

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM X • ZESZYT 1-2

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1964

RADA REDAKCYJNA

PROF. JANUSZ GROSZKOWSKI, PROF. JANUSZ LECH JAKUBOWSKI,
PROF. BOLESŁAW KONORSKI, PROF. IGNACY MALECKI
PROF. PAWEŁ NOWACKI, PROF. PAWEŁ SZULKIN

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor Naczelny
PROF. WITOLD NOWICKI

Sekretarz
JULIUSZ MIERZEJEWSKI

ADRES REDAKCJI

*Warszawa, Politechnika, Plac Jedności Robotniczej 1,
Katedra Teletransmisji Przewodowej, Gmach Mechaniki*

PANSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
Warszawa, Młodowa 10

Nakład 690 (558—132)	Oddano do składania 4.II.64
Ark. wyd. 16,0, ark. druk. 16,0	Podpisano do druku w lipcu 1964
Papier ilustr. kł. III, 80 g, 70×100	Druk ukończono w lipcu 1964
Zamówienie nr 205/64	Cena zł 50,— Z-25

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

TADEUSZ KACZOREK

Obliczanie rozgałęzionych obwodów nieliniowych metodami iteracyjnymi

Rękopis dostarczono 10. 1. 1963

Rozważono możliwość stosowania metody krok po kroku oraz metody indukcyjności dynamicznej do obliczania rozgałęzionych obwodów nieliniowych o ciągłych charakterystykach, zawierających w przypadku ogólnym obok źródeł energii, rezystancje nieliniowe, indukcyjności nieliniowe i pojemności nieliniowe.

Wykazano możliwość prostej ekstrapolacji metody krok po kroku na przypadek rozgałęzionych obwodów nieliniowych o liczbie indukcyjności nieliniowych nie większej od liczby oczek liniowo niezależnych. Dla rozgałęzionych obwodów nieliniowych, w szczególności o liczbie indukcyjności nieliniowych większej od liczby oczek liniowo niezależnych, zaproponowano nową metodę iteracyjną obliczania przebiegów czasowych. W proponowanej metodzie, korzystając z pojęcia indukcyjności dynamicznej, rezystancji dynamicznej i elastancji dynamicznej, jako wielkości poszukiwane przyjęto skończone wartości przyrostów prądów oczkowych.

Ponadto podano oszacowanie błędu własnego metody.

1. WPROWADZENIE

Jak wiadomo, przebiegi czasowe w rozgałęzionych obwodach nieliniowych opisują nieliniowe równania różniczkowe. Tylko dla stosunkowo wąskiej klasy tych równań można znaleźć dokładne rozwiązanie analityczne. W wielu przypadkach możliwe jest tylko rozwiązanie przybliżone, które jest zadowalająco dokładne tylko w pewnym przedziale pracy obwodu.

Teoretycznie każde równanie różniczkowe nieliniowe można rozwiązać metodami numerycznymi [4]. Rozwiązywanie nieliniowych równań różniczkowych wyższych rzędów (lub odpowiedniego układu nieliniowych równań różniczkowych pierwszego rzędu) wymaga zastosowania cyfrowych maszyn matematycznych. W związku z dynamicznym rozwojem cyfrowych maszyn matematycznych metody numeryczne nabierają coraz to większego znaczenia w różnych dziedzinach techniki, a między innymi i w elektrotechnice teoretycznej.

Do metod numerycznych obliczania obwodów nieliniowych należą między innymi metody iteracyjne: metoda krok po kroku (zwana też metodą kolejnych odcinków czasowych) oraz metoda indukcyjności dynamicznej (zwana też metodą kolejnych odcinków prądowych). Istotę tych

metod objaśnia się z reguły na prostym przykładzie obwodu nieliniowego (dwójnik R, Ψ) [2], [6], nie podając przy tym oszacowania błędu własnego metody.

W niniejszym artykule rozpatrzmy zagadnienie obliczania rozgałęzionych obwodów nieliniowych, tzn. mających przynajmniej dwa oczka liniowo niezależne, przy zastosowaniu metod iteracyjnych.

Przedmiotem rozważań będą rozgałęzione obwody nieliniowe o ciągłych charakterystykach, zawierające, w przypadku ogólnym, obok źródeł energii, rezystancje nieliniowe, indukcyjności nieliniowe i pojemności nieliniowe. Zakładać będziemy, że każda gałąź rozważanych obwodów zawiera obok źródeł energii co najwyżej jedną rezystancję, jedną indukcyjność i jedną pojemność nieliniową. Rozpatrywać będziemy rozgałęzione obwody nieliniowe zawierające przynajmniej jedną indukcyjność nieliniową.

W rozpatrywanych obwodach nieliniowych napięcia źródłowe (SEM -e) oraz prądy źródłowe, w przypadku ogólnym, mogą być w zasadzie dowolnymi, ograniczonymi funkcjami czasu, niekoniecznie danymi za pomocą wyrażenia analitycznego (wzorami), ale na przykład w postaci tabelarycznej lub wykresnej.

W dalszych rozważaniach zakładać będziemy, że dla rozpatrywanych rozgałęzionych obwodów nieliniowych dane są:

1. charakterystyki napięciowo-prądowe $u_{R_\alpha}(i_{R_\alpha})$ rezystancji nieliniowych (lub wartości rezystancji R_α , w przypadku $R_\alpha = \text{const}$), charakterystyki magnesowania rdzeni ferromagnetycznych cewek $\Psi_\alpha(i_\alpha)$ oraz charakterystyki $u_{C_\alpha}(q_\alpha)$ pojemności nieliniowych (lub wartości pojemności C_α , w przypadku $C_\alpha = \text{const}$);
2. napięcia źródłowe $e_\alpha(t)$ i prądy źródłowe $i_{\alpha 0}(t)$ jako funkcje czasu;
3. warunki początkowe dla $t = 0$, tzn. $i_{L_{\alpha 0}}(\Psi_{\alpha 0})$ oraz $u_{C_{\alpha 0}}(q_{\alpha 0})$.

Obliczanie rozgałęzionych obwodów nieliniowych będzie polegać na wyznaczeniu przebiegów czasowych prądów gałęziowych w postaci tablic, odpowiadających sobie wartości zmiennej niezależnej — czasu i zmiennych zależnych — prądów gałęziowych.

Z istoty samej metody indukcyjności dynamicznej wynika, że prosta ekstrapolacja tej metody na przypadek rozgałęzionych obwodów nieliniowych, zawierających więcej niż jedną indukcyjność nieliniową, jest niemożliwa. Jak wiadomo, w metodzie indukcyjności dynamicznej zakładamy wartości skończone przyrostów prądu, a z odpowiedniej zależności wyznaczamy wartości przyrostu czasu. W przypadku rozgałęzionego obwodu nieliniowego, zawierającego więcej niż jedną indukcyjność nieliniową, przy prostej ekstrapolacji metody indukcyjności dynamicznej, należałoby dla przyjętych skończonych przyrostów prądów wyznaczyć z układu równań liniowo niezależnych odpowiednie wartości przyrostu czasu. Tak postawione zagadnienie nie ma jednoznacznego rozwiązania.

W pracy [3] L. Collatz podaje oszacowanie błędu własnego metody łamanych w zastosowaniu do równania różniczkowego pierwszego rzędu.

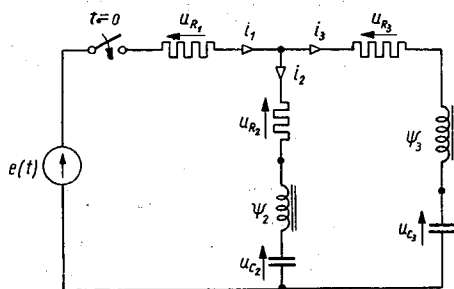
Stosując w pewnym sensie metodę analogiczną podamy oszacowanie błędu własnego metod iteracyjnych obliczania rozgałęzionych obwodów nieliniowych.

Ze względu na konieczność stosowania odrębnej metody obliczania w dalszych rozważaniach wyróżnimy następujące trzy przypadki rozgałęzionych obwodów nieliniowych:

1. obwody o liczbie oczek liniowo niezależnych p równej liczbie indukcyjności nieliniowych $a_L(p = a_L)$,
2. obwody o liczbie oczek liniowo niezależnych p większej od liczby indukcyjności nieliniowych $a_L(p > a_L)$,
3. obwody o liczbie oczek liniowo niezależnych p mniejszej od liczby indukcyjności nieliniowych $a_L(p < a_L)$.

2. ROZGAŁĘZIONE OBWODY NIELINIOWE O LICZBIE OCZEK LINIOWO NIEZALEŻNYCH RÓWNEJ LICZBIE INDUKCYJNOŚCI NIELINIOWYCH

Weźmy pod uwagę obwód nieliniowy, przedstawiony schematycznie na rys. 1, spełniający warunek $p = a_L$.



Rys. 1. Obwód nieliniowy zawierający dwie indukcyjności nieliniowe

Na podstawie pierwszego i drugiego prawa Kirchhoffa możemy napisać dla tego obwodu równania:

$$i_1 = i_2 + i_3, \quad (1)$$

$$\frac{d\Psi_2}{dt} = -u_{R1} - u_{R2} - u_{C2} + e(t), \quad (2)$$

$$\frac{d\Psi_3}{dt} = -u_{R1} - u_{R3} - u_{C3} + e(t). \quad (3)$$

Równania (2) i (3) możemy zapisać w postaci jednego równania macierzowego

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1, & -1, & 0, & -1, & 0 \\ -1, & 0, & -1, & 0, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{R_1} \\ u_{R_2} \\ u_{R_3} \\ u_{C_2} \\ u_{C_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e(t). \quad (4)$$

Prądy i_2 oraz i_3 z ładunkami chwilowymi q_2 i q_3 pojemności nieliniowych związane są zależnościami, które w postaci macierzowej zapisujemy następująco

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Zastępując pochodne strumieni skojarzonych Ψ_2 , Ψ_3 i ładunków q_2 , q_3 odpowiednimi stosunkami przyrostów skończonych oraz stosując wskaźnik k ($k = 0, 1, \dots$) o jeden wyższy dla wielkości szukanej, możemy na podstawie równań macierzowych (4) i (5) napisać

$$\begin{bmatrix} \Psi_{2,k+1} \\ \Psi_{3,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{2,k} \\ \Psi_{3,k} \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} -1, & -1, & 0, & -1, & 0 \\ -1, & 0, & -1, & 0, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{R_1k} \\ u_{R_2k} \\ u_{R_3k} \\ u_{C_2k} \\ u_{C_3k} \end{bmatrix} + \Delta t e(t_k) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$(t_k = k\Delta t),$$

$$\begin{bmatrix} q_{2,k+1} \\ q_{3,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{2,k} \\ q_{3,k} \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} i_{2,k} \\ i_{3,k} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Przebieg obliczeń przy wyznaczaniu przebiegów chwilowych prądów: i_1 , i_2 , i_3 jest następujący.

Znając wartości prądów $i_{2,0}$ oraz $i_{3,0}$ z zależności (1) wyznaczamy wartość prądu $i_{1,0}$. Z charakterystyk napięciowo-prądowych $u_{R_1}(i_1)$, $u_{R_2}(i_2)$, $u_{R_3}(i_3)$ odczytujemy wartości napięć: $u_{R_1,0}$, $u_{R_2,0}$, $u_{R_3,0}$, odpowiadające wartościom prądów: $i_{1,0}$, $i_{2,0}$, $i_{3,0}$. Zakładając wartość przyrostu skończonego czasu Δt z zależności (6) obliczamy $\Psi_{2,1}$ oraz $\Psi_{3,1}$. Z charakterystyk magnesowania $\Psi_2(i_2)$, $\Psi_3(i_3)$ odczytujemy wartości prądów: $i_{2,1}$, $i_{3,1}$, odpowiadające wartościom strumieni: $\Psi_{2,1}$, $\Psi_{3,1}$. Z zależności (1) wyznaczamy wartość prądu $i_{1,1}$. Wartości napięć: $u_{R_1,1}$, $u_{R_2,1}$, $u_{R_3,1}$ odpowiadające wartościom prądów: $i_{1,1}$, $i_{2,1}$, $i_{3,1}$ odczytujemy z odpowiednich charakterystyk napięciowo-prądowych: $u_{R_1}(i_1)$, $u_{R_2}(i_2)$, $u_{R_3}(i_3)$.

Korzystając z zależności (7) obliczamy wartości ładunków: $q_{2,1}$, $q_{3,1}$, a z charakterystyk $u_{C_2}(q_2)$, $u_{C_3}(q_3)$ odczytujemy wartości napięć: $u_{C_2,1}$, $u_{C_3,1}$, odpowiadające tym wartościom ładunków.

Kontynuując ten proces możemy wyznaczyć wartości prądów: i_1, i_2, i_3 dla chwil czasowych: $2\Delta t, 3\Delta t, \dots$ Wyniki obliczeń dla wygody zestawiono w tablicy 1.

Tablica 1

Wskaźnik	Chwila	Strumienie skojarzone		Prądy gałęziowe			Napięcia na rezystancjach			Ładunki		Napięcia na pojemnościach	
k	t	$\Psi_{2,k}$	$\Psi_{3,k}$	$i_{1,k}$	$i_{2,k}$	$i_{3,k}$	$u_{R_1,k}$	$u_{R_2,k}$	$u_{R_3,k}$	$Q_{2,k}$	$Q_{3,k}$	$u_{C_2,k}$	$u_{C_3,k}$
0	$t = 0$	$\Psi_{2,0}$	$\Psi_{3,0}$	$i_{1,0}$	$i_{2,0}$	$i_{3,0}$	$u_{R_1,0}$	$u_{R_2,0}$	$u_{R_3,0}$	$Q_{2,0}$	$Q_{3,0}$	$u_{C_2,0}$	$u_{C_3,0}$
1	$t = \Delta t$	$\Psi_{2,1}$	$\Psi_{3,1}$	$i_{1,1}$	$i_{2,1}$	$i_{3,1}$	$u_{R_1,1}$	$u_{R_2,1}$	$u_{R_3,1}$	$Q_{2,1}$	$Q_{3,1}$	$u_{C_2,1}$	$u_{C_3,1}$
2	$t = 2\Delta t$												
3													

Ogólny przebieg obliczeń będzie taki sam również w przypadku, w którym rezystancje i pojemności są stałe, niezależne od prądów i napięć.

Przechodząc do przypadku ogólnego weźmy pod uwagę rozgałęziony obwód nieliniowy, mający m gałęzi i n węzłów ($p = m - n + 1$), spełniający warunek $p = \alpha_L$.

Niech α_R, α_C będzie odpowiednio liczbą rezystancji nieliniowych i pojemności nieliniowych rozważanego obwodu.

Równania, wypisane dla tego obwodu na podstawie drugiego prawa Kirchhoffa, możemy przedstawić w postaci jednego równania macierzowego

$$\frac{d}{dt} \Psi = A \begin{bmatrix} u_R \\ u_C \end{bmatrix} + F(t), \quad (8)$$

gdzie:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_p \end{bmatrix}, \quad u_R = \begin{bmatrix} u_{R_1} \\ \vdots \\ u_{R_{\alpha_R}} \end{bmatrix}, \quad u_C = \begin{bmatrix} u_{C_1} \\ \vdots \\ u_{C_{\alpha_C}} \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_p(t) \end{bmatrix},$$

A — macierz prostokątna stopnia $p \times (\alpha_R + \alpha_C)$ o elementach: $+1, -1, 0$.

Jeżeli oczka liniowo niezależne wybrać w taki sposób, aby w skład każdego z nich wchodziła tylko jedna gałąź zawierająca indukcyjność nieliniową, to w przypadku ogólnym $A = -[C_t, C_c]$, gdzie C_t jest transponowaną macierzą łączącą prądową.

Zastępując pochodne strumieni skojarzonych: $\Psi_1, \dots, \Psi_p$ odpowiednimi stosunkami przyrostów skończonych oraz stosując wskaźnik k ($k = 0, 1, \dots$)

o jeden wyższy dla wielkości szukanych, możemy na podstawie równania macierzowego (8) napisać

$$\Psi_{k+1} \cong \Psi_k + \Delta t \mathbf{A} \begin{bmatrix} u_{Rk} \\ u_{Ck} \end{bmatrix} + \Delta t \mathbf{F}(t_k), \quad (9)$$

gdzie:

$$\Psi_\beta = \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{1,\beta} \\ \vdots \\ \bar{\Psi}_{p,\beta} \end{bmatrix}, \quad (\beta = k, k+1); \quad \mathbf{u}_{Rk} = \begin{bmatrix} u_{R_1k} \\ \vdots \\ u_{R_{a_R}k} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{Ck} = \begin{bmatrix} u_{C_1k} \\ \vdots \\ u_{C_{a_C}k} \end{bmatrix}.$$

Zależność (9) wypisujemy w sposób mnemotechniczny bezpośrednio na podstawie danego schematu obwodu.

Ponadto korzystać będziemy z zależności

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \Delta t \mathbf{i}_{Ck}, \quad (10)$$

gdzie:

$$\mathbf{q}_\beta = \begin{bmatrix} q_{1,\beta} \\ \vdots \\ q_{a_C,\beta} \end{bmatrix}, \quad (\beta = k, k+1); \quad \mathbf{i}_{Ck} = \begin{bmatrix} \bar{i}_{C_1k} \\ \vdots \\ \bar{i}_{C_{a_C}k} \end{bmatrix}.$$

Napiszmy $n-1$ równań liniowo niezależnych, zestawionych na podstawie pierwszego prawa Kirchhoffa; możemy je przedstawić w postaci

$$\mathbf{i} = \mathbf{B} \mathbf{i}_L + \mathbf{D} \mathbf{i}_z, \quad (11)$$

gdzie:

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \vdots \\ \bar{i}_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}_L = \begin{bmatrix} \bar{i}_{L_1} \\ \vdots \\ \bar{i}_{L_{a_L}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}_z = \begin{bmatrix} \bar{i}_{z_1} \\ \vdots \\ \bar{i}_{z_{n-1}} \end{bmatrix},$$

$\bar{i}_{z_k}$ — prąd źródłowy zasilający k -ty węzeł rozpatrywanego obwodu,

$\mathbf{B}$ — macierz prostokątna stopnia $(n-1) \times a_L$ o elementach: $+1$, -1 , 0 ,

$\mathbf{D}$ — macierz kwadratowa stopnia $n-1$ o elementach: $+1$, -1 , 0 .

Przebieg obliczeń przy wyznaczaniu chwilowych prądów gałęziowych w przypadku ogólnym jest następujący.

Mając dane macierze $\mathbf{i}_{L0}$, $\mathbf{i}_z$ oraz korzystając w miarę potrzeby z zależności (11) wyznaczamy macierz $\mathbf{i}_{R0}$, a z odpowiednich charakterystyk na-

pięciowo-prądowych: $u_{R_1}(i_{R_1}), u_{R_2}(i_{R_2}), \dots, u_{R_{a_R}}(i_{R_{a_R}})$ odczytujemy wartości napięć: $u_{R_1,0}, \dots, u_{R_{a_R},0}$, będące elementami macierzy $\mathbf{u}_{R_0}$. Zakładając wartość Δt , dla znanych macierzy $\mathbf{u}_{R_0}$ oraz $\mathbf{u}_{C_0}$ z zależności (9) dla $k=0$ obliczamy macierz strumieni skojarzonych Ψ_1 .

Dla znanej macierzy $\mathbf{i}_{L_1}$ korzystając z zależności (11) wyznaczamy macierze $\mathbf{i}_{R_1}$ oraz $\mathbf{i}_{C_1}$, a następnie z zależności (10) — macierz $\mathbf{q}_1$. Z odpowiednich charakterystyk odczytujemy wartości napięć: $u_{R_1,1}, \dots, u_{R_{a_R},1}$ oraz $u_{C_1,1}, \dots, u_{C_{a_C},1}$, będące elementami macierzy $\mathbf{u}_{R_1}$ oraz $\mathbf{u}_{C_1}$.

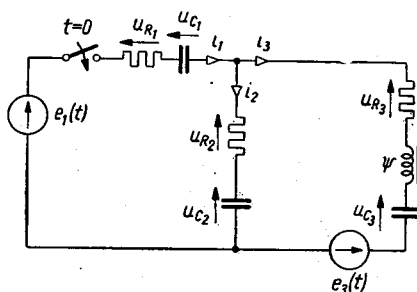
Korzystając z zależności (9) dla $k=1$ obliczamy macierz Ψ_2 , a z charakterystyk magnesowania odczytujemy wartości prądów: $i_{L_1,2}, \dots, i_{L_{a_L},2}$, odpowiadające wartościom strumieni skojarzonych: $\Psi_{1,2}, \dots, \Psi_{p,2}$ itd.

Otrzymane wyniki wygodnie jest zestawić w tablicy.

Podane wyżej rozważania są prawdziwe również w przypadku, w którym niektóre lub nawet wszystkie rezystancje i pojemności są stałe, niezależne od prądów i napięć.

3. ROZGAŁĘZIONE OBWODY NIELINIOWE O LICZBIE OCZEK LINIOWO NIEZALEŻNYCH WIĘKSZEJ OD LICZBY INDUKCYJNOŚCI NIELINIOWYCH

Weźmy pod uwagę obwód nieliniowy, przedstawiony schematycznie na rys. 2, spełniający warunek $p > a_L$.



Rys. 2. Obwód nieliniowy zawierający jedną indukcyjność nieliniową

Korzystając z pierwszego i drugiego prawa Kirchhoffa możemy dla tego obwodu napisać równania:

$$i_1 = i_2 + i_3, \quad (12)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = e_1(t) - e_3(t) - u_{R_1} - u_{C_1} - u_{R_3} - u_{C_3}, \quad (13)$$

$$u_{R_1} + u_{R_2} = e_1(t) - u_{C_1} - u_{C_2}. \quad (14)$$

Postępując zgodnie z ogólnymi zasadami metod iteracyjnych, na podstawie równania (13) możemy napisać

$$\Psi_{k+1} \cong \Psi_k + \Delta t [e_1(t_k) - e_3(t_k) - u_{R_1k} - u_{C_1k} - u_{R_2k} - u_{C_2k}], \quad (15)$$

($t_k = k\Delta t$, $k = 0, 1, \dots$).

Ponadto przy obliczaniu tego obwodu korzystać będziemy z zależności

$$\begin{bmatrix} q_{1,k+1} \\ q_{2,k+1} \\ q_{3,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{1,k} \\ q_{2,k} \\ q_{3,k} \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} i_{1,k} \\ i_{2,k} \\ i_{3,k} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Aby móc obliczyć z zależności (15) (dla $k = 0$) Ψ_1 trzeba znać między innymi wartości napięć na rezystancjach nieliniowych $u_{R_1,0}$, $u_{R_2,0}$. Napięcia te, dla danych warunków początkowych, możemy wyznaczyć na przykład w sposób następujący.

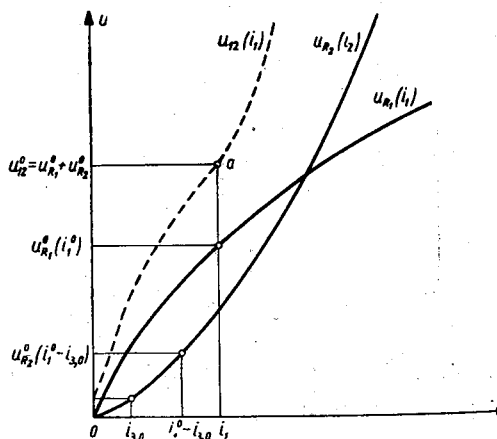
W równaniu (14) dla $t = 0$

$$u_{R_1,0} + u_{R_2,0} = e_1(0) - u_{C_1,0} - u_{C_2,0} \quad (17)$$

dane są: $e_1(0)$, $u_{C_1,0}$, $u_{C_2,0}$, a w równaniu (12)

$$i_{1,0} = i_{2,0} + i_{3,0} \quad (18)$$

znana jest wartość prądu ($i_{3,0} = i_{L,0}$).



Rys. 3. Konstrukcja pomocniczej charakterystyki $u_{12}(i_1)$ na podstawie danych charakterystyk $u_{R_1}(i_1)$ oraz $u_{R_2}(i_2)$

Niech dane charakterystyki napięciowo-prądowe rezystancji nieliniowych $u_{R_1}(i_1)$, $u_{R_2}(i_2)$ mają przykładowo postać przedstawioną na rys. 3. Wyznaczamy pomocniczą charakterystykę napięciowo-prądową $u_{12}(i_1)$ ($u_{12} = u_{R_1} + u_{R_2}$), dodając do siebie napięcia u_{R_1} i u_{R_2} , odpowiadające wartościom prądów i_1 oraz $i_2 = i_1 - i_{3,0}$ (rys. 3-p.a). Odkładając na osi

rzędnych daną wartość napięcia $e_1(0) - u_{C,0} - u_{C,0}$ odczytujemy z charakterystyki $u_{12}(i_1)$ wartość prądu $i_{1,0}$. Z równania (18) wyznaczamy wartość prądu $i_{2,0}$. Następnie z odpowiednich charakterystyk napięciowo-prądowych $u_{R_1}(i_1)$, $u_{R_2}(i_2)$, $u_{R_3}(i_3)$ odczytujemy wartości napięć: $u_{R,0}$, $u_{R,0}$, $u_{R,0}$, odpowiadające wartościom prądów: $i_{1,0}$, $i_{2,0}$, $i_{3,0}$.

Zakładając wartość przyrostu czasu Δt z zależności (15) dla $k = 0$ obliczamy wartość strumienia skojarzonego Ψ_1 . Z charakterystyki magnesowania $\Psi(i_3)$ odczytujemy wartość prądu $i_{3,1}$, odpowiadającą temu strumieniowi skojarzonemu. Wartość napięcia $u_{R,1}$, odpowiadającą prądowi $i_{3,1}$ odczytujemy z charakterystyki napięciowo-prądowej $u_{R_3}(i_3)$. Z zależności (16) dla $k = 0$ obliczamy wartości ładunków: $q_{1,1}$, $q_{2,1}$, $q_{3,1}$, a z charakterystyk $u_{C_1}(q_1)$, $u_{C_2}(q_2)$, $u_{C_3}(q_3)$ odczytujemy wartości napięć: $u_{C,1}$, $u_{C,1}$, $u_{C,1}$, odpowiadające tym ładunkom.

Napięcia na rezystancjach nieliniowych: $u_{R,1}$, $u_{R,1}$ możemy wyznaczyć w ten sam sposób graficzny jak napięcia: $u_{R,0}$, $u_{R,0}$. Jest to jednak sposób pracochłonny. Inny sposób określenia tych napięć wynika bezpośrednio z równań (13) i (14). Przybliżoną wartość napięcia na indukcyjności nieliniowej dla $t = \Delta t$ wyznaczamy z zależności

$$u_{L,1} = \frac{\Psi_1 - \Psi_0}{\Delta t} \quad \left(u_L = \frac{d\Psi}{dt} \cong \frac{\Delta\Psi}{\Delta t} \right).$$

Poszukiwane napięcia $u_{R,1}$, $u_{R,1}$ obliczamy z zależności:

$$\left. \begin{aligned} u_{R,1} &= e_1(t_1) - e_3(t_1) - u_{C,1} - u_{R,1} - u_{C,1} - u_{L,1}, \\ u_{R,1} &= e_1(t_1) - u_{C,1} - u_{C,1} - u_{R,1}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Wyniki obliczeń dla wygody zestawiamy w tablicy 2.

Tablica 2

Wskaźnik	Chwila	Strumień	Prądy gałęziowe			Napięcia na rezystancjach			Ładunki			Napięcia na pojemnościach		
k	t	Ψ_k	$i_{1,k}$	$i_{2,k}$	$i_{3,k}$	$u_{R,1,k}$	$u_{R,2,k}$	$u_{R,3,k}$	$q_{1,k}$	$q_{2,k}$	$q_{3,k}$	$u_{C,1,k}$	$u_{C,2,k}$	$u_{C,3,k}$
0	$t = 0$	Ψ_0	$i_{1,0}$	$i_{2,0}$	$i_{3,0}$	$u_{R,1,0}$	$u_{R,2,0}$	$u_{R,3,0}$	$q_{1,0}$	$q_{2,0}$	$q_{3,0}$	$u_{C,1,0}$	$u_{C,2,0}$	$u_{C,3,0}$
1	$t = \Delta t$	Ψ_1	$i_{1,1}$	$i_{2,1}$	$i_{3,1}$	$u_{R,1,1}$	$u_{R,2,1}$	$u_{R,3,1}$	$q_{1,1}$	$q_{2,1}$	$q_{3,1}$	$u_{C,1,1}$	$u_{C,2,1}$	$u_{C,3,1}$
2	$t = 2\Delta t$													
3														

W przypadku gdy rezystancje rozważanego obwodu są stałe, niezależne od prądów i napięć, obliczanie napięć na rezystancjach jest prostsze.

Przechodząc do przypadku ogólnego bierzemy pod uwagę rozgałęziony obwód nieliniowy o m gałęziach i n węzłach, spełniający warunek $p > a_L$. Zakładamy, że w przypadku ogólnym obok źródła energii każda gałąź rozważanego obwodu zawiera jedną rezystancję nieliniową, jedną pojemność nieliniową oraz ewentualnie jedną indukcyjność nieliniową.

Dla α_L oczek liniowo niezależnych rozpatrywanego obwodu, w skład których wchodzi wszystkie gałęzie z indukcyjnościami nieliniowymi, możemy napisać

$$\Psi_{k+1} \cong \Psi_k + \Delta t \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} u'_{Rk} \\ u'_{Ck} \end{bmatrix} + \Delta t \mathbf{F}_1(t_k), \quad (20)$$

gdzie:

$$\Psi_\beta = \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{1,\beta} \\ \vdots \\ \bar{\Psi}_{\alpha_L,\beta} \end{bmatrix} \quad (\beta = k, k+1), \quad u'_{Rk} = \begin{bmatrix} u_{R1k} \\ \vdots \\ u_{R\alpha_R k} \end{bmatrix}, \quad u'_{Ck} = \begin{bmatrix} u_{C1k} \\ \vdots \\ u_{C\alpha_C k} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_1(t) = \begin{bmatrix} \bar{f}_1(t) \\ \vdots \\ \bar{f}_{\alpha_L}(t) \end{bmatrix},$$

$$t_k = k\Delta t, \quad k = 0, 1, \dots$$

α_L oczek liniowo niezależnych można wybrać w ten sposób, aby w skład każdego z tych oczek wchodziła tylko jedna gałąź zawierająca indukcyjność nieliniową. Przy takim wyborze macierz $\mathbf{A}_1 = -[\mathbf{C}'_t, \mathbf{C}'_i]$, $\mathbf{C}'_i$ jest macierzą powstałą z transponowanej macierzy łączącej prądowej $\mathbf{C}_i$ przez skreślenie w niej wszystkich pozostałych wierszy, z wyjątkiem odpowiadających wybranym α_L oczkom liniowo niezależnym.

Dla pozostałych $p_1 = p - \alpha_L$ oczek liniowo niezależnych, do których należą gałęzie nie zawierające indukcyjności nieliniowych, równania, wypisane na podstawie drugiego prawa Kirchhoffa, przedstawiamy w postaci

$$\mathbf{C}'_i u''_R = \mathbf{C}'_i e_{RC}(t) - \mathbf{C}'_i u''_C, \quad (21)$$

gdzie:

$$u''_R = \begin{bmatrix} u_{R1} \\ \vdots \\ u_{R\alpha''_R} \end{bmatrix}, \quad u''_C = \begin{bmatrix} u_{C1} \\ \vdots \\ u_{C\alpha''_C} \end{bmatrix}, \quad e_{RC}(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ \vdots \\ e_{\alpha_{RC}}(t) \end{bmatrix},$$

$\mathbf{C}'_i$ — macierz zawierająca tylko te wiersze transponowanej macierzy łączącej prądowej $\mathbf{C}_i$, które odpowiadają tylko p_1 oczkom liniowo niezależnym.

Równania (20) i (21) wypisujemy w sposób mnemotechniczny bezpośrednio na podstawie danego schematu obwodu.

W tym przypadku $n-1$ równań liniowo niezależnych, wypisanych na podstawie pierwszego prawa Kirchhoffa, wygodnie jest przedstawić w postaci

$$\mathbf{i} = \mathbf{B}_1 \mathbf{i}_L + \mathbf{B}_2 \mathbf{i}_z + \mathbf{B}_3 \mathbf{i}_R, \quad (22)$$

gdzie:

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}_L = \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ \vdots \\ i_{L_{a_L}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}_z = \begin{bmatrix} i_{z_1} \\ \vdots \\ i_{z_{n-1}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}_R = \begin{bmatrix} i_{R_1} \\ \vdots \\ i_{R_{p_1}} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$ — macierze prostokątne o elementach: $+1, -1, 0$.

Niech

$$\mathbf{C}_t'' \mathbf{u}_R'' = \mathbf{u}_{R_{p_1}}', \quad (23)$$

gdzie

$$\mathbf{u}_{R_{p_1}}' = \begin{bmatrix} u_{R_1}' \\ \vdots \\ u_{R_{p_1}}' \end{bmatrix}.$$

Wartość napięć na rezystancjach nieliniowych dla $t = 0$ wyznaczamy na przykład graficznie w sposób następujący.

Mając dane charakterystyki napięciowo-prądowe rezystancji nieliniowych: $u_{R_1}(i_{R_1}), \dots, u_{R_{a_R}}(i_{R_{a_R}})$ wyznaczamy p_1 pomocniczych charakterystyk napięciowo-prądowych: $u_{R_1}'(i_{R_1}), \dots, u_{R_{p_1}}'(i_{R_{p_1}})$. Charakterystyki te otrzymujemy dodając do siebie, zgodnie z zależnością (23) (dla $t = 0$), napięcia na poszczególnych rezystancjach nieliniowych, odpowiadające prądom gałęziowym spełniającym zależność (22) (dla $t = 0$). Odkładając na osi rzędnych wartości znanych napięć, będących elementami macierzy $\mathbf{C}_t'' \mathbf{e}_{RC}(0) - \mathbf{C}_t'' \mathbf{u}_{C_0}''$ odczytujemy z charakterystyk pomocniczych wartości prądów: $i_{R_{1,0}}, \dots, i_{R_{p_1,0}}$. Korzystając z zależności (22) wyznaczamy pozostałe prądy w gałęziach zawierających rezystancje nieliniowe. Z odpowiednich charakterystyk rezystancji nieliniowych odczytujemy następnie napięcia na tych rezystancjach, będące elementami macierzy $\mathbf{u}_{R_0}''$.

Zakładając wartość przyrostu czasu Δt z zależności (20) dla $k = 0$ obliczamy macierz strumieni skojarzonych Ψ_1 . Z charakterystyk magnesywania odczytujemy następnie wartości prądów: $i_{L_1}, \dots, i_{L_{a_L}}$. Z zależności (10) dla $k = 0$ wyznaczamy macierz ładunków $\mathbf{q}_1$, a z odpowiednich charakterystyk odczytujemy wartości napięć na pojemnościach nieliniowych: $u_{C_1}, \dots, u_{C_{a_1}}$.

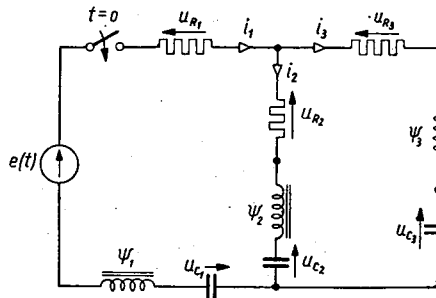
Napięcia na rezystancjach nieliniowych dla $t = \Delta t$ w przypadku ogólnym wyznaczamy graficznie w sposób analogiczny jak dla $t = 0$.

W przypadku gdy liczba rezystancji nieliniowych w rozważanym obwodzie jest nie większa od $p + a_L$ przy wyznaczaniu tych napięć można stosować przybliżony sposób analityczny. Polega on na wyznaczeniu p napięć na rezystancjach nieliniowych z układu p równań liniowo niezależnych, wypisanych na podstawie drugiego prawa Kirchhoffa.

Zagadnienie wyznaczania napięć na rezystancjach upraszcza się w przypadku, gdy rezystancje są stałe, niezależne od prądów i napięć. W tym przypadku wyznaczamy poszukiwane wartości napięć na rezystancjach rozwiązując odpowiedni układ równań, wypisanych na podstawie pierwszego i drugiego prawa Kirchhoffa.

4. ROZGAŁĘZIONE OBWODY NIELINOWE O LICZBIE OCZEK LINOWO NIEZALEŻNYCH MNIEJSZEJ OD LICZBY INDUKCYJNOŚCI NIELINIOWYCH

Weźmy pod uwagę obwód nieliniowy przedstawiony schematycznie na rys. 4, spełniający warunek $p < a_L$.



Rys. 4. Obwód nieliniowy zawierający trzy indukcyjności nieliniowe

Dla tego obwodu na podstawie pierwszego i drugiego prawa Kirchhoffa możemy napisać równania:

$$i_1 = i_2 + i_3, \quad (24)$$

$$\frac{d(\Psi_1 + \Psi_2)}{dt} = -u_{R_1} - u_{R_2} - u_{C_1} - u_{C_2} + e(t), \quad (25)$$

$$\frac{d(\Psi_1 + \Psi_3)}{dt} = -u_{R_1} - u_{R_3} - u_{C_1} - u_{C_3} + e(t). \quad (26)$$

Postępując w sposób analogiczny jak w przypadkach podanych wyżej, możemy wyznaczyć dla $t = \Delta t$ wartości odpowiednich sum strumieni skojarzonych $(\Psi_1 + \Psi_2)_1$ oraz $(\Psi_1 + \Psi_3)_1$. Ze względu na nieliniową zależność między strumieniami i prądami, przy wyznaczaniu prądów: $i_{1,1}$, $i_{2,1}$, $i_{3,1}$ napotykamy na poważne trudności. Trudności te występują przy wyznaczaniu strumieni skojarzonych $\Psi_{1,1}$, $\Psi_{2,1}$, $\Psi_{3,1}$ na podstawie znanych sum tych strumieni $(\Psi_1 + \Psi_2)_1$ oraz $(\Psi_1 + \Psi_3)_1$. Strumienie $\Psi_{1,1}$, $\Psi_{2,1}$, $\Psi_{3,1}$ powinny być takie, aby spełnione były zależności

$$\left. \begin{aligned} (\Psi_1 + \Psi_2)_1 &= \Psi_{1,1} + \Psi_{2,1} \\ (\Psi_1 + \Psi_3)_1 &= \Psi_{1,1} + \Psi_{3,1} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

oraz równanie (24).

Dla wyznaczenia przebiegów czasowych prądów i_1, i_2, i_3 w rozpatrywanym obwodzie nieliniowym proponujemy nową metodę graficzno-analityczną, korzystającą z pojęcia indukcyjności dynamicznej, określonej, jak wiadomo, zależnością $L = \frac{d\Psi}{di}$.

Korzystając z zależności $\frac{d\Psi_\beta}{dt} = \frac{d\Psi_\beta}{di_\beta} \frac{di_\beta}{dt} = L_\beta \frac{di_\beta}{dt}$ ($\beta = 1, 2, 3$) możemy równania (25) i (26) napisać w postaci

$$\left. \begin{aligned} L_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} &= -u_{R_1} - u_{R_3} - u_{C_1} - u_{C_2} + e(t) \\ L_1 \frac{di_1}{dt} + L_3 \frac{di_3}{dt} &= -u_{R_1} - u_{R_3} - u_{C_1} - u_{C_3} + e(t) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Rugując z równań (28) prąd i_1 w wyniku podstawienia zależności (24) otrzymamy

$$\begin{bmatrix} L_1 + L_2 & L_1 \\ L_1 & L_1 + L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di_2}{dt} \\ \frac{di_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_{R_1} & -u_{R_3} \\ -u_{R_1} & -u_{R_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u_{C_1} & -u_{C_2} \\ -u_{C_1} & -u_{C_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (29)$$

Macierz kwadratowa indukcyjności dynamicznych

$$\begin{bmatrix} L_1 + L_2 & L_1 \\ L_1 & L_1 + L_3 \end{bmatrix} \quad (30)$$

jest macierzą nieosobliwą o wyznaczniku większym od zera

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_1 + L_2 & L_1 \\ L_1 & L_1 + L_3 \end{vmatrix} = L_2(L_1 + L_3) + L_1 L_3 > 0. \quad (31)$$

Mnożąc obie strony równania (29) przez macierz odwrotną względem macierzy (30) otrzymamy

$$\begin{bmatrix} \frac{di_2}{dt} \\ \frac{di_3}{dt} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} L_1 + L_3 & -L_1 \\ -L_1 & L_1 + L_2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} -u_{R_1} & -u_{R_3} \\ -u_{R_1} & -u_{R_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u_{C_1} & -u_{C_2} \\ -u_{C_1} & -u_{C_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \right\} \quad (32)$$

Zastępując pochodne stosunkami przyrostów skończonych oraz stosując wskaźnik k ($k = 0, 1, \dots$) o jeden wyższy dla wielkości szukanej, możemy na podstawie równania (32) napisać

$$\begin{bmatrix} i_{2,k+1} \\ i_{3,k+1} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} i_{2,k} \\ i_{3,k} \end{bmatrix} + \frac{\Delta t}{\Delta_k} \begin{bmatrix} L_{1,k} + L_{3,k} & -L_{1,k} \\ -L_{1,k} & L_{1,k} + L_{2,k} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} -u_{R,k} & -u_{R,k} \\ -u_{R,k} & -u_{R,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u_{C,k} & -u_{C,k} \\ -u_{C,k} & -u_{C,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(t_k) \\ e(t_k) \end{bmatrix} \right\} \quad (33)$$

Ponadto korzystać będziemy z zależności

$$\begin{bmatrix} q_{1,k+1} \\ q_{2,k+1} \\ q_{3,k+1} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} q_{1,k} \\ q_{2,k} \\ q_{3,k} \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} i_{C_1k} \\ i_{C_2k} \\ i_{C_3k} \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Przebieg obliczeń w proponowanej metodzie jest następujący.

Znając $i_{1,0}$, $i_{2,0}$, $i_{3,0}$ z charakterystyk napięciowo-prądowych: $u_{R_1}(i_1)$, $u_{R_2}(i_2)$, $u_{R_3}(i_3)$ odczytujemy wartości napięć na rezystancjach nieliniowych: $u_{R_1,0}$, $u_{R_2,0}$, $u_{R_3,0}$, odpowiadające tym prądom.

Mając dane charakterystyki magnesowania wykreślamy odpowiednie zależności (krzywe) indukcyjności dynamicznych w funkcji prądów: $L_1(i_1)$, $L_2(i_2)$, $L_3(i_3)$. Z krzywych tych odczytujemy: $L_{1,0}$, $L_{2,0}$, $L_{3,0}$, odpowiadające prądom: $i_{1,0}$, $i_{2,0}$, $i_{3,0}$.

Zakładając wartość przyrostu czasu Δt z zależności (33) dla $k = 0$ obliczamy prądy: $i_{2,1}$, $i_{3,1}$. Prąd $i_{1,1}$ wyznaczamy z zależności (24). Korzystając natomiast z zależności (34) dla $k = 0$ obliczamy ładunki: $q_{1,1}$, $q_{2,1}$, $q_{3,1}$. Z odpowiednich charakterystyk odczytujemy wartości napięć na rezystancjach nieliniowych: $u_{R_1,1}$, $u_{R_2,1}$, $u_{R_3,1}$ oraz na pojemnościach nieliniowych: $u_{C_1,1}$, $u_{C_2,1}$, $u_{C_3,1}$, a z krzywych $L_1(i_1)$, $L_2(i_2)$, $L_3(i_3)$ wartości indukcyjności dynamicznych: $L_{1,1}$, $L_{2,1}$, $L_{3,1}$.

Kontynuując ten proces możemy wyznaczyć wartości prądów: i_1 , i_2 , i_3 dla chwil czasowych: $2\Delta t$, $3\Delta t$, ...

Wyniki obliczeń dla wygody zestawiono w tablicy 3.

Przechodząc do przypadku ogólnego, bierzemy pod uwagę rozgałęziony obwód nieliniowy, mający m gałęzi i n węzłów, spełniający warunek $\alpha_L > p$.

Oznaczając macierz kolumnową napięć na rezystancjach, indukcyjnościach i pojemnościach nieliniowych odpowiednio przez u_R , u_L , u_C , możemy napisać

$$u = u_R + u_L + u_C, \quad (35)$$

gdzie:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad u_R = \begin{bmatrix} u_{R_1} \\ \vdots \\ u_{R_m} \end{bmatrix}, \quad u_L = \begin{bmatrix} u_L \\ \vdots \\ u_{L_m} \end{bmatrix}, \quad u_C = \begin{bmatrix} u_{C_1} \\ \vdots \\ u_{C_m} \end{bmatrix}.$$

Miedzy macierzą kolumnową prądów gałęziowych i oraz macierzą kolumnową prądów oczkowych i' zachodzi znana zależność

$$i = C i', \quad (36)$$

gdzie C jest macierzą łączącą prądową stopnia $m \times p$.

Tablica 3

Wskaźnik	Chwila	Prądy gałęziowe			Ładunki			Napięcia na rezystancjach			Napięcia na pojemnościach			Indukcyjności dynamiczne		
		$i_{1,k}$	$i_{2,k}$	$i_{3,k}$	$q_{1,k}$	$q_{2,k}$	$q_{3,k}$	$u_{R_1,k}$	$u_{R_2,k}$	$u_{R_3,k}$	$u_{C_1,k}$	$u_{C_2,k}$	$u_{C_3,k}$	$L_{1,k}$	$L_{2,k}$	$L_{3,k}$
0	$t = 0$	$i_{1,0}$	$i_{2,0}$	$i_{3,0}$	$q_{1,0}$	$q_{2,0}$	$q_{3,0}$	$u_{R_1,0}$	$u_{R_2,0}$	$u_{R_3,0}$	$u_{C_1,0}$	$u_{C_2,0}$	$u_{C_3,0}$	$L_{1,0}$	$L_{2,0}$	$L_{3,0}$
1	$t = \Delta t$	$i_{1,1}$	$i_{2,1}$	$i_{3,1}$	$q_{1,1}$	$q_{2,1}$	$q_{3,1}$	$u_{R_1,1}$	$u_{R_2,1}$	$u_{R_3,1}$	$u_{C_1,1}$	$u_{C_2,1}$	$u_{C_3,1}$	$L_{1,1}$	$L_{2,1}$	$L_{3,1}$
2	$t = 2\Delta t$															
3																

Z drugiego prawa Kirchhoffa wynika zależność

$$\mathbf{e}' = \mathbf{C}_t \mathbf{u}, \quad (37)$$

gdzie:

$\mathbf{e}'$ — macierz kolumnowa oczkowych napięć źródłowych,

t — oznacza działanie transpozycji.

Ponadto mamy

$$\mathbf{u}_L = \mathbf{L} \frac{d}{dt} \mathbf{i}, \quad (38)$$

gdzie:

$\mathbf{L}$ — macierz diagonalna stopnia m indukcyjności dynamicznych.

Mnożąc lewostronnie obie strony równania (35) przez $\mathbf{C}_t$ oraz korzystając z zależności (37) otrzymamy

$$\mathbf{C}_t \mathbf{u}_L = \mathbf{e}' - \mathbf{C}_t \mathbf{u}_R - \mathbf{C}_t \mathbf{u}_C. \quad (39)$$

Po podstawieniu zależności (38) i (36) równanie (39) przyjmie postać

$$\mathbf{C}_t \mathbf{L} \mathbf{C} \frac{d}{dt} \mathbf{i}' = \mathbf{e}' - \mathbf{C}_t \mathbf{u}_R - \mathbf{C}_t \mathbf{u}_C. \quad (40)$$

Po wprowadzeniu upraszczających oznaczeń:

$$\mathbf{L}' = \mathbf{C}_t \mathbf{L} \mathbf{C}, \quad \mathbf{u}_R' = \mathbf{C}_t \mathbf{u}_R, \quad \mathbf{u}_C' = \mathbf{C}_t \mathbf{u}_C,$$

równanie (40) będzie miało postać

$$\mathbf{L}' \frac{d}{dt} \mathbf{i}' = \mathbf{e}' - \mathbf{u}_R' - \mathbf{u}_C'. \quad (41)$$

Macierz $\mathbf{L}'$ jest macierzą symetryczną ($\mathbf{L}' = \mathbf{C}_t \mathbf{L} \mathbf{C} = \mathbf{L}'$). Dla rozgałęzionych obwodów nieliniowych o liczbie indukcyjności nieliniowych nie mniejszej od liczby oczek liniowo niezależnych, macierz $\mathbf{L}'$ jest macierzą nieosobliwą o wyznaczniku większym od zera. Stosując metodę analogiczną do podanej w pracy [5] można wykazać, że forma kwadratowa $\mathbf{i}'^T \mathbf{L}' \mathbf{i}'$, przedstawiająca energię pola magnetycznego cewek, jest formą dodatnią określoną, tzn. że dla dowolnego niezerowego wektora prądów oczkowych $\mathbf{i}'$ forma ta przyjmuje wartości dodatnie.

W przypadku, gdy $\det \mathbf{L}' \neq 0$, z zależności (41) otrzymamy

$$\frac{d}{dt} \mathbf{i}' = \mathbf{L}'^{-1} [\mathbf{e}' - \mathbf{u}_R' - \mathbf{u}_C']. \quad (42)$$

Postępując zgodnie z ogólną zasadą metod iteracyjnych w oparciu o zależność (42) możemy napisać

$$\mathbf{i}'_{k+1} = \mathbf{i}'_k + \Delta t \mathbf{L}'^{-1} [\mathbf{e}'_k - \mathbf{u}'_{Rk} - \mathbf{u}'_{Ck}], \quad (43)$$

gdzie:

$$\mathbf{i}'_{\beta} = \begin{bmatrix} i'_{1,\beta} \\ \vdots \\ i'_{p,\beta} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}'_k = \mathbf{e}'(t_k), \quad \mathbf{u}'_{Rk} = \begin{bmatrix} u'_{R1,k} \\ \vdots \\ u'_{Rp,k} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}'_{Ck} = \begin{bmatrix} u'_{C1,k} \\ \vdots \\ u'_{Cp,k} \end{bmatrix},$$

($\beta = k, k+1, t_k = k\Delta t, k = 0, 1, \dots$).

Przebieg obliczeń w przypadku ogólnym w proponowanej metodzie jest następujący.

Mając daną macierz prądów w indukcyjnościach nieliniowych dla $t = 0$ $\mathbf{i}_{L0}$ z zależności (11) wyznaczamy prądy w gałęziach nie zawierających indukcyjności nieliniowych. Z odpowiednich charakterystyk napięciowo-prądowych odczytujemy napięcia, będące elementami macierzy $\mathbf{u}'_{R0}$. Na podstawie danych charakterystyk magnesowania wykreślamy krzywe: $L_1(i_{L1}), \dots, L_{\alpha_L}(i_{L\alpha_L})$. Z krzywych tych odczytujemy wartości indukcyjności dynamicznych: $L_1, \dots, L_{\alpha_L}$ odpowiadające prądom: $i_{L1}, \dots, i_{L\alpha_L}$. Zakładając wartość przyrostu czasu Δt z zależności (43) dla $k = 0$ obliczamy macierz prądów oczkowych $\mathbf{i}'_1$. Macierz prądów gałęziowych $\mathbf{i}_1$ wyznaczamy z zależności (36).

Mając daną macierz kolumnową prądów w pojemnościach nieliniowych dla $t = 0$ $\mathbf{i}'_{C0}$ z zależności (10) dla $k = 0$ wyznaczamy macierz kolumnową ładunków $\mathbf{q}_1$, a z odpowiednich charakterystyk odczytujemy elementy macierzy $\mathbf{u}'_{C1}$.

Kontynuując ten proces możemy wyznaczyć wartości wszystkich prądów gałęziowych dla $t = 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$

Proponowaną metodę można ekstrapolować na przypadek rozgałęzionych obwodów nieliniowych o liczbie oczek liniowo niezależnych p większej od liczby indukcyjności nieliniowych ($p > \alpha_L$).

W rozważanym obwodzie wybieramy w taki sposób α_L oczek liniowo niezależnych, aby w skład każdego z nich wchodziła gałąź zawierająca indukcyjność nieliniową. Dla tych oczek możemy napisać równanie o postaci analogicznej jak (41), tj.

$$\mathbf{L}_d \frac{d}{dt} \mathbf{i}'_L = \mathbf{e}'_L - \mathbf{u}'_R - \mathbf{u}'_C. \quad (44)$$

gdzie:

$\mathbf{L}_d$ — macierz diagonalna stopnia α_L indukcyjności dynamicznych,

$\mathbf{i}'_L, \mathbf{e}'_L$ — macierze odpowiednio prądów oczkowych i napięć oczkowych źródłowych dla oczek zawierających indukcyjności,

$\mathbf{u}'_R, \mathbf{u}'_C$ — macierze oczkowych napięć odpowiednio na rezystancjach i kondensatorach dla oczek zawierających indukcyjności.

Dla pozostałych $p_1 = p - a_L$ oczek liniowo niezależnych, do których należą gałęzie nie zawierające indukcyjności, słuszne jest równanie (21). Różniczkując obie strony tego równania względem czasu otrzymamy

$$C_i'' \frac{d}{dt} u_R'' = C_i'' \frac{d}{dt} e_{RC}(t) - C_i'' \frac{d}{dt} u_C''. \quad (45)$$

W dalszych rozważaniach będziemy korzystać z pojęcia rezystancji dynamicznej i pojęcia elastancji dynamicznej, określonych odpowiednio relacjami

$$R = \frac{du}{di}, \quad S = \frac{du}{dq}.$$

Korzystając z zależności $\frac{du_\beta}{dt} = \frac{du_\beta}{di_\beta} \frac{di_\beta}{dt} = R_\beta \frac{di_\beta}{dt}$, $\frac{du_\beta}{dt} = \frac{du_\beta}{dq_\beta} \frac{dq_\beta}{dt} = S_\beta i_\beta$ oraz równości $i_{RC} = C'' i_{RC}'$ możemy równanie (45) napisać w postaci

$$R'' \frac{d}{dt} i_{RC}' = \frac{d}{dt} e_{RC}'(t) - S'' i_{RC}', \quad (46)$$

gdzie:

$$R'' = C_i' R C_i'', \quad S'' = C_i' S C_i'', \quad e_{RC}'(t) = C_i' e_{RC}(t);$$

R, S — macierze diagonalne odpowiednio rezystancji i elastancji dynamicznych.

Macierze symetryczne R'', S'' oraz macierz kolumnową $e_{RC}'(t)$ wypisujemy w sposób mnemotechniczny bezpośrednio na podstawie danego schematu obwodu elektrycznego.

Biorąc pod uwagę, że

$$i' = \begin{bmatrix} i_L' \\ i_{RC}' \end{bmatrix},$$

równania (44) i (46) możemy zapisać łącznie w sposób następujący

$$\begin{bmatrix} L_d \\ R'' \end{bmatrix} \frac{d}{dt} i' = \begin{bmatrix} e_L' - u_R' - u_C' \\ \frac{d}{dt} e_{RC}'(t) - S'' i_{RC}' \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Stosując sposób podany w pracy [5] łatwo wykazać, że macierz kwadratowa stopnia p

$$\begin{bmatrix} L_d \\ R'' \end{bmatrix}$$

dla rozgałęzionych obwodów nieliniowych o a_L indukcyjnościach, w których gałęzie należące do p_1 oczek liniowo niezależnych, zawierają przy-

najmniej p_1 rezystancji dynamicznych dodatnich, jest macierzą nieosobliwą. W przypadku tym, gdy

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{L}_d \\ \mathbf{R}'' \end{bmatrix} \neq 0.$$

z zależności (47) otrzymamy

$$\mathbf{i}'_{k+1} = \mathbf{i}'_k + \Delta t \begin{bmatrix} \mathbf{L}_d \\ \mathbf{R}'' \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{e}'_L - \mathbf{u}'_R - \mathbf{u}'_C \\ \frac{d}{dt} \mathbf{e}'_{RC}(t) - \mathbf{S}'' \mathbf{i}'_{RC} \end{bmatrix}, \quad (48)$$

($k = 0, 1, \dots$).

Przebieg obliczeń w tym przypadku, ogólnie rzecz biorąc, jest podobny do podanego wyżej dla $\alpha_L > p$. W ostatnim przypadku ($p > \alpha_L$) zachodzi potrzeba wyznaczenia dodatkowo na podstawie danych charakterystyk $u_{C_a}(q_a)$ krzywych elastancji dynamicznych.

W przypadku, w którym napięcia źródłowe dane są w postaci wykresów (lub tabelarycznej), elementy macierzy $\frac{d}{dt} \mathbf{e}'_{RC}(t_k)$ wyznaczamy w sposób przybliżony stosując różniczkowanie graficzne.

5. OSZACOWANIE BŁĘDU WŁASNEGO METODY

Równania macierzowe (8), (42), (47), stanowiące punkt wyjścia dla metod obliczania wartości poszukiwanych wielkości, w postaci skróconej można zapisać następująco

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (49)$$

gdzie

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n_0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, t) \\ \vdots \\ f_{n_0}(\mathbf{x}, t) \end{bmatrix}.$$

Całkując zależność (49) w granicach od t_k do t_{k+1} otrzymamy

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) dt. \quad (50)$$

Wprowadzamy macierze błędów wartości przybliżonych

$$\boldsymbol{\epsilon}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}(t_k) \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (51)$$

oraz macierze przyrostów błędów po jednym kroku

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}_k = \boldsymbol{\epsilon}_{k+1} - \boldsymbol{\epsilon}_k \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (52)$$

Biorąc pod uwagę zależności (51) i (50) możemy napisać

$$\Delta \epsilon_k = x_{k+1} - x_k - \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x, t) dt. \quad (53)$$

Korzystając z wprowadzonych wyżej oznaczeń, zależności (9), (43) i (48) możemy zapisać w postaci

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t f_k. \quad (54)$$

Z zależności (53) i (54) mamy

$$\Delta \epsilon_k = \Delta t \{f_k - f[x(t_k), t_k]\} + \Delta t f[x(t_k), t_k] - \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x, t) dt. \quad (55)$$

Zakładamy, że spełniony jest warunek Lipschitza, tzn.

$$|f_k - f[x(t_k), t_k]| \leq K |x_k - x(t_k)| = K |\epsilon_k|, \quad (56)$$

gdzie: K — odpowiednio dobrana liczba dodatnia; $|\epsilon_k|$ — macierz kolumnowa o elementach równych odpowiednim wartościom bezwzględnym elementów macierzy ϵ_k .

Całkując przez części łatwo wykazać prawdziwość równości

$$\Delta t f[x(t_k), t_k] - \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x, t) dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t - t_{k+1}) \frac{df(x, t)}{dt} dt. \quad (57)$$

Dla zależności (57) mamy oszacowanie

$$\begin{aligned} \left| \Delta t f[x(t_k), t_k] - \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x, t) dt \right| &= \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t - t_{k+1}) \frac{df(x, t)}{dt} dt \right| \leq \\ &\leq N \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - t) dt = \frac{1}{2} \Delta t^2 N, \end{aligned} \quad (58)$$

gdzie

$$N \geq \left| \frac{df(x, t)}{dt} \right|; \quad t \in [t_k, t_{k+1}]. \quad (59)$$

Biorąc pod uwagę oszacowania (56) i (58) z zależności (55) otrzymamy

$$|\Delta \epsilon_k| = |\epsilon_{k+1} - \epsilon_k| \leq K \Delta t |\epsilon_k| + \frac{1}{2} \Delta t^2 N. \quad (60)$$

Ale

$$|\epsilon_{k+1} - \epsilon_k| \geq |\epsilon_{k+1}| - |\epsilon_k|, \quad (61)$$

zatem

$$|\epsilon_{k+1}| \leq (1 + K\Delta t)|\epsilon_k| + \frac{1}{2}\Delta t^2 N \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (62)$$

Zależność (62) pozwala określić macierz wartości bezwzględnych błędów wartości przybliżonych $|\epsilon_{k+1}|$, jeżeli znana jest macierz $|\epsilon_k|$.

Oznaczmy

$$\left. \begin{aligned} a &= 1 + K\Delta t, \\ b &= \frac{1}{2}\Delta t^2, \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

przy czym $a > 1$, $b > 0$.

Wówczas.

$$|\epsilon_{k+1}| \leq a|\epsilon_k| + bN \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (64)$$

Oznaczmy przez $\mathbf{O}_1$ macierz kolumnową o elementach zerowych.

Biorąc pod uwagę, że $\epsilon_0 = \mathbf{O}_1$, z zależności (64) dla $k = 0, 1, \dots$ otrzymamy:

$$\begin{aligned} |\epsilon_1| &\leq bN, \\ |\epsilon_2| &\leq a|\epsilon_1| + bN = Nb(1 + a), \\ &\dots\dots\dots \\ |\epsilon_k| &\leq Nb(1 + a + a^2 + \dots + a^{k-1}) = Nb \frac{a^k - 1}{a - 1}. \end{aligned} \quad (65)$$

Wstawiając do zależności (65) za a i b ich wartości dane relacjami (63) otrzymamy

$$|\epsilon_k| \leq N \frac{\Delta t}{2K} [(1 + K\Delta t)^k - 1] \quad (66)$$

lub po uwzględnieniu, że $e^u > 1 + u$, dla $u > 0$, oraz $k\Delta t = t_k$

$$|\epsilon_k| \leq N \frac{\Delta t}{2K} (e^{Kt_k} - 1). \quad (67)$$

Z zależności (66) i (67) wynika, że:

1. dla $t \rightarrow 0$, $|\epsilon_k| \rightarrow \mathbf{O}_1$,
2. $|\epsilon_k|$ zależy liniowo od N ,
3. elementy $|\epsilon_k|$ rosną ze wzrostem stałej K .

Na podstawie definicji macierzy N [zależność (59)] i stałej K stwierdzamy, że elementy macierzy $|\epsilon_k|$ będą duże dla funkcji $f_\beta(\mathbf{x}, t)$ ($\beta = 1, \dots, n_0$) zmieniających się szybko w zależności od t i $\mathbf{x}$.

Podzielmy rozpatrywany przedział czasu $0 - t_{k_{m_0}}$ na m_0 przedziałów: $0 - t_{k_1}$, $t_{k_1} - t_{k_2}$, ..., $t_{k_{m_0-1}} - t_{k_{m_0}}$. Załóżmy, że w poszczególnych tych przedziałach czasu przeprowadzono obliczenia metodą krok po kroku przyj-

mując odpowiednio: $\Delta t = \Delta t_1, \dots, \Delta t = \Delta t_{m_0}$ ($t_{k_\alpha} - t_{k_{\alpha-1}} = (k_\alpha - k_{\alpha-1}) \Delta t_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, m_0$).

Niech K_α oraz N_α jest stałą Lipschitza oraz macierzą kolumnową, spełniającą warunek (59) dla przedziału czasu $t_{k_{\alpha-1}} - t_{k_\alpha}$.

Oznaczmy

$$\left. \begin{aligned} a_\alpha &= 1 + K_\alpha \Delta t_\alpha, \\ b_\alpha &= \frac{1}{2} \Delta t_\alpha^2, \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

dla $\alpha = 1, \dots, m_0$.

Z zależności (64) mamy

$$|\epsilon_{k_{\alpha+1}}| \leq a_{\alpha+1} |\epsilon_{k_\alpha}| + b_{\alpha+1} N_{\alpha+1},$$

$$|\epsilon_{k_{\alpha+2}}| \leq a_{\alpha+1}^2 |\epsilon_{k_\alpha}| + b_{\alpha+1} N_{\alpha+1} (1 + a_{\alpha+1}),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\begin{aligned} |\epsilon_{k_{\alpha+1}}| &\leq a_{\alpha+1}^{k_{\alpha+1}-k_\alpha} |\epsilon_{k_\alpha}| + b_{\alpha+1} N_{\alpha+1} (1 + a_{\alpha+1} + \dots + a_{\alpha+1}^{k_{\alpha+1}-k_\alpha-1}) = \\ &= a_{\alpha+1}^{k_{\alpha+1}-k_\alpha} |\epsilon_{k_\alpha}| + b_{\alpha+1} N_{\alpha+1} \frac{a_{\alpha+1}^{k_{\alpha+1}-k_\alpha} - 1}{a_{\alpha+1} - 1}. \end{aligned} \quad (69)$$

Wstawiając do zależności (69) za $a_{\alpha+1}$ i $b_{\alpha+1}$ ich wartości dane równościami (68) otrzymamy

$$|\epsilon_{k_{\alpha+1}}| \leq (1 + K_{\alpha+1} \Delta t_{\alpha+1})^{k_{\alpha+1}-k_\alpha} |\epsilon_{k_\alpha}| + N_{\alpha+1} \frac{\Delta t_{\alpha+1}}{2K_{\alpha+1}} [(1 + K_{\alpha+1} \Delta t_{\alpha+1})^{k_{\alpha+1}-k_\alpha} - 1] \quad (70)$$

lub po uwzględnieniu, że $e^u > 1 + u$ dla $u > 0$ oraz $t_{k_{\alpha+1}} = t_k + (k_{\alpha+1} - k_\alpha) \Delta t_{\alpha+1}$

$$|\epsilon_{k_{\alpha+1}}| \leq e^{K_{\alpha+1}(t_{k_{\alpha+1}} - t_{k_\alpha})} |\epsilon_{k_\alpha}| + N_{\alpha+1} \frac{\Delta t_{\alpha+1}}{2K_{\alpha+1}} (e^{K_{\alpha+1}(t_{k_{\alpha+1}} - t_{k_\alpha})} - 1) \quad (71)$$

dla $\alpha + 1 = 1, \dots, m_0 - 1$.

Niech $N_{\alpha\beta}$ będzie elementem macierzy kolumnowej N_α znajdującym w β wierszu ($\beta = 1, \dots, n_0$). Z warunku (59) mamy

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta} &\geq \left| \frac{\partial f_\beta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right| = \left| \frac{\partial f_\beta(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial f_\beta(\mathbf{x}, t)}{\partial x_{n_0}} \frac{\partial x_{n_0}}{\partial t} + \frac{\partial f_\beta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right| \leq \\ &\leq \left| f_j(\mathbf{x}, t) \right| \left| \frac{\partial f_\beta(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} \right| + \dots + |f_{n_0}(\mathbf{x}, t)| \left| \frac{\partial f_\beta(\mathbf{x}, t)}{\partial x_{n_0}} \right| + \left| \frac{\partial f_\beta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right|. \end{aligned} \quad (72)$$

W przypadku, w którym funkcje $f_\beta(\mathbf{x}, t)$ nie są dane za pomocą wyrażenia analitycznego, pochodne cząstkowe tych funkcji w zależności (72) zastępujemy stosunkami odpowiednich różnic skończonych.

Oszacowanie niezależne (67) błędu własnego metody krok po kroku daje oszacowanie z dużym zapasem, tzn., że w rzeczywistości różnica między wartościami rzeczywistymi i wartościami przybliżonymi jest w przypadku ogólnym znacznie mniejsza od wynikającej ze wzoru (67).

W przypadku, w którym w poszczególnych przedziałach stosujemy różne przyrosty Δt , otrzymamy przy oszacowaniu przedziałami (71) [(70)] oszacowanie lepsze od oszacowania niezależnego (67) [(66)]. Najniższe wartości na elementy macierzy $|\epsilon_k|$ otrzymamy przy oszacowaniu indukcyjnym (64) dla poszczególnych przyrostów czasu Δt .

6. O STOSOWALNOŚCI INNYCH METOD GRAFICZNO-ANALITYCZNYCH I MATEMATYCZNYCH MASZYN CYFROWYCH PRZY OBLICZANIU ROZGAŁĘŻONYCH OBWODÓW NIELINIOWYCH

Obok podanej wyżej metody krok po kroku, znanej w matematyce jako metoda łamanych, można przy obliczaniu rozgałęzionych obwodów nieliniowych stosować między innymi ulepszoną metodę łamanych, ulepszoną metodę Eulera-Cauchy'ego, metodę różnic wstecznych Adamsa, metodę Rungego-Kutty oraz inne metody, będące modyfikacjami tych metod [3], [4], [8].

Stosując metodę analogiczną do podanej wyżej, można wyprowadzić wzory na oszacowanie błędu dla ulepszonej metody łamanych oraz ulepszonej metody Eulera-Cauchy'ego. Również dla metody różnic wstecznych Adamsa można podać oszacowanie błędu własnego metody.

Przyrosty wielkości poszukiwanych w metodzie krok po kroku, ulepszonej metodzie łamanych, ulepszonej metodzie Eulera-Cauchy'ego, można również wyznaczyć sposobem graficznym. Sposób graficzny stosujemy zwykle przy wstępnym, przybliżonym wyznaczaniu rozwiązania, mającym na celu zorientowanie się w charakterze zmienności poszukiwanych krzywych całkowych. Znajomość charakteru zmienności krzywych całkowych pozwala wybrać w sposób racjonalny wartości przyrostów Δt dla poszczególnych przedziałów czasu przy dokładniejszym wyznaczaniu rozwiązania jedną z podanych wyżej metod numerycznych.

Wyznaczenie przebiegów czasowych prądów i napięć nawet w obwodzie nieliniowym o dwóch oczkach liniowo niezależnych, przy założeniu dużej dokładności rozwiązania wymaga znacznego nakładu pracy na przeprowadzenie obliczeń numerycznych.

Obliczanie rozgałęzionych obwodów nieliniowych o większej liczbie oczek liniowo niezależnych niż dwa, przy założeniu stosunkowo wysokiej dokładności rozwiązania, wymaga zastosowania matematycznych maszyn cyfrowych.

Programowanie dla matematycznych maszyn cyfrowych w podanej wyżej metodzie jest proste.

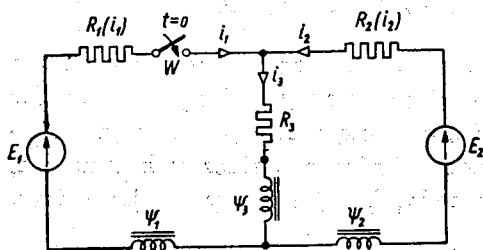
Jeżeli chodzi o obliczenie przebiegów czasowych poszukiwanych wielkości z dokładnością do kilku procent, to nawet dla obwodów nielinio-

wych o kilku oczkach liniowo niezależnych, można obliczenia przeprowadzić przy użyciu suwaka logarytmicznego. W takich przypadkach wystarczy z reguły podzielić rozpatrywany przedział czasu na od 20 do 40 przyrostów Δt .

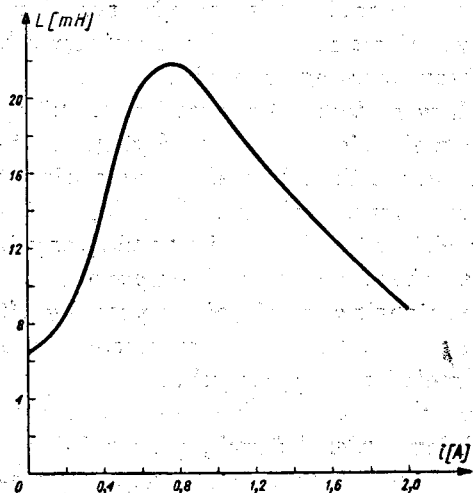
W wielu przypadkach jest celowe w trakcie obliczeń zakładać takie przyrosty czasu Δt , aby przyrosty poszukiwanych wielkości były w całym rozpatrywanym przedziale czasu w przybliżeniu stałe.

7. PRZYKŁAD

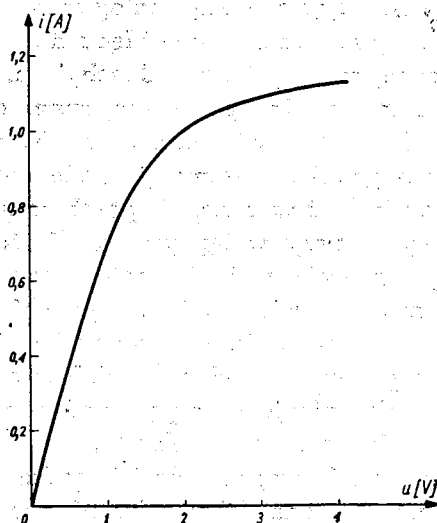
W obwodzie (rys. 5), zawierającym obok idealnych źródeł napięcia dwie jednakowe rezystancje nieliniowe, trzy jednakowe indukcyjności



Rys. 5. Schemat rozgałęzionego obwodu nieliniowego — ilustracja przykładu liczbowego



Rys. 6.



Rys. 7.

nieliniowe oraz jedną rezystancję stałą, w chwili $t = 0$ zostaje zamknięty wyłącznik W. Mając dane:

1. krzywą indukcyjności dynamicznych (rys. 6),
2. charakterystykę prądowo-napięciową rezystancji nieliniowych (rys. 7) oraz wartość rezystancji $R_3 = 8 \Omega$,
3. wartości stałych napięć źródłowych: $E_1 = 11,2 \text{ V}$, $E_2 = 10 \text{ V}$, wyznaczyć przebiegi chwilowe prądów: i_1 , i_2 , i_3 w stanie nieustalonym,

przy założeniu, że przed zamknięciem wyłącznika obwód znajdował się w stanie ustalonym.

Biorąc za punkt wyjścia równania napisane na podstawie pierwszego i drugiego prawa Kirchhoffa:

$$i_1 + i_2 = i_3, \quad (73)$$

$$\left[\begin{array}{c} \frac{d(\Psi_1 + \Psi_3)}{dt} \\ \frac{d(\Psi_2 + \Psi_3)}{dt} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} E_1 - u_{R_1} - u_{R_3} \\ E_2 - u_{R_2} - u_{R_3} \end{array} \right], \quad (74)$$

Tabela 4

Wskaźnik k	Chwila t_k msek	Prądy gałęziowe			Napięcia na rezystancjach			Indukcyjności dynamiczne		
		$i_{1,k}$ 10^{-1} A	$i_{2,k}$ 10^{-1} A	$i_{3,k}$ A	$u_{R_1,k}$ V	$u_{R_2,k}$ V	$u_{R_3,k}$ V	$L_{1,k}$ mH	$L_{2,k}$ mH	$L_{3,k}$ mH
0	0	0	10,00	1,000	0	2,00	8,00	6,45	19,4	19,4
1	0,3	0,595	9,702	1,0297	0,06	1,90	8,24	6,80	19,8	19,0
2	0,6	1,134	9,426	1,0560	0,16	1,76	8,44	7,20	20,2	18,7
3	0,9	1,615	9,181	1,0796	0,22	1,65	8,63	7,80	20,6	18,4
4	1,2	2,040	8,959	1,0999	0,27	1,56	8,89	8,60	20,9	18,1
5	1,5	2,409	8,753	1,1162	0,32	1,48	8,94	9,20	21,1	17,9
6	1,8	2,748	8,566	1,1314	0,36	1,40	9,05	9,90	21,3	17,7
7	2,1	3,05,4	8,393	1,1447	0,40	1,34	9,16	10,7	21,5	17,4
8	2,4	3,329	8,231	1,1560	0,43	1,31	9,25	11,6	21,6	17,2
9	2,7	3,579	8,076	1,1655	0,45	1,26	9,32	12,4	21,65	17,1
10	3,0	3,810	7,929	1,1739	0,48	1,21	9,39	13,4	21,7	17,05
11	3,3	4,018	7,791	1,1809	0,51	1,17	9,45	14,3	21,75	17,0
12	3,6	4,208	7,660	1,1868	0,54	1,15	9,49	15,2	21,8	16,95
13	4,2	4,560	7,408	1,1968	0,58	1,10	9,57	16,4	21,8	16,90
14	4,8	4,870	7,169	1,2039	0,63	1,02	9,64	17,6	21,8	16,8
15	5,4	5,140	6,949	1,2089	0,68	0,98	9,67	18,6	21,6	16,7
16	6,0	5,382	6,741	1,2123	0,72	0,95	9,70	19,3	21,4	16,6
17	6,6	5,604	6,540	1,2144	0,76	0,92	9,72	19,9	21,2	16,6
18	7,2	5,809	6,347	1,2156	0,79	0,88	9,725	20,2	21,0	16,6
19	7,8	6,003	6,165	1,2168	0,82	0,84	9,73	20,5	20,8	16,6
20	8,4	6,186	5,990	1,2178	0,85	0,82	9,735	20,8	20,5	16,6
21	9,4	6,470	5,717	1,2189	0,90	0,77	9,74	21,2	20,0	16,6
22	10,4	6,734	5,461	1,2197	0,95	0,72	9,75	21,4	19,4	16,6
23	11,4	6,972	5,224	1,2198	1,00	0,68	9,75	21,7	18,8	16,6
24	12,4	7,186	5,007	1,2195	1,04	0,65	9,75	21,8	18,4	16,6
25	13,4	7,386	4,799	1,2184	1,08	0,62	9,74	21,8	17,5	16,6
26	15,4	7,753	4,379	1,2131	1,18	0,56	9,72	21,7	15,8	16,6
27	17,4	8,051	4,054	1,2105	1,25	0,51	9,68	21,6	14,5	16,7
28	19,4	8,302	3,800	1,2102	1,33	0,49	9,68	21,4	13,4	16,7
29	21,4	8,500	3,577	1,2077	1,40	0,45	9,66	21,2	12,4	16,8
30	23,4	8,644	3,419	1,2063	1,47	0,42	9,65	21,0	12,0	16,8
31	29,4	8,904	3,122	1,2026	1,56	0,41	9,62			

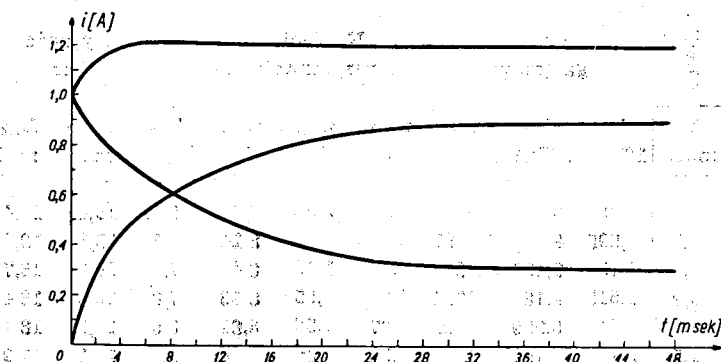
oraz wprowadzając pojęcie indukcyjności dynamicznych $L_\beta = \frac{d\Psi_\beta}{di_\beta}$ ($\beta = 1, 2, 3$) dochodzimy do równania macierzowego

$$\begin{bmatrix} i_{1,k+1} \\ i_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{1,k} \\ i_{2,k} \end{bmatrix} + \frac{\Delta t}{\Delta_k} \begin{bmatrix} L_{2,k} + L_{3,k} & -L_{3,k} \\ -L_{3,k} & L_{1,k} + L_{3,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{1,k} - u_{R1k} - u_{R3k} \\ E_{2,k} - u_{R2k} - u_{R3k} \end{bmatrix}, \quad (75)$$

gdzie

$$\Delta_k = L_{1,k}(L_{2,k} + L_{3,k}) + L_{2,k}L_{3,k}.$$

Wyniki obliczeń przeprowadzonych przy użyciu suwaka logarytmicznego w oparciu o zależność (75) zestawiono w tabelicy 4.



Rys. 8.

Na podstawie otrzymanych wyników wykreślono krzywe prądów: $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$ (rys. 8).

Wartości prądów i_1 , i_2 , i_3 w stanie ustalonym wyznaczamy jedną ze znanych metod, na przykład wykreślną. Dla $t = 0$ mamy $i_1(0) = i_{1,0} = 0$, $i_2(0) = i_{2,0} = 1\text{ A}$, $i_3(0) = i_{3,0} = 1\text{ A}$. W stanie ustalonym, który teoretycznie zostanie osiągnięty po czasie $t = \infty$, prądy gałęziowe będą miały wartości: $i_{1u} = 0,9\text{ A}$, $i_{2u} = 0,3\text{ A}$, $i_{3u} = 1,2\text{ A}$.

Korzystając ze wzoru (67), dla oszacowania niezależnego błędu własnego metody krok po kroku otrzymamy w rozpatrywanym przypadku

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{1,31} \\ \varepsilon_{2,31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33,5 \\ 16,5 \end{bmatrix} \frac{6 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 0,22} (e^{0,22 \cdot 29,4 \cdot 10^{-3}} - 1) = \begin{bmatrix} 2,96 \\ 1,46 \end{bmatrix} 10^{-3}.$$

Stwierdzamy zatem, a nawet przy bardzo grubym oszacowaniu niezależnym błąd własny metody w rozpatrywanym przykładzie nie przekracza 0,5% wartości ustalonych. Znacznie mniejsze wartości na $\varepsilon_{1,31}$, $\varepsilon_{2,31}$ otrzymalibyśmy przy oszacowaniu przedziałami o stałych wartościach przyrostów Δt [(71)], a jeszcze mniejsze przy oszacowaniu indukcyjnym [(64)].

WYKAZ LITERATURY

1. Biessonow L. A.: Pierechodnyje processy w nieliniejnych elektricheskich ceppjach so stalju. Moskwa 1951.
2. Cholewicki T.: Metody obliczania obwodów elektrycznych. Warszawa 1959.
3. Collatz L.: Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych. Warszawa 1960.
4. Cunningham W. J.: Analiza układów nieliniowych. Warszawa 1962.
5. Edelmann H.: Allgemeine Grundlagen der Netzberechnung mit Inzidenzmatrizen. — Archiv für Elektrotechnik Band XLIV, H. 7 (1959).
6. Nietuszył W., Strachow S. W.: Obwody o parametrach skupionych i rozłożonych. Warszawa 1959.
7. Nowacki P. J.: Obliczanie nieliniowych obwodów elektrycznych i magnetycznych. Warszawa 1959.
8. Salvadori M. G., Baron M. L.: Numerical Methods in Engineering. Prentice-Hall 1961.

T. KACZOREK

COMPUTATION OF NONLINEAR BRANCHED CIRCUITS BY MEANS OF ITERATIVE METHODS

Summary

The paper considers the possibility of applying step by step iterative methods and dynamic inductance to compute nonlinear branched circuits with continuous characteristics including, in a general case, besides the sources of energy, nonlinear resistances, nonlinear inductances, and nonlinear capacitances.

The possibility of simple extrapolation of a step by step method in the case of nonlinear branched circuits of nonlinear inductance number not higher than the number of linearly independent meshes was also shown in the paper.

For nonlinear branched circuits, and particularly for those of nonlinear inductance number higher than the number of linearly independent meshes a new iterative method of computing transients was proposed. In the proposed method, making use of the concept of dynamic inductance, dynamic resistance, and dynamic elastance the final values of mesh currents increase were accepted as the quantities sought.

Furthermore the estimate of the error of the method was given.

T. KACZOREK

CALCUL DES CIRCUITS NONLINÉAIRES BRANCHÉS EN APPLICANT DES MÉTHODES ITÉRATIVES

Résumé

On a considéré le possibilité d'employer la méthode par à pas ainsi que la méthode d'inductivité dynamique à calculer des circuits nonlinéaires branchés à caractéristiques continues; ces circuits contiennent en cas général à côté des

sources d'énergie aussi des résistances nonlinéaires, des inductances nonlinéaires et des capacitances nonlinéaires.

On a prouvé la possibilité de l'extrapolation directe de la méthode pas à pas sur le cas des circuits nonlinéaires branchés à nombre des inductances nonlinéaires non surpassant celui des mailles linéairement indépendantes. En cas des circuits nonlinéaires branchés, en particulier à nombre des inductances nonlinéaires surpassant le nombre des mailles linéairement indépendantes, on a proposé une nouvelle méthode itérative de calcul des parcours en fonction de temps. Dans la méthode proposée, en utilisant la conception d'inductivité dynamique ainsi que de résistance dynamique et d'élastance dynamique, on a accepté comme grandeurs cherchées des accroissements finis des courants de maille.

On a présenté enfin l'évaluation de l'erreur propre de la méthode.

T. KACZOREK

BERECHNUNG VON VERZWEIGTEN, NICHTLINEAREN KREISEN MITTELS ITERATIONSMETHODEN

Zusammenfassung

Hier wurde die Anwendungsmöglichkeit der Iterationsmethoden Schritt für Schritt sowie die dynamische Induktivität erwogen, zwecks Berechnung der verzweigten nichtlinearen Kreise in ununterbrochenen Charakteristiken, die in allgemeinen Fällen neben Energiequellen, nichtlineare Resistanzen, nichtlineare Induktivitäten und nichtlineare Kapazitäten enthalten.

Es wurde gezeigt, dass mittels einfacher Extrapolation der Methode Schritt für Schritt in Fällen verzweigter, nichtlinearer Kreise, die nichtlineare Induktivitätszahl nicht grösser, als die Anzahl der unabhängigen Maschen möglich ist.

Für verzweigte nichtlineare Kreise, besonders für solche, deren nichtlineare Induktivitätszahl grösser als die Anzahl der linearen Maschen ist, wurde für diesen Zweck eine neue iteratische Methode zur Berechnung des momentanen Verlaufes vorgeschlagen. Bei der vorgeschlagenen Methode, unter Ausnutzung des Begriffes der dynamischen Induktivität, der dynamischen Resistanz und der dynamischen Elastanz, wurden Endwerte des Maschen stromanwuchses als gesuchte Grössen angenommen. Ausserdem wurde die Einschätzung des Eigenfehlers der Methode angegeben.

T. КАЧОРЕК

РАСЧЁТ РАЗВЕТВЛЁННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ ПО ИТЕРАЦИОННЫМ МЕТОДАМ

Резюме

Проанализирована возможность применения метода шаг за шагом, а также метода динамической индуктивности для расчёта разветвлённых нелинейных цепей с непрерывными характеристиками, содержащими в общем случае, кроме

источников энергии, также нелинейные активные сопротивления, нелинейные индуктивности и нелинейные ёмкости.

Доказана возможность прямого экстраполирования метода шаг за шагом в случае разветвлённых нелинейных цепей с числом нелинейных индуктивностей не большим от числа линейно независимых петель. Для разветвлённых нелинейных цепей, в отдельности с числом нелинейных индуктивностей большим от числа линейно независимых петель, предложен новый, итерационный метод расчёта временных процессов. В предложенном методе, используя понятие динамической индуктивности, динамического активного сопротивления и динамического эластанца, в качестве рассчитываемых величин приняты конечные приращения контурных токов.

В заключении приведено оценки погрешности метода.

Kazimierz Kwiatkowski

s. 384, zł 21.—

**MATERIAŁOZNAWSTWO
ELEKTRYCZNE**



Skrypt dla studentów wydziałów elektrycznych wyższych szkół technicznych (studia stacjonarne i zaoczne); będą korzystali z niego także inżynierowie elektrycy. Autor omawia przewodniki, półprzewodniki i dielektryki.

STANISŁAW JUDYCKI

Zastosowanie algebry Boole'a dla analizy i syntezy układów dwustanowych

Rękopis dostarczono 9. 1. 1963

Omówiono zastosowanie algebry Boole'a dla potrzeb analizy i syntezy schematów układów elektrycznych z elementami o dwóch stanach.

Na wstępie omówiono ogólne zasady budowy schematów układów elektrycznych, podano najważniejsze prawa i zależności algebry Boole'a w relacji zależności matematycznej z ilustracją zapisu schematowego.

W dalszej części omówiono metodę dokonywania analitycznego zapisu układu dwustanowego oraz zapisu graficznego schematu.

Następnie zostały omówione metody syntezy i ich zastosowania dla potrzeb budowy schematów, metody analizy kontrolnej opracowanych układów, metody przekształcania schematów układów dwustanowych. Podano typowe rozwiązania układów równoważnych i przekształconych.

Na zakończenie na przykładzie układu deszyfratora, w zastosowaniu do odbioru sygnałów wieloimpulsowych tworzonych w relacji kombinacji bez powtórzeń, dokonano syntezy budowy schematu układu, doprowadzając przy pomocy stopniowych przekształceń do najprostszej i najoszczędniejszej jego postaci przez uzyskanie najmniejszej ilości styków poszczególnych elementów i równomiernego rozkładu styków na poszczególnych stopniach.

1. WSTĘP

Przy opracowywaniu schematów układów elektrycznych musi być dokonany właściwy wybór elementów, ustalone parametry robocze tych elementów oraz przeprowadzona analiza z punktu widzenia dogodności w eksploatacji i oszczędności w ilości zastosowanych elementów.

Przy projektowaniu schematów układów elektrycznych tworzymy zbiór elementów głównych roboczych układu oraz podzbiór elementów pomocniczych funkcjonalnie związanych z elementami głównymi.

Budowa schematu musi być tak dokonana, aby uzyskany układ elektryczny odpowiadał wszystkim założonym warunkom pracy. W wielu przypadkach rozwiązanie może być różne. Dla ustalenia, czy przyjęte rozwiązanie jest właściwe, należy zbudowany układ przeanalizować z punktu widzenia dogodności w eksploatacji oraz oszczędności w ilości zastosowanych elementów. W tym celu, przy wykorzystaniu zależności analitycznych, dokonuje się przekształceń dla uzyskania najmniejszej ilości elementów doprowadzając układ do najbardziej prostego i oszczędnego schematu.

Do badań właściwości układów elektrycznych dwustanowych, zarówno dla analizy, jak i dla syntezy schematów, wykorzystano szereg metod analitycznych opartych na pewnych dyscyplinach matematyki. W niniejszej publikacji został wykorzystany dział algebry Boole'a.

2. ZASADA BUDOWY SCHEMATU UKŁADU ELEKTRYCZNEGO

Każdy projektowany układ elektryczny może zawierać dowolną ilość „ n ” elementów o „ a ” stanach pracy, przy czym, w zależności od określonych warunków pracy, wchodzące w skład układu elementy mogą być dowolnie ze sobą kojarzone. Kojarzenie elementów może tworzyć układ prosty o jednym obwodzie, gdzie wszystkie elementy wchodzące w skład układu powiązane są ze sobą tak, że dają jeden określony przebieg roboczy, mówimy wówczas, że tworzą jeden obwód.

Kojarzenie elementów może tworzyć układ złożony wieloobwodowy. W takim układzie wchodzące w skład układu elementy są kojarzone tak, że dają szereg przebiegów roboczych, czyli mówimy, że układ zawiera wiele obwodów.

W założeniu, że służący do realizacji jakiejś czynności projektowany układ elektryczny ma zawierać „ n ” elementów, przy czym każdy element ma „ a ” stanów pracy, ilość możliwych do uzyskania obwodów określona będzie kombinacją kojarzeń wszystkich stanów pracy wszystkich elementów i będzie równa

$$w = a^n, \quad (1)$$

gdzie:

w — ilość możliwych do uzyskania obwodów,

n — ilość elementów,

a — ilość stanów pracy każdego elementu.

Jest to wzór wariacji z powtórzeniem, który określa, że z dowolnego zbioru elementów możemy uszeregować dowolną ilość elementów w dowolnej kolejności względem siebie, przy czym każde uszeregowanie będzie zawierało dowolne elementy różne lub jednakowe i będzie różniło się od innych uszeregowień co najmniej bądź kolejnością elementów, bądź też co najmniej jednym elementem.

Dla konkretnego rozważania w podanej interpretacji matematycznej jako cechy będziemy rozróżniać ilość elementów i stan pracy elementów.

Dla układów prostych, gdzie w każdym układzie występuje tylko jeden obwód roboczy, ilość możliwych do uzyskania schematów układów „ s_i ” równa będzie ilości możliwych do uzyskania obwodów „ w ”, czyli

$$s_i = w, \quad (2)$$

gdzie:

s_i — ilość możliwych do uzyskania schematów układów,

w — ilość możliwych do uzyskania obwodów.

Dla układów z elementami o dwóch stanach pracy (np. stan czynny i bierny) wartość „ a ” będzie równa „2” i wzór (1) przyjmie postać

$$w_d = 2^n, \quad (3)$$

gdzie:

- w_d — ilość możliwych do uzyskania obwodów,
- 2 — ilość stanów pracy,
- n — ilość elementów.

Dla układów wieloobwodowych, w których kojarzenie elementów roboczych daje szereg przebiegów roboczych (obwodów), otrzymamy ilość możliwych do uzyskania schematów układów jako kombinację matematyczną wariacji z powtórzeniem.

Dla układów wieloobwodowych przy zastosowaniu elementów o dwóch stanach pracy ($a = 2$) ilość możliwych do uzyskania schematów układów określimy ze wzoru

$$s = 2^{2^n}, \quad (4)$$

gdzie:

- s — ilość możliwych do uzyskania schematów układów,
- n — ilość elementów,
- 2 — ilość stanów pracy elementów.

Dla układów dwustanowych, zgodnie ze wzorem (3), ze wszystkich możliwych do uzyskania obwodów „ w ” co najmniej jeden obwód nie będzie realizował czynności narzuconej warunkami założeń. Będzie to stan bierny — przygotowanie do realizacji czynności wymaganej. Zależnie od narzuconych warunków założeń ilość obwodów nie realizujących czynności może być dowolnie większa od „1”, lecz mniejsza od wartości „ w ”, tj. ilości możliwych do uzyskania obwodów.

Przy uwzględnieniu obwodów nie realizujących czynności wzory (1) i (3) przyjmą postać

$$w_c = w - w_n = a^n - w_n, \quad (5)$$

$$w_{cd} = w_d - w_n = 2^n - w_n, \quad (6)$$

gdzie:

- w — całkowita ilość możliwych do uzyskania obwodów,
- w_c — ilość obwodów realizujących czynność,
- w_n — ilość obwodów nie realizujących założonej czynności,
- n — ilość elementów,
- a — ilość stanów pracy,
- w_d — całkowita ilość obwodów przy zastosowaniu elementów dwustanowych,
- w_{cd} — ilość obwodów realizujących czynność przy zastosowaniu elementów dwustanowych.

Na przykład przy zastosowaniu jako elementów roboczych trzech przełączników dwustanowych A, B, C , służących do realizacji czynności zamykania obwodu mechanizmu wykonawczego X , przy założonych warunkach, że czynność nie będzie realizowana, gdy wszystkie przełączniki będą czynne lub bierne, otrzymamy zależności

$$w_d = 2^n = 2^3 = 8,$$

oraz

$$w_{cd} = w_d - w_n = 8 - 2 = 6.$$

Otrzymamy osiem obwodów, z których sześć obwodów będzie realizowało czynność włączania mechanizmu wykonawczego X .

Zestawienie wszystkich obwodów podano w tablicy 1. Stan włączenia oznaczono symbolem plus, a stan odłączenia oznaczono symbolem minus.

Tablica 1
Zestawienie obwodów przełączników A, B, C oraz
mechanizmu X

Nr obwodu	1	2	3	4	5	6	7	8
Elementy								
A	—	+	+	—	+	—	—	+
B	—	+	—	+	—	+	—	+
C	—	—	+	+	—	—	+	+
X	—	+	+	+	+	+	+	—

Przy zastosowaniu „ n ” elementów dwustanowych dla potrzeb realizacji „ m ” czynności, np. włączania „ m ” mechanizmów, dla każdego mechanizmu „ m ” zgodnie ze wzorem (4) może być zrealizowanych $s = 2^{2^n}$ schematów układów dwustanowych.

Całkowita ilość schematów układów elektrycznych zawierających m mechanizmów będzie równa ilości rozmieszczeń s po m . Całkowita ilość wszystkich możliwych schematów zawierających ilość mechanizmów od 1 do m będzie równa sumie wszystkich podobnych rozmieszczeń i będzie określona wzorem ¹⁾

$$s_m = \sum_{p=1}^{p=m} A_{s_1}^p = \sum_{p=1}^{p=m} A_2^{p \cdot 2^{n-2}} \quad (7)$$

Ze wzoru (7) wynika, że ze wzrostem wartości ilości elementów n i ilości mechanizmów (lub czynności) m wartość s_m znacznie wzrośnie. Z powyższego powodu przy analizie schematów i doborze jak najkorzystniejszego schematu nie rozpatruje się wszystkich schematów, lecz tylko grupę schematów, stosując następującą metodę postępowania.

¹⁾ Poz. literatury [1] str. 36.

Przy zastosowaniu n elementów roboczych spośród wszystkich możliwych do utworzenia schematów wydzielamy grupę schematów spełniających zgodnie z założeniami ustalone warunki pracy, a następnie wybieramy z tej grupy najwłaściwszy schemat pod względem doboru i układu dla danych warunków pracy. Schemat ten przy wykorzystaniu dyscypliny matematycznej algebry Boole'a przedstawiamy w postaci algebraicznej i przez wykorzystanie analitycznych zależności dokonujemy przekształceń, doprowadzając do najkorzystniejszej postaci dla danych warunków pracy. Z postaci algebraicznej przechodzimy na schemat rysunkowy.

3. ALGEBRA BOOLE'A

3.1. Wprowadzenie, pojęcia podstawowe

Istnieje analogia w zależnościach pomiędzy elementami przedstawionymi w postaci symboli w dyscyplinie matematycznej algebry Boole'a a elementami układów elektrycznych. W układach elektrycznych elementami są odcinki obwodów, a działaniami są zależności między stanami tych odcinków. W algebrze Boole'a operujemy również elementami i wykonujemy działania, lecz elementom nie przypisuje się konkretnego znaczenia, a działania opisuje się przez podanie spełnianych przez nie praw. Upraszcza to znacznie zagadnienia, gdyż operując pewnymi umownymi symbolami i wprowadzając działania spełniające te same prawa co w algebrze liczb możemy wprowadzić większe uproszczenia.

Analogia ta pozwala na przejście z układu elektrycznego przedstawionego rysunkowo na układ przedstawiony w postaci zależności symboli algebry Boole'a i odwrotnie.

W algebrze Boole'a operujemy zazwyczaj trzema działaniami, a mianowicie dodawaniem, oznaczanym symbolem „+”, mnożeniem, oznaczanym symbolem „•”, przy czym symbol ten analogicznie jak w algebrze liczb często opuszczamy, oraz inwersją, czyli uzupełnianiem, oznaczanym symbolem „—” umieszczanym nad symbolem literowym (np. $\bar{x}$).

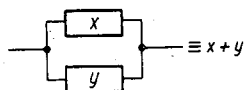
Wiele twierdzeń i zależności stosowanych w algebrze Boole'a jest analogicznych jak w algebrze liczb, jak np. działanie dodawania, mnożenia, zamiany miejsc, równości itp. Ze względu na wprowadzenie dodatkowego działania inwersji-uzupełniania niektóre twierdzenia i zależności algebry Boole'a są odrębne i nie mają analogii w algebrze liczb.

W rozważaniach algebry Boole'a operujemy dowolną ilością elementów zmiennych oznaczanych dowolnymi symbolami, np. $x, y, z, \dots$, wchodzących w skład zbioru, oznaczonego np. symbolem A .

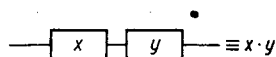
W celu przeprowadzenia analogii i dla porównania z układami elektrycznymi zawierającymi elementy dwustanowe do rozważanego zbioru A elementów wprowadza się dwa elementy wyróżnione, oznaczone symbolami „1” i „0”. Symbol „1” będzie odpowiednikiem stanu włączenia obwodu, a symbol „0” będzie odpowiednikiem stanu odłączenia obwodu.

Działanie dodawania wykonane nad dwoma elementami x, y , przedstawione w algebrze Boole'a symbolicznie w postaci $x + y$, jest odpowiednikiem w układzie elektrycznym połączenia równoległego tych elementów przedstawionego na rys. 1.

Działanie mnożenia wykonane nad dwoma elementami x, y , przedstawione w algebrze Boole'a symbolicznie w postaci $x \cdot y$, jest odpowiednikiem w układzie elektrycznym szeregowego połączenia tych elementów przedstawionego na rys. 2.

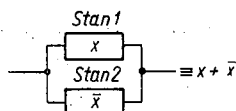


Rys. 1. Połączenie równoległe jako odpowiednik dodawania



Rys. 2. Połączenie szeregowe jako odpowiednik działania mnożenia

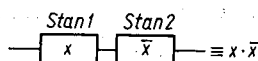
Działanie inwersji-uzupełniania wykonane nad elementem x , przedstawione w algebrze Boole'a symbolicznie w postaci $\bar{x}$, jest odpowiednikiem w układzie elektrycznym dla elementu x uzupełniania jednego stanu stanem drugim. Działanie powyższe, w powiązaniu z działaniem dodawania, przedstawione symbolicznie w algebrze Boole'a w postaci $x + \bar{x}$ będzie odpowiednikiem w układzie elektrycznym równoległego połączenia elementu x w postaci dwóch różnych stanów. Układ ten jest przedstawiony na rys. 3.



Rys. 3. Układ równoległy dwóch stanów jako odpowiednik dodawania z inwersją

W relacji układu elektrycznego z przekaźnikami będzie to połączenie równoległe styku czynnego i styku biernego.

Działanie inwersji-uzupełniania w powiązaniu z działaniem mnożenia przedstawione w algebrze Boole'a symbolicznie w postaci $x \cdot \bar{x}$ będzie



Rys. 4. Układ szeregowy dwóch stanów jako odpowiednik mnożenia z inwersją

odpowiednikiem w układzie elektrycznym szeregowego połączenia elementu x w postaci dwóch różnych stanów. Układ ten jest przedstawiony na rys. 4.

W relacji układu elektrycznego z przekaźnikami będzie to szeregowe połączenie styku czynnego i styku biernego elementu x .

3.2. Prawa (aksjomaty) i zależności

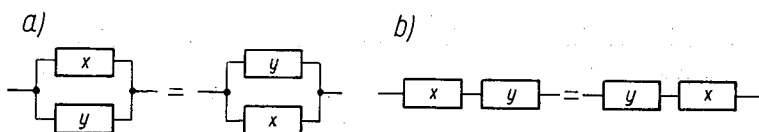
Poniżej są omówione najważniejsze prawa i zależności algebry Boole'a mające zastosowanie przy analizie i syntezie układów elektrycznych.

a) *Prawo przemienności dla równoległego i szeregowego łączenia elementów*

$$x + y = y + x, \quad (8)$$

$$x \cdot y = y \cdot x. \quad (9)$$

Na rys. 5 podane są schematy układu elektrycznego ilustrujące powyższe prawo.



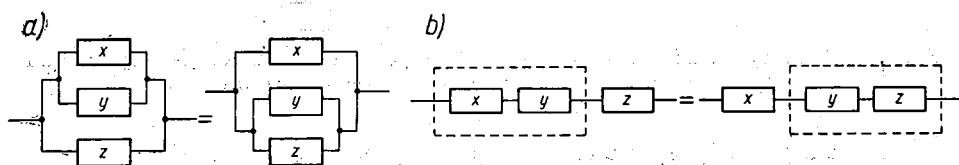
Rys. 5. Schematy układu elektrycznego ilustrujące prawo przemienności
a) układ równoległy, b) układ szeregowy

b) *Prawo łączności dla równoległego i szeregowego łączenia elementów*

$$(x + y) + z = x + (y + z), \quad (10)$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z). \quad (11)$$

Schematy układu elektrycznego ilustrujące powyższe prawo są podane na rys. 6.



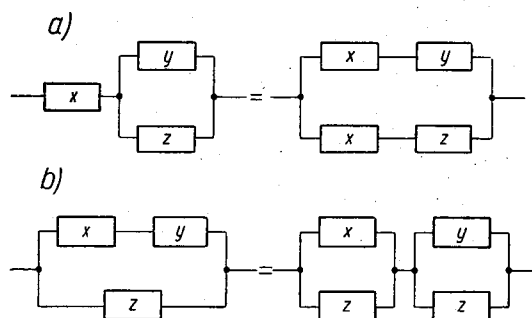
Rys. 6. Schematy układu elektrycznego ilustrujące prawo łączności
a) układ równoległy, b) układ szeregowy

c) *Prawo rozdzielności szeregowo-równoległego łączenia elementów*

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad (12)$$

$$x \cdot y + z = (x + z) \cdot (y + z). \quad (13)$$

Schematy układu elektrycznego ilustrujące powyższe prawo są podane na rys. 7.



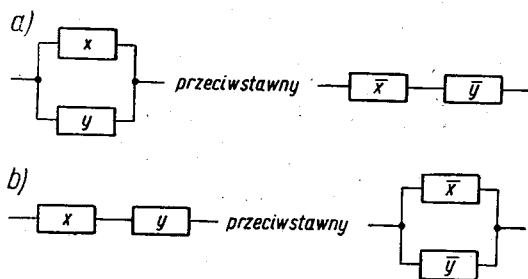
Rys. 7. Schematy układu elektrycznego ilustrujące prawo rozdzielności
a) dla zależności wg wzoru (12), b) dla zależności wg wzoru (13)

d) *Prawo inwersji-uzupełniania dla szeregowo-równoległego łączenia elementów*

$$\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}, \quad (14)$$

$$\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}. \quad (15)$$

Schematy układu elektrycznego ilustrujące powyższe prawo są podane na rys. 8.



Rys. 8. Schematy układu elektrycznego ilustrujące prawo inwersji-uzupełniania
a) dla zależności wg wzoru (14), b) dla zależności wg wzoru (15)

e) *Prawo podwójnej inwersji — podwójnego uzupełniania*

$$\overline{\bar{x}} = x \quad (16)$$

Interpretacja tego prawa może być sformułowana tak, że uzupełnianie dwukrotne pewnego stanu daje stan pierwotny.

f) *Prawo równości*

Jeśli $x = y$, to $\bar{x} = \bar{y}$. (17)

Interpretacja tego prawa może być sformułowana tak, że jeśli dla pewnych stanów dwa elementy są równe, to również będą równe dla stanów uzupełniających (inwersyjnych).

g) Prawo stałej wartości logicznej

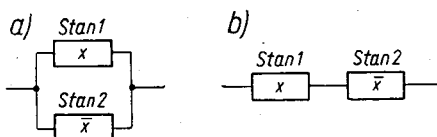
$$x + \bar{x} = 1, \quad (18)$$

$$x \cdot \bar{x} = 0. \quad (19)$$

Schematy układu elektrycznego ilustrujące powyższe prawo są podane na rys. 9.

Rys. 9. Schematy układu elektrycznego ilustrujące prawo stałej wartości logicznej

a) dla zależności wg wzoru (18), b) dla zależności wg wzoru (19)



Z powyższych zależności wynika, że równoległe łączenie elementów o dwóch stanach uzupełniających się tworzy obwód stale włączony i będzie oznaczone symbolem „1”, oraz szeregowe łączenie elementów o dwóch stanach uzupełniających się tworzy obwód stale wyłączony i będzie oznaczone symbolem „0”.

h) Prawo absorpcji

$$x + 0 = x \quad (20)$$

$$x \cdot 1 = x \quad (21)$$

$$x + 1 = 1 \quad (22)$$

$$x \cdot 0 = 0 \quad (23)$$

Z zależności według wzoru (20) wynika, że działanie (funkcjonalność) układu pozostaje bez zmiany, jeśli równoległe do jakiegoś elementu dołączyć element lub grupę elementów tworzących obwód stale wyłączony.

Z zależności według wzoru (21) wynika, że działanie (funkcjonalność) układu pozostanie bez zmiany, jeśli do dowolnego elementu dołączyć szeregowo jakiś element lub grupę elementów tworzących obwód stale włączony.

Z zależności według wzoru (22) wynika, że przez równoległe dołączenie do dowolnego elementu jakiegoś elementu lub grupy elementów o obwodzie stale włączonym stworzy się układ o obwodzie stale włączonym.

Z zależności według wzoru (23) wynika, że przez szeregowe dołączenie do dowolnego elementu jakiegoś elementu lub grupy elementów o obwodzie stale rozwartym stworzy się układ o obwodzie stale rozwartym.

Z określenia elementów oznaczonych symbolami „1” i „0” oraz z zależności podanych we wzorach (20), (21), (22), (23) można wyznaczyć dalsze następujące zależności

$$\bar{0} = 1 \quad (24)$$

$$\bar{1} = 0 \quad (25)$$

$$0 \cdot 0 = 0 \quad (26)$$

$$0 + 0 = 0 \quad (27)$$

$$1 \cdot 0 = 0 \quad (28)$$

$$1 + 0 = 1 \quad (29)$$

$$1 \cdot 1 = 1 \quad (30)$$

$$1 + 1 = 1 \quad (31)$$

Interpretacja tych zależności nie jest omawiana, gdyż logicznie wynika z określenia elementów (stanów) oznaczonych symbolami „1” i „0”, oraz z rozważań odnośnie prawa absorpcji.

i) *Prawo rozkładu stałej wartości logicznej*

Wzór (18) definiujący prawo stałej wartości logicznej w odniesieniu do jednego zmiennego elementu x w połączeniu równoległym również będzie ważny dla dowolnej ilości n zmiennych elementów. Dla zmiennych elementów $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, przyjmując zależność według wzoru (30), że $1 \cdot 1 \dots 1 = 1$ wzór (18) przyjmie postać

$$(x_1 + \bar{x}_1) \cdot (x_2 + \bar{x}_2) \dots (x_n + \bar{x}_n) = 1. \quad (32)$$

Dla dwóch zmiennych elementów x_1, x_2 wzór (32) da zależność

$$1 = (x_1 + \bar{x}_1) \cdot (x_2 + \bar{x}_2) = x_1 \cdot x_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2.$$

Analogicznie dla trzech zmiennych elementów x_1, x_2, x_3 będzie zależność

$$\begin{aligned} 1 = (x_1 + \bar{x}_1) \cdot (x_2 + \bar{x}_2) \cdot (x_3 + \bar{x}_3) = & x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \\ & x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + \\ & x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3. \end{aligned}$$

Dla n zmiennych elementów ogólna postać równania będzie:

$$\begin{aligned} 1 = (x_1 + \bar{x}_1) \cdot (x_2 + \bar{x}_2) \dots (x_n + \bar{x}_n) = & x_1 \cdot x_2 \dots x_n + \bar{x}_1 \cdot x_2 \dots x_n + \\ & + x_1 \cdot \bar{x}_2 \dots x_n + \dots + x_1 \cdot x_2 \dots \bar{x}_n + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \dots x_n + \dots + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n. \end{aligned} \quad (33)$$

Analizując powyższą zależność w oparciu o kombinatorykę określamy, że stałą wartość logiczną 1 można rozłożyć na 2^n składników, przy czym każdy składnik zawiera iloczyn n zmiennych elementów w kolejnej wariacji z inwersją.

W relacji schematu układu elektrycznego zależność według wzoru (33) przedstawia schemat zawierający 2^n równoległych obwodów, przy czym poszczególne obwody zawierają wszystkie możliwe kombinacje szeregowo połączonych elementów. W odniesieniu do zacisków wejściowych będzie to obwód stale włączony.

Wzór (19) definiujący prawo stałej wartości logicznej w odniesieniu do jednego zmiennego elementu x w połączeniu szeregowym będzie również ważny dla dowolnej ilości n zmiennych elementów.

Dla zmiennych elementów $x_1, x_2, \dots, x_n$, przyjmując zależność według wzoru (27), że $0 + 0 + \dots + 0 = 0$, wzór (19) przyjmie postać

$$x_1 \cdot \bar{x}_1 + x_2 \cdot \bar{x}_2 + \dots + x_n \cdot \bar{x}_n = 0. \quad (34)$$

Dla dwóch zmiennych elementów x_1, x_2 , uwzględniając według wzoru (13) prawo rozdzielności szeregowo-równoległego łączenia elementów, wzór (34) da zależność

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 \cdot \bar{x}_1 + x_2 \cdot \bar{x}_2 = (x_1 + x_2 \cdot \bar{x}_2) \cdot (\bar{x}_1 + x_2 \cdot \bar{x}_2) = (x_1 + x_2) \cdot \\ &(\bar{x}_1 + x_2) \cdot (x_1 + \bar{x}_2) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2). \end{aligned}$$

Analogicznie dla trzech zmiennych elementów x_1, x_2, x_3 będzie zależność

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 \cdot \bar{x}_1 + x_2 \cdot \bar{x}_2 + x_3 \cdot \bar{x}_3 = (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (\bar{x}_1 + x_2 + x_3) \cdot \\ &(x_1 + \bar{x}_2 + x_3) \cdot (x_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3) \cdot (\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot \\ &(x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot (x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3). \end{aligned}$$

Dla n zmiennych elementów ogólna postać równania będzie:

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 \cdot \bar{x}_1 + x_2 \cdot \bar{x}_2 + \dots + x_n \cdot \bar{x}_n = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \cdot \\ &(\bar{x}_1 + x_2 + \dots + x_n) \cdot (x_1 + \bar{x}_2 + \dots + x_n) \cdot \dots \cdot (x_1 + x_2 + \dots + \bar{x}_n) \cdot \\ &(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + x_n) \cdot \dots \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_n). \end{aligned} \quad (35)$$

Analizując powyższą zależność w oparciu o kombinatorykę określamy, że stałą wartość logiczną 0 można rozłożyć na 2^n czynników, przy czym każdy czynnik zawiera sumę n składników elementów w kolejnej wariacji z inwersją.

Zależność wzoru (35) w relacji schematu układu elektrycznego przedstawia schemat zawierający 2^n grup elementów szeregowo połączonych, przy czym poszczególne grupy zawierają wszystkie możliwe kombinacje n elementów równolegle połączonych. W odniesieniu do zacisków wejściowych będzie to obwód stale otwarty.

Zgodnie z prawem stałej wartości logicznej i prawem rozkładu stałej wartości logicznej z omówionych rozważań wynika, że przy zastosowaniu n zmiennych elementów można otrzymać 2^n grup n -elementowych, przy czym grupy mogą być łączone szeregowo, a elementy w grupie, zestawione w poszczególnych grupach według wariacji z kolejną inwersją, mogą być łączone równolegle, lub też grupy mogą być łączone równolegle, a elementy w grupie, zestawione w poszczególnych grupach według wariacji z kolejną inwersją, mogą być łączone szeregowo.

Dla pierwszego przypadku wyrażenie dowolnej grupy może być wyrażone wzorem

$$g_i = \sum_{k=1}^{k=n} x_k \quad (36)$$

oraz dla drugiego przypadku może być wyrażone wzorem

$$g_i = \prod_{k=1}^{k=n} x_k. \quad (37)$$

Wyrażenia poszczególnych grup można zestawić w pewnej kolejności, wybrać te grupy, które będą spełniać warunki określone założeniami, i przeanalizować je.

W przypadku stosowania elementów o dwóch stanach można ustalić kolejność grup według numeracji systemu dwójkowego, a to jednoznacznie scharakteryzuje każdy obwód i warunki pracy. W tym celu w rozkładzie wartości logicznej 0 wszystkie elementy x_k oznaczamy przez 0 , a elementy inwersji $\bar{x}_k$ przez 1 . Natomiast w rozkładzie wartości logicznej 1 wszystkie elementy x_k oznaczamy przez 1 , a elementy inwersji $\bar{x}_k$ przez 0 .

Otrzymane cyfry będziemy rozpatrywać jako składowe liczb systemu dwójkowego. Liczby te będą określać kolejny numer grupy. Przejścia z numeracji systemu dwójkowego na system dziesiętny można dokonać przy pomocy wzoru

$$i = \sum_{k=0}^{k=n-1} x_k \cdot 2^k, \quad (38)$$

gdzie:

- i — liczba w układzie dziesiętnym,
- x_k — kolejna cyfra liczby układu dwójkowego (0 lub 1),
- n — ilość cyfr liczby układu dwójkowego.

I tak np. przy zastosowaniu trzech zmiennych elementów x_1, x_2, x_3 otrzymujemy $2^n = 2^3 = 8$ grup trójelementowych, przy czym elementy w grupie mogą być łączone równolegle (rozkład wartości logicznej 0), a grupy szeregowo (zob. rys. 11), lub też elementy w grupie mogą być łączone szeregowo (rozkład wartości logicznej 1), a grupy łączone równolegle (zob. rys. 10).

W tablicy 2 podano w kolejnej numeracji dziesiętnej i dwójkowej zestawienie wszystkich trójelementowych grup w rozkładzie wartości logicznej 1 i wartości logicznej 0 .

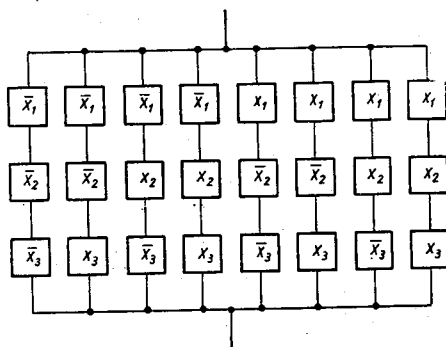
Na rysunkach 10 i 11 są podane schematy obwodów grup trójelementowych połączonych równolegle i szeregowo. Jak wynika z rozkładu wartości logicznej „1”, rysunek 10 przedstawia schemat obwodu stale zamkniętego, oraz z rozkładu wartości logicznej „0”, rysunek 11 przedstawia schemat obwodu stale otwartego.

Rozkład na elementy składowe wartości logicznej „1” i „0” może być wykorzystany przy analizie układów schematowych. Analiza ta ułatwia wydzielenie obwodów oddziałujących na dany element w jak najprostszym układzie.

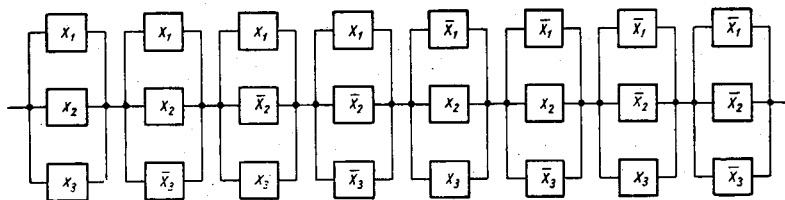
Tablica 2

Zestawienie wyrażeń grup trójelementowych w rozkładzie wartości logicznej „1” i „0”

Numer dziesiętny	Numer dwójkowy	Grupy łączone równolegle rozkład „1”	Grupy łączone szeregowo rozkład „0”
0	000	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$	$x_1 + x_2 + x_3$
1	001	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$	$x_1 + x_2 + \bar{x}_3$
2	010	$\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3$	$x_1 + \bar{x}_2 + x_3$
3	011	$\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	$x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3$
4	100	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$	$\bar{x}_1 + x_2 + x_3$
5	101	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$	$\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3$
6	110	$x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3$	$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3$
7	111	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3$



Rys. 10. Schemat obwodu stale zamkniętego (rozkład wartości logicznej „1”)



Rys. 11. Schemat obwodu stale otwartego (rozkład wartości logicznej „0”)

k) Prawo ekstensjonalności

$$(x = y) \xrightarrow{\text{jeśli}} (x + z = y + z), \quad (39)$$

$$(x = y) \xrightarrow{\text{jeśli}} (x \cdot z = y \cdot z). \quad (40)$$

Ze wzoru (39) wynika, że dwa elementy (stany) będą sobie równe, jeśli są sobie równe elementy (stany) z równolegle załączonym do obu elementów jednakowym elementem (stanem).

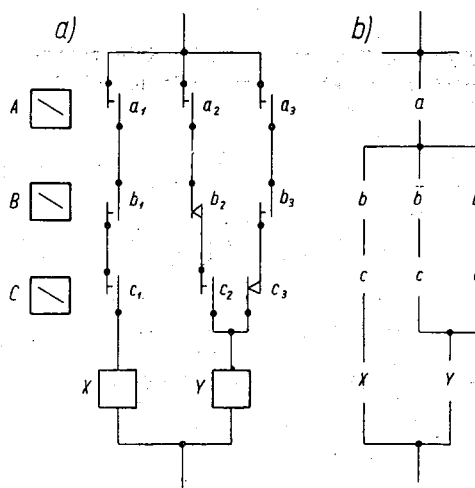
Ze wzoru (40) wynika, że dwa elementy (stany) będą sobie równe, jeśli są sobie równe elementy (stany) z szeregowo włączonym do obu elementów elementem (stanem).

4. ANALITYCZNY ZAPIS ELEMENTÓW UKŁADU ELEKTRYCZNEGO

Każdy schemat układu elektrycznego może być przedstawiony przy pomocy funkcji, w której rolę zmiennych niezależnych spełniają elementy wchodzące w skład układu elektrycznego, jak np. styki przekaźników, przycisków i przełączników ręcznych. Budowa takiej funkcji i operacje są dokonywane w oparciu o prawa i zależności algebry Boole'a.

Dla opisu układów elektrycznych przyjęto oznaczać elementy główne układu, jak np. przekaźniki, elektromagnesy itp., symbolami liter dużych alfabetu, a styki tych elementów małymi literami alfabetu. Przy założeniu, że elementy są o dwóch stanach, styki drugiego stanu będą inwersją stanu pierwszego. Równoległe połączenie jest oznaczane jako suma, a szeregowe jako iloczyn.

Na podstawie powyższych omówień można wprowadzić następujące oznaczenia i zapis. Na przykład przy zastosowaniu trzech elementów przekaźników oznaczamy przekaźniki literami A, B, C , styki włączające tych przekaźników literami a, b, c oraz styki rozwierające (jako inwersję) literami $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Rys. 12a przedstawia układ elektryczny włączania dwóch elementów roboczych wykonawczych X, Y przy pomocy styków trzech



Rys. 12. Układ elektryczny włączania dwóch elementów roboczych X, Y przy zastosowaniu trzech przekaźników A, B, C

a) schemat pierwotny, b) graficzny zapis schematu przekształconego

przełączników A, B, C . Warunki pracy są następujące: element roboczy wykonawczy X ma być włączony przy jednoczesnym zadziałaniu trzech przełączników A, B, C , oraz element roboczy wykonawczy Y ma być włączony przy zadziałaniu dwóch przełączników A, B lub A, C .

Wyrażenia analityczne funkcji $F(X)$ i $F(Y)$ będą następujące:

$$F(X) = a \cdot b \cdot c,$$

$$F(Y) = a \cdot \bar{b} \cdot c + a \cdot b \cdot \bar{c} = a \cdot (\bar{b} \cdot c + b \cdot \bar{c}).$$

Ogólne wyrażenie funkcji będzie:

$$F = a \cdot b \cdot c \cdot X + a \cdot (\bar{b} \cdot c + b \cdot \bar{c}) \cdot Y = a \cdot [b \cdot c \cdot X + (\bar{b} \cdot c + b \cdot \bar{c}) \cdot Y].$$

Rys. 12b podaje zapis graficzny schematu przekształconego.

Jeśli układ elektryczny zawiera n zmiennych elementów, oznaczonych np. symbolami $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$, oraz m elementów roboczych wykonawczych, oznaczonych np. symbolami $X_1, X_2, X_3 \dots X_m$, przy czym w tworzeniu obwodów poszczególnych elementów roboczych wykonawczych nie są wykorzystane wszystkie elementy zmienne $A_1, A_2 \dots A_n$, lecz tylko w poszczególnych obwodach część elementów, to zarówno zapis graficzny schematu, jak i wyrażenie funkcji mogą być przedstawione przy uwzględnieniu tylko tych elementów, które tworzą obwód zgodnie z założeniami, lub też zarówno zapis, jak i wyrażenie funkcji mogą być przedstawione przy uwzględnieniu wszystkich elementów w każdym obwodzie.

Pełny zapis i wyrażenie funkcji dają możliwość dokonania wnikliwej analizy realizowanego układu bądź też analizowanego układu.

Np. mamy układ elektryczny zawierający trzy elementy robocze wykonawcze X_1, X_2, X_3 , oraz pięć elementów zmiennych A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 , przy czym zgodnie z założeniami w poszczególnych obwodach elementów wykonawczych występują styki elementów zmiennych w następującej relacji:

dla X_1 — styki a_1, a_3, a_5 ,

dla X_2 — styki a_2, a_4 ,

dla X_3 — styki a_1, a_4, a_5 .

Zapis graficzny schematu z ograniczeniem do podanych warunków w założeniach jest przedstawiony na rysunku 13, oraz wyrażenie tej funkcji będzie:

$$F(X_1) = a_1 \cdot a_3 \cdot a_5,$$

$$F(X_2) = a_2 \cdot a_4,$$

$$F(X_3) = a_1 \cdot a_4 \cdot a_5.$$

Ogólne wyrażenie funkcji będzie:

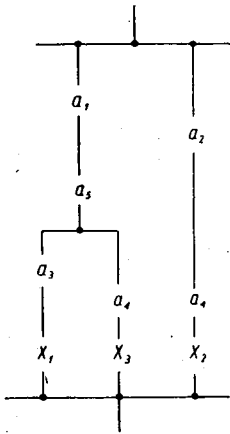
$$\begin{aligned} F &= a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 \cdot X_1 + a_2 \cdot a_4 \cdot X_2 + a_1 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot X_3 = \\ &= a_1 \cdot a_5 \cdot (a_3 \cdot X_1 + a_4 \cdot X_3) + a_2 \cdot a_4 \cdot X_2. \end{aligned}$$

Pełny zapis graficzny schematu z uwzględnieniem wszystkich elementów w poszczególnych obwodach jest przedstawiony na rysunku 14, a wyrażenie funkcji będzie:

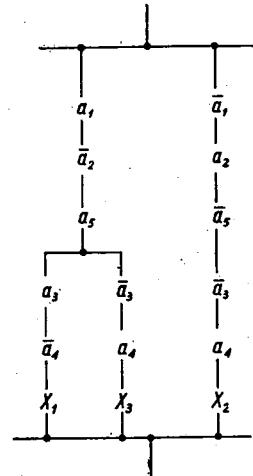
$$F(X_1) = a_1 \cdot \bar{a}_2 \cdot a_3 \cdot \bar{a}_4 \cdot a_5,$$

$$F(X_2) = \bar{a}_1 \cdot a_2 \cdot \bar{a}_3 \cdot a_4 \cdot \bar{a}_5,$$

$$F(X_3) = a_1 \cdot \bar{a}_2 \cdot \bar{a}_3 \cdot a_4 \cdot a_5.$$



Rys. 13. Zapis graficzny schematu z ograniczeniem do warunków podanych w założeniach



Rys. 14. Pełny zapis graficzny schematu z uwzględnieniem wszystkich elementów w poszczególnych obwodach

Ogólne wyrażenie funkcji będzie:

$$\begin{aligned} F &= a_1 \cdot \bar{a}_2 \cdot a_3 \cdot \bar{a}_4 \cdot a_5 \cdot X_1 + \bar{a}_1 \cdot a_2 \cdot \bar{a}_3 \cdot a_4 \cdot \bar{a}_5 \cdot X_2 + \\ &+ a_1 \cdot \bar{a}_2 \cdot \bar{a}_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot X_3 = a_1 \cdot \bar{a}_2 \cdot a_5 \cdot (a_3 \cdot \bar{a}_4 \cdot X_1 + \bar{a}_3 \cdot a_4 \cdot X_3) + \\ &+ \bar{a}_1 \cdot a_2 \cdot \bar{a}_3 \cdot a_4 \cdot \bar{a}_5 \cdot X_2. \end{aligned}$$

5. PRZEKSZTAŁCANIE UKŁADÓW ELEKTRYCZNYCH

Przekształcanie układu elektrycznego polega na doprowadzeniu układu przez kolejne przemiany, przy wykorzystaniu zależności i praw algebry Boole'a, do postaci najprostszego układu, warunkującego korzystniejsze warunki pracy, oszczędnego układu o najmniejszej ilości elementów i najmniejszej ilości połączeń pomiędzy elementami. Poniżej będą omówione typowe przekształcania, mogące mieć zastosowania w technice układów elektrycznych.

5.1. Przekształcanie na zasadzie inwersji (uzupełnienia)

Dla każdego dowolnego obwodu, zgodnie z prawem inwersji, możemy stworzyć obwód inwersyjny będący uzupełnieniem obwodu pierwotnego.

Przy przejściu z układu zwykłego na inwersyjny połączenie szeregowo jest zastąpione połączeniem równoległym i odwrotnie, dowolny element w dowolnym stanie jest zastąpiony w układzie inwersyjnym elementem w stanie uzupełniającym stan pierwotny, każde oczko w stanie pierwotnym układu jest zastąpione węzłem o schemacie układu inwersji i odwrotnie.

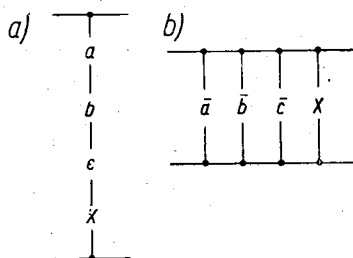
Obwód szeregowego połączenia elementów przedstawiony graficznie na rysunku 15a i wyrażony funkcją

$$F_1 = a \cdot b \cdot c \cdot X,$$

będzie przekształcony na zasadzie inwersji na obwód przedstawiony graficznie na rysunku 15b i wyrażony funkcją

$$F_2 = \bar{F}_1 = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + X.$$

W układzie pierwotnym (rys. 15a) element roboczy X będzie miał obwód włączony, jeśli wszystkie elementy wchodzące w skład układu są czynne. W relacji układu elektrycznego z przełącznikami element roboczy X będzie miał obwód włączony, jeśli wszystkie przełączniki będą czynne.



Rys. 15. Schemat układu elektrycznego elementu roboczego X

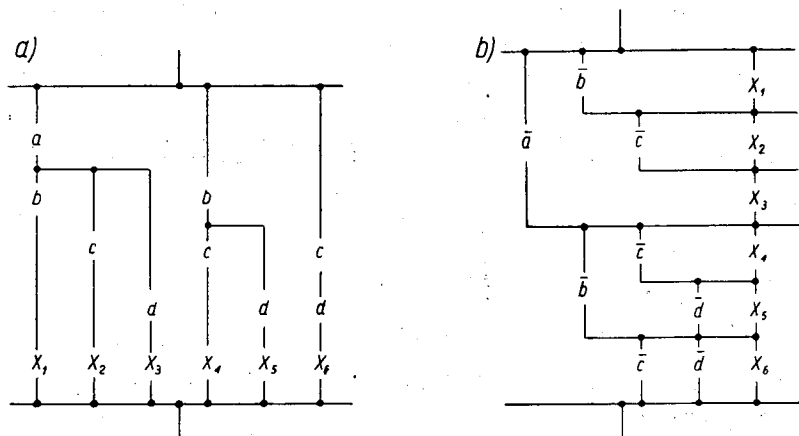
a) schemat układu normalnego, b) schemat układu inwersyjnego

W układzie inwersyjnym element roboczy wykonawczy X będzie miał obwód włączony, jeśli chociaż jeden z elementów zmiennych układu będzie w stanie biernym. W relacji układu elektrycznego z przełącznikami obwód roboczy wykonawczy elementu X będzie włączony, jeśli chociaż jeden z przełączników będzie w stanie biernym (pasywnym).

Przekształcanie na zasadzie inwersji nie daje uproszczenia układu i zmniejszenia ilości elementów, lecz dla pewnych układów elektrycznych stwarza się korzystniejsze warunki pracy zarówno co do wartości pa-

rametrów roboczych wynikających z warunków założeń, jak również i pewności pracy, tj. braku przekłamań. Przekształcenie to może mieć np. zastosowanie w układach deszyfratorów.

Na rysunku 16a przedstawiony jest układ deszyfratora normalnego, na rysunku 16b — układ deszyfratora inwersyjnego¹⁾.



Rys. 16. Schemat układu deszyfratora
a) schemat normalny, b) schemat inwersyjny

Dla obu układów są założone te same warunki pracy, a mianowicie poszczególne elementy wykonawcze $X_1, X_2, \dots, X_6$ wykonują pracę po zadziałaniu dwóch elementów odbiorczych roboczych spośród czterech elementów występujących w układzie elektrycznym deszyfratora.

W układzie deszyfratora normalnego praca dwóch dowolnych elementów odbiorczych, np. a i b , da jednoznaczne kryterium i spowoduje zadziałanie elementu roboczego wykonawczego X_1 . Zadziałanie przypadkowe, nie przewidziane normalnymi warunkami pracy, dowolnego trzeciego elementu odbiorczego, np. elementu d spowoduje dodatkowe zapracowanie elementów roboczych wykonawczych X_3, X_5 , czyli da przekłamanie.

Dla uniknięcia przekłamania tworzymy pełny schemat układu warunkujący wystąpienie wszystkich elementów odbiorczych w każdym obwodzie. Zapobiega to jednoczesnemu wystąpieniu dwóch lub nawet trzech zleceń wykonawczych.

Pełny schemat dla rozważanego układu jest podany na rysunku 17.

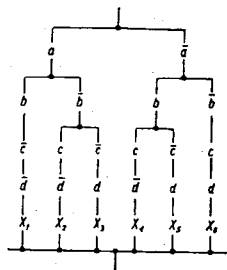
Ogólne wyrażenie funkcji dla układu deszyfratora podanego na rysunku 17 będzie

$$F = a[b \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} \cdot X_1 + \bar{b} \cdot (c \cdot \bar{d} \cdot X_2 + \bar{c} \cdot d \cdot X_3)] + \\ + \bar{a} \cdot [b \cdot (c \cdot \bar{d} \cdot X_4 + \bar{c} \cdot d \cdot X_5) + \bar{b} \cdot c \cdot d \cdot X_6].$$

¹⁾ Poz. literatury [1], strony 21 i 81.

Na schemacie inwersyjnym przedstawionym na rysunku 16b poszczególne elementy robocze wykonawcze $X_1, X_2 \dots X_6$ są zwierane przez styki elementów roboczych odbiorczych. Zadziałanie np. elementów a i b spowoduje anulowanie zwarcia elementu roboczego wykonawczego X_1 . Dodatkowe zadziałanie np. elementu odbiorczego d spowoduje włączenie

Rys. 17. Pełny schemat układu deszyfratora dla włączania sześciu elementów wykonawczych przy pomocy czterech elementów odbiorczych



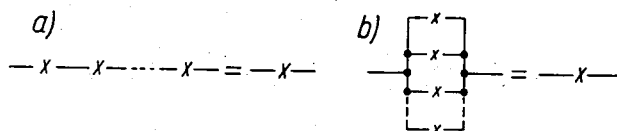
szeregowe elementów X_1, X_3, X_5 , czyli zwiększenie oporności obwodu, a tym samym zmniejszenie natężenia prądu. Przez wprowadzenie dodatkowego kryterium prądowego i dobrania parametrów roboczych prądu możemy stworzyć warunki, przy których nie wystąpi przekłamanie.

Ponieważ zasada tworzenia schematu polega na zwieraniu poszczególnych elementów roboczych wykonawczych $X_1, X_2 \dots X_6$ przez styki elementów odbiorczych roboczych a, b, c, d , można zastosować schemat inwersyjny w odniesieniu tylko do elementów lub poszczególnych obwodów, a nie dla całości schematu układu.

5.2. Przekształcanie dla uzyskania minimum elementów

Do przekształceń schematu układu dla uzyskania najmniejszej ilości elementów są wykorzystane prawa i zależności omówione w rozdz. 3.2.

Poza tym dla dokonywania przekształceń mogą być wykorzystane następujące typowe rozwiązania układów równoważnych.



Rys. 18. Schematy ilustrujące równoważne układy jednakowych styków
a) połączenie szeregowe, b) połączenie równoległe

a) Dowolną ilość szeregowo lub równoległe połączonych styków jednego elementu lub jednakowych grup styków różnych elementów można zastąpić jednym stykiem tego elementu lub jedną grupą styków ¹⁾.

¹⁾ Poz. literatury [1] str. 102.

Układ równoważny dla szeregowego połączenia styków jest podany na rysunku 18a. Układ taki można przedstawić w postaci zależności

$$x \cdot x \cdot x \dots x = x. \quad (41)$$

Układ równoważny dla równoległego połączenia styków jest podany na rysunku 18b. Układ taki można przedstawić w postaci zależności

$$x + x + \dots + x = x. \quad (42)$$

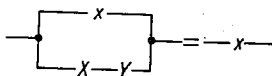
b) Schemat układu elektrycznego zawierający równoległe obwody, przy czym jeden z obwodów zawiera jeden styk dowolnego elementu i we wszystkich pozostałych równoległych obwodach taki sam styk połączony jest szeregowo ze stykami dowolnych pozostałych elementów, można zastąpić jednym stykiem tego elementu ¹⁾.

Na rysunku 19 jest przedstawiony schemat ilustrujący równoważność takiego układu.

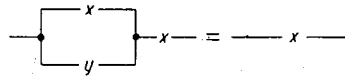
Po przeróbce i uwzględnieniu prawa absorpcji, że $y + 1 = 1$ [wzór (22)], oraz $x \cdot 1 = x$ [wzór (21)] otrzymujemy zależność w postaci

$$x + x \cdot y = x \cdot (1 + y) = x \cdot 1 = x. \quad (43)$$

c) Schemat układu elektrycznego zawierający grupy szeregowo połączonych styków, przy czym jedna z grup składa się z jednego styku dowolnego elementu i ten styk, jako równoległe dołączony do innych dowolnych styków, występuje we wszystkich pozostałych grupach, można zastąpić jednym powtarzalnym stykiem w grupach ¹⁾.



Rys. 19. Schemat ilustrujący równoważność układu z powtarzającym się stykiem w gałęziach równoległych



Rys. 20. Schemat ilustrujący równoważność układu elektrycznego z powtarzającym się stykiem w grupach połączonych szeregowo

Rysunek 20 przedstawia schemat ilustrujący równoważność takiego układu.

Układ taki można przedstawić w postaci zależności

$$x \cdot (x + y) = x \cdot x + x \cdot y = x + x \cdot y = x \cdot (1 + y) = x, \quad (44)$$

czyli zależność doprowadzona do postaci układu rys. 19.

Z powyższego wynika, że podane na rysunkach 19 i 20 układy są równoważne, czyli jeden układ przez zamianę połączeń szeregowych na równoległe, może być zastąpiony drugim układem i odwrotnie.

¹⁾ Poz. literatury [1] str. 102.

Podane w punktach a, b, c typowe rozwiązania przekształceń w odniesieniu do jednego styku powtarzalnego również będzie ważne w odniesieniu do grupy styków powtarzalnych.

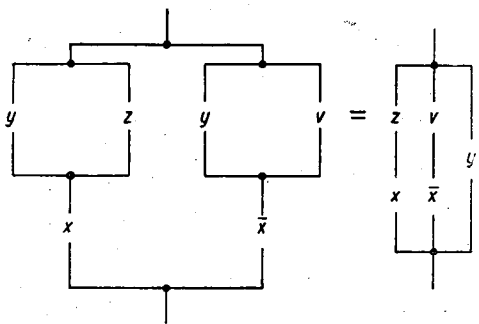
d) Dowolny styk równolegle dołączony do styku lub grupy styków dwóch różnych obwodów, przy czym jeden z tych obwodów jest połączony szeregowo z pewnym stykiem, a drugi z inwersją, to taki dowolny styk może być usunięty z poszczególnych obwodów i przyłączony równolegle do obu kompletnych obwodów ¹⁾.

Rysunek 21 przedstawia schemat ilustrujący równoważność takiego układu.

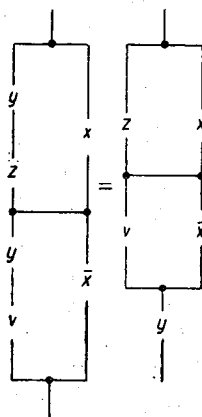
Po przeróbce i uwzględnieniu prawa stałej wartości logicznej $x + \bar{x} = 1$ [wzór (18)] wyrażenie dla danego układu może być przedstawione w postaci

$$\begin{aligned} x \cdot (y + z) + \bar{x} \cdot (y + v) &= x \cdot y + x \cdot z + \bar{x} \cdot y + \bar{x} \cdot v = \\ &= x \cdot z + \bar{x} \cdot v + y \cdot (x + \bar{x}) = x \cdot z + \bar{x} \cdot v + y. \end{aligned} \quad (45)$$

e) Dowolny styk włączony szeregowo do innych styków w dwóch grupach połączonych szeregowo, przy czym do jednej grupy jest równolegle załączony dowolny inny styk, a do drugiej grupy ten styk w postaci inwersji, to taki dowolny styk może być usunięty z obu grup i dołączony szeregowo do układu obu grup ¹⁾.



Rys. 21. Schemat ilustrujący równoważność układu elektrycznego dla zależności wg wzoru (45)



Rys. 22. Schemat ilustrujący równoważność układu dla zależności wg wzoru (46)

Schemat ilustrujący równoważność takiego układu jest podany na rysunku 22.

Układ taki można przedstawić w postaci zależności

$$(x + y \cdot z) \cdot (\bar{x} + y \cdot v) = (x + z) \cdot (\bar{x} + v) \cdot y. \quad (46)$$

¹⁾ Poz. literatury [1] str. 107.

Opracowania schematu układu elektrycznego dla warunków podanych w założeniach dokonuje się etapowo w następującej kolejności.

Na wstępie tworzy się indywidualne obwody dla poszczególnych elementów wykonawczych. W skład poszczególnych obwodów wchodzi bądź to styki elementów zgodnie z warunkami, bądź też styki wszystkich elementów występujących w danym układzie elektrycznym, przy czym styki nie objęte warunkami będą uzupełniające (inwersyjne).

W pierwszym przypadku będzie to schemat normalny danego układu, dostosowany do warunków pracy podanych w założeniach, a w drugim przypadku będzie to schemat ogólny z uwzględnieniem wszystkich elementów w poszczególnych obwodach.

Następnie, przy wykorzystaniu praw i zależności algebry Boole'a, dokonuje się przekształceń funkcji, doprowadzając do najprostszej postaci, i dla tej funkcji buduje się schemat układu elektrycznego.

Analizę budowy schematu układu elektrycznego rozpatrzono dla następującego przykładu. Należy zbudować schemat układu elektrycznego włączania obwodów czterech elementów roboczych wykonawczych X_1, X_2, X_3, X_4 przy pomocy pięciu elementów odbiorczych A, B, C, D, E dla następujących warunków pracy:

dla elementu X_1 włączenie obwodu poprzez styki a, b, c ,

"	"	X_2	"	"	"	"	$b, d,$
"	"	X_3	"	"	"	"	$a, d, e,$
"	"	X_4	"	"	"	"	$c, d, e.$

Zapis schematowy opracowywanego układu jest podany na rysunku 23a. Ogólne wyrażenie funkcji będzie:

$$F = a \cdot b \cdot c \cdot X_1 + b \cdot d \cdot X_2 + a \cdot d \cdot e \cdot X_3 + c \cdot d \cdot e \cdot X_4 = \\ = b \cdot (a \cdot c \cdot X_1 + d \cdot X_2) + d \cdot e \cdot (a \cdot X_3 + c \cdot X_4).$$

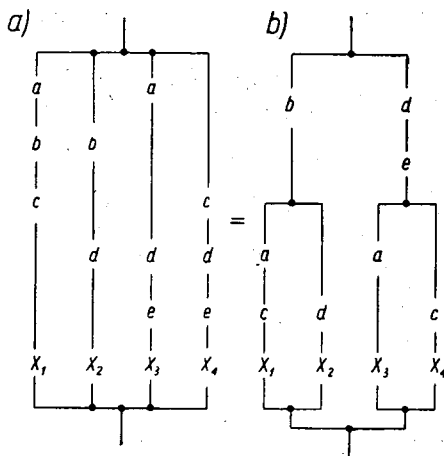
Ogólne wyrażenie bez przekształceń zawiera 11 elementów, a wyrażenie przekształcone zawiera 8 elementów pomocniczych. Ze względu na jednoznacznie określone warunki pracy każdego elementu wykonawczego dalszych uproszczeń nie da się wprowadzić.

Mechanizm przekształceń dla tego rodzaju układów elektrycznych polega na wyłączeniu przed nawias jednakowych elementów i zlikwidowaniu obwodów stale zamkniętych (prawo rozkładu stałej wartości logicznej — wzór 33), oraz obwodów stale otwartych (prawo rozkładu stałej wartości logicznej — wzór 34).

Wyniesienie przed nawias symbolu pewnego elementu lub inwersji symbolu tego elementu powoduje zredukowanie liczby styków tego elementu do jednego styku zwykłego, ewentualnie przełączającego (dla inwersji).

W normalnych układach elektrycznych o połączeniach szeregowo-równoległych liczba styków na dalszych stopniach połączeń, licząc od strony

wejścia, będzie progresywnie wzrastać. Dla pewnych układów elektrycznych, przy pewnych założonych warunkach, schemat układu elektrycznego można jeszcze bardziej uprościć, a mianowicie poza przekształceniem analitycznym funkcji przekształcić upraszczany układ na układ



Rys. 23. Schemat układu elektrycznego czterech elementów wykonawczych X_1, X_2, X_3, X_4

a) zapis schematowy zgodnie z warunkami założeń, b) schemat równoważny układu przekształconego

mostkowy. Na układ mostkowy może być przekształcony pewien fragment układu złożonego, względnie układ specjalny, jak np. układ elektryczny z jednym elementem roboczym wykonawczym, którego obwód zamyka się, zgodnie z założonymi warunkami pracy, w różnych relacjach pracy pomocniczych elementów odbiorczych.

Charakterystyczną cechą każdego układu, który można przekształcić na układ mostkowy, jest to, że każdy element na wejściu układu ma połączenie z każdym elementem na wyjściu układu elektrycznego.

Przykład. Obwód roboczy elementu wykonawczego X zamyka się w relacji czterech zestawów styków a, b, c, d, e, f, g .

1. $X - a \cdot b \cdot d,$
2. $X - a \cdot b \cdot g \cdot f,$
3. $X - c \cdot e \cdot f,$
4. $X - c \cdot e \cdot g \cdot d.$

Schemat układu elektrycznego jest podany na rysunku 24a.

Ogólne wyrażenie funkcji będzie:

$$F = (a \cdot b \cdot d + a \cdot b \cdot g \cdot f + c \cdot e \cdot g \cdot d + c \cdot e \cdot f) \cdot X = \\ = [a \cdot b \cdot (d + g \cdot f) + c \cdot e \cdot (f + g \cdot d)] \cdot X.$$

Ogólne wyrażenie bez przekształceń zawiera 14 elementów, a wyrażenie przekształcone zawiera 10 elementów pomocniczych.

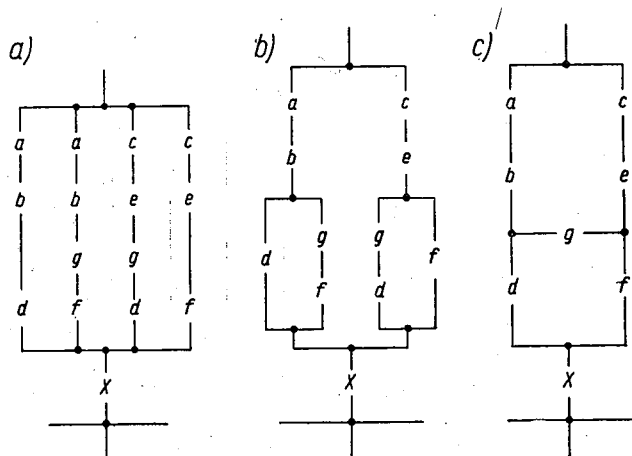
Schemat dla wyrażenia przekształconego jest podany na rysunku 24b. Dolny fragment (wyjście) schematu rys. 24b przedstawia cztery gałęzie równoległe o wyrażeniu

$$d + g \cdot f + g \cdot d + f.$$

Po dokonaniu przeróbek wyrażenie to można doprowadzić do postaci

$$d + g \cdot f + g \cdot d + f = d + f + g(d + f) = (d + f)(1 + g) = (d + f) \cdot 1,$$

gdyż zgodnie z prawem absorpcji [wzór (22)] $1 + g = 1$.



Rys. 24. Schematy układu elektrycznego

a) normalny — zgodnie z warunkami założeń, b) uproszczony na podstawie przekształceń funkcji, c) mostkowy — o najmniejszej ilości elementów

Z powyższego rozważania wynika, że w zastępczym układzie można włączyć dwie gałęzie równoległe składające się z elementów $d \cdot f$. Ponieważ, jak wynika z układu dolnego fragmentu podanego na rys. 24b, element g jest włączony bądź to szeregowo z elementem f , a równoległe do elementu d , lub odwrotnie, a zatem element g tworzy z elementami d i f oczko lub w relacji inwersji węzeł. Wynika to również z prawa rozkładu stałej wartości logicznej [wzory (32) i (33)], że w relacji schematu układu elektrycznego będzie to obwód stale zamknięty.

Powyższe przekształcenie daje układ mostkowy przedstawiony na rys. 24c. Układ ten zawiera tylko siedem elementów pomocniczych.

Przy dokonywaniu przekształceń metoda postępowania w dużej mierze zależy od warunków założeń i eksploatacji. Mogą występować inne dodatkowe warunki, jak np. rozdział styków zgodnie z założeniami, uzyskanie najmniejszej ilości połączeń pomiędzy określonymi grupami styków itp. Powyższe dodatkowe warunki mogą w pewnych wypadkach ograniczać możliwości redukcji elementów (styków).

Ważnym zagadnieniem przy opracowywaniu schematu układu elektrycznego jest równomierny rozdział styków na poszczególne elementy,

gdyż wówczas można zastosować jeden typ elementu. Metoda postępowania zostanie omówiona na przykładzie układu deszyfratora.

Przy przekazaniu z aparatury nadawczej do aparatury odbiorczej pewnej informacji w postaci sygnału wieloimpulsowego, przy założeniu, że poszczególne sygnały zawierają jednakową ilość impulsów i występujące w sygnale impulsy są różne, można określić ilość możliwych do uzyskania sygnałów ze wzoru na kombinację bez powtórzeń z n elementów po k ¹⁾.

$$s = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad (47)$$

gdzie:

- s — C_n^k — ilość sygnałów,
- k — ilość impulsów w sygnale,
- n — ilość impulsów o różnych cechach.

Dla spełnienia warunku, aby w układzie deszyfratora aparatury odbiorczej każdy z odbieranych sygnałów dawał indywidualne kryteria na poszczególne elementy odbiorcze wykonawcze, deszyfrator musi zawierać ilość roboczych elementów odbiorczych wykonawczych równą ilości przekazywanych sygnałów. Obwód każdego elementu wykonawczego musi być wyposażony w ilość elementów odbiorczych pomocniczych równą ilości impulsów w sygnale.

Kombinacje zestawów styków elementów pomocniczych dla poszczególnych obwodów tworzymy z wybraniem k impulsów spośród n impulsów będących do dyspozycji.

Dla założeń $n = 4$, $k = 2$ ilość sygnałów będzie równa

$$s = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{4!}{2!2!} = 6.$$

W aparaturze odbiorczej dajemy układ deszyfratora z wybraniem dwóch spośród czterech elementów a , b , c , d , oraz wyposażenie sześciu obwodów odbiorczych wykonawczych elementów X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , X_5 , X_6 .

Wyrażenie funkcji będzie

$$\begin{aligned} F &= a \cdot b \cdot X_1 + a \cdot c \cdot X_2 + a \cdot d \cdot X_3 + b \cdot c \cdot X_4 + b \cdot d \cdot X_5 + \\ &+ c \cdot d \cdot X_6 = a \cdot (b \cdot X_1 + c \cdot X_2 + d \cdot X_3) + b \cdot (c \cdot X_4 + \\ &+ d \cdot X_5) + c \cdot d \cdot X_6. \end{aligned}$$

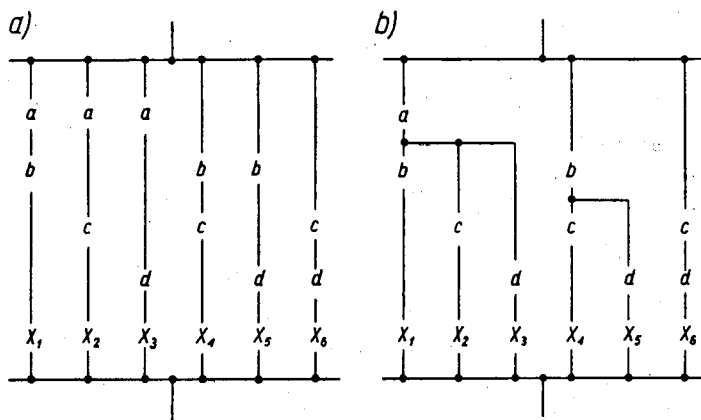
Wyrażenie początkowe zawiera 12 elementów, a wyrażenie przekształcone zawiera 9 elementów.

Zapisy graficzne tych wyrażeń są podane na rysunkach 25a i 25b.

¹⁾ Poz. literatury [2] str. 24.

Schemat układu przekształconego zawiera 9 styków elementów o nierównomiernym rozkładzie na poszczególnych stopniach, a mianowicie:

- 1 stopień — a — 1 szt.,
- 2 „ — b — 2 szt.,
- 3 „ — c — 3 szt.,
- 4 „ — d — 3 szt.,



Rys. 25. Schemat układu deszyfratora z sześcioma elementami wykonawczymi
a) schemat początkowy o 12 elementach, b) schemat przekształcony o 9 elementach

W celu uzyskania równomiernego rozkładu styków na poszczególnych stopniach należy wprowadzić następujący podział:

- 1 stopień — a — 2 szt.,
- 2 „ — b — 2 szt.,
- 3 „ — c — 2 szt.,
- 4 „ — d — 3 szt.

Z porównania podziału styków wynika, że na pierwszym stopniu należy

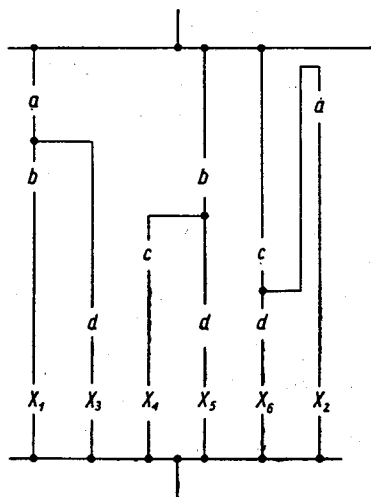
Tablica 3
Zestawienie rozkładu styków

Ele- ment	Ilość styków poszcze- gólnych elementów		Zmiana
	rozkład nierówno- mierny	rozkład równo- mierny	
a	1	2	zwiększyć o 1
b	2	2	bez zmiany
c	3	2	zmniejszyć o 1
d	3	3	bez zmiany

zwiększyć ilość styków o jeden, drugi stopień i czwarty pozostają bez zmiany, a na trzecim stopniu ilość styków należy zmniejszyć o jeden.

W tablicy trzeciej podano zestawienie styków w obu relacjach.

Z omówienia i zestawienia podanego w tablicy trzeciej wynika, że obwód $a-c$ (dla elementu X_2) należy zlikwidować oraz że należy zmienić fragment układu szeregowego łączenia $c-d$ (dla X_6) na dwie gałęzie równoległe $c-d$ i $c-a$ (dla X_6 i X_2).



Rys. 26. Schemat układu deszyfratora o równomiernym rozkładzie styków

W tablicy czwartej podano zestawienie symbolicznego zapisu obwodów poszczególnych elementów wykonawczych $X_1 \dots X_6$, oraz na rysunku 26 podano zmieniony schemat układu elektrycznego deszyfratora.

Tablica 4
Symboliczny zapis obwodów elementów $X_1 \dots X_6$

Symboliczny zapis obwodów nierównomiernego rozkładu styków	Numer obwodu	Symboliczny zapis obwodów równomiernego rozkładu styków	Numer obwodu
a — b	1	a — b	1
a — c	2	a — d	3
a — d	3	b — c	4
b — c	4	b — d	5
b — d	5	c — d	6
c — d	6	c — a	2

WYKAZ LITERATURY

1. Gawriłow M. A.: Teorja relejno-kontaktnych schiem. Moskwa 1950.
2. Judycki St.: Analiza sygnałów impulsowych. — Rozpr. Elektr. t. V, 1959.
3. Shannon C.: The Synthesis of Two-Terminal Switching Circuits. — The Bell Syst. Techn. Journ. 1949, Nr. 1, p. 59—98.

S. JUDYCKI

BOOLEAN ALGEBRA AS APPLIED TO THE ANALYSIS
AND SYNTHESIS OF THE TWO-STATE CIRCUITS

Summary

In the paper the application of the Boolean Algebra to the analysis and the synthesis of the electrical switching circuits is described.

The general rules of the Boolean Algebra are given including its analytical and graphical descriptive tools.

In the following the methods of synthesis of functional circuits the methods of checking these circuits and the minimalization and optimization methods of these circuits are described.

Some examples of typical equivalent and transformed switching circuits are given.

S. JUDYCKI

APPLICATION D'ALGÈBRE DE BOOLE À L'ANALYSE ET SYNTHÈSE
DES SCHÉMAS BISTABLES

Résumé

On a présenté l'application de l'algèbre de Boole à l'analyse et synthèse des schémas électriques avec des éléments bistables.

On a donné les principes généraux de la construction de tels schémas, les lois et les dépendances de l'algèbre de Boole ainsi que les méthodes analytique et graphique de l'enregistrement.

On a discuté aussi les méthodes de la synthèse et leurs applications à la construction des schémas, les méthodes de l'analyse de contrôle des schémas en train d'élaboration, les méthodes de transformation des schémas bistables pour obtenir le nombre minimum des éléments ainsi que pour obtenir une disposition uniforme des éléments sur des étages particulières du schéma bistable.

On a donné des exemples de la solution typique des schémas équivalents ainsi que des schémas transformés.

S. JUDYCKI

ANWENDUNG DER ALGEBRA VON BOOLE ZUR ANALYSE UND SYNTHESE
VON ZWEIZUSTAND-SCHALTUNGEN

Zusammenfassung

In dem Artikel wurde die Anwendung der Algebra von Boole zur Analyse und Synthese von elektrischen Schaltungen mit Elementen in zwei Zuständen erörtert.

Es wurden allgemeine Grundsätze des Schaltungs-aufbaues, Regeln und Beziehungen der Algebra von Boole sowie Methoden der analytischen und graphischen Aufzeichnung angegeben.

Weiterhin wurden Methoden der Synthese und ihre Anwendung für den Aufbau von Schaltungen, Methoden der Kontrollanalyse der gegebenen Schaltungen beschrieben; die Methoden der Umbildung einer Zweizustand-Schaltung zwecks Erlangung einer geringsten Anzahl von Elementen sowie Erzielung einer gleichmässigen Verteilung der Elemente (Kontakte) in diversen Stufen der Schaltung.

Auch wurden Beispiele typischer Lösungen äquivalenter und transformierter Schaltungen angeführt.

С. ЮДЫЦКИ

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГЕБРЫ БУЛЯ ДЛЯ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА СХЕМ
С ДВУМЯ СОСТОЯНИЯМИ

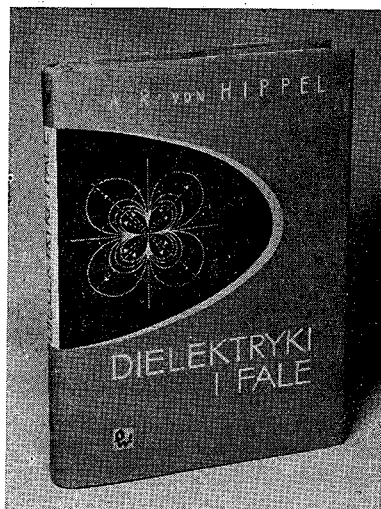
Резюме

Описано применение алгебры Буля для исследования анализа и синтеза электрических схем с элементом с двумя состояниями.

Изложено принципиальное решение построения схем, основные теоремы и соотношения алгебры Буля, а также методы графической и аналитической записи.

Описаны методы синтеза и их применение при построении схем, методы контрольного анализа разрабатываемых схем, методы преобразования схем с устройствами с двумя состояниями с целью получения минимального количества элементов, а также получение равномерного распределения элементов (контактов) в отдельных каскадах схем с двумя состояниями.

Приведены примеры типовых решений эквивалентных и преобразованных схем.



s. 493, zł 65.—

Artur R. von Hippel

Dielektryki i fale

Autor przedstawia procesy polaryzacji dielektrycznej magnesowania i przewodnictwa elektrycznego w gazach, cieczach i ciałach stałych.

WŁADYSŁAW MAJEWSKI jr

Podstawy krakowianowej analizy układów linearnych

Rękopis dostarczono 25. 2. 1963

Niniejszy artykuł poświęcony jest krakowianowej analizie układów linearnych. Rachunek krakowianowy, niemal równoważny rachunkowi macierzowemu w zastosowaniach teoretycznych, przewyższa go znacznie w zastosowaniach praktycznych — obliczeniowych.

Pierwsza część artykułu omawia krakowianową analizę czwórników. Najpierw dyskutowane są równania łańcuchowe czwórnika i krakowian łańcuchowy czwórnika. Rozważane jest również łączenie łańcuchowe czwórników. Następnie omówione są krakowianowe metody wyznaczania oporności wejściowych i tamowności skutecznych. Na zakończenie omówione są inne krakowiany czwórnika.

Druga część artykułu omawia krakowianową analizę sieci. Rozważane są równania oczkowe i węzłowe sieci oraz równania uniwersalne. Podana jest krakowianowa metoda rozwiązywania układu równań sieci oraz krakowianowa metoda wyznaczania układu odwrotnego. Następnie została omówiona metoda wyznaczania oporności wejściowych i przejściowych sieci oraz metoda wyznaczania wyznacznika sieci. Jako przykład omówiono wyznaczanie parametrów wzmacniacza ze sprzężeniem zwrotnym. Na zakończenie rozważono zakres stosowalności rachunku krakowianowego w analizie sieci.

W przypisach zostały przedstawione podstawy rachunku krakowianowego.

1. WSTĘP

Tematem niniejszego artykułu jest krakowianowa analiza elektrycznych układów linearnych — czwórników i sieci. Rachunek krakowianowy wprowadzony przez polskiego matematyka i astronoma prof. dr Tadeusza Banachiewicza i rozwijany dalej przez jego Szkołę jest odmianą rachunku macierzowego. Pozornie niewielkie różnice w określeniu niektórych działań¹⁾ sprawiły, że rachunek krakowianowy stał się o wiele potężniejszym narzędziem rachunkowym niż rachunek macierzowy. Pod względem teoretycznym oba rachunki są niemal równoważne. Rachunek krakowianowy umożliwia stosunkowo bardzo proste rozwiązywanie wielu zagadnień algebry liniowej, a w szczególności układów równań liniowych. Z tego względu rachunek ten znalazł zastosowanie w wielu dziedzinach nauki i techniki, a przede wszystkim w astronomii, geodezji,

¹⁾ Przede wszystkim odmienna definicja mnożenia.

inżynierii budowlanej i matematyce obliczeniowej. Dotychczasowy brak prac z zakresu teleelektrycznych i elektrycznych zastosowań rachunku krakowianowego¹⁾ nie dowodzi bynajmniej braku zapotrzebowania na takie prace. Rachunek krakowianowy jest rachunkiem młodym i powstałym w kołach zupełnie nie związanych z elektryką czy teleelektryką. Dlatego konieczny był pewien czas, aby rachunek ten mógł wyjść poza swój teren „rodzinny”.

Podstawową klasą układów elektrycznych są tzw. układy linearne, których równania różniczkowe przebiegów chwilowych są równaniami liniowymi. Stosując transformację funkcjonalną (przekształcenie Laplace'a w ogólnym przypadku, a metodą symboliczną dla występujących najczęściej przebiegów sinusoidalnie zmiennych) otrzymujemy z liniowych równań różniczkowych liniowe równania algebraiczne. Tak więc rozwiązanie wszelkich problemów z dziedziny elektrycznych układów linearnych prowadzi do problemów z zakresu algebry liniowej, w których może być zastosowany rachunek krakowianowy.

Zastosowanie krakowianów w elektryce i teleelektryce może mieć dwojaki charakter. Po pierwsze może polegać na formalnym rozwiązywaniu konkretnych problemów obliczeniowych wynikających z zagadnień elektrycznych czy teleelektrycznych, bez wnikania głębiej w istotę tych problemów. Po drugie może polegać na wprowadzeniu symboliki i metodologii krakowianowej nie przy rozwiązywaniu problemów, lecz już przy ich stawianiu. Pierwsza możliwość prowadzi jedynie do zastosowania algebry krakowianowej bez żadnych modyfikacji i nie jest specjalnie interesująca. Druga możliwość, którą zajmować się będziemy w niniejszym artykule, prowadzi do zastosowania krakowianów jako nowego narzędzia do badania zjawisk i procesów. W tym ujęciu krakowiany głęboko wnikają w rozpatrywaną dziedzinę, co prowadzi do nowych i ciekawych koncepcji i znacznych zysków praktycznych.

Krakowianowe metody rozwiązywania zagadnień algebraicznych dają — jak wiadomo — w stosunku do metod klasycznych znaczne zyski. Zyski te są dwojakiego charakteru. Po pierwsze ulega zmniejszeniu ilość działań. Dla przykładu można podać, że ilość działań potrzebnych do rozwiązania układu 5-ciu równań liniowych metodą krakowianową wynosi 135, a metodą wyznacznikową 2309. Odpowiednie liczby dla 10-ciu równań wynoszą 870 i ok. 129 000 000. Po drugie ulega zmniejszeniu wysiłek myślowy konieczny do rozwiązania danego zagadnienia. Wynika to z faktu, że wzory krakowianowe są gotowymi i wygodnymi schematami rachunkowymi. W niektórych, zwłaszcza klasycznych zastosowaniach krakowianów występują zyski obu typów, w innych tylko zysk drugiego typu. W zastosowaniach elektrycznych i teleelektrycznych występują bądź zyski obu typów (analiza sieci), bądź też głównie zysk drugiego typu (analiza czwórników).

¹⁾ Poza pracami autora — wykaz literatury.

Najbardziej podstawowe własności krakowianów zostały dla wygody czytelnika podane w przypisach. Czytelników pragnących pogłębić wiadomości z rachunku krakowianowego odsyłamy do bogatej literatury z tego zakresu (wykaz literatury). Niniejsza publikacja jest skrótem najbardziej istotnych rozdziałów pracy doktorskiej autora [18].

2. KRAKOWIANOWA ANALIZA CZWÓRNIKÓW

2.1. Zagadnienia ogólne

Czwórnikiem elektrycznym nazywamy układ posiadający dwie pary zacisków (oznaczone 1 i 2) i zdolny do przenoszenia energii elektrycznej za pośrednictwem tych par zacisków i tylko za ich pośrednictwem. Dla scharakteryzowania czwornika należy podać tzw. parametry własne czwornika. Istnieją różne rodziny parametrów własnych, ale zawsze konieczne jest podanie czterech parametrów (w przypadkach szczególnych ilość parametrów niezależnych może być mniejsza).

Do pierwszej grupy parametrów własnych czwornika można zaliczyć parametry liniowe — parametry łańcuchowe proste i odwrotne, parametry opornościowe, parametry przewodnościowe i parametry mieszane dwóch rodzajów.

Do drugiej grupy parametrów własnych czwornika można zaliczyć parametry falowe — oporności falowe i tamowności falowe.

Oprócz parametrów własnych czwornika rozważa się parametry robocze — oporności wejściowe, tamowności skuteczne, tamowności wtrąceniowe i tamowności skrośne oraz przepustowości skrośne i skuteczne¹⁾.

Rozważania niniejszego artykułu przyjmują za punkt wyjścia klasyczną teorię czworników w postaci przedstawionej w pracy [12].

Do podstawowych zagadnień z analizy czworników można zaliczyć następujące:

1. Wyznaczanie parametrów własnych czwornika, gdy dana jest jego struktura i wartości elementów.

2. Wyznaczanie parametrów własnych czwornika powstałego z połączenia kilku czworników składowych, gdy dane są parametry własne tych czworników.

3. Wyznaczanie parametrów roboczych czwornika, gdy dane są jego parametry własne; w szczególności wyznaczanie oporności wejściowych i tamowności skutecznych lub skrośnych, gdy dane są parametry falowe.

4. Wyznaczanie napięć i prądów zewnętrznych, gdy dane są parametry własne czwornika i oporności źródła i odbiornika.

¹⁾ Przepustowości skrośne i skuteczne nie są na ogół stosowane w klasycznej teorii czworników, znajdują one zastosowanie w układach elektronicznych i w automatyce.

Przez „wyznaczanie” rozumiemy tu bądź przeprowadzanie obliczeń na liczbach szczególnych, bądź też wyprowadzanie odpowiednich wzorów ogólnych.

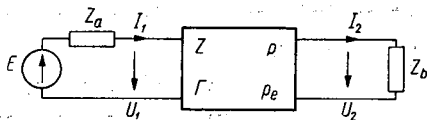
W dalszych rozważaniach zajmiemy się zagadnieniami 2 i 3 pomijając zagadnienie 1 jako nietypowe w teorii czwórników a związane raczej z teorią sieci elektrycznych i zagadnienie 4 jako bardziej szczegółowe.

Rachunek macierzowy znajduje od dawna zastosowanie w analizie czwórników — przede wszystkim w zagadnieniu 2. Zastosowanie rachunku krakowianowego daje szereg dodatkowych korzyści wynikających z faktu, że wzory krakowianowe stanowią gotowe i bardzo wygodne schematy obliczeniowe, zwłaszcza przy obliczeniach na liczbach szczególnych. Wzory macierzowe tej własności nie posiadają, a nawet przeciwnie są bardzo niedogodne do obliczeń praktycznych¹⁾. Zysk z zastąpienia rachunku macierzowego rachunkiem krakowianowym występuje w analizie czwórników w sposób wyraźny i polega na występowaniu prostszych schematów rachunkowych. Natomiast ze względu na niewielką ilość elementów krakowianu czwórnika (cztery) nie ulega zmniejszeniu ilość działań.

Rachunek krakowianowy znajduje również zastosowanie w rozwiązywaniu zagadnień 3 i 4 prowadząc do nowych, specyficznie krakowianowych metod obliczeniowych. Metody takie nie zostały dotąd opracowane na bazie rachunku macierzowego; byłoby to możliwe, choć mniej wygodne. Te nowe metody dają w stosunku do metod klasycznych zysk na przejrzystości obliczeń, a częściowo i na ilości działań.

2.2. Krakowian łańcuchowy czwórnika

Z omówionych poprzednio liniowych parametrów własnych czwórnika największe znaczenie mają parametry łańcuchowe — proste i odwrotne. Dlatego obecnie zajmiemy się ich bliższym omówieniem.



Rys. 2-1. Czwórnik pracujący między źródłem a odbiornikiem

Rozważmy czwórnik o parametrach falowych Z , ρ , Γ , ρ_e pracujący między źródłem o *sem*-nej E i oporności Z_a a odbiornikiem o oporności Z_b (rys. 2-1). Równania łańcuchowe takiego czwórnika mają postać.

$$\begin{aligned} U_1 &= a_{11}U_2 + a_{12}I_2, \\ I_1 &= a_{21}U_2 + a_{22}I_2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

¹⁾ Wynika to przede wszystkim z odmiennych definicji mnożenia przyjętych w rachunku macierzowym i krakowianowym.

Przepisując ten układ równań w postaci równania krakowianowego otrzymujemy

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 \mathbf{a}_0, \quad (2.2)$$

gdzie

$$\mathbf{X}_i = \begin{Bmatrix} U_i \\ I_i \end{Bmatrix}, \quad i = 1, 2 \quad (2.3)$$

a

$$\mathbf{a}_0 = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{Bmatrix}. \quad (2.4)$$

Krakowian $\mathbf{a}_0$ będziemy nazywać krakowianem łańcuchowym podstawowym transponowanym. Ponadto wprowadzimy krakowian łańcuchowy podstawowy prosty ¹⁾ określony wyrażeniem

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Bmatrix}. \quad (2.5)$$

Układ równań (2.1) można również rozwiązać względem U_2, I_2 . Otrzymamy wtedy

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1 \mathbf{b}_0, \quad (2.6)$$

gdzie

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{a}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \begin{Bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{Bmatrix}. \quad (2.7)$$

Krakowian $\mathbf{b}_0$ będziemy nazywać krakowianem łańcuchowym sprzężonym transponowanym. Ponadto wprowadzimy krakowian łańcuchowy sprzężony prosty określony wyrażeniem

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}_0^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \begin{Bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{Bmatrix}. \quad (2.8)$$

Rozważmy obecnie ten sam czwórnik po przeniesieniu *sem*-nej na prawą stronę (rys. 2-2). Równania łańcuchowe mają w tym przypadku postać:

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{|\mathbf{a}|} [a_{22} U_1 + (-a_{12}) I_1], \\ I_2 &= \frac{1}{|\mathbf{a}|} [(-a_{21}) U_1 + a_{11} I_1]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Stosując poprzednie oznaczenia można ten układ równań przepisać w postaci:

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1 \mathbf{b}_0 \quad (2.10)$$

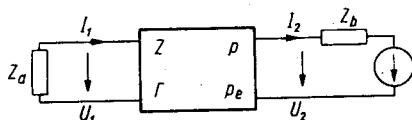
identycznej z (2.6).

¹⁾ W dalszym ciągu stosować będziemy w przypadkach nie budzących wątpliwości terminologię uproszczoną — „krakowian łańcuchowy” dla krakowianu $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

Rozwiązując układ (2.9) względem U_1, I_1 otrzymamy wyrażenie

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 \mathbf{a}_0 \quad (2.11)$$

identyczne z (2.2).



Rys. 2-2. Czwórnik pracujący między źródłem a odbiornikiem przy przeciwnym kierunku przenoszenia energii

Tak więc przy przyjętym systemie strzałkowania postać zależności $\mathbf{X}_1 = f_1(\mathbf{X}_2)$ i $(\mathbf{X}_2 = f_2(\mathbf{X}_1))$ nie zależy od kierunku przepływu energii.

Krakowiany łańcuchowe czwórnika mogą być powiązane z parametrami falowymi. Odpowiednie wzory mają postać:

$$\mathbf{a}_0 = p_e \begin{Bmatrix} \frac{\cosh \Gamma}{p} & \frac{\sinh \Gamma}{Z} \\ Z \sinh \Gamma & p \cosh \Gamma \end{Bmatrix}, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{b}_0 = \frac{1}{p_e} \begin{Bmatrix} p \cosh \Gamma & -\frac{\sinh \Gamma}{Z} \\ -Z \sinh \Gamma & \frac{\cosh \Gamma}{p} \end{Bmatrix}. \quad (2.13)$$

Wyznaczniki tych krakowianów są określone wzorami:

$$|a_0| = p_e^2, \quad (2.14)$$

$$|b_0| = \frac{1}{p_e^2}. \quad (2.15)$$

W szczególnym przypadku dla tzw. czwórnika energetycznie symetrycznego (np. biernego) $p_e = 1$ i powyższe wzory ulegają uproszczeniu.

Zastosowanie rachunku macierzowego zamiast krakowianowego prowadzi do nieco prostszych wzorów. Zamiast (2.2) otrzymamy:

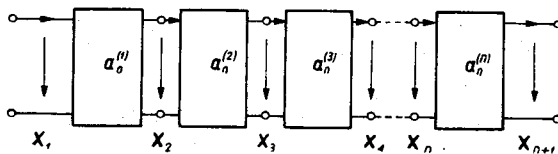
$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Nie zachodzi tu potrzeba wprowadzenia macierzy prostej i transponowanej. Jednak otrzymane wzory nie są dogodne do rachunku.

2.3. Łączenie łańcuchowe czwórników

Łączenie łańcuchowe czwórników występuje w praktyce bardzo często, a wyznaczenie parametrów własnych czwórnika zastępczego równoważnego łańcuchowi należy do bardziej skomplikowanych zagadnień obliczeniowych w teorii czwórników.

Rozważmy łańcuch czwórników scharakteryzowanych krakowianami podstawowymi transponowanymi (rys. 2-3) i oznaczmy przez $\mathbf{X}_k = \begin{Bmatrix} U_k \\ I_k \end{Bmatrix}$ krakowian odnoszący się do przekroju między $(k-1)$ -szym a k -tym czwórnikiem. Zadaniem naszym jest wyznaczenie krakowianu podstawowego



Rys. 2-3. Łańcuch czwórników

transponowanego czwórnika zastępczego. Sprowadza się to do podania zależności

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_{n+1} \mathbf{a}_0. \quad (2.17)$$

W tym celu piszemy oczywiste związki:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \mathbf{X}_2 \mathbf{a}_0^{(1)}, \\ \mathbf{X}_2 &= \mathbf{X}_3 \mathbf{a}_0^{(2)}, \\ \mathbf{X}_3 &= \mathbf{X}_4 \mathbf{a}_0^{(3)}, \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{X}_n &= \mathbf{X}_{n+1} \mathbf{a}_0^{(n)}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Podstawiając do pierwszego z tych równań wyrażenie na $\mathbf{X}_2$, a do równania otrzymanego w ten sposób wyrażenie na $\mathbf{X}_3$ itd. otrzymujemy ostatecznie:

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_{n+1} \mathbf{a}_0^{(n)} \mathbf{a}_0^{(n-1)} \dots \mathbf{a}_0^{(2)} \mathbf{a}_0^{(1)}. \quad (2.19)$$

Korzystając z reguły łączenia czynników w iloczynie otrzymujemy:

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_{n+1} [\mathbf{a}_0^{(1)} \mathbf{a}_0^{(2)} \mathbf{a}_0^{(3)} \dots \mathbf{a}_0^{(n)}]. \quad (2.20)$$

Porównując (2.20) z (2.17) mamy ostatecznie:

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0^{(1)} \mathbf{a}_0^{(2)} \mathbf{a}_0^{(3)} \dots \mathbf{a}_0^{(n)}. \quad (2.21)$$

Krakowian podstawowy transponowany czwórnika równoważnego łańcuchowi czwórników jest więc równy iloczynowi krakowianu podstawowego transponowanego pierwszego czwórnika kolejno przez krakowiany podstawowe proste dalszych czwórników, od drugiego do ostatniego.

W praktyce często bywa wygodniejsza inna postać wzoru (2.21), a mianowicie:

$$a_0 = \tau [a^{(n)} a_0^{(n-1)} a_0^{(n-2)} \dots a_0^{(1)}]. \quad (2.22)$$

Krakowian podstawowy transponowany czwórnika równoważnego łańcuchowi czwórników jest więc równy transpozycji iloczynu krakowianu podstawowego prostego ostatniego czwórnika kolejno przez krakowiany podstawowe transponowane dalszych czwórników, od przedostatniego do pierwszego.

Odpowiednie wzory w przypadku łańcucha trzech czwórników mają postać:

$$a_0 = a_0^{(1)} a^{(2)} a^{(3)} \quad (2.23)$$

lub

$$a_0 = \tau [a^{(3)} a_0^{(2)} a_0^{(1)}], \quad (2.24)$$

a w przypadku dwóch czwórników:

$$a_0 = a_0^{(1)} a^{(2)} \quad (2.25)$$

lub

$$a_0 = \tau [a^{(2)} a_0^{(1)}]. \quad (2.26)$$

Zależność odwrotną do (2.17), tzn. zależność

$$X_{n+1} = X_1 b_0, \quad (2.27)$$

wyprowadza się w sposób analogiczny. Ostateczne wzory ogólne na krakowian b_0 mają postać:

$$b_0 = b_0^{(n)} b^{(n-1)} b^{(n-2)} \dots b^{(1)} \quad (2.28)$$

lub

$$b_0 = \tau [b^{(1)} b_0^{(2)} b_0^{(3)} \dots b_0^{(n)}]. \quad (2.29)$$

Krakowian sprzężony transponowany czwórnika równoważnego łańcuchowi czwórników jest więc równy iloczynowi krakowianu sprzężonego transponowanego ostatniego czwórnika kolejno przez krakowiany sprzężone proste dalszych czwórników, od przedostatniego do pierwszego; krakowian ten jest też równy transpozycji iloczynu krakowianu sprzężonego prostego pierwszego czwórnika kolejno przez krakowiany sprzężone transponowane dalszych czwórników, od drugiego do ostatniego.

Odpowiednie wzory w przypadku dwóch i trzech czwórników mają postać:

$$b = b_0^{(3)} b^{(2)} b^{(1)} \quad (2.30)$$

lub

$$b_0 = \tau [b^{(1)} b_0^{(2)} b_0^{(3)}] \quad (2.31)$$

oraz

$$b_0 = b_0^{(2)} b^{(1)} \quad (2.32)$$

lub

$$b_0 = \tau [b^{(1)} b_0^{(2)}]. \quad (2.33)$$

Obliczenia krakowianu łańcuchowego czwórnika zastępczego najwygodniej jest przeprowadzić w sposób następujący:

- a) wypisuje się kolejno odpowiednie krakowiany poszczególnych czwórników, pozostawiając między nimi odstęp szerokości jednego krakowianu; odstęp nie jest potrzebny po pierwszym krakowianie,
- b) wykonuje się mnożenie pierwszego krakowianu przez drugi wypisując rezultat w odstępnie po drugim krakowianie,
- c) wykonuje się mnożenie powyższego rezultatu przez trzeci krakowian wypisując rezultat w odstępnie po trzecim krakowianie itd.

Kontrola prawidłowości obliczeń może być przeprowadzona w zwykły sposób. W przypadku jednak czwórników energetycznie symetrycznych kontrola ta może polegać na obliczaniu wyznaczników kolejno otrzymywanych krakowianów. Wszystkie te wyznaczniki powinny być równe jedności. Parametry falowe czwórnika zastępczego mogą być obliczone na podstawie wzorów podanych w 2.2.

W przypadku czwórników o parametrach zespolonych, dość częstym w praktyce, istnieją dwie drogi postępowania. Pierwsza droga polega na bezpośrednim mnożeniu krakowianów o elementach zespolonych. Nie jest to wygodne, gdyż nie można stosować bezpośrednio maszyn do liczenia. Drugą drogę rozważymy na przykładzie dwóch czwórników. Wprowadzając oznaczenia:

$$\begin{aligned} a^{(1)} &= p^{(1)} + jr^{(1)}, \\ a^{(2)} &= p^{(2)} + jr^{(2)}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

gdzie p i r są krakowianami o elementach rzeczywistych i korzystając ze wzoru (2.25) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0^{(1)} a^{(2)} = [p_0^{(1)} + jr_0^{(1)}] [p^{(2)} + jr^{(2)}] = \\ &= [p_0^{(1)} p^{(2)} - r_0^{(1)} r^{(2)}] + j [r_0^{(1)} p^{(2)} + p_0^{(1)} r^{(2)}]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Zastosowanie rachunku macierzowego do wyznaczania parametrów czwórnika zastępczego prowadzi do nieco prostszych wzorów typu:

$$[A] = [A^{(1)}] [A^{(2)}] [A^{(3)}] \dots [A^{(n)}]. \quad (2.36)$$

Jednak ze względu na bardziej dogodną definicję mnożenia w rachunku krakowianowym, wzory krakowianowe są bardziej przydatne w praktyce i to zarówno do konkretnych obliczeń, jak i do wyprowadzania wzorów ogólnych.

2.4. Wyznaczanie oporności wejściowych czwórnika

Rozpatrzmy obecnie krakowianową metodę wyznaczania oporności wejściowych czwórnika. Dla czwórnika z rys. 2-4 piszemy równania łańcuchowe ¹⁾ w postaci krakowianowej ²⁾:



Rys. 2-4. Wyznaczanie oporności wejściowej pierwotnej

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{Bmatrix} a_0. \quad (2.37)$$

Podstawiając do tego równania równanie odbiornika

$$U_2 = I_2 Z_b \quad (2.38)$$

i dzieląc obie strony przez I_2 otrzymujemy:

$$\frac{1}{I_2} \begin{Bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Z_b \\ 1 \end{Bmatrix} a_0. \quad (2.39)$$

Wprowadzając nowe oznaczenie:

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{Bmatrix} Y_{1-1} \\ Y_{1-2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Z_b \\ 1 \end{Bmatrix} a_0 \quad (2.40)$$

i biorąc pod uwagę, że oporność wejściowa pierwotna czwórnika jest określona wzorem:

$$W_1 = \frac{U_1}{I_1} \quad (2.41)$$

otrzymujemy ostatecznie:

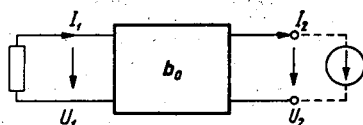
$$W_1 = \frac{Y_{1-1}}{Y_{1-2}}. \quad (2.42)$$

Oporność wejściowa pierwotna czwórnika jest więc równa ilorazowi górnego i dolnego elementu jednokolumnowego krakowianu $\mathbf{Y}_1$ określonego wzorem (2.40). W praktyce należy obliczać krakowian $\mathbf{Y}_1$ na liczbach szczególnych zgodnie z ogólną zasadą rachunku krakowianowego.

¹⁾ Jeżeli dane są parametry falowe czwórnika, to należy najpierw wyznaczyć parametry łańcuchowe, korzystając ze wzorów rozdziału 2.2.

²⁾ Nie stosujemy tu oznaczeń pomocniczych $\mathbf{X}_1$ i $\mathbf{X}_2$ dla zwiększenia przejrzystości.

Dla wyznaczenia oporności wejściowej wtórnej przeprowadza się analogiczne rozumowanie¹⁾ dla czwórnika z rys. 2-5 i otrzymuje się ostatecznie:



Rys. 2-5. Wyznaczanie oporności wyjściowej wtórnej

$$\mathbf{Y}_2 = \begin{Bmatrix} Y_{2-1} \\ Y_{2-2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Z_a \\ 1 \end{Bmatrix} b_0, \quad (2.43)$$

a stąd

$$W_2 = -\frac{Y_{2-1}}{Y_{2-2}}, \quad (2.44)$$

Otrzymaliśmy więc wzór analogiczny do (2.40).

Przedstawiona metoda umożliwia przeprowadzanie obliczeń od razu dla kilku wartości oporności obciążenia. Na przykład dla trzech wartości oporności obciążenia otrzymujemy odpowiednio zamiast (2.40) i (2.42):

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{Bmatrix} Y_{1-11} & Y_{1-12} & Y_{1-13} \\ Y_{1-21} & Y_{1-22} & Y_{1-23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Z'_b & Z''_b & Z'''_b \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} a_0, \quad (2.45)$$

$$W'_1 = \frac{Y_{1-11}}{Y_{1-21}},$$

$$W''_1 = \frac{Y_{1-12}}{Y_{1-22}}, \quad (2.46)$$

$$W'''_1 = \frac{Y_{1-13}}{Y_{1-23}}.$$

W przypadku czwórnika o parametrach zespolonych obciążonego opornością zespoloną krakowian $\mathbf{Y}_1$ obliczamy ze wzoru:

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} R_b \\ 1 \end{bmatrix} p_0 - \begin{bmatrix} X_b \\ 0 \end{bmatrix} r_0 + j \begin{bmatrix} R_b \\ 1 \end{bmatrix} r_0 + \begin{bmatrix} X_b \\ 0 \end{bmatrix} p_0, \quad (2.47)$$

gdzie

$$a = p + jr, \quad a \quad Z_b = R_b + jX_b, \quad (2.48)$$

a następnie stosujemy wzór (2.42) do otrzymanego krakowianu $\mathbf{Y}_1$ o parametrach zespolonych.

¹⁾ Należy zwrócić uwagę na to, że przy przyjętych zwrotach strzałek prądów i napięć (rys. 2-5) $U_1 = -I_1 Z_a$, a $W_2 = -\frac{U_2}{I_2}$. Stąd pochodzą znaki „-” we wzorach.

W występującym częściej przypadku czwórnika o parametrach zespolonych obciążonego opornością rzeczywistą otrzymamy zamiast (2.47) wyrażenie:

$$Y_1 = \begin{Bmatrix} Z_b \\ 1 \end{Bmatrix} p_0 + j \begin{Bmatrix} Z_b \\ 1 \end{Bmatrix} r_0. \quad (2.49)$$

Na zakończenie podamy dla porównania jeden ze wzorów zwykle stosowanych do wyznaczania oporności wejściowych.

$$W_1 = \frac{Z_b a_{11} + a_{12}}{Z_b a_{21} + a_{22}} \quad (2.50)$$

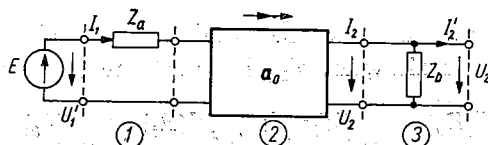
lub po wprowadzeniu parametrów falowych:

$$W_1 = \frac{\frac{Z_b}{p} \cosh \Gamma + Z \sinh \Gamma}{\frac{Z_b}{Z} \sinh \Gamma + Z \cosh \Gamma}. \quad (2.51)$$

Widać, że zysk ze stosowania metody krakowianowej, polegający na stworzeniu gotowego i wygodnego schematu rachunkowego, nie jest zbyt duży. Zysk ten może mieć jednak znaczenie — zwłaszcza przy dokładniejszych obliczeniach (większa ilość cyfr znaczących) dla kilku wartości oporności obciążenia.

2.5. Wyznaczanie tamowności skutecznych czwórnika

Rozpatrzmy obecnie krakowianową metodę wyznaczania tamowności skutecznych czwórnika. Dla wyznaczenia tamowności skutecznej czwórnika (rys. 2-6) weźmiemy pod uwagę wyrażenie:



Rys. 2-6. Wyznaczanie tamowności skutecznej pierwotnej czwórnika

$$\Gamma_{s1} = \ln \frac{E}{2U_2} - \frac{1}{2} \ln \frac{Z_a}{Z_b}. \quad (2.52)$$

Rozważmy czwórnik zastępczy dla łańcucha czwórników 1, 2, 3; założymy, że jego krakowian łańcuchowy wynosi a'_0 i napiszmy pierwsze z równań łańcuchowych:

$$U'_1 = a'_{11} U'_2 + a'_{12} I'_2. \quad (2.53)$$

Zgodnie z oznaczeniami podanymi na rys. 2-6 mamy:

$$\begin{aligned} U'_1 &= E, \\ U'_2 &= U_2, \\ I'_2 &= 0, \end{aligned} \quad (2.54)$$

Otrzymujemy więc ostatecznie:

$$E = a'_{11} U_2. \quad (2.55)$$

Tak więc wyznaczenie stosunku $\frac{E}{U_2}$, a co za tym idzie i tamowności skutecznej pierwotnej I'_{s1} sprowadza się do wyznaczenia elementu a'_{11} krakowianu łańcuchowego czwórnika zastępczego. Biorąc pod uwagę, że krakowiany łańcuchowe czwórników 1 i 3 wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned} a_0^{(1)} &= \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ Z_a & 1 \end{Bmatrix}, \\ a_0^{(3)} &= \begin{Bmatrix} 1 & Y_b \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

gdzie $Y_b = \frac{1}{Z_b}$,

i uwzględniając wyrażenie (2.23) otrzymujemy:

$$a'_0 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ Z_a & 1 \end{Bmatrix} a \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ Y_b & 1 \end{Bmatrix}. \quad (2.57)$$

Wykonując mnożenie mamy kolejno:

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ Z_a & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11} + Z_a a_{21} & a_{21} \\ a_{12} + Z_a a_{22} & a_{22} \end{Bmatrix}, \quad (2.58)$$

$$\begin{Bmatrix} a_{11} + Z_a a_{21} & a_{21} \\ a_{12} + Z_a a_{22} & a_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ Y_b & 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_s & * \\ * & * \end{Bmatrix}, \quad (2.59)$$

$$\text{gdzie} \quad a_s = a_{11} + Z_a a_{21} + Y_b a_{12} + Y_b Z_a a_{22}, \quad (2.60)$$

a * oznacza wielkości nas nie interesujące¹⁾. Z przebiegu mnożenia wnioskujemy, że nie jest potrzebne obliczenie drugiej kolumny iloczynu (2.58). Dlatego też wyrażenie (2.57) może być zastąpione prostszym, następującym wyrażeniem:

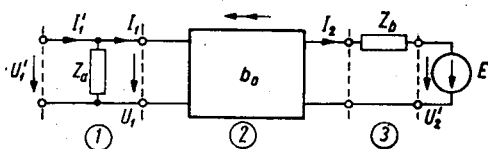
$$\begin{Bmatrix} 1 \\ Z_a \end{Bmatrix} a \begin{Bmatrix} 1 \\ Y_b \end{Bmatrix} = \{a_s\}, \quad (2.61)$$

¹⁾ Dążymy jedynie do wyznaczenia $a'_{11} = a_s$.

Krakowian $\{a_s\}$ jest krakowianem jednoelementowym o elemencie określonym (2.60). Ostatecznie mamy więc następujący wzór do obliczania Γ_{s1} :

$$\Gamma_{s1} = \ln \frac{a_s}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{Z_a}{Z_b}, \quad (2.62)$$

gdzie a_s określone jest wzorem (2.60). W praktyce należy obliczenia przeprowadzać na liczbach szczególnych zgodnie ze wzorami (2.61) i (2.62), a nie korzystając ze wzoru (2.60).



Rys. 2-7. Wyznaczanie tamowności skutecznej wtórnej czwórnika

Dla wyznaczenia tamowności skutecznej wtórnej czwórnika (rys. 2-7) określonej wzorem:

$$\Gamma_{s2} = \ln \frac{E}{2U_1} - \frac{1}{2} \ln \frac{Z_b}{Z_a} \quad (2.63)$$

przeprowadzamy analogiczne rozumowanie i otrzymujemy ostatecznie:

$$\Gamma_{s2} = \ln \frac{b_s}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{Z_b}{Z_a}, \quad (2.64)$$

gdzie b_s jest określone wzorem ¹⁾

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ -Z_b \end{Bmatrix} \mathbf{b} \begin{Bmatrix} 1 \\ -Y_a \end{Bmatrix} = \{b_s\}. \quad (2.65)$$

Przedstawiona metoda umożliwia przeprowadzanie obliczeń od razu dla kilku wartości oporności źródła i odbiornika. Na przykład dla dwóch wartości oporności źródła i trzech wartości oporności odbiornika, otrzymamy zamiast (2.61):

$$\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ Z'_a & Z''_a \end{Bmatrix} \mathbf{a} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ Y'_b & Y''_b & Y'''_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{s-11} & a_{s-12} \\ a_{s-21} & a_{s-22} \\ a_{s-31} & a_{s-32} \end{Bmatrix}. \quad (2.66)$$

Tamowność skuteczną pierwotną w przypadku pracy czwórnika między opornościami $Z_a = Z_a^{(i)}$ i $Z_b = Z_b^{(j)}$ wyznacza się wtedy ze wzoru:

$$\Gamma_{s1}^{(ij)} = \ln \frac{a_{s-ji}}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{Z_b^{(j)}}{Z_a^{(i)}}. \quad (2.67)$$

¹⁾ Pochodzenie znaków „-” jak w rozdz. 2.4.

W przypadku gdy czwórnik o parametrach zespolonych pracuje między opornościami rzeczywistymi¹⁾, wzór (2.61) przybierze postać:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ Z_a \end{Bmatrix} p \begin{Bmatrix} 1 \\ Y_b \end{Bmatrix} + j \begin{Bmatrix} 1 \\ Z_a \end{Bmatrix} r \begin{Bmatrix} 1 \\ Y_b \end{Bmatrix} = \{a_s\}, \quad (2.68)$$

$$\text{gdzie} \quad a = p + jr. \quad (2.69)$$

Na zakończenie podamy dla porównania wzór zwykle stosowany do wyznaczania tamowności skutecznej pierwotnej.

$$\Gamma_{s1} = \Gamma_1 + \ln \frac{Z_a + Z_1}{2\sqrt{Z_a Z_1}} + \ln \frac{Z_b + Z_2}{2\sqrt{Z_b Z_2}} + \ln(1 - q_1 q_2 e^{-2\Gamma}), \quad (2.70)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{Z}{p}, \\ Z_2 &= pZ, \\ q_1 &= \frac{Z_a - Z_1}{Z_a + Z_1}, \\ q_2 &= \frac{Z_b - Z_2}{Z_b + Z_2}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Porównując metodę krakowianową wyznaczania tamowności skutecznej czwornika z metodą klasyczną opartą na wzorze (2.70) możemy stwierdzić, że zastosowanie krakowianów prowadzi do dużych zysków zarówno pod względem ilości działań²⁾, jak i pod względem prostoty i przejrzystości wzorów obliczeniowych.

Oprócz tamowności skutecznej lub zamiast niej stosowana jest często tzw. tamowność wtrąceniowa $\Gamma_{w1(2)}$. Tamowność wtrąceniowa może być również łatwo wyznaczona metodą krakowianową przy pomocy związku

$$\Gamma_{w1(2)} = \Gamma_{s1(2)} - \ln \frac{Z_a + Z_b}{2\sqrt{Z_a Z_b}}. \quad (2.72)$$

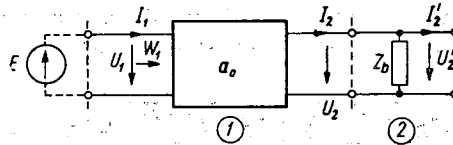
Wzór ten pozwala obliczyć tamowność wtrąceniową, gdy dana jest tamowność skuteczna.

¹⁾ Oporności pracy zespolone rzadko występują w praktyce.

²⁾ Przy porównywaniu ilości działań należy pamiętać, że pierwszy etap rachunku metodą krakowianową polega na wyznaczaniu parametrów łańcuchowych czwornika na podstawie znajomości jego parametrów falowych. We wzorze (2.70) natomiast występują bezpośrednio parametry falowe. Gdyby za podstawę przyjąć parametry łańcuchowe, a nie falowe, to korzyści ze stosowania krakowianów byłyby jeszcze większe.

2.6. Wyznaczanie tamowności skrośnych czwórników

Rozpatrzmy obecnie dwie krakowianowe metody wyznaczania tamowności skrośnych czwórników. Dla wyznaczania tamowności skrośnej pierwotnej czwórnik (rys. 2-8) weźmy pod uwagę wyrażenie:



Rys. 2-8. Wyznaczanie tamowności skrośnej pierwotnej czwórnik

$$\Gamma_{skr1} = \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2}. \quad (2.73)$$

Wyrażenie to można przedstawić w dwóch postaciach:

$$\Gamma_{skr1} = \ln \frac{U_1}{U_2} - \frac{1}{2} \ln \frac{W_1}{Z_b} \quad (2.74)$$

oraz

$$\Gamma_{skr1} = \frac{1}{2} \ln \frac{U_1}{U_2} + \frac{1}{2} \ln \frac{I_1 Z_b}{U_2}. \quad (2.75)$$

Rozważmy najpierw wyrażenie (2.74). Do wyznaczenia Γ_{skr1} na podstawie tego wyrażenia konieczne jest wyznaczenie stosunku napięć $\frac{U_1}{U_2}$ i oporności wejściowej pierwotnej W_1 . Dla wyznaczenia poszukiwanego stosunku napięć obliczamy współczynnik a'_{11} krakowianu łańcuchowego czwórnik zastępczego dla łańcucha czwórników 1, 2 podobnie jak w rozdz. 2.5. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\begin{Bmatrix} a'_{11} \\ a'_{12} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ Y_b \end{Bmatrix} = \{a_{skr}\}. \quad (2.76)$$

Mamy więc:

$$\Gamma_{skr1} = \ln a_{skr} - \frac{1}{2} \ln \frac{W_1}{Z_b}. \quad (2.77)$$

Oporność wejściowa pierwotna W_1 może być obliczona metodą krakowianową omówioną poprzednio.

Rozważmy obecnie wyrażenie (2.75). Dla wyznaczenia Γ_{skr1} na podstawie tego wyrażenia konieczne jest wyznaczenie stosunków $\frac{U_1}{U_2}$ i $\frac{I_1}{U_2}$. Dla wyznaczenia tych stosunków obliczamy współczynniki a'_{11} i a'_{21} kra-

kowianu łańcuchowego czwórnika zastępczego. Sprowadza się to do obliczenia następującego iloczynu:

$$a_0 \left\{ \begin{matrix} 1 \\ Y_b \end{matrix} \right\} = \{a_{skr} c_{skr}\}. \quad (2.78)$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\Gamma_{skr1} = \frac{1}{2} \ln a_{skr} + \frac{1}{2} \ln c_{skr} Z_b. \quad (2.79)$$

Do korzystania ze wzoru (2.77) nie jest potrzebna znajomość oporności wejściowej pierwotnej W_1 . Przeciwnie znajomość a_{skr} i c_{skr} umożliwia obliczenie W_1 ze wzoru:

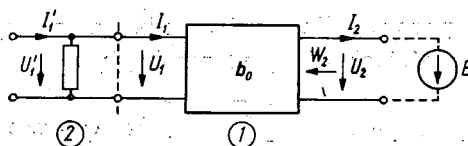
$$W_1 = \frac{a_{skr}}{c_{skr}}. \quad (2.80)$$

Niekiedy interesujące mogą być wielkości pokrewne z tamownością skróśną pierwotną, tzw. przepustowości (wzmocnienia) napięciowe, prądowe i mocowe (rys. 2-8). Definicje i wzory do obliczania tych wielkości są następujące:

$$k_{u1} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{a_{skr}}, \quad (3.81)$$

$$k_{i1} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{c_{skr} Z_b}, \quad (2.82)$$

$$k_{p1} = \frac{U_2 I_2}{U_1 I_1} = \frac{1}{a_{skr} c_{skr} Z_b}. \quad (2.83)$$



Rys. 2-9. Wyznaczanie tamowności skróśnej wtórnej czwórnika

Dla wyznaczenia tamowności skróśnej wtórnej czwórnika (rys. 2-9) określonej wzorem:

$$\Gamma_{skr2} = \frac{1}{2} \ln \frac{U_2 I_2}{U_1 I_1} \quad (2.84)$$

przeprowadzamy analogiczne rozumowanie i otrzymujemy ostatecznie:

$$\begin{Bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -Y_a \end{Bmatrix} = \{b_{skr}\} \quad (2.85)$$

oraz

$$\Gamma_{skr2} = \ln b_{skr} - \frac{1}{2} \ln \frac{W_2}{Z_a} \quad (2.86)$$

lub

$$b_0 \left\{ \begin{matrix} 1 \\ -Y_a \end{matrix} \right\} = \{b_{skr} d_{skr}\} \quad (2.87)$$

oraz

$$\Gamma_{skr2} = \frac{1}{2} \ln b_{skr} + \frac{1}{2} \ln (-d_{skr} Z_a). \quad (2.88)$$

Dalsze wzory mają postać

$$W_2 = -\frac{b_{skr}}{d_{skr}}, \quad (2.89)$$

$$k_{i2} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{1}{b_{skr}}, \quad (2.90)$$

$$k_{i2} = \frac{I_1}{I_2} = -\frac{1}{d_{skr} Z_a}, \quad (2.91)$$

$$k_{p2} = \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} = -\frac{1}{b_{skr} d_{skr} Z_a}. \quad (2.92)$$

Zagadnienie obliczania tamowności skrośnej dla kilku wartości oporności obciążenia i zagadnienie obliczania tamowności skrośnej dla czwórnik z zespolonymi parametrami wyglądają podobnie jak w przypadku tamowności skutecznej. Dlatego nie będziemy tu tych zagadnień dyskutować.

Na zakończenie podamy dla porównania wzór zwykle stosowany do wyznaczania tamowności skrośnej pierwotnej:

$$\Gamma_{skr1} = \Gamma_1 + \ln \frac{Z_b + Z_2}{2\sqrt{Z_b Z_2}} + \frac{1}{2} \ln (1 - q_2^2 e^{-4\Gamma}), \quad (2.93)$$

gdzie q_2 jest określone wzorem (2.71).

Widać, że zysk ze stosowania krakowianów do obliczania tamowności skrośnej jest podobny jak w przypadku tamowności skutecznej.

2.7. Inne krakowiany czwórnik

Nasze dotychczasowe rozważania były oparte na parametrach łańcuchowych czwórnik i wynikających z nich krakowianach łańcuchowych. Można również zastosować dla scharakteryzowania czwórnik inne krakowiany: opornościowy, przewodnościowy czy mieszany. Krakowiany te

Obie metody mogą być w zasadzie stosowane zamiennie, przy czym ze względów obliczeniowych wybór metody jest obojętny. Dlatego w dalszym ciągu będziemy operować jednym układem równań postaci:

$$\begin{aligned} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + A_{13}X_3 + \dots + A_{1n}X_n &= L_1, \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + A_{23}X_3 + \dots + A_{2n}X_n &= L_2, \\ \dots & \\ A_{n1}X_1 + A_{n2}X_2 + A_{n3}X_3 + \dots + A_{nn}X_n &= L_n, \end{aligned} \quad (3.3)$$

gdzie:

- A_{jj} — immitancja ¹⁾ własna oczka lub węzła j -ego,
- A_{ij} — immitancja wzajemna oczek lub węzłów i -ego i j -ego,
- X_j — niewiadoma — prąd oczkowy oczka j -ego lub napięcie między węzłem j -tym a węzłem odniesienia,
- L_j — wyraz wolny — *sem*-na samoistna działająca w oczku j -tym lub prąd źródłowy dopływający do węzła j -ego.

Do podstawowych zagadnień z analizy sieci można zaliczyć następujące:

1. Wyznaczenie rozwiązania ²⁾ sieci, tj. obliczenie niewiadomych X_j , gdy dane są immitancje A_{ij} i wyrazy wolne L_j .
2. Wyznaczenie rozwiązania nieoznaczonego sieci, tj. podanie dla sieci charakteryzowanej układem równań (3.3) następującego układu odwrotnego równań:

$$\begin{aligned} B_{11}L_1 + B_{12}L_2 + B_{13}L_3 + \dots + B_{1n}L_n &= X_1, \\ B_{21}L_1 + B_{22}L_2 + B_{23}L_3 + \dots + B_{2n}L_n &= X_2, \\ \dots & \\ B_{n1}L_1 + B_{n2}L_2 + B_{n3}L_3 + \dots + B_{nn}L_n &= X_n. \end{aligned} \quad (3.4)$$

3. Wyznaczenie immitancji roboczych własnych:

$$A_{jj}^{(r)} = \frac{L_j}{X_j} \Big|_{L_k=0, k \neq j} \quad (3.5)$$

i immitancji roboczych wzajemnych:

$$A_{ij}^{(r)} = \frac{L_i}{X_j} \Big|_{L_k=0, k \neq i.} \quad (3.6)$$

¹⁾ Immitancje — termin utworzony z terminów *im*-pedancja i *ad*-mitancja oznaczający oporność zespoloną (impedancję) lub przewodność zespoloną (admitancję).

²⁾ Rozwiązaniem sieci nazywamy tu zbiór wielkości X_j spełniających układ równań (3.4). Słowo „rozwiązanie” lub „rozwiązanie” używane jest również w sensie czynności.

4. Wyznaczanie wyznacznika charakterystycznego sieci

$$\Delta = |A_{ij}|. \quad (3.7)$$

W dalszym ciągu omówimy zasady rozwiązywania wymienionych zagadnień metodami krakowianowymi, interpretację schematową tych rozwiązań oraz korzyści wynikające ze stosowania krakowianów.

3.2. Wyznaczanie rozwiązania sieci

Wyznaczenie rozwiązania sieci polega na rozwiązaniu układu równań (3.3). Układ ten może być zastąpiony równaniem krakowianowym:

$$\mathbf{X} \mathbf{A}_0 = \mathbf{L}. \quad (3.8)$$

Krakowian $\mathbf{A}_0$ będziemy nazywać krakowianem podstawowym transponowanym sieci, a krakowian $\mathbf{A}$ — krakowianem podstawowym prostym sieci.

Przy rozwiązywaniu (3.8) jedną z metod krakowianowych można wyróżnić kilka przypadków.

Dla sieci nie zawierających *sem*-nych sterowanych¹⁾ krakowian $\mathbf{A}$ jest krakowianem symetrycznym, tzn.

$$A_{ij} = A_{ji} \quad (3.9)$$

lub

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0. \quad (3.10)$$

Można stosować wtedy metody uproszczone dla równań symetrycznych. Przypadek taki zachodzi w praktyce dość często. Dla sieci nie spełniających powyższych warunków konieczne jest korzystanie z metod ogólnych rozwiązywania układów równań.

W obu przypadkach można wyznaczać rozwiązania od razu dla kilku układów wyrazów wolnych.

Dla sieci ze współczynnikami zespolonymi możliwe jest bezpośrednie rozwiązywanie lub też rozwiązywanie po przekształceniu układu n równań ze współczynnikami zespolonymi na układ $2n$ równań ze współczynnikami rzeczywistymi. Może to być dokonane przez podstawienie:

$$A_{ij} = P_{ij} + jQ_{ij}, \quad (3.11)$$

$$X_i = T_i + jU_i, \quad (3.12)$$

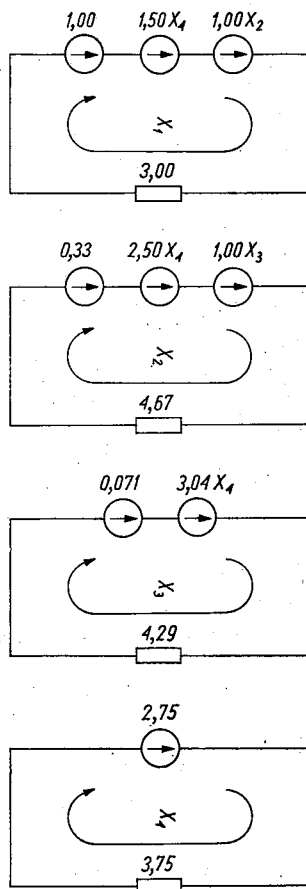
$$L_i = M_i + jN_i. \quad (3.13)$$

¹⁾ *Sem*-ną sterowaną nazywamy *sem*-ną, której wartość jest proporcjonalna do jednego z prądów oczkowych.

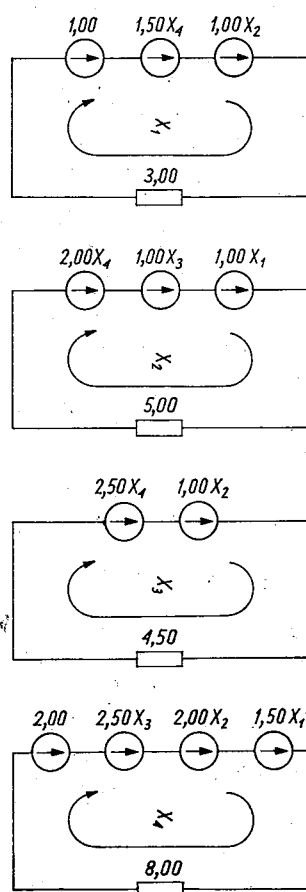
równanie (3.15) prowadzi do następującego zredukowanego układu równań:

$$\begin{aligned} G_{11} X_1 + G_{12} X_2 + G_{13} X_3 + G_{14} X_4 &= L'_1, \\ G_{22} X_2 + G_{23} X_3 + G_{24} X_4 &= L'_2, \\ G_{33} X_3 + G_{34} X_4 &= L'_3, \\ G_{44} X_4 &= L'_4. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Układ ten odpowiada tzw. sieci zredukowanej, której schemat zastępczy podano na rys. 3-2. Tak więc przekształcenie układu równań czterooczkowej sieci nie zawierającej *sem*-nych sterowanych odpowiada przekształ-



Rys. 3-2. Schemat zastępczy czterooczkowej sieci zredukowanej



Rys. 3-3. Schemat zastępczy sieci czterooczkowej

ceniu tej sieci na układ czterech oczek pozornie odseparowanych od siebie z *sem*-nymi sterowanymi. W oczku czwartym występuje oporność własna i *sem*-na samoistna. W oczku trzecim występuje oporność wła-

śna, *sem*-na sterowana prądem oczka czwartego i *sem*-na samoistna. W oczku drugim występuje oporność własna, *sem*-ne sterowane prądami oczka trzeciego i oczka czwartego i *sem*-na samoistna. Wreszcie w oczku pierwszym występuje oporność własna, *sem*-ne sterowane prądami oczka drugiego, trzeciego i czwartego i *sem*-na samoistna. Wartości oporności własnych poszczególnych oczek i *sem*-nych samoistnych w nich działających, są inne niż w sieci pierwotnej (obliczenie pomijamy). Prądy oczkowe pozostają oczywiście takie same.

Inna interpretacja redukcji układu równań sieci może być podana przy przedstawieniu schematu zastępczego sieci pierwotnej w postaci czterech oczek pozornie odseparowanych od siebie z *sem*-nymi sterowanymi (rys. 3-3). Przekształcenie układu równań w układ zredukowany odpowiada wtedy zmianie wartości oporności własnych oczek, oraz zmianie wartości i ilości *sem*-nych sterowanych.

3.3. Wyznaczanie rozwiązania nieoznaczonego sieci

Wyznaczanie rozwiązania nieoznaczonego sieci polega na podaniu układu równań (3.4) dla sieci opisanej układem równań (3.3). Zagadnienie jest identyczne z wyznaczeniem odwrotnego przekształcenia liniowego. W symbolice krakowianowej problem polega na podaniu krakowianowego równania:

$$L B_0 = X \quad (3.17)$$

dla sieci scharakteryzowanej równaniem krakowianowym:

$$X A_0 = L. \quad (3.18)$$

Rozwiązanie problemu równoważne jest wyznaczeniu krakowianu B_0 lub B związanego z krakowianem A wyrażeniem:

$$B_0 = A^{-1}. \quad (3.18a)$$

Krakowian B_0 nazywać będziemy krakowianem sprzężonym transponowanym sieci, a krakowian B krakowianem sprzężonym prostym sieci.

Przy wyznaczaniu krakowianu B_0 jedną z metod krakowianowych należy wyróżnić przypadek sieci nie zawierających *sem*-nych sterowanych z krakowianem A symetrycznym i przypadek sieci nie mających tej własności.

Rozwiązanie nieoznaczone sieci zawiera więcej informacji niż rozwiązanie zwykłe, oznaczone, ale jest znacznie bardziej pracochłonne i dlatego nie powinno być wyznaczane bez wyraźnej potrzeby.

Zwykle jest wystarczające wyznaczenie rozwiązania oznaczonego (rozdz. 3.2).

3.4. Wyznaczanie immitancji roboczych sieci

Wyznaczanie immitancji roboczych sieci — własnych i wzajemnych¹⁾ polega na wyznaczeniu wszystkich lub niektórych wielkości

$$A_{ij}^{(r)} = \frac{L_i}{X_j} \Big|_{L_k=0, k \neq i} \quad (3.19)$$

Porównując wyrażenie (3.19) z układem równań (3.4) widzimy, że zachodzi równość

$$A_{ij}^{(r)} = \frac{1}{B_{ji}}. \quad (3.20)$$

Tak więc znajomość rozwiązania nieoznaczonego sieci umożliwia proste wyznaczanie immitancji roboczych tej sieci.

Jeżeli potrzebna jest znajomość jedynie kilku immitancji roboczych, to znajdowanie rozwiązania nieoznaczonego nie jest celowe. Wtedy należy zastosować inną metodę.

Dla wyznaczenia $A_{mn}^{(r)}$ należy obliczyć X_n dla układu wyrazów wolnych

$$L_k^{(2)} = \begin{cases} 1 & k = m, \\ 0 & k \neq m. \end{cases}$$

Oznaczając tę szczególną wartość X_n przez X_n^* mamy:

$$A_{mn}^{(r)} = \frac{1}{X_n^*}. \quad (3.21)$$

Dla wyznaczenia wartości $A_{ij}^{(r)}$, np. $A_{pr}^{(r)}$, $A_{st}^{(r)}$, $A_{uw}^{(r)}$, należy obliczyć odpowiednie wartości X_j , a mianowicie

$$X_r \text{ dla } L_k = \begin{cases} 1 & k = p, \\ 0 & k \neq p, \end{cases} \quad X_t \text{ dla } L_k = \begin{cases} 1 & k = s, \\ 0 & k \neq s, \end{cases}$$

$$\text{oraz } X_w \text{ dla } L_k = \begin{cases} 1 & k = u, \\ 0 & k \neq u. \end{cases}$$

Wielkości poszukiwane wyznacza się ze wzorów analogicznych do (3.21).

3.5. Wyznaczanie wyznacznika charakterystycznego sieci

Wyznaczenie wyznacznika charakterystycznego sieci sprowadza się do dokonania rozkładu krakowianu podstawowego sieci na czynniki trój-

¹⁾ Wzór (3.19) stanowi połączenie wzorów (3.5) i (3.6) określa on immitancję własną, gdy $i = j$.

²⁾ Przy stosowaniu metody oczkowej $L_m = 1$ [V], X_n ma wymiar [A], a więc $A_{mn}^{(r)}$ ma wymiar [Ω]. Podobnie przy stosowaniu metody węzłowej $A_{mn}^{(r)}$ ma wymiar [S].

kątne, jedną z metod krakowianowych wg wzoru:

$$\mathbf{A} = \mathbf{G} \mathbf{H} \quad (3.22)$$

i do wykonania ostatecznego obliczenia wg wzoru ¹⁾:

$$\Delta = |\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^n G_{ii}. \quad (3.23)$$

3.6. Wyznaczanie parametrów wzmacniacza ze sprzężeniem zwrotnym

Jednym z przykładów zastosowania pojęcia immitancji roboczych i wyznacznika charakterystycznego sieci może być wyznaczanie parametrów wzmacniacza ze sprzężeniem zwrotnym.

Założmy, że wzmacniacz ze sprzężeniem zwrotnym traktowany jako sieć z *sem*-nymi sterowanymi jest opisany układem równań oczkowych (węzłowych). Założmy ponadto, że na wejściu wzmacniacza w oczku (węźle) *n*-tym działa źródło o *sem*-nej E_n (prądzie źródłowym I_n) i oporności Z_a (przewodności Y_a) wliczonej do oporności (przewodności) oczka (węzła) *n*-tego, a wyjście wzmacniacza w oczku (węźle) *m*-tym obciążone jest opornością Z_b (przewodnością Y_b).

Przy takich założeniach oporności wejściowa i wyjściowa (metoda oczkowa) są określone wzorami:

$$Z_{we} = Z_{nn}^{(r)} - Z_a, \quad (3.24)$$

$$Z_{wy} = Z_{mm}^{(r)} - Z_b, \quad (3.25)$$

a przewodności wejściowa i wyjściowa (metoda węzłowa) — wzorami:

$$Y_{we} = Y_{nn}^{(r)} - Y_a, \quad (3.26)$$

$$Y_{wy} = Y_{mm}^{(r)} - Y_b. \quad (3.27)$$

Wzmocnienie skuteczne napięciowe zdefiniowane wzorami:

$$k_{us} = \frac{I_m Z_b}{E_n} \quad (3.28)$$

lub

$$k_{us} = \frac{Y_a U_m}{I_n} \quad (3.29)$$

są określone wyrażeniami:

$$k_{us} = \frac{Z_b}{Z_{nn}^{(r)}} \quad (3.30)$$

¹⁾ W założeniu, że elementy przekątnej głównej krakowianu $\mathbf{H}$ są równe 1. Stosuje się również inny rozkład — wtedy elementy przekątnej głównej krakowianu $\mathbf{G}$ są równe 1 i wzór (3.23) ulega modyfikacji.

lub

$$k_{us} = \frac{Y_a}{Y_{nm}^{(r)}} \quad (3.31)$$

odpowiednio przy stosowaniu metody oczkowej i węzłowej.

Inne parametry wzmacniacza ze sprzężeniem zwrotnym są związane bezpośrednio z różnicą zwrotną zdefiniowaną wzorem:

$$F = \frac{\Delta}{\Delta^0}. \quad (3.32)$$

Wyznacznik Δ jest wyznacznikiem układu równań oczkowych lub węzłowych, a Δ^0 szczególną wartością tego wyznacznika obliczaną przy założeniu, że wielkość charakteryzująca działanie wzmacniające członu wzmacniającego (np. współczynnik amplifikacji jednej z lamp) jest sprowadzona do zera.

Przykłady wprowadzania wzorów ogólnych na parametry wzmacniacza przy użyciu metod krakowianowych podane są w literaturze [16]

3.7. Zakres racjonalnego stosowania rachunku krakowianowego w analizie sieci

Rachunek krakowianowy znajduje, jak wiadomo, zastosowanie przede wszystkim w konkretnych obliczeniach na liczbach szczególnych. Wynika to z faktu, że właśnie w takich zastosowaniach zyski płynące z posługiwania się tym rachunkiem są największe, a wyprowadzanie wzorów ogólnych przy pomocy rachunku krakowianowego jest na ogół niecelowe. Natomiast podstawowe zagadnienia z analizy sieci elektrycznych wymienione w rozdz. 3.1 są zwykle rozwiązywane na liczbach ogólnych, a ewent. obliczenia są wykonywane przy pomocy wyprowadzonych uprzednio wzorów ogólnych. Postępowanie takie wynika zarówno z dążenia do ogólnej dyskusji otrzymanych wzorów i nadawania fizycznej interpretacji poszczególnym członom tych wzorów, jak i z konieczności przeprowadzania obliczeń dla wielu różnych częstotliwości; niemałą rolę odgrywa tu również tradycja. W ostatnich czasach nastąpił duży rozwój metod topologicznych analizy sieci, umożliwiających stosunkowo proste wyprowadzanie wzorów ogólnych. Prowadzi to do dalszego pogłębienia omawianych tendencji. Wydawać więc by się mogło, że rachunek krakowianowy nie jest optymalnym narzędziem w analizie sieci. Wniosek taki nie jest jednak słuszny. Istnieje szeroka klasa zagadnień, w których wyprowadzenie końcowych wzorów ogólnych i korzystanie z nich do obliczeń na liczbach szczególnych nie jest celowe. Wynika to z następujących faktów:

1) stopień skomplikowania końcowego wzoru ogólnego zależy jedynie od stopnia skomplikowania rozwiązywanego zagadnienia; nie zależy natomiast od metody zastosowanej do wyprowadzenia tego wzoru,

2) ogólne wzory końcowe stanowiące rozwiązanie zagadnień występujących w praktyce są zwykle na tyle skomplikowane, że ich ogólna dyskusja i interpretacja fizyczna stają się niemożliwe,

3) ilość działań potrzebna do przeprowadzenia obliczenia na liczbach szczególnych na podstawie wzoru ogólnego jest równa ilości działań potrzebnych do wyprowadzenia tego wzoru metodą bezpośrednią — wyznacznikową; oznaczmy tę liczbę działań przez n_w ,

4) ilość działań na liczbach ogólnych potrzebna do wyprowadzenia wzoru ogólnego (n_{og}) łącznie z ilością działań na liczbach szczególnych potrzebną do k -krotnego wykonania obliczeń na podstawie tego wzoru (kn_w) — np. dla k różnych częstotliwości może być określona wzorem:

$$n' = n_{og} + k n_w, \quad (3.33)$$

5) ilość działań na liczbach szczególnych potrzebna do k -krotnego rozwiązania zagadnienia na liczbach szczególnych metodą krakowianową może być określona wzorem:

$$n'' = k n_k, \quad (3.34)$$

6) dla sieci zwykle występujących w praktyce o ilości oczek lub węzłów niezależnych $m \geq 5$ mamy:

$$n_w \gg n_k \quad (3.35)$$

i dalej:

$$n' \gg n'' \quad (3.36)$$

nawet przy bardzo małym n_{og} (np. przy zastosowaniu metod topologicznych do wyprowadzania wzorów ogólnych),

7) rozwiązywanie zagadnienia na liczbach szczególnych metodą krakowianową może być również z innych względów korzystniejsze od korzystania do obliczeń ze skomplikowanych wzorów ogólnych; metody krakowianowe prowadzą bowiem do bardzo wygodnych schematów rachunkowych.

Otrzymujemy więc następujący wniosek ogólny wielkiej wagi: wiele problemów z analizy sieci może być rozwiązywanych w sposób racjonalny przy użyciu metod krakowianowych. Wyprowadzanie wzorów ogólnych nie jest w tych przypadkach celowe.

Należy wyraźnie podkreślić, że niektóre problemy mogą jednak wymagać wyprowadzania wzorów ogólnych, np. metodami topologicznymi ¹⁾.

¹⁾ Metody topologiczne charakteryzują się w przeciwieństwie do metod algebraicznych ścisłym powiązaniem pośrednich etapów rachunku ze strukturą układu elektrycznego i z tego względu mogą być przydatne przy rozwiązywaniu niektórych problemów analizy, a zwłaszcza syntezy sieci.

4. ZAKOŃCZENIE

Przedstawiony powyżej krótki przegląd elektrycznych i teleelektrycznych zastosowań krakowianów dowodzi wyraźnie, że również w tych dziedzinach techniki rachunek krakowianowy ma duże pole działania. Można więc oczekiwać dalszego rozwoju omówionych zagadnień i krakowianowego rozwiązania dalszych problemów z zakresu elektryki i teleelektryki.

Autor składa serdeczne podziękowanie prof. drowi W. Nowickiemu, promotorowi, oraz prof. drowi Cz. Rajskiemu i prof. Z. Żyszkowskiemu, recenzentom pracy doktorskiej, będącej podstawą niniejszego artykułu — za pomoc i życzliwość.

PRZYPISY

PODSTAWOWE DEFINICJE I OPERACJE RACHUNKU KRAKOWIANOWEGO

1. OKREŚLENIE KRAKOWIANU

Krakowian jest to prostokątna tablica liczb lub funkcji spełniająca aksjomaty podane w rozdz. 2. Oznaczenie krakowianu:

$$\mathbf{a} = \{a_{mn}\} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (\text{P.1})$$

2. DZIAŁANIA NA KRAKOWIANACH

Równość krakowianów, dodawanie, odejmowanie, mnożenie krakowianu przez liczbę określone są tak samo jak w rachunku macierzowym. Krakowian $\mathbf{c}$ nazywamy iloczynem krakowianów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ — wzorem:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \mathbf{b}, \quad (\text{P.2})$$

jeżeli

$$c_{ij} = a_{1j} b_{1i} + a_{2j} b_{2i} + \dots + a_{mj} b_{mi}. \quad (\text{P.3})$$

Mnożenie dokonywane jest więc metodą „kolumna przez kolumnę”, a więc odmiennie niż w rachunku macierzowym. Warunkiem wykonalności mnożenia jest jednakowa ilość wierszy krakowianów.

3. KRAKOWIAN TRANSPONOWANY

Krakowianem transponowanym lub transpozycją krakowianu $\mathbf{a}$ nazywamy krakowian $\mathbf{a}_0$ utworzony z krakowianu $\mathbf{a}$ przez zamianę kolumn na wiersze.

4. KRAKOWIAN JEDNOSTKOWY

Krakowianem jednostkowym τ nazywamy krakowian

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{P.4})$$

5. NIEKTÓRE ZWIĄZKI RACHUNKU KRAKOWIANOWEGO

$$a \tau = a, \quad (P.5)$$

$$\tau a = a_0, \quad (P.6)$$

$$a b = \tau(b a), \quad (P.7)$$

$$a b c = (a b) c, \quad (P.8)$$

$$(a b) c = a (c b_0), \quad (P.9)$$

$$a (b c) = (a c_0) b. \quad (P.10)$$

Mnożenie krakowianów nie jest więc przemienne i nie jest łączne.

6. KONTROLA PRAWDŁOWOŚCI OBLICZANIA ILOCZYNU

Jeżeli krakowiany a i b uzupełnimy odpowiednio ich kolumnami sumowymi a_s i b_s i obliczymy iloczyn, to w wyniku otrzymamy krakowian $c = ab$ uzupełniony kolumną sumową c_s , wierszem sumowym c i sumą generalną c_{ss}

Mamy więc:

$$\{a a_s\} \{b b_s\} = \begin{Bmatrix} c & c_s \\ c_s & c_{ss} \end{Bmatrix} \quad (P.11)$$

Kontrola polega na sprawdzeniu, czy otrzymane drogą mnożenia krakowiany c_s , c_s i liczba c odpowiadają swojej definicji (odpowiednio kolumna sumowa, wiersz sumowy, suma generalna).

7. DZIELENIE KRAKOWIANÓW

Dzielenie krakowianów jest określone w następujący sposób:

$$x = l : a \quad (P.12)$$

jeżeli

$$x a_0 = l. \quad (P.13)$$

8. ROZKŁAD KRAKOWIANU NA CZYNNIKI TRÓJKĄTNE

Każdy krakowian kwadratowy (tj. mający jednakową ilość wierszy i kolumn) spełniający pewne warunki dodatkowe może być przedstawiony w postaci iloczynu dwóch krakowianów trójkątnych:

$$a = g h. \quad (P.14)$$

Krakowianem trójkątnym nazywamy krakowian o zerowych elementach pod główną przekątną.

W przyjętym rozkładzie zakładamy

$$g = \begin{Bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ 0 & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & g_{nn} \end{Bmatrix} \quad (P.15)$$

1) Kolumną surową krakowianu nazywamy krakowian jednokolumnowy, którego elementy są równe sumom elementów odpowiednich wierszy krakowianu pierwotnego.

Wiersz sumowy jest definiowany w analogiczny sposób.

Sumą generalną nazywamy sumę wszystkich elementów krakowianu pierwotnego.

14. Żyszkowski Z.: Zarys układów przenoszenia przewodowego. Państwowy Instytut Telekomunikacyjny, Warszawa 1950.

C. LITERATURA DOTYCZĄCA ZASTOSOWAŃ RACHUNKU KRAKOWIANÓW DO ANALIZY UKŁADÓW LINEARNYCH

15. Majewski W. jr: Krakowiany i możliwości ich zastosowania w teleelektryce. — Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej, Elektryka nr 17, 1958.
 16. Majewski W. jr: Parametry wzmacniacza ze sprzężeniem zwrotnym i metody ich wyznaczania. — Rozprawy Elektrotechniczne, tom IV, zeszyt 4, 1958.
 17. Majewski W. jr: The Possibilities of Employing Cracovians in the Theory of Telecommunications. — Zeszyty Naukowe AGH nr 39 — Elektryfikacja Górnictwa i Hutnictwa nr 9, 1963.
 18. Majewski W. jr: Krakowianowa analiza układów linearynych. Praca doktorska. Politechnika Warszawska, Wydział Łączności, Warszawa 1962.

W. MAJEWSKI jr

PRINCIPLES OF CRACOVIAN ANALYSIS OF LINEAR NETWORKS

Summary

This paper deals with cracovian analysis of linear networks. The cracovian calculus is nearly equivalent of the matrice calculus in theoretical applications. In calculations and practical applications, however, the cracovian calculus is incomparable more useful than the matrice calculus.

The first part of the paper deals with cracovian fourpole analysis. Chain equations of a four-pole (Fig. 2-1):

$$\begin{aligned} U_1 &= a_{11} U_2 + a_{12} I_2 \\ I_1 &= a_{21} U_2 + a_{22} I_2 \end{aligned} \quad (1)$$

and its chain cracovian:

$$a = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

are discussed. The formula for the chain cracovian of a four-pole equivalent the cascade connection of n four-poles (Fig. 2-3) is introduced as:

$$a_0 = a_0^{(1)} a^{(2)} \dots a^{(n)} \quad (3)$$

where a_0 is a transposition of a .

The cracovian method of calculating four-pole input impedances (W_1 and W_2) is proposed (Fig. 2-4). The following equation is introduced:

$$W_1 = \frac{Y_{1-1}}{Y_{1-2}}, \quad (4)$$

where

$$Y = \begin{Bmatrix} Y_{1-1} \\ Y_{1-2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Z_b \\ 1 \end{Bmatrix} a_0. \quad (5)$$

The cracovian method of calculating four-pole complex composite attenuations (Γ_{s1} and Γ_{s2}) is also proposed (Fig. 2-6). The equation for calculating Γ_1 e.g. has a form:

$$\Gamma_{s1} = \ln \frac{a_s}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{Z_a}{Z_b}, \quad (6)$$

Then instead of (10) and (9) we may obtain:

$$\mathbf{XG}_0 = \mathbf{L}' \quad (15)$$

or

$$\begin{aligned} G_{11} X_1 + G_{12} X_2 + \dots + G_{1n} X_n &= L'_1, \\ G_{22} X_2 + \dots + G_{2n} X_n &= L'_2, \\ &\dots\dots\dots \\ G_{nn} X_n &= L'_n, \end{aligned} \quad (16)$$

where

$$\mathbf{L}'\mathbf{H} = \mathbf{L}. \quad (17)$$

The solution of (16) may be obtain directly.

W. MAJEWSKI jr

PRINCIPES D'ANALYSE CRACOVIANNE DES RÉSEAUX LINÉAIRES

R e s u m é

L'article suivant concerne l'analyse cracovienne des réseaux linéaires. La première partie s'occupe d'analyse du quadripôle, elle contient la discussion du cracovian de chaîne du quadripôle, la combinaison des quadripôles en cascade et la détermination des impedances et des exposants de transfert du quadripôle.

La seconde partie s'occupe d'analyse des réseaux; elle contient la méthode cracovienne de solution des equations du réseaux, la méthode cracovienne de détermination des équations inverses et le calcul des impedances d'entrée et transitoires. L'étendue d'applicabilité du calcul cracovian en analyse du réseau et aussi discutée.

L'appendice contient les bases du calcul cracovian.

W. MAJEWSKI jr

UNTERLAGEN DER KRAKOVIANTHEORIE VON LINEAREN NETZWERKEN

Z u s a m m e n f a s s u n g

Vorliegender Aufsatz ist der Krakoviananalyse von linearen Netzwerken gewidmet. Die Krakovianrechnung ist der Matrixrechnung in theoretischen Anwendungen fast gleichwertig, überwiegt sie aber bedeutend in praktischen rechnerischen Anwendungen.

$$\begin{aligned} A_{11} X_1 + A_{12} X_2 + \cdots + A_{1n} X_n &= L_1, \\ A_{21} X_1 + A_{22} X_2 + \cdots + A_{2n} X_n &= L_2, \\ . &. \\ . &. \\ A_{n1} X_1 + A_{n2} X_2 + \cdots + A_{nn} X_n &= L_n \end{aligned} \tag{9}$$

В. МАЕВСКИ ЮР.

ОСНОВАНИЯ КРАКОВИЯНОГО АНАЛИЗА ЛИНЕАРНЫХ ЦЕПЕЙ

Резюме

Следующая статья рассматривает краковияновый анализ линейных цепей. Первая часть обсуждает краковияновый анализ четырехполюсников. Рассмотрен цепной краковиян четырехполюсника, цепное соединение четырехполюсников, определение входных сопротивлений и рабочих постоянных передачи.

Вторая часть обсуждает краковияновый анализ контуров. Рассмотрен краковияновый метод решения уравнений контуров, краковияновый метод определения обратных уравнений и исчисления входных и переходных сопротивлений. Рассужден тоже предел применения краковияного счёта в анализе контуров.

В приложении представлены основания краковияного счёта.

JERZY KACZMARCZYK

Metody analogowe optyki elektronowej

Rękopis dostarczono 27. 5. 1963

W artykule omówiono krótko zasady kilku, najczęściej stosowanych w optyce elektronowej, metod analogowych.

Główny nacisk położono na metody analogowe badania rozkładów pól; metody analogowe badania torów elektronów zostały omówione jedynie w tych przypadkach, w których ze względu na wygodę są one powszechnie stosowane.

W artykule zostały omówione:

- a) metoda membrany elastycznej,
- b) metody pola prądu elektrycznego (metoda wanny elektrolitycznej i metoda papieru przewodzącego),
- c) metoda sieci oporowej,

a więc metody pozwalające rozwiązywać równania Laplace'a i Poissona. Metody te są dyskutowane przede wszystkim z punktu widzenia przydatności w optyce elektronowej, ale można je oczywiście stosować także do badania innych pól i zjawisk opisanych za pomocą tych samych równań matematycznych.

Na zakończenie podano tablicę zawierającą porównanie wad i zalet omówionych poprzednio metod.

1. WSTĘP

Jednym z podstawowych problemów optyki elektronowej jest wyznaczanie rozkładów pól: elektrycznego i magnetycznego, oraz wyznaczanie torów cząstek naładowanych poruszających się w obszarze tych pól. Problem ten jest spotykany zarówno przy analizowaniu właściwości istniejących przyrządów elektronowych, jak też i przy ich projektowaniu.

Bezpośrednie badanie zjawisk fizycznych naraża niekiedy na pewne trudności, a może nawet okazać się wręcz niemożliwe. Z drugiej zaś strony w licznych przypadkach, np. przy projektowaniu, należy z góry przewidzieć przebieg zjawiska przed wykonaniem urządzenia, przyrządu lub układu, w którym ono zachodzi. Opisu ilościowego zjawisk fizycznych dokonuje się więc za pomocą równań matematycznych. Równania te noszą nazwę modelu matematycznego opisywanego zjawiska.

Warto zaznaczyć, że przez wprowadzenie do modelu matematycznego umownych symboli, z których każdy oznacza odpowiednią wielkość fi-

zyczną, i przez wyznaczenie stałych występujących w modelu matematycznym (jest to równoznaczne z wyborem układu jednostek) wprowadzamy do opisu ilościowego elementy jakościowego opisu danego zjawiska.

Jeżeli to samo zjawisko może być opisane za pomocą wielu różnych układów równań, to układy te powinny wynikać z siebie. Przypisywanie bowiem jednemu zjawisku dwu niezależnych modeli matematycznych oznaczałoby, że zjawisko to może zachodzić w dwa różne ilościowo sposoby. Dualizm taki można tolerować tylko wtedy, gdy nie potrafimy stworzyć pełnego i ścisłego modelu matematycznego, a istniejące modele są niedoskonałe i np. każdy z nich opisuje przebieg zjawiska tylko w pewnych specyficznych warunkach. Tak więc każde zjawisko fizyczne może posiadać co najwyżej jeden pełny i niezależny model matematyczny.

Przy polowym opisie zjawisk, a więc przy opisie zależności pomiędzy zdarzeniami zachodzącymi w bezpośrednim sąsiedztwie zarówno przestrzennym, jak i czasowym model matematyczny ma postać równań różniczkowych. Są to przeważnie równania różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu. Główną rolę wśród nich odgrywają:

a) równanie Laplace'a

$$\nabla^2 U = 0; \quad (1.1)$$

b) równanie Poissona

$$\nabla^2 U = f(U, x, y, z) = f(U, q_n); \quad (1.2)$$

c) równanie falowe

$$\nabla^2 U = a \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad (1.3)$$

d) równanie przewodnictwa

$$\nabla^2 U = b \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (1.4)$$

Teoria tych równań, pomimo prostoty ich budowy, jest trudna i rozległa. Równania te tylko w nielicznych przypadkach można rozwiązać w sposób analityczny. W większości praktycznych przypadków musimy się więc zadowolić rozwiązaniami przybliżonymi. Metody numeryczne pozwalające osiągnąć tego typu rozwiązania są na ogół bardzo uciążliwe ze względu na wielką ich czasochłonność i pracochłonność.

Dla osiągnięcia przybliżonych rozwiązań tego typu równań wykorzystuje się więc fakt, iż ten sam model matematyczny, na ogół, opisuje właściwości ilościowe wielu różnych zjawisk fizycznych. Jeżeli dwa zjawiska, A i B, posiadają ten sam model matematyczny, to ilościowe wnioski o zjawisku A można wyciągnąć z przebiegu zjawiska B. Mówi się wówczas, że zjawisko A zostało zbadane przez analogię, a metody oparte na

tej zasadzie noszą nazwę metod analogowych. W wyżej podanym przykładzie zjawisko B — badane bezpośrednio — było modelem ilościowym zjawiska A, dlatego też nosi ono nazwę modelu fizycznego zjawiska A.

Należy zaznaczyć, że postępowanie takie jest słuszne nawet wówczas, gdy zjawisko modelowane A i jego model fizyczny B mają zupełnie różne właściwości jakościowe; metody analogowe mają bowiem za zadanie określanie jedynie ilościowego przebiegu zjawiska modelowanego.

W metodach analogowych rozwiązanie otrzymywane jest przez pomiar wielkości fizycznych występujących w modelu badanego zjawiska. Oczywiście więc jest, iż rozwiązania otrzymane na tej drodze posiadają ograniczoną dokładność. Na błędy metod analogowych składają się:

- 1) błędy metody — związane z niedoskonałością zastosowanej analogii,
- 2) błędy modelu — związane z niedokładnościami zarówno wykonania samego modelu fizycznego, jak też odwzorowania na nim badanej sytuacji,
- 3) błędy pomiaru — związane z niedokładnościami określania wartości, występujących w modelu, wielkości fizycznych.

O ile błędy pierwszego rodzaju w pewnych metodach nie występują, to błędy drugiego i trzeciego rodzaju występują zawsze. Praktyka wykazuje, iż czasem ze względu na dokładność ostatecznego wyniku lepiej jest zastosować metodę obciążoną błędami pierwszego rodzaju, ale pozwalającą znacznie ograniczyć błędy modelu i pomiaru.

Dla każdej metody i modelu istnieje minimalna wartość błędu, poniżej której nie może on być zredukowany. Wartość ta zależy zarówno od rodzaju metody analogowej i rozmiarów użytego modelu, jak też od jakości zastosowanej do pomiaru aparatury.

W artykule niniejszym krótko omówiono i porównano, najczęściej stosowane w optyce elektronowej, metody analogowe; są to więc metody pozwalające rozwiązywać równania Laplace'a i Poissona oraz znajdować, przy tak określonym rozkładzie pól, torów poruszających się w nich cząstek. Metody te są dyskutowane przede wszystkim z punktu widzenia przydatności w optyce elektronowej, ale można je oczywiście stosować także do badania innych pól i zjawisk, których modelem matematycznym są wyżej wymienione równania.

W zakończeniu wstępu warto zaznaczyć, że w opisach zjawisk fizycznych podawanych w dalszej części niniejszego artykułu stosowano układ jednostek MKSA.

2. MODELE MATEMATYCZNE PÓL: ELEKTRYCZNEGO I MAGNETYCZNEGO

Modelem matematycznym pola elektromagnetycznego jest układ równań Maxwella. W ośrodku jednorodnym ($\epsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$) i izotropowym będzie on miał postać:

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{i} \\ \vec{\nabla} \times \vec{K} &= \text{rot } \vec{K} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \text{div } \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \text{div } \vec{D} = \varrho \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

gdzie:

$H = \frac{1}{\mu} B$ — natężenie pola magnetycznego,

μ — przenikalność magnetyczna,

B — indukcja magnetyczna,

$D = \epsilon K$ — indukcja elektryczna,

ϵ — przenikalność elektryczna,

K — natężenie pola elektrycznego,

t — czas,

i — gęstość prądu elektrycznego,

ϱ — gęstość ładunku przestrzennego.

Dla stałych, w funkcji czasu, pól równania (2.1) upraszczają się do postaci:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{i}, \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{K} = 0, \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.4)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{K} = \frac{\varrho}{\epsilon} \quad (2.5)$$

W tym przypadku pola są nawzajem niezależne; modelem matematycznym pola elektrycznego są równania (2.3) i (2.5), a modelem pola magnetycznego równania (2.2) oraz (2.4).

Z równania (2.3) wynika, że pole elektryczne posiada potencjał skalarny U . Jest on związany z natężeniem pola elektrycznego równością:

$$\vec{K} = -\text{grad } U = -\vec{\nabla} U \quad (2.6)$$

Wstawiając (2.6) do (2.5) otrzymamy inną formę matematycznego modelu pola elektrycznego:

$$\nabla^2 U = -\frac{\varrho}{\epsilon} \quad (2.7)$$

W podobny sposób można także przekształcić model pola magnetycznego. Z równania (2.4) wynika, iż pole magnetyczne posiada potencjał wektorowy $\vec{A}$. Jest on związany z wektorem indukcji magnetycznej równością:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2.8)$$

W celu uzyskania jednoznacznego określenia potencjału A należy jednak nałożyć na niego dodatkowy warunek. Najwygodniej jest przyjąć:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \quad (2.9)$$

Wstawiając (2.8) i (2.9) do (2.2) otrzymamy

$$\nabla^2 \vec{A} = -\vec{\mu i}, \quad (2.10)$$

lub po rozpisaniu wektorów na składowe wzdłuż osi q_1 , q_2 i q_3

$$\nabla^2 A_n = -\mu \cdot i_n \quad (n = 1, 2, 3). \quad (2.11)$$

Widać więc, iż modele matematyczne obu pól mają tę samą postać — równania Poissona. Gdy gęstość przestrzennego ładunku elektrycznego ϱ — w pierwszym, a gęstość prądu elektrycznego i — w drugim przypadku, jest pomijalnie mała, to równania (2.7) i (2.11) przyjmą postać równań Laplace'a.

Wypada zaznaczyć, iż przy badaniu pola magnetycznego w obszarach, gdzie nie występuje przepływ prądu elektrycznego, wygodniej jest na ogół operować potencjałem skalarnym φ :

$$\vec{B} = -\vec{\text{grad}} \varphi = -\vec{\nabla} \varphi. \quad (2.12)$$

Jak łatwo stwierdzić, równania (2.2) i (2.4) można przekształcić wówczas do postaci

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (2.13)$$

W przypadku tym wystarczy więc rozwiązać jedno równanie (2.13) zamiast trzech równań (2.11).

Omawiane poniżej metody analogowe wyznaczania rozkładów pól będą więc, jak już wspomniano we wstępie, metodami pozwalającymi rozwiązywać równania Laplace'a i Poissona przy zadanych warunkach brzegowych.

W przypadku badania pola elektrycznego będą to na ogół warunki typu Dirichleta, a w przypadku badania pola magnetycznego przeważnie warunki typu Neumanna.

3. MODEL MATEMATYCZNY RUCHU ELEKTRONU

Cząstka materialna startująca z punktu $P_0(t_0)$ będzie się poruszała po drodze, dla której, zgodnie z zasadą Hamiltona, w każdej chwili t będzie zachodził związek

$$\delta \int_{t_0}^t L(q_n, \dot{q}_n) \cdot dt = 0, \quad (3.1)$$

w którym $L(\dot{q}_n, q_n)$ jest funkcją Lagrange'a a q_n oraz $\dot{q}_n$ są odpowiednio współrzędnymi i prędkościami uogólnionymi.

Model matematyczny (3.1), dla elektronu poruszającego się z prędkością $\vec{v}$, można przekształcić do postaci:

$$\frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = -e \left\{ \vec{K} + \vec{v} \times \vec{B} + \frac{\partial A}{\partial t} \right\}. \quad (4.2)$$

Przy pominięciu relatywistycznej zmiany masy elektronu, poruszającego się w stałych w czasie polach, model ten można napisać w formie

$$\ddot{l} = -\frac{e}{m} \{ \vec{K} + \vec{v} \times \vec{B} \}, \quad (3.3)$$

gdzie l jest promieniem wodzącym, a $\ddot{l}$ jego drugą pochodną względem czasu.

Widać z powyższego, iż przed przystąpieniem do określania toru elektronu należy uprzednio wyznaczyć rozkłady pól: elektrycznego i magnetycznego. Na ogół nie jesteśmy w stanie wyznaczyć rozkładów obu pól za pomocą tego samego modelu fizycznego lub za pomocą jednego na nim pomiaru. Dlatego też najczęściej musimy, do określenia toru, pośrednio przechodzić przez dane cyfrowe, określające rozkłady pól, uzyskane z ich modeli fizycznych. W przypadkach tych wygodniejszymi, na ogół, okazują się metody cyfrowe wyznaczania toru elektronu.

Metody analogowe opłaca się stosować jedynie w prostszych przypadkach, gdy pełny rozkład interesujących nas pól dany jest bezpośrednio przez wielkość fizyczną występującą w modelu, nie trzeba bowiem wówczas przechodzić pośrednio przez dane cyfrowe.

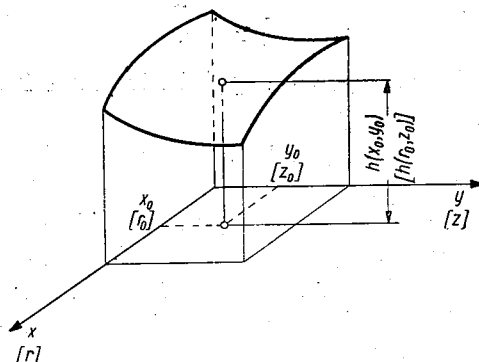
Dlatego też w artykule niniejszym główny nacisk położono na metody analogowe badania rozkładów pól. Metody analogowe badania torów elektronów zostały omówione tylko w tych przypadkach, w których, ze względu na wygodę, są one powszechnie stosowane.

4. METODA MEMBRANY ELASTYCZNEJ

Opis metody membrany elastycznej, zwanej także często metodą membrany gumowej, można znaleźć zarówno w książkach poświęconych opty-

ce elektronowej [1] — [3], jak też w licznych artykułach [4] — [23]. Poniżej zostanie więc podana jedynie zasada tej metody.

Równomiernie napięta membrana elastyczna po podparciu wspornikami odkształci się i ułoży tak, aby uzyskać minimum powierzchni. Oznaczając przez h funkcję określającą wysokość poszczególnych punktów



Rys. 1. Wycinek membrany elastycznej

membrany (rys. 1), można kształt jej powierzchni opisać równaniem różniczkowym [3]:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] - 2 \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial y} = 0. \quad (4.1)$$

Jeżeli membrana jest nieznacznie odkształcona, tzn. gdy można przyjąć, że

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \ll 1 \text{ oraz } \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \ll 1, \quad (4.2)$$

to związek (4.1) upraszcza się do dwuwymiarowego równania Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0. \quad (4.3)$$

Równość (4.3) można także otrzymać, przy założeniach (4.2), z warunku na równowagę sił działających na dowolny element membrany [2].

Jeżeli naprężenie mechaniczne σ panujące w membranie zmieniałoby się zgodnie z zależnością

$$\sigma = C \cdot r, \quad (4.4)$$

to kształt powierzchni membrany opisany byłby równaniem:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial h}{\partial r} = 0, \quad (4.5)$$

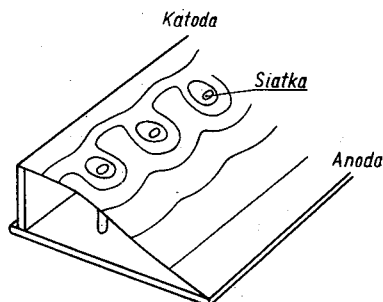
a więc można byłoby, za pomocą metody membrany gumowej, badać rozkład pola w układach o symetrii obrotowej. Wykonanie membrany spełniającej warunek (4.4) nastrocza jednak wiele trudności, bardziej przydatnym w praktyce może się więc okazać stosowanie dodatkowego nacisku [17]

$$p = \sigma \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial h}{\partial r} \quad (4.6)$$

na membranę, który także zapewnia spełnienie przez funkcję h równości (4.5).

Metoda membrany gumowej może więc, w zasadzie, być użyta do badania rozkładów dowolnych dwuwymiarowych pól harmoniczych. Ze względu jednak na trudności zapewnienia warunków brzegowych typu Neumanna, wykorzystuje się ją przeważnie tylko do modelowania pól o zadanych z góry wartościach na brzegu obszaru badanego. W przypadku badań elektrooptycznych służy ona zatem jedynie do odwzorowywania dwuwymiarowych pól elektrycznych.

Jeżeli więc równomiernie napiętą membranę elastyczną podeprzeć wspornikami, których poprzeczne rozmiary i wzajemne odległości odwzorowują w pewnej skali rozmiary i wzajemne odległości elektrod układu badanego, a wysokości poszczególnych wsporników są proporcjonalne do potencjałów odpowiednich elektrod, to funkcja h odpowiada funkcji rozkładu potencjału U przy pominięciu wpływu ładunku przestrzennego. Na rys. 2 przedstawiono uzyskany w ten sposób model rozkładu pola w triodzie płaskiej.



Rys. 2. Model rozkładu pola w triodzie płaskiej

Wpływ ładunku przestrzennego na badany tą metodą rozkład potencjału można uwzględnić wywierając na każdy punkt elastycznej membrany nacisk p , którego wielkość jest funkcją gęstości ładunku przestrzennego w odpowiednim punkcie układu:

$$p = k \cdot \frac{\sigma}{\epsilon} \cdot q = C' \cdot q. \quad (4.7)$$

Wartość stałej C' ze wzoru (4.7) jest na ogół nieznana; można ją wyznaczyć modulując rozkład pola w układzie elektrod, dla którego znane są, np. z rozważań teoretycznych, rozkład potencjału i gęstość ładunku.

Nacisk p wywierany na membranę może być wywołany np. za pomocą podmuchu powietrza [13], za pomocą sprężyny czy też odpowiednio skonstruowanej wagi poprzez niewielką płytkę [16], [19], [21] lub w inny podobny sposób.

Określenie rozkładu $h(q_n)$, a więc i $U(q_n)$, z membrany gumowej jest stosunkowo proste. Liniom ekwipotencjalnym pola elektrycznego odpowiadają prostopadłe rzuty poziomice na płaszczyznę odniesienia, a więc można je określić zanurzając w wodzie, na różne głębokości, powstały w wyniku deformacji membrany model rozkładu pola i obserwując z góry kształt linii brzegowej. Przy badaniu pól jednowymiarowych rozkład potencjału można otrzymać rzutując na matówkę cień modelu oświetlonego równoległą wiązką światła [23]. Są także budowane układy do automatycznego określania linii ekwipotencjalnych, badanego tą metodą, pola [21].

Dokładność wyznaczania rozkładu pola za pomocą metody membrany elastycznej jest stosunkowo niewielka — rzędu kilku procent. Uzyskane wyniki obarczone są bowiem wszystkimi trzema, wymienionymi we wstępie, rodzajami błędów.

Błąd metody, wynikający z odmienności równań (4.1) i (4.3), silnie zależy od kąta nachylenia α powierzchni membrany w stosunku do płaszczyzny poziomej $x-y$. Np. przy badaniu tą metodą rozkładu pola w kondensatorze cylindrycznym dla $\alpha_{max} = 23^\circ$, maksymalny błąd określenia natężenia pola wynosi 7%, a określenia potencjału 0,8%, podczas gdy dla $\alpha_{max} = 12^\circ$, błędy te wynoszą odpowiednio 1,6% oraz 0,2% [11]. Błędy modelu związane są z nierównomiernością naprężeń mechanicznych σ panujących w membranie, niedokładnościami wykonania i ustawienia wsporników modelujących badany układ elektrod oraz niedokładnościami ustalenia nacisku p modelującego wpływ ładunku przestrzennego lub symetrię obrotową układu. Do tego typu błędów należy także wpływ brzegu układu; można go zaobserwować, gdy rama, na której została napięta membrana, jest zbyt mała w stosunku do rozmiarów modelu. Wreszcie pewną rolę mogą odgrywać także błędy pomiaru.

Wiele spośród wymienionych błędów można poważnie zmniejszyć stosując dostatecznie duże rozmiary modelu.

Należy także zaznaczyć, iż za pomocą tej metody można, w stosunkowo prosty sposób, odwzorować zmienne pole elektryczne [9]. Odwzorowanie takie uzyska się wówczas, gdy wysokości wsporników będą zmieniały się w funkcji czasu.

Przy odwzorowaniu rozkładu potencjału U , dwuwymiarowego pola elektrycznego, za pomocą funkcji h opisującej wysokość poszczególnych punktów modelu, tak jak ma to miejsce w metodzie membrany elastycz-

nej, tory i ruchy elektronów można odwzorowywać za pomocą torów i ruchów kulki toczącej się po tym modelu. Można bowiem wykazać [3], iż modele matematyczne obu tych zjawisk, przy spełnianiu pewnych dodatkowych założeń, posiadają identyczną postać.

Puszczając po zaciemnionej powierzchni membrany błyszczące kulki i wykonując zdjęcia modelu w świetle stroboskopowym można otrzymać, w formie pokazanej na rys. 3, tory elektronów poruszających się w ukła-



Rys. 3. Tory elektronów w trójdrogach płaskiej

dzie elektronooptycznym modelowanym za pomocą tej metody. Z odległości pomiędzy położeniami kulki w momentach dwu kolejnych błysków (odległości pomiędzy jasnymi punktami na fotografii) można określić chwilową prędkość elektronu w różnych częściach jego toru.

Dzięki opisanej wyżej metodzie analogowej badania torów elektronów, zwanej metodą grawitacyjną, metoda membrany elastycznej, pomimo małej dokładności, znalazła w optyce elektronowej dość szerokie zastosowanie. Stosuje się ją przede wszystkim tam, gdzie chodzi o szybkie znalezienie torów elektronów poruszających się w polu elektrycznym wytworzonym przez układ elektrod o zadanym kształcie i wartościach potencjałów. Przykłady takich zastosowań można znaleźć w wielu publikacjach [5] — [9].

5. METODY POLA PRĄDU ELEKTRYCZNEGO

Innym modelem fizycznym pól: elektrycznego i magnetycznego jest pole prądu elektrycznego w ośrodku przewodzącym. Modelem matematycznym tego typu pola jest, wynikające z pierwszego prawa Kirchhoffa, równanie ciągłości

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{i}' = \vec{\nabla} \cdot \left(\gamma \cdot \vec{K} + \epsilon \frac{\partial \vec{K}}{\partial t} \right) = 0, \quad (5.1)$$

w którym i' — całkowita gęstość prądu elektrycznego, a γ — przewodność właściwa ośrodka.

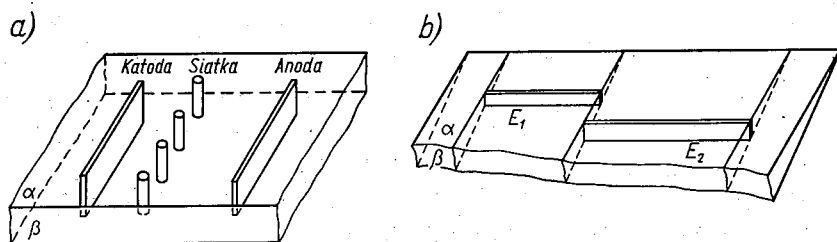
Korzystając z zależności (2.6) i (5.1) można napisać:

$$\nabla^2 U = \vec{K} \cdot \vec{\nabla} (\ln \gamma) + \frac{1}{\gamma} \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon \frac{\partial \vec{K}}{\partial t} \right). \quad (5.2)$$

Widać więc, iż model matematyczny tego pola, przy spełnieniu pewnych dodatkowych warunków, może być identyczny w swej formie z modelem matematycznym pola elektrycznego lub magnetycznego. Np. pole prądu elektrycznego w ośrodku izotropowym ($\gamma = \text{const}$), w ustalonych

warunkach $\left[\vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon \frac{\partial \vec{K}}{\partial t} \right) = 0 \right]$, jest opisane równaniem Laplace'a.

Badanie układów niesymetrycznych [24] sprawia wiele kłopotu ze względu na trudności realizacji warunków brzegowych i trudności w dostarczeniu sondy pomiarowej do dowolnego z punktów badanej przestrzeni. Metoda upraszcza się znacznie, gdy badany układ posiada płaszczyznę symetrii; wykorzystuje się wówczas fakt, że wektory $\vec{i}$ oraz $\vec{K}$ są styczne zarówno do płaszczyzny symetrii układu, jak też do powierzchni styku przewodnik-izolator (prąd nie wpływa ani nie wypływa z izolatora). W przypadku tym wystarczy odwzorować połowę lub tylko część badanej przestrzeni. Tego typu modele triody płaskiej i soczewki immersyjnej rurowej przedstawiono na rys. 4.



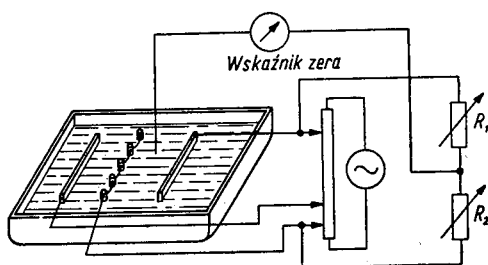
Rys. 4. Modele triody płaskiej (a) i soczewki immersyjnej rurowej (b)
 α i β — płaszczyzny graniczne przewodnik-izolator

Przy badaniach opartych na metodzie pola prądu elektrycznego można w prosty sposób zrealizować zarówno warunki brzegowe typu Dirichleta, jak też warunki typu Neumanna; w pierwszym przypadku odpowiednie punkty modelu należy zasilać ze źródeł napięciowych, w drugim zaś ze źródeł prądowych.

Ośrodek przewodzący, w którym badany jest rozkład pola prądu elektrycznego może być gazem, cieczą lub ciałem stałym. Ośrodki gazowe nie znalazły w praktyce szerszego zastosowania. W przypadku ośrodka ciekłego elektrolit nalewany jest do specjalnego naczynia-wan-

ny, a metoda zwana jest wówczas metodą wanny elektrolitycznej [1]—[4] oraz [25]—[39]. Jako ośrodka stałego używa się prawie wyłącznie odpowiednio spreparowanego papieru, a metoda, w tym przypadku, określana jest mianem metody papieru przewodzącego [40]—[43].

Metoda wanny elektrolitycznej, jedna z najstarszych i najchętniej stosowanych metod analogowych optyki elektronowej, znajduje zastosowanie szczególnie przy badaniu układów o skomplikowanej konfiguracji. Modele elektrod, wykonane w skali, zanurza się w elektrolicie i zasilają odpowiednio dobranymi napięciami lub prądami. Rozkład pola w badanym obszarze określa się za pomocą delikatnego próbnika-sondy, włączanego najczęściej w obwód mostka (rys. 5).



Rys. 5. Schemat układu do pomiaru potencjału w wannie elektrolitycznej

Przy badaniu pól, których modelem matematycznym jest równanie Poissona (1.2), najprościej byłoby uwzględnić funkcję $f(U, q_n)$ za pomocą zmiany przewodności ośrodka. Napełnianie wanny różnymi rodzajami elektrolitu, ze względu na szybkie mieszanie się ich, nie znalazło jednak praktycznego zastosowania. Opracowano natomiast metodę polegającą na kształtowaniu dna wanny [29], gdy głębokość elektrolitu — z , w stosunku do rozmiarów modelu, jest bardzo mała i nie ulega gwałtownym zmianom, można, w odniesieniu do zjawisk na powierzchni, zmiany przekroju przewodnika traktować jako równoważne zmianom jego przewodności, a więc można traktować, iż $\gamma = C \cdot z$. W oparciu o równość (5.2) można dla ustalonych warunków $\left[\nabla \left(\epsilon \cdot \frac{\partial K}{\partial t} \right) = 0 \right]$ napisać, na głębokość elektrolitu — h' , warunek:

$$\vec{\nabla} \cdot (\ln h') = - \frac{f(U, q_n)}{\vec{K} \cdot \vec{C}} \quad (5.3)$$

Metoda ta może być, oczywiście, stosowana jedynie do badania rozkładów pól dwuwymiarowych. Ze względu jednak na dużą pracochłonność i czasochłonność nie znalazła ona jak dotąd zbyt szerokiego zastosowania.

Opracowano także inną, bardziej użyteczną w praktyce, metodę modelowania rozkładu funkcji $f(U, q_n)$ za pomocą prądów dodatkowych [32],

[35]. Prądy te są doprowadzane do odpowiednich obszarów elektrolitu za pomocą przechodzących przez izolacyjne dno wanny prętów metalowych [32], [35] lub elektrod węglowych [37].

Za pomocą wanny elektrolitycznej można także badać zjawiska zachodzące w nałożonych na siebie, nawzajem prostopadłych polach elektrycznym i magnetycznym [34].

Metoda wanny elektrolitycznej, na pierwszy rzut oka bardzo prosta, komplikuje się, gdy chcemy wykonać za jej pomocą pomiary z dokładnością lepszą od kilku procent. W celu zapewnienia dostatecznej dokładności metodzie należy przedsięwziąć wiele środków zaradczych, np. aby uniknąć warstwy spolaryzowanej na powierzchni elektrod, należy zasilać je zmiennymi napięciami lub prądami. Postępowanie takie może jednak być źródłem błędu metody — gdy nie znika człon równości (5.2) zawierający pochodną czasową. Innymi środkami zaradczymi są: staranny dobór elektrolitu i materiału elektrod [4], precyzyjne wykonanie i ustawienie modeli elektrod, ekranowanie układu od zewnętrznych pól elektrycznych, zapewnienie ustalonych warunków termicznych elektrolitu oraz wyeliminowanie wpływu ścianek wanny na rozkład potencjału w badanym obszarze. Błędy mogą być także wywołane napięciami powierzchniowymi elektrolitu (meniski) w pobliżu elektrod modelu, ścianek wanny i sondy pomiarowej. Wreszcie zapewnienie dostatecznej dokładności samego pomiaru odgrywa także niemałą rolę. Zostały opracowane nawet specjalne układy pozwalające na automatyczne lub przynajmniej półautomatyczne zdejmowanie i wykreślanie linii ekwipotencjalnych, np. [33].

Przy zachowaniu ostrożności, zastosowaniu środków zaradczych i przy dużej staranności wykonania pomiarów można osiągnąć dokładność nawet rzędu 0,1%.

W metodzie papieru przewodzącego jako ośrodka używa się specjalnego papieru przewodzącego, o średniej oporności 1000—5000 Ω na kwadrat, lub nawet zwykłego papieru. W tym ostatnim przypadku występuje jednak pewna trudność — papier nie jest w pełni izotropowy; stosunek odpowiednich oporności w dwu głównych, nawzajem prostopadłych kierunkach waha się, na ogół, w granicach od 1,10 do 1,15. Wpływu tego można uniknąć zmieniając, w odpowiedni sposób, skalę modelu wzdłuż tych kierunków.

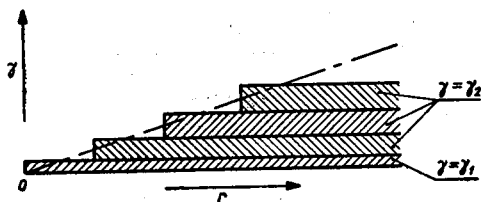
Na papierze, za pomocą specjalnej farby przewodzącej lub grafitu, maluje się w skali kształty przekroju elektrod badanego układu i zasila się, powstałe w ten sposób, elektrody modelu odpowiednimi prądami lub napięciami. Należy zaznaczyć, iż można w metodzie tej używać do zasilania prądów i napięć stałych — bowiem efekt polaryzacji nie odgrywa tu większej roli.

Pomiar odbywa się w podobnym układzie jak w metodzie wanny elektrolitycznej, a linie ekwipotencjalne mogą być rysowane bezpośred-

nio na użytym do pomiaru papierze za pomocą piszącej sondy, np. pióra kulkowego.

Wpływ funkcji $f(U, q_n)$ na rozkład potencjału pola, opisanego równaniem Poissona (1-2), można uwzględnić zmieniając oporność ośrodka przez dziurkowanie papieru lub przez nasycanie go niewielkimi ilościami odpowiednich płynów.

Metoda ta nadaje się głównie, ze względu na trudność wyprodukowania papieru o zmieniającej się w określony sposób oporności, do badania rozkładów pola w układach o symetrii płaskiej. Można jednak za cenę pewnej straty dokładności badać także za jej pomocą układy o symetrii obrotowej; należy w tym celu nałożyć na siebie, w sposób pokazany na rys. 6, kilka warstw papieru przewodzącego. Przy takim postępowaniu maksymalny błąd popełniony przy badaniu soczewki elektro nowej [43] wyniósł 5,3%, a średnie błędy były rzędu 1%.



Rys. 6. Sposób nałożenia warstw papieru przewodzącego przy badaniu pól o symetrii obrotowej

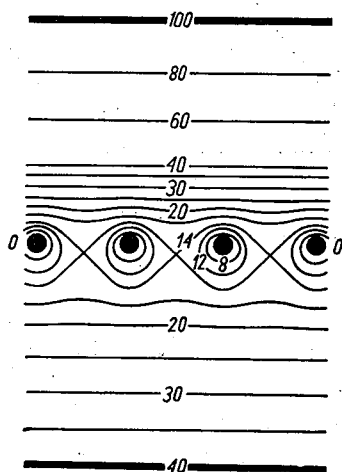
Metoda papieru przewodzącego jest znacznie wygodniejsza i mniej kłopotliwa od metody wanny elektrolitycznej. Jak wspomniano już wyżej, można w tej metodzie używać do zasilania modelu także napięć stałych. Malowanie przekroju elektrody jest znacznie wygodniejsze niż wykonywanie i ustawianie jej modelu. Wreszcie sama technika pomiarowa przy metodzie papieru przewodzącego ulega znacznemu uproszczeniu, zostaje bowiem wyeliminowany cały układ umożliwiający, w metodzie wanny elektrolitycznej, odwzorowanie położenia sondy za pomocą pisaka.

Główną wadą metody jest trudność otrzymania papieru o odpowiednio dobrych właściwościach. Stosowanie różnych skal w zależności od kierunku, w praktyce dość uciążliwe, nie zawsze w pełni rozwiązuje sprawę.

W metodzie papieru przewodzącego można uniknąć wielu błędów występujących w metodzie wanny elektrolitycznej, dlatego też pomimo gorszej w zasadzie izotropowości ośrodka i mniej dokładnego odwzorowywania warunków brzegowych dokładności obu metod są podobnego rzędu.

W podobnej postaci także są notowane wyniki pomiaru — w obu metodach podawana jest, na ogół, mapa linii ekwipotencjalnych. Na rys. 7 przedstawiono tego typu mapę dla triody płaskiej.

Przy badaniu rozkładów pól: elektrycznego i magnetycznego za pomocą metod pola prądu elektrycznego można również stosować metody analogowe wyznaczania torów elektronów. Metody te oparte są, na ogół,



Rys. 7. Rozkład pola w triodzie płaskiej

na podobnych zasadach i wykorzystują przeważnie analogie mechaniczne. Metody tego typu zostały omówione wyczerpująco w pracy [3].

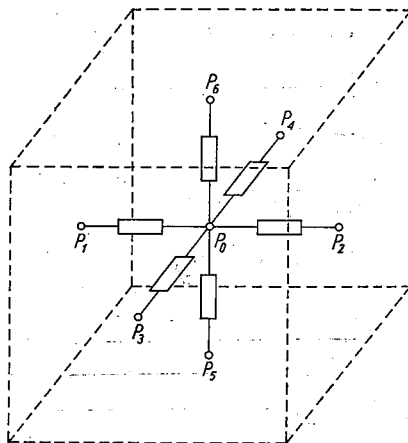
Stosowane są także dość często przeliczniki analogowe, lub nawet cyfrowe, sterujące pisakiem wykreślającym tor elektronu. Przy takim rozwiązywaniu równań ruchu można korzystać jednocześnie z kilku modeli fizycznych. Każdy z tych modeli odwzorowuje rozkład innego parametru pól, w których odbywa się ruch elektronu. Przykład takiego rozwiązania można znaleźć w pracy [35].

Metody wyznaczania torów elektronów, o których wspomniano wyżej, nie są już tak proste jak metoda grawitacyjna. Wymagają one zbudowania dość skomplikowanego i na ogół kosztownego wyposażenia. Dlatego też często, po wyznaczeniu rozkładów pól za pomocą metod pola prądu elektrycznego, tory elektronów wyznacza się za pomocą metod wykreślonych lub numerycznych.

6. METODA SIECI OPOROWEJ

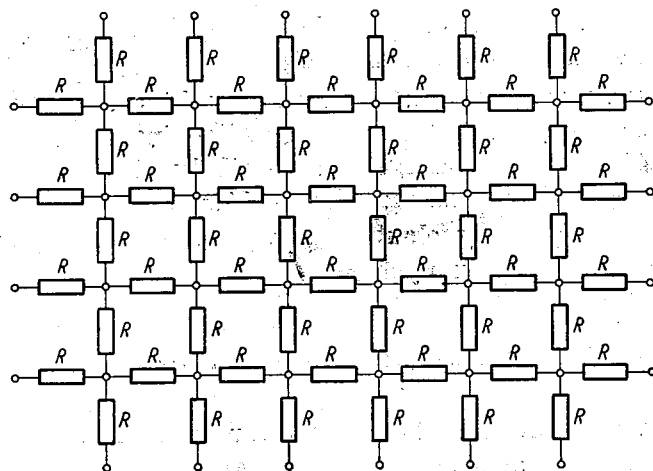
Stosunkowo niedawno została opracowana i zrealizowana w praktyce jeszcze inna metoda analogowa badania rozkładów pól — metoda sieci oporowej [44]—[54].

Jeżeli ośrodek przewodzący zostałby podzielony na dużą, ale skończoną ilość komórek, a oporność każdej z nich reprezentowana byłaby przez oporności „skupione” — to powstałaby w wyniku sieć oporowa (rys. 8). Łatwo się domyślić, iż większość uwag poczynionych poprzednio, z okazji omawiania metod pola prądu elektrycznego, pozostaje również słuszna w odniesieniu do tej metody.



Rys. 8. Element sieci oporowej równoważny elementowi przestrzeni przewodzącej

Podobnie jak poprzednio, metoda sieci oporowej upraszcza się znacznie przy badaniu rozkładów pól dwuwymiarowych; wystarcza stosować wówczas sieć jednowarstwową (rys. 9). Warunki brzegowe typu Dirichleta można zrealizować zasilając odpowiednie węzły sieci ze źródeł napięciowych, a warunki typu Neumanna — zasilając je ze źródeł prądowych,

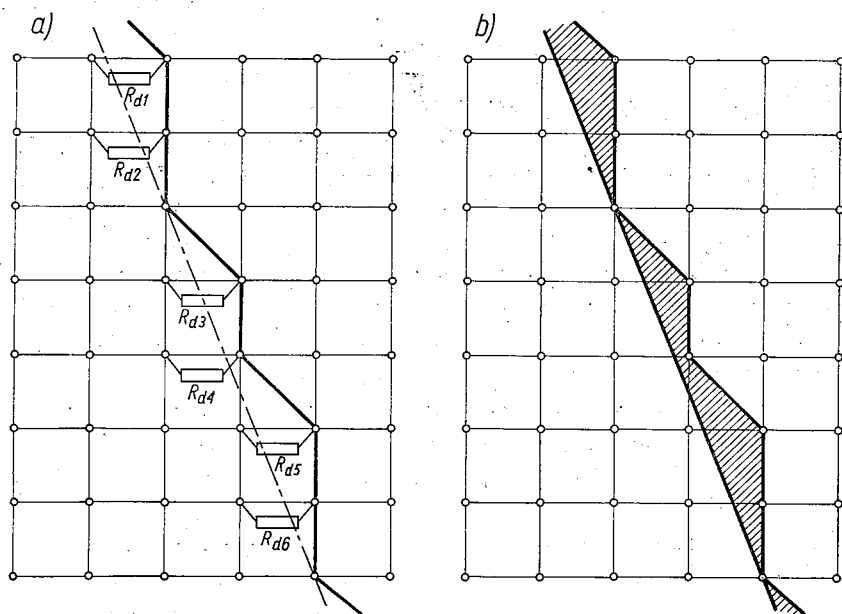


Rys. 9. Dwuwymiarowa sieć oporowa do odwzorowywania pól o symetrii płaskiej

wych. Pomiaru potencjałów w węzłach sieci można dokonać za pomocą układu mostkowego, podobnego do przedstawionego na rys. 4, lub też za pomocą woltomierza, najlepiej cyfrowego, o dużej oporności wejściowej. Przy badaniu rozkładów pól, opisanych równaniem Poissona (1.2), wpływ funkcji $f(U, q_n)$ można uwzględnić zmieniając lokalne oporności sieci, np. przez równoległe dołączenie dodatkowych oporników lub doprowadzając do węzłów dodatkowe prądy [45].

Metoda sieci oporowej posiada jednak, w stosunku do poprzednio omówionych metod, szereg zalet. Przewodność pomiędzy poszczególnymi punktami jest dokładnie znana, a jej zmianę można uzyskać w prosty sposób w bardzo szerokich granicach i przy zachowaniu dużej dokładności.

Modelowanie problemów odbywa się szybko i dokładnie; wystarczy bowiem dołączyć skończoną ilość punktów, dla których zadane są warunki brzegowe, do odpowiednich źródeł zasilania. W przypadkach gdy nie można dokładnie wymodelować kształtu jakiejś elektrody przez zwar-



Rys. 10. Modelowanie elektrod przy zastosowaniu „przemieszczeń elektrycznych”
a) sposób zwarcia węzłów sieci, b) wymodelowany kształt elektrody

cie istniejących na sieci węzłów, można zwiększyć dokładność modelowania odpowiednio zmieniając, np. przez dołączenie z zewnątrz dodatkowych oporników, wartości oporności na brzegu badanego obszaru; jest to równoznaczne z „elektrycznym przemieszczeniem” odpowiedniego węzła do żądanej pozycji (rys. 10). Przy wyprowadzeniu reguł przemieszczania elektrycznego [46], [52], [54], przyjmuje się, że pola w pobliżu elektrod można uważać za równomierne. Dokładność takiego mo-

delowania nie ustępuje jednak, a często nawet przewyższa dokładność modelowania układu elektrod w wannie elektrolitycznej.

Metoda sieci oporowej pozwala także na rozwiązywanie większej różnorodności problemów, np. po dołączeniu do węzłów sieci dodatkowych oporników i kondensatorów można za jej pomocą modelować równanie przewodnictwa, a więc badać np. zjawiska zachodzące w złączu $p-n$ [50] lub pole magnetyczne w ośrodku nie izotropowym [47]. W metodzie tej wyeliminowane zostały także, spotykane przy poprzednio omawianych metodach, trudności pomiarowe; nie występuje tu np. efekt polaryzacji, nie potrzebny jest układ odwzorowujący położenie sondy, a impedancje sieci i próbnika pomiarowego mogą być dostatecznie duże.

Należy także zaznaczyć, iż jest to najdokładniejsza z omawianych tu metod analogowych optyki elektronowej. Za jej pomocą można osiągnąć, w bardziej korzystnych przypadkach, dokładności rzędu 0,01%, a nawet rzędu 0,001% [46], [48].

Liczne, wyżej wymienione, zalety sieci oporowej są jednak okupione pewnymi jej wadami. Główna wada to istnienie tylko stosunkowo niewielkiej ilości punktów pomiarowych — wartości potencjału w punktach pośrednich można uzyskać w wyniku postępowania relaksacyjnego [46], w wyniku interpolacji lub przez ponowne wymodelowanie. w znacznie większej skali, danego fragmentu badanej przestrzeni. Sposoby te, w praktyce dość uciążliwe, nie zawsze dają wyniki wystarczająco dokładne; zawodzą one np. w obszarach, w których zachodzi szybka zmiana gradientu potencjału badanego pola. Rozwiązaniem tej trudności może być, obok stosowania sieci o bardzo dużej ilości oczek, stosowanie sieci o zmiennej odległości węzłów [48]. Metoda ta jest także dość niewygodna przy badaniu rozkładów pola w układach o skomplikowanej konfiguracji elektrod.

Przy badaniu rozkładów pola metodą sieci oporowej wyniki pomiarów podawane są na ogół w postaci sieci dokładnie zlokalizowanych punktów, dla których określono wartość potencjałów i zapisano je w postaci cyfrowej (rys. 11).

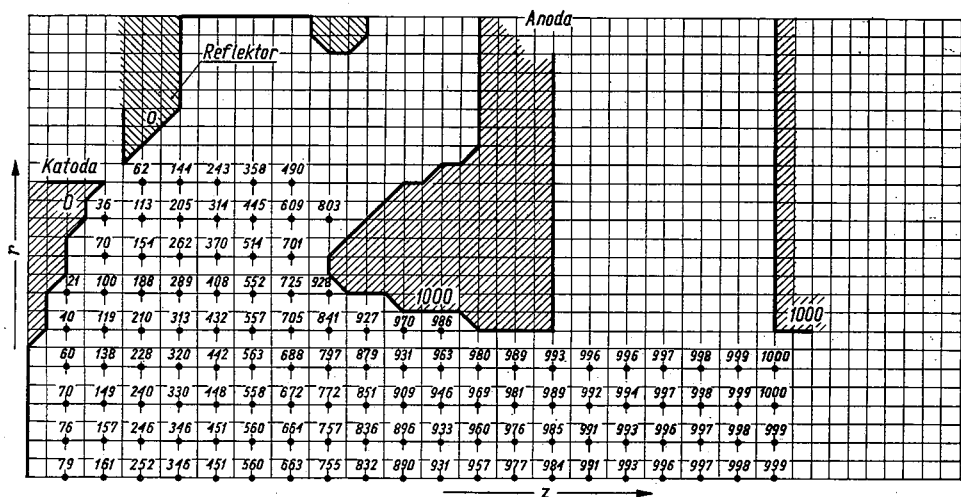
Dokładność uzyskanych wyników zależy w dużej mierze od dokładności samej analogii; rozkład potencjałów w węzłach sieci oporowej opisany jest bowiem równaniem różnicowym [51], [54]. Równanie to, w przypadku współrzędnych prostokątnych, ma postać:

$$L \cdot U = \frac{1}{h^2} \sum_{n=1}^6 (U_n - U_0) = 0, \quad (6.1)$$

a operator różnicowy LU związany jest z operatorem Laplace'a zależnością:

$$(\nabla^2 U)_0 = L \cdot U_0 - \frac{h^2}{12} \cdot \left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} \right)_0 - \dots \quad (6.2)$$

Widać więc, iż błąd metody jest tym większy, im większe są odległości h pomiędzy dwoma sąsiednimi węzłami sieci i im większe wartości osiągają parzyste pochodne, wyższych rzędów, funkcji U opisującej rozkład potencjału względem współrzędnych x, y, z . Błędy metody



Rys. 11. Rozkład pola w wyrzutni elektronowej. Na rysunku podano względne wartości potencjału jedynie w węzłach oznaczonych kropką

zależą w znacznym stopniu od konfiguracji układu elektrod i stosunku rozmiarów badanego modelu do odległości pomiędzy dwoma węzłami. Błędy te osiągają największe wartości w obszarach o dużym stopniu nieliniowości zmian natężenia pola, a więc np. w sąsiedztwie ostrych załamów i elektrod o małych promieniach krzywizny. Błędy metody, przy dość niekorzystnych układach, mogą być nawet rzędu 1% [53].

Błędy modelu są głównie wywołane odchyleniami wartości oporności poszczególnych oporników, użytych do budowy sieci, od wartości oporności otrzymanych z obliczeń oraz niedokładności modelowania warunków brzegowych. Błędy indywidualnych oporników są częściowo redukowane wskutek przypadkowego ich rozkładu [46]. Stopień redukcji tych błędów zależy bardzo silnie od ilości składowych oporników sieci biorących udział w pomiarze. Przy ilości 1000—1500 sztuk dokładność sieci jest o jeden lub nawet dwa rzędy wielkości wyższa od tolerancji użytych do jej budowy oporników. Ponieważ nie buduje się na ogół sieci z oporników o tolerancjach większych niż 1%, to błędy tego typu, już przy kilkuset opornikach, nie przekraczają 0,1%. Błędy modelowania warunków brzegowych mogą być także, w większości przypadków, zredukowane do niewielkiej części procenta.

Należy zaznaczyć, iż w metodzie sieci oporowej można także znacznie łatwiej, niż przy innych metodach, uniknąć błędów związanych ze

skończonymi rozmiarami urządzenia, na którym jest modelowy rozkład badanego pola. W metodzie tej wystarczy „zamknąć” brzegi sieci odpowiednio dobranymi oporami [46].

Błędy pomiaru mogą być, przez zastosowanie dostatecznie dokładnego układu pomiarowego, sprowadzone poniżej sumarycznego błędu wynikającego z błędów metody i błędów modelu.

Przy badaniu rozkładów pól za pomocą tej metody, tory elektronów mogą być także wyznaczane za pomocą metod analogowych [55], ale wygodniejsze i dokładniejsze są metody cyfrowe. W wielu przypadkach sieć oporowa „współpracuje” bezpośrednio z maszyną cyfrową [52].

7. PODSUMOWANIE

Podany tu przegląd metod nie obejmuje wszystkich metod analogowych pozwalających rozwiązywać równania Laplace'a i Poissona oraz znajdujących zastosowanie przy wyznaczaniu torów elektronów poruszających się w polu elektrycznym i magnetycznym. Omówiono tu jedynie najczęściej stosowane w optyce elektronowej metody analogowe.

Porównanie metod analogicznych optyki elektronowej

Metoda	Zalety	Wady
membrany elastycznej	metoda stosunkowo prosta i bardzo pogładowa. Łatwo modelować tory elektronów w stałym i zmiennym polu elektrycznym	mała dokładność; nadaje się w zasadzie tylko do badania pola elektrycznego. Modelowanie pól o symetrii obrotowej nastęrcza dużo trudności.
wanny elektrolitycznej	szczególnie cenna przy skomplikowanej konfiguracji badanego układu	dość trudna technika pomiarowa, ograniczona dokładność
papieru przewodzącego	stosunkowo tanie wyposażenie, prosta technika pomiarowa; znajduje zastosowanie przy skomplikowanej konfiguracji badanego układu	trudność otrzymania wystarczającej izotropii ośrodka, dość uciążliwe stosowanie różnych skal w zależności od kierunku
sieci oporowej	bardzo duża dokładność, prosta technika pomiarowa, szeroki wachlarz zastosowań; użyteczna przy skomplikowanych problemach	uciążliwa przy skomplikowanej konfiguracji badanego układu

Z podanych wyżej opisów widać, iż ten sam problem może być rozwiązany za pomocą różnych metod analogowych; o wyborze metody powinny decydować jej zalety i wady oraz specyfika rozwiązywanego problemu. Wydaje się więc celowe zestawienie, w zakończeniu niniejszego artykułu, cech charakterystycznych każdej z omówionych tu metod. Zestawienie takie zostało podane w wyżej zamieszczonej tablicy.

W zakończeniu pragnę podziękować Panu Profesorowi Bohdanowi Paszkowskiemu za przejrzenie rękopisu niniejszego artykułu i za cenne uwagi.

*Politechnika Warszawska
Katedra Przyrządów Elektronowych*

WYKAZ LITERATURY

1. Glaser W.: Grundlagen der Elektronenoptik. Springer-Verlag, Wien 1952.
2. Kelman W. M., Jawor S. J.: Elektronnaja optika. Izd. AN ZSRR, Moskwa—Leningrad 1959.
3. Paszkowski B.: Optyka elektronowa. PWT, W-wa 1960.
4. Liebmann G.: Field Plotting and Ray Tracing in Electron Optics. A Review of Numerical Methods. Advances in Electronics, T. 2 (1950), str. 102—151.
5. Kleynen P. H. J. A.: The Motion on Electron in Two-Dimensional Electrostatic Fields. Philips Techn. Rev., T. 2 (1937), str. 338—345.
6. Pierce J. R.: Electron Multiplier Design. Bell Lab. Rec., T. 16 (1938), str. 305—309.
7. Jonker J. L. H.: Pentode and Tetrode Output Valves. Wireless Engr., T. 16 (1939), str. 344—349.
8. Zworykin V. K., Rajchman J. A.: The Electrostatic Multiplier. Proc. Instn. Radio Engrs, T. 27 (1939), str. 558—566.
9. Hollmann H. E.: Theoretical and Experimental Investigations of Electron Motions in Alternating Fields with Aid of Ballistic Models. Proc. Instn. Radio Engrs, T. 29 (1941), str. 70—79.
10. Fræmlin J. H., Walker J.: The Stratched Rubber Sheet. J. Sci. Instr., T. 24 (1947), str. 50—51.
11. Walker G. B.: Factors Influencing the Design of Rubber Model. Proc. Instn. Electr. Engrs, T. 96, P. II (1949), str. 319—324.
12. Bobikin B. W., Kelman W. M., Kaminskij D. L.: Modelirowanie dwiżenja zariażennych czastic w dwumiernom elektryczeskom pole s ucetom objemnego zariada. Żurnał Tiechn. Fizyki, T. 22 (1952), str. 736—743.
13. Alma C., Diemer G., Groendijk H.: A Rubber Membrane Model for Tracing Electron Paths in Space Charge Fields. Philips Techn. Rev., T. 14 (1953), str. 336—344.
14. Fulop W.: The Rubber Membrane and the Solution of Laplace's Equation. Brit. J. Appl. Phys., T. 6 (1955), str. 21—23.
15. Kelman W. M., Krasnow J. F.: Opredielenje wieliczyn elektronnogo toka w wakuumie metodom rezinowej membrany. Żurnał Tiechn. Fizyki, T. 25 (1955), str. 1714—1725.
16. Krasnow J. F., Kelman W. M.: Reszenje zadaczi o płoskom diodie s ograniczennoj szirinoj emitirujuszczej powierchnosti metodom rezinowej membrany. Żurnał Tiechn. Fizyki, T. 25 (1955), str. 1726—1734.

17. Mayo B. J.: A Rubber — Membrane Model for Axially Symmetric Electric Fields. *Brit. J. Appl. Phys.*, T. 6 (1955), str. 141—142.
18. Allen K. R., Ashworth F.: Field Plotting on Rubber Sheet Models. *Lab. Practice*, T. 5 (1956), str. 455—456.
19. Kelman W. M., Utkin K. G., Loginowa L. N.: Uproszczennaja konstrukcija ustanowki s rezinowej membranoj dla opredielenja trajektorii zariadennych czastic w prisutstwiei objemnego zarjada. *Żurnał Tiechn. Fizyki*, T. 27 (1957), str. 2092—2096.
20. Bandel H. W.: Rubber Sheet Model Studies. *Rev. Scient. Instr.*, T. 30 (1959), str. 591—592.
21. Utkin K. G.: Ustanowka s rezinowej membranoj dla awtomatycznego opriedielenja ekwipotencjalej s ucetom prostranstwiennogo zarjada. *Pribory i Tiechn. Eksperimenta*, N. 5 (1959), str. 111—116.
22. White A. D., Perry D. L.: Notes on the Use a Rubber Membrane Model for Plotting Electron Trajectories. *Rev. Sci. Instr.*, T. 32 (1961), str. 730—732.
23. Kaczmarczyk J.: Badanie rozkładu pola elektrycznego i torów elektronów metodą membrany gumowej. *Podstawy Elektroniki. Materiały do zajęć laboratoryjnych*. WPW, W-wa 1962.
24. Softky S., Jugerman J.: Electrolytic Tank Measurements in Three Dimensions. *Rev. Sci. Instr.*, T. 23 (1952), str. 306.
25. Himpan J.: Eine neue Ausführg de elektrolytischen Trogs zur Aufnahme von Potentialfeldern. *Telefunken-Rohre*, Nr 16 (1939), str. 198—209.
26. Bowman-Monifold M., Nicoll F. H.: Electrolytic Field Plotting Trough for Circularly Symmetric System. *Nature*, T. 142 (1939), str. 39.
27. Theile R., Himpan J.: Die Auswahl des Elektrodenmaterials für die Feldbildaufnahme im elektrolytischen Trog. *Telefunken-Rohre*, Nr 18 (1940), str. 50—57.
28. Makar R., Boothroyd A. R., Cherry E. C.: An Electrolitic Tank for Exploring Potential Field Distributions. *Nature*, T. 161 (1948), str. 845—846.
29. Musson-Genon R.: Applications de methodes reographiques à l'etude des trajectoires electroniques planes compte tenu de la charge d'espace. *Ann. Telecommun.*, T. 22 (1947), str. 254—276 oraz 298—320.
30. Peierls R. E., Skyrme T. H.: Tank Model for Magnetic Problems of Axial Symmetry. *Phil. Mag.*, T. 40 (1949), str. 269—273.
31. Liebmann G.: Electrical Analogues. *Brit. J. Appl. Phys.*, T. 4 (1953), str. 193—200.
32. Hollway D. L.: The Determination of Electron Trajectories in the Presence of Space Charge. *Austr. J. Phys.*, T. 8 (1955), str. 74—89.
33. Hollway D. L.: An Electrolytic-Tank Equipement for the Determination of Electron Trajectories Potential and Gradient. *Proc. Instn. Electr. Engr.*, P.B., T. 103 (1956), str. 155—160.
34. Hollway D. L.: A Method of Tracing Electron Trajectories in Crossed Electric and Magnetic Fields. *Proc. Instn. Electr. Engr.*, P.B., T. 103 (1956), str. 161—163.
35. Łukoszkow V. S.: Electrolytic Tank with Current Leading Elements for Studying Space Charge Distribution in Electron Tubes. *Le Vide*, Nr. 65 (1956), str. 328—337.
36. Beaver W. L.: Flux Plotting Analog for an Axially Symmetric Potential Fields. *J. Appl. Phys.*, T. 28 (1957), str. 579—582.
37. Van Duzer T., Brever G. L.: Space-Charge Symulation in Electrostatic Tank. *J. Appl. Phys.*, T. 30 (1959), str. 291—301.

38. Kaczmarczyk J.: Zastosowanie wanny elektrolitycznej przy badaniu rozkładów pola w obecności ładunku przestrzennego. *Przegląd Elektroniki*, Nr 4 (1960), str. 435—457.
39. Kaczmarczyk J.: Badanie rozkładu pola elektrycznego za pomocą wanny elektrolitycznej. *Podstawy Elektroniki. Materiały do zajęć laboratoryjnych.* WPW, W-wa 1962.
40. Filczakow P. F.: Modelirowanie zadacz filtracji na elektroprowadnoij bumagie. *Doklady AN ZSRR*, T. 84 (1952), str. 237—240.
41. Murray C. T., Hollway D. L.: Equipotential Plotting. Using Untreated Writing Paper. *J. Appl. Phys.*, T. 24 (1953), str. 110.
42. Dahlin E. D.: Equipotential Plotting Table. *Rev. Sci. Instr.*, T. 25 (1954), str. 951—953.
43. Filczakow P. E.: O modelowaniu osismietrnych potencjalnych polej na elektroprowadnoij bumagie. *Doklady AN ZSRR*, T. 125 (1959), str. 1023—1026.
44. De'Packh D. C.: A Resistor Network for the Approximate Solution of the Laplace Equation. *Rev. Sci. Instr.*, T. 18 (1947), str. 798—799.
45. Liebmann G.: Precise Solution of Partial Differential Equations by Resistance Networks. *Nature*, T. 164 (1949), str. 149—150.
46. Liebmann G.: Solution of Partial Differential Equations with a Resistance Network Analogue. *Brit. J. Appl. Phys.*, T. 1 (1950), str. 92—103.
47. Liebmann G.: Method for the Mapping of Vector Potential Distributions in Axially Symmetrical Systems. *Phyl. Mag.*, T. 41 (1950), str. 1143—1151.
48. Liebmann G.: Resistance-Network Analogues with Unequal Meshes or Subdivided Meshes. *Brit. J. Appl. Phys.*, T. 5 (1954), str. 362—366.
49. Liebmann G.: Resistance-Network Analogues. *International Analogy Computation Meeting*, September 1955, str. 346—369.
50. Cremosnik G., Frei A., Strutt M. J. O.: New Applications of Impedance Networks Analog Computers for Electronic Space Charge and for Semiconductor Diffusion Problems. *Proc. Instn. Radio Engrs.*, T. 46 (1958), str. 868—877.
51. Francken J. C.: The Resistance-Network a Simple and Accurate Aid to the Solution of Potential Problems. *Philips Techn. Rev.*, T. 21 (1959/60), str. 10—23.
52. Hechtel J. R., Seeger J. A.: Accuracy and Limitations of the Resistor Network Used for Solving Laplace's and Poisson's Equations. *Proc. Instn. Radio Engrs.*, T. 49 (1961), str. 933—940.
53. Kaczmarczyk J.: Sieć oporowa do odwzorowywania rozkładu pola elektrycznego o symetrii obrotowej. *Przegląd Elektroniki*, Nr 6 (1962), str. 330—334.
54. Kaczmarczyk J.: Badanie rozkładu pola elektrycznego metodą sieci oporowej. *Podstawy Elektroniki. Materiały do zajęć laboratoryjnych.* WPW, W-wa 1962.
55. Vine J., Taylor R. T.: An Improvement to the Electron-Trajectory Tracer. *Proc. Instn. Electr. Engrs*, T. 107, P.B (1960), str. 181—184.

J. KACZMARCZYK

ANALOGUE METHODS OF ELECTRON OPTICS

Summary

The idea of the analogue representation of electron optical problems is discussed in this paper. It is mainly concerns with methods of the analogue

investigation of electric and magnetic fields and those methods of plotting a electron trajectories which are in general use.

The paper describes:

- a) the rubber sheet model,
- b) the analogues of the field of electric current (electrolytic tank and conducting paper methods),
- c) the resistance-network analogue.

A table summarizing the advantages and disadvantages of various types of analogues is enclosed.

These methods may also be used in investigation of various other problems physics and engineering.

J. KACZMARCZYK

LES MÉTHODES ANALOGUES DE L'OPTIQUE ÉLECTRONIQUE

Résumé

On a discuté les principes de quelques méthodes analogues, utilisées le plus souvent en optique électronique.

On a surtout discuté les méthodes analogues de la détermination des champs électriques; les méthodes analogues de la détermination des trajectoires électroniques n'ont été discutées que dans les cas généralement appliqués.

On a discuté les méthodes qui permettent résoudre les équations de Laplace et de Poisson:

- a) la méthode de la membrane élastique,
- b) les méthodes du champ du courant électrique (la méthode de la cuve rheographique et la méthode du papier conducteur),
- c) le méthode des réseaux de résistances.

On a comparé les défauts et les qualités des méthodes discutées.

Ces méthodes ont été surtout discutées du point de vue de l'utilité en optique électronique, mais évidemment on peut les appliquer pour la détermination des autres champs et phénomènes décrits par les mêmes équations mathématiques.

J. KACZMARCZYK

ANALOGUE METHODEN IN DER ELEKTRONENOPTIK

Zusammenfassung

In dem Artikel wurden kurz die Grundlagen einiger in der Elektronenoptik meisst angewandten Methoden besprochen.

Die Methoden die zur Erforschung der Feldverteilung beitragen wurden näher Betrachtet. Auf die Methoden zur Ermittlung der Elektronenbahnen wurde nur dann hingewiesen wo diese einen wesentlichen Vorteil bieten.

Folgende Methoden unterlagen einer näheren Analysis:

- a) Methode der Gummimembran,

b) Methode des Stromfeldes (Der Elektrolytische Trog und Methode des leitenden Papiers),

c) Methode des Widerstandnetzes.

Alle diese Methoden Erlauben die Lösung der Laplace und Poisson — Gleichungen. Sie wurden von dem Standpunkt ihrer Anwendbarkeit in der Elektronenoptik diskutiert. Selbstverständlich erlauben sie die Erforschung anderer Felder und Erscheinungen die durch diese Gleichungen beschrieben wurden können.

Die Vor und Nachteile der aufgeführten Methoden wurden in einer Tabelle zusammengefasst.

Е. КАЧМАРЧИК

АНАЛОГОВЫЕ МЕТОДЫ ЭЛЕКТРОННОЙ ОПТИКИ

Резюме

В настоящей статье вкратце рассмотрены основы нескольких аналоговых методов, наиболее часто применяемых в электронной оптике.

Главное ударение положено на аналоговые методы исследования электрических и магнитных полей. Аналоговые методы исследования траекторий электронов рассматривается только в тех случаях, в которых они из-за удобства широко применяются.

В статье рассмотрено:

а) метод резиновой мембраны,

б) метод поля электрического тока (метод электролитической волны и метод проводящей бумаги),

в) метод сетки сопротивлений — т. е. методы, позволяющие решить уравнение Лапласа и Пуассона. Эти методы рассматриваются здесь с точки зрения применимости их в электронной оптике, что, конечно, не исключает возможности применения их для исследования явлений, описываемых теми же математическими уравнениями. В заключении приводится таблица характеризующая в сравнительном разрезе недостатки и преимущества описываемых методов.

**P
W
N**

Praca zbiorowa

pod. red. F. Beckenbacha
Tłum. z języka angielskiego
Wyd. 1962, s. 672, zł 60,—

NOWOCZESNA MATEMATYKA DLA INŻYNIERÓW

Składa się z 19 artykułów, napisanych przez najwybitniejszych specjalistów. Informuje o nowych działach matematyki, które znajdują zastosowanie w technice. Obejmuje m. in. zagadnienia, takie, jak: równania różniczkowe, teorię prawdopodobieństwa, metody numeryczne, w szczególności obejmujące zastosowanie macierzy w technice, transformatory funkcyjne, metody nieliniowe, metody relaksacji do maszyn elektronowych i inne.

**P
O
L
E
C
A**

MIECZYŚLAW RYDEL

Obliczanie sygnałów echa obcego w torach współosiowych niejednorodnych

Rękopis dostarczono 14. 1. 1963

Wahania impedancji falowej miejscowej toru niejednorodnego powodują powstawanie w torze sygnałów odbitych, przy czym sygnały dwukrotnie odbite, zwane sygnałami echa obcego, trafiają do odbiorników, powodując w rezultacie zniekształcenie sygnału odbieranego. Jeżeli sygnał główny jest sinusoidalnie zmienny w czasie, to sygnał echa obcego jest scharakteryzowany współczynnikiem echa obcego określonym jako stosunek napięcia (zespolonego) echa obcego do napięcia (zespolonego) sygnału głównego wyjściowego. Współczynnik echa obcego jest zależny od tzw. funkcji odchylenia $S(x)$ charakteryzującej wahania impedancji falowej miejscowej, od tamowości toru i od niedopasowań na końcach toru. Znajomość współczynnika echa obcego jako funkcji częstotliwości zespolonej pozwala określić odpowiedź impulsową echa obcego, tj. sygnał echa obcego, dla przypadku, gdy sygnał główny ma postać funkcji impulsowej (δ -funkcji).

Wyprowadzono wzory ogólne dotyczące odpowiedzi echa obcego, a następnie rozpatrzono odpowiedzi impulsowe echa obcego dla szczególnych przypadków torów takich, jak tor nieznieszkadzający, tor bezstratny, tor współosiowy wykorzystany w zakresie częstotliwości użytecznych. Oprócz tego rozpatrzono sygnały echa obcego dla pewnych charakterystycznych przypadków funkcji odchylenia $S(x)$ i pewnych charakterystycznych funkcji sygnału głównego. Rozpatrzone przypadki szczególne pozwoliły wyciągnąć pewne wnioski ogólne dotyczące sygnałów echa obcego.

Dla normalnie produkowanych torów współosiowych można przyjąć, że funkcja odchylenia impedancji $S(x)$ jest funkcją przypadkową gaussowską stacjonarną (w szerokim sensie). Przyjmując takie założenie wyprowadzono wzory ogólne dotyczące wartości oczekiwanej i dyspersji współczynnika echa obcego oraz odpowiednie wzory dotyczące oczekiwanych sygnałów echa obcego. Ponadto rozpatrzono oczekiwany sygnał echa obcego towarzyszący wyłączonemu sygnałowi kosinusoidalnie zmiennemu w czasie. Dokonano pewnej ogólnej oceny oraz probabilistycznej wielkości echa obcego.

Oprócz rozważań przeprowadzonych dla pojedynczego odcinka toru niejednorodnego został rozpatrzony przypadek toru dalekosieźnego zawierającego wiele odcinków wzmacniakowych. Przy rozpatrywaniu sygnałów echa obcego w torze dalekosieźnym zakładano, że wzmacniaki są wyposażone w korektory tłumieniowe i fazowe korygujące idealnie zniekształcenia wnoszone przez odcinki wzmacniakowe torów.

Wyprowadzono zależności pozwalające określać wielkości charakteryzujące sygnały echa obcego na wyjściu toru dalekosieźnego na podstawie znajomości odpowiednich wielkości dotyczących odcinków wzmacniakowych torów zawartych w tym torze dalekosieźnym. Przy wyprowadzaniu zależ-

ności statystycznych rozpatrzono również przypadek, gdy długości poszczególnych odcinków wzmacniakowych są wielkościami przypadkowymi.

Na zakończenie podsumowano wnioski wynikające z przeprowadzonych rozważań.

1. WPROWADZENIE

Jednym z ważniejszych zagadnień, z jakim spotykają się konstruktorzy dalekosiężnych łączy o torach współosiowych, jest zagadnienie jednorodności tych torów. W praktyce bowiem nie jest możliwe wykonanie torów idealnie jednorodnych i nie jest możliwe idealne dopasowanie odcinków torów do urządzeń stacyjnych. Przyczyny te powodują powstanie sygnałów odbitych. Jeżeli sygnały odbite powracają do nadajnika (co ma miejsce w przypadku odbić nieparzystokrotnych), to mamy do czynienia z tzw. echem własnym; jeżeli natomiast sygnały odbite trafiają do odbiornika (co ma miejsce w przypadku odbić parzystokrotnych), to mamy do czynienia z tzw. echem obcym. Sygnały echa obcego towarzyszą sygnałowi (użytecznemu) powodując jego „rozmazanie”. Sygnały te, będące niepożądanym skutkiem niejednorodności, są szczególnie szkodliwe w przypadku transmisji telewizyjnych, powodują one bowiem powstawanie charakterystycznych „cieni” na ekranie odbiornika telewizyjnego.

Jeżeli zrezygnować z dokładnego określenia pola elektromagnetycznego w torze niejednorodnym, to tor taki można rozpatrywać podobnie jak tor jednorodny zakładając jednak, że jego impedancja falowa Z i jego tamowność jednostkowa γ są funkcjami odległości liczonej wzdłuż osi toru. W praktyce odchylenie parametrów miejscowych $Z = \bar{Z}(x)$ i $\gamma = \gamma(x)$ od odpowiednich wartości przeciętnych są niewielkie. Takie niewielkie odchylenia tamowności γ nie spowodują zniekształceń przesyłanych sygnałów, dlatego też można przyjmować, że tamowność γ jest jednakowa we wszystkich przekrojach toru. Odbicia w torze są spowodowane zmianami impedancji falowej miejscowej toru. Ze względu na to, iż zmiany funkcji $Z(x)$ są niewielkie i wszystkie współczynniki odbić pomiędzy torami a urządzeniami są również niewielkie, przy rozpatrywaniu echa obcego można się ograniczyć do uwzględnienia jedynie odbić dwukrotnych.

2. ECHO OBCE W ODCINKU TORU WSPÓŁOSIOWEGO NIEJEDNORODNEGO

2.1. Zależności podstawowe

Transmitancję (użytkową) odcinka toru niejednorodnego można zdefiniować jako stosunek

$$K_t = \frac{U_2}{U_0}, \quad (1)$$

gdzie:

U_2 — napięcie (zespolone) na wyjściu toru,

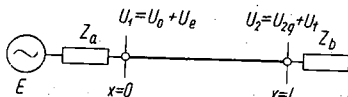
U_0 — napięcie (zespolone) pierwotnej fali nadawanej¹⁾, tj. (rys. 1)

$$U_0 = E \frac{Z(0)}{Z_a + Z(0)}, \quad (2)$$

gdzie:

Z_a — impedancja wewnętrzna źródła,

$Z(0)$ — impedancja falowa toru na początku toru ($x = +0$).



Rys. 1. Odcinek toru niejednorodnego w warunkach pracy

Napięcie wyjściowe U_2 można przedstawić w postaci sumy

$$U_2 = U_{2g} + U_t, \quad (3)$$

gdzie (rys. 1)

$$U_{2g} = U_0 \frac{2 Z_b}{Z(l) + Z_b} e^{-\gamma l} \quad (4)$$

jest napięciem wyjściowym głównym (odpowiadającym sygnałowi użytecznemu), a U_t jest napięciem echa obcego. We wzorze (4) Z_b oznacza impedancję odbiornika, $Z(l)$ — wartość impedancji falowej toru na końcu toru ($x = l - 0$), a γ — tłumowność jednostkową toru.

Uwzględniając zależności (3) i (4) we wzorze (1) po przekształceniach otrzymamy

$$K_t = \frac{2 Z_b}{Z(l) + Z_b} e^{-\gamma l} (1 + Q_t), \quad (5)$$

gdzie wielkość

$$Q_t = \frac{U_t}{U_{2g}} \quad (6)$$

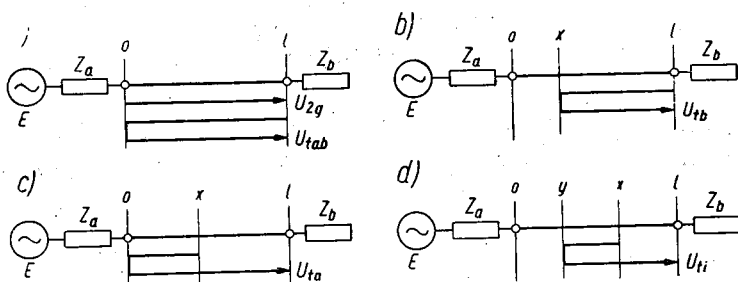
będziemy nazywać współczynnikiem echa obcego.

Jeżeli przy obliczaniu napięcia echa obcego ograniczyć się do rozpatrzenia odbić dwukrotnych, to napięcie to można uważać za sumę cze-

¹⁾ Wielkości U_2 i U_0 można również traktować jako transformaty fourierowskie (lub laplace'owskie) odpowiednio: sygnału wyjściowego $u_2(t)$ i użytecznego sygnału nadawanego $u_0(t)$.

rech napięć (rys. 2). Napięciom tym będą odpowiadać cztery składniki współczynnika echa obcego, wobec czego możemy napisać

$$Q_t = Q_{tab} + Q_{ta} + Q_{tb} + Q_{ti}. \quad (7)$$



Rys. 2. Powstawanie echa obcego na skutek odbić podwójnych

- a) odbicie na początku i na końcu toru,
- b) odbicie na końcu toru i zewnątrz toru,
- c) odbicie wewnątrz toru i na początku toru,
- d) podwójne odbicie wewnątrz toru

Poszczególne składniki współczynnika echa obcego (rys. 2) wyrażają się wzorami [1]:

$$Q_{tab} = \frac{U_{tab}}{U_{2g}} = q_a \cdot q_b \cdot e^{-2\gamma l}, \quad (8a)$$

$$Q_{tb} = \frac{U_{tb}}{U_{2g}} = -q_b \int_0^l S'(x) e^{-2\gamma(l-x)} dx = -q_b \int_0^l S'(l-x) e^{-2\gamma x} dx, \quad (8b)$$

$$Q_{ta} = \frac{U_{ta}}{U_{2g}} = q_a \int_0^l S'(x) e^{-2\gamma x} dx, \quad (8c)$$

$$Q_{ti} = \frac{U_{ti}}{U_{2g}} = - \int_0^l dx \int_0^x S'(x) S'(y) e^{-2\gamma(x-y)} dy, \quad (8d)$$

gdzie:

$$q_a = \frac{Z_a - Z(0)}{Z_a + Z(0)} \quad \text{— współczynnik odbicia na początku toru,}$$

$$q_b = \frac{Z_b - Z(l)}{Z_b + Z(l)} \quad \text{— współczynnik odbicia na końcu toru,}$$

$$S'(x) = \frac{dS(x)}{dx} \quad (9a)$$

[ze względu na własności funkcji $S(x)$ pochodną tę należy traktować jako pochodną uogólnioną (w sensie dystrybucyjnym)],

przy czym

$$S(x) = \frac{Z(x) - Z_0}{2Z_0} \quad (9b)$$

jest odchyleniem względem impedancji falowej miejscowej od jej wartości przeciętnej („teoretycznej”) Z_0 . Wzory (8) są słuszne, jeżeli są spełnione warunki:

$$|S(x)| \ll 1, \quad (10a)$$

$$|q_a| \ll 1, \quad (10b)$$

$$|q_b| \ll 1, \quad (10c)$$

Funkcja $S(x)$ jest w zasadzie określona w przedziale $(0, l)$. Przy badaniu sygnałów odbitych jest uzasadnione dodatkowe założenie, że

$$S(x) = \frac{Z(0) - Z_0}{2Z_0} = S(0) \quad \text{dla} \quad x \leq 0, \quad (10d)$$

$$S(x) = \frac{Z(l) - Z_0}{2Z_0} = S(l) \quad \text{dla} \quad x \geq l, \quad (10e)$$

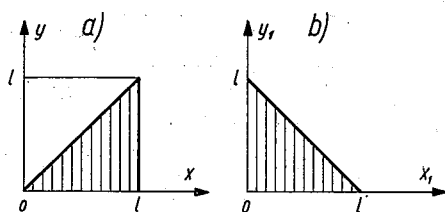
Jak wynika z warunku (10a), funkcja $S(x)$ jest ograniczona. Dodatkowo można przyjmować, że funkcja ta jest przedziałami ciągła i ma co najwyżej nieciągłości typu skokowego.

Wzór (8d) możemy przedstawić jeszcze w nieco zmienionej postaci, wygodniejszej w niektórych zastosowaniach. Wprowadzimy nowe zmienne

$$x_1 = x - y; \quad y_1 = y,$$

skąd

$$x = x_1 + y_1; \quad y = y_1.$$



Rys. 3. Obszary całkowania

a) dla wzoru (8d),

b) dla wzoru (11)

Obszar całkowania: $0 \leq x \leq l; 0 \leq y \leq x$ przekształci się teraz w obszar: $0 \leq x_1 \leq l; 0 \leq y_1 \leq l - x_1$ (rys. 3). Biorąc pod uwagę, że $dx_1 dy_1 = dx dy$, możemy wzór (8d) przepisać w postaci:

$$Q_{ii} = - \int_0^l e^{-2\gamma x_1} \left\{ \int_0^{l-x_1} S'(y_1) S'(y_1 + x_1) dy_1 \right\} dx_1. \quad (11)$$

Wobec tego współczynnik echa obcego można wyrazić wzorem

$$Q_{ti} = - \int_0^l f_{s'}(x) e^{-2\gamma x} dx, \quad (12)$$

gdzie

$$f_{s'}(x) = \int_0^{l-x} S'(y) S'(y+x) dy. \quad (13)$$

We wzorach (8) i (13) występuje pochodna funkcji $S(x)$. Wykażemy, że (w zakresie interesujących nas częstotliwości) funkcję tę można uważać za funkcję rzeczywistą i niezależną od częstotliwości.

W zakresie częstotliwości użytecznych impedancja falowa toru wyraża się wzorem [5]

$$Z = Z_{\infty} \left(1 + \frac{m'}{\sqrt{j\omega}} \right), \quad (14)$$

gdzie:

Z_{∞} — impedancja falowa nominalna toru,

m' — stała niezależna od częstotliwości,

$\omega = 2\pi f$, przy czym f — częstotliwość.

W przypadku gdy obydwa przewody toru wykonane są z jednakowych materiałów, stałą m' można obliczać ze wzoru:

$$m' = \frac{1}{D} \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \sigma}} \frac{1 + \frac{D}{d}}{\ln \frac{D}{d}}, \quad (15)$$

gdzie:

σ — przewodność właściwa materiału przewodów,

μ_0 — przenikalność magnetyczna próżni,

D — średnica wewnętrzna przewodu zewnętrznego,

d — średnica przewodu wewnętrznego.

Impedancja falowa nominalna wyraża się wzorem:

$$Z_{\infty} = 60 \frac{\ln \frac{D}{d}}{\sqrt{\epsilon_w}}, \quad (16)$$

gdzie: ϵ_w — względna przenikalność dielektryczna przestrzeni międzyprzewodowej.

Obliczając różniczkę zupełną wyrażenia (14) względem zmiennych Z_{∞} i m' w punkcie $(Z_{\infty 0}, m'_0)$ otrzymamy

$$\Delta Z \approx \left[\frac{\partial Z}{\partial Z_{\infty}} \right]_{(Z_{\infty 0}, m'_0)} \Delta Z_{\infty} + \left[\frac{\partial Z}{\partial m'} \right]_{(Z_{\infty 0}, m'_0)} \Delta m' = \Delta Z_{\infty} + \frac{1}{\sqrt{j\omega}} (m'_0 \Delta Z_{\infty} + Z_{\infty 0} \Delta m'), \quad (17)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\Delta Z &= Z - Z_0, \\ \Delta Z_\infty &= Z_\infty - Z_{\infty 0}, \\ \Delta m' &= m' - m'_0.\end{aligned}$$

Przyjmując, że wielkości Z_0 , $Z_{\infty 0}$ i m'_0 są odpowiednimi wielkościami przeciętnymi („teoretycznymi”), a wielkości $Z = Z(x)$, $Z_\infty = Z_\infty(x)$ i $m' = m'(x)$ — odpowiednimi wielkościami miejscowymi, możemy obliczyć odchylenie

$$Z(x) - Z_0 \approx \Delta Z_\infty(x) + \frac{1}{\sqrt{j\omega}} [m'_0 \Delta Z_\infty(x) + Z_{\infty 0} \Delta m'(x)]. \quad (18)$$

Biorąc pod uwagę, że

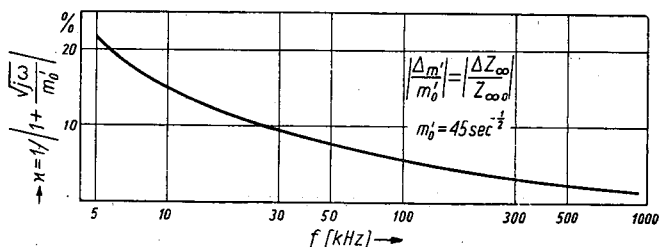
$$Z_0 = Z_{\infty 0} \left(1 + \frac{m'_0}{\sqrt{j\omega}} \right), \quad (19)$$

znajdziemy

$$S(x) = \frac{Z(x) - Z_0}{2Z_0} = \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta Z_\infty(x)}{Z_{\infty 0}} + \frac{\Delta m'(x)}{m'_0 + \sqrt{j\omega}} \right]. \quad (20)$$

Zależności pomiędzy odchyleniami ΔZ_∞ i $\Delta Zm'$ a odchyleniami $\Delta \varepsilon_w$, ΔD , Δd i $\Delta \sigma$ można uzyskać przez zróżniczkowanie wzorów (15) i (16). Biorąc pod uwagę tolerancje wykonania elementów toru i tolerancje stałych materiałowych można by się przekonać, że w praktyce wielkości $\left| \frac{\Delta Z_\infty(x)}{Z_{\infty 0}} \right|$ i $\left| \frac{\Delta m'}{m'_0} \right|$ są współmierne. Biorąc to pod uwagę oraz to, że drugi wyraz we wzorze (20) maleje ze wzrostem częstotliwości, można wnioskować, że w zakresie częstotliwości użytecznych (rys. 4)

$$S(x) \approx \frac{\Delta Z_\infty(x)}{2Z_{\infty 0}}, \quad (21)$$



Rys. 4. Stosunek $\left| \frac{\Delta Z_\infty}{Z_{\infty 0}} \right| : \left| \frac{\Delta m'}{m'_0 + \sqrt{j\omega}} \right|$ w funkcji częstotliwości obliczony w założeniu, że $\left| \frac{\Delta Z_\infty}{Z_{\infty 0}} \right| = \left| \frac{\Delta m'}{m'_0} \right|$. Przyjęta w obliczeniach wartość $m'_0 = 45 \text{ sec}^{-\frac{1}{2}}$ odpowiada normalnemu torowi współosiowemu typu 2,6/9,4

stąd wynika, że funkcję $S(x)$ można uważać za funkcję rzeczywistą, niezależną od częstotliwości¹⁾.

2.2. Sygnał wyjściowy, obliczanie sygnałów echa obcego

2.2.1. Zależności ogólne

Jeżeli znany jest przebieg czasowy sygnału użytecznego doprowadzonego do toru $u_0(t)$, to możemy temu przebiegowi przyporządkować transformatę Laplace'a²⁾ $U_0(s) = L[u_0(t)]$. Znając $U_0(s)$ możemy wyznaczyć transformatę Laplace'a głównego sygnału wyjściowego $U_{2g}(s)$ ze wzoru (4), a zatem możemy wyznaczyć przebieg czasowy tego sygnału

$$u_{2g}(x) = L^{-1}[U_{2g}(s)] = L^{-1}\left[U_0(s) \frac{2Z_b(s)}{Z(l,s) + Z_b(s)} e^{-\gamma(s)l}\right]. \quad (22)$$

Jeżeli już znany jest przebieg czasowy $u_{2g}(t)$ głównego sygnału wyjściowego [i jego transformata $U_{2g}(s)$] i jeżeli znany jest współczynnik echa obcego $Q_t(s)$, to na podstawie wzoru (6) możemy wyznaczyć przebieg czasowy sygnału echa obcego:

$$u_t(t) = L^{-1}[U_{2g}(s) \cdot Q_t(s)]. \quad (23)$$

Napięcie wyjściowe będzie na zasadzie wzoru (3) sumą:

$$u_2(t) = u_{2g}(t) + u_t(t). \quad (24)$$

Nie będziemy tu szczegółowo rozpatrywać sposobów obliczania sygnału głównego $u_{2g}(t)$ (zagadnienia te rozwiązuje się identycznie jak dla toru jednorodnego) i w dalszym ciągu będziemy uważali, że sygnał ten jest znany³⁾.

Znajdziemy teraz odpowiedź impulsową echa obcego (tzn. założymy, że $u_{2g}(t) = \delta(t)$ jest funkcją impulsową Diraca), przy czym najpierw rozpatrzmy przypadek toru bezstratnego. Jakkolwiek tor taki jest torem idealnym, to jednak odpowiednio krótkie odcinki torów można rozpatrywać jak tory bezstratne (małe zniekształcenia sygnałów i małe tłumienie). Tamowność operatorowa dla toru bezstratnego wyraża się wzorem:

$$\gamma(s) = \frac{s}{V_\infty}, \quad (25)$$

gdzie V_∞ — nominalna prędkość fazowa sygnału sinusoidalnego w torze.

¹⁾ Ten sam wniosek można otrzymać badając impulsy (echa własnego) odbite od niejednorodności wewnętrznych toru dla pewnych typowych przebiegów funkcji $S(x)$ — zob. np. [6].

²⁾ Zakładamy, że funkcja $u_0(t)$ spełnia warunki istnienia transformaty Laplace'a.

³⁾ Obliczanie tego sygnału nie zawsze jest konieczne — zob. rozdz. 3.1.

Uwzględniając założenie (25) we wzorach (8a), (8b), (8c) i (12) i podstawiając:

$$\frac{2x}{V_{\infty}} = \tau, \quad (26)$$

$$\frac{2l}{V_{\infty}} = T_l \quad (27)$$

otrzymany

$$Q_{tab}(s) = q_a q_b e^{-sT_l}, \quad (28a)$$

$$Q_{tb}(s) = -q_b \frac{V_{\infty}}{2} \int_0^{T_l} S' \left[\frac{V_{\infty}}{2} (T_l - \tau) \right] e^{-s\tau} d\tau, \quad (29b)$$

$$Q_{ta}(s) = q_a \frac{V_{\infty}}{2} \int_0^{T_l} S' \left(\frac{V_{\infty}\tau}{2} \right) e^{-s\tau} d\tau, \quad (28c)$$

$$Q_{ti}(s) = -\frac{V_{\infty}}{2} \int_0^{T_l} f_{s'} \left(\frac{V_{\infty}\tau}{2} \right) e^{-s\tau} d\tau. \quad (28d)$$

Przyjmując, że współczynniki odbicia na końcach toru (q_a i q_b) są rzeczywiste i niezależne od częstotliwości, znajdujemy natychmiast poszczególne składniki szukanej odpowiedzi impulsowej dla $0 \leq t \leq T_l$ (poza tym przedziałem odpowiedź impulsowa jest równa zero) w postaci:

$$q_{tab}(t) = L^{-1}[Q_{tab}(s)] = q_a q_b \delta(t - T_l), \quad (29a)$$

$$q_{tb}(t) = L^{-1}[Q_{tb}(s)] = -q_b \frac{V_{\infty}}{2} S' \left[\frac{V_{\infty}}{2} (T_l - t) \right], \quad (29b)$$

$$q_{ta}(t) = L^{-1}[Q_{ta}(s)] = q_a \frac{V_{\infty}}{2} S' \left(\frac{V_{\infty}t}{2} \right), \quad (29c)$$

$$q_{ti}(t) = L^{-1}[Q_{ti}(s)] = -\frac{V_{\infty}}{2} f_{s'} \left(\frac{V_{\infty}t}{2} \right). \quad (29d)$$

Jak widać ze wzorów (29), poszczególne składniki odpowiedzi impulsowej w sposób prosty zależą od odchylenia względnego $S(x)$, charakteryzującego niejednorodność toru.

Rozpatrzmy teraz przypadek ogólny. Tamowność operatorową w przypadku ogólnym możemy wyrazić wzorem:

$$\gamma(s) = \frac{1}{V_{\infty}} [s + g(s)], \quad (30)$$

gdzie $g(s)$ jest funkcją charakteryzującą tłumienność i zniekształcenia sygnału w torze¹⁾.

¹⁾ Nie przesądzamy na razie postaci funkcji $g(s)$; postać ta może być różna dla różnych parametrów konstrukcyjnych toru i różnych zakresów częstotliwości.

Zauważmy, że w takim razie zależność tamowności od częstotliwości można wyrazić wzorem:

$$\gamma(j\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega) = \frac{g'(\omega)}{V_\infty} + j \frac{\omega + g''(\omega)}{V_\infty}, \quad (31)$$

gdzie oznaczono: $g'(\omega) = \operatorname{Re} g(j\omega)$, $g''(\omega) = \operatorname{Im} g(j\omega)$ ¹.

Uwzględniając wzór (30) we wzorach (8a), (8b), (8c) i (12) otrzymamy:

$$Q_{iab}(s) = q_a q_b e^{-\frac{2l}{V_\infty}[s+g(s)]}, \quad (32a)$$

$$Q_{ib}(s) = -q_b \int_0^l S'(l-x) e^{-\frac{2x}{V_\infty}[s+g(s)]} dx, \quad (32b)$$

$$Q_{ia}(s) = q_a \int_0^l S'(x) e^{-\frac{2x}{V_\infty}[s+g(s)]} dx, \quad (32c)$$

$$Q_{ii}(s) = - \int_0^l f_{s'}(x) e^{-\frac{2x}{V_\infty}[s+g(s)]} dx. \quad (32d)$$

Uwzględniając teraz we wzorach (32) podstawienia (26) i (27) otrzymamy:

$$Q_{iab}(s) = q_a q_b e^{-T_l g(s)} e^{-sT_l}, \quad (33a)$$

$$Q_{ib}(s) = -q_b \frac{V_\infty}{2} \int_0^{T_l} S' \left[\frac{V_\infty}{2} (T_l - \tau) e^{-\tau g(s)} e^{-s\tau} d\tau \right], \quad (33b)$$

$$Q_{ia}(s) = q_a \frac{V_\infty}{2} \int_0^{T_l} S' \left(\frac{V_\infty \tau}{2} \right) e^{-\tau g(s)} e^{-s\tau} d\tau, \quad (33c)$$

$$Q_{ii}(s) = - \frac{V_\infty}{2} \int_0^{T_l} f_{s'} \left(\frac{V_\infty \tau}{2} \right) e^{-\tau g(s)} e^{-s\tau} d\tau. \quad (33d)$$

Stosując teraz do równań (33) operację transformacji odwrotnej L^{-1} , zakładając przy tym, że operacja ta (całkowanie względem zmiennej zespolonej s) jest przemienna z całkowaniem względem zmiennej τ , a ponadto zakładając (tak jak w przypadku toru bezstratnego), że wielkości q_a i q_b są niezależne od zmiennej s , otrzymamy

$$q_{iab}(t) = L^{-1}[Q_{iab}(s)] = q_a q_b G(T_l, t - T_l) \quad (34a)$$

$$q_{ib}(t) = L^{-1}[Q_{ib}(s)] = -q_b \frac{V_\infty}{2} \int_0^{T_l} S' \left[\frac{V_\infty}{2} (T_l - \tau) \right] G(\tau, t - \tau) d\tau, \quad (34b)$$

¹⁾ Dla częstotliwości praktycznie wykorzystywanych na ogół $|g(j\omega)| \ll |j\omega|$.

$$q_{ia}(t) = L^{-1}[Q_{ia}(s)] = q_a \frac{V_\infty}{2} \int_0^{T_1} S' \left(\frac{V_\infty \tau}{2} \right) G(\tau, t - \tau) d\tau, \quad (34c)$$

$$q_{ii}(t) = L^{-1}[Q_{ii}(s)] = -\frac{V_\infty}{2} \int_0^{T_1} f_{s'} \left(\frac{V_\infty \tau}{2} \right) G(\tau, t - \tau) d\tau, \quad (34d)$$

gdzie oznaczono:

$$G(\tau, t) = L^{-1}[e^{-\tau g(s)}] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{-\tau g(s)} e^{st} ds, \quad (35)$$

gdzie: c — określa linię całkowania.

W ten sposób wyznaczyliśmy poszczególne składniki odpowiedzi impulsowej echa obcego. We wzorach (34) wielkości q_a , q_b , $S' \left(\frac{V_\infty \tau}{2} \right)$, $f_{s'} \left(\frac{V_\infty \tau}{2} \right)$ charakteryzują odbicia w torze, natomiast funkcja $G(\tau, t)$ charakteryzuje tłumienie i zniekształcenia wniesione przez tor.

W zakresie częstotliwości używanych przy transmisji dalekosieżnej na torach współosiowych tłumowność jednostkowa wyraża się wzorem [5] ¹⁾

$$\gamma(s) \approx \frac{1}{V_\infty} (s + m' \sqrt{s}), \quad (36)$$

wobec czego

$$g(s) = m' \sqrt{s}. \quad (37)$$

Takiej funkcji $g(s)$ odpowiada funkcja ²⁾

$$G(\tau, t) = L^{-1}[e^{-m' \sqrt{s}}] = \frac{\tau m'}{2\sqrt{\pi} t^{3/2}} e^{-\frac{m'^2 \tau^2}{4t}} \mathbf{1}(t); \quad \tau > 0, \quad (38)$$

gdzie:

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{dla } t > 0 \\ 0, & \text{dla } t < 0 \end{cases} \quad \text{— skok jednostkowy.}$$

Uwzględniając zależność (38) we wzorach (34) można by dla danych q_a , q_b i $S(x)$ obliczyć poszczególne składniki odpowiedzi impulsowej. Postać funkcji (38) wskazuje, że efektywne obliczenie całek we wzorach (34) może być trudne nawet dla prostych przebiegów funkcji $S'(x)$. Otrzymane zależności mogą jednak być w razie potrzeby wykorzystane jako punkt wyjścia do obliczeń przy pomocy maszyn matematycznych.

¹⁾ Wzór ten nie uwzględnia wpływu strat w dielektryku przestrzeni międzyprzewodowej, a ponadto nie obowiązuje on dla całkiem małych częstotliwości.

²⁾ Zob. np. [2] — tablice transformat Laplace'a.

W pewnych przypadkach przy analizowaniu sygnałów echa obcego może się okazać wystarczające założenie, że tor jest tłumiący, natomiast można przyjąć, że jest on nieznkształcający. W takim przypadku tamowność

$$\gamma(s) = \frac{1}{V_\infty} (s + n'), \quad (39)$$

czyli dla takiego przypadku $g(s) = n'$ (n' — stała niezależna od częstotliwości), wobec czego na mocy określenia (35)

$$G(\tau, t) = L^{-1}[e^{-n'\tau}] = e^{-n'\tau} \delta(t). \quad (40)$$

Uwzględniając funkcję (40) we wzorach (34) otrzymamy

$$q_{tab}(t) = q_a q_b e^{-n'T_1} \delta(t - T_1), \quad (41a)$$

$$q_{tb}(t) = -q_b \cdot \frac{V_\infty}{2} S' \left[\frac{V_\infty}{2} (T_1 - t) \right] e^{-n't}, \quad (41b)$$

$$q_{ta}(t) = q_a \frac{V_\infty}{2} S' \left(\frac{V_\infty t}{2} \right) e^{-n't}, \quad (41c)$$

$$q_{ti}(t) = -\frac{V_\infty}{2} f_{s'} \left(\frac{V_\infty t}{2} \right) e^{-n't}. \quad (41d)$$

Dla przypadku toru nieznkształcającego otrzymaliśmy proste zależności. Zauważmy, iż podstawiając we wzorach (41) $n' = 0$, czyli zakładając, że tor jest bezstratny, wzory (41) zredukują się do wzorów (29) otrzymanych dla toru bezstratnego na drodze bezpośredniej.

Pełna odpowiedź impulsowa jest na mocy zależności (7) sumą czterech obliczonych składników.

$$q_t(t) = q_{tab}(t) + q_{tb}(t) + q_{ta}(t) + q_{ti}(t). \quad (42)$$

W przypadku gdy znana jest odpowiedź impulsowa $q_t(t)$, na podstawie twierdzenia o splocie możemy wyznaczyć przebieg czasowy sygnału echa obcego [towarzyszący dowolnemu znanemu sygnałowi głównemu $u_{2g}(t)$] ze wzoru:

$$u_t(t) = \int_{-\infty}^{\infty} q_t(\tau) u_{2g}(t - \tau) d\tau. \quad (43)$$

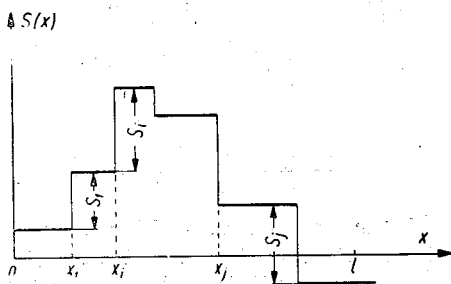
2.2.2. Zależności dla szczególnych przypadków funkcji odchylenia $S(x)$

W dotychczasowych rozważaniach nie czyniliśmy żadnych zastrzeżeń dotyczących przebiegu funkcji odchylenia $S(x)$. Rozważymy teraz dwa typowe przypadki szczególne przebiegu tej funkcji.

a) Najpierw przyjmiemy założenie, że funkcja $S(x)$ zmienia się skokami w określonych punktach nieciągłości, przy czym pomiędzy tymi punktami funkcja ta jest stała (rys. 5). Założenie takie może mieć dosyć ogólne znaczenie, wynikające z możliwości aproksymacji dowolnej krzywej krzywą schodkową. Funkcję $S(x)$ w rozpatrywanym przypadku można wyrazić wzorem:

$$S(x) = \sum_i S_i \cdot 1(x - x_i), \quad (44)$$

gdzie S_i — wielkość przyrostu funkcji $S(x)$ w punkcie nieciągłości x_i ¹⁾.



Rys. 5. Funkcja $S(x)$ zmienna skokami

Suma (44) rozciągnięta jest na wszystkie punkty nieciągłości zawarte w przedziale $(0, l)$. Różniczkując wyrażenie (44) i przyjmując przy tym, iż pochodna funkcji jednostkowej jest równa funkcji impulsowej δ , otrzymamy

$$S'(x) = \sum_i S_i \delta(x - x_i). \quad (45)$$

Znajdziemy teraz funkcję $f_s(x)$ charakteryzującą podwójne odbicia wewnętrzne toru. Ze względu na charakter funkcji $S'(x)$ definicyjny wzór (13) niezbyt nadaje się do obliczenia funkcji $f_s(x)$. Postąpimy więc inaczej. Wyznamy najpierw bezpośrednio na podstawie wzoru (8d) odpowiedź impulsową $q_{ii}(t)$ dla toru bezstratnego, a następnie porównując tę odpowiedź ze wzorem (29d) wyznaczmy funkcję $f_s(x)$. Mamy:

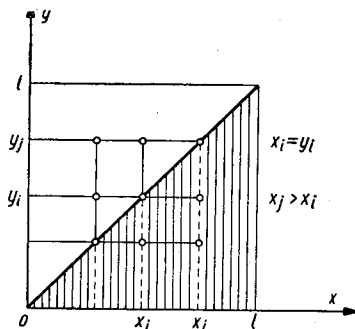
$$\begin{aligned} S'(x) \cdot S'(y) &= \sum_i S_j \cdot \delta(x - x_j) \cdot \sum_i S_i \delta(y - y_i) = \\ &= \sum_{i,j} S_i S_j \delta_2(x - x_j, y - y_i), \end{aligned} \quad (46)$$

¹⁾ $S_i > 0$ dla przyrostu dodatniego, natomiast $S_i < 0$ dla przyrostu ujemnego.

przy czym oczywiście $x_k = y_k$. Przy zapisie wyrażenia (46) posłużono się pojęciem dwuwymiarowej funkcji impulsowej.

$$\delta(x - x_0, y - y_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0).^{1)}$$
(47)

Funkcja (46) ma więc wartości nieskończone w punktach (x_j, y_i) . Tylko te z tych punktów, które leżą w obszarze całkowania wzoru (8d) (rys. 6), wchodzi w grę przy obliczaniu współczynnika Q_{ii} . Uwzględnia-



Rys. 6. Obszar całkowania całki we wzorze (8d).
Punktami zaznaczono „bieguny typu δ_2 ” funkcji
podcałkowej

jąc teraz we wzorze (8d) funkcję (46) i założenie, że tor jest bezstratny ($\gamma = \frac{s}{V_\infty}$), biorąc ponadto pod uwagę, że $x_i = y_i$ i że $x_j > x_i$, oraz korzystając z własności funkcji δ_2 otrzymamy:

$$\begin{aligned} Q_{ii}(s) &= - \iint_D \sum_{i,j} S_i S_j \delta(x - x_j, y - y_i) e^{-\frac{2s}{V_\infty}(x-y)} dx dy = \\ &= - \sum_{\substack{i,j \\ j > i}} S_i S_j e^{-\frac{2s}{V_\infty}(x_j, x_i)} - \frac{1}{2} \sum_i S_i^2. \end{aligned}$$
(48)

Przyjmując teraz oznaczenie

$$\frac{2 x_i}{V_\infty} = t_i$$
(49)

¹⁾ Funkcja ta ma następującą własność

$$\iint_D f(x, y) \delta(x - x_0, y - y_0) dx dy = f(x_0, y_0),$$

jeżeli obszar całkowania D zawiera punkt (x_0, y_0) , a funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w tym obszarze.

²⁾ Przyjęto tu, że $\iint_D f(x, y) \delta(x - x_0, y - y_0) dx dy = \frac{1}{2} f(x_0, y_0)$, jeżeli punkt (x_0, y_0)

leży na prostej ograniczającej obszar całkowania D (rys. 6) — zob. również niżej przypadek b).

otrzymamy odpowiedź impulsową dla rozpatrywanego przypadku

$$\begin{aligned} q_{ii}(t) &= L^{-1}[Q_{ii}(s)] = - \sum_{\substack{i,j \\ j>i}} S_i S_j \delta[t - (t_j - t_i)] - \frac{1}{2} \sum_i S_i^2 \delta(t) = \\ &= - \frac{V_\infty}{2} \left[\sum_{\substack{i,j \\ j>i}} S_i S_j \delta\left\{\frac{V_\infty}{2}[t - (t_j - t_i)]\right\} + \frac{1}{2} \sum_i S_i^2 \delta\left(\frac{V_\infty t}{2}\right) \right]^{1)} \end{aligned} \quad (50)$$

Porównując wzór (50) ze wzorem (29d) ostatecznie otrzymamy

$$f_{s'}(x) = \sum_{\substack{i,j \\ j>i}} S_i S_j \delta[x - (x_j - x_i)] + \frac{1}{2} \sum_i S_i^2 \delta(x). \quad (51)$$

Uwzględniając teraz zależności (45) i (51) we wzorach ogólnych (34) otrzymamy

$$q_{tab}(t) = q_a q_b G(T_l, t - T_l), \quad (52a)$$

$$\begin{aligned} q_{tb}(t) &= -q_b \frac{V_\infty}{2} \int_0^{T_l} \sum_i S_i \delta\left[\frac{V_\infty}{2}(T_l - \tau - t_i)\right] G(\tau, t - \tau) d\tau = \\ &= -q_b \sum_i S_i \cdot G[T_l - t_i, t - (T_l - t_i)], \end{aligned} \quad (52b)$$

$$\begin{aligned} q_{ta}(t) &= q_a \frac{V_\infty}{2} \int_0^{T_l} \sum_i S_i \delta\left[\frac{V_\infty}{2}(\tau - t_i)\right] G(\tau, t - \tau) d\tau = \\ &= q_a \sum_i S_i \cdot G(t_i, t - t_i), \end{aligned} \quad (52c)$$

$$\begin{aligned} q_{ti}(t) &= -\frac{V_\infty}{2} \int_0^{T_l} \sum_{\substack{i,j \\ j>i}} S_i S_j \delta\left[\frac{V_\infty}{2}(\tau - t_j + t_i)\right] G(\tau, t - \tau) d\tau + \\ &\quad - \frac{V_\infty}{2} \int_0^{T_l} \frac{1}{2} \sum_i S_i^2 \delta\left(\frac{V_\infty \tau}{2}\right) G(\tau, t - \tau) d\tau = \\ &= - \sum_{\substack{i,j \\ j>i}} S_i S_j G[t_j - t_i, t - (t_j - t_i)] - \frac{1}{2} \sum_i S_i^2 G(0, t).^{2)} \end{aligned} \quad (52d)$$

Otrzymane wzory dla rozpatrywanego przypadku są o wiele prostsze od wzorów ogólnych (34); we wzorach tych nie występują już całki.

1) Skorzystano tu z własności funkcji δ : $\delta(x) = a \cdot \delta(ax)$.

2) $G(0, t) = \delta(t)$ — zob. wzór (35).

Ostatni czynnik we wzorze (52d) nie ma większego znaczenia praktycznego ze względu na to, iż odpowiadający mu sygnał echa obcego pokrywa się całkowicie z sygnałem głównym; występowanie tego czynnika we wzorze dotyczącym echa obcego jest konsekwencją przyjętego za podstawę rozważań określenia współczynnika echa obcego Q_{ti} .

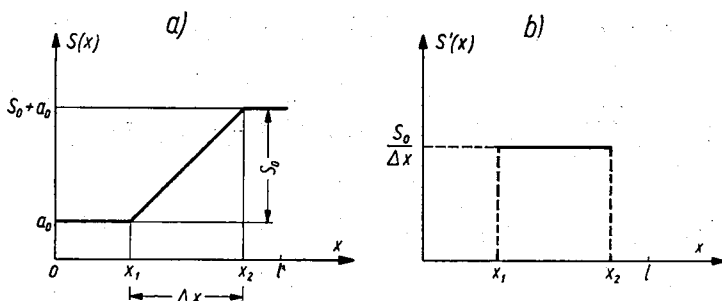
b) Przyjmijmy teraz założenie, że funkcja odchylenia jest określona wzorem:

$$S(x) = \begin{cases} a_0 & \text{dla } x \leq x_1, \\ \frac{S_0}{x_2 - x_1} (x - x_1) + a_0 = \frac{S_0}{\Delta x} (x - x_1) + a_0, & \text{dla } x_1 \leq x \leq x_2, \\ S_0 + a_0 & \text{dla } x \geq x_2. \end{cases} \quad (53)$$

Pochodne tej funkcji wyraża się wzorem

$$S'(x) = \begin{cases} \frac{S_0}{\Delta x} & \text{dla } x_1 < x < x_2, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x. \end{cases} \quad (54)$$

Przebiegi funkcji $S(x)$ i $S'(x)$ określonych (odpowiednio) wzorami (53) i (54) pokazano na rys. 7.



Rys. 7.

- a) Przebieg funkcji $S(x)$ określonej wzorem (53),
b) Przebieg funkcji $S'(x)$ określonej wzorem (54)

Obliczymy teraz na podstawie wzoru (13) funkcję $f_{s'}(x)$ charakteryzującą podwójne odbicia wewnątrz toru

$$f_{s'}(x) = \left(\frac{S_0}{\Delta x} \right)^2 \int_{x_1}^{x_2 - x} dy = \left(\frac{S_0}{\Delta x} \right)^2 \cdot (x_2 - x_1 - x) = \left(\frac{S_0}{\Delta x} \right)^2 (\Delta x - x) \quad \text{dla } 0 < x \leq \Delta x,$$

lub po przekształceniu

$$f_{s'}(x) = \begin{cases} \frac{S_0^2}{\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x} \right) & \text{dla } 0 < x \leq \Delta x, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x. \end{cases} \quad (55)$$

Obliczmy teraz wielkości występujące we wzorach ogólnych (34)

$$\frac{V_{\infty}}{2} S' \left(\frac{V_{\infty} \tau}{2} \right) = \frac{S_0}{\Delta T} \quad \text{dla } t_1 < \tau < t_2, \quad (56a)$$

$$\frac{V_{\infty}}{2} S' \left[\frac{V_{\infty}}{2} (T_l - \tau) \right] = \frac{S_0}{\Delta T} \quad \text{dla } T_l - t_2 < \tau < T_l - t_1, \quad (56b)$$

$$\frac{V_{\infty}}{2} f_{s'} \left(\frac{V_{\infty} \tau}{2} \right) = \frac{S_0^2}{\Delta T} \left(1 - \frac{\tau}{\Delta T} \right) \quad \text{dla } 0 < \tau \leq \Delta T, \quad (56c)$$

gdzie oznaczono:

$$\Delta T = \frac{2 \Delta x}{V_{\infty}}, \quad t_1 = \frac{2 x_1}{V_{\infty}}, \quad t_2 = \frac{2 x_2}{V_{\infty}}. \quad (57)$$

Uwzględniając te zależności we wzorach (34) otrzymamy wzory:

$$q_{iab}(t) = q_a q_b G(T_l, t - T_l), \quad (58a)$$

$$q_{ib}(t) = - q_b \frac{S_0}{\Delta T} \int_{T_l - t_2}^{T_l - t_1} G(\tau, t - \tau) d\tau, \quad (58b)$$

$$q_{ia}(t) = q_a \frac{S_0}{\Delta T} \int_{t_1}^{t_2} G(\tau, t - \tau) d\tau, \quad (58c)$$

$$q_{ii}(t) = - \frac{S_0^2}{\Delta T} \int_0^{\Delta T} \left(1 - \frac{\tau}{\Delta T} \right) G(\tau, t - \tau) d\tau. \quad (58d)$$

W ostatnim z tych wzorów zmienna całkowania τ zmienia się w przedziale $(0, \Delta T)$. Jeżeli Δx jest małe (np. dla częstotliwości stosowanych w teletransmisji rzędu kilkudziesięciu metrów), to można przyjąć we wzorze (58d): $G(\tau, t - \tau) \approx G(0, t - \tau) = \delta(t - \tau)$, [zob. wzór 35)], a więc w takim przypadku wzór (58d) zredukuje się do prostego wzoru

$$q_{ii}(t) = \begin{cases} - \frac{S_0^2}{\Delta T} \left(1 - \frac{t}{\Delta T} \right) & \text{dla } 0 \leq t \leq \Delta T, \\ 0 & \text{dla pozostałych } t. \end{cases} \quad (59)$$

Wyprowadzone wzory dotyczące omawianego przypadku są względnie proste; całki w tych wzorach zawierają jedynie funkcję $G(\tau, t - \tau)$.

W przypadku gdy można przyjąć, że tor jest nieznieszkodliwiający, wzory dotyczące składników odpowiedzi impulsowej echa obcego są bardzo proste; otrzymamy je podstawiając zależności (56) do wzorów (41) w postaci:

$$q_{iab}(t) = q_a q_b e^{-n'T_l} \delta(t - T_l), \quad (60a)$$

$$q_{ib}(t) = \begin{cases} -\frac{S_0 q_b}{T} e^{-n't} & \text{dla } T_1 - t_2 < t < T_1 - t_1, \\ 0 & \text{dla pozostałych } t, \end{cases} \quad (60b)$$

$$q_{ia}(t) = \begin{cases} \frac{S_0 q_a}{T} e^{-n't} & \text{dla } t_1 < t < t_2, \\ 0 & \text{dla pozostałych } t, \end{cases} \quad (60c)$$

$$q_{ii}(t) = \begin{cases} -\frac{S_0^2}{\Delta T} \left(1 - \frac{t}{\Delta T}\right) e^{-n't} & \text{dla } 0 < t \leq \Delta T, \\ 0 & \text{dla pozostałych } t. \end{cases} \quad (60d)$$

Wzory te nie zawierają już całek, które mogą być trudne do rozwiązania w konkretnych obliczeniach.

Omawiany przypadek może mieć znaczenie przy badaniu odbić wyprowadzanych przez odcinki dopasowujące tory bardzo wielkich częstotliwości. Należy tu zauważyć, że im większa będzie różnica Δx (a więc i różnica ΔT), tym mniejsze będą (co do bezwzględnej wartości) sygnały echa, przy czym jednak dłużej będzie trwał sygnał odpowiadający składnikowi $q_{ii}(t)$.

Z postaci wyprowadzonych wzorów wynika pewien wniosek. Zauważmy mianowicie, że wzór (58d) (i inne z niego wynikające) zawiera czynnik $-S_0^2$. Znaczy to, że $q_{ii} < 0$ zarówno w przypadku gdy $S_0 > 0$ [wzrost $S(x)$ — rys. 7], jak i w przypadku gdy $S_0 < 0$ [malenie $S(x)$]. Wynika stąd, iż w przypadku bardziej złożonej krzywej łamanej $S(x)$ ¹⁾ (zob. np. rys. 8a) odpowiednie składniki w odpowiedzi impulsowej $q_{ii}(t)$, odpowiadające poszczególnym odcinkom prostym tej krzywej, będą się sumowały (zawsze ze znakiem ujemnym), podczas gdy inne składniki mogą się, przynajmniej częściowo, kompensować (rys. 8b). Można więc już teraz twierdzić, że dla bardzo długiego toru, dla założenia, że ilość odcinków prostych krzywej łamanej jest proporcjonalna do długości toru, dominującym czynnikiem w sygnale echa obcego będzie czynnik będący sumą wyrazów odpowiadających wyrażeniu (58d) rozciągniętej na wszystkie odcinki proste linii łamanej²⁾.

Możemy teraz w sposób bezpośredni sprawdzić założenie dotyczące ostatniego czynnika wzoru (48) lub wzoru (52d). Z tego ostatniego wzoru wynika, że w przypadku toru bezstratnego odpowiedni składnik odpowiedzi jednostkowej dla pojedynczego skoku (o wielkości S_0) wyniesie

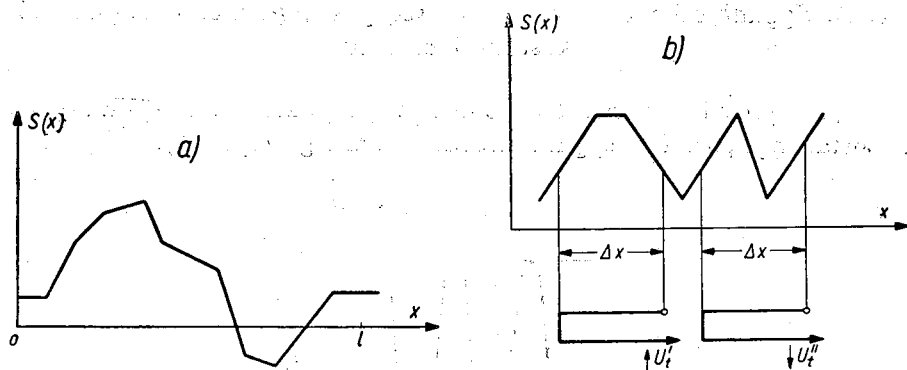
$h_{ii}(t) = -\frac{1}{2} S_0^2 \cdot 1(t)$. Taki sam wynik otrzymamy ze wzoru (59d) (dla $n=0$) przy przejściu granicznym $\Delta T \rightarrow 0$: mamy bowiem:

¹⁾ Przypadku tego nie będziemy tu rozpatrywać szczegółowo.

²⁾ Podobne wnioski wynikają również z rozważań statystycznych — zob. niżej.

$$h_{ii}(t, \Delta T) = \int_0^t q_{ii}(\tau) d\tau = \begin{cases} S_0^2 \left[\frac{1}{2} \frac{t^2}{(\Delta T)^2} - \frac{t}{\Delta T} \right] & \text{dla } 0 \leq t \leq \Delta T, \\ -\frac{1}{2} S_0^2 & \text{dla } t \leq \Delta T. \end{cases}$$

stąd widać, że $h_{ii}(t, \Delta T) \rightarrow -\frac{1}{2} S_0^2 \cdot 1(t)$, gdy $\Delta T \rightarrow 0$.

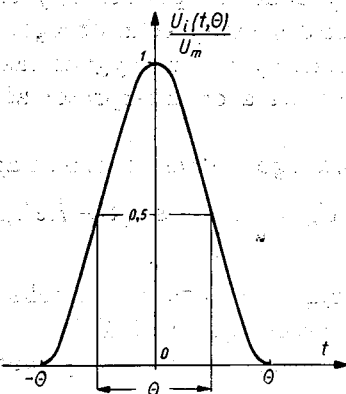


Rys. 8.

a) Przykład aproksymacji funkcji $S(x)$ krzywą łamaną,

b) Przykład kompensacji. Napięcia elementarne u_i' i u_i'' opóźnione względem napięcia sygnału głównego o ten sam czas $\frac{2\delta x}{V_\infty}$, różniące się (na końcu toru) jedynie znakiem kompensują się

Zwróćmy jeszcze uwagę na fakt, że przy obliczaniu sygnałów echa obcego towarzyszących wąskim impulsom niekoniecznie musimy posługiwać się całką splotu. Jeżeli bowiem impuls sygnału głównego $U_{2g}(t) =$



Rys. 9. Typowy impuls pomiarowy

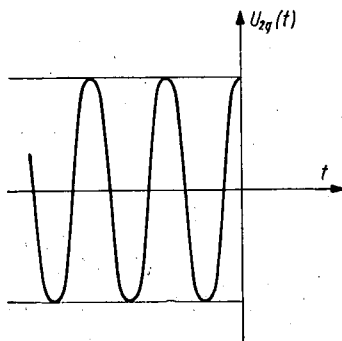
$= U_i(t, \theta)$ — (zob. np. rys. 9) jest dostatecznie wąski tak, iż jego szerokość jest o wiele mniejsza od minimalnej spośród różnic $(t_j - t_i)$ występujących we wzorach (52), lub tak, iż jego szerokość jest o wiele mniej-

sza od wielkości ΔT występującej we wzorach (58), to wtedy przybliżoną odpowiedź na taki sygnał impulsowy otrzymamy mnożąc odpowiedź impulsową przez stałą

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} u_i(t, \theta) dt. \quad ^1) \quad (61)$$

2.2.3. Sygnał echa obcego towarzyszący wyłączanemu sygnałowi kosinusoidalnemu

Rozpatrzmy teraz krótko echo obce w przypadku, gdy sygnał główny ma postać wyłączanego sygnału kosinusoidalnego (rys. 10).



Rys. 10. Wyłączany sygnał kosinusoidalny

Sygnał taki ma duże znaczenie praktyczne, ponieważ odpowiada on przejściu od płaszczyzny białej do płaszczyzny czarnej obrazu telewizyjnego, a na takim przejściu sygnały echa obcego są najbardziej widoczne. Z drugiej strony przekonamy się, że sygnał taki ma pewne znaczenie teoretyczne, ponieważ pozwala on interpretować fizycznie współczynnik echa obcego.

Równanie rozpatrywanego sygnału można napisać w postaci:

$$U_{2g}(t, \omega_0) = U_m \mathbf{1}(-t) \cdot \cos \omega_0 t = \operatorname{Re} U_m \mathbf{1}(-t) e^{j\omega_0 t}, \quad (62)$$

gdzie:

- ω_0 — jest pulsacją przebiegu kosinusoidalnego,
- U_0 — amplituda przebiegu dla $t \leq 0$.

Zamiast rozpatrywać przebieg określony wzorem (62) można rozpatrywać przebieg

$$U_{2g}(t, \omega_0) = U_m \mathbf{1}(-t) e^{j\omega_0 t}. \quad (63)$$

¹⁾ Zob. np. [8] lub [2]. Funkcja $u_i(t, \theta)$ musi być tego rodzaju, aby funkcja $\delta(t, \theta) = \frac{u_i(t, \theta)}{a(\theta)}$ miała w granicy ($\theta \rightarrow 0$) własności funkcji $\delta(t)$ — zob. np. [8].

Odpowiadający temu sygnałowi sygnał echa obcego na mocy wzoru (43) będzie:

$$u'_t(t, \omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} q_t(\tau) e^{j\omega_0(t-\tau)} \mathbf{1}(\tau - t) d\tau = U_m \begin{cases} e^{j\omega_0 t} \int_t^{\infty} q_t(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau & \text{dla } t \geq 0, \\ e^{j\omega_0 t} \int_0^{\infty} q_t(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau & \text{dla } t \leq 0. \end{cases}$$

Przy obliczaniu całki uwzględniono, że dla $\tau < 0$ funkcja $q_t(\tau) = 0$. Biorąc pod uwagę, że

$$Q_t(j\omega_0) = \int_0^{\infty} q_t(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau, \quad (64)$$

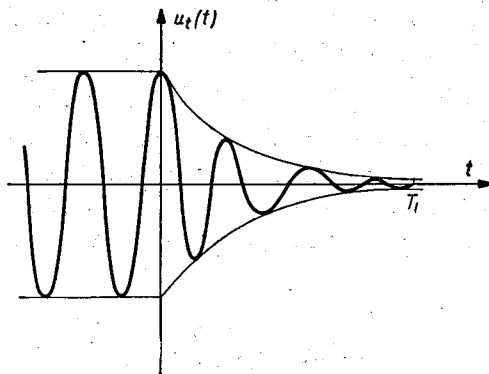
mamy

$$u'_t(t, \omega_0) = U_m e^{j\omega_0 t} \begin{cases} \int_t^{\infty} q_t(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau & \text{dla } t \geq 0, \\ Q_t(j\omega_0) & \text{dla } t \leq 0, \end{cases} \quad (65)$$

Odpowiedź na sygnał rzeczywisty określony wzorem (62) można znaleźć biorąc

$$u_t(t, \omega_0) = \operatorname{Re} u'_t(t, \omega_0).$$

Ze wzoru (65) wynika, że dla $t \leq 0$ sygnał echa obcego jest kosinusoidalny, przy czym jego amplituda jest stała i równa $U_m |Q_t(j\omega_0)|$. Dla $t > 0$



Rys. 11. Orientacyjny przebieg sygnału echa obcego towarzyszący wyłączanemu sygnałowi kosinusoidalnemu

(po zniknięciu sygnału głównego) amplituda sygnału będzie się zmieniać, przy czym będzie miała ona tendencję do zmniejszania się ze wzrostem t (rys. 11). Dla $t > T_l$ sygnał echa obcego praktycznie zniknie, ponieważ $q_t(\tau) \approx 0$, dla $\tau > T_l$ (dla toru nieznieszkodliwiającego $q_t(\tau) = 0$, dla $\tau > T_l$).

2.3. Zależności statystyczne

2.3.1. Założenia ogólne

W dotychczasowych rozważaniach zakładaliśmy, że funkcja odchylenia względnego $S(x)$ jest znana. W praktyce założenie takie jest zwykle mało przydatne, z jednej strony ze względu na niedoskonałość metod pomiaru takich funkcji, z drugiej strony — ze względu na to, iż zmierzone funkcje $S(x)$ są tak skomplikowane, że posłużenie się nimi przy konkretnych obliczeniach byłoby bardzo trudne. Ponadto, nie można dla danego odcinka toru (np. dla odcinka fabrykacyjnego) określić a priori, przed dokonaniem pomiaru — przebiegu funkcji $S(x)$. Obserwacja sygnałów echa własnego [związanego z przebiegiem $S(x)$] wskazuje na to, iż funkcje odchylenia zmierzone dla różnych odcinków można uważać za realizacje przebiegu przypadkowego stacjonarnego (dla danego typu toru i dla danego sposobu produkcji wszystkich zmierzonych odcinków toru).

W dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że funkcja odchylenia $S(x)$ jest w przedziale $(0, 1)$ funkcją przypadkową stacjonarną (w szerokim sensie), tj. będziemy zakładać, że funkcja korelacyjna

$$K_s(x_1, x_2) = E\{[S(x_1) - \bar{S}][S(x_2) - \bar{S}]\} = K_s(x_2 - x_1) \quad (66)$$

jest zależna tylko od wartości różnicy $|x_2 - x_1|$ [x_1 i x_2 są zawarte w przedziale $(0, 1)$], nie jest natomiast zależna od położenia x_1 i x_2 . We wzorze (66) oznaczono symbolem $\bar{S}$ wartość oczekiwaną odchylenia $S(x)$ (dla przebiegu stacjonarnego niezależną od x).

Odnosnie funkcji korelacyjnej przyjmujemy założenia:

- 1° funkcja korelacyjna $K_s(x_2 - x_1)$ jest funkcją szybko zanikającą ze wzrostem różnicy $|x_2 - x_1|$; będziemy uważać, że $K_s(x_2 - x_1) \approx 0$, gdy $|x_2 - x_1| > N$, dla N rzędu kilkunastu do kilkudziesięciu metrów,
- 2° funkcję korelacyjną $K_s(x_2 - x_1) = K_s(\xi)$ możemy przedstawić w postaci

$$K_r(\xi) = \bar{S}^2 \varphi_s\left(\frac{\xi}{R}\right), \quad (67)$$

gdzie $\bar{S}^2 = K_s(0)$ i gdzie unormowaną funkcję korelacyjną φ_s można przedstawić jako funkcję zredukowanej odległości $z = \frac{\xi}{R}$.

¹⁾ Symbol E jest symbolem operacji uśredniania, tzn. operacji znajdowania wartości oczekiwanej.

Wielkość R będziemy nazywali umownie zasięgiem korelacji. Będziemy przyjmować, że im R będzie mniejsze, tym szybciej będzie zanikała funkcja korelacyjna (dla danej funkcji φ_s).¹⁾

Jeżeli znana jest funkcja korelacyjna $K_s(\xi)$ określona wzorem (67), to funkcja korelacyjna funkcji $S'(x) = \frac{dS}{dx}$ będzie

$$\begin{aligned} K'_s(\xi) &= E[S'(x)S'(x + \xi)] = -\frac{\partial^2 K_s(\xi)}{\partial \xi^2} = \overline{S^2} \frac{\partial^2 \varphi_s\left(\frac{\xi}{R}\right)}{\partial \xi^2} = \\ &= -\frac{\overline{S^2}}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_s(z)}{\partial z^2} = -\frac{\overline{S^2}}{R^2} \varphi_s''(z). \end{aligned} \quad (68)$$

Jeżeli oznaczyć

$$K_{s'}(\xi) = \overline{S^2} \varphi_{s'}\left(\frac{\xi}{R}\right), \quad (69)$$

gdzie $\overline{S'^2} = K_{s'}(0)$, to z porównania zależności (68) i (69) wynikają zależności:

$$\overline{S'^2} = -\overline{S^2} \frac{\varphi_s''(0)}{R^2}, \quad (70a)$$

$$\varphi_{s'}(z) = \frac{\varphi_s''(z)}{\varphi_s''(0)}. \quad (70b)$$

Przyjmijmy, że wartość przeciętna („teoretyczna”) Z_0 impedancji falowej jest równa wartości oczekiwanej

$$Z_0 = E[Z(x)]. \quad (71)$$

Z definicji funkcji odchylenia względnego $S(x)$ wynika, że w takim razie

$$\overline{S} = E[S(x)] = 0, \quad (72)$$

¹⁾ Założenie takie nie jest założeniem ograniczającym ogólność przytoczonych rozważań, bowiem, ogólnie biorąc, funkcja korelacyjna może zawierać stałe parametry mające wpływ na kształt i „szerokość” funkcji korelacyjnej. Wprowadzenie zredukowanej odległości ułatwia zapis i przekształcenia odpowiednich wzorów i ułatwia wyciąganie wniosków dotyczących zależności sygnałów echa obcego od zasięgu korelacji.

Przykłady unormowanych funkcji korelacyjnych dla $z = \frac{\xi}{R}$;

$$\varphi_s(z) = e^{-k_1|z|} \cdot \cos k_2 z, \quad k_1 k_2 - \text{stałe},$$

$$\varphi_s(z) = e^{-z^2/2}.$$

skąd wynika, że również

$$\overline{S'} = E[S'(x)] = 0. \quad (73)$$

W takim razie wprowadzone poprzednio wielkości $\overline{S^2}$ i $\overline{S'^2}$ są wartościami oczekiwanymi kwadratów odpowiednio funkcji $S(x)$ i $S'(x)$.

2.3.2. Wartość oczekiwana współczynnika echa obcego, oczekiwane sygnały echa obcego

Przed wszystkim znajdziemy wartość oczekiwaną współczynnika echa obcego. Założymy tutaj, że długość toru nie jest wielkością przypadkową, natomiast współczynniki odbić q_a i q_b są wielkościami (zespolonymi) przypadkowymi, wzajemnie statystycznie niezależnymi, o wartościach przeciętnych (odpowiednio) $\overline{q_a}$ i $\overline{q_b}$.

Stosując operację uśredniania do wzorów (8a), (8b), (8c) i (12) i uwzględniając wzór (73) znajdziemy:

$$\overline{Q_{tab}}(s) = E[Q_{tab}(s)] = \overline{q_a} \cdot \overline{q_b} \cdot e^{-2\gamma l}, \quad (74)$$

$$E[Q_{tb}(s)] = E[Q_{ta}(s)] = 0, \quad (75)$$

$$\overline{Q_{ti}} = E[Q_{ti}(s)] = - \int_0^l E[f_{s'}(x)] e^{-2\gamma x} dx. \quad (76)$$

Biorąc teraz pod uwagę określenie funkcji $f_{s'}(x)$ [wzór (13)] oraz określenie funkcji korelacyjnej [wzór (69)] możemy napisać

$$\begin{aligned} E[f_{s'}(x)] &= \int_0^{l-x} E[S'(y)S'(y+x)] dx = (l-x)K_{s'}(x) = \\ &= \overline{S'^2} l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \varphi_{s'}\left(\frac{x}{R}\right). \end{aligned} \quad (77)$$

Wobec czego

$$\overline{Q_{ti}} = - \overline{S'^2} \cdot l \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \varphi_{s'}\left(\frac{x}{R}\right) e^{-2\gamma x} dx. \quad (78)$$

Wzór ten można znacznie uprościć, jeżeli wziąć pod uwagę, że funkcja podcałkowa praktycznie znika dla dużych x (zob. założenia dotyczące funkcji korelacyjnej — rozdz. 2.3.1). Wobec tego przy całkowaniu można

brać pod uwagę jedynie małe wartości x , a zatem można przyjąć $\frac{x}{l} \ll 1$.

Wynika stąd, że

$$\overline{Q_{ti}} \approx - \overline{S'^2} \cdot l \cdot F_{s'}(2\gamma, R), \quad (79)$$

gdzie

$$F_{s'}(2\gamma, R) = \int_0^l \varphi_{s'}\left(\frac{x}{R}\right) e^{-2\gamma x} dx. \quad (80)$$

Uwzględniając w całce (80) zależność (30) i biorąc pod uwagę, że przy całkowaniu wchodzi w grę jedynie małe wartości x , możemy w tej całce przyjąć: $e^{-\frac{2x}{V_\infty} g(s)} \approx 1$ ¹⁾, wobec czego uwzględniając podstawienie (26) i (27) możemy napisać:

$$\int_0^l \varphi_{s'}\left(\frac{x}{R}\right) e^{-2\gamma x} dx \approx \frac{V_\infty}{2} \int_0^{T_l} \varphi_{s'}\left(\frac{\tau}{T_R}\right) e^{-s\tau} d\tau \approx \frac{V_\infty}{2} F_{s'}(S, T_R), \quad (81)$$

$$\text{gdzie } T_R = \frac{2R}{V_\infty}. \quad (82)$$

Wynika stąd, że

$$Q_{ii}(s) \approx -\overline{S'^2} \cdot l \cdot \frac{V_\infty}{2} F_{s'}(s, T_R). \quad (83)$$

Wartość oczekiwana współczynnika echa obcego wyraża się sumą

$$\overline{Q}_t = \overline{Q}_{tab} + \overline{Q}_{ti}. \quad (84)$$

Znajdziemy teraz oczekiwaną odpowiedź impulsową

$$q_t(t) = L^{-1}[\overline{Q}_t, s] = \overline{q}_{tab}(t) + \overline{q}_{ti}(t). \quad (85)$$

Zakładając we wzorze (74), że wielkości $\overline{q}_a$ i $\overline{q}_b$ są niezależne od zmiennej s , uwzględniając w tym wzorze zależność (30) i korzystając z oznaczeń (26), (27) i (35) znajdziemy:

$$\overline{q}_{tab}(t) = L^{-1}[\overline{Q}_{tab}(s)] = \overline{q}_a \cdot \overline{q}_b G(T_b, t - T_l). \quad (86)$$

Biorąc pod uwagę, że funkcję $F_{s'}(s, T_R)$ możemy uważać za transformatę laplace'owską funkcji $\varphi_{s'}\left(\frac{t}{T_R}\right)$ (przy $t > 0$) (ponieważ $T_l \gg T_R$), możemy na podstawie wzoru (83) napisać:

$$q_{ii}(t) = L^{-1}[Q_{ii}, s] = \begin{cases} -\overline{S'^2} \cdot l \cdot \frac{V_\infty}{2} \varphi_{s'}\left(\frac{t}{T_R}\right) & \text{dla } t \geq 0, \\ 0 & \text{dla } t < 0. \end{cases} \quad (87)$$

Z przytoczonych rozważań wynikają już pewne wnioski:

- 1° Sygnał oczekiwany zawiera tylko dwa składniki: pierwszy z nich powstaje na skutek odbić od końców toru, drugi na skutek podwójnych odbić wewnątrz toru.

¹⁾ Praktycznie założenie to oznacza, że można pomijać zniekształcenia i tłumienie wniesione przez odcinek toru o długości współmiernej z zasięgiem korelacji R .

- 2° Wielkość sygnału powstającego na skutek podwójnych odbić wewnątrz toru jest wprost proporcjonalna do długości toru. Z faktu tego można wnioskować, że sygnał ten dla dostatecznie długiego toru może być sygnałem dominującym tym bardziej, że sygnał odpowiadający odbiciom od końców toru będzie tym bardziej stłumiony, im dłuższy będzie odcinek toru i im większa będzie tłumienność jednostkowa toru.
- 3° Czas trwania sygnału echa obcego towarzyszącego wąskiemu impulsowi będzie współmierny z czasem T_R odpowiadającym zasięgowi korelacji R .

Znajdziemy jeszcze oczekiwany sygnał echa obcego towarzyszący wyłączanemu sygnałowi kosinusoidalnemu. Stosując operację uśredniania do wzoru (65) mamy

$$\bar{u}'_t(t, \omega_0) = U_m e^{j\omega_0 t} \begin{cases} \int_t^{\infty} \bar{q}_t(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau & \text{dla } t \geq 0, \\ \bar{Q}_t(j\omega_0) & \text{dla } t \leq 0. \end{cases} \quad (88)$$

Sygnał ten składa się z dwóch czynników. Jeden z nich (u'_{ti}) powstaje wskutek podwójnych odbić wewnątrz toru, drugi — (u'_{tab}) powstaje wskutek odbić na końcach toru. Możemy więc napisać

$$u'_t(t, \omega_0) = u'_{tab}(t, \omega_0) + u'_{ti}(t, \omega_0), \quad (89)$$

gdzie

$$u'_{tab}(t, \omega_0) = u_m e^{j\omega_0 t} \begin{cases} \int_t^{\infty} \bar{q}_{tab}(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau & \text{dla } t \geq 0, \\ \bar{Q}_{tab}(j\omega_0) & \text{dla } t \leq 0. \end{cases} \quad (90)$$

i gdzie

$$u'_{ti}(t, \omega_0) = U_m e^{j\omega_0 t} \begin{cases} \int_t^{\infty} \bar{q}_{ti}(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau & \text{dla } t \geq 0, \\ \bar{Q}_{ti}(j\omega_0) & \text{dla } t \leq 0. \end{cases} \quad (91)$$

Sygnał $u'_{ti}(t, \omega_0)$ możemy obliczyć natychmiast. Uwzględniając wzory (85) i (83) we wzorze (91) otrzymamy

$$u'_t(t, \omega_0) = -U_m e^{j\omega_0 t} S'^2 l \frac{V_{\infty}}{2} \begin{cases} \int_t^{\infty} \varphi_s' \left(\frac{\tau}{T_R} \right) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau & \text{dla } t \geq 0, \\ F_s'(j\omega_0, T_R) & \text{dla } t \leq 0. \end{cases} \quad (92)$$

Sygnał $u'_{tab}(t, \omega_0)$, dla $t \leq 0$, można obliczyć uwzględniając zależność (74) we wzorze (90):

$$u'_{tab}(t, \omega_0) = U_m e^{j\omega_0 t} q_a q_b e^{-Tl} [j\omega_0 + g(j\omega_0)] \quad \text{dla } t \leq 0. \quad (93)$$

Przy obliczaniu u'_{tab} dla wartości $t > 0$ przyjmiemy pewne dodatkowe założenie. Po pierwsze założymy (podobnie jak przy obliczaniu odpowiedzi impulsowej), że $\bar{q}_a$ i $\bar{q}_b$ są rzeczywiste i niezależne od częstotliwości. Poza tym założymy, że dla dostatecznie dużych częstotliwości (kątowych) ω_0 można pomijać zniekształcenia fazowe¹⁾. Z założeń tych wynika, że możemy w pierwszym przybliżeniu dla rozpatrywanego przypadku przyjmować²⁾

$$\gamma(j\omega_0) = \frac{1}{V_\infty} [j\omega_0 + g'(\omega_0)]. \quad (94)$$

Biorąc pod uwagę, że w przypadku rozpatrywanego sygnału (o modulowanej amplitudzie) największy wpływ na obwiednię tego sygnału mają częstotliwości bliskie częstotliwości nośnej ω_0 , oraz zakładając, że w otoczeniu częstotliwości ω_0 funkcją $g'(\omega)$ mało się zmienia, możemy dla naszych celów przyjąć $g(s) \approx g'(\omega_0) = \text{const}$. W takim razie [zob. wzory (39) i (40)]

$$G(\tau, t) \approx e^{-g'(\omega_0)\tau} \delta(t). \quad (95)$$

Uwzględniając tę funkcję we wzorze (84) można znaleźć interesującą nas przybliżoną odpowiedź impulsową

$$\bar{q}_{tab}(t, \omega_0) = \bar{q}_a \bar{q}_b e^{-g'(\omega_0)T_l} \cdot \delta(t - T_l). \quad (96)$$

Podstawiając teraz znalezioną funkcję do wzoru (90) znajdziemy przybliżoną funkcję $u'_{tab}(t)$ dla $t > 0$ w postaci

$$\bar{u}'_{tab}(t, \omega_0) \approx \begin{cases} U_m \bar{q}_a \bar{q}_b e^{g'(\omega_0)T_l} e^{j\omega_0(t-T_l)} & \text{dla } 0 \leq t \leq T_l, \\ 0 & \text{dla } t > T_l. \end{cases} \quad (97)$$

Ze wzorów (97) i (93) widać wyraźnie, że sygnał $u'_{tab}(t, \omega_0)$ będzie tym mniejszy, im większy będzie czynnik $g'(\omega_0)T_l = 2\alpha(\omega_0)l$, czyli będzie on tym mniejszy, im większa będzie tłumienność jednostkowa i im większa będzie długość toru. Jeżeli odcinek toru będzie dostatecznie długi, jeżeli częstotliwość ω_0 będzie dostatecznie duża³⁾ i jeżeli współczynniki q_a i q_b będą niezbyt duże, to amplituda sygnału $\bar{u}'_{tab}$ może być bardzo mała.

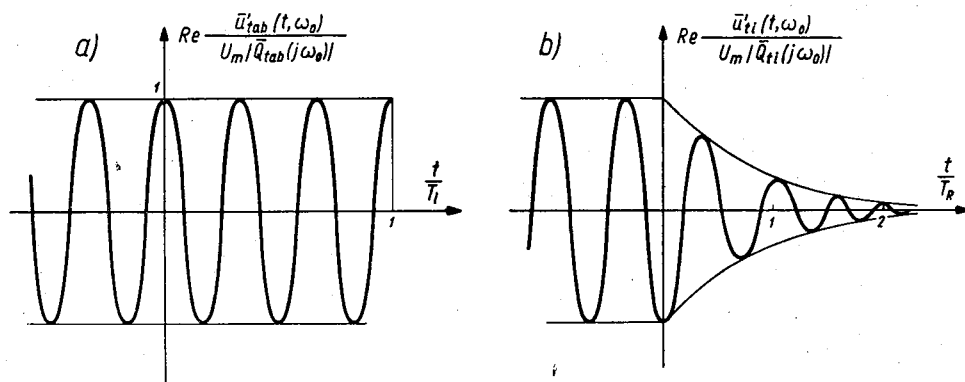
W przeciwieństwie do tego ze wzoru (92) wynika, że sygnał $\bar{u}'_{ti}$ może być duży dla torów dostatecznie długich.

Czas trwania sygnału $\bar{u}'_{tab}(t, \omega_0)$ jest równy w przybliżeniu T_l (zob. wzór (97) i rys. 12a), natomiast czas trwania sygnału $u'_{ti}(t, \omega_0)$ jest współmierny z czasem T_R odpowiadającym zasięgowi korelacji (zob. wzór (92) i rys. 12b).

¹⁾ Tzn. można przyjmować $|j\omega_0| \gg I_m g(j\omega)$.

²⁾ Zob. wzór (31).

³⁾ Tłumienność jednostkowa rośnie z częstotliwością [zob. również wzór (36)].



Rys. 12. Orientacyjne przebiegi oczekiwanych sygnałów echa obcego towarzyszących wyłączanemu sygnałowi kosinusoidalnemu

- a) sygnał powstający wskutek podwójnych odbić na końcach toru,
b) sygnał powstający wskutek podwójnych odbić wewnątrz toru

Ze wzoru (88) (zob. również rys. 12) wynika, że miarą amplitudy sygnału oczekiwanego towarzyszącego kosinusoidalnemu sygnałowi wyłączanemu jest moduł oczekiwanego współczynnika echa obcego $\bar{Q}_t(j\omega_0)$.

2.3.3. Dyspersja współczynnika echa obcego i ocena probabilistyczna wielkości echa obcego

Z poprzednich rozważań widzieliśmy, że ważną wielkością charakteryzującą wielkość sygnałów echa obcego jest współczynnik Q_t i jego wartość oczekiwana $\bar{Q}_t(j\omega)$. Aby zorientować się, o ile ta ostatnia wartość jest miarodajna przy ocenie wielkości echa obcego, należałoby ocenić rozrzut realizacji Q_t wokół wielkości oczekiwanej $\bar{Q}_t$. Miarą tego rozrzutu może być dyspersja

$$D[Q_t] = E[(Q_t - \bar{Q}_t)(Q_t^* - \bar{Q}_t^*)] = E[Q_t Q_t^*] - \bar{Q}_t \bar{Q}_t^{*1}). \quad (98)$$

Biorąc pod uwagę, że Q_t jest sumą czterech wielkości [zob. zależność (7)] napiszemy

$$\begin{aligned} E[Q_t Q_t^*] &= E[Q_{tab} + Q_{ta} + Q_{tb} + Q_{ti}](Q_{tab}^* + Q_{ta}^* + Q_{tb}^* + Q_{ti}^*) = \\ &= E[Q_{tab} \cdot Q_{tab}^* + Q_{ta} Q_{ta}^* + Q_{tb} Q_{tb}^* + Q_{ti} Q_{ti}^* + Q_{tab} Q_{ta}^* + Q_{ta}^* Q_{tab} + \\ &+ Q_{tab} Q_{tb}^* + Q_{tb}^* Q_{tab} + Q_{tab} Q_{ti}^* + Q_{ti}^* Q_{tab} + Q_{ta} Q_{tb}^* + Q_{ta}^* Q_{tb} + Q_{ta} Q_{ti}^* + \\ &+ Q_{ti}^* Q_{ta} + Q_{tb} Q_{ti}^* + Q_{ti}^* Q_{tb}]. \end{aligned} \quad (99)$$

¹⁾ Gwiazdkami oznaczamy tu wielkości zespolone sprzężone. Przy przekształcaniu wzoru (98) skorzystaliśmy z tożsamości $Q_t^* = \bar{Q}_t^*$.

Założymy teraz dodatkowo, że funkcja (przypadkowa) odchylenia względnego $S(x)$ [a więc i jej pochodna $S'(x)$] jest funkcją przypadkową gaussowską¹⁾. Przekonamy się teraz, że niektóre spośród czynników wzoru (99) znikają:

1° Z faktu, że $E[S'(x)] = 0$, wynika, że

$$E[Q_{tab} Q_{ta}^*] = E \left[q_a q_b e^{-2\gamma l} q_a^* \int_0^l S'(x) e^{-2\gamma x} dx \right] = 0.$$

Podobnie: $E[Q_{tab}^* Q_{ta}] = E[Q_{tab} Q_{tb}^*] = E[Q_{tab}^* Q_{tb}] = 0$.

2° Z faktu, że dla funkcji przypadkowej gaussowskiej zachodzi tożsamość:

$$E[S'(x) \cdot S'(x_1) \cdot S'(x_2)] = 0^2),$$

wynika, że

$$E[Q_{ta} Q_{ti}^*] = E \left[-q_a \int_0^l S'(x) e^{-2\gamma x} dx \int_0^l dx_1 \int_0^{x_1} S'(x_1) S'(x_2) e^{-2\gamma(x_1-x_2)} dx_2 \right] = 0.$$

Podobnie:

$$E[Q_{ta}^* Q_{ti}] = E[Q_{tb} Q_{ti}^*] = E[Q_{tb}^* Q_{ti}] = 0.$$

3° Z faktu, iż wielkości $S'(x)$ i $S'(l-x)$ są słabo skorelowane (można uważać, że dla zasięgu korelacji $R \ll l$ wielkości te są skorelowane jedynie w otoczeniu punktu $x = \frac{l}{2}$), wynika, iż

$$E[Q_{ta} Q_{tb}^*] \approx E[Q_{ta}^* Q_{tb}] \approx 0^3).$$

Możemy więc teraz napisać

$$\begin{aligned} E[Q_t Q_t^*] &= \overline{|Q_{tab}|^2} + \overline{|Q_{ta}|^2} + \overline{|Q_{tb}|^2} + \overline{|Q_{ti}|^2} + \\ &+ E[Q_{tab} Q_{ti}^*] + E[Q_{tab}^* Q_{ti}], \end{aligned} \quad (100)$$

gdzie oznaczono

$$\overline{|Q_{tab}|^2} = E[Q_{tab} Q_{tab}^*]; \quad \overline{|Q_{tb}|^2} = E[Q_{tb} Q_{tb}^*] \text{ itd.}$$

Biorąc teraz pod uwagę, że

$$\overline{Q_t Q_t^*} = (Q_{tab} + Q_{ti})(Q_{tab}^* + Q_{ti}^*) = \overline{Q_{tab} Q_{tab}^*} + \overline{Q_{ti} Q_{ti}^*} + \overline{Q_{tab} Q_{ti}^*} + \overline{Q_{tab}^* Q_{ti}}, \quad (101)$$

na podstawie wzorów (98) i (100) otrzymamy⁴⁾

$$D[Q_t] = [\overline{|Q_{tab}|^2} - \overline{Q_{tab}} \cdot \overline{Q_{tab}^*}] + \overline{|Q_{ta}|^2} + \overline{|Q_{tb}|^2} + [\overline{|Q_{ti}|^2} - \overline{Q_{ti}} \cdot \overline{Q_{ti}^*}] \quad (102)$$

¹⁾ Założenie takie można usprawiedliwić tym, iż na powstanie tej funkcji składa się bardzo wiele czynników przypadkowych.

²⁾ Zob. np. [3].

³⁾ Fakt ten można uzasadnić ściślej obliczając odpowiednie wielkości oczekiwane.

⁴⁾ We wzorze (100) należy uwzględnić fakt, iż $E[Q_{tab} Q_{ti}^*] = \overline{Q_{tab}} \overline{Q_{ti}^*}$ i $E[Q_{tab}^* Q_{ti}] = \overline{Q_{tab}^*} \overline{Q_{ti}}$, wynikający z niezależności statystycznej wielkości Q_{tab} i Q_{ti} .

Ze wzoru (102) wynika, że dyspersja współczynnika echa obcego jest sumą dyspersji jego składników. Fakt ten jest oczywisty, jeżeli weźmie się pod uwagę przeprowadzone wyżej rozważania dotyczące korelacji wzajemnych między składnikami współczynnika echa obcego.

Obliczymy teraz kolejno poszczególne składniki wzoru (102).

a) Na podstawie wzoru (8a) i wzoru (74) możemy napisać

$$|\overline{Q_{tab}}|^2 - \overline{Q_{tab}} \cdot \overline{Q_{tab}^*} = [|\overline{q_a}|^2 \cdot |\overline{q_b}|^2 - |\overline{q_a}|^2 \cdot |\overline{q_b}|^2] e^{-4\alpha l}, \quad (103)$$

gdzie wielkości $|\overline{q_a}|^2$ i $|\overline{q_b}|^2$ oznaczają (odpowiednio) wartości oczekiwane kwadratów modułów, a wielkości $|\overline{q_a}|^2$ i $|\overline{q_b}|^2$ oznaczają (odpowiednio) kwadraty modułów oczekiwanych wartości współczynników odbić q_a i q_b . Wzór (103) obowiązuje w założeniu, że wielkości q_a i q_b są wzajemnie statystycznie niezależne.

b) Na podstawie wzoru (8c) możemy napisać

$$\begin{aligned} |\overline{Q_{ta}}|^2 &= E[Q_{ta} Q_{ta}^*] = E\left[q_a q_a^* \int_D \int_D S'(x) S'(y) e^{-2\gamma x - 2\gamma^* y} dx dy\right] = \\ &= |\overline{q_a}|^2 \int_D \int_D K_{s'}(y-x) e^{-2\alpha(x+y)} e^{j2\beta(y-x)} dx dy, \end{aligned} \quad (104)$$

gdzie obszar całkowania D jest określony nierównościami: $0 < x < l$; $0 < y < l$ i gdzie $K_{s'}$ oznacza funkcję korelacyjną określoną wzorem (68). Po obliczeniu całki ¹⁾ ze wzoru (104) otrzymamy

$$|\overline{Q_{ta}}|^2 = \overline{S'^2} |\overline{q_a}|^2 \frac{1 - e^{-4\alpha l}}{4\alpha} \Phi_{s'}(j2\beta, R), \quad (105)$$

gdzie $\Phi_{s'}$ oznacza transformatę fourierowską unormowanej funkcji korelacyjnej

$$\Phi_{s'}(j\Omega, R) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{s'}\left(\frac{x}{R}\right) e^{-j\Omega x} dx. \quad (106)$$

c) Na podstawie wzoru (8b) napiszemy

$$\begin{aligned} |\overline{Q_{tb}}|^2 &= E[Q_{tb} Q_{tb}^*] = E[q_b q_b^* \int_D \int_D S'(l-x) \cdot S'(l-y) e^{-2\gamma x - 2\gamma^* y} dx dy] = \\ &= |\overline{q_b}|^2 \int_D \int_D K_{s'}(y-x) e^{-2\alpha(x+y)} e^{j2\beta(y-x)} dx dy. \end{aligned} \quad (107)$$

¹⁾ Zob. dodatek D1.

²⁾ Wzięto tu pod uwagę, że funkcja korelacyjna jest funkcją parzystą.

Porównując tę zależność z zależnością (104) możemy natychmiast na podstawie wzoru (105) napisać

$$|\overline{Q_{ib}}|^2 = \overline{S'^2} |\overline{q_b}|^2 \frac{1 - e^{-4\alpha l}}{4\alpha} \Phi_{s'}(j2\beta, R), \quad (108)$$

d) Obliczenie ostatniego czynnika wzoru (102) jest nieco trudniejsze. Na podstawie wzoru (12) napiszemy

$$|\overline{Q_{ii}}|^2 = E[Q_{ii} Q_{ii}^*] = \int \int_D E[f_{s'}(x_1) f_{s'}^*(x_2)] e^{-2\gamma x_1 - 2\gamma^* x_2} dx_1 dx_2, \quad (109)$$

gdzie obszar całkowania D jest określony nierównościami:

$$0 < x_1 < l; \quad 0 < x_2 < l.$$

Na podstawie wzoru (13) możemy napisać

$$E[f_{s'}(x_1) f_{s'}^*(x_2)] = \int_{y_1=0}^{l-x_1} \int_{y_2=0}^{l-x_2} E[S'(y_1) S'(y_1 + x_1) S'(y_2) S'(y_2 + x_2)] dy_1 dy_2. \quad (110)$$

Jeżeli $S'(x)$ jest funkcją przypadkową gaussowską, to ¹⁾

$$\begin{aligned} E[S'(y_1) S'(y_1 + x_1) S'(y_2) S'(y_2 + x_2)] &= E[S'(y_1) S'(y_1 + x_1)] \cdot \\ &\cdot E[S'(y_2) S'(y_2 + x_2)] + E[S'(y_1) S'(y_2)] \cdot E[S'(y_1 + x_1) S'(y_2 + x_2)] + \\ &+ E[S'(y_1) S'(y_2 + x_2)] \cdot E[S'(y_1 + x_1) S'(y_2)] = K_{s'}(x_1) \cdot K_{s'}(x_2) + \\ &+ K_{s'}(y_2 - y_1) \cdot K_{s'}(y_2 - y_1 + x_2 - x_1) + \\ &+ K_{s'}(y_2 - y_1 + x_2) \cdot K_{s'}(y_2 - y_1 - x_1), \end{aligned} \quad (111)$$

wobec czego

$$\begin{aligned} E[f_{s'}(x_1) f_{s'}^*(x_2)] &= \int_{y_1=0}^{l-x_1} \int_{y_2=0}^{l-x_2} [K_{s'}(x_1) K_{s'}(x_2) + \\ &+ K_{s'}(y_2 - y_1) K_{s'}(y_2 - y_1 + x_2 - x_1) + \\ &+ K_{s'}(y_2 - y_1 + x_2) K_{s'}(y_2 - y_1 - x_1)] dy_1 dy_2. \end{aligned} \quad (112)$$

Całka (112) jest sumą trzech całek, przy czym pierwszą z nich można obliczyć natychmiast, natomiast dwie pozostałe można przedstawić w postaci całek pojedynczych. W rezultacie otrzymamy ²⁾

$$\begin{aligned} E[f_{s'}(x_1) f_{s'}^*(x_2)] &\approx (l - x_1)(l - x_2) K_{s'}(x_1) K_{s'}(x_2) + \\ &+ (l - x_2) \int_{-l+x_1}^{l-x_2} K_{s'}(\delta) K_{s'}(\delta + x_2 - x_1) d\delta + l \int_{-l}^l K_{s'}(\delta) K_{s'}(\delta + x_1 + x_2) d\delta. \end{aligned} \quad (113)$$

¹⁾ Zob. np. [3].

²⁾ Zob. dodatek D2.

Na podstawie zależności (113) i (109) możemy teraz napisać

$$|\overline{Q_{ti}}|^2 A + B + C, \quad (114)$$

gdzie

$$A = \int_{x_1=0}^l \int_{x_2=0}^l (l-x_1)(l-x_2) K_{s'}(x_1) K_{s'}(x_2) e^{-2\gamma x_1} e^{-2\gamma^* x_2} dx_1 dx_2; \quad (115a)$$

$$B = \int_{D_1} \int (l-x_2) K_{s'}(\delta) K_{s'}(\delta+x_2-x_1) e^{-2\alpha(x_1+x_2)} e^{j2\beta(x_2-x_1)} d\delta dx_1 dx_2 \quad (115b)$$

gdzie obszar całkowania D_1 jest określony nierównościami:

$$0 < x_1 < l; \quad 0 < x_2 < l; \quad -(l-x_1) < \delta < l-x_2;$$

$$C = l \int_{D_2} \int K_{s'}(\delta) K_{s'}(\delta+x_1+x_2) e^{-2\alpha(x_1+x_2)} e^{j2\beta(x_2-x_1)} d\delta dx_1 dx_2, \quad (115c)$$

gdzie obszar całkowania D_2 jest określony nierównościami:

$$0 < x_1 < l; \quad 0 < x_2 < l; \quad -l < \delta < l.$$

Funkcja podcałkowa całki (115a) praktycznie znika dla większych x_1 i x_2 , skąd wynika, że można w tej całce przyjąć $x_1 \ll l$ i $x_2 \ll l$ ¹⁾, wobec czego

$$A \approx l^2 |\overline{S'}|^2 F_{s'}(2\gamma, R) F_{s'}(2\gamma^*, R) = l^2 (\overline{S'}^2) |F_{s'}(2\gamma, R)|^2, \quad (116)$$

gdzie funkcja $F_{s'}(2\gamma, R)$ jest określona wzorem (80).

Obliczając całki (115b) i (115c)²⁾ otrzymamy

$$B \approx (\overline{S'}^2) |\Phi_{s'}(j2\beta, R)|^2 \frac{e^{-4\alpha l} - 1 + 4\alpha l}{(4\alpha)^2}, \quad (117)$$

$$C \approx 0.$$

Porównując wzór (116) ze wzorem (79) widzimy, że $A = \overline{Q_{ti}} \cdot \overline{Q_{ti}^*}$. Biorąc to pod uwagę mamy:

$$|\overline{Q_{ti}}|^2 - \overline{Q_{ti}} \cdot \overline{Q_{ti}^*} = B. \quad (118)$$

Uwzględniając teraz obliczone składniki wzoru (102) w tym wzorze znajdziemy dyspersję współczynnika echa obcego

$$\begin{aligned} D[Q_i] &= [|\overline{q_a}|^2 \cdot |\overline{q_b}|^2 - |\overline{q_a}|^2 \cdot |\overline{q_b}|^2] e^{-4\alpha l} + \\ &+ \overline{S'}^2 |\Phi_{s'}(j2\beta, R)|^2 \cdot \frac{1 - e^{-4\alpha l}}{4\alpha} (|\overline{q_a}|^2 + |\overline{q_b}|^2) + \\ &+ (S'^2) |\Phi_{s'}(j2\beta, R)|^2 \frac{e^{-4\alpha l} - 1 + 4\alpha l}{(4\alpha)^2}. \end{aligned} \quad (119)$$

Ze wzoru (119) wynika między innymi fakt, iż dyspersja współczynnika odbicia jest tym mniejsza im większa jest tłumienność jednostkowa toru.

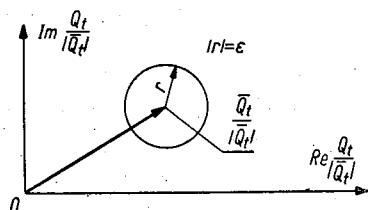
¹⁾ Zob. również uwagi dotyczące wzoru (78).

²⁾ Zob. dodatek D3.

Miarą rozrzutu współczynnika echa obcego może być odchylenie standardowe równe pierwiastkowi z dyspersji. Dla celów technicznych bardziej interesujący jest rozrzut względny współczynnika echa obcego w stosunku do modułu wartości oczekiwanej tego współczynnika. Miarą takiego rozrzutu będzie względne odchylenie standardowe ¹⁾

$$\sigma_t = \frac{\sqrt{D[Q_t]}}{|\bar{Q}_t|}. \quad (120)$$

Zdefiniowane wielkości mogą posłużyć do pewnej oceny probabilistycznej wielkości echa obcego. Można np. ocenić prawdopodobieństwo tego, iż $|Q_t - \bar{Q}_t| \geq \varepsilon$ mówiące o tym, w jakim stopniu wartość $\bar{Q}_t$ jest



Rys. 13. Ilustracja geometryczna wielkości

$$\bar{Q}_t \text{ i } P \left[\frac{|Q_t - \bar{Q}_t|}{|\bar{Q}_t|} \geq \varepsilon \right]$$

miarodajną przy ocenie wielkości echa obcego. Prawdopodobieństwo to można ocenić na mocy nierówności Czebyszewa, która dla naszego przypadku ma postać

$$P[|Q_t - \bar{Q}_t| \geq \varepsilon_1] \leq \frac{D[Q_t]}{\varepsilon_1^2}. \quad (121)$$

Przyjmując tu $\varepsilon_1 = \varepsilon |\bar{Q}_t|$ i biorąc pod uwagę, że

$$P[|Q_t - \bar{Q}_t| \geq \varepsilon \cdot |\bar{Q}_t|] = P\left[\frac{|Q_t - \bar{Q}_t|}{|\bar{Q}_t|} \geq \varepsilon\right], \quad \text{otrzymamy}$$

$$P\left[\frac{|Q_t - \bar{Q}_t|}{|\bar{Q}_t|} \geq \varepsilon\right] \leq \frac{D[Q_t]}{\varepsilon^2 |\bar{Q}_t|^2} = \frac{\sigma_t^2}{\varepsilon^2}. \quad (122)$$

Wzór (122) mówi o prawdopodobieństwie znalezienia się końca wektora (zespolonego) $Q_t/|\bar{Q}_t|$ na zewnątrz koła o promieniu ε , zakreślonego z końca wektora $\bar{Q}_t/|\bar{Q}_t|$ (zob. rys. 13).

¹⁾ Wielkość ta jest odchyleniem standardowym zmiennej przypadkowej $\frac{Q_t}{\bar{Q}_t}$.

3. ECHO OBCE W TORZE DALEKOSIĘŻNYM¹⁾

3.1. Zależności ogólne

Rozpatrzmy najpierw układ złożony z odcinka toru i ze wzmacniaka (rys. 14). Założymy, że długość toru odpowiada długości odcinka wzmacniakowego toru i że wzmacniak zawiera oprócz właściwego wzmacniacza również korektory amplitudy i fazy. Ze względu na to, iż interesuje nas tu przede wszystkim wpływ niejednorodności toru na własności transmisyjne układu, będziemy uważać, że działanie wzmacniaka jest idealne, tj. założymy, że transmitancja wzmacniaka w warunkach pracy wyraża się wzorem:

$$K_{wzm} = \frac{U'_2}{U_2} = \frac{Z(l) + Z_b}{2Z_b} e^{\alpha l} \cdot e^{-j(\omega\tau_w - \Delta\beta \cdot l)}, \quad (123)$$

gdzie:

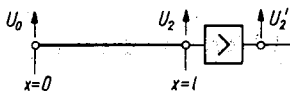
U_2 — napięcie wejściowe wzmacniaka równe napięciu wyjściowemu toru,

U'_2 — napięcie wyjściowe wzmacniaka na impedancji obciążenia równej w przypadku wzmacniaka przelotowego impedancji falowej miejscowej na początku następnego odcinka toru,

Z_b — impedancja wejściowa wzmacniaka będąca impedancją obciążenia dla odcinka toru,

$\Delta\beta = \beta - \omega\tau_\infty$ — reprezentuje zniekształcenia fazowe wniesione przez tor ($\tau_\infty = \frac{1}{V_\infty}$ — opóźność jednostkowa nominalna toru),

τ_w — czynnik stały (w funkcji częstotliwości) opóźności wzmacniaka.



Rys. 14. Połączenie odcinka wzmacniakowego toru i wzmacniaka

U_0 — napięcie główne doprowadzane do toru (zob. wzór),

U_2 — napięcie całkowite wyjściowe odcinka toru,

U'_2 — napięcie wyjściowe główne wzmacniaka

Transmitancja odcinka toru na zasadzie wzoru (5) wyraża się wzorem

$$K_t = \frac{U_2}{U_0} = \frac{2Z_b}{Z(l) + Z_b} e^{-\alpha l} \cdot e^{-j(\omega\tau_\infty + \Delta\beta)l} (1 + Q_t). \quad (124)$$

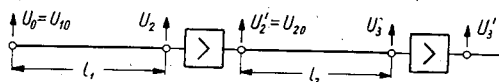
Wobec tego transmitancja układu złożonego z odcinka toru i wzmacniaka, zdefiniowana jako stosunek napięcia wyjściowego głównego za

¹⁾ Torem dalekosiężnym będziemy nazywali tor zawierający wzmacniaki.

wzmacniakiem U'_2 do napięcia głównego doprowadzanego do wejścia toru, będzie

$$K = \frac{U'_2}{U_0} = \frac{U'_2}{U_2} \cdot \frac{U_2}{U_0} = K_w \cdot K_t = (1 + Q_t) e^{-j\omega(\tau_{\infty} \cdot l + \tau_w)}. \quad (125)$$

Rozpatrzmy teraz połączenie dwóch takich odcinków wzmacniakowych (rys. 15). Zwróćmy uwagę, że dla drugiego odcinka napięcie $U'_2 = U_{20}$ odgrywa taką samą rolę jak napięcie $U_{10} = U_0$ dla odcinka pierwszego [przypominamy, że transmitancja wzmacniaka została określona



Rys. 15. Dwa odcinki wzmacniakowe ze wzmacniakami

w przypadku wzmacniaka przelotowego, przy obciążeniu go impedancją falową miejscową początkową następnego odcinka toru¹⁾. Wobec tego transmitancja dwóch odcinków wzmacniakowych będzie:

$${}_2K = \frac{U'_3}{U_0} = \frac{U'_2}{U_0} \cdot \frac{U'_3}{U_{20}} = K_1 \cdot K_2,$$

gdzie: K_1 i K_2 oznaczają (odpowiednio) transmitancje pierwszego i drugiego odcinka wzmacniakowego.

Na podstawie wzoru (125) możemy więc napisać

$${}_2K = (1 + Q_{t1}) \cdot (1 + Q_{t2}) e^{-j\omega(\tau_{\infty 1} \cdot l_1 + \tau_{\infty 2} \cdot l_2 + \tau_{w1} + \tau_{w2})}. \quad (127)$$

We wzorze (126) indeksy 1 i 2 przy odpowiednich symbolach wskazują na to, którego odcinka odpowiednia wielkość dotyczy.

Znajdziemy teraz transmitancję całego toru dalekosieźnego zawierającego n odcinków wzmacniakowych. Transmitancja takiego toru, określona jako stosunek napięcia wyjściowego U_{wy} (na wyjściu ostatniego wzmacniaka) do napięcia głównego U_0 , będzie iloczynem transmitancji poszczególnych odcinków wzmacniakowych

$${}_nK = \frac{U_{wy}}{U_0} = \frac{U'_{n+1}}{U_0} = \prod_{v=1}^n K_v \quad (128)$$

gdzie K_v jest transmitancją v -tego odcinka wzmacniakowego. Na podstawie wzoru (125) mamy

$$K_v = (1 + Q_{t,v}) e^{-j\omega(\tau_{\infty,v} \cdot l + \tau_{w,v})}, \quad (129)$$

¹⁾ W praktyce wzmacniak będzie projektowany na impedancję obciążenia równą $Z_0 = Z(0) - S(0)$. Ze względu na to, że $|Z(0) - Z_0| \ll |Z_0|$, obydwa założenia będą praktycznie równoważne.

wobec czego

$${}_nK = e^{-j\omega t_\infty} \cdot \prod_{v=1}^n (1 + Q_{t,v}), \quad (130)$$

gdzie

$$t_\infty = \sum_{v=1}^n (\tau_{\infty,v} \cdot l + \tau_{w,v}) \quad (131)$$

jest całkowitym czasem przejścia sygnału (niezniekształconego) poprzez tor dalekosiężny. Biorąc pod uwagę, że dla każdego z odcinków wzmacniających toru wielkość $|Q_{t,v}| \ll 1$ ¹⁾, możemy w iloczynie we wzorze (130) pominąć wszystkie wyrazy typu $Q_{t,v} \cdot Q_{t,\mu}$; $Q_{t,v} \cdot Q_{t,\mu} \cdot Q_{t,\lambda}$ itd., wobec czego

$$\prod_{v=1}^n (1 + Q_{t,v}) \approx 1 + \sum_{v=1}^n Q_{t,v}. \quad (132)$$

Uwzględniając to we wzorze (130) otrzymamy

$${}_nK = \frac{U_{wy}}{U_0} = e^{-j\omega t_\infty} \left(1 + \sum_{v=1}^n Q_{t,v} \right). \quad (133)$$

Ze wzoru (133) wynika, iż współczynnik echa obcego dla całego toru dalekosiężnego będzie sumą współczynników echa obcego dla poszczególnych odcinków wzmacniających

$${}_nQ_t = \sum_{v=1}^n Q_{t,v}. \quad (134)$$

Sygnał wyjściowy $u_{wy}(t)$, jak wynika ze wzoru (133), zawiera dwa składniki. Jeden z nich $u_{wy,g}(t)$ jest sygnałem głównym, będącym (dla rozważanego przypadku toru z korekcją zniekształceń) wiernym powtórzeniem sygnału $u_0(t)$. Sygnał ten jest opóźniony względem sygnału $u_0(t)$ o czas t_∞ . Drugi składnik $u_{wy,t}(t)$ jest towarzyszącym sygnałem echa obcego. Transformatę laplace'owską tego sygnału można obliczyć na podstawie wzoru (133)²⁾ ze wzoru

$$u_{wy,t}(s) = u_{wy,g}(s) \cdot {}_nQ_t(s). \quad (135)$$

Odpowiedź impulsowa echa obcego wyrazi się na zasadzie wzoru (134) sumą

$${}_nq_t(t) = \sum_{v=1}^n q_{t,v}(t). \quad (136)$$

1) Praktycznie dla odcinków wzmacniających $|Q_t|$ jest rzędu 10^{-3} .

2) Przy uwzględnianiu, że transformata laplace'owska sygnału głównego jest $U_{wy,g}(s) = U_0(s)e^{-st_\infty}$.

Sygnał echa obcego towarzyszący sygnałowi wyjściowemu głównemu $u_{wy,g}(t) = u_0(t - t_\infty)$ możemy obliczyć, na podstawie twierdzenia o splocie, ze wzoru

$$\begin{aligned} u_{wy,t}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} q_t(\tau) \cdot u_{wy,g}(t - \tau) d\tau = \sum_{v=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} q_{t,v}(\tau) u_{wy,g}(t - \tau) d\tau = \\ &= \sum_{v=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} q_{t,v}(\tau) u_0(t - \tau - t_\infty) d\tau. \end{aligned} \quad (137)$$

Poszczególne czynniki $q_{t,v}(t)$ odpowiedzi impulsowej można obliczać dla poszczególnych odcinków wzmacniakowych torów metodami omówionymi w rozdziale poprzednim.

Ze wzoru (137) wynika, iż dla obliczenia wyjściowego sygnału echa obcego wystarczy znajomość odpowiedzi impulsowych echa obcego dla poszczególnych odcinków toru i znajomość przebiegu wejściowego sygnału głównego $u_0(t)$, nie jest natomiast potrzebna znajomość przebiegów sygnału głównego na wyjściach poszczególnych odcinków (wzmacniakowych) toru, jak można by sądzić nie rozpatrując bliżej tego zagadnienia.

3.2. Zależności statystyczne

Założymy teraz, że współczynniki echa obcego $Q_{t,v}$ poszczególnych odcinków toru są wielkościami przypadkowymi, oraz założymy, że znane są ich wartości oczekiwane $\bar{Q}_{t,v}$ i ich dyspersje $D(Q_{t,v})$.

Wartość oczekiwana współczynnika echa obcego dla całego łącza wyrazi się na zasadzie wzoru (134) wzorem

$${}_n\bar{Q}_t = E[{}_nQ_t] = \sum_{v=1}^n \bar{Q}_{t,v}. \quad (138)$$

Można zauważyć, że współczynniki echa obcego dla poszczególnych odcinków toru są wzajemnie niezależne¹⁾. W takim razie dyspersja współczynnika echa obcego dla całego toru dalekosiężnego $D[{}_nQ_t]$ będzie na zasadzie wzoru (134) sumą dyspersji współczynników echa obcego poszczególnych odcinków, czyli będzie

$$D[{}_nQ_t] = \sum_{v=1}^n D[Q_{t,v}]. \quad (139)$$

Względne odchylenie standartowe wyrazi się więc na zasadzie wzorów (138) i (139) wzorem

¹⁾ Fakt tej niezależności wynika stąd, iż poszczególne odcinki torów są między sobą separowane wzmacniakami.

$${}_n\sigma_t = \frac{\sqrt{D[{}_n\bar{Q}_t]}}{|{}_n\bar{Q}_t|} = \frac{\sqrt{\sum_{v=1}^n D[Q_{t,v}]}}{\left| \sum_{v=1}^n \bar{Q}_{t,v} \right|}. \quad (140)$$

Rozpatrzmy teraz przypadek, kiedy zarówno wartości oczekiwane $\bar{Q}_{t,v}$, jak i dyspersje $D[Q_{t,v}]$ są odpowiednio równe dla wszystkich odcinków toru wchodzących w skład toru, czyli przypadek, gdy dla dowolnej pary wskaźników v i μ zachodzą równości

$$\bar{Q}_{t,v} = \bar{Q}_{t,\mu} = \bar{Q}_t, \quad (141a)$$

$$D[Q_{t,v}] = D[Q_{t,\mu}] = D[Q_t] = |\bar{Q}_t|^2 \cdot \sigma_t^2. \quad (141b)$$

Z takim przypadkiem mamy do czynienia w szczególności wtedy, gdy wszystkie odcinki torów są tego samego typu i wszystkie zostały wyprodukowane z podobnych materiałów, przy pomocy tych samych (lub przynajmniej podobnych) metod fabrykacji, gdy współczynniki odbić pomiędzy torami i wzmacniakami podlegają tym samym prawom statystycznym i gdy długości wszystkich odcinków toru są jednakowe, lub gdy długości te podlegają tym samym prawom statystycznym.

Uwzględniając równości (141) we wzorach (138), (139) i (140) otrzymamy

$${}_n\bar{Q}_t = n \cdot \bar{Q}_t, \quad (142)$$

$$D[{}_nQ_t] = n \cdot D[Q_t], \quad (143)$$

$${}_n\sigma_t = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{D[Q_t]}}{|\bar{Q}_t|} = \frac{\sigma_t}{\sqrt{n}}. \quad (144)$$

Możemy teraz napisać wzór na prawdopodobieństwo znalezienia się końca wektora (zespolonego) $\frac{{}_nQ_t}{|{}_n\bar{Q}_t|}$ na zewnątrz koła o promieniu ε zakreślonego z końca wektora $\frac{{}_n\bar{Q}_t}{|{}_n\bar{Q}_t|}$. Wzór ten, analogiczny do wzoru (122), będzie miał postać:

$$P \left[\frac{|{}_nQ_t - {}_n\bar{Q}_t|}{|{}_n\bar{Q}_t|} \geq \varepsilon \right] \leq \frac{D[{}_nQ_t]}{\varepsilon^2 |{}_n\bar{Q}_t|^2} = \frac{1}{n} \frac{\sigma_t^2}{\varepsilon^2}. \quad (145)$$

Ze wzoru (142) widać, że wielkość oczekiwanych sygnałów echa obcego jest wprost proporcjonalna do ilości odcinków wzmacniakowych. Ze wzorów (145) i (144) wynika, że wartość oczekiwana współczynnika echa obcego ${}_n\bar{Q}_t$ będzie tym bardziej miarodajna dla oceny sygnałów echa obcego, im więcej odcinków wzmacniakowych zawiera tor dalekosiężny ¹⁾.

¹⁾ Ze wzoru (145) widać, że prawdopodobieństwo określone tym wzorem dąży do zera, gdy n dąży do nieskończoności przy dowolnym skończonym ε .

Znajdziemy najpierw wielkość $n\bar{Q}_t$ dla przypadku, gdy wszystkie odcinki wzmacniakowe mają tę samą długość l . Uwzględniając wzory (74) i (79) we wzorze (142) znajdziemy

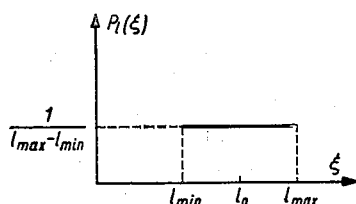
$$n\bar{Q}_t = n(\bar{Q}_{tab} + \bar{Q}_{ti}) = L \left[\bar{S}^2 F_{s'}(2\gamma, R - \frac{\bar{q}_a \bar{q}_b}{l} e^{-2\gamma l} \right], \quad (146)$$

gdzie $L = n \cdot l$ jest całkowitą długością toru.

Posługując się wzorami wyprowadzonymi w rozdz. 2.3 możemy uwzględniając wzór (146) obliczać oczekiwane sygnały echa obcego dla rozpatrywanego przypadku.

Dyspersję i względne odchylenie standartowe współczynnika echa obcego dla rozpatrywanego przypadku możemy znaleźć uwzględniając wzory wyprowadzone w rozdz. 2.3.3. odpowiednio we wzorach (143) i (144).

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy długości poszczególnych odcinków wzmacniakowych mogą nie być jednakowe. Założymy, że długości wszystkich odcinków wzmacniakowych, jako wielkości przypadkowe, mają tę samą funkcję rozkładu. Ze względu na zwykle przyjmowane warunki techniczne na długości odcinków wzmacniakowych (mówiące jedynie, że długości te powinny być zawarte pomiędzy wartościami l_{min} i l_{max}) zało-



Rys. 16. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa długości odcinka wzmacniakowego jako wielkości przypadkowej

żymy, że wielkość przypadkowa l ma rozkład jednostajny. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa dla takiego rozkładu (rys. 16) ma postać:

$$P_l(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{l_{max} - l_{min}} & \text{dla } l_{min} \leq \xi \leq l_{max}, \\ 0 & \text{dla pozostałych } \xi. \end{cases} \quad (147)$$

Wartość oczekiwana długości odcinka wzmacniakowego będzie więc

$$l_0 = E[l] = \int_{-\infty}^{\infty} \xi P_l(\xi) d\xi = \frac{1}{l_{max} - l_{min}} \int_{l_{min}}^{l_{max}} \xi d\xi = \frac{l_{min} + l_{max}}{2}. \quad (148)$$

Zakładając, że zasięg korelacji $R \ll l_{min}$, możemy uważać, że wzór (79) obowiązuje dla każdej realizacji l , wobec czego

$$\bar{Q}_{ti} = -l_0 \bar{S}^2 F_{s'}(2\gamma, R). \quad (149)$$

Stosując operację uśredniania do wzoru (74) możemy napisać

$$\bar{Q}_{iab} = E[Q_{iab}] = \bar{q}_a \cdot \bar{q}_b \cdot E[e^{-2\gamma \Delta l}] \cdot e^{-2\gamma l_0}, \quad (150)$$

gdzie wprowadzono nową zmienną przypadkową

$$\Delta l = l - l_0. \quad (151)$$

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa dla tej zmiennej będzie

$$P(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta l_0} & \text{dla } -\frac{\Delta l_0}{2} \leq \xi \leq \frac{\Delta l_0}{2}, \\ 0 & \text{dla pozostałych } \xi \end{cases} \quad (152)$$

gdzie oznaczono

$$\Delta l_0 = l_{max} - l_{min}. \quad (153)$$

Wobec tego

$$E[e^{-2\gamma \Delta l}] = \frac{1}{\Delta l_0} \int_{-\frac{\Delta l_0}{2}}^{\frac{\Delta l_0}{2}} e^{-2\gamma \xi} d\xi = \frac{1}{\Delta l_0} \frac{e^{\gamma \cdot \Delta l_0} - e^{-\gamma \cdot \Delta l_0}}{2\gamma} \approx \frac{\sin \beta \cdot \Delta l_0}{\Delta l_0 \cdot \beta}, \quad (154)$$

gdzie w ostatecznym przybliżeniu wzięto pod uwagę fakt, że $\alpha \ll \beta$. Uwzględniając wzór (154) w zależności (150) otrzymamy

$$\bar{Q}_{iab} = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda}{\Delta l_0} \sin\left(2\pi \frac{\Delta l_0}{\lambda}\right) \cdot e^{-2\gamma l_0} \cdot \bar{q}_a \bar{q}_b, \quad (155)$$

gdzie $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ jest długością fali w torze.

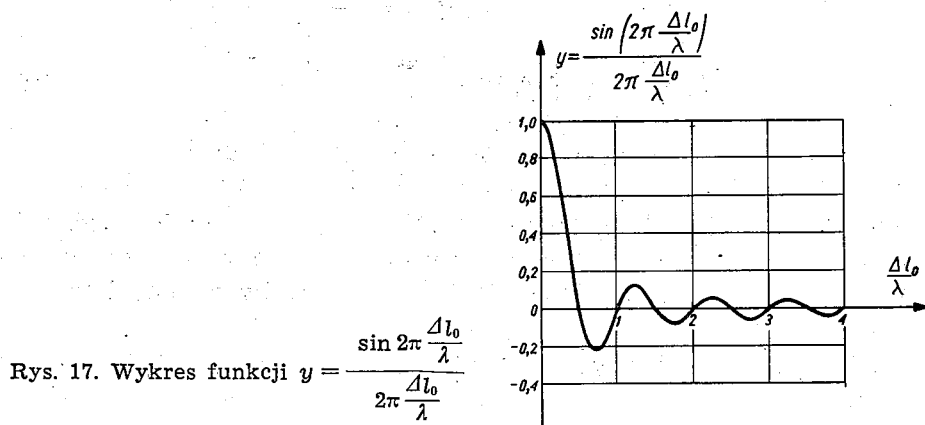
Sumując wzory (149) i (155) i mnożąc sumę przez liczbę odcinków wzmacniakowych n znajdujemy ostatecznie wartość oczekiwaną współczynnika echa obcego

$$n\bar{Q}_t = n(\bar{Q}_{ii} + \bar{Q}_{iab}) = -L \left[\bar{S}'^2 F_{S'}(2\gamma, R) + \frac{\bar{q}_a \cdot \bar{q}_b}{l_0} e^{-2\gamma l_0} \frac{\sin\left(2\pi \frac{\Delta l_0}{\lambda}\right)}{2\pi \frac{\Delta l_0}{\lambda}} \right], \quad (156)$$

gdzie $L = n \cdot l_0$ jest (w przybliżeniu) całkowitą długością toru. Porównując poprzednio otrzymany wzór (146) ze wzorem (156) widzimy, że w tym ostatnim przypadku uzyskujemy redukcję tego składnika współczynnika echa obcego, który odpowiada odbiciom na krańcach odcinków wzmac-

niakowych toru. Redukcja ta będzie tym większa, im większy będzie stosunek $\Delta l_0/\lambda$ (rys. 17).

W rezultacie tej redukcji możemy przyjąć, że dla rozpatrywanego przypadku $\bar{Q}_{tab} \approx 0$, pod warunkiem, że częstotliwość nie będzie zbyt mała,



Rys. 17. Wykres funkcji $y = \frac{\sin 2\pi \frac{\Delta l_0}{\lambda}}{2\pi \frac{\Delta l_0}{\lambda}}$

a współczynniki $\bar{q}_a$ i $\bar{q}_b$ nie będą zbyt duże. Biorąc to pod uwagę we wzorze (156) otrzymamy¹⁾

$${}_n\bar{Q}_t \approx -L \cdot \bar{S}'^2 F_{S'}(2\gamma, R) \approx -L \cdot \bar{S}'^2 \cdot \frac{V_\infty}{2} F_{S'}(s, R). \quad (157)$$

Uwzględniając wzór (102) (przy założeniu $\bar{Q}_{tab} \approx 0$) we wzorze (143) otrzymamy

$$D[{}_nQ_t] = n [|\bar{Q}_{tab}|^2 + |\bar{Q}_{ta}|^2 + |\bar{Q}_{tb}|^2 + |\bar{Q}_{ti}|^2 - \bar{Q}_{ti} \cdot \bar{Q}_{ti}^*]. \quad (158)$$

Na podstawie wzoru (8a), przy uwzględnieniu funkcji rozkładu (152), możemy napisać

$$\begin{aligned} |\bar{Q}_{tab}|^2 &= E[Q_{tab} Q_{tab}^*] = |\bar{q}_a|^2 \cdot |\bar{q}_b|^2 e^{-4\alpha l_0} E[e^{-4\alpha \cdot \Delta l}] = \\ &= |\bar{q}_a|^2 \cdot |\bar{q}_b|^2 e^{-4\alpha l_0} \frac{1}{\Delta l_0} \int_{-\frac{\Delta l_0}{2}}^{\frac{\Delta l_0}{2}} e^{-4\alpha \xi} d\xi = |\bar{q}_a|^2 \cdot |\bar{q}_b|^2 e^{-4\alpha l_0} \frac{\text{sh} \cdot (2\alpha \cdot \Delta l_0)}{2\alpha \cdot \Delta l_0}. \end{aligned} \quad (159)$$

Pozostałe czynniki wzoru (158) można obliczyć ze wzorów (105), (108), (117) i (118), przyjmując w tych wzorach $l = l_0$ ²⁾,

¹⁾ Zob. również wzory (80) i (81).

²⁾ Taki sposób obliczania jest słuszny w założeniu, że $R \ll l$.

Uwzględniając to wszystko we wzorze (158) ostatecznie otrzymamy

$$D[{}_nQ_t] = n \left\{ \overline{|q_a|^2} \cdot \overline{|q_b|^2} e^{-2\alpha l_0} \frac{\text{sh}(2\alpha \cdot \Delta l_0)}{2\alpha \cdot \Delta l_0} + \right. \\ \left. + \overline{S'^2} (\overline{|q_a|^2} + \overline{|q_b|^2}) |\Phi_{S'}(j2\beta, R)| \frac{|1 - e^{-4\alpha l_0}|}{4\alpha} + \right. \\ \left. + (\overline{S'^2})^2 \cdot |\Phi_{S'}(j2\beta, R)|^2 \frac{e^{-4\alpha l_0} - 1 + 4\alpha l_0}{(4\alpha)^2} \right\}. \quad (160)$$

Ze wzorów (157) i (160) wynikają następujące wnioski:

- 1° Wartość oczekiwana współczynnika echa obcego dla długiego łącza ${}_n\overline{Q_t}$ zależy głównie od wielkości charakteryzujących niejednorodności wewnętrzne toru, natomiast praktycznie nie zależy ona od współczynników odbić w miejscach połączeń odcinków wzmacniakowych toru ze wzmacniakami.
- 2° Wielkość ${}_n\overline{Q_t}$ praktycznie nie zależy od tłumienności jednostkowej toru.
- 3° Wielkość ${}_n\overline{Q_t}$ jest wprost proporcjonalna do długości toru dalekosiężnego L ; można stąd wysnuć wniosek, że jakość toru powinna być tym lepsza, im dłuższy jest tor.
- 4° Dyspersja $D[{}_nQ_t]$ jest zależna zarówno od wielkości charakteryzujących niejednorodności wewnętrzne toru, jak i od współczynników odbicia na połączeniach odcinków toru i wzmacniaków (dyspersja jest tym większa, im te wielkości są większe).
- 5° Dyspersja maleje ze wzrostem tłumienności jednostkowej toru.

Posługując się wzorami wyprowadzonymi w (rozdz. 2.3, można na podstawie wzoru (157) obliczać oczekiwane sygnały echa obcego dla toru dalekosiężnego.

4. PODSUMOWANIE WNIOSKÓW

Z rozważań przeprowadzonych w niniejszej pracy wynikają pewne wnioski ogólne:

- 1° Echo obce ujawnia się najbardziej w przypadku, gdy przesyłane sygnały (główne) są sygnałami raptownie urywającymi się, jak impulsy lub sygnały kosinusoidalne wyłączane (ewentualnie sygnały kosinusoidalne o amplitudzie zmniejszającej się skokowo). Jak wiadomo, sygnały echa obcego tworzące charakterystyczny „ogon” towarzyszący sygnałom głównym będą tym bardziej zauważalne (a więc tym bardziej szkodliwe), im większa będzie amplituda tych sygnałów i im dłużej będą one trwały. Otóż z przytoczonych rozważań wynika między innymi fakt, iż czas trwania sygnału echa obcego (liczony od chwili zaniku sygnału głównego) towarzyszącego takim urywającym się raptownie sygnałom będzie praktycznie co najwyżej równy cza-

sowi T_l , odpowiadającemu podwójnemu przejściu sygnału przez dany odcinek toru. Po upływie takiego czasu sygnał echa obcego bardzo szybko zanika (w przypadku braku zniekształceń fazowych sygnał ten zniknie natychmiast po upływie czasu T_l — jeżeli nie brać pod uwagę sygnałów odpowiadających wielokrotnym odbiciom o krotności większej niż dwa). W przypadku toru dalekosiężnego sygnał echa obcego praktycznie nie może trwać dłużej niż czas odpowiadający podwójnemu przejściu sygnału przez najdłuższy spośród odcinków wzmacniających toru.

2° Sygnał echa obcego na wyjściu toru dalekosiężnego jest sumą sygnałów echa obcego powstających w poszczególnych odcinkach wzmacniających toru.

3° Rozważania statystyczne prowadzą do wniosku, iż sygnały echa obcego powstające w poszczególnych odcinkach wzmacniających mogą się częściowo kompensować. W szczególności całkowicie mogą się kompensować sygnały spowodowane odbiciami w miejscach połączeń toru ze wzmacniakami i odbiciami wewnątrz toru (tj. sygnały odpowiadające współczynnikom Q_{ta} i Q_{tb}).

Nie mogą całkowicie kompensować się jedynie sygnały spowodowane podwójnymi odbiciami wewnątrz toru (Q_{ti}) i sygnały spowodowane podwójnymi odbiciami w miejscach połączeń torów ze wzmacniakami (Q_{tab}). Sygnał oczekiwany spowodowany podwójnymi odbiciami wewnątrz toru jest proporcjonalny do długości toru i jest praktycznie niezależny od tłumienności odcinków torów. Sygnał oczekiwany spowodowany podwójnymi odbiciami w miejscach połączeń torów ze wzmacniakami jest tym mniejszy, im większe są tłumienności odcinków wzmacniających torów. Gdy przesyłane przez tor sygnały zawierają tylko wyższe częstotliwości (duże α) i gdy odcinki wzmacniakowe nie są zbyt krótkie, to wtedy sygnały echa obcego spowodowane podwójnymi odbiciami w miejscach połączeń torów ze wzmacniakami mogą być małe w porównaniu z sygnałami echa obcego spowodowanymi podwójnymi odbiciami wewnątrz toru.

4° Rozrzut długości odcinków wzmacniających wchodzących w skład toru dalekosiężnego powoduje zmniejszenie sygnału echa obcego spowodowanego podwójnymi odbiciami w miejscach połączeń odcinków toru ze wzmacniakami. Ze względu na sygnały echa obcego korzystne jest więc dopuszczanie dosyć dużych tolerancji przy ustaleniu długości poszczególnych odcinków wzmacniających.

5° Sygnał echa obcego jest tym bardziej szkodliwy (zob. 1°), im większa będzie amplituda tego sygnału i im dłuższy będzie jego czas trwania. Jeżeli można się oprzeć na sygnale oczekiwanym odpowiadającym podwójnym odbiciom wewnątrz toru (zob. 3° i 4°), to z przeprowadzonych rozważań wynika, iż amplituda takiego sygnału jest proporcjonalna do średniego kwadratu odchylenia $\overline{S^2}$, a jego czas trwania jest

współmierny z czasem $T_R = \frac{2R}{V_\infty}$ odpowiadającym zasięgowi korelacji funkcji $S(x)$. Obydwie te wielkości (równie ważne ze względu na szkodliwość echa obcego) są znane, jeżeli znana jest funkcja korelacyjna odchylenia $S(x)$.

- 6° Jeżeli są spełnione odpowiednie warunki (zob. 3° i 4°), to można uważać, że oczekiwany sygnał echa obcego jest niezależny od współczynników odbić w miejscach połączeń torów ze wzmacniakami. Od tych współczynników jest zależna jedynie dyspersja sygnału echa obcego¹⁾. Można stąd wnioskować, że warunki dotyczące jednorodności toru powinny być ostrzejsze²⁾ niż warunki dotyczące dopasowania wzmacniaków do torów.

Dodatek

D. 1. Rozwiązanie całki występującej we wzorze (104)

Całka ta ma postać

$$I = \int_D K_s(y-x) e^{-2\alpha(x+y)} e^{j2\beta(y-x)} dx dy. \quad (D1)$$

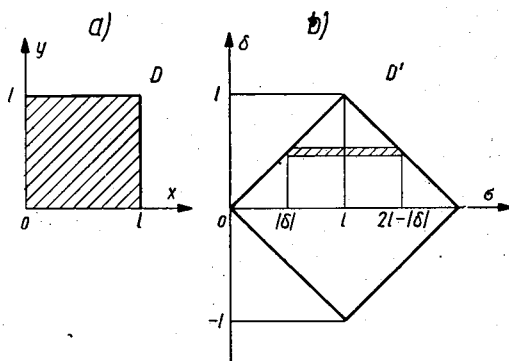
gdzie obszar całkowania D (rys. D1a) jest określony nierównościami:

$$0 < x < l; \quad 0 < y < l.$$

Wprowadzając nowe zmienne całkowanie:

$$\begin{aligned} \delta &= y - x, \\ \sigma &= y + x, \end{aligned} \quad (D2)$$

i biorąc pod uwagę (o czym łatwo się przekonać), że $dx dy = \frac{1}{2} d\delta d\sigma$ i że



Rys. D1.

¹⁾ Dyspersja ta dla ogólnego przypadku nie była obliczana w niniejszej pracy. Na dyspersji tej można by się oprzeć przy ocenie wielkości sygnałów echa obcego dla czasów $t \gg T_R$ takich, dla których sygnał oczekiwany jest już praktycznie równy zeru.

²⁾ Warunki te powinny być tym ostrzejsze, im dłuższy ma być tor.

obszar całkowania w nowych zmiennych będzie wyglądał tak, jak pokazano na rys. D1b, całkę (D1) możemy napisać w postaci

$$I = \frac{1}{2} \int_{-l}^l K_{s'}(\delta) e^{j2\beta\delta} \left[\int_{|\delta|}^{2l-|\delta|} e^{-2\alpha\sigma} d\sigma \right] d\delta. \quad (D3)$$

Zakładaliśmy, że funkcja korelacyjna nie znika jedynie dla małych wartości $|\delta|$ ($|\delta| \ll l$), wobec czego całkę w nawiasie kwadratowym można obliczać w granicach od 0 do $2l$. Z tych samych względów granice całkowania $(-l, l)$ względem zmiennej δ możemy zastąpić granicami $(-\infty, \infty)$. Biorąc to wszystko pod uwagę możemy napisać:

$$I = \frac{1 - e^{-4\alpha l}}{4\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} K_{s'}(\delta) e^{j2\beta\delta} d\delta. \quad (D4)$$

Biorąc teraz pod uwagę oznaczenia (69) i (106) i biorąc pod uwagę, że z parzystości $\varphi_{s'}\left(\frac{x}{R}\right)$ wynika, iż $\Phi_{s'}(j2\beta, R) = \Phi_{s'}(-j2\beta, R) = |\Phi_{s'}(j2\beta, R)|$ ($\Phi_{s'}$ jest funkcją rzeczywistą), ostatecznie napiszemy:

$$I = \frac{1 - e^{-4\alpha l}}{4\alpha} S'^2 |\Phi_{s'}(j2\beta, R)|. \quad (D5)$$

D. 2. Przekształcenie całek występujących we wzorze (112)

a) Pierwsza z tych całek ma postać

$$I_1 = \int_{y_1=0}^{l-x_1} \int_{y_2=0}^{l-x_2} K_{s'}(y_2 - y_1) K_{s'}(y_2 - y_1 + x_2 - x_1) dy_1 dy_2. \quad (D6)$$

Obszar całkowania tej całki pokazano na rys. D2a.

Wprowadzimy nowe zmienne całkowania

$$\begin{aligned} \delta &= y_2 - y_1, \\ \sigma &= y_1. \end{aligned} \quad (D7)$$

Łatwo się przekonać, że obszar całkowania w nowych zmiennych będzie wyglądał tak, jak pokazano na rys. D2b (dla założenia $x_2 \geq x_1$).

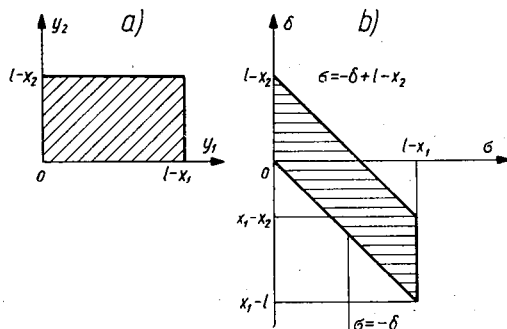
Biorąc pod uwagę, że $dy_1 dy_2 = d\delta d\sigma$ (co łatwo sprawdzić), całkę (D6) możemy napisać w postaci (rys. D2b)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{l-x_2} K_{s'}(\delta) K_{s'}(\delta + x_2 - x_1) d\delta \int_0^{-\delta+l-x_2} d\sigma + \\ &+ \int_{x_1-x_2}^0 K_{s'}(\delta) K_{s'}(\delta + x_2 - x_1) d\delta \int_{-\delta}^{-\delta+l-x_2} d\sigma + \int_{x_1-l}^{x_1-x_2} K_{s'}(\delta) K_{s'}(\delta + x_2 - x_1) d\delta \int_{-\delta}^{l-x_1} d\sigma = \\ &= (l-x_2) \int_{x_1-x_2}^{l-x_2} K_{s'}(\delta) K_{s'}(\delta + x_2 - x_1) d\delta + (l-x_1) \int_{-(l-x_1)}^{x_1-x_2} K_{s'}(\delta) K_{s'}(\delta + x_2 - x_1) d\delta + \\ &- \int_0^{l-x_2} K_{s'}(\delta) K_{s'}(\delta + x_2 - x_1) d\delta + \int_{-(l-x_1)}^{x_1-x_2} K_{s'}(\delta) K_{s'}(\delta + x_2 - x_1) d\delta. \end{aligned} \quad (D8)$$

1) Parametry x_1 i x_2 są zawarte w przedziale $(0, l)$.

Ze względów, o których była mowa wyżej (patrz p. D1), można we wzorze (D8) pominąć dwie ostatnie całki, a przy dwóch pierwszych można przyjąć przybliżoną równość współczynników $(l - x_1) \approx (l - x_2)$. W takim razie możemy napisać

$$I_1 \approx (l - x_2) \int_{-(l-x_1)}^{l-x_2} K_{s'}(\delta) K_s(\delta + x_2 - x_1) d\delta. \quad (D9)$$



Rys. D2.

b) Druga z całek występujących we wzorze (112) ma postać

$$I_2 = \int_{y_1=0}^{l-x_1} \int_{y_2=0}^{l-x_2} K_{s'}(y_2 - y_1 + x_2) K_s(y_2 - y_1 - x_1) dy_1 dy_2. \quad (D10)$$

Obszar całkowania jest tu taki sam jak w przypadku całki (D6) (rys. D2a). Wprowadźmy nowe zmienne całkowania

$$\begin{aligned} \delta &= y_2 - y_1 - x_1, \\ \sigma &= y_1. \end{aligned} \quad (D11)$$

Łatwo się przekonać, że obszar całkowania w nowych zmiennych będzie wyglądał tak, jak pokazano na rys. D3 (dla założenia $x_2 \geq x_1$). Biorąc pod uwagę, że $dy_1 dy_2 = d\delta d\sigma$ (co łatwo sprawdzić), całkę (D10) można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-x_1}^{l-(x_1+x_1)} K_{s'}(\delta) K_s(\delta + x_1 + x_2) d\delta \int_0^{l-(\delta+x_1+x_2)} d\sigma + \\ &+ \int_{-x_2}^{-x_1} \dots d\delta \int_{-(\delta+x_1)}^{l-(\delta+x_1+x_2)} d\sigma + \int_{-l}^{-x_2} \dots d\delta \int_{-(\delta+x_1)}^{l-x_1} d\sigma. \end{aligned} \quad (D12)$$

Funkcje podcałkowe wszystkich tych całek nie znikają jedynie dla małych wartości $|\delta|$, x_1 i x_2 . Wobec tego można przyjąć w wyrażeniu (D12), że wartości x_1 i x_2 są o wiele mniejsze od l i pominąć (podobnie jak w przypadku a) całki typu

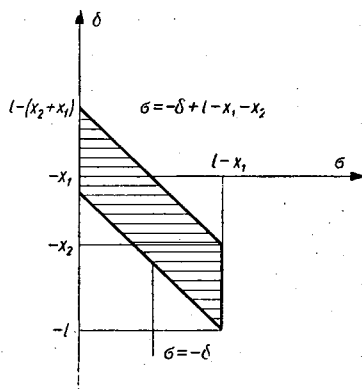
$$\int \delta \cdot K_s(\delta) K_{s'}(\delta + x_1 + x_2) d\delta.$$

1) Zob. odnośnik do wzoru (D6).

W rezultacie otrzymamy

$$I_2 \approx l \int_{-l}^l K_{s'}(\delta) K_s(\delta + x_1 + x_2) d\delta. \quad (D13)$$

D. 3. Obliczenie całek (115b) i (115c)



Rys. D3.

a) Najpierw obliczymy całkę (115b)

$$B = \int_{D_1} \int (l - x_2) K_{s'}(\delta) K_s(\delta + x_2 - x_1) e^{2\alpha(x_1 + x_2)} e^{j2\beta(x_2 - x_1)} dx_1 dx_2 d\delta, \quad (D14)$$

gdzie obszar całkowania jest określony nierównościami:

$$0 \leq x_1 \leq l; \quad 0 \leq x_2 \leq l; \quad -l + x_1 \leq \delta \leq l - x_2.$$

Wprowadźmy nowe zmienne całkowania

$$\begin{aligned} y_1 &= \delta + x_2 - x_1, \\ y_2 &= -l + x_2 + x_1, \\ y_3 &= \delta, \end{aligned} \quad (D15)$$

skąd

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(-y_1 + y_2 + y_3 + l), \\ x_2 &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3 + l), \\ \delta &= y_3. \end{aligned} \quad (D16)$$

Z równań (D16) obliczymy wyznacznik

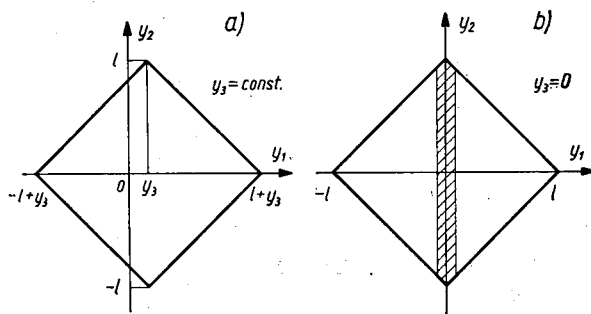
$$D = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},$$

skąd wynika, że $dx_1 dx_2 d\delta = \frac{1}{2} dy_1 dy_2 dy_3$.

Uwzględniając to wszystko w całce (D14) otrzymamy

$$B = \frac{e^{-2al}}{4} \int_{D'_1} \int (y_3 - y_1 - y_2 + l) K_s'(y_1) e^{j2\beta y_1} \cdot K_s'(y_3) e^{-2\beta y_3} e^{-2\alpha y_2} dy_1 dy_2 dy_3, \quad (D17)$$

przy czym obszar całkowania D'_1 jest graniastosłupem czworokątnym ukośnym o wysokości $2l$ ($-l \leq y_3 \leq l$), którego przekrój płaszczyzną $y_3 = \text{const}$ jest taki jak pokazano na rys. D4a. Biorąc pod uwagę, że $K_s'(y_1)$ i $K_s'(y_3)$ znikają (odpowiednio) dla dużych y_1 i y_3 , możemy w nawiasie cał-



Rys. D4.

ki (D17) pominąć y_1 i y_3 . Z tego samego względu można uważać, że funkcja podcałkowa nie równa się zero jedynie w punktach leżących w bezpośrednim otoczeniu osi y_2 (zob. rys. D4b obszar zakreskowany).

Wobec tego można napisać

$$B \approx \frac{e^{-2al}}{4} \int_{-\infty}^{\infty} K_s'(y_3) e^{-j2\beta y_3} dy_3 \int_{-\infty}^{\infty} K_s'(y_1) e^{j2\beta y_1} dy_1 \cdot \int_{-l}^l (l - y_2) e^{-2\alpha y_2} dy_2. \quad (D18)$$

Przeprowadzając elementarne całkowanie względem zmiennej y_2 i biorąc pod uwagę oznaczenia (69) i (106) ostatecznie otrzymamy

$$B \approx (\overline{s'^2})^2 \left(\frac{1}{4\alpha} \right)^2 \cdot (e^{-4al} - 1 + 4al) \cdot \Phi_s(j2\beta, R) \cdot \Phi_s^*(j2\beta, R). \quad (D19)$$

b) Obliczymy teraz całkę (115c)

$$C = l \int_{D_2} \int K_s'(\delta) K_s'(\delta + x_1 + x_2) e^{-2\alpha(x_1+x_2)} \cdot e^{j2\beta(x_1+x_2)} dx_1 dx_2 d\delta, \quad (D20)$$

gdzie obszar D_2 jest określony nierównościami

$$-l \leq \delta \leq l; \quad 0 \leq x_1 \leq l; \quad 0 \leq x_2 \leq l.$$

Wprowadźmy nowe zmienne całkowania:

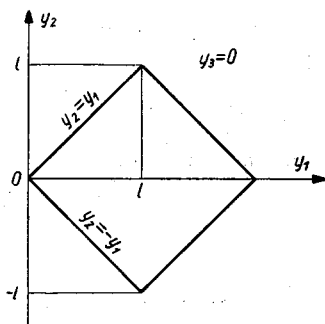
$$\begin{aligned} y_1 &= \delta + x_1 + x_2, \\ y_2 &= x_2 - x_1, \\ y_3 &= \delta. \end{aligned} \quad (D21)$$

Łatwo wykazać, że $dx_1 dx_2 d\delta = \frac{1}{2} dy_1 dy_2 dy_3$.

Uwzględniając to w całce (D20) otrzymamy:

$$C = \frac{1}{2} \int \int_{D_2'} K_{s'}(y_3) K_{s'}(y_1) e^{-2\alpha(y_1 - y_3)} e^{j2\beta y_2} dy_1 dy_2 dy_3. \quad (D22)$$

Zauważmy, że ze względów, o których była mowa wyżej (przypadek a), można uważać, że funkcja podcałkowa jest nierówna zero jedynie w otoczeniu punktu 0 ($y_1 = 0$; $y_2 = 0$; $y_3 = 0$). Z tego względu można przyjąć $e^{-2\alpha(y_1 - y_3)} \approx 1$. Ponadto, jak widać z nierówności określających obszar D_2 i równań (D21), obszar całkowania D_2' ma kształt graniastoslupa czworokątnego ukośnego o wysokości równej $2l$ ($-l \leq y_3 \leq l$). Obszar ten nie



Rys. D5.

obejmuje punktu 0, jedynie jedna z jego krawędzi przechodzi przez ten punkt (rys. D5). Można więc wnioskować, że $C \approx 0$. Aby ten wniosek uzasadnić dokładniej, przeprowadźmy całkowanie (rys. D5)

$$C \approx \frac{l}{2} \int_{-\infty}^{\infty} K_{s'}(y_3) dy_3 \int_0^{\infty} K_{s'}(y_1) dy_1 \int_{-y_1}^{y_1} e^{j2\beta y_2} dy_2 = \frac{l}{2} \frac{1}{\beta} (\overline{S'^2})^2 \cdot \Phi_{s'}(0) \cdot \text{Im} F_{s'}(j2\beta, R). \quad (D23)$$

Ze względu na czynnik $\frac{1}{\beta}$ wielkość C szybko maleje ze wzrostem częstotliwości ($\frac{1}{\beta} \approx \frac{V_{\infty}}{\omega}$), szybciej niż wielkość B . Ponadto w przypadku interesujących nas funkcji korelacyjnych zachodzi równość $\Phi_{s'}(0, R) = 0$. Z tych względów możemy przyjąć $C = 0$.

Politechnika Warszawska
Katedra Teletransmisji Przewodowej

1) Jeżeli unormowana funkcja korelacyjna $\varphi_s\left(\frac{x}{R}\right)$ odchylenia $S(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale $(-\infty, \infty)$, to na zasadzie wzoru (68) transformata $\Phi_{s'}(j\Omega)$ funkcji $\varphi_s\left(\frac{x}{R}\right)$ będzie proporcjonalna do $\Omega^2 \Phi_s(j\Omega)$, gdzie $\Phi_s(j\Omega)$ jest transformatą funkcji $\varphi_s\left(\frac{x}{R}\right)$. Ze względu na to, iż dla przyjętych założeń $\Phi_s(0)$ jest skończona, więc $\Phi_{s'}(0) = 0$.

WYKAZ LITERATURY

1. Kaden H.: Impulse und Schaltvorgänge in der Nachrichtentechnik. München 1957.
2. Kontorowicz M. I.: Operacionnoje isczislenje i niestacionarnyje jawlenja w elektriceskich cepjach. Moskwa 1949.
3. Laning J. H., Battin R. H.: Random Processes in Automatic Control. New York 1956.
4. Pugaczew W. S.: Tiorja słuczajnych funkcji i jejo primienjenje k zadaczom awtomaticzeskogo uprawlenija. Moskwa 1960.
5. Rydel M.: Parametry transmisyjne toru współosiowego w zakresie częstotliwości użytecznych. Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej, Elektryka nr 24, Warszawa 1961.
6. Rydel M.: Analiza wpływu złączy na niejednorodność toru współosiowego. Biuletyn Kablowy nr 4, 1961.
7. Ryżik I. M., Gradsztejn I. S.: Tablicy integrałów, summ, riadow i proizwiedienij. Moskwa 1951.
8. Van der Pol, Bremmer: Operational Calculus Based on Two-Sided Laplace Integral. Cambridge 1950.
9. Ville J.: Étude statistique des irrégularités des câbles coaxiaux. B.S.F.E., 1944.

M. RYDEL

COMPUTATIONS OF DOUBLY REFLECTED SIGNALS IN COAXIAL CABLES WITH IMPEDANCE IRREGULARITIES

Summary

Impedance irregularities in a h -f cable give rise to reflected signals. Double reflections generate signals accompanying the main signal in the cable and therefore cause distortion in the received signal form. Signals due to double reflections may be characterized by the double reflection factor defined as the ratio of Laplace transform of the signal voltage due to double reflections and that of the main signal voltage at the receiving end of the cable. This factor depends on a function $S(x) = Z(x) - Z_0$ which characterizes impedance variations of the cable, on the propagation constant of the cable, and on the reflection coefficients at the terminations of the cable. An impulse response can be obtained as the inverse Laplace transform of the double reflection factor.

In the paper, general formulae for double reflection factor and corresponding signals in a section of the cable are derived. Impulse responses for special cases such as distortionless cable, non-dissipative cable, coaxial cable in the frequency range normally used are discussed. Besides, some special cases of the function $S(x)$ and some characteristic main signal forms are considered. These considerations have made it possible to come to some general conclusions.

Assuming that the function $S(x)$ is a random, stationary gaussian function, general formulae for the mean value (and corresponding signal) and for the

variance of the double reflection factor are derived. A special case of the main signal of the form of switched-off cosine function is discussed. Some estimation of doubly reflected signals is made.

Beside considerations made for the single section of the cable, a long distance cable, consisting of a number of such sections and of a number of repeaters, is investigated. Relations between double reflection properties of a long distance cable and those of its component sections are derived. For the evaluation of statistical formulae it is assumed that also the lengths of repeater sections of the cable are random quantities.

At the end of the paper some general conclusions are summed up.

M. RYDEL

CALCUL DES SIGNAUX DE TRAÎNAGE DANS DES CÂBLES COAXIALES NON HOMOGENES

Résumé

Les variations de l'impédance d'onde locale de la ligne irrégulière causent la formation dans la ligne des signaux réfléchis; en cas des signaux deux fois réfléchis, nommés signaux de traînage qui entrent en receptr, il résulte une distortion du signal reçu. Si la forme du signal principal est sinusoidale, le signal de traînage est caractérisé par coefficient de traînage déterminé comme rapport de la tension (complexe) de traînage à la tension (complexe) du signal principal de sortie. Coefficient de traînage est dépendant de la, si nommée, fonction de déclination $S(x)$ caractérisant les variations de l'impédance d'onde locale, de l'affaiblissement du câble et de la mauvaise adaptation aux extrémités du câble. La connaissance du coefficient de traînage comme fonction de fréquence complexe permet déterminer la réponse impulsive de traînage, c. à d. le signal de traînage dans le cas, lorsque le signal principal paraît sous la forme de la fonction impulsive (fonction δ).

On a déduit les formules générales concernant la réponse de traînage et ensuite on a analysé les réponses impulsives de traînage dans les cas particuliers, comme circuit sans distortions, circuit sans pertes ainsi que circuit coaxial employé dans la bande des fréquences utilisées. Hors de cela on a analysé les signaux de traînage dans certains cas caractéristiques de la fonction de la grandeur de l'irrégularité d'impédance $S(x)$ et de certaines fonctions caractéristiques du signal principal. Les cas particuliers analysés permettaient de venir aux conclusions générales concernant les signaux de traînage.

Ce qui concerne les câbles coaxiaux de la production normale on peut admettre, que la fonction de la grandeur de l'irrégularité d'impédance $S(x)$ constitue une fonction aléatoire de Gauss stationnaire (dans un large sens). Admettant ce principe on a déduit les formules générales concernant la valeur attendue et la dispersion du coefficient de traînage ainsi que les formules convenables concernant des signaux de traînage. On a analysé encore le signal attendu de traînage accompagnant le signal exclu de la forme cosinusoidale. On a fait une certaine générale évaluation probabilistique de la grandeur de traînage.

Outre des considérations concernant le singulier tronçon du câble non homogène on a étudié le cas du circuit de longue distance contenant beaucoup de secteurs d'amplification. En cours d'examination des signaux de traînage dans le circuit de

longue distance on a accepté, que les amplificateurs sont équipés des correcteurs d'affaiblissement et de phase sorrigéant de la manière idéale les distorsions introduites par les tronçons d'amplification des circuits.

On a déterminé des dépendances qui permettent de calculer les grandeurs caractérisant des signaux de trainage à la sortie de la ligne de longue distance en se basant sur la connaissance de convenables grandeurs concernant les tronçons d'amplification contenus dans cette ligne de longue distance. En cours de la détermination des dépendances statistiques on a examiné aussi le cas, quand des longueurs de singuliers tronçons sont des grandeurs aléatoires.

En terminaison on a présenté les conclusions résultant des considérations effectuées dans l'ouvrage.

M. RYDEL

BERECHNUNG VON MITFLÜSSEN IN KOAXIALKABELN MIT WELLENWIDERSTANDSSCHWANKUNGEN

Zusammenfassung

Die Schwankungen des Wellenwiderstandes in einem inhomogenen Kabel verursachen die Entstehung von reflektierten Wellen in dem Kabel, wobei die zweimal reflektierten Wellen, die als Mitflusssignale bezeichnet wurden, in den Empfängern gelangen und in der Schlussfolge eine Verzerrung des empfangenen Signals verursachen. Wenn das Hauptsignal sinusoidal zeitlich veränderlich ist, so wird das Mitflusssignal durch den Mitflussfaktor charakterisiert, welcher durch das Verhältnis der komplexen Mitflussspannung zur komplexen Hauptausgangsspannung bestimmt wird.

Der Mitflussfaktor von der sogen. Schwankungsfunktion $S(x)$, welche die Schwankungen des lokalen Wellenwiderstandes charakterisiert, ferner von der Fortpflanzungskonstante des Kabels sowie von den Reflexionsfaktoren an den Kabelenden abhängig ist. Die Kenntnis des Mitflussfaktors als Funktion der komplexen Frequenz gestattet die Berechnung der Impulsantwort des Mitflusses, d.h. des Mitflusssignals für den Fall, wo das Hauptsignal eine Form der Impulsfunktion (die δ -Funktion) annimmt. Es wurden allgemeine Formeln eingeführt, welche die Antwort des Mitflusses betreffen, ferner wurden die Impulsantworten des Mitflusses in besonderen Fällen der Kabel erwogen, wie die verzerrungslose Kabel, verlustlose Kabel, Koaxialkabel, das für den Bereich der brauchbaren Frequenzen ausgenutzt wird. Ausserdem wurden Mitflusssignale für gewisse, charakteristische Fälle der Schwankungsfunktion $S(x)$, sowie für gewisse charakteristische Funktionen des Hauptsignals betrachtet. Diese betrachteten besonderen Fälle erlaubten gewisse Schlüsse betr. der Mitflusssignale zu ziehen.

Bei normal hergestellten Koaxialkabeln kann man annehmen, dass die Schwankungsfunktion $S(x)$ eine Gaussische statistische Funktion (in erweitertem Sinne) ist. Bei Annahme einer solchen Grundlegung wurden allgemeine Formeln, welche den Mittelwert und die Dispersion des Mitflussfaktors, sowie entsprechende Formeln, welche die Mittelwerte der Signale betreffen, entwickelt. Hierbei wurde eine probabilistische Einschätzung der Grösse des Mitflusses durchgeführt. Ausser den Betrachtungen des Einzelabschnittes des inhomogenen Kabels, wurde der Fall des weit-

greifenden Kabels, welches viele Verstärkerfelder enthält, erwogen. Bei der Betrachtung der Mitflusssignale in weitgreifendem Kabel wurde vorausgesetzt, dass die Verstärker mit Dämpfungs- und Phasenentzerrer ausgerüstet sind, welche die Verzerrungen ideal entzerren, die durch die Verstärkerfelder des Kabels eingebracht wurden. Es wurden Abhängigkeiten vorgebracht, welche die Grössen der Mitflusssignale am Ausgang der weitgreifenden Kabel charakterisieren, auf Grund der Kenntnis geeigneter Grössen, welche die Verstärkerfelder betreffen.

Bei Ausführung der statischen Abhängigkeiten wurde auch der Fall in Betracht gezogen, in welchem die Längen der Verstärkerfelder statistische Grössen sind.

Zuletzt wurden die Schlüsse, die sich aus den durchgeführten Betrachtungen ergaben, summiert.

М. РЫДЕЛЬ

РАСЧЁТ ПОПУТНОГО ПОТОКА В НЕОДНОРОДНЫХ КОАКСИАЛЬНЫХ КАБЕЛЯХ

Резюме

Колебания характеристического сопротивления местной неоднородной кабельной цепи вызывают возникновение в ней отражённых сигналов, причём двукратно отражённые сигналы, названные попутным потоком, попадают в приёмник, вызывая в результате искажения принимаемого сигнала. Если главный сигнал изменяется во времени синусоидально, то попутный поток характеризуется коэффициентом попутного потока, определённый как соотношение (комплексного) напряжения попутного потока к (комплексному) напряжению главного входного сигнала. Коэффициент попутного потока зависит от т. наз. функции отклонений волновых сопротивлений $S(x)$, характеризующей зависимость колебания местного характеристического сопротивления, от затухания в цепи и от несогласованностей на концах цепи. Знание коэффициента попутного потока, как комплексной функции частоты позволяет определить импульсный ответ попутного потока, то есть попутный поток, для случая, когда главный сигнал имеет вид импульсной функции (δ -функции).

Выведены общие формулы, касающиеся ответа попутного потока, а далее рассмотрены импульсные ответы попутного потока для отдельных случаев кабельных цепей таких, как неискажающая цепь, цепь без потерь, коаксиальная цепь, используемая в диапазоне потребляемых частот. Кроме этого рассмотрены попутные потоки для некоторых характеристических случаев функции отклонений волновых сопротивлений $S(x)$ и некоторых характеристических функций главного сигнала. Рассмотрены частные случаи позволили извлечь некоторые общие выводы, касающиеся попутных потоков.

Для коаксиальных кабелей нормального производства можно принять, что функция отклонений волнового сопротивления $S(x)$ является стационарной гауссовой случайной функцией (в широком смысле). Принимая такое положение, выведены общие формулы, касающиеся ожидаемого значения и дисперсии коэффициента попутного потока, а также соответственные формулы, касающиеся ожидаемых попутных потоков. Кроме этого рассмотрен ожидаемый сигнал попутного потока, сопровождающий выключенный, косинусоидально изменяющийся во времени сигнал. Произведена некоторая общая оценка вероятностной величины попутного потока.

Кроме рассуждений, проведенных для одиночного отрезка неоднородной цепи дальней протяжённости, содержащей много усилительных участков. При кабельной рассмотрении попутных потоков в цепи дальней связи принималось, что усилители снабжены корректорами затухания и фазы, корректирующими идеально искажения, вводимые усилительными участками кабельной цепи.

Выведены зависимости, позволяющие определять величины, характеризующие попутные потоки на выходе кабельной цепи дальней связи, на основании знания соответственных величин, касающихся усилительных участков расположенных в данной цепи дальней связи. При выведении статистических зависимостей был рассмотрен тоже случай, когда длины отдельных усилительных участников являются случайными величинами.

В заключении представлены выводы, результирующие из проведенного анализа.

WITOLD WIERZEJSKI

Projektowanie i pomiary jednorodnych linii spiralnych

Rękopis dostarczono 31.5.1963

W artykule niniejszym omówiono na wstępie zasadnicze konstrukcje jednorodnych linii spiralnych, zarówno z kompensacją błędu fazowego, jak i bez kompensacji. Następnie podano sposoby projektowania linii spiralnych oraz metodę pomiaru zasadniczych parametrów linii. Na zakończenie podano przykłady zaprojektowanych i wykonanych konstrukcji.

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

- A — tłumienie całkowite linii
- B — całkowite przesunięcie fazy przez linię
- C_0 — jednostkowa pojemność linii przy małych częstotliwościach
- C_{c0} — pojemność całkowita linii przy małych częstotliwościach
- C — jednostkowa pojemność linii przy dowolnej częstotliwości
- C_b — jednostkowa pojemność spirali do pasków kompensacyjnych
- D — średnica spirali
- D_1 — średnica ekranu zewnętrznego
- d — średnica drutu w spirali
- e — amplituda oscylacji w odpowiedzi linii na impuls Diraca
- F — tangens kąta stratności dielektryku
- f — częstotliwość
- f_{gr} — częstotliwość, przy której błąd fazy osiąga założoną wartość ΔB_{gr}
- f_{01}, f_{02} — częstotliwości, przy których błąd fazy przechodzi przez zero
- f_k — częstotliwość kolejnego k -tego ekstremum napięcia na wejściu linii rozwartej lub zwartej
- h — skok uzwojenia spirali
- J_0, J_1 — podstawowe funkcje Bessela zerowego i pierwszego rzędu
- L_0 — jednostkowa indukcyjność linii przy małych częstotliwościach
- L_{c0} — całkowita indukcyjność linii przy małych częstotliwościach
- L — jednostkowa indukcyjność linii przy dowolnej częstotliwości
- l — geometryczna długość linii
- $\ln$ — logarytm naturalny
- $\log$ — logarytm dziesiętny

- n — ilość zwojów na cm spirali
 P — szerokość paska kompensacyjnego lub ekranowego
 S — radialna odległość spirali od ekranu
 W_{10} — impedancja wejściowa linii rozwartej na końcu
 W_{12} — impedancja wejściowa linii zwartej na końcu
 Z_0 — oporność falowa linii przy częstotliwościach małych
 Z — oporność falowa linii przy dowolnej częstotliwości
 α — jednostkowe tłumienie linii
 β — jednostkowe przesunięcie fazy linii
 Δf — zakres częstotliwości przenoszonych przez linię
 ΔB — błąd fazowy — odchylenie od liniowego przebiegu fazy danej linii
 ΔB_{gr} — błąd fazowy na końcu zakresu przenoszenia linii przy częstotliwości f_{gr}
 ΔL — przyrost indukcyjności linii (w funkcji częstotliwości)
 $\Delta \tau$ — przyrost opóźnienia jednostkowego linii
 ε — względna stała dielektryczna ośrodka
 η — długość paska kompensacyjnego
 μ — względna przenikalność magnetyczna materiału lub ośrodka
 τ_0 — jednostkowe opóźnienie linii dla małych częstotliwości
 τ_{c0} — całkowite opóźnienie linii dla małych częstotliwości
 τ — jednostkowe opóźnienie linii dla dowolnej częstotliwości
 $\omega = 2\pi f$ — pulsacja

1. KONSTRUKCJE LINII SPIRALNYCH

1.1. Możliwości prostych rozwiązań konstrukcyjnych

Linie spiralne są używane do opóźniania i formowania przebiegów elektrycznych w zakresie opóźnień od pojedynczych nanosekund do paru mikrosekund. Linie te składają się z dwóch zasadniczych części: spirali i ekranu. Indukcyjność spirali decyduje o jednostkowej indukcyjności linii, podczas gdy pojemność spirali do uziemionego ekranu stanowi jej jednostkową pojemność poprzeczną. Istnieją wprowadzić konstrukcje linii nie posiadających pozornie ekranu, wówczas jednak dwie spirale umieszczone jedna na drugiej odgrywają dla siebie na wzajem rolę ekranu.

Linie złożone tylko ze spirali i ekranu, tzn. linie niekompensowane mają zasadniczą wadę polegającą na zmienności w funkcji częstotliwości ich indukcyjności. Zmniejszanie się wraz z częstotliwością indukcyjności, powoduje z kolei spadek opóźnienia linii i jej oporności falowej.

W liniach, w których właściwy im spadek opóźnienia w funkcji częstotliwości i związany z tym błąd fazowy nie mogą być tolerowane, stosuje się kompensację przez zwiększanie pojemności wzdłużnej, tzn. rozłożonej pomiędzy zwojami spirali. Dokonuje się tego na ogół za pomocą pasków kompensacyjnych. Są to jak gdyby wyizolowane części ekranu o odpowiedniej szerokości i długości, nie mające połączeń ze spiralą ekranu ani między sobą. Dzięki ich pojemności do pobliskich zwojów spirali uzyskuje się właściwe sprzężenie pojemnościowe zapewniające kompensację. Podstawowe własności niekompensowanych linii spiralnych jak również mechanizm i wynik kompensacji paskowej był omówiony w poprzednich artykułach [1] i [2].

Za pomocą kompensacji paskowej można kilkakrotnie rozszerzyć zakres częstotliwości, w którym zmiany opóźnienia i wynikający z nich błąd fazowy nie przekraczają dopuszczalnych wartości. O ile w przypadku linii niekompensowanych czas narastania i kształt odpowiedzi na skok jednostkowy linii jest na ogół określony przez zniekształcenia fazowe, o tyle w przypadku linii kompensowanych przy znacznie rozszerzonym zakresie stałego opóźnienia, a więc liniowej fazy, może już odgrywać rolę charakterystyka amplitudowa przenoszenia linii.

Linie spiralne mogą mieć ekran zewnętrzny, wewnętrzny lub oba te rodzaje ekranów jednocześnie. Ekran może być wykonany z folii metalowej, w postaci oplotu z drucików lub w formie rurki metalowej.

Najczęściej ekran wykonuje się w ten sposób, aby nie był możliwy przepływ prądu po obwodzie ekranu, a więc tak, by indukcyjność linii nie była zmniejszana przez efekt „zwoju zwartego”. Zazwyczaj, jeżeli ekran umieszczony jest wewnątrz spirali, jest on wykonany z cienkiej folii nałożonej lub nadrukowanej na pręt izolacyjny. Grubość ekranu wewnętrznego ma poważny wpływ na straty ze względu na prądy wirowe. Dla zmniejszenia ich ekran jest zwykle rozcięty wzdłużnie na dużą ilość pasków biegnących wzdłuż całej linii, połączonych ze sobą wspólnym punktem uziemiającym poza spiralą. Część z tych pasków może być wykorzystana jako paski kompensacyjne. W tym celu zostają one odłączone od wspólnego uziemienia i rozcięte poprzecznie na odpowiednio wielką ilość odcinków. Następnie tak paski ekranowe, jak i kompensacyjne zostają okryte warstwą folii izolującej, na której nawija się spiralę. Folia ta zwykle bywa wykonana z dielektryku o małym kącie strat, jak styroflex lub teflon. Poważny kłopot stanowi dosyć duża stratność powszechnie stosowanej lakierowanej izolacji drutów nawojowych. Nieco mniejsze tłumienie uzyskuje się przez zastosowanie drutu w izolacji jedwabnej. Użycie drutu nie izolowanego jest tu możliwe, jednak wymaga izolowania lub dystansowania od siebie poszczególnych zwojów. Pewne możliwości zmniejszenia strat daje konstrukcja, w której częścią dielektryku jest warstwa powietrza, ale w wypadku ekranu wewnętrznego z folii nie jest to możliwe do zrealizowania. Drugą wadą linii z ekranem

wewnętrznym jest możliwość zniekształcania jej jednorodności przez znajdujące się w pobliżu masy metalowe. Mogą one zwiększać lokalnie pojemność lub zmniejszać indukcyjność. Ponadto linia bez zewnętrznego ekranu jest dla częstotliwości większych obciążona dodatkowymi stratami na promieniowanie. Natomiast do zalet konstrukcji z ekranem wewnętrznym należy zaliczyć możliwość realizowania go w formie drukowanej, łatwość uzyskiwania dużych pojemności jednostkowych, zwartość mechaniczną linii i pewne ułatwienia przeliczeniowe (łatwy dobór $\frac{C_b}{C_0}$).

Ekran zewnętrzny linii może być wykonany w jeden z trzech podanych już sposobów. W przypadku wykonania go z folii metalowej jest on oddzielony od spirali folią z dielektryku. Tu spirala może być również wykonana z drutu gołego, gdyż nawinięta jest na izolacyjnym, sztywnym rdzeniu, który może być np. spiralnie nacięty, w celu dystansowania zwojów. W liniach giętkich typu kablowego ekran jest wykonany z reguły w formie opłotu z izolowanych drutów.

Dosyć wygodną konstrukcją jest ekran zewnętrzny w postaci rozciętej wzdłużnie rurki sztywnej. Rurka ta dystansowana od spirali odpowiednimi krawężnikami dielektryku na końcach linii (ewent. również i w środku) pozwala na pewną regulację pojemności (przez rozwieranie lub zgniatanie rurki) jednostkowej, przy zachowaniu jako dielektryku powietrza. Paski kompensacyjne mogą być umieszczone między spiralą a ekranem lub też wewnątrz spirali. Przy małych odległościach spirali od ekranu można dla zabezpieczenia się przed zwarciami umieścić drut spirali w zagłębieniu wyciętego spiralnego rowka, a rozciętą rurką nakładać bezpośrednio na rdzeń. Wówczas jednak umieszczanie pasków kompensacyjnych jest możliwe tylko w szerokiej szczelinie wyciętej wzdłuż ekranu rurki.

1.2. Linie o oporności falowej większej niż 5 kΩ

W pewnych przypadkach do opóźniania impulsów korzystne jest użycie linii o dużej oporności falowej i dużym opóźnieniu jednostkowym. Te dwa warunki wskazują na konieczność użycia spirali z możliwie dużą indukcyjnością jednostkową. W tych przypadkach stosuje się z reguły spirale wielowarstwowe o uzwojeniu schodkowym. Ma to jeszcze tę dodatkową zaletę, że występuje wówczas duża pojemność międzyzwojowa, tak że uzyskuje się dostateczną kompensację błędów fazowych bez użycia pasków kompensacyjnych. W liniach tych stosuje się przeważnie ekran wewnętrzny rozcinany wzdłużnie. Uzyskiwane oporności falowe dochodzą do kilkunastu kiloomów przy stosowanych opóźnieniach jednostkowych rzędu 0,1—0,2 μs/cm. Obliczenia i dane takich linii podaje W. S. Carley [5].

1.3. Konstrukcje linii wykorzystujące materiały magnetyczne

Nowoczesne materiały magnetyczne są z powodzeniem stosowane do budowy linii spiralnych. Wynikający z ich użycia wzrost indukcyjności pozwala na zwiększenie jednostkowego opóźnienia lub oporności falowej bądź też na zmniejszenie wymiarów linii. Użycie materiałów magnetycznych pozwala na dużą różnorodność konstrukcji. W prostszych rozwiązaniach spirala jest nawinięta na cylindrycznym rdzeniu magnetycznym. Rdzeń może być w konstrukcjach sztywnych pałeczką ferrytową lub rdzeniem proszkowym, jak również może być wykonany z plastycznego materiału magnetycznego. Materiał taki składa się zwykle z miękkiego, zapewne zmielonego już po wypaleniu ferrytu, ewent. żelaza karbonylowego lub proszku permalojowego połączonego z plastifikatorem polietylenowym lub polistyrenowym. Uzyskany materiał przy przenikalności rzędu kilku (w toroidzie) i niewielkich stratach jest całkowicie plastyczny. Może on w postaci taśmy lub folii służyć jednocześnie do oddzielania spirali od ekranu. Taka konstrukcja daje znaczny wzrost jednostkowej indukcyjności, gdyż obwód magnetyczny prawie całkowicie zamyka się w materiale magnetycznym. Np. plastyczny materiał magnetyczny Ferotron firmy Polymer Corporation [11] posiadający przenikalność (toroidalną) około 6 (dla małych częstotliwości) i stałą dielektryczną ok. 8 daje w różnych konstrukcjach linie o następujących danych:

Rodzaj konstrukcji	A	B	C	D
Rdzeń	Dielektryk niemagnetyczny	Dielektryk magnetyczny	Dielektryk niemagnetyczny	Dielektryk magnetyczny
Folia oddzielająca spiralę od ekranu	Dielektryk niemagnetyczny	Dielektryk niemagnetyczny	Dielektryk magnetyczny	Dielektryk magnetyczny
Opóźnienie na 1 m μ s	1,28	2,6	3,7	5,0
Oporność falowa Ω	1550	1950	1000	1500

Jak widać, w konstrukcji D opóźnienie jednostkowe jest ok. 4 razy większe niż w A. Jest rzeczą jasną, że taki wzrost opóźnienia jednostkowego łączy się z jednoczesnym wzrostem zniekształceń fazowych, co z kolei obniża nieco maksymalną użyteczną częstotliwość linii, niemniej korzyść użycia materiału magnetycznego jest niewątpliwa. Pewne ciekawe możliwości stwarzałyby konstrukcja linii nawiniętej na rdzeniu niemagnetycznym drutem, którego izolacja została wykonana z materiału magnetycznego. Ta swojego rodzaju krarupizacja linii zwiększałaby indukcyjności bieżące linii głównie ze względu na wzrost indukcyjności elementarnej długości drutu, a nie indukcyjności wzajemnej zwojów. Jak wia-

domo, ta ostatnia właśnie prowadzi do zmienności indukcyjności jednostkowej w funkcji częstotliwości. Aby jednak wpływ tej krarupizacji był istotny, przenikalność magnetyczna materiału musiałaby być b. duża, co dla wielkich częstotliwości nie jest realizowalne.

Używając materiałów magnetycznych do budowy linii należy wziąć pod uwagę następujące fakty: 1° przenikalność magnetyczna jest funkcją częstotliwości i ma charakter malejący z jej wzrostem, 2° straty na histerzę w ferrytach silnie wzrastają w zakresie większych częstotliwości, 3° przenikalność magnetyczna może być bardzo zależna od temperatury, 4° linia staje się elementem nieliniowym, tzn. jej parametry: indukcyjność, opóźnienie i oporność falowa są funkcją przyłożonych napięć.

Mimo tych zastrzeżeń dane uzyskiwane przy użyciu materiałów magnetycznych są zupełnie dobre.

1.4. Płynna regulacja długości elektrycznej linii

W wielu przypadkach dla celów formowania lub opóźniania impulsów potrzebna jest regulacja elektrycznej długości linii. Może się to odbywać w rozmaity sposób. Najprostszym rozwiązaniem jest podzielenie linii na odcinki lub dołączenie do spirali odczepów i wybieranie przełącznikiem odpowiedniej długości linii. Sposób ten jest dosyć niekorzystny ze względu na następujące fakty:

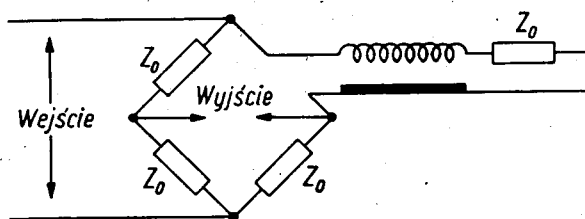
1° Regulacja jest skokowa, więc niezbyt precyzyjna.

2° Przełącznik wprowadza pewne skupione pojemności tak do ziemi, jak i pomiędzy odcinkami linii. Te pojemności prowadzą do poważnych zniekształceń impulsów i niedopasowania. Przełącznik koncentryczny pozwalałby tych błędów unikać, jednak są b. duże trudności z wykonaniem go na dostatecznie dużą oporność falową.

3° W przypadku korzystania z odczepów linii pozostała nie używana część linii może dawać pewne dodatkowe sygnały odbite ze względu na trudności dopasowania. Ten ostatni punkt odpada, jeżeli linia jest używana jako formująca i przełącznik dokonuje zwarcia do ekranu wybranego odcinka linii.

W celu uzyskania płynnej regulacji opóźnienia można użyć styku ślizgającego się wzdłuż uzwojenia spirali. Linia powinna być tu również zamknięta na swym końcu na oporność falową, aby uniknąć odbić w części chwilowo nie używanej. Poważną trudnością konstrukcyjną jest konieczność unikania zwierania przez ślizgacz sąsiednich zwojów w miejscu styku. Wówczas bowiem powstałaby niejednorodność dająca zmianę lokalną oporności falowej i silne odbicia. Kłopoty natury konstrukcyjnej związane są też z zapewnieniem dobrego styku elektrycznego i trwałości spirali, szczególnie w przypadku wykonania jej z cienkiego drutu.

Istnieją możliwości regulacji płynnej długości linii bez styku mechanicznego. Linia taka powinna być wykonana z ekranem zewnętrznym i spiralą nawiniętą na cienkościennej rurce z materiału o dużej stałej dielektrycznej. Wewnątrz linii należy umieścić dopasowany do wewnętrznej średnicy rurki walec z materiału o dobrym przewodnictwie połączony z ekranem linii. Walec ten stanowi wewnątrz linii zwój zwarty, zmniejszający w dużym stopniu indukcyjność linii w miejscu jego ustawienia. Jednocześnie w tymże miejscu pojemność linii znacznie wzrasta. A więc oporność falowa linii $\sqrt{\frac{L}{C}}$ spada w miejscu chwilowego ustawienia walca do wartości wprawdzie nie równej zero, ale stosunkowo bardzo małej. Ta część energii impulsu, która nie została odbita w punkcie pozornego zwarcia i przedostała się poza walec, zostaje pochłonięta przez opór dopasowania umieszczony na końcu linii. Przesuwając walec wzdłuż linii można uzyskać dowolną (w granicach jej maksymalnego opóźnienia) długość elektryczną linii zwartej na końcu. Jeżeli linia taka ma być użyta jako opóźniająca, a nie formująca, należy ją włączyć w układ mostkowy (rys. 1). W układzie tym ze względu na zrównoważenie mostka impuls pierwotny jest na wyjściu bardzo stłumiony.



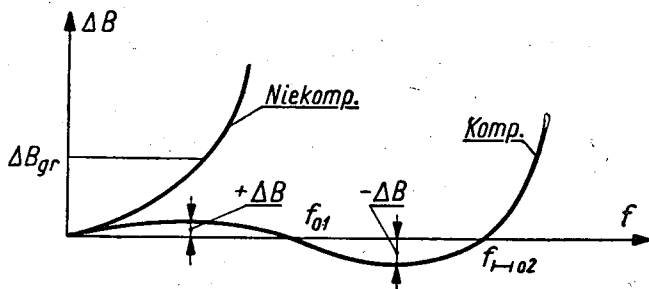
Rys. 1. Włączenie linii spiralnej w układ mostkowy

C. Berkley [9] proponuje następującą metodę płynnej regulacji opóźnienia. Polega ona na użyciu linii nawiniętej na rdzeniu magnetycznym, przy czym punkt nieciągłości oporności falowej uzyskuje się za pomocą miejscowego nasycenia rdzenia zewnętrznym, stałym polem magnetycznym. Służy do tego stały magnes lub elektromagnes, który może być przesuwany wzdłuż linii. Lokalna zmiana oporności falowej powodowana jest spadkiem przenikalności magnetycznej rdzenia, a więc indukcyjności jednostkowej i jest proporcjonalna do pierwiastka ze skutecznej przenikalności magnetycznej rdzenia. Aby zmiana ta była wyraźnie zlokalizowana, materiał magnetyczny powinien mieć pętlę histerezy możliwie zbliżoną do prostokątnej. Tytułem uwagi marginesowej warto zauważyć, że zmienność indukcyjności, a więc i opóźnienia linii, w funkcji wielkości pola magnetycznego zewnętrznego lub nawet własnego, wytwarzanego przez samą spiralę, stwarza duże możliwości do wykorzystania, jak np. prosty układ modulacji fazy impulsów oraz formowanie grzbietu impulsu wg dowolnego kształtu za pomocą zewnętrznego pola.

2. PROJEKTOWANIE LINII SPIRALNYCH

Przystępując do projektowania należy na wstępie zdecydować, czy linia ma być wykonana z kompensacją błędu fazy, czy bez niej. Jest to zagadnienie raczej ekonomiczne, gdyż — jak wiadomo — linie z kompensacją mają kilkakrotnie szersze pasmo użyteczne lub mniejsze wymiary, ale wykonanie ich jest bardziej pracochłonne i trudniejsze, zarówno jeśli chodzi o opracowanie, jak i wykonanie małoseryjne. Jest rzeczą jasną, że w wykonaniu fabrycznym przy użyciu precyzyjnych narzędzi produkcji linie skompensowane dadzą duże oszczędności materiałów i robocizny przy założonym pasmie i opóźnieniu jednostkowym. Natomiast jeśli chodzi o wykonanie warsztatowo-laboratoryjne, to czasem może się zdarzyć, że będzie bardziej opłacalne wykonanie linii o większych wymiarach i z większym nakładem materiałów, ale za to z mniejszym nakładem robocizny. Decyzja, czy należy linie kompensować, zależy również od przewidywanego przebiegu tłumienia. Jeżeli ze wstępnego przeliczenia wyniknie, że tłumienie wzrasta znacznie już przy częstotliwościach, przy których zniekształcenia fazowe linii niekompensowanej są jeszcze małe, to kompensacji przeprowadzać nie warto.

Zwykle dane są następujące założenia: opóźnienie całkowite τ_{c0} , oporność falowa Z_0 , zakres użyteczny częstotliwości Δf , określony dopuszczalnym błędem fazowym i wzrostem tłumienia lub też wielkością przepięć w odpowiedzi impulsowej. Zwykle też trzeba założyć jeden z wymiarów linii, np. średnicę spirali D lub jej długość l . Przebieg błędu fazowego ΔB w funkcji częstotliwości (rys. 2) jest inny w przypadku linii niekom-

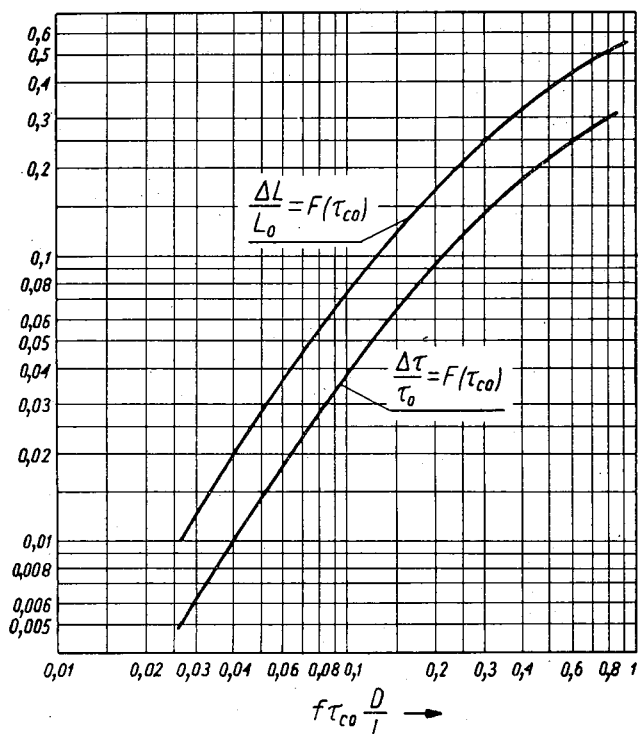


Rys. 2. Przebieg błędu fazowego w funkcji częstotliwości w przypadku linii kompensowanej i niekompensowanej

pensowanych i inny w przypadku linii z kompensacją paskową. Dla linii niekompensowanej błąd fazowy jest funkcją monotonicznie rosnącą i koniec pasma użytecznego linii jest określony jego maksymalną dopuszczalną wartością. Jeśli chodzi o linie prawidłowo skompensowane, to za maksymalną częstotliwość użyteczną linii przyjmuje się zwykle częstotliwość f_{02} , przy której błąd fazy powtórnie przechodzi przez zero. Cał-

kowita kompensacja linii za pomocą pasków jednego wymiaru jest niemożliwa.

W przypadku projektowania linii bez kompensacji można skorzystać z przedstawionej na rys. 3 zależności [1], [3] względnej zmiany opóźnie-



Rys. 3. Przebieg względnych zmian opóźnienia w funkcji iloczynu $f\tau_0 \frac{D}{l}$.

nia linii od iloczynu częstotliwości przez opóźnienie dla częstotliwości małych i stosunek $\frac{D}{l}$ linii. Ponieważ błąd fazowy

$$\Delta\beta = \Delta\tau f 2\pi \text{ radianów}, \quad (1)$$

więc mając założone: opóźnienie τ_{c0} , jeden z wymiarów linii — średnicę D lub długość l oraz częstotliwość graniczną f_{gr} , przy której błąd fazy osiąga daną wartość ΔB_{gr} , można znaleźć:

$$\frac{\Delta\tau_{gr}}{\tau_{c0}} = \frac{\Delta B_{gr}}{2\pi f_{gr} \tau_{c0}}. \quad (2)$$

A stąd z rys. 3 iloczyn $f_{gr} \tau_{c0} \cdot \frac{D}{l}$, z czego można obliczyć pozostałą niewiadomą. Nb. zwykle ΔB_{gr} przyjmuje się $1/2$ radiana.

Powyższe rozważanie pozwala na określenie odpowiednich wymiarów linii ze względu na zniekształcenia fazowe.

Indukcyjność i pojemność jednostkową linii obliczamy z prostej zależności (z pominięciem strat):

$$L_0 = \tau_0 \cdot Z_0, \quad (3)$$

zaś

$$C_0 = \frac{\tau_0}{Z_0} \quad (4)$$

Dalsze parametry konstrukcyjne można wyznaczyć z wyrażeń na indukcyjność i pojemność jednostkową linii [1], ponieważ dla linii z ekranem wzdłużnie rozciętym (lub w oplocie z drutów izolowanych) indukcyjność jednostkowa

$$L_0 = 10^{-9} \pi^2 n^2 D^2 \mu \quad [\text{H/cm}], \quad (5)$$

stąd ilość zwojów na centymetr linii:

$$n = \sqrt{\frac{L_0}{10^{-9} \cdot \pi^2 \cdot D^2 \mu}} \quad [\text{zw/cm}]. \quad (6)$$

Podobnie z wyrażenia na pojemność linii z rurkowym ekranem zewnętrznym [1]

$$C_0 = \frac{0,24 \cdot 10^{-12} \varepsilon}{\log \frac{D_1}{D}} \quad [\text{F/cm}] \quad (7)$$

wynika

$$\log \frac{D_1}{D} = \frac{0,24 \cdot 10^{-12} \varepsilon}{C_0}, \quad (8)$$

gdzie D_1 jest średnicą ekranu zewnętrznego, a ε względną stałą dielektryczną przestrzeni między spiralą a ekranem. Dla ekranów paskowych o małej odległości S spirali od ekranu i szerokości paska P pojemność jednostkową można liczyć jak dla kondensatora płaskiego. Stąd:

$$S = \frac{8,86 \cdot 10^{-14} \varepsilon \cdot P}{C_0} \quad [\text{cm}]. \quad (9)$$

Wyrażenie to obowiązuje dla przypadku, gdy spirala nawinięta jest zwój przy zwoju i wyprowadzone jest w założeniu, że spirala jest gładką powierzchnią cylindryczną. Wyprowadzenie wyrażenia bez powyższych ograniczeń jest dość skomplikowane ze względu na zależność rozkładu pola elektrycznego od względnej odległości sąsiednich zwojów od siebie. Autor

korzystał z wyrażenia empirycznego określającego pojemność spirali do ekranu paskowego:

$$C_0 = \frac{8,86 \cdot P \cdot 10^{-14}}{\frac{S}{\varepsilon} + \frac{S_1}{\varepsilon_1} + \frac{d}{25}} \sqrt{\frac{d}{h}} \quad [\text{F/cm}], \quad (10)$$

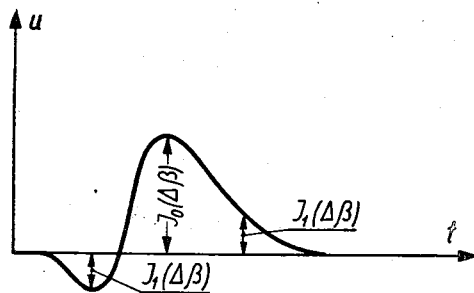
gdzie: S i ε są grubością i stałą dielektryczną izolacji oddzielającej drut spirali od ekranu; S_1 i ε_1 odpowiednio grubością i stałą dielektryczną izolacji samego drutu i wreszcie $\frac{d}{h}$ jest stosunkiem grubości drutu do skoku spirali. Przed wykonaniem linii warto jednak nawinąć kawałek próbnej linii i skontrolować obliczenia.

Jeśli chodzi o linie skompensowane, to zwykle warunek dopuszczalnej wartości błędu fazy $\Delta B_{\max}$ jest tu zastępowany przez warunek dopuszczalnego przepięcia e w odpowiedzi układu na impuls Diraca. Jeżeli przyjąć, że tłumienie linii zaczyna odgrywać poważną rolę dopiero przy częstotliwościach powyżej f_{02} (rys. 2), to amplituda oscylacji e odpowiedzi na impuls Diraca (rys. 4) jest uzależniona od błędu fazy następująco [10]:

$$e = \frac{J_1(\Delta B)}{J_0(\Delta B)}, \quad (11)$$

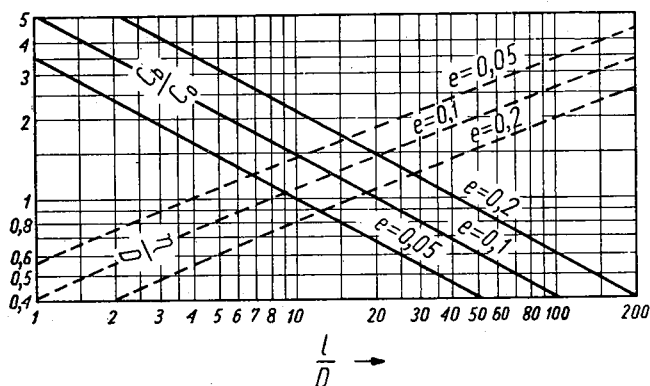
gdzie: J_1 i J_0 są funkcjami Bessela rzędu zerowego i pierwszego. Projektowanie linii z kompensacją jest oparte na pełnej teorii przenoszenia linii skompensowanej podanej przez J. M. Di Toro [6] (zob. [2]).

Rys. 4. Uproszczona odpowiedź na impuls Diraca niekompensowanej linii spiralnej

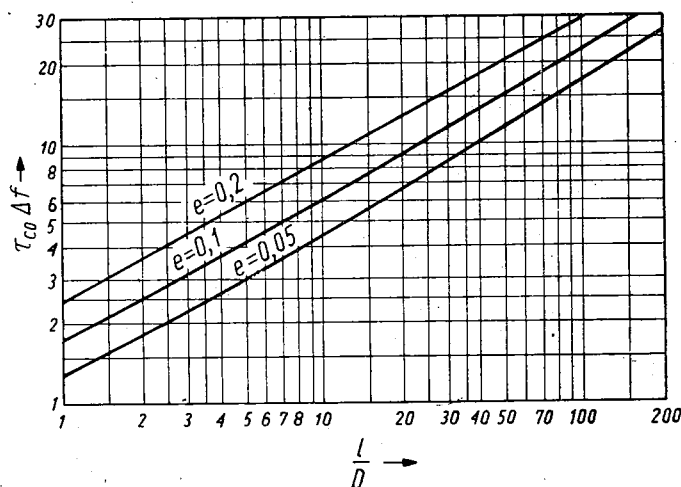


Za pomocą podstawienia wartości cyfrowych założonych wartości $\Delta f = f_{02}$, τ_{c0} i ΔB oraz korzystając ze wzoru (11) zostały jako wynik rozważań teoretycznych wyznaczone zależności: stosunków długości paska kompensacyjnego η do średnicy spirali D i jednostkowej pojemności wszystkich pasków C_b do pojemności jednostkowej C_0 od stosunku długości l do średnicy D linii. W podobny sposób wyznaczono zależność iloczynu opóźnienia całkowitego τ_{c0} przez pasmo linii Δf również od stosunku $\frac{l}{D}$ linii. Przebiegi tych zależności przedstawiają rys. 5 i rys. 6,

przy czym parametrem jest tu wielkość przepięcia e . Projektowanie sprowadza się do założenia wartości τ_{co} , Δf i e , znalezienia z wykresu na rys. 6 stosunku $\frac{l}{D}$, a stąd z rys. 5 wartości $\frac{C_b}{C_0}$ i $\frac{\eta}{D}$. Pozostaje jeszcze do założenia wartość długości lub średnicy linii. Ze średnicą linii związane jest jednak jej tłumienie, które szczególnie przy liniach kompensowanych nie może być pominięte. Tłumienie linii w zakresie jej stałego



Rys. 5. Przebieg zależności względnej pojemności kompensacyjnej i względnej długości pasków od stosunku $\frac{l}{D}$ przy różnych wielkościach przepięć



Rys. 6. Zależność iloczynu użytecznego pasma przez opóźnienie linii od stosunku jej wymiarów $\frac{l}{D}$

opóźnienia zmniejsza amplitudę przepięć i może nawet doprowadzić w szczególnych przypadkach do odpowiedzi aperiodycznej, ale o zwiększonym czasie narastania.

Tłumienie linii na jednostkę opóźnienia jest określone wyrażeniem [1], [3], [4]

$$\alpha = \frac{7 \cdot 10^{-4} \sqrt{f}}{D n d} \frac{L_0}{L} + 2,7 \cdot 10^{-5} F f \quad [\text{dB}/\mu\text{s}] \quad (12)$$

w którym pierwszy człon określa straty powodowane opornością rzeczywistą spirali, a drugi — straty dielektryczne przestrzeni spiralno-ekran. W przypadku stosowania małostratnych dielektryków wpływ pierwszego członu na charakterystykę tłumienia w funkcji częstotliwości jest większy. Wzrost strat powodowany zjawiskiem naskórkowości jest proporcjonalny do pierwiastka z częstotliwości. Jak widać z tego wyrażenia, aby utrzymać w możliwie szerokim zakresie częstotliwości tłumienie nie przekraczające założonej wartości, należy przyjąć dużą wartość średnicy spirali D , grubości drutu d oraz ilości zwojów na jednostkę długości n . Dla spiral jednowarstwowych iloczyn $n \cdot d$ nie może przekroczyć jedności, gdyż:

$$n = \frac{1}{h}, \quad (13)$$

gdzie h — jest skokiem uzwojenia.

Należy jednak nawijać spiralę możliwie blisko, zwój koło zwoju, aby iloczynu $n \cdot d$ zbytnio nie zmniejszać. Jak widać, wpływ kompensacji dający $\frac{L_0}{L}$ bliskie jedności w szerszym zakresie poprawia również charakterystykę amplitudową linii.

Wielkością, za pomocą której można zmieniać tłumienie linii w zakresie nieograniczonym, jest tu więc tylko średnica spirali D , ale należy pamiętać, że przy założonym opóźnieniu i zakresie częstotliwościowym stałego opóźnienia należy zmieniać również długości linii, by zachować właściwy stosunek $\frac{l}{D}$. Tak więc założenie całkowitego opóźnienia spirali i zakresu częstotliwości, w którym zniekształcenia fazowe i amplitudowe linii nie przekraczają odpowiednich wartości, narzuca całe wymiary geometryczne linii.

Warto zwrócić uwagę na to, że nie tylko częstotliwościowa charakterystyka tłumienia zależy od charakterystyki opóźnienia, lecz również istnieje zależność odwrotna. Wzrost tłumienia wywołuje dodatkowe zmniejszenie się indukcyjności jednostkowej w funkcji częstotliwości, gdyż wartość prądu wzdłuż linii maleje i dla danego odcinka oddziaływanie sprzęgniętych z nim zwojów maleje. Istnienie tej zależności między charakterystykami amplitudową i fazową jest zupełnie naturalne. W celu zachowania stałego opóźnienia pomimo tłumienia należy zwiększyć nieco kompensację, np. przez zwiększenie stosunku $\frac{C_b}{C_0}$ w porównaniu z wartością wynikającą z obliczenia.

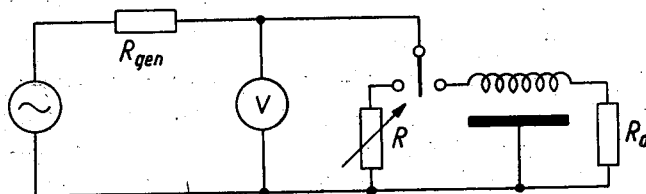
3. METODY POMIAROWE

3.1. Pomiary parametrów linii L_0 i C_0

Najprostszą metodą skontrolowania parametrów linii po jej wykonaniu jest pomiar jej indukcyjności i pojemności w celu obliczenia z nich oporności falowej i całkowitego opóźnienia linii. Pomiary te muszą być wykonane przy częstotliwościach akustycznych, aby móc tak indukcyjność, jak i pojemność traktować jako elementy skupione. Pomiaru indukcyjności dokonuje się przy linii zwartej, a odpowiednio pojemności — przy rozwartej. Pomiary te są jednak z punktu widzenia użytkowego tylko przybliżone, gdyż w normalnie interesującym nas zakresie częstotliwości powyżej kilkuset kHz indukcyjność linii ma już inną wartość — mniejszą, określoną nie przez średnią, lecz przez wewnętrzną średnicę spirali (zob. [1] str. 13).

3.2. Pomiary oporności falowej

Oporność falową można wyznaczyć z pomiarów L_0 i C_0 dla częstotliwości małych. Dla częstotliwości większych pomiary te muszą być wykonywane nieco inaczej. Mostek musi mierzyć impedancję wejściową



Rys. 7. Układ do pomiarów oporności falowej linii

linii w stanie zwarcia i rozwarcia i to naturalnie dla tej samej częstotliwości. Wówczas, jak wiadomo,

$$\hat{Z} = \sqrt{\hat{W}_{12} \cdot \hat{W}_{10}}, \quad (14)$$

gdzie $\hat{W}_{12}$ jest impedancją wejściową linii zwartej, a $\hat{W}_{10}$ — rozwartej.

Bezpośredni pomiar oporności falowej linii może być dokonywany w funkcji częstotliwości metodą porównywania z pewną rzeczywistą opornością o cechowanej zmiennej wartości (rys. 7). Oporność wewnętrzną generatora jest tu sztucznie zwiększona do wartości około Z_0 . Linia jest zamknięta na oporność obciążenia R_0 równą przypuszczalnej oporności falowej. Dla danej częstotliwości oporność R jest tak dobierana, by napięcie na niej było równe napięciu na wejściu linii. Wówczas $R = |Z_{wej}|$.

Oporność falowa jest średnią geometryczną:

$$Z = \sqrt{R_0 R}. \quad (15)$$

Jest rzeczą bardzo istotną, aby w układzie tym pojemności na wejściu i wyjściu linii były możliwie małe, gdyż w przeciwnym wypadku uzyskany przebieg oporności falowej w funkcji częstotliwości mieć będzie bardzo silne falowanie w okresie równym

$$T = \frac{1}{2\tau_c} \quad (16)$$

związane z niedopasowaniem. Rzecz jasna, że za oporność falową należy przyjąć średnią wartość tego przebiegu.

Prostą metodą techniczną jest pomiar impulsowy. Linia jest tu zwarta na końcu, a dopasowana na wejściu do oporności wewnętrznej generatora impulsów. Sygnał z wejścia linii jest doprowadzony do oscylografu. Linia pracuje tu jako formująca: impuls odbity na zwartym końcu z odwróceniem polaryzacji wraca na wejście i odejmuje się od impulsu wejściowego. O ile linia jest tu zamknięta dokładnie na oporność falową i ma małe tłumienie, dalsze odbicie nie nastąpi i napięcie na wejściu będzie po czasie odpowiadającym podwójnemu opóźnieniu równe zeru.

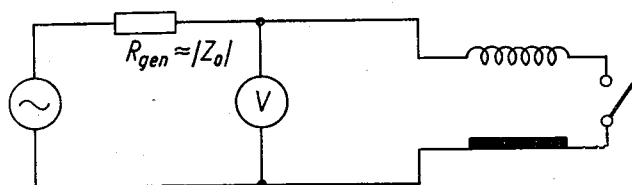
3.3. Pomiary opóźnienia

Dosyć dokładna metoda pomiaru opóźnienia w funkcji częstotliwości polega na określeniu częstotliwości, dla których przesunięcie fazy przez linię przechodzi przez 0 lub 180° i jego wielokrotności. Wówczas długość elektryczna linii jest równa wielokrotności połówki fali. Wówczas opóźnienie

$$\tau_c = \frac{k}{2f_k}, \quad (17)$$

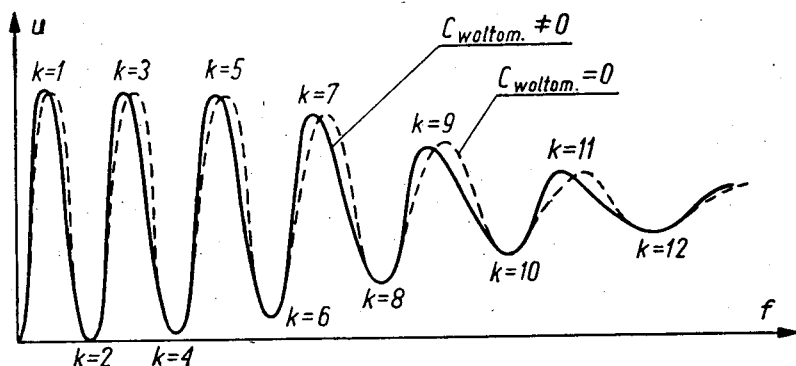
gdzie: — f_k — jest częstotliwością dla kolejnego k -tego punktu mierzonego. Pomiar przejścia fazy przez zero lub π dokonuje się za pomocą oscylografu, którego jedna para płytek jest włączona na wejściu, a druga na wyjściu linii. Dla odpowiednich punktów figura Lissajou staje się ukośną prostą. Ze względu na to, że przesunięcie fazy przechodzi przez zero bardzo szybko, błąd pomiaru częstotliwości sprowadza się praktycznie tylko do błędu cechowania generatora. Jednak określenie opóźnienia z częstotliwości, dla których przesunięcie fazy między początkiem a końcem linii jest 180°, jest obarczone dużym błędem ze względu na duży wpływ na tych częstotliwościach pojemności rozproszonych między początkiem a końcem linii. Pojemności te wprowadzone przez układ pomiarowy są bardzo trudne do uniknięcia. Ich wpływ wyraża się pozornym wzrostem opóźnienia. Natomiast dla częstotliwości, dla których faza na początku

i końcu linii jest ta sama, pojemności te nie grają roli. Tak więc metoda ta daje bardzo dokładne pomiary opóźnień, ale tylko dla częstotliwości, przy których wzdłuż linii rozłożona jest co najmniej jedna cała długość fali lub jej całkowite wielokrotne. Przy tak dużej częstotliwości zmienność indukcyjności w liniach nieskompensowanych jest już duża.



Rys. 8. Układ do pomiarów opóźnień i tłumienia linii

Druga metoda pomiarowa polega na badaniu w funkcji częstotliwości oporności wejściowej linii zwartej na końcu. W układzie tym (rys. 8) linia jest zasilana z generatora o oporności wyjściowej zbliżonej do oporności falowej linii, przy czym mierzone jest napięcie na jej wejściu woltomierzem lampowym o małej pojemności wejściowej. Amplituda napięcia



Rys. 9. Typowa zależność od częstotliwości napięcia na wejściu linii zwartej na końcu

osiąga pierwsze maksimum (rys. 9), gdy opóźnienie jest równe jednej czwartej okresu, tzn. gdy wzdłuż linii jest ćwierć fali. Ekstrema napięcia wejściowego występują dla wielokrotności ćwiartki fali: wielokrotności nieparzyste stanowią maksima, a parzyste minima. Opóźnienie wynosi

$$\tau_c = \frac{k}{4f_k}, \quad (18)$$

gdzie f_k — jest częstotliwością k -tego ekstremum.

W odróżnieniu od metody poprzedniej pojemności między początkiem i końcem linii nie grają tu żadnej roli (koniec zwarty), natomiast pomiar

częstotliwości dla nieparzystych wielokrotności ćwiartki fali jest obarczony dużym błędem związanym z pojemnością woltomierza lampowego oraz rozproszoną pojemnością połączeń na wejściu linii. Daje to pozorny wzrost opóźnienia dla nieparzystych punktów, przy czym błąd jest duży już dla pojedynczych pF. Pojemność ta nie wpływa jednak na położenia minimum, tak że pomiar opóźnienia jest tu dokładny już dla częstotliwości, gdy wzdłuż linii jest rozłożone pół fali. Dokładność, z jaką ustala się częstotliwość występowania minimum, zależy od amplitudy napięcia z generatora, czystości jego krzywej, czułości woltomierza i strat linii, dla przeciętnie jednak spotykanych przyrządów jest ona mniejsza niż w poprzedniej metodzie. Pomiar opóźnienia dla punktów nieparzystych można wykonać przy linii rozwartej na końcu. Przebieg napięcia na wejściu linii będzie wówczas odwrotny, a pomiar częstotliwości minimum nie będzie obciążony błędem powodowanym przez istnienie pojemności. W obu wymienionych metodach dokładne dopasowanie linii nie jest konieczne.

Jeżeli potrzebna jest charakterystyka opóźnienia w funkcji częstotliwości z gęściej rozmieszczonymi punktami pomiarowymi, można użyć włączanej w szereg z linią badaną pewnej linii wzorcowej o znanym opóźnieniu i dobrej charakterystyce opóźnienia. Po wykonaniu pomiarów częstotliwości poszczególnych „rezonansów”, które teraz wypadną dla częstotliwości mniejszych, należy odjąć od obliczonego opóźnienia opóźnienie linii wzorcowej. Jeszcze korzystniejsze jest użycie linii wzorcowej o zmiennym cechowanym opóźnieniu.

Pomiary opóźnienia linii za pomocą synchroskopu są stosunkowo proste, aczkolwiek mało dokładne. Mogą one być wykonane bądź przez pomiar szerokości impulsu formowanego przez zwartą na końcu linię, bądź też przez wprowadzenie sygnału z początku linii na jedną z pionowych płytek, a z końca na drugą, albo też przez pomiar za pomocą synchroskopu dwustrumieniowego.

3.4. Pomiary tłumienia

Pomiary tłumienia linii są na ogół dosyć kłopotliwe w wykonaniu, gdyż wskutek istnienia pojemności rozproszonych wnoszonych przez przyrządy pomiarowe i układ trudno jest uzyskać dobre dopasowania, tak że na początku i końcu linii następują odbicia. Występujące odbicia przejawiają się w postaci falowań charakterystyki tłumienia linii, gdyż sygnały odbite — zależnie od częstotliwości — dodają się lub odejmują od sygnału pomiarowego.

W jednej z metod pomiarowych wykorzystuje się właśnie to zjawisko. Mierzy się linię dopasowaną na wejściu, zaś zwartą lub rozwartą na końcu i bada się minima i maksima napięcia na jej wejściu w funkcji częstotliwości.

Wielkość napięcia na wejściu linii w minimum wyraża się przez

$$U_{min} = (1 - e^{-2A}) U_1,$$

gdzie A jest tłumieniem linii, a U_1 napięciem na wejściu linii, gdyby była ona zamknięta na wyjściu na oporność falową.

Zmieniając na końcu linii zwarcie na rozwarciu lub odwrotnie uzyskujemy przy tej samej lub bardzo zbliżonej częstotliwości dla napięcia na wejściu maksimum wyrażone przez:

$$U_{max} = (1 + e^{-2A}) U_1;$$

stosunek tych napięć:

$$\frac{U_{min}}{U_{max}} = \frac{1 - e^{-2A}}{1 + e^{-2A}} = \frac{e^A - e^{-A}}{e^A + e^{-A}}$$

Podstawiając

$$1 + \frac{U_{min}}{U_{max}} = \frac{2e^A}{e^A + e^{-A}}$$

oraz

$$1 - \frac{U_{min}}{U_{max}} = \frac{2e^{-A}}{e^A + e^{-A}}$$

dostajemy

$$e^{2A} = \frac{1 + \frac{U_{min}}{U_{max}}}{1 - \frac{U_{min}}{U_{max}}} = \frac{U_{max} + U_{min}}{U_{max} - U_{min}},$$

skąd

$$A = \frac{1}{2} \ln \frac{U_{max} + U_{min}}{U_{max} - U_{min}} \quad [\text{N}]. \quad (19)$$

Jeżeli tłumienie nie jest duże, to można napisać $e^{2A} \approx 1 + 2A$, wtedy:

$$1 + 2A \approx \frac{U_{max} + U_{min}}{U_{max} - U_{min}},$$

a wtedy

$$A \approx \frac{U_{min}}{U_{max} - U_{min}} \quad [\text{N}]. \quad (20)$$

Metodą tą można pomierzyć tłumienie dla poszczególnych punktów ekstremów. Wadą tej metody jest to, że ze względu na pojemność wnoszoną przez woltomierz lampowy maksima są przesunięte względem minimów w funkcji częstotliwości, tak że pomiar odbywać się musi dla dwu różnych częstotliwości.

W celu zdjęcia charakterystyki tłumienia w całym pasmie, nie tylko zaś w poszczególnych punktach, trzeba użyć klasycznej metody pomiaru napięcia w funkcji częstotliwości na wejściu i wyjściu badanej linii (jeżeli się przełącza woltomierz np. z wejścia na wyjście, trzeba na jego miejscu pozostawić pewną zastępczą pojemność) lub porównać za pomocą wskaźnika tłumienie linii z tłumieniem jakiegoś regulowanego wzorca. Najwygodniejszą metodą jest oczywiście pomiar przenoszenia dopasowanej obustronnie linii za pomocą szerokopasmowego wobulatora.

4. PRZYKŁADY WYKONANYCH LINII SPIRALNYCH

Autor niniejszego artykułu projektował i wykonywał szereg linii do przyrządów przez siebie budowanych: wzmacniaczy impulsowych dla celów fizyki nuklearnej oraz synchroskopu o wielkiej szybkości pisania. W pierwszym przypadku linie były używane do formowania szerokości wzmacnianych impulsów na pewną stałą szerokość. Linia była tu zwarta na końcu i dopasowana od strony wejścia. Ze względów ekonomicznych linia była zaprojektowana bez kompensacji fazowej.

Dane założeniowe linii nr 7: $Z_0 = 450 \Omega$; $\tau_{c0} = 0,2 \mu s$; $l = 24 \text{ cm}$, częstotliwość graniczna $f_{gr} \geq 10 \text{ MHz}$ przy błędzie $\Delta B_{gr} = 1/2$ radiana.

$$Z(2) \quad \frac{\Delta \tau_{gr}}{\tau_{c0}} = \frac{1}{4 \pi \cdot 10^7 \cdot 0,2 \cdot 10^{-6}} = 0,04;$$

z wykresu na rys. 3 odpowiednio $f_{gr} D \frac{\tau_{c0}}{l} = 0,102$,
stąd

$$D \leq \frac{0,102 \cdot l}{f_{gr} \cdot \tau_{c0}} = 1,22 \text{ cm}.$$

Ze względu na normalizację wymiarów przyjęto $D_1 = 1 \text{ cm}$ (średnica wewnętrzna rurki będącej ekranem),
teraz

$$L_{c0} = \tau_{c0} Z_0 = 90 \mu H,$$

$$C_{c0} = \frac{\tau_{c0}}{Z_0} = 445 \text{ pF};$$

z (8)

$$\log \frac{D_1}{D} = \frac{Z_0}{42 \tau_{c0}} \cdot 10^{-11} \cdot l = 0,0128,$$

stąd:

$$\frac{D_1}{D} = 1,03;$$

gdy więc: $D_1 = 1 \text{ cm}$ $D = 0,97 \text{ cm}$.

Teraz dla ekranu rozciętego wzdłużnie:

$$n = \sqrt{\frac{L_{c0}}{10^{-8} \pi^2 D^2 l}} = \sqrt{\frac{90}{10^{-8} \pi^2 0,96^2 \cdot 24}} = 20,1 \text{ zw/cm},$$

przyjęto w zaokrągleniu skok:

$$h = 0,5 \text{ mm}.$$

Wykonanie konstrukcyjne przyjęto następujące:

na rdzeniu z dielektryku o średnicy 1 cm wykonane jest spiralne nacięcie rowkowe o skoku 0,5 mm i głębokości 0,2 mm. W tym nacięciu jest umieszczony drut miedziany o średnicy 0,1 mm. Na rdzeń jest nasunięta ściśle rurka metalowa wzdłużnie rozcięta.

Po wykonaniu linia została pomierzona na małych częstotliwościach (na mostkach do pomiaru L i C), przy czym:

$$L_{c0} = 90 \mu\text{H}, \quad C_{c0} = 430 \text{ pF},$$

stąd

$$Z_0 = 460 \Omega \quad \text{ i } \quad \tau_0 = 0,197 \mu\text{s}.$$

Następnie dokonano pomiarów w funkcji częstotliwości, badając częstotliwości minimów i maksimów napięcia na wejściu linii zwartej na końcu. Z pomiarów tych obliczono $\tau_c = f(f)$, $\Delta B = f(f)$ i $A = f(f)$ według wzorów kolejno (18), (1) i (19).

Przebieg $Z = f(f)$ przeliczono z zależności:

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C_0}} = \frac{\tau}{C_0}.$$

Wyniki pomiarów na rys. 10.

Jak widać, zniekształcenia fazowe są nieco większe od założonych. Wzrost tłumienia powodowany zjawiskiem naskórkowości, obliczony z pierwszej części wzoru (12), zwiększony o stałą wartość równą tłumieniu linii dla małych częstotliwości, narysowany jest linią przerywaną. Na przebieg całkowitego tłumienia złożyły się również straty dielektryczne, głównie lakieru izolacyjnego pokrywającego użyty drut nawojowy. Zniekształcenia fazowe linii okazały się jednak nieco za duże i impuls formowany miał na końcu oscylację jak na rys. 11 (jest to oscylacja poprzedzająca impuls odbity od zwartego końca linii, więc odwrócony w polaryzacji).

Oscylacja ta została w znacznym stopniu zmniejszona za pomocą następującej kompensacji dobranej eksperymentalnie: w pewnej odległości od końca linii została wytworzona pewna lokalna niejednorodność linii przez zwarcie w tym punkcie ze sobą dwóch brzegów rozciętego wzdłużnie ekranu. Powstały zwój zwarty zmniejsza lokalnie indukcyjność; a więc i oporność falową linii i jest przyczyną powstawania pewnego odbicia —