

$$a) f_n(t) = F_n^{(k)}(t) \quad \text{dla} \quad T_1 \leq t \leq T_2,$$

$$b) F_n(t) \Rightarrow f_n(t) \quad \text{dla} \quad T_1 \leq t \leq T_2$$

(strzałka $\Rightarrow$ oznacza jednostajną zbieżność).

Ciągi podstawowe: $\{f_n(t)\}$ i $\{g_n(t)\}$ nazywamy równoważnymi i piszemy:

$$\{f_n(t)\} \sim \{g_n(t)\},$$

jeśli dla każdego przedziału $[T_1, T_2]$ istnieją takie ciągi $\{F_n(t)\}$ i $\{G_n(t)\}$ oraz liczba całkowita $k \geq 0$, że:

$$a) f_n(t) = F_n^{(k)}(t), \quad g_n(t) = G_n^{(k)}(t) \quad \text{dla} \quad T_1 \leq t \leq T_2,$$

$$b) F_n(t) \Rightarrow \Phi(t), \quad G_n(t) \Rightarrow \Phi(t) \quad \text{dla} \quad T_1 \leq t \leq T_2.$$

Relacja równoważności ciągów podstawowych pozwala podzielić zbiór wszystkich możliwych ciągów podstawowych na rozłączne klasy. Według Mikusińskiego ([1] str. 51) dystrybucją: $f(t) = \langle f_n(t) \rangle$ nazywamy klasę ciągów równoważnych ciągowi $\{f_n(t)\}$. Na przykład dystrybucja Diraca jest określona jako:

$$\delta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle \frac{1}{\pi} \frac{n}{n^2 t^2 + 1} \right\rangle. \quad (1)$$

3. UJĘCIE FUNKCJONALOWE TEORII DYSTRYBUCJI

Funkcję $\Phi(t)$ nazywamy funkcją podstawową, jeśli jest ona funkcją klasy C^∞ w przedziale $-\infty < t < +\infty$ i równą zero na zewnątrz pewnego przedziału ograniczonego. Zbiór wszystkich funkcji podstawowych oznaczamy przez $\mathcal{D}$ i nazywamy przestrzenią podstawową. Jest to oczywiście przestrzeń liniowa.

Wprowadza się pojęcie zbieżności w przestrzeni $\mathcal{D}$. Ciąg $\{\Phi_n(t)\}$, $\Phi_n(t) \in \mathcal{D}$ jest zbieżny do zera w przestrzeni $\mathcal{D}$, jeśli: a) wszystkie funkcje $\Phi_n(t)$ są równe zero poza tym samym przedziałem, b) $\Phi_n(t) \Rightarrow 0$, $\Phi_n^{(k)}(t) \Rightarrow 0$ dla dowolnego $k \geq 0$.

Jeśli każdej funkcji $\Phi \in \mathcal{D}$ przyporządkujemy jednoznacznie pewną liczbę, to jest określony funkcjonal w $\mathcal{D}$. Funkcjonały te wygodnie jest oznaczać symbolami: $\langle f, \Phi \rangle$, $\langle g, \Phi \rangle$ itd. Według Schwartza dystrybucją nazywa się każdy funkcjonal liniowy ciągły w $\mathcal{D}$, tj. taki funkcjonal $\langle f, \Phi \rangle$, który spełnia warunki:

$$a) \langle f, a_1 \Phi_1 + a_2 \Phi_2 \rangle = a_1 \langle f, \Phi_1 \rangle + a_2 \langle f, \Phi_2 \rangle, \quad a_1, a_2 \text{ — liczby (warunek liniowości),}$$

$$b) \langle f, \Phi_n \rangle \rightarrow 0, \quad \text{gdy} \quad \Phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \quad (\text{warunek ciągłości; symbol ten oznacza: ciąg } \{\Phi_n\} \text{ dąży do zera w przestrzeni } \mathcal{D}).$$

Na przykład dystrybucja Diraca δ jest w tym ujęciu określana jako funkcjonal:

$$\langle \delta, \Phi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(0). \quad (2)$$

4. OZNACZENIA I UWAGI OGÓLNE

Podane tu dwie definicje są sobie równoważne, określają one te same obiekty, dystrybucje jednej zmiennej. Będziemy je oznaczać tymi samymi symbolami, co funkcje, tj. $f, f(t), g, g(t)$ itd. pamiętając o tym, że dystrybucja f może być rozumiana bądź jako klasa $\langle f_n(t) \rangle$

w ujęciu ciągowym, bądź jako funkcjonal $\langle f, \Phi \rangle$ w ujęciu funkcjonalowym. Zbiór wszystkich dystrybucji jednej zmiennej określonych poprzednio będziemy oznaczać przez $\mathcal{D}'$ ($\mathcal{D}'$ jest przestrzenią sprzężoną z $\mathcal{D}$). Dystrybucjami wielu zmiennych zajmować się nie będziemy.

5. NIEKTÓRE WŁAŚCIWOŚCI DYSTRYBUCJI

a) Każda funkcja ciągła lub ogólniej, każda funkcja lokalnie całkowalna daje się utożsamiać z odpowiednią dystrybucją (tzw. dystrybucją regularną). Istnieją natomiast dystrybucje (tzw. dystrybucje singularne), które nie dadzą się utożsamiać z żadną funkcją (lokalnie całkowalną), np. dystrybucja Diraca $\delta(t)$.

b) Każda dystrybucja $f \in \mathcal{D}'$ ma pochodną $f' \in \mathcal{D}'$. Pochodna ta jest definiowana w ujęciu ciągowym jako:

$$f' \stackrel{\text{def}}{=} \langle f'_n(t) \rangle, \quad (3)$$

przy czym: $f = \langle f_n(t) \rangle$, a w ujęciu funkcjonalowym jako:

$$\langle f', \Phi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, -\Phi' \rangle. \quad (4)$$

Każda funkcja (lokalnie całkowalna) traktowana jako dystrybucja ma zatem pochodną w dziedzinie dystrybucji, nazywaną pochodną dystrybucyjną funkcji. Na przykład

$$I'(t) = \delta(t). \quad (5)$$

Pochodną w dziedzinie dystrybucji oznaczamy tak samo jak w klasycznej analizie, f' lub $\frac{df}{dt}$.

c) Dla każdej dystrybucji $f \in \mathcal{D}'$ i ustalonego przedziału (T_1, T_2) można znaleźć taką funkcję ciągłą $F(t)$ oraz liczbę naturalną r , że:

$$f = F^{(r)}(t) \quad \text{w} \quad (T_1, T_2)$$

(różniczkowanie oczywiście dystrybucyjne). Ogólnie biorąc, dla danej dystrybucji f , $F(t)$ i r zależą od przedziału. Jeśli: $f = F^{(r)}(t)$ w $(-\infty, +\infty)$, to mówimy, że dystrybucja f jest rzędu skończonego. W przeciwnym przypadku f jest rzędu nieskończonego.

d) Niech I oznacza zbiór wszystkich przedziałów otwartych, w których $f = 0$ ($f \in \mathcal{D}'$). Jest to więc zbiór otwarty lub pusty. Uzupełnienie zbioru I do zbioru $(-\infty, +\infty)$ nazywamy nośnikiem N dystrybucji f . Np. $\delta(t)$ ma nośnik punktowy $t = 0$, $\sin t$ ma nośnik $(-\infty, +\infty)$. $I(t)$ ma nośnik $[0, +\infty)$. Nośnik dystrybucji może więc być zbiorem ograniczonym lub nie.

Każda dystrybucja o ograniczonym nośniku jest rzędu skończonego, ale nie odwrotnie, np. $\sin t$, $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \delta(t-k)$ są dystrybucjami rzędu skończonego, ale mają nieograniczony nośnik. Zbiór wszystkich dystrybucji $f \in \mathcal{D}'$ o ograniczonym nośniku oznaczamy przez $\mathcal{E}'$. Oczywiście: $\mathcal{E}' \subset \mathcal{D}'$.

W DRO ważną rolę odgrywają dystrybucje, których nośnik: $N \subset [0, +\infty)$ (tzn. dystrybucje równe zeru na ujemnej półosi). Zbiór wszystkich dystrybucji $f \in \mathcal{D}'$ spełniających ten warunek oznaczamy przez $\mathcal{D}'_+$. Oczywiście: $\mathcal{D}'_+ \subset \mathcal{D}'$.

e) Zbieżność w dziedzinie dystrybucji (dla odróżnienia oznaczamy ją symbolem $\rightharpoonup$) określa się następująco. Niech: $f_n \in \mathcal{D}'$, $n = 1, 2, \dots$.

W ujęciu ciągowym: $f_n \rightharpoonup f$, jeśli dla każdego przedziału $[T_1, T_2]$ istnieje taka liczba całkowita $k \geq 0$ oraz ciąg funkcji ciągłych $\{F_n(t)\}$, że: $F_n(t) \Rightarrow F(t)$ w $[T_1, T_2]$ oraz:

$$F_n^{(k)}(t) = f_n, \quad F^{(k)}(t) = f \text{ w } (T_1, T_2).$$

W ujęciu funkcyjnym: $f_n \rightharpoonup f$, jeśli dla każdej funkcji $\Phi \in \mathcal{D}$: $\langle f_n, \Phi \rangle \rightarrow \langle f, \Phi \rangle$ przy $n \rightarrow \infty$.

Zbieżny (w podanym sensie) ciąg dystrybucji $f_n \in \mathcal{D}'$ ma granicę $f \in \mathcal{D}'$.

Jeśli: $f_n \rightharpoonup f$, to piszemy również: $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.

Jeśli $f_n \rightharpoonup f$, to również: $f_n^{(k)} \rightharpoonup f^{(k)}$.

f) Funkcję $F(t)$ ciągłą w $(-\infty, +\infty)$ nazywamy funkcją temperowaną, jeśli

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} |t|^{-\alpha} F(t) = 0 \quad (6)$$

dla pewnego rzeczywistego α . Dystrybucję $f \in \mathcal{D}'$ nazywamy dystrybucją temperowaną, jeśli:

$$f = F^{(k)}(t) \quad \text{w} \quad (-\infty, +\infty), \quad (7)$$

gdzie: k — liczba naturalna, $F(t)$ — funkcja temperowana. Zbiór wszystkich dystrybucji temperowanych oznaczamy przez $\mathcal{S}'$. Oczywiście: $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$. Zbiór wszystkich dystrybucji $f \in \mathcal{S}'$, których nośnik $N \subset [0, +\infty)$ (tzn. równych zeru na ujemnej półosi) oznaczamy przez $\mathcal{S}'_+$. Zgodnie z poprzednim dystrybucja $f \in \mathcal{S}'_+$ może być przedstawiona w postaci (7), przy czym dodatkowo: $F(t) = 0$ dla $t < 0$. Oczywiście: $\mathcal{S}'_+ \subset \mathcal{S}'$, $\mathcal{S}'_+ \subset \mathcal{D}'_+$.

Z (7) wynika, że dystrybucja temperowana jest rzędu skończonego. Ponadto każda dystrybucja o ograniczonym nośniku jest dystrybucją temperowaną, a więc: $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$.

g) W teorii funkcyjnej dystrybucje o ograniczonym nośniku ($\mathcal{E}'$) i dystrybucje temperowane ($\mathcal{S}'$) można traktować jako funkcyjny ciągły w innych niż $\mathcal{D}$ przestrzeniach podstawowych, oznaczanych odpowiednio przez $\mathcal{E}$ i $\mathcal{S}$.

Przestrzeń $\mathcal{E}$ — to przestrzeń wszystkich funkcji $\Phi(t)$ klasy C^∞ w przedziale $(-\infty, +\infty)$. Przestrzeń $\mathcal{S}$ — to przestrzeń funkcji $\Phi(t)$ klasy C^∞ w przedziale $(-\infty, +\infty)$ spełniających warunek: dla każdego $m \geq 0$ i całkowitego $p \geq 0$:

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} |t|^m \Phi^{(p)}(t) = 0 \quad (8)$$

(kwestie topologii w $\mathcal{E}$ i $\mathcal{S}$ — pomijamy). Oczywiście: $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$.

6. PRZEKSZTAŁCENIE LAPLACE'A W DZIEDZINIE DYSTRYBUCJI

W literaturze znanych jest kilka różnych sposobów definiowania przekształcenia Laplace'a w dziedzinie dystrybucji. W pracy tej przedstawimy właściwości i zastosowania dystrybucyjnego przekształcenia Laplace'a w oparciu o definicję Doleżala [19], [14]. Ujęcie Doleżala wydaje się najprostsze i najbardziej odpowiadające potrzebom zastosowań. W zakończeniu (p. 14, 15, 16) przedstawimy krótko inne, najczęściej spotykane sposoby wprowadzania przekształcenia Laplace'a w dziedzinie dystrybucji, głównie pod kątem ich porównania z ujęciem przedstawionym w tym punkcie.

Dystrybucję $f(t) \in \mathcal{D}'$ będziemy nazywać dystrybucją typu wykładniczego, jeśli istnieją: taka funkcja ciągła $F(t)$, liczba całkowita $k \geq 0$ i liczby rzeczywiste $M > 0$, $\rho \geq 0$, że:

- a) $F(t) = 0$ dla $t < 0$,
 - b) $|F(t)| \leq Me^{\rho t}$ dla $t \geq 0$,
 - c) $F^{(k)}(t) = f(t)$ dla $-\infty < t < +\infty$
- (9)

(różniczkowanie dystrybucyjne). Zbiór wszystkich dystrybucji typu wykładniczego będziemy oznaczać przez $\mathcal{W}$.

Z podanego określenia wynika, że dystrybucja $f \in \mathcal{W}$ jest rzędu skończonego oraz jest równa zero dla $t < 0$. Jeśli porównamy warunek (6) z warunkiem (9), to widzimy, iż jeśli $f \in \mathcal{S}'_+$ to również $f \in \mathcal{W}$. Mamy zatem: $\mathcal{S}'_+ \subset \mathcal{W} \subset \mathcal{D}'_+$. Zbiór $\mathcal{W}$ jest liniowy; jeśli $f_1, f_2 \in \mathcal{W}$, to oczywiście również: $a_1 f_1 + a_2 f_2 \in \mathcal{W}$, gdzie a_1, a_2 — liczby. Ponadto łatwo zauważyć, że jeśli: $f \in \mathcal{W}$, to również: $f^{(k)} \in \mathcal{W}$.

Jeśli $f(t)$ jest funkcją równą zero dla $t < 0$ oraz $\mathcal{L}$ -transformowalną, tzn. posiadającą zwykłą transformatę Laplace'a:

$$\bar{f}(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (10)$$

to: $f(t) \in \mathcal{W}$ (por. [20]). Wynika to stąd, że dla każdej funkcji $\mathcal{L}$ -transformowalnej $f(t)$ mamy:

$$\left| \int_0^t f(\tau) d\tau \right| \leq Me^{\rho t}$$

(np. [5], str. 86), a więc funkcja $f(t)$ spełnia wszystkie warunki a), b), c), definicji dystrybucji typu wykładniczego (wystarczy przyjąć: $F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$, $k = 1$).

Zbiór $\mathcal{W}$ dystrybucji typu wykładniczego zawiera zatem w sobie wszystkie funkcje $\mathcal{L}$ -transformowalne w zwykłym sensie. Jak łatwo sprawdzić, również: $\delta(t) \in \mathcal{W}$ (a więc i $\delta^{(k)}(t) \in \mathcal{W}$), ale np. $e^{t^2} 1(t) \notin \mathcal{W}$.

Funkcja $F(t)$ występująca w definicji dystrybucji typu wykładniczego jest, wobec warunku (9), $\mathcal{L}$ -transformowalna i jej transformata:

$$\bar{F}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \quad (11)$$

jest funkcją holomorficzną w pewnej półpłaszczyźnie $\text{Re } s > x_0$ (może być $x_0 = -\infty$).

Transformatę Laplace'a dystrybucji $f(t) \in \mathcal{W}$ definiujemy następująco [19]:

$$\bar{f}(s) = \mathcal{L}[f(t)] \stackrel{\text{def}}{=} s^k \bar{F}(s), \quad (12)$$

przy czym $F(t)$, k są wielkościami występującymi w definicji dystrybucji $f(t)$ typu wykładniczego.

Wykazuje się, że:

1) Każda dystrybucja $f \in \mathcal{W}$ ma dokładnie jedną $\mathcal{L}$ -transformatę określoną wzorem (12), a więc definicja (12) nie zależy od wyboru k i $F(t)$ (dla każdej dystrybucji $f \in \mathcal{W}$ istnieje bowiem nieskończenie wiele par: k i $F(t)$ spełniających warunki definicyjne).

2) Jeśli $f(t)$ jest funkcją $\mathcal{L}$ -transformowalną, to jej $\mathcal{L}$ -transformata dystrybucyjna (12) jest identyczna ze zwykłą $\mathcal{L}$ -transformatą (10).

3) Jeśli: $f(t), g(t) \in \mathcal{W}$ oraz: $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)]$, to również $f(t) = g(t)$ w sensie dystrybucyjnym¹⁾.

Z określenia (12) wynika, iż $\mathcal{L}$ -transformata $\bar{f}(s)$ dystrybucji $f(t) \in \mathcal{W}$ jest funkcją holomorficzną w półpłaszczyźnie $\text{Re } s > x_0$, przy czym można wykazać, że $\bar{f}(s)$ jest funkcją całkowitą, jeśli dystrybucja $f(t)$ ma ograniczony nośnik. Jest zatem rzeczą wielce znamienne, iż przekształcenie Laplace'a zarówno funkcje $\mathcal{L}$ -transformowalne, jak i dystrybucje typu wykładniczego przekształca w tę samą klasę funkcji, w funkcje holomorficzne. Jest to również powodem znanej i często w literaturze podkreślanej jednolitości, jaką w dziedzinie zespolonej uzyskuje się przy stosowaniu rachunku operatorowego niezależnie od stopnia niejednorodności problemu w dziedzinie czasu, niezależnie np. od tego, czy w dziedzinie czasu problem opisuje się w kategoriach funkcyjnych, klasycznych czy też wymaga sformułowania w kategoriach dystrybucyjnych.

Warto także podkreślić, iż w przeciwieństwie do innych definicji $\mathcal{L}$ -przekształcenia w dziedzinie dystrybucji, definicja (12) nie wymaga korzystania z definicji samej dystrybucji; jednakowo dobrze nadaje się ona zatem dla dystrybucji w ujęciu ciągowym, jak i funkcyjnym, a nawet, co jest istotne dla praktyki, nie wymaga w ogóle precyzowania, jak rozumiana jest dystrybucja $f(t)$.

Wygodnie jest używać również operatora $\mathcal{L}^{-1}$. Jeśli zachodzi związek (12), to piszemy również, że:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(s)].$$

7. PODSTAWOWE WŁASNOŚCI DYSTRYBUCYJNEGO $\mathcal{L}$ -PRZEKSZTAŁCENIA

Jeśli $f(t) \in \mathcal{W}$, to również $f^{(n)}(t) \in \mathcal{W}$, $t^n f(t) \in \mathcal{W}$, $e^{-at} f(t) \in \mathcal{W}$, $f(t-t_0) \in \mathcal{W}$ przy $t_0 \geq 0$ oraz $f(at) \in \mathcal{W}$ przy $a > 0$ i przy tym (np. [5], [18])

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \bar{f}(s), \quad (13)$$

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n \bar{f}(s)}{ds^n}, \quad (14)$$

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = \bar{f}(s+a), \quad (15)$$

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-st_0} \bar{f}(s) \quad (t_0 \geq 0), \quad (16)$$

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} \bar{f}\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a > 0). \quad (17)$$

Mamy oczywiście również:

$$\mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 \bar{f}_1(s) + a_2 \bar{f}_2(s), \quad (18)$$

przy założeniach: $f_1(t), f_2(t) \in \mathcal{W}$, a_1, a_2 — liczby.

¹⁾ Jeśli $f(t), g(t)$ — dystrybucje regularne (tj. funkcje lokalnie całkowalne), to ich równość dystrybucyjna: $f(t) = g(t)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje te są w zwykłym sensie równe sobie prawie wszędzie.

Wzory te świadczą o zachowaniu w dziedzinie dystrybucji wszystkich podstawowych właściwości przekształcenia Laplace'a, decydujących o jego znaczeniu i zakresie zastosowań.

Przykład 1. Ponieważ: $\delta(t) = [t \cdot I(t)]''$ (różniczkowanie dystrybucyjne), więc przyjmując: $F(t) = t \cdot I(t)$, $\bar{F}(s) = \frac{1}{s^2}$, $k = 2$ mamy zgodnie z (12):

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = s^2 \frac{1}{s^2} = 1. \quad (19)$$

Przykład 2. Na podstawie (13)—(19) dostajemy na przykład:

$$\mathcal{L}[\delta^{(n)}(t)] = s^n, \quad (20)$$

$$\mathcal{L}[\delta^{(n)}(t-t_0)] = e^{-st_0} s^n \quad (t_0 \geq 0), \quad (21)$$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \delta^{(n)}(t)] = (s+\alpha)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k s^{n-k}, \quad (22)$$

$$\mathcal{L}[t^m \delta^{(n)}(t)] = (-1)^m \frac{d^m s^n}{ds^m} = \begin{cases} 0; & m > n \\ (-1)^n n!; & m = n \\ (-1)^n \frac{n!}{(n-m)!} s^{n-m}; & m < n \end{cases} \quad (23)$$

Ze wzorów (22) i (23) wynika w szczególności po uwzględnieniu (20), że:

$$e^{-\alpha t} \delta^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k \delta^{(n-k)}(t),$$

$$t^m \delta^{(n)}(t) = \begin{cases} 0; & m > n \\ (-1)^n n! \delta(t); & m = n \\ (-1)^n \frac{n!}{(n-m)!} \delta^{(n-m)}(t); & m < n. \end{cases}$$

Podobnie, porównując (17) i (19) zauważamy, że przy $a > 0$:

$$\mathcal{L}[\delta(at)] = \frac{1}{a},$$

a stąd na podstawie odpowiedniego twierdzenia podanego w p. 6 oraz zależności (18) mamy:

$$\delta(at) = \frac{1}{a} \delta(t).$$

Przykład 3. Obliczyć: $\mathcal{L}^{-1}[\sqrt{s}]$. Ponieważ: $\sqrt{s} = s \frac{1}{\sqrt{s}}$ oraz:

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right] = \frac{1}{\sqrt{s}},$$

więc na podstawie (13):

$$\mathcal{L}^{-1}[\sqrt{s}] = f'(t),$$

gdzie:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} & \text{dla } t > 0. \end{cases} \quad (24)$$

Pochodną dystrybucyjną funkcji (24) można w $(0, +\infty)$ utożsamiać z funkcją $-\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi t^3}}$,

a więc:

$$\mathcal{L}^{-1}[\sqrt{s}] = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi t^3}} & \text{dla } t > 0, \\ 0 & \text{dla } t < 0. \end{cases}$$

Można wykazać również zależność ogólniejszą (np. [5], [19]):

$$\mathcal{L}^{-1}[s^{k+\alpha}] = \begin{cases} \frac{t^{-k-\alpha+1}}{\Gamma(-k-\alpha)} & \text{dla } t > 0, \\ 0 & \text{dla } t < 0, \end{cases}$$

przy czym: $0 < \alpha < 1$, k — liczba naturalna.

8. CHARAKTERYSTYKA $\mathcal{L}$ -TRANSFORMATY

Kwestię, jakie funkcje zmiennej zespolonej są $\mathcal{L}$ -transformatami dystrybucji typu wykładniczego rozstrzyga następujące twierdzenie (np. [18], [20]):

Funkcja $F(s)$ holomorphyzna w półpłaszczyźnie $\text{Re } s > x_0$ jest wtedy i tylko wtedy $\mathcal{L}$ -transformatą dystrybucji $f(t) \in \mathcal{W}$, jeśli istnieją takie liczby A, r , że:

$$|F(s)| \leq A|s|^r \quad \text{dla} \quad \text{Re } s \geq x_0. \quad (25)$$

Z twierdzenia tego wynika w szczególności, że każda funkcja wymierna:

$$F(s) = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}$$

jest $\mathcal{L}$ -transformatą dystrybucji $f(t) \in \mathcal{W}$, nie są natomiast $\mathcal{L}$ -transformatami dystrybucji typu wykładniczego takie funkcje, jak e^s , e^{s^2} , $\sin s$ itp.

Jeśli funkcja $F(s)$ jest $\mathcal{L}$ -transformatą pewnej dystrybucji regularnej (tj. funkcji $\mathcal{L}$ -formowalnej w zwykłym sensie), to — jak wiadomo:

$$F(s) \rightarrow 0 \quad (26)$$

przy $s \rightarrow \infty$, przy czym punkt s powinien pozostawać w pewnym obszarze kątowym (np. [5]). W szczególności zależność (26) zachodzi przy $s \rightarrow \infty$ wzdłuż dodatniej półosi rzeczywistej. Warto jednak podkreślić, iż warunek (26) może być spełniony również przez $\mathcal{L}$ -transformatę dystrybucji singularnej, np. (21). Jeśli jednak warunek (26) nie jest spełniony (np. przy $s \rightarrow \infty$ wzdłuż dodatniej półosi rzeczywistej), to $F(s)$ na pewno nie jest $\mathcal{L}$ -transformatą funkcji, jest natomiast, przy spełnieniu warunku (25), $\mathcal{L}$ -transformatą dystrybucji singularnej $f(t) \in \mathcal{W}$.

Zależność (25) w połączeniu z definicją (12) stwarza możliwość prostego wyznaczenia przekształcenia odwrotnego. Załóżmy, że $F(s)$ jest funkcją holomorficzną w pewnej półpłaszczyźnie $\text{Re } s \geq x_0$, spełniającą warunek (25), i niech k — liczba naturalna, $k > r+1$. Wówczas funkcja

$$s^{-k}F(s)$$

spełnia warunki wystarczające do tego, aby być $\mathcal{L}$ -transformatą funkcji $\varphi(t)$ wyrażonej dla $t > 0$ wzorem Riemanna-Mellina (np. [5], str. 111):

$$\varphi(t) = \mathcal{L}^{-1}[s^{-k}F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{st} s^{-k}F(s) ds \quad (t > 0, c > x_0), \quad (27)$$

przy czym: $\varphi(t) = 0$ dla $t < 0$. Ponieważ:

$$F(s) = s^k \bar{\varphi}(s)$$

więc zgodnie z (13) mamy:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \varphi^{(k)}(t) \quad (28)$$

(różniczkowanie dystrybucyjne).

Wzory (27) i (28) łącznie rozwiązują problem przekształcenia odwrotnego dla funkcji spełniających nierówność (25), tj. będących $\mathcal{L}$ -transformatami dystrybucji typu wykładniczego.

9. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE LINIOWE

Użyteczność dystrybucyjnego przekształcenia Laplace'a jako metody operatorowej służącej do rozwiązywania równań różniczkowych liniowych o współczynnikach stałych wynika z następującego prostego twierdzenia (por. np. [4], [5])

Jeśli $f(t) \in \mathcal{W}$, to równanie:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(t), \quad (29)$$

gdzie $a_0 \dots a_n$ — stałe ($a_n \neq 0$), ma w przedziale $(-\infty, +\infty)$ dokładnie jedno rozwiązanie $y(t) \in \mathcal{W}$, przy czym rozwiązanie to jest równe:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\bar{f}(s)}{A_n(s)} \right], \quad (30)$$

gdzie: $\bar{f}(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, $A_n(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$.

Z twierdzenia tego wynika, iż w zbiorze $\mathcal{W}$ dystrybucji typu wykładniczego równanie (29) ma jednoznaczne rozwiązanie i rozwiązanie to, zgodnie z (30), można wyznaczyć metodą operatorową w sposób analogiczny jak w zakresie funkcyjnym. Zauważmy przy tym, iż rozwiązanie $y(t) \in \mathcal{W}$ przy $f(t) \in \mathcal{W}$ jest określone jednoznacznie bez zadawania jakichkolwiek warunków początkowych. Trzeba jednak pamiętać o tym, iż warunek: $y(t) \in \mathcal{W}$ wymaga, aby: $y(t) = 0$ dla $t < 0$. Odpowiada to w klasycznym sformułowaniu warunkom początkowym zerowym rozumianym jako:

$$y(0-) = y'(0-) = \dots = y^{(n-1)}(0-) = 0.$$

Przykład 4. Rozwiążmy równanie:

$$y'' + k^2 y = \delta''(t) + \delta'(t - t_0), \quad (31)$$

gdzie $t_0 \geq 0$. Dokonując $\mathcal{L}$ -przekształcenia mamy:

$$(s^2 + k^2) \bar{y}(s) = s^2 + e^{-st_0} s,$$

a stąd:

$$\bar{y}(s) = 1 - \frac{k^2}{s^2 + k^2} + e^{-st_0} \frac{s}{s^2 + k^2}$$

i ostatecznie:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{y}(s)] = \delta(t) - \frac{1}{k} \sin kt \cdot I(t) + \cos k(t - t_0) \cdot I(t - t_0).$$

Jak wynika z poprzednich rozważań, rozwiązanie to jest jedyną dystrybucją typu wykładniczego spełniającą równanie (31) w przedziale $(-\infty, +\infty)$.

10. SPLOT W DZIEDZINIE DYSTRYBUCJI

Założmy, że $f, g \in \mathcal{W}$. Wówczas, zgodnie z określeniem dystrybucji typu wykładniczego:

$$F^{(k)}(t) = f(t); \quad G^{(m)}(t) = g(t), \quad (32)$$

przy czym funkcje $F(t)$ i $G(t)$ spełniają warunki a), b), c) z p. 6. Istnieje wówczas splot:

$$F(t) * G(t) = \int_0^t F(\tau) G(t - \tau) d\tau, \quad (33)$$

przy czym, wobec warunku a):

$$F(t) * G(t) = 0 \quad \text{dla } t < 0.$$

Splot dystrybucji $f, g \in \mathcal{W}$ określamy następująco (określenie to pochodzi od Doležala [19]):

$$f * g \stackrel{\text{def}}{=} \left[\int_0^t F(\tau) G(t - \tau) d\tau \right]^{(k+m)}. \quad (34)$$

Łatwo można sprawdzić (por. [19]), iż określenie to jest poprawne: dystrybucja (34) nie zależy od wyboru liczb k, m . Każda para dystrybucji $f, g \in \mathcal{W}$ ma zatem dokładnie jeden splot określony wzorem (34). Ponadto, jeśli $f(t), g(t)$ — funkcje lokalnie całkowalne równe zeru dla $t < 0$ oraz jeśli chociaż jedna z tych funkcji jest ograniczona w każdym przedziale $[0, T]^1$, to splot dystrybucyjny (34) jest identyczny ze zwykłym splotem:

$$\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (35)$$

Splot (34) ma następujące podstawowe własności (por. [19], a także [5]):

1) $f * g \in \mathcal{W}$, a więc w szczególności: $f * g = 0$ dla $t < 0$;

¹⁾ Założenie to jest potrzebne do tego, aby zagwarantować istnienie splotu (35) dla każdego t .

2) spłot $f * g$ jest przemienny, łączny i rozdzielny względem dodawania, tzn.

$$f * g = g * f; \quad (f * g) * h = f * (g * h); \quad f * (g + h) = f * g + f * h; \quad (36)$$

3) jeśli: $f * g = 0$, to $f \equiv 0$ lub $g \equiv 0$ (uogólnienie twierdzenia Titchmarsh'a);

4) pochodna spłotu jest równa:

$$(f * g)^{(k)} = f^{(k)} * g = f * g^{(k)}; \quad (37)$$

5) transformata Laplace'a spłotu jest równa iloczynowi transformat:

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[g]. \quad (38)$$

Podana tutaj definicja spłotu nie jest w pełni ogólna, dotyczy ona bowiem tylko dystrybucji typu wykładniczego, a więc m. in. równych zeru dla $t < 0$. Jest ona jednak w pełni dostosowana do potrzeb i zakresu zastosowań przekształcenia Laplace'a, o czym świadczą własności 1) i 5). Jej zaletą jest ponadto prostota oraz fakt, iż nie korzysta ona bezpośrednio z definicji samej dystrybucji.

Ogólniejszą definicję spłotu dwóch dystrybucji formułuje się zwykle w ujęciu funkcjonalowym. Spłot $f * g$ dystrybucji $f, g \in \mathcal{D}'$ określa się wówczas jako funkcjonal (por. np. [17], [18]):

$$\langle f * g, \Phi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f(t) \times g(\tau), \Phi(t + \tau) \rangle = \langle f(t), \langle g(\tau), \Phi(t + \tau) \rangle \rangle, \quad (39)$$

gdzie $\Phi \in \mathcal{D}$, zaś $f(t) \times g(\tau)$ jest iloczynem kartezjańskim dystrybucji f, g .

Dowodzi się, iż wzór (39) określa dystrybucję $f * g \in \mathcal{D}'$, jeśli albo:

a) f lub g ma ograniczony nośnik, albo

b) obie dystrybucje f i g mają nośnik ograniczony od dołu lub od góry.

Warunek b) jest w szczególności spełniony, jeśli $f, g \in \mathcal{W}$. Można wykazać iż w tym przypadku określenie (39) pokrywa się z określeniem (34).

Przykład 5. Istotne znaczenie dla zastosowań ma zależność:

$$f * \delta = f \quad (40)$$

słuszna dla dowolnej dystrybucji $f \in \mathcal{D}'$. Wynika ona wprost z określenia (39) oraz wzoru (2), mamy bowiem dla dowolnej funkcji podstawowej $\Phi \in \mathcal{D}$:

$$\langle f * \delta, \Phi \rangle = \langle f(t), \langle \delta(\tau), \Phi(t + \tau) \rangle \rangle = \langle f(t), \Phi(t) \rangle = \langle f, \Phi \rangle.$$

Podobnie:

$$f * \delta^{(k)} = f^{(k)}. \quad (41)$$

W odniesieniu do spłotu dystrybucji z funkcją podstawową słuszne jest następujące proste twierdzenie (por. np. [18]):

Jeśli $f \in \mathcal{D}'$ oraz $\Phi \in \mathcal{D}$, to

$$f * \Phi \in C^\infty,$$

tzn. spłot $f * \Phi$ jest wówczas funkcją dowolną liczbę razy różniczkowalną.

11. RÓWNANIA SPLOTOWE

Wiele różnorodnych równań daje się zapisać w postaci równania spłotowego:

$$f = w * y, \quad (42)$$

gdzie: w, f — dane dystrybucje, y — dystrybucja szukana.

Dystrybucją odwrotną względem dystrybucji w nazywa się taką dystrybucję w^{-1} , która spełnia równanie

$$w * w^{-1} = w^{-1} * w = \delta. \quad (43)$$

Dowodzi się (por. np. [18]), że jeśli: $w \in \mathcal{D}'_+$, to istnieje najwyżej jedna dystrybucja odwrotna $w^{-1} \in \mathcal{D}'_+$. Ponadto jeśli: $w, f \in \mathcal{D}'_+$ oraz istnieje $w^{-1} \in \mathcal{D}'_+$ to równanie (42) ma dokładnie jedno rozwiązanie $y \in \mathcal{D}'_+$ równe:

$$y = w^{-1} * f. \quad (44)$$

Założmy teraz, że $w, f \in \mathcal{W}$. Jeśli istnieje $w^{-1} \in \mathcal{W}$, to wówczas również $y \in \mathcal{W}$ i równanie (42) można poddać przekształceniu Laplace'a:

$$\bar{f}(s) = \bar{w}(s) \cdot \bar{y}(s),$$

a stąd:

$$\bar{y}(s) = \frac{\bar{f}(s)}{\bar{w}(s)}, \quad y = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\bar{f}(s)}{\bar{w}(s)} \right]. \quad (45)$$

Transformata Laplace'a dystrybucji odwrotnej jest wówczas równa:

$$\mathcal{L}[w^{-1}] = \frac{1}{\bar{w}(s)}. \quad (46)$$

Problem, czy istnieje dystrybucja $w^{-1} \in \mathcal{W}$ przy $w \in \mathcal{W}$, sprowadza się zatem do tego, czy funkcja $\frac{1}{\bar{w}(s)}$ jest $\mathcal{L}$ -transformatą (por. p. 8).

Przykład 6. Równanie różniczkowe (29) można zapisać w postaci:

$$w * y = f, \quad (47)$$

gdzie:

$$w = a_n \delta^{(n)} + a_{n-1} \delta^{(n-1)} + \dots + a_1 \delta' + a_0 \delta. \quad (48)$$

Mamy: $w \in \mathcal{W}$ oraz:

$$\bar{w}(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0.$$

Funkcja

$$\frac{1}{\bar{w}(s)} = \frac{1}{a_n s^n + \dots + a_0}$$

jest oczywiście $\mathcal{L}$ -transformatą, istnieje zatem dystrybucja odwrotna $w^{-1} \in \mathcal{W}$ równa:

$$w^{-1}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \right]. \quad (49)$$

Jest to w dodatku dystrybucja regularna o postaci:

$$w^{-1}(t) = k(t) \cdot I(t), \quad (50)$$

gdzie, jak wiadomo (por. np. [5]), $k(t)$ jest rozwiązaniem równania jednorodnego względem (29), spełniającym warunki początkowe:

$$k(0) = k'(0) = \dots = k^{(n-2)}(0) = 0,$$

$$k^{(n-1)}(0) = \frac{1}{a_n}$$

Funkcja (50) nosi nazwę funkcji Greena lub odpowiedzi impulsowej.

Przykład 7. Prostym a jednocześnie bardzo ważnym przykładem dystrybucji $w \in \mathcal{W}$ mającej dystrybucję odwrotną $w^{-1} \in \mathcal{W}$ jest każda dystrybucja o $\mathcal{L}$ -transformacie wymiernej. Jeśli bowiem:

$$\bar{w}(s) = \frac{a_n s^n + \dots + a_0}{b_m s^m + \dots + b_0}, \quad (51)$$

to

$$\frac{1}{\bar{w}(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} \quad (52)$$

jest też $\mathcal{L}$ -transformatą i przy tym

$$w^{-1}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} \right].$$

Na przykład jeśli $w(t) = \cos t \cdot I(t)$, $\bar{w}(s) \equiv \frac{s}{s^2+1}$, to: $\frac{1}{\bar{w}(s)} \equiv \frac{s^2+1}{s}$ i dystrybucja odwrotna jest równa: $w^{-1}(t) = \delta(t) + I(t)$.

12. RÓWNANIA UKŁADÓW LINIOWYCH

Rozpatrzmy układ liniowy o transmitancji $K(s)$, tj. przyjmijmy, iż związek między sygnałem wejściowym $x(t)$ i wyjściowym $y(t)$ ma postać:

$$\bar{y}(s) = K(s) \cdot \bar{x}(s). \quad (53)$$

Założmy ponadto, że transmitancja $K(s)$ jest dowolną rzeczywistą funkcją wymierną, tzn.

$$K(s) = \frac{a_n s^n + \dots + a_0}{b_m s^m + \dots + b_0}. \quad (54)$$

Bez trudu zauważamy, że jeśli $\bar{x}(s)$ spełnia nierówność typu (25), to i $K(s)\bar{x}(s)$ przy założeniu (54) również będzie spełniać analogiczną nierówność. Wynika stąd, że jeśli: $x(t) \in \mathcal{W}$, to również: $y(t) \in \mathcal{W}$.

Związek między $x(t)$ i $y(t)$ można również zapisać umownie w postaci:

$$y(t) = Ax(t), \quad (55)$$

gdzie A jest operatorem rozpatrywanego układu. Operator A występujący w równaniu (55) jest przykładem tzw. operatora splotowego (por. np. [18]). Oznaczając bowiem

$$k(t) = \mathcal{L}^{-1}[K(s)] \quad (56)$$

otrzymujemy na podstawie (38)

$$y(t) = k(t) * x(t), \quad (57)$$

przy czym również: $k(t) \in \mathcal{W}$. Dystrybucja $k(t)$ wyrażona wzorem (55) jest odpowiedzią impulsową układu. Wyrażenie (57) określa zatem explicite postać operatora A .

Przy przyjętych założeniach istnieje również operator odwrotny A^{-1} , tzn. taki, że

$$x(t) = A^{-1}y(t). \quad (58)$$

Bez trudu zauważamy, iż operator A^{-1} jest też operatorem splotowym określonym przez dystrybucję $k^{-1}(t)$ odwrotną względem $k(t)$. Na podstawie (53) możemy bowiem napisać:

$$\bar{x}(s) = \frac{1}{K(s)} \bar{y}(s),$$

a stąd na podstawie wyników przykładu 7 otrzymujemy od razu:

$$x(t) = k^{-1}(t) * y(t),$$

gdzie:

$$k^{-1}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{K(s)} \right],$$

przy czym $k^{-1}(t) \in \mathcal{W}$ jest dystrybucją odwrotną względem $k(t)$.

Przykład 8. W układzie o transmitancji

$$K(s) = \frac{s}{s + \alpha}$$

odpowiedź impulsowa jest równa: $k(t) = \delta(t) - \alpha e^{-\alpha t} \cdot I(t)$, zaś dystrybucja odwrotna względem $k(t)$:

$$k^{-1}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + \alpha}{s} \right] = \delta(t) + \alpha \cdot I(t).$$

Operator A wyrażający zależność sygnału wyjściowego $y(t)$ od sygnału wejściowego ma zatem postać:

$$y(t) = k(t) * x(t) = x(t) - \alpha e^{-\alpha t} I(t) * x(t), \quad (59)$$

zaś operator odwrotny A^{-1} jest określony przez zależność:

$$x(t) = k^{-1}(t) * y(t) = y(t) + \alpha I(t) * y(t). \quad (60)$$

Jeśli sygnał $x(t)$ jest dystrybucją regularną (tzn. funkcją) równą zero dla $t < 0$, to wzór (59) można zapisać w postaci funkcyjnej:

$$y(t) = x(t) - \alpha e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha \tau} x(\tau) d\tau.$$

Podobnie, jeśli sygnał $y(t)$ jest dystrybucją regularną równą zero dla $t < 0$, to wzór (60) można zapisać w postaci funkcyjnej:

$$x(t) = y(t) + \alpha \int_0^t y(\tau) d\tau.$$

W związku z równaniem (53), mającym zasadnicze znaczenie w teorii obwodów, trzeba zwrócić uwagę na następującą okoliczność. Przy założeniu, że $x(t)$ jest funkcją (tj. dystrybucją regularną), nawet dla najprostszej klasy układów (np. dla układów o stałych skupionych, liniowych, pasywnych, odwracalnych) zarówno odpowiedź impulsowa $k(t)$, jak i sygnał wyjściowy $y(t)$ mogą nie być funkcjami. Innymi słowy, przeciwdziedzina operatora

A wykracza poza zakres funkcyjny, nawet jeśli jego dziedziną jest zbiór funkcji lokalnie całkowalnych. Naturalnym w tej sytuacji i znacznie upraszczającym sprawę jest rozszerzenie dziedziny operatora A na dystrybucje, np. na zbiór $\mathcal{W}$. Jak wynika bowiem z podanych rozważań, operator A odpowiadający dowolnej transmitancji o postaci (54) przekształca zbiór $\mathcal{W}$ w siebie, przy czym sam operator A oraz operator odwrotny A^{-1} są określone przez dystrybucje $k(t)$, $k^{-1}(t)$ również należące do $\mathcal{W}$.

13. RÓWNANIA DWÓJNIKÓW

Rozpatrzmy teraz krótko równania dwójników liniowych pasywnych w ujęciu dystrybucyjnym. Niech $x(t)$, $y(t) \in \mathcal{D}'$ oznaczają wielkości zaciskowe dwójnika (tj. np. napięcie i prąd w dwójniku elektrycznym). Równanie dwójnika można zapisać w postaci:

$$y = Ax. \quad (61)$$

Dwójnik jest określony, jeśli jest określony operator A i odwrotnie.

W odniesieniu do operatora A przyjmujemy następujące założenia [18]:

1) operator A jest operatorem rzeczywistym; oznacza to, że dla każdej rzeczywistej dystrybucji x dystrybucja $y = Ax$ jest też rzeczywista¹⁾;

2) operator A jest operatorem splotowym; oznacza to, że istnieje taka dystrybucja $w \in \mathcal{D}'$, że:

$$Ax \equiv w * x; \quad (62)$$

3) operator A spełnia warunek pasywności; oznacza to, że:

$$\operatorname{Re} \int_{-\infty}^t y^*(\tau)x(\tau)d\tau = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^t y(\tau)x^*(\tau)d\tau \geq 0 \quad (63)$$

dla każdego t oraz dla każdego $x(t) \in \mathcal{D}^{(2)}$;

4) dystrybucja w (zwana odpowiedzią impulsową) jest dystrybucją temperowaną, tzn. $w \in \mathcal{S}'$.

Dwójnik o równaniu (61) przy spełnieniu wszystkich założeń 1—4 będziemy nazywać dwójnikiem pasywnym.

Zbiór wszystkich dystrybucji x , dla których splot $w * x$ jest określony, tworzy dziedzinę D operatora A .

Można wykazać (np. [18]), że operator A dwójnika pasywnego ma następujące właściwości:

a) operator A jest jednoznaczny;

b) operator A jest liniowy; oznacza to, że jeśli $x_1, x_2 \in D$, to również: $k_1x_1 + k_2x_2 \in D$ oraz:

$$A(k_1x_1 + k_2x_2) = k_1Ax_1 + k_2Ax_2;$$

c) operator A spełnia warunek przyczynowości; oznacza to, że jeśli: $x_1, x_2 \in D$ oraz $x_1 = x_2$ dla $t < t_0$, to również zawsze: $Ax_1 = Ax_2$ dla $t < t_0$. Konsekwencją spełnienia

¹⁾ O dystrybucji $f \in \mathcal{D}'$ mówimy, że jest to dystrybucja rzeczywista, jeśli dla każdej rzeczywistej funkcji podstawowej $\Phi \in \mathcal{D}$ funkcjonal $\langle f, \Phi \rangle$ przybiera wartości rzeczywiste.

²⁾ Zgodnie z twierdzeniem podanym na końcu p. 11 splot $y = w * x$ jest przy tym założeniu funkcją klasy C^∞ , a więc całki występujące w (63) istnieją dla każdego t .

warunku przyczynowości (por. [18]) jest to, że $w = 0$ dla $t < 0$, a więc $w \in \mathcal{S}'_+$ oraz w posiada transformatę Laplace'a $\bar{w}(s)$ będącą immitancją rozpatrywanego dwójnika.

d) operator A jest stacjonarny; oznacza to, że jeśli $x(t) \in D$, $y(t) = Ax(t)$, to również $x(t-t_0) \in D$ oraz

$$Ax(t-t_0) = y(t-t_0) \quad (64)$$

dla każdego t_0 .

Jak wynika z przytoczonych właściwości, podane tu pojęcie dwójnika pasywnego jest naturalnym uogólnieniem liniowego pasywnego dwójnika elektrycznego R, L, C, M .

Podamy teraz za Zemanianem [18] twierdzenie uogólniające klasyczne twierdzenie Brune (por. np. [5]).

Immitancja $\bar{w}(s)$ każdego dwójnika pasywnego jest funkcją rzeczywistą dodatnią i odwrotnie każda funkcja rzeczywista dodatnia jest immitancją pewnego dwójnika pasywnego, tzn. jest $\mathcal{L}$ -transformatą jego odpowiedzi impulsowej.

Jak wiadomo, jeśli $F(s)$ jest funkcją rzeczywistą dodatnią, to również $\frac{1}{F(s)}$ jest funkcją rzeczywistą dodatnią. Wynika stąd, że dla dwójnika pasywnego istnieje zawsze dystrybucja odwrotna w^{-1} względem w i przy tym: $w^{-1} \in \mathcal{S}'_+$. Jeśli przyjąć: $x \in \mathcal{W}$, to wówczas również $y \in \mathcal{W}$ i dystrybucja w^{-1} określa operator A^{-1} odwrotny względem A , tzn. (por. p. 12):

$$x = A^{-1}y = w^{-1} * y, \quad (65)$$

przy czym operator A^{-1} będzie miał wszystkie te same właściwości co operator A . Jeśli $\mathcal{L}[w(t)]$ jest np. impedancją dwójnika (elektrycznego), to $\mathcal{L}[w^{-1}(t)]$ jest oczywiście admittancją tegoż dwójnika.

Podane twierdzenie w pełni charakteryzuje klasę dwójników, których immitancje są funkcjami rzeczywistymi dodatnimi.

14. PRZEKSZTAŁCENIE LAPLACE'A W UJĘCIU KOREVAARA

Omówimy teraz krótko inne, najczęściej spotykane w literaturze warianty dystrybucyjnego przekształcenia Laplace'a, głównie pod kątem ich porównania z przedstawionym przez nas ujęciem.

W ujęciu Korevaara [20] dystrybucje definiuje się w sposób analogiczny jak w ujęciu ciągowym Mikusińskiego (p. 2). Różnice (wyłącznie natury formalnej) dadzą się streścić następująco:

- a) funkcje $f_n(t)$ tworzące ciąg podstawowy są określone tylko w przedziale $[0, +\infty)$ — a nie $(-\infty, +\infty)$ jak w p. 2; w związku z tym: $T_1 = 0$ w określeniu ciągu podstawowego;
- b) funkcje $f_n(t)$ są lokalnie całkowalne (a nie ciągłe jak w p. 2), zaś funkcje $F_n(t)$ w definicji ciągu podstawowego są określone dla danego k jako:

$$F_n(t) = f_n^{(-k)}(t) = \int_0^t f_n(\tau) \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} d\tau. \quad (66)$$

Poza tymi różnicami konstrukcja pojęcia dystrybucji jest identyczna jak w p. 2. W rezultacie otrzymuje się dystrybucje w przedziale $[0, +\infty)$, które można identyfikować z dystrybucjami równymi zeru dla $t < 0$, tj. z dystrybucjami $f \in \mathcal{D}'_+$.

O ciągu podstawowym $\{f_n(t)\}$ mówimy, że jest typu wykładniczego, jeśli:

a) istnieją: $\mathcal{L}[f_n(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f_n(t) dt$, $n = 1, 2, \dots$,

b) istnieje taka liczba całkowita $k \geq 0$ oraz stałe $M > 0$, $\varrho \geq 0$, że:

$$|f_n^{(-k)}(t)| \leq M e^{\varrho t} \quad \text{dla } t \geq 0. \quad (67)$$

O dystrybucji $f(t) = \langle f_n(t) \rangle$ mówimy, że jest typu wykładniczego, jeśli ciąg $\{f_n(t)\}$ jest typu wykładniczego.

Bez trudu można wykazać (por. [20]), str. 385, twierdzenie 8.10), iż ta definicja dystrybucji typu wykładniczego jest równoważna poprzedniej, podanej w p. 6: obie one określają ten sam zbiór $\mathcal{W}$ dystrybucji typu wykładniczego.

Przekształcenie Laplace'a dystrybucji $f(t) \in \mathcal{W}$ określa się teraz następująco. Jeśli: $f(t) = \langle f_n(t) \rangle$, to:

$$\mathcal{L}[f(t)] \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}[f_n(t)]. \quad (68)$$

Łatwo również wykazać (por. [20], str. 388, twierdzenie 9.10), iż definicja (68) jest równoważna definicji (12): określają one tę samą $\mathcal{L}$ -transformatę dystrybucji $f(t) \in \mathcal{W}$.

Jak wynika z tego krótkiego porównania, oba przedstawione ujęcia zagadnień dystrybucyjnego przekształcenia Laplace'a są w pełni równoważne i niewiele, w zasadzie, od siebie się różnią. Pewną wadą ujęcia Korevaara jest to, iż definicja (68) $\mathcal{L}$ -przekształcenia korzysta w sposób wyraźny z definicji samej dystrybucji, co, jak już podkreślaliśmy, nie występuje w przypadku definicji (12).

15. PRZEKSZTAŁCENIE LAPLACE'A W UJĘCIU SCHWARTZA

Przekształcenie Laplace'a w ujęciu funkcjonalowym wprowadzone przez Schwartza w pracy [21] oparte jest na pojęciu dystrybucji temperowanej i ściśle wiąże się z dystrybucyjnym przekształceniem Fouriera (por. np. [17], [18], [22]).

Założmy, że $f \in \mathcal{D}'_+$ tzn. f jest dystrybucją równą zeru dla $t < 0$ oraz że istnieje taka liczba rzeczywista c , że:

$$e^{-ct} f \in \mathcal{S}'_+ \quad (69)$$

(dystrybucja $e^{-ct} f$ jest też równa zeru dla $t < 0$). Dystrybucję spełniającą te założenia będziemy nazywać dystrybucją $\mathcal{L}$ -transformowalną (w sensie Schwartza).

Gdyby f była funkcją, wówczas:

$$\bar{f}(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-ct} f(t) e^{-(s-c)t} dt \quad (70)$$

dla $\text{Re } s > c$. Na podobieństwo zapisu (70) transformatę Laplace'a dystrybucji f $\mathcal{L}$ -transformowalnej definiuje się następująco (np. [17], [18]):

$$\bar{f}(s) = \mathcal{L}[f(t)] \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, e^{-st} \rangle. \quad (71)$$

Prawa strona wzoru (71) ma znaczenie umowne, gdyż funkcja e^{-st} nie jest elementem przestrzeni $\mathcal{S}$ (a więc nie jest również elementem przestrzeni $\mathcal{D}$). Rozumiemy ją następująco:

$$\langle f, e^{-st} \rangle \equiv \langle e^{-ct} f, \lambda(t) e^{-(s-c)t} \rangle, \quad (72)$$

gdzie $\lambda(t)$ — funkcja klasy C^∞ o nośniku ograniczonym od dołu i równa jedności w otoczeniu nośnika dystrybucji f . Innymi słowy, rolą funkcji $\lambda(t)$, czysto zresztą formalną, jest „zgaszenie” funkcji $e^{-(s-c)t}$ dla dostatecznie dużych co do modułu, ujemnych wartości t bez zmiany jej przebiegu tam, gdzie to jest istotne, tj. w otoczeniu nośnika dystrybucji f (dystrybucja $e^{-ct}f$ ma ten sam nośnik co f). W ten sposób: $\lambda(t)e^{-(s-c)t} \in \mathcal{S}$ dla $\text{Re } s > c$ i funkcyjonał (72) jest dobrze określony, ponieważ z założenia $e^{-ct}f \in \mathcal{S}'$, a więc funkcyjonał $\langle e^{-ct}f, \Phi \rangle$ jest określony dla każdej funkcji $\Phi \in \mathcal{S}$. Ponieważ funkcja: $\lambda(t)e^{-(s-c)t}$ zależy dodatkowo od parametru s , wartość (72), a więc i (71), jest funkcją s , określoną w półpłaszczyźnie $\text{Re } s > c$.

Przykład 9. Mamy wprost — por. (2), (71):

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \langle \delta, e^{-st} \rangle = 1.$$

Przykład 10. Obliczając zgodnie z (71) transformatę pochodnej mamy:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \langle f', e^{-st} \rangle = \langle f, se^{-st} \rangle = s \langle f, e^{-st} \rangle = s \overline{f}(s).$$

W analogiczny sposób można wykazać w ujęciu funkcyjonałowym wszystkie własności $\mathcal{L}$ -przekształcenia, wymienione przez nas w p. 7.

Przedstawiona tu definicja funkcyjonałowa przekształcenia Laplace’a jest w pełni równoważna poprzedniej definicji (12). Rozstrzygające znaczenie w tym zakresie ma następujące twierdzenie:

Każda dystrybucja $\mathcal{L}$ -transformowalna (w sensie Schwartza) jest dystrybucją typu wykładniczego (w sensie określonym w p.6) i odwrotnie.

D o w ó d. a) Niech: $fe^{-ct} \in \mathcal{S}'_+$. Ponieważ: $\mathcal{S}'_+ \subset \mathcal{W}$ (p.6), a więc: $fe^{-ct} \in \mathcal{W}$ oraz również ([5], str. 287): $f = e^{ct}e^{-ct}f \in \mathcal{W}$.

b) Niech: $f \in \mathcal{W}$. Wówczas, zgodnie z określeniem (p.6): $f = F^{(k)}(t)$, $F(t) = 0$ dla $t < 0$, $|F(t)| \leq Me^{at}$ dla $t \geq 0$. Weźmy funkcję ciągłą:

$$\psi(t) = e^{-at}F(t) + \sum_{v=1}^k \binom{k}{v} e^v \int_0^t \frac{(t-\tau)^{v-1}}{(v-1)!} e^{-a\tau} F(\tau) d\tau, \quad (73)$$

przy czym oczywiście: $\psi(t) = 0$ dla $t < 0$. Pochodna dystrybucyjna rzędu k funkcji (73) jest równa ([5], str. 287)

$$\psi^{(k)}(t) = e^{-at}F^{(k)}(t) = e^{-at}f. \quad (74)$$

Wykażemy, że $\psi(t)$ jest funkcją temperowaną. Mamy dla $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} |\psi(t)| &\leq |e^{-at}F(t)| + \sum_{v=1}^k \binom{k}{v} e^v \left| \int_0^t \frac{(t-\tau)^{v-1}}{(v-1)!} e^{-a\tau} F(\tau) d\tau \right| \leq \\ &\leq M + \sum_{v=1}^k \binom{k}{v} e^v \frac{M}{(v-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{v-1} d\tau = \\ &= M + M \sum_{v=1}^k \binom{k}{v} e^v \frac{t^v}{v!} = \sum_{v=0}^k A_v t^v, \end{aligned}$$

a więc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-(k+1)} \psi(t) = 0.$$

Funkcja $\psi(t)$ jest więc istotnie funkcją temperowaną, a stąd zgodnie z (74): $e^{-et}f \in \mathcal{S}'_+$, a więc f jest dystrybucją $\mathcal{L}$ -transformowalną.

Podobnie, można bez trudu pokazać w oparciu o zależność (13), że dla każdej dystrybucji $f \in \mathcal{W}$ wzory (12) i (71) określają tę samą funkcję, $\mathcal{L}$ -transformatę dystrybucji f .

16. INNE WARIANTY PRZEKSZTAŁCENIA LAPLACE'A

Na zakończenie warto wspomnieć o innych, ogólniejszych ujęciach przekształcenia Laplace'a w dziedzinie dystrybucji.

Dotychczas rozpatrywaliśmy wyłącznie zagadnienia $\mathcal{L}$ -przekształcenia dystrybucji równych zero dla $-\infty < t < 0$. Ten zakres zagadnień jest niewątpliwie najistotniejszy praktycznie i teoretycznie. Można jednak, podobnie, jak to się czasem robi w zakresie funkcyjnym (por. np. [23]), uwolnić się od podanego ograniczenia.

Definicję (71) przekształcenia Laplace'a w ujęciu funkcjonalowym można np. przyjąć bez żadnych zmian w przypadku, gdy f jest dystrybucją o lewostronnie ograniczonym nośniku tj. równą zero w jakimś przedziale $-\infty < t < T$. Konsekwencją takiego rozszerzenia byłby np. fakt, iż równość (16) byłaby słuszna dla dowolnego rzeczywistego t_0 .

Podobnie można określać transformatę Laplace'a dystrybucji o prawostronnie ograniczonym nośniku, tj. równej zero dla $T < t < +\infty$. Wówczas, podobnie jak poprzednio, przy spełnieniu warunku: $e^{-dt}f \in \mathcal{S}'$:

$$\bar{f}(s) = \mathcal{L}[f(t)] \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, e^{-st} \rangle \equiv \langle e^{-dt}f, \mu(t) e^{-(s-d)t} \rangle \quad (75)$$

gdzie $\mu(t)$ — funkcja klasy C^∞ o nośniku ograniczonym od góry i równa jedności w otoczeniu nośnika dystrybucji f , przy czym teraz wzór (75) określa transformatę $\bar{f}(s)$ dla $\text{Res} < d$.

W przypadku dystrybucji f o nieograniczonym (ani od góry ani od dołu) nośniku możliwy jest (por. np. [18]) rozkład na sumę:

$$f = f_d + f_g, \quad (76)$$

gdzie f_d, f_g mają nośnik ograniczony odpowiednio od dołu i od góry. Wówczas można przy spełnieniu poprzednich warunków definiować $\mathcal{L}$ -transformatę dystrybucji w postaci (por. np. [18])

$$\bar{f}(s) = \mathcal{L}[f(t)] \stackrel{\text{def}}{=} \bar{f}_d(s) + \bar{f}_g(s) \quad (77)$$

przy czym transformata $\bar{f}_d(s)$ jest określona wzorem (71) dla $\text{Res} > c$, zaś transformata $\bar{f}_g(s)$ wzorem (75) dla $\text{Res} < d$. Transformata (77) będzie funkcją holomorficzną w pasie $c < \text{Res} < d$ pod warunkiem, iż $c < d$.

Niezależnie od zagadnienia ograniczoności czy nieograniczoności nośnika dystrybucji wszystkie przedstawione dotąd ujęcia dystrybucyjnego przekształcenia Laplace'a wymagały spełnienia pewnego założenia dodatkowego, które, z pominięciem nieistotnych różnic, da się sprowadzić do warunku, aby istniała taka liczba rzeczywista c , że $e^{-ct}f(t) \in \mathcal{S}'$. Powstaje zatem pytanie, czy można dalej rozszerzyć zakres przekształcenia Laplace'a np.

tak, aby każda dystrybucja $f(t) \in \mathcal{D}'$ miała $\mathcal{L}$ -transformatę. Pozytywną odpowiedź na to pytanie dał Ishihara [24], który w oparciu o definicję Gelfanda i Sziłowa [4] transformaty Fouriera dystrybucji $f \in \mathcal{D}'$ podał analogiczną definicję $\mathcal{L}$ -transformaty dowolnej dystrybucji $f \in \mathcal{D}'$.

WYKAZ LITERATURY

1. Mikusiński J., Sikorski R.: The Elementary Theory of Distributions (I). — Rozprawy Matematyczne XII, PWN, Warszawa 1957.
2. Mikusiński J., Sikorski R.: Elementarna teoria dystrybucji. PWN, Warszawa 1964 (Małe Monografie PWN — Matematyka).
3. Lighthill M. J.: Wstęp do analizy Fouriera i teorii dystrybucji. PWN, Warszawa 1963 (Małe Monografie PWN — Matematyka).
4. Gelfand L. M., Sziłow G. E.: Obobsczennyje funkcji i diejstwija nad nimi. GIFML, Moskwa 1958.
5. Osowski J.: Zarys rachunku operatorowego. WNT, Warszawa 1965.
6. Steinhaus H. (redaktor): Elementy nowoczesnej matematyki dla inżynierów. PWN, Warszawa—Wrocław 1964. Rozdział VI: J. Osowski „Elementy teorii dystrybucji”.
7. Osowski J.: Znaczenie i zastosowania dystrybucji w teorii obwodów. — Rozprawy Elektrotechn. t. VI, 1960, zeszyt 4.
8. Mikusiński J.: Rachunek operatorów. PWN, Warszawa 1957.
9. Bellert S.: Metoda operatorów liczbowych. — Rozprawy Elektrotechn., t. V, 1959, zeszyt 4.
10. Bellert S.: On Foundations of Operational Calculus. — Bull. Acad. Pol. Sci. Cl. III, t. V, 1957.
11. Bittner R.: Operational Calculus in Linear Spaces. — Studia Math., t. 20, 1961.
12. Doležal V.: Über eine Klasse linearer Operatoren. — Čas. pro pešt. matem., t. 86, 1961.
13. Doležal V.: O jistných lineárních operátorech. — Čas. pro pešt. matem., t. 87, 1962.
14. Doležal V.: Dynamics of Linear Systems. — Publ. House of the Czech. Acad. Sci., Prague 1964.
15. Livermann T. P. G.: Generalized Functions and Direct Operational Methods. Vol. I. Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1964.
16. Weston J. D.: Operational Calculus and Generalized Functions. — Proc. Royal Society, No 1263, vol. 250, 7.IV.1959.
17. Schwartz L.: Méthodes mathématiques pour les sciences physiques. Hermann, Paris 1961 (lub tłumaczenie rosyjskie: „Matematyčeskije metody dla fizyčeskich nauk”. Mir, Moskwa 1965).
18. Zemanian A. H.: Distribution Theory and Transform Analysis. McGraw-Hill, New York 1965.
19. Doležal V.: O použití distribuci v teorii lineárních dynamických soustav. — Aplikace Matematiky, t. IV, 1959, nr 6.
20. Korevaar J.: Distributions Defined from the Point of View of Applied Mathematics. — Indagationes Mathematicae, vol. XVII, 1955.
21. Schwartz L.: Transformation de Laplace des distributions. — Communications du Séminaire Mathématique de l'Université de Lund. Tome supplémentaire dédié à M. Riesz, 1952.
22. Schwartz L.: Théorie des distributions. Hermann, Paris 1966.
23. van der Pol B., Bremmer H.: Operational Calculus Based on the Two-Sided Laplace Integral. — University Press, Cambridge 1955.
24. Ishihara T.: On Generalized Laplace Transforms. — Proc. Japan Acad., vol. 37, 1961.

J. OSIOWSKI

OPERATIONAL CALCULUS IN THE DOMAIN OF DISTRIBUTIONS

Summary

Some fundamental problems of the operational calculus in the domain of distributions are discussed in the paper. After the preface and the brief introduction to the theory of distributions defined both in terms

of sequences (Mikusiński) and in terms of functionals (Schwartz) (§§ 2-5), the most important definitions, theorems and properties concerning the distributional Laplace transformation are presented in §§ 6-8. The basis for the considerations is the Doležal's definition of the Laplace transformation in the field of distributions [19].

The next part of the paper (§§ 9-13) deals with such various problems concerning differential equations and linear circuit theory, in which the method of the distributional Laplace transformation has been applied successfully. The following problems can be mentioned here: the solving of the differential equations in the domain of distributions, some convolution problems and the solving of the distributional convolution equations, the determination of the inverse distribution, some properties of the two-ports having rational transform functions, the extension of the Brune's theorem to the case of general passive one-port and so forth.

The last part of the paper (§§ 14-16) contains a brief review of other possibilities to introduce the Laplace transformation in the domain of distributions. The comparison with our method of defining the distributional Laplace transformation is also given. In particular, it has been shown that for the set of distributions equal to zero over the interval $(-\infty, 0)$ the definitions: given by Schwartz [21] and by Doležal [19] are strictly equivalent. These results are of important practical significance. They make it possible to formulate uniquely all the problems of distributional operational calculus, which have been treated up-to-date in numerous various manners.

J. OSIOWSKI

LE CALCUL OPÉRATEUR DANS LE DOMAINE DES DISTRIBUTIONS

Résumé

Dans cet ouvrage on a présenté les problèmes fondamentales de calcul opératoire dans le domaine des distributions. Après une courte introduction dans des problèmes de la théorie des distributions en termes des suites et des fonctionnels (§§ 2-5) on a introduit les définitions les plus importantes, les théorèmes et les propriétés concernant la transformation de Laplace dans le domaine des distributions en prenant pour la base la définition de la transformation de Laplace de la distribution donnée par Doležal [19].

Dans la suite de l'ouvrage (§§ 9-13) on a discuté les divers problèmes concernant les équations différentielles et la théorie des systèmes linéaires où la méthode de la transformation de Laplace dans le domaine des distributions trouve une application substantielle. On peut citer ici: la solution des équations différentielles linéaires dans le domaine des distributions, les problèmes de produit de composition et la solution des équations contenant le produit de composition, l'assignation des distributions inverses, étude de certaines propriétés des quadripôles linéaires aux transmittances rationnelles et les problèmes concernant le théorème généralisé de Brune de l'immittance des dipôles passifs.

A la fin de l'ouvrage (§§ 14-16) on a discuté brièvement les autres manières d'introduction de la transformation de Laplace dans le domaine des distributions connus dans la littérature, en les comparant avec la manière présentée dans cet ouvrage. En particulier on a prouvé, que dans le domaine des distributions égaux à zéro dans l'intervalle $(-\infty, 0)$ les définitions de la transformation de Laplace présentées par Schwartz [21] et Doležal [19] sont entièrement équivalentes. Ces résultats sont importants au point de vue de l'unification et rendent possible la création d'une opinion uniforme sur les problèmes du calcul opératoire dans le domaine des distributions qui sont jusqu'à présent traités différemment par chaque auteur.

J. OSIOWSKI

DIE DISTRIBUTIONALE OPERATORENRECHNUNG

Zusammenfassung

In der Arbeit wurden die Hauptprobleme der Operatorenrechnung im Distributionsbereich dargestellt.

Nach dem kurzen Vorwort und der Einführung in die Probleme der Distributionstheorie (p. 2-5) wurden (p. 6-8) die wichtigsten Definitionen, Behauptungen und Eigenschaften betreffenden der distributionale

Laplace-Transformation angegeben. Dabei wurde als Überlegungsgrund die Definition der Laplace-Transformation der Distribution angenommen, die durch Doležal [19] angegeben wurde. Im weiteren Teil der Arbeit (p. 9–13) wurde eine Anzahl der verschiedenen Probleme im Bereich der Differentialgleichungen und der Theorie der linearen Systeme besprochen, in denen die Methode der distributionale Laplace-Transformation eine wesentliche Anwendungen findet. Zu diesen Problemen gehören unter anderem: die Lösungen der linearen Differentialgleichungen im Distributionsbereich, das Faltungsproblem und die Lösungen der distributionalen Faltungsgleichungen, die Bestimmung der umkehrten Distributionen, die Untersuchung der manchen Eigenschaften der einigen linearen Vierpole mit rationalen Übertragungsfunktionen und die Probleme verbunden mit der Verallgemeinerung des Satzes von Brune für der Eingangswiderstände der passiven Zweipole.

Am Ende wurden andere aus der Literatur bekannte Einführungsweisen der distributionale Laplace-Transformation besprochen und auch wurden sie mit der dargestellten Auffassung in der gegenwärtigen Arbeit verglichen. Im Besondern wurde es bewiesen, dass die durch Schwartz [21] und Doležal [19] angegebenen Definitionen der Laplace-Transformation der Distributionen verschwindenden im Intervall $(-\infty, 0)$ gleichbedeutend sind. Diese Ergebnisse haben eine unifizierende Bedeutung und ermöglichen das Schaffen einer einheitlichen Ansicht auf die Probleme der Operatorenrechnung im Distributionsbereich, die — wie bis jetzt — durch verschiedene Autoren sehr ungleichmässig dargestellt werden.

Е. ОСЕВСКИ

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В ОБЛАСТИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Р е з ю м е

В работе представлены основные проблемы операционного исчисления в области обобщенных функций (распределений).

После предварительных замечаний и краткого введения в вопросы обобщенных функций, рассматриваемых как последовательности (по Микусинскому) или как функционалы (по Соболеву и Шварцу), в §§ 6—8 изложены все основные определения, теоремы и свойства преобразования Лапласа обобщенных функций. Представленный нами подход основан на определении Долежала [19]. В дальнейшем (§§ 9—13) обсуждены различные вопросы по теории дифференциальных уравнений и теории линейных систем, в которых находит применение представленный раньше операционный метод в области обобщенных функций. Здесь можно указать такие вопросы, как: решение дифференциальных уравнений в области обобщенных функций, некоторые вопросы касающиеся свертки и решения уравнений в свертках, проблема обратных обобщенных функций, некоторые свойства линейных четырехполюсников обладающих рациональными функциями передачи, обобщение теоремы Бруне для входного сопротивления пассивного двухполюсника и др.

В заключении дается краткий обзор других известных по литературе способов определения преобразования Лапласа в области обобщенных функций с учётом их сравнения с подходом рассмотренным в этой статье. Между прочим доказано, что в области обобщенных функций равных нулю на интервале $(-\infty, 0)$ определения преобразования Лапласа данные Шварцом [21] и Долежалом [19] взаимно эквивалентные. Эти результаты представляют некоторый практический интерес, так как они приводят в порядок вопросы связанные с определением преобразования Лапласа в области обобщенных функций. Как нам кажется, они делают возможным единственный подход к этим вопросам, которые до сих пор в литературе представлялись различными методами.

OLGIERD PRZESMYCKI

Nowa — szablonowa metoda wyznaczania wartości parametrów funkcji impedancyjnych filtrów LC obliczanych na gruncie parametrów falowych

Rękopis dostarczono 17.4.1967

W pracy przedstawiono metodę szablonową (tj. metodę graficzno-analityczną opartą na użyciu określonego wykresu pewnej funkcji) wyznaczania wartości parametrów funkcji impedancyjnych filtrów LC obliczanych na gruncie parametrów falowych, przy czym rozpatrzono ją w odniesieniu do funkcji impedancyjnych sprowadzalnych do charakterystyk dolnoprzepustowych. Wskazano sposób wykorzystania w praktyce przedstawionej metody, umożliwiającą minimalizację zniekształceń tłumieniowych wnoszonych przez filtry rzeczywiste (tj. ze stratami) w praktycznym pasmie przepustowym przy zachowaniu z góry danej maksymalnej wartości współczynnika odbicia (echa). Metodą zilustrowano odpowiednim przykładem liczbowym.

1. WSTĘP

Przy obliczaniu filtrów LC na gruncie parametrów falowych dla parametrów funkcji impedancyjnych z_1 i z_2 filtru przyjmuje się z zasady takie wartości, przy których byłyby zachowane izoekstremalne (czebyszewowskie) przebiegi transmitancji niedopasowania filtru w praktycznym pasmie przepustowym w przypadku, gdyby: 1° w elementach filtru nie było strat i 2° impedancje robocze filtru były rzeczywiste i stałe¹⁾.

Powyższe wartości parametrów funkcji z_1 i z_2 , obliczane za pomocą wzorów podanych m.in. w [2], [3], [4] i [7] nie są jednak najkorzystniejsze z punktu widzenia minimalnych zniekształceń tłumieniowych wnoszonych przez filtr rzeczywisty (tj. ze stratami) w praktycznym pasmie przepustowym²⁾. Bardziej korzystne z tego punktu widzenia wartości parametrów funkcji z_1 i z_2 trudno jest wyznaczyć metodą analityczną (a więc na drodze czysto rachunkowej), zwłaszcza wtedy, kiedy klasa tych funkcji jest dość wysoka (np. wyższa, niż druga), co często się zdarza. Można je natomiast stosunkowo łatwo wyznaczyć metodą graficzno-analityczną, opracowaną przez autora, zwaną metodą szablonową.

W pracy niniejszej jest przedstawiona ta właśnie szablonowa metoda wyznaczania wartości parametrów funkcji z_1 i z_2 filtrów dla z góry danych warunków, rozpatrzona w odniesieniu do funkcji z_1 , z_2 sprowadzalnych do charakterystyk dolnoprzepustowych. Tego rodzaju funkcje, jak wiadomo, najczęściej występują w stosowanych w praktyce

¹⁾ Najczęściej drugi z podanych warunków, w odróżnieniu od pierwszego, prawie dokładnie bywa spełniony w praktyce. Dlatego też u podstaw metody szablonowej rozpatrywanej w niniejszej pracy zakłada się, iż jest on spełniony.

²⁾ Por. np. [7], str. 211.

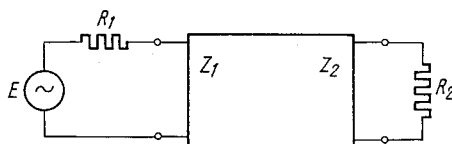
różnych filtrach LC obliczanych na gruncie parametrów falowych, a m.in. w filtrach typu Zobela ([11], [6], [7], [10]), których półogniwami skrajnymi są półogniwa odwracające (różnych rzędów) i półogniwa pochodne typu m , typu mm' i ogólnie typu $mm' \dots m^{(n)}$.

Praca składa się w zasadzie z trzech odrębnych części, objętych rozdziałami 2, 3 i 4. W części pierwszej omówiono zasadnicze własności rozpatrywanych typów funkcji z_1 i z_2 , podając ich klasyfikację. W części drugiej omówiono podstawy teoretyczne oraz istotę rozpatrywanej metody szablonowej prowadząc rozważania na bazie tzw. funkcji standardowej (impedancyjnej), wprowadzonej w części pierwszej. Wreszcie w części trzeciej wskazano sposób, w jaki można wykorzystać rozpatrywaną metodę szablonową przy obliczaniu filtrów LC dysypatywnych, by móc zmniejszyć do minimum wprowadzane przez nie zniekształcenia tłumieniowe w praktycznym pasmie przepustowym przy równoczesnym zachowaniu z góry danej wartości maksymalnej współczynnika odbicia (echa).

W całości pracy zakłada się milcząco, że rozpatrywane filtry są czwórnikami biernymi linearnymi, zawierającymi elementy skupione niezmiennie w czasie. Przy tym przez filtry symetryczne (antymetryczne) rozumie się zawsze filtry symetryczne (antymetryczne) pod względem impedancji falowych.

2. POJĘCIA ZASADNICZE

Metoda szablonowa, stanowiąca przedmiot niniejszej pracy dotyczy w zasadzie filtrów reaktancyjnych, a więc filtrów LC bez strat¹⁾. Opiera się ona na pewnych właściwościach funkcji impedancyjnych filtrów tego rodzaju. W tym rozdziale podamy postacie funkcji impedancyjnych, które są nią objęte. Ponadto przypomnimy definicje szeregu terminów, z których w dalszym ciągu będzie się korzystać. Aby to było możliwe, założymy od razu,



Rys. 1. Filtr o impedancjach falowych Z_1 i Z_2 włączony między rzeczywiste impedancje R_1 i R_2

że mamy dany filtr reaktancyjny włączony między rzeczywiste, dodatnie i stałe (a więc niezależne od częstotliwości, czasu itp.) impedancje robocze: pierwotną R_1 i wtórną R_2 , rys. 1. Funkcje impedancyjne: pierwotna z_1 i wtórna z_2 tego filtru są określone wzorami:

$$z_1 = Z_1/R_1 \quad \text{ i } \quad z_2 = Z_2/R_2, \quad (1)$$

gdzie Z_1 i Z_2 — impedancje falowe pierwotna i wtórna filtru

W zależności od funkcji z_1 i z_2 w prosty sposób możemy wyrazić tamowności niedopasowania: pierwotną Γ_{N1} i wtórną Γ_{N2} danego filtru, jak również i jego tłumienności niedopasowania: pierwotną A_{N1} i wtórną A_{N2} ; mamy bowiem:

$$\Gamma_{N1} = \ln \frac{1+z_1}{1-z_1}, \quad \Gamma_{N2} = \ln \frac{1+z_2}{1-z_2}, \quad (2)$$

¹⁾ Metoda ta może być stosowana jednak i przy projektowaniu filtrów dysypatywnych (a więc filtrów LC ze stratami), w których można założyć, że straty nie mają wpływu na pewne wielkości filtru (np. na impedancje falowe w pasmie przepustowym itp.). Jak wiadomo, tego rodzaju założenie bardzo często przyjmuje się przy obliczaniu określonych rodzajów filtrów LC w celu uproszczenia przeprowadzanych rachunków [7].

$$A_{N1} = \operatorname{Re} \Gamma_{N1} = \ln \left| \frac{1+z_1}{1-z_1} \right|, \quad A_{N2} = \operatorname{Re} \Gamma_{N2} = \ln \left| \frac{1+z_2}{1-z_2} \right|. \quad (3)$$

Zgodnie z (3) i (1) tłumienności A_{N1} i A_{N2} są miarami (logarytmicznymi) względnych odchyłeń impedancji falowych Z_1 i Z_2 filtru od jego impedancji roboczych R_1 i R_2 . Od nich więc w znacznym stopniu zależy zachowanie się podstawowych wielkości roboczych filtru w pasmie przepustowym.

Dalsze nasze rozważania w tym rozdziale skoncentrujemy na jednej tylko (dowolnie wybranej) stronie filtru, a więc na jego stronie pierwotnej lub też wtórnej. W związku z tym wprowadzimy wielkości Z, R, z, Γ_N i A_N , reprezentujące kolejno bądź wielkości $Z_1, R_1, z_1, \Gamma_{N1}$ i A_{N1} , bądź też wielkości $Z_2, R_2, z_2, \Gamma_{N2}$ i A_{N2} filtru. Wielkości Z, R, z, Γ_N i A_N nazwiemy odpowiednio impedancją falową, impedancją roboczą, funkcją impedancyjną, tamownością niedopasowania i tłumiennością niedopasowania danego filtru. Dla nich — zgodnie z (1), (2) i (3) — będą obowiązywać zależności:

$$z = Z/R, \quad (4)$$

$$\Gamma_N = \ln \frac{1+z}{1-z}, \quad (5)$$

$$A_N = \operatorname{Re} \Gamma_N = \ln \left| \frac{1+z}{1-z} \right|. \quad (6)$$

Warto zauważyć, iż w związku z przyjętym założeniem, że rozpatrywany filtr jest filtrem reaktancyjnym pracującym między rzeczywistymi, dodatnimi i stałymi impedancjami roboczymi, jego funkcja z ma własności analogiczne do własności impedancji Z . Ma ona zatem m.in.: 1° analogiczny przebieg w funkcji częstotliwości (tak fizycznej f , jak i pewnej „uogólnionej”, rozpatrywanej w dalszym ciągu, a mianowicie znormalizowanej y i także znormowanej D), 2° przybiera wartości rzeczywiste dodatnie w pasmie przepustowym oraz 3° przybiera wartości urojone dodatnie i ujemne w pasmie tłumieniowym. Wskutek tego, np. w pasmie przepustowym, transmitancja niedopasowania filtru, określona jako

$$e^{-r_N} = \frac{1-z}{1+z}, \quad (7)$$

przybiera wartości rzeczywiste dodatnie (gdy $z < 1$) i ujemne (gdy $z > 1$).

Przyjmujemy, że impedancja falowa Z rozpatrywanego filtru wyraża się wzorem¹⁾

$$Z = \begin{cases} R_N \sqrt{1-y^2} \frac{\prod_{i=1,3,\dots}^{n-2} (1-a_i^2 y^2)}{\prod_{i=2,4,\dots}^{n-1} (1-a_i^2 y^2)} & \text{dla } n = 1, 3, \dots \\ R_N \sqrt{1-y^2} \frac{\prod_{i=2,4,\dots}^{n-2} (1-a_i^2 y^2)}{\prod_{i=1,3,\dots}^{n-1} (1-a_i^2 y^2)} & \text{dla } n = 2, 4, \dots \end{cases} \quad (8)$$

¹⁾ We wzorach (8) lub (9) zakłada się, że dla $n-2 \leq 0$ lub $n-1 \leq 0$ odpowiednie iloczyny występujące w liczniku lub mianowniku są równe 1.

lub wzorem

$$Z = \begin{cases} R_N \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \frac{\prod_{i=2,4,\dots}^{n-1} (1-a_i^2 y^2)}{\prod_{i=1,3,\dots}^{n-2} (1-a_i^2 y^2)} & \text{dla } n = 1, 3, \dots \\ R_N \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \frac{\prod_{i=1,3,\dots}^{n-1} (1-a_i^2 y^2)}{\prod_{i=2,4,\dots}^{n-2} (1-a_i^2 y^2)} & \text{dla } n = 2, 4, \dots, \end{cases} \quad (9)$$

gdzie y — określona funkcja częstotliwości fizycznej f , zwana *częstotliwością znormalizowaną* i dla $f \in [0, \infty]$ przybierająca rzeczywiste wartości, np. zawarte w przedziale $[-\infty, \infty]$, R_N — liczba rzeczywista dodatnia stanowiąca szczególną wartość Z dla $y = 0$ i zwana *nominalną impedancją falową*, natomiast $a_i^2 (i = 1, 2, \dots, n-1)$ — rzeczywiste liczby (dodatnie) reprezentujące odwrotności kwadratów częstotliwości zer i biegunów impedancji $Z = Z(y)^{1)}$ spełniające warunek:

$$0 < a_1^2 < a_2^2 < \dots < a_{n-2}^2 < a_{n-1}^2 < 1. \quad (10)$$

Zauważmy, że funkcje $Z = Z(y)$ wg (8) i (9) przedstawiają jedne z możliwych, częściej spotykanych form impedancji falowych filtrów reaktancyjnych fizycznie realizowalnych [3], a mianowicie filtrów takich, których impedancje falowe w oparciu o odpowiednie transformacje częstotliwościowe, zgodne np. z normalizacją y podaną w [6] i [7] dają się sprowadzić do charakterystyk dolnoprzepustowych. Wzory (8) i (9) wyrażają właśnie te „sprowadzone” już do charakterystyk dolnoprzepustowych impedancje falowe filtru. Inaczej mówiąc wielkość y w tych wzorach przedstawia częstotliwość zredukowaną dolnoprzepustowego filtru odniesienia, tj. iloraz jego pulsacji bieżącej ω przez pulsację graniczną ω_0 , gdzie pulsacja ω może przyjmować wartości (rzeczywiste) zawarte w granicach od $-\infty$ do ∞ do ∞ ²⁾.

W przypadku charakterystyk górnoprzepustowych, środkowoprzepustowych (częstotliwościowo-symetrycznych) i środkowozaporowych (częstotliwościowo-symetrycznych) wielkość y w omawianych wzorach wiąże się z częstotliwością fizyczną f odpowiednio wzorami postaci³⁾:

$$y = -f_0/f, \quad y = \frac{f^2 - f_1 f_{-1}}{f(f_1 - f_{-1})}, \quad y = -\frac{f(f_1 - f_{-1})}{f^2 - f_1 f_{-1}}, \quad (11)$$

gdzie f — częstotliwość dowolna (bieżąca), f_0 — częstotliwość graniczna, f_1 i f_{-1} — częstotliwości graniczne górna i dolna ($f_1 > f_{-1}$).

Punktami rozgałęzienia funkcji $Z = Z(y)$ wg (8) i (9) są częstotliwości $|y| = 1$. Odpowiadają one częstotliwościom granicznym filtru. Dla nich funkcja (8) przybiera wartość 0, funkcja (9) zaś — wartość ∞ .

¹⁾ Omawiane częstotliwości występują dla $|y| > 1$ (tj. w pasmie tłumieniowym).

²⁾ Jest rzeczą oczywistą, że gdy rozpatrujemy (np. obliczamy) filtr dolnoprzepustowy, interesuje nas zakres zmian wartości ω (a więc i y) tylko od 0 do ∞ .

³⁾ Por. [7], str. 75.

Dla częstotliwości $|y| < 1$ obie rozważane funkcje mają wartości rzeczywiste dodatnie, a przy tym spełniają warunek:

$$Z(-y) = Z(y), \quad (12)$$

tzn. są parzystymi funkcjami częstotliwości y . Zakres $|y| < 1$ stanowi zatem pasmo przepustowe (tzw. teoretyczne) danego filtra.

Dla $|y| > 1$ każda z omawianych funkcji przybiera wartości urojone (dodatnie i ujemne) i spełnia warunek:

$$Z(-y) = -Z(y),$$

tzn. jest funkcją nieparzystą częstotliwości y . Tak więc zakres $|y| > 1$ stanowi pasmo tłumieniowe (tzw. teoretyczne) rozpatrywanego filtra.

W dalszym ciągu będziemy się zajmować impedancjami falowymi Z tylko wyrażającymi się wzorami (8) i (9). Innymi słowy innych impedancji falowych poza wymienionymi nie będziemy tutaj w ogóle wprowadzać. Gdy chodzi o zakresy częstotliwości charakterystycznych filtra, będziemy się interesować tylko jego pasmem przepustowym ($|y| < 1$), włączając częstotliwości graniczne ($|y| = 1$). Przy tym z uwagi na zależność (12) rozważania najczęściej będziemy ograniczać tylko do przedziału: $0 \leq y \leq 1$.

Figurującą w (8) i (9) wielkość n utożsamimy z tzw. klasą danej impedancji falowej Z . A więc powiemy, iż impedancja falowa Z wyrażona wzorem (8) lub (9) ma klasę pierwszą, drugą, trzecią itd., albo ogólnie n -tą, gdy wielkość n w tych wzorach kolejno będzie równa 1, 2, 3 itd., albo ogólnie n^1 .

Klasy pierwszą, drugą, trzecią itd., oraz ogólnie n -tą w przypadku tak impedancji (8), jak i (9) oznaczymy kolejno przez 1, 2, 3 itd., oraz ogólnie przez n , pamiętając o tym, iż n reprezentuje jakąś liczbę naturalną.

Niezależnie od podanych nazw (i oznaczeń), dla klas pierwszej, drugiej, trzeciej itd. w przypadku impedancji (8) będziemy stosować ponadto nazwy (oznaczenia) kolejnych liter alfabetu greckiego, tj. alfa, beta, gamma itd. (α , β , γ itd.). Dla tych samych klas w przypadku impedancji (9) będziemy stosować natomiast nazwy (oznaczenia) kolejnych liter alfabetu greckiego opatrzonych u góry gwiazdką *, tj. alfa z gwiazdką, beta z gwiazdką, gamma z gwiazdką itd. (α^* , β^* , γ^* itd.).

Analizując (8) i (9) oraz uwzględniając uwagi podane powyżej z łatwością stwierdzamy, że zastosowana tu klasyfikacja danych impedancji Z jest ściśle związana z bardzo istotnymi cechami tych impedancji, a mianowicie:

1) numer klasy danej impedancji Z (tj. liczba naturalna 1, 2, 3 itd.²⁾ w przypadku oznaczania klas liczbami, bądź taka sama liczba zgodna z numerem porządkowym danej litery w alfabecie greckim, w przypadku oznaczania klas literami tego alfabetu, ewentualnie uzupełnionymi gwiazdką *) równa się maksymalnej osiągalnej liczbie częstotliwości y w pasmie przepustowym dla $y \in [0,1]$, przy których Z może się równać stałej (dodatniej) wartości R (odpowiednio dobranej do Z); ten sam numer oczywiście zgodny jest z liczbą

¹⁾ Zamiast mówić, że impedancja Z ma daną klasę, często się mówi, że należy ona do tej klasy. Nieraz też mówi się po prostu: impedancja danej klasy (np. pierwszej itp.).

²⁾ Lub wielkość n oznaczająca ogólnie taką liczbę.

parametrów danej funkcji $Z = Z(y)$, tj. z liczbą wielkości R_N i a_i^2 ($i = 1, 2, \dots, n-1$) występujących we wzorach (8) i (9).

2) impedancje falowe klas oznaczanych literami alfabetu greckiego różniącymi się od siebie tylko gwiazdką są sobie przeciwstawne (w stosunku R_N);

3) klasy oznaczane literami alfabetu greckiego bez gwiazdki (lub z gwiazdką) odpowiadają impedancjom falowym równym 0 (lub równym ∞) dla częstotliwości granicznej ($y = 1$).

Jak widać, oznaczenia literowe klas (α, α^* itd.) dają jedną informację więcej o zachowaniu się Z niż oznaczenia liczbowe (1, 2, ..., n). Mówią one mianowicie o tym, jaką wartość przybiera Z dla $y = 1$.

Funkcji impedancyjnej $z = Z/R$ danego filtra (i samemu powyższemu filtrowi dla strony związanej z funkcją z) także przypiszemy określoną klasę, zgodną z klasą odpowiedniej impedancji Z^1 .

Określoną w wyżej omówiony sposób klasę filtra (dla danej jego strony) nazwiemy *klasą impedancyjną filtra* (dla tej jego strony).

Klasyfikacja filtrów pod względem impedancji Z podana powyżej jest zgodna z przyjętą w [7], stanowiąc odpowiednie jej rozszerzenie (na przypadek, gdy $n > 2$). Różni się ona zatem nieco od użytej np. w [2], [3] i [4], co trzeba uwzględniać.

Wobec szerokiego stosowania w praktyce filtrów typu Zobela²⁾ zwrócimy tu uwagę na następującą okoliczność: w przypadku filtrów typu Zobela impedancjami falowymi klas α, β, γ i δ (lub $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ i δ^*) są odpowiednio impedancje $Z_{Tk}, Z_{Tm}, Z_{Tmm'}$ i $Z_{Tmm'm''}$ (lub $Z_{\pi k}, Z_{\pi m}, Z_{\pi mm'}$ i $Z_{\pi mm'm''}$) reprezentujące impedancje falowe od strony T (lub π) kolejno półogniwa podstawowego i półogniw równoległopochodnych (lub szeregowopochodnych) typu m , typu mm' i typu $mm'm''$. W przypadku półogniw pochodnych wymienionych rodzajów wielkości a_1^2, a_2^2 i a_3^2 w (8) i (9) są równe odpowiednio $1-m^2, 1-(mm')^2$ i $1-(mm'm'')^2$, gdzie $m, m',$ i m'' są to tzw. parametry powyższych półogniw.

Podstawmy (8) i (9) do (4). W rezultacie dostaniemy następujące wzory na funkcję impedancyjną z rozpatrywanego filtra³⁾:

— dla przypadku klas α, β, γ itd.

$$z = \begin{cases} h \sqrt{1-y^2} \frac{\prod_{i=1,3,\dots}^{n-2} (1-a_i^2 y^2)}{\prod_{i=2,4,\dots}^{n-1} (1-a_i^2 y^2)} & \text{przy } n = 1, 3, \dots \\ h \sqrt{1-y^2} \frac{\prod_{i=2,4,\dots}^{n-2} (1-a_i^2 y^2)}{\prod_{i=1,3,\dots}^{n-1} (1-a_i^2 y^2)} & \text{przy } n = 2, 4, \dots, \end{cases} \quad (13)$$

¹⁾ Łatwo zauważyć, iż w przypadku funkcji z klasa n odpowiada maksymalnej osiągalnej liczbie częstotliwości $y \in [0, 1]$, przy których może zająć równość: $z = 1$.

²⁾ Por. np. [6], [7], [10] i [11].

³⁾ We wzorach (13) i (14), podobnie jak i w (8) oraz (9), zakłada się, iż przy $n-2 \leq 0$ lub $n-1 \leq 0$ odpowiednie iloczyny są równe 1.

— dla przypadku klas α^* , β^* , γ^* itd.

$$z = \begin{cases} h \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \frac{\prod_{i=2,4,\dots}^{n-1} (1-a_i^2 y^2)}{\prod_{i=1,3,\dots}^{n-2} (1-a_i^2 y^2)} & \text{przy } n = 1, 3, \dots \\ h \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \frac{\prod_{i=1,3,\dots}^{n-1} (1-a_i^2 y^2)}{\prod_{i=2,4,\dots}^{n-2} (1-a_i^2 y^2)} & \text{przy } n = 2, 4, \dots, \end{cases} \quad (14)$$

gdzie

$$h = R_N/R. \quad (15)$$

W myśl (13) i (14) z jest określoną funkcją częstotliwości y , a nadto zależy od szeregu (n) parametrów h i a_i^2 , a zatem:

$$z = z(y, h, a_i^2), \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (16)$$

Obliczając filtr trzeba wartości tych parametrów wyznaczyć. Wychodzi się przy tym z wymagań odnoszących się np. do wielkości A_N filtru w praktycznym pasmie przepustowym.

Praktyczne pasmo przepustowe (skrót: *PPP*) stanowi część teoretycznego pasma przepustowego, dla której formułowane są (podawane) warunki np. na A_N .

Jak już wspomnieliśmy, teoretyczne pasmo przepustowe (skrót: *TPP*) omawianego filtru występuje w przedziale: $0 \leq |y| < 1$. Przyjmujemy, że *PPP* tego filtru rozciąga się w przedziale: $0 \leq |y| \leq k_p$, gdzie $k_p < 1$. Wielkość k_p nazwiemy *częstotliwością krańcową PPP* (znormalizowaną) albo też *współczynnikiem wykorzystania TPP*, wartość k_p wskazuje bowiem jaką część *TPP* zajmuje *PPP*.

Metodę graficzno-analityczną (szablonową) wyznaczania wartości parametrów funkcji (13) i (14) dla z góry danych wartości tłumienności A_N w *PPP* przedstawimy w rozdziale następnym. Tutaj zwrócimy jeszcze uwagę na następujące dwa ważne fakty:

1) funkcja (13) lub (14) i odwrotność funkcji (14) lub (13) o tej samej klasie n różnią się od siebie tylko czynnikiem stałym (odwrotnym);

2) wielkość A_N z (6) ma dla z i dla $1/z$ taką samą wartość.

W związku z tymi faktami odpowiednie dalsze rozważania będziemy prowadzić jednocześnie dla funkcji (13) i (14) na bazie jednej z nich. Postępowanie takie jest korzystne m.in. z praktycznego punktu widzenia, bo pozwala uzyskać pewną zasadniczą relację, z której się korzysta przy stosowaniu omawianej dalej metody szablonowej, wspólną dla klas α , β , γ itd. oraz klas α^* , β^* , γ^* , itd.¹⁾

Jako funkcję, na bazie której prowadzić będziemy dalsze rozważania, przyjmujemy funkcję (13), którą w związku z tym nazwiemy *funkcją (impedancyjną) standartową*²⁾.

¹⁾ Mowa tu o relacji, w oparciu o którą przetransformowuje się zadaną dla *PPP* krzywą tłumienności A_N z zakresu częstotliwości y do zakresu tzw. częstotliwości znormowanych D , czyli o relacji postaci (67).

²⁾ Zamiast funkcji (13) jako funkcję standartową można by oczywiście przyjąć również funkcję (14). Wtedy zależności (17) do (19) zachowałyby swą ważność, a relacja (67) przyjęłaby postać: $D = \sqrt{k_p}/\sqrt{1-y^2}$. Jest rzeczą do dyskusji, która z podanych form relacji $D = D(y)$ jest wygodniejsza w zastosowaniu w praktyce.

Przypuśćmy, że znamy już (wyznaczyliśmy metodą szablonową) wartości parametrów h i a_i^2 funkcji standartowej takie, przy których spełnione są postawione warunki na A_N w PPP. Funkcja (14) odpowiadająca tłumienności A_N , również spełniającej te warunki (bo przybierającej dla poszczególnych częstotliwości wartości te same, jakie przybiera dla nich tłumienność A_N odpowiadająca danej funkcji standartowej), oczywiście będzie mieć tę samą klasę n , co funkcja standartowa. Będzie ona mieć ponadto i współczynniki a_i^2 identyczne (mające identyczną wartość) ze współczynnikami a_i^2 funkcji standartowej oraz stały czynnik h , równy odwrotności stałego czynnika h funkcji standartowej. Te zależności, jeśli uwzględni się również (15), można wyrazić następująco:

$$n^* = n, \quad (17)$$

$$a_i^{2*} = a_i^2, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (18)$$

$$h^* = 1/h \quad \text{lub} \quad R_N^*/R^* = R/R_N, \quad (19)$$

gdzie n , a_i^2 , h , R i R_N — wiadome wielkości odnoszące się do funkcji (13), natomiast n^* , a_i^{2*} , h^* , R^* i R_N^* — analogiczne wielkości odnoszące się do funkcji (14), której odpowiadają wartości A_N takie same, jakie odpowiadają funkcji (13) dla poszczególnych częstotliwości.

W dalszym ciągu funkcję standartową będziemy oznaczać przez z_s , a przy tym będziemy ją rozpatrywać również jako funkcję zmiennej $A = jy$, gdzie y — częstotliwość znormalizowana, j zaś — jednostka urojona ($j = \sqrt{-1}$). Podstawiając

$$y^2 = -A^2 \quad (20)$$

we wzorze (13), dla z_s jako funkcji zmiennej A dostaniemy wyrażenie o następującej postaci¹⁾:

$$z_s = \begin{cases} h\sqrt{1+A^2} \frac{(1+a_1^2 A^2)(1+a_3^2 A^2) \dots (1+a_{n-2}^2 A^2)}{(1+a_2^2 A^2)(1+a_4^2 A^2) \dots (1+a_{n-1}^2 A^2)} & \text{dla } n = 1, 3, \dots \\ h\sqrt{1+A^2} \frac{(1+a_2^2 A^2)(1+a_4^2 A^2) \dots (1+a_{n-2}^2 A^2)}{(1+a_1^2 A^2)(1+a_3^2 A^2) \dots (1+a_{n-1}^2 A^2)} & \text{dla } n = 2, 4, \dots, \end{cases} \quad (21)$$

gdzie h , a_i^2 ($i = 1, 2, \dots, n-1$) i n są to te same odpowiednie wielkości, co w (13). Funkcję z_s z (21) przedstawimy w nieco innej formie sprowadzając jej licznik i mianownik do postaci wielomianów zmiennej A . W wyniku otrzymamy²⁾:

$$z_s = \begin{cases} h\sqrt{1+A^2} \frac{1+b_1 A^2+b_3 A^4+\dots+b_{n-2} A^{n-1}}{1+b_2 A^2+b_4 A^4+\dots+b_{n-1} A^{n-1}} & \text{dla } n = 1, 3, \dots \\ h\sqrt{1+A^2} \frac{1+b_2 A^2+b_4 A^4+\dots+b_{n-2} A^{n-2}}{1+b_1 A^2+b_3 A^4+\dots+b_{n-1} A^n} & \text{dla } n = 2, 4, \dots, \end{cases} \quad (22)$$

gdzie stały czynnik h ma tu tę samą wartość, co w (21), zaś współczynniki b_k ($k = 1, 2, \dots, n-1$) są wielkościami rzeczywistymi dodatnimi, w określony sposób związanymi z odpowiednimi wielkościami a_i^2 ($i = 1, 2, \dots, n-1$) występującymi we wzorze (21).

¹⁾ W (21) zakłada się, że przy $n-1 \leq 0$ lub $n-2 \leq 0$ odpowiedni licznik względnie mianownik równa się 1.

²⁾ W (22) zakłada się, iż dla $n-1 \leq 0$ lub $n-2 \leq 0$ odpowiedni licznik względnie mianownik równa się 1.

Łatwo spostrzec, iż zależności między wielkościami b_k i a_i^2 ze wzorów (22) i (21) są następujące¹⁾:

1) dla n nieparzystego ($n = 1, 3, \dots$):

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \sum_q^1 a_i^2, & b_3 &= \sum_q^2 a_i^2, & b_5 &= \sum_q^3 a_i^2, \dots, \\ & & b_{n-2} &= \sum_q^q a_i^2, \\ b_2 &= \sum_q^1 a_j^2, & b_4 &= \sum_q^2 a_j^2, & b_6 &= \sum_q^3 a_j^2, \dots, \\ & & b_{n-1} &= \sum_q^q a_j^2, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

przy czym

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{n-1}{2}, \\ i &= 1, 3, \dots, n-2, \\ j &= 2, 4, \dots, n-1; \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

2) dla n parzystego ($n = 2, 4, \dots$):

$$\left. \begin{aligned} b_2 &= \sum_q^1 a_i^2, & b_4 &= \sum_q^2 a_i^2, & b_6 &= \sum_q^3 a_i^2, \dots, \\ & & b_{n-2} &= \sum_q^q a_i^2, \\ b_1 &= \sum_r^1 a_j^2, & b_3 &= \sum_r^2 a_j^2, & b_5 &= \sum_r^3 a_j^2, \dots, \\ & & b_{n-1} &= \sum_r^r a_j^2, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

przy czym

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{n-2}{2}, & r &= \frac{n}{2} = q+1, \\ i &= 2, 4, \dots, n-2, \\ j &= 1, 3, \dots, n-1, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

gdzie ogólnie symbol

$$\sum_N^M x_i, \quad (27)$$

np. przy $i = 1, 2, \dots, N$ ($M = 1, 2, \dots, N$), kiedy to może on być również zapisany w następującej równoważnej formie:

$$\sum_N^M x_i, \quad (28)$$

$$i = 1, 2, \dots, N,$$

oznacza sumę wszystkich kombinacji z N po M elementów x_i zbioru o elementach: $x_1, x_2, \dots, x_N$ ²⁾; łatwo sprawdzić, iż w podanych warunkach (przy $i = 1, 2, \dots, N$) jest np.:

¹⁾ Tutaj i w dalszym ciągu zakłada się, że $b_k = 0$ dla $k < 0$ i że $a_i^2 = 0$ dla $i < 0$, co jest zgodne z uwagami podanymi m. in. w notkach 1 i 2 na str. 230.

²⁾ Suma taka zawiera ilość

$$C_N^M = \frac{N!}{M!(N-M)!}$$

składników, gdzie $k!$ jest silnią, tzn. iloczynem k kolejnych liczb naturalnych ($k! = 1 \cdot 2 \dots k$), przy czym przyjmuje się umownie, że $0! = 1$.

$$\sum_N^N x_i = \prod_{i=1,2,\dots}^N x_i \quad (29)$$

W tablicy 1 podano wartości sum:

$$\sum_{i=1,2,\dots,n}^m v_i$$

dla $n = 1, 2, \dots, 5$ (oraz $m = 1, 2, \dots, n$).

Tablica 1

Wartości sum: $\sum_n^m v_i$ dla $n, m = 1, 2, \dots, 5$ oraz $i = 1, 2, \dots, n$

n	$\sum_n^m v_i \stackrel{\text{ozn}}{=} \sum_n^m, \quad \left(\begin{matrix} n, m = 1, 2, \dots, 5 \\ i = 1, 2, \dots, n \end{matrix} \right)$
1	$\sum_1^1 = v_1$
2	$\sum_2^1 = v_1 + v_2; \quad \sum_2^2 = v_1 v_2$
3	$\sum_3^1 = v_1 + v_2 + v_3; \quad \sum_3^2 = v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_2 v_3; \quad \sum_3^3 = v_1 v_2 v_3$
4	$\sum_4^1 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4; \quad \sum_4^2 = v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_1 v_4 + v_2 v_3 + v_2 v_4 + v_3 v_4;$ $\sum_4^3 = v_1 v_2 v_3 + v_1 v_2 v_4 + v_1 v_3 v_4 + v_2 v_3 v_4; \quad \sum_4^4 = v_1 v_2 v_3 v_4$
5	$\sum_5^1 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5;$ $\sum_5^2 = v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_1 v_4 + v_1 v_5 + v_2 v_3 + v_2 v_4 + v_2 v_5 + v_3 v_4 + v_3 v_5 + v_4 v_5;$ $\sum_5^3 = v_1 v_2 v_3 + v_1 v_2 v_4 + v_1 v_2 v_5 + v_1 v_3 v_4 + v_1 v_3 v_5 + v_1 v_4 v_5 + v_2 v_3 v_4 + v_2 v_3 v_5 + v_2 v_4 v_5 + v_3 v_4 v_5;$ $\sum_5^4 = v_1 v_2 v_3 v_4 + v_1 v_2 v_3 v_5 + v_1 v_2 v_4 v_5 + v_1 v_3 v_4 v_5 + v_2 v_3 v_4 v_5; \quad \sum_5^5 = v_1 v_2 v_3 v_4 v_5$

Przy wyznaczaniu wartości sum tego rodzaju¹⁾ dla danego zbioru o n elementach: $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$, gdy znane są wartości odpowiednich sum dla zbioru o $n-1$ elementach: $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ (czyli dla zbioru różniącego się od poprzedniego tylko brakiem elementu v_n) wygodnie jest posługiwać się następującym wzorem rekurencyjnym:

$$\sum_{i=1,2,\dots,n}^m v_i = \sum_{i=1,2,\dots,n-1}^m v_i + v_n \sum_{i=1,2,\dots,n-1}^{m-1} v_i, \quad (30)$$

gdzie zakłada się, że przy $x = 0, 1, 2, \dots$ jest:

$$\sum_x^{x+1} v_i = 0 \quad \text{oraz} \quad \sum_x^0 v_i = 1. \quad (31)$$

W następnym rozdziale będziemy stosować wzór na tangens hiperboliczny sumy n argumentów $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$. Stosując wprowadzony symbol (27) wzór ten będzie można napisać w następującej prostej formie:

¹⁾ Symbole postaci (27) i (28) wprowadza się tutaj w celu uproszczenia zapisu odpowiednich wzorów i w celu ułatwienia ich analizy.

Tablica 2

Wyrażenia na funkcję standardową z_s klas $n = 1, 2, \dots, 5$ w dwu równoważnych sobie postaciach oraz związki między odpowiednimi współczynnikami b_k i a_i^2

n	$z_s = z_s(\Lambda; h, a_i^2)$	$z_s = z_s(\Lambda; h, b_k)$	$b_k(a_i^2)$	$a_i^2(b_k)$
1	$h\sqrt{1+\Lambda^2}$	$h\sqrt{1+\Lambda^2}$	—	—
2	$h\sqrt{1+\Lambda^2} \frac{1}{1+a_1^2\Lambda^2}$	$h\sqrt{1+\Lambda^2} \frac{1}{1+b_1\Lambda^2}$	$b_1 = a_1^2$	$a_1^2 = b_1$
3	$h\sqrt{1+\Lambda^2} \frac{1+a_1^2\Lambda^2}{1+a_2^2\Lambda^2}$	$h\sqrt{1+\Lambda^2} \frac{1+b_1\Lambda^2}{1+b_2\Lambda^2}$	$b_1 = a_1^2;$ $b_2 = a_2^2$	$a_1^2 = b_1;$ $a_2^2 = b_2$
4	$h\sqrt{1+\Lambda^2} \frac{1+a_2^2\Lambda^2}{(1+a_1^2\Lambda^2)(1+a_3^2\Lambda^2)}$	$h\sqrt{1+\Lambda^2} \frac{1+b_2\Lambda^2}{1+b_1\Lambda^2+b_3\Lambda^4}$	$b_1 = a_1^2+a_3^2;$ $b_2 = a_2^2;$ $b_3 = a_1^2a_3^2$	$a_1^2 = \frac{b_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 - b_3};$ $a_2^2 = b_2;$ $a_3^2 = \frac{b_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 - b_3}$
5	$h\sqrt{1+\Lambda^2} \frac{(1+a_1^2\Lambda^2)(1+a_2^2\Lambda^2)}{(1+a_2^2\Lambda^2)(1+a_3^2\Lambda^2)}$	$h\sqrt{1+\Lambda^2} \frac{1+b_1\Lambda^2+b_3\Lambda^4}{1+b_2\Lambda^2+b_4\Lambda^4}$	$b_1 = a_1^2+a_3^2;$ $b_2 = a_2^2+a_4^2;$ $b_3 = a_1^2a_3^2;$ $b_4 = a_2^2a_4^2$	$a_1^2 = \frac{b_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 - b_3};$ $a_2^2 = \frac{b_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{b_2}{2}\right)^2 - b_4};$ $a_3^2 = \frac{b_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 - b_3};$ $a_4^2 = \frac{b_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{b_2}{2}\right)^2 - b_4}$

$$\text{th}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \begin{cases} \frac{\sum_n^1 \text{th} x_i + \sum_n^3 \text{th} x_i + \dots + \sum_n^n \text{th} x_i}{1 + \sum_n^2 \text{th} x_i + \sum_n^4 \text{th} x_i + \dots + \sum_n^{n-1} \text{th} x_i} & \text{dla } n = 1, 3, \dots \\ \frac{\sum_n^1 \text{th} x_i + \sum_n^3 \text{th} x_i + \dots + \sum_n^{n-1} \text{th} x_i}{1 + \sum_n^2 \text{th} x_i + \sum_n^4 \text{th} x_i + \dots + \sum_n^n \text{th} x_i} & \text{dla } n = 2, 4, \dots, \end{cases} \quad (32)$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, n$.

Jeśli np. $n = 3$, to zgodnie z odpowiednimi zależnościami podanymi w tablicy 1 poszczególne sumy w (32) będą wynosiły:

$$\begin{aligned} \sum_3^1 \text{th} x_i &= \text{th} x_1 + \text{th} x_2 + \text{th} x_3, \\ \sum_3^2 \text{th} x_i &= \text{th} x_1 \text{th} x_2 + \text{th} x_1 \text{th} x_3 + \text{th} x_2 \text{th} x_3, \\ \sum_3^3 \text{th} x_i &= \text{th} x_1 \text{th} x_2 \text{th} x_3. \end{aligned}$$

W tablicy 2 podano wzory na funkcję standartową z_s wg (21) i (22) dla $n = 1, 2, \dots, 5$ łącznie z wyznaczonymi na podstawie (23) do (26) związkami między odpowiednimi wielkościami b_k i a_i^2 . Czynniki stały h w obu podanych formach funkcji z_s z tabl. 2 jest identyczny, oraz $\Lambda^2 = -y^2$.

3. PODSTAWY TEORETYCZNE I ISTOTA METODY

Zastąpmy w (5) z przez z_s . W rezultacie dostaniemy:

$$\Gamma_N = \ln \frac{1 + z_s}{1 - z_s}. \quad (33)$$

Przyjmujemy, że z_s w (33) wyraża się wzorem (22). W tych warunkach Γ_N z (33) będzie przedstawiać tamowność niedopasowania odpowiadającą funkcji standartowej pewnej klasy $n \geq 1$. Mamy następującą

Własność 1.

Tamowność niedopasowania Γ_N odpowiadająca funkcji standartowej z_s danej klasy n jest sumą n tamowności niedopasowania $\Gamma_N^{(i)}$ odpowiadających funkcjom standartowym $z_s^{(i)}$ klasy $n = 1$ o czynnikach stałych v_i , a zatem:

$$\Gamma_N = \sum_{i=1}^n \Gamma_N^{(i)}, \quad (34)$$

przy czym

$$\Gamma_N^{(i)} = \ln \frac{1 + z_s^{(i)}}{1 - z_s^{(i)}}, \quad (35)$$

$$z_s^{(i)} = v_i \sqrt{1 + \Lambda^2}, \quad (36)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad (37)$$

gdzie v_i — określone liczby rzeczywiste dodatnie.

Prosty dowód podanej własności otrzymuje się posługując się funkcją tangens hiperboliczny. Biorąc mianowicie tangens hiperboliczny połowy wartości lewej i prawej strony równości (34) mamy

$$\operatorname{th} \frac{\Gamma_N}{2} = \operatorname{th} \sum_{i=1}^n \frac{\Gamma_N^{(i)}}{2}. \quad (38)$$

Na mocy (33) i (35) jest natomiast:

$$\operatorname{th} \frac{\Gamma_N}{2} = z_s, \quad (39)$$

$$\operatorname{th} \frac{\Gamma_N^{(i)}}{2} = z_s^{(i)}. \quad (40)$$

Uwzględniając (39) w (38) otrzymuje się:

$$z_s = \operatorname{th} \sum_{n=1}^n \frac{\Gamma_N^{(i)}}{2}. \quad (41)$$

Odpowiedni dowód polegać będzie zatem na wykazaniu, że prawa strona (41) sprowadza się do postaci funkcji (22).

Zastosujmy w odniesieniu do prawej strony (41) wzór (32) i uwzględnijmy jednocześnie (40) i (36). W wyniku po prostych przekształceniach otrzymamy, że:

$$\begin{aligned} \operatorname{th} \sum_{i=1,2,\dots}^n \frac{\Gamma_N^{(i)}}{2} = \\ = \begin{cases} \sqrt{1+A^2} \frac{\sum_n^1 v_i + (1+A^2) \sum_n^3 v_i + (1+A^2)^2 \sum_n^5 v_i + \dots + (1+A^2)^{\frac{n-1}{2}} \sum_n^n v_i}{1 + (1+A^2) \sum_n^2 v_i + (1+A^2)^2 \sum_n^4 v_i + \dots + (1+A^2)^{\frac{n-1}{2}} \sum_n^{n-1} v_i} \text{ dla } n=1,3,\dots \\ \sqrt{1+A^2} \frac{\sum_n^1 v_i + (1+A^2) \sum_n^3 v_i + (1+A^2)^2 \sum_n^5 v_i + \dots + (1+A^2)^{\frac{n-2}{2}} \sum_n^{n-1} v_i}{1 + (1+A^2) \sum_n^2 v_i + (1+A^2)^2 \sum_n^4 v_i + \dots + (1+A^2)^{\frac{n}{2}} \sum_n^n v_i} \text{ dla } n=2,4,\dots, \end{cases} \quad (42) \end{aligned}$$

gdzie w odpowiednich sumach z prawej strony (42) i ma wartości zgodne z podanymi w (37).

Stosując w wyrażeniu (42) odnośnie do czynników kształtu $(1+A^2)^q$, gdzie $q = 1, 2, \dots$, wzór dwumienny Newtona, w myśl którego

$$(1+A^2)^q = 1 + \binom{q}{1} A^2 + \binom{q}{2} A^4 + \dots + \binom{q}{q} A^{2q}, \quad (43)$$

przy czym

$$\binom{q}{k} = \frac{q!}{k!(q-k)!}, \quad (k = 1, 2, \dots, q), \quad (44)$$

sprowadzimy licznik i mianownik tego wyrażenia do postaci wielomianów zmiennej A .

W wyniku otrzymamy:

$$\text{th} \sum_{i=1,2,\dots}^n \frac{\Gamma_N^{(i)}}{2} = \begin{cases} \sqrt{1+\Lambda^2} \frac{d_{-1}+d_1\Lambda^2+d_3\Lambda^4+\dots+d_{n-2}\Lambda^{n-1}}{d_0+d_2\Lambda^2+d_4\Lambda^4+\dots+d_{n-1}\Lambda^{n-1}} & \text{dla } n = 1, 3, \dots \\ \sqrt{1+\Lambda^2} \frac{d_0+d_2\Lambda^2+d_4\Lambda^4+\dots+d_{n-2}\Lambda^{n-2}}{d_{-1}+d_1\Lambda^2+d_3\Lambda^4+\dots+d_{n-1}\Lambda^n} & \text{dla } n = 2, 4, \dots, \end{cases} \quad (45)$$

gdzie d_l ($l = -1, 0, 1, 2, \dots, n-1$) — rzeczywiste dodatnie współczynniki, będące określonymi funkcjami wielkości v_i z (42) a m.in. dla n nieparzystego:

$$\left. \begin{aligned} d_{-1} &= \sum_{j=1,3,\dots}^n \left(\sum_n^j v_i \right), & d_{n-2} &= \sum_n^{n-1} v_i, \\ d_0 &= 1 + \sum_{j=2,4,\dots}^{n-1} \left(\sum_n^j v_i \right), & d_{n-1} &= \sum_n^{n-1} v_i, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

oraz dla n parzystego:

$$\left. \begin{aligned} d_0 &= \sum_{j=1,3,\dots}^{n-1} \left(\sum_n^j v_i \right), & d_{n-2} &= \sum_n^{n-1} v_i, \\ d_{-1} &= 1 + \sum_{j=2,4,\dots}^n \left(\sum_n^j v_i \right); & d_{n-1} &= \sum_n^n v_i, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, n$.

Biorąc w (45) przed znak ułamka współczynniki wielomianów licznika i mianownika występujące przy zmiennej Λ w potęgze zerowej ostatecznie dostaniemy:

$$\text{th} \sum_{i=1,2,\dots}^n \frac{\Gamma_N^{(i)}}{2} = \begin{cases} H\sqrt{1+\Lambda^2} \frac{1+c_1\Lambda^2+c_3\Lambda^4+\dots+c_{n-2}\Lambda^{n-1}}{1+c_2\Lambda^2+c_4\Lambda^4+\dots+c_{n-1}\Lambda^{n-1}} & \text{dla } n = 1, 3, \dots \\ H\sqrt{1+\Lambda^2} \frac{1+c_2\Lambda^2+c_4\Lambda^4+\dots+c_{n-2}\Lambda^{n-2}}{1+c_1\Lambda^2+c_3\Lambda^4+\dots+c_{n-1}\Lambda^n} & \text{dla } n = 2, 4, \dots, \end{cases} \quad (48)$$

przy czym dla n nieparzystego:

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{d_{-1}}{d_0}, & c_j &= \frac{d_j}{d_{-1}}, & (j = 1, 3, \dots, n-2), \\ c_k &= \frac{d_k}{d_0}, & (k = 2, 4, \dots, n-1), \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

oraz dla n parzystego:

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{d_0}{d_{-1}}, & c_j &= \frac{d_j}{d_{-1}}, & (j = 1, 3, \dots, n-1), \\ c_k &= \frac{d_k}{d_0}, & (k = 2, 4, \dots, n-2). \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Jak widać, funkcje występujące z prawej i lewej strony (41) mają kształt identyczny i wobec tego dla wszystkich wartości zmiennej λ mogą być sobie równe, jeżeli tylko czynniki v_i z (36) zostaną tak dobrane, że stałe czynniki H i h oraz współczynniki c_j i b_j wielomianów licznika i mianownika funkcji (48) i (22) występujące przy tych samych potęgach λ będą sobie równe, czyli gdy będą zachodziły równości:

$$\left. \begin{aligned} H &= h, \\ c_j &= b_j \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Ponieważ taki dobór wartości czynników v_i jest możliwy, więc własność 1 możemy uznać za udowodnioną.

W tablicy 3 podano otrzymane na podstawie (51) związki między wielkościami h i b_j funkcji (22) a wielkościami v_i z (36) dla przypadku klas $n = 1, 2, \dots, 5$.

Tablica 3

Wzory służące do obliczania parametrów h i b_j funkcji standartowej z_s klasy $n = 1, 2, \dots, 5$ wg tablicy 2 w zależności od czynników v_i odpowiednich funkcji standartowych $z_s^{(i)}$ klasy $n = 1$

n	h	b_1	b_2	b_3	b_4
1	Σ_1^1	—	—	—	—
2	$\frac{\Sigma_2^1}{1 + \Sigma_2^2}$	$\frac{\Sigma_2^2}{1 + \Sigma_2^2}$	—	—	—
3	$\frac{\Sigma_3^1 + \Sigma_3^3}{1 + \Sigma_3^2}$	$\frac{\Sigma_3^3}{\Sigma_3^1 + \Sigma_3^3}$	$\frac{\Sigma_3^2}{1 + \Sigma_3^2}$	—	—
4	$\frac{\Sigma_4^1 + \Sigma_4^3}{1 + \Sigma_4^2 + \Sigma_4^4}$	$\frac{\Sigma_4^2 + 2 \Sigma_4^4}{1 + \Sigma_4^2 + \Sigma_4^4}$	$\frac{\Sigma_4^3}{\Sigma_4^1 + \Sigma_4^3}$	$\frac{\Sigma_4^4}{1 + \Sigma_4^2 + \Sigma_4^4}$	—
5	$\frac{\Sigma_5^1 + \Sigma_5^3 + \Sigma_5^5}{1 + \Sigma_5^2 + \Sigma_5^4}$	$\frac{\Sigma_5^3 + 2 \Sigma_5^5}{\Sigma_5^1 + \Sigma_5^3 + \Sigma_5^5}$	$\frac{\Sigma_5^2 + 2 \Sigma_5^4}{1 + \Sigma_5^2 + \Sigma_5^4}$	$\frac{\Sigma_5^5}{\Sigma_5^1 + \Sigma_5^3 + \Sigma_5^5}$	$\frac{\Sigma_5^4}{1 + \Sigma_5^2 + \Sigma_5^4}$
Uwaga. Poszczególne sumy: $\Sigma_n^m \equiv \Sigma_n^m v_i$ podane w tablicy ($n, m = 1, 2, \dots, 5; i = 1, 2, \dots, n$) mają wartości zgodne z podanymi w tablicy 1.					

Bezpośrednią konsekwencję udowodnionej własności 1 stanowi niżej podana ważna własność 2, która dotyczy tłumienności niedopasowania $A_N = \text{Re} \Gamma_N$ w pasmie przepustowym odpowiadającej funkcji standartowej z_s danej klasy n .

Własność 2.

W pasmie przepustowym tłumienność niedopasowania $A_N = \operatorname{Re} \Gamma_N$ odpowiadająca funkcji standartowej z_s danej klasy n jest sumą n tłumienności niedopasowania $A_N^{(i)} = \operatorname{Re} \Gamma_N^{(i)}$ odpowiadających funkcjom standartowym $z_s^{(i)}$ klasy $n = 1$ o czynnikach stałych v_i , a zatem:

$$A_N = \sum_{i=1,2,\dots,n} A_N^{(i)}, \quad (52)$$

przy czym

$$A_N = \ln \left| \frac{1+z_s}{1-z_s} \right|, \quad (53)$$

$$A_N^{(i)} = \ln \left| \frac{1+z_s^{(i)}}{1-z_s^{(i)}} \right|, \quad (54)$$

$$z_s^{(i)} = v_i \sqrt{1-y^2}, \quad (55)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie z_s wyraża się wzorem (22), a wynikające z (51) dla $n = 1, 2, \dots, 5$ odpowiednie związki są zgodne z podanymi w tablicy 3.

Przedstawmy wielkość v_i z (55) w postaci iloczynu dwóch rzeczywistych wielkości t i μ_i :

$$v_i = t\mu_i, \quad (56)$$

oraz wprowadźmy wielkość D określoną jako:

$$D = t\sqrt{1-y^2}. \quad (57)$$

W tych warunkach wzory (55) i (54) przyjmą postacie:

$$z_s^{(i)} = \mu_i D, \quad (58)$$

$$A_N^{(i)} = \ln \left| \frac{1+\mu_i D}{1-\mu_i D} \right|. \quad (59)$$

Wielkość D określoną wzorem (57) nazwiemy *częstotliwością znormowaną*.

Zbadamy zachowanie się (przebieg) tłumienności $A_N^{(i)}$ z (59) w funkcji częstotliwości D przy różnych wartościach μ_i .

Założymy najpierw — w celu uproszczenia rozważań — że $\mu_i = 1$. W tych warunkach wzór (59) przejdzie we wzór:

$$A_N^{(i)} = \ln \left| \frac{1+D}{1-D} \right|. \quad (60)$$

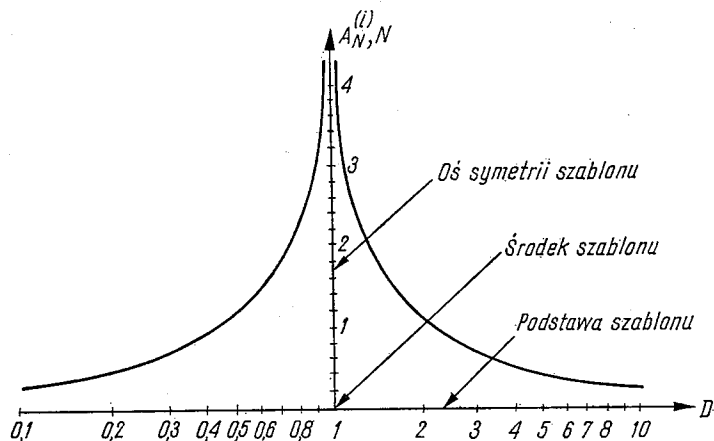
Wnioski wynikające z analizy wzoru (60) są następujące:

1) tłumienność $A_N^{(i)} = A_N^{(i)}(D)$ z (60) jest nieskończenie wielka dla częstotliwości $D = 1$, czyli — inaczej mówiąc — biegun tej tłumienności występuje w punkcie $D = 1$ na osi D ;

2) omawiana tłumienność ma przebieg geometrycznie symetryczny względem punktu $D = 1$, bowiem

$$A_N^{(i)}(1/D) = A_N^{(i)}(D). \quad (61)$$

Skonstruowany na podstawie wzoru (60) wykres tłumienności $A_N^{(i)}$ w funkcji D jest przedstawiony na rys. 2. Wykres ten — wskutek zastosowania na osi D skali logarytmicznej — jest, jak widać, symetryczny względem punktu (osi) $D = 1$.

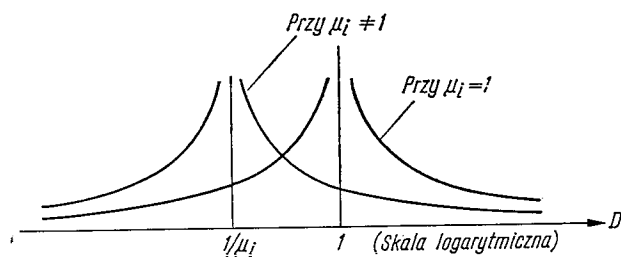


Rys. 2. Szablon tłumieniowy (odpowiadający funkcji impedancyjnej klasy $n = 1$)

Obszar zawarty między krzywą o równaniu (60) a osią częstotliwości D jak na rys. 2 zwie się *szablone tłumieniowym* (odpowiadającym funkcji impedancyjnej klasy $n = 1$).

Założmy teraz z kolei, że wielkość μ_i w (59) różni się od jedności, a przy tym iloczyn $\mu_i D$ oznaczmy przez D' . Wtedy (59) przyjmijmy postać:

$$A_N^{(i)} = \ln \left| \frac{1+D'}{1-D'} \right|. \quad (62)$$



Rys. 3. Położenie na osi D szablonów tłumieniowych wg rys. 2 przy $\mu_i = 1$ i przy $\mu_i \neq 1$

Oczywiście przebieg tłumienności $A_N^{(i)}$ z (62) w funkcji D' będzie taki sam, jak przebieg tłumienności $A_N^{(i)}$ z (60) w funkcji D , z tym, że biegun tłumienności pierwszej wystąpi w punkcie $D' = 1$ na osi D' , czyli w punkcie

$$D_i = 1/\mu_i \quad (63)$$

na osi D , rys. 3. Wynika stąd następująca ważna

Własność 3.

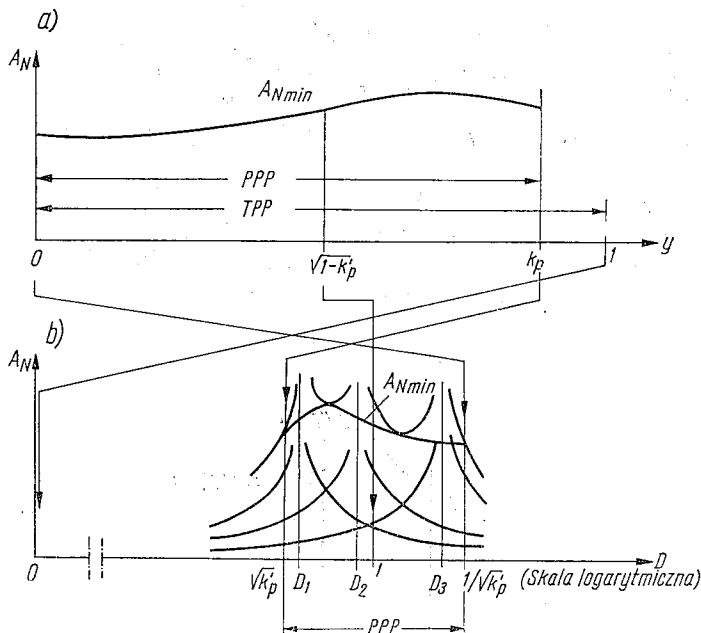
W pasmie przepustowym, w zakresie częstotliwości znormowanych D reprezentację graficzną tłumienności niedopasowania $A_N^{(i)}$ odpowiadających funkcjom standartowym

klasy $n = 1$ o różnych wartościach czynnika (parametru) μ_i stanowią identyczne wykresy — szablony tłumieniowe jak na rys. 2 rozmieszczone wzdłuż osi częstotliwości D w taki sposób, że odcięte ich środków wynoszą $D_i = 1/\mu_i$ (rys. 3).

Opierając się na faktach wyrażonych treścią własności podanych powyżej, a zwłaszcza własności 2 i 3, łatwo można skonstruować następującą, prostą tzw. *szablonową metodę* wyznaczania wartości parametrów rozpatrywanych funkcji impedancyjnych z filtru dla z góry danych wartości jego tłumienności niedopasowania A_N w PPP (por. rozdz. 2).

Przypuśćmy, że w PPP w zakresie częstotliwości y od $y = 0$ do $y = k_p < 1$ ma być zagwarantowana minimalna tłumienność niedopasowania A_{Nmin} filtru, wynosząca A_{Nmin} , rys. 4a. Przypiszmy punktom $y = 0$ i $y = k_p$ na osi y kolejno punkty $1/\sqrt{k'_p}$ i $1/\sqrt{k'_p}$ na osi D (rys. 4a,b¹⁾), gdzie

$$k'_p = \sqrt{1 - k_p^2}. \quad (64)$$



Rys. 4. Schemat metody szablonowej: *a* — krzywa żądanej minimalnej tłumienności niedopasowania A_{Nmin} filtru w praktycznym pasmie przepustowym w zakresie częstotliwości y , *b* — przetransformowana do zakresu częstotliwości D krzywa A_{Nmin} przybliżona sumą odpowiedniej liczby n szablów wg rys. 2 (w danym przypadku $n = 3$) ustawionych swymi środkami w punktach D_i osi D ($i = 1, 2, 3$)

Zgodnie z (57), jeżeli uwzględnimy, że $D = D(y)$, będziemy mieli:

$$\frac{1}{\sqrt{k'_p}} = D(0) = t,$$

$$\sqrt{k'_p} = D(k_p) = t\sqrt{1 - k_p^2} = tk'_p.$$

¹⁾ Oczywiście punkt $D = 0$ nie powinien występować na osi D (rys. 4b), ponieważ na tej osi zastosowana jest skala logarytmiczna. Punkt ten jednak zaznaczono na omawianej osi z tego względu, aby móc wskazać, jakiemu punktowi osi y on odpowiada (por. rys. 4a, b).

Stąd

$$t = 1/\sqrt{k'_p}. \quad (65)$$

Figurująca w (56) i (57) wielkość t wyraża się zatem w prosty sposób przez częstotliwość krawcową PPP , albo — inaczej mówiąc — przez współczynnik wykorzystania TPP k_p (rozdz. 2).

Uwzględnijmy (65) w (56) i (57). W rezultacie dostaniemy, że:

$$v_i = \mu_i/\sqrt{k'_p}, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (66)$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{k'_p}} \sqrt{1-y^2} \quad (67)$$

Tak więc w oparciu o (67) bez trudności możemy „przetransformować” zadaną krzywą A_{Nmin} z zakresu częstotliwości y do zakresu częstotliwości znormowanych D , gdzie na osiach A_N i D (rys. 4b), ze względów wynikających z dalszych rozważań, trzeba stosować dokładnie takie same skale (logarytmiczną wartości D i liniową wartości A_N) jak na osiach $A_N^{(i)} \equiv A_N$ i D szablonu tłumieniowego podanego na rys. 2.

Teraz można już łatwo wyznaczyć klasę n i wartości parametrów v_i funkcji standartowej z_s takie, przy których odpowiadająca jej tłumienność A_N w PPP będzie nie mniejsza od z góry danych wartości A_{Nmin} . W tym celu daną w zakresie częstotliwości D krzywą A_{Nmin} trzeba możliwie dokładnie przybliżyć sumą rzędnych szablonów wg rys. 2, np. wyciętych z kartonu (lub celuloidu) i ustawionych swymi podstawami na osi D , rys. 4b. Liczba szablonów użytych do tego przybliżenia równa się szukanej klasie n funkcji z_s , a parametry v tej funkcji mogą być obliczone ze wzoru (66), przy czym¹⁾

$$\mu_i = 1/D_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (68)$$

gdzie D_i — odcięta środka ustawionego na osi D i -tego szablonu (rys. 4b).

Znając wartości n i v_i , na podstawie wzorów podanych w tablicach 1, 2 i 3²⁾ można obliczyć czynnik h i poszczególne współczynniki b_k, a_k ($k = 1, 2, \dots, n-1$) odpowiedniej funkcji standartowej z_s , zaś na podstawie (15) — przy znanej wartości R — wartość R_N .

W ten sposób przy zastosowaniu metody szablonowej wyznacza się poszczególne wielkości (parametry) funkcji standartowej z_s , tj. funkcji impedancyjnej klas α, β, γ itd.

W razie przyjęcia dla danej strony filtru funkcji impedancyjnej z klas $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ itd. wielkości b_k i a_k tej funkcji oczywiście będą takie, jak odpowiednie wielkości b_k i a_k funkcji z_s (wielkości b_k i a_k o tych samych indeksach k), wyznaczone w sposób omówiony powyżej; czynnik h tej funkcji będzie natomiast odwrotnością czynnika h funkcji z_s . Inaczej mówiąc obowiązują tutaj zależności (19), na podstawie których, przy znanych wartościach h i R łatwo można obliczyć odpowiednie wielkości h^* i R_N^* .

Mnożąc uzyskaną podanym sposobem funkcję impedancyjną przez impedancję roboczą R otrzymuje się natychmiast odpowiednią impedancję falową Z filtru, co widać bezpośrednio z (4).

Przy przybliżaniu krzywej A_{Nmin} w zakresie częstotliwości D sumą rzędnych szablonów wg rys. 2 zaleca się uwzględniać podane poniżej uwagi, które pozwalają ułatwić rozwiązanie

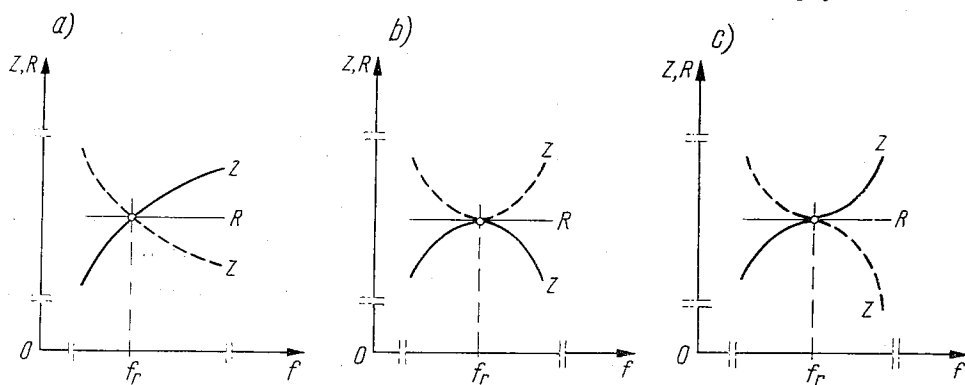
¹⁾ Wzór (68) wynika bezpośrednio z (63).

²⁾ Zakładamy tutaj, iż $n \leq 5$, co zazwyczaj ma miejsce. W przypadku, gdyby $n > 5$, trzeba by odpowiednio wzory wyprowadzić w sposób analogiczny do omówionego wcześniej.

tego zadania i osiągnąć wymagany kształt przebiegu danej impedancji falowej Z filtru w pasmie przepustowym.

Uwaga 1. Jeśli środek danego szablonu występuje na osi częstotliwości D w przedziale $\sqrt{k_p'} \leq D \leq 1/\sqrt{k_p'}$ (rys. 4b), dopasowanie (falowe) impedancji falowej Z filtru do impedancji roboczej R (czyli równość: $Z = R$) zachodzi dla $0 \leq y \leq k_p$, tj. w *PPP*. Jeśli środek ten występuje dla $D < \sqrt{k_p'}$, równość $Z = R$ zachodzi dla $k_p < y < 1$, czyli w części *TPP* nie objętej *PPP*. Gdy wreszcie omawiany środek występuje dla $D > 1/\sqrt{k_p'}$, równość $Z = R$ zachodzi w zakresie wartości y urojonych, czyli — w konsekwencji — nie zachodzi ona w ogóle w zakresie częstotliwości fizycznych f .

Uwaga 2. Jeżeli w danym punkcie na osi D umieści się środek jednego tylko szablonu wg rys. 2, dopasowanie Z do R wystąpi w punkcie charakterystyki $Z = Z(f)$ różnym (na ogół) od jej punktu ekstremalnego lub od punktu przegięcia, rys. 5a; gdy zaś w danym



Rys. 5. Typowe zachowanie się impedancji $Z = Z(f)$ w otoczeniu częstotliwości $f = f_r$, przy której $Z = R$, jeżeli w odpowiednim punkcie na osi D umieszczony jest środek k szablonów wg rys. 2 (tzn. występuje biegun k -krotny tłumienności A_N): a) gdy $k = 1$, b) gdy $k = 2$, c) gdy $k = 3$

punkcie na osi D umieści się jednocześnie środek dwóch (trzech) szablonów wg rys. 2, dopasowanie Z do R wystąpi w punkcie charakterystyki $Z = Z(f)$ odpowiadającym jej punktowi ekstremalnemu (punktowi przegięcia), rys. 5b (rys. 5c).

Uwaga 3. W praktyce do wykonania aproksymacji (rys. 4b) zamiast wielu (n) szablonów jak na rys. 2 wystarczy mieć jeden tylko taki szablon o wymiarach zależnych od częstotliwości wchodzących w grę wartości k_p i A_{Nmin} (np. „długość” tego szablonu od punktu $D = 0,1$ do punktu $D = 10$ może wynosić 25 cm, co wobec logarytmicznej skali wartości D odpowiada dokładnie skali kwadratów suwaka logarytmicznego o długości 25 cm; „wysokość” powyższego szablonu odpowiadająca zakresowi zmian A_N od 0 do 5 neperów może wynosić np. 10 cm) i wykonany możliwie dokładnie tak, aby nie wprowadzał dodatkowego zbyt dużego błędu aproksymacji. Szablon ten po ustawieniu go w wybranych miejscach na osi D (rys. 4b) obrysowuje się, np. ołówkiem. Rzędne otrzymanych tą drogą — narysowanych szeregu szablonów dodaje się do siebie przy odpowiedniej aproksymacji np. przy użyciu cyrkuła (lub linijki z podziałką).

Uwaga 4. Gdy krzywa A_{Nmin} jest w przybliżeniu równoległa do osi D w przedziale: $\sqrt{k_p'} \leq D \leq 1/\sqrt{k_p'}$, klasę n funkcji z , można w przybliżeniu określić na podstawie wzoru:

$$n = \begin{cases} n', & \text{gdy } n' \text{ jest liczbą całkowitą,} \\ E(n') + 1, & \text{gdy } n' \text{ jest liczbą ułamkową,} \end{cases} \quad (69)$$

przy czym

$$n' = \frac{A'_{Nmin} + 0,69}{2 \operatorname{arth} \sqrt{k'_p} + 0,69}, \quad (70)$$

gdzie $E(n')$ oznacza „całość z n' ”.

Wielkość A'_{Nmin} w (70) oznacza średnią arytmetyczną maksymalnej i minimalnej wartości tłumienności A_{Nmin} wymaganej w podanym wyżej przedziale (tj. w *PPP*), k'_p zaś przedstawia wielkość określoną wzorem (64).

W przypadku krzywej A_{Nmin} wymienionego kształtu, przybliżone wartości odciętych D_i środków umieszczonych na osi D odpowiednich szablonów można wyznaczyć na podstawie wzoru:

$$D_i = \frac{\sqrt{k'_p}}{\operatorname{dn}(u, k_p)}, \quad (71)$$

przy czym:

$$u = \frac{2i-1}{2n} K, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (72)$$

gdzie $\operatorname{dn}(u, k_p)$ jest to funkcja eliptyczna delta Jacobiego, k_p — moduł ten funkcji (równający się współczynnikowi wykorzystania *TPP*), k'_p — wielkość określona wzorem (64), a przedstawiająca tzw. moduł dopełniający omawianej funkcji, K zaś — całka eliptyczna zupełna pierwszego rodzaju postaci Legendre'a, tzn.:

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_p^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (73)$$

Tablice wartości funkcji $\operatorname{dn}(u, k_p)$ łącznie z uwagami dotyczącymi sposobu posługiwania się nimi są podane w [7] na str. 371.

Wzory (70) do (72) odnoszące się do przypadku izoekstremalnego (czebyszewowskiego) przebiegu transmitancji niedopasowania filtru w *PPP* otrzymano na podstawie odpowiednich wzorów zamieszczonych w [7], dotyczących przypadku izoekstremalnego (czebyszewowskiego) przebiegu transmitancji falowej filtru w praktycznym pasmie tłumieniowym.

Wielkość n' zamiast ze wzoru (70) można też wyznaczać z rys. 7.2 podanego w [7] traktując wielkości A_{min} , k_i i n występujące na tym rysunku odpowiednio jako A'_{Nmin} , k_p i n' . Podobnie wielkości $\mu_i = 1/D_i$ zamiast ze wzoru (71) można wyznaczać na podstawie rys. 7.4, 7.6, 7.8, 7.10 i 7.12 podanych w [7] uważając, że wielkości μ_i i k_i występujące na tych rysunkach przedstawiają odpowiednio μ_i i k_p , a n — klasę funkcji z .

4. WYKORZYSTANIE PRAKTYCZNE METODY

Metoda szablonowa, przedstawiona w rozdziale poprzednim, posiada pewną bardzo istotną cechę, która stanowi bezsporną jej zaletę. Pozwala ona mianowicie w sposób stosunkowo bardzo łatwy i szybki ukształtować w żądany sposób (w zasadzie dowolny)

częstotliwościową charakterystykę danej funkcji impedancyjnej z filtru w *PPP* odpowiednio do przyjętego kształtu częstotliwościowej charakterystyki tłumienności A_{Nmin} filtru w *PPP*. W związku z tą okolicznością oraz w związku z faktem, iż zachowanie się funkcji z w *PPP* w znacznej mierze decyduje o zachowaniu się wielkości roboczych filtru w *PPP* takich, jak tłumienność skuteczna A_s , współczynnik odbicia (echa) p_e itp., omawiana metoda może być efektywnie wykorzystywana w praktyce przy projektowaniu odpowiednich filtrów *LC* do celów minimalizacji wnoszonych przez nie zniekształceń tłumieniowych ΔA_{smax} w *PPP* np. w stopniu uzależnionym od wartości maksymalnego dopuszczalnego współczynnika odbicia p_{emax} w *PPP*. W rozdziale niniejszym omówimy bliżej to zagadnienie ograniczając rozważania do filtrów częściej stosowanych w praktyce, a więc: 1° filtrów symetrycznych obciążonych symetrycznie tak, że ich funkcje impedancyjne z_1 i z_2 są sobie równe ($z_1 = z_2$) oraz 2° filtrów antymetrycznych obciążonych antymetrycznie tak, że ich funkcje z_1 i z_2 są nawzajem swymi odwrotnościami ($z_1 z_2 = 1$)¹⁾. Ze względu na jednoznaczną zależność zachodzącą między funkcjami z_1 , z_2 i na równość tłumienności A_{N1} i A_{N2} w takich filtrach, przy ich rozpatrywaniu będziemy operować wielkościami z i A_N mającymi znaczenia omówione w rozdz. 2.

Założmy, że mamy dany filtr *LC* symetryczny ($z_1 = z_2$) lub antymetryczny ($z_1 z_2 = 1$) bez strat włączony między rzeczywiste i stałe (dodatnie) impedancje robocze. Tłumienność skuteczna A_s powyższego filtru w pasmie przepustowym wyraża się — jak wiadomo — wzorem²⁾:

$$A_s = \frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{1}{4} \left(z - \frac{1}{z} \right)^2 \Phi^2 \right], \quad (74)$$

przy czym

$$\Phi = \begin{cases} \sin B & \text{dla filtru symetrycznego,} \\ \cos B & \text{dla filtru antymetrycznego,} \end{cases} \quad (75)$$

gdzie z — funkcja impedancyjna filtru określona wzorem (4), B zaś — przesuwność falowa filtru.

Zgodnie z (74) w danym pasmie wielkość A_s jest nieujemna ($A_s \geq 0$), a przy tym „oscyluje” ona pewną ilość razy (zależną od liczby przebiegów funkcji z przez 1 i od zakresu zmian wartości przesuwności B) między zerem a pewnymi wartościami maksymalnymi. Te maksymalne wartości przy ustalonym przebiegu z i różnych przebiegach B wyznaczają punkty obwiedni rodziny krzywych A_s z parametrem B . Rugując powyższy parametr z układu równań: $A_s = 0$ i $\partial A_s / \partial B = 0$ otrzymanych z (74) otrzymuje się równanie odpowiedniej obwiedni o następującej postaci³⁾:

$$A_{sm} = \ln \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \ln \operatorname{ch} \ln z. \quad (76)$$

¹⁾ Oczywiście zakłada się tutaj, że równości podane w nawiasach są spełnione dla wszystkich częstotliwości.

²⁾ Por. [7], p. 4.2.1.2.

³⁾ W wyniku rugowania z omawianego układu równań parametru B również otrzymuje się równanie obwiedni o postaci: $A_s = 0$.

Krzywa tłumienności A_s z (74) ma zatem przebieg falisty w pasmie przepustowym, a przy tym jest „ograniczona od dołu” osią częstotliwości, do której jest styczna gdy $z = 1$ (tzn. gdy zachodzi dopasowanie falowe po obu stronach filtru) oraz gdy $\Phi = 0$ (tzn. gdy B jest całkowitą wielokrotnością π w przypadku filtru symetrycznego, oraz gdy B jest nieparzystą wielokrotnością $\pi/2$ w przypadku filtru antysymetrycznego); jest ona natomiast ograniczona od góry obwiednią o równaniu (76), do której jest styczna, gdy $B = (k+1/2)\pi$ w przypadku filtru symetrycznego oraz gdy $B = k\pi$ w przypadku filtru antysymetrycznego, gdzie $\pm k = 0, 1, 2, \dots$

Dla rozpatrywanego filtru jako czwórnika reaktancyjnego włączonego między rzeczywiste impedancje obowiązuje wzór Feldtkellera, w myśl którego tłumienność skuteczna A_s i tłumienność echowa A_e powyższego filtru są związane ze sobą zależnością:

$$e^{-2A_s} + e^{-2A_e} = 1, \quad (77)$$

przy czym

$$A_e = -\ln p_e, \quad (78)$$

$$p_e = \left| \frac{W-R}{W+R} \right|, \quad (79)$$

gdzie wielkość p_e nosi nazwę współczynnika echa albo odbicia, wielkości W i R zaś reprezentują kolejno impedancję wejściową (pierwotną lub wtórną) i impedancję roboczą (pierwotną lub wtórną) danego filtru.

Jeżeli w elementach rozpatrywanego filtru są straty, jego tłumienność skuteczna w pasmie przepustowym, którą oznaczymy przez A_s^* , jest w przybliżeniu równa sumie tłumienności skutecznej A_s tego samego filtru występującej w przypadku bezstratności elementów i jego tłumienności falowej A^* uwarunkowanej stratnością elementów, zatem¹⁾:

$$A_s^* \approx A_s + A^*, \quad (80)$$

przy czym wg wzoru Mayera²⁾:

$$A^* \approx \frac{\omega}{2Q} \frac{dB}{d\omega}, \quad (81)$$

gdzie ω — pulsacja, Q — wypadkowa dobroć elementów filtru, B — przesuwność falowa filtru występująca w przypadku braku strat w elementach (tj. przy $Q = \infty$).

Zgodnie z (81) w ogólnym przypadku tłumienność A^* jest różna dla różnych częstotliwości pasma przepustowego; przy tym przy $Q = \text{const}$ jest ona największa dla tych częstotliwości powyższego pasma, przy których nachylenie krzywej $B = B(\omega)$ jest w tym pasmie największe. Ma to miejsce w otoczeniu częstotliwości granicznej (lub granicznych). Uwzględniając powyższe oraz wzór (80) wnosimy, iż w przypadku ogólnym zniekształcenia tłumieniowe wprowadzane przez dany filtr ze stratami w pasmie przepustowym są większe niż te, jakie wprowadza ten sam filtr bez strat w omawianym pasmie.

Zniekształcenia tłumieniowe wnoszone przez rozważany filtr ze stratami np. w PPP można by zmniejszyć dobierając (kształtując) przebieg $A_s = A_s(\omega)$ jako odwrotny do przebiegu $A^* = A^*(\omega)$ w tym pasmie³⁾.

¹⁾ Por. [7], p. 6.3.1.

²⁾ Por. [7], p. 6.2.1.

³⁾ Taka jest idea analitycznej metody Nai Ta Minga zmniejszania zniekształceń tłumieniowych w PPP filtrów LC ze stratami (filtrów rozpatrywanych na gruncie parametrów roboczych), por. [5] i [1].

Jeżeli w (80) wielkość A_s zastąpimy przez wielkość A_{sm} z (76), będziemy mieli:

$$A_s^* \approx A_{sm} + A^*. \quad (82)$$

W tym przypadku warunek minimalizacji zniekształceń tłumieniowych w *PPP* wyrazi się żądaniem, by przebieg $A_{sm} = A_{sm}(\omega)$ był możliwie odwrotny do przebiegu $A^* = A^*(\omega)$ w tym pasmie, czyli żeby:

$$A_{sm} \approx A_o - A^*, \quad (83)$$

gdzie A_o jest pewną wielkością stałą (nie mniejszą niż A^*). Dla tej wielkości stałej przyjmujemy wartość $A_s = A_{smax}$ odpowiadającą maksymalnej wartości p_{emax} współczynnika p_e co najwyżej dopuszczalnej w *PPP* lub — co na jedno wychodzi — minimalnej wartości A_{emin} tłumienności A_e wymaganej w *PPP*, zakładając, że straty nie mają wpływu na wielkości p_e, p_{emax}, A_e i A_{emin} . Na podstawie (77) przy uwzględnieniu (78) mamy:

$$A_{smax} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1-p_{emax}^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1-e^{-2A_{emin}}} \quad (84)$$

Wielkości p_{emax} i A_{emin} w (84) można przyjmować jako równe odpowiednim wielkościom podawanym w warunkach technicznych, na podstawie których projektuje się filtry, ewentualnie jako od nich nieco mniejsze (przypadek p_{emax}) lub większe (przypadek A_{emin}) w celu zachowania pewnego „marginesu bezpieczeństwa” na niedokładność wykonania stosowanych wykresów (np. szablonu tłumieniowego), na straty, nierównomierny rozkład strat na tego samego typu elementy filtru, niedokładność elementów itp.

Wielkość A_{smax} z (84) w szeregu przypadków może nie spełniać tego warunku, że dla wszystkich częstotliwości *PPP* jest ona nie mniejsza od wartości A^* z (83). Aby zachować nieujemność A_{sm} z (83) w przypadku przyjęcia wielkości A_o jako równej wartości A_{smax} z (84), założymy przeto, iż

$$A_{sm} = \begin{cases} \varepsilon & \text{przy } A_{smax} \leq A^*, \\ A_{smax} - A^* & \text{przy } A_{smax} > A^*, \end{cases} \quad (85)$$

gdzie ε jest rzeczywistą liczbą dodatnią bliską zera (dostatecznie małą).

Po wyznaczeniu z (85) wartości A_{sm} dla poszczególnych częstotliwości *PPP*, odpowiednie wartości funkcji impedancyjnej z filtru możemy łatwo obliczyć na podstawie wzoru

$$z = e^{\text{arch } A_{sm}} \quad (86)$$

wynikającego bezpośrednio z (76).

Znając wartości z , odpowiednie wartości minimalnej tłumienności niedopasowania A_{Nmin} wymaganej dla *PPP* możemy określić ze wzoru

$$A_{Nmin} = \begin{cases} 2 \text{arth } z & \text{przy } z < 1, \\ 2 \text{arcth } z & \text{przy } z > 1, \\ \ln \left| \frac{1+z}{1-z} \right| & \text{przy } z \geq 1, \end{cases} \quad (87)$$

który otrzymano z (6) oznaczając A_N przez A_{Nmin} .

Jeżeli znane są wartości A_{Nmin} , to klasę n i wartości parametrów odpowiednich funkcji impedancyjnych z filtru bez trudności można wyznaczyć metodą szablonową omówioną w rozdziale poprzednim.

Należy tu zaznaczyć, iż w celu uproszczenia operacji związanych z wyznaczaniem wartości A_{smax} w zależności od p_{emax} i A_{emin} oraz wartości A_{Nmin} w zależności od A_{sm} , dogodnie jest posługiwać się odpowiednimi wykresami skonstruowanymi wg wzorów (84), (86) i (87).

Tablica 4

Odpowiadające sobie wartości p_e , A_e , A_{sm} i A_N

p_e	A_e , [N]	A_{sm} , [mN]	A_N , [N]
0,01	4,61	0,05	5,30
0,02	3,91	0,2	4,60
0,03	3,51	0,5	4,20
0,04	3,22	0,8	3,91
0,05	3,00	1,3	3,69
0,06	2,81	1,8	3,51
0,07	2,66	2,5	3,35
0,08	2,53	3,2	3,22
0,09	2,41	4,1	3,09
0,10	2,30	5,0	2,99
0,11	2,21	6,0	2,90
0,12	2,12	7,5	2,81
0,13	2,04	8,5	2,73
0,14	1,97	10	2,66
0,15	1,90	11	2,59
0,16	1,83	13	2,52
0,17	1,77	15	2,46
0,18	1,72	16	2,40
0,19	1,66	18	2,34
0,20	1,61	20	2,29
0,21	1,56	23	2,24
0,22	1,51	25	2,20
0,23	1,47	27	2,15
0,24	1,43	30	2,11
0,25	1,39	32	2,06

W tablicy 4 podano wartości tłumienności:

$$A = -\ln p_e,$$

$$A_{sm} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1-p_e^2},$$

$$A_N = \ln \left| \frac{1+z}{1-z} \right| = 2 \operatorname{arth} \sqrt{\frac{1-p_e}{1+p_e}}$$

odpowiadające wartościom $p_e = 0,01(0,01)0,25$.

U podstaw sposobu minimalizacji zniekształceń tłumieniowych w *PPP* omówionego powyżej przyjęto założenie, iż wartości tłumienności A^* filtru w *PPP* są znane, a więc bądź obliczone, np. wg wzoru (81)¹⁾, bądź też oszacowane. Sposób ten oczywiście może być różnie modyfikowany, zależnie od warunków. Jeżeli — w szczególności — w warunkach zadania nie jest podana wartość $p_{\max}$ (lub — co na jedno wychodzi — wartość $A_{\min}$), na ogół można uzyskać większą minimalizację zniekształceń tłumieniowych w *PPP*.

Metodę minimalizacji zniekształceń tłumieniowych w *PPP* omówioną powyżej zilustrujemy odpowiednim przykładem liczbowym.

Przykład. W pewnym urządzeniu teletransmisyjnym ma być zastosowany filtr drabinkowy antymetryczny w postaci półogniwa odwracającego pewnego rzędu²⁾. W praktycznym pasmie przepustowym (*PPP*) tego filtru mieszczącym się w przedziale: $0 \leq |y| \leq k_p =$

Tablica 5

Wartości tłumienności A^* filtru w *PPP*

$ y $	A^* , [mN]
0,000	0,00
0,100	0,10
0,200	0,20
0,300	0,31
0,400	0,44
0,500	0,58
0,600	0,75
0,700	0,98
0,750	1,13
0,800	1,33
0,850	1,61
0,870	1,76
0,900	2,06
0,920	2,35
0,940	2,76
0,960	3,43
0,970	3,99
0,975	4,39
0,980	4,92

$= 0,980$ jego tłumienność falowa A^* (przy określonej wartości dobroci Q elementów) ma wartości zgodne z podanymi w tablicy 5. Należy wyznaczyć klasę n i wartości parametrów funkcji impedancyjnych rozważanego filtru w taki sposób, żeby przy zachowaniu wartości

¹⁾ Aby móc obliczyć wg wzoru (81) wartości A^* , trzeba znać wartości parametrów funkcji tłumieniowej filtru (tzn. jego tamowności falowej). Warto wspomnieć, iż nie we wszystkich rodzajach filtrów *LC* parametry funkcji tłumieniowej i funkcji impedancyjnej filtru są od siebie niezależne. Całkowita niezależność parametrów obu tych funkcji występuje np. w filtrach mostkowych i różnicowych. W filtrach drabinkowych (typu Zobela), np. dolnoprzepustowych i innych, do nich sprowadzalnych, mających bieguny tłumienności falowej m. in. przy $|y| < \infty$, występuje ona tylko w przypadku klasy impedancyjnej pierwszej, gdy filtry te składają się z sekcji (tj. ogniw i półogniw) konwencjonalnych, oraz w przypadku klasy impedancyjnej wyższej niż pierwszej, gdy filtry te składają się z określonych sekcji nowych typów, którym poświęcone zostaną odpowiednio specjalne publikacje autora.

²⁾ Jak wiadomo, rząd półogniwa odwracającego jest identyczny z klasą n jego funkcji impedancyjnych (rząd ten ustala się zatem równocześnie z klasą n).

współczynnika odbicia $p_{emax} \leq 0,12$ zniekształcenia tłumieniowe w jego PPP były możliwie małe.

Rozwiązanie. W celu zachowania wiadomego „marginesu bezpieczeństwa” jako obliczeniową wartość p_{emax} przyjmujemy wartość $p_{emax} = 0,10$. Dla tej wartości p_{emax} z tablicy 4 odczytujemy odpowiednią wartość $A_{sm} \equiv A_{smax} = 5$ mN.

Na podstawie wzorów od (85) do (87) przy $A_{smax} = 5$ mN i przy wartościach A^* podanych w tablicy 5 znajdujemy wartości A_{sm} i A_{Nmin} takie, jakie są zamieszczone w tablicy 6.

Teraz wg wzoru (64) dla $k_p = 0,980$ obliczamy $k'_p = 0,198998$; $\sqrt{k'_p} = 0,446091$ i $1/\sqrt{k'_p} = 2,241694$ oraz wg wzoru (67) dla poszczególnych wartości y podanych w tablicy 5 — wartości częstotliwości znormowanych D zgodne z zamieszczonymi w tablicy 6.

Tablica 6

Wymagane wartości tłumienności A_{sm} i A_{Nmin} filtru dla poszczególnych częstotliwości $|y|$ i D w PPP

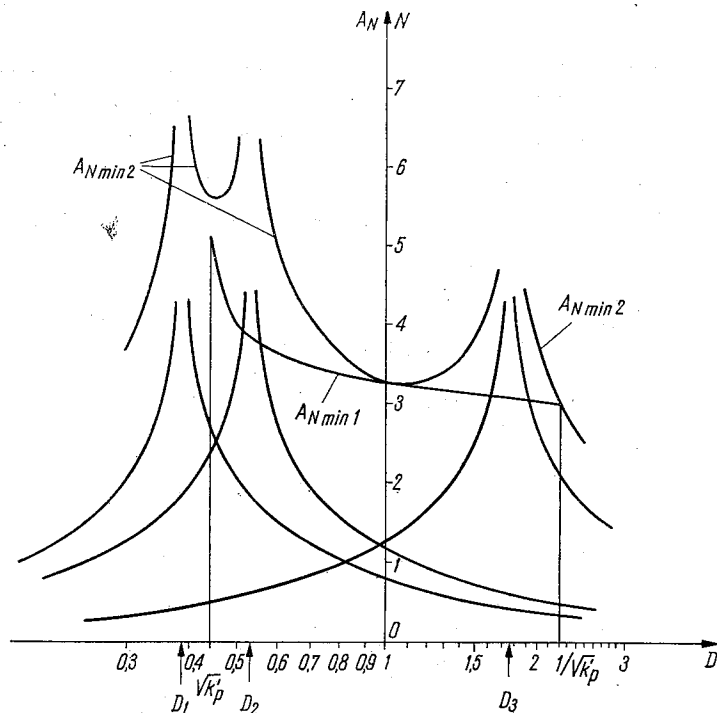
$ y $	D	A_{sm} , [mN]	A_{Nmin} , [N]
0,000	2,242	5,00	2,99
0,100	2,229	4,90	3,00
0,200	2,195	4,80	3,01
0,300	2,137	4,69	3,03
0,400	2,052	4,56	3,04
0,500	1,439	4,42	3,05
0,600	1,794	4,25	3,07
0,700	1,600	4,02	3,10
0,750	1,483	3,87	3,12
0,800	1,345	3,67	3,14
0,850	1,180	3,39	3,18
0,870	1,105	3,24	3,21
0,900	0,976	2,94	3,26
0,920	0,877	2,65	3,31
0,940	0,764	2,24	3,39
0,960	0,627	1,57	3,58
0,970	0,544	1,01	3,79
0,975	0,498	0,61	4,01
0,980	0,446	0,08	5,15

Obecnie wg danych zawartych w tablicy 6 i uwzględniając wskazówki podane w rozdziale poprzednim konstruujemy krzywą A_{Nmin} w zakresie częstotliwości D . Krzywą tę pokazaną na rys. 6 i oznaczoną przez A_{Nmin1} przybliżamy szablonami tłumieniowymi postacią jak na rys. 2. Stwierdzamy, że do powyższego przybliżenia muszą być użyte trzy szablony tego rodzaju i że środki tych szablonów muszą być umieszczone w następujących punktach $D_i (i = 1, 2, 3)$ na osi D (rys. 6)¹⁾:

¹⁾ W celu uzyskania możliwie dokładnej kompensacji zniekształceń tłumieniowych w PPP przy danym przebiegu A^* w tym paśmie, przybliżenie to wykonujemy w taki sposób, żeby suma rzędnych szablonów dla $|y| \leq k_p$ w możliwie najmniejszym stopniu przekraczała wartości $A_{Nmin} = A_{Nmin1}$, a dla $|y| \approx k_p$ — w możliwie największym stopniu przekraczała te wartości. Sumę rzędnych szablonów lub — co na jedno wychodzi — istniejącą tłumienność A_N filtru oznaczono na rys. 6 przez A_{Nmin2} .

$$D_1 = 0,390; \quad D_2 = 0,534; \quad D_3 = 1,760.$$

W ten sposób ustaliliśmy klasę funkcji impedancyjnych filtru $n = 3$ oraz wartości D_i zgodnie z podanymi wyżej.



Rys. 6. Ilustracja do przykładu liczbowego: A_{Nmin1} —wartości A_{Nmin} wymagane, A_{Nmin2} —wartości A_{Nmin} uzyskane

Jako funkcje impedancyjne pierwotną z_1 i wtórną z_2 filtru przyjmujemy odpowiednie funkcje kolejno klas γ i γ^* . Zgodnie ze wzorami zawartymi w tablicy 2, a odnoszącymi się do przypadku, gdy $n = 3$, i odpowiednimi uwagami podanymi wcześniej (w tym i w drugim rozdziale) będziemy zatem mieli:

$$z_1 = h \sqrt{1-y^2} \frac{1-a_1^2 y^2}{1-a_2^2 y^2} = 1/z_2,$$

przy czym

$$a_1^2 = b_1, \quad a_2^2 = b_2.$$

Aby wyznaczyć wartości h , a_1^2 i a_2^2 , posłużymy się wzorami (68), (66) i wzorami z tablic 1 i 3 dla $n = 3$.

Na podstawie wzoru (68) przy danych wartościach D_1 , D_2 , D_3 mamy:

$$\mu_1 = 1/D_1 = 2,564103,$$

$$\mu_2 = 1/D_2 = 1,872659,$$

$$\mu_3 = 1/D_3 = 0,568182,$$

tak iż wg (66) przy $1/\sqrt{k_p'} = 2,241694$ dostaniemy:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{k_p'}} \mu_1 = 5,747934,$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{k_p'}} \mu_2 = 4,197928,$$

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{k_p'}} \mu_3 = 1,273690.$$

Podstawiając powyższe wartości v_1, v_2, v_3 do wzorów zawartych w tablicach 1 i 3 (odnoszących się do przypadku, gdy $n = 3$) mamy ostatecznie:

$$\sum_3^1 = v_1 + v_2 + v_3 = 11,219552,$$

$$\sum_3^2 = v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_2 v_3 = 36,797360,$$

$$\sum_3^3 = v_1 v_2 v_3 = 30,73339$$

oraz

$$h = \frac{\sum_3^1 + \sum_3^3}{1 + \sum_3^2} = 1,109944,$$

$$a_1^2 = b_1 = \frac{\sum_3^3}{\sum_3^1 + \sum_3^3} = 0,732568,$$

$$a_2^2 = b_2 = \frac{\sum_3^2}{1 + \sum_3^2} = 0,973543.$$

Wartości z_1 i z_2 obliczone wg wzorów podanych powyżej i odpowiadające im wartości A_{sm} i A_{Nmin} obliczone wg wzorów (76) i (87) dla szeregu częstotliwości y w *PPP* zostały podane w tablicy 7¹⁾. W tej samej tablicy również zostały podane przybliżone wartości tłumienności skutecznej A_s^* filtru, określone w oparciu o wzór $A_s^* \approx A^* + A_{sm}$, gdzie A^* i A_{sm} — są to odpowiednie wartości znajdujące się w tablicach 5 i 7.

Określając maksymalne zniekształcenia tłumieniowe w *PPP* jako różnicę między maksymalną i minimalną wartościami tłumienności A_s^* filtru w *PPP* podanymi w tablicy 7 można stwierdzić, że nie przekraczają one wartości 4,53 mN²⁾. Warto zauważyć, iż w razie przyjęcia dla parametrów funkcji impedancyjnych rozważanego filtru wartości odpowiadających izoekstremalnym przebiegom jego transmitancji niedopasowania w *PPP* przy $Q = \infty$ (tj. wartości wyznaczonych metodą analityczną w oparciu o odpowiednie wzory

¹⁾ Podana w tablicy 7 m. in. dla $y = 0$ wartość A_{sm} przekracza odpowiednią wartość A_{sm} podaną w tablicy 6 o 0,38 mN; jest to konsekwencją niedokładności wykonania stosowanego szablonu tłumieniowego (łatwo sprawdzić, iż wartości $A_{sm} = 5,38$ mN odpowiada wartość $p_{emax} \approx 0,104$).

²⁾ Maksymalne zniekształcenia tłumieniowe w *PPP* wyznaczone eksperymentalnie dla wykonanego modelu rozważanego filtru były bliskie wymienionej wartości.

Tablica 7

Istniejące (obliczone) wartości wielkości z_1 , z_2 , A_{sm} , A_{Nmin} i $A_s^* \approx A_{sm} + A^*$ filtru dla szeregu częstotliwości $|y|$ w PPP

$ y $	z_1	z_2	A_{sm} , [mN]	A_{Nmin} , [N]	A_s^* , [mN]
0,000	1,1099	0,9010	5,38	2,96	5,38
0,100	1,1071	0,9033	5,19	2,98	5,29
0,200	1,0984	0,9104	4,39	3,06	4,59
0,300	1,0840	0,9225	3,23	3,20	3,54
0,400	1,0637	0,9401	1,90	3,48	2,34
0,500	1,0378	0,9636	0,70	3,98	1,28
0,600	1,0066	0,9935	0,10	5,72	0,85
0,700	0,9716	1,0292	0,40	4,24	1,38
0,750	0,9541	1,0481	1,10	3,74	2,23
0,800	0,9384	1,0656	2,05	3,44	3,38
0,850	0,9279	1,0777	2,80	3,28	4,41
0,870	0,9266	1,0792	2,90	3,28	4,66
0,900	0,9305	1,0747	2,60	3,32	4,66
0,920	0,9391	1,0648	1,94	3,46	4,29
0,940	0,9555	1,0465	1,00	3,80	3,76
0,960	0,9823	1,0180	0,15	4,70	3,58
0,970	0,9982	1,0018	0,00	6,90	3,99
0,975	1,0047	0,9953	0,00	6,06	4,39
0,980	1,0072	0,9929	0,05	5,64	4,97

podane np. w [2], [3] i [4]) wymienione zniekształcenia w PPP byłyby nieco większe (w przybliżeniu o 25%), przy czym krzywa tłumienności skutecznej filtru miałaby przebieg mniej płaski w PPP, szczególnie w sąsiedztwie częstotliwości $|y| = k_p$.

5. ZAKOŃCZENIE

Metodę szablonową przedstawioną w niniejszej pracy można rozszerzyć i na inne nie rozpatrzone tutaj funkcje impedancyjne, jak np. na funkcje impedancyjne klas a , a^* , b_1 , b_1^* , b_2 i b_2^* filtrów zygzakowych Laurenta [8]. Rozszerzając ją na te funkcje w szeregu przypadków (np. w przypadku funkcji impedancyjnych klas b_1 , b_1^* , b_2 i b_2^*) trzeba stosować określone założenia upraszczające¹⁾.

Warto zauważyć, iż przedstawiona tutaj metoda szablonowa jest podobna do podanej w [9], a zwłaszcza w [4] i [7] szablonowej metody wyznaczania wartości parametrów funkcji tłumieniowej filtrów LC rozpatrywanych na gruncie parametrów falowych dla z góry danych warunków (dla z góry danych wartości minimalnej tłumienności falowej filtru wymaganych w praktycznym pasmie tłumieniowym). W szczególności szablony tłumieniowe używane przy stosowaniu obu tych metod są identyczne. Ma to duże znaczenie dla projektantów filtrów, którzy w rezultacie znając jedną z tych metod łatwiej mogą się zapoz-

¹⁾ Założenia te trzeba stosować wtedy, kiedy rozpatrywana jakaś funkcja impedancyjna o postaci skomplikowanej nie da się „złożyć” z odpowiednich funkcji impedancyjnych o postaci prostszej.

nać i z drugą, i — w szczególności — stosując jeden i ten sam szablon tłumieniowy mogą wyznaczać wartości parametrów tak funkcji impedancyjnej, jak i funkcji tłumieniowej odpowiednich filtrów.

Politechnika Warszawska

Katedra Urządzeń Teletransmisyjnych i Telegraficznych

WYKAZ LITERATURY

1. Bielecki A. F.: *Teoreticheskie osnovy elektroprowodnoj swiazi*. Swiazizdat, Moskwa 1959.
2. Cauer W.: *Siebschaltungen*. VDI—Verlag, GMBH, Berlin 1931.
3. Cauer W.: *Theorie der linearen Wechselstromschaltungen*. Akad.-Verlag, Berlin 1954.
4. Kogan S. S.: *Teoria i rasczot filtrow dla ustanowok dalniej swiazi*. Swiazizdat, Moskwa 1950.
5. Ming Nai Ta: *Arch. für Elektrotechnik*, 1949, s. 359÷387; s. 452÷471 i s. 496÷507.
6. Mole J. H.: *Filter Design Data*. SPON, Londyn 1952.
7. Przesmycki O.: *Filtry elektryczne*. WKiŁ, Warszawa 1962.
8. Przesmycki O.: *Półogniwa Zig-zag Laurenta dla środkowoprzepustowych filtrów częstotliwościowo-niesymetrycznych*. — *Prace Zakładu Teorii Łączności Instytutu Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk*, Praca Nr 10, Warszawa 1961.
9. Rumpelt E.: *Schablonenverfahren für den Entwurf elektrischen Wellenfiltern auf den Grundlage der Wellenparametern*. — *TFT*, Oct.-Nov., 1941.
10. Scowen A. T.: *Introduction to Theory and Design of Electric Wave Filters*. Chapman and Hall, Ltd., Londyn 1945.
11. Zobel O. J.: *Bell System Techn. Journal* Vol. 2, I, Jan., 1923; Vol. 3, IV, Oct., 1924; Vol. 10, II, April 1931.

O. PRZESMYCKI

NEW—TEMPLATE METHOD OF THE IMAGE IMPEDANCE FUNCTION COEFFICIENTS DETERMINATION OF THE LC-FILTERS

Summary

The paper describes an analytical—graphical method of the Image Impedance Function Coefficients determination of the loss—free LC filters for the arbitrary frequency relationship of this function within the pass-band. The method refers to the Image Impedance Functions transformable to the Low—pass Characteristics.

The principle is based on the approximation of the required frequency characteristic of the image return attenuation of the filter within the pass—band in the normalized frequency range D , by means of templates. The templates represent curves against D of the Image return attenuation corresponding to the Image Impedance Function of First Class.

The method described enables particularly to determine such values of the Image Impedance Function Coefficients at which the influence of the components dissipation on the effective attenuation characteristic in the pass-band may be reduced. The degree of reduction depends upon the minimum required value of the effective return attenuation within this band.

Besides the theoretical background of the described method the paper gives also a practical instructions and also a numerical example is quoted.

O. PRZESMYCKI

UNE NOUVELLE MÉTHODE GRAPHO-ANALYTIQUE DE DÉTERMINER LES VALEURS DES PARAMÈTRES DES FONCTIONS D'IMPEDANCE-IMAGE DES FILTRES LC

Résumé

Dans cet article on présente une méthode grapho-analytique de déterminer les valeurs des paramètres des fonctions d'impédance-image des filtres LC sans pertes pour obtenir la forme désirée de ces fonctions dans la bande passante en dépendance de la fréquence. Cette méthode est applicable aux fonctions d'impédance-image qui peuvent être réduites aux caractéristiques des filtres passe-bas. Elle se base sur l'approximation d'une courbe désirée d'affaiblissement de réflexion-image dans l'intervalle de certaines „fréquences D ” par une courbe standard. Cette courbe standard présente la forme de la caractéristique d'affaiblissement réflexion-image en fonction de D correspondante à la fonction d'impédance-image de la première classe. À l'aide de la méthode présentée on peut particulièrement déterminer telles valeurs des paramètres des fonctions d'impédance-image pour lesquelles on obtient la compensation de l'influence des pertes des éléments à la courbe de l'affaiblissement effectif. Le degré de cette compensation dépend de la valeur désirée minimale de l'affaiblissement de réflexion-effectif dans la bande passante.

Dans l'article on donne les principes théoriques de la méthode ainsi que les indications pratiques correspondantes, et enfin un exemple numérique.

O. PRZESMYCKI

NEUES — SCHABLONENVERFAHREN FÜR DIE ERMITTLUNG DER PARAMETERWERTEN VON WELLENWIDERSTANDSFUNKTIONEN DER ELEKTRISCHEN WELLENFILTERN

Zusammenfassung

Es wurden die elektrischen Wellenfilter betrachtet, die auf der Grundlage der Wellenparametertheorie berechnet sind, und deren Wellenwiderstände zu Tiefpasscharakteristiken zugeführt werden können. Für solchen Filtern wird eine graphisch-analytische Methode der Ermittlung der Wellenwiderstandsfunktionenparameterwerten für beliebig gewünschte Frequenzverläufe dieser Funktionen im Durchlassbereich gegeben. Diese Methode stützt sich auf die Approximation der gewünschten Frequenzverläufe der Wellenreflexionsdämpfung im Durchlassbereich im Gebiet der normierter Frequenz D mit bestimmten Schablonen, die Wellenreflexionsdämpfungsverläufe entsprechend der Wellenwiderstandsfunktion der ersten Klasse im Gebiet der Frequenzen D darstellen. Die beschriebene Methode ermöglicht insbesondere die Ermittlung solcher Wellenwiderstandsfunktionenparameterwerte, bei denen der Einfluss der Schaltelementeverluste auf die Betriebsdämpfungcharakteristik des Filters im Durchlassbereich reduziert werden kann. Der Reduktionsgrad hängt von Gegebenen Minimalwerten der Echodämpfung im Durchlassbereich ab.

Im Artikel sind nicht nur die theoretischen Grundlagen der beschriebenen Methode gegeben, sondern auch entsprechende praktische Hinweise und ein numerisches Beispiel.

О. ПШЭСМЫЦКИ

НОВЫЙ ГРАФИЧЕСКО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ФУНКЦИЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ СОПРОТИВЛЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ LC , ОСНОВАННЫЙ НА ПРИМЕНЕНИИ ШАБЛОНОВ

Резюме

В статье рассматриваются электрические фильтры LC рассчитываемые по характеристическим параметрам, а при этом имеющие характеристические сопротивления, приводимые к характери-

стикам нижних частот. Для этих фильтров в статье дается графическо-аналитический метод определения значений параметров функции характеристических сопротивлений фильтра для желанных произвольных зависимостей этих функции от частоты в полосе пропускания. Этот метод основан на аппроксимации желанных кривых зависимости затухания несогласованности фильтра в полосе пропускания от определенной нормированной частоты D , при помощи шаблонов. Эти шаблоны представляют собой кривые (графики) изменения в функции частоты D затухания несогласованности, соответствующего функции характеристического сопротивления первого класса. Приведенный метод позволяет в особенности определить такие значения параметров функции характеристического сопротивления, при которых можно уменьшить влияние потерь в элементах на характеристику рабочего затухания фильтра в полосе пропускания в степени, зависимой от требуемых значений минимального затухания эхо фильтра в этой полосе.

В статье независимо от теоретических основ метода дается соответствующие практические советы, а также численный пример.

JERZY SAWICKI

Liniowość charakterystyki mostka o przetworniku nieproporcjonalnym

Rękopis dostarczono 9.5.1967

Pewne odmiany przetworników oporowych do pomiaru wielkości nieelektrycznych wykazują hiperboliczną zależność między wielkością badaną a opornością. Podobną postać ma charakterystyka pomiarowa mostka odchyłowego [1], [2]. Przy odpowiednim zaprojektowaniu układu możliwe jest uzyskanie w niektórych przypadkach ściśle liniowego związku między odchyleniem miernika w mostku a wartością wielkości nieelektrycznej. Zagadnienie to zostało zbadane w początkowej części niniejszego artykułu.

Dalsze rozważania dotyczą uchybu przybliżenia dla tych przypadków, gdy uzyskanie idealnej proporcjonalności podziałki jest niemożliwe. Jakość przybliżenia ocenia się na podstawie uchybu zredukowanego, przez który rozumiemy największy moduł uchybu przybliżenia odniesiony do zakresu pomiaru.

Na podstawie znanych współczynników charakterystyki przetwornika, granic zakresu pomiarowego oraz uchybu zredukowanego można określić potrzebne wartości współczynników charakterystyki mostka (k , α_∞). W oparciu o te wartości projektuje się następnie sam układ pomiarowy, stosownie do rozważań przedstawionych w [4], [5].

Wzory określające k oraz α_∞ w funkcji poprzednio wymienionych danych wyjściowych mają postać zależną od zastosowanego typu zakresu. W artykule rozpatrzono wszelkie typy zakresów, a mianowicie: jednostronny dodatni, jednostronny ujemny, dwustronne sprawdzalne do jednostronnego oraz dwustronne niesprawdzalne. Dla każdego przypadku ustalono także odpowiedni warunek praktycznej rozwiązalności zadania.

Dodatkowo wyprowadzono wzory do obliczenia wartości współczynników charakterystyki przetwornika, jeżeli jest ona zadana w postaci tablicy liczbowej.

Ilustrację rozważań teoretycznych stanowią obliczenia, wykonane dla konkretnego przykładu zadania pomiarowego.

1. WSTĘP

Mostki odchyłowe bardzo często są stosowane w pomiarach wielkości nieelektrycznych. W układach takich używa się przetworników oporowych, czyli elementów, których oporność zależy w znany sposób od wartości wielkości mierzanej. Charakterystyką pomiarową przetwornika nazywamy zależność wiążącą między sobą wartości oporności i wielkości badanej. Niektóre typy przetworników mają charakterystykę praktycznie proporcjonalną, przynajmniej w pewnym zakresie (np. opornik termometryczny miedziany lub platynowy). Proporcjonalność charakterystyki pomiarowej całego zespołu można wówczas uzyskać, projektując mostek wg zasad przedstawionych w [3]. Wiele typów przetworników ma jednak charakterystykę o postaci krzywoliniowej, jak np. przetworniki solomierzy służących do pomiaru stężenia soli NaCl w wodzie. Uzyskanie proporcjonalnej

podziałki miernika wymaga tutaj innej metodyki projektowania mostka niż w przypadku poprzednio wspomnianym.

W pracy niniejszej założono, że charakterystyka pomiarowa zastosowanego typu przetwornika ma postać hiperboliczną. Pewne odmienne typy charakterystyk dają się sprowadzić do zależności hiperbolicznej przez zastosowanie prostego podstawienia wielkości pomocniczej, odpowiednio przyjętej. W innych przypadkach można ustalić równanie przybliżonej charakterystyki hiperbolicznej, aproksymującej rzeczywistą w pewnym przedziale. Niekiedy może zachodzić potrzeba zastosowania obu tych sposobów jednocześnie. Przyjęte założenie hiperboliczności wynika z właściwości mostka odchyłowego.

2. CHARAKTERYSTYKI POMIAROWE

Oporność R_v przetwornika jest zależna od pewnej wielkości V , którą chcemy mierzyć. W przypadkach gdy jesteśmy zmuszeni stosować podstawienie wspomniane w rozdziale 1 niniejszego artykułu, jako V należy rozumieć wielkość pomocniczą, proporcjonalną do właściwej wielkości mierzonej. Oporność przetwornika odpowiadającą wartości $V=0$ będziemy oznaczać przez R , (przy czym $R > 0$) i nazywać „opornością podstawową” lub „odniesienia”. Wszelkie wartości R_v będziemy wyrażać w zależności od oporności podstawowej oraz od rozstrojenia X (liczba niemianowana) stosownie do wzoru

$$R_v = R(1+X), \quad (1)$$

który można też zapisać inaczej, w postaci

$$X = \frac{R_v - R}{R}. \quad (1')$$

Przyjmujemy, że rozstrojenie X jest związane z wartością V wielkości mierzonej zależnością hiperboliczną

$$X = \frac{\theta \cdot V}{V_\infty - V} \quad (2)$$

gdzie θ jest stałym współczynnikiem niemianowanym, natomiast symbol V_∞ oznacza pewną stałą (charakterystyczną) wartość wielkości mierzonej¹⁾. Wzór (2) daje się łatwo przekształcić w zależność odwrotną

$$V = V_\infty \frac{X}{\theta + X}. \quad (2')$$

Biorąc pod uwagę, że oporność przetwornika R_v musi się zawierać w granicach $0 \leq R_v < \infty$, otrzymujemy następujące przedziały możliwych wartości dla poszczególnych zmiennych:

$$\left. \begin{array}{l} \text{przy } \theta \leq 1: \quad -\infty < V < V_\infty \quad \text{oraz} \quad -\theta < X < +\infty, \\ \text{przy } 1 \leq \theta: \quad -\frac{V_\infty}{1-\theta} < V < V_\infty \quad \text{oraz} \quad -1 < X < +\infty. \end{array} \right\} \quad (3)$$

¹⁾ Zakładamy, że zarówno θ , jak i V_∞ mają wartości dodatnie, a więc $X = f(V)$ oraz $V = f(X)$ są funkcjami rosnącymi.

Podstawienie zależności (2) do (1) pozwala wyrazić charakterystykę pomiarową przetwornika w postaci „bezpośredniej”

$$R_v = R \frac{V_\infty - (1-\theta)V}{V_\infty - V} \quad (4)$$

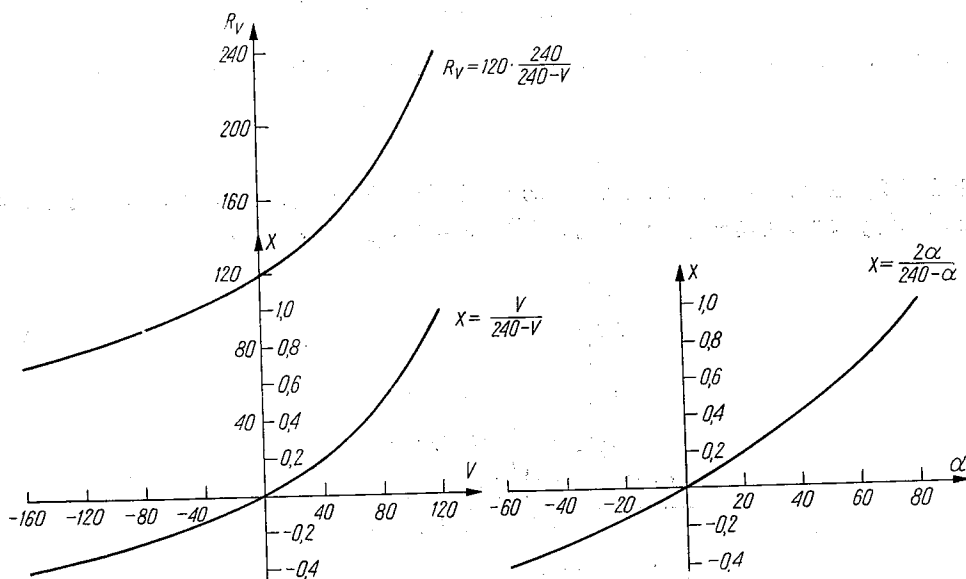
lub też jako związek odwrotny tych samych wielkości

$$V = V_\infty \frac{R_v - R}{R_v - (1-\theta)R} \quad (4')$$

Wartości występujące w powyższych wzorach muszą leżeć w przedziałach:

$$\left. \begin{array}{l} \text{przy } \theta \leq 1: \quad -\infty < V < V_\infty \quad \text{oraz } (1-\theta)R < R_v < +\infty, \\ \text{przy } 1 \leq \theta: \quad -\frac{V_\infty}{1-\theta} < V < V_\infty \quad \text{oraz} \quad 0 < R_v < +\infty. \end{array} \right\} \quad (5)$$

Przyjmujemy, że układ mostka odchyłowego znajduje się w równowadze, gdy wielkość mierzona przybiera wartość $V = 0$. Występująca wówczas oporność przetwornika $R_v = R$ stanowi zatem oporność odniesienia dla układu mostkowego zgodnie z definicją podaną



Rys. 1. Przykład charakterystyk pomiarowych przetwornika i mostka

w [1], [2]. Rozstrojenie zdefiniowane wzorem (1') jest więc identyczne z rozstrojeniem rozważanym w cytowanych pracach. Wyprowadzona tam charakterystyka pomiarowa odchyłowego mostka wyraża się jako

$$X = \frac{k\alpha}{\alpha_\infty - \alpha} \quad (6)$$

lub inaczej — w postaci zależności

$$\alpha = \alpha_{\infty} \frac{X}{k+X}, \quad (6')$$

gdzie α oznacza odchylenie miernika. Współczynnik niemianowany $k > 1$ oraz odchylenie charakterystyczne $\alpha_{\infty} > 0$ są wartościami stałymi. Rozstrojenie X oraz odchylenie α , występujące w powyższych wzorach, muszą leżeć w przedziałach

$$-1 < X < \infty \quad \text{oraz} \quad -\frac{\alpha_{\infty}}{k-1} < \alpha < \alpha_{\infty}. \quad (7)$$

Wypadkową charakterystykę pomiarową zespołu mostka z przetwornikiem wyprowadzamy na podstawie zależności (6') i (2). Otrzymany wzór (8) określa rzeczywiście występujące odchylenie miernika α_w dla danej wartości wielkości mierzonej V

$$\alpha_w = \alpha_{\infty} \frac{\theta V}{kV_{\infty} - (k-\theta)V}. \quad (8)$$

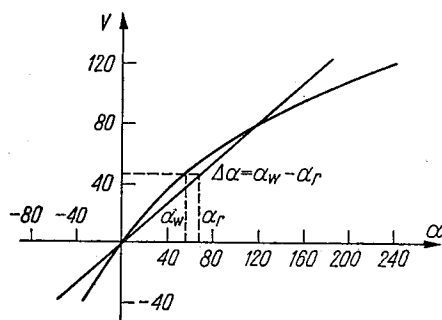
Powyższa funkcja ma charakter rosnący, gdyż przy poczynionych założeniach jest

$$\frac{d\alpha_w}{dV} = \frac{\alpha_{\infty} \theta k V_{\infty}}{[kV_{\infty} - (k-\theta)V]^2} > 0.$$

Podziałkę miernika wykonuje się jako proporcjonalną, stosownie do zależności

$$\alpha_r = \alpha_{\infty} \frac{V}{V_c}, \quad (9)$$

w której V_c oznacza pewną stałą wartość wielkości mierzonej, odpowiednio przyjętą. Zależność (9) jest rosnącą — podobnie jak (8), gdyż stosuje się $V_c > 0$.



Rys. 2. Powstawanie uchybu przybliżenia

Mierzonej wartości V odpowiada zatem odchylenie α_r . Wskazaniem miernika rządzi jednak faktycznie wzór (8), wobec czego przyrząd wskaże odchylenie α_w . Powstaje tym samym bezwzględny uchyb wskazania $\Delta\alpha$, o wartości określonej jako

$$\Delta\alpha = \alpha_w - \alpha_r = \alpha_{\infty} \frac{V}{V_c} \frac{(\theta V_c - kV_{\infty}) + (k-\theta)V}{kV_{\infty} - (k-\theta)V}. \quad (10)$$

Uchyb ten jest stale zerowy dla wszystkich wartości zmiennej V w przypadku gdy są spełnione wymagania

$$\left. \begin{aligned} \theta V_c - k V_\infty &= 0 \\ k - \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{lub inaczej} \quad \left. \begin{aligned} k &= \theta, \\ V_c &= V_\infty. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Przytoczone wymagania stanowią warunek ścisłej liniowości charakterystyki pomiarowej zespołu mostka z przetwornikiem.

W przypadku spełnienia warunku (11) charakterystykę pomiarową zespołu można zapisać jako

$$\alpha = \alpha_\infty \frac{V}{V_\infty} = \frac{1}{C_z} V, \quad (12)$$

gdzie C_z oznacza stałą zespołu pomiarowego. Wymienioną stałą można łatwo obliczyć na podstawie np. wartości założonych dla górnej granicy zakresu pomiarowego (indeks M):

$$C_z = \frac{V_M}{\alpha_M} = \frac{V_\infty}{\alpha_\infty}. \quad (13)$$

Przy znanej wartości V_∞ , charakteryzującej zastosowany przetwornik, obliczymy stąd α_∞ dla projektowanego układu mostka:

$$\alpha_\infty = \frac{V_\infty}{C_z} = \alpha_M \frac{V_\infty}{V_M}. \quad (13')$$

Parametr k charakterystyki mostka odchyłowego został już poprzednio wyznaczony z warunku (11) jako $k = \theta$. Dwie ostatnio wymienione dane pozwalają obliczyć układ mostka odchyłowego przy zastosowaniu metodyki przedstawionej w [4], [5].

Z cytowanych publikacji wiadomo jednak, że praktycznie można zrealizować jedynie mostki o $k > 1$. Wynika stąd, iż w przypadkach gdy $\theta \leq 1$, uzyskanie ściśle liniowej charakterystyki zespołu jest fizycznie niemożliwe. Staramy się wówczas układ tak zaprojektować, by występujące uchyby nie przekroczyły z góry założonych wartości dopuszczalnych. Opracowanie właściwej metodyki postępowania dla omawianego przypadku wymaga przede wszystkim zbadania bezwzględnego uchybu przybliżenia w zależności od wartości wielkości mierzonej V .

3. BEZWZGLĘDNY UCHYB PRZYBLIŻENIA

W rozważaniach zakładamy, że uzyskanie ścisłej charakterystyki liniowej jest niemożliwe wobec $\theta \leq 1$. Jak wiemy, zawsze jest $k > 1$, wobec czego z całą pewnością $(k - \theta) > 0$. Wzór (10) możemy więc przekształcić do postaci

$$\Delta\alpha = -\frac{\alpha_\infty}{V_c} \frac{V \left[V - \frac{kV_\infty - \theta V_c}{k - \theta} \right]}{V - \frac{kV_\infty}{k - \theta}}. \quad (10')$$

Wprowadzamy oznaczenie pomocnicze S wg definicji

$$S = + \sqrt{\frac{\theta V_c}{k V_\infty}} \quad (S \text{ jest zawsze dodatnie}), \quad (14)$$

co pozwala wyrazić omawiany uchyb jako

$$\Delta\alpha = -\frac{\alpha_\infty}{V_c} \frac{V \left[V - \frac{kV_\infty}{k-\theta} (1-S^2) \right]}{V - \frac{kV_\infty}{k-\theta}} = -\frac{\alpha_\infty}{V_c} \frac{L}{M}. \quad (15)$$

Mianownik M jest ujemny, o ile zachodzi $V < \frac{kV_\infty}{k-\theta}$. Zgodnie z (3) górna granica zakresu pomiarowego wynosi najwyżej V_∞ . Spytajmy więc, kiedy jest $\frac{kV_\infty}{k-\theta} > V_\infty$? Nierówność ta jest spełniona, gdy $\theta V_\infty > 0$ — a więc zawsze. Z rozważań tych wynika, że mianownik M jest ujemny bez względu na wartość wielkości mierzonej V . Znak uchybu $\Delta\alpha$ jest zatem taki sam jak znak licznika L . Ze wzoru (15) widać wyraźnie, że licznik jest ujemny tylko w przedziale wartości V między 0 a $\frac{kV_\infty}{k-\theta} (1-S^2)$. W punktach granicznych tego przedziału uchyb osiąga wartość zerową:

$$\Delta\alpha = 0 \text{ dla } V = 0 \quad \text{oraz} \quad V_0 = \frac{kV_\infty}{k-\theta} (1-S^2). \quad (16)$$

Zbadamy teraz ekstrema uchybu w zależności od wartości wielkości mierzonej V . W tym celu obliczamy

$$\frac{d(\Delta\alpha)}{dV} = -\frac{\alpha_\infty}{V_c} \frac{V^2 - 2\frac{kV_\infty}{k-\theta}V + \left(\frac{kV_\infty}{k-\theta}\right)^2 (1-S^2)}{\left(V - \frac{kV_\infty}{k-\theta}\right)^2}.$$

Pochodna ta przyjmuje wartość zerową w punktach

$$V'_e = \frac{kV_\infty}{k-\theta} (1-S), \quad V''_e = \frac{kV_\infty}{k-\theta} (1+S).$$

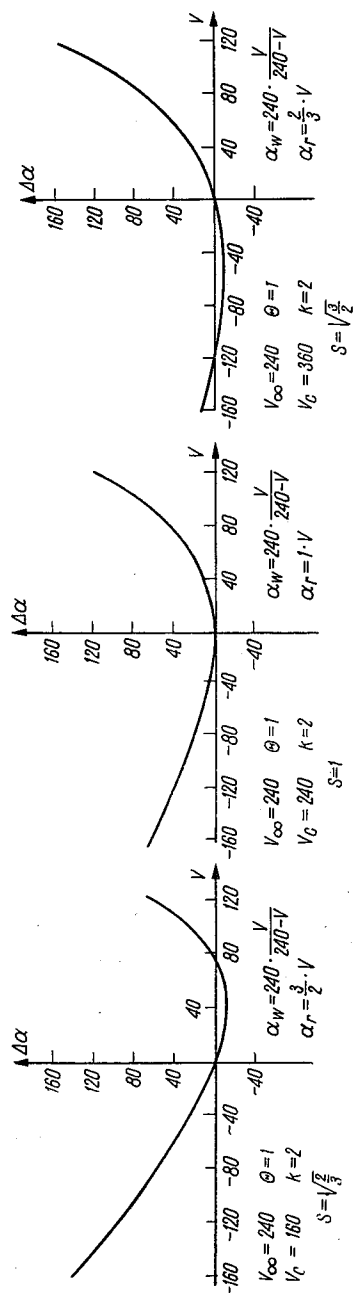
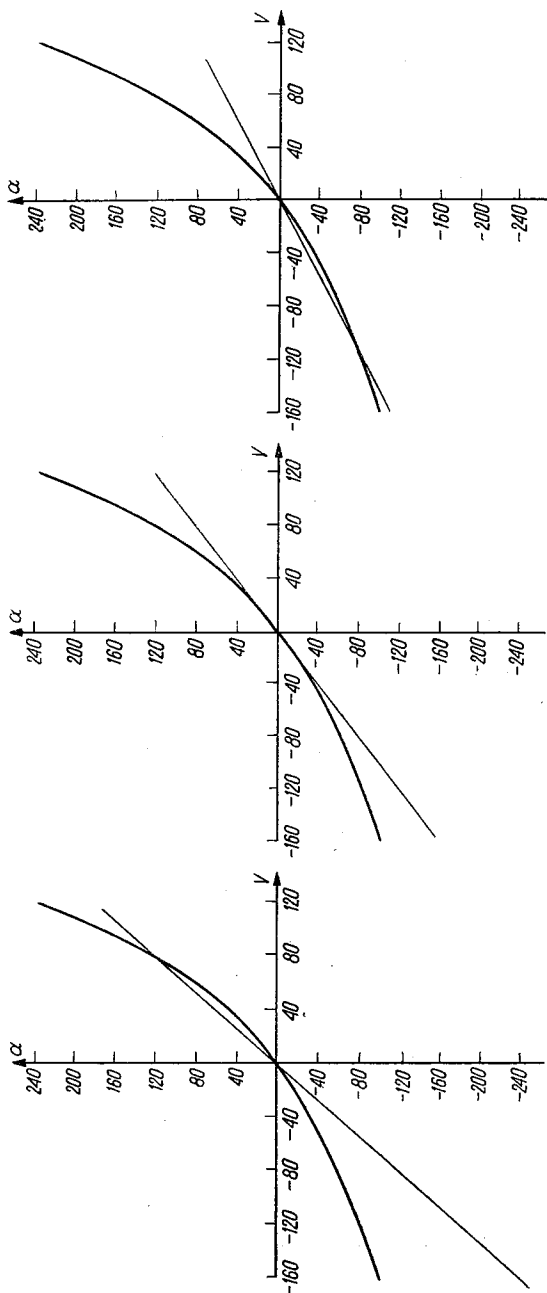
Dla V'_e występuje minimum w sensie matematycznym, natomiast dla V''_e istnieje matematyczne maksimum.

Sprawdźmy teraz, kiedy punkt V'_e leży w obszarze uchybów ujemnych, czyli między wartościami 0 a $\frac{kV_\infty}{k-\theta} (1-S^2)$. Zakładamy najpierw, że $0 < S < 1$ (czyli $V_0 > 0$) i otrzymujemy nierówność warunkową

$$0 < \frac{kV_\infty}{k-\theta} (1-S) < \frac{kV_\infty}{k-\theta} (1-S^2).$$

Wobec przyjętych założeń lewa część powyższej nierówności jest jawnie spełniona; prawą można sprowadzić do postaci $1 < 1+S$, co również zachodzi w całym rozpatrywanym przedziale.

Przyjmijmy z kolei, że $S = 1$. W takim przypadku jest $V_0 = 0$ oraz $V'_e = 0$.



Rys. 3. Przykładowe przebiegi uchybów dla różnych wartości S

Założmy wreszcie, że $S > 1$, co oznacza iż $V_0 < 0$. Nierówność warunkowa przybiera wówczas postać

$$\frac{kV_\infty}{k-\theta}(1-S^2) < \frac{kV_\infty}{k-\theta}(1-S) < 0.$$

Jej prawa część jest wyraźnie spełniona. Część lewą, po podzieleniu przez liczbę ujemną $(1-S)$, możemy wyrazić w postaci $1+S > 1$, co również zachodzi w całym rozpatrywanym przedziale.

Okazało się więc, że punkt V'_e leży zawsze w tym przedziale wartości wielkości mierzonej, gdzie występujący uchyb jest ujemny.

Zbadamy obecnie, kiedy punkt V''_e leży poza zakresem pomiarowym wielkości V (powyżej jego górnej granicy). Odpowiednia nierówność warunkowa brzmi teraz

$$V_\infty < \frac{kV_\infty}{k-\theta}(1+S)$$

i jest spełniona, o ile $S > -\frac{\theta}{k}$. Z przyjętych założeń $\theta > 0$, $k > 1$ oraz definicji S wg wzoru (14) widać, że powyższy warunek jest zawsze zachowany.

Z przytoczonych rozważań wynika jasno, że w zakresie pomiaru wielkości V występuje tylko jeden punkt ekstremalny, oznaczony krótko jako

$$V_e = \frac{kV_\infty}{k-\theta}(1-S). \quad (17)$$

Uchyb bezwzględny osiąga tutaj wartość minimalną w sensie matematycznym, przy tym mniejszą od zera; jej moduł oznaczmy przez $\Delta\alpha_e$. Podstawiając wyrażenie (17) do wzoru (15) znajdujemy

$$\Delta\alpha_e = \frac{\alpha_\infty}{V_e} \frac{kV_\infty}{k-\theta}(1-S)^2. \quad (18)$$

Kończąc tę część naszych rozważań poszukamy takich wartości granicznych wielkości mierzonej, dla których dodatni uchyb bezwzględny jest równy poprzednio wyznaczonemu $\Delta\alpha_e$. Na podstawie zależności (15) i wzoru (18) ustawiamy równanie

$$V^2 - 2 \frac{kV_\infty}{k-\theta} S(1-S)V - \left(\frac{kV_\infty}{k-\theta} \right)^2 (1-S)^2 = 0,$$

którego rozwiązaniami są

$$\left. \begin{aligned} V'_g &= \frac{kV_\infty}{k-\theta}(1-S)(S - \sqrt{1+S^2}), \\ V''_g &= \frac{kV_\infty}{k-\theta}(1-S)(S + \sqrt{1+S^2}). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

W przypadku gdy $S < 1$, jest V'_g jawnie ujemne. Natomiast $V''_g > V_0$, gdyż dla uczynionego założenia jest $(1-S)(S + \sqrt{1+S^2}) > 1-S^2$.

Dla $S = 1$ wartości V'_g , V''_g oraz V_0 wszystkie stają się równe zero; wówczas także zachodzi $\Delta\alpha_e = 0$.

Załóżmy z kolei, że $S > 1$. Wartość V_0 jest teraz ujemna, jak to wyjaśniliśmy poprzednio. Punkt V'_g leży obecnie w zakresie dodatnim, natomiast $V''_g < V_0$, gdyż obecnie jest $(1-S)(S+\sqrt{1+S^2}) < 1-S^2$.

Istotnym kryterium dla oceny dokładności zespołu pomiarowego mostka z przetwornikiem jest nie tyle uchyb bezwzględny, ile raczej tak zwany „uchyb zredukowany”. Definicję uchybu zredukowanego stanowi wzór

$$\delta = \frac{|\Delta\alpha|_M}{\alpha_z}, \quad (20)$$

w którym $|\Delta\alpha|_M$ oznacza maksimum modułu uchybu bezwzględnego w rozpatrywanym zakresie pomiaru, natomiast α_z rozpiętość zakresu pomiaru wyrażoną w odchyleniach miernika. Przez rozpiętość zakresu rozumiemy różnicę między jego górną a dolną granicą. Z podanej definicji widać, że uchyb zredukowany stanowi analogię do uchybu podstawowego dla mierników odchyłowych.

Można z góry przewidzieć, że wartość $|\Delta\alpha|_M$ jest zależna nie tylko od rozpiętości zakresu, lecz również od usytuowania jego granic względem punktu zerowego. Dalsze rozważania przeprowadzimy zatem odrębnie dla różnych typów zakresu pomiarowego.

4. ZAKRES JEDNOSTRONNY DODATNI

Zakres pomiaru nazywamy jednostronnym dodatnim, jeżeli przedział wartości wielkości mierzonej V może być określony nierównością $0 \leq V \leq V_M$. Uzyskanie możliwie małego uchybu zredukowanego wymaga takiego doboru danych, by występowały zarówno uchyby bezwzględne dodatnie, jak i ujemne. Postulat ten jest spełniony, gdy $S < 1$. Maksymalny moduł uchybu ujemnego powinien być przy tym równy maksymalnemu uchybowi dodatniemu. Warunek ten zostanie spełniony, gdy górna granica zakresu pomiarowego V_M będzie równa dodatniej wartości granicznej V_g wg wzoru (19). Wobec założenia $S < 1$, chodzi tu o V''_g . W związku z tym otrzymujemy zależność

$$V_M = \frac{kV_\infty}{k-\theta} (1-S)(S+\sqrt{1+S^2}). \quad (21)$$

Rozpiętość zakresu odchyłeń miernika określa tutaj wzór

$$\alpha_z = \alpha_M = \alpha_\infty \frac{V_M}{V_c}, \quad (22)$$

a maksymalny moduł uchybu bezwzględnego — zależność (18). Na tej podstawie obliczymy uchyb zredukowany jako

$$\delta = \frac{1}{V_M} \frac{kV_\infty}{k-\theta} (1-S)^2. \quad (23)$$

Wyrażenia (21) i (23) tworzą układ równań pozwalający na wyznaczenie potrzebnych wartości k oraz S . Przede wszystkim obliczamy

$$\frac{kV_\infty}{k-\theta} = \frac{\delta V_M}{(1-S)^2} \quad (24)$$

i po podstawieniu do (21) otrzymujemy wzór

$$\delta = +(1-S)(\sqrt{1+S^2}-S), \quad (25)$$

który można też przedstawić w postaci równania

$$(1+2\delta)S^2 - 2(1+\delta)S + (1-\delta^2) = 0.$$

Pierwiastkami powyższego równania są wartości

$$S_{1,2} = \frac{1+\delta \pm \delta\sqrt{2(1+\delta)}}{1+2\delta}.$$

Na wstępie niniejszego rozdziału stwierdziliśmy, że powinno być $S < 1$. Zauważmy dalej, iż

$$\frac{1+\delta+\delta\sqrt{2(1+\delta)}}{1+2\delta} > \frac{1+\delta+\delta\sqrt{2}}{1+2\delta} > 1 \quad (\delta > 0),$$

wobec czego właściwą odpowiedzią jest wartość oznaczona poprzednio przez S_1 . Napiшем więc

$$S = \frac{1+\delta-\delta\sqrt{2(1+\delta)}}{1+2\delta} = 1 - \frac{\delta}{\sqrt{2(1+\delta)}-1}. \quad (26)$$

W ten sposób określiliśmy potrzebną wartość współczynnika S na podstawie założonego uchybu zredukowanego δ . Dążąc dalej do wyznaczenia współczynników w równaniach charakterystyki, obliczamy najpierw wyrażenie

$$\frac{kV_\infty}{k-\theta} = \frac{V_M}{\delta} [\sqrt{2(1+\delta)}-1]^2, \quad (27)$$

a stąd znajdziemy już

$$k = \theta \frac{\frac{V_M}{V_\infty}}{\frac{V_M}{V_\infty} - \frac{\delta}{[\sqrt{2(1+\delta)}-1]^2}}. \quad (28)$$

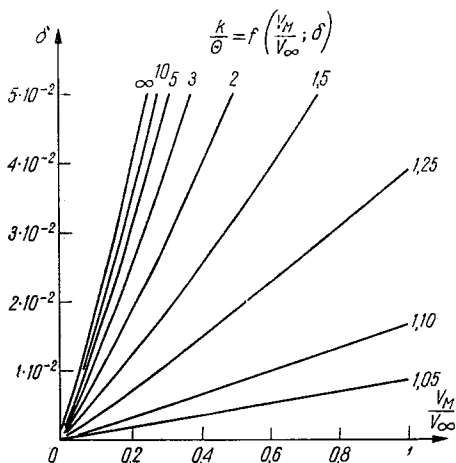
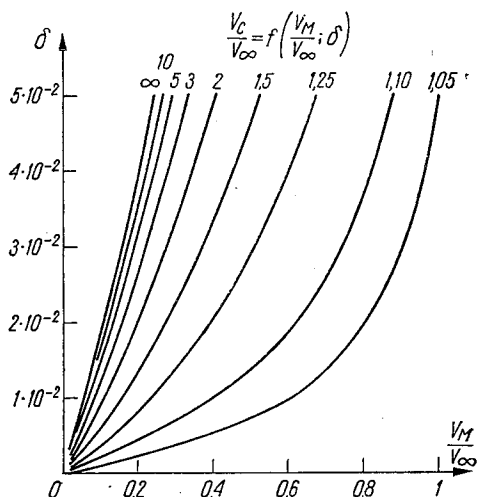
Na podstawie definicji (14) oraz wyrażenia (26) obliczamy

$$V_c = V_\infty \frac{\frac{V_M}{V_\infty} \left[1 - \frac{\delta}{\sqrt{2(1+\delta)}-1} \right]^2}{\frac{V_M}{V_\infty} - \frac{\delta}{[\sqrt{2(1+\delta)}-1]^2}}. \quad [29]$$

Wartość współczynnika α_∞ określamy na podstawie (22) jako

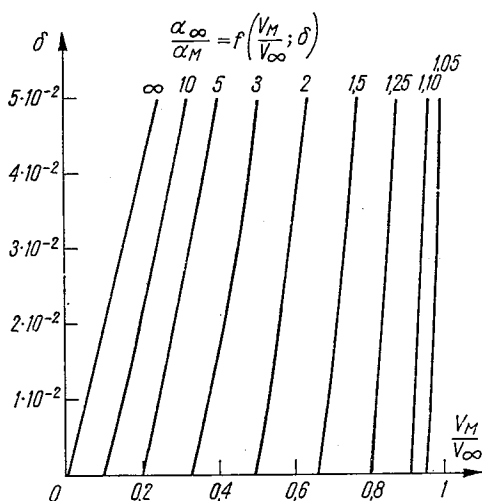
$$\alpha_\infty = \alpha_M \frac{\left[1 - \frac{\delta}{\sqrt{2(1+\delta)}-1} \right]^2}{\frac{V_M}{V_\infty} - \frac{\delta}{[\sqrt{2(1+\delta)}-1]^2}}. \quad (30)$$

We wzorach (28), (29) i (30) występują tylko dwa różne wyrażenia, zależne funkcyjnie od założonego uchybu zredukowanego δ . W celu ułatwienia praktycznych obliczeń odpowiednie wartości liczbowe zostały zestawione w tablicy 1.


 Rys. 4. Współczynnik k dla zakresu jednostronnego dodatniego

 Rys. 5. Współczynnik V_c dla zakresu jednostronnego dodatniego

Wyżej wyprowadzone rozwiązania mają znaczenie praktyczne tylko wówczas, gdy wartości k , V_c oraz α_∞ są dodatnie. Stan taki zachodzi, o ile jest

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\delta}{[\sqrt{2(1+\delta)}-1]^2} < \Phi_g, \\ & \text{gdzie } \Phi_g = \frac{V_M}{V_\infty}, \quad \text{przy czym jest } 0 < \Phi_g < \frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$


 Rys. 6. Współczynnik α_∞ dla zakresu jednostronnego dodatniego

Warunek powyższy przekształcimy dalej, aby wyznaczyć dopuszczalny przedział δ w zależności od Φ_g . W toku przekształceń otrzymujemy najpierw postać

Tablica 1

Wartości wyrażeń zależnych od δ we wzorach (28) ... (30)

δ	$\frac{\delta}{[\sqrt{2(1+\delta)}-1]^2}$	$\left[1 - \frac{\delta}{\sqrt{2(1+\delta)}-1}\right]^2$
$1 \cdot 10^{-4}$	$5,8264 \cdot 10^{-4}$	$9,9952 \cdot 10^{-1}$
$2 \cdot 10^{-4}$	$1,1649 \cdot 10^{-3}$	$9,9903 \cdot 10^{-1}$
$5 \cdot 10^{-4}$	$2,9092 \cdot 10^{-3}$	$9,9759 \cdot 10^{-1}$
$1 \cdot 10^{-3}$	$5,8086 \cdot 10^{-3}$	$9,9519 \cdot 10^{-1}$
$2 \cdot 10^{-3}$	$1,1578 \cdot 10^{-2}$	$9,9040 \cdot 10^{-1}$
$3 \cdot 10^{-3}$	$1,7308 \cdot 10^{-2}$	$9,8564 \cdot 10^{-1}$
$4 \cdot 10^{-3}$	$2,2999 \cdot 10^{-2}$	$9,8091 \cdot 10^{-1}$
$5 \cdot 10^{-3}$	$2,8652 \cdot 10^{-2}$	$9,7621 \cdot 10^{-1}$
$6 \cdot 10^{-3}$	$3,4266 \cdot 10^{-2}$	$9,7153 \cdot 10^{-1}$
$7 \cdot 10^{-3}$	$3,9843 \cdot 10^{-2}$	$9,6688 \cdot 10^{-1}$
$8 \cdot 10^{-3}$	$4,5382 \cdot 10^{-2}$	$9,6226 \cdot 10^{-1}$
$9 \cdot 10^{-3}$	$5,0884 \cdot 10^{-2}$	$9,5766 \cdot 10^{-1}$
$1 \cdot 10^{-2}$	$5,6349 \cdot 10^{-2}$	$9,5309 \cdot 10^{-1}$
$1,5 \cdot 10^{-2}$	$8,3131 \cdot 10^{-2}$	$9,3062 \cdot 10^{-1}$
$2 \cdot 10^{-2}$	$1,0903 \cdot 10^{-1}$	$9,0879 \cdot 10^{-1}$
$2,5 \cdot 10^{-2}$	$1,3409 \cdot 10^{-1}$	$8,8755 \cdot 10^{-1}$
$3 \cdot 10^{-2}$	$1,5834 \cdot 10^{-1}$	$8,6690 \cdot 10^{-1}$
$3,5 \cdot 10^{-2}$	$1,8182 \cdot 10^{-1}$	$8,4682 \cdot 10^{-1}$
$4 \cdot 10^{-2}$	$2,0454 \cdot 10^{-1}$	$8,2728 \cdot 10^{-1}$
$4,5 \cdot 10^{-2}$	$2,2655 \cdot 10^{-1}$	$8,0826 \cdot 10^{-1}$
$5 \cdot 10^{-2}$	$2,4786 \cdot 10^{-1}$	$7,8974 \cdot 10^{-1}$

$$2\Phi_g \sqrt{2(1+\delta)} < 3\Phi_g - \delta(1-2\Phi_g).$$

Prawa strona tej nierówności musi być dodatnia, co prowadzi do wymagania, by było

$$\delta < \frac{3\Phi_g}{1-2\Phi_g}. \quad (31')$$

Zakładając spełnienie powyższego warunku otrzymujemy następnie zależność

$$(1-2\Phi_g)^2 \delta^2 - 2\Phi_g(3-2\Phi_g)\delta + (\Phi_g)^2 > 0.$$

Jest ona zachowana dla wartości δ leżących w przedziałach

$$\delta < \frac{\Phi_g}{[\sqrt{2(1-\Phi_g)}+1]^2} \quad \text{oraz} \quad \frac{\Phi_g}{[\sqrt{2(1-\Phi_g)}-1]^2} < \delta. \quad (31'')$$

Zauważmy teraz, że

$$\frac{\Phi_g}{[\sqrt{2(1-\Phi_g)}+1]^2} < \frac{3\Phi_g}{1-2\Phi_g},$$

o ile jest

$-2(2-\Phi_g) < 3\sqrt{2(1-\Phi_g)}$, a to zachodzi w całym rozpatrywanym przedziale wartości zmiennej Φ_g . Analogicznie

$$\frac{3\Phi_g}{1-2\Phi_g} < \frac{\Phi_g}{[\sqrt{2(1-\Phi_g)}-1]^2},$$

jeżeli $-1 < \Phi_g < \frac{1}{2}$,

co również jest spełnione dla wszelkich wartości Φ_g wg definicji tego symbolu (31).

Wymagania (31') oraz (31'') muszą być jednocześnie zachowane. Z bezpośrednio poprzedzających uwag wynika, że zachodzi to dla wartości δ leżących w przedziale

$$\delta < \frac{\Phi_g}{[\sqrt{2(1-\Phi_g)}+1]^2} \quad (32)$$

Rozpatrzmy teraz, kiedy jest $k > 1$? Zakładamy przy tym, że warunek (32) jest spełniony. Dodatkowo otrzymujemy wymaganie, by było

$$\left. \begin{aligned} \Phi_d &< \frac{\delta}{[\sqrt{2(1+\delta)}-1]^2}, \\ \text{gdzie } \Phi_d &= \frac{V_M}{V_\infty}(1-\Theta), \text{ przy czym jest } 0 < \Phi_d < \Phi_g < \frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Wykonując przekształcenia analogiczne jak poprzednio dochodzimy najpierw do postaci

$$3\Phi_d - \delta(1-2\Phi_d) < 2\Phi_d\sqrt{2(1+\delta)}.$$

Wymaganie to jest spełnione, jeżeli lewa strona reprezentuje wartość ujemną lub zero; zachodzi to dla

$$\frac{3\Phi_d}{1-2\Phi_d} < \delta. \quad (33')$$

Oprócz powyższego istnieją jeszcze inne przypadki spełnienia nierówności (33), które wyznaczmy z zależności otrzymanej w toku dalszych przekształceń, a mianowicie

$$(1-2\Phi_d)^2\delta^2 - 2\Phi_d(3-2\Phi_d)\delta + (\Phi_d)^2 < 0.$$

Spełnia się ona w przedziale wartości

$$\frac{\Phi_d}{[\sqrt{2(1-\Phi_d)}+1]^2} < \delta < \frac{\Phi_d}{[\sqrt{2(1-\Phi_d)}-1]^2}. \quad (33'')$$

Stwierdzamy obecnie, iż

$$\frac{\Phi_d}{[\sqrt{2(1-\Phi_d)}+1]^2} < \frac{3\Phi_d}{1-2\Phi_d},$$

jeżeli jest $-2(2-\Phi_d) < 3\sqrt{2(1-\Phi_d)}$, co spełnia się dla wszelkich wartości zmiennej Φ_d w rozpatrywanym przedziale. Podobnie

$$\frac{3\Phi_d}{1-2\Phi_d} < \frac{\Phi_d}{[\sqrt{2(1-\Phi_d)}-1]^2}, \text{ gdy } -1 < \Phi_d < \frac{1}{2},$$

co także jest zachowane w całym przyjętym zakresie wartości Φ_d .

Z przytoczonych rozważań widać, że nierówność (33) jest słuszna z chwilą, gdy spełnimy choćby jeden z warunków (33') lub (33''). Można je połączyć w jedno wypadkowe wymaganie dzięki wyżej wykazanemu związkowi

$$\frac{\Phi_d}{[\sqrt{2(1-\Phi_d)}+1]^2} < \frac{3\Phi_d}{1-2\Phi_d} < \frac{\Phi_d}{[\sqrt{2(1-\Phi_d)}-1]^2}.$$

Jako odpowiednik nierówności (33) otrzymujemy zatem

$$\frac{\Phi_d}{[\sqrt{2(1-\Phi_d)}+1]^2} < \delta. \quad (34)$$

Pamiętamy jednak, że dla pełnej realności obliczonych rozwiązań musi być również spełniona zależność (32). Ostateczne wymaganie dotyczące danych wyjściowych do obliczeń ma wobec tego postać

$$\left. \begin{aligned} f(\Phi_d) &< \delta < f(\Phi_g), \\ \text{gdzie oznaczono } f(\Phi) &= \frac{\Phi}{[\sqrt{2(1-\Phi)}+1]^2}, \\ \text{natomiast } \Phi_d &= \frac{V_M}{V_\infty}(1-\theta), \quad \Phi_g = \frac{V_M}{V_\infty} < \frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

W celu ułatwienia praktycznego stosowania wyprowadzonej nierówności, wartości funkcji $f(\Phi)$ zostały przedstawione w tablicy 2.

Tablica 2

Wartości funkcji $f(\Phi)$ wg wzoru (35)

Φ	$f(\Phi)$	Φ	$f(\Phi)$
$1 \cdot 10^{-4}$	$1,7158 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-1}$	$1,8237 \cdot 10^{-2}$
$2 \cdot 10^{-4}$	$3,4319 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-1}$	$2,2168 \cdot 10^{-2}$
$5 \cdot 10^{-4}$	$8,5812 \cdot 10^{-5}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$2,6203 \cdot 10^{-2}$
$1 \cdot 10^{-3}$	$1,7167 \cdot 10^{-4}$	$1,6 \cdot 10^{-1}$	$3,0347 \cdot 10^{-2}$
$2 \cdot 10^{-3}$	$3,4355 \cdot 10^{-4}$	$1,8 \cdot 10^{-1}$	$3,4607 \cdot 10^{-2}$
$5 \cdot 10^{-3}$	$8,6039 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-1}$	$3,8988 \cdot 10^{-2}$
$1 \cdot 10^{-2}$	$1,7258 \cdot 10^{-3}$	$2,2 \cdot 10^{-1}$	$4,3495 \cdot 10^{-2}$
$2 \cdot 10^{-2}$	$3,4722 \cdot 10^{-3}$	$2,4 \cdot 10^{-1}$	$4,8137 \cdot 10^{-2}$
$3 \cdot 10^{-2}$	$5,2396 \cdot 10^{-3}$	$2,6 \cdot 10^{-1}$	$5,2920 \cdot 10^{-2}$
$4 \cdot 10^{-2}$	$7,0283 \cdot 10^{-3}$	$2,8 \cdot 10^{-1}$	$5,7851 \cdot 10^{-2}$
$5 \cdot 10^{-2}$	$8,8389 \cdot 10^{-3}$	$3,0 \cdot 10^{-1}$	$6,2940 \cdot 10^{-2}$
$6 \cdot 10^{-2}$	$1,0672 \cdot 10^{-2}$	$3,5 \cdot 10^{-1}$	$7,6413 \cdot 10^{-2}$
$7 \cdot 10^{-2}$	$1,2528 \cdot 10^{-2}$	$4,0 \cdot 10^{-1}$	$9,1098 \cdot 10^{-2}$
$8 \cdot 10^{-2}$	$1,4407 \cdot 10^{-2}$	$4,5 \cdot 10^{-1}$	$1,0720 \cdot 10^{-1}$
$9 \cdot 10^{-2}$	$1,6310 \cdot 10^{-2}$		

Przechodząc do innych zagadnień, wyznaczmy teraz położenie punktu o uchybie ekstremalnym V_e w obrębie zakresu pomiarowego. Wychodząc z zależności (17), (26) i (27) otrzymujemy wzór

$$V_e/V_M = \sqrt{2(1+\delta)} - 1. \quad (36)$$

Punkt o zerowym uchybie V_0 występuje w miejscu, które znajdziemy na podstawie wyrażań (16), (26) i (27):

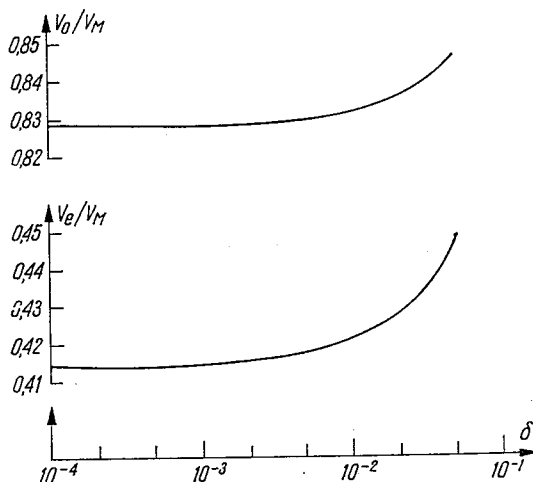
$$V_0/V_M = 2[\sqrt{2(1+\delta)} - 1] - \delta. \quad (37)$$

Tablica 3

Polożenia punktów V_e oraz V_0 w zależności od uchybu zredukowanego δ

δ	V_e/V_M	V_0/V_M
$1 \cdot 10^{-4}$	$4,1428 \cdot 10^{-1}$	$8,2849 \cdot 10^{-1}$
$2 \cdot 10^{-4}$	$4,1436 \cdot 10^{-1}$	$8,2851 \cdot 10^{-1}$
$5 \cdot 10^{-4}$	$4,1457 \cdot 10^{-1}$	$8,2863 \cdot 10^{-1}$
$1 \cdot 10^{-3}$	$4,1492 \cdot 10^{-1}$	$8,2884 \cdot 10^{-1}$
$2 \cdot 10^{-3}$	$4,1563 \cdot 10^{-1}$	$8,2925 \cdot 10^{-1}$
$3 \cdot 10^{-3}$	$4,1633 \cdot 10^{-1}$	$8,2967 \cdot 10^{-1}$
$4 \cdot 10^{-3}$	$4,1704 \cdot 10^{-1}$	$8,3008 \cdot 10^{-1}$
$5 \cdot 10^{-3}$	$4,1774 \cdot 10^{-1}$	$8,3049 \cdot 10^{-1}$
$6 \cdot 10^{-3}$	$4,1845 \cdot 10^{-1}$	$8,3090 \cdot 10^{-1}$
$7 \cdot 10^{-3}$	$4,1915 \cdot 10^{-1}$	$8,3131 \cdot 10^{-1}$
$8 \cdot 10^{-3}$	$4,1986 \cdot 10^{-1}$	$8,3172 \cdot 10^{-1}$
$9 \cdot 10^{-3}$	$4,2056 \cdot 10^{-1}$	$8,3213 \cdot 10^{-1}$
$1 \cdot 10^{-2}$	$4,2127 \cdot 10^{-1}$	$8,3253 \cdot 10^{-1}$
$1,5 \cdot 10^{-2}$	$4,2478 \cdot 10^{-1}$	$8,3456 \cdot 10^{-1}$
$2 \cdot 10^{-2}$	$4,2829 \cdot 10^{-1}$	$8,3657 \cdot 10^{-1}$
$2,5 \cdot 10^{-2}$	$4,3178 \cdot 10^{-1}$	$8,3856 \cdot 10^{-1}$
$3 \cdot 10^{-2}$	$4,3527 \cdot 10^{-1}$	$8,4054 \cdot 10^{-1}$
$3,5 \cdot 10^{-2}$	$4,3875 \cdot 10^{-1}$	$8,4250 \cdot 10^{-1}$
$4 \cdot 10^{-2}$	$4,4222 \cdot 10^{-1}$	$8,4444 \cdot 10^{-1}$
$4,5 \cdot 10^{-2}$	$4,4568 \cdot 10^{-1}$	$8,4637 \cdot 10^{-1}$
$5 \cdot 10^{-2}$	$4,4914 \cdot 10^{-1}$	$8,4828 \cdot 10^{-1}$

Jak widać, powyższe punkty szczególne V_e oraz V_0 zmieniają nieco swoją pozycję w obrębie zakresu pomiarowego w zależności od przyjętej wartości uchybu zredukowanego δ . Liczbową ilustrację tego zjawiska daje tablica 3.

Rys. 7. Polożenie punktów V_e oraz V_0 w obrębie zakresu jednostronnego dodatniego

Punkt V_0 posiada istotne znaczenie praktyczne. Regulację warunków zasilania mostka przeprowadza się zwykle na podstawie wskazania jego miernika przy włączeniu znanego rozstrojenia wzorcowego. Rozstrojenie to należy tak dobrać, by odpowiadało ono punktowi V_0 , w którym uchyb przybliżenia (absolutny) ma wartość zerową. Zastosowanie innego rozstrojenia wzorcowego spowoduje, że warunki zasilania układu będą nieco odbiegać od założonych przy konstrukcji mostka. Omawiane zjawisko wystąpi najsilniej, jeżeli jako wzorcowe zastosujemy rozstrojenie odpowiadające punktowi V_e , gdzie uchyb bezwzględny osiąga wartość ekstremalną.

Na zakończenie tej części rozważań wyznaczmy jeszcze graniczny punkt $V_g < 0$ tak, by w przedziale $V_g \leq V \leq V_m$ bezwzględny uchyb przybliżenia nigdzie nie przekroczył wartości odpowiadającej poprzednio założonemu uchybowi zredukowanemu δ . Korzystamy tutaj z wyrażenia V'_g wg wzoru (19) oraz z zależności (25) i (27), otrzymując w wyniku

$$V_g = -V_m [\sqrt{2(1+\delta)} - 1]^2. \quad (38)$$

Z przytoczonego związku można wyciągnąć wnioski praktyczne. Takie zakresy dwustronne, w których jest $V_m \geq V_g$ wg wzoru (38), można bowiem sprowadzić do przypadku obecnie rozpatrzanego. Bliższe naświetlenie tego zagadnienia zawiera rozdział 6 niniejszego opracowania.

5. ZAKRES JEDNOSTRONNY UJEMNY

Zakres pomiaru nazywamy jednostronnym ujemnym, jeżeli przedział wartości wielkości mierzonej V może być określony nierównością $V_m \leq V \leq 0$. Podobnie jak w rozdziale 4 uzyskanie możliwie małego uchybu zredukowanego wymaga takiego doboru danych, by występowały zarówno uchyby bezwzględne dodatnie, jak i ujemne. Postulat ten jest tutaj spełniony, o ile $S > 1$. Maksymalny moduł uchybu ujemnego powinien być przy tym równy maksymalnemu uchybowi dodatniemu. Warunek ten będzie spełniony, o ile dolna granica zakresu pomiarowego V_m będzie równa ujemnej wartości granicznej V_g wg wzoru (19). Wobec założenia $S > 1$ chodzi tu więc o V''_g . W związku z tym otrzymujemy zależność

$$V_m = -\frac{kV_\infty}{k-\theta} (S-1)(S+\sqrt{1+S^2}). \quad (39)$$

Rozpiętość zakresu odchył miernika określa obecnie wzór

$$\alpha_z = -\alpha_m = \alpha_\infty \frac{-V_m}{V_e}, \quad (40)$$

a maksymalny moduł uchybu bezwzględnego — zależność (18). Na tej podstawie obliczymy uchyb zredukowany jako

$$\delta = \frac{1}{-V_m} \frac{kV_\infty}{k-\theta} (S-1)^2. \quad (41)$$

Wyrażenia (39) i (41) tworzą układ równań pozwalający na wyznaczenie potrzebnych wartości k oraz S . Przede wszystkim obliczamy

$$\frac{kV_\infty}{k-\theta} = \frac{\delta(-V_m)}{(S-1)^2} \quad (42)$$

i po podstawieniu do (39) otrzymujemy wzór

$$\delta = (S-1)(\sqrt{1+S^2}-S), \quad (43)$$

który można też przedstawić w postaci równania

$$(1-2\delta)S^2 - 2(1-\delta)S + (1-\delta^2) = 0 \quad \left(\text{oczywiście } \delta < \frac{1}{2} \right).$$

Pierwiastkami powyższego równania są wartości

$$S_{1,2} = \frac{1-\delta \pm \delta\sqrt{2(1-\delta)}}{1-2\delta}.$$

Na wstępie niniejszego rozdziału stwierdziliśmy, że powinno być $S > 1$. Zauważmy dalej, że dla $\delta < \frac{1}{2}$ jest $1-\delta-\delta\sqrt{2(1-\delta)} < 1-2\delta$, wobec czego właściwą odpowiedzią jest wartość oznaczona poprzednio przez S_2 . Napiszemy więc

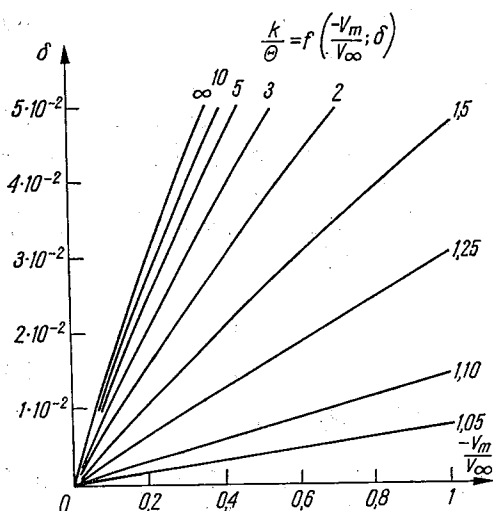
$$S = \frac{1-\delta+\delta\sqrt{2(1-\delta)}}{1-2\delta} = 1 + \frac{\delta}{\sqrt{2(1-\delta)}-1} \quad (44)$$

W ten sposób określiliśmy potrzebną wartość współczynnika S na podstawie założonego uchybu zredukowanego δ . Dążąc dalej do wyznaczenia współczynników w równaniach charakterystyki, obliczamy najpierw wyrażenie

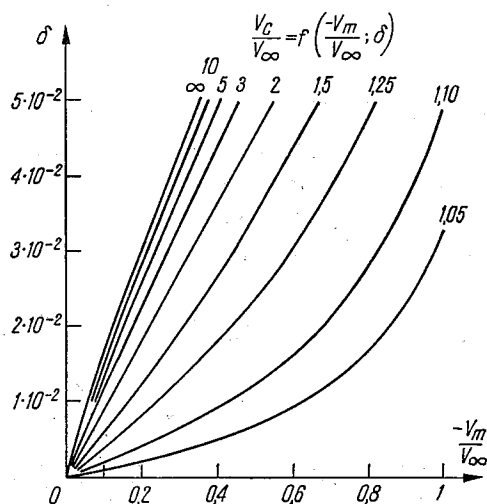
$$\frac{kV_\infty}{k-\theta} = \frac{-V_m}{\delta} [\sqrt{2(1-\delta)}-1]^2, \quad (45)$$

a stąd znajdziemy już

$$k = \theta \frac{\frac{-V_m}{V_\infty}}{\frac{-V_m}{V_\infty} - \frac{\delta}{[\sqrt{2(1-\delta)}-1]^2}}. \quad (46)$$



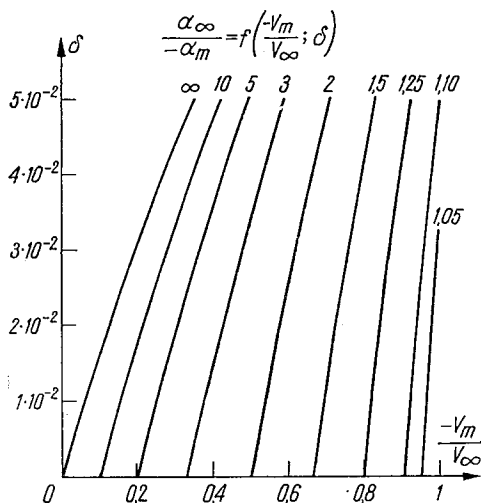
Rys. 8. Współczynnik k dla zakresu jednostronnego ujemnego



Rys. 9. Współczynnik V_c dla zakresu jednostronnego ujemnego

Na podstawie definicji (14) oraz wyrażenia (44) obliczamy

$$V_c = V_\infty \frac{\frac{-V_m}{V_\infty} \left[1 + \frac{\delta}{\sqrt{2(1-\delta)}-1} \right]^2}{\frac{-V_m}{V_\infty} - \frac{\delta}{[\sqrt{2(1-\delta)}-1]^2}}. \quad (47)$$



Rys. 10. Współczynnik α_∞ dla zakresu jednostronnego ujemnego

Wartość współczynnika α_∞ określamy z zależności (40) jako

$$\alpha_\infty = -\alpha_m \frac{\left[1 + \frac{\delta}{\sqrt{2(1-\delta)}-1} \right]^2}{\frac{-V_m}{V_\infty} - \frac{\delta}{[\sqrt{2(1-\delta)}-1]^2}}. \quad (48)$$

We wzorach (46), (47) i (48) występują tylko dwa różne wyrażenia, zależne funkcyjnie od założonego uchybu zredukowanego δ . Aby ułatwić przeprowadzanie praktycznych obliczeń, odpowiednie wartości liczbowe zostały zestawione w tablicy 4.

Wyżej wyprowadzone rozwiązania mają znaczenie praktyczne tylko wówczas, gdy wartości k , V_c oraz α_∞ są dodatnie. Stan taki zachodzi, o ile jest

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta}{[\sqrt{2(1-\delta)}-1]^2} &< \Phi_p, \\ \text{gdzie } \Phi_p &= \frac{-V_m}{V_\infty}, \text{ przy czym jest } 0 < \Phi_p < 1. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Warunek powyższy przekształcimy dalej w celu wyznaczenia dopuszczalnego przedziału δ w zależności od Φ_p . W toku przekształceń otrzymujemy najpierw postać

$$2\Phi_p \sqrt{2(1-\delta)} < 3\Phi_p - \delta(1+2\Phi_p).$$

Tablica 4

 Wartości wyrażeń zależnych od δ we wzorach (46) ... (48)

δ	$\frac{\delta}{[\sqrt{2(1-\delta)}-1]^2}$	$\left[1 + \frac{\delta}{\sqrt{2(1-\delta)}-1}\right]^2$
$1 \cdot 10^{-4}$	$5,8304 \cdot 10^{-4}$	$1,0005 \cdot 10^0$
$2 \cdot 10^{-4}$	$1,1664 \cdot 10^{-3}$	$1,0010 \cdot 10^0$
$5 \cdot 10^{-4}$	$2,9192 \cdot 10^{-3}$	$1,0024 \cdot 10^0$
$1 \cdot 10^{-3}$	$5,8484 \cdot 10^{-3}$	$1,0048 \cdot 10^0$
$2 \cdot 10^{-3}$	$1,1737 \cdot 10^{-2}$	$1,0097 \cdot 10^0$
$3 \cdot 10^{-3}$	$1,7666 \cdot 10^{-2}$	$1,0146 \cdot 10^0$
$4 \cdot 10^{-3}$	$2,3636 \cdot 10^{-2}$	$1,0195 \cdot 10^0$
$5 \cdot 10^{-3}$	$2,9647 \cdot 10^{-2}$	$1,0245 \cdot 10^0$
$6 \cdot 10^{-3}$	$3,5699 \cdot 10^{-2}$	$1,0295 \cdot 10^0$
$7 \cdot 10^{-3}$	$4,1794 \cdot 10^{-2}$	$1,0345 \cdot 10^0$
$8 \cdot 10^{-3}$	$4,7930 \cdot 10^{-2}$	$1,0395 \cdot 10^0$
$9 \cdot 10^{-3}$	$5,4109 \cdot 10^{-2}$	$1,0446 \cdot 10^0$
$1 \cdot 10^{-2}$	$6,0332 \cdot 10^{-2}$	$1,0497 \cdot 10^0$
$1,5 \cdot 10^{-2}$	$9,2100 \cdot 10^{-2}$	$1,0757 \cdot 10^0$
$2 \cdot 10^{-2}$	$1,2500 \cdot 10^{-1}$	$1,1025 \cdot 10^0$
$2,5 \cdot 10^{-2}$	$1,5908 \cdot 10^{-1}$	$1,1301 \cdot 10^0$
$3 \cdot 10^{-2}$	$1,9440 \cdot 10^{-1}$	$1,1586 \cdot 10^0$
$3,5 \cdot 10^{-2}$	$2,3101 \cdot 10^{-1}$	$1,1879 \cdot 10^0$
$4 \cdot 10^{-2}$	$2,6896 \cdot 10^{-1}$	$1,2182 \cdot 10^0$
$4,5 \cdot 10^{-2}$	$3,0834 \cdot 10^{-1}$	$1,2495 \cdot 10^0$
$5 \cdot 10^{-2}$	$3,4919 \cdot 10^{-1}$	$1,2817 \cdot 10^0$

Prawa strona tej nierówności musi być dodatnia, co prowadzi do wymagania, by było

$$\delta < \frac{3\Phi_p}{1+2\Phi_p}. \quad (49')$$

Zakładając spełnienie powyższego warunku otrzymujemy następnie zależność

$$(1+2\Phi_p)^2\delta^2 - 2\Phi_p(3+2\Phi_p)\delta + (\Phi_p)^2 > 0.$$

Jest ona zachowana dla wartości δ leżących w przedziałach

$$\delta < \frac{\Phi_p}{[\sqrt{2(1+\Phi_p)}+1]^2} \quad \text{oraz} \quad \frac{\Phi_p}{[\sqrt{2(1+\Phi_p)}-1]^2} < \delta. \quad (49'')$$

Zauważmy teraz, że

$$\frac{\Phi_p}{[\sqrt{2(1+\Phi_p)}+1]^2} < \frac{3\Phi_p}{1+2\Phi_p},$$

o ile jest $-2(2+\Phi_p) < 3\sqrt{2(1+\Phi_p)}$, a to zachodzi w całym rozpatrywanym przedziale wartości zmiennej Φ_p . Analogicznie

$$\frac{3\Phi_p}{1+2\Phi_p} < \frac{\Phi_p}{[\sqrt{2(1+\Phi_p)}-1]^2},$$

jeżeli $-\frac{1}{2} < \Phi_p < 1$, co również jest spełnione dla wszelkich wartości Φ_p wg definicji tego symbolu (49).

Wymagania (49') oraz (49'') muszą być jednocześnie zachowane. Z bezpośrednio poprzedzających uwag wynika, że zachodzi to dla wartości δ leżących w przedziale

$$\delta < \frac{\Phi_p}{[\sqrt{2(1+\Phi_p)}+1]^2}. \quad (50)$$

Rozpatrzmy teraz, kiedy jest $k > 1$? Zakładamy przy tym, że warunek (50) jest spełniony. Dodatkowo otrzymujemy wymaganie, by było

$$\left. \begin{aligned} \Phi_l &< \frac{\delta}{[\sqrt{2(1-\delta)}-1]^2}, \\ \text{gdzie } \Phi_l &= \frac{-V_m}{V_\infty}(1-\theta), \quad \text{przy czym jest } 0 < \Phi_l < \Phi_p < 1. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Wykonując przekształcenia analogiczne jak poprzednio dochodzimy najpierw do postaci

$$3\Phi_l - \delta(1+2\Phi_l) < 2\Phi_l\sqrt{2(1-\delta)}.$$

Wymaganie to jest spełnione, jeżeli lewa strona reprezentuje wartość ujemną lub zero; zachodzi to dla

$$\frac{3\Phi_l}{1+2\Phi_l} < \delta. \quad (51')$$

Oprócz powyższego istnieją jeszcze inne przypadki spełnienia nierówności (51), które wyznaczymy z zależności otrzymanej w toku dalszych przekształceń, a mianowicie

$$(1+2\Phi_l)^2\delta^2 - 2\Phi_l(3+2\Phi_l)\delta + (\Phi_l)^2 < 0.$$

Spełnia się ona w przedziale wartości

$$\frac{\Phi_l}{[\sqrt{2(1+\Phi_l)}+1]^2} < \delta < \frac{\Phi_l}{[\sqrt{2(1+\Phi_l)}-1]^2}. \quad (51'')$$

Stwierdzamy obecnie, iż

$$\frac{\Phi_l}{[\sqrt{2(1+\Phi_l)}+1]^2} < \frac{3\Phi_l}{1+2\Phi_l},$$

jeżeli jest $-2(2+\Phi_l) < 3\sqrt{2(1+\Phi_l)}$, co spełnia się dla wszelkich wartości zmiennej Φ_l w rozpatrywanym przedziale. Podobnie

$$\frac{3\Phi_l}{1+2\Phi_l} < \frac{\Phi_l}{[\sqrt{2(1+\Phi_l)}-1]^2},$$

gdy $-\frac{1}{2} < \Phi_l < 1$, co także jest zachowane w całym przyjętym zakresie wartości Φ_l .

Z przytoczonych rozważań widać, że nierówność (51) jest słuszna z chwilą, gdy spełnimy choćby jeden z warunków (51') lub (51''). Można je połączyć w jedno wypadkowe wymaganie dzięki wykazanemu związkowi

$$\frac{\Phi_l}{[\sqrt{2(1+\Phi_l)}+1]^2} < \frac{3\Phi_l}{1+2\Phi_l} < \frac{\Phi_l}{[\sqrt{2(1+\Phi_l)}-1]^2}.$$

Jako odpowiednik nierówności (51) otrzymujemy zatem

$$\frac{\Phi_l}{[\sqrt{2(1+\Phi_l)} + 1]^2} < \delta. \quad (52)$$

Pamiętamy jednak, że dla pełnej realności obliczonych rozwiązań musi być również spełniona zależność (50). Ostateczne wymaganie dotyczące danych wyjściowych do obliczeń ma wobec tego postać

$$\left. \begin{aligned} F(\Phi_l) < \delta < F(\Phi_p), \\ \text{gdzie oznaczono } F(\Phi) &= \frac{\Phi}{[\sqrt{2(1+\Phi)} + 1]^2}, \\ \text{natomiast } \Phi_l &= \frac{-V_m}{V_\infty}(1-\theta), \quad \Phi_p = \frac{-V_m}{V_\infty} < +1. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

W celu ułatwienia praktycznego stosowania wyprowadzonej nierówności, wartości funkcji $F(\Phi)$ zostały przedstawione w tablicy 5.

Tablica 5

 Wartości funkcji $F(\Phi)$ wg wzoru (53)

Φ	$F(\Phi)$	Φ	$F(\Phi)$
$1 \cdot 10^{-4}$	$1,7156 \cdot 10^{-5}$	$2,0 \cdot 10^{-1}$	$3,0777 \cdot 10^{-2}$
$2 \cdot 10^{-4}$	$3,4311 \cdot 10^{-5}$	$2,2 \cdot 10^{-1}$	$3,3516 \cdot 10^{-2}$
$5 \cdot 10^{-4}$	$8,5761 \cdot 10^{-5}$	$2,4 \cdot 10^{-1}$	$3,6201 \cdot 10^{-2}$
$1 \cdot 10^{-3}$	$1,7147 \cdot 10^{-4}$	$2,6 \cdot 10^{-1}$	$3,8836 \cdot 10^{-2}$
$2 \cdot 10^{-3}$	$3,4274 \cdot 10^{-4}$	$2,8 \cdot 10^{-1}$	$4,1420 \cdot 10^{-2}$
$5 \cdot 10^{-3}$	$8,5536 \cdot 10^{-4}$	$3,0 \cdot 10^{-1}$	$4,3957 \cdot 10^{-2}$
$1 \cdot 10^{-2}$	$1,7057 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-1}$	$4,6447 \cdot 10^{-2}$
$2 \cdot 10^{-2}$	$3,3918 \cdot 10^{-3}$	$3,4 \cdot 10^{-1}$	$4,8892 \cdot 10^{-2}$
$3 \cdot 10^{-2}$	$5,0586 \cdot 10^{-3}$	$3,6 \cdot 10^{-1}$	$5,1293 \cdot 10^{-2}$
$4 \cdot 10^{-2}$	$6,7064 \cdot 10^{-3}$	$3,8 \cdot 10^{-1}$	$5,3652 \cdot 10^{-2}$
$5 \cdot 10^{-2}$	$8,3357 \cdot 10^{-3}$	$4,0 \cdot 10^{-1}$	$5,5970 \cdot 10^{-2}$
$6 \cdot 10^{-2}$	$9,9469 \cdot 10^{-3}$	$4,5 \cdot 10^{-1}$	$6,1594 \cdot 10^{-2}$
$7 \cdot 10^{-2}$	$1,1540 \cdot 10^{-2}$	$5,0 \cdot 10^{-1}$	$6,6987 \cdot 10^{-2}$
$8 \cdot 10^{-2}$	$1,3116 \cdot 10^{-2}$	$6,0 \cdot 10^{-1}$	$7,7144 \cdot 10^{-2}$
$9 \cdot 10^{-2}$	$1,4675 \cdot 10^{-2}$	$7,0 \cdot 10^{-1}$	$8,6550 \cdot 10^{-2}$
$1,0 \cdot 10^{-1}$	$1,6217 \cdot 10^{-2}$	$8,0 \cdot 10^{-1}$	$9,5298 \cdot 10^{-2}$
$1,2 \cdot 10^{-1}$	$1,9251 \cdot 10^{-2}$	$9,0 \cdot 10^{-1}$	$1,0346 \cdot 10^{-1}$
$1,4 \cdot 10^{-1}$	$2,2222 \cdot 10^{-2}$		
$1,6 \cdot 10^{-1}$	$2,5132 \cdot 10^{-2}$		
$1,8 \cdot 10^{-1}$	$2,7983 \cdot 10^{-2}$		

Przechodząc do innych zagadnień wyznaczmy położenie punktu V_e w obrębie zakresu. Z zależności (17), (44) i (45) wynika

$$V_e/V_m = \sqrt{2(1-\delta)} - 1. \quad (54)$$

Miejsce punktu V_0 znajdujemy na podstawie wzorów (16), (44) i (45)

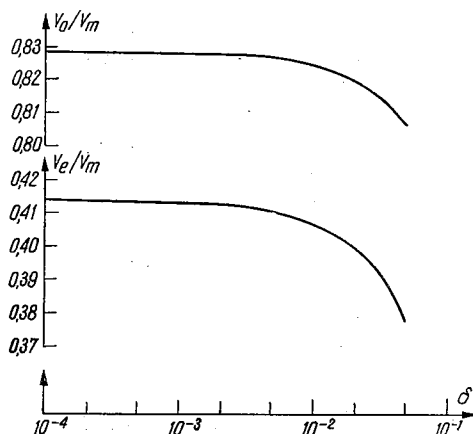
$$V_0/V_m = 2[\sqrt{2(1-\delta)} - 1] + \delta. \quad (55)$$

Liczbową ilustrację położenia obu tych punktów daje tablica 6.

Tablica 6

Położenia punktów V_e oraz V_0 w zależności od uchybu zredukowanego δ

δ	V_e/V_m	V_0/V_m
$1 \cdot 10^{-4}$	$4,1414 \cdot 10^{-1}$	$8,2839 \cdot 10^{-1}$
$2 \cdot 10^{-4}$	$4,1407 \cdot 10^{-1}$	$8,2834 \cdot 10^{-1}$
$5 \cdot 10^{-4}$	$4,1386 \cdot 10^{-1}$	$8,2822 \cdot 10^{-1}$
$1 \cdot 10^{-3}$	$4,1351 \cdot 10^{-1}$	$8,2801 \cdot 10^{-1}$
$2 \cdot 10^{-3}$	$4,1280 \cdot 10^{-1}$	$8,2760 \cdot 10^{-1}$
$3 \cdot 10^{-3}$	$4,1209 \cdot 10^{-1}$	$8,2718 \cdot 10^{-1}$
$4 \cdot 10^{-3}$	$4,1138 \cdot 10^{-1}$	$8,2676 \cdot 10^{-1}$
$5 \cdot 10^{-3}$	$4,1067 \cdot 10^{-1}$	$8,2635 \cdot 10^{-1}$
$6 \cdot 10^{-3}$	$4,0996 \cdot 10^{-1}$	$8,2593 \cdot 10^{-1}$
$7 \cdot 10^{-3}$	$4,0926 \cdot 10^{-1}$	$8,2551 \cdot 10^{-1}$
$8 \cdot 10^{-3}$	$4,0855 \cdot 10^{-1}$	$8,2509 \cdot 10^{-1}$
$9 \cdot 10^{-3}$	$4,0784 \cdot 10^{-1}$	$8,2467 \cdot 10^{-1}$
$1 \cdot 10^{-2}$	$4,0712 \cdot 10^{-1}$	$8,2425 \cdot 10^{-1}$
$1,5 \cdot 10^{-2}$	$4,0357 \cdot 10^{-1}$	$8,2213 \cdot 10^{-1}$
$2 \cdot 10^{-2}$	$4,0000 \cdot 10^{-1}$	$8,2000 \cdot 10^{-1}$
$2,5 \cdot 10^{-2}$	$3,9642 \cdot 10^{-1}$	$8,1785 \cdot 10^{-1}$
$3 \cdot 10^{-2}$	$3,9284 \cdot 10^{-1}$	$8,1568 \cdot 10^{-1}$
$3,5 \cdot 10^{-2}$	$3,8924 \cdot 10^{-1}$	$8,1349 \cdot 10^{-1}$
$4 \cdot 10^{-2}$	$3,8564 \cdot 10^{-1}$	$8,1128 \cdot 10^{-1}$
$4,5 \cdot 10^{-2}$	$3,8203 \cdot 10^{-1}$	$8,0905 \cdot 10^{-1}$
$5 \cdot 10^{-2}$	$3,7840 \cdot 10^{-1}$	$8,0681 \cdot 10^{-1}$



Rys. 11. Położenie punktów V_e oraz V_0 w obrębie zakresu jednostronnego ujemnego

Wyznamy jeszcze graniczny punkt $V_g > 0$ tak, by w przedziale $V_m \leq V \leq V_g$ bezwzględny uchyb przybliżenia nigdzie nie przekroczył wartości odpowiadającej poprzednio założonemu uchybowi zredukowanemu. Korzystamy z wyrażenia V'_g wg wzoru (19) oraz

z zależności (43) i (45), otrzymując w wyniku

$$V_g = -V_m [\sqrt{2(1-\delta)} - 1]^2. \quad (56)$$

Takie zakresy dwustronne, w których jest $V_M \leq V_g$ wg wzoru (56), można sprowadzić do przypadku obecnie rozpatrzanego.

6. ZAKRESY DWUSTRONNE SPROWADZALNE

Zakres pomiaru nazywamy dwustronnym, jeżeli przedział wartości wielkości mierzone V jest określony nierównością $V_m \leq V \leq V_M$, przy czym jest $V_m < 0 < V_M$. Niektóre zakresy dwustronne — zwane „sprowadzalnymi” — mogą być w zasadzie opisane tymi samymi zależnościami, co odpowiednie zakresy jednostronne. Wymaga to tylko niewielkich zmian we właściwych wzorach.

Rozpatrzmy najpierw przypadek $S < 1$, zbadany poprzednio jako zakres jednostronny dodatni. Opierając się na wzorze (38) możemy stwierdzić, że w całym przedziale $V_g \leq V \leq V_M$ maksymalny moduł uchybu bezwzględnego $|\Delta\alpha|_M$ ma taką samą wartość jak dla samego obszaru dodatniego $0 \leq V \leq V_M$. Wynika stąd, że zakres dwustronny, którego prawy skraj stanowi V_M , a lewa granica V_m leży nie niżej wartości V_g , będzie zakresem sprowadzalnym. Biorąc pod uwagę definicję (20) i wzór (38) zapiszemy to wymaganie w postaci

$$-V_M \left[\sqrt{2 \left(1 + \frac{|\Delta\alpha|_M}{\alpha_M} \right)} - 1 \right]^2 \leq V_m.$$

Rozpiętość zakresu dwustronnego, wyrażoną w odchyleniach lub w jednostkach wielkości mierzonej określają zależności

$$\alpha_z = \alpha_M - \alpha_m \quad \text{lub} \quad V_z = V_M - V_m. \quad (57)$$

Po wprowadzeniu symbolu V_z poprzednia nierówność wyraża się jako

$$\frac{V_z}{V_M} \leq 2 \left[2 + \frac{|\Delta\alpha|_M}{\alpha_M} - \sqrt{2 \left(1 + \frac{|\Delta\alpha|_M}{\alpha_M} \right)} \right].$$

Maksymalny moduł uchybu bezwzględnego $|\Delta\alpha|_M$ można wyrazić za pomocą uchybu zredukowanego zakresu dwustronnego δ' oraz ponownie w oparciu o uchyb zredukowany δ samej tylko części dodatniej: $|\Delta\alpha|_M = \delta\alpha_M = \delta'\alpha_z$. Przy uwzględnieniu związku (9) otrzymujemy więc następujące wzory:

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \delta' \frac{\alpha_z}{\alpha_M} = \delta' \frac{V_z}{V_M}, \\ \delta' &= \delta \frac{\alpha_M}{\alpha_z} = \delta \frac{V_M}{V_z}. \end{aligned} \right\} \quad (58')$$

W związku z tym rozpatrywaną nierówność możemy przedstawić jako

$$\frac{V_z}{V_M} \leq 2 \left[2 + \delta' \frac{V_z}{V_M} - \sqrt{2 \left(1 + \delta' \frac{V_z}{V_M} \right)} \right].$$

Dążąc do rozdzielenia obu zmiennych, otrzymujemy przede wszystkim wyrażenie

$$4 - \frac{V_z}{V_M} (1 - 2\delta') \geq 2 \sqrt{2 \left(1 + \delta' \frac{V_z}{V_M} \right)}.$$

Zagadnienie nasze będzie rozwiązywalne, o ile $\frac{V_z}{V_M} < \frac{4}{1 - 2\delta'}$. Dalsze przekształcenia prowadzą do postaci

$$(1 - 2\delta')^2 \left(\frac{V_z}{V_M} \right)^2 - 8(1 - \delta') \frac{V_z}{V_M} + 8 \geq 0,$$

która jest spełniona w przedziałach

$$\frac{V_z}{V_M} \leq 2 \frac{2(1 - \delta') - \sqrt{2 - 4(\delta')^2}}{(1 - 2\delta')^2}$$

oraz

$$2 \frac{2(1 - \delta') + \sqrt{2 - 4(\delta')^2}}{(1 - 2\delta')^2} \leq \frac{V_z}{V_M}.$$

Drugi z obliczonych przedziałów jest nierealny w świetle poprzednio ustalonego warunku rozwiązalności. Czytelność otrzymanej odpowiedzi możemy powiększyć nadając jej formę

$$\frac{V_M}{V_z} \geq \frac{1}{4} [2(1 - \delta') + \sqrt{2 - 4(\delta')^2}] = \left(\frac{V_M}{V_z} \right)_{gr} \quad \text{przy } S < 1. \quad (59')$$

Wyprowadzona zależność stanowi kryterium sprowadzalności zakresu dwustronnego typu $S < 1$, czyli o przewodze obszaru dodatniego.

Wartości $(V_M/V_z)_{gr}$ wg wzoru (59') są przedstawione w tablicy 7.

Obecnie zajmijmy się przypadkiem $S > 1$ rozpatrzonym poprzednio przy badaniu zakresu jednostronnego ujemnego. Na podstawie wzoru (56) możemy stwierdzić, że w całym obszarze $V_m \leq V \leq V_g$ maksymalny moduł uchybu bezwzględnego $|\Delta\alpha|_M$ ma taką samą wartość jak dla obszaru ujemnego $V_m \leq V \leq 0$. Wynika stąd, że zakres dwustronny, którego lewy skraj stanowi V_m , a prawa granica V_M leży nie wyżej wartości V_g , będzie zakresem sprowadzalnym. Biorąc pod uwagę definicję (20) i wzór (56) zapiszemy to wymaganie w postaci

$$V_M \leq -V_m \left[\sqrt{2 \left(1 - \frac{|\Delta\alpha|_M}{\alpha_m} \right)} - 1 \right]^2.$$

Po wprowadzeniu rozpiętości zakresu pomiaru V_z wg (57) nierówność powyższa wyrazi się jako

$$\frac{V_z}{-V_m} \leq 2 \left[2 - \frac{|\Delta\alpha|_M}{-\alpha_m} - \sqrt{2 \left(1 - \frac{|\Delta\alpha|_M}{-\alpha_m} \right)} \right].$$

Maksymalny moduł uchybu bezwzględnego można wyrazić zarówno w zależności od uchybu zredukowanego δ' zakresu dwustronnego, jak i za pomocą uchybu zredukowanego δ dla samego obszaru ujemnego: $|\Delta\alpha|_M = \delta(-\alpha_m) = \delta'\alpha_z$. Uwzględniając związek (9) otrzymujemy zależności

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \delta' \frac{\alpha_z}{-\alpha_m} = \delta' \frac{V_z}{-V_m}, \\ \delta' &= \delta \frac{-\alpha_m}{\alpha_z} = \delta \frac{-V_m}{V_z}. \end{aligned} \right\} \quad (58'')$$

W związku z tym rozpatrywaną nierówność przedstawimy jako

$$\frac{V_z}{-V_m} \leq 2 \left[2 - \delta' \frac{V_z}{-V_m} - \sqrt{2 \left(1 - \delta' \frac{V_z}{-V_m} \right)} \right].$$

Dążąc do rozdzielenia obu zmiennych otrzymujemy w pierwszej kolejności wyrażenie

$$4 - \frac{V_z}{-V_m} (1 + 2\delta') \geq 2 \sqrt{2 \left(1 - \delta' \frac{V_z}{-V_m} \right)}.$$

Badane zagadnienie jest rozwiązywalne, jeżeli $\frac{V_z}{-V_m} < \frac{4}{1 + 2\delta'}$. W wyniku dalszych przekształceń rozpatrywana nierówność przybiera formę

$$(1 + 2\delta')^2 \left(\frac{V_z}{-V_m} \right)^2 - 8(1 + \delta') \frac{V_z}{-V_m} + 8 \geq 0,$$

k która jest spełniona w dwu przedziałach, a mianowicie

$$\frac{V_z}{-V_m} \leq 2 \frac{2(1 + \delta') - \sqrt{2 - 4(\delta')^2}}{(1 + 2\delta')^2}$$

oraz

$$2 \frac{2(1 + \delta') + \sqrt{2 - 4(\delta')^2}}{(1 + 2\delta')^2} \leq \frac{V_z}{-V_m}.$$

Poprzednio ustalony warunek rozwiązalności tego zagadnienia wskazuje, że drugi z tych przedziałów jest nierealny, gdyż nigdy nie stosuje się $\delta' > \frac{1}{2}$. Właściwą odpowiedź można przedstawić w formie bardziej czytelnej jako

$$\frac{-V_m}{V_z} \geq \frac{1}{4} [2(1 + \delta') + \sqrt{2 - 4(\delta')^2}].$$

Lewą stronę tej nierówności przekształcimy dalej, dążąc do nadania jej postaci analogicznej do lewej strony zależności (59'), co umożliwi lepsze porównanie obydwu warunków. W tym celu posługujemy się związkiem (57), z którego wynika

$$\frac{-V_m}{V_z} = 1 - \frac{V_M}{V_z}.$$

Po podstawieniu otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{V_M}{V_z} \leq \frac{1}{4} [2(1 - \delta') - \sqrt{2 - 4(\delta')^2}] = \left(\frac{V_M}{V_z} \right)_{gr} \quad \text{przy } S > 1. \quad (59'')$$

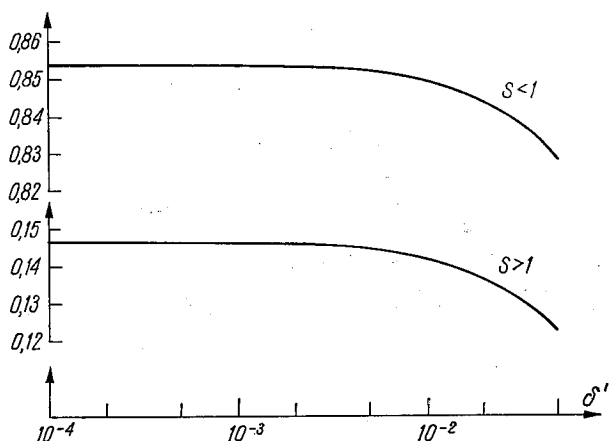
Jest to kryterium sprawdzalności zakresu dwustronnego typu $S > 1$, czyli o przewodze obszaru ujemnego.

Wartości $(V_M/V_z)_{gr}$ wg wzoru (59'') są przedstawione w tablicy 7.

Tablica 7

Wartości stosunku $(V_M/V_z)_{gr}$ w zależności od uchybu zredukowanego δ'

δ'	$(V_M/V_z)_{gr}$	
	przy $S < 1$	przy $S > 1$
$1 \cdot 10^{-4}$	$8,5350 \cdot 10^{-1}$	$1,4640 \cdot 10^{-1}$
$2 \cdot 10^{-4}$	$8,5345 \cdot 10^{-1}$	$1,4635 \cdot 10^{-1}$
$5 \cdot 10^{-4}$	$8,5330 \cdot 10^{-1}$	$1,4620 \cdot 10^{-1}$
$1 \cdot 10^{-3}$	$8,5305 \cdot 10^{-1}$	$1,4595 \cdot 10^{-1}$
$2 \cdot 10^{-3}$	$8,5255 \cdot 10^{-1}$	$1,4545 \cdot 10^{-1}$
$3 \cdot 10^{-3}$	$8,5205 \cdot 10^{-1}$	$1,4495 \cdot 10^{-1}$
$4 \cdot 10^{-3}$	$8,5155 \cdot 10^{-1}$	$1,4445 \cdot 10^{-1}$
$5 \cdot 10^{-3}$	$8,5104 \cdot 10^{-1}$	$1,4396 \cdot 10^{-1}$
$6 \cdot 10^{-3}$	$8,5054 \cdot 10^{-1}$	$1,4346 \cdot 10^{-1}$
$7 \cdot 10^{-3}$	$8,5004 \cdot 10^{-1}$	$1,4296 \cdot 10^{-1}$
$8 \cdot 10^{-3}$	$8,4953 \cdot 10^{-1}$	$1,4247 \cdot 10^{-1}$
$9 \cdot 10^{-3}$	$8,4902 \cdot 10^{-1}$	$1,4198 \cdot 10^{-1}$
$1 \cdot 10^{-2}$	$8,4852 \cdot 10^{-1}$	$1,4148 \cdot 10^{-1}$
$1,5 \cdot 10^{-2}$	$8,4597 \cdot 10^{-1}$	$1,3903 \cdot 10^{-1}$
$2 \cdot 10^{-2}$	$8,4341 \cdot 10^{-1}$	$1,3659 \cdot 10^{-1}$
$2,5 \cdot 10^{-2}$	$8,4083 \cdot 10^{-1}$	$1,3417 \cdot 10^{-1}$
$3 \cdot 10^{-2}$	$8,3824 \cdot 10^{-1}$	$1,3176 \cdot 10^{-1}$
$3,5 \cdot 10^{-2}$	$8,3562 \cdot 10^{-1}$	$1,2938 \cdot 10^{-1}$
$4 \cdot 10^{-2}$	$8,3299 \cdot 10^{-1}$	$1,2701 \cdot 10^{-1}$
$4,5 \cdot 10^{-2}$	$8,3034 \cdot 10^{-1}$	$1,2466 \cdot 10^{-1}$
$5 \cdot 10^{-2}$	$8,2767 \cdot 10^{-1}$	$1,2233 \cdot 10^{-1}$



Rys. 12. Granice sprowadzalności zakresów dwustronnych

Omówimy teraz metodykę obliczeń właściwą dla zakresów dwustronnych sprowadzalnych. Przyjmujemy, że znane są wartości V_m , V_M , V_∞ , θ , α_m , α_M oraz δ' . Obliczamy rozpiętość zakresu V_z wg wzoru (57), a następnie sprawdzamy warunki sprowadzalności (59') oraz (59'').

W przypadku gdy spełnione jest kryterium (59'), rozpatrywany zakres dwustronny sprowadzamy do jednostronnego dodatniego. Uchyb zredukowany δ dla zakresu jednostronnego znajdujemy z zależności (58'), po czym sprawdzamy warunek realności rozwiązania (35). Szukane wartości współczynników k , V_c oraz α_∞ wyznaczamy następnie ze wzorów (28), (29) i (30).

Przy spełnionym kryterium (59'') badany zakres dwustronny sprowadzimy do jednostronnego ujemnego. Przede wszystkim obliczamy uchyb zredukowany δ dla zakresu jednostronnego według związku (58''), a następnie kontrolujemy realność rozwiązania za pomocą warunku (53). Szukane odpowiedzi k , V_c oraz α_∞ znajdujemy teraz z zależności (46), (47) i (48).

Przedstawiony powyżej tok rozważań dowodzi, że i w obecnym przypadku uzyskane rozwiązanie charakteryzuje się najlepszym możliwym rozkładem uchybu bezwzględnego.

7. ZAKRESY DWUSTRONNE NIESPROWADZALNE

Poprzednie rozważania, zawarte w rozdziałach 4, 5 i 6 niniejszego opracowania, wyczerpały wszystkie typy zakresów pomiarowych, w których decydującą rolę odgrywa moduł ekstremalnego uchybu ujemnego $\Delta\alpha_e$ wg wzoru (18). Do rozpatrzenia pozostają więc takie przypadki, w których rozwiązanie jest uwarunkowane skrajnymi wartościami uchybów dodatnich. Występują one, jak to wynika z analizy przedstawionej w rozdz. 3, na krańcach przedziału pomiarowego. Stosownie do tego przyjmujemy, że uchyb bezwzględny dla $V = V_m < 0$ ma być taki sam, jak dla $V = V_M > 0$, co prowadzi do zależności

$$-\frac{\alpha_\infty}{V_c} \frac{V_m \left[V_m - \frac{kV_\infty}{k-\theta} (1-S^2) \right]}{V_m - \frac{kV_\infty}{k-\theta}} = -\frac{\alpha_\infty}{V_c} \frac{V_M \left[V_M - \frac{kV_\infty}{k-\theta} (1-S^2) \right]}{V_M - \frac{kV_\infty}{k-\theta}}.$$

Wyznaczamy stąd wyrażenie S^2 jako

$$S^2 = \frac{\left(\frac{kV_\infty}{k-\theta} - V_m \right) \left(\frac{kV_\infty}{k-\theta} - V_M \right)}{\left(\frac{kV_\infty}{k-\theta} \right)^2}. \quad (60)$$

Opierając się na powyższej wartości obliczamy następnie uchyb bezwzględny $\Delta\alpha_M$ (dodatni), występujący na górnym krańcu V_M zakresu pomiarowego. Wzór (15) daje tutaj wynik

$$\Delta\alpha_M = \frac{\alpha_\infty}{V_c} \frac{-V_m V_M}{\frac{kV_\infty}{k-\theta}}. \quad (61)$$

Zależności (9) i (57) pozwalają wyrazić rozpiętość zakresu odchyłen miernika α_z w postaci

$$\alpha_z = \frac{\alpha_\infty}{V_c} (V_M - V_m) = \frac{\alpha_\infty}{V_c} V_z. \quad (62)$$

Uchyb zredukowany δ rozpatrywanego zakresu znajdziemy na podstawie definicji (20) oraz wzorów (61) i (62), gdyż obecnie jest $|\Delta\alpha|_M = \Delta\alpha_M$. W ten sposób otrzymujemy wyrażenie

$$\delta = \frac{k-\theta}{kV_\infty} \frac{-V_m V_M}{V_M - V_m} = \frac{k-\theta}{kV_\infty} \frac{-V_m V_M}{V_z},$$

które pozwala następnie wyznaczyć wartość

$$\frac{kV_\infty}{k-\theta} = \frac{1}{\delta} \frac{-V_m V_M}{V_z}. \quad (63)$$

Podstawienie tej zależności do wzoru (60) daje

$$S^2 = \left(1 - \delta \frac{V_z}{-V_m}\right) \left(1 + \delta \frac{V_z}{V_M}\right). \quad (64)$$

Otrzymana odpowiedź musi być dodatnia, co zachodzi dla $\delta < 1 - \frac{V_M}{V_z}$. Wymaganie to jest łatwe do spełnienia, gdyż staramy się stosować możliwie małe wartości uchybu zredukowanego, a z drugiej strony w rozpatrywanym typie zakresu zawsze V_M jest wyraźnie mniejsze od V_z .

Wyrażenie (63) umożliwia obliczenie szukanego współczynnika k . Po dokonaniu odpowiednich przekształceń otrzymujemy wzór

$$k = \theta \frac{\frac{V_M}{V_\infty} \left(1 - \frac{V_M}{V_z}\right)}{\frac{V_M}{V_\infty} \left(1 - \frac{V_M}{V_z}\right) - \delta}. \quad (65)$$

Współczynnik V_c znajdujemy na podstawie definicji (14) oraz związku (64):

$$V_c = V_z \frac{\left(\frac{V_M}{V_z} + \delta\right) \left[1 - \left(\frac{V_M}{V_z} + \delta\right)\right]}{\frac{V_M}{V_\infty} \left(1 - \frac{V_M}{V_z}\right) - \delta}. \quad (66)$$

Wartość α_∞ wyznaczamy posługując się poprzednio wyprowadzonymi wzorami (62) oraz (66), które dają w wyniku

$$\alpha_\infty = \alpha_z \frac{\left(\frac{V_M}{V_z} + \delta\right) \left[1 - \left(\frac{V_M}{V_z} + \delta\right)\right]}{\frac{V_M}{V_\infty} \left(1 - \frac{V_M}{V_z}\right) - \delta}. \quad (67)$$

Zbadamy teraz realność otrzymanych wyżej rozwiązań. Z przyjętych założeń $V_m < 0 < V_M < V_\infty$ wynika, że o realności obliczonej wartości k decyduje mianownik wyrażenia (65), który powinien być dodatni. Stan taki zachodzi, jeżeli

$$\delta < \frac{V_M}{V_\infty} \left(1 - \frac{V_M}{V_z}\right). \quad (68')$$

Praktycznie daje się jednak zrealizować tylko $k > 1$, co prowadzi do wymagania

$$(1-\theta) \frac{V_M}{V_\infty} \left(1 - \frac{V_M}{V_z}\right) < \delta. \quad (68'')$$

Powyższe nierówności (68') oraz (68'') można połączyć w jeden wspólny warunek praktycznej rozwiązalności zadania o postaci

$$(1-\theta) \frac{V_M}{V_\infty} \left(1 - \frac{V_M}{V_z}\right) < \delta < \frac{V_M}{V_\infty} \left(1 - \frac{V_M}{V_z}\right). \quad (69)$$

Przypomnijmy tutaj, że zgodnie z rozważaniami w rozdziałach 2 i 3 niniejszego artykułu jest $0 < \theta \leq 1$. Zauważymy również, iż wymaganie (68') jest ostrzejsze od warunku ustalonego w dyskusji zależności (64), bowiem $V_M/V_\infty < 1$.

Wartości mianowników we wzorach (66) oraz (67) są dodatnie wobec konieczności spełnienia warunku (68'). Rozpatrywane odpowiedzi będą realne, o ile wyrażenie stojące w liczniku również będzie dodatnie. Wobec przyjętych założeń prowadzi to do żądania $\delta < 1 - \frac{V_M}{V_z}$, znanego już z dyskusji wzoru (64).

Jak się zatem okazuje, warunek (69) określa realność całego zespołu odpowiedzi k , V_c oraz α_∞ .

Określimy obecnie położenie punktu o zerowym uchybie bezwzględnym w obrębie zakresu pomiaru. Na podstawie zależności (16), (63) i (64) po wykonaniu przekształceń dostajemy wzór

$$\frac{V_0}{V_z} = 2 \frac{V_M}{V_z} - (1-\delta). \quad (70)$$

Punkt ten leży w obrębie zakresu pomiarowego, gdy $\delta \leq 1 - \frac{V_M}{V_z}$, co jest zagwarantowane przy spełnieniu warunku (69).

W rozdz. 3 niniejszego artykułu zbadaliśmy bezwzględny uchyb przybliżenia. Okazało się przy tym, że kształt funkcji $\Delta\alpha = f(\alpha)$ zależy od wartości współczynnika S zdefiniowanego wzorem (14). Zakres jednostronny dodatni oraz zakresy dwustronne dające się sprowadzić do tego przypadku mają typ omawianego przebiegu odpowiadający $S < 1$. Zakres jednostronny ujemny i wszystkie zakresy dwustronne sprowadzalne do niego charakteryzują się natomiast kształtem odpowiadającym $S > 1$. Zbadajmy teraz to samo zagadnienie w odniesieniu do zakresów dwustronnych niesprowadzalnych. Rozpatrzenie przekształconego odpowiednio wzoru (64) prowadzi do następujących wniosków:

$$\text{dla } V_M/V_z \leq \frac{1}{2}(1-\delta) \quad \text{jest } S \geq 1,$$

$$\text{dla } \frac{1}{2}(1-\delta) \leq V_M/V_z \quad \text{jest } S \leq 1.$$

Biorąc pod uwagę odpowiednie kryteria sprowadzalności (59') i (59'') możemy napisać ostatecznie:

$$\left. \begin{aligned} S \leq 1 \text{ zachodzi w przedziale} \\ \frac{1}{2}(1-\delta) \leq \frac{V_M}{V_z} < \frac{1}{4}[2(1-\delta) + \sqrt{2-4\delta^2}], \\ S \geq 1 \text{ zachodzi w przedziale} \\ \frac{1}{4}[2(1-\delta) - \sqrt{2-4\delta^2}] < \frac{V_M}{V_z} \leq \frac{1}{2}(1-\delta). \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

8. OBLICZENIE WSPÓŁCZYNNIKÓW CHARAKTERYSTYKI PRZETWORNIKA

Charakterystyka pomiarowa przetwornika czasami jest znana nie w postaci analitycznej (wzór), lecz jako tablica wartości funkcji $R_v = f(V)$. Z teorii działania danego typu przetwornika wiadomo dodatkowo, że omawiana zależność jest dokładnie lub w przybliżeniu hiperboliczna. Zaprojektowanie układu mostka według poprzednich rozważań wymaga jednak znajomości wartości R , V_∞ oraz θ , występujących we wzorze (4).

Niniejszą część naszych badań poświęcimy zatem wyprowadzeniu wyrażeń umożliwiających obliczenie wartości R , V_∞ oraz θ na podstawie trzech par odpowiadających sobie zmiennych: R_1 oraz V_1 , R_2 oraz V_2 , R_3 oraz V_3 .

Omawiane wzory mogą również znaleźć zastosowanie do aproksymowania — oczywiście w ograniczonym zakresie i z ograniczoną dokładnością — funkcji niehiperbolicznych. Bez sprecyzowania rzeczywiście występującej zależności nie można określić ogólnie uchybu takiej aproksymacji. Jest jasne, że uchyb dla danego typu funkcji będzie tym mniejszy, im węższy zastosujemy przedział aproksymacji. Kształt zależności faktycznej w rozpatrywanym przedziale musi jednak być zbliżony do odpowiedniego odcinka hiperboli.

W celu uproszczenia zapisu poszczególnych wyrażeń wprowadzimy pewne oznaczenia pomocnicze. Pierwszymi z nich będą

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= (R_3 - R_2)(V_3 - V_2), \\ H_2 &= (R_2 - R_1)(V_3 - V_1), \\ H_3 &= (R_3 - R_1)(V_2 - V_1). \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Wartości wyrażeń pomocniczych H_1 , H_2 , H_3 wyrazimy inaczej — podstawiając do definicji (72) wartości R_1 , R_2 , R_3 , wynikające ze wzoru (4). W ten sposób otrzymujemy związki

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= R\theta V_\infty \frac{(V_3 - V_2)^2}{(V_\infty - V_3)(V_\infty - V_2)}, \\ H_2 &= R\theta V_\infty \frac{(V_3 - V_1)(V_2 - V_1)}{(V_\infty - V_2)(V_\infty - V_1)}, \\ H_3 &= R\theta V_\infty \frac{(V_3 - V_1)(V_2 - V_1)}{(V_\infty - V_3)(V_\infty - V_1)}. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Obecnie wprowadzimy dalsze oznaczenia pomocnicze: A , B , C , D , zdefiniowane następująco:

$$\left. \begin{aligned} A &= H_3 - H_2, \\ B &= H_3 V_3 - H_2 V_2, \\ C &= H_3 V_3 R_2 - H_2 V_2 R_3, \\ D &= H_3 H_2 H_1. \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Do powyższych wyrażeń pomocniczych podstawiamy wartości odpowiednich symboli według wzorów (73) i ewentualnie (4), otrzymując

$$\left. \begin{aligned} A &= R\theta V_{\infty} \frac{(V_3 - V_2)(V_3 - V_1)(V_2 - V_1)}{(V_{\infty} - V_3)(V_{\infty} - V_2)(V_{\infty} - V_1)}, \\ B &= R\theta V_{\infty}^2 \frac{(V_3 - V_2)(V_3 - V_1)(V_2 - V_1)}{(V_{\infty} - V_3)(V_{\infty} - V_2)(V_{\infty} - V_1)}, \\ C &= R^2\theta V_{\infty}^2 \frac{(V_3 - V_2)(V_3 - V_1)(V_2 - V_1)}{(V_{\infty} - V_3)(V_{\infty} - V_2)(V_{\infty} - V_1)}, \\ D &= R^3\theta^3 V_{\infty}^3 \frac{(V_3 - V_2)^2(V_3 - V_1)^2(V_2 - V_1)^2}{(V_{\infty} - V_3)^2(V_{\infty} - V_2)^2(V_{\infty} - V_1)^2} \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Analiza prawych stron zespołu zależności (75) wskazuje wyrażnie, że szukane wartości współczynników R , θ oraz V_{∞} w równaniu charakterystyki pomiarowej przetwornika mogą być wyrażone jako

$$V_{\infty} = \frac{B}{A}, \quad R = \frac{C}{B}, \quad \theta = \frac{D}{AC}. \quad (76)$$

Przy praktycznym rozwiązywaniu zagadnienia takiego typu będziemy zatem korzystać ze wzorów (72), (74) i (76).

9. PRZYKŁAD

Ilustrację liczbową przedstawionych rozważań będą stanowiły obliczenia charakterystyki mostka dla technicznego zespołu do pomiaru zasolenia wody. Układ taki jest zasilany prądem przemiennym, można jednak tutaj stosować zależności obowiązujące dla mostków prądu stałego [1], [4]. Pewne zagadnienia specyficzne dla układów prądu przemiennego będą rozpatrzone w osobnej publikacji.

Cały zespół solomierza ma zachowywać dokładność odpowiadającą klasie 5. Przetwornik pomiarowy zaprojektowany i wykonany przez inż. Tadeusza Smogura oraz inż. Piotra Szajka jest zaopatrzone w układ do kompensacji wpływu temperatury, działający z uchybem do $\pm 0,017$ (czyli $\pm 1,7\%$) w całym przedziale stosowanych temperatur medium. Zakładamy, że miernik wyjściowy łącznie z prostownikiem zachowuje dokładność odpowiadającą klasie 2,5, a niedokładność stabilizacji warunków zasilania mostka wnosi dodatkowy uchyb do $\pm 0,020$ (czyli $\pm 2,0\%$). Ostatnią przyczynę niedokładności stanowi niezupełna liniowość podziałki; dopuszczalną wartość określającego ją uchybu zredukowanego znajdziemy z poprzednich danych jako

$$\delta_{dop} = \sqrt{(5,0 \cdot 10^{-2})^2 - (1,7 \cdot 10^{-2})^2 - (2,5 \cdot 10^{-2})^2 - (2,0 \cdot 10^{-2})^2} = 3,7 \cdot 10^{-2},$$

gdyż poszczególne uchyby są od siebie niezależne, wobec czego można je składać na zasadzie sumy kwadratów.

Tablica 8

Charakterystyka pomiarowa przetwornika solomierza

w	0,00	2,00	4,00	6,00	8,00	10,00	12,00	14,00	16,00	18,00	20,00	mg NaCl/litr
R_v	2593	2560	2529	2501	2474	2449	2425	2403	2382	2362	2343	Ω

Charakterystyka pomiarowa omawianego przetwornika została sprawdzona doświadczalnie przy użyciu precyzyjnego mostka prądu przemiennego oraz wzorcowych roztworów wodnych chlorku sodu NaCl. Otrzymane wyniki są zestawione w tablicy 8, gdzie symbolem w oznaczono zasolenie wody, wyrażone w mg NaCl/litr, natomiast R_v oznacza rezystancję przetwornika podaną w omach.

Dążąc do praktycznego wyeliminowania wpływu błędów zaokrągleń na otrzymane rezultaty, wszelkie obliczenia prowadzić będziemy z dokładnością do 6 cyfr znaczących. Zaokrąglanie do 4 znaków zastosujemy dopiero w zapisie wyników końcowych. Ostrożność ta jest niezbędna z uwagi na postać wzorów, którymi będziemy się posługiwać: występują w nich różnice dwu zbliżonych liczb.

9.1. Współczynniki charakterystyki przetwornika

Postać charakterystyki przetwornika, widoczna z tablicy 8, zmusza nas do wprowadzenia wielkości pomocniczej V , proporcjonalnej do zasolenia w . Stosownie do przyjętej postaci związku między tymi wielkościami zależeć będzie nie tylko zakres wartości V , lecz również współczynniki równania $R_v = f(V)$ wg zależności (4). Okoliczności te pozwalają przewidywać duży wpływ wybranego podstawienia na wymagane wartości współczynników charakterystyki mostka — a co za tym idzie — również na osiągalną wartość uchybu.

Powyższe uwagi skłaniają nas do obliczenia wartości współczynników charakterystyki przetwornika dla całego szeregu rozmaicie zdefiniowanych podstawień. Jako dane wyjściowe przyjmujemy za każdym razem te same trzy punkty zależności doświadczalnej, a mianowicie odpowiadające zasoleniom 2, 10, 18 mg NaCl/litr. Dla zilustrowania toku obliczeń wg zależności (72), (74) i (76) wystarczy przytoczyć liczby otrzymane przy badaniu tylko jednego z wybranych podstawień. Wszystkie wyniki końcowe obejmuje natomiast tablica 9.

Podstawienie $V = 20,00 - w$ (zakres $0 \leq V \leq +20$). Dane wyjściowe są tutaj następujące:

V	+2,00	+10,00	+18,00	mg NaCl/litr
R_v	2362	2449	2560	omów

Tok obliczeń:

$$\begin{aligned}
 H_1 &= 0,888000 \cdot 10^3 & \Omega \cdot \text{mg NaCl/litr}, \\
 H_2 &= 1,39200 \cdot 10^3 & \Omega \cdot \text{mg NaCl/litr}, \\
 H_3 &= 1,58400 \cdot 10^3 & \Omega \cdot \text{mg NaCl/litr}, \\
 A &= 0,192000 \cdot 10^3 & \Omega \cdot \text{mg NaCl/litr}, \\
 B &= 14,5920 \cdot 10^3 & \Omega \cdot (\text{mg NaCl/litr})^2, \\
 C &= 34,1907 \cdot 10^6 & \Omega^2 \cdot (\text{mg NaCl/litr})^2, \\
 D &= 1,95798 \cdot 10^9 & \Omega^3 \cdot (\text{mg NaCl/litr})^3.
 \end{aligned}$$

Rezultaty obliczeń:

$$\begin{aligned}
 V_\infty &= 76,00 & \text{mg NaCl/litr}, \\
 R &= 2343 & \Omega, \\
 \theta &= 0,2983
 \end{aligned}$$

T a b l i c a 9

Współczynniki charakterystyki przetwornika

Lp.	Podstawienie	Skraje zakresu		Współczynniki			Uchyb zredukowany		Typ zakresu
		V_m	V_M	R	V_∞	θ	min.	max.	
1	$V = 20,00 - w$	0,00	+ 20,00	2343	76,00	0,2983	$3,6 \cdot 10^{-2}$	$5,4 \cdot 10^{-2}$	jednostronny dodatni $S < 1$
2	$V = 18,00 - w$	- 2,00	+ 18,00	2362	74,00	0,3039	$2,9 \cdot 10^{-2}$	$4,4 \cdot 10^{-2}$	sprowadzalny dodatni $S < 1$
3	$V = 17,00 - w$	- 3,00	+ 17,00	2372	73,00	0,3068	$2,6 \cdot 10^{-2}$	$4,0 \cdot 10^{-2}$	graniczny dodatni $S < 1$
4	$V = 16,00 - w$	- 4,00	+ 16,00	2382	72,00	0,3097	$3,1 \cdot 10^{-2}$	$4,4 \cdot 10^{-2}$	dwustronny niesprowadzalny $S < 1$
5	$V = 14,00 - w$	- 6,00	+ 14,00	2403	70,00	0,3158	$4,1 \cdot 10^{-2}$	$6,0 \cdot 10^{-2}$	dwustronny niesprowadzalny $S < 1$
6	$V = 12,00 - w$	- 8,00	+ 12,00	2425	68,00	0,3221	$4,8 \cdot 10^{-2}$	$7,1 \cdot 10^{-2}$	dwustronny niesprowadzalny $S < 1$
7	$V = 10,00 - w$	- 10,00	+ 10,00	2449	66,00	0,3286	$5,1 \cdot 10^{-2}$	$7,6 \cdot 10^{-2}$	dwustronny niesprowadzalny $S < 1$
8	$V = 8,00 - w$	- 12,00	+ 8,00	2474	64,00	0,3354	$5,0 \cdot 10^{-2}$	$7,5 \cdot 10^{-2}$	dwustronny niesprowadzalny $S > 1$
9	$V = 6,00 - w$	- 14,00	+ 6,00	2501	62,00	0,3425	$4,4 \cdot 10^{-2}$	$6,8 \cdot 10^{-2}$	dwustronny niesprowadzalny $S > 1$
10	$V = 4,00 - w$	- 16,00	+ 4,00	2529	60,00	0,3500	$3,5 \cdot 10^{-2}$	$5,3 \cdot 10^{-2}$	dwustronny niesprowadzalny $S > 1$
11	$V = 2,40 - w$	- 17,60	+ 2,40	2554	58,40	0,3561	$2,6 \cdot 10^{-2}$	$3,9 \cdot 10^{-2}$	graniczny ujemny $S > 1$
12	$V = 2,00 - w$	- 18,00	+ 2,00	2560	58,00	0,3577	$2,8 \cdot 10^{-2}$	$4,1 \cdot 10^{-2}$	sprowadzalny ujemny $S > 1$
13	$V = 0,00 - w$	- 20,00	+ 0,00	2593	56,00	0,3658	$3,4 \cdot 10^{-2}$	$5,0 \cdot 10^{-2}$	jednostronny ujemny $S > 1$

9.2. Osiągalny uchyb zredukowany

Badając poszczególne typy zakresów ustaliliśmy odpowiednie warunki rozwiązalności zadania. Wyprowadzone zależności określają przedział wartości uchybu zredukowanego w funkcji współczynników danych, a mianowicie V_m , V_M , V_∞ oraz θ . Zastosowanie tych związków pokażemy teraz dla kilku różnych podstawień $V = f(w)$.

Podstawienie $V = 20,00 - w$ (zakres $0 \leq V \leq +20,00$).

Jest to zakres jednostronny dodatni o następujących danych: $V_M = 20,00$ mg NaCl/litr, $V_\infty = 76,00$ mg NaCl/litr, $\theta = 0,2983$.

Stosownie do warunku rozwiązalności (35) obliczamy kolejno: $\Phi_g = 0,263$, $\Phi_d = 0,185$, $f(\Phi_g) = 0,054$, $f(\Phi_d) = 0,036$, wobec czego uchyb zredukowany δ ma się mieścić w przedziale $3,6 \cdot 10^{-2} \leq \delta \leq 5,4 \cdot 10^{-2}$.

Podstawienie $V = 18,00 - w$ (zakres $-2,00 \leq V \leq +18,00$).

Stosownie do wymagania (59') jest to zakres dwustronny sprowadzalny typu $S < 1$ dla wszelkich wartości uchybu zredukowanego δ' .

Obecny przypadek charakteryzuje się następującymi danymi: $V_M = 18,00$ mg NaCl/litr, $V_z = 20,00$ mg NaCl/litr, $V_\infty = 74,00$ mg NaCl/litr, $\theta = 0,3039$.

Zgodnie z wymaganiem (35) wyznaczamy wartości: $\Phi_g = 0,243$, $\Phi_d = 0,169$, $f(\Phi_g) = 0,049$, $f(\Phi_d) = 0,032$.

Wynika stąd, że uchyb zredukowany δ dla obszaru dodatniego rozpatrywanego zakresu dwustronnego powinien mieścić się w granicach $3,2 \cdot 10^{-2} \leq \delta \leq 4,9 \cdot 10^{-2}$. Przechodząc do uchybu zredukowanego δ' całego zakresu dwustronnego wg zależności (58') otrzymujemy następujący przedział wartości: $2,9 \cdot 10^{-2} \leq \delta' \leq 4,4 \cdot 10^{-2}$.

Podstawienie $V = 10,00 - w$ (zakres $-10,00 \leq V \leq +10,00$).

Rozpatrywany zakres nie spełnia ani wymagania (59'), ani też (59''), wobec czego jest niesprowadzalny dla wszelkich wartości uchybu.

Wartości danych wyjściowych do obliczeń są teraz następujące:

$V_M = 10,00$ mg NaCl/litr, $V_z = 20,00$ mg NaCl/litr, $V_\infty = 66,00$ mg NaCl/litr, $\theta = 0,3286$. Na podstawie warunku praktycznej rozwiązalności (69) znajdujemy $5,1 \cdot 10^{-2} \leq \delta \leq 7,6 \cdot 10^{-2}$.

Podstawienie $V = 2,00 - w$ (zakres $-18,00 \leq V \leq +2,00$).

Zgodnie z wymaganiem (59'') jest to zakres dwustronny sprowadzalny typu $S > 1$ dla wszelkich wartości uchybu zredukowanego.

Przypadek ten charakteryzuje się poniższymi wartościami danych: $-V_m = 18,00$ mg NaCl/litr, $V_z = 20,00$ mg NaCl/litr, $V_\infty = 58,00$ mg NaCl/litr, $\theta = 0,3577$.

Stosownie do warunku (53) obliczamy kolejno wartości: $\Phi_p = 0,310$, $\Phi_l = 0,199$, $F(\Phi_p) = 0,045$, $F(\Phi_l) = 0,031$.

Uchyb zredukowany δ ujemnej części rozpatrywanego zakresu dwustronnego ma się zatem zawierać w przedziale $3,1 \cdot 10^{-2} \leq \delta \leq 4,5 \cdot 10^{-2}$. Granice uchybu zredukowanego δ' całego zakresu dwustronnego znajdziemy teraz na podstawie związku (58'') jako $2,8 \cdot 10^{-2} \leq \delta' \leq 4,1 \cdot 10^{-2}$.

Podstawienie $V = -w$ (zakres $-20,00 \leq V \leq 0$).

Mamy tutaj jednostronny zakres ujemny o danych: $-V_m = 20,00$ mg NaCl/litr, $V_\infty = 56,00$ mg NaCl/litr, $\theta = 0,3658$.

Korzystamy z warunku praktycznej rozwiązalności (53) i obliczamy $\Phi_p = 0,357$, $\Phi_t = 0,226$, $F(\Phi_p) = 0,051$, $F(\Phi_t) = 0,034$, wobec czego uchyb zredukowany δ ma się znajdować w przedziale $3,4 \cdot 10^{-2} \leq \delta \leq 5,1 \cdot 10^{-2}$.

9.3. Współczynniki charakterystyki mostka

Przegląd wartości zestawionych w tablicy 9 wskazuje, że dopuszczalna wartość uchybu zredukowanego $3,7 \cdot 10^{-2}$ (ustalona na wstępie niniejszego przykładu) może być zrealizowana jedynie dla niektórych podstawień. Pewne typy zakresów pozwalają jednak uzyskać znacznie mniejszy uchyb od założonego. Wartości współczynników charakterystyki mostka w każdym z tych przypadków wypadają inne. Przedstawimy tutaj tok obliczeń dla kilku wybranych podstawień $V = f(w)$, wykonanych przy założeniu, że zakres odchyłeń miernika ma wynosić 40 działek, a uchyb zredukowany (dla całego zakresu) ma być równy $3,7 \cdot 10^{-2}$. W tablicy 10 zestawiono wyniki obliczeń przy czym — dla lepszej orientacji — dodano także rezultaty otrzymane przy nieco zmienionych założeniach co do uchybu zredukowanego.

Z a k r e s $0 \leq V \leq +20,00$.

$V_M = 20,00$ mg NaCl/litr, $V_\infty = 76,00$ mg NaCl/litr, $\theta = 0,2983$, $\alpha_M = 40,00$ dz., $\delta = 3,7 \cdot 10^{-2}$.

Stosujemy wzory (28), (29) i (30). Obliczamy najpierw

$$\frac{V_M}{V_\infty} = 2,63158 \cdot 10^{-1},$$

$$\frac{\delta}{[\sqrt{2(1+\delta)} - 1]^2} = 1,90995 \cdot 10^{-1},$$

$$\left[1 - \frac{\delta}{\sqrt{2(1+\delta)} - 1}\right]^2 = 8,38939 \cdot 10^{-1},$$

$k = 1,088$, $V_c = 232,5$ mg NaCl/litr, $\alpha_\infty = 465,0$ dz.

Inne wielkości charakterystyczne obliczamy ze wzorów (26), (36) oraz (37):

$\alpha_\infty/k = 427,5$ dz., $S = 0,9159$, $V_e = +8,803$ mg NaCl/litr, $V_0 = +16,87$ mg NaCl/litr.

Z a k r e s $-2,00 \leq V \leq +18,00$.

$V_M = 18,00$ mg NaCl/litr, $V_\infty = 74,00$ mg NaCl/litr, $\theta = 0,3039$, $\alpha_M = 36,00$ dz., $\delta' = 3,7 \cdot 10^{-2}$.

Korzystamy teraz ze wzorów (58') oraz (28), (29) i (30).

$$\delta = 4,11111 \cdot 10^{-2}, \quad \frac{V_M}{V_\infty} = 2,43243 \cdot 10^{-1},$$

$$\frac{\delta}{[\sqrt{2(1+\delta)} - 1]^2} = 2,09493 \cdot 10^{-1},$$

$$\left[1 - \frac{\delta}{\sqrt{2(1+\delta)} - 1}\right]^2 = 8,23006 \cdot 10^{-1},$$

$k = 2,190$, $V_c = 438,9$ mg NaCl/litr, $\alpha_\infty = 877,9$ dz.

Tablica 10

Współczynniki charakterystyki mostka ($\alpha_z = \alpha_M - \alpha_m = 40,00$ dz. = const)

Lp.	Skrajy zakresu		Uchyb zred.	Współczynniki				Dane uzupełniające				
	V_m	V_M		k	α_∞	V_c	S	V_e	V_0	α_∞/k		
1	0,00	+ 20,00	$3,7 \cdot 10^{-2}$	1,088	465,0	232,5	0,9159	+ 8,803	+ 16,87	427,5		
2	- 2,00	+ 18,00	$3,7 \cdot 10^{-2}$	2,190	877,9	438,9	0,9072	+ 7,974	+ 15,21	400,8		
3	- 3,00	+ 17,00	$3,7 \cdot 10^{-2}$	5,953	2174	1153	0,9021	+ 7,559	+ 14,38	365,1		
4	- 4,00	+ 16,00	$3,7 \cdot 10^{-2}$	1,849	733,1	366,5	0,9234	+ 6,624	+ 12,74	396,5		
5	- 16,00	+ 4,00	$3,7 \cdot 10^{-2}$	1,143	442,9	221,4	1,063	- 5,458	- 11,26	387,5		
6	- 17,60	+ 2,40	$3,7 \cdot 10^{-2}$	6,515	2630	1315	1,109	- 6,761	- 14,26	403,7		
7	- 18,00	+ 2,00	$3,7 \cdot 10^{-2}$	3,389	1346	673,2	1,107	- 6,927	- 14,59	397,3		
8	- 20,00	0,00	$3,7 \cdot 10^{-2}$	1,176	431,9	216,0	1,095	- 7,756	- 16,25	367,4		
9	- 10,00	+ 10,00	$5,7 \cdot 10^{-2}$	1,327	526,2	263,1	0,9935	+ 0,5721	+ 1,140	396,5		
10	- 3,00	+ 17,00	$3,2 \cdot 10^{-2}$	1,835	730,3	365,2	0,9146	+ 7,490	+ 14,34	398,1		
11	- 17,60	+ 2,40	$3,2 \cdot 10^{-2}$	1,784	700,0	350,0	1,094	- 6,833	- 14,31	392,3		
12	- 3,00	+ 17,00	$2,7 \cdot 10^{-2}$	1,080	441,8	220,9	0,9272	+ 7,420	+ 14,30	409,2		
13	- 17,60	+ 2,40	$2,7 \cdot 10^{-2}$	1,052	401,2	200,6	1,078	- 6,905	- 14,35	381,3		

Inne wielkości charakterystyczne są tu następujące: $\alpha_{\infty}/k = 400,8$ dz., $S = 0,9072$, $V_e = +7,974$ mg NaCl/litr, $V_0 = +15,21$ mg NaCl/litr.

Z a k r e s $-4,00 \leq V \leq +16,00$.

$V_M = 16,00$ mg NaCl/litr, $V_z = 20,00$ mg NaCl/litr, $V_{\infty} = 72,00$ mg NaCl/litr, $\theta = 0,3097$, $\alpha_z = 40,00$ dz., $\delta = 3,7 \cdot 10^{-2}$.

Posługując się wzorami (65), (66) i (67) znajdujemy: $k = 1,849$, $V_c = 366,5$ mg NaCl/litr, $\alpha_{\infty} = 733,1$ dz.

Inne wielkości charakterystyczne wyznaczamy ze wz. (14), (17) i (70): $\alpha_{\infty}/k = 396,5$ dz., $S = 0,9234$, $V_e = +6,624$ mg NaCl/litr, $V_0 = +12,74$ mg NaCl/litr.

Z a k r e s $-18,00 \leq V \leq +2,00$.

$-V_m = 18,00$ mg NaCl/litr, $V_{\infty} = 58,00$ mg NaCl/litr, $\theta = 0,3577$, $-\alpha_m = 36,00$ dz., $\delta' = 3,7 \cdot 10^{-2}$.

Stosujemy obecnie zależności (58'') oraz (46), (47) i (48). Obliczamy kolejno:

$$\delta = 4,11111 \cdot 10^{-2}, \quad \frac{-V_m}{V_{\infty}} = 3,10345 \cdot 10^{-1},$$

$$\frac{\delta}{[\sqrt{2(1-\delta)}-1]^2} = 2,77588 \cdot 10^{-1},$$

$$\left[1 + \frac{\delta}{\sqrt{2(1-\delta)}-1}\right]^2 = 1,22507 \cdot 10^0,$$

$k = 3,389$, $V_c = 673,2$ mg NaCl/litr, $\alpha_{\infty} = 1346$ dz.

Inne wielkości charakterystyczne znajdujemy z zależności (44), (54) i (55), na podstawie których otrzymujemy $\alpha_{\infty}/k = 397,3$ dz., $S = 1,107$, $V_e = -6,927$ mg NaCl/litr, $V_0 = -14,59$ mg NaCl/litr.

Z a k r e s $-20,00 \leq V \leq 0$.

$-V_m = 20,00$ mg NaCl/litr, $V_{\infty} = 56,00$ mg NaCl/litr, $\theta = 0,3658$, $-\alpha_m = 40,00$ dz., $\delta = 3,7 \cdot 10^{-2}$.

Posługujemy się wzorami (46), (47), (48) i wyznaczamy $\frac{-V_m}{V_{\infty}} = 3,57143 \cdot 10^{-1}$,

$$\frac{\delta}{[\sqrt{2(1-\delta)}-1]^2} = 2,46024 \cdot 10^{-1},$$

$$\left[1 + \frac{\delta}{\sqrt{2(1-\delta)}-1}\right]^2 = 1,19992 \cdot 10^0,$$

$k = 1,176$, $V_c = 216,0$ mg NaCl/litr, $\alpha_{\infty} = 431,9$ dz.

Inne wielkości charakterystyczne mają tutaj wartości: $\alpha_{\infty}/k = 367,4$ dz., $S = 1,095$, $V_e = -7,756$ mg NaCl/litr, $V_0 = -16,25$ mg NaCl/litr.

9.4. Wybór rozwiązania

Wyniki obliczeń, zestawione w tablicy 10, wskazują wyraźnie iż istnieje cały szereg różnych rozwiązań czyniących zadość postawionym założeniom. Wybór należy zatem oprzeć na dodatkowych kryteriach.

W pierwszym rzędzie bierzemy pod uwagę wartość współczynnika α_{∞} . Z rozważań nad dobozem elementów mostka [4], [5] wiadomo, iż powiększenie α_{∞} wymaga zastosowania czulszego miernika lub większego prądu bądź napięcia zasilającego układ. Skłania to nas do poszukiwania rozwiązania o niewielkiej wartości tego współczynnika. Spełnienie tego postulatu pociąga za sobą zmniejszenie k , co utrudnia konstrukcję mostka w przypadku, gdy k staje się bliskie 1; z tego względu wartość omawianego parametru nie powinna na ogół być mniejsza od ok. 1,15.

Tablica 11

Charakterystyka pomiarowa wybranego rozwiązania

$\frac{w}{\text{mg NaCl}}$ litr	α_w dz.	α_r dz.	$\Delta\alpha$ dz.
0,00	0,00	0,00	0,00
1,00	— 2,34	— 2,00	—0,34
2,00	— 4,68	— 4,00	—0,68
3,00	— 6,94	— 6,00	—0,94
4,00	— 9,14	— 8,00	—1,14
5,00	—11,30	—10,00	—1,30
6,00	—13,40	—12,00	—1,40
7,00	—15,46	—14,00	—1,46
8,00	—17,47	—16,00	—1,47
9,00	—19,44	—18,00	—1,44
10,00	—21,36	—20,00	—1,36
11,00	—23,24	—22,00	—1,24
12,00	—25,08	—24,00	—1,08
13,00	—26,88	—26,00	—0,88
14,00	—28,65	—28,00	—0,65
15,00	—30,37	—30,00	—0,37
16,00	—32,07	—32,00	—0,07
17,00	—33,72	—34,00	+0,28
18,00	—35,35	—36,00	+0,65
19,00	—36,94	—38,00	+1,06
20,00	—38,50	—40,00	+1,50

U w a g a. Znak odchyień można łatwo uczynić dodatnim przez skrzyżowanie przewodów na zaciskach samego miernika

Rozpatrywany układ jest mostkiem prądu zmiennego, w związku z czym miernik musi być wyposażony w prostownik. W przypadku gdybyśmy wybrali zakres dwustronny będziemy musieli stosować prostowanie fazoczułe, stanowiące komplikację przyrządu w porównaniu do zwykłego prostownika, który możemy użyć dla zakresu jednostronnego. Wzmiankowana komplikacja jest celowa, jeżeli pozwoli to wyraźnie poprawić dokładność całego zespołu pomiarowego.

Analiza poszczególnych uchybów, uwidocznionych w początkowej części niniejszego punktu oraz osiągalnego uchybu zredukowanego (tablica 9) wskazuje, że w naszym przypadku nie da się zbudować całego zespołu w klasie 2,5. Założony uchyb stabilizacji warunków zasilania jest już na tyle duży, że ewentualne jego zwiększenie kosztem zmniejszenia uchybu zredukowanego nie daje wyraźnego ułatwienia w projektowaniu odpowiedniego

stabilizatora. Widać stąd wyraźnie celowość zastosowania zakresu jednostronnego. Ze względu na wartości parametrów k oraz α_∞ decydujemy się przy tym na zakres jednostronny ujemny.

Wybieramy więc rozwiązanie o następujących danych charakterystycznych:

$$\begin{aligned} V &= 0,00 - w, & -20,00 \leq V \leq 0,00, & \delta = 3,7 \cdot 10^{-2}, \\ R &= 2593 \Omega, & V_\infty &= 56,00 \text{ mg NaCl/litr}, & \theta &= 0,3658, \\ \alpha_\infty &= 431,9 \text{ dz}, & V_c &= 216,0 \text{ mg NaCl/litr}, & k &= 1,176, \\ V_e &= -7,756 \text{ mg NaCl/litr}, & V_0 &= -16,25 \text{ mg NaCl/litr}. \end{aligned}$$

Powyższe dane pozwalają obliczyć wskazania prawidłowe α_r oraz wskazania rzeczywiste α_w na podstawie przystosowanych wzorów (9) i (8), które przybierają postać:

$$\alpha_r = -2.000 \cdot w \quad \alpha_w = -\frac{195,0 \cdot w}{81,30 + w}.$$

Wyniki obliczeń wg powyższych zależności dla całego zakresu wartości zasolenia zostały zestawione w tablicy 11.

Zakres odchyłeń wynosi 40 dz., a całkowity uchyb zespołu pomiarowego $5 \cdot 10^{-2}$. Wynika stąd, że uchyb bezwzględny może sięgać ± 2 działek. Przy sporządzaniu definitywnej podziałki miernika należy zatem usunąć wszystkie kreski nieparzyste w dawnym podziale 40 działkowym. Jest to wskazane z tego względu, by nie sugerować użytkownikowi przyrządu mniejszego uchybu pomiaru niż faktycznie występujący.

10. ZAKOŃCZENIE

Rozważania przedstawione w niniejszym opracowaniu pozwalają tak obliczyć współczynniki charakterystyki mostka odchyłowego (k , α_∞ , V_c), by układ współpracujący z przetwornikiem o charakterystyce hiperbolicznej był możliwie korzystny.

Rozpatrzony przykład wskazuje, że należy dążyć do stosowania zakresu sprowadzalnego dodatniego lub ujemnego, gdyż wówczas można osiągnąć najmniejszą wartość uchybu zredukowanego. Postulat niewielkiego obciążenia przetwornika sprowadza się do poszukiwania małej wartości α_∞ . Realizuje się to wybierając uchyb zredukowany o wartości niewiele większej od minimalnie możliwej. Zbytne zbliżenie się do tej granicy powoduje jednak, iż współczynnik k staje się mało większy od 1, co następcza poważne trudności realizacyjne. Obliczenie konkretnych danych elementów mostka przeprowadza się na podstawie wybranych wartości k oraz α_∞ za pomocą metodyki opisanej w [4], [5].

Trzeba tutaj zauważyć, iż możliwe są przypadki, w których osiągalny uchyb zredukowany będzie zbyt duży, by podziałkę miernika dało się wykonać jako proporcjonalną. Obliczenia wg przedstawionej metodyki pozwalają wówczas uzyskać podziałkę maksymalnie zbliżoną do liniowej, co jest wygodne dla użytkownika przyrządu. Jako uboczny wniosek z naszych rozważań wynika obserwacja, że czułość mostka nie określa jednoznacznie wartości uchybu zredukowanego. Widać to wyraźnie z tablicy 10, bowiem iloraz α_∞/k jest miarą czułości w pobliżu stanu równowagi mostka — zgodnie z teorią przedstawioną w [1], [2].

Przedstawione zależności mogą ułatwić projektowanie omawianych układów i jednocześnie przyczynić się do uzyskania lepszych rozwiązań niż dotychczasowe.

WYKAZ LITERATURY

1. Sawicki J.: Właściwości niezrównoważonego mostka Wheatstone'a. — Arch. Elektrotechn., t. X, 1961, z. 1.
2. Sawicki J.: Właściwości odchyłowego mostka Thomsona. — Rozprawy Elektrotechn., t. XI, 1965, z. 1.
3. Sawicki J.: Liniowe przybliżenie charakterystyki mostka odchyłowego. — Arch. Elektrotechn., t. XII, 1963, z. 2.
4. Sawicki J.: Czułość i dobór elementów odchyłowego mostka Wheatstone'a. — Arch. Elektrotechn., t. XIII, 1964, z. 2.
5. Sawicki J.: Czułość i dobór elementów odchyłowego mostka Thomsona. — Rozprawy Elektrotechn., t. XI, 1965, z. 1.

J. SAWICKI

LINEARITY OF CHARACTERISTIC OF BRIDGE WITH UNPROPORTIONAL TRANSDUCER

Summary

Some species rheostatic for measuring nonelectrical quantity shows hyperbolic relation between testing quantity and resistance. The measurement characteristic of deflection bridge [1], [2] is similar. By adequate designing of system there is possibility in some cases to get linear dependence between deflection of meter in the bridge and value of measured quantity (nonelectrical). Problem that was examining in the starting part of the paper.

In that cases when is impossible to obtain ideal proportionality of scale there are consideration of approximation error. Precision of approximation is estimating basing on reduction error—by which we mean the biggest modulus of approximation error relate to measuring range.

Basing on the known:

- characteristic coefficients of transducer,
- limits of measuring range,
- reduction error,

we can define the necessary characteristic coefficients of bridge k and α_∞ . Basing on that value we can design bridge, suitable to the consideration describe in the papers [4], [5].

The form of formulas which define value k and α_∞ in function of starting date is depending from tape of apply range. The paper considered:

- a) positive unilateral range, b) negative unilateral range,
- c) bilateral range which can be reducing to unilateral,
- d) bilateral range nonreducing.

In each case settled suitable term of practical solution of problem.

If the transducer characteristic is knows as a number table form there are additional brought out formulas for computation value of coefficients that characteristic.

The teoretical consideration in the paper are illustrating with the aid of extensive exampl.

J. SAWICKI

PROPORTIONNALITÉ DE L'ÉCHELLE D'UN PONT À DÉVIATION MUNI D'UN ÉLÉMENT SENSIBLE NON-PROPORTIONNEL

Résumé

Certaines sortes des éléments sensibles à résistance se caractérisent par une courbe de graduation hyperbolique, ressemblante à celle d'un pont à déviation, décrite précédemment [1], [2]. La première partie de cet article est consacrée aux cas, où on peut obtenir une échelle résultante, parfaitement proportionnelle.

Ensuite nous avons étudié l'erreur de l'approximation pour les autres cas. L'erreur réduite, dont la définition est semblable à celle de l'erreur de la classe pour les instruments à l'aiguille, nous permet d'évaluer la qualité de l'approximation.

En partant des valeurs suivantes:

- les coefficients de la courbe de graduation pour l'élément sensible,
- les limites de la gamme de mesure,
- l'erreur réduite,

nous avons déduit les formules de calcul des coefficients k et α_∞ de la courbe de graduation du pont. À partir de ces coefficients, en utilisant les méthodes publiées en [4], [5], on peut maintenant calculer tous les éléments du schéma.

Les formules en question dépendent de l'art de la gamme de mesure. Nous avons étudié les types suivants: a) unilatéral positif, b) unilatéral négatif, c) bilatéral réductible à unilatéral, d) bilatéral non réductible. Pour tous ces cas nous avons établi les conditions nécessaires pour que les réponses soient réalisables.

Nous avons établi également les formules de calcul des coefficients de l'élément sensible, utiles si sa courbe est donnée sous la forme d'une table numérique.

Un exemple de calcul démontre comment utiliser de diverses formules.

J. SAWICKI

LINEARISIERUNG DER MESSCHARAKTERISTIK DER UNABGEGLICHENEN BRÜCKE MIT NICHT PROPORTIONELLEN MESSFÜHLER

Zusammenfassung

Verschiedene Widerstandsfühler nichtelektrischen Grössen weisen eine hyperbolische Messcharakteristik auf. Die Messcharakteristik einer unabgeglichenen Brücke besitzt auch eine hyperbolische Gestalt [1, 2]. Es gibt die Fälle, wo der Zusammenhang zwischen den Messwert und der Instrumentablenkung streng linear gemacht werden kann. Die dafür geeignete Berechnungsart ist im Anfangskapitel dargelegt.

Weiter ist der Annäherungsfehler für die Fälle, wo die genaue Linearität unerreichbar ist, untersucht worden. Als Mass der Annäherungsgüte gilt der Wert des reduzierten Fehlers, wobei dieser analogisch wie der Klassenfehler der Messgeräte gemeint ist.

Auf Grund der bekannten Fühlerkoeffiziente, des reduzierten Fehlers und der Messbereichsgrenzwerte können die nötigen Brückenkoeffiziente k und α_∞ bestimmt werden. Die letztgenannten Werte ermöglichen das eigentliche berechnen der Brücke, wobei die entsprechende Methodik nach [4], [5] zur Anwendung kommt.

Die Formeln, die für die Bestimmung der Koeffiziente k und α_∞ gelten, hängen von der Messbereichart ab. Folgende Messbereiche sind hier untersucht worden: a) einseitiger positiver, b) einseitiger negativer, c) beiderseitiger reduzierbar zur einseitigem, d) beiderseitiger nicht reduzierbar. Für alle solche Abarten sind auch entsprechende Lösbarkeitsbedingungen festgestellt.

Zusätzlich sind die Formeln für die Berechnung der Fühlerkoeffiziente aus gegebener Zahlentafel aufgestellt.

Theoretische Erwägungen sind mit einem umfangreichem praktischem Beispiel ergänzt worden.

Е. САВИЦКИ

ЛИНЕЙНОСТЬ ХАРАКТЕРИСТИКИ МОСТА С НЕПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМ ДАТЧИКОМ

Резюме

Некоторые виды датчиков сопротивления, применяемых для измерений неэлектрических величин, обладают гиперболической зависимостью между измеряемой величиной и сопротивлением. Такою же зависимостью отличается характеристика неуравновешенного моста [1], [2]. Проектируя

соответствующим образом систему, в некоторых случаях можно получить строго линейную зависимость между отклонением измерительного прибора в мосте и значением измеряемой неэлектрической величины. Этот вопрос рассмотрен в первой части статьи.

Дальнейшие рассуждения касаются погрешности приближения для тех случаев, когда оказывается невозможным получить идеальную пропорциональность шкалы. Точность приближения оценивается на основании приведенной погрешности, которая понимается как самая большая по модулю погрешность, отнесенная к измерительному диапазону.

На основании известных:

- коэффициентов характеристики датчика,
- пределов измерительного диапазона,
- приведенной погрешности,

можно определить необходимые значения коэффициентов характеристики моста k и α_∞ . Получив эти коэффициенты имеем возможность запроектировать мост, соответственно с ходом рассуждений, представленных в работах [4] и [5].

Формулы определяющие значения k и α_∞ в функции вышеупомянутых исходных данных, дают выражения зависящие от типа диапазона измерений. В статье рассмотрены диапазоны: а) односторонний положительный, б) односторонний отрицательный, в) обустроние приводимые к одностороннему, г) обустроние неприводимые. Для каждого случая выведены соответствующие условия возможности практического решения задачи.

Кроме этого дан вывод формул для расчета значений коэффициентов характеристики датчика, если она задана в форме числовой таблицы.

Приведенные теоретические рассуждения иллюстрируются обширным примером расчета.

JĘDRZEJ BROŻYNA

Współczynnik szumów wzmacniaczy grupowych

Rękopis dostarczono 8.5.1967

W tranzystorowych wzmacniaczach grupowych powstaje problem optymalizacji wzmacniacza pod względem szumów przy jednoczesnym zapewnieniu określonej oporności wejściowej. Stosuje się głównie dwa rozwiązania obwodu wejściowego pokazane na rysunkach 3 i 7. Obliczenie współczynników szumów, dobór optymalnych oporności źródła i polaryzacji oraz parametrów tranzystora dla tych dwu układów stanowi treść niniejszej pracy.

1. WPROWADZENIE

Zasadniczy wpływ na szумы wzmacniacza ma rozwiązanie jego obwodu wejściowego. Minimalny współczynnik szumów można otrzymać obciążając źródło sygnału bezpośrednio wejściem tranzystora, oczywiście przy optymalnie dobranych: impedancji źródła i prądzie emitera. Wprowadzenie dalszych elementów do obwodu źródło-tranzystor (np. sprzężenia zwrotnego) powiększa współczynnik szumów.

We wzmacniaczach grupowych problem polega na optymalizacji wzmacniacza pod względem szumów przy jednoczesnym zapewnieniu określonej oporności wejściowej, stałej w paśmie użytecznym.

Impedancja wejściowa tranzystora silnie zależy od polaryzacji, temperatury i częstotliwości oraz konkretnego egzemplarza. To zmusza konstruktorów do stosowania układów, w których impedancja wejściowa wzmacniacza będzie określona przez elementy biernie, a maksymalne zmiany parametrów tranzystora będą jedynie o kilka procent zmieniać tę impedancję. Powszechnie stosuje się dwa rodzaje tego typu układów wejściowych, a mianowicie układy:

- 1) z „dopasowaniem czynnym” (rys. 3),
- 2) z „dopasowaniem biernym” (rys. 7).

Obliczenie współczynników szumów, dobór optymalnych oporności źródła i polaryzacji oraz parametrów tranzystora dla tych dwóch układów stanowi treść niniejszej pracy.

2. WYBÓR UKŁADU ZASTĘPCZEGO TRANZYSTORA

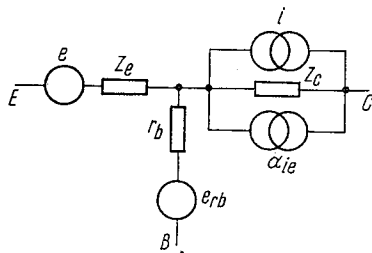
Żeby w odpowiedni sposób wybrać układ zastępczy tranzystora dla reprezentacji szumów, należy przede wszystkim określić zakres interesujących nas częstotliwości.

Wzmacniacze grupowe są wykonywane jako wzmacniacze z silnym ujemnym sprzężeniem zwrotnym. Objęcie sprzężeniem zwrotnym dużej ilości stopni jest niemożliwe ze względu na stabilność układu i dlatego stosuje się w tych wzmacniaczach tranzystory o sto-

sunkowo dużych częstotliwościach granicznych. Można uważać, że pasmo użyteczne wzmacniacza jest tego rzędu co i częstotliwość graniczna f_β . W publikacji firmy Ericsson na podobny temat [1] autor przyjmuje warunek:

$$f_g \leq 5f_\beta.$$

Dolna częstotliwość pasma użytecznego tych wzmacniaczy, zależnie od krotności systemu, wynosi kilkanaście lub kilkadziesiąt kiloherców. Takie zawężenie interesującego nas pasma pozwala przyjąć uproszczony — niskoczęstotliwościowy układ zastępczy tranzystora dla szumów i pominąć efekt szumów o widmie $1/f$.



Rys. 1. Układ zastępczy tranzystora w układzie WB z uwzględnieniem źródeł szumów

Powszechnie stosowanym układem zastępczym własności szumowych tranzystora jest układ van der Ziela [2], podany początkowo dla tranzystorów germanowych. Nowe publikacje [3], [4] wprowadzają pewne zmiany w tym układzie, przystosowując go do tranzystorów krzemowych oraz podają porównanie szumów wyliczonych z tych układów zastępczych z pomiarami. Układ podany przez van der Ziela odnoszący się do stopnia tranzystorowego w układzie W. B. jest pokazany na rys. 1, gdzie:

$$\overline{e_{rb}^2} = 4kTr_b\Delta f \quad (1)$$

reprezentuje szum cieplny związany z opornością bazy,

$$\overline{e^2} = 2kT\Delta f[2(g_e - g_{e0}) + \frac{q}{kT}(I_E + 2I_{EE})]|Z_e|^2, \quad (2)$$

przy czym dla małych częstotliwości można przyjąć zależność uproszczoną:

$$\overline{e^2} \approx \frac{2kT\Delta f}{g_{e0}}. \quad (3)$$

Szum ten na niskich częstotliwościach jest wywoływany głównie zjawiskiem fluktuacji procesu dyfuzji.

Źródło kolektorowe określa zależność (4), I_{eq} wyraża w niej równoważny prąd wyjściowy nasyconej diody (mierzony przy otwartym wejściu):

$$\overline{i^2} = 2qI_{eq}\Delta f. \quad (4)$$

Ze względu na określenie wartości I_{eq} Chenette [5] rozpatruje dwie grupy tranzystorów:

1) Tranzystory, w których generacja par w obszarze bazy jest mała, ale efekt rekombinacji nośników w pułapkach w obszarze emiter-baza nie może być pominięty. Zachodzi to

dla większości tranzystorów krzemowych; w tym przypadku: $\alpha_{dc} \neq \alpha_0$ (α_{dc} — wzmocnienie prądowe dla prądu stałego),

$$I_{eq} = \left(\alpha_{dc} + |\alpha|^2 - 2|\alpha|^2 \frac{\alpha_{dc}}{\alpha_0} \right) I_E; \quad (5)$$

dla małych częstotliwości $\alpha \approx \alpha_0$ oraz przy warunku $\alpha_0 - \alpha_{dc} \ll \alpha_{dc}(1 - \alpha_{dc})$ otrzymamy:

$$I_{eq} \approx \alpha_{dc}(1 - \alpha_{dc})I_E. \quad (6)$$

2) Tranzystory, w których generacja par w obszarze bazy jest znaczna, ale efekt rekombinacji nośników w pułapkach w obszarze emiter-baza może być pominięty. Zachodzi to dla większości tranzystorów germanowych w temperaturze pokojowej przy małych sygnałach:

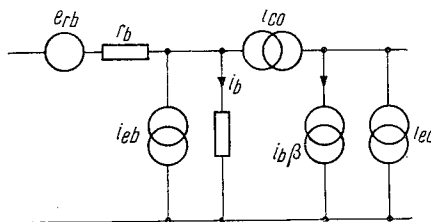
$$I_{eq} = I_c - |\alpha|^2 I_E = (\alpha_0 - |\alpha|^2) I_E + I_{c0}; \quad (7)$$

dla małych częstotliwości można założyć, że $\alpha \approx \alpha_0$:

$$I_{eq} \approx \alpha_0(1 - \alpha_0)I_E + I_{c0}. \quad (8)$$

Dla małych częstotliwości można uważać, że prąd szumów i^2 jest wywoływany głównie zjawiskiem fluktuacji procesu rekombinacji. W wyrażeniu (8) pierwszy składnik odpowiada szumowi rozdziału prądu emitera I_E , a drugi składnik stanowi śrutowy szum prądu nasycenia kolektora I_{c0} (I_c dla $I_E = 0$). Źródła szumów i^2 oraz $\bar{e}^2$ są ze sobą częściowo skorelowane, ale dla dostatecznie małych częstotliwości można je uważać za niezależne.

Obliczenia przeprowadzone w dalszej części tej pracy odnoszą się do tranzystorów drugiej grupy, jednak wszystkie otrzymane zależności można stosować również do tranzystorów grupy pierwszej z tym, że zamiast α_0 należy podstawić α_{dc} oraz można pominąć wielkość I_{c0} [porównaj zależności (6) i (8)].



Rys. 2. Układ zastępczy tranzystora w układzie WE ze źródłami szumów

Układ zastępczy tranzystora drugiej grupy we W. E. (śluszy dla małych częstotliwości) jest pokazany na rys. 2. W układzie tym pominięto admitancję wyjściową tranzystora (jako małą w porównaniu z obciążeniem) oraz sprzężenie zwrotne w tranzystorze, gdyż praktycznie nie wpływa ono na współczynnik szumów stopnia tranzystorowego¹⁾.

¹⁾ W obliczeniach sprzężenie zwrotne było brane pod uwagę, ponieważ jednak nie weszło ono w sposób istotny do wzorów końcowych, w dalszej części tej pracy zostało pominięte. Admitancję wyjściową można uwzględnić dodając do impedancji obciążenia Z_m .

Na rys. 2 przyjęto oznaczenia:

$$\overline{e_{rb}^2} \approx 4kTr_b\Delta f, \quad (9)$$

$$\overline{i_{eb}^2} \approx 2I_E q(1 - \alpha_0)\Delta f, \quad (10)$$

$$\overline{i_{c0}^2} \approx 2|I_{c0}|q\Delta f, \quad (11)$$

$$\overline{i_{ec}^2} \approx 2qI_E\Delta f \quad (12)$$

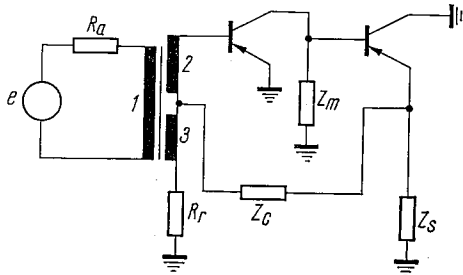
oraz założono, że dla interesującego nas zakresu częstotliwości można przyjąć:

$$\overline{i_{eb}^* \cdot i_{ec}} = 0. \quad (13)$$

Pozostałe źródła nie są skorelowane, gdyż są związane z odrębnymi procesami.

3. WSPÓŁCZYNNIK SZUMÓW WZMACNIACZA Z DOPASOWANIEM CZYNNYM

Obliczymy współczynnik szumów wzmacniacza pokazanego na rys. 3. Wnioski z rozpatrzenia tego prostego układu można rozciągnąć na wszystkie wzmacniacze z tak rozwiązanym obwodem wejściowym. Dla uproszczenia założymy, że tylko pierwszy tranzystor zawiera źródła szumów. Jest to uzasadnione, gdyż wpływ drugiego stopnia na współczynnik szumów będzie zmniejszony o wzmocnienie stopnia pierwszego.



Rys. 3. Typowe rozwiązanie obwodu wejściowego dla wzmacniacza z „dopasowaniem czynnym”

Transformator będziemy traktowali jako przekładnik idealny, co w pasmie użytecznym jest słuszne.

Schemat zastępczy wzmacniacza z rys. 3 z uwzględnieniem źródeł szumów jest pokazany na rys. 4. Na rysunku tym do czterech źródeł szumów tranzystora dołączono cztery źródła szumów cieplnych: $\overline{e_a^2}$, $\overline{e_r^2}$, $\overline{e_c^2}$, $\overline{e_s^2}$, które charakteryzują odpowiednie oporności: R_a , R_r , $\text{Re}Z_c$ i $\text{Re}Z_s$. Są to źródła napięciowe o wartości:

$$\overline{e_k^2} = 4kT\text{Re}Z_k. \quad (14)$$

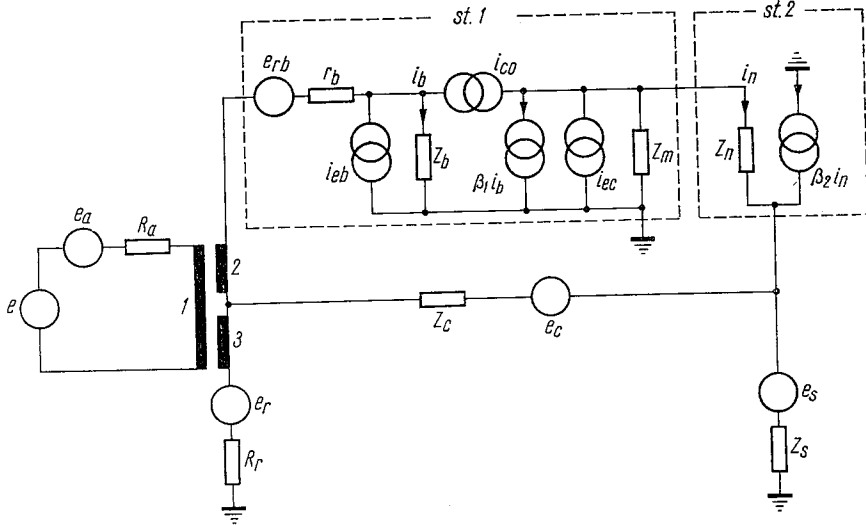
Współczynnik szumów można wyrazić w sposób następujący:

$$F_{dc} = 1 + \frac{\overline{i_{s,rb}^2} + \overline{i_{s,r}^2} + \overline{i_{s,c}^2} + \overline{i_{s,s}^2} + \overline{i_{s,eb}^2} + \overline{i_{s,c0}^2} + \overline{i_{s,ec}^2}}{\overline{i_{s,a}^2}}, \quad (15)$$

gdzie $\overline{i_{s,k}^2}$ oznacza prąd szumów w impedancji Z_s wywołany przez źródło k . Do tak obliczonego współczynnika szumów należy podstawić warunek na dopasowanie wzmacniacza, który ogólnie dla tego typu wzmacniaczy wyraża się zależnością:

$$\frac{R_r}{R_a} = p_{31}(p_{21} + p_{31}), \quad (16)$$

gdzie p_{21} i p_{31} są odpowiednimi przekładniami transformatora. Oczywiście zależność (16) jest spełniona dla dostatecznie dużego sprzężenia zwrotnego, co dla rozpatrywanego typu wzmacniaczy musi być spełnione.



Rys. 4. Schemat zastępczy wzmacniacza z rysunku 3 z uwzględnionymi w obliczeniach źródłami szumów

Dla uproszczenia wyrażeń końcowych wygodnie jest podstawić $p_{21} + p_{31} = 1$ i traktować oporność źródła R_a jako przeniesioną na stronę wtórną. Wówczas warunek (16) można zapisać jako:

$$p_{31} = \frac{R_r}{R_a}, \quad (17)$$

$$p_{21} = \frac{R_a - R_r}{R_a}. \quad (18)$$

W ten sposób z wyrażeń końcowych można wyeliminować przekładnię transformatora. Wprowadzając założenie upraszczające

$$|R_a R_r + R_a Z_c| \gg R_r^2 \quad (19)$$

otrzymamy następujące składniki współczynnika szumów związane z szumem tranzystora:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{i_{s,rb}^2} + \overline{i_{s,eb}^2} + \overline{i_{s,c0}^2} + \overline{i_{s,ec}^2}}{\overline{i_{s,a}^2}} &= \frac{r_b}{R_a} + \frac{1}{R_a} (R_a + R_r + r_b)^2 I_E (1 - \alpha_0) \frac{q}{2kT} + \\ &+ \frac{1}{R_a} \left| \frac{R_a + R_r + r_b}{\alpha} \right|^2 |I_{c0}| \frac{q}{2kT} + \frac{1}{R_a} \left| (Z_b + R_a + R_r + r_b) \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right|^2 I_E \cdot \frac{q}{2kT} \end{aligned} \quad (20)$$

oraz składniki współczynnika szumów związane z szumem cieplnym oporności R_r , $\text{Re}Z_c$, $\text{Re}Z_s$:

$$\frac{\overline{i_{s,r}^2} + \overline{i_{s,c}^2} + \overline{i_{s,s}^2}}{\overline{i_{s,a}^2}} = \frac{R_r}{R_a} \left| \frac{-R_a R_r + R_r^2 + R_a Z_c}{R_a R_r - R_r^2 + R_a Z_c} \right|^2 + \frac{\operatorname{Re} Z_c}{R_a} \left| \frac{2R_r}{Z_c + R_r} \right|^2 + \frac{\operatorname{Re} Z_s}{R_a} \left| \frac{2R_r}{Z_c + R_r} \right|^2; \quad (21)$$

dla wzmacniaczy o niezbyt małym wzmocnieniu można zwykle przyjąć założenie:

$$|Z_c| \gg R_r, \quad (22)$$

wówczas zależność (21) można będzie zapisać następująco:

$$\frac{\overline{i_{s,r}^2} + \overline{i_{s,c}^2} + \overline{i_{s,s}^2}}{\overline{i_{s,a}^2}} \approx \frac{R_r}{R_a}, \quad (23)$$

zaś pełny wzór na współczynnik szumów:

$$F_{dc} = 1 + \frac{1}{R_a} (R_r + r_b) + \frac{1}{R_a} (R_a + R_r + r_b)^2 \frac{q}{2kT} \frac{|I_{c0}| + I_E(1 - \alpha_0)|\alpha|^2}{|\alpha|^2} + \\ + \frac{1}{R_a} |Z_b + R_a + R_r + r_b|^2 \cdot \frac{q}{2kT} \left| \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right|^2. \quad (24)$$

Wyrażenie (24) jest analogiczne do wyrażenia określającego ten współczynnik dla stopnia bez sprzężenia zwrotnego F (33), różnica polega jedynie na tym, że do wszystkich składników dochodzi dodatkowy wyraz zależny od R_r . Oczywiście

$$\lim_{R_r \rightarrow 0} F_{dc} = F,$$

Dla dostatecznie małych wartości R_r współczynnik szumów F_{dc} zbliża się do wartości współczynnika bez sprzężenia zwrotnego. Dla osiągnięcia minimalnego współczynnika szumów należy dobrać optymalną oporność generatora w zależności od wartości prądu emitera oraz wzmocnienia. W tym celu do zależności (24) wprowadzimy oznaczenia

$$C_1 = \frac{I_E(1 - \alpha_0)|\alpha|^2 + |I_{c0}|}{\frac{2kT}{q}|\alpha|^2} \approx 20 \left[\frac{I_E}{\beta_0} + |I_{c0}| \right], \quad (25)$$

$$C_2 = \frac{I_E}{\frac{2kT}{q}} \left| \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right|^2 = 20 \frac{I_E}{\beta^2}, \quad (26)$$

następnie różniczkując zależność (24) względem R_a i przyrównując różniczkę do zera obliczymy wartość R_{aopt} przy założeniu, że:

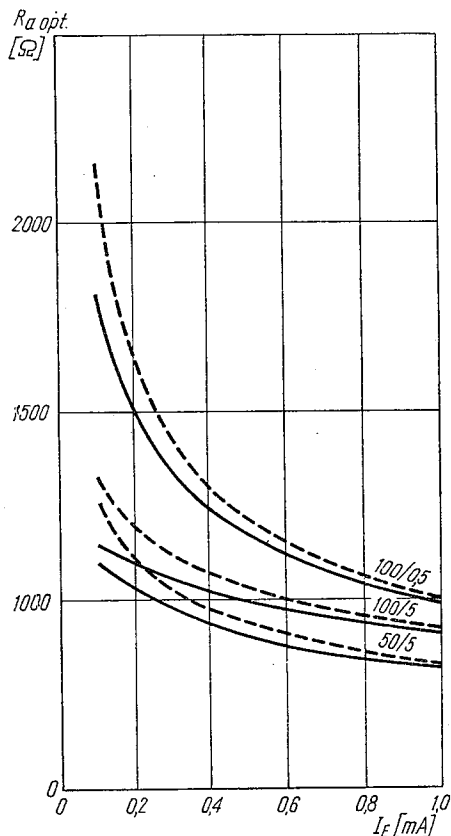
$$C_1 \gg C_2 \quad \text{i} \quad C_1 \ll \frac{1}{R_r + r_b}, \\ R_{aopt}^2 = \frac{R_r + r_b + |Z_b + R_r + r_b|^2 C_2}{C_1}. \quad (27)$$

Praktycznie biorąc dla stosowanego zakresu prądów $I_E(0,3 \div 1 \text{ mA})$ można w zależności (27) pominąć trzeci składnik licznika i otrzymać orientacyjną zależność na R_{aopt} :

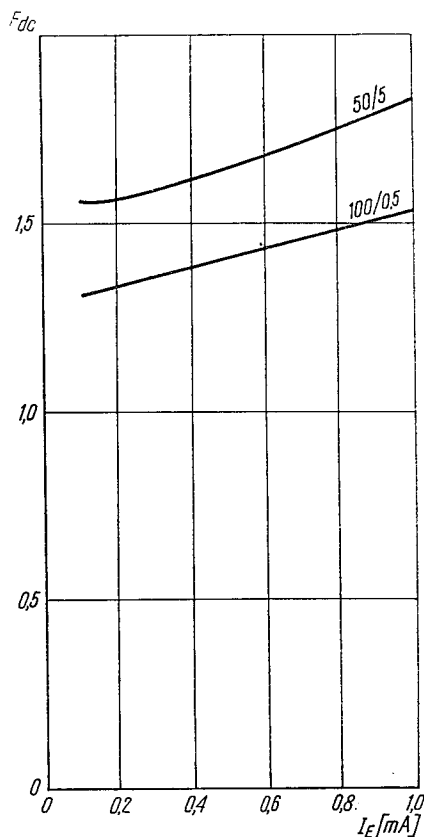
$$R_{aopt}^2 \approx \frac{R_r + r_b}{20 \left[\frac{I_E}{\beta_0} + |I_{c0}| \right]}. \quad (28)$$

Otrzymana wartość R_{aopt} obliczona ze wzoru uproszczonego będzie mniejsza o kilka procent od wartości otrzymanej z zależności (27).

Dla zilustrowania powyższych wyników zostały zamieszczone dwa wykresy:



Rys. 5. Wykres optymalnej oporności źródła w funkcji prądu emitera obliczony ze wzoru przybliżonego (28) — linia ciągła, i wzoru pełnego (27) — linia przerywana



Rys. 6. Wykres współczynnika szumów F_{dc} w funkcji prądu emitera dla wzmacniacza z „dopasowaniem czynnym”

1) Wykres R_{aopt} w funkcji prądu emitera I_E obliczony ze wzoru przybliżonego (28), wykreślony linią ciągłą, i ze wzoru pełnego (27), wykreślony linią przerywaną. Można zauważyć, że wartości R_{aopt} otrzymywane ze wzoru przybliżonego dla zakresu prądów I_E (0,3 ÷ 1 mA) odbiegają od wartości obliczonych ze wzoru pełnego nie więcej niż 10% (rys. 5).

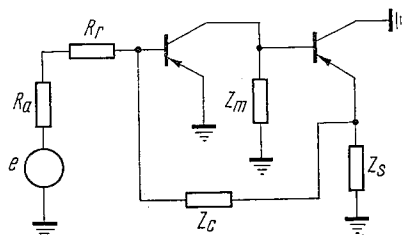
2) Wykres współczynnika szumów wzmacniacza F_{dc} w zależności od prądu emitera I_E przy optymalnych opornościach generatora R_{aopt} obliczonych oddzielnie dla każdego punktu (rys. 6).

Wykresy zostały przeliczone przy założeniu, że $r_b = 100\Omega$, $R_r = 0,1 \cdot R_{a_{opt}}$, $R_c \gg R_r$, oraz z pominięciem wpływu pojemności. Przy każdej krzywej są podane dwie wielkości: na pierwszym miejscu założone wzmocnienie β_0 , na drugim prąd zerowy I_{c0} w μA .

Należy zaznaczyć, że wzmocnienie tranzystora β_0 jest zależne od prądu emitera, z tego względu poszczególne krzywe na rysunkach 5 i 6 nie odnoszą się do pojedynczych tranzystorów, tylko każdemu punktowi krzywej odpowiadającemu odciętej I_E odpowiada tranzystor, którego wzmocnienie przy prądzie I_E jest równe β_0 .

4. WSPÓŁCZYNNIK SZUMÓW WZMACNIACZA Z DOPASOWANIEM BIERNYM

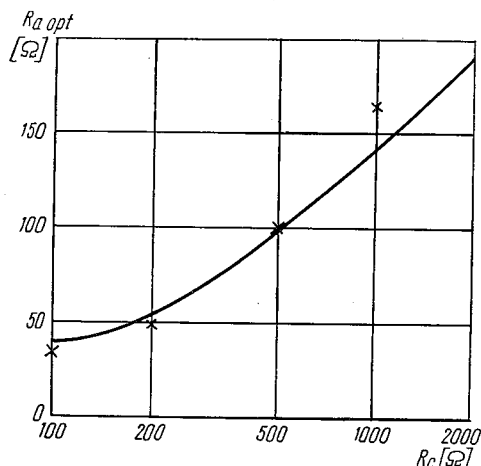
W analogiczny sposób jak w rozdziale poprzednim możemy — rozpatrując układ podany na rys. 7 — uchwycić ogólne zależności współczynnika szumów dla układów wzmacniaczy z dopasowaniem biernym. Dla tego układu można narysować analogiczny



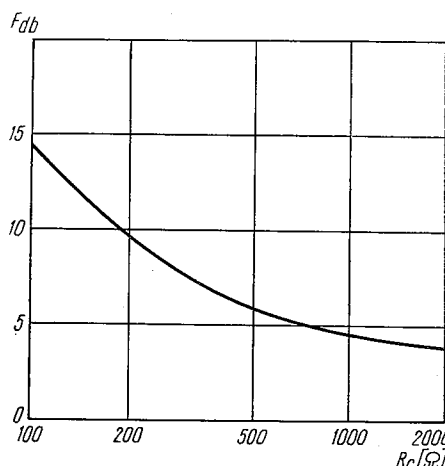
Rys. 7. Typowe rozwiązanie obwodu wejściowego dla wzmacniacza z „dopasowaniem biernym”

schemat zastępczy dla reprezentacji szumów oraz wprowadzając warunek na dopasowanie wzmacniacza:

$$R_a = R_r \quad (29)$$



Rys. 8. Wykres optymalnej oporności źródła w funkcji oporności R_c ($R_c = \text{Re } Z_c$ z rysunku 7)



Rys. 9. Wykres współczynnika szumów F_{db} w funkcji R_c ($R_c = \text{Re } Z_c$ z rysunku 7) dla wzmacniacza z „dopasowaniem biernym”

przy dostatecznie dużym sprzężeniu zwrotnym (koniecznym do spełnienia warunku na współczynnik odbicia) i przy założeniu:

$$|(2R_a + Z_c)[Z_b(1 - \alpha)]| \ll |2R_a Z_c| \quad (30)$$

można otrzymać

$$F_{db} = 2 + \frac{4R_a(\operatorname{Re} Z_s + \operatorname{Re} Z_c)}{|Z_c|^2} + \left| \frac{2R_a + Z_c}{Z_c} \right|^2 \frac{r_b}{R_a} + \\ + \frac{1}{R_a} \left| \frac{r_b(2R_a + Z_c) + 2R_a Z_c}{Z_c} \right|^2 \frac{I_E(1 - \alpha_0)|\alpha|^2 + |I_{c0}|}{|\alpha|^2} \frac{q}{2kT} + \\ + \frac{1}{R_a} \left| \frac{(2R_a + Z_c)(Z_b + r_b) + 2R_a Z_c}{Z_c} \right|^2 \frac{q}{2kT} I_E \left| \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right|^2. \quad (31)$$

Różniczkując zależność (31) względem R_a i przyrównując pochodną $\frac{dF_{db}}{dR_a}$ do zera otrzymujemy zależność na optymalną oporność generatora:

$$R_{aopt}^2 = \frac{1}{4} \frac{|Z_c|^2(r_b + r_b^2 C_1 + |Z_b + r_b|^2 C_2)}{|Z_s + Z_c| + r_b + |r_b + Z_c|^2 C_1 + |Z_b + r_b + Z_c|^2 C_2}, \quad (32)$$

gdzie C_1 i C_2 są określone zależnościami (25) i (26).

Z zależności (32) wynika, że dla niezbyt wielkich Z_c i dla małych wartości C_1 i C_2 , R_{aopt} oraz F_{db} w małym stopniu zależą od wielkości prądu emitera, wykazując jednocześnie silną zależność od impedancji Z_c . Impedancja ta przy ustalonej wielkości Z_s (rys. 7) określa wzmocnienie wzmacniacza, które jest proporcjonalne do modułu $|2R_a + Z_c|$, gdzie R_{aopt} można traktować jako funkcję Z_c .

R_c [Ω]	R_{aopt} [Ω]	F_{db}				
		2	3	4	5	Razem
100	40	1,60	8,10	0,50	2,26	14,46
200	50	1,50	4,50	0,37	1,28	9,66
500	100	0,96	1,95	0,35	0,54	5,80
1000	150	0,66	1,12	0,37	0,36	4,51
2000	190	0,40	0,74	0,39	0,26	3,79

Dla zilustrowania powyższych wyników zostały zamieszczone dwa wykresy wykonane przy założeniu, że wszystkie impedancje przyjmują wartości rzeczywiste.

1) Wykres R_{aopt} w funkcji oporności R_c ($R_c = \operatorname{Re} Z_c$) został przeliczony z zależności (32) dla prądu emitera $I_E = 0,5$ mA (rys. 8). Krzyżkami oznaczono wartości R_{aopt} dla $I_E = 0,2$ mA. Z wykresu można zauważyć, że dla małych wartości R_c wartości R_{aopt} dla obu prądów są zbliżone. W tym zakresie wartość R_{aopt} zależy głównie od wyrażenia

$$\frac{1}{4} \frac{|Z_c|^2 r_b}{|Z_s + Z_c| + r_b} \text{ ze wzoru (32).}$$

2) Wykres współczynnika szumów wzmacniacza F_{db} z zależności (31) w funkcji oporności R_c (rys. 9) został przeliczony dla prądu emitera $I_E = 0,5$ mA.

Wykresy zostały przeliczone przy założeniu, że $r_b = 100\Omega$, $I_{c0} = 5 \mu A$, $\beta = 50$, $R_s = 100\Omega$.

Dla porównania udziału poszczególnych składników zależności (31), których sumę pokazuje wykres na rys. 9, wprowadzono tabelkę, w której numery kolumn 2, 3, 4 i 5 oznaczają, że kolumny te zawierają wartości odpowiednio drugiego, trzeciego, czwartego i piątego składnika zależności (31). Można zauważyć, że dla wszystkich podanych w tabelce wartości R_c stosunkowo dużą rolę odgrywa szum cieplny, szczególnie odpowiadający oporności bazy tranzystora — kolumna 3. Oczywiście w miarę wzrostu R_c wartości wszystkich składników maleją i rośnie procentowy udział składników zależnych od prądu emitera — kolumny 4 i 5, jednocześnie w tym zakresie istotną rolę zaczyna odgrywać szum oporności dopasowującej [pierwszy składnik zależności (31)].

5. PODSUMOWANIE

Jak już zaznaczono, minimalny współczynnik szumów wzmacniacza można uzyskać przy zamknięciu źródła sygnału bezpośrednio wejściem tranzystora. Współczynnik szumów w tym przypadku przy użyciu poprzednich oznaczeń i założeniu: $|Z(1-\alpha)| \ll R_a + r_b$ wyrazi się zależnością:

$$F = 1 + \frac{r_b}{R_a} + \frac{1}{R_a} (R_a + r_b)^2 \frac{q}{2kT} \frac{|I_{c0} + I_E(1-\alpha_0)|\alpha|^2}{|\alpha|^2} + \frac{1}{R_a} |R_a + r_b + Z_b|^2 \frac{q}{2kT} I_E \left| \frac{1-\alpha}{\alpha} \right|^2. \quad (33)$$

Z porównania zależności (24), (31) i (33), można zauważyć, że chociaż współczynnik szumów nie zależy od wielkości sprzężenia zwrotnego, jednak jest zwiększany przez straty w obwodzie źródło-tranzystor spowodowane wprowadzeniem sprzężenia zwrotnego oraz elementów dopasowujących oporność wejściową. I tak w przypadku dopasowania czynnego [zależność (24)] zwiększenie współczynnika szumów można traktować jako wynik pozornego zwiększenia się oporności bazy tranzystora o wartość oporności R_r . Ma to istotny wpływ na drugi składnik zależności (24), w następnych składnikach zwykle $R_a \gg R_r$ i wpływ ten można pominąć. W przykładzie przedstawionym na wykresie z rysunku 6 maksymalny wzrost współczynnika szumów ze względu na wprowadzenie oporności R_r nie przekroczył 10%. Dla wzmacniaczy o małych wzmocnieniach należy uwzględnić zależność (21).

W przypadku dopasowania biernego [zależność (31)] dla dostatecznie dużych wartości wzmocnienia wzmacniacza ($|Z_c| \gg 2R_a$) współczynnik szumów oczywiście rośnie dwukrotnie w porównaniu z zależnością (33) ze względu na dwukrotne zmniejszenie się szumu generatora przy tym samym poziomie szumu na wyjściu. Można więc obliczyć R_{aopt} i współczynnik szumów wzmacniacza z zależności wyprowadzonych dla stopnia bez sprzężenia zwrotnego podstawiając $R_{aopt} = R_a + R_r$.

Dla wzmacniaczy o małych wzmocnieniach, jak wynika z tabelki, silnie rosną wszystkie składniki zależności (31) i mogą spowodować wzrost współczynnika szumów o rząd wielkości (rys. 9). Warto zwrócić uwagę na tę możliwość z dwóch względów:

- 1) większość stosowanych wzmacniaczy nie spełnia warunku $|Z_c| \gg 2R_a$,
- 2) trudności wykonania wzmacniacza o małym wzmocnieniu z obustronnym dopasowaniem czynnym skłaniają do zastosowania w tym przypadku dopasowania biernego na wejściu.

Politechnika Warszawska

Katedra Urządzeń Teletransmisyjnych i Telegraficznych

WYKAZ LITERATURY

1. Frizlen H. J.: Noise in Transistor Amplifiers with Negative Feedback. — NTC — CJ, nr 2, 1966.
2. Smullin L. D., Haus H. A.: Noise in Electron Devices (tłum. rosyjskie „Szumy w elektronnych приборach”, Moskwa 1964).
3. van der Ziel A.: Shot Noise in Transistors. — Proc. IRE, Jan. 1960.
4. Chenette E. R.: Frequency Dependence of the Noise and the Current Amplification Factor of Silicon Transistors. — Proc. IRE, Jan. 1960.
5. Chenette E. R., van der Ziel A.: Accurate Noise Measurements on Transistors. — IRE Trans. E. D., March 1962.

J. BROŻYNA

THE NOISE FIGURE OF CARRIER AMPLIFIERS

Summary

In transistor carrier amplifiers appears problem of the noise optimalization of amplifiers with fixed input impedances.

One often uses two versions of the input circuits, they are shown in fig. 3 and 7.

Calculation of noise figures, choice of optimum source impedances, biases and transistor parameters for these both input circuits is made in this paper.

J. BROŻYNA

COEFFICIENT DE BRUIT DES AMPLIFICATEURS MULTICANAUX

Résumé

Dans les amplificateurs multicanaux á transistors il existe un problème d'optimiser l'amplificateur du point de vue du bruit en assurant en même temps la résistance d'entrée déterminée. On utilise principalement les deux solutions du circuit d'entrée présentées sur les figures 3 et 7. Le calcul des coefficients de bruit et le choix de la résistance optimale de la source, de la polarisation optimale ainsi que des paramètres optimaux du transistor pour les deux schémas mentionnés constituent le contenu de l'oeuvre présent.

Е. БРОЖЫНА

КОЭФФИЦИЕНТ ШУМА В МНОГОКАНАЛЬНЫХ УСИЛИТЕЛЯХ

Резюме

В транзисторных многоканальных усилителях возникает вопрос оптимизации усилителя с точки зрения шума вместе с обеспечением определенного входного сопротивления. Чаще всего применяют два типа входных цепей, которые изображены на рис. 3 и 7. В этой статье рассмотрено определение коэффициентов шума, выбор оптимального сопротивления источника и смещения, а также параметров транзистора для этих двух входных цепей.

T. POSTUPOLSKI, M. PIOTRKIEWICZ

Odtwarzalność stanu magnetycznego ferrytów Mn-Zn

Rękopis dostarczono 19. 9.1966

W pracy omówiono na podstawie uzyskanych wyników doświadczalnych stany magnetyczne powstające po rozmagnesowaniach magnetycznych i termicznych w polikrystalicznych ferrytach Mn-Zn. Do badań dobrano próbki wykazujące efekty dyfuzyjnego opóźnienia magnetycznego i nie wykazujące tych efektów. Stwierdzono występowanie stabilizacji magnetycznej niewrażliwej na rozmagnesowania magnetyczne; podjęto próbę wyjaśnienia tego zjawiska.

Zbadano skutki różnokierunkowych rozmagnesowań magnetycznych mając na uwadze m. in. zależność anizotropii rozmagnesowania od kształtu próbki, natężenia pola pomiarowego i czasu. Zaproponowano model tłumaczący zaobserwowane zjawiska. Przedyskutowano poprawność wyznaczania parametrów dyfuzyjnego opóźnienia magnetycznego z pomiarów dezakomodacji.

Wskazano na przyczyny powodujące odmienne stany magnetyczne odpowiednio po rozmagnesowaniu cieplnym i magnetycznym. Najwyższy stopień odtwarzalności stanu w badanych próbkach osiągnięto stosując rozmagnesowanie cieplne łącznie z magnetycznym; zapobiegło to stabilizacji magnetycznej zachodzącej podczas chłodzenia próbek od temperatury Curie.

W obrębie rozmagnesowania magnetycznego wyniki wskazują na możliwość istnienia dwóch równoczesnych mechanizmów rozmagnesowania: jednego zachodzącego w skali submakroskopowej i drugiego — w skali mikroskopowej.

W końcowej części uwidoczniono wpływ techniki rozmagnesowania magnetycznego na stan magnetyczny próbek.

W zakończeniu sformułowano wnioski ogólne.

WYKAZ CZĘŚCIEJ STOSOWANYCH OZNACZEŃ

d — dezakomodacja dziesiąta (dezakomodacja, DA , mierzona w czasie t_1 i $t_2 = 10t_1$ po rozmagnesowaniu), w %,

d_{III} , d_{II} , d_I — dezakomodacje dziesiąte związane odpowiednio z III, II, I-szym efektem relaksacji magnetycznej, w %,

$k = \sqrt{\Theta_2/\Theta_1}$ — względna szerokość pasma stałych czasu relaksacji magnetycznej,

t — czas,

DA — dezakomodacja przenikalności magnetycznej, w %,

H — natężenie pola magnetycznego, w Oe,

H_m lub H_{dem} — natężenie magnetycznego pola rozmagnesowującego, w Oe,

H_c — natężenie pola powściągającego, w Oe,

J — namagnesowanie, w Gs,

T — temperatura, w $^{\circ}\text{C}$ lub $^{\circ}\text{K}$,

T_c — temperatura Curie, w $^{\circ}\text{C}$,

W_a — średnia energia aktywacji, w eV,

W_o — energia stabilizacji Néela, w erg/cm³,

μ — przenikalność magnetyczna, w Gs/Oe,

Θ_1, Θ_2 — krańcowe stałe czasu relaksacji magnetycznej ($\Theta_1 \leq \Theta_2$), w sek,

$\Theta_0 = \sqrt{\Theta_1 \cdot \Theta_2}$ — średnia stała czasu relaksacji magnetycznej, w sek,

Θ_{∞} — średnia stała czasu relaksacji magnetycznej przy $T \rightarrow \infty$, w sek,

Δ — oznaczenie przyrostu.

Pozostałe oznaczenia są objaśnione w tekście.

1. WSTĘP

Zagadnienie niepowtarzalności wyników pomiarów magnetycznych, nie wynikającej bezpośrednio ze zjawiska histerezy magnetycznej, nabrało w ostatnich latach dużego znaczenia technicznego. Między innymi wyrazem tego było wyodrębnienie w 51 Komitecie Technicznym IEC osobnej grupy roboczej (nr 6 — Variability), do przedmiotu zainteresowania której włączono wymieniony problem [1].

Powtarzalność pomiarów jest uzależniona od wykonywania ich w określonych i odtwarzalnych magnetycznych stanach odniesienia [2], [3]. Do dziś jednak nie zostały sprecyzowane ogólne i powszechnie uznane techniczne przepisy postępowania, zapewniające uzyskiwanie odtwarzalnego stanu magnetycznego próbek. Wiadomo tylko, że droga do wytworzenia takiego stanu wiedzie przez rozmagnesowanie, zwane ostatnio też neutralizacją [4].

Znane są cztery rodzaje rozmagnesowań (neutralizacji) [5], [6], [7]:

1) rozmagnesowanie cieplne — przez monotoniczne ochłodzenie próbki od temperatury przekraczającej temperaturę Curie do temperatury pomiaru,

2) rozmagnesowanie magnetyczne dynamiczne¹⁾ — przez umieszczenie próbki w przemennym polu magnetycznym o amplitudzie malejącej monotonicznie od wartości nasycającej, H_m , do zera,

3) rozmagnesowanie magnetyczne statyczne — przez wyłączenie w punkcie $(-, H_c)$ stałego pola magnetycznego malejącego monotonicznie od wartości nasycającej $(+, H_m)$,

4) rozmagnesowanie mechaniczne — przez poddanie próbki wibracjom, uderzeniom lub innym wstrząsom mechanicznym.

Praktyczne zastosowanie, przynajmniej w przypadku materiałów magnetycznie miękkich, znalazły jedynie pierwsze dwa sposoby i większość danych literaturowych dotyczy wyników uzyskanych przy użyciu rozmagnesowania cieplnego lub magnetycznego. Wyniki uzyskane przez różnych autorów nie są zgodne: w szeregu przypadków uzyskiwano po rozmagnesowaniu cieplnym większą wartość przenikalności niż po magnetycznym, w innych natomiast przypadkach — odwrotnie. Autorzy pracy [8] natomiast w jednym materiale uzyskali w temperaturze pokojowej przenikalność wyższą po rozmagnesowaniu magnetycznym, a w temperaturze $+138^{\circ}\text{C}$ — wyższą po cieplnym. Zestawienie znanych nam

¹⁾ W dalszym ciągu mówiąc o rozmagnesowaniu magnetycznym będziemy zawsze mieli na myśli dynamiczne.

rezultatów uzyskanych przez różnych autorów podano w porządku chronologicznym w tablicy 1. Niestety, z powodu nie zawsze dostatecznie pełnych opisów doświadczeń, utrudnione jest bliższe porównanie i dyskusja wyników. Konkluzja jest jednak następująca: w żadnym przypadku nie uzyskano tego samego stanu magnetycznego stosując odmienne rodzaje rozmagnesowania.

Tablica 1

Zestawienie danych literaturowych dotyczących rezultatów uzyskanych po rozmagnesowaniu cieplnym i magnetycznym

Autorzy	Rok	Pozycja bibliogr.	Materiał badany	Większą przenikalność uzyskano po rozmagnesowaniu	
				cieplnym	magnet.
H. Schulze	1938	[9]	żelazo karbonylkowe		+
W. Gerlach	1947	[10]	nikiel i żelazo karbonylkowe	+	
J. L. Snoek, J. F. Fast	1948	[11]	czysty nikiel	+	
H. Fahlenbrach K. Sixtus	1949	[12]	żelazo karbonylkowe		+
A. Smoliński	1952	[13]	żelazo krzemowe, permaloje 50% i 76%		+
A. Smoliński	1954	[14]	żelazo krzemowe, permaloje 50% i 76%		+
G. Sommerkorn	1955	[7]	żelazo krzemowe		+
G. W. Rathenau J. F. Fast	1955	[15]	ferryt Ni-Zn, nikiel	+	
R. C. Jackson, E. W. Lee G. H. Traughton	1958	[16]	permaloje 80%		+
S. Mijahara T. Yamadaya	1959	[17]	ferryt Mn-Zn	+	
A. Smoliński	1960	[38]	żelazo krzemowe, permaloje		+
K. H. v. Klitzing G. Zentgraf	1964	[8]	ferryt + 23°C		+
			Mn-Zn + 138°C	+	

Dotychczas pomineliśmy milczeniem samą technikę rozmagnesowania, tj. głównie jego program czasowy i — nazwijmy to — „wielkościowy” (natężeniowy). Wiadomo, że czynniki te również wywierają wpływ na powtarzalność wyników pomiarów.

Celem niniejszej pracy było zbadanie stopnia odtwarzalności stanu magnetycznego w polikrystalicznych ferrytach manganowo-cynkowych o przenikalności początkowej powyżej 600 Gs/Oe. W badaniach stosowaliśmy wyłącznie rozmagnesowania cieplne i magnetyczne dynamiczne w różnych wariantach i kombinacjach. Inne sposoby rozmagnesowania

wania (wymienione wyżej jako 3 i 4) nie były stosowane. W obrębie zagadnień dotyczących rozmagnesowania magnetycznego nie badaliśmy wpływu kształtu i częstotliwości rozmagnesowującego pola magnetycznego na stan magnetyczny próbek. To ostatnie było badane w przypadku ferrytów przez Snellinga [18] oraz bardziej szczegółowo przez Rasmussena [19].

2. STAN NEUTRALNY (ROZMAGNESOWANY)

Zabieg zwany powszechnie rozmagnesowaniem, a według ostatnich propozycji IEC [4] — neutralizacją, polegający bądź na powolnym ochłodzeniu próbki od temperatury Curie, bądź na sprowadzeniu przy pomocy malejącego pola magnetycznego, H , namagnesowania makroskopowego, J , próbki do zera, był znany i stosowany od czasu, gdy zaczęto badać materiały magnetyczne, tzn. od końca XIX wieku. Intencją tego zabiegu było uniknięcie pozostałości magnetycznej w próbce, wynikającej wprost z istnienia histerezy magnetycznej.

Badania zjawisk związanych z opóźnieniem magnetycznym ujawniły, że taka interpretacja celu rozmagnesowania nie jest wystarczająca i że spełnienie warunku $J = 0$ (makroskopowo) przy $H = 0$ nie zapewnia uzyskania powtarzalnych wyników pomiarów. Néel budując teorię dyfuzyjnego opóźnienia magnetycznego [20] wskazał, że celem rozmagnesowania jest również wytworzenie w magnetyku izotropowego rozkładu przestrzennego elementów dyfundujących, w chwili $t = 0$ po rozmagnesowaniu. Brissonneau [21] rozwinął naszkicowane przez Néela modele dwóch możliwych mechanizmów rozmagnesowań. Model pierwszy zakłada wytworzenie rozkładu izotropowego elementów dyfundujących w skali makroskopowej. Możliwe to jest wówczas, gdy rozmagnesowanie magnetyczne trwa dłużej od największej stałej czasu ustabilizowanych już elementów dyfundujących. Jak pokazuje jednak doświadczenie, pożądane rezultaty przynosi rozmagnesowanie magnetyczne o czasie trwania znacznie krótszym, co uwzględnia model drugi. Przyjmuje się w nim, że rozmagnesowanie magnetyczne krótkotrwałe, powodując zupełną redystrybucję układu domenowego, nie pozostającą w żadnym związku z poprzednią, jest w stanie wytworzyć rozkład izotropowy jedynie w skali makroskopowej. Przez to pojęcie należy rozumieć skalę obszaru co najwyżej jednodomenowego. Dla uniknięcia ewentualnych nieporozumień będziemy tę skalę nazywać dalej submakroskopową. W ostatecznej konkluzji Néel stwierdza jednak, że własności układu w obu przypadkach (tj. mikro- i submakroskopowym) nie powinny znacznie się od siebie różnić. Spełnienie obu warunków, tj. $J = 0$ przy $H = 0$ oraz izotropowości rozkładu defektów dyfundujących w $t = 0$ po rozmagnesowaniu, charakteryzuje *magnetyczny stan neutralny* lub krótko — *stan neutralny*. Stan taki jest możliwy tylko w $t = 0$ po rozmagnesowaniu. Stan magnetyczny próbki pozostającej w nie zmieniających się warunkach zewnętrznych przez czas $t = t_1$ od rozmagnesowania będziemy nazywali *magnetycznym stanem odniesienia*.

Mechanizm uzyskiwania stanu neutralnego omówił Néel [20], a szerzej Brissonneau [21], który opierając się na koncepcji Néela wprowadził pojęcie skuteczności rozmagnesowania, przyjmując jako jedyne jej kryterium powtarzalność wyników pomiarów w określonym czasie po rozmagnesowaniu. Zarówno Néel, jak i Brissonneau nie rozpatrywali

w cytowanych pracach rozmagnesowania cieplnego. Brugel, Morel i Rimet [22], autorzy związani ze szkołą Néela, podali, aczkolwiek bez uzasadnienia, najpełniejszy zespół warunków niezbędnych do zrealizowania „optymalnego”¹⁾ rozmagnesowania magnetycznego.

W pracy staraliśmy się sprawdzić, jakie rodzaje rozmagnesowań doprowadzą do uzyskania powtarzalnych wyników pomiarów, wykonywanych oczywiście w jednakowych warunkach i czasach po zastosowanym rozmagnesowaniu. Innymi słowy — czy uzyskujemy po określonym rozmagnesowaniu stan neutralny, a w konsekwencji odtwarzalny stan magnetyczny.

3. METODY I URZĄDZENIA POMIAROWE

Stan magnetyczny próbek badaliśmy wyłącznie za pomocą pomiaru początkowej przenikalności (przy 5 m0e) po określonym czasie lub w funkcji czasu liczonego od zakończenia rozmagnesowania. Przenikalność obliczaliśmy z indukcyjności uzwojonych jednowarstwowo próbek pierścieniowych. Bliższe dane próbek użytych do doświadczeń zestawiono w tablicy 2, przy czym wyjściowy skład chemiczny był znany tylko w przypadku próbek pochodzących z własnego laboratorium. Warunki, w jakich przeprowadzano doświadczenia, podano w tablicy 3. Termostaty powietrzne, w których przebywały próbki podczas doświadczeń długo trwających, były ekranowane magnetycznie i elektrycznie, a ich bezwładność cieplna była znaczna (wahania temperatury mniejsze od 0,1°C/godz). Przy pomiarach krótkoczasowych (maks. kilkugodzinnych) korzystano z termostatów wodnych typu Wobsera, z tym, że próbka była zanurzona w oleju transformatorowym wypełniającym naczynie wstawione do wody. Używane również do pomiarów krótkoczasowych suszarki laboratoryjne z udoskonalonym systemem ogrzewczym pozwalały na uzyskanie stałości temperatury $\pm 0,1^\circ\text{C}$ (kontrolowanej termoparą z rejestratorem), wyjąwszy przypadki ogrzania wnętrza suszarki podczas rozmagnesowania próbek umieszczonym tam elektromagnesem. Zmiana temperatury dochodziła wówczas do $+3,8^\circ\text{C}$, odpowiednio do czego korygowano wyniki.

Szczegóły dotyczące sposobów rozmagnesowań cieplnych zamieszczono w tablicy 4, zaś dane odnoszące się do rozmagnesowań magnetycznych — w tablicy 5. Podczas rozmagnesowań magnetycznych zwracano szczególną uwagę na izotermiczność tego zabiegu. W przypadkach nasuwających wątpliwość umieszczano próbkę w ośrodku odprowadzającym ciepło i kontrolowano jej temperaturę termoparą umieszczoną w wydrążonej w rdzeniu jamce. Przy rozmagnesowaniach cieplnych starano się zachować powtarzalne programy cieplno-czasowe oraz identyczną atmosferę ochronną.

Pomiary przeprowadzano stosując następujące podstawowe przyrządy i układy pomiarowe:

— układ kompensacyjny z rejestratorem do pomiaru względnych zmian przenikalności

$\frac{\Delta\mu}{\mu}$ w krótkich czasach (między 1 a 2000 sek) po rozmagnesowaniu, o czułości zawartej

w granicach $6,5\%/250\text{ mm} \leq \frac{\Delta\mu}{\mu} \leq 50\%/250\text{ mm}$, możliwości odczytu $\frac{\Delta\mu}{\mu} \geq 0,02\%$

i zbliżonej powtarzalności pomiaru,

¹⁾ wg określenia autorów [22].

Dane próbek, na których przeprowadzono doświadczenia

Nr próbki	Skład chemiczny % mol.	Przenikalność pocz. (wartości orientacyjne) (μ_p)	Wymiary			Zredukowany współcz. temper. przenik. (β) ²⁾	Tempera- tura Curie (T_c) °C	Natężenie koercji (H_c) Oe	Współcz. dezakomo- dacji w 20°C ($DF \times 10^6$) ³⁾
			D_z	D_w	h				
—	—	—	cm	cm	cm	°C ⁻¹	°C	Oe	—
1a	ZnO _{14,6} MnO _{29,4} (Fe ₂ O ₃) ₅₆	717	2,91	1,91	0,54	-1,79	249	0,39	88,4
1b	"	727	2,91	1,91	0,54	-1,79	249	0,39	81,5
1c	"	708	2,91	1,91	0,54	-1,79	249	0,39	92,1
1d	"	687	2,91	1,91	0,54	-1,79	249	0,39	95,2
2	ZnO _{17,4} MnO _{29,4} (Fe ₂ O ₃) ₅₃	900	2,89	1,88	0,72	+4,55	190	0,45	49,7
3	nieznany ¹⁾	1880	2,965	1,585	0,56	-2,22	220	—	19,14
4	nieznany ¹⁾	1200	2,33	1,37	0,65	+6,0	195	0,65	~0
5	ZnO _{17,6} MnO _{29,4} (Fe ₂ O ₃) ₅₃	2000	1,02	0,605	0,57	+1,89	192	0,2	20,0
6a	"	2050	1,265	0,55	0,535	-0,497	170 ⁴⁾	0,2	5,3
6b	"	2020	1,265	0,555	0,535	-1,002	"	0,2	4,89
6c	"	1970	1,265	0,55	0,535	-0,608	"	0,2	4,6
7	nieznany ¹⁾	1200	2,94	1,58	0,54	ujenny	230	—	30,10
8	nieznany ¹⁾	1845	2,23	1,32	0,50	0 ⁴⁾	220	—	22,78
9a	ZnO _{17,6} MnO _{29,4} (Fe ₂ O ₃) ₅₃	2955	1,525	—	0,068	—	170 ⁴⁾	0,2	—
9b	"	1907	1,525	—	0,068	—	"	0,2	—

1) Próbkę obcego pochodzenia

2) $\beta = \frac{\Delta \mu_p}{\mu_p^2 \Delta T}$; przeważnie między +15 i +25°C3) $DF = \frac{\Delta \mu_p}{\mu_p^2 \lg t_2 / t_1}$

4) Wartość katalogowa

T a b l i c a 3

Warunki przeprowadzanych doświadczeń (podstawowych)

Doświadczenie	Warunki pomiaru					Rozmagnesowanie			Uwagi
	temperatura	miejsce przebywania próbek	częstotliwość	układ pomiarowy	czas trwania doświadczenia	rodzaj	program rozmagn. magnet.	program rozmagn. ciepln.	
—	°C	—	kHz	—	—	—	wg tabl. 5	wg tabl. 4	—
I	+40,3 ± 0,2	termostat powietrzny	10	mostek odchyłek + układ kompensacyjny	2,96 · 10 ⁷ sek ≈ 343 dni	cieplne magnet.	I	I	
II	+40 ± 0,2	termostat powietrzny	8	Mostek Maxwella-Wiena	łącznie ~ 4444 godz = = 185 dni	cieplne magnet.	I	II	
III	+30	suszarka	8	„	szereg pomiarów 30-minutowych	magnet.	II III		
IIIa	+23	otoczenie	40	mostek odchyłek		magnet.	III		
IV	+30 ± 0,05	suszarka + termostat wodno-olejowy	8	mostek Maxwella-Wiena	1 cykl 200 + 30 min	cieplne magnet.	I	III IV	
V	+30 ± 0,15 23 ± 0,15	w obiegu wodnym termostatu	8	„	szereg pomiarów 10-minutowych	magnet.	IIa IIIa		rozmagnesowanie o zmiennym czasie trwania
VI	+30 ± 0,05	termostat wodny	8	„	cykl pomiarów 10-min	magnet.	według tabl. 11		

- mostek odchyłek firmy Siemens, typ Rel 3R119c, umożliwiający pomiar $\frac{\Delta\mu}{\mu} \geq 0,0002\%$, używany do pomiarów w czasach $t \geq 2000$ sek po rozmagnesowaniu,
- mostek Maxwella-Wiena, typ 1008, firmy RFT, używany do pomiarów w czasach $0,5 \text{ min} \leq t \leq 500 \text{ min}$, o niedokładności pomiaru indukcyjności $\leq 0,5\%$.

Tablica 4

Opis stosowanych rozmagnesowań cieplnych

Numer programu	Temper. rozmagn. T_r	Czas dochodzenia do T_r	Czas przebywania w T_r	Czas chłodzenia do temper. otoczenia	Atmosfera rozmagnesowania	Uwagi
—	°C	min	min	min	—	
I	265	105	60	860	argon ¹⁾	ciągły przepływ argonu 25 l/h
II	230	~70	60	105	argon ¹⁾	— „ —
III	$T_c + 10$	~180	~5	4	próżnia ~10 ⁻³ mm Hg	próbki umieszczano w szklanych ampulkach
IV	$T_c + 10$	~180	~5	44		

¹⁾ 0,0004 % obj. O₂

Pomiary indukcyjności były wykonywane bądź przy ciągłym utrzymywaniu próbek w pomiarowym polu magnetycznym (głównie pomiary w $t \leq 500$ min), bądź przy polu pomiarowym włączonym tylko w momencie pomiaru (głównie pomiary długoczasowe). Okresowe przykładanie pola pomiarowego do próbki pozostawionej w spokoju nie wywoływało, jak sprawdzono, niepożądanego destabilizacji¹⁾.

4. DOŚWIADCZENIA

4.1. Rozmagnesowania magnetyczne wykonywane rzadko i w znacznych odstępach czasu po rozmagnesowaniu cieplnym (doświadczenie I)

4.1.1. Cel doświadczenia

Doświadczenie to stało się punktem wyjścia tej pracy. Chodziło o sprawdzenie, czy rozmagnesowanie magnetyczne polem o natężeniu początkowym co najmniej pięciokrotnie większym od natężenia powściągającego (H_c) [22], [25], [26], dające powtarzalne wyniki

¹⁾ Jest to zrozumiałe, gdyż maks. $\frac{H_{pom}}{H_c} \cong \frac{5 \text{ m Oe}}{200 \text{ m Oe}} = 0,025$, co wg [25], [30] nie wywołuje zauważalnych efektów destabilizacyjnych.

Tablica 5

Charakterystyki stosowanych sposobów rozmagnesowań magnetycznych

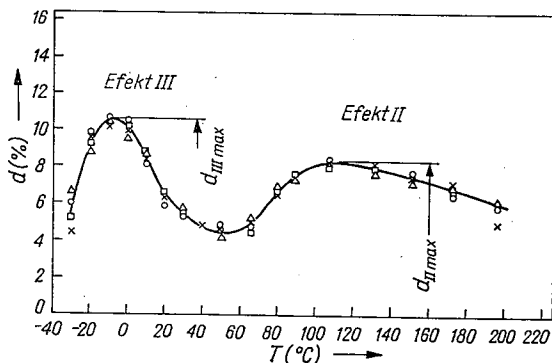
Numer programu	Pole rozmagnesujące pochodzi	Czas, t_c , gdy $H = H_{max}$ (sek)	Czas, t_m , pola malenia (sek)	Charakter obwiedni malejącego pola rozmagnesującego	$\frac{H_{max}}{H_{min}}$	Krotność procesu rozmagnesowania	Częstotliwość pola rozmagnesującego (Hz)	Sposób realizacji programu	Charakterystyka malenia amplitudy pola
I	z uzwojenia	20	12	wykładniczy	$\sim 1,4 \cdot 10^4$	3	50	automat.	
Ia	"	20	12	"	"	1	50	"	płynna
Ib	"	5	12	"	"	3	50	"	
Ic	"	1	12	"	"	1	50	"	
II	"	5	5	liniowy	$> 10^4$	3	50	ręczny	drobno-schodkowa (szeregowe połączone autotransformatory ślizgowe)
IIa	"	1	1	"	"	1	50	"	
III	ze szczeliny elektromagnesu	5	5	"	"	3	50	"	
IIIa	"	1	1	"	"	1	50	"	
IV	z uzwojenia	0		wykładniczy	$\rightarrow \infty$	1	~ 80	rozładowanie kondensatora	płynna

w przypadkach, gdy odstęp między kolejnymi rozmagnesowaniami jest krótki, zapewni powtarzalność również wówczas, gdy odstęp ten będzie zwiększony. W oparciu o komunikat Miyahary i Yamadai [17] można odpowiedzieć na to pytanie twierdząco. Obserwacje własne, wzmianka w pracy Brissonneau [21, str. 29], jak również dane dotyczące stabilizacji własności na drodze obróbki cieplnej poniżej temperatury Curie, podane m.in. przez Verschoora [27], v. Klitzinga i Zentgrafa [8], Lifszycy i Hanina [28], przemawiają za odpowiedzią przeczącą.

Przyjmijmy hipotezę, że stabilizacja magnetyczna, zachodząca w przedziale czasu od zera do nieskończoności po rozmagnesowaniu wytwarzającym stan neutralny, składa się z wzajemnie nakładających się efektów oddzielnych procesów relaksacyjnych następujących kolejno po sobie w funkcji czasu i reprezentowanych odpowiednio przez tzw. [23] III, II i I efekt relaksacji magnetycznej¹⁾ [24]. Początkowe pytanie można wówczas sformułować innymi słowami: czy rozmagnesowanie magnetyczne, dokonane w długim czasie po rozmagnesowaniu cieplnym i w temperaturze np. otoczenia, a więc w temperaturze bliskiej lokalnemu maksimum dezakomodacji efektu III, zdestabilizuje zakończone lub daleko posunięte procesy relaksacji związane z efektami I i II?

4.1.2. Opis doświadczenia

Aby odpowiedzieć na powyższe pytania, dobrano cztery bliźniacze próbki (1a÷1d wg tablicy 2) o prawie identycznych widmach temperaturowych dezakomodacji przenikalności i wyraźnie zaznaczonych efektach II i III, rys. 1. Próbkę te rozmagnesowano cieplnie (pro-

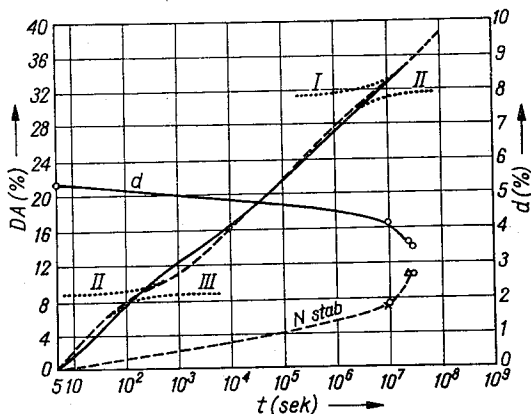


Rys. 1. Widma temperaturowe dezakomodacji próbek 1a÷1d: × — 1a, o — 1b, □ — 1c, Δ — 1d; dezakomodacja dziesiętna, d , obliczona między 1 i 10 minutą po rozmagnesowaniu

gram I wg tablicy 4) i umieszczono w termostacie. Po ustaleniu się temperatury próbek rozmagnesowano magnetycznie, wg programu I z tablicy 5, polem o natężeniu $4,3 \text{ Oe} \cong 11 H_c$. Bliższe szczegóły doświadczenia w tablicy 3. Na podstawie danych uzyskanych z analizy widm temperaturowych dezakomodacji obliczono metodą podaną w [29] teoretyczną krzywą zmian przenikalności w funkcji czasu — krzywa kreskowana na rys. 2.

¹⁾ Pojedyncze efekty relaksacji magnetycznej objawiają się jako lokalne maksima przebiegu temperaturowego dezakomodacji. Maksima te ponumerowano kolejno, licząc od temperatury Curie w stronę temperatur niższych [23, 24]. Przebieg temperaturowy dezakomodacji zwany jest też jej widmem temperaturowym.

Krzywa ta powstała z superpozycji wyróżnionych na rys. 2 krzywych odpowiadających poszczególnym efektom. Na tymże rysunku krzywa ciągła przedstawia przebieg uzyskany doświadczalnie. Po czasie $t = 0,96 \cdot 10^7$ sekund, gdy można było uznać, że proces stabilizacji przypisywany efektowi II dobiega końca ($\theta_2 = 0,787 \cdot 10^7$ sek) [24], rozmagnesowanie



Rys. 2. Teoretyczny i doświadczalny przebieg dezakomodacji $DA(t)$ dla próbek 1a ÷ 1d. Krzywa ciągła przedstawia przebieg doświadczalny, krzywa przerywana — teoretyczny. Przebieg teoretyczny powstał z superpozycji krzywych kropkowanych, odpowiadających poszczególnym efektom dezakomodacji. Obliczenia wykonano dla następujących stałych charakteryzujących opóźnienie magnetyczne:

- efekt I: $k^2 = 100$; $W_a = 1,5$ eV; $\Theta_{\infty} = 10^{-15}$ sek;
 efekt II: $k^2 = 10^4$; $W_a = 1,05$ eV; $\Theta_{\infty} = 10^{-11}$ sek;
 efekt III: $k^2 = 900$; $W_a = 0,8$ eV; $\Theta_{\infty} = 5 \cdot 10^{-13}$ sek.

Dla krzywej „N stab” ważna jest lewa skala. Pozostałe objaśnienia w tekście

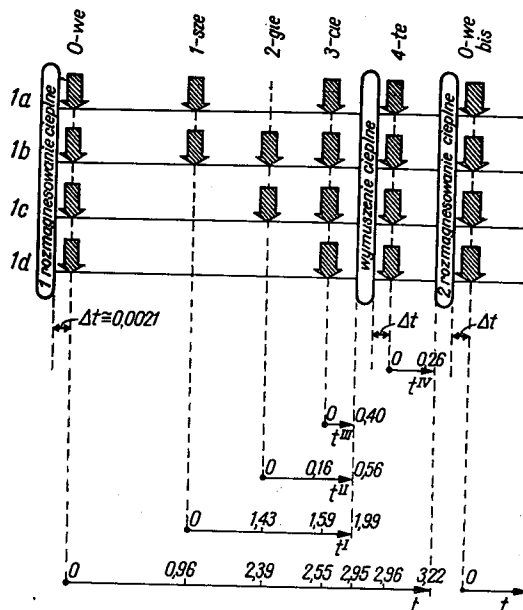
wano magnetycznie próbki 1a i 1b (rozmagnesowanie to oznaczono jako pierwsze). Pełny przebieg doświadczenia pokazano schematycznie na rys. 3. Uzyskane wyniki przedstawiono dla próbki 1b, najczęściej rozmagnesowywanej, na rys. 4, a dla pozostałych próbek (by nie zaciemniać rysunku) w tablicy 6a i 6b. Punktem odniesienia jest przenikalność $\mu(5'')$, tj. mierzona po 5 sek po „zerowym” rozmagnesowaniu magnetycznym.

Z rysunku 4 widać, że wartość przenikalności $\mu(5'')$ oraz dezakomodacji po kolejnych rozmagnesowaniach magnetycznych maleje. Oznacza to, że zastosowane rozmagnesowania magnetyczne, wykonywane w znacznych wzajemnych odstępach czasu, nie powodują w badanych próbkach całkowitej destabilizacji, a więc odtwarzalności stanu magnetycznego. Mamy wyraźnie do czynienia z destabilizacją częściową, co widać również z charakterystycznych dla takiego przypadku przebiegów pokazanych na rys. 5 i analogicznych do opisanych w [25], [30].

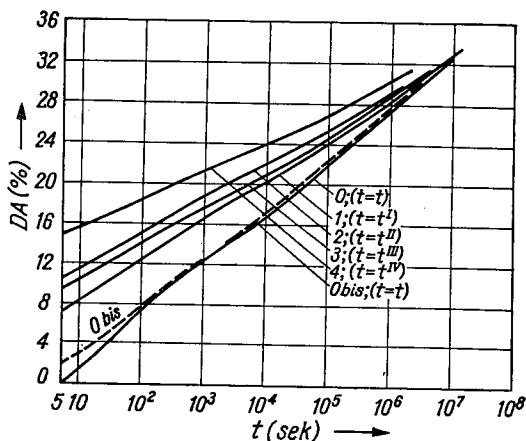
Odpowiednie wartości liczbowe przenikalności $\mu(5'')$ i dezakomodacji po pierwszych rozmagnesowaniach podano (w ramkach) w tablicach 6a i 6b. Stabilizację tę będziemy dalej nazywali stabilizacją typu N w odróżnieniu od następującej po każdorazowym rozmagnesowaniu stabilizacji, którą nazwiemy typu O. Przybliżony przebieg stabilizacji typu N zaznaczono na rys. 2 jako „N stab”.

Dla czasów $t \geq 0,5 \cdot 10^7$ sek obserwujemy gwałtowną zmianę nachylenia tej krzywej oraz krzywej wartości dezakomodacji $d(t)$ (d obliczone dla przedziału czasu od 5 do 2000

sek). Tłumaczymy to rozpoczęciem się procesu stabilizacyjnego związanego z efektem I, trudniej destabilizującym się z powodu energii aktywacji rzędu $1,5 \div 2,0$ eV [24], [31], [32], tzn. około dwukrotnie większej niż energia efektów II i III.



Rys. 3. Schemat przebiegu doświadczenia I; czasy wyrażono w 10^7 sek. Strzałki oznaczają rozmagnesowania magnetyczne



Rys. 4. Przebiegi DA próbki 1b w funkcji czasu po kolejnych rozmagnesowaniach magnetycznych. Oznaczenia krzywych wg rys. 3

W przypadku próbek 1b i 1c po rozmagnesowaniu trzecim zaobserwowano destabilizację znacznie większą, niż wynikałoby to z przebiegu krzywej „ N stab”. Przypisujemy to faktowi wykonania trzeciego rozmagnesowania w momencie, gdy próbki te nie osiągnęły stopnia stabilizacji posiadanego w chwili wykonania rozmagnesowania poprzedniego, tj.

Tablica 6a

Procentowy spadek wartości przenikalności początkowej μ mierzonej po 5 sekundach po kolejnych rozmagnesowaniach magnetycznych w doświadczeniu I

$$N_{\text{stab}} = \frac{\mu_0(5'') - \mu_n(5'')}{\mu_0(5'')}$$

$\begin{matrix} n^* \\ \text{Nr} \\ \text{próbki} \end{matrix}$	0-we	1-sze	2-gie	3-cie	4-te	0-we bis
1a	0	7,13	—	11,68	12,59	1,05
1b	0	7,28	10,52	9,51	14,63	1,85
1c	0	—	10,71	9,01	14,15	1,91
1d	0	—	—	10,62	13,19	1,56

Tablica 6b

Dezakomodacja przenikalności początkowej odpowiadająca stabilizacji typu 0 po kolejnych rozmagnesowaniach magnetycznych w doświadczeniu I

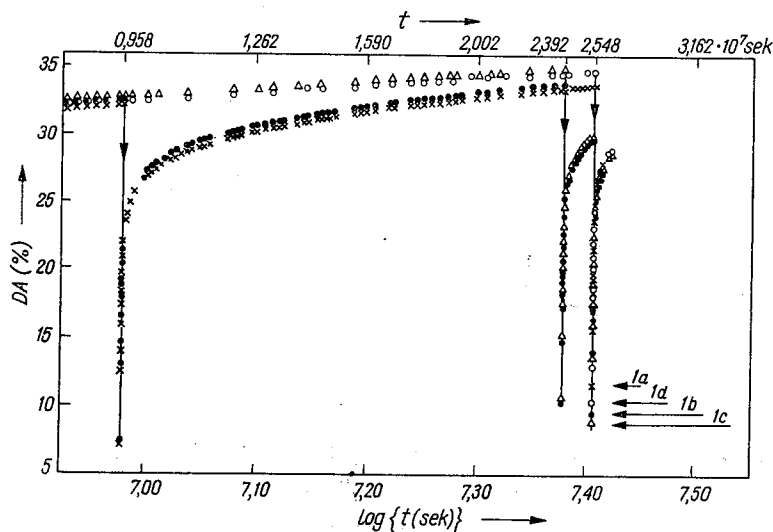
$$d = \frac{\mu_n(5'') - \mu_n(2000'')}{\mu_n(5'') \cdot \lg 2000''/5''}$$

$\begin{matrix} n^* \\ \text{Nr} \\ \text{próbki} \end{matrix}$	0-we	1-sze	2-gie	3-cie	4-te	0-we bis
1a	5,3	4,21	—	3,16	3,10	4,75
1b	5,29	4,065	3,56	3,52	2,85	4,66
1c	5,35	—	3,48	3,62	2,90	4,68
1d	5,35	—	—	3,41	3,09	4,73

* Kolejne rozmagnesowania magnetyczne wg rys. 3.

drugiego. Należy jednak zwrócić uwagę, że zjawisko to obserwuje się wyłącznie przy stanach o względnie daleko posuniętych procesach stabilizacji, podatnych na rozmagnesowania magnetyczne. Wielokrotne krótkotrwałe rozmagnesowania w bardzo krótkich odstępach czasu dają wyniki powtarzalne, nie wykazujące wyraźnych tendencji do dalszej destabilizacji. Zachodzi natomiast pytanie, jakie skutki wywołają rozmagnesowania wykonywane w pośrednich, tzn. kilkugodzinnych lub kilkudniowych odstępach czasu? Nasuwają się dalsze pytania: 1) czy istotna zmiana programu rozmagnesowania magnetycz-

nego, polegająca na odpowiedniej intensyfikacji energetycznej tego zabiegu, uzależnionej od postępu stabilizacji próbki, zwiększy „skuteczność” rozmagnesowania?, 2) czy stabilizacja N zaobserwowana w badanych próbkach zachodzi również w innych próbkach, np. różniących się charakterem widma temperaturowego dezakomodacji ?,3) czy zastosowanie różnokierunkowych rozmagnesowań magnetycznych zwiększy może stopień destabilizacji? Te problemy i szereg innych stały się tematem dalszych doświadczeń.



Rys. 5. Fragment przebiegu $DA(t)$ próbek 1a ÷ 1d dla czasów od $0,9 \cdot 10^7$ do $2,6 \cdot 10^7$ sek po rozmagnesowaniu zerowym

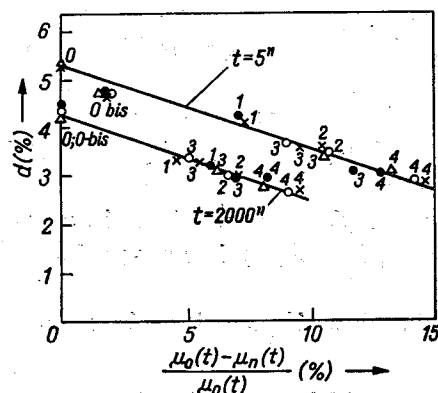
Powróćmy teraz do końcowej fazy omawianego doświadczenia — do zbadania odwracalności stanu po powtórnym rozmagnesowaniu cieplnym, wykonanym po upływie czasu $t = 2,64 \cdot 10^7$ sek (306 dni) od pierwszego (rys. 3). Powtórne rozmagnesowanie wykonano w sposób możliwie identyczny z pierwszym, zachowując dokładnie ten sam program temperaturowo-czasowy zabiegu i pomiaru. Wynik świadczy o odwracalności procesów stabilizacyjnych wobec rozmagnesowania cieplnego (z niepowtarzalnością ok. 2% w początkowym zakresie czasowym¹⁾), a więc o braku procesów starzeniowych (krzywa O -bis na rys. 4). O jednorodności procesu stabilizacyjnego może świadczyć rys. 6, na którym uwidoczniło się zależność wartości dezakomodacji dziesiątej d po kolejnych rozmagnesowaniach od współczynnika

$$a = [\mu_o(t) - \mu_n(t)] : \mu_o(t)^2$$

użytego jako miara stabilizacji N , nieczułej na rozmagnesowania magnetyczne. Jednorodność procesu oznacza, że wzrastające z czasem usztywnienie ścian (mniejsze μ) i zmniej-

¹⁾ Niepowtarzalność ta jest przypisywana raczej błędowi pomiarowemu niż przyczynie fizycznej, na co wskazują odbiegające od całości przebiegu punkty O -bis dla $t = 5''$ na rys. 6. Punkty dla $t = 2000''$ nie wykazują już tego odchylenia. Przebieg po $t \geq 2000$ sek uzyskiwano, jak wiadomo, za pomocą innego urządzenia pomiarowego.

²⁾ Indeksy „o” i „n” oznaczają kolejne rozmagnesowania na rys. 3; t — jest czasem po rozmagnesowaniu, równym 5 lub 2000 sek.



Rys. 6. Zależność dezakomodacji d (tj. stabilizacji typu O) od stopnia stabilizacji typu N dla próbek $1a \div 1d$. $\mu_0(t)$ i $\mu_n(t)$ oznaczają wartości przenikalności początkowej w ustalonym czasie t odpowiednio po 0-wym i kolejnym rozmagnesowaniu magnetycznym;

$$\text{dla czasu } t = 5 \text{ sek: } d = \frac{DA_{2000''} - DA_{5''}}{\lg 2000''/5''}$$

$$\text{dla czasu } t = 2000 \text{ sek: } d = \frac{DA_{20000''} - DA_{2000''}}{\lg 20000''/2000''}$$

Cyfry przy poszczególnych punktach wskazują nume kolejnego rozmagnesowania wg rys. 3

$\times$ — $1a$; $\bullet$ — $1b$; $\circ$ — $1c$; $\triangle$ — $1d$;

szczenie dezakomodacji mają jedną przyczynę — niezupełną destabilizację defektów dyfundujących.

Oznaczone na rys. 3 wymuszenie cieplne (zamierzone początkowo jako rozmagnesowanie cieplne, do którego wskutek przypadkowego wyłączenia pieca nie doszło) spowodowało przyspieszenie w czasie stabilizacji typu $N^{(1)}$.

Szersze omówienie wyników oraz podanie wniosków nastąpi łącznie dla doświadczeń I i II.

4.2. Rozmagnesowania magnetyczne wykonywane często i których rozpoczęcie dzielił krótki czas od rozmagnesowania cieplnego (doświadczenie II)

4.2.1. Cel doświadczenia

Celem doświadczenia jest znalezienie odpowiedzi na postawione w poprzednim rozdziale pytania. Przytaczamy je powtórnie w postaci usystematyzowanej:

1) czy zachodzi wyraźny związek między stabilizacją typu N a charakterem temperaturowego widma dezakomodacji (a więc zależnością temperaturową stabilizacji typu O),

2) czy krótkotrwałe rozmagnesowania magnetyczne przykładane często i w momentach niezbyt daleko zaawansowanych procesów stabilizacyjnych — zapobiegają ujawnieniu w doświadczeniu I stabilizacji typu N ,

Procesami stabilizacyjnymi w podwyższonych temperaturach zajmujemy się w doświadczeniu IV.

3) czy intensyfikacja energetyczna rozmagnesowania polegająca na:

a) zwiększeniu natężenia pola rozmagnesowującego, H_m , podczas jednego cyklu rozmagnesowującego, bądź na

b) wydatnym zwiększeniu czasu rozmagnesowania, t_m ,

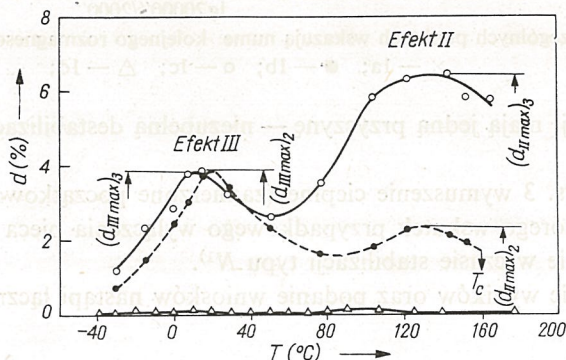
przeprowadzona w momentach wyraźnie ujawniającej się stabilizacji typu N , zwiększy stopień destabilizacji,

4) czy zaobserwowana na przykładzie przenikalności początkowej stabilizacja typu N zachodzi również w zakresie pól silniejszych, np. w zakresie Rayleigha (do 100 mOe), a jeśli tak, to

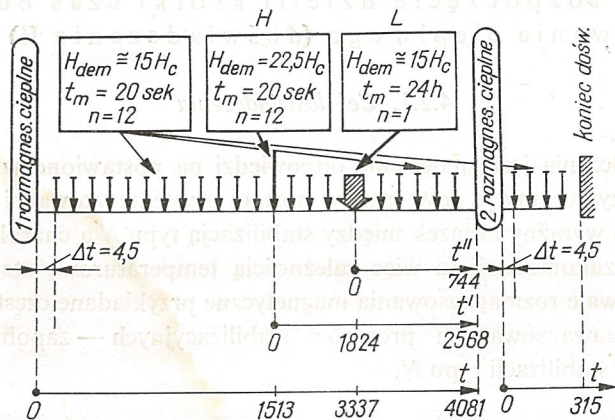
5) czy ulega zmniejszeniu zależność przenikalności od pola (wyrażana zwykle współczynnikami δ_5 i δ_{100})?

4.2.2. Opis doświadczenia

Do doświadczenia dobrano próbki 2 i 3 wg tablicy 2. Próbki te różniły się widmami dezakomodacji — rys. 7. Próbka 2 wyróżnia się przewagą intensywności efektu III wobec efektu II, przeciwnie do próbki 3, której efekt III jest słabszy od II. Próbki te po rozmagnesowaniu cieplnym wg programu II z tablicy 4 umieszczono w termostacie. Warunki to-



Rys. 7. Widma dezakomodacji próbek: ● — nr 2; ○ — nr 3; △ — nr 4. Dezakomodacja dziesiętna, d , obliczona między 30 i 300 sekundami

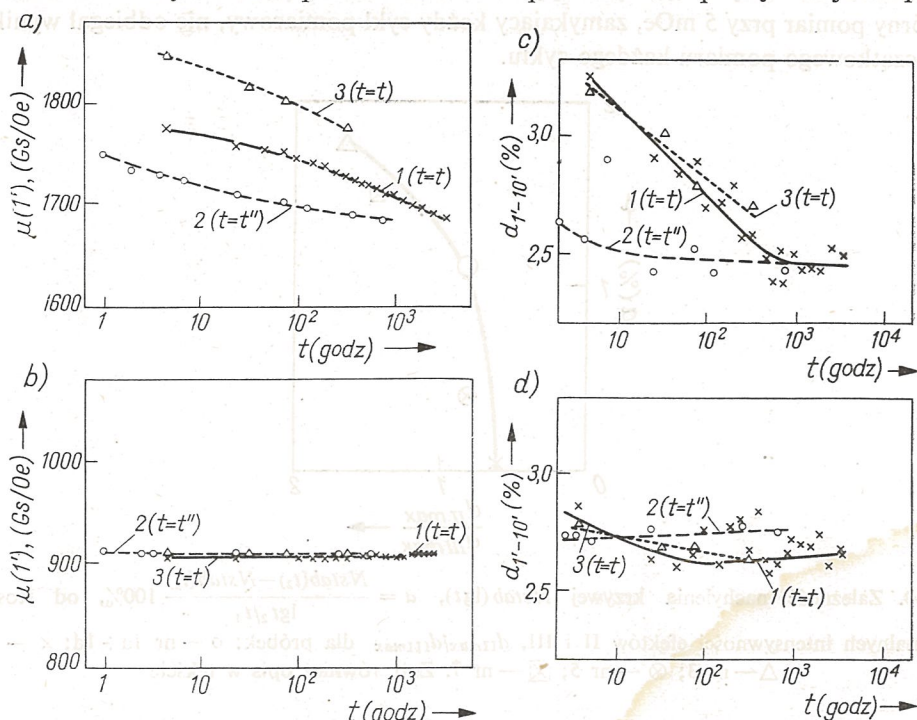


Rys. 8. Schemat przebiegu doświadczenia II; czas w godzinach

warzyszące doświadczeniu podano w tablicy 3. W krótkich wzajemnych odstępach czasu wykonywano kolejne identyczne cykle pomiarów przenikalności w funkcji czasu po rozmagnesowaniu magnetycznym. Cykl pomiarowy składał się z czterech dziesięciominutowych pomiarów w polach 5, 20, 100 i znów 5 mOe. Każdy pomiar poprzedzało rozmagnesowanie magnetyczne wykonywane po ustaleniu w próbce określonego pola pomiarowego. Natężenie pola rozmagnesowującego, H_m , wynosiło dla próbki 2: 6 Oe $\cong 13,5 H_c$, dla próbki 3: 5 Oe $\cong 20 H_c$. Samo rozmagnesowanie wykonywano wg programu I z tablicy 5. W ten sposób podczas jednego cyklu pomiarowego próbka była rozmagnesowywana $3 \times 4 = 12$ razy. Jednokrotne zwiększenie natężenia pola rozmagnesowującego, H_m , oraz jednokrotne znaczne wydłużenie działania pola H_m nastąpiły w momentach wskazanych odpowiednio literami „H” i „L” na rys. 8, który schematycznie przedstawia przebieg całego doświadczenia.

4.2.3. Omówienie wyników doświadczenia II

Mimo że w tym doświadczeniu mierzono bezwzględne wartości przenikalności, a nie, jak poprzednio, jej względne zmiany, nie przeszkadza to w porównaniu rezultatów obu doświadczeń. Na rys. 9a i 9b pokazano wartości przenikalności początkowej obu próbek

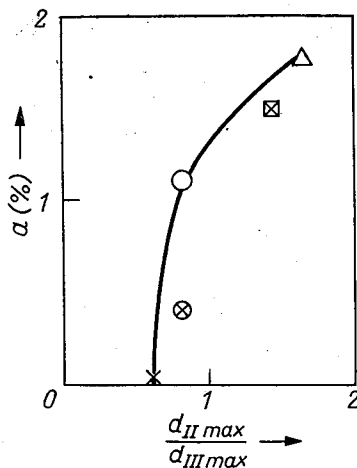


Rys. 9. Wyniki doświadczenia II dla pola pomiarowego 5 mOe: a) przenikalność dla próbki nr 3; b) przenikalność dla próbki nr 2; c) dezakomodacja dziesiąta dla próbki nr 3; d) dezakomodacja dziesiąta dla próbki nr 2. Wartości μ dotyczą pomiarów po 1 minucie po kolejnym rozmagnesowaniu magnetycznym, a d obliczono między 1 a 10 minutą po rozmagnesowaniu: Krzywe 1 przedstawiają wymienione wielkości w funkcji czasu t po pierwszym rozmagnesowaniu cieplnym, krzywe 2 — w funkcji czasu t'' po rozmagnesowaniu „L”, krzywe 3 — w funkcji czasu t po drugim rozmagnesowaniu cieplnym

mierzone w polu 5 mOe po 1 minucie po każdym rozmagnesowaniu magnetycznym — w funkcji czasu po rozmagnesowaniu cieplnym. Krzywe te są odpowiednikami krzywej „*N stab*” z rys. 2.

Pierwszym spostrzeżeniem jest, że częste rozmagnesowanie nie zapobiegło w próbce 3 wystąpieniu stabilizacji typu *N* (krzywa 1 na rys. 9a). W próbce 2 stabilizacja ta występuje w stopniu minimalnym (krzywa 1, rys. 9b). Rozmagnesowania były przykładane w różnych wzajemnych odstępach czasu (wskazanych przez punkty pomiarowe na rysunkach), a więc w różnych stadiach stabilizacji typu *O*, wydaje się zatem, że znikomy efekt stabilizacji *N* w tej próbce nie może być przypisany często powtarzanemu rozmagnesowaniu.

Monotoniczność przebiegu $\mu(1') = f(t)$ dla obu próbek również przemawia za powyższym wnioskiem. Wydaje się, że można spostrzeżenia te uogólnić stwierdzając, że częste i krótkotrwałe rozmagnesowania magnetyczne nie wywierają decydującego wpływu na pojawienie się stabilizacji typu *N*. Obserwacje poczynione przy innych doświadczeniach prowadzą do tego samego wniosku. Jak należało się spodziewać, dezakomodacja, *d*, próbki 3 wyraźnie maleje z czasem, natomiast dezakomodacja próbki 2 tendencji takiej nie przejawia (krzywe 1 odpowiednio na rys. 9c i 9d). Przebiegi przenikalności (nie zamieszczone z braku miejsca) w polach 20 i 100 mOe, odpowiednich dezakomodacji oraz współczynników niestabilności δ_5 i δ_{100} wykazują — w zależności od próbki — ten sam charakter. Powtórny pomiar przy 5 mOe, zamykający każdy cykl pomiarowy, nie odbiegał wynikami od początkowego pomiaru każdego cyklu.



Rys. 10. Zależność nachylenia krzywej $Nstab(lgt)$, $a = \frac{Nstab(t_2) - Nstab(t_1)}{\lg t_2 / t_1} 100\%$, od stosunku maksymalnych intensywności efektów II i III, $d_{II max} / d_{III max}$ dla próbek: o — nr 1a ÷ 1d; x — nr 2; Δ — nr 3; ⊗ — nr 5; ⊠ — nr 7. Zob. również opis w tekście

Podjęto próbę powiązania przytoczonych wyżej faktów ze wspomnianą różnicą w widmach dezakomodacji obu próbek. W tym celu obliczono stosunek maksymalnych intensywności dezakomodacji efektów II i III, $d_{II max} / d_{III max}$, dla każdej z próbek 1a ... 3 i odłożono w funkcji tego stosunku wartość nachylenia $a = \frac{\Delta(Nstab)}{\lg t_2 / t_1}$ odpowiednich krzywych

„*N stab*” w zakresie czasów właściwych II efektowi, posługując się danymi z rys. 2 i 9a, b. Mimo że zależność tę, pokazaną na rys. 10, wyznaczono zaledwie dla trzech rodzajów próbek, wydaje się, że sugeruje ona ogólną tendencję, którą można by wyrazić następująco: *efekt stabilizacji niewrażliwej na krótkotrwale rozmagnesowania magnetyczne, pojawiający się w określonej temperaturze, zwiększa się ze względnym wzrostem intensywności wysokotemperaturowych procesów relaksacyjnych (np. II i I wobec III; I wobec III; lub I wobec II, zależnie od temperatury obserwacji).*

Brak dla badanych próbek leżącej poza punktem Curie części widma temperaturowego dezakomodacji, odpowiadającej efektowi I, osłabia moc dowodową ogólności wysuniętego przypuszczenia. Z kolei zaobserwowany w doświadczeniu I gwałtowny wzrost nachylenia krzywej „*N stab*” w zakresie czasu możliwego pojawienia się stabilizacji, związanej z efektem I, skłania do podtrzymania ogólności wysuniętej tezy. Potwierdzeniem wydają się być również dwa dodatkowe punkty na rys. 10, otrzymane dla próbek 5 i 7; krzywa nie została przeprowadzona przez te punkty ze względu na warunki doświadczeń wykonanych na tych próbkach, różniące się nieco od warunków doświadczeń I i II.

Tablica 7

Zestawienie wartości przenikalności i dezakomodacji w charakterystycznych momentach doświadczenia II (wg. rys. 8)

Rozmagnesowanie cieplne	<i>t</i>	0(1')		<i>d</i> (1'–10')		U w a g i
	godz.	Gs/Oe		%		wg rys. 8
		pr. 2	pr. 3	pr. 2	pr. 3	
pierwsze	4,5	905,2	1774,7	2,860	3,24	pierwszy pomiar
	1513	902,9	1697,7	2,704	2,44	przed rozmagnesowaniem <i>H</i>
	1513	906,1	1697,7	2,750	2,44	po rozmagnesowaniu <i>H</i>
	3337	904,8	1685,6	2,670	2,49	przed rozmagnesowaniem <i>L</i>
	3337	909,5	1765,1	2,780	3,30	dla <i>t</i> = 1' po rozmagnesowaniu <i>L</i>
	4081	905,8	1685,7	2,759	2,44	ostatni pomiar przed drugim rozmagnesowaniem cieplnym
drugie	4,5	907,9	1845,2	2,786	3,18	pierwszy pomiar
	315	906,4	1774,3	2,643	2,70	koniec doświadczenia

Przejdźmy do dalszych spostrzeżeń. Zastosowane w czasie *t* = 1513 godz po pierwszym rozmagnesowaniu cieplnym rozmagnesowanie magnetyczne o 1,5-krotnie zwiększonym natężeniu¹⁾, przy pozostałych warunkach nie zmienionych, nie wywołało w próbce 3 zauważalnego efektu destabilizacyjnego, w próbce 2 — nieznaczny podskok przenikalności (rys. 9b). Wyraźną destabilizację, aczkolwiek niezupełną, spowodowało natomiast znaczne

¹⁾ Przyłożenie jeszcze silniejszego pola, a więc i prądu, powodowało nagrzewanie się uzwojenia.

zwiększenie czasu rozmagnesowania, do $t_m = 24 \text{ godz} = 86400 \text{ sek}$, przy polu o normalnie stosowanych tu natężeniach, wykonanego w czasie $t = 3337 \text{ godz}$ po rozmagnesowaniu cieplnym. Oczywiście dalsze rozmagnesowania w bezpośrednio następującym cyklu pomiarowym odbyły się wg zwykłego programu. Wyniki wykreślono na rys. 9 jako krzywe 2 (zob. także rys. 8), a w tablicy 7 podano odpowiednie zestawienie.

Dotychczasowe spostrzeżenia prowadzą do wniosku, że energia dostarczana przez krótkotrwałe (wobec stałych czasu dyfuzji) działanie pola rozmagnesowującego o natężeniu rzędu kilkunastu H_c może być niewystarczająca, by przewyciężyć rosnące z czasem siły uporządkowania dyfuzyjnego, a tym samym nie jest zdolna do wytworzenia izotropowego rozkładu defektów. Zaobserwowany jednocześnie skutek długotrwałego rozmagnesowania magnetycznego nasuwa myśl, że możemy mieć w tym przypadku do czynienia z rozmagnesowaniem zachodzącym w skali mikroskopowej, które wg Néela [20], aby być skutecznym, powinno być realizowane w czasie porównywalnym z największą stałą czasu uczestniczących procesów relaksacyjnych. W tym przypadku warunek niezależności układów domenowych przed i po rozmagnesowaniu nie jest oczywiście konieczny (jeśli chodzi o dyfuzję magnetyczną).

Kończąc opis tego doświadczenia zauważmy jeszcze, że po drugim rozmagnesowaniu cieplnym nastąpiło w obu próbkach zwiększenie przenikalności mierzonych po tych samych czasach po rozmagnesowaniu magnetycznym. Przypisujemy to możliwej różnicy w szybkości studzenia próbek od temperatury Curie, szczególnie w zakresie temperatur wyższych (zob. np. doświadczenie IV).

4.2.4. Podsumowanie wyników doświadczeń I i II

1. W ferrytach Mn-Zn wykazujących dyfuzyjne opóźnienie magnetyczne może wystąpić po rozmagnesowaniu cieplnym stabilizacja magnetyczna, nazwana typu *N*, niewrażliwa na krótkotrwałe (wobec stałych czasu zachodzących procesów stabilizacyjnych) rozmagnesowania magnetyczne o natężeniu kilkunastu H_c .

2. Objawem stabilizacji *N* jest uzyskiwanie bezpośrednio po kolejnych rozmagnesowaniach magnetycznych coraz mniejszych, w miarę upływu czasu, wartości przenikalności, dezakomodacji oraz współczynników niestałości amplitudowej przenikalności. Opisane efekty badano w zakresie Rayleigha.

3. Stabilizacja typu *N* jest odwracalna w następstwie rozmagnesowania cieplnego — nie jest zatem procesem starzeniowym, wobec czego można zaproponować wniosek 4.

4. Pojawienie się stabilizacji typu *N* uzależniamy od stosunków ilościowych między intensywnościami oraz energiami aktywacji poszczególnych efektów relaksacji magnetycznej (III, II i I efekt) w ten sposób, że:

1) wielkość bezwzględna stabilizacji *N* jest tym większa, im większa jest energia stabilizacji Néela, W_0 , wysokotemperaturowych efektów względem niskotemperaturowych i

2) wielkość względna stabilizacji *N*, tzn. jej stosunek do całkowitej zachodzącej stabilizacji, jest tym większa, im większe są energie aktywacji efektów wysokotemperaturowych wobec niskotemperaturowych.

5. Można przypuszczać, że w procesie rozmagnesowania magnetycznego zachodzą

jednocześnie dwa podane przez Néela [20] i Brissonneau [21] mechanizmy rozmagnesowań:

- submakroskopowy, powodujący redystrybucję układu domenowego, wymagający stosowania natężeń pól rozmagnesowujących rzędu kilku — kilkunastu H_c , o skuteczności mało zależnej od czasu działania rozmagnesowania,
- mikroskopowy, o skuteczności zależnej od czasu działania pola rozmagnesowującego, którego natężenie w tym przypadku może być prawdopodobnie mniejsze niż poprzednio¹⁾.

Wydaje się logiczne przypisać mechanizmowi submakroskopowemu zdolność destabilizacji do poziomu „ N stab”. Dalsza destabilizacja wymaga odpowiednio wydłużonego czasu rozmagnesowania, a więc działania mechanizmu mikroskopowego.

4.3. Rozmagnesowania magnetyczne różnokierunkowe (doświadczenie III)

4.3.1. Uzasadnienie celowości doświadczenia

W dotychczas rozpatrywanych doświadczeniach próbki rozmagnesowywano polem magnetycznym o kierunku zgodnym z polem pomiarowym. Były to więc rozmagnesowania ukierunkowane. Opisana w poprzednich rozdziałach niepełna destabilizacja zachodzi wewnątrz lub na granicach obszarów domenowych. Przyłożenie pola rozmagnesowującego o kierunku różniącym się od kierunku pola pomiarowego nie powinno więc zwiększyć w próbkach polikrystalicznych skuteczności destabilizacji. Jednak nie zawsze jest możliwe rozmagnesowanie próbki przez uzwojenie robocze lub pomiarowe, szczególnie gdy mamy do czynienia z próbkami różnych kształtów. Konieczne bywa wówczas rozmagnesowanie w polu zewnętrznym, którego kierunek w ogólności nie musi się pokrywać z kierunkiem pola roboczego lub pomiarowego. Jeżeli założymy, że próbka jest niejednorodna, to niejednorodność ta wespół z ukierunkowanym polem rozmagnesowującym może być źródłem trudnych do uchwycenia anizotropii mierzonych własności. Moser np. uzależnia uzyskanie statystycznie izotropowego stanu początkowego od rozmagnesowania „polem bezkierunkowym” [33]. Dlatego postanowiliśmy zbadać wpływ różnokierunkowego rozmagnesowania magnetycznego na stan magnetyczny próbek.

4.3.2. Opis doświadczenia i omówienie wyników

4.3.2.1. Doświadczenie podstawowe

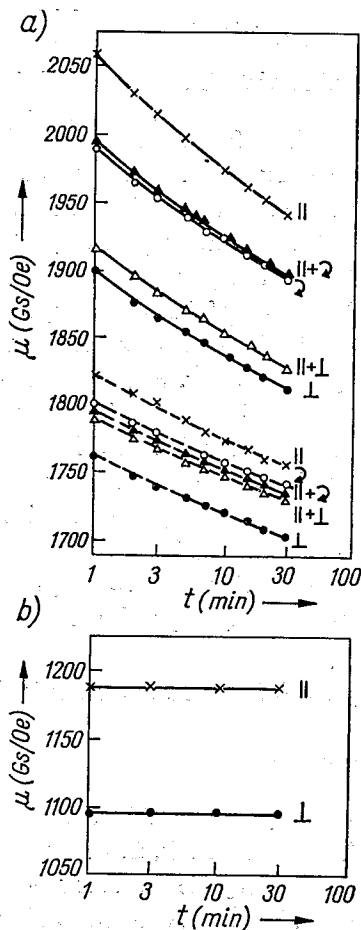
Do doświadczenia wzięto początkowo próbki 5 i 8 wg tablicy 2. Uzwojone próbki umieszczono w szczelinie elektromagnesu tak, że mogły się w niej obracać o 360° wokół swojej średnicy. Elektromagnes i uzwojenie pomiarowo-rozmagnesowujące były zasilane ze wspólnego autotransformatora. Zapewniało to współbieżność jednoczesnych rozmagnesowań, np. poprzecznego i zgodnego z polem pomiarowym.

Elektromagnes z próbką był umieszczony w suszarce w $+30^\circ\text{C}$. Inne warunki doświadczenia podano w tablicy 3. Indukcja rozmagnesowująca w szczelinie elektromagnesu (bez

¹⁾ Do problemu tego powrócimy obszerniej przy omawianiu doświadczenia V.

próbki) wynosiła 3100 Gs, co zapewniało rozmagnesowanie próbki do nasycenia. Natężenia pól rozmagnesowujących przez uzwojenie wynosiły dla obu próbek 5,0 Oe. Program rozmagnesowań: II lub III wg tablicy 5. Mierzono przenikalność początkową między 1 a 30 minutą po rozmagnesowaniu. Zastosowano następujące kombinacje kierunków rozmagnesowań wobec kierunku pola pomiarowego:

- I — równoległe ($\parallel$),
- II — prostopadłe ($\perp$),
- III — „wirujące” ($\odot$) (przez obrót próbki o 360°C w szczelinie elektromagnesu podczas rozmagnesowania),
- IV — równoległe łącznie z prostopadłym ($\parallel + \perp$),
- V — równoległe łącznie z „wirującym” ($\parallel + \odot$).



Rys. 11. Przebiegi $\mu(t)$ po różnokierunkowych rozmagnesowaniach magnetycznych — doświadczenie III. Temperatura $T = +30^\circ\text{C}$: a) krzywe ciągłe dotyczą próbki nr 5, przerywane — próbki nr 8; b) próbka 4

Wyniki dla próbek 5 i 8 przedstawiono na rys. 11a. Wartości przenikalności są największe po rozmagnesowaniu równoległym do pola pomiarowego, najmniejsze po prostopadłym.

Pozostałe warianty dają wyniki pośrednie. Wartości dezakomodacji odpowiadające poszczególnym wariantom rozmagnesowań podaje tablica 8a. Przy powtarzaniu doświadczenia otrzymywano wyniki całkowicie powtarzalne, nie dające żadnych powodów do mniemania o zwiększeniu skuteczności destabilizacyjnej rozmagnesowania różnokierunkowego tym bardziej, że próbki użyte w doświadczeniu były rozmagnesowane cieplnie na kilka miesięcy przed jego wykonaniem.

Tablica 8a

Dezakomodacja w zależności od kierunku zastosowanego rozmagnesowania magnetycznego

Wariant rozmagn.		Dezakomod. $d(1'-10')$, % próbek wg tablicy 2			$d_{(0,1^h-1^h)}$, %	$d_{(1^h-10^h)}$, %	$d_{(10^h-100^h)}$, %
oznacz.	numer	5	8	4	dane wg Rischa [35]		
	I	4,16	2,70	~0	15,67	4,74	2,33
⊥	II	3,36	2,37	~0	7,37	3,54	2,21
↷	III	3,63	2,43	—	—	4,87	—
+⊥	IV	3,32	2,45	—	—	—	—
+↷	V	3,65	2,52	—	—	—	—

Tablica 8b

Dezakomodacja różniczkowa, d_A , w zależności od kierunku rozmagnesowania magnetycznego i od czasu

Dezakomodacja różniczkowa	Próbka (Numer)	Kierunek rozmagnesowania	Czas t (min)							
			1	2	3	5	10	30		
$d_A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mu}{\Delta t}, \%$	5		5,39	4,21	3,96	3,83	3,52	3,395		
		⊥	3,82	3,68	3,38	3,17	3,03	2,82		
	8		3,12*	2,70	2,70	2,53	2,63	2,15		
		⊥	2,80	2,35	2,34	2,33	2,17	2,12		
	Blacha elektrotechniczna wg Rischa [35]		Czas t (godz)							
			0,1	0,5	1	5	10	50	100	200
			36,4	8,90	6,23	4,27	3,00	2,03	1,75	1,48
		—	13,4	6,38	4,85	3,14	2,86	1,62	1,62	1,21

Doświadczenie ujawniło natomiast, że w badanych próbkach rozmagnesowania kierunkowe indukują dość znaczną anizotropię, którą za Barbier i Ferlin-Guion [34] będziemy nazywali anizotropią rozmagnesowania. Autorzy ci badali krzywe magnesowania liczy-

nych materiałów o strukturze kubicznej — o trzech osiach łatwego magnesowania, jednoosiowych — heksagonalnych i kubicznych z wprowadzoną anizotropią naprężeń. Anizotropię rozmagnesowania stwierdzili wyłącznie w materiałach kubicznych wolnych od naprężeń. Wprowadzenie naprężeń niwelowało kierunkowy wpływ pola rozmagnesowującego.

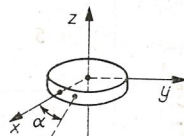
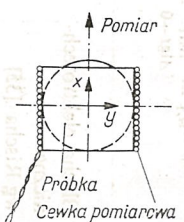
Anizotropię rozmagnesowania w niestopowej stali i blachach elektrotechnicznych badał również Risch [35]. Rezultaty, które otrzymał, są analogiczne z naszymi.

4.3.2.2. Anizotropia rozmagnesowania a anizotropia kształtu

Można przypuszczać, że zaobserwowana anizotropia rozmagnesowania, mierzona w naszym przypadku na pierścieniach, może mieć związek z anizotropią kształtu próbek wynikającą np. z odmienności konfiguracji geometrycznej w różnych kierunkach bądź np. z ukierunkowanej struktury ziarnistej (anizotropia „technologiczna”). Sprawdzeniu tych przypuszczeń poświęcono dwa doświadczenia, każde wykonane na próbkach specjalnie przygotowanych. Do pierwszego doświadczenia z materiału odpowiadającego próbce 5 wyprasowano sześcián, w którym kierunek prasowania przyjęto za oś z . Z sześciánu wycięto 3 pierścienie tak, że płaszczyzny ich obwodów leżały w płaszczyznach xoy , xoz i $yoiz$.

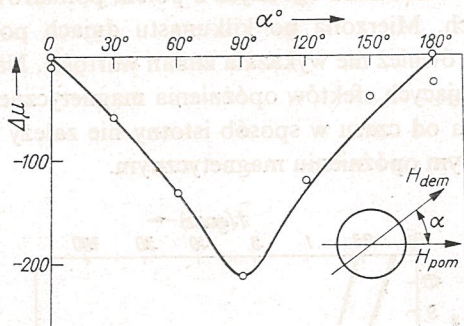
Tablica 9

Zestawienie wyników rozmagnesowań pod różnymi kątami płytek ferrytowych

Próbka (Numer)	Kierunek		$\Delta\mu$	μ		
	pomiaru	rozmagnesowania				
9a	X	X	0,0	2955		
	X	Y	-150,0			
	X	Z	-157,0			
	Y	X	- 59,3			
	Y	Y	0,0			
	Y	Z	- 47,3			
9b	X	X	0,0	1907		
	X	Y	- 51,6			
	X	Z	- 27,9			
	Y	X	- 39,8			
	Y	Y	0,0			
	Y	Z	- 34,3			
9a	X+ α	X+ α	0,0	2955		
	X+ α	Y+ α	-121,0			
	Y+ α	X+ α	- 17,4			
	Y+ α	Y+ α	0,0			

Próbki te oznaczono w tablicy 2 odpowiednio jako 6a, 6b i 6c. W wyniku pomiaru przeprowadzonego analogicznie jak w 4.3.2.1 otrzymano wyniki wzajemnie zgodne ilościowo (między próbkami 6a-6c) i jakościowo zgodne z wynikami próbek 5 i 8. Ilościowa zgodność wyników wskazuje na niezależność anizotropii rozmagnesowania od ewentualnej anizotropii pochodzenia technologicznego.

Do drugiego doświadczenia z tego samego co poprzednio materiału wycięto w niewyróżnionej płaszczyźnie okrągłe plasterki o możliwie dużym stosunku średnicy do wysokości, równym 22,4 (próbki 9a i 9b w tablicy 2). Plasterki te rozmagnesowywano kolejno wzdłuż osi x , y , z i mierzono w ustalonym kierunku x lub y przenikalność tak, jak to po-



Rys. 12. Zależność $\Delta\mu = \mu(\alpha) - \mu(0^\circ)$ od kąta α między kierunkami pól rozmagnesowującego i pomiarowego (próbka nr 9a)

kazano w tablicy 9. Pomiary przeprowadzono na opisanym w rozdziale 3 mostku odchyłek, mierząc różnice indukcyjności między nie zmieniającą się cewką odniesienia a specjalną cewką o kształcie kieszonki, w której umieszczano w pożądanym położeniu plasterki jako rdzeń (zob. rysunek w tablicy 9). Pomiar wykonywano po 1 minucie po zakończeniu rozmagnesowania. Następnym krokiem było zmierzenie zmian przenikalności w funkcji kąta między ustalonym kierunkiem pola pomiarowego a zmieniającym się co 30° kierunkiem pola rozmagnesowującego. Uzyskany wynik pokazano na rys. 12. Krzywa tam zamieszczona może być w przybliżeniu opisana zależnością: $\Delta\mu(\alpha) = \Delta\mu(90^\circ)\sin^2\alpha$.

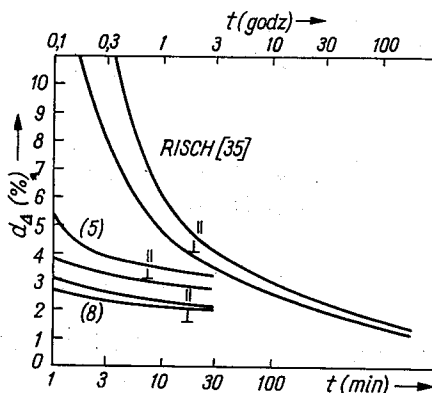
Wyniki tych doświadczeń zostały podane jako odchylenia $\Delta\mu$ obliczone dla każdej próbki od określonego poziomu przenikalności. Wartości $\Delta\mu$ zostały wyznaczone na drodze dość długich przeliczeń. Niezbędne do obliczeń wartości toroidalnej przenikalności początkowej wyznaczono, po wykonaniu wszystkich doświadczeń z tej serii, na pierścieniu powstałym z plasterka przez wycięcie w środku otworu. Współczynnik odmagnesowania plasterka wyznaczono drogą eksperymentalną; otrzymano: $(N/4\pi)_{exp} = 0,027439459$, wobec wartości teoretycznej obliczonej ze wzoru podanego w [5, str. 99]: $(N/4\pi)_{teor} = 0,033083$. Oczywiście należy sobie zdawać sprawę z błędów, jakimi mogą być obarczone cytowane tu wyniki liczbowe (w grę wchodzi mikronowe różnice wymiarów plasterków w różnych kierunkach). Należy te wyniki traktować jako wyznaczające kierunek i proporcje zmian, a nie jako dane absolutne.

Oba opisane tu doświadczenia zdecydowanie świadczą o niezależności anizotropii rozmagnesowania od anizotropii kształtu.

4.3.2.3. Zależność anizotropii rozmagnesowania od czasu

Zależność tę należy rozpatrzyć na przykładzie dwu próbek: próbki, która nie wykazuje dyfuzyjnego opóźnienia magnetycznego, i próbki, w której ono występuje. Zajmijmy się przypadkiem pierwszym.

Badaliśmy próbkę pozostającą przez 6 lat w spokoju w stałej temperaturze i praktycznie nie wykazującą dezakomodacji przenikalności (próbka nr 4 z tablicy 2 o widmie DA wg rys. 7). Jak wynika z rys. 11b, również w niej pojawia się anizotropia rozmagnesowania. Trwające przez 6 lat ciągle pomiary przenikalności, zapoczątkowane oczywiście rozmagnesowaniem magnetycznym o kierunku zgodnym z polem pomiarowym, nie wykazały mierzalnych zmian czasowych. Mierzona po kilkunastu dniach po rozmagnesowaniu poprzecznym przenikalność również nie wykazała zmian wartości. Należy zatem stąd wnosić, że w próbkach nie wykazujących efektów opóźnienia magnetycznego interesująca nas anizotropia rozmagnesowania od czasu w sposób istotny nie zależy oraz — co więcej — nie ma ona źródła w dyfuzyjnym opóźnieniu magnetycznym.



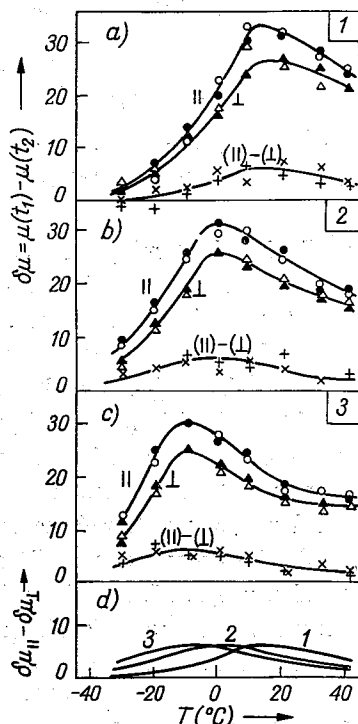
Rys. 13. Przebieg dezakomodacji różniczkowej d_A w funkcji czasu. Górna skala odnosi się do krzywej otrzymanej z publikacji [35], skala dolna — do krzywych dla próbek nr 5 i nr 8

W próbkach 5 i 8, o wyraźnych efektach relaksacyjnych, występuje widoczna zależność przebiegów czasowych od kierunku rozmagnesowania. W tablicy 8a zestawiono średnie wartości dezakomodacji dziesiętnej dla badanych próbek oraz dla badanej przez Rischa [35] blachy elektrotechnicznej — w zależności od wszystkich zastosowanych kierunków rozmagnesowania. Przy analizie tych wyników nasuwa się pytanie, czy efekt anizotropii magnetycznej utrzyma się, czy też zostanie zmieniony przez rosnące w czasie ciśnienie opóźnienia magnetycznego tak, że po dostatecznie długim okresie zniknie zależność stanu magnetycznego od kierunku rozmagnesowania. W tym celu obliczono dezakomodację różniczkową $d_A = \lim_{\Delta \lg t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \mu}{\mu} \right)$ w funkcji czasu, tablica 8b. Wg tej tablicy wykreślono na rys. 13 zależności $d_A(t)$ po poprzecznym i podłużnym rozmagnesowaniu. Dla każdej z wymienionych próbek różnica $d_{A||} - d_{A\perp}$ maleje z czasem. Przyjmując, że to dążenie utrzymuje się również dla dalszych czasów, wyznaczono dla każdej próbki drogą ekstrapolacji czas t_z , w którym $d_{A||} = d_{A\perp}$. Wyznaczono również czas t'_z , odpowiadający ekstrapolo-

wanym punktom przecięcia przebiegów $\mu(t)$ po obu rodzajach rozmagnesowania (przy założeniu, że po czasie $t > 30$ min nachylenie tych krzywych nie ulega już zmianie). Po porównaniu tych czasów okazuje się, że dla każdej próbki $t < t_0$. Oznacza to, że krzywe $\mu(t)$ dla różnych kierunków rozmagnesowania osiągają równoległość przed zrównaniem się wartości przenikalności — a zatem zrównanie nie następuje — skutek kierunkowości rozmagnesowania pozostaje. Ponieważ oparliśmy się tutaj dwukrotnie na ekstrapolacji przebiegów o bardzo zbliżonych nachyleniach, wniosek ten należy potraktować jedynie jako hipotezę. Prawdopodobieństwo jej zwiększa brak zaprzeczających faktów.

4.3.2.4. Anizotropia rozmagnesowania a współczynniki charakteryzujące dyfuzyjne opóźnienie magnetyczne

Na rys. 11 oraz w tablicach 8a i b widoczna jest znaczna zależność szybkości zmian przenikalności w czasie od kierunku pola rozmagnesowującego, szczególnie w początko-



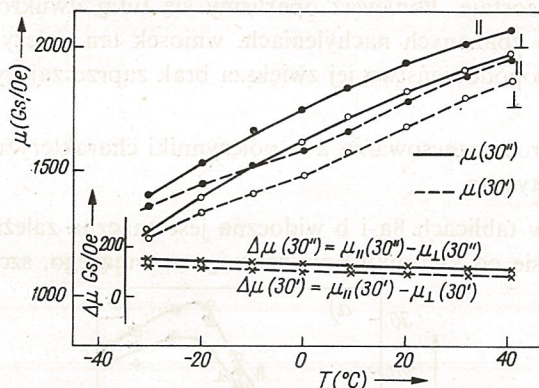
Rys. 14. Przebiegi $\delta\mu = \mu(t_1) - \mu(t_2)$ oraz $\delta\mu_{||} - \delta\mu_{\perp}$ w funkcji temperatury dla próbki nr 5: a) przedział czasu 1: $t_1 = 30$ sek, $t_2 = 60$ sek, b) przedział czasu 2: $t_1 = 3$ min, $t_2 = 6$ min, c) przedział czasu 3: $t_1 = 15$ min, $t_2 = 30$ min, d) $[\delta\mu_{||} - \delta\mu_{\perp}]$ — porównanie krzywych z rysunków a ÷ c; nad każdą krzywą podano numer przedziału czasu

U w a g a. Wielkość $\delta\mu$ przyjęto jako miarę szybkości zmian $\mu(\lg t)$ w odpowiednich przedziałach czasu ($t_2 - t_1$), przy czym zawsze $t_2/t_1 = 2$. Każda z krzywych a ÷ c była wyznaczana dwukrotnie

wych okresach zmian. Nasuwa się pytanie, czy wyznaczone z kształtu krzywych $\mu(t)$ współczynniki charakteryzujące dyfuzyjne opóźnienie magnetyczne θ_1 , θ_2 , k , $W_a^{(1)}$ itd. różnią

¹⁾ θ_1 i θ_2 — krańcowe stałe czasu, k — względna szerokość widma, W_a — średnia energia aktywacji.

się dla odmiennych kierunków rozmagnesowania. Wiadomo, że widmo temperaturowe dezakomodacji jest niezwykle czułe na wszelkie zmiany wartości współczynników opóźnienia magnetycznego [39]. Dlatego zdjęto dla próbki nr 5 widma temperaturowe dezakomodacji po rozmagnesowaniach równoległym i prostopadłym do pola pomiarowego.



Rys. 15. Zależność przenikalności od temperatury dla różnych kierunków rozmagnesowania i czasów pomiaru oraz odpowiednie różnice przenikalności (próbka nr 5)

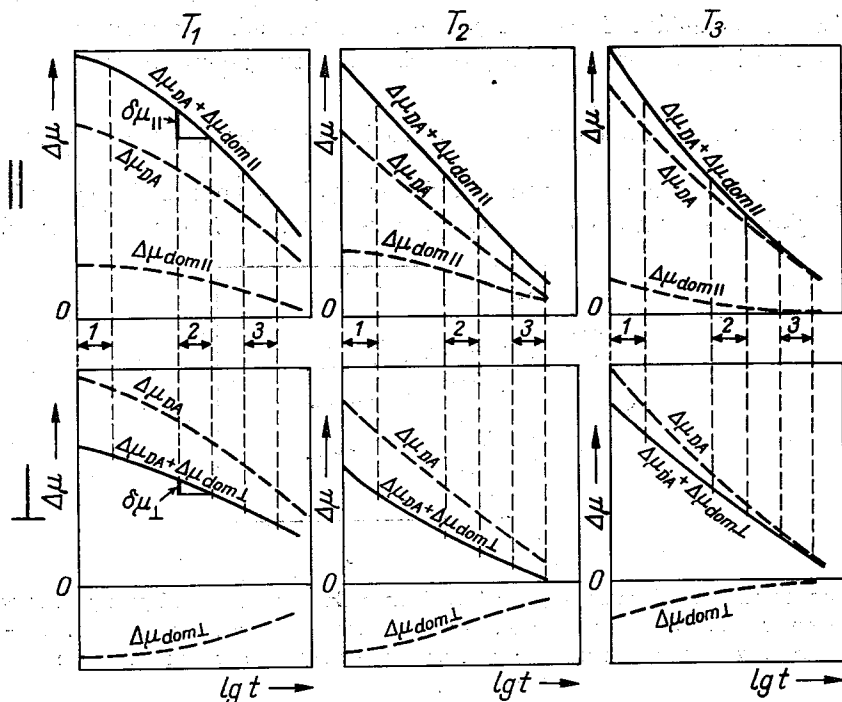
Mierzono przenikalność między 0,5 a 30 minutami po rozmagnesowaniu. Wyniki przedstawiono na rys. 14a, b, c, odpowiednio dla trzech odcinków czasu $0,5' \div 1'$; $3' \div 6'$ i $15' \div 30'$, jako zmiany różnicy $\delta\mu = \mu(t_1) - \mu(t_2)$ w funkcji temperatury. Okazuje się, że kierunkowość rozmagnesowania wywiera istotny wpływ jedynie na mierzoną intensywność efektu opóźnienia, a więc na wyznaczaną energię stabilizacji Néela, W_o . Stałe czasu, θ_1 , θ_2 , względna szerokość widma, k , ani energie aktywacji, W_a , nie zostają w istotny sposób zmienione. Świadczy o tym brak zauważalnego przesunięcia maksimów widm odpowiadających równoległym i poprzecznym rozmagnesowaniom, niezależnie od czasów, dla jakich te widma wyznaczono. Z innych spostrzeżeń warto zanotować, że anizotropia rozmagnesowania wyrażona tu różnicą $\mu_{||}(t_1) - \mu_{\perp}(t_1)$ lekko wzrasta z obniżaniem się temperatury, przy jednocześnie malejącej przenikalności, μ , rys. 15. Różnica między nachyleniami krzywych $\mu_{||}(t)$ i $\mu_{\perp}(t)$ zmienia się również z temperaturą, osiągając słabe maksimum w okolicy maksimum widma dezakomodacji, rys. 14. Jeśli się przyjmie, że mierzony przebieg zmienności przenikalności w czasie składa się z niezależnej od kierunku rozmagnesowania dezakomodacji i zależnych od tego kierunku zmian struktury domenowej, można przy pomocy konstrukcji pokazanej na rys. 16a starać się jakościowo wyjaśnić otrzymane wyniki¹⁾.

Wyraźnie uwidacznia się podobieństwo krzywych na rys. 14d z wynikającymi z zaproponowanego modelu krzywymi z rys. 16b. Skłania to do uznania przyjętych przy konstrukcji modelu założeń:

1. wielkość dezakomodacji, która jest miarą stabilizacji wynikającej z dyfuzyjnego opóźnienia magnetycznego nie zależy od kierunku rozmagnesowania i

¹⁾ Założenie to i zaproponowany model okazały się również przydatne do wyjaśnienia wyników doświadczenia V.

2. mierzona zmienność przenikalności po rozmagnesowaniu jest wynikiem superpozycji zmienności dyfuzyjnej (dezakomodacji) i zmienności struktury domenowej. Kierunek ostatniej zmienności zależy od kierunku pola rozmagnesowującego.



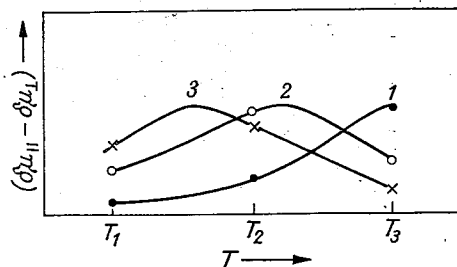
Rys. 16a. Model, którego przyjęcie umożliwia interpretację przebiegów $\delta\mu_{||} - \delta\mu_{\perp}$ z rys. 14d

$\Delta\mu$ — składowa przenikalności zależna od czasu, przy czym:

$\Delta\mu_{DA}$ — niezależny od kierunku rozmagnesowania przyczynek od dyfuzyjnej zmienności przenikalności,

$\Delta\mu_{dom}$ — przyczynek od zmienności struktury domenowej wytworzonej w wyniku rozmagnesowania, o kierunku (znaku) zależnym od kierunku rozmagnesowania.

$T_1 < T_2 < T_3$. Przedziały czasu 1, 2, 3, odpowiadają przedziałom na rys. 14. Symbol $\delta\mu$ ma to samo znaczenie co na rys. 14



Rys. 16b. Różnica $\delta\mu_{||} - \delta\mu_{\perp}$ obliczona dla odpowiednich temperatur i przedziałów czasu wg rys. 16a. Przez otrzymane punkty można przeprowadzić krzywe wyraźnie podobne do krzywych na rys. 14d

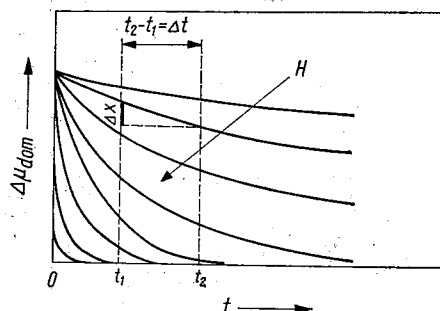
Powyższe składa się na niezwykle istotny wynik tego doświadczenia: Współczynniki charakteryzujące dyfuzyjne opóźnienie magnetyczne

z wyjątkiem jego intensywności nie zależą w istotny sposób od kierunku rozmagnesowania.

Dla zastosowań technicznych ważny jest natomiast drugi wynikający stąd wniosek; po rozmagnesowaniu zgodnym z polem pomiarowym otrzymuje się największe wartości zmienności przenikalności. Z tego też powodu w pomiarach technicznych powinna być w miarę możliwości zachowana zasada zgodności pól rozmagnesowującego i pomiarowego.

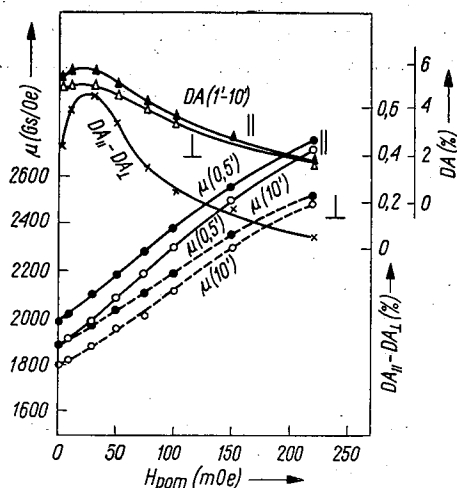
4.3.2.5. Anizotropia rozmagnesowania w zależności od natężenia pola pomiarowego

Idąc za myślą poprzedniego rozdziału, tj. uznając istnienie niestabilnej struktury domenowej wywołanej rozmagnesowaniem magnetycznym, należałoby spodziewać się za-



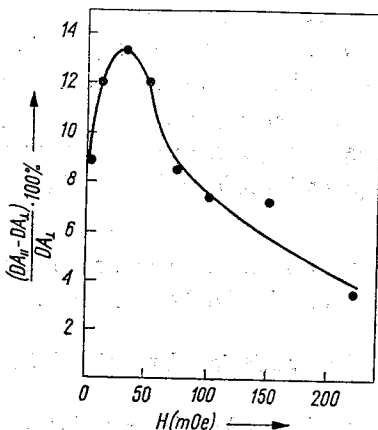
Rys. 17. Proponowany model zmian $\Delta\mu_{dom}$ w funkcji czasu dla różnych natężeń pola pomiarowego przykładanego bezpośrednio po rozmagnesowaniu (strzałka wskazuje kierunek wzrostu pola). Δt — przedział czasu, w którym wykonuje się pomiar; Δx — zmiana $\Delta\mu$ w tym przedziale

leżności tej struktury od natężenia pola pomiarowego. Szybkość stabilizacji struktury powinna wzrastać ze wzrostem natężenia pola pomiarowego np. w sposób pokazany na rys. 17. Na rysunku tym chcieliśmy wskazać jedynie na charakter zależności od pola po-



Rys. 18. Zależność przenikalności i dezakomodacji dla różnych kierunków rozmagnesowania oraz różnicy $DA_{||} - DA_{\perp}$ od natężenia pola pomiarowego (próbka nr 5)

miarowego przebiegów $\Delta\mu_{dom}(t)$, nie przesądzając o ich kształcie. Przy dostatecznie dużym polu stabilizacja struktury domenowej powinna nastąpić przed momentem pomiaru i wówczas szybkości zmian przenikalności po rozmagnesowaniu równoległym i poprzecznym, jako pochodzące wyłącznie od dyfuzji, powinny się ze sobą zrównać. Przeprowadzone na próbce 5 odpowiednie doświadczenie potwierdziło przewidywania. Mierzono po rozmagnesowaniu poprzecznym i podłużnym przenikalności i ich dezakomodację przy natężeniach pól od 1,67 mOe do 220 mOe. Wyniki pokazano na rys. 18.



Rys. 19. Zależność względnej różnicy szybkości zmian przenikalności, po rozmagnesowaniach równoległym i poprzecznym, od natężenia pola pomiarowego (próbka nr 5)

Zgodnie z przewidywaniami względna różnica szybkości zmian przenikalności, $\frac{DA_{||} - DA_{\perp}}{DA_{\perp}}$ maleje wraz ze wzrostem natężenia pola — rys. 19, co przemawia za zaproponowanym modelem.

Warto jeszcze zauważyć, że podobnie jak w badanym przez Barbier i Ferlin-Guion [34] stopie Fe-Ni następuje w badanej przez nas próbce w zakresie Rayleigha wzrost anizotropii rozmagnesowania z polem pomiarowym.

4.3.3. Podsumowanie wyników doświadczenia III

1. Rozmagnesowanie magnetyczne w wyróżnionym kierunku powoduje w badanych próbkach wytworzenie się anizotropowej nadstruktury domenowej, co objawia się m.in. największą wartością przenikalności początkowej przy zachowaniu zgodności kierunków pól rozmagnesowującego i pomiarowego. Zjawisko to bywa nazywane anizotropią rozmagnesowania magnetycznego [34].

2. Efekty anizotropii magnetycznej są:

- mało zależne od czasu w próbkach wolnych od dyfuzyjnego opóźnienia magnetycznego,
- zależne od czasu, w próbkach wykazujących dyfuzyjne opóźnienie magnetyczne, przy czym prawdopodobnie zależność ta w miarę upływu czasu od zakończenia rozmagnesowania zanika, co objawia się asymptotycznym dążeniem do równo-

ległości przebiegów czasowych przenikalności po obu kierunkach rozmagnesowania. Innymi słowy $[\mu_{\parallel}(t) - \mu_{\perp}(t)] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \text{const} \neq 0$ i $\frac{d\mu_{\parallel}(t)}{d \lg t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{d\mu_{\perp}(t)}{d \lg t}$.

Dążenie to wzmacnia się z natężeniem pola pomiarowego.

3. Kierunkowość rozmagnesowania magnetycznego nie wywiera istotnego wpływu na wyznaczenie z pomiarów dezakomodacji przenikalności stałe charakteryzujące opóźnienie dyfuzyjne, jak stałe czasu θ_1 , θ_2 , względna szerokość widma k i energia aktywacji W_a . Większym błędem może być obarczona wyznaczana z intensywności danego efektu relaksacyjnego energia stabilizacji W_0 . Mierzona intensywność jest wynikiem superpozycji dwóch efektów: relaksacyjnego i stabilizacji struktury domenowej.

4. Ze wzrostem natężenia pola magnetycznego wzrasta szybkość stabilizacji struktury domenowej. Pociąga to za sobą zmniejszanie się wraz ze wzrostem czasu pomiaru zależności mierzonej zmienności przenikalności od kierunku rozmagnesowania.

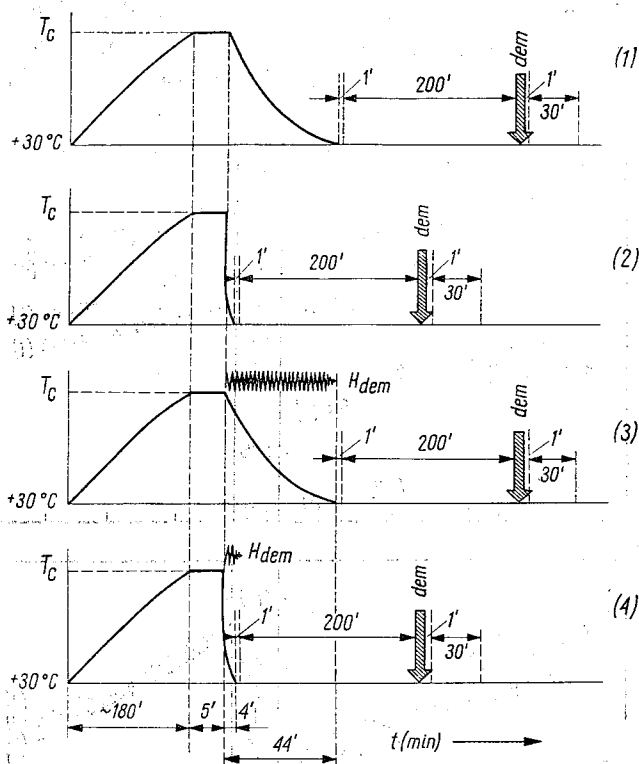
4.4. Rozmagnesowania cieplne i magnetyczne (doświadczenie IV)

4.4.1. Uzasadnienie celowości doświadczenia

Dane zebrane w tablicy 1 wyraźnie wskazują, że treść wymienionego w tytule doświadczenia była przedmiotem najliczniejszej grupy prac z zakresu rozmagnesowań. Z cytowanych jedynie trzy [8], [15] i [17] dotyczyły ferrytów, w tym manganowo-cynkowych — dwie [8], [17]. Miyahara i Yamadaya [17] otrzymali przenikalność większą po rozmagnesowaniu cieplnym, v. Klitzing i Zentgraf [8] w temperaturze pomiaru $+23^\circ\text{C}$ — większą po rozmagnesowaniu magnetycznym, a w $+138^\circ\text{C}$ — większą po cieplnym. Z pomiarów własnych, z okresu poprzedzającego niniejszą pracę, otrzymywaliśmy w temperaturach pokojowych zawsze większą wartość przenikalności po rozmagnesowaniu magnetycznym. Rozbieżności wyników oraz niemożliwość pominięcia w całości pracy tego zagadnienia skłoniły nas do wykonania niżej opisanego doświadczenia. Przy układaniu jego programu kierowano się głównie przesłankami wynikającymi z faktu istnienia opóźnienia magnetycznego. W związku z tym zróżnicowano szybkość chłodzenia próbek od temperatury Curie; zastosowano ponadto chłodzenie próbek w przemiennym polu magnetycznym o natężeniu kilkunastu H_c . Intencją ostatniego zabiegu było niedopuszczenie do stabilizacji magnetycznej podczas chłodzenia.

4.4.2. Opis doświadczenia

Doświadczenie przeprowadzono na dwóch próbkach: 5 i 7, wykazujących dezakomodację i jednej nr 4, praktycznie bezdezakomodacyjnej. Przed każdym pomiarem uzwojoną próbkę umieszczano w szklanej ampułce, w której wytwarzano próżnię rzędu 10^{-3} mm Hg. Zabezpieczało to próbki przed ewentualnym utlenieniem. Poprzez zatopione w ściance ampułki doprowadzenia próbka mogła być dowolnie przyłączana elektrycznie. Rozmagnesowanie cieplne przeprowadzano w suszarce. Szybkość chłodzenia regulowano intensywnością nawiewu powietrza do suszarki. W ustalonym momencie chłodzenia ampulkę roz-



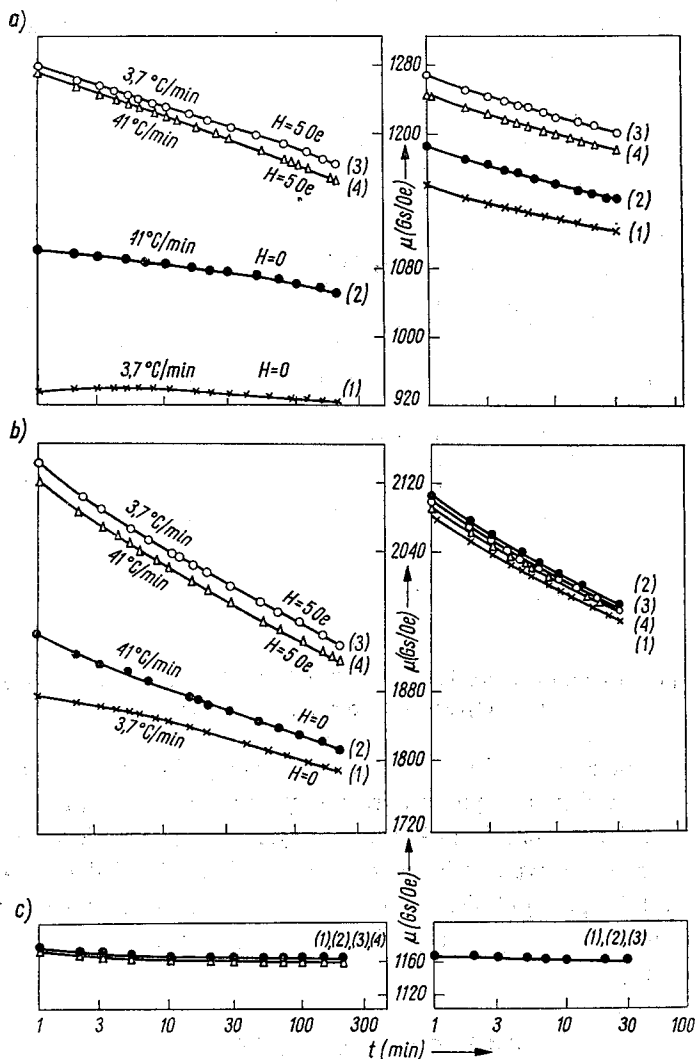
Rys. 20. Schemat przebiegu doświadczenia IV. Strzałkami z napisem „dem” oznaczono rozmagnesowanie magnetyczne wg programu I z tablicy 5

bijano i próbkę chłodzono dalej w regulowanym przepływie powietrza, a następnie zanurzano w kąpeli olejowej (w naczyniu umieszczonym w termostacie wodnym). Szczegółowy schemat przebiegu doświadczenia pokazano na rys. 20, a pozostałe warunki w tablicy 3. Natężenia pól rozmagnesowujących wynosiły dla próbek 5, 7 i 4 odpowiednio: $25 H_c$, $17 H_c$ i $15,5 H_c$. Jako początek liczenia czasu po rozmagnesowaniu cieplnym przyjmowano moment zrównania się temperatury rdzenia z temperaturą kąpeli, co sprawdzano termoparą różnicową.

4.4.3. Omówienie wyników

Wyniki doświadczenia przedstawiono na rys. 21. Znaczne, widoczne na pierwszy rzut oka różnice stanów magnetycznych obserwuje się w przypadku próbek 5 i 7, tj. o wyraźnych efektach opóźnienia magnetycznego. Po ostudzeniu próbek przy $H = 0$ uzyskano niższe wartości przenikalności po wolnym, niż po szybkim studzeniu (krzywe 1 i 2 na rysunkach lewych). Rozmagnesowanie magnetyczne dokonane po 200 minutach różnice te zmniejszyło, lecz nie zniwelowało (krzywe 1 i 2 na rysunkach prawych). Przykład ten odpowiada przypadkowi „większych wartości przenikalności po rozmagnesowaniu magnetycznym”, i może być wytłumaczony w oparciu o wnioski wynikające z doświadczenia I i II. Różne stany magnetyczne, w jakich znalazły się próbki po odmiennych szybkościach studzenia;

wynikają z bardziej (wolne studzenie) lub mniej (szybkie studzenie) posuniętego procesu stabilizacyjnego zachodzącego podczas chłodzenia. Wiadomo, że wyższa temperatura wydatnie przyspiesza procesy relaksacyjne. Część ustabilizowanych lub stabilizujących

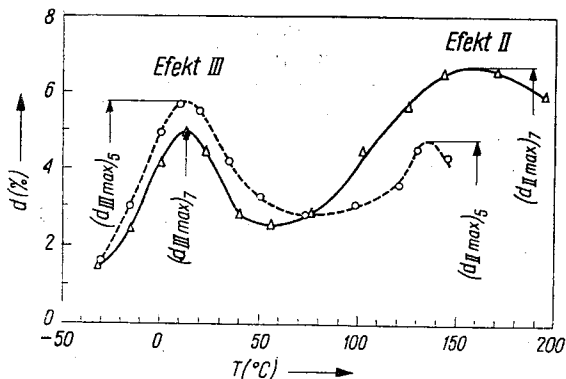


Rys. 21. Wyniki doświadczenia IV wykonanego wg programu przedstawionego na rys. 20: a) próbka nr 7, b) próbka nr 5, c) próbka nr 4. Dla krzywych 1 i 2, przedstawionych na lewych częściach rysunku, czas liczono od ustalenia się temperatury pomiarowej $T = +30^\circ\text{C}$. Dla pozostałych krzywych — jak zwykle — od zakończenia rozmagnesowania magnetycznego

się defektów o większych energiach aktywacji staje się niepodatna na przyłożone po pewnym czasie rozmagnesowanie magnetyczne (zob. doświadczenie I); wytwarza się stabilizacja typu N, uzależniona tu oczywiście od szybkości studzenia. Wyniki widoczne na prawych częściach rys. 21 przekonująco świadczą o powyższym. Różnice wartości przenikalności zarówno bezpośrednio po rozmagnesowaniu cieplnym, jak i po przyłożonym po 200 mi-

nutach magnetycznym, są w przypadku próbek 7 większe niż dla próbek 5. W świetle wniosków wynikających z doświadczenia I wydaje się to zrozumiałe zważywszy, że stosunek $d_{II\max}/d_{III\max}$ wynosi dla próbek 7 i 5 odpowiednio 1,35 i 0,835 (rys. 22).

Próbka nr 4, „bezdezakomodacyjna” w skali rysunku 21, wykazuje w tej skali praktycznie zupełną odtwarzalność stanu magnetycznego.



Rys. 22. Widma temperaturowe dezakomodacji próbek: o — — — — o nr 5 i Δ — — — — Δ nr 7

Z tej części doświadczenia wynika następujący wniosek: przenikalność próbek wykazujących dezakomodację mierzona bezpośrednio lub po pewnym czasie po ochłodzeniu próbki od temperatury Curie do temperatury pomiaru będzie tym mniejsza, im większa jest intensywność poszczególnych efektów relaksacyjnych ($d_{III\max}$, $d_{II\max}$ i $d_{I\max}$) i im powolniejsze jest studzenie. Przy danym widmie temperaturowym dezakomodacji próbek, je stan magnetyczny po ochłodzeniu od temperatury Curie jest wyznaczony, przy braku innych wymuszeń, przede wszystkim przebiegiem czasowym studzenia, przy czym ze względu na temperaturową zależność dyfuzji, szczególnie istotny jest on w zakresie temperatur równych i wyższych od temperatur występowania maksimów efektów II i I.

Przejdźmy do kolejnej części doświadczenia, w której stosując studzenie próbek w przeciwnym polu magnetycznym starano się powstrzymać zachodzące podczas studzenia procesy relaksacyjne. Wydaje się, że cel ten został osiągnięty bez wywołania zauważalnych tu dodatkowych efektów, o czym świadczą położenia krzywych 3 i 4 na wszystkich częściach rys. 21. Do widocznego rozszczepienia krzywych 3 i 4 powrócimy później.

Powstrzymanie zachodzącej podczas studzenia stabilizacji pozwala uzyskać znacznie zwiększoną powtarzalność stanów magnetycznych, którą wyrażono współczynnikiem odtwarzalności ξ , określonym jako

$$\xi = \frac{\mu_c(t_1) - \mu_m(t_1)}{\mu_m(t_1)} \cdot 100\%.$$

$\mu_c(t_1)$ i $\mu_m(t_1)$ oznaczają przenikalności po czasie t_1 odpowiednio po rozmagnesowaniu cieplnym i magnetycznym. Zestawienie obliczonych współczynników ξ oraz dezakomodacji dla czterech wariantów doświadczenia znajduje się w tablicach 10a i 10b.

Pokazana na rys. 23 prostoliniowa zależność między dezakomodacjami a przenikalnościami uzyskiwanymi po różnych programach zastosowanych tu rozmagnesowań ciepl-

no-magnetycznych może świadczyć o jednorodności przyczyny powodującej w próbkach 5 i 7 opisane wyniki.

Tablica 10a

Odtwarzalność stanu magnetycznego, ξ , po różnych programach rozmagnesowań cieplno-magnetycznych (doświadczenie IV)

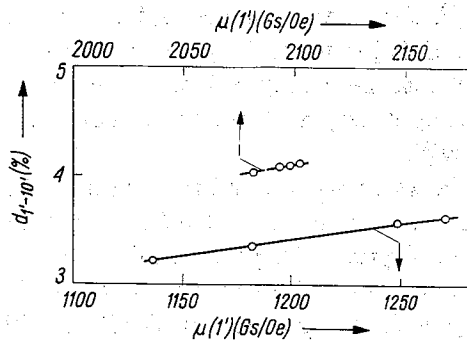
Odtwarzalność:		$\xi = \frac{\mu_c(t_1) - \mu_m(t_1)}{\mu_m(t_1)} 100\%$					
Nr próbki		5		7		4	
t_1 (min)							
Sposób rozmagnesowania		1	30	1	30	1	30
bez pola	Studzenie						
	wolne	-9,65	-6,85	-17,70	-14,1	+0,29	+0,06
	szybkie	-7,75	-6,33	-2,65	-4,49	+0,74	+0,10
z polem	wolne	+1,85	+0,97	+0,44	+0,32	+0,03	-0,16
	szybkie	+1,07	+0,24	+0,20	+0,67	—	—

Tablica 10b

Dezakomodacja $d_{1'-10'}$ po różnych programach rozmagnesowań cieplno-magnetycznych (doświadczenie IV)

Nr próbki		Dezakomodacja $d_{1'-10'}$ (%)					
		5		7		4	
Rozmagnesowanie		cieplne	magnet.	cieplne	magnet.	cieplne	magnet.
bez pola	Studzenie						
	wolne	1,47	4,03	-0,15	3,21	0,391	0,071
	szybkie	3,07	4,11	1,245	3,35	0,62	0,064
z polem	wolne	4,69	4,09	3,63	3,63	0,218	0,067
	szybkie	4,63	4,08	4,39	3,61	0,338	—

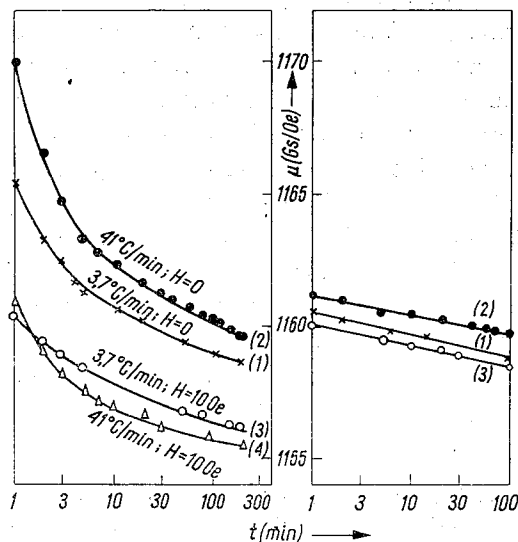
Tę część doświadczenia można zamknąć następującym wnioskiem: Najwyższy stopień odtwarzalności stanu magnetycznego uzyskano stosując szybkie chłodzenie próbki w przemiennym polu magnetycznym o natężeniu kilkunastu H_c , przy czym stopniowe malenie natężenia pola do zera następowało dopiero po osiągnięciu przez próbkę temperatury pomiaru. Jako stan odniesienia należy przyjąć stan w określonym czasie t_1 po zakończeniu rozmagnesowania. Normalne, izotermiczne rozmagnesowanie magnetyczne dokonane powtórnie po czasie np. $t_1 + t$ może nie odtworzyć stanu próbki właściwego dla czasu t_1 , z powodu postępującej stabilizacji typu N , co zresztą widać na rys. 21.



Rys. 23. Zależność między przenikalnościami i odpowiadającymi im dezakomodacjami uzyskanymi po rozmagnesowaniach ciepło-magnetycznych o różnych programach zastosowanych w doświadczeniu IV: $\circ - - \circ$ próbka nr 5, $\circ - \circ$ próbka nr 7. Dane odpowiadają prawym częściom rysunku 21'

Przedstawione na rys. 21c wyniki dotyczące próbki nr 4 przerysowane w znacznie zwiększonej skali na rys. 24 wskazują, że w przypadku próbki o znikomej dezakomodacji uzyskano:

- 1) większą wartość przenikalności po rozmagnesowaniu cieplnym niż po magnetycznym (por. krzywe 1 i 2 na lewej i prawej części rys. 24) oraz
- 2) większą wartość przenikalności po chłodzeniu próbki bez pola niż po chłodzeniu w polu — odwrotnie niż to miało miejsce w próbkach 5 i 7 (rys. 21a i b).



Rys. 24. Wyniki doświadczenia IV dla próbki nr 4 w skali znacznie powiększonej w stosunku do rys. 21c

Wzajemne usytuowanie krzywych w obrębie rodzin $H = 0$ i $H \neq 0$ pozostało takie samo jak dla próbek 5 i 7.

Uzyskane wyniki tłumaczymy wytworzeniem się w wyniku chłodzenia metastabilnej struktury domenowej, takiej, jaką ujawnili, w znacznie zresztą większych rozmiarach,

Snoek i Fast w niklu [11]¹⁾. Efekt ten powinien być tym znaczniejszy, im szybsze jest chłodzenie, co potwierdza doświadczenie. Przyłożenie silnego pola magnetycznego wytrąca ściany Blocha z płytkich, niestabilnych dołów potencjału w bardziej stabilne, tak że po rozmagnesowaniu magnetycznym struktura Snoeka-Fasta wydaje się istnieć co najwyżej w fazie szczątkowej²⁾.

Pozostało do omówienia wspomniane wyżej rozszczepienie krzywych 3 i 4 na rys. 21 i 24, przy $H \neq 0$, spowodowane różnymi szybkościami chłodzenia, oraz interpretacja całości wyników uzyskanych w przypadku próbki nr 4.

Najprościej jest przyjąć, przez analogię do rezultatów v. Kienlina, Kornetzkiego i Rabla [36]³⁾, że mamy tu do czynienia z „uprostokątnieniem” pętli histerezy przez działające podczas studzenia przemienne pole magnetyczne. „Uprostokątnienie” to jest oczywiście bardzo słabe, a to z uwagi na znikomą anizotropię magnetyczną badanych przez nas próbek. Powinno ono wzrastać w miarę przedłużania czasu studzenia próbek w polu.

Zastosowana przez nas miara stanu magnetycznego — przenikalność początkowa — nie może świadczyć, jak wynika to z pracy Gortera i Esveltda [40]⁴⁾, o stopniu „uprostokątnienia” pętli próbki. Klasyczna metoda pomiaru prostokątności pętli histerezy, wobec małych rozmiarów postulowanego zjawiska, jest tu nieprzydatna. Dlatego prowadzone tu rozumowanie opiera się w zasadzie na przesłankach ogólnych.

Aby rozciągnąć interpretację na wyniki próbki 4, należy uznać, że istnieje w niej, choćby w fazie szczątkowej, opóźnienie magnetyczne, co jest możliwe wzięwszy pod uwagę rys. 7.

We wszystkich przypadkach zaobserwowano, że przenikalność początkowa jest większa po wolniejszym studzeniu, a więc po większym „uprostokątnieniu” — krzywe 3 na rys. 21 i 24 są zawsze ponad krzywymi 4. Stan ten utrzymuje się również po rozmagnesowaniu magnetycznym wykonanym po 200 minutach pomiaru w słabym polu.

Jeśli studzeniu w polu przypisano tu zdolność „uprostokątnienia”, to chłodzeniu bez pola należy konsekwentnie przypisać zdolność wytworzenia w próbce efektu „perminwarowego”. Oba pojęć użyto tu jedynie jako haseł sugestywnych. Z rezultatów [40] wynika, że z wartości przenikalności początkowej nie można wnioskować o tym, czy pętla histerezy próbki ma kształt zbliżony do prostokątnego, czy przewężonego (perminwar). Dlatego, jak można sądzić, różne wzajemne usytuowanie rodzin krzywych $H = 0$ (krzywe 1 i 2 na rys. 21 i 24) i $H \neq 0$ (krzywe 3 i 4) nie przeczą wysuniętej hipotezie.

Hipoteza natomiast nie wyjaśnia znacznie większej zmienności przenikalności próbki 4 po odjęciu pola bezpośrednio po ostudzeniu niż po wykonanym po 200 minutach rozmagnesowaniu magnetycznym o takim samym natężeniu jak podczas studzenia i takim samym sposobie zaniku pola.

¹⁾ Należy odróżnić metastabilną strukturę Snoeka-Fasta powstającą podczas chłodzenia próbki bez pola od omówionej w 4.3 niestabilnej struktury domenowej będącej jednym z efektów anizotropii rozmagnesowania.

²⁾ Konsekwentnie, strukturze Snoeka-Fasta, podobnie jak postulowanej przez nas w 4.3 niestabilnej części struktury domenowej wytworzonej przez rozmagnesowanie magnetyczne, należałoby przypisać stabilizację tym szybszą, im silniejsze jest zewnętrzne pole magnetyczne. Niezależnie zresztą od przyczyn powodujących powstanie tych nadstruktur efektem jest zwiększenie liczby ścian lub zwiększona ich ruchliwość. Różny może być natomiast stopień ich niestabilności (czasowej, amplitudowej, wywołanej wibracjami itp.), uzależniony od wielkości energii magnetostatycznej związanej z metastabilnymi przyczynkami domenowymi.

³⁾ dotyczących ferrytów o składzie $\text{Co}_{0,02}\text{Mn}_{0,06}\text{Ni}_{0,72}\text{Fe}_{2,2}\text{O}_4$.

⁴⁾ dotyczącej ferrytów o składzie $(\text{Mg}_{0,6}\text{Ni}_{0,4})_{(1-\delta)}\text{Co}_\delta\text{Fe}_2\text{O}_4$.

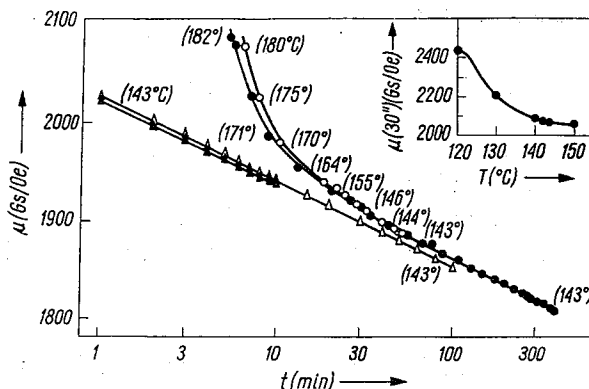
Szczęśliwie zjawiska tu opisane można uznać za drugorzędne i pomijalne, szczególnie w przypadku próbek 5 i 7, wobec efektów wynikających z dyfuzyjnego opóźnienia magnetycznego.

4.4.4. Doświadczenie z rejestrowaną przenikalnością i temperaturą rdzenia podczas studzenia

Doświadczenie to jest bliskie cytowanemu już doświadczeniu v. Klitzinga i Zentgrafa [8]. W próbce nr 5 wydrążono ultradźwiękowo mały otworek, w którym umieszczono termoparę Cu-Konst. Otwór następnie zasklepiono złym przewodnikiem ciepła. Napięcie termopary sterowało rejestrator, co zapewniało stały odczyt temperatury. Przenikalność mierzono od momentu przekroczenia punktu Curie. Doświadczenie wykonano w dwóch wariantach:

a) powolne studzenie od temperatury Curie do momentu ustalenia się temperatury $+143^{\circ}\text{C}$ (ok. 55 min), rozmagnesowanie magnetyczne i pomiar μ ,

b) powolne studzenie, jak poprzednio, rozmagnesowanie magnetyczne po 400 minutach i pomiar μ .



Rys. 25. Wyniki doświadczenia wg punktu 4.4.4 dla próbki nr 5. Białe punkty dotyczą wariantu a), czarne — wariantu b). W nawiasach podano wartości temperatury odpowiadające danym punktom pomiarowym. W górnym prawym rogu rysunku zamieszczono fragment przebiegu przenikalności (mierzonej po 30 sekundach po rozmagnesowaniu magnetycznym) w funkcji temperatury

Czas w przypadku studzenia liczono od chwili wyjścia próbki ze stanu paramagnetycznego. Otrzymane przez nas wyniki, rys. 25, są podobne, choć nie tak wyraźne, jak w [8]. Większa wartość przenikalności rdzenia w temperaturze $+143^{\circ}\text{C}$ po rozmagnesowaniu cieplnym niż po magnetycznym (dla $t > 55$ min) potwierdza możliwość wystąpienia struktury Snoeka-Fasta, zniwelowanej następnie przez rozmagnesowanie magnetyczne. Stabilizacja typu N jest tu mała dzięki krótkim czasom dzielącym poszczególne fazy doświadczenia i wysokiej temperaturze pomiarowej. Bardzo wyraźnie wystąpił natomiast efekt stabilizacji podczas studzenia, zważywszy, że w okolicy $+143^{\circ}\text{C}$ próbka posiada ujemny współczynnik temperaturowy przenikalności. Świadczy to o przewadze procesów stabilizacyjnych — dyfuzyjnych i domenowych — nad „czystą” zależnością przenikalności od temperatury.

4.4.5. Podsumowanie wyników doświadczenia IV

1. Wydaje się, że ze zjawisk zachodzących w badanych przez nas próbkach podczas ich studzenia od temperatury Curie do temperatury pomiaru głównie dwa zjawiska wpływają na stan magnetyczny próbek w słabych polach:

- zjawisko dyfuzyjnego opóźnienia magnetycznego,
- zjawisko metastabilnej struktury domenowej (Snoeka-Fasta).

2. W próbkach, w których istnieje dyfuzyjne opóźnienie magnetyczne, zachodzą podczas studzenia procesy stabilizacyjne, tym dalej postępujące, im studzenie — zwłaszcza w wyższych temperaturach — jest powolniejsze. Część efektów o największych energiach aktywacji i najdalej posuniętej stabilizacji może nie ulec następnie destabilizacji podczas rozmagnesowania magnetycznego wykonywanego w niższych temperaturach (stabilizacja typu *N*, patrz również doświadczenie I i II).

3. Efekty metastabilnej struktury Snoeka-Fasta są prawdopodobnie tym znaczniejsze, im szybkość studzenia jest większa.

4. W badanych próbkach znacznie zwiększono stopień odtwarzalności stanu magnetycznego przez powstrzymanie procesów dyfuzyjnych na drodze rozmagnesowania ciepłno-magnetycznego, polegającego na chłodzeniu próbek od temperatury Curie do temperatury pomiaru w przemiennym polu magnetycznym o natężeniu kilkunastu H_c . Uniezależniono się w ten sposób w znacznym stopniu od decydującej o stanie magnetycznym szybkości studzenia.

5. Chłodzenie badanych próbek w przemiennym polu magnetycznym nie wywołało w badanych próbkach praktycznie znaczących efektów anizotropowych.

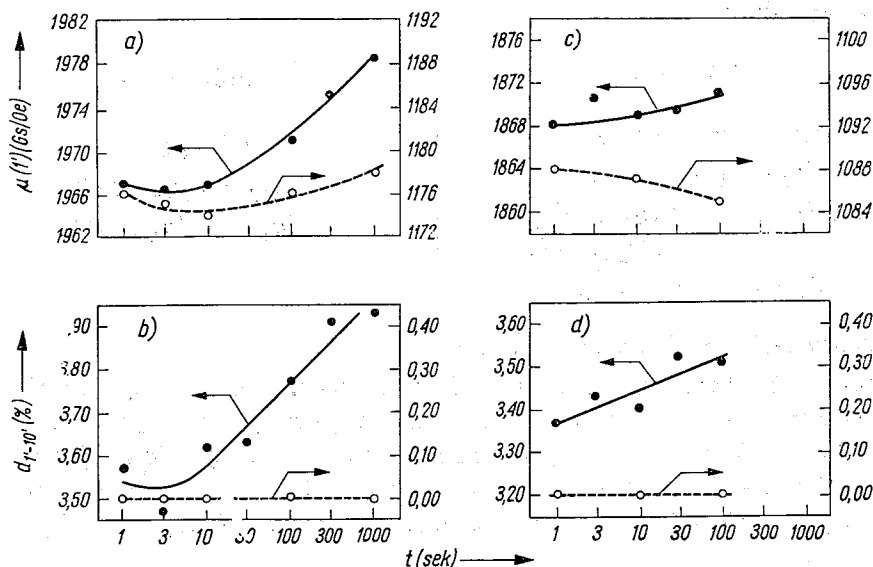
6. W próbce praktycznie wolnej od opóźnienia magnetycznego uzyskano znikomą nieodtworzalność stanu magnetycznego (w granicach 1%), stosując różne sposoby rozmagnesowania.

4.5. Badanie skuteczności rozmagnesowania w zależności od czasu trwania rozmagnesowania magnetycznego (doświadczenie V)

4.5.1. Opis i wyniki doświadczenia

Spostrzeżone w doświadczeniu II zwiększenie skuteczności rozmagnesowania (wzrost przenikalności i dezakomodacji) po długotrwałym rozmagnesowaniu magnetycznym skłoniło nas do przeprowadzenia obszerniejszego doświadczenia. Aby zorientować się w mechanizmie zjawiska, doświadczenie wykonano na dwóch próbkach — nr 5, wykazującej dezakomodację, i nr 4, praktycznie bezdezakomodacyjnej. Doświadczenie przeprowadzono w następujący sposób: uzwojone próbki umieszczono w rurce szklanej między biegunami elektromagnesu w sposób umożliwiający poprzeczne rozmagnesowanie w polu 3100 Gs. Rozmagnesowanie zgodne z polem pomiarowym następowało poprzez uzwojenie. Natężenie tego pola rozmagnesowującego $\geq 20 H_c$. Szczegóły doświadczenia w tablicy 3. Rurka z próbką była przyłączona do obiegu wodnego termostatu, co zapewniało utrzymanie temperatury z dokładnością do $\pm 0,15^\circ\text{C}$. Temperaturę kontrolowano za

pomocą termopary i rejestratora. Natężenie pola rozmagnesowującego o określonym kierunku utrzymywano przez żądany czas, następnie po płynnym zmniejszeniu pola mierzono w czasie przenikalność początkową próbki. Każde rozmagnesowanie o regulowanym



Rys. 26. Przenikalność początkowa po 1 minucie po zakończeniu rozmagnesowania (rys. a) i c) oraz dezakomodacji dziesiąta między 1 a 10 minutą (rys. b) i d)) — w zależności od czasu trwania rozmagnesowania. Rysunki a) i b) dotyczą pomiarów po rozmagnesowaniu równoległym, c) i d) — po rozmagnesowaniu poprzecznym. ● — próbka nr 5 ($T = +30^\circ\text{C}$); ○ — próbka nr 4 ($T = +23^\circ\text{C}$)

czasie trwania było poprzedzone rozmagnesowaniem o kierunku doń prostopadłym, o czasie trwania 1 sek (rozmagnesowanie Ic lub Iia wg tablicy 5). Chodziło o start z możliwie jednakowego poziomu. Wyniki pokazano na rys. 26a, b, c, d. Widać, jak ze wzrostem czasu utrzymywania próbki w pełnym polu rozmagnesowującym zmienia się przenikalność i dezakomodacja.

Model dotyczący wypadkowych zmian przenikalności, zaproponowany w 4.3.2.4 i na rys. 16, łącznie z wnioskiem 5 z doświadczeń I i II, umożliwiając, jak się wydaje, zadowalającą interpretację wyników niniejszego doświadczenia. W próbce nr 4, wolnej od dezakomodacji, zostaje indukowana dodatkowa nadstruktura domenowa pogłębiająca efekt anizotropii rozmagnesowania i rosnąca z czasem działania silnego pola magnetycznego (krzywe przerywane na rys. 26a i c). W próbce nr 5 zachodzą jednocześnie dwa zjawiska: destabilizacja magnetyczna, powodująca wzrost dezakomodacji i przenikalności, oraz podobnie jak w próbce 4, indukowanie nadstruktury domenowej zwiększające lub zmniejszające przenikalność zależnie od kierunku pola rozmagnesowującego. Destabilizacja magnetyczna zachodzi, co należy przyjąć, na drodze mechanizmu mikroskopowego, a więc uzależnionej od czasu działania.

Oznaczmy zmiany przenikalności pochodzące od indukowanej nadstruktury domenowej przez $\Delta\mu_{dom}$, od dyfuzyjnej stabilizacji przez $\Delta\mu_{DA}$. Pamiętając, że są to funkcje czasu,

uwzględniając kierunki działania pola rozmagnesowującego i konsekwentnie utrzymując, że

$$\Delta\mu_{||DA} = \Delta\mu_{\perp DA} = \Delta\mu_{DA},$$

możemy napisać:

Próbka nr 5

$$\Delta\mu_{||} = \Delta\mu_{DA} + \Delta\mu_{||dom},$$

$$\Delta\mu_{\perp} = \Delta\mu_{DA} + \Delta\mu_{\perp dom},$$

z doświadczenia: $\Delta\mu_{||} > \Delta\mu_{\perp}$,

$$\Delta\mu_{\perp dom} > 0,$$

więc: $\Delta\mu_{DA} > \Delta\mu_{\perp dom}$.

Próbka nr 4

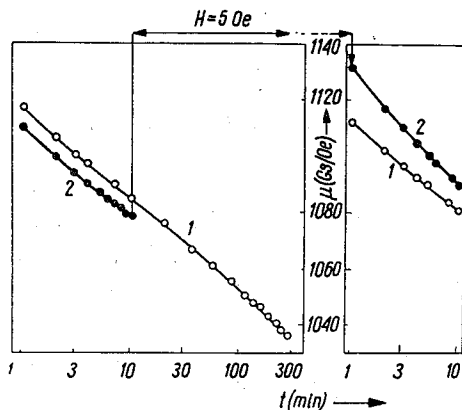
$$(\Delta\mu_{DA} \approx 0),$$

$$\Delta\mu_{||} = \Delta\mu_{||dom} > 0,$$

$$\Delta\mu_{\perp} = -\Delta\mu_{\perp dom} < 0.$$

Powyższy zapis oddaje treść rysunków 26.

Opisane efekty bardzo wyraźnie wystąpiły w przypadku dodatkowego doświadczenia. Próbkę nr 7 (tablica 2) podgrzewano przed każdym cyklem pomiarowym do temperatury Curie, wolno chłodzono do $+30^{\circ}\text{C}$, rozmagnesowywano magnetycznie w tej temperaturze i w przypadku 1) — (rys. 27)—mierzone w 5 mOe przez 300 minut, a następnie rozmagnesowywano powtórnie próbkę mierząc potem μ przez 10 minut. W przypadku 2) postąpiono



Rys. 27. Porównanie przebiegów czasowych przenikalności po krótkotrwałym (krzywa 1) i długotrwałym (krzywa 2) rozmagnesowaniu magnetycznym w stałej temperaturze $T = +30^{\circ}\text{C}$. Wynik dotyczy doświadczenia V wykonanego na próbce nr 7

początkowo analogicznie, z tym, że po 10 minutach po pierwszym rozmagnesowaniu przyłożono na czas 290 minut przemienne pole magnetyczne o natężeniu 5 Oe, po usunięciu którego, normalnym sposobem, mierzono próbkę przez 10 minut. Kierunki pól rozmagnesowującego i pomiarowego były zgodne. Wynik doświadczenia jest w przypadku 1) taki sam, jak w doświadczeniach I, II i IV, zaś w przypadku 2) występują bardzo wyraźnie omówione wyżej efekty destabilizacji w skali mikroskopowej i indukowanej nadstruktury domenowej.

4.5.2. Podsumowanie wyników doświadczenia V

1. Silne, o natężeniu kilku lub kilkunastu H_c , przemienne pole magnetyczne w miarę czasu swego działania wywołuje w badanych próbkach dodatkową nadstrukturę domeniową, czyli zwiększa efekt anizotropii rozmagnesowania. Zjawisko to nie jest następstwem opóźnienia magnetycznego.

2. W próbkach wykazujących dyfuzyjne opóźnienie magnetyczne wraz ze wzrostem czasu działania silnego przemennego pola magnetycznego wzrasta stopień destabilizacji magnetycznej prawdopodobnie wskutek rozmagnesowania zachodzącego w skali mikroskopowej.

3. Oba wymienione efekty wzajemnie się nakładają i oddzielenie ich nie jest łatwe.

4.6. Wpływ programu rozmagnesowania magnetycznego na stan magnetyczny próbek (doświadczenie VI)

4.6.1. Opis i wyniki doświadczenia

Opis i wynik tego doświadczenia podajemy w celu zwrócenia uwagi, że czynniki związane z samą techniką czynności rozmagnesowania mogą wywrzeć wpływ na stan magnetyczny próbek.

Próbkę nr 5, pozostającą w nie zmieniających się warunkach, w $+30^{\circ}\text{C}$, rozmagnesowano magnetycznie wg programów podanych w tablicy 11, natężeniem $H_m = 25 H_c$.

Tablica 11

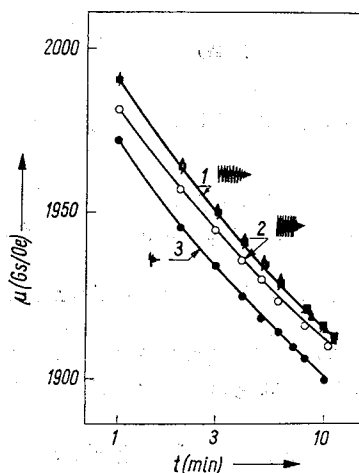
Szczegółowe dane dotyczące zastosowanych w doświadczeniu VI rozmagnesowań magnetycznych

	Nr programu wg tabl. 5	t_c (sek)	t_m (sek)	Charakter obwiedni	Urządzenie rozmagne- sowujące	Oznaczenie krzywej na rys. 28	Oznaczenie obwiedni pola na rys. 29
1	II	5	25	liniowy	autotrans- formator	1	1a
2	„	„	6	„			1b
3	„	„	1	„			1c
4	Ib	„	12	wykładn.	demagnet. automat.	2	2
5	IV	b. krótki	b. krótki	„	rozł. kond.	3	—

The diagram illustrates the magnetic field H as a function of time t . It shows a series of high-frequency oscillations (a sine wave) for a duration t_c , followed by an exponential decay for a duration t_m . The entire process is labeled 'Obwiednia' (envelope) and 'Koniec rozmagnesowania' (end of demagnetization).

Pomiar przenikalności rozpoczynano każdorazowo po jednej minucie od zakończenia czynności rozmagnesowania. Wyniki pokazano na rys. 28 i w tablicy 12.

Różnice w stanach magnetycznych, wyrażone wartością przenikalności i dezakomodacji po określonym rozmagnesowaniu można łatwo wytłumaczyć w oparciu o rys. 29. Początek liczenia czasu każdorazowo zaczynał się od momentu zakończenia *czynności rozmagnesowania*. Stabilizacja natomiast zaczyna się wcześniej, począwszy od pewnego



Rys. 28. Przebieg przenikalności początkowej próbki 5 w funkcji czasu po rozmagnesowaniach magnetycznych różniących się programem czasowo-amplitudowym. Początkowe natężenie pola rozmagnesowującego we wszystkich przypadkach równe było $25 \cdot H_c$. Bliższe objaśnienia w tablicy 11

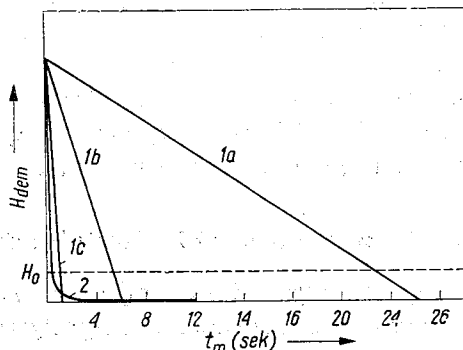
Tablica 12

Różnice stanu magnetycznego po różnych programach rozmagnesowania magnetycznego opisanych w tablicy 11

Program rozmagnesowania	II	Ib	IV
Nr krzywej wg rys. 28	1	2	3
$\mu(1')$	1990,6	1981,1	1972,0
$d(1'-10')$, %	3,81	3,49	3,63
$d(1'-2')$, %	4,50	3,96	4,42
$d(8'-10')$, %	3,12	3,01	3,09

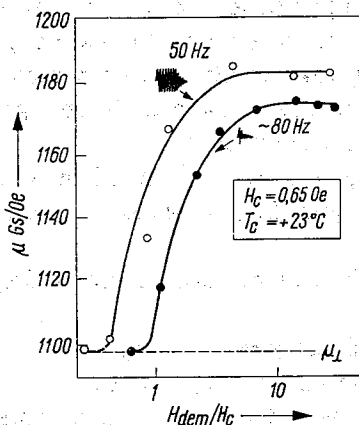
pola H_0 tak, że w rzeczywistości zafałszowany jest początek liczenia czasu. Szybkość stabilizacji (dezakomodacja) zależy od aktualnej wielkości pola magnetycznego (zob. np. rys. 18). W związku z tym przebieg czasowo-amplitudowy rozmagnesowania w zakresie pól $H < H_0$ rzutuje w istotny sposób na stan próbki w arbitralnie przez nas przyjmowanym momencie „zakończenia” rozmagnesowania, a tym samym rozpoczęcia pomiaru. Uwidocznia się to wyraźnie na rys. 28 w przypadku krzywych 1 i 2. Odstęp między przebiegami przenikalności wynika z różnego stopnia stabilizacji w zakresie pól $H < H_0$,

a różnica w nachyleniach obu krzywych w początkowym okresie pomiaru (zob. również tablica 12) jest spowodowana wspomnianym zafałszowaniem początku liczenia czasu. Niezauważalne różnice w stanach magnetycznych w przypadku liniowego spadku pola rozmagnesowującego wynikają z nieznacznej efektywnej różnicy czasu, rzędu 0,1÷2 sek w stosunku do czasu rozpoczęcia pomiaru, równego 60 sek. Wyjaśnia to dokładniej rys. 29.



Rys. 29. Schematyczny przebieg obwiedni pola rozmagnesowującego w czasie jego zmniejszania się. Opisy krzywych wg tablicy 11

Oprócz tego źródła niepowtarzalności stanu należy uwzględnić omówiony w 4.5 fakt indukowania struktury domenowej uzależnionej m.in. od czasu rozmagnesowania, t_c , a co za tym idzie — i od sposobu rozmagnesowania. Uwidocznia to krzywa 3 na rys. 28 odpowiadająca rozmagnesowaniu za pomocą rozładowania kondensatora. Osiągnięto



Rys. 30. Efekt rozmagnesowań o kolejno zwiększonym natężeniu H_{dem} (próbka nr 4 — o znikomej dezakomodacji) wykonanych: — za pomocą demagnetyzatora: ○ — o, — metodą Enza: ● — ●. μ_L — poziom wyjściowy uzyskiwany przed każdym kolejnym rozmagnesowaniem

tu znacznie niższą wartość przenikalności $\mu(1')$ — punkt startu krzywej 3, i podobne do krzywej 1 — nachylenie. Tłumaczy to przedstawiony na rys. 30 wynik opisanego poniżej doświadczenia. Wykonano pomiary przenikalności początkowej po rozmagnesowaniach równoległych o natężeniu pola H_{dem} zwiększanym kolejno od 0 do H_m (H_m rzędu kilkunastu H_c). Rozmagnesowania przeprowadzano dwoma sposobami: 1) za pomocą dema-

gnetyzatora (szkic przebiegu rozmagnesowania pokazano w dole tablicy 11) i 2) metodą Enza [37] — rozładowanie kondensatora w obwodzie drgającym (program IV wg tablicy 5). Po każdym pomiarze sprowadzano próbkę do tego samego stanu wyjściowego, μ_1 , przez rozmagnesowanie poprzeczne.

Charakterystyczne jest ostro zaznaczające się pole progowe, począwszy od którego zaczynają występować zmiany anizotropowej struktury domenowej. Widoczna jest przez to nierównoważność zastosowanych rozmagnesowań. Po rozmagnesowaniu sposobem 1) progowe natężenie pola jest mniejsze, a przenikalność po rozmagnesowaniu polem H_m — większa niż po rozmagnesowaniu sposobem 2). Rozbieżność tę przypisujemy temu, że sposób 1) zapewnia próbce co najmniej kilkadziesiąt razy więcej przemagnesowań polem H_{dem} niż w przypadku rozładowania kondensatora (sposób 2).

4.6.2. Podsumowanie wyników doświadczenia VI

1. Można wymienić następujące czynniki wywierające wpływ na stan magnetyczny próbek — wynikające z przebiegu rozmagnesowania magnetycznego:

- niedokładne wyznaczenie momentu rzeczywistego zakończenia rozmagnesowania,
- procesy stabilizacyjne zachodzące w końcowej fazie rozmagnesowania (poniżej pola H_0 na rys. 29); w związku z tym przebieg czasowo-amplitudowy tej fazy rozmagnesowania jest szczególnie istotny,
- zależna od czasu trwania rozmagnesowania magnetycznego: destabilizacja magnetyczna oraz indukowana nadstruktura domenowa — opisane szczegółowiej w 4.5.

2. Odtwarzalność stanu magnetycznego próbek w zakresie uzależnionym wyłącznie od techniki rozmagnesowania magnetycznego (tj. sposobu, programu itp.) jest możliwa do uzyskania jedynie w przypadku identycznego we wszystkich szczegółach programu magnetyczno-czasowego tego rozmagnesowania. Do szczegółów (parametrów) programu rozmagnesowania magnetycznego zaliczamy:

- kierunek pola rozmagnesowującego¹⁾ względem pola pomiarowego,
- kształt, wielkość względną (np. wobec H_c) i częstotliwość pola rozmagnesowującego,
- czas rozmagnesowania, t_c , tzn. czas, podczas którego amplituda pola pozostaje niezmienna,
- czas malenia amplitudy natężenia pola, t_m ,
- charakter czasowy obwiedni malejącego pola,
- dopuszczalne szczytkowe natężenie pola, tzw. „praktyczne zero” (tzn. po czasie $t \geq t_m$),
- ewentualną krotność procesu i czas powtarzania.

5. WNIOSKI KOŃCOWE

Istnieją dwa charakterystyczne stany magnetyczne, które mogą służyć jako poziom odniesienia dla wszystkich pozostałych stanów magnetycznych. Jednym z nich jest stan

¹⁾ Można również operować indukcją magnetyczną B w miejsce pola H .

magnetycznie izotropowy (neutralny, całkowicie zdestabilizowany), drugim — stan odpowiadający całkowicie zakończonej stabilizacji magnetycznej.

Stan drugi, trudny, a nieraz w ogóle niemożliwy praktycznie do osiągnięcia choćby ze względu na długotrwałość procesów stabilizacji, nie może być w ogólności uznany za przydatny w technice pomiarowej, wobec czego za jedynie użyteczny należy przyjąć stan izotropowy.

Stan próbki w czasie $t = t_1$ po jej wyjściu ze stanu izotropowego nazwalimy magnetycznym stanem odniesienia. Odtwarzalność tego stanu uzależniona jest od:

- (i) przyczyn — opóźnienia magnetycznego,
natury — anizotropii rozmagnesowania o efektach:
fizycznej: — niezmiennych w czasie,
— zmiennych w czasie,
— niestabilnej struktury domenowej Snoeka-Fasta;
- (ii) przyczyn — wartości wszystkich parametrów technicznych rozmagnesowania,
natury — programu czasowego rozmagnesowania;
technicznej:
- (iii) warunków zewnętrznych, w jakich przebywa próbka do chwili zakończenia pomiaru.

ad (i):

W badanych próbkach:

- dyfuzyjne opóźnienie magnetyczne było głównym źródłem nieodtworzalności stanu magnetycznego wynikającego z różnych rodzajów i sposobów rozmagnesowania; stosowane jako miara nieodtworzalności różnice przenikalności początkowej, μ , i jej dezakomodacji, DA , sięgały kilkunastu (μ), a nawet kilkuset procent (DA),
- nieodtworzalność wynikająca z anizotropii rozmagnesowania, wyrażona tą samą miarą, co powyżej, nie przekraczała 10 procent (μ) i kilkudziesięciu procent (DA),
- wynikające z pozostałych przyczyn natury fizycznej nieodtworzalności oszacowano na rząd jednego procenta.

ad (ii):

Warunkiem koniecznym uzyskania odtwarzalności magnetycznego stanu odniesienia jest zachowanie identycznych wartości wszystkich parametrów technicznych i czasowych rozmagnesowania.

ad (iii):

Również warunkiem koniecznym jest utrzymanie próbki w identycznych warunkach zewnętrznych od momentu jej wyjścia ze stanu neutralnego do momentu zakończenia pomiaru.

Na podstawie całości pracy można sformułować następujący wniosek końcowy:

Podczas rozmagnesowania cieplnego zachodzą w materiałach magnetycznych zjawiska wynikające z odmiennego podłoża fizycznego, niż to ma miejsce podczas rozmagnesowania magnetycznego. Wyklucza to w ogólności możliwość uzyskania odtwarzalności stanu magnetycznego próbki po osobnym zastosowaniu obu tych rodzajów rozmagnesowań. Wytworzenie stanu neutralnego jest pewnie jedynie podczas rozmagnesowania cieplnego.

Poddanie próbki jednoczesnemu działaniu rozmagneśowania cieplnego i magnetycznego zwiększa wydatnie w badanych próbkach stopień odtwarzalności ich stanów odniesienia, pod warunkiem zachowania w każdym przypadku niezmienniej wzajemnej geometrii próbki i kierunków pól rozmagneśowującego i pomiarowego.

*

Wnioski wynikające z tej pracy można odnosić w całości jedynie do materiałów o małej anizotropii magnetokrystalicznej, a więc materiałów z zamierzenia izotropowych.

W przypadku materiałów o wytwarzanej technologicznie anizotropii (krystalicznej lub jednoosiowej) można stosować niektóre lub nie można stosować w ogóle rozmagneśowań opisywanych w tej pracy. Nieodpowiedni rodzaj rozmagneśowania, niewłaściwy kierunek lub natężenie rozmagneśowania magnetycznego mogą zniszczyć lub naruszyć wytworzoną przez proces technologiczny strukturę magnetyczną, a więc zmienić jakościowo próbkę. Osiągnięcie magnetycznego stanu odniesienia w przypadku materiałów o wprowadzonej technologicznie anizotropii wymaga osobnego rozważenia dla każdego materiału i sposobu jego wytworzenia.

Autorzy wyrażają podziękowanie prof. drowi inż. A. Smolińskiemu za opiekę nad całością pracy, której niniejszy artykuł jest częścią.

Autorzy uważają również za swój obowiązek podziękować za liczne dyskusje i inspirowanie wielu doświadczeń doc. drowi inż. A. Bragińskiemu, doc. drowi inż. A. Góralowi za szereg wnikliwych spostrzeżeń i uwag, drowi inż. J. Kulikowskiemu za przejrzenie rękopisu i poczynione uwagi, mgrowi inż. S. Makolągwie za dostarczenie próbek, panu A. Zajderowi za wydatną pomoc w przygotowaniu próbek do doświadczeń, mgrowi inż. T. Gromadowskiemu za przeprowadzenie doświadczenia II oraz pani E. Gajzlerowej za wykonanie rysunków.

*Zakład Materiałów Magnetycznych
„POLFER”*

WYKAZ LITERATURY

1. Dokument IEC: 51 (Secretariat) 26, Jan. 1963.
2. Protokół z posiedzenia 51 Komitetu Technicznego IEC nr PV 906/CE 51, Dec. 1965, Baden-Baden (28.6—2.7.65 r.).
3. Postupolski, T.: Metody powtarzalnego wyznaczania współczynników niestabilnościowych rdzeni ferrytowych wykazujących dyfuzyjne opóźnienie magnetyczne. — Przegl. Elektroniki, 7 (1966), 7, s. 344 — 351.
4. Dokument IEC: 51 (Secretariat) 36, June 1965.
5. K n e l l e r, E.: Ferromagnetismus. Springer Verl. 1962.
6. Dokument IEC: 51 (USA) 26, Febr. 1965.
7. S o m m e r n k o r n, G.: Elementarbereichstrukturen verschiedenen pauschal unmagnetischer Zustände. — Techn. Mitt. Krupp, 13 (1955), 4, s. 71—83.
8. v. K l i t z i n g, K. H., Z e n t g r a f, G.: Über den Einfluss der Art der Abmagnetisierung auf die Anfangspermeabilität eines Mn-Zn-Ferrits. — Zeitschr. für Physik, 180 (1964), s. 470—475.
9. S c h u l t z e, H.: Über die magnetische Nachwirkung in schwachem Wechselfeldern.... — Wiss. Veröf. Siemenswerke 17 (1938).
10. G e r l a c h, W.: Z. Metallkde. 38 bzw. Metallforsch 2 (1947).
11. S n o e k, J. L., F a s t, J. F.: Metastable States of Nickel Characterized by a High Initial Permeability. — Nature, Nr 4101, 1948, June 5, s. 887.
12. F a h l e n b r a c h, H., S i x t u s, K.: Untersuchungen an verschiedenen pauschal unmagnetischen Zuständen. — Z. Metallkde, 40 (1949), s. 187—193.

13. Smoliński, A.: Wpływ pierwszego magnesowania na przenikalność magnetyczną. — Arch. Elektrot. 1 (1952) zesz. I, s. 67—77.
14. Smoliński, A.: Ciepne rozmagnesowanie i jego wpływ na dokładność technicznych pomiarów magnetycznych. Sprawozd. Nr 6 IPPT PAN, Zakł. Elektroniki, 1954.
15. Rathenau, G. W., Fast, J. F.: Initial Permeabilities of Sintered Ferrites. — Physica, 21 (1955), s. 964—970.
16. Jackson, R. G., Lee, E. W., Troughton, G. H.: The Influence of the Method of Demagnetization on the Reversible Permeability of a High Permeability Nickel-Iron Alloys. — Brit. Journ. Appl. Phys. 9 (1958), s. 495.
17. Miyahara, S., Yamadaya, T.: The Ageing of Permeability in Manganese-Zinc Ferrite. — J. Phys. Soc. Japan, 14 (1959), s. 1635.
18. Snelling, E. C.: Disaccommodation and its Relations to the Stability of Inductors Having Manganese-Zinc Ferrite Cores. — Mullard Techn. Communications, vol. 6, nr 55, March 1962.
19. Rasmussen, A. L.: Disaccommodation of Magnetic Spectra of Two Manganese Zinc Ferrites. — Journ. of Research NBS, — A. Phys. and Chem. vol. 69A, nr 2, 1965, s. 181—191.
20. Néel, L.: Théorie du traînage magnétique de diffusion. — Journ. Phys. Rad., 13 (1952) nr 5, s. 249—264.
21. Brissonneau, P.: Contribution à l'étude quantitative du traînage magnétique de diffusion du carbon dans le fer α . — Journ. Phys. Chem. Solids, 7 (1958), s. 22—51.
22. Brugel, L., Morel, B., Rimet, G.: Un appareil de désaimantation utilisant des photorésistances. — Journ. Phys. Appl. Suppl. Nr 3, 24, 1953, 35A.
23. Bragiński, A., Merceron, Th., Marais, A.: Traînage magnétique dans les solutions solides de ferrites de manganèse et de ferrites de nickel avec le magnétite. — Journ. Phys. Soc. Jap., 17, (1962), Suppl. B1, s. 300—303.
24. Bragiński, A., Postupolski, T.: Niestalość czasowa przenikalności ferrytów manganowo-cynkowych. — Przegl. Elektroniki, 1963, nr 10—11, s. 651—658.
25. Bragiński, A., Postupolski, T.: Instabilité de la perméabilité magnétique de ferrites de Mn-Zn dans les conditions variables. — Bull. Ac. Pol. Sci., ser. techn., vol. XIII, nr 2, 1965, s. 9—14.
26. Kampczyk, W., Roessel, G.: Einige Gesetzmässigkeiten des zeitlichen Verlaufes der Permeabilität von Ferritkernen. — Siemens Zeitschr. 37 (1963), 11, s. 809—815.
27. Verschoor, I. T.: A New Measure for Disaccommodation Effects in Ferrites. — Matronics, 19 (1961), s. 365.
28. Liwyszyc, B. G., Halin, A. L.: Wlijanie temperatury zakłki na wriemiennoj spad pronicajemosti w piermałoiach. — Fiz. Met. i Metalowied., 19 (1965), 2, s. 296—299.
29. Bragiński, A.: Badanie stabilizacji ścian Blocha w ferrycie manganowo-cynkowym przy temperaturach bliskich 273°K. — Arch. Elektrotechn., t. XIII, z. 4, 1964, s. 823.
30. Bragiński, A., Postupolski, T.: Niestalość czasowa przenikalności ferrytów Mn-Zn po wymuszeniach amplitudowych. — Przegl. Elektroniki, 5 (1964), 11, s. 609—616.
31. Bragiński, A.: Magnetic After-Effects in Iron-Rich Ferrites Containing Vacancies. — Phys. Stat. Sol. 11 (1965), s. 603—616.
32. Bragiński, A., Merceron, Th.: Magnetic Relaxation in Magnetite in its Solid Solutions with Manganese and Nickel Ferrites. — Nature, vol. 191, nr 4791, 1961, s. 898—899.
33. Moser, P.: Étude au moyen du traînage magnétique de diffusion des défauts créés par irradiation dans le fer. — Thèse, Université Grenoble, 1965.
34. Barbier, J., Ferlin-Guion, B.: Magnetic Anisotropy of the Demagnetized State. — Journ. Appl. Phys. Suppl., 33 (1962), 3, s. 1226—1228.
35. Risch, R.: Magnetische Nachwirkung nach verschieden gerichteten starken Wechsellagerungen. — Zeitschr. Ang. Phys. 18 (1964), 1, s. 4—7.
36. v. Kienlin, A., Kornetzki, A., Rabi, H.: Ferrites à cycle d'hysteresis modifié par traitement thermique dans un champ magnétique faible. — Journ. Phys. Rad. 20 (1959), Nr 2-3, s. 247—250.
37. Enz, U.: Relation between Disaccommodation and Magnetic Properties of Manganese-Ferrous Ferrite. — Physica, 24 (1958), 7, s. 609—624.

38. Smoliński, A.: The Influence of the Method of Demagnetization on the Permeability in Soft Magnetic Materials. — Bull. Ac. Pol. Sci. ser. sci. techn. vol. VIII, nr 2, 1960, s. 93—97.
39. Postupolski, T., Piotrkiewicz, M.: praca w przygotowaniu.
40. Gorter, E.W., Esveltdt, C.J.: Square-Loop Ferrites Obtained by Magnetic Annealing of New Compositions. — Proc. IEE. 104 (1957), Part B, Suppl. Nr 7, s. 418—421.

T. POSTUPOLSKI, M. PIOTRKIEWICZ

MAGNETIC STATE REPRODUCIBILITY IN Mn-Zn FERRITES

Summary

In the present paper magnetic states which occur in polycrystalline Mn-Zn ferrites after magnetic and thermal demagnetisation are being reported on the basis of experimental results. Two groups of specimens, one group showing the diffusion magnetic after-effect and the other, without exhibiting that effect, were being chosen for investigation.

Magnetic stabilization unyielding to magnetic demagnetization occurs; an explanation to this effect has been given.

Effects of magnetic demagnetizations at various directions were being studied. Demagnetization anisotropy effects and its dependence on shape of the sample, field intensity and time has been shown. Correctness of the determination of after-effect parameters from permeability disaccommodation measurements has been discussed.

The causes of the appearance of different magnetic states corresponding to the thermal and to the magnetic demagnetization have been shown.

During magnetic demagnetization two mechanisms are possible: one in submacroscopic scale and the other—in microscopic scale. The mechanisms have been discussed.

The influence of demagnetization technique on the magnetic state of specimens has been analysed.

Finally the general conclusions have been drawn.

T. POSTUPOLSKI, M. PIOTRKIEWICZ

REPRODUCTIBILITÉ DES ÉTATS MAGNÉTIQUES DANS LES FERRITES DE Mn-Zn

Résumé

On décrit dans cet article les états magnétiques, qui résultent des désaimantations magnétiques et thermiques dans les ferrites polycristallins de Mn-Zn. Pour les expériences on a choisi des échantillons manifestant les effets dus au trainage magnétique de diffusion aussi que ceux qui ne les manifestent pas.

On a constaté la manifestation de la stabilisation insensible à la désaimantation magnétique. On a fait un essai d'expliquer ce phénomène.

On a étudié les effets résultant de la désaimantation magnétique effectuée en directions diverses. On a considéré ici l'anisotropie de désaimantation et sa dépendance de la forme de l'échantillon, de l'intensité du champ et du temps. On a aussi examiné la correction de la façon de déterminer les paramètres du trainage magnétique par la mesure de la désaccommodation.

On a indiqué les causes grâce auxquelles après la désaimantation thermique l'état magnétique n'est pas, en général, le même que celui qui résulte de la désaimantation magnétique. Le plus haut degré de la reproductibilité de l'état a été obtenu dans les échantillons étudiés en leur appliquant les désaimantations magnétique et thermique conjointes.

Les résultats obtenus indiquent, que les deux mécanismes de désaimantation magnétique sont possibles: l'un, qui a lieu à l'échelle submacroscopique et l'autre — à l'échelle microscopique.

La partie finale est consacrée à la technique de la désaimantation magnétique qui exerce aussi l'influence sur l'état magnétique.

On a établi enfin les conclusions générales.

T. POSTUPOLSKI, M. PIOTRKIEWICZ

ABBILDUNG DES MAGNETISCHEN ZUSTANDES VON Mn-Zn-FERRITEN

Zusammenfassung

Auf Basis der erhaltenen Versuchungsergebnisse sind die magnetische Zustände, die nach der magnetischen und thermischen Entmagnetisierung in polikristallischen Mn-Zn-Ferriten entstehen, besprochen worden.

Als Versuchsprüflinge wurden Ferritmuster, die einen oder keinen magnetischen Nachwirkungseffekt der Diffusionstypen aufweisen, angewandt.

Eine magnetische Stabilisierung, unempfindlich auf magnetische Entmagnetisierung, ist festgestellt worden und es ist ein Versuch unternommen um diese Erscheinung zu klären.

Es wurde die Wirkung von magnetischen Entmagnetisierung, die in verschiedenen Richtungen ausgeübt wurde, geprüft; dabei wurde die Abhängigkeit der Entmagnetisierungsanisotropie von der Prüflingsform, der Messfeldstärke und der Zeit, berücksichtigt. Ein Modell der die beobachteten Erscheinungen klärt, ist vorgeschlagen worden. Es wird auch die Auswertung der Parameter von magnetischen Nachwirkung der Diffusionstypen, die aus den Messergebnissen der Desakkommodation gerechnet wurde, diskutiert.

Die Ursachen die die verschiedene magnetische Zustände nach der thermischen und magnetischen Entmagnetisierung hervorufen, sind gezeigt worden. Der höchste Abbildungsgrad des magnetischen Zustandes der Prüflinge ist bei gleichzeitiger thermischer und magnetischer Entmagnetisierung, erreicht worden. Solcher Entmagnetisierungsvorgang verhindert die magnetische Stabilisierung des Werkstoffes während der Abkühlung (von dem Curiepunkt) der Prüflinge.

Die erhaltenen Resultate zeigen, dass während der magnetischen Entmagnetisierung zwei Arten des Entmagnetisierungsmechanismus möglich sind. Der erste, das im submakroskopischen Maßstabe herforgeht, der Zweite, im mikroskopischen Maßstabe herforgeht.

Im Schlussabschnitt wird der Einfluss der Entmagnetisierungstechnik auf den magnetischen Zustand der Prüflinge gezeigt und es sind allgemeine Entschlüsse formuliert worden.

T. ПОСТУПОЛЬСКИ, М. ПИОТРКЕВИЧ

ВОССТАНОВЛЯЕМОСТЬ МАГНИТНОГО СОСТОЯНИЯ ФЕРРИТОВ Mn-Zn

Резюме

В работе обсуждаются, на основании экспериментальных результатов, магнитные состояния в поликристаллических ферритах Mn-Zn после их магнитного и термического размагничивания. Для эксперимента были выбраны две группы образцов: 1) проявляющих магнитное диффузионное последствие, 2) без в. у. последствия.

Сконстатировано наличие магнитной стабилизации неразрушаемой магнитным размагничиванием.

Исследовались подробно многие эффекты магнитного размагничивания производимого в различных направлениях по отношению к направлению измерительного поля. Обсуждено м. п. правильность определения параметров диффузионного последствия на основании измерения дезаккомодации проницаемости.

Указано на причины существования различных магнитных состояний, вызванных соответственно магнитным и термическим размагничиванием. Самая высокая степень восстановления магнитного состояния в исследованных образцах была достигнута с помощью совместно действующих размагничиваний: термического и магнитного.

В области магнитного размагничивания могут существовать одновременно два механизма: один — действующий в субмакроскопическом масштабе и другой — в микроскопическом масштабе.

Даны примеры, поясняющие влияние различных методов магнитного размагничивания на состояние сердечника.

В заключении даны общие выводы.

MICHAŁ JABŁOŃSKI

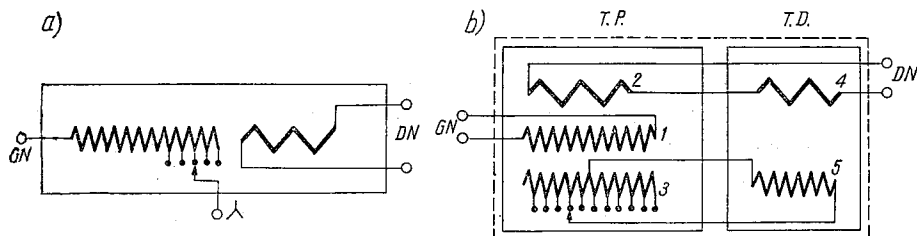
Praca transformatora trójfazowego przy niesymetrycznej regulacji przekładni

Rękopis dostarczono 19.4.1967

Przy niesymetrii impedancji w obwodzie wtórnym transformatora może wystąpić potrzeba symetryzacji albo prądu wtórnego, albo prądu pierwotnego. Jedną z metod symetryzacji jest niesymetryczne ustawienie przełączników zacepów w poszczególnych fazach. W pracy rozpatrzono dla różnych układów połączeń przypadki symetryzacji prądu wtórnego. Wyprowadzono wzory służące do obliczania rozplywu prądów oraz spadków napięcia przy niesymetrycznym ustawieniu przełączników. Określono występujące przy tym prze-wzbudzenia i przetężenia w poszczególnych fazach. Wyeliminowano układy, których nie można stosować przy takiej regulacji. Określono, kiedy występuje potrzeba stosowania rdzenia 5-kolumnowego lub układu trzech jednostek jednofazowych. Opracowano metody wyznaczania położenia przełączników zacepów dla zadanych wartości niesymetrycznych napięć wtórnych. Opracowano zarówno przypadki działania przełącznika po stronie wtórnej, jak i po stronie pierwotnej. Stwierdzono, że transformatory przewidziane do symetryzacji prądu wtórnego mogą zawsze służyć do symetryzacji prądu pierwotnego, gdyż niesymetria połączeń przełączników zacepów jest w takim przypadku mniejsza.

1. WSTĘP

Niesymetryczna regulacja przekładni transformatora trójfazowego lub trójfazowego układu trzech transformatorów jednofazowych jest stosowana wtedy, gdy różne fazowe impedancje odbioru powodują powstanie niesymetrii prądu obciążenia. Odzyskanie symetrii prądu, które dalej będzie zwane symetryzacją, wymaga na zaciskach napięcia dostosowanego do układu impedancji. Jest to napięcie o większym lub mniejszym stopniu asymetrii.



Rys. 1. Układ regulacyjny dla 1 fazy w transformatorze z małą liczbą zwojów po stronie DN

a) Regulacja bezpośrednia po stronie GN; b) Regulacja pośrednia po stronie DN: T.P. — transformator podstawowy, T.D. — transformator dodawczy, 1 — uzwojenie pierwotne GN, 2 — uzwojenie wtórne podstawowe DN, 3 — uzwojenie regulacyjne z przełącznikiem, 4 — uzwojenie dodawcze DN, 5 — uzwojenie wzbudzające transformatora dodawczego

Typowym przykładem praktycznym odbiornika o niejednakowych impedancjach fazowych jest układ wielkoprądowy toru i pieca łukowego dużej mocy. Transformatory do takich układów mają zazwyczaj moce trójfazowe $16 \div 40$ MVA. Symetryzacja prądu w układzie piecowym wymaga niejednokrotnie dość znacznych różnic w nastawieniu przełączników zaczepek poszczególnych faz. Należy przeanalizować zjawiska, które występują w transformatorze lub układzie transformatorów przy takiej regulacji.

Przełączniki zaczepek mogą być umieszczone bezpośrednio w uzwojeniach strony pierwotnej (rys. 1a) lub mogą działać po stronie wtórnej. Niskie napięcie i mała liczba zwojów DN wymaga, aby regulacja po tej stronie odbywała się przy użyciu transformatora dodatkowego (rys. 1b), co nie zmienia jednak toku rozważań.

Rysunek 1 wykonano dla jednej fazy. Końcówki GN oraz DN mogą być łączone w gwiazdę lub w trójkąt. Po stronie DN niezależnie od układu połączeń odbiór jest trójprzewodowy. Istnieją zatem następujące możliwości łączenia układu:

a) Yd ; b) Y_Y ; Y_0Y ; $Y_Y(d_{wyr})$; c) DY ; d) Dd ;

We wszystkich przypadkach istnieje możliwość budowy transformatora z rdzeniem trójkolumnowym oraz 5-kolumnowym, jak również zestawienia układu trzech transformatorów jednofazowych.

Układ Y_Y bez przewodu zerowego i bez trójkąta wyrównawczego ma znane powszechnie wady, które sprawiają, że do regulacji niesymetrycznej — szczególnie w układzie trzech jednostek — nie może być zastosowany. W toku dyskusji okaże się również, że układ Dd nie nadaje się do regulacji niesymetrycznej. Zostaną więc rozpatrzone bliżej układy podkreślone, przy niesymetrycznej regulacji po stronie pierwotnej lub wtórnej i przy omówieniu roli układów rdzeni magnetycznych we wszystkich przypadkach.

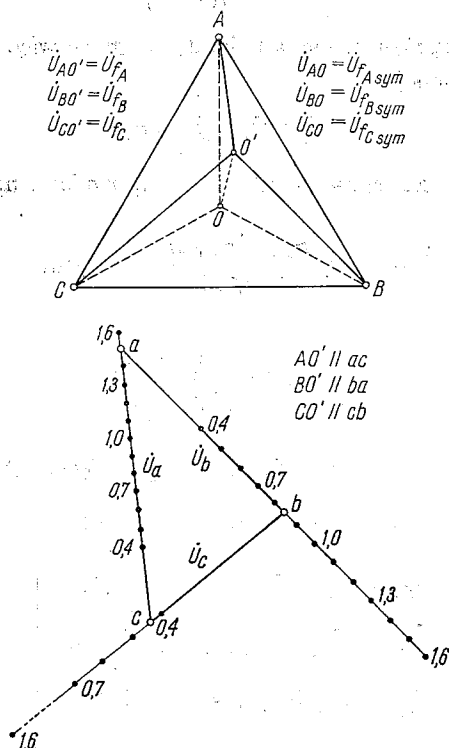
2. ROZWAŻANIE PRACY UKŁADU Yd PRZY REGULACJI OD STRONY DN

Układ Yd jest szczególnie wygodny przy niskich napięciach i wielkich prądach po stronie DN , gdyż pozwala na mniejsze przekroje przewodów i mniejsze wymiary przepustów niż w przypadkach gwiazdy DN .

2.1. Regulacja niesymetryczna od strony DN w stanie jałowym

Uziemienie gwiazdy symetrycznej GN powoduje występowanie sztywnych i symetrycznych pierwotnych napięć uzwojeń fazowych. W tych warunkach stworzenie niesymetrii zwojowej w uzwojeniach trójkąta powoduje pojawienie się dużego prądu wyrównawczego składowej zerowej w jego obwodzie. Amperozwoje tego prądu są równe przepływowi składowej zerowej po stronie pierwotnej. Duże wartości prądów wyrównawczych dyskwalifikują ten układ. Trzeba więc z naciskiem podkreślić, że przy niesymetrycznej regulacji punkt zerowy gwiazdy w układzie Yd musi być nie połączony z punktem zerowym sieci. Rozważania zostaną przeprowadzone przy tym założeniu. Przy niesymetrycznym układzie przełączników punkt zerowy strony pierwotnej może przesuwac się, dostosowując się do warunków układu.

Położenie przełącznika zaczepów będzie określone parametrem p . Jako podstawowy stopień regulacji zostanie przyjęty zgodnie z rys. 1b taki stopień, przy którym uzwojenie regulacyjne (3) jest nieczynne, wybierak stoi w położeniu średnim, a uzwojenie (5) jest zwarte i nie wzbudza SEM w uzwojeniu dodawczym (4). Stopień ten oznacza się $p = 1$.



Rys. 2. Przykład niesymetrycznej regulacji napięcia od strony trójkąta DN przy ustawieniu przełączników: $p_a = 1,5$; $p_b = 0,85$; $p_c = 0,43$, w układzie $Yd 11$. W tekście oznaczono: $\dot{U}_{ca}$ jako $\dot{U}_a$; $\dot{U}_{ab}$ jako $\dot{U}_b$ oraz $\dot{U}_{bc}$ jako $\dot{U}_c$

Jeśli SEM w uzwojeniu 4 wynosi np. 50% SEM -ej w uzwojeniu 2, to przy zgodności kierunków sił elektromotorycznych $p = 1,5$, a przy rewersji $p = 0,5$. Przy rozważaniach uzwojenie fazowe i napięcie tego uzwojenia po stronie GN jest sprowadzone do uzwojenia fazowego DN na stopniu podstawowym. Powyższe założenia pozwalają zapisać następujące konieczne do rozważań układy równań napięciowych¹⁾. (Rys. 2).

Jako napięcie odniesienia zostaje przyjęte $\dot{U}_{fA sym} = U_f$;

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{fA} &= \dot{U}_{fA sym} + \dot{U}_0 = U_f + \dot{U}_0, \\ \dot{U}_{fB} &= \dot{U}_{fB sym} + \dot{U}_0 = a^2 U_f + \dot{U}_0, \\ \dot{U}_{fC} &= \dot{U}_{fC sym} + \dot{U}_0 = a U_f + \dot{U}_0; \end{aligned} \right\} \quad (1a,b,c)$$

¹⁾ Przy przyjętej kolejności faz operator zespolony a w rachunku symbolicznym jest: $a = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_a &= \dot{U}_{fA} p_a, \\ \dot{U}_b &= \dot{U}_{fB} p_b, \\ \dot{U}_c &= \dot{U}_{fC} p_c. \end{aligned} \right\} \quad (2a,b,c)$$

Napięcia strony wtórnej są skojarzone w trójkąt, nie może więc w nich występować składowa zerowa. W konsekwencji

$$\dot{U}_a + \dot{U}_b + \dot{U}_c = 0. \quad (3)$$

Podstawiając (1) do (2), a następnie do (3), przegrupowując i upraszczając otrzymuje się

$$\dot{U}_0 = -U_f \frac{p_a + a^2 p_b + a p_c}{p_a + p_b + p_c} = U_f \dot{p}_0, \quad (4a)$$

gdzie

$$\dot{p}_0 = - \frac{p_a + a^2 p_b + a p_c}{p_a + p_b + p_c}, \quad (4b)$$

przy czym $\dot{p}_0$ wyraża symboliczną wartość względną napięcia składowej zerowej $\dot{p} = \frac{\dot{U}_0}{U_f}$.

W konsekwencji można inaczej wyrazić wzory (1a,b,c):

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{fA} &= U_f + U_f \dot{p}_0 = U_f (1 + \dot{p}_0), \\ \dot{U}_{fB} &= a^2 U_f + U_f \dot{p}_0 = U_f (a^2 + \dot{p}_0), \\ \dot{U}_{fC} &= a U_f + U_f \dot{p}_0 = U_f (a + \dot{p}_0) \end{aligned} \right\} \quad (5a,b,c)$$

oraz wzory (2a,b,c):

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_a &= U_f (1 + \dot{p}_0) p_a, \\ \dot{U}_b &= U_f (a^2 + \dot{p}_0) p_b, \\ \dot{U}_c &= U_f (a + \dot{p}_0) p_c. \end{aligned} \right\} \quad (6a,b,c)$$

Ponieważ w warunkach niesymetrycznego ustawienia regulatorów w napięciach fazowych po stronie pierwotnej $\dot{U}_{fA}$, $\dot{U}_{fB}$, $\dot{U}_{fC}$ występuje składowa zerowa, więc tego rodzaju regulacja w przypadku transformatora trójfazowego trójkolumnowego już w stanie jałowym powoduje pojawienie się strumienia jarzmowego silnie magnesującego każdą, co stanowi poważną wadę praktycznie dyskwalifikującą układ.

W przypadku trzech transformatorów jednofazowych lub transformatorów trójfazowych 5-kolumnowych droga dla strumienia składowej zerowej jest zamknięta, nie ma więc obaw stosowania tego układu.

W obu alternatywach trzeba natomiast wziąć pod uwagę, że jedno lub dwa napięcia fazowe, a więc i strumienie fazowe, mogą być wyższe od napięć (i odpowiednio strumieni) fazowych symetrycznych, należy więc rozwiązywać ten układ z obniżoną indukcją w rdzeniach (zob. przykład liczbowy 1 i 2).

Przykład liczbowy 1.

Graniczne niesymetryczne ustawienie regulatorów przewidziane przez konstruktora wynosi $p_a = 1, p_b = 0,85, p_c = 0,7$, stąd zgodnie ze wzorem (4a):

$$\begin{aligned} \dot{p}_0 &= -\frac{1+0,85a^2+0,70a}{1+0,85+0,70} = -\frac{1+0,85\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+0,70\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2,55} = \\ &= -\frac{0,225-j\frac{0,15\sqrt{3}}{2}}{2,55} = -0,088+j0,05. \end{aligned}$$

Moduł tego wyrażenia jest 0,102, składowa zerowa napięcia wynosi zatem 10,2%.

Napięcia fazowe pierwotne wynoszą w oparciu o wzory (5a, b, c):

$$a) \dot{U}_{fA} = U_f(0,912+j \cdot 0,051)$$

— moduł tego wyrażenia wynosi:

$$U_{fA} = U_f \cdot 0,914;$$

$$b) \dot{U}_{fB} = U_f(-0,588-j \cdot 0,815)$$

— moduł tego wyrażenia wynosi:

$$U_{fB} = U_f \cdot 1,004 \approx U_f;$$

$$c) \dot{U}_{fC} = U_f(-0,588+j \cdot 0,917)$$

— moduł tego wyrażenia wynosi:

$$U_{fC} = U_f \cdot 1,09.$$

Tak więc w powyższych warunkach napięcie fazowe pierwotne, a więc i strumień w transformatorze fazy *A* spadnie o ok. 8,5%,

„ *B* wzrośnie o ok. 0,5%,

„ *C* wzrośnie o ok. 9,0%.

Aby w tych warunkach nie uzyskać zbyt dużego przewzbudzenia żadnego transformatora w układzie, należy przy projektowaniu obniżyć indukcyjność o ok. 9% w porównaniu z indukcyjnością, która mogłaby być przyjęta przy symetrycznej pracy przełączników zaczepów.

Napięcia (wartości skuteczne, czyli moduły) po stronie wtórnej w stanie jałowym będą następujące przy zastosowaniu wzoru (2a, b, c) w postaci modułowej — bez kropek:

$$U_a = U_{fA}p_a = U_f 0,914 \times 1,0 = U_f 0,914,$$

$$U_b = U_{fB}p_b = U_f 1,004 \times 0,85 = U_f 0,853,$$

$$U_c = U_{fC}p_c = U_f 1,09 \times 0,70 = U_f 0,763.$$

Asymetria trójkąta napięć wtórnych jest więc znacznie mniejsza niż asymetria ustawiona na regulatorach. Napięcie wtórne daje się rozłożyć na składowe symetryczne — zgodną i przeciwną. Składowa zerowa oczywiście nie występuje (skojarzenie w trójkąt).

W rozpatrywanym przypadku rozkład na składowe symetryczne daje następujące wartości składowych:

$$U_I = U_f 0,845, \quad U_{II} = U_f 0,092,$$

a więc składowa przeciwna wynosi 10,85% składowej zgodnej.

Zadany układ położenia regulatorów jest 1; 0,85; 0,70; natomiast układ uzyskanych napięć jest: 0,92; 0,85; 0,76; różnice są więc niemal dwukrotnie mniejsze, niż by to wynikało z nastawionych pozycji regulatorów. Uzyskanie układu napięć wtórnych 1; 0,85; 0,7 wymagałoby ustawienia regulatora na pozycje 1,32; 0,79; 0,60; (zob. przykład liczbowy 2). W takim układzie strumień w transformatorze fazy *C* wzrósłby już nie o 9, lecz o 17 procent wartości znamionowej.

Aby móc prawidłowo zaprojektować obwód magnetyczny transformatora dla układu *Yd* przewidzianego do pracy przy niesymetrycznym napięciu wtórnym konstruktor musi mieć koniecznie podaną graniczną niesymetrię napięć; następnie musi znaleźć odpowiadającą zadanej największej niesymetrii napięć graniczną niesymetrię położenia przełączników, po czym musi znaleźć napięcia fazowe pierwotne i wynikające z nich wartości względne strumieni. Ostatecznie można wtedy określić indukcję w transformatorze przy pracy symetrycznej tak, aby przy granicznej niesymetrii nie przekroczyć wartości indukcji, którą dla danej blachy można jeszcze uznać za dopuszczalną. Z drugiej strony konstruktor musi podawać, jaką największą asymetrię ustawienia przełącznika uznaje za dopuszczalną dla zaprojektowanego przez siebie transformatora. Należy podkreślić, że wobec istnienia trójkąta (mimo jego niesymetrii) napięcia fazowe są sinusoidalne.

Opisana i przedyskutowana powyżej niesymetria wobec nieistnienia przewodu zerowego po stronie pierwotnej i wobec nieistnienia *SEM* składowej zerowej po stronie wtórnej nie powoduje pojawienia się prądu wyrównawczego w stanie jałowym, nie powstają więc zjawiska opisane poprzednio w przypadku *Y₀d*.

Prądy płynące przy niesymetrycznej regulacji w stanie jałowym zespołu 3 transformatorów jednofazowych są wyłącznie prądami o charakterze magnesującym, są więc pomijalnie małe. Jedynie w przypadku transformatora trójfazowego z rdzeniem 3-kolumnowym strumień składowej zerowej, będący strumieniem jarzmowym, wymaga większego prądu wzbudzającego składowej zerowej.

Jeśli napięcie składowej zerowej wyniosłoby — jak w obliczanym przykładzie liczbowym 1 — około 10%, to transformator trójfazowy 3-kolumnowy wymagałby ok. 20% *I_n* w obwodzie trójkąta, aby takie napięcie wytworzyć¹⁾. Tak więc oprócz wspomnianego poprzednio grzania się kadzi występowałoby dodatkowe obciążenie prądem elementów uzwojenia *DN*, co podczas pracy prowadziłoby do przeciążeń. W konsekwencji przy niesymetrycznej regulacji po stronie trójkąta w układzie *Yd* należy stosować albo rdzeń 5-kolumnowy, albo układ trzech jednostek jednofazowych.

2.2. Metoda określania położenia przełącznika zaczepów przy zadanych wartościach napięć przewodowych wtórnych

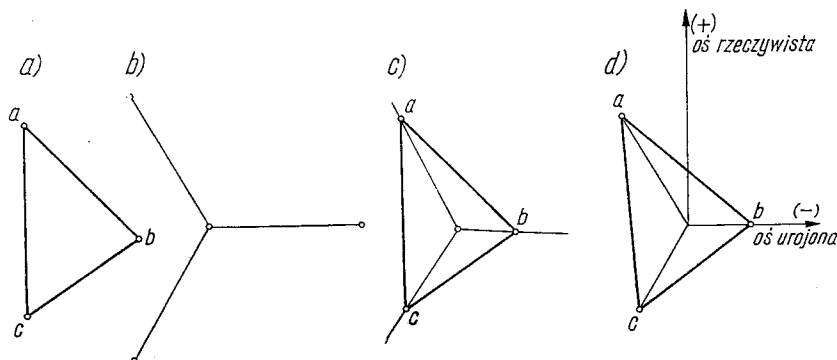
Metoda rachunkowo-wykreślna będzie przedstawiona na tle przesunięcia godzinowego 11h, gdyż jest to jedyne przesunięcie, z którym należy się liczyć w dużym transformatorze *Yd*.

¹⁾ Oporność dla składowej zerowej w transformatorze trójkolumnowym jest rzędu 50%.

Kolejność postępowania:

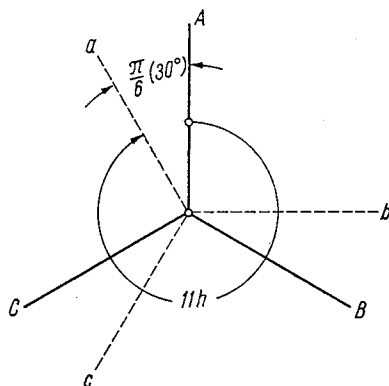
1) Zadane niesymetryczne napięcie strony wtórnej wyrażone w wartościach skutecznych przedstawia się w jednostkach względnych, odniesionych do napięcia symetrycznego na zaczeple podstawowym U_f :

$$\frac{\dot{U}_a}{U_f} = \dot{u}_a; \quad \frac{\dot{U}_b}{U_f} = \dot{u}_b; \quad \frac{\dot{U}_c}{U_f} = \dot{u}_c. \quad (7a, b, c)$$



Rys. 3. Kolejność postępowania dla uzyskania wykresu wektorowego napięć wtórnych o zadanych modułach

2) Za pomocą cyrkla należy z zadanych napięć zestawić trójkąt napięć jak na rys. 3a. Następnie symetryczną gwiazdę trójfazową (rys. 3b) należy tak wysować w trójkąt napięć, aby przechodziła przez wierzchołki a, b, c jak na rys. 3c. Rys. 3c należy na papierze milimetrowym tak obrócić, aby ramię gwiazdy przechodzące przez wierzchołek „b” miało kierunek poziomy (rys. 3d). Przy takim ustawieniu przesunięcie gwiazd symetrycznych napięć fazowych DN względem GN wynosi 11 godzin (rys. 4).



Rys. 4. Przesunięcie gwiazd napięć fazowych dla grupy 11h

Przy przesunięciach innych niż 11 godzin (np. 1 h lub 5 h) należy odpowiednio inaczej ustawić gwiazdę napięć fazowych wtórnych względem pierwotnych. Boki trójkąta należy zestawić teraz w gwiazdę zachowując ich kierunki (rys. 5) i na tym samym rysunku wykreślić symetryczną gwiazdę napięć pierwotnych sprowadzonych do strony wtórnej na zaczeple podstawowym. U_f w jednostkach względnych będzie oznaczane małą literą u ,

i ma moduł równy 1. Wektor $\dot{u}_{f_{A \text{ sym}}}$ został na początku rozważań przyjęty jako baza, a więc $\dot{u}_{f_{A \text{ sym}}} = 1 = u_f$. Również na rys. 5 wykreśla się różnicę wektorów

$$\dot{u}_{f_{A \text{ sym}}} - \dot{u}_{f_{B \text{ sym}}} = u_f(1-a^2)$$

oraz

$$\dot{u}_{f_{A \text{ sym}}} - \dot{u}_{f_{C \text{ sym}}} = u_f(1-a).$$

Są to odpowiednio odcinki $\overrightarrow{ow}$ oraz $\overrightarrow{oz}$. Z wierzchołka wektora $\dot{u}_a$ (punkt k) kreśli się równoległą do $\overrightarrow{oz}$ i otrzymuje się punkt l . Podobne postępowanie dla wektora $\dot{u}_c \cdot a^2$ daje punkt n oraz dla wektora $\dot{u}_b \cdot a$ punkt t .

Oznaczmy:

$$\overrightarrow{lk} = \dot{\delta}; \quad \overrightarrow{ol} = \dot{\alpha};$$

$$\overrightarrow{ts} = \dot{\varepsilon}; \quad \overrightarrow{ot} = \dot{\beta};$$

$$\overrightarrow{nm} = \dot{\eta}; \quad \overrightarrow{on} = \dot{\gamma}.$$

Równanie (6a, b, c) po podstawieniu (4b) oraz napięć w wartościach względnych (7a, b, c) i uproszczeniu można zapisać następująco:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_a &= \frac{1}{1 + \frac{p_b}{p_a} + \frac{p_c}{p_a}} [p_b(1-a^2) + p_c(1-a)], \\ \dot{u}_b a &= \frac{\frac{p_b}{p_a}}{1 + \frac{p_b}{p_a} + \frac{p_c}{p_a}} [p_c(1-a^2) + p_a(1-a)], \\ \dot{u}_c a^2 &= \frac{\frac{p_c}{p_a}}{1 + \frac{p_b}{p_a} + \frac{p_c}{p_a}} [p_a(1-a^2) + p_b(1-a)]. \end{aligned} \right\} \quad (8a, b, c)$$

Jednocześnie z rys. 5 widać, że:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_a &= \dot{\alpha} + \dot{\delta}, \\ \dot{u}_b a &= \dot{\beta} + \dot{\varepsilon}, \\ \dot{u}_c a^2 &= \dot{\gamma} + \dot{\eta}. \end{aligned} \right\} \quad (9a, b, c)$$

Zestawienie wzorów (8a, b, c) i (9a, b, c) wskazuje, że:

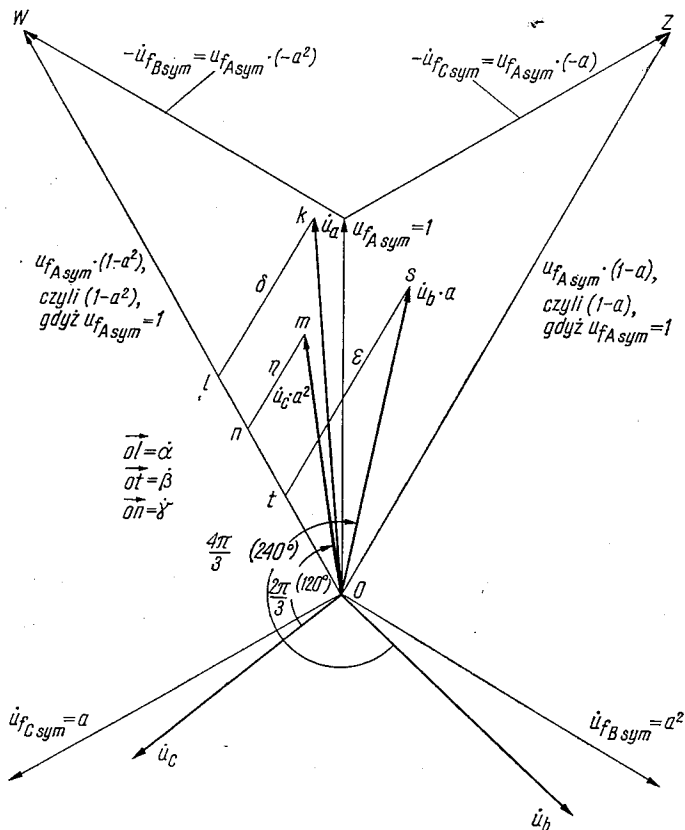
$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{p_b(1-a^2)}{1 + \frac{p_b}{p_a} + \frac{p_c}{p_a}}; & \dot{\delta} &= \frac{p_c(1-a)}{1 + \frac{p_b}{p_a} + \frac{p_c}{p_a}}, \\ \dot{\beta} &= \frac{p_c(1-a^2)}{1 + \frac{p_b}{p_a} + \frac{p_c}{p_a}} \cdot \frac{p_b}{p_a}; & \dot{\varepsilon} &= \frac{p_a(1-a)}{1 + \frac{p_b}{p_a} + \frac{p_c}{p_a}} \cdot \frac{p_b}{p_a}, \\ \dot{\gamma} &= \frac{p_a(1-a^2)}{1 + \frac{p_b}{p_a} + \frac{p_c}{p_a}} \cdot \frac{p_c}{p_a}; & \dot{\eta} &= \frac{p_b(1-a)}{1 + \frac{p_b}{p_a} + \frac{p_c}{p_a}} \cdot \frac{p_c}{p_a}. \end{aligned} \right\} \quad (10a, d) \quad (10b, c, e, f)$$

Dzielnik wyrażenia dla jednokierunkowych wektorów $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ oraz $\dot{\gamma}$ albo $\dot{\delta}$, $\dot{\varepsilon}$ oraz $\dot{\eta}$ odpowiednio stronami otrzymujemy stosunki wyrażone liczbami rzeczywistymi:

$$\frac{p_a}{p_a} = 1; \quad \frac{p_b}{p_a} = \frac{\beta}{\gamma}; \quad \frac{p_c}{p_a} = \frac{\beta}{\alpha} \quad (11a, b, c)$$

albo

$$\frac{p_a}{p_a} = 1; \quad \frac{p_b}{p_a} = \frac{\delta}{\eta}; \quad \frac{p_c}{p_a} = \frac{\eta}{\varepsilon}. \quad (12a, b, c)$$



Rys. 5. Wykres prowadzący do uzyskania współczynników wyrażonych wzorami (10 a, b, c, d, e, f)

Łatwo udowodnić, że odpowiadające sobie wyrażenia (11a, b, c) i (12a, b, c) są tożsamościowo równe.

Z rys. 5 widać, że:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= \alpha \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right), \\ \dot{\beta} &= \beta \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right), \\ \dot{\gamma} &= \gamma \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (13a, b, c)$$

Prąd ten będzie w dalszym ciągu oznaczany wskazowo (z kropką), gdyż w ostatecznych rozważaniach, aby móc na wykresie wektorowym we właściwy sposób oznaczyć kierunki poszczególnych prądów i spadków napięcia, trzeba uwzględnić przesunięcie fazowe prądu $\dot{I}$ względem podstawowej bazy kierunkowej, za którą uznano $\dot{U}_{f_{Asym}}$. W układzie $Yd 11$ wektor prądu przewodowego odbioru czysto czynnego wyprzedza o jedną godzinę, czyli o $\psi = 30^\circ$ wektor odpowiedniego napięcia fazowego pierwotnego. W takim przypadku $\dot{I} = I(0,866 + j0,500)$. Przy układach Yd o innym przesunięciu godzinowym kierunek wektora $\dot{I}$ należy oznaczać w sposób analogiczny, uwzględniając odpowiednią liczbę godzin przesunięcia. Przesunięcie fazowe między symetryczną gwiazdą napięć fazowych wtórnych w stanie jałowym a usymetryzowanym prądem przewodowym wtórnym przy obciążeniu oznaczmy jako $-\varphi_u$, przy czym φ_u ma charakter indukcyjny, $\cos \varphi_u$ nazwiemy umownym współczynnikiem mocy. Prąd I można więc wyrazić następująco:

$$\dot{I} = I[\cos(\varphi_u + \psi) - j\sin(\varphi_u + \psi)], \quad (16)$$

gdzie dla przesunięcia godzinowego 11 h $\psi = -30^\circ$,

„ „ „ 1 h $\psi = +30^\circ$,

„ „ „ 5 h $\psi = +150^\circ$,

„ „ „ 7 h $\psi = -150^\circ$.

Zestawienie równań charakteryzujących układ jest następujące w oparciu o rys. 6:

$$\dot{I}_a = \dot{I}_{fa} - \dot{I}_{fb}; \quad \dot{I}_b = \dot{I}_{fb} - \dot{I}_{fc}; \quad \dot{I}_c = \dot{I}_{fc} - \dot{I}_{fa}; \quad (17a, b, c)$$

$$\dot{I}_A = -\dot{I}_{fa}p_a; \quad \dot{I}_B = -\dot{I}_{fb}p_b; \quad \dot{I}_C = -\dot{I}_{fc}p_c; \quad (18a, b, c)$$

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0; \quad (19)$$

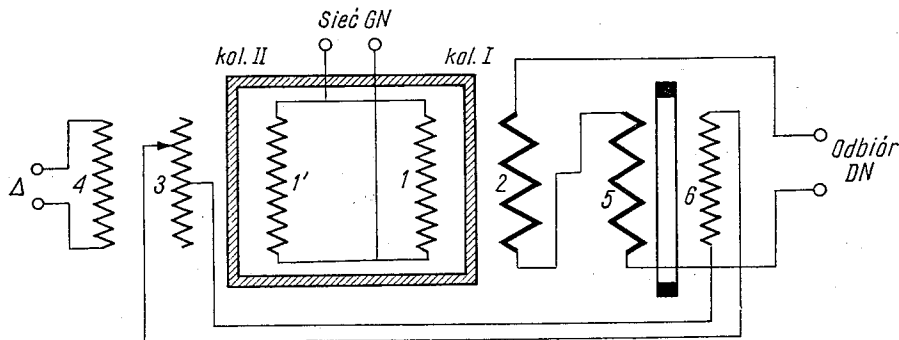
$$\frac{1}{3}(\dot{I}_{fa} + \dot{I}_{fb} + \dot{I}_{fc}) = I_0. \quad (20)$$

Tablica 1

Dla układu $Yd 11$

Prądy odbioru	Prądy uzwojeń fazowych trójkąta	Prądy pierwotne pobierane z sieci
wzory (15a, b, c)	wzory (21a, b, c)	wzory (22a, b, c)
$\dot{I}_a = \dot{I}$	$\dot{I}_{fa} = \dot{I} \frac{p_b - ap_c}{p_a + p_b + p_c}$	$\dot{I}_A = -\dot{I} p_a \frac{p_b - ap_c}{p_a + p_b + p_c} = -\dot{I}_{fa} p_a$
$\dot{I}_b = a^2 \dot{I}$	$\dot{I}_{fb} = \dot{I} \frac{a^2 p_c - p_a}{p_a + p_b + p_c}$	$\dot{I}_B = -\dot{I} p_b \frac{a^2 p_c - p_a}{p_a + p_b + p_c} = -\dot{I}_{fb} p_b$
$\dot{I}_c = a \dot{I}$	$\dot{I}_{fc} = \dot{I} \frac{ap_a - a^2 p_b}{p_a + p_b + p_c}$	$\dot{I}_C = -\dot{I} p_c \frac{ap_a - a^2 p_b}{p_a + p_b + p_c} = \dot{I}_{fc} p_c$
Prąd składowej zerowej w obwodzie wewnętrznym trójkąta		
$\dot{I}_0 = \dot{I} \frac{a-1}{3} \frac{p_a + a^2 p_b + ap_c}{p_a + p_b + p_c}$		(23)

Podstawiając (16) do (17), a następnie (18), kojarząc ze sobą poszczególne pary wyrażeń, porządkując, upraszczając i uwzględniając (19) uzyskuje się po odpowiednich przeróbkach zestawienie wzorów możliwych do praktycznego zastosowania (tablica 1).



Rys. 7. Schemat praktycznego rozwiązania transformatora jednofazowego podstawowego i dodatkowego przeznaczonego do zespołu z niesymetryczną regulacją przekładni

I ; I' — uzwojenie pierwotne (dwie gałęzie równoległe), 2 — uzwojenie podstawowe DN, 3 — uzwojenie regulacyjne, 4 — ewentualne uzwojenie trójne, 5 — uzwojenie dodatkowe DN, 6 — uzwojenie wzbudające transformatora dodatkowego

U w a g a 1. Jeżeli układ transformatora jednofazowego pracującego w zespole trójfazowym jest taki, jak przedstawiono na rys. 7, należy zauważyć, że wzory (22a, b, c) dotyczą prądów pierwotnych płynących z sieci. Prądy płynące w obu równoległych gałęziach uzwojenia pierwotnego oznaczonych I i I' są przy tym następujące:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_{A1} &= -\dot{I}_{fa}, \\ \dot{I}_{B1} &= -\dot{I}_{fb}, \\ \dot{I}_{C1} &= -\dot{I}_{fc} \end{aligned} \right\} \quad (24a, b, c)$$

oraz

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_{A1'} &= -\dot{I}_{fa}(p_a - 1), \\ \dot{I}_{B1'} &= -\dot{I}_{fb}(p_b - 1), \\ \dot{I}_{C1'} &= -\dot{I}_{fc}(p_c - 1). \end{aligned} \right\} \quad (25a, b, c)$$

Prąd pobierany z sieci jest oczywiście sumą obu prądów uzwojeń równoległych, czyli odpowiednie sumy wyrażeń (24a, b, c) oraz (25a, b, c) dają zgodność ze wzorem (22a, b, c):

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_{A1} + \dot{I}_{A1'} = -\dot{I}_{fa}p_a, \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_{B1} + \dot{I}_{B1'} = -\dot{I}_{fb}p_b, \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_{C1} + \dot{I}_{C1'} = -\dot{I}_{fc}p_c. \end{aligned}$$

U w a g a 2. Tablica 1 została wykonana dla układu $Yd\ 11$. Aby uzyskać wzory dla układu $Yd\ 1$, należy obrócić wskaz prądu GN o 60° w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, czyli pomnożyć prawe strony wzorów (22a, b, c) i w konsekwencji (21a, b, c) oraz (23) przez operator $-a^2$; dla układu $Yd\ 5$ należy zmienić znak prawych

stron powyższych wzorów na przeciwny; dla układu $Yd 7$ należy prawe strony powyższych wzorów pomnożyć przez operator a^2 .

Przykład liczbowy 3.

Podobnie jak w przykładzie liczbowym 1: $p_a = 1,0$; $p_b = 0,85$; $p_c = 0,70$;

Przyjmujemy, że niesymetryczne ustawienie regulatorów spowodowało pełną symetrię obciążenia prądem I . Korzystając ze wzorów zestawionych w tablicy 1(21a, b, c) otrzymuje się dla prądów uzwojeń fazowych trójkąta następujące wyniki:

$$a) \dot{I}_{fa} = \dot{I} \frac{0,85 - \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)0,70}{1,00 + 0,85 + 0,70} = \dot{I}(0,471 - j \cdot 0,237)$$

— moduł tego wyrażenia wynosi:

$$I_{fa} = \frac{I}{\sqrt{3}} 0,914;$$

$$b) \dot{I}_{fb} = \dot{I} \frac{\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)0,70 - 1}{1,00 + 0,85 + 0,70} = \dot{I}(-0,530 - j \cdot 0,237)$$

— moduł tego wyrażenia wynosi:

$$I_{fb} = \frac{I}{\sqrt{3}} 1,005;$$

$$c) \dot{I}_{fc} = \dot{I} \frac{\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)1 - \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)0,85}{1,00 + 0,85 + 0,70} = \dot{I}(-0,029 + j \cdot 0,628)$$

— moduł tego wyrażenia wynosi:

$$I_{fc} = \frac{I}{\sqrt{3}} 1,090.$$

Ze względu na symetryczny odbiór, prąd uzwojeń fazowych trójkąta może zawierać jedynie składową zgodną oraz składową zerową krążącą wewnątrz uzwojeń trójkąta. Prąd składowej zgodnej ma moduł $\frac{I}{\sqrt{3}} = I \cdot 0,578$.

Natomiast wektor prądu składowej zerowej (wzór 23):

$$\begin{aligned} \dot{I}_0 &= \dot{I} \frac{\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1}{3} \cdot \frac{1 + \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)0,85 + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)0,70}{1 + 0,85 + 0,70} = \\ &= \dot{I}(-0,029 + j0,051) \end{aligned}$$

— moduł tego wyrażenia wynosi:

$$I \cdot 0,059 = \frac{I}{\sqrt{3}} 0,102.$$

Prąd składowej zerowej cyrkulujący wewnątrz obwodu trójkąta wynosi w rozpatrywanym przypadku niesymetrii $10,2\% \frac{I}{\sqrt{3}}$, czyli tyle, ile wynosiło napięcie składowej zerowej znalezione w przykładzie liczbowym 1.

U w a g a. Prąd składowej zgodnej i zerowej płynący w uzwojeniach trójkąta i wyrażony wzorami (32a, b, c) nie wytwarza amperozwojów składowej zerowej, lecz tylko amperozwoje kolejności zgodnej i przeciwnej. Przyczyną tego zjawiska jest właśnie niesymetria położeń przełącznika zaczepów, czyli niesymetria zwojowa trójkąta [2].

Obliczenie prądów pierwotnych pobieranych z sieci:

$$\dot{I}_A = -\dot{I}_{fa} \cdot p_a = \dot{I}(-0,471 + j \cdot 0,237);$$

$$\text{moduł: } I \cdot 0,528 = \frac{I}{\sqrt{3}} 0,914;$$

$$\dot{I}_B = -\dot{I}_{fb} \cdot p_b = \dot{I}(0,451 + j \cdot 0,202);$$

$$\text{moduł: } I \cdot 0,491 = \frac{I}{\sqrt{3}} 0,85;$$

$$\dot{I}_C = -\dot{I}_{fc} \cdot p_c = \dot{I}(0,020 - j \cdot 0,439);$$

$$\text{moduł: } I \cdot 0,441 = \frac{I}{\sqrt{3}} 0,765.$$

Prąd pierwotny pobierany z sieci zawiera składową zgodną I_I i przeciwną I_{II} , a nie zawiera składowej zerowej, gdyż układ jest połączony w gwiazdę bez przewodu zerowego.

Zgodnie z podanymi wyżej komentarzami dotyczącymi amperozwojów wtórnych może zachodzić pełna równowaga amperozwojów w transformatorze.

$$I_I = I \cdot 0,486 = \frac{I}{\sqrt{3}} 0,843,$$

$$I_{II} = I \cdot 0,053 = \frac{I}{\sqrt{3}} 0,062, \text{ czyli } 10,9\% I_I.$$

Asymetria ta jest liczbowo identyczna z asymetrią napięć obliczoną dla takiego samego ustawienia przełączników w przykładzie liczbowym 1.

Przeciążenie obliczone tu wskazuje na konieczność przewymiarowania uzwojeń, jeśli przełączniki zaczepów mają pracować niesymetrycznie. Przeciążenie fazy C w rozpatrywanym przypadku wynosi 9%, podobnie jak powiększenie strumienia w rdzeniu tej samej fazy.

W przypadku innych granicznych niesymetrii ustawienia przełącznika, koniecznych dla uzyskania symetrii prądów obciążenia, należy przeprowadzić przeliczenie analogiczne do przykładów liczbowych 1 i 3, aby sprawdzić, jakie przeciążenie prądowe i jaki wzrost strumienia wystąpi podczas pracy. Należy przy tym pamiętać, że niesymetria ustawienia przełącznika zaczepów nie odpowiada niesymetrii uzyskanych po stronie DN napięć i przy zadanej niesymetrii napięć wtórnych trzeba najpierw obliczyć odpowiadające jej położenia przełączników zaczepów. (Rozdział 2.2 i przykład liczbowy 2).

2.4: Spadki napięcia przy obciążeniu

Pozostaje do omówienia zagadnienie geometrycznych strat napięcia oraz spadku napięcia wewnątrz transformatora, gdy zarówno prądy, jak i reaktancje jego uzwojeń są niesymetryczne. Przy rozważaniach będzie brana pod uwagę tylko reaktancja, gdyż w przypadku dużych transformatorów, jakimi są transformatory piecowe, wpływ rezystancji na spadek napięcia jest praktycznie pomijalny.

W układzie przedstawionym na rys. 1b lub na rys. 7 (realny przypadek rozwiązania układu) tylko część reaktancji transformatora ulega zmianie podczas regulacji napięcia. Zgodnie z rys. 7 reaktancje par uzwojeń 1, 2 oraz 5, 6 pozostają w obwodzie odbiorczym nie zmienionym przy zmianie zaczepu, natomiast reaktancja pary 1,3 zmienia się bardzo poważnie od pewnej wartości X_{reg} przy ustawieniu na maksymalne napięcie, do 0 przy zaczepie podstawowym oraz znowu X_{reg} przy ustawieniu na najniższe napięcie [6]. Reaktancja ta jest proporcjonalna do kwadratu czynnej liczby zwojów uzwojenia regulacyjnego (3). Ogólnie biorąc przyjąć można, że udział jego w całkowitej reaktancji przy ustawieniu na maksymalnym zaczepie wynosi λ . Niezmienna reaktancja wynosi zatem $1-\lambda$ całości. W konkretnych rozwiązaniach okazało się, że λ zawiera się w granicach 0,1 ... 0,2. Całkowitą reaktancję można więc wyrazić jako następującą funkcję ustawienia przełącznika zaczepów:

$$X = X_{max} \left[\underbrace{(1-\lambda)}_{\text{część stała}} + \underbrace{\lambda \left(\frac{p-1}{p_m-1} \right)^2}_{\text{część zmienna}} \right], \quad (26)$$

gdzie p_m — odpowiada ustawieniu przełącznika na górnej granicy regulacji.

Po przeprowadzeniu drobnych przekształceń wzór (26) przybiera postać

$$X = X_{max} \left[1 - \lambda \frac{(p_m-p)(p_m+p-2)}{(p_m-1)^2} \right]; \quad (27)$$

ponieważ

$$\frac{X_{max} \cdot \frac{I_n}{\sqrt{3}}}{U_{max}} 100 = u_x,$$

więc

$$X = \frac{u_x}{100} \frac{U_{max} \sqrt{3}}{I_n} \left[1 - \lambda \frac{(p_m-p)(p_m+p-2)}{(p_m-1)^2} \right]. \quad (28)$$

Strata napięcia w uzwojeniu fazowym DN przy obciążeniu wynosi:

$$\Delta \dot{U} = \dot{I}_{uf} j X = \dot{I}_{uf} j \frac{u_x}{100} \frac{U_{max} \sqrt{3}}{I_n} \left[1 - \lambda \frac{(p_m-p)(p_m+p-2)}{(p_m-1)^2} \right]. \quad (29)$$

Podstawiając do wyrażenia (29) wzory (21a, b, c) z tablicy 1, można zestawić wyrażenia dla strat napięcia w poszczególnych uzwojeniach fazowych

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{U}_a &= \left(j \frac{I}{I_n} \frac{u_x}{100} U_{max} \sqrt{3} \right) \frac{p_b - a p_c}{p_a + p_b + p_c} \left[1 - \lambda \frac{(p_m - p_a)(p_m + p_a - 2)}{(p_m - 1)^2} \right], \\ \Delta \dot{U}_b &= \left(j \frac{I}{I_n} \frac{u_x}{100} U_{max} \sqrt{3} \right) \frac{a^2 p_c - p_a}{p_a + p_b + p_c} \left[1 - \lambda \frac{(p_m - p_b)(p_m + p_b - 2)}{(p_m - 1)^2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (30a, b)$$

$$\Delta \dot{U}_c = \left(j \frac{I}{I_n} \frac{u_x}{100} U_{max} \sqrt{3} \right) \frac{ap_a - a^2 p_b}{p_a + p_b + p_c} \left[1 - \lambda \frac{(p_m - p_c)(p_m + p_c - 2)}{(p_m - 1)^2} \right], \quad (30c)$$

gdzie:

$$\frac{I}{I_n} = i \text{ jest wskazem względnego prądu obciążenia,}$$

u_x jest praktycznie napięciem zwarcia w %, odniesionym do napięcia znamionowego na najwyższym zaczeple w stanie jałowym.

Przykład liczbowy 4.

Przykład ten jest kontynuacją przykładu 1 i 3, przy czym $p_m = 1,5$; $U_{max} = 425$ V; $u_x = 10,5\%$; $\lambda = 0,15$.

Człon wspólny w nawiasie okrągłym wzorów (30a,b,c)

$$ji \frac{10,5}{100} 425 \sqrt{3} = ji 77,5.$$

Człony liczbowe w nawiasach kwadratowych wzorów (30a,b,c)

$$a) 1 - 0,15 \frac{(1,5 - 1)(1,5 + 1 - 2)}{(1,5 - 1)^2} = 0,850,$$

$$b) 1 - 0,15 \frac{(1,5 - 0,85)(1,5 + 0,85 - 2)}{(1,5 - 1)^2} = 0,864,$$

$$c) 1 - 0,15 \frac{(1,5 - 0,7)(1,5 + 0,7 - 2)}{(1,5 - 1)^2} = 0,904.$$

Człony zespolone obliczono już w przykładzie liczbowym 3:

$$a) 0,471 - j \cdot 0,237,$$

$$b) -0,530 - j \cdot 0,237,$$

$$c) -0,029 + j \cdot 0,628.$$

Ostatecznie straty napięcia wynoszą:

$$\Delta \dot{U}_a = ji 77,5 \cdot 0,850(0,471 - j \cdot 0,237) = ji(31,0 - j \cdot 15,6) = i(15,6 + j \cdot 31,0) \text{ V};$$

moduł: $i \cdot 34,6$ V;

$$\Delta \dot{U}_b = ji 77,5 \cdot 0,864(-0,530 - j \cdot 0,237) = ji(-35,4 - j \cdot 15,85) = i(15,85 - j \cdot 35,4) \text{ V};$$

moduł: $i \cdot 38,8$ V;

$$\Delta \dot{U}_c = ji 77,5 \cdot 0,904(-0,029 + j \cdot 0,628) = ji(-2,0 + j \cdot 43,9) = i(-43,9 - j \cdot 2,0) \text{ V};$$

moduł: $i \cdot 44,0$ V.

Charakterystyczną cechą układu regulacyjnego przedstawionego na rys. 7 jest to, że przy tym samym stopniu asymetrii na zaczeplach wyższych od podstawowego ($p > 1$) zmiany reakcji rozproszenia zmniejszają asymetrię strat napięcia, natomiast na zaczeplach niższych od podstawowego ($p < 1$) stopień asymetrii strat napięcia rośnie.

W stratach napięcia występuje kolejność zerowa. Nie może ona oczywiście pojawić się w napięciu wtórnym, gdyż uzwojenia DN są połączone w trójkąt. Występuje natomiast dodatkowe przesunięcie punktu zerowego strony pierwotnej w kierunku prze-

ciwnym do straty napięcia kolejności zerowej i odpowiednia zmiana w niesymetrii strumieni. Ogólnie biorąc pod wpływem obciążenia strata kolejności zerowej zmniejsza napięcie kolejności zerowej występujące w stanie jałowym.

W rozpatrywanym przykładzie liczbowym 4 składowa zerowa spadku napięcia wynosi

$$\frac{i}{3}(\Delta \dot{U}_a + \Delta \dot{U}_b + \Delta \dot{U}_c) = \frac{i}{3}(15,6 + j \cdot 31,0 + 15,9 - j \cdot 35,4 - 43,9 - j \cdot 2,0) = \\ = i(-4,1 - j \cdot 2,1) \text{ V};$$

moduł: $i \cdot 4,6 \text{ V}$.

Geometryczna strata napięcia kolejności zerowej powodująca dodatkowe przesuwanie punktu zerowego strony pierwotnej jest niewielka. W omawianym przykładzie liczbowym wynosi ona 1,7%. Praktycznie zmniejsza ona napięcie kolejności zerowej z początkowej wartości występującej w stanie jałowym. Obliczona w przykładzie liczbowym 1 wartość składowej zerowej napięcia 10,2% zostaje zmniejszona pod wpływem obciążenia do 9,2%.

Aby znaleźć napięcie wtórne podczas obciążenia, należy odjąć od strat napięcia składową zerową i tylko pozostałe składowe I i II kolejności odjąć od napięcia stanu jałowego obliczonego jak w przykładzie liczbowym 1.

Dla zorientowania się w stopniu niesymetrii wartości poszczególnych wielkości zostaną zestawione w tablicy 2 wyniki obliczeń przykładów liczbowych 1, 3 i 4 wykonanych dla położenia przełączników $p_a = 1,0$; $p_b = 0,85$; $p_c = 0,70$. Napięcie podstawowe dla $p = 1$ wynosi $U_p = 283 \text{ V}$.

Tablica 2

Zestawienie wyników przykładów liczbowych 1, 3 i 4

			faza A	faza B	faza C
Położenie przełączników zaczepów p		—	1,00	0,85	0,70
Stan jałowy	Napięcie U_{20}	V	258	242	216
	Napięcie względne $\frac{U_{20}}{U_p}$	—	0,914	0,855	0,765
	Strumień względny $\frac{\Phi_o}{\Phi_n}$	—	0,914	1,005	1,090
Obciążenie usymetryzowanym prądem I_n	Napięcie U_2	V	233	222	191
	Napięcie względne $\frac{U_2}{U_p}$	—	0,825	0,785	0,675
	Strumień względny $\frac{\Phi}{\Phi_n}$	—	0,930	0,99	1,085
	Prąd w uzwojeniach trójkąta DN (względem $\frac{I_n}{\sqrt{3}}$)	—	0,914	1,005	1,090
	Prąd sieciowy pierwotny (względem $\frac{I_n}{\sqrt{3}}$)	—	0,914	0,855	0,765

Powyższe zestawienie pozwala ocenić, jakie przewzbudzenie i przeciążenie powstaje w jednej z faz pod wpływem określonego niesymetrycznego ustawienia przełączników w celu uzyskania symetryzacji prądu obciążenia oraz jakie zmiany w niesymetrii napięć i strumieni powstają przy obciążeniu układu usymetryzowanym prądem.

Parametry transformatora występujące w takich właśnie warunkach muszą stanowić dla konstruktora podstawę do projektowania. Trzeba bardzo mocno podkreślić, że uzziemienie punktu zerowego strony *GN* podczas pracy z niesymetryczną regulacją przełączników w układzie *Yd* grozi zniszczeniem transformatora.

3. ROZWAŻANIE PRACY UKŁADU Y_0Y PRZY REGULACJI OD STRONY DN

Układ ten w zasadniczy sposób różni się od układu *Yd*. Niezależnie od położenia przełącznika zaczepów, wobec trwałego połączenia punktu zerowego sieci i uzwojenia pierwotnego transformatora, napięcia pierwotne są sztywne i symetryczne i nie występuje zwyżka strumienia w żadnej fazie, nie trzeba więc przewymiarować rdzeni. Regulacja niesymetryczna przełączników zaczepów w połączonych w gwiazdę uzwojeniach fazowych wtórnych powoduje regulację napięć wtórnych fazowych i przewodowych, jednak stosunek napięć fazowych jest inny niż stosunek napięć przewodowych. Symetryzacja prądu wtórnego drogą desymetryzacji napięć powoduje podobnie jak w poprzednim przypadku pojawienie się po stronie pierwotnej niesymetrii prądów. Występuje składowa zgodna, przeciwna i składowa zerowa prądu pierwotnego odprowadzana przewodem zerowym sieci.

3.1. Niesymetria napięć w stanie jałowym

Niesymetrię napięć fazowych wtórnych można obliczyć następująco mając zadane położenia przełącznika zaczepów p_a, p_b, p_c :

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_a &= \dot{U}_A p_a = U_f p_a, \\ \dot{U}_b &= \dot{U}_B p_b = a^2 U_f p_b, \\ \dot{U}_c &= \dot{U}_C p_c = a U_f p_c. \end{aligned} \right\} \quad (31a,b,c)$$

Punkt zerowy układu gwiazdowego *DN* nie jest wykorzystywany. W grę wchodzi więc tylko napięcia przewodowe. Napięcia przewodowe wynoszą:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{ab} &= \dot{U}_b - \dot{U}_a = U_f (a^2 p_b - p_a), \\ \dot{U}_{bc} &= \dot{U}_c - \dot{U}_b = U_f (a p_c - a^2 p_b), \\ \dot{U}_{ca} &= \dot{U}_a - \dot{U}_c = U_f (p_a - a p_c). \end{aligned} \right\} \quad (32a,b,c)$$

Przykład liczbowy 5.

Obliczenie napięć przewodowych wtórnych przy położeniach przełącznika zaczepów $p_a = 1; p_b = 0,85; p_c = 0,7; U_f = \frac{283}{\sqrt{3}} = 163 \text{ V}$.

$$[\dot{U}_{ab} = 163 \left[\left(-\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) 0,85 - 1 \right] = -232 - j \cdot 120 \text{ V}$$

—moduł 262 V;

$$\dot{U}_{bc} = 163 \left[\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) 0,7 - \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) 0,85 \right] = 10,6 + j \cdot 220 \text{ V}$$

—moduł 220 V;

$$\dot{U}_{ca} = 163 \left[1 - \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) 0,7 \right] = 220 - j \cdot 99 \text{ V}$$

—moduł 240 V.

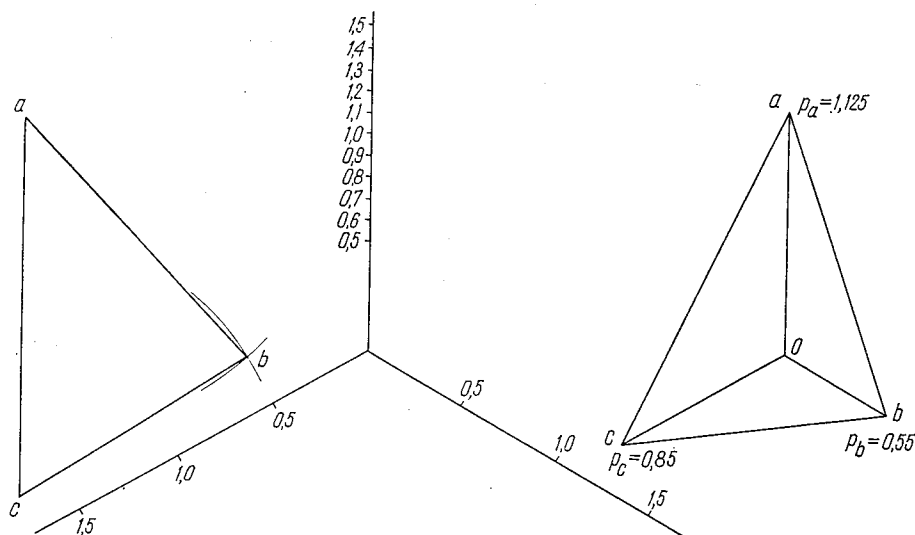
Uzyskana asymetria napięć przewodowych wynosi

$$0,93 : 0,85 : 0,775.$$

Asymetria napięć przewodowych jest podobnie, jak w przypadku Yd znacznie mniejsza (w przybliżeniu dwukrotnie) niż asymetria ustawienia przełącznika zaczepów.

3.2. Znajdowanie położeń przełącznika przy zadanej asymetrii napięć

Jeśli zadane jest napięcie niesymetryczne, należy znaleźć odpowiadającą mu niesymetrię przełącznika. Najprostszą drogą jest tu metoda wykreślna pokazana na rys. 8. Najpierw (rys. 8a) wykreśla się trójkąt zadanych napięć przewodowych w pewnej skali, w której za jednostkę uznane jest napięcie znamionowe przewodowe zacze-
pu podsta-



Rys. 8. Kolejność postępowania dla uzyskania położeń przełącznika przy zadanej niesymetrii napięć w układzie z gwiazdą po stronie DN. Regulacja od strony DN

wowego ($p = 1$). Następnie wykreśla się symetryczną gwiazdę napięć i cechuje ją w skali $\sqrt{3}$ -krotnie mniejszej niż poprzednia (rys. 8b). Gwiazdę ustawia się na rysunku trójkąta tak, aby ramiona przechodziły przez wierzchołki trójkąta. Wierzchołki wyznaczają na skali gwiazdy wartość p_a , p_b , p_c .

Przykład liczbowy 6.

Należy znaleźć p_a , p_b , p_c tak, aby napięcia przewodowe wynosiły 100%, 85%, 70% napięcia zaczełu podstawowego (tzn. $U_{ca} = 283$ V; $U_{ab} = 240$ V; $U_{bc} = 212$ V).

Rysunek 8 został wykonany tak, aby spełniał warunki tego przykładu liczbowego. Odczytane z rysunku wartości wynoszą:

$$p_a = 1,125; \quad p_b = 0,55; \quad p_c = 0,85.$$

Ustawienie przełącznika zaczełów jest tu znacznie korzystniejsze niż w układzie *Yd*.

3.3. Rozpływ prądów przy obciążeniu

Jeżeli przy niesymetrycznym ustawieniu przełączników uzyskano symetryzację prądów obciążenia, to rozpływ prądów jest następujący.

Prąd odbioru

$$\dot{I}_c = \dot{I}; \quad \dot{I}_b = a^2 \dot{I}; \quad \dot{I}_a = a \dot{I}.$$

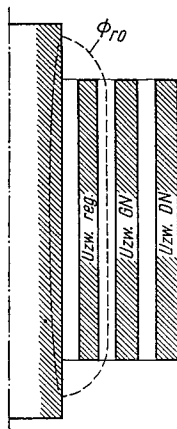
Prąd pierwotny pobierany z sieci

$$\dot{I}_A = -\dot{I}p_a; \quad \dot{I}_B = -a^2 \dot{I}p_b; \quad \dot{I}_C = -a \dot{I}p_c. \quad (33a,b,c)$$

Prąd przewodu zerowego sieci zasilającej

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = -\dot{I}(p_a + a^2 p_b + a p_c). \quad (34)$$

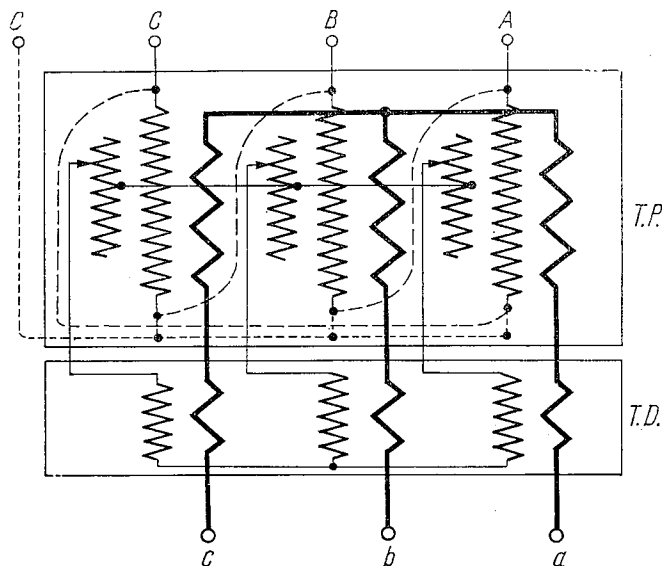
Odmienne niż w układzie *Yd* żadne niesymetryczne ustawienie przełączników nie powoduje przeciążenia któregoś z uzwojeń, jeśli prąd I nie przekracza wartości znamionowej. Amperozwoje składowej zerowej powstające podczas obciążenia usymetry-



Rys. 9. Droga strumienia rozproszenia kolejności zerowej (Φ_{r0}) w przypadku gdy uzwojenie regulacyjne jest najbliższe rdzenia. Rysunek przedstawia jedną fazę układu trójfazowego

zowanym prądem wtórnym są równoważone po stronie pierwotnej. Strumień składowej zerowej jest jedynie strumieniem rozproszenia, jest więc około dziesięciokrotnie mniejszy niż w układzie *Yd* i przy zastosowaniu transformatora trójfazowego trójkolumnowego nie powoduje zagrożenia nadmiernymi stratami w kadzi i częściach konstrukcyjnych.

Jeżeli w układzie trójfazowym trójkolumnowym uzwojenie regulacyjne znajduje się najbliżej rdzenia, to droga głównej części strumienia rozproszenia od składowej zerowej amperozwojów w transformatorze podstawowym jest zgodna z rys. 9. Nie ma więc obawy nagrzewania części konstrukcyjnych nawet przez strumień rozproszenia składowej ze-



Rys. 10. Schemat układu trójfazowego z regulacją pośrednią od strony DN, przy alternatywnym połączeniu uzwojenia GN w gwiazdę z czynnym punktem zerowym, lub w trójkąt
T.P. — transformator podstawowy, T.D. — transformator dodawczy

rowej; nie ma również potrzeby stosowania rdzenia 5-kolumnowego. Jeżeli połączenie uzwojenia regulacyjnego z transformatorem dodawczym jest przy tym wykonane w postaci niezależnych układów gwiazdowych (rys. 10), to również transformator dodawczy może być 3-kolumnowy, a nie 5-kolumnowy. Wskazane jest, aby w układzie jak na rys. 10 na transformatorze dodawczym zakładać trójkątowe uzwojenie wyrównawcze małej mocy zapewniające dostawę III harmonicznej magnesującej.

Wymienione cechy stanowią poważną zaletę eksploatacyjną układu Y_0y , w którym nie trzeba przewymiarować ani rdzeni, ani uzwojeń i nie trzeba stosować układów 5-kolumnowych lub jednofazowych ze względu na niesymetryczną pracę przełączników. Jedyną wadą eksploatacyjną jest obciążenie prądem przewodu zerowego sieci.

Przykład liczbowy 7.

Stopień asymetrii przełącznika jak w przykładzie liczbowym 5: $p_a = 1$; $p_b = 0,85$; $p_c = 0,70$. Obciążenie uzwojeń wtórnych usymetryzowanym prądem I . Należy znaleźć prąd sieciowy pierwotny:

Prąd sieciowy wzory (33a,b,c) i (34)

$$\dot{I}_A = -\dot{I} \quad \text{— moduł } 1,00 \cdot I;$$

$$\dot{I}_B = -0,85a^2\dot{I} \quad \text{— moduł } 0,85 \cdot I;$$

$$\dot{I}_c = -0,70a\dot{I} - \text{moduł } 0,70 \cdot I;$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_0 &= -\dot{I} \left[1 + \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) 0,85 + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) 0,7 \right] = \\ &= -\dot{I}(0,225 - j \cdot 0,130) - \text{moduł } 0,26 \cdot I. \end{aligned}$$

Prąd przewodu zerowego jest duży i trzeba to brać pod uwagę przy projektowaniu układu zasilania transformatorów.

3.4. Straty napięcia przy obciążeniu usymetryzowanym

W przypadku realnego rozwiązania konstrukcyjnego przedstawionego na rys. 7 wzorem wyjściowym jest wzór (29), do którego jako $\dot{I}_{uf}$ należy podstawić usymetryzowany prąd odbioru, czyli odpowiednio dla faz a, b, c , $\dot{I}, a^2\dot{I}, a\dot{I}$, oraz opuścić $\sqrt{3}$, a jako napięcie podstawić U_f na najwyższym zaczeple. Po przejściu do wzoru (30a,b,c) upraszcza się człon bez nawiasu, zwany poprzednio członem zespolonym. Zmodyfikowany wzór (30a,b,c), pozwalający na obliczenie fazowych strat napięcia po stronie wtórnej, przybiera więc następującą postać:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{U}_a &= \left(j \frac{\dot{I}}{I_n} \frac{u_x}{100} U_{f \max} \right) 1 \left[1 - \lambda \frac{(p_m - p_a)(p_m + p_a - 2)}{(p_m - 1)^2} \right], \\ \Delta \dot{U}_b &= \left(j \frac{\dot{I}}{I_n} \frac{u_x}{100} U_{f \max} \right) a^2 \left[1 - \lambda \frac{(p_m - p_b)(p_m + p_b - 2)}{(p_m - 1)^2} \right], \\ \Delta \dot{U}_c &= \left(j \frac{\dot{I}}{I_n} \frac{u_x}{100} U_{f \max} \right) a \left[1 - \lambda \frac{(p_m - p_c)(p_m + p_c - 2)}{(p_m - 1)^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (35a,b,c)$$

Zestawienie napięć stanu jałowego (przykład liczbowy 5) oraz obciążenia znamionowym prądem [uwzględnienie wzoru (35a,b,c)] przy ustawieniu przełączników $p_a = 1$; $p_b = 0,85$; $p_c = 0,7$ jest następujące:

	faza ab	faza ca	faza bc
Stan jałowy	$0,926U_p$	$0,855U_p$	$0,78U_p$
Obciążenie	$0,810U_p$	$0,785U_p$	$0,696U_p$

gdzie U_p — symetryczne znamionowe napięcie przewodowe zaczeple podstawowego ($p = 1$).

Porównanie wyników analizy i obliczeń dla układu Yd (tablica 2) oraz Y_0y wskazuje, że układ Y_0y ma poważne zalety i pracuje korzystniej od Yd . Wadą tego układu jest występowanie dużego prądu przewodu zerowego po stronie GN . Należy mocno podkreślić niedopuszczalność otwierania połączenia punktu zerowego GN z ziemią. (Odwrotnie niż w układzie Yd).

4. ROZWAŻANIE PRACY UKŁADU $Yy(d)$ PRZY REGULACJI OD STRONY GWIAZDY DN

Układ $Yy(d)$ z trójkątem wyrównawczym może pracować zarówno przy uziemieniu, jak i przy izolowaniu punktu zerowego GN . W układzie tym (przy izolowaniu punktu zerowego) nie występuje wada układu poprzedniego Y_0y — prąd przewodu zerowego, występują natomiast wszystkie jego zalety.

Przy uziemieniu punktu zerowego GN prąd składowej zerowej zamyka się częściowo w obwodzie trójkąta, częściowo płynie przez przewód zerowy. Rozkład prądu składowej zerowej między te dwa elementy przy zaniedbaniu rezystancji zależy od stosunku ich reaktancji. Na przykład dla układu przedstawionego na rys. 7

$$\frac{I_{\Delta}}{I_0/3} = \frac{X_{31'} + X_{uz}}{X_{34}}, \quad (36)$$

gdzie X_{uz} jest ewentualną reaktancją układu wiążącego punkt zerowy GN z punktem zerowym źródła.

W układzie z rys. 7 niestety $X_{34} > X_{31'}$, a więc dla uzyskania korzystnego rozplywu prądów (mały prąd przewodu zerowego) wskazane jest punkt zerowy odłączyć od ziemi lub połączyć z ziemią przez stosunkowo dużą impedancję.

4.1. Analiza pracy w stanie jałowym

Niezależnie od niesymetrii położenia przełączników zaczepów napięcia po stronie pierwotnej są sztywne i symetryczne. Mimo izolowania punktu zerowego gwiazdy, elementem stabilizacji jest symetryczny trójkąt trójny.

Dla napięć wtórnych przy niesymetrycznej regulacji obowiązują więc wzory wprowadzone dla układu Y_0Y . Wzory (31a,b,c) i (32a,b,c). Przy zadanej niesymetrii napięć w stanie jałowym konieczne dla jej uzyskania położenie przełączników zaczepów znajduje się metodą opisaną w rozdziale poprzednim (rys. 8 i przykład liczbowy 6). Indukcji w tym transformatorze nie potrzeba obniżać. Możliwe jest stosowanie rdzenia trójfazowego, trójkolumnowego, gdyż niesymetryczna regulacja nie powoduje powstania strumienia składowej zerowej.

4.2. Analiza przy obciążeniu

Analiza rozplywu prądów jest analogiczna jak w układzie Y_0Y z tą jedynie różnicą, że prąd składowej zerowej równy trzeciej części prądu przewodu zerowego przejmuje uzwojenie trójkątowe. Prąd przewodu zerowego określał wzór (34), a więc prąd uzwojenia trójkątowego, sprowadzonego do liczby zwojów uzwojenia podstawowego jest następujący:

$$I_{\Delta} = -\frac{1}{3} \dot{I}(p_a + a^2 p_b + a p_c). \quad (37)$$

Wzór (37) pozwala na określenie mocy uzwojenia wyrównawczego. Wszystkie pozostałe uzwojenia mogą być liczone w sposób zwykły, gdyż nigdzie nie występuje zwiększenie prądu ponad wartość znamionową (jeśli obciążenie jest znamionowe), tak jak to dzieje się w układzie Yd . Nie ma więc potrzeby zmniejszania gęstości w żadnym z uzwojeń tego układu.

Jeżeli rozwiązanie konstrukcyjne wykonane jest zgodnie z rys. 7, to uzwojenie wyrównawcze należy umieścić na kolumnie regulacyjnej, gdyż tylko na tej kolumnie występują amperozwoje składowej zerowej. Straty napięcia można obliczać wzorami (35a,b,c). Popełnia się przy tym pewien błąd, gdyż w układzie z trójkątem wyrównawczym reaktancja

dla składowej zerowej prądu różni się od reaktancji dla składowej zgodnej i przeciwnej. Różnice między obliczeniem ścisłym a użyciem wzorów (35a,b,c) są jednak tak niewielkie, że w pełni usprawiedliwiają zastosowanie uproszczenia.

5. ANALIZA PRACY UKŁADU D_y PRZY REGULACJI OD STRONY DN

Układ D_y ma wszystkie cechy układu $Y_{0,y}$ z tą różnicą, że prąd składowej zerowej po stronie GN zamyka się wewnątrz obwodu pierwotnego trójkąta i nie obciąża sieci. Strumień w rdzeniu zachowuje symetrię, nie ma potrzeby zmniejszania indukcji. Nie ma również potrzeby zmniejszania gęstości prądu w żadnym z uzwojeń.

Określenia położeń przełączników przy zadanej asymetrii napięcia można dokonać metodą podaną w rozdziale 3.2. Obliczenia spadków napięcia można dokonać wzorami (35a,b,c).

Wszystkie uwagi dotyczące układu $Y_{0,y}$ podane w rozdziale 3.3 dotyczą również układu D_y , który przy tym jest pozbawiony wady układu $Y_{0,y}$, a mianowicie prądu przewodu zerowego w sieci zasilającej.

6. ANALIZA PRACY UKŁADU D_d Z REGULACJĄ OD STRONY DN

W układzie tym, podobnie jak w przypadku $Y_{0,d}$, występuje bardzo duży prąd wyrównawczy składowej zerowej wewnątrz obwodu trójkątów — symetrycznego i niesymetrycznego. Powyższe zjawisko dyskwalifikuje możliwość stosowania układu D_d z niesymetryczną regulacją przekładni.

7. REGULACJA NIESYMETRYCZNA OD STRONY PIERWOTNEJ

Aby uzyskać pełnię obrazu zjawisk w transformatorze z niesymetryczną regulacją przekładni przeprowadzona zostanie analiza rozkładu napięć i rozplywu prądów dla przypadku regulacji liczby zwojów po stronie pierwotnej (regulacja przez zmianę strumienia). Układ regulacyjny przedstawiono na rys. 1a. Jest to regulacja bezpośrednia, to znaczy bez zastosowania transformatora dodatkowego.

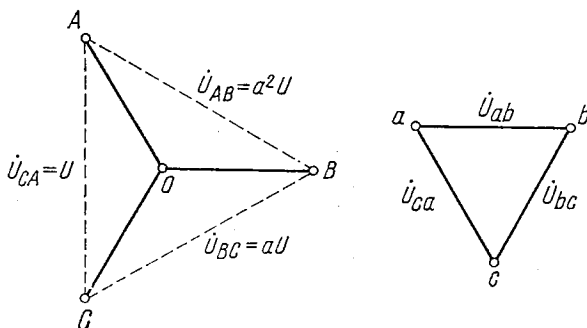
7.1. Układ Y_d

Rozpatrzony zostanie przypadek $Y_d II$.

Podobnie jak przy regulacji od strony DN uziemianie punktu zerowego gwiazdy jest niedopuszczalne. Położenie przełącznika po stronie pierwotnej oznaczono „p”. Najmniejsza liczba zwojów zostaje uznana za zaczepek podstawowy i oznaczona przez $p = 1$. Zwiększenie liczby zwojów o 50% odpowiada położeniu $p = 1,5$. Przy niesymetrycznej regulacji tego układu niedopuszczalne jest przełączanie uzwojenia pierwotnego w trójkąt, gdyż powoduje to duży prąd wyrównawczy omówiony w rozdziale 6. Dla uzyskania regulacji przekładni w stosunku 1 : 3 (np. napięcie DN od 140 do 425 V stosowane w transformatorach piecowych) trzeba całość uzwojenia podzielić na 3 grupy o jednakowej liczbie zwojów: uzwojenie podstawowe stosowane dla uzyskania najwyższego napięcia DN o przekroju odpowiadającym prądowi znamionowemu; uzwojenie regulacji drobnej

o przekroju tym samym jak uzwojenie podstawowe; uzwojenie regulacji grubej o przekroju dwukrotnie mniejszym niż uzwojenie podstawowe. Pozycja najwyższego napięcia DN oznaczona jest $p = 1$; najniższego natomiast $p = 3$.

Przy niesymetrycznej regulacji położenia przełączników zostaną jak poprzednio oznaczone p_a, p_b, p_c . Ze względu na to, że zwiększanie p powoduje malenie U_{DN} , więc dla wygody dalsze operacje będą wykonywane przy użyciu odwrotności p , która zostanie oznaczona $q = \frac{1}{p}$ z odpowiednim indeksem a, b, c określającym fazę.



Rys. 11. Oznaczenia poszczególnych napięć dla układu $Yd 11$

W oparciu o rys. 11 można zestawiać następujące równania napięciowe:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{ca} &= \dot{U}_A q_a, \\ \dot{U}_{ab} &= \dot{U}_B q_b, \\ \dot{U}_{bc} &= \dot{U}_C q_c, \end{aligned} \right\} \quad (38a,b,c)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{cA} &= \dot{U}_A - \dot{U}_C = U, \\ \dot{U}_{AB} &= \dot{U}_B - \dot{U}_A = a^2 U, \\ \dot{U}_{BC} &= \dot{U}_C - \dot{U}_B = a U, \end{aligned} \right\} \quad (39a,b,c)$$

gdzie U jest napięciem GN sprowadzonym do strony DN na zaczeple uznanym za podstawowy ($p = 1$). Wobec połączenia GN w λ , a DN w Δ $U = U_{DN_{max}} \cdot \sqrt{3}$.

Ze względu na połączenie w Δ uzwojenia DN :

$$\dot{U}_{ca} + \dot{U}_{ab} + \dot{U}_{bc} = 0. \quad (40)$$

Po szeregu operacji otrzymuje się następujące wzory:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{ca} &= U q_a \frac{q_c - a^2 q_b}{q_a + q_b + q_c}, \\ \dot{U}_{ab} &= U q_b \frac{a^2 q_a - a q_c}{q_a + q_b + q_c}, \\ \dot{U}_{bc} &= U q_c \frac{a q_b - q_a}{q_a + q_b + q_c}. \end{aligned} \right\} \quad (41a,b,c)$$

Układ równań dla prądów przy założeniu usymetryzowanego odbioru prądu I .

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_A &= -\dot{I}_{ca}q_a, \\ \dot{I}_B &= -\dot{I}_{ab}q_b, \\ \dot{I}_C &= -\dot{I}_{bc}q_c. \end{aligned} \right\} \quad (42a,b,c)$$

Ze względu na połączenie w gwiazdę bez przewodu zerowego po stronie GN :

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0. \quad (43)$$

Po stronie DN :

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_a &= \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{ab} = \dot{I}, \\ \dot{I}_b &= \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{bc} = a^2 \dot{I}, \\ \dot{I}_c &= \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ca} = a \dot{I}. \end{aligned} \right\} \quad (44a,b,c)$$

Wykonanie odpowiednich operacji daje następujące wzory dla prądów pierwotnych:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}q_a \frac{aq_c - q_b}{q_a + q_b + q_c}, \\ \dot{I}_B &= \dot{I}q_b \frac{q_a - a^2q_c}{q_a + q_b + q_c}, \\ \dot{I}_C &= \dot{I}q_c \frac{a^2q_b - aq_a}{q_a + q_b + q_c}; \end{aligned} \right\} \quad (45a,b,c)$$

odpowiednio prądy uzwojeń fazowych trójkąta wynoszą:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_{ca} &= -\frac{\dot{I}_A}{q_a} = \dot{I} \frac{q_b - aq_c}{q_a + q_b + q_c}, \\ \dot{I}_{ab} &= -\frac{\dot{I}_B}{q_b} = \dot{I} \frac{a^2q_c - q_a}{q_a + q_b + q_c}, \\ \dot{I}_{bc} &= -\frac{\dot{I}_C}{q_c} = \dot{I} \frac{aq_a - a^2q_b}{q_a + q_b + q_c} \end{aligned} \right\} \quad (46a,b,c)$$

Przykład liczbowy 8.

Regulator ustawiony na pozycjach $q_a = 1$; $q_b = 0,85$; $q_c = 0,7$, czyli $p_a = 1$; $p_b = 1,18$; $p_c = 1,43$; dla $p = 1$ $U_{DN} = 425$ V; $U = 425 \cdot \sqrt{3} = 736$ V.

Napięcia DN wynoszą w oparciu o wzory (41a,b,c):

$$\dot{U}_{ca} = 736 \cdot 1 \cdot \frac{0,7 - \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)0,85}{2,55} = 324 + j \cdot 212$$

—moduł = 388 V;

$$\dot{U}_{ab} = 736 \cdot 0,85 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)1 - \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)0,7}{2,55} = -37 - j \cdot 361$$

—moduł = 363 V;

$$\dot{U}_{bc} = 736 \cdot 0,70 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)0,85 - 1}{2,55} = -287 + j \cdot 149V$$

$$- \text{moduł} = 324 V.$$

Uzyskany stopień asymetrii bez uwzględnienia spadków napięcia wynosi więc: 0,914 : 0,855 : 0,765. Jest więc podobnie jak we wszystkich innych przypadkach znacznie mniejszy niż stopień założonej asymetrii ustawienia przełączników zaczeów (porównaj ten wynik z wynikiem na tablicy 2).

Rozpływ prądów w uzwojeniach trójkąta jest w oparciu o wzory (46a,b,c) następujący:

$$\dot{i}_{ca} = \dot{I} \frac{0,85 - \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)0,7}{2,55} = \frac{\dot{I}}{\sqrt{3}} (0,815 - j \cdot 0,413)$$

$$- \text{moduł} \frac{I}{\sqrt{3}} \cdot 0,915;$$

$$\dot{i}_{ab} = \dot{I} \frac{\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)0,7 - 1}{2,55} = \frac{\dot{I}}{\sqrt{3}} (-0,920 - j \cdot 0,413)$$

$$- \text{moduł} \frac{I}{\sqrt{3}} \cdot 1,01;$$

$$\dot{i}_{bc} = \dot{I} \frac{\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)1 - \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)0,815}{2,55} = \frac{\dot{I}}{\sqrt{3}} (-0,051 + j \cdot 1,09)$$

$$- \text{moduł} \frac{I}{\sqrt{3}} \cdot 1,09.$$

Prądy płynące w uzwojeniach pierwotnych w oparciu o wzory (45a,b,c) mają następujące moduły

$$I_A = \frac{I}{\sqrt{3}} 0,915; \quad I_B = \frac{I}{\sqrt{3}} 0,86; \quad I_C = \frac{I}{\sqrt{3}} 0,76.$$

Rozważanie teoretyczne i przykład liczbowy wskazują wyraźnie, że składowa zerowa płynąca w obwodzie trójkąta może przeciążać jedną lub dwie fazy uzwojenia fazowego strony *DN*, co w konsekwencji pociąga za sobą konieczność obniżenia gęstości prądu po stronie wtórnej.

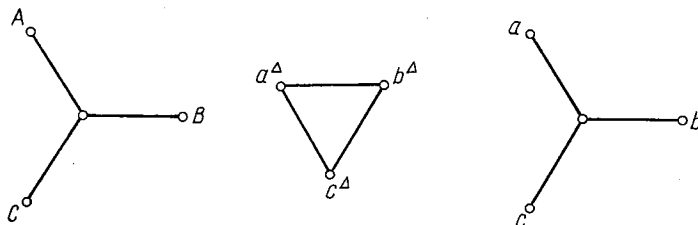
Indukcja w rdzeniu musi być dobrana do położenia regulatora na pozycji $q = 1$ (najwyższa wartość indukcji, najmniejsza liczba zwojów *GN*).

Wady, którą jest konieczność przewymiarowania przekroju uzwojenia *DN* przy niesymetrycznej regulacji od strony pierwotnej, nie posiada układ *Dy* lub układ *Yy(d)*.

7.2. Układ $Yy(d)$

Analiza układu napięcie może być przeprowadzona w oparciu o punkt poprzedni. Napięcia gwiazdy wtórnej z symetrycznymi uzwojeniami wynikają z napięć trójkąta rozważonych dla układu Yd , a mianowicie (rys. 12):

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{ca}^{\Delta} &= \dot{U}_{ca}^{\Delta} - \dot{U}_{bc}^{\Delta}, \\ \dot{U}_{ab}^{\Delta} &= \dot{U}_{ab}^{\Delta} - \dot{U}_{ca}^{\Delta}, \\ \dot{U}_{bc}^{\Delta} &= \dot{U}_{bc}^{\Delta} - \dot{U}_{ab}^{\Delta}. \end{aligned} \right\} \quad (47a,b,c)$$

Rys. 12. Oznaczenia końcówek w układzie $YyOd 11$

Z powyższego wzoru po odpowiednich przeróbkach wynika:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{ca}^{\Delta} &= U \left[\frac{3q_a q_c}{q_a + q_b + q_c} - \dot{q}_0 \right], \\ \dot{U}_{ab}^{\Delta} &= U \left[a^2 \frac{3q_a q_b}{q_c + q_b + q_c} - \dot{q}_0 \right], \\ \dot{U}_{bc}^{\Delta} &= U \left[a \frac{3q_b q_c}{q_a + q_b + q_c} - \dot{q}_0 \right], \end{aligned} \right\} \quad (48a,b,c)$$

gdzie

$$\dot{q}_0 = \frac{q_a q_c + a^2 q_a q_b + a q_b q_c}{q_a + q_b + q_c}. \quad (49)$$

Po obciążeniu tego układu usymetryzowanym prądem I przy jednoczesnej symetrii zwojowej strony DN obciążenie daje amperozwoje symetryczne. Po stronie pierwotnej wobec niesymetrii zwojowej amperozwoje zawierają składową zgodną oraz zerową, która jest równoważona w obwodzie trójkąta. Dla wytworzenia amperozwojów składowej zgodnej w uzwojeniach mających niesymetrię zwojową prąd strony pierwotnej pobierany z sieci zawiera składową zgodną i przeciwną podobnie jak w przypadku $Yy(d)$ z regulacją po stronie wtórnej. Żadne z uzwojeń nie jest przy tym przeciążane ponad swoją wartość znamionową, jeśli $I \leq I_n$. Uziemienie gwiazdy pierwotnej jest niedopuszczalne.

7.3. Układ Dy

W układzie tym napięcia przewodowe DN są następujące:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{ca} &= U(q_a - a q_c), \\ \dot{U}_{ab} &= U(a^2 q_b - q_a), \\ \dot{U}_{bc} &= U(a q_c - a^2 q_b). \end{aligned} \right\} \quad (50a,b,c)$$

Regulacja niesymetryczna w obwodzie pierwotnego trójkąta pociąga za sobą pojawienie się składowej zerowej w napięciu zwojowym, a więc i w strumieniu. Dla układu trójkolumnowego z uzwojeniem cylindrycznym konsekwencją tego jest strumień jarzmowy i nagrzewanie kadzi. Nagrzewaniu zapobiega rdzeń 5-kolumnowy lub układ 3 jednostek jednofazowych. W układzie *Dy* przy usymetryzowanym obciążeniu nie wystąpi przeciążenie żadnego uzwojenia. W obciążeniu sieci wystąpi oczywiście składowa przeciwna prądu.

8. SYMETRYZACJA PRĄDU PIERWOTNEGO

Niesymetryczna regulacja przekładni w przypadku niejednakowych impedancji w poszczególnych fazach odbiornika może mieć na celu albo uzyskanie symetrii prądów wtórnych, co było przedmiotem analizy rozplywu prądów przeprowadzonej w niniejszej pracy, albo usymetryzowanie prądów pierwotnych. W przypadku wielkich mocy odbiorników (np. piece stalownicze) usymetryzowanie prądu pierwotnego może mieć zasadnicze znaczenie ze względu na ujemne skutki składowej przeciwnej prądu dla generatorów synchronicznych. Ustawienie przełączników zaczepów jest w takim przypadku pośrednie między ustawieniem symetrycznym a ustawieniem dającym symetryzację prądów odbioru. Sytuacja po stronie wtórnej jest więc tu znacznie lepsza niż przy symetrycznych położeniach przełączników, jakkolwiek gorsza niż przy pełnym usymetryzowaniu wtórnym. Stan taki wydaje się najbardziej godnym zalecenia. Transformator przystosowany do symetryzacji wtórnej jest tym bardziej zdolny do wytrzymania warunków narzuconych przez symetryzację pierwotną. Porównanie obu tych stanów będzie przedmiotem osobnej analizy.

9. WNIOSKI OGÓLNE

a) Niezależnie od tego, czy regulacja występuje po stronie pierwotnej, czy wtórnej, niesymetria położenia przełączników zaczepów nie jest równa asymetrii napięć po stronie *DN*. Przy zadanej asymetrii napięć należy obliczyć odpowiadające jej położenia przełączników zaczepów. Asymetria ustawienia przełączników jest znacznie większa niż asymetria napięć.

b) Przy usymetryzowanym prądzie obciążenia po stronie wtórnej niesymetria prądów pierwotnych sieciowych odpowiada asymetrii napięć stanu jałowego strony wtórnej.

c) Jeżeli niesymetryczna regulacja przekładni jest dokonywana w uzwojeniu połączonym w trójkąt, niezależnie od tego, czy jest to trójkąt pierwotny, czy wtórny, żadne inne uzwojenie symetryczne, odpowiednio wtórne, pierwotne lub nawet trójne nie może być połączone w trójkąt. Podobnie, jeśli regulacja jest dokonywana we wtórnym trójkącie, uzwojenie gwiazdowe pierwotne musi mieć izolowany punkt zerowy.

d) Jeśli niesymetryczna regulacja przekładni jest dokonywana w obwodzie trójkąta pierwotnego lub wtórnego, w transformatorze pojawia się strumień składowej zerowej. Obecność tego strumienia wymaga 5-kolumnowej konstrukcji rdzenia lub układu trzech jednostek jednofazowych.

e) Jeżeli niesymetryczna regulacja dokonywana jest w obwodzie gwiazdy wtórnej, strumień pozostaje całkowicie symetryczny. Niesymetrię uzyskuje jedynie strumień rozproszenia. Rdzeń trójfazowy może być budowy 3-kolumnowej.

f) Jeżeli niesymetryczną regulację przeprowadza się w obwodzie gwiazdy pierwotnej, strumień desymetryzuje się, lecz tylko kolejnością przeciwną. Nie ma więc konieczności dawania w takim przypadku rdzenia pięciokolumnowego lub układu jednostek jednofazowych.

g) Jeżeli w układzie cylindrycznym uzwojeń trójkąt symetryczny (pierwotny, wtórny lub trójny) znajduje się na zewnątrz uzwojenia będącego przyczyną amperozwojów składowej zerowej, to strumień rozproszenia składowej zerowej zamyka się przez rdzeń nie powodując nagrzewania kadzi i części konstrukcyjnych.

h) Jeżeli transformator dodawczy trójfazowy ma uzwojenie wzbudające połączone w gwiazdę z izolowanym punktem zerowym, to rdzeń takiego transformatora może mieć budowę 3-kolumnową. Wskazane (lecz nie konieczne) jest zastosowanie w tym transformatorze trójkątowego uzwojenia wyrównawczego małej mocy dla zapewnienia przepływu III harmonicznej prądu magnesującego.

i) Każdy z omówionych typów transformatorów może być wykorzystany do uzyskania symetryzacji prądu pierwotnego, co z punktu widzenia energetyki jest ze wszystkich miar pożądane.

10. ZAKOŃCZENIE

Niesymetryczna regulacja przekładni mająca na celu uzyskanie symetryzacji prądu obciążenia wywołuje różne efekty w transformatorze, w którym jest zastosowana. Z jednej strony należy uchronić się przed niekorzystnymi zjawiskami, z drugiej zaś nie należy niepotrzebnie stosować środków ochronnych tam, gdzie są one zbędne. W tym celu trzeba wybrać ze względów konstrukcyjnych układ najlepiej odpowiadający zadany warunkom, a następnie w oparciu o podane w artykule metody ustalić graniczną asymetrię regulacji i wynikające z niej zmiany w parametrach transformatora. Takie postępowanie zapewnia zarówno właściwe zaprojektowanie, jak i właściwą eksploatację transformatora przewidzianego do niesymetrycznej regulacji napięcia.

Politechnika Łódzka

Katedra Maszyn Elektrycznych i Transformatorów

WYKAZ LITERATURY

1. Jezierski E.: Transformatory — Podstawy teoretyczne. WNT, Warszawa 1965.
2. Kołek W., Puchała A.: Pojęcia różnych rodzajów niesymetrii transformatora i źródła ich klasyfikacji. Referat na seminarium Katedry Maszyn Elektrycznych i Transformatorów Politechniki Łódzkiej. Łódź 1964.
3. Kołek W., Puchała A.: Die Ermittlung der Grenzfälle nichtsymmetrischer Belastung von Transformatoren. — Wiss. Zeitsch. d. Elektrotechnik, Leipzig 1963.
4. Kurbiel A.: Wyrównanie mocy fazowych pieca łukowego przez zastosowanie dławika o niejednakowych reaktancjach fazowych. — Przegl. Elektrotechn., 1966, str. 439 — 442.
5. Małasięwicz S.: Przeciżenia piecowych transformatorów stalowniczych. — Przegl. Elektrotechn., 1966, str. 426 — 429.
6. Jabłoński M.: Obliczanie napięcia zwarcia transformatorowych układów regulacyjnych. — Przegl. Elektrotechn., 1968, str. 150 — 154.

J. JABŁOŃSKI

THREE PHASE TRANSFORMER WORK AT NONSYMMETRICAL RATIO CONTROL

Summary

Nonsymmetrical control of the ratio is used first of all in big furnace transformers, because in this case the asymmetrical secondary impedance produces an important asymmetry of the load. Nonsymmetrical ratio control can lead either to the symmetrisation of secondary current profitable for the technology of the receiver or to the symmetrisation of supplying primary current because of disadvantages produced by negative current component in synchronous generators.

The symmetrisation of the secondary current needs larger differences of ratio in particular phases than the primary symmetrisation, and should be discussed at first.

The ratio control can be realised directly in primary HV winding or by means of an intermediary (booster) transformer in secondary LV winding (fig. 1). The tap changer position is determined with the parameter p with the suitable phase index. The low voltage at $p = 1$ is taken as the base for the calculus.

The connection $Yd; Y_0Y; Dy; Yy$ (d_{equal}) with the nonsymmetrical ratio control as well on primary as on secondary side are discussed. The connections $Dd; Y_0d$ are not suitable for such a control, because of large equalizing current flying due to asymmetry even at no load.

If the nonsymmetrical control of turn number is realised in the winding connected in delta ($Yd; Dy$) or in star with active neutral point (Y_0Y) then in the flux the zero sequence component appears which needs either a five limb core construction or a bank of three single phase transformers.

For the Yd connection with nonsymmetrical position of tap changers in delta winding the formulas are derived enabling to state the values of secondary voltages at no load (form. 6abc and 4b). The asymmetry of obtained voltages is much smaller than the asymmetry of tap changer position. Due to zero sequence component of the flux one or two phases are overexcited (form. 5abc) which needs the diminishing of flux density when projecting such a transformer. The method is derived to obtain the tap changer position for given values of nonsymmetrical voltages at no load (fig. 3 and 5, form. 14 abc).

The analysis of currents at symmetrised secondary load current (table 1) shows that in secondary phase windings, and in some constructions (fig. 7) also in primary windings appears an overload, similar to the overexciting of the same phases. The geometrical voltage drops at a symmetrised load are non symmetrical. The formulas 30 abc make it able to compute them.

The connections Dy and Yy (d_{equal}) with nonsymmetrical secondary ratio control don't show neither overexciting nor overload in any phase. The zero sequence component of the flux appears only in the leakage. For these connections the computing formulas and a method are given enabling to determine the tap changer positions when the nonsymmetrical voltages are given (fig. 8).

Nonsymmetrical ratio control in primary windings produces a different disposition of flux changes in every connection. In Yd and $Yy(d_{equal})$ only the positive and negative sequence components in the flux appear and consequently there exists no need of 5-limb core construction. But in this case an overload of one or of two phase windings takes place. In the case of Dy at nonsymmetrical control the zero sequence component in the flux appears which needs the 5 limb core or a transformer bank of single phase units. In this case exists no overload in any phase.

The transformer suitable for load current symmetrisation is always able to obtain the symmetry of primary load currents because the asymmetry of tap changer positions in this case is smaller than in the first one.

M. JABŁOŃSKI

LE TRAVAIL D'UN TRANSFORMATEUR TRIPHASÉ AVEC LE RÉGLAGE
NONSYMÉTRIQUE DU RAPPORT DE TRANSFORMATION

Résumé

Le réglage nonsymétrique du commutateur des prises est utilisé surtout dans les transformateurs de fours à l'arc, car en ce cas l'impédance asymétrique du côté secondaire produit une asymétrie importante du courant.

Le réglage nonsymétrique peut conduire ou bien à la symétrisation du courant secondaire, qui est avantageuse au récepteur ou à la symétrisation du courant primaire, qui est avantageuse à la source d'alimentation; les générateurs synchrones sont très sensibles à la composante de séquence négative du courant.

La symétrisation du courant secondaire est effectuée par une plus grande asymétrie du rapport des nombres de spires que la symétrisation primaire et doit être discutée en premier ordre.

Le réglage du rapport des nombres de spires peut être réalisé directement dans l'enroulement H. T. ou à l'aide d'un transformateur intermédiaire du côté B. T. (fig. 1). La position du commutateur des prises est déterminée par le paramètre p avec un index approprié. La valeur de la basse tension à la position du commutateur $p = 1$ est traitée comme une base pour le calcul.

Les couplages Yd , Y_0Y , Dy , $Yy(d_{eq})$ sont discutés pour le réglage nonsymétrique aussi bien du côté primaire.

Les couplages Dd et Y_0d ne conviennent pas au réglage nonsymétrique à cause d'un grand courant intérieur provoqué par l'asymétrie même pendant la marche à vide.

Si le réglage nonsymétrique du rapport des nombres de spires est réalisé dans l'enroulement connecté en triangle (Yd ; Dy) ou en étoile avec le point neutre actif (Y_0Y) dans le flux apparaîtra la composante de séquence zéro (monophasée) qui a besoin d'un noyau à cinq colonnes ou d'un banc de trois transformateurs monophasés.

Pour la connexion Yd avec les positions asymétriques des commutateurs dans l'enroulement delta on a déduit les formules qui donnent la possibilité de calculer les valeurs de la tension secondaire à vide (form. 6a, b, c et 4b). L'asymétrie des tensions produites est beaucoup moindre que l'asymétrie des positions des commutateurs. À cause de la composante monophasée du flux une ou deux phases sont surexcitées (form. 5a, b, c). Il faut alors diminuer l'induction au cours du projet d'un tel transformateur.

On a déduit une méthode pour obtenir les positions des commutateurs quand les valeurs de la tension nonsymétrique à vide sont données (fig. 3 et 5; form. 14a, b, c).

L'analyse des courants, pendant la symétrisation de la charge secondaire (tableau 1), montre que dans les enroulements secondaires (et dans le cas de certaines constructions, comme sur la figure 7, également dans les enroulements primaires) apparaît une surintensité semblable à la surexcitation des mêmes phases. Les chutes de tension pendant la charge avec les courants symétrisés sont non symétriques. Les formules 30a, b, c permettent de les calculer.

Les connexions Dy et $Yy(d_{eq})$ avec le réglage nonsymétrique secondaire ne montrent ni surexcitation ni surintensité dans aucune phase. La composante monophasée du flux existe seulement dans le champ des fuites.

Pour les connexions décrites on a déduit des formules et une méthode qui permet de déterminer les positions des commutateurs, quand les valeurs des tensions nonsymétriques sont données, fig 8.

Le réglage nonsymétrique dans l'enroulement primaire produit une disposition différente du flux pour chaque connexion. En cas de Yd et $Yy(d_{eq})$ il n'existe que les composantes négative et positive, il n'est pas alors nécessaire de construire un noyau à 5 colonnes. Mais en ce cas il apparaît une surintensité dans une ou deux phases. La connexion Dy pendant le réglage nonsymétrique produit la composante du flux de séquence zéro; dans ce cas un noyau à cinq colonnes ou un banc des transformateurs monophasés sont nécessaires mais il n'y a pas de surintensité dans aucune phase.

Le transformateur prévu pour la symétrisation du courant secondaire peut toujours supporter la symétrisation du courant primaire, car l'asymétrie des positions des commutateurs en ce cas est moindre que dans le premier cas.

М. ЯВЛОНЬСКИ

РАБОТА ТРЕХФАЗНОГО ТРАНСФОРМАТОРА ПРИ НЕСИММЕТРИЧНОЙ РЕГУЛЯЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА ТРАНСФОРМАЦИИ

Резюме

Несимметричная регулировка коэффициента трансформации применяется в основном в крупных трехфазных трансформаторах, где несимметрия импеданции вторичного контура вызывает зна-

чительную несимметрию нагрузки. Несимметричная регуляция может приводить к симметризации вторичного тока (что полезно для технологии работы приёмника) или же к симметризации первичного тока, что полезно с точки зрения источника питания. Синхронные генераторы работают неправильно при несимметричной нагрузке.

Симметризация вторичного тока требует большей асимметрии коэффициента трансформации, чем симметризация первичного тока, и поэтому следует рассмотреть её в первую очередь.

Регуляция коэффициента трансформации может быть реализована непосредственно в первичной обмотке или же с помощью добавочного трансформатора по вторичной стороне (рис. 1).

Положение переключателя определяется параметром p с индексом соответствующей фазы. Основное напряжение стороны НН (напр. среднее напряжение без подключенной системы регуляции) является базисом, к которому относится напряжение фазной обмотки стороны ВН. При таком напряжении $p = 1$.

В работе рассматриваются схемы: Yd , Y_0y , Dy , $[Yy]$ ($d_{уравн.}$) при несимметричной регуляции так по первичной как по вторичной стороне.

Схемы Dd и Yd не пригодны к несимметричной регуляции, так как уже при холостом ходе выступают в них очень большие уравнительные токи. Если несимметричная регуляция проводится в контуре треугольника (Yd ; Dy) или же звезды с подключенной нулевой точкой (Y_0y), то в потоке появится нулевая составляющая которая требует пятистержневого сердечника или системы трёх однофазных трансформаторов.

Для схемы Yd с несимметричными положениями переключателей напряжения были выведены формулы позволяющие находить вторичные напряжения холостного хода (формулы 6а, б, в и 4 б).

Асимметрия полученных напряжений значительно меньше чем асимметрия установки переключателей.

Ввиду действия потока нулевой последовательности, одна или две фазы перевозбуждаются (формулы 5а, б, в). Требуется это снижения индукции при расчете трансформатора. Приводится расчетно-графический метод нахождения положений переключателей для получения заданных значений несимметричных вторичных напряжений при холостом ходе (рис. 3 и рис. 5 и формулы 14а, б, в).

Анализ токов нагрузки при симметризации токов приёмника (табл. 1) показывает, что во вторичных обмотках (а в некоторых конструкциях — как напр. рис. 7 — также в первичных обмотках) появится перегрузка током, аналогична магнитному перевозбуждению этих же фаз.

Падения напряжения при нагрузке тоже являются несимметричными. Формулы 30а, б, в позволяют их рассчитать.

Схемы Dy а также Yy ($d_{уравн.}$) с несимметричной регуляцией во вторичной обмотке не имеют ни перегрузок ни перевозбуждений в никакой фазе. Поток нулевой последовательности появляется только в поле рассеяния. Для этих схем приводятся расчетные формулы и графический метод определения положений переключателей при заданных напряжениях (рис. 8). Несимметричная регуляция напряжения проводимая в первичной обмотке вызывает различный характер изменений потока для отдельных схем. В случае Yd , а также Yy ($d_{уравн.}$) в основном потоке появляется лишь только асимметрия положительной и отрицательной последовательности и поэтому не требуется применять пятистержневой сердечник. Симметризацией же тока нагрузки вызывается перегрузка одной или двух фаз. В случае Dy в главном потоке появится нулевая составляющая, вызывающая необходимость применить пятистержневой сердечник или систему трёх однофазных трансформаторов, симметризация же токов нагрузки не вызывает в этой схеме перегрузки никакой из обмоток.

Трансформатор, приспособленный к симметризации токов нагрузки, пригоден тоже всегда для достижения симметрии токов первичной сети, так как степень асимметрии положений переключателей в этом случае меньше.

ANDRZEJ WĄSOWSKI

Wahania napięcia powodowane pracą pieców łukowych w sieciach elektrycznych zasilających stalownię

Rękopis dostarczono 9.5.1966

Artykuł jest skrótem rozprawy doktorskiej¹⁾, poświęconej oddziaływaniu pieców łukowych na sieci zasilające [8]. Na wstępie omówiono doświadczenia różnych krajów, stwierdzono, że nie są one wystarczająco ściśle ani zgodne; wobec poważnych następstw ekonomicznych wymaga to głębszego przeanalizowania.

Do badania nieregularnych zaburzeń, jakie wywołują w sieciach piece łukowe, opracowano metodę statystycznych wskaźników prądowych opartą na wykresie kołowym pieca łukowego i metodach probabilistycznych. W pracy przeanalizowano wpływ na wielkość wahań parametrów układu energoelektrycznego: reaktancji i rezystancji oraz innych odbiorów.

W przypadku kilku pieców pracujących w stalowni uwzględniono harmonogram ich pracy oraz wpływ sieci zasilającej na wielkość powstałych zaburzeń.

Artykuł kończą: przykład zastosowania metody w praktyce oraz wnioski — podano warunki, w jakich należy analizować wpływ parametrów sieciowych na wielkość zaburzeń w sieci.

1. WSTĘP

Poważny rozwój grzejnictwa łukowego stwarza niekiedy trudności w eksploatacji sieci energoelektrycznych. Stalowniczy piec łukowy w czasie roztopiania złomu wykazuje bardzo nieregularny i burzliwy pobór prądu, wywołując wahania napięcia w sieci zasilającej. Przy niewłaściwych warunkach zasilania wahania te wywołują zjawisko migotania światła lamp zasilanych z tej samej sieci, jak też zaburzenia w pracy nadajników i odbiorników telewizyjnych oraz innych urządzeń czułych na warunki napięciowe.

Na podstawie różnych publikacji można stwierdzić, że w wielu krajach konieczne było użycie specjalnych, a kosztownych środków ograniczających nadmierne wahania napięcia. W niektórych przypadkach konieczna była zmiana układu zasilającego przez budowę nowej linii, zainstalowanie nowego transformatora, baterii kondensatorów posobnych, kompensatora synchronicznego, zasilanie huty na wyższym napięciu lub — w najlepszym razie — przez zmianę warunków pracy istniejącego układu. Stosowane były ograniczenia roztopiania do godzin pozaszczytowych lub nocnych, a nawet całkowita likwidacja roztopiania i stosowanie procesu duplex.

Ponieważ ograniczanie nadmiernych wahań napięcia prawie zawsze było związane z dużymi wydatkami, próbowano ustalić pewne wytyczne, które z góry pozwalałyby orzec, czy dany piec można przyłączyć do danej sieci lub jakie warunki powinna spełniać sieć zasilająca, by nie wystąpiły zaburzenia u innych odbiorców po przyłączeniu pieca.

¹⁾ Praca przyjęta przez Radę Wydziału Elektrycznego Politechniki Warszawskiej na posiedzeniu w dn. 24.11.1965 (Promotor — prof. Cz. Mejro, Recenzenci — prof. dr T. Schwartz, prof. dr S. Seidel).

2. OMÓWIENIE METOD DOTYCHCZASOWYCH

Jak można wnioskować z literatury technicznej, problem oddziaływania pieców łukowych na sieć zasilającą wystąpił najwcześniej w Stanach Zjednoczonych i w Niemczech, skąd pochodzą pierwsze prace sprzed ok. 30 lat. Zalecenia sprowadzają się najczęściej do ustalenia zależności między wielkością pieca i mocą zwarciovą sieci w punkcie, gdzie wahania napięcia przenoszące się na innych odbiorców są największe, wzorem

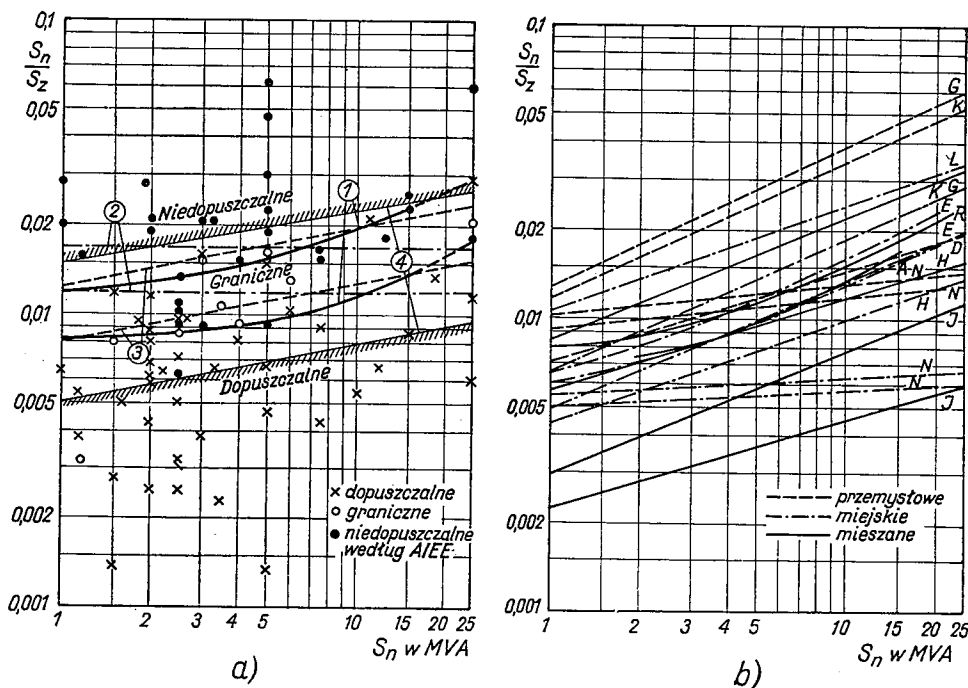
$$S_z \geq S_{z \min} = f(S_n), \quad (1)$$

gdzie:

S_z — moc zwarciovą sieci,

$S_{z \min}$ — minimalna wymagana S_z ,

S_n — moc znamionowa transformatora piecowego.



Rys. 1. Wymagane stosunki $S_n:S_z$ w funkcji S_n według różnych źródeł

a) 1 — AIEE, 2 — Elektrowarme Institut, 3 — Elektroprojekt, 4 — zakres proponowany do dalszego sprawdzenia,
b) różne przedsiębiorstwa amerykańskie (według AIEE)

Na rys. 1 podano wymagania co do stosunku $S_n:S_z$ dla różnych pieców. Na rys. 1a podano wymagania według materiałów AIEE (krzywe 1) — [1] oraz propozycje elektrotechników zachodnioniemieckich (krzywe 2) — [2]. Na rys. 1b podano wymagania różnych przedsiębiorstw amerykańskich — [1]. Propozycje pozostałych autorów mieszczą się w zasadzie w granicach $S_z \geq 50 \dots 200 S_n$.

Wahania napięcia powodowane pracą pieców łukowych w najbardziej przybliżony sposób [1], [3] można podzielić na:

A. Bardzo częste, szybkozmienne wahania o częstości kilku do kilkunastu na sek („cyclic swings”, „Flimmern”),

B. Wahania częste, o stosunkowo większej amplitudzie, a mniejszej częstości 0,3 — 2 na sek („extreme frequent swings”, „Flackern”).

W ankiecie AIEE opartej na doświadczeniu wielu hut amerykańskich stwierdzono, że wahania napięcia kat. A (b. częste) odgrywają decydującą rolę przy dużych piecach — powyżej 15 MVA, zaś przy mniejszych piecach dominują wahania kat. B (częste).

Wahania b. częste (A) wywołują migotanie światła w najniekorzystniejszym dla oświetlenia żarowego zakresie częstości. Najodpowiedniejszą metodą ich analizy są pomiary uwzględniające czułość oka na wahania napięcia, przy użyciu „flickermetru”, stosowanego we Francji [4], Belgii [5] i Japonii [6], lub detektora wahań napięcia stosowanego w Polsce [7]. W oparciu o statystyczną analizę tego rodzaju pomiarów W. Seydak zaproponował wprowadzenie wskaźnika wielkości zaburzeń ψ :

$$\psi = \frac{S_n^{0,8}}{S_z} 100. \quad (2)$$

Na rys. 1a (krzywe 3) podano wymagania Elektropjektu [7] ustalone przy założeniu $\psi_1 = 1,25$ (sieci przemysłowe) i $\psi_2 = 0,8$ (sieci komunalne).

Powyżej omówione pomiary są niewystarczające dla oceny wpływu wahań napięcia na pracę wielu urządzeń o mniejszej czułości na częstość wahań niżeli zestaw „żarówka — oko” (telewizory, lampy wyładowcze i in.). Wahania częste mogą oddziaływać nie tylko na pracę oświetlenia, lecz i innych odbiorów przemysłowych zasilanych z punktu sieci bliższego elektrycznie do pieca, a zatem o waniach zwiększonych w stosunku do sieci oświetleniowej. Wynika stąd potrzeba uzupełnienia badań analizą dużych wahań kat. B.

Zakres analizy w niniejszym artykule ogranicza się do przemysłowych pieców trójfazowych średniej wielkości, od 2 do 50 t, z transformatorami o mocach od 1 do ok. 15 MVA oraz do sieci średnich napięć od 6 kV (3 kV) do — w wyjątkowych przypadkach — 110 kV.

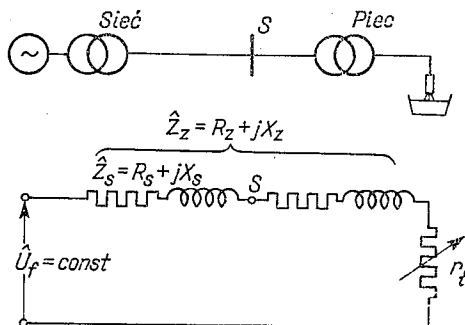
Jak wynika z materiałów ankiety AIEE, dla wartości $S_z \approx 100 S_n$ występuje strefa przejściowa — obszar pomiędzy krzywymi 1 na rys. 1a. Wewnątrz tej strefy (a nawet poza jej granicami) obserwuje się zarówno wystąpienie wahań niedopuszczalnych, jak i ich brak, obok wahań granicznych, tzn. już odczuwalnych, ale niezbyt dużych. W związku z powyższym wyniki prac dotychczasowych należy uznać za niedokładne i w pewnych granicach prowadzące do błędnych wniosków. Dla zakresu $\psi = 1 \pm 0,5$, zaznaczonego na rys. 1a przez krzywe 4, należy przeprowadzać bardziej wnikliwą analizę. Uzyskanie bardziej dokładnych wyników i określenie wpływu różnych parametrów poza S_z i S_n na wielkość wahań napięcia zapewnia przedstawiona w pracy [8] metoda statystycznych wskaźników prądowych. Metoda ta stanowi kontynuację i uogólnienie poprzednich prac autora [9].

3. METODA STATYSTYCZNYCH WSKAŹNIKÓW PRĄDOWYCH

Za punkt wyjściowy rozważań przyjmiemy najprostszą sieć promieniową, jak na rys. 2, na końcu której, w punkcie S, przyłączony jest piec łukowy. Piec traktować będziemy jako idealny odbiór prądu. Przy najprostszej zmienności prądu pobranego przez piec, od prądu

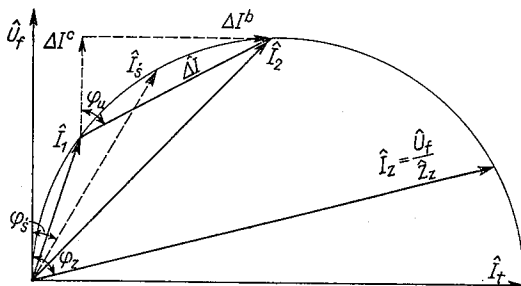
$\hat{I}_1$ do prądu $\hat{I}_2 = \hat{I}_1 + \Delta\hat{I}$, występują wahania poboru prądu $\Delta\hat{I} = \Delta I^c - j\Delta I^b$. Wahania napięcia w sieci w punkcie S można wyznaczyć ze znanego wzoru

$$\Delta U_s = \Delta I^c R_s + \Delta I^b X_s. \quad (3)$$



Rys. 2. Sieć zasilająca piec łukowy

Dla praktyki wygodniej będzie opierać się nie na pomiarach wahań prądu czynnego i biernego, lecz tylko na jednej zmiennej — wielkości prądu pobranego przez piec; umożliwia to wykres kołowy — rys. 3.



Rys. 3. Wykres kołowy pieca łukowego

Wahania prądu czynnego i biernego można wyznaczyć ze wzorów

$$\Delta I^b = \Delta I 2 \sin \varphi_s, \quad (4)$$

$$\Delta I^c = \Delta I^b \frac{\cos \varphi_u}{\sin \varphi_u}. \quad (5)$$

W przybliżony sposób można oszacować te wielkości znając zmianę wartości skutecznej prądu $\Delta I = (I_2 - I_1)$ oraz prąd średni, równy średniej arytmetycznej, $I_s = 0,5(I_1 + I_2)$. Z wykresu kołowego dostajemy

$$\sin \varphi_s = \frac{I_s}{I_t}, \quad (6)$$

gdzie I_t — teoretyczny prąd zwarcia eksploatacyjnego (średnica wykresu kołowego).

Z pewnym przybliżeniem można przyjąć $\varphi_u = \varphi_1 + \varphi_2 \approx 2\varphi_s$ i wyliczać wahania prądu czynnego ze wzoru

$$\Delta I^c = \frac{\Delta I \cos 2\varphi_s}{\cos \varphi_s}. \quad (7)$$