

INSTYTUT TECHNOLOGII ELEKTRONOWEJ
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

K W A R T A L N I K

SPIS TREŚCI DO TOMU XIV — 1968

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA

SPIS TREŚCI DO TOMU XIV

T. Bełdowski: Analiza przyrostów temperatury konstrukcji stalowych w elektrowniach pod wpływem zmiennych pól magnetycznych prądów zwarciovych	487
J. Borkowski: Porównanie różnych sposobów ciągłej regulacji prędkości obrotowej silników indukcyjnych pod względem techniczno-ekonomicznym	159
J. Brożyna: Współczynnik szumów wzmacniaczy grupowych	299
Z. Celiński: Parametry elektryczne generatora MHD w zależności od elektrycznego połączenia elektrod	9
R. Gessing: Równania różnicowe nieliniowych układów impulsowych i ich wykorzystanie do obliczania przebiegów	35
Ł. Gronau: Ocena dynamiki zmiękowanych przebiegów z wielokanałowego magnetofonu studyjnego systemu konwencjonalnego i z przetwarzaniem	565
G. Gulcz: Transformacja impedancji wejściowej w półfalowych wielokrotnych dipolach pętlowych	133
M. Jabłoński: Praca transformatora trójfazowego przy niesymetrycznej regulacji przekładni	363
T. Jankowski, W. Łągwiński: Zagadnienia realizacji toru cyfrowej rejestracji magnetycznej na przykładzie maszyny UMC-10	517
M. Kozłowski: Graniczna obciążalność trwała transformatora „z rozdzielonymi uzwojeniami” przy nierównomiernym obciążeniu uzwojeń	467
J. Leszczyński: Metoda uniwersalnych charakterystyk uchybowych przekładników prądu stałego	447
B. Licznerski: Wzorce tangensa kąta strat kondensatorów o parametrach RC skupionych i rozłożonych	609
J. Mielnicki: Oddziaływanie magnonowo-fononowe w kryształach ferromagnetycznych w warunkach „pompowania równoległego”	59
M. Nałęcz, J. Szukalski: Niektóre techniczne zastosowania magneto-optycznego zjawiska Faradaya	77
J. Osowski: Rachunek operatorowy w dziedzinie dystrybucji	199
J. Owczarek: Mikrosilnik histerezowo-permasynowy	629
T. Postupolski, M. Piotrkiewicz: Odtwarzalność stanu magnetycznego ferrytów Mn-Zn	311
T. Postupolski, J. Kulikowski: Badanie stałości uporządkowania magnetycznego w ferrytach perminwarowych	595
O. Przesmycki: Nowa — szablonoowa metoda wyznaczania wartości parametrów funkcji impedancyjnych filtrów LC obliczanych na gruncie parametrów falowych	223
M. Pstrokoński: Iloczyn liczb strukturalnych	3
A. Puchała, B. Wachta: Analiza niesymetrycznego układu elektroenergetycznego za pomocą pojęcia transmitancji napięciowej	675
J. Sawicki: Liniowość charakterystyki mostka o przetworniku nieproporcjonalnym	257
L. Smoczyński: Projektowanie szerokopasmowych cyrkulatorów ferrytowych na liniach paskowych	539
A. Smoliński: Impulsowy wzmacniacz o jednym obwodzie rezonansowym małej dobroci	95
F. Sondij: Zagadnienie doboru parametrów toru wieloprądowego w asymetrycznych stalowniczych urządzeniach łukowych	511
J. Tabin: Metoda obliczania przebiegów niestabilnych w obwodach nieliniowych	423

J. Turowski: Uogólniona metoda obliczania strat rozproszonych w stalowych częściach konstrukcyjnych	177
A. Wąsowski: Wahania napięcia powodowane pracą pieców łukowych w sieciach elektrycznych zasilających stalownie	397
R. Żuberek: Pewne problemy związane z efektami opóźnieniowymi w kulistych próbkach ferrytowych	555

CONTENTS

T. Bełdowski: Analysis of Temperature Increments at Steel Constructions in Power Electric Plants by Influence of Alternated Magnetic Fields Issued from Short-Circuit Currents . . .	487
J. Borkowski: Comparison of Various Methods of Stepless Speed Control of the Induction Motors from the Technical and Economic Points of View	159
J. Brożyna: The Noise Figure of Carrier Amplifiers	299
Z. Celiński: Electrical Parameters of the DC MHD Generator with Various Electrical Connections of Electrodes	9
R. Gessing: Difference Equations of Nonlinear Sampled-Data Systems and their Application to Computation of System Responses	35
Ł. Gronau: Appreciation of the Dynamics of Mixed Signals from Multichannel Professional Tape Recorder in Two Recording Systems: with Conversion and the Conventional One . . .	565
G. Gulcz: Transformation of Input Impedance in Half-Wave Multiple Folded Dipoles . . .	133
M. Jabłoński: Three Phase Transformer Work at Nonsymmetrical Ratio Control	363
T. Jankowski, W. Łągwiński: The realisation Problems of Magnetic Recording Channel (on the Basis of UMC-10 Computer)	517
M. Kozłowski: The Continuous Limit Rating of the Transformer "with Split Windings" at Non-Uniform Loading of Windings	467
J. Leszczyński: Method of Universal Error Curves of Direct-Current Transformers . . .	447
B. Licznarski: The Standards of $\tan \delta$ of Capacitors with Concentrated and Distributed Parameters RC	609
J. Mielnicki: Magnon-Phonon Interaction in Ferromagnetic Crystals in the Parallel Pumping Conditions	59
M. Nałęcz, J. Szukalski: Certain Technological Applications of Magneto-Optic Faraday Effect	77
J. Osowski: Operational Calculus in the Domain of Distributions	199
J. Owczarek: Hysteresis-Permasyn Micromotor	629
T. Postupolski, M. Piotrkiewicz: Magnetic State Reproducibility in Mn-Zn Ferrites . . .	311
T. Postupolski, J. Kulikowski: Investigation of Stability of Magnetic Ordering in Perminvar Ferrites	595
O. Przesmycki: New — Template Method of the Image Impedance Function Coefficients Determination of the LC-Filters	223
M. Pstrokoński: Product of Structural Numbers	3
A. Puchała, B. Wachta: Analysis of an Asymmetrical Electro-Energetic System with the Help of the Concept of Voltage Transmittance	675
J. Sawicki: Linearity of Characteristic of Bridge with Unproportional Transducer	257
L. Smoczyński: Designing of Broadband Strip-Line Ferrite Circulators	539
A. Smoliński: Pulse Amplifier with a Single Resonant Low-Q Factor Circuit	95
F. Sondij: The Problem of Selecting Parameters of a Supplying Circuit in Asymmetric Steel Mill Arc Devices	511
J. Tabin: A Method of Calculating Transients in Nonlinear Circuits	423
J. Turowski: The Generalized Method of the Calculation of Stray Losses in Solid Steel Elements	177

A. Wąsowski: Voltage Dips Caused by Arc Furnaces in Electric Networks Supplying Steel-works	397
R. Żuberek: Certain Problems Connected with Retardation Effects in Ferrite Spherical Samples	555

TABLE DES MATIERES

T. Beldowski: L'analyse des accroissements de la température des constructions d'acier dans les stations électriques sous l'influence des champs magnétiques alternatifs des courants court-circuit	487
J. Borkowski: La comparaison des méthodes différentes du réglage coulant de la vitesse de rotation des moteurs asynchrones à l'égard technique et économique	159
J. Brożyna: Coefficient de bruit des amplificateurs multicanaux	299
Z. Celiński: Les paramètres électriques du générateur MHD en dépendance de la connexion électrique des électrodes	9
R. Gessing: Les équations aux différences finies des systèmes échantillonnés non-linéaires et leurs applications à calculer des régimes transitoires	35
Ł. Gronau: L'appréciation de la dynamique des signaux d'un magnétophone de studio à voies multiples opérant dans les systèmes: conventionnel et avec une conversion	565
G. Gulcz: Transformation d'impédance d'entrée dans dipôles demi-onde repliés multiples	133
M. Jabłoński: Le travail d'un transformateur triphasé avec le réglage nonsymétrique du rapport de transformation	363
T. Jankowski, W. Łągwiński: Le problème de la réalisation de la voie de l'enregistrement magnétique digital sur l'exemple de la calculatrice UMC-10	517
M. Kozłowski: La capacité de charge borne et stable du transformateur "avec bobinage divisé" à charge inégale des enroulements	467
J. Leszczyński: La méthode des courbes d'erreur universelles des transformateurs courant continu	447
B. Licznarski: Les étalons de $\tan \delta$ des condensateurs avec des paramètres RC concentrés et distribués	609
J. Mielnicki: Interaction magnon-phonon dans des cristaux ferromagnétiques soumis à un "pompage parallèle"	59
M. Nałecz, J. Szukalski: Certaines applications techniques de phénomène magnétooptique de Faraday	77
J. Osowski: Le calcul opératoire dans le domaine des distributions	199
J. Owczarek: Micromoteur à hystérésis-permasyn	629
T. Postupolski, M. Piotrkiewicz: Reproductibilité des états magnétiques dans les ferrites de Mn-Zn	311
T. Postupolski, J. Kulikowski: L'étude de la stabilité de la structure magnétique des ferrites permivar	595
O. Przesmycki: Une nouvelle méthode grapho-analytique de déterminer les valeurs des paramètres des fonctions d'impédance-image des filtres LC	223
M. Pstrokoński: Le produit des chiffres structurels	3
A. Puchała, B. Wachta: L'analyse du système électroénergétique non-symétrique à l'aide de la notion de la transmittance de tension	675
J. Sawicki: Proportionnalité de l'échelle d'un pont à déviation muni d'un élément sensible nonproportionnel	257
L. Smoczyński: La méthode de projeter les circulateurs de ferrite à large bande en lignes de ruban	539
A. Smoliński: Amplificateur d'impulsions avec circuit résonant unique à Q petit	95
F. Sondi: Le choix des paramètres de la ligne d'alimentation des fours à l'arc asymétriques pour acier	511

J. Tabin: Une nouvelle méthode de l'analyse des phénomènes transitoires dans les nonlinéaires circuits	423
J. Turowski: La méthode généralisée de calculer des pertes de dissipation dans les parties d'acier des constructions	177
A. Wąsowski: Fluctuations de tension provoquées par la marche de fours à arc dans les réseaux électriques alimentant les aciéries	397
R. Żuberek: Certaines problèmes liés avec effets de retard dans échantillons sphériques de ferrite	555

INHALT

J. Borkowski: Vergleich verschiedener Methoden der stufenlosen Drehzahlregelung der Induktionsmotoren in technischer und ökonomischer Hinsicht	159
Z. Celiński: Elektrische Parameter des MHD-Generators mit verschiedener Verbindungsweise der Elektroden	9
R. Gessing: Differenzgleichungen nichtlinearer Impulssysteme und ihre Anwendung zur Berechnung von Verläufen in diesen Systemen	35
Ł. Gronau: Die Abschätzung des Geräuschspannungsabstandes der gemischten Vorgänge aus dem mehrkanaligen Studiomagnettongerätes in konventionellen und mit Umformung arbeitenden Registriersystemen	565
M. Kozłowski: Die Grenzdaurbelastbarkeit des Transformators „mit getrennten Wicklungen“ bei ungleichmässiger Belastung der Wicklungen	467
B. Licznarski: Verlustwinkelnormale mit konzentrierten und verteilten RC Parametern	609
J. Mielnicki: Magnon-Phononwechselwirkung in ferromagnetischen Kristallen beim Parallelpumpverfahren	59
J. Osowski: Die distributionale Operatorenrechnung	199
J. Owczarek: Micromoteur à hystérésis-permasyn	629
T. Postupolski, M. Piotrkiewicz: Abbildung des magnetischen Zustandes von Mn-Zn-Ferriten	311
T. Postupolski, J. Kulikowski: L'étude de la stabilité de la structure magnétique des ferrites perminvar	595
O. Przesmycki: Neues — Schablonenverfahren für die Ermittlung der Parameternwerte von Wellenwiderstandsfunktionen der elektrischen Wellenfiltern	223
A. Puchała, B. Wachta: Die Untersuchung schiefbelasteten Elektroenergiesystems mit Hilfe des Begriffes der Spannungstransmittanz	675
J. Sawicki: Linearisierung der Messcharakteristik der unabgeglichenen Brücke mit nicht proportionellen Messfühler	257
J. Tabin: Eine Methode zur Berechnung von Ausgleichsvorgängen in nichtlinearen Kreisen	423
J. Turowski: Die allgemeine Methode der Berechnung der Wirbelstromverluste in massiven Konstruktionseisenteilen	177
A. Wąsowski: Spannungsschwankungen verursacht durch den Betrieb von Lichtbogenöfen in elektrischen Versorgungsnetzen für Stahlwerke	397

СОДЕРЖАНИЕ

Т. Бэлдовски: Анализ перегрева стальных конструкций в электростанциях, вызванного переменными полями токов короткого замыкания	487
Е. Борковски: Сравнение различных способов плавного регулирования вращательной скорости асинхронных двигателей по технико-экономическим соображениям	159
Е. Брожина: Коэффициент шума в многоканальных усилителях	299
А. Вонсовски: Колебания напряжения, вызванные работой дуговых печей в электрических цепях, питающих сталеплавильные заводы	397

Р. Гессинг: Разностные нелинейные уравнения импульсных систем и их использование для исчисления переходных процессов	35
Л. Гро на у: Оценка динамики микстированных записей многодорожечного студийного магнитофона обычной системы и с преобразованием	565
Г. Гу ль ч: Трансформация входного импеданса в полуволновых петлевых диполях из нескольких элементов	133
Р. Ж у б е р е к: Некоторые проблемы связанные с запаздыванием в ферритовых сферических образцах	555
М. К о з л о в с к и: Предельная нагрузочная способность трансформатора с расщепленными обмотками при неравномерной нагрузке обмоток	467
Я. Л е щ и н ь с к и: Метод универсальных характеристик погрешностей трансформаторов постоянного тока	447
Б. Л и ч н е р с к и: Эталоны тангенса угла потерь конденсаторов со сосредоточенными и распределенными параметрами	609
Е. М е л ь н и ц к и: Взаимодействие магнон-фонон в ферромагнитных кристаллах в условиях „параллельного качания”	59
М. Н а л э н ч, Я. Ш у к а л ь с к и: Некоторые технические применения магнитооптического явления Фарадея	77
Е. О с е в с к и: Операционные исчисления в области обобщенных функций	199
Е. О в ч а р е к: Гистерезисно-пермассинный микроэлектродвигатель	629
Т. П о с т у п о л ь с к и, М. П и о т р к е в и ч: Восстановляемость магнитного состояния ферритов Ми-Зи	311
Т. П о с т у п о л ь с к и, Я. К у л и к о в с к и: Исследования временной устойчивости перминвар-ферритов	595
М. П с т р о к о н ь с к и: Произведение структурных чисел	3
А. П у х а л а, Б. В а х т а: Анализ несимметричной электроэнергетической системы с помощью понятия преобразования напряжения	675
О. П ш е с м ы ц к и: Новый графическо-аналитический метод определения значений параметров функций характеристических сопротивлений электрических фильтров ГС, основанный на применении шаблонов	223
Е. С а в и ц к и: Линейность характеристики моста с непропорциональным датчиком	257
Л. С м о ч и н ь с к и: Проектирование широкополосных ферритных циркуляторов полоскового типа	539
А. С м о л и н ь с к и: Импульсный усилитель с одним резонансным контуром малой добротности	95
Ф. С о н д и й: Вопросы выбора параметров „короткой сети” асимметрических дуговых сталеплавильных установок	511
Ю. Т а б и н: Метод анализа переходных процессов в нелинейных цепях.	423
Я. Т у р о в с к и: Обобщенный метод расчета потерь рассеяния в стальных элементах конструкций	177
З. Ц е л и н ь с к и: Электрические параметры МГД генератора в зависимости от электрического соединения электродов	9
М. Я б л о н с к и: Работа трехфазного трансформатора при несимметричной регуляции коэффициента трансформации	363
Т. Я н к о в с к и, В. Л о н г в и н ь с к и: Конструирование тракта цифровой магнитной записи на примере вычислительной машины УМЦ-10	517

RADA REDAKCYJNA

Prof. Tadeusz Cholewicki, Prof. Bolesław Dubicki, Prof. Bolesław Konorski, Prof. Stanisław Ryżko
Prof. Tadeusz Zagajewski

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor Naczelny: Prof. Witold Nowicki, Sekretarz: Juliusz Mierzejewski

ADRES REDAKCJI

*Warszawa, Politechnika, Plac Jedności Robotniczej 1, Katedra Teletransmisji Przewodowej, Gmach
Elektroniki, tel. 21—007 w. 794*

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA, MIODOWA 10

INSTYTUT TECHNOLOGII ELEKTRONOWEJ
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XIV · ZESZYT 1

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1968

RADA REDAKCYJNA

PROF. TADEUSZ CHOLEWICKI, PROF. BOLESŁAW DUBICKI, PROF. BOLESŁAW KONORSKI,
PROF. STANISŁAW RYŻKO, PROF. TADEUSZ ZAGAJEWSKI

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor Naczelny

PROF. WITOLD NOWICKI

Sekretarz

JULIUSZ MIERZEJEWSKI

ADRES REDAKCJI

*Warszawa, Politechnika, Plac Jedności Robotniczej 1
Katedra Teletransmisji Przewodowej, Gmach Elektroniki,
pokój 483, tel. 21-007 w. 794*

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

Warszawa, Miodowa 10

Nakład 700 (539+161)	Oddano do składania 10.XI. 1967 r.
Ark. wyd. 12,25; ark. druk. 12,75+1 wkł.	Podpisano do druku w lutym 1968 r.
Papier druk. sat. kl. III, 80 g, 70×100	Druk ukończono w marcu 1968 r.
Zamówienie nr 1892/67	Cena zł 40.— N-58

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

MACIEJ PSTROKOŃSKI

Iloczyn liczb strukturalnych

Rękopis dostarczono 15.9.1966

W pracy podano definicję tzw. liczby strukturalnej boolowskiej oraz definicję iloczynu liczb strukturalnych boolowskich. Podano również algorytm iloczynu liczb strukturalnych w tzw. postaci naturalnej i boolowskiej sformułowany w symbolice algebry logiki. Przedstawiono procedurę w wersji publikacyjnej języka Algol 60 oraz podprogram w języku W-20 (wewnętrznym języku maszyny cyfrowej UMC-1) realizujące ten algorytm.

Definicja iloczynu liczb strukturalnych dla liczb strukturalnych w postaci tabel liczb naturalnych została przedstawiona w pracy [1]. W poniższej pracy podano algorytm iloczynu liczb strukturalnych dla liczb strukturalnych w postaci rodzin zbiorów równej mocy o elementach będących liczbami naturalnymi oraz w postaci zbiorów, których elementami są ciągi o wyrazach przyjmujących wartości 0 lub 1. Algorytm ten sformułowany jest przy pomocy metod i symboliki algebry logiki. Dla tak sformułowanego algorytmu podano program w języku Algol 60 oraz w języku wewnętrznym W-20 dla maszyny UMC-1, realizujący iloczyn liczb strukturalnych. Podano również ścisłą definicję tzw. liczby strukturalnej boolowskiej.

Liczbą strukturalną w postaci naturalnej będziemy nazywali rodzinę A zbiorów a równej mocy o elementach będących liczbami naturalnymi.

Przyporządkujemy w sposób dowolny elementom a zbioru A kolejne liczby naturalne $1, 2, \dots, i, \dots, n$ oraz elementom α zbioru a kolejne liczby naturalne $1, 2, \dots, t, \dots, k$.

Możemy więc liczbę strukturalną przedstawić przy pomocy tabeli. Postać tabeli jest dowolna. W kolumnach tabeli można umieścić elementy α_{it} zbiorów a_i jak również w wierszach tabeli można przedstawić elementy α_{it} zbiorów a_i .

Liczbą strukturalną w postaci boolowskiej będziemy nazywali zbiór A^b n różnych ciągów a^b (gdzie n jest liczbą naturalną lub zerem) o następujących własnościach:

1. elementy α_k^b ciągów a^b przyjmują wartość 0 lub 1.
2. każdy z ciągów ma tę samą ilość elementów k (k jest liczbą naturalną.)
3. ilość elementów równych 1 jest we wszystkich n ciągach jednakowa.

Liczbę strukturalną w postaci boolowskiej można przedstawić w formie tabeli boolowskiej. Postać tabeli jest dowolna. Elementy ciągów mogą być przedstawione w kolumnach tabeli i wiersz tabeli o numerze t może odpowiadać elementom ciągów o numerach $\tau = t$ przy zapisie elementów ciągu w kolejności zgodnej z kolejnością numeracji wierszy tabeli lub przy zapisie w kolejności przeciwnej elementom ciągów o numerach $k - \tau$. Podobnie elementy ciągów mogą być przedstawione w wierszach tabeli w kolejności zgodnej z numeracją kolumn lub przeciwnej. Wszystkie te postacie zapisu są oczywiście równoważne.

Dla wygody autor będzie nazywał liczbę strukturalną w postaci naturalnej liczbą strukturalną naturalną, a liczbę strukturalną w postaci boolowskiej liczbą strukturalną boolowską.

Zachodzi wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie między liczbami strukturalnymi w postaci naturalnej i boolowskiej określone w sposób następujący:

1. Ilość wyrazów ciągu w liczbie strukturalnej boolowskiej odpowiadającej liczbie strukturalnej naturalnej jest równa maksymalnej liczbie naturalnej występującej w liczbie strukturalnej naturalnej.

2. Elementowi a_i w liczbie strukturalnej naturalnej odpowiada ciąg a_i^b w liczbie strukturalnej boolowskiej.

3. Elementom α_{it} w zbiorze a_i liczby strukturalnej naturalnej odpowiadają w liczbie strukturalnej boolowskiej wyrazy α_{it}^b ciągu a_i^b , dla których $\tau = \alpha_{it}$, przyjmujące wartości 1, a wszystkie pozostałe elementy α_{it}^b są równe 0, czyli:

$$\begin{aligned}\alpha_{it}^b &= 1 & \text{dla} & \quad \tau = \alpha_{it}, & \text{gdzie} & \quad 1 \leq t \leq k, \\ \alpha_{it}^b &= 0 & \text{dla} & \quad \tau \neq \alpha_{it}.\end{aligned}$$

Przy posługiwaniu się maszynami cyfrowymi, ze względu na ekonomię wykorzystania miejsca w pamięci oraz szybkość działań, wygodne są liczby strukturalne boolowskie. Ciąg a_i^b o elementach α_{it}^b przyjmujących wartości 1 lub 0 zapisywany jest na kolejnych bitach „u” komórek pamięci, gdzie:

$$\begin{aligned}u &= E\left(\frac{k}{r}\right) + Z, & \text{gdzie} & \quad Z = 1, & \text{gdy} & \quad \frac{k}{r} - E\left(\frac{k}{r}\right) > 0, \\ & & & & & Z = 0, & \text{gdy} & \quad \frac{k}{r} - E\left(\frac{k}{r}\right) = 0,\end{aligned}\tag{1}$$

r — ilość bitów słowa maszynowego.

W przypadku ręcznych zapisów wygodniejsza jest postać naturalna liczby strukturalnej.

W pracy [1] została sformułowana definicja iloczynu liczb strukturalnych w postaci tabel liczb naturalnych:

„Iloczynem liczb strukturalnych A i B jest liczba strukturalna, której kolumny są sumami mnogościowymi wszystkich możliwych kombinacji kolumn liczby A i B z wyjątkiem największej parzystej liczby kolumn identycznych i kolumn, w których którykolwiek element powtarza się (i która innych kolumn nie zawiera)”.

Poniżej podano algorytm iloczynu liczb strukturalnych dla liczb strukturalnych w postaci rodzin zbiorów równej mocy o elementach będących liczbami naturalnymi, czyli dla liczb strukturalnych w postaci naturalnej oraz dla liczb strukturalnych w postaci boolowskiej. Algorytm ten jest równocześnie definicją iloczynu liczb strukturalnych boolowskich.

Oznaczmy przez A i B liczby strukturalne, a przez C liczbę strukturalną, która jest ich iloczynem. Przyporządkujmy elementom zbioru A kolejne liczby naturalne $1, 2, \dots, i, \dots, n$, elementom zbioru B kolejne liczby naturalne $1, 2, \dots, j, \dots, m$, elementom zbioru C kolejne liczby naturalne $1, 2, \dots, p, \dots, w$.

Oznaczmy przez D iloczyn kartezjański dwóch liczb strukturalnych A i B :

$$D = A \times B.$$

D jest więc zbiorem wszystkich uporządkowanych par $\langle a_i, b_j \rangle$.

Uporządkujemy zbiór D przy pomocy relacji porządkującej elementy zbioru, określonej w sposób następujący:

Element $\langle a_r, b_s \rangle$ poprzedza element $\langle a_i, b_j \rangle$, jeżeli spełniony jest jeden z dwóch warunków:

1. $r < i$,
2. $r = i, \quad s < j$.

Oznaczmy przez D^1 podzbiór uporządkowanego zbioru D określony w sposób następujący:

element $\langle a_i, b_j \rangle$ zbioru uporządkowanego D należy do podzbioru D^1 , jeżeli:

dla liczb strukturalnych A i B w postaci naturalnej spełniona jest między a_i a b_j oraz między parą $\langle a_i, b_j \rangle$ a wszystkimi parami poprzedzającymi $\langle a_r, b_s \rangle$ zależność dana wzorem (2a)¹⁾.

$$[(a_i \cap b_j) = \emptyset] \wedge \left[\bigwedge_{r=1}^{i-1} \bigwedge_{s=1}^j [(a_i \cup b_j) = (a_r \cup b_s)] \right] \wedge \left[\bigwedge_{r=i}^{j-1} \bigwedge_{s=1}^j [(a_i \cup b_j) = (a_r \cup b_s)] \right] = 1, \quad (2a)$$

to znaczy przy spełnieniu (2a): $\langle a_i, b_j \rangle \in D^1$.

Dla liczb strukturalnych $A_{n,k}^b$ i $B_{m,l}^b$ w postaci boolowskiej spełniona jest między elementami a_i^b a b_j^b oraz między parą $\langle a_i^b, b_j^b \rangle$ a wszystkimi poprzedzającymi parami $\langle a_r^b, b_s^b \rangle$ zależność dana wzorem (2b) (elementy a_i^b i b_j^b są ciągami o wyrazach $\alpha_{i\tau}^b$ i $\beta_{j\tau}^b$, które przyjmują wartości 0 lub 1).

$$\left[\bigvee_{\tau=1}^{\min(k,l)} (\alpha_{i\tau}^b \wedge \beta_{j\tau}^b) \right] = 0 \wedge \left[\bigwedge_{r=1}^{i-1} \bigwedge_{s=1}^j \left[\bigwedge_{\tau=1}^{\max(k,l)} [(\alpha_{i\tau}^b \vee \beta_{j\tau}^b) \equiv (\alpha_{r\tau}^b \vee \beta_{s\tau}^b)] \right] \right] \wedge \left[\bigwedge_{r=i}^{j-1} \bigwedge_{s=1}^j \left[\bigwedge_{\tau=1}^{\max(k,l)} [(\alpha_{i\tau}^b \vee \beta_{j\tau}^b) \equiv (\alpha_{r\tau}^b \vee \beta_{s\tau}^b)] \right] \right] = 1, \quad (2b)$$

to znaczy przy spełnieniu (2b): $\langle a_i^b, b_j^b \rangle \in D^1$.

Kolejnym elementem $\langle a_i, b_j \rangle$ zbioru uporządkowanego D^1 przyporządkujemy kolejne liczby naturalne p .

Iloczynem liczb strukturalnych A i B jest liczba strukturalna C będąca odwzorowaniem zbioru D^1 określonym w sposób następujący: każdemu elementowi $\langle a_i, b_j \rangle_p \in D^1$ odpowiada element $c_p \in C$ będący dla liczb strukturalnych w postaci naturalnej sumą zbiorów a_i i b_j

$$c_p = a_i \cup b_j, \quad (3a)$$

a dla liczb strukturalnych w postaci boolowskiej element c_p^b jest ciągiem o elementach $\gamma_{p\tau}^b$ będących sumami logicznymi elementów $\alpha_{i\tau}^b$ i $\beta_{j\tau}^b$

$$\gamma_{p\tau}^b = \alpha_{i\tau}^b \vee \beta_{j\tau}^b. \quad (3b)$$

1) Zastosowano oznaczenia: $\bar{a}$ = „nie a ” — negacja,

$\vee$ — suma logiczna,

$\wedge$ — iloczyn logiczny,

$\equiv$ — tożsamość.

Bardziej zwięźle możemy sformułować iloczyn liczb strukturalnych w sposób następujący: iloczynem liczb strukturalnych A i B jest liczba strukturalna C , będąca odwzorowaniem [określonym zależnością (3a) dla liczb strukturalnych naturalnych, a (3b) — dla liczb strukturalnych boolowskich] podzbioru D^1 [określonego przez warunek podany wzorem (2a) dla liczb strukturalnych naturalnych, a (2b) dla liczb strukturalnych boolowskich, jaki muszą spełniać elementy $\langle a_i, b_j \rangle$ zbioru D , aby należały do podzbioru D^1] iloczynowi kartezjańskiego D liczb A i B .

Poniżej podano w wersji publikacyjnej języka algol 60 procedurę niefunkcyjną realizującą powyższy algorytm iloczynu liczb strukturalnych.

Przed wywołaniem procedury w pamięci maszyny muszą znajdować się liczby strukturalne a i b oraz musi być zadeklarowana tabela boolowska c , na miejsce której będzie umieszczana uzyskana w wyniku działania procedury liczba strukturalna c będąca iloczynem liczb strukturalnych a i b .

Liczby strukturalne a , b i c są tabelami boolowskimi, o których dla zwiększenia przejrzystości programu założono, że mają tę samą ilość wierszy. Pierwsze wskaźniki i , j oraz p liczb strukturalnych $a[i, t]$, $b[j, t]$ oraz $c[p, t]$ przebiegają odpowiednie wartości:

i od 1 do $\max a$,

j od 1 do $\max b$,

p od 1 do $\max c$,

a wskaźnik drugi t dla wszystkich tych liczb przebiega wartości od 1 do $\max t$.

Po wykonaniu iloczynu, p jest równe ilości drzew (liczby strukturalnej c) zwiększonej o jeden.

procedure II strukt ($a, b, c, p, \max t, \max a, \max b, \max c$);

integer $\max t, \max a, \max b, \max c$;

boolean array a, b, c ;

begin integer i, j, t ;

$p := 1$;

for $i := 1$ step 1 until $\max a$ do

for $j := 1$ step 1 until $\max b$ do

begin integer e ;

for $t := 1$ step 1 until $\max t$ do

if $a[i, t] \wedge b[j, t]$ then go to Et2;

for $t := 1$ step 1 until $\max t$ do

$c[p, t] := a[i, t] \vee b[j, t]$;

for $e := 1$ step 1 until $p - 1$ do

begin integer w ;

for $t := 1$ step 1 until $\max t$ do

if $\neg (c[p, t] \equiv c[e, t])$ then go to Et1;

for $w := e$ step 1 until $p - 2$ do

for $t := 1$ step 1 until $\max t$ do

$c[w, t] := c[w + 1, t]$;

$p := p - 1$;

go to Et2;

Et 1: end koniec eliminacji identycznych drzew;

$p := p + 1$;

Et 2: end koniec tworzenia iloczynu strukturalnego i -tego drzewa liczby a przez j -te drzewo liczby b ;

end;

Program iloczynu liczb strukturalnych w języku W-20 dla maszyny UMC1 zamieszczono w dodatku. Program napisano w adresach względnych. Zajmuje on 172 komórki. Liczby strukturalne zapisane są w pamięci w postaci boolowskiej. Ilość komórek na jeden element liczby strukturalnej, czyli jeden ciąg o elementach 0 lub 1, określona jest wzorem (1). Łącznik do podprogramu ma następującą postać:

X.

C+ (adres początku podprogramu).

V + adres 1-szej komórki, od której umieszczono liczbę A .

V + „ „ „ „ „ „ „ „ B .

V + „ „ „ „ „ „ program umieszcza liczbę C .

V + adres ostatniej komórki, w której można umieszczać liczbę C .

V + ilość komórek na element (ciąg zer i jedynek) liczby A . (k)

V + „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ B . (l)

V + „ „ elementów liczby A .

V + „ „ „ „ B .

Na zakończenie pragnę podziękować Doc. drowi St. Bellertowi za udzielenie cennych uwag.

Politechnika Warszawska

Katedra Automatyki i Telemechaniki

WYKAZ LITERATURY

1. Bellert S.: Topological Analysis and Synthesis of Linear Systems. — Journal of the Franklin Institute, Vol. 274, No 6, December, 1962. (Tłumaczenie: Topologiczna analiza i synteza układów liniowych. — Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej, Elektryka nr 37, 1964).

M. PSTROKOŃSKI

PRODUCT OF STRUCTURAL NUMBERS

Summary

The paper contains the definition of the boolean structural number and the definition of the product of boolean structural numbers. There is also given the algorithm of the product of the structural numbers. The paper presents the procedure in the published version of the Algol language which realized the algorithm.

M. PSTROKOŃSKI

LE PRODUIT DES CHIFFRES STRUCTURELS

Résumé

Dans l'article on a présenté: définition des chiffres structurels de Boole, définition du produit des chiffres structurels de Boole, algorithme d'obtenir le produit mentionné ci-dessus et procédé dans langage algorithmique Algol 60 servant à calculer ce produit ainsi que sous-programme dans langage W-20 (langage intérieur de la calculatrice digitale UMC-1) réalisant l'algorithme.

М. ПСТРОКОНЬСКИ

ПРОИЗВЕДЕНИЕ СТРУКТУРНЫХ ЧИСЕЛ

Резюме

В статье приведены: определение структурных булевых чисел, определение произведения структурных булевых чисел, алгоритм получения произведения структурных булевых чисел и процедура в алгоритмическом языке Алгол 60 для получения произведения структурных булевых чисел.

Dodatek

Podprogram iloczynu liczb strukturalnych
w kodzie W-20 dla maszyny UMC-1

f

```

wc.wcov+25,+29,pov+79,wcov+27,+53,+13,pov+14,+16,wcov+19,+23
pov+33,+165,r+0.ir.pob+170,rb.pob+169,po,r.po+170,q.po+166,
tv+23,pov+159,rv.pov+167,rv.pov+168,rv.pov+40,+62,+171,tv.pov+151,
rv+167,pov+41,+61,tv+170,pov+44,r.o.wn.c+151,scx.povb+44,rcvb+41,
povb+41,rcvb+40,povb,cb+40,rv+169,yv+168,ix.cb+57,wn.h.rv+168,
pov+64,tv+169,pov+65,r.rm.a.po.scx.povb+65,rcvb+62,povb,rcvb+64,
povb+64,rcvb+61,povb,cb,rn+166,c+77,c+146,tv+166,pov+139,rv.
pov+86,rv+168,pov+85,tv+169,pov+88,r.un.c+139,scx.povb+88,rcvb+86,
povb+86,rcvb+85,povb,cb,rcv+86,pov+103,iv+169,pov+104,rcv+139,
pov+112,tv+169,pov+105,r.po.scx.povb+105,rcv+104,pov,
rcv+103,pov,cb,scx.povb+112,cb+103,rvu+168,iv+169,pov+124,+168,
s-2.pov+130,tv+169,pov+125,q.po.scx.povb+125,rcvb+124,povb,cb+123,
scx.povb+130,rcvb+124,povb,cb+121,s-1.yv+166,pov,c+151,scx.
povb+139,rvb+168,povb+85,rcvb+86,povb,cb+85,rcv+166,pov,rv+168,
vv+169,pov+168,scx.povb+151,rvb+171,yvb+169,povb+40,+62,+171,
cb+35,scx.povb+159,rvb+169,yvb+167,povb,cb+29,si.v+0.....

```

ZDZISŁAW CELIŃSKI

Parametry elektryczne generatora magneto hydrodynamicznego w zależności od elektrycznego połączenia elektrod

Rękopis dostarczono 3.10.1966

W artykule przeanalizowano parametry elektryczne generatora magneto hydrodynamicznego prądu stałego z dzielonymi elektrodami dla różnych systemów połączeń elektrod oraz określono optymalne połączenia. W rozważaniach przyjęto stałe parametry dynamiczne gazu, stały przekrój poprzeczny kanału generatora, stałą indukcję pola magnetycznego oraz jednorodność pól elektrycznych i gęstości prądu w całej objętości kanału generatora. Obliczono wielkości elektryczne „wewnętrzne” (gęstość prądu elektrycznego, pola elektryczne, gęstość mocy elektrycznej itd.) w kanale generatora oraz „zaciskowe” (prąd, napięcie na zaciskach, moc wytwarzana, oporność wewnętrzna itd.). Rozważania zilustrowano przykładem obliczeniowym.

SPIS WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

- $\bar{B}$ — indukcja pola magnetycznego, w Vs/m²,
- $\bar{E}$ — natężenie pola elektrycznego, w V/m,
- $\bar{E}^*$ — natężenie pola elektrycznego mierzone w układzie ruchomym w V/m
- I — natężenie prądu elektrycznego, w A,
- K — współczynnik obciążenia,
- P — moc elektryczna wytwarzana, w W,
- P_m — moc hamowania gazu, w W,
- Q — moc tracona na ciepło Joule’a, w W,
- R_w — oporność wewnętrzna generatora, w Ω ,
- R_z — oporność obwodu zewnętrznego, w Ω ,
- U — napięcie na zaciskach generatora, w V,
- a — podziałka połączeń elektrod, w m,
- b — szerokość kanału (w kierunku osi z), w m,
- h — wysokość kanału, w m,
- $\bar{j}$ — gęstość prądu elektrycznego, w A/m²,
- l — długość kanału generatora, w m,
- n — liczba samodzielnych obwodów prądowych,
- p — gęstość mocy elektrycznej wytwarzanej, w W/m³,
- p_m — gęstość mocy hamowania gazu, w W/m³,
- q — gęstość mocy traconej na ciepło Joule’a, w W/m³,
- s — długość sekcji, w m,

- $\bar{w}$ — prędkość przepływu gazu, w m/s,
 α — parametr zdefiniowany równaniem (5),
 β — parametr Halla,
 ξ — parametr zdefiniowany równaniem (19),
 Φ — kąt zdefiniowany na rys. (4),
 η — sprawność elektryczna,
 σ — elektryczna przewodność właściwa gazu, w $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$,
 ϱ — parametr zdefiniowany równaniem (23),
 Ψ — kąt zdefiniowany na rys. (13),

Indeksy

- * — wielkości w układzie ruchomym,
 ** — jednostki podstawowe,
 ' — wielkości względne,
 $_r$ — wielkości elektryczne odnoszące się do jednego obwodu odbiorczego,
 $_o$ — wielkości w biegu jałowym generatora,
 $_z$ — wielkości w stanie zwarcia generatora,
 x, y — składowe wektorów w kierunku osi x i y .

1. WSTĘP

System elektrycznego połączenia elektrod odgrywa zasadniczą rolę w procesie odbierania mocy elektrycznej z generatora określając wielkość i parametry elektryczne odbieranej mocy. W artykule przeanalizowano parametry elektryczne generatora w różnych systemach połączeń elektrod oraz określono optymalne połączenia.

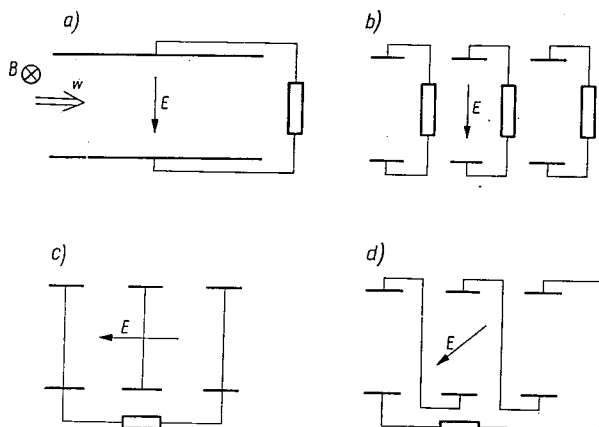
Generatory magnetohydrodynamiczne prądu stałego z liniowym przepływem gazu mogą być wykonane z dwoma zasadniczymi rodzajami elektrod: elektrodami ciągłymi (generator typu A) oraz elektrodami dzielonymi na izolowane od siebie segmenty (rys. 1).

W generatorach z elektrodami dzielonymi istnieje możliwość łączenia ich elektrycznie w różnoraki sposób. Najbardziej znane systemy połączeń to generator typu B (zwany też generatorem pracującym w układzie Faradaya), w którym każda para elektrod pracuje na niezależny, izolowany elektrycznie od pozostałych obwodów obciążenia, oraz generator typu C (zwany też generatorem pracującym w układzie Halla lub krótko generatorem Halla), w którym naprzeciwległe elektrody są parami zwarte, a oporność obciążenia przyłączona jest do dwu skrajnych elektrod.

Te trzy przedstawione typy generatorów (A, B i C) zostały opisane i przeanalizowane w klasycznej już pracy Harrisa i Cobine'a [5].

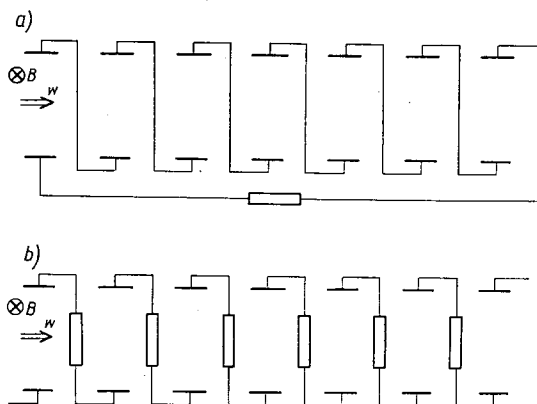
Myśl szeregowego połączenia elektrod (rys. 1) po raz pierwszy poddał Rosa [7], podstawowe obliczenia wykonał Montardy [6], Bürgel [1] podał graficzną metodę określania mocy i sprawności, Celiński [2], [3], [4] przeprowadził bardziej wyczerpującą analizę tego typu generatora.

W pracy sklasyfikowano (za [2]) typy połączeń generatora, rozróżniając dwa podstawowe typy (rys. 2):



Rys. 1. Typy generatorów MHD

a) typ A — generator z ciągłymi elektrodami, b) typ B — generator z dzielonymi elektrodami pracujący w układzie Faradaya, c) typ C — generator z dzielonymi elektrodami pracujący w układzie Halla, d) generator z dzielonymi elektrodami połączonymi szeregowo



Rys. 2. Generatory typu I i II

a) generator typu I, b) generator typu II

typ I: kierunek wektora pola elektrycznego $\vec{E}$ jest określony jedynie przez sposób elektrycznego połączenia elektrod (parametr α) i jest niezależny od współczynnika obciążenia K i parametru Halla β . Szeregowo połączone elektrody umożliwiają pracę z jednym lub z kilku niezależnymi obwodami.

typ II: kierunek wektora gęstości prądu $\vec{j}$ jest określony jedynie przez sposób elektrycznego połączenia elektrod (parametr ϱ) i jest niezależny od współczynnika obciążenia K i parametru Halla β . Liczba niezależnie pracujących obwodów odbiorczych odpowiada liczbie par elektrod.

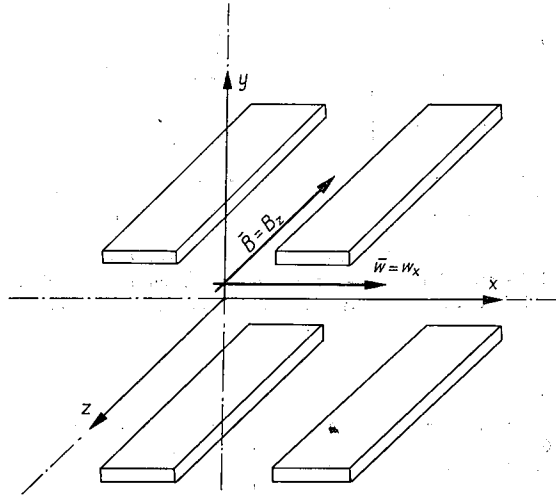
Wspomniane wyżej generatory typów A, B i C mogą być traktowane jako szczególne przypadki generatorów typów I i II.

W rozważaniach przyjęto następujące założenia:

— parametry gazodynamiczne są stałe w całej objętości komory generatora i w czasie.

W wyniku również przewodność elektryczna gazu jest stała;

- przekrój poprzeczny komory generatora jest stały;
- pole magnetyczne wewnątrz komory generatora jest stałe. Pole magnetyczne indukowane przepływem jest pominięte (magnetyczna liczba Reynoldsa, $R_m \ll 1$);
- kanał generatora jest dostatecznie długi ($l/h \gg 1$), tak, że efekty na krańcach kanału mogą być pominięte;



Rys. 3. Układ współrzędnych

- efekty przyelektrodowe są pominięte;
- „poślizg” jonowy (ion slip) jest pominięty ($\beta_e \cdot \beta_i \ll 1$).

Założone kierunki $\vec{w}$ i $\vec{B}$ oraz przyjęty układ współrzędnych pokazano na rys. 3.

2. OKREŚLENIE WIELKOŚCI ELEKTRYCZNYCH „WEWNĘTRZNYCH”

Zależnościami podstawowymi są: uproszczona postać uogólnionego prawa Ohma oraz zależność między polem elektrycznym w ruchomym układzie współrzędnych poruszającym się z prędkością środka ciężkości gazu (układ środka mas) oraz polem elektrycznym w nieruchomym układzie współrzędnych (układ laboratoryjny).

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}^* - \beta \cdot \vec{j} \times \frac{\vec{B}}{B}, \quad (1)$$

$$\vec{E}^* = \vec{E} + \vec{w} \times \vec{B}. \quad (2)$$

Dla przyjętych (rys. 3) kierunków $\vec{w}$ i $\vec{B}$ równanie (1) można zapisać w postaci

$$j_x = \frac{\sigma}{1 + \beta^2} (E_x^* + \beta \cdot E_y^*), \quad (3)$$

$$j_y = \frac{\sigma}{1 + \beta^2} (E_y^* - \beta \cdot E_x^*), \quad (4)$$

przy czym

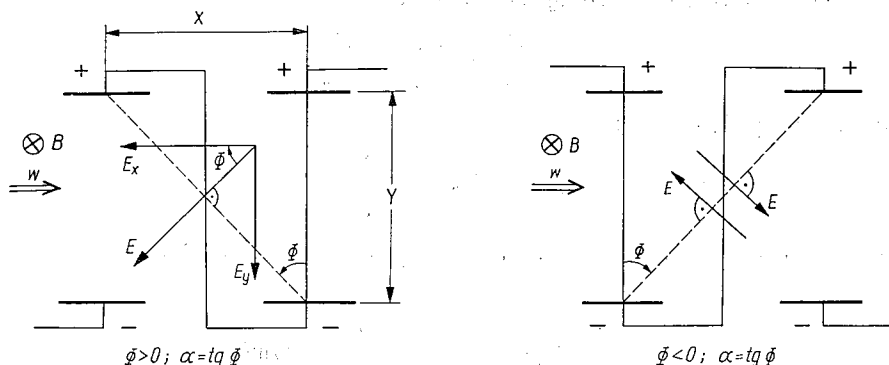
$$E_y^* = w \cdot B - E_y \quad \text{oraz} \quad E_x^* = -E_x.$$

2.1. Generator typu I

W generatorze typu I wektor $\vec{E}$ jest prostopadły do linii łączącej dwie elektrycznie zwarte elektrody (rys. 4) — linia ta jest bowiem linią ekwipotencjalną.

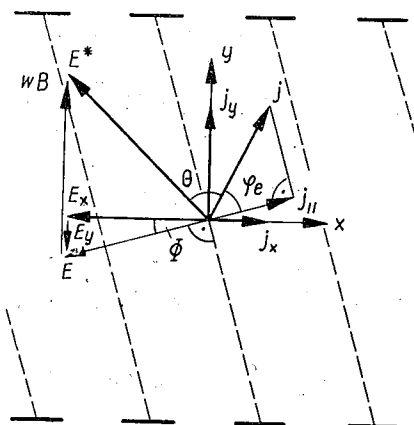
Z rys. 4

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{X}{Y} = \frac{E_y}{E_x} = \alpha. \quad (5)$$



Rys. 4. Definicja parametru α

Generatory typu A i C mogą być traktowane jako graniczne przypadki generatora typu I (generator typu A tylko formalnie i jedynie odnośnie wielkości elektrycznych wewnętrznych).



Rys. 5. Układ wektorów wielkości elektrycznych w generatorze typu I

Z rys. 5 i równania (5) znajdujemy:

$$j_{\parallel} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} (j_x + \alpha \cdot j_y). \quad (6)$$

Z pomocą równań (3), (4) i (6) składową gęstości prądu w kierunku $\bar{E}$ można wyrazić w zależności od E_y :

$$j_{||} = \sigma \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha(1+\beta^2)} \left(\alpha \frac{\alpha+\beta}{1+\alpha^2} wB - E_y \right). \quad (7)$$

Stąd pole elektryczne w biegu jałowym generatora jest

$$E_{yo} = \alpha \frac{\alpha+\beta}{1+\alpha^2} wB, \quad (8)$$

współczynnik obciążenia definiuje się wzorem

$$K = \frac{E}{E_o} = \frac{E_x}{E_{xo}} = \frac{E_y}{E_{yo}}, \quad (9)$$

stąd z pomocą równania (8)

$$K = \frac{E_y}{wB} \cdot \frac{1+\alpha^2}{\alpha(\alpha+\beta)}. \quad (10)$$

Z równań (3), (4), (5) oraz (10) określa się składowe gęstości prądu w kierunkach x i y :

$$j_x = \left[\frac{\beta}{1+\beta^2} (1-K) - \frac{\alpha}{1+\alpha^2} K \right] \sigma wB, \quad (11)$$

$$j_y = \left[\frac{1}{1+\beta^2} (1-K) + \frac{1}{1+\alpha^2} K \right] \sigma wB. \quad (12)$$

Zależność między gęstością mocy hamowania (p_m), gęstością mocy elektrycznej oddawanej na zewnątrz (p) i gęstością mocy traconej na ciepło Joule'a w gazie (q) można otrzymać drogą skalarnego wymnożenia przez $\bar{j}$ obu stron równania wyrażającego prawo Ohma:

$$\bar{j} = \sigma (\bar{E} + \bar{w} \times \bar{B}) - \beta \cdot \bar{j} \times \frac{\bar{B}}{B} \quad \left| \cdot \bar{j} \right.$$

$$-\bar{w} \cdot (\bar{j} \times \bar{B}) = -\bar{j} \cdot \bar{E} + \frac{j^2}{\sigma}, \quad (13)$$

$$p_m = p + q. \quad (14)$$

Gęstość mocy hamowania gazu jest określona jako iloczyn prędkości gazu przez siłę Lorentza:

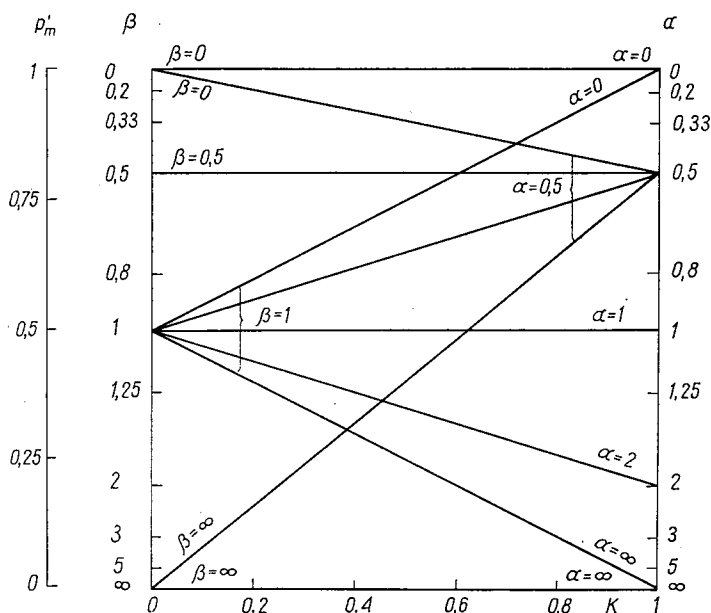
$$p_m = -\bar{w} \cdot (\bar{j} \times \bar{B}) = \bar{j} \cdot (\bar{w} \times \bar{B}) = j_y wB. \quad (15)$$

Z pomocą równania (12) znajdujemy

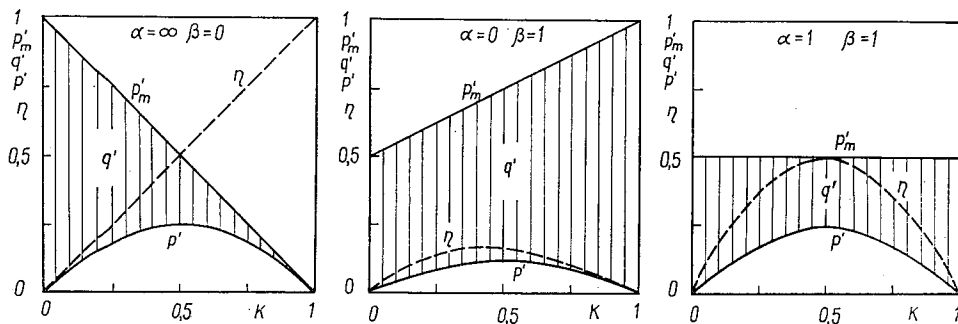
$$p_m = \left[\frac{1}{1+\beta^2} (1-K) + \frac{1}{1+\alpha^2} K \right] \sigma w^2 B^2. \quad (16)$$

Na rys. 6 skonstruowano nomogram służący do bezpośredniego wyznaczania zależności $p_m(K)$ dla określonych wartości α i β . Skale α i β opisanie są funkcjami $1/(1+\alpha^2)$ ewen-

tualnie $1/(1+\beta^2)$. Zależność $p_m(K)$ jest linią prostą; dla $K = 0$ określona jest jedynie wartością β , zaś dla $K = 1$ — wartością α . Odcinki wychodzące z punktu $\alpha = 0$ odpowiadają generatorowi typu C, z punktu $\alpha = \infty$ odpowiadają natomiast generatorowi typu A.



Rys. 6. Zależność gęstości mocy hamowania od obciążenia



Rys. 7. Zależność p_m , p , q i η od obciążenia

Dla

$$\alpha < \beta: p_m \nearrow, \quad \text{gdy} \quad K \nearrow,$$

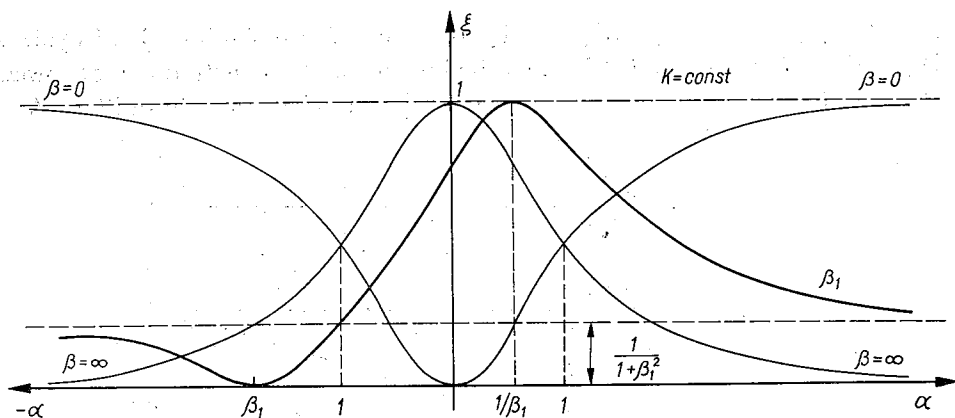
$$\alpha = \beta: p_m = \text{const},$$

$$\alpha > \beta: p_m \searrow, \quad \text{gdy} \quad K \nearrow.$$

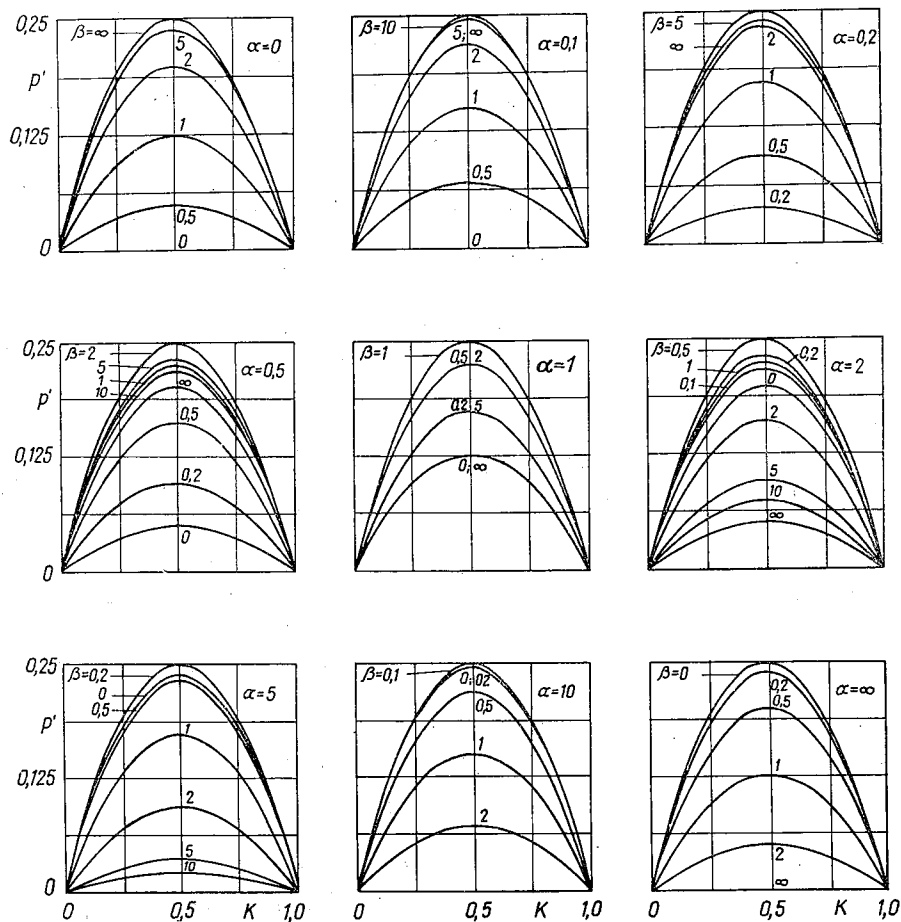
Na rys. 7 pokazano przebieg p_m , p i q w funkcji K dla kilku wartości α i β .

Gęstość mocy elektrycznej oddawanej na zewnątrz jest:

$$p = -\vec{j} \cdot \vec{E} = -jE \cos \angle(\vec{j}, \vec{E}) = j_x \cdot E_x + j_y \cdot E_y. \quad (17)$$



Rys. 8. Zależność współczynnika ξ od parametru α i β



Rys. 9. Gęstość mocy odbieranej w funkcji obciążenia

Warto zwrócić uwagę na warunki pracy przy biegu jałowym generatora $K = 1$. Wtedy $p = 0$ i $j_y \cdot E_y = -j_x \cdot E_x$. Składowa prądu w osi x ma kierunek ujemny (por. równ. 11). Fizycznie oznacza to cyrkulowanie prądu między dwiema elektrycznie zwartymi elektrodami: przez plazmę oraz przewód zwierający.

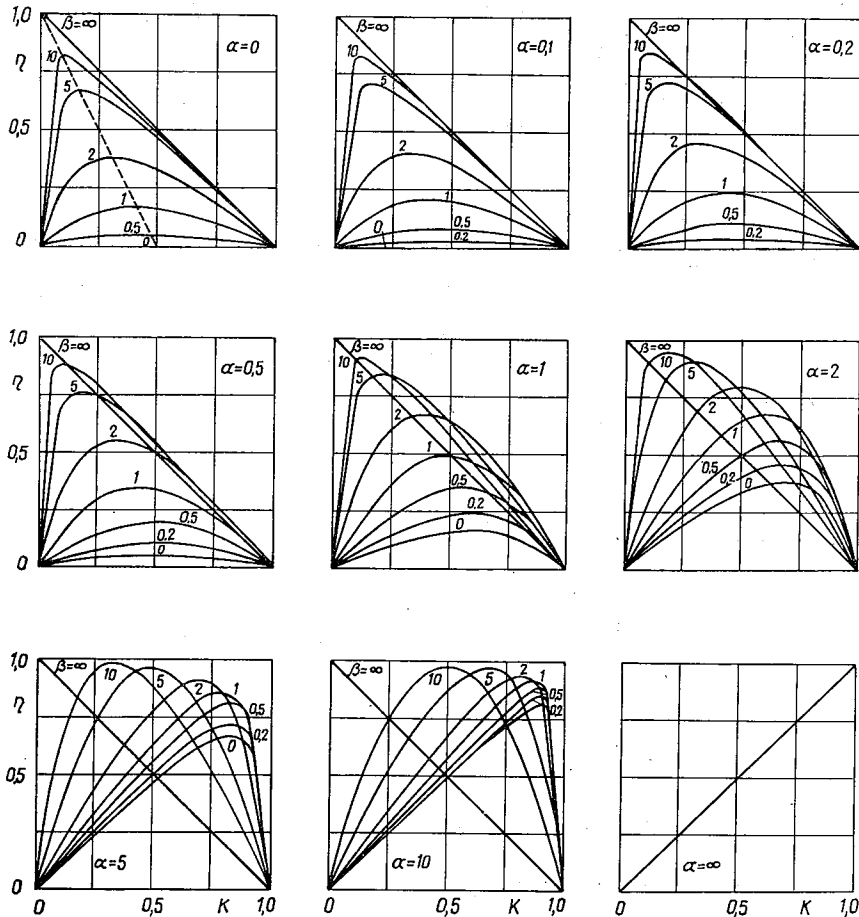
Z równań (5), (10), (11), (12) i (17) mamy:

$$p = \xi K(1-K)\sigma\omega^2 B^2, \quad (18)$$

przy czym

$$\xi = \frac{(\alpha + \beta)^2}{(1 + \alpha^2)(1 + \beta^2)}. \quad (19)$$

Współczynnik ξ wyraża zależność gęstości mocy od parametrów α i β . Przebieg funkcji $\xi(\alpha, \beta)$ pokazano na rys. 8. Największą wartość mocy elektrycznej ($\xi = 1$) uzyskać można dla $\alpha = 1/\beta^1$. Minimum gęstości mocy elektrycznej ($\xi = 0$, $p = 0$) uzyskuje się dla $\alpha = -\beta$. Zależność $\xi(\alpha, \beta)$ jest symetryczna względem α i β .



Rys. 10. Współczynnik sprawności w funkcji obciążenia

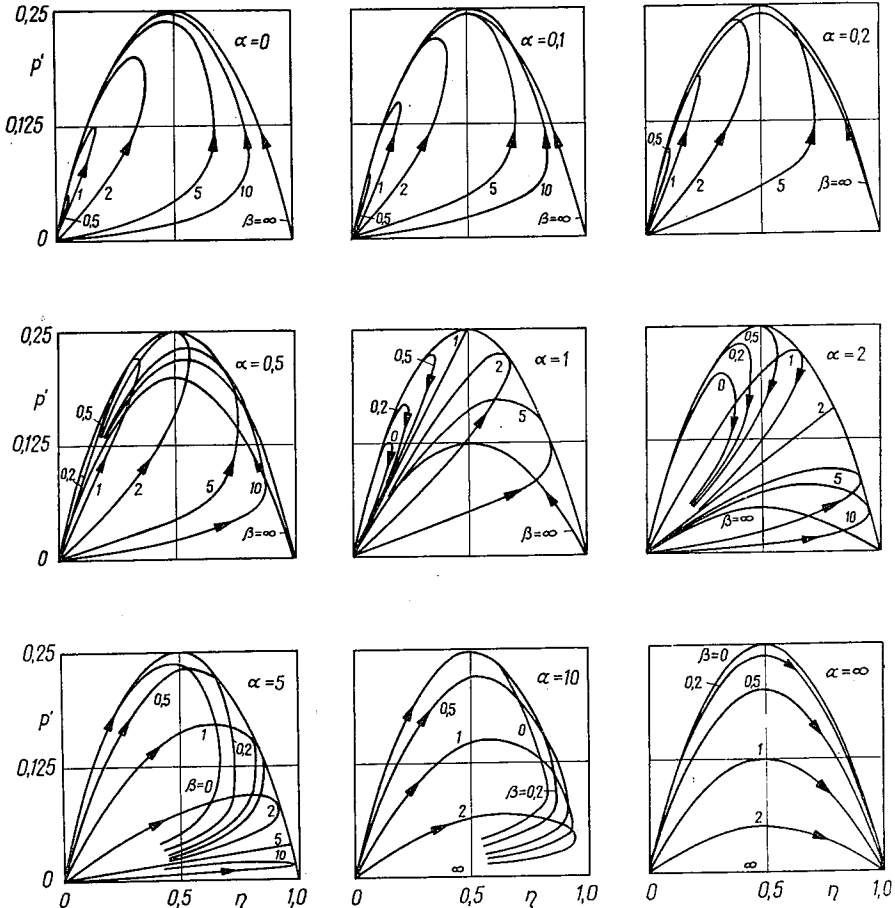
¹⁾ Na warunek ten pierwszy zwrócił uwagę Montardy [6].

Na rys. 9 pokazano przebiegi $p'(K) = p(K)/\sigma w^2 B^2 = \xi K(1-K)$. Są to parabole o wartościach maksymalnych przy $K = 0,5$.

Współczynnik sprawności definiuje się jako stosunek mocy elektrycznej (oddawanej do obwodu zewnętrznego) do mocy hamowania gazu. Z równań (16) i (18) określa się go jako

$$\eta = \frac{p}{p_m} = \frac{\vec{j} \cdot \vec{E}}{\vec{j} \cdot (\vec{w} \times \vec{B})} = K(1-K) \frac{(\alpha + \beta)^2}{(1 + \alpha^2) + K(\beta^2 - \alpha^2)}. \quad (20)$$

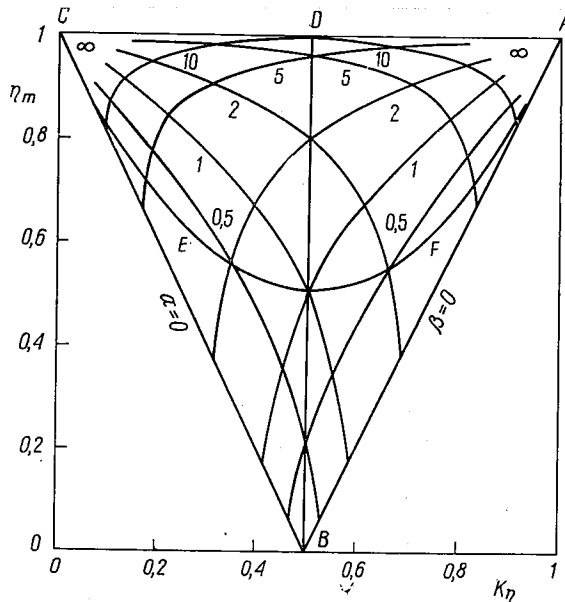
Zależność tę dla różnych wartości α i β pokazano na rys. 10. Na rys. 11 pokazano gęstość mocy elektrycznej w funkcji współczynnika sprawności.



Rys. 11. Gęstość mocy odbieranej w funkcji współczynnika sprawności

Z równania (20) określa się największy możliwy dla danych wartości α i β współczynnik sprawności η_m :

$$\eta_m = K_\eta(1-K_\eta) \frac{(\alpha + \beta)^2}{\sqrt{(1 + \alpha^2)(1 + \beta^2)}}. \quad (21)$$



Rys. 12. Zależność $\eta_m(K_\eta)$

Tablica 1

Wielkości elektryczne „wewnętrzne” w generatorze typu I

		$\alpha = \infty$	$\alpha = 0$
E_x	$\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha^2} KwB$	0	βKwB
E_y	$\alpha \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha^2} KwB$	KwB	0
j_x	$\frac{\beta}{1 + \beta^2} \left(1 - \frac{1 + \alpha\beta}{1 + \alpha^2} \cdot \frac{\alpha + \beta}{\beta} K \right) \sigma wB$	$\frac{\beta}{1 + \beta^2} (1 - K) \sigma wB$	$\frac{\beta}{1 + \beta^2} (1 - K) \sigma wB$
j_y	$\frac{1}{1 + \beta^2} \left(1 - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{1 + \alpha^2} K \right) \sigma wB$	$\frac{1}{1 + \beta^2} (1 - K) \sigma wB$	$\frac{1}{1 + \beta^2} (1 + K\beta^2) \sigma wB$
p	$\frac{\alpha + \beta^2}{(1 + \beta^2)(1 + \alpha^2)} K(1 - K) \sigma w^2 B^2$	$\frac{1}{1 + \beta^2} K(1 - K) \sigma w^2 B^2$	$\frac{\beta^2}{1 + \beta^2} K(1 - K) \sigma w^2 B^2$
K	$\frac{E_y}{wB} \cdot \frac{1 + \alpha^2}{\alpha(\alpha + \beta)} = \frac{E_x}{wB} \cdot \frac{1 + \alpha^2}{\alpha + \beta}$	$\frac{E_y}{wB}$	$\frac{E_x}{\beta wB}$
η	$\frac{(\alpha + \beta)^2}{(1 + \alpha^2) + K(\beta^2 - \alpha^2)} K(1 - K)$	K	$\frac{\beta^2}{1 + K\beta^2} (1 - K) K$
p_m	$\frac{1}{1 + \beta^2} \left(1 - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{1 + \alpha^2} K \right) \sigma w^2 B^2$	$\frac{1}{1 + \beta^2} (1 - K) \sigma w^2 B^2$	$\frac{1}{1 + \beta^2} (1 + K\beta^2) \sigma w^2 B^2$
η_m	$\frac{(\alpha^2 + \beta^2) - 2(\sqrt{(1 + \alpha^2)(1 + \beta^2)} - 1)}{(\alpha - \beta)^2}$	1	$1 - 2 \frac{\sqrt{1 + \beta^2} - 1}{\beta^2}$
K_η	$\frac{(1 + \alpha^2) - \sqrt{(1 + \alpha^2)(1 + \beta^2)}}{\alpha^2 - \beta^2}$	1	$\frac{\sqrt{1 + \beta^2} - 1}{\beta^2}$

Współczynnik obciążenia K_η , przy którym występuje maksymalny współczynnik sprawności, jest określony wyrażeniem:

$$K_\eta = \frac{(1+\alpha^2) - \sqrt{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}}{\alpha^2 - \beta^2}. \quad (22)$$

Rysunek 12 przedstawia wykres służący do bezpośredniego odczytywania wartości η_m i K_η dla określonych wartości α i β . Odcinek CB na wykresie odpowiada generatorowi typu C, a punkt A generatorowi typu A. Przypadkowi $\alpha = \beta$ odpowiada odcinek DB , a przypadkowi $\alpha = 1/\beta$ parabola EF .

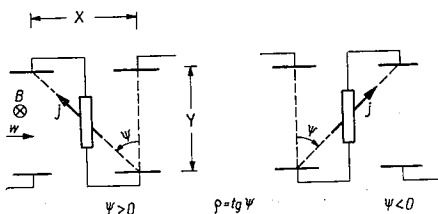
W tabelicy 1 zestawiono wyrażenia na wielkości elektryczne w generatorze typu I z uwzględnieniem dwóch szczególnych wartości parametru α ($\alpha = \infty$ i $\alpha = 0$) odpowiadających generatorom typów A i C.

2.2. Generator typu II

W generatorze typu II wektor $\vec{j}$ jest równoległy do linii łączącej dwie, współpracujące ze sobą elektrody (rys. 13).

Z rys. 13

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{X}{Y} = -\frac{j_x}{j_y} = \varrho. \quad (23)$$



Rys. 13. Definicja parametru ϱ

Generator typu B może być traktowany jako szczególny przypadek generatora typu II. Równania (3) i (4) mogą być przekształcone do postaci

$$E_x = \frac{1}{\sigma} (\beta \cdot j_y - j_x), \quad (24)$$

$$E_y^* = \frac{1}{\sigma} (j_y + \beta \cdot j_x). \quad (25)$$

Z pomocą równania (23) uzyskuje się

$$E_x = \frac{1}{\sigma} (\beta + \varrho) \cdot j_y, \quad (26)$$

$$E_y^* = \frac{1}{\sigma} (1 - \varrho \cdot \beta) \cdot j_y. \quad (27)$$

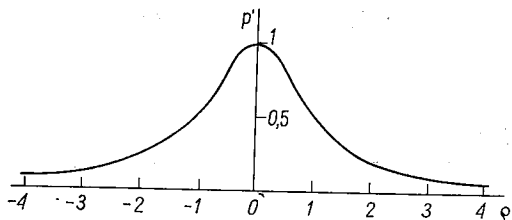
Stan zwarcia ($K = 0$) generatora typu II odpowiada stanowi biegu jałowego ($K = 1$) generatora typu I. Stąd wyrażenia na wielkości elektryczne w generatorze typu II przy zwarcu będą identyczne jak w generatorze typu I przy biegu jałowym, jedynie parametr α będzie zastąpiony przez parametr ϱ . Korzystając z powyższej zależności oraz równań

Tablica 2

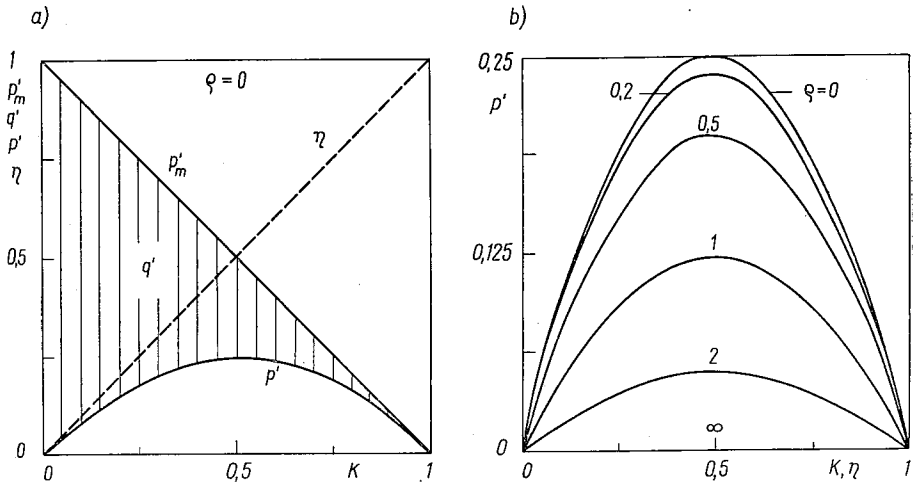
Wielkości elektryczne „wewnętrzne” w generatorze typu II

		$\varrho = 0$
E_x	$\frac{\beta + \varrho}{1 + \varrho^2} (1 - K) w B \quad (28)$	$\beta (1 - K) w B$
E_y	$\left[1 - (1 - K) \frac{1 - \varrho \cdot \beta}{1 + \varrho^2} \right] w B \quad (29)$	$K w B$
j_x	$-\frac{\varrho}{1 + \varrho^2} (1 - K) \sigma w B \quad (30)$	0
j_y	$\frac{1}{1 + \varrho^2} (1 - K) \sigma w B \quad (31)$	$(1 - K) \sigma w B$
P	$\frac{1}{1 + \varrho^2} K (1 - K) \sigma w^2 B^2 \quad (32)$	$K (1 - K) \sigma w^2 B^2$
K	$\frac{E_x}{w B} \cdot \frac{1 + \varrho^2}{\beta - \varrho} = 1 - \left(1 - \frac{E_y}{w B} \right) \frac{1 + \varrho^2}{1 - \varrho \beta} \quad (33)$	$1 - \frac{E_x}{\beta w B} = \frac{E_y}{w B}$
η	K	K
P_m	$\frac{1}{1 + \varrho^2} (1 - K) \sigma w^2 B^2 \quad (34)$	$(1 - K) \sigma w^2 B^2$
η_m	1	1
K_η	1	1

(26) i (27) obliczono i zestawiono w tablicy 2 wyrażenia na wielkości elektryczne w generatorze typu II z uwzględnieniem szczególnej wartości parametru ϱ ($\varrho = 0$) odpowiadającej generatorowi typu B.

Rys. 14. Zależność gęstości mocy elektrycznej od parametru ϱ

Na rys. 14 przedstawiono zależność gęstości mocy elektrycznej oddawanej na zewnątrz od parametru ϱ , a na rys. 15 od współczynnika obciążenia. Gęstości mocy na obu rysunkach wyrażono w wielkościach względnych.



Rys. 15. Zależność gęstości mocy od obciążenia

a) dla $\varphi = 0$, b) dla zmiennego φ

3. OKREŚLENIE WIELKOŚCI ELEKTRYCZNYCH „ZACISKOWYCH”

Dla określenia wielkości „wewnętrznych” w generatorze ($\bar{j}$, $\bar{E}$, σ , p , p_m , q) wystarczyło przyjęcie ogólnego założenia jednorodności pól elektrycznych i gęstości prądu w całym kanale generatora. Z chwilą gdy przechodzi się do określenia wielkości „zaciskowych” (I , U , R_w , P , P_m , Q) i do praktycznego odprowadzenia mocy elektrycznej z generatora, wyłania się problem długości elektrod. W generatorze z nieskończenie drobno podzielnymi elektrodami założenie jednorodności pól jest w pełni uzasadnione. W praktyce ma się do czynienia ze skończoną długością elektrod, co wprowadza zakłócenia w jednorodności pól. Założenie jednorodności pól należy sformułować teraz nieco inaczej: „pola można traktować jako jednorodne; efekty przyelektrodowe odgrywają pomijalnie małą rolę — grubość „elektrycznej warstwy przyściennej”, w której pola nie są jednorodne, jest znacznie mniejsza od wysokości h kanału”.

3.1. Generator typu I

Dla wygody do obliczeń wprowadzono wielkości względne. Jako jednostki podstawowe przyjęto:

$$E^{**} = wB, \quad (35)$$

$$j^{**} = \sigma wB, \quad (36)$$

$$p^{**} = \sigma w^2 B^2 = E^{**} \cdot j^{**} = q^{**} = p_m^{**}, \quad (37)$$

$$U^{**} = lE^{**} = lwB, \quad (38)$$

$$I^{**} = bhj^{**} = bh\sigma wB, \quad (39)$$

$$P^{**} = U^{**} \cdot I^{**} = lbh\sigma w^2 B^2 = P_m^{**} = Q^{**}, \quad (40)$$

$$R^{**} = U^{**} / I^{**} \equiv \frac{U^{**}}{I^{**}} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{bh}. \quad (41)$$

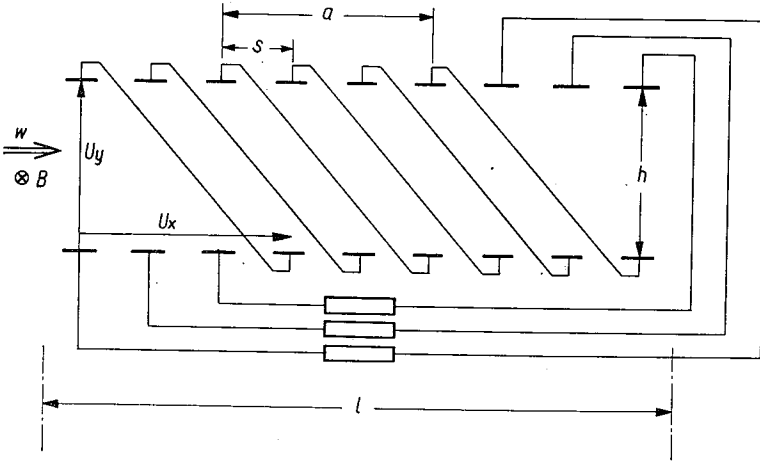
Przyjęte oznaczenia w kanale ilustruje rys. 16. Z rys. 16

$$\frac{a}{h} = \alpha, \quad (42)$$

$$\frac{a}{s} = n. \quad (43)$$

Stąd

$$n = \alpha \cdot \frac{h}{s}. \quad (44)$$



Rys. 16. Oznaczenia w kanale generatora

Zgodnie z założeniem nieuwzględniania efektów związanych z krawędziami kanału rozważania odnoszą się do kanału długiego ($l \gg h$, $l \gg s$), tak że efekty końców odgrywają w nim pomijalnie małą rolę.

Oznaczmy:

$$I_y = s \cdot b \cdot j_y, \quad (45)$$

$$I_x = h \cdot b \cdot j_x. \quad (46)$$

W generatorze mamy n obwodów prądowych pracujących na n niezależnych odbiorów. Natężenie prądu w każdym z obwodów wynosi:

$$I_I = \frac{1}{n} \cdot I_x + I_y, \quad (47)$$

$$I_y = s \cdot b \cdot j'_y \cdot j^{**} = \frac{s}{h} \cdot j'_y \cdot I^{**}, \quad (48)$$

$$I_x = h \cdot b \cdot j'_x \cdot j^{**} = j'_x \cdot I^{**}. \quad (49)$$

Po uwzględnieniu równania (44) równanie (47) można zapisać w postaci:

$$I_I = \frac{1}{n} (j'_x + \alpha \cdot j'_y) \cdot I^{**}. \quad (50)$$

Napięcie elektryczne w każdym z obwodów wynosi:

$$U_x = lE_x = lE'_x E^{**} = E'_x U^{**}, \quad (51)$$

$$U_y = h \frac{l}{a} E_y = h \frac{l}{a} E'_y E^{**} = \frac{1}{\alpha} E'_y U^{**}, \quad (52)$$

$$U_I = U_x = U_y. \quad (53)$$

Podstawiając do równań (50) i (51) wyrażenia na E'_x , j'_y oraz j'_x z tablicy 1 uzyskuje się następujące wyrażenia na wielkości elektryczne „zaciskowe” dla pojedynczego obwodu odbiorczego:

$$I'_I = \frac{1}{n} \cdot \frac{\alpha + \beta}{1 + \beta^2} (1 - K), \quad (54)$$

$$U'_I = \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha^2} K, \quad (55)$$

$$P'_I = U'_I \cdot I'_I = \frac{1}{n} \cdot \frac{(\alpha + \beta)^2}{(1 + \alpha^2)(1 + \beta^2)} K(1 - K), \quad (56)$$

$$R'_{wI} = \frac{U'_{0I}}{I'_{zI}} = n \frac{1 + \beta^2}{1 + \alpha^2}, \quad (57)$$

$$R'_{zI} = \frac{U'_I}{I'_I} = n \frac{1 + \beta^2}{1 + \alpha^2} \cdot \frac{K}{1 - K} = R'_{wI} \frac{K}{1 - K}, \quad (58)$$

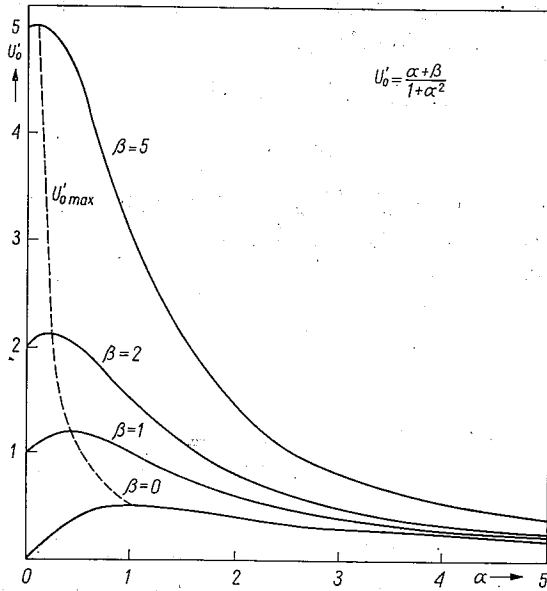
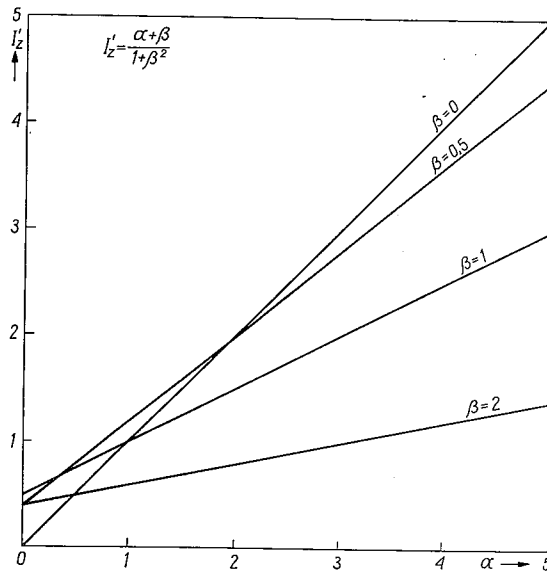
przy czym

$$K = \frac{R'_{zI}}{R'_{zI} + R'_{wI}} = \frac{U'_I}{U'_{0I}}. \quad (59)$$

Tablica 3

Wielkości elektryczne „zaciskowe” w generatorach typów I i II

	Generator typu I	Generator typu II
U'	$\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha^2} K \quad (64)$	$K \quad (89)$
I'	$\frac{\alpha + \beta}{1 + \beta^2} (1 - K) \quad (65)$	$\frac{1}{1 + \varrho^2} (1 - K) \quad (90)$
P'	$\frac{(\alpha + \beta)^2}{(1 + \alpha^2)(1 + \beta^2)} K(1 - K) \quad (66)$	$\frac{1}{1 + \varrho^2} K(1 - K) \quad (91)$
P'_m	$\frac{(1 + \alpha^2) - (\alpha^2 - \beta^2) K}{(1 + \alpha^2)(1 + \beta^2)} \quad (67)$	$\frac{1}{1 + \varrho^2} (1 - K) \quad (92)$
Q'	$\frac{1 + [\alpha - K(\alpha + \beta)]^2}{(1 + \alpha^2)(1 + \beta^2)} \quad (68)$	$\frac{1}{1 + \varrho^2} (1 - K)^2 \quad (93)$
R'_{wI}	$\frac{1 + \beta^2}{1 + \alpha^2} \quad (69)$	$1 + \varrho^2 \quad (94)$

Rys. 17. Zależność U_0 od parametrów α i β Rys. 18. Zależność I_z od parametrów α i β

Wielkości „zaciskowe” dla całego generatora (obliczone dla celów porównawczych) można określić jak dla układu n połączonych równolegle obwodów generator-odbiornik. Obliczone w ten sposób wielkości elektryczne zaciskowe, zestawione w tablicy 3, nie zależą od podziałki elektrod (s/h). Zmiana podziałki wpływa jedynie na zmianę ilości n obwodów odbiorczych.

Równania zestawione w tablicy 3 uzupełniono wyrażeniami na moc hamowania gazu, P_m , oraz na straty mocy na ciepło Joule'a, Q .

$$P_m = j_y w B h b l = j'_y \cdot P^{**}, \quad (60)$$

$$Q = P_m - P. \quad (61)$$

Na rys. 17 i 18 pokazano przebiegi U'_0 i I'_z przy zmiennym α i β jako parametrze.

Przebieg $U'_0(\alpha)$ wskazuje, że przy $\alpha \nearrow \infty$, $U'_0 \searrow 0$.

Funkcja osiąga wartość maksymalną U'_{0m} dla

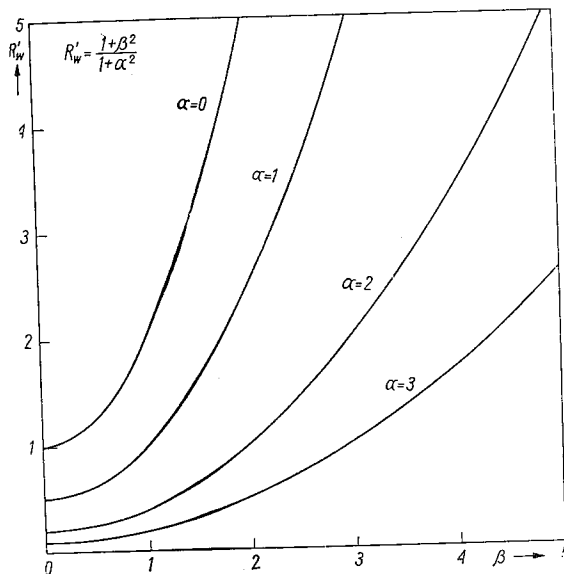
$$\alpha_m = \sqrt{1 + \beta^2} - \beta; \quad (62)$$

gdy $\beta \nearrow \infty$, wtedy $\alpha_m \searrow 0$;

$$U'_{0m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2} - \beta} = \frac{1}{2\alpha_m}; \quad (63)$$

gdy $\beta \nearrow \infty$, wtedy $U'_{0m} \nearrow \infty$.

Ponieważ wyrażenie $I'_z(\beta)$ jest identyczne w formie z wyrażeniem $U'_0(\alpha)$, jedynie α zastąpiona jest przez β , a β przez α , równania (62) i (63) zachowują ważność dla przebiegu $I'_z(\beta)$, należy jedynie β zastąpić przez α a α_m zastąpić przez β_m .



Rys. 19. Zależność oporności wewnętrznej od parametrów α i β

Przebieg $I'_z(\alpha)$ jest linią prostą z wartością początkową oraz nachyleniem zależnym od parametru β . Charakterystyki $U'_0(\beta)$ są identyczne z charakterystykami $I'_z(\alpha)$, gdy w wyrażeniu $I'_z(\alpha)$ parametr α zostanie zastąpiony przez β .

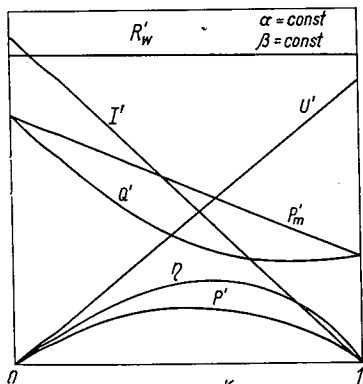
Na rys. 19 pokazano przebieg $R'_w(\alpha, \beta)$. Charakterystyczne jest silne zmniejszenie oporności wewnętrznej generatora przy wzroście parametru α .

Charakterystyki obciążenia

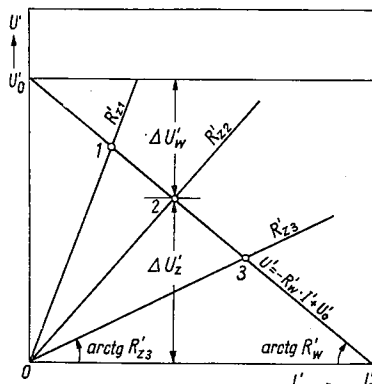
Zależności dla generatora typu I zestawione w tabelicy 3 można przedstawić na wykresie w funkcji współczynnika obciążenia K . Na rys. 20 przedstawiono charakter przebiegu typowych krzywych.

Wyrażenie na napięcie [równ. (55)] można przekształcić do postaci

$$U' = -\frac{1+\beta^2}{1+\alpha^2} \cdot \frac{\alpha+\beta}{1+\beta^2} (1-K) + \frac{\alpha+\beta}{1+\alpha^2} = -R'_w \cdot I' + U'_0. \quad (70)$$



Rys. 20. Charakterystyki generatora typu I w funkcji współczynnika obciążenia



Rys. 21. Charakterystyka prądowo-napięciowa generatora typu I

Dla zmiennego obciążenia równanie (70) przedstawia linię prostą o pochyleniu $\arctg R'_w$ (rys. 21). Punkty pracy generatora 1, 2, 3 wyznaczone są przez punkty przecięcia z charakterystyką generatora prostych poprowadzonych z początku układu pod kątami $\arctg R'_{z1}$, $\arctg R'_{z2}$ i $\arctg R'_{z3}$, odpowiadających opornościom zewnętrznego obciążenia R_{z1} , R_{z2} i R_{z3} .

Dla stanu zwarcia $U' = 0$

$$I'_z = \frac{U'_0}{R'_w}. \quad (71)$$

Moc elektryczna oddawana na zewnątrz jest:

$$P' = U' \cdot I' = -R'_w \cdot (I')^2 + U'_0 \cdot I'. \quad (72)$$

Maksymalna moc elektryczna oddawana na zewnątrz, P'_{max} , wystąpi, gdy $dP'/dI' = 0$,

$$\frac{dP'}{dI'} = -2R'_w \cdot I' + U'_0 = 0,$$

tj. przy prądzie $I' = 0,5 \cdot I'_z$ — wtedy $K = 0,5$, $U' = 0,5U'_0$ i moc maksymalna wynosi

$$P'_{max} = \frac{1}{4} \cdot U'_0 \cdot I'_z. \quad (73)$$

Charakterystyka mocy hamowania gazu w funkcji obciążenia generatora jest linią prostą o równaniu

$$P'_m = \frac{P'_{mz} - P'_{m0}}{I'_z} I' + P'_{m0}. \quad (74)$$

Stąd straty mocy na ciepło Joule'a wynoszą

$$Q' = P'_m - P' = R'_w(I')^2 + \left(\frac{P'_{mz} - P'_{m0}}{I'_z} - U'_0 \right) I' + P'_{m0}. \quad (75)$$

3.2. Generator typu II

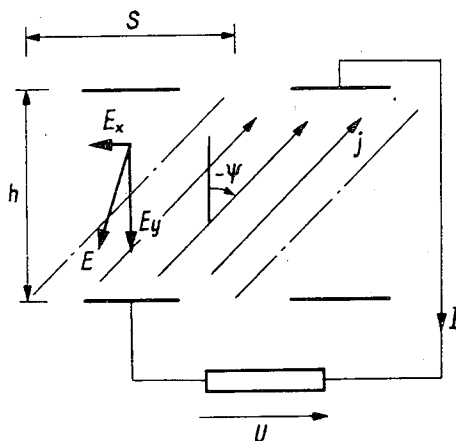
Podobnie jak w rozważaniach nad generatorem typu I wprowadzono do obliczeń wielkości względne. Jednostki podstawowe dla wielkości elektrycznych „zaciskowych” przyjęto nieco odmienne niż poprzednio, a mianowicie:

$$U^{**} = h \cdot E^{**} = h\omega B, \quad (76)$$

$$I^{**} = lbj^{**} = lb\sigma\omega B, \quad (77)$$

$$P^{**} = U^{**} \cdot I^{**} = lbh\sigma\omega^2 B^2 = P_m^{**} = Q^{**}, \quad (78)$$

$$R^{**} = U^{**} / I^{**} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{h}{bl}. \quad (79)$$



Rys. 22. Oznaczenia w generatorze typu II

Z każdą parą elektrod jest związany jeden opór obciążenia (rys. 22)

$$I_1 = jsb \cdot \cos(\arctg \varrho) = \frac{1}{\sqrt{1+\varrho^2}} jsb = j_y \cdot sb. \quad (80)$$

Z pomocą równania (31) znajdujemy

$$I'_1 = \frac{s}{l} \frac{1}{1+\varrho^2} (1-K). \quad (81)$$

Napięcie na zaciskach pary elektrod (rys. 22) jest

$$U_1 = \bar{E} \cdot \frac{\bar{j}}{j} h \frac{1}{\cos \varphi} = h \cdot \sqrt{1+\varrho^2} [E_x \cdot \cos \angle (\bar{E}_x, \bar{j}) + E_y \cdot \cos \angle (\bar{E}_y, \bar{j})]. \quad (82)$$

Po przeliczeniu z pomocą równań (28), (29) otrzymujemy

$$U'_I = K, \quad (83)$$

$$P'_I = U'_I \cdot I'_I = \frac{s}{l} \cdot \frac{1}{1+\varrho^2} K(1-K), \quad (84)$$

$$R'_{wI} = \frac{l}{s} (1+\varrho^2), \quad (85)$$

$$P'_{mI} = \frac{s}{l} \cdot \frac{1}{1+\varrho^2} (1-K), \quad (86)$$

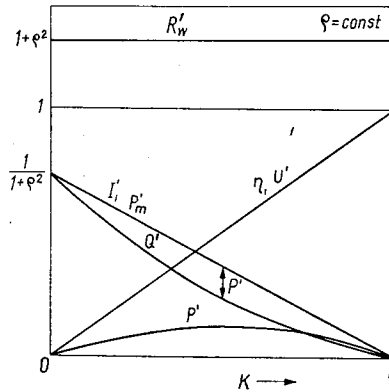
$$Q'_I = \frac{s}{l} \frac{1}{1+\varrho^2} (1-K)^2, \quad (87)$$

$$\eta' = K. \quad (88)$$

Są to wielkości elektryczne dla pojedynczego obwodu odbiorczego. Każda para elektrod związana jest z jednym, niezależnym od pozostałych obwodem odbiorczym. Wielkości elektryczne „zaciskowe” dla całego generatora (w celach porównawczych) można określić podobnie jak dla generatora typu I. Zestawiono je w tablicy 3.

Charakterystyki obciążenia

Na rys. 23 przedstawiono typowe krzywe zależności wielkości elektrycznych „zaciskowych” w generatorze typu II (zob. tablica 3) w funkcji współczynnika obciążenia K .



Rys. 23. Charakterystyki generatora typu II w funkcji współczynnika obciążenia

Podobnie jak dla generatora typu I można wypisać równania wielkości elektrycznych w funkcji obciążenia:

$$U' = -R'_w \cdot I' + U'_0, \quad (95)$$

$$P' = U' \cdot I' = -R'_w \cdot (I')^2 + U'_0 \cdot I', \quad (96)$$

$$P'_m = U'_0 \cdot I', \quad (97)$$

$$Q' = R'_w \cdot (I')^2, \quad (98)$$

$$\eta = U'. \quad (99)$$

Dla generatora typu II prąd obciążenia jest równy prądowi I_y , moc hamowania gazu i moc strat na ciepło Joule'a wyrażają się wtedy bardzo prosto.

Największa możliwa do uzyskania moc elektryczna jest

$$P'_{max} = \frac{1}{4} P'_{max} = \frac{1}{4} U'_0 I'_z. \quad (100)$$

3.3. Przykład liczbowy

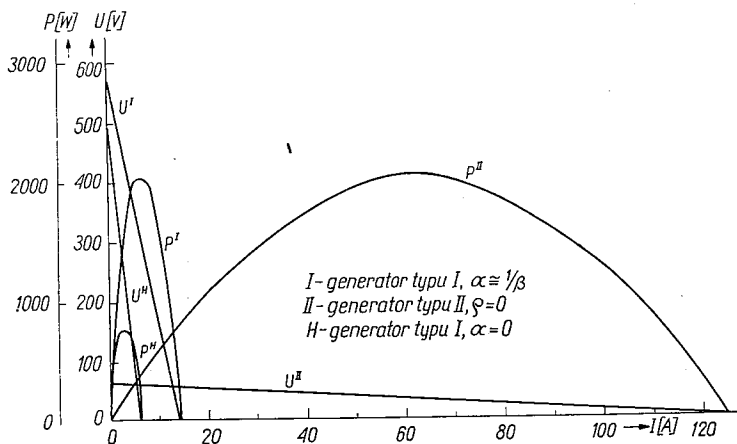
W doświadczalnym generatorze MHD o danych: $w = 800$ m/s, $B = 2$ Vs/m², $\sigma = 10$ Ω⁻¹m⁻¹, $\beta = 0,77$, $l = 4 \cdot 10^{-1}$ m, $b = 2 \cdot 10^{-2}$ m, $s = 2 \cdot 10^{-2}$ m, $h = 4 \cdot 10^{-2}$ m należy określić optymalny (z uwagi na możliwość otrzymania maksymalnej mocy elektrycznej) sposób połączenia elektrod w układzie generatora typu I i II oraz obliczyć parametry elektryczne i porównać je z parametrami elektrycznymi otrzymanymi w układzie Halla.

Generator typu I

Z warunku na uzyskanie maksimum mocy elektrycznej (zob. rozdz. 2.1)

$$\alpha = \frac{1}{\beta} = 1,3.$$

Geometria kanału zezwala jedynie na nieciągłą zmianę wartości α ; najbliższe wartości to $\alpha = 1$ lub $\alpha = 1,5$. Przyjęto $\alpha = 1$ w celu zmniejszenia liczby obwodów odbiorczych. Liczba niezależnych obwodów odbiorczych $n = 2$ [równ. (44)].



Rys. 24. Charakterystyki generatora w funkcji prądu obciążenia (ilustracja do przykładu liczbowego)

Parametry elektryczne obwodów wyrażone w jednostkach względnych są:

$$U'_I = 0,885K; \quad I'_I = 0,557(1-K); \quad P'_I = 0,493K(1-K); \quad P'_{mI} = -0,0643K + 0,314; \\ Q'_I = 0,493K^2 - 0,557K + 0,314; \quad R'_{wI} = 1,59,$$

przy czym

$$K = \frac{R_{zI}}{R_{wI} + R_{zI}} = \frac{R_z}{R_w + R_z};$$

wielkości podstawowe wynoszą

$$U^{**} = 640 \text{ V}; \quad I^{**} = 12,8 \text{ A}; \quad P^{**} = 8200 \text{ W}; \quad R^{**} = 50 \Omega.$$

Dla $K = 0,5$ (dla innych wartości obciążenia zob. rys. 24) mamy:

$$U_I = 284 \text{ V}; \quad I_I = 3,57 \text{ A}; \quad P_I = 1012 \text{ W}; \quad P_{mI} = 2316 \text{ W}; \quad Q_I = 1304 \text{ W}; \\ R_{wI} = 79,6 \Omega; \quad R_{zI} = 79,6 \Omega, \quad \eta = 0,438.$$

Moc maksymalna odbierana z całego generatora jest

$$P = nP_I = 2024 \text{ W}.$$

Generator typu I, $\alpha = 0$ (generator Halla)

Istnieje tylko jeden obwód odbiorczy.

Parametry elektryczne wyrażone w jednostkach względnych są:

$$U' = 0,77K; \quad I' = 0,485(1-K); \quad P' = 0,371K(1-K); \\ P'_m = 0,371K + 0,63; \quad Q' = 0,371K^2 + 0,63; \quad R'_w = 1,59.$$

Wielkości podstawowe przyjęto jak dla generatora typu I.

$$\text{Dla } K = 0,5: \quad U = 247 \text{ V}; \quad I = 3,1 \text{ A}; \quad P = 762 \text{ W}; \quad P_m = 6695 \text{ W}; \\ Q = 5933 \text{ W}; \quad R_w = 79,6 \Omega; \quad \eta = 0,114.$$

Generator typu II

Z warunku na maksimum mocy elektrycznej (zob. rozdz. 2.2) mamy $\varrho = 0$. Liczba obwodów obciążenia odpowiada liczbie par elektrod: $l/s = 20$ par. Parametry elektryczne dla jednego obwodu wyrażone w wielkościach względnych są:

$$U'_I = K; \quad I'_I = 0,05(1-K); \quad P'_I = 0,05K(1-K); \quad P'_{mI} = 0,05(1-K); \\ Q'_I = 0,05(1-K)^2; \quad R'_{wI} = 20; \quad \eta = K.$$

Wielkości podstawowe są:

$$U^{**} = 64 \text{ V}; \quad I^{**} = 128 \text{ A}; \quad P^{**} = 8200 \text{ W}; \quad R^{**} = 0,5 \Omega.$$

$$\text{Dla } K = 0,5: \quad U_I = 32 \text{ V}; \quad I_I = 3,2 \text{ A}; \quad P_I = 102,5 \text{ W}; \quad P_{mI} = 205 \text{ W}; \\ Q_I = 102,5 \text{ W}; \quad R_{wI} = R_{zI} = 10 \Omega; \quad \eta = 0,5.$$

Moc odbierana z całego generatora wynosi:

$$P = \frac{s}{l} \cdot P_I = 2050 \text{ W}.$$

Porównanie

Uzyskane wyniki przedstawiono na rys. 24. Parametry elektryczne zestawione na rysunkach odnoszą się do całego generatora.

Najkorzystniejszym połączeniem jest połączenie w układzie generatora typu I z $\alpha = 1$. Choć moc i sprawność jest nieco mniejsza (wskutek niedopasowania α do α_{opt}) niż

w generatorze typu II, jednak zasadniczą zaletą tego rozwiązania jest znacznie mniejsza liczba niezależnych obwodów prądowych (2 zamiast 20) i korzystne parametry elektryczne odbieranej mocy (wysokie napięcie-niski prąd: 284 V/7 A zamiast 32 V/64 A). Połączenie w układzie generatora Halla jest wysoce niekorzystne ze względu na zbyt niską wartość parametru β .

4. WNIOSKI

Opisane przez Harrisa i Cobine'a [5] trzy typy generatorów mają niekorzystne własności elektryczne utrudniające ich praktyczne zastosowanie.

Generator z ciągłymi elektrodami (typ A) ma tylko wtedy korzystne parametry elektryczne, gdy $\beta \ll 1$, generator Halla (typ C) odwrotnie — gdy $\beta \gg 1$.

Praktyczne wartości β w generatorach pracujących z gazami spalinowymi leżą w zakresie 1 ... 3. Stąd moc uzyskiwana z generatora typu A ulega znacznej redukcji. W generatorze typu C ulega zmniejszeniu nie tylko moc elektryczna, lecz również współczynnik sprawności.

Parametry elektryczne generatora typu B (przy założonym bardzo drobnym podziale elektrod) są niezależne od parametru β . Jednak zastosowanie praktyczne tego typu połączenia elektrod jest utrudnione ze względu na konieczność stosowania osobnego odbioru elektrycznego do każdej pary elektrod.

Analiza parametrów elektrycznych wskazuje, że w generatorze typu I dla warunku $\alpha = 1/\beta$ można uzyskać taką samą gęstość mocy elektrycznej i współczynnik sprawności, jak w generatorze typu B. Połączenie szeregowo elektrod umożliwia zastosowanie jednego lub co najwyżej kilku odrębnych oporności obciążenia.

W generatorze typu II najwyższą moc elektryczną uzyskuje się przy $\varrho = 0$, co odpowiada generatorowi typu B. Ten system połączeń elektrod umożliwia otrzymanie maksymalnej możliwej mocy elektrycznej z generatora. Praca przy $\varrho \leq 0$ nie daje żadnych korzyści.

Wyniki rozważań są słuszne dla wyidealizowanych warunków zgodnie z przyjętymi na wstępie założeniami. W warunkach praktycznych wyniki są słuszne jedynie w mniejszym lub większym stopniu, w zależności od tego, jak daleko warunki rzeczywiste odbiegają od idealnych. Tak np. uwzględnienie niejednorodności rozprywu prądów wskutek skończonej długości elektrod w rzeczywistym generatorze typu I wskazuje, że moc maksymalna wystąpi przy $\alpha > 1/\beta$ [4].

*Instytut Badań Jądrowych
Zakład Fizyki i Techniki Plazmy*

WYKAZ LITERATURY

1. Bürgel B.: An Investigation of MHD Generators by a Simplified Graphical Method. Symposium on Magnetoplasma-dynamic Electrical Power Generation. Newcastle 1962.
2. Celiński Z.: Elektrische Theorie der Gleichstrom — MHD Generatoren mit stationärer, linearer Gasströmung. Rapport IPP 3/2, Institut für Plasmaphysik. Garching k. Monachium, April 1964.
3. Celiński Z.: Analysis of DC MHD Generator with Stationary, Linear Gas Flow. International Symposium on Magnetohydrodynamic Electrical Power Generation. Paris, July 1964.

4. Celiński Z.: Parametry elektryczne generatora magnetohydrodynamicznego przy różnych elektrycznych połączeniach elektrod. Rozprawa doktorska. Politechnika Warszawska, maj 1965.
5. Harris L. P., Cobine I. D.: The Significance of the Hall-Effect in Three MHD-Generator Configurations. ASME, Paper 60-Wa-329, 1960.
6. Montardy A.: MHD Generator with Series Connected Electrodes. Symposium on Magnetoplasma-dynamic Electrical Power Generation. Newcastle 1962.
7. Rosa R. I.: U.S. Patent Nr 32969, 31 May, 1960.

Z. CELIŃSKI

ELECTRICAL PARAMETERS OF THE DC MHD GENERATOR WITH VARIOUS ELECTRICAL CONNECTIONS OF ELECTRODES

Summary

The electrical parameters of a DC MHD generator with segmented electrodes were determined for various electrode connection systems. In the paper constant gas dynamic parameters, constant channel cross-section and uniformity of the electric fields and current density were assumed. The "internal" (current density, electric fields, power density etc.) and "terminal" (current, terminal voltage, electric power, internal resistance etc.) electrical parameters were calculated. The considerations were illustrated by a numerical example.

Z. CELIŃSKI

LES PARAMÈTRES ÉLECTRIQUES DU GÉNÉRATEUR MHD EN DÉPENDANCE DE LA CONNEXION ÉLECTRIQUE DES ÉLECTRODES

Résumé

Dans l'article on a analysé les paramètres électriques du générateur magnétohydrodynamique de courant continu à électrodes divisées en cas de différents systèmes des connexions des électrodes et on a déterminé aussi les connexions optimales. Dans les considérations on a accepté les paramètres dynamiques du gaz constants, la section transversale du canal de générateur constante, l'induction du champ magnétique constante ainsi que l'uniformité des champs électriques et du courant dans le volume entier du canal de générateur. On a calculé des grandeurs électriques „intérieures" (densité du courant électrique, champs électriques, densité de la puissance électrique et ct.) dans le canal de générateur ainsi que celles des „bornes" (courant, tension sur les bornes, puissance générée, résistance intérieure et ct.). Les considérations sont illustrées par un exemple de calcul.

Z. CELIŃSKI

ELEKTRISCHE PARAMETER DES MHD-GENERATORS MIT VERSCHIEDENER VERBINDUNGSWEISE DER ELEKTRODEN

Zusammenfassung

Die elektrische Parameter des Gleichstrom-MHD Generators mit segmentierten Elektroden wurden für verschiedene Elektrodenverbindungen bestimmt. Es wurden die gasdynamische Parameter, der Kanalquerschnitt und das magnetische Feld als konstant und das elektrische Feld und die elektrische Stromdichte

als homogen angenommen. Die elektrische „innere“ Größen (Stromdichte, elektrische Felder, Leistungsdichte usw.) und „Klemmgrößen“ (Strom, Spannung, innerer Widerstand, elektrische Leistung usw.) in Generatorkanal wurden berechnet. Berechnungen sind mit einem numerischen Beispiel illustriert.

З. ЦЕЛИНСКИ

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ МГД ГЕНЕРАТОРА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СОЕДИНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДОВ

Резюме

В статье проанализованы электрические параметры магнитогидродинамического генератора постоянного тока с разделенными электродами в случае различных систем соединения электродов, а также определены оптимальные соединения. В рассуждениях принято постоянство динамических параметров газа, постоянное поперечное сечение канала генератора, постоянное магнитное поле, а также однородное распределение электрических полей и плотности тока в целом объеме канала генератора. Рассчитаны электрические „внутренние“ параметры (плотность электрического тока, электрические поля, плотность электрической мощности и т. п.) в канале генератора, а также „зажимные“ (ток, напряжение на зажимах электродов, создаваемая мощность, внутреннее сопротивление и т. п.). Рассуждения были иллюстрированы примером расчета.

RYSZARD GESSING

Równania różnicowe nieliniowych układów impulsowych i ich wykorzystanie do obliczania przebiegów

Rękopis dostarczono 9.5.1966

W pracy wyprowadzono równania różnicowe dla nieliniowych układów impulsowych dowolnego rzędu, które dadzą się sprowadzić do układu składającego się z nieliniowego impulsatora o dowolnym kształcie impulsów i liniowej części ciągłej. Przy wyprowadzeniach tych równań wykorzystano podstawowe własności liniowych równań różniczkowych (o stałych współczynnikach) opisujących część ciągłą układu — oraz rozwiązań tych ostatnich równań. Rozpatrzono najbardziej ogólny przypadek, w którym równanie charakterystyczne równania różniczkowego może posiadać pierwiastki wielokrotne. Z przeprowadzonych rozważań wynika, że znając odpowiedź części ciągłej układu na dowolny impuls wysyłany przez impulsator możemy od razu napisać równanie różnicowe układu. Pokazano, że z otrzymanych równań różnicowych wynikają bezpośrednio formuły rekurencyjne, za pomocą których można obliczyć w postaci numerycznej interesujące nas przebiegi, przy czym obliczenia te znacznie się upraszczają w przypadku, gdy impulsator posiada kwantowanie w poziomie. Podano przykłady obliczania przebiegów w konkretnym układzie regulacji impulsowej.

1. WSTĘP

Punktem wyjściowym analizy impulsowych układów regulacji jest ułożenie dla nich odpowiednich równań różnicowych. Wiele prac dostępnych u nas i dotyczących nieliniowych układów impulsowych ogranicza się do pewnej klasy układów, a mianowicie do takich nieliniowych układów, które dadzą się sprowadzić do układu składającego się z liniowej części ciągłej, liniowego impulsatora i nieliniowego, bezinercyjnego elementu opisanego funkcją $\phi(x)$, np. [1], [2]. Dla takich układów są opracowane w literaturze metody otrzymywania równań różnicowych, przy czym metody te zazwyczaj bazują na sumacyjnej transformacji Laplace'a lub transformacji Z. Bardzo często stosowane w praktyce układy z impulsatorem o prostokątnym kształcie i modulowanej szerokości impulsów (IS) nie należą do wymienionej wyżej klasy układów. Powstaje więc problem otrzymywania równań różnicowych dla układów z impulsatorem IS i innych układów nie należących do wymienionej klasy.

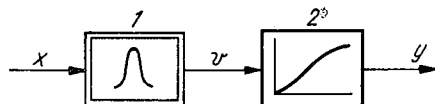
W niniejszej pracy wyprowadzone są równania różnicowe dla szerszej niż dotąd spotykana w literaturze klasy układów, a mianowicie dla układów, w których występuje liniowa część ciągła i nieliniowy (bądź liniowy) impulsator o dowolnym kształcie impulsów. Dowolny kształt impulsów nie jest tu rozpatrywany jako „liniowy człon formujący włączony za impulsatorem idealnym”, lecz może być wyrażony dowolną nieliniową zależnością jednej (lub kilku) z cech impulsów od wartości sygnału wejściowego $x(n)$ impulsatora.

Dla układów występujących w praktyce z wyprowadzonych równań bezpośrednio wynikają formuły rekurencyjne, za pomocą których można obliczyć przebieg interesującej nas wielkości przy znanym wymuszeniu $w(n)$. Te równania mogą być również podstawą do bardziej wszechstronnej analizy nieliniowych układów impulsowych.

2. RÓWNANIE RÓŻNICOWE OTWARTEGO UKŁADU IMPULSOWEGO

2.1. Układ z impulsatorem o dowolnym kształcie impulsów

Zajmiemy się teraz otwartym układem impulsowym, przedstawionym na rysunku 1, składającym się z impulsatora 1 i części ciągłej 2. Impulsator wysyła impulsy o dowolnym kształcie, przy czym kolejny i -ty impuls ma parametry (wysokość, szerokość, chwila roz-



Rys. 1. Otwarty układ z nieliniowym impulsatorem o dowolnym kształcie impulsów 1 i liniową częścią ciągłą 2

poczynania się impulsu itp.) zależne od wartości wielkości x w chwili iT_J (gdzie T_J — okres impulsowania impulsatora).

O części ciągłej układu zakładamy, że jest liniowa i posiada operatorową funkcję przejścia o postaci:

$$\bar{K}(s) = \frac{\bar{L}(s)}{\bar{M}(s)} = \mathcal{L}[\bar{k}(\tau)], \quad (1)$$

gdzie: $\bar{k}(\tau)$ — odpowiedź części ciągłej układu na skok jednostkowy;

τ — zmienna czasu w skali dowolnej;

$\mathcal{L}$ — symbol transformaty Laplace'a-Carsona;

$\bar{L}(s)$ i $\bar{M}(s)$ — wielomiany zmiennej s , takie, że stopień $\bar{L}(s)$ jest nie większy od stopnia $\bar{M}(s)$.

Wprowadzając nową zmienną czasu $t = \frac{\tau}{T_J}$ i korzystając z twierdzenia o zmianie skali dla funkcji operatorowych mamy:

$$k(t) = \bar{k}(\tau) = \bar{k}(t T_J), \quad (2)$$

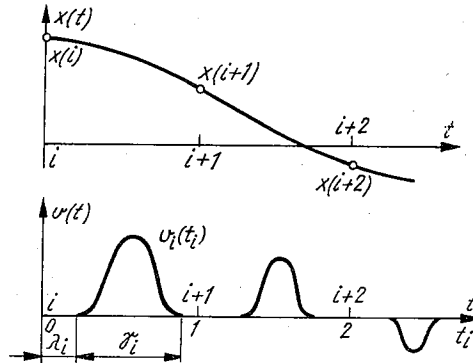
$$K(p) = \mathcal{L}[k(t)] = \frac{L(p)}{M(p)} = \bar{K}\left(\frac{p}{T_J}\right) = \frac{\bar{L}\left(\frac{p}{T_J}\right)}{\bar{M}\left(\frac{p}{T_J}\right)}. \quad (3)$$

W inny sposób własności części ciągłej układu można zapisać za pomocą równania różniczkowego o postaci:

$$M_0 \frac{d^r y(t)}{dt^r} + M_1 \frac{d^{r-1} y(t)}{dt^{r-1}} + \dots + M_r y(t) = L_0 \frac{d^u v(t)}{dt^u} + L_1 \frac{d^{u-1} v(t)}{dt^{u-1}} + \dots + L_u v(t), \quad (4)$$

gdzie wielkości M_i, L_j ($i = 0, 1, \dots, r; j = 0, 1, \dots, u$) są stałymi współczynnikami, przy czym $u \leq r$.

Przebieg impulsów przedstawiony jest na rysunku 2. Zakładamy, że impulsy mają dowolny kształt, przy czym parametry i -tego impulsu zależą od wartości wielkości x



Rys. 2. Przebiegi wielkości wejściowej $x(t)$ i impulsów $v(t)$ podawanych przez impulsator

w chwili $t = i$. Zakładamy jeszcze, że i -ty impuls występuje w czasie t spełniającym nierówność:

$$0 \leq t - i < 1.. \quad (5)$$

Wprowadzając zmienną czasu

$$t_i = t - i \quad (6)$$

oraz oznaczając przebieg pojedynczego i -tego impulsu przez $v_i(t_i)$ mamy więc:

$$v_i(t_i) = V[x(i), t_i], \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} v_i(t_i) &\neq 0 & \text{dla} & \quad 0 \leq t_i < 1, \\ v_i(t_i) &\equiv 0 & \text{dla} & \quad t_i < 0 \quad \text{i dla} \quad t_i \geq 1, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

gdzie przez $V[x(i), t_i]$ oznaczono funkcję dwóch zmiennych, której postać zależy od konstrukcji impulsatora. Zakładamy, że funkcja ta jest określona.

Oznaczając przez $y_i(t_i)$ przebieg wielkości y pochodzący tylko od i -tego impulsu $v_i(t_i)$ można napisać

$$M_0 \frac{d^r y_i(t_i)}{dt_i^r} + M_1 \frac{d^{r-1} y_i(t_i)}{dt_i^{r-1}} + \dots + M_r y_i(t_i) = \bar{v}_i(t_i), \quad (9)$$

gdzie

$$\bar{v}_i(t_i) = L_0 \frac{d^u v_i(t_i)}{dt_i^u} + L_1 \frac{d^{u-1} v_i(t_i)}{dt_i^{u-1}} + \dots + L_u v_i(t_i). \quad (10)$$

Innymi słowy $y_i(t_i)$ jest odpowiedzią części ciągłej układu na pojedynczy i -ty impuls $v_i(t_i)$. Należy tu podkreślić, że ze względu na (7), (9) i (10) $y_i(t_i)$ jest funkcją dwóch wielkości, a mianowicie $x(i)$ i t_i , czyli:

$$y_i(t_i) = Y[x(i), t_i]. \quad (11)$$

Zakładamy, że równanie charakterystyczne

$$M_0 p^r + M_1 p^{r-1} + \dots + M_r = 0 \quad (12)$$

równania różniczkowego (4) posiada κ różnych pierwiastków wielokrotnych: $p_1, p_2, \dots, p_\kappa$ (rzeczywistych lub zespolonych), z których każdy ma stopień wielokrotności s_k ($k = 1, 2, \dots, \kappa$). Jeżeli r jest rzędem równania (12), to mamy:

$$r = \sum_{k=1}^{\kappa} s_k. \quad (13)$$

Podobnie jak w pracy [1] wprowadzamy obecnie przesuniętą funkcję dyskretną $y(n, \varepsilon)$, dla której mamy:

$$y(n, \varepsilon) = y(n + \varepsilon) = y(t), \quad (14)$$

gdzie $t = n + \varepsilon$, n jest liczbą całkowitą, a parametr ε spełnia nierówność:

$$0 \leq \varepsilon < 1. \quad (15)$$

W dodatku 1 udowodniono, że dla otwartego układu impulsowego przedstawionego na rysunku 1 można napisać następujące równanie różnicowe:

$$\begin{aligned} y(n+m, \varepsilon) + d_1 y(n+m-1, \varepsilon) + \dots + d_m y(n, \varepsilon) = \\ = \Phi_0[x(n+m), \varepsilon] + \Phi_1[x(n+m-1), \varepsilon] + \dots + \Phi_m[x(n), \varepsilon], \end{aligned} \quad (16)$$

gdzie m jest rzędem równania różnicowego (16), który — w przypadku gdy zachodzi:

$$\begin{aligned} e^{p_i} \neq e^{p_j} \quad \text{dla} \quad i \neq j, \\ i, j = 1, 2, \dots, \kappa, \end{aligned} \quad (17)$$

— jest równy rzędowi równania różniczkowego (4) części ciągłej układu, czyli $m = r$.

Współczynniki d_j , $j = 1, 2, \dots, m$, równania (16) są wartościami stałymi, które można obliczyć ze wzoru:

$$d_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (18)$$

gdzie:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (m-1)^0 e^{p_1(m-1)}, & (m-2)^0 e^{p_1(m-2)}, & \dots, & (1)^0 e^{p_1}, & 0^0 \\ (m-1)^1 e^{p_1(m-1)}, & (m-2)^1 e^{p_1(m-2)}, & \dots, & (1)^1 e^{p_1}, & 0^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (m-1)^{s_1-1} e^{p_1(m-1)}, & (m-2)^{s_1-1} e^{p_1(m-2)}, & \dots, & (1)^{s_1-1} e^{p_1}, & 0^{s_1-1} \\ (m-1)^0 e^{p_2(m-1)}, & (m-2)^0 e^{p_2(m-2)}, & \dots, & (1)^0 e^{p_2}, & 0^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (m-1)^{s_\kappa-1} e^{p_\kappa(m-1)}, & (m-2)^{s_\kappa-1} e^{p_\kappa(m-2)}, & \dots, & (1)^{s_\kappa-1} e^{p_\kappa}, & 0^{s_\kappa-1} \end{vmatrix}, \quad (19)$$

przy czym Δ_j jest wyznacznikiem, który powstaje z wyznacznika Δ przez zastąpienie j -tej kolumny wyrażeniami:

$$-m^0 e^{p_1 m}, \quad -m^1 e^{p_1 m}, \quad \dots, \quad -m^{s_1-1} e^{p_1 m}, \quad -m^0 e^{p_2 m}, \quad \dots, \quad -m^{s_\kappa-1} e^{p_\kappa m}.$$

Należy podkreślić, że w przypadku gdy przynajmniej jeden z pierwiastków $p_1, p_2, \dots, p_m$ jest równy zeru, to współczynniki $d_1, d_2, \dots, d_m$ spełniają równanie:

$$1 + d_1 + d_2 + \dots + d_m = 0. \quad (19a)$$

Dla funkcji $\Phi_j, j = 0, 1, \dots, m$, mamy wzory:

$$\Phi_j[x(n+m-j), \varepsilon] = \sum_{l=0}^j d_l y_{n+m-j}(j-l, \varepsilon), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (20)$$

gdzie $d_0 = 1$, a $y_{n+m-j}(j-l, \varepsilon)$ jest odpowiedzią części ciągłej układu na $(n+m-j)$ -ty impuls $v_{n+m-j}(t_i)$, w której argument t_i przyjmuje wartość równą $j-l+\varepsilon$. Ze względu na (11) prawa strona wzorów (20) zależy od dwóch wielkości, a to od $x(n+m-j)$ i od ε , co uwzględniła zapis lewej strony tych wzorów.

Równanie różnicowe (16) jest równaniem, którego rząd jest zazwyczaj równy rzędowi równania różniczkowego części ciągłej układu. Jest ono równaniem bardzo ogólnym, gdyż odnosi się do układów posiadających nieliniowy (bądź liniowy) impulsator o dowolnym kształcie impulsów i liniową część ciągłą, dającą się opisać za pomocą funkcji przejścia (1). Jak wynika z przeprowadzonych rozważań, jeżeli impulsator reaguje na dyskretne wartości wielkości wejściowej x , występujące w równo od siebie oddalonych chwilach, czyli — inaczej mówiąc — jeżeli mamy do czynienia z impulsatorem o periodycznym pomiarze wielkości wejściowej x , wtedy współczynniki lewej strony równania różnicowego (16) są stałe i zależą tylko od części ciągłej układu i od okresu impulsowania impulsatora, a nie zależą od sposobu działania impulsatora, np. od kształtu impulsów, ani od tego, czy impulsator jest nieliniowy, czy też liniowy. Natomiast prawa strona równania (16) jest sumą pewnych funkcji, z których każda zależy tylko od jednej wartości $x(n+m-j)$. Na funkcje te ma wpływ zarówno impulsator, jak i część ciągła układu. W zależności od konstrukcji impulsatora równanie (16) może być nieliniowe lub — w przypadkach szczególnych — liniowe.

Łatwo zauważyć, że równanie różnicowe (16) o współczynnikach (18) i (20) jest również ważne w przypadku, gdy impulsator jest parametryczny (liniowy bądź nieliniowy), tzn., gdy dla pojedynczego i -tego impulsu jest:

$$v_i(t_i) = V[x(i), i, t_i], \quad (21)$$

gdzie V jest określoną funkcją trzech zmiennych spełniającą relacje (8). Równanie (16) jest również ważne w przypadku, gdy parametry i -tego impulsu są zależne nie tylko od wartości $x(i)$, ale również od kilku poprzednich wartości x , np.:

$$v_i(t_i) = V[x(i), x(i-1), \dots, x(i-r_1), t_i]. \quad (22)$$

Funkcja V jest w tym przypadku zależna od r_1+2 zmiennych, przy czym powinna być określona i spełniać relacje (8). Oczywiście również odpowiedź $y_i(t_i)$ części ciągłej układu na i -ty impuls, która występuje we wzorach (20), jest w przypadku (21) lub (22) odpowiednio funkcją trzech i r_1+2 zmiennych.

Tak więc dla rozpatrywanych układów ułożenie równania różnicowego zostało sprowadzone do znalezienia odpowiedzi $y_i(t_i)$ części ciągłej układu na dowolny i -ty impuls. Odpowiedź $y_i(t_i)$ możemy znaleźć rozwiązując równanie różniczkowe (9) części ciągłej układu albo za pomocą rachunku operatorowego, wykorzystując do tego celu operatorową funkcję przejścia (1) części ciągłej układu. Jeżeli znamy odpowiedź na skok jednostkowy

Wzór na współczynnik d_j jest sumą wszystkich iloczynów, z których każdy jest kombinacją j różnych czynników wziętych spośród wielkości: $e^{p_1}, e^{p_2}, \dots, e^{p_r}$, przy czym przed sumą jest znak minus lub plus, jeżeli j jest odpowiednio liczbą nieparzystą lub parzystą. W sumie tej występuje $\binom{m}{j}$ składników.

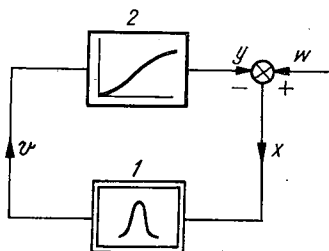
$$\binom{m}{j} = \frac{m!}{j!(m-j)!} \quad (27)$$

Wzory (20) na funkcje występujące po prawej stronie równania różnicowego (16) dla rozpatrywanego przypadku pozostają takie same. Należy jednak pamiętać, że przy obliczaniu odpowiedzi $y_i(t_i)$ części ciągłej układu na i -ty impuls — w przypadku pojedynczych pierwiastków otrzymujemy inne wzory (zazwyczaj prostsze) niż w przypadku pierwiastków wielokrotnych.

3. RÓWNANIA RÓŻNICOWE ZAMKNIĘTEGO UKŁADU W ZASTOSOWANIU DO OBLICZANIA PRZEBIEGÓW

3.1. Równania różnicowe zamkniętego układu impulsowego

Na rysunku 3 przedstawiony jest uproszczony schemat zamkniętego układu regulacji impulsowej, w którym występuje impulsator o dowolnym kształcie impulsów 1 i liniowa część ciągła 2. Zakładamy, że impulsator i część ciągła układu są takie same jak w otwar-



Rys. 3. Zamknięty układ z nieliniowym impulsatorem o dowolnym kształcie impulsów 1 i liniową częścią ciągłą 2

tym układzie rozpatrywanym w rozdziale 2.1. Dla otwartego układu impulsowego ważne jest więc równanie różnicowe (16). Równanie węzła sumującego ma postać:

$$x(n, \varepsilon) = w(n, \varepsilon) - y(n, \varepsilon), \quad (28)$$

gdzie $x(n, \varepsilon)$ i $w(n, \varepsilon)$ są przesuniętymi funkcjami dyskretnymi — podobnie jak $y(n, \varepsilon)$.

Należy pamiętać o tym, że dla występującej w równaniu (16) wielkości $x(n)$ mamy relację:

$$x(n) = x(n, 0) = x(n, \varepsilon) \quad \text{dla} \quad \varepsilon = 0. \quad (29)$$

W dalszym ciągu będziemy konsekwentnie oznaczać również

$$w(n) = w(n, 0) \quad \text{i} \quad y(n) = y(n, 0). \quad (30)$$

Równanie różnicowe zamkniętego układu regulacji dla wielkości $x(n)$ otrzymujemy podstawiając w równaniach (16) i (28) $\varepsilon = 0$ i rugując z tak otrzymanych równań wielkość $y(n)$. Otrzymujemy wtedy:

$$\{x(n+m) + \Phi_0[x(n+m), 0]\} + \{d_1 x(n+m-1) + \Phi_1[x(n+m-1), 0]\} + \dots + \\ + \{d_m x(n) + \Phi_m[x(n), 0]\} = w(n+m) + d_1 w(n+m-1) + \dots + d_m w(n). \quad (31)$$

Równanie to wiąże wielkość uchybu $x(n)$ z wymuszeniem $w(n)$ i jest — w ogólnym przypadku — nieliniowe. Dla uproszczenia tego równania zauważmy, że na podstawie (20) jest:

$$\Phi_0[x(n+m), 0] = y_{n+m}(0). \quad (32)$$

Jeżeli impulsator jest tak zbudowany, że dowolny i -ty impuls $v_i(t_i)$ przyjmuje w chwili $t_i = 0$ wartość równą zeru, wtedy mamy przy dowolnej części ciągłej układu

$$y_{n+m}(0) = 0 \quad (33)$$

dla wszystkich wartości $n+m$.

Jeżeli impulsator jest tak zbudowany, że i -ty impuls $v_i(t_i)$ w chwili $t_i = 0$ może przyjmować już wartość różną od zera, wtedy zachodzi (33) w przypadku, gdy odpowiedź na skok jednostkowy $k(t)$ części ciągłej układu w chwili $t = 0$ przyjmuje wartość równą zeru¹⁾. A zatem praktycznie dla wszystkich układów mieszczących się w rozpatrywanej klasie zachodzi (33), mamy więc dla nich:

$$\Phi_0[x(n+m), 0] = 0. \quad (34)$$

Równanie różnicowe (31) upraszcza się więc:

$$x(n+m) + \{d_1 x(n+m-1) + \Phi_1[x(n+m-1), 0]\} + \dots + \{d_m x(n) + \Phi_m[x(n), 0]\} = \\ = w(n+m) + d_1 w(n+m-1) + \dots + d_m w(n). \quad (35)$$

Równania (31) i (35) różnią się między sobą w sposób zasadniczy. Chodzi mianowicie o to, że trudno jest znaleźć rozwiązanie równania (31) lub (35) w formie analitycznej, gdyż są to równania nieliniowe. Natomiast stosunkowo łatwo jest znaleźć rozwiązanie numeryczne równania (35) przy dowolnej znanej wielkości $w(n)$ (i znanych warunkach początkowych), gdyż z równania tego łatwo możemy otrzymać formułę rekurencyjną dla wielkości $x(n+m)$. Obliczenie rozwiązania numerycznego równania (31) jest bardzo utrudnione ze względu na to, że równanie to jest względem wielkości $x(n+m)$ równaniem przestępnym.

W sposób podobny jak dla wielkości $x(n)$, można otrzymać równanie różnicowe dla wielkości $y(n)$:

$$y(n+m) + d_1 y(n+m-1) + \dots + d_m y(n) = \\ = \Phi_1[w(n+m-1) - y(n+m-1), 0] + \dots + \Phi_m[w(n) - y(n), 0]. \quad (36)$$

Oczywiście równanie to jest ważne dla układów, które spełniają zależność (33).

Korzystając z równań różnicowych (35) i (36) możemy obliczyć dyskretne wielkości $x(n)$ i $y(n)$. Ażeby ułożyć równanie różnicowe dla wielkości $y(n, \varepsilon)$, należałoby z układu równań złożonego z (35) i (16) wyrugować wielkość $x(n)$. Ponieważ równania (35) i (16)

¹⁾ Wynika to ze wzoru (22a).

są nieliniowe, więc przy rugowaniu z nich wielkości $x(n)$ natrafia się na duże trudności. Można jednak posługując się tymi równaniami obliczyć przebieg $y(n, \varepsilon)$ w zamkniętym układzie, przy dowolnym przebiegu $w(n)$. W tym celu należy najpierw za pomocą równania (35) obliczyć kolejne wartości $x(n)$ dla $n = 0, 1, \dots$ itd., a następnie korzystając z nich i z równania (16) — kolejne wartości $y(n, \varepsilon)$. W podobny sposób można również — korzystając z równań (35) (16) i (28) — obliczyć przebieg $x(n, \varepsilon)$ [jeżeli znany jest przebieg $w(n, \varepsilon)$].

W przypadku szczególnym, gdy równania (35) i (16) są równaniami liniowymi, można z nich bez trudności wyrugować wielkość $x(n)$ i otrzymać w ten sposób jedno równanie różnicowe wiążące wielkości $y(n, \varepsilon)$ i $w(n)$.

Przedstawiając równanie (35) w nieco zmienionej postaci można zastosować do niego warunek stabilności podany w pracy [3] i w ten sposób przeprowadzić analizę stabilności układów należących do rozpatrywanej klasy.

3.2. Obliczanie przebiegów

Jak już wspominaliśmy, znając równanie różnicowe możemy stosunkowo prosto obliczyć przebieg interesującej nas wielkości w postaci numerycznej (jeżeli to równanie nie jest przestępne). W tym celu równanie różnicowe przedstawiamy w postaci formuły rekurencyjnej, za pomocą której obliczamy kolejne wartości interesującej nas wielkości. Na przykład z równania (35) bezpośrednio wynika następująca formuła rekurencyjna:

$$x(n) = w(n) + d_1 w(n-1) + \dots + d_m w(n-m) - \{d_1 x(n-1) + \Phi_1[x(n-1), 0]\} + \dots - \{d_m x(n-m) + \Phi_m[x(n-m), 0]\}. \quad (37)$$

Jeżeli układ do chwili $n = 0$ znajdował się w stanie spoczynku, a więc

$$w(n) = x(n) = 0 \quad \text{dla} \quad n < 0, \quad (38)$$

wtedy przebieg $x(n)$ obliczamy w ten sposób, że podstawiamy w formule (37) kolejno zamiast n wartości $0, 1, 2, \dots$ itd., pamiętając o tym, że dla ujemnych argumentów funkcje $w(n)$ i $x(n)$ są równe zero. Fizykalnie oznacza to, że obliczamy w ten sposób reakcję układu tylko na przebieg wielkości $w(n)$, która zaczyna działać począwszy od chwili $n = 0$, a do chwili $n = 0$ układ znajdował się w stanie spoczynku. Oczywiście znając warunki początkowe $x(0), x(1), \dots, x(m-1)$ i przebieg wielkości $w(n)$, możemy również obliczyć przebieg $x(n)$ za pomocą formuły (37) w przypadku, gdy układ do chwili $n = 0$ nie był w stanie spoczynku.

Impulsatory budowane w praktyce często posiadają tzw. kwantowanie w poziomie, tzn. posiadają własność wysyłania pewnej, zazwyczaj niewielkiej ilości różnych impulsów. Ten fakt, który utrudnia dodatkowo znalezienie rozwiązania równania w postaci analitycznej, często — odwrotnie — ułatwia obliczenie rozwiązania numerycznego równania sposobem rekurencyjnym. Rozpatrzmy to bliżej. Zakładamy, że impulsator posiada kwantowanie w poziomie, tzn. ma możliwość wysyłania s różnych impulsów, gdy $x(i) > 0$, i tyleż samo, gdy $x(i) < 0$ (w ogólnym przypadku ilości różnych impulsów dla $x(i)$, dodatnich i ujemnych, mogą być różne). Jeżeli wielkość $x(i)$ przyjmuje wartości należące do pewnego przedziału, to impulsator dla tych wartości $x(i)$ wysyła ten sam impuls o określonych pa-

rametrach, dla innego przedziału wartości $x(i)$ — impuls o innych parametrach. Można to zapisać w ten sposób:

Jeżeli wartości $x(i)$ leżą w przedziale

$$x_v \leq x(i) < x_{v+1} \quad v = 0, 1, \dots, s,$$

to impulsator wysyła impuls

$$v_i(t_i) = v_{(v)}(t_i) \quad v = 0, 1, \dots, s,$$

gdzie:

$$0 < x_1 < x_2 < \dots < x_s,$$

$$x_0 = 0, \quad x_{s+1} = x_{mx} > x_s,$$

$v_{(v)}(t_i)$ — przebieg impulsu wysyłany w odpowiednim przedziale wartości $x(i)$,

$$v_{(0)}(t_i) \equiv 0.$$

Dla ujemnych wartości $x(i)$ impulsator wysyła takie same impulsy, tylko z ujemnym znakiem, czyli:

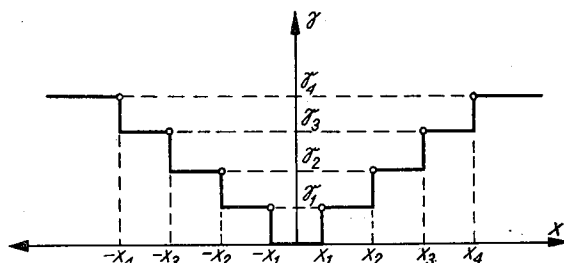
jeżeli

$$-x_v \geq x(i) > -x_{v+1},$$

to

$$v_i(t_i) = -v_{(v)}(t_i).$$

Przykładem takiego impulsatora może być impulsator o prostokątnym kształcie i modulowanej szerokości impulsów (IS), który posiada zależność szerokości impulsów γ_i od wielkości $x(i)$ przedstawioną na rysunku 4. Impulsator ten może wysyłać cztery różne impulsy dodatnie i tyle samo ujemnych, a zatem dla niego $s = 4$.



Rys. 4. Zależność γ_i od $x(i)$ dla impulsatora IS posiadającego kwantowanie w poziomie

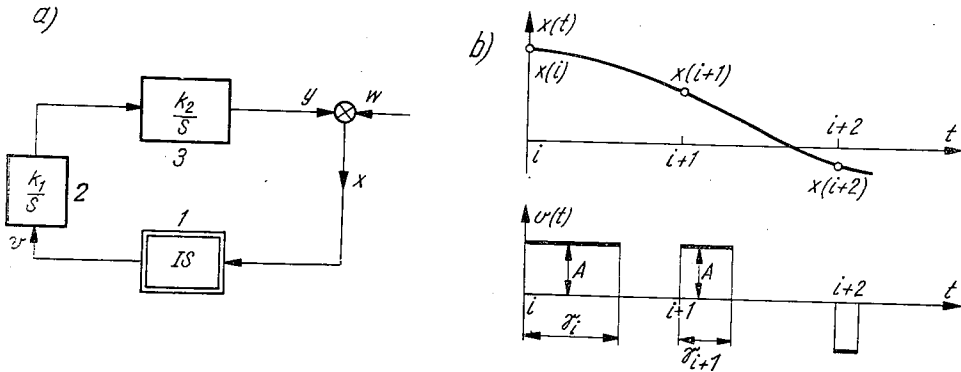
Założmy teraz, że równanie różnicowe (35) opisuje nam zamknięty układ regulacji, w którym występuje impulsator posiadający kwantowanie w poziomie. Biorąc pod uwagę wzory (20) na funkcje $\Phi_j[x(n+m-j), 0]$ i własności impulsatora, dochodzimy do wniosku, że przy dowolnej zmianie wielkości $x(n+m-j)$ każda z funkcji $\Phi_j[x(n+m-j), 0]$ może przyjmować najwyżej s wartości (dodatnich i ujemnych) różnych od zera i jedną równą zeru. A zatem chcąc otrzymać rozwiązanie numeryczne równania (35) należy obliczyć dla każdej funkcji $\Phi_j[x(n+m-j), 0]$ s wartości i następnie odpowiednio podstawiać je do formuły rekurencyjnej (37).

Jeżeli impulsator nie posiada kwantowania w poziomie, a rozpatrywany układ jest nieliniowy, wtedy dla każdej wartości $x(n+m-j)$ musimy obliczać wartość $\Phi_j[x(n+m-j), 0]$ według wzorów (20). A zatem w tym przypadku obliczenia są znacznie bardziej pracochłonne.

4. PRZYKŁADY OBLICZANIA PRZEBIEGÓW

1) Układ z impulsatorem IS, serwowmotorem i obiektem astatycznym

Obecnie rozpatrzmy układ regulacji składający się z impulsatora o prostokątnym kształcie i modulowanej szerokości impulsów (IS), serwowmotoru i idealnego obiektu astatycznego (rysunek 5a). W dalszym ciągu zbadamy zachowanie się tego układu, przy wymuszeniu w postaci skoku jednostkowego.



Rys. 5. a) Przykład układu regulacji składającego się z impulsatora IS 1, serwowmotoru 2 i obiektu całkującego 3. b) Przebiegi wielkości wejściowej $x(t)$ i impulsów $v(t)$ dla impulsatora IS

Przebieg impulsów podawanych przez impulsator pokazany jest na rysunku 5b. Impulsy mają stałą wysokość A , a ich szerokość γ_i zależy od wielkości $x(i)$ tak, że:

$$\begin{aligned} \gamma_i &= k_J |x(i)| & \text{dla } |x(i)| \leq x_{mx}, \\ \gamma_i &= \gamma_{mx} = k_J x_{mx} & \text{dla } |x(i)| \geq x_{mx}, \end{aligned} \quad (39)$$

gdzie:

k_J — stały współczynnik impulsatora,

x_{mx} — dodatnia wartość określająca nasycenie impulsatora.

Operatorowa funkcja przejścia części ciągłej układu ma postać:

$$\bar{K}(s) = \frac{k_1 k_2}{s^2}, \quad (40)$$

gdzie k_1 i k_2 — stałe współczynniki odpowiednio dla serwowmotoru i obiektu. Po zmianie skali czasu otrzymujemy zgodnie z (3):

$$K(p) = \frac{k}{p^2}, \quad (41)$$

gdzie $k = k_1 k_2 T_J^2$.

Równania różnicowe układu

Równania różnicowe układu napiszemy korzystając z poprzednio wyprowadzonych wzorów ogólnych. Ograniczymy się tu do równań dla przypadku, gdy parametr ε przyjmuje wartość równą zero. Oczywiście bez trudności można napisać podobne równania dla dowolnej wartości parametru ε . Stosując oznaczenia takie jak w rozdziale 2.1 mamy dla naszego układu:

$$\begin{aligned} v_i(t_i) &= A[1(t_i) - 1(t_i - \gamma_i)] \operatorname{sgn} x(i), \\ y_i(t_i) &= A[k(t_i) - k(t_i - \gamma_i)] \operatorname{sgn} x(i). \end{aligned} \quad (42)$$

Odpowiedź na skok jednostkowy dla części ciągłej układu ma postać

$$k(t_i) = \mathcal{L}^{-1}[K(p)] = \frac{k}{2} t_i^2 1(t_i),$$

gdzie $\mathcal{L}^{-1}$ — symbol odwrotnej transformacji Laplace'a-Carsona. A zatem

$$y_i(t_i) = \begin{cases} \frac{Ak}{2} t_i^2 \operatorname{sgn} x(i) & \text{dla } t_i \leq \gamma_i, \\ \frac{Ak}{2} [2\gamma_i t_i - \gamma_i^2] \operatorname{sgn} x(i) & \text{dla } t_i \geq \gamma_i. \end{cases} \quad (43)$$

Dla naszego układu $m = r = 2$, a zatem zgodnie z (16), równanie różnicowe otwartego układu dla $\varepsilon = 0$ ma postać:

$$y(n+2) + d_1 y(n+1) + d_2 y(n) = \Phi_0[x(n+2), 0] + \Phi_1[x(n+1), 0] + \Phi_2[x(n), 0]. \quad (44)$$

Współczynniki d_1 i d_2 obliczamy korzystając ze wzorów (19) i (18):

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1; & \Delta_1 &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2; & \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1, \\ d_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = -2; & d_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1. \end{aligned} \quad (45)$$

Funkcje $\Phi_j[x(n+2-j), 0]$ dla $j = 0, 1, 2$ obliczamy uwzględniając we wzorach (20) zależności (43):

$$\begin{aligned} \Phi_0[x(n+2), 0] &= y_{n+2}(0) = 0, \\ \Phi_1[x(n+1), 0] &= y_{n+1}(1) = \frac{Ak}{2} \gamma_{n+1} [2 - \gamma_{n+1}] \operatorname{sgn} x(n+1), \end{aligned} \quad (46)$$

$$\Phi_2[x(n), 0] = y_n(2) + d_1 y_n(1) = \frac{Ak}{2} \gamma_n^2 \operatorname{sgn} x(n).$$

Równanie różnicowe zamkniętego układu, wiążące ze sobą wielkości $x(n)$ i $w(n)$, ma postać:

$$\begin{aligned} x(n+2) + \left[-2x(n+1) + \frac{Ak}{2} \gamma_{n+1} (2 - \gamma_{n+1}) \operatorname{sgn} x(n+1) \right] + \\ + \left[x(n) + \frac{Ak}{2} \gamma_n^2 \operatorname{sgn} x(n) \right] = w(n+2) - 2w(n+1) + w(n). \end{aligned} \quad (47)$$

Jest to równanie różnicowe nieliniowe, a więc rozpatrywany układ jest układem nieliniowym.

Obliczenie przebiegu wielkości $x(n)$

Wyniki obliczeń przebiegu wielkości $x(n)$ w układzie, w którym

$$Ak = 10, \quad k_J = 0,1, \quad x_{mx} = 8, \quad (48)$$

przy $w(n) = 2 \cdot 1(n)$, zostały przedstawione w tablicy 1a. Obliczenia te wykonano korzystając z formuły rekurencyjnej o postaci:

$$x(n) = w(n) - 2w(n-1) + w(n-2) + [x(n-1) + 5\gamma_{n-1}^2 \operatorname{sgn} x(n-1)] + \\ - [x(n-2) + 5\gamma_{n-2}^2 \operatorname{sgn} x(n-2)], \quad (49)$$

która wynika bezpośrednio z równania (47), przy założeniu, że impulsator nie jest nasycony (tzn. $x(i) \leq 8, i = n-1, n-2$).

Na rysunku 7a wykreślono przebieg funkcji schodkowej $x(n)$ na podstawie wykonanych obliczeń. Widać na nim wyraźnie, że rozpatrywany układ przy $w(n) = 2 \cdot 1(n)$ jest niestabilny.

Rozpatrując nasz układ za pomocą metody przybliżonej, która polega na linearyzacji układu dla niewielkich odchyłach wielkości od stanu ustalonego, można dojść do znanego wniosku, że układ ten jest strukturalnie niestabilny. Z metody przybliżonej wynika mianowicie, że jeżeli

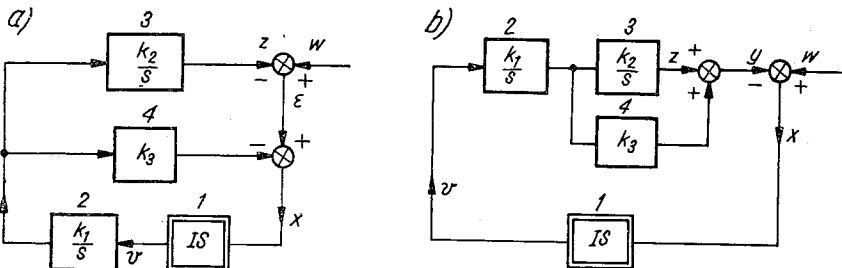
$$Akk_J \leq 4, \quad (50)$$

to nasz układ jest układem konserwatywnym, jeżeli zaś warunek (50) nie jest spełniony, to układ jest niestabilny. Z obliczonego za pomocą dokładnej formuły (49) przebiegu widać, że pomimo tego, że parametry (48) układu spełniają warunek (50), to jednak układ dla $w(n) = 2 \cdot 1(n)$ nie jest układem konserwatywnym, lecz wyraźnie niestabilnym. Z rezultatów rozważań otrzymanych za pomocą metody przybliżonej nie można więc sądzić o zachowaniu się układu przy dowolnych wymuszeniach.

Rozpatrywany układ można, jak wiadomo, ustabilizować wprowadzając dodatkowe korekcyjne sprzężenie zwrotne.

2) Układ z dodatkowym korekcyjnym sprzężeniem zwrotnym

Układ z dodatkowym korekcyjnym sprzężeniem zwrotnym przedstawiony jest na rysunku 6a. W układzie tym występują te same elementy, co w układzie z rysunku 5 i jeszcze dodatkowe sztywne sprzężenie zwrotne o współczynniku wzmocnienia k_3 , którego zadaniem jest



Rys. 6. a) Układ z rysunku 5a z dodatkowym korekcyjnym sprzężeniem zwrotnym i b) równoważny mu układ

niem jest stabilizacja układu. W celu napisania równań różnicowych układu przekształcamy go do postaci przedstawionej na rysunku 6b. Operatorowa funkcja przejścia części ciąglej tego ostatniego układu ma postać:

$$\bar{K}(s) = \frac{k_1 k_2}{s^2} + \frac{k_1 k_3}{s}. \quad (51)$$

Po zmianie skali czasu otrzymujemy:

$$K(p) = \frac{k_1 k_2 T_J^2}{p^2} + \frac{k_1 k_3 T_J}{p} = \frac{k + k' p}{p^2}, \quad (52)$$

gdzie:

$$k = k_1 k_2 T_J^2, \quad k' = k_1 k_3 T_J.$$

Równania różnicowe układu

Ponieważ mianownik funkcji przejścia (52) jest taki sam jak mianownik funkcji przejścia (41), więc tak jak poprzednio $d_1 = -2$, $d_2 = 1$. Obliczamy dalej:

$$k(t_i) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{k}{p^2} + \frac{k'}{p} \right] = \left(\frac{k}{2} t_i^2 + k' t_i \right) \mathbf{1}(t_i). \quad (53)$$

Uwzględniając we wzorze (42) zależność (53) otrzymujemy:

$$y_i(t_i) = \begin{cases} A \left(\frac{k}{2} t_i^2 + k' t_i \right) \operatorname{sgn} x(i) & \text{dla } t_i \leq \gamma_i, \\ A \left[\frac{k}{2} (2\gamma_i t_i - \gamma_i^2) + k' \gamma_i \right] \operatorname{sgn} x(i) & \text{dla } t_i \geq \gamma_i. \end{cases} \quad (54)$$

Korzystając ze wzorów (16), (20), (45) i (54) otrzymujemy dla $\varepsilon = 0$ następujące równanie różnicowe otwartego układu:

$$y(n+2) - 2y(n+1) + y(n) = A \left[(k+k') \gamma_{n+1} - \frac{k}{2} \gamma_{n+1}^2 \right] \operatorname{sgn} x(n+1) + \\ + A \left[\frac{k}{2} \gamma_n^2 - k' \gamma_n \right] \operatorname{sgn} x(n). \quad (55)$$

Równanie różnicowe zamkniętego układu, wiążące ze sobą wielkości $x(n)$ i $w(n)$, ma więc postać:

$$x(n+2) + \left\{ -2x(n+1) + A \left[(k+k') \gamma_{n+1}^2 - \frac{k}{2} \gamma_{n+1}^2 \right] \operatorname{sgn} x(n+1) \right\} + \\ + \left\{ x(n) + A \left[\frac{k}{2} \gamma_n^2 - k' \gamma_n \right] \operatorname{sgn} x(n) \right\} = w(n+2) - 2w(n+1) + w(n). \quad (56)$$

Jest to nieliniowe równanie różnicowe, określające w sposób dokładny przebieg $x(n)$ w układzie przy znanym przebiegu $w(n)$.

Rozpatrując nasz układ za pomocą powszechnie stosowanej metody przybliżonej, polegającej na linearyzacji układu dla niewielkich odchyłach wielkości od stanu ustalonego, otrzymalibyśmy liniowe równanie różnicowe opisujące nasz układ. Równanie to możemy także otrzymać z równania (56) zakładając, że w tym ostatnim wielkości γ_n i γ_{n+1} zbiegają do zera. Otrzymujemy wtedy przybliżone równanie różnicowe dla zamkniętego układu, które ma postać:

$$x(n+2) + [-2 + Ak_J(k+k')]x(n+1) + [1 - Ak_Jk']x(n) = w(n+2) - 2w(n+1) + w(n). \quad (57)$$

Stosując do równania (57) warunki stabilności dla liniowych układów otrzymujemy warunek:

$$Ak k_J + 2Ak'k_J < 4 \quad (58)$$

(przy $Ak k_J > 0$ i $Ak'k_J > 0$), który jest warunkiem stabilności układu otrzymanym za pomocą metody przybliżonej.

Obliczenie przebiegu wielkości $x(n)$

Wybieramy teraz konkretną wartość dla parametru k' . Niechaj więc

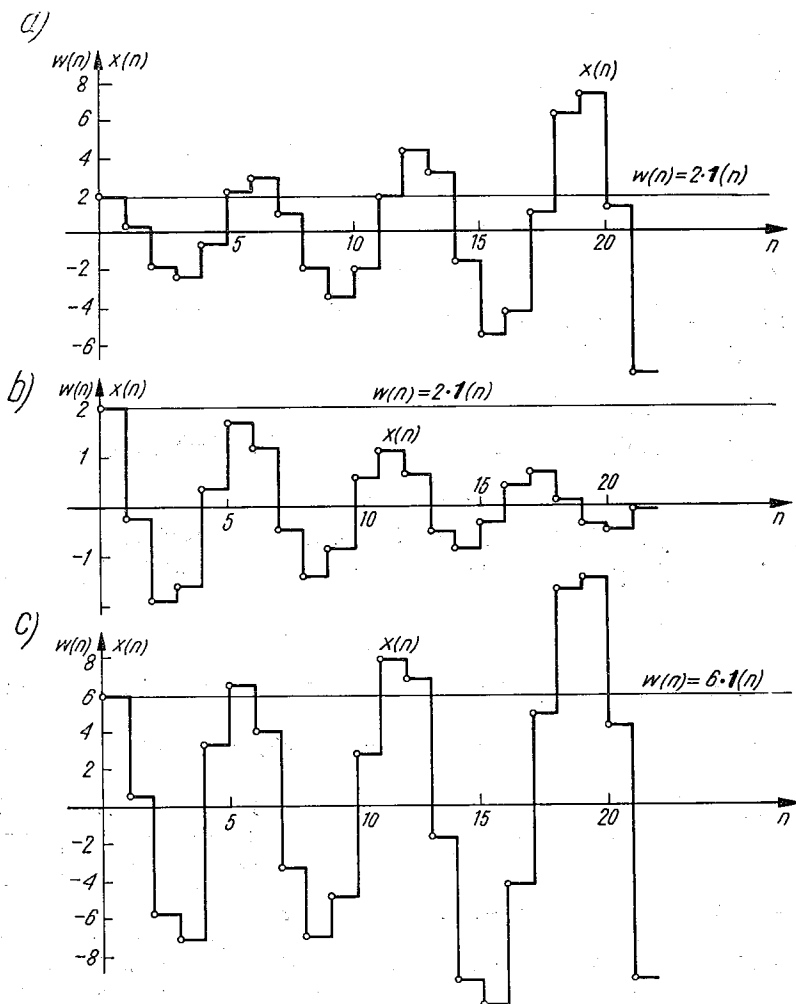
$$Ak' = 2, \quad (59)$$

a pozostałe parametry są określone wzorami (48). Łatwo zauważyć, że dla tych wartości parametrów jest spełniony warunek stabilności (58), gdyż $Ak k_J + 2Ak'k_J = 1,4 < 4$.

Tablica 1

	Tabl. 1a	Tabl. 1b	Tabl. 1c		Tabl. 1a	Tabl. 1b	Tabl. 1c
n	$x(n)$	$x(n)$	$x(n)$	n	$x(n)$	$x(n)$	$x(n)$
0	2	2	6	11	1,99	1,148	7,973
1	0,2	-0,2	0,6	12	4,374	0,561	6,828
2	-1,998	-1,962	-5,94	13	3,188	-0,519	-1,758
3	-2,399	-1,6	-7,176	14	-1,68	-0,894	-9,352
4	-0,489	0,354	3,35	15	-5,517	-0,326	-10,744
5	2,185	1,697	6,407	16	-4,22	0,489	-4,136
6	2,924	1,213	3,935	17	0,931	0,669	4,98
7	0,928	-0,459	-3,254	18	6,474	0,155	11,815
8	-1,992	-1,421	-7,055	19	7,203	-0,433	12,006
9	-3,549	-0,86	-5,001	20	1,226	-0,481	4,197
10	-1,989	0,512	2,883	21	-7,816	-0,04	-9,368

Za pomocą formuły rekurencyjnej, wynikającej bezpośrednio z równania (56), dla wybranych konkretnych wartości parametrów (48) i (59) zostały obliczone przebiegi wielkości $x(n)$ w przypadku, gdy $w(n) = 2 \cdot 1(n)$ (zob. tablica 1b), oraz gdy $w(n) = 6 \cdot 1(n)$ (zob. tablica 1c). Na rysunkach 7b i 7c wykreślono przebiegi funkcji schodkowej $x(n)$ na



Rys. 7. Przebiegi schodkowych funkcji $x(n)$ dla:

- a) układu z rysunku 5a dla $w(n) = 2 \cdot 1(n)$,
- b) układu z rysunku 6a dla $w(n) = 2 \cdot 1(n)$,
- c) układu z rysunku 6a dla $w(n) = 6 \cdot 1(n)$

podstawie wykonanych obliczeń. Z wykresów tych widać wyraźnie, że o ile układ nasz jest stabilny dla $w(n) = 2 \cdot 1(n)$, to jest on niestabilny dla $w(n) = 6 \cdot 1(n)$. A zatem pomimo tego że warunek stabilności (58) otrzymany za pomocą metody przybliżonej jest spełniony, to jednak układ może być niestabilny dla większych wymuszeń. Jak widać, stosowanie metody przybliżonej do układów z impulsorem IS w przypadku większych wymuszeń może prowadzić do błędnych rezultatów.

5. WNIOSKI KOŃCOWE

Punktem wyjściowym analizy dowolnego układu impulsowego jest ułożenie równań różnicowych układu lub — w przypadku układu liniowego — obliczenie odpowiednich funkcji przejścia. W niniejszej pracy pokazano, że problem ułożenia równań różnicowych dla układu impulsowego posiadającego nieliniowy (bądź liniowy) impulsator o dowolnym kształcie impulsów (może być parametryczny) i liniową część ciągłą można sprowadzić do problemu znajdowania odpowiedzi części ciągłej układu na pojedynczy dowolny i -ty impuls. Innymi słowy, znając odpowiedź części ciągłej układu na każdy z impulsów, jaki może wysyłać impulsator, możemy — korzystając z wyprowadzonych wzorów — napisać równania różnicowe układu.

Dla zamkniętych układów impulsowych praktycznie realizowalnych, w których występuje jeden nieliniowy (bądź liniowy) impulsator oraz liniowa część ciągła, można z wyprowadzonych równań różnicowych otrzymać formuły rekurencyjne, za pomocą których można obliczyć przebieg interesującej nas wielkości w postaci numerycznej. Należy przy tym podkreślić, że dla układów posiadających impulsator z kwantowaniem w poziomie (możliwość wysyłania tylko kilku lub kilkunastu różnych impulsów) łatwiej jest otrzymać rozwiązanie numeryczne równania różnicowego niż dla innego typu nieliniowych układów impulsowych.

Formuły rekurencyjne, które można otrzymać korzystając z wyprowadzonych równań różnicowych, szczególnie dobrze nadają się do obliczania przebiegów przy wykorzystaniu matematycznych maszyn cyfrowych. Obliczając cały szereg przebiegów przy różnych wymuszeniach można wyciągnąć daleko idące wnioski o zachowaniu się nieliniowego układu, dla którego trudno jest przeprowadzić analizę w formie ogólnej. Istniejące warunki stabilności dla nieliniowych układów są warunkami wystarczającymi i w związku z tym są one dosyć ostre. Korzystając z obliczonych przebiegów można — dla konkretnych układów i wymuszeń — podać warunki znacznie łagodniejsze. Prowadząc obliczenia przebiegów w sposób celowy, możemy ustalić wpływ poszczególnych parametrów konkretnego układu na takie wskaźniki procesu regulacji, jak czas regulacji, wielkość przeregulowań itd.

Dodatek 1

Wyprowadzenie równania różnicowego otwartego układu

Przy założeniach poczynionych w rozdziale 2.1, dla rozwiązania równania różniczkowego (9) w poszczególnych przedziałach czasu mamy wyrażenia:

$$y_i(t_i) \begin{cases} \equiv 0 & \text{dla } t_i < 0 \\ = \varphi_i^*(t_i) & \text{dla } 0 \leq t_i < 1 \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{s_k} C_{iku} t_i^{s_k-u} e^{p_k t_i} & \text{dla } t_i \geq 1^1), \end{cases} \quad (60)$$

¹⁾ Zob. na przykład praca: W. Pogorzelski „Analiza matematyczna”, tom III, Warszawa 1954 r., str. 177.

gdzie $\varphi_i^*(t_i)$ rozwiązanie równania (9) w przedziale czasu $0 \leq t_i < 1$, a C_{iku} oznacza r stałych, zależnych również od wskaźnika i . Zależność ta wynika stąd, że warunki początkowe przebiegu $y_i(t_i)$ dla przedziału czasu $t_i \geq 1$ są ściśle związane z przebiegiem impulsu $v_i(t_i)$. Zakładając, że część ciągła układu posiada zerowe warunki początkowe, wielkość $y(n, \varepsilon)$ możemy obliczyć ze wzoru:

$$y(n, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(n-i, \varepsilon) + y_n(0, \varepsilon). \quad (61)$$

Uwzględniając zależność (60) dla $t_i \geq 1$ mamy:

$$y_i(n-i, \varepsilon) = y_i(n-i+\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{s_k} C_{iku}(n-i+\varepsilon)^{s_k-u} e^{p_k(n-i+\varepsilon)} \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (62)$$

Stosując wzór Newtona na rozkład dwumianu mamy:

$$[(n-i)+\varepsilon]^{s_k-u} = \sum_{\mu=0}^{s_k-u} \binom{s_k-u}{\mu} \varepsilon^{s_k-u-\mu} (n-i)^{\mu}.$$

Zatem:

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^{s_s} C_{iku}(n-i+\varepsilon)^{s_k-u} &= \sum_{u=1}^{s_k} C_{iku} \sum_{\mu=0}^{s_k-u} \binom{s_k-u}{\mu} \varepsilon^{s_k-u-\mu} (n-i)^{\mu} = \\ &= \sum_{\mu=0}^{s_k-1} (n-i)^{\mu} \sum_{u=1}^{s_k-\mu} C_{iku} \binom{s_k-u}{\mu} \varepsilon^{s_k-u-\mu} (n-i)^{\mu} = \sum_{\mu=0}^{s_k-1} B'_{ik\mu} (n-i)^{\mu}, \end{aligned} \quad (63)$$

gdzie

$$B'_{ik\mu} = \sum_{u=1}^{s_k-\mu} C_{iku} \binom{s_k-u}{\mu} \varepsilon^{s_k-u-\mu}.$$

Podstawiając (63) do (62) otrzymujemy:

$$y_i(n-i, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{s_k-1} B_{ik\mu} (n-i)^{\mu} e^{p_k(n-i)} \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (64)$$

gdzie

$$B_{ik\mu} = e^{p_k \varepsilon} \sum_{u=1}^{s_k-\mu} C_{iku} \binom{s_k-u}{\mu} \varepsilon^{s_k-u-\mu}. \quad (65)$$

Uwzględniając we wzorze (61) zależność (65) mamy:

$$y(n, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{s_k-1} B_{ik\mu} (n-i)^{\mu} e^{p_k(n-i)} + y_n(0, \varepsilon). \quad (66)$$

Tworzymy obecnie sumę:

$$Y(n, \varepsilon) = \sum_{j=0}^m d_j y(n+m-j, \varepsilon), \quad (67)$$

gdzie $d_0 = 1$, a liczba m i wielkości $d_1, d_2, \dots, d_m$ zostaną obliczone w dalszym ciągu.

¹⁾ Zob. na przykład praca: A. Mostowski, M. Stark „Algebra wyższa”, część I, Warszawa 1953 r., str. 24.

Korzystając z (66) możemy dla każdego składnika sumy (67) napisać:

$$\begin{aligned} d_j y(n+m-j, \varepsilon) &= d_j \sum_{i=0}^{n+m-j-1} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{s_k-1} B_{ik\mu} (n+m-j-i)^{\mu} e^{p_k(n+m-j-i)} + d_j y_{n+m-j}(0, \varepsilon) = \\ &= d_j \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{s_k-1} B_{ik\mu} [(n-i)+(m-j)]^{\mu} e^{p_k(n-i)} e^{p_k(m-j)} + d_j \sum_{i=n}^{n+m-j} y_i(n+m-j-i, \varepsilon). \end{aligned} \quad (68)$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=0}^{s_k-1} B_{ik\mu} [(n-i)+(m-j)]^{\mu} &= \sum_{\mu=0}^{s_k-1} B_{ik\mu} \sum_{u=0}^{\mu} \binom{\mu}{u} (m-j)^{\mu-u} (n-i)^u = \\ &= \sum_{u=0}^{s_k-1} (n-i)^u \sum_{\mu=u}^{s_k-1} \binom{\mu}{u} (m-j)^{\mu-u} B_{ik\mu} = \sum_{u=0}^{s_k-1} (n-i)^u \sum_{v=0}^{s_k-u-1} \binom{n+v}{u} (m-j)^v B_{ik, u+v}, \end{aligned} \quad (69)$$

więc:

$$\begin{aligned} d_j y(n+m-j, \varepsilon) &= d_j \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{u=0}^{s_k-1} (n-i)^u e^{p_k(n-i)} \sum_{v=0}^{s_k-u-1} \binom{n+v}{u} (m-j)^v B_{ik, u+v} + \\ &\quad + d_j \sum_{i=n}^{n+m-j} y_i(n+m-j-i, \varepsilon). \end{aligned} \quad (70)$$

Po podstawieniu (70) do (67) dostajemy:

$$\begin{aligned} Y(n, \varepsilon) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{u=0}^{s_k-1} (n-i)^u e^{p_k(n-i)} \sum_{v=0}^{s_k-u-1} \binom{n+v}{u} B_{ik, u+v} \sum_{j=0}^m d_j (m-j)^v e^{p_k(m-j)} + \\ &\quad + \sum_{j=0}^m d_j \sum_{i=n}^{n+m-j} y_i(n+m-j-i, \varepsilon). \end{aligned} \quad (71)$$

Jeżeli dobierzemy wielkości $d_1, d_2, \dots, d_m$ tak, aby były spełnione równania:

$$\sum_{j=0}^m d_j (m-j)^v e^{p_k(m-j)} = 0 \quad (72)$$

$$\text{dla } v = 0, 1, \dots, s_k-1,$$

$$k = 1, 2, \dots, \infty,$$

wtedy z równania (71) otrzymujemy równanie różnicowe otwartego układu regulacji. Do wniosku tego dochodzimy biorąc pod uwagę zależność (11).

Układ równań (72) można zapisać w innej postaci:

$$d_1(m-1)^v e^{p_k(m-1)} + d_2(m-2)^v e^{p_k(m-2)} + \dots + d_m 0^v = -m^v e^{p_k m}, \quad (73)$$

$$v = 0, 1, \dots, s_k-1,$$

$$k = 1, 2, \dots, \infty,$$

gdzie — jak wiadomo — mamy:

$$0^v = \begin{cases} 0 & \text{dla } v \neq 0, \\ 1 & \text{dla } v = 0. \end{cases}$$

Układ równań (73) składa się z r równań. Jeżeli wszystkie wielkości $e^{p_1}, e^{p_2}, \dots, e^{p_r}$ różnią się między sobą, tzn. jest

$$\begin{aligned} e^{p_i} &\neq e^{p_j}, \quad \text{gdy} \quad i \neq j, \\ i, j &= 1, 2, \dots, r, \end{aligned} \quad (74)$$

wtedy, aby mogły być spełnione wszystkie równania układu (73), musi być $m = r$. Rzeczywiście, w przypadku gdy zachodzi (74), wtedy wyznacznik charakterystyczny Δ układu równań (73), określony wzorem (19), jest różny od zera¹⁾ i aby układ r równań (73) był spełniony, należy dobrać r stałych $d_1, d_2, \dots, d_m$, $m = r$, które możemy obliczyć z wzorów Cramera (23). Po dobraniu stałych d_j według wzoru (23), z zależności (71) dostajemy równanie różnicowe:

$$Y(n, \varepsilon) = \sum_{j=0}^m d_j \sum_{i=n}^{n+m-j} y_i(n+m-j-i, \varepsilon). \quad (75)$$

Grupując wyrażenia prawej strony równania (75), zależne od tej samej wielkości $x(i)$, otrzymujemy w końcu równanie różnicowe otwartego układu o postaci (16).

Jak widać z przytoczonych tu rozważań, jeżeli zachodzi (74), wtedy rząd równania różnicowego otwartego układu jest równy rzędowi równania różniczkowego części ciągłej układu. Jeżeli pierwiastki $p_1, p_2, \dots, p_r$ są różne, co zakładaliśmy, wtedy zazwyczaj zachodzi również (74). Jeżeli jednak dwa pierwiastki różnią się między sobą o $\pm j2k\pi$ (gdzie $k = 1, 2, \dots$), wtedy relacja (74) nie jest spełniona. Załóżmy więc, że dwa spośród pierwiastków równania (12), a mianowicie p_μ i p_ν , różnią się między sobą o $\pm j2k\pi$. Stopień wielokrotności pierwiastka p_μ jest s_μ , a pierwiastka p_ν jest s_ν . Jest więc:

$$e^{p_\mu} = e^{p_\nu}, \quad \mu \neq \nu. \quad (76)$$

Dla wszystkich pozostałych pierwiastków równania (12) jest spełniona relacja (74). Jeżeli zachodzi (76), to w układzie równań (73) występują pewne równania takie same, możemy zatem z tego układu równań usunąć te równania, w których występuje jeden z pierwiastków p_μ lub p_ν , posiadający niższy stopień wielokrotności. Jeżeli zatem mamy $s_\mu > s_\nu$, to w układzie równań (73) powinny występować równania, w których występuje pierwiastek p_μ , a nie powinny występować równania zawierające pierwiastek p_ν . Ilość równań układu (73) zmniejszy się zatem o s_ν i rząd równania różnicowego (16) otwartego układu w tym przypadku będzie równy:

$$m = r - s_\nu. \quad (77)$$

Rozumując podobnie można obliczyć rząd równania różnicowego w przypadku, gdy dla więcej niż dwóch pierwiastków p_j zachodzi (76).

D o d a t e k 2

Przekształcenie wzorów (23)²⁾

Zmieniając porządek kolumn wyznacznika Δ_{ij} określonego wzorem (25) i podstawiając $r = m$ możemy go przedstawić w postaci:

$$\Delta_{ij} = (-1)^j \Omega, \quad (78)$$

¹⁾ Zob. np. praca: Гельфонд Исчисление конечных разностей. Гостехиздат, Москва 1952, str. 398.

²⁾ We wzorach tutaj występujących zakładamy, że $r = m$. W przypadku ogólnym może być $r > m$. Również w tym przypadku pokazane przekształcenia będą prawdziwe, jeżeli dla występujących we wzorze (79) pierwiastków p_j (których jest zawsze m) zmienimy numerację wskaźników na $p_1, p_2, \dots, p_m$.

gdzie

$$\Omega = \begin{vmatrix} e^{p_1 m}, & e^{p_1(m-1)}, & \dots, & e^{p_1(m-j+1)}, & e^{p_1(m-j-1)}, & \dots, & 1 \\ e^{p_2 m}, & e^{p_2(m-1)}, & \dots, & e^{p_2(m-j+1)}, & e^{p_2(m-j-1)}, & \dots, & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{p_m m}, & e^{p_m(m-1)}, & \dots, & e^{p_m(m-j+1)}, & e^{p_m(m-j-1)}, & \dots, & 1 \end{vmatrix} \quad (79)$$

Mnożymy drugą kolumnę wyznacznika Ω przez e^{p_1} i odejmujemy od pierwszej, trzecią — przez e^{p_1} i odejmujemy od drugiej itd., $(j+1)$ -szą — przez e^{2p_1} i odejmujemy od j -tej, $(j+2)$ — przez e^{p_1} i odejmujemy od $(j+1)$ -ej itd.

Dostajemy wtedy:

$$\begin{aligned} \Omega &= \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ e^{p_2(m-1)^0}(e^{p_2}-e^{p_1}), & \dots, & e^{p_2(m-j-1)^0}(e^{2p_2}-e^{2p_1}), & \dots, & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{p_m(m-1)}(e^{p_m}-e^{p_1}), & \dots, & e^{p_m(m-j-1)}(e^{2p_m}-e^{2p_m}), & \dots, & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \prod_{i=2}^m (e^{p_i}-e^{p_1}) \begin{vmatrix} e^{p_2(m-1)}, & \dots, & e^{p_2(m-j-1)}(e^{p_2}+e^{p_1}), & \dots, & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{p_m(m-1)}, & \dots, & e^{p_m(m-j-1)}(e^{p_m}+e^{p_1}), & \dots, & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \prod_{i=2}^m (e^{p_i}-e^{p_1}) \left\{ \begin{vmatrix} e^{p_2(m-1)}, & \dots, & e^{p_2(m-j)}, & e^{p_2(m-j-2)}, & \dots, & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{p_m(m-1)}, & \dots, & e^{p_m(m-j)}, & e^{p_m(m-j-2)}, & \dots, & 1 \end{vmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + e^{p_1} \begin{vmatrix} e^{p_2(m-1)}, & \dots, & e^{p_2(m-j+1)}, & e^{p_2(m-j-1)}, & \dots, & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{p_m(m-1)}, & \dots, & e^{p_m(m-j+1)}, & e^{p_m(m-j-1)}, & \dots, & 1 \end{vmatrix} \right\} \quad (80) \end{aligned}$$

Oznaczamy przez

$$|e^{p_{k+1}}|_{m-k}^i$$

wyznacznik $(m-k)$ -tego rzędu, który powstaje z wyznacznika Vandermonda $(m-k)$ -tego rzędu, zawierającego w kolejnych wierszach odpowiednie potęgi wielkości $e^{p_{k+1}}, e^{p_{k+2}}, \dots, e^{p_m}$, w ten sposób, że w tym ostatnim w pierwszych i kolumnach zostają zwiększone o jedność potęgi wielkości e^{p_j} , czyli:

$$|e^{p_{k+1}}|_{m-k}^i = \begin{vmatrix} e^{p_{k+1}(m-k)}, & \dots, & e^{p_{k+1}(m-k-i+1)}, & e^{p_{k+1}(m-k-i-1)}, & \dots, & 1 \\ e^{p_{k+2}(m-k)}, & \dots, & e^{p_{k+2}(m-k-i+1)}, & e^{p_{k+2}(m-k-i-1)}, & \dots, & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{p_m(m-k)}, & \dots, & e^{p_m(m-k-i+1)}, & e^{p_m(m-k-i-1)}, & \dots, & 1 \end{vmatrix} \quad (81)$$

Wtedy wzór (80) można zapisać:

$$\dot{\Omega} = |e^{p_1}|_m^j = \prod_{i=2}^m (e^{p_i}-e^{p_1}) [|e^{p_2}|_{m-1}^j + e^{p_1} |e^{p_2}|_{m-1}^{j-1}]. \quad (82)$$

Wzór (82) jest wzorem rekurencyjnym uzależniającym wyznacznik m -tego rzędu od podobnych mu wyznaczników $(m-1)$ rzędu. Dla każdego z nich można dalej stosować wzór (82). Mamy więc:

$$|e^{p_2}|_{m-1}^j = \prod_{i=3}^m (e^{p_i} - e^{p_2}) [|e^{p_3}|_{m-2}^j + e^{p_2} |e^{p_3}|_{m-2}^{j-1}], \quad (83)$$

$$|e^{p_2}|_{m-1}^{j-1} = \prod_{i=3}^m (e^{p_i} - e^{p_2}) [|e^{p_3}|_{m-2}^{j-1} + e^{p_2} |e^{p_3}|_{m-2}^{j-2}]. \quad (84)$$

Podstawiając (83) i (84) do (82) otrzymujemy:

$$|e^{p_1}|_m^j = \prod_{i=2}^m (e^{p_i} - e^{p_1}) \prod_{j=3}^m (e^{p_j} - e^{p_2}) [|e^{p_3}|_{m-2}^j + e^{p_2} |e^{p_3}|_{m-2}^{j-1} + e^{p_1} |e^{p_3}|_{m-2}^{j-1} + e^{p_1} e^{p_2} |e^{p_3}|_{m-2}^{j-2}]. \quad (85)$$

Postępując tak w dalszym ciągu można dojść do wniosku, że:

$$\Omega = |e^{p_1}|_m^j = \prod_{j=i+1}^m \prod_{i=1}^{m-1} (e^{p_j} - e^{p_i}) \sum_j e^{p_{k_1}} e^{p_{k_2}} \dots e^{p_{k_j}}, \quad (86)$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie iloczyny, z których każdy jest kombinacją j różnych czynników e^{p_k} wziętych spośród wielkości $e^{p_1}, e^{p_2}, \dots, e^{p_m}$. A zatem w sumie $\sum_j$ występuje, jak wiadomo z kombinatoryki $\binom{m}{j}$ składników. Uwzględniając to, że wyznacznik Δ_1 określony wzorem (24) jest wyznacznikiem Vandermonda, dla którego jest

$$\Delta_1 = \prod_{j=i+1}^m \prod_{i=1}^{m-1} (e^{p_j} - e^{p_i}), \quad (87)$$

oraz uwzględniając zależności (23), (78) i (86) otrzymujemy dla wielkości d_j wzory:

$$d_j = (-1)^j \sum_j e^{p_{k_1}} e^{p_{k_2}} \dots e^{p_{k_j}}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (88)$$

które inaczej można przedstawić w postaci (26).

*Politechnika Śląska
Katedra Teorii Regulacji*

WYKAZ LITERATURY

1. Cypkin J. Z.: Teorija impulsnych sistem. Fizmaszgiz, Moskwa 1958.
2. Cypkin J. Z.: Elementy teorii cyfrowych awtomatycznych sistem. Prace I Międzynarodowego Kongresu IFAC w 1960 r. Izdatielstwo AN SSSR, Moskwa 1961.
3. Gessing R.: O pewnym wystarczającym warunku stabilności nieliniowych układów impulsowych. — Arch. Automatyki i Telemekhaniki, tom IX, 1964, z. 3.
4. Gessing R.: Zastosowanie metody równań różnicowych do układów regulacji z nieliniowym impulsatorem o prostokątnym kształcie impulsów. — Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Automatyka, 1965, nr 6.

R. GESSING

DIFFERENCE EQUATIONS OF NONLINEAR SAMPLED-DATA SYSTEMS AND THEIR APPLICATION TO COMPUTATION OF SYSTEM RESPONSES

Summary

In the paper difference equations of nonlinear sampled-data systems of an arbitrary order are derived. The presented work deals with systems which can be transformed into the system with a nonlinear sampler generating pulses of an arbitrary wave-form and linear continuous-data part. The most general case, when a characteristic equation of the differential equation could have multiple roots is considered. It was proved that knowing the response of a linear system part to any pulse generated by the sampler one could write at once system difference equations. It was shown that from the obtained system difference equations follow directly the recurrent formulae, which could be used to compute in the numerical form the system responses of interest to us. The computational procedure is considerably simplified in the case of a sampler with a level quantization. As an example the computation of responses of the given sampled-data control system was shown.

R. GESSING

LES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES DES SYSTÈMES ÉCHANTILLONNÉS NON-LINÉAIRES ET LEURS APPLICATIONS À CALCULER DES RÉGIMES TRANSITOIRES

Résumé

L'oeuvre présente les équations aux différences finies des systèmes échantillonnés non-linéaires dans les cas, où la non-linéarité est provoquée par l'échantillonneur qui produit des impulsions à la forme géométrique quelconque.

L'analyse est généralisée pour les cas des racines multiples des équations caractéristiques de la partie linéaire du système. On a montré, que la connaissance de la réponse de la partie linéaire à l'impulsion mise à l'entrée est suffisante pour composer les équations aux différences finies du système entier. Il est aussi possible de trouver immédiatement les formules récurrentes permettant à résoudre numériquement des cas intéressants. Ces formules deviennent spécialement simples dans les cas où l'échantillonneur travaille avec la quantification des signaux en niveaux. Les exemples pratiques du calcul, justifiant les méthodes proposées, sont annexés.

R. GESSING

DIFFERENZENGLEICHUNGEN NICHTLINEARER IMPULSSYSTEME UND IHRE ANWENDUNG ZUR BERECHNUNG VON VERLÄUFEN IN DIESEN SYSTEMEN

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden Differenzengleichungen nichtlinearer Impulssysteme beliebiger Ordnung für den Fall aufgestellt, in welchem sich ein Impulssystem durch einen Pulsmodulator von beliebiger Impulsform und einen kontinuierlichen linearen Teil ersetzen lässt. Erörtert wurde der allgemeine Fall von Differentialgleichung, deren charakteristische Gleichung mehrtfache Wurzeln haben kann. Aus den angeführten Erwägungen folgt, dass man bei bekannter Antwort des kontinuierlichen Teils auf einen beliebigen Impuls des Pulsmodulators die Differenzengleichung des Systems unmittelbar aufstellen kann. Es wurde bewiesen, dass aus den aufgestellten Differenzengleichungen unmittelbar Rekursionsformeln folgen, die

uns gestatten, Verläufe vom Interesse in numerischer Form zu errechnen. Die Rechenarbeit wird wesentlich vereinfacht, wenn der Pulsmodulator mit Amplitudenquantelung arbeitet. Die Arbeit enthält Beispiele von Berechnungen der Verläufe in einem konkreten Impulsregelsystem.

Р. ГЕССИНГ

РАЗНОСТНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ ИСЧИСЛЕНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Р е з ю м е

В статье выведены разностные уравнения для нелинейных импульсных систем произвольного порядка, которые можно привести к линейной непрерывной части и нелинейному импульсатору, образующему импульсы произвольной формы. Рассмотрен вполне общий случай, в котором характеристическое уравнение дифференциального уравнения имеет многократные корни. Показано что на основании реакции непрерывной части системы на произвольный импульс выработанный импульсатором можно немедленно написать разностные уравнения системы. Из полученных разностных уравнений возникают непосредственно рекуррентные формулы, с помощью которых можно численно рассчитать интересующие нас процессы. Эти расчёты значительно упрощаются в случае импульсатора с амплитудной модуляцией. Приведены примеры расчёта процессов в конкретной импульсной системе регулирования.

JERZY MIELNICKI

Oddziaływanie magnonowo-fononowe w kryształach ferromagnetycznych w warunkach „pompowania równoległego”

Rękopis dostarczono 31.5.1966

W artykule przedstawiono zagadnienie oddziaływania magnonów z fononami w przypadku wzbudzenia magnonów za pomocą techniki „równoległego pompowania”. Zostało rozpatrzone zdegenerowane i niezdegenerowane wzbudzenie fal magnetoelastycznych oraz został podany warunek możliwości obserwacji pierwszego lub drugiego typu wzbudzenia.

Omawiając generację zdegenerowanych fal przedyskutowano możliwość uprzywilejowania generacji fononów za pomocą zmiennego pola magnetycznego w stosunku do generacji fal spinowych.

1. WSTĘP

W pracach [1], [2] wykazano, że występowanie energii magnetoelastycznej prowadzi w pewnych warunkach do pojawiania się sprzężenia między falami spinowymi, tj. magnonami, a drganiami sieci — fononami, w wyniku czego powstają fale o cechach zarówno fal spinowych, jak i fononów. Są to fale magnetoelastyczne.

Omawiane sprzężenie jest szczególnie silne, gdy magnony i fonony mają jednocześnie ten sam wektor falowy $\vec{k}$ i tę samą częstotliwość. Oddziaływanie magnetoelastyczne zmienia natężenie pola progowego, które można wyznaczyć doświadczalnie. Szczegółowe zbadanie tej zmiany pozwala na określenie szeregu wielkości charakteryzujących badany materiał, jak np. energii wymiany, stałych wchodzących do wyrażenia na energię magnetoelastyczną stałych elastycznych materiału, od których zależy między innymi prędkość rozchodzenia się fononów. Ciekawe są również perspektywy zastosowania oddziaływania magnetoelastycznego:

- można będzie uzyskać cenne informacje dotyczące procesów relaksacyjnych fononów,
- nieliniowa generacja fal magnetoelastycznych może być wykorzystana w praktycznych urządzeniach jako źródło mikrofalowych fononów,
- można będzie umożliwić generację mikrofalowych fononów o większej mocy,
- powstanie możliwość konstrukcji fononowego wzmacniacza, gdyż przy zachowaniu pewnych warunków amplituda drgań elastycznych przechodzących przez ferromagnetyczny materiał umieszczony w zmiennym polu magnetycznym powinna rosnąć.

W pracy tej omówiona została generacja fal magnetoelastycznych za pomocą „pompowania równoległego”, tzn. gdy zmienne pole (mikrofalowe) $\vec{h}$ ma taki sam kierunek jak pole stałe.

2. RÓWNANIA RUCHU [1]

Równania ruchu wyprowadzamy na drodze klasycznej opierając się na znajomości gęstości funkcji Lagrange'a $\mathcal{L}$ i funkcji Hamiltona $\mathcal{H}$. W skład tych funkcji wchodzi w naszym przypadku wyrazy

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_z + \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_i + \mathcal{L}_p, \\ \mathcal{H} &= \mathcal{H}_z + \mathcal{H}_e + \mathcal{H}_i + \mathcal{H}_p,\end{aligned}\quad (1)$$

gdzie indeksy z , e , i oraz p odnoszą się odpowiednio do wyrazu Zeemana, wyrazu wymiennego, oddziaływania magnetoelastycznego oraz do wyrazu fononowego.

a) Wyraz Zeemana

Gęstość funkcji Lagrange'a dla przypadku $M_x, M_y \ll M_s$ możemy zapisać w postaci:

$$\mathcal{L}_z = \frac{M_y \dot{M}_x}{\omega_s} + \gamma(M_x^2 + M_y^2) \frac{H_0}{2\omega_s}, \quad (2)$$

gdzie H_0 jest stałym polem skierowanym wzdłuż osi z , zaś

$$\omega_s = -\gamma M_s. \quad (3)$$

Hamiltonian otrzymujemy wprowadzając wpraw wprowadzając wpraw współrzędne uogólnione

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{M}_x} = \frac{\partial \mathcal{L}_z}{\partial \dot{M}_x} = \frac{M_y}{\omega_s}, \quad \psi \equiv M_x. \quad (4)$$

Znajdujemy:

$$\mathcal{H}_z = \pi \dot{M}_x - \mathcal{L}_z = (\omega_0/2\omega_s)(\omega_s^2 \pi^2 + \psi^2).$$

b) Człon wymienny

Jeśli w rozwinięciu M_z na szereg pominiemy wyrazy zawierające potęgi M_x i M_y rzędów wyższych od drugiego, to wyraz wymienny można zapisać w postaci

$$\mathcal{H}_e = (A/M_s^2)[\omega_s^2(\nabla\pi)^2 + (\nabla\psi)^2]. \quad (5)$$

c) Oddziaływanie magnetoelastyczne

Postać magnetoelastycznej energii swobodnej zależy od symetrii kryształu oraz od usytuowania kierunku stałego pola magnetycznego względem kierunków krystalograficznych. Dla kryształów o symetrii kubicznej, w przypadku pola $\vec{H}$ skierowanego wzdłuż kierunku [100] gęstość energii magnetoelastycznej jest w przybliżeniu równa:

$$f_{me}^{[100]} = b_1(\alpha_x^2 U_{xx} + \alpha_y^2 U_{yy} + \alpha_z^2 U_{zz}) + 2b_2(\alpha_x \alpha_y U_{xy} + \alpha_y \alpha_z U_{yz} + \alpha_z \alpha_x U_{zx}), \quad (6)$$

zaś w przypadku pola $\vec{H}$ skierowanego wzdłuż [111]:

$$f_{me}^{[111]} = 2b_2(\alpha_x \alpha_z U_{xz} + \alpha_y \alpha_z U_{yz}) + \frac{2}{3}(b_1 - 2b_2)\{\alpha_x \alpha_z [(1/\sqrt{2})(U_{xx} - U_{yy}) + U_{xz}] + \\ + \alpha_y \alpha_z [U_{yz} - (1/\sqrt{2})U_{xy}]\}, \quad (7)$$

gdzie α_i jest stosunkiem i -tej składowej namagnesowania do namagnesowania nasycenia M_s , zaś U_{ij} są składowymi odkształceń, b_1 i b_2 — stałe sprzężenia magnetoelastycznego.

Przy wypisywaniu wyrażeń (6) i (7) ograniczyliśmy się do wyrazów zawierających drugie potęgi α_i i pierwsze U_{ij} .

Rozpatrujemy w dalszym ciągu przypadek, w którym stałe pole jest skierowane w kierunku [100]. Kierunek ten przyjmujemy za oś z . Ograniczając się do przybliżenia liniowego, zachowujemy w wyrażeniu na $f_{me}^{[100]}$ tylko wyrazy liniowe ze względu na M_x i M_y , tj.

$$\alpha_y \alpha_z U_{yz} \quad \text{ i } \quad \alpha_z \alpha_x U_{zx}.$$

Związana z oddziaływaniem magnetoelastycznym gęstość funkcji Hamiltona ma stąd postać

$$\mathcal{H}_i = (2b_2/M_s)(\omega_s \pi U_{yz} + \psi U_{zx}), \quad (8)$$

gdzie składowe odkształceń występujące w (8) zdefiniowane są następująco:

$$U_{yz} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial R_y}{\partial z} + \frac{\partial R_z}{\partial y} \right), \quad U_{zx} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial R_z}{\partial x} + \frac{\partial R_x}{\partial z} \right). \quad (9)$$

$\vec{R}$ — wektor przesunięcia punktu z położenia równowagi.

d) Wyraz fononowy

Dla wygody zakładamy tu elastyczną izotropowość, co ogranicza dyskusję do fal rozchodzących się wzdłuż osi symetrii. Wzdłuż tych osi dwie gałęzie fononów poprzecznych pokrywają się.

Gęstość funkcji Hamiltona związana z fononami ma postać:

$$\mathcal{H}_p = \frac{1}{2\varrho} (\Pi_x^2 + \Pi_y^2 + \Pi_z^2) + \alpha \sum_{i,j} U_{ij}^2 + \beta \left(\sum_i U_{ii} \right)^2, \quad (10)$$

gdzie:

$$\vec{\Pi} = \varrho d\vec{R}/dt, \quad (11)$$

α i β są stałymi elastyczności, ϱ — gęstość.

Całkowita gęstość funkcji Hamiltona (przy $\vec{H}$ równoległym do kierunku [100]):

$$\mathcal{H} = (\omega_0/2\omega_s)(\omega_s^2 \pi^2 + \psi^2) + (A/M_s^2)[\omega_s^2(\nabla \pi)^2 + (\nabla \psi)^2] + (2b_2/M_s)(\omega_s \pi U_{yz} + \psi U_{zx}) + \\ + (\frac{1}{2}\varrho)(\Pi_x^2 + \Pi_y^2 + \Pi_z^2) + \alpha \sum_{ij} U_{ij}^2 + \beta \left(\sum_i U_{ii} \right)^2. \quad (12)$$

Znając gęstość funkcji Hamiltona otrzymujemy równania ruchu w postaci:

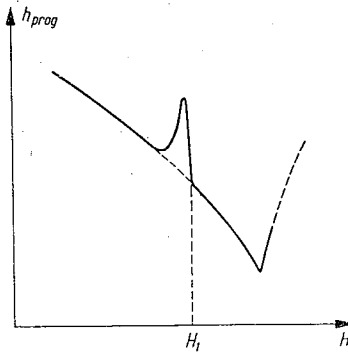
$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\pi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} + \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial \psi / \partial x_{\alpha})}, \\ \dot{\psi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} - \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial \pi / \partial x_{\alpha})}, \\ \frac{d\Pi_x}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial R_x} + \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial R_x / \partial x_{\alpha})}, \\ \frac{d\Pi_y}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial R_y} + \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial R_y / \partial x_{\alpha})}, \\ \frac{d\Pi_z}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial R_z} + \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial R_z / \partial x_{\alpha})}, \end{array} \right. \quad (13)$$

gdzie $\pi = \frac{M_y}{\omega_s}$, $\psi = M_x$.

Równania (13) są poszukiwanym układem równań.

3. GENERACJA FAL MAGNETOELASTYCZNYCH ZA POMOCĄ „RÓWNOLEGŁEGO POMPOWANIA”

Przy wzroście amplitudy zmiennego pola h , przyłożonego równoległe do pola stałego H , przy pewnej wielkości $h = h_{\text{progowe}}$ pojawia się silne wzbudzenie fal spinowych, rozchodzących się prostopadłe do kierunku stałego pola [3], [4], [5], przyjmowanego zwykle za kierunek osi z . Częstość tych fal równa się połowie częstości pola zmiennego. Obserwowano [6], że w ten sam sposób, ale przy częstościach niższych (w zakresie megacykli), mogą być wzbudzone fale elastyczne — fonony. Istnieje także wspólny obszar, w którym



Rys. 1. Zmiana pola progowego wywołana przez oddziaływanie magnetoelastyczne

produkowane za pomocą równoległego pompowania fale są mieszanymi falami magnetoelastycznymi. Występuje wtedy wzrost pola progowego, obserwowany jako pik pojawiający się na krzywej $h_{\text{progowe}} = h_{\text{pr}}(H)$ przy pewnej wartości pola H_1 (rys. 1).

Omawiając oddziaływanie magnetoelastyczne, będziemy rozpatrywać mały ferromagnetyczny kryształ mający symetrię kubiczną, o kształcie elipsoidu, namagnesowany wzdłuż kierunku [100] (kierunek stałego pola jest równoległy do tego kierunku). Wtedy, zachowując w wyrażeniu na gęstość energii magnetoelastycznej (6) tylko człony liniowe ze względu na M_x i M_y , dostajemy:

$$f_{me}^{[100]} = 2b_2(\alpha_y \alpha_z U_{yz} + \alpha_z \alpha_x U_{zx}) = \frac{b_2 M_z}{M^2} \left\{ M_y \left(\frac{\partial R_y}{\partial z} + \frac{\partial R_z}{\partial y} \right) + M_x \left(\frac{\partial R_z}{\partial x} + \frac{\partial R_x}{\partial z} \right) \right\}. \quad (14)$$

Wiadomo, że wzbudzone przez „równoległe pompowanie” fale spinowe rozchodzą się prostopadłe do kierunku $\vec{H}$ (tj. prostopadłe do osi z). Bez ograniczenia ogólności rozważań, kierunek wektora falowego $\vec{k}$ tych fal przyjmujemy za oś x . Ponieważ wzbudzone fale spinowe mogą tylko oddziaływać z fononami o tym samym $\vec{k}$, więc powstająca fala magnetoelastyczna, która jest również falą płaską, rozchodzić się będzie w kierunku osi x .

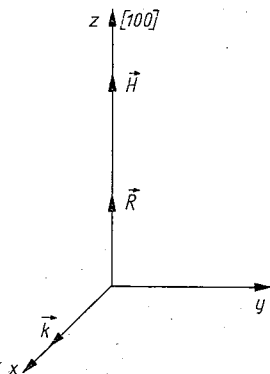
W takim razie można przyjąć:

$$\frac{\partial R_{x,y,z}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial R_{x,y,z}}{\partial z} = 0, \quad (15)$$

dzięki czemu wyrażenie na energię magnetoelastyczną uprości się do postaci

$$f_{me}^{[100]} = b_2 \frac{M_z M_y}{M^2} \frac{\partial R_z}{\partial x}. \quad (16)$$

Wynika stąd, że wektor przesunięcia $\vec{R}$ jest poprzeczny i spolaryzowany wzdłuż osi z , tj. $\vec{R} = (0, 0, R_z)$, co ilustruje rys. 2.



Rys. 2. Wzajemne usytuowanie kierunków [100] w kryształach, pola magnetycznego $\vec{H}$, wektora odkształceń $\vec{R}$ oraz wektora falowego $\vec{k}$

a) Równania ruchu i zależność dyspersyjna

Na podstawie równań (13), równania ruchu dla omawianego przypadku są postaci:

$$\begin{aligned} \dot{M}_x &= -(\omega_H + \omega_f \cos \omega_p t) M_y, \\ \dot{M}_y &= (\omega_H + \omega_M + \omega_f \cos \omega_p t) M_x + \gamma b_2 \partial R_z / \partial x, \\ \rho \ddot{R}_z &= \alpha \partial^2 R_z / \partial x^2 + (b_2 / M_s) \partial M_x / \partial x, \end{aligned} \quad (17)$$

b) Relaksacja

W dalszym ciągu zostaną wprowadzone straty magnetyczne. W tym celu częstość fal spinowych ω_k zostanie zastąpiona przez wielkość Ω_k :

$$\Omega_k = \omega_k + i\tau_k^{-1}, \quad (20)$$

gdzie:

$$\tau_k^{-1} = \frac{1}{2}\gamma\Delta H_k = (\omega_k/2)Q_k^{-1}, \quad (21)$$

τ_k czas relaksacji fal spinowych, ΔH_k — „szerokość linii” charakteryzująca niestabilne fale spinowe.

W celu uwzględnienia relaksacji fononów zastępujemy w (17) $\ddot{R}_z$ przez

$$\ddot{R}_z + 2\tau_f^{-1}\dot{R}_z, \quad (22)$$

gdzie τ_f jest czasem relaksacji niezaburzonych fononów:

$$\tau_f^{-1} = (\omega_e/2)Q_e^{-1}, \quad (23)$$

$\omega_e = c_k$ jest częstością poprzecznych fononów, Q_e i Q_k — dobroć fali elastycznej i spinowej. (Miernikiem dobroci Q jest stosunek częstości $\omega_{k,e}$ do „szerokości linii” $\Delta\omega_{k,e}$).

Jeśli zaniedbać τ_f^{-2} w porównaniu z ω_e^2 , to uwzględnienie relaksacji fononów sprowadza się do zastąpienia ω_e przez Ω_e , gdzie

$$\Omega_e = \omega_e + i\tau_f^{-1}. \quad (24)$$

c) Próg niestabilności

A. Przypadek zdegenerowanego parametrycznego wzbudzenia [7]

Przedstawimy teraz namagnesowanie i przesunięcie w postaci fal płaskich o częstości równej połowie częstości pompowania:

$$\begin{aligned} M_{x,y} &= \sum_{k>0} a_{kx,y}^+ e^{i[(\omega_p/2)t - kx]} + a_{kx,y}^- e^{i[(\omega_p/2)t + kx]} + s.z., \\ R_z &= \sum_{k>0} b_{kz}^+ e^{i[(\omega_p/2)t - kx]} + b_{kz}^- e^{i[(\omega_p/2)t + kx]} + s.z., \end{aligned} \quad (25)$$

gdzie s.z. oznacza wielkość sprzężoną zespoloną.

Podstawiając powyższe rozwinięcie do równań ruchu (17) dostajemy jednorodny układ równań. Z zerowania się wyznacznika oraz po wprowadzeniu strat przez zastąpienie ω_e i ω_k przez

$$\Omega_e = \omega_e + i\tau_e^{-1}, \quad \Omega_k = \omega_k + i\tau_k^{-1} \quad (26)$$

otrzymujemy wyrażenie na wartość progową:

$$\left(\frac{\omega_s}{2}\right)_{\text{prog}}^2 = \frac{(\omega_k^2 - \frac{1}{4}\omega_p^2)^2 (\omega_e'^2 - \frac{1}{4}\omega_p^2)^2 - [(\omega_e^2 - \frac{1}{4}\omega_p^2)2\omega_k\tau_k^{-1} + (\omega_k^2 - \frac{1}{4}\omega_p^2)2\omega_e\tau_e^{-1}]^2}{[(kb_2)^2(\gamma/\varrho M_s) - \omega_M(\omega_e^2 - \frac{1}{4}\omega_p^2)]^2 + (2\omega_M\omega_e\tau_e^{-1})^2}, \quad (27)$$

gdzie

$$\omega_e' = (k^2/\varrho)[\alpha - \gamma b_2^2 \omega_H/M_s(\omega_k^2 - \frac{1}{4}\omega_p^2)]. \quad (28)$$

Zauważmy, że jeśli częstość pompowania została tak wybrana, by

$$\omega'_e = \omega_p/2 = \omega,$$

to wtedy definicja ω'_e redukuje się do wyprowadzonej poprzednio zależności dyspersyjnej (18) dla fal magnetoelastycznych. Na podstawie równania (27) widać, że $(\omega_s)_{prog}$ osiąga wartości minimalne, gdy częstość pompowania ω_p jest bliska częstości odpowiednio: $2\omega_k$, $2\omega_e$, $2\omega'_e$, co odpowiada wzbudzeniu odpowiednio: fal spinowych, fal elastycznych lub też mieszanych fal magnetoelastycznych. Każdy z tych przypadków rozpatrzmy oddzielnie.

Niestabilność fal spinowych

Niech częstość pompowania ω_p będzie tak dobrana, by spełniony był warunek:

$$|\omega_e^2 - \omega_p^2/4| \gg |\omega_k^2 - \omega_p^2/4| \approx 0. \quad (29)$$

Wtedy na podstawie (27) otrzymujemy następujące wyrażenie na wartość progową:

$$(\frac{1}{2}\omega_s)_{prog} = |\omega_k^2 - \frac{1}{4}\omega_p^2|, \quad (30)$$

które osiąga minimalną wartość dla $\omega_k = \frac{1}{2}\omega_p$, równą

$$h_{prog} = \omega_p \Delta H_k(k) / \omega_M. \quad (31)$$

Graficznym przedstawieniem tej zależności są gałęzie *a* i *b* na rys. 4.

Wzór (31) jest dobrze znanym wyrażeniem opisującym próg wzbudzenia fal spinowych przy równoległym pompowaniu (zob. np. [3]). Zauważymy tu tylko, że ponieważ szerokość linii fal spinowych ΔH_k rośnie wraz z *k*, najmniejsza wartość h_{prog} występuje dla $k \approx 0$.

Niestabilność fal elastycznych

Jeśli $\frac{1}{2}\omega_p$ jest takie, że zachodzi

$$|\omega_k^2 - \frac{1}{4}\omega_p^2| \gg |\omega_e^2 - \frac{1}{4}\omega_p^2| \approx 0, \quad (32)$$

to na podstawie zależności (27), zaniedbując straty fal spinowych i przyjmując, że τ_e^{-1} jest dostatecznie małe (w mianowniku (27) zaniedbujemy wszystkie człony z wyjątkiem $k^2 b_2^2 \gamma / \rho M_s$), dostajemy:

$$h_{prog} = \frac{2|\omega_k^2 - \frac{1}{4}\omega_p^2| [(\omega_e'^2 - \frac{1}{4}\omega_p^2) + (\omega_e^2 Q_e^{-1})^2]^{\frac{1}{2}} \alpha M_s}{\gamma b_2^2 \omega_e^2}. \quad (33)$$

W przypadku $\frac{1}{2}\omega_p \ll \omega_k$ oraz $\frac{1}{2}\omega_p = \omega_e$ (gałąź *d* na rys. 3 i 4) powyższe wyrażenie redukuje się do:

$$h_{prog} = 2\omega_k^2 \alpha M_s / \gamma^2 b_2^2 Q_e. \quad (34)$$

Natomiast dla $\omega_k \ll \frac{1}{2}\omega_p$ (gałąź *c* na rys. 3 i 4) wartość progowa wynosi:

$$h_{prog} = \omega_p^2 \alpha M_s / 2\gamma^2 b_2^2 Q_e. \quad (35)$$

Niestabilność fal magnetoelastycznych

Jeśli $\frac{1}{2}\omega_p \approx \omega_k \approx \omega_e$, to znaczy częstość pompowania została tak dobrana, że znajduje się w pobliżu punktu przecięcia się niezaburzonych częstości ω_e i ω_k , to mamy do czynienia

z obszarem oddziaływania magnetoelastycznego. Zależność progowa (27) redukuje się wtedy do następującej postaci:

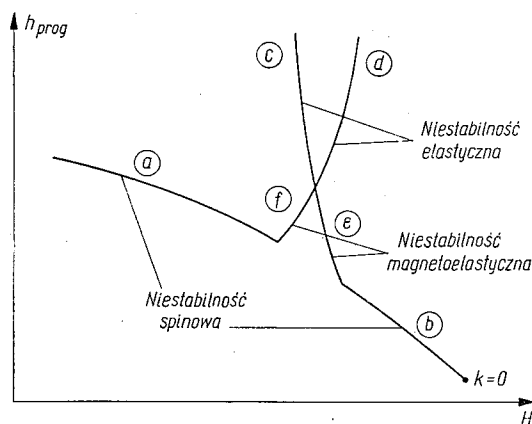
$$\left(\frac{\omega_s}{2}\right)_{prog} \cong \frac{2\omega_k \tau_k^{-1}}{\omega_M} + \frac{(\omega_k^2 - \frac{1}{4}\omega_p^2)}{(\omega_e^2 - \frac{1}{4}\omega_p^2)} \frac{2\omega_e \tau_e^{-1}}{\omega_M}. \quad (36)$$

Przyjęto tu, że rozszczepienie jest większe od tłumienia, to znaczy:

$$(\omega_e^2 - \frac{1}{4}\omega_p^2) \gg 2\omega_e \tau_e^{-1}. \quad (37)$$

Z rys. 3 widać, że w pobliżu punktu przecięcia $k = k_{kr}$ istnieją dwie magnetoelastyczne fale o częstości $\omega_e' = \frac{1}{2}\omega_p$, które należą do dwu gałęzi dyspersyjnych. Na podstawie równania (36) można obliczyć wartości progowe dla obu tych fal, jednak przy stosunkowo małym rozszczepieniu można przyjąć, że wartość progowa dla tych fal jest identyczna.

Rysunek 4 przedstawia typowy przebieg wartości progowej zmiennego pola. Litery wskazują na powiązanie poszczególnych części krzywej progowej z odpowiednimi częściami zależności dyspersyjnej, przedstawionej na rys. 3.



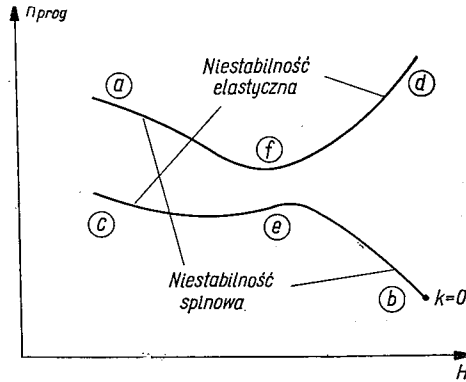
Rys. 4. Typowy przebieg wartości progowej. Poszczególne części ilustrują trzy przypadki omawiane w tekście. Litery w okręgach odnoszą się do liter na rys. 3

W rozważanym przypadku próg niestabilności fal elastycznych jest o wiele większy niż próg niestabilności fal spinowych, co wyjaśnia, dlaczego ten ostatni nie był dotąd obserwowany doświadczalnie. Jednak dla materiałów charakteryzujących się dużymi wartościami b_1 i b_2 oraz Q_e istnieje możliwość, by próg niestabilności fal elastycznych był mniejszy od progu dla fal spinowych. Możliwość ta będzie szczególnie prawdopodobna w przypadku materiałów o małych wartościach $4\pi M_s$ przy stosunkowo niskiej częstości pompowania, gdyż wtedy wielkość Q_e jest zwykle duża. Przebieg krzywych progowych w takim przypadku pokazuje schematycznie rys. 5.

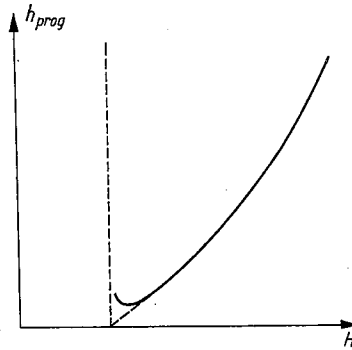
Warunkiem, by krzywe progowe się nie przecinały, jest spełnienie nierówności:

$$2\pi\omega_p \alpha M_s^2 / \gamma b_2^2 Q_e \Delta H_k < 1. \quad (38)$$

Jeżeli $\frac{1}{2}\omega_p \ll \omega_k$, to jedyną możliwą niestabilnością jest niestabilność elastyczna. Rysunek 6 pokazuje teoretyczny przebieg pola progowego. Wzrost h_{prog} w pobliżu minimalnej wartości pola stałego, koniecznej do nasycenia próbki, wynika ze zmniejszenia się Q_e w pobliżu tego punktu na skutek tworzenia się domen.



Rys. 5. Próg niestabilności w przypadku materiału o dużej wartości stałej sprzężenia magnetoelastycznego i o małych stratach elastycznych. Dla $\frac{1}{2}\omega_p > \omega_k$ próg niestabilności fal elastycznych jest mniejszy od progu fal spinowych



Rys. 6. Niestabilność fal elastycznych przy niskich częstotliwościach

B. Przypadek niezdegenerowanego wzbudzenia fal magnetoelastycznych [8]

Ponownie powróćmy do układu równań (17). Przedstawimy teraz namagnesowanie i przesunięcie w postaci fal płaskich o różnych częstotliwościach ω_1 i ω_2 i różnych wektorach falowych k_1 i k_2 (zob. rys. 7).

$$M_x = a_{x1}^+ \exp[i(\omega_1 t - k_1 x)] + a_{x1}^- \exp[i(\omega_1 t + k_1 x)] + a_{x2}^+ \exp[i(\omega_2 t - k_2 x)] + a_{x2}^- \exp[i(\omega_2 t + k_2 x)] + s.z. \quad (39)$$

Podobnie wyrażenie na M_y .

$$R_z = b_1^+ \exp[i(\omega_1 t - k_1 x)] + b_1^- \exp[i(\omega_1 t + k_1 x)] + b_2^+ \exp[i(\omega_2 t - k_2 x)] + b_2^- \exp[i(\omega_2 t + k_2 x)] + s.z.$$

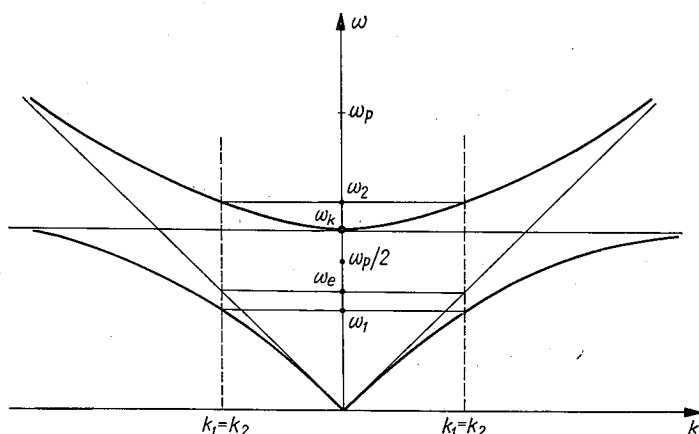
Wektory falowe tych fal (k_1 i k_2) są sobie równe, lecz mają przeciwne znaki, gdyż zachodzi

$$k_p = k_1 + k_2,$$

gdzie k_p jest wektorem falowym fali związanej ze zmianą natężenia pola h w przestrzeni (długość tej fali jest rzędu 1 cm), który można przyjąć za równy zero w porównaniu z k_1 i k_2 (fale magnetoelastyczne mają długość rzędu 1 μ).

Częstości dwu wzbudzonych fal spełniają następującą zależność:

$$\omega_p = \omega_1 + \omega_2.$$



Rys. 7. Wykres zależności dyspersyjnej dla przypadku niezdegenerowanego. Na rysunku pokazano wszystkie omawiane częstości

Dalej postępujemy analogicznie jak w przypadku zdegenerowanym, tj. podstawiamy równania (39) do równań ruchu, wprowadzamy straty poprzez zastąpienie

$$\begin{aligned} \omega_e^2 - \omega_{1,2}^2 &\rightarrow \omega_e^2 - \omega_{1,2}^2 + i\omega_{1,2}/Q_{e1,2}, \\ \omega_k^2 - \omega_{1,2}^2 &\rightarrow \omega_k^2 - \omega_{1,2}^2 + i\omega_{1,2}/Q_{k1,2}, \end{aligned} \quad (40)$$

gdzie $Q_{e,1,2}$ jest wartością Q fali elastycznej przy częstościach ω_1 i ω_2 , zaś $Q_{k1,2}$ jest wartością Q fali spinowej przy tych samych częstościach.

Następnie, po otrzymaniu jednorodnego układu równań, przyrównujemy jego wyznacznik do zera, a stąd dostajemy wyrażenie na wartość progową natężenia pola.

Przy założeniu, że

$$\omega_e^2 - \omega_{1,2}^2 \gg \omega_{1,2}^2/Q_{e1,2},$$

które ogranicza analizę do układów z rozszczepieniem większym niż elastyczne częstości relaksacyjne, otrzymujemy ostatecznie wartość progową na fale magnetoelastyczne:

$$\left(\frac{\omega_s}{2}\right)_{kryt} = \frac{[(\omega_e^2 - \omega_1^2)\omega_2^2/Q_{k2} + (\omega_k^2 - \omega_2^2)\omega_1^2/Q_{e2}][(\omega_e^2 - \omega_1^2)\omega_1^2/Q_{k1} + (\omega_k^2 - \omega_1^2)\omega_2^2/Q_{e1}]}{(\omega_e^2 - \omega_1^2)(\omega_e^2 - \omega_2^2)[2(\omega_k^2 - \omega_1\omega_2) + \omega_M^2] - k^2 b_{21}^2[(\omega_H + \omega_M)(2\omega_e^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2) - k^2 b_{21}^2]}. \quad (41)$$

Aby ustalić warunki, przy których niestabilność ta będzie uprzywilejowana, należy porównać wyrażenie (41) z wyrażeniami na wartości progowe, opisującymi niestabilności konkurencyjne. Jeśli ω_1 i ω_2 są znacznie rozseparowane, to wtedy wartość progowa (41) jest dużo większa niż w przypadku gdy ω_1 i ω_2 są porównywalne. Minimum wyrażenia (41) występuje, gdy

$$\omega_e^2 - \omega_1^2 \approx \omega_2^2 - \omega_e^2$$

oraz gdy Q_{e1} i Q_{e2} , a także Q_{k1} i Q_{k2} w pobliżu punktu przecięcia niezaburzonych krzywych dyspersyjnych mało się między sobą różnią.

Jeśli założymy, że

$$\omega_e^2 - \omega_1^2 = \omega_2^2 - \omega_e^2; \quad \omega_e = \omega_k; \quad Q_{e1,2} = Q_e; \quad Q_{k1,2} = Q_k \quad (42)$$

oraz zanedbamy małe $(kb_2)^4$ i przyjmiemy, że $\omega_k^2 - \omega_1\omega_2$ jest małe w porównaniu z ω_M^2 , to dostaniemy próg na niezdegenerowaną magnetoelastyczną niestabilność w następującej postaci:

$$\left(\frac{\omega_s}{2}\right)_{prog} = \omega_1\omega_2/\omega_M Q_k + \omega_1\omega_2/\omega_M Q_e. \quad (43)$$

Porównując powyższe wyrażenie z wyrażeniem na próg niestabilności zdegenerowanej [w punkcie $\omega_e(k_0) = \omega_k(k_0)$] otrzymujemy następujący warunek na to, by niestabilność niezdegenerowana była uprzywilejowana w stosunku do zdegenerowanej:

$$(\gamma^2 D/v_s^2)[2H + 4\pi M(1 - 2N_z)] > 1, \quad (44)$$

D — stała wymiany.

4. OPIS KSZTAŁTU ODDZIAŁYWANIA MAGNETOELASTYCZNEGO [9]

Przedstawimy teraz układ równań (18) w innych zmiennych.

Niech δM i ξ będą amplitudami odpowiednio fali spinowej i fononu (zob. rys. 8).

Jeśli do równań (17) wprowadzimy straty w ten sposób, że do prawej strony równania pierwszego i drugiego dodamy odpowiednio $-\gamma \Delta H_k M_y$, $-\gamma \Delta H_k M_x$, zaś w trzecim $q\ddot{R}_z$ zastąpimy przez

$$q\ddot{R}_z + 2\tau_f^{-1}\dot{R}_z,$$

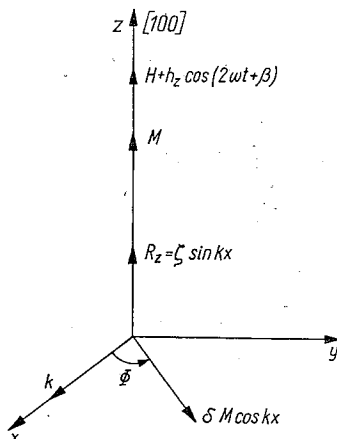
to można pokazać, że równania te są równoważne następującemu układowi równań (przy czym ω_p zastąpiliśmy przez $2\omega t + \beta$):

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= \omega_1 + \omega_M \cos^2 \Phi + \frac{b_2}{M} k(\xi/\delta M) \omega_M \cos \Phi + \omega_f \cos(2\omega t + \beta), \\ \delta \dot{M} &= [\tfrac{1}{2} \sin 2\Phi - (\Delta H_k/M) + \frac{b_2}{M} k(\xi/\delta M) \sin \Phi] \omega_M \delta M, \\ q\ddot{\xi} + 2\tau_f^{-1}\dot{\xi} + \alpha k^2 \xi &= -\frac{b_2}{M} k \delta M \cos \Phi; \end{aligned} \quad (45)$$

tutaj:

$\omega_M = \gamma M$, $2\Delta H_k$ — szerokość linii fali spinowej,

$$\omega_1 = \omega_H - N_z \omega_M + \lambda k^2 \omega_M.$$



Rys. 8. Graficzne przedstawienie wielkości występujących w równaniach ruchu (45)

Otrzymane równania prowadzą do rozwiązania, w którym amplituda wzbudzonej fali spinowej bądź fali magnetoelastycznej jest stała, co oznacza, że

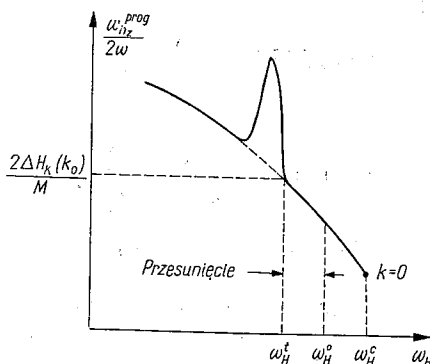
$$\omega_{h_z} = \omega_{h_z}^{prog},$$

gdzie $\omega_{h_z}^{prog}$ jest progiem niestabilności ($\omega_{h_z} = \gamma h_z$).

Jeśli rozszczepienie magnetoelastyczne jest dostatecznie duże w porównaniu z częstością relaksacji fononu, to na podstawie (45) dostajemy:

$$\frac{\omega_{h_z}^{prog}}{2\omega} \cong \frac{2\Delta H_k(k)}{M} + \frac{b_2^2}{M^2\alpha} k_0 \left\{ \frac{\Delta H_k(k_0)}{M} \frac{1}{k_0 \Delta k} + \frac{\omega_1 Q_e^{-1}}{4\omega (\Delta k)^2} \right\}, \quad (46)$$

gdzie $\Delta k = k - k_0 \ll k_0$, $2\omega = \omega_p$.



Rys. 9. Natężenie pola progowego w przypadku oddziaływania magnetoelastycznego

Pierwszy człon równania (46) opisuje zależność progową przy braku oddziaływania magnetoelastycznego. Natomiast w wyniku tego oddziaływania powstaje człon drugi, odpowiedzialny za powstanie piku na wykresie $\omega_{h_z}^{prog}$ (rys. 9).

W wyniku zmiany eliptyczności magnonu pik przesunięty jest o wielkość

$$\omega_H^0 - \omega_H^t = \frac{2\Delta H_k(k_0)}{M} Q_e \frac{\omega_1}{\omega} \frac{b_2^2}{M^2} \frac{\omega_1 \omega_M}{\alpha(2\omega_1^0 + \omega_M)}. \quad (47)$$

Znając ω_H^0 można znaleźć stałą wymiany ze związku

$$\lambda = (\omega_H^e - \omega_H^0)/k_0^2 \omega_M. \quad (48)$$

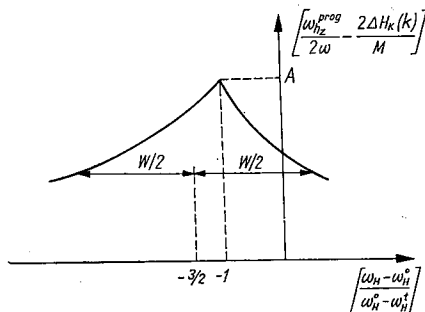
Jeśli przesunięcie zostało zaniedbane, to

$$\lambda_{\text{widoczne}} = [(\omega_H^e - \omega_H^t)/(\omega_H^e - \omega_H^0)]\lambda \quad (49)$$

jest wielkością większą od prawdziwej.

Błąd może być znaczny dla materiałów o bardzo dużej wartości fononowego Q lub też w przypadku małej częstości ω .

Jeśli teraz od krzywej przedstawionej na rys. 9 odejmiemy krzywą $\frac{2\Delta H_k(k)}{M}$, to otrzymamy graficzne przedstawienie drugiej części wzoru (46). Otrzymano w ten sposób wykres przedstawiony na rys. 10.



Rys. 10. Kształt linii oddziaływania magnetoelastycznego. Jest to wykres drugiego składnika po prawej stronie równania (46)

Wysokość linii A wynosi:

$$A = 2\lambda k_0^2 \frac{2\omega_1^0 + \omega_M}{\omega_p} Q_e^{-1}, \quad (50)$$

zaś szerokość połówkowa

$$W = |b_2|k_0 \left[\frac{2\omega_1^0 \lambda}{(2\omega_1^0 + \omega_M)\alpha} \right]^2. \quad (51)$$

Na podstawie powyższych zależności można wyciągnąć dwa ważne z punktu widzenia praktycznego wnioski:

- Wysokość pików nie zależy od stałej magnetoelastycznej i zmienia się wprost proporcjonalnie do strat elastycznych (Q_e jest wielkością odwrotnie proporcjonalną do tych strat). Okazuje się przy tym [10], że wysokość wzrasta gwałtownie wraz ze wzrostem częstości. Dla ustalonego Q wysokość rośnie prawie jak trzecia potęga częstości.
- Szerokość pików jest bezpośrednio związana z b_2 , nie zależy od Q_e i jest prawie niezależna od częstości. Ponieważ wysokość wzrasta szybciej wraz ze wzrostem częstości niż szerokość, więc kształt linii staje się węższy przy wyższych częstotliwościach.

Widzimy więc, że znajomość wielkości A i W pozwala na wyznaczenie Q_e i $|b_2|$.

Cała powyższa teoria została doświadczalnie potwierdzona przez Olsona [10]. W pracy tej badano także temperaturowe zależności Q_e i b_2 oraz przedyskutowana została możliwość doświadczalnego wyznaczenia stałej magnetoelastycznej b_5 .

5. UWAGI KOŃCOWE

Rozpatrzyliśmy dotychczas przypadek, w którym pole H jest skierowane wzdłuż kierunku [100]. Pozwoliło to nam między innymi na wyliczenie na podstawie kształtu otrzymywanej doświadczalnie zależności

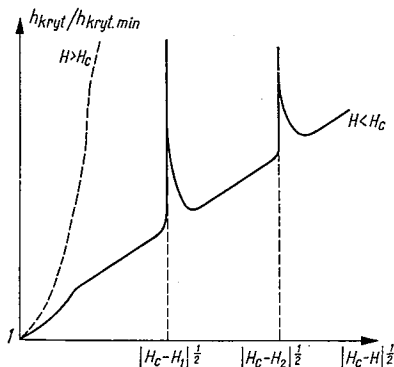
$$h_{kryt} = h_{kryt}(H)$$

magnetoelastycznej stałej b_2 .

Jeżeli całą analizę powtórzymy przy polu H skierowanym wzdłuż kierunku [111], to okaże się, że otrzymane wyniki będą analogiczne. (Gdy wektor przesunięcia $\vec{R}$ ma kierunek stałego pola $\vec{H}$, to w uzyskanych wyrażeniach stałą b_2 należy zastąpić przez $(b_1 + b_2)/3$ [11]).

Na podstawie obu pomiarów możemy więc wyznaczyć stałe b_1 i b_2 . Doświadczenie takie zostało przeprowadzone w pracy [11], przy czym badano ferryt litu, który wyróżnia się tym, że wartość b_1 jest o rząd wielkości większa od b_2 , stąd pomiar szerokości połówkowej piku oddziaływania magnetoelastycznego praktycznie daje tylko wartość b_1 .

Gdy pole H jest skierowane wzdłuż kierunku [111], to przy $\vec{h}$ skierowanym równoległe do $\vec{H}$ (pompowanie równoległe), fale spinowe oddziałują również z fononami podłużnymi.



Rys. 11. Natężenie pola progowego podzielone przez natężenie minimalne w zależności od $|H_c - H|^{1/2}$. Pik przy natężeniu pola stałego H_1 odpowiada oddziaływaniu fal spinowych z fononami podłużnymi, a przy natężeniu pola H_2 — oddziaływaniu z fononami poprzecznymi

Dzięki temu na krzywej $h_{kryt} = h_{kryt}(H)$ pojawia się jeszcze jeden pik odpowiedzialny za to sprzężenie (rys. 11). (Wykres sporządzono w nieco innych współrzędnych). Piki te można rozróżnić na podstawie związku:

$$[(H_c - H_2)/(H_c - H_1)]^{1/2} = \frac{v_l}{v_s}, \quad (52)$$

gdzie v_l i v_s — prędkość fononów podłużnych i poprzecznych.

6. ZAKOŃCZENIE

Pojawienie się w funkcji Hamiltona wyrazu opisującego energię magnetoelastyczną prowadzi w efekcie do równań ruchu, w których poprzeczne składowe wektora namagnesowania M_x i M_y zostają powiązane ze składowymi wektora przesunięcia $\vec{R}$ punktów materialnych ośrodka. Inaczej mówiąc, pojawia się oddziaływanie między falami spinowymi, tj. magnonami a fononami. W wyniku tego oddziaływania w pewnych warunkach może powstać fala magnetoelastyczna — nowy twór o cechach zarówno fali elastycznej, jak i spinowej. W warunkach „pompowania równoległego” może się ona rozchodzić tylko prostopadle do kierunku stałego pola.

Wzbudzenie fali magnetoelastycznej powoduje zmianę wielkości natężenia pola progowego, którą obserwuje się doświadczalnie. Charakter tej zmiany daje nam informacje dotyczące szeregu stałych, charakteryzujących badany materiał (np. stałą sprzężenia magnetoelastycznego, prędkości rozchodzenia się fononów, stałe elastyczne).

Omówione zostały dwa możliwe ze względu na spełnienie praw zachowania energii i pędu przypadki powstawania fal magnetoelastycznych. W pierwszym (przypadek zdegenerowany) powstają dwie fale przeciwnie skierowane ($\vec{k}_1 = -\vec{k}_2$), o tych samych częstościach, równych połowie częstości pompowania

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega/2.$$

Na wykresie $\omega = \omega(|\vec{k}|)$ przypadkowi temu odpowiada jeden punkt leżący na jednej z dwu gałęzi krzywej dyspersyjnej.

W przypadku wzbudzenia niezdegenerowanego powstają dwie pary fal magnetoelastycznych: (1a, 2a) oraz (1b, 2b) o wektorach falowych równych co do wartości bezwzględnej. Wektory falowe każdej pary są przeciwnie skierowane, a częstości są różne. Jednak suma częstości równa jest „częstości pompowania”. Prawo zachowania energii i pędu ma teraz postać następującą:

$$\omega_{1a} + \omega_{2a} = \omega_p, \quad \omega_{1b} = \omega_{2b} = \omega_p, \quad \vec{k}_{1a} = -\vec{k}_{2a}, \quad \vec{k}_{1b} = -\vec{k}_{2b}.$$

Na wykresie dyspersyjnym $\omega = \omega(|\vec{k}|)$ wzbudzeniu niezdegenerowanemu odpowiadają dwa punkty leżące na dwóch różnych gałęziach krzywej dyspersyjnej.

Przy dyskusji progu niestabilności wykazano, że pik oddziaływania magnetoelastycznego powstaje w obszarze przecięcia się dwu gałęzi krzywych progowych. Każda z tych krzywych składa się z części odpowiedzialnej za wzbudzenie fal spinowych oraz z części odpowiedzialnej za wzbudzenie fal elastycznych. Zazwyczaj krzywe te przecinają się w taki sposób, że za pomocą zmiennego pola mikrofalowego łatwiej można wzbudzić fale spinowe. Jednakże przy spełnieniu odpowiednich warunków krzywe te można rozseparować tak, by się nie przecinały. Wtedy, w pewnym zakresie natężeń stałego pola magnetycznego, przy rosnącej amplitudzie pola zmiennego wzbudzone zostaną wprawdzie fale elastyczne, a dopiero potem spinowe.

WYKAZ LITERATURY

1. Kittel C.: Interaction of Spin Waves and Ultrasonic Waves in Ferromagnetic Crystals. — *Phys. Rev.*, Vol. 110, nr 4 (836), 1958.
2. Achiezer J. I., Beriachtar W. G., Paletninskij S. W.: Swiazannyje magnitoupругije wolny w ferromagnetikach i ferroakusticeskij rezonans. — *Žurnal Eksp. Tieoret. Fiziki*, Vol. 35 (228) 1958.
3. Wadas R.: Zjawiska rezonansowe w ferrytach, PWN, Warszawa 1964, rozdziały 3 i 4.
4. Rado G. T., Suhl H.: *Magnetism*, Vol. I, Academic Press, New York-London 1963, Chap. 11.
5. Schlömann E., Green J. J., Milano U.: Recent Developments in Ferromagnetic Resonance at High Power Levels. — *J. Appl. Phys. Suppl. to Vol. 31*, nr 5 (386), 1960.
6. Morgenthaler F. R.: Survey of Ferromagnetic Resonance in Small Ferromagnetic Ellipsoids. — *J. Appl. Phys. Suppl. to Vol. 31*, nr 5 (95), 1960.
7. Comstock R. L., Le Craw R. C.: Instability of Elastic Waves by Time Varying Elastic Modulus in Ferromagnets. — *Phys. Rev. Letters*, Vol. 10 (219), 1963.
8. Comstock R. L.: Parallel Pumping of Magnetoelastic Waves in Ferromagnets. — *J. Appl. Phys.* Vol. 35, nr 8 (2427), 1964.
9. Comstock R. L., Hansen E.: Analysis of the Nondegenerate Parallel Pumping of Magnetoelastic Waves in Ferromagnets. — *J. Appl. Phys.*, Vol. 36, nr 5 (1567), 1965.
10. Morgenthaler F. R.: Longitudinal Pumping of Magnetoelastic Waves in Ferromagnetic Ellipsoids. — *J. Appl. Phys.*, Vol. 34, nr 4, Part 2 (1289), 1963.
11. Olson F. A.: Study of Magnetoelastic Interactions by Parallel Pumping. — *J. Appl. Phys.*, Vol. 34, nr 4, Part 2 (1281), 1963.
12. Comstock R. L., Nilsen W. G.: Parallel Pumping of Magnetoelastic Waves in Lithium Ferrite. — *Phys. Rev.*, Vol. 136, A 442, 1964.

J. MIELNICKI

MAGNON-PHONON INTERACTION IN FERROMAGNETIC CRYSTALS IN THE PARALLEL PUMPING CONDITIONS

Summary

Review of the magnetoelastic interaction theories near the magnon-phonon crossover region is presented. Equations of motion describing magnon-phonon interactions with $\vec{H}_0$ along [100] direction of the monocrystal of cubic symmetry have been derived. Expressions describing critical rf field are obtained in both cases of degenerate and nondegenerate magnetoelastic instability. In the case of degenerate instability, magnetoelastic peak shape (in particular peak height and half-width) is given. It was pointed out that in the low frequency region the phonon compared to magnon generation is favoured. Additionally the discussion of the peak shape dependence on the magnetoelastic constant b_2 , elastic damping and pump frequency is presented.

J. MIELNICKI

INTERACTION MAGNON-PHONON DANS DES CRISTAUX FERROMAGNÉTIQUES SOUMIS À UN „POMPAGE PARALLÈLE”

Résumé

On décrit les interactions magnétoélastiques dans les monocristaux de ferrite à symétrie cubique. On considère le cas des champs magnétiques alternatifs et constants dirigés selon l'axe [100]. On dérive les équations de mouvement et la formule de l'intensité de champ critique. On donne aussi les formules de la hauteur et de la largeur du pic d'interaction magnétoélastique sur la courbe du champ critique.

J. MIELNICKI

MAGNON-PHONONWECHSELWIRKUNG IN FERROMAGNETISCHEN KRISTALLEN BEIM PARALLELPUMPVERFAHREN

Zusammenfassung

Auf grund der wichtigsten Arbeiten wird über die Wechselwirkung zwischen Spinwellen und Kristallgitterschwingungen beim Parallelpumpverfahren berichtet. Behandelt wurde der Fall mit magnetischem Gleichfeld in der [100]-Richtung eines kubischen Einkristalls. Die magnetische und elastische Anisotropie wurde hierbei vernachlässigt. Es werden Gleichungen angegeben, die eine Auswertung der kritischen magnetischen Wechselfeldstärke für die entartene sowie auch unentartene Anregung von magnetoelastischen Wellen ermöglicht. Die für die entartene Anregung gewonnene Beziehung bestimmt sowohl die Linienform der magnetoelastischen Wechselwirkung, wie auch dessen Grösse und Halbwertsbreite. Auf die Bevorzugung der Phononenerzeugung im Verhältnis zur Spinwellenerzeugung wird hingewiesen. Es wird auch über die Abhängigkeit zwischen Linienform der magnetoelastischen Wechselwirkung und magnetoelastischen Konstante b_2 , elastischer Verluste und Frequenz berichtet.

Е. МЕЛЬНИЦКИ

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МАГНОН-ФОНОН В ФЕРРОМАГНИТНЫХ КРИСТАЛЛАХ В УСЛОВИЯХ „ПАРАЛЛЕЛЬНОГО КАЧАНИЯ”

Резюме

Основываясь на важнейших работах, изданных в последние годы, представлены вопросы, связанные с явлением взаимодействия спиновых волн с колебаниями кристаллической решетки в условиях параллельного накачивания. Рассмотрен случай, при котором постоянное магнитное поле направлено вдоль кристаллографической оси [100] монокристалла с кубической симметрией.

Магнитную и упругую анизотропию считают пренебрежимыми. Выведены уравнения движения на основании которых рассчитано пороговое напряжение переменного магнитного поля в случаях вырожденного и невырожденного возбуждения магнитоупругих волн.

В случаях вырожденного возбуждения приводят выражение описывающее форму пика магнитоупругого взаимодействия, его высоту и полуширину. Рассмотрена также возможность преимущества генерации фононов по сравнению с генерацией спиновых волн. Наконец представлена зависимость формы пика магнитоупругого взаимодействия от магнитоупругой постоянной b_2 , упругих потерь и частоты.

MACIEJ NAŁĘCZ, JAN SZUKALSKI

Niektóre techniczne zastosowania magneto-optycznego zjawiska Faradaya

Rękopis dostarczono 11.3.1967

Niniejszy artykuł podaje przegląd niektórych zastosowań magneto-optycznych modulatorów Faradaya w fotoelektrycznej sacharymetrii i refraktometrii, w urządzeniach do lokowania linii w procesie wytwarzania siatek dyfrakcyjnych i kopiowania skal, w pomiarach małych przemieszczeń i skręceń przy dużych odległościach oraz w zastosowaniu do pomiaru prądów.

1. MAGNETO-OPTYCZNE ZJAWISKO FARADAYA

Zjawisko skręcenia płaszczyzny polaryzacji pod wpływem zewnętrznego pola magnetycznego odkrył Faraday w 1846 r. badając zależności wzajemne pomiędzy zjawiskami świetlnymi i magnetycznymi. Efekt ten dotyczy zarówno substancji optycznie obojętnych jak i aktywnych. To znaczy, że nawet substancje nie mające naturalnych zdolności skręcania płaszczyzny polaryzacji nabierają jej pod wpływem zewnętrznego pola magnetycznego. W przypadku substancji aktywnych optycznie ich naturalna zdolność skręcania płaszczyzny polaryzacji dodaje się do ich zdolności polaryzacji pod wpływem zewnętrznego pola magnetycznego.

W przeciwieństwie do naturalnego skręcania płaszczyzny polaryzacji przez aktywne optycznie ośrodki, magnetyczne skręcenie płaszczyzny polaryzacji zależy tylko i jedynie od kierunku pola magnetycznego, a nie od kierunku rozchodzenia się światła. W ten sposób skręcenie magnetyczne przy przejściu promienia świetlnego tam i z powrotem w ciele skręcającym wzrasta. Korzystając z tego można zastosować wewnątrz ciała skręcającego wielokrotne odbicie dla zwielokrotnienia kąta skręcenia płaszczyzny polaryzacji.

Poglądowo charakter zjawiska wyjaśnia rys. 1. Na rysunku przedstawiono polaryzator 1, modulator Faradaya z uzwojeniem 2 wytwarzającym pole magnetyczne w szklanym rdzeniu 3, w którym następuje skręcenie płaszczyzny polaryzacji o kąt ϑ .

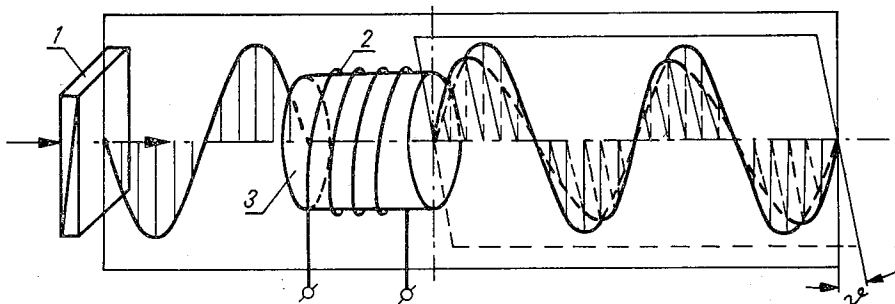
Kąt skręcenia płaszczyzny polaryzacji jest proporcjonalny do odległości przebytej w ośrodku skręcającym i do natężenia pola magnetycznego.

$$\vartheta = kIH, \quad (1)$$

gdzie:

l w metrach,
 H w Oe.

Współczynnik k charakteryzujący zdolność skręcania płaszczyzny polaryzacji w polu magnetycznym, nie przekraczający wartości 0,1 stopień/1 cm 1 Oe, zwany jest stałą Verdet. Wielkość skręcenia zależy również od długości fali i w związku z tym współczynnik k ma dla różnych fal różne wartości.



Rys. 1. Magneto-optyczny efekt Faradaya

Zjawisko Faradaya jest bezpośrednio wywołane zjawiskiem precesji elektronów wchodzących w skład atomów i cząsteczek substancji pod wpływem zewnętrznego pola magnetycznego i jest ściśle związane z tzw. zjawiskiem Zeemana polegającym na zmianie częstotliwości światła wysyłanego przez atomy pod wpływem pola magnetycznego [1].

Pomimo odległego czasu od odkrycia Faradaya, zjawisko to nie było dotychczas praktycznie wykorzystywane w technice. Dopiero w ostatnich latach wraz z gwałtownym rozwojem elektrooptyki zjawisko Faradaya znalazło zastosowania w b. dokładnych metodach pomiaru przemieszczeń liniowych i kątowych oraz w budowie laboratoryjnych i przemysłowych analizatorów wielkości fizyko-chemicznych (fotoelektryczna refraktometria, polarymetria i sacharymetria). Zastosowanie modulatorów Faradaya pozwoliło na zwiększenie dokładności wielu przyrządów, równocześnie eliminując szereg elementów mechanicznych lub elektromechanicznych, na których bazowały dotychczasowe modulatory świetlne.

2. MODULATOR FARADAYA

Modulator Faradaya w swej zasadniczej postaci składa się z uzwojenia wytwarzającego pole magnetyczne, przez które płynie prąd zmienny i wewnątrz którego znajduje się rdzeń wykonany ze szkła o dużej stałej Verdet (np. z ciężkiego flintu).

Jeżeli wzdłuż linii pola magnetycznego skierujemy przez szkło spolaryzowany promień świetlny, to po przejściu jego natężenie będzie zgodnie z prawem Malusa proporcjonalne do kwadratu sinusa kąta skręcenia płaszczyzny polaryzacji spowodowanego przez pole.

$$I = I_0 \sin^2 \vartheta, \quad (2)$$

I — natężenie strumienia świetlnego wychodzącego,

I_0 — natężenie strumienia świetlnego wchodzącego,

ϑ — kąt skręcenia płaszczyzny polaryzacji.

Jeżeli cewka jest zasilana zmiennym napięciem sinusoidalnym, to wówczas

$$\vartheta = K \sin \omega t, \quad (3)$$

gdzie K — stała zależna od materiału, amplitudy prądu płynącego przez cewkę i długości rdzenia.

Stąd

$$I = I_0 \sin^2(K \sin \omega t). \quad (4)$$

Ponieważ dla małych pól i niedużych dróg efekt skręcenia jest mały, można przyjąć, gdy $K < 1$, że ϑ jest bardzo małe, i zastąpić funkcję jej argumentem; wtedy

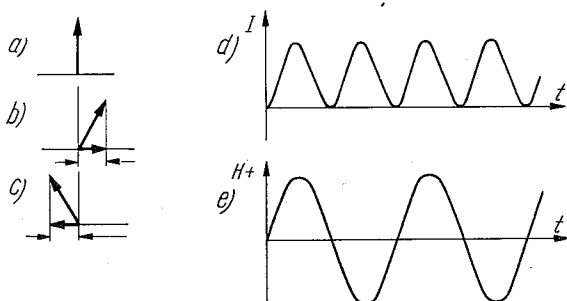
$$I = I_0 K^2 \sin^2 \omega t. \quad (5)$$

Korzystając z zależności $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

$$\text{otrzymujemy} \quad I = K' - K' \cos 2\omega t. \quad (6)$$

Z powyższej zależności wynika, że modulacja natężenia strumienia świetlnego jest pod względem częstotliwości dwukrotnie większa niż częstotliwość pola magnetycznego.

Wektor pionowy na rys. 2a może odpowiadać płaszczyźnie polaryzacji światła wchodzącego do modulatora, a jego długość jest proporcjonalna do amplitudy natężenia światła.



Rys. 2. Modulacja polem magnetycznym, skręcenie płaszczyzny polaryzacji

Jeżeli przed modulatorem wstawimy polaryzator w kierunku x i za modulatorem analizator w kierunku y , ustawione do siebie prostopadle, to w pierwszej chwili przez analizator nie przechodzi światło. Po $1/4$ cyklu skręcenie płaszczyzny polaryzacji polem magnetycznym osiąga maximum i wówczas przez analizator przechodzi maximum światła (wektor w płaszczyźnie poziomej na rys. 2b). W połowie cyklu pole magnetyczne nie istnieje i przez analizator nie przechodzi światło (jak na rys. 2a). W $3/4$ cyklu znów występuje maximum pola, lecz o przeciwnym znaku, płaszczyzna polaryzacji zostaje skręcona maksymalnie w stronę przeciwną (wektor poziomy na rys. 2c) i przez modulator przechodzi maximum światła. Na rys. 2d i 2e podano wykresy w funkcji czasu natężenia strumienia świetlnego I padającego na detektor umieszczony za modulatorem i natężenia pola magnetycznego H . Jeżeli na drodze promieni znajduje się ośrodek optycznie aktywny, równanie (3) przyjmie postać

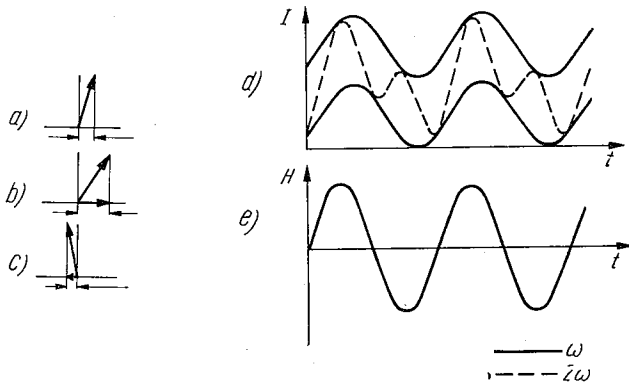
$$\vartheta' = K \sin \omega t + \varphi, \quad (7)$$

gdzie φ — kąt skręcenia spowodowany aktywnym ośrodkiem.

Po przekształceniach otrzymamy

$$I' = I_0 \left[\frac{K^2}{2} - \frac{K^2 \cos 2\omega t}{2} + 2K\varphi \sin \omega t + \varphi^2 \right]; \quad (8)$$

z zależności tej wynika, że zmodulowane natężenie światła o dwukrotnie większej częstotliwości niż pole magnetyczne jest modulowane częstotliwością pola magnetycznego. Rozważania przebiegu zjawiska są podobne jak dla ośrodka optycznie nieaktywnego (rys. 2). W chwili początkowej strumień świetlny ulega skręceniu przez ośrodek optycznie aktywny (prawo lub lewoskrętny), co przedstawiono na rys. 3a. Po $1/4$ cyklu amplituda



Rys. 3. Przebieg modulacji z udziałem optycznie aktywnego ośrodka

natężenia strumienia świetlnego jest większa niż w poprzednio rozważanym przypadku (rys. 2b) z powodu dodatkowego skręcenia płaszczyzny polaryzacji przez aktywny ośrodek (rys. 3b). W połowie cyklu przez układ przejdzie ta sama ilość światła co w chwili początkowej. W $3/4$ okresu skręcenie płaszczyzny polaryzacji wynikłe z modulacji polem magnetycznym ma kierunek odwrotny i przeciwny do skręcenia spowodowanego aktywnym optycznie ośrodkiem, wskutek czego strumień świetlny przepuszczony przez układ jest odpowiednio mniejszy (rys. 3c).

Wykreślając przebieg zjawiska w funkcji czasu t mamy odpowiednio na rys. 3d i 3e przebiegi zależności natężenia strumienia świetlnego I i natężenia pola magnetycznego H .

Jeżeli ośrodek aktywny wywołuje ujemne skręcenie płaszczyzny polaryzacji, to równanie (8) przyjmie postać

$$I'' = I_0 \left[\frac{K^2}{2} - \frac{K^2 \cos 2\omega t}{2} - 2K\varphi \sin \omega t + \varphi^2 \right]; \quad (9)$$

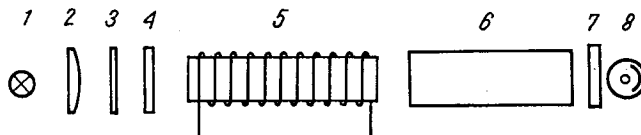
zważywszy, że

$$-2\varphi K \sin \omega t = 2\varphi K \sin(\omega t + 180^\circ)$$

widzimy, że skręcenie płaszczyzny polaryzacji w kierunku przeciwnym daje w rezultacie zmianę fazy modulacji częstotliwości o 180° .

Na tej podstawie otrzymuje się nową metodę polarymetryczną określania kierunku skręcenia płaszczyzny polaryzacji ośrodka optycznie aktywnego przedstawioną schema-

tycznie na rys. 4, na którym wprowadzono oznaczenia: 1 — lampa oświetlająca, 2 — kolimator, 3 — filtr pasmowy, 4 — polaryzator, 5 — modulator Faradaya, 6 — ośrodek aktywny optycznie, 7 — analizator, 8 — czujnik fotoelektryczny.



Rys. 4. Metoda polarymetryczna określająca skręcenie płaszczyzny polaryzacji (i jego kierunek) za pomocą magneto-optycznej modulacji

W przypadku jeśli ośrodek optycznie aktywny nie wprowadza dodatkowego skręcenia płaszczyzny polaryzacji, w czujniku fotoelektrycznym wytwarza się prąd fotoelektryczny, który jest odwzorowaniem padającego na niego strumienia świetlnego o natężeniu zmieniającym się wg (6). Natężenie strumienia świetlnego posiada składową zmienną o częstotliwości 2ω . Wraz z powstaniem w ośrodku aktywnym skręcenia płaszczyzny polaryzacji, pojawia się w czujniku fotoelektrycznym składowa zmienna o częstotliwości ω , której amplituda jest funkcją wielkości skręcenia płaszczyzny polaryzacji przez ośrodek aktywny, a faza zależy od kierunku tego skręcenia. Na podstawie tego zjawiska wyrażonego analitycznie wzorami (8) i (9) otrzymuje się cztery sposoby pomiaru kąta skręcenia płaszczyzny polaryzacji aktywnego ośrodka za pomocą tej metody, a mianowicie:

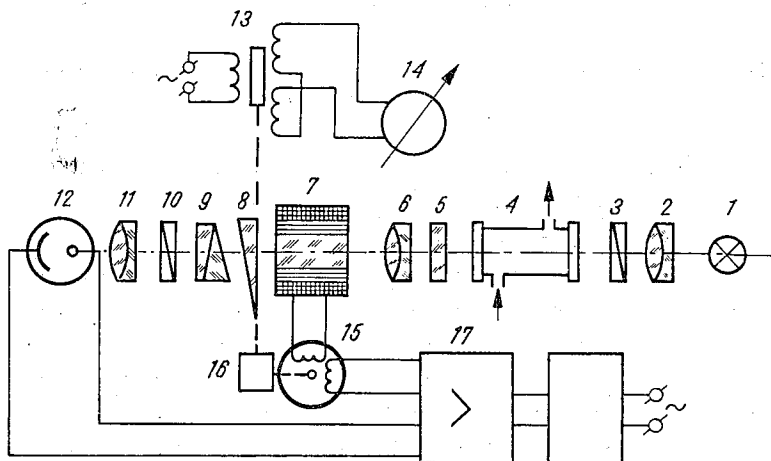
1. przez pomiar amplitudy przebiegu o częstotliwości ω (8), (9).
2. przez obrót analizatora do momentu, gdy amplituda sygnału o częstotliwości ω zaniknie i pomiar kąta obrotu analizatora. W tym sposobie analizator może być obracany przez serwomechanizm, co jest tym dogodniejsze, że sygnał o częstotliwości ω spowodowany skręceniem płaszczyzny polaryzacji jest fazoczuły.
3. przez zastosowanie do wygaszania sygnału o częstotliwości ω klinów kwarcowych, pozwalających zmieniać długość drogi wiązki w kwarcu i w następstwie zmieniać naturalne skręcenie płaszczyzny polaryzacji w przeciwnym kierunku do skręcenia magnetycznego. Mierzając grubość kwarcu na drodze wiązki promieni można wyznaczyć zdolność skręcenia płaszczyzny polaryzacji przez dany ośrodek. Również w tym przypadku można w dogodny sposób zastosować serwomechanizm.
4. przez wytworzenie stałego pola magnetycznego w modulatorze w obecności pola wytworzonego przez prąd zmienny, w celu skompensowania skręcenia płaszczyzny polaryzacji wywołanego przez ośrodek optycznie aktywny, redukując w ten sposób do zera drgania o amplitudzie ω . Znając kierunek i wielkość prądu stałego można zmierzyć skręcenie spowodowane aktywnym optycznie ośrodkiem.

3. ZASTOSOWANIE MODULATORÓW FARADAYA W FOTOELEKTRYCZNEJ SACHARYMETRII I REFRAKTYMETRII

Modulację Faradaya w zastosowaniu do pomiarów polarymetrycznych opublikowali po raz pierwszy King i Gates w 1958 r. [2] (nieco później Wenking [3]) jako metodę określania koncentracji cukru, bazując na wykorzystaniu skręcających własności cieczy cukrowych.

Klasycznym natomiast przykładem zastosowania do tych samych celów metody modulacji Faradaya może być opisany niżej *przepływowy automatyczny sacharymtr* opracowany przez W. J. Kudrjawcewa [4], wykorzystujący sposób ruchomego klina kwarcowego podany wyżej (w punkcie 3).

Światło z lampy oświetlacza 1 (rys. 5) pada przez kondensator 2 na polaryzator 3, gdzie zostaje spolaryzowane w jednej płaszczyźnie. Spolaryzowane światło przechodzi przez



Rys. 5. Automatyczny sacharymtr przepływowy

przepływową kuetę 4, przez którą przepływa badany roztwór, filtr 5, obiektyw 6, magneto-optyczny modulator 7, kwarcowy kompensator 8, 9, analizator 10, obiektyw 11 i pada na czujnik fotoelektryczny 12, przekształcający drgania strumienia świetlnego w zmienny sygnał elektryczny.

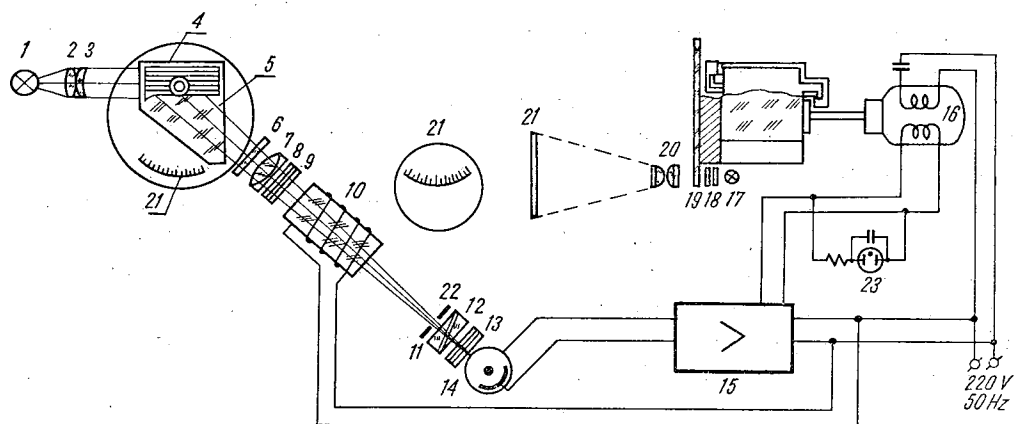
Kompensującym elementem są kliny (ruchomy 8 i nieruchomy 9) wykonane z krystalicznego kwarcu. Zmianę kąta skręcenia płaszczyzny polaryzacji badanej cieczy kompensuje się poprzez zmianę ruchomego kwarcowego klina, którego położenie jest funkcją skręcenia płaszczyzny polaryzacji cieczy. Ponieważ zaś skręcenie płaszczyzny polaryzacji jest funkcją zawartości cukru w cieczy, położenie ruchomego klina stanowi o koncentracji roztworu.

Ruchomy klin jest mechanicznie sprzężony z rdzeniem indukcyjnego czujnika 13 połączonego z rejestratorem 14 i z silnikiem rewersyjnym 15 przez reduktor 16. Jedno z uzwojeń silnika zasilane jest z sieci (50 Hz, 220 V), drugie jest zasilane ze serwowzmacniacza 17, na którego wejście wchodzi sygnał z czujnika fotoelektrycznego. W chwili zrównoważenia układu śledzącego w uzwojeniu „roboczym” silnika płynie prąd zmienny o częstotliwości podwojonej (100 Hz) i silnik nie pracuje. Zakres przyrządu $0-3^{\circ}\text{Bx}^1$, czułość $0,01^{\circ}\text{Bx}$, dokładność $0,02^{\circ}\text{Bx}$. Modulator Faradaya wykonany w postaci cewki o ilości 2000 amperozwojów i rdzenia z ciężkiego flintu (o stałej Verdet’a 0,06).

¹⁾ $^{\circ}\text{Bx}$ — umowna jednostka charakteryzująca stężenie roztworów cukrowych, praktycznie stosowana w przemyśle cukrowniczym i spożywczym. 1°Bx odpowiada skręceniu płaszczyzny polaryzacji przez roztwór ok. 2° lub w przypadku pomiarów refraktometrycznych zmianie współczynnika załamania o 0,0014 (przy zmianie od 0°Bx do 1°Bx).

Wykorzystanie modulacji polem magnetycznym skręcenia płaszczyzny polaryzacji w fotoelektrycznej refraktometrii przedstawia poniższe rozwiązanie konstrukcyjne [5].

Strumień świetlny z lampy 1 (rys. 6) i układu kondensorowego 2, 3 pada na mierzoną ciecz, która przepływa przez kufkę 4 przyklejoną do pomiarowego pryzmatu 5, dalej



Rys. 6. Fotoelektryczny analizator refraktometryczny zbudowany na zasadzie autokompensacyjnej z wykorzystaniem magneto-optycznej modulacji

pada na monochromatyczny filtr 6, obiektyw 7, 8, polaryzator 9, modulator 10, klinowy kompensator 11 wykonany z optycznie aktywnego materiału. Celem wyprostowania wiązek świetlnej zastosowano szklany kontrklin 12 stanowiący z klinem kompensującym płaskorównoległą płytkę, po przejściu której wiązka pada na analizator 13 i czujnik fotoelektryczny 14. Wytworzony w czujniku prąd fotoelektryczny zostaje podany na serwowzmacniacz wzmacniający jego składową zmienną. Serwowzmacniacz 15 uruchamia silnik rewersyjny 16 sprzężony mechanicznie przez reduktor z mechanizmem obracającym pryzmat pomiarowy, do którego przymocowana jest skala 19 oraz oświetlacz 17 i urządzenie projekcyjne 18, 19, 20 rzucające obraz skali na ekran 21. Kontrolna lampka 23 zapala się podczas ruchu silnika rewersyjnego i sygnalizuje w ten sposób, że przyrząd znajduje się w stanie niustalonym, tzn., że wskazanie jest fałszywe.

Liniowo spolaryzowane światło jest modulowane modulatorem skręcającym jego płaszczyznę polaryzacji z podwójną częstotliwością prądu zmiennego, którym zasilana jest cewka. Strumień z modulatora jest kierowany na diafragmę 22 ustawioną przed klinowym kompensatorem. Jeżeli średnia część strumienia przechodzącego przez powierzchnię graniczną pomiarowego pryzmatu 5 i mierzonego ośrodka o rozkładzie energetycznym jak w konwencjonalnym refraktometrze Abbego będzie zrównoważona przy pomocy analizatora w ten sposób, że będzie w niej minimum światła, tj. częstotliwość drgań na fotoelemencie będzie wynosiła 100 Hz, to odpowiednio dla lewych i prawych części strumienia drgania strumienia świetlnego będą równe co do amplitudy i częstotliwości i przeciwne w fazie, będą się wzajemnie znosić. Jeżeli jedna z bocznych części strumienia zmniejszy swą intensywność, w obwodzie czujnika fotoelektrycznego powstanie składowa zmienna z częstotliwością 50 Hz, której faza zależy od tego, który ze strumieni zmieni swą intensywność, czyli układ jest fazoczuły.

Granice światłocienia ustawia się przy równoważeniu przyrządu tak, aby zakrywała jedną trzecią otworu diafragmy. Wówczas boczne części strumienia świetlnego są równe co do intensywności. Odchylenie granicy światłocienia powoduje pojawienie się fazoczułej składowej zmiennej w obwodzie czujnika fotoelektrycznego, będącej sygnałem wejściowym układu śledzącego. Silnik rewersyjny obracając pryzmatem powoduje przemieszczanie się granicy światłocienia na klinie kompensującym w położeniu równowagi, w uzwojeniu silnika zasilanym ze serwowzmacniacza znika wówczas składowa zmienna 50 Hz, zostaje tylko składowa 100 Hz i silnik zatrzymuje się. Tak więc zmiana współczynnika załamania (koncentracji) badanej cieczy zmieniając warunki przejścia i odbicia promieni powoduje w ostateczności zmianę położenia pryzmatu pomiarowego i to jest wielkością pomiarową.

Zastosowanie w wyżej opisanym przypadku modulacji Faradaya i kompensacji klinem z aktywnego optycznie materiału powoduje znaczne uproszczenie układu i stwarza możliwość znacznego zwiększenia dokładności pomiaru bez uciekania się do dwuwiazkowych układów różnicowych o mechanicznej modulacji światła, których skuteczność w przypadku cieczy nieprzezroczystych i mętnych jest niezadowalająca. To ostatnie wykazały analizy i badania przeprowadzone w Centralnym Laboratorium Optyki w Warszawie nad refraktometrem porównawczym dla cieczy nieprzezroczystych (podczas realizacji projektu wstępnego refraktometrycznego analizatora Refot-2).

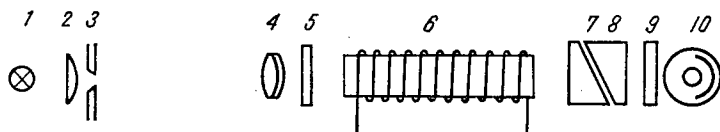
4. ZASTOSOWANIE ZJAWISKA FARADAYA DO LOKOWANIA LINII

Skreślenie płaszczyzny polaryzacji polem magnetycznym znajduje istotne zastosowanie w urządzeniach do lokowania linii. Metoda ta została sprawdzona [6] w procesach wytwarzania siatek dyfrakcyjnych i kopiowania skal. Zjawisko Faradaya stosowano w tych procesach do kontroli nacinanych skal i siatek oraz jako elektrooptyczne sprzężenie zwrotne stabilizujące ruch stołu, na którym znajdowała się wykonywana siatka (matryca). Sprzężenie takie stosować można w celu kasowania luzów śruby napędowej i przekładni zębatych, sterując odpowiednią przekładnią różnicową. W dotychczasowych rozwiązaniach posługiwano się w tym celu metodami interferencyjnymi, które poza gorszą dokładnością wymagały stosowania generatorów i serwowzmacniaczy na niskie częstotliwości (poniżej 1 Hz). Wykorzystując zjawisko magneto-optyczne można umieszczać linie na skalach i siatkach z dokładnością większą niż jeden mikrocal [6]. Urządzenie służące do tego celu poza wysoką dokładnością posiada takie zalety jak:

- 1) brak części ruchomych,
- 2) szeroki zakres kontroli, tzn. możliwości znajdowania linii w szerokim polu,
- 3) niewrażliwość (prawie) na zmianę ogniskowania,
- 4) małą bezwładność,
- 5) zdolność pomiaru i wykrywania odchyłeń od prawidłowego lokowania linii na wykonywanych siatkach i skalach,
- 6) zdolność wykazania kierunku odchylenia.

Warunkiem realizacji wyżej wymienionych zastosowań zjawiska Faradaya jest zamiana przemieszczenia linii w skreślenie płaszczyzny polaryzacji oraz określenie kierunku tego przemieszczenia. Służy do tego urządzenie przedstawione na rys. 7. Z lewej strony rysunku 7 mamy linię, której położenie chcemy ustalić. Tą linią jest oświetlona szczelina 3 przez

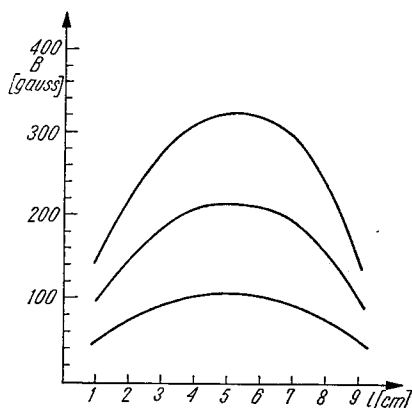
lampę 1 i soczewkę 2. Obraz linii jest rzutowany przez obiektyw 4 na polaryzator 5, modulator 6 i pada na dwa skrzyżowane identyczne pryzmaty kwarcowe. Lewoskrętny pryzmat kwarcowy 7 i prawoskrętny pryzmat kwarcowy 8. Następnie światło przechodzi przez



Rys. 7. Magneto-optyczne urządzenie do lokowania (pozycjonowania) linii

analizator 9 i pada na czujnik fotoelektryczny 10. Jeżeli światło pada ze szczeliny w takiej płaszczyźnie, że drogi optyczne przez kwarc lewo- i prawoskrętny będą równe, wówczas nie uzyskamy skręcenia. Płaszczyzna równego prawego i lewego skręcenia jest nazwana płaszczyzną zerową. Jeżeli obraz pada na zewnątrz płaszczyzny zerowej, wówczas zaobserwujemy pewne skręcenie. Przy odchyleniu w jedną stronę otrzymamy skręcenie w prawo, w drugą — skręcenie w lewo. Wielkość skręcenia będzie proporcjonalna do przemieszczenia obrazu. Jak wynika z rozważań podanych we wstępie, amplituda drgania o częstotliwości ω będzie proporcjonalna do kąta przesunięcia linii, natomiast faza drgania wskaże jego kierunek.

W modelu funkcjonalnym takiego urządzenia wykonanym i przebadanym przez R. J. Meltzera [6] zastosowano modulator w postaci rdzenia o długości 60 mm ze szkła 874/224 (wg norm USA) umieszczonego w cewce o 15 tys. zwojów. Jako analizatora i polaryzatora zastosowano płytki polaroidowe. Rozkład naturalny pola magnetycznego w modulatorze wyglądał jak na rysunku 8. Modulator w celu uniknięcia zakłóceń interferencyj-



Rys. 8. Pole magnetyczne w modulatorze

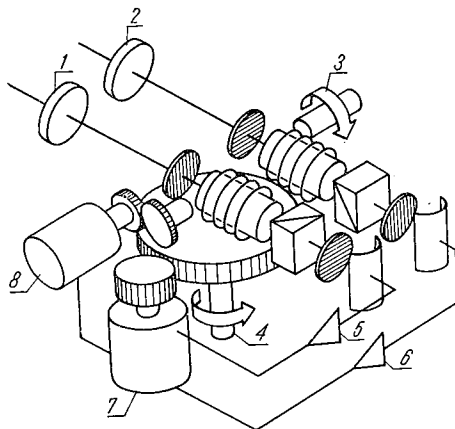
nych zasilano ze specjalnego generatora 100 Hz (częstotliwość sieci 60 Hz). Czujnikiem fotoelektrycznym był fotopowielacz 1P21. Sygnał z fotopowielacza po wzmocnieniu i zdemodulowaniu w demodulatorze pierścieniowym uruchamiał miernik. Meltzer wykazał, że sygnał wyjściowy jest wprost proporcjonalny do przesunięcia szczeliny, prądu modulatora i w dość dużym zakresie (do 150 mikronów) do szerokości szczeliny oraz że wzrost czułości

w zakresie liniowości jest spowodowany tylko i jedynie wzrostem oświetlenia. Ponadto wykazał, że czułość układu praktycznie nie zależy od dokładności zogniskowania i od równoległości szczeliny w stosunku do płaszczyzny zerowej. Zasadniczym zakłóceniem wykazany przez Meltzera jest pojawienie się znacznego niemodulowanego sygnału, kiedy obraz linii znajduje się poza płaszczyzną zerową. Jest to niebezpieczne ze względu na możliwość uszkodzenia fotopowielacza.

Składowa stała prądu fotoelektrycznego w przypadkach konieczności stosowania szerokiego pola widzenia może być prosto i skutecznie ograniczana przez stosowanie specjalnej przesłony zwężającej się w miarę oddalania się od płaszczyzny zerowej. Źródłem zakłóceń są przede wszystkim zanieczyszczenia i zawiesiny w szkle, które depolaryzują światło, niedoskonałość polaroidów (przez skrzyżowanie polaroidy przechodzi 0,0005% światła), wielokrotne odbicie pomiędzy pryzmatami kwarcowymi oraz to, że dwójłomność kwarcu może być źródłem światła spolaryzowanego eliptycznie i wówczas światło to nie daje się wygasić przez drugi polaroid.

5. ZASTOSOWANIE EFEKTU FARADAYA DO POMIARU MAŁYCH PRZESUNIĘĆ I SKRĘCEŃ NA DUŻYCH ODLEGŁOŚCIACH

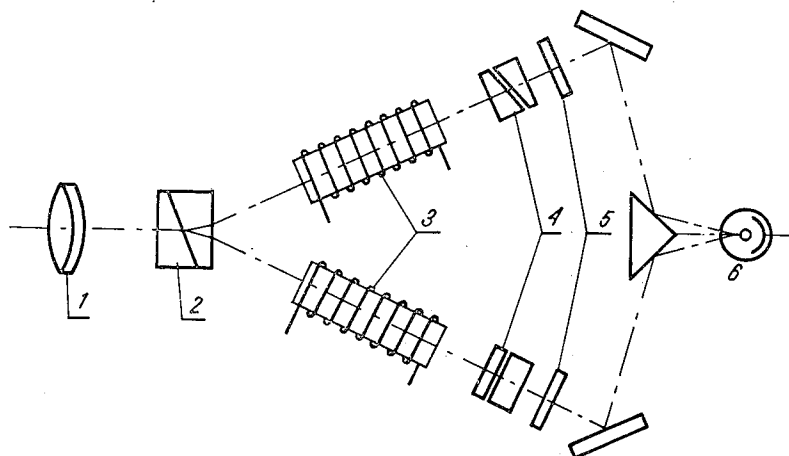
Robert J. Meltzer [6] podaje w swojej pracy szereg ciekawych zastosowań we współczesnej technice efektu skręcenia płaszczyzny polaryzacji polem magnetycznym, z których najciekawszym wydaje się tzw. śledzenie optyczne w przestrzeni, czyli budowa opartych na efekcie Faradaya fotoelektrycznych układów nadążnych. Chodzi o układy śledzące lub ustalające położenie odległych obiektów. Przedstawione na rys. 7 urządzenie do lokowania linii może być wykorzystane wraz z drugim analogicznym zestawem do śledzenia do-



Rys. 9. Zastosowanie zjawiska Faradaya w teleskopach śledzących

wolnego punktu świecącego w przestrzeni za pomocą dwóch serwo mechanizmów stanowiących układ nadążny, dzięki któremu ciało w przestrzeni (np. planeta) znajduje się stale w polu widzenia urządzenia obserwującego. Na rys. 9 przedstawiono taki teleskop śledzący i wprowadzono następujące oznaczenia: 1 teleskop azymutu, 2 teleskop horyzontu, 3 oś horyzontu, 4 oś azymutu, 5 wzmacniacz azymutu, 6 wzmacniacz horyzontu, 7 silnik azymutu i 8 silnik horyzontu.

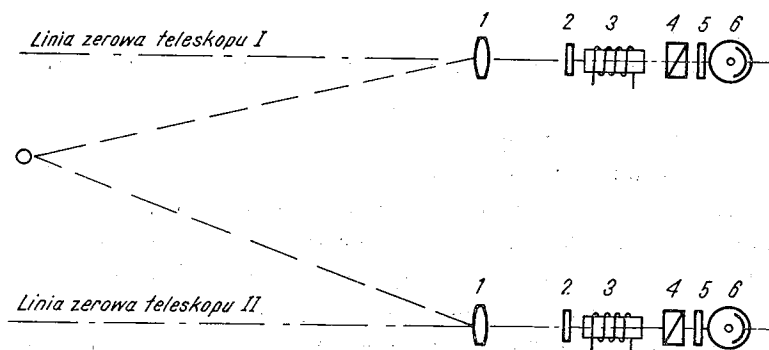
Powyżej przedstawiony układ można zredukować przez sprzężenie jednego teleskopu z pryzmatem Wollastona i stosując wówczas dwa modulatory przesunięte w fazie o 90° . Można w tym przypadku użyć jednego czujnika fotoelektrycznego. Na rys. 10 przedsta-



Rys. 10. Teleskop śledzący z jednym obiektywem

wiono teleskop śledzący z jednym obiektywem. Wprowadzono następujące oznaczenia: 1 obiektyw, 2 pryzmat Wollastona, 3 modulatory (przesunięte w fazie o 90°), 4 pryzmaty kwercowe prawo- i lewoskrętne, 5 analizatory i 6 fotopowielacz.

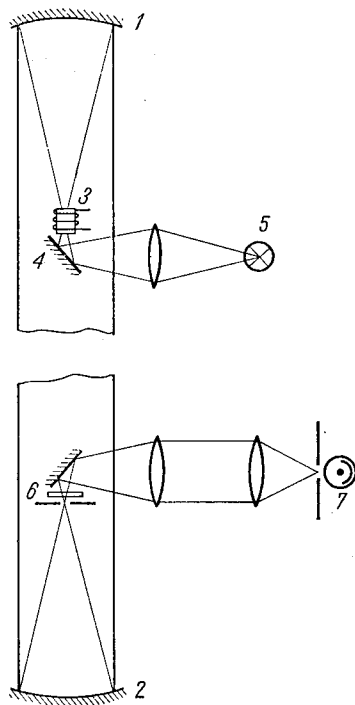
Na rys. 11 przedstawiono schemat dwóch sprzężonych teleskopów spełniających funkcję dalmierza. Wprowadzono oznaczenia: 1 obiektywy, 2 polaryzatory, 3 modulatory Faradaya, 4 pryzmaty kwarcowe, 5 analizatory i 6 fotopowielacze.



Rys. 11. Magneto-optyczny dalmierz

daya, 4 pryzmaty kwarcowe, 5 analizatory i 6 fotopowielacze. Pomimo że zarówno teleskopy, jak i dalmierz mogą pracować jedynie na tzw. torach świecących, wykazują szereg zalet w porównaniu z konwencjonalnymi dalmierzami. Przede wszystkim są niezależne od noniusza i ostrości przestrzennej oraz nie jest konieczne dokładne ustawianie na obiekt (fałszywy sygnał z jednego teleskopu zostaje również odjęty od sygnału drugiego). J. Meltzer [6] podaje, że przy odstępach między osiami optycznymi (zerowymi płaszczyznami teleskopów) 36 cali z czułością $5 \cdot 10^{-8}$ radiana wykrywał przesunięcia 0,002 cala na 100 stóp.

R. J. King, S. P. Middleton i J. M. G. Thompson [7] opisali zastosowanie magneto-optycznej modulacji do pomiarów minimalnych wzajemnych skręceń dwóch odległych obiektów. Uzyskali przy tym czułość kątową 0,1 minuty na odległości ok. 600 m (2000 stóp). Schemat urządzenia przedstawiono na rys. 12, przy czym wprowadzono następujące



Rys. 12. Urządzenie do pomiaru przemieszczeń kątowych dwóch odległych obiektów

oznaczenia: 1, 2 zwierciadła wklęsłe, 3 modulator Faradaya, 4 polaryzator, 5 źródło światła, 6 analizator, 7 czujnik fotoelektryczny. Główną trudnością metody jest skupienie odpowiedniej energii na dużej przestrzeni, zostało to opanowane przez zastosowanie dwóch odpowiednio dużych lusterek wklęsłych, wówczas polaryzator i modulator Faradaya mogą mieć odpowiednio małe kąty aperturowe przy umieszczeniu ich w ognisku zwierciadeł.

Zwierciadła wklęsłe i związane z nimi podzespoły są umieszczone na wspólnej osi optycznej na dwóch różnych obiektach, których wzajemne skręcenie jest przedmiotem pomiaru. Ponieważ analizator i polaryzator są ustawione pod kątem 90° , w chwili początkowej w czujniku fotoelektrycznym jest sygnał o częstotliwości 2ω . Z chwilą wzajemnego skręcenia obiektów pojawia się w czujniku sygnał o częstotliwości ω . Jest on wzmacniany, prostowany i uruchamia mikroamperomierz, którego odchylenie jest funkcją wzajemnego skręcenia obiektów. Metodę można udoskonalić przechodząc na pomiar sposobem autokompensacyjnym przez obrót analizatora bądź przez zastosowanie kompensacyjnego modulatora Faradaya zasilanego bezpośrednio z wyjścia układu elektronicznego.

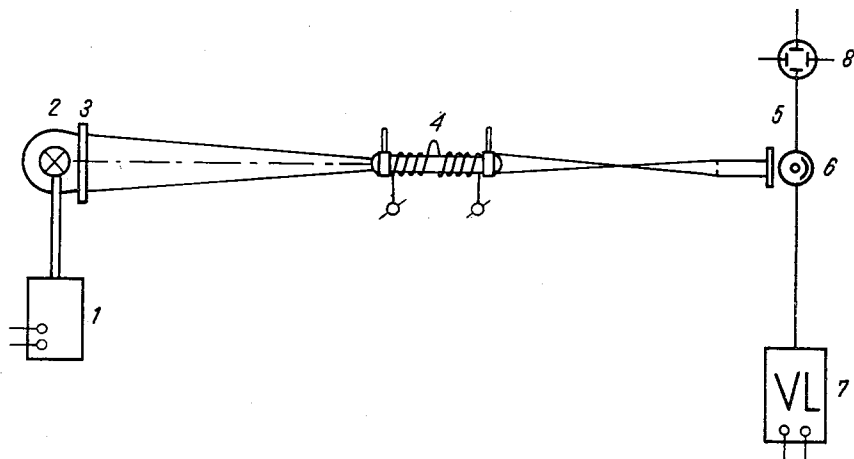
Opisany wyżej sposób pomiaru wzajemnych skręceń odległych obiektów może mieć bardzo różnorodne zastosowania, szczególnie tam, gdzie stosowanie tradycyjnych metod

pomiaru jest znacznie utrudnione. Na przykład w bezpośrednich pomiarach dynamicznych i statycznych odkształceń skręcających w dużych budowlach, w ciągłej rejestracji kątowych przesunięć trudno dostępnych w trakcie pomiaru obiektów (korpusy, kadłuby samolotów, rakiety itp.), w pomiarach orientacji wzajemnej dwóch obiektów oddzielonych dużą odległością, np. wałów napędowych.

6. ZASTOSOWANIE DO POMIARU PRĄDÓW

Modulacja magneto-optyczna dzięki swej bezinercyjności do częstotliwości rzędu 10^9 Hz może mieć zastosowanie w pośrednim pomiarze i oscylografowaniu krótkich przebiegów udarowych prądów i napięć. Przeprowadzone w tym kierunku próby przez G. W. Gołodzińskiego [8] i [9] w Związku Radzieckim dały szereg pozytywnych rezultatów. Osiągnięto pomiar impulsów z dokładnością $\pm 10\%$ i wierny obraz ich kształtu.

Zasada działania przetworników elektrooptycznych polega na tym, że mierzony prąd płynie bezpośrednio w uzwojeniu modulatora bądź też sam element optyczny jest umieszczony w polu magnetycznym mierzonego lub oscylograflowanego prądu, np. przez przyklejenie bezpośrednio do szyny przewodzącej.



Rys. 13. Pomiar prądu przy zastosowaniu zjawiska Faradaya

Na rys. 13 przedstawiono układ najprostszego urządzenia do pomiaru i oscylografowania dużych prądów. Oznaczenia na rys. 13 są następujące: 1 zasilacz, 2 lampa, 3 polaryzator, 4 modulator Faradaya, 5 analizator, 6 czujnik fotoelektryczny, 7 miernik, 8 oscylograf.

Pośrednie metody pomiaru prądów bazujące na pomiarze napięcia na boczniku są ograniczone ze względów częstotliwościowych z uwagi na indukcyjności rozproszenia i pojemności boczników. Jeżeli w przypadku pomiarów pojedynczych i rzadkich impulsów można zastosować tzw. „bezindukcyjne” boczniki, to użycie ich dla pomiaru i oscylografowania prądów quasistacjonarnych w takim przedziale częstotliwości jest niemożliwe ze względów energetycznych, a mianowicie mocy wydzielonej na boczniku. Bocznik wówczas powinien być obliczony na pełny prąd i w następstwie będzie miał b. duże wymiary. Magne-

to optyczne przetworniki pozwalają na wyeliminowanie tych problemów, a ponadto ponieważ między jego elementami składowymi, tzn. modulatorem jako czujnikiem, oświetlaczem i czujnikiem fotoelektrycznym nie ma galwanicznego połączenia, stąd pomiaru i oscylografowania można dokonywać stosując jako jeden z potencjałów ziemię.

Poza pomiarami prądów można również bazując na zjawisku Faradaya mierzyć inne wielkości elektryczne, jak np. moce chwilowe, ładunek, straty dielektryczne, prędkości rozchodzenia się fal napięciowych i prądowych.

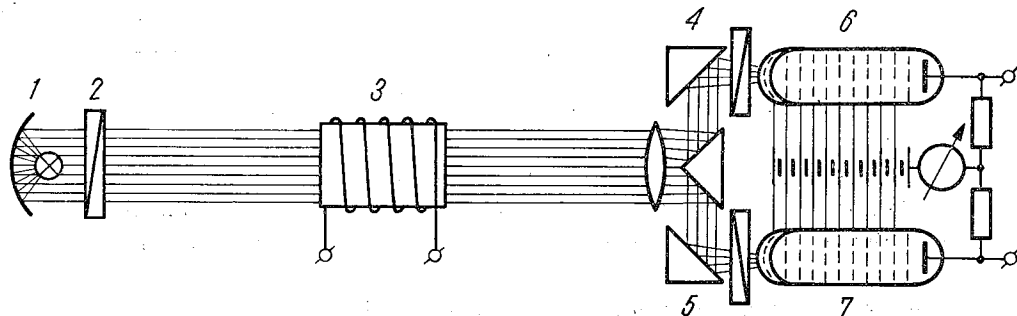
Dla pomiaru metodą magneto-optycznej modulacji wielkości elektrycznych najistotniejszym jest zapewnienie stabilności strumienia świetlnego zarówno pod względem przypadkowych zmian jego natężenia, spowodowanych np. wahaniami napięcia zasilania oświetlacza, jak i pulsacji, oraz stabilność czujnika fotoelektrycznego.

Poza tym ważnym zagadnieniem jest wyeliminowanie zniekształceń spowodowanych pojawieniem się wyższych harmonicznych na skutek nieliniowości metody i nieliniowości charakterystyki czujnika fotoelektrycznego. W tym celu m. in. stosuje się odmiennie jak w poprzednio opisanych metodach skrzyżowanie analizatora i polaryzatora o 45° zamiast 90° .

Okazuje się, że przy kątach $\theta > 15^\circ$ występują znaczne zniekształcenia i kąt 15° należy przyjąć jako górną granicę możliwych skręceń płaszczyzny polaryzacji przy pomiarze i oscylografowaniu wielkości elektrycznych. W celu zapewnienia więc minimum zniekształceń spowodowanych charakterem zjawiska, opornością indukcyjną modulatora (która m. in. jest funkcją jego gabarytów) należałoby stosować jak najmniejsze skręcenia. Jest to warunek przeciwny warunkowi jakości modulatora, o której decyduje tzw. głębokość modulacji (stosunek składowej zmiennej do składowej stałej prądu czujnika fotoelektrycznego), charakteryzująca stosunek sygnału do szumu.

Ze względu na indukcyjności rozproszenia metoda magnetooptycznej modulacji jest stosowana dla pomiaru i oscylografowania prądów większych od 100 A.

W celu wyeliminowania szeregu czujników ubocznych, skompensowania zniekształceń nieliniowych, stosuje się układy zrównoważone. Układ zrównoważony pozwala na znaczne



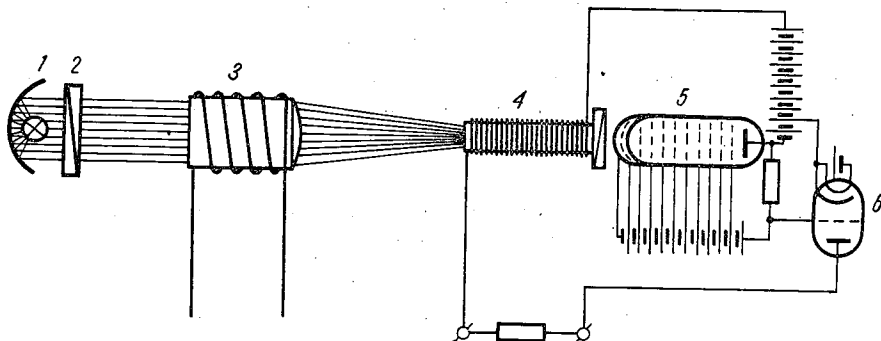
Rys. 14. Pomiar prądu w układzie porównawczym przy zastosowaniu zjawiska Faradaya

zwiększenie czułości poprzez możliwość skrzyżowania analizatora z polaryzatorem pod kątem 90° .

Na rysunku 14 wprowadzono następujące oznaczenia: oświetlacz 1, polaryzator 2, modulator Faradaya 3, analizatory 4, 5, fotopowielacze 6, 7.

Przez zastosowanie dwóch modulatorów pomiarowego i kompensacyjnego otrzymujemy tzw. elektrooptyczny transformator prądu (przekładnik prądowy).

Na rys. 15 wprowadzono następujące oznaczenia: oświetlacz 1, polaryzator 2, modulator pomiarowy 3, modulator kompensacyjny 4, fotopowielacz 5, wzmacniacz 6.



Rys. 15. Pomiar prądu w układzie z dwoma modulatorami przy zastosowaniu zjawiska Faradaya

Działanie przekładnika polega na tym, że prąd kompensacyjnego modulatora powstaje w momencie pojawienia się prądu w modulatorze pomiarowym i jest skierowany w ten sposób, że kompensuje skręcenie płaszczyzny polaryzacji modulatora pomiarowego. Zachodzi tutaj jak gdyby optyczne sprzężenie zwrotne. Stosunek pomiędzy prądami obu modulatorów jest niezależny od przypadkowych zmian strumienia świetlnego i zmian czułości czujnika fotoelektrycznego. Układ nie wymaga więc stabilizacji zasilania źródła światła, wzmacniacza i czujnika fotoelektrycznego.

Z wyżej przedstawionego krótkiego przeglądu możliwości, jakie daje magneto-optyczna modulacja w dziedzinie pomiarów wielkości elektrycznych, wynika jasno, że może ona stanowić przełom w wielu dziedzinach pomiaru w technice najwyższych napięć. Nadmienić należy, że podobnie szerokie możliwości daje praktyczne wykorzystanie zjawiska Pokelsa polegające na zmianie pod wpływem pola elektrycznego różnicy faz pomiędzy załamanyymi w kryształach promieniem zwyczajnym i nadzwyczajnym. Modulatory oparte na tym zjawisku stwarzają szczególne dogodności w pomiarze i oscylografovaniu napięć i niedużych prądów nie mogących być mierzonymi za pomocą modulacji Faradaya jak np. prądy ulotu czy prądy koronowe na wysokim potencjale.

7. ZASTOSOWANIE DO POMIARU SŁABYCH PÓŁ MAGNETYCZNYCH

Ponieważ zjawisko Faradaya zachodzi również w ferrytach i to nawet o wiele wyraźniej niż w ciałach stałych i cieczach, może być podstawą do opracowania magnetometrów mierzących b. słabe pola magnetyczne. Zjawisko Faradaya w ferrytach zachodzi dla b. wysokich częstotliwości promieniowania, dla mikrofali P. J. Allen [10] podaje jako możliwe odchylenia rzędu 0,1 stopnia na 1 cm długości drogi promieniowania w ośrodku

aktywnym (ferrycie) i na 1 Oe przyłożonego pola przy różnorodnych ferromagnetycznych ferrytach przy częstotliwości 9000 MHz (w przypadku ciał stałych i cieczy skrócenie jest rzędu 0,001 stopnia na 1 cm i na 1 Oe).

Magnetometr mikrofalowy jest w zasadzie odpowiednikiem najzwyczajszego opisanego poprzednio układu magneto-optycznego używanego do pomiaru odchyłeń kątowych przy znanych polach magnetycznych. Rdzeń ferrytowy, w którym zachodzi zjawisko skrócenia płaszczyzny polaryzacji ma kształt cylindra zamkniętego w długim kolistym falowodzie. Wysoka częstotliwość nośna jest dostarczana przez generator klistronowy. Sygnał z detektora jest częściowo uformowany w czułym odbiorniku mikrofalowym.

8. AKTUALNIE PROWADZONE PRACE W KRAJU W DZIEDZINIE ZASTOSOWANIA ZJAWISKA FARADAYA

Prace podstawowe i konstrukcyjne nad zastosowaniem zjawiska Faradaya w układach pomiarowych i kontrolnych są prowadzone w Zakładzie Fotoelektroniki Centralnego Laboratorium Optyki w Warszawie.

W chwili obecnej trwają badania modelu funkcjonalnego refraktometrycznego analizatora dla cieczy absorbujących, w którym zastosowano magneto-optyczny modulator bazując na szkłe flintowym SF-6. Analizator przeszedł pomyślnie pierwsze próby laboratoryjne, które potwierdziły wysokie walory magneto-optycznej modulacji.

Równocześnie trwają przygotowania nad zastosowaniem zjawiska Faradaya w budowie automatycznego sacharymetru o b. małym zakresie pomiarowym ($0-2^\circ B_x$).

Wyniki prowadzonych aktualnie prac będą przedmiotem oddzielnych publikacji.

*Instytut Automatyki PAN
Centralne Laboratorium Optyki*

WYKAZ LITERATURY

1. Frisz S., Timoriewa A.: Kurs fizyki. PWN, Warszawa 1956.
2. King and Gates: Chem. and Ind., p. 190, London 1958.
3. Wenking Z.: Instrumentkunde, str. 1, 1958.
4. Kułakow M. W., Kazakow A. W., Szeljastik U. W.: Technologiczskie izmierienija i analiticeskije pribory. Maszynostrojenije, 1964.
5. Kudrjawcew W. J., Miediniec B. M., Zatwornickij A. L., Gnidko K. P.: Fotoelektriceskij refraktometr, patent ZSRR Nr 5319/575441.
6. Meltzer Robert J.: Magneto-Optic Positioning. — IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. IE-10, May 1963, Nr 1.
7. King R. I., Middleton S. P., Thompson I. M. G.: Sensitive Method for Measuring Small Rotations of a Distant Object. — ISI, Vol. 38, Nr 5.
8. Gołodolinskij G. W.: Primienienije effiekta Faradeja dla izmierienija tokow i napriazienij. — Elektricestwo, Nr 8, 1956.
9. Gołodolinskij G. W.: Elektroopticeskije mietody i aparatura dla izmierienija tokow i napriazienij. — Elektricestwo, Nr 4, 1963.
10. Allen P. I.: A Microwave Magnetometer. — Proceeding of the IRE, Nr 1, 1953.

M. NAŁĘCZ, J. SZUKALSKI

CERTAIN TECHNOLOGICAL APPLICATIONS OF MAGNETO-OPTIC FARADAY EFFECT

Summary

The present paper reviews certain applications of magneto-optic Faraday modulators in photoelectric saccharimetry and refractometry, in devices for locating lines in the process of diffraction grating generation and copying of scales, in the measurements of small displacements and torsions for long distances and in current measurements.

M. NAŁĘCZ, J. SZUKALSKI

CERTAINES APPLICATIONS TECHNIQUES DE PHÉNOMÈNE MAGNÉTOOPTIQUE
DE FARADAY

Résumé

L'article présent donne la revue de certaines applications des magnétooptiques modulateurs de Faraday dans la saccharimétrie photoélectrique et dans la refractométrie, dans des appareils servant à l'emplacement des lignes dans le procédé d'effectuer des grilles de diffraction et de copier des échelles, dans les mesures de petits déplacements et torsions ainsi qu'à mesurer des courants.

M. НАЛЭНЧ, Я. ШУКАЛЬСКИ

НЕКОТОРЫЕ ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРИМЕНЕНИЯ МАГНИТООПТИЧЕСКОГО ЯВЛЕНИЯ
ФАРАДЕЯ

Резюме

Настоящая статья приводит обзор некоторых применений магнитооптических модуляторов Фарадея в фотоэлектрической сахариметрии и рефрактометрии, в устройствах для расположения линий в процессе производства дифракционных сеток и копирования шкал, в измерениях малых сдвигов и скруток при больших расстояниях, а также в применении к измерению токов.

ADAM SMOLIŃSKI

Impulsowy wzmacniacz o jednym obwodzie rezonansowym małej dobroci

Rękopis dostarczono 31.1.1967

Praca niniejsza zawiera obliczenia przebiegów impulsowych wielkiej częstotliwości wzmacnianych w jednoobwodowych wzmacniaczach rezonansowych o małej dobroci.

Jako sygnał standardowy przyjęto impuls wielkiej częstotliwości z prostokątną obwiednią (1) w ogólnym przypadku, gdy częstotliwość sygnału jest różna od częstotliwości rezonansowej obwodów, a jego faza może przybierać dowolne wartości w przedziale $(0, 2\pi)$. Ponieważ w tym przypadku nie można stosować metody transformacji częstotliwości i przeniesienia wyników z dobrze znanych układów dolnoprzepustowych, więc konieczne było zastosowanie ogólnych metod rachunku operatorowego. Transformata sygnału podana jest równaniami (5) do (7).

Badany układ rezonansowy zawiera straty w gałęziach indukcyjnej i pojemnościowej (rys. 2). Jego wzmocnienie podane wzorem (8) jest zależne od współczynnika η asymetrii krzywej rezonansu. Przy skoncentrowaniu strat tylko w gałęzi pojemnościowej $\eta = 0$ i krzywa rezonansu wykazuje symetrię geometryczną (rys. 3). Wzmocnienie układu w postaci operatorowej podane jest wzorem (17).

Odpowiedź wzmacniacza w postaci operatorowej podają zależności (19)÷(21). Odwrotna transformata odpowiedzi przedstawiona jest wzorami (22)÷(24) opisującymi zjawisko narastania i zanikania sygnału na wyjściu wzmacniacza. Odpowiedź ta jest sumą funkcji sinusoidalnych nietłumionych o częstotliwości sygnału oraz tłumionych o częstotliwości biegunów funkcji wzmocnieniowej układu. Typowe ich postacie dla średnich wartości dobroci podają oscylogramy z rys. 4.

W dalszej części pracy podana jest analiza narastania sygnału we wzmacniaczu dostrójonym do częstotliwości sygnału zarówno dla symetrycznej ($\eta = 0$), jak niesymetrycznej ($\eta = 1$) krzywej rezonansu. Odpowiednie wartości współczynników i kątów w równaniu (23) podane są w Tablicach 1 do 4 i na rys. 7, 8 oraz 13 i 14. Pozwalają one na obliczenie (na maszynie cyfrowej Urat 2 COPAN) ekstremów badanych funkcji (tablice 5÷8), tworzących w zależności od kąta fazowego sygnału obwiednie parametryczne (rys. 10 i 15). W wyniku tych rozważań stwierdzono, że w tych przypadkach napięcie wyjściowe ustala się bez przepięć oraz że pierwsze ekstremum nie leży na krzywej wykładniczej nawet przy bardzo dużych wartościach dobroci. Przy bardzo małych wartościach dobroci występuje niewielka liczba ekstremów w czasie ustalania się napięcia wyjściowego (rys. 9).

Podobne rozważania przeprowadzono dla odstrojenia wzmacniacza do punktów połowy mocy. Odpowiednie wartości współczynników i kątów podane są w tablicach 1 do 3 i na rys. 17÷21; natomiast wartości ekstremów badanych funkcji w tablicach 9 do 12. Obwiednie parametryczne tych przebiegów (rys. 22) wykazują przepięcia w pewnym zakresie kątów fazowych sygnału przekraczające wartości przepięć dla bardzo dużych dobroci (rys. 25). Stąd wynika nowe pojęcie prawdopodobieństwa występowania przepięć większych od normalnych.

W końcowej części pracy przeprowadzono analizę zanikania sygnału (52) i stwierdzono, że ta część obwiedni wzmacniacza jest postacią tłumionej sinusoidy o częstotliwości biegunów

funkcji wzmocnieniowej układu. Ekstrema tej zależności tworzą również obwiednię parametryczną (54) (rys. 28 i 29), która w pewnych przypadkach (np. dla odstrojenia do punktu połowy mocy o mniejszej częstotliwości) może wykazywać przebiegi w pewnym przedziale kątów fazowych sygnału. Tutaj więc występuje również pojęcie prawdopodobieństwa zjawiania się przepięć.

Na zakończenie pracy zestawiono wyniki analizy wzmacniania impulsów wielkiej częstotliwości modulowanych prostokątnym przebiegiem podając obwiednie parametryczne ich odpowiedzi (rys. 33).

1. WSTĘP

Impulsowe wzmacniacze przebiegów wielkiej częstotliwości charakteryzują się szerokim pasmem częstotliwości i związaną z tym małą dobrocią obwodów rezonansowych, spadającą w niektórych przypadkach do $1 \div 2$. W tych przypadkach naturalnie nie można stosować teorii układów, zakładających występowanie dużych wartości dobroci obwodów [1], lecz trzeba zagadnienie to rozpatrzyć od podstaw. Zagadnienie to było wprawdzie przedmiotem rozważań w kilku książkach i artykułach ([2] ÷ [8]), lecz nie podano tam ogólnego rozwiązania tego problemu prawdopodobnie ze względu na trudności wynikające ze stosunkowo wielkiej liczby występujących tu parametrów.

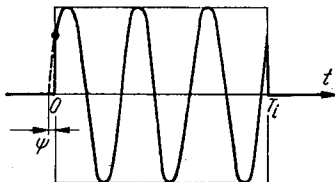
Na tym miejscu przedstawia się ogólną teorię impulsowego wzmacniacza o jednym obwodzie rezonansowym małej dobroci wraz z wynikami przeliczeń cyfrowych prowadzących do opisu własności takiego układu za pomocą tablic i wykresów ([9] ÷ [12]).

2. SYGNAŁ

Dla zbadania właściwości impulsowych wzmacniacza rezonansowego możemy zastosować sygnał wielkiej częstotliwości modulowanej impulsem prostokątnym (rys. 1) opisany równaniem:

$$u_1(t) = \bar{U}_1[1(t) - 1(t - T_i)]\sin(\omega_1 t + \psi), \quad (1)$$

gdzie $\bar{U}_1$ jest amplitudą, ω_1 częstotliwością, ψ kątem fazowym sygnału, a T_i czasem jego trwania.



Rys. 1. Sygnał wielkiej częstotliwości

Występujący tutaj kąt fazowy sygnału ψ może przybierać dowolne wartości w przedziale $(0, 2\pi)$; gęstość prawdopodobieństwa jego występowania w tym przedziale może być uważana jako stała.

Sygnał $u_1(t)$ składa się z dwóch części, więc może być zapisany jako

$$u_1(t) = u_{11}(t) - u_{12}(t), \quad (2)$$

gdzie:

$$u_{11}(t) = \bar{U}_1 \mathbf{1}(t) \sin(\omega_1 t + \psi), \quad (3)$$

$$u_{12}(t) = \bar{U}_1 \mathbf{1}(t - T_i) \sin(\omega_1 t + \psi). \quad (4)$$

Transformata takiego sygnału ma więc postać

$$U_1(s) = U_{11}(s) - U_{12}(s) = \mathcal{L}u_1(t), \quad (5)$$

gdzie — zgodnie z regułami rachunku operatorowego [13]

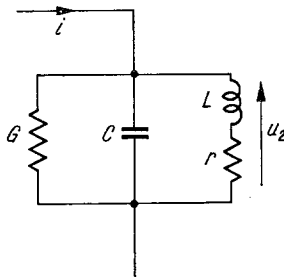
$$U_{11}(s) = \bar{U}_1 \frac{s \sin \psi + \omega_1 \cos \psi}{s^2 + \omega_1^2}, \quad (6)$$

$$U_{12}(s) = \bar{U}_1 e^{-sT_i} \frac{s \sin(\omega_1 T_i + \psi) + \omega_1 \cos(\omega_1 T_i + \psi)}{s^2 + \omega_1^2} \quad (7)$$

dla $s = j\omega$.

3. UKŁAD BADANY

Do rozważań naszych przyjmiemy układ wzmacniacza lampowego z obwodem rezonansowym według rys. 2. Ten typ obwodu rezonansowego odzwierciedla w lepszy sposób jego fizyczne właściwości i pozwala na uzyskanie dokładniejszych wyników niż normalnie stosowany układ o stratach ześrodkowanych tylko w postaci przewodności G [14].



Rys. 2. Obwód rezonansowy wzmacniacza

Wzmocnienie napięciowe oblicza się ze schematu zastępczego (rys. 2) jako

$$\frac{k_u(\omega)}{k_k(\omega_0)} = \sqrt{\frac{\eta^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 Q_o^2}{\left[Q_o^2 + \eta - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 Q_o^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 Q_o^2}}, \quad (8)$$

gdzie

$$k_u(\omega_0) = -\frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{S_a}{C} \quad (9)$$

jest wzmocnieniem dla częstotliwości ω_0 rezonansu prądowego układu.

Przesunięcie fazowe wzmacnienia wynosi

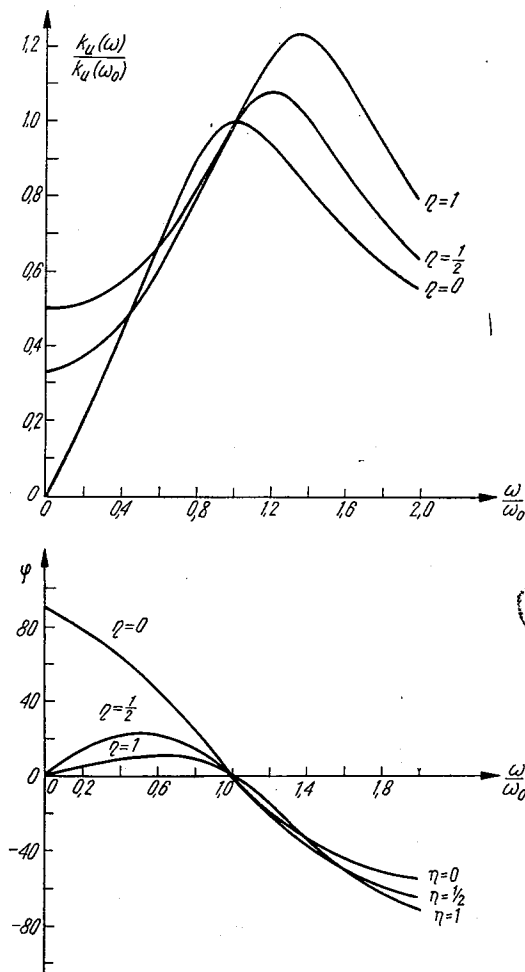
$$\zeta = \operatorname{arctg} \frac{Q_o}{\eta} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) - \operatorname{arctg} \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) Q_o}{1 + \eta - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 Q_o^2}. \quad (10)$$

W równaniach tych, zilustrowanych krzywymi na rys. 3, oznaczają kolejno: S_a nachylenie charakterystyki pentody, L , C , r , G elementy obwodu rezonansowego (rys. 2). Ponadto

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{G}{C} + \frac{r}{L} \right) \quad (11)$$

jest współczynnikiem tłumienia obwodu,

$$Q_o = \frac{\omega_0}{2\alpha} \quad (12)$$



Rys. 3. Krzywe rezonansu wzmacniacza ($Q_o = 1$)

współczynnikiem dobroci przy niższej zdefiniowanej częstotliwości rezonansowej. Na koniec

$$\eta = \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{r}{L} \quad (13)$$

jest współczynnikiem asymetrii krzywej rezonansu (rys. 3). Ten ostatni współczynnik równa się zeru w przypadku geometrycznej symetrii krzywej rezonansu, która wykazuje maksimum dla

$$\frac{\omega_m}{\omega_0} = \frac{1}{Q_o} \sqrt{\sqrt{\eta^4 + 2\eta^3 + Q_o^2(Q_o^2 + 2\eta^2 + 2\eta)} - \eta^2}. \quad (14)$$

Naturalna częstotliwość rezonansu równa się

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1+rG}{LC}}, \quad (15)$$

natomiast jako częstotliwość rezonansu (prądowego) będziemy uważać

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_r^2 - 4\alpha^2\eta}. \quad (16)$$

Wzmocnienie napięciowe można również przedstawić w postaci operatorowej jako

$$k_u(s) = -\frac{S_a}{C} \cdot \frac{s+2\alpha\eta}{(s+\alpha)^2 + \omega_r'^2}, \quad (17)$$

gdzie

$$\omega_r' = \sqrt{\omega_r^2 - \alpha^2} \quad (18)$$

oznacza częstotliwość biegunową funkcji wzmocnieniowej.

Współczynnik asymetrii krzywej rezonansu η równa się zeru przy całkowitym obciążeniu stratami gałęzi pojemnościowej ($r = 0$); natomiast przy całkowitym obciążeniu gałęzi indukcyjnej ($G = 0$) równa się jedności. W praktyce współczynnik ten może się wahać w granicach $0,02 \div 0,998$ przy całkowitej dobroci obwodu $Q_o = 1$ i dobrociach cewki $Q_L = 50$ i kondensatora $Q_C = 50$. Granice te zawężają się w miarę wzrostu dobroci obwodu Q_o . W praktyce uzyskuje się żadaną wartość dobroci obwodu przez obciążanie obwodu odpowiednią przewodnością G . Ponieważ np. przy częstotliwości rezonansowej $f_0 = 150$ MHz i szerokości pasma symetrycznej krzywej rezonansowej ($\eta = 0$) $B = 100$ MHz, dobroć rezonansu obwodu $Q_o = 1,5$ [14], skąd wynika, że obwód musi być silnie tłumiony. Jeśli założymy, że dysponujemy elementami obwodu o dobrociach $Q_L = 50$ i $Q_C = 500$, to po stłumieniu go odpowiednią przewodnością G współczynnik asymetrii $\eta = 0,03$, co rzeczywiście pozwala na założenie symetrii krzywej rezonansu.

4. ODPOWIEDŹ WZMACNIACZA

Odpowiedź wzmacniacza na sygnał zdefiniowany uprzednio równa się naturalnie

$$U_2(s) = U_1(s) \cdot k_u(s) = U_{21}(s) - U_{22}(s), \quad (19)$$

gdzie zgodnie z równaniami (5)÷(7) i (16):

$$U_{21}(s) = -\bar{U}_1 \frac{S_a}{C} \sin \psi \frac{s + \omega_1 \cot \psi}{s^2 + \omega_1^2} \cdot \frac{s + 2\alpha\eta}{(s + \alpha)^2 + \omega_r'^2}, \quad (20)$$

$$U_{22}(s) = -\bar{U}_1 \frac{S_a}{C} e^{-sT_i} \sin(\omega_1 T_i + \psi) \frac{s + \omega_1 \cotg(\omega_1 T_i + \psi)}{s^2 + \omega_1^2} \cdot \frac{s + 2\alpha\eta}{(s + \alpha)^2 + \omega_r'^2}. \quad (21)$$

Transformatę odwrotną wyrażenia (20) oblicza się według numeru 1363 zbioru transformat w dodatku C książki M. F. Gardnera i J. L. Barnes'a [15]. Odwrotna transformata wyrażenia (21) jest podobna, lecz przesunięta o długość trwania impulsu T_i . Całkowita odpowiedź równa się

$$u_2(t) = u_{21}(t) - u_{22}(t), \quad (22)$$

gdzie:

$$u_{21}(t) = -\bar{U}_1 \frac{S_a}{2\alpha C} [A_1 \sin(\omega_1 t + \psi_1) - B e^{-\alpha t} \sin(\omega_r' t + \psi_2)], \quad (23)$$

$$u_{22}(t) = -\bar{U}_1 \frac{S_a}{2\alpha C} \{A_2 \sin[\omega_1(t - T_i) + \psi_3] - B_2 e^{-\alpha(t - T_i)} \sin[\omega_r'(t - T_i) + \psi_4]\}. \quad (24)$$

Współczynniki i kąty występujące w równaniu (23) wyznaczamy w postaci

$$A_1^2 = \frac{1 + \left(\frac{2\eta}{\Omega_2}\right)^2}{1 + \left(\frac{4\eta - \Omega_1}{2\Omega_2}\right)^2}, \quad (25)$$

$$\psi_1 = \arctg \frac{2\eta + \Omega_2 \cotg \psi}{2\eta \cotg \psi - \Omega_2} - \arctg \frac{2\Omega_2}{4\eta - \Omega_1}, \quad (26)$$

$$B_1^2 = \frac{4}{4Q_o^2 + 4\eta - 1} \times \frac{4[Q_o^4 + Q_o^2(\eta^2 + \eta) + \eta^3] \sin^2 \psi + \Omega_2^2(Q_o^2 + \eta^2) \cos^2 \psi - 2\Omega_2(Q_o^2 + \eta^2) \sin \psi \cos \psi}{\Omega_2^2 \left[1 + \left(\frac{4\eta - \Omega_1}{2\Omega_1}\right)^2\right]}, \quad (27)$$

$$\psi_2 = \arctg \frac{\sqrt{4Q_o^2 + 4\eta - 1} [\Omega_2 \cotg \psi - 2(1 - \eta)]}{2(1 - 3\eta) - 4Q_o^2 - \Omega_2(1 - \eta) \cotg \psi} - \arctg \frac{\sqrt{4Q_o^2 + 4\eta - 1}}{2\eta - 1 - \frac{1}{2}\Omega_1}, \quad (28)$$

gdzie:

$$\Omega_1 = \frac{\beta_1}{\alpha} \left(\frac{\beta_1}{\alpha} + 4Q_o \right), \quad (29)$$

$$\Omega_2 = \frac{\beta_1}{\alpha} + 2Q_o. \quad (30)$$

Odstrojenie wzmacniacza od częstotliwości sygnału ω_1 oznaczamy jako

$$\beta_1 = \omega_1 - \omega_0. \quad (31)$$

Równanie (23) wraz z następującymi po nim wyrazami pozwala na obliczenie czoła odpowiedzi wzmacniacza ($t < T_i$). Natomiast zanik odpowiedzi ($t > T_i$) oblicza się z peł-

nego równania (22), do którego części wyrażonej wzorem (24) należy podstawić następujące współczynniki i kąty:

$$A_2 = A_1, \quad (32)$$

$$\psi_3(\psi) = \psi_1(\psi + \omega_1 T_i), \quad (33)$$

$$B_2(\psi) = B_1(\psi + \omega_1 T_i), \quad (34)$$

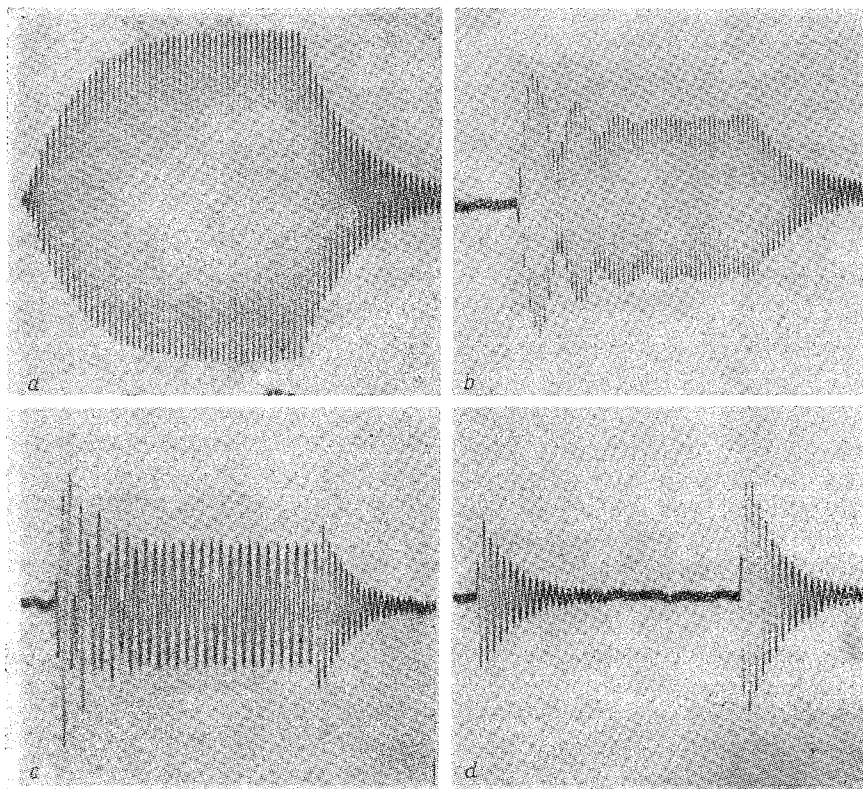
$$\psi_4(\psi) = \psi_2(\psi + \omega_1 T_i). \quad (35)$$

Symbole te oznaczają, że B_2 , ψ_3 i ψ_4 otrzymuje się z wyrażen na B_1 , ψ_1 i ψ_2 podstawiając zamiast ψ wyrażenie $\psi + \omega_1 T_i$. Poza tym można wykazać, że

$$\psi_3 = \psi_1 + \omega_1 T_i + n\pi, \quad (36)$$

gdzie n jest liczbą naturalną. To stwierdzenie upraszcza obliczenia i prowadzi do następującego rezultatu ważnego dla $t > T_i$:

$$u_2(t) = -\bar{U}_1 \frac{S_a}{2\alpha C} \{B_2 e^{-\alpha(t-T_i)} \sin[\omega_r'(t-T_i) + \psi_4] - B_1 e^{-\alpha t} \sin(\omega_r' t + \psi_2)\}. \quad (37)$$



Rys. 4. Oscylogramy odpowiedzi obwodu o symetrycznej krzywej rezonansu dostrojonego do częstotliwości

$f_0 = f_r = 800$ Hz. Czas trwania sygnału $T_i = 50$ msek

- a) częstotliwość sygnału $f_i = 800$ Hz, dobroć obwodu $Q_0 = Q_r = 40$;
- b) częstotliwość sygnału $f_i = 900$ Hz, dobroć obwodu $Q_0 = Q_r = 40$;
- c) częstotliwość sygnału $f_i = 500$ Hz, dobroć obwodu $Q_0 = Q_r = 15$;
- d) częstotliwość sygnału $f_i = 50$ Hz, dobroć obwodu $Q_0 = Q_r = 15$

Dla dłuższych impulsów $e^{-at} \approx 0$ i prawa część powyższego wyrażenia znika.

Dla dużych wartości dobroci otrzymujemy

$$A^2 = B^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\beta_1}{\alpha}\right)^2}, \quad (38)$$

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi - \arctg \frac{\beta_1}{\alpha}, \quad (39)$$

czyli znane już wyrażenia z pracy [16].

Z podanych powyżej rozważań wynika, że odpowiedź wzmacniacza rezonansowego na prostokątny impuls wielkiej częstotliwości wyrażona wzorami (22) do (24) składa się z sumy funkcji sinusoidalnych nietłumionych o częstotliwości sygnału ω_1 oraz tłumionych o częstotliwości biegunów ω_r funkcji wzmocnieniowej układu. Aktualny ich przebieg zależy od szeregu parametrów sygnału i obwodu. Typowe ich postacie podane są na rys. 4. Są to oscylogramy zdjęte dla różnych warunków pracy obwodu o symetrycznej krzywej rezonansu ($\eta = 0$) przy niekontrolowanej fazie sygnału [7].

Odpowiedni przykład przeliczający przypadek opisany rys. 4c jest podany w dalszej części pracy.

5. NARASTANIE SYGNAŁU WE WZMACNIACZU O SYMETRYCZNEJ KRZYWEJ REZONANSU, DOSTROJONYM DO CZĘSTOTLIWOŚCI SYGNAŁU

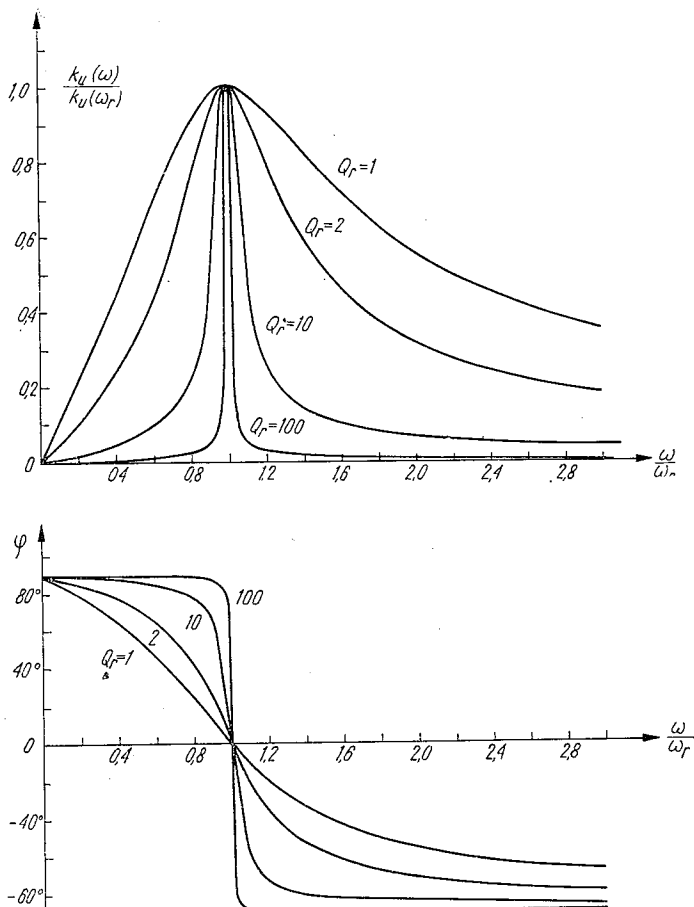
Szczegółową analizę pracy badanego wzmacniacza rozpoczniemy od przypadku dostrojenia obwodu o symetrycznej krzywej rezonansu ($\eta = 0$, rys. 5) do częstotliwości sygnału ($\omega_0 = \omega_r = \omega_1$). W rozważanym przypadku $\beta_1 = 0$ i współczynniki i kąty występujące w równaniu (23) przybierają postać $A_1 = 1$; $\psi_1 = \psi$ oraz

$$B_2 = \pm \sqrt{\frac{Q_r^2 - Q_r \sin \psi \cos \psi}{Q_r^2 - 0,25}}, \quad (40)$$

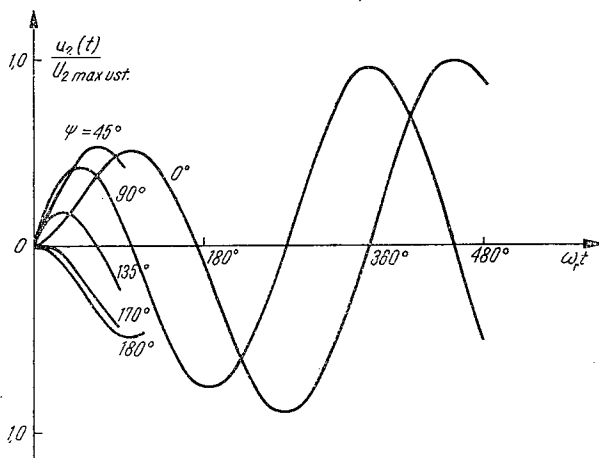
$$\psi_2 = \pm \arctg \frac{\sqrt{Q_r^2 - 0,25}}{Q_r \cotg \psi - 0,5}. \quad (41)$$

Znaki w tych wyrażeniach dobiera się w ten sposób, aby otrzymać rozwiązanie narastające w czasie i zgodnie w granicy z przebiegiem dla dużych wartości dobroci (rys. 6). Odpowiednie wartości B_1 i ψ_2 można odczytać z rubryki $\frac{\beta_1}{\alpha} = 0$ tablicy 1 dla $Q_r = 1$ i różnych wartości kąta fazowego sygnału ψ , a z tablic 2 i 3 dla różnych wartości dobroci Q_r przy $\psi = 0^\circ$ i 90° . Na rys. 7 i 8 podano te zależności graficznie. Z danych tych wynika, że wpływ dobroci obwodu Q_r i kąta fazowego sygnału ψ jest jeszcze widoczny przy dobrociach $Q_r \approx 10$.

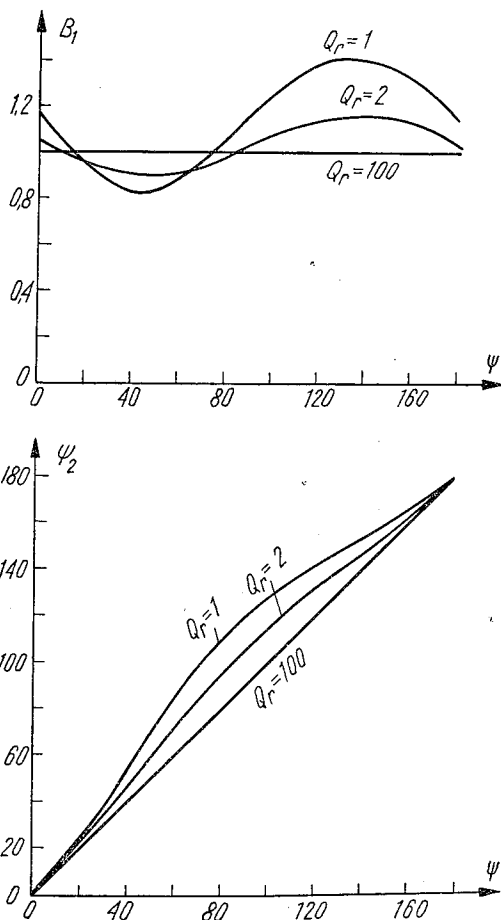
Celem dokładniejszego zbadania przebiegów narastania sygnałów obliczono (na maszynie cyfrowej Urał 2 COPAN) ekstrema napięcia wyjściowego wyrażonego równaniem (23). Wyniki tych obliczeń przedstawiono w tablicach 5 i 6 oraz na rys. 9 i 10. Pierwszy z nich (rys. 9) wykazuje wpływ dobroci obwodu Q_r przy stałym kącie fazowym sygnału $\psi = 0$, natomiast drugi (rys. 10) wpływ kąta fazowego sygnału ψ przy stałej dobroci



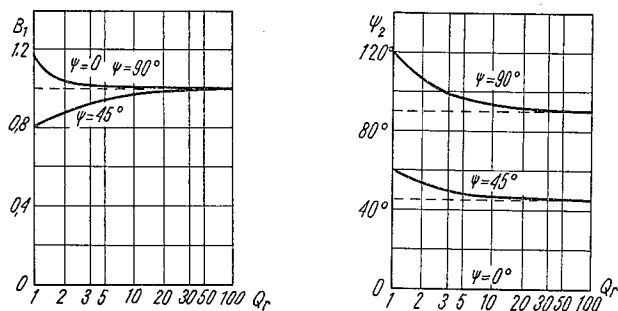
Rys. 5. Krzywe rezonansu wzmacniacza o różnych wartościach dobroci wykazujące symetrię geometryczną względem częstotliwości rezonansowej



Rys. 6. Narastanie odpowiedzi wzmacniacza o symetrycznej krzywej rezonansu ($\eta = 0$) dostrojonego do częstotliwości sygnału ($\omega_0 = \omega_r = \omega_1$) przy różnych wartościach kąta fazowego sygnału ψ ($Q_r = 1$)



Rys. 7. Zależność współczynnika B_1 i jego kąta fazowego ψ_2 od kąta fazowego sygnału ψ przy różnych wartościach dobroci Q_r obwodu symetrycznego ($\eta = 0$) dostrojonego do częstotliwości sygnału



Rys. 8. Zależność współczynnika B_1 i jego kąta fazowego ψ_2 od dobroci Q_r symetrycznego ($\eta = 0$) obwodu dostrojonego do częstotliwości sygnału przy różnych kątach fazowych sygnału ψ

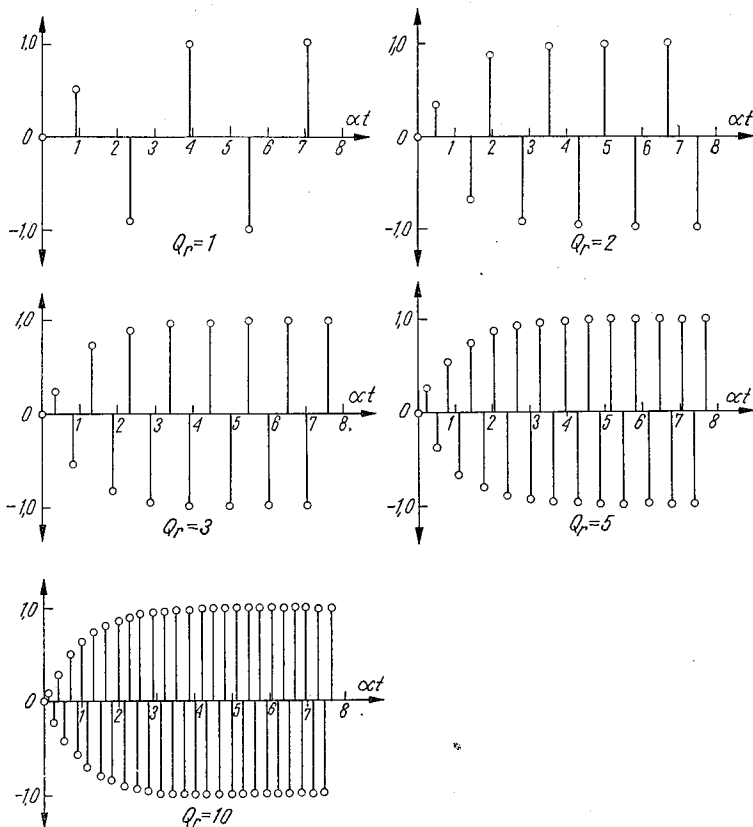
Współczynniki A_1 , B_1 , i kąty ψ_1 , ψ_2 równania odpowiedzi (23) dla $\eta = 0$ oraz $Q_0 = Q_r = 1$

ψ	0°			22,5°			45°			67,5°			90°			112,5°			135°			157,5°			180°		
	A_1	ψ_1°		A_1	ψ_1°		A_1	ψ_1°		A_1	ψ_1°		A_1	ψ_1°		A_1	ψ_1°		A_1	ψ_1°		A_1	ψ_1°		A_1	ψ_1°	
$\frac{\beta_1}{\alpha}$																											
-1,95	0,0250	88,57	0,0250	111,07	133,57	0,0250	156,07	0,0250	178,57	0,0250	201,07	0,0250	223,57	0,0250	246,07	0,0250	268,57		0,0250	246,07	0,0250	268,57		0,0250	246,07	0,0250	268,57
	0,0289	59,99	0,4293	176,88	178,71	0,8067	179,45	1,0617	179,97	1,1551	179,97	1,0727	181,19	0,8272	182,87	0,4559	239,97		0,4559	182,87	0,0289	239,97		0,4559	182,87	0,0289	239,97
-1,5	0,2577	75,07	0,2577	97,57	120,07	0,2577	142,57	0,2577	165,07	0,2577	187,57	0,2577	210,07	0,2577	232,57	0,2577	255,07		0,2577	232,57	0,2577	255,07		0,2577	232,57	0,2577	255,07
	0,2975	56,80	0,3972	139,98	162,88	0,7385	171,40	1,0472	176,80	1,1901	181,68	1,1606	187,70	0,9641	198,68	0,6389	236,80		0,6389	198,68	0,2975	236,80		0,6389	198,68	0,2975	236,80
-1,0	0,5547	56,31	0,5547	78,81	101,31	0,5547	123,81	0,5547	146,31	0,5547	168,81	0,5547	191,31	0,5547	213,81	0,5547	236,31		0,5547	213,81	0,5547	236,31		0,5547	213,81	0,5547	236,31
	0,6405	46,10	0,5481	96,87	136,10	0,7845	154,77	1,0820	166,10	1,2810	175,33	1,3232	185,21	1,1983	199,20	0,9384	226,10		0,9384	199,20	0,6405	226,10		0,9384	199,20	0,6405	226,10
-1,5	0,8638	30,26	0,8638	52,76	75,26	0,8638	97,76	0,8638	120,26	0,8638	142,76	0,8638	165,26	0,8638	187,76	0,8638	210,26		0,8638	187,76	0,8638	210,26		0,8638	187,76	0,8638	210,26
	0,9974	25,87	0,7995	59,33	99,77	0,8476	128,23	1,0892	145,87	1,3299	158,98	1,4575	171,16	1,4300	185,33	1,2558	205,87		1,2558	185,33	0,9974	205,87		1,2558	185,33	0,9974	205,87
0	1,0000	0,00	1,0000	22,50	45,00	1,0000	67,50	1,0000	90,00	1,0000	112,50	1,0000	135,00	1,0000	157,50	1,0000	180,00		1,0000	157,50	1,0000	180,00		1,0000	157,50	1,0000	180,00
	1,1547	0,00	0,9284	24,34	60,00	0,8165	95,66	0,9284	120,00	1,1547	136,55	1,3434	150,00	1,4142	163,45	1,3434	180,00		1,3434	163,45	1,1547	180,00		1,3434	163,45	1,1547	180,00
+0,5	0,9119	-24,23	0,9119	-1,73	20,77	0,9119	43,27	0,9119	65,77	0,9119	88,27	0,9119	110,77	0,9119	133,27	0,9119	155,77		0,9119	133,27	0,9119	155,77		0,9119	133,27	0,9119	155,77
	1,0530	-20,81	0,8583	-1,84	28,30	0,6824	68,02	0,6741	99,19	0,8424	118,80	1,0401	132,86	1,1631	145,36	1,1679	159,19		1,1679	145,36	1,0530	159,19		1,1679	145,36	1,0530	159,19
+1,0	0,7682	-39,82	0,7682	-17,32	7,682	0,7682	27,68	0,7682	50,18	0,7682	72,68	0,7682	95,18	0,7682	117,68	0,7682	140,18		0,7682	117,68	0,7682	140,18		0,7682	117,68	0,7682	140,18
	0,8871	-33,67	0,7331	-18,18	5,532	7,22	4,778	48,35	5,914	86,33	7,741	108,65	9,914	122,92	9,931	146,33		9,931	134,46	0,8871	146,33		9,931	134,46	0,8871	146,33	
+1,5	0,6470	-49,67	0,6470	-27,17	-4,67	0,6470	17,83	0,6470	40,33	0,6470	62,83	0,6470	85,33	0,6470	107,83	0,6470	130,33		0,6470	107,83	0,6470	130,33		0,6470	107,83	0,6470	130,33
	0,7471	-41,33	0,6247	-28,21	-6,61	0,4590	34,12	0,3529	78,67	0,4269	103,41	0,5916	117,62	0,7278	128,29	0,7471	138,67		0,7471	128,29	0,7471	138,67		0,7471	128,29	0,7471	138,67
+2,0	0,5547	-56,31	0,5547	-33,81	-11,31	0,5547	11,19	0,5547	33,69	0,5547	56,19	0,5547	78,69	0,5547	101,19	0,5547	123,69		0,5547	101,19	0,5547	123,69		0,5547	101,19	0,5547	123,69
	0,6405	-46,10	0,5410	-34,77	-16,10	0,3922	23,13	0,3740	73,90	0,3203	100,80	0,4692	114,79	0,5991	124,67	0,6616	133,90		0,6616	124,67	0,6405	133,90		0,6616	124,67	0,6405	133,90
	B_1	ψ_2°	B_1	ψ_2°	B_1	ψ_2°	B_1	ψ_2°	B_1	ψ_2°	B_1	ψ_2°	B_1	ψ_2°	B_1	ψ_2°	B_1		B_1	ψ_2°	B_1	ψ_2°		B_1	ψ_2°	B_1	ψ_2°

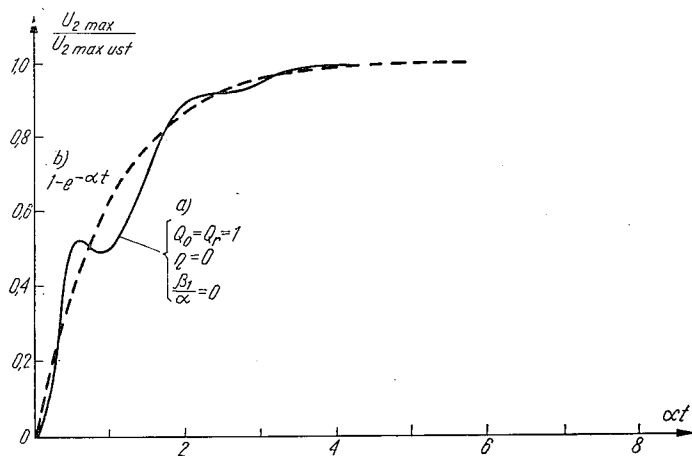
Tablica 2

Współczynniki A_1 , B_1 i kąty ψ_1 , ψ_2 równania odpowiedzi (23) dla $\eta = 0$ oraz $\psi = 0^\circ$

[illegible]



Rys. 9. Wpływ dobroci Q_r symetrycznego ($\eta = 0$) obwodu dostrojonego do częstotliwości sygnału na przebieg narastania napięcia wyjściowego przy stałym kącie fazowym sygnału $\psi = 0$. Na rysunku podano jedynie ekstrema napięcia



Rys. 10. Obwiednia parametryczna (a) narastania odpowiedzi obwodu symetrycznego ($\eta = 0$), dostrojonego do częstotliwości sygnału ($Q_r = 1$) oraz obwiednia (b) dla bardzo dużych wartości dobroci

Tablica 4

Współczynniki A_1 , B_1 i kąty ψ_1 , ψ_2 , równania odpowiedzi (23) dla $\eta = 1$ oraz $\omega_1 = \omega_m$.

ψ	1		2		3		5		10		30		100	
	A_1	ψ_1°	A_1	ψ_1°	A_1	ψ_1°	A_1	ψ_1°	A_1	ψ_1°	A_1	ψ_1°	A_1	ψ_1°
0°	1,2339 1,0605	-29,26 -34,65	1,0962 1,0252	-22,11 -23,73	1,0489 1,0126	-16,76 -17,38	1,0191 1,0048	-10,89 -11,05	1,0049 1,0012	-5,65 -5,68	1,0005 1,0001	-1,91 -1,91	1,0001 1,0000	-0,57 -0,57
22,5°	1,2339 0,9198	-6,75 -9,08	1,0962 0,9413	0,39 0,46	1,0489 0,9546	5,74 6,31	1,0191 0,9694	11,61 12,21	1,0049 0,9835	16,85 17,22	1,0005 0,9942	20,59 20,73	1,0001 0,9982	21,93 21,97
45°	1,2339 0,8727	15,75 22,57	1,0962 0,9072	22 28,04	1,0489 0,9302	28,24 32,26	1,0191 0,9548	34,11 36,80	1,0049 0,9760	39,34 40,78	1,0005 0,9918	43,12 43,58	1,0001 0,9975	44,44 44,58
67,5°	1,2339 0,9596	38,25 52,75	1,0962 0,9481	45,42 54,40	1,0489 0,9563	50,76 58,13	1,0191 0,9697	56,61 61,34	1,0049 0,9835	61,85 64,28	1,0005 0,9942	65,59 66,41	1,0001 0,9982	66,93 67,17
90°	1,2339 1,1092	60,74 76,06	1,0962 1,0340	67,89 79,19	1,0489 1,0149	73,24 81,72	1,0191 1,0052	79,11 84,58	1,0049 1,0013	84,35 87,18	1,0005 1,0001	88,09 89,05	1,0001 1,0000	89,43 89,71
112,5°	1,2339 1,2284	83,25 94,06	1,0962 1,1109	90,39 99,33	1,0489 1,0697	95,74 102,68	1,0191 1,0394	101,61 106,18	1,0049 1,0187	106,85 109,24	1,0005 1,0060	110,59 111,40	1,0001 1,0018	111,93 112,17
135°	1,2339 1,2623	105,75 109,82	1,0962 1,1389	112,89 117,55	1,0489 1,0910	118,24 122,13	1,0191 1,0531	124,11 126,78	1,0049 1,0259	129,36 130,77	1,0005 1,0084	133,12 133,58	1,0001 1,0025	134,44 134,58
157,5°	1,2339 1,1976	128,25 125,98	1,0962 1,1051	135,42 135,85	1,0489 1,0682	140,73 141,58	1,0191 1,0391	146,61 147,34	1,0049 1,0187	151,85 152,26	1,0005 1,0060	155,59 155,73	1,0001 1,0018	156,93 156,97
180°	1,2339 1,0605	150,74 145,35	1,0962 1,0252	157,87 156,27	1,0489 1,0126	163,24 162,62	1,0191 1,0048	169,11 168,95	1,0049 1,0012	174,35 174,32	1,0005 1,0001	178,09 178,09	1,0001 1,0000	179,43 179,43
ψ	B_1	ψ_2°	B_1	ψ_2°	B_1	ψ_2°	B_1	ψ_2°	B_1	ψ_2°	B_1	ψ_2°	B_1	ψ_2°
$\frac{\beta_1}{\alpha}$	0,7044		0,4344		0,3101		0,1944		0,0993		0,0333		0,0100	

Tablica 5

Wartości pierwszych maksimów wyrażenia (23) dla $\eta = 0$, $\beta_1 = 0$

$$\left(\alpha t_m = \frac{\omega_1 t_m}{2Q_r} \right)$$

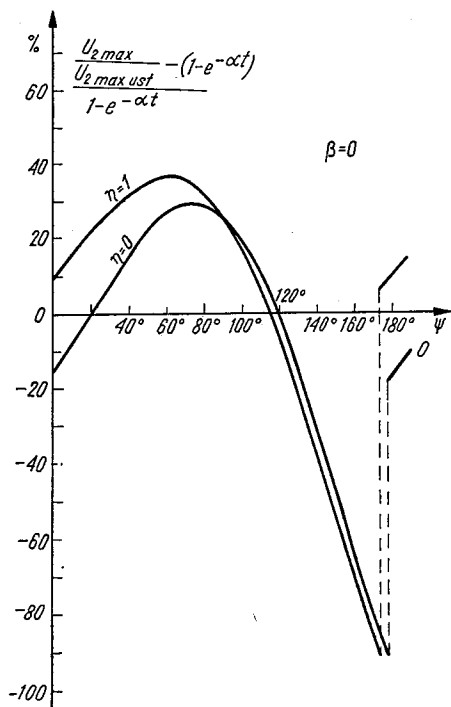
Q_r	$\psi = 0^\circ$			$\psi = 90^\circ$		
	$\omega_1 t_m$	αt_m	U_{max}	$\omega_1 t_m$	αt_m	U_{max}
1	1,804	0,902	0,504	0,839	0,420	0,429
2	1,893	0,473	0,327	0,939	0,235	0,266
3	1,932	0,322	0,241	0,979	0,163	0,192
5	1,968	0,197	0,158	1,016	0,102	0,124
10	1,996	0,100	0,085	1,044	0,052	0,066
30	2,017	0,034	0,030	1,066	0,018	0,023
100	2,025	0,010	0,010	1,073	0,005	0,007

Tablica 6

Wartości maksimów wyrażenia (23) dla $\eta = 0$, $\beta_1 = 0$, $Q_o = Q_r = 1$

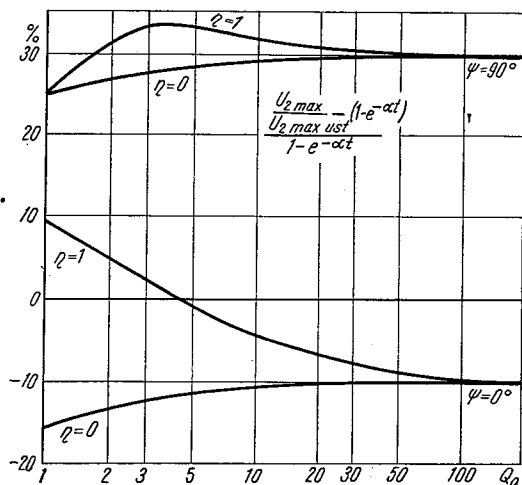
$$(\alpha t_m = 0,5\omega_1 t_m)$$

ψ°	$\omega_1 t_m$	αt_m	U_{max}	$\omega_1 t_m$	αt_m	U_{max}
176	0,067	0,034	0,002	4,769	2,385	0,912
175	0,083	0,042	0,004	4,787	2,394	0,912
170	0,159	0,080	0,014	4,875	2,438	0,912
165	0,229	0,115	0,029	4,965	2,483	0,912
160	0,292	0,146	0,048	5,054	2,527	0,912
157,5	0,321	0,161	0,059	5,099	2,550	0,913
135	0,534	0,267	0,183	5,503	2,752	0,915
112,5	0,695	0,348	0,317	5,902	2,951	0,934
90	0,839	0,420	0,429	6,293	3,147	0,953
67,5	0,991	0,496	0,501	6,679	3,340	0,970
45	1,182	0,591	0,526	7,065	3,533	0,982
22,5	1,447	0,724	0,516	7,451	3,726	0,987
0	1,804	0,902	0,504	7,843	3,922	0,989
355	1,893	0,947	0,505	7,930	3,965	0,989
350	1,983	0,992	0,508	8,018	4,009	0,989
345	2,073	1,037	0,517	8,105	4,053	0,989
340	2,163	1,082	0,521	8,193	4,097	0,988
337,5	2,208	1,104	0,525	8,236	4,118	0,988
315	2,602	1,301	0,590	8,633	4,317	0,988
292,5	2,961	1,481	0,680	9,028	4,514	0,990
270	3,295	1,648	0,772	9,423	4,712	0,992
247,5	3,623	1,812	0,845	9,815	4,908	0,995
225	3,958	1,979	0,890	10,208	5,104	0,998
202,5	4,317	2,159	0,909	10,600	5,300	0,999
180	4,700	2,350	0,912	10,991	5,496	1,000



Rys. 11. Względne odchylenie pierwszego maksimum narastania odpowiedzi od krzywej wykładniczej w zależności od kąta fazowego sygnału ψ :

- a) $\eta = 0, \beta_1 = 0, Q_0 = Q_r = 1$;
 b) $\eta = 1, \beta_1 = 0,7044 \alpha, Q_0 = 1$



Rys. 12. Względne odchylenie pierwszego maksimum narastania odpowiedzi od krzywej wykładniczej w zależności od dobroci Q_0 przy różnych wartościach kąta fazowego sygnału: $\psi = 0^\circ$ i 90° :

- a) $\eta = 0, \beta_1 = 0, Q_0 = Q_r = 1$;
 b) $\eta = 1, \beta_1 = 0,7044 \alpha, Q_0 = 1$

$Q_r = 1$. Falująca dokoła krzywej wykładniczej linia jest miejscem geometrycznym maksimum napięcia wyjściowego (23) przy kątach fazowych sygnału zawartych kolejno w przedziałach $(0, \pi)$ i $(\pi, 2\pi)$. Zatem linia ta może być uważana jako obwiednia parametryczna badanego przebiegu w odróżnieniu od linii wykładniczej, która jest obwiednią tych przebiegów dla bardzo dużych wartości dobroci obwodu [16].

Z danych tych wynikają następujące wnioski:

1. Napięcie wyjściowe ustala się bez przepięć.
2. Przy bardzo małych wartościach dobroci występuje niewielka liczba ekstremów w czasie ustalania się napięcia wyjściowego.

3. Względne odchylenia pierwszego ekstremum od przebiegu wykładniczego dochodzą do kilkudziesięciu procent zależnie od wartości kąta fazowego sygnału ψ (rys. 11) i przy dużych wartościach dobroci nie dążą do zera (rys. 12). Ponieważ przy małych dobrociach pierwsze ekstrema stanowią pokąźną część narastającego przebiegu, więc w tych warunkach rola ich jest istotna. Natomiast przy dużych wartościach dobroci zajmują one tylko niewielką część przebiegu narastania i ich rola jest tak niewielka, że można uznać w przybliżeniu, że obwiednia jest krzywą wykładniczą.

4. Względne odchylenia następnych ekstremów od przebiegu wykładniczego bardzo szybko maleją ze wzrostem kolejnego numeru ekstremum. (Np. dla $Q_r = 100$ pierwsze ekstremum przy $\psi = 90^\circ$ różni się od przebiegu wykładniczego o ok. 30%, natomiast drugie jest już mniejsze od 1%, a czwarte od 1₀₀).

6. NARASTANIE SYGNAŁU WE WZMACNIACZU O NIESYMETRYCZNEJ KRZYWEJ REZONANSU, DOSTROJONYM DO CZĘSTOTLIWOŚCI SYGNAŁU

Jako drugi skrajny przypadek omówimy układ o niesymetrycznej krzywej rezonansu ($\eta = 1$, rys. 3) w założeniu, że częstotliwość sygnału ω_1 równa się częstotliwości maksymalnej ω_m . Zatem równanie (14) przybiera uproszczoną postać

$$\frac{\omega_m}{\omega_0} = \frac{1}{Q_o} \sqrt{\sqrt{Q_o^4 + 4Q_o^2 + 3} - 1}, \quad (42)$$

a znormalizowany współczynnik odstrojenia (31)

$$\frac{\beta_1}{\alpha} = 2 \sqrt{\sqrt{Q_o^4 + 4Q_o^2 + 3} - 1} \quad (43)$$

jest tylko funkcją dobroci obwodu.

Współczynniki i kąty równania (23) przybierają postać

$$A_1^2 = \frac{1 + \left(\frac{2}{\Omega_2}\right)^2}{1 + \left(\frac{4 - \Omega_1}{2\Omega_2}\right)^2}, \quad (44)$$

$$\psi_1 = \arctg \frac{2 + \Omega_2 \cotg \psi}{2 \cotg \psi - \Omega_2} - \arctg \frac{2\Omega_2}{4 - \Omega_1} = \psi_1 - \arctg \frac{\Omega_1 \Omega_2}{8 - 2\Omega_1 + 2\Omega_2^2}, \quad (45)$$

$$B_1^2 = \frac{4}{4Q_o^2 + 3} \times \frac{4(Q_o^4 + 2Q_o^2 + 1)\sin^2\psi + \Omega_2^2(Q_o^2 + 1)\cos^2\psi + 2\Omega_2(Q_o^2 + 1)\sin\psi\cos\psi}{\Omega_2^2 \left[1 + \left(\frac{4 - \Omega_1}{2\Omega_2} \right)^2 \right]}, \quad (46)$$

$$\psi_2 = -\arctg \frac{\sqrt{4Q_o^2 + 3}\Omega_2 \cotg\psi}{\Omega_2 \cotg\psi - 4Q_o^2 - 4} - \arctg \frac{\sqrt{4Q_o^2 + 3}}{1 - \frac{1}{2}\Omega_1}. \quad (47)$$

Tablica 7

 Wartości pierwszych maksimów wyrażenia (23) dla $\eta = 1$, $\omega_1 = \omega_m$

$$\alpha t_m = \frac{\omega_1 t_m}{2 \sqrt{\sqrt{Q_o^4 4Q_o^2 + 3} - 1}}$$

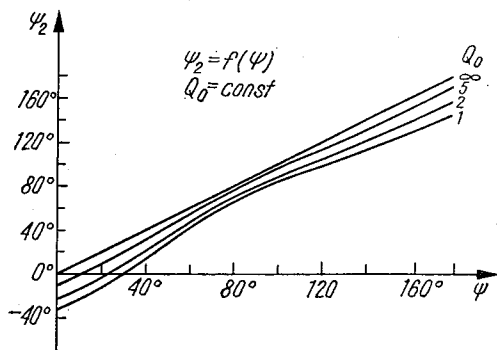
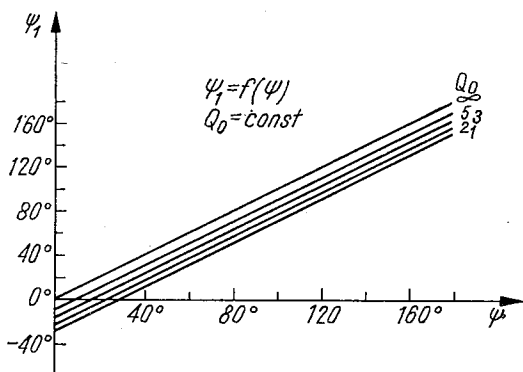
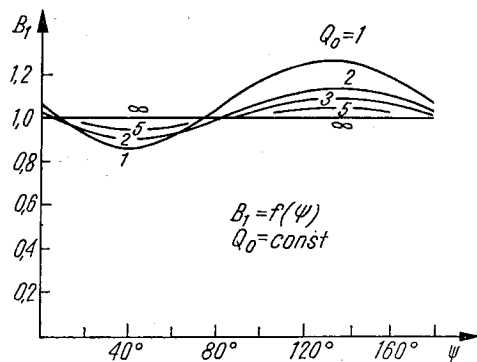
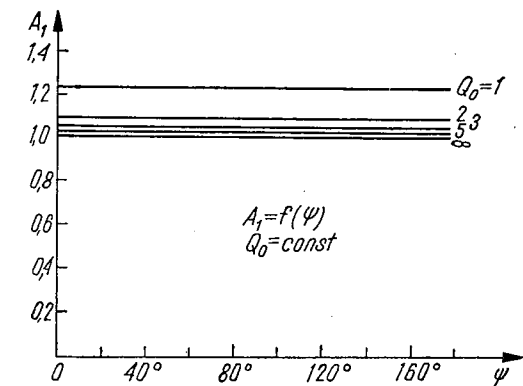
Q_o	$\psi = 0^\circ$			$\psi = 90^\circ$		
	$\omega_1 t_m$	αt_m	$\frac{U_{max}}{U_{max\ ust}}$	$\omega_1 t_m$	αt_m	$\frac{U_{max}}{U_{max\ ust}}$
1	2,220	0,820	0,612	1,132	0,418	0,429
2	2,168	0,489	0,411	1,121	0,253	0,294
3	2,131	0,338	0,295	1,110	0,176	0,214
5	2,094	0,205	0,184	1,099	0,108	0,135
10	2,062	0,103	0,093	1,087	0,054	0,070
30	2,039	0,034	0,031	1,080	0,018	0,023
100	2,031	0,010	0,009	1,078	0,005	0,007

Tablica 8

 Wartości maksimów wyrażenia (23) dla $\eta = 1$, $\frac{\beta_1}{\alpha} = 0,7044$, $Q_o = 1$

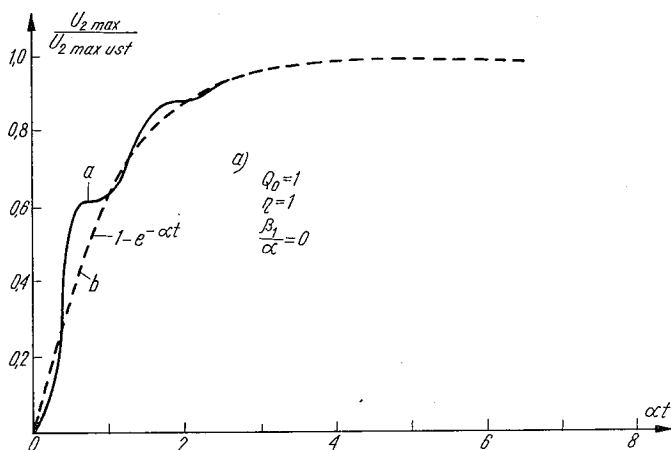
$$(\alpha t_m = 0,369\omega_1 t_m)$$

ψ°	$\omega_1 t_m$	αt_m	$\frac{U_{max}}{U_{max\ ust}}$	$\omega_1 t_m$	αt_m	$\frac{U_{max}}{U_{max\ ust}}$
157,5	0,375	0,138	0,044	5,644	2,083	0,880
135	0,679	0,251	0,156	6,047	2,231	0,890
112,5	0,922	0,340	0,295	6,443	2,377	0,908
90	1,132	0,418	0,429	6,831	2,521	0,928
67,5	1,340	0,494	0,532	7,213	2,662	0,946
45	1,573	0,580	0,592	7,594	2,802	0,957
22,5	1,861	0,687	0,612	7,978	2,944	0,962
0						
360	2,220	0,819	0,612	8,369	3,088	0,963
337,5	2,632	0,971	0,622	8,763	3,234	0,963
315	3,049	1,125	0,658	9,158	3,379	0,965
292,5	3,439	1,269	0,716	9,552	3,525	0,971
270	3,800	1,402	0,780	9,945	3,670	0,978
247,5	4,148	1,531	0,833	10,335	3,814	0,983
225	4,498	1,660	0,865	10,725	3,958	0,986
202,5	4,862	1,794	0,877	11,114	4,101	0,988
180	5,245	1,935	0,878	11,506	4,246	0,989



Rys. 13. Zależność współczynnika A_1 i jego kąta fazowego ψ_1 od kąta fazowego sygnału ψ przy różnych wartościach dobroci Q_0 obwodu niesymetrycznego ($\eta = 1$) dostrojonego do częstotliwości sygnału

Rys. 14. Zależność współczynnika B_1 i jego kąta fazowego ψ_2 od kąta fazowego sygnału ψ przy różnych wartościach dobroci Q_0 obwodu niesymetrycznego ($\eta = 1$) dostrojonego do częstotliwości sygnału



Rys. 15. Obwiednia parametryczna (a) narastania odpowiedzi obwodu niesymetrycznego ($\eta = 1$), dostrojonego do częstotliwości sygnału ($Q_0 = 1$) oraz obwiednia (b) dla bardzo dużych dobroci

W tablicy 4 oraz na rysunkach 13 i 14 podane są wyniki obliczeń tych współczynników i kątów w zależności od kąta fazowego sygnału i dobroci obwodu. Na podstawie tych danych obliczono ekstrema napięcia wyjściowego $u_2(t)$ w postaci danych tablicy 8. Na rys. 15 przedstawiono obwiednię parametryczną tych ekstremów na tle krzywej wykładniczej. Porównanie obwiedni parametrycznych dla wzmacniacza dostrojonego na maksimum krzywej rezonansu dla $\eta = 0$ (rys. 10) i $\eta = 1$ (rys. 15) wykazuje podobieństwo tych przebiegów. Dokładniejszej analizy można dokonać na podstawie porównania względnych odchyień pierwszego ekstremum od krzywej wykładniczej podanych dla obu rozpatrywanych przypadków na rys. 11 i 12. Ogólne wnioski z analizy przypadku symetrycznej krzywej rezonansu sformułowane w rozdz. 5 można rozciągnąć również na przypadek asymetrycznej krzywej rezonansu.

7. NARASTANIE SYGNAŁU WE WZMACNIACZU O SYMETRYCZNEJ KRZYWEJ REZONANSU, ODSTROJONYM OD CZĘSTOTLIWOŚCI SYGNAŁU

Po omówieniu przypadków dostrojenia wzmacniacza do częstotliwości rezonansowej w rozdz. 5, przejdziemy teraz do przypadku wzmacniacza odstrojonego od tej częstotliwości. Wówczas $\beta_1 \neq 0$, a współczynniki i kąty równania (23) przybierają postać następującą:

$$A_1^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_1}{2\Omega_2}\right)^2}, \quad (48)$$

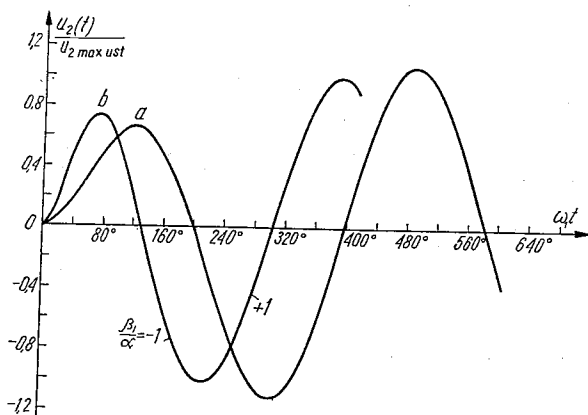
$$\psi_1 = \psi - \arctg \frac{\Omega_1}{2\Omega_2}, \quad (49)$$

$$\beta_1^2 = \frac{4Q_r^2}{4Q_r^2 - 1} \cdot \frac{4Q_r^2 \sin^2 \psi + \Omega_2^2 \cos^2 \psi - 2\Omega_2 \sin \psi \cos \psi}{\Omega_2^2 \left[1 + \left(\frac{\Omega_1}{2\Omega_2}\right)^2 \right]}, \quad (50)$$

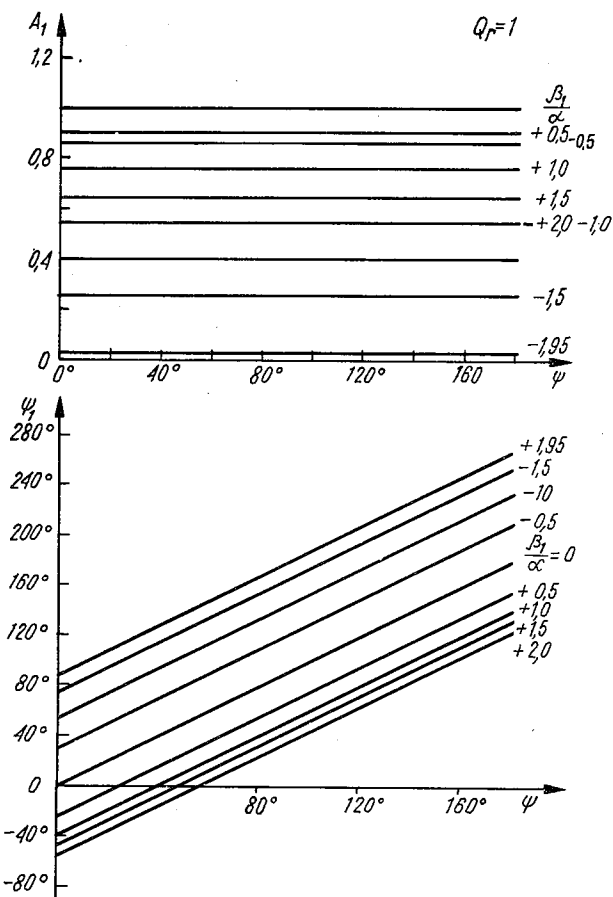
$$\psi_2 = \arctg \frac{\sqrt{4Q_r^2 - 1} [\Omega_2 \cotg \psi - 2]}{2 - 4Q_r^2 - \Omega_2 \cotg \psi} + \arctg \frac{\sqrt{4Q_r^2 - 1}}{1 + \frac{1}{2}\Omega_1}. \quad (51)$$

Tutaj również dobiera się znaki w tych wyrażeniach w ten sposób, aby otrzymać rozwiązanie narastające w czasie i zgodne w granicy z przebiegiem dla dużych wartości dobroci (rys. 16). Odpowiednie wartości $A_1 B_1 \psi_1 \psi_2$ można odczytać z tablicy 1 dla $Q_r = 1$ i różnych wartości kąta fazowego sygnału ψ , a z tablic 2 i 3 dla różnych wartości dobroci Q_r przy $\psi = 0^\circ$ i 90° . Na rys. 17÷21 podano te zależności graficznie. Dane te pozwalają na obliczenie ekstremów napięcia wyjściowego wyrażonego równaniem (23). Wyniki tych obliczeń dla punktów połowy mocy $\left(\frac{\beta_1}{\alpha} = \pm 1\right)$ zestawiono w tablicach 9 do 12 oraz na rys. 22 do 26.

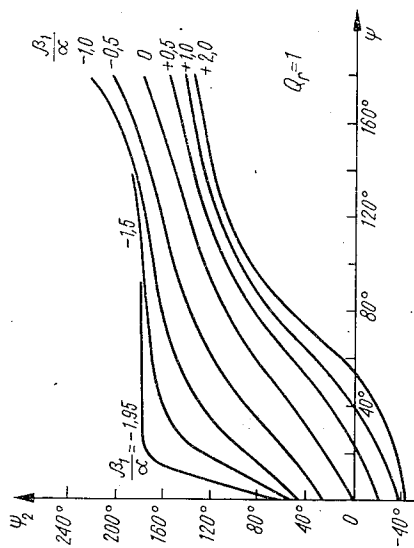
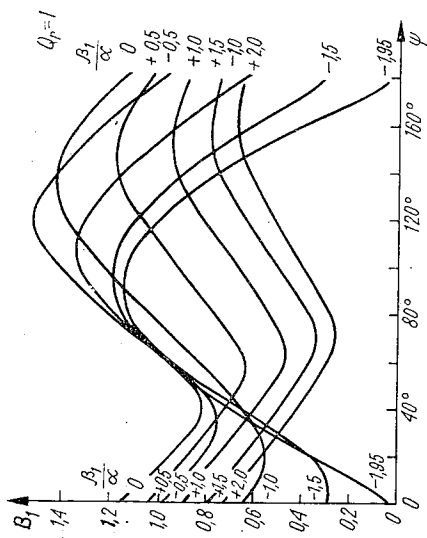
Pierwszy z nich (rys. 22) podaje obwiednię parametryczną dla $Q_r = 1$, a dwa następne (rys. 23 i 24) odchylenia ich pierwszego ekstremum od obwiedni dla bardzo dużych wartości dobroci [1]. Z rysunków tych widać, że obwiednie parametryczne układają się faliście dokoła obwiedni dla bardzo dużych wartości dobroci, oraz, że pierwsze ekstrema prze-



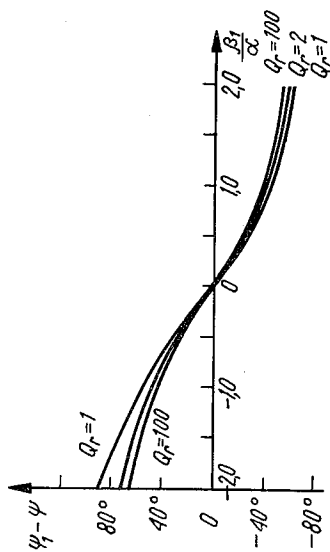
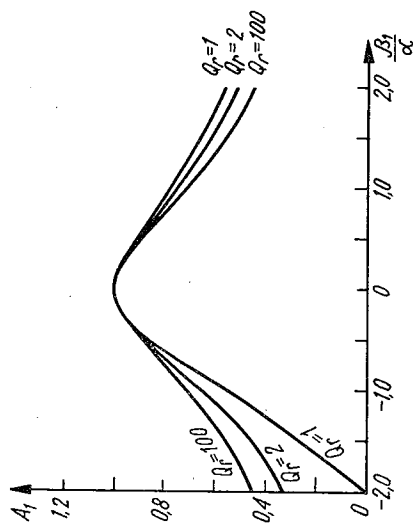
Rys. 16. Narastanie odpowiedzi wzmacniacza o symetrycznej krzywej rezonansu ($\eta = 0$) odstrojonego do punktów połowy mocy ($\frac{\beta_1}{\alpha} = \pm 1$) przy $\psi = 0^\circ$ i $Q_r = 1$



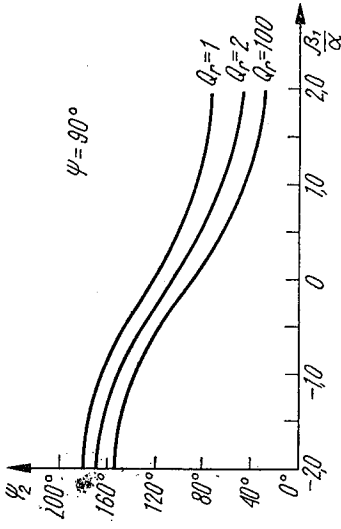
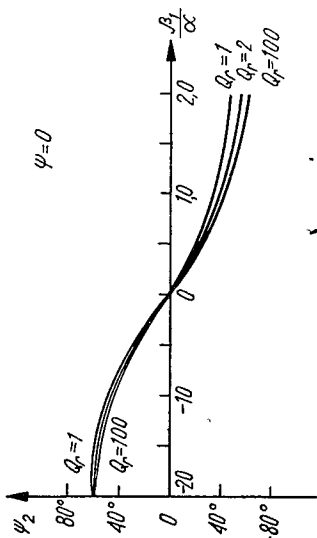
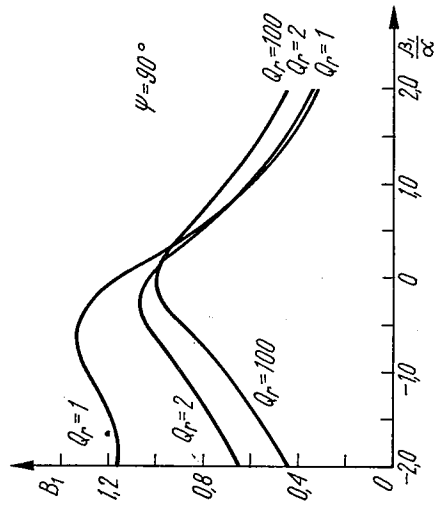
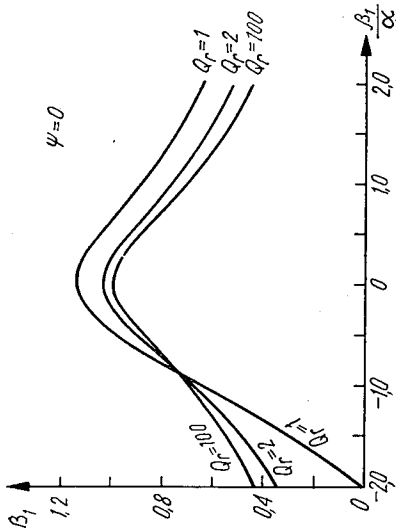
Rys. 17. Zależność współczynnika A_1 i jego kąta fazowego ψ_1 od kąta fazowego sygnału ψ przy różnych wartościach względnego rozstrojenia $\frac{\beta_1}{\alpha}$ dla obwodu o symetrycznej krzywej rezonansu ($\beta = 0$) i o bardzo małej dobroci ($Q_r = 1$)



Rys. 18. Zależność współczynnika B_1 i jego kąta fazowego ψ_2 od kąta fazowego sygnału ψ przy różnych wartościach względnego rozstrojenia $\frac{\beta_1}{\alpha}$ dla obwodu o symetrycznej krzywej rezonansu ($\eta = 0$) i o bardzo małej dobroci ($Q_r = 1$)

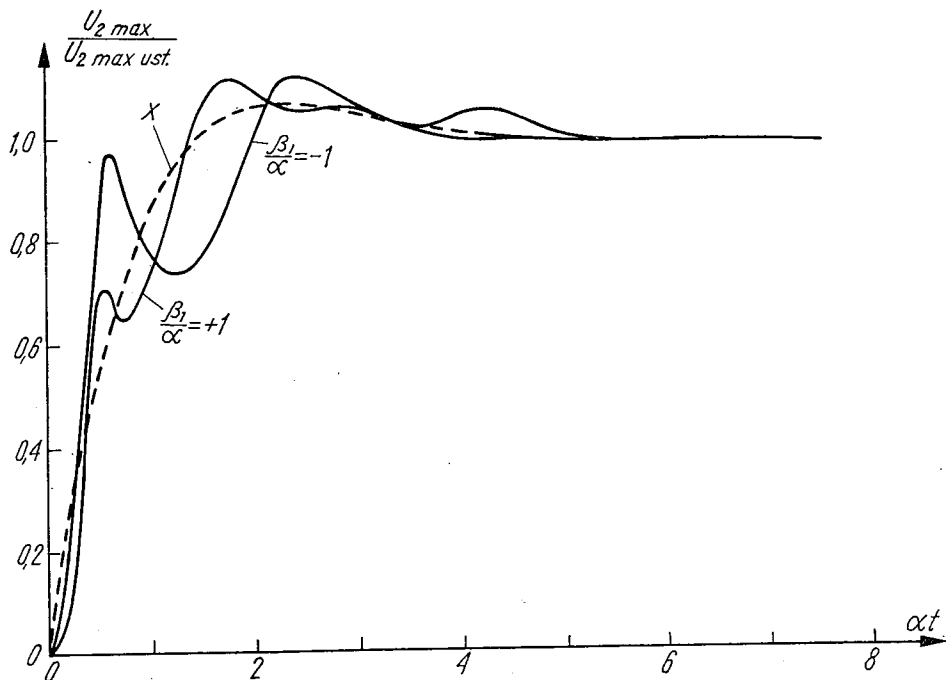


Rys. 19. Zależność współczynnika A_1 i kąta fazowego ψ_1 od względnego rozstrojenia $\frac{\beta_1}{\alpha}$ przy różnych wartościach dobroci Q_r obwodu o symetrycznej krzywej rezonansu ($\eta = 0$)

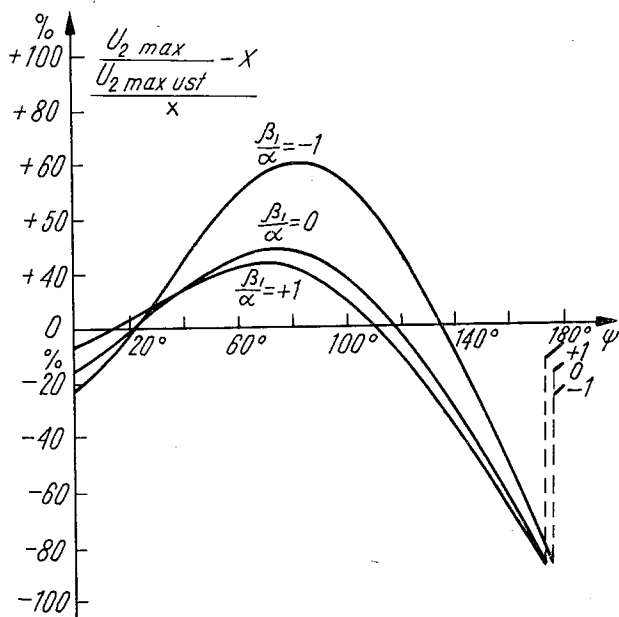


Rys. 20. Zależność współczynnika B_1 i jego kąta fazowego ψ_2 od względnego rozstrojenia $\frac{\beta_1}{\alpha}$ przy różnych wartościach dobroci Q_r obwodu o symetrycznej krzywej rezonansu dla $\psi = 0^\circ$

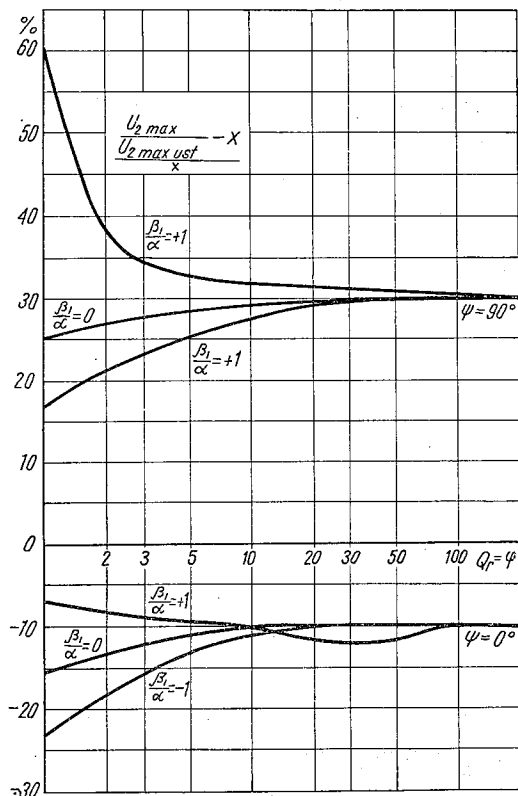
Rys. 21. Zależność współczynnika B_1 i jego kąta fazowego ψ_2 od względnego rozstrojenia $\frac{\beta_1}{\alpha}$ przy różnych wartościach dobroci Q_r obwodu o symetrycznej krzywej rezonansu dla $\psi = 90^\circ$



Rys. 22. Obwiednia parametryczna narastania odpowiedzi obwodu symetrycznego ($\eta = 0$) odstrojonego do punktów połowy mocy a) $\frac{\beta_1}{\alpha} = 1$, b) $\frac{\beta_1}{\alpha} = -1$ ($Q_r = 1$) na tle obwiedni dla bardzo dużych wartości dobroci

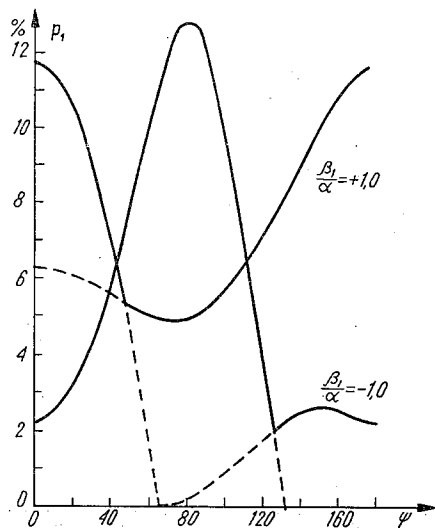


Rys. 23. Względne odchylenia pierwszego maksimum narastania odpowiedzi od obwiedni dla bardzo dużych dobroci w zależności od kąta fazowego sygnału ψ dla obwodu symetrycznego ($\eta = 0$) odstrojonego do punktów połowy mocy $\left(\frac{\beta_1}{\alpha} = \pm 1\right)$ przy $Q_r = 1$



Rys. 24. Względne odchylenia pierwszego maksimum narastania odpowiedzi od obwiedni dla bardzo dużych dobroci w zależności od dobroci symetrycznego ($\eta = 0$) obwodu odstrojonego do punktów połowy

$$\text{mocy } \left(\frac{\beta_1}{\alpha} = \pm 1 \right)$$



Rys. 25. Przepięcia obwiedni parametrycznej narastania odpowiedzi w symetrycznym ($\eta = 0$) obwodzie ($Q_r = 1$) w zależności od kąta fazowego sygnału ψ przy $\frac{\beta_1}{\alpha} = \pm 1$

Tablica 9

Wartości maksimów wyrażenia (23) dla $\eta = 0$; $\beta_1 = \alpha$; $Q_o = Q_r = 1$

$$\left(\alpha t_m = \frac{1}{3} \omega_1 t_m \right)$$

ψ°	$\omega_1 t_m$	αt_m	$\frac{U_{max}}{U_{max ust}}$	$\omega_1 t_m$	αt_m	$\frac{U_{max}}{U_{max ust}}$
170	0,165	0,055	0,013	5,453	1,818	1,115
165	0,241	0,080	0,026	5,540	1,847	1,112
160	0,311	0,104	0,046	5,632	1,877	1,109
157,5	0,344	0,115	0,056	5,675	1,892	1,107
135	0,606	0,202	0,184	6,089	2,030	1,086
112,5	0,820	0,273	0,335	6,509	2,170	1,065
90	1,018	0,339	0,474	6,928	2,309	1,052
67,5	1,221	0,407	0,579	7,342	2,447	1,049
45	1,456	0,485	0,635	7,748	2,583	1,055
22,5	1,748	0,583	0,652	8,149	2,716	1,060
0	2,111	0,704	0,651	8,541	2,847	1,063
360	2,200	0,733	0,651	8,630	2,877	1,063
355	2,290	0,763	0,652	8,717	2,906	1,063
350	2,384	0,795	0,655	8,804	2,935	1,061
345	2,476	0,825	0,660	8,890	2,963	1,060
340	2,525	0,842	0,662	8,934	2,978	1,060
337,5	2,593	0,851	0,707	9,326	3,109	1,051
315	3,369	1,123	0,786	9,721	3,240	1,038
292,5	3,765	1,255	0,885	10,119	3,373	1,023
270	4,143	1,381	0,982	10,517	3,506	1,012
247,5	4,517	1,506	1,059	10,915	3,638	1,003
225	4,890	1,630	1,104	11,310	3,770	0,999
205	5,277	1,759	1,117	11,705	3,902	0,997
180	5,364	1,788	1,117	11,791	3,930	0,997

Tablica 10

Wartości maksimów wyrażenia (23) dla $\eta = 0$, $\beta_1 = -\alpha$, $Q_o = Q_r = 1$
 $(\alpha t_m = \omega_1 t_m)$

ψ°	$\omega_1 t_m$	$\frac{U_{max}}{U_{max ust}}$	$\omega_1 t_m$	$\frac{U_{max}}{U_{max ust}}$	$\omega_1 t_m$	$\frac{U_{max}}{U_{max ust}}$
175	0,079	0,013	3,820	1,023	3,820	1,023
170	0,145	0,043	3,905	1,023	3,905	1,023
165	0,199	0,088	3,989	1,023	3,989	1,023
160	0,244	0,142	4,073	1,025	4,073	1,025
157,5	0,263	0,171	4,115	1,026	4,115	1,026
135	0,386	0,460	4,490	1,024	4,490	1,024
112,5	0,463	0,726	4,877	1,014	4,877	1,014
90	0,528	0,908	5,276	1,005	5,276	1,005
67,5	0,600	0,975	5,681	1,000	5,681	1,000
45	0,704	0,927	6,082	0,999	6,082	0,999
22,5	0,900	0,806	6,476	0,999	6,476	0,999
0	1,254	0,732	6,870	1,000	6,870	1,000
360	1,340	0,735	6,956	1,000	6,956	1,000
355	1,424	0,748	7,044	1,000	7,044	1,000
350	1,502	0,766	7,131	1,000	7,131	1,000
345	1,576	0,789	7,219	0,998	7,219	0,998
340	1,611	0,802	7,262	0,999	7,262	0,999
337,5	1,883	0,941	7,656	0,999	7,656	0,999
315	2,108	1,061	8,050	0,998	8,050	0,998
292,5	2,332	1,121	8,443	0,998	8,443	0,998
270	2,592	1,114	8,835	1,000	8,835	1,000
247,5	2,927	1,069				
225	3,328	1,033				
202,5	3,733	1,022				
180						

T a b l i c a 11

Wartości pierwszych maksimów wyrażenia (23) dla $\eta = 0, \beta = \alpha$

$$\left(\alpha t_m = \frac{\omega_1 t_m}{2Q_r + 1} \right)$$

Q_r	$\psi = 0^\circ$				$\psi = 90^\circ$			
	$\omega_1 t_m$	αt_m	$\frac{U_{max}}{U_{maxust}}$		$\omega_1 t_m$	αt_m	$\frac{U_{max}}{U_{maxust}}$	
1	2,111	0,703	0,651		1,018	0,339	0,474	
2	2,088	0,418	0,439		1,045	0,209	0,324	
3	2,074	0,296	0,329		1,057	0,151	0,244	
5	2,061	0,187	0,218		1,066	0,097	0,165	
10	2,048	0,097	0,117		1,074	0,051	0,089	
30	2,042	0,033	0,041		1,080	0,018	0,032	
100	2,038	0,010	0,013		1,084	0,005	0,010	

T a b l i c a 12

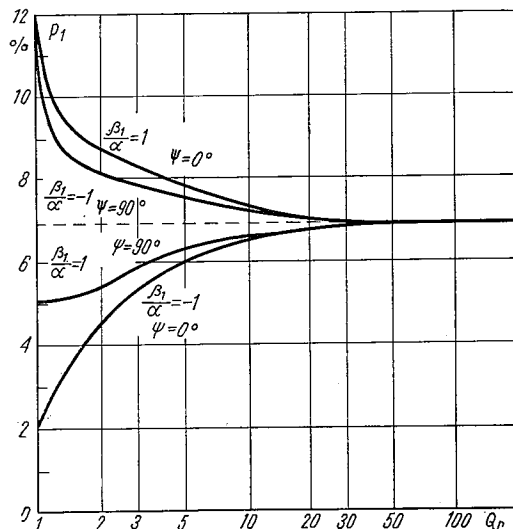
Wartości pierwszych maksimów wyrażenia (23) dla $\eta = 0, \beta = -\alpha$

$$\left(\alpha t_m = \frac{\omega_1 t_m}{2Q_r - 1} \right)$$

Q_r	$\psi = 0^\circ$				$\psi = 90^\circ$			
	$\omega_1 t_m$	αt_m	$\frac{U_{max}}{U_{maxust}}$		$\omega_1 t_m$	αt_m	$\frac{U_{max}}{U_{maxust}}$	
1	1,257	1,257	0,732		0,528	0,528	0,908	
2	1,633	0,544	0,479		0,794	0,265	0,452	
3	1,760	0,352	0,351		0,885	0,177	0,308	
5	1,866	0,207	0,228		0,960	0,107	0,189	
10	1,947	0,102	0,122		1,017	0,053	0,097	
30	2,004	0,034	0,043		1,056	0,018	0,033	
100	2,023	0,010	0,013		1,068	0,005	0,010	

biegów nawet dla dużych dobroci (rys. 24) poważnie odchylają się od obwiedni dla bardzo dużych dobroci.

Obwiednia dla bardzo dużych dobroci wykazuje przepięcie ok. 7% [1], natomiast przepięcie obwiedni parametrycznych zależy od kąta fazowego sygnału (rys. 25) oraz od



Rys. 26. Przepięcia obwiedni parametrycznej narastania odpowiedzi w symetrycznym ($\eta = 0$) obwodzie ($Q_r = 1$) w zależności od dobroci obwodu przy $\psi = 0^\circ$ i 90° oraz $\frac{\beta_1}{\alpha} = \pm 1$

dobroci (rys. 26). Z danych rys. 25 można określić prawdopodobieństwo występowania przepięć większych od 7% na 28% dla $\frac{\beta_1}{\alpha} = 1$ oraz 18% dla $\frac{\beta_2}{\alpha} = -1$. Maksymalne wartości przepięć obwiedni parametrycznych sięgają ok. 12% dla $\frac{\beta_1}{\alpha} = 1$ oraz ok. 13% dla $\frac{\beta_1}{\alpha} = -1$.

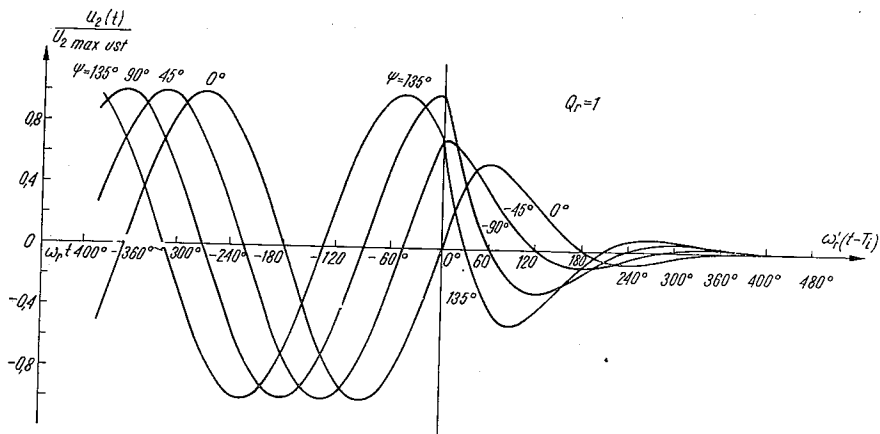
8. ZANIKANIE SYGNAŁU

Zanikanie odpowiedzi wzmacniacza na impuls wielkiej częstotliwości postaci prostokątnej opisane jest wzorem (37), który pozwala na wyznaczenie odpowiedzi dla dowolnej długości czasu trwania impulsu. W praktyce zazwyczaj interesują nas dłuższe impulsy, których zanikanie następuje po ustaleniu się czoła ($\alpha T_i \gg 1$). Wówczas

$$u_2(t) = -\bar{U}_1 \frac{S_a}{2\alpha C} B_2 e^{-\alpha(t-T_i)} \sin[\omega'_r(t-T_i) + \varphi_4]. \quad (52)$$

Zatem można stwierdzić, że odpowiedź wzmacniacza jest postaci tłumionej sinusoidy o częstotliwości ω'_r , biegunów funkcji wzmocnieniowej układu (rys. 27). Współczynnik B_2 wyznacza skalę przebiegu w stosunku do ustalonej części sygnału opisanej współczynnikiem A_1 .

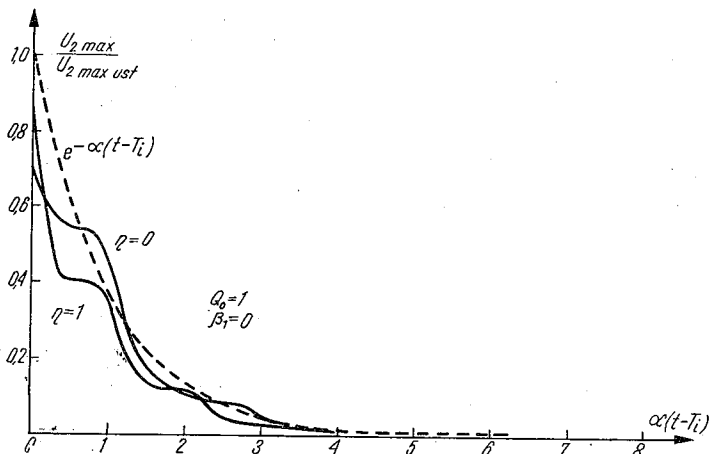
Przy bardzo dużych dobrociach układu ($Q_0 > 100$) ekstrema funkcji zanikania tworzą obwiednię w postaci krzywej wykładniczej [1]. W miarę malenia dobroci coraz mniej punktów wyznacza tę obwiednię (rys. 4), a przy małych i bardzo małych dobrociach



Rys. 27. Przebieg zanikania odpowiedzi w symetrycznym ($\eta = 0$) obwodzie ($Q_r = 1$) w zależności od znormalizowanego czasu dla różnych wartości kąta fazowego sygnału ψ

występuje wyraźny wpływ kąta fazowego sygnału poprzez współczynnik B_2 i kąt ψ_4 . Dla opisanego przebiegu w takich warunkach należy wyznaczyć obwiednię parametryczną wyrażającą zależność położenia maksimum wyrażenia (52) od

$$[\alpha(t-T_i)]_{\max} = \frac{\alpha}{\omega_r'} \left(\arctg \frac{\omega_r'}{\alpha} - \psi_4 + n\pi \right) \quad (53)$$



Rys. 28. Obwiednia parametryczna zanikania odpowiedzi w obwodzie o dobroci $Q_0 = 1$ dostrojonym na maksimum sygnału ($\beta_1 = 0$)

otrzymanego drogą różniczkowania wyrażenia (52). Zatem równanie obwiedni parametrycznej przybierze postać

$$U_{2\max} = u_2[\alpha(t-T_i)_{\max}] = B_2 \frac{\omega_r'}{\omega_r} e^{-[\alpha(t-T_i)_{\max}]}, \quad (54)$$

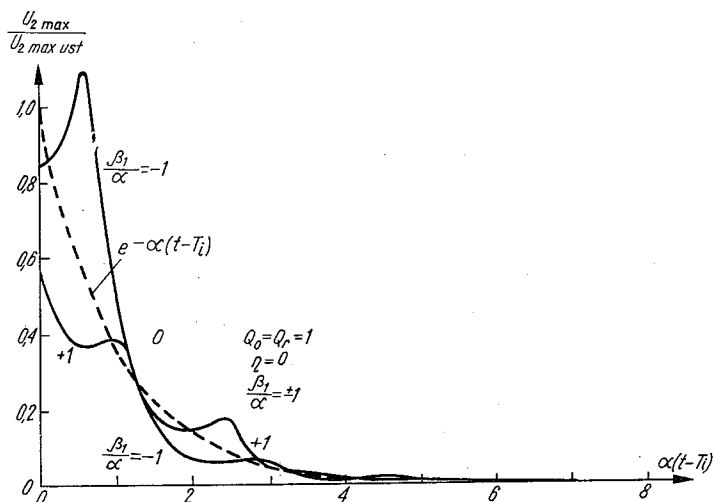
gdzie:

$$\frac{\omega_r'}{\alpha} = \sqrt{4Q_o^2 + 4\eta - 1}, \quad (55)$$

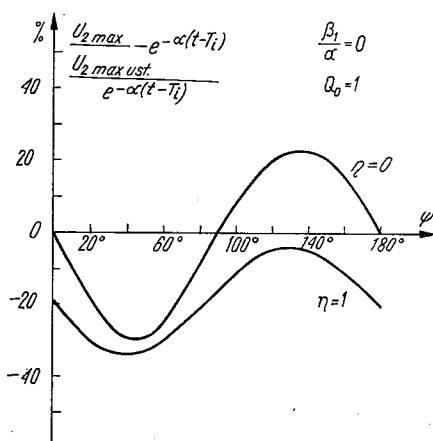
$$\frac{\omega_r}{\alpha} = 2\sqrt{Q_o^2 + \eta}. \quad (56)$$

Naturalnie B_2 i ψ_4 są funkcjami kąta fazowego sygnału ψ .

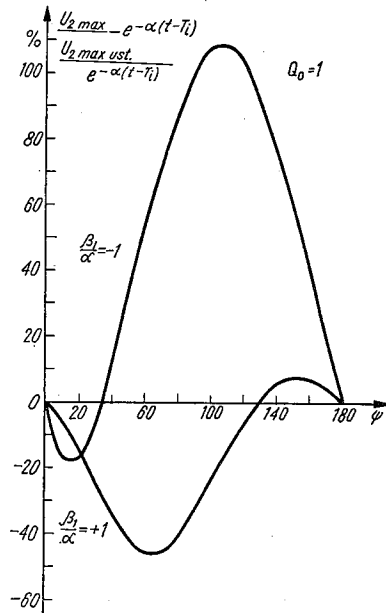
Obwiednie parametryczne zanikania odpowiedzi dla różnych warunków pracy podane są na rys. 28 i 29. Są to funkcje opadające wykładniczo w sposób falujący. W przypadku



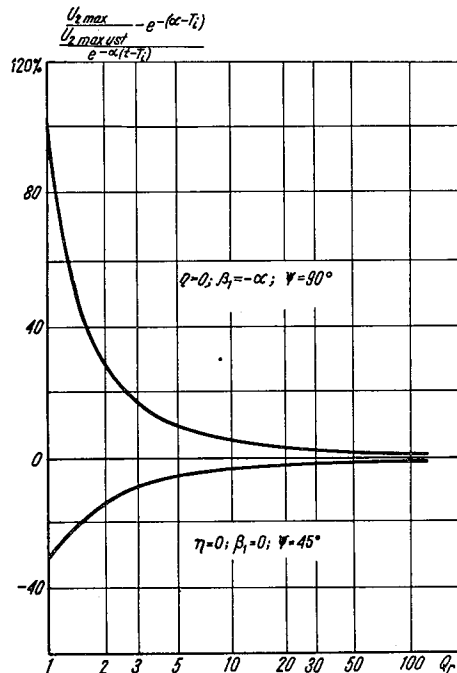
Rys. 29. Obwiednia parametryczna zanikania odpowiedzi w obwodzie symetrycznym ($\eta = 0$) o dobroci $Q_r = 1$ odstrojonym do punktów połowy mocy ($\frac{\beta_1}{\alpha} = \pm 1$)



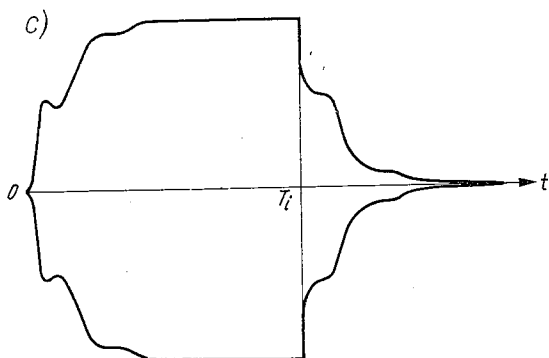
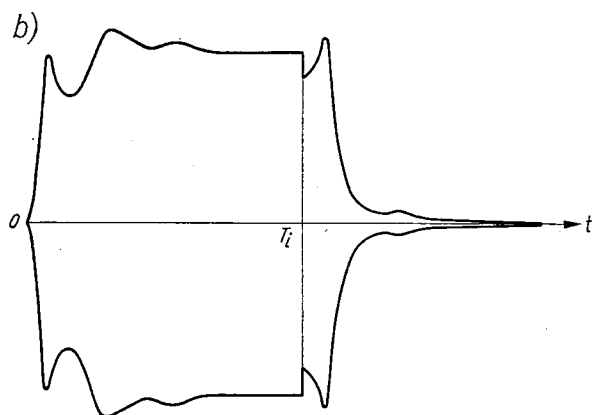
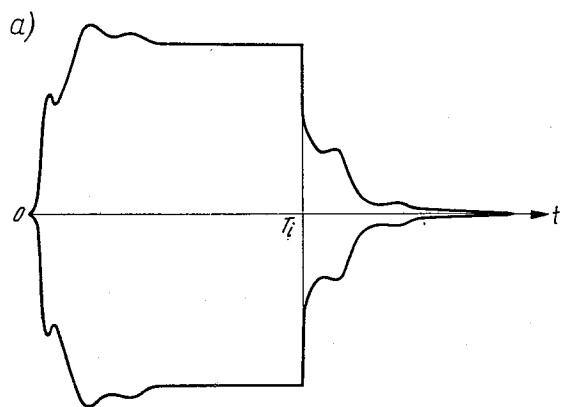
Rys. 30. Odchylenia pierwszego ekstremum zanikania odpowiedzi w obwodzie o dobroci $Q_o = 1$ dostrojonym na maksimum sygnału



Rys. 31. Odchylenia pierwszego ekstremum zanikania odpowiedzi w obwodzie symetrycznym ($\eta = 0$) o dobroci $Q_r = 1$ odstrojonym do punktów połowy mocy ($\frac{\beta_1}{\alpha} = \pm 1$)



Rys. 32. Odchylenia pierwszego ekstremum zanikania odpowiedzi w zależności od dobroci obwodu



Rys. 33. Obwiednie parametryczne całkowitej odpowiedzi wzmacniacza o małej dobroci ($Q_r = 1$) i o symetrycznej krzywej rezonansu ($\eta = 0$) na sygnał wielkiej częstotliwości modulowany impulsem prostokątnym
a) $\beta_1 = 0$, b) $\beta_1 = \alpha$, c) $\beta_1 = -\alpha$

odstrojenia układu poniżej rezonansu mogą powstawać przebiegi (rys. 4c i 4d). Np. dla $\frac{\beta_1}{\alpha} = -1$ otrzymujemy przebiegi ok. 8%. Prawdopodobieństwo powstawania przebiegów można ocenić na około 10% w tym przypadku.

Odchylenie pierwszego maksimum od krzywej wykładniczej

$$\frac{\frac{U_{2max}}{A_1} - e^{-\alpha(t-T_i)}}{e^{-\alpha(t-T_i)}} = \frac{B_2}{A_1} \frac{\omega'_r}{\omega_r} - 1 = f(\psi) \quad (57)$$

jest również funkcją kąta fazowego sygnału ψ (rys. 30 i 31). W miarę wzrostu dobroci odchylenia te zanikają do zera, gdyż $B_2 \rightarrow A_1$, a $\omega'_r \rightarrow \omega_r$ (rys. 32).

9. ZAKOŃCZENIE

Przeprowadzona powyżej dokładniejsza analiza pracy wzmacniacza impulsowego wielkiej częstotliwości wykazuje istnienie przy małych dobrociach układu silnej zależności odpowiedzi od kąta fazowego sygnału. Ekstrema odpowiedzi tworzą w sposób stochastyczny obwiednię parametryczną przebiegu wielkiej częstotliwości. Kształt tej obwiedni parametrycznej zależy w znacznej mierze od dobroci układu i jego odstrojenia od częstotliwości sygnału (rys. 33).

Obwiednia parametryczna wykazuje przebiegi, których prawdopodobieństwo występowania powyżej pewnej wartości jest interesującą cechą.

Ponadto należy zwrócić uwagę na to, że pierwsza ekstremum odpowiedzi nie leży na normalnie zdefiniowanej obwiedni (dla bardzo dużych dobroci) nawet przy bardzo dużych wartościach tych dobroci.

Autor poczuwa się do miłego obowiązku podziękowania mgrowi A. Sadowskiemu i mgrowi inż. M. Bukowskiemu za pomoc przy obliczeniach.

*Politechnika Warszawska
Katedra Układów Elektronicznych*

WYKAZ LITERATURY

1. Smoliński A.: Synchroniczne jednoobwodowe wzmacniacze rezonansowe impulsów wielkiej częstotliwości. — *Rozprawy Elektrotechn.*, t. XII, 1966, z. 3, str. 436.
2. Guillemin E. A.: *Communication Networks*, Vol. I, „Classical Theory of Lumped Constant Networks”, New York 1931/1952, str. 92.
3. Valley G. E., Wallman H.: *Vacuum Tube Amplifiers*. — MIT Radiation Laboratory Series, No 18, New York 1948, str. 166.
4. Jewtjanow S. I.: *Pieriechodnyje processy w prijomno-usilitielnych schiemach*. Moskwa 1948, str. 76.
5. Agiejew D. W., Kobzarew Ju. B.: *O pieriechodnych processach w rezonansnom usilitiele*. — *Żurnał Tiejniceskoj Fiziki*, 1935, nr 8, str. 1408.
6. Gensel J.: *Einschwingvorgänge an Rundfunk-Bandfiltern*. — T.F.T., 1940, nr 1, str. 17.
7. Tucker D. G.: *The Transient Response of a Tuned Circuit*. — *Electronic Engineering*, 1946, nr 12, str. 379.

8. Gent A. W.: The Transient Response of r.f. and i.f. Filters to a Wave Packet. — Proc. IEE, 1952 Part IV, str. 326.
9. Smoliński A.: High Frequency Pulse Response in a Low-Q Factor Resonant Amplifier. — Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 1966, nr 10, str. 163 — [1017].
10. Smoliński A.: Low-Q Factor Single Stage Amplifier Tuned to the Resonant Frequency. — Electronics Letters, 1966, nr 7, str. 234.
11. Smoliński A.: The High Frequency Rectangular Modulated Pulse Response of a Low-Q Factor Amplifier with the Asymmetrical Resonance Curve. — Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., nr 1, str. 1 — [89].
12. Smoliński A.: High Frequency Rectangular Modulated Pulse Response of a Low-Q Factor Amplifier with the Symmetrical Curve: I. "Coefficients and Angles of the Response Equations", Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 1967, nr 3, str. 21 — [243]; II. "Parametric Envelope and Overshoots Probability", Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 1967, nr 5, str. 55 — [443].
13. Osowski J.: Zarys rachunku operatorowego, Warszawa 1965, str. 83 i 134.
14. Smoliński A.: Zasady wzmacniania, tom II, Warszawa 1956, str. 37 i 254.
15. Gardner M.F., Barnes J.L.: Transients in Linear Systems, tom I, New York 1942/1945, str. 345.
16. Smoliński A.: High Frequency Pulse Rise in Synchronous Single-Circuit Amplifiers. — Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., nr 9, str. 141 — [833].

A. SMOLIŃSKI

PULSE AMPLIFIER WITH A SINGLE RESONANT LOW-Q FACTOR CIRCUIT

Summary

The present paper contains calculations of high frequency pulse transients amplified in single-circuit resonant low-Q factor amplifiers.

High frequency pulse with rectangular envelope (1) has been assumed as standard signal for the general case when the signal frequency is different from the resonant frequency of circuits and its phase may assume arbitrary values in the range $(0, 2\pi)$. Since it is impossible to apply in this case the method of frequency transformation and to transfer the results from the well-known low-pass systems, it has become necessary to apply the general methods of operational calculus. The signal transform is given in equations (5), (6) and (7).

The resonant system under investigation contains losses in its induction and capacitance branches (Fig. 2). Its amplification is given in formula (8) and is dependent on the coefficient η of the asymmetrical resonance curve. If the losses concentrate only in the capacitance branche, $\eta = 0$ and the resonance curve shows geometrical symmetry (Fig. 3). The amplification of the system in the operational form is given in formula (17).

The amplifier response in the operational form is given in formulas (19) ÷ (21). The inverse transform of the response is presented in formulas (22) ÷ (24) which describe the phenomenon of the signal rise and decay at the output of the amplifier. The response is a sum of undamped sinusoidal functions of signal frequency and of damped functions of frequency of the poles of the system's amplification function. Their typical forms for mean Q factor values are shown in oscillograms in Fig. 4.

Further the paper analyses the signal rise in an amplifier tuned to the signal frequency both for the symmetric ($\eta = 0$) and for the asymmetric ($\eta = 1$) resonance curve. The corresponding values of coefficients and angles in equation (23) are given in Tables 1 ÷ 4 and in Figs. 7, 8, 13 and 14. They make it possible to calculate (with the help of the Ural 2 computer, Calculation Centre of the Polish Academy of Sciences) the extremes of the functions under investigation (Tables 5 ÷ 8). Depending on the phase angle of the signal, the extremes form parametric envelopes (Figs. 10 and 15). As a result of these considerations it has been stated that in these cases output voltage is fixed without overshoots and that the first extreme does not lie on the exponential curve even when the Q factor is very high. When the Q factor is very low there appears a small number of extremes while the output voltage is being fixed (Fig. 9).

Similar considerations have been carried out for the detuning of the amplifier to the points of half the power. The corresponding values of coefficients and angles are given in Tables 1÷3 and Figs. 17÷21. The extreme values of the functions under investigation are given in Tables 9÷12. Parametric envelopes of these transients (Fig. 22) show overshoots in a certain range of phase angles of the signal which exceed overshoots values for very high Q factor values (Fig. 25). Hence ensues a new notion — that of the probability of occurrence of overshoots larger than normal.

The analysis of the signal decay (52) has been carried out in the final part of the paper. It has been found that the part of the amplifier envelope assumes the form of an undamped sinusoid of the frequency of the poles of the system's amplification function. The extremes of this formula also form a parametric envelope (54) shown in Figs. 28 and 29, which in certain cases (for example, for the decay to the point of half the power of lower frequency) can show overshoots in a certain range of the signal phase angles. Thus, the notion of the probability of overshoots occurrence appears also here.

At the end of the paper are listed the results of the analysis of high frequency pulse amplification modulated with rectangular transient, giving parametric envelopes of their responses (Fig. 33).

A. SMOLIŃSKI

AMPLIFICATEUR D'IMPULSIONS AVEC CIRCUIT RÉSONANT UNIQUE À Q PETIT

R é s u m é

L'oeuvre contient le calcul des tensions impulsionnelles haute fréquence amplifiées dans les amplificateurs avec le circuit résonnant unique à facteur de surtension petit.

On a accepté comme le signal standard l'impulsion haute fréquence avec une enveloppe rectangulaire dans le cas général (1), quand la fréquence du signal est différente de la fréquence résonnante des circuits et sa phase peut obtenir des valeurs quelconques dans l'intervalle $(0, 2\pi)$. Parce que dans ce cas on ne peut pas utiliser la méthode de la transformation de fréquence et de la transposition des résultats pris des schémas passe-bas bien connus, il était nécessaire d'employer les méthodes générales de calcul opératoire. La transformation du signal est donné par les équations (5) à (7).

Le circuit résonnant étudié contient des pertes dans les branches inductive et capacitive (fig. 2). Sa amplification donnée par la formule (8) dépend du coefficient η de l'asymétrie de la courbe de résonance. En concentrant des pertes seulement dans la branche capacitive $\eta = 0$ et la courbe de résonance présente la symétrie géométrique (fig. 3). L'amplification du schéma sous la forme opératoire est donné par (17).

La réponse de l'amplificateur sous la forme opératoire est donnée par les dépendances (19)÷(21). La transformation inverse de la réponse est présentée par les formules (22)÷(24), décrivant le phénomène d'accroissement et de diminution du signal à la sortie de l'amplificateur. Cette réponse est la somme des fonctions sinusoïdales non affaiblies à fréquence du signal et de celles affaiblies à fréquence des pôles de la fonction amplificatrice du schéma. Leurs formes typiques aux valeurs moyennes du facteur Q sont présentées par des oscillogrammes de fig. 4.

Dans la partie suivante de l'oeuvre on donne l'analyse d'accroissement du signal dans l'amplificateur accordé à la fréquence de signal en cas de la courbe de résonance symétrique $\eta = 0$, ainsi qu'en cas de la courbe non-symétrique $\eta = 1$. Les valeurs convenables des coefficients et des angles dans l'équation (23) sont données dans les tableaux 1 à 4 et sur fig. 7, 8 et 13, 14. Elles permettent de calculer (à l'aide de la calculatrice digitale Oural 2 COPAN) les extrêmes des fonctions étudiées (tableaux 5÷8), constituant en dépendance de l'angle de phase du signal les enveloppes paramétriques (fig. 10 et 15). En résultat de ces considérations on a obtenu, que dans ces cas la tension de sortie s'établit sans surtensions et que le premier extrême ne se trouve pas sur la courbe exponentielle même aux valeurs du facteur Q très élevées. Aux très petites valeurs du facteur Q on trouve un nombre pas grand des extrêmes dans le temps d'établissement de la tension de sortie (fig. 9).

On a effectué les considérations pareilles en cas du désaccord de l'amplificateur aux points de la moitié de la puissance. Les valeurs convenables des coefficients et des angles sont données dans les tableaux 1 à 3 et sur fig. 17÷21, les valeurs des extrêmes des fonctions étudiées dans les tableaux 9 à 12. Les enveloppes

paramétriques de ces tensions (fig. 22) présentent les surtensions dans une certaine étendue des angles de phase du signal surpassant des valeurs des surtensions en cas des facteurs Q très élevées (fig. 25). Il résulte d'ici la nouvelle notion de la probabilité de paraître des surtensions plus grandes que normales.

Dans la partie finale de l'oeuvre on a effectué l'analyse de l'affaiblissement du signal (52) et on a constaté, que cette partie de l'enveloppe de l'amplificateur présente la forme de la sinusoïde affaiblie à la fréquence des pôles de la fonction amplificatrice du schéma. Les extrêmes de cette dépendance constituent aussi une enveloppe paramétrique (54) (fig. 28 et 29), qui dans de certains cas (par ex. le désaccord au point de la moitié de la puissance à fréquence plus petite) peut présenter les surtensions dans un certain interval des angles de phase du signal. Ici donc se trouve aussi la notion de la probabilité de paraître des surtensions.

En terminant l'oeuvre on a mis ensemble les résultats de l'analyse de l'amplification des impulsions haute fréquence modulées par la tension rectangulaire, en donnant les enveloppes paramétriques de leurs réponses (fig. 33).

А. СМОЛИНСКИ

ИМПУЛЬСНЫЙ УСИЛИТЕЛЬ С ОДНИМ РЕЗОНАНСНЫМ КОНТУРОМ МАЛОЙ ДОБРОТНОСТИ

Резюме

Настоящая работа посвящена расчету импульсных процессов высокой частоты, усиливаемых в одноконтурных резонансных усилителях малой добротности.

В качестве стандартного сигнала принят импульс высокой частоты с прямоугольной огибающей (1) в общем случае, когда частота сигнала отличается от резонансной частоты контуров, а его фаза может получать произвольные значения в интервале $(0, 2\pi)$. Так как в этом случае нельзя применять метод преобразования частоты и переноса результатов из хорошо известных цепей нижних частот, возникла необходимость применить общие методы операторного исчисления. Преобразование сигнала приведено уравнениями (5) до (7).

Излучаемая резонансная схема содержит потери в индуктивной и емкостной цепях (рис. 2). Ее усиление, определенное формулой (8) зависит от коэффициента η асимметрии резонансной кривой. При сосредоточении потерь только в емкостной ветви получается $\eta = 0$ и резонансная кривая отличается геометрической симметрией (рис. 3). Усиление схемы в операторном виде приведено формулой (17).

Ответ усилителя в операторном виде приведен выражениями (19) ÷ (21). Обратное преобразование ответа представлено формулами (22) ÷ (24), описывающими явление нарастания и опадания сигнала на выходе усилителя. Этот ответ является суммой синусоидальных незатухающих функций с частотой сигнала, а также подавляемых с частотой полюсов усилительной функции схемы. Их типические формы при средних значениях добротности приведены на осциллограммах на рис. 4.

В следующей части работы приведен анализ нарастания сигнала в усилителе подстроенном к частоте сигнала так при симметричной ($\eta = 0$), как и несимметричной ($\eta = 1$) резонансной кривой. Соответственные значения коэффициентов и углов в уравнении (23) приведены в таблицах 1 до 4 и на рис. 7, 8, а также 13 и 14. Они позволяют рассчитать (на цифровой машине Урал 2 ЦОПАН) экстремумы изучаемых функций (таблицы 5 ÷ 8), создающих в зависимости от фазового угла сигнала параметрические огибающие (рис. 10 и 15). В итоге этих рассуждений получили, что в этих случаях выходное напряжение устанавливается без перенапряжений и что первый экстремум не находится на экспоненциальной кривой даже при очень больших значениях добротности. При очень малых значениях добротности выступает небольшое число экстремумов во время устанавливания выходного напряжения (рис. 9).

Похожие рассуждения проводились при отстройке усилителя к пунктам половины мощности. Соответственные значения коэффициентов и углов приведены в таблицах 1 до 3 и на рис. 17 ÷ 21

а значения экстремумов изучаемых функций в таблицах 9 до 12. Параметрические огибающие этих процессов (рис. 22) отличаются перенапряжениями в некотором интервале фазовых углов сигнала, превышающими значения перенапряжений при очень больших добротностях (рис. 25). Отсюда вытекает новое понятие вероятности выступления перенапряжений больше нормальных.

В окончательной части работы проведен анализ опадания сигнала (52) и было получено, что эта часть огибающей усилителя имеет вид подавляемой синусоиды частотного полюсов усилительной функции схемы. Экстремумы этой зависимости создают тоже параметрическую огибающую (54) (рис. 28 и 29), которая в отдельных случаях (например при отстройке к пункту половины мощности нижней частоты) может отличаться перенапряжениями в некотором интервале фазовых углов сигнала. Итак здесь тоже выступает понятие вероятности появления перенапряжений.

В заключении работы сделана сводка результатов анализа усиления импульсов высокой частоты, модулированных прямоугольным напряжением, приводя параметрические огибающие их ответов (рис. 33).

GRZEGORZ GULCZ

Transformacja impedancji wejściowej w półfalowych wielokrotnych dipolach pętlowych

Rękopis dostarczono 9.9.1966

Celem pracy jest analityczne rozpatrzenie zjawisk zachodzących w antenach pętlowych i ustalenie odpowiednich zależności w postaci wzorów oraz wykresów (nomogramów) służących do projektowania anten pętlowych.

Półfalowe wielokrotne dipole pętlowe znajdują obecnie częste i stosunkowo powszechne zastosowanie. Szczególnie często można spotkać się z dwuelementowym dipolem pętlowym, który jest współcześnie jednym z konwencjonalnych układów anteny odbiorczej, w której obydwa przewodniki są o tej samej średnicy. Taki układ anteny zwiększa czterokrotnie oporność wejściową, tzn. z ca 70 omów na 280 omów.

Każdy układ anteny w postaci wielokrotnego dipola pętlowego posiada na swych zaciskach wejściowych większą oporność wejściową niż zwykły prosty dipol półfalowy. Transformacja impedancji wejściowej jest określona tzw. współczynnikiem transformacji, który jest zdefiniowany jako stosunek oporności wejściowej danego dipola pętlowego do oporności wejściowej zwykłego dipola prostego. Współczynnik transformacji jest określony liczbą elementów dipola pętlowego, wzajemnym usytuowaniem tych elementów, stosunkiem średnic elementów i odległością między elementami. Współczynnik transformacji wzrasta, jeżeli wzrasta liczba przewodników anteny, jeżeli wzrasta stosunek średnic przewodników (odniesiony do średnicy przewodnika anteny, który jest załączony do linii zasilającej układ antenowy) oraz jeżeli maleje odległość pomiędzy przewodnikami.

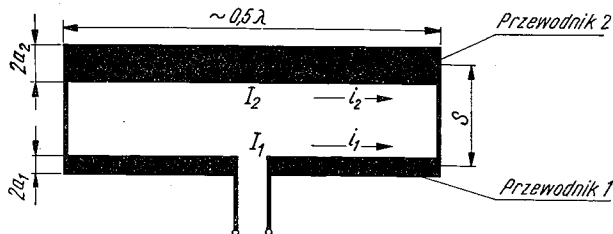
Szereg informacji dotyczących współczynnika transformacji w półfalowych antenach pętlowych można znaleźć w literaturze [7]. Autor niniejszego artykułu podał rozwiązanie dwóch nowych układów anten pętlowych, nie publikowanych w dotychczasowej literaturze, a mianowicie układu trójelementowego, tzw. „trójkąt równoboczny”, i układu pięcioelementowego.

W artykule omówiono fizyczne podstawy transformacji impedancji wejściowej. Następnie, korzystając z zależności połowych wielkości elektromagnetycznych, zostały wprowadzone wzory na współczynnik transformacji dipoli pętlowych dla układów: dwuelementowego, dwóch trójelementowych i pięcioelementowego. Na zakończenie sporządzono wykresy współczynnika transformacji impedancji wejściowej dla ww. układów antenowych. Dodatkowo omówiono wyniki pomiarów przeprowadzonych dla kilku układów wielokrotnych anten pętlowych.

1. WŁASNOŚCI TRANSFORMUJĄCE DIPOLA PĘTLOWEGO

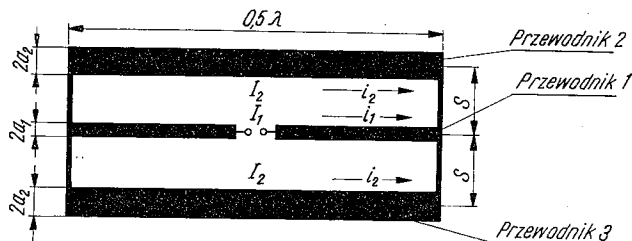
Jeden z prostszych dipoli pętlowych jest przedstawiony na rysunku 1.1. Z reguły stosuje się półfalowe dipole pętlowe połączone razem (zwarte) na obydwu końcach anteny. Anteny takie będziemy nazywać antenami pętlowymi. Układ takiej anteny będzie przedstawiał

sobą inną impedancję wejściową niż zwykły dipol półfalowy [1] i [2]. Przez dobranie odpowiedniego stosunku średnic przewodników i odległości między przewodnikami można otrzymać odpowiednie wartości impedancji wejściowej. Jeżeli chcemy uzyskać bardzo



Rys. 1.1. Dwuelementowy dipol pętlowy

dużą impedancję wejściową, wówczas należy zastosować odpowiednio większą liczbę dodatkowych przewodników (dipoli biernych). Istotnym warunkiem układu jest to, aby wszystkie dipole były równoległe względem siebie, aczkolwiek nie muszą znajdować się w jednej płaszczyźnie. Jeden z często stosowanych układów dipola trójelementowego pokazano na rys. 1.2.



Rys. 1.2. Trójelementowy dipol pętlowy

Jeżeli założymy, że charakterystyka promieniowania dipola pętlowego nie różni się od charakterystyki dipola zwykłego [3], wówczas możliwe jest obliczenie współczynnika transformacji impedancji, tzn. stosunku impedancji na zaciskach wejściowych dipola pętlowego do impedancji wejściowej dipola prostego. Wprowadzamy następujące oznaczenia:

R_o — oporność wejściowa dipola prostego,

R_{we} — oporność wejściowa układu dipola pętlowego,

I_i — strzałka prądu w „ i -tym” przewodniku anteny (przy czym I_1 oznacza zarazem prąd w punktach zasilania anteny),

$\epsilon = \frac{R_{we}}{R_o}$ — współczynnik transformacji impedancji,

k — liczba elementów dipola pętlowego.

Z przyjętego założenia, że promieniowanie dipola pętlowego nie różni się od promieniowania dipola zwykłego, wynika bilans mocy doprowadzonej do układu i mocy wypromieniowanej przez odpowiednie elementy anteny pętlowej. Z powyższego rozumowania

wynika, że zastępczy układ promieniowania jest dipolem prostym o oporności R_o , w którym płynie suma prądów $\sum_{i=1}^{i=k} I_i$. Stąd wspomniany bilans mocy możemy zapisać następująco:

$$I_1^2 \cdot R_{we} = \left(\sum_{i=1}^{i=k} I_i \right)^2 \cdot R_o. \quad (1.1)$$

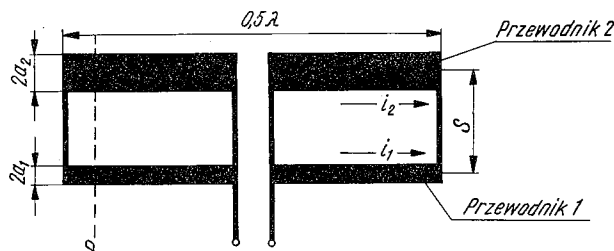
Z równania (1.1) możemy wyliczyć współczynnik transformacji impedancji (zwany dalej współczynnikiem transformacji):

$$u = \frac{R_{we}}{R_o} = \left(\frac{\sum_{i=1}^k I_i}{I_1} \right)^2. \quad (1.2)$$

W przypadku prostej anteny pętlowej, tzn. składającej się z dwu elementów, współczynnik transformacji określony równaniem (1.2) będzie wyrażał się następująco:

$$\left. \begin{aligned} u &= \left(\frac{I_1 + I_2}{I_1} \right)^2 = \left(1 + \frac{I_2}{I_1} \right)^2 = (1+n)^2 \\ n &= \frac{I_2}{I_1}. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Z równania (1.3) wynika, że w tym celu, aby wyliczyć współczynnik transformacji, wystarczy znać stosunek prądów w obu elementach anteny. Analogicznie, jeżeli określimy stosunek prądów w pozostałych przypadkach odpowiednich układów anten pętlowych, to wówczas współczynnik transformacji będzie określony w sposób jednoznaczny.



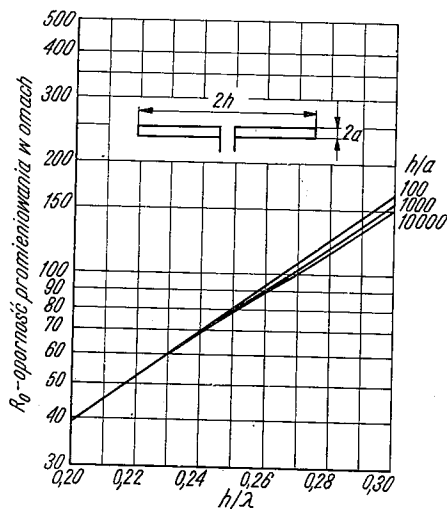
Rys. 1.3. Fizyczny równoważnik (układ zastępczy) dwuelementowego dipola pętlowego przedstawionego na rys. 1.1

Na rys. 1.3 przedstawiono fizyczny równoważnik dwuelementowej anteny pętlowej, której układ rzeczywisty podany jest na rys. 1.1.

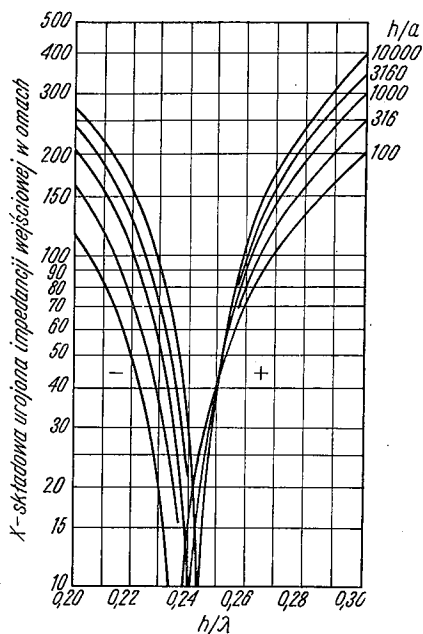
Dla uproszczenia całokształtu analizy zakłada się, że zaciski wejściowe anteny przedstawiają sobą oporność czysto rzeczywistą, co oznacza, iż antena posiada długość w przybliżeniu równą połowie długości fali. W rzeczywistości występuje tzw. „efekt skrócenia anteny”. Na rysunkach 1.4 i 1.5 przedstawiono odpowiednio przebieg składowej rzeczywistej i urojonej impedancji wejściowej dipola symetrycznego jako funkcję wielkości h/λ przy parametrze h/a . Na ww. rysunkach:

- 2h — długość cylindrycznego dipola symetrycznego,
- 2a — średnica cylindrycznego dipola symetrycznego.

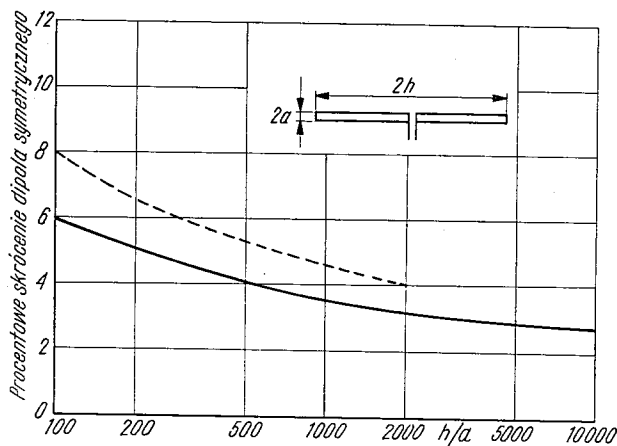
Wyżej wymienione przebiegi są wynikiem analizy podanej przez Schelkunoffa (H. P. Williams „Antenna Theory and Design”. Pitman Press, 1950, str. 91 do 93). Z wykresów tych widać, że dipol symetryczny przedstawia sobą na zaciskach wejściowych oporność



Rys. 1.4. Oporność promieniowania (składowa rzeczywista impedancji wejściowej) cylindrycznego dipola symetrycznego — wg Schelkunoffa



Rys. 1.5. Składowa urojona impedancji wejściowej cylindrycznego dipola symetrycznego — wg Schelkunoffa



Rys. 1.6. Procentowe skrócenie dipola symetrycznego. Linia ciągła — przebieg teoretyczny (Schelkunoff, Proc. I.R.E., Sept. 1941); linia przerywana — przebieg otrzymany na podstawie systematycznie przeprowadzonych pomiarów (Brown, Woodward, Proc. I.R.E., Apr. 1945)

czysto rzeczywistą przy długościach dipola mniejszych niż pół długości fali. Jednocześnie widać, iż „efekt skrócenia anteny” jest funkcją parametru h/a . Wpływ średnicy przewodnika półfalowego dipola symetrycznego na składową rzeczywistą impedancji wejściowej jest w interesującym nas zakresie praktycznie do pominięcia. Na rys. 1.6 przedstawiono procentowy przebieg „efektu skrócenia dipola symetrycznego” w odniesieniu do anteny o długości równej połowie długości fali.

2. ZALEŻNOŚCI POŁOWE W POSTACI FUNKCJI CZTEROWYMIAROWYCH

W tym celu, aby uzyskać zależności elektromagnetyczne w zwartej postaci potrzebne do rozwiązywania interesującego nas zagadnienia, wygodnie jest operować zależnościami w postaci funkcji czterowymiarowych. Wprowadzając poniższe oznaczenia:

$\diamond$ — czterowymiarowy operator różniczkowy, gdzie:

$$x_1 \equiv x,$$

$$x_2 \equiv y,$$

$$x_3 \equiv z,$$

$$x_4 \equiv jct,$$

k_i — wektory jednostkowe w przestrzeni czterowymiarowej,

c — prędkość rozprzestrzeniania się fali elektromagnetycznej,

$\square$ — czterowymiarowy operator Laplace'a,

Φ — czteropotencjał,

$\mathbf{P}$ — czteroprąd,

$\mathbf{F}$ — sześciowektor pola elektromagnetycznego,

otrzymamy:

$$\mathbf{F} = \text{rot } \Phi, \quad (2.1)$$

$$\text{div } \Phi = 0, \quad (2.2)$$

$$\square \Phi = -\mathbf{P}, \quad (2.3)$$

$$\text{div } \mathbf{P} = 0, \quad (2.4)$$

gdzie:

$$\diamond = k_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + k_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + k_4 \frac{\partial}{\partial x_4},$$

$$\square = \diamond \cdot \diamond = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Równanie (2.1) zawiera informację związaną z natężeniem pola, które w zasadzie nas nie interesuje, więc nie będziemy zajmować się rozwiązaniem tego równania.

Jest oczywiste, że na obydwu przewodnikach wszystkie punkty znajdujące się na płaszczyźnie p (rys. 1.3) prostopadłej do osi tych przewodników w dowolnej chwili czasu posiadają te same potencjały. Zakładamy, że prądy płyną tylko na powierzchni przewodników oraz posiadają tylko składową równoległą do osi przewodników. Na podstawie tych założeń wartość czteroprądu jest określona następująco:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{c} ik_3 + jek_4 \quad (2.5)$$

przy dodatkowym założeniu, że oś z jest równoległa do osi przewodnika. W równaniu (2.5) przyjęto oznaczenia:

i — prąd płynący na powierzchni przewodników,

q — ładunek liniowy (tzn. określony na jednostkę) przewodnika.

Analogicznie czteropotencjał w założonym przypadku posiada także tylko dwie składowe, a mianowicie:

$$\Phi = A_z k_3 + j\Phi k_4, \quad (2.6)$$

gdzie:

A_z — potencjał wektorowy,

Φ — potencjał skalarny.

Jest oczywiste, że prądy płynące wzdłuż poszczególnych przewodników muszą tak rozłożyć się, aby spełniony był warunek równości potencjałów na przewodnikach w płaszczyźnie p prostopadłej do osi przewodników. Równanie (2.4) jest równaniem ciągłości, zakładającym zachowanie ładunku w czasie i przestrzeni. Z tego wynika, iż stosunek gęstości ładunku jest równy stosunkowi odpowiednich prądów, tzn.:

$$\mathbf{P}_2 : \mathbf{P}_1 = n,$$

stąd:

$$q_2 : q_1 = i_2 : i_1 = n. \quad (2.7)$$

Na tej podstawie możemy ograniczyć się jedynie do wyznaczenia stosunku ładunków. Określone to jest na podstawie równania (2.2), z którego wynika, że czteropotencjał nie posiada dywergencji. W ten sposób potencjał wektorowy na przewodzących elementach układu w płaszczyźnie p prostopadłej do osi przewodników jest proporcjonalny do potencjału skalarnego. W rezultacie ograniczamy się na ww. podstawie do wyznaczenia potencjału skalarnego. Następnie dodatkowo założymy jeszcze sinusoidalny rozkład prądów i ładunków wzdłuż dipola. Okazuje się, że stosunek prądów nie zależy w sposób krytyczny od rozkładu prądu i ładunku wzdłuż anteny.

3. WYZNACZANIE STOSUNKU PRĄDÓW I WSPÓŁCZYNNIKA TRANSFORMACJI

We wszystkich przypadkach przewodnik I jest przewodnikiem, który podłączono do linii zasilającej i w stosunku, do którego odnosimy współczynnik n oraz współczynnik transformacji u .

3.1. Dipol dwuelementowy

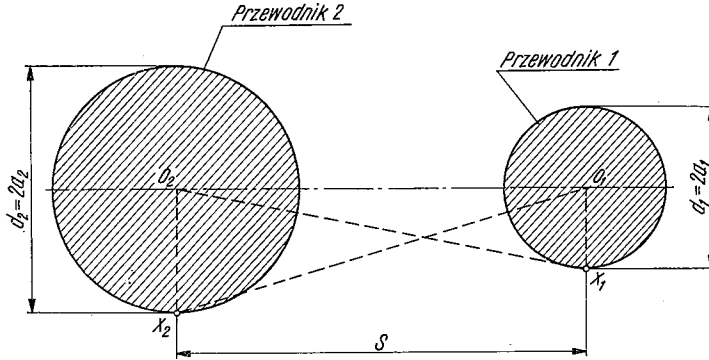
W przypisach podano wyrażenie na znormalizowany potencjał skalarny (zakładając, że w elemencie zasilanym $q_{max} = 4\pi\epsilon_0$) dla punktu położonego bardzo blisko przewodników w płaszczyźnie p , która jest prostopadła do osi przewodników. Wyrażenie to (zob. przypis 1) jest określone:

$$\Phi = \ln \frac{\lambda^{n+1}}{\delta_1 \delta_2^n} - \frac{n+1}{2} S_1(2\pi), \quad (3.1.1)$$

δ_1, δ_2 należy rozumieć jako odległości od aktualnego punktu X_i do przewodników I oraz 2 .

Na rys. 3.1 przedstawiono schematycznie przecięcie przewodników dwuelementowej anteny pętlowej w płaszczyźnie p . Z rysunku tego otrzymujemy interesujące nas zależności. Dla punktu X_1 :

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= a_1, \\ \delta_2 &= \sqrt{S^2 + a_1^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.2)$$



Rys. 3.1. Przecięcie płaszczyzną p , prostopadłą do osi przewodników, dwuelementowego dipola pętlowego

Dla punktu X_2 :

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \sqrt{S^2 + a_2^2}, \\ \delta_2 &= a_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.3)$$

Wstawiając równanie (3.1.2) i (3.1.3) do równania (3.1.1) otrzymujemy:

$$\Phi(X_1) = \ln \frac{\lambda^{n+1}}{a_1(\sqrt{S^2 + a_1^2})^n} - \frac{n+1}{2} \cdot S_1(2\pi), \quad (3.1.4)$$

$$\Phi(X_2) = \ln \frac{\lambda^{n+1}}{\sqrt{S^2 + a_1^2} \cdot a_2^n} - \frac{n+1}{2} \cdot S_1(2\pi). \quad (3.1.5)$$

Wiadomo, że:

$$\Phi(X_1) = \Phi(X_2),$$

stąd przyrównując równania (3.1.4) i (3.1.5) piszemy:

$$a_1(\sqrt{S^2 + a_1^2})^n = \sqrt{S^2 + a_2^2} \cdot a_2^n,$$

czyli:

$$\left(\frac{\sqrt{S^2 + a_1^2}}{a_2} \right)^n = \frac{\sqrt{S^2 + a_2^2}}{a_1},$$

i w końcu:

$$n = \frac{\lg \frac{\sqrt{S^2 + a_2^2}}{a_1}}{\lg \frac{\sqrt{S^2 + a_1^2}}{a_2}}. \quad (3.1.6)$$

Wstawiając równanie (3.1.6) do równania (1.2) lub (1.3) otrzymamy:

$$u = \left[1 + \frac{\lg \sqrt{\left(\frac{S}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2}}{\lg \sqrt{\left(\frac{S}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2}} \right]^2. \quad (3.1.7)$$

Jeżeli w równaniu (3.1.6) dokonamy pewnych uproszczeń, wówczas współczynnik transformacji będzie wyrażony w prostszej postaci, a mianowicie jeżeli:

$$s^2 \gg a_2^2,$$

$$s^2 \gg a_1^2,$$

wówczas:

$$n \approx \frac{\lg \frac{S}{a_1}}{\lg \frac{S}{a_2}} \quad (3.1.8)$$

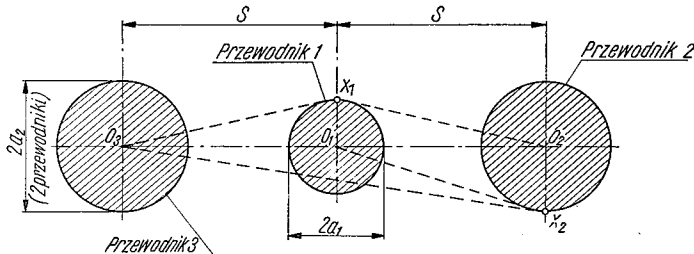
oraz:

$$u = (n+1)^2 = \left[\frac{\lg \frac{S^2}{a_1 a_2}}{\lg \frac{S}{a_2}} \right]^2 = \left[\frac{\lg \frac{a_2}{a_1} \left(\frac{S}{a_2}\right)^2}{\lg \frac{S}{a_2}} \right]^2. \quad (3.1.9)$$

Równania (3.1.8) i (3.1.9) są wystarczająco dokładne w celu dokonywania obliczeń praktycznych. Pamiętać jednak należy o uczynionych uproszczeniach.

3.2.1. Dipol trójelementowy z elementami symetrycznie usytuowanymi w jednej płaszczyźnie

Zakładamy dipol trójelementowy, którego wszystkie elementy znajdują się w jednej płaszczyźnie. Elementy 2 i 3 są o jednakowej średnicy i są symetrycznie usytuowane względem przewodu 1. Schemat takiego układu (w przekroju poprzecznym) przedstawiony



Rys. 3.2.1. Przecięcie płaszczyzną p , prostą do osi przewodników, trójelementowego symetrycznego dipola pętlowego

jest na rys. 3.2.1. Wyrażenie na znormalizowany potencjał dla takiego układu (zob. przypis 2) jest określone:

$$\Phi = \ln \frac{\lambda^{2n+1}}{\delta_1 (\delta_2 \cdot \delta_3)^n} - \frac{1+2n}{2} \cdot S_1(2\pi). \quad (3.2.1.1)$$

Dla punktu X_1 :

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= a_1, \\ \delta_2 &= \delta_3 = \sqrt{S^2 + a_1^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.1.2)$$

Dla punktu X_2 :

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \sqrt{S^2 + a_2^2}, \\ \delta_2 &= a_2, \\ \delta_3 &= \sqrt{(2S)^2 + a_2^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.1.3)$$

gdzie:

$\delta_1, \delta_2, \delta_3$ — odległości od aktualnego punktu X_i do przewodnika 1, 2, 3. Wstawiając równanie (3.2.1.2) i (3.2.1.3) do równania (3.2.1.1) otrzymujemy:

$$\Phi(X_1) = \ln \frac{\lambda^{2n+1}}{a_1 (\sqrt{S^2 + a_1^2})^{2n}} - \frac{1+2n}{2} \cdot S_1(2\pi), \quad (3.2.1.4)$$

$$\Phi(X_2) = \ln \frac{\lambda^{2n+1}}{\sqrt{S^2 + a_2^2} (a_2 \sqrt{(2S)^2 + a_2^2})^n} - \frac{1+2n}{2} \cdot S_1(2\pi), \quad (3.2.1.5)$$

$$\Phi(X_1) = \Phi(X_2),$$

$$a_1 (\sqrt{S^2 + a_1^2})^{2n} = \sqrt{S^2 + a_2^2} (a_2 \sqrt{(2S)^2 + a_2^2})^n,$$

$$\left[\frac{S^2 + a_1^2}{a_2 \sqrt{(2S)^2 + a_2^2}} \right]^n = \frac{\sqrt{S^2 + a_2^2}}{a_1},$$

$$n = \frac{\lg \frac{\sqrt{S^2 + a_2^2}}{a_1}}{\lg \frac{S^2 + a_1^2}{a_2 \sqrt{(2S)^2 + a_2^2}}}. \quad (3.2.1.6)$$

Jeżeli spełniony jest warunek:

$$S^2 \gg a_2^2,$$

$$S^2 \gg a_1^2,$$

wówczas:

$$n \approx \frac{\lg \frac{S}{a_1}}{\lg \frac{S}{2a_2}}. \quad (3.2.1.7)$$

Wstawiając równanie (3.2.1.7) do równania (1.3) oraz uwzględniając symetrię układu otrzymujemy:

$$u = (2n+1)^2 = \left[\frac{\lg \frac{S^3}{2a_1^2 a_2}}{\lg \frac{S}{2a_2}} \right]^2 = \left[\frac{\lg \left(\frac{2a_2}{a_1} \right)^2 \left(\frac{S}{2a_2} \right)^3}{\lg \frac{S}{2a_2}} \right]^2. \quad (3.2.1.8)$$

Wstawiając równanie (3.2.2.2) i (3.2.2.3) do równania (3.2.2.1) otrzymujemy:

$$\Phi(X_1) = \ln \frac{\lambda^{2n+1}}{a_1 \left[(S' - a_1)^2 + \left(\frac{S}{2} \right)^2 \right]^n} - \frac{1+2n}{2} \cdot S_1(2\pi), \quad (3.2.2.4)$$

$$\Phi(X_2) = \ln \frac{\lambda^{2n+1}}{\sqrt{(S' - a_2)^2 + \left(\frac{S}{2} \right)^2} (a_2 \sqrt{S^2 + a_2^2})^n} - \frac{1+2n}{2} \cdot S_1(2\pi), \quad (3.2.2.5)$$

$$\Phi(X_1) = \Phi(X_2),$$

$$a_2 \left[(S' - a_1)^2 + \left(\frac{S}{2} \right)^2 \right]^n = \sqrt{(S' - a_2)^2 + \left(\frac{S}{2} \right)^2} (a_2 \sqrt{S^2 + a_2^2})^n,$$

$$\left[\frac{(S' - a_1)^2 + \left(\frac{S}{2} \right)^2}{a_2 \sqrt{S^2 + a_2^2}} \right]^n = \frac{\sqrt{(S' - a_2)^2 + \left(\frac{S}{2} \right)^2}}{a_1},$$

$$n = \frac{\lg \frac{\sqrt{(S' - a_2)^2 + \left(\frac{S}{2} \right)^2}}{a_1}}{\lg \frac{(S' - a_1)^2 + \left(\frac{S}{2} \right)^2}{a_2 \sqrt{S^2 + a_2^2}}}. \quad (3.2.2.6)$$

Gdy:

$$S' \gg a_2,$$

$$S' \gg a_1,$$

$$S^2 \gg a_2^2,$$

wówczas:

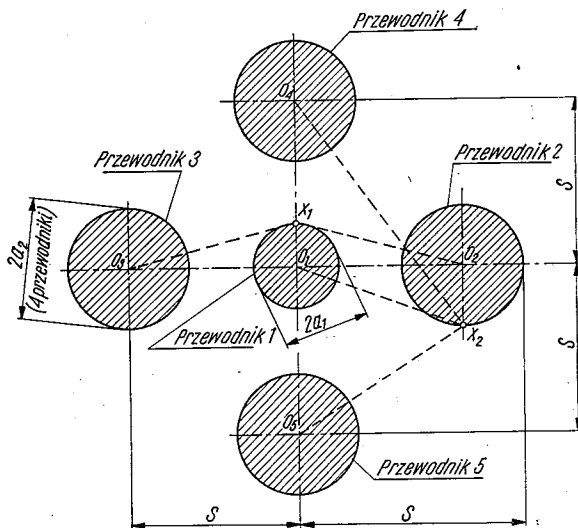
$$n \approx \frac{\lg \frac{S}{a_1}}{\lg \frac{S}{a_2}}. \quad (3.2.2.7)$$

Wstawiając równanie (3.2.2.7) do równania (1.3) (podobnie jak to uczyniliśmy w poprzednim rozdziale) otrzymujemy:

$$u = (2n+1)^2 = \frac{\lg \frac{S^3}{a_1^2 a_2}}{\lg \frac{S}{a_2}} = \left[\frac{\lg \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 \left(\frac{S}{a_2} \right)^3}{\lg \frac{S}{a_2}} \right]^3. \quad (3.2.2.8)$$

3.3. Dipol pętlowy symetryczny pięcioelementowy

Rozpatrzmy obecnie symetryczny dipol pięcioelementowy, którego cztery elementy są rozmieszczone na kwadracie, przy czym przewodniki 2, 3, 4 i 5 posiadają identyczne średnice oraz są rozmieszczone symetrycznie w stosunku do przewodnika 1. Układ takiej



Rys. 3.3. Przecięcie płaszczyzną p , prostopadłą do osi przewodników, pięcioelementowego dipola pętlowego

anteny jest przedstawiony na rys. 3.3 (w przekroju poprzecznym układu). Znormalizowany potencjał dla omawianego układu (zob. przypis 3) określony jest następującym równaniem:

$$\Phi = \ln \frac{\lambda^{4n+1}}{\delta_1(\delta_2\delta_3\delta_4\delta_5)^n} - \frac{1+4n}{2} \cdot S_1(2\pi), \quad (3.3.1)$$

gdzie:

$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5$ oznaczają odległości od aktualnego punktu X_i do przewodnika 1, 2, 3, 4 i 5.

Dla punktu X_1 :

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= a_1, \\ \delta_2 &= \delta_3 = \sqrt{S^2 + a_1^2}, \\ \delta_4 &= S - a_1, \\ \delta_5 &= S + a_1. \end{aligned} \right\} \quad (3.3.2)$$

Dla punktu X_2 :

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \sqrt{S^2 + a_2^2}, \\ \delta_2 &= \sqrt{(2S)^2 + a_2^2}, \\ \delta_3 &= a_2, \\ \delta_4 &= \sqrt{(S + a_2)^2 + S^2}, \\ \delta_5 &= \sqrt{(S - a_2)^2 + S^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.3.3)$$

Wstawiając równanie (3.3.2) i (3.3.3) do równania (3.3.1) otrzymujemy:

$$\Phi(X_1) = \ln \frac{\lambda^{4n+1}}{a_1[(S^2+a_1^2)(S-a_1)(S+a_1)]^n} - \frac{1+4n}{2} \cdot S_1(2\pi), \quad (3.3.4)$$

$$\Phi(X_2) = \ln \frac{\lambda^{4n+1}}{\sqrt{S^2+a_2^2}[\sqrt{(2S)^2+a_2^2}a_2\sqrt{(S+a_2)^2+S^2}\sqrt{(S-a_2)^2+S^2}]^n} - \frac{1+4n}{2} \cdot S_1(2\pi), \quad (3.3.5)$$

$$\Phi(X_1) = \Phi(X_2),$$

$$a_1[(S^2+a_1^2)(S^2-a_1^2)]^n = \sqrt{S^2+a_2^2}[\sqrt{(2S)^2+a_2^2}a_2\sqrt{(S+a_2)^2+a_2^2}\sqrt{(S-a_2)^2+S^2}]^n,$$

$$a_1[S^4-a_1^4]^n = \sqrt{S^2+a_2^2}[\sqrt{(2S)^2+a_2^2}a_2\sqrt{4S^4+a_2^4}]^n,$$

$$\frac{\sqrt{S^2+a_2^2}}{a_1} = \left[\frac{S^4-a_1^4}{a_2\sqrt{(2S)^2+a_2^2}\sqrt{4S^4+a_2^4}} \right]^n,$$

$$n = \frac{\lg \frac{\sqrt{S^2+a_2^2}}{a_1}}{\lg \frac{S^4-a_1^4}{a_2\sqrt{(2S)^2+a_2^2}\sqrt{4S^4+a_2^4}}}. \quad (3.3.6)$$

Jeżeli spełniony będzie warunek:

$$S^2 \gg a_2^2,$$

$$S^4 \gg a_1^4,$$

wtedy:

$$n \approx \frac{\lg \frac{S}{a_1}}{\lg \frac{S}{4a_2}}. \quad (3.3.7)$$

Wstawiając równanie (3.3.7) do równania (1.3) oraz biorąc pod uwagę fakt, iż mamy do czynienia z układem symetrycznym, możemy napisać:

$$u = (4n+1)^2 = \left[\frac{\lg \frac{S^5}{4a_1^4 a_2}}{\lg \frac{S}{4a_2}} \right]^2 = \left[\frac{\lg \left(\frac{4a_2}{a_1} \right) \left(\frac{S}{4a_2} \right)}{\lg \frac{S}{4a_2}} \right]^2. \quad (3.3.8)$$

4. ANALIZA OTRZYMANYCH WYNIKÓW

W tablicy 1 zestawiono otrzymane wyrażenia na współczynnik n oraz na współczynnik transformacji u przy założonych uproszczeniach. Jak można łatwo zauważyć, każdy z rozpatrzonych układów antenowych posiada przekładnię podwyższającą, tzn. układy te przedstawiają sobą większą oporność wejściową niż pojedynczy dipol. Współczynniki transformacji określone są stosunkiem odpowiednich średnic przewodników oraz stosunkiem odle-

głości S do średnicy d_2 . Dla każdego z układów istnieje taki stosunek średnic, przy którym to stosunku współczynnik transformacji u nie zależy od wartości odległości S . Mianowicie jeżeli:

1. dla układu anteny przedstawionego na rys. 3.1

$$\frac{a_2}{a_1} = 1, \quad \text{tzn.} \quad a_2 = a_1,$$

wówczas:

$$u = 2^2 = 4 \neq f(S);$$

2. dla układu anteny przedstawionego na rys. 3.2.1

$$\frac{2a_2}{a_1} = 1, \quad \text{tzn.} \quad a_2 = \frac{1}{2}a_1,$$

wówczas:

$$u = 3^2 = 9 \neq f(S);$$

3. dla układu anteny przedstawionego na rys. 3.3.2

$$\frac{a_2}{a_1} = 1, \quad \text{tzn.} \quad a_2 = a_1,$$

wówczas:

$$u = 3^2 = 9 \neq f(S);$$

4. dla układu anteny przedstawionego na rys. 3.3

$$\frac{4a_2}{a_1} = 1, \quad \text{tzn.} \quad a_2 = \frac{1}{4}a_1,$$

wówczas:

$$u = 5^2 = 25 \neq f(S).$$

Układ anteny przedstawiony na rys. 3.1 oraz na rys. 3.2.2 dla przypadku, kiedy $u = \text{const} \neq f(S)$, jest bardzo wygodny ze względów konstrukcyjnych, gdyż każdy z elementów (przewodników) układu posiada jednakową średnicę, tzn., że nie potrzeba stosować w tych przypadkach elementów o różnych średnicach. Jednocześnie współczynnik transformacji nie będąc wówczas funkcją odległości S nie narzuca nam zarazem ostrych wymagań na tolerancję rozstawienia między elementami układu anteny.

Jeżeli dla układów przedstawionych na rys. 3.2.1 i na rys. 3.3 użyjemy wszystkich przewodników o identycznych średnicach, to — jak można łatwo zauważyć na podstawie odpowiednich wzorów — współczynnik transformacji jest funkcją stosunku odległości S do średnicy d_2 .

Chcąc uzyskać dużą wartość współczynnika transformacji należy wybierać układ anteny pętlowej z odpowiednio większą liczbą elementów.

Należy podkreślić, iż dodatkową zaletą układu anteny pętlowej jest to, że wszystkie końce anteny są razem zwarte elektrycznie, wobec czego z punktu widzenia mechanicznego stanowi to zarazem tzw. konstrukcję sztywną. Dzięki temu, iż anteny pętlowe są układami

Tablica 1

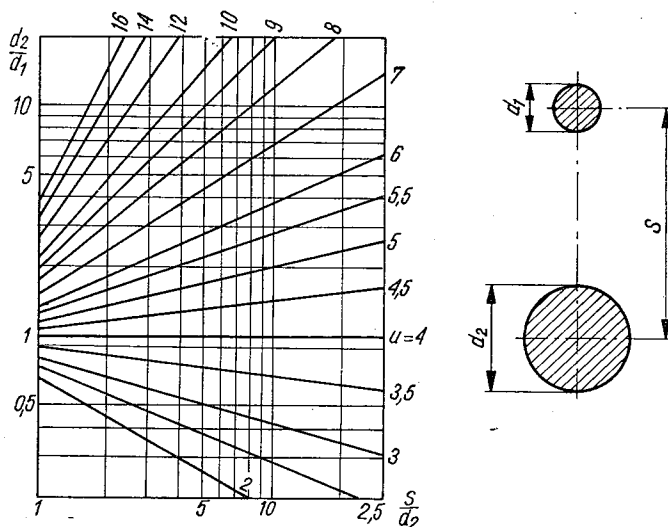
Lp.	Układ anteny z rys.	n	u	Uwagi
1	3.1	$\frac{\lg \frac{S}{a_1}}{\lg \frac{S}{a_2}}$	$(1+n)^2 = \left[\frac{\lg \left(\frac{a_2}{a_1} \right) \cdot \left(\frac{S}{a_2} \right)}{\lg \frac{S}{a_2}} \right]^2$	$S^2 \gg a_1^2$ $S^2 \gg a_2^2$
2	3.2.1	$\frac{\lg \frac{S}{a_1}}{\lg \frac{S}{2a_2}}$	$(1+2n)^2 = \left[\frac{\lg \left(\frac{2a_2}{a_1} \right)^2 \cdot \left(\frac{S}{2a_2} \right)^3}{\lg \frac{S}{2a_2}} \right]^2$	$S^2 \gg a_1^2$ $S^2 \gg a_2^2$
3	3.2.2	$\frac{\lg \frac{S}{a_1}}{\lg \frac{S}{a_2}}$	$(1+2n)^2 = \left[\frac{\lg \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 \cdot \left(\frac{S}{a_2} \right)^3}{\lg \frac{S}{a_2}} \right]^2$	$S' = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot S$ $S' \gg a_2$ $S' \gg a_1$ $S^2 \gg a_2^2$
4	3.3	$\frac{\lg \frac{S}{a_1}}{\lg \frac{S}{4a_2}}$	$(1+4n)^2 = \left[\frac{\lg \left(\frac{4a_2}{a_1} \right)^4 \cdot \left(\frac{S}{4a_2} \right)^5}{\lg \frac{S}{4a_2}} \right]^2$	$S^2 \gg a_2^2$ $S^4 \gg a_1^4$

symetrycznymi, każdy z przewodników anteny (z wyjątkiem przewodnika 1) można uziemić, tzn. można układ anteny pętlowej zainstalować na uziemionym maszcie metalowym.

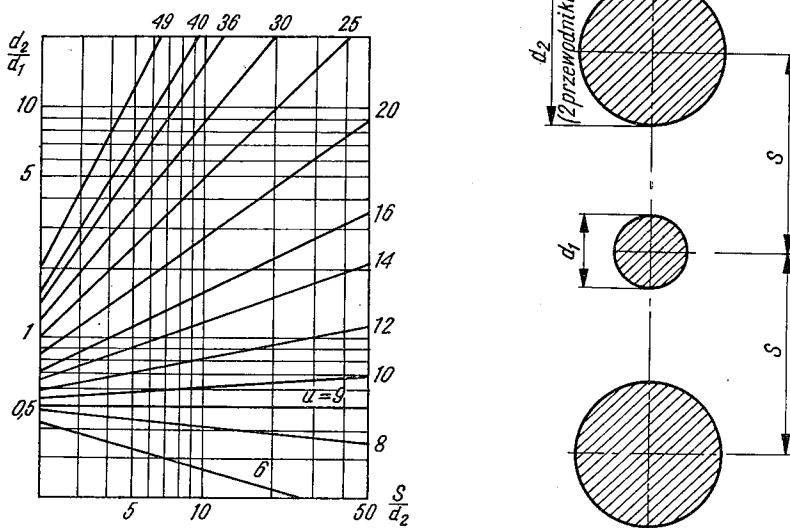
Na podstawie podanych wzorów (przy założonych uproszczeniach) sporządzono odpowiednie wykresy, tzw. nomogramy. Wszystkie wykresy sporządzone są w skali podwójnie logarytmicznej. Dzięki takiej skali wyrażenie:

$$\frac{d_2}{d_1} = f\left(\frac{S}{d_2}\right)_{u=\text{parametr}}$$

jest pękiem linii prostych dla każdego z omawianych układów anten pętlowych. Tangens kąta nachylenia każdej z tych prostych jest oczywiście jednoznacznie określony przy pomocy współczynnika transformacji danego układu anteny pętlowej. Pęk linii prostych przechodzi przez jeden charakterystyczny punkt w przyjętym układzie współrzędnych, przy czym punkt ten jest także określony jednoznacznie przez wybrany układ anteny pętlowej. Wykresy te podano odpowiednio na rys. 4.1, 4.2, 4.3, 4.4. Na podstawie podanych wykresów można szybko zaprojektować lub przeanalizować wybrany układ anteny pętlowej. Przy pomocy podanych wzorów lub wykresów można także oszacować wpływ tolerancji mechanicznych (wymiarów fizycznych) na rozrzut współczynnika transformacji. Okazuje się, że łatwiej jest utrzymać ostrzejsze wymagania na tolerancję średnic przewodników niż na rozstawienie między poszczególnymi przewodnikami. Na podstawie powyższego można



Rys. 4.1. Wykres współczynnika transformacji u dwuelementowego dipola pętlowego



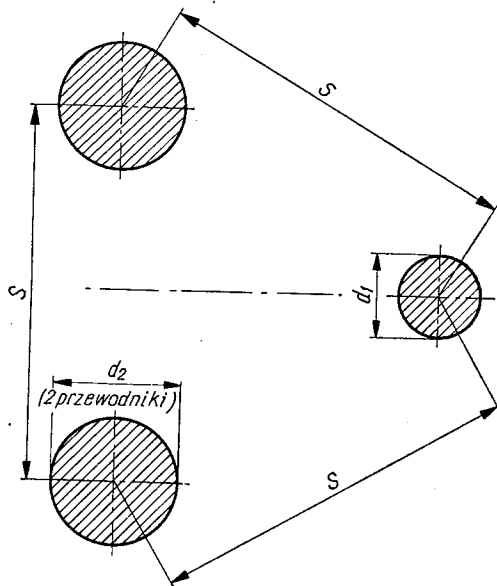
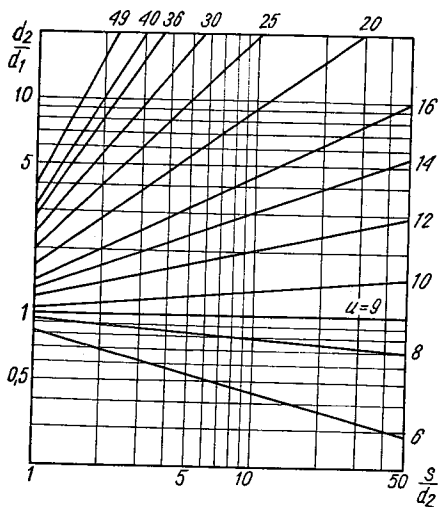
Rys. 4.2. Wykres współczynnika transformacji u trójelementowego dipola pętlowego symetrycznego

stwierdzić, że bezwzględna wartość rozrzutu współczynnika transformacji zwiększa się, jeżeli:

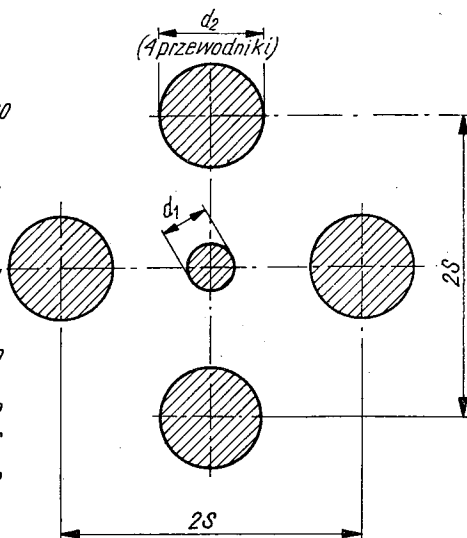
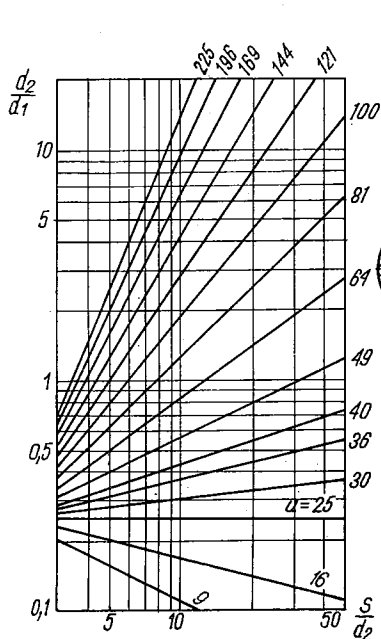
— współczynnik transformacji posiada dużą wartość (tzn. jeżeli współczynnik transformacji wzrasta),

— stosunek $d_2:d_1$ i stosunek $S:d_2$ jest mały (tzn., jeżeli poszczególne stosunki maleją).

Jak można zauważyć, układy anten pętlowych przedstawione na rys. 3.2.1 i rys. 3.2.2 są określone podobnymi wzorami, tzn. że cytowane wykresy są tym samym pękiem prostych,



Rys. 4.3. Wykres współczynnika transformacji u trójelementowego dipola pętlowego w układzie trójką równoboczny



Rys. 4.4. Wykres współczynnika transformacji u pięcioelementowego dipola pętlowego

z tym że punkt przecięcia się prostych jest jedynie odpowiednio przesunięty na wykresie dla poszczególnych układów anten pętlowych.

Możliwość uzyskania dużego współczynnika transformacji w dipolach pętlowych można interpretować jako efekt związany ze zjawiskiem rezonansu prądów w poszczególnych przewodnikach układu anteny. Omawianym układom antenowym można by przyporządkować pewne układy zastępcze w postaci obwodów elektrycznych. Mianowicie można uważać anteny pętlowe za równoważne obwody sprzężone (filtry sprzężone) o stałych rozłożonych.

5. ZAKOŃCZENIE

Dla lepszego zilustrowania zostaną przytoczone pewne dane z przeprowadzonych pomiarów współczynnika transformacji. Dane te zaczerpnięto z literatury [6] i [7].

Dla dipola dwuelementowego następujące parametry układu były zawarte w poniższych granicach:

$$2a_1 = 0,19'' \div 0,375'',$$

$$2a_2 = 0,50'' \div 0,375'',$$

$$S = 0,50'' \div 2,5'',$$

$$u_{teoret} = 4 \div 9.$$

W sumie przeprowadzono 9 pomiarów. Dla 8 pomiarów błąd zawierał się w granicach od -1% do $+6,7\%$, dla jednego pomiaru błąd wyniósł $27,5\%$.

Dla anteny pętlowej trójelementowej (układ wg rys. 1.2) wykonano dwa pomiary [7], tzn. dla:

$$2a_1 = 2a_2 = \text{const},$$

$$S = 1,5'', \quad u_{teoret} = 14, \quad u_{pom} = 11, \quad \text{błąd} = -21\%,$$

$$S = 1'', \quad u_{teoret} = 16, \quad u_{pom} = 12,5, \quad \text{błąd} = -22\%.$$

Pomiary pętlowej anteny dwuelementowej przeprowadzono na częstotliwości 150 MHz.

Autor niniejszego artykułu wykonał także szereg pomiarów współczynnika transformacji. Pomiary przeprowadzono w Katedrze Radiolokacji Politechniki Warszawskiej dla dwu różnych anten pętlowych w pasmie częstotliwości $120 \div 175$ MHz.

Dla pętlowej anteny trójelementowej (układ wg rys. 1.2) parametry geometryczne zawarte były w poniższych granicach:

$$2a_1 = 5 \text{ mm},$$

$$2a_2 = 10 \text{ mm},$$

$$S = 25 \text{ mm},$$

$$u_{teoret} = 25.$$

W sumie wykonano 24 pomiary. Dla 18 pomiarów błąd zawarty był w granicach od -16% do $+15\%$, dla 5 pomiarów błąd zawierał się w granicach od $+22\%$ do $+35\%$, dla jednego pomiaru błąd wyniósł $+54\%$.

Dla pięcioelementowej anteny pętlowej wymiary geometryczne wynosiły:

$$2a_1 = 5 \text{ mm},$$

$$2a_2 = 5 \text{ mm},$$

$$S = 25 \text{ mm},$$

$$u_{\text{teoret}} = 121.$$

W sumie wykonano 24 pomiary współczynnika transformacji. Dla 23 pomiarów błąd zawarty był w granicach od -13% do $+11\%$, a dla jednego pomiaru błąd wyniósł $+36\%$.

Dla wszystkich przeprowadzonych pomiarów błąd jest określany jako różnica pomiędzy teoretycznym a pomierzonym współczynnikiem transformacji.

Anteny pętlowe przenoszą szerszą wstęgę częstotliwości niż zwykły „otwarty” dipol półfalowy [1] i [2]. Przenoszenie szerszej wstęgi częstotliwości można interpretować jako efekt powiększenia średnicy równoważnego dipola. Wiadomo bowiem, iż powiększenie średnicy przewodnika anteny zmniejsza jej oporność falową i dzięki temu zmniejsza składową urojoną impedancji wejściowej anteny przy tym samym odstrojeniu od częstotliwości rezonansowej (porówn. przebiegi na rys. 1.5).

Jest oczywiste, że można zrealizować anteny pętlowe więcej niż pięcioelementowe. Wyznaczenie współczynnika transformacji dla takich wielokrotnych anten pętlowych odbywa się analogicznie jak dla przytoczonych w niniejszym artykule układów antenowych. Jednak w praktyce nie stosuje się anten pętlowych więcej niż pięcioelementowych z uwagi na fakt, iż nie zachodzi potrzeba uzyskiwania tak dużego współczynnika transformacji, który w zasadzie rośnie bardzo szybko ze wzrostem liczby elementów wielokrotnej anteny pętlowej. Z tych względów autor niniejszego artykułu uważał za stosowne ograniczyć się jedynie do omówienia czterech rodzajów, cytowanych uprzednio, wielokrotnych układów anten pętlowych.

Przypisy

Przypis 1 dotyczący równania (3.1.1)

Na rys. P1 pokazano schematycznie układ dwuelementowego dipola pętlowego. Potencjał skalarny w punkcie X jest sumą potencjałów skalarnych wywołanych ładunkami nagromadzonymi na przewodnikach 1 i 2. Punkt X jest umieszczony na płaszczyźnie p (porówn. rys. 1.3). Współrzędne punktu X pokazano na rys. P1. Opóźniony potencjał skalarny, pochodzący od ładunku nagromadzonego na przewodniku 1, jest określony następująco:

$$\Psi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{z=0}^{\frac{1}{2}\lambda} \frac{1}{r} \cdot [e] \cdot dz, \quad (3.1.1.1)$$

gdzie:

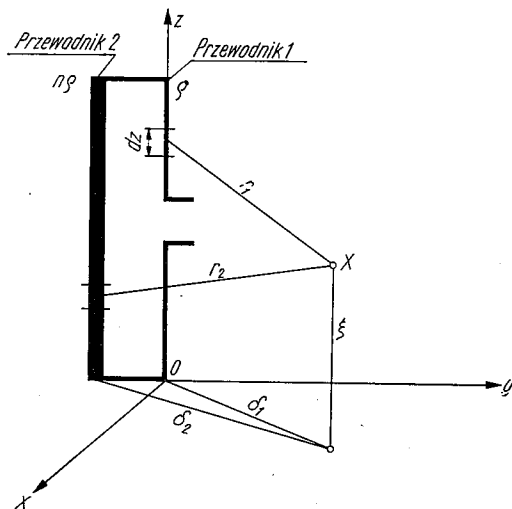
Ψ — opóźniony potencjał skalarny,

$[e]$ — opóźniony ładunek (rozkład ładunku) wzdłuż przewodnika 1, przy czym:

$$[e] = e_{\text{max}} \cdot \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \cdot \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right).$$

Ponieważ ostatnie wyrażenie słuszne jest dla każdej chwilowej wartości t , więc wybieramy taki moment czasowy, aby otrzymać prostsze wyrażenia, tzn. przyjmujemy $t = 0$, wówczas:

$$[\bar{q}] = 4\pi\epsilon_0 \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \cdot \cos \frac{2\pi r}{\lambda}, \quad (3.1.1.2)$$



Rys. P1. Dwuelementowy dipol pętlowy w układzie współrzędnych prostokątnych — rysunek pomocniczy do wyznaczania opóźnionego potencjału skalarnego

gdzie:

$$[\bar{q}] = \frac{4\pi\epsilon_0 [q]}{q_{max}}. \quad (3.1.1.3)$$

Równanie (3.1.1.3) oznacza znormalizowany liniowy ładunek opóźniony.

Jeżeli równanie (3.1.1.2) wstawimy do równania (3.1.1.1), to otrzymamy wówczas:

$$\Psi = \int_{z=0}^{\frac{1}{2}\lambda} \frac{1}{r} \cdot \cos \frac{2\pi r}{\lambda} \cdot \cos \frac{2\pi z}{\lambda} dz. \quad (3.1.1.4)$$

Równanie (3.1.1.4) możemy także zapisać w innej postaci, a mianowicie:

$$\Psi = \int_{z=0}^{\pi} \frac{1}{r} \cos r \cdot \cos z \cdot dz. \quad (3.1.1.5)$$

W tym celu, aby rozwiązać równanie (3.1.1.5), musimy odległość r przedstawić w postaci $r = r(z)$. Z rysunku P1 wynika:

$$\left. \begin{aligned} r &= [\delta^2 + (z - \xi)^2]^{\frac{1}{2}} = (r^2 + u^2)^{\frac{1}{2}}, \\ u &= z - \xi, \end{aligned} \right\} \quad (3.1.1.6)$$

u jest obecnie nową zmienną.

Wstawiając równanie (3.1.1.6) do równania (3.1.1.5) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\Psi &= \int_{u_1=\xi}^{u_2=\pi-\xi} \frac{1}{r} \cdot \cos r \cdot \cos(u+\xi) du = \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{r} (\cos r) [\cos u \cdot \cos \xi - \sin u \cdot \sin \xi] du = \\ &= \frac{1}{2} \cos \xi \left[\int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{r} \cdot \cos(r+u) du + \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{r} \cos(r-u) du \right] + \\ &\quad - \frac{1}{2} \sin \xi \left[\int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{r} \sin(r+u) du - \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{r} \sin(r-u) du \right], \quad (3.1.1.7)\end{aligned}$$

$$r \pm u = (u^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}} \pm u = r_{1,2}; \quad \text{stad:} \quad \left[\frac{1}{2} (u^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2u \pm 1 \right] du = d\tau_{1,2},$$

$$\left(\frac{u}{r} \pm 1 \right) du = \frac{u \pm r}{r} du = d\tau_{1,2}; \quad \text{oraz:}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\cos(r+u)}{r} du &= \frac{\cos(r+u)}{r+u} d(r+u), \\ \frac{\cos(r-u)}{r} du &= -\frac{\cos(r-u)}{r-u} d(r-u), \\ \frac{\sin(r-u)}{r} du &= \frac{\sin(r+u)}{r+u} d(r+u), \\ \frac{\sin(r-u)}{r} du &= -\frac{\sin(r-u)}{r-u} d(r-u). \end{aligned} \right\} \quad (3.1.1.8)$$

Wstawiając równania (3.1.1.8) do równania (3.1.1.7) oraz wykonując operacje całkowania otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\Psi &= \frac{1}{2} \cos \xi [\text{Ci}(r_{12}+u_2) - \text{Ci}(r_{11}+u_1) - \text{Ci}(r_{12}-u_2) + \text{Ci}(r_{11}-u_1)] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin \xi [-\text{Si}(r_{12}+u_2) + \text{Si}(r_{11}+u_1) - \text{Si}(r_{12}-u_2) + \text{Si}(r_{11}-u_1)], \quad (3.1.1.9)\end{aligned}$$

gdzie:

$$r_{11} = \sqrt{u_1^2 + \delta_1^2}; \quad r_{12} = \sqrt{u_2^2 + \delta_2^2}$$

oraz na podstawie [4] i [5]

$$\text{Si}(x) = - \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt = -\frac{\pi}{2} + \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt,$$

$$\text{Ci}(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt = C + \ln x - \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt = C + \ln x - S_1(x),$$

$$S_1(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt,$$

$$\text{Si}(x) = -\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cdot x^{2k-1}}{(2k-1) \cdot (2k-1)!} = -\frac{\pi}{2} + \text{Si}|x|,$$

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n) \right] \approx 0,5772,$$

$$S_1(x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{2k \cdot (2k)!}$$

$$\text{Ci}(0) = \infty, \quad \text{Ci}(\infty) = 0,$$

$$\text{Si}(0) = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{Si}(\infty) = 0,$$

$$\text{Si}|0| = 0, \quad \text{Si}|\infty| = \frac{\pi}{2},$$

$$S_1(0) = 0, \quad S_1(\infty) = +\infty,$$

C — stała Eulera,

$\text{Si}(x)$ — sinus integralny,

$\text{Ci}(x)$ — cosinus integralny.

Wykonując dalsze przekształcenia na podstawie powyżej podanych związków otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \Psi = \frac{1}{2} \cos \xi \left[\ln \left(\frac{r_{12} + u_2}{r_{11} + u_1} \cdot \frac{r_{11} - u_1}{r_{12} - u_2} \right) + S_1(r_{11} + u_1) - S_1(r_{11} - u_1) + \right. \\ \left. - S_1(r_{12} + u_2) + S_1(r_{12} - u_2) \right] + \\ + \frac{1}{2} \sin \xi [\text{Si}(r_{11} + u_1) + \text{Si}(r_{12} - u_1) - \text{Si}(r_{12} + u_2) - \text{Si}(r_{12} - u_2)]. \end{aligned} \quad (3.1.1.10)$$

Płaszczyznę p , prostopadłą do osi przewodników, w której określamy potencjał skalarny Ψ możemy wybrać dowolną. Wybieramy więc taką płaszczyznę, aby otrzymać pewne uproszczenia w poszczególnych wyrażeniach, a mianowicie przyjmując $\xi = 0$ — wtedy:

$$u_1 = 0,$$

$$u_2 = \pi,$$

$$r_{11} = \delta_1,$$

$$r_{12} = \sqrt{\pi^2 + \delta_1^2}.$$

Jednocześnie w interesującej nas płaszczyźnie, w przypadku kiedy punkt X znajduje się bardzo blisko od poszczególnych przewodników, spełniona jest zależność:

$$\delta_1^2 \ll \pi^2.$$

Korzystając z dokonanych założeń, wyrażenie na potencjał skalarny Ψ_1 , wywołany ładunkiem zgromadzonym na przewodniku 1 przyjmie postać:

$$\Psi_1 = \ln \frac{2\pi}{\delta_1} - \frac{1}{2} \cdot S_1(2\pi).$$

Ładunek zgromadzony na przewodniku 2 jest n razy większy niż na przewodniku 1. Wynika to z równania (2.7). W ten sposób potencjał skalarny Ψ_2 w punkcie X , wywołany ładunkiem zgromadzonym na przewodniku 2, przyjmie postać:

$$\Psi_2 = n\Psi_1 = n \left[\ln \frac{2\pi}{\delta_2} - \frac{1}{2} \cdot S_1(2\pi) \right].$$

Skoro mamy do czynienia z potencjałami skalarnymi, to potencjał wypadkowy otrzymamy przez zsumowanie algebraiczne potencjałów składowych. Wobec tego wypadkowy potencjał w punkcie X_i , wywołany ładunkiem nagromadzonym na przewodniku 1 oraz na przewodniku 2, określony jest następująco:

$$\Phi = \Psi_1 + \Psi_2 = \ln \frac{(2\pi)^{n+1}}{\delta_1 \cdot \delta_2^n} - \frac{n+1}{2} \cdot S_1(2\pi). \quad (3.1.1.11)$$

Przy poprzednich działaniach posługiwaliśmy się wyrażeniami określanymi w mierze kątowej; wygodne to było ze względu na wykonywane operacje. Obecnie należy wrócić do wyrażeń określonych w mierze liniowej. W tym celu w równaniu (3.1.1.11) należy:

$$\text{w miejsce } \delta_1 \text{ wstawić } \frac{2\pi\delta_1}{\lambda},$$

$$\text{w miejsce } \delta_2 \text{ wstawić } \frac{2\pi\delta_2}{\lambda};$$

otrzymamy wówczas następujące wyrażenie na potencjał skalarny dla dwuelementowego dipola pętlowego:

$$\Phi = \ln \frac{\lambda^{n+1}}{\delta_1 \cdot \delta_2^n} - \frac{n+1}{2} \cdot S_1(2\pi), \quad (3.1.1)$$

gdzie:

δ_1, δ_2 — odległości od aktualnego punktu X_i do przewodnika 1 i 2.

Przypis 2 dotyczący równań (3.2.1.1) i (3.2.2.1)

Analogicznie jak to czyniliśmy w przypadku przypisu 1 oraz zakładając, że przewodniki 2 i 3 są o tych samych średnicach, możemy napisać:

$$\Psi_1 = \ln \frac{2\pi}{\delta_1} - \frac{1}{2} \cdot S_1(2\pi),$$

$$\Psi_2 = n \left[\ln \frac{2\pi}{\delta_2} - \frac{1}{2} \cdot S_1(2\pi) \right],$$

$$\Psi_3 = n \left[\ln \frac{2\pi}{\delta_3} - \frac{1}{2} \cdot S_1(2\pi) \right],$$

$$\Phi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 = \ln \frac{(2\pi)^{2n+1}}{\delta_1 \cdot (\delta_2 \cdot \delta_3)^n} - \frac{1+2n}{2} \cdot S_1(2\pi) \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{matrix}} \right\} \quad (3.2.1.1)$$

lub

$$\Phi = \ln \frac{\lambda^{2n+1}}{\delta_1 \cdot (\delta_2 \cdot \delta_3)^n} - \frac{1+2n}{2} \cdot S_1(2\pi),$$

gdzie:

$\delta_1, \delta_2, \delta_3$ — odległości od aktualnego punktu X_i do przewodników 1, 2, 3.

Przypis 3 dotyczący równania (3.3.1)

Analogicznie jak w przypadkach poprzednich określamy potencjały składowe, pochodzące od ładunków zgromadzonych na poszczególnych przewodnikach. Dzięki temu, że przewodniki 2, 3, 4, 5 są o tych samych średnicach, możemy napisać:

$$\Psi_1 = \ln \frac{2\pi}{\delta_1} - \frac{1}{2} \cdot S_1(2\pi),$$

$$\Psi_2 = n \left[\ln \frac{2\pi}{\delta_2} - \frac{1}{2} \cdot S_1(2\pi) \right],$$

$$\Psi_3 = n \left[\ln \frac{2\pi}{\delta_3} - \frac{1}{2} \cdot S_1(2\pi) \right],$$

$$\Psi_4 = n \left[\ln \frac{2\pi}{\delta_4} - \frac{1}{2} \cdot S_1(2\pi) \right],$$

$$\Psi_5 = n \left[\ln \frac{2\pi}{\delta_5} - \frac{1}{2} \cdot S_1(2\pi) \right],$$

$$\Phi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4 + \Psi_5,$$

lub:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \ln \frac{(2\pi)^{4n+1}}{\delta_1 \cdot (\delta_2 \cdot \delta_3 \cdot \delta_4 \cdot \delta_5)^n} - \frac{1+4n}{2} \cdot S_1(2\pi) \\ \Phi &= \ln \frac{\lambda^{4n+1}}{\delta_1 \cdot (\delta_2 \cdot \delta_3 \cdot \delta_4 \cdot \delta_5)^n} - \frac{1+4n}{2} \cdot S_1(2\pi), \end{aligned} \right\} \quad (3.3.1)$$

gdzie:

$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5$ — odległości od aktualnego punktu X_1 do przewodników 1, 2, 3, 4, 5.

Politechnika Warszawska
Katedra Radiolokacji

WYKAZ LITERATURY

1. Carter P. S.: Simple Television Antennas. — R.C.A. Rev., tom 4, październik 1939, str. 168.
2. Kraus J. D.: Multi-Wire Dipole-Antennas. — Electronics, tom 13, styczeń 1940, str. 26.
3. King R. W. P., Mimno H. R., Wing A. H.: Transmission Lines, Antennas, and Wave Guides. Mc Graw — Hill Book Co., New York 1945, str. 224.
4. Ryżik I. M., Gradsztejn I. S.: Tablice całek, sum, rzędów i pochodnych. Gosudarstvennyje Izdatielstwo Techniko-Teorietičeskoj Literatury, Moskwa-Leningrad 1951, str. 325.
5. Handbuch für Hochfrequenz- und Elektrotechniker. Herausgeber: Curt Rint, Verlag für Radio — Foto — Kinotechnik GMBH, Berlin-Borsigwalde, tom III, 1955, str. 198, 199, 310, 24, 25.
6. O'Shannassy J., Wilkinson E. J.: Some Measurements of the Impedance Multiplication Factor of Folded Dipoles. — Amateur Radio, tom 16, styczeń 1948, str. 9.
7. Guertler Rudolf: Impedance Transformation in Folded Dipoles. (Standard Telephones and Cables Pty. Ltd., Sydney, Australia). — P.I.R.E., Australia, tom 10, kwiecień 1949, str. 95—100.

G. GULCZ

TRANSFORMATION OF INPUT IMPEDANCE IN HALF-WAVE MULTIPLE FOLDED DIPOLES

Summary

Each system of a half-wave multiple folded antenna has at its input terminals a higher input resistance than a standard half-wave dipole. The transformation of the input impedance is determined by means of what is referred to as transformation coefficient, which is defined as the relation of the input resistance of

a given half-wave folded dipole to the input resistance of a standard simple dipole. It turns out that the transformation coefficient is unambiguously determined by the number of elements (number of conductors) of a folded antenna, by the mutual geometric location of particular elements, by the relation of corresponding diameters of conductors and by the distance between the above mentioned conductors, which is measured in a relative way (defined as the relation of the distance between particular elements S to the diameter of the passive element d_2). The transformation coefficient increases if the number of elements of the folded antenna increases simultaneously, and if the relation of the diameter of the passive conductor d_2 to the diameter of the active conductor d_1 connected to the feeder also increases, or if the distance between particular elements S decreases. The transformation coefficient for a two-element half-wave folded antenna, for two different three-element antenna and for one five-element antenna has been discussed and analysed in the present paper. The physical foundations of the input impedance transformation have been given in the paper. Then, making use of field dependences of electromagnetic magnitudes, formulas employed for the calculation of transformation coefficients for the four different antenna systems in relation to the geometric parameters of particular antenna systems have been derived. Finally diagrams have been charted in the form of what is referred to as nomograms of the transformation coefficient for the four antenna systems. The diagrams make it possible to design quickly and to analyse multiple folded antennae. In order to illustrate the accuracy of the formulas derived for transformation coefficients, results of measurements carried out for several various antenna systems have been discussed. The measurements show that in practice the formulas derived yield sufficiently accurate results.

G. GULCZ

TRANSFORMATION D'IMPÉDANCE D'ENTRÉE DANS DIPÔLES DÉMI-ONDE REPLIÉS MULTIPLES

R é s u m é

Chaque schéma du dipôle démi-onde replié multiple possède sur ses bornes d'entrée une résistance plus grande que la résistance d'entrée d'un dipôle replié ordinaire. La transformation de l'impédance d'entrée est déterminée à l'aide du si nommé coefficient de transformation, qui est défini comme un rapport de la résistance d'entrée du dipôle démi-onde replié donné à la résistance d'entrée d'un dipôle ordinaire. Il résulte, que le coefficient de transformation est simultanément déterminé par le nombre des éléments (nombre des conducteurs) du dipôle replié, par l'installation géométrique mutuelle des éléments particuliers, par le rapport des diamètres convénables des conducteurs ainsi que par la distance entre les conducteurs mentionnés ci-dessus, exprimée dans la mesure relative (déterminée comme le rapport de la distance entre les éléments particuliers S et du diamètre de l'élément passif d_2). Le coefficient de transformation augmente, si dans le même temps augmente le nombre des éléments du dipôle replié et si le rapport du diamètre du conducteur passif d_2 et du diamètre du conducteur actif — connecté au feeder — d_1 augmente ou encore si la distance entre les éléments particuliers S diminue.

Dans l'article présent on a décrit et analysé le coefficient de transformation en cas du dipôle démi-onde replié à deux éléments, de deux différentes antennes à trois éléments et d'une antenne à cinq éléments. On a présenté dans l'article des principes physiques de la transformation de l'impédance d'entrée. Ensuite utilisant les relations de champ des grandeurs électromagnétiques on a dérivé les formules à calculer les coefficients de transformation en cas de quatre différents systèmes d'antenne en relation des paramètres géométriques de particuliers systèmes d'antenne. Enfin on a effectué des diagrammes (c. à d. des nomogrammes) de coefficient de transformation pour tous les quatre systèmes d'antenne. Ces diagrammes permettent effectuer rapidement les projets ainsi que l'analyse des antennes repliées multiples. Pour illustrer l'exactitude des formules données concernant les coefficients de transformation on a décrit les résultats des mesures, exécutées sur quelques différents systèmes d'antenne. On a obtenu en conséquence que les formules dérivées sont suffisamment exactes en pratique.

Г. ГУЛЬЧ

ТРАНСФОРМАЦИЯ ВХОДНОГО ИМПЕДАНСА В ПОЛУВОЛНОВЫХ ПЕТЛЕВЫХ
ДИПОЛЯХ ИЗ НЕСКОЛЬКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Резюме

Каждая система полуволновой петлевой антенны из нескольких элементов отличается большим входным сопротивлением на входных зажимах, чем обычный простой диполь. Трансформация входного импеданса определяется с помощью так наз. коэффициента трансформации, который является отношением входного сопротивления данного полуволнового петлевого диполя к входному сопротивлению обычного простого диполя. Оказывается, что коэффициент трансформации однозначно определен числом элементов (числом проводов) петлевой антенны, взаимным геометрическим расположением отдельных элементов, отношением соответственных диаметров проводов, а также расстоянием между вышеуказанными проводами, которое измеряется в относительной мере (определенное как отношение расстояния между отдельными элементами S к диаметру пассивного элемента d_2). Коэффициент трансформации растет, если одновременно растет число элементов петлевой антенны и если растет отношение диаметра пассивного провода d_2 к диаметру активного провода d_1 — подсоединенного к фидеру или если падает расстояние между отдельными элементами.

В настоящей статье описан и проанализирован коэффициент трансформации для петлевой полуволновой двухэлементной антенны, двух разных трехэлементных антенн и одной пятиэлементной антенны. В статье приведены физические основы трансформации входного импеданса. Далее, используя полевые зависимости электромагнитных величин выведены формулы, служащие для расчета коэффициентов трансформации для четырех разных антенных систем в зависимости от геометрических параметров отдельных антенных систем. В окончании сделаны графики (так наз. номограммы) коэффициента трансформации для всех четырех антенных систем. Эти графики дают возможность быстро проектировать и проводить анализ петлевых антенн из нескольких элементов. С целью иллюстрировать точность приведенных формул на коэффициенты трансформации приведены результаты измерений, проведенных на нескольких различных антенных системах. Из этих измерений вытекает, что на практике получается достаточная точность выведенных формул.

JERZY BORKOWSKI

Porównanie różnych sposobów ciągłej regulacji prędkości obrotowej silników indukcyjnych pod względem techniczno-ekonomicznym

Rękopis dostarczono 28.6.1966

Wiele nowoczesnych napędów elektrycznych prądu zmiennego wymaga, aby ich prędkość obrotowa zmieniała się podczas pracy w sposób ciągły. Przy projektowaniu ich ogólnej koncepcji należy brać pod uwagę oprócz możliwości technicznych również czynniki ekonomiczne.

W artykule podano metodę postępowania przy podejmowaniu decyzji, jakie rozwiązanie ciągłej regulacji prędkości obrotowej przy użyciu silników indukcyjnych jest najkorzystniejsze pod względem techniczno-ekonomicznym. Rozpatrzono zarówno koszty inwestycyjne związane z instalowaniem różnych rozwiązań technicznych takiego napędu, jak również zmiany sprawności urządzenia podczas regulacji, a więc zmiany kosztów eksploatacyjnych.

Wprowadzono pojęcie ogólnej sprawności względnej układu, podanej wzorem (3), która umożliwia porównywanie z sobą różnych rozwiązań realizujących ciągłą regulację prędkości obrotowej.

Porównano kilka klasycznych i kilka nowych sposobów uzyskiwania ciągłej regulacji prędkości obrotowej przy stałym momencie obciążenia i na tym przykładzie wyjaśniono metodę postępowania. Wykres na rys. 6 podaje koszty budowy, a rys. 7 zmiany sprawności podczas regulacji prędkości obrotowej rozpatrywanymi sposobami.

We wnioskach podano krótkie charakterystyki przydatności poszczególnych sposobów regulacji.

1. WSTĘP

Wiele nowoczesnych napędów elektrycznych prądu zmiennego wymaga, aby ich prędkość obrotowa zmieniała się podczas pracy w sposób ciągły. Wszystkie napędy, realizujące to zadanie przy użyciu silników indukcyjnych, posiadają liczne wady i przy projektowaniu ich ogólnej koncepcji należy przyjąć układ najodpowiedniejszy do danego celu. Często jednak brak jest dostatecznej liczby danych do podjęcia takiej decyzji. Artykuł niniejszy stawia sobie za zadanie danie pewnej koncepcji postępowania przy podejmowaniu decyzji, jak również — poprzez podanie porównań parametrów techniczno-ekonomicznych — scharakteryzowanie klasycznych i nowych sposobów regulacji pod tym względem. Dokładna i szczegółowa analiza wszystkich sposobów jest oczywiście bardzo trudna, jednak znalezienie przynajmniej szacunkowe pewnych porównań wydaje się celowe.

O tym, jakie rozwiązanie techniczne dla danego napędu jest korzystniejsze, decydują takie aspekty, jak koszt budowy urządzenia, osiągnięty zakres oraz sprawność napędu pod-

czas regulacji, a więc jego koszty eksploatacyjne. Przy podejmowaniu decyzji, jakie rozwiązanie należy przyjąć, trzeba również wziąć pod uwagę charakter pracy napędu, to znaczy, czy układ ma pracować stale przy zmiennych prędkościach i w jakim zakresie, czy pracuje on w zasadzie przy jednej określonej prędkości, a wymaga tylko dorywczej regulacji. Ponadto należy uwzględnić również dodatkowe czynniki, jak łatwość dokonywania regulacji, możliwość automatyzowania przebiegu regulacji itp. Każdy więc napęd należy rozpatrywać indywidualnie mając do tego celu takie dane, jak koszty inwestycyjne urządzenia napędowego i jego dodatkowe koszty eksploatacyjne, związane z regulacją.

Wobec dużej liczby znanych sposobów ciągłej regulacji prędkości obrotowej silników indukcyjnych, z których wiele jest mało rozpowszechnionych, ograniczono się w tej pracy do porównania sposobów klasycznych i niektórych nowych rozwiązań, o których istnieją w literaturze dostateczne do tego dane. Nie wymienione sposoby regulacji można zawsze porównać z któryś z klasycznych rozwiązań i tą drogą otrzymać pożądaną informację.

W następnych częściach artykułu przedstawiona będzie metoda umożliwiająca porównanie różnych sposobów regulacji ze sobą pod względem dodatkowych kosztów eksploatacyjnych podczas regulacji i kosztów inwestycyjnych urządzenia.

2. SPOSÓB PORÓWNANIA SPRAWNOŚCI PODCZAS REGULACJI

Dla celów porównawczych przyjęto dla wszystkich sposobów regulacji — regulację przy stałym momencie obciążenia. Ponadto, aby ujednolicić wszystkie wykresy, przyjęto podawanie wielkości w jednostkach względnych, przy czym sprawność względna (η_w) — jest stosunkiem sprawności dla danej prędkości obrotowej układu do sprawności przy znamionowej prędkości obrotowej tego układu bez regulacji

$$\eta_w = \frac{\eta}{\eta_n}, \quad (1)$$

a prędkość względna (n_w) — stosunkiem prędkości obrotowej układu w rozpatrywanym punkcie pracy do znamionowej prędkości obrotowej układu bez regulacji

$$n = \frac{n}{n_n}. \quad (2)$$

Ponieważ sprawność poszczególnych rozwiązań przy pracy znamionowej bez regulacji jest różna, różne są również moce silników, które służą jako przykłady, należy te różnice uwidocznic przy porównywaniu zmian sprawności. Najlepszym wyjściem wydaje się tutaj wprowadzenie współczynników korygujących wartość sprawności względnej. Ogólna sprawność względna przybierze wtedy postać

$$\eta'_w = \eta_w \cdot k_n \cdot k_m; \quad (3)$$

k_n — jest współczynnikiem uwzględniającym fakt, że dane rozwiązanie względnie układ regulacji jako całość osiąga przy pracy bez regulacji inną sprawność niż przyjęty tu jako podstawowy normalny silnik pierścieniowy. Współczynnik ten można wyrazić stosunkiem sprawności (η_n), jaką osiąga rozpatrywany układ bez regulacji dla pracy

znamionowej, do sprawności znamionowej normalnego silnika pierścieniowego (η_{np}) o tej samej mocy i prędkości obrotowej.

$$k = \frac{\eta_n}{\eta_{np}}, \quad (4)$$

k_m — jest współczynnikiem, który sprowadza sprawności względne poszczególnych układów do sprawności jednakowej mocy. Współczynnik k_m można przedstawić jako stosunek znamionowej sprawności silnika pierścieniowego o mocy przyjętej jako odniesienie ($\eta_{np}(P_{od})$) do znamionowej sprawności silnika pierścieniowego o mocy i prędkości obrotowej odpowiadającej rozpatrywanemu układowi (η_{np}).

$$k_m = \frac{\eta_{np}(P_{od})}{\eta_{np}}. \quad (5)$$

Przyjęcie takiego sposobu sprowadzania wszystkich układów do jednej mocy jest usprawiedliwione jedynie wtedy, gdy wszystkie porównywane rozwiązania mają zbliżone moce; są mniej więcej tej samej wielkości.

Przedstawiona wzorem (3) ogólna sprawność względna podaje, jaka byłaby sprawność rozpatrywanego układu w danym punkcie pracy, gdyby urządzenie było wykonane na moc i prędkość silnika podstawowego.

3. SPOSÓB PORÓWNYWANIA KOSZTÓW BUDOWY

Jednym z warunków mających decydujące znaczenie przy wyborze najwłaściwszego rozwiązania napędu są koszty inwestycyjne związane z zainstalowaniem urządzenia, w których koszt urządzenia gra dominującą rolę. W celu zorientowania się, jak kształtują się one dla poszczególnych urządzeń, przeprowadzono tu analizę porównawczą. Koszt maszyny bądź urządzenia jest zależny oczywiście od ich mocy. Dlatego, aby porównywać koszty rozwiązań, trzeba przyjąć, że moce ich są jednakowe. Dokładne wyliczenie kosztów poszczególnych urządzeń jest trudne, jednak podanie, choćby szacunkowe, jak one się kształtują, wydaje się pożądane dla celów orientacyjnych. W praktycznych przypadkach projektowania napędu najwygodniejsze jest oczywiście użycie do porównań cen poszczególnych urządzeń branych pod uwagę. Zdecydowano się dla celów porównawczych, przyjąć jako odniesienie koszt budowy silnika pierścieniowego. Ponieważ do niektórych układów wchodzi silniki o wirnikach klatkowych, przyjęto koszt silnika klatkowego jako 60% kosztu silnika pierścieniowego tej samej mocy, co dla silników małych i średnich jest mniej więcej słuszne.

4. SPOSOBY CIĄGŁEJ REGULACJI PRĘDKOŚCI OBROTOWEJ SILNIKÓW INDUKCYJNYCH I ICH PORÓWNANIE

Porównane zostaną następujące sposoby ciągłej regulacji prędkości silników indukcyjnych:

- przez zmianę częstotliwości napięcia zasilającego,
- przez zmianę napięcia na zaciskach maszyny,
- przez zmianę oporności w obwodzie wtórnym maszyny,

- przez zmianę sprzężeń magnetycznych,
- przez ciągłą zmianę liczby par biegunów lub długości podziałki biegunowej.

Inne sposoby regulacji, jak przez hamowanie polem przeciwbieżnym czy stałym, układy wielomaszynowe czy kaskadowe oraz regulacja impulsowa, nie będą rozpatrywane, gdyż analityczne ujęcie ich zmian sprawności w sposób ogólny napotyka duże trudności, a w literaturze brak jest danych eksperymentalnych. Ponadto regulacja tymi sposobami jest normalnie mniej ekonomiczna od sposobów wymienionych powyżej.

4.1. Regulacja przez zmianę częstotliwości zasilania

Ogólnie przyjmuje się, że regulacja przez zmianę częstotliwości zasilania jest regulacją, przy której praktycznie nie występują dodatkowe straty mocy podczas regulacji. Twierdzenie takie jest słuszne jednak tylko dla zmian prędkości w górę od częstotliwości znamionowej sieci. Przy regulacji prędkości w dół dodatkowe straty mocy związane z regulacją występują, są one jednak w porównaniu z innymi rozwiązaniami małe. Ponadto, należy brać pod uwagę fakt, że ogólna sprawność maszyny regulowanej wraz z urządzeniem do regulacji częstotliwości, nawet dla częstotliwości znamionowej, jest znacznie niższa od sprawności pojedynczej maszyny przy tej częstotliwości. Z tych powodów, jak również ze względu na duży koszt takiego układu, regulację tę zwykło się stosować do napędów ważnych albo do napędów dużych grup silników, które powinny równocześnie zmieniać swoje prędkości.

Obecnie rozpatrzona zostanie zmiana sprawności silnika indukcyjnego podczas regulacji prędkości obrotowej przez zmianę częstotliwości bez uwzględnienia wpływu urządzeń do regulacji częstotliwości na ogólną sprawność układu. Wpływ ten będzie później uwzględniony przez wprowadzenie odpowiednich współczynników k_n i k_m .

Optymalną pracę silnika otrzyma się, jeżeli wraz ze zmianą częstotliwości i obciążenia regulować się będzie napięcie zasilające według zależności

$$\frac{U}{U_n} = \frac{f}{f_n} \sqrt{\frac{M}{M_n}}. \quad (6)$$

Ponieważ rozpatruje się tu prace przy stałym momencie, to:

$$\frac{U}{f} = \frac{U_n}{f_n} = \text{const.} \quad (7)$$

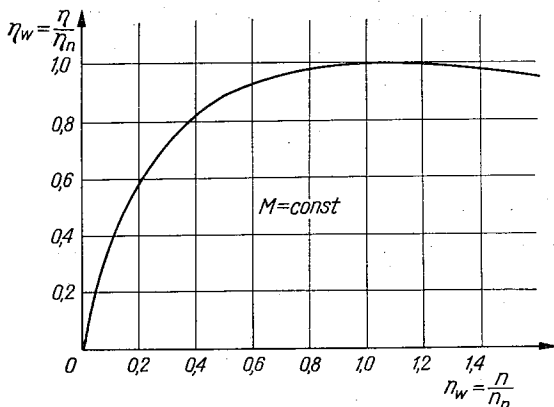
Jako częstotliwość znamionową przyjmuje się częstotliwość, na jaką maszyna została wykonana (dla normalnych katalogowych silników będzie to częstotliwość sieci). Prędkość obrotowa na wale maszyny wynosi:

$$n = n_s(1-s) = \frac{60f}{p}(1-s) \quad (8)$$

i jeśli poślizg maszyny byłby stały, to obroty na wale zmieniałyby się tylko ze zmianą częstotliwości. W rzeczywistości poślizg przy malejącej częstotliwości rośnie, co jest zrozumiałe, jeśli weźmie się pod uwagę, że poślizg krytyczny wzrasta.

$$s_{kr} = \frac{C_1 R_2}{\sqrt{R_1^2 + (X_1 + C_1 X_2)^2}} \approx \frac{C_1 R_2}{X_1 + C_1 X_2} = \frac{C_1 R_2}{2\pi f(L_1 + C_1 L_2)}. \quad (9)$$

Ze wzrostem poślizgu podczas regulacji w dół wzrastają straty mocy w wirniku i sprawność, aczkolwiek powoli, maleje. Wykres zmian względnej sprawności w zależności od względnej prędkości obrotowej (według przyjętych uprzednio definicji), obliczony na podstawie danych z książki Bułgakowa [3], dla regulacji przy stałym momencie obciążenia podano na rys. 1.



Rys. 1. Zmiana sprawności w funkcji prędkości obrotowej przy regulacji przez zmianę częstotliwości zasilania

Przy regulacji przez zmianę częstotliwości oprócz kosztu silnika, który w tym przypadku może być klatkowym, dochodzi koszt przetwornicy częstotliwości. Przyjmuje się tu najtańsze rozwiązanie — przetwornicy asynchronicznej napędzanej silnikiem komutatorowym. Moc silnika napędzającego przetwornicę przyjęto

$$P_{sp} = 0,2P_1 = 0,2 \frac{P}{\eta} \approx 0,25P, \quad (10)$$

wtedy moc maszyny indukcyjnej jako przetwornicy

$$P_{przetw} = 0,8P_1 = 0,8 \frac{P}{\eta} \approx P. \quad (11)$$

Stosując zależność wzrostu kosztów maszyny w stosunku do mocy:

$$K = c P^{3/4}, \quad (12)$$

gdzie:

K — koszt maszyny,

c — stała dla danego typu maszyny (w pewnym zakresie mocy),

oraz przyjmując, że koszt silnika komutatorowego kształtuje się w stosunku do kosztu silnika indukcyjnego, klatkowego tej samej mocy jak 4:1 otrzyma się

$$K_{sp} = 4(0,25)^{3/4} \cdot 0,6K_{pierśc} = 0,9K_{pierśc},$$

przy czym: K_{sp} — koszt silnika napędzającego przetwornicę,

$K_{pierśc}$ — koszt silnika pierścieniowego o mocy przyjętej jako odniesienie.

Koszt maszyny indukcyjnej, użytej jako przetwornicy, wobec równości mocy (11) wynosi tyle co silnika pierścieniowego o mocy przyjętej jako odniesienie

$$K_{przetw} = K_{pierśc}.$$

Koszt silnika wykonawczego jako klatkowego będzie

$$K_{sf} = 0,6K_{pierśc.}$$

Po zsumowaniu kosztów tych trzech elementów układu otrzyma się jego koszt całkowity:

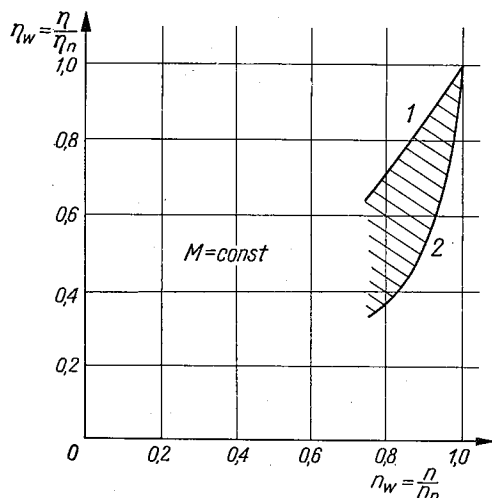
$$K_f = K_{sp} + K_{przetw} + K_{sf} = 2,5K_{pierśc.}, \quad (13)$$

a więc koszt 2,5-krotny w porównaniu z normalnym silnikiem pierścieniowym. Uwzględniając jeszcze koszt urządzenia do regulacji obrotów silnika napędzającego przetwornicę całkowity koszt wypadnie na pewno jeszcze większy.

4.2. Regulacja przez zmianę napięcia zasilającego

Przez zmianę napięcia zasilającego można uzyskać regulację prędkości obrotowej, jednak zakres tej regulacji jest niewielki — ograniczony poślizgiem krytycznym maszyny. Ujęcie zmian sprawności podczas takiej regulacji prowadzi do konieczności rozbicia strat mocy maszyny na straty poszczególne i uwzględnienia ich zmian w miarę zmian napięcia i prędkości.

Postępując w ten sposób otrzyma się zależność zmian sprawności od uzyskiwanych prędkości obrotowych podaną na rys. 2 (w jednostkach względnych), obliczoną według danych Richtera [5]; krzywa 1 jest obliczona bez uwzględnienia strat na regulatorze napięcia, a krzywa 2 — dla przypadku, gdy regulację napięcia uzyskuje się drogą włączania szeregowej oporności czynnej w obwód stojana silnika. W praktycznych rozwiązaniach takiej regulacji, jako regulatorów napięcia używa się zazwyczaj regulatorów indukcyjnych, autotransformatorów lub transformatorów z zaczepami, albo też — w nowszych rozwią-



Rys. 2. Zmiana sprawności w funkcji prędkości obrotowej przy regulacji przez zmianę napięcia zasilającego

zaniach — dławików nasycanych lub transduktorów. Krzywa zależności sprawności od prędkości będzie w tym przypadku znajdować się pomiędzy krzywymi 1 i 2 podanymi na rys. 2.

Dodać jeszcze należy, że w przypadku podanym przez Richtera silnik ma stosunkowo duży zakres regulacji, spotykany jedynie w małych maszynach (duże poślizgi krytyczne).

Do obliczeń kosztów budowy przyjęto jako urządzenie do regulacji napięcia transduktory. Można przyjąć, że koszt ich budowy jest o około 40% wyższy od kosztu budowy transformatorów tej samej mocy. Dobierając transformatory odpowiedniej mocy i znając ich ceny otrzymano w ten sposób, że koszt układu transduktorów będzie wynosić:

$$K_{Tr} = 0,75K_{pierśc}.$$

Jako silnik może być w tym przypadku użyty silnik klatkowy, więc

$$K_{SU1} = 0,6K_{pierśc},$$

a koszt całego układu

$$K_{U1} = K_{Tr} + K_{SU1} = 1,35K_{pierśc}. \quad (14)$$

4.3. Regulacja przez zmianę oporności czynnej w obwodzie wtórnym maszyny

Przez wprowadzenie dodatkowej oporności czynnej w obwód wtórny silnika indukcyjnego można regulować prędkość obrotową maszyny w dół od obrotów odpowiadających pracy silnika bez dodatkowej oporności w wirniku. Widać to wyraźnie ze wzoru

$$s = \frac{mI_2^2(R_2 + R_d)}{P_w} \quad (15)$$

przy założeniu stałej mocy pola wirującego (mocy wewnętrznej) P_w , co odpowiada regulacji przy stałym momencie obciążenia. Taka zmiana poślizgu wiąże się oczywiście ze zwiększeniem strat w obwodzie wtórnym; maleje również moc mechaniczna:

$$P_{mech} = (1-s)P_w. \quad (16)$$

Sprawność takiego układu silnika z opornikami przedstawia się zależnością

$$\eta = \frac{P}{P_1} = \frac{P_{mech} - \Delta P_{mech}}{P_1}, \quad (17)$$

gdzie:

P — moc na wale silnika,

P_1 — moc czynna doprowadzona do silnika,

ΔP_{mech} — straty mechaniczne.

Przyjmując dla uproszczenia zależność strat mechanicznych według

$$\Delta P_{mech} = (1-s)aP_{wn}, \quad (18)$$

gdzie a — stosunek strat mechanicznych przy prędkości znamionowej do znamionowej mocy wewnętrznej maszyny, co wprowadzie jest niezbyt ściśle, ale wobec tego, że straty mechaniczne stanowią bardzo mały ułamek mocy maszyny — dopuszczalne, oraz uwzględniając (16), otrzyma się:

$$\eta = (1-s) \frac{P_w - aP_{wn}}{P_w + \Delta P_1}, \quad (19)$$

przy czym ΔP_1 — straty strony pierwotnej.

Dla obciążenia znamionowego bez dodatkowego oporu w obwodzie wtórnym wzór (19) przybierze postać:

$$\eta_n = (1-s_n) \frac{P_{wn}(1-a)}{P_w + \Delta P_1}. \quad (20)$$

Po podzieleniu równania (19) przez (20), wobec stałości mocy wewnętrznej

$$P_w = P_{wn} = \text{const} \quad (21)$$

i założeniu $\Delta P_1 = \Delta P_{1n} = \text{const}$, co dla tego typu regulacji jest prawdziwe, otrzyma się od razu sprawność względną

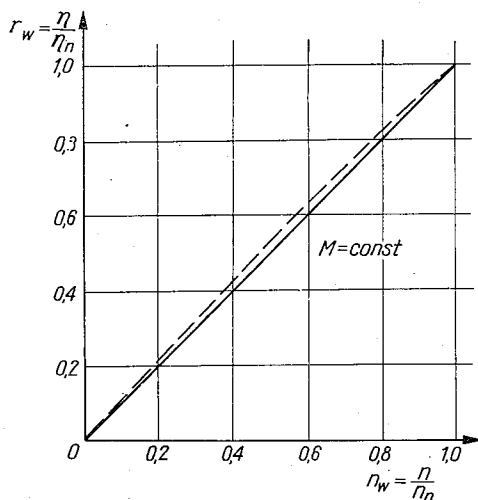
$$\frac{\eta}{\eta_n} = \frac{(1-s)}{(1-s_n)}. \quad (22)$$

Korzystając z zależności na obroty silnika indukcyjnego

$$\left. \begin{aligned} n &= (1-s)n_s, \\ n_n &= (1-s_n)n_s \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

dochodzi się do pożądanej zależności sprawności względnej od względnej prędkości (według uprzedniej definicji).

$$\eta_w = \frac{\eta}{\eta_n} = \frac{n}{n_n} = n_w. \quad (24)$$



Rys. 3. Zmiana sprawności w funkcji prędkości obrotowej przy regulacji opornością czynną w obwodzie wtórnym

Zależność tę przedstawiono na rys. 3, przy czym linią kreskowaną podano wynik dokładnie obliczony (dokładne straty mechaniczne i dodatkowe) podany przez Richtera [5].

Należy dodać, że przy włączeniu oporności indukcyjnych w obwód wtórny (dławiki nasycane, transduktory) zakres regulacji jest mały — mniejszy niż do poślizgu krytycznego,

a sprawności nie lepsze niż przy włączaniu oporności czynnej. Pogarsza się ponadto współczynnik mocy.

Obliczając koszt układu do regulacji prędkości przez włączanie oporności czynnej w obwód wtórny silnika pierścieniowego, do kosztu samego silnika należy dodać koszt oporników regulacyjnych. Ponieważ nie produkuje się w kraju seryjnie całych takich zestawów, przyjęto do obliczeń koszty oporników katalogowych najbardziej do tego celu przydatnych (rozzruszniki, regulatory napięcia). W wyniku otrzymano, że koszt takich oporników wyniesie średnio 60% kosztu silnika. Stosowane czasem do tego celu oporniki płynowe nie zapewniają pewnej i stabilnej regulacji. Regulowanie przy użyciu oporników stałych daje natomiast regulację niezupełnie ciągłą, a skokową.

Można więc przyjąć dla regulacji opornikami koszt całego urządzenia

$$K_R = 1,6K_{\text{pierśc.}} \quad (25)$$

4.4 Regulacja przez zmianę sprzężeń magnetycznych

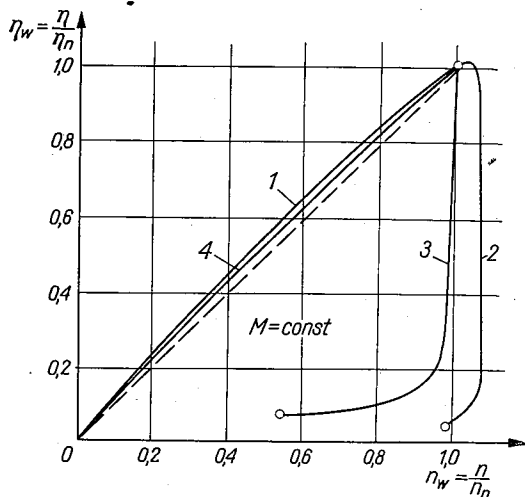
Regulacja tym sposobem wykorzystuje fakt, że moment elektromagnetyczny rozwijany przez maszynę zależy od sprzężenia magnetycznego uzwojenia pierwotnego z wtórnym. Zmieniając sprzężenie magnetyczne można więc wpływać w sposób ciągły na prędkość obrotową maszyny. Zmianę sprzężeń magnetycznych umożliwia specjalna konstrukcja silnika. Uzwojenie stojana takiego silnika rozdzielone jest na dwie części, przy czym jedna z tych części ma możliwość przesuwania się względem drugiej po obwodzie maszyny. Obie części uzwojenia stojana są połączone elektrycznie i przez zmianę wzajemnego położenia obu części zmienia się sprzężenie magnetyczne uzwojenia stojana jako całości z uzwojeniem wirnika. Regulacja tym sposobem została podana w [1], [2]. W zależności od sposobu zasilania takiego silnika (od strony stojana czy od strony wirnika) oraz łączenia ze sobą obu części uzwojenia stojana otrzymuje się różne zmiany charakterystyk mechanicznych podczas regulacji. Najkorzystniejsze okazuje się zasilanie od strony wirnika, przy którym zakres regulacji jest szeroki — od obrotów znamionowych, bliskich synchronicznemu do zera, a sprawność podczas regulacji korzystna.

Zmiany sprawności podczas regulacji obliczone i pomierzone eksperymentalnie na silniku doświadczalnym podane w [1] przedstawiają się jak na rys. 4. Krzywe 1, 2, 3 na tym rysunku podają zależności sprawności od prędkości obrotowej przy stałym momencie obciążenia kolejno dla zasilania od strony wirnika oraz szeregowego i równoległego zasilania od strony stojana, obliczone bez uwzględnienia strat w żelazie i mechanicznych. Krzywa 4 jest zależnością zdjętą eksperymentalnie dla zasilania od strony wirnika. Wiadocznym jest, że pominięcie strat w żelazie i mechanicznych nie wprowadza istotnych zmian co do charakteru przebiegu sprawności. Łatwo zauważyć, że regulacja przez zmianę sprzężeń magnetycznych może konkurować pod względem ekonomicznym z poprzednimi sposobami regulacji jedynie w przypadku zasilania od strony wirnika. Zakres regulacji jest w tym przypadku ponadto największy.

Koszt budowy silnika umożliwiającego regulację przez zmianę sprzężeń magnetycznych obliczono szczegółowo w analizie podanej w dodatku do pracy [1]. Analizę przeprowadzono w założeniu, że produkcja silników tego typu w danym wydziale wytwórni jest

jednakowo duża i odbywa się w jednakowych warunkach technologicznych co produkcja normalnych silników pierścieniowych. Dzięki temu można przyjmować jednakowe procentowe narzuty wydziałowe i administracyjne wchodzące w koszt silnika. W efekcie otrzymano, że koszt produkcji takiego silnika wynosi

$$K = 1,4K_{\text{pierśc.}} \quad (26)$$



Rys. 4. Zmiana sprawności w funkcji prędkości obrotowej przy regulacji przez zmianę sprzężeń magnetycznych

1 — zasilanie od wirnika, 2 — szeregowe zasilanie stojana, 3 — równoległe zasilanie stojana, 4 — zasilanie od wirnika (z pomiarów)

4.5. Regulacja przez ciągłą zmianę liczby par biegunów, lub długości podziałki biegunowej

Regulacja prędkości przez zmianę liczby par biegunów drogą przełączania uzwojeń w normalnym (wielobiegowym) silniku klatkowym, aczkolwiek najbardziej ekonomiczna, nie daje regulacji ciągłej, a skokami. Ostatnio podjęto na świecie próby zbudowania silników specjalnej konstrukcji, umożliwiających uzyskanie niecałkowitej liczby par biegunów, a nawet płynnej ich zmiany. Konstrukcje tych silników wywodzą się z koncepcji silnika z „łukowym” — niepełnym stojanem, zapoczątkowanej przez uczonych radzieckich (Szturman, Rezin, Aronow). Zadanie wykorzystania tej koncepcji dla celów ciągłej regulacji prędkości obrotowej podjęła grupa pracowników Uniwersytetu w Manchesterze pod kierunkiem prof. F. C. Williamsa, a wyniki ich pracy są interesujące i zachęcające.

Pierwszym rozwiązaniem był silnik o ukośnym kierunku przesuwania pola w stosunku do kierunku wirowania maszyny (silnik „bojerowy”). Silnik składa się z wirnika klatkowego specjalnej budowy (siatkowy), a stojan stanowią bloki z trójfazowymi uzwojeniami wytwarzające pole wirujące (wędrujące). Kierunek wędrówki pola można zmieniać przez obracanie bloków w stosunku do kierunku wirowania wirnika. W efekcie tego obracania na wirnik działa w kierunku wirowania pole o zmiennej długości podziałki biegunowej i prędkość synchroniczna zmienia się w sposób ciągły. Pierwszy model takiego silnika posiadał wirnik tarczowy [6], a następny w kształcie beczki — „sferyczny” [7]. Podobne

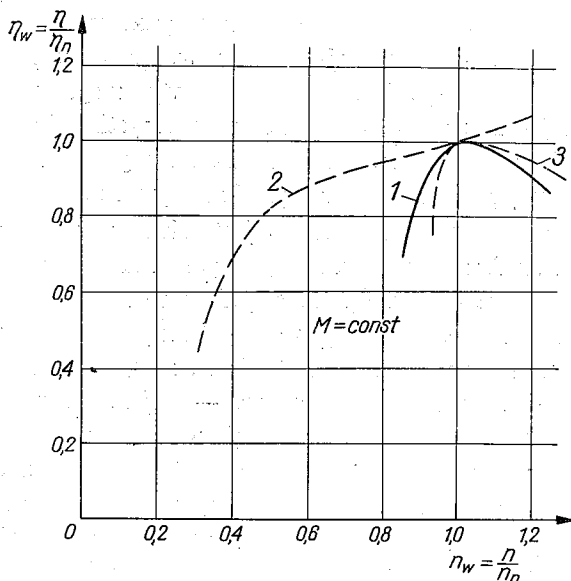
rozwiązanie podał również Gammal [4]. Ostatni model miał ponadto, w celu ograniczenia kąta skręcania, konstrukcyjnie narzucone wstępne skręcenie wykonane za pomocą ukośnych żłobków w bloku stojana [8]. Konstrukcja zarówno wirników, jak i stojanów silników „sferycznych” jest skomplikowana i trudna do wykonania. Występują w nich ponadto „straty brzegowe” od prądów płynących w wirniku w przestrzeniach pomiędzy blokami, które są bezużyteczne, gdyż nie wytwarzają momentów. Sprawności tych silników są więc niskie i malejące podczas regulacji. Aby ograniczyć straty brzegowe, należy dawać w blokach uzwojenia o dużej liczbie par biegunów; dlatego wszystkie silniki z łukowymi stojanami wykonane są jako wolnobieżne. Uzyskany zakres regulacji nie spełnił wyrażonych przez autorów w pierwszej pracy nadziei, nie przekraczając 1,5 : 1.

Innym rozwiązaniem tych samych autorów jest tak zwany „Logmotor” [9]. Składa się on ze specjalnego transformatora obrotowego i połączonego z nim silnika o specjalnej budowie. Transformator posiada uzwojenia stojana i wirnika rozłożone w ten sposób, że poskoki poszczególnych cewek wzrastają według funkcji logarytmicznej. Część obwodu powinna być nie zapełniona, aby strumienie resztkowe mogły się zamknąć. Transformator taki działa jak dwie skale suwaka logarytmicznego — to jest przez przesunięcie pierwotnego uzwojenia względem wtórnego „mnoży się” wielkość wejściową — ilość par biegunów. Wtórne uzwojenie transformatora jest wprost połączone z uzwojeniem stojana właściwego silnika, które jest również rozłożone logarytmicznie i dokonuje operacji odwrotnej do logarytmowania na wielkości wyjściowej transformatora. W efekcie otrzymuje się w silniku przepływy o zmiennej w sposób ciągły liczbie par biegunów, a więc prędkość synchroniczna pola zmienia się w sposób ciągły. Wirnik silnika jest normalnym wirnikiem klatkowym, a stojan — niepełny — łukowy ma również w celu zmniejszenia strat brzegowych dużą liczbę par biegunów. Uzyskuje się regulację ciągłą w dość dużych granicach (uzyskano 4 : 1), przy czym przebieg sprawności w czasie regulacji, chociaż opadający, jest korzystny. Zasada takiego silnika bardzo interesująca teoretycznie, ze względu na bardzo skomplikowaną budowę, na małe szanse na szersze zastosowanie.

Ostatnim silnikiem realizującym ciągłą regulację prędkości obrotowej na podobnej zasadzie jest silnik sterowany układem przesuwników fazowych [10]. Wykorzystano tu również zasadę ciągłej zmiany podziałki biegunowej zrealizowaną drogą zmiany fazy przepływów żłobkowych. Łukowy stojan tej maszyny posiada w żłobkach specjalnie rozłożone trzy trójfazowe uzwojenia, jedno zasilane wprost z sieci, a dwa pozostałe przez dwa przesuwniki fazowe o przeciwnych kątach przesunięć. Przy zmianie fazy przepływów w uzwojeniach zasilanych z przesuwników, kąty fazowe wypadkowych przepływów żłobkowych pomiędzy sąsiednimi żłobkami zmieniają się w sposób ciągły — zmienia się więc długość podziałki biegunowej i synchroniczna prędkość pola na obwodzie maszyny. Uzyskano ciągłą regulację prędkości w zakresie 1,5 : 1 przy sprawności podczas regulacji zmieniającej się podobnie jak przy silniku sferycznym. Wszelkie trudności związane ze stojanem łukowym i stratami brzegowymi występują w tym silniku podobnie jak i w poprzednich.

Rozpatrywanie zmian sprawności podczas regulacji dla tych sposobów regulacji drogą teoretycznych rozważań napotyka wielkie trudności i wykracza poza ramy niniejszej pracy. Podano tu jedynie zależności dla rozwiązań, dla których w literaturze istnieją dostateczne dane do ich uzyskania. Są to, ostatni wariant silnika „sferycznego” [8],

„Logmotor” [9] i silnik z regulacją kątów fazowych przepływów żłobkowych przez układ przesuwników fazowych [10]. Zmiany ich sprawności podczas regulacji przedstawiają krzywe na rys. 5. Należy dodać, że we wszystkich przypadkach krzywe te są tylko przy-



Rys. 5. Zmiana sprawności w funkcji prędkości dla: 1 — silnika sferycznego, 2 — „Logmotoru”, 3 — silnika z regulacją przesuwnikami fazowymi

bliżone, gdyż albo są podawane dla regulacji przy napięciu odpowiadającym każdorazowo optymalnej sprawności (dla Logmotoru), albo bez uwzględnienia strat mocy na przesuwnikach fazowych, bądź też dane są charakterystyki tylko dla trzech położen pracy (silnik „sferyczny”). Ponadto w rozwiązaniach tych przyjęcie prędkości znamionowej jest sprawą otwartą. Przy opracowywaniu przebiegów na rys. 5 przyjęto jako obroty znamionowe obroty przy zerowym położeniu urządzeń do zmiany prędkości.

Należy podkreślić, że we wszystkich trzech wypadkach wartości bezwzględne sprawności są stosunkowo niskie jak dla maszyn tej mocy, a zakresy regulacji, z wyjątkiem Logmotoru (dla którego uzyskano regulację 4 : 1) nie przekraczają 1,5 : 1. Wadą wszystkich tych rozwiązań jest również fakt, że mogą one być wykonywane tylko na niskie prędkości (duże liczby biegunów), w przeciwnym przypadku sprawności ich szybko maleją.

Dla silnika sferycznego został podany w dyskusji do artykułu Williamsa koszt takiego silnika w porównaniu z normalnym silnikiem klatkowym tej samej mocy jak 3,4 : 1. Wobec tego koszt silnika sferycznego będzie się kształtował

$$K_{sf} = 0,6 \cdot 3,4 K_{pierśc} = 2,04 K_{pierśc}. \quad (27)$$

Logmotor — składa się w zasadzie z dwóch oddzielnych maszyn — transformatora obrotowego o uzwojeniach rozłożonych logarytmicznie na stojanie i wirniku i właściwego silnika z logarytmicznie rozłożonym uzwojeniem na stojanie i wirnikiem klatkowym. Ponieważ zarówno stojan transformatora, jak i silnika są „łukowe”, to znaczy, obejmują

one tylko część obwodu wirnika (przerwa od 1/4 od 1/3 obwodu), to wykorzystanie ich przy tej samej mocy jest odpowiednio mniejsze. Dlatego przyjęto koszt ich zwiększyć o odpowiedni mnożnik $(1,5)^{3/4}$. Wykonanie uzwojenia rozłożonego według funkcji logarytmicznej jest bardzo trudne i pracochłonne. Aby to uwzględnić, przyjęto dla transformatora (dwa uzwojenia rozłożone logarytmicznie) mnożnik 1,5, a dla silnika (jedno uzwojenie rozłożone logarytmicznie) mnożnik 1,2. Koszt transformatora oszacowano więc

$$K_{TL} = (1,5)^{3/4} \cdot 1,5 \cdot K_{\text{pierśc}} \approx 2K_{\text{pierśc}},$$

a silnika (klatkowego)

$$K_{SL} = 0,6(1,5)^{3/4} \cdot 1,2K_{\text{pierśc}} \approx 1K_{\text{pierśc}},$$

stąd wynika całkowity koszt logmotoru

$$K_L = K_{TL} + K_{SL} = 3K_{\text{pierśc}}. \quad (28)$$

Przy obliczaniu kosztów budowy silnika z regulacją za pomocą przesuwników fazowych oprócz kosztu budowy samego skomplikowanego silnika trzeba uwzględnić koszt dwóch przesuwników fazowych. Sam silnik posiada wirnik klatkowy, a stojan o obwodzie magnetycznym łukowym (jak w logmotorze), na którym nawinięte są trzy uzwojenia trójfazowe rozłożone w sposób skomplikowany, stąd otrzymać można jego koszt

$$K_{s\theta z} = 0,6(1,5)^{3/4} \cdot 1,8K_{\text{pierśc}} \approx 1,5K_{\text{pierśc}}.$$

Przyjmując, że przesuwniki fazowe są na niepełną moc (0,6 mocy silnika) i są wykonane jak normalne silniki uzwojone, otrzyma się koszt dwóch przesuwników

$$K_{2 \times \text{przes}} = 2(0,6)^{3/4} K_{\text{pierśc}} = 1,36K_{\text{pierśc}},$$

a więc całkowity koszt tego urządzenia

$$K_{\theta z} = K_{s\theta z} + K_{2 \times \text{przes}} = 2,86K_{\text{pierśc}} \quad (29)$$

Otrzymane powyżej dane co do kosztów budowy poszczególnych układów obrazuje wykres poglądowy podany na rys. 6, na którym podano ponadto koszty budowy silnika komutatorowego prądu zmiennego, silnika Schragego i prostego układu Leonarda według danych z dyskusji do artykułu Williamsa [8].

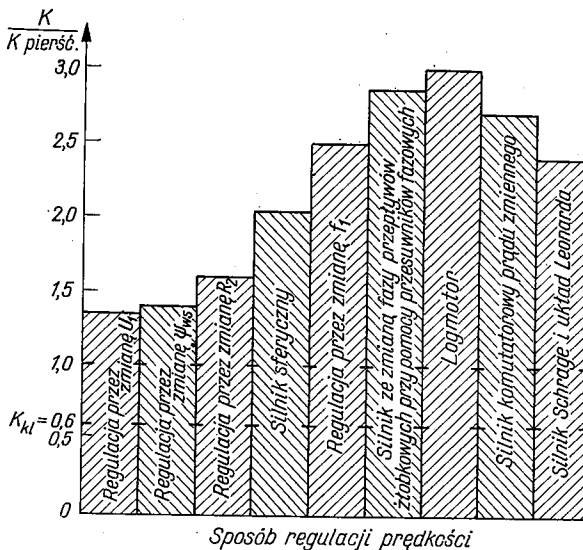
Z wykresu na rys. 6 jasno wynika, że pod względem kosztów budowy silnik z regulacją za pomocą zmian sprzężeń magnetycznych jest najtańszy biorąc pod uwagę jego duży zakres regulacji. Fakt, że wyniki powyższej analizy zostały osiągnięte drogą spekulacji szacunkowej nie powinien umniejszać ich końcowego efektu — dosyć jasnego uszeregowania kosztów budowy różnych sposobów ciągłej regulacji prędkości obrotowej. Wynikłe bowiem z takiego podejścia ewentualne pomyłki nie powinny być wielkie i nie wprowadzają istotnych zmian wyniku końcowego.

Aby wszystkie opisane tu sposoby regulacji można było porównać pod względem ich sprawności podczas regulacji, należy tak dobrać współczynniki k_n i k_m , aby sprowadzić przebiegi ich sprawności do wspólnego mianownika.

Ponieważ rozpatrywane maszyny są małe, o mocach od 1 kW do 10 kW, dlatego jako silnik odniesienia przyjęto silnik pierścieniowy 3,5 kW, $p = 2$. Wtedy $\eta_{np}(P_{od}) = 0,8$.

Dla sposobów regulacji, gdzie obiektem jest normalny silnik pierścieniowy, przyjęto do rozpatrywań oczywiście silnik o mocy odniesienia, a więc wszędzie tam współczynniki

k_m będą równe jedności. Również dla silnika z regulacją przez zmianę sprzężeń magnetycznych przyjęto współczynniki k_n i k_m — równe jedności, gdyż wykonanie takiej maszyny o sprawności równej sprawności normalnego silnika pierścieniowego jest zupełnie możliwe.



Rys. 6. Porównanie kosztów budowy silników i układów posiadających możliwość ciągłej regulacji prędkości obrotowej

Modele silników „sferycznego” i „Logmotoru” wykonane były na nieco różne moce niż silnik odniesienia, dlatego w tych przypadkach współczynniki k_m są różne od jedności.

Jeżeli chodzi o współczynnik k_n — korygujący ogólną sprawność układu, to w większości rozpatrywanych przypadków jest on różny od jedności. Dla regulacji przez zmianę częstotliwości przyjęto, że sprawność ogólna układu, uwzględniając sprawność przetwornicy częstotliwości i jej silnika napędowego (a więc trzech maszyn) oraz dodatkowych urządzeń zmienia się z wykładnikiem 2,5 w stosunku do sprawności normalnej pojedynczej maszyny pierścieniowej. Przyjęcie takie jest na pewno za łagodne, uwzględnia jednak fakt, że jako silnika przy tej regulacji można użyć silnika zwartego o nieco wyższej sprawności niż pierścieniowy

$$\eta_{nf1} = (\eta_{np})^{2,5},$$

stąd przy przyjęciu za $\eta_{np} = 0,8$

$$k_n = \frac{\eta_{nf1}}{\eta_{np}} = \frac{(\eta_{np})^{2,5}}{\eta_{np}} = (\eta_{np})^{1,5} = 0,8^{1,5} = 0,716.$$

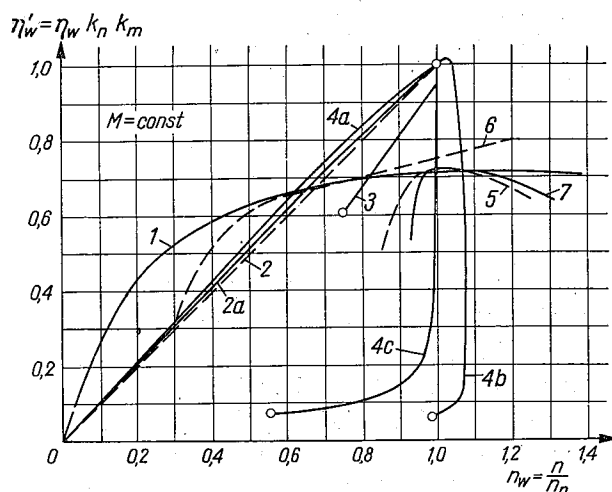
Przy regulacji napięciem zasilającym przyjęto zmniejszenie sprawności na straty w urządzeniu do regulacji o 5%, co również jest optymistyczne. Dla pozostałych rozwiązań przyjęto jako sprawności znamionowe sprawności podawane w literaturze dla zerowych położeń układów regulacyjnych.

W tablicy 1 podano współczynniki korygujące i znamionowe sprawności względne dla wszystkich rozpatrywanych tu sposobów regulacji.

Tabela 1

Lp.	Sposób regulacji	η_n	η_{np}	$\eta_{np}(P_{od})$	k_n	k_m	η'_{wn}
1	Regulacja przez zmianę f_1	0,573	0,800	0,8	0,716	1,000	0,716
2	Regulacja przez zmianę R_2	0,800	0,800		1,000	1,000	1,000
3	Regulacja przez zmianę U_1	0,760	0,800		0,950	1,000	0,950
4	Regulacja przez zmianę ψ_{ws}	0,800	0,800		1,000	1,000	1,000
5	Silnik „sferyczny”	0,630	0,830		0,760	0,964	0,732
6	„Logmotor”	0,550	0,765		0,718	1,045	0,752
7	Silnik z regulacją przesuwnikami fazowymi	0,571	0,800		0,714	1,000	0,714

Rysunek 7 przedstawia zależności sprawności ogólnych od prędkości obrotowej dla wszystkich omówionych tu sposobów regulacji, po uwzględnieniu współczynników korygujących, podczas regulacji przy stałym momencie.



Rys. 7. Zależności ogólnych sprawności od prędkości obrotowych dla różnych sposobów regulacji przy stałym momencie

1 — regulacja przez zmianę f_1 , 2 (2a) — regulacja przez zmianę R_2 , 3 — regulacja przez zmianę U_1 , 4a — regulacja przez zmianę ψ_{ws} (zasilanie od strony wirnika), 4b — regulacja przez zmianę ψ_{sw} (szeregowe zasilanie stojana), 4c — regulacja przez zmianę ψ_{sw} (równoległe zasilanie stojana), 5 — silnik sferyczny, 6 — „Logmotor”, 7 — silnik z regulacją przesuwnikami fazowymi

Widoczne jest, że dla zakresów regulacji do 0,6 prędkości znamionowej, sposób regulacji prędkości przez zmianę sprzężeń magnetycznych (dla zasilania od strony wirnika — krzywa 4a) jest ekonomiczniejszy nawet od regulacji częstotliwościowej (krzywa 1). Dla większych zakresów regulacja jest już mniej ekonomiczna, choć różnice są początkowo niezbyt duże. Można stąd wysnuć wniosek, że dla napędów urządzeń, które wymagają

regulacji w niewielkich granicach przez dłuższy okres czasu pracy i nawet dużych, ale krótkotrwałych obniżek prędkości sposób ten okazuje się najlepszy. Regulacja tym sposobem jest znacznie ekonomiczniejsza od regulacji napięciowej, która posiada ponadto ograniczony zakres zmian prędkości. Również silniki, które podane są krzywymi 5, 6 i 7 mają gorsze sprawności. Wyjątek stanowi tu „Logmotor” (krzywa 6), który przy wymaganej długotrwałej regulacji w dużym zakresie prędkości może okazać się korzystniejszy pod względem ekonomicznym. Wszystkie te trzy silniki mają tę wyższość, że posiadają (wprawdzie ograniczoną) możliwość regulacji w górę, jednak trudno tu powiedzieć, które obroty są tu znamionowe. Z drugiej strony wiadomo, że są to z zasady silniki wolnobieżne. Nawet więc przyjęcie maksymalnych osiągalnych prędkości jako znamionowych nie poprawi przebiegów ich sprawności w znaczny sposób.

Regulacja prędkości przez zmianę sprzężeń magnetycznych przy obu sposobach zasilania od strony stojana okazuje się mało ekonomiczna. Jedynie sposób szeregowego zasilania od strony stojana przy bardzo małych zakresach regulacji może się okazać przydatny dla specjalnych celów.

Dodać również warto, że przyjęta tu w celu ułatwienia porównań regulacja przy stałym momencie, stwarza pod względem kosztów eksploatacyjnych regulacji specjalnie trudne warunki.

Przy rozpatrywaniu napędu o innej zależności momentu od prędkości obrotowej, należy oczywiście odpowiednio wyprowadzić przebiegi sprawności względnych dla wszystkich branych pod uwagę rozwiązań i porównać je ze sobą.

5. WNIOSKI

Analizując przebiegi sprawności podczas regulacji prędkości obrotowej dla poszczególnych sposobów i koszty inwestycyjne związane z ich instalowaniem można scharakteryzować rozpatrywane przypadki pod względem ekonomicznym następująco.

— Regulacja przez zmianę częstotliwości zasilania posiada dobre charakterystyki zmian sprawności podczas regulacji w największym osiąganym zakresie zmian prędkości, jednak koszt zainstalowania urządzenia jest duży. Stosowanie tego sposobu powinno się więc ograniczać do napędów ważnych i wymagających dużych zakresów regulacji.

— Sposób regulacji prędkości przez włączanie oporności czynnych w obwód wtórny maszyny obok stosunkowo niskiego kosztu budowy posiada dość dobre przebiegi sprawności dla niewielkiego zakresu regulacji w dół. Dalsze rozszerzanie zakresu prędkości związane jest już z dużymi stratami. Układy takie powinny być stosowane bądź do napędów o regulacji w niewielkim zakresie, bądź do napędów małej mocy, gdzie straty związane z regulacją nie są duże.

— Regulacja prędkości przez zmianę napięcia zasilającego okazuje się najtańsza pod względem kosztów inwestycyjnych. Jej mały zakres i niskie sprawności ograniczają jednak w zasadzie stosowanie tego sposobu. Należy dodać, że dzięki stosowaniu do regulacji napięcia transduktorów regulacja ta jest łatwa do sterowania elektrycznego i zautomatyzowania. Fakt ten spowodował, że sposób ten rozpowszechnił się ostatnio — często w połą-

czeniu z regulacją oporową dla rozszerzenia zakresu. W tym przypadku jednak koszt urządzenia dość znacznie wzrasta.

— Silnik sferyczny tak pod względem kosztów budowy jak i eksploatacyjnych kosztów regulacji nie wydaje się rozwiązaniem godnym polecenia. Mały zakres regulacji i fakt, że maszyna może być tylko wolnobieżna dodatkowo ogranicza możliwości jego stosowania.

— Logmotor posiada zachęcające charakterystyki sprawności podczas regulacji i stosunkowo duży zakres zmian prędkości, jest jednak bardzo skomplikowany i przez to kosztowny.

— Silnik z regulacją przesuwnikami fazowymi podobnie jak silnik sferyczny ma niekorzystne charakterystyki sprawności i mały zakres regulacji, a jego koszt budowy jest jeszcze wyższy.

Sposób regulacji prędkości obrotowej przez zmianę sprzężeń magnetycznych ma w porównaniu z innymi rozwiązaniami regulacji dużo zalet. Zarówno jego koszty eksploatacyjne podczas regulacji, jak i koszty budowy okazują się korzystne na tle innych sposobów, przy stosunkowo dużym zakresie regulacji. Odnosi się to oczywiście do zasilania od strony wirnika, który to sposób zasilania wykazuje dobre charakterystyki sprawności podczas regulacji. Można więc przypuszczać, że silnik taki będzie konkurencyjną alternatywą dla wielu napędów wymagających ciągłej regulacji prędkości obrotowej.

Podany w artykule sposób postępowania umożliwia podjęcie decyzji przy wyborze optymalnego pod względem techniczno-ekonomicznym rozwiązania układu napędu przy wymaganej ciągłej regulacji prędkości obrotowej. Przeprowadzone porównania dają również pogląd co do przydatności rozpatrywanych sposobów ciągłej regulacji prędkości obrotowej przy regulacji ze stałym momentem obciążenia.

Instytut Automatyki PAN

WYKAZ LITERATURY

1. Borkowski J.: Ciągła regulacja prędkości obrotowej silnika indukcyjnego przez zmianę sprzężeń magnetycznych. Praca doktorska. Instytut Automatyki PAN, 1964.
2. Borkowski J.: Ciągła regulacja prędkości obrotowej silnika indukcyjnego przez zmianę sprzężeń magnetycznych. — *Rozprawy Elektrotechn.*, tom XIII, zeszyt 1, 1967, str. 3—74.
3. Булгakov A. A.: Частотное управление асинхронными электродвигателями. Izd. Akademii Nauk SSSR, Moskwa 1955.
4. Gamal A. M.: A Modified Adjustable-Speed Brushless Induction Motor. — *Transactions AIEE*, vol. 77, 1958, część III, str. 431.
5. Richter R.: *Elektrische Maschinen*, IV Teil. Verlag Birkhäuser, Basel-Stuttgart 1954.
6. Williams F. C., Laithwaite E. R.: A Brushless Variable-Speed Induction Motor. — *Proc. IEE*, vol. 102, 1955, część A, str. 203.
7. Williams F. C., Laithwaite E. R., Piggott L. S.: Brushless Variable-Speed Induction Motor. — *Proc. IEE*, vol. 104, 1957, część A, str. 102.
8. Williams F. C., Laithwaite E. R., Eastham J. F.: Development and Design of Spherical Induction Motors. — *Proc. IEE*, vol. 106, 1959, część A, str. 471.
9. Williams F. C., Laithwaite E. R., Eastham J. F., Piggott L. S.: The Logmotor — A Cylindrical Brushless Variable-Speed Induction Motor. — *Proc. IEE*, vol. 108, 1961, część A, str. 91.
10. Williams F. C., Laithwaite E. R., Eastham J. F., Farrer W.: Brushless Variable-Speed Induction Motor Using Phase-Shift Control. — *Proc. IEE*, vol. 108, 1961, część A, str. 100.

J. BORKOWSKI

COMPARISON OF VARIOUS METHODS OF STEPLESS SPEED CONTROL OF THE INDUCTION MOTORS FROM THE TECHNICAL AND ECONOMIC POINTS OF VIEW

Summary

Many of the modern alternating current electrical drives require a continual change of their rotational speed in the process of work. In working out general designs of these motors it is necessary to take into consideration—besides the technical aspects—also the economic factors. The article presents a method of procedure enabling to determine which of the methods of the stepless speed control is most advantageous from the technical and economic points of view. Discussed in the article are the investment costs connected with the installation of various solutions referring to this kind of electrical drive as well as the changes of efficiency occurring during the process of control, thus the changes in the exploitation costs.

There has been introduced here the concept of general relative efficiency shown by formula (3) which enables the comparison of various solutions of the stepless speed control.

Several of the conventional and of the new methods of obtaining the stepless speed control by the constant load torque have been compared and on the basis of these comparisons the method of procedure has been explained.

The diagram in Fig. 6 shows the construction costs and Fig. 7—the changes of efficiency in the process of the stepless speed control after the methods discussed here. In conclusion the author gives brief characteristics of the usefulness of the particular methods of control.

J. BORKOWSKI

LA COMPARAISON DES MÉTHODES DIFFÉRENTES DU RÉGLAGE COULANT DE LA VITESSE DE ROTATION DES MOTEURS ASYNCHRONES A L'ÉGARD TECHNIQUE ET ÉCONOMIQUE

Résumé

Beaucoup des commandes électriques contemporaines de courant alternatif exige le changement de leur vitesse de rotation pendant le travail. En projetant leur conception générale il faut considérer outre les possibilités techniques aussi les facteurs économiques. Dans l'article on a donné la méthode d'agir pour obtenir la décision juste, quelle solution du réglage coulant de la vitesse de rotation en utilisant des moteurs asynchrones est la plus commode à l'égard technique et économique. On a étudié également les frais d'aménagement liés à l'installation de différentes solutions techniques d'une telle commande, ainsi que les changements de l'efficacité de l'appareil au cours du réglage, c. à d. les changements des frais d'exploitation.

On a introduit la notion de l'efficacité générale relative évaluée par la formule (3), qui permet de comparer mutuellement les solutions différentes réalisant le réglage coulant de la vitesse de rotation.

On a comparé quelques classiques et quelques nouveaux moyens d'obtenir le réglage coulant de la vitesse de rotation à moment de charge constant et sur cet exemple on a expliqué la méthode d'agir. Le diagramme sur la fig. 6 donne les frais de construction et la fig. 7 présente les changements de l'efficacité au cours du réglage de la vitesse de rotation à l'aide des moyens considérés ci-dessus. Dans les conclusions on donne les caractéristiques concises de l'utilité des moyens particuliers du réglage.

J. BORKOWSKI

VERGLEICH VERSCHIEDENER METHODEN DER STUFENLOSEN DREHZAHLESTELLUNG DER INDUKTIONSMOTOREN IN TECHNISCHER UND ÖKONOMISCHER HINSICHT

Zusammenfassung

Viele neuzeitliche Wechselstrom elektroantriebe erfordern eine stufenlose Regelung ihrer Drehzahl während des Betriebes. Bei der grundsätzlichen Auslegung dieser Antriebe müssen neben den technischen Gesichtspunkten auch die ökonomischen Faktoren berücksichtigt werden. Der Artikel enthält die Handlungsweise bei Entscheidung welche Anordnung der stufenlosen Drehzahlregelung im Falle von Induktionsmotoren die vorteilhafteste, in technisch-ökonomischer Hinsicht, ist. Betrachtet wurden sowohl die Investitionskosten die mit der Anwendung verschiedener technischer Anordnungen dieses Antriebes verbunden sind, als auch die Änderungen des Wirkungsgrades während des Betriebes d.h. die Änderungen der Betriebskosten. Der Begriff des relativen Gesamt-Wirkungsgrades, nach Formel (3), wurde eingeführt zwecks Ermöglichung des Vergleiches verschiedener Anordnungen der stufenlosen Drehzahlregelung.

Einige herkömmliche und neuzeitliche Anordnungen welche die Erzielung einer stufenlosen Drehzahlregelung bei konstantem Lastmoment sichern, wurden verglichen und an Hand der letzteren Beispiele die Behandlungsweise des Problems erläutert. Das Diagramm Abb. 6, gibt die Anlagekosten und die Abb. 7 die Änderungen des Wirkungsgrades während der Drehzahlregelung nach den angeführten Methoden, an. Als eine Schlussfolgerung liefert der Verfasser kurze Charakteristiken der Anwendbarkeit der einzelnen Regelungsmethoden.

Е. БОРКОВСКИ

СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБОВ ПЛАВНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОЙ СКОРОСТИ АСИНХРОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ПО ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИМ СООБРАЖЕНИЯМ

Резюме

Многие современные электроприводы переменного тока требуют, чтобы их скорость вращения изменялась во время работы плавным образом. При проектировании их общей концепции надо принимать во внимание кроме технических возможностей также экономические факторы. В статье приведен метод действия при выборе решения о том, какой вариант плавной регулировки скорости вращения при использовании асинхронных двигателей является самым выгодным по технико-экономическим соображениям. Рассмотрены так инвестиционные издержки, связанные с установкой разных технических вариантов такого привода, как и изменения коэффициента полезного действия устройства во время регулирования, то есть изменения эксплуатационных затрат.

Введено понятие общего относительного коэффициента полезного действия системы, представленного формулой (3), которая даст возможность сравнивать друг с другом разные варианты, реализующие плавную регулировку скорости.

Проведено сравнение нескольких классических и нескольких новых способов получения плавной регулировки скорости при постоянном моменте нагрузки и на этом примере был выяснен метод действия. График на рис. 6 приводит издержки на построение, а рис. 7 изменение коэффициента полезного действия во время регулирования скорости вращения рассматриваемыми здесь способами. В выводах приведены краткие характеристики пригодности отдельных способов регулирования.

JANUSZ TUROWSKI

Uogólniona metoda obliczania strat rozproszeniowych w stalowych częściach konstrukcyjnych

Rękopis dostarczono 15.3.1967

W pracy [1] omówiono kilka metod obliczania strat w masywnych stalowych częściach konstrukcyjnych, wywołanych strumieniami rozproszenia, oraz podano szczególną metodę obliczania tych strat w ścianie stalowej w przypadku, gdy w pobliżu przebiegają szyny równoległe z prądem. Mimo wyraźnych postępów w tej dziedzinie problem opracowania ogólnej prostej metody, nadającej się do zastosowania w nieco bardziej skomplikowanych układach pozostaje nadal otwarty. Elektroniczne maszyny cyfrowe stworzyły obecnie nowe możliwości rozwiązania tego zagadnienia, bez cofania się przed żmudnymi i skomplikowanymi obliczeniami. Wykorzystując możliwości maszyn matematycznych możemy wyprowadzić wzory ogólne, a skomplikowane rachunki i całkowania przenieść do współczynników, które z dowolną praktycznie dokładnością mogą być obliczone przy pomocy maszyny cyfrowej. Praca niniejsza jest przykładem takiej metody.

METODA OGÓLNA

Obliczanie strat mocy i lokalnego nagrzewania w nieaktywnych masywnych stalowych częściach konstrukcyjnych umieszczonych w silnych polach elektromagnetycznych składa się z dwóch podstawowych zadań:

- 1) z wyznaczenia rozkładu pola magnetycznego na powierzchni ciała,
- 2) z obliczenia pola elektromagnetycznego i strat mocy czynnej i biernej w masie materiału.

Pierwsze zadanie z dostateczną dla praktyki dokładnością i dość łatwo może być rozwiązane metodą odbić zwierciadlanych, metodą Rotha lub metodą Rogowskiego. Znajdujemy w ten sposób rozkład składowej normalnej natężenia pola magnetycznego na powierzchni ciała od strony powietrza $H_{z0}(x, y)$, przy założeniu upraszczającym, że przenikalność stali jest nieskończenie duża w stosunku do przenikalności powietrza.

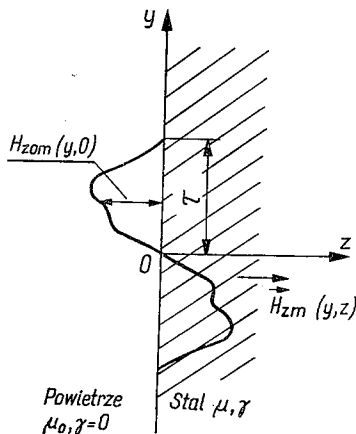
Trudniejszym na ogół zadaniem jest rozwiązanie podstawowych równań pola elektromagnetycznego:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad (1)$$

we wnętrzu stali z uwzględnieniem zmiennej przenikalności μ . To drugie zadanie jest głównym przedmiotem niniejszej pracy.

Zakładamy dla uproszczenia rozumowania, że wszystkie składowe pola są harmonicznymi funkcjami czasu $\underline{H}_m = H_m e^{j\omega t}$ i zmieniają się w przestrzeni tylko wzdłuż osi Y i Z (rys. 1). Ze względu na ciągłość strumienia wchodzącego do badanej części konstrukcyjnej funkcja rozkładu pola na powierzchni tej części ma z reguły charakter okresowy (rys. 1).

Przy dalszych obliczeniach zastosujemy półempiryczną metodę uproszczoną polegającą na tym, że wszystkie obliczenia prowadzimy wstępnie przy stałej przenikalności, a następnie



Rys. 1. Pole na powierzchni półprzestrzeni stalowej

przenikalność tę uśredniamy w końcowych wzorach teoretycznych. Metoda ta ma tylko częściowe uzasadnienie teoretyczne, jednakże często jest stosowana i daje poprawne wyniki. Wyniki te jednak trzeba zawsze sprawdzać doświadczalnie.

Z równań (1) drogą prostych przekształceń przy $\mu = \text{const}$ otrzymujemy dla wnętrza metalu równanie przewodnictwa:

$$\frac{\partial^2 H_{zm}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_{zm}}{\partial z^2} = \alpha^2 H_{zm}, \quad (2)$$

gdzie stałe $\alpha = \sqrt{j\omega\mu\gamma} = (1+j)k$ i $k = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}$

charakteryzują własności fizyczne stali.

Rozwiązując równanie (2) metodą rozdzielania zmiennych *Fouriera* [1], dla układu przedstawionego na rys. 1 otrzymamy:

$$H_{zm}(y, z) = \sum_{n=1}^m C_n \sin\left(n \frac{\pi}{\tau} y\right) \cdot e^{-\sqrt{\alpha^2 + \left(n \frac{\pi}{\tau}\right)^2} \cdot z}. \quad (3)$$

Na powierzchni, dla $z = 0$, równanie to przybiera postać:

$$H_{zm}(y, 0) = \sum_{n=1}^m C_n \sin\left(n \frac{\pi}{\tau} y\right) = \frac{\mu_0}{\mu} H_{zom}(y), \quad (4)$$

gdzie m odpowiada liczbie uwzględnionych harmonicznych rozkładu funkcji $H_{zom}(y)$ na szereg *Fouriera*.

Porównanie równań (3) i (4) wytycza drogę ścisłego rozwiązania matematycznego, polegającego na znalezieniu stałych C_n . Jednakże całkowanie funkcji $H_{zom}(y)$ w celu

znalezienia stałych C_n rozkładu (4) jest często zbyt trudne. Dlatego w praktyce można zastosować następujące uproszczenie.

Z reguły wystarczy uwzględnienie w analizie tylko kilku pierwszych harmonicznych rozkładu przestrzennego — od 1 do m . Wtedy na przykład dla wymiarów rzędu $\tau = 20$ cm i $m = 3$:

$$\left(m \frac{\pi}{\tau}\right)^2 = 0,22 \cdot 10^4 \frac{1}{\text{m}^2},$$

podczas gdy dla stali o parametrach fizycznych $\mu_r = 500$ do 1000 i $\gamma = 7 \cdot 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}}$, przy 50 Hz:

$$|\alpha^2| = \omega \mu \gamma = (140 \text{ do } 280) \cdot 10^4 \frac{1}{\text{m}^2}.$$

Nie ulega więc wątpliwości, że dla niezbyt wysokiego rzędu harmonicznych (np. $m \leq 5$) i dla wymiarów obiektu większych od kilku centymetrów można przyjąć z dostateczną dla celów technicznych dokładnością:

$$\sqrt{\alpha^2 + \left(n \frac{\pi}{\tau}\right)^2} \cong \alpha. \quad (5)$$

Dzięki temu czynnik wykładniczy we wzorze (3) można wynieść przed znak sumy otrzymując z (3) i (4) przybliżony wzór na pole w metalu:

$$H_{zm}(y, z) \approx \frac{\mu_0}{\mu} H_{zom}(y, 0) \cdot e^{-\alpha z}. \quad (6)$$

Z równań Maxwella dla $H_x = 0$, $E_y = E_z = 0$:

$$E_{xm} = j\omega\mu \int H_{zm}(y, z) dy + C = -j\omega\mu_0 e^{-\alpha z} \cdot F_y, \quad (7)$$

$$H_{ym} = -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_{xm}}{\partial z} = -\frac{\mu_0}{\mu} \alpha e^{-\alpha z} \cdot F_y = -(1+j)\mu_0 \sqrt{\frac{\omega\gamma}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu}} \cdot F_y \cdot e^{-\alpha z}, \quad (8)$$

gdzie

$$F_y = - \int H_{zom}(y, 0) \cdot dy + C. \quad (9)$$

Stałą C wyznaczamy z warunków granicznych dla zadanego rozkładu pola na powierzchni.

Występującą we wzorze (8) przeliczoną przenikalność w postaci $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ wyeliminujemy wprowadzając aproksymację odpowiednio przeliczonej charakterystyki magnesowania stali w postaci [1]:

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} = A_1 + A_2 \sqrt{\mu} |H_{ym}|, \quad (10)$$

gdzie zgodnie z [1] $A_1 = 14 \sqrt{\frac{\text{Am}}{\text{Vs}}}$ i $A_2 = 0,13 \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$.

Po podstawieniu (10) do (8) otrzymamy po przekształceniach:

$$H_{ym} = \frac{H_{ym}}{\frac{1}{\sqrt{\mu}}} (A_1 + A_2 \sqrt{\mu} |H_{ym}|) = -(1+j)e^{-\alpha z} \mu_0 \sqrt{\frac{\omega\gamma}{2}} \cdot F_y (A_1 + A_2 \mu_0 \sqrt{\omega\gamma} F_y \cdot e^{-kz}). \quad (11)$$

Straty mocy czynnej i pobór mocy biernej na jednostkę powierzchni ciała równają się wektorowi Poyntinga na powierzchni, wyznaczonemu ze wzorów (7) i (8):

$$|\underline{S}_{z=0}| = \frac{1}{2} E_{xm}^* \cdot \underline{H}_{ym} = (1-j) \frac{\mu_0^2 \omega \sqrt{\omega\gamma}}{2\sqrt{2}} (A_1 F_y^2 + A_2 \mu_0 \sqrt{\omega\gamma} F_y^3). \quad (12)$$

Straty mocy czynnej i pobór mocy biernej na jeden okres 2τ i na jednostkę długości badanego elementu wzdłuż osi X wynoszą:

$$\underline{P}_{s1} = \int_{-\tau}^{\tau} \underline{S}_{z=0} dy = (1,4 - 0,8j) \omega \sqrt{\omega\gamma} (a_1 + a_2 \sqrt{\omega\gamma}), \quad (13)$$

gdzie:

$$a_1 = \frac{A_1 \mu_0^2}{2\sqrt{2}} \int_{-\tau}^{\tau} F_y^2 dy, \quad (13a)$$

$$a_2 = \frac{A_2 \mu_0^3}{2\sqrt{2}} \int_{-\tau}^{\tau} F_y^3 dy. \quad (13b)$$

Współczynniki 1,4 i 0,8 we wzorze (13) są liczbami przybliżonymi, uwzględniającymi w sposób wypadkowy wpływ zmienności przenikalności magnetycznej w głąb stali i wpływ strat histerezowych na straty mocy czynnej i pobór mocy biernej.

Współczynniki a_1 i a_2 są łatwe do obliczenia przy prostym rozkładzie pola $H_{zom}(y, 0)$ na powierzchni. Przy bardziej złożonym rozkładzie pola całkowanie metodami klasycznymi jest zbyt trudne, by wzory (13) mogły mieć znaczenie praktyczne, całkowanie zaś graficzne [1] jest zbyt uciążliwe i niezbyt dokładne. Dopiero zastosowanie elektronicznych maszyn liczących pozwala dość szybko i z dużą dokładnością obliczyć współczynniki a_1 i a_2 .

WZORY OGÓLNE W PRZYPADKU SINUSOIDALNEGO ROZKŁADU POLA NA POWIERZCHNI STALI

Założmy, że rozkład składowej normalnej natężenia pola magnetycznego na powierzchni płyty stalowej (rys. 2) wyraża się wzorem:

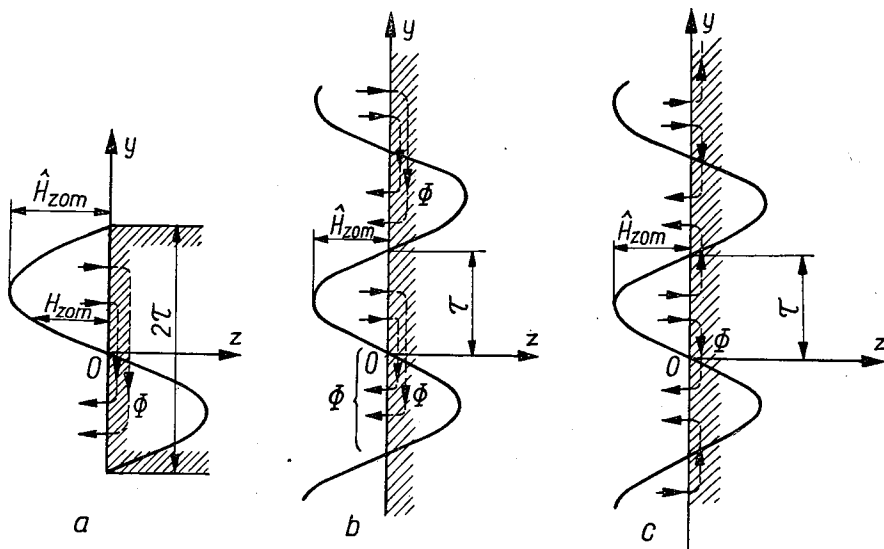
$$H_{zom}(y, 0) = \hat{H}_{zom} \sin \frac{\pi}{\tau} y. \quad (14)$$

Zgodnie ze wzorem (9):

$$F_y = - \int H_{zom}(y, 0) \cdot dy + C = -\hat{H}_{zom} \int \sin \frac{\pi}{\tau} y \cdot dy + C = \frac{\tau}{\pi} \hat{H}_{zom} \cos \frac{\pi}{\tau} y + C. \quad (15)$$

Wartość składowej stałej C we wzorze (15) zależy od warunków granicznych. Rozróżnić tu możemy 4 charakterystyczne przypadki (rys. 2):

Przypadek a. Badany element ma skończony wymiar w kierunku osi y (szyna stalowa), równy założonemu okresowi rozkładu przestrzennego pola 2τ , a cały strumień



Rys. 2. Typowe przypadki rozkładu składowej normalnej pola H_{zom} na powierzchni półprzestrzeni stalowej

Φ wnikający do stali zamyka się w obrębie tego okresu (rys. 2a). Zgodnie z tym założeniem można przyjąć dla obszaru $y \geq \tau$ i $y \leq -\tau$, że składowe pola równają się tam $H_{zom}(y, 0) = H_{ym} = 0$. Ze wzoru (8) wynika zatem dla tego obszaru $F_y = 0$, a ze wzoru (9): $C = 0$.

Podstawiając wyrażenie (15) do wzorów (13a) i (13b), po prostym całkowaniu otrzymamy:

$$a_1 = \frac{A_1 \mu_0^2 \tau^2}{2\sqrt{2}\pi^2} \hat{H}_{zom}^2 \int_{-\tau}^{\tau} \cos^2 \frac{\pi}{\tau} y \cdot dy = \frac{A_1 \mu_0^2 \tau^3}{2\sqrt{2}\pi^2} \hat{H}_{zom}^2,$$

$$a_2 = \frac{A_2 \mu_0^3 \tau^3}{2\sqrt{2}\pi^3} \hat{H}_{zom}^3 \int_{-\tau}^{\tau} \cos^3 \frac{\pi}{\tau} y \cdot dy = 0.$$

Podstawiając z kolei otrzymane współczynniki do wzoru (13) otrzymamy moc pozorną pobieraną przez stalową część (rys. 2a) na jednostkę jej długości:

$$\underline{P}_{s1} = (1,4-0,8j) \frac{A_1 \mu_0^2 \tau^3}{2\sqrt{2}\pi^2} \omega \sqrt{\omega \gamma} \cdot \hat{H}_{zom}^2. \quad (16)$$

Przypadek b. Powierzchnia stalowa jest nieskończenie rozległa w kierunku osi y , rozkład pola powtarza się okresowo, a strumień zamyka się w obrębie okresu 2τ (rys. 2b).

Stałą C we wzorze (15) można wyznaczyć przyrównując strumień wchodzący do stali na przestrzeni półokresu τ do strumienia w stali przy $y = 0$:

$$\Phi_z(z = 0) = \mu_0 \int_0^{\tau} H_{zom}(y, 0) \cdot dy = \frac{2\mu_0\tau}{\pi} \hat{H}_{zom}, \quad (17)$$

$$\Phi_y(y = 0) = \mu \int_0^{\infty} H_{ym}(y = 0) \cdot dz = \mu_0 \alpha F_y(y = 0) \int_0^{\infty} e^{-\alpha z} dz = \mu_0 \left(\frac{\tau}{\pi} \hat{H}_{zom} + C \right). \quad (18)$$

Przyrównując (17) do (18) otrzymamy:

$$\frac{2\tau}{\pi} \hat{H}_{zom} = \frac{\tau}{\pi} \hat{H}_{zom} + C, \quad \text{skąd} \quad C = \frac{\tau}{\pi} \hat{H}_{zom}.$$

$$\text{Zatem } F_y = \frac{\tau}{\pi} \hat{H}_{zom} \left(\cos \frac{\pi}{\tau} y + 1 \right).$$

Zgodnie z (13a) i (13b):

$$a_1 = \frac{A_1 \mu_0^2 \tau^2}{2\sqrt{2} \pi^2} \hat{H}_{zom}^2 \int_{-\tau}^{\tau} \left(\cos \frac{\pi}{\tau} y + 1 \right)^2 dy = \frac{3A_1 \mu_0^2 \tau^3}{2\sqrt{2} \pi^2} \hat{H}_{zom}^2, \quad (19)$$

$$a_2 = \frac{A_2 \mu_0^3 \tau^3}{2\sqrt{2} \pi^3} \hat{H}_{zom}^3 \int_{-\tau}^{\tau} \left(\cos \frac{\pi}{\tau} y + 1 \right)^3 \cdot dy = \frac{5A_2 \mu_0^3 \tau^4}{2\sqrt{2} \pi^3} \hat{H}_{zom}^3. \quad (20)$$

Po podstawieniu (19) i (20) do (13) otrzymamy moc pozorną pobieraną przez powierzchnię stalową (rys. 2b) na okres 2τ i jednostkę długości wzdłuż osi X :

$$P_{s1} = (1,4 - 0,8j) \frac{3\mu_0^2 \tau^3}{2\sqrt{2} \pi^2} \omega \sqrt{\omega \gamma} \cdot \hat{H}_{zom}^2 \left(A_1 + \frac{5\mu_0}{3\pi} \sqrt{\omega \gamma} A_2 \tau \hat{H}_{zom} \right). \quad (21)$$

Przypadek c. Powierzchnia stalowa nieskończenie rozległa w kierunku osi y , rozkład pola powtarza się okresowo, a strumień wchodzący do stali rozchodzi się w obie strony symetrycznie (rys. 2c).

Stałą C we wzorze (15) można wyznaczyć przyrównując tym razem strumień wnikaący na przestrzeni ćwiartki okresu $\tau/2$ do strumienia w stali w punkcie $y = 0$. Zmieniając zatem górną granicę w całce (17) na $\tau/2$ i przyrównując ją do (18), otrzymamy:

$$\hat{H}_{zom} \left[-\frac{\tau}{\pi} \cos \frac{\pi}{\tau} y \right]_0^{\tau/2} = \frac{\tau}{\pi} \hat{H}_{zom} + C, \quad \text{skąd} \quad C = 0.$$

Postępując dalej analogicznie jak w przypadku (a) stwierdzimy, że pobór mocy pozornej przez powierzchnię stalową (rys. 2c) na jeden okres 2τ i jednostkę długości wzdłuż osi X wyraża się wzorem (16). Okazuje się, że przy obliczeniach teoretycznych można układ rzeczywisty z rys. 2a zastępować układem teoretycznym z rys. 2c, podobnie jak to uczynił Markwardt [2].

Przypadek d. Układ jest analogiczny jak na rys. 2c z tym, że fala składowej normalnej natężenia pola magnetycznego na powierzchni stali H_{zom} biegnie w kierunku osi y z jednostajną prędkością $\frac{\omega\tau}{\pi}$.

Chwilowa wartość natężenia pola magnetycznego w dowolnym miejscu na osi y , przy polu biegnącym, wyraża się wzorem:

$$H_{zo}(y, 0) = \hat{H}_{zom} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau} y\right). \quad (22)$$

Chwilowa zaś wartość przy polu nieruchomym w przestrzeni, ale oscylującym w czasie, zgodnie z (14) wyraża się wzorem:

$$H_{zo}(y, 0) = \hat{H}_{zom} \cos \omega t \cdot \sin \frac{\pi}{\tau} y. \quad (23)$$

Stosunek średnich strat mocy czynnej na jeden okres czasowy $T = \frac{2\pi}{\omega}$ i jeden okres przestrzenny (podwójną podziałkę biegunową) 2τ wynosi zatem:

$$\frac{P_{bieg.}}{P_{osc.}} = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} \hat{H}_{zom}^2 \cos^2\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau} y\right) dt \cdot dy}{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} \hat{H}_{zom}^2 \cos^2 \omega t \cdot \sin^2 \frac{\pi}{\tau} y \cdot dt \cdot dy} = 2, \quad (24)$$

gdzie $P_{bieg.}$ — straty przy polu biegnącym i $P_{osc.}$ — przy polu oscylującym.

Wzoru (16) można więc używać także do obliczania liniowych silników indukcyjnych, napędzających masywne ciało stalowe (np. szynę), mnożąc przez 2 moc obliczoną przy pomocy wzoru (16). Takie same zastosowania może mieć wymieniony wzór do obliczania mocy pola wirującego w silnikach indukcyjnych z masywnym wirnikiem stalowym (niekończenie długim).

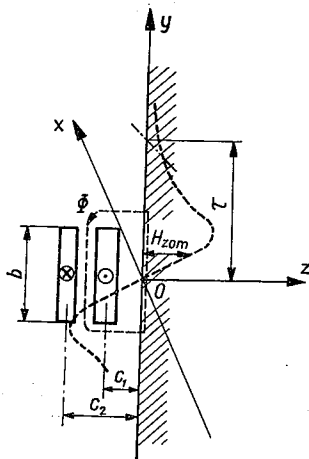
MASZYNOWE OBLICZENIE STRAT MOCY W PŁYCIE STALOWEJ UMIESZCZONEJ W POLU SZYN RÓWNOLEGLYCH

Rozpatrzmy obecnie nieco bardziej złożony układ, w którym współczynniki a_1 i a_2 do wzoru (13) należało obliczać przy pomocy elektronicznej maszyny cyfrowej. Zagadnienie to zostało w zasadzie rozwiązane w pracy [1], jednakże brak wówczas łatwego dostępu do maszyn matematycznych zmusił autora do zastosowania żmudnej metody graficznej, co odbiło się na znacznym ograniczeniu liczby, zakresu i dokładności obliczonych wartości. Obecnie ten problem nie istnieje.

Zadanie 1., znalezienia rozkładu pola $H_{zom}(y, 0)$ na powierzchni stali dla pary szyn (rys. 3), rozwiązano metodą odbicia zwierciadlanego [1]:

$$H_{zom}(y, 0) = \eta \frac{\sqrt{2} I}{2\pi b} \left[\ln \frac{c_1^2 + (y+b/2)^2}{c_1^2 + (y-b/2)^2} - \ln \frac{c_2^2 + (y+b/2)^2}{c_2^2 + (y-b/2)^2} \right], \quad (25)$$

gdzie: $\eta = \frac{1+i_r/i}{2} \leq 1$ — współczynnik uwzględniający nieidealne odbicie prądu w powierzchni stali wskutek skończonej przenikalności magnetycznej i reakcji prądów wirowych; i_r — prąd odbity ($i_r \leq i$).



Rys. 3. Schemat rozkładu pola magnetycznego szyn równoległych na powierzchni nieskończenie rozległej płyty stalowej

Zadanie 2., obliczenie mocy, rozwiążemy obecnie w następujący sposób.

Przy nieskończenie rozległej płycie stalowej rozkład pola (25) przypomina początkowo odkształcony przebieg sinusoidalny, jednakże nie ma on drugiego węzła na osi y (rys. 3), lecz — od pewnej małej wartości poczynając — zbliża się asymptotycznie do osi y . Straty mocy na powierzchni stali należy więc obliczać przy pomocy wzorów (13), (13a) i (13b), ale nie w granicach od $-\tau$ do $+\tau$, lecz od $-\infty$ do $+\infty$.

Podstawiając (25) do równania (9) i stosując regułę *de L'Hospitala* stwierdzimy [1], że przy $y \rightarrow \infty$ pierwszy składnik prawej strony równania (9) dąży do zera. Ponieważ jednocześnie przy $y \rightarrow \infty$ natężenie pola elektrycznego E_{xm} (7) musi dążyć do zera, wobec tego $F_y \rightarrow 0$, a więc stała $C = 0$.

Dokonując zamiany zmiennej: $\xi = \frac{y+b/2}{c_1}$ w tak otrzymanym wzorze na F_y (9), po kilku przekształceniach mamy:

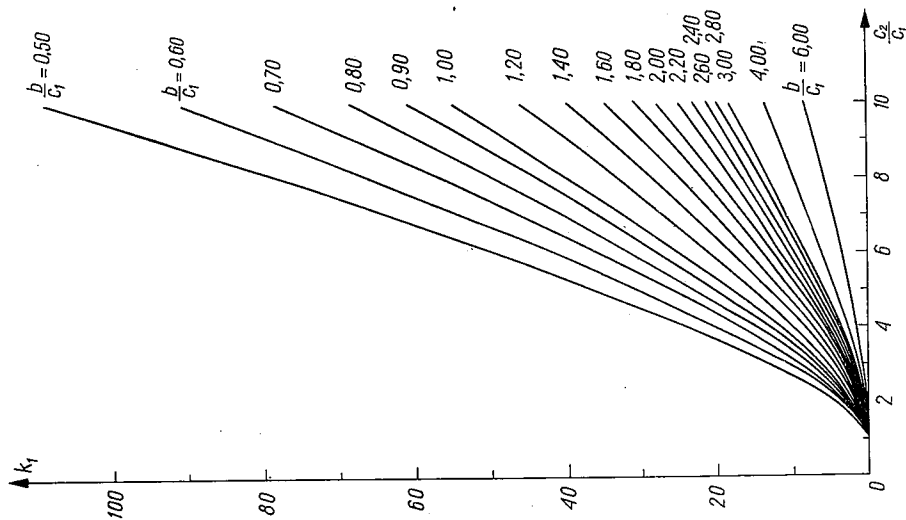
$$F_y = \eta \frac{\sqrt{2} I}{2\pi b} c_1 [f(\xi - b/c_1) - f(\xi)], \quad (26)$$

gdzie

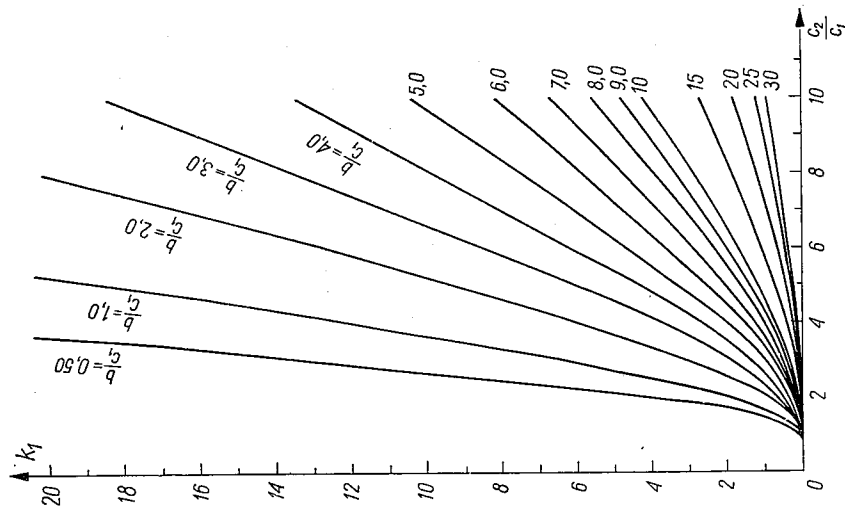
$$f(\xi) = \xi \ln \frac{1+\xi^2}{(c_2/c_1)^2 + \xi^2} + 2 \arctg \xi - 2 \frac{c_2}{c_1} \arctg \frac{c_2}{c_1} \xi.$$

Całkowita moc pozorną pobieraną przez płytę stalową na jednostkę długości wzdłuż osi X , obliczona wzorem (13), wyraża się wzorem [1]:

$$\underline{P}_{st} = (1,4 - 0,8j) \frac{\mu_0^2 \omega \sqrt{\omega \gamma}}{2\sqrt{2} \pi^2} b \eta^2 I^2 \left(A_1 k_1 + A_2 \frac{\mu_0 \sqrt{\omega \gamma}}{\sqrt{2} \pi} \eta k_2 \right), \quad (27)$$



Rys. 4. Wykres współczynnika geometrycznych proporcji szyn k_1

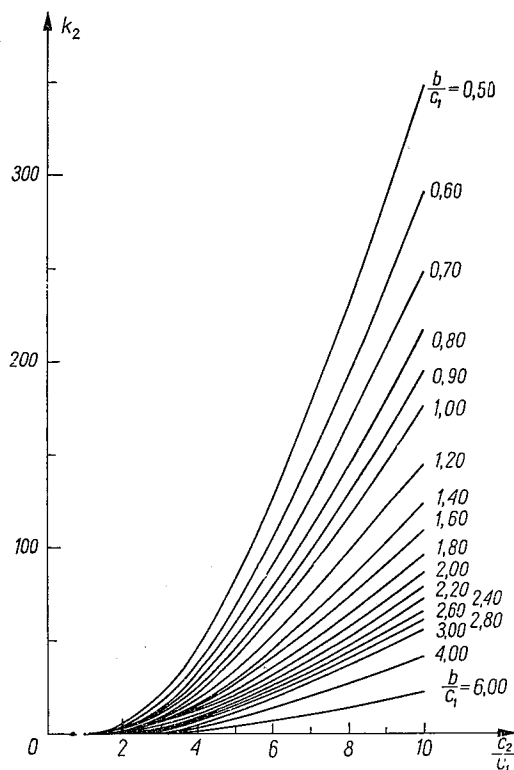


Rys. 5. Wykres współczynnika geometrycznych proporcji szyn k_1

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{(b/c_1)^3} \int_{b/2c_1}^{\infty} \left[f\left(\zeta - \frac{b}{c_1}\right) - f(\zeta) \right]^2 d\zeta, \\ k_2 &= \frac{1}{(b/c_1)^4} \int_{b/2c_1}^{\infty} \left[f\left(\zeta - \frac{b}{c_1}\right) - f(\zeta) \right]^3 d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Współczynniki k_1 i k_2 ze względu na złożoność funkcji podcałkowych obliczono przy pomocy elektronicznej maszyny cyfrowej „ZAM-2 Beta” metodą numeryczną stosując kwadraturowy wzór *Gaussa*. Ponieważ całki oznaczone k_1 i k_2 mają granicę niewłaściwą, zbadano przedtem przebieg funkcji podcałkowych i ustalono (ograniczono) górną granicę całkowania. Następnie metodą *Gaussa*, przy pomocy bibliotecznego podprogramu Kat.



Rys. 6. Wykres współczynnika geometrycznych proporcji szyn k_2

Mechaniki Technicznej P. Ł. obliczono całki (28). Obliczenia wykonano dla różnych wartości $b/c_1 = 0,5 \dots 30$ i $c_2/c_1 = 1$ — co 0,5 do 10.

Część wyników podano wykreślnie na rys. 4, 5, 6 i 7.

Podstawiając wartości liczbowe na stałe A_1 , A_2 i μ_0 oraz przyjmując współczynnik odbicia $\eta = 0,8$ otrzymujemy ostatecznie:

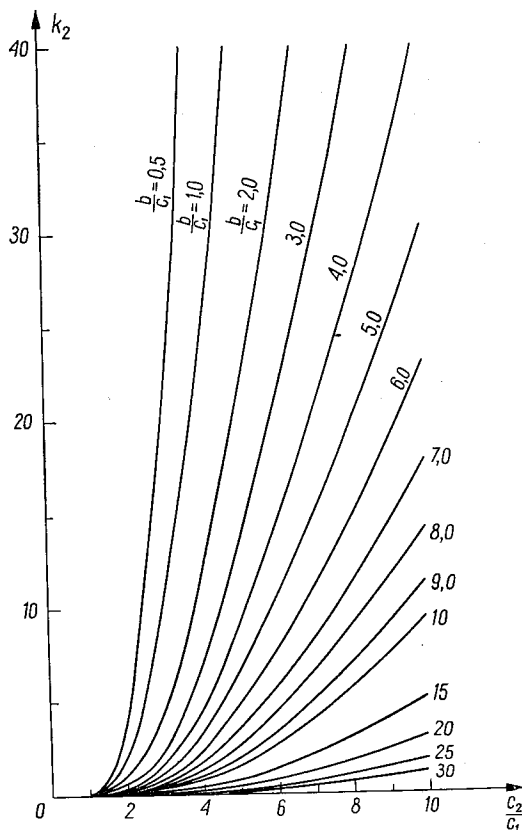
— straty mocy czynnej w masywnej płycie w W/m:

$$P_1 = 1,12 \cdot 10^{-11} b f \sqrt{f\gamma} I^2 (k_1 + 5,3 \cdot 10^{-9} k_2 \sqrt{f\gamma} I), \quad (29)$$

— pobór mocy biernej przez płytę w var/m:

$$Q_1 = 0,64 \cdot 10^{-11} b f \sqrt{f\gamma} I^2 (k_1 + 5,3 \cdot 10^{-9} k_2 \sqrt{f\gamma} I). \quad (30)$$

(Wszystkie jednostki według układu „SI”).



Rys. 7. Wykres współczynnika geometrycznych proporcji szyn k_2

Wzór (29) został sprawdzony doświadczalnie w pracy [1] i kilku innych. Należy jednak zaznaczyć, że współczynnik odbicia może w pewnych warunkach być mniejszy niż przyjęta wartość 0,8 i wtedy zmierzone straty mogą wypaść nieco mniejsze od obliczonych tym wzorem.

Jak wynika z wyprowadzonych wzorów (16), (21) i (27), wykładnik potęgi przy prądzie lub natężeniu pola magnetycznego, jak już wspomniano przy innej okazji w pracy [3], zależy od konfiguracji pola na powierzchni i może być w pewnych przypadkach równy 2 [wzór (16)], a w innych — większy od 2 [wzory (21) i (27)]. Pełne wyjaśnienie tego za-

gadnienia ma istotne znaczenie dla badania wielkich maszyn elektrycznych i transformatorów przy prądzie mniejszym od znamionowego [3].

Na zakończenie autor pragnie podziękować pani mgr inż. L. Pasikowskiej za opracowanie programu i przeprowadzenie obliczeń na elektronicznej maszynie cyfrowej.

Politechnika Łódzka

Katedra Maszyn Elektrycznych i Transformatorów

WYKAZ LITERATURY

1. Turowski J.: Metody obliczania strat dodatkowych wywołanych polem rozproszenia w transformatorze. — *Rozprawy Elektrotechn.*, t. VIII, z. 4, 1962, str. 563—599.
2. Markwardt J. G.: *Elektromagnitnyje rasczoty transformatorow*. Moskwa 1938, str. 91—136.
3. Jezierski E., Turowski J.: Dependence of Stray Losses on Current and Temperature. CIGRE, XX Session, 1964, Report 102, str. 1—13.

J. TUROWSKI

THE GENERALIZED METHOD OF THE CALCULATION OF STRAY LOSSES IN SOLID STEEL ELEMENTS

Summary

In recent years several important works were published referring to the question of stray losses in a simple massive steel elements, but the problem of evaluating power loss in some more complicated structures remains open and is ever-present in any field of electrical engineering. Electronic computers are giving new ways of resolving various problems mentioned above. The proposed generalised method of evaluation of losses in steel plates placed in the given external field or in the presence of an alternating current carrying bus-bars is the next step in comparison with the previous works.

The calculation of stray losses in massive steel elements consists, in general, of two fundamental problems: 1) evaluation of electromagnetic field on the surface of a steel plate, and 2) evaluation of electromagnetic field and power loss inside steel.

The first problem can be solved with the aid of the mirror reflection method. In this way we can evaluate the cross-component (normal-component) of the magnetic field on the steel plate surface. $H_{zom}(y, 0)$ — Fig. 1. The more complicated problem is to solve the fundamental Maxwell equations when the variability of the magnetic permeability is taken into account. Therefore, to simplify the calculation, the permeability will be initially assumed to be constant, and taken into account only later. This method is quite involved and only an approximation, but is often used and has found an application in many works. The solution obtained in this way be corrected by the introduction of constant coefficients: ca. 1,4 — for active power loss and ca. 0,8 — for reactive power loss (see 13).

From the equations (1) a partial differential equation (2) is obtained. Using the Fourier method in solving the equation (2) the field intensity (3) — inside the steel, and (4) — on the surface, is obtained, where m is the order of the highest considered harmonic of the field $H_{zom}(y, 0)$ on the surface. The constants C_n can be formed by analysing the function $H_{zom}(y, 0)$ into a series. But the integration of the function H_{zom} in order to find the coefficients of the series becomes often involved. This may be simplified when (5) is assumed. It follows from the assumption, that only harmonics of the lower order may be considered in the analysis, neglecting the higher harmonics, not only because being the lowest, but also because the influence of the field rapidly decreases due to the increase of the power exponent in formula (3).

Due to the homogeneity of the system in the direction of the X axis the only remaining components of the field are H_{zm} (6), E_{xm} (7) and H_{ym} (8).

In order to eliminate the permeability μ in the Formula (8) the actual magnetizing curve for steel is recalculated and expressed by approximation (10), where A_1 and A_2 are determined constants from the actual magnetizing curve.

The Poynting vector on the surface ($z = 0$), which represents the distribution of the power losses on the surface OXY is (12), where F_y is the function of the place and geometrical arrangements of the exciting current or distribution of the field intensity on the surface (9).

In order to find the total losses per one space period 2τ , and per unit length in the direction of the X axis, the expression (12) must be integrated according to dy in the limits $\mp \tau$.

The coefficients a_1 (13a) and a_2 (13b) are easy to calculate when the field distribution is of the sine form (see 16, 19, 20, 21). As a result, the formula (16) for the active and reactive power loss per geometrical period and unit length in the X direction corresponds to the field distribution shown in Fig. 2a and 2c. The formula (21) corresponds to the Fig. 2b. The losses at the running or rotating field are two times higher (24) than at the oscillating one.

In the final part of the paper the computer calculation of losses in steel plate due to a bus-bars has been made.

Owing to the complicated subintegral function (25) which also contains a number of variable parameters, an electronic digital computer method of the calculation of coefficients a_1 and a_2 (13) was used. The coefficient η in the formula (25) is the coefficient of decrease of the current due to the partial reflection and displacement in phase of the reflected currents. At the field distribution (25) the Poynting vector (12) must be integrated in the limits $\mp \infty$. Consequently the total apparent power loss per unit length in the direction of the X axis are (27). The integrals (28) have been calculated numerical on the electronic computer with the aid of the Gauss quadratic formula, in the limits of the geometrical proportions of the bus-bars $b/c_1 = 0,5 \dots 30$ and $c_2/c_1 = 1 \dots 10$ (Fig. 3). The calculated factors k_1 and k_2 are given in Figs. 4, 5, 6 and 7. When the constants μ_0 , A_1 and A_2 is substituted and $\eta = 0,8$ assumed it follows finally formulae (29) — for active power loss and (30) — for reactive power loss.

The results obtained from the check by experiments as compared with the calculated results of the unit losses (per length) in the steel plates due to the stray flux were given in papers [1] and [3], made with the aid of graphical solution without the application of an electronic computer.

J. TUROWSKI

LA MÉTHODE GÉNÉRALISÉE DE CALCULER DES PERTES DE DISSIPATION DANS LES PARTIES D'ACIER DES CONSTRUCTIONS

Résumé

Malgré de l'accomplissement dans les années dernières d'un nombre certain des travaux sur le calcul des pertes de puissance dans les parties massives d'acier des constructions, il n'y a pas jusqu'au présent des élaborations synthétiques quelconques. La majorité des travaux concerne des cas particuliers simples qu'on a traités des manières différentes. Le problème de calculer des pertes de puissance dans les schémas un peu plus compliqués, de la manière générale, reste toujours ouvert en dépit qu'il appartient toujours au problèmes les plus importants dans de plusieurs domaines de l'électrotechnique. Les calculatrices digitales électroniques ont ouvert les nouvelles possibilités à présent à la méthode générale des calculs.

Dans l'oeuvre on a proposé une telle méthode généralisée de calculer les pertes de la puissance active et passive dans les plaques massives d'acier situées dans le champ extérieur normal donné ou tout près des rails conduisant le courant alternatif.

L'essentiel de la méthode c'est la dérivation de la formule générale (13), dans laquelle les coefficients a_1 et a_2 , dépendant de la configuration du champ extérieur, sont séparés sous la forme des formules intégrales particulières (13a et 13b). On peut résoudre ces intégrales ou approximativement, en remplaçant la distribution du champ extérieur par une fonction légèrement intégrable, par ex. une sinusoïde (formule

14), ou encore effectuer l'intégration numérique, avec une exactitude pratiquement à volonté, à l'aide d'une calculatrice électronique digitale (formules 28 et figures 4 à 7).

Un tel schéma de calcul correspond à la voie normale de calculer les pertes de puissance dans les parties massives d'acier des constructions utilisant les méthodes de l'électrodynamique. Ce calcul se compose de deux partis essentiels:

1) de la détermination de la distribution de l'intensité du champ magnétique sur la surface du corps étudié et

2) du calcul du champ électromagnétique et des pertes de la puissance active et passive dans l'intérieur du matériel.

Le premier problème détermine les conditions indispensables de côté pour celui le second. Ce pourquoi on peut réduire le problème 2 à la formule générale (13), et le problème 1 — les conditions de côté — aux formules auxiliaires (13 a et 13b), considérant le caractère spécifique du schéma.

On peut résoudre le problème 1 à l'aide de la méthode des réflexions miroir du courant dans la surface de l'acier. On détermine de cette manière la composante normale de l'intensité du champ magnétique sur la surface de l'acier $H_{zom}(y, 0)$ — fig. 1.

Une tâche en général plus difficile constitue la solution des équations du champ électromagnétique (1) considérant la perméabilité magnétique variable de l'acier. Dans l'oeuvre on a employé une méthode connue simplifiée, consistante à effectuer tous les calculs en acceptant premièrement la perméabilité constante et seulement dans les formules finales à considérer la variabilité de μ en employant pour les changements le long de la surface — une approximation analytique (formule 10), ainsi que pour les changements le fond du métal — les coefficients constants: env. 1, 4 — pour la puissance active et env. 0,8 — pour la puissance passive. Cette méthode à moitié empirique demande la vérification expérimentale des résultats. Il faut ajouter, que toutes les études expérimentales précédentes confirmaient la justice de cette méthode [1].

Des équations (1) on a obtenu l'équation (2) et ensuite, utilisant la méthode de Fourier à la resoudre, on a obtenu l'intensité du champ magnétique (5) — dans l'intérieur de l'acier et (4) — sur sa surface de côté de l'acier, avec cela m c'est le numéro de la plus haute de considérées harmoniques du champ $H_{zom}(y, 0)$ à la surface. Les constantes C_n on peut déterminer en distribuant la fonction $H_{zom}(y, 0)$ en série de Fouriers. Mais l'intégration de cette fonction pour déterminer les coefficients C_n de série est souvent difficile. On peut simplifier cette tâche en acceptant la simplification (5). Elle résulte de principe, qu'aux études il suffit à l'ordinaire considérer seulement les harmoniques plus basses, en faisant abstraction des harmoniques plus hautes. Car celles-ci sont non seulement en général beaucoup plus petites, mais aussi leur influence sur le champ entier diminue vite à cause de l'accroissement de leur exposant de puissance dans la formule (3).

Acceptant l'uniformité du schéma envers l'axe X , on obtient comme les composantes uniques du champ dans le métal H_{zm} (6), E_{xm} (7) et H_{ym} (8).

Pour éliminer la perméabilité μ de la formule (8) on a converti la caractéristique réelle de magnétisation $B = f(H)$ de l'acier sur $\frac{1}{\sqrt{\mu}} = f(H)$ et présenté à l'aide de l'approximation analytique (10), ou A_1 et A_2 ce ont les constantes de l'approximation.

La formule (12) présente le vecteur de Poyntig à la surface, exprimant la distribution des pertes de puissance sur la surface OXY . La fonction F_y (9), qui se trouve dans cette formule, constitue la fonction de l'emplacement et de la distribution géométrique du courant excitant ou de la distribution du champ magnétique sur la surface.

Pour déterminer les pertes totales de puissance sur un période spatial 2τ et sur l'unité de la longueur le long de l'axe X il faut intégrer la formule (12) à dy dans l'interv. $\mp \tau$. Les coefficients a_1 et a_2 (13 a et 13b) on peut calculer sans difficulté en cas de la distribution sinusoïdale du champ (regarder les formules 16, 19, 20, 21 et fig. 2). En résultat de ces calculs on a obtenu les formules de la puissance apparente, correspondant à la distribution du champ donnée sur la figure 2a et 2c — formule (16) et sur la fig. 2b — formule (21).

Les pertes de la puissance en cas du champ courant ou tournoyant sont deux fois (24) plus grandes que dans le cas du champ oscillant.

Dans la dernière partie du travail on a présenté la méthode de calculer à l'aide de la calculatrice les pertes de la puissance dans une plaque d'acier posée dans le champ des rails parallèles. À cause de la forme compliquée de la fonction sousintégrale (25), qui contient encore quelques paramètres variables à calculer les coefficients a_1 et a_2 (13a et 13b), on a appliqué une calculatrice digitale ZAM-2 BETA. Le coefficient η dans la formule (25) c'est le coefficient de la diminution du courant calculé à cause de non complète réflexion miroir du courant alternatif dans la surface massive de l'acier. Dans le cas (25) de cette distribution du champ sur la surface le vecteur de Poynting (12) doit être intégré dans l'intervalle $\mp \infty$. En résultat les pertes de la puissance apparente sur l'unité de la longueur des rails s'expriment par la formule (27). Les intégrales (23) ont été calculé à l'aide d'une calculatrice électronique digitale dans les limites des proportions géométriques des rails $b/c_1 = 0,5 \dots 30$ et $c_2/c_1 = 1 \dots 10$ (fig. 3). On a calculé les coefficients k_1 et k_2 , qui sont présentés sur les figures de 4 à 7.

On a placé dans (27) les constantes μ_0 , A_1 et A_2 et en acceptant $\eta = 0,8$ on a obtenu enfin les formules: (29) — les pertes de la puissance active et (30) — la puissance passive. La formule (29) a été vérifiée expérimentalement dans l'oeuvre [1], où le calcul a été effectué graphiquement sans utiliser la calculatrice. Il faut souligner, que dans de certains cas le coefficient de réflexion peut résulter plus petit que la valeur acceptée 0,8. Ce cas est encore l'objet des études, qui continuent.

J. TUROWSKI

DIE ALLGEMEINE METHODE DER BERECHNUNG DER WIRBELSTROMVERLUSTE IN MASSIVEN KONSTRUKTIONSEISENTEILEN

Zusammenfassung

Die Berechnung der Leistungsverluste und lokalen Erwärmung in inaktiven Stahlkonstruktionsteilen die der Wirkung starker elektromagnetischer Felder ausgesetzt sind, besteht aus zwei grundsätzlichen Aufgaben: 1) der Bestimmung der Verteilung des magnetischen feldes (Abb. 1, 2 und 3) auf der Oberfläche der Metallteile, und 2) der Berechnung der Wirk — und Blindverluste in der Masse des Metalls.

Die erste Aufgabe kann ziemlich einfach und mit für praktische Zwecke genügender Genauigkeit durch Anwendung der Spiegelabbildungsmethode gelöst werden. Viel schwieriger ist die Lösung der Maxwellgleichungen im Innern des Eisens bei der Berücksichtigung der veränderlichen Permeabilität.

Die Feldkomponenten im Metall (6), (7), (8) wurden zuerst aus der Differentialgleichung (2) unter der Annahme der konstanten Permeabilität ermittelt. Nachher wurde in den erhaltenen Formeln die Veränderlichkeit der Permeabilität unter der Anwendung der Aproximation (10) und der halbempirischen Neiman — Koeffizienten berücksichtigt. Als Ergebnis erhielt man die allgemeine formel (13) zur Berechnung der Wirk- und Blindleistungsverluste, bezogen auf ein räumliche Period 2τ und die Längeneinheit des betrachteten Feldes längs der X — Achse.

Die Koeffizienten a_1 (13a) und a_2 (13b) können bei sinusförmigen Verteilung (Abb. 2) der Feldstärke $H_{zom}(y, 0)$ leicht berechnet werden. Die Formel (16) gilt für Verteilung nach dem Abb. 2a und Abb. 2c, und die Formel (21) — für Abb. 2b.

Bei der mehr komplizierten- verzerrten Form der Verteilungskurve $H_{zom}(y, 0)$ bietet jedoch die Integration nach den klassischen Methoden allzu grosse Schwierigkeiten, als dass die erhaltenen Formeln irgendeine praktische Bedeutung haben könnten. Erst die Anwendung von Digitalrechenmaschinen bot die Möglichkeit, die genannten Koeffizienten a_1 und a_2 schnell und mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen.

Nachstehend wird ein Beispiel der maschinellen Berechnung der Wirbelstromverluste in einer Stahlplatte, die im Feld zwei parallel liegenden Schienen untergebracht wurde.

Aufgabe 1. Das Schienenpaar, zusammen mit seinen Spiegelbild (Abb. 3) bildet ein Vierschienenensystem, für welches man nach der Superpositionsmethode die Feldstärkeverteilung $H_{zom}(y, 0)$ auf der Oberfläche der Stahlplatte (25) findet [1].

Aufgabe 2. Aus der Formeln (13) erhält man: Formel (29) — als Wirkleistungsverluste in der massiven Platte, und Formel (30) — als Blindleistungsverluste.

Die Koeffizienten k_1 und k_2 werden mit Rücksicht auf die verwickelte Form der unter dem Integral (28) stehenden Funktionen mit der elektronischen Digitalcomputer unter der Verwendung der quadratischen Gaussformel berechnet. Die Berechnungen wurden für verschiedene Abmessungen der Schienen b/c_1 und c_2/c_1 ausgeführt. Ein Teil der Ergebnisse ist graphisch in der Abb. 4, 5, 6 und 7 angegeben.

Я. ТУРОВСКИ

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПОТЕРЬ РАССЕЯНИЯ В СТАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИЙ

Резюме

Помимо выполнения в последние годы ряда работ по вопросам расчета потерь мощности в массивных стальных конструкционных элементах, до сих пор нет синтетических разработок проблемы. Большинство работ относится к простым отдельным случаям, к которым применялись различные способы подхода. Проблема общего метода расчета потерь мощности в несколько более сложных системах остается открытой, несмотря на то, что принадлежит она всё еще к важнейшим во многих отраслях электротехники. Электронные вычислительные машины открыли теперь новые возможности развития общего метода расчета.

В работе предлагается такой обобщенный метод расчета потерь активной и реактивной мощности в массивных стальных плитах, помещенных во внешнем известном магнитном поле или вблизи шин с переменным током. Сущностью метода является вывод общей формулы (13), в которой зависимые от конфигурации внешнего поля коэффициенты a_1 и a_2 (13 а и б) выделены в виде отдельных интегральных формул. Интегралы эти можно решить или приближенно — заменяя действительное распределение внешнего поля легко интегрирующейся функцией, напр. синусоидой (формула-14), или же — можно провести численное интегрирование с практически любой точностью, с помощью электронной вычислительной машины дискретного действия (формулы 28 и рис. 4, 5, 6, 7).

Такая схема расчета вполне соответствует обычному ходу расчета потерь мощности в стальных элементах конструкций по методам электродинамики. Расчет этот состоит из двух основных задач:

- 1) из расчета распределения магнитного поля на поверхности исследуемого элемента, и
- 2) из расчета электромагнитного поля и потерь активной и реактивной мощности в массе материала.

Первая задача определяет необходимые граничные условия для второй задачи. Таким образом, задачу 2 можно свести к общей формуле (13), а задачу 1 — граничные условия — к вспомогательным формулам (13 а и б), учитывающим специфические особенности системы.

Задача 1 может быть решена с помощью метода зеркальных изображений тока в поверхности стали. Таким образом получают нормальную составляющую напряжения магнитного поля на поверхности стали $H_{zom}(y, 0)$ — рис. 1.

Более трудной, в общем случае, является задача решения основных уравнений электромагнитного поля (1) с учетом переменной магнитной проницаемости стали. В работе применялся известный упрощенный метод состоящий в том, что все расчеты проводились предполагая постоянную проницаемости и только в конечных формулах учитывалось, что μ переменная, при чем для изменений её вдоль поверхности применялась аналитическая аппроксимация (формула 10), а для изменений вглубь металла — постоянные коэффициенты, ок. 1,4 — для активной мощности и ок. 0,8 — для реактивной. Такой метод можно считать полумпирическим и он требует экспериментальной проверки конечных результатов. Следует добавить, что все предыдущие экспериментальные исследования подтвердили правильность этого метода [1].

Из уравнений (1) было получено уравнение (2), а затем решая его методом Фурье — была получена напряженность магнитного поля (3) — внутри стали, и (4) — на её поверхности со стороны стали, где m -порядок самой высокой из учитываемых гармоник поля $H_{zom}(y, 0)$ на поверхности. Постоянные C_n можно определить развивая в ряд Фурье функцию $H_{zom}(y, 0)$. Однако же

это интегрирование часто затруднительно. Вопрос можно упростить, принимая допущение (5). Вытекает оно из положения, что при исследованиях обычно достаточно учесть лишь гармоники низших порядков, пренебрегая высшими гармониками, т. к. высшие гармоники поля не только обычно много меньше низших, но и влияние их на все поле быстро падает ввиду увеличения показателя степени в формуле (3).

Принимая, что система однородна по отношению оси X , мы получим в качестве составляющих только $H_{zm}(6)$, $E_{xm}(7)$ и $H_{ym}(8)$.

С целью исключить проникаемость μ из формулы (8) мы пересчитаем действительную характеристику намагничивания стали $B = f(H)$ на $\frac{1}{\mu} = f(H)$ и представим её с помощью аналитической аппроксимации (10), где A_1 и A_2 — постоянные аппроксимации.

Формула (12) представляет вектор Пойнтинга на поверхности, выражающий распределение потерь мощности на поверхности OXY . Выступающая в этой формуле функция $F_y(9)$ — является функцией места и геометрического распределения тока возбуждения или распределения магнитного поля на поверхности.

С целью найти общие потери мощности в один пространственный период 2τ и на единицу длины вдоль оси X , выражение (12) следует интегрировать по dy в пределах $\mp\tau$.

Коэффициенты a_1 и a_2 (13 а и б) рассчитываются легко в случае синусоидального распределения поля (см. 16, 19, 20, 21 и рис. 2). В результате этих расчетов были получены формулы соответствующие распределению поля, представленному на рис. 2 а и 2 с — формула (16) и на рис. 2 в — формула (21).

Потери мощности при бегущем поле и вращающемся поле в 2 раза (24) больше чем при переменном поле.

В последней главе статьи приводится метод машинного расчета потерь мощности в стальной плите помещенной в поле параллельных шин.

Из-за сложной формы подинтегральной функции (25) к расчету коэффициентов a_1 и a_2 (13 а и б) применялась электронная вычислительная машина дискретного действия ZAM-2BETA.

Коэффициент η в формуле (25) является коэффициентом уменьшения тока из-за неполного зеркального изображения действительного тока в поверхности массивной стали.

При таком распределении поля на поверхности (25) вектор Пойнтинга (12) следует интегрировать в пределах $\pm\infty$.

В результате, потери кажущейся мощности на единицу длины шин выражаются формулой (27). Интегралы (28) были рассчитаны численно, с помощью электронной вычислительной машины в пределах геометрических соотношений шин $b/c_1 = 0,5...30$ и $c_2/c_1 = 1...10$ (рис. 3). Расчитанные коэффициенты k_1 и k_2 представлены на рис. 4, 5, 6 и 7.

Подставляя в (27) постоянные μ_0 , A_1 и A_2 , а также полагая $\eta = 0,8$ были получены формулы: (29) — для активных потерь мощности и (30) — для реактивной мощности.

Формула (29) была проверена экспериментально в работе [1], где расчеты проводились графически, без применения вычислительной машины.

Следует отметить, что в некоторых случаях коэффициент неполного зеркального изображения η может быть несколько меньше принятой величины 0,8.

Wytyczne dla autorów

Komitet Redakcyjny prosi autorów o ułatwienie prac redakcyjnych związanych z przygotowaniem do druku nadesłanych artykułów przez przestrzeganie następujących wytycznych przy przygotowaniu maszynopisu:

1. Prace powinny być napisane pismem maszynowym, na pojedynczych arkuszach formatu A4, jednostronnie, z podwójną interlinią (co drugi wiersz), z marginesem szerokości ok. 3,5 cm z lewej strony. Stronice numerowane. Artykuły należy nadsyłać w dwu egzemplarzach (oryginał i pierwsza kopia na papierze maszynowym).

2. Wzory i oznaczenia należy wpisywać ręcznie, czytelnie, używając jedynie liter łacińskich i greckich. Wskaźniki niżej liter i wykładniki potęg należy pisać szczególnie dokładnie i wyraźnie. Numery wzorów należy umieszczać z prawej strony.

3. Każda praca powinna być zaopatrzona w streszczenie w języku polskim objętości do jednej strony maszynopisu oraz w cztery streszczenia w językach angielskim, francuskim, niemieckim i rosyjskim, z których dwa (w dowolnych językach) mogą być dłuższe, np. objętości 1 strony na każde 20 stron tekstu, dwa zaś krótsze, objętości 10—20 wierszy maszynopisu. W razie niemożności nadesłania streszczeń w językach obcych autor dostarcza odpowiedniki w języku polskim, do każdego języka oddzielny, podając niezbędną do wykonania tłumaczenia obcojęzyczną terminologię.

4. Rysunki, wykresy i zdjęcia należy wykonywać na oddzielnych arkuszach z podaniem kolejnych numerów rysunków. W tekście i na marginesie, obok właściwego tekstu, należy podać jedynie odnośny numer rysunku. Natomiast pożądane jest zaopatrywanie rysunków w krótki podpis wyjaśniający również wtedy, gdy rysunek omówiony jest w tekście. Ostateczne wykonanie rysunku obowiązuje Redakcję.

5. Wszystkie rysunki, wykresy i zdjęcia należy nazywać w tekście rysunkami (skrót: rys.) i nie stosować takich określeń, jak figura, szkic, rycina, fotografia. U samego dołu rysunku (a przy fotografiach na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, napis pod rysunkiem, tytuł pracy i nazwisko autora.

6. Wszystkie tablice (unikać zbyt dużych), podobnie jak rysunki, należy wykonywać na oddzielnych arkuszach i numerować kolejno liczbami arabskimi. U góry każdej tablicy podać tytuł (napis objaśniający). Wszelkie zestawienia należy nazywać tablicami (nie tabelami).

7. Po zakończeniu artykułu należy podać wykaz literatury, wymieniając w następującej kolejności: nazwisko autora i pierwsze litery imion, po czym po dwukropku pełny tytuł dzieła lub artykuł, tytułu czasopisma, tom, numer zeszytu, rok i miejsce wydania oraz ewentualnie numer strony. Pozycje wykazu powinny być ponumerowane, w tekście — powołania na numer pozycji w nawiasach prostokątnych, na przykład [3].

8. Redakcji przysługuje prawo do przeprowadzenia korekty stylistycznej i do dostosowania oznaczeń oraz układu pracy do norm przyjętych w „Rozprawach”.

9. Autora obowiązuje korekta autorska, którą należy zwracać w ciągu trzech dni. W korekcie autorskiej nie mogą być wprowadzane żadne poprawki tekstu złożonego uprzednio w maszynopisie, które mogłyby spowodować konieczność przełamywania składu drukarskiego.

10. Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egzemplarzy odbitek jego pracy. Dodatkowe egzemplarze autor może zamówić w Redakcji na własny koszt przy przysyłaniu maszynopisu swej pracy.

11. Niezastosowanie się autora do powyższych wytycznych pociągnie za sobą konieczność potrącenia z honorarium autorskiego kosztów związanych z doprowadzeniem dostarczonych przez autora materiałów do wymaganej formy.

INSTYTUT TECHNOLOGII ELEKTRONOWEJ
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XIV · ZESZYT 2

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1968

RADA REDAKCYJNA

PROF. TADEUSZ CHOLEWICKI, PROF. BOLESŁAW DUBICKI, PROF. BOLESŁAW KONORSKI,
PROF. STANISŁAW RYŻKO, PROF. TADEUSZ ZAGAJEWSKI

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor Naczelny

PROF. WITOLD NOWICKI

Sekretarz

JULIUSZ MIERZEJEWSKI

ADRES REDAKCJI

*Warszawa, Politechnika, Plac Jedności Robotniczej 1
Katedra Teletransmisji Przewodowej, Gmach Elektroniki,
pokój 483, tel. 21-007 w. 794*

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

Warszawa, Miodowa 10

Nakład 670 (539+131)	Oddano do składania 24.I. 1968 r.
Ark. wyd. 19,0; ark. druk. 14,0	Podpisano do druku w czerwcu 1968 r.
Papier druk. sat. kl. III, 80 g, 70×100	Druk ukończono w czerwcu 1968 r.
Zamówienie nr 226/68	Cena zł 40.— N-25

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

JERZY OSIOWSKI

Rachunek operatorowy w dziedzinie dystrybucji

Rękopis dostarczono 16.10.1967

W pracy przedstawiono podstawowe problemy rachunku operatorowego w dziedzinie dystrybucji. Po krótkim wstępie i wprowadzeniu w zagadnienia teorii dystrybucji w ujęciu ciągowym i w ujęciu funkcjonalnym (p. 2—5) podano w p. 6—8 najważniejsze definicje, twierdzenia i właściwości dotyczące dystrybucyjnego przekształcenia Laplace'a, przy czym za podstawę rozważań przyjęto definicję przekształcenia Laplace'a dystrybucji podaną przez Doleżala [19]. W dalszej części pracy (p. 9—13) omówiono szereg różnorodnych problemów z zakresu równań różniczkowych i teorii układów liniowych, w których metoda dystrybucyjnego przekształcenia Laplace'a znajduje istotne zastosowania. Do problemów tych należą m. in.: rozwiązywanie równań różniczkowych liniowych w dziedzinie dystrybucji, zagadnienia spłotu i rozwiązywanie dystrybucyjnych równań spłotowych, wyznaczanie dystrybucji odwrotnych, badanie pewnych właściwości czwórników liniowych o transmitancjach wymiernych oraz zagadnienia związane z uogólnieniem twierdzenia Brune'a dotyczącego immitancji dwójników pasywnych.

W zakończeniu (p. 14—16) omówiono krótko inne, znane w literaturze sposoby wprowadzania przekształcenia Laplace'a w dziedzinie dystrybucji oraz porównano je z ujęciem przedstawionym w niniejszej pracy. W szczególności wykazano, że w zakresie dystrybucji równych zeru w przedziale $(-\infty, 0)$ definicje przekształcenia Laplace'a podane przez Schwartza [21] i Doleżala [19] są w pełni równoważne. Wyniki te mają znaczenia unifikujące i umożliwiają stworzenie jednolitego poglądu na problemy rachunku operatorowego w dziedzinie dystrybucji, które, jak dotąd, są przez różnych autorów przedstawiane bardzo różnorodnie.

1. WSTĘP

Celem niniejszej pracy¹⁾ jest przedstawienie w skrócie aktualnego stanu wiedzy w zakresie uogólnionego na dziedzinę dystrybucji rachunku operatorowego, omówienie jego znaczenia w teorii obwodów elektrycznych oraz wskazanie niektórych jego zastosowań, wykraczających poza klasyczne ramy. Pod pojęciem „uogólnionego rachunku operatorowego” lub „dystrybucyjnego rachunku operatorowego” (w skrócie: DRO) będziemy rozumieli takie uogólnienie klasycznego rachunku operatorowego, aby z zachowaniem wszystkich swoich podstawowych właściwości działał on jednakowo sprawnie zarówno w dziedzinie funkcji, jak i w dziedzinie dystrybucji²⁾.

Celowość takiego uogólnienia jest m. in. szczególnie wyraźna w teorii elektrycznych obwodów liniowych lub — ogólniej — w teorii systemów liniowych, w której wiele pojęć

¹⁾ Praca ta jest rozszerzeniem referatu wygłoszonego przez autora w ramach Sympozjum „Nowoczesne metody matematyczne w elektrotechnice”, zorganizowanego we wrześniu 1966 r. w Mielnie przez Oddział Warszawski PTETiS.

²⁾ Autor z konieczności zakłada, iż czytelnikowi znane są główne pojęcia i zasady teorii dystrybucji (czyli teorii funkcji uogólnionych), podane w licznych publikacjach podstawowych i popularyzatorskich, [1], [2], [3], [4], [5] rozdz. 5, [6], [7].

i zagadnień (choćby związanych z tzw. odpowiedzią impulsową) wyraźnie „przerasta” klasyczną analizę matematyczną i wymaga poprawnego sformułowania w kategoriach teorii dystrybucji. Z drugiej strony właśnie w teorii systemów liniowych rachunek operatorowy znalazł najszersze i najistotniejsze zastosowania, stając się nie tylko metodą obliczeniową, ale i badawczą. Znane są przy tym od dawna próby wyjścia poza zakres klasycznych funkcji, np. w postaci szeroko rozpowszechnionego i praktycznie użytecznego formalizmu delt Diraca. Wprowadzone przez B. van der Pola przekształcenie Laplace’a delty Diraca pozwoliło na formalne rozszerzenie rachunku operatorowego na obiekty niefunkcyjne, rozszerzenie to jednak, podobnie jak cały formalizm delt Diraca, nie było matematycznie poprawne, nie mogło zatem spełniać roli ogólnej metody badawczej. Możliwości te stworzyła dopiero teoria dystrybucji i wywodzący się z niej DRO. Znaczenie DRO dla teorii układów liniowych widzimy zatem:

a) w stworzeniu ścisłego uzasadnienia dla formalizmu Dirac — Van der Pol i rozszerzeniu jego zakresu (np. na różne przekształcenia całkowite),

b) w stworzeniu ścisłej, jednolitej metody badawczej, niezbędnej dla dalszego rozwoju ogólnej teorii układów liniowych.

Podobnie, jak w zakresie klasycznym, funkcyjnym, również w dziedzinie dystrybucji DRO może być realizowany w rozmaity sposób. Można by tu wyróżnić warianty DRO:

a) oparte na przekształceniach całkowitych, odpowiednio uogólnionych na dystrybucje,

b) oparte na nowych pojęciach, głównie na odpowiednio definiowanym pojęciu operatora.

Główne znaczenie (przynajmniej obecnie) wydają się mieć metody zaliczone do grupy a), a wśród nich metoda przekształcenia Laplace’a. Z uwagi na ograniczone ramy niniejszej pracy w dalszym tekście ograniczymy się z konieczności tylko do omówienia zagadnień przekształcenia Laplace’a w zakresie dystrybucyjnym, pomijając inne przekształcenia całkowite, w tym również przekształcenie Fouriera. Należy jednak podkreślić, iż w dziedzinie dystrybucyjnej, może jeszcze bardziej niż w dziedzinie funkcyjnej, związek między przekształceniami Laplace’a i Fouriera jest ścisły i nierozzerwalny.

Wśród metod grupy b) na szczególne wyróżnienie zasługuje rachunek operatorów Mikusińskiego [8], oparty na innym niż dystrybucja uogólnieniu pojęcia funkcji. Poza tym w grupie tej wyliczyć można szereg różnych metod, opartych nieraz na bardzo pomysłowych i oryginalnych koncepcjach (np. Bellert [9], [10], Bittner [1], Doleżał [12], [13], [14], Livermann [15], Weston [16] i inni), w różnym stopniu i zakresie wiążących się z problematyką dystrybucyjną. Z braku miejsca metodami tymi zajmować się nie będziemy.

Jak wiadomo, w teorii dystrybucji rozpowszechnione są dwa różne jej ujęcia: ujęcie funkcyjne (Schwartz, np. [17], [18], [4]) oraz ujęcie ciągowe (Mikusiński, np. [1], [2]). W dalszym tekście będziemy korzystać z obu tych ujęć.

Podamy teraz w wielkim skrócie najważniejsze definicje i oznaczenia. Czytelnika nie znającego teorii dystrybucji odsyłamy do podanej już literatury.

2. UJĘCIE CIĄGOWE TEORII DYSTRYBUCJI

Niech $f_n(t)$ — funkcje ciągłe dla $-\infty < t < +\infty$. Ciąg $\{f_n(t)\}$ nazywamy ciągiem podstawowym, jeśli dla każdego przedziału $[T_1, T_2]$ istnieje taki ciąg $\{F_n(t)\}$ i liczba całkowita $k \geq 0$, że: