z wybieraniem pionowym (ułatwiającym realizację transmisji przestrzennej obrazu) mamy pogorszenie warunków migotania pól, ponieważ poświata ekranu ogranicza się tu tylko do czasu nadawania jednego pola (rys. 33).

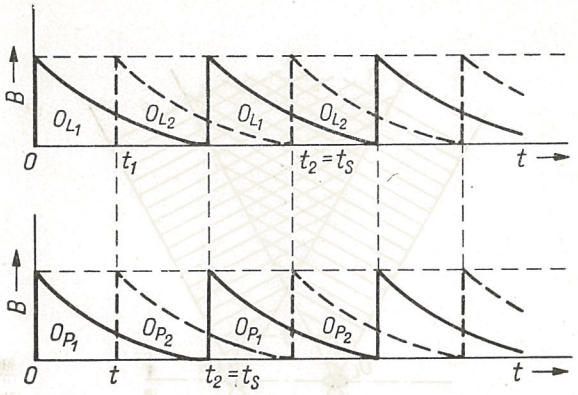


Rys. 33. Zmiana jaskrawości ekranu kineskopu w czasie nadawania lewego i prawego obrazu stereopary przy wybieraniu pionowym

Dla porównania na rys. 34 przedstawiono zmianę jaskrawości ekranów kineskopów odbiornika w systemie jednoczesnym. Jak wynika z rysunku, w telewizji przestrzennej systemu jednoczesnego warunki poświaty i migotania pól dla każdego obrazu są identyczne z warunkami telewizji dwuwymiarowej.

Nieliniowość rastrów obrazów składowych, stabilność ich położenia na ekranie kineskopu oraz różnice rozmiarów obu obrazów będą miały niewątpliwe wpływ na jakość obrazu stereoskopowego. Między innymi w wyniku tych zniekształceń nastąpi rozdwajanie oddalonych szczegółów obrazu lub zupełny zanik efektu stereoskopowego dla całego obrazu.

Tolerancje te jednak nie są tak małe, ażeby przy obecności wszystkich możliwych fluktuacji w systemie nie można było ich spełnić. Tak np. nieliniowość rastrów wzdłuż linii wynosząca 4% nie wprowadza widocznych zniekształceń objętości obrazu. Wskazuje to, że przy odtwarzaniu obrazów trójwymiarowych nie jest potrzebna identyczność odchylania poziomego do lewego i prawego obrazu stereopary, co byłoby trudne do



Rys. 34. Zmiana jaskrawości ekranów kineskopów w systemie jednoczesnym

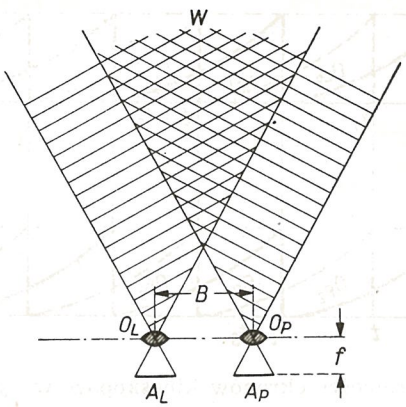
uzyskania w praktyce. Tolerancje w kierunku pionowym są mniejsze niż w kierunku poziomym. Tłumaczy się to brakiem zbieżności (konwergencji) gałek ocznych w kierunku pionowym, w odróżnieniu od takiej zdolności oczu w kierunku poziomym. Również dopuszczalne jest przesunięcie jednego z obrazów składowych w kierunku poziomym bez wpływu na efekt stereoskopowy o ok. 2%, zaś dla kierunku pionowego — o ok. 0,5%.

3.3. Parametry systemów przestrzennej transmisji obrazu telewizyjnego

W dotychczasowych rozważaniach nic nie powiedzieliśmy o parametrach optyczno-fizjologicznych rozpatrywanych zespołów wchodzących w skład systemu telewizji przestrzennej. Obecnie ocenimy system telewizyjny pod kątem jakości efektu stereoskopowego.

Jak wiadomo, efekt stereoskopowy uzyskuje się głównie dzięki temu, że na każdej z siatkówek naszych oczu układa się obraz przedmiotu widzianego z dwu różnych pozycji oddalonych od siebie o tzw. bazę transmisji, tj. o odległość, w jakiej są ustawione dwie kamery telewizyjne nadające odbierany przez nas program. Uzyskana w ten sposób różnica położenia obrazu na obu siatkówkach oczu w stosunku do ich środków jest obiektywną miarą odległości oglądanego przedmiotu. Ta konieczność

ustawienia obiektywów dwu kamer O_L i O_P w pewnej od siebie odległości B ustanawia strefę stereoskopowego widzenia W (rys. 35). Pod tym terminem rozumiemy tę część sceny, która jest rzutowana jednocześnie na obie fotokatody lamp analizujących. Ażeby powiększyć strefę stereoskopową przy danej bazie, należy zastosować obiektywy o dużym polu widzenia. Można również uzyskać większą bazę przez symetryczne przesunięcie obu kamer, lecz widz odniesie wówczas wrażenie, że przedmioty



Rys. 35. Określenie strefy stereoskopowego widzenia W

zbliżają się do niego. Jeżeli zaś zwiększymy bazę przez przesuwanie tylko jednej kamery, to obserwatorowi wyda się, iż wszystkie przedmioty przesuwają się nie w jego stronę, lecz w bok. Zagadnienie istnienia efektu stereoskopowego przy krótko trwającym oświetleniu ma istotne znaczenie dla telewizji przestrzennej. Wrażenie plastyczności daje się zauważyć przy oświetleniu błyskowym rzędu $10^{-5} \div 10^{-7}$ sec. Wskazuje to między innymi na to, że na ocenę trzeciego wymiaru nie może mieć wpływu wielkość kąta konwergencji, gdyż przy tak krótkim oświetleniu konwergencja nie zachodzi. Główne znaczenie dla efektu stereoskopowego ma wartość bazy, z jakiej są nadawane dwa obrazy stereopary. Natomiast próg widzenia stereoskopowego δ zależy od czasu trwania obserwacji oraz od natężenia oświetlenia tła (czarne obiekty na białym tle).

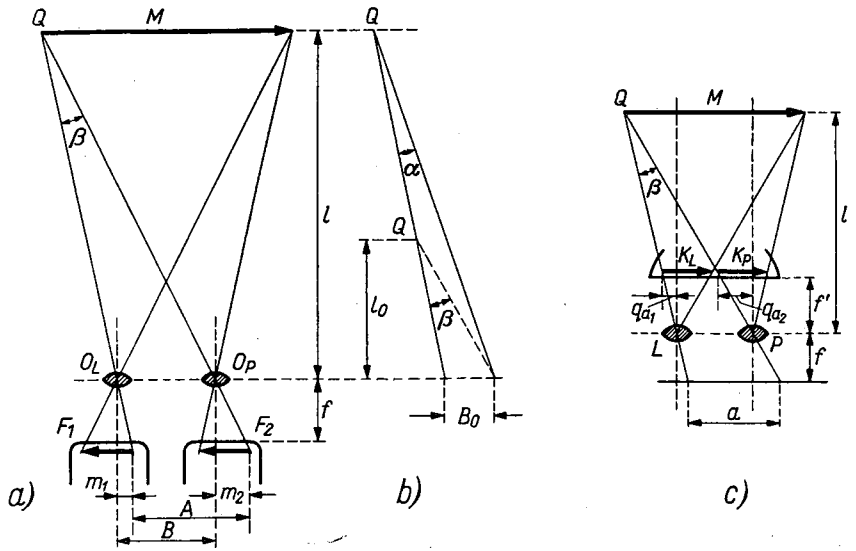
Podstawową cechą przyrządu stereoskopowego jest (jak to podawaliśmy w rozdz. 1.2) tzw. plastyczność przyrządu. Dla systemu telewizyjnego pojęcie to poszerza się.

Niech będzie transmitowany pewien szczegół Q (rys. 36) należący do jakiegoś obiektu i leżący w płaszczyźnie M. Szczegół ten jest widziany przez fotokatody F_1 i F_2 w postaci punktów m_1 i m_2. Oznaczając odległość między nimi przez A i bazę transmisji przez B znajdziemy że $p_m = A - B$. Wielkość p_m nazywa się p a r a l a k s ą l i n i o w ą systemu. Z podo-

bieństwa trójkątów m_1Qm_2 i O_LQO_P znajdziemy, że paralaksa ta wyraża się następująco:

$$p_m = B\frac{f}{l}.$$

Jak wynika z powyższego równania, wartość paralaksy liniowej p_m nie zależy od położenia punktu Q na płaszczyźnie M, lecz tylko od odległości l tej płaszczyzny od położenia obiektywów. Dlatego też wielkość p_m nazywamy paralaksą liniową płaszczyzny M. Dochodzimy w ten sposób do spostrzeżenia, że dzieląc przestrzeń pomiędzy obiektywami aż do nieskończoności na szerek stref za pomocą płaszczyzn M_1, M_2, M_3 można scharakteryzować ją parametrami, jakimi są paralaksy p_1, p_2, p_3 ... Dla płaszczyzny nieskończenie odległej wartość p_m będzie przy tym równa zeru, a w miarę przybliżania jej do obiektywów będzie wzrastać.



Rys. 36. Określenie plastyczności układu telewizyjnego: a) układ optyczny nadajnika, b) obserwowanie punktu Q nie uzbrojonymi oczami, c) układ optyczny odbiornika

Drugim ważnym spostrzeżeniem wynikającym ze wzoru jest fakt, że wartość paralaksy liniowej p_m dowolnej płaszczyzny M przy określonej odległości l i znanej ogniskowej f obiektywu zależy tylko od bazy transmisji B. Tak więc zmieniając bazę transmisji B, można w rzeczywistości zmieniać paralaksę liniową systemu p_m, tzn. uzyskiwać różny efekt stereoskopowy po stronie odbiorczej, ponieważ paralaksa liniowa odbioru p_k

(odpowiedniego punktu obrazu na ekranie kineskopu) jest związana z liniową paralaksą nadawania p_m następującym wyrażeniem:

$$p_k = q\, p_m,$$

gdzie:

q — liniowe powiększenie systemu telewizyjnego, tj. stosunek długości boku obrazu na ekranie odbiorczym do odpowiedniego boku obrazu na fotokatodzie lampy nadawczej.

Z rysunku 36b widać, że patrząc na punkt Q nie uzbrojonymi oczami (o bazie ocznej B_o) z odległości l zobaczymy ten punkt pod kątem paralaktycznym $\alpha = \frac{B_o}{l}$. Różniczkując to wyrażenie ze względu na l, znajdziemy wyrażenie na próg widzenia stereoskopowego dla oka ludzkiego

$$d\alpha = -B_o \frac{dl}{l^2}.$$

Załóżmy, że obraz telewizyjny jest odbierany za pomocą stereoskopu (rys. 36c) o bazie transmisji równej bazie ocznej B_o. Paralaksa liniowa odbioru p_k dla punktów rozłożonych na płaszczyźnie M będzie wynosić:

$$p_k = q \cdot p_m = q \cdot B \cdot \frac{f}{l},$$

gdzie f — ogniskowa obiektywów nadajnika.

Przez analogię paralaktyczny kąt

$$\beta_k = \frac{B_o}{r}.$$

gdzie:

r — odległość punktu od oczu obserwatora.

Z podobieństwa trójkątów o wspólnym wierzchołku Q_k (rys. 36c) oraz zależności na p_k wynika, że

$$\beta_k = \frac{q \cdot B \cdot f}{l \cdot f'},$$

gdzie f' — ogniskowa soczewek stereoskopu.

Różniczkując to wyrażenie znajdziemy próg widzenia systemu stereoskopowego

$$d\beta_k = -q \cdot B \cdot \frac{f}{f'} \cdot \frac{dl}{l^2}.$$

Stosunek progów trójwymiarowego widzenia dla układu stereoskopowego i oka ludzkiego nazywamy *plastycznością systemu P;*

$$P = \frac{d\beta_k}{d\alpha}.$$

Wielkość ta wskazuje, ile razy obraz jest bardziej plastyczny od sceny naturalnej oglądanej gołym okiem.

Korzystając z poprzednich zależności otrzymamy

$$P = q \cdot \frac{B}{B_o} \cdot \frac{f}{f'},$$

gdzie:

$\frac{B}{B_o}$ — plastyczność właściwa systemu,

$\frac{f}{f'}$ — powiększenie systemu teleskopowego złożonego z soczewek nadajnika i odbiornika.

Tak więc plastyczność systemu telewizyjnego jest tym większa, im większa jest baza transmisji i liniowe powiększenie systemu. Z ostatniego równania wynika perspektywa wykorzystania telewizji przestrzennej przy obserwacj bardzo odległych przedmiotów, oraz prowadzenia badań w warunkach trudno dostępnych dla bezpośredniej obserwacji.

4. REALIZACJA SYSTEMU TELEWIZJI STEREOSKOPOWEJ BARWNEJ

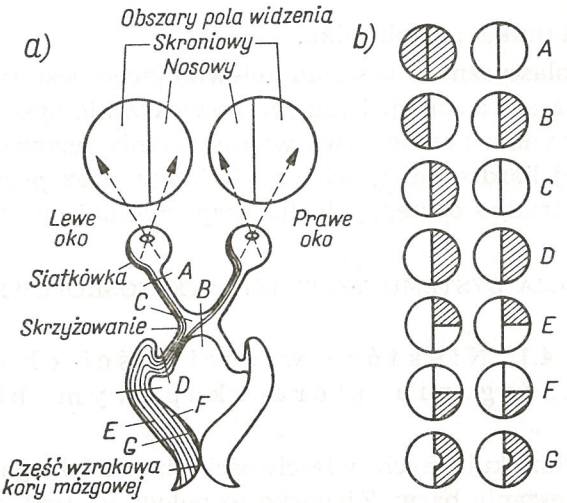
4.1. Niektóre właściwości oka w postrzeganiu stereoskopowym barwnym

U postaw binokularnych właściwości oka ludzkiego leży zjawisko obuocznego mieszania barw. Zjawisko to polega na tym, że przy podrażnieniu siatkówek każdego oka oddzielnie dwiema różnymi barwami — w mózgu naszym powstaje wrażenie nowej, trzeciej barwy. Zjawisko powyższe można potwierdzić za pomocą prostego doświadczenia. Jeśli między jednym obiektywem stereoskopu a okiem ustawić upłaszczyznę barwną lub rysunek, a przed drugim białą kartkę papieru, to na tej kartce zobaczymy tę samą barwę i rysunek. Jeśli następnie przykryjemy białe pole filtrem barwnym, to zobaczymy ten sam obraz, lecz już w nowym zabarwieniu, będącym mieszaniną barw „lewej" i „prawej". Przyczyna takiego przenoszenia barwy lub pojawiania się rysunku przed drugim okiem wynika stąd, że włókna nerwu wzrokowego łączącego się z siatkówkami obu oczu idą częściowo zarówno do prawej, jak i lewej półkuli mózgowej.

Nerw wzrokowy każdego oka, mający w przekroju około 4 mm², składa się z bardzo wielu włókien nerwowych, idących od siatkówki do mózgu. Średnica przekroju tych włókien jest nadzwyczaj mała i wynosi od 0,002 do 0,01 mm. Włókna nerwowe tworzą w nerwie wzrokowym trzy główne pęczki. Jeden z pęczków obejmuje włókna części siatkówki położonej od strony skroni, drugi od strony nosa, a trzeci — od części

środkowej. Na drodze od siatkówki do kory mózgowej nerwy wzrokowe częściowo krzyżują się (rys. 37a). Włókna części skroniowej siatkówki kierują się do odpowiadającej danemu oku półkuli mózgowej, a włókna części nosowej — do półkuli przeciwnej. Co się tyczy włókien wiązki centralnej, to według mniemania niektórych badaczy, prowadzą one od każdego oka do obydwu półkul mózgowych.

Przy naruszeniu normalnego stanu mózgu w obszarze prawej półkuli następuje ślepota prawej połowy obu siatkówek, w wyniku czego chory nie widzi niczego, co znajduje się na lewo od punktu, na który skiero-



Rys. 37. a) Nerw oka ludzkiego, b) Zmiana pola widzenia przy uszkodzeniu ośrodków wzrokowych

wane są oczy. Przy uszkodzeniu lewej połowy mózgu ślepota ogarnia prawą połowę pola widzenia. Na rys. 37b pokazano, jakie części pola widzenia wypadają (zakreskowane) przy uszkodzeniu w tym lub innym miejscu dróg i ośrodków wzrokowych. Miejsca uszkodzenia są oznaczone na rys. 37a kreseczką z odpowiednią literą.

Pogłębienie znajomości obuocznego widzenia jest rzeczą bardzo pożyteczną przy doświadczeniach w dziedzinie telewizji. Właściwości widzenia powinny być brane pod uwagę przy opracowywaniu tego czy innego układu telewizyjnego. Doświadczenia z dwuwymiarową telewizją kolorową przekonują nas o konieczności bardzo dokładnego łączenia oddzielnych obrazów monochromatycznych barwnych w jeden obraz kolorowy. Należy tu rozumieć nie tylko dokładne połączenie optyczne, ale i zupełną identyczność wybierania każdego obrazu. Spełnienie tego ostatniego warunku stwarza olbrzymie trudności w systemach wykorzystujących w urządzeniu odbiorczym kilku kineskopów. Dlatego w technice

telewizji kolorowej powstała tendencja przejścia na jedną lampę syntetyzującą, chociażby bardziej złożoną w konstrukcji i w technologii produkcji.

Z drugiej strony doświadczenia z telewizją trójwymiarową i otrzymywanie kolorowego ograzu stereoskopowego dowodzą, że dokładne łączenie lewego i prawego składowego obrazu stereopary nie jest konieczne. Nawet gdy jeden obraz monochromatyczny nie zgadza się z drugim o ćwierć pola, to i wtedy otrzymuje się jeszcze kolorowy obraz stereoskopowy.

Z czego to wynika? Dlaczego dla otrzymania obrazu kolorowego są wymagane w obu przypadkach (telewizji płaskiej i przestrzennej) różne warunki? Odpowiedzi należy szukać we własnościach naszego organu wzrokowego. Wykorzystanie organu wzrokowego jest w pierwszym przypadku mniej pełne niż w drugim.

Nasz organ wzrokowy, wyrażając się językiem technicznym, jest systemem dwukanałowym i nie jest to system tylko optyczny, ale i zdolny rozmieszczać prawy i lewy obraz w naszej świadomości zgodnie z prawami wyższej nerwowej działalności mózgu. W dwuwymiarowej telewizji kolorowej wykorzystujemy system wzrokowy tylko jako jednokanałowy, gdyż oglądamy lewym i prawym okiem jeden i ten sam obraz. Jeżeli więc są w nim jakieś niedokładności połączenia obrazów, to będą one dostrzegane tak, jak zachodzą w rzeczywistości.

Natomiast przy obuocznym mieszaniu barw, kiedy każde oko dostrzega swój obraz i przy właściwej paralaksie poziomej, w naszej świadomości powstanie nieuchronnie wrażenie obrazu trójwymiarowego danej sceny.

Badania fizyków i fizjologów ograniczały się do warunków statycznych przy uzyskiwaniu przez oko wrażenia trzeciej barwy z dwu dowolnych. Jednakże warunki, jakie wykorzystuje technika telewizyjna, są dynamiczne, tzn. zachodzi zmienne oddziaływanie barw pierwotnych oddzielnie na lewe i prawe oko.

Doświadczenia potwierdzające właściwości obuocznego widzenia dla obrazów zmiennych wskazują na możliwość istnień całego szeregu nieścisłości, nie wpływających na jakość obrazu, a mianowicie:

a) niekonieczne jest dokładne dopasowanie optyczne lewego i prawego obrazu,

b) warunki wybierania tych obrazów nie muszą być identyczne,

c) dopuszczalna jest niejednakowa krytyczna częstotliwość migotania dla lewego i prawego oka,

d) chwilowe zakłócenia w transmisji telewizyjnej nie wywołują zaniku efektu stereoskopowego,

e) krytyczna częstotliwość migotania dla barw czerwonej i niebieskiej jest mniejsza od częstotliwości krytycznej dla środkowej części widma,

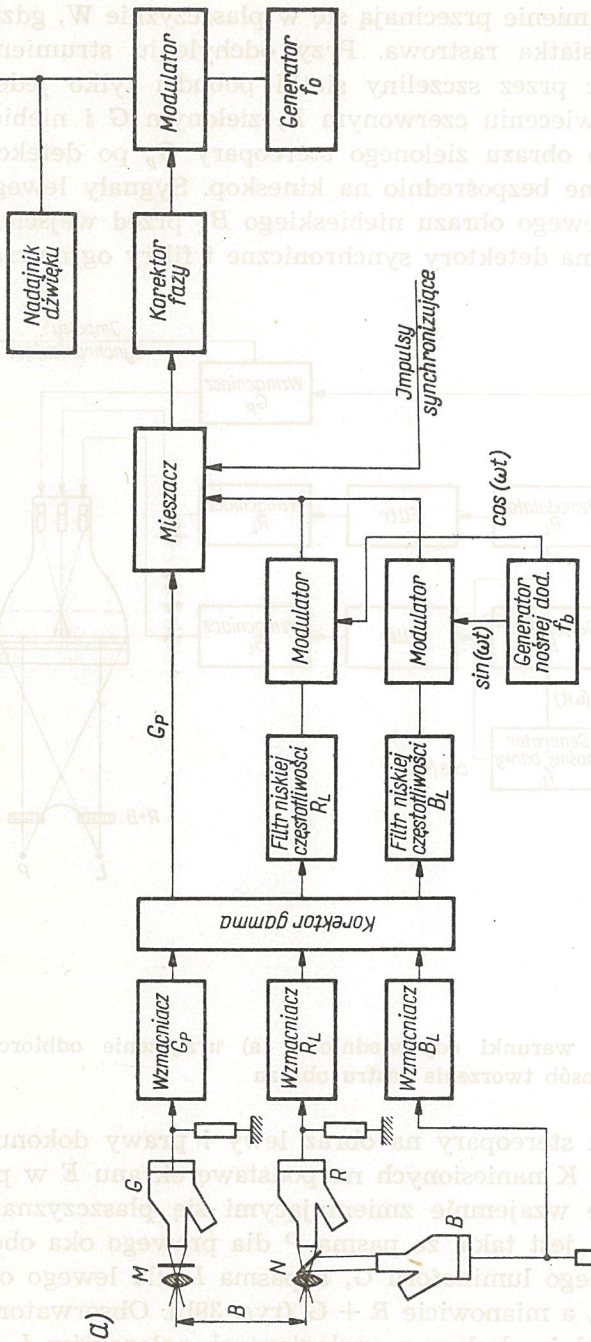
f) ostrość widzenia dla niebieskiej i czerwonej jest mniejsza niż dla środkowej części widma.

Rozsądne uwzględnienie wymienionych czynników przy wykorzystaniu odpowiednich środków technicznych pozwoli stworzyć system telewizji kolorowej trójwymiarowej bez potrzeby poszerzania standartowego pasma częstotliwości.

Eksperymentalne potwierdzenie możliwości obuocznego mieszania barw zmieniających się obrazów (w warunkach telewizyjnych) oraz określenie wierności odtwarzania barwy obiektu można przeprowadzić na stereoskopie, przed którym umieszcza się barwną stereoparę. Oświetlenie lewego i prawego obrazu dokonuje się oddzielnie poprzez obracające się filtry o barwach podstawowych: czerwonej, niebieskiej i zielonej. Zestawienie barw dla każdego z obrazów można dowolnie zmieniać. Z przeprowadzonych eksperymentów wynika, że wierność odtwarzania barwnych obrazów przestrzennych nie zależy od tego, czy oświetlamy oba obrazy składowe stereopary przez trzy podstawowe filtry: czerwony, zielony i niebieski, czy też jeden z obrazów oświetlamy na przykład poprzez czerwony i niebieski, a drugi poprzez czerwony i zielony, lub też jeden — tylko przez zielony, a drugi — poprzez czerwony i niebieski, Z powyższego można wysnuć wniosek, że nawet zupełny brak oddziaływania na jedno oko jednej z barw podstawowych jest dopełniane w obrazie barwnym stereoskopowym poprzez oddziaływanie tą barwą na drugie oko. Poza tym, z uwagi na fakt, że jakość obrazu przestrzennego odpowiada jakości lepszego pod tym względem obrazu składowego stereopary, można w jednym z kanałów przesyłających obrazy składowe zawęzić znacznie pasmo częstotliwości.

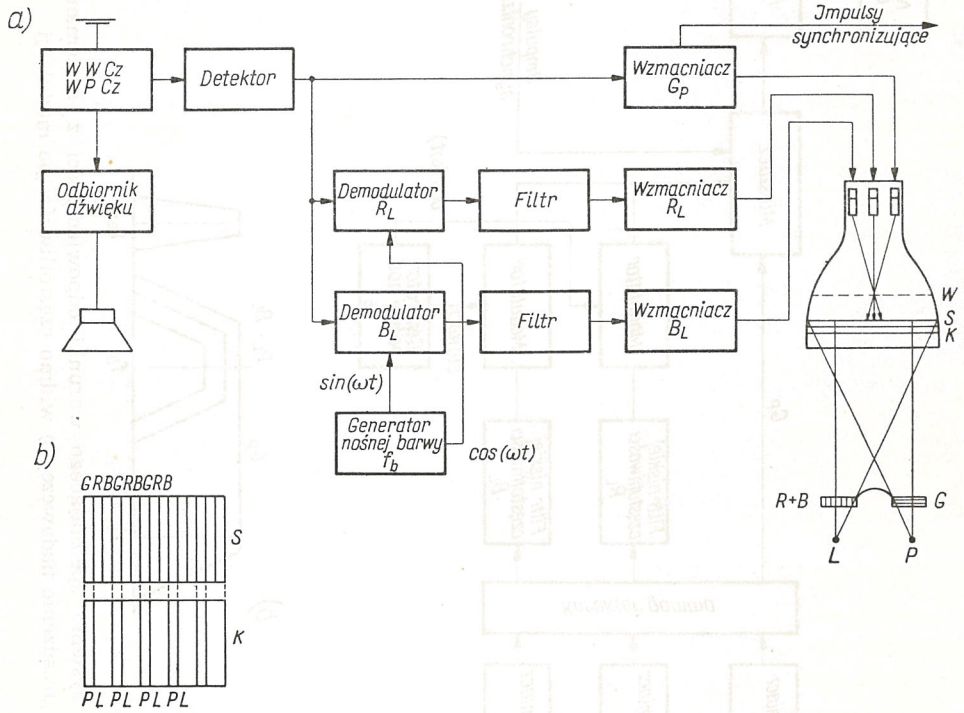
4.2. System telewizji trójwymiarowej barwnej

Na rys. 38 przedstawiono układ blokowy odpowiedniego systemu telewizji stereoskopowej barwnej (przystosowanego do pracy w standartowym pasmie telewizji czarno-białej). W urządzeniu nadawczym (rys. 38a) (kamerze) znajdują się trzy lampy analizujące: jedna dla obrazu prawego i dwie dla obrazu lewego stereopary. Rozdziału barw dokonuje się za pomocą dwóch zwierciadeł interferencyjnych M i N. Załóżmy, że prawy obraz stereopary jest nadawany w barwie zielonej G, a lewy — w czerwonej R i niebieskiej B. Sygnały G_p po przejściu przez korektor gamma z pełnym pasmem częstotliwości podążają bezpośrednio do mieszacza, a sygnały R_L i B_L, z odpowiednio ograniczonym pasmem za pomocą filtrów dolnoprzepustowych, dochodzą do mieszacza w postaci modulowanych drgań dodatkowej fali nośnej barwy f_b. Zastosowano tu modulację kwadraturową. Rozkład widma częstotliwości trzech kanałów po modulacji nośnej zasadniczej f_o podano na rys. 38b.



Rys. 38. Schemat blokowy systemu spełniającego warunki odpowiedniości z systemami telewizji czarno-białej: a) urządzenie nadawcze, b) widmo częstotliwości po modulacji

W odbiorniku (rys. 39) zastosowano kineskop trójstrumieniowy z paskową strukturą ekranu S. Działa elektronowe są zestawione w ten sposób, że wszystkie trzy strumienie przecinają się w płaszczyźnie W, gdzie jest ustawiona pionowa siatka rastrowa. Przy odchyleniu strumieni, każdy z nich przechodząc przez szczeliny siatki pobudzi tylko jeden z trzech luminoforów o świeceniu czerwonym R, zielonym G i niebieskim B. Sygnały prawego obrazu zielonego stereopary G_p po detekcji i wzmocnieniu są podawane bezpośrednio na kineskop. Sygnały lewego obrazu czerwonego R_L i lewego obrazu niebieskiego B_L przed wejściem na kineskop są podawane na detektory synchroniczne i filtry ogranicza-



Rys. 39. System spełniający warunki odpowiedniości: a) urządzenie odbiorcze, b) sposób tworzenia rastru obrazu

jące ich pasmo. Rozkładu stereopary na obraz lewy i prawy dokonuje się za pomocą polaroidów K naniesionych na podstawę ekranu E w postaci pionowych pasm ze wzajemnie zmieniającymi się płaszczyznami polaryzacji. Szerokość ich jest taka, że pasma P dla prawego oka obejmują jedno pasmo barwnego luminoforu G, a pasma L dla lewego oka obejmują dwie szerokości, a mianowicie $R + G$ (rys. 39b). Obserwatorzy są zaopatrzeni w odpowiednie okulary z analogicznych polaroidów L, P. Kanał prawy jest analogiczny pod względem szerokości pasma częstotliwości do kanału telewizji czarno-białej. Z uwagi na to, że widmowa

charakterystyka filtru zielonego, który jest umieszczony w kanale prawym, jest podobna do charakterystyki względnej widzialności oka, transmisja barwna stereoskopowa może być odbierana na zwykłym odbiorniku czarno-białym telewizji dwuwymiarowej.

5. NIEKTÓRE PRAKTYCZNE ZASTOSOWANIA TELEWIZJI STEREOSKOPOWEJ

Poza funkcją określania głębi przestrzeni i plastyki przedmiotów scen analizowanych w telewizji programowej z punktu widzenia ich wartości artystycznej, istnieje szereg zastosowań telewizji stereoskopowej, dla których duże znaczenie posiada znajomość wzajemnego rozmieszczenia przedmiotów oglądanych. Tak na przykład przy pracach z materiałami radioaktywnymi dużą usługę oddaje zdalne i przestrzenne odtwarzanie procesu przelewania substancji radioaktywnych z jednego naczynia do drugiego, bez obawy rozlania na boki. Z uwagi zaś na możliwość zmiany bazy transmisji i liniowego powiększenia systemu telewizji przestrzennej, właściwości te mają szerokie zastosowanie do przestrzennej obserwacji przedmiotów odległych, zdalnego pomiaru przedmiotów obserwowanych, prowadzenia badań w warunkach niedostępnych do bezpośredniej obserwacji itp.

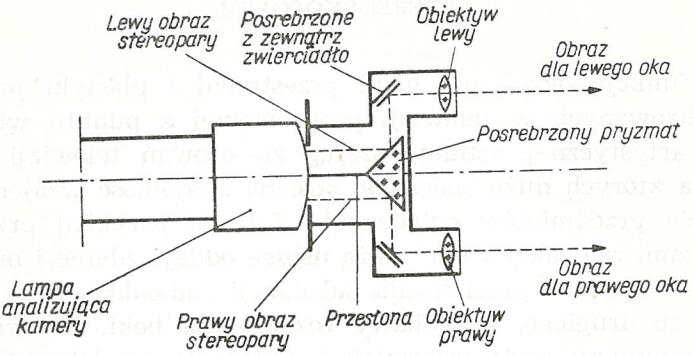
Techniczna realizacja urządzeń stereotelewizyjnych do praktycznych zastosowań może odbywać się w stereoskopowym systemie kolejnym bądź stereoskopowym systemie jednoczesnym. W zasadzie sposoby technicznej realizacji takich systemów niewiele odbiegają od systemów, jakie omówiono poprzednio przy rozpatrywaniu stereotelewizji programowej. Również to samo odnosi się do metod rozdzielania stereopary na dwa obrazy składowe dla lewego i prawego oka.

Podamy tutaj jedynie kilka praktycznych rozwiązań systemów użytkowych stereotelewizji.

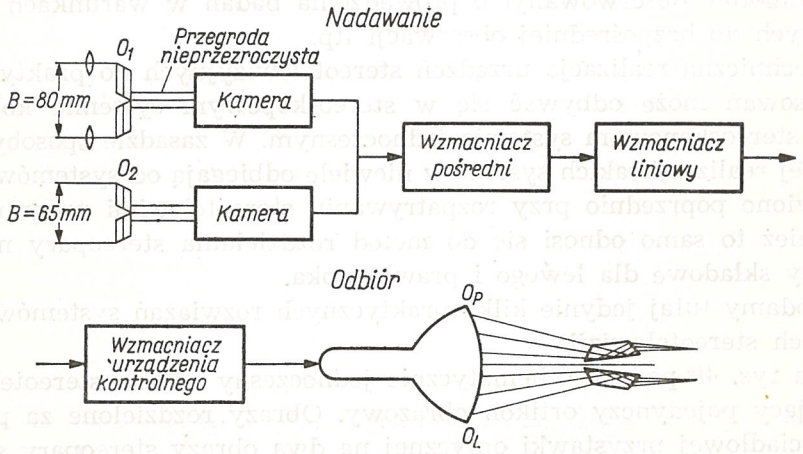
Na rys. 40 podano schematycznie jednoczesny system stereotelewizji stosujący pojedynczy ortikon obrazowy. Obrazy rozdzielone za pomocą zwierciadłowej przystawki optycznej na dwa obrazy stereopary są rzutowane na fotokatodę lampy analizującej, skąd odpowiednio blokowane są przesyłane do nadajnika. Metoda ta nie pozwala na uzyskanie dużej wypadkowej rozdzielczości systemu.

System jednoczesny stereotelewizji opracowany przez Radio Corporation of America wykorzystuje dwa widikony i dwa współpracujące równolegle tory wizji, co pozwala na uzyskiwanie zdolności rozdzielczej osiągalnej w normalnych aparaturach telewizji użytkowej. W skład systemu wchodzi kamera stereoskopowa z dwoma widikonami, odbiornik stereoskopowy obrazu zawierający dwa miniaturowe kineskopy oraz człon kontrolny.

Istnieje inny typ odbiornika stereoskopowego, który stanowi zespół (obok innych układów optycznych) dwu standartowych monitorów telewizji użytkowej. Rolę składania obrazów stereopary stanowi typowy dla telewizji programowej stereoskopowej układ przystawki pryzmatycznej wraz z odpowiednimi polaryzatorami i okularami z polaroidów. Obraz otrzymywany z dwóch niezależnych kineskopów po spo-



Rys. 40. Projekcja stereopary na fotokatodę lampy analizującej w systemie jednoczesnym stosującym pojedynczy ortikan obrazowy



Rys. 41. Schemat blokowy stereotelewizji stosowany przy zdalnej obserwacji i określaniu wymiarów przedmiotów oglądanych

laryzowaniu i rzutowaniu za pomocą przystawki pryzmatycznej na wspólny ekran daje wrażenie obrazu w pełni trójwymiarowego dzięki użyciu okularów z polaroidów z odpowiednio skierowanymi osiami polaryzacji.

Na rys. 41 przedstawiono schematycznie układ nadawczy i odbiorczy urządzenia przemysłowego telewizji przestrzennej stosowanego przy zdalnej obserwacji i pomiarach przedmiotów i skonstruowanego w Leningradzkim Instytucie Łączności. Urządzenie to było stosowane do pomiaru oddalonych przedmiotów znajdujących się na pewnej głębokości.

Układ składał się z dwu oddzielnych stereoskopowych kanałów wizji pracujących na wspólny odbiornik. Każdy z kanałów pracował w systemie z kolejną zmianą lewego i prawego obrazu co każdą wybieraną linię. Obraz na fotokatodach lamp (kolejno lewy i prawy) był formowany za pomocą specjalnych nasadek pryzmatycznych. W celu obserwacji przedmiotów znajdujących się na różnych odległościach, nasadki były wyposażone w dwa rodzaje obiektywów: krótkoogniskowy o bazie 65 mm i długoogniskowy o bazie 80 mm. Obserwacji obrazu przestrzennego dokonywano za pomocą obrotowej przystawki pryzmatycznej.

British Institute of Oceanography wprowadził na statku oceanograficznym Discovery II, przeznaczonym do badania flory i fauny morskiej, aparaturę telewizyjną firmy Pye przystosowaną do odbioru obrazów podwodnych w trzech wymiarach.

Centralny Instytut Ochrony Pracy

WYKAZ LITERATURY

1. Krawkow S. W.: Głaz i jewo rabota. — Izd. Akadiemii Nauk SSSR, 1950.
2. Czurajew L. P.: Opticzeskije swojstwa polarizacjonnych filtrow. — Żurn. Tiechn. Fiz. wyp. 4—5, 1944.
3. Widdop M. E., Journ. Soc. Motion Picture Eng. 60. Nr 4, 1953.
4. Evans J. W.: Journ. Opt. Soc. Amer. 39, Nr 3, 1949.
5. Naumann H.: Optik für Konstrukteure, 1949.
6. Walus N. A.: Rastrowaja optika, 1949.
7. Tudorowskij A. J.: Tieoria opticzeskich priborow, 1952.
8. Schade O. H., Electro-Optical Characteristics of Television Systems. — RCA Rev. 1948.
9. Macdonald D. E.: Calibration of Survey Cameras and Lens Testing. — Photogrammetric Eng. 1951.
10. Szmakow P. W.: Osnowy ctwietnowo i abjomnowo tieiewidienija, 1956.
11. Schade O. H.: Image Gradation in Television Motion—Picture Systems. — J. Soc. Mot. Pict. Telev., 1952.
12. Bałtanskij A. G. i Berensztajn J. D.: Opticzeskoje ustrojstwo dla sjemki i projekcji stiereoizobrażenija. — Awtorskoje swidietielstwo Nr 92980, 1950.
13. Johnston H. R.: Stereo Television in Remote Control. — Elec. Eng. 69, 1950.
14. Zworykin V. K.: Industrial Television and the Vidicon. — Elec. Eng. 69, 1950.

C. КОНАРСКИ

ТРЁХРАЗМЕРНОЕ ВИДЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ТЕЛЕВИДЕНИЕ

Резюме

Изложены вкратце принципы пространственного видения; описаны также оптические системы дающие возможность воспроизведения третьего размера на-

блюдаемых сцен. Далее описаны основные элементы аппаратуры системы пространственного телевидения в зависимости от методов разделения стереопары. Приведены основные блок-схемы систем служащих для передачи на расстояние пространственных изображений, а также сделан анализ некоторых свойств передачи пространственного узображения с точки зрения качества стереоскопического эффекта.

S. KONARSKI

RAUMFERNSEHEN — BILDFUNK IN DREI DIMENSIONEN

Zusammenfassung

In der Bearbeitung sind kurz die Grundlagen der Raumbetrachtung wie auch die Beschreibung von optischen Komponenten erfasst, die eine Wiedergabe von Bildern in drei Dimensionen ermöglichen.

Ausserdem sind hier die grundsätzlichen Bestandteile des Raumfernsehenssystems in Bezug auf die Einstellung der Bilder im Stereo-Fernsehen, besprochen.

Weiter, sind hier auch die praktischen Grundblockschema, die zur Übertragung von Raumbildern dienen, angegeben.

Zum Schluss führte man eine Untersuchung der einzelnen Möglichkeiten der Übertragung des Raumfernbildes durch, wobei die Beobachtung der Qualität des Stereoeffekts zum Ausgangspunkt genommen wurde.

S. KONARSKI

VISION D'IMAGES À TROIS DIMENSIONS — TÉLÉVISION EN RELIEF

Resumé

On a présenté les principes de la vision en relief ainsi que les systèmes optiques rendant possible la perception de la troisième dimension des images observées. Ensuite on a discuté les élements principanse du système de télévision en relief faisant les dépendre des méthodes de la division du stéréoscope. On a présenté les schèmes générales des système de transmission d'images en relief et on a discuté quelques propriétés de la transmission d'images en relief du point de vue de la qualité de l'effet stéréoscopique.

S. KONARSKI

STEREOTELEVISION — PICTURES' SEEING IN THREE DIMENSIONS

Summary

Some principles of stereoscopy and some optical systems making 3-D pictures possible were briefly discussed and described. Then the fundamental components of stereotelevision system depending upon the methods of stereopicture division were discussed. Principal block systems used for sending 3-D pictures to a distance were given and some properties of 3-D picture transmission were analyzed from the point of view of the quality of stereoscopic effect.

621.395.7

STANISŁAW BELLERT, JERZY GODWOD, MIECZYSŁAW KOWALSKI

Urządzenie telekonferencyjne

Rękopis dostarczono 22.5.1961

W pracy omówiono urządzenie telekonferencyjne umożliwiające prowadzenie konferencji jednocześnie w wielu salach telekonferencyjnych rozmieszczonych na terenie całego kraju. Sale telekonferencyjne są wyposażone w głośniki i mikrofony oraz w specjalne układy sygnalizacyjne. Układy sygnalizacyjne umożliwiają każdemu z uczestników telekonferencji wysłanie do sali przewodniczącego telekonferencji kryterium zgłoszenia się do głosu bez przeszkadzania innym uczestnikom telekonferencji (sygnalizacja świetlna zgłoszenia się do głosu).

W przyjętym rozwiązaniu sieć telekonferencyjna jest dwupoziomowa.

1. Wyższy poziom stanowi sieć magistralna łącząca przy pomocy łączy dwutorowych punkt centralny z siedzibami wszystkich okręgów.

2. Niższy poziom stanowi sieć okręgowa łącząca przy pomocy łączy jednotorowych siedzibę okręgu z tak zwanymi abonentami końcowymi.

W punkcie centralnym, jak i w punktach okręgowych sieci telekonferencyjnej została przewidziana możliwość dołączania do telekonferencji po 20 tak zwanych abonentów lokalnych wyposażonych w specjalne aparaty głośnomówiące.

Układ telekonferencyjny jest zaprojektowany w ten sposób, że cała sieć po dołączeniu nawet kilkuset abonentów końcowych stanowi układ stabilny.

1. WSTĘP

W niniejszej pracy są podane podstawowe założenia koncepcyjne, na których oparte było rozwiązanie urządzenia telekonferencyjnego opracowanego przez Katedrę Teletransmisji Przewodowej Politechniki Warszawskiej. Przy opracowywaniu projektu tego urządzenia przede wszystkim dążono do uzyskania rozwiązania stojącego na możliwie najwyższym poziomie technicznym, zapewniającego dobrą jakość transmisji i pewność pracy urządzenia oraz charakteryzującego się zaletami eksploatacyjnymi. Z drugiej strony kierowano się jednak realnymi możliwościami, ograniczonymi oczywiście wieloma względami, a między innymi warunkami narzuconymi przez istniejące urządzenia polskiej łączności oraz względami natury ekonomicznej.

Sieć telekonferencyjna jest w podanym rozwiązaniu siecią dwupoziomową zawierającą „sieć magistralną" i „sieci okręgowe". Oczywiście, mimo odrębności tych sieci, istnieje możliwość ich kojarzenia, a w związku z tym dowolnie głębokiego wzajemnego przenikania się.

2. URZĄDZENIA TELEKONFERENCYJNE SIECI MAGISTRALNEJ

2.1. Wstępne warunki eksploatacyjno-techniczne

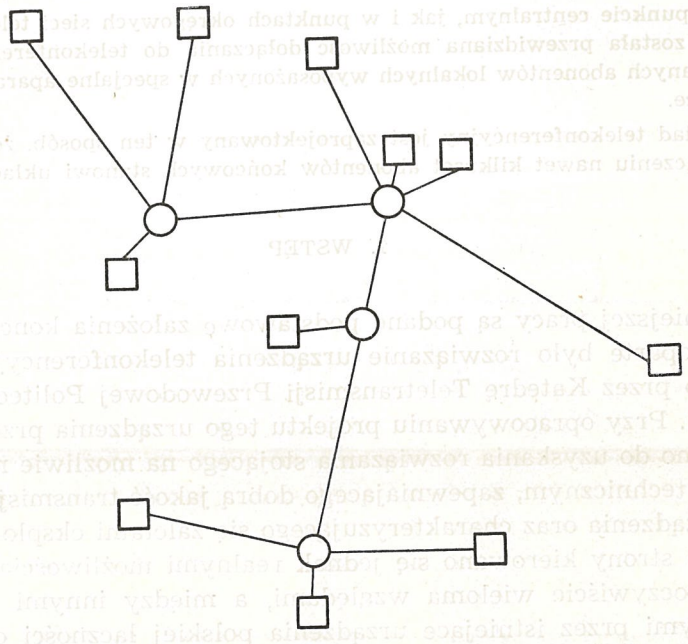
Przedstawione w pracy rozwiązanie urządzenia telekonferencyjnego sieci magistralnej jest oparte na podanych poniżej założeniach.

1. Łącza dla sieci magistralnej są oddane do wyłącznego użytku telekonferencji i nie będą przełączane do innych celów. Przewiduje się użycie wyłącznie łączy kablowych dwutorowych o dobrych właściwościach transmisyjnych i pasmie przenoszenia zawartym w granicach od 300 do 2700 Hz.

2. Układ sieci magistralnej jest gwiazdowy z rozgałęzieniami. Układ sieci magistralnej jest przedstawiony na rys. 1.

3. W sieci magistralnej istnieje możliwość utajnienia telekonferencji przez zastosowanie inwersji częstotliwości.

4. Konferencje na sieci magistralnej będą prowadzone na zasadzie zgłaszania się do głosu. Zgłoszenie się do głosu nastąpi przez uruchomienie odpowiedniego przycisku, co spowoduje u przewodniczącego telekon-



Rys. 1. Schemat magistralnej sieci telekonferencyjnej

ferencji zapalenie się lampki sygnalizacyjnej odpowiadającej danej stacji końcowej (np. napis świetlny). Udzielanie głosu będzie przeprowadzane ustnie przez przewodniczącego.

Niezależnie od przedstawionej wyżej zasady prowadzenia konferencji, każdy z jej uczestników ma techniczną możliwość zabrania głosu w dowolnej chwili.

5. Zespoły rozmówne składające się z oddzielnych mikrofonów i głośników oraz zespoły sygnalizacyjno-wywoławcze są umieszczone w salach konferencyjnych specjalnie dostosowanych akustycznie. W punkcie centralnym przewiduje się zainstalowanie telekonferencyjnych zespołów rozmównych w sali telekonferencyjnej (istniejącej) obliczonej na ok. 20 osób. W punktach końcowych zespoły rozmówne zostaną umieszczone w adaptowanych akustycznie salach telekonferencyjnych obliczonych na ok. 15—20 osób.

6. Oprócz urządzeń w salach telekonferencyjnych jest obok nich zainstalowanych około 20—30 lokalnych, indywidualnych aparatów telekonferencyjnych. Lokalne aparaty telekonferencyjne są aparatami głośnomówiącymi pracującymi na zasadzie przełączenia z odbioru na nadawanie. Abonent lokalnego aparatu telekonferencyjnego jest podporządkowany przewodniczącemu telekonferencji w miejscowej sali konferencyjnej.

Pomiędzy abonentem aparatu lokalnego a miejscowym przewodniczącym jest zastowana optyczna sygnalizacja zgłoszenia się do głosu. Jeżeli zgłaszającym się do głosu będzie abonent lokalny w punkcie końcowym, wówczas przewodniczący w sali telekonferencyjnej końcowej przekaże do przewodniczącego telekonferencji punktu centralnego żądanie punktu końcowego zabrania głosu, a po udzieleniu głosu przez przewodniczącego w punkcie centralnym z kolei sam, również ustnie, udzieli głosu abonentowi. Niezależnie od podanej wyżej zasady istnieje techniczna możliwość zabrania głosu przez abonenta lokalnego w dowolnej chwili. Przewodniczący w każdej sali telekonferencyjnej ma możliwość przymusowego przełączenia wszystkich abonentów lokalnych na odbiór.

7. Możliwe jest przyłączenie sieci okręgowych do sieci magistralnej dla przeprowadzenia telekonferencji o szerokim zasięgu.

8. Zwoływanie telekonferencji na sieci magistralnej będzie przeprowadzane po łączach telekonferencyjnych. Wywoływanie będzie mogło być przeprowadzane zarówno z punktu centralnego do punktów końcowych, jak i z punktów końcowych do punktu centralnego. Urządzenia sygnalizacyjne dla celów zwoływania telekonferencji będą mogły być zainstalowane w dowolnym punkcie o całodobowym dyżurze technicznym.

9. Urządzenia telekonferencyjne sieci magistralnej będą obsługiwane przez operatorów, których zadaniem będzie wywoływanie punktów końcowych przed rozpoczęciem telekonferencji, dokonywanie wszelkich ma-

nipulacji przed rozpoczęciem telekonferencji i po jej zakończeniu, kontrola jakości transmisji w czasi trwania telekonferencji oraz dozór techniczny urządzeń telekonferencyjnych.

2.2. Uzasadnienie wyboru systemu urządzenia telekonferencyjnego sieci magistralnej

Spośród kilku możliwych do przyjęcia rozwiązań systemu urządzeń telekonferencyjnych, po wyczerpującej analizie przyjęto rozwiązanie wskazane na rys. 2. Główną zaletą tego systemu, przy dużej wygodzie eksploatacyjnej, jest w pełni dwutorowy przebieg transmisji na całym przebiegu połączeń telekonferencyjnych, dzięki czemu została zmniejszona do minimum możliwość naruszania stabilności układu. Możliwość powstawania szkodliwych sprzężeń została w tym systemie ograniczona do istnienia drogi akustycznej pomiędzy głośnikiem a mikrofonem zainstalowanym w każdej sali telekonferencyjnej. Sprzężeniom akustycznym przeciwdziała odpowiednia adaptacja akustyczna sali oraz istnienie automatycznej blokady tonu nadawczego w czasie odbioru.

Wadą przyjętego systemu jest stosunkowo wysokie zapotrzebowanie na lampy elektronowe, jednakże dla niezbyt silnie rozgałęzionej sieci magistralnej wada ta nie jest istotna w świetle otrzymywanej wygody eksploatacyjnej oraz wysokiej dobroci transmisyjnej urządzeń. System zaprojektowany charakteryzuje się bardzo oszczędnym rozwiązaniem punktów rozgałęźnych, ulepszonymi warunkami transmisji otrzymywanymi przez zastosowanie kompandorów oraz istnieniem sygnalizacji wywoławczej i zgłoszeniowej.

2.3. Schemat blokowy oraz główne elementy układu magistralnego

Schemat blokowy całości układu magistralnego jest przedstawiony na rys. 2. Układ magistralny zawiera następujące zespoły urządzeń:

1) Zespoły urządzeń końcowych.

2) Zespoły głównych punktów rozgałęźnych — są one zainstalowane w punktach rozgałęzienia się łączy telekonferencyjnych.

3) Kablowe łącza telekonferencyjne.

Zespół urządzeń końcowych zawiera następujące elementy:

— Wyposażenie rozmówne, na które składają się:

a) mikrofon ze wzmacniaczem mikrofonowym (istnieje możliwość włączenia kilku mikrofonów),

b) głośnik ze wzmacniaczem głośnikowym zaopatrzonym w układ automatycznej regulacji poziomu odbiorczego,
c) układ blokujący służący do blokowania toru nadawczego w czasie odbioru.

— Pomocniczy punkt rozgałęźny złożony z układu separatorów, a służący do przyłączenia układu abonentów lokalnych sieci magistralnej (oraz układu sieci dyrekcyjnej w przypadku kojarzenia obu sieci).

— Wyposażenie specjalne zawierające:
a) kompandor,
b) układ utajniający,
c) układ sygnalizacji wywoławczej i zgłoszeniowej.

Zespoły urządzeń końcowych posiadają układ identyczny dla wszystkich punktów końcowych telekonferencji, jak również dla punktu centralnego.

Zespoły głównych punktów rozgałęźnych zawierają układ separatorów służący do połączenia ze sobą kilku łączy telekonferencyjnych (oraz lokalnego zespołu urządzeń końcowych, jeśli taki istnieje w danym punkcie). Istniejąca ilość separatorów jest zależna od ilości wchodzących w grę łączy.

Kablowe łącza telekonferencyjne zawierają tory przewodowe wraz z odpowiednimi wzmacniakami przelotowymi i końcowymi. Ze względu na odpowiednio dobrany poziom nadawczy ze strony zespołu rozgałęźnego we wzmacniaku końcowym łącza, wzmacniacz kierunku nadawczego nie będzie używany przy zachowaniu wzmacniacza kierunku odbiorczego (podobnie jak to jest w przypadku stosowania na torach kablowych niektórych systemów telegrafii wielokrotnej).

2.4. Działanie urządzeń

2.4.1. Sygnalizacja wywoławcza i zgłoszeniowa

Sygnalizacja wywoławcza i zgłoszeniowa będzie realizowana za pomocą przesyłania częstotliwości 2600 Hz leżącej poza pasmem częstotliwości używanych w połączeniach telekonferencyjnych. Pasmo to zawiera się w granicach od 300 do 2500 Hz. Powyższe rozwiązanie jest podyktowane istnieniem w torach kablowych o mocnej pupinizacji dużych zniekształceń tłumieniowych w zakresie powyżej 2500 Hz, które wpływają ujemnie na przebieg transmisji telekonferencji, nie wywierając jednak decydującego wpływu na transmisję jednej częstotliwości.

Wywoływanie końcowych punktów telekonferencyjnych w celu zwołania telekonferencji nastąpi przez wysłanie serii impulsów częstotliwości 2600 Hz z generatora *Gs*. Każdemu punktowi końcowemu (i centralnemu) odpowiada określona seria impulsów odbierana przez odbiornik

sygnałów *OS* tak, że właściwa seria spowoduje zadziałanie sygnalizacji wywoławczej w odpowiednim punkcie. Istnieje również możliwość zastosowania wywołania grupowego do wszystkich punktów końcowych jednocześnie.

Zasada działania sygnalizacji zgłoszeniowej jest taka sama jak zasada działania sygnalizacji wywoławczej. Przychodzące ze strony punktów końcowych do punktu centralnego serie impulsów spowodują zadziałanie odbiornika sygnałów *OS*, który, zależnie od rodzaju serii, spowoduje zadziałanie sygnalizacji zgłoszeniowej odpowiadającej miejscowości, z której zostało wysłane zgłoszenie. Różnicę pomiędzy sygnalizacją wywoławczą a zgłoszeniową stanowi fakt, że sygnalizacja wywoławcza jest używana wtedy, gdy telekonferencja nie odbywa się, a urządzenia odbiorcze sygnalizacji wywoławczej (sygnał optyczny i akustyczny) umieszczone są wtedy w pomieszczeniu dyżurnego pracownika. W czasie trwania telekonferencji sygnalizacja w pomieszczeniu tym jest wyłączona, a przychodzące sygnały zgłoszeniowe uruchamiają sygnalizację umieszczoną na pulpicie przewodniczącego telekonferencji (sygnał optyczny).

2.4.2. Przeprowadzanie rozmów

2.4.2.1. NADAWANIE

Rozmowa wychodząca z sali konferencyjnej trafia do mikrofonu, skąd po przekształceniu na przebieg elektryczny trafia do wzmacniacza mikrofonowego. Wzmocnione prądy rozmówne przechodzą teraz do separatorów pomocniczego punktu rozgałęźnego, skąd trafiają — z jednej strony na szynę odbiorczą układu abonentów lokalnych — z drugiej strony do układu nadawczego wyposażenia specjalnego. W wyposażeniu specjalnym prądy rozmówne przechodzą przez część nadawczą kompandora — kompresor *K* —, a następnie przez utajniacz *U* (zasilany częstotliwością nośną z generatora *G*), gdzie ulega inwersji częstotliwościowej. Za utajniaczem znajduje się doprowadzenie od generatora częstotliwości sygnalizacyjnej *Gs* (częstotliwość sygnalizacji nie ulega inwersji).

Po kompresji i utajnieniu pasmo rozmówne przechodzi do separatorów głównego punktu rozgałęźnego, skąd trafia do poszczególnych torów dalekosiężnych.

2.4.2.2. ODBIÓR

Przychodzące z toru dalekosiężnego pasmo rozmówne dostaje się do separatorów głównego punktu rozgałęźnego, jeśli taki istnieje w danym punkcie sieci, lub bezpośrednio do układu odbiorczego wyposażenia specjalnego.

W głównym punkcie rozgałęźnym prądy rozmówne rozgałęziają się do strony wyjściowej dołączonych torów przewodowych oraz do układów lokalnego punktu końcowego. W układzie odbiorczym wyposażenia specjalnego pasmo rozmówne ulega odwrotnej inwersji w odtajniaczu *O* (zasilanym częstotliwością nośną z generatora *G*), dzięki czemu ulega odtajnieniu.

Przed wejściem odtajniacza znajduje się wejście odbiornika sygnałów *Os*, do którego trafia częstotliwość sygnalizacyjna. Po odtajnieniu prądy rozmówne ulegają ekspansji w ekspandorze (stanowiącym część odbiorczą kompandora), a następnie trafiają do separatorów pomocniczego punktu rozgałęźnego, skąd rozgałęziają się do części odbiorczej wyposażenia rozmównego oraz do szyny odbiorczej układu abonentów lokalnych. W wyposażeniu odbiorczym, poprzez wyłączalny tłumik oraz wzmacniacz głośnikowy zaopatrzony w układ automatycznej regulacji poziomu, prądy rozmówne trafiają do głośnika, skąd po przekształceniu na przebieg akustyczny trafiają do sali konferencyjnej.

2.4.2.3. KOJARZENIE SIECI MAGISTRALNEJ Z SIECIĄ OKRĘGOWĄ

Kojarzenie sieci magistralnej z siecią okręgową odbywa się przez połączenie ze sobą odpowiednich szyn układu abonentów lokalnych sieci magistralnej z szynami układu rozgałęźnego sieci okręgowej. Przy kojarzeniu obu sieci sala konferencyjna sieci okręgowej nie wchodzi w skład układu telekonferencyjnego.

2.5. Zagadnienia transmisyjne

2.5.1. Zapobieganie sprzężeniom akustycznym w układzie telekonferencyjnej sieci magistralnej

Aby zapobiec możliwości powstawania sprzężeń akustycznych pomiędzy głośnikiem a mikrofonem, wyposażenie rozmówne jest wyposażone w dodatkowy układ blokujący *B* oraz tłumik (umieszczony przed wzmacniaczem głośnikowym). W działaniu urządzenia możemy rozróżnić trzy przypadki, zależnie od decyzji przewodniczącego w danej sali telekonferencyjnej.

Przypadek 1. Widoczne na rysunku sprężyny *I*, *II* i *III* są zwarte. Układ blokujący automatycznie eliminuje zjawisko echa oraz szumy z tych sal, do których mówi się w danej chwili (wzmacniacz kierunku nadawczego jest zablokowany sygnałem odbiorczym). Należy zauważyć, że rozmowę w danym punkcie można rozpocząć w dowolnej chwili przerwy odbioru bez potrzeby uruchamiania jakichkolwiek przycisków.

Przypadek 2. Sprężyny *I* i *II* są rozwarte, sprężyna *III* jest zwarta. Układ blokujący jest w danej chwili wyłączony, a wyposażenie rozmówne przystosowane jedynie do odbioru. Stabilność akustyczna jest zapewniona dzięki przerwaniu toru nadawczego.

Przypadek 3. Sprężyna *I* jest zwarta, sprężyny *II* i *III* są rozwarte. Układ blokujący jest wyłączony, a wyposażenie rozmówne przystosowane jedynie do nadawania, przy możliwości usłyszenia rozmowy przychodzącej (ściszonej). Stabilność akustyczna jest zapewniona przez włączenie tłumika do obwodu wzmacniacza głośnikowego.

2.5.2. Wpływ odległości przemawiającego od mikrofonu na słyszalność transmisji

Aby zmniejszyć zależność pomiędzy odległością przemawiającego od mikrofonu a słyszalnością jego głosu w poszczególnych punktach odbioru, przewiduje się ewentualne zastosowanie „optycznego wskaźnika siły głosu". Wskaźnik taki znajduje się w polu widzenia osoby mówiącej oraz w polu widzenia przewodniczącego. Zrezygnowano tu świadomie z możliwości wprowadzenia we wzmacniaczu mikrofonowym układu automatycznej regulacji wzmocnienia, ponieważ układ taki zmniejszyłby stabilność urządzeń, zwiększając jednocześnie szumy pochodzące z sal.

2.5.3. Automatyczna regulacja tłumienności wynikowej

W celu uniknięcia zależności słyszalności od wahań tłumienności toru oraz wahań wzmocności wzmacniaczy zastosowano układ automatycznej regulacji poziomu we wzmacniaczu głośnikowym. Świadomie zrezygnowano tu ze stosowania do celów regulacji określonej częstotliwości pilotującej ze względu na trudności w umieszczeniu tej częstotliwości w stosunkowo wąskim pasmie będącym w dyspozycji (istnienie odrębnej częstotliwości sygnalizacyjnej przy niemożności wykorzystania jej jako częstotliwości pilotującej), jak również ze względu na koszty związane z takim rozwiązaniem przy sieci zawierającej kilka punktów rozgałęźnych.

2.5.4. Zmniejszenie szumów przychodzących z linii dalekosiężnych

W celu zmniejszenia szumów przychodzących z linii dalekosiężnych, które odgrywają decydującą rolę w jakości transmisji telekonferencyjnych, zastosowano kompandory. Kompandor, złożony z kompresora po stronie nadawczej i ekspandora po stronie odbiorczej, zmniejsza zakłócenia przychodzące z linii (szumy i przesłuchy) w stosunku około dziesięciokrotnym.

3. URZĄDZENIE TELEKONFERENCYJNE SIECI OKRĘGOWYCH

3.1. Warunki eksploatacyjno-techniczne

1. Abonenci końcowi są dołączeni do okręgowego punktu węzłowego przeważnie za pośrednictwem łączy jednotorowych kablowych lub napowietrznych, czasem za pośrednictwem łączy dwutorowych. Sposób dołączania jest zawsze jednotorowy.

2. Łącza dla telekonferencji okręgowych są przełączalne i dołączane do sieci telekonferencyjnej przez telefonistkę lub specjalnego operatora tylko i wyłącznie na czas trwania telekonferencji. Łącza te nie są dowolne, lecz wytypowane, przy czym w każdej relacji są przewidziane dwa łącza: główne i rezerwowe.

3. Na stanowisku operatora i u przewodniczącego jest przewidziana sygnalizacja optyczna abonentów dołączonych do telekonferencji okręgowej oraz możliwość „podsłuchu" transmisji przychodzących od dowolnego abonenta.

4. Włączenie na nadawanie abonenta końcowego jest sygnalizowane optycznie u przewodniczącego telekonferencji okręgowej.

5. Abonenci końcowi są zaopatrzeni w tak zwane aparaty głośnomówiące, a więc aparaty z przełączaniem na nadawanie lub na odbiór. Przełączenie aparatu głośnomówiącego na nadawanie wymaga naciśnięcia odpowiedniego przycisku. W tym samym pomieszczeniu co aparaty głośnomówiące znajdują się wzmacniacze abonenckie. Abonent będzie miał możność:

a) przełączenia aparatu z odbioru na nadawanie i z nadawania na odbiór;

b) regulacji wzmocnienia odbieranej transmisji.

U abonenta będzie sygnalizowane:

a) przygotowanie aparatu do pracy (włączenie zasilania),

b) przełączenie aparatu z odbioru na nadawanie.

6. Urządzenia telekonferencyjne oddziałowe mogą być umieszczone w pomieszczeniach nie wymagających specjalnego dostosowania akustycznego.

7. Przewodniczący telekonferencji okręgowej ma urządzenia zawierające oddzielny głośnik i mikrofon. Urządzenia telekonferencyjne przewodniczących są umieszczone w salach specjalnie dostosowanych akustycznie.

8. Przewodniczący telekonferencji okręgowej ma możność przełączenia wszystkich abonentów końcowych i lokalnych z nadawania na odbiór. Sygnał przełączający jest wysłany jedynie w kierunku łącza abonenta mówiącego i nie jest słyszalny przez pozostałych abonentów.

9. Zwołanie telekonferencji okręgowej jest realizowane przez telefonistkę lub specjalnego operatora za pośrednictwem zwykłych łączy telefonicznych. W tym celu telefonistka otrzymuje od przewodniczącego wykaz abonentów końcowych i lokalnych, których należy dołączyć do telekonferencji na określony okres czasu.

10. Oprócz abonentów końcowych mogą być dołączeni do sieci telekonferencyjnej w siedzibie okręgu w każdym oddziale tzw. abonenci lokalni w liczbie nie przekraczającej 20 osób. Abonenci lokalni są zaopatrzeni również w aparaty głośnomówiące. Aparaty telekonferencyjne lokalne umożliwiają uczestnictwo w telekonferencji z odrębnych pomieszczeń, bez konieczności udawania się do sali telekonferencyjnej.

11. Oprócz abonentów oddziałowych i lokalnych, do sieci telekonferencyjnej okręgowej może być dołączony w siedzibie okręgu abonent korzystający ze zwykłego aparatu telefonicznego. Ponieważ włączenie takiego aparatu może pogorszyć jakość transmisji, dołączenie powinno być dokonywane tylko w wyjątkowych przypadkach. W sali przewodniczącego telekonferencji okręgowej uczestnictwo powyższego abonenta jest sygnalizowane za pomocą sygnalizacji świetnej.

12. Telekonferencja okręgowa może być prowadzona niezależnie od telekonferencji na sieci magistralnej.

13. W przypadku jednoczesnego odbywania telekonferencji magistralnej i telekonferencji okręgowej część abonentów okręgowych lokalnych może być dołączona do telekonferencji okręgowej, a pozostali do telekonferencji magistralnej.

14. Sieć telekonferencyjna okręgowa może być dołączona do sieci telekonferencyjnej magistralnej, z wyjątkiem sal telekonferencyjnych okręgowych.

15. Abonenci okręgowi lokalni mogą zgłaszać się do głosu za pomocą sygnału optycznego u przewodniczącego telekonferencji okręgowej.

3.2. Uzasadnienie wyboru systemu urządzenia telekonferencyjnego sieci okręgowej

Drugi poziom łączności telekonferencyjnej stanowią sieci okręgowe. W urządzeniu telekonferencyjnym sieci okręgowej abonenci końcowi są dołączani do punktu węzłowego znajdującego się w siedzibie okręgu za pośrednictwem różnorodnych łączy napowietrznych i kablowych, przyłączanych do urządzeń telekonferencyjnych tylko na czas trwania telekonferencji.

Istnieje więc zasadnicza różnica sieci okręgowej w stosunku do sieci magistralnej. Na sieci magistralnej telekonferencje są bowiem realizowane jedynie na łączach dwutorowych kablowych, które ponadto są oddane do wyłącznego użytku urządzenia telekonferencyjnego. Właśnie

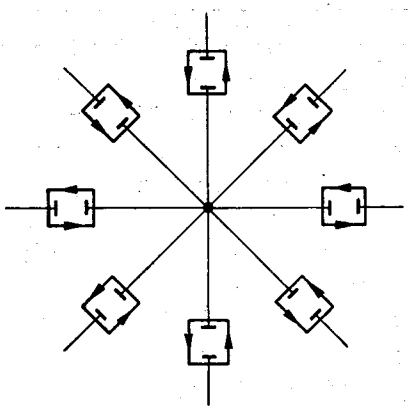
dzięki tej zasadzie urządzenie telekonferencyjne sieci magistralnej stanowi układ przejrzysty i pod względem koncepcyjnym łatwiejszy do racjonalnego rozwiązania. W urządzeniu sieci magistralnej możemy sobie pozwolić na stosowanie całego szeregu kosztownych, lecz efektywnie polepszających jakość transmisji urządzeń, jak np. ekspandorów, układów do automatycznej regulacji poziomu, układów blokujących, które zapewniają stabilną pracę urządzenia itp. Stosowanie na sieciach okręgowych powyższych urządzeń nie byłoby ekonomicznie usprawiedliwione ze względu na duży koszt tych urządzeń. Należy bowiem wziąć pod uwagę, że sieci okręgowych może być duża liczba (np. 10). Ponadto ilość telekonferencji przeprowadzanych na sieciach okręgowych będzie prawdopodobnie znacznie mniejsza niż na sieci magistralnej, a w związku z tym wykorzystanie powyższych urządzeń byłoby niewielkie.

Bardzo istotne konsekwencje pociąga za sobą konieczność zrezygnowania na sieciach okręgowych z zasady dwutorowych i nieprzełączalnych łączy. Stosowanie łączy jednotorowych stwarza mianowicie znaczne trudności w rozwiązaniu punktu węzłowego, od którego bezwzględnie wymagamy całkowitej stabilności pracy.

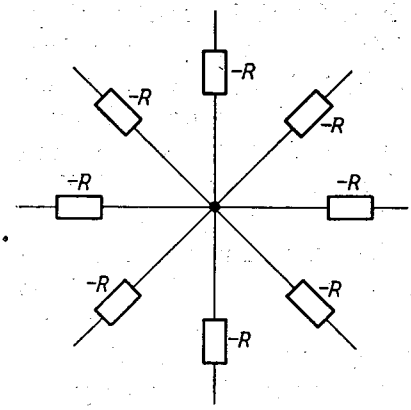
Należy zauważyć, że w przypadku łączy dwutorowych prawidłowe zaprojektowanie punktu węzłowego, charakteryzującego się całkowitą stabilnością, nie przedstawia większych trudności.

Właśnie dzięki tym wszystkim przytoczonym wyżej powodom, racjonalne z punktu widzenia technicznego i ekonomicznego rozwiązanie koncepcji urządzenia telekonferencyjnego sieci okręgowej jest trudniejsze niż rozwiązanie koncepcji urządzenia pracującego na sieci magistralnej.

Na rysunkach 3, 4, 5, 6, 7 i 8 wskazano kilka możliwych rozwiązań punktu węzłowego okręgowej sieci telekonferencyjnej. Rys. 3 i 4 przedstawiają punkt węzłowy zrealizowany przy użyciu specjalnych wzmacniaków

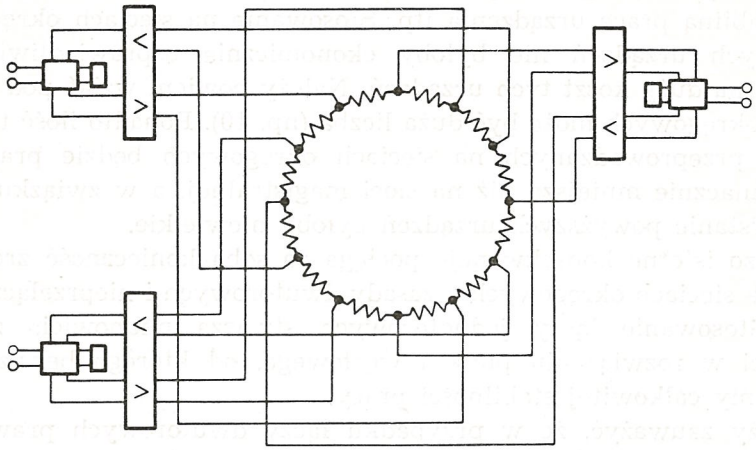


Rys. 3. Punkt rozgałęźny zrealizowany przy użyciu wzmacniaków jednotorowych



Rys. 4. Punkt rozgałęźny zrealizowany przy użyciu odtłumików

jednotorowych lub odtłumników połączonych bezpośrednio na wspólne szyny. Rozwiązanie przedstawione na rys. 3 posiada zasadniczą wadę, wynikającą z konieczności stosowania dodatkowych wzmacniaków jednotorowych. Z tego powodu liczba rozgałęźników wzrasta na każdym łączu (od abonenta do abonenta) o 4, a oczywiście znacznie zmniejsza sta-



Rys. 5. Punkt rozgałęźny zrealizowany przy użyciu specjalnego rozgałęźnika oporowego

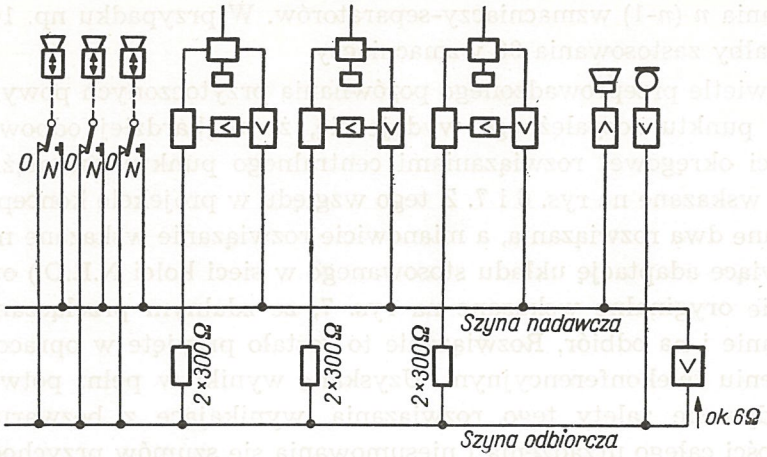
bilność pracy całego układu. Również rozwiązanie z rys. 4 charakteryzuje się małą stabilnością, spowodowaną włączeniem do wspólnego punktu dużej liczby odtłumników.

Rys. 5 przedstawia rozwiązanie punktu węzłowego zrealizowanego przy użyciu specjalnego rozgałęźnika oporowego. Zasadniczą wadą powyższego rozwiązania jest nierówny podział mocy do poszczególnych torów.

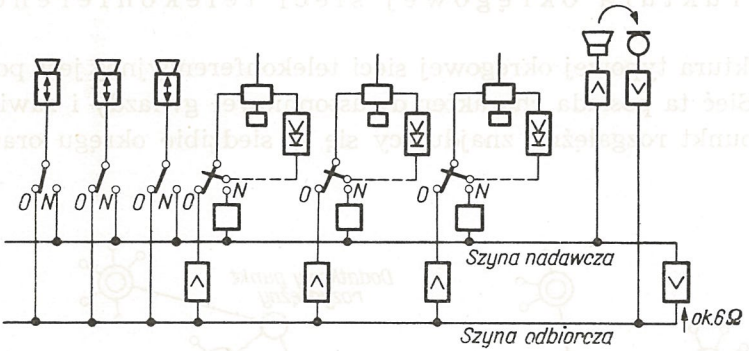
Rys. 6 podaje rozwiązanie punktu rozgałęźnego przy pomocy wzmacniaków jednotorowych z blokadą głosem przeciwnego kierunku transmisji. Jego wadą jest konieczność zapewnienia dobrego zrównoważenia wszystkich torów dochodzących do punktu rozgałęźnego. Należy jednak zauważyć, że w ten sposób rozwiązany punkt rozgałęźny spełnia w sieci telekonferencyjnej kolei N.R.D. swoje zadanie w sposób zadowalający.

Rys. 7 podaje punkt rozgałęźny rozwiązany z zastosowaniem zdalnego przełączania na nadawanie i na odbiór. Główną zaletą powyższego układu jest zapewnienie całkowitej stabilności pracy urządzenia telekonferencyjnego; ze względu na urządzenie przełączające, nie tylko sam punkt rozgałęźny stanowi układ stabilny, lecz również dołączenie do telekonferencji dowolnej liczby łączy jednotorowych nie zmniejsza ich stabilności.

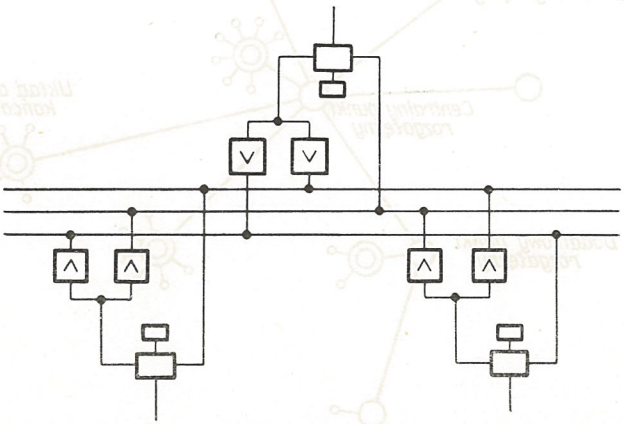
Rysunek 8 przedstawia punkt rozgałęźny rozwiązany przy pomocy separatorów. Wykonany w ten sposób punkt rozgałęźny stanowi układ względnie stabilny, jest jednak kosztowny, gdyż dla n torów wymaga



Rys. 6. Punkt rozgałęźny zrealizowany przy pomocy wzmacniaków jednotorowych z blokadą głosem kierunku transmisji



Rys. 7. Punkt rozgałęźny zrealizowany w układzie ze zdalnym przełączaniem na nadawanie i na odbiór



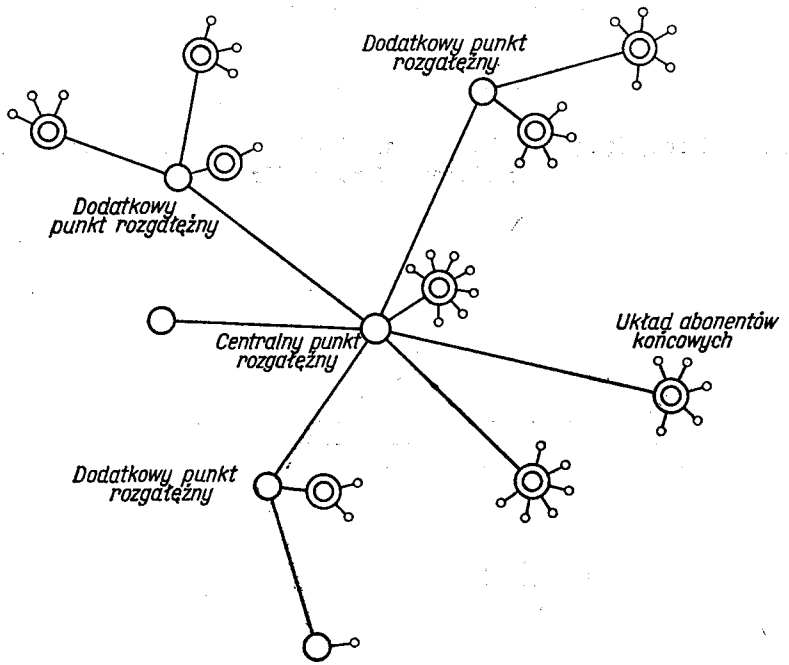
Rys. 8. Punkt rozgałęźny zrealizowany przy pomocy separatorów

stosowania n (n-1) wzmacniaczy-separatorów. W przypadku np. 10 torów wymagałby zastosowania 90 wzmacniaczy.

W świetle przeprowadzonego porównania przytoczonych powyżej rozwiązań punktu rozgałęźnego wydaje się, że najbardziej odpowiednimi dla sieci okręgowej rozwiązaniami centralnego punktu rozgałęźnego są układy wskazane na rys. 6 i 7. Z tego względu w projekcie koncepcyjnym są podane dwa rozwiązania, a mianowicie rozwiązanie wskazane na rys. 6 (stanowiące adaptację układu stosowanego w sieci kolei N.R.D.) oraz rozwiązanie oryginalne wskazane na rys. 7, ze zdalnym przełączaniem na nadawanie i na odbiór. Rozwiązanie to zostało przyjęte w opracowanym urządzeniu telekonferencyjnym. Uzyskane wyniki w pełni potwierdziły przewidywane zalety tego rozwiązania, wynikające z bezwarunkowej stabilności całego urządzenia i niesumowania się szumów przychodzących z dużej liczby dołączonych do telekonferencji torów dalekosiężnych.

3.3. Struktura okręgowej sieci telekonferencyjnej

Struktura typowej okręgowej sieci telekonferencyjnej jest podana na rys. 9. Sieć ta posiada charakter dwustopniowej gwiazdy i zawiera centralny punkt rozgałęźny znajdujący się w siedzibie okręgu oraz dodat-



Rys. 9. Struktura sieci okręgowej

kowe punkty rozgałęźne. W okręgu i niemal we wszystkich punktach końcowych są dołączane do sieci układy tzw. abonentów lokalnych, podobnie jak to ma miejsce w sieci magistralnej.

2.4. Schematy blokowe oraz główne elementy urządzenia telekonferencyjnego sieci okręgowej

3.4.1. Rozwiązanie 1, oparte na układzie ze zdalnym przełączaniem na nadawanie i na odbiór

Schemat blokowy powyższego rozwiązania jest przedstawiony na rys. 10. Urządzenie telekonferencyjne sieci okręgowej zawiera następujące układy:

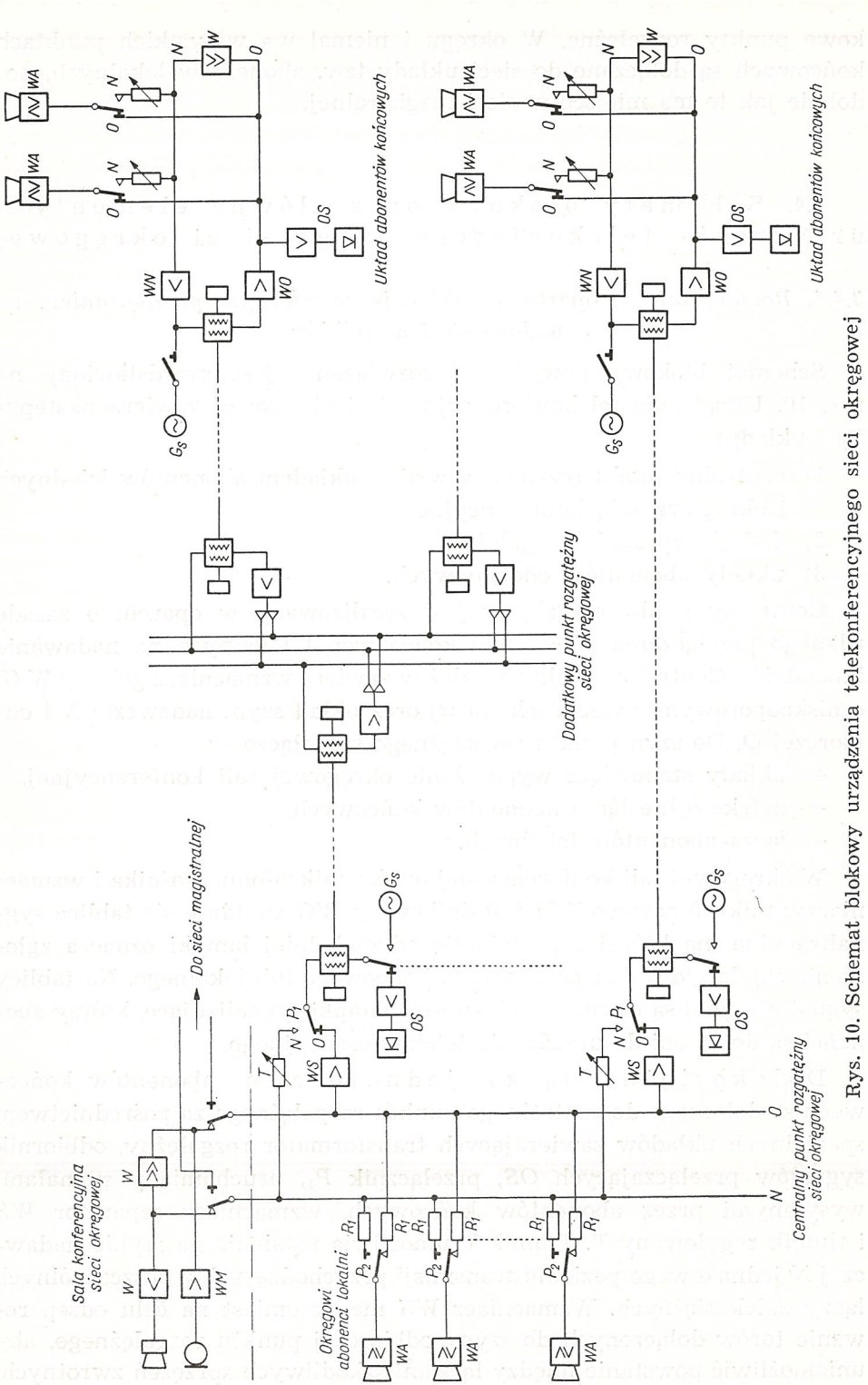
1) centralny punkt rozgałęźny wraz z układem abonentów lokalnych i okręgową salą konferencyjną,
2) dodatkowy punkt rozgałęźny,
3) układy abonentów oddziałowych.

Centralny punkt rozgałęźny jest zrealizowany w oparciu o zasadę zdanego przełączania abonentów końcowych i lokalnych na nadawanie i na odbiór. Centralny punkt rozgałęźny zawiera wzmacniacz główny *W.G.* o niskooporowym wyjściu (ok. 15 Ω) oraz układ szyn: nadawczej *N* i odbiorczej *O*. Do szyn punktu rozgałęźnego są dołączone:

— układy stanowiące wyposażenie okręgowej sali konferencyjnej,
— dalekosiężne łącza abonentów końcowych,
— łącza abonentów lokalnych.

W okręgowej sali konferencyjnej oprócz mikrofonu, głośnika i wzmacniaczy: mikrofonowego *WM* i głośnikowego *WG* znajduje się tablica sygnalizacyjna, na której zapalenie się odpowiedniej lampki oznacza zgłoszenie się do głosu danego abonenta końcowego lub lokalnego. Na tablicy sygnalizacyjnej są również umieszczone lampki sygnalizujące, którzy abonenci są dołączeni do urządzenia telekonferencyjnego.

Dalekosiężne łącza jednotorowe abonentów końcowych są dołączone do centralnego punktu rozgałęźnego za pośrednictwem specjalnych układów zawierających transformator rozgałęźny, odbiornik sygnałów przełączających *OS*, przełącznik P_1, uruchamiany sygnałami wysyłanymi przez abonentów końcowych, wzmacniacz separator *WS* i tłumik regulowany *T*. Tłumik *T* umożliwia ustalenie na szynie nadawczej *N* jednakowego poziomu transmisji przychodzących z poszczególnych łączy dalekosiężnych. Wzmacniacz *WS* ma natomiast na celu odseparowanie torów dołączonych do szyny odbiorczej punktu rozgałęźnego, aby uniemożliwić powstanie między łączami szkodliwych sprzężeń zwrotnych.



Rys. 10. Schemat blokowy urządzenia telekonferencyjnego sieci okręgowej

Łącza abonentów lokalnych są dołączone do szyn centralnego punktu rozgałęźnego za pośrednictwem oporników $R = 2 \cdot 300\ \Omega$ i przełączników zdalnie sterowanych przez abonentów lokalnych. Abonenci lokalni są zaopatrzeni w aparaty głośnomówiące z przełączaniem na nadawanie i na odbiór.

Rozwiązanie dodatkowego punktu rozgałęźnego, podane na schemacie blokowym, jest oparte na systemie, który omówiono w rozdziale 3.2. Wadą tego rozwiązania jest konieczność zastosowania w urządzeniu dużej liczby wzmacniaczy-separatorów oraz trudność rozbudowy punktu rozgałęźnego na większą liczbę łączy. Jego zaletą jest stosunkowo duża stabilność.

Układ abonentów końcowych zawiera następujące zespoły:

— wzmacniacz główny *WG*,
— wzmacniacz nadawczy *WN*,
— wzmacniacz odbiorczy *WO*,
— transformator rozgałęźny,
— zespoły urządzeń oddziałowych abonentów lokalnych.

Z uwagi na sposób dołączenia wzmacniaczy (głównego, nadawczego i odbiorczego) wzbudzenie się układu niezależnie od jakości zrównoważenia toru dalekosiężnego jest niemożliwe.

Transformator rozgałęźny jest stosowany w celu zmniejszenia zniekształceń transmisji odbieranej przez abonentów oddziałowych. Zniekształcenia te w przypadku niezastosowania transformatora rozgałęźnego pozostałyby na skutek istnienia dwu dróg (poprzez wzmacniacz główny lub poprzez wzmacniacze: nadawczy i odbiorczy) dla transmisji pochodzącej od abonenta końcowego i odbieranej przez abonenta końcowego.

W celu uniezależnienia poziomu na szynie odbiorczej punktu rozgałęźnego od ilości dołączonych abonentów końcowych, wzmacniacz główny i odbiorczy posiadają niskooporowe wyjścia. Abonenci końcowi są zaopatrzeni w aparaty głośnomówiące, analogiczne do aparatów okręgowych i magistralnych abonentów lokalnych. Aparaty te w zasadzie wszystkie są przełączone na odbiór transmisji.

W celu zabrania głosu w dyskusji abonent końcowy naciska odpowiedni klucz „nadawanie", w wyniku czego automatycznie zostają wykonane następujące czynności:

— przełączenie wzmacniacza abonenckiego *WA* z odbioru na nadawanie,
— przełączenie łącza abonenckiego z szyny odbiorczej *O* na szynę nadawczą *N* układu abonentów końcowych,
— wysłanie z generatora *Gs* do linii dalekosiężnej sygnału przełączającego daną linię z szyny odbiorczej *O* na szynę nadawczą *N* centralnego punktu rozgałęźnego.

W ten sposób łącze danego abonenta końcowego jest przygotowane do nadawania transmisji.

Po ukończeniu przemówienia abonent końcowy naciska klucz „odbiór", powodując w ten sposób przełączenie odpowiadającego mu łącza dalekosiężnego oraz swojego wzmacniacza *WA* z nadawania na odbiór.

Politechnika Warszawska
Katedra Teletransmisji Przewodowej

С. БЕЛЛЕРТ, Е. ГОДВОД М. КОВАЛЬСКИ,

ТЕЛЕКОНФФЕРЕНЦИОННОЕ УСТРОЙСТВО

Резюме

В статье описано телекоконференционное устройство дающее возможность ведения конференции одновремённо во многих телеконференционных залах расположенных на всей территории страны. Телеконференционные залы оборудованы громкоговорителями и микрофонами, а также специальными сигнализационными системами. Каждый участник телеконференции может, благодаря сигнализационной системе, направить в зал председателя телеконференции сигнал просьбы получить слово, не мешая этим сигналом другим участникам телеконференции (световая сигнализация просьбы получить слово).

В принятом решении телеконференционная сеть имеет два разряда:

1. Высший разряд составляет магистральная сеть, соединяющая с помощью четырёхпроводных цепей центральный пункт со всеми районными пунктами.

2. Низший разряд составляет районная сеть, соединяющая с помощью двухпроводных цепей районный пункт с так называемыми оконечными абонентами.

В центральном пункте ,а также в районных пунктах телеконференционной сети предустмотрена возможность присоединения к телеконференции по ГО так называемых местных абонентов, снабжённых специальными громкоговорящими аппаратами. Телеконференционная система практикуется таким образом, что вся сеть даже после присоединения нескольких сот оконечных абонентов составляет стабильную схему.

S. BELLERT, J. GODWOD, M. KOWALSKI

TELECONFERENCE EQUIPMENT

Summary

The present paper describes a teleconference equipment which makes it possible to carry out a conference, the participants of which are present in several teleconference halls all over the country at the same time. The teleconference halls are provided with loudspeakers, microphones and special signalling systems. The signalling systems allow each participant of a teleconference to send the president of the teleconference a special light signal asking for the floor, without interfering with other participants.

The described teleconference network consists of two levels. The higher level consists of the main network connecting the central point with the central points of the particular districts by means of two-circuit lines. The lower level consists of local

networks connecting the central points of the districts with terminal extensions by means of one-circuit lines.

The central point and the central points of the districts are designed so that there is a possibility to connect twenty local extensions equipped with special loudspeaking devices to each central point of the district.

The teleconference system is designed in such a manner that the entire network, after connecting even several hundreds of therminal extensions, constitutes a stable system.

S. BELLERT, J. GODWOD, M. KOWALSKI

EQUIPEMENT POUR LES TÉLÉCONFÉRENCES

Resumé

On présente l'idée de l'équipement déstiné pour rendre possible des conférences à distance.

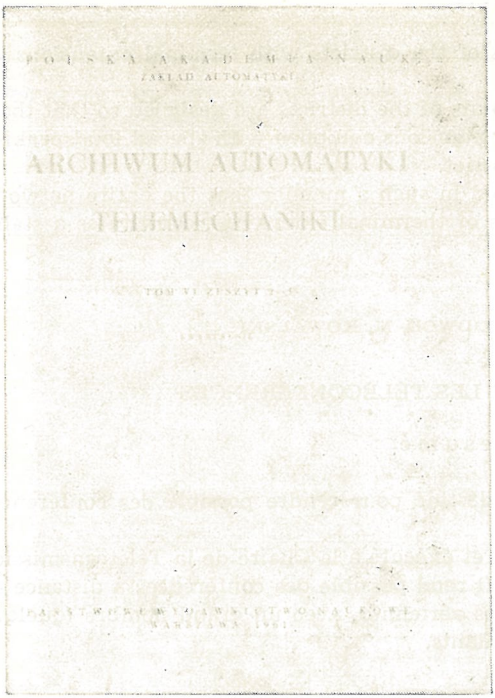
L'équipement mentionné a été concu et exécuté à la Chaire de la Télétransmission de l'Ecole Polytechnique de Varsovie. Il rend possible des conférences à distance en utilisant les lignes à cables ou les lignes aériennes, avec un grand nombre (quelque centaines) de points terminaux indépendants.

S. BELLERT, J. GODWOD, M. KOWALSKI

TELE-KONFERENZANLAGE

Zusammenfassung

In der Arbeit wird das Konzept einer Anlage angegeben, die für die Fernführung der Konferenz bestimmt ist. Die Anlage wurde im Lehrstuhl für Fernmeldetechnik der Warschauer Technischen Hochschule projektiert und ausgearbeitet. Die Anlage ermöglicht die Durchführung einer Fernkonferenz durch Vermittlung der Kabelleitungen und Feileitungslinien mit einer grossen (mehrere hundert betragenden) Zahl unabhängiger Endpunkte.



Kolportażem czasopism PWN zajmuje się „Ruch". Zamówienia i wpłaty na prenumeratę przyjmują: oddziały i delegatury „Ruchu", urzędy pocztowe, listonosze, księgarnie Domu Książki, Centrala Kolportażu „Ruch", Warszawa, ul. Srebrna 12, konto PKO nr 1-6-100.020.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM VIII · ZESZYT 3-4

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1962

RADA REDAKCYJNA

PROF. JANUSZ GROSZKOWSKI, PROF. JANUSZ LECH JAKUBOWSKI,
PROF. BOLESŁAW KONORSKI, PROF. IGNACY MALECKI
PROF. PAWEŁ NOWACKI, PROF. PAWEŁ SZULKIN

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor Naczelny

PROF. WITOLD NOWICKI

Sekretarz

JULIUSZ MIERZEJEWSKI

ADRES REDAKCJI

Warszawa, Politechnika, Plac Jedności Robotniczej 1,
Katedra Teletransmisji Przewodowej, Gmach Mechaniki

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
Warszawa, Miodowa 10

Nakład 680 (533 + 147)	Podpisano do druku w październiku 1962
Ark. wyd. 19,— ark. druk. 17,—	Oddano do składania 23.VI.62
Papier druk. sat. kl. III, 80 g, 70 × 100	Druk ukończono w październiku 1962
Zamówienie nr 1081/62.	Cena zł 50,— H-59

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

621.317.733

J. SAWICKI

Modyfikacja mostka Carey-Fostera

Rękopis dostarczono 8.1.1962

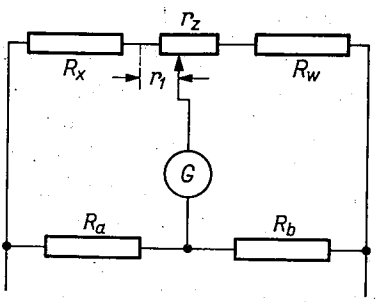
Mostek Carey-Fostera, będący rozwinięciem układu Wheatstone'a należy do precyzyjnych metod pomiaru oporów średnich. Pomimo szeregu zalet, metoda ta jest niemal nieznana w literaturze kontynentalnej, a spotyka się ją prawie wyłącznie w publikacjach anglosaskich.

Przedstawiona modyfikacja pozwala na wyeliminowanie kłopotliwego zabiegu skalowania elementu pomiarowego, co jest niezbędne w rozwiązaniu klasycznym.

Praca zawiera dyskusję dokładności proponowanej modyfikacji.

1. WSTĘP

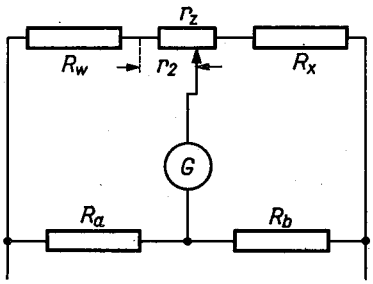
Zasadniczy układ połączeń mostka Carey-Fostera przedstawia rys. 1. Opór badany został oznaczony przez R_x, a wzorcowy — przez R_w. Oporniki R_a oraz R_b muszą wykazywać wysoką stałość swoich wartości. Obiekt badany i opór wzorcowy powinny mieć jednakową wartość



Rys. 1. Pierwszy etap pomiaru

nominalną; to samo wymaganie dotyczy wartości opornika R_a w porównaniu z R_b. Potencjometr r_z służy do równoważenia układu i stanowi element pomiarowy.

Pomiar, wykonywany metodą przemieszczenia, składa się z dwu etapów. W pierwszym etapie układ równoważy się przy normalnym włączeniu oporów R_x oraz R_w, tj. takim jak na rys. 1. Następnie przeprowadza się przemieszczenie pokazane na rys. 2, a otrzymany układ ponownie równoważy się.



Rys. 2. Drugi etap pomiaru

Z chwilą osiągnięcia równowagi w pierwszym etapie pomiaru zostaje spełniona zależność

$$(R_x + r_1) : (R_x + R_w + r_z) = R_a : (R_a + R_b) \tag{1}$$

wynikająca z warunku równowagi zwykłego mostka Wheatstone'a. Po zrównoważeniu układu przedstawionego na rys. 2 otrzymujemy analogicznie

$$(R_w + r_2) : (R_x + R_w + r_z) = R_a : (R_a + R_b) \tag{2}$$

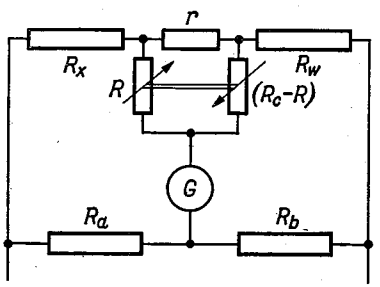
Uwzględniając, że opory R_x, R_w, R_a, R_b oraz r_z są stałe, dochodzimy do wniosku, że

$$R_x = R_w + (r_2 - r_1). \tag{3}$$

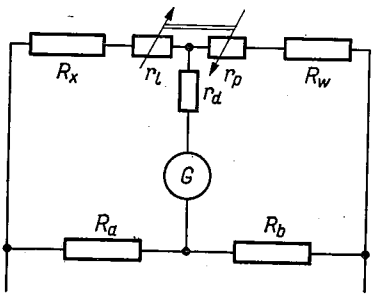
W rozwiązaniu klasycznym potencjometr r_z jest wykonany jako drut oporowy rozpięty na listwie skalowanej i wyposażony w ruchomy styk. Z wyprowadzenia wzoru (3) widać, że potrzebna oporność r_z musi być nie mniejsza od sumy uchybów dopuszczalnych dla oporów R_x i R_w. Według przepisów PTR dopuszczalny uchyb dla oporów o wartości 10 omów i wyższej wynosi $\pm 3 \cdot 10^{-4}$, a dla mniejszych $\pm 1 \cdot 10^{-3}$. Odpowiednio do tego $r_z = (1 \ldots 2) \cdot 10^{-3} \cdot R_w$. Wynika stąd, że przy badaniu oporników rzędu tysięcy omów drut potencjometru musi być dość cienki, skutkiem czego stosunkowo łatwo zmienia oporność w następstwie ścierania przez styk ruchomy. Zmniejszenie przekroju, wywołane zużyciem, nie jest równomierne na całej długości, a zwykle najsilniejsze w okolicy środka, gdzie najczęściej manewruje się stykiem. Wywołuje to konieczność dość częstego skalowania („kalibrowania" [7]) potencjometru, które zabiera sporo czasu. Dodatkowo trzeba zauważyć, że zbyt duża oporność potencjometru prowadzi do trudności uchwycenia różnicy $(r_2 - r_1)$. Możność badania oporów w szerokim zakresie wartości

wymaga zatem stosowania kilku różnych potencjometrów, włączanych w miarę potrzeby.

Zaletą metody Carey-Fostera w porównaniu np. z odchyłowym mostkiem Wheatstone'a, jest niezależność pomiaru od napięcia zasilającego, które wpływa jedynie na czułość układu. Przewaga nad metodami kompensacyjnymi, np. Malikowa lub Lewina [5], wynika z trudności utrzymania niezmiennych *SEM* dwu lub więcej źródeł, występujących w tych metodach. Zalety te spowodowały znaczne rozpowszechnienie układu Carey-Fostera w literaturze anglosaskiej ([3], [6], [7]).



Rys. 3. Zmodyfikowany mostek Carey-Fostera



Rys. 4. Układ zastępczy

Proponowana modyfikacja zmierza do wyeliminowania „najsłabszego" elementu metody, to znaczy — klasycznego rozwiązania potencjometru r_z. Przedłożony układ przedstawia rys. 3, gdzie rolę opornika r_z pełni zespół złożony z małego oporu r oraz precyzyjnego potencjometru dekadowego w układzie Feussnera, oznaczonego jako sprzężone oporności R oraz $(R_c - R)$. Można tu użyć zarówno gotowego potencjometru, jak i doraźnie zmontowanego — oczywiście pod warunkiem właściwej obsługi (R_c = const).

Zamieniając trójkąt oporów r, R, $(R_c - R)$ na równoważną gwiazdę (rys. 4) otrzymujemy następujące wyrażenia dla oporów zastępczych:

$$r_l = \frac{R \cdot r}{R_c + r}, \quad r_p = \frac{(R_c - R) \cdot r}{R_c + r}, \quad r_d = \frac{R \cdot (R_c - R)}{R_c + r}. \tag{4}$$

Opór potencjometru w rozwiązaniu klasycznym reprezentuje teraz suma

$$r_l + r_p = \frac{R_c \cdot r}{R_c + r} = r_z. \tag{5}$$

W oparciu o zależności (4) i (5) przekształcamy wzór (3) następująco:

$$R_x = R_w + \frac{R_c \cdot r}{R_c + r}\left(\frac{R_2}{R_c} - \frac{R_1}{R_c}\right) = R_w + r_z \cdot (q_2 - q_1), \tag{6}$$

gdzie wielkość $q = R/R_c$ jest stosunkiem oporów, odczytanym z nastawienia dekad potencjometru precyzyjnego.

2. UCHYB SYSTEMATYCZNY

O dobroci metody pomiarowej decyduje przede wszystkim wartość uchybu systematycznego. Uchyb systematyczny mierzonej oporności R_x wyznaczamy na podstawie wzoru (6), obliczając kolejno

$$\frac{\partial R_x}{\partial R_w} = 1, \quad \frac{\partial R_x}{\partial r_z} = q_2 - q_1, \quad \frac{\partial R_x}{\partial q_2} = r_z, \quad \frac{\partial R_x}{\partial q_1} = -r_z;$$

$$[\Delta_{s(R_x)}]^2 = [\Delta_{s(R_w)}]^2 + [(q_2 - q_1)\cdot \Delta_{s(r_z)}]^2 + [r_z \cdot \Delta_{s(q_2)}]^2 + [r_z \cdot \Delta_{s(q_1)}]^2 \leqslant$$

$$\leqslant [\Delta_{s(R_w)}]^2 + [\Delta_{s(r_z)}]^2 + 2 \cdot r_z^2 [\Delta_{s(q)}]^2 =$$

$$= R_w^2 [\delta_{s(R_w)}]^2 + r_z^2 \{[\delta_{s(r_z)}]^2 + 2[\Delta_{s(q)}]^2\}.$$

Uwzględniając, że wartości oporów R_x oraz R_w są bliskie sobie, możemy napisać następujące wyrażenie dla względnego uchybu systematycznego oporu badanego:

$$[\delta_{s(R_x)}]^2 \leqslant [\delta_{s(R_w)}]^2 + \left(\frac{r_z}{R_w}\right)^2 \cdot \{[\delta_{s(r_z)}]^2 + 2[\Delta_{s(q)}]^2\}. \tag{7}$$

Uchyb oporu badanego będzie praktycznie równy uchybowi opornika wzorcowego, o ile zostanie spełniona nierówność

$$[\delta_{s(r_z)}]^2 + 2[\Delta_{s(q)}]^2 \leqslant \frac{1}{10}\left(\frac{R_w}{r_z}\right)^2 \cdot [\delta_{s(R_w)}]^2.$$

Biorąc pod uwagę, że $r_z/R_w \leqslant 2 \cdot 10^{-3}$ sporządzamy tablicę dopuszczalnych wartości uchybu oporu r_z w funkcji dokładności oporu wzorcowego oraz potencjometru dekadowego.

Tablica 1

$|\delta_{s(r_z)}|_{max} = f\{|\delta_{s(R_w)}|; |\Delta_{s(q)}|\}$ przy $|\delta_{s(R_x)}| \approx 1\,|\delta_{s(R_w)}|$

$\lvert\Delta_{s(q)}\rvert$	$\lvert\delta_{s(R_w)}\rvert$				
	$1 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$
$3 \cdot 10^{-3}$	$1{,}5 \cdot 10^{-2}$	$2{,}2 \cdot 10^{-3}$	—	—	—
$1 \cdot 10^{-3}$	$1{,}6 \cdot 10^{-2}$	$4{,}5 \cdot 10^{-3}$	$7{,}1 \cdot 10^{-4}$	—	—
$3 \cdot 10^{-4}$	$1{,}6 \cdot 10^{-2}$	$4{,}7 \cdot 10^{-3}$	$1{,}5 \cdot 10^{-3}$	$2{,}2 \cdot 10^{-4}$	—
$1 \cdot 10^{-4}$	$1{,}6 \cdot 10^{-2}$	$4{,}7 \cdot 10^{-3}$	$1{,}6 \cdot 10^{-3}$	$4{,}5 \cdot 10^{-4}$	$7{,}1 \cdot 10^{-5}$
$3 \cdot 10^{-5}$	$1{,}6 \cdot 10^{-2}$	$4{,}7 \cdot 10^{-3}$	$1{,}6 \cdot 10^{-3}$	$4{,}7 \cdot 10^{-4}$	$1{,}5 \cdot 10^{-4}$

Względny uchyb oporu mierzonego nie przekroczy natomiast podwójnej wartości względnego uchybu wzorca pod warunkiem spełnienia zależności

$$[\delta_{s(r_z)}]^2 + 2[\Delta_{s(q)}]^2 \leqslant 3\left(\frac{R_w}{r_z}\right)^2 \cdot [\delta_{s(R_w)}]^2.$$

Dopuszczalny względny uchyb oporności r_z obliczamy z powyższego wzoru, przyjmując $r_z/R_w \leqslant 2 \cdot 10^{-3}$. Otrzymane wartości liczbowe zostały zestawione w tablicy 2.

Tablica 2

$|\delta_{s(r_z)}|_{max} = f\{|\delta_{s(R_w)}|; |\Delta_{s(q)}|\}$ przy $|\delta_{s(R_x)}| \leqslant 2|\delta_{s(R_w)}|$

$\lvert\Delta_{s(q)}\rvert$	$\lvert\delta_{s(R_w)}\rvert$				
	$1 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$
$3 \cdot 10^{-3}$	$8{,}6 \cdot 10^{-2}$	$2{,}6 \cdot 10^{-2}$	$7{,}5 \cdot 10^{-3}$	—	—
$1 \cdot 10^{-3}$	$8{,}7 \cdot 10^{-2}$	$2{,}6 \cdot 10^{-2}$	$8{,}5 \cdot 10^{-3}$	$2{,}2 \cdot 10^{-3}$	—
$3 \cdot 10^{-4}$	$8{,}7 \cdot 10^{-2}$	$2{,}6 \cdot 10^{-2}$	$8{,}6 \cdot 10^{-3}$	$2{,}6 \cdot 10^{-3}$	$7{,}5 \cdot 10^{-4}$
$1 \cdot 10^{-4}$	$8{,}7 \cdot 10^{-2}$	$2{,}6 \cdot 10^{-2}$	$8{,}7 \cdot 10^{-3}$	$2{,}6 \cdot 10^{-3}$	$8{,}5 \cdot 10^{-4}$
$3 \cdot 10^{-5}$	$8{,}7 \cdot 10^{-2}$	$2{,}6 \cdot 10^{-2}$	$8{,}7 \cdot 10^{-3}$	$2{,}6 \cdot 10^{-3}$	$8{,}6 \cdot 10^{-4}$

Z wartości przytoczonych w tablicach 1 i 2 widać, że opór badany można wyznaczyć z uchybem praktycznie równym uchybowi wzorca, o ile

$$|\delta_{s(R_w)}| \geqslant 1 \cdot 10^{-5} \quad \text{oraz} \quad |\Delta_{s(q)}| \leqslant 1 \cdot 10^{-3} \quad \text{i} \quad |\delta_{s(r_z)}| \leqslant 1 \cdot 10^{-3}.$$

Zgadzając się na względny uchyb oporu badanego dwa razy większy niż uchyb wzorca, otrzymujemy warunek

$$|\delta_{s(R_w)}| \geqslant 1 \cdot 10^{-6} \quad \text{przy} \quad |\Delta_{s(q)}| \leqslant 3 \cdot 10^{-4} \quad \text{i} \quad |\delta_{s(r_z)}| \leqslant 1 \cdot 10^{-3}.$$

Wynika stąd, że potencjometr dekadowy powinien zachowywać klasę dokładności 0,2 lub 0,1. Liczba określająca klasę jest bowiem miarą uchybu wiarygodnego, który jest trzykrotnie większy od średniego; poprzednie wywody dotyczyły oczywiście uchybu średniego. Wymagana dokładność potencjometru precyzyjnego nie jest trudna do osiągnięcia.

Opór zastępczy r_z powinien być znany z uchybem nieprzekraczającym $\pm 1 \cdot 10^{-3}$. Zbadamy obecnie warunki zachowania tej dokładności. Opierając się na wzorze (5) obliczamy kolejno

$$\frac{\partial r_z}{\partial R_c} \cdot \frac{R_c}{r_z} = \frac{r}{R_c + r}, \qquad \frac{\partial r_z}{\partial r} \cdot \frac{r}{r_z} = \frac{R_c}{R_c + r}$$

i na tej podstawie otrzymujemy wyrażenie

$$[\delta_{s(r_z)}]^2 = \left[\frac{r}{R_c + r} \cdot \delta_{s(R_c)}\right]^2 + \left[\frac{R_c}{R_c + r} \cdot \delta_{s(r)}\right]^2,$$

które możemy przekształcić do postaci

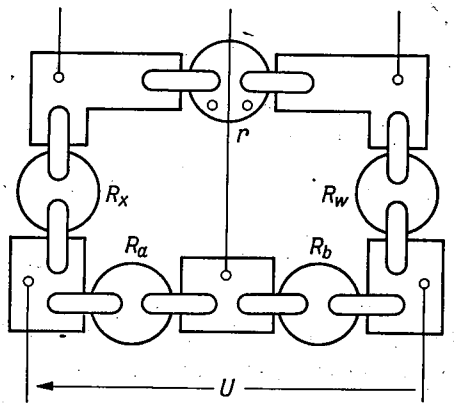
$$[\delta_{s(r)}]^2 = \left(\frac{R_c + r}{R_c}\right)^2 \cdot \left\{[\delta_{s(r_z)}]^2 - [\delta_{s(R_c)}]^2 \cdot \left(\frac{r}{R_c}\right)^2\right\}.$$

Maksymalna wartość r_z, występująca przy badaniu oporów $10^5\Omega$, wynosi około 100Ω. Oporność R_c potencjometru Feussnera wynosi co najmniej 1000 omów (4 dekady, najniższa po $0{,}1\Omega$). Z faktów tych wynika, że największy spotykany opór r wynosi 100 omów. Pierwszy składnik różnicy po prawej stronie powyższego wzoru jest zatem rzędu 10^{-6}, natomiast drugi nie przekracza 10^{-8}. Wobec tego można przyjąć z wystarczającą dokładnością, że

$$|\delta_{s(r_z)}| \approx |\delta_{s(r)}|. \tag{8}$$

Wzór (8) prowadzi do wniosku, że opór r_z można wprost wyznaczyć z wartości r oraz R_c według zależności (5), o ile opór r jest znany z uchybem poniżej $\pm 1 \cdot 10^{-3}$. Nie ma zatem trudności przy stosowaniu oporników jednoomowych i większych.

Komplikacje występują natomiast przy konieczności stosowania opornika r o wartości $0{,}1\Omega$ lub mniejszej. Opory takie wykonywane są już jako czterozaciskowe, a ich oporność nominalną uzyskuje się po-



Rys. 5. Układ połączeń głównych oporników mostka

między zaciskami napięciowymi przy zasilaniu poprzez zaciski prądowe. Warunków takich nie można uzyskać w mostku Carey-Fostera. Stosowany sposób włączania oporu r przedstawia rys. 5. Oporność występująca w układzie pomiarowym jest oczywiście większa, niż wartość nominalna opornika r. Wartość tej różnicy autor zmierzył w 25 oporach czterozaciskowych (od 1 do $10^{-4}\,\Omega$) pięciu wytwórni; trzeba nadmienić, że spotyka się też opory 1Ω czterozaciskowe. Otrzymane wyniki leżały w granicach od $0{,}4\,m\Omega$ do $3\,m\Omega$. Wynika stąd, że w przypadku zastosowania opornika czterozaciskowego w charakterze oporu r nie można już uzyskać wymaganej dokładności oporności r_z, która pozwoliłaby na obliczanie według wzoru (5).

W takim przypadku można by mierzyć opór r_z przy pomocy odpowiednio dokładnego mostka i otrzymaną wartość przyjąć do obliczeń. Istnieje jednak możliwość pośredniego pomiaru wartości r_z w samym mostku Carey-Fostera.

3. WYZNACZENIE OPORNOŚCI r_z

Pośrednie wyznaczenie oporności r_z osiąga się przez dwukrotne przeprowadzenie pomiaru. W pierwszym pomiarze opór badany porównuje się z samym opornikiem wzorcowym R_w, otrzymując

$$R_x - R_w = r_z \cdot (q_2' - q_1'). \tag{9}$$

W czasie drugiego pomiaru oporność wzorcowa jest zbocznikowana znanym opornikiem R_d, a wówczas

$$R_x - \frac{R_w \cdot R_d}{R_w + R_d} = r_z \cdot (q_2'' - q_1''). \tag{10}$$

Wyznaczając z tych zależności wartość r_z dochodzimy do wzoru

$$r_z = R_w \cdot \frac{s}{(1+s) \cdot (Q'' - Q')}, \tag{11}$$

w którym zastosowano następujące oznaczenia pomocnicze:

$$Q' = q_2' - q_1' \quad , \quad Q'' = q_2'' - q_1'' \quad , \quad s = R_w/R_d. \tag{12}$$

Szukaną oporność R_x możemy teraz wyrazić, opierając się na wzorach (6), (11) i (12), przy pomocy zależności

$$R_x = R_w \cdot \left(1 + \frac{s}{1+s} \cdot \frac{Q'}{Q'' - Q'}\right). \tag{13}$$

Przedstawiona metoda pomiaru wymaga oczywiście przeprowadzenia dyskusji dokładności. W związku z tym obliczamy:

$$\frac{\partial R_x}{\partial R_w} = 1 + \frac{s}{1+s} \cdot \frac{Q'}{Q'' - Q'} = \frac{R_x}{R_w},$$

$$\frac{\partial R_x}{\partial Q'} = R_w \cdot \frac{s}{1+s} \cdot \frac{Q''}{(Q'' - Q')^2} = \frac{R_x - R_w}{Q'' - Q'} \cdot \frac{Q''}{Q'},$$

$$\frac{\partial R_x}{\partial Q''} = R_w \cdot \frac{s}{1+s} \cdot \frac{-Q'}{(Q'' - Q')^2} = -\frac{R_x - R_w}{Q'' - Q'},$$

$$\frac{\partial R_x}{\partial s} = R_w \cdot \frac{Q'}{Q'' - Q'} \cdot \frac{1}{(1+s)^2} = \frac{R_x - R_w}{s \cdot (1+s)},$$

$$[\Delta_{s(R_x)}]^2 = \left[\frac{R_x}{R_w} \cdot \Delta_{s(R_w)}\right]^2 + \left(\frac{R_x - R_w}{Q'' - Q'}\right)^2 \cdot \left\{\left[\frac{Q''}{Q'} \cdot \Delta_{s(Q')}\right]^2 + [\Delta_{s(Q'')}]^2\right\} + \\ + \left[\frac{R_x - R_w}{s \cdot (1+s)} \cdot \Delta_{s(s)}\right]^2. \tag{14}$$

Opierając się na definicjach (12) stwierdzamy, że

$$[\Delta_{s(Q')}]^2 = [\Delta_{s(q_2')}]^2 + [\Delta_{s(q_1')}]^2 = 2 \cdot [\Delta_{s(q)}]^2$$

oraz

$$[\Delta_{s(Q'')}]^2 = [\Delta_{s(q_2'')}]^2 + [\Delta_{s(q_1'')}]^2 = 2 \cdot [\Delta_{s(q)}]^2.$$

Powyższe wartości podstawiamy do wzoru (14) i przyjmujemy, że $1 + s \approx 1$ (co jest uzasadnione, gdyż $s \ll 1$):

$$[\Delta_{s(R_x)}]^2 = \left[\frac{R_x}{R_w} \cdot \Delta_{s(R_w)}\right]^2 + 2 \cdot \left(\frac{R_x - R_w}{Q'' - Q'}\right)^2 \cdot \frac{(Q')^2 + (Q'')^2}{(Q')^2} \cdot [\Delta_{s(q)}]^2 + \\ + \left[\frac{R_x - R_w}{s} \cdot \Delta_{s(s)}\right]^2.$$

Przechodzimy obecnie do względnego uchybu systematycznego oporności mierzonej i zauważamy jednocześnie, że $(Q')^2 + (Q'')^2 \leqslant (Q' + Q'')^2$, co prowadzi do wzoru

$$[\delta_{s(R_x)}]^2 \leqslant [\delta_{s(R_w)}]^2 + \left(\frac{R_x - R_w}{R_x}\right)^2 \cdot \left\{2\frac{1}{(Q'' - Q')^2} \cdot \left(\frac{Q' + Q''}{Q'}\right)^2 \cdot [\Delta_{s(q)}]^2 + \right. \\ \left. + [\delta_{s(s)}]^2\right\}. \tag{15}$$

Na podstawie wzoru (11) wyznaczamy wartość

$$\frac{1}{Q'' - Q'} = \frac{r_z}{R_w} \cdot \frac{1+s}{s} \approx \frac{r_z}{R_w} \cdot \frac{1}{s}.$$

Z zależności (10) i (9) otrzymujemy odpowiednio

$$Q'' = \frac{1}{r_z} \cdot \left(R_x - R_w \cdot \frac{1}{1+s}\right) \quad \text{oraz} \quad Q' = \frac{1}{r_z} \cdot (R_x - R_w),$$

a stąd

$$Q' + Q'' = \frac{1}{r_z} \cdot \left(2 \cdot R_x - \frac{2+s}{1+s} \cdot R_w\right) \approx \frac{2}{r_z} \cdot (R_x - R_w),$$

czyli

$$\frac{Q' + Q''}{Q'} \approx 2.$$

Wprowadzając powyżej obliczone wartości do wzoru (15) dochodzimy do następującej zależności

$$[\delta_{s(R_x)}]^2 \leqslant [\delta_{s(R_w)}]^2 + \left(\frac{R_x - R_w}{R_x}\right)^2 \cdot \left\{8\left[\frac{r_z}{s \cdot R_w} \cdot \Delta_{s(q)}\right]^2 + [\delta_{s(s)}]^2\right\}. \quad (16)$$

Uchyb systematyczny stosunku s, zgodnie z definicją (12), wyraża się jako

$$[\delta_{s(s)}]^2 = [\delta_{s(R_w)}]^2 + [\delta_{s(R_d)}]^2.$$

Przyjmując ostrożnie $r_z = 2 \cdot 10^{-3} \cdot R_w$ oraz $s = 3 \cdot 10^{-4}$, możemy napisać

$$[\delta_{s(R_x)}]^2 \leqslant [\delta_{s(R_w)}]^2 + \left(\frac{R_x - R_w}{R_x}\right)^2 \cdot \{360 \cdot [\Delta_{s(q)}]^2 + [\delta_{s(R_w)}]^2 + [\delta_{s(R_d)}]^2\} \approx$$

$$\approx [\delta_{s(R_w)}]^2 + \left(\frac{R_x - R_w}{R_x}\right) \cdot \{360 \cdot [\Delta_{s(q)}]^2 + [\delta_{s(R_d)}]^2\}. \quad (17)$$

Opuszczenie uchybu wzorca wewnątrz nawiasu {} jest uzasadnione pomijalnością tego składnika wobec wartości pierwszego wyrażenia sumy, gdyż $|\Delta_{s(q)}|_{min} = 3 \cdot 10^{-5}$, $|\delta_{s(R_w)}|_{max} = 3 \cdot 10^{-4}$, wobec czego $360 \cdot [\Delta_{s(q)}]^2 \geqslant$ $\geqslant 3240 \cdot 10^{-10}$, natomiast $[\delta_{s(R_w)}]^2 \leqslant 900 \cdot 10^{-10}$.

Uchyb oporu badanego będzie praktycznie równy uchybowi opornika wzorcowego, o ile zostanie spełniona nierówność

$$360 \cdot [\Delta_{s(q)}]^2 + [\delta_{s(R_d)}]^2 \leqslant \frac{1}{10}\left(\frac{R_x}{R_x - R_w}\right)^2 \cdot [\delta_{s(R_w)}]^2.$$

Biorąc pod uwagę, że $|R_x - R_w| \leqslant 2 \cdot 10^{-3} \cdot R_w \approx 2 \cdot 10^{-3} \cdot R_x$, sporządzamy tablicę dopuszczalnych wartości uchybu oporu R_d w funkcji dokładności opornika wzorcowego oraz potencjometru dekadowego.

Tablica 3

$|\delta_{s(R_d)}|_{max} = f\{|\delta_{s(R_w)}|; |\Delta_{s(q)}|\}$ przy $|\delta_{s(R_x)}| \approx 1\,|\delta_{s(R_w)}|$

$\lvert\Delta_{s(q)}\rvert$	$\lvert\delta_{s(R_w)}\rvert$				
	$3 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-6}$
$3 \cdot 10^{-3}$	—	—	—	—	—
$1 \cdot 10^{-3}$	$4{,}5 \cdot 10^{-2}$	—	—	—	—
$3 \cdot 10^{-4}$	$4{,}7 \cdot 10^{-2}$	$1{,}5 \cdot 10^{-2}$	—	—	—
$1 \cdot 10^{-4}$	$4{,}7 \cdot 10^{-2}$	$1{,}6 \cdot 10^{-2}$	$4{,}5 \cdot 10^{-3}$	—	—
$3 \cdot 10^{-5}$	$4{,}7 \cdot 10^{-2}$	$1{,}6 \cdot 10^{-2}$	$4{,}7 \cdot 10^{-3}$	$1{,}5 \cdot 10^{-3}$	—

Względny uchyb oporu mierzonego nie przekroczy natomiast podwójnej wartości względnego uchybu wzorca pod warunkiem spełnienia zależności

$$360 \cdot [\Delta_{s(q)}]^2 + [\delta_{s(R_d)}]^2 \leqslant 3 \cdot \left(\frac{R_x}{R_x - R_w}\right)^2 \cdot [\delta_{s(R_w)}]^2.$$

Dopuszczalny względny uchyb oporności R_d obliczamy z powyższego wzoru, przyjmując $|R_x - R_w| \leqslant 2 \cdot 10^{-3} \cdot R_x$. Otrzymane wartości liczbowe zostały zestawione w tablicy 4.

Tablica 4

$|\delta_{s(R_d)}|_{max} = f\{|\delta_{s(R_w)}|; |\Delta_{s(q)}|\}$ przy $|\delta_{s(R_x)}| \leqslant 2 \cdot |\delta_{s(R_w)}|$

$\lvert\Delta_{s(q)}\rvert$	$\lvert\delta_{s(R_w)}\rvert$				
	$3 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-6}$
$3 \cdot 10^{-3}$	$2{,}5 \cdot 10^{-1}$	$6{,}5 \cdot 10^{-2}$	—	—	—
$1 \cdot 10^{-3}$	$2{,}6 \cdot 10^{-1}$	$8{,}5 \cdot 10^{-2}$	$1{,}8 \cdot 10^{-2}$	—	—
$3 \cdot 10^{-4}$	$2{,}6 \cdot 10^{-1}$	$8{,}6 \cdot 10^{-2}$	$2{,}5 \cdot 10^{-2}$	$6{,}5 \cdot 10^{-3}$	—
$1 \cdot 10^{-4}$	$2{,}6 \cdot 10^{-1}$	$8{,}7 \cdot 10^{-2}$	$2{,}6 \cdot 10^{-2}$	$8{,}5 \cdot 10^{-3}$	$1{,}8 \cdot 10^{-3}$
$3 \cdot 10^{-5}$	$2{,}6 \cdot 10^{-1}$	$8{,}7 \cdot 10^{-2}$	$2{,}6 \cdot 10^{-2}$	$8{,}6 \cdot 10^{-3}$	$2{,}5 \cdot 10^{-3}$

Z wartości przytoczonych w tablicach 3 i 4 widać, że opór badany można wyznaczyć z uchybem praktycznie równym uchybowi wzorca, o ile $|\delta_{s(R_w)}| \geqslant 3 \cdot 10^{-5}$ oraz $|\Delta_{s(q)}| \leqslant 1 \cdot 10^{-4}$ i $|\delta_{s(R_d)}| \leqslant 3 \cdot 10^{-3}$.

Zgadzając się na względny uchyb oporu badanego dwa razy większy niż uchyb wzorca, otrzymujemy warunek

$$|\delta_{s(R_w)}| \geqslant 3 \cdot 10^{-6} \text{ przy } |\Delta_{s(q)}| \leqslant 1 \cdot 10^{-4} \text{ i } |\delta_{s(R_d)}| \leqslant 3 \cdot 10^{-3}.$$

Wynika stąd, że w obecnym układzie potencjometr dekadowy powinien zachowywać klasę dokładności 0,02, a w najgorszym razie 0,05. Jako oporu bocznikującego R_d można z powodzeniem użyć opornika dekadowego klasy 0,5.

Widać wyraźnie, że wymagana tutaj dokładność potencjometru Feussnera jest znacznie wyższa niż przy pomiarze większych oporów. Przy doborze sprzętu należy zatem zawsze liczyć się z użyciem potencjometru klasy 0,5 a lepiej — klasy 0,02.

4. POMIAR STOSUNKU R_b/R_a

Jedną z zalet mostka Carey-Fostera stanowi możliwość pomiaru stosunku oporności R_b/R_a jednocześnie z wyznaczeniem nieznanego oporu R_x. Możliwość ta jest szczególnie ważna przy badaniu grupy oporów

metodą porównywania „każdego z każdym" i wyrównywaniu wyników np. sposobem Thiessena ([1], [4]). Otrzymane dodatkowo wyniki mogą być użyte do jeszcze ściślejszego wyrównania, co pozwala zwiększyć dokładność określenia wartości wszystkich badanych oporów.

Z chwilą uzyskania równowagi układu w pierwszym etapie pomiaru zostaje spełniona zależność (por. rys. 1.):

$$\frac{R_b}{R_a} = \frac{R_w + r_z - r_1}{R_x + r_1} = \frac{R_w + r_z(1 - q_1)}{R_x + r_z \cdot q_1}.$$

Podstawiając tutaj wartość R_x określoną wzorem (6) otrzymujemy

$$\frac{R_b}{R_a} = \frac{R_w + r_z(1 - q_1)}{R_w + r_z \cdot q_2} = 1 + \frac{r_z(1 - q_1 - q_2)}{R_w + r_z \cdot q_2} = X. \tag{18}$$

Zbadamy obecnie dokładność wyznaczenia stosunku $X = R_b/R_a$. W tym celu musimy obliczyć

$$\frac{\partial X}{\partial R_w} = -\frac{r_z \cdot (1 - q_1 - q_2)}{(R_w + r_z \cdot q_2)^2}, \qquad \frac{\partial X}{\partial r_z} = \frac{R_w(1 - q_1 - q_2)}{(R_w + r_z \cdot q_2)^2},$$

$$\frac{\partial X}{\partial q_1} = -\frac{r_z}{R_w + r_z \cdot q_2}, \qquad \frac{\partial X}{\partial q_2} = -\frac{r_z[R_w + r_z \cdot (1 - q_1)]}{(R_w + r_z \cdot q_2)^2},$$

a stąd otrzymujemy wyrażenie

$$[\Delta_{s(X)}]^2 = \left[\frac{1 - X}{R_w + r_z \cdot q_2} \cdot \Delta_{s(R_w)}\right]^2 + \left[-\frac{1 - X}{R_w + r_z \cdot q_2} \cdot \frac{R_w}{r_z} \cdot \Delta_{s(r_z)}\right]^2 +$$

$$+ \left[-\frac{r_z}{R_w + r_z \cdot q_2} \cdot \Delta_{s(q_1)}\right]^2 + \left[-\frac{r_z \cdot [R_w + r_z \cdot (1 - q_1)]}{(R_w + r_z \cdot q_2)^2} \cdot \Delta_{s(q_2)}\right]^2.$$

Powyższe wyrażenia można znacznie uprościć, zauważając, iż:

$$r_z \leqslant 2 \cdot 10^{-3} \cdot R_w \text{ oraz } |\Delta_{s(q_1)}| = |\Delta_{s(q_2)}| = \Delta_{s(q)}.$$

W związku z tym

$$[\Delta_{s(X)}]^2 = \left[\frac{1 - X}{R_w} \cdot \Delta_{s(R_w)}\right]^2 + \left[\frac{1 - X}{r_z} \cdot \Delta_{s(r_z)}\right]^2 + 2 \cdot \left[\frac{r_z}{R_w} \cdot \Delta_{s(q)}\right]^2.$$

Z zależności tej można łatwo przejść do względnego uchybu stosunku X, pamiętając, że $X \approx 1$:

$$[\delta_{s(X)}]^2 = (1 - X)^2 \cdot \{[\delta_{s(R_w)}]^2 + [\delta_{s(r_z)}]\}^2 + 2\left(\frac{r_z}{R_w}\right)^2 \cdot [\Delta_{s(q)}]^2. \tag{19}$$

Ponieważ $|1 - X| \leqslant 2 \cdot 10^{-3}$ oraz $r_z/R_w \leqslant 2 \cdot 10^{-3}$,
zatem

$$[\delta_{s(X)}]^2 \leqslant 4 \cdot 10^{-6} \cdot \{[\delta_{s(R_w)}]^2 + [\delta_{s(r_z)}]^2 + 2[\delta_{s(q)}]^2\} \approx$$

$$\approx 4 \cdot 10^{-6} \cdot \{[\delta_{s(r_z)}]^2 + 2[\delta_{s(q)}]^2\}.$$

W rozważaniach nad uchybem systematycznym (punkt 2) wykazaliśmy, że moduły uchybów oporności r_z oraz stosunku q nie powinny przekraczać wartości $1 \cdot 10^{-3}$; wymaganie to było podyktowane dokładnością pomiaru oporu R_x. Podstawiając te wartości do powyższego wzoru widzimy, że stosunek oporów R_b/R_a będzie wyznaczony z uchybem względnym nie większym niż $\pm 4 \cdot 10^{-6}$.

5. UCHYB OD NIECZUŁOŚCI

Z rysunku 4 wynika, że czułość mostka Carey-Fostera można określić na podstawie rozważań nad mostkiem Wheatstone'a. Jako oporność podstawową przyjmiemy nominalną wartość oporu R_x, którą oznaczymy wprost przez R. Wszystkie opory mostka wyrazimy jako krotności oporu podstawowego. W obliczeniach pominiemy małe oporności r_l oraz r_p, których suma nie przekracza 0,2% oporu podstawowego.

Wprowadzimy tu następujące oznaczenia:

$$R_a \approx R_b = R \cdot m, \quad R_g = r_g + r_d = R \cdot p, \tag{20}$$

gdzie R_g jest całkowitą opornością przekątnej galwanometrycznej mostka, złożoną z oporności wewnętrznej przyrządu r_g oraz oporu zastępczego r_d, uwidocznionego na rys. 4.

Przy porównaniu ze zwykłym mostkiem Wheatstone'a zauważamy, że współczynnik n, określony jako R_b/R_a praktycznie jest równy jedności. Stosunek p obecnie nie jest stały, zależy on bowiem od wartości q aktualnie nastawionej na potencjometrze precyzyjnym.

Obszerną dyskusję uchybu od nieczułości zawiera praca [8]. Stosownie do przytoczonych tam rozważań możemy napisać

$$|\delta_{n(R_x)}| = \frac{C_I \cdot \Delta_\alpha \cdot R}{U} \cdot 2(1 + m + 2p). \tag{21}$$

Przy założeniu jednakowej obciążalności P_d elementów mostka największą czułość osiąga się, stosując $n = 1$ oraz $U = 2 \cdot \sqrt{R \cdot P_d}$. Z grupy galwanometrów należących do jednego typu fabrykacyjnego należy wybrać ten, którego oporność krytyczna zewnętrzna jest równa zastępczej oporności mostka, widzianej z zacisków galwanometru. Potrzebną czułość układu osiąga się dla takiego typu, w którym stała

$$K = \frac{C_I \cdot R_{kc}}{\sqrt{R_{kc} - r_g}} \text{ spełnia warunek } |\delta_{n(R_x)}|_{dop} \approx \frac{2 \cdot K \cdot \Delta_\alpha}{\sqrt{P_d}}\ ^{*)}.$$

*) Stała K wynika ze znanych zależności $C_I^2 R_{kc} = k$ oraz $C_I^2 \cdot r_g = z$ jako $K = \frac{k}{\sqrt{k - z}}$. W przybliżeniu przyjęto, że $R_{kc} - r_g \approx R$.

Obecnie rozpatrzymy dobór galwanometru o nastawialnym boczniku magnetycznym. Z teorii wiadomo ([2]), że zachodzi tu zależność $C_I^2 \cdot R_{kc} = k$. W związku z tym, uchyb od nieczułości można przedstawić w postaci

$$|\delta_{n(R_x)}| = \frac{2 \cdot \Delta_\alpha \cdot R}{U} \cdot \sqrt{\frac{k}{R_{kc}}} \cdot (1 + m + 2p).$$

Oporność zastępcza układu wynosi $R \cdot \left(p + \frac{m+1}{2}\right)$, co łatwo wyprowadzić na podstawie rys. 4. Oporność krytyczna całkowita powinna być równa powyższej wartości, wobec czego

$$|\delta_{n(R_x)}| = \frac{2 \cdot \Delta_\alpha \cdot \sqrt{2 \cdot R \cdot k}}{U} \cdot \sqrt{1 + m + 2p}.$$

W przypadku, gdy $m \geqslant 1$, dopuszczalne napięcie zasilania mostka określone jest przez opór $R_x \approx R$ i wynosi $U = 2 \cdot \sqrt{R \cdot P_d}$. Wówczas

$$|\delta_{n(R_x)}| = \Delta_\alpha \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k}{P_d}} \cdot \sqrt{1 + m + 2 \cdot p} = \Delta_\alpha \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k}{P_d}} \cdot \sqrt{W_A}.$$

Dla $m \leqslant 1$ napięcie zasilania układu jest wyznaczone przez wartość oporu $R_a = R \cdot m$ i nie może przekraczać $U = 2 \cdot \sqrt{R \cdot P_d} \cdot \sqrt{m}$. W takim przypadku obowiązuje zależność

$$|\delta_{n(R_x)}| = \Delta_\alpha \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k}{P_d}} \cdot \sqrt{\frac{1 + m + 2 \cdot p}{m}} = \Delta_\alpha \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k}{P_d}} \cdot \sqrt{W_B}.$$

Najkorzystniejszą wartość m określimy, badając wyrażenia W_A i W_B jako funkcje tego parametru. Widzimy, że W_A przybiera możliwie najmniejszą wartość wówczas, gdy m odpowiada lewej granicy przedziału ważności tego wyrażenia, to znaczy — dla $m = 1$. Z drugiej strony $\frac{d(W_B)}{dm} = -\frac{1 + 2 \cdot p}{m^2} < 0$, co wskazuje na celowość wybrania m odpowiadającego prawej granicy przedziału ważności wyrażenia W_B, czyli również $m = 1$.

Przy zastosowaniu optymalnej wartości $m = 1$ otrzymujemy

$$|\delta_{n(R_x)}| = 2 \cdot \Delta_\alpha \cdot \sqrt{\frac{k}{P_d}} \cdot \sqrt{1 + p},$$

$$R_{kc} = R(p + 1) = r_g + R_c \cdot q \cdot (1 - q) + R.$$

Ponieważ wartość iloczynu $R_c \cdot q \cdot (1—q)$ zawiera się pomiędzy 0 a $\frac{1}{4} \cdot R_c$ dla wszystkich możliwych wartości parametru q, celowe będzie tak na-

stawić bocznik magnetyczny galwanometru, by uzyskać oporność krytyczną zewnętrzną odpowiadającą warunkowi $R_{kz} \approx R + \frac{1}{8} R_c$. Wybrany galwanometr powinien charakteryzować się taką wartością stałej k, aby uchyb od nieczułości był pomijalnie mały wobec systematycznego. Warunek ten będzie spełniony, gdy $|\delta_{n(R_x)}| \leqslant \frac{1}{3} \cdot |\delta_{s(R_w)}|$. Powiększanie czułości znacznie powyżej tej granicy utrudnia zrównoważenie układu, a nie poprawia dokładności pomiaru, ogranicznej uchybem systematycznym.

6. PRZYKŁADY POMIARÓW

Dobrą ilustrację powyższych wywodów teoretycznych stanowią wyniki pomiarów przykładowych. Do badań użyto grupę oporników normalnych o wartości nominalnej po 1000 omów; poszczególne opory zostały oznaczone następującymi symbolami:

„Wolff" nr fabr. 2881 — 10^3H „Wolff" nr fabr. 2882 — 10^3J,
„Etalon" nr fabr. 486 — 10^3K, „Etalon" nr fabr. 513 — 10^3L,
„Cambridge" nr fabr. L-300416 — 10^3M.

Opory firmy „Wolff" odbiegają silnie od wartości nominalnej, gdyż pochodzą z roku 1903. Opornik 10^3K wykazuje również znaczne odchylenie, natomiast 10^3L zachowuje dobrą dokładność. Nowy opór firmy „Cambridge" jest wyregulowany specjalnie dokładnie i służył jako wzorzec w przeprowadzonych pomiarach. Znaczne rozbieżności pomiędzy wartościami poszczególnych oporników pozwalają lepiej zorientować się we właściwościach metody pomiarowej.

W charakterze opornika r użyto oporu normalnego 10 omów, co zostało podyktowane dużą odchyłką oporów badanych (do 2‰). Jako potencjometr dekadowy służyły dwa oporniki, obsługiwane tak, by stale zachować wartość R_c = const. Wskaźnikiem równowagi układu był galwanometr firmy „Kipp" typu Ka.

Zasadniczy mostek został umieszczony w kąpieli termostatycznej, utrzymującej temperaturę + 20,0°C z uchybem do $\pm$ 0,05°C. Napięcie zasilające układ wynosiło 5,66 V przez cały czas pomiarów. Strata mocy w poszczególnym oporniku była zatem rzędu 8,5 mW, co leży wielokrotnie poniżej dopuszczalnej granicy.

Pomimo braku pasożytniczych sił elektromotorycznych — każdy pomiar wykonywano przy dwu kierunkach napięcia zasilającego; dla każdego oporu przeprowadzono po trzy takie pomiary.

Wartości odczytane zestawiono w tablicy 5, zawierającej jednocześnie średnie wartości nastawień R_1 oraz R_2.

Tablica 5

Wartości stałe: $R_w = 1.000.000\,\Omega$, $R_c = 1111{,}0\,\Omega$, $r = 10{,}00\,\Omega$

Lp.	R_x	R_a	R_b	R_1	R_2	Wartości średnie
				Ω	Ω	Ω
1+	10^3H	10^3K	10^3L	518,7	696,2	$R_1 = 518{,}75$
1−				518,8	696,3	
2+				518,7	696,2	
2−				518 8	696,3	$R_2 = 696{,}25$
3+				518,7	696,2	
3−				518,8	696,3	
1+	10^3J	10^3K	10^3L	498,5	716,4	$R_1 = 498{,}5$
1−				498,5	716,4	
2+				498,5	716,4	
2−				498,5	716,4	$R_2 = 716{,}4$
3+				498,5	716,4	
3−				498,5	716,4	
1+	10^3K	10^3H	10^3J	481,0	589,5	$R_1 = 481{,}0$
1−				481,0	589,4	
2+				481,0	589,4	
2−				481,0	589,4	$R_2 = 589{,}43$
3+				481,0	589,5	
3−				481,0	589,4	
1+	10^3L	10^3H	10^3J	532,7	537,7	$R_1 = 532{,}7$
1−				532,7	537,7	
2+				532,7	537,7	
2−				532,7	537,7	$R_2 = 537{,}7$
3+				532,7	537,7	
3−				532,7	537,7	

Przebieg obliczenia wartości R_x przedstawiono w tablicy 6. Parametr q oblicza się ze wzoru $q = \dfrac{R}{R_c} = \dfrac{R}{1111{,}0}$, a opór r_z wyznacza się jako $r_z = \dfrac{R_c \cdot r}{R_c + r}$.

Tablica 6

Wartości stałe: $r_z = 9{,}9108\,\Omega$, $R_w = 1.000.000\,\Omega$

Lp.	R_x	R_a	R_b	q_1	q_2	$q_2 - q_1$	R_x
				—	—	—	Ω
1	10^3H	10^3K	10^3L	0,46692	0,62669	$159{,}77 \cdot 10^{-3}$	1001,5834
2	10^3J	10^3K	10^3L	0,44869	0,64482	$196{,}13 \cdot 10^{-3}$	1001,9438
3	10^3K	10^3H	10^3J	0,43294	0,53054	$97{,}60 \cdot 10^{-3}$	1000,9673
4	10^3L	10^3H	10^3J	0,47948	0,48398	$4{,}50 \cdot 10^{-3}$	1000,0446

Obliczenia stosunków $X = R_b/R_a$, oparte na wywodach punktu 4, ilustruje tablica 7.

Tablica 7

Wartości stałe: $r_z = 9{,}9108\ \Omega$, $R_w = 1.000.000\ \Omega$

Lp.	R_x	R_a	R_b	q_1	q_2	$r_z(1-q_1-q_2)$	$R_w + r_z q_2$	$X - 1$
				—	—	Ω	Ω	—
1	10^3H	10^3K	10^3L	0,46692	0,62669	−0,92775	1006,2	$-922{,}0 \cdot 10^{-6}$
2	10^3J	10^3K	10^3L	0,44869	0,64482	−0,92676	1006,4	$-920{,}9 \cdot 10^{-6}$
3	10^3K	10^3H	10^3J	0,43294	0,53054	+0,36194	1005,3	$+360{,}0 \cdot 10^{-6}$
4	10^3L	10^3H	10^3J	0,47948	0,48398	+0,36214	1004,8	$+360{,}4 \cdot 10^{-6}$

Dla porównania obliczymy teraz stosunki X, opierając się na wartościach odpowiednich oporów, określonych w tablicy 6. Otrzymujemy:

$$\frac{10^3\text{L}}{10^3\text{K}} = \frac{1000{,}0446}{1000{,}9673} = 1 - \frac{0{,}9227}{1000{,}9673} = 1 - 921{,}8 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{10^3\text{J}}{10^3\text{H}} = \frac{1001{,}9438}{1001{,}5834} = 1 + \frac{0{,}3604}{1001{,}5834} = 1 + 359{,}8 \cdot 10^{-6}$$

Porównując obliczone i pomierzone wartości stosunków widzimy, że największa różnica nie przekracza $1 \cdot 10^{-6}$, co korzystnie świadczy o dokładności tej metody.

Obliczenie uchybu systematycznego, jakim są obarczone wartości R_x, przeprowadzamy na podstawie wzoru (7) i (8). Podstawiając $r_z \approx 10\Omega$, $R_w = 1000\ \Omega$, $|\delta_{s(R_w)}| = 2 \cdot 10^{-6}$, $|\delta_{s(r)}| = 3 \cdot 10^{-4}$, $|\Delta_{s(q)}| = 3 \cdot 10^{-4}$ otrzymujemy $|\delta_{s(R_x)}| \leqslant 6 \cdot 10^{-6}$. Ta stosunkowo wysoka granica uchybu wynika z nienormalnie wysokiej wartości stosunku r_z/R_w. Przytoczone powyżej wartości stosunków X wskazują, że takie obliczenie uchybów jest pesymistyczne, co było widać z toku wyprowadzenia wzoru (7).

Wartość uchybu od nieczułości wyznaczono doświadczalnie. Przy badaniu oporu 10^3H zmieniono opór R_2 z wartości 696,2Ω na 696,1Ω, co spowodowało odchylenie galwanometru o 1/3 działki. Zmiana ta odpowiada zmianie oporu $(R_x - R_w)$ z 1,5834Ω na 1,5825Ω to jest o 0,0009Ω. Wynika stąd, że względny uchyb od nieczułości wynosił około $\pm 1 \cdot 10^{-6}$.

7. ZAKOŃCZENIE

Przedstawione rozważania teoretyczne, poparte wynikami pomiarów przykładowych, świadczą wyraźnie o korzystnych właściwościach metrologicznych przedstawionej modyfikacji mostka Carey-Fostera. Nadaje się ona do dokładnych pomiarów wszelkich oporów dwuzacisko-

wych samodzielnych. Nie można jej niestety zastosować do wyznaczania stosunku oporów tworzących zestawy (np. w kompensatorze), gdyż trzeba by dokonywać rozłączeń dla wtrącenia oporu r_z. Stosunki takie można badać, posługując się odrębnym oporem wzorcowym R_w i przeliczając odpowiednio wyniki; stanowi to jednak komplikację pomiaru i obniża jego dokładność.

Do niewątpliwych zalet metody należy fakt, że operuje ona wyłącznie sprzętem typowym. Tylko nieliczne elementy potrzebnej aparatury muszą wykazywać wysoką dokładność; od pozostałych wymaga się jedynie zachowania stałej wartości. Ściśle zerowy charakter metody uniezależnia wynik pomiaru od wartości napięcia zasilającego. Możliwość ubocznego, lecz dokładnego, wyznaczenia stosunku oporów pomocniczych jest specjalnie korzystna przy wewnętrznym sprawdzaniu grup oporników.

Wydaje się zatem, że omawiana metoda zasługuje na szersze spopularyzowanie i częstsze stosowanie praktyczne.

Politechnika Gdańska
Katedra Miernictwa Elektrycznego

WYKAZ LITERATURY

1. Bock H.: Einführung in die Messtechnik — Allgemeine Grundlagen für die Projektierung von Prüfständen, die Durchführung und Auswertung von Messungen. VEB Verlag Technik, Berlin 1954.
2. Friemkie A. W.: Elektriczeskije izmierenija — obszczyj kurs. Goseniergoizdat, Moskwa — Leningrad 1954.
3. Golding E.: Electrical Measurements and Measuring Instruments. Pittman and Sons LTD, London 1940.
4. Jaeger W.: Elektrische Messtechnik. J. A. Barth, Leipzig 1928.
5. Karandiejew K. B.: Mietody elektriczeskich izmierenij (diffierencjalnyje, mostowyje i kompensacjonnyje). Goseniergoizdat, Moskwa — Leningrad 1952.
6. Laws F. A.: Electrical Measurements. Mc Graw-Hill, New York — London 1938.
7. Michels W. C.: Adwanced Electrical Measurements. D. van Nostrand, New York 1949.
8. Sawicki J.: Skompensowany mostek Wheatstone'a. — Arch. Elektrot. t. VII, z. 3, Warszawa, 1958.

J. SAWICKI

MODIFICATION OF THE CAREY-FOSTER BRIDGE

Summary

The Carey-Foster bridge is a exactly zero method of a precise measurement of resistance. The proposed modification removes the main disadvantage of the system, that is, the necessity of a periodical calibration of the wire potentio-

meter. The potentiometer has been substituted by a parallel set consisting of a low constant resistance r and a precise Feussner voltage divider. The result of the measurement is obtained from the formula (6). In case a resistor r is a four-terminal one, the measurement is carried out twice; with R_w alone, and again with the parallel set R_w, and R_d. The result of the measurement is computed form the formula (13) and (12).

At the same time in the presented system the ration $X = R_b/R_a$ based on the relationship (18) may be measured.

The paper contains an analysis of the accuracy of the proposed modification and some recommendations concerning the selection of the instrumental setup from the point of view of the accuracy and sensitivity of the method. The results of the model measurements have been also given.

Е. САВИЦКИ

МОДИФИКАЦИЯ МОСТА КАРЕЙ-ФОСТЕРА

Резюме

Мост Карей-Фостера является одним из методов для прецизионного измерения сопротивлений. Он обладает всеми положительными качествами точно нулевого метода измерения. Существенным недостатком классической схемы — это необходимость периодической калибрировки проволочного потенциометра, который служит измерительным элементом. Предлагаемая модификация устраняет этот недостаток. Настоящий доклад анализирует точность этой модификации и приводит пример измерения.

Схема первого этапа представлена на рис. 1, а второй этап иллюстрирован рис. 2-ым. Значение испытуемого сопротивления расчитывается в классической схеме по формуле (3).

Модификация заключается в замене проволочного потенциометра параллельным соединением небольшого постоянного сопротивления r и прецизионного декадного потенциометра по Фойснеру с полным сопротивлением $R_c = \text{const}$ (рис. 3). Значение сопротивления r обыкновенно равняется 1 ... 2‰ соротивления применённого образца R_w. Для определения результата пользуемся формулой (6). Рассуждения о систематической погрешности приводят к заключению, что релятивная погрешность испытуемого сопротивления $|\delta_{s(R_x)}|$ практически равна погрешности образца $|\delta_{s(R_w)}|$ когда $|\delta_{s(R_w)}| \geqslant 10^{-5}$ а также $|\Delta_{s(q)}| \leqslant 10^{-3}$ и $|\delta_{s(r)}| \leqslant 10^{-3}$. Доказано тоже, что $|\delta_{s(R_x)}| \leqslant 2 \cdot |\delta_{s(R_w)}|$, когда $|\delta_{s(R_w)}| \geqslant 10^{-6}$ при $|\Delta_{s(q)}| \leqslant 3 \cdot 10^{-4}$ и $|\delta_{s(r)}| \leqslant 10^{-3}$.

В случае, когда сопротивление r четырёхзажимное, значение r_z для формулы (6) не может быть определено расчётом, ввиду того, что погрешность могла бы превысить допусткаемые пределы. В таком случае измерение производится двоекратно: первый раз применяя сам образец R_w, а второй раз — при образце шунтированном сопротивлением R_d. Результат измерения находим по формуле (13), принимая в расчёт дефиницию (12). Обыкновенно применяется значение коэффициента шунтирования $s = R_w/R_d = 3 \cdot 10^{-4}$. Приведенные рассуждения приводят к заключению, что $|\delta_{s(R_x)}| \approx |\delta_{s(R_w)}|$ когда $|\delta_{s(R_w)}| \geqslant 3 \cdot 10^{-5}$ а также $|\Delta_{s(q)}| \leqslant 10^{-4}$ и $|\delta_{s(R_d)}| \leqslant 3 \cdot 10^{-3}$. Дополнительно доказано, что $|\delta_{s(R_x)}| \leqslant 2 \cdot |\delta_{s(R_w)}|$ когда $|\delta_{s(R_w)}| \geqslant 3 \cdot 10^{-6}$ а также $|\Delta_{s(q)}| \leqslant 10^{-4}$ и $|\delta_{s(R_d)}| \leqslant 3 \cdot 10^{-3}$. Из вышеизложенного следует, что сопротивление r должно соответствовать классу точности 0,2, сопро-

тивление R_d классу 0,5, а потенциометр по Фойснеру классу 0,05 а лучше 0,02. При рассуждениях применены упрощения, которые приводят к пессимистической оценке погрешности измерения.

Одной из положительных черт представленного метода является возможность одновременного измерения отношения $X = R_b/R_a$, которое получаем из формулы (18). При соблюдении прежде приведенных положений, погрешность этого отношения не превышает $\pm 4 \cdot 10^{-6}$.

Глава 5 настоящего доклада вкратце рассматривает вопрос чувствительности схемы и даёт указания по наилучшему подбору элементов с этой точки зрения. Примеры измерений предложенным методом приведены в главе 6-ой. Измеренные и рассчитанные значения отношений X отличаются друг от друга не более чем $\pm 1 \cdot 10^{-6}$. Это доказывает хорошую точность модификации, несмотря на то, что два сопротивления весьма далеко отклонялись от номинального значения.

Модифицированный мост Карей-Фостера должен был бы найти более широкое применение благодаря своим преимуществам, заступая например компенсационные методы, в которых изменения ЕДС источников влияет на результат измерения.

J. SAWICKI

MODIFIKATION DER CAREY—FOSTER—BRÜCKE

Zusammenfassung

Die Brücke nach Carey-Foster stellt eine Präzisionsmethode zur Widerstandsbestimmung dar. Sie ist mit allen Vorteilen der exakten Nullmethode versehen. Der Hauptnachteil der klassischen Lösung bildet die Unentbehrlichkeit periodischer Kalibration des Drahtpotentiometers, der die Rolle eines Messgliedes spielt. Unsere Modifikation beseitigt diesen Nachteil. Die vorliegende Abfassung enthält eine eingehende Diskussion der Genauigkeit dieser Modifikation, wie auch Beispielmessungen.

Die Schaltung der ersten Etappe ist auf der Abb. 1, die der zweiten auf Abb. 2 dargestellt. Der Wert des Prüflings wird in der klassischen Lösung nach Formel (3) berechnet.

Die vorgelegte Modifikation beruht auf der Ersetzung des Drahtpotentiometers durch eine parallele Schaltung eines kleinen Festwiderstandes r mit einem Präzisionsdekadenpotentiometr (nach Feussner), der einen Gesamtwiderstand $R_c =$ $=$ const aufweist (Abb. 3). Der Wert des Widerstandes r beträgt gewöhnlich 1...2‰ des Vergleichs widerstandes R_w. Zur Berechnung des Resultats der Messung dient jetzt die Formel (6). Die Diskussion des systematischen Fehlers führt uns zu dem Schluss, dass der relative Fehler des Prüflings $|\delta_{s(R_x)}|$ praktisch dem des Vergleichswiderstandes $|\delta_{s(R_w)}|$ gleich ist, wenn $|\delta_{s(R_w)}| \geqslant 10^{-5}$ und $|\Delta_{s(q)}| \leqslant 10^{-3}$ wie auch $|\delta_{s(r)}| \leqslant 10^{-3}$. Es wurde bewiesen, dass $|\delta_{s(R_x)}| \leqslant 2 \cdot |\delta_{s(R_w)}|$ wenn $|\delta_{s(R_w)}| \geqslant 10^{-6}$ und $|\Delta_{s(q)}| \leqslant 3 \cdot 10^{-4}$ wie auch $|\delta_{s(r)}| \leqslant 10^{-3}$.

Falls der Widerstand r mit vier Klemmen ausgerüstet ist, so können wir nicht den Wert r_z zur Formel (6) berechnen, da der Fehler zulässige Grenzen überschreiten kann. In solchen Fällen wird die Messung zweimal ausgeführt: erstmalig mit dem blossen Vergleichswiderstand und nachträglich mit dem Vergleichs-

widerstand nebst dem Nebenschluss R_d. Das Resultat der Messung wird aus der Formel (13), mit Berücksichtigung der Definition (12) berechnet. Gewöhnlich wird der Nebenschlusskoeffizient $s = R_w/R_d = 3 \cdot 10{-}4$ gewählt. Die durchgeführte Diskussion der Genauigkeit führt zu dem Schluss, dass jetzt $|\delta_{s(R_x)}| \approx |\delta_{s(R_w)}|$ wenn $|\delta_{s(R_w)}| \geqslant 3 \cdot 10{-}5$ und $|\Delta_{s(q)}| \leqslant 10{-}4$ wie auch $|\delta_{s(R_d)}| \leqslant 3 \cdot 10{-}3$. Weiter wurde bewiesen, dass $|\delta_{(sR_x)}| \leqslant 2 |\delta_{s(R_w)}|$ wenn $|\delta_{s(R_w)}| \geqslant 3 \cdot 10{-}6$ und $|\Delta_{s(q)}| \leqslant 10{-}4$ wie auch $|\delta_{s(R_d)}| \leqslant 3 \cdot 10{-}3$.

Aus dem vorhergesagten folgt, dass der Widerstand r die Genauigkeitsklasse 0,2, R_d — die Klasse 0,5, der Potentiometer nach Feussner — 0,05 oder besser 0,02, aufweisen muss. Während der Erwägungen wurden Vereinfachungen benutzt, die zu einer pessimistischen Schätzung des Fehlers führen.

Einen Vorteil dieser Methode bildet die Möglichkeit der gleichzeitigen Messung des Verhältnisses $X = R_b/R_a$, das aus der Formel (18) berechnet wird. Werden die obigen Voraussetzungen erhalten, so kann der Fehler dieses Verhältnisses nicht den Wert $\pm 4 \cdot 10{-}6$ überschreiten.

Der 5-te Absatz der vorliegenden Abfassung bespricht kürzlich das Problem der Empfindlichkeit der Schaltung und gibt Angaben zur vorteilhaftesten Anpassung der Elemente an. Beispielmessungen nach dieser Methode sind im Absatz 6 angeführt. Gemessene und berechnete Werte der Verhältnisse X unterscheiden sich voneinander nicht mehr als $\pm 1 \cdot 10{-}6$. Diese Tatsache beweist die gute Geneauigkeit der besprochenen Methode, obwohl zwei Widerstände starke Abweichungen vom Sollwert aufweisen.

Unserer Meinung nach kann die Carey-Foster-Brücke wegen ihrer Vorteile eine öftere Anwendung finden, z. B. Kompensationsmethoden ersetzend, in denen die Änderungen der EMK der Quellen auf das Resultat der Messung einen Einfluss ausüben.

J. SAWICKI

MODIFICATION DU PONT DE CAREY-FOSTER

Résumé

Le pont de Carey — Foster c'est strictement une méthode de zéro servant aux mésures de précision des résistances. La modification proposée élimine le defaut cardinal de se système consistant en la nécessité de graduer périodiquement le potentiomètre en fil. Ce potentiomètre était substitué par la connexion parallèle d'une petite résistance invariable r et d'un diviseur exact de tension d' après le schème de Feussner. On peut obtenir le résultat de mesure à l'aide de la formule (6). Dans les cas, quand la résistance r possède quatre bornes, on exécute la mesure deux fois: avec la résistance R_w, seulement et, ensuite, avec la connection parallèle R_w et R_d. On peut évaluer le résultat de cette mesure à l'aide des formules (13) et (12).

Utilisant le schème présenté on peut aussi mesurer le rapport $X = R_b/R_a$ en ce basant sur la rélation (18). Enfin on a présenté l'analyse de l'exactitude de la modification proposée, ainsi que les directives concernant le choix des élements du point de vue de la précision et de la sensibilité de la méthode. On a rapporté aussi des résultats de quelques mesures d'exemple.

621.392.26

ANDRZEJ SKORUPSKI

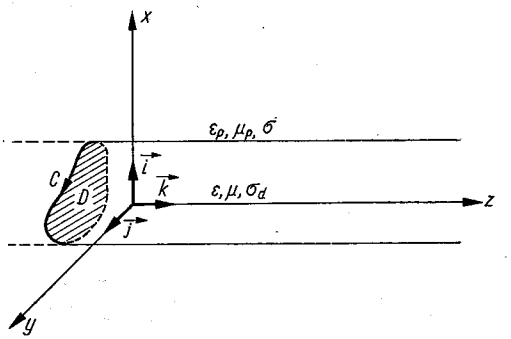
Zastosowanie odwzorowań konforemnych do analizy falowodów grzbietowych

Rękopis dostarczono 5.1.1962

W pracy zastosowano metodę odwzorowania konforemnego do wyznaczania parametrów falowodu grzbietowego, takich jak graniczne długości fal, impedancja charakterystyczna, wytrzymałość na przebicie i tłumienie pola. Rozwiązania zilustrowano przykładem rachunkowym sugerującym właściwy przebieg rachunków numerycznych. W rozdziale pierwszym wyprowadzono podstawowe wzory z teorii falowodów jednorodnych i przedstawiono je w postaci wygodnej do dalszych rozważań; wyprowadzono również wzór na szybkość zmiany tłumienia wywołanego stratami w ściankach przy częstotliwości granicznej. W rozdziale drugim podano transformację wzorów z rozdziału pierwszego przy odwzorowaniu konforemnym przekroju poprzecznego falowodu grzbietowego na prostokąt (rys. 4). W rozdziale 2.3.1 rozważono najprostsze przybliżenie funkcji odwzorowującej, a dalsze przybliżenia przedyskutowano w rozdziale 2.3.2. Oszacowano również błędy przybliżonych odwzorowań.

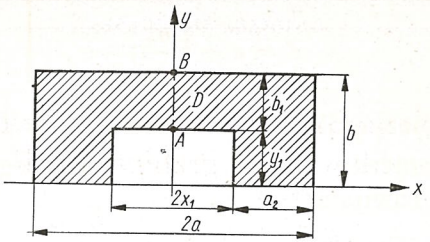
1. DEFINICJE I PODSTAWOWE ZALEŻNOŚCI

Aby nie rozpraszać toku dalszych rozważań, przytoczymy obecnie wzory wyrażające parametry falowodów jednorodnych przez wartości i funkcje własne odpowiednich problemów brzegowych, nadając im



Rys. 1. Falowód jednorodny i związane z nim oznaczenia

przy tym postać możliwie jednolitą i wygodną w dalszych rozważaniach. Przyjmiemy układ jednostek MKS. Przez ε μ σ_d oznaczymy parametry ośrodka wypełniającego falowód, a dla ośrodka otaczającego zarezerwujemy symbole ε_p, μ_p i σ (rys. 1).



Rys. 2. Przekrój poprzeczny falowodu grzbietowego

Falowodem grzbietowym będziemy w dalszym ciągu nazywać falowód jednorodny o przekroju poprzecznym jak na rys. 2.

Będziemy rozważać wyłącznie pola elektromagnetyczne o harmonicznej zależności od czasu:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \mathrm{Re}[\vec{E}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}] \tag{1}$$

i analogicznie dla H.

1.1. Pola i częstotliwości graniczne (por. np. [7])

a) Pola typu TE:

$$\left.\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}_T(\vec{r}) = -i\omega\mu(\vec{k} \times \nabla\psi) \\ \vec{H}_T(\vec{r}) &= ih\nabla\psi \\ H_z(\vec{r}) &= \gamma^2\psi \end{aligned}\right\} \cdot e^{ihz}, \tag{2}$$

gdzie ψ i γ^2 — funkcja i wartość własna w problemie Neumana:

$$\nabla^2\psi + \gamma^2\psi = 0 \qquad \text{w obszarze } D; \qquad \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_C = 0. \tag{3}$$

(Dla dowolnego wektora $\vec{a}$, przez $\vec{a}_T$ oznaczamy składową poprzeczną $a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$.

b) Pola typu TM:

$$\left.\begin{aligned} \vec{H}(\vec{r}) &= \vec{H}_T(\vec{r}) = i\omega\varepsilon(\vec{k} \times \nabla\psi) \\ \vec{E}_T(\vec{r}) &= ih\nabla\varphi \\ E_z(\vec{r}) &= \gamma^2\varphi \end{aligned}\right\} e^{ihz} \tag{4}$$

φ i γ^2 — funkcja i wartość własna w problemie Dirichleta:

$$\nabla^2\varphi + \gamma^2\varphi = 0 \quad \text{w obszarze } D; \quad \varphi|_C = 0. \tag{5}$$

Stała propagacji h w obu wypadkach wyraża się wzorem:

$$\left.\begin{aligned} h &= h' + ih'' = \sqrt{k^2 - \gamma^2}, \\ k &= \omega\sqrt{\varepsilon'\mu}; \\ \varepsilon' &= \varepsilon + i\frac{\sigma_d}{\omega}; \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

gdzie:

$h'' = Imh$ jest współczynnikiem tłumienia pola w falowodzie.

Częstotliwość graniczna rodzaju odpowiadającego wartości własnej γ^2 jest zdefiniowana równaniem $h(\omega_g, \gamma^2)|_{\sigma_d = 0} = 0$,
czyli

$$\omega_g = \gamma v \quad \text{lub} \quad \lambda_g = \frac{2\pi v}{\omega_g} = \frac{2\pi}{\gamma}, \quad (7)$$

gdzie:

$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ — prędkość fali elektromagnetycznej w ośrodku nieograniczonym o parametrach ε, μ, $\sigma_d = 0$

λ_g — graniczna długość fali.

Miarą szerokopasmowości falowodu, w którym propagowany jest rodzaj podstawowy, jest stosunek

$$m = \frac{\omega_{g2}}{\omega_{g1}} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \quad (8)$$

zwany współczynnikiem separacji rodzajów [γ_1 — najmniejsza wartość własna problemu (3); γ_2 — następna co do wielkości wartość własna problemu (3) lub (5)].

O funkcjach φ i ψ można zawsze założyć, że są rzeczywiste i wówczas posiadają one dobrze znaną interpretację fizyczną: linie $\psi = \text{const}$ są liniami pola elektrycznego (2), a $\varphi = \text{const}$ liniami pola magnetycznego (4); rodziny krzywych ortogonalnych określają odpowiednio linie poprzecznego pola magnetycznego (2) lub elektrycznego (4). W związku z powyższym pragniemy jeszcze zwrócić uwagę na następujący fakt. Jeśli przyrost funkcji ψ między sąsiednimi liniami $\psi = \text{const}$ jest stały, czyli równania tych linii są postaci $\psi = c + k \cdot h$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$, c i $h > 0$ — dowolne stałe) (rys. 3), wówczas koncentracja linii sił jest w przybliżeniu miarą natężenia pola elektrycznego (2) w danym punkcie.

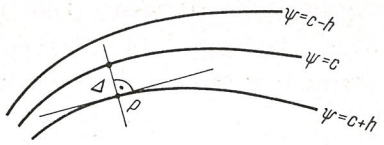
Istotnie, ze wzorów (1) i (2) mamy

$$\vec{E}_T(\vec{r}, t) = (\vec{k} \times \nabla\psi)\,\mathrm{Re}\,[-i\omega\mu e^{i(hz-\omega t)}],$$

czyli

$$\max_t E_T(\vec{r}, t) = \omega \mu e^{-h''z} |\nabla \psi| \sim |\nabla \psi| \approx \frac{h}{\Delta}. \tag{9}$$

Zatem $\frac{1}{\Delta}$, czyli ilość linii sił na jednostkę długości normalnej, jest



Rys. 3.

w przybliżeniu proporcjonalna do amplitudy natężenia pola elektrycznego (2). Podobnie, koncentracja linii $\varphi = c + k \cdot h$ jest miarą natężenia pola magnetycznego (4).

1.2. Impedancja charakterystyczna

Przykładowo przyjmiemy następującą definicję impedancji charakterystycznej falowodu: $Z = \frac{\bar{U}^2}{2P}$,

gdzie:

$\bar{U}$ — amplituda napięcia na osi symetrii przekroju poprzecznego,

P — moc średnia transmitowana przez falowód.

Rozważania ograniczamy do pól typu TE, wśród których znajduje się m. in. rodzaj podstawowy. Na mocy wzorów (9) i (2):

$$\left.\begin{aligned} \bar{U} &= \int_{AB} \max_t E_T(\vec{r}, t)\, ds = \omega \mu e^{-h''z} \int_{y_A}^{y_B} |\nabla \psi|\Big|_{x=0} dy \\ \text{oraz} \quad P &= \frac{1}{2} Re \int_D \int [\vec{E}_T(\vec{r}) \times \vec{H}_T^*(\vec{r})] \cdot \vec{k}\, dx\, dy = \frac{1}{2} \omega \mu h' e^{-2h''z} \int_D \int (\nabla \psi)^2 dx\, dy, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

czyli

$$Z = K \frac{\omega \mu}{h'} = K Z_0 \frac{\lambda_f}{\lambda}, \tag{11}$$

gdzie $K = \frac{I_1^2}{I_2}$; $I_1 = \int_{AB} |\nabla\psi|\, ds = \int_{y_A}^{y_B} |\nabla\psi|\Big|_{x=0} dy$; $I_2 = \iint_D (\nabla\psi)^2\, dx\, dy = \gamma^2 \iint_D \psi^2\, dx\, dy$ (12)

$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$; $\lambda_f = \frac{2\pi}{h'}$ — długość fali w falowodzie;

$\lambda = \frac{2\pi v}{\omega}$ — długość fali w dielektryku nieograniczonym [$\sigma_d = 0$].

1.3. Wytrzymałość falowodu na przebicie

Ograniczymy się również do pól typu TE. Ze wzorów (9) i (12):

$$\frac{P}{\left[\max_{\vec{r}} \max_{t} E\right]^2} = \frac{h' \iint_D (\nabla\psi)^2\, dx\, dy}{2\omega\mu \left[\max_{\vec{r}} |\nabla\psi|\right]^2}.$$

Podstawiając w tym wzorze zamiast ψ funkcję $c \cdot \psi$ (która jest również funkcją własną) i dobierając tak c, aby $\max_{\vec{r}} \max_{t} E = E_g$ — maksymalne dopuszczalne dla danego dielektryka natężenie pola elektrycznego — otrzymamy $P = P_g$ — maksymalna moc możliwa do przesłania.

Ostatecznie więc:

gdzie:

$$P_g = E_g^2 \frac{h'}{2\omega\mu} L = \frac{E_g}{2Z_0} \frac{\lambda}{\lambda_f} L,$$

$$L = \frac{\iint_D (\nabla\psi)^2\, dx\, dy}{\left[\max_{\vec{r}} |\nabla\psi|\right]^2} = \frac{I_2}{\max_{\vec{r}} (\nabla\psi)^2}. \qquad (13)$$

1.4. Charakterystyka częstotliwościowa tłumienia pola

Podamy obecnie wzór na pełne tłumienie pola (zarówno od strat w dielektryku, jak i w ściankach falowodu) słuszny przy dowolnej częstotliwości, opierając się na wynikach uzyskanych w [4]. Otóż, jak pokazano w tej pracy, w obecności strat w ściankach nie może być propagowany „czysty" rodzaj TE (2), lub TM (4), lecz występuje zawsze pewna domieszka pól drugiego typu. Jednak przy braku degeneracji [czyli gdy γ^2 jest wartością własną dokładnie jednego z problemów (3),

lub (5)] powyższa domieszka jest w pierwszym przybliżeniu do pominięcia, a stała propagacji przy dowolnej częstotliwości wyraża się wzorem:

$$h = \sqrt{h^{(0)2} + M(1+i) + 0(|w|^2)} \approx \sqrt{h^{(0)2} + M(1+i)},$$

gdzie:

$$w = \sqrt{\frac{\mu_p}{\varepsilon_p'}} = \omega \mu_p d \frac{1-i}{2}$$

jest oporem falowym przewodnika; dla dobrych przewodników $|w|$ jest bardzo małym parametrem. $\left(d = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu_p}}\right.$ — głębokość wnikania pola w przewodnik).

$$M_{TE} = \frac{\frac{\mu_p}{\mu} d \left[\gamma^4 \oint_C \psi^2 \, ds + h_0^2 \oint_C \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \right)^2 ds \right]}{2\gamma^2 \iint_D \psi^2 \, dx \, dy},$$

$$M_{TM} = \frac{\omega^2 \mu_p \varepsilon d \oint_C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2 ds}{2\gamma^2 \iint_D \varphi^2 \, dx \, dy},$$

$h^{(0)}$ — stała propagacji przy $\sigma = \infty$.

W [4] rozważania prowadzono przy założeniu doskonałego dielektryka ($\sigma_d = 0$); jednak śledząc ich tok okazuje się, że założenie to, w gruncie rzeczy, nigdzie nie interweniuje i za $h^{(0)}$ można podstawić wyrażenie (6), co daje ostatecznie:

$$h \approx \sqrt{h_0^2 + M(1+i) + Ni}, \tag{14}$$

gdzie:

$h_0 = \gamma \sqrt{\omega_1^2 - 1}$ — stała propagacji w warunkach idealnych ($\sigma_d = 0$, $\sigma = \infty$),

$\omega_1 = \frac{\omega}{\omega_g}$ — częstotliwość zredukowana,

$N = \omega_1 \gamma \sigma_d Z_0$ — współczynnik uwzględniający straty dielektryczne,

$M = C \frac{A + B(\omega_1^2 - 1)}{\omega_1^{1/2}}$ (pole TE)
$M = C \cdot D \cdot \omega_1^{3/2}$ (pole TM)
— współczynnik uwzględniający straty w ściankach,

$$A = \gamma^2 - \frac{\oint_C \psi^2 \, ds}{\iint_D \psi^2 \, dx \, dy}$$

$$B = \frac{\oint_C \left(\frac{\partial \psi}{\partial s}\right)^2 ds}{\iint_D \psi^2 \, dx \, dy}$$

$$D = \frac{\oint_C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)^2 ds}{\iint_D \varphi^2 \, dx \, dy}$$

— współczyniki zależne od postaci przekroju poprzecznego falowodu,

(15)

$$C = \frac{\frac{\mu_p}{\mu} d_g}{2}$$

— współczynik zależny od stałych materiałowych,

$$d_g = \sqrt{\frac{2}{\omega_g \sigma \mu_p}}$$

— głębokość wnikania pola w ścianki przy częstotliwości granicznej.

W konkretnych rachunkach konieczność posługiwania się wzorem (14) zachodzi tylko w bezpośrednim otoczeniu częstotliwości granicznej, gdy $\omega_1 \approx 1$, czyli $h_0 \approx 0$. Jeśli zaś $|h_0^2| \gg M + N$, co jest łatwe do spełnienia, bo M ($\sim d$) i N ($\sim \sigma_d$) są bardzo małe, to rozwijając pierwiastek we wzorze (15) na szereg Maclaurina, dochodzi się do następujących wzorów przybliżonych:

dla $\omega > \omega_g$ (przy $h_0^2 \gg M + N$) $\qquad h \simeq \left(h_0 + \frac{M}{2 h_0}\right) + i \frac{M + N}{2 h_0}$,

czyli

$$h'' \simeq \frac{M + N}{2 h_0} \tag{16}$$

dla $0 < \omega < \omega_g$ (przy $-h_0^2 \gg M + N$) $\qquad h \simeq \frac{M + N}{2 |h_0|} + i \left(|h_0| - \frac{M}{2 |h_0|}\right)$,

czyli

$$h'' \simeq |h_0| - \frac{M}{2 |h_0|}. \tag{17}$$

Interesującym parametrem charakterystyki tłumienia falowodu jest szybkość jej opadania przy częstotliwości granicznej:

$$S = \left| \frac{dh''}{df} \right|_{f = f_g}$$

Ponieważ $\left.\frac{dh''}{df}\right|_{f_g} = \left.\frac{d\,Im\,h}{df}\right|_{f_g} = Im\left.\frac{dh}{df}\right|_{f_g}$, więc dla obliczenia parametru S wystarczy zróżniczkować (14) względem częstotliwości $f = \frac{\omega}{2\pi}$ i oddzielić część urojoną przy $\omega_1 = 1$. Przyjmując dla prostoty $\sigma_d = 0$ (czyli $N = 0$) dojdziemy, po prostych przekształceniach, do następujących wzorów:

$$S_{TE} = \frac{\lambda_g \sqrt{\varepsilon\mu}}{\sqrt{CA\sqrt{2}}}\left|\left[\left(\frac{2\pi}{\lambda_g}\right)^2 + E\right]\sin\frac{\pi}{8} - E\cos\frac{\pi}{8}\right| \simeq \frac{4\pi^2 \sin\frac{\pi}{8}\sqrt{\varepsilon\mu}}{\lambda_g\sqrt{CA\sqrt{2}}},$$

$$S_{TM} = \frac{\lambda_g \sqrt{\varepsilon\mu}}{\sqrt{CD\sqrt{2}}}\left|\left[\left(\frac{2\pi}{\lambda_g}\right)^2 + F\right]\sin\frac{\pi}{8} - F\cos\frac{\pi}{8}\right| \simeq \frac{4\pi^2 \sin\frac{\pi}{8}\sqrt{\varepsilon\mu}}{\lambda_g\sqrt{CD\sqrt{2}}}, \tag{18}$$

gdzie $E = C[B - 0{,}25A] \ll \left(\frac{2\pi}{\lambda_g}\right)^2$; $F = 0{,}75 \cdot CD \ll \left(\frac{2\pi}{\lambda_g}\right)^2$.

Wprowadzając tłumienie graniczne:

$$h_g'' = Im\sqrt{M_g(1+i)} = \left\{\begin{array}{ll} \sqrt{CA\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{8} & \text{(TE)}, \\ \sqrt{CD\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{8} & \text{(TM)}, \end{array}\right\} \tag{19}$$

możemy części przybliżone wzorów (18) zapisać jednym wzorem:

$$S \simeq \frac{4\pi^2 \sin^2\frac{\pi}{8}\sqrt{\varepsilon\mu}}{\lambda_g h_g''}. \tag{18'}$$

Zatem, dla dwu różnych falowodów, ale wypełnionych tym samym dielektrykiem (wspólne ε i μ):

$$\frac{S_1}{S_2} \simeq \frac{\lambda_{g2} h_{g2}''}{\lambda_{g1} h_{g1}''}. \tag{20}$$

Przy pomocy powyższego wzoru można np. prosto porównać falowód grzbietowy z prostokątnym o tych samych wymiarach zewnętrznych.

2. METODA ODWZOROWANIA KONFOREMNEGO

2.1. Rozważania ogólne

Jak pokazano w rozdziale 1, wszystkie parametry falowodu jednorodnego wyrażają się przez wartości i funkcje własne problemów brzegowych (3) i (5). Tego typu problemy mogą być jednak rozwiązane ści-

śle tylko dla nielicznej grupy prostych obszarów, jak prostokąt czy elipsa; w przypadkach bardziej skomplikowanych konieczne jest zastosowanie metod przybliżonych, jak np. metoda wariacyjna Ritza, czy metoda Galorkina. Jednak w przypadku falowodu grzbietowego bezpośrednie zastosowanie tych metod nie dało pomyślnego rezultatu. Pojawiające się trudności najłatwiej pokażemy omawiając krótko zasadnicze idee wspomnianych metod. Mając do rozwiązania równanie różniczkowe liniowe $L(\varphi) = 0$ z warunkiem $L_1(\varphi)|_C = 0$ (gdzie L_1 — operator liniowy, a C — brzeg obszaru) można zawsze dobrać do niego pewną całkę $I(u)$ zależną od niewiadomej funkcji (tzw. funkcjonał), która przybiera wartość minimalną, gdy u jest rozwiązaniem rozważanego problemu. W metodzie Ritza funkcjonał $I(u)$ minimalizuje się przyjmując $u = \varphi_n = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k$. Koniecznym warunkiem zbieżności ciągu φ_n do rozwiązania rozważanego problemu jest, aby funkcje u_k stanowiły układ zupełny; oznacza to, że każdą funkcję spełniającą $L_1(\varphi)|_C = 0$ i jej pierwsze pochodne można dowolnie przybliżać przez kombinacje liniowe funkcji u_k, a poza tym mogą one być dowolne. Od właściwego wyboru tych funkcji zależy jednak szybkość zbieżności ciągu φ_n do rozwiązania.

Współczynniki a_k wyznacza się z warunków na minimum funkcjonału $I(\varphi_n)$:

$$\frac{\partial I(a_1, \ldots, a_n)}{\partial a_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

W przypadku problemów brzegowych (3) i (5) funkcjonał $I(u)$ jest postaci:

$$I(u) = \int\int_D (u_x^2 + u_y^2 - \gamma^2 u^2)\, dx\, dy.$$

Okazuje się, że jeśli funkcja u minimalizuje ten funkcjonał przy warunku $u|_C = 0$, to jest ona rozwiązaniem problemu (5), a jeśli minimalizuje go w klasie funkcji przyjmujących dowolne wartości brzegowe, to jest rozwiązaniem problemu (3), czyli spełnia automatycznie warunek brzegowy $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = 0$. W pierwszym przypadku musimy więc znaleźć układ zupełny funkcji u_n znikających na brzegu C, co dla obszaru z rys. 2 nie jest zagadnieniem prostym. Można wprawdzie przyjąć $u_n = \omega(x,y)\, x^l\, y^m$ $(l, m = 0,1,2, \ldots)$, gdzie ω — funkcja klasy $C^{(1)}$ znikająca na C (por. [3]), jednak otrzymuje się wtedy bardzo wolną zbieżność ciągu przybliżeń; również skonstruowanie funkcji ω jest dość kłopotliwe i wymaga operowania różnymi wzorami w różnych częściach obszaru. W przypadku problemu (3) narzucanie warunków $\left.\frac{\partial u_k}{\partial n}\right|_C = 0$

nie jest konieczne, choć oczywiście dla uzyskania szybkiej zbieżności warunki te powinny być spełnione przynajmniej na części brzegu C. Autorowi nie udało się jednak dokonać takiego wyboru funkcji u_k, aby zbieżność ciągu przybliżeń była dostatecznie szybka.

W metodzie Galorkina rozwiązanie problemu brzegowego przybliża się również przez funkcje $\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k$ przy czym funkcje u_k muszą spełniać takie same warunki brzegowe jak poszukiwane rozwiązania. Współczynniki a_k wyznacza się tu z żądania ortogonalności $L(\varphi_n)$ względem wszystkich funkcji $u_1, \ldots, u_n$:

$$\iint_D (\nabla^2 \varphi_n + \gamma^2 \varphi_n) u_k \, dx \, dy = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Można pokazać, że otrzymane w ten prosty sposób równania po przekształceniach przechodzą w odpowiednie równania metody Ritza, jeśli i tam na funkcje u_k w problemie (3) narzucić warunki $\left.\frac{\partial u_k}{\partial n}\right|_C = 0$; obie metody są więc wówczas równoważne. Konieczność spełnienia wspomnianych warunków na całym brzegu C jest tu jednak dodatkową komplikacją przy wyborze funkcji u_k dla problemu (3). W tej sytuacji stało się konieczne odwzorowanie obszaru z rys. 2 na prostszy obszar Δ.

W parze z uproszczeniem obszaru idzie jednak zawsze komplikacja problemów brzegowych i jeśli nie zawęzić odpowiednio klasy dopuszczalnych odwzorowań, to skomplikuje się zarówno równanie różniczkowe, jak i warunek brzegowy na pochodną normalną. Mianowicie, jeśli $\xi(x, y)$ i $\eta(x, y)$ są funkcjami klasy $C^{(2)}$ odwzorowującymi wzajemnie jednoznacznie obszar D na Δ, a $\varphi(x, y)$ dowolną funkcją klasy $C^{(2)}$ w obszarze D, to

$$\Delta\varphi(x, y) = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = \varphi_{\xi\xi}(\xi_x^2 + \xi_y^2) + \varphi_{\eta\eta}(\eta_x^2 + \eta_y^2) + 2\varphi_{\xi\eta}(\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y) + \\ + \varphi_\xi \Delta\xi + \varphi_\eta \Delta\eta \qquad (21)$$

co, po podstawieniu do równania różniczkowego problemu brzegowego (3) lub (5), znacznie go skomplikuje. Wzór (21) uprości się jednak maksymalnie, gdy odwzorowanie będzie konforemne, czyli zrealizowane przez funkcję analityczną $\zeta = g(z)$ i $g'(z) \neq 0$ w obszarze D. Wówczas funkcje $\xi(x,y)$ i $\eta(x,y)$ (gdzie $\xi + i\eta = \zeta$) będą harmoniczne i będą spełniać równania Cauchy-Riemana: $\xi_x = \eta_y$, $\xi_y = -\eta_x$, czyli wzór (21) przyjmie postać:

$$\Delta\varphi(x,y) = \Delta\varphi(\xi,\eta) \cdot (\xi_x^2 + \eta_x^2) = \Delta\varphi(\xi,\eta)\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2. \qquad (22)$$

Zatem równanie różniczkowe problemów brzegowych po odwzorowaniu przyjmie stosunkowo prostą postać:

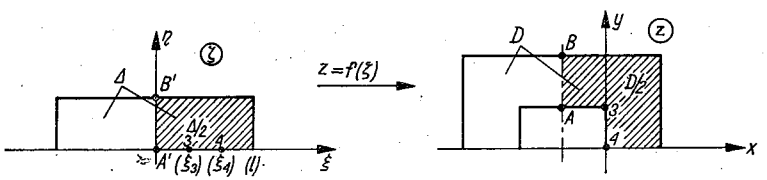
$$\Delta\varphi(\xi,\eta) + \gamma^2\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2 \varphi(\xi,\eta) = 0. \tag{23}$$

Istotne jest również, że w tym przypadku nie ulegną żadnej zmianie warunki brzegowe, jeśli tylko brzegi obszarów D i Δ składają się ze skończonej ilości łuków analitycznych (porównaj wniosek z twierdzenia II w rozdziale 3). Ostatecznie więc problemy brzegowe (3) i (5) po odwzorowaniu konforemnym przyjmą następującą postać:

$$\Delta\psi(\xi,\eta) + \gamma^2\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2 \psi(\xi,\eta) = 0 \text{ w obszarze } \Delta \text{ i } \left.\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|_\Gamma = 0 \tag{24}$$

$$\Delta\varphi(\xi,\eta) + \gamma^2\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2 \varphi(\xi,\eta) = 0 \text{ w obszarze } \Delta \text{ i } \left.\varphi\right|_\Gamma = 0, \tag{25}$$

gdzie Γ — brzeg obszaru Δ, $\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ — pochodna normalna. W przypadku falowodu grzbietowego D jest obszarem, jak na rys. 2, a za obszar Δ przyjmiemy prostokąt, dla którego łatwo jest znaleźć układ zupełny funkcji $u_n(\xi,\eta)$, spełniających warunki: $\left.\dfrac{\partial u_n}{\partial\nu}\right|_\Gamma = 0$ lub $u_n = 0$, co umożliwi zastosowanie metody Galorkina, dla przybliżonego rozwiązania problemów (24) i (25). (Sformułowane poprzednio założenia będą oczywiście spełnione, bo D i Δ są ograniczone odcinkami prostych).



Rys. 4.

Funkcję $z = f(\zeta)$, odwzorowującą Δ na D, można traktować jako przedłużenie analityczne, przez odcinek A'—B', funkcji odwzorowującej obszar $\Delta/2$ na $D/2$ (rys. 4). Przedłużenie to zrealizujemy przyporządkowując punktom $\zeta = \pm\xi + i\eta$ punkty symetryczne względem prostej A—B. Wówczas:

$$\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2_{(-\xi+i\eta)} = \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2_{(\xi+i\eta)} \tag{26}$$

bo $x_\xi(\xi,\eta)$ i $y_\xi(\xi,\eta)$ są odpowiednio parzystą i nieparzystą funkcją ξ, a $\left|\dfrac{dz}{d\zeta}\right|^2 = (x_\xi^2 + y_\xi^2)$.

Zgodnie z ideą metody Galorkina, za przybliżoną wartość funkcji własnej φ (lub ψ) przyjmiemy:

$$\varphi_n(\xi,\eta) = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k(\xi,\eta), \tag{27}$$

gdzie $u_n(\xi, \eta)$ — układ zupełny funkcji w obszarze Δ, spełniających warunki $u_n|_\Gamma = 0 \left(\text{lub } \frac{\partial u_n}{\partial \nu}\Big|_\Gamma = 0\right)$, a współczynniki a_k wyznaczymy z warunków:

$$\iint_\Delta L(\varphi_n) u_k \, d\xi d\eta = 0 \qquad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, n. \tag{28}$$

$L(\varphi)$ — oznacza lewą stronę równania (23). Podstawiając φ_n ze wzoru (27) otrzymamy:

$$\sum_{l=1}^{n} A_{kl} a_l = 0, \tag{29}$$

gdzie:

$$A_{kl} = B_{kl} - \gamma^2 C_{kl}$$

$$B_{kl} = -\iint_\Delta (\Delta u_l) u_k \, d\xi d\eta;$$

$$C_{kl} = \iint_\Delta \left|\frac{dz}{d_\xi}\right|^2 u_l u_k \, d\xi d\eta$$

Jest to układ równań liniowych jednorodnych, którego wyznacznik charakterystyczny musi znikać, aby istniały niezerowe rozwiązania na a_l:

$$det[A_{kl}] = det[B_{kl} - \gamma^2 C_{kl}] = 0. \tag{30}$$

Jest to tzw. równanie charakterystyczne, pozwalające obliczyć w przybliżeniu n wartości własnych. Ze wzorów (29) widać, że $C_{kl} = C_{lk}$, a ponieważ wyrażenie na B_{kl} można łatwo przekształcić do postaci:

$$B_{kl} = \iint_\Delta (u_{k\xi} u_{l\eta} + u_{k\eta} u_{l\eta}) \, d\xi \, d\eta,$$

więc również $B_{kl} = B_{lk}$, czyli wszystkie macierze występujące we wzorach (29) są symetryczne.

Za u_n wygodnie będzie przyjąć układ funkcji własnych operatora Laplace'a dla obszaru Δ, przy warunku brzegowym Neumana, bądź Dirichleta, czyli

$$u_n^{(1)} = \cos p \frac{\pi(\xi + l)}{2l} \cdot \cos q\eta; \quad p, q = 0, 1, 2, \ldots \left(\frac{\partial u_n^{(1)}}{\partial \nu}\Big|_\Gamma = 0\right) \tag{31.1}$$

lub

$$u_n^{(2)} = \sin p\,\frac{\pi(\xi+l)}{2l}\cdot\sin q\eta;\quad p,q = 1,2,\ldots\ (u_n^{(2)}|_\Gamma = 0). \tag{31.2}$$

Z ogólnych twierdzeń o funkcjach własnych operatora Laplace'a wynika zupełność i ortogonalność powyższych układów w Δ. Dla obu układów

gdzie:
$$\left.\begin{aligned} \Delta u_n &= -\lambda^2_{p,q}\cdot u_n,\\ \lambda^2_{p,q} &= \left(\frac{p\pi}{2l}\right)^2 + q^2. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Funkcje $u_n(\xi,\eta)$, przy konkretnym l, można uporządkować np. w taki sposób, aby ciąg $\lambda^2_{p,q}$ był niemalejący. Ze względu na symetrię obszaru Δ względem osi urojonej, oraz parzystość funkcji $\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2$ względem zmiennej ξ [por. (26)] rozwiązania problemów (24) i (25) mogą być wyłącznie parzyste lub nieparzyste względem ξ, jeśli nie rozważać przypadków zdegenerowanych (por. twierdzenie III w rozdziale 3). Wygodnie więc będzie poszukiwać oddzielnie parzystych funkcji własnych (które będą rozwijać się wyłącznie względem funkcji parzystych ze względu na ξ, czyli przy $p^{(1)} = 0, 2, 4, \ldots$ lub $p^{(2)} = 1, 3, 5, \ldots$) i oddzielnie nieparzystych (gdzie należy przyjąć $p^{(1)} = 1, 3, 5, \ldots$ lub $p^{(2)} = 2, 4, 6, \ldots$). W obu jednak przypadkach iloczyn $u_k \cdot u_l$ będzie funkcją parzystą ξ, czyli na mocy (26) i (29) całkowanie we wzorze na C_{kl} będzie można ograniczyć do połowy obszaru Δ:

$$C_{kl} = 2\iint_{\Delta/2}\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2 u_k u_l\,d\xi\,d\eta. \tag{33}$$

Natomiast współczynniki B_{kl} można wyznaczyć efektywnie, opierając się na wzorach (29), (32) i fakcie ortogonalności funkcji u_m w obszarze Δ:

$$B_{kl} = 0 \text{ dla } k \neq l;\ B_{kl} = \lambda^2_{p,q}\|u_k\|^2 = \left\{\begin{aligned} &\lambda^2_{p,q}\frac{l\pi}{2} && \text{dla } p,\ q \neq 0 \quad (1) \text{ lub } (2)\\ &\lambda^2_{p,q} l\pi && \text{dla } p = 0 \text{ lub } q = 0 \quad (1)\\ &\lambda^2_{p,q} 2l\pi && \text{dla } p = q = 0 \quad (1) \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

($\|u_k\|$ — norma funkcji u_k w obszarze Δ).

2.2. Transformacja wzorów na parametry falowodu przy odwzorowaniu

Wszystkie parametry falowodu można wyrazić przez funkcję $\psi(\xi,\eta)$ [lub $\varphi(\xi,\eta)$] określoną w obszarze odworowanym Δ. W tym celu należy pochodne i elementy całkowania względem zmiennych x, y wyrazić przez analogiczne wyrażenia zawierające zmienne ξ i η, posługując się

wzorami (1) ... (5) rozdziału 3.1. W efekcie ze wzorów (12) otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \int_{A'B'} |\nabla\psi(\xi,\eta)|\, d\sigma = \int_{\eta_{A'}}^{\eta_{B'}} |\nabla\psi(\xi,\eta)|\Big|_{\xi=0} d\eta, \\ I_2 &= \int\int_{\Delta} [\nabla\psi(\xi,\eta)]^2\, d\xi\, d\eta = 2\int\int_{\Delta/2} [\nabla\psi(\xi,\eta)]^2 d\xi\, d\eta, \end{aligned}\right\} \tag{12'}$$

gdzie ostatnie równości są już wyspecjalizowane na przypadek falowodu grzbietowego. Podobnie, ze wzoru (13):

$$L = \frac{I_2}{\max\limits_{(\xi,\eta)} \left(\dfrac{[\nabla\psi(\xi,\eta)]^2}{|dz/d\zeta|^2} \right)}. \tag{13'}$$

Wzory określające parametry tłumieniowe falowodu (15) przekształcą się do postaci:

$$\left.\begin{aligned} A &= \gamma^4 \frac{\oint_C \psi^2\, ds}{I_2} = \gamma^2 \frac{\oint_\Gamma \psi^2 \left|\dfrac{dz}{d\zeta}\right|^2 d\sigma}{I_2}, \\ B &= \gamma^2 \frac{\oint_C \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial s}\right)^2 ds}{I_2} = \gamma^2 \frac{\oint_\Gamma \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)^2 \dfrac{d\sigma}{|dz/d\zeta|}}{I_2}, \\ D &= \gamma^2 \frac{\oint_C \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^2 ds}{I_2} = \gamma^2 \frac{\oint_\Gamma \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2 \dfrac{d\sigma}{|dz/d\zeta|}}{I_2}. \end{aligned}\right\} \tag{15'}$$

W przypadku falowodu grzbietowego, można i w tych wzorach ograniczyć całkowanie do połowy krzywej Γ.

Z punktu widzenia prostoty rachunków istotne jest, aby wyrażenie podcałkowe po odwzorowaniu nie zawierało funkcji $\left|\dfrac{dz}{d\zeta}\right|$, która jak zobaczymy dalej jest dość skomplikowana. Z drugiej strony ze wzorów (1) — (5) rozdz. 3.1 wynika, że $\dfrac{dz}{d\zeta}$ nie wystąpi w całce liniowej z $|\nabla\psi|$ i powierzchniowej z $|\nabla\psi|^2$. Zatem takie parametry falowodu jak napięcia, prądy i moce, a w konsekwencji również impedancja charakterystyczna będą szczególnie proste do wyznaczania metodą odwzorowań, a obliczanie pozostałych wymagać będzie całkowania numerycznego.

2.3. Wyznaczenie funkcji odwzorowującej

Zgodnie z rozważaniami rozdziału 2.1 należy wyznaczyć funkcję analityczną $z = f(\zeta)$ odwzorowującą konforemnie obszar $\Delta/2$ na $D/2$ (rys. 4). Zagadnienie to można rozwiązać ściśle, przy pomocy wzoru

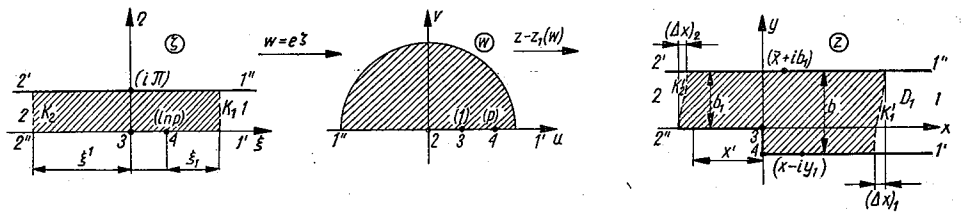
Christoffela, odwzorowującego górną półpłaszczyznę na dowolny wielobok (jednospójny), a więc w szczególności na obszar $D/2$. Z kolei odwzorowanie prostokąta $\Delta/2$ na górną półpłaszczyznę można zrealizować przy pomocy funkcji eliptycznej Jacobiego $sn\ (\zeta/c, k)$ (por. np. [6]), gdzie c i k są stałymi zależnymi od wymiarów prostokąta. Jednak całka, którą otrzymuje się ze wzoru Christoffela, nie daje się wyrazić w sposób skończony przez żadne znane funkcje, ponieważ zawiera pierwiastek kwadratowy z wielomianu stopnia 6-go. W związku z tym wyznaczenie niewiadomych parametrów w całce Christoffela jest bardzo trudne.

Aby stworzyć możliwość efektywnego wykonania rachunków, z możliwie dużą dokładnością, zastosujemy metody przybliżone dla wyznaczenia poszukiwanego odwzorowania.

2.3.1. *Pierwsze przybliżenie funkcji odwzorowującej*

Niech funkcja $z = f_1(\zeta)$ odwzorowuje konforemnie pas $0 < Im\zeta < \pi$ na obszar D_1 (rys. 5). Wówczas obrazy odcinków $K_{1,2}$, dostatecznie odległych od osi urojonej, będą niewiele różnić się od odcinków prostych, ortogonalnych do osi x. Zatem obrazem zakreskowanego prostokąta (rys. 5) będzie w przybliżeniu obszar $D/2$ z rys. 4.

Za miarę błędu odwzorowania można przyjąć różnice $(\Delta x)_{1,2}$. Aby



Rys. 5.

pozostawały one w dopuszczalnych granicach, wymiary ξ_1 i ξ^1 prostokąta muszą być dostatecznie duże, czyli falowód grzbietowy musi mieć dostatecznie duże wymiary x_1 i a_2 (przy zadanych y_1 i b). (Powyższą ideę zasugerował autorowi A. Turski). Funkcja $z = f_1()$ będzie superpozycją

Tablica 1

	1	2	3	4
a_k	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\gamma_k = 1 - a_k$	1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
w_k	∞	0	1	p

funkcji $w = e^{\zeta}$, odwzorowującej pas $0 < Im\zeta < \pi$ na górną półpłaszczyznę $Imw > 0$, oraz funkcji $z = z_1(w)$, odwzorowującej tę półpłaszczyznę na obszar D_1. Dla ujednoznacznienia funkcji $z_1(w)$ załóżmy przeciwobrazy wierzchołków *1, 2, 3* wieloboku D_1 odpowiednio w punktach $w_1 = \infty$, $w_2 = 0$ i $w_3 = 1$. Przeciwobraz wierzchołka *4* oznaczmy przez p, gdzie p jest do wyznaczenia. Parametry odwzorowania przedstawione są w tabl. 1; $\varphi_k = \pi a_k$ — oznacza kąt wewnętrzny przy k-tym wierzchołku D_1. Na mocy wzoru Christoffela:

$$\frac{dz_1}{dw} = C(w - w_2)^{-\gamma_2}(w - w_3)^{-\gamma_3}(w - w_4)^{-\gamma_4} = C\frac{\sqrt{w-1}}{w\sqrt{w-p}}.$$

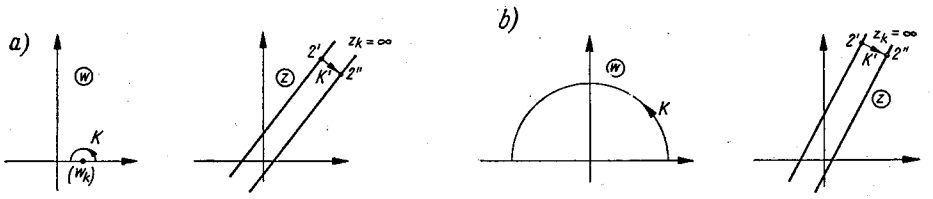
Dla wyznaczenia parametrów C i p skorzystamy obecnie z następujących twierdzeń [2]:

1) Jeżeli jeden z wierzchołków z_k wieloboku D_1 leży w nieskończoności ($z_k = \infty$ i $a_k = 0$, oraz $w_k \neq \infty$, to dostatecznie mały półokrąg K (rys. 6a) odwzorowuje się w przybliżeniu na odcinek prostej K' i zachodzi wzór:

$$z'' - z' = i\pi C \prod_{l \neq k} (w_k - w_l)^{-\gamma_l}. \tag{35}$$

2) Jeżeli $z_k = \infty$, $a_k = 0$ oraz $w_k = \infty$, to dostatecznie duży półokrąg K (rys. 6b) odwzorowuje się w przybliżeniu na odcinek prostej K' i zachodzi wzór:

$$z'' - z' = i\pi C. \tag{36}$$



Rys. 6.

Stosując kolejno wzory (36) i (35) do wierzchołków *1* i 2 otrzymamy:

$$C = \frac{b}{\pi}; \qquad p = \left(\frac{b}{b_1}\right)^2. \tag{37}$$

Podstawiając te wartości i korzystając ze znanego wzoru

$$\int \frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - a^2}} = \operatorname{Arch}\frac{\varrho}{a} = \operatorname{Ln}\left[\frac{\varrho}{a} + \sqrt{\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2 - 1}\right] \tag{38}$$

(gdzie $a > 0$, $Im\varrho > 0$, $\sqrt{u} \overset{\text{df}}{=} \sqrt{|u|} \cdot e^{i\frac{\arg u}{2}}$ i $0 < \arg u < 2\pi$;

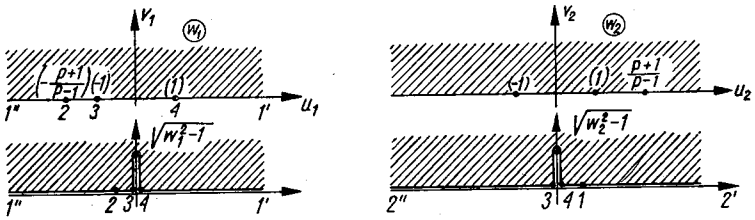
Ln — logarytm główny) otrzymamy po prostych przekształceniach i uwzględnieniu warunku $z_1(1) = 0$:

$$z_1(w) = \frac{b}{\pi} \operatorname{Arch} w_1 - \frac{b_1}{\pi} \operatorname{Arch} w_2 - iy_1,$$

gdzie: (39)

$$w_1 = \frac{2w - (p+1)}{p-1}; \qquad w_2 = \frac{p+1-2pw^{-1}}{p-1},$$

Kładąc w tym wzorze $w = e^{\zeta}$ otrzymamy poszukiwaną funkcję $z = f_1(\zeta)$. Na prostej $Im w = 0$ funkcje $w_{1,2}$ są rzeczywiste, a dla wyznaczenia wartości $\sqrt{w_{1,2}^2 - 1}$ na poszczególnych odcinkach brzegu posłużymy się pomocniczymi odwzorowaniami (rys. 7):



Rys. 7.

Odcinek 4—1'. Z rys. 7 widać, że $w_{1,2} > 1$ i $\sqrt{w_{1,2}^2 - 1} > 0$

oraz $w = e^{\zeta} = e^{(\xi + \ln p)} = pe^{\xi_1}$,

czyli ze wzoru (39):

$$\frac{\pi}{b} x(\xi_1) = \operatorname{Arch} \frac{2pe^{\xi_1} - (p+1)}{p-1} - \frac{1}{\sqrt{p}} \operatorname{Arch} \frac{p+1-2e^{-\xi_1}}{p-1}. \tag{40}$$

Odcinek 3—2''. Z rys. 7: $w_{1,2} < -1$ i $\sqrt{w_{1,2}^2 - 1} < 0$;

$$w = e^{\zeta} = e^{-\xi^1}$$

co po podstawieniu do wzoru (39) i prostych przekształceniach daje:

$$\frac{\pi}{b} x'(\xi^1) = \frac{1}{\sqrt{p}} \operatorname{Arch} \frac{2pe^{\xi^1} - (p+1)}{p-1} - \operatorname{Arch} \frac{p+1-2e^{\xi^1}}{p-1}. \tag{41}$$

Odcinek $1'' - 2'$. $w = e^{\xi + i\pi} = -e^{\xi}$; $w_1 < -1$ i $\sqrt{w_1^2 - 1} < 0$,

oraz $w_2 > 1$ i $\sqrt{w_2^2 - 1} > 0$,

czyli:

$$\frac{\pi}{b} \overline{x}(\xi) = \operatorname{Arch} \frac{(p+1) + 2e^{\xi}}{p-1} - \frac{1}{\sqrt{p}} \operatorname{Arch} \frac{p+1+2pe^{-\xi}}{p-1}. \tag{42}$$

Oznaczmy przez ξ_{10} i ξ_0^1 liczby będące rozwiązaniami równań:

$$x(\xi_{10}) = a_2 \qquad x'(\xi_0^1) = x_1 \qquad \text{(rys. 5)}, \tag{43}$$

gdzie a_2, x_1 są wymiarami falowodu grzbietowego (rys. 2). Liczby te określą wymiary prostokąta $\Delta/2$.

Błędy odwzorowania:

$$\frac{\pi}{b}(\Delta x)_1 = \frac{\pi}{b}\overline{x}(\ln p + \xi_{10}) - \frac{\pi}{b}x(\xi_{10}), \tag{44}$$

$$\frac{\pi}{b}(\Delta x)_2 = \frac{\pi}{b}x'(\xi_0^1) - \frac{\pi}{b}|\overline{x}(-\xi_0^1)|. \tag{45}$$

Ponieważ prawe strony wzorów (40), (41), (42) oraz (44) i (45) są funkcjami zależnymi od jednego tylko parametru p, można więc, w prosty sposób, zbudować odpowiednie nomogramy dla przybliżonego rozwiązywania równań (43) i określania błędów odwzorowania. Można również sporządzić wykresy tych funkcji przy zadanym p i na ich podstawie określić graficznie liczby ξ_{10} i ξ_0^1, a następnie błędy odwzorowania. Jeśli będą one zawierać się w dopuszczalnych granicach, wówczas można poprawić dokładność metod graficznych, przez analityczne rozwiązanie rozważanych równań.

Błędy odwzorowania można zmniejszyć o połowę, gdy zamiast równań (43) przyjąć:

$$x(\xi_{10}) + \overline{x}(\ln p + \xi_{10}) = 2a_2, \qquad x'(\xi_0^1) + |\overline{x}(-\xi_0^1)| = 2x_1. \tag{46}$$

Pozostaje jeszcze przesunąć prostokąt z rys. 5 o ξ_0^1, aby przyjął on takie położenie względem układu współrzędnych, jak na rys. 4. Ostatecznie więc funkcja realizująca pierwsze przybliżenie odwzorowania obszarów z rys. 4 będzie określona wzorem (39), gdzie należy podstawić

$$w = e^{\zeta - \xi_0^1}. \tag{47}$$

Z rys. 5 widać, że wymiar l prostokąta będzie równy

$$l = \xi_0^1 + \xi_{10} + \ln p. \tag{48}$$

Obliczymy jeszcze funkcję $\frac{dz}{d\zeta}$ występującą w całce (33), oraz we wzorach rozdziału 2.2. Ze wzorów (39) i (47) otrzymujemy:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{dz_1}{dw} \cdot \frac{dw}{d\zeta} = \frac{b}{\pi}\frac{\sqrt{w-1}}{\sqrt{w-p}}; \qquad \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2 = \frac{b^2}{\pi^2}\frac{|e^{\zeta-\xi_0^1}-1|}{|e^{\zeta-\xi_0^1}-p|},$$

ale

$$|e^{\zeta+i\eta} \pm r| = 2re^{\xi}[\mathrm{ch}(\xi - \ln r) \pm \cos\eta], \tag{49}$$

więc ostatecznie, po prostych przekształceniach, dochodzimy do wzoru:

$$\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2 = \frac{b_1 b}{\pi^2}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}(\xi-\xi_0^1)-\cos\eta}{\operatorname{ch}(\xi-\xi_0^1-\ln p)-\cos\eta}}. \tag{50}$$

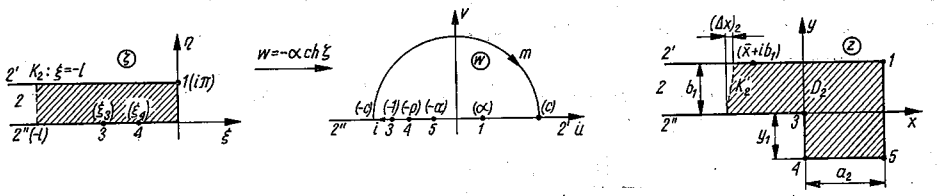
Otrzymana funkcja jest dość skomplikowana i całek, w których ona występuje, nie udało się wyrazić przez żadne znane funkcje, co spowodowało konieczność rachunków numerycznych. Są to wprawdzie wszystko całki niewłaściwe (bo $\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2 = 0$ dla $\zeta = \xi_0^1 = \xi_3$, oraz $\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2 = \infty$ dla $\zeta = \xi_0^1 + \ln p = \xi_4$ — rys. 4), jednak dowody ich zbieżności nie przedstawiają trudności (por. uzupełnienie), a fakt ten jedynie komplikuje rachunki.

2.3.2. *Dalsze przybliżenia funkcji odwzorowującej*

Jeśli błąd $(\Delta x)_1$ odwzorowania rozważanego w poprzednim rozdziale jest zbyt duży, a $(\Delta x)_2$ pozostaje w dopuszczalnych granicach, wówczas należy zapewnić dokładne odwzorowywanie się odcinka K_1 na odcinek prostej i analogicznie w przypadku przeciwnym. W ten sposób otrzymujemy dalsze przybliżenia funkcji odwzorowującej:

1. PRZYPADEK, GDY K_1 ODWZOROWUJE SIĘ DOKŁADNIE NA ODCINEK PROSTEJ, A K_2 W SPOSÓB PRZYBLIŻONY

Niech funkcja $z = f_2(\zeta)$ odwzorowuje konforemnie pas: $\xi < 0$; $0 < \eta < \pi$ w płaszczyźnie ζ na obszar D_2 w płaszczyźnie z (rys. 8). Wówczas obraz odcinka K_2, dostatecznie odległego od osi urojonej, będzie w przybliżeniu prostoliniowy, czyli zakreskowany prostokąt na rys. 8 odwzorowuje się w przybliżeniu na obszar $D/2$ z rys. 4. Odwzorujmy



$$\xi_3 = -\operatorname{Arch}\frac{1}{\alpha};\quad \xi_4 = -\operatorname{Arch}\frac{p}{\alpha}$$

Rys. 8.

wpierw rozważany półpas na górną półpłaszczyznę zmiennej w. Dla ujednoznacznienia odwzorowania załóżmy: $w_2 = \infty$, $w_1 = a$, $w_5 = -a$, gdzie a jest pewną liczbą dodatnią. Korzystając ze wzoru Christoffela oraz wzorów (36) i (38) otrzymamy $\zeta = i\pi - \operatorname{Arch}\frac{w}{a}$, a stąd

$$w = -a\operatorname{ch}\zeta. \tag{51}$$

Pozostaje obecnie odwzorować górną półpłaszczyznę na obszar D_2; dla ujednoznacznienia tego odwzorowania przyjmiemy następujące trzy warunki: $w_2 = \infty$, $w_3 = -1$, $w_1 = -w_5$, oraz oznaczymy $w_4 = -p$ i $w_1 = a$ $(0 < a < p < 1)$.

Tablica 2

	1	2	3	4	5
α_k	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$p_k = 1 - \alpha_k$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
w_k	a	∞	-1	$-p$	$-a$

Stosując wzór Christoffela oraz wzór (36) dla wierzchołka 2 otrzymamy:

$$\frac{dz}{dw} = C \prod_{k \neq 2} (w - w_k)^{-\gamma_k} = -\frac{b_1}{\pi} \frac{\sqrt{w+1}}{\sqrt{w+p}\sqrt{w^2-a^2}}. \tag{52}$$

Całkując powyższy wzór obustronnie po dowolnej krzywej, leżącej w górnej półpłaszczyźnie, o początku w punkcie $w_3 = -1$ i uwzględniając warunek $z(w_3) = 0$ otrzymamy ostatecznie:

$$z(w) = -\frac{b_1}{\pi} \int_{-1}^{w} \frac{\sqrt{\varrho+1}}{\sqrt{\varrho+p}} \frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho^2-a^2}}. \tag{53}$$

Dla wyznaczenia niewiadomych parametrów odwzorowania p i a rozważymy odpowiedniość poszczególnych odcinków brzegu, co doprowadzi do układu równań na te parametry.

a) Odcinek 3 — 4.

Ze wzoru (53) otrzymujemy: (całkowanie po osi rzeczywistej)

$$z = -\frac{b_1}{\pi} \int_{-1}^{u} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+p}} \frac{dx}{\sqrt{x-a}\sqrt{x+a}},$$

gdzie:

$$\sqrt{u} \overset{\text{df}}{=} \sqrt{|u|}\, e^{i\frac{\arg u}{2}}; \quad 0 \leqslant \arg u \leqslant \pi.$$

Zatem:

$$z = -i\frac{b_1}{\pi} \int_{-1}^{u} \sqrt{\frac{x+1}{(-p-x)(-a-x)(a-x)}}\, dx = iy,$$

a więc

$$-\frac{\pi y}{b_1} = \frac{2(1+\alpha)}{\sqrt{(\alpha+p)(1-\alpha)}}[F(\varphi,k) - \Pi(\varphi, -\alpha_0^2, k)].$$

We wzorze tym: $F(\varphi,k) = \int_0^{\sin\varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$

— całka eliptyczna I rodzaju niezupełna,

$$\Pi(\varphi,n,k) = \int_0^{\sin\varphi} \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

— całka eliptyczna III rodzaju niezupełna,

$$\varphi = \text{amplituda} = \arcsin \sqrt{\frac{(\alpha+p)(u+1)}{(1-p)(\alpha-u)}},$$

$$n = -\alpha_0^2 = \text{parametr} = \frac{1-p}{\alpha+p},$$

$$k = \text{moduł} = \sqrt{\frac{2\alpha(1-p)}{(\alpha+p)(1-\alpha)}} \qquad \text{(por. [5] wzór 252.14).}$$

Dla $u = -p$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ oraz $-y = y_1$,

czyli

$$\frac{\pi y_1}{b_1} = \frac{2(1+\alpha)}{\sqrt{(\alpha+p)(1-\alpha)}}\left[K(k) - \Pi\left(\frac{\pi}{2}, -\alpha_0^2, k\right)\right];$$

$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ — całka eliptyczna I rodzaju zupełna.

Ponieważ w rozważanym przypadku $-\alpha_0^2 = \frac{1-p}{\alpha+p} > 0$, więc całka eliptyczna III rodzaju zupełna wyrazi się przez funkcję $K(k)$, oraz tzw. funkcję Λ_0 Heumana: (por. [5] wzór 410.01):

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}, -\alpha_0^2, k\right) = \frac{k^2 K(k)}{k^2-\alpha^2} - \frac{\pi\alpha_0^2 \Lambda_0(\psi,k)}{2\sqrt{\alpha_0^2(1-\alpha_0^2)(\alpha_0^2-k^2)}}; \quad \psi = \arcsin\sqrt{\frac{-\alpha_0^2}{k^2-\alpha_0^2}}.$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do poprzedniego wzoru, otrzymamy po przekształceniach:

$$\left.\begin{aligned} \frac{y_1}{b_1} &= \frac{1-\alpha}{\sqrt{(\alpha+p)(1-\alpha)}} F_0(k) - \Lambda_0(\psi,k), \\ \psi = \arcsin\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}; \quad k^2 &= \frac{2\alpha(1-p)}{(\alpha+p)(1-\alpha)}; \quad F_0(k) \overset{\text{df}}{=} \frac{2}{\pi} K(k). \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Występujące tu funkcje $F_0(k)$ i $\Lambda_0(\psi, k)$ zostały wyczerpująco stabularyzowane przez Heumana w [1].

b) Odcinek 4 — 5: $-p \leqslant u \leqslant -\alpha$; $v = 0$;

$$z = -\frac{b_1}{\pi}\left[\int_{-1}^{-p} + \int_{-p}^{u}\right] = -iy_1 + \frac{b_1}{\pi}\int_{-p}^{u}\sqrt{\frac{x+1}{(x+p)(\alpha-x)(-\alpha-x)}}\,dx,$$

czyli

$$x = Rez = \frac{b_1}{\pi}\frac{2(1-p)}{\sqrt{(\alpha+p)(1-\alpha)}}\Pi(\varphi, -\alpha_0^2, k) \quad \text{(por. [5] wzór 254.02)},$$

gdzie $k^2 = \frac{(p-\alpha)(1+\alpha)}{(p+\alpha)(1-\alpha)}$; $\alpha_0^2 = \frac{p-\alpha}{1-\alpha}$; $\varphi = \arcsin\sqrt{\frac{(1-\alpha)(u+p)}{(p-\alpha)(u+1)}}$.

Dla $u = -\alpha$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$ oraz $x = a_2$, co po podstawieniu prowadzi do całki eliptycznej III rodzaju zupełnej. Ta z kolei może być wyrażona przez funkcję $K(k)$ oraz funkcję Zeta Riemana $Z(\beta, k)$ (por. [5] wzór 414.01), co ostatecznie prowadzi do równań:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_2}{b_1} &= \frac{1-p}{\sqrt{(\alpha+p)(1-\alpha)}}F_0(k) + \frac{2}{\pi}KZ(\beta,k), \\ k^2 &= \frac{(p-\alpha)(1+\alpha)}{(p+\alpha)(1-\alpha)}; \qquad \beta = \arcsin\sqrt{\frac{p+\alpha}{1+\alpha}}. \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Funkcja $KZ(\beta, k)$ jest stabularyzowana w [5].

Wzory (54) i (55) stanowią układ równań dla wyznaczenia parametrów p i α. Jak zobaczymy dalej, równanie (54) może być w pewnych wypadkach zastąpione prostszym równaniem, które daje się łatwo rozwiązać metodą iteracji.

W celu wyznaczenia parametru l (rys. 8) oraz błędu $(\Delta x)_2$ należy rozważyć odwzorowanie odcinków 1 — 2′ oraz 3 — 2″. Postępując podobnie jak w poprzednich przypadkach dojdziemy również do równań zawierających całki eliptyczne I i III rodzaju, ale niezupełne. Całki eliptyczne III rodzaju niezupełne nie zostały jednak dotąd stabularyzowane, jak również w ogólności nie wyrażają się w sposób skończony, przez żadne stabularyzowane funkcje. Stwarza to konieczność operowania skomplikowanymi szeregami funkcyjnymi, co jest rachunkowo bardzo kłopotliwe.

Powyższe trudności ominiemy przez rozwinięcie jednego z czynników funkcji podcałkowej na szereg potęgowy, który okaże się tak szybko zbieżny, że uwzględnienie niewielkiej ilości wyrazów zapewni wystarczająco dużą dokładność. Wzory na oszacowanie błędu wyprowadzimy w uzupełnieniu.

Oznaczmy: $$z_1 = \frac{w}{\sqrt{w^2 - a^2}}; \qquad z_2 = \frac{\sqrt{w+1}}{w\sqrt{w+p}}.$$

Wówczas wzór (52) przyjmie postać:

$$\frac{dz}{dw} = -\frac{b_1}{\pi} z_1(w) \cdot z_2(w) \tag{56}$$

Funkcja $z_1(w)$, jako analityczna w pierścieniu $a < |w| < \infty$, może być w tym obszarze rozwinięta na szereg Laurenta; rozwinięcie to może być łatwo otrzymane z uogólnionego wzoru dwumiennego Newtona. Mamy mianowicie:

$$z_1\left(\frac{1}{\omega}\right) = (1 - a^2\omega^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (a\omega)^{2k}, \qquad \text{gdzie } a_0 = 1;$$

$$a_k = (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2k-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2k} = a_{k-1} \frac{2k-1}{2k} \quad \text{dla } k \geqslant 1, \tag{57}$$

czyli

$$z_1(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{a^{2k}}{w^{2k}} \qquad \text{dla } a < |w| < \infty \tag{58}$$

Podstawiając otrzymane wyrażenie do wzoru (56) i całkując obustronnie po dowolnej krzywej o początku w punkcie $w_3 = -1$, leżącej całkowicie w obszarze $a < |w| < \infty$, otrzymamy:

$$z(w) \simeq -\frac{b_1}{\pi} \int_{-1}^{w} z_2(\varrho) \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{a^{2k}}{\varrho^{2k}} d\varrho. \tag{59}$$

Po wykonaniu prostych przekształceń algebraicznych otrzymamy dalej:

$$\int z_2(w) \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{a^{2k}}{w^{2k}} dw = \int \frac{dw}{\sqrt{\left(w + \frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-p}{2}\right)^2}} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{p}} \int \frac{du}{\sqrt{\left(-u - \frac{p+1}{2p}\right)^2 - \left(\frac{1-p}{2p}\right)^2}} + \int \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k a^{2k} (u^{2k-1} + u^{2k})}{\sqrt{(-1-u)(-1-pu)}} du,$$

gdzie: $u = \frac{1}{w}$ oraz wszystkie pierwiastki są określone wzorem:

$$\sqrt{u} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sqrt{|u|}\, e^{i\frac{\arg u}{2}}, \qquad 0 < \arg u < 2\pi.$$

Dwie pierwsze całki obliczymy bezpośrednio przy pomocy wzoru (38), a dla obliczenia trzeciej skorzystamy ze znanego wzoru rachunku całkowego:

$$\int \frac{W_m(u)\,du}{\sqrt{au^2+bu+c}} = Q_{m-1}(u)\sqrt{au^2+bu+c} + \lambda \int \frac{du}{\sqrt{au^2+bu+c}}, \tag{60}$$

gdzie:

$W_m(u)$ — wielomian stopnia m-tego,

$Q_{m-1}(u)$ — wielomian stopnia $(m\text{-}1)$-go, którego współczynniki oraz stałą λ można łatwo wyznaczyć przez obustronne zróżniczkowanie.

Podstawiając otrzymane wyniki do wzoru (59) otrzymamy ostatecznie:

$$z(w) \simeq -\frac{b_1}{\pi}\left[\operatorname{Arch} w_1 - \frac{1}{\sqrt{p}}(1+\lambda)\operatorname{Arch} w_2 + \right.$$

$$\left. + Q_{2n-1}\left(\frac{1}{w}\right)\sqrt{\left(-1-\frac{1}{w}\right)\left(-1-\frac{p}{w}\right)}\right] - ib_1\frac{1+\lambda-\sqrt{p}}{\sqrt{p}}, \tag{61}$$

gdzie

$$w_1 = \frac{2w+p+1}{1-p} \quad ; \quad w_2 = -\frac{2pw^{-1}+p+1}{1-p}.$$

Przyjmując przykładowo $n = 3$, otrzymamy następujące wzory na współczynniki wielomianu $Q_5(u) = \sum_{k=0}^{5} b_k u^k$ oraz stałą λ:

$$\begin{aligned}
b_5 &= \frac{p_1}{19{,}2} \\
b_4 &= p_1\frac{1{,}1\,p_1 - 0{,}1}{19{,}2} \\
b_3 &= p_1\frac{0{,}99\,p_1^2 - 0{,}1\,p_1 - 0{,}09}{15{,}36} + \frac{3}{32}p_1 \\
b_2 &= -p_1\frac{6{,}93\,p_1^3 - 0{,}81\,p_1^2 - 0{,}69\,p_1 - 0{,}63}{92{,}16} - p_1\frac{7\,p_1 - 1}{64}.
\end{aligned} \tag{62}$$

Dalsze wzory są już bardzo nieprzejrzyste, a więc dla wyznaczenia pozostałych współczynników i stałej λ, wygodniej skorzystać z zależ-

ności rekurencyjnych (z których trzy pierwsze mogą stanowić sprawdzian rachunkowy dla dotychczas wyznaczonych współczynników b_2 — b_5):

$$b_4 = \frac{1}{16} p_1 a^6 - \frac{11}{10}(p_1+1)b_5$$

$$b_3 = \frac{3}{32} p_1 a^4 - \frac{9}{8}(p_1+1)b_4 - \frac{5}{4} p_1 b_5$$

$$b_2 = \frac{1}{8} p_1 a^4 - \frac{7}{6}(p_1+1)b_3 - \frac{4}{3} p_1 b_4$$

$$b_1 = \frac{1}{4} p_1 a^2 - \frac{5}{4}(p_1+1)b_2 - \frac{3}{2} p_1 b_3 \qquad (62')$$

$$b_0 = \frac{1}{2} p_1 a^2 - \frac{3}{2}(p_1+1)b_1 - 2 p_1 b_2$$

$$\lambda = -a_0 \frac{p_1+1}{2p_1} - a_1 \qquad \left[p_1 = \frac{1}{p}\right]$$

Dokładność wzoru (61) maleje, gdy $|w|$ zbliża się do a [por. (86) i (87)]. A zatem, choć wzór ten może być z powodzeniem wykorzystany do odwzorowania odcinka $3 - 2''$ oraz interesującej części odcinka $1 - 2'$, to stosowanie go do odcinka $3 - 4$ może już prowadzić do znacznych błędów, jeżeli p niewiele różni się od a (czyli, gdy wymiar y_1 falowodu grzbietowego jest dostatecznie duży w porównaniu z a_2). Jeśli jednak, przy $w \to -p$, błąd wzoru (61) pozostaje w dopuszczalnych granicach (por. 101), to odwzorowując przy jego pomocy odcinek 3—4 otrzymamy stosunkowo proste równanie wiążące parametry p i a, zastępujące równanie (54). Mianowicie, dla $w = -p$, wzór (61) daje: $i(b_1 - b) = -ib_1 \frac{1+\lambda}{\sqrt{p}} - 1$, a stąd:

$$p = \left(\frac{b_1}{b}\right)^2 (1+\lambda)^2 \qquad (63)$$

λ — jest funkcją parametrów p i a, określoną wzorami (62) i (62'). Ma ona postać szeregu potęgowego względem a^2, którego dwa pierwsze wyrazy otrzymamy ze wzorów (62), zaniedbując wyrazy z a^6:

$$\lambda = a^2 \frac{3p_1^2 - 2p_1 - 1}{16} + a^4 \frac{1{,}05p_1^4 - 0{,}6p_1^3 - 0{,}18p_1^2 - 0{,}12p_1 - 0{,}15}{10{,}24} + \ldots \qquad (64)$$

Z ostatnich dwu wzorów widać, że gdy a jest dostatecznie małe, to równanie (63) może być łatwo rozwiązane metodą kolejnych przybli-

żeń. Zaniedbując mianowicie we wzorze (63), w pierwszym przybliżeniu, potęgi a^2 względem jedynki otrzymamy $p^{(1)}=\frac{1}{p_1^{(1)}}=\left(\frac{b_1}{b}\right)^2$. Podstawiając powyższą wartość do wzoru (64) i dalej do (63) otrzymamy następne przybliżenie $p^{(2)}$ itd.

Jeśli zachodzi równanie (63), to wzór (61) przybiera nieco prostszą postać. Mianowicie wówczas:

$$\frac{b_1}{\pi}\frac{1+\lambda}{\sqrt{p}}=\frac{b}{\pi} \quad \text{oraz} \quad b_1\frac{1+\lambda-\sqrt{p}}{\sqrt{p}}=b-b_1.$$

Przy pomocy wzoru (61) możemy obecnie odwzorować odcinki $3-2''$ i $1-2''$. Jeśli oznaczyć

$$w_1=\frac{2w+p+1}{1-p} \quad \text{oraz} \quad w_2=\frac{2pw^{-1}+p+1}{1-p},$$

to znaki pierwiastków $\sqrt{w_{1,2}^2-1}$ na brzegu łatwo określić, korzystając z pomocniczych odwzorowań górnej półpłaszczyzny w przez funkcje w_{1-4} podobnie, jak w rozdz. 2.3·1 (por. rys. 7).

Po wykonaniu przekształceń algebraicznych i uwzględnieniu zależności (51) dojdziemy ostatecznie do następujących wzorów:

c) Odcinek $3-2''$

$$-\frac{\pi}{b_1}x(\xi)=\operatorname{Arch}\frac{2u-(p+1)}{1-p}-Q_{2n-1}(-u^{-1})\sqrt{pu^{-2}-(p+1)u^{-1}+1}+$$
$$-\frac{1+\lambda}{\sqrt{p}}\operatorname{Arch}\frac{p+1-2pu^{-1}}{1-p} \qquad (u=a\operatorname{ch}\xi). \tag{65}$$

d) Odcinek $1-2'$

$$-\frac{\pi}{b_1}\bar{x}(\xi)=\operatorname{Arch}\frac{2u+p+1}{1-p}Q_{2n-1}(u^{-1})\sqrt{pu^{-2}+(p+1)u^{-1}+1}+$$
$$-\frac{1+\lambda}{\sqrt{p}}\operatorname{Arch}\frac{p+1+2pu^{-1}}{1-p} \qquad (u=a\operatorname{ch}\xi). \tag{66}$$

Jeśli zachodzi równanie (63), to $\frac{1+\lambda}{\sqrt{p}}$ w powyższych wzorach można zastąpić przez $\left(\frac{b}{b_1}\right)^2$.

Niech dalej $l>0$ oznacza liczbę tak dobraną, że

$$-x(l)=x_1 \qquad \left(\text{lub}-\frac{1}{2}\left[x(l)+x(\bar{l})\right]=x_1\right). \tag{67}$$

Wówczas kładąc we wzorze (61)

$$w=-a\operatorname{ch}(\zeta-l) \tag{68}$$

otrzymamy poszukiwaną funkcję odwzorowującą w przybliżeniu obszary z rys. 4, gdzie

$$\xi_3=l-\operatorname{Arch}\frac{1}{a}; \quad \xi_4=l-\operatorname{Arch}\frac{p}{a} \qquad \text{(por. rys. 8).} \tag{69}$$

Błąd odwzorowania wyrazi się wzorem: $(\Delta x)_2 = |x(l)| - |\bar{x}(l)|$ [lub będzie o połowę mniejszy, przy posługiwaniu się drugim ze wzorów (67)].

Warto zauważyć, że przybliżone wartości parametrów p, a i l można otrzymać zakładając, że wymiary prostokątów $\Delta/2$ (rys. 4), otrzymywanych w pierwszym i w drugim przybliżeniu funkcji odwzorowującej, są identyczne. Na podstawie rys. 5 i wzorów (48) i (69) otrzymamy przy tym założeniu następujące wzory przybliżone:

$$a \simeq \frac{1}{\operatorname{ch}\left[\ln\left(\frac{b}{b_1}\right)^2 + \xi_{10}\right]}; \quad p \simeq a \operatorname{ch} \xi_{10}; \quad l \simeq \xi_0^1 + \xi_{10} + \ln\left(\frac{b}{b_1}\right)^2. \tag{70}$$

Liczby ξ_0^1 i ξ_{10} otrzymamy z odpowiednich nomogramów lub wykresów rozdziału 2.3.1 dla wartości występującego tam parametru $p = \left(\frac{b}{b_1}\right)^2$.

Wyznaczenie funkcji $\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2$

Ze wzorów (52) i (68) otrzymamy:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{dz}{dw} \cdot \frac{dw}{d\zeta} = -\frac{b_1}{\pi} \frac{\sqrt{w+1}}{\sqrt{w+p}\,\sqrt{w^2-a^2}} [-a \operatorname{sh}(\zeta - l)] =$$

$$= \frac{b_1}{\pi} \frac{\sqrt{w+1}}{\sqrt{w+p}}.$$

Zatem:

$$\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2 = \frac{b_1^2}{\pi^2} \frac{|w+1|}{|w+p|} = \frac{b_1^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{[\operatorname{ch}(l-\xi)\cos\eta - 1/a]^2 + [\operatorname{sh}(l-\xi)\sin\eta]^2}{[\operatorname{ch}(l-\xi)\cos\eta - p/a]^2 + [\operatorname{sh}(l-\xi)\sin\eta]^2}} \tag{71}$$

Wzór ten upraszcza się, gdy $e^{l-\xi} \gg e^{-(l-\xi)}$, czyli gdy ξ na rys. 4 nie jest zbyt bliskie l. Wówczas, na mocy (68), $w \simeq -\frac{a}{2} e^{l-\xi} \cdot e^{i\eta}$, co po wstawieniu do (71) i uwzględnieniu wzoru (49) daje:

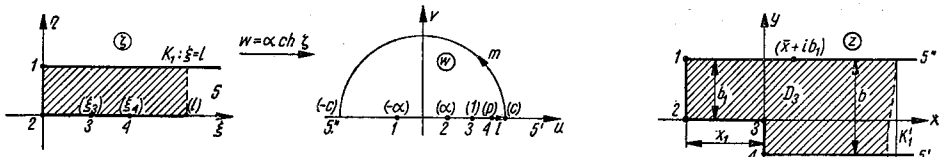
$$\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2 \simeq \frac{b_1^2}{\pi^2 \sqrt{p}} \sqrt{\frac{\operatorname{ch}[l - \xi - \ln 2/a] - \cos\eta}{\operatorname{ch}[l - \xi - \ln 2p/a] - \cos\eta}}. \tag{71'}$$

Wzór ten jest bardzo podobny do analogicznego wzoru z rozdziału 2.3.1.

Z (71) widać, że $\left|\frac{dz}{d\xi}\right|^2 = 0$ dla $\zeta = l - \operatorname{Arch}\frac{1}{a} = \xi_3$ i $\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2 = \infty$ dla $\zeta = l - \operatorname{Arch}\frac{p}{a} = \xi_4$. Całki zawierające rozważaną funkcję będą więc niewłaściwe i podobnie jak w rozdziale 2.3.1 będą wymagać rachunków numerycznych.

2. PRZYPADEK, GDY K_2 ODWZOROWUJE SIĘ DOKŁADNIE NA ODCINEK PROSTEJ, A K_1 W SPOSÓB PRZYBLIŻONY

Ponieważ rozważania tego rozdziału będą dość podobne do przeprowadzonych w poprzednim rozdziale, skrócimy do maksimum pomocnicze przekształcenia i skoncentrujemy uwagę głównie na wynikach końcowych, podkreślając jednak pewne istotne różnice występujące między rozważonymi przypadkami.



$\xi_3 = \operatorname{Arch}\frac{1}{\alpha}$; $\xi_4 = \operatorname{Arch}\frac{p}{\alpha}$

Rys. 9.

Odwzorujmy wpierw pas : $\xi > 0$, $0 < \eta < \pi$ w płaszczyźnie ζ na górną półpłaszczyznę w, gdzie dla ujednoznacznienia założymy: $w_1 = -\alpha$, $w_2 = \alpha$, $w_5 = \infty$ (rys. 9). Liczba $\alpha > 0$ zostanie wyznaczona dalej.

Ze wzoru Christoffela oraz ze wzorów (36) i (38) otrzymamy $\zeta = \operatorname{Arch}\frac{w}{\alpha}$, a stąd

$$w = \alpha \operatorname{ch} \zeta. \tag{72}$$

Górną półpaszczyznę zmiennej w odwzorujemy dalej na obszar D_3 (rys. 9), korzystając w dalszym ciągu ze wzoru Christoffela. Dla ujednoznacznienia przyjmiemy: $w_5 = \infty$, $w_3 = 1$, $w_1 = -w_2$, oraz oznaczymy $w_2 = \alpha$, $w_4 = p$.

Tablica 3

	1	2	3	4	5
α_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\gamma_k = 1 - \alpha_k$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
w_k	$-\alpha$	α	1	p	∞

Korzystając jeszcze ze wzoru (36) otrzymamy ostatecznie:

$$2(w) = \frac{b}{\pi}\int_1^w \frac{\sqrt{\varrho - 1}}{\sqrt{\varrho - p}} \frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - \alpha^2}}. \tag{73}$$

(Całkowanie po dowolnej krzywej leżącej w górnej półpłaszczyźnie w). Dla wyznaczenia parametrów p i α rozważymy odwzorcowanie punktów brzegowych.

a) Odcinek 3 — 2. Całkując po osi rzeczywistej, po prostych przekształceniach, otrzymamy:

$$z = x = -\frac{b}{\pi}\int_u^1 \sqrt{\frac{1-\varrho}{(p-\varrho)(\varrho-\alpha)(\varrho+\alpha)}}\,d\varrho.$$

Całka ta może być wyrażona przez całki eliptyczne I i III rodzaju niezupełne (por. [5] wzór 255.21).

Dla $u = a \quad -x = x_1$, a rozważane całki stają się zupełne, przy czym całka eliptyczna III rodzaju może być wyrażona przez funkcję $K(k)$ i $Z(\beta, k)$ ([5] wzór 414.01), co ostatecznie prowadzi do równania:

$$\frac{x_1}{b} = \frac{2}{\pi} KZ(\beta,k),$$

gdzie

$$\beta = \arcsin\sqrt{\frac{1+\alpha}{p+\alpha}}; \quad k^2 = \frac{(1-\alpha)(p+\alpha)}{(1+\alpha)(p-\alpha)}. \tag{74}$$

b) Odcinek 3 — 4.

Ze wzoru (73), całkując po osi rzeczywistej, otrzymamy po przekształceniach:

$$z = iy = -i\frac{b}{\pi}\int_1^u \sqrt{\frac{\varrho-1}{(p-\varrho)(\varrho-\alpha)(\varrho+\alpha)}}\,d\varrho.$$

Całka ta wyrazi się również przez całki eliptyczne I i III rodzaju niezupełne ([5] wzór 256.15), które dla $u = p$ (czyli $-y = y_1$) przejdą w całki zupełne. Całka eliptyczna III rodzaju zupełna wyrazi się w tym przypadku przez funkcję $\Lambda_0(\psi,k)$ ([5] wzór 413.01), co — po prostych przekształceniach — doprowadzi do równania :

$$\frac{y_1}{b} = \Lambda_0(\psi, k) - \frac{1-\alpha}{\sqrt{(p-\alpha)(1+\alpha)}} F_0(k),$$

gdzie

$$\psi = \arcsin\sqrt{\frac{p-\alpha}{p+\alpha}}; \quad k^2 = \frac{2\alpha(p-1)}{(1+\alpha)(p-\alpha)}. \tag{75}$$

Zależności (74) i (75) stanowią układ równań na parametry p i α. Dla odwzorowania pozostałych odcinków brzegu zastosujemy metodę

rozwinięcia na szereg potęgowy, podobnie jak w poprzednim rozdziale. Oznaczając $z_3(w) = \frac{\sqrt{w-1}}{w\sqrt{w-p}}$ mamy na mocy wzorów (73) i (56):

$$\frac{dz}{dw} = \frac{b}{\pi} z_3(w) z_1(w).$$

Całkując to równanie po dowolnej krzywej, leżącej w obszarze $a < |w| < \infty$, otrzymamy:

$$z(w) \simeq \frac{b}{\pi} \int_{w_0}^{w} z_3(\varrho) \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{a^{2k}}{\varrho^{2k}} d\varrho + z(w_0); \tag{76}$$

w_o — jest tu dowolną liczbą, leżącą w obszarze $a < |w| < \infty$, dla której znamy wartość funkcji $z(w_o)$. W naszym przypadku istnieją tylko dwie liczby spełniające powyższe wymagania: $w_3 = 1$ i $w_4 = p$. Aby jednak błąd wynikający z opuszczenia n-tej reszty szeregu był jak najmniejszy, należy zapewnić możliwie jak największą odległość krzywej całkowania od punktów $\pm a$ [por. wzory (86) i (92)]. W szczególności początek krzywej całkowania powinien leżeć jak najdalej tych punktów, czyli korzystniej będzie przyjąć $w_0 = p$; $(z(w_0) = -iy_1)$.

Po prostych przeróbkach algebraicznych otrzymamy dalej:

$$\int z_3(w) \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{a^{2k}}{w^{2k}} dw = \int \frac{\sqrt{w-1}}{w\sqrt{w-p}} dw - \int \frac{\sum_{k=1}^{k} a_k a^{2k} (u^{2k-1} - u^{2k})}{w\sqrt{(1-u)(1-pu)}} du,$$

gdzie $u = \frac{1}{w}$.

Pierwsza z otrzymanych całek jest, z dokładnością do czynnika $C = \frac{b}{\pi}$ identyczna jak w rozdziale 2.3.1, więc możemy skorzystać ze wzoru (39), a drugą, na podstawie wzoru (60), możemy zapisać w postaci:

$$\int \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k a^{2k} (u^{2k-1} - u^{2k})}{\sqrt{(1-u)(1-pu)}} du = \underset{2n-1}{Q}(u) \sqrt{(1-u)(1-pu)} - \lambda \int \frac{du}{\sqrt{(1-u)(1-pu)}} \tag{77}$$

Po podstawieniu do (76) otrzymamy ostatecznie:

$$z(w) \simeq \frac{b}{\pi} \left[\operatorname{Arch} w_1 - \frac{1+\lambda}{\sqrt{p}} \operatorname{Arch} w_2 - Q_{2n-1}\left(\frac{1}{w}\right) \sqrt{\left(1-\frac{1}{w}\right)\left(1-\frac{p}{w}\right)} \right] - iy_1,$$

gdzie

$$w_1 = \frac{2w - (p+1)}{p-1}; \quad w_2 = \frac{p+1-2pw^{-1}}{p-1}. \tag{78}$$

Współczynniki wielomianu $Q_{2n-1}(u) = \sum_{k=0}^{2k-1} b_k u^k$ oraz stałą λ wyznaczymy przez obustronne zróżniczkowanie równania (77). Przyjmując przykładowo $n = 3$ otrzymamy:

$$b_5 = -\frac{1}{19{,}2} p_1 \alpha^6,$$

$$b_4 = -\frac{1}{19{,}2}(1{,}1 p_1 - 0{,}1)\, p_1 \alpha^6, \tag{79}$$

$$b_3 = -\frac{1}{15{,}36}(0{,}99\, p_1^2 - 0{,}1\, p_1 - 0{,}09)\, p_1 \alpha^6 - \frac{3}{32} p_1 \alpha^4$$

$$\left(p_1 = \frac{1}{p}\right)$$

oraz zależności rekurencyjne:

$$\begin{aligned}
b_4 &= \frac{11}{10}(p_1 + 1)\, b_5 + \frac{1}{16} p_1 \alpha^6, \\
b_3 &= \frac{9}{8}(p_1 + 1)\, b_4 - \frac{5}{4} p_1 b_5 - \frac{3}{32} p_1 \alpha^4, \\
b_2 &= \frac{7}{6}(p_1 + 1)\, b_3 - \frac{4}{3} p_1 b_4 + \frac{1}{8} p_1 \alpha^4, \\
b_1 &= \frac{5}{4}(p_1 + 1)\, b_2 - \frac{3}{2} p_1 b_3 - \frac{1}{4} p_1 \alpha^2, \\
b_0 &= \frac{3}{2}(p_1 + 1)\, b_1 - \frac{2}{1} p_1 b_2 + \frac{1}{2} p_1 \alpha^2,
\end{aligned} \tag{79'}$$

$$\lambda = -b_0 \frac{p_1 + 1}{2 p_1} + b_1.$$

Jeżeli dla $w = 1$ błąd wzoru (78) pozostaje w dopuszczalnych granicach [por. (95)], to można przy jego pomocy odwzorować odcinek 3 — 4, co prowadzi do prostego równania na parametry p i α, następującego równania (75):

$$p = \left(\frac{b}{b_1}\right)^2 (1 + \lambda)^2. \tag{80}$$

Wówczas $\frac{b}{\pi} \frac{1 + \lambda}{\sqrt{p}} = \frac{b_1}{\pi}$ i wzór (78) przyjmuje postać niemal identyczną jak w pierwszym przybliżeniu funkcji odwzorowującej (rozdział 2.3.1). Jedyną różnicą w stosunku do wzoru (39) jest obecność wy-

razu z wielomianem $Q_{2n-1}\left(\frac{1}{w}\right)$ („człon korekcyjny"). Funkcja $\lambda(\alpha, p)$ ma identyczną postać jak w poprzednim przypadku, czyli wyraża się wzorem (64). Zatem przy małym α, podobnie jak poprzednio, można rozwiązywać równanie (80) metodą kolejnych przybliżeń.

W celu ciągłego przedłużenia funkcji (78) na brzeg można posłużyć się pomocniczymi odwzorowaniami z rys. 7, co prowadzi do wzorów:

c) Odcinek $4 - 5'$

$$\frac{\pi}{b} x(\xi) = \operatorname{Arch} \frac{2u - (p+1)}{p-1} - \frac{1+\lambda}{\sqrt{p}} \operatorname{Arch} \frac{p+1-2pu^{-1}}{p-1} + \\ - Q_{2n-1}(u^{-1}) \sqrt{pu^{-2} - (p+1)u^{-1} + 1}. \tag{81}$$

$$(u = \alpha \operatorname{ch} \xi)$$

d) Odcinek $1 - 5''$

$$\frac{\pi}{b} \bar{x}(\xi) = \operatorname{Arch} \frac{2u + p + 1}{p-1} - \frac{1+\lambda}{\sqrt{p}} \operatorname{Arch} \frac{p+1+2pu^{-1}}{p-1} + \\ - Q_{2n-1}(-u^{-1}) \sqrt{pu^{-2} + (p+1)u^{-1} + 1} \tag{82}$$

$$(u = \alpha \operatorname{ch} \xi).$$

Liczba l (rys. 9) jest rozwiązaniem równania:

$$x(l) = a_2 \text{ [lub } x(l) + \bar{x}(l) = 2a_2]. \tag{83}$$

Błąd odwzorowania odcinka K_1 wynosi $(\Delta x)_1 = \bar{x}(l) - x(l)$ [lub o połowę mniej, gdy korzystamy z drugiego ze wzorów (83)]. Przyrównanie prostokątów $\Delta/2$, otrzymanych w pierwszym i w drugim przybliżeniu, prowadzi do następujących wzorów przybliżonych:

$$\alpha \simeq \frac{1}{\operatorname{ch} \xi_0^1}; \qquad p \simeq \alpha \operatorname{ch}\left[\xi_0^1 + \ln\left(\frac{b}{b_1}\right)^2\right]; \qquad l \simeq \xi_0^1 + \xi_{10} + \ln\left(\frac{b}{b_1}\right)^2 \tag{84}$$

[przy określaniu liczb ξ_0^1 i ξ_{10} z rozdziału 2.3.1 należy przyjąć $p = \left(\frac{b}{b_1}\right)^2$].

Wyznaczenie funkcji $\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2$

Ze wzorów (72) i (73) otrzymamy $\frac{dz}{d\zeta} = \frac{b}{\pi} \frac{\sqrt{w-1}}{\sqrt{w-p}}$,

czyli

$$\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2 = \frac{b^2}{\pi^2} \frac{\left|\operatorname{ch} \zeta - \frac{1}{\alpha}\right|}{\left|\operatorname{ch} \zeta - \frac{p}{\alpha}\right|} = \frac{b^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\left(\operatorname{ch} \xi \cos \eta - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + (\operatorname{sh} \xi \sin \eta)^2}{\left(\operatorname{ch} \xi \cos \eta - \frac{p}{\alpha}\right)^2 + (\operatorname{sh} \xi \sin \eta)^2}}. \tag{85}$$

Jeśli $e^{\xi} \gg e^{-\xi}$, czyli ξ nie jest zbyt bliskie zera, to postępując podobnie, jak w poprzednim rozdziale, dojdziemy do następującego wzoru przybliżonego:

$$\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2 \simeq \frac{b^2}{\pi^2 \sqrt{p}} \sqrt{\frac{\operatorname{ch}\left(\xi - \ln\frac{2}{a}\right) - \cos\eta}{\operatorname{ch}\left(\xi - \ln\frac{2p}{a}\right) - \cos\eta}}. \tag{85'}$$

Z (85) widać, że $\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2 = 0$ dla $\zeta = \operatorname{Arch}\frac{1}{a} = \xi_3$ oraz $\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2 = \infty$ dla $\zeta = \operatorname{Arch}\frac{p}{a} = \xi_4$ (rys. 9). Zatem całki zawierające rozważaną funkcję będą niewłaściwe i będą wymagać rachunków numerycznych podobnie jak w poprzednich przypadkach.

2.4. Przykład rachunkowy

Rachunki przeprowadzimy zakładając na tyle mały stosunek $\frac{a_2}{b}$ i tak dużą głębokość grzbietu y_1, aby nie można było zastosować pierwszego przybliżenia funkcji odwzorowującej. Niech na przykład $a = 8$; $b = 12{,}8$; $b_1 = 3$; $x_1 = 1{,}28$ [cm] (wymiary zaczerpnięte z praktyki). Posłużymy się wzorami rozdziału 2.3.2 — 1.

2.4.1. Wyznaczenie parametrów p, a i l

Rozwiązując wykreślnie równanie (43) otrzymamy: $\xi_{10} \simeq 0{,}3$, $\xi_0^1 \simeq \simeq 1{,}87$. Zatem ze wzorów (70): $a \simeq 0{,}081 \overset{\text{ozn}}{=} \overset{1}{a}$, $p \simeq 0{,}085 \overset{\text{ozn}}{=} \overset{1}{p}$, $l \simeq 5{,}07 \overset{\text{ozn}}{=} \overset{1}{l}$. W ten sposób mamy wyznaczone pierwsze przybliżenie rozważanych parametrów. Ponieważ $\overset{1}{p}$ jest niewiele większe od $\overset{1}{a}$ (co wynika z dużej wartości stosunku y_1/a_2), więc należy oczekiwać, że wzór przybliżony (63) będzie obarczony dużym błędem. Istotnie, podstawiając w (91) $p = \overset{1}{p}$, $a = \overset{1}{a}$ i $n = 3$ otrzymamy: $|\delta y_4| \leqslant 18$. Wprawdzie nie jest to zbyt dokładne oszacowanie, bo liczby $\overset{1}{p}$ i $\overset{1}{a}$ są jeszcze obarczone sporym błędem, jednak otrzymany wynik informuje o rzędzie wielkości błędu i wskazuje na nieprzydatność wzoru (63) w rozważanym przykładzie. Równania (54) i (55) rozwiążemy metodą kolejnych przybliżeń. W tym celu zapiszmy je w postaci:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_2}{b_1} &\overset{\text{ozn}}{=} u = f(p, a) \\ \frac{y_1}{b_1} &\overset{\text{ozn}}{=} v = \varphi(p, a) \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

i oznaczmy

$$\overset{n}{u} = f(\overset{n}{p}, \overset{n}{\alpha}); \qquad u = \overset{n}{u} + \Delta\overset{n}{u} \qquad p = \overset{n}{p} + \Delta\overset{n}{p}$$
$$\overset{n}{v} = \varphi(\overset{n}{p}, \overset{n}{\alpha}); \qquad v = \overset{n}{v} + \Delta\overset{n}{v} \qquad \alpha = \overset{n}{\alpha} + \Delta\overset{n}{\alpha}.$$

Parametry p i α są określonymi funkcjami zmiennych u i v, wyznaczonymi przez wzory (a). Przyrosty tych funkcji $\Delta\overset{n}{p}$ i $\Delta\overset{n}{\alpha}$, odpowiadające przyrostom $\Delta\overset{n}{u}$ i $\Delta\overset{n}{v}$ argumentów, równają się w przybliżeniu różniczkom zupełnym $d\overset{n}{p}$ i $d\overset{n}{\alpha}$,

$$p \simeq \overset{n}{p} + d\overset{n}{p} \overset{ozn}{=} \overset{n+1}{p}, \qquad \alpha \simeq \overset{n}{\alpha} + d\overset{n}{\alpha} \overset{ozn}{=} \overset{n+1}{\alpha}.$$

Otrzymane wzory wyrażają $(n+1)$-sze przybliżenie parametrów p i α przez n-te. Różniczki $d\overset{n}{p}$ i $d\overset{n}{\alpha}$ łatwo otrzymamy, różniczkując wzory (a) względem u i v i rozwiązując otrzymane stąd dwa równania liniowe:

$$d\overset{n}{p} = \frac{\begin{vmatrix} f_\alpha & \Delta\overset{n}{u} \\ \varphi_\alpha & \Delta\overset{n}{v} \end{vmatrix}}{W}; \qquad d\overset{n}{\alpha} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta\overset{n}{u} & f_p \\ \Delta\overset{n}{v} & \varphi_p \end{vmatrix}}{W}, \tag{b}$$

gdzie $W = \begin{vmatrix} f_\alpha & f_p \\ \varphi_\alpha & \varphi_p \end{vmatrix}$ i wszystkie pochodne należy liczyć w punkcie $(\overset{n}{p}, \overset{n}{\alpha})$. W rozważanym przykładzie, po czterech krokach iteracyjnych otrzymamy: $p = 0{,}097070$; $\alpha = 0{,}088229$ (błąd $\leqslant 10^{-5}$). [Pochodne we wzorach (b) obliczano w sposób przybliżony, przy pomocy odpowiednich ilorazów różnicowych]. Parametr l wyznaczymy z drugiego z równań (67), które rozwiążemy metodą iteracyjną Newtona, wychodząc z wyznaczonej wartości $\overset{1}{l}$. Po czterech krokach iteracyjnych otrzymamy: $l = 5{,}03902$ (błąd $\leqslant 10^{-5}$). Błąd odwzorowania $(\Delta x)_2 = \frac{1}{2}[|x(-l)| - |\overline{x}(-l)|] = 0{,}0634$ [cm], czyli $\frac{(\Delta x)_2}{x_1} < 5\%$. Błędy odwzorowania odcinków $3-2''$ i $1-2'$ dla $\xi = -l$ (rys. 8) i $n = 3$ wypadają bardzo małe, co jest konsekwencją szybkiej zbieżności szeregu (58):

$$|\delta x| \leqslant 1{,}6 \cdot 10^{-8}\,[\text{cm}] \text{ — wzór (89)}; \quad |\delta\overline{x}| \leqslant 2 \cdot 10^{-8}\,[\text{cm}] \text{ — wzór (90)}$$

2.4.2. Wyznaczenie długości fal granicznych

1. POLA TYPU TE (PROBLEM NEUMANA)

a) Funkcje nieparzyste względem ξ.

Przyjmijmy: $u_1 = \sin\frac{\pi\xi}{2l}$, $u_2 = \sin\frac{3\pi\xi}{2l}$, ...

Ze wzorów (34) otrzymamy:

$$[B_{kl}] = \begin{bmatrix} 1{,}53831 & 0 \\ 0 & 13{,}84479 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczenie współczynników C_{kl} [wzór (33)] wymaga całkowania numerycznego, co stanowi najbardziej kłopotliwy fragment rachunków. W rozważanym przykładzie całkowano najpierw względem η, przy pomocy wzoru Simpsona, a wyniki względem ξ w identyczny sposób, dobierając gęstość podziału przy całkowaniu zależnie od szybkości zmian funkcji podcałkowej. Ostatecznie otrzymano:

$$[C_{kl}] = \begin{bmatrix} 154{,}525 & -108{,}234 \\ -108{,}234 & 116{,}220 \end{bmatrix},$$

Równanie charakterystyczne (30) przybiera postać:
$6244{,}3(\gamma^2)^2 - 2318{,}148\ \gamma^2 + 21{,}2976 = 0$. Rozwiązując to równanie kwadratowe otrzymamy ostatecznie:

$$\lambda_{g1} = \frac{2\pi}{\gamma_1} = 64{,}712 \text{ [cm]}; \qquad \lambda_{g2} = \frac{2\pi}{\gamma_2} = 10{,}446 \text{ [cm]}.$$

b) Funkcje parzyste względem ξ.

Niech $u_1 = 1$, $u_2 = \cos\frac{\pi\xi}{l}$, ... Postępując podobnie jak w a) otrzymamy:

$$[B_{kl}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6{,}15324 \end{bmatrix}; \qquad [C_{kl}] = \begin{bmatrix} 179{,}712 & -129{,}339 \\ -129{,}339 & 133{,}388 \end{bmatrix}.$$

Równanie charakterystyczne: $\gamma^2(7242{,}847\ \gamma^2 - 1105{,}811) = 0$. Stąd: $\gamma_1 = 0$ — przypadek trywialny, oraz $\lambda_g = \frac{2\pi}{\gamma_2} = 16{,}080$ [cm]

2. POLA TYPU TM (PROBLEM DIRICHLETA)

a) Funkcje parzyste względem ξ.

Niech: $u_1 = \cos\frac{\pi\xi}{2l}\sin\eta$, $\qquad u_2 = \cos\frac{3\pi\xi}{2l}\sin\eta$, ...

$$[B_{kl}] = \begin{bmatrix} 8{,}68443 & 0 \\ 0 & 14{,}83767 \end{bmatrix}; \qquad [C_{kl}] = \begin{bmatrix} 12{,}14210 & -8{,}61333 \\ -8{,}61333 & 26{,}18468 \end{bmatrix}.$$

Równanie charakterystyczne: $243{,}7475\ (\gamma^2)^2 - 407{,}5595)\gamma^2 + 128{,}8567 = 0$.

$$\lambda_{g1} = \frac{2\pi}{\gamma_1} = 9{,}657 \text{ [cm]} \qquad \lambda_{g2} = \frac{2\pi}{\gamma_2} = 5{,}623 \text{ [cm]}.$$

b) Funkcje nieparzyste względem ξ

Poprzestańmy na pierwszym przybliżeniu metody Galorkina:

$u_1 = \sin\frac{\pi\xi}{l}\sin\eta$,... Wówczas: $B_{11} = 10{,}99189$;

$C_{11} = 20{,}7549$, czyli $\gamma^2 = \frac{B_{11}}{C_{11}} = 0{,}529605$. Stąd $\lambda_g = 8{,}634$ [cm].

Zestawienie otrzymanych wyników:

Tablica 4

Graniczne długości fal falowodu grzbietowego

λ_g (cm)	64,712	16,080	10,446	9,657	8,634	5,623
Typ	TE	TE	TE	TM	TM	TM
Symetria funkcji własnej względem x	nieparz.	parz.	nieparz.	parz.	nieparz.	parz.

Współczynnik separacji rodzajów (8) wynosi $m = \frac{64{,}712}{16{,}080} = 4$. Ciekawe jest porównanie falowodu grzbietowego z prostokątnym o identycznych wymiarach zewnętrznych.

Tablica 5

Graniczne długości fal falowodu prostokątnego

λ_g (cm)	32	25,6	19,6		16
Typ	TE_{10}	TE_{01}	TE_{11}	TM_{11}	TE_{20}

Dla falowodu prostokątnego $m = \frac{32}{25{,}6} = 1{,}25$.

Zatem w wyniku wprowadzenia grzbietu do falowodu prostokątnego zwiększa się znacznie λ_{g1}, przy równoczesnym zmaleniu λ_{g2}, co w efekcie prowadzi do znacznego wzrostu współczynnika separacji rodzajów.

2.4.3. Wyznaczenie impedancji charakterystycznej dla rodzaju podstawowego

Zgodnie ze wzorem (27) funkcja określająca rodzaj podstawowy wynosi:

$$\psi(\xi, \eta) \simeq \psi_2(\xi, \eta) = a_1 \sin\frac{\pi\xi}{2l} + a_2 \sin\frac{3\pi\xi}{2l}.$$

Układ równań (29), ze względu na znikanie wyznacznika charakterystycznego, redukuje się do jednego: $A_{11}a_1 + A_{12}a_2 = 0$, gdzie $A_{11} = B_{11} +$

$-\gamma_1^2 C_{11} = 0{,}08156$, $A_{12} = B_{12} - \gamma_1^2 C_{12} = 1{,}02035$. Jeśli oznaczyć: $\alpha = -\frac{a_2}{a_1} = \frac{A_{11}}{A_{12}} = 0{,}079933$, to można przyjąć $\psi_2 = \sin\frac{\pi\xi}{2l} - \alpha \sin\frac{3\pi\xi}{2l}$, korzystając z dowolności stałej multiplikatywnej. Zatem ze wzorów (12′) otrzymamy:

$$I_1 = \int_0^{\pi} \left|\frac{\partial\psi_2}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} d\eta = \frac{\pi^2}{2l}(1 - 3\alpha), \text{ oraz } I_2 = 2\int_{\Delta/2}\int (\nabla\psi_2)^2 \, d\xi \, d\eta = \frac{\pi^3}{4l}(1 + 9\alpha^2),$$

czyli

$$K = \frac{I_1^2}{I_2} = \frac{\pi}{l}\frac{(1-3\alpha)^2}{1+9\alpha^2} \simeq 0{,}34 \quad \text{i} \quad Z = 0{,}34\, Z_0 \frac{\lambda f}{\lambda} \quad \text{[por. wzór (12)]}.$$

Dla falowodu prostokątnego o wymiarach $2a \times b$ $K_p = \frac{b}{a}$, co bezpośrednio wynika ze wzoru (12), gdy podstawić w nim $\psi = \sin\frac{\pi x}{2a}$. Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymamy $K_p/K = \frac{1{,}6}{0{,}34} \simeq 4{,}7$. Zatem wprowadzenie grzbietu znacznie zmniejsza impedancję charakterystyczną.

2.5. Uwagi związane z szacowaniem błędów i podsumowanie pracy

Wprawdzie autorowi nie udało się uzyskać jakichś prostych wyrażeń dla oszacowania błędów przy wyznaczaniu parametrów falowodu metodą odwzorowań, jednak o rzędzie wielkości tych błędów można się zorientować na podstawie zmiany rozważanych parametrów, przy zmniejszeniu o jeden ilości funkcji przybliżających.

I tak, zakładając w rozdziale 2.4.2.1.a) $n = 1$, otrzymamy $\psi_1 = \sin\frac{\pi\xi}{2l}$, czyli równanie charakterystyczne przyjmie postać $A_{11} = 0$. Stąd $\gamma_1^2 = \frac{B_{11}}{C_{11}} = 0{,}00995509$, czyli $\lambda_{g1}|_{n=1} = \frac{2\pi}{\gamma_1} = 63$ [cm]. Ponieważ mieliśmy $\lambda_{g1} = 64{,}712$ [cm], więc zmiana jest stosunkowo niewielka i oczekiwana dokładność jest duża. Natomiast $K|_{n=1} = \frac{\pi}{l}\frac{(1-3\alpha)^2}{1+9\alpha^2}\Big|_{\alpha=0} = \frac{\pi}{l} = 0{,}623$, a $K|_{n=2} = 0{,}340$. A zatem zmiana jest tu dość znaczna, czyli wartość $K|_{n=2}$ może być obarczona jeszcze sporym błędem. Podobnie można oczekiwać, że parametry tłumieniowe przy $n = 2$ będą także obarczone jeszcze sporym błędem, a ponieważ obliczenie ich jest dość kłopotliwe, bo wymaga numerycznego całkowania, więc zostało pominięte w przykła-

dzie rachunkowym. Gdyby przyjąć mniejszą głębokość grzbietu y_1, to wyniki byłyby oczywiście znacznie dokładniejsze. Chcąc powiększyć dokładność należałoby przyjąć $n \geqslant 3$, co równocześnie umożliwiłoby przybliżone wyznaczenie dalszych długości fal granicznych. Autor nie dysponował jednak niezbędnymi do tego możliwościami rachunkowymi, co zmusiło do ograniczenia rachunków numerycznych do minimum uznanego za niezbędne dla zilustrowania wyników teoretycznych i naszkicowania właściwej, zdaniem autora, metodyki rachunków numerycznych. Wprawdzie przytoczony przykład rachunkowy pokazał, że metoda odwzorowań wymaga dość dużej ilości obliczeń numerycznych, jednak jej godną uwagi zaletą jest stosunkowo nieznaczny wzrost komplikacji rachunkowych przy zwiększaniu ilości funkcji przybliżających. Przy obliczaniu dodatkowych współczynników C_{kl} wykorzystuje się bowiem stale raz obliczone wartości funkcji $\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2$, a jedynie będzie zwiększał się stopień wielomianu charakterystycznego i stopnię związanych z nim wyznaczników. Można więc tą metodą obliczać wiele rodzajów drgań w falowodzie, zwiększając równocześnie dokładność aproksymacji rodzaju podstawowego. Warto jeszcze zwrócić uwagę na fakt, że zamiast odwzorowywać pas $0 < \eta < \pi$ na „kanał o zmiennej wysokości" (rys. 5) można było go odwzorować na „kanał skręcający o 90°" i przy pomocy tego odwzorowania konstruować dalsze przybliżenia funkcji odwzorowującej. Rozważania i wzory końcowe byłyby w tym przypadku bardzo podobne.

Autor dziękuje doc. K. Bochenkowi za zasugerowanie tematu oraz mgrowi A. Turskiemu za szereg pożytecznych dyskusji.

Instytut Badań Jądrowych

3. UZUPEŁNIENIA

3.1. Twierdzenia pomocnicze

I. Jeżeli funkcja zespolona $z = z(\zeta)$ odwzorowuje konforemnie obszar Δ na D (rys. 10), a $u(\xi, \eta)$ jest dowolną funkcją klasy $C^{(2)}$ w Δ, to zachodzą następujące wzory:

$$(1)\quad [\nabla u(x, y)]^2 = [\nabla u(\xi, \eta)]^2 \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2$$

[$\zeta = \zeta(z)$ — funkcja odwrotna względem $z(\zeta)$]

$$(2)\quad dx\,dy = \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2 d\xi\,d\eta\,.$$

Dowód. Funkcja $\zeta(z)$ musi być analityczna, czyli muszą zachodzić równania Cauchy-Riemana w obszarze D. Wykorzystanie tych równań i zależności $\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2 = \xi_x^2 + \eta_x^2$ prowadzi bezpośrednio do wzoru (1).

Związek (2) jest konsekwencją równości $\begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{vmatrix} = \left|\frac{dz}{d\xi}\right|^2$ wynikającej z równań Cauchy — Riemana dla funkcji analitycznej $z(\zeta)$ (por. np. [6]).

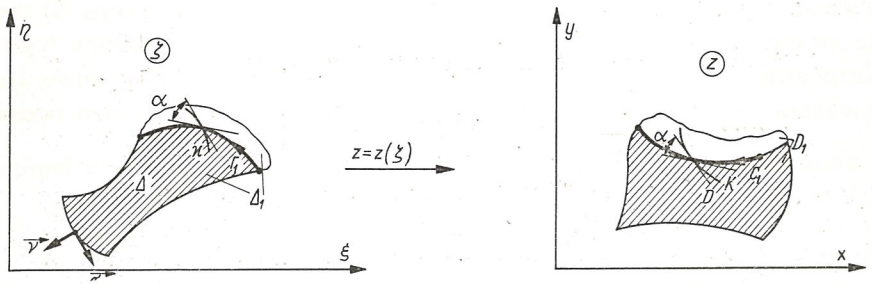
II. Jeżeli obowiązują założenia twierdzenia I i dodatkowo brzegi obszarów D i Δ składają się ze skończonej ilości łuków analitycznych, to zachodzą następujące wzory:

$$(3)\ \frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{\partial u}{\partial s}\left|\frac{dz}{d\zeta}\right| \qquad (4)\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial n}\left|\frac{dz}{d\zeta}\right| \qquad (5)\ ds = \left|\frac{dz}{d\zeta}\right| d\sigma;$$

$\frac{\partial}{\partial \sigma}$; $\frac{\partial}{\partial s}$ — pochodne w kierunku stycznym do brzegów Γ i C.

$\frac{\partial}{\partial \nu}$; $\frac{\partial}{\partial n}$ — pochodne w kierunku normalnym; $d\delta$; ds — elementy łuku na brzegach Γ i C (rys. 10).

Dowód. Zgodnie z założeniami twierdzenia II możemy tak podzielić brzeg Γ na łuki analityczne, aby ich obrazy były również łukami analitycznymi. Niech Γ_1 będzie jednym z takich łuków, a C_1 jego obrazem (rys. 10). Jeśli D i Δ są obszarami Jordana[1]), to na mocy twierdzenia Os-



Rys. 10.

gooda-Caratheodory'ego (por. [8]) funkcję $z(\zeta)$ można przedłużyć w sposób ciągły na obszar domknięty $\Delta + \Gamma$, a zatem obowiązuje „uogólniona zasada symetrii" [8], w myśl której funkcja ta daje się przedłużyć analitycznie przez każdy punkt łuku Γ_1. Można więc założyć, że $z(\zeta)$ jest analityczna w pewnym obszarze Δ_1 zawierającym $\Delta + \Gamma_1$ (rys. 10). Jeżeli dalej D_1 oznacza obraz obszaru Δ_1 przy odwzorowaniu określonym tą funkcją, to nietrudno dowieść, że odwzorowanie Δ_1 na D_1 jest konforemne. Jak wiadomo, wystarczy pokazać, że $\frac{dz}{d\zeta} \neq 0$ w Δ_1, a to wynika z analogicznego faktu obowiązującego w obszarze Δ (wynik konforemności

[1]) Gdyby założenie to nie było spełnione (np. gdyby D i Δ były obszarami wielospójnymi), to dowód można by przeprowadzić analogicznie biorąc jedynie zamiast odwzorowania całych obszarów D i Δ odwzorowanie pewnych ich części dostatecznie bliskich łuków C_1 i Γ_1, będących obszarami Jordana.

odwzorowania Δ na D) oraz z konstrukcji przedłużenia analitycznego, podanej w dowodzie „uogólnionej zasady symetrii" (por. [8]). Zatem, jeśli $\varkappa$ jest krzywą regularną, przecinającą Γ_1 pod kątem α, to jej obraz K przetnie C_1 pod takim samym kątem. Niech σ i s oznaczają parametry naturalne rozważanych krzywych i $\zeta = \zeta(\sigma)$ będzie równaniem krzywej $\varkappa$. Wtedy równanie krzywej K przyjmie postać: $z = z[\zeta(\sigma)]$. Pochodna łuku s względem parametru σ wyrazi się wzorem:

$$\frac{ds}{d\sigma} = \sqrt{x'^2(\sigma) + y'^2(\sigma)} = \left|\frac{dz}{d\sigma}\right| = \left|\frac{dz}{d\zeta}\right| \cdot \left|\frac{d\zeta}{d\sigma}\right| = \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|, \quad \text{bo} \quad \left|\frac{d\zeta}{d\sigma}\right| = 1.$$

Dla $\alpha = 0$ otrzymamy stąd związek (5).

Jeżeli dalej $\frac{\partial}{\partial\sigma}$ i $\frac{\partial}{\partial s}$ oznaczają pochodne w kierunku stycznym do krzywych $\varkappa$ i K, to

$$\frac{\partial u}{\partial\sigma} = \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{ds}{d\sigma} = \frac{\partial u}{\partial s}\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|.$$

Przyjmując w tym wzorze $\alpha = 0$ otrzymamy związek (3), a dla $\alpha = \frac{\pi}{2}$ — związek (4).

Wniosek. Z przebiegu dowodu wynika, że na łuku Γ_1 $\left|\frac{dz}{d\zeta}\right| \neq 0$, czyli na mocy wzoru (4) $\left[\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{C_1} = 0\right] \equiv \left[\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_1} = 0\right]$. Dowodzi to, że warunek brzegowy na znikanie pochodnej normalnej nie ulega zmianie przy odwzorowaniu konforemnym, jeśli spełnione są założenia twierdzenia II. (W punktach załamania brzegów wszystko co powiedziano powyżej obowiązuje w odniesieniu do granic jednostronnych odpowiednich pochodnych).

III. Symetria funkcji własnych w obszarze symetrycznym

Jeżeli 1° D — jest obszarem symetrycznym względem osi y;

2° $u(x, y)$ — jest funkcją własną, odpowiadającą wartości własnej γ^2, w problemie:

$$\left.\begin{aligned} \Delta u + \gamma^2 f(x,y)\, u = 0 \qquad & \text{w obszarze } D \\ u|_C = 0 \quad (\text{lub } \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = 0), & \end{aligned}\right\}$$

3° $f(x, y)$ jest funkcją parzystą zmiennej x [czyli $f(-x, y) \underset{D}{\equiv} f(x, y)$];

4° nie występuje zwyrodnienie, tzn. każda funkcja własna odpowiadająca wartości własnej γ^2 jest postaci $Au(x, y)$, wówczas $u(-x, y) \underset{D}{\equiv} (ux, y)$ lub $u(-x, y) \underset{D}{\equiv} -u\ (x, y)$.

Innymi słowy, funkcje własne, przy założeniach twierdzenia III, mogą być wyłącznie parzyste lub nieparzyste względem zmiennej x.

Dowód. Na mocy założenia 1°, jeżeli punkt $P(x, y) \in D$, to również $\overline{P}(-x, y) \in D$. Ale $\Delta u(-x, y)\,|_P = \Delta u(x, y)|_{\overline{P}}$, czyli jeśli w punkcie $\overline{P}$ zachodzi równanie 2°, to $[\Delta u(-x, y) + \gamma^2 f(x, y)\, u(-x, y)]_P = 0$, gdzie skorzystaliśmy również z założenia 3°, a P jest dowolnym punktem obszaru D. Podobnie, jeśli $P \in C$ [(C — brzeg obszaru D)], to i $\overline{P} \in C$, a spełnienie warunku brzegowego przez funkcję $u(x, y)$ w punkcie $\overline{P}$, pociąga $u(-x, y)\,|_P = 0$

$$\left[\text{lub } \left.\frac{\partial u(-x, y)}{\partial n}\right|_P = -\left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\right|_{\overline{P}} \cdot n_x + \left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right|_{\overline{P}} \cdot n_y = \left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial n}\right|_{\overline{P}} = 0,\right.$$

bo gdy $\vec{n}_P = (n_x, n_y)$, to $\vec{n}_{\overline{P}} = (-n_x, n_y)$$\Big]$. Zatem $u(-x, y)$ jest funkcją własną problemu brzegowego 2°, a więc na mocy założenia 4° istnieje stała A, że $u(-x, y) \underset{D}{\equiv} Au(x, y)$.

Otrzymane równanie obowiązuje w każdym punkcie obszaru D, a więc w szczególności w punkcie $\overline{P}$, czyli $u(x, y) \underset{D}{\equiv} Au(-x, y)$, co w zestawieniu z poprzednim równaniem daje $A^2 = 1$, czyli $A = \pm 1$, cbdo.

3.2. Zbieżność całek niewłaściwych

Zbieżność całek we wzorach (33) wynika z faktu, że funkcje u_k są ograniczone, a $2\iint\limits_{\Delta/2} \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2 d\xi\, d\eta = 2\iint\limits_{D/2} dx\, dy =$ pole obszaru D [por. wzór 2 rozdziału 3.1].

Łatwo również pokazać, że we wszystkich rozważanych przypadkach funkcja $\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2$ ma postać

$$\frac{L(\zeta)}{|\zeta - \xi_4|}, \tag{6}$$

gdzie $L(\zeta)$ — funkcja ograniczona. Wystarczy w tym celu rozwinąć mianownik funkcji $\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2$ na szereg Tylora, w otoczeniu punktu ξ_4. Np. w przypadku rozważanym w rozdz. 3.2.2. — 1:

$$\operatorname{ch}(\zeta - l) - \frac{p}{\alpha} = u\left[\sqrt{(p/\alpha)^2 - 1}\left(1 + \frac{u^2}{3!} + \frac{u^4}{5!} + \ldots\right) - \frac{p}{\alpha}\left(\frac{u}{2!} + \frac{u^3}{4!} + \ldots\right)\right],$$

gdzie $u = \zeta - \xi_4$, czyli, ze wzoru (71):

$$\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2 = \frac{1}{|\zeta - \xi_4|}\left[\frac{b_1^2\left|\operatorname{ch}(\zeta - l) - \frac{1}{\alpha}\right|}{\pi^2\left|\sqrt{(p/\alpha)^2 - 1} - \frac{p}{2\alpha}(\zeta - \xi_4) + \ldots\right|}\right]$$

i podobnie w pozostałych przypadkach.

Zatem, przy zagadnieniu Dirichleta, gdzie $u_k \cdot u_l = f(\xi) \sin n\eta \sin m\eta$, osobliwość funkcji podcałkowej we wzorze (33) będzie usuwalna i $\lim_{\eta \to 0}$ $\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2 u_k u_l \underset{\xi}{\equiv} 0$. (Jest to oczywiste przy $\xi \neq \xi_4$, bo wtedy funkcja $\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2$ jest ograniczona. Natomiast przy $\xi = \xi_4$ $\zeta - \xi_4 = i\eta$, czyli

$$\lim_{\eta \to 0} \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2 u_k u_l = K \lim \frac{\sin n\eta \cdot \sin m\eta}{\eta} = 0\Big).$$

Fakt ten jest dość istotny dla rachunków numerycznych. Zbieżność całek z rozdziału 2.2. wynika z faktu, że powstały one w wyniku zamiany zmiennych w całkach właściwych. Może być ona również prosto wykazana bezpośrednio, w oparciu o wzór (6).

3.3. Oszacowanie błędu wzoru (61)

Ze wzoru (58):

$$z_1(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\alpha^{2k}}{w^{2k}} = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\alpha^{2k}}{w^{2k}} + R_n(w),$$

gdzie:

$$R_n(w) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{\alpha^{2k}}{w^{2k}} = \frac{\alpha^{2n+2}}{w^{2n+2}} \sum_{l=0}^{\infty} a_{l+n+1} \frac{\alpha^{2l}}{w^{2l}} \text{ i } \alpha < |w| < \infty.$$

Ciąg współczynników a_k jest malejący, bo według (57):

$$a_k = a_{k-1} \frac{2k-1}{2k} < a_{k-1},$$

czyli

$$|R_n(w)| \leqslant a_{n+1} \frac{\alpha^{2n+2}}{|w|^{2n+2}} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{|w|}\right)^{2l} = a_{n+1} \frac{\alpha^{2n+2}}{|w|^{2n+2}} \frac{1}{1 - \left(\frac{\alpha}{|w|}\right)^2}.$$

Załóżmy, że krzywa całkowania leży całkowicie na zewnątrz półkola o promieniu $K > \alpha$, czyli $|w| \geqslant K > \alpha$. Wtedy, wzdłuż całej krzywej całkowania

$$|R_n(w)| \leqslant a_{n+1} \left(\frac{\alpha}{K}\right)^{2n+2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\alpha}{K}\right)^2} \overset{\text{ozn}}{=} \varepsilon(K, \alpha). \tag{86}$$