621.314.222.6

ZDZISŁAW GAWECKI

Schematy zastępcze transformatorów wielouzwojeniowych

Rękopis dostarczono 23.2.1965

W obliczeniach stanów ustalonych sieci elektroenergetycznych transformatory wielouzwojeniowe są zastępowane schematami złożonymi z gałęzi impedancji wzdłużnych. Schematy zastępcze w postaci wieloboków zupełnych odwzorowują wiernie impedancje wzdłużne transformatorów n-uzwojeniowych o dowolnej liczbie uzwojeń. Schematy zastępcze w postaci wieloboków gwiazdowych znajdują zastosowanie w obliczeniach analogowych, w przypadkach transformatorów cztero- i pięciouzwojeniowych. Transformator trójuzwojeniowy jest najczęściej zastępowany schematem gwiazdowym. Schematy łańcuchowe i ich modyfikacje wprowadzają znaczne uproszczenia w obliczeniach, lecz mogą być stosowane jedynie w przypadkach transformatorów z uzwojeniami koncentrycznymi. W artykule rozważono własności różnych schematów i podano zakresy ich zastosowań w obliczeniach stanów ustalonych sieci elektroenergetycznych.

1. WSTĘP

W obliczeniach rozpływów prądów, spadków napięć, zwarć symetrycznych i w obliczeniach innych ustalonych, symetrycznych stanów pracy sieci elektroenergetycznych — transformatory są zastępowane schematami impedancji wzdłużnych. Transformatory sieciowe są wykonane z reguły jako dwu- lub trójuzwojeniowe, jednakże w sporadycznych przypadkach występują w sieciach również transformatory o większej liczbie uzwojeń. Praca niniejsza ma na celu przedstawienie różnych rodzajów schematów zastępczych transformatorów o dowolnej liczbie uzwojeń i przeprowadzenie analizy własności tych schematów z punktu widzenia wykorzystania ich w obliczeniach stanów ustalonych sieci elektroenergetycznych. Przedstawione w pracy schematy znajdą również zastosowanie w obliczeniach wykonywanych przez konstruktorów w zakładach wytwórczych transformatorów.

W schematach zastępczych impedancji wzdłużnych nie uwzględnia się, jak wynika z określenia, ani impedancji poprzecznych, odwzorowujących magnesowanie i straty w stali transformatora, ani też reaktancji pojemnościowych, odtwarzających pojemności międzyzwojowe, międzycewkowe oraz pojemności uzwojeń w stosunku do rdzenia i kadzi transformatora. Tego rodzaju uproszczenie schematów zastępczych jest uzasadnione

w większości obliczeń sieciowych, ponieważ nie wpływa ono w większym stopniu na dokładność wyników.

Jako dane wyjściowe do obliczeń wartości impedancji schematów wykorzystuje się wartości impedancji zwarciowych $\dot{Z}_{zkl}$ pary uzwojeń: k oraz l transformatora wielouzwojeniowego. Impedancje zwarciowe wyznacza się ze znanych wzorów, wyrażających wartość impedancji np. w jednostkach względnych (wzór 1.1) lub w jednostkach fizykalnych — w omach (wzór 1.2):

$$\dot{Z}_{zkl} = \frac{[\Delta P_{Cukl(\%)} + j\Delta U_{Xkl(\%)}]S_p}{100 S_{Tkl}}, \tag{1.1}$$

$$\dot{Z}_{zkl}[\Omega] = \frac{[\Delta P_{Cukl(\%)} + j\Delta U_{Xkl(\%)}]U^2_{Todn}[\mathrm{kV}]^2}{100 S_{Tkl}[\mathrm{MVA}]}, \tag{1.2}$$

$$\Delta U_{Xkl(\%)} = \sqrt{\Delta U^2_{zkl(\%)} - \Delta P^2_{Cukl(\%)}} \cong \Delta U_{zkl(\%)}, \tag{1.3}$$

w których

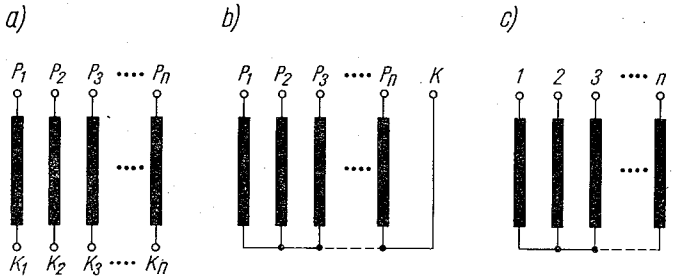
$\Delta P_{Cukl(\%)}$ — procentowa wartość strat w miedzi,
$\Delta U_{Xkl(\%)}$ — procentowa wartość straty napięcia na reaktancji,
$\Delta U_{zkl(\%)}$ — procentowa wartość napięcia zwarcia,
S_{Tkl}[MVA] — znamionowa moc przechodnia pary uzwojeń k, l,
S_p[MVA] — moc podstawowa,
U_{Todn}[kV] — napięcie odniesienia, równe napięciu znamionowemu wybranego uzwojenia transformatora.

We wzorach (1.1), (1.2) i (1.3) wartości strat w miedzi i napięcia zwarcia pary uzwojeń kl są wyznaczone z pomiaru stanu zwarcia, w którym jedno z uzwojeń, np. k, jest zwarte, drugie, np. l, jest przyłączone do źródła, a pozostałe uzwojenia są otwarte. Podczas próby zwarciowej płynie prąd równy prądowi odpowiadającemu znamionowej mocy przechodniej pary uzwojeń S_{Tkl}. Wszystkie wartości procentowe odniesione są do tejże mocy przechodniej.

2. SCHEMATY ZASTĘPCZE W POSTACI WIELOBOKÓW ZUPEŁNYCH

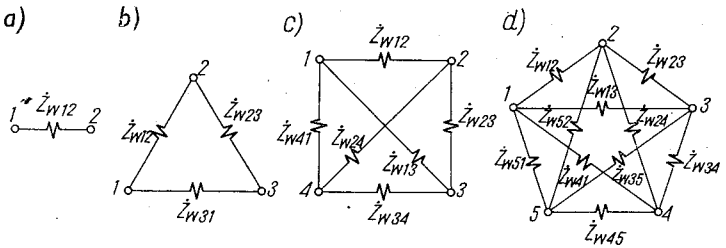
W większości obliczeń sieciowych impedancje wzdłużne transformatorów mogą być traktowane jako elementy liniowe. Przyjąwszy to założenie transformator można uważać za równoważny sieci liniowej i odwzorować w postaci wieloboku zupełnego o liczbie wierzchołków zależnej od liczby uzwojeń transformatora. Liczbę wierzchołków wieloboku zastępczego transformatora n-uzwojeniowego określimy w sposób następujący Rys. 2.1a przedstawia n uzwojeń transformatora wielouzwojeniowego o przekładni niezmiennej. Uzwojenia transformatora są sprzężone magzwojowe i międzycewkowe, to możemy połączyć jedne zaciski uzwojeń, w stosunku do rdzenia i kadzi transformatora oraz pojemności międzyzwojowe i międzycewkowe, to możemy połączyć jedne zaciski uzwojeń, np. tej samej biegunowości K, we wspólny zacisk (rys. 2.1b). Impedancje poszczególnych uzwojeń, jak również impedancje pomiędzy dowolnymi

zaciskami P nie ulegną wówczas zmianie. Pominięcie prądu magnesującego transformatora upraszcza z kolei schemat do postaci przedstawionej na rys. 2.1c. Z równowagi amperozwojów poszczególnych uzwojeń wynika bowiem, że we wspólnym przewodzie K prąd jest równy zeru, a więc



Rys. 2.1. Uzwojenie jednej fazy transformatora n-uzwojeniowego: a) zaciski nie połączone, b) zaciski $K_1, K_2, \ldots K_n$ połączone we wspólny zacisk K, c) zacisk K odrzucony

przewód ten można odrzucić. Z rysunku 2.1 wynika w sposób bezpośredni, że transformator n-uzwojeniowy, w którym uwzględniono wyłącznie wzdłużne impedancje, jest równoważny sieci liniowej o n zaciskach. Sieć ta charakteryzuje się $\frac{1}{2} n\,(n-1)$ stopniami swobody i może być odwzorowana wielobokiem zupełnym o takiej samej liczbie gałęzi. Na rys. 2.2 przedstawiono przykładowo schematy zastępcze transformatorów o $n =$



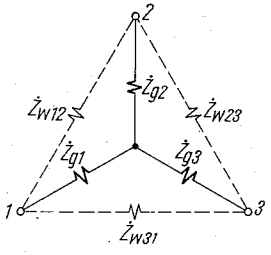
Rys. 2.2. Schematy zastępcze w postaci wieloboków zupełnych: a) transformatora dwuuzwojeniowego, $n = 2$, $\frac{1}{2} n\,(n-1) = 1$; b) transformatora trójuzwojeniowego, $n = 3$, $\frac{1}{2} n\,(n-1) = 3$; c) transformatora czterouzwojeniowego, $n = 4$, $\frac{1}{2} n\,(n-1) = 6$, d) transformatora pięciouzwojeniowego, $n = 5$, $\frac{1}{2} n\,(n-1) = 10$

$= 2, 3, 4$ oraz 5 w postaci wieloboków zupełnych. Impedancje zastępcze gałęzi wieloboków oznaczono symbolem $\dot{Z}_w$ z indeksami liczbowymi określającymi numery zacisków.

Wspólną cechą schematów zastępczych w postaci wieloboków zupełnych jest zgodność liczby impedancji zastępczych $\dot{Z}_w$ i liczby gałęzi wieloboków z liczbą wszystkich możliwych impedancji zwarciowych $\dot{Z}_z$ do-

wolnych par uzwojeń transformatora. Liczba ta wynosi również $\frac{1}{2} n (n-1)$.

W celu obliczenia wartości impedancji $\dot{Z}_w$ schematu zastępczego transformatora n-uzwojeniowego można by ułożyć $\frac{1}{2} n (n-1)$ równań zawierających $\frac{1}{2} n (n-1)$ impedancji zwarciowych $\dot{Z}_z$ oraz tyleż impedancji $\dot{Z}_w$. Punktem wyjścia do tego układu równań byłaby zasada równości impedancji wypadkowej między kolejnymi parami zacisków schematu i impedancji zwarciowej odpowiedniej pary uzwojeń. Jest to metoda uciążliwa i dlatego zakres jej zastosowania w praktyce obliczeniowej jest ograniczony do transformatora trójuzwojeniowego.



Rys. 2.3. Schemat zastępczy gwiazdowy transformatora trójuzwojeniowego (liniami przerywanymi podano schemat w postaci wieloboku zupełnego)

W przypadku transformatora dwuuzwojeniowego (rys. 2.2a) występuje prosta zależność

$$\dot{Z}_{w12} = \dot{Z}_{z12}. \tag{2.1}$$

Reaktancje zwarciowe transformatora trójuzwojeniowego wynoszą (rys. 2.2b):

$$\left.\begin{aligned} \dot{Z}_{z12} &= \frac{\dot{Z}_{w12}(\dot{Z}_{w23}+\dot{Z}_{w31})}{\dot{Z}_{w12}+\dot{Z}_{w23}+\dot{Z}_{w31}}, \\ \dot{Z}_{z23} &= \frac{\dot{Z}_{w23}(\dot{Z}_{w12}+\dot{Z}_{w31})}{\dot{Z}_{w12}+\dot{Z}_{w23}+\dot{Z}_{w31}}, \\ \dot{Z}_{z31} &= \frac{\dot{Z}_{w31}(\dot{Z}_{w12}+\dot{Z}_{w23})}{\dot{Z}_{w12}+\dot{Z}_{w23}+\dot{Z}_{w31}}. \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Wartości impedancji $\dot{Z}_w$ można obliczyć posługując się wartościami impedancji klasycznego schematu zastępczego gwiazdowego (rys. 2.3), oznaczonych symbolem $\dot{Z}_g$.

$$\left.\begin{aligned} \dot{Z}_{w12} &= \frac{\dot{Z}_{g1}\dot{Z}_{g2}}{\dot{Z}_{g3}} + \dot{Z}_{g1} + \dot{Z}_{g2}, \\ \dot{Z}_{w23} &= \frac{\dot{Z}_{g2}\dot{Z}_{g3}}{\dot{Z}_{g1}} + \dot{Z}_{g2} + \dot{Z}_{g3}, \\ \dot{Z}_{w31} &= \frac{\dot{Z}_{g3}\dot{Z}_{g1}}{\dot{Z}_{g2}} + \dot{Z}_{g3} + \dot{Z}_{g1}, \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Wartości $\dot{Z}_g$ oblicza się ze znanych zależności:

$$\left.\begin{aligned}\dot{Z}_{g1} &= \frac{1}{2}(\dot{Z}_{z12}+\dot{Z}_{z31}-\dot{Z}_{z23}),\\ \dot{Z}_{g2} &= \frac{1}{2}(\dot{Z}_{z12}+\dot{Z}_{z23}-\dot{Z}_{z31}),\\ \dot{Z}_{g3} &= \frac{1}{2}(\dot{Z}_{z31}+\dot{Z}_{z23}-\dot{Z}_{z12}).\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Z równań (2.3) i (2.4) wynikają związki między $\dot{Z}_w$ oraz $\dot{Z}_z$:

$$\dot{Z}_{w12} = \frac{\dot{Z}_{z12}\cdot\dot{Z}_{z23}+\dot{Z}_{z12}\cdot\dot{Z}_{z31}+\dot{Z}_{z23}\cdot\dot{Z}_{z31}-\frac{1}{2}(\dot{Z}^2_{z12}+\dot{Z}^2_{z23}+\dot{Z}^2_{z31})}{\dot{Z}_{z31}+\dot{Z}_{z23}-\dot{Z}_{z12}}. \tag{2.5}$$

W podobny sposób można obliczyć wartości $\dot{Z}_{w23}$ oraz $\dot{Z}_{w31}$.

W praktyce obliczeniowej korzysta się z wieloboku zupełnego admitancji $\dot{Y}_w$, określonych wzorami:

$$\left.\begin{aligned}\dot{Y}_{w12} &= \frac{\dot{Z}_{g3}}{\dot{Z}_{g1}\dot{Z}_{g2}+\dot{Z}_{g2}\dot{Z}_{g3}+\dot{Z}_{g1}\dot{Z}_{g3}},\\ \dot{Y}_{w23} &= \frac{\dot{Z}_{g1}}{\dot{Z}_{g1}\dot{Z}_{g2}+\dot{Z}_{g2}\dot{Z}_{g3}+\dot{Z}_{g1}\dot{Z}_{g3}},\\ \dot{Y}_{w31} &= \frac{\dot{Z}_{g2}}{\dot{Z}_{g1}\dot{Z}_{g2}+\dot{Z}_{g2}\dot{Z}_{g3}+\dot{Z}_{g1}\dot{Z}_{g3}}.\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Jak wynika z podanych zależności, powyższa klasyczna i tradycyjna metoda obliczeń daje wyniki mało przejrzyste już w przypadku transformatora 3-uzwojeniowego. Dlatego też w celu określenia wieloboków zastępczych transformatorów o liczbie uzwojeń większej od 3 posłużymy się odmienną, ogólniejszą metodą rozważań.

Związki między napięciami i prądami transformatora n-uzwojeniowego o n zaciskach, można przedstawić w postaci ogólnego równania zawierającego macierz impedancji $\dot{Z}$ (równanie 2.7) lub równania zawierającego macierz admitancji $\dot{Y}$ (równanie 2.8)

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\\ \vdots\\ \dot{U}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dot{Z}_{11} & \dot{Z}_{12} & \dots & \dot{Z}_{1n}\\ \dot{Z}_{21} & \dot{Z}_{22} & \dots & \dot{Z}_{2n}\\ \vdots & & & \\ \dot{Z}_{n1} & \dot{Z}_{n2} & \dots & \dot{Z}_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\\ \vdots\\ \dot{I}_n\end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{11} & \dot{Y}_{12} & \dots & \dot{Y}_{1n} \\ \dot{Y}_{21} & \dot{Y}_{22} & \dots & \dot{Y}_{2n} \\ \vdots & & & \\ \dot{Y}_{n1} & \dot{Y}_{n2} & \dots & \dot{Y}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \vdots \\ \dot{U}_n \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

W równaniach powyższych macierze kwadratowe stopnia n impedancji $[\dot{Z}_{kl}]$ i admitancji $[\dot{Y}_{kl}]$ są macierzami symetrycznymi, a więc zarówno impedancje wzajemne, jak i admitancje wzajemne spełniają zależności

$$\dot{Z}_{kl} = \dot{Z}_{lk}; \quad \dot{Y}_{kl} = \dot{Y}_{lk}, \tag{2.9}$$

przy czym $k \neq l$.

Wielkości z indeksami liczbowymi $k = l$ są to impedancje i admitancje własne.

Jak wiadomo z teorii sieci liniowej, admitancje wzajemne w równaniu macierzowym (2.8) są równe ujemnym wartościom admitancji odpowiednich gałęzi wieloboku zupełnego

$$\begin{gathered} \dot{Y}_{kl} = -\dot{Y}_{wkl} \\ k \neq l, \end{gathered} \tag{2.10}$$

natomiast admitancje własne k-tego węzła są równe sumie admitancji gałęzi dołączonych do k-tego węzła

$$\dot{Y}_{kk} = \dot{Y}_{wk1} + \dot{Y}_{wk2} + \dots + \dot{Y}_{wkn}. \tag{2.11}$$

Zadanie określenia schematu zastępczego transformatora wielouzwojeniowego polega na podaniu związków między impedancjami $\dot{Z}_w$ lub admitancjami $\dot{Y}_w$ wieloboku zupełnego a impedancjami zwarciowymi $\dot{Z}_z$ między poszczególnymi parami uzwojeń, z wykorzystaniem podstawowych równań transformatora, przedstawionych w ogólnej postaci (2.7) lub (2.8).

Transformator n-uzwojeniowy, uproszczony w sposób podany na początku niniejszego rozdziału (rys. 2.1c) może być traktowany jako obwód bierny (bez źródeł), w którym suma prądów jest równa zeru.

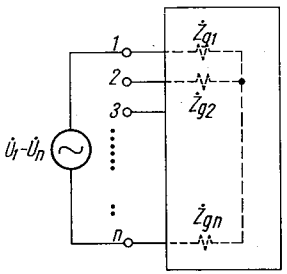
$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dots + \dot{I}_n = 0. \tag{2.12}$$

Jeden z zacisków transformatora, np. zacisk n, można więc uważać za zacisk odniesienia (powrotny). Otrzymamy wówczas $n-1$ niezależnych prądów oraz $n-1$ niezależnych różnic napięć: $\dot{U}_1 - \dot{U}_n$, $\dot{U}_2 - \dot{U}_n \dots \dot{U}_{n-1} - \dot{U}_n$.

Równanie macierzowe typu impedancyjnego przyjmie po przekształceniu następującą postać:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1-\dot{U}_n \\ \dot{U}_2-\dot{U}_n \\ \vdots \\ \dot{U}_{n-1}-\dot{U}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{(11)n} & \dot{Z}_{(12)n} & \dots & \dot{Z}_{[1(n-1)]n} \\ \dot{Z}_{(21)n} & \dot{Z}_{(22)n} & \dots & \dot{Z}_{[2(n-1)]n} \\ \vdots & & & \\ \dot{Z}_{[(n-1)1]n} & \dot{Z}_{[(n-1)2]n} & \dots & \dot{Z}_{[(n-1)(n-1)]n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

W równaniu powyższym występuje macierz kwadratowa stopnia $n-1$ zawierająca elementy impedancyjne $\dot{Z}_{(kl)n}$ odmienne niż w równaniu (2.7). Elementy macierzy (2.13) można jednak obliczyć w prostszy sposób aniżeli elementy macierzy kwadratowej stopnia n z równania (2.7).



Rys. 2.4. Stan zwarcia wybranej pary uzwojeń: *1—n*, oraz schemat zastępczy wybranej trójki uzwojeń: *1—2—n* transformatora *n*-uzwojeniowego

W tym celu przeprowadzimy analizę stanu zwarcia poszczególnych par uzwojeń.

Załóżmy na wstępie, że uzwojenie n jest zwarte, do uzwojenia *1* jest przyłożone napięcie, a pozostałe uzwojenia są otwarte. Stan ten jest równoważny stanowi, w którym napięcie zwarcia doprowadzone jest do zacisków *1* oraz n (rys. 2.4).

Równanie (2.13) przyjmie w stanie zwarcia postać

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1-\dot{U}_n \\ \dot{U}_2-\dot{U}_n \\ \vdots \\ \dot{U}_{n-1}-\dot{U}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{(11)n} & \dot{Z}_{(12)n} & \dots & \dot{Z}_{[1(n-1)]n} \\ \dot{Z}_{(21)n} & \dot{Z}_{(22)n} & \dots & \dot{Z}_{[2(n-1)]n} \\ \vdots & & & \\ \dot{Z}_{[(n-1)1]n} & \dot{Z}_{[(n-1)2]n} & \dots & \dot{Z}_{[(n-1)(n-1)]n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{1z} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.14}$$

Z równania powyższego wynika

$$\dot{Z}_{(11)n} = \frac{\dot{U}_1-\dot{U}_n}{\dot{I}_{1z}} = \dot{Z}_{z1n}. \tag{2.15}$$

Doprowadzając napięcie kolejno do zacisków $2-n$, $3-n...(n-1)-n$ stwierdzamy, iż elementy głównej przekątnej macierzy impedancji z rów-

nania (2.13) są równe impedancjom zwarciowym między odpowiednim k-tym uzwojeniem a uzwojeniem n-tym, co zapiszemy w postaci równości

$$\dot{Z}_{(kk)n} = \dot{Z}_{zkn}. \tag{2.16}$$

W celu określenia wartości pozostałych elementów macierzy impedancji z równania (2.13) wykorzystamy pewne zależności, znane z teorii transformatora trójuzwojeniowego. W stanie zwarcia między zaciskami *1* oraz n prąd przepływa tylko przez te dwa uzwojenia. Weźmy pod uwagę dodatkowo trzecie uzwojenie, np. uzwojenie *2*, a trójkę uzwojeń *1—2—n* potraktujemy jako transformator trójuzwojeniowy. Takie założenie wolno nam przyjąć, ponieważ w pozostałych uzwojeniach nie płyną prądy w stanie zwarcia, a więc mogą być zaniechane w rozważaniach. Z równania (2.14) wynika zależność

$$\dot{Z}_{(12)n} = \frac{\dot{U}_2 - \dot{U}_n}{\dot{I}_{1z}}. \tag{2.17}$$

Trójkę uzwojeń *1—2—n* możemy zastąpić schematem gwiazdowym transformatora trójuzwojeniowego, jak to podano na rys. 2.4 [1]. Z rysunku tego wynika zależność

$$\dot{Z}_{gn} = \frac{\dot{U}_2 - \dot{U}_n}{\dot{I}_{1z}}. \tag{2.18}$$

Z równań (2.17) i (2.18) oraz (2.4) wynika ostatecznie:

$$\dot{Z}_{(12)n} = \dot{Z}_{gn} = \frac{\dot{Z}_{z1n} + \dot{Z}_{z2n} - \dot{Z}_{z12}}{2}. \tag{2.19}$$

Przeprowadzając analogiczne rozważania w odniesieniu do kolejnych elementów rozpatrywanej macierzy w kolejnych stanach zwarcia, dochodzimy do ogólnej zależności

$$\dot{Z}_{(kl)n} = \frac{\dot{Z}_{zkn} + \dot{Z}_{zln} - \dot{Z}_{zkl}}{2}. \tag{2.20}$$

Elementy macierzy z równania (2.13) typu $\dot{Z}_{(kl)n}$ położone poza główną przekątną ($k \neq l$) są więc równe impedancji gałęzi n-tej schematu zastępczego gwiazdowego trójki uzwojeń k—l—n. Impedancje te nazwiemy gwiazdowymi impedancjami trójuzwojeniowymi uzwojenia n w stosunku do uzwojeń k oraz l. Macierz impedancji z równania (2.13) zastąpi macierz symetryczna zapisana w postaci trójkątnej:

$$[\dot{Z}_{(kl)n}] = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{z1n} & \frac{\dot{Z}_{z1n} + \dot{Z}_{z2n} - \dot{Z}_{z12}}{2} & \cdots & \frac{\dot{Z}_{z1n} + \dot{Z}_{z(n-1)n} - \dot{Z}_{z1(n-1)}}{2} \\ & \dot{Z}_{z2n} & \cdots & \vdots \\ & & & \vdots \\ & & & \dot{Z}_{z(n-1)n} \end{bmatrix}. \tag{2.21}$$

[1] Podkreślić należy, że rys. 2.4 nie przedstawia schematu odpowiadającego macierzy (2.14), lecz przykładowy schemat zastępczy trójki uzwojeń.

W powyższy sposób w impedancyjnym równaniu macierzowym transformatora impedancje własne oraz wzajemne zostały wyznaczone za pomocą impedancji zwarciowych.

Równanie admitancyjne (2.8) przekształcamy również w równanie (2.22), w którym występuje macierz admitancji stopnia n—1

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{11} & \dot{Y}_{12} & \dots & \dot{Y}_{1(n-1)} \\ \dot{Y}_{21} & \dot{Y}_{22} & \dots & \dot{Y}_{2(n-1)} \\ \vdots & & & \\ \dot{Y}_{(n-1)1} & \dot{Y}_{(n-1)2} & \dots & \dot{Y}_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 - \dot{U}_n \\ \dot{U}_2 - \dot{U}_m \\ \vdots \\ \dot{U}_{n-1} - \dot{U}_n \end{bmatrix}. \tag{2.22}$$

Analizując stan zwarcia, w którym wszystkie uzwojenia z wyjątkiem jednego są zwarte, a do pozostałego uzwojenia doprowadzone jest napięcie, można dowieść w prosty sposób, że elementy macierzy kwadratowej z równania (2.22) nie ulegną zmianie w porównaniu z elementami macierzy kwadratowej z równania (2.8). Macierz stopnia $n-1$ zawiera więc nie zmienione wartości admitancji własnych i wzajemnych. Odwzorowanie tych admitancji w schemacie wieloboku zupełnego zostało opisane wyżej w komentarzu do równania (2.8).

Podane przekształcenia umożliwiają z kolei obliczenie wartości impedancji lub admitancji wieloboku zastępczego transformatora n-uzwojeniowego, w oparciu o znane wartości impedancji zwarciowych.

Obliczenie zostało przeprowadzone w następującym przykładzie, dotyczącym t r a n s f o r m a t o r a c z t e r o u z w o j e n i o w e g o.

Macierze impedancji transformatora czterouzwojeniowego zapiszemy w postaci

$$[\dot{Z}_{(kl)4}] = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{(11)4} & \dot{Z}_{(12)4} & \dot{Z}_{(13)4} \\ \dot{Z}_{(21)4} & \dot{Z}_{(22)4} & \dot{Z}_{(23)4} \\ \dot{Z}_{(31)4} & \dot{Z}_{(32)4} & \dot{Z}_{(33)4} \end{bmatrix}. \tag{2.23}$$

Wartości elementów macierzy $[\dot{Z}_{(kl)4}]$ obliczamy z podanych wyżej wzorów (2.16) oraz (2.20).

Zapiszemy również macierz admitancji transformatora czterouzwojeniowego

$$[\dot{Y}_{kl}] = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{11} & \dot{Y}_{12} & \dot{Y}_{13} \\ \dot{Y}_{21} & \dot{Y}_{22} & \dot{Y}_{23} \\ \dot{Y}_{31} & \dot{Y}_{32} & \dot{Y}_{33} \end{bmatrix}. \tag{2.24}$$

Z równań (2.14) i (2.22) wynika, że macierz admitancji jest macierzą odwrotną względem macierzy impedancji

$$[\dot{Y}_{kl}] = [\dot{Z}_{(kl)4}]^{-1}, \tag{2.25}$$

stąd

$$[\dot{Y}_{kl}] = \frac{1}{D}[\dot{Z}_{(kl)4}]_{ad}, \qquad (2.26)$$

gdzie: D — wyznacznik macierzy impedancji.

$[\dot{Z}_{(kl)4}]_{ad}$ — macierz dołączona do macierzy impedancji.

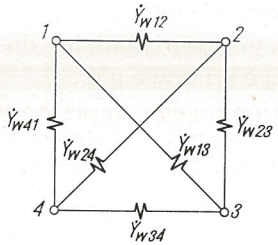
Wartość wyznacznika obliczymy ze wzoru

$$D = \dot{Z}_{(11)4}\dot{Z}_{(22)4}\dot{Z}_{(33)4} + \dot{Z}_{(12)4}\dot{Z}_{(23)4}\dot{Z}_{(31)4} + \dot{Z}_{(13)4}\dot{Z}_{(21)4}\dot{Z}_{(32)4} + \\ - \dot{Z}_{(11)4}\dot{Z}_{(23)4}\dot{Z}_{(32)4} - \dot{Z}_{(12)4}\dot{Z}_{(21)4}\dot{Z}_{(33)4} - \dot{Z}_{(13)4}\dot{Z}_{(22)4}\dot{Z}_{(31)4}. \qquad (2.27)$$

Znając wartość kofaktorów macierzy dołączonej $[\dot{Z}_{(kl)4}]_{ad}$, można obliczyć admitancje własne macierzy $[\dot{Y}_{kl}]$ ze wzorów

$$\left.\begin{aligned} \dot{Y}_{11} &= \frac{1}{D}(\dot{Z}_{(22)4}\dot{Z}_{(33)4} - \dot{Z}^2_{(23)4}), \\ \dot{Y}_{22} &= \frac{1}{D}(\dot{Z}_{(11)4}\dot{Z}_{(33)4} - \dot{Z}^2_{(13)4}), \\ \dot{Y}_{33} &= \frac{1}{D}(\dot{Z}_{(11)4}\dot{Z}_{(22)4} - \dot{Z}^2_{(12)4}), \end{aligned}\right\} \qquad (2.28)$$

oraz admitancje wzajemne tejże macierzy, których wartości są równe ujemnym wartościom admitancji wieloboku zupełnego z rys. 2.5.



Rys. 2.5. Schemat zastępczy transformatora czterouzwojeniowego w postaci wieloboku zupełnego admitancji wzdłużnych

$$\left.\begin{aligned} \dot{Y}_{12} = \dot{Y}_{21} &= \frac{1}{D}(\dot{Z}_{(13)4}\dot{Z}_{(23)4} - \dot{Z}_{(12)4}\dot{Z}_{(33)4}) = -\dot{Y}_{w12}, \\ \dot{Y}_{13} = \dot{Y}_{31} &= \frac{1}{D}(\dot{Z}_{(12)4}\dot{Z}_{(23)4} - \dot{Z}_{(13)4}\dot{Z}_{(22)4}) = -\dot{Y}_{w13}, \\ \dot{Y}_{23} = \dot{Y}_{32} &= \frac{1}{D}(\dot{Z}_{(13)4}\dot{Z}_{(12)4} - \dot{Z}_{(23)4}\dot{Z}_{(11)4}) = -\dot{Y}_{w23}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.29)$$

Pozostałe admitancje gałęzi wieloboku zupełnego wyznaczymy ze wzorów

$$\left.\begin{aligned} \dot{Y}_{14} = \dot{Y}_{41} &= \dot{Y}_{11} + \dot{Y}_{12} + \dot{Y}_{13} = -\dot{Y}_{w41}, \\ \dot{Y}_{24} = \dot{Y}_{42} &= \dot{Y}_{22} + \dot{Y}_{21} + \dot{Y}_{23} = -\dot{Y}_{w24}, \\ \dot{Y}_{34} = \dot{Y}_{43} &= \dot{Y}_{33} + \dot{Y}_{31} + \dot{Y}_{32} = -\dot{Y}_{w34}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.30)$$

Znając wartości impedancji zwarciowych $\dot{Z}_z$ poszczególnych par uzwojeń, obliczymy w sposób podany wyżej wartości admitancji $\dot{Y}_w$ (rys. 2.5), a zatem i wartości impedancji $\dot{Z}_w$ (rys. 2.2c) wieloboku zupełnego transformatora czterouzwojeniowego.

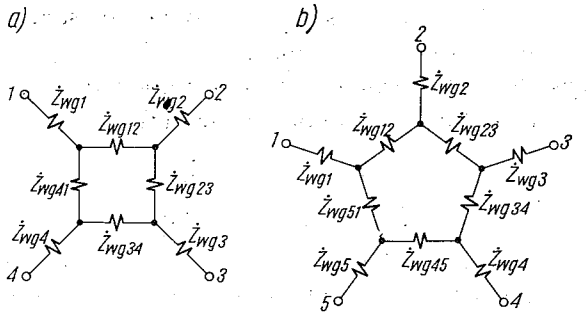
Powyższa metoda umożliwia wyznaczenie wieloboków zupełnych transformatorów o $n = 5$, $n = 6$... itd. Obliczenia są oczywiście coraz bardziej złożone w miarę wzrostu liczby uzwojeń n.

Schematy zastępcze wieloboków zupełnych mają zastosowanie przede wszystkim w obliczeniach metodą napięć węzłowych (np. w obliczeniach rozpływów) zarówno w sposób analityczny, jak i na maszynach cyfrowych. W porównaniu z innymi schematami zastępczymi, wieloboki zupełne mają najmniejszą liczbę węzłów, dzięki czemu w obliczeniach na maszynach cyfrowych uzyskuje się stosunkowo najmniejsze obciążenie pamięci zewnętrznej maszyny.

Wartości rezystancji lub reaktancji niektórych gałęzi wieloboków zupełnych mogą być ujemne. Stwarza to niekiedy istotną niedogodność w analogowych obliczeniach sieciowych i dlatego wieloboki zupełne nie znajdują szerszego zastosowania w obliczeniach analogowych. Korzysta się natomiast z innego rodzaju schematów zastępczych, na przykład z tzw. wieloboków gwiazdowych.

3. SCHEMATY ZASTĘPCZE W POSTACI WIELOBOKÓW GWIAZDOWYCH

Wprowadzenie do obliczeń sieciowych schematów wieloboków gwiazdowych (rys. 3) ma na celu wyeliminowanie ujemnych wartości impedancji w gałęziach wewnętrznych łączących wierzchołki wieloboku. Im-



Rys. 3. Schematy zastępcze w postaci wieloboków gwiazdowych: a) transformatora czterouzwojeniowego, $n = 4$; b) transformatora pięciouzwojeniowego, $n = 5$

pedancje oznaczone symbolami $\dot{Z}_{wg12}$, $\dot{Z}_{wg23}$... powinny więc mieć wartości dodatnie. Natomiast wartości impedancji gałęzi promieniowych: $\dot{Z}_{wg1}$,

Z_{wg2}... mogą być ujemne, ponieważ wartości ujemne można wyeliminować w prosty sposób po zsumowaniu z dodatnimi wartościami impedancji sieciowych. Dzięki tej własności schematy wieloboków gwiazdowych nadają się w szczególności do obliczeń analogowych.

Sposób obliczenia wartości impedancji schematu zastępczego transformatora czterouzwojeniowego został podany przez F. M. Starra [5]. Znając sześć wartości impedancji zwarciowych $\dot{Z}_z$ oblicza się impedancje wieloboku gwiazdowego (rys. 3a) z następujących zależności:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{Z}_{wg12} &= \dot{Z}_{wg34} = \sqrt{\dot{K}_1\dot{K}_2}+K_2 = \dot{A},\\
\dot{Z}_{wg23} &= \dot{Z}_{wg41} = \sqrt{\dot{K}_1\dot{K}_2}+\dot{K}_1 = \dot{B},
\end{aligned}\right\}$$

gdzie:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{K}_1 &= \dot{Z}_{z13}+\dot{Z}_{z24}-\dot{Z}_{z12}-\dot{Z}_{z34},\\
\dot{K}_2 &= \dot{Z}_{z13}+\dot{Z}_{z24}-\dot{Z}_{z14}-\dot{Z}_{z23},\\
\dot{Z}_{wg1} &= \frac{\dot{Z}_{z12}+\dot{Z}_{z14}-\dot{Z}_{z24}}{2}-\frac{\dot{A}\dot{B}}{2(\dot{A}+\dot{B})},\\
\dot{Z}_{wg2} &= \frac{\dot{Z}_{z12}+\dot{Z}_{z23}-\dot{Z}_{z13}}{2}-\frac{\dot{A}\dot{B}}{2(\dot{A}+\dot{B})},\\
\dot{Z}_{wg3} &= \frac{\dot{Z}_{z23}+\dot{Z}_{z34}-\dot{Z}_{z24}}{2}-\frac{\dot{A}\dot{B}}{2(\dot{A}+\dot{B})},\\
\dot{Z}_{wg4} &= \frac{\dot{Z}_{z34}+\dot{Z}_{z14}-\dot{Z}_{z13}}{2}-\frac{\dot{A}\dot{B}}{2(\dot{A}+\dot{B})}.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

Z pierwszych dwóch wzorów wynika, że impedancje przeciwległych gałęzi wewnętrznych wieloboku są sobie równe. W schemacie występuje więc sześć różnych wartości impedancji.

W celu uzyskania dodatnich wartości impedancji gałęzi wewnętrznych powinny być spełnione następuje warunki:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{Z}_{z13}+\dot{Z}_{z24} &> \dot{Z}_{z12}+\dot{Z}_{z34},\\
\dot{Z}_{z13}+\dot{Z}_{z24} &> \dot{Z}_{z14}+\dot{Z}_{z23}.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.2)$$

Należy więc w taki sposób dobrać oznaczenia zacisków, aby impedancje zwarciowe pomiędzy zaciskami *1—3* oraz *2—4* leżącymi na przekątnych schematu z rys. 3a miały w sumie wartość spełniającą nierówności (3.2).

Schemat wieloboku gwiazdowego z rys. 3a może być rozwinięty do schematu wieloboku podanego na rys. 3b, odwzorowującego transformator pięciouzwojeniowy. Równania tego ostatniego schematu zostały wyprowadzone przez L. Aichera i W. M. Johnsona [11]

$$
\left.
\begin{aligned}
\dot{K} &= \dot{Z}_{z23}+\dot{Z}_{z12}-\dot{Z}_{z13},\\
\dot{L} &= \dot{Z}_{z13}+\dot{Z}_{z24}-\dot{Z}_{z14}-\dot{Z}_{z23},\\
\dot{M} &= \dot{Z}_{z14}+\dot{Z}_{z25}-\dot{Z}_{z15}-\dot{Z}_{z24},\\
\dot{N} &= \dot{Z}_{z12}+\dot{Z}_{z15}-\dot{Z}_{z25},\\
\dot{O} &= \dot{Z}_{z34}+\dot{Z}_{z23}-\dot{Z}_{z24},\\
\dot{P} &= \dot{Z}_{z24}+\dot{Z}_{z35}-\dot{Z}_{z34}-\dot{Z}_{z25},\\
\dot{Q} &= \dot{Z}_{z13}+\dot{Z}_{z25}-\dot{Z}_{z12}-\dot{Z}_{z35},\\
\dot{R} &= \dot{Z}_{z45}+\dot{Z}_{z34}-\dot{Z}_{z35},\\
\dot{S} &= \dot{Z}_{z14}+\dot{Z}_{z35}-\dot{Z}_{z13}-\dot{Z}_{z45},\\
\dot{T} &= \dot{Z}_{z45}+\dot{Z}_{z15}-\dot{Z}_{z14},\\
\dot{W} &= \dot{M}\dot{Q}\dot{L}+\dot{Q}\dot{L}\dot{P}+\dot{L}\dot{P}\dot{S}+\dot{P}\dot{S}\dot{M}+\dot{S}\dot{M}\dot{Q},
\end{aligned}
\right\} \qquad (3.3)
$$

Wartości impedancji wieloboku gwiazdowego wynoszą:

$$
\left.
\begin{aligned}
\dot{Z}_{wg12} &= \dot{W}:2\dot{P}\dot{S} \qquad \dot{Z}_{wg1} = \frac{1}{2}\dot{N}-\dot{Z}_{wg12}\dot{Z}_{wg51}:\dot{Z}_t,\\
\dot{Z}_{wg23} &= \dot{W}:2\dot{S}\dot{M} \qquad \dot{Z}_{wg2} = \frac{1}{2}\dot{K}-\dot{Z}_{wg12}\dot{Z}_{wg23}:\dot{Z}_t,\\
\dot{Z}_{wg34} &= \dot{W}:2\dot{M}\dot{Q} \qquad \dot{Z}_{wg3} = \frac{1}{2}\dot{O}-\dot{Z}_{wg23}\dot{Z}_{wg34}:\dot{Z}_t,\\
\dot{Z}_{wg45} &= \dot{W}:2\dot{Q}\dot{L} \qquad \dot{Z}_{wg4} = \frac{1}{2}\dot{R}-\dot{Z}_{wg34}\dot{Z}_{wg45}:\dot{Z}_t,\\
\dot{Z}_{wg51} &= \dot{W}:2\dot{L}\dot{P} \qquad \dot{Z}_{wg5} = \frac{1}{2}\dot{T}-\dot{Z}_{wg45}\dot{Z}_{wg51}:\dot{Z}_t,
\end{aligned}
\right\} \qquad (3.4)
$$

gdzie $\dot{Z}_t = \dot{Z}_{wg12}+\dot{Z}_{wg23}+\dot{Z}_{wg34}+\dot{Z}_{wg45}+\dot{Z}_{wg51}$.

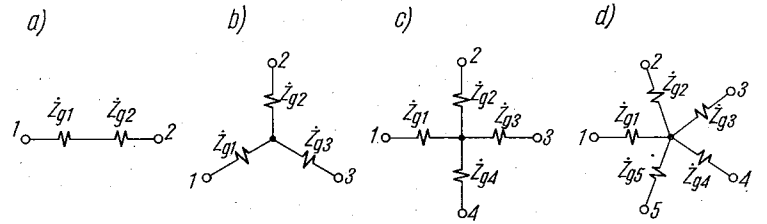
Liczby gałęzi impedancji w schematach zastępczych wieloboku zupełnego i wieloboku gwiazdowego są jednakowe, zarówno w przypadku transformatora czterouzwojeniowego, jak i pięciouzwojeniowego i wynoszą odpowiednio: 6 i 10. Liczba stopni swobody jest jednakowa dla obu rodzajów schematów, a więc schematy są równoważne. Schemat wieloboku zupełnego można przekształcić w schemat wieloboku gwiazdowego i odwrotnie. Schematy wieloboków gwiazdowych odwzorowują wiernie transformatory cztero- i pięciouzwojeniowe o dowolnym sprzężeniu magnetycznym uzwojeń.

Natomiast w przypadku transformatora sześciouzwojeniowego liczba gałęzi w wieloboku gwiazdowym wyniosłaby $2n = 12$, podczas gdy w wieloboku zupełnym wynosi ona $\frac{1}{2}n(n-1) = 15$. Wynika z tego, iż wielobok

gwiazdowy nie może być stosowany jako jednoznaczny schemat zastępczy transformatora o $n > 5$ i dowolnym sprzężeniu magnetycznym uzwojeń. Zmniejszenie liczby gałęzi schematu zastępczego w porównaniu z liczbą stopni swobody jest możliwe jedynie po wprowadzeniu uproszczeń uwzględniających sposób wykonania poszczególnych uzwojeń i wzajemne ich sprzężenia.

4. SCHEMATY ZASTĘPCZE GWIAZDOWE

Schemat gwiazdowy transformatora dwuuzwojeniowego można zbudować w oparciu o teorię transformatora wprowadzając rozdział impedancji wzdłużnej na dwie, odpowiadające reaktancjom rozproszenia i re-



Rys. 4. Schematy zastępcze gwiazdowe: a) transformatora dwuuzwojeniowego; b) transformatora trójuzwojeniowego; c) transformatora czterouzwojeniowego; d) trasformatora pięciouzwojeniowego

zystancjom poszczególnych uzwojeń. W schematach rozpatrywanych w niniejszym rozdziale pomijamy poprzeczne gałęzie magnesowania, a więc schemat gwiazdowy sprowadza się do jednej impedancji zwarciowej

$$\dot{Z}_{z12} = \dot{Z}_{g1} + \dot{Z}_{g2}. \tag{4.1}$$

Schemat gwiazdowy transformatora trójuzwojeniowego jest, jak wiadomo, klasycznym schematem o szerokim praktycznym zastosowaniu.

Wartości impedancji gwiazdowych określa się ze znanych zależności podanych w rozdziale 2, wzory (2.4). W obliczeniach analitycznych wygodniej jest posługiwać się wzorami typu:

$$\left.\begin{aligned} \dot{Z}_{g1} &= \frac{1}{2}(\dot{Z}_{z12} + \dot{Z}_{z23} + \dot{Z}_{z31}) - \dot{Z}_{z23} = \dot{A} - \dot{Z}_{z23}, \\ \dot{Z}_{g2} &= \dot{A} - \dot{Z}_{z31}, \\ \dot{Z}_{g3} &= \dot{A} - \dot{Z}_{z12}. \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Schemat gwiazdowy transformatora trójuzwojeniowego można w sposób jednoznaczny przekształcić na schemat trójkątowy (wielobok zupełny) i przeciwnie: schemat trójkątowy — na gwiazdowy. Liczba reaktancji zwarciowych $n = 3$ jest równa liczbie niezależnych reaktancji gwiazdowych.

W przypadkach transformatorów cztero- i wielouzwojeniowych ($n > 3$) liczba impedancji zwarciowych $\frac{1}{2}n(n-1)$ jest większa od liczby impedancji gwiazdowych n, rys. 4c i 4d. Każda gwiazda n-promieniowa może być zastąpiona jednoznacznie wielobokiem o n wierzchołkach, natomiast wielobok zupełny o n wierzchołkach nie może być w ogólnym przypadku przekształcony w gwiazdę, jeżeli $n > 3$. Wynika z tego, iż schematy gwiazdowe transformatorów n-uzwojeniowych nie są słuszne w przypadku uzwojeń sprzężonych magnetycznie w sposób dowolny. Schematy gwiazdowe, rys. 4c i 4d, podane przez autora niemieckiego Röscha [12] również nie odwzorowują jednoznacznie transformatorów wielouzwojeniowych, pomimo iż autor ten wprowadza upraszczające założenie. Rösch przyjął, iż napięcie każdego uzwojenia zależy od strumienia w rdzeniu oraz od tzw. „własnego strumienia rozproszenia". Założenie to, słuszne w przypadku transformatorów dwuuzwojeniowych, prowadzi jednak do błędnych wniosków w odniesieniu do transformatorów wielouzwojeniowych.

Jedynym schematem gwiazdowym, który znajduje zastosowanie w obliczeniach sieciowych, jest schemat transformatora trójuzwojeniowego (rys. 4b). Schemat ten używany jest w obliczeniach analitycznych i na maszynach cyfrowych wykonywanych metodą oczkową (np. obliczenia zwarć). Również i w obliczeniach analogowych transformator trójuzwojeniowy zastępowany jest schematem gwiazdowym. W jednej z gałęzi gwiazdy może wystąpić ujemna wartość reaktancji, którą można wyeliminować dodając ją do wartości zewnętrznej reaktancji sieciowej.

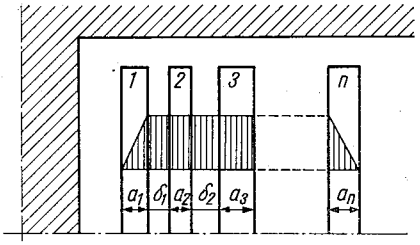
5. SCHEMATY ŁAŃCUCHOWE TRANSFORMATORÓW WIELOUZWOJENIOWYCH Z UZWOJENIAMI KONCENTRYCZNYMI

Główną cechą schematów zastępczych tzw. łańcuchowych jest zredukowana liczba gałęzi impedancji zastępczych. Zmniejszenie liczby $\frac{1}{2}n(n-1)$ impedancji jest możliwe pod warunkiem ograniczenia dowolności wewnętrznych połączeń i sprzężeń uzwojeń transformatorów oraz uwzględnienia charakterystycznych cech budowy pewnych rodzajów transformatorów.

Podstawowe założenia upraszczające, niezbędne w celu wyprowadzenia schematów łańcuchowych, są następujące. Transformator zbudowany jest z n uzwojeń koncentrycznych, cylindrycznych o jednakowej wysokości uzwojeń (rys. 5.1). Prąd magnesujący jest pominięty, a więc opór magnetyczny rdzenia przyjmuje się równy zeru. W przestrzeni ograniczonej uzwojeniami linie pola rozproszenia są równoległe do osi głównej transformatora. Reaktancję rozproszenia dowolnej pary uzwojeń k—l, równą reaktancji zwarciowej X_{zkl}, oblicza się z równania (5.1) uwzględniającego

trapezowy rozkład indukcji pola rozproszenia w przestrzeni ograniczonej tą parą uzwojeń (rys. 5.1).

$$X_{zkl} = 7{,}9 f z^2 \frac{L_k + L_l}{2h}\left[\frac{a_k}{3} + \delta_{k(l-1)} + \frac{a_l}{3}\right] K 10^{-8}[\Omega], \tag{5.1}$$



Rys. 5.1. Transformator n-uzwojeniowy z uzwojeniami koncentrycznymi

gdzie:

f[Hz] — częstotliwość,
z — liczba zwojów uzwojenia odniesienia,
L_k, L_l[cm] — średnie obwody zwojów uzwojeń k, l,
h[cm] — wysokość uzwojeń,
a_k, a_l[cm] — szerokości uzwojeń k, l (wymiary promieniowe, rys. 5.1),
$\delta_{k(l-1)}$[cm] — odstęp między uzwojeniami k, l (wymiar promieniowy),
K — tzw. współczynnik Rogowskiego, uwzględniający odkształcenie linii pola w pobliżu dolnego i górnego jarzma.

Wartości reaktancji zwarciowych poszczególnych par uzwojeń danego transformatora różnią się między sobą w zależności przede wszystkim od wymiarów promieniowych uzwojeń, a w znacznie mniejszym stopniu w zależności od L_k, L_l i współczynnika K. Reaktancję zwarciową można więc wyrazić wzorem uproszczonym:

$$X_{zkl} = A\left[\frac{a_k}{3} + \delta_{k(l-1)} + \frac{a_l}{3}\right], \tag{5.2}$$

gdzie A — wartość stała dla danego transformatora.

Wymiary promieniowe: szerokości uzwojeń a oraz szerokości kanałów izolacyjnych δ, są więc zmiennymi niezależnymi w obliczeniach reaktancji zwarciowych transformatora n-uzwojeniowego. Liczba uzwojeń wynosi n, zaś liczba kanałów $(n-1)$. Łącznie liczba zmiennych niezależnych, a zatem liczba stopni swobody, wynosiłaby $(2n-1)$. Jednakże liczbę tę można zredukować o 2, ponieważ szerokości obu uzwojeń zewnętrznych a_1 i a_n oraz szerokości obu przyległych kanałów δ_1 i δ_{n-1} mogą być zastąpione w obliczeniach reaktancji zwarciowych dwiema zmiennymi niezależnymi. W rezultacie otrzymujemy $(2n-3)$ stopni swobody i taka właśnie liczba niezależnych reaktancji zastępczych odwzorowuje w sposób jednoznaczny transformator n-uzwojeniowy z uzwojeniami koncentrycznymi. Reaktancje zastępcze oblicza się w oparciu o znane wartości reak-

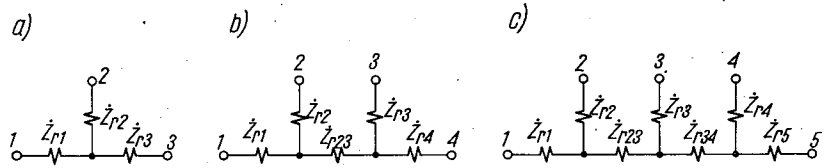
tancji zwarciowych. Spośród możliwych $\frac{1}{2}n(n-1)$ kombinacji reaktancji zwarciowych poszczególnych par uzwojeń jedynie $(2n-3)$ reaktancje są więc zmiennymi niezależnymi, a pozostałe reaktancje zwarciowe, w liczbie $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$, są funkcjami zależnymi od poprzednich wartości reaktancji. Wartości reaktancji zwarciowych są w transformatorach sieciowych prawie równe wartościom impedancji zwarciowych. Reaktancje zwarciowe można przeto w powyższym rozumowaniu zastąpić impedancjami. Transformator n-uzwojeniowy możemy więc zastąpić schematem o liczbie gałęzi impedancji wzdłużnych równej $(2n-3)$, a wartości tych impedancji zastępczych obliczymy w oparciu o znane wartości impedancji zwarciowych, których liczba wynosi również $(2n-3)$.

Tablica 5.1

Liczby impedancji $\dot{Z}_w$ oraz $\dot{Z}_r$ schematów zastępczych transformatorów wielouzwojeniowych

Lp.	Wyszczególnienie	Liczba uzwojeń n				
		2	3	4	5	6
1	Liczba impedancji $\dot{Z}_w$ wieloboku zupełnego: $\frac{1}{2}n(n-1)$	1	3	6	10	15
2	Zredukowana liczba impedancji $\dot{Z}_r$ schematu zastępczego łańcuchowego: $2n-3$	1	3	5	7	9
3	Różnica liczb impedancji (poz. 1 — poz. 2): $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$	0	0	1	3	6

Tablica 5.1 zawiera zestawienie porównawcze liczb gałęzi impedancyjnych schematów w postaci wieloboków zupełnych oraz schematów o zredukowanej liczbie impedancji w zakresie transformatorów wielouzwojeniowych o wartości n od 2 do 6.



Rys. 5.2. Schematy zastępcze łańcuchowe: a) transformatora trójuzwojeniowego; b) transformatora czterouzwojeniowego; c) transformatora pięciouzwojeniowego

Schematy zastępcze o zredukowanej liczbie gałęzi impedancyjnych zostały podane przez E. Uhlmanna [15] w postaci tzw. schematów łańcuchowych. Na rys. 5.2 podano przykłady schematów łańcuchowych

transformatorów $n = 3$, 4 oraz 5. Impedancje zastępcze tego rodzaju schematów oznaczono symbolem $\dot{Z}_r$.

W schemacie łańcuchowym numeracja zacisków uzwojeń nie jest przypadkowa, lecz musi być zgodna z kolejnością usytuowania uzwojeń na kolumnie rdzenia transformatora. Uzwojenie najbliższe kolumny otrzymuje numer 1, a następne uzwojenia — kolejne numery 2, 3... (rys. 5.1, 5.2). Przyjąwszy podane wyżej założenia E. Uhlmann wyprowadził następujące wzory na wartości impedancji gałęzi schematu łańcuchowego:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{Z}_{r1} &= \frac{1}{2}(\dot{Z}_{z12}+\dot{Z}_{z13}-\dot{Z}_{z23}),\\
\dot{Z}_{rn} &= \frac{1}{2}[\dot{Z}_{zn(n-1)}+\dot{Z}_{zn(n-2)}-\dot{Z}_{z(n-1)(n-2)}],\\
\dot{Z}_{rk} &= \frac{1}{2}[\dot{Z}_{zk(k-1)}+\dot{Z}_{zk(k+1)}-\dot{Z}_{z(k-1)(k+1)}],\\
\dot{Z}_{rl(l+1)} &= \frac{1}{2}[\dot{Z}_{z(l-1)(l+1)}+\dot{Z}_{zl(l+2)}-\dot{Z}_{zl(l-1)}-\dot{Z}_{z(l+1)(l+2)}],
\end{aligned}\right\} \qquad (5.3)$$

gdzie $2 \leqslant k \leqslant (n-1)$; $\quad 2 \leqslant l \leqslant (n-2)$.

W przypadku transformatora trójuzwojeniowego otrzymujemy równania (5.4) wstawiając do równań (5.3) $n = 3$, $k = 2$.

$$\left.\begin{aligned}
\dot{Z}_{r1} &= \frac{1}{2}(\dot{Z}_{z12}+\dot{Z}_{z13}-\dot{Z}_{z23}) = \dot{Z}_{g1},\\
\dot{Z}_{r3} &= \frac{1}{2}(\dot{Z}_{z32}+\dot{Z}_{z31}-\dot{Z}_{z21}) = \dot{Z}_{g3},\\
\dot{Z}_{r2} &= \frac{1}{2}(\dot{Z}_{z21}+\dot{Z}_{z23}-\dot{Z}_{z13}) = \dot{Z}_{g2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (5.4)$$

Schemat łańcuchowy jest identyczny ze schematem gwiazdowym.

W przypadku transformatora czterouzwojeniowego wartości impedancji zastępczych obliczymy ze wzorów:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{Z}_{r1} &= \frac{1}{2}(\dot{Z}_{z12}+\dot{Z}_{z13}-\dot{Z}_{z23}),\\
\dot{Z}_{r4} &= \frac{1}{2}(\dot{Z}_{z43}+\dot{Z}_{z42}-\dot{Z}_{z32}),\\
\dot{Z}_{r2} &= \frac{1}{2}(\dot{Z}_{z21}+\dot{Z}_{z23}-\dot{Z}_{z13}),\\
\dot{Z}_{r3} &= \frac{1}{2}(\dot{Z}_{z32}+\dot{Z}_{z34}-\dot{Z}_{z24}),\\
\dot{Z}_{r23} &= \frac{1}{2}(\dot{Z}_{z13}+\dot{Z}_{z24}-\dot{Z}_{z21}-\dot{Z}_{z34}).
\end{aligned}\right\} \qquad (5.5)$$

Podobne równania można zestawić w przypadkach transformatorów: pięciouzwojeniowych (7 impedancji), sześciouzwojeniowych (9 impedancji) itd.

Z analizy własności schematów łańcuchowych wynikają pewne ich szczególne cechy. Zwróćmy uwagę na wartości reaktancji poszczególnych gałęzi schematu łańcuchowego. Wyodrębniając składniki urojone z równań (5.3) i wstawiając wartości z równania (5.2) otrzymamy zależności:

$$\left.\begin{aligned} X_{r1} &= \frac{1}{2}A\left[\left(\frac{a_1}{3}+\delta_1+\frac{a_2}{3}\right)+\left(\frac{a_1}{3}+\delta_1+a_2+\delta_2+\frac{a_3}{3}\right)-\left(\frac{a_2}{3}+\delta_2+\frac{a_3}{3}\right)\right] = \\ &= A\left[\frac{a_1}{3}+\delta_1+\frac{a_2}{2}\right], \\ X_{rn} &= A\left[\frac{a_{(n-1)}}{2}+\delta_{(n-1)}+\frac{a_n}{3}\right], \\ X_{rk} &= A\left[-\frac{a_k}{6}\right], \\ X_{rl(l+1)} &= A\left[\frac{a_l}{2}+\delta_{l(l+1)}+\frac{a_{(l+1)}}{2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

W schemacie łańcuchowym reaktancje X_{rk} gałęzi, narysowanych pionowo na rys. 5.2, mają wartości ujemne i niewielkie w porównaniu z reaktancjami pozostałych gałęzi schematu.

Przeanalizujemy z kolei wartości rezystancji poszczególnych gałęzi schematu. Rezystancję zwarciową dowolnej pary uzwojeń k, l można wyrazić poniższym równaniem

$$R_{zkl} = R_{zk}+R_{zl}+\sum_{x=k+1}^{x=l-1} r_{zx}, \tag{5.7}$$

przy czym $k < l$.

W równaniu (5.7) wprowadzono następujące oznaczenia:

R_{zk}, R_{zl} — rezystancje zmiennoprądowe uzwojeń k oraz l z „dodatkiem" rezystancji uwzględniającym straty dodatkowe w uzwojeniach k oraz l, w których płynie prąd,

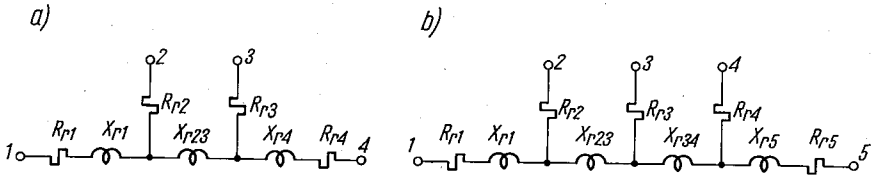
r_{zx} — „dodatek" rezystancji uwzględniający straty dodatkowe w uzwojeniu x, w którym prąd nie płynie, a które znajduje się w polu rozproszenia wzbudzonym przez uzwojenia k oraz l; uzwojenie x jest położone między k i l, a więc x zmienia się w granicach od $k+1$ do $l-1$.

Wartości r_{zx} są znacznie mniejsze niż wartości R_{zk} i R_{zl}, tak że w obliczeniach schematów zastępczych mogą być one pominięte. W równaniu (5.7) pomijamy „dodatki" rezystancji, uwzględniające straty dodatkowe w kadzi i pokrywie transformatora.

Wyodrębniając składniki rzeczywiste z równań (5.3) i wykorzystując wartości rezystancji ze wzoru (5.7) otrzymamy układ równań:

$$\left.\begin{aligned} R_{r1} &= \frac{1}{2}(R_{z1}+R_{z2}+R_{z1}+r_{z2}+R_{z3}-R_{z2}-R_{z3}) = R_{z1}+\frac{1}{2}r_{z2}, \\ R_{rn} &= R_{zn}+\frac{1}{2}r_{z(n-1)}, \\ R_{rk} &= \frac{1}{2}[R_{zk}+R_{zk(k-1)}+R_{zk}+R_{z(k+1)}-R_{z(k-1)}-r_{zk}-R_{z(k+1)}] = \\ &= R_{zk}-\frac{1}{2}r_{zk}, \\ R_{rl(l+1)} &= \frac{1}{2}[R_{z(l-1)}+r_{zl}+R_{z(l+1)}+R_{zl}+r_{z(l+1)}+R_{z(l+2)}+ \\ &\quad -R_{zl}-R_{z(l-1)}-R_{z(l+1)}-R_{z(l+2)}] = \frac{1}{2}[r_{zl}+r_{z(l+1)}]. \end{aligned}\right\} \quad (5.8)$$

Rezystancje zmiennoprądowe R_z poszczególnych uzwojeń znajdują się więc tylko w gałęziach narysowanych na rys. 5.2 jako gałęzie pionowe oraz poziome — zewnętrzne (gałęzie z pojedynczymi indeksami cyfrowymi), natomiast gałęzie poziome — wewnętrzne (z podwójnymi indeksami cyfrowymi) zawierają jedynie „dodatki" rezystancji.



Rys. 5.3. Schematy zastępcze łańcuchowe uproszczone: a) transformatora czteruzwojeniowego; b) transformatora pięciouzwojeniowego

Wykorzystując rozpatrzone powyżej cechy schematów łańcuchowych można wprowadzić dalsze uproszczenia w obliczeniach impedancji wzdłużnych.

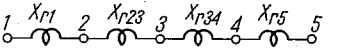
Jeżeli zaniechamy reaktancji gałęzi „pionowych" jak również rezystancji gałęzi „poziomych — wewnętrznych", których wartości są niewielkie w porównaniu z pozostałymi reaktancjami i rezystancjami, to otrzymamy uproszczone schematy łańcuchowe, podane na rys. 5.3 na przykładach transformatorów cztero- i pięciouzwojeniowego.

Dalszym uproszczeniem schematów łańcuchowych jest pominięcie rezystancji. Założenie takie jest dopuszczalne np. w przybliżonych obliczeniach zwarciowych. W tym przypadku schemat łańcuchowy uprości się jeszcze bardziej. Pozostaną tylko szeregowo połączone reaktancje gałęzi „poziomych". Tego rodzaju uproszczony schemat, zwany schematem sze-

regowym, przedstawia rys. 5.4 na przykładzie transformatora pięciouzwojeniowego.

Schematy łańcuchowe transformatorów z uzwojeniami koncentrycznymi dzięki swej prostocie powinny znaleźć zastosowanie w obliczeniach

Rys. 5.4. Schemat zastępczy szeregowy (uproszczony) transformatora pięciouzwojeniowego



sieciowych zarówno analogowych, jak i analitycznych i na maszynach cyfrowych.

6. ZAKRES ZASTOSOWANIA SCHEMATÓW ZASTĘPCZYCH TRANSFORMATORÓW W OBLICZENIACH SIECIOWYCH

W obliczeniach ustalonych, symetrycznych stanów pracy sieci elektroenergetycznych szczególnie istotną rolę odgrywa wybór metod najprostszych i najmniej pracochłonnych. W obliczeniach na maszynach cyfro-

Tablica 6.1

Liczby gałęzi, oczek i węzłów w schematach zastępczych transformatorów wielouzwojeniowych

Lp.	Rodzaj schematu zastępczego	Liczba uzwojeń	Liczba gałęzi	Liczba oczek (zewn. i wewn.)	Liczba gałęzi i oczek	Liczba węzłów (zewn. i wewn.)	Liczba gałęzi i węzłów
1	Schemat w postaci wieloboku zupełnego	n	$\frac{1}{2}n(n-1)$	$\frac{1}{2}(n-1)+1$	$n(n-1)+1$	n	$\frac{1}{2}n(n+1)$
2	„ — „	3	3	4	7	3	6
3	„ — „	4	6	7	13	4	10
4	„ — „	5	10	11	21	5	15
5	„ — „	6	15	16	31	6	21
6	Schemat w postaci wieloboku gwiazdowego	n	$2n$	$n+1$	$3n+1$	$2n$	$4n$
7	„ — „	4	8	5	13	8	16
8	„ — „	5	10	6	16	10	20
9	Schemat łańcuchowy	n	$2n-3$	n	$3n-3$	$2n-2$	$4n-5$
10	Schemat gwiazdowy (łańcuchowy)	3	3	3	6	4	7
11	Schemat łańcuchowy	4	5	4	9	6	11
12	„ — „	5	7	5	12	8	15
13	„ — „	6	9	6	15	10	19

wych należy dążyć do uproszczenia programowania, a w przypadku bardziej rozbudowanych sieci — również do jak najmniejszego obciążenia pamięci zewnętrznej maszyny. Transformatory wielouzwojeniowe, wchodzące w skład sieci, powinny być z tych względów zastępowane takimi schematami, które zawierają możliwie najmniejszą liczbę gałęzi oraz oczek — w obliczeniach metodą oczkową lub węzłów — w obliczeniach metodą napięć węzłowych. W celu porównania własności poszczególnych

Tablica 6.2

Zalecane zakresy zastosowania schematów zastępczych transformatorów wielouzwojeniowych w obliczeniach stanów ustalonych sieci elektroenergetycznych

Lp.	Rodzaj schematu zastępczego	Liczba uzwojeń n	Transf. o dowolnym sprzężeniu magnetycznym uzwojeń			Transf. z uzwojeniami koncentrycznymi		
			Obliczenia analogowe	Obliczenia analityczne i na maszynach cyfrowych		Obliczenia analogowe	Obliczenia analityczne i na maszynach cyfrowych	
				Metoda oczkowa	Metoda napięć węzłowych		Metoda oczkowa	Metoda napięć węzłowych
1	Schemat w postaci wieloboku zupełnego	3			×			×
2	„ — „	4		×	×			×
3	„ — „	5		×	×			
4	„ — „	6	×	×	×			
5	Schemat w postaci wieloboku gwiazdowego	4	×					
6	„ — „	5	×					
7	Schemat gwiazdowy	3	×	×		×	×	
8	Schemat łańcuchowy	4				×	×	
9	„ — „	5				×	×	×
10	„ — „	6				×	×	×

× — oznacza zalecony zakres zastosowania.

schematów zestawiono w tablicy 6.1 liczby gałęzi, oczek i węzłów. Liczby te stanowią uzupełniające kryterium do określenia przydatności tych schematów w obliczeniach sieciowych.

W tablicy 6.2 zestawiono zalecone zakresy zastosowania rozpatrywanych schematów zastępczych w obliczeniach sieci elektroenergetycznych.

Politechnika Warszawska
Katedra Sieci i Układów Elektroenergetycznych

WYKAZ LITERATURY

1. Höpp H.: Mehrwicklungs-Transformatoren. — E. und M., 1928, nr 26, str. 692.
2. Ost F.: Das Ersatzschaltbild des Dreiwicklungs-Transformators. — E. und M., 1929, nr 45, str. 977.
3. Willheim R.: Ersatzschaltbild des Mehrwicklungs-Transformators. — Forschung und Technik, Springer-Verlag, Berlin (Göttingen) — Heidelberg 1930, str. 280—290.
4. Starr F. M.: Equivalent Circuits. — AIEE Transactions, June 1932, str. 287.
5. Starr F. M.: An Equivalent Circuit for the Four-Winding Transformer. — General Electric Review. Schenectady, March 1933, str. 150.
6. Garin A. N., Palnev K. K.: Transformer Circuit Impedance Calculation. — Electrical Engineering, June 1936, str. 717.
7. Hobson J. E., Lewis W. A.: Equivalent Circuits for Power and Regulating Transformers. — Electric Journal, 1939.
8. Ostendorf W.: Ersatzschaltbilder für Mehrwicklungsumspanner. — ETZ, 1939, nr 28, str. 831.
9. Fraunberger F.: Theorie der Einphasentransformatoren mit n-Wicklungen. Ersatzstromkreise. — E. und M., 1940, nr 5/6, str. 49.
10. Fraunberger F.: Theorie der Mehrphasentransformatoren mit Anwendungsbeispielen. — E. und M., 1940, nr 41/42, str. 426, nr 43/44, str. 447.
11. Aicher L. C. jr, Johnsson W. M.: A Useful Equivalent Circuit for a Fivewinding Transformer. — AIEE Transactions, 1943, str. 66—70.
12. Rösch H.: Theorie des n-Wicklungstransformatoren. — A. f. E., 1950, nr 10, str. 668.
13. Clarke E.: Circuit Analysis of A-C Power Systems, vol. 2. J. Wiley and Sons, New York 1950.
14. Morris D.: Some Practical Equivalent Circuits for Multi-Circuit Transformers. — Proceedings IEE, Part II, London, April 1951, str. 256.
15. Uhlmann E.: Equivalent Circuit for the Multi-Winding Transformer. — ASEA Journal, 1951, str. 17, ASEAs Tidning, 1951, nr 1—2.
16. Willheim R.: Multi-Winding Transformers. — Electrical Times, London, June 14, 1951, str. 991.
17. Blume L. F., Boyajian A., ...: Transformer Engineering, Chap. IV, V. J. Wiley and Sons, New York 1951.
18. Jezierski E.: Zastosowanie teorii transformatorów trójuzwojeniowych do niektórych przypadków transformatora dwuuzwojeniowego. — Przegląd Elektrotechn., 1955, nr 2/3, str. 109.
19. Jezierski E.: Transformatory — Podstawy teoretyczne. PWT, Warszawa 1956.
20. Pietrow G. N.: Schiema zamieszczenija mnogoobmotocznych transformatorow. Naucznyje dokłady wysszej szkoły. — Elektromiechanika i awtomatika, 1958, nr 1.
21. Pietrow G. N.: Mnogoobmotocznyje awtotransformatory. Izwiestija wysszich uczebnych zawiedienij. — Elektromiechanika, 1959, nr 3, str. 50.
22. Bean R. L., Chackan N., ...: Transformers for the Electric Power Industry, Chap. 5, 11. Mc Graw-Hill, New York 1959.
23. Dommel H.: Die Darstellung des Transformators in der elektronischen Netzberechnung. — Elektrizitätswirtschaft, 1960, nr 9, str. 271.
24. Sjuda J. P., Bogusz A. G.: O schiemach zamieszczenija siłowych awtotransformatorow. — Izwiestija wysszych uczebnych zawiedienij, 1961, nr 10, str. 15.

25. Calvaer A.: Note sur les schémas équivalents des transformateurs à n-enroulements. — ASEC Revue, 1961, nr 1, str. 15.
26. Stix R.: Ersatzbild und Impedanzen des Dreiwicklungs-Transformators. — E. und M., 1962, nr 15—16, str. 381.
27. Ganz A. G.: A Simple, Exact Equivalent Circuit for the Three-Winding Transformer. — IRE Transactions, Component Part, 1962, nr 4, str. 212.
28. Cholewicki T.: Analiza obwodów elektrycznych. WNT, Warszawa 1962.
29. Schlosser K.: Eine auf physikalischer Grundlage ermittelte Ersatzschaltung für Transformatoren mit mehreren Wicklungen. — BBC-Nachrichten, 1963, nr 3, str. 107.
30. Shipley R. B., Coleman D., Watts C. F.: Transformer Circuits for Digital Studies. — AIEE Transactions, Power Apparatus and Systems, 1963, nr 64, str. 1028.

Z. GAWECKI

EQUIVALENT CIRCUITS FOR MULTIWINDING TRANSFORMERS

Summary

In calculations of steady states in networks the transformers are replaced by circuits composed of series of branch impedances.

The values of branch impedances are calculated according to: short-circuit voltages, copperlosses, and rated voltage and capacity of the transformer.

Two- and three-winding transformer equivalent circuits are in common use. Less known are the equivalent circuits for transformers with a greater number of windings. Different kinds of equivalent circuits for multiwinding transformers have been analysed in the paper. Equivalent circuits in shape of complete polygon (Fig. 2.2) represent with high fidelity transformers with arbitrary magnetic coupling of windings. They are mainly applied in analytic calculations and digital computers. Circuits in shape of star-polygon (Fig. 3) refer to four- and five-winding transformers and are good only for calculations by means of network analysers. From equivalent star-circuits (Fig. 4) only the three-winding network (Fig. 4b) represents with fidelity the series impedances of transformers. The greater the number of windings, the more time-consuming the computation of the value of branch impedance in equivalent circuits. A serious simplification in calculating the impedances can be obtained in a so-called equivalent chain-circuit (Fig. 5.2). These circuits may be applied only for transformers with concentric windings and under the condition that the sequence of configuration of windings in relation to the column of transformer's core is known. The number of branches of those circuits is $2n-3$. The greater the number of windings n, the smaller this number $2n-3$ than the number of branches of equivalent circuits in shape of polygons (see Figs 2.2 and 3). The values of impedances in branches of the chain circuit may be calculated from the formulae (5.3) which are simpler than in case of complete or star-polygons. Chain circuits may be simplified to the form given in Fig. 5.3, and in cases of, for instance, short circuit calculation it may be limited to a very simple form of equivalent series circuit from the Fig. 5.4.

In the last part of the paper numbers of branches, mashes and knot points in different equivalent circuits for multiwinding transformers (Table 6.1) are given as well as the recommended application ranges for circuits in calculations of power networks (Table 6.2).

Z. GAWECKI

SCHÉMAS ÉQUIVALENTS DES TRANSFORMATEURS À BOBINAGES MULTIPLES

Résumé

Dans les calculs des états stationnaires des réseaux électroénergétiques les transformateurs sont remplacés par des schémas composés des branches des impédances longitudinales.

On calcule les valeurs des impédances longitudinales en se basant sur les valeurs: tension court-circuit, pertes dans cuivre, puissance et tensions nominales du transformateur.

Dans l'utilisation génerale se trouvent les schémas équivalents à deux ou trois bobinages. Moins connus sont sont des schémas équivalents des transformateurs à plus que trois bobinages. Dans l'article on a analysé de différents types des schémas équivalents des transformateurs à plusieurs bobinages. Les schémas sous la forme des polygones complets (fig. 2.2) réproduisent fidèlement les transformateurs à quelconque liaison magnétique des bobinages. Ils trouvent l'application surtout dans les calculs analytiques et dans les calculs à l'aide des machines mathématiques. Les schémas sous la forme poligones étoilés (fig. 3) concernent aux transformateurs à quatre et à cinq bobinages et conviennent seulement aux calculs analogues. Entre les schémas étoilé (fig. 4) seulement le schéma de transformateur à trois bobinages (fig. 4b) réproduit fidèlement les impédances longitudinales des transformateurs. Le calcul des valeurs des impédances des branches des schémas équivalents est d'autant plus absorbant que le nombre de bobinages augmente. On obtient une simplification considérable des calculs de l'impédance dans de si nommés schémas en chaîne (fig. 5.2). Ceux-ci peuvent être appliqués seulement dans les cas des transformateurs à bobinages coaxiaux at à condition qu'on connait la sequence des positions des bobinages en rélation de la colonne du noyau du transformateur. Le nombre des branches de ces schémas est $2n-3$. Il est d'autant plus petit de nombre des branches des schémas sous la forme des polygones de fig. 2.2 et de fig. 3, que le nombre des bobinages n augmente. On calcule les valeurs des impédances des branches du schéma en chaîne des formules (5.3), qui sont considérablement plus simples qu'en cas des polygones complete ou des polygones étoilés. On peut simplifier les schémas en chaîne à la forme donnée sur la fig. 5.3, et, en cas par exemple des calculs de court circuit on peu les borner à la forme très simple du schèma en sèrie de fig. 5.4.

En conclusion on a présenté les nombres des branches, mailles et noeuds en schémas équivalents particuliers des transformateurs à plusieurs bobinages (tableau 6.1) et on a déterminé les zones récommendées d'application des schémas dans les calculs des réseaux électroénergétiques (tableau 6.2).

Z. GAWECKI

ERSATZSCHAFTBILDER DER MEHRWICKLUNGS-TRANSFORMATOREN

Zusammenfassung

Für Berechnungen der stationären Vorgänge des Kraftnetzes werden Transformatoren durch Ersatzschaltbilder ersetzt, die aus Zweigen der Längsimpedanzen bestehen.

Die Werte der Längsimpedanzen werden auf Grund folgender Werte berechnet: Kurzschlusspannungen, Kupferverluste, sowie Nennleistung und Nennspannung der Transformatoren.

Im allgemeinen werden Ersatzschaltbilder von Zwei- und Dreiwicklungs-Transformatoren angewandt. Weniger bekannt sind Ersatzschalbilder der Transformatoren mit einer grösseren Anzahl als drei Wicklungen.

Dieser Aufsatz enthält Analysen der verschiedenen Arten Ersatzschaltbilder für Mehrwicklungs-Transformatoren. Ersatzschaltbilder in Form des vollständigen n-Eckes (Fig. 2.2) ersetzen genau Transformatoren mit beliebiger magnetischer Kupplung der Wicklungen. Meistens finden sie Verwendung bei analytischen Netzberechnungen sowie Netzberechnungen mit Hilfe von programmgesteuerten Digital--Rechenanlagen. Ersatzschaltbilder in Form des Stern-n-Eckes (Fig. 3) beziehen sich auf Vier- und Fünfwicklungs-Transformatoren und eignen sich nur für Berechnungen mit Hilfe von Netzmodellen. Unter den Sternschemas (Fig. 4) gilt nur das Ersatzschaltbild des Dreiwicklungs-Transformators (Fig. 4b). Die Berechnungen der Werte der Zweige-Impedanzen der Ersatzschaltbilder sind destomehr arbeitsraubend je grösser die Anzahl der Wicklungen ist. Die Berechnungen werden bedeutend vereinfacht durch die sogenannten Kettenersatzschaltbilder (Fig. 5.2). Diese Schaltbilder können nur in Fällen angewandt werden, wenn es sich um Transformatoren mit konzentrischen Wicklungen handelt und unter der Bedingung, dass die Lage der Wicklungen im Verhältnis zur Säule des Transformator-Kerns bekannt ist. Die Anzahl der Zweige dieser Ersatzschaltbilder beträgt $2n-3$ und ist kleiner als deren Anzahl in den Schaltbildern in Form des n-Eckes aus Fig. 2.2 und Fig. 3. Der Unterschied vergrössert sich mit dem Vergrössern der Anzahl der Wicklungen n.

Die Impedanzwerte der Zweige des Kettenschemas werden aus Gleichungen (5.3) berechnet, die bedeutend einfacher sind als im Falle des vollständigen n-Eckes oder Stern n-Eckes.

Die Kettenschemas können bis zur Form in Fig. 5.3 vereinfacht werden. In Fällen wie z.B. Kurzschlussberechnungen können diese bis zu der sehr einfachen Form des Reihenersatz-schaltbildes aus Fig. 5.4 begrenzt werden.

Am Schluss des Aufsatzes folgen: eine Zusammenstellung der Anzahl der Zweige, Maschen und Knotenpunkte der einzelnen Schaltbilder des Mehrwichlungs--Transformatoren (Tabelle 6.1) sowie die empfehlenswerten Bereiche für die Anwendung des einzelnen Schaltbilder in Berechnungen des Kraftnetzes (Tabelle 6.2).

З. ГАВЕЦКИ

СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ МНОГООБМОТОЧНЫХ ТРАНСФОРМАТОРОВ

Р е з ю м е

В расчетах стационарных процессов электроэнергетических сетей трансформаторы замещаются схемами, составленными из ветвей продольных импедансов.

Значения продольных импедансов рассчитываются на основании значений: напряжений короткого замыкания, потерь в меди, а также номинальной мощности и номинального напряжения трансформатора.

В общем потреблении находятся схемы замещения двух- и трехобмоточных трансформаторов. Менее известными являются схемы замещения трансформаторов с числом обмоток больше трех. В статье произведено анализ разных типов схем замещения многообмоточных трансформаторов. Схемы в виде полных мно-

гоугольников (рис. 2.2) достоверно отображают трансформаторы с любой магнитной связью между обмотками. Они находят применение особенно в аналитических расчетах и на цифровых вычислительных машинах. Схемы в виде звездных многоугольников (рис. 3) относятся к четырех- или пятиобмоточным трансформаторам и пригодны только лишь к аналогическим вычислениям. Среди звездных схем (рис. 4) только схема трехобмоточного трансформатора (рис. 4 b) достоверно отображает продольные импедансы трансформаторов. Расчет значений импедансов ветвей схем замещения является тем более трудоемким, чем больше число обмоток. Значительное упрощение расчетов импеданса получается в так наз. цепных схемах (рис. 5.2). Эти схемы могут приняться только в случаях трансформаторов с коаксикальными обмотками и при условии, что известна очередность расположения обмоток по отношению к колонне сердечника трансформатора. Число ветвей этих схем составляет $2n-3$. Оно тем менее числа ветвей схем в виде многоугольников с рис. 2.2 и рис. 3, чем больше число обмоток n. Значения импедансов ветвей ценной схемы вычисляются из формул (5.3), которые значительно более простые чем в случае полных многоугольников или звездных многоугольников. Цепные схемы можно упростить к виду приведенному на рис. 5.3, а в случаях нп. расчетов при коротком замыкании, можно их привести к очень простому виду последовательной схемы с рис. 5.4.

В заключении статьи сделано сводку числа ветвей, контуров и узлов в отдельных схемах замещения многообмоточных трансформаторов (таблица 6.1), а также приведено рекомендуемые области применения схем в расчетах электроэнергетических сетей (таблица 6.2).

Czasopismo „Rozprawy Elektrotechniczne" można nabywać w następujących księgarniach technicznych PP Domu Książki:

Białystok, ul. Lipowa 43
Gdańsk-Wrzeszcz, ul. Grunwaldzka 111/113
Kraków, Rynek Główny 36
Łódź, ul. Piotrkowska 45
Poznań, ul. Paderewskiego 6
Warszawa, ul. Świętokrzyska 14
Bydgoszcz, Stary Rynek 15
Katowice, ul. Młyńska 2
Lublin, Krakowskie Przedmieście 39
Opole, ul. Ozimska 8
Szczecin, Al. Wojska Polskiego 29
Wrocław, ul. Świdnicka 8

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XII · ZESZYT 2

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1966

RADA REDAKCYJNA

PROF. JANUSZ GROSZKOWSKI, PROF. JANUSZ LECH JAKUBOWSKI,
PROF. BOLESŁAW KONORSKI, PROF. IGNACY MALECKI
PROF. PAWEŁ NOWACKI, PROF. PAWEŁ SZULKIN

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor Naczelny

PROF. WITOLD NOWICKI

Sekretarz

JULIUSZ MIERZEJEWSKI

ADRES REDAKCJI

Warszawa, Politechnika, Plac Jedności Robotniczej 1.
Katedra Teletransmisji Przewodowej, Gmach Mechaniki
tel. 21-007 w. 330

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
Warszawa, Miodowa 10

Nakład 740 (584 + 156)	Oddano do składania 31.I.1966 r.
Ark. wyd. 14,25, ark. druk. 13,25	Podpisano do druku w maju 1966 r.
Papier druk sat. kl. III, 80 g, 70×100	Druk ukończono w maju 1966 r.
Zamówienie nr 181/66	Cena zł 25,— M-72

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

621.311.22 : 66.012.3

STEFAN BERNAS

Oszczędność paliwa w systemie elektroenergetycznym przy „odstawieniach"

Rękopis dostarczono 22.9.1965

W opracowaniu przedstawiono teorię doboru zestawu zespołów blokowych w elektrowniach parowych, doboru zapewniającego minimalne zużycie paliwa w systemie, w którym optymalizacja rozdziału obciążeń jest dokonywana metodą przyrostów względnych. W szczególności zbadano, jak na postać rozwiązania wpływa dokładne uwzględnienie strat odstawienia. W tym celu w apendyksie wyprowadzono wzory na straty z odstawienia o formie celowo bardzo skomplikowanej. Rozważano również opłacalność odstawienia jedno- i dwukrotnego w czasie doby oraz zaproponowano sposoby uproszczeń. Rozważania te mogą być podstawą opracowania stosunkowo prostych algorytmów obliczeniowych.

1. FUNKCJA CELU

1.1. Postawienie zadania

Odstawienia zespołów elektrownianych z ruchu są źródłem oszczędności paliwa zużytego na produkcję energii elektrycznej w systemie elektroenergetycznym. Rozważamy opłacalność dwukrotnego odstawienia n-tego z kolei zespołu. Poprzednio odstawione zespoły zostały wytypowane do odstawienia w wyniku rozważań identycznych z przeprowadzonymi przy zespole n. Chwile t_1^n, t_3^n włączenia zespołu n-tego do ruchu i chwile t_2^n, t_4^n odstawienia zespołu n z ruchu powinny być obrane w taki sposób, by zysk J_o paliwa z dokonanych wszystkich n odstawień osiągnął największą dodatnią wartość. Rozważamy wyłącznie koszt paliwa zużytego na produkcję energii elektrycznej. Za stan odniesienia uważamy taki stan pracy systemu, w którym zespół n-ty nie jest odstawiony i w stosunku do tego stanu wyznaczamy funkcję korzyści z odstawienia.

1.2. Założenia

Zebrano tu założenia związane przede wszystkim z przyjętą metodą optymalizacji rozkładu obciążeń oraz uproszczenia potrzebne do jasnego

matematycznego przedstawienia zadania i łatwiejszego jego rozwiązania numerycznego.

1) Ekonomiczny rozdział obciążeń dokonywany jest metodą „przyrostów względnych".

2) Rozważania dotyczą zespołów blokowych: kocioł — turbina — generator. Do innych układów elektrowni będą one się nadawały właściwie tylko w przypadkach zbliżonych do odstawień bloków.

3) Charakterystyki netto kosztów $K_i(P_i)$ zespołów mają pierwsze i drugie pochodne nieujemne:

$$\varepsilon_i = \frac{dK_i}{dP_i} > 0, \quad \frac{d\varepsilon_i}{dP_i} \geqslant 0,$$

K_i ... zł/h, ε_i ... zł/MWh.

4) Moc P_n odstawionego zespołu n jest mała w porównaniu z mocą całego układu $\sum_i P_i$.

5) Układ elektroenergetyczny reprezentowany jest przez swoje charakterystyki zbiorcze $\lambda(t)$, $\varepsilon(t)$, $P_o(t)$, $\sigma(t)$;

$\lambda(t)$ — nieoznaczony czynnik Lagrage'a, związany z metodą przyrostów względnych (wyznaczenie minimum względnego funkcji wielu zmiennych),

$$\varepsilon(t) = \frac{d\left(\sum_i K_i(P_i)\right)}{dP_o}$$ — przyrost względny układu,

$$\sigma(t) = 1 - \frac{\varepsilon(t)}{\lambda(t)}$$ — przyrost względny strat sieciowych układu,

$P_o(t)$ — sumaryczne obciążenie układu odbiorami, traktowane jako parametr zadany w postaci tzw. grafiku obciążenia dobowego.

6) $\lambda^n(t)$, $\varepsilon^n(t)$, $\sigma^n(t)$ — charakterystyki zbiorcze układu po dokonaniu n kolejnych odstawień.

7) Grafik obąciążeń $P_o(t)$ powtarza się bez zmiany w kolejnych dobach; rozważamy dobę, przed którą było i po której będzie odpowiednio (nieskończenie) wiele dób identycznych.

8) Zespół może być najwyżej dwa razy odstawiony w ciągu doby.

9) Nie uwzględnia się strony technicznej i administracyjnej odstawień i rozruchów.

10) Koszt związany z odstawieniem do rezerwy składa się z dwu części: bezpośredniego kosztu odstawienia J^n_{ob} i kosztu włączenia J^n_w, omówionych w apendyksie.

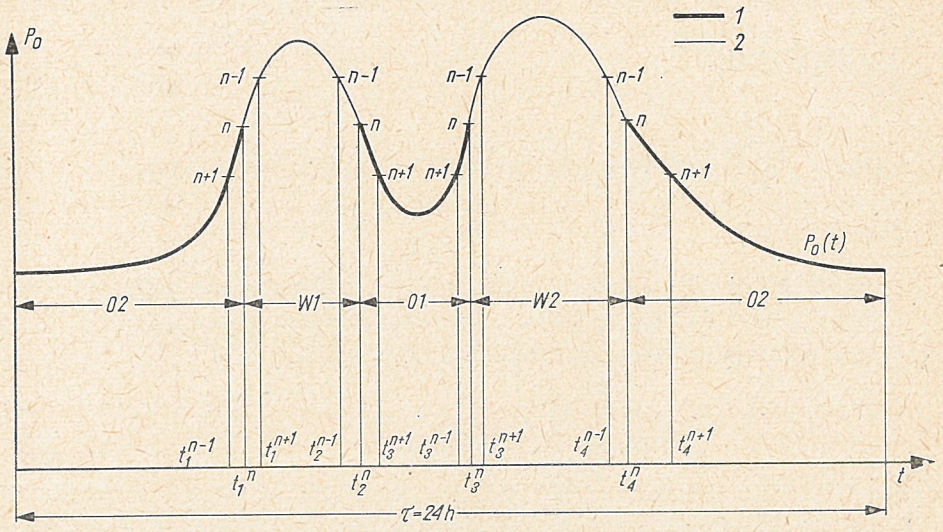
11) Koszty 10) są funkcją czasu trwania odstawień i włączeń: $J^n_{ob}(\mathbf{t}_n)$, $J^n_w(\mathbf{t}_n)$.

$$\mathbf{t}_n = \begin{bmatrix} t^n_1 \\ t^n_2 \\ t^n_3 \\ t^n_4 \end{bmatrix} \text{ przy odstawieniu dwukrotnym,}$$

$$\mathbf{t}_n = \begin{bmatrix} t^n_w \\ t^n_o \end{bmatrix} \text{ przy odstawieniu jednokrotnym.}$$

12) Czas trwania odstawienia zespołów wcześniej odstawionych jest dłuższy od czasu trwania odstawienia zespołów później odstawionych (rys. 1.1):

$$[\Delta t^{n+1}_o] \subset (\Delta t^n_o),$$



Rys. 1.1

1 — ε^n, λ^n, σ^n; 2 — z uwzględnieniem kolejnych odstawień

$$[t^{n+1}_w, t^{n+1}_o] \subset [t^n_w, t^n_o]; \quad [t^n_o, t^n_w] \subset [t^{n+1}_o, t^{n+1}_w]$$

podobnie czas trwania pracy zespołu wcześniej włączanego jest dłuższy od czasu trwania pracy zespołu później włączanego:

$$[\Delta t^n_w] \subset (\Delta t^{n+1}_w).$$

13) Wyznaczenie funkcji korzyści z odstawienia odbywa się metodą przybliżoną, a mianowicie przez wyznaczenie przyrostów kosztów, nie zaś różnicy kosztów. Wyznaczenie różnicy kosztów, teoretycznie poprawne, prowadzi do rozwiązania numerycznego obarczonego znacznymi błędami (wyznaczenie małej różnicy dużych wyrazów).

14) Korzyści z odstawień wyznacza się w stosunku do stanu pracy z wyłączonymi zespołami, a więc rozpoczyna się ze stanu, w którym włączone są wszystkie zespoły.

15) Zakłada się, że proces odstawienia i włączenia zespołu jest bardzo krótkotrwały, co w rzeczywistości nie trwa bynajmniej tak krótko.

1.3. Bilans strat i zysków, wynikający z odstawień i wyłączeń

Odstawienie

A. *Zyski*

Koszt paliwa niedostarczonego do kotła odstawionego zespołu jest jedynym zyskiem. Jest on odpowiednio równy:

$$\int_{t_o^n}^{t_w^n} e_n(P_n)P_n(t)\,dt, \tag{1}$$

$e_n(P_n) = \dfrac{K(P_n)}{P_n}$ zł/MWh jest kosztem jednostkowym paliwa.

B. *Straty*

1) Koszt paliwa związany z mocą zespołu odstawionego przejętą przez inne zespoły układu. Korzystając z założenia 4) wyznaczamy ten koszt jako część główną liniową przyrostu kosztów układu:

$$\int_{t_o^n}^{t_w^n} \varepsilon^n(P_o)P_n(t)\,dt. \tag{2}$$

2) Zmniejszenie korzyści, wyznaczonych dla poprzednio odstawionych zespołów, spowodowane wzrostem λ układu po odstawieniu zespołu n. Przy wyznaczaniu bowiem bilansu związanego z odstawianymi wcześniej zespołami nie wiedzieliśmy o konieczności dalszych odstawień:

$$\int_{t_o^n}^{t_w^n} \Delta\varepsilon^n(P_o) \sum_{k=1}^{n-1} P_k(t)\,dt, \tag{3}$$

$$\Delta\varepsilon^n = \varepsilon^n(P_o) - \varepsilon^{n-1}(P_o).$$

Można w przybliżeniu traktować ten przyrost jako część główną liniową przyrostu funkcji ε^{n-1} (założenie 4):

$$\Delta\varepsilon^n \approx \frac{d\varepsilon^{n-1}}{dP_o} P_n(t). \tag{4}$$

Taki sposób traktowania wzajemnego wpływu odstawień nie wprowadza do bilansu zmiennych $t_j^{i \neq n}$, nie związanych z odstawieniem rozważanym.

3) Koszt strat bezpośrednich odstawienia: $J_{ob}^n(t_n)$.

Włączenie

Korzyść z odstawienia zespołu n obliczamy traktując jako stan odniesienia stan pracy systemu z włączonym na stałe zespołem n. W okresie rozważanym doraźnego włączenia zespołu n stan pracy pokrywa się ze stanem odniesienia. Okres ten jest więc obarczony jedynie stratami włączenia $J_w^n(t_n)$.

Inaczej przedstawia się sprawa, jeśli oblicza się korzyść z włączania, a więc jeśli potraktujemy stan pracy z wyłączonymi n zespołami jako stan odniesienia. Korzyść z włączenia zespołu można by wtedy wyznaczyć w sposób podobny jak przy odstawieniu, natomiast okres odstawienia wszedłby do funkcji korzyści tylko w postaci strat bezpośrednich odstawienia.

1.4. Funkcja korzyści z odstawień

Teraz można już zestawić funkcję korzyści z dokonania odstawienia zespołu n-tego, w założeniu (zob. założenie 8), że zespół jest odstawiany najwyżej dwukrotnie w ciągu doby.

$$J_n^o = \int_{t_2^n}^{t_3^n} e_n(P_n)P_n(t)\,dt + \int_{t_4^n}^{\tau+t_1^n} e_n(P_n)P_n(t)\,dt +$$

$$- \int_{t_2^n}^{t_3^n} \varepsilon^n(P_o)P_n(t)\,dt - \int_{t_4^n}^{\tau+t_1^n} \varepsilon^n(P_o)P_n(t)\,dt +$$

$$- \int_{t_2^n}^{t_3^n} \Delta\varepsilon^n(P_o) \sum_{k=1}^{n-1} P_k(t)\,dt - \int_{t_4^n}^{\tau+t_1^n} \Delta\varepsilon^n(P_o) \sum_{k=1}^{n-1} P_k(t)\,dt +$$

$$- J_{ob}^{n1}(t_n) - J_{ob}^{n2}(t_n) - J_w^{n1}(t_n) - J_w^{n2}(t_n); \qquad (5)$$

$$\tau = 24\,\mathrm{h}.$$

Koszt strat z ostygnięcia zespołu jest funkcją obu okresów stygnięcia, jest więc funkcją wszystkich czterech zmiennych niezależnych t_1^n, t_2^n, t_3^n, t_4^n.

Zmienne niezależne muszą spełniać następujące zależności:

$$0 \leqslant t_1^n \leqslant t_2^n \leqslant t_3^n \leqslant t_4^n; \quad \text{są one nieujemne.}$$

Zaproponowany tu sposób uwzględnienia wzajemnego wpływu odstawień i włączeń jest przyczyną, że korzyść z odstawienia zespołu n jest

funkcją wyłącznie chwil włączeń i odstawień zespołu n i nie zależy od chwil włączeń innych zespołów. A to powoduje, że maksimum korzyści ze wszystkich dokonanych odstawień i włączeń $\sup \sum_{n=1}^{N} J_n^o$ pokrywa się każdorazowo z maksimum korzyści rozważanego pojedynczego odstawienia: $\sup J_n^o$.

1.5. Kryterium odstawień

Punkty odstawień i włączeń, a więc wektor optymalny

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \\ \vdots \\ t_N \end{bmatrix}$$

określimy jako współrzędne punktu $\sup \sum_{n=1}^{N} J_n^o$ w przestrzeni $4N$-wymiarowej.

Poszukiwanie dodatniego kresu górnego funkcji sprowadzimy do poszukiwania największego z maksimów dodatnich funkcji (5), a więc współrzędnych punktu $\sup J_n^o$, kolejno dla $n = 1, 2 \ldots, N$. Wyznaczamy w ten sposób kolejne czwórki współrzędnych punktu $\sup \sum_{n=1}^{N} J_n^o$, a więc podmacierze $\mathbf{t}_n$ macierzy kolumnowej (wektora) $\mathbf{T}$.

Poszukując największego z maksimów funkcji korzyści (5), musimy rozważyć również odstawienie jednokrotne. Odstawienie jednokrotne może mieć 3 warianty:

a) $t_2^n = t_3^n$,

b) $t_1^n = t_2^n$,

c) $t_3^n = t_4^n$.

Czwarty możliwy wariant: $t_4^n = t_1^n$ jest nierealny przy obecnie występujących grafikach obciążeń $P_o(t)$.

W praktyce nie opłaci się (a często nawet jest to niemożliwe technicznie) odstawiać zespołów na okres krótki. Za zero trzeba więc będzie przyjmować już pewien umowny okres Δt^n.

Jednokrotne odstawienie, poza formalnym zrównaniem niektórych zmiennych, powodującym znikanie z funkcji (5) całek o jednakowych granicach całkowania górnych i dolnych, powoduje jeszcze zmiany w kosztach strat: znika mianowicie połowa liczby wyrazów funkcji st[illegible]

Funkcja korzyści z jednokrotnego odstawienia ma postać następującą:

$$J_n^o = \int_{t_o^n}^{\tau+t_w^n} e_n(P_n)P_n(t)\mathrm{d}t - \int_{t_o^n}^{\tau+t_w^n} \varepsilon^n(P_o)P_n(t)\mathrm{d}t - \int_{t_o^n}^{\tau+t_w^n} \Delta\varepsilon^n(P_o)\sum_{k=1}^{n-1} P_k(t)\mathrm{d}t + \\ - J_{ob}^n(\mathbf{t}_n) - J_w^n(\mathbf{t}_n). \tag{6}$$

Badanie przyrostów funkcji w otoczeniu punktu ekstremalnego daje w wyniku następujące warunki na maksimum funkcji:

a) $\mathrm{d}J_n^o = 0$, z czego wynikają następujące cztery równania:

$$\frac{\partial J_n^o}{\partial t_i^n} = 0; \tag{7}$$

b) $\mathrm{d}^2 J_n^o < 0$, z czego wynika, że następująca forma kwadratowa powinna być ujemnie określona:

$$\sum_i \sum_j \frac{\partial^2 J_n^o}{\partial t_i^n \partial t_j^n} \mathrm{d}t_i^n \mathrm{d}t_j^n < 0; \tag{8}$$

$$i, j = 1, 2, 3, 4$$

Różniczkujemy funkcję (5) wyznaczając pochodne całek jako funkcji granicy górnej lub dolnej całkowania

$$\frac{\partial J_n^o}{\partial t_1^n} = [e_n(P_n) - \varepsilon^n(P_o)]P_n(t_1^n) - \Delta\varepsilon^n(P_o)\sum_{k=1}^{n-1} P_k(t_1^n) - \frac{\partial J_{\mathrm{II}}^{no}}{\partial t_1^n} = 0.$$

Symbolem J_{II}^{no} oznaczono wszystkie koszty związane z odstawieniami [w równaniu (5)]: $J_{\mathrm{II}}^{no} = J_{ob}^{n1}(\mathbf{t}_n) + J_{ob}^{n2}(\mathbf{t}_n) + J_w^{n1}(\mathbf{t}_n) + J_w^{n2}(\mathbf{t}_n)$,

$$\frac{\partial J_n^o}{\partial t_2^n} = [-e_n(P_n) + \varepsilon^n(P_o)]P_n(t_2^n) + \Delta\varepsilon^n(P_o)\sum_{k=1}^{n-1} P_k(t_2^n) - \frac{\partial J_{\mathrm{II}}^{no}}{\partial t_2^n} = 0,$$

$$\frac{\partial J_n^o}{\partial t_3^n} = [e_n(P_n) - \varepsilon^n(P_o)]P_n(t_3^n) - \Delta\varepsilon^n(P_o)\sum_{k=1}^{n-1} P_k(t_3^n) - \frac{\partial J_{\mathrm{II}}^{no}}{\partial t_3^n} = 0,$$

$$\frac{\partial J_n^o}{\partial t_4^n} = [-e_n(P_n) + \varepsilon^n(P_o)]P_n(t_4^n) + \Delta\varepsilon^n(P_o)\sum_{k=1}^{n-1} P_k(t_4^n) - \frac{\partial J_{\mathrm{II}}^{no}}{\partial t_4^n} = 0. \tag{9}$$

Równania (9) przedstawiają warunki konieczne istnienia ekstremum; aby ekstremum to było maksimum funkcji, musi być spełniona dodatkowo nierówność (8). Nierówność ta przybiera postać skomplikowaną i będzie badana dopiero po wprowadzeniu uproszczeń.

Chwile odstawień jednokrotnych wyznacza się ze wzorów analogicznych:

$$\frac{\partial J_n^o}{\partial t_w^n} = [e_n P_n - \varepsilon^n(P_o)]P_n(t_w^n) - \Delta\varepsilon^n(P_o)\sum_{k=1}^{n-1} P_k(t_w^n) - \frac{\partial J_{\mathrm{I}}^{no}}{\partial t_w^n} = 0,$$

$$\frac{\partial J_n^o}{\partial t_o^n} = [-e_n(P_n) + \varepsilon^n(P_o)]P_n(t_o^n) + \Delta\varepsilon^n(P_o)\sum_{k=1}^{n-1} P_k(t_o^n) - \frac{\partial J_{\mathrm{I}}^{no}}{\partial t_o^n} = 0. \qquad (10)$$

2. UPROSZCZONE ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ ODSTAWIEŃ

Równania (9) oraz (10) są trudne do numerycznego rozwiązania. Użycie do tego celu nawet stosunkowo szybkich maszyn cyfrowych nie poprawi sytuacji. Dlatego bardzo są tu pożądane uproszczenia zależności. Poniżej zostaną zaproponowane i omówione niektóre uproszczenia.

2.1. Uproszczenie rozkładu obciążeń $P_n(t)$

Największe stosunkowo uproszczenia wynikają z faktu, że zbocza krzywej $P_o(t)$, należące do obu szczytów tej krzywej, są dość strome. Stromość ta jest niekiedy tak duża, że w większych zespołach elektrownianych nie można nadążyć ze zmianą obciążenia. W tej sytuacji uzasadnione wydaje się założenie, że zespół odstawiony pracowałby, gdyby nie było odstawienia, na swoim minimum technicznym P_n^m, a zespół włączony do ruchu, na swoim maksimum technicznym P_n^M.

To założenie zmienia funkcję korzyści z odstawienia (10) w sposób następujący:

$$J_n^o = \int_{t_2^n}^{t_3^n} e_n^m P_n^m \mathrm{d}t + \int_{t_4^n}^{\tau+t_1^n} e_n^m P_n^m \mathrm{d}t - \int_{t_2^n}^{t_3^n} \varepsilon^n(P_o) P_n^m \mathrm{d}t - \int_{t_4^n}^{\tau+t_1^n} \varepsilon^n(P_o) P_n^m \mathrm{d}t +$$

$$- \int_{t_2^n}^{t_3^n} \Delta\varepsilon^n(P_o) \sum_{k=1}^{n-1} P_k^m \mathrm{d}t - \int_{t_4^n}^{\tau+t_1^n} \Delta\varepsilon^n(P_o) \sum_{k=1}^{n-1} P_k^m \mathrm{d}t - J_{\mathrm{II}}^{no}(t_n).$$

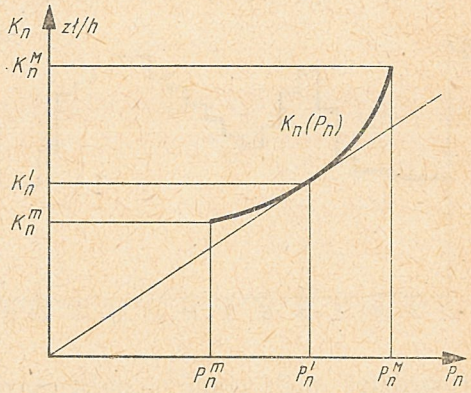
Można tu już wyznaczyć niektóre całki tej funkcji. Jeśli ponadto zauważymy (rys. 2.1), że:

$e_n^m P_n^m = K_n^m$, $e_n^M P_n^M = K_n^M$ (koszty godzinowe produkcji P_n^m, P_n^M)

funkcji korzyści (5) można nadać postać następującą

$$J_n^o = K_n^m(\tau + t_1^n + t_3^n - t_2^n - t_4^n) - P_n^m\Big(\int_{t_2^n}^{t_3^n} \varepsilon^n(P_o)\,dt + \int_{t_4^n}^{\tau+t_1^n} \varepsilon^n(P_o)\,dt\Big) +$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1} P_k^m\Big(\int_{t_2^n}^{t_3^n} \Delta\varepsilon^n(P_o)\,dt + \int_{t_4^n}^{\tau+t_1^n} \Delta\varepsilon^n(P_o)\,dt\Big) - J_{II}^{no}(t_n). \tag{11}$$



Rys. 2.1

$\frac{K_n^M}{P_n^M} = e_n^M$; $\frac{K_n^m}{P_n^m} = e_n^m$; $\frac{K_n'}{P_n'} = e_{n\,min}$

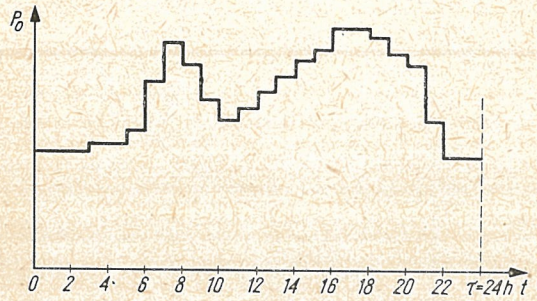
2.2. Aproksymacja krzywej $P_o(t)$

Dalsze uproszczenie związać można z aproksymacją krzywej $P_o(t)$ (grafiku obciążeń). Krzywa ta nie jest nigdy zapisywana analitycznie, lecz z reguły podana wykreślnie. Założenie powtarzalności tej krzywej sugeruje przyjęcie do obliczeń nie krzywej realnej, bo takich należałoby rozpatrzyć dużą liczbę, lecz raczej pewnej krzywej wypadkowej. Nie uczyni się więc dużego błędu, jeśli taką wypośrodkowaną, a więc w pewnym stopniu fikcyjną, krzywą będzie się aproksymowało krzywą o maksymalnie uproszczonych kształtach: krzywą schodkową (rys. 2.2).

W gruncie rzeczy, jeśli można mówić o okresowości krzywej $P_o(t)$, to jej okresem jest raczej tydzień niż doba. Tu jednakże liczba niewiadomych czasów odstawień t_i^n wzrosłaby 7-krotnie, co przy nieliniowych równaniach stwarzałoby znaczne trudności w numerycznym rozwiązaniu zadania. Jak zobaczymy, już okres równy jednej dobie stwarza wystarczająco duże kłopoty.

Aproksymacja schodkowa krzywej $P_o(t)$ zmniejsza liczbę wartości ε^n i $\Delta\varepsilon^n$ do najwyżej kilkudziesięciu, z czego zazwyczaj niewielką tylko ich liczbę trzeba będzie podstawić do równań (9) i (10) przy ich numerycznym rozwiązywaniu. Nieciągłość funkcji $P_o(t)$ pociągać musi za sobą ostrza w funkcji korzyści (5) i (6) (krzywa $\varepsilon^n(P_o)$, $\Delta\varepsilon^n(P_o)$ są teraz również

schodkowe, więc ich całki będą przedstawiały krzywe złożone z odcinków prostej). Największych wartości funkcji można tu oczekiwać nie tylko w punktach ekstremalnych, lecz również w ostrzach i to ze względu na specyficzną budowę funkcji (5) i (6) — raczej w ostrzach. W ostrzu takim („hiperostrzu" ze względu na pięciowymiarowość funkcji korzyści) należy spodziewać się różnoimiennych znaków pochodnej prawo- i lewostronnej. W takim podejrzanym ostrzu należy dla każdej wartości t_i^n podstawić raz lewo- raz prawostronną wartość funkcji: $\varepsilon_-^n, \varepsilon_+^n, \Delta\varepsilon_-^n, \Delta\varepsilon_+^n$ i zbadać znaki pochodnych prawostronnych i lewostronnych. Niewątpliwie



Rys. 2.2

najbardziej „podejrzane" o największą wartość funkcji w pewnym obszarze będzie ostrze, w którym pochodne lewostronne są dodatnie, prawostronne — ujemne. Oczywiście zbadanie przyrostów funkcji tylko w kierunkach wzdłuż osi współrzędnych nie jest wystarczające w ogólnym przypadku. Łatwo sobie wyobrazić funkcję dwu zmiennych mającą ostrze tak ukształtowane, że pochodne w kierunkach x i y zmieniają znak, zaś pochodne w innym jakimś kierunku znaku nie zmieniają. Niemniej odpowiednie różnoimienne znaki pochodnych prawostronnych i lewostronnych są warunkiem koniecznym istnienia lokalnego kresu funkcji w otoczeniu ostrza.

Ustalenie wstępne kolejności odstawianych zespołów jest łatwe. Można się tu oprzeć na wzorach uproszczonych (11) lub pełnych (6) i założyć:

straty sieciowe równe zeru: $\varepsilon = \lambda = \varepsilon_n$ (ε_n jest to przyrost względny zespołu n),

straty z odstawienia równe zeru: $J^{no} = 0$,

brak wzajemnego wpływu odstawień: $\Delta\varepsilon^n = 0$, $\varepsilon^n = \varepsilon$. Otrzymuje się wtedy:

ze wzorów uproszczonych: $\varepsilon_n = \dfrac{K_n^M + K_n^m}{P_n^m + P_n^M}$,

ze wzorów dokładniejszych: $\varepsilon_n = e_n = e_{n\,\min}$ (zob. rys. 2.1). Różnice między wartościami wyznaczonymi z obu wzorów nie są duże. Wystarczy więc uszeregować zespoły według malejącego najmniejszego zużycia jednostkowego (najlepiej maksymalnej sprawności), nadając numer $n = 1$ najgorszemu zespołowi.

Uwzględnienie opuszczonych parametrów może nieco zmienić kolejność odstawianych zespołów, co łatwo będzie skorygować w toku obliczeń.

2.3. Dalsze uproszczenia

A. Następnym nasuwającym się tu uproszczeniem jest przyjęcie za wartość stałą przyrostu $\Delta\varepsilon^n$. Przyrost ten nie ma w gruncie rzeczy wartości stałej, jednak wpływ jego na straty jest stosunkowo mały, tak że wielu autorów zgoła go pomija. Można więc za $\Delta\varepsilon^n$ przyjąć pewną średnią wartość $\Delta\varepsilon^n_{śr}$ i traktować go jako czynnik niezmienny. $\Delta\varepsilon^n$ wyznaczyć można ze wzoru (4).

B. Wyrazy, będące całkami z przyrostu względnego systemu ε^n, są — przy założeniu schodkowej postaci krzywej $P_o(t)$ — skończonymi sumami iloczynów i to o stosunkowo małej liczbie wyrazów:

$$\int_{t_o^n}^{t_w^n} \varepsilon^n(P_o)\mathrm{d}t = \sum_{t_w^n - t_o^n} \varepsilon_i^n \Delta t_i, \tag{12}$$

$t_w^n - t_o^n$ — przedział czasu, złożony z podprzedziałów Δt_i, równych długości stopni funkcji $P_o(t)$ w przedziale $t_w^n - t_o^n$; pierwszy i ostatni przedział ma długość zależną odpowiednio od t_2^n i t_3^n,

ε_i^n — wysokość stopni krzywej przyrostu względnego systemu, liczona od osi t.

Funkcja korzyści przybierze teraz postać:

$$J_n^o = \Big(K_n^m - \Delta\varepsilon_{śr}^n \sum_{k=1}^{n-1} P_k^m\Big)(\tau + t_1^n + t_3^n - t_2^n - t_4^n) +$$

$$- P_n^m \Big(\sum_{t_3^n - t_2^n} \varepsilon_i^n \Delta t_i + \sum_{(\tau + t_1^n) - t_4^n} \varepsilon_i^n \Delta t_i \Big) - J_{II}^{no}(\mathbf{t}_n). \tag{13}$$

C. *Uproszczenie funkcji strat odstawienia.* Wzory na straty odstawienia zestawiono i omówiono w apendyksie. Można je uprościć, przyjąwszy założenie o pracy zespołu wyłącznie na ograniczeniu dolnym i górnym P_n^m, P_n^M: zespół włączony wydaje moc P_n^M, zespół odstawiony — P_n^m. Straty związane ze zmianą obciążenia będą miały teraz wartość stałą, równą:

$2e_r^n(P_n^M - P_n^m)$ przy jednokrotnym odstawieniu,

$4e_r^n(P_n^M - P_n^m)$ przy dwukrotnym odstawieniu,

i można je połączyć z wyrazami stałymi.

Dalsze uproszczenie funkcji strat z odstawienia nie jest w zasadzie możliwe w sposób ogólny. Należy się raczej spodziewać większych możliwości uproszczeń po poznaniu wartości stałych i czasowych i stałych współczynników, związanych z poszczególnymi wyrazami tej funkcji. Można oczekiwać, że stare ciężkie kotły będą miały dużą stosunkowo część strat związanych z ciepłem w obmurzu; w kotłach nowszych o kon-

strukcji lekkiej ta część strat będzie odgrywała stosunkowo mniejszą rolę. Tu właśnie tkwią możliwości uproszczeń; uproszczenia powinny pójść po drodze wiązania z czasem trwania odstawień tylko największych porcji strat i to wyraźnie z tym związanych.

Straty przy dwukrotnym odstawieniu można więc wyrazić wzorem (zob. A13):

$$J_{II}^{no} = 2[J_m^n + 2e_r^n(P_n^M - P_n^m) + J_k^n] + J_p^n\left(2 - e^{\frac{-t_3^n - t_2^n}{T_{np}}} - e^{\frac{-t_3^n - t_2^n}{T_{np}}}\right) +$$

$$+ J_{sII}^n(t_n) = 2J_c^n + J_p^n\left(2 - e^{\frac{-t_3^n - t_2^n}{T_{np}}} - e^{\frac{-t_3^n - t_2^n}{T_{np}}}\right) + J_{sII}^n(t_n), \qquad (14)$$

w którym:

$$J_c^n = J_m^n + 2e_r^n(P_n^M - P_n^m) + J_k^n.$$

Straty przy jednokrotnym odstawieniu wyrażają się wzorem (zob. A14):

$$J_I^{no} = J_c^n + J_p^n\left(1 - e^{\frac{\tau + t_w^n - t_o^n}{T_{np}}}\right) + J_{sI}^n(t_n). \qquad (15$$

W krańcowym przypadku, gdy zespół ma małe stałe czasowe w porównaniu z okresem odstawień i włączeń, straty z odstawienia mają wartość maksymalną i stałą:

$$J_{II}^{no} = 2J_I^{no} = 2J_\infty^{no}.$$

W przypadku małych kotłów o budowie ciężkiej, w których większość strat związana jest z ciepłem w obmurzu, można chyba bez większego błędu założyć:

$$J_I^{no} = J_{c1}^n + J_{sI}^n(t_n).$$

W przypadku dużych kotłów o budowie lekkiej, można raczej chyba potraktować jako stałe straty związane z ciepłem w obmurzu:

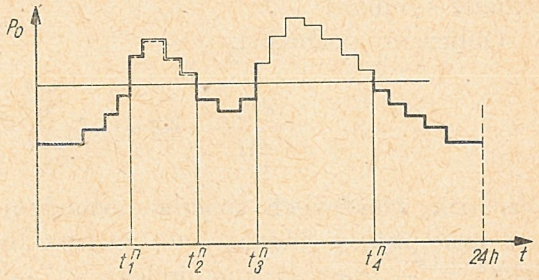
$$J_I^{no} = J_{c2}^n + J_p^n\left(1 - e^{\frac{\tau + t_1^n - t_2^n}{T_{np}}}\right).$$

Inna droga uproszczeń wzoru na straty z odstawienia wiąże się już z konkretnym rozpatrywanym układem i wymaga znajomości badanego układu, a więc nawet wykonania wstępnych obliczeń przybliżonych. Można bowiem spostrzec, że przedział zmienności zmiennych t_n nie jest w istocie duży. Czasy te zmieniają się od wartości t_{n-1} o stosunkowo niewielki przyrost dodatni, tym mniejszy, im bardziej strome są zbocza krzywej $P_o(t)$. Istnieje duże prawdopodobieństwo stosunkowo dokładnej linearyzacji tego fragmentu funkcji strat z odstawienia, co jest już zadaniem elementarnym. Jak się później okaże, przy $P_o(t)$ aproksymowanej schodkowo czasy t_n układają się na przecięciu pewnej prostej równoległej do

osi t z krzywą $\varepsilon^n(t)$; koszty strat z odstawienia są funkcją długości okresów włączenia i odstawienia, nie zaś usytuowania tych okresów w czasie (są funkcją $t_i^n - t_{i-1}^n$, nie zaś t_i^n, t_{i-1}^n itd.). To pozwala natychmiast określić w łatwy sposób długości okresów odstawień i włączeń dla poszczególnych skoków funkcji $\varepsilon^n(t)$ i, co za tym idzie, wyznaczyć wartości funkcji J^{no}. Uwagi te staną się bardziej zrozumiałe po przeczytaniu rozdziałów 2.4 i 2.5.

2.4. Odstawienie przy maksymalnych i stałych stratach z odstawienia

A. Rozważmy teraz opłacalność odstawienia *dwukrotnego* i opłacalność odstawienia *jednokrotnego*. Do rozważań przyjmijmy zespoły małe, dla których można założyć stałość kosztów odstawienia.



Rys. 2.3

W przypadku odstawienia dwukrotnego funkcja korzyści będzie miała postać następującą:

$$J_{nII}^{o} = \left(K_n^m - \Delta\varepsilon_{sr}^n \sum_{k=1}^{n-1} P_k^m\right)(\tau + t_1^n + t_3^n - t_2^n - t_4^n) - P_n^m\left(\int_{t_2^n}^{t_3^n} \varepsilon^n(P_o)\,dt + \int_{t_4^n}^{\tau+t_1^n} \varepsilon^n(P_o)\,dt\right) - 2J_{\infty}^{no}. \tag{16}$$

W przypadku odstawienia jednokrotnego funkcja korzyści jest następująca:

$$J_{nI}^{o} = \left(K_n^m - \Delta\varepsilon_{sr}^n \sum_{k=1}^{n-1} P_k^m\right)(\tau + t_w^n - t_o^n) - P_n^m \int_{t_o^n}^{\tau+t_w^n} \varepsilon^n(P_o)\,dt - J_{\infty}^{no}. \tag{17}$$

Jeśli rozważać odstawienia jedno i dwukrotne łącznie, to w funkcji korzyści J_{nI}^{o} istnieje pewna nieścisłość w uwzględnieniu wzajemnego wpływu odstawień: w iloczynie $\Delta\varepsilon_{sr}^n \sum_{k=1}^{n-1} P_k^m(\tau + t_w^n - t_o^n)$ należałoby potraktować odmiennie te części wykresu (rys. 2.3 linia przerywana), dla

których nie jest spełnione założenie o rozkładzie chwil odstawień i włączeń (rys. 1.1). Godzimy się na tę nieścisłość.

$\varepsilon^n(P_o)$ jest funkcją schodkową P_o, a więc jest funkcją schodkową czasu t Łatwo spostrzec, że przez całą szerokość stopnia: $\varepsilon^n = \text{const}$. funkcja korzyści jest funkcją liniową czasów $\mathbf{t}_n$. A więc funkcja J^o_{nI} jest powierzchnią złożoną z płaszczyzn nachylonych do siebie pod różnymi kątami, zaś J^o_{nII} jest hiperpowierzchnią złożoną z hiperpłaszczyzn w przestrzeni 5-wymiarowej.

Do optymizacji funkcji korzyści nie warto stosować tu bezpośrednio programowania liniowego ze względu na występowanie wielu płaszczyzn. Z programowania liniowego wiadomo jednak, że kres górny funkcji wystąpi na przecięciu krawędzi płaszczyzn, a więc w chwilach $\mathbf{t}_n$ odpowiadających skokom funkcji $P_o(t)$. W punkcie takim wszystkie lewostronne i prawostronne pochodne mają różne znaki: lewostronne — plus, prawostronne — minus.

Obliczamy pochodne:

$$\frac{\partial J^o_{nII}}{\partial t^n_1} = K^m_n - \Delta\varepsilon^n_{śr} \sum_{k=1}^{n-1} P^m_k - P^m_n \varepsilon^n(t^n_1).$$

Warunek właściwych znaków pochodnej prawostronnej i lewostronnej jest następujący (indeks „−" znaczy: lewostronna wartość funkcji, indeks „+" — prawostronna, indeks „^" — czas optymalny):

$$\varepsilon^n_-(\hat{t}^n_1) < e^m_n - \Delta\varepsilon^n_{śr} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P^m_k}{P^m_n},$$

$$\varepsilon^n_+(\hat{t}^n_1) > e^m_n - \Delta\varepsilon^n_{śr} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P^m_k}{P^m_n},$$

$$\frac{\partial J^o_{nII}}{\partial t^n_2} = -K^m_n + \Delta\varepsilon^n_{śr} \sum_{k=1}^{n-1} P^m_k + P^m_n \varepsilon^n(t^n_2),$$

$$\varepsilon^n_-(\hat{t}^n_2) > e^m_n - \Delta\varepsilon^n_{śr} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P^m_k}{P^m_n},$$

$$\varepsilon^n_+(\hat{t}^n_2) < e^m_n - \varepsilon^n_{śr} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P^m_k}{P^m_n},$$

$$\frac{\partial J^o_{nII}}{\partial t^n_3} = K^m_n - \Delta\varepsilon^n_{śr} \sum_{k=1}^{n-1} P^m_k - P^m_n \varepsilon^n(t^n_3),$$

$$\varepsilon_{-}^{n}(\hat{t}_3^n) < e_n^m - \Delta\varepsilon_{śr}^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_k^m}{P_n^m},$$

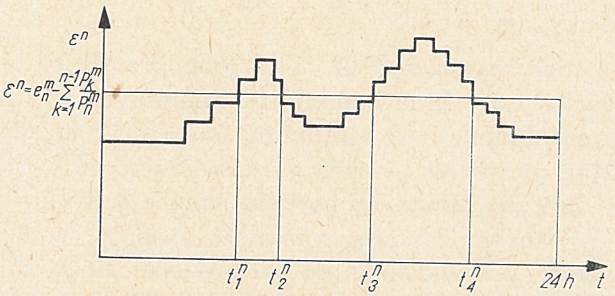
$$\varepsilon_{+}^{n}(\hat{t}_3^n) > e_n^m - \Delta\varepsilon_{śr}^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_k^m}{P_n^m},$$

$$\frac{\partial J_{n\,\mathrm{II}}^o}{\partial t_4^n} = -K_n^m + \Delta\varepsilon_{śr}^n \sum_{k=1}^{n-1} P_k^m + P_n^m \varepsilon^n(t_4^n),$$

$$\varepsilon_{-}^{n}(\hat{t}_4^n) > e_n^m - \Delta\varepsilon_{śr}^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_k^m}{P_n^m},$$

$$\varepsilon_{+}^{n}(\hat{t}_4^n) < e_n^m - \Delta\varepsilon_{śr}^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_k^m}{P_n^m}. \tag{18}$$

Interpretacja graficzna otrzymanych wyników jest bardzo prosta; pokazano ją na rys. 2.4. Jednak tak wyznaczone punkty odstawień muszą być jeszcze zweryfikowane: funkcja korzyści bowiem musi być większa



Rys. 2.4

$$\varepsilon^n = e_n^m - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_k^m}{P_n^m}$$

od zera. Wyznaczenie funkcji korzyści jest już elementarne; całki można zastąpić skończonymi sumami, jak to już uczyniono poprzednio (12).

W przypadku odstawiania jednokrotnego warunki odstawienia są następujące:

$$\frac{\partial J_{n\,\mathrm{I}}^o}{\partial t_w^n} = K_n^m - \Delta\varepsilon_{śr}^n \sum_{k=1}^{n-1} P_k^m - P_n^m \varepsilon^n(t_w^n),$$

$$\varepsilon_{-}^{n}(\hat{t}_w^n) < e_n^m - \Delta\varepsilon_{śr}^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_k^m}{P_n^m},$$

$$\varepsilon_+^n(\hat{t}_w^n) > e_n^m - \Delta\varepsilon_{śr}^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_k^m}{P_n^m},$$

$$\frac{\partial J_{nI}^o}{\partial t_o^n} = -K_n^m + \Delta\varepsilon_{śr}^n \sum_{k=1}^{n-1} P_k^m + P_n^m \varepsilon^n(t_o^n),$$

$$\varepsilon_-^n(\hat{t}_o^n) > e_n^m - \Delta\varepsilon_{śr}^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_k^m}{P_n^m},$$

$$\varepsilon_+^n(\hat{t}_o^n) < e_n^m - \Delta\varepsilon_{śr}^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_k^m}{P_n^m}. \tag{19}$$

Jak widać, otrzymuje się te same warunki, co przy odstawieniu dwukrotnym. Rys. 2.4 ilustruje więc również sposób wyznaczania punktów odstawienia jednokrotnego. Będą tu istniały po 2 rozwiązania na t_w^n i t_o^n i trzeba tu rozważyć wszystkie realne przypadki (rys. 2.4):

1) $t_w^n = t_1^n, \quad t_o^n = t_4^n,$

2) $t_w^n = t_3^n, \quad t_o^n = t_4^n,$

3) $t_w^n = t_1^n, \quad t_o^n = t_2^n,$

dla każdego z nich wyznaczyć J_{oI}^n i wybrać przypadek odpowiadający największej wartości J_{oI}^n. Inne kombinacje zmiennych są niedopuszczalne lub dają nie maksimum, lecz minimum funkcji. Takie jest stanowisko formalne. Faktycznie jeden z trzech przypadków musi być wyeliminowany. Algorytm obliczeń powinien bowiem rozpoczynać się od obciążenia szczytowego, w którym pracują wszystkie zespoły, w tym oczywiście również wszystkie przewidziane do odstawień. Niech takim punktem szczytowym będzie np. drugi szczyt, szczyt wieczorny. Ponieważ w szczycie tym musi pracować również zespół n-ty, przypadek 3) jest więc niejako automatycznie wyeliminowany z rozważań.

Różnicę między korzyścią z odstawienia 1) (odstawienie w dolinie nocnej $t_w^n = t_1^n$, $t_o^n = t_4^n$ rys. 2.4) i odstawieniem 2) (odstawienie w dolinie nocnej i w szczycie porannym $t_w^n = t_3^n$, $t_o^n = t_4^n$) można wyznaczyć bezpośrednio:

$$\Delta J_{nI-I}^o = \left(K_n^m - \Delta\varepsilon_{śr}^n \sum_{k=1}^{n-1} P_k^m\right)[(\tau + \hat{t}_1^n - t_4^n) - (\tau + \hat{t}_3^n - \hat{t}_4^n)] +$$

$$- P_n^m \left(\int_{\hat{t}_4^n}^{\tau+\hat{t}_1^n} \varepsilon^n(P_o)\,dt - \int_{\hat{t}_4^n}^{\tau+\hat{t}_3^n} \varepsilon^n(P_o)\,dt \right) = P_n^m \int_{\hat{t}_1^n}^{\hat{t}_3^n} \varepsilon^n(P_o)\,dt +$$

$$- \left(K_n^m - \Delta\varepsilon_{śr}^n \sum_{k=1}^{n-1} P_k^m\right)(\hat{t}_3^n - \hat{t}_1^n),$$

stąd wynika, że jeśli

$$\int_{\hat{t}_1^n}^{\hat{t}_3^n} \varepsilon^n(P_o)\,dt > \left(e_n^m - \Delta\varepsilon_{śr}^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_k^m}{P_n^m}\right)(\hat{t}_3^n - \hat{t}_1^n), \tag{20}$$

bardziej opłaci się odstawienie tylko w dolinie nocnej; jeśli nierówność ma zwrot przeciwny — bardziej opłaci się odstawienie i w dolinie nocnej i w szczycie porannym. Całka w tej nierówności jest jak wiadomo sumą skończoną stosunkowo niewielkiej liczby wyrazów.

B. Rozważmy teraz, kiedy opłaci się odstawić zespoły *jednokrotnie* w ciągu doby, kiedy zaś *dwukrotnie* w ciągu doby. Różnicę korzyści między odstawieniem jednokrotnym i dwukrotnym wyznaczymy bezpośrednio. Punkty odstawień przy poczynionych założeniach pokrywają się w obu przypadkach.

B1. Odstawienie jednokrotne następuje *w dolinie nocnej i w szczycie porannym.*

$$\Delta J^o_{n,\,\mathrm{I-II}} = J^{no}_{\infty} + \left(K_n^m - \Delta\varepsilon_{śr}^n \sum_{k=1}^{n-1} P_k^m\right)[(\tau + \hat{t}_3^n - \hat{t}_4^n) +$$

$$-(\tau + \hat{t}_1^n + \hat{t}_3^n - \hat{t}_2^n - \hat{t}_4^n)] - P_n^m \left(\int_{\hat{t}_4^n}^{\tau+\hat{t}_3^n} \varepsilon^n(P_o)\,dt - \int_{\hat{t}_2^n}^{\hat{t}_3^n} \varepsilon^n(P_o)\,dt +\right.$$

$$\left. - \int_{\hat{t}_4^n}^{+\hat{t}_1^n} \varepsilon^n(P_o)\,dt\right) = J^{no}_{\infty} + \left(K_n^m - \Delta\varepsilon_{śr}^n \sum_{k=1}^{n-1} P_k^m\right)(\hat{t}_2^n - \hat{t}_1^n) - P_n^m \int_{\hat{t}_1^n}^{\hat{t}_2^n} \varepsilon^n(P_o)\,dt$$

$$\Delta J^o_{n,\mathrm{I-II}} > 0,$$

gdy:

$$\int_{\hat{t}_1^n}^{\hat{t}_2^n} \varepsilon^n(P_o)\,dt < \frac{J^{no}_{\infty}}{P_n^m} + \left(e_n^m - \Delta\varepsilon_{śr}^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_k^m}{P_n^m}\right)(\hat{t}_2^n - \hat{t}_1^n). \tag{21}$$

Jeśli nierówność ta jest spełniona, więcej paliwa zaoszczędzi się przez odstawienie jednokrotne (włącznie w szczycie wieczornym), jeśli nie jest spełniona — przez odstawienie w obu dolinach: nocnej i południowej.

B2. Odstawienie jednokrotne tylko *w dolinie nocnej.* Rozumowanie analogiczne do przeprowadzonego w B1 prowadzi do następującej nierówności:

$$\int_{\hat{t}_2^n}^{\hat{t}_3^n} \varepsilon^n(P_o)\,dt > \left(e_n^m - \Delta\varepsilon_{śr}^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_k^n}{P_n^m}\right)(\hat{t}_3^n - \hat{t}_2^n) - \frac{J^{no}_{\infty}}{P_n^m}. \tag{22}$$

Odstawienie jednokrotne tylko w dolinie nocnej daje oszczędność paliwa większą niż odstawienie dwukrotne, gdy spełniona jest powyższa nierówność; w przeciwnym przypadku większą oszczędność paliwa daje odstawienie dwukrotne.

C. *Aspekt techniczny odstawień.* Zagadnienie tzw. szybkich rozruchów zespołów jest bardzo złożone. Przeprowadzane tu rozważania dotyczą tylko pewnego jego fragmentu, a mianowicie: oszczędności paliwa. Nie poruszają one innych aspektów tej sprawy, a niestety inne aspekty obniżają wartość zysków obliczonych na podstawie przeprowadzonych tu rozważań. Te ujemne strony odstawień to przede wszystkim:

zmiany naprężeń termicznych poszczególnych części kotłów i turbin, powodujące skrócenie czasu życia urządzeń i zmniejszenie ich współczynnika niezawodności;

wzrost liczby manipulacji urządzeniami zespołów (np. zaworami), powodujący szybsze ich zużycie (np. nieszczelności) i zwiększający liczbę okazji do awarii;

powiększenie ilości pracy załogi, co wprawdzie nie musi pociągać zwiększenia liczebności załogi, ale może powodować komplikacje w rozkładzie ich zajęć i trudności organizacyjne.

Wymienione tu sprawy niełatwo jest ująć rachunkiem ekonomicznym. Jest to wszakże możliwe, jednak wykracza tematycznie poza ramy niniejszego opracowania, w którym podaje się jedynie metodę wyznaczania wartości zaoszczędzonego paliwa. Niemniej jednak należy bardzo starannie przeanalizować wszystkie aspekty, typując zespoły nadające się do odstawień.

W rozważaniach ograniczamy się do zespołów uprzednio już wytypowanych do odstawień.

2.5. Odstawienia przy dokładniejszym uwzględnieniu krzywej strat z odstawienia

A. *Odstawienie jednokrotne.* Rozważmy teraz odstawienie jednokrotne przy uwzględnieniu bardziej dokładnej funkcji strat z odstawienia. Przyjmujemy mianowicie, ze straty odstawienia są następującą funkcją t_w^n, t_o^n (zob. apendyks A14):

$$I_{\mathrm{I}}^{no}(\mathbf{t}_n) = J_c^n + J_p^n\left(1-\exp\left(-\frac{\tau+t_w^n-t_o^n}{T_{np}}\right)\right)+$$

$$+\frac{J_n}{1-\exp\left(-\frac{\tau}{T_n}\right)}\left(1+\exp\left(-\frac{\tau}{T_n}\right)-\exp\left(-\frac{t_o^n-t_w^n}{T_n}\right)-\exp\left(-\frac{\tau+t_w^n-t_o^n}{T_n}\right)\right). \quad (23)$$

Przybliżona funkcja korzyści z odstawienia przybiera teraz postać następującą:

$$J^o_{nI} = \left(K^m_n - \Delta\varepsilon^n_{śr}\sum_{k=1}^{n-1} P^m_k\right)(\tau + t^n_w - t^n_o) - P^m_n \int_{t^n_o}^{\tau+t^n_w} \varepsilon^n(P_o)\,dt +$$

$$-\left[J^n_c + J^n_p\left(1-\exp\left(-\frac{\tau+t^n_w-t^n_o}{T_{np}}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{J^n}{1-\exp\left(-\frac{\tau}{T_n}\right)}\left(1+\exp\left(-\frac{\tau}{T_n}\right)-\exp\left(-\frac{t^n_o-t^n_w}{T_n}\right)-\exp\left(-\frac{\tau+t^n_w-t^n_o}{T_n}\right)\right)\right]. \quad (24)$$

Zgodnie z uwagami z rozdziałów 2.2 i 2.3 uważamy, że kres górny funkcji występować może w punktach ekstremalnych i w ostrzach. Wyznaczamy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial J^o_{nI}}{\partial t^n_w} = K^m_n - \Delta\varepsilon^n_{śr}\sum_{k=1}^{n-1} P^m_k - P^m_n\varepsilon^n(t^n_w) - \frac{J^n_p}{T_{np}}\exp\left(-\frac{\tau+t^n_w-t^n_o}{T_{np}}\right)+$$

$$-\frac{J_n}{\left(1-\exp\left(-\frac{\tau}{T_n}\right)\right)T_n}\left(-\exp\left(-\frac{t^n_o-t^n_w}{T_n}\right)+\exp\left(-\frac{\tau+t^n_w-t^n_o}{T_n}\right)\right),$$

$$\frac{\partial J^o_{nI}}{\partial t^n_o} = -K^m_n + \Delta\varepsilon^n_{śr}\sum_{k=1}^{n-1} P^m_k + P^m_n\varepsilon^n(t^n_o) + \frac{J^n_p}{T_{np}}\exp\left(-\frac{\tau+t^n_w-t^n_o}{T_{np}}\right)+$$

$$+\frac{J_n}{\left(1-\exp\left(-\frac{\tau}{T_n}\right)\right)T_n}\left(-\exp\left(-\frac{t^n_o-t^n_w}{T_n}\right)+\exp\left(-\frac{\tau+t^n_w-t^n_o}{T_n}\right)\right). \quad (25)$$

Załóżmy teraz, że największa wartość funkcji występuje w ostrzu, to znaczy że pochodne cząstkowe (25) w rozpatrywanym zakresie zmiennych t^n_w i t^n_o nie są równe zeru przy żadnej ze stałych wartości ε^n_i. Zauważmy ponadto, że funkcje wykładnicze występujące w (24) i (25) są to w gruncie rzeczy funkcje czasu trwania odstawienia: $\Delta O = \tau + t^n_w - t^n_o$ i włączenia zespołu: $\Delta W = t^n_o - t^n_w$, a ze względu na zależność: $\Delta W = \tau - \Delta O$ są to wyłącznie funkcje czasu trwania odstawienia. Warunki

na prawostronne i lewostronne pochodne będą teraz miały postać następującą:

$$\varepsilon_{-}^{n}(t_w^n) < e_n^m - \Delta\varepsilon_{śr}^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_k^m}{P_n^m} - \frac{1}{P_n^m}\left[\frac{J_p^n}{T_{np}} \exp\left(-\frac{\Delta O}{T_{np}}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{J_n}{\left(1-\exp\left(-\frac{\tau}{T_n}\right)\right)T_n}\left(-\exp\left(-\frac{\Delta W}{T_n}\right)+\exp\left(-\frac{\Delta O}{T_n}\right)\right)\right],$$

$$\varepsilon_{+}^{n}(t_w^n) > e_n^m - \Delta\varepsilon_{śr}^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_k^m}{P_n^m} - \frac{1}{P_n^m}\left[\frac{J_p^n}{T_{np}} \exp\left(-\frac{\Delta O}{T_{np}}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{J_n}{\left(1-\exp\left(-\frac{\tau}{T_n}\right)\right)T_n}\left(-\exp\left(-\frac{\Delta W}{T_n}\right)+\exp\left(-\frac{\Delta O}{T_n}\right)\right)\right],$$

$$\varepsilon_{-}^{n}(t_o^n) > e_n^m - \Delta\varepsilon_{śr}^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_k^m}{P_n^m} - \frac{1}{P_n^m}\left[\frac{J_p^n}{T_{np}} \exp\left(-\frac{\Delta O}{T_{np}}\right) + \frac{J_n}{\left(1-\exp\left(-\frac{\tau}{T_n}\right)\right)T_n} \times \right.$$

$$\left. \times\left(-\exp\left(-\frac{\Delta W}{T_n}\right)+\exp\left(-\frac{\Delta O}{T_n}\right)\right)\right],$$

$$\varepsilon_{+}^{n}(t_o^n) < e_n^m - \Delta\varepsilon_{śr}^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_k^m}{P_n^m} - \frac{1}{P_n^m}\left[\frac{J_p^n}{T_{np}} \exp\left(-\frac{\Delta O}{T_{np}}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{J_n}{\left(1-\exp\left(-\frac{\tau}{T_n}\right)\right)T_n}\left(-\exp\left(-\frac{\Delta W}{T_n}\right)+\exp\left(-\frac{\Delta O}{T_n}\right)\right)\right]. \qquad (26)$$

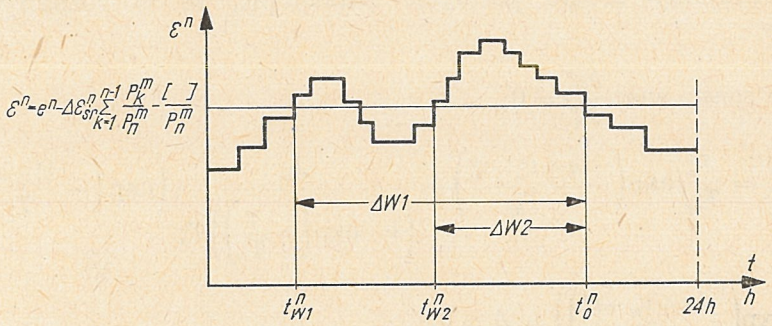
Wyrażenia w nawiasie kwadratowym mają tę samą wartość we wszystkich czterech nierównościach. Świadczy to o tym, że punkty odstawień i włączeń również i w tym przypadku leżą na prostych równoległych do osi t; interpretacja graficzna rozwiązania pokazana jest na rys. 2.5. Rozwiązanie nierówności (26) nie jest w gruncie rzeczy tak trudne, jak to na pozór wygląda.

Postępowanie może tu być następujące. Zastosować obliczenie uproszczone z rozdz. 2.4, a więc przy stałych kosztach z odstawienia [wzory (19) i (20)]. Pozwoli to ustalić:

1) przybliżone punkty odstawień i włączeń,
2) czy odstawienie jest bardziej opłacalne tylko w dolinie nocnej, czy również i w szczycie porannym.

Daje to już pierwsze przybliżenie na ΔW i ΔO (rys. 2.5), co z kolei pozwoli wyznaczyć wartość funkcji w nawiasie. Jeśli wartość ta jest na tyle duża, że zmieni punkty t_w^n i t_o^n, to należy wykonać następne obliczenie przy skorygowanych wartościach ε^n, ΔO, ΔW.

Może się tu zdarzyć, że prosta na rys. 2.5 pokryje się z odcinkiem $\varepsilon^n(t) = \varepsilon_i^n$. O ile przy funkcji liniowej kosztów (rozdz. 2.4) znaczyć to



Rys. 2.5

$$\varepsilon^n = e^n - \Delta\varepsilon_{sr}^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_k^m}{P_n^m} - \frac{[\ ]}{P_n^m}$$

mogło tylko, że płaszczyzna kosztów była przy tych wartościach równoległa do płaszczyzny wyznaczonej osiami t_w^n, t_o^n, a więc w zasadzie miała w tym obszarze wartość stałą, i obojętne było, które z punktów odcinka wspólnego przyjmiemy jako punkty t_w^n i t_o^n, o tyle w tym przypadku (nieliniowej funkcji kosztów) trzeba spodziewać się, że rozwiązaniem będzie punkt prostej na odcinku wspólnym z odcinkiem ε_i^n, określony przez przyrównanie do zera pochodnych cząstkowych (25).

W tym jednakże przypadku należałoby stwierdzić, czy wyznaczone ekstremum jest maksimum funkcji. Można to zrobić bezpośrednio przez porównania wartości funkcji korzyści w punkcie ekstremalnym i w dwóch sąsiednich ostrzach lub wyznaczyć znak $d^2J_n^o$, co — jak już było wspomniane — sprowadza się do zbadania, czy pewna forma kwadratowa (8) jest ujemnie oznaczona:

$$\sum_i \sum_j \frac{\partial^2 J_o^n}{\partial t_i^n \partial t_j^n} dt_i^n dt_j^n < 0.$$

W przypadku jednokrotnego odstawienia forma ta przybiera postać następującą:

$$\frac{\partial^2 J_o^n}{\partial t_w^{n2}} dt_w^{n2} + 2 \frac{\partial^2 J_o^n}{\partial t_w^n \partial t_o^n} dt_w^n dt_o^n + \frac{\partial^2 J_o^n}{\partial t_o^{n2}} dt_o^{n2} < 0.$$

Taka forma kwadratowa, jak wiadomo, jest ujemnie oznaczona, jeśli wyróżnik formy jest dodatni:

$$\frac{\partial^2 J_o^n}{\partial t_w^{n2}} \cdot \frac{\partial^2 J_o^n}{\partial t_o^{n2}} - \left(\frac{\partial^2 J_o^n}{\partial t_w^n \partial t_o^n}\right)^2 > 0$$

i jeśli jednocześnie:

$$\frac{\partial^2 J_o^n}{\partial t_w^{n2}} < 0.$$

Wyznaczamy drugie pochodne pamiętając, że w rozpatrywanym punkcie:

$$\varepsilon^n = const, \text{ więc } \frac{\partial \varepsilon^n}{\partial t_i^n} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 J_o^n}{\partial t_w^{n2}} = \frac{J_p^n}{T_{np}^2} \exp\left(-\frac{\tau + t_w^n - t_o^n}{T_{np}}\right) + \frac{J_n}{\left(1 - \exp\left(-\frac{\tau}{T_n}\right)\right) T_n^2} \left(\exp\left(-\frac{t_w^n - t_w^n}{T_n}\right) + \right.$$

$$\left. + \exp\left(-\frac{\tau + t_w^n - t_o^n}{T_n}\right)\right) = A > 0,$$

$$\frac{\partial^2 J_n^o}{\partial t_o^{n2}} = A, \qquad \frac{\partial^2 J_n^o}{\partial t_w^n \partial t_o^n} = -A.$$

Wyróżnik formy jest tu równy zeru, forma jest więc półoznaczona dodatnio; zbadajmy bezpośrednio samą formę kwadratową:

$$A\,\mathrm{d}t_w^{n2} - 2A\,\mathrm{d}t_w^n \mathrm{d}t_o^n + A\,\mathrm{d}t_o^{n2} = A(\mathrm{d}t_w^n - \mathrm{d}t_o^n)^2 > 0,$$

gdyż $A > 0$. Forma ta jest więc zawsze nieujemna.

Punkt ekstremalny jest wątpliwym lokalnym minimum funkcji korzyści i można go wyłączyć z rozważań. Maksimum zachodzi więc wyłącznie w ostrzach, a więc w tych chwilach, w których następuje skokowa zmiany funkcji $P_o(t)$.

Różnicę między korzyścią z odstawienia tylko w *dolinie nocnej* a odstawienia i w *dolinie nocnej, i w szczycie wieczornym* wyznacza się w sposób analogiczny, jak w rozdz. 2.4, z tym jednakże że wystąpią tu również straty z odstawienia. Odstawienie tylko w dolinie nocnej jest korzystniejsze, jeśli zachodzi nierówność przybliżona:

$$\int_{\hat{t}_1^n}^{\hat{t}_3^n} \varepsilon^n(P_o)\mathrm{d}t > \left(e_n^m - \Delta\varepsilon_{sr}^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_k^m}{P_n^m}\right)(\hat{t}_3^n - \hat{t}_1^n) +$$

$$+ \frac{1}{P_n^m}\left[J_p^n\left(\mathrm{xep}\left(-\frac{\tau + \hat{t}_3^n - \hat{t}_4^n}{T_{np}}\right) - \exp\left(-\frac{\tau + \hat{t}_1^n - \hat{t}_4^n}{T_{np}}\right)\right) + \frac{J_n}{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{T_n}\right)} \times\right.$$

$$\times\left(\exp\left(-\frac{\hat{t}_4^n-\hat{t}_1^n}{T_n}\right)+\exp\left(-\frac{\tau+\hat{t}_1^n-\hat{t}_4^n}{T_n}\right)-\exp\left(-\frac{\hat{t}_4^n-\hat{t}_3^n}{T_n}\right)+\right.$$

$$\left.-\exp\left(-\frac{\tau+\hat{t}_3^n-\hat{t}_4^n}{T_n}\right)\right)\Bigg]. \tag{27}$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest ujemne; z tego wynika, że uwzględnienie dokładniejsze strat z odstawienia „ułatwia" jak gdyby spełnienie nierówności (27), a więc działa w kierunku wzrostu opłacalności odstawienia jedynie w dolinie nocnej.

B. *Odstawienie dwukrotne.* Odstawienie dwukrotne w ciągu doby dotyczy raczej zespołów o mniejszej mocy, a takimi są w Polsce zespoły o starszych kotłach z grubym obmurzem, a więc o dużych stosunkowo stałych czasowych T_n. Należy się więc spodziewać, że te właśnie kotły przy odstawieniu dwukrotnym nie osiągają stanu pracy ustalonej, a więc tu właśnie należałoby stosować wzory dokładniejsze na straty z odstawienia.

$$J^o_{n\,\mathrm{II}}=\left(K^m_n-\Delta\varepsilon^n_{śr}\sum_{k=1}^{n-1}P^m_k\right)(\tau+t^n_1+t^n_3-t^n_2-t^n_4)+$$

$$-P^m_n\left(\int_{t^n_2}^{t^n_3}\varepsilon^n(P_o)\mathrm{d}t+\int_{t^n_4}^{\tau+t^n_1}\varepsilon^n(P_o)\mathrm{d}t\right)-J^{no}_{\mathrm{II}}(\mathbf{t}_n).$$

$J^{no}_{\mathrm{II}}(\mathbf{t}_n)$ wyraża się wzorem (A13), podanym w apendyksie, i jest również funkcją wyłącznie czasu trwania włączeń i odstawień, nie zaś samych momentów włączeń i odstawień. By nie skomplikować wzorów, nie będziemy tu rozwijać wyrażenia na straty z dwukrotnego odstawienia. Nie będziemy tu również wypisywać wzorów na dwukrotne odstawienie, gdyż mają one postać identyczną z nierównościami (18), z tym jednakże, że do prawych stron tych nierówności należy dopisać wyrażenie $-\frac{\partial J^{no}_{\mathrm{II}}}{\partial t^n_i}$. Punkty optymalne $(\hat{\mathbf{t}}_n)$ leżą tu również na przecięciu pewnej prostej z krzywą schodkową $\varepsilon^n(t)$.

Podobnie przedstawia się również porównanie opłacalności odstawień jednokrotnych i dwukrotnych:

odstawienie *jednokrotne w dolinie nocnej i szczycie porannym* jest bardziej opłacalne od odstawienia *dwukrotnego*, jeśli spełniona jest nierówność przybliżona:

$$\int_{\hat{t}^n_1}^{\hat{t}^n_2}\varepsilon^n(P_o)\mathrm{d}t<\frac{1}{P^m_n}\left(J^{no}_{\mathrm{II}}(\hat{\mathbf{t}}_n)-J^{no}_{\mathrm{I}}(\hat{\mathbf{t}}_n)\right)+\left(e^m_n-\Delta\varepsilon^n_{śr}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{P^m_k}{P^m_n}\right)(\hat{t}^n_2-\hat{t}^n_1),$$

odstawienie *jednokrotne tylko w dolinie nocnej* jest bardziej opłacalne od odstawienia *dwukrotnego*, jeśli spełniona jest nierówność przybliżona:

$$\int_{\hat{t}_2^n}^{\hat{t}_3^n} \varepsilon^n(P_o)\mathrm{d}t > \left(e_n^m - \Delta\varepsilon_{śr}^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_k^m}{P_n^m}\right)(\hat{t}_3^n - \hat{t}_2^n) - \frac{1}{P_n^m}\left(J_{\mathrm{II}}^{no}(\hat{\mathbf{t}}_n) - J_{\mathrm{I}}^{no}(\hat{\mathbf{t}}_n)\right).$$

3. WNIOSKI

Przedstawiona tu teoria odstawień i propozycje uproszczeń pozwalają na łatwe ułożenie algorytmów obliczeń.

Słabym punktem obliczeń jest nieznajomość funkcji strat z odstawienia. Podane tu propozycje uproszczonej postaci funkcji strat, która mimo tych uproszczeń jest bardzo skomplikowana, pozwalają na przewidywanie pewnych uproszczeń, gdy znane będą wartości liczbowe stałych czasowych i współczynników występujących w funkcji.

Zdaniem autora niniejszego opracowania szczególnie owocna może być linearyzacja funkcji strat w obszarze zmienności zmiennych w pobliżu punktu optymalnego $\hat{\mathbf{t}}_n$, wyznaczonym z przebiegu grafiku obciążeń dobowych $P_o(t)$.

Zaproponowane obliczenia odstawień są dość skomplikowane, jednak wiele z tych obliczeń, zwłaszcza najbardziej pracochłonnych, jest jednorazowych; nie trzeba ich powtarzać przy bieżącym wyznaczaniu odstawień.

Apendyks

Straty z odstawienia

A.1. Etapy odstawienia i rozruchu

Proces odstawienia i ponownego rozruchu kotła i turbiny jest złożony. Zwykle wyróżnić w nim można następujące etapy, przedstawione tu w wielkim uproszczeniu:

a) Odstawienie zespołu:

1) zmniejszenie obciążenia do minimum technicznego P_n^m (lub nawet niekiedy niżej);

2) wstrzymanie dopływu paliwa i wyłączenie turbiny i generatora;

3) okres stygnięcia kotła i turbiny.

b) Włączenie zespołu:

1) rozpalenie i rozruch kotła;

2) doprowadzenie pary do temperatury wewnętrznych części turbiny;

3) włączenie turbiny i synchronizacja generatora;

4) stopniowe obciążenie zespołu;

5) praca przy obniżonej jeszcze sprawności, na skutek nagrzewania ostudzonych części zespołu.

Straty związane bezpośrednio z odstawieniem, dotyczące punktu a, 1), są spowodowane procesem zmniejszenia obciążenia. Zmniejszanie obciążenia odbywa się na ogół ze stałą prędkością, właściwą rozważanemu zespołowi. Nie czyniąc chyba większego błędu założyć można, że są one proporcjonalne do wartości mocy, podlegającej zmniejszeniu, a więc wyrazić je można w sposób następujący:

$$e_r^n(P_n(t_o^n)-P_n^m).$$

Nie są one zależne od okresu trwania odstawienia, a wyłącznie od chwili, w której nastąpiło odstawienie $(P_n(t_o^n))$.

Z punktem a, 2) nie są w zasadzie związane straty w momencie wykonywania tych czynności. Powstałe tu straty bedą pokryte dopiero przy włączaniu zespołu.

Z punktem a, 3) związane są pewne straty, a mianowicie straty energii zużytej na napędzanie jeszcze przez pewien czas po odstawieniu niektórych urządzeń pomocniczych zespołu. Ta część strat J_m^n jest więc stała. Stygnięcie zespołu w tym okresie nie jest połączone z kosztem. Koszty z tym związane zaczną się przy podgrzewaniu urządzenia w procesie włączania zespołu.

Straty bezpośrednio związane z *odstawieniem* wyrażają się więc wzorem przybliżonym:

$$J_{ob}^n = J_m^n + e_r^n\ P_n(t_o^n)-P_n^m).$$

Straty związane bezpośrednio z okresem *włączenia* są oczywiście znacznie wyższe niż omawiane powyżej. Powiążemy je również z czynnościami:

b, 1) Straty J_k^n rozpalenia i rozruchu kotła potraktować można jako wielkość stałą.

b, 2) Straty związane z doprowadzeniem pary do temperatury wewnętrznych części turbiny są zależne od stopnia ostygnięcia kotła i turbiny. Stygnięcie zarówno turbiny, jak i pary w kotle aproksymować można krzywą wykładniczą, a więc uważać straty za proporcjonalne do wyrażenia

$$e^{-\frac{t_w^n-t_o^n}{T_{nt}}}-e^{-\frac{t_w^n-t_o^n}{T_{np}}}.$$

Ta część strat będzie wymagała gruntowniejszej analizy, zwłaszcza jeśli chodzi o zespoły bardziej nowoczesne z „lekkimi" kotłami. Ponieważ obecnie odstawiane są zespoły starsze, proponuje się uznać tę część strat oraz straty związane z rozruchem turbiny (b, 3) za straty związane z doprowadzeniem pary do parametrów roboczych i traktować je jako liniowo zależne tylko od temperatury pary w kotle

$$J_p^n\left(1-e^{-\frac{t_w^n-t_o^n}{T_{np}}}\right).$$

b, 3) Straty na doprowadzenie turbiny do obrotów synchronicznych i utrzymanie tych obrotów w okresie synchronizacji są małe; można je traktować jako wartość stałą. Mogą być więc wliczone do strat b, 2) i nie występują samodzielnie.

b, 4) Stopniowe obciążanie zespołu jest funkcją technicznego sposobu realizacji wstępnego obciążania zespołu. Do celu związanego z niniejszym opracowaniem należy chyba abstrahować od sposobu obciążania i uważać, że są to wyłącznie straty typu „regulacyjnych", a więc związane z podwyższaniem obciążenia zespołu, przeprowadzonym analogicznie jak poprzednio odciążanie, a więc szybko:

$$e_r^n(P_n(t_w^n)-P_n^m).$$

b, 5) Praca przy obniżonej sprawności zespołu jest wywołana dostarczaniem ciepła do wystudzonych przy odstawieniu części zespołu, przede wszystkim do obmu-

rza kotła. Tu ilość ciepła i stała czasu są zależne od wydajności i konstrukcji kotła. Wyznaczeniem strat J_s^n z tym związanych zajmiemy się w następnym rozdziale.

Straty związane z *włączeniem* zespołu wyrażają się więc zależnością:

$$J_w^n = J_k^n + J_p^n\left(1 - e^{-\frac{t_w^n - t_o^n}{T_{np}}}\right) + e_r^n(P_n(t_w^n) - P_n^m) + J_s^n(t_n).$$

A.2. Straty ze stygnięcia

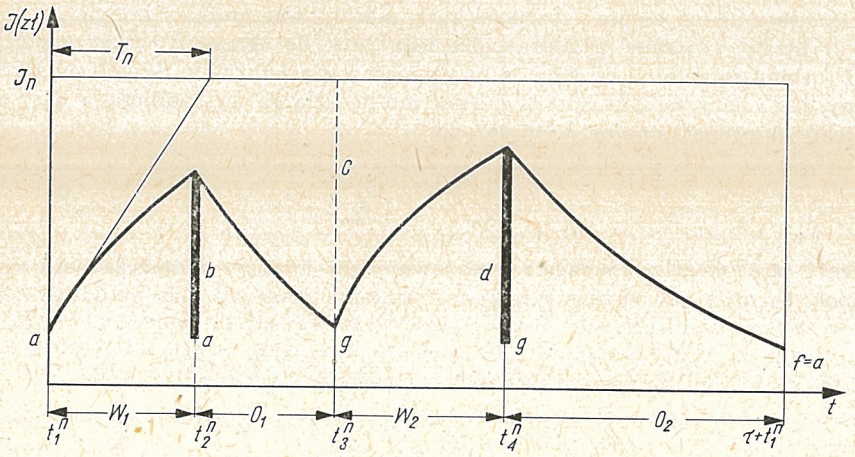
A. Odstawianie dwukrotne w ciągu doby

Zespół odstawiany jednokrotnie lub dwukrotnie w ciągu doby osiąga po pewnej liczbie cykli ustalony (powtarzający się) stan termiczny, odpowiedni dla założonego cyklu pracy przerywanej. Na rys. A.1 pokazano stan ustalony nagrzewania i stygnięcia przy dwukrotnym odstawieniu w ciągu doby. Oznaczenia na tym rysunku są następujące:

J_n — koszt nagrzewania zespołu od temperatury otoczenia do temperatury ustalonej przy pracy ciągłej,

a, b, c ... — odcinki (mierzone w złotych) odpowiadające stratom ciepła,

w_1, o_1, w_2, o_2 — okresy włączenia (w) i odstawienia (o), mierzone jako część stałej czasowej T_n zespołu.



Rys. A.1

Zakłada się, że nagrzewanie i stygnięcie odbywa się według krzywej wykładniczej, a stała czasowa nagrzewania i stygnięcia jest jednakowa i równa T_n.

Zadaniem naszym jest wyznaczenie kosztu strat ze stygnięcia w funkcji czasów odstawień i włączeń t_i lub, co na jedno wychodzi, w funkcji długości okresów odstawienia i włączenia zespołu: o_1, w_1, o_2, w_2 (rys. A.1). Stygnięcie zespołu jest bezpłatne, kosztuje natomiast jego ponowne nagrzewanie, więc:

$$J_s^n(t_n) = b(w_1, o_1, w_2, o_2) + d(w_1, o_1, w_2, o_2).$$

Ustalony stan pracy zespołu nastąpi wtedy, gdy ilość ciepła pozostała w zespole po drugim odstawieniu jest równa ilości ciepła, przy której nastąpiło pierwsze włączenie: $f = a$ (rys. A.1).

Zgodnie z oznaczeniami

$$o_1 = -\frac{t_3^n - t_2^n}{T_n} \text{ itd. (rys. A1)},$$

$$\tau = w_1 + o_1 + w_2 + o_2.$$

Wyznaczamy odcinki b oraz d.

$$b = (J_n - a)(1 - e^{w_1}), \tag{A1}$$

$$d = c(1 - e^{w_2}), \tag{A2}$$

$$c = J_n - (b + a)e^{o_1}, \tag{A3}$$

$$a = (d + g)e^{o_2}, \tag{A4}$$

$$g = (b + a)^{o_1}. \tag{A5}$$

W zależności A4 podstawiamy g (A5) i wyznaczamy a:

$$a = [d + (b + a)e^{o_1}]e^{o_2} = de^{o_2} + be^{o_1+o_2} + ae^{o_1+o_2},$$

stąd

$$a = \frac{de^{o_2} + be^{o_1+o_2}}{1 - e^{o_1+o_2}}; \tag{A6}$$

wyznaczamy c jako funkcję b oraz d:

$$c = J_n - \frac{bo^{o_1} + de^{o_1+o_2}}{1 - e^{o_1+o_2}}. \tag{A7}$$

Podstawiamy a (A6) w zależności A1, zaś c (A7) w A2; otrzymujemy dwa równania z dwiema niewiadomymi:

$$b = \left(J_n - \frac{de^{o_2} + be^{o_1+o_2}}{1 - e^{o_1+o_2}}\right)(1 - e^{w_1}),$$

$$d = \left(J_n - \frac{be^{o_1} + de^{o_1+o_2}}{1 - e^{o_1+o_2}}\right)(1 - e^{w_2}),$$

stąd:

$$d = J_n \frac{(1 - e^{o_1+o_2})(1 - e^{w_1})[(1 - e^{\tau-w_2}) - (1 - e^{w_1})e^{o_1}]}{1 + e^{2\tau-w_1-w_2} - e^{o_1+o_2} - e^{\tau}}, \tag{A.8}$$

$$b = J_n \frac{(1 - e^{o_1+o_2})(1 - e^{w_1})\{1 - e^{o_1+o_2} + e^{\tau+o_1+o_2} - e^{\tau} - (1 - e^{w_2})e^{o_2}[(1 - e^{\tau-w_2}) - (1 - e^{w_1})e^{o_1}]\}}{(1 - e^{\tau-w_2})(1 - e^{o_1+o_2} + e^{\tau+o_2+o_1} - e^{\tau})}. \tag{A.9}$$

Widać, że taka postać wyrażeń b oraz d nie nadaje się, praktycznie rzecz biorąc, do obliczeń ... jest zbyt skomplikowana. Trzeba wprowadzić uproszczenia. Uproszczenia wynikają z faktu, że obecnie dwukrotnie w ciągu doby (zwykle letniej) odstawia się zespoły o najmniejszej mocy, a więc o małych stałych czasowych T_n.

Jeśli założymy, że $T_n < 12$h, to znaczy, że:

$$\tau = w_1 + o_1 + w_2 + o_2 < -2, \text{ zaś } e^{-2} \approx 0{,}14.$$

Odrzućmy więc w wyrażeniach na b oraz d wszystkie wyrazy o wykładniku większym niż τ (dotyczy to wartości bezwzględnych wykładników ujemnych). Otrzymujemy:

$$J_s^n = b+d \approx J_n(2-e^{w_1}-e^{o_1}-e^{w_2}-e^{o_2}+e^{o_1+w_1}+e^{o_1+w_2}+e^{w_1+o_2}+e^{w_2+o_2}+$$
$$-e^{\tau-w_1}-e^{\tau-o_1}-e^{\tau-w_2}-e^{\tau-o_2}+2e^{\tau}). \tag{A.10}$$

Jeśli $T_n < 6h$, a więc $\tau < -4$ można posługiwać się wyrażeniem:

$$J_s^n \approx J_n(2-e^{w_1}-e^{o_1}-e^{w_2}-e^{o_2}+e^{o_1+w_1}+e^{o_1+w_2}-e^{w_1+o_1+w_2})$$

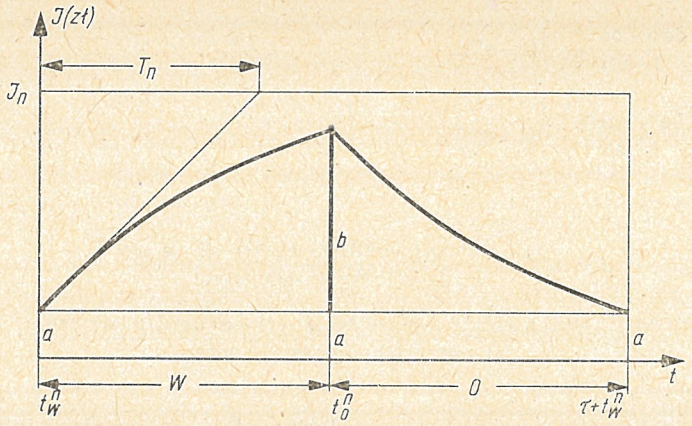
lub we właściwej symbolice:

$$J_s^n(t_n) \approx J_n\left(2-e^{-\frac{t_2^n-t_1^n}{T_n}}-e^{-\frac{t_3^n-t_2^n}{T_n}}-e^{-\frac{t_4^n-t_3^n}{T_n}}-e^{-\frac{\tau+t_1^n-t_4^n}{T_n}}+\right.$$
$$\left.+e^{-\frac{t_3^n-t_1^n}{T_n}}+e^{-\frac{t_4^n-t_2^n}{T_n}}+e^{-\frac{t_4^n-t_1^n}{T_n}}\right). \tag{A.11}$$

B. Odstawienie jednokrotne w ciągu doby

Rozważmy teraz jednokrotne odstawienie zespołu w ciągu doby. Koszt strat ze stygnięcia zespołu jest proporcjonalny do odcinka b z rys. A.2

$$b = (J_n-a)(1-e^w),$$
$$a = (b+a)e^o,$$



Rys. A.2

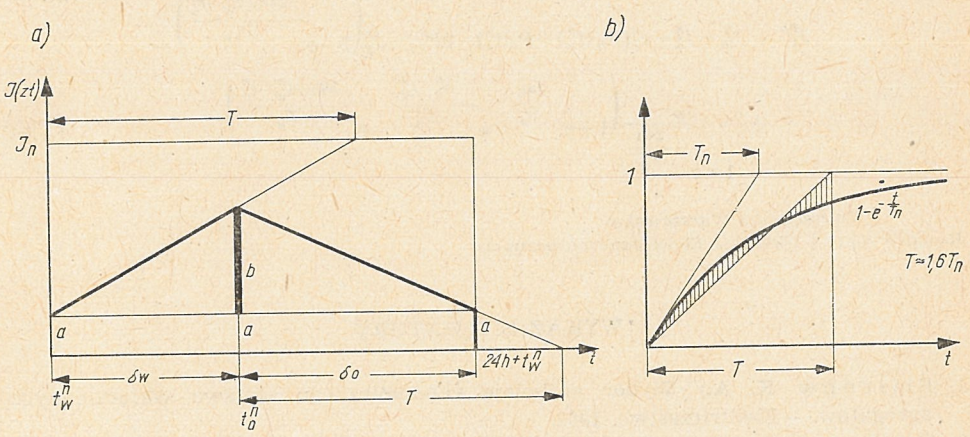
stąd:

$$b = J_n\frac{1-e^o-e^w+e^{\tau}}{1-e^{\tau}}$$

Po podstawieniu czasów t_w^n i t_o^n otrzymujemy:

$$J_s^n(t_n) = \frac{J_n}{1-e^{-\frac{\tau}{T_n}}}\left(1-e^{-\frac{t_o^n-t_w^n}{T_n}}-e^{-\frac{\tau+t_w^n-t_o^n}{T_n}}+e^{-\frac{\tau}{T_n}}\right). \tag{A.12}$$

Rozważmy obecnie, czy — jeśli zespoły mają duże stałe czasowe ($T_n \geqslant 12$h) — linearyzacja przebiegów stygnięcia prowadzi do uproszczeń zależności. Sposób linearyzacji przedstawia rys. A.3. Przebiegi przedstawiamy w postaci odcinków prostych, które odcinają na osi t (prosta $J = 0$) lub osi $J = J_n$ odcinki T (rys. A. 3A). Odcinek T wyznaczamy z warunku równości pól (rys. A. 3B):



Rys. A.3

$$\int_0^T \left(1-e^{-\frac{t}{T_n}}\right)dt = \int_0^T \frac{1}{T}\,t\,dt,$$

$$T \approx 1{,}6\,T_n.$$

Koszt strat ze stygnięcia zespołu, proporcjonalny do odcinka b na rys. A. 3A, wyznaczamy na podstawie zależności oczywistych wg tego rysunku:

$$b = \frac{J_n-a}{1{,}6\,T_n}(t_o^n-t_w^n) = (J_n-a)\,0{,}625\,\delta w,$$

$$a = \frac{b+a}{1{,}6T_n}[1{,}6\,T_n-(24\,\mathrm{h}+t_w^n-t_o^n)] = (b+a)(1-0{,}625\,\delta o).$$

Stąd:

$$b = J_s^{nw} = J_n\frac{0{,}625\,\delta w\,\delta o}{\tau-0{,}625\,\delta w\,\delta o}.$$

Postać tej zależności nie jest prosta; również skomplikowane są pochodne. Linearyzacja przebiegów nie wniosła więc spodziewanych uproszczeń. Również uproszczeń nie wnosi rozkład J_s na szereg potęgowy.

A.3. Funkcja strat z odstawienia

Teraz już można zestawić straty z odstawienia jako funkcję czasów włączenia i odstawienia.

A. Ostawienie dwukrotne

$$J_{II}^{no} = 2J_m^n + e_r^n(P_n(t_1^n)+P_n(t_2^n)+P_n(t_3^n)+P_n(t_4^n)-4P_n^m)+2J_k^n+$$
$$+J_p^n\left(2-e^{-\frac{t_3^n-t_2^n}{T_{np}}}-e^{-\frac{24h+t_1^n-t_4^n}{T_{np}}}\right)+$$
$$+J_n\left(2-e^{-\frac{t_2^n-t_1^n}{T_n}}-e^{-\frac{t_3^n-t_2^n}{T_n}}-e^{-\frac{t_4^n-t_3^n}{T_n}}-e^{-\frac{24h+t_1^n-t_4^n}{T_n}}+e^{-\frac{t_3^n-t_1^n}{T_n}}+e^{-\frac{t_4^n-t_2^n}{T_n}}+e^{-\frac{t_4^n-t_1^n}{T_n}}\right). \quad (A.13)$$

B. Odstawienie jednokrotne

$$J_I^{no} = J_m^n + J_k^n + e_r^n(P_n(t_w^n)+P_n(t_o^n)-2P_n^m)+J_p^n\left(1-e^{-\frac{24h+t_w^n-t_o^n}{T_{np}}}\right)+$$
$$+\frac{J_n}{1-e^{-\frac{24h}{T_n}}}\left(1+e^{-\frac{24h}{T_n}}-e^{-\frac{t_o^n-t_w^n}{T_n}}-e^{-\frac{24h+t_w^n-t_o^n}{T_n}}\right). \quad (A.14)$$

Politechnika Warszawska
Katedra Sieci i Układów Elektroenergetycznych

WYKAZ LITERATURY

1. Smirnow K. A.: Wybór najboleje ekonomicznogo sostawa wkluczіennych agregatow. — Elektriczestwo, 1962.
2. Bernas S., Szumilin W.: Le critère détermination de points économiques de la mise en service et hors service des ensembles dans les centrales thermiques. WPC, 1964, Rapp. 40.
3. Charakterystyka strat odstawienia, postoju i uruchomienia kotła. — Energetyka, 1965, nr 8, str. 238—230.

S. BERNAS

FUEL SAVINGS AS A RESULT OF THE SCHEDULED OUTAGES OF GENERATING UNITS IN POWER SYSTEM

Summary

In the paper presented the theory is developed which deals with the problem of selection of the optimal number of generating units in the power system operation. The theory is based on the assumption of load distribution using incremental cost rule.

The problem of dependence of the final solution from the cost of taking units into the operation has been particularly considered. In order to examine this dependence the exact formulas are derived and described in the appendix.

The economy of one and two scheduled outages in the day time has been discussed and some simplifying assumptions are proposed.

The theory presented can provide the starting point for some practical methods and computational procedures.

S. BERNAS

L'ÉCONOMIE DU COMBUSTIBLE DANS UN SYSTÈME PENDANT LA MISE HORS SERVICE DU BLOC CHAUDIÈRE-TURBO

Résumé

Le rapport présente une théorie de l'exploitation journatière d'un parc des Centrales Thermiques disponibles du point de vue de l'économie du combustible dans un système où l'optimisation des charges est faite à l'aide de la méthode „des coûts marginaux". En particulier on a examiné l'influence de l'exactitude des formules des coûts de démarrage sur la forme de la solution. C'est pourquoi les formules des coûts de démarrage présentées dans l'annexe ont les formes compliquées le plus possible.

On a examiné aussi est-ce qu'il vaut mieux mettre un bloc hors service une ou deux fois par jour. On a présenté la possibilité des hypothèses simplificatrices. Les considération peuvent servir comme une base des algorithmes assez simples.

S. BERNAS

BRENNSTOFFERSPARNIS BEI ABSTELLUNGEN FÜR DIE WARME RESERVE IM VERBUNDBETRIEBE

Zusammenfassung

Der Bericht umfasst die Theorie der Auswahl von Blockeinheiten der Dampfkraftwerken, welche versichert den minimalen Brennstoffverbrauch im Verbundbetriebe, bei welchem die Optimalisierung der Lastverteilung laut der Prinzip der Zuwachskosten bestimmt ist.

Besonders wurde der Einfluss von der Genauigkeit der Abstellungsverlusten auf die Form der Lösungen geprüft. Deswegen auch in der Ergänzung sind speziel die Formel der Abstellungsverluste in sehr komplizierter Form angegeben.

Es wurden auch die erlangten Vorteile bei ein und zweimahliger Abstellung binnen 24 Stunden erwogen und bezüglich die Vereinfachüng des Verfahrens vorgeschlagen.

Die Überlegung darf auch als Grundlage für die Ausarbeitung von verhältnissmässig einfachen Rechenprogrammen genommen werden.

С. БЭРНАС

ЭКОНОМИЯ ТОПЛИВА В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ПРИ „ОТСТАНОВКАХ"

Резюме

В статье рассмотрена проблема экономии топлива, связанной с выключением из работы и повторным включением блоков в теплоэлектростанциях по системе, в которой оптимизация нагрузок производится методом относительных прира-

щений. Даны точные и приблизительные формулы для определения оптимальных моментов выключений и включений в случае однократных или двукратных выключений в течение суток. Приведены критерии выбора однократного или двукратного выключения, а также критерии выбора момента включения при однократном выключении: в обоих периодах пика, утреннем и вечернем, или только в одном пике.

В приложении предложены разные виды формул функции потерь, вызванных отстановками. Рассмотрены тоже пути, ведущие к значительным упрощениям этих формул.

Приведенные рассуждения, формулы и упрощения могут быть непосредственно применены для разработки простых расчетных алгорифмов. Цель статьи состоит в доказательстве влияния более точного учёта потерь, связанных с отстановками, на вид решения проблемы.

621.313.236

ANDRZEJ CZAJKOWSKI

Analiza stanów ustalonych trójfazowego wzmacniacza magnetycznego zasilającego obwód typu R, E

Rękopis dostarczono 10.3.1965

W artykule przeprowadzono analizę pracy trójfazowego wzmacniacza magnetycznego z wewnętrznym sprzężeniem zwrotnym, w układzie mostkowym, pracującego na obciążenie typu *R*, *E* potraktowane jako odpowiednik twornika obcowzbudnego silnika prądu stałego z pominięciem jego indukcyjności.

Określono dla stanu ustalonego napięcia, pod wpływem których nasycane są dławiki wzmacniacza magnetycznego oraz wyznaczono przebieg charakterystyk mechanicznych silnika $v(\mu)$ w jednostkach względnych, dla całego zakresu zmian prędkości i obciążenia silnika oraz zmian prądu sterującego wzmacniacza.

Podano równanie krzywej rozgraniczającej obszar przewodzenia impulsowego prądu w obwodzie twornika, od obszaru przewodzenia ciągłego. Jednocześnie wskazano na pewien sposób sterowania, zapewniający uzyskanie prostoliniowych charakterystyk mechanicznych w obszarze przewodzenia impulsowego.

Uzyskanego wyniki można uważać za pierwszą część analizy obejmującej zagadnienia zasilania silników obcowzbudnych z trójfazowego wzmacniacza magnetycznego. Warto zauważyć, że zasadnicze wyniki analizy mogą być również wykorzystane przy rozpatrywaniu tyrystorowych układów sterowania.

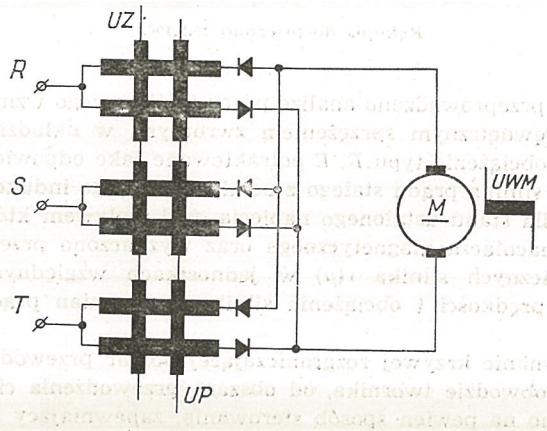
1. WSTĘP

Od przeszło dziesięciu lat obserwuje się rozwój zastosowań przemysłowych układu, w którym silnik obcowzbudny prądu stałego jest zasilany ze wzmacniacza magnetycznego (zwanego dalej w skrócie WM). W tym okresie czasu spośród najrozmaitszych rozwiązań wyłonił się dla napędów o mocy powyżej kilkuset watów zasadniczy układ, w którym obwód twornika silnika obcowzbudnego zasilany jest z sieci prądu przemiennego poprzez 3-fazowy, sześciodławikowy WM z wewnętrznym sprzężeniem zwrotnym. Układ taki stanowi najczęściej stopień wyjściowy złożonego układu automatycznej stabilizacji prędkości, o szerokim zakresie regulacji poziomu prędkości obrotowej. Główną jego zaletą jest znaczny przedział liniowości charakterystyk mechanicznych $n = f(M)$, symetria

obciążenia sieci 3-fazowej oraz dobre cieplne wykorzystanie silnika wynikające z wygładzonego przebiegu prądu twornika. Schemat ideowy samego 3-fazowego WM zasilającego twornik silnika podano na rys. 1.

Jak wiadomo, sposób pracy WM z wewnętrznym sprzężeniem zwrotnym w znacznym stopniu zależy od charakteru jego obciążenia. Wydaje się, że opublikowane dotychczas prace nie obejmują dużej części zagadnień związanych z zasilaniem twornika silnika obcowzbudnego z 3-fazowego WM.

Artykuł niniejszy ma na celu analizę pracy powyższego układu w stanie ustalonym, z pominięciem indukcyjności obwodu twornika, w przy-



Rys. 1. Schemat ideowy 3-fazowego, sześciodławikowego wzmacniacza magnetycznego z wewnętrznym sprzężeniem zwrotnym, zasilającego twornik silnika obcowzbudnego prądu stałego

UZ — uzwojenie zadające WM, *UP* — uzwojenie podmagnesowania wstępnego WM, *UWM* — uzwojenie wzbudzenia obcego silnika

padku, gdy rdzenie WM zostały wykonane z materiału o tzw. prostokątnej pętli histerezy (stopy żelazo-nikiel, teksturowana blacha krzemowa), zapewniającej występowanie w czasie pracy WM wyraźnie zaznaczonego kąta nasycenia rdzeni dławików. Analiza ta zostanie wykonana głównie pod kątem widzenia własności napędowych układu. Z tego względu rzeczą zasadniczą jest ustalenie wielkości, którą można by przyjąć jako parametr pracy układu. Z punktu widzenia praktyki celowe byłoby rozpatrywanie pracy układu przy założeniu stałej średniej wartości prądu sterującego (analogicznie jak w innych układach napędowych pracujących w systemie automatyzacji otwartej); parametrem byłby więc tu prąd sterujący I_{st}. W realnym układzie otwartym z WM, nastawiona średnia wartość prądu sterującego pozostaje nie zmieniona w całym zakresie pracy silnika, tzn. począwszy od biegu jałowego, poprzez obciążenie znamionowe, w krańcowym przypadku aż do zahamowania wirnika.

Z drugiej strony wiadomo, że średnia wartość napięcia na zaciskach wyjściowych WM zależy bezpośrednio od zmiany indukcji w rdzeniu ΔB, zachodzącej przy odsycaniu rdzenia

$$\Delta B = B_s - B_o, \tag{1}$$

gdzie:

B_s — indukcja nasycenia rdzenia dławika,

B_o — indukcja w rdzeniu uzyskana w przedziale nastawiania strumienia (inaczej, w przedziale odsycania rdzenia). Jest to najniższa wartość indukcji B w czasie trwania cyklu, liczona od stanu B_r.

Niezależnie od charakteru chwilowego przebiegu prądu w uzwojeniu sterującym WM (w stanie ustalonym), zmiana indukcji w rdzeniu dławika ΔB określa powierzchnię równą całce z napięcia względem czasu, odpowiadającą napięciu „pochłoniętemu" przez dławik w tzw. przedziale wzbudzenia dławika, to znaczy w przedziale czasu, w którym indukcja w rdzeniu dławika ponownie zmienia się od wartości B_o ustalonej w przedziale nastawiania strumienia do wartości indukcji nasycenia B_s. Zmiana indukcji od B_o do B_s zachodzi w przedziale wzbudzenia pod wpływem napięcia źródła zasilającego; całka z napięcia odejmuje się od napięcia zasilania (wartości średnie). (Powierzchnia równa całce z napięcia względem czasu poza interpretacją geometryczną ma również prostą interpretację fizyczną, gdyż jej wartość jest miarą wartości przyrostu strumienia magnetycznego).

Tak więc w analizie pracy układu WM — silnik dogodne byłoby przyjęcie parametru $\Delta B = \text{const}$ lub też względnej wartości zmiany indukcji $\beta = \text{const}$, gdzie

$$\beta = \frac{\Delta B}{2B_s} = \frac{B_s - B_o}{2B_s}. \tag{2}$$

Powstaje jednak pytanie, czy między średnią wartością prądu sterującego I_{st} i wartością parametru β istnieje jednoznaczna zależność $\beta(I_{st})$?

A. Góral wykazał w drodze eksperymentu, że taka jednoznaczna zależność istnieje w przypadku stałej rozpiętości przedziału nastawiania strumienia τ w rdzeniu [1], [2] oraz że nie zależy ona od parametrów obwodu sterującego.

Z tego względu w dalszym ciągu rozważań jako parametr pracy układu przyjęto względną zmianę indukcji w przedziale nastawiania strumienia $\beta = \text{const}$, mimo iż w pracy układu rozpiętość przedziału τ ulega nieznacznym zmianom.

2. ZAŁOŻENIA UPRASZCZAJĄCE

Dalsza analiza jest prowadzona po przyjęciu następujących założeń upraszczających:

1° Przyjęto, że w stanie ustalonym prędkość obrotowa silnika n, strumień główny silnika Φ oraz SEM-a silnika $E = c_E \Phi n$, są stałe.

2° Przyjęto, że impedancja sieci zasilającej układ jest równa zeru.

3° Przyjęto, że zawory półprzewodnikowe 3-fazowego mostka są zaworami idealnymi.

4° Pominięto indukcyjne oporności rozproszenia i nasycenia uzwojeń WM. Nie czyni się ograniczeń co do przebiegu cząstkowych pętli histerezy jak i stopnia tłumienia harmonicznych prądu w uzwojeniach sterujących WM.

5° Pominięto udział tzw. prądu magnesującego WM, płynącego (częściowo) przez obciążenie, w tworzeniu średniej wartości prądu obciążenia I ze względu na jego nieznaczną wartość.

Wyniki analizy będą podawane w jednostkach względnych. Jako wielkości odniesienia przyjęto:

U_m — amplituda napięcia międzyprzewodowego symetrycznej sieci 3-fazowej.

I_{zw} — średnia wartość prądu zwarcia twornika przy zahamowanym wirniku i zasilaniu układu (rys. 2) symetrycznym napięciem 3-fazowym o amplitudzie napięcia międzyprzewodowego U_m. Średnia wartość napięcia na tworniku wynosi wtedy [3]:

$$U = U_m \frac{p}{\pi} \sin\frac{\pi}{p} = U_m \frac{6}{\pi} \sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{\pi} U_m \tag{3}$$

oraz

$$I_{zw} = \frac{3U_m}{\pi R}. \tag{4}$$

M_{zw} — średnia wartość momentu napędowego silnika przy zahamowanym wirniku (inaczej — największy moment rozruchowy)

$$M_{zw} = c_M \Phi I_{zw}. \tag{5}$$

n_{0mx} — maksymalna prędkość idealnego biegu jałowego silnika, która dla omawianego układu wystąpi przy $E = U_m$ oraz $I = 0$. Wtedy

$$n_{0mx} = \frac{U_m}{c_E \Phi}. \tag{6}$$

Ponadto wprowadzono następujące oznaczenia:

$U(\vartheta)$, $I(\vartheta)$ — wartości chwilowe napięcia i prądu twornika w jednostkach bezwzględnych w funkcji kąta bieżącego $\vartheta = \omega t$,

$u(\vartheta)$, $i(\vartheta)$ — wartości chwilowe jw. w jednostkach względnych (w odniesieniu do U_m oraz I_{zw}),

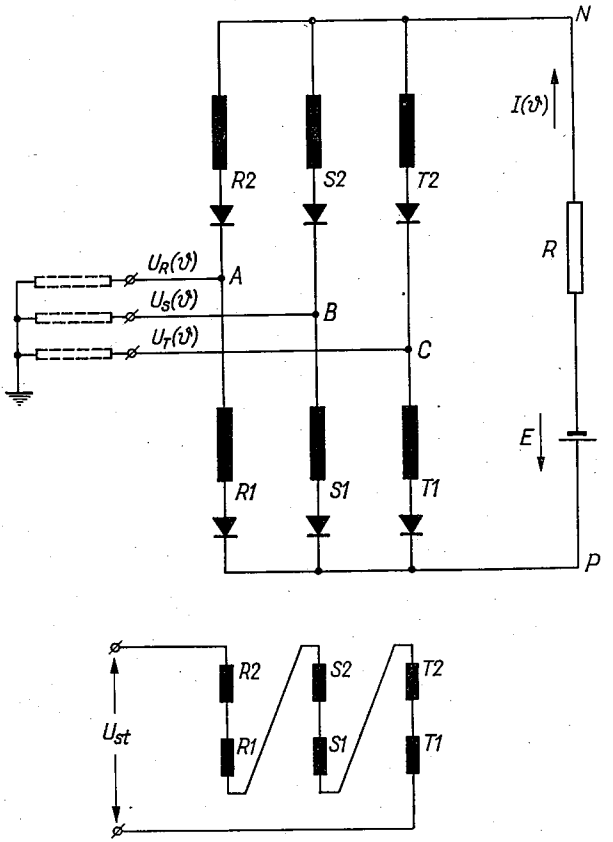
U, I, M, n — wartości średnie w jednostkach bezwzględnych,

u, i, μ, ν — wartości średnie w jednostkach względnych.

A zatem:

$$\left.\begin{aligned} i(\vartheta) &= \frac{I(\vartheta)}{I_{zw}}; \qquad i = \frac{I}{I_{zw}}; \\ \mu &= \frac{M}{M_{zw}} = \frac{c_M \Phi I}{c_M \Phi I_{zw}} = i; \\ \nu &= \frac{n}{n_{0mx}} = \frac{E}{c_E \Phi} \cdot \frac{c_E \Phi}{U_m} = \frac{E}{U_m}; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$U_R(\vartheta), U_S(\vartheta), U_T(\vartheta)$ — wartości chwilowe napięć fazowych sieci zasilającej;
R — oporność czynna obwodu twornika silnika;
τ — rozpiętość przedziału nastawiania strumienia w rdzeniach dławików WM.



Rys. 2. Schemat zastępczy układu z rys. 1
U_{st} — napięcie źródła sygnału sterującego

Schemat zastępczy układu z rys. 1 podano na rys. 2, uwzględniając jedno uzwojenie sterujące WM.

3. BIEG JAŁOWY UKŁADU

Idealny bieg jałowy układu pokazanego na rys. 2 w ścisłym znaczeniu tego terminu odpowiada warunkowi $I = 0$. Warunek ten jest spełniony jedynie przy $E = U_m$, czyli przy maksymalnej prędkości silnika

$$n_{0mx} = \frac{U_m}{c_E \Phi}$$

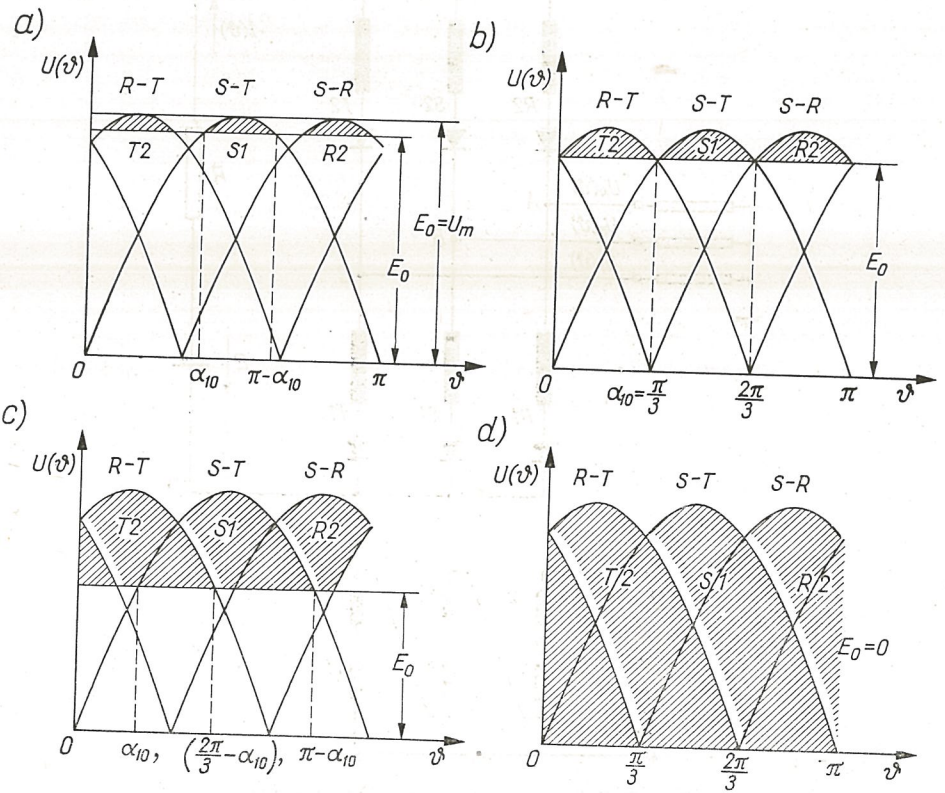
lub w jednostkach względnych, przy

$$\nu_{0mx} = 1. \tag{8}$$

Jeśli zgodnie z założeniem 5° pominąć prąd magnesujący WM, to bieg jałowy wystąpi również przy $I = 0$ na różnych poziomach prędkości, zależnie od parametru β. Dla tych przypadków będzie

$$\nu_0 = \frac{n_0}{n_{0mx}} = \frac{E_0}{U_m} = \sin\alpha_{10} \tag{9}$$

(oznaczenia jak na rys. 3).



Rys. 3. Idealny bieg jałowy na różnych poziomach prędkości. Powierzchnie zacienione odpowiadają całkom z napięcia dla odpowiednich dławików, stosownie do wartości parametru β. Prędkość $\nu_0 = \frac{E_0}{U_m} = \sin\alpha_{10}$

a) $1 \geqslant \nu_0 > 0{,}8660$; b) $\nu_0 = \sin\pi/3 = 0{,}8660$; c) $0{,}8660 > \nu_0 > 0$; d) $\nu_0 = 0$

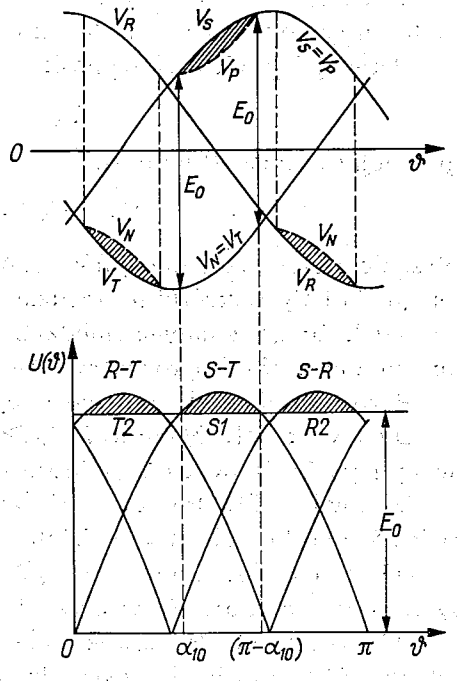
3.1. Bieg jałowy układu przy prędkościach $1 \geqslant \nu_0 \geqslant 0{,}8660$

a) sposób pracy WM

Rozpatrzmy w pierwszej kolejności sposób pracy WM dla warunku, gdy stosunek siły elektromotorycznej silnika E_0 do amplitudy napięcia zasilającego U_m (rys. 3 a, b) określony jest nierównością

$$\nu_0 = \frac{E_0}{U_m} \geqslant \sin\pi/3 = 0{,}8660.$$

Charakterystyczną cechą sposobu pracy WM w zakresie prędkości $1 \geqslant \nu_0 \geqslant 0{,}8660$ przy biegu jałowym jest okoliczność, że w przedziale czasu, w którym jedno z napięć międzyprzewodowych jest większe od *SEM*-ej E_0, zawsze nasycany jest tylko jeden dławik. I tak np. indukcja w rdzeniu



Rys. 4. Przebiegi czasowe potencjałów V_P i V_N, oraz powierzchnie równe całkom z napięcia dla dławików, przy biegu jałowym i prędkości $1 \geqslant \nu_0 \geqslant 0{,}8660$

dławika $S1$ zmienia się do wartości B_o (w momencie $\vartheta = \alpha_{10}$) do indukcji nasycenia B_s (w momencie $\vartheta = \pi - \alpha_{10}$) — oznaczenia jak na rys. 4.

Rozpatrzmy ten proces nieco bliżej. W chwili $\vartheta = \alpha_{10}$ napięcie międzyprzewodowe $U_{ST} = U_m \sin\vartheta$ zwiększając się osiąga wartość równą *SEM*-ej E_0. Po przekroczeniu tej wartości, pod wpływem napięcia

$$U_m \sin\vartheta - E_0,$$

zaczyna płynąć prąd w obwodzie $B — S1 — P — N — T2 — C$. Prąd ten jest ograniczony przez nienasycony dławik $S1$; nazwijmy go prądem ma-

gnesującym. Przyjmując zgodnie z poprzednimi założeniami, że spadki napięć na uzwojeniu roboczym i zaworze dławika $T2$ (który osiągnął nasycenie w poprzedniej 1/6 okresu), jak również spadek napięcia na oporności obciążenia od prądu magnesującego są równe zeru, można napisać równanie napięć dla wspomnianego obwodu;

$$U_s(\vartheta) - \left(\omega z_r s \frac{dB}{d\vartheta}\right)_{DlS1} - E_0 - U_T(\vartheta) = 0,$$

stąd

$$\left(\omega z_r s \frac{dB}{d\vartheta}\right)_{DlS1} = U_m \sin\vartheta - E_0 \tag{10}$$

z_r — liczba zwojów uzwojenia roboczego dławika,
s — pole przekroju czynnego (żelaza) rdzenia dławika.

Tak więc różnica napięć $U_m \sin\vartheta - E_0$ jest równa spadkowi napięcia na jednym tylko nasycanym dławiku $S1$.

Potencjał punktu N wynosi:

$$V_N = V_C = U_T(\vartheta),$$

potencjał punktu P wynosi:

$$V_P = V_N + E_0 = U_T(\vartheta) + E_0.$$

Przebiegi czasowe potencjałów punktów P i N zaznaczono na rys. 4. Przebiegu V_P i V_N w krótkim przedziale czasu, w którym SEM-a E_0 jest większa od każdego z napięć międzyprzewodowych, nie rozważano, gdyż nie ma to znaczenia dla rozpatrywanych zagadnień.

Pozostałe dławiki są w następującej sytuacji:

D ł a w i k $R1$. Ponieważ $V_P > V_R$ (rys. 4), to zawór $R1$ jest zablokowany (rys. 2). Dławik $R1$ znajduje się w przedziale nastawiania strumienia.

D ł a w i k $T1$. Ponieważ $V_P > V_T$, zawór $T1$ jest zablokowany. Dławik $T1$ znajduje się w przedziale nastawiania strumienia.

D ł a w i k $R2$. Ponieważ $V_R > V_N = V_T$, zawór $R2$ jest zablokowany. Dławik $R2$ znajduje się w przedziale nastawiania strumienia.

D ł a w i k $S2$. Ponieważ $V_S > V_N = V_T$, zawór $S2$ jest zablokowany. Dławik $S2$ znajduje się w przedziale nastawiania strumienia.

D ł a w i k $T2$. Dławik $T2$ osiągnął nasycenie w poprzedniej 1/6 okresu, obecnie przez jego uzwojenie robocze płynie prąd magnesujący dławika $S1$. Napięcie na dławiku $T2$ jest równe zeru, $V_C = V_N$.

Pisząc o dławikach $R1$, $T1$, $R2$, $S2$, że znajdują się w przedziale nastawiania strumienia, stwierdzamy jedynie, że jakiekolwiek zmiany strumieni w tych dławikach zachodzą pod wpływem prądu sterującego WM; nie rozpatrujemy tutaj zjawiska podziału napięcia blokującego między dławik i związany z nim zawór. Szczegóły te nie wchodzą w zakres naszych rozważań ze względu na podejście do tematu połączone z przyjęciem istnienia

jednoznacznej zależności β (I_{st}) przy stałej rozpiętości przedziału nastawiania strumienia τ [1], [2].

Pominięto tu również wpływ niewielkiego okresu, w którym *SEM*-a E_0 jest większa od któregokolwiek z napięć międzyprzewodowych (np. od $\vartheta = \pi - \alpha_{10}$ do $\vartheta = \alpha_{10} + \pi/3$ na rys. 4). W zasadzie nasycony w chwili $\vartheta = \pi - \alpha_{10}$ dławik $S1$ podlega w tym przedziale czasu odsyceniu wywołanemu przez prąd sterujący. Jednak ze względu na niewielki udział tego przedziału czasu w stosunku do całkowitego przedziału nastawiania strumienia τ (który w tym przypadku waha się od $\tau = 4/6$ okresu napięcia zasilającego przy $\nu_0 = \sin\pi/3 = 0{,}8660$ do $\tau = 6/6$ okresu przy $\nu_0 = 1$) pominięto jego wpływ i przyjęto, że w chwili $\vartheta = \alpha_{10} + \pi/3$ dławik $S1$ znajduje się nadal w stanie nasycenia.

Mogłoby się wydawać, że stanowi to znaczne uproszczenie analizy pracy układu, zniekształcające w pewnym stopniu prawdziwy obraz jego działania. Zostało ono jednak przyjęte w niniejszej pracy z następujących uzasadniających je względów:

1° Zdaniem autora, jest bardzo mała szansa, że możliwe będzie określenie w sposób ogólny zależności między średnią wartością prądu sterującego wzmacniacza magnetycznego I_{st} a parametrem β (lub, co na jedno wychodzi, kątem nasycenia α dławików WM) w rozpatrywanym zakresie pracy układu. Wynika to ze zjawiska częściowego odsycania dławików w czasie blokady wszystkich zaworów przez *SEM*-ą E.

2° Niezgodności ze stanem rzeczywistym, wynikające z przyjętego wyżej uproszczenia, mają małe znaczenie dla wniosków praktycznych, ze względu na b. mały zakres pracy, w którym one wystąpią. Obszar objęty rozpatrywanym zakresem pracy w ogólnym obszarze możliwych zmian prędkości i prądu jest niewielki (jak rys. 12).

3° Przyjęte uproszczenie zezwala na jednolite podejście do analizy pracy układu, oparte o powiązanie prądu sterującego I_{st} z parametrem β [1], [2], w założeniu stałej (lub niewiele zmieniającej się) rozpiętości przedziału nastawiania strumienia τ przy pracy na charakterystyce mechanicznej przy $\beta = \text{const}$.

Symetria układu i napięć zasilających wskazuje, że przebiegi występujące w jednej gałęzi mostka (rys. 2) powtarzają się kolejno w określonych gałęziach. I tak np. w podanym układzie nasycają się kolejno dławiki: $S1$, $R2$, $T1$, $S2$, $R1$, $T2$. W przedziałach czasu, gdy jedno z napięć międzyprzewodowych jest większe od *SEM*-ej E_0,

jeden dławik jest nasycony,
jeden dławik jest nasycany,
cztery dławiki są w przedziale odsycania.

(Należy odróżnić to sformułowanie od „cztery dławiki są odsycane", gdyż byłoby ono niewłaściwe ze względów, o których była mowa wyżej).

Opisany wyżej sposób pracy WM przy biegu jałowym występuje przy obniżaniu prędkości v_0, od wartości $v_{0mx} = 1$, do wartości $v_0 = \sin\pi/3 = 0{,}8660$ (rys. 3 b).

b) zależność $v_0(\beta)$.

Biorąc pod uwagę rys. 3 a, d, można łatwo wyznaczyć przebieg charakterystyki $v_0(\beta)$. Największa zmiana indukcji w dławiku przy tzw. wzbudzeniu normalnym [4] wynosi $2B_s$. Zmianie tej odpowiada całka z napięcia równa U_m, odpowiada ona polu zacienionemu na rys. 3d (wykazano to w dalszym ciągu w rozdz. 3.2).

W rozpatrywanym obecnie przypadku całka z napięcia dla dławika $S1$ wynosi (rys. 4):

$$\int_{\alpha_{10}}^{\pi-\alpha_{10}} (U_m \sin\vartheta - E_0)\,d\vartheta = U_m\left[2\cos\alpha_{10} - (\pi - 2\alpha_{10})\frac{E_0}{U_m}\right] =$$

$$= U_m[2\cos\alpha_{10} - (\pi - 2\alpha_{10})\sin\alpha_{10}], \tag{11}$$

gdyż

$$\frac{E_0}{U_m} = \sin\alpha_{10}.$$

Oczywiście współczynnik β jest stosunkiem podanych wyżej powierzchni, czyli

$$\left.\begin{aligned} \beta &= [2\cos\alpha_{10} - (\pi - 2\alpha_{10})\sin\alpha_{10}], \\ v_0 &= \sin\alpha_{10}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Zespół równań (12) podaje w postaci parametrycznej zależność $v_0(\beta)$. Parametr α_{10} może się tu zmieniać od $\alpha_{10} = \pi/2$ do $\alpha_{10} = \pi/3$.

Tablica 1

α_{10}	90°	85°	80°	75°	70°	65°	60°
v_0	1,0	0,9962	0,9848	0,9659	0,9397	0,9063	0,8660
β	0	0,0006	0,0034	0,0119	0,0280	0,0543	0,0931

Na podstawie (12) wykonano obliczenia i sporządzoną tablicę 1. Dane powyższej tablicy posłużyły do wykresu części krzywej $v_0(\beta)$ zamieszczonej na rys. 6.

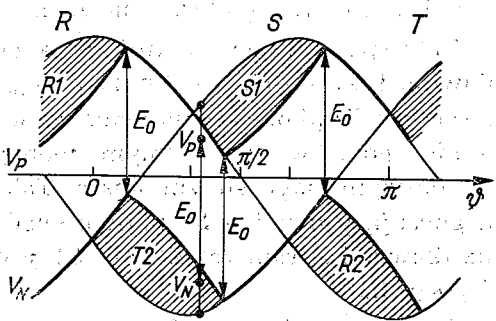
3.2. Bieg jałowy układu przy prędkościach $0{,}8660 \geqslant v_0 \geqslant 0$

a) sposób pracy WM

Charakterystyczną cechą sposobu pracy WM w tym zakresie prędkości biegu jałowego jest fakt, że w przedziałach czasu odpowiadających dla

przebiegu napięcia $U_{ST}(\vartheta)$ wartościom $\pi/3 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi/3 - \alpha_{10}$ nasycane są dwa dławiki, zaś w pozostałym czasie — tylko jeden dławik (rys. 3c).

Aby prześledzić ten sposób pracy, zacznijmy obserwować układ np. od chwili $\vartheta = \pi/6$ (rys. 3c), w której jedynie napięcie $U_{RT}(\vartheta)$ jest większe od *SEM*-ej E_0. Pod wpływem napięcia $U_{RT}(\vartheta) - E_0$ płynie w obwodzie $A - R1 - P - N - T2 - C$ prąd magnesujący związany z szerokością dynamicznej pętli histerezy nasycanego dławika $T2$. Dławik $R1$ pracuje w tym przedziale czasu jako nasycony (osiągnął nasycenie w poprzedniej 1/6 okresu). Z tego powodu potencjał punktu P jest równy $V_P = V_R(\vartheta)$, potencjał



Rys. 5. Przebiegi napięć fazowych i rozkład potencjałów w układzie, przy prędkościach biegu jałowego $\nu_0 < 0{,}8660$
Uwaga. Przy ϑ nieco większym od $\pi/3$ zaznaczono hipotetyczny rozkład symetryczny napięcia $U_{ST}(\vartheta) - E_0$ na dławiki $S1$ i $T2$

punktu N jest równy $V_N = V_R(\vartheta) - E_0$ dławik $T2$ jest nasycany pod wpływem napięcia $U_{RT}(\vartheta) - E_0$ (rys. 5). Sytuacja taka trwa do chwili $\vartheta = \pi/3$ bez zmiany.

Poczynając od momentu $\vartheta = \pi/3$ napięciem o najwyższej wartości chwilowej staje się napięcie $U_{ST}(\vartheta)$, chociaż stale jeszcze $U_{RT}(\vartheta) > E_0$. Powstaje pytanie: czy napięcie $U_{ST}(\vartheta) - E_0$ zostanie podzielone na dławiki $S1$ i $T2$, a jeśli tak, to w jaki sposób?

Załóżmy wstępnie, że napięcie $U_{ST}(\vartheta) - E_0$ podzieli się na dławiki $S1$ i $T2$ symetrycznie, po połowie. Wtedy byłoby:

$$V_P = V_S(\vartheta) - \frac{U_{ST}(\vartheta) - E_0}{2};\ V_P < V_R;\ V_P > V_T \text{ (rys. 5).}$$

$$V_N = V_T(\vartheta) + \frac{U_{ST}(\vartheta) - E_0}{2};\ V_N > V_T;\ V_N < V_S;\ V_N < V_R.$$

Ponieważ $V_R > V_P$, zaś dławik $R1$ — jak wspomniano uprzednio — jest nacony, to przez dławik $R1$ powinien płynąć znaczny prąd. Jednakże przy przyjętym uprzednio założeniu o oporności zespołu dławik $R1$ — zawór $R1$ (w kierunku przepustowym) równej zeru, spadek napięcia na dławiku i zaworze $R1$ musi być równy zeru, czyli powinno być $V_R = V_P$. Z drugiej strony, ponieważ zawory $R2$ i $S2$ są zablokowane, prąd płynący przez dławik $R1$ musiałby powracać przez dławik $T2$; ten ostatni będąc w stanie nienasyconym może jednak co najwyżej przepuścić prąd magnesujący.

Tak więc założenie symetrycznego podziału napięcia $U_{ST}(\vartheta) - E_0$ między dławiki $S1$ i $T2$ okazało się niewłaściwe.

Przytoczone rozumowanie wskazuje jednocześnie, że potencjał punktu P pozostaje po czasie $\vartheta = \pi/3$ równy potencjałowi fazy R. Wtedy po przekroczeniu $\vartheta = \pi/3$ dławik $S1$ nasycany jest napięciem $V_S - V_P = V_S - V_R = U_{SR}(\vartheta)$, zaś dławik $T2$ nasycany jest w dalszym ciągu pod wpływem napięcia $U_{RT}(\vartheta) - E_0$.

Warto zauważyć, że prąd magnesujący płynący przez uzwojenie robocze dławika $S1$, równy (lub w rzeczywistości nieco mniejszy ze względu na nachylenie pionowych gałęzi pętli histerezy materiału rdzeni) prądowi magnesującemu dławika $T2$, może powracać poprzez zawór i nasycony dławik $R1$, omijając obciążenie R, E.

Taki sposób pracy, w którym okresowo nasycane są **jednocześnie dwa dławiki,** trwa do chwili $\vartheta = 2\pi/3 - \alpha_{10}$ (rys. 3c). Dławik $T2$ osiąga wtedy nasycenie. Prąd obciążenia jednakże w obwodzie dławików $R1 - T2$ nie popłynie, gdyż w tym samym momencie napięcie $U_{RT}(2\pi/3 - \alpha_{10}) = E_0$ i w dalszym ciągu się zmniejsza. Tak więc po czasie $\vartheta > 2\pi/3 - \alpha_{10}$ prąd magnesujący dławika $S1$ musi płynąć przez obciążenie (R, E) i nasycony już dławik $T2$, sam zaś dławik $S1$ jest nasycany pod wpływem napięcia $U_{ST}(\vartheta) - E_0$.

Począwszy od chwili $\vartheta = 2\pi/3$, potencjał fazy R staje się niższy od potencjału fazy T (rys. 5). Teraz prąd magnesujący dławika $R2$ może płynąć od fazy T przez nasycony dławik $T2$ (prąd ten płynie w kierunku zaporowym zaworu $T2$ dzięki temu, że ten ostatni przewodzi prąd magnesujący dławika $S1$), a następnie przez dławik i zawór $R2$ do fazy R, omijając obciążenie. Dławik $R2$ nasycany jest napięciem $U_{TR}(\vartheta)$.

Dotychczasowy opis pracy układu pozwala na zrozumienie jego działania w pozostałych częściach okresu napięcia zasilającego ze względu na symetrię układu i cykliczny charakter przebiegów.

Rozpiętość przedziału nastawiania strumienia τ waha się teraz od 4/6 okresu przy prędkości $\nu_0 = 0{,}8660$ do 3/6 okresu przy prędkości $\nu_0 = 0$ (czyli przy $E = 0$).

b) zależność $\nu_0(\beta)$

Jak wynika z rys. 3c, z którym związany jest bezpośrednio rys. 5, zmianie indukcji ΔB w dławiku $S1$ odpowiada pole zacienione oznaczone symbolem $S1$. Powierzchnia pola $S1$ wynosi:

$$\int_{\pi/3}^{2\pi/3-\alpha_{10}} U_m \sin(\vartheta - \pi/3)\,d\vartheta + \int_{2\pi/3-\alpha_{10}}^{\pi-\alpha_{10}} (U_m \sin\vartheta - E_0)\,d\vartheta = U_m\left[1 - \frac{\pi}{3}\sin\alpha_{10}\right], \quad (13)$$

stąd

$$\beta = 1 - \frac{\pi}{3}\sin\alpha_{10} \quad (14)$$

lub po prostu

$$\nu_0 = \frac{3}{\pi}[1-\beta]. \tag{15}$$

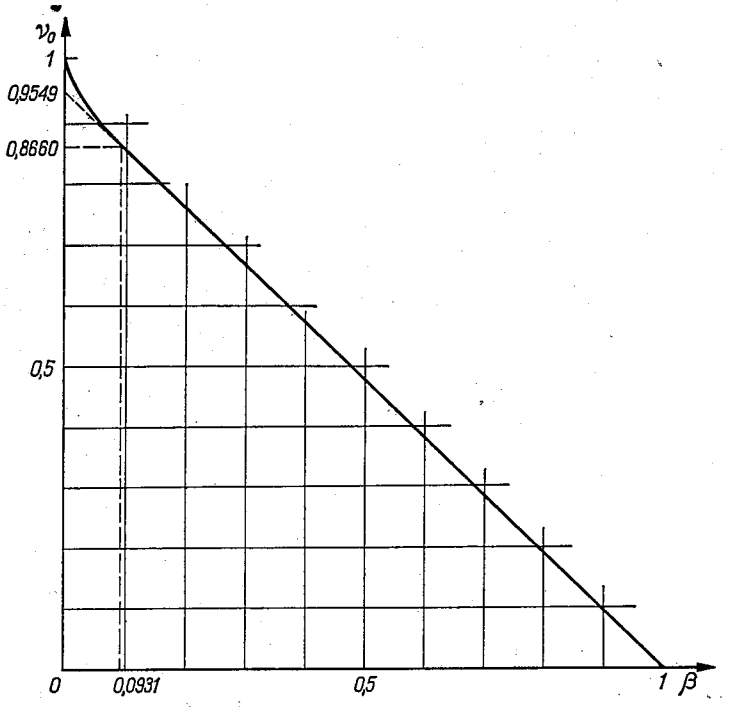
Należy zaznaczyć, że wzór (15) obowiązuje dla wartości parametru β określonych nierównością:

$$0{,}0931 \leqslant \beta \leqslant 1 \tag{16}$$

odpowiednio do zmian prędkości idealnego biegu jałowego

$$0{,}8660 \geqslant \nu_0 \geqslant 0.$$

Na podstawie wzoru (15) uzupełniono przebieg wykresu zależności $\nu_0(\beta)$ na rys. 6. Jest to wykres prędkości idealnego biegu jałowego silnika w funkcji parametru β. Co do wartości liczbowych (w jednostkach względnych)



Rys. 6. Charakterystyka $\nu_0(\beta)$ przy biegu jałowym

pokrywa on się z przebiegiem charakterystyki mechanicznej $\nu(\mu)$ układu 3-fazowego mostka prostowniczego z niesterowanymi zaworami półprzewodnikowymi, zasilającego twornik silnika obcowzbudnego (lub obciążenie typu R, E), [5].

Istotny z punktu widzenia możliwości regulacyjnych układu jest tu fakt, że przebieg charakterystyki $\nu_0(\beta)$ jest w przeszło 90% liniowy.

Ze wzoru (13) można uzyskać maksymalną wartość całki z napięcia przez podstawienie $\alpha_{10} = 0$, co odpowiada biegowi jałowemu układu przy

zatrzymanym wirniku silnika i $E = 0$. Całka z napięcia dla każdego dławika wynosi wtedy U_m (pole zacienione $S1$ na rys. 3c), zaś współczynnik $\beta = 1$.

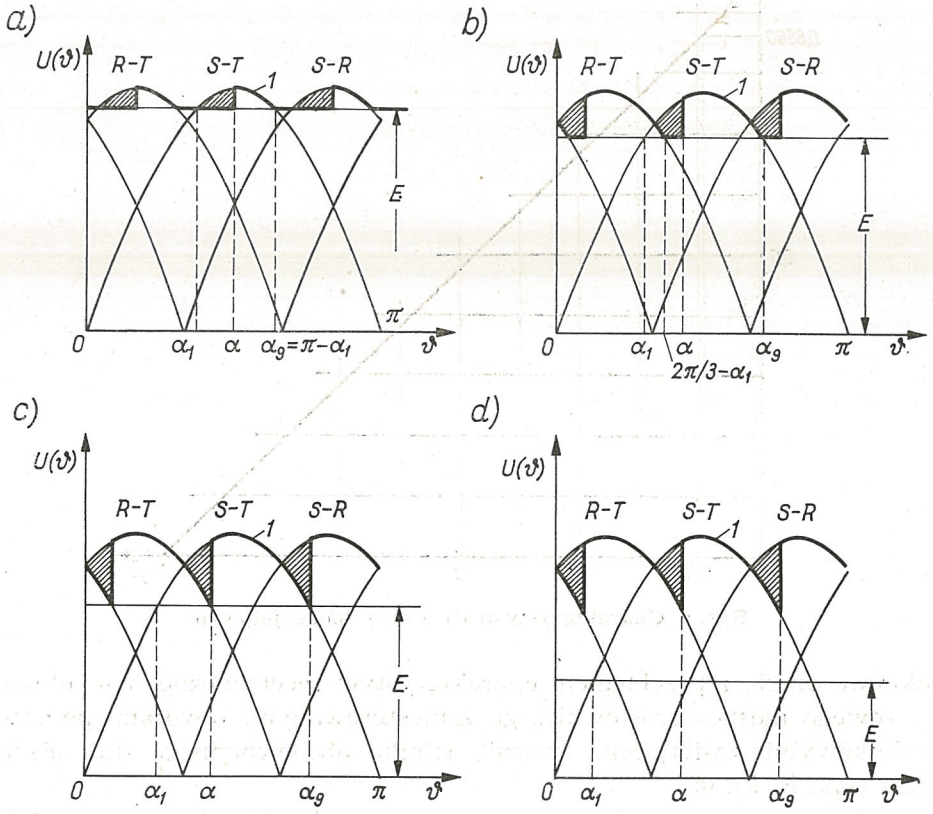
4. PRACA UKŁADU PRZY OBCIĄŻENIU

4.1. Działanie układu przy $1 \geqslant \nu_0 \geqslant 0{,}8660$

a) sposób pracy WM

Przy wzroście momentu obciążenia silnika w stosunku do biegu jałowego praca układu w stanie ustalonym przy $\beta = \text{const}$ przebiega zgodnie z obrazem podanym na rys. 7. Prześledźmy działanie układu na przykładzie dławika $S1$.

Od chwili $\vartheta = \alpha_1 = \arcsin E/U_m$ (rys. 7a) do chwili nasycenia dławika $S1$ przy $\vartheta = \alpha$ przez dławik $S1$ płynie prąd magnesujący (który powraca przez obciążenie R, E i nasycony uprzednio dławik $T2$). Dławik $S1$ jest



Rys. 7. Praca układu przy obciążeniu dla wartości parametru β określonych nierównością $0 \leqslant \beta \leqslant 0{,}0931$

Krzywa 1 — przebieg napięcia na tworniku silnika $U(\vartheta)$, α — kąt nasycenia dławika $S1$, α_g — kąt zgaszenia impulsu prądu twornika

nasycany pod wpływem napięcia $U_{ST}(\vartheta)-E$. Punkt pracy dławika $S1$ na cząstkowej pętli histerezy przesuwa się od początkowej wartości indukcji $B_o = B(\alpha_1)$ wyznaczonej wartością prądu magnesującego I_{st} do indukcji nasycenia $B(\alpha) = B_s$ (α — kąt nasycenia).

W chwili $\vartheta = \alpha$, dławik $S1$ zostaje nasycony i do twornika zostaje przyłożone pełne napięcie sieci, w tym przypadku napięcie $U_{ST}(\vartheta)$. Prąd twornika określony jest wzorem

$$I(\vartheta) = \frac{U_m \sin\vartheta - E}{R}. \tag{17}$$

i wzrasta skokiem od wartości równej zeru do wartości

$$I(\alpha) = \frac{U_m \sin\alpha - E}{R}. \tag{18}$$

Prąd twornika staje się ponownie równy zeru, w chwili $\vartheta = \pi - \alpha_1$, zwanej kątem zgaszenia, α_g. Następnie do czasu $\vartheta = \alpha_1 + \pi/3$ zawory mostka są zablokowane, gdyż SEM-a E jest większa od któregokolwiek z napięć międzyprzewodowych i prąd przez obciążenie nie płynie (rys. 7a). Wynika stąd, że prąd twornika składa się z impulsów o szerokości

$$\lambda = (\pi - \alpha_1) - \alpha. \tag{19}$$

Przy dalszym wzroście obciążenia i spadku prędkości $\nu = \sin\alpha_1$ poniżej wartości $\nu = 0{,}8660$ mają miejsce następujące zmiany w sposobie pracy układu (rys. 7b):

1° — znika występujący przy prędkościach $\nu > 0{,}8660$ krótki przedział czasu, w którym wszystkie zawory mostka były okresowo zablokowane.

2° — w pierwszej fazie przedziału wzbudzenia dławik $S1$ jest nasycany pod wpływem napięcia $U_{SR}(\vartheta)$, zaś jego prąd magnesujący powraca poprzez zawór $R1$ do sieci. Wynika to z faktu, iż dławik $R1$ (wraz z dławikiem $T2$) jest nasycony i przewodzi prąd obciążenia, na ogół znacznie większy od prądu magnesującego. Potencjał punktu P jest równy potencjałowi fazy R, $V_P = V_R$.

— W drugiej części przedziału wzbudzenia, tzn. po zaniku prądu obciążenia do zera, a więc po chwili $\vartheta = (\pi - \alpha_1) - \pi/3$, dławik $S1$ jest nasycany pod wpływem napięcia $U_{ST}(\vartheta) - E$ i jego prąd magnesujący płynie przez obciążenie i nasycony dławik $T2$.

Powyższe warunki pracy występują aż do chwili, w której wskutek dalszego spadku prędkości silnika impulsy prądu twornika zaczną się stykać brzegami; od tego momentu zaczyna się przewodzenie ciągłe prądu w obwodzie twornika. Jak widać z rys. 7c i rys. 7d, w strefie przewodzenia ciągłego dławik $S1$ jest nasycany wyłącznie pod wpływem napięcia $U_{SR}(\vartheta)$.

Reasumując: dla przypadku, gdy $1 \geqslant \nu_0 \geqslant 0{,}8660$, przy przejściu od biegu jałowego do stanu zwarcia przy zahamowanym wirniku, charakte-

rystyczną cechą pracy WM jest fakt, że jednocześnie nasycany jest tylko jeden dławik. Wynika to z przyczyny, że kąt nasycenia α nie może tu być większy niż $\alpha = 2\pi/3$, tzn. aniżeli kąt nasycenia przy biegu jałowym i prędkości $\nu_0 \geqslant 0{,}8660$.

Rozpiętość przedziału nastawiania strumienia τ może się zmieniać od $\tau = 2\pi$ (przy $\nu_0 = 1$) do $\tau = \frac{4}{6}2\pi$ (przy $\nu = 0{,}8660$). Przy pracy na jednej charakterystyce mechanicznej przy $\beta = \text{const}$ zakres zmian τ jest oczywiście mniejszy.

b) równanie charakterystyk mechanicznych $\nu(\mu)$ w jednostkach względnych, przy $\beta = \text{const}$

Jak wynika z rozważań przeprowadzonych powyżej, w przebiegu charakterystyki mechanicznej $\nu(\mu)$ przy $\beta = \text{const}$ można wyróżnić trzy jej odcinki:

1° — odcinek od $\nu_0 > 0{,}8660$ do $\nu = 0{,}8660$ w strefie przewodzenia impulsowego.

2° — odcinek od $\nu_0 = 0{,}8660$ w strefie przewodzenia impulsowego do początku strefy przewodzenia ciągłego, czyli do prędkości ν_c.

3° — odcinek od ν_c do $\nu = 0$ w strefie przewodzenia ciągłego.

Rozpatrzymy teraz szczegółowo równania charakterystyki $\nu(\mu)$ dla trzech wskazanych odcinków.

1° Dla prędkości od ν_0 do $\nu = 0{,}8660$ średnia wartość prądu obciążenia wynosi

$$I = \frac{3}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha_1} I(\vartheta)d\vartheta,$$

ale

$$I(\vartheta) = \frac{U_m \sin\vartheta - E}{R},$$

stąd

$$I = \frac{3}{\pi R}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha_1} (U_m \sin\vartheta - E)d\vartheta. \tag{20}$$

Po wykonaniu całkowania i wprowadzeniu jednostek względnych otrzymuje się

$$i = \mu = [\cos\alpha_1 + \cos\alpha - (\pi - \alpha_1 - \alpha)\sin\alpha_1], \tag{21}$$

gdzie $\sin\alpha_1 = \nu$.

Równanie (20) musi być brane pod uwagę łącznie z warunkiem $\beta = \text{const}$. Obliczając wg rys. 7a całkę z napięcia dla dławika $S1$ mamy:

$$\beta = \frac{1}{U_m} \int_{\alpha_1}^{\alpha} (U_m \sin\vartheta - E) d\vartheta,$$

stąd

$$\beta = [\cos\alpha_1 - \cos\alpha - (\alpha - \alpha_1)\sin\alpha_1]. \tag{22}$$

Wyliczanie przebiegów $\nu(\mu)$ przy $\beta = \text{const}$ ze wzorów (21) i (22) byłoby kłopotliwe i być może nawet niecelowe, ze względu na niewielki obszar zajmowany przez omawiany sposób pracy w całym zakresie zmian prędkości ν i momentu silnika μ (jak rys. 12). Przebieg charakterystyk $\nu(\mu)$ można tu jednak uzyskać łatwiej na drodze graficznej. Przeprowadzimy w tym celu następujące rozumowanie.

Jeżeli założyć wartość $\beta = 0$, co odpowiada warunkowi $\alpha = \alpha_1$, to ze wzoru (21) otrzymuje się wynik

$$\mu = 2[\cos\alpha_1 - (\pi/2 - \alpha_1)\sin\alpha_1] \tag{23}$$

identyczny z charakterystyką $\nu(\mu)$ obowiązującą w strefie przewodzenia impulsowego dla układu 3-fazowego mostka prostowniczego z niesterowanymi zaworami półprzewodnikowymi, zasilającego obciążenie typu R, E [5], zwaną w dalszym ciągu *charakterystyką podstawową* układu. Przy $\beta = 0$, WM pracuje przy wszystkich sześciu dławikach trwale nasyconych. Odsycanie rdzeni ze względu na odpowiednio dobrany wypadkowy przepływ uzwojeń sterujących WM nie występuje. Wartość pochodnej $d\nu/d\mu$ wynosi w tym przypadku:

$$\frac{d\nu}{d\mu} = -\frac{1}{\pi - 2\alpha_1} \tag{24}$$

i może być uznana za miarę sztywności charakterystyki mechanicznej w danym punkcie.

Znajdźmy teraz pochodną $d\nu/d\mu$ dla charakterystyk $\nu(\mu)$ przy $\beta = \text{const}$. Ze wzoru (21) mamy:

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{\cos\alpha_1}{\frac{d\alpha}{d\alpha_1}(\sin\alpha_1 - \sin\alpha) - \lambda\cos\alpha_1}, \tag{25}$$

gdyż

$$\frac{d\mu}{d\alpha_1} = \frac{d\alpha}{d\alpha_1}(\sin\alpha_1 - \sin\alpha) - \lambda\cos\alpha_1$$

oraz

$$\frac{d\nu}{d\alpha_1} = \cos\alpha_1.$$

Tu λ — rozpiętość impulsu prądu twornika, równa w tym przypadku $\lambda = (\pi - \alpha_1) - \alpha$.

Jak wynika ze wzoru (25), wartość pochodnej $d\nu/d\mu$ zależy z kolei od wartości pochodnej $d\alpha/d\alpha_1$ wyznaczonej dla warunku $\beta = \text{const}$ ze wzoru (22). Ponieważ zależność $\alpha(\alpha_1)$ jest tu podana równaniem przestępnym, stąd

$$\frac{d\alpha}{d\alpha_1} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial \alpha_1}}{\dfrac{\partial F}{\partial \alpha}}, \tag{26}$$

gdzie

$$F(\alpha, \alpha_1) = \cos\alpha_1 - \cos\alpha - (\alpha - \alpha_1)\sin\alpha_1 - \beta. \tag{27}$$

Po obliczeniu wg (26) otrzymuje się

$$\frac{d\alpha}{d\alpha_1} = \frac{(\alpha - \alpha_1)\cos\alpha_1}{\sin\alpha - \sin\alpha_1}. \tag{28}$$

Po podstawieniu (28) do wzoru (25) otrzymuje się prosty wynik, identyczny ze wzorem (24):

$$\frac{d\nu}{d\mu} = -\frac{1}{\pi - 2\alpha_1}.$$

Skoro pochodne $d\nu/d\mu$ określone powyższym wzorem dla różnych wartości parametru $\beta = \text{const}$ są zależne jedynie od zmiennej $\alpha_1 = \arcsin\nu$, oznacza to, że przesuwając charakterystykę podstawową w lewo, równolegle do osi momentu, otrzymuje się kolejne charakterystyki $\nu(\mu)$ przy różnych $\beta = \text{const}$, wychodzące z założonych prędkości biegu jałowego ν_0 zawartych w przedziale $1 \geqslant \nu \geqslant 0{,}8660$. (Jeżeli $d\nu/d\mu = \text{const}$ dla określonej wartości prędkości ν, to funkcje pierwotne $\nu(\mu)$ różnią się tylko o stałą wartość).

Udowodnioną powyżej właściwość można wykorzystać przy rysowaniu przebiegu charakterystyk mechanicznych w początkowym zakresie zmian prędkości od $\nu = 1$ do $\nu = 0{,}8660$ (rys. 8).

2° Przy dalszym wzroście obciążenia, tzn. przy prędkościach $\nu < 0{,}8660$, średnia wartość prądu obciążenia określona jest nadal wzorami (20) i (21). Całka z napięcia dla dławika $S1$ wynosi w tym przypadku:

$$\int_{\pi/3}^{2\pi/3-\alpha_1} U_m \sin(\vartheta - \pi/3)\,d\vartheta + \int_{2\pi/3-\alpha_1}^{\alpha} (U_m \sin\vartheta - E)\,d\vartheta, \tag{29}$$

zaś obliczony stąd współczynnik β

$$\beta = 1 - \cos\alpha_1 - \cos\alpha - \left(\alpha_1 + \alpha - \frac{2\pi}{3}\right)\sin\alpha_1. \tag{30}$$

Ze wzoru (30) mamy

$$\cos\alpha_1+\cos\alpha = 1-\beta-\left(\alpha_1+\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)\sin\alpha_1. \tag{31}$$

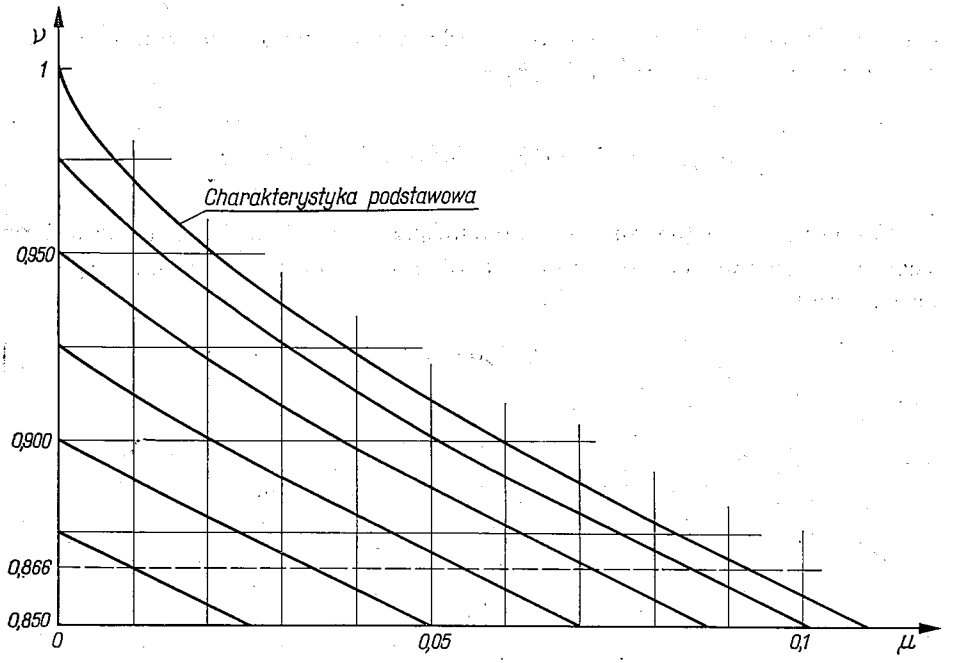
Podstawiając (31) do wzoru (21) na moment, uzyskuje się prosty wynik

$$\mu = (1-\beta)-\frac{\pi}{3}\nu \tag{32}$$

lub

$$\nu = \frac{3}{\pi}[(1-\beta)-\mu]. \tag{33}$$

Jak wynika ze wzoru (33), charakterystyka mechaniczna układu jest w rozpatrywanym zakresie prostoliniową, pomimo iż przebiega nadal w strefie przewodzenia impulsowego. Należy to uznać za cenną własność



Rys. 8. Charakterystyki mechaniczne w początkowym zakresie zmian prędkości od $\nu = 1$ do $\nu = 0{,}8660$ (strefa przewodzenia impulsowego), dla wartości parametru β określonych nierównością $0 \leqslant \beta \leqslant 0{,}0931$

układu WM — silnik, pracującego przy stałej wartości $\beta = \text{const}$, w odróżnieniu od układów otwartych ze sterowanymi zaworami, pracujących w strefie przewodzenia impulsowego przy stałym kącie zapłonu $\alpha_z = \text{const}$. Stałemu parametrowi β odpowiada w tym przypadku z dużym przybliżeniem praca WM przy $I_{st} = \text{const}$ (zgodnie z [1, 2], gdyż przedział

nastawiania strumienia w dławikach zmienia się nieznacznie, poczynając od wartości równej 4/6 okresu przy $\nu = \sin\pi/3 = 0{,}8660$, do stałej wartości $\tau = \frac{4}{6}2\pi + (\alpha - \pi/3)$, przy prędkościach $\nu_c \geqslant \nu \geqslant 0$ w strefie przewodzenia ciągłego. Widać to na rys. 7b, c, d).

3° Przy dalszym wzroście obciążenia prąd twornika przechodzi ze strefy przewodzenia impulsowego do strefy przewodzenia ciągłego (rys. 7c, d). Średnia wartość prądu obciążenia wynosi teraz

$$I = \frac{3}{\pi R}\int_{\alpha}^{\alpha+\pi/3} (U_m \sin\vartheta - E)d\vartheta, \tag{34}$$

stąd

$$i = \mu = \sin(\alpha+\pi/6) - \frac{\pi}{3}\sin\alpha_1. \tag{35}$$

Kąt nasycenia α jest w strefie przewodzenia ciągłego jednoznacznie związany z wartością parametru β, gdyż

$$\beta = \frac{1}{U_m}\int_{\pi/3}^{\alpha} U_m \sin(\vartheta - \pi/3)d\vartheta = 1 - \cos(\alpha - \pi/3). \tag{36}$$

Równania (35) i (36) można przedstawić w innej postaci, licząc kąt nasycenia α_n poczynając od kąta naturalnej komutacji równego $\alpha_k = \pi/3$. Mamy wtedy:

$$\alpha_n = \alpha - \pi/3, \tag{37}$$

stąd

$$\alpha = \alpha_n + \pi/3. \tag{38}$$

Podstawiając (38) do wzorów (35) i (36) otrzymuje się

$$\mu = \cos\alpha_n - \frac{\pi}{3}\nu \tag{35a}$$

lub

$$\nu = \frac{3}{\pi}[\cos\alpha_n - \mu] \tag{35b}$$

oraz

$$\beta = 1 - \cos\alpha_n. \tag{36a}$$

Łącząc wzory (35b) i (36a) uzyskuje się ponownie

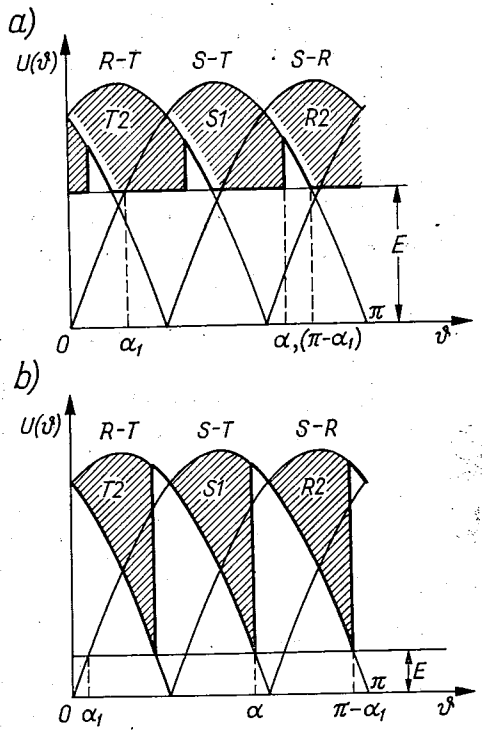
$$\nu = \frac{3}{\pi}[(1-\beta) - \mu]. \tag{39}$$

Wynika stąd istotny wniosek, że charakterystyki mechaniczne w strefie przewodzenia ciągłego prądu twornika są przedłużeniem charakterystyk ze strefy przewodzenia impulsowego. Inaczej, przy prędkości $\nu < 0{,}8660$ obowiązuje równanie (39) niezależnie od rodzaju przewodzenia prądu twornika.

4.2. Działanie układu przy $0{,}8660 \geqslant \nu_0 \geqslant 0$

a) sposób pracy WM

Jedyną różnicą charakteru pracy WM w porównaniu z omówionym szczegółowo sposobem pracy przy biegu jałowym w p-kcie 3.2a jest wcześniejsze nasycanie się dławików przy kącie nasycenia $\alpha < \pi - \alpha_1$ (rys. 9a)



Rys. 9. Praca układu przy obciążeniu, dla wartości parametru β określonych nierównością $0{,}0931 \leqslant \beta \leqslant 0{,}5$
a) praca w strefie przewodzenia impulsowego; b) praca na początku strefy przewodzenia ciągłego

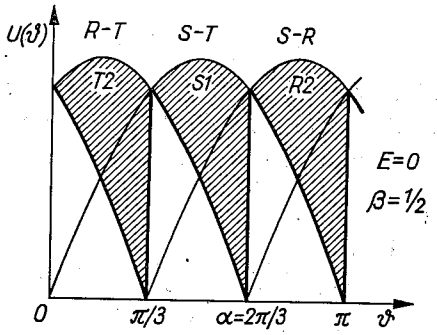
i związany z tym przepływ prądu obciążenia $I(\vartheta)$. Poza tym, jeśli chodzi o sposób nasycania się dławików pod wpływem określonych napięć, to układ pracuje identycznie; z tego powodu powtórzenie wywodów p-ktu 3.2a wydaje się zbyteczne, co najwyżej można by tu dodać następującą uwagę:

— jeżeli kąt nasycenia $\alpha > 2\pi/3$, to okresowo występuje jednoczesne nasycanie dwu dławików,

— jeżeli kąt nasycenia $\alpha \leqslant 2\pi/3$, to jednoczesne nasycanie się dwu dławików nie występuje.

Na rys. 9b pokazano sytuację, w której wystąpi początek przewodzenia ciągłego prądu w obwodzie twornika. Jak widać, począwszy od tego momentu dławik $S1$ jest ponownie nasycany wyłącznie pod wpływem napięcia $U_{SR}(\vartheta)$.

Należy jednak zaznaczyć, że istnieje pewna graniczna wartość parametru β, powyżej której strefa przewodzenia ciągłego w pracy układu nie



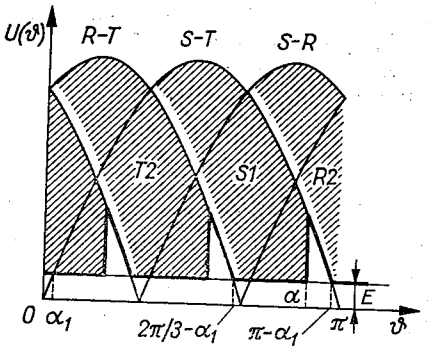
Rys. 10. Praca układu przy $\beta = 0{,}5$ i zahamowanym wirniku, $E = 0$

wystąpi w ogóle. Tę wartość parametru β można wyznaczyć na podstawie rys. 10. Przewodzenie ciągłe zaczyna się tu właśnie w momencie, gdy wirnik silnika zostaje zahamowany ($E = 0$, $\nu = 0$). Parametr β wynosi tu

$$\beta = \frac{1}{U_m} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} U_m \sin(\vartheta - \pi/3)\, d\vartheta = 0{,}5. \tag{40}$$

Dla wartości $\beta > 0{,}5$ charakterystyki mechaniczne silnika przebiegają w całości w strefie przewodzenia impulsowego. Przypadek ten ilustruje rys. 11.

Rozpiętość przedziału nastawiania strumienia zmienia się w zależności od wartości parametru β od 4/6 do 3/6 okresu napięcia zasilającego. Warto



Rys. 11. Przypadek pracy układu przy $0{,}5 < \beta \leqslant 1$; występuje wyłącznie przewodzenie impulsowe prądu w obwodzie twornika

jednak zauważyć, że dla przyjętej wartości β rozpiętość przedziału nastawiania strumienia przy przejściu od biegu jałowego aż do zahamowania wirnika zmienia się b. nieznacznie, co ponownie potwierdza dopuszczal-

ność założenia, iż praca układu przy $\beta = \text{const}$ odpowiada warunkowi $I_{st} = \text{const}$.

b) równanie charakterystyki mechanicznej $\nu(\mu)$ w jednostkach względnych, przy $\beta = \text{const}$

Na podstawie rysunków 9a i 11 można wywnioskować, że w strefie przewodzenia impulsowego średnia wartość prądu twornika wynosi jak poprzednio

$$I = \frac{3}{\pi R} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha_1} (U_m \sin\vartheta - E) d\vartheta,$$

zaś wartość parametru β:

$$\beta = \frac{1}{U_m} \int_{\pi/3}^{2\pi/3-\alpha_1} U_m \sin(\vartheta - \pi/3) d\vartheta + \frac{1}{U_m} \int_{2\pi/3-\alpha_1}^{\alpha} (U_m \sin\vartheta - E) d\vartheta.$$

Rozwiązaniem powyższych całek były wzory (21) i (30) oraz wynikający stąd wzór (33) na charakterystykę mechaniczną

$$\nu = \frac{3}{\pi}[(1-\beta)-\mu].$$

Jak łatwo sprawdzić na podstawie rys. 9b, ten sam wynik obowiązuje w strefie przewodzenia ciągłego.

Na rys. 12 pokazano przebiegi charakterystyk mechanicznych dla trzech wybranych wartości parametru β, a mianowicie:

$\beta = 0$ — charakterystyka podstawowa (jak dla układu 3-fazowego mostka prostowniczego z niesterowanymi zaworami),

$\beta = 0{,}0931$ — pierwsza całkowicie prostoliniowa charakterystyka dla obydwu stref przewodzenia prądu w obwodzie twornika,

$\beta = 0{,}5$ — pierwsza charakterystyka przebiegająca całkowicie w strefie przewodzenia impulsowego.

Na rys. 12 pokazano również przebieg krzywej rozgraniczającej strefę przewodzenia impulsowego od strefy przewodzenia ciągłego. Na podstawie obserwacji, rys. 7c, rys. 9b i rys. 10, można wywnioskować, że strefa przewodzenia ciągłego zaczyna się każdorazowo, jeżeli rozpiętość impulsu prądu twornika osiąga wartość $\lambda = \pi/3$, czyli

$$(\pi - \alpha_{1c}) - \alpha_c = \pi/3,$$

skąd

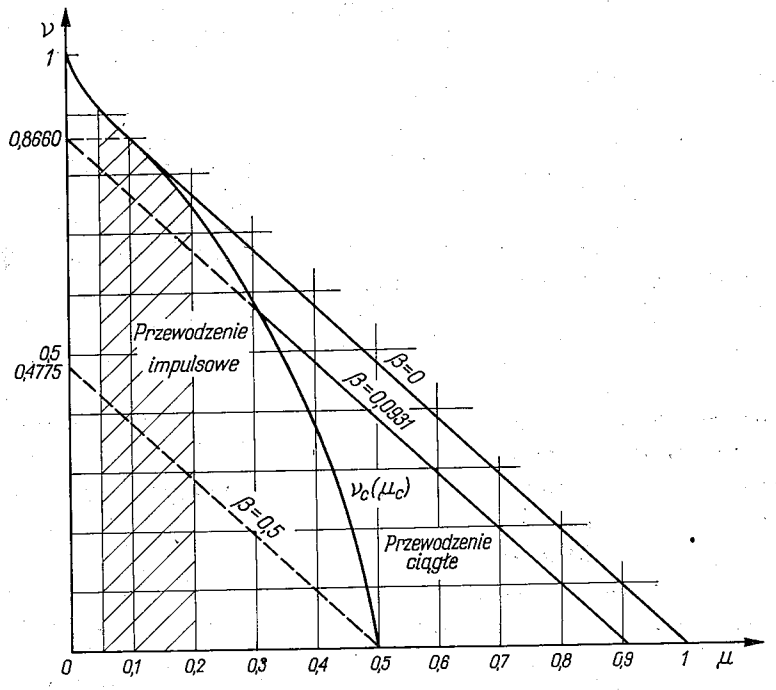
$$\alpha_c = 2\pi/3 - \alpha_{1c}. \tag{41}$$

(Należy zastrzec, że wzór (41) jest słuszny jedynie dla wartości $\alpha_{1c} \leqslant \pi/3$, gdyż dla $\alpha_1 > \pi/3$ przewodzenie ciągłe nie występuje).

Łącząc wzór (41) z wyprowadzonym uprzednio wzorem (35) na średnią wartość prądu (i momentu) twornika w jednostkach względnych, otrzymuje się zależność dla początku strefy przewodzenia ciągłego

$$\left.\begin{aligned} i_c = \mu_c &= \sin(\alpha_{1c} - \pi/6) - \frac{\pi}{3}\sin\alpha_{1c}, \\ \text{oprócz tego} \\ \nu_c &= \sin\alpha_{1c}. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Zespół równań parametrycznych (42) określa przebieg krzywej $\nu_c(\mu_c)$, rozgraniczającej strefę przewodzenia impulsowego od strefy przewodzenia ciągłego.



Rys. 12. Przebiegi charakterystyk mechanicznych $\nu(\mu)$ układu w jednostkach względnych, dla charakterystycznych wartości parametru β, oraz przebieg krzywej $\nu_c(\mu_c)$ rozgraniczającej strefę przewodzenia impulsowego od strefy przewodzenia ciągłego. Na rysunku zakreskowano obszar wartości momentu znamionowego μ_{zn} dla silników małej i średniej mocy

nia ciągłego. W tablicy 2 umieszczono wyniki obliczeń kilkunastu punktów omawianej krzywej, na podstawie których sporządzono wykres na rys. 12.

Na marginesie warto może zaznaczyć, że chcąc porównać charakterystyki silnika zasilanego napięciem stałym U_- na wspólnym wykresie z charakterystykami omawianego układu zasilanego napięciem o tej samej wartości średniej, tzn.

$$\frac{3}{\pi}U_m = U_-,$$

rzędne krzywych na rys. 12 (oraz wartości ν_c tablicy 2) należy zwiększyć w stosunku $\pi/3 \approx 1{,}047$, [5].

Tablica 2

α_{1c}	60^0	55^0	50^0	45^0	40^0	35^0	30^0	25^0	20^0	15^0	10^0	5^0	0
α_c	60^0	65^0	70^0	75^0	80^0	85^0	90^0	95^0	100^0	105^0	110^0	115^0	120^0
ν_c	0,8660	0,8192	0,7660	0,7071	0,6428	0,5736	0,5000	0,4226	0,3420	0,2588	0,1736	0,0872	0
μ_c	0,0931	0,1383	0,1826	0,2254	0,2666	0,3056	0,3424	0,3767	0,4079	0,4361	0,4610	0,4823	0,5000

Na zakończenie wyznaczmy jeszcze wartość momentu rozruchowego (równego co do wartości liczbowej prądowi zwarcia) w jednostkach względnych, przy $\nu = 0$. Ze wzorów (32) i (39) otrzymuje się natychmiast

$$\mu_r = 1-\beta. \tag{43}$$

Moment rozruchowy można również wyznaczyć w funkcji kąta nasycenia α. Dla kątów nasycenia $2\pi/3 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ (wartości parametru β wynoszą wtedy $0{,}5 \leqslant \beta \leqslant 1$) mamy ze wzoru (21)

$$\mu_r = 1+\cos\alpha. \tag{44}$$

Dla kątów nasycenia $\pi/3 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi/3$ (wartości parametru β wynoszą wtedy $0 \leqslant \beta \leqslant 0{,}5$) mamy ze wzoru (35)

$$\mu_r = \sin(\alpha+\pi/6) \tag{45}$$

lub licząc kąt nasycenia poczynając od kąta naturalnej komutacji, tzn. dla $0 \leqslant \alpha_n \leqslant \pi/3$, na podstawie wzoru (35a)

$$\mu_r = \cos\alpha_n. \tag{4)6}$$

5. WNIOSKI

W wyniku przeprowadzonej analizy pracy układu 3-fazowego WM w układzie mostka, pracującego na obciążenie typu R, E, przy parametrze $\beta = \text{const}$ ustalono pewne cechy omawianego układu rozpatrywanego głównie z punktu widzenia jego własności napędowych.

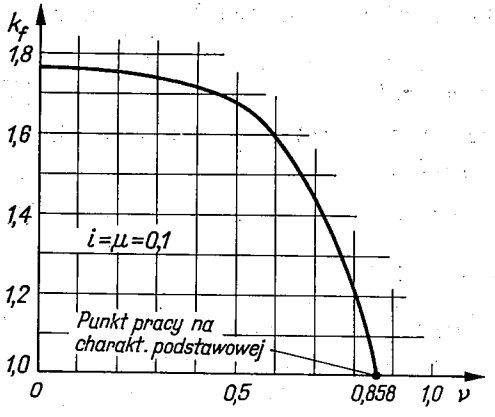
1°. Określono sposoby pracy WM w całym zakresie zmian wartości *SEM*-ej E i prądu obciążenia I (w jednostkach względnych prędkości ν i momentu μ). Chodziło tu w szczególności o określenie napięć, pod wpływem których nasycane są dławiki WM.

2°. Wyznaczono równania charakterystyk mechanicznych układu WM — silnik, w jednostkach względnych, przy parametrze $\beta = \Delta B/2B_s = \text{const}$ dla całego obszaru zmian prędkości i momentu silnika. Stwierdzono przy tym korzystną cechę układu pracującego przy stałej wartości parametru β, polegającą na prostoliniowym przebiegu charakterystyk mechanicznych $\nu(\mu)$ w strefie przewodzenia impulsowego, przy prędkościach $\nu < 0{,}8660$, w przeciwieństwie do układów ze sterowanymi zaworami pracujących przy stałym kącie zapłonu. Niezmienność parametru β przy pra-

cy układu otwartego (szczególnie w węższych granicach, tzn. od biegu jałowego do obciążenia znamionowego) jest z dużym przybliżeniem samoczynnie utrzymywana przez zachowanie stałej wartości prądu sterującego I_{st} wzmacniacza magnetycznego. Przyczyną tej wzajemnej odpowiedniości $\beta(I_{st})$ jest stała nieomal rozpiętość przedziału nastawiania strumienia τ, przy pracy na charakterystyce mechanicznej przy $\beta = \text{const}$. Umożliwia to wykorzystanie wyników prac A. Górala [1], [2], które pozwalają na jednoznaczne powiązanie wartości I_{st} oraz β; przy $\tau = \text{const}$.

Z drugiej strony trzeba stwierdzić, że każdej wartości β (a więc każdej charakterystyce mechanicznej układu), ściśle rzecz biorąc, odpowiada inna nieco wartość τ, gdyż zmianom β od zera do jedności odpowiadają zmiany τ od pełnego (przy $\nu_{0mx} = 1$) do połowy okresu napięcia zasilającego (przy $\nu_0 = 0$).

3°. Wyznaczono równanie krzywej rozgraniczającej strefę przewodzenia impulsowego od strefy przewodzenia ciągłego. Na podstawie wykresu tej krzywej można stwierdzić, że 3-fazowy WM zasilający obwód twornika silnika obcowzbudnego z pomijalnie małą indukcyjnością własną, pracowałby wyłącznie przy impulsowym przewodzeniu prądu obciążenia,



Rys. 13. Zależność współczynnika kształtu prądu twornika w funkcji prędkości silnika, przy stałej wartości średniej prądu obciążenia $i = \mu = 0,1$

gdyż zakres normalnej pracy silnika dla silników małej i średniej mocy sięga co najwyżej wartości $\mu_{zn} = (0,05 \div 0,2)$. Obszar ten zaznaczono polem zakreskowanym na rys. 12.

W związku z tym trzeba zaznaczyć, że wymieniona we wstępie zaleta układu polegająca na dobrym cieplnym wykorzystaniu silnika występuje w układzie z obciążeniem typu R, E tylko częściowo. W miarę obniżenia prędkości wzrasta bowiem znacznie współczynnik kształtu prądu twornika k_f. Ilustruje to przykładowo wykres wartości k_f obliczonych dla tej samej wartości średniej prądu $i = 0,1$ i różnych prędkości, zamieszczony na rys. 13.

Politechnika Łódzka
Katedra Automatyki

WYKAZ LITERATURY

1. Góral A.: Dynamiczne właściwości ferromagnetyków o prostokątnej pętli histerezy. — Archiwum Elektrotechniki, tom X, z. 2/1961, str. 407—439.
2. Góral A.: O jednolitej teorii wzmacniaczy magnetycznych samonasycanych. — Archiwum Automatyki i Telemechaniki, tom VII, z. 1-2/1962, str. 147—171.
3. Mierdel G., Kroczek J.: Selengleichrichter. VEB Verlag Technik Berlin 1959.
4. Storm H. F., Flairty C. W.: Theory of 3-Phase Bridge Magnetic Amplifier. I. — Steady State. — AIEE Trans., January 1960, str. 878—895.
5. Czajkowski A.: Analiza pracy silnika obcowzbudnego zasilanego z trójfazowego mostka prostowniczego. Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, Nr 63, „Elektryka", z. 15/1965, str. 41—64.
6. Kümmel F.: Regel — Transduktoren. Springer Verlag, Berlin 1961.

A. CZAJKOWSKI

STEADY STATE ANALYSIS OF 3-PHASE BRIDGE MAGNETIC AMPLIFIER FEEDING R, E — CIRCUIT

Summary

The paper deals with the steady state theory of 3-phase self-saturating bridge magnetic amplifier operated on R, E — circuit, which is treated as parallel to D—C motor armature, with armature reactance neglected. The analysis has been made after assumption that relative flux change $\beta = \Delta B/2B_s$ is a constant parameter. Some features of investigated system have been established considering mainly the drive properties.

First, all modes of magnetic amplifier operation in the whole range of electromotive force (E) and load current (I) changes have been determined. (In another scale they are changes of motor-speed ν and torque μ). Particularly it concerns the determination of setting interval gate-voltages.

Next, normalized speed-torque characteristics of amplifier-motor unit have been derived in the entire area of motor-speed and torque changes, with parameter β = const. Advantageous feature of the system has been stated, when operating with constant value of β parameter. It consists in straight-line speed-torque characteristics $\nu(\mu)$ in discontinuous conduction range at speeds $\nu < 0{,}8660$ — contrary to system with controlled rectifiers operating with constant firing angle. Invariability of β parameter in open-loop system operation (especially within narrower bounds i.e. from no-load to full-load) is maintained automatically with good approximation by keeping constant control current I_{st}, of magnetic amplifier. This mutual equivalence $\beta(I_{st})$ is caused by nearly constant width (τ) of resetting interval, when operating on speed-torque characteristic at β = const. Thus, results of charge control approach to magnetic amplifiers may be used [1], [2], as they enable univocal connection between relative flux change β and control current I_{st}, on condition τ = const.

Subsequently equation of delimiting curve $\nu_c(\mu_c)$ running between discontinuous and continuous conduction zones has been deduced. Considering the $\nu_c(\mu_c)$ diagram in Fig. 12 it may be found that separately excited D—C motor (with neglected armature reactance) driven by 3-phase magnetic amplifier will operate entirely at dis-

continuous armature current conduction, because rated motor-torque of small integral horsepower and larger ranges attains at most values of $\mu_n = (0{,}05 \div 0{,}2)$. This region of torque values has been marked in Fig. 12 by hachure. In this context it is to be noted, that certain amount of derating would be necessary in order to maintain rated temperature rise. Reducing motor-speed level, rises form factor k_f of armature current. An examplary diagram of $k_f(\nu)$ has been shown in Fig. 13. Values of k_f have been evaluated at constant mean value of load current $i = 0{,}1$ and $\nu = \text{var}$.

Results obtained can be treated as first part of analysis that encloses questions of operation of separately excited D—C motors driven by 3-phase magnetic amplifiers. Basic results of the analysis can be adapted to problems occuring in thyristor--drive control systems.

A. CZAJKOWSKI

ANALYSE DES RÉGIMES STATIONNAIRES D'UN AMPLIFICATEUR MAGNÉTIQUE TRIPHASÉ, ALIMENTANT UN CIRCUIT AVEC RÉSISTANCE ET FORCE ÉLECTROMOTRICE

Résumé

Dans l'étude sont analysés les régimes stationnaires d'un amplificateur magnétique à autosaturation en schéma d'un pont triphasé, alimentant un moteur à courant continu à excitation separée, c'est à dire alimentant un circuit avec résistance et force électromotrice. L'analyse concerne le comportement du moteur dans ce système de commande. On a trouvé une methode de contrôle qui assure les caractéristiques vitesse-couple linéaires dans le domaine de la conductibilité impulsive. Les résultats obtenus sont aussi valables pour les systèmes avec thyristors.

A. CZAJKOWSKI

BEHARRUNGSVERHALTENS ANALYSE VON MAGNETVERSTÄRKER IN DREIPHASIGEN — BRÜCKENSCHALTUNG MIT WIRKLAST UND GEGENSPANNUNG IM BETRIEB

Zusammenfassung

In vorliegender Arbeit werden die Beharrungsverhalten des Dreiphasigen Magnetverstärker in Brückenschaltung mit R, E — Belastung analysiert. Erwägungen werden unter Beachtung der Antriebseigenschaften der Anlage ausgeführt. Es ist gewisse Steuerungsweise hingewiesen worden, die die Erlangung geradlinige Drehzahl — Drehmoment Kennlinien in der Zone der diskontinuierlichen Ankerstromführung zusichert. Die in diesem Aufsatz dargestellte Ergebnisse auch für 3-phasige Stromrichterantriebe mit steuerbaren Siliziumzellen recht sind.

А. ЧАЙКОВСКИ

АНАЛИЗ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ ТРЕХФАЗНОГО МАГНИТНОГО УСИЛИТЕЛЯ РАБОТАЮЩЕГО НА КОНТУР С АКТИВНОЙ НАГРУЗКОЙ И ПРОТИВО — Э.Д.С.

Резюме

В настоящей статье приведен анализ работы магнитного усилителя с самонасыщением, в схеме трехфазного моста, предназначенного для питания двигателя постоянного тока с независимым возбуждением, который рассмотрено как контур с активной нагрузкой и противо — э.д.с. (пренебрегая индуктивностью обмотки якоря).

Анализ совершен с точки зрения приводных свойств системы. Указано на способ управления, обеспечивающий прямолинейность механических характеристик в области импульсного тока в цепи якоря двигателя. Результаты выводов применимы тоже для анализа установившихся режимов в системах электроприводов с питанием якоря двигателя постоянного тока от тиристорного преобразователя.

621.313.236

ANDRZEJ CZAJKOWSKI

Praca trójfazowego wzmacniacza magnetycznego oraz układu tyrystorowego przy zasilaniu twornika silnika obcowzbudnego

Rękopis dostarczono 10.3.1965

W artykule dokonano analizy podstawowego sposobu pracy trójfazowego samonasycanego wzmacniacza magnetycznego w układzie mostkowym, zasilającego twornik silnika obcowzbudnego prądu stałego. Rozpatrzono pracę układu otwartego oraz układu zamkniętego automatycznej stabilizacji prędkości.

Uzyskane wyniki, łącznie z pracą [1], zamykają analizę stanów ustalonych rozpatrywanego układu wzmacniacz magnetyczny — silnik, przeprowadzoną głównie pod kątem widzenia jego własności napędowych. Zasadnicze wyniki rozważań są również słuszne dla trójfazowych mostkowych tyrystorowych układów sterowania.

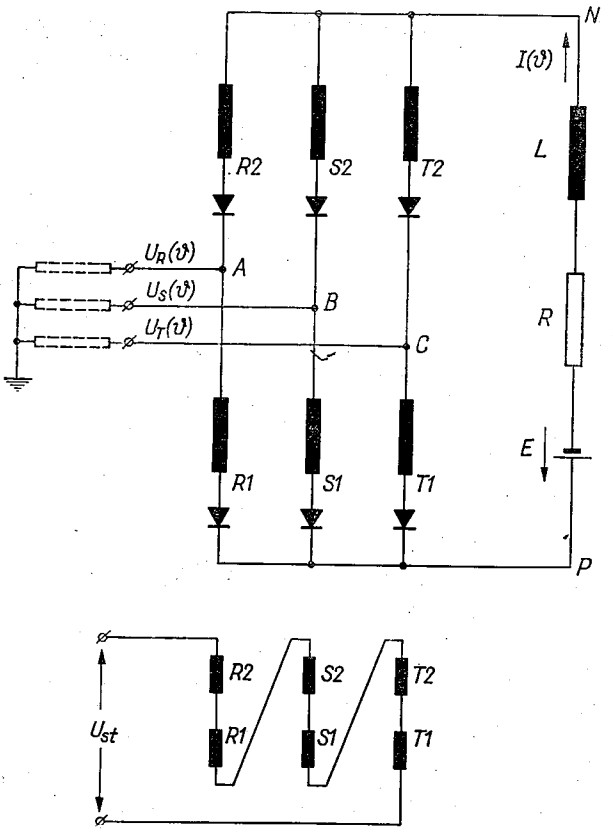
1. WSTĘP

Spośród spotykanych współcześnie układów zautomatyzowanego napędu z silnikami obcowzbudnymi prądu stałego małej i średniej mocy, najszersze zastosowanie znalazły dwa typowe rozwiązania. Jedno z nich stanowią układy z samonasycanymi wzmacniaczami magnetycznymi wykonywane najczęściej w postaci mostka trójfazowego, a drugie — układy ze sterowanymi zaworami półprzewodnikowymi. Te ostatnie uzyskały znaczenie praktyczne w technice silnoprądowej wskutek szybkiego rozwoju technologii wytwarzania sterowanych diod krzemowych — tyrystorów. W oparciu o przekonywające zalety tyrystora będą one niewątpliwie wpływały w określony sposób na przyszły rozwój zautomatyzowanego napędu prądu stałego.

Celem niniejszego artykułu jest w pierwszym rzędzie analiza podstawowego sposobu pracy układu trójfazowego wzmacniacza magnetycznego zasilającego twornik silnika obcowzbudnego z uwzględnieniem indukcyjności własnej obwodu twornika L. Schemat zastępczy takiego układu podano na rys. 1.

Następnym celem artykułu jest wykazanie możliwości wykorzystania wyników analizy przeprowadzonej dla układu z idealnym wzmacniaczem magnetycznym (zwanym dalej w skrócie WM), do rozważań dotyczących pracy tyrystorowego układu sterowania (dalej w skrócie TUS, rys. 2).

Analogia obydwu układów polega na tym, że zarówno WM, jak i TUS wytwarzają poprzez prostowanie napięcia przemiennego, napięcie stałe o wartości średniej, określonej przez opóźnienie chwili załączenia do pracy poszczególnych gałęzi zaworowych mostka. Niezbędna do tego zdolność czasowego blokowania napięć w kierunku przepustowym zaworów jest zapewniona w WM na drodze magnetycznej, przez dławiki nasycane.



Rys. 1. Schemat zastępczy 3-fazowego, sześciodławikowego wzmacniacza magnetycznego z wewnętrznym sprzężeniem zwrotnym, zasilającego twornik obcowzbudnego silnika prądu stałego (obwód typu *R*, *L*, *E*)

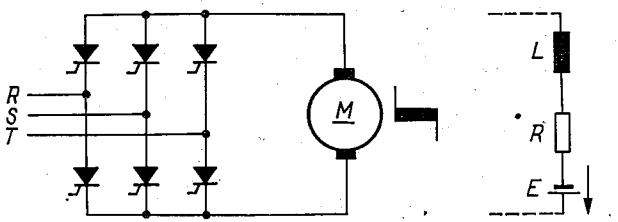
Moment załączenia (określony przez kąt nasycenia dławika α) zależy od stanu namagnesowania dławików, który ze swej strony jest określony wypadkowym przepływem sterującym. W kierunku zaporowym napięcie jest blokowane przez zawory półprzewodnikowe.

W TUS tyrystory są zdolne do blokowania napięcia w obu kierunkach; natomiast zapewniają przewodzenie prądu w kierunku przepustowym po odblokowaniu przez impuls sterujący, wytwarzany z reguły przez tranzystorowy bezopóźnieniowy układ zapłonowy. Ze względu na

obecność zaworów sterowanych odpowiednie kombinacje połączeń TUS zapewniają możliwość pracy nawrotnej silnika oraz oddawanie energii do sieci przy hamowaniu odzyskowym. W układzie z WM takich możliwości nie ma.

Artykuł niniejszy jest w pewnym stopniu kontynuacją pracy [1]. Z tego względu przyjęto ponownie wymienione w [1] oznaczenia, założenia upraszczające oraz układ jednostek względnych.

Modyfikacji ulega jedynie punkt 4° założeń upraszczających, w części dotyczącej tłumienia harmonicznych prądu w uzwojeniach sterujących



Rys. 2. Schemat tyrystorowego układu sterowania, zasilającego twornik silnika obcowzbudnego (obwód typu *R*, *L*, *E*)

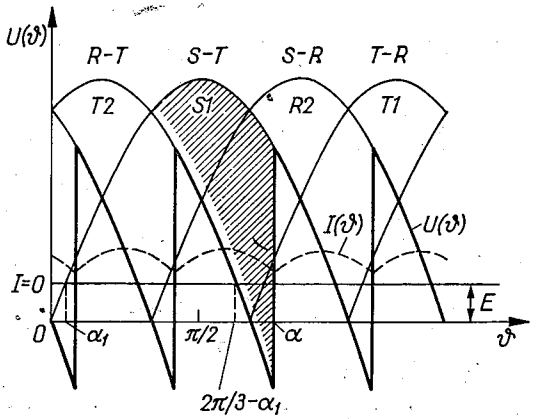
WM. Niezbędne jest tu założenie dostatecznie dużych impedancji obwodów uzwojeń sterujących WM, zapewniających praktycznie tzw. wymuszony przepływ prądu sterującego. W przeciwnym razie, ze względu na wpływ prądu płynącego wskutek rozładowania energii pola magnetycznego, nagromadzonej w indukcyjności obwodu twornika *L*, na nienasycone dławiki WM, mogłaby wystąpić niestabilna praca układu otwartego WM — silnik, uniemożliwiająca praktycznie jego wykorzystanie [5].

2. TYPOWY SPOSÓB PRACY UKŁADU WM — SILNIK

Przebieg chwilowy i wartość średnia prądu obciążenia $I(\vartheta)$ — (rys. 1), zależą od wartości obciążenia (tzn. momentu oporowego na wale silnika), parametrów obwodu twornika *R*, *L*, oraz od wartości prądu sterującego I_{st} (względnie parametru $\beta = \Delta B/2B_s$). Prąd obciążenia może składać się z szeregu kolejno po sobie następujących impulsów (przewodzenie impulsowe) lub też może być prądem tętniącym (przewodzenie ciągłe). Występują tu daleko idące analogie w stosunku do opisywanych w wielu publikacjach układów ze sterowanymi zaworami prostowniczymi. Układ z WM posiada jednak również swe odrębne cechy. Aby poznać bliżej te podobieństwa i różnice, rozpatrzmy typowy sposób pracy układu, występujący w całym nieomal obszarze możliwych zmian prędkości i momentu silnika. Jest to praca przy przewodzeniu ciągłym prądu w obwodzie twornika silnika. Charakterystyczny obraz przebiegów na-

pięć, pod wpływem których nasycane są dławiki WM, oraz prądu i napięcia twornika dla tego przypadku podano na rys. 3.

Prześledźmy na wstępie sposób pracy WM zgodnie z rys. 3. Charakterystyczną cechą sposobu działania WM w tym zakresie pracy jest



Rys. 3. Przebiegi czasowe prądu i napięcia twornika oraz napięć, pod wpływem których nasycane są dławiki WM (pole zakreskowane dla dławika $S1$), w obszarze pracy typowej układu WM — silnik

$\alpha_1 = \arcsin E/U_m$, α — kąt nasycenia dławika $S1$

to, że dławiki WM od początku do końca przedziału wzbudzenia są nasycane pod wpływem jednego z napięć międzyprzewodowych, zaś ich prąd magnesujący omija całkowicie obciążenie R, L, E.

Jak wynika z rys. 3, dławik $S1$ w przedziale wzbudzenia $\pi/3 \leqslant \vartheta \leqslant \alpha$ jest nasycany pod wpływem napięcia międzyprzewodowego $U_{SR}(\vartheta)$, przy czym jego prąd magnesujący wraca do sieci poprzez gałąź $R1$ przewodzącą prąd obciążenia; początkowo prąd ten płynie gałęziami $R1 \rightarrow S2$ (dla kątów $\pi/3 \leqslant \vartheta \leqslant \alpha - \pi/3$), a następnie po nasyceniu dławika $T2$, gałęziami $R1 \rightarrow T2$ (dla $\alpha - \pi/3 \leqslant \vartheta \leqslant \alpha$).

Aby prześledzić przebieg komutacji prądu obciążenia, zacznijmy obserwować układ od chwili $\vartheta = \pi/2$ (rys. 3), w której pod wpływem napięcia $U_{RT}(\vartheta)$ prąd obciążenia płynie gałęziami $R1 \rightarrow T2$. Wartość chwilową prądu $I(\vartheta)$ określa równanie

$$U_{RT}(\vartheta) = RI(\vartheta) + \omega L \frac{dI(\vartheta)}{d\vartheta} + E. \tag{1}$$

Przy obciążeniu typu R, E, prąd $I(\vartheta)$ staje się równy zeru w chwili, gdy napięcie $U_{RT}(\vartheta)$ malejąc osiąga wartość równą SEM-ej E, czyli w chwili $\vartheta = 2\pi/3 - \alpha_1$. Jeżeli natomiast obciążenie stanowi obwód typu R, L, E, to prąd $I(\vartheta)$ płynie nawet przy napięciu $U_{RT}(\vartheta) < E$, a to ze względu na powstawanie SEM-ej samoindukcji, równej

$$L \frac{dI(\omega t)}{dt} = \omega L \frac{dI(\vartheta)}{d\vartheta}.$$

SEM samoindukcji dąży przy malejącym prądzie twornika do jego podtrzymania, równanie (1) obowiązuje tak długo, dopóki prąd obciążenia jest dodatni, $I(\vartheta) > 0$. (Przyjęto założenie, że wartość indukcyjności L jest stała i niezależna od prądu twornika). Potencjał punktu P w rozpatrywanym przedziale czasu jest równy potencjałowi fazy R (rys. 1), zaś potencjał punktu N — potencjałowi fazy T. Zatem napięcie na tworniku silnika wynosi:

$$U(\vartheta) = V_P(\vartheta) - V_N(\vartheta) = U_{RT}(\vartheta).$$

W chwili $\vartheta = \alpha$, (rys. 3), dławik $S1$ osiąga nasycenie i jego impedancja własna staje się równa zeru. W obwodzie B—$S1$—$R1$—A zaczyna płynąć prąd zwarcia pod wpływem napięcia $U_{SR}(\vartheta) > 0$. Ponieważ impedancje nasyconych dławików $S1$ i $R1$ i sieci 3-fazowej z założenia są równe zeru, prąd zwarcia natychmiast osiąga wartość prądu obciążenia $I(\alpha)$ płynącego uprzednio przez gałąź $R1$ (tzn., że szerokość strefy komutacji jest równa zeru), zawór $R1$ ulega zablokowaniu, zaś prąd obciążenia zostaje przejęty przez fazę S oraz gałąź $S1$ i jest określony w dalszym ciągu równaniem

$$U_{ST}(\vartheta) = RI(\vartheta) + \omega L \frac{dI(\vartheta)}{d\vartheta} + E. \tag{2}$$

Należy tu podkreślić, że taki obraz działania układu ma miejsce jedynie w przypadku dostatecznie dużej impedancji obwodu sterowania WM, gdy w obwodzie tym nie mogą płynąć prądy pod wpływem napięć transformowanych do obwodu sterującego przez nienasycone dławiki w ich przedziałach wzbudzenia.

W przeciwnym przypadku, przy $\alpha > 2\pi/3$, w układzie wystąpiłaby niejednoznaczność charakterystyki sterowania WM w postaci pętli (działanie przekaźnikowe), analogicznie jak przy pracy WM zasilającego obwód typu R, L przy małej impedancji obwodu sterującego [5]. (Pracy przekaźnikowej można również uniknąć stosując na wyjściu WM diodę rozładowczą lub człony R—C; w tych przypadkach przy analizie pracy układu trzeba dodatkowo brać pod uwagę wpływ powyższych modyfikacji na przebiegi prądów i napięć wyjściowych).

Znajdźmy teraz równanie chwilowej wartości prądu obciążenia, w przedziale $\alpha \leqslant \vartheta \leqslant \alpha + \pi/3$, na podstawie wyrażenia (2). Przy przewodzeniu ciągłym prąd obciążenia jest większy od zera w dowolnej chwili, przy czym zachodzi zależność stanu ustalonego

$$I(\vartheta) = I(\vartheta + k\pi/3) \tag{3}$$

oraz spełniony jest warunek brzegowy

$$I(\alpha) = I(\alpha + \pi/3). \tag{4}$$

Po rozwiązaniu równania (2) i odniesieniu prądu $I(\vartheta)$ do wartości prądu zwarcia

$$I_{zw} = \frac{3U_m}{\pi R}$$

otrzymuje się wyrażenie na wartość chwilową prądu twornika w jednostkach względnych:

$$i(\vartheta) = \frac{\pi}{3}\left\{\cos\varphi\sin(\vartheta-\varphi)-\sin\alpha_1+\right.$$

$$\left.-[\cos\varphi\sin(\alpha-\varphi)-\sin\alpha_1]e^{-\frac{\vartheta-\alpha}{\operatorname{tg}\varphi}}\right\}+i(\alpha)e^{-\frac{\vartheta-\alpha}{\operatorname{tg}\varphi}}, \tag{5}$$

gdzie

$$i(\alpha) = \frac{\pi}{3}\left\{\frac{\cos\varphi\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}-\varphi\right)-e^{-\frac{\pi/3}{\operatorname{tg}\varphi}}\cos\varphi\sin(\alpha-\varphi)}{1-e^{-\frac{\pi/3}{\operatorname{tg}\varphi}}}-\sin\alpha_1\right\} \tag{6}$$

oraz

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}. \tag{7}$$

Po podstawieniu wyrażenia (6) do równ. (5) otrzymuje się ostatecznie

$$i(\vartheta) = \frac{\pi}{3}\left\{\cos\varphi\sin(\vartheta-\varphi)-\sin\alpha_1-\frac{\cos\varphi\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}-\varphi\right)}{1-e^{-\frac{\pi/3}{\operatorname{tg}\varphi}}}e^{-\frac{\vartheta-\alpha}{\operatorname{tg}\varphi}}\right\}. \tag{8}$$

Przejdźmy teraz do obliczenia wartości średniej prądu twornika (i momentu silnika). Całkując równanie (2) w granicach od α do $(\alpha+\pi/3)$ mamy:

$$R\int_{\alpha}^{\alpha+\pi/3} I(\vartheta)\,d\vartheta+\omega L\int_{I(\alpha)}^{I(\alpha+\pi/3)} dI(\vartheta) = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi/3}(U_m\sin\vartheta-E)\,d\vartheta. \tag{9}$$

Ponieważ zgodnie z (4) prąd spełnia równość $I(\alpha) = I(\alpha+\pi/3)$, to druga całka po lewej stronie wyrażenia (9) jest równa zeru. Mamy więc

$$I = \frac{1}{\pi/3}\int_{\alpha}^{\alpha+\pi/3} I(\vartheta)\,d\vartheta = \frac{3}{\pi R}\int_{\alpha}^{\alpha+\pi/3}(U_m\sin\vartheta-E)\,d\vartheta,$$

stąd

$$I = \frac{3U_m}{\pi R}\left[\sin(\alpha+\pi/6)-\frac{\pi}{3}\sin\alpha_1\right]$$

lub w jednostkach względnych

$$i = \mu = \sin(\alpha+\pi/6) - \frac{\pi}{3}\nu \tag{10}$$

oraz

$$\nu = \frac{3}{\pi}[\sin(\alpha+\pi/6) - \mu]. \tag{11}$$

Licząc kąt nasycenia α_n od chwili naturalnej komutacji w układzie (tzn. od $\vartheta = \pi/3$), byłoby

$$i = \mu = \cos\alpha_n - \frac{\pi}{3}\nu, \tag{10a}$$

$$\nu = \frac{3}{\pi}(\cos\alpha_n - \mu). \tag{11a}$$

W strefie przewodzenia ciągłego kąt nasycenia α jest związany jednoznacznie z wartością parametru β równaniem [1]:

$$\beta = \frac{1}{U_m}\int_{\pi/3}^{\alpha} U_m \sin(\vartheta - \pi/3)\,d\vartheta,$$

skąd

$$\beta = 1 - \sin(\alpha+\pi/6) = 1 - \cos\alpha_n. \tag{12}$$

Po podstawieniu (12) do wzorów (10) i (11) otrzymuje się odpowiednio

$$i = \mu = (1-\beta) - \frac{\pi}{3}\nu, \tag{10b}$$

$$\nu = \frac{3}{\pi}[(1-\beta) - \mu]. \tag{11b}$$

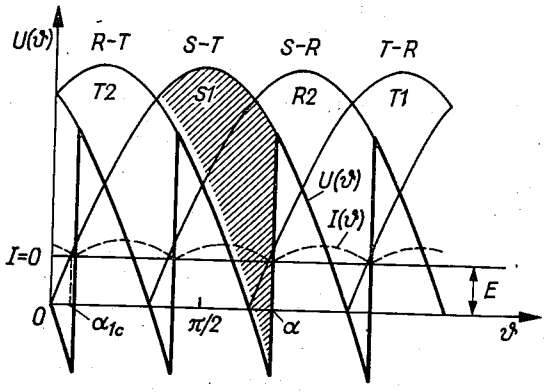
Jak widać, charakterystyki mechaniczne $\nu(\mu)$ układu w strefie przewodzenia ciągłego są prostymi o nachyleniu

$$\frac{d\nu}{d\mu} = -\frac{3}{\pi} \tag{13}$$

niezależnym od wartości parametru β i od wartości $\cos\varphi$ obwodu twornika. Charakterystyki $\nu(\mu)$ dla różnych wartości β = const (lub α_n = const) są równoległe. Ze wzorów (10), (10a) i (10b) po podstawieniu $\nu = 0$ otrzymuje się natychmiast wartość momentu rozruchowego.

2.1. Granice obszaru typowego sposobu pracy układu

Zajmijmy się teraz wyznaczeniem granic obszaru typowego sposobu pracy układu WM — silnik. Jedną z nich jest krzywa rozgraniczająca strefę przewodzenia impulsowego prądu twornika od strefy przewodzenia ciągłego. Przewodzenie ciągłe prądu w obwodzie twornika kończy się



Rys. 4. Praca układu na początku strefy przewodzenia ciągłego prądu twornika $\nu_c = \sin\alpha_{1c}$

w momencie, gdy wartość prądu $I(\alpha)$ określona równaniem (6) staje się równa zeru. Ma to miejsce przy prędkości $\nu_c = \sin\alpha_{1c}$ (rys. 4).

Pisząc równanie (6) dla tak określonych warunków mamy:

$$i(\alpha) = \frac{\pi}{3}\left\{\frac{\cos\varphi\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}-\varphi\right)-e^{-\frac{\pi/3}{\mathrm{tg}\varphi}}\cos\varphi\sin(\alpha-\varphi)}{1-e^{-\frac{\pi/3}{\mathrm{tg}\varphi}}}-\sin\alpha_{1c}\right\}=0.$$

Stąd prędkość ν_c w jednostkach względnych, od której zaczyna się strefa przewodzenia ciągłego, jest określona wzorem:

$$\nu_c = \frac{\sin\left(\alpha-\varphi+\frac{\pi}{3}\right)-e^{-\frac{\pi/3}{\mathrm{tg}\varphi}}\sin(\alpha-\varphi)}{1-e^{-\frac{\pi/3}{\mathrm{tg}\varphi}}}\cos\varphi. \tag{14}$$

Podstawiając wartość ν_c obliczoną z (14) do wzoru na moment (10), uzyskuje się wyrażenie

$$\mu_c = \sin(\alpha+\pi/6)-\frac{\pi}{3}\nu_c \tag{15}$$

określające wartość momentu silnika w jednostkach względnych na początku strefy przewodzenia ciągłego.

Tak więc zespół równań (14) i (15) daje w postaci parametrycznej równanie krzywej $\nu_c(\mu_c)$ rozgraniczającej strefę przewodzenia impulsowego

od strefy przewodzenia ciągłego, dla danej wartości $\cos\varphi$, związanej w określony sposób z elektromagnetyczną stałą czasową obwodu twornika. Parametrem jest tu kąt nasycenia dławików α. Powstaje zatem pytanie, dla jakich wartości kąta α obowiązuje wzór (14).

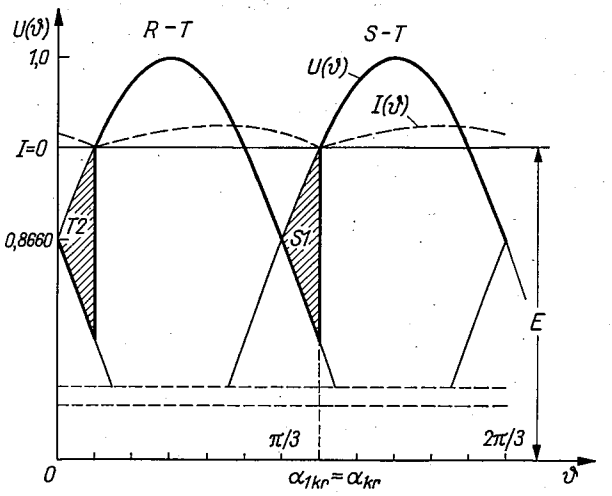
Okazuje się, że górna granica stosowalności wzoru (14) jest wyznaczona warunkiem

$$\alpha = \alpha_{kr} = \alpha_{1kr}. \tag{16}$$

Warunek ten można by określić następująco: przy krytycznej wartości kąta nasycenia α_{kr}, impuls prądu $I(\vartheta)$ malejąc osiąga wartość równą zeru w chwili

$$\alpha_g = \alpha_{kr} = \alpha_{1kr},$$

w której wskutek nasycenia kolejnego dławika zaczyna się następny impuls prądu. Sytuację taką pokazano na rys. 5.



Rys. 5. Praca układu przy $\alpha_{1kr} = \alpha_{kr}$ na początku strefy przewodzenia ciągłego, określająca górną granicę stosowalności wzoru (14)

Podstawiając wartość $\alpha_{kr} = \alpha_{1kr}$ do wzoru (14), uzyskuje się krytyczną wartość prędkości ν_{ckr}, powyżej której wzór (14) przestaje obowiązywać:

$$\nu_{ckr} = \sin\alpha_{1kr} = \frac{\sin\left(\alpha_{1kr} - \varphi + \frac{\pi}{3}\right) - e^{-\frac{\pi/3}{\operatorname{tg}\varphi}} \sin(\alpha_{1kr} - \varphi)}{1 - e^{-\frac{\pi/3}{\operatorname{tg}\varphi}}} \cos\varphi. \tag{17}$$

Równanie (17) jest względem ν_{ckr} równaniem przestępnym. Prędkość ν_{ckr} zależna wyłącznie od wartości parametru

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}$$

może być tu znaleziona znanymi metodami. I tak np. dla $\cos\varphi = 0{,}6$ znaleziono przy pomocy metody wykreślnej wartość $\nu_{ckr} = 0{,}9325$, co odpowiada jednocześnie kątowi nasycenia $\alpha_{kr} = 68^{\circ}828$ oraz wartości parametru β_{kr}, równej (rys. 5):

$$\beta_{kr} = \frac{1}{U_m}\int_{60^{\circ}}^{68^{\circ}828} U_m \sin(\vartheta - 60^{\circ})\,d\vartheta = 0{,}01185.$$

Dla wartości $\cos\varphi = 0{,}01$ znaleziono odpowiednio:

$$\nu_{ckr} = 0{,}9401; \quad \alpha_{kr} = 70^{\circ}063; \quad \beta_{kr} = 0{,}01538.$$

Tak więc praktycznie rzecz biorąc, dla najczęściej spotykanych wartości $\cos\varphi$ zawartych (przy częstotliwości $f = 50$ Hz) w przedziale $(0{,}01 \div 0{,}6)$, zespół równań (14) i (15) obowiązuje dla wartości $\alpha \geqslant 70^{\circ}$ lub inaczej dla wartości parametru $\beta \geqslant 0{,}015$.

Najmniejsza wartość prędkości ν_c, jaką można otrzymać ze wzoru (14), równa jest oczywiście zeru. Odpowiada jej pewien największy kąt nasycenia α_{mx}, przy którym w układzie z siłą elektromotoryczną $E = 0$ (czyli z zahamowanym wirnikiem) występuje jeszcze przewodzenie ciągłe prądu twornika. Pisząc

$$\cos\varphi \frac{\sin\left(\alpha_{mx} - \varphi + \frac{\pi}{3}\right) - e^{-\frac{\pi/3}{\operatorname{tg}\varphi}} \sin(\alpha_{mx} - \varphi)}{1 - e^{-\frac{\pi/3}{\operatorname{tg}\varphi}}} = 0 \tag{18}$$

otrzymujemy warunek na szukaną wartość kąta α_{mx}. Po przekształceniu (18) mamy:

$$\frac{\sin\left(\alpha_{mx} - \varphi + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin(\alpha_{mx} - \varphi)} = e^{-\frac{\pi/3}{\operatorname{tg}\varphi}}. \tag{19}$$

Równanie (19) podaje zależność $\alpha_{mx}(\varphi)$ w postaci przestępnej. Przy pomocy metody wykreślnej obliczono dwie wartości α_{mx}:

$$\cos\varphi = 0{,}6; \quad \alpha_{mx} = 146^{\circ}040;$$
$$\cos\varphi = 0{,}01; \quad \alpha_{mx} = 149^{\circ}945.$$

Wartości kąta α_{mx} są, jak widać, b. bliskie wartości $\alpha_{mx} = 150^{\circ}$, która obowiązywałaby w teoretycznym przypadku przy $R = 0$ i $\cos\varphi = 0$.

Reasumując powyższe wywody wzór (14) obowiązuje dla wartości parametru α zawartych w granicach

$$\alpha_{kr} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{mx}, \tag{20}$$

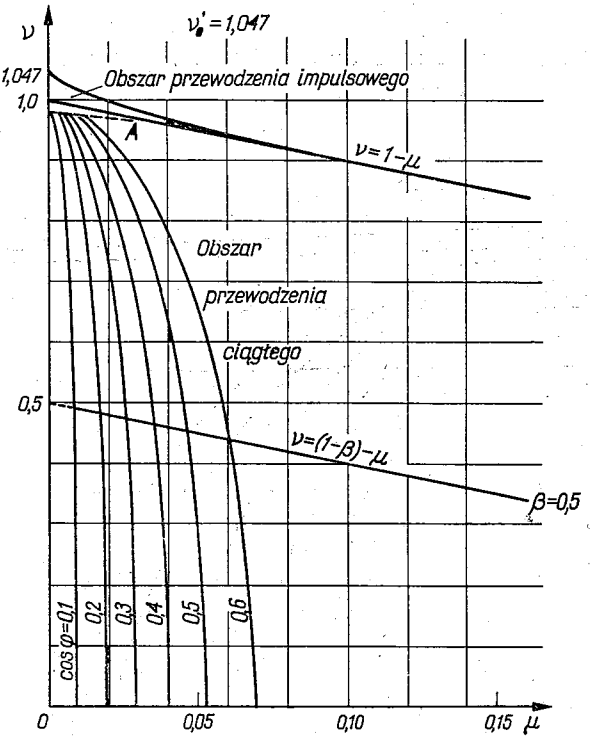
co praktycznie w wartościach liczbowych wynosi

$$70^{\circ} \leqslant \alpha \leqslant 150^{\circ}.$$

2.2. Przebieg charakterystyk mechanicznych $\nu(\mu)$

Na podstawie zespołu równań (14) i (15) obliczono wartości funkcji $\nu_c(\mu_c)$ na maszynie cyfrowej ZAM II Beta, dla 24 wartości parametru $\cos\varphi$ = const przyjmując wartości kąta nasycenia zgodnie z (20) co jeden stopień. Wartości funkcji współrzędnych ν_c i μ_c obliczano z dokładnością do piątego znaku po przecinku.

Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 6 i rys. 7, na których wykreślono krzywe rozgraniczające $\nu_c(\mu_c)$, dla kilkunastu wartości $\cos\varphi$ obwodu



Rys. 6. Krzywe $\nu_c(\mu_c)$ rozgraniczające strefę przewodzenia impulsowego od strefy przewodzenia ciągłego prądu w obwodzie twornika. Na rysunku wykreślono charakterystykę mechaniczną $\nu = 1-\mu$ silnika zasilanego napięciem stałym o wartości

$$U_- = \frac{3}{\pi} U_m$$

oraz charakterystykę układu WM — silnik przy $\beta = 0{,}5$. Krzywa kreskowana A łączy punkty ν_{ckr}, μ_{ckr} dla różnych wartości $\cos\varphi$. Prędkość idealnego biegu jałowego $\nu'_0 = 1{,}047$

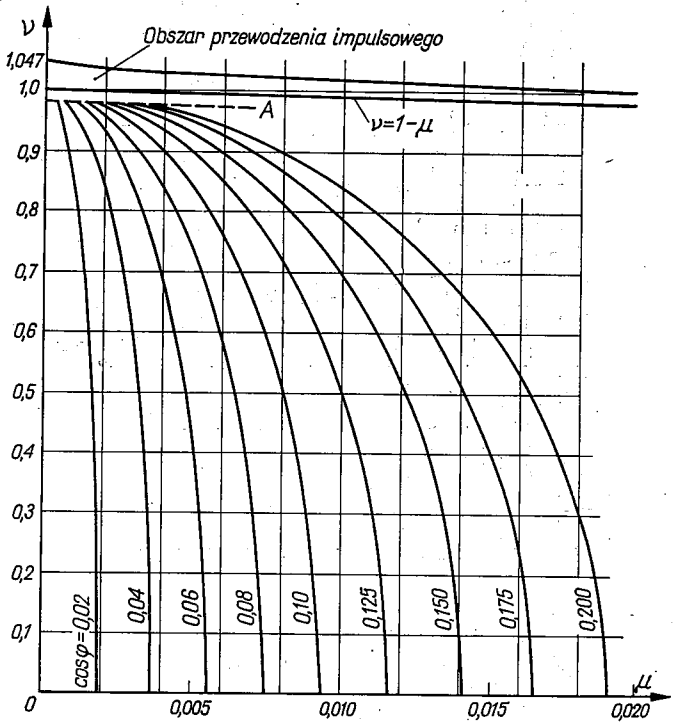
twornika. Na marginesie można dodać, że — jak wynika z danych publikowanych przez różnych autorów — $\cos\varphi$ obwodu twornika dla silników o mocy od kilkunastu do kilkuset kilowatów waha się w granicach $0{,}3 \div 0{,}05$ (przy $f = 50$ Hz).

Krzywe na rys. 6 i 7 zamieszczono wspólnie z charakterystyką $\nu = 1-\mu$ silnika zasilanego napięciem stałym, po przyjęciu założenia, że średnia wartość napięcia wyprostowanego uzyskiwana z 3-fazowego mostka prostowniczego (przy całkowicie wysterowanym WM) jest równa napięciu znamionowemu silnika

$$\frac{3}{\pi} U_m = U_-.$$

Z tego względu rzędne ν_c krzywych obliczone wg wzoru (14) zostały zwiększone w stosunku $\pi/3 \approx 1{,}0472$, [2].

Na rys. 6 i 7 widać, że w większości przypadków przeważająca część przebiegu charakterystyki mechanicznej układu mieści się w strefie przewodzenia ciągłego. Wynika to z faktu, że wartość prądu obciążenia przy rzeczywistym biegu jałowym silnika wynosi $(0{,}07 \div 0{,}15) I_{zn}$, zależnie od



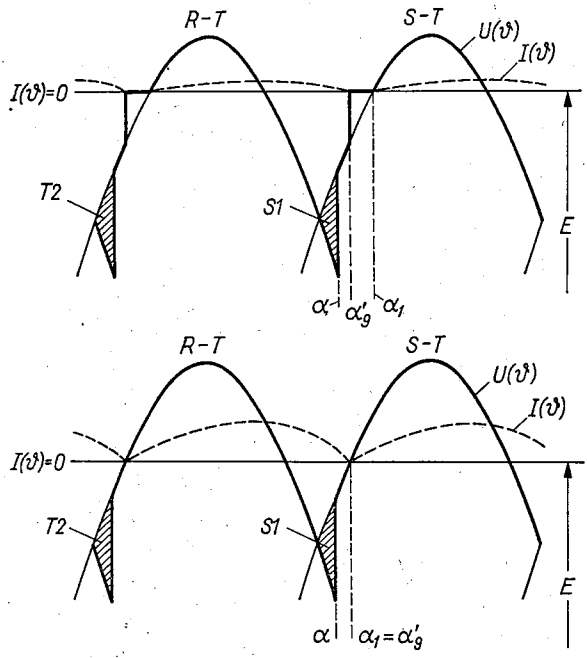
Rys. 7. Krzywe $\nu_c(\mu_c)$ układu WM — silnik jak na rys. 6, wykreślone dla rejonu wartości momentów silnika, przy rzeczywistym biegu jałowym (w jednostkach względnych)

mocy silnika. Wypływa stąd wniosek co do potrzeby umieszczania dodatkowego dławika gładzącego w obwodzie twornika — w większości przypadków jest on w rozpatrywanym układzie zbędny. Jak wynika z obliczeń oraz danych eksperymentalnych, współczynnik kształtu prądu twornika k_f dla znamionowej wartości prądu obciążenia nie przekracza w całym

obszarze pracy układu wartości $k_f = (1{,}02 \div 1{,}05)$, zapewniając dobre wykorzystanie cieplne silnika. Falistość prądu twornika ma jednak pewien ujemny wpływ na wielkość obszaru beziskrowej komutacji silnika [5].

Wzory dotyczące przebiegu charakterystyk mechanicznych $\nu(\mu)$ i krzywych rozgraniczających $\nu_c(\mu_c)$ dla typowego obszaru pracy układu WM — silnik oraz wypływające z nich wnioski odnoszą się również w pełni do układu tyrystorowego (rys. 2), pracującego w określonym wyżej obszarze pracy przy stałym kącie zapłonu $\alpha_z = \text{const}$.

Różnice w pracy obu układów dotyczą obszaru leżącego na rys. 6 i 7 powyżej krzywej A, łączącej punkty ν_c, μ_c dla α_{kr}, i nie będą szczegółowo rozpatrywane ze względu na niewielki zakres tego rodzaju pracy w ogólnym obszarze zmian prędkości i momentu silnika. Można tu jedynie wspomnieć, że postać wzoru na prędkość ν_c przy $\alpha < \alpha_{kr}$ ulega w układzie

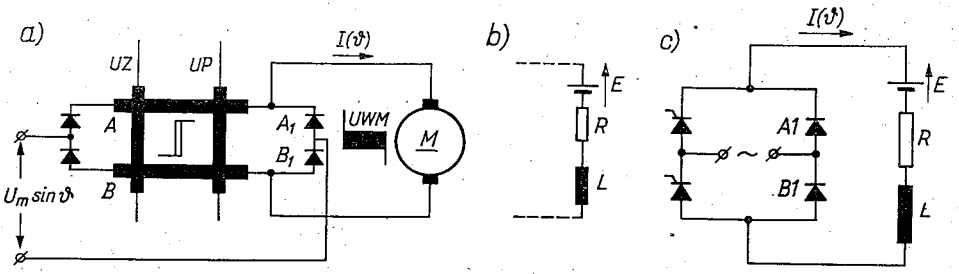


Rys. 8. Przejście od przewodzenia impulsowego do przewodzenia ciągłego w układzie WM — silnik, przy $\beta < \beta_{kr}$. Ten rodzaj pracy układu występuje przy prędkościach leżących powyżej krzywej A i poniżej prostej $\nu = 1-\mu$ (jak rys. 6 i 7). Kąt $\alpha'_g = \alpha_g - \pi/3$

z WM zmianie wynikającej z innego sposobu przejścia prądu twornika ze strefy przewodzenia impulsowego do strefy przewodzenia ciągłego. Ten odmienny sposób przejścia pokazano na rys. 8; został on dokładnie rozpatrzony dla układu jednofazoweqo WM [3], w którym odgrywa bardziej istotną rolę niż w układzie trójfazowym.

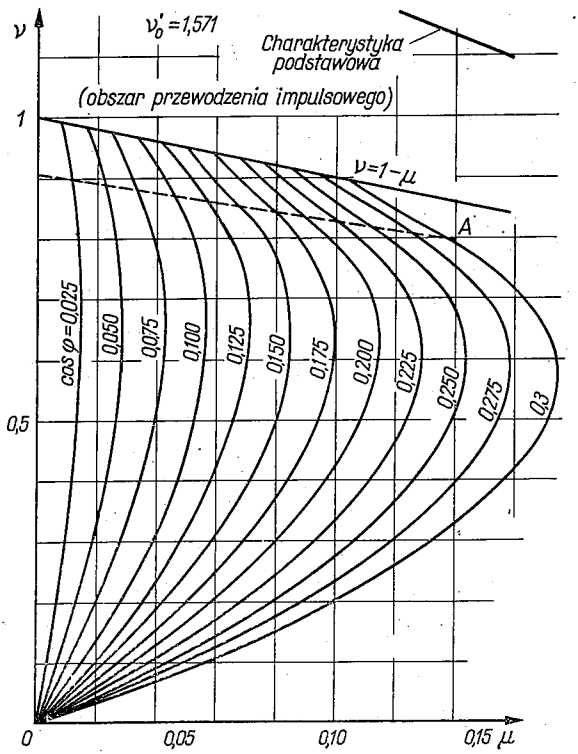
Dla porównania 3-fazowego WM w układzie mostka z układem 1-fazowego WM (wg schematu na rys. 9a), pokazano na rys. 10 analogiczne krzy-

we obliczone i zamieszczone w pracy [3]. Uderzająca różnica w kształcie krzywych dla układu 1-faz. WM wynika z roli zaworów $A1$ i $B1$ (rys. 9a), pełniących funkcję obwodu rozładowania dla indukcyjności twornika w okresie, gdy napięcie zasilania jest blokowane przez nienasycone dla-



Rys. 9

a) układ 1-fazowego WM zasilającego silnik obcowzbudny; b) schemat zastępczy — obwód typu R, L, E; c) schemat 1-fazowego TUS w wykonaniu oszczędnościowym, zasilającego obwód typu R, L, E. $A1$, $B1$ — diody półprzewodnikowe (tzw. zerowe lub rozładowcze)



Rys. 10. Krzywe $\nu_c(\mu_c)$ dla układu 1-fazowego WM wg schematu z rys. 9. Na rysunku wykreślono charakterystykę mechaniczną $\nu = 1-\mu$ silnika zasilanego napięciem stałym o wartości $U_- = \frac{2}{\pi}U_m$. W obszarze między prostą $\nu = 1-\mu$ a charakterystyką podstawową występuje wyłącznie przewodzenie impulsowe. Krzywa A łączy punkty ν_{ckr}, μ_{ckr} dla różnych wartości $\cos\varphi$

wiki WM w ich przedziale wzbudzenia. Krzywe z rys. 10, w zakresie od $\nu = 0$ do ν_{kr} (krzywa A), są identyczne dla tyrystorowego układu sterowania w tzw. wykonaniu oszczędnościowym (rys. 9c). Łatwo dostrzec, że w układzie 3-fazowym przewodzenie ciągłe zaczyna się już przy 4÷5-krotnie mniejszym prądzie obciążenia silnika (w zakresie prędkości od $\nu \approx 1$ do $\nu \approx 0{,}5$). Poza tym zakres przewodzenia impulsowego, który występuje powyżej prostej $\nu = 1-\mu$, zajmuje w układzie 1-fazowym około 1/3 całego obszaru zmian ν i μ. Prędkość idealnego biegu jałowego osiąga tu wartość $\nu'_{omx} = 1{,}57$ (znaczek „prim" dodano tutaj ze względu na przeliczenie rzędnych prędkości, zastosowane wskutek założenia identycznych wartości średnich pełnego napięcia wyprostowanego w obu układach, równych zawsze U_{-}). Natomiast zakres przewodzenia impulsowego powyżej prostej $\nu = 1-\mu$ w układzie 3-fazowym można w praktyce pominąć.

Wracając do układu trójfazowego WM należy podkreślić, że zgodnie z rys. 3 oraz wzorem (12) praca układu na danej charakterystyce mechanicznej przy $\beta = \text{const}$ (dla $\beta_{kr} \leqslant \beta \leqslant 1$) odbywa się przy stałej rozpiętości przedziału nastawiania strumienia w dławikach WM, równej

$$\tau = 2\pi - (2\pi/3 + \alpha_n). \tag{21}$$

Zgodnie z wnioskami teorii sterowania ładunkowego, wg Górala [4], są to więc właśnie charakterystyki mechaniczne przy stałym prądzie sterującym I_{st} wzmacniacza. Zależność $\beta(I_{st})$ przy $\tau = \text{const}$ można znaleźć dla różnych materiałów magnetycznych na podstawie odpowiednich krzywych zamieszczonych w pracy [4] lub na podstawie podobnych danych zamieszczanych ostatnio w innych publikacjach.

Ponieważ zmiany kąta α_n we wzorze (21) są praktycznie zawarte w granicach od $\alpha_n \approx 10°$ do $\alpha_n \approx 90°$, to rozpiętość przedziału nastawiania strumienia przy przejściu od prawie pełnego wysterowania WM (przy $\beta = \beta_{kr} \approx 0$) — do pracy przy napięciu wyjściowym równym zeru, waha się jak

$$\frac{360° - (120° + 10°)}{360° - (120° + 90°)} \approx \frac{3}{2},$$

a więc nieznacznie.

Aby prześledzić w całości przebieg charakterystyk mechanicznych $\nu(\mu)$ przy $\beta = \text{const}$, rozpatrzmy jeszcze pracę układu WM w strefie przewodzenia impulsowego przy prędkościach $\nu < \nu_{ckr}$. Przebiegi czasowe impulsów prądu twornika oraz krzywej napięcia na twornika dla tego przypadku pokazano na rys. 11. Średnia wartość prądu obciążenia wynosi tu

$$I = \frac{3}{\pi R} \int_{\alpha}^{\alpha_g} (U_m \sin\vartheta - E) d\vartheta,$$

stąd

$$i = \mu = [\cos\alpha - \cos\alpha_g - (\alpha_g - \alpha)\sin\alpha_1]. \tag{22}$$

Wartość parametru β wynosi (rys. 11):

$$\beta = \frac{1}{U_m}\int_{\pi/3}^{\alpha_g-\pi/3} U_m \sin(\vartheta-\pi/3)\,d\vartheta + \frac{1}{U_m}\int_{\alpha_g-\pi/3}^{\alpha}(U_m\sin\vartheta - E)\,d\vartheta, \tag{23}$$

stąd

$$\beta = 1-\cos\alpha+\cos\alpha_g-(\alpha-\alpha_g+\pi/3)\sin\alpha_1. \tag{24}$$

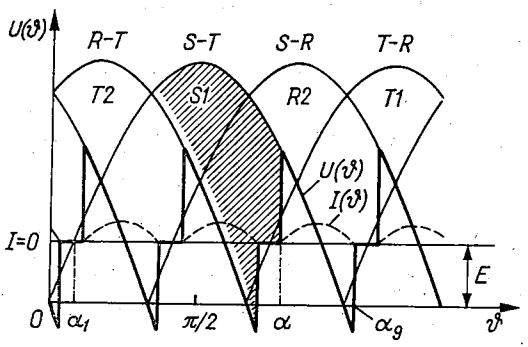
Łącząc wzory (22) i (24) uzyskuje się prosty wynik:

$$i = \mu = (1-\beta)-\frac{\pi}{3}\nu \tag{25}$$

lub

$$\nu = \frac{\pi}{3}[(1-\beta)-\mu]. \tag{26}$$

Jak wynika ze wzoru (26), charakterystyki mechaniczne układu (WM lub TUS) pracującego przy β = const w strefie przewodzenia impulsowego



Rys. 11. Przebiegi czasowe prądu i napięcia twornika oraz spadku napięcia na nienasyconym dławiku $S1$ (pole zakreskowane), przy przewodzeniu impulsowym i prędkości $\nu < \nu_{ckr}$

są przedłużeniem prostoliniowych charakterystyk ze strefy przewodzenia ciągłego. Na rys. 6 pokazano przebieg charakterystyki mechanicznej układu dla wartości $\beta = 0{,}5$.

3. CHARAKTERYSTYKI MECHANICZNE ZAMKNIĘTEGO UKŁADU AUTOMATYCZNEJ STABILIZACJI PRĘDKOŚCI

Jak wynika z dotychczasowych rozważań, w układzie o t w a r t y m, w strefie przewodzenia ciągłego, kąt nasycenia α_n jest dla każdej z wartości prądu sterującego (lub parametru β) stały i nie zależy od obciążenia

silnika. Charakterystyka mechaniczna układu otwartego podana jest wzorem (11a, b):

$$\nu = \frac{3}{\pi}[\cos\alpha_n - \mu] = \frac{3}{\pi}[1-\beta-\mu],$$

w którym przy I_{st} = const kąt nasycenia jest również stały, $\cos\alpha_n$ = const.

W układzie zamkniętym prędkość ν i moment silnika μ są w strefie przewodzenia ciągłego powiązane oczywiście tym samym wzorem (11a, b), jednakże kąt nasycenia dławików WM (lub kąt zapłonu TUS) jest wtedy wielkością zmienną zależną od prędkości silnika.

Rozpatrzmy układ automatycznej stabilizacji prędkości, w którym wypadkowy przepływ uzwojeń sterujących WM (w stanie ustalonym) jest sumą algebraiczną przepływu podmagnesowania wstępnego, przepływu zadającego i przepływu sztywnego ujemnego sprzężenia zwrotnego prędkościowego. (Sam sposób realizacji sprzężenia zwrotnego jest tu obojętny, może to być np. układ z tzw. mostkiem tachometrycznym, prądniczką tachometryczną lub odpowiednio dobranym sprzężeniem napięciowo-prądowym). A zatem wypadkowy przepływ uzwojeń sterujących WM wyrażony w amperozwojach wynosi:

$$\Sigma(Iz)_{WM} = c_1 U_z - c_2 n - (Iz)_{UP} \tag{27}$$

lub w jednostkach względnych

$$\Sigma(iz)_{WM} = k_1 u_z - k_2 \nu - (iz)_{UP} \tag{28}$$

gdzie:

U_z — napięcie zadające; rozpatrywana jest praca układu przy U_z = const;

$(Iz)_{UP}$ — przepływ magnetyczny uzwojenia przesuwającego charakterystykę sterowania WM (inaczej: przepływ uzwojenia podmagnesowania wstępnego).

c_1, c_2, k_1, k_2 — współczynniki proporcjonalności.

Wartość kąta nasycenia α_n (lub parametru β) jest przy pracy układu zamkniętego przy nastawionym napięciu zadającym U_z = const pewną funkcją wypadkowego przepływu WM:

$$\cos\alpha_n = (1-\beta) = \Psi[k_1 u_z - k_2 \nu - (iz)_{UP}]. \tag{29}$$

Po podstawieniu wyrażenia (29) do wzoru (11a, b) uzyskalibyśmy wyrażenie na charakterystykę mechaniczną $\nu(\mu)$ układu zamkniętego w postaci ogólnej. Może to być zależność przestępna względem prędkości ν, zaś wynikający stąd przebieg $\nu(\mu)$ — nieliniowy.

Ze względów praktycznych interesuje nas bardziej pytanie, kiedy można uzyskać prostoliniowy przebieg charakterystyk mechanicznych układu zamkniętego. Otóż przypadek taki zachodzi jedynie wtedy, gdy funkcja $\Psi[\Sigma(iz)_{WM}]$ jest funkcją liniową, o postaci

$$\Psi[\Sigma(iz)_{WM}] = a + b[k_1 u_z - k_2 \nu - (iz)_{UP}]. \tag{30}$$

Łącząc zależności (29) i (30) z wzorem (11a, b) otrzymuje się po przekształceniach:

$$\nu = \frac{3}{\pi}\left[\frac{a-b(iz)_{UP}+bk_1u_z}{1+\frac{3}{\pi}bk_2} - \frac{\mu}{1+\frac{3}{\pi}bk_2}\right]; \tag{31}$$

tu: a, b — współczynniki liczbowe.

Postać równania (31) jest analogiczna do znanych równań układów liniowych automatycznej stabilizacji prędkości. Sztywność charakterystyki mechanicznej wynosi w tym przypadku

$$\frac{d\nu}{d\mu} = -\frac{3}{\pi+3bk_2} \tag{32}$$

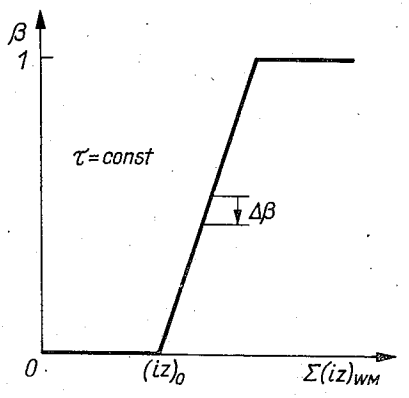
i zależy m.in. od współczynnika k_2, charakteryzującego wzmocnienie w pętli sprzężenia zwrotnego.

Można wykazać, że w rozpatrywanym przez nas typowym obszarze pracy układu zamkniętego WM — silnik zachodzi z dużym przybliżeniem warunek podany równaniem (30):

a) Załóżmy na chwilę, że układ zapewnia idealną stabilizację prędkości; mielibyśmy wtedy ν = const niezależnie od obciążenia. Zgodnie z wzorem

$$\nu = \frac{3}{\pi}[1-\beta-\mu]$$

zmiany parametru β byłyby wtedy równe liczbowo zmianom momentu obciążenia μ, te ostatnie zaś przy przejściu od idealnego biegu jałowego do obciążenia znamionowego są rzędu $\Delta\mu_{zn} \approx 0{,}1$. Związane z tym przesu-



Rys. 12. Wykres względnej zmiany indukcji β w rdzeniach dławików WM, w funkcji wypadkowego przepływu magnetycznego uzwojeń sterujących WM, przy stałym przedziale nastawiania strumienia τ = const (na podstawie pracy [4])

nięcie wartości kąta nasycenia α_n w stronę mniejszych wartości jest niewielkie, w całym zakresie prędkości ν obszaru pracy typowej. Zmiany rozpiętości przedziału nastawiania strumienia τ, określonego wzorem (21), są

rzędu od kilku do kilkunastu procentów wartości początkowej. Można zatem przyjąć, że $\tau \approx$ const.

b) Jak wynika z pracy [4], zależność $\beta[\Sigma(iz)_{WM}]$ przy τ = const można aproksymować prostą łamaną przedstawioną na rys. 12. (W pracy [4] uwzględnia się dodatkowo wartość stałą przyrostu indukcji β_0 występującą w przedziale nasycenia dławika. W niniejszym artykule, zgodnie z początkowymi założeniami upraszczającymi, β_0 zostało pominięte). Na rys. 12 zaznaczono dla ilustracji w rejonie $\beta = 0{,}5$ zmianę parametru β występującą w układzie zamkniętym przy przejściu od biegu jałowego do obciążenia znamionowego, równą $\Delta\beta \approx 0{,}1$.

Równanie interesującej nas nachylonej części charakterystyki $\beta[\Sigma(iz)_{WM}]$ ma postać (rys. 12):

$$\beta = [\Sigma(iz)_{WM} - (iz)_0]\varrho, \tag{33}$$

gdzie:

ϱ — współczynnik nachylenia prostej na rys. 12, będący wyrazem liczbowym zastępczej równoważnej oporności przemagnesowywanego rdzenia [4];

$(iz)_0$ — przepływ magnetyczny odpowiadający krytycznej wartości natężenia pola H_0 w rdzeniu, powyżej której rozpoczynają się zmiany nieodwracalne stanu magnesowania materiału.

A zatem na podstawie (33) można napisać

$$\cos\alpha_n = 1 - \beta = 1 + \varrho(iz)_0 - \varrho[k_1 u_z - k_2 v - (iz)_{UP}]. \tag{34}$$

Tak więc w tym przypadku mamy:

$$a = 1 + \varrho(iz)_0,$$

$$b = -\varrho.$$

(Uwaga. Jeżeli przyjąć dodatnie wartości wypadkowych amperozwojów sterujących zmianami β, jak na rys. 12, to współczynniki k_1 i k_2 mają wtedy wartości ujemne).

Reasumując, można uważać, że charakterystyki mechaniczne zamkniętego układu automatycznej stabilizacji prędkości z 3-fazowym WM zasilającym silnik obcowzbudny pokrywają się z dużą dokładnością z prostymi (31) o nachyleniu wg wzoru (32), co stanowi niewątpliwie cenną zaletę układu. Nie są to jednak proste równoległe dla różnych napięć zadających u_z = const, gdyż choć nieznacznie, wraz ze zmianą rozpiętości przedziału nastawiania strumienia τ, zmienia się również wartość współczynnika ϱ, określającego sztywność tych charakterystyk.

Dla tyrystorowego układu stabilizacji prędkości ścisłe spełnienie warunku liniowej zależności między $\cos\alpha_n$ a wypadkowym sygnałem sterującym jego układ zapłonowy nie jest zazwyczaj konieczne ze względu na znaczny wypadkowy współczynnik wzmocnienia, dający duże usztywnienie charakterystyk mechanicznych. W tym przypadku nieliniowość cha-

rakterystyk $\nu(\mu)$ w realnym zakresie zmian momentu obciążenia silnika jest słabo wyczuwalna.

4. WNIOSKI

W artykule przedstawiono zasadnicze cechy typowego sposobu pracy układu trójfazowego wzmacniacza magnetycznego zasilającego silnik obcowzbudny. Wyprowadzone zależności są w rozpatrywanym obszarze pracy wspólne dla tyrystorowego układu sterowania silnika.

Interesujące z punktu widzenia własności napędowych są następujące wnioski:

1°. W realnym zakresie obciążeń, tzn. od rzeczywistego biegu jałowego do obciążenia znamionowego (lub większego przy przeciążeniu), silnik pracuje przy przewodzeniu ciągłym prądu w obwodzie twornika. Współczynnik kształtu prądu twornika jest praktycznie równy jedności, co umożliwia dobre wykorzystanie cieplne silnika.

2°. Ciekawe jest porównanie szerokości stref przewodzenia impulsowego i przewodzenia ciągłego w układzie trójfazowego wzmacniacza magnetycznego i w układzie jednofazowego wzmacniacza magnetycznego lub oszczędnościowego mostka jednofazowego tyrystorowego układu sterowania. Wskazuje ono z jednej strony na znaczne zalety układu trójfazowego, z drugiej zaś — na celowość stosowania obwodu z tzw. diodą zerową, umożliwiającą przepływ prądu rozładowania indukcyjności twornika. (Układy z diodą zerową wykazują ponadto korzystniejsze wartości współczynnika mocy układu, szczególnie na dolnym poziomie prędkości [6], [8], jednakże uniemożliwiają one wysterowanie zaworów aż do ujemnych średnich wartości napięcia, co bywa niekiedy niekorzystne w odniesieniu do forsowania procesów przejściowych [10]).

3°. Charakterystyki mechaniczne układu otwartego WM — silnik przy stałym prądzie sterującym I_{st} wzmacniacza są prostoliniowe. To samo dotyczy charakterystyk mechanicznych układu otwartego TUS — silnik, pracującego przy stałym kącie zapłonu α_z.

4°. Charakterystyki mechaniczne zamkniętego układu automatycznej stabilizacji prędkości w układzie wzmacniacz magnetyczny — silnik, dla stałej nastawionej wartości napięcia zadającego U_z, są z dużym przybliżeniem liniowe. Ich nachylenie zmienia się nieznacznie wraz z nastawionym poziomem prędkości. W analogicznym układzie tyrystorowym można uzyskać ściśle liniowe charakterystyki mechaniczne tylko przy zachowaniu określonego warunku przez układ zapłonowy, odpowiadającego zależności (30) sformułowanej dla przepływu wypadkowego we wzmacniaczu magnetycznym.

Politechnika Łódzka
Katedra Automatyki

WYKAZ LITERATURY

1. Czajkowski A.: Analiza stanów ustalonych trójfazowego wzmacniacza magnetycznego zasilającego obwód typu R, E. — Rozprawy Elektrotechn., tom XII, z. 2/1966.
2. Czajkowski A.: Analiza pracy silnika obcowzbudnego zasilanego z trójfazowego mostka prostowniczego. — Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, Nr 63, „Elektryka", z. 15/1965, str. 41—64.
3. Czajkowski A.: Analiza warunków pracy zautomatyzowanego układu napędowego z silnikiem obcowzbudnym prądu stałego zasilanym ze wzmacniacza magnetycznego. Rozprawa doktorska, Łódź, luty 1963, str. 286+123. Biblioteka Główna Politechniki Łódzkiej.
4. Góral A.: Charge Control of Magnetic Amplifiers; Pt I — Dynamic Properties of Square Hysteresis — Loop Ferromagnetics. — AIEE Trans. Comm. and El., v. 81, 1962, s. 297—303; Pt II — Performance of Self-Saturating Magnetic Amplifiers. — AIEE Trans. Comm. and El., v. 82, 1963, s. 338—346.
5. Kümmel F.: Regel — Transduktoren. Springer Verlag Berlin 1961.
6. Kümmel F.: Gleichstromantriebe mit Steuerbaren Siliziumzellen. — Automatik 1964, Teil I, s. 14—18, Teil II, s. 52—56.
7. Reichmann H., Winkler H.: Halbleiterstromrichter für geregelte Gleichstromantriebe. — AEG Mitteilungen, 54 (1964), Heft 5/6, s. 451—458.
8. Hengsberger J., Putz U., Vetters L.: Thyristor-Stromrichter für Bahnmotoren. — AEG Mitteilungen, 5/6, 1964, s. 435—442.
9. King K. G.: The Application of Silicon Controlled Rectifiers to the Control of Electrical Machines. — Proc. IEE, vol. 110, No 1/1963, s. 197—204.
10. Iwanczuk B. N., Lipman R. A., Rubinow B. Ja.: Elektropriwody z połuprowodnikowym uprawlenijem. — Tiristornyje usilitieli postojannogo toka. Bibliot. po awtomatikie, Wyp. 117, Moskwa 1964.

A. CZAJKOWSKI

THE OPERATION OF 3-PHASE MAGNETIC AMPLIFIER AS WELL AS THYRISTOR CONTROLLER SUPPLYING ARMATURE POWER TO SEPARATELY EXCITED D—C MOTOR

Summary

This paper presents basic features of typical mode of 3-phase magnetic amplifier operation when feeding a separately excited D—C motor, taking into account the armature reactance. Steady states of open-loop system as well as speed stabilisation closed-loop system have been examined. Relations derived are common in considered region of operation both for magnetic amplifier and thyristor controller drive systems. Results obtained form together with farmer paper [1] an analysis of steady states of magnetic amplifier — D.C. motor drive system, which has been considered mainly from the point of view its drive properties. Following conclusions may be emphasized:

1°. The motor operates from no load to full load at continuous armature current conduction. Armature current form factor k_f practically amounts to unity, so no derating is needed.

2°. In virtue of Fig. 6, 7 and 10, one can compare the width of discontinuous as well as continuous conduction zones for 3-phase drive systems (see Fig. 1, 2), 1-phase magnetic amplifier drive (like Fig. 9a) and 1-phase thyristor drive system (like Fig. 9c). Comparison indicates advantages of 3-phase systems and suitableness of shunt-diodes application. The use of shunt-diode paths improves also the power factor of the system, especially on the bottom level of the motor-speed [6, 8]. However it makes impossible controlling the thyristor-rectifiers up to negative D—C voltages, what is sometimes disadvantageous concerning transients forcing in the system.

3°. Speed-torque characteristics of 3-phase open-loop system at constant control current I_{st} as well as at constant firing angle, are straight-linear.

4°. Speed-torque characteristics of speed stabilisation closed-loop systems are approximately straight-linear. Equation (30) gives the condition for exactly straight-linear characteristic in magnetic-amplifier drive system. In thyristor drives nonlinearity of speed-torque characteristics in real range of motor-torque changes is poorly perceptible, because of significant gain of the system.

A. CZAJKOWSKI

LES RÉGIMES D'UN AMPLIFICATEUR MAGNÉTIQUE AUSSI QUE D'UN AMPLIFICATEUR À THYRISTORS — ALIMENTANT L'INDUIT D'UN MOTEUR À COURANT CONTINU À EXCITATION SÉPARÉE

Résumé

Les problèmes concernant le comportement d'un amplificateur magnétique triphasé alimentant l'induit d'un moteur à courant continu à excitation séparée sont analysés. On a examiné les régimes stationnaires de ce système en cas de commande en chaîne ouverte aussi qu'en chaîne fermée de ce systeme de régulation automatique de vitesse du moteur. On a démontré la possibilité d'application des résultats obtenus pour l'analyse des systèmes de commande avec les convertisseurs à thyristors.

A. CZAJKOWSKI

WIRKUNGSWEISE DES 3-PHASIGEN MAGNETVERSTÄRKER SOWIE DER STROMRICHTERSCHALTUNG MIT STEUERBAREN SILIZIUMVENTILE BEI MOTORBELASTUNG

Zusammenfassung

In vorliegender Arbeit werden die Grundprobleme der Wirkungsweise eines Antriebsatzes mit fremderregten Gleichstrommotor dessen Ankerkreis vom spannungsteuernden Magnetverstärker in dreiphasiger Brückenschaltung gespeist wird behandelt. Es wird Beharrungsverhalten des gesteuerten sowie auf konstante Drehzahl geregelten Transduktorantriebes untersucht.

Die Resultate der Analyse können auch beim Behandeln der Grundprobleme des Verhaltens eines von Tyristoren gespeisten Gleichstrommotors vom Nutzen sein.

А. ЧАЙКОВСКИ

РАБОТА 3-ФАЗНОГО МАГНИТНОГО УСИЛИТЕЛЯ, А ТАКЖЕ ТИРИСТОРНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ПРИ ПИТАНИИ ЯКОРЯ ДВИГАТЕЛЯ С НЕЗАВИСИМЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

Резюме

В статье выполнен анализ работы 3-фазного магнитного усилителя (мостовая схема) при питании якоря двигателя постоянного тока, с независимым возбуждением. Обсуждено установившийся режим работы так разомкнутой как и замкнутой системы стабилизации скорости двигателя. Указано на возможность использования результатов при рассматривании работы тиристорных систем электропривода постоянного тока.

621.313.333

ZYGMUNT BAJOREK

Wykresy miejsc geometrycznych silników asynchronicznych przy zasilaniu niesymetrycznym

Rękopis dostarczono 13.1.1964

Przedstawiono wpływ składowej odwrotnej kolejności napięcia zasilającego na wykres kołowy silnika asynchronicznego. Otrzymano w wyniku krzywą, która jest dwubiegunową kwartyką wykazującą w zakresie poślizgów większych od 1 znaczne odstępstwo od okręgu koła. Rozpatrzone zostały również miejsca geometryczne dwóch układów trójfazowych o zasilaniu jednofazowym jako szczególne przypadki asymetrii napięcia.

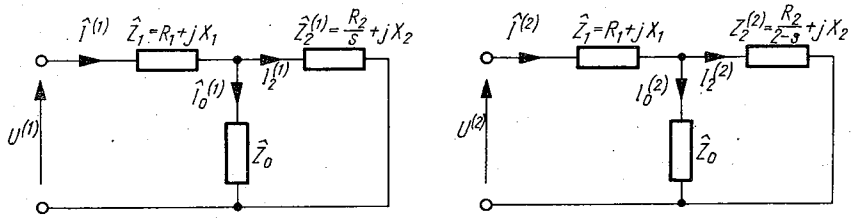
1. WSTĘP

Znane z teorii maszyn elektrycznych pod nazwą „wykresów kołowych" wykresy miejsc geometrycznych silników asynchronicznych trójfazowych odnoszą się do maszyn o symetrycznej budowie i symetrycznym zasilaniu. Warunek symetrycznej budowy jest sprawą zarówno konstrukcyjną (i jest przez wytwórcę zwykle w zasadzie spełniony), jak również sprawą eksploatacyjną, gdy dla uzyskania żądanych własności ruchowych wprowadza się celowo asymetrię w obwód stojana lub wirnika. Problem symetrii zasilania dotyczy w zasadzie jedynie eksploatacji; niesymetria napięcia może być spowodowana asymetrią sieci lub urządzeń zasilających (transformatorów) lub jako rezultat stosowania specjalnych układów dla rozruchu, regulacji prędkości lub hamowania. Problem ten może również wystąpić przy próbach wyrobu lub próbach typu, gdy dla regulacji napięcia stosuje się regulator indukcyjny o budowie niesymetrycznej; niesymetria napięć po stronie wtórnej regulatora może dać fałszywy obraz własności ruchowych silnika.

Treścią niniejszej pracy jest rozważenie wpływu niesymetrii napięcia zasilającego na wykresy miejsc geometrycznych w przypadku zasilania silnika o budowie symetrycznej takim napięciem, że prócz stałej składowej symetrycznej kolejności zgodnej $U^{(1)}$ występuje również stała składowa odwrotnej kolejności $U^{(2)}$. Jest to przypadek występujący przy sztywnym niesymetrycznym trójfazowym napięciu zasilającym, a także w takich układach jednofazowego zasilania silnika trójfazowego, gdzie warunki za-

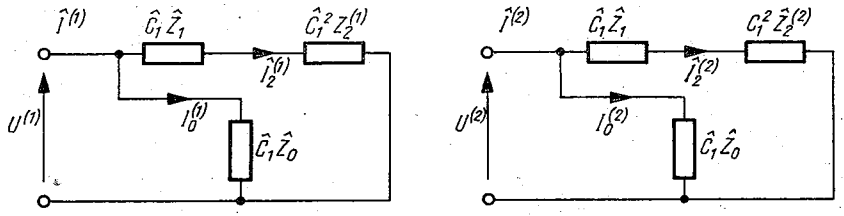
silania dadzą się opisać trzema niezależnymi równaniami napięciowymi; w takim przypadku otrzymujemy sztywny układ napięć symetrycznych kolejności zgodnej i przeciwnej. Jeżeli do opisanego układu trzeba zastosować równania prądowe (wyłącznie lub razem z równaniami napięciowymi), wówczas napięcia symetryczne są funkcją prędkości obrotowej. Zasadę tę ilustrują przytoczone dwa przykłady zasilania jednofazowego (rys. 10 i 11).

Każdy z symetrycznych układów napięć zasilających daje własne prądy symetryczne stojana $I_1^{(1)}$ i $I_1^{(2)}$ oraz własne pola wirujące w przeciwnych kierunkach (pole współbieżne i przeciwbieżne). Znane z teorii maszyn



Rys. 1. Podstawowy schemat zastępczy silnika asynchronicznego

elektrycznych schematy zastępcze silników dla składowych prądów i napięć kolejności zgodnej i przeciwnej (rys. 1) przytacza się bez omawiania, a jedynie dla wprowadzenia oznaczeń. Wielkości dotyczące wirnika są sprowadzone na stronę stojana (pominięto znak „prim" stosowany zwykle dla oznaczania prądu i oporności wirnika np. I_2, R_2'). Dla sporządzenia wy-



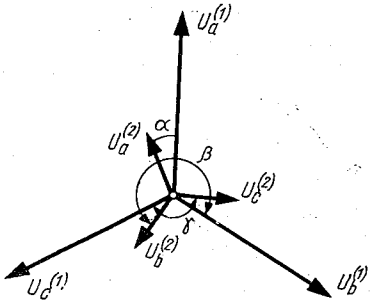
Rys. 2. Schemat „gamma" przekształcony wg zasady ścisłego prądu stojana

kresów miejsc geometrycznych wprowadzone jest przekształcenie schematu zastępczego na układ „gamma" z warunkiem zachowania ścisłego prądu stojana (rys. 2).

2. OGÓLNY PRZYPADEK ZASILANIA NIESYMETRYCZNYM UKŁADEM NAPIĘĆ

Przy niesymetrycznym zasilaniu, takim, że składowe symetryczne napięć $U^{(1)}$ i $U^{(2)}$ są stałe, warunki zasilania są określone, jeżeli prócz wartości skutecznych napięć symetrycznych znany jest kąt przesunięcia fazo-

wego między wektorami tych napięć. Oznaczając przez α kąt między napięciami składowymi $U_a^{(1)}$ i $U_a^{(2)}$ dla fazy „a", otrzymujemy dla fazy „b" i „c" (rys. 3):



Rys. 3. Kąty między napięciami fazowymi układów symetrycznych

$$\beta = \alpha + 240, \tag{1a}$$

$$\gamma = \alpha + 120. \tag{1b}$$

Niech $\hat{m}_a$, $\hat{m}_b$ i $\hat{m}_c$ oznaczają ilorazy napięć symetrycznych fazowych w postaci zespolonej, a m iloraz wartości skutecznych. Związki między tymi wielkościami wyrażają się następująco:

$$\hat{m}_a = \frac{\hat{U}_a^{(2)}}{\hat{U}_a^{(1)}} = \frac{U_a^{(2)}}{U_a^{(1)}} e^{j\alpha} = m e^{j\alpha}, \tag{2a}$$

$$\hat{m}_b = m e^{j\beta} = a^2 \hat{m}_a, \tag{2b}$$

$$\hat{m}_c = m e^{j\gamma} = a \hat{m}_a, \tag{2c}$$

gdzie $a = e^{j120}$.

Fazowe napięcia składowe kolejności przeciwnej można wyrazić przez napięcia kolejności zgodnej:

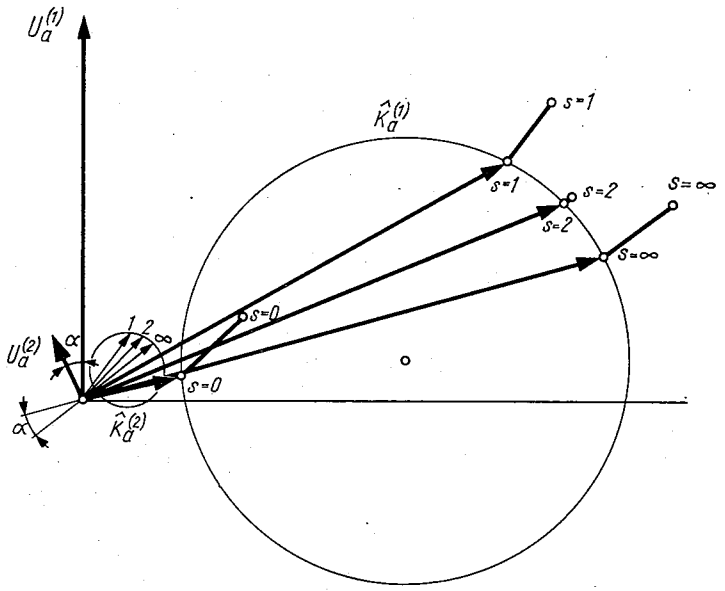
$$\hat{U}_a^{(2)} = m \hat{U}_a^{(1)} e^{j\alpha} = \hat{m}_a U_a^{(1)}, \tag{3a}$$

$$\hat{U}_b^{(2)} = m \hat{U}_b^{(1)} e^{j\beta} = a^2 \hat{m}_a U_b^{(1)}, \tag{3b}$$

$$\hat{U}_c^{(2)} = m \hat{U}_c^{(1)} e^{j\gamma} = a \hat{m}_a U_c^{(1)}. \tag{3c}$$

Rozpatrzony zostanie najpierw wykres miejsc geometrycznych prądu fazy „a". Prąd ten jest geometryczną sumą prądów składowych symetrycznych, które można określić z odpowiedniego wykresu kołowego. Jeżeli dla prądu $I_a^{(1)}$ wykreśli się koło $K_a^{(1)}$ (rys. 4), to koło $K_a^{(2)}$ można otrzymać przez skrócenie w stosunku m odległości środka okręgu od początku układu, obrót otrzymanego odcinka o kąt α i zatoczenie okręgu promieniem zmniejszonym w tej samej proporcji m. Wyznaczenie poślizgów dla obu okręgów może być wykonane przez zastosowanie jednej ze znanych konstrukcji skali poślizgu, przy czym odpowiadające sobie punkty na obu okręgach różnią się w wartości poślizgu o 2. Wykres miejsc geometrycz-

nych prądu fazowego można skonstruować sumując punkt za punktem prądy składowe symetryczne. Na rys. 4 przedstawiono te sumy dla poślizgów $s = 1$, $s = 0$, $s = 2$, i $s = \infty$.



Rys. 4. Miejsca geometryczne prądów składowych symetrycznych

Do bardziej ogólnych wniosków można dojść przez określenie miejsca geometrycznego sumy obu prądów składowych będących parametrycznymi funkcjami poślizgu:

$$\hat{I}_a = \hat{I}_a^{(1)} + \hat{I}_a^{(2)}. \tag{4}$$

Prądy składowe symetryczne wyrazić można następująco:

$$\hat{I}_a^{(1)} = \hat{S}_a^{(1)} + \hat{R}_a^{(1)} e^{j\varphi^{(1)}}, \tag{5}$$

$$\hat{I}_a^{(2)} = \hat{S}_a^{(2)} + \hat{R}_a^{(2)} e^{j\varphi^{(2)}}. \tag{6}$$

gdzie:

$\hat{S}_a^{(1)}$, $\hat{S}_a^{(2)}$ — wektory od początku układu do środków okręgów $\hat{K}_a^{(1)}$ i $\hat{K}_a^{(2)}$,

$\hat{R}_a^{(1)}$, $\hat{R}_a^{(2)}$ — promienie okręgów wyznaczone wektorem dla $\varphi^{(1)} = 0$ względnie $\varphi^{(2)} = 0$,

$e^{j\varphi^{(1)}}$, $e^{j\varphi^{(2)}}$ — promienie wodzące (wektory obrotowe jednostkowe) dla okręgów $\hat{K}_a^{(1)}$ i $\hat{K}_a^{(2)}$.

Jeżeli równanie prądu $\hat{I}_a^{(1)}$ określimy zależnością:

$$\hat{I}_a^{(1)} = \frac{\hat{A} + \hat{E}s}{\hat{C} + \hat{D}s}, \tag{7}$$

wówczas prąd $\hat{I}_a^{(\cdot)}$ wyraża się funkcją:

$$\hat{I}_a^{(2)} = \hat{m}_a \frac{\hat{A}+\hat{B}(2-s)}{\hat{C}+\hat{D}(2-s)}, \tag{8}$$

a wówczas określone wyżej wielkości wyrażą się następująco:

$$\hat{R}_a^{(1)} = \frac{\hat{C}\hat{B}-\hat{D}\hat{A}}{\hat{C}\check{D}-\hat{D}\check{C}}, \tag{9}$$

$$\hat{R}_a^{(2)} = \hat{m}_a \hat{R}_a^{(1)}, \tag{10}$$

$$\hat{S}_a^{(1)} = \frac{\hat{A}\check{D}-\hat{B}\check{C}}{\hat{C}\check{D}-\hat{D}\check{C}}; \tag{11}$$

$$\hat{S}_a^{(2)} = \hat{m}_a \hat{S}_a^{(1)}, \tag{12}$$

$$e^{j\varphi(1)} = \frac{\check{C}+\check{D}s}{\hat{C}+\hat{D}s}, \tag{13}$$

$$e^{j\varphi(2)} = \frac{\check{C}+\check{D}(2-s)}{\hat{C}+\hat{D}(2-s)}. \tag{14}$$

Ostatnie dwie zależności można przedstawić w sposób następujący:

$$\varphi^{(1)} = \operatorname{arctg} \frac{Im(\hat{C}+\hat{D}s)}{Re(\hat{C}+\hat{D}s)}, \tag{13a}$$

$$\varphi^{(2)} = \operatorname{arctg} \frac{Im[\hat{C}+\hat{D}(2-s)]}{Re[\hat{C}+\hat{D}(2-s)]}. \tag{14a}$$

Zależności (9) i (11) znane są z ogólnej teorii miejsc geometrycznych [1]. Związki (10) i (12) wynikają z podstawienia składników funkcji (8) do zależności (9) i (11). Wielkości przedstawione wzorami (13) i (14) są wektorami jednostkowymi jako ilorazy liczby zespolonej i z nią sprzężonej.

Z podanych związków wynika, że zarówno między wektorami środków okręgów $\hat{S}_a^{(1)}$ i $\hat{S}_a^{(2)}$, jak między promieniami $\hat{R}_a^{(1)}$ i $\hat{R}_a^{(2)}$. występują te same kąty α co między napięciami $\hat{U}_a^{(1)}$ i $\hat{U}_a^{(2)}$. Wartości poślizgów wyznaczonych promieniami $\hat{R}_a^{(1)}$ i $\hat{R}_a^{(2)}$(przy $\varphi^{(1)} = 0$ i $\varphi^{(2)} = 0$) można otrzymać z równania (13a) i (14a). Dla okręgu $\hat{K}_a^{(1)}$:

$$\varphi^{(1)} = 0, \tag{15a}$$

$$s_0^{(1)} = \frac{-Im\hat{C}}{Im\hat{D}}, \tag{15b}$$

zaś dla okręgu $K_a^{(2)}$:

$$\varphi^{(2)} = 0, \tag{16a}$$

$$s_0^{(2)} = 2+\frac{Im\hat{C}}{Im\hat{D}}. \tag{16b}$$

Ze schematu zastępczego (pełnego lub przekształconego dla ścisłego prądu stojana) otrzymuje się mianownik wyrażenia na prąd stojana $\hat{I}_a^{(1)}$ w postaci następującej:

$$\hat{C}+\hat{D}s = \hat{C}_1R_2+[R_1+j(X_1+\hat{C}_1X_2)]s, \tag{17}$$

stąd zaś szukane wartości poślizgów wynoszą:

$$s_0^{(1)} = -\frac{R_2 Im\hat{C}_1}{X_1+X_2Re\hat{C}_1}, \tag{18}$$

$$s_0^{(2)} = 2-s_0^{(1)}. \tag{19}$$

Ponieważ zaś część urojona składnika

$$\hat{C}_1 = 1+\frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_0}$$

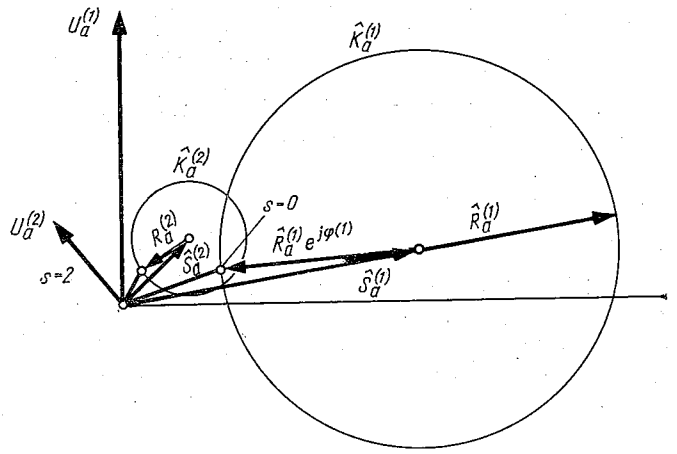
jest bardzo mała, można przyjąć, że

$$s_0^{(1)} \approx 0, \tag{20}$$

$$s_0^{(2)} \approx 2. \tag{21}$$

Wektory $\hat{R}_a^{(1)}$ i $\hat{R}_a^{(2)}$ wyznaczają zatem na okręgach punkty odpowiadające wartościom bardzo bliskim prędkości synchronicznej dla danego pola wirującego. Przedstawione wyżej związki ilustruje rys. 5.

Jeżeli napięcie fazowe $\hat{U}_a^{(1)}$ oraz napięcia $\hat{U}_b^{(1)}$ i $\hat{U}_c^{(1)}$ po ich odpowiednim obrocie wyrysujemy w tej samej osi, wówczas okrąg $\hat{K}_a^{(1)}$ będzie jedno-



Rys. 5. Ilustracja wykładniczej postaci funkcji prądów $\hat{I}_a^{(1)}$ i $\hat{I}_a^{(2)}$

cześnie okręgiem dla wszystkich trzech prądów fazowych kolejności zgodnej. Jednak okręgi dla prądów odwrotnej kolejności nie będą się pokrywać; ich wzajemne przesunięcie wynika ze wzorów (10), (12), oraz (1) i (2). Ponieważ wektory $\hat{S}^{(1)}$ i $\hat{R}^{(1)}$ dla poszczególnych faz są przesunięte o 120°, podobnie są przesunięte wektory $\hat{S}^{(2)}$ i $\hat{R}^{(2)}$ (lecz w przeciwnym kierunku);

są one oznaczone indeksami faz *a*, *b* i *c*. Natomiast wektory obrotowe określone związkami (13) i (14) są wspólne dla wszystkich trzech faz [gdyż mianowniki wyrażeń (7) i (8) nie są funkcją napięcia] i dlatego nie są one oznaczone symbolami literowymi faz.

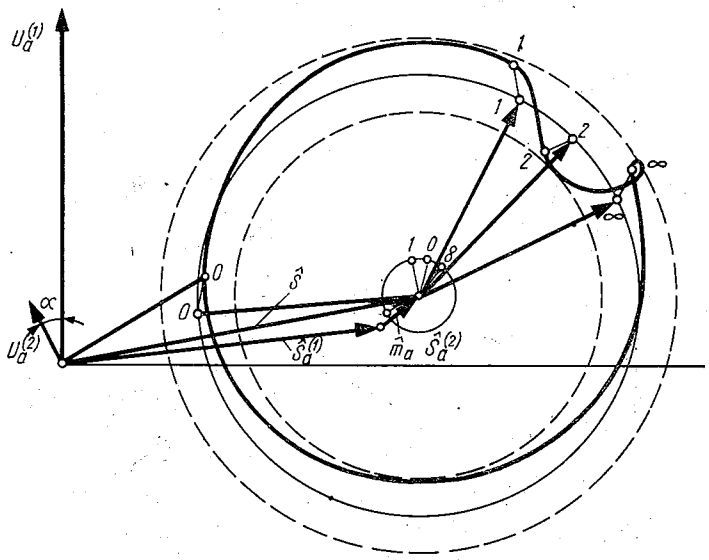
Stosując wprowadzone związki (5) i (6) można napisać

$$\hat{I}_a = \hat{S}_a^{(1)} + \hat{m}_a \hat{S}_a^{(1)} + \hat{R}_a^{(1)} e^{j\varphi^{(1)}} + \hat{m}_a \hat{R}_a^{(1)} e^{j\varphi^{(2)}}. \tag{22}$$

Miejsce geometryczne prądu $\hat{I}_a$ można zatem określić jako sumę wektora stałego

$$\hat{S} = \hat{S}_a^{(1)} + \hat{m}_a \hat{S}_a^{(1)} \tag{23}$$

oraz obu zmieniających kierunek w funkcji poślizgu wektorów $\hat{R}_a^{(1)}$ i $\hat{R}_a^{(2)}$ zataczających swymi końcami dwa okręgi współśrodkowe (rys. 6). Przy zmianie parametru s od $+\infty$ do $-\infty$ wektor $\hat{R}_a^{(1)}$ zatacza pełny kąt 2π



Rys. 6. Konstrukcja miejsca geometrycznego prądu $\hat{I}_a$

w lewo, a wektor $\hat{R}_a^{(2)}$ kąt pełny w prawo. Stąd dwukrotnie w pełnym zakresie poślizgów wektor $\hat{R}_a^{(1)} + \hat{R}_a^{(2)}$ jest ich sumą algebraiczną, a dwukrotnie algebraiczną różnicą. Wykreślenie okręgów o promieniach $\hat{R}_a^{(1)} + \hat{R}_a^{(2)}$ oraz $\hat{R}_a^{(1} - \hat{R}_a^{(2)}$, do których szukana krzywa ma być styczna (dwukrotnie do każdego z nich), pozwala na łatwiejsze znalezienie tej krzywej. Na rys. 6 została wyrysowana krzywa prądu $\hat{I}_a$, przy czym zaznaczono wartości prądu dla kilku charakterystycznych punktów ($s = 0$, 1, 2 i ∞).

Miejscem geometrycznym prądu $\hat{I}_a$ nie jest więc koło, ale krzywa wyższego rzędu zwana „dwubiegunową kwartyką". Można ją określić funkcją typu:

$$\hat{K} = \frac{\hat{E}+\hat{F}s+\hat{G}s^2}{\hat{H}+\hat{M}s+\hat{N}s^2}. \tag{24}$$

Istotnie, jeżeli dodamy do siebie prądy $\hat{I}_a^{(1)}$ i $\hat{I}_a^{(2)}$ określone związkami (7) i (8), to otrzymamy powyższe równanie gdzie:

$$\hat{E} = (1+\hat{m}_a)\hat{A}\hat{C}+2\hat{A}\hat{D}+2\hat{m}\hat{B}\hat{C}, \tag{25a}$$

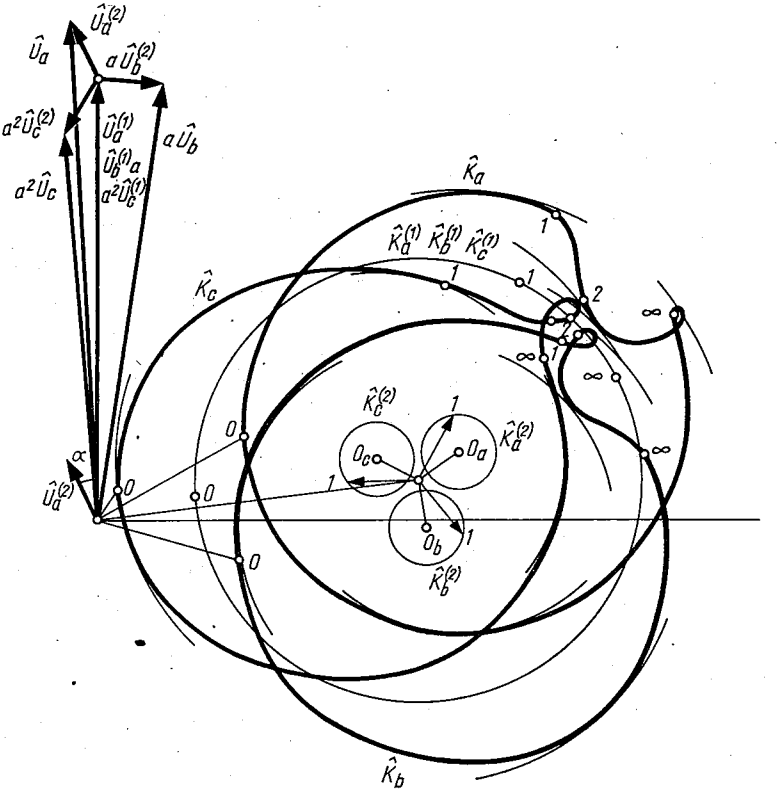
$$\hat{F} = (1+m_a)2\hat{B}\hat{D}+(1-\hat{m}_a)(\hat{B}\hat{C}-\hat{A}\hat{D}), \tag{25b}$$

$$\hat{G} = -(1+\hat{m}_a)\hat{B}\hat{D}, \tag{25c}$$

$$\hat{H} = \hat{C}^2+2\hat{C}\hat{D}, \tag{25d}$$

$$\hat{M} = 2\hat{D}^2, \tag{25e}$$

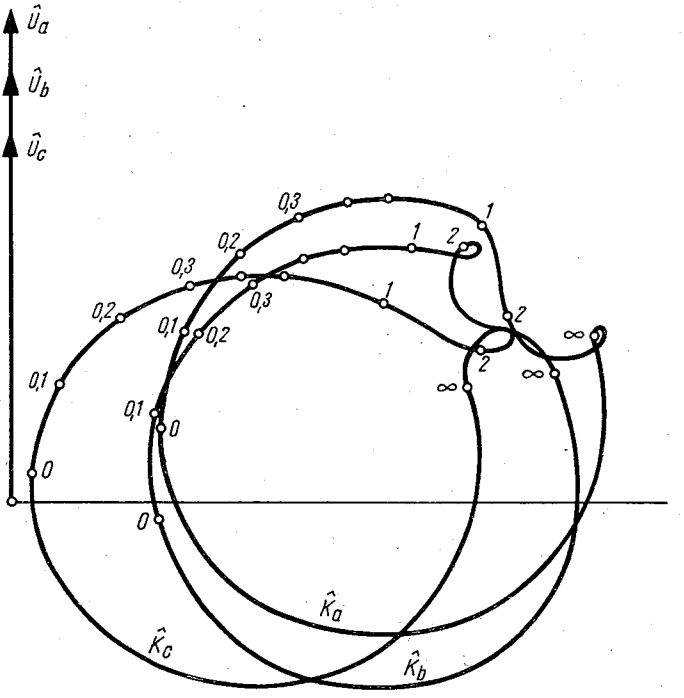
$$\hat{N} = -\hat{D}^2. \tag{25f}$$



Rys. 7. Kwartyki trzech prądów fazowych przy zgodności położenia napięć fazowych symetrycznych kolejności zgodnej

Wykreślenie kwartyki z określonego w ten sposób równania metodą kół stycznych w wybranych punktach jest jednak żmudne i łatwiej jest wyszukać kilka punktów przez zsumowanie promieni odpowiadających danym punktom poślizgu.

Równania i wykresy dla prądów fazy b i c otrzyma się w podobny sposób stosując odpowiednie wartości $\hat{m}_b$ i $\hat{m}_c$ określone związkami (2b) i (2c). Otrzymuje się ostatecznie trzy różne kwartyki pokazane przykładowo na rys. 7, gdzie wyrysowano w tej samej osi pionowej wszystkie



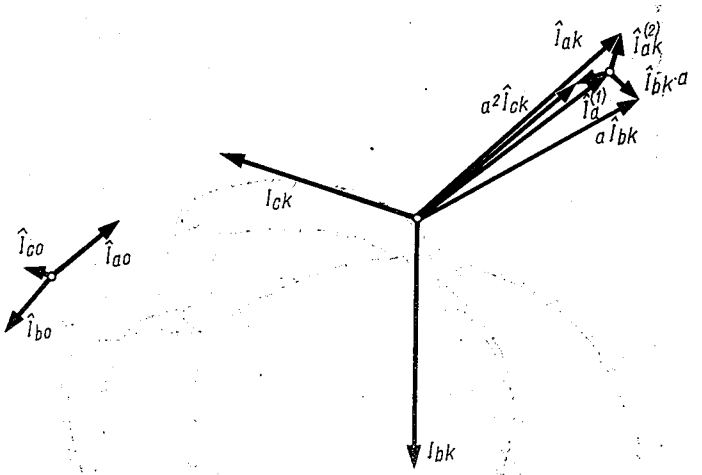
Rys. 8. Kwartyki trzech prądów fazowych przy zgodności położenia napięć fazowych (niesymetrycznych)

napięcia fazowe kolejności zgodnej, stąd otrzymano zgodność położenia wektorów $\hat{S}_a^{(1)}$, $\hat{S}_b^{(1)}$ i $\hat{S}_c^{(1)}$. Natomiast kolejność wektorów $\hat{S}_a^{(2)}$, $\hat{S}_b^{(2)}$ i $\hat{S}_c^{(2)}$ jest tu na skutek obrotu napięć inna niż kolejność napięć $\hat{U}_a^{(2)}$, $\hat{U}_b^{(2)}$ i $\hat{U}_c^{(2)}$. Z punktów O_a, O_b i O_c zatoczono jedynie fragmenty kół stycznych do odpowiednich kwartyk. Z rys. 7 wynika, że dla wykreślenia krzywych wystarczy nanieść skalę poślizgu na okrąg $\hat{K}^{(1)}$ wspólny dla wszystkich prądów fazowych oraz na jedno z kół prądów odwrotnej kolejności, np. $\hat{K}_a^{(2)}$ Dla każdej wartości poślizgu s punkty na kwartykach są rozmieszczone symetrycznie względem punktu na okręgu $\hat{K}^{(1)}$.

Na rys. 8 przedstawiono te same trzy kwartyki po takim ich obrocie, że napięcia fazowe są wyrysowane na osi pionowej. Punkty tych samych

poślizgów nie tworzą teraz trójkąta równobocznego jak na rys. 7. Krzywe prądów mało różnią się od okręgów w zakresie od $s = 1$ do $s = -\infty$, lecz są przesunięte względem okręgów prądów symetrycznych kolejności zgodnej. Natomiast duże charakterystyczne odchyłki kwartyki od okręgu występują między punktami $s = 1$ a $s = +\infty$.

Rysunek 7 wskazuje, że niesymetria napięć wywołała znacznie większą niesymetrię prądów, szczególnie przy małych poślizgach. Stopień niesymetrii prądów nie jest stały i — jak to wskazuje rys. 9 — przy biegu ja-



Rys. 9. Niesymetria prądów przy biegu jałowym i przy zwarciu

łowym występuje duża asymetria prądów, przy zwarciu asymetria prądów i napięć jest taka sama, natomiast przy poślizgu $s = 2$ niesymetria prądów jest znacznie mniejsza od niesymetrii napięć.

3. ZASILANIE JEDNOFAZOWE JAKO SZCZEGÓLNY PRZYPADEK ASYMETRII

Jednofazowe zasilanie silnika trójfazowego może być zrealizowane na kilka sposobów i w zależności od układu połączeń można taki układ traktować jako zasilany sztywnymi napięciami składowymi symetrycznymi lub układ o niesztywnych napięciach składowych (zależnych od poślizgu). Drugim kryterium podziału jest istnienie lub brak składowej zerowej napięcia zasilającego. Jako przykłady geometrycznej interpretacji układów trójfazowych zasilanych jednofazowo zostaną rozpatrzone dwa układy, gdzie nie ma składowej zerowej napięcia, a mianowicie układ z przerwą w jednej fazie (rys. 10) i układ hamowania o zwartych dwóch fazach (rys. 11). Pierwszy z nich charakteryzuje się niesztywnymi napięciami składowymi symetrycznymi, drugi ma stałe napięcia składowe.

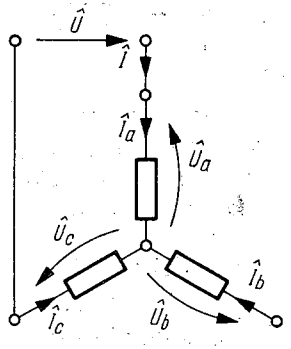
Dla układu o przerwie w jednej fazie (rys. 10) otrzymuje się warunki wyjściowe do wyznaczenia składowych symetrycznych w postaci następujących związków:

$$\hat{I}_a = \hat{I}, \tag{26}$$

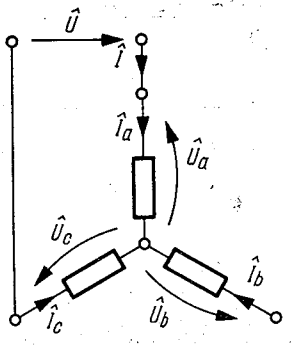
$$\hat{I}_b = 0, \tag{27}$$

$$\hat{I}_c = -\hat{I}, \tag{28}$$

$$\hat{U} = \hat{U}_a - \hat{U}_c. \tag{29}$$



Rys. 10. Schemat układu trójfazowego z przerwą w jednej fazie



Rys. 11. Schemat układu trójfazowego o zasilaniu jednofazowym przy zwartych dwóch fazach

Pierwsze trzy związki pozwalają na określenie składowych symetrycznych prądów fazowych:

$$\hat{I}_a^{(0)} = 0, \tag{30}$$

$$\hat{I}_a^{(1)} = \frac{1}{3}\hat{I}(1-a^2), \tag{31}$$

$$\hat{I}_a^{(2)} = \frac{1}{3}\hat{I}(1-a), \tag{32}$$

a z warunku wiążącego napięcia fazowe z napięciem zasilania otrzymuje się:

$$\hat{I}_a = \hat{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}^{(1)} + \hat{Z}^{(2)}}. \tag{33}$$

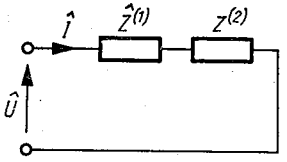
Prąd pobierany z sieci jest zatem zależny od poślizgu, a również składowe symetryczne napięcia są funkcją poślizgu:

$$\hat{U}_a^{(0)} = 0, \tag{34}$$

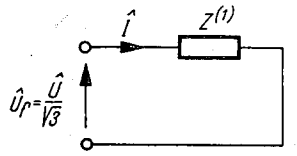
$$\hat{U}_a^{(1)} = \hat{I}_a^{(1)}\hat{Z}^{(1)} = \frac{\hat{U}}{3}(1-a^2)\frac{\hat{Z}^{(1)}}{\hat{Z}^{(1)} + \hat{Z}^{(2)}}, \tag{35}$$

$$\hat{U}_a^{(2)} = \hat{I}_a^{(2)}\hat{Z}^{(2)} = \frac{\hat{U}}{3}(1-a)\frac{\hat{Z}^{(2)}}{\hat{Z}^{(1)} + \hat{Z}^{(2)}}. \tag{36}$$

Układu o przerwie w jednej fazie nie można zatem traktować jako układu o sztywnych napięciach symetrycznych i dlatego nie można wyznaczać miejsca geometrycznego prądów metodą omówioną w poprzednim rozdziale. Jednak korzystając z prostej postaci wzoru (33) na prąd $\hat{I}$ można wykonać konstrukcję miejsc geometrycznych wprowadzając niewielkie uproszczenia. Można przyjąć, że oporność $\hat{Z}^{(2)}$ w zakresie poślizgów od 0 do 1 jest stała i jest równa oporności $\hat{Z}_k$ dla stanu zwarcia. Wówczas

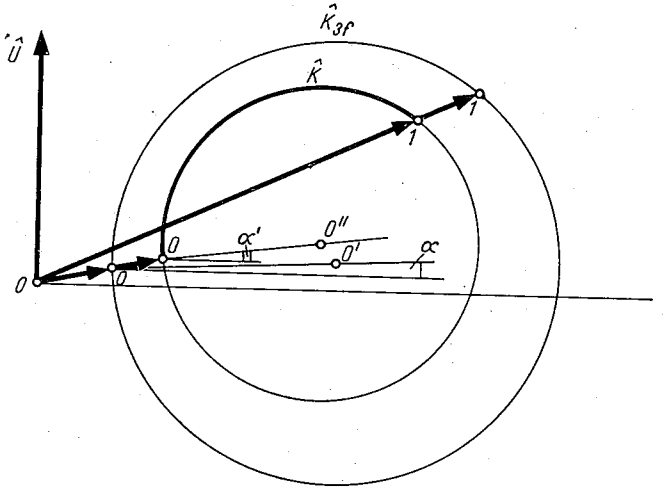


Rys. 12. Schemat zastępczy uproszczony układu wg rys. 10



Rys. 13. Schemat zastępczy wielkości fazowych przy zasilaniu trójfazowym symetrycznym

układ zastępczy można przedstawić jako sumę oporności stałej $\hat{Z}_k$ i oporności zmieniającej się z poślizgiem $\hat{Z}^{(1)}$ (rys.12). Miejscem geometrycznym prądu dla takiego układu jest oczywiście okrąg koła, ale inny niż dla symetrycznego zasilania trójfazowego z tej samej sieci. Z porównania otrzymanego schematu (rys. 12) ze schematem dla pracy trójfazowej przy



Rys. 14. Wykres kołowy uproszczony przy zasilaniu wg rys. 10 i schematu 12

tym samym napięciu przewodowym $\hat{U}$ (rys. 13) wynika, że różnice między obu okręgami spowodowane będą dwoma czynnikami:

a) zwiększonym dla pracy jednofazowej napięciem zasilania,

b) dołączoną szeregowo przy pracy jednofazowej opornością stałą $\hat{Z}_k$, którą można traktować jako zwiększenie oporności stojana.

Dla stanu zwarcia można pominąć gałąź poprzeczną pełnego schematu zastępczego i w przybliżeniu można traktować oporność $\hat{Z}_k$ jako podwójną oporność stojana, a w takim razie otrzymalibyśmy przy pracy jednofazowej trzykrotnie większą oporność stojana niż przy pracy trójfazowej.

Niech dla pracy trójfazowej wykres miejsc geometrycznych określony będzie okręgiem $\hat{K}_{3f}$ (rys. 14). Wyznaczmy na tym samym rysunku okrąg $\hat{K}_1$ dla pracy jednofazowej przez określenie punktów $s = 0$ i $s = 1$ oraz kąta między osią poziomą a linią łączącą punkt $s = 0$ ze środkiem okręgu. Przy $s = 0$ prąd dla pracy jednofazowej jest w przybliżeniu $\sqrt{3}$ razy większy, gdyż wielkość $\hat{Z}_k$ jest znacznie mniejsza od $\hat{Z}^{(1)}$. Przy zwarciu $\hat{Z}_k = \hat{Z}^{(1)}$, a zatem prąd $\hat{I}_k$ przy pracy jednofazowej w porównaniu z prądem przy pracy trójfazowej $\hat{I}_{3k}$ wynosi:

$$\hat{I}_k = \frac{\hat{U}}{2\hat{Z}_k} = \frac{\sqrt{3}\,\hat{U}_f}{2\hat{Z}_k} = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{I}_{3k}. \tag{37}$$

Kąt α przy pracy trójfazowej wyraża się przybliżoną zależnością:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2R_1}{X_1+X_0},$$

a więc przy pracy jednofazowej kąt α' (rys. 14) jest dwa do trzech razy większy od kąta α.

Skala poślizgu może być dla tego koła wyznaczona na podstawie ogólnego równania okręgu, które dla pracy trójfazowej można napisać w postaci:

$$\hat{I}_3 = \frac{\hat{U}}{\sqrt{3}}\,\frac{\hat{A}+\hat{B}s}{\hat{C}+\hat{D}s} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{\dfrac{\hat{C}+\hat{D}s}{\hat{A}+\hat{B}s}}. \tag{38}$$

Mianownik ostatniego członu powyższego wzoru jest opornością $\hat{Z}^{(1)}$. Oznaczając $\hat{Z}_k = \hat{E}$ otrzymujemy dla pracy jednofazowej:

$$I = \frac{U}{\hat{E}+\dfrac{\hat{C}+\hat{D}s}{\hat{A}+\hat{B}s}} = U\,\frac{\hat{A}+\hat{B}s}{\hat{A}\hat{E}+\hat{C}+(\hat{E}\hat{B}+\hat{D})s}, \tag{39}$$

a więc otrzymaliśmy równanie okręgu $\hat{K}^{(1)}$, dla którego skala poślizgu jest liniowa i może być wyznaczona jak dla zasilania symetrycznego. Dla przyjętych wyżej uproszczeń ($\hat{Z}^{(2)} = \hat{Z}_k$) otrzymany wykres kołowy może być uważany za dobre przybliżenie tylko przy poślizgach od 0 do 1.

Korzystając z ogólnej formuły na prąd pobierany przy pracy jednofazowej można na podstawie wzorów (7), (8) i (33) napisać:

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\dfrac{\hat{C}+\hat{D}s}{\hat{A}+\hat{B}s}+\dfrac{\hat{C}+\hat{D}(2-s)}{\hat{A}+\hat{B}(2-s)}}. \tag{40}$$

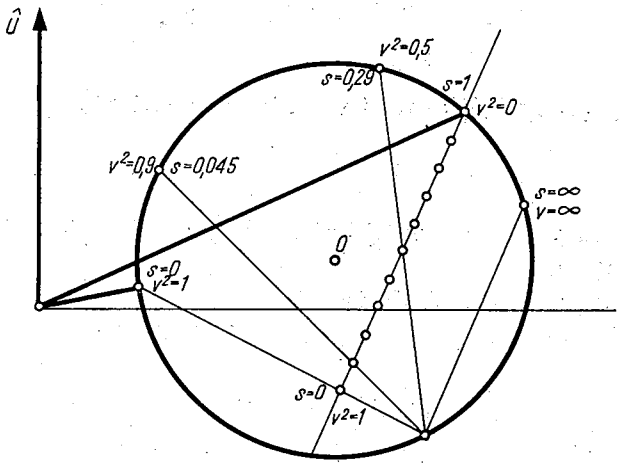
Po przekształceniu otrzymuje się:

$$\hat{I} = \hat{U}\frac{(\hat{A}+\hat{B})^2-\hat{B}^2(1-s)^2}{2(\hat{A}+\hat{B})(\hat{C}+\hat{D})-2\hat{B}\hat{D}(1-s)^2}. \tag{41}$$

Równanie to jest również równaniem okręgu, przy czym parametrem zmiennym jest:

$$v = (1-s) = \left(\frac{n}{n_0}\right). \tag{42}$$

Koło to będzie miało równomierną skalę dla parametru v^2. Natomiast dla poślizgu s skala będzie przesunięta o jedność skalą pierwiastka z parametru v^2 (rys. 15).



Rys. 15. Wyznaczanie skali poślizgu dla okręgu wg rys. 14

Układ wg rys. 11 charakteryzuje się tym, że składowe symetryczne napięć zgodnej i odwrotnej kolejności są sobie równe i nie zależą od poślizgu. Na podstawie równań wyjściowych:

$$\hat{U}_A = 0, \tag{43a}$$

$$\hat{U}_B = \hat{U}, \tag{43b}$$

$$\hat{U}_C = -\hat{U} \tag{43c}$$

otrzymuje się składowe symetryczne napięć liniowych

$$\hat{U}_A^{(0)} = 0, \tag{44a}$$

$$\hat{U}_A^{(1)} = j\frac{\hat{U}}{\sqrt{3}}, \tag{44b}$$

$$\hat{U}_A^{(2)} = -j\frac{\hat{U}}{\sqrt{3}} \tag{44c}$$

oraz składowe symetryczne napięć fazowych

$$\hat{U}_a^{(0)} = 0, \tag{45a}$$

$$\hat{U}_a^{(1)} = \frac{\hat{U}}{3}, \tag{45b}$$

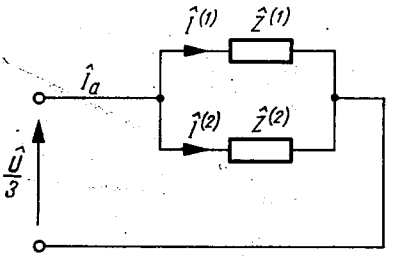
$$\hat{U}_a^{(2)} = \frac{\hat{U}}{3}. \tag{45c}$$

Równanie prądu wyraża się zależnością:

$$\hat{I} = \hat{I}_a^{(1)} + \hat{I}_a^{(2)} = \frac{\hat{U}}{3}\left(\frac{1}{\hat{Z}^{(1)}} + \frac{1}{\hat{Z}^{(2)}}\right). \tag{46}$$

Silnik reprezentuje zatem równoległy układ oporności $\hat{Z}^{(1)}$ i $\hat{Z}^{(2)}$ załączony na napięcie $\frac{\hat{U}}{3}$ (rys. 16).

Prądy składowe $\hat{I}_a^{(1)}$ i $\hat{I}_a^{(2)}$ przedstawiają na płaszczyźnie Gaussa pokrywające się okręgi $\hat{K}^{(1)}$ i $\hat{K}^{(2)}$ (rys. 17), lecz o przesuniętej o 2 skali poślizgu.



Rys. 16. Schemat zastępczy układu wg rys. 11

Suma wektorów odpowiadających danemu poślizgowi wyznacza wektor prądu $\hat{I}$. Na podstawie wzorów (2) i (9) do (12) i (45) otrzymuje się:

$$\hat{m}_a = 1, \tag{47}$$

$$\hat{R}_a^{(1)} = \hat{R}_a^{(2)} = \hat{R}_a, \tag{48}$$

$$\hat{S}_a^{(1)} = \hat{S}_a^{(2)} = \hat{S}_a, \tag{49}$$

a zatem równanie prądu $\hat{I}$ wyraża się zależnością:

$$\hat{I} = 2\hat{S}_a + \hat{R}_a(e^{j\varphi^{(1)}} + e^{j\varphi^{(2)}}). \tag{50}$$

Wyrażenie

$$\hat{W} = e^{j\varphi^{(1)}} + e^{j\varphi^{(2)}} \tag{51}$$

jest wektorem, którego miejscem geometrycznym jest okrąg koła. Po podstawieniu bowiem wzorów (13) i (14) otrzymuje się:

$$\hat{W} = \frac{2\hat{C}\check{C} + 2\check{C}\hat{D} + 2\hat{C}\check{D} + 2\hat{D}\check{D} - 2\hat{D}\check{D}(1-s)^2}{(\hat{C}+\hat{D})^2 - \hat{D}^2(1-s)^2}, \tag{52}$$

a to jest równanie okręgu o parametrze $1-s^2$. Ten okrąg przechodzi przez początek własnego układu współrzędnych, gdyż istnieje taka wartość rze-

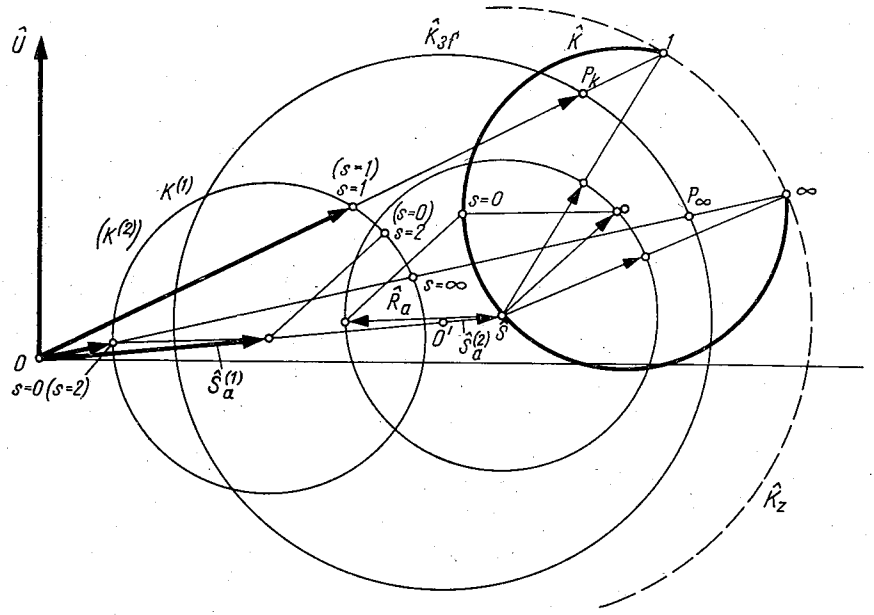
czywista parametru $(1-s)^2$, dla którego $\hat{W} = 0$. Jeżeli licznik przyrównamy do zera, to otrzymamy:

$$(1-s)^2 = \frac{\hat{C}\check{C}+\check{C}\hat{D}+\hat{C}\check{D}+\hat{D}\check{D}}{\hat{D}\check{D}} \tag{53}$$

lub po przekształceniu

$$(1-s)^2 = \frac{(\hat{C}+\hat{D})(\check{C}+\check{D})}{\hat{D}\check{D}}. \tag{54}$$

Zarówno licznik, jak mianownik są tutaj iloczynami liczby zespolonej i z nią sprzężonej, zatem są to liczby rzeczywiste. Iloraz liczb rzeczywistych jest liczbą rzeczywistą, dającą wartość parametru $(1-s)^2$, dla które-



Rys. 17. Konstrukcja miejsc geometrycznych prądu dla układu wg rys. 11

go wektor $\hat{W}$ jest zerem. Ponieważ miejscem geometrycznym wektora $\hat{W}$ jest okrąg koła, więc i iloczyn $\hat{R}_a\hat{W}$ wyznacza okrąg koła przechodzący przez koniec wektora $2\hat{S}_a$. Jednym punktem szukanego okręgu jest zatem koniec wektora $2\hat{S}_a = \hat{S}_a^{(1)}+\hat{S}_a^{(2)}$, dwa inne punkty można wyznaczyć dla poślizgu $s = \infty$ i $s = 1$. Są to takie dwie wartości poślizgów, które leżą na kołach $\hat{K}^{(1)}$ i $\hat{K}^{(2)}$ w tych samych punktach. Wynika to również z zależności (13) i (14):

$$\varphi_{(s=1)}^{(1)} = \varphi_{(s=1)}^{(2)} = \operatorname{arctg}\frac{Im(\hat{C}+\hat{D})}{Re(\hat{C}+\hat{D})}, \tag{55}$$

$$e^{j\varphi_{(s=1)}^{(1)}} + e^{j\varphi_{(s=1)}^{(2)}} = \frac{\check{C}+\check{D}}{\hat{C}+\hat{D}} = e^{j\varphi_{(s=1)}} \tag{56}$$

oraz dla $s = \infty$

$$\varphi^{(1)}_{(s=\infty)} = \varphi^{(2)}_{(s=\infty)} = \operatorname{arctg} \frac{Im\hat{D}}{Re\hat{D}}, \tag{57}$$

$$e^{j\varphi^{(1)}_{(s=\infty)}} = e^{j\varphi^{(2)}_{(s=\infty)}} = \frac{\check{D}}{\hat{D}} = e^{j\varphi(s=\infty)}. \tag{58}$$

Równanie prądów wyraża się zatem dla tych dwóch punktów zależnością:

$$\hat{I}_{(s=1)} = 2\hat{S}_a + 2\hat{R}_a e^{j\varphi(s=1)}, \tag{59}$$

$$\hat{I}_{(s=\infty)} = 2\hat{S}_a + 2\hat{R}_a e^{j\varphi(s=\infty)} \tag{60}$$

Otrzymane w ten sposób dwa punkty charakterystyczne są punktami styczności krzywej, która jest miejscem geometrycznym prądu $\hat{I}$, z okręgiem zatoczonym z punktu $\hat{S}$ (rys. 17) promieniem o długości $2\hat{R}_a$. Ta krzywa dwukrotnie od $s = +\infty$ do $s = -\infty$ zatacza łuk okręgu $\hat{K}$ wyznaczonego przez te trzy określone wyżej punkty.

Dla wyznaczenia punktów $s = 1$ i $s = \infty$ wystarczy zatem wyznaczyć wektor $\overline{OS}$ jako dwukrotną wartość $\hat{S}^{(1)}_a$ z punktu S zatoczyć okrąg podwójnym promieniem $\hat{R}_a$ i znaleźć przecięcie tego okręgu z prostymi będącymi przedłużeniem wektorów prądu $\hat{I}^{(1)}_{(s=\infty)}$ i $\hat{I}^{(1)}_{(s=1)}$ (rys. 17).

Na rys. 17 zilustrowano jednocześnie związek między kołem $\hat{K}$ prądu fazowego $\hat{I}$ a okręgiem $\hat{K}_{3f}$ prądu fazowego $\hat{I}_{3f}$ dla symetrycznego zasilania trójfazowego przy tym samym napięciu międzyprzewodowym $\hat{U}$ sieci zasilającej. Jeżeli dla pracy trójfazowej określony jest okrąg $\hat{K}_{3f}$ i jego charakterystyczne punkty P_k dla $s = 1$ i P_∞ dla $s = \infty$ oraz środek okręgu O', wówczas okręgi $K^{(1)}$ i $K^{(2)}$ są zgodnie z rys. 16 mniejsze od $\hat{K}_{3f}$ w proporcji $\sqrt{3}$.

$$\hat{K}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{K}_{3f}, \tag{61}$$

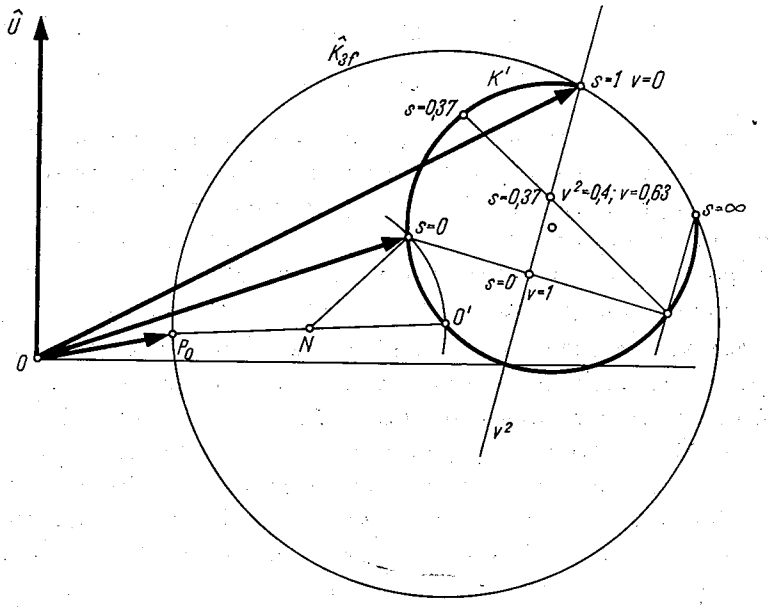
natomiast okrąg $\hat{K}_z$ (rys. 17) ma dwukrotnie większy promień i odległość jego środka od początku układu jest dwukrotnie większa niż okręgu $\hat{K}^{(1)}$. Stąd okrąg $\hat{K}_z$ można wprost wyrysować z okręgu $\hat{K}_{3f}$ mnożąc ten ostatni przez $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Ale na tym okręgu leżą tylko dwa punkty szukanego miejsca geometrycznego. Trzecim punktem jest, jak wykazano wyżej, środek okręgu $\hat{K}_z$ (punkt S na rys. 17), który również można prosto wyznaczyć z relacji:

$$\overline{OS} = \frac{2}{\sqrt{3}} \overline{OO'}. \tag{62}$$

Dla wyznaczenia skali poślizgu na okręgu $\hat{K}$ należy znaleźć punkt $s = 0$. Najprościej można tego dokonać, jeżeli z punktu S przeprowadzi się wek-

tor $\bar{R}_a$ równoległy do odcinka ze środka okręgu $\bar{K}_{3f}$ do punktu pracy synchronicznej $s = 0$, krótszy od tego odcinka w stosunku $\sqrt{3}$. Zatoczony z tego punktu tym samym promieniem $\bar{R}_a$ łuk wyznacza na przecięciu z okręgiem $\bar{K}$ szukany punkt $s = 0$.

W oparciu o powyższe związki można wyznaczyć okrąg $\bar{K}$ znacznie prościej (rys. 18) zmieniając tylko skalę prądu. Punkty P_k, P_∞ i środek



Rys. 18. Miejsce geometryczne prądu jak na rys. 17, lecz przy zmienionej skali prądu: dla okręgu $\bar{K}_{3f}$ 1 cm $= n$ [A], dla okręgu $\bar{K}'$ 1 cm $= \frac{2}{\sqrt{3}} n$ [A]

okręgu dla silnika 3-fazowego są wprost szukanymi trzema punktami okręgu $\bar{K}'$, którego skala prądów jest zwiększona w stosunku $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Wyznaczenie punktu $s = 0$ można przeprowadzić, znajdując punkt N połowiący odcinek $\overline{P_0O'}$ i kreśląc z tego punktu promieniem $\overline{NO'}$ łuk do przecięcia z okręgiem $\bar{K}'$.

Skalę poślizgu dla okręgu $\bar{K}'$ można wyznaczyć jako liniową dla parametru $v^2 = (1-s)^2$ (rys. 18), a stąd wyznaczyć nieliniową (kwadratową) skalę poślizgu s.

Przedstawione dla jednofazowego zasilania ze zwartymi dwoma fazami (wg rys. 11) związki i konstrukcje geometryczne pozwalają na przedstawienie w zupełnie podobny sposób miejsca geometrycznego prądu dla przerwy w jednej fazie (rys. 10).

Niech będzie dany okrąg $\hat{K}_3$ dla pracy trójfazowej (rys. 19), przy czym skala prądów wynosi n:

$$1 \text{ cm} = n[\text{A}] \tag{63}$$

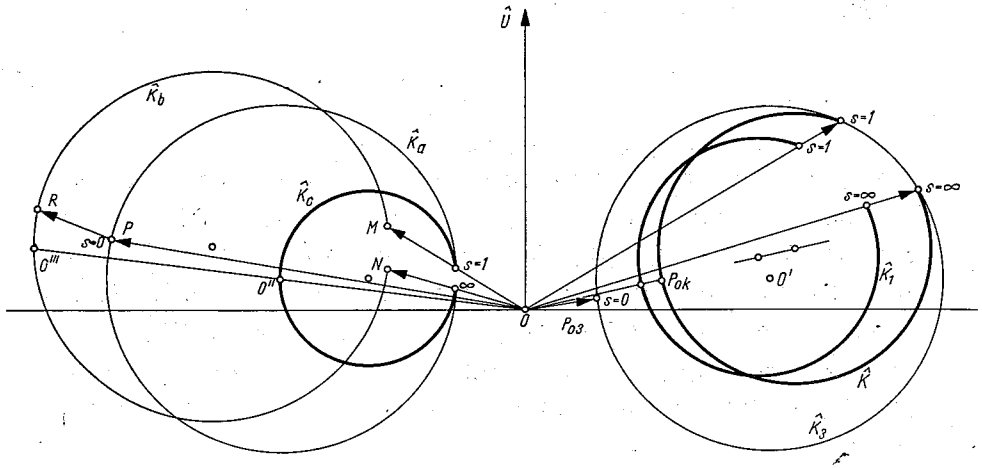
Ten okrąg reprezentuje prąd fazowy określony (zgodnie ze schematem 13) równaniem:

$$\hat{I}_{3f} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\hat{U}}{\hat{Z}^{(1)}}. \tag{64}$$

Wyrysujemy okrąg, który jest miejscem geometrycznym odwrotności prądu

$$\hat{K}_a = \frac{1}{\hat{K}_3} = \sqrt{3} \frac{\hat{Z}^{(1)}}{\hat{U}}. \tag{65}$$

Można tak dobrać skalę, aby otrzymać okrąg $\hat{K}_a$ o tym samym promieniu i stanowiący zwierciadlane odbicie okręgu $\hat{K}_3$ względem osi rzeczywistej (osi napięcia). Jest to okrąg, reprezentujący w innej skali miejsce geome-



Rys. 19. Konstrukcja miejsc geometrycznych prądu dla układu wg rys. 10

tryczne oporności $\hat{Z}^{(1)}$. Ten sam okrąg jest miejscem geometrycznym oporności $\hat{Z}^{(2)}$, ale punkty równych poślizgów są przesunięte o 2. Przechodząc na postać wykładniczą równania okręgu otrzymuje się, podobnie jak poprzednio, że suma $\hat{Z}^{(1)}+\hat{Z}^{(2)}$ da się przedstawić jako okrąg, dla którego trzema charakterystycznymi punktami są: punkt M (podwójna wartość $\hat{Z}^{(1)}$ dla $s = 1$), punkt N (podwójna wartość $\hat{Z}^{(1)}$ dla $s = \infty$) oraz punkt O''' jako koniec wektora dwukrotnie większego niż wektor $\overline{OO''}$. Co do punktów M i N, to położenie ich jest oczywiste, natomiast właści-

wość punktu O''' można uzasadnić podobnie jak w poprzednim przypadku [wzory (50) do (54)]. Te trzy punkty wyznaczają okrąg $\hat{K}_b$ (rys. 19):

$$\hat{K}_b = \sqrt{3}\,\frac{\hat{Z}^{(1)}+\hat{Z}^{(2)}}{\hat{U}}, \tag{66}$$

przy czym miejscem geometrycznym sumy $\hat{Z}^{(1)}+\hat{Z}^{(2)}$ jest właściwie kwartyka, która w zakresie od $s = +\infty$ do $s = -\infty$ przebiega dwukrotnie duży łuk $\widehat{MN}$ okręgu $\hat{K}_b$.

Wykreślmy jeszcze okrąg dwukrotnie mniejszy:

$$\hat{K}_c = \frac{1}{2} = \sqrt{3}\,\frac{\hat{Z}^{(1)}+\hat{Z}^{(2)}}{2\hat{U}}, \tag{67}$$

okrąg ten ma punkty $s = 1$ i $s = \infty$ te same co okrąg $\hat{K}_a$ i przechodzi przez jego środek O''.

Wracając do miejsca geometrycznego prądów znajdźmy odwrotność tego okręgu $\hat{K}_c$:

$$\hat{K} = \frac{1}{\hat{K}_c} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{\hat{U}}{\hat{Z}^{(1)}+\hat{Z}^{(2)}}, \tag{68}$$

a uwzględniając równanie (33):

$$\hat{K} = \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{I}. \tag{69}$$

Jest to okrąg przechodzący przez punkty $s = 1$ i $s = \infty$ na okręgu $\hat{K}_3$, a trzeci jego punkt można wyznaczyć (w przybliżeniu) odcinając odcinek $\overline{OP}_{0k}$ jako nieco mniej niż podwójną wartość odcinka $\overline{OP}_{03}$ (dla $s = 0$) przy pracy trójfazowej, przy czym prąd ten ma nieco większy współczynnik mocy. Proporcja $\overline{OP}_{0k}$ do podwójnej wartości $\overline{OP}_{03}$ jest taka, jak proporcja odcinków $\overline{OP}$ do $\overline{OR}$, zaś położenie wektora $\overline{OP}_{0k}$ wyznacza kąt między osią napięcia U a odcinkiem $\overline{OR}$, przy czym, jak to widać z rys. 19, kąt ten jest nieco mniejszy od kąta wyznaczonego wektorem $\overline{OP}$ i $\overline{OP}_{03}$.

Otrzymany łuk okręgu $\hat{K}$ jest zatem kwartyką prądu, który jest $\frac{2}{\sqrt{3}}$ większy od prądu $\hat{I}$ przy przerwie w jednej fazie. Jeżeli okrąg $\hat{K}$ przedstawia prąd $\hat{I}$, to skala jego wynosi:

$$1\text{ cm} = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{[A]}. \tag{70}$$

Miejsce geometryczne $\hat{K}_1$ prądu $\hat{I}$ przy zachowaniu skali prądu takiej samej jak dla okręgu $\hat{K}_3$ może być wyznaczone przez zmniejszenie łuku okręgu $\hat{K}$ w proporcji $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Porównując łuk okręgu $\bar{K}'$ na rys. 18 i okręgu $\bar{K}$ na rys. 19 dochodzi się do wniosku, że punkty charakterystyczne obu okręgów są wspólne ($s = 1$ i $s = \infty$), lecz okrąg każdego z tych kół jest inny z powodu znacznie się różniących prądów stanu jałowego. Przy tym zmiana skali prądu dla okręgu $\bar{K}$ (rys. 19) jest odwrotna niż zmiana skali okręgu $\bar{K}'$ na rys. 18 w stosunku do wspólnej skali okręgu dla pracy trójfazowej symetrycznej.

Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
Katedra Maszyn i Pomiarów Elektrycznych

WYKAZ LITERATURY

1. Gabryś W.: Ścisły wykres kołowy schematu zastępczego silnika asynchronicznego. — Rozpr. Elektr., 1956, z. 3.
2. Kovacs K. P.: Symmetrische Komponenten in Wechselstrommaschinen. Basel u. Stuttgart 1962.
3. Michael W.: Theorie der Wechselstrommaschinen in vektorieler Darstellung. Leipzig u. Berlin 1937.
4. Richter A.: Der einsträngige Einphasen — Asynchronmotor in dimensionloser Darstellung als unsymmetrisch gespeiste Zweiphasenmaschine. — AEG — Mitt. 7/8 1963.

Z. BAJOREK

LES DIAGRAMMES DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES DES MOTEURS ASYNCHRONES À ALIMENTATION NON SYMÉTRIQUE

Résumé

On a présenté l'influence de la composanté de successivité inverse de la tension d'alimentation sur le diagramme du cercle du moteur asynchrone. En résultat on a obtenu une courbe spéciale, qui montre dans la gamme des glissements plus grands que l'unité un écart considérable en comparison avec la circonférence du cercle. On a analysé aussi des lieux géométriques de deux systèmes triphasés à alimentation monophasée comme des cas singuliers de l'asymétrie de la tension.

З. БАЁРЭК

ДИАГРАММЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ АСИНХРОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ПРИ НЕСИММЕТРИЧНОМ ПИТАНИИ

Резюме

Представлено влияние составляющей обратной очередности питающего напряжения на круговую диаграмму асинхронного двигателя. Получено в результате специальную кривую высшего порядка, отличающуюся в диапазоне скольжений больше единицы значительным отступлением от окружности. Рассмотрены тоже геометрические места двух трехфазных систем с однофазным питанием в качестве частных случаев асимметрии напряжения.

621.391.3

ANDRZEJ KARCZMAREWICZ

Efektywne kodowanie dla systemów binarnych ze sprzężeniem zwrotnym informacji

Rękopis dostarczono 10.5.1965

W artykule zreferowano sposób kodowania dla binarnych systemów transmisyjnych ze sprzężeniem zwrotnym informacji. Sposób ten polega na przesyłaniu w kanale podstawowym (od źródła do ujścia danych) wiadomości bez dodatkowej rozwlekłości (z wyjątkiem niewielkiej rozwlekłości wprowadzanej przez sygnał odrzucenia), natomiast w kanale zwrotnym wiadomości są przesyłane z rozwlekłością wystarczającą do skorygowania pojedynczego błędu. Przeprowadzona ocena zreferowanego kodowania przy założeniu kanałów podstawowego i zwrotnego o identycznych szybkościach modulacji i zakłóceniach wykazała pewne istotne jego zalety. Porównanie otrzymanych wyników z wynikami uzyskanymi dla systemów ze sprzężeniem zwrotnym decyzji oraz systemów z kodami korekcyjnymi pozwoliło wyciągnąć ogólne wnioski o zakresie stosowania systemów ze sprzężeniem zwrotnym informacji.

1. WSTĘP

W artykule tym został przedstawiony sposób kodowania dla binarnych systemów transmisyjnych ze sprzężeniem zwrotnym informacji (SZI). Zastosowanie przedstawionego sposobu kodowania w systemie iteracyjnego SZI [5], [13] zostało ocenione i porównane z wynikami uzyskanymi w innych systemach przesyłania danych ziarnistych. Podstawą przeprowadzonej oceny była metoda analizy opracowana w [14] i zreferowana również w [15]. Dokładny opis systemu iteracyjnego SZI podany jest w [15]. Dla ułatwienia czytania przypominamy podstawowe pojęcia.

System przesyła kolejne wiadomości

$$\ldots, x^{(j-1)}, x^{(j)}, x^{(j+1)}, \ldots$$

ze *źródła danych* do *ujścia danych*. Wiadomości przesyłane są od nadajnika systemu do odbiornika poprzez *kanał podstawowy* w postaci ciągów kodowych $\vec{s}(x)$. W kanale podstawowym może być również przesyłana wiadomość jałowa x_0 o postaci ciągu $\vec{s}(x_0)$. Zdarzenie polegające na wysłaniu kolejnej wiadomości ze zbioru wiadomości źródła danych nazwiemy

akceptacją (oznaczenie A). Zdarzenie polegające na wysłaniu wiadomości jałowej nazwiemy *odrzuceniem* (oznaczenie R).

W kanale przesyłane ciągi kodowe podlegają działaniu zakłóceń, na skutek czego odebrany ciąg $\vec{y}(\vec{s})$ może różnić się od nadanego ciągu $\vec{s}$.

Od odbiornika do nadajnika przesyłane są poprzez *kanał zwrotny* pewne dane o ciągu odebranym w postaci ciągu kontrolnego $\vec{s}^k(\vec{y})$. Odebrany ciąg kontrolny $\vec{y}^k(\vec{s}^k)$ może być obarczony błędami spowodowanymi przez zakłócenia kanału zwrotnego. W nadajniku systemu na podstawie porównania ciągu $\vec{s}$ i odebranego ciągu kontrolnego $\vec{y}^k$ zostaje podjęta decyzja N^*. Decyzja N^* może przybierać jedną z postaci:

$N^* = \bar{B}A$ — „odebrano prawidłową wiadomość (niejałową)",
$N^* = A \to BA$ — „odebrano błędną wiadomość (niejałową)",
$N^* = A \to R$ — „odebrano błędne odrzucenie",
$N^* = R \to A$ — „odebrano błędną akceptację",
$N^* = \bar{B}R$ — „odebrano prawidłowe odrzucenie".

Pierwszą ($N^* = \bar{B}A$) i ostatnią ($N^* = \bar{B}R$) postać oznaczymy wspólnym symbolem

$$N^* = \bar{B} \quad \text{„nie było błędu"},$$

a pozostałe trzy postacie oznaczymy

$$N^* = B \quad \text{„był błąd"},$$

Reguła decyzyjna nadajnika jest podana w tablicy 1.

Tablica 1

jeżeli	oraz jeżeli R ($x = x_0$)	oraz jeżeli A ($x \neq x_0$)
odebrany ciąg kontrolny odpowiada wysłanej wiadomości x $N^* = \bar{B}$	$N^* = \bar{B}R$	$N^* = \bar{B}A$
odebrany ciąg kontrolny nie odpowiada wysłanej wiadomości x $N^* = B$	$N^* = R \to A$	jeżeli odebrany ciąg kontrolny odpowiada x_0 $N^* = A \to R$
		jeżeli odebrany ciąg kontrolny nie odpowiada x_0 $N^* = A \to BA$

Użyty w tablicy 1 termin „odpowiada" zostanie sprecyzowany bliżej w rozdz. 4, tutaj ograniczymy się do jego intuicyjnego rozumienia.

Zależnie od decyzji N^* nadajnik wyśle w następnym kroku albo następną wiadomość $x^{(j+1)}$ (przyjmujemy, że wysłana została wiadomość

$x^{(j)}$), albo powtórzy poprzednią wiadomość $x^{(j-1)}$, albo powtórzy ostatnią wiadomość $x^{(j)}$, albo wyśle odrzucenie, czyli wiadomość jałową x_0 i następnie powtórzy wiadomość $x^{(j)}$. Po wysłaniu x_0 nadajnik albo prześle $x^{(j)}$ (ostatnią wiadomość), albo x_0. Sposób postępowania nadajnika w zależności od decyzji N^* jest podany w tablicy 2. Odbiornik notuje w pamięci otrzymane z kanału podstawowego wiadomości niejałowe i przetrzymuje je przez pewien czas przed przekazaniem do ujścia danych. Po otrzymaniu odrzucenia odbiornik wymazuje z pamięci ostatnią wiadomość.

Tablica 2

wysłane było \ N^*	$\overline{B}A$	$A \to BA$	$A \to R$	$R \to A$	$\overline{B}R$
$x^{(j)} \neq x_0$	$x^{(j+1)}$	$x_0; x^{(j)}$	$x^{(j-1)}; x^{(j)}$		
x_0				$x_0; x_0$	zależnie od poprzednich N^* albo x_0, albo $x^{(j)}$

Przykład: Wysłana została wiadomość $x^{(3)}$. Odebrany został ciąg kontrolny odpowiadający $x^{(3)}$, a więc (tabl. 1) $N^* = \overline{B}A$. Wysłana zostaje zatem (tabl. 2) wiadomość $x^{(4)}$. Odebrany ciąg kontrolny nie odpowiada $x^{(4)}$ oraz odpowiada x_0, więc (tabl. 1) $N^* = A \to R$. Wysłana zostaje więc (tabl. 2) $x^{(3)}$, a następnie wysłana będzie $x^{(4)}$.

Przyjmiemy następujące założenia:

Założenie 1

Przesyłane są wiadomości x_l gdzie $l = 1, ..., L$. Wszystkie wiadomości są równoprawdopodobne:

$$P_{\acute{z}}(x_l) = \frac{1}{L},$$

gdzie: $P_{\acute{z}}(x_l)$ — prawdopodobieństwo, że kolejną przesyłaną wiadomością (niejałową) jest x_l.

Założenie 2

Rozpatrywane będą jedynie kody systematyczne należące do klasy binarnych kodów liniowych.

Założenie 3

Kanały należą do klasy binarnych symetrycznych kanałów bezpamięciowych. Prawdopodobieństwo warunkowe otrzymania określonego ciągu $\vec{y}$ na wyjściu kanału, przy warunku, że nadany był ciąg $\vec{s}$, wynosi więc:

$$P(\vec{y}/\vec{s}) = P_z(\vec{z} = \vec{y} + \vec{s}) = p^{w(\vec{z})}(1-p)^{n-w(\vec{z})},$$

gdzie:

$P(\vec{y}/\vec{s})$ — prawdopodobieństwo warunkowe otrzymania na wyjściu kanału ciągu $\vec{y}$, przy warunku, że nadany był ciąg $\vec{s}$;

$P_z(\vec{z})$ — prawdopodobieństwo wystąpienia zakłóceń w postaci ciągu błędów $\vec{z}$;

p — elementowa stopa błędów;

$w(\vec{z})$ — waga (liczba jedynek) ciągu $\vec{z}$;

n — długość ciągów ($\vec{s}$, $\vec{y}$ oraz $\vec{z}$),

a więc odpowiada schematowi Bernoulliego. W dalszym ciągu artykułu prawdopodobieństwa odnoszące się do kanału podstawowego będą oznaczane literą T, a prawdopodobieństwa odnoszące się do kanału zwrotnego — literą S.

Założenie 4

Zakładamy, że jest dostępny kanał zwrotny o własnościach transmisyjnych takich samych jak własności kanału podstawowego. A więc w szczególności kanał zwrotny ma taką samą, jak kanał podstawowy, szybkość modulacji i elementową stopę błędów.

Zastosowana zostanie metoda oceny [15] obejmująca zjawiska niezachowania długości wiadomości. Zjawiska te są charakterystyczne dla systemów arytmicznych — zob. [13], [15].

Najbardziej, na pozór, oczywisty wydaje się taki sposób kodowania, który zapewnia najlepsze wykrywanie błędów zachodzących w procesie transmisji. Ocena tego sposobu przeprowadzona przy uwzględnieniu zakłóceń kanału zwrotnego oraz efektu niezachowania długości wiadomości wykazała, że daje on bardzo słabe wyniki — zob. [14] rozdz. 5. W niniejszym artykule zostanie zreferowany inny sposób kodowania, dający — jak zostanie pokazane — znacznie lepsze wyniki.

2. SPRECYZOWANIE PROBLEMU

W artykule tym zostanie przeanalizowany przypadek kodowania sprzężenia zwrotnego, gdy poprawa błędów kanału podstawowego zachodzi wyłącznie wskutek procesu wykorzystującego sprzężenie zwrotne, natomiast niektóre błędy kanału zwrotnego są korygowane przez wykorzystanie właściwości kodów korekcyjnych. Przyjmiemy następujące nazwy i oznaczenia:

— ciągi $\vec{s}_l$ o długości n przesyłane w kanale podstawowym będziemy nazywać *ciągami informacyjnymi*;

— zbiór $\vec{S}$ wszystkich ciągów informacyjnych będziemy nazywać *kodem kanału podstawowego*;

— ciągi $\vec{s}_l^k$ o długości n przesyłane w kanale zwrotnym będziemy nazywać *ciągami kontrolnymi;*

— zbiór wszystkich ciągów kontrolnych będziemy nazywać *kodem kanału zwrotnego*;

— podzbiór ciągów informacyjnych, którym odpowiada taki sam ciąg kontrolny, oznaczymy $\{\vec{s}_l\}$, gdzie $\vec{s}_l$ dowolny ciąg wchodzący w skład tego podzbioru;

— rząd przestrzeni ciągów kontrolnych będziemy oznaczać i_s, co znaczy, że przestrzeń ta zawiera 2^{i_s} ciągów;

— ciąg $(\vec{s}_l, \vec{s}_l^k)$ składający się z ciągu informacyjnego i odpowiadającego mu ciągu kontrolnego nazwiemy *ciągiem kodowym sprzężenia zwrotnego.* Zbiór wszystkich ciągów $(\vec{s}_l, \vec{s}_l^k)$ nazwiemy *kodem sprzężenia zwrotnego.*

Stosowanie kodu korekcyjnego w kanale zwrotnym powoduje, że (przy identycznej przepustowości obu kanałów) liczba ciągów kontrolnych 2^{i_s} musi być mniejsza od liczby ciągów binarnych 2^n. Na każdy ciąg kontrolny przypadnie:

$$2^{k_s}, \quad \text{gdzie: } k_s = n - i_s,$$

ciągów binarnych. Z założenia 2 wynika, że *każdy* podzbiór $\{\vec{s}_l\}$ musi zawierać tę samą liczbę, to jest 2^{k_s} ciągów. Przyjmiemy, że sygnał „odrzucić" będzie reprezentowany przez ciąg samych zer

$$\vec{s}(x_0) = \vec{0}.$$

Z zasady działania systemu iteracyjnego SZI wynika, że trzeba mieć możność rozróżnienia, czy odebrano sygnał „odrzucić", czy wiadomość oznaczającą akceptację. Aby to umożliwić, ciągi podzbioru

$$\{\vec{0}\}$$

zawierającego sygnał „odrzucić" nie mogą być wykorzystywane do przesyłania wiadomości. Odebranie takiego ciągu $\vec{y} \in \{\vec{0}\}$ przez odbiornik będzie traktowane jako odebranie sygnału „odrzucić". Rezygnacja z wykorzystania jednego zbioru o liczebności

$$2^{k_s}$$

powoduje, że rozwlekłość kodu zdefiniowana jako:

$$r = \frac{\log 2^n}{\log L}, \quad \text{gdzie: } L \text{ — liczba wiadomości,}$$

równa się:

$$r = \frac{\log 2^n}{\log(2^n - 2^{k_s})}. \tag{1}$$

Problem kodowania dla rozpatrywanego przypadku składa się z następujących zagadnień:

1. Znalezienie takiego podziału ciągów informacyjnych na podzbiory $\{\vec{s}_l\}$, aby wyrażenie

$$\max_{\{\vec{s}_{l'}\}} \mathbf{E}_{\vec{s}_l \in \{\vec{s}_{l'}\}} \sum_{\substack{\vec{s}_m \neq \vec{s}_l \\ \vec{s}_m \in \{\vec{s}_{l'}\}}} T(\vec{s}_m/\vec{s}_l) \tag{2}$$

będące maksymalnym ze względu na podzbiór $\{\vec{s}_{l'}\}$, uśrednionym dla wszystkich $\vec{s}_l \in \{\vec{s}_{l'}\}$ prawdopodobieństwem przekłamywania w kanale podstawowym ciągu $\vec{s}_l \in \{\vec{s}_{l'}\}$ na dowolny, ale różny od ustalonego ciągu $\vec{s}_l$, ciąg $\vec{s}_m \in \{\vec{s}_{l'}\}$ — było minimalne.

2. Znalezienie algorytmu kodowania w kanale podstawowym, tj. reguły pozwalającej znaleźć ciąg $\vec{s}_l$ na podstawie numeru l.

3. Znalezienie algorytmu dekodowania w kanale podstawowym, tj. reguły pozwalającej znaleźć numer l na podstawie ciągu $\vec{y}_l$.

4. Znalezienie kodu kanału zwrotnego, tj. zbioru ciągów kontrolnych.

5. Znalezienie algorytmu kodowania w kanale zwrotnym, tj. reguły przyporządkowującej ciągowi informacyjnemu $\vec{s}_l$ ciąg kontrolny $\vec{s}_l^k$, tak aby ciąg $\vec{s}_l^k$ był taki sam dla wszystkich ciągów informacyjnych należących do tego samego podzbioru $\{\vec{s}_{l'}\}$.

6. Znalezienie algorytmu dekodowania w kanale zwrotnym, tj. reguły pozwalającej znaleźć decyzję N^* nadajnika dla każdej pary $(x_l, \vec{y}_m^k)$ wiadomości nadanej i odebranego ciągu kontrolnego.

Z założenia 2 wynika, że podziału wymienionego w p. 1 trzeba tak dokonać, aby reguły wymienione w p. 2, p. 3, p. 5 były systematyczne, tj. aby nie zależały od konkretnych wiadomości (ich numerów) oraz ciągów informacyjnych.

Pierwsze 3 zagadnienia (1, 2, 3) obejmujące problemy kodowania w kanale podstawowym omówimy w rozdz. 3, ostatnie 3 (4, 5, 6), dotyczące kanału zwrotnego, omówimy w rozdz. 4. W rozdz. 5 omówimy pewne właściwości znalezionego w poprzednich paragrafach kodu sprzężenia zwrotnego, w rozdz. 6 dokonamy oceny jakości systemu iteracyjnego SZI dla tego kodu, a w rozdz. 7 przeprowadzimy pewne porównania z innymi systemami transmisji danych.

3. KANAŁ PODSTAWOWY

Podział ciągów informacyjnych na podzbiory $\{\vec{s}_l\}$

Założenia: — ważne jest założenie 2;
— ważne jest założenie 3.

Zadanie: Podzielić 2^n ciągów na 2^{i_s} podzbiorów $\{\vec{s}_l\}$ tak, aby osiągnąć minimum wyrażenia (2) przy spełnionych założeniach.

Rozwiązanie

1) *Jako podzbiory* $\{\vec{s}_l\}$ *zostaną użyte warstwy podgrupy* $\vec{S}_0$ *grupy* $\vec{B}_n$, gdzie $\vec{B}_n$ — grupa wszystkich ciągów binarnych (zob. P1.1, P1.2, P1.3).

2) *Jako podgrupa* $\vec{S}_0$ *zostanie użyty optymalny liniowy kod detekcyjny typu* (n, k_s).

Uzasadnienie: Jak wynika z podanego w przypisie 2 twierdzenia P2.1, uśrednione dla wszystkich $s_l \in \{\vec{s}_{l'}\}$ prawdopodobieństwo przekłamania w kanale podstawowym ustalonego $\vec{s}_l \in \{\vec{s}_{l'}\}$ na dowolny ciąg $\vec{s}_m \in \{\vec{s}_{l'}\}$ należący do tego samego podzbioru co ciąg nadany $\vec{s}_l$, ale różny od niego, jest dla przyjętego rozwiązania 1)

— niezależne od rozkładu prawdopodobieństwa

$$P(\vec{s} = \vec{s}_l / \vec{s} \in \{\vec{s}_{l'}\}),$$

gdzie:

$P(\vec{s} = \vec{s}_l / \vec{s} \in \{\vec{s}_{l'}\})$ — warunkowe prawdopodobieństwo nadania w kanale podstawowym ciągu $\vec{s}_l$, przy warunku, że nadany ciąg $\vec{s} \in \{\vec{s}_{l'}\}$,

— jednakowe dla wszystkich podzbiorów $\{\vec{s}_{l'}\}$, w tym także dla podzbioru $\{\vec{0}\} = \vec{S}_0$,

— równe prawdopodobieństwu niewykrycia błędu liniowego kodu detekcyjnego $\vec{S}_0$

$$\sum_{\vec{s}_l \in \vec{S}_0} T_z(\vec{s}_l) - T_z(\vec{0}). \tag{3}$$

W związku z powyższym wyrażenie (2) przyjmie postać (3). Rozwiązanie 2) — wybór optymalnego kodu detekcyjnego jako podgrupy $\vec{S}_0$ — zapewnia minimum (3) — prawdopodobieństwa niewykrycia błędu kodu detekcyjnego, a zatem i (2) — prawdopodobieństwa przekłamania zachowującego podzbiór.

Z rozwiązania 1) wynika możliwość znalezienia rozwiązania w zakresie kodów liniowych zagadnienia 5 (rozdz. 2). Warstwy tworzą mianowicie — zob. twierdzenie P1.8 — grupę. Grupa ta wyznacza kod kanału zwrotnego z dokładnością do izomorfizmu.

Dla uniknięcia nieporozumień, podkreślmy, że kod liniowy $\vec{S}_0$ służy tu jedynie do podziału ciągów informacyjnych (ciągów kanału podstawowego) na zbiory i bynajmniej *nie stanowi kodu kanału podstawowego.*

Algorytm kodowania

Założenie: Ze zbioru $\vec{B}_n$ wszystkich ciągów binarnych $\vec{s}$ o długości n liczącego 2^n elementów wykreślono (zob. rozdz. 2) 2^{k_s} ciągów $\vec{s} \in \vec{S}_0$ należących do podgrupy $\vec{S}_0$. Podgrupa $\vec{S}_0$ określona jest poprzez k_s-wierszową, n-kolumnową macierz generującą (patrz P1.16):

$$G_t = \|I; P\| \tag{4}$$

lub i_s-wierszową, n-kolumnową macierz ortogonalną:

$$H_t = \|P^T; I\|. \tag{5}$$

Zadanie: Ponumerować pozostałe $(2^n - 2^{k_s})$ ciągów $\vec{s}$ tak, aby mając numer l ciągu można było znaleźć ciąg $\vec{s}_l$.

Komentarz: Zazwyczaj wiadomości przychodzą na wejście systemu transmisji danych w postaci ciągów elementów binarnych. Ciągi te mogą być traktowane jako numery wiadomości (w zapisie binarnym). Kodowanie polega więc na odszukaniu ciągu kodowego (w rozpatrywanym tutaj przypadku zwanego ciągiem informacyjnym) na podstawie jego numeru.

Rozwiązanie

1. Do ponumerowania ciągów użyjemy liczb naturalnych l z przedziału:

$$[2^{k_s}, (2^n - 1)]. \tag{6}$$

Jeżeli więc źródło podaje wiadomości w postaci liczb naturalnych $l_ź$ (numerów wiadomości) z przedziału

$$[0, (2^n - 2^{k_s} - 1)],$$

to należy przeprowadzić wstępne kodowanie polegające np. na dodaniu do każdej liczby $l_ź$ liczby 2^{k_s}

$$l = l_ź + 2^{k_s}.$$

2. Każdą liczbę l przedstawimy w postaci ciągu dwóch liczb:

$$l = (l', l'') \tag{7}$$

spełniających warunki:

$$l = l' \cdot 2^{k_s} + l'', \tag{8}$$

$$1 \leqslant l' \leqslant 2^{i_s} - 1, \tag{9}$$

$$0 \leqslant l'' \leqslant 2^{k_s} - 1. \tag{10}$$

Łatwo zauważyć, że istnieje tylko jedna para (l', l'') spełniająca warunki (8), (9), (10) dla każdego l z przedziału (6).

3. Zapiszemy liczby l', l'' w postaci ciągów binarnych $\vec{u}_{l'}$, $\vec{v}_{l''}$:

$$\left.\begin{aligned} &\vec{u}_{l'} = (u_{i_s-1}, \ldots, u_1, u_0), \\ &l' = u_{i_s-1} \cdot 2^{i_s-1} + \ldots + u_1 \cdot 2 + u_0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} &\vec{v}_{l''} = (v_{k_s-1}, \ldots, v_1, v_0) \\ &l'' = v_{k_s-1} \cdot 2^{k_s-1} + \ldots + v_1 \cdot 2 + v_0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

4. Z ciągu $\vec{u}$ tworzy się ciąg $\vec{s}'$ przez dopisanie k_s zer z przodu:

$$\vec{s}_{l'} = (\vec{0}, \vec{u}_{l'}) \tag{13}$$

5. Z ciągu $\vec{v}$ tworzy się ciąg $\vec{s}''$ według wzoru:

$$\vec{s}''_{l''} = \vec{v}_{l''} \cdot G_t. \tag{14}$$

6. Ciąg kodowy $\vec{s}$ tworzy się przez zsumowanie ciągów $\vec{s}'$ i $\vec{s}''$

$$\vec{s}_l = \vec{s}'_{l'} \oplus \vec{s}''_{l''}, \tag{15}$$

gdzie: l, l', l'' związane są zależnością (8).

Przykład

Macierz generująca G_t podgrupy $\vec{S}_0$ ma postać:

$$G_t = \begin{Vmatrix} 100 & 110 \\ 010 & 101 \\ 001 & 011 \end{Vmatrix}$$

Macierz ortogonalna $\vec{S}_0$ będzie więc:

$$H_t = \begin{Vmatrix} 110 & 100 \\ 101 & 010 \\ 011 & 001 \end{Vmatrix}$$

Przesyłana jest wiadomość dana w postaci ciągu binarnego

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (011, 101).$$

Kodowanie:

$$\vec{s}' = (\vec{0}, \vec{u}) = (000\ \ 011)$$

$$\vec{s}'' = \vec{v} \cdot G_t = (101) \cdot \begin{Vmatrix} 100 & 110 \\ 010 & 101 \\ 001 & 011 \end{Vmatrix} = (101\ \ 101)$$

$$\vec{s} = \vec{s}' \oplus \vec{s}'' = (000\ \ 011) \oplus (101\ \ 101) = (101\ \ 110)$$

U z a s a d n i e n i e: Przedstawimy ideę rozwiązania. Wszystkie ciągi $s \in \vec{B}_n$ dzielimy na warstwy podgrupy $\vec{S}_0$ grupy $\vec{B}_n$ zgodnie z P1.8 i układamy w tablicę prostokątną o 2^{k_s} kolumnach i 2^{l} wierszach:

$$\left.\begin{array}{cccc} \vec{0} & \vec{s}_1'' & \vec{s}_2'' & \dots \\ \vec{s}_1' & \vec{s}_1' \oplus \vec{s}_1'' & \vec{s}_1' \oplus \vec{s}_2'' & \dots \\ \vec{s}_2' & \vec{s}_2' \oplus \vec{s}_1'' & \vec{s}_2' \oplus \vec{s}_2'' & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{array}\right\} 2^{l_s} \qquad (16)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{2^{k_s}}$$

gdzie:

$\vec{s}'' \in \vec{S}_0$,

$\vec{s}'$ — ciąg (element) tworzący warstwę.

Numerujemy ciągi liczbami l składającymi się z dwóch części l oraz l'', gdzie:

l' — jest numerem wiersza,

l'' — jest numerem kolumny.

Z tablicy (16) widać, że każdy ciąg $\vec{s}$ spełnia

$$\vec{s} = \vec{s}' \oplus \vec{s}''$$

z tym, że dla wszystkich ciągów leżących w tym samym wierszu ciąg $\vec{s}'$ jest taki sam oraz że dla wszystkich ciągów leżących w tej samej kolumnie ciąg $\vec{s}''$ jest taki sam.

Szukamy więc teraz:

a) systematycznego sposobu przyporządkowania ciągu $\vec{s}_{l'}$ (ciągu tworzącego warstwę $\{\vec{s}_{l'}\}$) numerowi l' warstwy $\{\vec{s}_{l'}\}$ zapisanemu w postaci ciągu binarnego $\vec{u}_{l'}$,

b) systematycznego sposobu przyporządkowania ciągu $\vec{s}'' \in \vec{S}_0$ numerowi l'' kolumny, na czele której ten ciąg stoi, zapisanemu w postaci ciągu $\vec{v}_{l''}$.

Szukane sposoby przyporządkowania muszą być wzajemnie jednoznaczne, gdyż inaczej nie udałoby się zadowalająco rozwiązać problemu dekodowania.

Rozwiązanie b) wynika natychmiast z P1.12 i P1.16:

$$\vec{s}'' = \vec{v} \cdot G_t. \tag{17}$$

Wzór (17) przedstawia dobrze znany w teorii kodów liniowych [18] algorytm kodowania dla kodu o macierzy generującej G_t.

Istnienie przekształcenia odwrotnego wynika z (4):

$$\vec{v} = \vec{s}'' \left\| \begin{matrix} I \\ Q \end{matrix} \right\|, \tag{18}$$

gdzie:

I — $k_s \times k_s$ macierz tożsamościowa,

Q — $i_s \times k_s$ macierz zerowa.

Rozwiązania a) nie można uzyskać bez dodatkowych ustaleń, gdyż wybór dowolnego ciągu warstwy na ciąg tworzący nie zmienia tej warstwy, a zmienia jedynie kolejność elementów w warstwie — zob. twierdzenie P1.5. Wybór ciągu tworzącego warstwy jest więc w pewnym zakresie arbitralny i nie ma, ogólnie biorąc, jednoznacznej zależności między warstwą (lub jej numerem) a jej ciągiem tworzącym. Istnieje natomiast, zob. twierdzenie P1.23, zależność odwrotna w postaci jednoznacznej zależności między dowolnym ciągiem warstwy (a więc każdym z możliwych ciągów tworzących tej warstwy) a jej numerem:

$$\vec{u} = \vec{s} H_t^T = (\vec{s}' \oplus \vec{s}'') H_t^T = \vec{s}' H_t^T \oplus \vec{s}'' H_t^T = \vec{s}' H_t^T \oplus \vec{0} = \vec{s}' H_t^T \tag{19}$$

(dla przypomnienia: $\vec{s}'' \cdot H_t^T = \vec{0}$ dla $\vec{s}'' \in \vec{S}_o$).

Z (19) wynika, że numer $l' = 0$ ($\vec{u}_0 = \vec{0}$) odpowiada warstwie $\{\vec{0}\}$. Warstwa $\{\vec{0}\}$ nie jest używana, a więc $l' > 0$, co jest zgodne z (9).

Aby jednoznacznie przyporządkować numerowi warstwy ciąg tworzący warstwy, ustalimy (arbitralnie), że ciągi tworzące warstwę mają postać:

$$\vec{s}' = (\vec{0}, \vec{u}'), \tag{20}$$

gdzie:

$\vec{0}$ — ciąg k_s zer,

$\vec{u}$ — i_s-pozycjowy ciąg.

Podstawiając (20) do (19) i biorąc pod uwagę (5) otrzymujemy:

$$\vec{u} = \vec{s}' H_t^T = (\vec{0}, \vec{u}') \left\| \begin{matrix} P \\ I \end{matrix} \right\| = \vec{0} \cdot P \oplus \vec{u}' I = \vec{u}'. \tag{21}$$

A więc ustalimy, że ciąg tworzący warstwy o numerze l' zapisanym w postaci ciągu binarnego $\vec{u}_{l'}$ ma postać:

$$\vec{s}_{l'} = (\vec{0}, \vec{u}_{l'}). \tag{22}$$

Ustalenie powyższe jest dopuszczalne, gdyż — jak wynika z (21) oraz twierdzenia P1.23 — nie ma takiej pary ciągów $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_1 \neq \vec{u}_2$, dla której ciągi $(\vec{0}, \vec{u}_1)$ i $(\vec{0}, \vec{u}_2)$ znajdowałyby się w tej samej warstwie.

Algorytm dekodowania

Algorytm dekodowania w kanale podstawowym prowadzący do utworzenia decyzji roboczej odbiornika $x^*(\vec{y}_l)$, gdzie $\vec{y}_l$ — ciąg odebrany, jest odwróceniem w pewnym sensie algorytmu kodowania.

Zadanie: Odtworzyć na podstawie odebranego ciągu $\vec{y}$ wiadomość nadaną w jej pierwotnej postaci, tj. w postaci numeru

$$l = (l', l''),$$

w zapisie binarnym

$$(\vec{u}, \vec{v}).$$

Rozwiązanie

1) Obliczamy ciąg $\vec{u}$ będący numerem warstwy z równania (19) po zmianie $\vec{s}$ na $\vec{y}$:

$$\vec{u} = \vec{y} H_t^T. \tag{23}$$

2) Z równania (15) znajduje się $\vec{y}''$ (po zmianie $\vec{s}$ na $\vec{y}$)

$$\vec{y}'' = \vec{y} \oplus \vec{y}', \tag{24}$$

gdzie: $\vec{y}' = (\vec{0}, \vec{u})$.

3) Z $\vec{y}''$ oblicza się $\vec{v}$ wg wzoru (18) (po zmianie $\vec{s}''$ na $\vec{y}''$)

$$\vec{v} = \vec{y}'' \cdot \left\| \begin{matrix} I \\ Q \end{matrix} \right\|, \tag{25}$$

czyli biorąc pierwsze k_s pozycji ciągu $\vec{y}''$.

4) Mając $\vec{u}$ oraz $\vec{v}$ mamy decyzję roboczą w postaci numeru wiadomości w zapisie binarnym

$$(\vec{u}, \vec{v}).$$

Powyższe rozwiązanie wynika natychmiast z przyjętego algorytmu kodowania i osobnego komentarza nie wymaga.

Przykład

$$\vec{s} = (101\,110)$$

$$H_t = \left\| \begin{matrix} 110 & 100 \\ 101 & 010 \\ 011 & 001 \end{matrix} \right\|$$

Załóżmy, że zakłócenia w kanale podstawowym

$$\vec{z} = \vec{0},$$

a więc

$$\vec{y} = \vec{s} = (101\ \ 110).$$

Dekodowanie

$$\vec{u} = \vec{y} \cdot H_t^T = (101\ \ 110) \cdot \left\| \begin{matrix} 110 \\ 101 \\ 011 \\ 100 \\ 010 \\ 001 \end{matrix} \right\| = (011),$$

$$\vec{y}' = (\vec{0}, \vec{u}) = (000\ \ 011),$$

$$\vec{y}'' = \vec{y} \oplus \vec{y}' = (101\ \ 110) \oplus (000\ \ 011) = (101\ \ 101),$$

$$\vec{v} = \vec{y}'' \left\| \begin{matrix} I \\ Q \end{matrix} \right\| = (101\ \ 101) \cdot \left\| \begin{matrix} 100 \\ 010 \\ 001 \\ 000 \\ 000 \\ 000 \end{matrix} \right\| = (101),$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (011,\ 101).$$

4. KANAŁ ZWROTNY

Kod

Rozważania ograniczymy do przypadków użycia w kanale zwrotnym kodu o minimalnej odległości $d_{min} = 3$, a więc korygującego pojedynczy błąd. Kodami takimi można bowiem operować przy użyciu stosunkowo

prostej aparatury. Użycie kodów korygujących błędy o wyższych krotnościach dałoby w efekcie, przy niewielkiej długości ciągów zapewniających możliwie dużą sprawność R (zob. [15], tablica 4 — przykład 1), małe wartości i_s, a więc dużą rozwlekłość kodu (1).

Przyjmiemy, że kod kanału zwrotnego dany w postaci macierzy generującej G_s jest liniowym (n, i_s)-kodem, optymalnym jako kod korekcyjny.

Algorytm kodowania

Zadanie. Każdemu ciągowi odebranemu $\vec{y}$ lub nadanemu $\vec{s}$ należy przyporządkować systematyczny ciąg $\vec{s}^k$ tak, aby:

— ciąg $\vec{s}^k$ należał do przestrzeni wierszowej macierzy G_s,

— każdemu ciągowi $\vec{y}$ lub $\vec{s}$ należącemu do tej samej warstwy podgrupy $\vec{S}_0$ (zob. rozdz. 3) odpowiadał taki sam ciąg $\vec{s}^k$.

Rozwiązanie

Ciąg $\vec{s}_l^k$ odpowiadający ciągowi odebranemu $\vec{y}_l$ lub ciągowi nadanemu $\vec{s}_l$ znajduje się z zależności:

$$\begin{aligned} \vec{s}_l^k &= \vec{y}_l \cdot G, \\ \vec{s}_l^k &= \vec{s}_l \cdot G, \end{aligned} \tag{26}$$

gdzie: $G = H_t^T \cdot G_s$.

Uzasadnienie

Ciągowi $\vec{y}_l$ można korzystając z (19) przyporządkować numer (w zapisie binarnym) warstwy, do której ten ciąg należy:

$$\vec{u} = \vec{y} \cdot H_t^T, \tag{27}$$

gdzie:

H_t^T — macierz ortogonalna podgrupy $\vec{S}_0$,

$\vec{u}$ — jest i_s-pozycjowym ciągiem binarnym.

Ciągowi $\vec{u}$ można przyporządkować ciąg $\vec{s}^k$, będący w przestrzeni wierszowej macierzy G_s, następująco:

$$\vec{s}^k = \vec{u} \cdot G_s. \tag{28}$$

Po podstawieniu (27) do (28) otrzymujemy (26).

Algorytm dekodowania

Założenia: Dany jest ciąg informacyjny $\vec{s}$, który był wysłany w kanał podstawowy.

Dany jest odebrany z kanału zwrotnego ciąg kontrolny $\vec{y}^k$.

Zadanie: Sprecyzować termin „odpowiada" użyty w opisie reguły decyzyjnej nadajnika — tabl. 1.

Rozwiązanie

Przyjmujemy, że odebrany ciąg kontrolny $\vec{y}^k_m$ odpowiada wysłanemu ciągowi $\vec{s}_l$ (wiadomości x_l), gdy zachodzi:

$$w(\vec{s}^k_l \oplus \vec{y}^k_m) \leqslant 1, \tag{29}$$

gdzie:

$w(\vec{a})$ — waga ciągu $\vec{a}$,

$\vec{s}^k_l$ — ciąg kontrolny ciągu $\vec{s}_l$ wytworzony po stronie nadawczej zgodnie ze wzorem (26).

Uzasadnienie

Liniowy kod korekcyjny można przedstawić jako podział przestrzeni wszystkich ciągów binarnych o długości n na obszary akceptacji zawierające ciągi $\vec{y}$ różniące się od ciągów kodowych $\vec{s}$ o ciągi

$$\vec{z} \in \vec{Z},$$

gdzie: $\vec{Z}$ — zbiór ciągów błędów korygowanych przez dany kod.

Proces dekodowania, niezależnie od jego technicznej realizacji, można sprowadzić do badania, w którym obszarze akceptacji znajduje się ciąg odebrany.

Używając kodu korekcyjnego w kanale zwrotnym systemu sprzężenia zwrotnego informacji można procedurę dekodowania uprościć. Podstawą uproszczenia jest zmiana podstawowego pytania: „w którym obszarze akceptacji znajduje się odebrany ciąg?" — na pytanie: „czy odebrany ciąg znajduje się w obszarze akceptacji danego ciągu kontrolnego?". Serię pytań o obszar akceptacji można więc zastąpić jednym pytaniem.

Przyjęliśmy, że w kanale zwrotnym będziemy używać optymalnego kodu o $d_{min} = 3$, a więc korygującego wszystkie błędy pojedyncze i możliwie mało błędów podwójnych. Dla kanałów o błędach niezależnych prawdopodobieństwo maleje z ich krotnością, gdy $np < 1$ (a tylko takie przypadki mogą nas zainteresować z praktycznego punktu widzenia). Dlatego

też jakość transmisji nie ucierpi wiele, jeżeli zrezygnujemy z korygowania błędów podwójnych (nawet gdy użyty kod daje takie możliwości), natomiast znacznie uprości się proces dekodowania i przeprowadzającą dekodowanie aparaturę. Rezygnacja z korygowania błędów podwójnych oznacza, że zbiór błędów korygowanych składa się z ciągu zer i wszystkich ciągów o jednej jedynce:

$$\vec{Z} = \bigcup_{\nu=0}^{n} \vec{\delta}_\nu, \tag{30}$$

gdzie: $\vec{\delta}_\nu$ — ciąg o długości n, mający jedynkę na ν-tej pozycji oraz zera na pozostałych pozycjach.

Operacje przeprowadzone w trakcie podejmowania decyzji sprowadzają się teraz do sprawdzenia, czy ciąg

$$(\vec{s}_i^k \oplus \vec{y}_m^k)$$

ma wagę przekraczającą 1

$$w(\vec{s}_i^k \oplus \vec{y}_m) \leqslant 1. \tag{31}$$

Sprawdzenie (31) można zrealizować bardzo prostymi środkami technicznymi.

Przykład

Macierz ortogonalna podgrupy $\vec{S}_0$ ma postać:

$$H_t = \begin{Vmatrix} 110 & 100 \\ 101 & 010 \\ 011 & 001 \end{Vmatrix},$$

a macierz generująca kodu kanału zwrotnego ma postać

$$G_s = \begin{Vmatrix} 100 & 100 \\ 010 & 101 \\ 001 & 011 \end{Vmatrix}.$$

Przesyłany jest ciąg informacyjny

$$\vec{s} = (101 \quad 110).$$

Zakłócenia w kanale podstawowym

$$\vec{z} = \vec{0},$$

a więc

$$\vec{y} = \vec{s} = (101 \quad 110).$$

Kodowanie

$$\vec{s}^k = \vec{y} \cdot H_t^T \cdot G_s = (101 \quad 110) \begin{Vmatrix} 110 \\ 101 \\ 011 \\ 100 \\ 010 \\ 001 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 100 & 110 \\ 010 & 101 \\ 001 & 011 \end{Vmatrix} =$$

$$= (101 \quad 110), \begin{Vmatrix} 110 & 011 \\ 101 & 101 \\ 011 & 110 \\ 100 & 110 \\ 010 & 101 \\ 001 & 011 \end{Vmatrix} = (011 \quad 110).$$

Zakłócenia w kanale zwrotnym

$$\vec{z} = (001 \quad 000),$$

a więc

$$\vec{y}^k = (010 \quad 110).$$

Dekodowanie

$$w(\vec{s}^k \oplus \vec{y}^k) = w[(011 \quad 110) \oplus (010 \quad 110)] = w(001 \quad 000) = 1 \leqslant 1,$$

a więc odebrany ciąg kontrolny odpowiada wysłanemu ciągowi i zgodnie z tablicą 1 (dla przypomnienia: x_0 kodujemy ciągiem zer — $\vec{s}(x_0) = \vec{0}$) decyzja

$$N^* = \bar{B}A.$$

5. WŁAŚCIWOŚCI KODU

W [14] zostało wykazane, że w przypadku zastosowania liniowych kodów detekcyjnych dla sprzężenia zwrotnego informacji, przy czym ciąg informacyjny kodu przesyła się w kanale podstawowym, a ciąg kontrolny — w kanale zwrotnym, decyzja „nie było błędu" zostanie podjęta wtedy i tylko wtedy, gdy wystąpią błędy pokrywające się z dowolnym ciągiem kodowym. W niniejszym przypadku również w kanale podstawowym przesyła się ciągi informacyjne, a w kanale zwrotnym ciągi kontrolne liniowo zależne od tych pierwszych [zob. (26)]. Inny nieco jest sposób dekodowania: decyzję „nie ma błędu" podejmuje się, gdy ciąg odebrany różni się od ciągu kontrolnego wiadomości nadanej co najwyżej

w jednej pozycji. W przypisie 2 zostało udowodnione — twierdzenie P2.2 — że decyzja „nie było błędu" zostanie podjęta wtedy i tylko wtedy, gdy wystąpią błędy różniące się od dowolnego ciągu kodowego (kodu sprzężenia zwrotnego — zob. rozdz. 2) co najwyżej w jednej pozycji kontrolnej. W tym rozdziale będziemy nazywać ciągiem kodowym sprzężenia zwrotnego każdy ciąg $(\vec{s}, \vec{s}^k)$, w którym $\vec{s} \in \vec{B}_n$, a $\vec{s}^k$ jest związane z $\vec{s}$ zależnością (26).

Z twierdzenia P2.2 wynika, że prawdopodobieństwo decyzji $N^* = \bar{B}$ („nie ma błędu") wyniesie:

$$D(\bar{B}) = \sum_{\vec{s}_l \in \vec{B}_n} \sum_{\nu=0}^{n} P_z[(\vec{s}_l, \vec{s}_l^k) \oplus (\vec{0}, \vec{\delta}_\nu)] = \sum_{\nu=0}^{n} P_z[(\vec{0}, \vec{0}) \oplus (\vec{0}, \vec{\delta}_\nu)] +$$

$$+ \sum_{\vec{s}_l \neq \vec{0}} \sum_{\nu=0}^{n} P_z[(\vec{s}_l, \vec{s}_l^k) \oplus (\vec{0}, \vec{\delta}_\nu)] = D'(\bar{B}) + D''(\bar{B}), \tag{32}$$

gdzie:

$P_z(\vec{a})$ — prawdopodobieństwo wystąpienia w obu kanałach łącznie ciągu błędów $\vec{z} = \vec{a}$ (o długości $2n$);

$D'(\bar{B})$ — prawdopodobieństwo prawidłowej decyzji „nie ma błędu";

$D''(\bar{B})$ — prawdopodobieństwo błędnej decyzji „nie ma błędu".

Dla kanałów o elementowej stopie błędów p wyliczymy:

$$D'(\bar{B}) = (1-p)^{2n}\left[1 + n\frac{p}{1-p}\right], \tag{33}$$

$$D'' = (\bar{B}) \sum_{a=d_{min}-1}^{2n} M_a p^a (1-p)^{2n-a}, \tag{34}$$

gdzie:

$$M_a = N_a + nN_{a-1} + \sum_{b=0}^{n} b(N_{a+1,b} - N_{a-1,b}) \tag{35}$$

oznacza liczbę ciągów o wadze a, które powodują decyzję „nie było błędu";

$N_{a,b}$ — liczba ciągów kodowych o wadze równej a, które posiadają ciąg kontrolny o wadze równej b;

N_a — liczba ciągów kodowych o wadze a.

Oczywiście

$$N_a = \sum_b N_{a,b}.$$

Wyprowadzenie wzoru (35) podane jest w przypisie 2.

6. OCENA JAKOŚCI SYSTEMU ITERACYJNEGO SZI

Korzystając z klasyfikacji błędów i ogólnych wzorów na prawdopodobieństwa błędów poszczególnych typów podane w [15], przeprowadzimy ocenę jakości systemu iteracyjnego SZI.

Zbiór wiadomości przesyłanych ze źródła do ujścia danych liczy (zob. rozdz. 2)

$$L = 2^n - 2^{k_s}$$

elementów. A więc zgodnie z założeniem 1:

$$P_{\acute{z}}(x_l) = \frac{1}{2^n - 2^{k_s}}; \qquad l = 1, \ldots, L. \tag{36}$$

Na wstępie wyliczymy warunkowe prawdopodobieństwa decyzji $N^* = A \to BA$ i $N^* = R \to A$, oznaczone odpowiednio $D(BA/A)$ i $D(A/R)$. Następnie obliczymy średnie prawdopodobieństwa akceptacji i odrzucenia

$$P(A) \quad \text{i} \quad P(R).$$

Mając $P(A)$ i $P(R)$ wyprowadzimy wzory na prawdopodobieństwa błędów poszczególnych typów.

Po wysłaniu akceptacji możliwa jest jedna z trzech decyzji:

$$N^* = \overline{B}A,$$
$$N^* = A \to R,$$
$$N^* = A \to BA.$$

W takim razie, biorąc pod uwagę, że prawdopodobieństwo decyzji „nie było błędu" nie zależy od nadanego ciągu (właściwość kodów liniowych), otrzymamy:

$$D(BA/A) = 1 - D(\overline{B}) - D(R/A). \tag{37}$$

$D(\overline{B})$ jest dane wzorami (32), (33) i (34). Pozostaje wyliczyć $D(R/A)$. Decyzja „odebrano odrzucenie" zostanie podjęta, gdy z kanału zwrotnego nadejdzie ciąg o wadze nie przekraczającej 1. A więc:

$$D(R/A) = \sum_{l=1}^{L} P_{\acute{z}}(x_l) \sum_{\vec{y}_m = \vec{s}_m \in \vec{B}_n} T(\vec{y}_m/\vec{s}_l) \sum_{v=0}^{n} S(\vec{\delta}_v/\vec{s}_m^k).$$

Podstawimy (36) i po zmianie prawdopodobieństw przejścia na prawdopodobieństwa błędów otrzymamy:

$$D(R/A) = \frac{1}{2^n - 2^{k_s}} \sum_{\vec{s}_l \notin \{\vec{0}\}} \sum_{\vec{s}_m \in \vec{B}_n} T_z(\vec{s}_l \oplus \vec{s}_m) \sum_{v=0}^{n} S_z(\vec{s}_m^k \oplus \vec{\delta}_v) =$$

$$= \frac{1}{2^n - 2^{k_s}} \sum_{\vec{s}_m \in \vec{B}_n} \sum_{\nu=0}^{n} S_z(\vec{s}_m^k \oplus \vec{\delta}_\nu) \left[\sum_{\vec{s}_l \in \vec{B}_n} T_z(\vec{s}_l \oplus \vec{s}_m) - \sum_{\vec{s}_l \in \{\vec{0}\}} T_z(\vec{s}_l \oplus \vec{s}_m) \right] =$$

$$= \frac{1}{2^n - 2^{k_s}} \sum_{\vec{s}_m \in \vec{B}_n} \sum_{\nu=0}^{n} S_z(\vec{s}_m^k \oplus \vec{\delta}_\nu) \left[1 - \sum_{\vec{s}_l \in \{\vec{0}\}} T_z(\vec{s}_l \oplus \vec{s}_m) \right] =$$

$$= \frac{1}{2^n - 2^{k_s}} \left[\sum_{\vec{s}_m \in \vec{B}_n} \sum_{\nu=0}^{n} S_z(\vec{s}_m^k \oplus \vec{\delta}_\nu) - \sum_{\vec{s}_m \in \vec{B}_n} \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\vec{s}_l \in \{\vec{0}\}} T_z(\vec{s}_l \oplus \vec{s}_m) S_z(\vec{s}_m^k \oplus \vec{\delta}_\nu) \right] =$$

$$= \frac{1}{2^n - 2^{k_s}} [U_1 - U_2]. \tag{38}$$

Zajmiemy się teraz członem U_1. $U_1 = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\vec{s}_m \in \vec{B}_n} S_z(\vec{s}_m^k \oplus \vec{\delta}_\nu)$.

Na każde 2^{k_s} ciągów $\vec{s}_l$ wypada tylko jeden ciąg kontrolny $\vec{s}^k(\vec{s}_l)$, a więc możemy zamienić sumowanie funkcji $F(\vec{s}^k)$ po wszystkich $\vec{s}_m$ sumowaniem po wszystkich warstwach $\{\vec{s}_m\}$ mnożąc wynik przez 2^{k_s}.

$$U_1 = 2^{k_s} \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\{\vec{s}_m\}} S_z(\vec{s}_m^k \oplus \vec{\delta}_\nu). \tag{39}$$

Dla kodu korekcyjnego można napisać tablicę dekodowania rozkładając grupę wszystkich ciągów na warstwy względem podgrupy stanowiącej kod. Ciągi tworzące warstwy oznaczają błędy korygowane. Łatwo zauważyć, że

$$\sum_{\{\vec{s}_m\}} S_z(\vec{s}_m^k \oplus \vec{\delta}_\nu)$$

wyraża prawdopodobieństwo wystąpienia w kanale zwrotnym ciągu błędów leżących w warstwie tworzonej przez ciąg $\vec{\delta}_\nu$. Optymalny kod korekcyjny o $d_{min} = 3$ posiada jako ciągi tworzące warstwy jeden ciąg samych zer, n ciągów $\vec{\delta}_\nu$ o wadze 1, oraz

$$2^{k_s} - n - 1$$

ciągów $\vec{\lambda}_r$, o wadze 2. Wobec tego:

$$\sum_{\nu=0} \sum_{\{\vec{s}_m\}} S_z(\vec{s}_m^k \oplus \vec{\delta}_\nu) = 1 - F_1, \tag{40}$$

gdzie:

$$F_1 = \sum_{\vec{\lambda}_r} \sum_{\{\vec{s}_m\}} S_z(\vec{s}_m^k \oplus \vec{\lambda}_r) \tag{41}$$

ma sens prawdopodobieństwa wystąpienia w kanale zwrotnym ciągu błędów pokrywającego się z dowolnym ciągiem, który wskutek uproszczenia reguły decyzyjnej podanego w rozdz. 4 znalazł się poza obszarami akceptacji.

Podstawiając (40) do (39) otrzymujemy:

$$U_1 = 2^{k_s}[1 - F_1]. \tag{42}$$

Teraz obliczymy U_2. Zauważmy, że

$$\vec{s}_l^k = \vec{0} \text{ dla każdego } \vec{s}_l \in \{\vec{0}\},$$

a więc można formalnie napisać:

$$(\vec{s}_m^k \oplus \vec{\delta}_v) = (\vec{s}_m^k \oplus \vec{s}_l^k \oplus \vec{\delta}_v) = (\vec{s}_m \oplus \vec{s}_l)^k \oplus \vec{\delta}_v = (\vec{s}_{m'}^k \oplus \vec{\delta}_v) \text{ dla } \vec{s}_l \in \{\vec{0}\}$$

i stąd

$$\begin{aligned} U_2 &= \sum_{\vec{s}_m \in \vec{B}_n} \sum_{v=0}^{n} \sum_{\vec{s}_l \in \{\vec{0}\}} T_z(\vec{s}_l \oplus \vec{s}_m) S_z(\vec{s}_m^k \oplus \vec{\delta}_v) = \\ &= \sum_{\vec{s}_{m'} \in \vec{B}_n} \sum_{v=0}^{n} \sum_{\vec{s}_l \in \{\vec{0}\}} T_z(\vec{s}_{m'}) S_z(\vec{s}_{m'}^k \oplus \vec{\delta}_v) = \\ &= \sum_{v=0}^{n} \sum_{\vec{s}_m \in \vec{B}_n} T_z(\vec{s}_m) S_z(\vec{s}_m^k \oplus \vec{\delta}_v) \sum_{\vec{s}_l \in \{\vec{0}\}} 1 = 2^{k_s} \cdot D(\bar{B}). \end{aligned} \tag{43}$$

Po podstawieniu (42) i (43) do (38) otrzymujemy:

$$D(R/A) = \frac{1}{2^{n-k_s}-1}[1 - F_1 - D(\bar{B})], \tag{44}$$

gdzie: F_1 dane jest wzorem (41). Po podstawieniu (44) do (37) otrzymujemy:

$$D(BA/A) = 1 - D(\bar{B}) - \frac{1}{2^{n-k_s}-1}[1 - F_1 - D(\bar{B})]. \tag{45}$$

Obecnie wyliczymy $D(A/R)$. Decyzja „była odebrana akceptacja" po wysłaniu odrzucenia jest równoznaczna z decyzją „był błąd". Ponieważ prawdopodobieństwo decyzji „nie było błędu", a więc i decyzji „był błąd" nie zależy od nadanego ciągu, więc

$$D(A/R) = D(B) = 1 - D(\bar{B}). \tag{46}$$

Po podstawieniu (45) i (46) do wzoru (34) z [15]:

$$P(A) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\dfrac{D(BA/A)}{1-2D(A/R)}} & \text{dla } D(A/R) < 0{,}5, \\ 0 & \text{dla } D(A/R) \geqslant 0{,}5, \end{cases}$$

możemy wyliczyć prawdopodobieństwo akceptacji $P(A)$ oraz prawdopodobieństwo odrzucenia

$$P(R) = 1 - P(A)$$

Prawdopodobieństwa błędów

Posłużymy się tutaj klasyfikacją błędów i ogólnymi wzorami na błędy z [15]. Wprowadzimy jeszcze jedną wielkość pomocniczą:

$$F_2 = \sum_{\vec{s}_l \in \{\vec{0}\}} T_z(\vec{s}_l) = \sum_{a=0}^{n} N_{a0} p^a (1-p)^{n-a} \tag{47}$$

mającą sens prawdopodobieństwa wystąpienia w kanale podstawowym ciągu błędów pokrywającego się z warstwą $\{\vec{0}\}$, a więc zmieniającego ciąg informacyjny na ciąg leżący w tej samej warstwie.

Prawdopodobieństwo błędu typu B_1 otrzymamy ze wzoru (41) podanego w [15] po podstawieniu:

$$T(x_m^*/\vec{s}_l) = T(\vec{y}_m/\vec{s}_l),$$

$$T(x_m^*/\vec{s}_l) S(N^* = \overline{B}/\vec{s}_m^k) = T(\vec{y}_m/\vec{s}_l) \sum_{v=0}^{n} S(\vec{s}_l^k \oplus \vec{\delta}_v / \vec{s}_m^k),$$

$$P(B_1) = P(A) P_{\dot{z}}(x_l) \sum_{\vec{s}_l \notin \{\vec{0}\}} \sum_{\substack{\vec{y}_m \notin \{\vec{0}\} \\ \vec{y}_m \neq \vec{s}_l}} T(\vec{y}_m/\vec{s}_l) \sum_{v=0}^{n} S(\vec{s}_l^k \oplus \vec{\delta}_v / \vec{s}_m^k) =$$

$$= \frac{P(A)}{2^n - 2^{k_s}} \sum_{\vec{s}_l \notin \{\vec{0}\}} \sum_{\substack{\vec{s}_m \notin \{\vec{0}\} \\ \vec{s}_m \neq \vec{s}_l}} T_z(\vec{s}_l \oplus \vec{s}_m) \sum_{v=0}^{n} S_z(\vec{s}_l^k \oplus \vec{s}_m^k \oplus \vec{\delta}_v) =$$

$$= \frac{P(A)}{2^n - 2^{k_s}} \sum_{\vec{s}_l \notin \{\vec{0}\}} \Bigg[\sum_{\vec{s}_m \in \vec{B}_n} T_z(\vec{s}_l \oplus \vec{s}_m) \sum_{v=0}^{n} S_z(\vec{s}_l^k \oplus \vec{s}_m^k \oplus \vec{\delta}_v) -$$

$$- \sum_{\vec{s}_m \in \{\vec{0}\}} T_z(\vec{s}_l \oplus \vec{s}_m) \sum_{v=0}^{n} S_z(\vec{s}_l^k \oplus \vec{s}_m^k \oplus \vec{\delta}_v) - T_z(\vec{0}) \sum_{v=0}^{n} S_z(\vec{\delta}_v) \Bigg].$$

Po skorzystaniu z (32) otrzymujemy:

$$P(B_1) = \frac{P(A)}{2^n - 2^{k_s}}\Big[\sum_{\vec{s}_l \notin \{\vec{0}\}} D(\bar{B}) - \sum_{\vec{s}_l \notin \{\vec{0}\}} \sum_{\vec{s}_m \in \{\vec{0}\}} T_z(\vec{s}_l \oplus \vec{s}_m) \sum_{v=0}^{n} S_z(\vec{s}_l^k \oplus \vec{s}_m^k \oplus \vec{\delta}_v) +$$

$$- \sum_{\vec{s}_l \in \{\vec{0}\}} D'(\bar{B})\Big] = \frac{P(A)}{2^n - 2^{k_s}}\Big[(2^n - 2^{k_s})D''(\bar{B}) - \sum_{\vec{s}_m \in \{\vec{0}\}} \sum_{\vec{s}_l \in \vec{B}_n} T_z(\vec{s}_l \oplus \vec{s}_m) \cdot$$

$$\cdot \sum_{v=0}^{n} S_z(\vec{s}_l^k \oplus \vec{s}_m^k \oplus \vec{\delta}_v) + \sum_{\vec{s}_m \in \{\vec{0}\}} \sum_{\vec{s}_l \in \{\vec{0}\}} T_z(\vec{s}_l \oplus \vec{s}_m) \sum_{v=0}^{n} S_z(\vec{\delta}_v)\Big] =$$

$$= \frac{P(A)}{2^n - 2^{k_s}}\Big[(2^n - 2^{k_s})D''(\bar{B}) - \sum_{\vec{s}_m \in \{\vec{0}\}} D(\bar{B}) + \sum_{v=0}^{n} S_z(\vec{\delta}_v) \sum_{\vec{s}_m \in \{\vec{0}\}} \sum_{\vec{s}_l \in \{\vec{0}\}} T_z(\vec{s}_l \oplus \vec{s}_m)\Big].$$

Ponieważ $\{\vec{0}\}$ stanowi grupę i sumujemy po wszystkich elementach tej grupy, to po skorzystaniu z (47) oraz (33) otrzymujemy:

$$P(B_2) = \frac{P(A)}{2^n - 2^{k_s}}\Big[(2^n - 2^{k_s})D''(\bar{B}) - 2^{k_s}D(\bar{B}) + 2^{k_s}\frac{D'(\bar{B})}{(1-p)^n}F_2\Big] =$$

$$= P(A)\Big\{D''(\bar{B}) - \frac{1}{2^{n-k_s}-1}\Big[D(\bar{B}) - \frac{D'(\bar{B})F_2}{(1-p)^n}\Big]\Big\}. \tag{48}$$

Wzory na prawdopodobieństwa pozostałych błędów można wyprowadzić w analogiczny sposób — zob. [14]. Tutaj podajemy same wyniki.

$$P(B_1) = \frac{P(A)}{2^{n-k_s}-1}\Big[1 - \frac{D'(\bar{B})}{(1-p)^n}\Big][1 - F_2], \tag{49}$$

$$P(B_3) = P(R)\Big[1 - \frac{D'(\bar{B})}{(1-p)^n}\Big]F_2, \tag{50}$$

$$P(B_4) = P(R)\Big[D(\bar{B}) - \frac{D'(\bar{B})}{(1-p)^n}F_2\Big], \tag{51}$$

$$P(B_5) = \frac{P(A)}{2^{n-k_s}-1}\Big\{1 - F_1 - \frac{D'(\bar{B})}{(1-p)^n}[1 - F_2] - D(\bar{B})\Big\}. \tag{52}$$

Kryteria oceny

Prawdopodobieństwo błędu powodującego stratę dwóch wiadomości wynosi [15]:

$$P(B_s) = P(B_2) + P(B_3), \tag{53}$$

a prawdopodobieństwo błędu powodującego generację dwóch wiadomości wynosi [15]:

$$P(B_g) = P(B_4) + P(B_5). \tag{54}$$

Stąd prawdopodobieństwo, że przesłany ciąg da w efekcie błąd w przesyłanej wiadomości przy założeniu, że strata lub generacja jednej wiadomości jest równoważna przekłamaniu jednej wiadomości na inną, wyniesie:

$$P(B_c) = P(B_1) + 2P(B_2) + 2P(B_3) + 2P(B_4) + 2P(B_5), \tag{55}$$

gdzie prawdopodobieństwa $P(B_1)$ do $P(B_5)$ dane są wzorami (48) do (52). Średnia liczba błędów przypadająca na przesłaną (nie licząc powtórzeń) wiadomość wynosi (zob. [14]):

$$\overline{N(B)} = \frac{P(B_c)}{2D(\overline{B}) - 1}, \tag{56}$$

gdzie $D(\overline{B})$ dane jest wzorami (32), (33) i (34),
a liczba α określająca stopień poprawy bezbłędności w stosunku do przesyłania bezpośredniego (bez żadnej poprawy) wynosi

$$\alpha = \frac{1 - (1-p)^{\overline{r}}}{\overline{N(B)}}, \tag{57}$$

gdzie r jest dane wzorem (1). Ocena jakości może być przeprowadzona na podstawie liczby α i sprawności transmisji R danej wzorem (36) z [15]:

$$R = \frac{1 - 2D(B)}{r}.$$

Przykład

Dla przykładu ocenimy jakość systemu iteracyjnego SZI na podstawie wyżej podanych kryteriów, przyjmując $n = 6$ oraz, zgodnie z ogólnymi założeniami, oba kanały o błędach niezależnych i elementowej stopie błędów p. Z ustalenia, że kod w kanale zwrotnym ma korygować błędy pojedyncze i możliwie mało podwójnych wynika, że

$$i_s = 3.$$

Kod (6, 3) może korygować prócz błędów pojedynczych zaledwie

$$2^3 - 6 - 1 = 1$$

błąd podwójny. Istnieją 2 nierównoważne optymalne kody korekcyjne (6, 3) o postaci macierzy generującej (4), kod podany w tablicy Slepiana [20] o macierzy

$$G = \begin{Vmatrix} 100 & 110 \\ 010 & 101 \\ 001 & 011 \end{Vmatrix} \tag{58}$$

oraz znaleziony przez autora kod o macierzy:

$$G = \left\| \begin{matrix} 100 & 111 \\ 010 & 110 \\ 001 & 101 \end{matrix} \right\|. \tag{59}$$

Mając $n = 6$, $i_s = 3$ musimy na podgrupę $\vec{S}_0$ w kanale podstawowym wybrać kod (6, 3). Najlepszego wyniku można się spodziewać stosując optymalne kody detekcyjne. Istnieją 2 nierównoważne optymalne kody detekcyjne (6, 3). Kody te pokrywają się z optymalnymi kodami korekcyjnymi danymi przez (58) i (59). Mając dwa kody do wyboru dla stworzenia grupy $\vec{S}_0$ i dwa kody dla kanału zwrotnego, mamy 4 możliwości konstrukcji kodu sprzężenia zwrotnego opisanego przez macierz:

$$G = \|I; H_t^T \cdot G_s\|. \tag{60}$$

Najlepszy, dający najmniejsze $D''(\overline{B})$ okazał się kod zbudowany przy użyciu w obu kanałach tego samego kodu opisanego przez (58). Otrzymaliśmy kod o macierzy:

$$G = \left\| \begin{matrix} 100 & 000 & 110 & 011 \\ 010 & 000 & 101 & 101 \\ 001 & 000 & 011 & 110 \\ 000 & 100 & 100 & 110 \\ 000 & 010 & 010 & 101 \\ 000 & 001 & 001 & 011 \end{matrix} \right\| \tag{61}$$

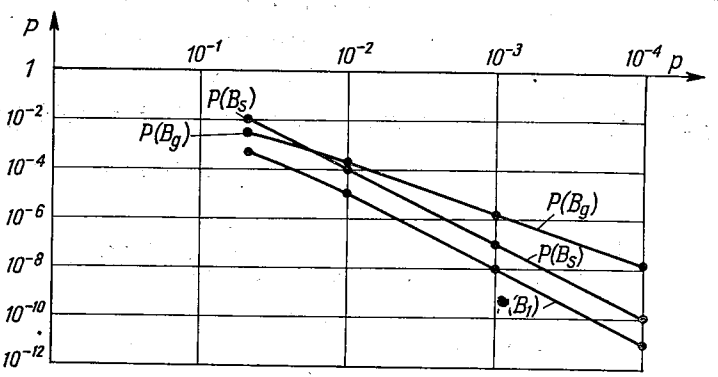
o liczbach N_{ab} i M_a określonych w rozdz. 5, podanych w tablicy 3.

Tablica 3

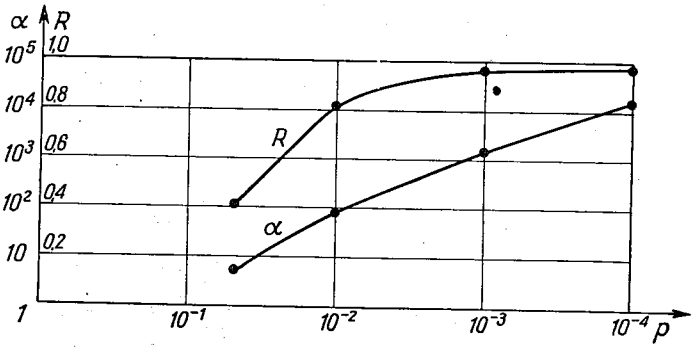
a \ b	$N_{a,b}$			N_a	M_a
	0	3	4		
0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	6
2	0	0	0	0	0
3	4	0	0	4	13
4	3	3	0	6	69
5	0	9	3	12	93
6	0	10	6	16	115
7	0	5	6	11	83
8	0	3	7	10	52
9	0	1	3	4	34
10	0	0	0	0	9

Tablica 4

p	0,05	0,01	0,001	0,0001
r	1,03	1,03	1,03	1,03
$D'(\overline{B})$	0,71	0,92	0,994	0,9994
$D''(\overline{B})$	$1{,}32.10^{-3}$	$1{,}25.10^{-5}$	$1{,}31.10^{-8}$	$1{,}3.10^{-11}$
$D(\overline{B})$	0,71	0,92	0,994	0,9994
F_1	$6{,}53.10^{-3}$	$2{,}92.10^{-4}$	3.10^{-6}	3.10^{-8}
F_2	0,735	0,94	0,994	0,9994
$P(A)$	0,637	0,925	0,995	0,9995
$P(R)$	0,363	0,075	0,005	0,0005
$P(B_1)$	$7{,}58.10^{-4}$	$1{,}16.10^{-5}$	$1{,}17.10^{-8}$	$1{,}2.10^{-11}$
$P(B_2)$	$7{,}7.10^{-4}$	$1{,}2.10^{-5}$	$1{,}3.10^{-8}$	$1{,}3.10^{-11}$
$P(B_3)$	$8{,}5.10^{-3}$	$1{,}06.10^{-4}$	$7{,}5.10^{-8}$	$7{,}5.10^{-11}$
$P(B_4)$	$3{,}23.10^{-4}$	$6{,}5.10^{-7}$	$4{,}56.10^{-11}$	$4{,}5.10^{-15}$
$P(B_5)$	$2{,}32.10^{-3}$	$1{,}53.10^{-4}$	$1{,}71.10^{-6}$	$1{,}7.10^{-8}$
$P(B_s)$	$9{,}27.10^{-3}$	$1{,}18.10^{-4}$	$8{,}8.10^{-8}$	$8{,}8.10^{-11}$
$P(B_g)$	$2{,}64.10^{-3}$	$1{,}54.10^{-4}$	$1{,}71.10^{-6}$	$1{,}7.10^{-8}$
$P(B_c)$	$2{,}46.10^{-2}$	$5{,}56.10^{-4}$	$3{,}60.10^{-6}$	$3{,}4.10^{-8}$
$\overline{N(B)}$	$5{,}56.10^{-2}$	$6{,}62.10^{-4}$	$3{,}68.10^{-6}$	$3{,}4.10^{-8}$
α	4,57	84	1545	$16{,}8.10^{3}$
R	0,41	0,815	0,96	0,97



Rys. 1



Rys. 2

Wyniki obliczeń przykładu dla czterech wartości p:

$p = 0{,}05$ — która reprezentuje kanały bardzo złe,
$p = 0{,}01$ — która reprezentuje kanały umiarkowanie złe,
$p = 0{,}001$ — która reprezentuje kanały średnie,
$p = 0{,}0001$ — która reprezentuje kanały dobre,

podane są w tablicy 4 oraz na rys. 1 i rys. 2.

7. ZAKOŃCZENIE

Porównamy uzyskane wyniki z wynikami innych sposobów kodowania SZI oraz innych systemów transmisyjnych — systemów ze sprzężeniem zwrotnym decyzji (SZD) oraz z kodami korekcyjnymi.

Porównywanie różnych systemów transmisji danych napotyka poważne trudności. Różne systemy mogą mieć różną sprawność transmisji, różną wiarygodność przesyłanych informacji, różne długości bloków, różny stopień skomplikowania aparatury. Trudno jest ująć te wszystkie czynniki w postaci jakiegoś wskaźnika, który stanowiłby kryterium jakości systemu. Można wskazać na próbę [10] rozwiązania tych trudności, niemniej jednak nie można obecnie ująć w postaci jednego obiektywnego wskaźnika nawet dwóch tylko czynników rozpatrywanych w tym artykule — sprawności transmisji R i współczynnika poprawy α. Można by wprawdzie zaproponować jako kryterium szereg funkcji $f(R,\alpha)$, jednak w każdym takim przypadku stajemy przed zagadnieniem wyboru współczynnika wagowego ustalającego wzajemną „cenność" R i α. Przyjęcie w tej pracy jakichkolwiek ścisłych kryteriów porównawczych miałoby bardzo subiektywny i arbitralny charakter. Chcąc tej arbitralności uniknąć, zrezygnujemy z ilościowego porównania uzyskanych wyników i poprzestaniemy na przeprowadzeniu jakościowej dyskusji. Dla ułatwienia tej dyskusji przedstawimy uzyskane wyniki jako krzywe na płaszczyźnie R, α o parametrze p — rys. 3.

Kolejne punkty (licząc od lewej) krzywych odpowiadają wartościom p:

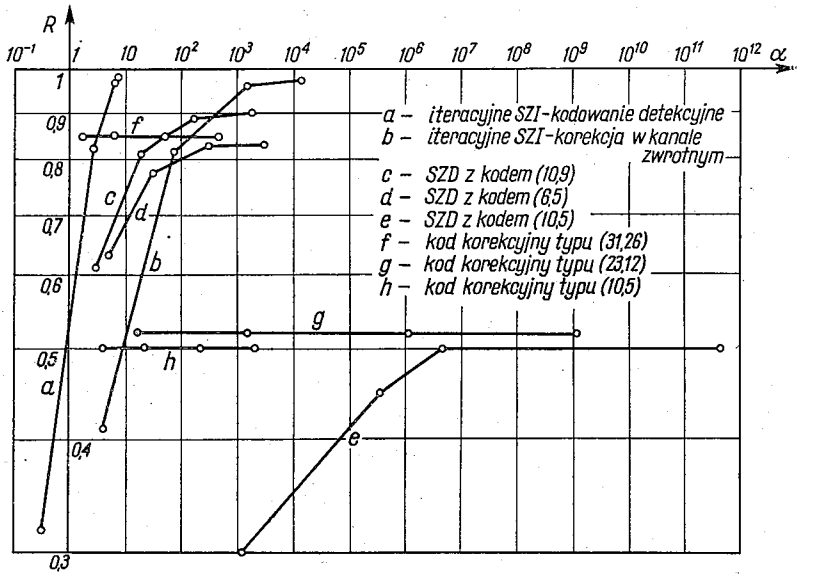
$p = 0{,}05$ — co charakteryzuje kanały bardzo złe,
$p = 0{,}01$ — co charakteryzuje kanały złe,
$p = 0{,}001$ — co charakteryzuje kanały średnie,
$p = 0{,}0001$ — co charakteryzuje kanały dobre.

Na rys. 3 naniesione są dla porównania wyniki przykładowych obliczeń R, α, dla systemów ze sprzężeniem zwrotnym decyzji, oraz wyniki przykładowych obliczeń R, α dla optymalnych korekcyjnych kodów liniowych. Obliczenia te podane są w [14].

Krzywa a przedstawia wyniki dla systemu SZI z optymalnym kodem wykrywającym błędy, przeanalizowanego w [14]. Jak widać z rys. 3, współczynnik poprawy α jest niewielki, dla bardzo złych kanałów nawet mniejszy od jedności. Wyniki dla kodowania z korekcją w kanale zwrotnym rozpatrywanego w tym artykule reprezentowane są przez krzywą b.

Uzyskane wyniki są znacznie lepsze. Przy podobnym lub nawet większym R uzyskiwane jest znacznie większe α. Potwierdza się wysunięta między innymi w [7] teza, że decydujące znaczenie dla jakości systemów SZI mają błędy wnoszone przez kanał zwrotny.

Porównując wyniki SZI (krzywa b) z wynikami uzyskanymi dla SZD (krzywe: c, d, e) widać, że z wyjątkiem bardzo słabych kanałów systemy



Rys. 3

SZD mają albo zbliżone do systemu SZI R oraz mniejsze α, albo mniejsze R i większe α. Stosując SZD o odpowiednim kodzie, można — jak widać (krzywa e) — uzyskać bardzo duże α, jednak R będzie niewielkie.

Krzywe c, d, e wyliczone zostały przy tych samych założeniach, które przyjęte zostały w całym artykule — rozdz. 1. Szczególnie należy podkreślić założenie o identycznych kanałach: podstawowym i zwrotnym. W literaturze często spotyka się poglądy, że dla SZD wystarczy kanał zwrotny o mniejszym pasmie i szybkości modulacji niż kanał podstawowy. Wyniki w tym ostatnim przypadku będą oczywiście gorsze.

Krzywe f, g, h obrazują jakość optymalnych kodów korekcyjnych. Jakość kodu korekcyjnego rośnie ze wzrostem długości kodu — rys. 3, krzywe g, h. Jest to zależność dobrze znana z teorii kodów [19]. Z długością kodu rośnie jednak bardzo szybko stopień skomplikowania urządzeń. Dlatego też materiał porównawczy ograniczono do kodów niezbyt długich: $n = 10$ (krzywa h), $n = 23$ (krzywa g), $n = 31$ (krzywa f).

Dla bardzo złych kanałów można łatwo znaleźć kody lepsze (krzywe: g, h) od systemu SZI. Dla umiarkowanie złych oraz wszystkich lepszych

kanałów SZI daje albo znacznie większe R przy nieco mniejszych α, albo większe R i większe α.

Warte uwagi jest zachowanie się porównywanych systemów dla różnych kanałów. W praktyce bowiem trzeba liczyć się z możliwością pracy tego samego systemu na kanałach o różnej stopie błędów. Przyczyną tego są różnice występujące między poszczególnymi kanałami tej samej kategorii, a również powolna zmienność właściwości kanałów w czasie (w zależności od pory dnia, dnia tygodnia, dnia miesiąca itp.). Kody korekcyjne dają stałą wartość R i na zmiany stopy błędów reagują zmianami α. Systemy ze sprzężeniem zwrotnym (SZI oraz SZD) zmieniają zarówno R, jak i α. Występuje tu pewnego rodzaju elastyczność — zdolność dopasowywania się do aktualnych warunków transmisji. Gdy kanał jest lepszy, to szybkość transmisji rośnie, gdy kanał się pogorszy, to transmisja przebiega wolniej.

Ogólny wniosek z dyskusji wyników przedstawionych na rys. 3 jest następujący:

systemy ze sprzężeniem zwrotnym informacji wykazują wyższość nad innymi sposobami zabezpieczenia przed błędami (kody korekcyjne, SZD) tam, gdzie przy niezbyt złych kanałach trzeba uzyskać możliwie dużą wierność jak najmniej obniżając szybkość transmisji.

Tam gdzie uzyskanie dużej bezbłędności jest znacznie ważniejsze niż uzyskanie dużej prędkości, najlepszym rozwiązaniem wydaje się system ze sprzężeniem zwrotnym decyzji.

Stosując kody korekcyjne o umiarkowanych długościach nie można oczekiwać osiągnięcia lepszych wyników niż dla odpowiednio dobranego systemu ze sprzężeniem zwrotnym. Kody korekcyjne powinny być więc stosowane tam, gdzie nie istnieje kanał zwrotny.

Na marginesie powyższej dyskusji umieścimy uwagę nie mieszczącą się w ramach przyjętych w tej pracy założeń. Systemy SZI mogą się okazać szczególnie korzystne tam, gdzie można stworzyć kanał zwrotny dużo lepszy od kanału podstawowego. Przykładem może być transmisja radiowa z małego, ruchomego obiektu o ograniczonej mocy nadajnika (może to być sztuczny satelita) do dużego stacjonarnego obiektu, dysponującego mocnym nadajnikiem. W takim przypadku system iteracyjnego SZI może zapewnić prawie bezbłędną transmisję z szybkością zależną od aktualnych zakłóceń kanału podstawowego.

Wydaje się, że obecny stan teorii kodowania dla systemów ze sprzężeniem zwrotnym informacji daje pojęcie, czego można oczekiwać od systemów SZI.

Można obecnie z grubsza ocenić, jakie możliwości transmisyjne, to jest sprawność transmisji i jej bezbłędność, mogą mieć te systemy. Można także wskazać konstruktorowi decydującemu się na zastosowanie systemu SZI, jaki ma użyć kod i jakie ma przyjąć zasady działania systemu.

Nie potrafimy natomiast dać odpowiedzi na pytanie, kiedy warto systemy SZI stosować. Z dotychczasowego rozwoju teorii i praktyki transmisji danych wynika, że stopień skomplikowania aparatury końcowej ma znacznie większy wpływ na stosowanie określonych systemów niż ich walory transmisyjne. Należałoby więc w pierwszym rzędzie ocenić rozmiar aparatury potrzebnej do realizacji systemów SZI. Ocena tego, jeżeli ma być wartościowa, powinna uwzględniać rzeczywiste warunki, a w tym przede wszystkim opóźnienia wnoszone przez kanały.

Z innych nierozwiązanych dotychczas w tej dziedzinie tematów wymienimy dla przykładu cztery:

1. Teoria porównywania systemów transmisji danych o różnych właściwościach transmisyjnych i stopniach skomplikowania.
2. Ocena jakości systemów SZI w przypadku zakłóceń seryjnych.
3. Optymalizacja kodowania dla SZI w przypadku zakłóceń seryjnych.
4. Teoria systemów SZI dopasowujących szybkość transmisji do aktualnych warunków kanału (analogicznie do systemu SECO dla SZD — [22]).

Listę powyższą można by oczywiście znacznie rozszerzyć. Systemy ze sprzężeniem zwrotnym informacji mogą być polem wielu ciekawych rozważań teoretycznych.

Przypisy

Przypis 1. Elementy teorii grup i teorii kodów liniowych

W przypisie tym przytoczone zostaną krótko te twierdzenia i definicje, z zakresu teorii grup i teorii kodów liniowych, które potrzebne są dla zrozumienia całości artykułu. Szersze wyjaśnienia i dowody twierdzeń można znaleźć w wielu publikacjach, np.: w [1], [18], [19], [20], [21].

Definicja P1.1

Grupa jest to zbiór elementów, dla którego:

1. określona jest operacja spełniająca prawo łączności;
2. operacja na dwóch elementach grupy daje w wyniku element grupy;
3. istnieje element tożsamościowy;
4. każdy element grupy posiada element odwrotny.

Jeżeli operacja jest przemienna, to grupa nazywa się grupą abelową.

Przykład. Zbiór wszystkich ciągów binarnych o długości n jest względem operacji sumowania modulo 2 poszczególnych pozycji grupą abelową, gdyż:

a) $\vec{a} \oplus \vec{b} = \vec{c}$,

gdzie:

$\left.\begin{matrix}\vec{a}\\ \vec{b}\\ \vec{c}\end{matrix}\right\}$ ciągi binarne o długości n;

b) $\vec{a} \oplus \vec{b} = \vec{b} \oplus \vec{a}$,

czyli operacja jest przemienna;

c) $\vec{0} \oplus \vec{a} = \vec{a}\ \vec{0} = \vec{a}$,

a więc $\vec{0}$ jest elementem tożsamościowym, gdzie: $\vec{0}$ — ciąg samych zer;

d) $\vec{a} \oplus \vec{a} = \vec{0}$,

a więc każdy element jest swoją własną odwrotnością.

Z punktu d) widać, że element tożsamościowy z powodu własności 2 musi wchodzić w skład grupy.

W tej pracy interesują nas jedynie grupy ciągów binarnych względem operacji sumowania modulo 2. Ciągi binarne będziemy oznaczali małymi literami ze strzałką, np. $\vec{a}$, $\vec{b}$. Zbiory ciągów binarnych będziemy oznaczali dużymi literami ze strzałką, np. $\vec{S}$, $\vec{A}$. Grupę wszystkich ciągów binarnych o długości n oznaczymy $\vec{B}_n$.

Aby nie wprowadzać zbytecznych oznaczeń w dalszych definicjach i twierdzeniach, będziemy oznaczali elementy zbiorów jako ciągi, a operacje jako sumowanie modulo 2. Trzeba więc pamiętać, że teoria grup ma charakter abstrakcyjny i odnosi się do wszelkich elementów, dla których można spełnić warunki definicji P1.1. Ponieważ grupy ciągów binarnych względem sumowania modulo 2 są abelowe, to dla uproszczenia dalszych definicji i twierdzeń założymy z góry, że odnoszą się one jedynie do grup abelowych. Tam gdzie będzie mowa o ciągach i kodach, należy rozumieć, że chodzi o ciągi i kody binarne.

Definicja P1.2

Podgrupą $\vec{S}$ nazywamy taki podzbiór elementów grupy $\vec{A}$, którym sam jest grupa.

Przykład. Zbiór dwóch ciągów

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

jest podgrupą grupy $\vec{B}_3$ wszystkich ciągów binarnych o długości 3.

Definicja P1.3

Warstwą $\{\vec{a}\}$ podgrupy $\vec{S}$ grupy $\vec{A}$ nazywamy każdy ze zbiorów złożony z sum $\vec{s} \oplus \vec{a}$ wszystkich elementów $\vec{s} \in \vec{S}$ i ustalonego elementu $\vec{a} \in \vec{A}$. Element $\vec{a}$ nazwiemy elementem tworzącym (warstwę).

Twierdzenie P1.4. Jeżeli podgrupa $\vec{S}$ jest skończona, to każda warstwa podgrupy $\vec{S}$ ma tyle elementów do $\vec{S}$.

Twierdzenie P1.5. Dwie warstwy podgrupy $\vec{S}$ są albo identyczne, albo nie mają wspólnych elementów.

Twierdzenie P1.6. Każdy element grupy $\vec{A}$ jest w jednej i tylko jednej warstwie podgrupy $\vec{S}$ grupy $\vec{A}$.

Definicja P1.7. Określimy następująco sumowanie modulo 2 dla warstw podgrupy $\vec{S}$ grupy $\vec{A}$:

przez sumę dwóch warstw $\{\vec{a}\} \oplus \{\vec{b}\}$,

gdzie: $\vec{a} \in \vec{A}$,

$\vec{b} \in \vec{A}$,

rozumiemy warstwę, do której należy wynik sumowania (modulo 2) dwóch dowolnych reprezentantów warstw $\{\vec{a}\}$ i $\{\vec{b}\}$. Np.: $\{\vec{a}\}\oplus\{\vec{b}\} = \{\vec{c}\}$, jeżeli $\vec{a}\oplus\vec{b} = \vec{c}$.

Twierdzenie P1.8. Warstwy podgrupy $\vec{S}$ grupy $\vec{A}$ tworzą względem operacji sumowania określonej w definicji P1.7 grupę zwaną ilorazową $\vec{A}/\vec{S}$.

Wniosek P1.9. Z twierdzenia P1.5 wynika natychmiast wniosek, że warstwa $\{\vec{a}\}$ o elemencie tworzącym $\vec{a}$ różni się od warstwy $\{\vec{b}\}$ o elemencie tworzącym b co najwyżej kolejnością elementów, jeżeli obie są warstwami tej samej podgrupy $\vec{S}$ i jeżeli $\vec{b}\in\{\vec{a}\}$.

Definicja P1.10. Zbiór $\vec{S}$ jest nazywany przestrzenią wektorową nad ciałem F, jeżeli:

1. $\vec{S}$ jest grupą ze względu na operację sumowania modulo 2;
2. dla każdego $\vec{a}\in\vec{S}$ i każdego $d\in F$ określona jest operacja mnożenia

$$d\cdot\vec{a}$$

i każdy iloczyn $(d\cdot\vec{a})\in\vec{S}$.

3. dla każdych $\vec{a}\in\vec{S}$, $\vec{b}\in\vec{S}$, $d\in F$, $e\in F$ zachodzi

$$d(\vec{a}\oplus\vec{b}) = d\vec{a}\oplus d\vec{b},$$

$$(d\oplus e)\vec{a} = d\vec{a}\oplus e\vec{a},$$

$$(d\cdot e)\vec{a} = d(e\cdot\vec{a}).$$

Definicja P1.11. Podzbiór $\vec{S}$ przestrzeni wektorowej $\vec{A}$ jest podprzestrzenią wektorową, jeżeli sam jest przestrzenią wektorową.

Twierdzenie P1.12. Zbiór wszystkich kombinacji liniowych pewnych elementów $\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_k$ z przestrzeni $\vec{S}$ jest podprzestrzenią wektorową.

Definicja P1.13. Mnożenie skalarne ciągów określimy następująco:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1\oplus\ldots\oplus a_nb_n,$$

gdzie:

$\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$,

$\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$.

Definicja P1.14. Dwa ciągi a i b są wzajemnie ortogonalne, jeżeli zachodzi

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0.$$

Dwie przestrzenie $\vec{A}$ i $\vec{B}$ są wzajemnie ortogonalne, jeżeli powyższe zachodzi dla dowolnej pary $\vec{a}\in\vec{A}$ i $\vec{b}\in\vec{B}$.

Definicja P1.15. Binarnym kodem liniowym $\vec{S}$ o długości n nazywamy zbiór ciągów, który stanowi podprzestrzeń w przestrzeni wszystkich ciągów binarnych o długości n nad ciałem $\{0, 1\}$.

Definicja P1.16. Macierzą generującą G kodu $\vec{S}$ nazywamy macierz, której przestrzeń wierszowa jest kodem $\vec{S}$.

Definicja P1.17. Macierzą ortogonalną (zerową) H kodu $\vec{S}$ nazywamy macierz, której przestrzeń wierszowa jest ortogonalna do $\vec{S}$.

Definicja P1.18. Systematycznym kodem liniowym nazywamy kod liniowy, którego macierz generująca G ma postać:

$$G = \|I; G_k\|,$$

gdzie: I — macierz tożsamościowa.

Twierdzenie P1.19. Jeżeli macierz generująca kodu ma postać

$$G = \|I; G_k\|,$$

to macierz ortogonalna tego kodu ma postać

$$H = \|G_k^T; I\|,$$

gdzie: G_k^T — macierz transponowana macierzy G_k.

Definicja P1.20. Kod $\vec{S}_1$ jest równoważny kodowi $\vec{S}_2$, jeżeli nieuporządkowane zbiory elementów obu kodów są identyczne natychmiast lub po dowolnej zmianie uporządkowania pozycji jednego z kodów.

Twierdzenie P1.21. Każdy kod liniowy jest równoważny przynajmniej jednemu systematycznego kodowi liniowemu.

Definicja P1.22. Ciągi wchodzące w skład kodu nazwiemy ciągami kodowymi. Ciąg składający się z pierwszych i pozycji systematycznego kodu liniowego o długości n zawierającego 2^i ciągów kodowych nazwiemy ciągiem informacyjnym. Ciąg składający się z pozostałych n-i pozycji nazwiemy ciągiem kontrolnym. Kod taki nazywa się kodem liniowym typu (n, i) lub w skrócie (n, i) — kodem liniowym.

Twierdzenie P1.23. Ciąg

$$\vec{k} = \vec{a} \cdot H^T$$

gdzie:

$\vec{a}$ — ciąg binarny o długości n,

H^T — macierz transponowana macierzy ortogonalnej kodu $\vec{S}$ o długości n,

1. jest identyczny dla wszystkich $\vec{a}$ należących do tej samej warstwy podgrupy $\vec{S}$ grupy $\vec{B}_n$ wszystkich ciągów o długości n;

2. jest inny dla każdego $\vec{a}$ należącego do innej warstwy jw.;

3. przybiera wszystkie możliwe postacie, gdy $\vec{a}$ przybiera wszystkie możliwe postacie.

Definicja P1.24. Wagą $w(\vec{a})$ ciągu $\vec{a}$ nazywamy liczbę jedynek tego ciągu.

Definicja P1.25. Odległością $d(\vec{a}, \vec{b})$ ciągów $\vec{a}, \vec{b}$ nazywamy liczbę pozycji, w których te ciągi się różnią. Łatwo zauważyć, że

$$d(\vec{a}, \vec{b}) = w(\vec{a} \oplus \vec{b}).$$

Definicja P1.26. Odległością minimalną d_{min} kodu $\vec{S}$ nazywamy najmniejszą z odległości, jakie występują między ciągami kodowymi.

T w i e r d z e n i e P1.27. Odległość minimalna d_{min} kodu liniowego $\vec{S}$ jest równa najmniejszej wadze w, jaka występuje wśród ciągów kodowych, nie licząc ciągu samych zer.

T w i e r d z e n i e P1.28. Każdej zależności liniowej między w kolumnami macierzy ortogonalnej H kodu liniowego $\vec{S}$ odpowiada ciąg kodowy o wadze w.

T w i e r d z e n i e P1.29. Jeżeli do każdego ciągu kodu liniowego $\vec{S}$ o długości n i nieparzystym d_{min} dopisać jedną pozycję, tak aby waga każdego ciągu była parzysta, to w wyniku powstanie kod liniowy o długości $n+1$ i parzystej odległości minimalnej

$$d'_{min} = d_{min}+1.$$

D e f i n i c j a P1.30. Kodem Hamminga nazywamy kod liniowy o $d_{min} = 3$ lub $d_{min} = 4$.

Przypis 2. Twierdzenia pomocnicze

T w i e r d z e n i e P2.1

Założenia: 1. $\{\vec{s}_{l'}\}$ jest warstwą podgrupy $\vec{S}_0$ grupy $\vec{B}_n$ wszystkich ciągów binarnych o długości n.

2. $T(\vec{s}_m/\vec{s}_l) = T_z(\vec{s}_m \oplus \vec{s}_l)$.

Teza:

$$\mathop{\mathsf{E}}_{\vec{s}_l \in \{\vec{s}_{l'}\}} \sum_{\substack{\vec{s}_m \neq \vec{s}_l \\ \vec{s}_m \in \{\vec{s}_{l'}\}}} T(\vec{s}_m/\vec{s}_l) \overset{\text{df}}{=} \sum_{\vec{s}_l \in \{\vec{s}_{l'}\}} P(\vec{s} = \vec{s}_l/\vec{s} \in \{\vec{s}_l\}) \sum_{\substack{\vec{s}_m \neq \vec{s}_l \\ \vec{s}_m \in \{\vec{s}_{l'}\}}} T(\vec{s}_m/\vec{s}_l) =$$

$$= \sum_{\vec{s}_l \in \vec{S}_0} T_z(\vec{s}_l) - T_z(\vec{0})$$

dla dowolnego rozkładu $P(\vec{s} = \vec{s}_l/\vec{s} \in \{\vec{s}_{l'}\})$ i dowolnej warstwy $\{\vec{s}_{l'}\}$ ustalonej podgrupy $\vec{S}_0$ grupy $\vec{B}_n$.

D o w ó d: Z założenia 2, dla $\vec{s}_l \in \{\vec{s}_{l'}\}$ otrzymujemy

$$\sum_{\substack{\vec{s}_m \neq \vec{s}_l \\ \vec{s}_m \in \{\vec{s}_{l'}\}}} T(\vec{s}_m/\vec{s}_l)\Big|_{\vec{s}_l \in \{\vec{s}_{l'}\}} = \sum_{\substack{\vec{s}_m \neq \vec{s}_l \\ \vec{s}_m \in \{\vec{s}_{l'}\}}} T_z(\vec{s} \oplus \vec{s}_l)\Big|_{\vec{s}_l \in \{\vec{s}_{l'}\}} =$$

$$= \sum_{\vec{s}_m \in \{\vec{s}_{l'}\}} T_z(\vec{s}_m \oplus \vec{s}_l)\Big|_{\vec{s}_l \in \{\vec{s}_{l'}\}} - T_z(\vec{s}_l \oplus \vec{s}_l) =$$

$$= \sum_{\vec{s}_m \in \{\vec{s}_{l'}\}} T_z(\vec{s}_m \oplus \vec{s}_l)\Big|_{\vec{s}_l \in \{\vec{s}_{l'}\}} - T_z(\vec{0}). \tag{62}$$

Z definicji P1.3 wynika, że gdy

$$\vec{s}_m \in \{\vec{s}_{l'}\},$$

$$\vec{s}_l \in \{\vec{s}_{l'}\},$$

to

$$\vec{s}_m = \vec{s}_{l'} \oplus \vec{s}_{m_0},$$

$$\vec{s}_l = \vec{s}_{l'} \oplus \vec{s}_{l_0},$$

gdzie: $\vec{s}_{l'}$ — element tworzący warstwy $\{\vec{s}_{l'}\}$,

$$\vec{s}_{m_0} \in \vec{S}_0,$$

$$\vec{s}_{l_0} \in \vec{S}_0.$$

Stąd

$$\vec{s}_m \oplus \vec{s}_l = (\vec{s}_{l'} \oplus \vec{s}_{m_0}) \oplus (\vec{s}_{l'} \oplus \vec{s}_{l_0}) = (\vec{s}_{l'} \oplus \vec{s}_{l'}) \oplus (\vec{s}_{m_0} \oplus \vec{s}_{l_0}) = \vec{0} \oplus \vec{s}_{m_0} \oplus \vec{s}_{l_0} = \vec{s}_{m_0} \oplus \vec{s}_{l_0},$$

a więc dla $\vec{s}_l \in \{\vec{s}_{l'}\}$

$$\sum_{\vec{s}_m \in \{\vec{s}_{l'}\}} T_z(\vec{s}_m \oplus \vec{s}_l)\Big|_{\vec{s}_l \in \{\vec{s}_{l'}\}} = \sum_{\vec{s}_{m_0} \in \vec{S}_0} T_z(\vec{s}_{m_0} \oplus \vec{s}_{l_0})\Big|_{\vec{s}_{l_0} \in \vec{S}_0}. \tag{63}$$

Ponieważ $\vec{S}_0$ jest grupą, więc z P1.1 wynika, że

$$(\vec{s}_{m_0} \oplus \vec{s}_{l_0}) \in \vec{S}_0,$$

a więc

$$\sum_{\vec{s}_{m_0} \in \vec{S}_0} T_z(\vec{s}_{m_0} \oplus \vec{s}_{l_0})\Big|_{\vec{s}_{l_0} \in \vec{S}_0} = \sum_{\vec{s}_m \in \vec{S}_0} T_z(\vec{s}_m). \tag{64}$$

Po podstawieniu (63) i (64) do (62) otrzymujemy:

$$\sum_{\substack{\vec{s}_m \neq \vec{s}_l \\ \vec{s}_m \in \{\vec{s}_{l'}\}}} T(\vec{s}_m/\vec{s}_l)\Big|_{\vec{s}_l \in \{\vec{s}_{l'}\}} = \sum_{\vec{s}_m \in \vec{S}_0} T_z(\vec{s}_m) - T_z(\vec{0}). \tag{65}$$

Jak widać, dla ustalonego rozkładu $T_z(\vec{z})$ i ustalonej podgrupy $\vec{S}_0$, (65) jest wielkością stałą, a ponieważ zawsze jest słuszne

$$\sum_{\vec{s}_l \in \{\vec{s}_{l'}\}} P(\vec{s} = \vec{s}_l / \vec{s} \in \{\vec{s}_{l'}\}) = 1,$$

to twierdzenie P2.1 zostało udowodnione.

Twierdzenie P2.2

Założenia. 1. Decyzja $N^* = \overline{B}$ zostaje podjęta, gdy (zawsze i tylko)

$$w(\vec{s}_l^k \oplus \vec{y}_m^k) \leqslant 1.$$

2. $\vec{s}_l^k \overset{\text{df}}{=} \vec{s}^k(\vec{s}_l) = \vec{s}_l \cdot G.$

Teza. Decyzja $N^* = \overline{B}$ zostanie podjęta, gdy wystąpi (zawsze i tylko) ciąg błędów

$$(\vec{z}', \vec{z}''),$$

gdzie:

$\vec{z}'$ — ciąg błędów w kanale podstawowym,

$\vec{z}''$ — ciąg błędów w kanale zwrotnym,

spełniający

$$w[\vec{s}^k(\vec{z}')\oplus\vec{z}''] \leqslant 1,$$

czyli różniący się od ciągu kodowego

$$[\vec{z}', \vec{s}^k(\vec{z}')]$$

co najwyżej w jednej pozycji kontrolnej.

Dowód. Z założenia 1:

$$w(\vec{s}_l^k \oplus \vec{y}_m^k) \leqslant 1$$

jest warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby $N^* = \overline{B}$. Podstawiamy:

$$\vec{y}_m^k = \vec{s}^k(\vec{s}_l \oplus \vec{z}') \oplus z''$$

i otrzymujemy

$$w[\vec{s}_l^k \oplus \vec{s}^k(\vec{s}_l \oplus \vec{z}') \oplus \vec{z}''] \leqslant 1.$$

Z założenia 2 wynika:

$$\vec{s}^k(\vec{s}_l \oplus \vec{z}') = \vec{s}_l^k \oplus \vec{s}^k(\vec{z}'),$$

a więc

$$w[\vec{s}_l^k \oplus \vec{s}_l^k \oplus \vec{s}^k(\vec{z}') \oplus \vec{z}''] \leqslant 1,$$

$$w[\vec{s}^k(\vec{z}') \oplus \vec{z}''] \leqslant 1.$$

c.b.d.d.

Wyprowadzenie wzoru (35)

Ciąg błędów o wadze a, który powoduje $N^* = \overline{B}$, może:

1. być jednym z N_a ciągów o wadze a;

2. różnić się w jednej pozycji kontrolnej od ciągu kodowego o wadze $a+1$, posiadającego ciąg kontrolny o wadze b. Jest b takich ciągów dla każdego z $N_{a+1,b}$ ciągów kontrolnych o wadze $a+1$ i o wadze ciągu kontrolnego b. Razem jest więc

$$\sum_{b=0}^{n} b \cdot N_{a+1,\,b}$$

takich ciągów.

3. różnić się w jednej pozycji kontrolnej od ciągu kodowego o wadze $a-1$, posiadającego ciąg kontrolny o wadze b. Jest $n-b$ takich ciągów dla każdego z $N_{a-1,b}$ ciągów kontrolnych. Razem jest więc

$$\sum_{b=0}^{n} (n-b) N_{a-1,\,b}$$

takich ciągów.

Innych możliwości niż trzy wyżej wymienione nie ma, a więc

$$M_a = N_a + \sum_{b=0}^{n} b \cdot N_{a+1,b} + \sum_{b=0}^{n} (n-b) N_{a-1,b} =$$

$$= N_a + n \sum_{b=0}^{n} N_{a-1,b} + \sum_{b=0}^{n} b N_{a+1,b} - \sum_{b=0}^{n} b N_{a-1,b} =$$

$$= N_a + n N_{a-1} + \sum_{b=0}^{n} b (N_{a+1,b} - N_{a-1,b}).$$

Wzór (35) został wyprowadzony.

Politechnika Warszawska
Katedra Urządzeń Teletransmisyjnych i Telegraficznych

WYKAZ LITERATURY

1. Birkhoff G., Mac Lane S.: Przegląd algebry współczesnej. PWN, Warszawa 1960.
2. Bishop W. B., Buchanan B. L.: Message Redundancy vs. Feedback for Reducing Message Uncertainty. — IRE Conv. Rec., p. 2, 1957.
3. Błoch E. L.: Pomiechoustojczivost' sistiem swiazi s pieriesprosom. I.A.N., Moskwa 1963.
4. Brown A. B., Meyers S. T.: Evaluation of Some Error Correcting Method Applicable to Digitat Data Transmission. — IRE Conv. Rec., p. 4, 1958.
5. Chang S. S. L.: Theory of Information Feedback Systems. — IRE Trans. on I.T., No 3, 1956.
6. Chang S. S. L.: Improvement of Two-Way Communication by Means of Feedback. — IRE Conv. Rec., p. 4, 1961.
7. Harris B., Hauptschein A., Morgan K. C., Schwartz L. S.: Binary Communication Feedback Systems. — AIEE Trans., p. I, 1958.
8. Harris B., Hauptschein A.: Optimum Decision Feedback Systems. — IRE Conv. Rec., p. 2, 1957.
9. Harris B., Morgan K. C.: Binary Symmetric Decision Feedback Systems. — AIEE Trans., p. I, 1958.
10. Helstrom C. W.: The Comparison of Digital Communication Systems. — IRE Trans. on Comm. Systems, Sept. 1960.
11. Karczmarewicz A.: Przegląd zagadnień technicznych związanych z transmisją danych. — Biuletyn Techniczny Ministerstwa Łączności, 1960.
12. Karczmarewicz A.: Zastosowanie sprzężenia zwrotnego informacji dla poprawy transmisji binarnej. Materiały Sympozjum „Nowoczesne systemy teletransmisyjne", Warszawa 1963.
13. Karczmarewicz A.: Sprzężenie zwrotne informacji dla transmisji binarnej. Przegląd zagadnień. — Rozprawy Elektrotechn., zeszyt 1, 1965.
14. Karczmarewicz A.: Kodowanie w systemach ze sprzężeniem zwrotnym informacji. — Rozprawa doktorska, 1964.
15. Karczmarewicz A.: Analiza binarnego systemu transmisyjnego ze sprzężeniem zwrotnym informacji. — Rozprawy Elektrotechn., zeszyt 1, 1966.
16. Metzner J. J., Morgan K. C.: Coded Binary Decision Feedback Communication Systems. — IRE Trans. on Comm. Syst., June 1960.

17. Metzner J. J., Morgan K. C.: Coded Feedback Communication Systems. — AIEE Trans., p. I, 1961.
18. Peterson W. W.: Error-Correcting Codes. J. Willey a.s., New York 1961.
19. Seidler J.: Teoria kodów. PWN, Warszawa 1964.
20. Slepian D.: A Class of Binary Signalling Alphabets. — Bell System Techn. J., v. 35, 1956.
21. Slepian D.: Some Futher Theory of Group Codes. — B.S.T.J., Sept. 1960.
22. Wozencraft J. M., Horstein M.: Coding for Two-Way Channels, w książce „Information Theory", Butterworth, London, 1961.

A. KARCZMAREWICZ

EFFECTIVE CODING FOR BINARY INFORMATION FEED-BACK SYSTEMS

Summary

The author presents in this article a method of coding for binary information feed-back systems. The method consists of transmitting information without additional redundancy through the forward channel (with the exception of little redundancy for rejection signal). In the feed-back channel, however, the information is transmitted with redundancy sufficient for correcting single errors. The above coding shows certain important advantages as proved by the author. It was assumed that:

— forward and feed-back channels have the same modulation rate

— forward and feed-back channels are influenced by the same disturbations.

The comparison of obtained results with the results received for decision feed-back systems and error-correcting codes let to draw general conclusions as regards the scope of utilization of information feed-back systems.

A. KARCZMAREWICZ

CODIFICATION EFFECTIVE POUR SYSTÈMES BINAIRES À CONTRERÉACTION D'INFORMATION

Résume

On a presenté dans l'article la méthode de codification pour les systèmes binaires de transmission à contreréaction d'information. Cette méthode consiste à la transmission dans le canal de base (de source à sortie des données) des informations sens redondance complementaire (à l'exception de la petite redondance induite par le signal de tronquer), mais dans le canal de contreréaction les informations sont transmises avec une redondance suffisante à corriger un erreur singulier. L'évaluation effectuée de la codification proposée, en supposant que le canaux de base et de contreréaction ont des vitesses de modulation et des brouillages identiques, a montré de certaines considérables qualités de cette codification. La comparaison des résultats obtenus avec ceux en cas des systèmes a contreréaction de décision et des systèmes à codifications correctrices a permis de formuler les conclusions générales concernant l'étendue de l'application des systèmes à contreréaction d'information.

A. KARCZMAREWICZ

EFFECTIVES KODIERUNG FÜR BINÄRSYSTEMEN MIT INFORMATIONSRÜCKKOPPLUNG

Zusammenfassung

Im Aufsatz hat man ein Kodierungsverfahren für Binärübertragungssystemen mit Informationsrückkopplung vorstellen. Dieses Verfahren beruht auf dem, dass im Hauptkanal (vom Datenquelle zum Datenempfangsstelle) Nachrichten übertragen mit keinem zusatzlichen Redundanz sind (mit Ausnahme einen ganz geringen Redundanz, die von Unakzeptenscheidungssignale eingeführt ist), und im Rückkanal sind die Nachrichten mit einem Redundanz ausreichend für Korrigieren einzelnen Fehlern übertragen. Eine Bewertung vorgeführte beim Grundsatze, dass Schrittgeschwindigkeit und Störsignale im Hauptkanal und im Rückkanal gleiche sind, hat auf wertvolle Vorzüge des vorgestellten Kodierungsverfahrens gezeigt. Ein Vergleich der erreichten Erfolge mit denen, die für Systemen mit Entscheidungsrückkopplung und Systemen mit fehlerkorriegierbaren Coden gelten, ermöglicht allgemeine Bescheid nach Verwendungsbereich der Systemen mit Informationsrückkupplung bekommen.

А. КАРЧМАРЕВИЧ

ЭФФЕКТИВНОЕ КОДИРОВАНИЕ ДЛЯ БИНАРНЫХ СИСТЕМ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО ИНФОРМАЦИИ

Резюме

В статье описан способ кодирования для бинарных систем связи с обратной связью по информации. Он заключается в передаче по основному каналу (от источника до выхода данных) сообщений без добавочной избыточности (с исключением небольшой избыточности вводимой сигналом отбрасывания), а по обратному каналу сообщения передаются с избыточностью достаточной для исправления одиночной ошибки. Произведенная оценка представленного кодирования при предположении, что основной и обратный каналы имеют одинаковые скорости модуляции и помех выявила некоторые существенные достоинства этого кодирования. Сравнение полученных результатов для вышеуказанной системы и для систем с обратной связью по решению, а также для систем с корекционными кодами, позволило сделать общие выводы, касающиеся области применения систем с обратной связью по информации.

621.392.26

A. KRASZEWSKI

Falowodowe cyrkulatory rozgałęzione

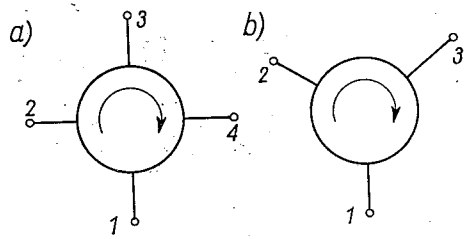
Rękopis dostarczono 15.1.1965

Przedstawiono całokształt zagadnień związanych z zasadą działania, projektowaniem, konstrukcją i zastosowaniem mikrofalowych cyrkulatorów ferrytowych zbudowanych w oparciu o symetryczne rozgałęzienie falowodu prostokątnego. Przedstawiona analiza i przykłady zastosowań odnoszą się do większości cyrkulatorów tego typu.

1. WSTĘP

Co jakiś czas pojawiają się w literaturze wzmianki o nowych elementach mikrofalowych i nieraz trudno jest ustalić, czy istnieją elementy, które umożliwiają rozwiązanie konkretnych problemów konstrukcyjnych lub uproszczenia w praktyce laboratoryjnej. Nawet gdy wiadomo, że element taki istnieje, nie zawsze można ocenić jego potencjalne możliwości i ograniczenia oraz przewidzieć jego dalszy rozwój. Tematem niniejszej pracy jest jeden z najbardziej obiecujących mikrofalowych elementów nieodwracalnych, trójramienny cyrkulator ferrytowy typu Y.

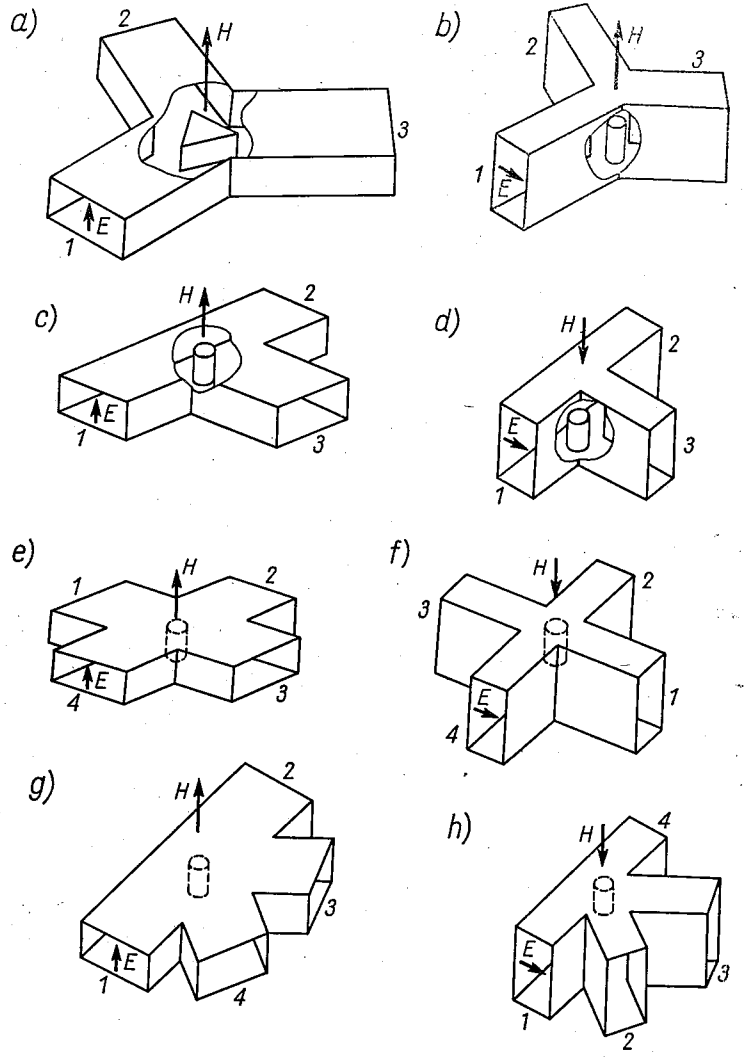
Idealny cyrkulator ferrytowy jest elementem, który przenosi moc wielkiej częstotliwości z jednej gałęzi do drugiej, podczas gdy pomiędzy



Rys. 1. Symbol cyrkulatora ferrytowego
a) Cyrkulator czteroramienny, b) Cyrkulator trójramienny

pozostałymi gałęziami przenoszenie mocy w ogóle nie występuje. Symbol cyrkulatora przedstawiono na rys. 1. Strzałka oznacza kierunek cyrkulacji, a więc przenoszenie mocy odbywa się pomiędzy gałęziami *1* a *2*, *2* a *3*, *3* a *4*, oraz *4* a *1*. Pomiędzy gałęziami *1* i *4*, *4* i *3*, *3* i *2* oraz *2* i *1* występuje izolacja, czyli nie ma przenoszenia mocy. Podobnie w przypadku cyrkulatora trójramiennego strzałka oznacza kierunek przenoszenia mocy, a izolacja występuje dla kierunku przeciwnego do zwrotu strzałki.

Cyrkulatorem rozgałęzionym przyjęto nazywać cyrkulator utworzony z rozgałęzienia prowadnicy falowej, w którego osi symetrii znajduje się ferryt magnesowany polem magnetycznym wytwarzanym przez magnesy umieszczone na zewnątrz prowadnicy. Cyrkulator rozgałęziony może być

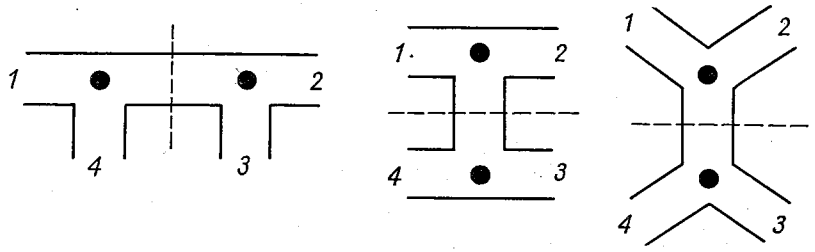


Rys. 2. Falowodowe cyrkulatory rozgałęzione
a) Y w płaszczyźnie H, b) Y w płaszczyźnie E, c) T w płaszczyźnie H, d) T w płaszczyźnie E, e) X w płaszczyźnie H, f) X w płaszczyźnie E, g) K w płaszczyźnie H, h) K w płaszczyźnie E

wykonany z falowodu prostokątnego lub linii paskowej; w pracy niniejszej ograniczono się jedynie do omówienia pierwszej grupy cyrkulatorów. Rozgałęzienie falowodowe, w którym umieszczony jest ferryt, może mieć postać Y lub T i to zarówno w płaszczyźnie E (szeregowe), jak i w płaszczyźnie H (równoległe). Na rys. 2 przedstawiono kilka konfiguracji rozgałę-

zień falowodu prostokątnego zawierających ferryt, które mogą spełniać rolę cyrkulatorów. Cyrkulatory trójramienne pokazane na rys. 2 można łączyć ze sobą i w ten sposób otrzymuje się konfigurację cyrkulatora czteroramiennego typu X, H lub Π, pokazane na rys. 3. Wszystkie te cyrkulatory mają właściwości opisane symbolem z rys. 1a.

Cyrkulatory rozgałęzione są najbardziej praktyczne pod względem rozmiarów, właściwości i prostoty konstrukcji spośród dużej grupy mikrofalowych cyrkulatorów ferrytowych. Inne typy cyrkulatorów wymagają



Rys. 3. Cyrkulatory czteroramienne powstałe z połączenia dwu cyrkulatorów trójramiennych z rys. 2

wykorzystywania przejść z falowodu prostokątnego na kołowy (cyrkulatory z rotacją Faradaya) albo sprzęgaczy kierunkowych (cyrkulatory z nieodwracalnymi przesuwnikami fazy) na obu końcach prowadnicy falowej zawierającej element nieodwracalny. Powoduje to zwiększenie rozmiarów, a uzyskanie szerokopasmowości takich cyrkulatorów jest skomplikowanym problemem konstrukcyjnym.

Ze względu na duże podobieństwo w działaniu i projektowaniu rozgałęzionych cyrkulatorów ferrytowych pokazanych na rys. 2 w pracy niniejszej ograniczono się wyłącznie do omówienia zjawisk i zagadnień związanych z najprostszymi i najpopularniejszymi przedstawicielami grupy cyrkulatorów rozgałęzionych, a mianowicie trójramiennymi cyrkulatorami typu Y (rys. 2a). Większość przytoczonych zależności i rozważań odnosi się jednak do wszystkich cyrkulatorów rozgałęzionych, a bliższe szczegóły nieomówionych zagadnień znajdzie Czytelnik w literaturze przytoczonej na końcu artykułu.

2. ZASADA DZIAŁANIA

Pierwsze modele laboratoryjne trójramiennych cyrkulatorów rozgałęzionych zostały wykonane w latach 1958—59 przez Chaita i Curry [12], Swansona i Wheelera [34] oraz Yoshidę [37], [38], [39]. Prace swe opierali oni w głównej mierze na rozważaniach teoretycznych przeprowadzonych wcześniej przez Aulda [5], Treuhafta [36], a przede wszystkich przez Carlina [10].

Z analizy układów odwracalnych nie zawierających elementów anizotropowych wynika, że żadne połączenie trzech prowadnic falowych nie może być dopasowane [1]. Twierdzenie takie można wyprowadzić z macierzy rozproszenia dla ogólnego odwracalnego połączenia

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} O & S_{21} & S_{31} \\ S_{21} & O & S_{32} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \tag{1}$$

napisanej przy założeniu, że co najmniej dwie z trzech gałęzi można dopasować. Przy założeniu, że układ taki jest bezstratny, macierz jest unitarna, to znaczy $\mathbf{S}\tilde{\mathbf{S}}^* = \mathbf{I}$. Korzystając z zasad rachunku macierzowego otrzymuje się

$$\begin{aligned} |S_{21}|^2 + |S_{31}|^2 &= 1 \\ |S_{21}|^2 + |S_{32}|^2 &= 1 \\ |S_{31}|^2 + |S_{32}|^2 + |S_{33}|^2 &= 1 \\ S_{32}^* S_{31} &= 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Aby spełnić czwarte z powyższych równań, albo S_{32}, albo S_{31} musi być równe zeru. W obu jednak przypadkach otrzymuje się $S_{21} = 0$ z jednego z dwu pierwszych równań. W związku z tym okazuje się, że musi być spełniony warunek $S_{31} = S_{32} = 0$ i stąd wynika, że w trzecim równaniu $|S_{33}| = 1$, a więc rozgałęzienia trójramiennego nie można dopasować z trzech gałęzi jednocześnie.

Rozgałęzienie zawierające nieodwracalny element, taki jak namagnesowany ferryt, może być dopasowane, ponieważ macierz nie musi być symetryczna dla spełnienia warunku odwracalności. Kilka lat przed opracowaniem pierwszych cyrkulatorów rozgałęzionych Carlin [10] wyprowadził podstawowe twierdzenie, że każde bezstratne, nieodwracalne połączenie trzech prowadnic falowych, które zostało dopasowane, jest cyrkulatorem. Warunek dopasowania jest tu warunkiem koniecznym i wystarczającym uzyskania cyrkulacji w rozgałęzieniu trójramiennym, a wykazano, że dopasowanie jest możliwe tylko dzięki wprowadzeniu do rozgałęzienia namagnesowanego ferrytu. Podobnie jak poprzednio, macierz bezstratnego i symetrycznego, ale nieodwracalnego rozgałęzienia trójramiennego ma postać

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{13} & S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{13} & S_{11} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Nakładając warunki unitarności w celu spełnienia warunku zachowania energii otrzymuje się, że

$$|S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 = 1, \tag{4}$$

$$S_{11}S_{12}^* + S_{13}S_{11}^* + S_{12}S_{13}^* = 0. \tag{5}$$

Rozgałęzienie będzie dopasowane, jeżeli wszystkie współczynniki leżące na przekątnej macierzy są równe zeru, czyli gdy $S_{11} = 0$, a jeśli tak, to z równań (4) i (5) wynikają dwa rozwiązania

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad S_{12} = 0 \quad |S_{13}| = 1 \\ &\text{(b)} \quad S_{13} = 0 \quad |S_{12}| = 1 \end{aligned} \tag{6}$$

Innymi słowy, w celu dopasowania rozgałęzienia Y moc z gałęzi *1* musi w całości przechodzić do gałęzi *2*, zaś z gałęzi *2* do gałęzi *3* itd., to znaczy musi ono być cyrkulatorem.

Tak więc warunki dla doskonale symetrycznego cyrkulatora pozwalają napisać macierz rozproszenia w postaci

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

dla cyrkulacji zgodnej z kierunkiem ruchu wskazówek zegara na rys. 1b. W drugim przypadku dla przeciwnego zwrotu cyrkulacji, z równ. (6a) będzie

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Rozważmy teraz warunki dla niedoskonałego cyrkulatora. Niech $S_{12} = |S_{12}| e^{-\theta_2}$ i wtedy z równ. (5) otrzymuje się

$$|S_{12}|(S_{11} e^{-j\theta_2} + S_{13}^* e^{j\theta_2}) + S_{13} S_{11}^* = 0, \tag{9}$$

lecz w wyrażeniu tym dla niedoskonałego cyrkulatora najczęściej można przyjąć, $S_{13} S_{11}^* \ll 1$ oraz $|S_{12}| \approx 1$. Tak więc równ. (9) uprości się do postaci

$$(S_{11} e^{-j\theta_2} + S_{13}^* e^{j\theta_2}) \approx 0, \tag{10}$$

co po podstawieniu do równ. (4) daje

$$|S_{12}|^2 + 2|S_{11}|^2 \approx 1$$

oraz

$$|S_{12}| = \sqrt{1 - 2|S_{11}|^2}\,. \tag{11}$$

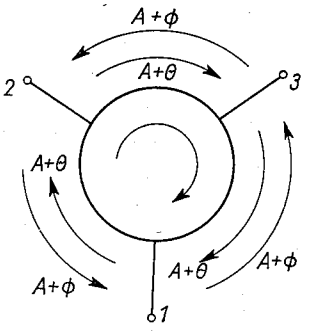
Z równ. (11) wynika, że minimum tłumienia przepustowego $\left(\frac{1}{|S_{12}|}\right)$ pokrywa się z maksimum izolacji $\left(\frac{1}{|S_{13}|}\right)$ i minimum współczynnika odbicia ($|S_{11}|$), a również, że moc przechodząca do gałęzi *3* jest równa mocy odbitej w gałęzi *1* ($|S_{13}|^2 \approx |S_{11}|^2$).

Chociaż namagnesowany ferryt jest konieczny do dopasowania rozgałęzienia, a więc do uzyskania cyrkulacji, szerokopasmowość cyrkulatora

tego typu zależy przede wszystkim od uzyskania szerokopasmowego dopasowania, a wszelkie zmiany właściwości ferrytu z częstotliwością są zjawiskami drugorzędnymi. Pod tym względem cyrkulator rozgałęziony różni się od innych cyrkulatorów, szczególnie od cyrkulatorów z rotatorami Faradaya, gdzie szerokopasmowość bardzo zależy od zmian właściwości materiału ferrytowego z częstotliwością.

Mimo wielu prac doświadczalnych prowadzonych nad cyrkulatorami rozgałęzionymi dotychczas nie opracowano jeszcze całkowitego wyjaśnienia zasady działania i zjawisk zachodzących w cyrkulatorze trójramiennym. Jedyny fizyczny obraz pracy cyrkulatora wykonanego z linii paskowej przedstawił w swych pracach Bosma [6], [7], zaś Auld [5] i Milano [28] przedstawili macierzowe sformułowanie zasad działania cyrkulatorów rozgałęzionych. Próby wyjaśnienia zjawisk zachodzących w cyrkulatorze podejmowali również Skomal [32] w oparciu o rozpływ fal powierzchniowych na namagnesowanym walcu ferrytowym, Fieoktistow [18] rozważając dyfrakcję na walcu ferrytowym, Rowley i Sheehan [31] traktując element ferrytowy jako dielektryczno-ferromagnetyczny rezonator wymiarowy, Collins i Watter [13] zdejmując rozkłady pól w rozgałęzieniu zawierającym ferryt, a także Caswell [11] proponując model oparty o zasadę przemieszczenia pola, podobnie jak w klasycznym izolatorze tego typu. Dopóki jednak nie zostanie przedstawione pełne i wiarygodne wyjaśnienie wszystkich występujących zjawisk, użyteczny obraz działania cyrkulatora daje elementarny zapis zasugerowany przez Penneya [29].

Rozważmy symetryczne rozgałęzienie trzech prowadnic falowych, pośrodku którego umieszczony jest ferryt magnesowany wzdłuż osi rozga-



Rys. 4. Przesunięcia fazy dla dwu kierunków rozchodzenia się fal spolaryzowanych kołowo w cyrkulatorze typu Y

łęzienia. Fala elektromagnetyczna wchodząca z gałęzi *1* będzie miała dwie składowe spolaryzowane kołowo w ferrycie i te składowe będą oddziaływały z namagnesowanym ferrytem, wytwarzając różne przesunięcia fazy dla dwu kierunków rozchodzenia się energii w.cz. — w lewą i w prawą stronę wokół ferrytu. W pewnych warunkach obie te fale, rozchodzące się w przeciwne strony wokół ferrytu, będą się nakładać w taki sposób, że w gałęzi *3* wystąpi minimum, a w gałęzi *2* maksimum, będące wyni-

kiem odpowiednich przesunięć fazowych dwu fal spolaryzowanych kołowo, które znoszą się w jednej gałęzi, a dodają w drugiej, dając w rezultacie zjawisko cyrkulacji.

Działanie takie można szczegółowo rozważyć w oparciu o rys. 4. Niech przesunięcie fazy pomiędzy dwoma gałęziami wynosi $(A+\Phi)$ w jednym kierunku, oraz $(A+\Theta)$ pomiędzy gałęziami w przeciwnym kierunku, gdzie Φ i Θ są nieodwracalnymi przesunięciami fazy zależnymi od natężenia pola magnetycznego, zaś A określone jest przez konfigurację ferrytu i stałą dielektryczną i jest wartością przesunięcia fazy dla zerowego pola. A, Φ i Θ zależą wszystkie od częstotliwości. Rozważmy dla danej częstotliwości pożądany warunek wystąpienia cyrkulacji, zgodnie z przedstawionym powyżej mechanizmem, tak aby moc przechodziła z gałęzi *1* do *2*, a nie występowało przenoszenie mocy pomiędzy *1* i *3*.

Warunek zgodności faz dla dodawania się obu fal w gałęzi *2* i przejścia do niej całej mocy brzmi:

$$2(A+\Phi) = (A+\Theta)+2\pi n, \tag{12}$$

gdzie $n = 0, 1, 2,...,$
natomiast warunek przeciwnych faz dla znoszenia się obu fal w gałęzi *3* ma postać

$$2(A+\Theta) = (A+\Phi)+(2m+1)\pi, \tag{13}$$

gdzie $m = 0, 1, 2,...$
Rozwiązując równania (12) i (13) otrzymuje się

$$\begin{aligned} A+\Phi &= \frac{1}{3}(2m+4n+1)\pi, \\ A+\Theta &= \frac{2}{3}(2m+n+1)\pi. \end{aligned} \tag{14}$$

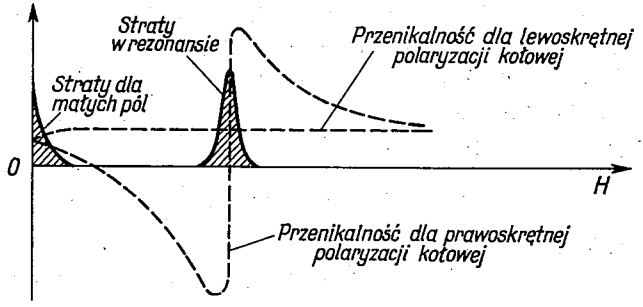
Dodając i odejmując oba równania (14) można wyznaczyć wyrażenia na stałe przesunięcie fazy A oraz konieczną dla uzyskania cyrkulacji różnicę fazy dwu fal spolaryzowanych kołowo.

$$\begin{aligned} 2A &= (2m+2n+1)\pi-(\Theta+\Phi), \\ \Theta-\Phi &= \frac{1}{3}(2m-2n+1)\pi. \end{aligned} \tag{15}$$

Tak więc w celu uzyskania cyrkulacji w rozgałęzieniu muszą być spełnione dwa oddzielne warunki, a do spełnienia tych warunków konieczna jest możliwość zmiany dwu parametrów cyrkulatora. W praktyce jednym ze zmienianych parametrów jest zwykle przykładane z zewnątrz pole magnetyczne, drugim zaś rozmiary ferrytu lub rozmiary wnęki środkowej utworzonej przez ścianki falowodu. Na podstawie równ. (15) staje się oczywista możliwość wystąpienia cyrkulacji w przeciwną stronę, jeżeli wy-

stąpią po temu odpowiednie warunki, które nie muszą znacznie odbiegać od warunków koniecznych dla uzyskania określonej cyrkulacji.

Nieodwracalne przesunięcia fazy zależne od natężenia pola magnetycznego związane są ze skuteczną przenikalnością magnetyczną ferrytu dla fal elektromagnetycznych spolaryzowanych kołowo lewo- i prawoskrętnie. Na rys. 5 pokazano zależność przenikalności ferrytu dla fal o lewoskrętnej i prawoskrętnej polaryzacji kołowej oraz zakresy strat magnetycznych w ferrycie w funkcji przykładanego z zewnątrz stałego pola magnetycznego. Powyżej wykazano, że dla uzyskania zjawiska cyrkulacji konieczne



Rys. 5. Skuteczna przenikalność magnetyczna dla prawo- i lewoskrętnie spolaryzowanych fal w funkcji natężenia pola magnetycznego

jest określone przesunięcie fazy dwu fal spolaryzowanych kołowo przy odpowiedniej wartości stałego przesunięcia fazy A. Ponieważ przenikalność magnetyczna ferrytu posiada różne wartości dla obu kierunków polaryzacji, w konsekwencji uzyskuje się różnicę przesunięć fazy na obwodzie ferrytu. Z rys. 5 widać, że istnieją dwie wartości natężenia pola magnetycznego poniżej lub powyżej rezonansu ferromagnetycznego, przy których przenikalność mogłaby wprowadzać odpowiednie różnice fazy. Wybór któregoś z tych obszarów, w których może wystąpić zjawisko cyrkulacji i straty magnetyczne są niewielkie, zależy od częstotliwości, natężenia pola, jakie można przyłożyć, oraz od właściwości dostępnego materiału ferrytowego.

Ponieważ w zakresie wyższych częstotliwości w falowodzie trudno jest wytworzyć pole magnetyczne konieczne do pracy powyżej rezonansu, falowodowe cyrkulatory rozgałęzione pracują zwykle poniżej rezonansu, podczas gdy modele zbudowane z linii paskowej mogą pracować w obu obszarach.

3. KONSTRUKCJA

Parametrami cyrkulatora ferrytowego, najbardziej interesującymi dla konstruktora jak i użytkownika są: izolacja sąsiednich gałęzi, pomiędzy którymi w modelu idealnym nie występuje przenoszenie mocy, miarą

tak pojmowanej izolacji jest wyrażony w decybelach stosunek mocy pomierzonych w tych sąsiednich gałęziach; tłumienie przepustowe na drodze pomiędzy sąsiednimi gałęziami leżącymi na drodze przenoszenia energii w kierunku cyrkulacji oraz dopasowanie poszczególnych gałęzi wyrażone w postaci współczynnika fali stojącej (WFS), a więc parametry charakteryzujące odchylenia właściwości konkretnego cyrkulatora od modelu idealnego. Poza tym bardzo często interesującym parametrem jest zakres temperatur, w jakim cyrkulator może pracować bez wyraźnego pogorszenia się jego właściwości, a także wartości mocy średniej i impulsowej, jakie można bezpiecznie przesyłać przez cyrkulator bez obawy o jego uszkodzenie lub zniszczenie.

Ogólną tendencją przy projektowaniu i opracowywaniu cyrkulatorów jest dążenie do zapewnienia poprawnej pracy cyrkulatora w jak najszerszym pasmie częstotliwości oraz przy jak najwyższym poziomie mocy. Oczywiście powiększanie szerokości pasma częstotliwości przenoszonych przez cyrkulator pociąga za sobą obniżenie się maksymalnej izolacji w pasmie oraz wzrost tłumienia przepustowego, a projektowanie cyrkulatorów rozgałęzionych polega na znalezieniu kompromisu pomiędzy dopuszczalnym pogorszeniem się izolacji i tłumienia a konieczną szerokością przenoszonego pasma częstotliwości. W wielu przypadkach okazuje się, że najbardziej opłacalne jest stosowanie cyrkulatorów wąskopasmowych, wprowadzających małe tłumienia i posiadających bardzo wysokie wartości izolacji. Poza tym często należy brać pod uwagę dopuszczalne rozmiary, ciężar oraz koszt cyrkulatorów.

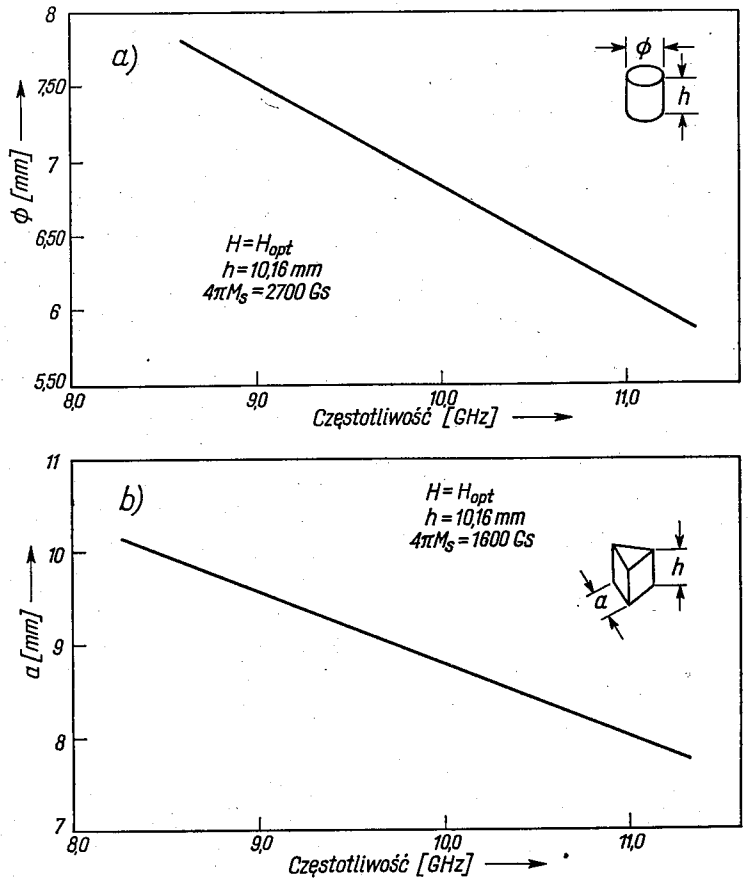
Przy pracy cyrkulatora w obszarze poniżej rezonansu na rys. 5, stosuje się słabe pola magnetyczne, ale najniższa częstotliwość robocza ograniczona jest przez straty magnetyczne występujące w tym obszarze. Najniższa częstotliwość robocza, przy której można jeszcze uniknąć strat magnetycznych, określona jest w przybliżeniu przez

$$f_{min} = \gamma(H_a + 4\pi M_s), \tag{16}$$

gdzie γ — współczynnik żyromagnetyczny, H_a — pole anizotropii ferrytu, $4\pi M_s$ — magnetyzacja nasycenia ferrytu. Minimalną częstotliwość roboczą można obniżyć przez zastosowanie materiałów posiadających niską magnetyzację nasycenia. Jednakże temperatura Curie większości materiałów maleje wraz z magnetyzacją nasycenia. Ferryt poniżej swojej temperatury Curie staje się materiałem niemagnetycznym, tak że właściwości cyrkulatora psują się gwałtownie przy zbliżaniu się do tej temperatury. Dobór materiału jest przeto bardzo istotny, szczególnie w układach przeznaczonych do pracy w zakresie niższych częstotliwości pasma mikrofal.

Prace prowadzone nad nowymi materiałami ferrytowymi zmierzają do uzyskania materiałów opartych na polikrystalicznych granatach itru z pewnymi wtrąceniami metali ziem rzadkich, które posiadać będą niskie magnetyzacje nasycenia i wysokie temperatury Curie i w związku z tym

umożliwią budowę falowodowych cyrkulatorów rozgałęzionych w pasmie 1000 MHz i niższych. W chwili obecnej produkuje się cyrkulatory rozgałęzione w wersji falowodowej na częstotliwości wyższe od 3000 MHz, w wersji paskowej pracujące poniżej rezonansu na częstotliwości wyższe od 1000 MHz. Cyrkulatory zbudowane z linii paskowej i pracujące powyżej rezonansu pokrywają pasmo częstotliwości od 200 MHz. Górna częstotliwość pracy cyrkulatorów paskowych jest ograniczona przez duże tłumienie, jakie występuje we wszystkich liniach paskowych i współosio-

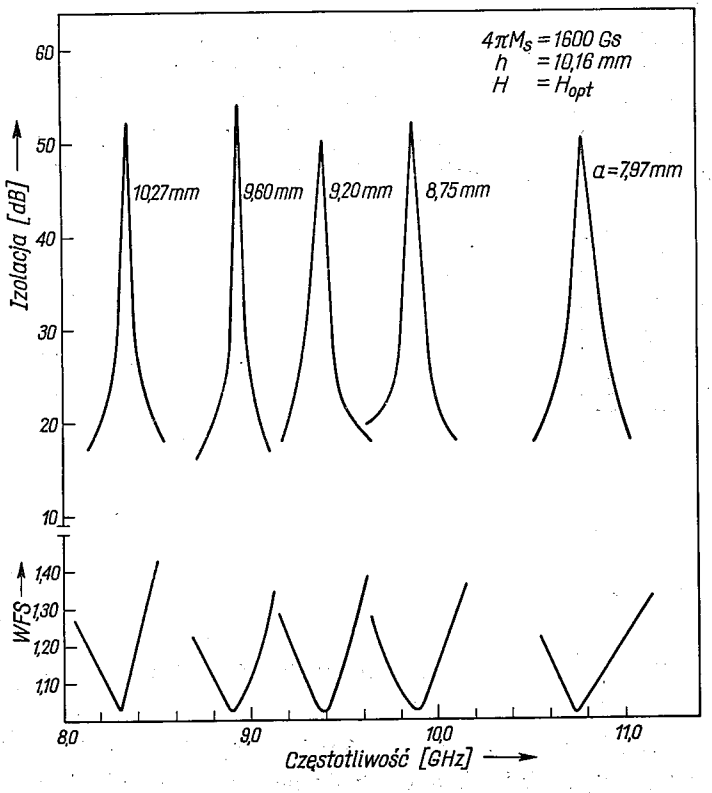


Rys. 6. Zależność częstotliwości, przy której występuje maksymalna izolacja, od rozmiaru ferrytu

wych przy wyższych częstotliwościach. Granicą taką jest zwykle 10 000 MHz. Cyrkulatory falowodowe, w których zastosowano ferryt manganowo-magnezowy, ograniczone są tylko fizycznymi rozmiarami falowodu i pracują zadowalająco do 140 000 MHz [35].

Dobór konfiguracji i rozmiarów ferrytu oraz jego usytuowanie względem osi rozgałęzienia odbywa się zwykle na drodze doświadczalnej. Równ.

(15) mają charakter jakościowy i nie można na ich podstawie przewidzieć wpływu rozmiarów ferrytu i zmian natężenia stałego pola magnetycznego przykładanego z zewnątrz na parametry cyrkulatora. Jednakże liczne prace doświadczalne przeprowadzane z ferrytami o wysokości równej wysokości falowodu [3], [6], [12], [17], [23] pozwoliły stwierdzić, że zmniejszanie rozmiarów poprzecznych ferrytu powoduje zwiększanie się częstotliwości f_0, przy której występuje optymalna cyrkulacja. Na rys. 6 przedstawiono zależność częstotliwości f_0 od poprzecznych rozmiarów ferrytu: średnicy pręta [3] i długości boku podstawy graniastosłupa [23]. Tak więc

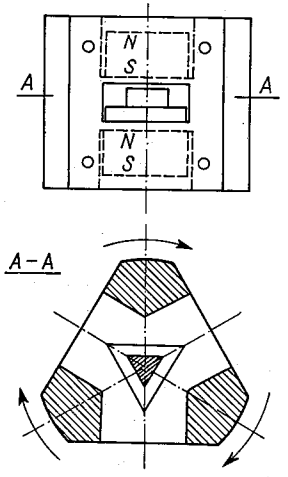


Rys. 7. Charakterystyki wąskopasmowych cyrkulatorów z ferrytem o wysokości równej pełnej wysokości falowodu

wprowadzenie do rozgałęzienia ferrytu o wysokości równej wysokości falowodu pozwala uzyskać wąskopasmowy cyrkulator o następujących właściwościach: (dla falowodu FP22×10) izolacja ponad 40 dB w każdym punkcie pasma częstotliwości przenoszonego przez falowód, izolacja ponad 20 dB w pasmie ±150 MHz (około 3%) przy WFS poniżej 1,20 i tłumieniu przepustowym 0,2 dB. Kilka charakterystyk takich najprostszych cyrkulatorów przedstawiono na rys. 7. Natężenie pola wynosi w tym przypadku 80—100 Oe, a cyrkulatory nie zawierają żadnych dodatkowych elementów dopasowujących.

Główną wadą cyrkulatorów z wkładkami ferrytowymi o wysokości równej wysokości falowodu jest to, że z powodu zastosowania słabych pól magnetycznych, obecność pól rozproszonych w sąsiedztwie cyrkulatora znacznie wpływa na jego właściwości. Pod tym względem najlepsze wyniki uzyskuje się z takimi konfiguracjami ferrytu, które mają duży współczynnik odmagnesowania w kierunku przykładanego pola. Cyrkulator z dwoma krążkami ferrytowymi umieszczonymi na przeciwległych ściankach falowodu, gdzie pole potrzebne do wywołania cyrkulacji wynosi około 1000 Oe, jest zakłócany przez pola rozproszone tylko w nieznacznym stopniu [3].

Problem uzyskania szerokiego pasma pracy cyrkulatora sprowadza się w myśl rozważań przeprowadzonych w rozdz. 2 do problemu szerokopasmowego dopasowania impedancji rozgałęzienia falowodowego zawierającego namagnesowany ferryt. Można wykazać, że dopasowanie takie jest możliwe za pomocą strojników umieszczonych we wszystkich gałęziach

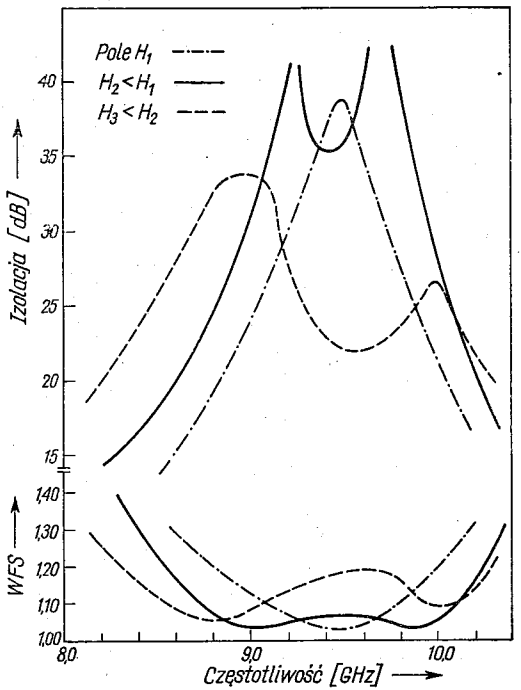


Rys. 8. Konstrukcja trójramiennego cyrkulatora typu Y

cyrkulatora [21], nawet wtedy gdy konfiguracja ferrytu i natężenie pola nie są dobrane optymalnie. Warunek dopasowania stanowi jednak o wystąpieniu cyrkulacji i tak dopasowane rozgałęzienie będzie również dobrym cyrkulatorem. W każdym jednak przypadku właściwości cyrkulatora można poprawić przez wprowadzenie zewnętrznych elementów dopasowujących. Jednakże dążeniem konstruktorów jest, aby cyrkulację w szerokim pasmie częstotliwości zapewnić przez dobór optymalnej konfiguracji ferrytu, natężenia pola magnetycznego oraz elementów dopasowujących umieszczonych symetrycznie w stosunku do osi wewnątrz cyrkulatora.

Przykładem szerokopasmowej konstrukcji cyrkulatora rozgałęzionego na pasmo 3 cm jest konstrukcja przedstawiona na rys. 8. Rolę wewnętrznego elementu dopasowującego spełnia tutaj graniastosłup metalowy

umieszczony na osi rozgałęzienia. Częstotliwość środkowa oraz szerokość pasma przenoszonego przez cyrkulator zależą od rozmiarów graniastosłupa ferrytowego, rozmiarów graniastosłupa metalowego oraz od natężenia stałego pola magnetycznego. Dla przykładu, na rys. 9 przedstawiono wpływ zmian pola magnetycznego na właściwości cyrkulatora zawierającego optymalną konfigurację uzyskaną przez dobór rozmiarów geome-

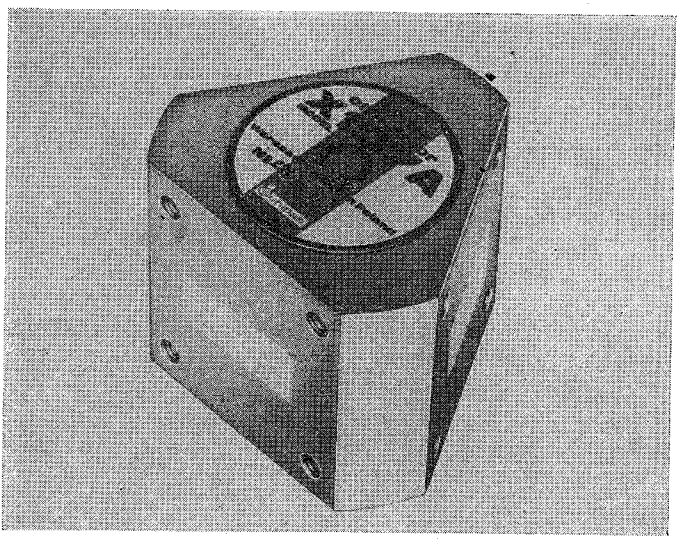


Rys. 9. Izolacja w funkcji częstotliwości dla cyrkulatora Y przy różnych natężeniach pola magnetycznego

trycznych ferrytu i elementu dopasowującego. Można zauważyć, że przy zmniejszaniu natężenia pola krzywa izolacji rozszerza się, przy czym środkowa jej część pogłębia się. W ten sposób można regulować parametry cyrkulatora i kosztem szerokości pasma podnosić izolację. Maksymalne uzyskiwane szerokości pasma, określone przy izolacji 20 dB zawierają się w granicach 20—25%, wtedy WFS nie przekracza wartości 1,20, a tłumienie przepustowe jest rzędu 0,3 dB.

Pole magnetyczne może być wytwarzane przez stabilne magnesy barowe, jak na rys. 8, lub przez zwykłe stopowe magnesy dyskowe połączone jarzmem z materiału o dużej przenikalności magnetycznej, co pozwala na skuteczniejsze wykorzystanie właściwości magnesu trwałego i zapewnia skuteczne ekranowanie od wpływu pól zewnętrznych. W pierwszym jednak przypadku możliwe jest zapewnienie bardziej zwartej konstrukcji mechanicznej i sprowadzenie rozmiarów cyrkulatora do koniecznego minimum. Przykładem takiej konstrukcji jest cyrkulator na pasmo 3 cm pokazany na rys. 10 [33].

Maksymalne wartości mocy, jakie można przenosić przez cyrkulator rozgałęziony zależą od cieplnych właściwości ferrytu (temperatury Curie oraz tempa zmian magnetyzacji nasycenia przy zmianach temperatury), a także od konfiguracji ferrytu i cieplnej stabilności magnesów trwałych. Materiał ferrytowy powinien być dobrany w taki sposób, aby zmiany jego właściwości w funkcji zmian temperatury były jak najmniejsze. Przy-



Rys. 10. Trójramienny cyrkulator na pasmo 3 cm

kładem takiego stabilnego cieplnie materiału może być granat itrowy z wtrąceniami gadolinu, którego magnetyzacja nasycenia jest prawie stała w zakresie od 0° do 140°C.

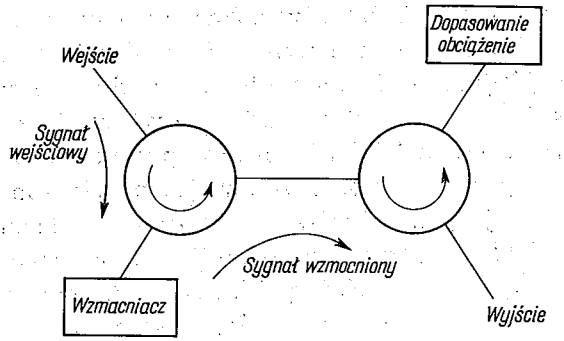
Zmiany właściwości materiału można częściowo kompensować przez zmiany przyłożonego pola magnetycznego, tak aby przy zmianach temperatury stale zapewniać spełnienie warunku optymalnej cyrkulacji. Można to wykonać przez częściowe zabocznikowanie pola magnetycznego materiałem o niskiej temperaturze Curie, gdyż ze wzrostem temperatury wymagane jest przykładanie coraz to silniejszych pól magnetycznych [29]. Przez odpowiedni dobór konfiguracji ferrytu można w dużym stopniu uniezależnić parametry cyrkulatora od zmian magnetyzacji nasycenia przy zmianach temperatury. Chodzi o wybranie konfiguracji, dla której współczynniki odmagnesowania wzdłuż trzech osi będą jednakowe. Konfiguracją taką jest kula, a także graniastosłup o podstawie trójkątnej pokazany na rys. 8, którego wszystkie pięć boków posiada jednakową powierzchnię [11]. W praktyce najczęściej stosuje się wszystkie te środki jednocześnie, co pozwala zapewnić stałość parametrów cyrkulatora w zakresie temperatur od -20°C do 60°C, a specjalne rozwiązania mogą pra-

cować nawet w temperaturze ciekłego azotu przy −196°C lub przy +125°C.

Badania na dużym poziomie mocy przeprowadzone z szerokopasmowymi cyrkulatorami rozgałęzionymi o konstrukcji pokazanej na rys. 8 wykazały, że cyrkulatory pracujące w pasmie 7000 MHz zbudowane z falowodu FP34×15 wytrzymują zadowalająco moc ciągłą 3000 W, zaś cyrkulatory pracujące w pasmie 10 000 MHz zbudowane z falowodu FP22×10 moc ciągłą 1250 W bez wymuszonego chłodzenia [3]. Jednakże przy pracy z falą impulsową moc dopuszczalna dla cyrkulatorów szerokopasmowych ograniczona jest do 10 kW w przypadku rozwiązania pierwszego oraz do 5 kW dla rozwiązania drugiego. Specjalne konfiguracje ferrytu w cyrkulatorach wąskopasmowych umożliwiają jednak zadowalającą pracę przy poziomie mocy 100 kW w impulsie dla pasma 10 000 MHz [3].

4. ZASTOSOWANIA

Falowodowe cyrkulatory rozgałęzione ze względu na swą zwartą konstrukcję, niewielki ciężar oraz dobre parametry elektryczne, trudne do uzyskania w innych o wiele bardziej rozbudowanych układach, znalazły szerokie zastosowanie w technice mikrofalowej [33]. Cyrkulatory rozgałę-



Rys. 11. Dwa trójramienne cyrkulatory typu Y wykorzystane do separacji fali wejściowej i wyjściowej we wzmacniaczu odbiciowym oraz do izolacji wzmacniacza od wpływu niedopasowanego odbiornika

zione stosuje się zarówno w układach laboratoryjnych, jak i w urządzeniach mikrofalowych, w nowoczesnych wzmacniaczach i układach przeznaczonych do badań fizycznych. Pokrótce omówiono kilka układów, które nie mogłyby powstać bez zastosowania cyrkulatorów rozgałęzionych lub których właściwości i przydatność zostały w znacznym stopniu poprawione dzięki zastosowaniu takich cyrkulatorów.

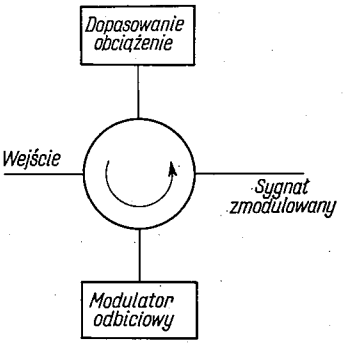
Jednym z coraz ważniejszych zastosowań falowodowych cyrkulatorów rozgałęzionych jest wykorzystanie ich przy współpracy z mikrofalowymi wzmacniaczami odbiciowymi. Wzmacniacz odbiciowy, który wzmacnia

i odbija falę nań padającą, stanowi ujemną oporność umieszczoną w jednej z gałęzi trójramiennego cyrkulatora jak na rys. 11. Cyrkulator w tym układzie ma za zadanie rozdzielanie fal padających i odbitych. W chwili obecnej istnieje szereg takich przyrządów, jak wzmacniacze z diodami tunelowymi, wzmacniacze parametryczne czy masery, które w pewnym zakresie częstotliwości przedstawiają sobą ujemną oporność i charakteryzują się niskimi szumami własnymi, co czyni je szczególnie atrakcyjnymi wzmacniaczami mikrofalowymi. Cyrkulator ferrytowy jest tutaj nieodzownym elementem układu wzmacniającego, a jego niewielkie rozmiary pozwalają uzyskać zwartą konstrukcję całego wzmacniacza. Dodatkową zaletą cyrkulatorów rozgałęzionych, które jak wspomniano, można przystosować do pracy w bardzo niskich temperaturach, jest to, że szumy, wprowadzane przez cyrkulator związane z tłumieniem przepustowym, są na ogół bardzo niskie, a jeszcze można je obniżyć przez ochłodzenie całego układu w ciekłym azocie lub helu [16].

Innym ważnym problemem, który w technice mikrofalowej można rozwiązać przy pomocy cyrkulatorów, jest problem separacji generatorów od wpływu zmian obciążenia. Każdy cyrkulator trójramienny, którego jedna gałąź zakończona jest dopasowanym obciążeniem, może spełniać w układzie rolę izolatora ferrytowego i skutecznie separować generator od wpływu zmian obciążenia, jeżeli izolacja wprowadzana jest większa od 20 dB [33]. Drugi z cyrkulatorów pokazanych na rys. 11 spełnia właśnie funkcję izolatora, separując wzmacniacz odbiciowy od wpływu niedopasowania znajdującego się na wyjściu układu. Korzyści płynące ze stosowania rozgałęzionych cyrkulatorów ferrytowych zamiast odpowiednich izolatorów są najbardziej widoczne w przypadku układów pracujących przy dużym poziomie mocy. W świetle przytoczonej powyżej wytrzymałości mocowej cyrkulatorów rozgałęzionych okazuje się bowiem, że rezonansowy izolator ferrytowy o zbliżonej wytrzymałości mocowej będzie około dziesięciokrotnie cięższy i kilkakrotnie większy i droższy niż cyrkulator rozgałęziony zakończony dopasowanym obciążeniem dużej mocy [2]. Decydującą rolę gra tutaj ciężar i rozmiary magnesu, gdyż natężenie pola magnetycznego potrzebne do zapewnienia poprawnej pracy izolatora rezonansowego w pasmie 10 000 MHz wynosi około 3500 Oe, a w przypadku cyrkulatora rozgałęzionego tylko około 500 Oe. Ciężar tych przyrządów wynosiłby odpowiednio 2,5 kg i 0,25 kg.

Przykładem znacznego poprawienia właściwości laboratoryjnego układu pomiarowego uzyskanego dzięki zastosowaniu zwartego konstrukcyjnie czteroramiennego cyrkulatora rozgałęzionego jest modulator odbiciowy przedstawiony na rys. 12. Modulator odbiciowy składa się z diody półprzewodnikowej polaryzowanej napięciem modulującym, za którą umieszczony jest zwieracz. W zależności od znaku napięcia modulującego sygnał przechodzący z gałęzi *1* odbija się albo od diody umieszczonej w gałęzi *2*, albo od umieszczonego za nią zwieracza. Gdy dioda przewodzi, energia

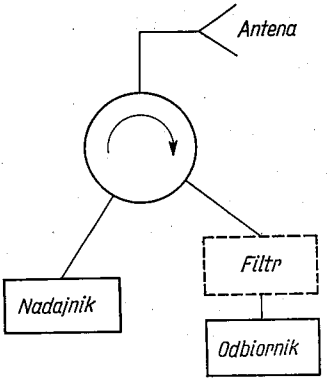
wielkiej częstotliwości odbija się od zwieracza, gdy zaś dioda jest spolaryzowana ujemnie, płaszczyzna zwarcia znajduje się w płaszczyźnie umieszczenia diody. Energia odbita z gałęzi 2 przedostaje się do układu umieszczonego na wyjściu gałęzi 3. Energia odbita od układu w gałęzi 3 wydziela się w dopasowanym obciążeniu umieszczonym w gałęzi 4 i w ten



Rys. 12. Cyrkulator czteroramienny współpracujący z modulatorem odbiciowym

sposób cyrkulator zapewnia całkowitą separację generatora zarówno od wpływu niedopasowania modulatora odbiciowego, jak i odbiornika znajdującego się na wyjściu układu (w gałęzi 3).

Klasycznym przykładem wykorzystania mikrofalowych cyrkulatorów ferrytowych jest ich zastosowanie w układach przełączników antenowych urządzeń radiolokacyjnych, pokazanych schematycznie na rys. 13. Główną zaletą takiego układu jest szybkość przełączania, gdyż praktycznie

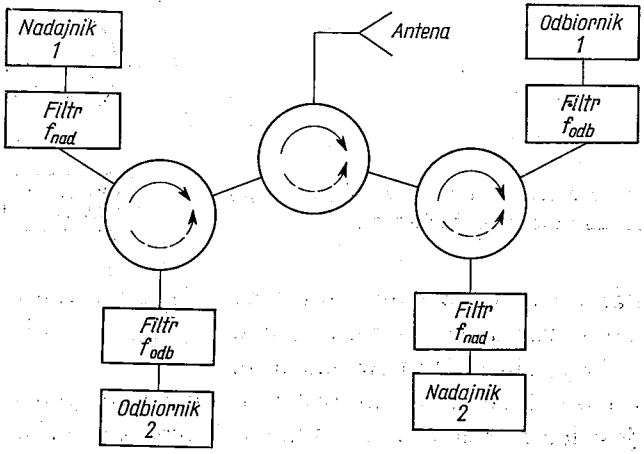


Rys. 13. Cyrkulator typu Y umożliwiający jednoczesne wykorzystanie nadajnika i odbiornika ze wspólną anteną

przez cały czas nadajnik jest połączony z anteną, a moc dochodząca do anteny przedostaje się do odbiornika. Cyrkulatory rozgałęzione ze względu na swoje niewielkie rozmiary i znikomy ciężar umożliwiają znaczne zmniejszenie rozmiarów przełącznika. Ponieważ antena zwykle nie jest dokładnie dopasowana, sygnał z nadajnika odbity od anteny przechodzi do odbiornika. W urządzeniach radiolokacyjnych pracujących na fali cią-

głej, na przykład w urządzeniach wykorzystujących zjawisko Dopplera, sygnał ten można wykorzystać jako sygnał heterodyny. W łączach mikrofalowych nadajnik i odbiornik pracują zwykle na różnych częstotliwościach, tak że filtr umieszczony na wejściu odbiornika eliminuje sygnały o częstotliwości nadajnika, jak na rys. 13.

Pewną odmianą układu przełączającego jest układ przedstawiony na rys. 14, zawierający trzy cyrkulatory trójramienne zasilane polem magnetycznym o dwu przeciwnych zwrotach. Gdy energia cyrkuluje w kierunku



Rys. 14. Trzy cyrkulatory rozgałęzione umożliwiające dołączenie zapasowego nadajnika i odbiornika do wspólnej anteny

oznaczonym na rysunku strzałkami ciągłymi, wtedy sygnał z nadajnika *1* przechodzi do anteny, a sygnał odbierany z anteny przedostaje się do odbiornika *1*. Po odwróceniu kierunku pola magnetycznego przykładanego do cyrkulatorów energia cyrkuluje w kierunku oznaczonym na rysunku strzałkami przerywanymi i sygnał z nadajnika *2* odbija się od filtru w odbiorniku *1* i przedostaje się do anteny. Sygnał odbierany w tym momencie przechodzi z anteny do gałęzi, w której umieszczony jest nadajnik *1*, odbija się i przechodzi do odbiornika *2*. W ten sposób rezerwowy nadajnik i odbiornik można włączyć przez zmianę kierunku pola magnetycznego w cyrkulatorach, co znacznie podnosi niezawodność systemu komunikacyjnego.

5. ZAKOŃCZENIE

Należy spodziewać się, że dalsze prace nad rozwojem falowodowych cyrkulatorów rozgałęzionych, w oparciu o rozwój zarówno nowych materiałów magnetycznych, jak i nowych zastosowań, doprowadzą do dalszej poprawy parametrów. Szczególnie odnosi się to do zakresu roboczych

temperatur, wytrzymałości mocowej oraz szerokości przenoszonego pasma częstotliwości. Dobre właściwości cyrkulatory takie powinny posiadać w całym pasmie przenoszonym przez falowód, a w zakresie fal milimetrowych cyrkulatory rozgałęzione mogą należeć do najbardziej przydatnych elementów nieodwracalnych.

Obecnie produkowane cyrkulatory rozgałęzione [33] mogą znaleźć szerokie zastosowanie w wielu typach układów mikrofalowych, w laboratoryjnych układach pomiarowych, w elektronice kwantowej, spektrometrii, radiokomunikacji i telewizji. Najnowszy z klasycznych elementów nieodwracalnych — rozgałęziony cyrkulator ferrytowy — staje się coraz popularniejszym elementem w nowoczesnych rozwiązaniach techniki mikrofalowej, a wszystko wskazuje na to, że z czasem popularność ta będzie gwałtownie wzrastać.

Autor pragnie wyrazić podziękowanie mgrowi inż. St. Stuchłemu za szereg cennych uwag i dyskusji w trakcie przygotowywania pracy oraz dyr. mgr inż. J. Kalińskiemu za pozwolenie na opublikowanie artykułu.

UNIPAN — Zakład Budowy Aparatury Naukowej PAN
Warszawa

WYKAZ LITERATURY

1. Montgomery C. G., Dicke R. H., Purcell E. M.: Principles of Microwave Circuits. McGraw-Hill Book Co., New York, rozdz. 5 i 12, 1948.
2. Lax B., Button K. J.: Microwave Ferrites and Ferrimagnetics, McGraw-Hill Book Co., New York 1962.
3. Aitken F. M., McLean R.: Some Properties of the Waveguide Y-Circulator. — Proc. IEE, t. 110, nr 2, str. 256—260, luty 1963.
4. Allen P. J.: The Turnstile Circulator. — IRE Trans., t. MTT-4, nr 4, str. 223—228, październik 1956.
5. Auld B. A.: The Synthesis of Symmetrical Waveguide Circulators. — IRE Trans., t. MTT-7, nr 2, str. 238—246, kwiecień 1959.
6. Bosma H.: On the Principle of Stripline Circulation. — Proc. IEE, t. 109, cz. B, suppl. nr 21, str. 137—146, styczeń 1962.
7. Bosma H.: On Stripline Y-Circulation at UHF. — IEEE Trans., t. MTT-12, nr 1, str. 61—72, styczeń 1964.
8. Butterweck H. J.: Der Y-Zirkulator. — Arch. Elektr. Ubertr., t. 17, nr 4, str. 163—176, kwiecień 1963.
9. Cacheris J. C., Sakiotis N. G.: Modern UHF and Microwave Ferrite Devices — Some Recent Developments. — Proc. IEE, t. 109, cz. B, suppl. nr 21, str. 127—131, styczeń 1962.
10. Carlin H. J.: Principles of Gyrator Networks. — Proc. Symp. on Modern Advances in Microwave Techn., PIB, str. 175—204, Brooklyn, N.Y., listopad 1954.
11. Caswell D. A.: Understanding Circulators. — Microwaves, t. 2, nr 8, sierpień 1963.
12. Chait H. N., Curry T. R.: Y-Circulator. — J. appl. Phys., t. 30, suppl. nr 4, str. 152S—153S, kwiecień 1959.

13. Collins J. H., Watter A. R.: A Field Map for Waveguide Y-Junction Circulator. Electronic Engng, t. 35, nr. 426, str. 540—543, sierpień 1963.
14. Davies J. B.: An Analysis of the m-Port Symmetrical H-Plane Waveguide Junction with Central Ferrite Post. — IRE Trans., t. MTT-10, nr 6, str. 596—604, listopad 1962.
15. Davis L., Milano U., Saunders J.: A Strip-Line L-Band Compact Circulator. — Proc. IRE, t. 48, nr 1, str. 115—116, styczeń 1960.
16. Davis L. E., Longley S. R.: E-plane 3-Port X-Band Waveguide Circulator. — IEEE Trans., t. MTT-11, nr 5, str. 443—445, wrzesień 1963.
17. Davis L. E., Coleman M. D., Cotter J. J.: Four-Port Crossed-Waveguide Junction Circulator. — IEEE Trans., t. MTT-12, nr 1, str. 43—47, styczeń 1964.
18. Fieoktistow W. G.: Difrakcjonnaja modiel Y-cirkulatora, — Radiot. i elektronika t. 7, nr 10, str. 1763—1768, październik 1962.
19. Fox A. G., Miller S. E., Weiss M. T.: Behaviour and Application of Ferrites in the Microwave Region. — Bell Syst. Techn. J., t. 34, str. 5—103, styczeń 1955.
20. Grace M., Arams F. R.: Three-Port Ring Circulator. — Proc. IRE, t. 48, nr 8, str. 1497—1498, sierpień 1960.
21. Humphreys B. L., Davies J. B.: The Synthesis of n-Port Circulators. — IRE Trans., t. MTT-10, nr 6, str. 551—554, listopad 1962.
22. Kawka W.: Cyrkulator T. — Prace PIT, nr 34, str. 75—77, 1961.
23. Kraszewski A.: Some Experimental Results on the X-Band Junction Circulator. — IEEE Trans., t. MTT-13, nr 3, str. 382—383, maj 1965.
24. Krzycki Z.: Cyrkulator ferrytowy na pasmo 3 cm. — Arch. Elektr., t. 11, nr 1, str. 172—174, 1962.
25. Krzycki Z.: Cyrkulator ferrytowy na pasmo 10 cm. — Arch. Elektr., t. 12, nr 4, str. 767—768, 1963.
26. Lewandowski S.: Cyrkulator ferrytowy typu Y na pasmo 3 cm. — Przegl. Telekom., t. 35, nr 1, str. 18, styczeń 1962.
27. Lewandowski S. J.: On Some Design Problems of a Star-Type Ferrite Circulator. — J. Inst. Telecomm. Engrs India, t. 8, str. 103—106, marzec 1962.
28. Milano U., Saunders J. H., Davis L.: A Y-Junction Strip-Line Circulator. — IRE Trans., t. MTT-8, nr 3, str. 346—351, maj 1960.
29. Penney J. A.: The Three-Port Circulator. — Radio and Electronic Comp., t. 3, nr 6, str. 485—491, czerwiec 1962.
30. Penney J. A.: Experiments in the Design of Some Three-Port Circulators. — International Conf. on Microwave Components, Londyn, listopad 1962.
31. Rowley J., Sheehan E.: Design Considerations for Ferrite Junction Circulators. — Proc. IEEE, t. 52, nr 2, str. 221, luty 1964.
32. Skomal E. N.: Theory of Operating of a 3-Port Y-Junction Ferrite Circulator. — IEEE Trans., t. MTT-11, nr 2, str. 117—122, marzec 1963.
33. Stuchły S., Kraszewski A.: Mikrofalowe przyrządy ferrytowe na pasmo 3 cm. — Przegl. Telekom., t. 37, nr 12, str. 341—349, grudzień 1964.
34. Swanson W. E., Wheeler G. J.: Tee Circulator. — IRE Wescon Conv. Rec., t. 2, cz. 1, str. 151—156, sierpień 1958.
35. Thaxter J. B., Heller G. S.: Circulators at 70 and 140 kMc. — Proc. IRE, t. 48, nr 1, str. 110, styczeń 1960.
36. Treuhaft M. A.: Network Properties of Circulators Based on the Scattering Concept. — IRE Trans., t. CT-3, nr 2, str. 127—135, czerwiec 1956.
37. Yoshida S.: X Circulator. — Proc. IRE, t. 47, nr 6, str. 1150, czerwiec 1959.
38. Yoshida S.: E-Type X Circulator. — Proc. IRE, t. 47, nr 11, str. 2017, list. 1959.
39. Yoshida S.: E-Type T Circulator. — Proc. IRE, t. 47, nr 11, str. 2018, list. 1959.

40. Yoshida S.: Strip-Line Y Circulator. — Proc. IRE, t. 48, nr 7, str. 1337, lipiec 1960.
41. Davies J. B.: Theoretical Design of Broad-Band Waveguide Circulators. — Electronics Letters, t. 1, nr 4, czerwiec 1965.
42. Fay C. E., Comstock R. L.: Operation of the Ferrite Junction Circulator. — IEEE Trans., t. MTT-13, nr 1, str. 15—27, styczeń 1965.
43. Kraszewski A.: Niektóre wyniki badań doświadczalnych nad cyrkulatorem falowodowym w pasmie 3 cm. — Przegl. Elektroniki, t. 6, nr 10, str. 505—508, październik 1965.
44. Sidhu G. S., Gandhi O. P.: A Four-Port Waveguide Junction Circulator. — IEEE Trans., t. MTT-13, nr 3, str. 388—389, maj 1965.
45. Simon J. W.: Broadband Strip-Transmission Line Y-Junction Circulators. — WESCON Conv. Rec. 1963, str. 1—14.
46. Weiss J. A.: Circulator Synthesis. — IEEE Trans., t. MTT-13, nr 1, str. 38—44, styczeń 1965.
47. Wolman W. I.: Rasczjot wałnowodnowo Y-cirkulatora. — Radiotechnika, t. 20, nr 3, str. 21—30, marzec 1965.
48. Anderson L. K.: Broadband Microwave Circulators for Negative Resistance Amplifiers. — International Conf. on Microwave Behaviour of Ferrimagnetics and Plasmas, Londyn, wrzesień 1965.
49. Hagelin S.: Experimental Bandwidth Studies on Waveguide Y-Junction Circulators, jak wyżej.
50. Longley S. R.: 4-Port E-Plane Junction Circulators, jak wyżej.
51. Parsonson C. G., Longley S. R.: Theoretical Design of Broad-Band 3-Port Circulators, jak wyżej.
52. Stuchły S., Kraszewski A.: On Some Properties of Junction Circulators. — International Conf. on Microwave Behaviour of Ferrimagnetics and Plasmas, Londyn, wrzesień 1965.

ANDRZEJ KRASZEWSKI

WAVEGUIDE JUNCTION CIRCULATORS

Summary

A complex survey is presented on the operating principles, design, construction and application of microwave ferrite circulators, which use symmetric rectangular waveguide junction. It has been shown, that by inserting a gyromagnetic element inside a symmetric, three-port waveguide junction conditions can be established to matching the junction, and that this junction constitutes an ideal microwave circulator. There were many attempts, by various authors, [5, 6, 11, 13, 18, 28, 29, 31, 32] to give a full explanation of the physical phenomena in such circulators, but no one of them can be considered as being satisfactory.

By considering the phase shifts of a circularily polarized wave at the ferrite surface, requirements are defined in this paper, which have to be met by the imaginary part of the permeability of ferrite material. Thus, the ferrite characteristics are related to the condition of circulation and it is shown, that the properties of the arrangement are futhermore dependent on the ferrite insert dimensions, on the frequency and on intensity of the applied magnetic field.

Problems of waveguide junction circulator design are discussed such as broadband matching of the network, resolution of the magnetic circuit, selection of the

ferrite insert dimensions; some more typical applications of such circulators also are given. Due to its mechanical qualities — small dimensions, small weight, and electrical features [33] waveguide junction circulators are widely used in up-to-date microwave system arrangements, in laboratory set-ups and measuring devices.

A. KRASZEWSKI

CIRCULATEUR JONCTION À GUIDE D'ONDE

Résumé

On a presenté l'ensemble des problèmes concernant le principe de fonctionnement, le calcul, la construction et l'application des circulateurs à microondes à ferrites qui font appel au guide d'onde rectangulaire à branchement symetrique. On a démontré que l'introduction d'un corps gyromagnétique dans l'élément de jonction du guide d'onde en T ou Y symetrique, permet d'obtenir l'accord du branchement et que le système devient un circulateur idéal. La description des phénomènes physique intervenant dans ce type de circulateur, qu'on a tentée de donner [5], [6], [11], [13], [18], [28], [29], [31], [32], à été jusqu'à présent incomplète.

En considérant le déphasage de l'onde à polarisation circulaire a la surface du ferrite, on a établi les relations que doit remplir la composante de perméabilité magnétique liée au déphasage. On a obtenu de cette façon les conditions de circulation des paramètres du ferrite, en outre on a démontré l'influence des dimensions du ferrite, de la fréquence et de l'intensité du champ magnétique sur les propriétés du dispositif.

On a étudié plusieurs questions concernant la construction de ce type de circulateur, les méthodes d'adaption du dispositif dans une large bande de fréquence, le calcul du circuit magnétique et des dimensions du ferrite ainsi que quelques exemples d'application. Grâce à leurs caractéristiques mécaniques avantageuses — dimensions réduites, faible poids et à leurs performances électriques [33], les circulateurs jonctions donnent de plus en plus fréquemment lieu à des applications dans les dispositifs modernes à microondes, dans les appareils de laboratoire et dans les appareils de mesure.

A. КРАШЕВСКИ

ВОЛНОВОДНЫЕ ЦИРКУЛЯТОРЫ МОСТОВОГО ТИПА

Резюме

В статье рассматриваются все вопросы связанные с принципом действия, проектированием, конструированием и применением ферритовых циркуляторов, построенных на базе симметрического разветвления прямоугольного волновода. Доказано, что расположение анизотропного элемента в симметрическом Т- либо У-образном волноводном разветвлении делает возможным его согласование со стороны трех плеч и таким образом система является идеальным циркулятором. Несмотря на большое количество попыток, произведенных различными авторами [5], [6], [11], [13], [18], [28], [29], [31], [32], для циркулятора этого типа, до настоящего времени, не получено еще достаточного и полного описания физических явлений.