POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTROTECHNIKI

50

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

KWARTALNIK

SPIS TREŚCI DO TOMU XIX — 1973

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA

SPIS TREŚCI DO TOMU XIX

S. Apanasewicz: Rozkład pola elektromagnetycznego w układzie: grupa przewodników równoległych, ekran, półprzestrzeń metalowa 37
W. Bobrowski: Niektóre zagadnienia związane ze skalowaniem statystycznym przekaźników termobimetalowych 397
Z. Chudoba: Charakterystyki zrównoważonych mikrofalowych modulatorów fazy . . . 713
Z. Czyżykowski: Analiza i synteza nieliniowego członu operacyjnego modelującego dynamiczne pętle histerezy 63
A. Dąbrowski: Efektywna sprawność transmisji kilku systemów transmisji danych ze sprzężeniem zwrotnym decyzji 503
A. Dobrogowski: Optymalizacja charakterystyki kompresji próbek sygnałów mowy w systemach modulacji impulsowo-kodowej 487
Z. Dunajski: Układ z hallotronami przeznaczony do pomiaru rezystancji przy prądzie zmiennym 77
B. Galiński: Uogólniona teoria skośnika 231
A. Giełczyński: Dyskretne przekształcenie Fouriera przebiegów o widmie uciętym. Właściwości i metody obliczania 583
J. Gulczyński, Z. Staszak: Pomiar rezystancji termicznych diod lawinowych . . . 295
J. Gulczyński, Z. Staszak: Właściwości cieplne diod lawinowych 281
Z. Kierzkowski, E. Weksej: Próba oceny predykcji obciążeń czynnych okręgu energetycznego 327
T. Koter, W. Lasocki: Parametry w zastępczym schemacie cieplnym transformatora suchego przy chłodzeniu naturalnym 179
A. Kozłowska: Czterokolumnowy rdzeń autotransformatora jednofazowego z uzwojeniem regulacyjnym umieszczonym na jednej z kolumn skrajnych 609
J. Kożuchowski: Kompleksowa automatyzacja systemów elektroenergetycznych . . . 437
A. Kraszewski: Pomiar wilgotności metodą mikrofalową 137
I. Kuzora, J. Bajorek: Wyznaczanie pojemności niesymetrycznych linii paskowych metodą elektroanalogii 165
J. Lasociński: Metodyka obliczania strat dodatkowych w uzwojeniu stojana turbogeneratora wywołanych strumieniem strefy czołowej 633
J. Łyskanowski: Niektóre zagadnienia oceny techniczno-ekonomicznej przekaźników . 597
J. Pasternak: Analiza ustalonych stanów pracy elektromagnetycznego potrajacza częstotliwości 423
Z. Perkowski: Optymalizacja budowy ekranów wielodrutowych przewodów współosiowych wielkiej częstotliwości. Podstawy teoretyczne 517
Z. Perkowski: Optymalizacja budowy ekranów wielodrutowych przewodów współosiowych wielkiej częstotliwości. Metoda i wyniki badań 685
A. Podemski: Analiza metod sumowania fazy różnicowej i wzmocnienia różnicowego sygnałów telewizji barwnej 561
A. Rosicki: Pomiary modelowe i obliczenia przepięć przy próbach udarowych autotransformatora regulacyjnego 100 MVA; 220/110 kV 339
R. Rydlewicz: Pojemnościowy rozkład napięcia w autotransformatorze 465
J. Sawicki: Dokładność omomierzy zwyczajnych 117
Z. Sawicki, R. Vogel: Trójwrotowe symetryczne dzielniki mocy dla zastosowań w mikrofalowych układach scalonych 305

A. Skiba, E. Goc: Realizacja filtrów środkowoprzepustowych z liniową fazą przez zastosowanie ogniw pięcioelementowych 17
J. Skwarna: Oddziaływanie twornika tarczowego maszyny homopolarnej 663
W. Sobczak: Problemy optymalizacji systemów wielodostępowych ze zwielokrotnieniem centralnym 197
H. Sołtysik: Warunki realizowalności i metody realizacji macierzy [Y] za pomocą (n+1)-zaciskowej sieci zbudowanej z elementów *R*, *C*, żyrator 411
J. Sosnowski: Ograniczanie prądu wyjściowego we wtórniku emiterowym 725
C. Syc: Analiza stałoprądowych liniowych układów elektronicznych metodą liczb strukturalnych sprzężonych za pomocą maszyn cyfrowych 3
M. Tadeusiewicz: Analiza pewnej klasy nieliniowych obwodów rezystancyjnych w przestrzeni m_n 215
E. Tota-Ramisz: Maszynowa analiza tranzystorowych złożonych liniowych układów wzmacniających prądu stałego w oparciu o parametry czwórnika zastępczego 49
J. Turowski: Metody obliczania pola i parametrów bieżni indukcyjnych silników liniowych 371
B. M. Wilanowski: O możliwości neurystorowych sieci logicznych 273

CONTENTS

S. Apanasewicz: Electromagnetic Field Distribution in a Screening Semi-Infinite Solid Due to Currents in Parallel Conductors 37
W. Bobrowski: Certain Problems of Statistical Calibrating of Thermobimetal Relays . . 397
Z. Chudoba: Characteristics of Microwave Hybride Phase Shifters 713
Z. Czyżykowski: Analysis and Projecting of Nonlinear System With Operational Amplifier for Modelling of Dynamical Hysteresis Loop 63
A. Dąbrowski: The Efficiency of Several Data Transmission Systems With Feedback . . 503
A. Dobrogowski: Optimization of the Compression Characteristic of Speech Signal Samples in the Pulse Code Modulation Systems 487
Z. Dunajski: Hall Effect Resistance A. C. Measuring System 77
B. Galiński: Generalised Theory of Cross-Connected Long Line 231
A. Giełczyński: Discrete Fourier Transform of a Frequency Band-Limited Waveforms. Properties and Method for Efficient Computing 583
J. Gulczyński, Z. Staszak: Measurement of Thermal Resistance in Avalanche Diodes 295
J. Gulczyński, Z. Staszak: Thermal Properties of Avalanche Diodes 281
Z. Kierzkowski, E. Weksej: An Attempt to Evaluate a Prediction of Active Loads of a Power System District 327
T. Koter, W. Lasocki: Parameters in the Thermal Equivalent Circuit of a Dry Transformer in the Case of Natural Cooling 179
A. Kozłowska: Four Leg Core of a Single Phase Autotransformer With a Ratio Control Winding Situated on One of Extreme Legs 609
J. Kożuchowski: Complex Control of Power Systems 437
A. Kraszewski: Measurement of Water Content by Microwave Method 137
I. Kuzora, J. Bajorek: Analogue Method to Calculate Capacitance of Microstrip Transmission Lines 165
J. Lasociński: Method of Calculating Additional Losses Within Turbogenerator Stator Winding Caused by End-Region Flux 633
J. Łyskanowski: Some Problems of Technical and Economical Estimation of Relays . . 597
J. Pasternak: The Analysis of Operational Steady States of the Electromagnetic Frequency Tripler 423
Z. Perkowski: Optimization of Construction of Multiwire Screens for High Frequency Coaxial Cables. Principles of the Theory 517

Z. Perkowski: Optimization of Construction of Multiwire Screens for High Frequency Coaxial Cables. Measuring Method and Results 685
A. Podemski: Analysis of Different Methods in Adding up of Differential Phase and Differential Gain of Colour Television Signals 561
A. Rosicki: Surge Measurements on a Model and Calculations of Surges in Impulse Test Condition of the Regulating Autotransformer 100 MVA; 220/110 kV 339
R. Rydlewicz: Capacitance Voltage Distribution in Autotransformer 465
J. Sawicki: Accuracy of Standard Ohmmeters 117
Z. Sawicki, R. Vogel: Three-Port Symmetrical Hybrid for Applications in Microwave Integrated Circuits 305
A. Skiba, E. Goc: Realization of Constant-Delay Band-Pass Filters by Means of Five-Element Sections 17
J. Skwarna: The Disk Armature Reaction of a Homopolar Machine 663
W. Sobczak: Optimization Problems for Central Multiplexing Systems 197
H. Sołtysik: The Realizability Conditions and a Method of Realization of the Matrix [Y] by (n+1)-terminals Network Built of R, C Elements and Impedance Gyrators 411
J. Sosnowski: Limitation of Output Current in Emitter Follower 725
C. Syc: D-C Analysis of Electronic Linear Circuits by the Method of Structural Conjugate Numbers by Means of Digital Computers 3
M. Tadeusiewicz: An Analysis of a Certain Class of Non-linear Resistive Networks in the m_n Space 215
E. Tota-Ramisz: Computer Analysis of Complicated Linear Transistor Current Amplifiers Based on Twoport Parameters 49
J. Turowski: Methods of the Calculation of Field and Secondary Parameters of Linear Induction Motors 371
B. M. Wilamowski: Possibilities of Constructing Neuristor Logic Networks 273

TABLE DES MATIÈRES

S. Apanasewicz: La distribution du champ électromagnétique dans le système: un groupe de conducteurs parallèles, écran, demi-espace métallique 37
Z. Chudoba: Les caractéristiques théoriques de déphaseurs digitaux hybrides pour hyperfréquences 713
A. Dobrogowski: Optimalisation de caractéristique de la compression à segments du signal de la parole dans les systèmes à modulation codée par impulsion 487
B. Galiński: La théorie généralisée d'une ligne électrique en connection diagonale . . . 231
J. Gulczyński, Z. Staszak: La mésure de résistance thérmique des diodes à avalanche 295
J. Gulczyński, Z. Staszak: Les propriétés thermiques des diodes à avalanche . . 281
Z. Kierzkowski, E. Weksej: Essai d'apréciation d'une prédiction des charges actives d'une région énérgétique 327
T. Koter, W. Lasocki: L'analyse des paramètres d'un circuit équivalent thermique du transformateur sec 179
A. Kozłowska: Le noyau à quatre colonnes d'un autotransformateur monophasé à enroulement de réglage placé sur l'une des colonnes extrémes 609
J. Kożuchowski: Automatisation complète du réseau électroénergétique 437
I. Kuzora, J. Bajorek: Détérmination de la capacité non symétrique des lignes à bandes par la méthode éléctroanalogue 165
Z. Perkowski: L'optimisation de construction des écrans multiconducteurs des câbles coaxiaux pour hautes fréquences. Principes de la théorie 517
Z. Perkowski: L'optimisation de construction des écrans multiconducteurs des câbles coaxiaux pour hautes fréquences. Méthode et resultats des mesures 685

A. Podemski: Analyse des méthodes d'addition de la phase différentielle et du gain différentiel des signaux de télévision en couleur 561
A. Rosicki: Measurages de model et calcules des surtensions des essais aux ondes de choc d'autotransformateur de reglage 100 MVA; 220/110 kV 339
R. Rydlewicz: La distribution capacitive de tension dans l'autotransformateur 465
J. Sawicki: Exactitude des ohmmètres ordinaires 117
Z. Sawicki, R. Vogel: Hybrid symétrique hexâpôle pour circuits intégrés à microondes 305
A. Skiba, E. Goc: Réalisation des filtres passe-bandes avec temps de propagation de groupe constante qui sont composés de cinq elements cellules 17
J. Skwarna: La réaction de l'induit d'une machine unipolaire 663
H. Sołtysik: Les conditions et la méthode de réalisation de la matrice [Y] à l'aide de réseau (n+1)-bornes contenant *R*, *C* éléments et gyrateurs impédances 411
J. Sosnowski: La limitation de courant de sortie dans l'emetteur suiveur 725
C. Syc: Analyse des circuits linéaires à courant direct par la méthode des nombres structuraux conjugés à l'aide des machines mathématiques 3
M. Tadeusiewicz: Analyse d'un certain type des circuits non linéaires des résistances dans l'espace m_n 215
J. Turowski: Méthodes de calcul du champ électromagnétique et des paramètres secondaires du moteur asynchrone lineaire 371
B. M. Wilamowski: Sur la possibilité de la construction des réseaux logiques à neuristor . . 273

INHALT

S. Apanasewicz: Verteilung des elektromagnetischen Feldes im System: Gruppe paralleler Leitungen, Flachschirm und metallischer Halbraum 37
W. Bobrowski: Gewählte Probleme statistischer Gradierung von Bimetallrelais 397
Z. Chudoba: Charakteristiken der Mikrowellen Hybrid Coupled Phasenschieber 713
Z. Czyżykowski: Analyse und Synthese dynamische Schleifen modelierender Operationselemente 63
A. Dąbrowski: Effektiver Übertragungswirkungsgrad einiger Datenübertragungssysteme mit Entscheidungsrückkopplung 503
A. Dobrogowski: Optimierung der Sample-Kompressionscharakteristik des Sprachsignals in den Puls-Code-Modulation-Systemen 487
Z. Dunajski: Schaltung mit Hallgeneratoren zur Messung von ohmschen Widerständen bei Wechselstrom 77
B. Galiński: Die verallgemeinte Theorie der elektrischen Feldlinie in diagonaler Verbindung 231
A. Giełczyński: Diskrete Fouriersche Umwandlung der Vorgänge mit angeschnittenem Spektrum. Eigenschaften und Berechnungsmethoden 583
J. Gulczyński, Z. Staszak: Messung des Wärmewiderstandes von Lawinendioden . 295
J. Gulczyński, Z. Staszak: Thermische Eigenschaften von Lawinendioden 281
Z. Kierzkowski, E. Weksej: Beurteilungsversuch der Wirkbelastungsprediktion eines Energiekreises 327
T. Koter, W. Lasocki: Parameter im Wärmeersatzschaltung des Trockentransformators bei natürlicher Kühlung 179
A. Kozłowska: Vierschenkelrahmenkern des einphasigen Autotransformators mit einer auf dem äussersten Schenkel untergebrachten Regelwicklung 609
J. Kożuchowski: Komplexe Automatisierung elektroenergetischer Systeme 437
A. Kraszewski: Feuchtigkeitsmessung mittels Mikrowellenmethode 137
I. Kuzora, J. Bajorek: Bestimmung der Mikrowellen-Streifenleitungskapazität mittels Elektroanalogiemethode 165
J. Lasociński: Berechnungsmethode für die durch den Stirnfluss hervorgerufenen Zusatzverluste in der Statorwicklung des Turbogenerators 633

J. Łyskanowski: Manche Probleme technisch-ökonomischer Einschätzung von Relais . 597
J. Pasternak: Analyse von stationären Betriebszuständen des elektromagnetischen Frequenzverdreifachers 423
Z. Perkowski: Optimalisierung des Aufbaues von Reusenaussenleitern der koaxialer Hochfrequenzleitungen. Theoretische Grundlagen 517
Z. Perkowski: Optimalisierung des Aufbaues von Reusenaussenleitern der koaxialen Hochfrequenzleitungen. Methode un Ergebnisse von Messungen 685
A. Podemski: Analyse von Methoden der Differentialphasen-Superposition und der Verstärkung des Differentialsignals farbigen Fernsehens 561
A. Rosicki: Modellmessungen und Überspannungsberechnungen bei Stosspannungsprüfungen des Regelautotransformators 100 MVA; 220/110 kV 339
R. Rydlewicz: Kapazitive Spannungsverteilung in Autotrafos 465
J. Sawicki: Genauigkeit einfacher Ohmmeter 117
Z. Sawicki, R. Vogel: Sechspol-Leistungsteiler für die Anwendung in integrierten Schaltungen im Mikrowellenbereich 305
A. Skiba, E. Goc: Aufbau von Bandpassiltern mit linearem Phasengang durch Anwendung von Gliedern mit je fünf Baulementen 17
J. Skwarna: Scheibenankerrückwirkung der Unipolarmaschine . . . . . .
W. Sobczak: Optimalisationsprobleme der Mehrzugangssysteme mit zentraler Vervielfachung 197
H. Sołtysik: Bedingungen der Realisität sowie Realisierungsmethoden der Matrix [Y] mittels eines aus *R*-, *C*- und Girator-Elementen erbauten (n+1)-Klemmennetzes 411
J. Sosnowski: Beschränkung des Ausgangsstroms im Emitterverstärker 725
C. Syc: Analyse elektrischer, linearer, mittels Methode verkoppelter Strukturalzahlen mit Hilfe von Digitalrechnern berechneter Gleichstromsysteme 3
M. Tadeusiewicz: Analyse von nichtlinearen Resistanzkreisen bestimmter Klasse im m_n-Raum 215
E. Tota-Ramisz: Maschinelle Analyse verstärkender, zusammengesetzter Lineargleichstrom-Transistorensysteme in Anlehnung an Parameter eines Ersatzvierpols 63
J. Turowski: Berechnungsmethoden des Feldes und der Parameter des Läufers von Induktionslinearmotoren 371
B. M. Wilamowski: Baumöglichkeiten von neuristischen logischen Netzen 273

СОДЕРЖАНИЕ

С. Апанасевич: Распределение электро-магнитного поля в системе: группа параллельных проводов, экран, металлическое полупространство 37
В. Бобровски: Некоторые вопросы статической калибровки термобиметаллических реле 397
Б. М. Вилямовски: О способах постройки невристорных логических контуров . . 273
Б. Галиньски: Обобщенная теория диагонального соединения электрической длинной линии 231
А. Гелчиньски: Дискретное преобразование Фурье сигналов с ограниченным спектром — свойства и методы вычисления 583
Я. Гульчиньски, З. Сташак: Тепловые свойства лавинных диодов 281
Я. Гульчиньски, З. Сташак: Измерение тепловых сопротивлений лавинных диодов 295
А. Доброговски: Оптимизация характеристики компрессии сигнала речи в системах с кодово-импульсной модуляцией 487
А. Домбровски: Эффективная скорость передачи систем передачи данных с обратной связью 503

З. Дунайски: Схема с датчиками Холла для измерения сопротивления при переменном токе . . . 77
З. Кежковски, Э. Вэксэй: Попытка оценки предсказания активных нагрузок энергетической области . . . 327
Я. Кожуховски: Комплексная автоматизация электроэнергетических систем . . . 437
А. Козловска: Четырехстержневой сердечник однофазного автотрансформатора с регулировочной обмоткой расположенной на одном из крайних стержней . . . 609
Т. Котер, В. Лясоцки: Параметры в тепловой схеме замещения сухого трансформатора при естественном охлаждении . . . 179
А. Крашевски: Измерение влажности на сверхвысоких частотах . . . 137
И. Кузора, Е. Байорек: Определение емкости несиметрических полосковых линий методом электроаналогии . . . 165
Я. Лыскановски: Некоторые вопросы технико-экономической оценки реле . . . 597
Я. Лясоциньски: Метод расчета добавочных потерь в обмотке статора турбогенератора вызванных потоком торцевой зоны . . . 633
Е. Пастернак: Анализ установившегося режима работы электромагнитного утроителя частоты . . . 423
А. Подемски: Анализ методов суммирования дифференциальной фазы и дифференциального усиления сигналов цветного телевидения . . . 561
З. Пэрковски: Оптимизация конструкции многопроволочных экранов коаксиальных радиочастотных кабелей. Теоретические основы . . . 517
З. Пэрковски: Оптимализация конструкции многопроволочных экранов радиочастотных кабелей. Метод и результаты измерений . . . 685
А. Росицки: Измерения на модели и расчет перенапряжений при волновых испытаниях регулировочного автотрансформатора 100 MVA; 220/110 kV . . . 339
Р. Рыдлевич: Емкостное распределение напряжений в обмотках автотрансформатора . . . 465
Е. Савицки: Точность обыкновенных омометров . . . 117
З. Савицки, Р. Вогель: Симметричные делители мощности для применений в интегральных схемах СВЧ . . . 305
Я. Скварна: Реакция дискового якоря униполярной машины . . . 663
А. Скиба, Е. Гоц: Реализация полосовых фильтров с линейным фазовым сдвигом путем применения пятиэлементных звеньев . . . 17
В. Собчак: Вопросы оптимализации систем с множественным доступом и центральным уплотнением . . . 197
Г. Солтысик: Условия реализуемости и метод реализации матрицы $[Y]$ при помощи $(n+1)$-зажимной цепи построенной из элементов R, C и импедансных гираторов . . . 411
Я. Сосновски: Ограничение исходного тока в эмитерном повторителе . . . 725
Я. Сыц: Анализ линейных электронных схем постоянного тока методом сопряженных структурных чисел с помощью цифровых вычислительных машин . . . 3
М. Тадеусевич: Анализ одного из классов нелинейных резистивных цепей в пространстве m_n . . . 215
Э. Тота-Рамищ: Машинный метод анализа сложных транзисторных линейных усилительных схем постоянного тока обоснованный на приведении схемы к четырехполюснику . . . 49
Я. Туровски: Методы расчета поля и параметров рельса индукционных линейных двигателей . . . 371
З. Худоба: Характеристики балансного микроволнового фазовращателя . . . 713
З. Чижиковски: Анализ и проектирование нелинейной схемы с решающим усилителем моделирующей динамические петли гистерезиса . . . 63

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTROTECHNIKI

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XIX · ZESZYT 1

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1973

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor Naczelny

PROF. DR WITOLD NOWICKI

Członkowie

PROF. TADEUSZ CHOLEWICKI, PROF. EUGENIUSZ JEZIERSKI,
PROF. DR WITOLD ROSIŃSKI, PROF. DR STANISŁAW RYŻKO

Sekretarz

JANINA MATHEISEL

ADRES REDAKCJI

Warszawa, Politechnika, Plac Jedności Robotniczej 1
Instytut Teleelektroniki, Gmach Elektroniki
pokój 343, tel. 21-007-564 oraz 25-09-10

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
Warszawa, Miodowa 10

Nakład 660 (538+122)	Oddano do składania 30. VIII. 1972 r.
Ark. wyd. 17,0 ark. druk. 13,25	Podpisano do druku 3.I.1973 r.
Papier druk. sat. kl. III, 80 g, 70×100	Druk ukończono w styczniu 1973 r.
Zamówienie nr 1197/72	Cena zł 40.— A-73

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1973, 19, z. 1, ss. 3-15

621.372

Analiza stałoprądowych liniowych układów elektronicznych metodą liczb strukturalnych sprzężonych za pomocą maszyn cyfrowych

CZESŁAW SYC (WARSZAWA)

Instytut Teleelektroniki Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 15.10.1971

W artykule opisano topologiczny sposób analizy stałoprądowych układów elektrycznych i elektronicznych (w których elementy czynne zastąpiono grafami unistorowymi) metodą liczb strukturalnych sprzężonych za pomocą maszyn cyfrowych

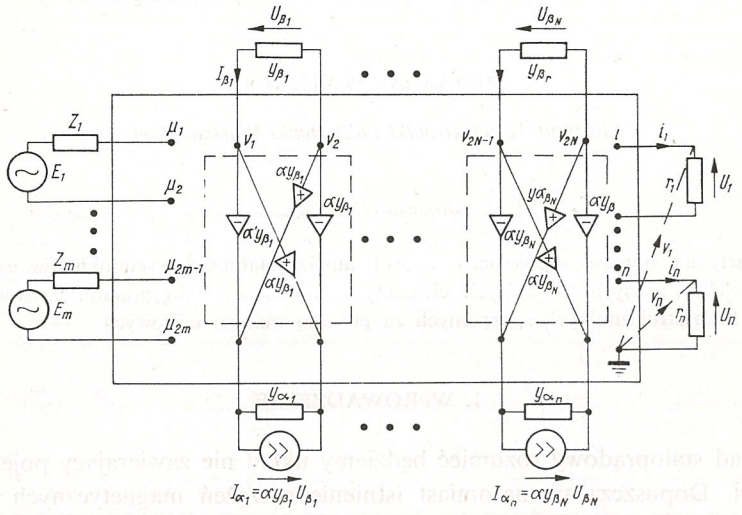
1. WPROWADZENIE

Przez układ stałoprądowy rozumieć będziemy układ nie zawierający pojemności oraz indukcyjności. Dopuszcza się natomiast istnienie sprzężeń magnetycznych w układzie, np. transformatorów oraz źródeł sterowanych. Automatyczne projektowanie układów elektrycznych i elektronicznych za pomocą maszyn cyfrowych nabrało w ostatnim pięcioleciu niebywałego rozmachu. Trudno bowiem wyobrazić sobie na przykład zaprojektowanie układu elektronicznego scalonego nawet w małej skali integracji bez udziału maszyny cyfrowej. Opracowanie zatem odpowiednich metod matematycznych projektowania za pomocą maszyn ma bardzo istotne znaczenie praktyczne. Szczególnie dotyczy to projektowania układów elektronicznych scalonych i nieliniowych. Problematyka przedstawiona w tym artykule, chociaż dotyczy analizy stałoprądowych układów elektronicznych liniowych, to jednak opracowana jest pod kątem widzenia zastosowania jej również do analizy układów elektronicznych nieliniowych linearyzowanych odcinkowo.

Rozważmy sieć elektroniczną liniową pokazaną symbolicznie na rys. 1
gdzie:

E_i — siła elektromotoryczna i-tego niezależnego źródła napięciowego,
α — współczynnik wzmocnienia prądowego,
y_{β_i} — admitancja gałęzi β_i,
y_{α_i} — admitancja gałęzi α_i,
z_i — rezystancja i-tego źródła napięciowego,
I_{α_i} — wydajność prądowa zależnego źródła prądowego w gałęzi α_i,
u_{β_i} — napięcie sterujące zależnym źródłem prądowym I_{β_i} w gałęzi β_i,
N — liczba elementów czynnych w układzie,
u_i — napięcie między dwoma wierzchołkami,
v_i — potencjał między wybranym i-tym wierzchołkiem a wierzchołkiem odniesienia 0,

r_i — rezystancja i-tej gałęzi,
i_i — prąd płynący w i-tej gałęzi,
n — liczba par wierzchołków, dla których wyznaczane są napięcia gałęziowe w sieci elektronicznej,
m — liczba niezależnych źródeł napięciowych.



Rys. 1. Symboliczny sposób oznaczania sieci elektronicznej, w której występują sprzężenia prądowo napięciowe (źródło prądowe I_{α_i} jest sterowane przez napięcie u_i, gdzie $i = 1, 2, \ldots, N$)

Sieć ta w oparciu o metodę opisaną w pracy Chua [7] scharakteryzować można za pomocą tzw. macierzy hybrydowej H rzędu $n \times n$ oraz wektora potencjałów wierzchołkowych $V = [v_i]$ rzędu $n \times 1$ i wektora napięć $U = [u_i]$ rzędu $n \times 1$. W tym przypadku układ równań liniowych

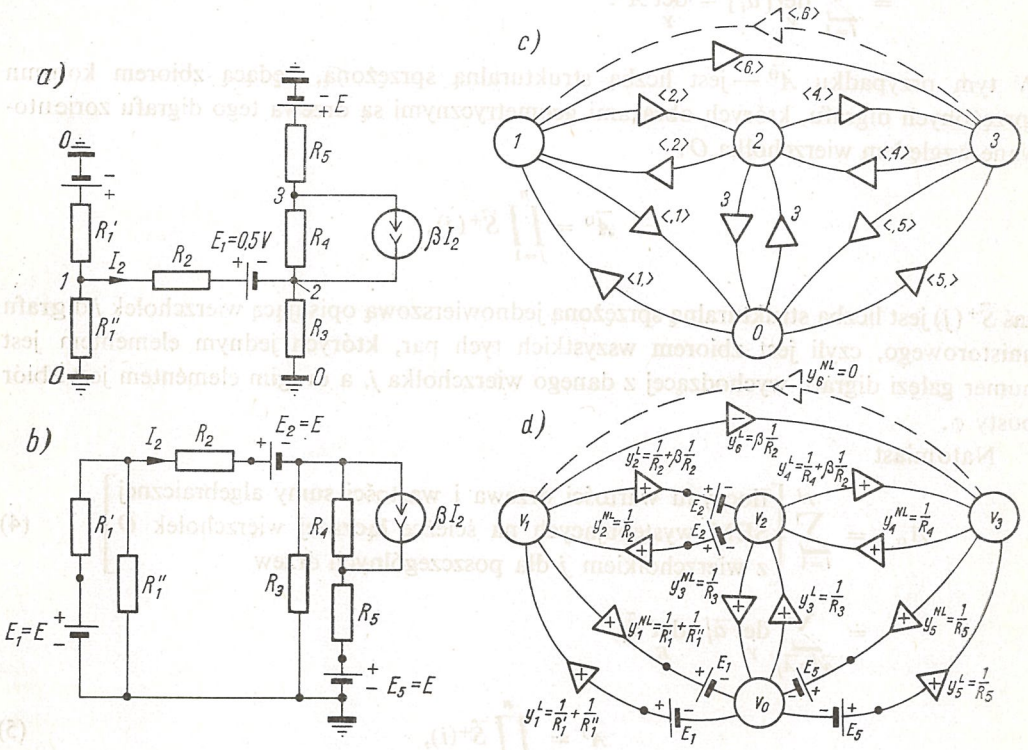
$$U = HI + V \tag{1}$$

opisuje zależności napięciowo-prądowe w sieci elektronicznej pokazanej symbolicznie na rys. 1.

Korzystając z układu równań (1) oraz metody transformacji macierzy H opracowanej przez Chua [7], można dla raz określonego wektora V wyznaczyć napięcie u_i dla wybranej rezystancji r_i bez konieczności ponownego wyznaczenia wektora V. Ma to bardzo istotne znaczenie przy analizie układów elektronicznych nieliniowych, dla których rezystancja r_i zmienia się liniowo tylko w określonych obszarach zmian prądu i_i oraz napięcia u_i.

Naszym celem będzie podanie metody wyznaczania macierzy hybrydowej H oraz wektora V dla układu równań (1) metodą liczb strukturalnych sprzężonych. W tym celu rozważać będziemy model unistorowy (digraf unistorowy) sieci elektronicznej utworzony z danej sieci przez zastąpienie każdej jej gałęzi włączonej między wierzchołkami x, y parą łuków, z których każdy reprezentuje sumę admitancji zorientowanych odpowiednio od wierzchołka x do wierzchołka y i odwrotnie, od wierzchołka y do wierzchołka x.

Na przykład dla układu elektronicznego, którego schemat zastępczy pokazano symbolicznie na rys. 2a, zaś odpowiadającą mu sieć elektroniczną na rys. 2b — digraf unistorowy pokazany jest na rys. 2c, zaś jego graf unistorowy na rys. 2d. W przypadku gdy



Rys. 2. Sieć elektroniczna i jej grafy
a) schemat zastępczy układu elektronicznego, b) sieć elektroniczna, c) digraf, d) graf unistorowy

dwie rezystancje połączone są szeregowo lub równolegle można je zastąpić jedną zastępczą, zgodnie ze znanymi regułami. Podobnie postępujemy z siłami elektromotorycznymi w przypadku ich szeregowego lub równoległego połączenia.

2. WYZNACZANIE POTENCJAŁÓW WIERZCHOŁKOWYCH SIECI ELEKTRONICZNEJ

Zgodnie z wzorami podanymi przez H. Woźniackiego w pracy [1], dla dowolnego grafu unistorowego sieci elektronicznej pokazanej symbolicznie na rys. 1, w oparciu o metodę opisaną w pracach [5, 6] autora, mamy

$$v_i = \frac{\Delta_{0,i}}{\Delta_{0,0}}, \tag{2}$$

gdzie

$$\Delta_{0,0} = \sum_{i=1}^{T^0} \left[\begin{array}{l}\text{wartość } \vec{a}_i^0 \text{ drzewa zorientowanego digrafu unistorowego} \\ \text{względem wierzchołka odniesienia } O\end{array}\right] \tag{3}$$

$$= \sum_{i=1}^{T^0} \det_Y [\vec{a}_i^0] = \det_Y \vec{A}^0.$$

W tym przypadku $\vec{A}^0$ — jest liczbą strukturalną sprzężoną, będącą zbiorem kolumn sprzężonych digrafu, których obrazami geometrycznymi są drzewa tego digrafu zorientowane względem wierzchołka O:

$$\vec{A}^0 = \prod_{j=1}^{n} \vec{S}^+(j),$$

zaś $\vec{S}^+(j)$ jest liczbą strukturalną sprzężoną jednowierszową opisującą wierzchołek j digrafu unistorowego, czyli jest zbiorem wszystkich tych par, których jednym elementem jest numer gałęzi digrafu wychodzącej z danego wierzchołka j, a drugim elementem jest zbiór pusty ϕ.

Natomiast

$$\Delta_{0,j} = \sum_{i=1}^{T^j} \left[\begin{array}{l}\text{Iloczynu wartości drzewa i wartości sumy algebraicznej} \\ \text{SEM występujących na ścieżce łączącej wierzchołek } O \\ \text{z wierzchołkiem } j \text{ dla poszczególnych drzew}\end{array}\right] \tag{4}$$

$$= \sum_{\vec{a}_i^j \in \vec{A}_j} \det_Y \vec{a}_i^j \cdot \det_E \tilde{d}_i^j$$

$$\vec{A}^j = \prod_{\substack{i=0 \\ (i \neq j)}}^{n} \vec{S}^+(i), \tag{5}$$

gdzie:

$\vec{a}_i^j$ — jest i-tą kolumną liczby strukturalnej sprzężonej (5) digrafu unistorowego zorientowanego względem wierzchołka j. Obrazem kolumny sprzężonej $\vec{a}_i^j$ w oparciu o prace [5, 6] jest drzewo digrafu unistorowego zorientowane względem j-tego wierzchołka tego digrafu,

$\tilde{d}_i^j$ — jest zbiorem, którego elementami są liczby całkowite $\alpha \in \mathscr{C}$ różne od zera (w szczególności zbiorem pustym, dla którego $\det_E \phi = 0$). Każda taka liczba $\alpha \in \tilde{d}_i^j$ wzięta co do wartości bezwzględnej określa numer $|\alpha| = abs(\alpha)$ gałęzi digrafu unistorowego, która zawiera SEM $E_{abs(\alpha)}$ na drodze łączącej wierzchołek odniesienia O z wierzchołkiem j dla danego drzewa digrafu, opisanego przez kolumnę sprzężoną $\vec{a}_i^j$

$$abs(\alpha) \overset{\text{df}}{=} \begin{cases} \alpha \text{ gdy } \alpha > 0 \\ -\alpha \text{ gdy } \alpha < 0 \end{cases} \tag{6}$$

Znak liczby całkowitej $\alpha \in \vec{d}_i^j$ określony jest przez sposób włączenia SEM $E_{abs(\alpha)}$ do gałęzi o numerze $abs(\alpha)$ w ten sposób, że

$$\operatorname{sign}(\alpha) = \begin{cases} -1 & \text{gdy SEM } E_{abs(\alpha)} \text{ włączona jest między wierzchołkami } x \text{ oraz} \\ & y \text{ w ten sposób, że dla } x < y \text{ do wierzchołka } x \text{ podłączony} \\ & \text{jest biegun „}-\text{”, zaś do wierzchołka } y \text{ biegun „}+\text{”.} \\ 1 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

Przez analogię do wyników uzyskanych w pracy [1], również i w tym przypadku mamy

$$\det_Y \vec{a}_i^0 = \prod_{\alpha \in a_i^{L_0}} y_\alpha^{L_0} \cdot \prod_{\alpha \in a_i^{NL_0}} y_\alpha^{NL_0}; \quad (\vec{a}_i^0 = \langle a_i^{L_0}, a_i^{NL_0} \rangle), \tag{7}$$

$$\det_Y \vec{a}_i^j = \prod_{\alpha \in a_i^{Lj}} y_\alpha^{Lj} \cdot \prod_{\alpha \in a_i^{NLj}} y_\alpha^{NLj}; \quad (\vec{a}_i^j = \langle a_i^{Lj}, a_i^{NLj} \rangle), \tag{8}$$

$$\det_E \tilde{d}_i^j = \sum_{\alpha \in \tilde{d}_i^j} \operatorname{sign}_i'(\alpha) \cdot E_{abs(\alpha)}. \tag{9}$$

Zgodnie ze wzorami (7), (8) i (9) mamy

$$\det_Y \vec{a}_i^j \cdot \det_E \tilde{d}_i^j = \prod_{\alpha \in a_i^{Lj}} y_\alpha^{Lj} \cdot \prod_{\alpha \in a_i^{NLj}} y_\alpha^{NLj} \cdot \sum_{\alpha \in d_i} \operatorname{sign}(\alpha) E_{abs(\alpha)}.$$

W przypadku, gdy nie istnieje

$$\alpha \in a_i^{Lj}, \text{ to piszemy } \prod_{\alpha \notin a_i^{Lj}} y_\alpha^{Lj} = y_0^{Lj} = 1.$$

Podobnie postępujemy w przypadku, gdy nie istnieje $\alpha \in a_i^{NLj}$.
Wtedy

$$\prod_{\alpha \notin a_i^{NLj}} y_\alpha^{NLj} = y_0^{NLj} = 1.$$

Natomiast w przypadku, gdy zbiór $\tilde{d}_i^j = \phi$,

$$\sum_{\alpha \notin \tilde{d}_i^j} \operatorname{sign}(\alpha) E_{abs(\alpha)} = E_0 = 0.$$

Iloczyn dwóch liczb strukturalnych sprzężonych $\vec{S}^+(x)$ oraz $\vec{S}^+(y)$, zgodnie z definicją iloczynu opisaną w pracy [6], określamy jak następuje:

$$\vec{S}^+(x) \cdot \vec{S}^+(y) \overset{\text{df}}{=} \{\vec{z} | \vec{z} = \langle z^L, z^{NL} \rangle = \langle a^L \cup b^L, a^{NL} \cup b^{NL} \rangle \wedge$$
$$\wedge (a^L \cup a^{NL}) \cap (b^L \cup b^{NL}) = \phi \wedge (a^L \cup b^L) \cap E_{NS}^L = (a^{NL} \cup b^{NL}) \cap E_{NS}^{NL} = \phi \wedge$$
$$\wedge r(a^L \cup b^L \cup a^{NL} \cup b^{NL}) \in \{1, 3, 5, \ldots\} \wedge \langle a^L, a^{NL} \rangle \in \vec{S}^+(x) \wedge \langle b^L, b^{NL} \rangle \in \vec{S}^+(y)\}, \tag{10}$$

gdzie $E_{NS}^j = \langle E_{NS}^{Lj}, E_{NS}^{NLj} \rangle$ określa defekt digrafu względem wierzchołka j, to jest parę zbiorów E_{NS}^{Lj} oraz E_{NS}^{NLj} zawierających numery gałęzi, które należałoby dołączyć do niego, aby uczynić dany digraf symetrycznym.

W tym przypadku: E_{NS}^{Lj} — jest zbiorem numerów gałęzi leksykograficznie dołączonych, to znaczy od wierzchołka o numerze mniejszym do wierzchołka o numerze większym;

E_{NS}^{NLj} — jest zbiorem numerów gałęzi antyleksykograficznie dołączonych, to znaczy od numeru większego do numeru mniejszego.

W celu wyznaczenia liczby strukturalnej sprzężonej $\vec{A}^j$, a następnie dla każdej jej kolumny sprzężonej $\vec{a}^j$ zbioru $\tilde{d}^j$ (w szczególności może to być zbiór pusty), należy znać:

1) Zbiór $\vec{S}^+$ wszystkich liczb strukturalnych sprzężonych jednowierszowych $\vec{S}^+(i)$, gdzie $i = 0, 1, \ldots, n$, opisujących wszystkie te gałęzie, które wychodzą z danych wierzchołków $i = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$\vec{S}^+ = \{\vec{S}^+(0), \vec{S}^+(1), \ldots, \vec{S}^+(n)\}. \tag{11}$$

2) Parę $\tilde{E}$ zbiorów E^+ i E^-

$$\tilde{E} = \langle E^+, E^- \rangle, \tag{12}$$

gdzie:

$$E^+ = \langle E^{+L}, E^{+NL} \rangle,$$
$$E^- = \langle E^{-L}, E^{-NL} \rangle.$$

W tym przypadku E^{+L} określa zbiór wszystkich tych numerów SEM, które to SEM są włączone biegunem „+" do wierzchołka o numerze mniejszym w gałęziach zorientowanych od numeru mniejszego do numeru większego. Symbol E^{-L} określa zbiór wszystkich tych numerów SEM, które to SEM są włączone biegunem „−" do wierzchołka o numerze mniejszym w gałęziach zorientowanych od numeru mniejszego do numeru większego. Przez analogię symbole E^{+NL} i E^{-NL} określają odpowiednio zbiory wszystkich tych numerów SEM, które to SEM są włączone odpowiednio biegunem „+" i biegunem „−" w gałęziach zorientowanych od numeru większego do numeru mniejszego.

3) Parę $\vec{E}_i^j$ elementów E_i^{Lj} oraz E_i^{NLj} dla kolumny sprzężonej $\vec{a}_i^j \in \vec{A}^j$ oznaczać będziemy przez

$$\vec{E}_i^j = \langle E_i^{Lj}, E_i^{NLj} \rangle, \tag{13}$$

gdzie:

E_i^{Lj} — zbiór wszystkich tych numerów gałęzi, które zorientowane są leksykograficznie na drodze łączącej wierzchołek O z wierzchołkiem j,

E_i^{NLj} — zbiór wszystkich tych numerów gałęzi, które zorientowane są antyleksykograficznie na drodze łączącej wierzchołek O z wierzchołkiem j.

Aby wyznaczyć parę $\vec{E}_i^j = \langle E_i^{Lj}, E_i^{NLj} \rangle$, należy dla $\vec{a}_i^j = \langle a_i^{Lj}, a_i^{NLj} \rangle$, gdzie $\vec{a}_i^j \in A^j$, wyznaczyć ślad $\vec{S}_{\text{ślad}}^{0,j}(\vec{a}_i^j)$ struktury $\vec{S}$

$$\vec{S}_{\text{ślad}}(\vec{a}_i^j) \overset{\text{df}}{=} \vec{S} \dot{\frown} \vec{a}_i^j$$
$$= \left[\langle \vec{S}^+(0) \dot{\frown} \vec{a}_i^j, \vec{S}^+(1) \dot{\frown} \vec{a}_i^j, \ldots, \vec{S}^j(n) \dot{\frown} \vec{a}_i^j \rangle\right], \tag{14}$$

gdzie

$$\vec{S}^+(k) \dot{\frown} \vec{a}_i^j \overset{\text{df}}{=} \left\{\vec{\alpha}_i | \vec{\alpha}_i = \langle \alpha_i^{Lj}, \alpha_i^{NLj} \rangle \wedge [\alpha_i^{Lj} \cap a_i^{Lj} = \alpha_i^{Lj} \vee \alpha_i^{Lj} \cap a_i^{NLj} = \alpha_i^{Lj}] \wedge \right.$$
$$\left. \wedge [\alpha_i^{NLj} \cap a_i^{NLj} = \alpha_i^{NLj} \wedge \alpha_i^{NLj} \cap a_i^{NLj} = \alpha_i^{NLj}] \wedge \vec{\alpha}_i \in \vec{S}^+(i) \wedge \vec{a}_i^j = \langle a_i^{Lj}, a_i^{NLj} \rangle \right\}.$$

4) Zbiór $\tilde{d}_i^j$ określony według następującego wzoru

$$\tilde{d}_i^j \overset{\text{df}}{=} \left\{-(E_i^{Lj} \cap E^{-L} \cap E_i^{NLj} \cap E^{-NL})\right\} \cup \left\{(E_i^{Lj} \cap E^{+L} \cup E_i^{NLj} \cap E^{+NL})\right\}, \tag{15}$$

gdzie

$$\left\{-(E_i^{Lj} \cap E^{-L} \cup E_i^{NLj} \cap E^{-NL})\right\} \overset{\text{df}}{=} \left\{-\alpha | \alpha \in E_i^{Lj} \cap E^{-L} \vee \alpha \in E^{NLj} \cap E^{-NL}\right\}.$$

3. ALGORYTM WYZNACZANIA ŚLADU $\vec{S}^{0,j}_{\text{ślad}}(\vec{a}^j_i)$ STRUKTURY $\vec{S}_{\text{ślad}}(\vec{a}^j_i)$

Wyznaczanie śladu $\vec{S}^{0,j}_{\text{ślad}}(\vec{a}^j_i)$ struktury $\vec{S}_{\text{ślad}}(\vec{a}^j_i)$ dla zadanej struktury $\vec{S}$ i kolumny sprzężonej $\vec{a}^j_i \in \vec{A}^j$ sprowadza się do:

1° Ustalenia dwóch zbiorów w uporządkowanej strukturze $\vec{S}_{\text{ślad}}(\vec{a}^j_i)$, których indeksami są numery 0 oraz j i którą to strukturę w dalszym ciągu oznaczać będziemy przez $\vec{S}^k_{\text{ślad}}(\vec{a}^j_i)$, gdzie $k = 1$.

2° Przeszukiwania kolejno (za wyjątkiem zbiorów ustalonych w punkcie 1° i oznaczonych numerami 0 oraz j) śladów ze śladu $\vec{S}^k_{\text{ślad}}(\vec{a}^j_i)$ i eliminowania ze śladu zbiorów jednoelementowych oraz elementów podobnych do nich znajdujących się w pozostałych zbiorach danego śladu. Dwa elementy $\vec{t}_1$ i $\vec{t}_2$ nazywamy podobnymi, $\vec{t}_1 \sim \vec{t}_2$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\vec{t}_1 = \langle t_1^L, t_1^{NL}\rangle \wedge t_2 = \langle t_2^L, t_2^{NL}\rangle \wedge [t_1^L \cup t_1^{NL} = t_2^{NL} \cup t_2^L].$$

3° Powtarzania fazy 2° tak długo, dopóki ma miejsce eliminacja zbiorów jednoelementowych. W przeciwnym przypadku przechodzimy do fazy 4°.

4° Wyznaczania $\vec{E} = \langle E^L, E^{NL}\rangle$ rozpoczynając od zbioru z indeksem 0 kończąc na zbiorze z indeksem j poprzez sumowanie teoriomnogościowe odpowiednich par należących do zbiorów incydentych. Zasada ta wyjaśniona została na przykładzie niżej.

P r z y k ł a d 1. Dla digrafu (rys. 2c) grafu unistorowego pokazanego na rys. 2d sieci elektronicznej (rys. 2b) należy wyznaczyć zbiór $\vec{d}^3_5$ dla $\vec{a}^3_5 = [\langle {}^{12}_{6}\rangle]$, gdzie $\vec{a}^3_5 \in A^3$.

R o z w i ą z a n i e. Dla digrafu pokazanego na rys. 2c mamy

$$\vec{S}^+(0) = [\langle 1,\rangle, \langle 3,\rangle, \langle 5,\rangle],$$
$$\vec{S}^+(1) = [\langle ,1\rangle, \langle 2,\rangle, \langle 6,\rangle],$$
$$\vec{S}^+(2) = [\langle ,2\rangle, \langle ,3\rangle, \langle 4,\rangle],$$
$$\vec{S}^+(3) = [\langle ,4\rangle, \langle ,5\rangle, \langle ,6\rangle],$$
$$\vec{S} = \{\vec{S}^+(0), \vec{S}^+(1), \vec{S}^+(2), \vec{S}^+(3)\}.$$

Zgodnie z zależnością (14) mamy

$$\vec{S}_{\text{ślad}} = \{\vec{S}^+(0) \dot{\frown} \vec{a}^3_5, \vec{S}^+(1) \dot{\frown} \vec{a}^3_5, \vec{S}^+(2) \dot{\frown} \vec{a}^3_5, \vec{S}^+(3) \dot{\frown} \vec{a}^3_5\}. \tag{16}$$

Ponieważ zgodnie z definicją (14)

$$\vec{S}^+(0) \dot{\frown} \vec{a}^3_5 = [\langle 1,\rangle, \langle 3,\rangle, \langle 5,\rangle] \dot{\frown} [\langle {}^{12}_{6}\rangle] = [\langle 1,\rangle],$$
$$\vec{S}^+(1) \dot{\frown} \vec{a}^3_5 = [\langle ,1\rangle, \langle 2,\rangle, \langle 6,\rangle] \dot{\frown} [\langle {}^{12}_{6}\rangle] = [\langle ,1\rangle, \langle 2,\rangle, \langle 6,\rangle],$$
$$\vec{S}^+(2) \dot{\frown} \vec{a}^3_5 = [\langle ,2\rangle, \langle ,3\rangle, \langle 4,\rangle] \dot{\frown} [\langle {}^{12}_{6}\rangle] = [\langle ,2\rangle],$$
$$\vec{S}^+(3) \dot{\frown} \vec{a}^3_5 = [\langle ,4\rangle, \langle ,5\rangle, \langle ,6\rangle] \dot{\frown} [\langle {}^{12}_{6}\rangle] = [\langle ,6\rangle],$$

to uwzględniając powyższe w (16) otrzymamy

$$\vec{S}_{\text{ślad}} = \{\langle [\langle 1,\rangle], [\langle ,1\rangle, \langle 2,\rangle, \langle 6,\rangle], [\langle ,2\rangle], [\langle ,6\rangle]\rangle\}. \tag{17}$$

Dla grafu unistorowego (rys. 2d) mamy również

$$E^+ = [\langle {}^{12}_{5}\rangle], \; E^- = [\langle {}^{21}_{5}\rangle]. \; \vec{E}^3_{NS} = [\langle ,6\rangle].$$

Zatem postępując zgodnie z procedurą 1°÷4°:

1° W strukturze (17) ustalamy zbiory

$$\vec{S}^{+}(0) \dot{\cap} \vec{a}_5^3 = [\langle 1,\rangle],$$
$$\vec{S}^{+}(3) \dot{\cap} \vec{a}_5^3 = [\langle ,6\rangle],$$

które w fazie 2° nie biorą udziału w czasie eliminacji.

2° Eliminujemy ze zbioru $\vec{S}^{+}(2) \dot{\cap} \vec{a}_5^3$ element $\langle ,2\rangle$ jako pojedynczy oraz jemu podobny $\langle 2,\rangle$ występujący w zbiorze $\vec{S}^{+}(1) \dot{\cap} \vec{a}_5^3$ struktury (17).

3° W wyniku realizacji fazy 2° otrzymujemy

$$\vec{S}^{0,3}_{\text{ślad}} = \left[\langle [\langle 1,\rangle]_0, [\langle ,1\rangle, \langle 6,\rangle]_1, \phi, [\langle ,6\rangle]_3\rangle\right]. \tag{18}$$

Ponieważ dalsza eliminacja (18) nie jest możliwa, ma miejsce przejście do fazy 4°.

4° Sumowane są teoriomnogościowe pojedyncze pary zbiorów według poniżej przedstawionego diagramu

$$\left\langle [\langle 1,\rangle], [\langle ,1\rangle, \langle 6,\rangle], \phi, [\langle ,6\rangle] \right\rangle$$

to jest para $\langle 1,\rangle$ z parą $\langle ,6\rangle$, według następującej zasady

$$\vec{E} = [\langle 1,\rangle] \dot{\cup} [\langle ,6\rangle] = [\langle E^{L_3}, E^{NL_3}\rangle] = [\langle 1,6\rangle].$$

W tym przypadku $E^{L_3} = 1$), zaś $E^{NL_3} = \{6\}$.

W naszym przypadku, zgodnie z definicją (15) i wyrażeniem $\vec{E} = [\langle 1, 6\rangle]$, w fazie 4° otrzymamy

$$\tilde{d}_5^3 = \left(-([1] \cap [2] \cap [6] \cap [1,5])\right) \cup ([1] \cap [1,5] \cup [6] \cap [2]) = [1].$$

P r z y k ł a d 2. Dla sieci elektronicznej pokazanej na rys. 8a, której graf unistorowy pokazano na rys. 2b, wyznaczyć

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie

$$\vec{A}^{o} = \vec{S}^{+}(1) \cdot \vec{S}^{+}(2) \cdot \vec{S}^{+}(3)$$
$$= [\langle ,1\rangle, \langle 2,\rangle, \langle 6,\rangle] \cdot [\langle ,2\rangle, \langle ,3\rangle, \langle 4,\rangle] \cdot [\langle ,4\rangle, \langle ,5\rangle, \langle ,6\rangle]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 41 & 41 & 23 & 23 & 23 & 25 & 26 & 62 & 62 & 63 & 63 & 65 \\ \phi 2 & \phi 2 & \phi 2 & \phi 3 & \phi 3 & \phi 3 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 4 & 4 & 4 & 5 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & & & & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 41 & 23 & 23 & 25 & 62 & 63 & 63 & 6 \\ \phi 2 & \phi 2 & \phi 3 & \phi 3 & 5 & 4 & 5 & 4 & 5 & 4 & 5 & 45 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & & & & & & & & \end{bmatrix},$$

$$\vec{A}^1 = \vec{S}^+(0) \cdot \vec{S}^+(2) \cdot \vec{S}^+(3)$$

$$= [\langle 1,\rangle, \langle 3,\rangle, \langle 5,\rangle] \cdot [\langle ,2\rangle, \langle ,3\rangle, \langle 4,\rangle] \cdot [\langle ,4\rangle, \langle ,5\rangle, \langle ,6\rangle]$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 12 & 12 & 13 & 13 & 13 & 15 & 32 & 32 & 32 & 35 & 36 & 16 & 52 & 52 & 53 & 53 & 56 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 4 & 4 & 5 & 6 & 4 & 4 & 4 & 4 & 6 & 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 12 & 13 & 13 & 15 & 32 & 32 & 52 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 4 & 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{A}^2 = [\langle 1,\rangle, \langle 3,\rangle, \langle 5,\rangle] \cdot [\langle ,1\rangle, \langle 2,\rangle, \langle 6,\rangle] \cdot [\langle ,4\rangle, \langle ,5\rangle, \langle ,6\rangle] \tag{19}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 15 & 16 & 14 & 15 & 31 & 31 & 31 & 34 & 35 & 36 & 34 & 35 & 51 & 51 & 54 & 56 & 54 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & 6 & 4 & 5 & 6 & 2 & 2 & 2 & 6 & 6 & 4 & 6 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 15 & 14 & 31 & 31 & 34 & 35 & 34 & 35 & 51 & 54 & 54 \\ 2 & 2 & 6 & 4 & 5 & 2 & 2 & 6 & 6 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\vec{A}^3 = [\langle 1,\rangle, \langle 3,\rangle, \langle 5,\rangle] \cdot [\langle ,1\rangle, \langle 2,\rangle, \langle 6,\rangle] \cdot [\langle ,2\rangle, \langle ,3\rangle, \langle 4,\rangle] \tag{20}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 1 & 12 & 13 & 1 & 31 & 31 & 3 & 32 & 3 & 51 & 51 & 51 & 53 & 5 & 52 & 53 & 5 \\ 2 & 2\phi & 6 & 6 & 6\phi & 2 & 4 & 2\phi & 6 & 6\phi & 2 & 3 & 4 & 2 & 2\phi & 6 & 6 & 6\phi \\ & 4 & & & 4 & & & 4 & & 4 & & & & & 4 & & & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 12 & 13 & 1 & 31 & 3 & 32 & 3 & 51 & 51 & 51 & 53 & 5 & 52 & 53 & 5 \\ 2\phi & 6 & 6 & 6\phi & 4 & 2\phi & 6 & 6\phi & 2 & 3 & 4 & 2 & 2\phi & 6 & 6 & 6\phi \\ 4 & & & 4 & & 4 & & 4 & & & & & 4 & & & 4 \end{bmatrix},$$

$$\Delta_{0,0} = \det_Y \vec{A}^0 = \sum_{i=1}^{16} \det_Y \vec{a}_i^0 = y_1^{NL} y_2^{NL} y_4^{NL} + y_1^{NL} y_2^{NL} y_5^{NL} + \tag{21}$$

$$+ y_1^{NL} y_3^{NL} y_4^{NL} + y_1^{NL} y_3^{NL} y_5^{NL} + y_4^L y_1^{NL} y_5^{NL} + y_2^L y_3^{NL} y_4^{NL} +$$

$$+ y_2^L y_3^{NL} y_5^{NL} + y_2^L y_4^L y_5^{NL} + y_6^L y_2^{NL} y_5^{NL} + y_6^L y_3^{NL} y_4^{NL} +$$

$$+ y_6^L y_3^{NL} y_5^{NL} + y_6^L y_4^L y_5^{NL}$$

$$\Delta_{0,1} = \sum_{i=1}^{8} \det_Y \vec{a}_i^1 \cdot \det_E \tilde{d}_i^1 \tag{22}$$

$$= y_1^L y_2^{NL} y_4^{NL} E_1 + y_1^L y_2^{NL} y_5^{NL} E_1 + y_1^L y_3^{NL} y_4^{NL} E_1 +$$

$$+ y_1^L y_3^{NL} y_5^{NL} E_1 + y_1^L y_4^L y_5^{NL} E + y_3^L y_2^{NL} y_4^{NL} E_2 +$$

$$+ y_3^L y_2^{NL} y_5^{NL} E_2 + y_5^L y_2^{NL} y_4^{NL} (E_5 + E_2),$$

$$\Delta_{0,2} = \sum_{i=1}^{12} \det_Y \vec{a}_i^2 \cdot \det_E \tilde{d}_i^2 \tag{23}$$

$$= y_1^L y_2^L y_4^{NL} \cdot (E_1 - E_2) + y_1^L y_2^L y_5^{NL} \cdot (E_1 - E_2) + y_1^L y_6^L y_4^{NL} \cdot E_1 +$$

$$+ y_5^L y_1^{NL} y_4^{NL} E_5 + y_5^L y_2^L y_4^{NL} E_5 + y_5^L y_6^L y_4^{NL} E_5,$$

$$\Delta_{0,3} = \sum_{i-1}^{16} \det_{Y} \vec{a}_i^3 \cdot \det_{E} \tilde{d}_i^3 \tag{24}$$

$$= y_1^L y_2^L y_4^L (E_1 - E_2) + y_1^L y_6^L y_2^{NL} E_1 + y_1^L y_6^L y_3^{NL} E_1 +$$
$$+ y_1^L y_6^L y_4^L E_1 + y_3^L y_6^L y_2^{NL} E_2 + y_5^L y_1^{NL} y_2^{NL} E_5 + y_5^L y_1^{NL} y_3^{NL} E_5 +$$
$$+ y_5^L y_4^L y_1^{NL} E_5 + y_5^L y_2^L y_3^{NL} E_5 + y_5^L y_2^L y_4^L E_5 + y_5^L y_6^L y_2^{NL} E_5 +$$
$$+ y_5^L y_6^L y_3^{NL} E_5 + y_5^L y_6^L y_4^L E_5 .$$

Jeśli za zmienne y_i^L oraz $y_i^{NL} (i = 1, 2, \ldots, 6)$ we wzorach (21), (22), (23) i (24) postawimy odpowiednie wielkości (rys. 2), to otrzymamy

$$v_i = \frac{\Delta_{0,i}}{\Delta_{0,0}} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{25}$$

4. WYZNACZANIE MACIERZY HYBRYDOWEJ H

Załóżmy, że elementy macierzy H są rezystancjami. Dla dowolnego grafu unistorowego sieci elektronicznej, w oparciu o metodę opisaną w pracy [6] autora, mamy

$$h_{ii} = z_{ii} = \frac{-\det_{Y} \vec{A}^{0i}}{\det_{Y} \vec{A}^{0}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{26}$$

$$h_{ij} = z_{ij} = \frac{-\det_{Y} \vec{A}^{0ij}}{\det_{Y} \vec{A}^{0}} \quad \begin{matrix}(i, j = 1, 2, \ldots, n) \\ (i \neq j),\end{matrix} \tag{27}$$

gdzie:

$$\vec{A}^{0i} = \vec{A}^0 \vec{\cap} \vec{A}^i$$

$$\overset{\text{df}}{=} \{\vec{a} = \langle a^L, a^{NL}\rangle | \vec{a} \in \vec{A}^i \wedge \tilde{a} \in \operatorname{mod} \vec{A}^0 \wedge \tilde{a} = a^L \cup a^{NL} \wedge \tilde{a} \in \operatorname{mod} \vec{A}^i \wedge$$
$$\wedge \operatorname{mod} \vec{A}^0 = \{a_0^L \cup a_0^{NL} | \langle a_0^L, a_0^{NL}\rangle \in \vec{A}^0\} \wedge$$
$$\wedge \operatorname{mod} \vec{A}^i = \{a_i^L \cup a_i^{NL} | \langle a_i^L, a_i^{NL}\rangle \in A^i\}\}, \tag{28}$$

$$\vec{A}^{0ij} = \vec{A}^{0i} \vec{\cap} \vec{A}^{0j}$$

$$\overset{\text{df}}{=} \{\vec{a} = \langle a^L, a^{NL}\rangle | \vec{a} \in \vec{A}^{0j} \wedge \tilde{a} \in \operatorname{mod} \vec{A}^{0i} \wedge \tilde{a} = a^L \cup a^{NL} \wedge \tilde{a} \in \operatorname{mod} \vec{A}^{0i} \wedge$$
$$\wedge \operatorname{mod} \vec{A}^{0i} = \{a_{0i}^L \cup a_{0i}^{NL} | \langle a_{0i}^L, a_{0i}^{NL}\rangle \in \vec{a}^{0i}\} \wedge$$
$$\wedge \operatorname{mod} \vec{A}^{0j} = \{a_{0j}^L \cup a_{0j}^{NL} | \langle a_{0j}^L, a_{0j}^{NL}\rangle \in \vec{a}^{0j}\}\}. \tag{29}$$

Liczby strukturalne sprzężone $\vec{A}^0$ oraz $\vec{A}^i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ dla digrafu unistorowego wyznacza się identycznie jak to opisano poprzednio (wyrażenia (3) i (5)). Podobnie wyznaczane są również ich funkcje wyznacznikowe.

Przykład 3. Wyznaczyć dla grafu unistorowego, rys. 8c, macierz $H = [z_{ij}]$ dla wierzchołków $i = 1, 2, 3$.

Rozwiązanie. Postępując zgodnie ze wzorami (26), (27), (28) i (29) oraz w oparciu o liczby strukturalne sprzężone $\vec{A}^0$, $\vec{A}^1$, $\vec{A}^2$, $\vec{A}^3$ wyznaczamy:

$$\vec{A}^{01} = \vec{A}^0 \overrightarrow{\cap} \vec{A}^1 = \begin{bmatrix} 12 & 12 & 13 & 13 & 15 & 32 & 32 & 52 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 4 & 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \tag{30}$$

$$\vec{A}^{02} = \vec{A}^0 \cap \vec{A}^2 = \begin{bmatrix} 14 & 15 & 31 & 31 & 34 & 35 & 34 & 35 & 51 & 54 & 54 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 2 & 2 & 6 & 6 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \tag{31}$$

$$\vec{A}^{03} = \vec{A}^0 \overrightarrow{\cap} \vec{A}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 31 & 3 & 3 & 51 & 51 & 51 & 53 & 5 & 52 & 53 & 5 \\ 2\phi & 4 & 2\phi & 6\phi & 2 & 3 & 4 & 2 & 2\phi & 6 & 6 & 6\phi \\ 4 & & 4 & 4 & & & & & 4 & & & 4 \end{bmatrix}, \tag{32}$$

$$\vec{A}^{012} = \vec{A}^{01} \cap \vec{A}^{02} = \begin{bmatrix} 14 & 15 & 31 & 31 & 34 & 35 & 51 & 54 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \tag{33}$$

$$\vec{A}^{013} = \vec{A}^{01} \overrightarrow{\cap} \vec{A}^{03} = \begin{bmatrix} 1 & 31 & 3 & 51 & 51 & 51 & 53 & 5 \\ 2\phi & 4 & 2\phi & 2 & 3 & 4 & 2 & 2\phi \\ 4 & & 4 & & & & & 4 \end{bmatrix}, \tag{34}$$

$$\vec{A}^{021} = \vec{A}^{02} \overrightarrow{\cap} \vec{A}^{01} = \begin{bmatrix} 12 & 12 & 13 & 13 & 15 & 32 & 32 & 52 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 4 & 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \tag{35}$$

$$\vec{A}^{023} = \vec{A}^{02} \overrightarrow{\cap} \vec{A}^{03} = \begin{bmatrix} 1 & 31 & 3 & 3 & 51 & 51 & 51 & 53 & 5 & 53 & 5 \\ 2\phi & 4 & 2\phi & 6\phi & 2 & 3 & 4 & 2 & 2\phi & 6 & 6\phi \\ 4 & & 4 & 4 & & & & & 4 & & 4 \end{bmatrix}, \tag{36}$$

$$\vec{A}^{031} = \vec{A}^{03} \cap \vec{A}^{01} = \begin{bmatrix} 12 & 12 & 13 & 13 & 15 & 32 & 32 & 52 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 4 & 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \tag{37}$$

$$\vec{A}^{032} = \vec{A}^{03} \cap \vec{A}^{02} = \begin{bmatrix} 14 & 15 & 31 & 31 & 34 & 35 & 34 & 35 & 51 & 54 & 54 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 2 & 2 & 6 & 6 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Stąd

$$H = Z = \frac{1}{\det\limits_Y \vec{A}} \begin{bmatrix} -\det\limits_Y \vec{A}^{01} & -\det\limits_Y \vec{A}^{012} & -\det\limits_Y \vec{A}^{013} \\ -\det\limits_Y \vec{A}^{021} & -\det\limits_Y \vec{A}^{02} & -\det\limits_Y \vec{A}^{023} \\ -\det\limits_Y \vec{A}^{031} & -\det\limits_Y \vec{A}^{032} & -\det\limits_Y \vec{A}^{03} \end{bmatrix} \tag{39}$$

Jeśli do wzoru (39) podstawilibyśmy odpowiednie wielkości charakteryzujące sieć elektroniczną (rys. 2a, d), to otrzymalibyśmy po wykonaniu odpowiednich działań macierz impedancyjną tej sieci.

5. ZAKOŃCZENIE

Metoda liczb strukturalnych sprzężonych pozwala wyznaczyć wszystkie interesujące nas funkcje charakterystyczne sieci elektrycznej i przedstawić je za pomocą odpowiednich wzorów. Wzory te można generować za pomocą maszyny cyfrowej w sposób sukcesywny bez konieczności ich pamiętania w pamięci maszyny. W tym celu wystarczy tylko zmodyfikować sposób wyznaczania poszczególnych liczb strukturalnych sprzężonych $\vec{A}^0$ oraz $\vec{A}^i$, gdzie $i = 1, 2, \ldots, n$. Przesłanką do tego jest fakt, że w przypadku liczby strukturalnej sprzężonej, której obrazem jest digraf, nigdy we wzorze (8) nie zdarzy się tak, by $\vec{a}^i \in \vec{A}^j$ występowało więcej niż jeden raz.

Ten fakt pozwala wyznaczyć liczbę strukturalną sprzeżoną korzystając z metody opisanej w tym artykule, a dotyczącej wyznaczenia ścieżki między dwoma wierzchołkami. Wystarczy bowiem każdą n-tkę iloczynu kartezjańskiego $\vec{S}(o) \times \vec{S}^+(1) \times \vec{S}^+(i) \times \ldots \times \vec{S}^+(n)$ sprawdzić, czy nie zawiera elementów podobnych oraz czy tworzy w interpretacji geometrycznej drogi łączące wszystkie wierzchołki j z wierzchołkiem i ($i = 1$). Jest rzeczą oczywistą, że wykorzystanie przedstawionej w tym artykule metody analizy układów elektronicznych może być efektywne tylko przy użyciu szybkich maszyn cyfrowych. W przypadku maszyny cyfrowej ODRA-1204, dla której opracowano algorytmy analizy i zaprogramowano je w języku JAS Ø istnieje efektywna możliwość analizy układów elektronicznych zawierających nie więcej niż 47 gałęzi (w tym do 10 tranzystorów) oraz 47 niezależnych źródeł SEM.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. S. Bellert i H. Woźniacki; Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych, WNT, W-wa 1968.
2. W. K. Chen, Topological Analysis for Activ Networks, Mc Graw-Hill, 1965.
3. W. K. Chen, On Directed Tress and Directed k-Tress of Digraphs and Their Generation, J. SIAM Appl. Math., vol. 14, No 5, 1966.
4. C. Syc, Wyznaczanie zorientowanych drzew digrafów metodą liczb strukturalnych za pomocą maszyn cyfrowych, Biuletyn WAT, nr 8, 204, 1969.
5. C. Syc, Topologiczny sposób rozwiązywania układów równań liniowych metodą liczb strukturalnych sprzężonych za pomocą maszyn cyfrowych. Archiwum Elektroniki, z. 1, 1971.
6. C. Syc, Zastosowanie algebry liczb strukturalnych do analizy elektronicznych układów liniowych, Arch. Elektrot., z. 4, 1971.
7. L. O. Chua, Efficient Computer Algorithms for Piecewise-Linear Analysis of Resistive Nonlinear Networks, IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol. CT-18, No 1, January 1971.

C. SYC

D-C ANALYSIS OF ELECTRONIC LINEAR CIRCUITS BY THE METHOD OF STRUCTURAL CONJUGATE NUMBERS BY MEANS OF DIGITAL COMPUTERS

Summary

In this paper we have presented a topological method of D-C analysis of electrical and electronical circuits by the method of structural conjugate numbers by means of digital computers.

C. SYC

ANALYSE DES CIRCUITS LINÉAIRES À COURANT DIRECT PAR LA MÉTHODE DES NOMBRES STRUCTURAUX CONJUGÉS À L'AIDE DES MACHINES MATHÉMATIQUES

Résumé

Cet article présente une méthode topologique d'analyse des circuits électriques et électroniques à courant direct par la méthode des nombres structuraux conjugés à l'aide des machines mathématiques.

C. SYC

ANALYSE ELEKTRISCHER, LINEARER, MITTELS METHODE VERKOPPELTER STRUKTURALZAHLEN MIT HILFE VON DIGITALRECHNERN BERECHNETER GLEICHSTROMSYSTEME

Zusammenfassung

In diesem Artikel wurde das topologische Analysenverfahren fur elektrische und elektronische Gleichstromsysteme (in denen aktive Elemente durch Unistordiagramme ersetzt worden waren) mittels Methode verkoppelter Strukturalzahlen — berechnet mit Hilfe von Digitalrechnern — beschrieben.

Ч. СЫЦ

АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ ПОСТОЯННОГО ТОКА МЕТОДОМ СОПРЯЖЕННЫХ СТРУКТУРНЫХ ЧИСЕЛ С ПОМОЩЬЮ ЦИФРОВЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН

Резюме

В статье описан топологический метод анализа линейных электрических и электронных схем постоянного тока (в которых активные элементы представлены унисторными графами) методом сопряженных структурных чисел с помощью цифровых вычислительных машин.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1973, 19, z. 1, ss. 17-36

621.372.543.2

Realizacja filtrów środkowoprzepustowych z liniową fazą przez zastosowanie ogniw pięcioelementowych

ADAM SKIBA (GDAŃSK), EUGENIUSZ GOC (GDAŃSK)

Instytut Technologii Elektronicznej Politechniki Gdańskiej

Otrzymano 4.11.1970

W pracy rozpatrzono możliwość realizacji filtrów środkowoprzepustowych spełniających określone wymagania na charakterystykę tłumieniową i opóźnieniową. Przeprowadzono szczegółową analizę właściwości filtru o możliwie najprostszych strukturach jego gałęzi. Stwierdzono, że otrzymane ogniwa pięcioelementowe mogą stanowić rozwiązanie postawionego problemu oraz zbadano warunki fizycznej realizacji ogniw określających charakterystyki tłumieniową i opóźnieniową. Opis sposobu postępowania przy projektowaniu wymienionych filtrów zilustrowano przykładem. Osiągnięte wyniki potwierdzają, iż można w stosunkowo łatwy sposób uzyskać bardzo korzystne rezultaty zarówno z uwagi na charakterystyki, jak i strukturę układu.

1. WSTĘP

W urządzeniach teletransmisyjnych stosuje się często filtry bierne *LC*, które oprócz wymagań na tłumienność skuteczną A_s spełniają i ten dodatkowy warunek (z reguły dla uzyskania możliwie niezniekształconej transmisji przebiegów impulsowych), że ich przesuwność skuteczna B_s jest w przybliżeniu liniową funkcją częstotliwości w pasmie przepustowym. Filtry takie, zwane są filtrami z liniową fazą.

Filtry z liniową fazą doziemnie niesymetryczne, obliczone w oparciu o parametry falowe i odznaczające się stosunkowo dużą stromością charakterystyki tłumienności A_s w strefie przejściowej, realizowane są z reguły w formie łańcucha utworzonego z *układu tłumieniowego*, którym jest doziemnie niesymetryczny filtr konwencjonalny (filtr drabinkowy typu Zobela lub typu Laurenta) oraz z *układu korekcyjnego* służącego do zapewnienia wymaganej stałości opóźności $\tau_s = \frac{dB_s}{d\omega}$ filtru w pasmie przepustowym. Układem korekcyjnym może być tutaj bądź korektor opóźnieniowy odpowiedniego rzędu, bądź też filtr doziemnie niesymetryczny, otrzymany w drodze określonych transformacji równoważnych z filtru mostkowego lub drabinkowego.

Oczywiście układ korekcyjny drugiego rodzaju jest na ogół korzystniejszy od układu korekcyjnego pierwszego rodzaju, może być bowiem dopasowany falowo (dla wszystkich częstotliwości) do układu tłumieniowego wymienionego wyżej, a ponadto może z nim *współdziałać* w urzeczywistnieniu żądanej charakterystyki tłumienności A_s w pasmie tłumieniowym filtru; dzięki temu liczba elementów układu tłumieniowego może być odpowiednio zmniejszona. Układów korekcyjnych drugiego rodzaju dla różnych typów filtrów znanych jest wiele.

Przedmiotem niniejszej pracy jest przedstawienie w oparciu o ideę J. Collina i P. Allemandou [1] sposobu dojścia do struktury filtru oraz podanie wskazówek dotyczących metodyki obliczeń rozpatrywanych typów filtrów z liniową fazą. Istota metody polega na odpowiednim doborze parametrów $m_i (i = 1, 2, 3 \ldots)$ decydującym m.in. o położeniu w pasmach tłumieniowych częstotliwości biegunów tłumienia, przy czym charakterystykę tłumieniową określają współczynniki m_i rzeczywiste, a opóźnieniową sprowadza się do wymaganej przez zastosowanie par ogniw o współczynnikach zespolono-sprzężonych.

W pracy niniejszej wzięto pod uwagę filtr środkowoprzepustowy w postaci czwórnika mostkowego, którego charakterystykę tłumieniową realizowałyby możliwie najprostsze dwójniki w jego gałęziach. Wychodząc z filtrów o takiej strukturze uzyskano następnie równoważne im układy doziemnie niesymetryczne zawierające tylko jedną indukcyjność i cztery pojemności dla realizacji jednego bieguna tłumienności falowej. Wyprowadzono przydatne w dalszej analizie wzory określające opóźność jednego i szeregu ogniw. Stwierdzono, iż w przypadku rozpatrywania łącznego dwóch ogniw opóźność jest uzależniona od iloczynu i sumy współczynników m_i, a zatem nie jest konieczne, aby te współczynniki były rzeczywiste i dodatnie, lecz by ich iloczyn i suma posiadały tę własność. Same współczynniki mogą więc być także wielkościami zespolonymi sprzężonymi. Wówczas przebieg opóźności będzie taki, że umożliwi skorygowanie charakterystyki opóźnieniowej ogniw o współczynnikach rzeczywistych zastosowanych ze względu na realizację charakterystyki tłumieniowej.

W dalszej części artykułu wyprowadzono wzory na elementy ogniw o współczynnikach rzeczywistych, a następnie dokonano przekształceń układu dwóch połączonych łańcuchowo ogniw w taki sposób, aby uzyskać układ równoważny, którego elementy są wyrażone przez iloczyn i sumę wspomnianych współczynników.

Całość rozważań przeprowadzono w oparciu o parametry falowe; podano jednak również wzory określające charakterystyki tłumienności i opóźności skutecznej. Ponieważ charakterystyki filtrów obliczane metodą parametrów falowych za pomocą wzorów przybliżonych różnią się nieco od charakterystyk wielkości roboczych, więc uzyskanie optymalnych rezultatów wymaga pewnego doświadczenia, bądź szeregu prób w celu wyznaczenia ostatecznych wartości współczynników m_i. W praktyce niedogodność ta nie stanowi istotnego problemu, a duża prostota obliczeń znacznie ją przewyższa. Z uwagi na rozmiary artykułu ograniczono się w części projektowej do ogólnych wskazówek ułatwiających projektowanie tego typu filtrów. Przedstawione w przykładzie wyniki zostały praktycznie uzyskane po wykonaniu kilku układów próbnych i potwierdzają słuszność przeprowadzonych rozważań.

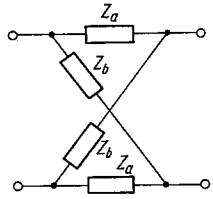
2. ANALIZA FILTRU ŚRODKOWOPRZEPUSTOWEGO MOSTKOWEGO NALEŻĄCEGO DO KLASY IMPEDANCYJNEJ I TŁUMIENIOWEJ PIERWSZEJ

Strukturę dwójników w gałęziach filtru, który ma realizować określoną charakterystykę tłumieniową, wygodnie jest ustalać w oparciu o układ mostkowy (rys. 1). Impedancja falowa takiego czwórnika wynosi:

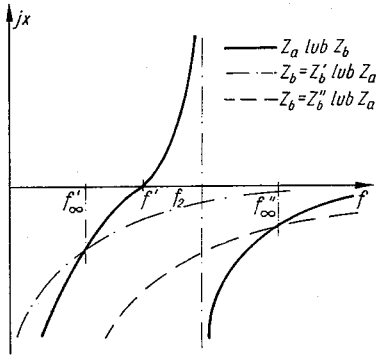
$$Z = \sqrt{Z_a Z_b}\,, \tag{2.1}$$

a tamowność falowa:

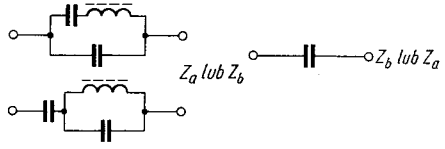
$$\Gamma = \ln \frac{1+\sqrt{\frac{Z_a}{Z_b}}}{1-\sqrt{\frac{Z_a}{Z_b}}}. \tag{2.2}$$



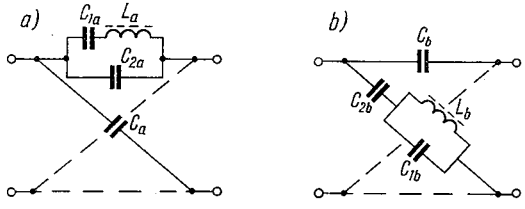
Rys. 1. Czwórnik mostkowy symetryczny



Rys. 2. Przebiegi impedancji Z_a i Z_b filtru



Rys. 3. Schematy dwójników Z_a i Z_b filtru



Rys. 4. Schematy filtrów realizujących jeden biegun charakterystyki tłumieniowej

W przypadku filtru środkowoprzepustowego z jednym biegunem tłumienności falowej dla częstotliwości $f \in (0, \infty)$, impedancje gałęzi wzdłużnej Z_a i skośnej Z_b mogą mieć przebieg, jak na rys. 2, czyli strukturę jak na rys. 3.

Uzyskany filtr należy do klasy impedancyjnej i tłumieniowej pierwszej.

Wielkość pojemności stanowiącej dwójnik Z_b lub Z_a określa położenie częstotliwości nieskończonego tłumienia: impedancji Z_b' odpowiada biegun w dolnym pasmie tłumieniowym f_∞', a impedancji Z_b'' — biegun w górnym paśmie tłumieniowym f_∞''. Z uwagi na łatwość uzyskania układu równoważnego niesymetrycznego składającego się z mniejszej liczby elementów, do dalszych rozważań przyjmujemy następujące dwa warianty filtru: z pojemnością w gałęzi skośnej (rys. 4a) i z pojemnością w gałęzi wzdłużnej (rys. 4b).

2.1. Analiza charakterystyk filtru z pojemnością w gałęzi skośnej

Impedancje dwójników czwórnika z rys. 4a wyrażą się wzorami:

$$Z_a = \frac{1}{j\omega(C_{1a}+C_{2a})} \frac{1-\omega^2 L_a C_{1a}}{1-\omega^2 L_a \frac{C_{1a}C_{2a}}{C_{1a}+C_{2a}}}, \tag{2.3}$$

$$Z_b = \frac{1}{j\omega C_a}. \tag{2.4}$$

Można zatem napisać, iż częstotliwości graniczne f_1 i $f_2 > f_1$ określone są zależnościami:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_a C_{1a}}}, \tag{2.5}$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C_{1a}+C_{2a}}{L_a C_{1a} C_{2a}}}, \tag{2.6}$$

a częstotliwość średnia f_o wynosi:

$$f_o = \sqrt{f_1 f_2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_a\sqrt{C_{1a}\frac{C_{1a}C_{2a}}{C_{1a}+C_{2a}}}}}. \tag{2.7}$$

Impedancja falowa filtru wyraża się wzorem:

$$Z = \sqrt{\frac{L_a C_{1a}}{C_a(C_{1a}+C_{2a})}} \frac{f_2}{f}\sqrt{\frac{f^2-f_1^2}{f_2^2-f^2}}. \tag{2.8}$$

Dla częstotliwości średniej:

$$Z = R_o = \sqrt{\frac{L_a C_{1a}}{C_a(C_{1a}+C_{2a})}}. \tag{2.9}$$

Wobec tego impedancję falową można zapisać jako:

$$Z = R_o \frac{f_2}{f}\sqrt{\frac{f^2-f_1^2}{f_2^2-f^2}}. \tag{2.10}$$

Tamowność falowa na podstawie wzorów (2.2) do (2.4) będzie:

$$\Gamma = \ln \frac{m+m_\infty}{m-m_\infty}, \tag{2.11}$$

gdzie:

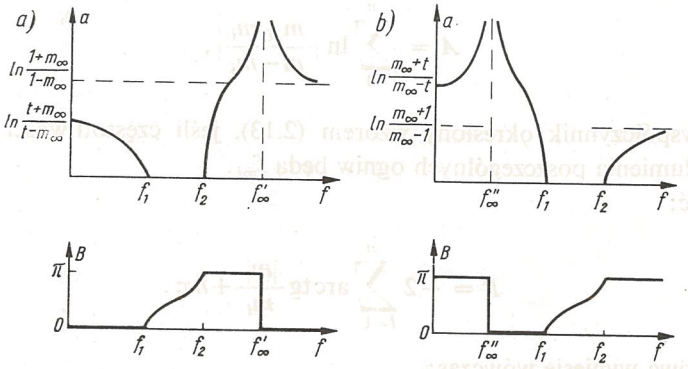
$$m = \sqrt{\frac{f^2-f_2^2}{f^2-f_1^2}}, \tag{2.12}$$

$$m_\infty = \sqrt{\frac{f_\infty^2-f_2^2}{f_\infty^2-f_1^2}}, \tag{2.13}$$

a tłumienność falowa w pasmie tłumieniowym i przesuwność falowa w pasmie przepustowym — odpowiednio:

$$A = \ln \left| \frac{m+m_\infty}{m-m_\infty} \right|, \tag{2.14}$$

$$B = -2\operatorname{arc\,tg} \frac{|m|}{m_\infty} + \pi. \tag{2.15}$$



Rys. 5. Charakterystyki tłumienności i przesuwności falowej filtru z rys. 4a
a) dla $f_\infty > f_2$, b) dla $f_\infty < f_1$

Przebiegi tłumienności i przesuwności falowej w funkcji częstotliwości, zależnie od położenia bieguna tłumienności falowej, przedstawiono na rys. 5. W praktyce wygodniej jest operować opóźnością falową niż przesuwnością. Wyznacza się więc ze wzoru (2.15):

$$\tau = \frac{dB}{d\omega} = \frac{dB}{dm} \cdot \frac{dm}{d\omega}, \tag{2.16}$$

$$\frac{dm}{d\omega} = \frac{\sqrt{t}}{t^2-1} \frac{1-m^2}{2\pi f_o} \sqrt{(t^2-m^2)\frac{1-m^2}{-m^2}} = \tau_c, \tag{2.17}$$

gdzie:

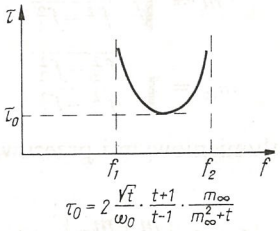
$$t = \frac{f_2}{f_1}, \tag{2.18}$$

$$\frac{dB}{dm} = \frac{2m_\infty}{m_\infty^2-m^2}. \tag{2.19}$$

A zatem ostatecznie opóźność falowa filtru jak na rys. 4a wynosi

$$\tau = \tau_c \frac{2m_\infty}{m_\infty^2 - m^2}, \tag{2.20}$$

a przebieg jej w funkcji częstotliwości jest zgodny z podanym na rys. 6.



Rys. 6. Charakterystyka opóźności falowej filtru z rys. 4a

W przypadku zastosowania filtru złożonego z wielu ogniw tego typu, tłumienność falowa będzie:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \ln \left| \frac{m+m_i}{m-m_i} \right|, \tag{2.21}$$

gdzie: m_i — współczynnik określony wzorem (2.13), jeśli częstotliwości nieskończonego tłumienia poszczególnych ogniw będą $f_{\infty i}$,

a przesuwność:

$$B = -2 \sum_{i=1}^{n} \operatorname{arctg} \frac{|m|}{m_i} + n\pi. \tag{2.22}$$

Opóźność falowa wyniesie wówczas:

$$\tau = \tau_c \cdot 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{m_i^2 - m^2}. \tag{2.23}$$

Warto zwrócić uwagę, iż w przypadku rozpatrywania łańcucha dwóch ogniw wzór na opóźność przyjmie postać:

$$\tau_k = 2\tau_c \cdot \frac{(m_r + m_{r+1})(m_r m_{r+1} - m^2)}{(m_r m_{r+1} + m^2)^2 m^2 (m_r + m_{r+1})^2}, \tag{2.24}$$

gdzie m_r i m_{r+1} — współczynniki określające położenie częstotliwości nieskończonego tłumienia. A to oznacza, że opóźność falowa pozostaje rzeczywista dodatnia, jeśli tylko rzeczywiste dodatnie są wartości $m_r + m_{r+1}$ i $m_r \cdot m_{r+1}$.

Występujące tu współczynniki m_r i m_{r+1} nie muszą posiadać tej właściwości, lecz mogą być również wielkościami zespolonymi sprzężonymi. Charakterystyka opóźności takiego łańcucha ogniw posiada kształt jak na rys. 7, przy czym zależnie od założonych wartości iloczynu i sumy zmienia się *selektywność* krzywej oraz wielkość i położenie maksimum

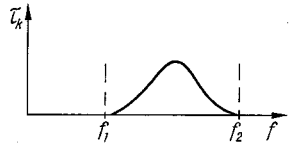
na skali częstotliwości. Tłumienność falowa omawianego łańcucha ogniw wyrazi się wzorem:

$$A_k = \ln \frac{m^2+\alpha m+\beta}{m^2-\alpha m+\beta}, \tag{2.25}$$

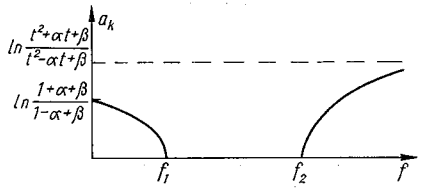
gdzie:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= m_r + m_{r+1}, \\ \beta &= m_r \cdot m_{r+1}, \end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

i będzie się przedstawiać, jak na rys. 8.



Rys. 7. Charakterystyka opóźności falowej pary ogniw o współczynnikach m_i zespolonych sprzężonych



Rys. 8. Charakterystyka tłumienności falowej pary ogniw o współczynnikach m_i zespolonych sprzężonych

W rzeczywistych warunkach pracy filtr charakteryzowany jest parametrami roboczymi i te wielkości precyzowane są w warunkach zadania. Dlatego też bardzo istotna w procesie projektowania jest znajomość skutecznej tłumienności i opóźności filtru w paśmie przepustowym. Wynoszą one odpowiednio:

$$A_s = \frac{1}{2}\ln\left[1+\frac{(z^2-1)^2}{4z^2}\sin^2 B\right], \tag{2.27}$$

i

$$\tau_s = \frac{2}{4z^2+(z^2+1)\operatorname{tg}^2 B}\left[(z^2-1)\operatorname{tg} B\frac{dz}{d\omega}+z(z^2+1)(1+\operatorname{tg}^2 B)\tau\right], \tag{2.28}$$

gdzie:

$z = \dfrac{Z}{R}$ — znormalizowana impedancja falowa filtru,

B — przesuwność falowa filtru,

τ — opóźność falowa filtru,

$$\frac{dz}{d\omega} = \frac{1}{2\pi f}\left[\frac{f_2^2(f_2^2-f_1^2)}{z(f_2^2-f^2)^2}-z\right].$$

2.2. Analiza charakterystyk filtru z pojemnością w gałęzi wzdłużnej

W przypadku filtru, jak na rys. 4b, impedancje dwójników można wyrazić jako:

$$Z_a = \frac{1}{j\omega C_b}, \tag{2.29}$$

$$Z_b = \frac{1}{j\omega C_{2b}} \cdot \frac{1-\omega^2 L_b(C_{1b}+C_{2b})}{1-\omega^2 L_b C_{1b}}. \tag{2.30}$$

Podobnie jak w 2.1, wyznaczamy częstotliwości graniczne pasma przepustowego:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_b(C_{1b}+C_{2b})}}, \tag{2.31}$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_b C_{1b}}}, \tag{2.32}$$

oraz częstotliwość średnią:

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_b\sqrt{C_{1b}(C_{1b}+C_{2b})}}}. \tag{2.33}$$

Impedancja falowa będzie określona wzorem (2.10), z tym że obecnie

$$R_o = \sqrt{\frac{L_b(C_{1b}+C_{2b})}{C_b C_{2b}}}. \tag{2.34}$$

Tamowność falowa wyznaczona w oparciu o wzory (2.2), (2.29) i (2.30) będzie:

$$\Gamma = \ln\frac{m_\infty+m}{m_\infty-m} = \ln\frac{m+m_\infty}{m-m_\infty} \pm j\pi. \tag{2.35}$$

Wynika stąd, że przebiegi tłumienności falowej obu filtrów z rys. 4 będą identyczne, a przesuwności będą się różniły o π. W związku z tym przesuwność falowa wyrazi się wzorem:

$$B = -2\sum_{i=1}^{n} \operatorname{arc\,tg}\frac{|m|}{m_i}, \tag{2.36}$$

a wszystkie wyprowadzone w 2.1 pozostałe wzory na charakterystyki będą słuszne dla obu filtrów.

3. OGNIWA DRABINKOWE FILTRÓW RÓWNOWAŻNE MOSTKOWYM WZORY NA ELEMENTY

3.1. Ogniwo filtru z pojemnością w gałęzi skośnej

Elementy filtru z rys. 4a wyznacza się przy pomocy wzorów (2.5), (2.6) i (2.9) uwzględniając, że $Z_a = Z_b$ dla częstotliwości nieskończonego tłumienia (rys. 2). Warunek ten można zapisać jako:

$$m_i = t\sqrt{\frac{C_a}{C_{1a}+C_{2a}}}. \tag{3.1}$$

W rezultacie wzory na elementy wyrażą się w sposób następujący:

$$\left.\begin{aligned} l_a &= \frac{L_a}{L_o} = m_i, \\ c_a &= \frac{C_a}{C_o} = m_i, \\ c_{1a} &= \frac{C_{1a}}{C_o} = \frac{t^2-1}{m_i}, \\ c_{2a} &= \frac{C_{2a}}{C_o} = \frac{1}{m_i}, \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

gdzie:

$$\left.\begin{aligned} L_o &= \frac{R_o t}{2\pi f_1 (t^2-1)}, \\ C_o &= \frac{1}{2\pi f_2 R_0}. \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

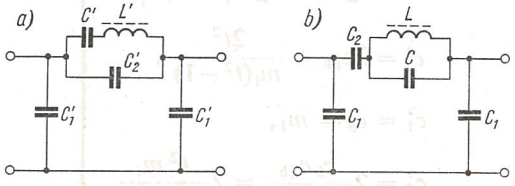
Do dalszych rozważań przyjmuje się wielkości zredukowane l_a, c_a, c_{1a}, c_{2a}, a następnie mnoży się otrzymane na etapie końcowym wyniki odpowiednio przez C_o dla pojemności i L_o w przypadku indukcyjności.

Układy równoważne omawianego filtru będą posiadały strukturę, jak na rys. 9, a wzory na elementy w postaci zredukowanej będą:

$$\left.\begin{aligned} l' &= 2l_a = 2m_i, \\ c' &= \frac{1}{2} c_{1a} = \frac{t^2-1}{2m_i}, \\ c_1' &= c_a = m_i, \\ c_2' &= \frac{1}{2}(c_{2a} - c_a) = \frac{1-m_i^2}{2m_i} \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

oraz

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{2m_i(t^2-1)^2}{(t^2-m_i^2)^2}, \\ c &= \frac{(t^2-m_i^2)(1-m_i^2)}{2m_i(t^2-1)}, \\ c_1 &= m_i, \\ c_2 &= \frac{t^2-m_i^2}{2m_i}. \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$



Rys. 9. Schematy ogniw drabinkowych filtrów równoważnych mostkowym z pojemnością w gałęzi skośnej

Jak można łatwo zauważyć, z uwagi na realizację elementów c_2' i c_2, obie struktury równoważne (rys. 9) mogą stanowić filtry z częstotliwościami nieskończonego tłumienia $f_{\infty i} > f_2$, gdyż wówczas $0 < m_i \leqslant 1$.

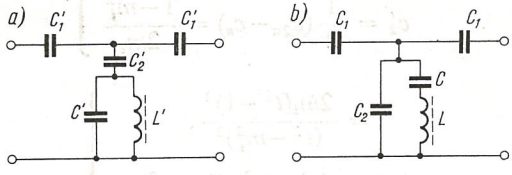
3.2. Ogniwo filtru z pojemnością w gałęzi wzdłużnej

Podobnie, jak dla filtru z pojemnością w gałęzi skośnej, elementy wyznaczamy w oparciu o własności impedancji w obu gałęziach (rys. 4b) dla częstotliwości granicznych (f_1 i f_2), częstotliwości średniej (f_0) oraz częstotliwości nieskończonego tłumienia ($f_{\infty i}$). Dla $f = f_{\infty i}$, $Z_a = Z_b$ i w związku z tym:

$$m_i = t\sqrt{\frac{C_b}{C_{2b}}}. \tag{3.6}$$

Wykorzystując powyższy wzór oraz zależności (2.31)÷(2.33) otrzymujemy już w postaci zredukowanej następujące wzory na elementy:

$$\left.\begin{aligned} l_b &= m_i\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^2,\\ c_b &= m_i,\\ c_{1b} &= \frac{t^2}{m_i(t^2-1)},\\ c_{2b} &= \frac{t^2}{m_i}. \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$



Rys. 10. Schematy ogniw drabinkowych filtrów równoważnych mostkowym z pojemnością w gałęzi wzdłużnej

Układy równoważne będą jak na rys. 10, a wzory na elementy odpowiednio:

$$\left.\begin{aligned} l' &= \frac{1}{2}l_b = \frac{m_i}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^2,\\ c' &= 2c_{1b} = \frac{2t^2}{m_i(t^2-1)},\\ c_1' &= c_b = m_i,\\ c_2' &= 2\frac{c_b c_{2b}}{c_b+c_{2b}} = 2\frac{t^2 m_i}{m_i^2-t^2}, \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

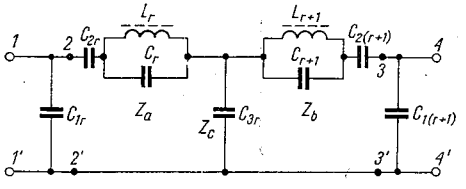
oraz:

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{(m_i^2-1)^2}{2m_i^3}, \\ c &= \frac{2m_i^3(t^2-1)}{(m_i^2-t^2)(m_i^2-1)}, \\ c_1 &= m_i, \\ c_2 &= \frac{2m_i}{m_i^2-1}. \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

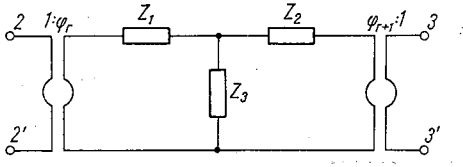
Należy pamiętać, iż wartości rzeczywiste elementów otrzymamy mnożąc indukcyjności i pojemności odpowiednio przez współczynniki L_o i C_o określone wzorem (3.3). Na podstawie wzorów (3.8) i (3.9) można stwierdzić, że warunkiem realizowalności elementów c_2' i c_2 jest $m_i \geqslant t$; a zatem struktury z rys. 10 mogą przedstawiać sobą filtry z częstotliwościami nieskończonego tłumienia $f_{\infty i} < f_1$.

4. REALIZACJA FILTRU KORYGUJĄCEGO FAZĘ

Jak już wspomniano w 2.1, para ogniw posiadających zespolono-sprzężone współczynniki m_i ma charakterystykę fazową odmienną niż ogniwa, w których te współczynniki są rzeczywiste. Zależnie od doboru tych współczynników opóźność maksymalna ich sumarycznej charakterystyki może leżeć w dowolnym miejscu pasma przepustowego, podczas gdy w ogniwach o współczynnikach rzeczywistych występuje zawsze na jego krańcach. Oczywiście ogniw korekcyjnych nie można fizycznie zrealizować samodzielnie i należy szukać takiej struktury równoważnej obu ogniw, w której elementy będą wyrażone liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Można łatwo stwierdzić, że struktura taka da się zrealizować, gdy znormalizowane wartości jej elementów będą wyrażone przez iloczyn i sumę parametrów m_i.



Rys. 11. Połączenie dwu ogniw filtru jak na rys. 9b

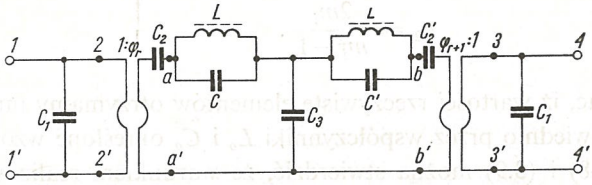


Rys. 12. Układ równoważny czwórnikowi z rys. 11 zawartemu między zaciskami *2—2'* i *3—3'*

Z czterech rozpatrywanych struktur (rys. 9 i 10) możliwość taką dają układy z rys. 9b i 10b. Okazuje się, że najmniejszą ilość elementów posiadać będzie filtr uzyskany drogą transformacji ogniw postaci jak na rys. 9b, a których połączenie łańcuchowe przedstawia rys. 11. Przekształcenie tego układu w strukturę realizowalną przebiegać będzie w szeregu etapów. Pierwszy z nich, to przekształcenie czwórnika między zaciskami *2—2'* i *3—3'*

w układ, jak na rys. 12. Z porównania macierzy [a] uzyskujemy następujące warunki równoważności:

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= Z_a \varphi_r^2 + Z_c(\varphi_r - \varphi_{r+1})\,\varphi_r, \\ Z_2 &= Z_b \varphi_{r+1}^2 + Z_c(\varphi_{r+1} - \varphi_r)\,\varphi_{r+1}, \\ Z_3 &= Z_c \varphi_r \varphi_{r+1}. \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$



Rys. 13. Schemat filtru korygującego fazę po wprowadzeniu transformatorów idealnych

Widać więc, że struktury dwójników w gałęziach obu rozpatrywanych czwórników będą takie same, a nowa postać układu wyjściowego będzie przedstawiać się, jak na rys. 13. Ze wzorów (4.1) wynikają następujące zależności na elementy:

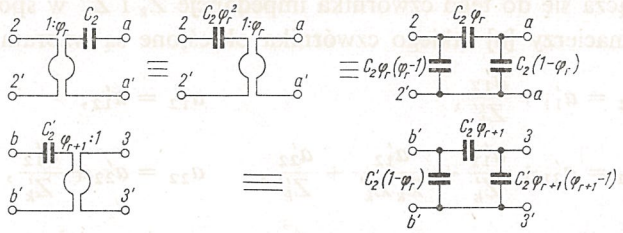
$$\left.\begin{aligned} C_2 &= \frac{C_{2r} C_{3r}}{\varphi_r [C_{3r}\varphi_r + C_{2r}(\varphi_r - \varphi_{r+1})]}, \\ L &= L_r \varphi_r^2, \\ C &= \frac{C_r}{\varphi_r^2}, \\ C_3 &= \frac{C_{3r}}{\varphi_r \varphi_{r+1}}, \\ C_2' &= \frac{C_{2(r+1)} C_{3r}}{\varphi_{r+1} [C_{3r}\varphi_{r+1} + C_{2(r+1)}(\varphi_{r+1} - \varphi_r)]}, \\ L' &= L_{r+1} \varphi_{r+1}^2, \\ C' &= \frac{C_{r+1}}{\varphi_{r+1}^2}, \\ C_1 &= C_{1r}, \\ C_1' &= C_{1(r+1)}, \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

przy czym:

$$C_{3r} = C_{1r} + C_{1(r+1)}.$$

W odniesieniu do czwórników między zaciskami *2—2'* i *a—a'* oraz *b—b'* i *3—3'* stosuje się znane powszechnie transformacje Nortona (rys. 14). Ponieważ jedna z pojemności równoległych musi być ujemna, więc można dobrać tak przekładnię, aby:

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2(\varphi_r - 1)\,\varphi_r &= 0 \\ C_1' + C_2'(\varphi_{r+1} - 1)\,\varphi_{r+1} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$



Rys. 14. Transformacje czwórników $2-2'$, $a-a'$ oraz $b-b'$, $3-3'$ z rys. 13

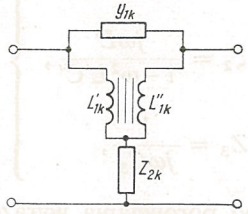
Zastosowanie wzorów (3.3), (3.5) i (4.2) daje następujące rozwiązanie:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_r &= \frac{t^2-m_r^2}{t^2+m_r m_{r+1}}, \\ \varphi_{r+1} &= \frac{t^2-m_{r+1}^2}{t^2+m_r m_{r+1}}, \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Otrzymany rezultat oraz wzory (3.5) i (4.2) pozwalają stwierdzić, że pojemności $C_2\varphi_r$ i $C_2'\varphi_{r+1}$ wyrażają się przez iloczyn i sumę współczynników m_i. Obie te wielkości są sobie równe i wynoszą:

$$c_{3k} = \frac{C_{3k}}{C_o} = \frac{t^2+m_r m_{r+1}}{m_r+m_{r+1}}. \tag{4.5}$$

Kolejny etap przekształceń polega na poszukiwaniu układu zastępczego czwórnika zawartego między zaciskami a—a' i b—b' (rys. 13). W tym celu należy najpierw rozpatrzeć przedstawiony na rys. 15 czwórnik pomocniczy, w którym transformator różni się



Rys. 15. Schemat czwórnika pomocniczego

od idealnego tym, że jego indukcyjności uzwojeń posiadają wartości skończone L_{1k}' i L_{1k}''. Wykorzystując ogólnie znane metody analizy sieci otrzymujemy następujące wyrazy macierzy $[a]$:

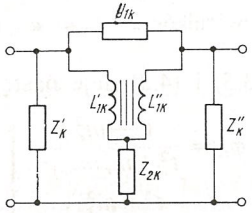
$$\left.\begin{aligned} a_{11}' &= \frac{Z_{2k}(1+j\omega L_{1k}Y_{1k})+j\omega L_{1k}'}{Z_{2k}+j\omega L_{1k}Y_{1k}Z_{2k}-j\omega M}, & a_{12}' &= \frac{j\omega L_{1k}Z_{2k}}{Z_{2k}+j\omega L_{1k}Y_{1k}Z_{2k}-j\omega M}, \\ a_{21}' &= \frac{1+j\omega L_{1k}Y_{1k}}{Z_{2k}+j\omega L_{1k}Y_{1k}Z_{2k}-j\omega M}, & a_{22}' &= \frac{Z_{2k}(1+j\omega L_{1k}Y_{1k})+j\omega L_{1k}''}{Z_{2k}+j\omega L_{1k}Y_{1k}Z_{2k}-j\omega M}, \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

gdzie:

$$\left.\begin{aligned} L_{1k} &= L_{1k}'+L_{1k}''+2M, \\ M &= \sqrt{L_{1k}'L_{1k}''}. \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

Następnie dołącza się do tego czwórnika impedancje Z'_k i Z''_k w sposób pokazany na rys. 16. Wyrazy macierzy $[a]$ takiego czwórnika określone są wzorami:

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= a'_{11}+\frac{a'_{12}}{Z''_k}, & a_{12} &= a'_{12},\\ a_{21} &= a'_{21}+\frac{a'_{11}}{Z'_k}+\frac{a'_{12}}{Z'_k Z''_k}+\frac{a'_{22}}{Z''_k}, & a_{22} &= a'_{22}+\frac{a'_{12}}{Z'_k}, \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$



Rys. 16. Czwórnik pomocniczy z impedancjami Z'_k i Z''_k

Otrzymane wyrażenia porównuje się z wyrazami macierzy $[a]$ czwórnika między zaciskami a—a' i b—b' z rys. 13:

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= 1+\frac{\zeta_1}{Z_3}, & a_{12} &= \zeta_1+\zeta_2+\frac{\zeta_1\zeta_2}{Z_3},\\ a_{21} &= \frac{1}{\zeta_1}, & a_{22} &= 1+\frac{\zeta_2}{Z_3}, \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

gdzie:

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC},\\ \zeta_2 &= \frac{j\omega L'}{1-\omega^2 L'C'},\\ Z_3 &= \frac{1}{j\omega C_3}, \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

Najwygodniej jest rozpocząć od porównania wyrazów a_{12}, czyli:

$$\frac{j\omega L_{1k}}{1+j\omega L_{1k}Y_{1k}-\dfrac{j\omega M}{Z_{2k}}} = \zeta_1+\zeta_2+\frac{\zeta_1\zeta_2}{Z_3}. \tag{4.11}$$

Prawą stronę tego równania można doprowadzić do postaci:

$$\frac{j\omega(L+L')}{1-\omega^2\dfrac{(L+L')CC'}{C+C'+C^3}+\omega^2\dfrac{(LC-L'C'-L'C_3)(L'C'-LC-LC_3)}{(L+L')(C+C'+C_3)\left[1-\omega^2\dfrac{LL'(C+C'+C_3)}{L+L'}\right]}}. \tag{4.12}$$

Odpowiednie przekształcenia mianownika wzoru (4.2) po odjęciu i dodaniu wyrażenia:

$$\omega^2\varrho\frac{(LC-L'C'-L'C_3)(L'C'-LC-LC_3)}{(L+L')(C+C'+C_3)}, \tag{4.13}$$

gdzie ϱ — współczynnik o dowolnej wartości, pozwalają sprowadzić go do postaci, z której wynikają następujące warunki równowartości tych czwórników:

$$L_{1k} = L + L', \tag{4.14}$$

$$Y_{1k} = j\omega \frac{CC'(L+L')^2 + \varrho\,(LC - L'C' - L'C_3)\,(L'C' - LC - LC_3)}{(L+L')^2(C+C'+C_3)} = j\omega C_{1k}, \tag{4.15}$$

$$M = \frac{(LC - L'C' - L'C_3)\,(L'C' - LC - LC_3)}{C_3^2(L+L')}, \tag{4.16}$$

$$\frac{1}{Z_{2k}} = j\omega \frac{C_3^2}{C+C'+C_3}\left[\varrho + \frac{1}{1-\omega^2 \dfrac{LL'(C+C'+C_3)}{L+L'}}\right]. \tag{4.17}$$

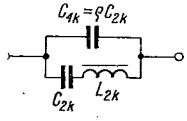
Ze wzorów (4.7), (4.14) i (4.16) wynika przekładnia transformatora:

$$n = \sqrt{\frac{L'_{1k}}{L''_{1k}}} = \frac{L'C' - LC - LC_3}{LC - L'C' - L'C_3}. \tag{4.18}$$

Impedancja Z_{2k} przedstawia sobą dwójnik, jak na rys. 17, w którym:

$$C_{2k} = \frac{C_3^2}{C+C'+C_3}, \tag{4.19}$$

$$L_{2k} = \frac{LL'(C+C'+C_3)^2}{(L+L')\,C_3^2}. \tag{4.20}$$



Rys. 17. Schemat impedancji Z_{2k}

Porównanie wyrazów a_{11} i a_{22} we wzorach (4.8) i (4.9) pozwala zapisać impedancje Z'_k i Z''_k w formie:

$$\frac{1}{Z'_k} = j\omega \frac{C_3[C(L+L') + \varrho\,(LC - L'C' - L'C_3)]}{(L+L')\,(C+C'+C_3)} = j\omega C'_k, \tag{4.21}$$

$$\frac{1}{Z''_k} = j\omega \frac{C_3[C'(L+L') + \varrho\,(L'C' - LC - LC_3)}{(L+L')\,(C+C'+C_3)} = j\omega C''_k. \tag{4.22}$$

Pojemności C'_k i C''_k mogą być różne zależnie od doboru współczynnika ϱ, a więc również takie, aby:

$$C'_k + C_2(1-\varphi_r) = 0, \tag{4.23}$$

lub

$$C''_k + C'_2(1-\varphi_{r+1}) = 0, \tag{4.24}$$

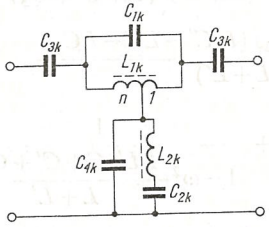
gdzie:

$C_2(1-\varphi_r)$ — pojemność z rys. 14a,

$C_2(1-\varphi_{r+1})$ — pojemność z rys. 14b.

Po zastosowaniu wzorów: (3.3), (3.5), (4.2), (4.4) oraz (4.21) i (4.22) można stwierdzić, że oba równania (4.23) i (4.24) spełnione są jednocześnie dla:

$$\varrho = \frac{(t^2+m_r m_{r+1})^2 - t^2(m_r+m_{r+1})^2}{m_r m_{r+1}(t^2-1)\,(t^2+m_r m_{r+1})}. \tag{4.25}$$



Rys. 18. Schemat układu równoważnego łańcuchowi dwóch ogniw filtru jak na rys. 9b

Układ z rys. 13 przyjmie zatem postać jak na rys. 18. Elementy tego układu obliczone na podstawie wzorów (3.3), (3.5), (4.2), (4.4), (4.5), (4.14), (4.15), (4.18), (4.19), (4.20) (4.25) wynoszą:

$$\left.\begin{aligned}
c_{3k} &= \frac{C_{3k}}{C_o} = \frac{t^2+m_r m_{r+1}}{m_r+m_{r+1}},\\
n &= 1,\\
c_{4k} &= \frac{C_{4k}}{C_o} = \frac{2\,(m_r+m_{r+1})\,(t^2+m_r m_{r+1})}{V},\\
l_{1k} &= \frac{L_{1k}}{L_o} = \frac{2\,(m_r+m_{r+1})\,(t^2-1)^2}{(t^2+m_r m_{r+1})^2},\\
c_{1k} &= \frac{C_{1k}}{C_o} = \frac{(1+m_r m_{r+1})\,(t^2+m_r m_{r+1})}{2\,(m_r+m_{r+1})\,(t^2-1)},\\
l_{2k} &= \frac{L_{2k}}{L_o} = \frac{V^2}{2m_r m_{r+1}(m_r+m_{r+1})\,(t^2+m_r m_{r+1})^2},\\
c_{2k} &= \frac{C_{2k}}{C_o} = \frac{2m_r m_{r+1}(m_r+m_{r+1})\,(t^2+m_r m_{r+1})^2(t^2-1)}{V[(t^2+m_r m_{r+1})^2 - t^2(m_r+m_{r+1})^2]},
\end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

gdzie:

$$V = (t^2+m_r m_{r+1})\,(1+m_r m_{r+1}) - (m_r+m_{r+1})^2.$$

Jak widać, układ może być realizowalny dla współczynników m_i rzeczywistych dodatnich oraz zespolonych sprzężonych. Jest on zatem postacią ostateczną układu z rys. 11 i może przedstawiać sobą filtr korygujący fazę.

5. PROJEKTOWANIE FILTRÓW ŚRODKOWOPRZEPUSTOWYCH Z LINIOWĄ FAZĄ

Wymagania na charakterystyki częstotliwościowe tłumienności i opóźności posiadają zwykle postać, jak na rys. 19, przy czym najczęściej $f_{-t} < f_{-\tau} < f_{-p}$ oraz $f_p < f_\tau < f_t$.

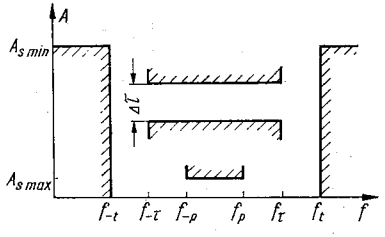
Projektowanie rozpocząć należy od ustalenia częstotliwości granicznych f_1 i f_2 takich, żeby spełnione były nierówności:

$$f_{-t} < f_1 < f_{-\tau} < f_{-p}$$

oraz

$$f_p < f_\tau < f_2 < f_t.$$

Następnie wykorzystując wzór (2.21) oblicza się ilość i rozkład częstotliwości nieskończonego tłumienia tak, aby zrealizować charakterystykę tłumieniową. Pamiętając, że w paśmie tłumieniowym tłumienność skuteczna może być mniejsza od falowej co najwyżej o 0,7 N, dobiera się takie m_i ogniw filtru, aby spełnić wymagania na charakterystykę tłumieniową. Można przy tym uwzględnić, że tłumienność nieco wzrośnie po dołączeniu ogniwa korygującego fazę.



Rys. 19 Wymagania na charakterystykę tłumieniową i opóźnieniową filtru środkowoprzepustowego

Po ustaleniu częstotliwości nieskończonego tłumienia przeprowadza się korekcję opóźności. Należy obliczyć przy pomocy wzoru (2.23) opóźność falową ogniw tłumieniowych i dobrać parametry $\alpha = m_r + m_{r+1}$ oraz $\beta = m_r \cdot m_{r+1}$ ogniwa korekcyjnego (wzór 2.24) tak, aby zostały spełnione postawione wymagania. Elementy w postaci zredukowanej wyznacza się w przypadku ogniw korekcyjnych ze wzorów (4.26), a ogniw tłumieniowych ze wzorów (3.4) lub (3.5), jeśli $f_{\infty i} > f_2$, albo z (3.7) lub (3.8), gdy $f_{\infty i} < f_1$. Obliczone wielkości należy następnie pomnożyć odpowiednio przez określone wzorami (3.3) współczynniki L_o i C_o. Pary ogniw tłumieniowych, których częstotliwości nieskończonego tłumienia usytuowane są po tej samej stronie pasma przepustowego można łączyć w ogniwa *podwójne* i wówczas elementy wyznacza się, jak dla ogniw korekcyjnych.

Przykład

Zaprojektować filtr środkowoprzepustowy dla systemu telegrafii nośnej 200 bd, spełniający następujące wymagania:

1. tłumienność skuteczna
   — w praktycznym paśmie przepustowym:
   2.840 ÷ 3.160 Hz, $\Delta A_s \leqslant 0{,}5$ N,
   — w praktycznym paśmie tłumieniowym:
   $A_s \geqslant 5$ N dla $2360 \leqslant f \leqslant 2640$ Hz i $3.360 \leqslant f \leqslant 3640$ Hz oraz
   $A_s \geqslant 4{,}2$ N dla $f < 2.360$ Hz i $3640 < f < 5.000$ Hz;
2. opóźność skuteczna powinna się zawierać w granicach:
   $\tau_o \pm 0{,}5$ ms dla $2840 \leqslant f \leqslant 3160$ Hz oraz

$\tau_o \pm 1$ ms dla $2760 \leqslant f \leqslant 2840$ Hz i $3160 \leqslant f \leqslant 3240$ Hz,
gdzie τ_o opóźność dla częstotliwości 3000 Hz;

3. oporność pracy filtru — 1200 Ω.

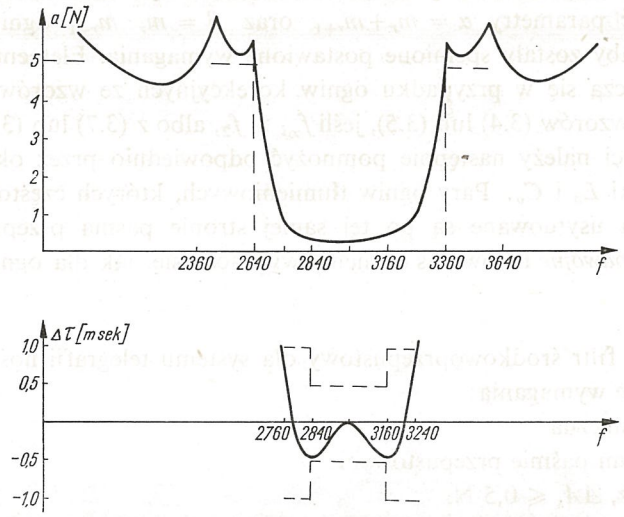
W rezultacie kilku prób znaleziono częstotliwości graniczne $f_1 = 2.703$ i $f_2 = 3.298$ Hz. Równocześnie ustalono następujący rozkład częstotliwości nieskończonego tłumienia filtru:

$$f_{\infty 1} = 3.374 \text{ Hz, czyli } m_1 = 0.353,$$
$$f_{\infty 2} = 3.575 \text{ Hz, czyli } m_2 = 0.590,$$
$$f_{\infty 3} = 2.433 \text{ Hz, czyli } m_3 = 1.890,$$
$$f_{\infty 4} = 2.625 \text{ Hz, czyli } m_4 = 3.098.$$

Tablica 1

Wyniki obliczeń opóźności falowej filtru

f[kHz]	$-m^2$	τ_c[msek]	τ_t[msek]	τ_k[msek]	τ[msek]	$\Delta\tau$[msek]
2760	10,4662	9,99916	3.737	1,156	4,893	+0,998
2840	3,70186	2,90909	2,126	1,341	3,467	−0,428
2920	1,92624	1,60605	1,677	1,927	3,604	−0,291
2986	1,22013	1,18772	1,567	2,328	3,895	0
3080	0,63773	0,92220	1,672	1,888	3,560	−0,335
3160	0,33261	0,86743	2,112	1,310	3,422	−0,473
3240	0,11882	1,04889	3,7717	1,131	4,848	+0,953



Rys. 20. Przebieg tłumienności i opóźności skutecznej filtru

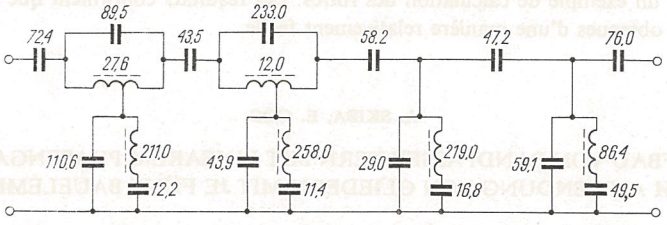
W tabl. 1 podano obliczenia opóźności falowej tych ogniw oraz wielkość m i τ_c w funkcji częstotliwości. Dla skorygowania charakterystyki opóźności tak, aby spełniła narzucone warunki dobiera się parametry m_5 i m_6, a właściwie ich sumę (α) i iloczyn (β).

Warto przy tym zauważyć, że maksimum krzywej opóźności falowej ogniw korekcyjnych wypada w pobliżu tej częstotliwości, dla której $-1/m^2 = \beta$, a jego wartość ustala się dobierając α. Wypływa stąd wniosek, aby w pierwszym przybliżeniu przyjąć $\beta = t$ i dobierać α. W następnym etapie tak korygujemy obie te wielkości, aby aproksymacja była optymalna. Po przeprowadzeniu kilku prób znaleziono:

$$\alpha = m_5 + m_6 = 0{,}97,$$

$$\beta = m_5 \cdot m_6 = 1.12.$$

Uzyskane rezultaty zestawiono w tabl. 1, a wyniki pomiarów charakterystyki tłumieniowej i opóźnieniowej przedstawiono na rys. 20. Elementy obliczamy na podstawie wzorów (3.9)



Rys. 21. Schemat filtru środkowoprzepustowego z liniową fazą

i (4.26), ponieważ ogniwa reprezentujące częstotliwości nieskończonego tłumienia 3.374 i 3.575 Hz zrealizowano w takiej samej strukturze, jak ogniwo korekcyjne. Ostateczny schemat filtru przedstawia się, jak na rys. 21, przy czym indukcyjności wyrażone są w mH, a pojemności w nF.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. E. Colin, P. Allemandou, Modelage du temps de propagation de groupe d'un filtre à caractéristiques données d'affaiblissement composite, Câbles & Transmission, Nr 3, 1963.

A. SKIBA, E. GOC

REALIZATION OF CONSTANT-DELAY BAND-PASS FILTERS BY MEANS OF FIVE-ELEMENT SECTIONS

Summary

In the paper the possibility of realization band-pass filters complying with definite requirements as to damping and time-delay characteristics has been considered.

The exact analysis of the properties of band-pass filters with the simplest possible impedances in their branches was performed. It was ascertained that given five-element sections can be the solution of this problem and the conditions of the realization of the quadripole that determin damping and time-delay characteristics were examined. The method of design was illustrated with an example. The given results confirm that one can obtain a network with primary determined characteristics in a simple manner.

A. SKIBA, E. GOC

RÉALISATION DES FILTRES PASSE-BANDES AVEC LE TEMPS DE PROPAGATION DE GROUPE CONSTANTE QUI SONT COMPOSÉS DE CINQ ELEMENTS CELLULES

Résumé

L'article étudie une possibilité de réalisation des filtres passe-bandes, qui répondent à la fois aux conditions d'affaiblissement et de temps de propagation de groupe. On a fait une analyse détaillée des propriétés d'un filtre aux branches ayant la structure d'impédence la plus simple possible.

On a examiné des conditions de la réalisation physique des filtres déterminant la caractéristique d'affaiblissement et de temps de propagation de groupe. Les filtres aux cinq éléments peuvent constituer une réalisation de ce problème.

On a prèsenté un exemple de calculation des filtres. Les résultats confirment que les caractéristiques utiles peuvent être obtenues d'une manière relativement facile.

A. SKIBA, E. GOC

AUFBAU VON BANDPASSFILTERN MIT LINEAREM PHASENGANG DURCH ANWENDUNG VON GLIEDERN MIT JE FÜNF BAUELEMENTEN

Zusammenfassung

In diesem Artikel wird die Möglichkeit der Realisierung von Bandpassfiltern beschrieben, welche bestimmte Forderungen bezüglich der Dämpfungs- und Laufzeitcharakteristik erfüllen.

In der Arbeit wird eine genaue Analyse von Eigenschaften der Filter, welche eine sehr einfache Struktur besitzen, gebracht. Jedes Glied des Filters besteht aus fünf Bauelementen. Durch Zusammenschaltung mehrerer solcher, einfach aufgebauter Glieder wird ein Filter aufgebaut, welcher eine lineare Phasendrehung erreicht. Anhand eines Beispiels werden die Dimensionierungsgrundlagen für den Entwurf eines solchen Filters angegeben.

А. СКИБА, Е. ГОЦ

РЕАЛИЗАЦИЯ ПОЛОСОВЫХ ФИЛЬТРОВ С ЛИНЕЙНЫМ ФАЗОВЫМ СДВИГОМ ПУТЕМ ПРИМЕНЕНИЯ ПЯТИЭЛЕМЕНТНЫХ ЗВЕНЬЕВ

Резюме

В работе рассмотрена возможность реализации полосовых фильтров исполняющих определенные требования относительно характеристики затухания и группового времени запаздывания. Проведен подробный анализ свойств фильтров с возможно простыми структурами ветвей.

Показано, что полученные пятиэлементные звенья могут быть решением поставленной проблемы, а также проверена возможность физической реализации этих звеньев. Метод проиллюстрирован примером. Полученные результаты подтверждают теоретические предпосылки.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1973, 19, z. 1, ss. 37-48

621.372

Rozkład pola elektromagnetycznego w układzie: grupa przewodników równoległych, ekran, półprzestrzeń metalowa

STANISŁAW APANASEWICZ (ŁÓDŹ)

Insytut Elektrotechniki, Oddział Łódzki

Otrzymano 27.11.1971

Celem niniejszej pracy jest wyprowadzenie wzorów przydatnych przy analizie płaskich ekranów w różnych urządzeniach elektrotechnicznych, zwłaszcza w transformatorach. Teoretyczny model, w którym analizowany jest rozkład pola elektromagnetycznego, jest następujący: grupa równoległych przewodów nieskończenie długich i nieskończenie cienkich (w przewodach tych płyną sinusoidalne w czasie prądy elektryczne wzbudzające pole), równoległa do tych przewodów metalowa płyta (ekran) o skończonej grubości i nieskończonych wymiarach pozostałych, równoległa do niej półprzestrzeń metalowa (rys. 1). Przy założeniu, że przenikalność magnetyczna obszarów metalowych jest stała, wyprowadzono z równań Maxwella wzory w postaci całek Fouriera, opisujące rozkład pola elektromagnetycznego w takim układzie. W przypadku, jeśli prądy wzbudzające płyną w dwóch lub w trzech przewodach, opracowano programy obliczeń na maszynę cyfrową i przedstawiono omówienie wyników obliczeń numerycznych. Dla porównania zestawiono również dane doświadczalne otrzymane w IEL Oddział Łódzki przez mgra inż. M. Kaźmierskiego z danymi teoretycznymi. Zgodność jakościowa amplitud indukcji magnetycznej i pola magnetycznego w obu wypadkach jest całkowicie dobra, natomiast jeśli chodzi o wartości liczbowe to na ogół dane teoretyczne są większe od doświadczalnych (co autor tłumaczy zmienną przenikalnością półprzestrzeni metalowej).

1. RÓWNANIA WYJŚCIOWE I ICH OGÓLNE ROZWIĄZANIE

Dla analizy pola elektromagnetycznego (rys. 1) w układzie złożonym z grupy nieskończenie długich przewodów $P_1, P_2, \ldots, P_k$ równoległych do płyty metalowej o grubości d oddalonej o d_1 od półprzestrzeni metalowej można posłużyć się następującym układem równań

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \mu \gamma \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad \mu = \text{const}, \quad \gamma = \text{const}, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} B_x = \mu H_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad B_y = \mu H_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \\ E_z = E = \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad j_z = \gamma E_z, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

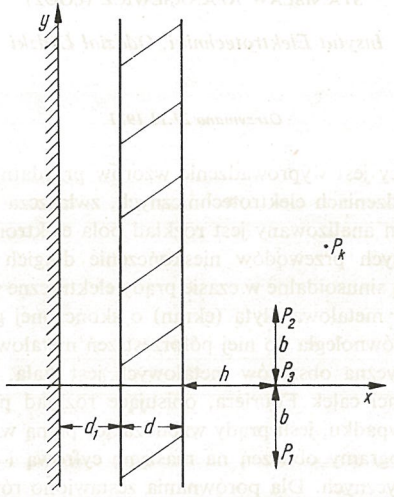
gdzie:

B_x, B_y, H_x, H_y — składowe indukcji magnetycznej i natężenia pola magnetycznego w kierunku x i y odpowiednio;

Ψ — składowa potencjału wektorowego w kierunku osi z prostopadłej do płaszczyzny x, y,

E_z, j_z — składowe natężenia pola elektrycznego i gęstość prądu w kierunku z,

μ, γ — przenikalność magnetyczna i konduktywność elektryczna rozpatrywanego środowiska.



Rys. 1. Schemat poprzecznego przekroju opisywanego układu

W niniejszej pracy zakładamy, że rozpatrywane funkcje nie zależą od z. Oznacza to, że otrzymane wyniki mogą odnosić się do obiektów małych w porównaniu z długością fali elektromagnetycznej powstającej przy przepływie prądów w przewodach nieskończenie długich.

Będziemy poszukiwać rozwiązania (1) przy następujących założeniach:

a) przekroje poprzeczne przewodów P_j są pomijalnie małe,

b) prądy płynące w tych przewodach są sinusoidalne z pulsacją ω.

W związku z tym można przyjąć, że

$$\Psi = \varphi(x, y)\, e^{\sqrt{-1}\,\omega t},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \lambda^2 \varphi, \tag{3}$$

$$\lambda^2 = \sqrt{-1}\,\omega\mu\gamma.$$

Rozpatrujemy osobno 4 obszary: obszar 1 — półprzestrzeń metalowa ($x \leqslant 0$), obszar 2 — szczelina powietrzna ($0 \leqslant x \leqslant d_1$), obszar 3 — płyta metalowa ($d_1 \leqslant x \leqslant d_1 + d$), obszar 4 — powietrze ($x \geqslant d + d_1$) i z tego względu wszystkie funkcje odnoszące się do

obszaru i będą oznaczane przez φ_i). W obszarze czwartym umieszczone są przewody wiodące prąd.

Na brzegach obszarów zakładamy, że

$$\varphi_i = \varphi_{i+1}, \quad \frac{1}{\mu_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = \frac{1}{\mu_{i+1}}\frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial x}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4}$$

Równości te przedstawiają klasyczne warunki brzegowe elektrodynamiki: ciągłość składowej normalnej indukcji magnetycznej i składowych stycznych pola elektrycznego i magnetycznego.

Ponieważ przewody są nieskończenie cienkie, to φ_4 można przedstawić w postaci:

$$\varphi_4 = \varphi_o + \varphi_{4*}, \tag{5}$$

przy czym φ_o reprezentuje składową potencjału wektorowego odpowiadającego polu wytworzonemu przez przewodniki P_j przy nieobecności metalu w obszarach 1 i 3, a φ_{4*} reprezentuje dodatkowe pole, jakie powstaje dzięki istnieniu obszarów metalowych w pobliżu przewodów.

W obszarach powietrznych $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$, wobec czego funkcje φ_2 i φ_4 spełniają równanie Laplace'a, a φ_1 i φ_3 — równanie Helmholza.

Poszukiwane rozwiązanie układu (3)÷(5) z warunkiem znikania pola dla $x = \pm\infty$, można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \int_0^\infty C_1 e^{p_1 x} \cos \alpha y \, d\alpha, \qquad p_i = \sqrt{\alpha^2 + \lambda_i^2}, \\
\varphi_2 &= \int_0^\infty (C_4 e^{\alpha x} + C_5 e^{-\alpha x}) \cos \alpha y \, d\alpha, \\
\varphi_3 &= \int_0^\infty (C_2 e^{p_3 x} + C_3 e^{-p_3 x}) \cos \alpha y \, d\alpha, \\
\varphi_{4*} &= \int_0^\infty C_6 e^{-\alpha x} \cos \alpha y \, d\alpha.
\end{aligned} \tag{6}$$

przy czym wielkości C_k są zespolonymi funkcjami parametru α.

Funkcje typu (6) spełniają równanie Laplace'a i odpowiednio równanie Helmholza i zmierzają do 0, jeśli $x^2 + y^2 \to \infty$. Są one symetryczne względem osi y, co możliwe jest w przypadku jednego przewodu umieszczonego na osi x; w każdym innym przypadku rozwiązanie może być uzyskane jako superpozycja wektorowa rozwiązań typu (6).

Z warunków brzegowych (4) otrzymuje się 6 równań dla wyznaczania funkcji C_k:

$$\begin{aligned}
&C_1 = C_4 + C_5, \quad \frac{p_1}{\mu_1} C_1 = \frac{\alpha}{\mu_2}(C_4 - C_5), \\
&C_4 e^{\alpha d_1} + C_5 e^{-\alpha d_1} = C_2 e^{p_3 d_1} + C_3 e^{-p_3 d_1}, \\
&C_2 e^{p_3 d_2} + C_3 e^{-p_3 d} = \Psi_o(d_2) + C_6 e^{-\alpha d_2}, \\
&\frac{\alpha}{\mu_2}(C_4 e^{\alpha d_1} - C_5 e^{-\alpha d_1}) = \frac{p_3}{\mu_3}(C_2 e^{p_3 d_1} - C_3 e^{-p_3 d_1}),
\end{aligned}$$

$$\frac{p_3}{\mu_3}(C_2 e^{p_3 d_2} - C_3 e^{-p_3 d_2}) = \frac{1}{\mu_4}\left[\frac{d\overline{\Psi}_o(d_2)}{dx} - \alpha C_6 e^{-\alpha d_2}\right], \tag{7}$$

$$d_2 = d_1 + d,$$

gdzie $\overline{\Psi}_o$ jest transformatą cosinusową Fouriera funkcji $\overline{\varphi}_o$:

$$\Psi_o = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \overline{\varphi}_o(x, y)\cos\alpha y\, dy, \tag{8}$$

przy czym $\overline{\varphi}_0$ reprezentuje potencjał wektorowy pola magnetycznego pochodzący od jednego przewodu znajdującego się na osi x ($x = h + d_2$).

Rozwiązanie układu (7) jest następujące:

$$C_1 = \frac{2K_1}{K_1 - 1} C_5, \qquad C_4 = \frac{K_1 + 1}{K_1 - 1} C_5,$$

$$C_2 = \frac{(K_1+1)(K_2+1)e^{\delta_1 d_1} - (K_1-1)(K_2-1)e^{-\delta_2 d_1}}{K_1 - 1} \cdot \frac{C_5}{2},$$

$$C_3 = \frac{[(K_1-1)(K_2+1)e^{-\delta_1 d_1} - (K_1+1)(K_2-1)e^{\delta_2 d_1}] \cdot \frac{C_5}{2}}{K_1 - 1},$$

$$C_6 = -\overline{\Psi}_o e^{\alpha d_2} + \left\{(K_2+1)e^{\delta_1 d} - (K_2-1)e^{\delta_2 d} + \right. \tag{9}$$

$$\left. + \frac{(K_1+1)}{K_1-1}\cdot[(K_2+1)e^{\delta_2 d} - (K_2-1)e^{\delta_1 d}]e^{2\alpha d_1}\right\} \cdot \frac{C_5}{2},$$

$$C_5 = \frac{2K_2(K_1-1)\left[\overline{\Psi}_o(d_2) + \frac{1}{\alpha}\frac{d\overline{\Psi}_o(d_2)}{dx}\right]e^{\alpha d_2}}{(K_1-1)(K_2^2-1)(e^{\delta_1 d} - e^{\delta_2 d}) + (K_1+1)[(K_2+1)^2 e^{\delta_2 d} - (K_2-1)^2 e^{\delta_1 d}]e^{2\alpha d_1}},$$

gdzie:

$$K_1 = \frac{\mu_1 \alpha}{\mu_2 p_1}, \qquad K_2 = \frac{\mu_3 \alpha}{\mu_2 p_3}, \qquad \mu_2 = \mu_4 = \mu_o,$$

$$\delta_1 = \alpha - p_3, \qquad \delta_2 = \alpha + p_3.$$

Rozpatrzmy tu jeszcze dwa przypadki szczególne: $d_1 = 0$ oraz

$$\lambda_1 = 0, \qquad \mu_1 = \mu_o.$$

Pierwszy z tych przypadków oznacza, że obie metalowe warstwy stykają się ze sobą. Odpowiednikiem wzorów (9) będą wzory następujące:

$$C_4 = C_5 = 0, \qquad C_2 = \frac{1+K_3}{2} C_1, \qquad C_3 = \frac{1-K_3}{2} C_1,$$

$$C_6 = -\overline{\Psi}_o(d_2)e^{\alpha d} + [(K_3+1)e^{\delta_2 d} - (K_3-1)e^{\delta_1 d}] \cdot \frac{C_1}{2}, \tag{10}$$

$$C_1 = \frac{2K_2\left[\overline{\Psi}_o(d) + \frac{1}{\alpha}\overline{\Psi}'_o(d)\right]e^{\alpha d}}{(K_3+1)(K_2+1)e^{\delta_2 d} - (K_3-1)(K_2-1)e^{\delta_1 d}},$$

gdzie $K_3 = \dfrac{K_2}{K_1}$.

Drugi z przypadków związany jest z pominięciem półprzestrzeni metalowej (lub przesunięciem jej w nieskończoność). Umieszczając teraz układ współrzędnych tak, by powierzchnia płyty zwrócona w stronę przewodów wiodących prąd miała równanie $x = 0$, otrzymamy podobnie jak (9) i (10):

$$
\begin{aligned}
C_1 &= C_5 = 0, \\
C_3 &= -\frac{K_2-1}{K_2+1} e^{(\delta_1-\delta_2)d} \cdot C_2, \\
C_4 &= \frac{2e^{\delta_1 d}}{K_2+1} C_2, \\
C_6 &= -\overline{\Psi}_o(d) + \left[1 - \frac{K_2-1}{K_2+1} e^{-2p_3 d}\right] C_2, \\
C_2 &= \frac{K_2(K_2+1)\left(\overline{\Psi}_o + \frac{1}{\alpha}\Psi_o'\right)}{(K_2+1)^2 - (K_2-1)^2 e^{-2p_3 d}}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Warto tu dodać, że związki (11) mogą być uzyskane z (9) przy podanym wyborze układu współrzędnych jako graniczny przypadek przy przesuwaniu półprzestrzeni metalowej w nieskończoność, natomiast związki (10) nie mogą być otrzymane z (9) jako graniczny przypadek przy $d_1 \to 0$.

Zauważymy jeszcze, że występujące w (9) ÷ (11) wyrażenie $\overline{\Psi}_o(d_2)$ nie ujmując ogólności można położyć równe 0.

W tym celu zamiast występujących we wzorach (5), (6), (9), (11) funkcji φ_o i φ_{4*} będziemy rozpatrywali odpowiednio funkcje $\varphi_o + \varphi_{o1}$ oraz $\varphi_{4*} - \varphi_{o1}$, dobierając funkcję φ_{o1} tak, by dla $x = d_2$ było $\varphi_o + \varphi_{o1} = 0$.

Innymi słowy wzór (5) zapisujemy w zmienionej nieco formie.

$$
\varphi_4 = (\varphi_o + \varphi_{o1}) + (\varphi_{4*} - \varphi_{o1}), \qquad \varphi_o(d_2, y) + \varphi_{o1}(d_2, y) = 0. \tag{12}
$$

Funkcję φ_{o1} najprościej przyjąć jako następującą: jeśli φ_o związana jest z pojedyńczym przewodem umieszczonym w punkcie P, to jako funkcję φ_{o1} przyjmujemy potencjał związany z przewodem umieszczonym w punkcie P' będącym zwierciadlanym odbiciem P względem płaszczyzny $x = d_2$. Dzięki takiemu ujęciu nie zachodzi konieczność obliczania transformaty Fouriera funkcji $\varphi_o + \varphi_{o1}$, a tylko pochodnej tej funkcji po x.

W ten sposób dla układu przewodów umieszczonych w punktach:

$x = d_2 + h, \quad y = 0; \quad x = d_2 - h, \quad y = 0$ mamy

$$
\begin{aligned}
\varphi_o + \varphi_{o1} &= \frac{\mu_o i_o}{4\pi} \ln \frac{y^2 + (x - d_2 - h)^2}{y^2 + (x - d_2 + h)^2}, \\
\frac{d(\varphi_o + \varphi_{o1})}{dx} &= -\frac{\mu_o i_o h}{\pi(h^2 + y^2)} = -\frac{\mu_o i_o}{\pi} \int_0^\infty e^{-\alpha h} \cos \alpha y \, d\alpha, \\
\frac{d\overline{\Psi}_o(d_2)}{dx} &= -\frac{\mu_o i_o}{\pi} e^{-\alpha h}, \\
i &= i_o \sin \omega t, \qquad i_o = \text{const}, \qquad x = d_2.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Wyprowadzenie wartości funkcji $\varphi_o + \varphi_{o1}$ we wzorze (13) można znaleźć w pracy [1] rozwinięcia w całkę Fouriera pochodnej tej funkcji w [2].

2. ROZKŁAD POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO W PRZYPADKU $d_1 = 0$

Wzory (6), (9), (10), (13) pozwalają skonstruować rozkład pola przez odpowiednią superpozycję dla dowolnie położonych przewodów w obszarze 4. Nie są one jednak proste: mamy tu do czynienia z funkcjami nieelementarnymi, których wartości można otrzymać tylko na drodze numerycznego całkowania wyrażeń (6). Na przykładzie $d_1 = 0$, jako bardziej prostym, przedstawiamy tu pewne zalecenie ułatwiające technikę numeryczną.

Przypadek $d_1 = 0$ nie jest przy tym przypadkiem trywialnym, a odgrywa dużą rolę w praktyce transformatorowej, gdzie zachodzi konieczność badania wpływu ekranów miedzianych leżących na żeliwnej ścianie kadzi.

Jeśli $d_1 = 0$, to mamy:

$$\varphi_1 = -\frac{2\mu_o i_o}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_2\, e^{\alpha(d-h)+p_1 x} \cos \alpha y}{\alpha D_o}\, d\alpha,$$

$$\varphi_3 = -\frac{\mu_o i_o}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_2\, e^{\alpha(d-h)} [(1+K_3)\, e^{p_3 x} + (1-K_3)\, e^{-p_3 x}}{D_o} \cdot \frac{\cos \alpha y\, dx}{\alpha}, \tag{14}$$

$$D_o = (1+K_3)(1+K_2)\, e^{\delta_2 d} - (K_3-1)(K_2-1)\, e^{\delta_1 d}. \tag{15}$$

Ograniczamy się tu tylko do rozpatrzenia rozkładu pola w obszarze metalowym. Dla prostoty obliczeń wprowadzamy wielkości bezwymiarowe:

$$s = \alpha L, \quad Q = \mu_r \frac{\gamma_1}{\gamma_3}, \quad \mu_r = \frac{\mu_1}{\mu_o},$$

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y}{L}, \quad L = \frac{1}{\sqrt{\omega \mu_o \gamma_3}}, \tag{16}$$

$$E = \frac{\pi E_z}{2\mu_o i_o \omega}, \quad \bar{B}_x = \frac{\pi L B_x}{2\mu_o i_o}, \quad \bar{B}_y = \frac{\pi L B_y}{2\mu_o i_o}.$$

Wtedy zamiast (14) i (15) otrzymamy:

$$E_1 = -2j\mu_r \int_0^\infty \frac{p\, e^{-sh+\sqrt{jQ+s^2}\, x} \cos sy\, ds}{A\, e^{pd} - B\, e^{-pd}},$$

$$E_3 = -j \int_0^\infty \frac{e^{-sh} [C\, e^{px} - D\, e^{-px}] \cos sy\, ds}{A\, e^{pd} - B\, e^{-pd}}, \tag{17}$$

gdzie

$$j = \sqrt{-1}, \quad p = \sqrt{j+s^2},$$
$$C = \sqrt{jQ+s^2} + p\mu_r,$$
$$D = \sqrt{jQ+s^2} - p\mu_r,$$
$$A = C \cdot (s+p), \quad B = D \cdot (s-p).$$

We wzorach (17) wielkości h, d, x, y są bezwymiarowe (odniesione do L).

Numeryczne obliczanie wartości funkcji (17) formalnie nie przedstawia trudności, można zastosować metodę trapezów i zaprogramować obliczenia na maszynie cyfrowej. W praktyce nie jest to jednak sprawa zbyt prosta: dla większych wartości y ilość przedziałów całkowania musi być bardzo duża i czas obliczeń przekracza rozsądne granice. Aby czas obliczeń był maksymalnie mały przy spełnieniu określonej dokładności obliczeń można w wyrażeniach (17) dokonać pewnych uproszczeń. Na ogół $h > 10$, $\mu_r > 100$, $Q > 10$, a więc z dostateczną dokładnością można:

a) przyjąć przedział całkowania (0,1),

b) przyjąć w (17) $C = p\mu_r$, $D = -C$,

c) zamiast $\sqrt{s^2+jQ}$ przyjąć $\sqrt{jQ}$.

Wtedy wzory (17) przyjmą znacznie prostszą postać:

$$E_1 = -2j e^{\sqrt{jQ}\,x} \int_0^1 F(s)\cos sy\,ds,$$

$$E_3 = -j \int_0^1 G(s, x)\cos sy\,ds, \tag{18}$$

$$F = \frac{e^{-sh}}{(s+p)\,e^{pd}+(s-p)\,e^{-pd}},$$

$$G = (e^{px}+e^{-px})\,F(s).$$

Wzory (18) są prawdziwe dla przypadku, kiedy w obszarze 4 umieszczony jest jeden przewód z prądem i w punkcie $x = d_2+h$, $y = 0$.

Dla mających znaczenie praktyczne prądów trójfazowych i prądów płynących w dwóch równoległych przewodach (zakładamy, że suma prądów w przewodach jest równa 0) odpowiednie rozwiązania otrzymamy przez superpozycję rozwiązań (18). I tak dla prądu w dwóch przewodach (w punktach $y = \pm b$, $x = d_2+h$) otrzymamy:

$$E_1 = 4j\, e^{\sqrt{jQ}\,x} \int_0^1 F \sin sb \sin sy\,ds,$$

$$E_3 = -2j \int_0^1 G \sin sb \sin sy\,ds. \tag{19}$$

Dla prądu trójfazowego (przewody w punktach $y = \pm b$, $y = 0$, $x = d_2+h$):

$$E_1 = -4j\, e^{\sqrt{jQ}\,x} \int_0^1 \left[\cos sy\,(1-\cos sb)+j\sqrt{3}\,\sin sy \sin sb\right] F\,ds,$$

$$E_3 = -2j \int_0^1 \left[(1-\cos sb)\cos sy+j\sqrt{3}\,\sin sy \sin sb\right] G\,ds. \tag{20}$$

Bezwymiarowe składowe indukcji magnetycznej zgodnie ze wzorami (16) i (2) wyrażają się w zależności od E_i w sposób następujący:

$$\bar{B}_{iy} = -\frac{1}{j}\frac{\partial E_i}{\partial x}, \qquad \bar{B}_{ix} = \frac{1}{j}\frac{\partial E_i}{\partial y}. \tag{21}$$

Numeryczne obliczenia całek występujących we wzorach (19)÷(21) można wykonać w sposób następujący. Funkcje F i G należy zaaproksymować odcinkami prostych; wówczas

będziemy mieli do czynienia z sumami całek typu: $\int_{s_1}^{s_2} (\alpha_o s+\alpha_1)\sin sb \sin sy\, ds$, które są prostymi funkcjami elementarnymi. Uprzednio należy rozdzielić F i G na części rzeczywiste i urojone:

$$F = F_1 + jF_2, \qquad G = G_1 + jG_2,$$

$$F_1 = \frac{M_1 e^{-sh}}{M_1^2+M_2^2}, \qquad F_2 = -\frac{M_2 e^{-sh}}{M_1^2+M_2^2},$$

$$M_1 = [(s+R_1)e^{R_1 d}+(s-R_1)e^{-R_1 d}]\cos R_2 d - 2R_2 \operatorname{ch} R_1 d \sin R_2 d,$$

$$R_1 = \sqrt{\frac{R+s^2}{2}}, \qquad R_2 = \sqrt{\frac{R-s^2}{2}}, \qquad R = \sqrt{1+s^4}, \tag{22}$$

$$G_1 = F_1 R_3 - F_4 R_4, \qquad G_2 = F_1 R_4 + F_2 R_3,$$

$$R_3 = 2\operatorname{ch} R_1 x \cos R_2 x, \qquad R_4 = 2\operatorname{sh} R_1 x \sin R_2 x,$$

$$M_2 = [(s+R_1)e^{R_1 d}-(s-R_1)e^{-R_1 d}]\sin R_2 d + 2R_2 \operatorname{sh} R_1 d \cos R_2 d.$$

W przypadku $d_1 \neq 0$ odpowiednie wzory do (19)÷(22) są znacznie bardziej zawiłe i tu ich nie przytaczamy informując tylko, że w Instytucie Elektrotechniki (Oddział Łódzki) w oparciu o wyprowadzone tu wzory zostały wykonane przez mgra G. Miksę programy obliczeń na maszynę cyfrową Elliot-803 amplitud pola elektromagnetycznego i bezwymiarowych wartości strat odniesionych do wielkości $\gamma_i(2\mu_o i_o \omega/\pi)^2$. Programy są wykonane dla różnych parametrów b, h, μ_r, d, d_1 dla różnych wartości y i x. Pewne wnioski z obliczeń przedstawiamy w tej pracy.

Należy zwrócić uwagę na to, że wszystkie wielkości opisywane przy pomocy załączonych tablic oraz y na rys. 2 i 3 są bezwymiarowe, określone przez wzór (16).

Tablica 1

Amplitudy bezwymiarowe pola elektromagnetycznego i straty dla prądu trójfazowego dla: $d_1 = 1$, $y = 0$

x	Ampl. E_1	Ampl. B_{1y}	Ampl. B_{1x}	Straty
a) $b = 60$, $d = 0{,}6$, $h = 15$, $\mu_r = 1000$				
0	0,114402	1,401136	0,000298	0,013088
−0,29	0,009391	0,115012	0,000024	0,000088
—0,58	0,000771	0,009441	0,00002	0,000001
−0,87	0,000063	0,000775	0,00000	0,00000
—1,15	0,000005	0,000064	0,00000	0,00000
b) $b = 60$, $d = 0{,}6$, $\mu_r = 100$, $d_1 = 0{,}75$, $y = 0$				
0	0,109508	0,424400	0,000283	0,012008
−0,91	0,008995	0,034837	0,000023	0,000081
−1,83	0,000738	0,002860	0,000002	0,000001
−2,74	0,000061	0,000235	0,000000	0,000000
−3,65	0,000005	0,000019	0,000000	0,000000

Tablica 2

Rozkład bezwymiarowych amplitud pola elektromagnetycznego i strat dla prądu trójfazowego w zależności od d_1

Dane dla $y = x = 0$, $b = 60$, $d = 0{,}6$, $\mu_r = 1000$

d_1	Ampl. E_1	Ampl. B_{1y}	Ampl. B_{1x}	Straty
0,05	0,116	1,426	0,0003000	0,0135
0,75	0,115	1,408	0,000398	0,0132
1,00	0,114	1,401	0,0003	0,0130
1,5	0,113	1,385	0,0003	0,0128
2,0	0,112	1,369	0,0003	0,0125

Tablica 3

Rozkład bezwymiarowych amplitud pola elektromagnetycznego dla prądu trójfazowego i strat w zależności od grubości ekranu d

Dane dla $b = 60$, $h = 15$, $x = y = 0$, $\mu_r = 500$, $d_1 = 0{,}75$

d	Ampl. E_1	Ampl. B_{1y}	Ampl. B_{1x}	Straty
0,0001	2,532	21,928	0,00156	6,411
0,6	0,114	0,987	0,000295	0,013
1,0	0,069	0,418	0,000176	0,0047
1,5	0,045	0,272	0,000113	0,002
2,0	0,032	0,193	0,000079	0,001

Tablica 4

Rozkład amplitud bezwymiarowych pola elektromagnetycznego i strat w zależności od μ_r dla prądu trójfazowego

Dane dla $b = 60$, $h = 15$, $x = y = 0$, $d_1 = 0{,}75$, $d = 0{,}6$

μ_r	Ampl. E_1	Ampl. B_{1y}	Ampl. B_{1x}	Straty
100	0,1096	0,4244	0,000283	0,012
500	0,1139	0,9866	0,000295	0,013
1000	0,114	1,401	0,00297	0,013

Tablica 5

Rozkład bezwymiarowych amplitud pola elektromagnetycznego w ekranie dla prądu trójfazowego

Dane dla $b = 60$, $d = 2$, $d_1 = 0{,}75$, $h = 15$, $\mu_r = 500$, $y = 0$

x	Ampl. E_3	Ampl. B_{3y}	Ampl. B_{3x}	Straty
0,75	0,0311865	0,000685	0,000080	0,001015
1,25	0,032252	0,016421	0,000081	0,001047
1,75	0,035192	0,032718	0,000088	0,001238
2,25	0,044684	0,050187	0,000112	0,001997
2,75	0,063756	0,070923	0,000159	0,004065

3. WNIOSKI Z OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

Na podstawie wykonanych obliczeń numerycznych można wyciągnąć następujące wnioski.

a) Dla $\mu_r > 100$ w obszarze 1 (tj. dla $x \leqslant 0$) zanik amplitud pola elektromagnetycznego, a szczególnie strat, następuje bardzo szybko: dla praktycznych obliczeń można ograniczyć się w tym przypadku tylko do punktu $x = 0$. Ilustruje to tablica 1.

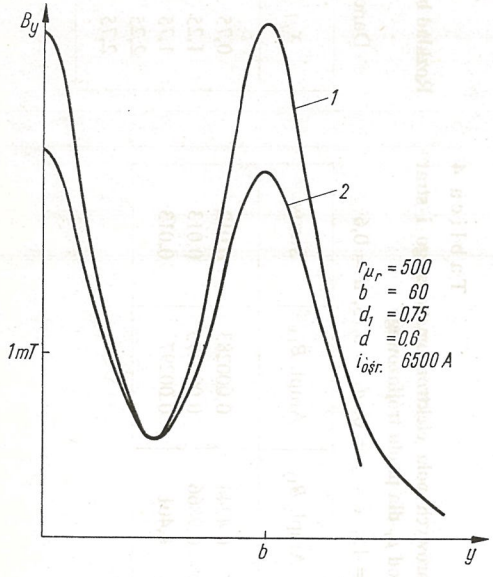
b) Wpływ szczeliny powietrznej (obszar 2) na rozkład pola jest bardzo mały, przynajmniej w zakresie $d_1 < 2$ (tablica 2).

c) Obserwuje się bardzo silny wpływ na rozkład pola i strat płyty metalowej (ekran, obszar 3); można uważać, że istnienie płyty o grubości 0,2 powoduje stokrotne zmniejszenie strat na powierzchni półprzestrzeni metalowej (tablica 3).

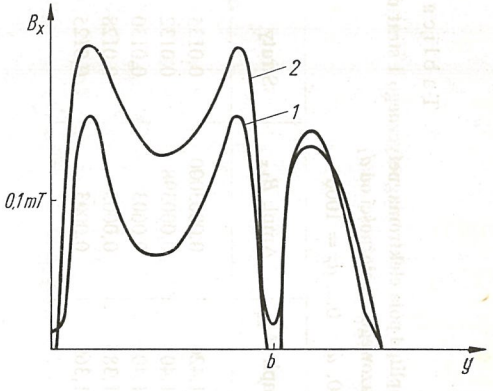
d) Wpływ parametru μ_r na rozkład strat w obszarach metalowych jest bardzo słaby, natomiast składowa B_y indukcji zależy od niego w sposób istotny (tablica 4).

e) W ekranującej płycie znacznie szybciej zmienia się amplituda składowej indukcji B_y w porównaniu z wielkościami pozostałymi (tablica 5).

Charakterystyczne rozkłady amplitud pola wzdłuż osi y ilustrują rys. 2 i 3.



Rys. 2. Charakterystyczny rozkład amplitudy składowej B_y dla $x = 0$
1 — krzywa teoretyczna, 2 — krzywa z pomiarów M. Kaźmierskiego



Rys. 3. Charakterystyczny rozkład amplitudy składowej B_x dla danych z rys. 2
1 — krzywa teoretyczna, 2 — krzywa z pomiarów M. Kaźmierskiego

Na rysunkach tych, dla porównania, przedstawiono też krzywe doświadczalne otrzymane przez mgra inż. M. Kaźmierskiego. Istniejące różnice ilościowe można tłumaczyć różnie: niecałkowita adekwatność modelu doświadczalnego i teoretycznego, niedokładność obliczeń numerycznych, niedokładność pomiaru itp. Jak się wydaje główną przyczyną jest fakt, że ponieważ w rozpatrywanym ośrodku występuje stal, to w rzeczywistości μ jest zmienną funkcją indukcji magnetycznej w przeciwieństwie do tego co założyliśmy.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. S. D. Kupalan, Teoria pola elektromagnetycznego, WNT, Warszawa 1967.
2. I. M. Ryżyk, I. S. Gradsztejn, Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów, PWN, Warszawa 1964.

S. APANASEWICZ

ELECTROMAGNETIC FIELD DISTRIBUTION IN A SCREENING SEMI-INFINITE SOLID DUE TO CURRENTS IN PARALLEL CONDUCTORS

Summary

In the article are presented formulas describing the electromagnetic field distribution on the surface of a screening semi-infinite solid due to currents in parallel conductors. This serves the purpose of estimating the effect of screening in electrical devices especially in transformers.

Numerical calculation and its comparison with the results of measurements are discussed.

S. APANASEWICZ

LA DISTRIBUTION DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE DANS LE SYSTÈME: UN GROUPE DE CONDUCTEURS PARALLÈLES, ÉCRAN, DEMI-ESPACE MÉTALLIQUE

Résumé

Dans cet article, pour l'étude des ecrans aux transformateurs, on a prèsenté des formules qui donnent la description de la distribution du champ électromagnétique provoqué par les courants électriques aux conducteurs parallèles à l'ecran placé devant la demi-espace metallique. On a donné aussi des résultats des calculs nummériques qui sont comparés avec ceux des mesurages.

S. APANASEWICZ

VERTEILUNG DES ELEKTROMAGNETISCHEN FELDES IM SYSTEM: GRUPPE PARALLELER LEITUNGEN, FLACHSCHIRM UND METALLISCHER HALBRAUM

Zusammenfassung

Diese Arbeit bezweckt die Ableitung mathematischer Formeln, die bei der Analyse von Flachschirmen in verschiedenen elektrotechnischen Anlagen, besonders bei Transformatoren nutzbar sind. Das theoretische Modell, worin die elektromagnetische Feldverteilung untersucht worden ist, bestand aus einer Gruppe paralleler, unendlich langer und unendlich dünner Leitungen, in denen die das elektromagnetische Feld erregenden Sinusströme flossen, und einer parallel verlaufenden metallischen Platte (Schirm) rationaler Stärke und von unendlichen übrigen Dimensionen sowie dazu parallel angebrachtem, metallischem Halbraum (Abb. 1).

Bei Voraussetzung, daß die magnetische Durchdringlichkeit des Metallraums unverändert bleibt, hat man — von Maxwell-Gleichungen ausgehend — die Formeln als Fourier-Integralle abgeleitet, die die elektromagnetische Feldverteilung in einem solchen Modell beschreiben. Für den Fall, wenn die Erregungsströme in zwei oder drei Leitungen fließen, wurden Programme für Rechenanaloge bearbeitet, und die Berechnungsergebnisse dargestellt. Zwecks Vergleich stellte man die theoretischen Ergebnisse mit den praktischen Resultaten der Versuche von Dipl.-Ing. M. Kaźmierski vom Elektrotechnischen Institut, Abt.

in Łódź, zusammen. Die qualitative Übereinstimmung der Amplituden magnetischer Induktion und des magnetischen Feldes sind in beiden Fällen zufriedenstellend, aber die theoretischen Werte sind im allgemeinen größer, als die praktischen, was der Autor durch wechselnde Durchdringlichkeit des Metallhalbraums erklärt.

С. АПАНАСЕВИЧ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СИСТЕМЕ: ГРУППА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОВОДОВ, ЭКРАН, МЕТАЛЛИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Р е з ю м е

В статье представлены формулы пригодные для анализа плоских экранов в разных электротехнических устройствах, особенно в трансформаторах. Теоретическая модель, в которой рассматривается распределение электромагнитного поля следующая: группа параллельных бесконечно длинных и бесконечно тонких проводов, в которых текут возбуждающие поле синусоидальные токи, параллельная к ним конечной толщины и бесконечная в остальных направлениях плита (экран) и параллельное к ней металлическое полупространство (рис. 1). Предполагая, что магнитная проницаемость экрана и полупространства постоянна, выведены из уравнений Максвелла формулы в виде интегралов Фурье описывающие распределение электромагнитного поля в этой системе. В случаях, когда возбуждающие токи текут в двух или трех проводах, разработаны программы расчета на цифровые машины и представлены некоторые итоги численного расчета. Теоретические данные сопоставлены с экспериментальными. Качественная согласованность амплитуд поля в обоих случаях хорошая, но теоретические числовые значения в общем больше экспериментальных (по мнению автора причиной этого явления является переменная магнитная проницаемость металла).

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1973, 19, z. 1, ss. 49-61

621.375.024

Maszynowa analiza tranzystorowych złożonych liniowych układów wzmacniających prądu stałego w oparciu o parametry czwórnika zastępczego

EWA TOTA-RAMISZ (KRAKÓW)

Instytut Techniki Jądrowej AGH w Krakowie

Otrzymano 3.12.1971

W artykule przedstawiono maszynową metodę analizy złożonych liniowych układów wzmacniających prądu stałego w oparciu o współczynniki macierzy przewodności i parametry robocze czwórnika zastępczego przy jednoczesnej analizie czułości parametrów roboczych na zmiany elementów obwodu.

Stosowane obecnie wzmacniacze są to rozbudowane układy, w których rolę jednego stopnia czwórnikowego spełnia kilka tranzystorów. Tego typu wieloprzyrządowe układy wykazują wiele zalet w porównaniu z układami jednostopniowymi, a mianowicie mogą zapewnić:

— odpowiednio duży poziom immitancji wejściowej lub wyjściowej,
— duży zakres dynamiki,
— dobre właściwości stabilizujące od zmian temperatury i parametrów układu.

Parametry robocze takich wzmacniaczy zależą w sposób dość skomplikowany od elementów układu i stąd zastosowanie maszynowych metod obliczeniowych przy ich projektowaniu stanowi duże ułatwienie i pozwala na głębsze poznanie ich właściwości.

1. OPIS STOSOWANEGO ALGORYTMU ANALIZY

1.1. Zależności podstawowe

W stosowanej tutaj analizie przyjęto algorytm oparty na opisie sieci wielowęzłowej przy pomocy metody napięć węzłowych według równania Kirchhoffa w formie macierzowej:

$$[I] = [Y] \cdot [U], \tag{1}$$

gdzie dla układu o ilości węzłów równej $n+1$:

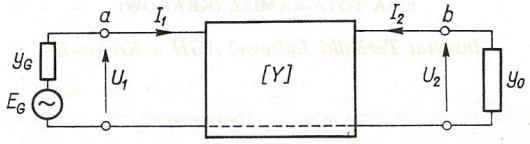
$[I]$ — macierz kolumnowa prądów źródłowych dopływających do poszczególnych węzłów,
$[Y]$ — kwadratowa macierz stopnia n admitancji własnych i wzajemnych węzłów układu,
$[U]$ — macierz kolumnowa napięć węzłowych.

Sieć opisaną równaniem (1) można dla ustalonych zacisków wejściowych i wyjściowych przekształcić w równoważny czwórnik, na wejściu którego znajduje się źródło sterujące

o admitancji Y_G i sile elektromotorycznej E_G lub prądzie I_G, a na wyjściu odbiornik o admitancji Y_o. Równania wiążące prądy i napięcia na zaciskach czwórnika mają postać:

$$\begin{bmatrix} EY_G \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_G+y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & Y_o+y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Aby sieć wielowęzłową zastąpić równoważnym czwórnikiem, należy więc wyrazić współczynniki macierzy [y] czwórnika przy pomocy elementów macierzy [Y] układu z równania (1). Potrzebne do tego celu zależności podaje tablica 1. Zależności te można otrzymać z równania (1) stosując twierdzenie Cramera oraz proste przekształcenia [2], [3].



Rys. 1. Układ wzmacniający jako czwórnik

Tablica 1

Związek współczynników macierzy [y] czwórnika zastępczego z macierzą admitancji układu

Lp.	Definicja współczynnika	Stosowane zależności
1.	Admitancja wejściowa przy zwartym wyjściu $y_{11} = \left(\frac{I_1}{U_1}\right) U_2 = 0$	$\frac{\Delta_{bb}}{\Delta_{aa,bb}}$
2.	Admitancja przejściowa przy zwartym wejściu $y_{12} = \left(\frac{I_1}{U_2}\right) U_1 = 0$	$-\frac{\Delta_{ba}}{\Delta_{aa,bb}}$
3.	Admitancja przejściowa przy zwartym wyjściu $y_{21} = \left(\frac{I_2}{U_1}\right) U_2 = 0$	$-\frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa,bb}}$
4.	Admitancja wyjściowa przy zwartym wejściu $y_{22} = \left(\frac{I_2}{U_2}\right) U_1 = 0$	$\frac{\Delta_{aa}}{\Delta_{aa,bb}}$

gdzie: $\Delta_{aa}, \Delta_{bb}, \Delta_{ab}, \Delta_{ba}, \Delta_{aa,bb}$, — dopełnienia algebraiczne macierzy [Y] układu.

Oprócz parametrów macierzy [y], czwórnik zastępczy charakteryzują również jego parametry robocze takie, jak wzmocnienie napięciowe, prądowe, wzmocnienie mocy, admitancja wejściowa i wyjściowa.

Parametry te zależą od wartości elementów układu, sposobu ich wzajemnego połączenia oraz od admitancji źródła i obciążenia. Tablica 2 podaje parametry robocze czwórnika zastępczego o jednym zacisku wspólnym wyrażone za pomocą współczynników jego macierzy [y].

Tablica 2

Parametry robocze czwórnika zastępczego wyrażone przy pomocy współczynników jego macierzy [y]

Lp.	Nazwa parametru roboczego	Definicja	Stosowane zależności
1	Wzmocnienie napięciowe	$K_{U12} = \frac{U_2}{U_1}$	$-\frac{y_{21}}{y_{22}+Y_o}$
2	Skuteczne wzmocnienie napięciowe	$K_{usk} = \frac{U_2}{E_G}$	$-\frac{y_{21}}{y_{22}+Y_o} \cdot \frac{Y_G}{Y_{we}+Y_G}$
3	Wzmocnienie prądowe	$K_i = \frac{I_2}{I_1}$	$\frac{y_{21} \cdot Y_o}{\Delta y + y_{11} Y_o}$
4	Skuteczne wzmocnienie prądowe	$K_{isk} = \frac{I_2}{I_G}$	$\frac{y_{21} Y_o}{\Delta y + y_{11} Y_o} \frac{Y_{we}}{Y_{we}+Y_G}$
5	Admitancja wejściowa	$Y_{we} = \frac{I_1}{U_1}$	$\frac{\Delta y + y_{11} Y_o}{y_{22}+Y_o}$
6	Admitancja wyjściowa	$Y_{wy} = \frac{I_2}{U_2}$	$\frac{\Delta y + y_{22} Y_G}{y_{11}+Y_G}$
7	Skuteczne wzmocnienie mocy	$K_p = \frac{\lvert U_2 \rvert^2 G_o}{\frac{\lvert I_G \rvert^2}{4G_G}}$	$4G_G G_o \left\lvert \frac{K_{U12}}{Y_{we}+Y_G} \right\rvert^2$
gdzie: $\Delta y = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}$			

Tablica 3

Parametry funkcji wyrażonej zależnością (2)

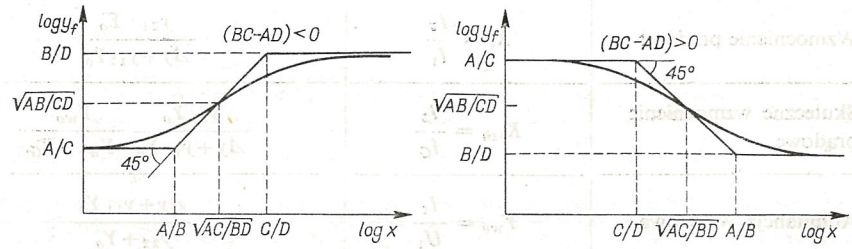
y_f	x	A	B	C	D	A/C	B/D	C/D	A/B	BC/AD
Y_{we}	Y_o	Δy	y_{11}	y_{22}	1	$\Delta y/y_{22}$	y_{11}	y_{22}	$\Delta y/y_{11}$	$\frac{y_{11}y_{22}}{\Delta y}$
Y_{wy}	Y_G	Δy	y_{22}	y_{11}	1	$\Delta y/y_{11}$	y_{22}	y_{11}	$\Delta y/y_{22}$	$\frac{y_{11}y_{22}}{\Delta y}$
K_i	Y_o	0	y_{21}	Δy	y_{11}	0	y_{21}/y_{11}	$\Delta y/y_{11}$	0	∞
K_{u12}	Y_o	$-y_{21}$	0	y_{22}	1	$-y_{21}/y_{22}$	0	y_{22}	∞	0
K_{isk}	Y_G	K_i	0	Y_{we}	1	K_i/Y_{we}	0	Y_{we}		0
K_{usk}	Y_G	0	K_{u12}	Y_{we}	1	0	K_{u12}	Y_{we}		∞

1.2. Analiza układów wzmacniających przy zmianie admitancji źródła i obciążenia

W celu oceny zależności parametrów układu czwórnikowego od admitancji źródła i obciążenia można te parametry przedstawić przy pomocy funkcji typu [1], [3]:

$$y_f = \frac{A+Bx}{C+Dx}, \tag{3}$$

gdzie wartości współczynników A, B, C, D oraz zmiennych x i y_f zgodnie z zależnościami wyszczególnionymi w tab. 2 podano w tablicy 3.



Rys. 2. Przebieg funkcji wyrażonej zależnością (3)

Funkcję wyrażoną zależnością (3) można przedstawić w skali podwójnie logarytmicznej w postaci krzywych podanych na rys. 2. Jeśli $BC/AD < 1$, to przebieg funkcji (3) jest malejący, a jeśli $BC/AD > 1$, to funkcja ta jest rosnąca.

Na podstawie zależności (3) i tablicy 3 można wykreślić przebiegi admitancji wyjściowej w zależności od admitancji źródła Y_G oraz przebiegi admitancji wejściowej, wzmocnienia napięciowego, prądowego i wzmocnienia mocy od admitancji obciążenia Y_o.

Jeśli $y_{11}y_{22}/\Delta y < 1$, to admitancja wejściowa układu maleje od wartości równej $\Delta y/y_{22}$ przy $Y_o < y_{22}$ do wartości równej y_{11} dla $Y_o > \Delta y/y_{11}$, a admitancja wyjściowa maleje od wartości równej $\Delta y/y_{11}$ dla $Y_G < y_{11}$ do wartości równej y_{22} dla $Y_G > \Delta y/y_{22}$.

Jeśli $y_{11}y_{22}/\Delta y > 1$, to admitancja wejściowa rośnie od y_{11} dla $Y_o < y_{22}$ do $\Delta y/y_{22}$ przy $Y_o > \Delta y/y_{11}$, a admitancja wyjściowa rośnie od y_{22} dla $Y_G < y_{11}$ do $\Delta y/y_{11}$ dla $Y_G > y/y_{22}$.

Jeśli Y_o rośnie, to wzmocnienie K_{u12} maleje od wartości $-y_{21}/y_{22}$ dla $Y_o \ll y_{22}$ do zera, a wzmocnienie prądowe K_i rośnie od zera do wartości y_{21}/y_{11} dla $Y_o \gg \Delta y/y_{11}$.

1.3. Analiza czułości roboczych parametrów złożonych układów na zmiany elementów obwodu

Jeśli oblicza się parametry układu stosując zależności wyprowadzone z macierzy admitancyjnej sieci (tab. 1 i 2), to opierając się również na tych zależnościach można przeprowadzić analizę czułości układu przy małych zmianach elementów obwodu. Jeśli parametr roboczy A układu jest funkcją wielu elementów $X_1, \ldots, X_n$:

$$A = f(X_1, X_2, \ldots X_n), \tag{4}$$

to stosując twierdzenie o różniczce zupełnej dla funkcji wielu zmiennych można określić zmianę danego parametru roboczego dA jako:

$$dA = \frac{\partial A}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial A}{\partial X_2} dX_2 + \ldots + \frac{\partial A}{\partial X_n} dXn. \tag{5}$$

Przy założeniu, że przyrosty bezwzględne są odpowiednio małe:
$|\Delta X_i| \ll |X_i|$ przechodząc do przyrostów skończonych i przekształcając zależność (5) otrzymujemy równanie:

$$\frac{\Delta A}{A} \cdot A = \frac{\partial A}{\partial X_1} \cdot X_1 \cdot \frac{\Delta X_1}{X_1} + \frac{\partial A}{\partial X_2} \cdot X_2 \cdot \frac{\Delta X_2}{X_2} + \ldots + \frac{\partial A}{\partial X_n} \cdot X_n \cdot \frac{\Delta X_n}{X_n}, \tag{6}$$

co możemy zapisać też w następujący sposób:

$$\frac{\Delta A}{A} = S^A_{X_1} \cdot \frac{\Delta X_1}{X_1} + S^A_{X_2} \cdot \frac{\Delta X_2}{X_2} + \ldots + S^A_{Xn} \cdot \frac{\Delta X_n}{X_n}, \tag{7}$$

gdzie

$$S^A_{X_i} = \frac{X_i}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial X_i} \tag{8}$$

jest to czułość parametru A na małą zmianę i-tego elementu.

Względny przyrost wielkości A przy zmianie wielu elementów oblicza się więc jako sumę iloczynów czułości $S^A_{X_i}$ i względnych przyrostów $\frac{\Delta X_i}{X_i}$ elementów układu.

Przy zastosowaniu zależności podanych w tab. 2 obliczenie pochodnych cząstkowych polega głównie na obliczeniu dopełnień algebraicznych macierzy o wyznacznikach Δ, Δ_{ab}, Δ_{aa} w ten sam sposób, jak obliczenie samych wyznaczników [4], gdyż pochodna cząstkowa wyznacznika względem jednego z elementów sieci jest równa dopełnieniu algebraicznemu tego elementu. Jeśli element G jest włączony pomiędzy węzłami l i m, to następujące rzeczywiste elementy macierzy $[Y]$, tj. przewodności, są funkcjami elementu G: G_{ll}, G_{lm}, G_{ml}, G_{mm} i wtedy pochodna cząstkowa względem G, np. dla wyznacznika Δ_{ab}, jest równa sumie:

$$\frac{\partial \Delta_{ab}}{\partial G} = \frac{\partial \Delta_{ab}}{\partial G_{ll}} \cdot \frac{\partial G_{ll}}{\partial G} + \frac{\partial \Delta_{ab}}{\partial G_{lm}} \cdot \frac{\partial G_{lm}}{\partial G} + \frac{\partial \Delta_{ab}}{\partial G_{ml}} \cdot \frac{\partial G_{ml}}{\partial G} + \frac{\partial \Delta_{ab}}{\partial G_{mm}} \cdot \frac{\partial G_{mm}}{\partial G} \tag{9}$$

dla elementu biernego

$$\frac{\partial G_{lm}}{\partial G} = \frac{\partial G_{ml}}{\partial G} = -1, \qquad \frac{\partial G_{ll}}{\partial G} = \frac{\partial G_{mm}}{\partial G} = +1 \tag{10}$$

i

$$\frac{\partial \Delta_{ab}}{\partial G} = \frac{\partial \Delta_{ab}}{\partial G_{ll}} + \frac{\partial \Delta_{ab}}{\partial G_{mm}} - \frac{\partial \Delta_{ab}}{\partial G_{lm}} - \frac{\partial \Delta_{ab}}{\partial G_{ml}}. \tag{11}$$

Jeśli element G jest włączony między węzłem l a węzłem zerowym, to tylko przewodność G_{ll} jest funkcją G i wyrażenia na pochodne cząstkowe wyznaczników Δ_{aa}, Δ_{ab} i Δ odpowiednio się upraszczają, a mianowicie:

$$\frac{\partial \Delta_{aa}}{\partial G} = \frac{\partial \Delta_{aa}}{\partial G_{ll}}; \qquad \frac{\partial \Delta_{ab}}{\partial G} = \frac{\partial \Delta_{ab}}{\partial G_{ll}}; \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial G} = \frac{\partial \Delta}{\partial G_{ll}}. \tag{12}$$

Element G_{lm} może być również nachyleniem charakterystyki G_m źródła sterowanego włączonego pomiędzy węzłami l i m, a sterowanego napięciem pomiędzy węzłami k i m. Wtedy wielkość G_m wchodzi w skład następujących przewodności: G_{lk} i G_{mm} (ze znakiem plus) oraz G_{lm} i G_{mk} (ze znakiem minus). W tym przypadku pochodna cząstkowa względem nachylenia charakterystyki G_m źródła sterowanego np. dla wyznacznika Δ_{ab} wyraża się zależnością:

$$\frac{\partial \Delta_{ab}}{\partial G_{m(lmk)}} = \frac{\partial \Delta_{ab}}{\partial G_{lk}} + \frac{\partial \Delta_{ab}}{\partial G_{mm}} - \left(\frac{\partial \Delta_{ab}}{\partial G_{lm}} + \frac{\partial \Delta_{ab}}{\partial G_{mk}} \right). \tag{13}$$

Tablica 4

Pochodne cząstkowe niektórych parametrów roboczych czwórnika wyrażone za pomocą wyznacznika i dopełnień algebraicznych macierzy admitancyjnej

Lp.	Oznaczenie	Stosowane zależności
1	$\frac{\partial K_{uo}}{\partial G}$	$\frac{1}{\Delta_{aa}} \frac{\partial \Delta_{ab}}{\partial G} - \frac{\Delta_{ab}}{(\Delta_{aa})^2} \cdot \frac{\partial \Delta_{aa}}{\partial G}$
2	$\frac{\partial Y_{weo}}{\partial G}$	$\frac{1}{\Delta_{aa}} \frac{\partial \Delta}{\partial G} - \frac{\Delta}{(\Delta_{aa})^2} \cdot \frac{\partial \Delta_{aa}}{\partial G}$
3	$\frac{\partial \Delta_i}{\partial G_{lm}}$	$\Delta_{ll} + \Delta_{mm} - (\Delta_{lm} + \Delta_{ml})$ $\Delta_{abll} + \Delta_{abmm} - (\Delta_{ablm} + \Delta_{abml})$ $\Delta_{aall} + \Delta_{aamm} - (\Delta_{aalm} + \Delta_{aaml})$
4	$\frac{\partial \Delta_i}{\partial G_{ll}}$	Δ_{ll}, Δ_{abll}, Δ_{aall}
5	$\frac{\partial \Delta_i}{\partial G_{m(lmk)}}$	$\Delta_{lk} + \Delta_{mm} - (\Delta_{lm} + \Delta_{mk})$ $\Delta_{ablk} + \Delta_{abmm} - (\Delta_{ablm} + \Delta_{abmk})$ $\Delta_{aalk} + \Delta_{aamm} - (\Delta_{aalm} + \Delta_{aamk})$
6	$\frac{\partial \Delta_i}{\partial G_{m(lok)}}$	Δ_{lk}, Δ_{ablk}, Δ_{aalk}

Przy obliczaniu współczynników czułości można więc wyróżnić następujące przypadki:

1. przewodność G włączona pomiędzy węzłami l i m;
2. przewodność G włączona pomiędzy węzłem l-tym a węzłem odniesienia;
3. sterowane źródło prądowe o nachyleniu charakterystyki G_m włączone pomiędzy węzłem l i m, a sterowane napięciem pomiędzy węzłami k i m $G_{m(lmk)}$;
4. sterowane źródło prądowe G_m włączone pomiędzy węzłem l a węzłem zerowym $G_{m(lok)}$.

Dla każdego z tych przypadków odpowiednie zależności na pochodne cząstkowe wyznaczników układu podano w tablicy 4.

2. OPIS OPRACOWANEGO PROGRAMU

W oparciu o przedstawione uprzednio zależności opracowano program obliczeniowy w języku ODRA-ALGOL dla maszyny cyfrowej ODRY-1204 o pojemności pamięci operacyjnej 16 000 słów 24-bitowych.

W wyniku obliczeń przy pomocy tego programu otrzymuje się wartości współczynników macierzy $[y]$ i parametrów roboczych czwórnika zastępczego oraz parametry funkcji w równaniu (3) i wartości czułości niektórych parametrów roboczych na zmiany elementów obwodu.

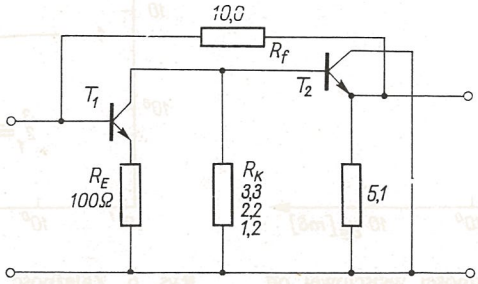
Program ten zawiera dwie procedury standardowe [6], a mianowicie procedurę służącą do obliczenia wyznacznika macierzy o elementach rzeczywistych oraz procedurę pozwalającą na skreślenie w danej macierzy dowolnego wiersza i kolumny.

Punktem wyjścia do obliczeń jest macierz przewodności rzeczywistych otrzymana dla schematu zastępczego układu w postaci sieci wielowęzłowej zawierającej przewodności rzeczywiste oraz prądowe źródła sterowane.

Do automatycznego utworzenia macierzy sieci służy oddzielny program [7]. Opracowany program zajmuje 3290 komórek pamięci operacyjnej maszyny. Jako urządzenie wejściowe wykorzystuje się czytnik, a wyjściem jest dziurkarka 8-kanałowej taśmy papierowej. Czas obliczeń dla ilości węzłów układu mniejszej niż 5 wynosi kilka sekund, a dla liczby węzłów $6 \div 10$ nie przekracza kilkunastu sekund.

3. PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA

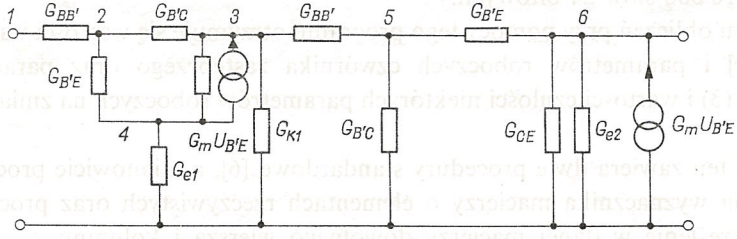
Jako przykład ilustrujący zastosowanie opracowanej metody obliczeniowej podano wyniki analizy niesymetrycznego wzmacniacza prądu stałego złożonego z tranzystorów w układzie wspólnego emitera i wspólnego kolektora. Rys. 3 przedstawia uproszczony schemat układu, a rysunek 4 schemat zastępczy przy wykorzystaniu modelu tranzystora typu „hybryd π" dla małych sygnałów.



Rys. 3. Uproszczony schemat elektryczny badanego wzmacniacza

Obliczenia przeprowadzono dla czterech odmian tego układu (R_K = 3,3, 2,2 i 1,2 kΩ przy $R_F = 0$ oraz R_K = 3,3 kΩ i R_F = 10 kΩ), stosując następujące wartości parametrów tranzystorów: $G_{BB'} = 20$ mS, $G_m = 40$ mS, $G_{B'C} = 0{,}001$ mS, $G_{B'E} = 0{,}25$ mS, $G_{CE} =$ $= 0{,}025$ mS. Wartości te odpowiadają parametrom tranzystorów BF520 dla $U_{KE} = 4$ V

i $I_K = 1$ mA. Tablica 5 przedstawia wyniki obliczeń wzmocnienia napięciowego dla $G_o =$ $= 10$ mS, przewodności y_{12} oraz maksymalnego wzmocnienia mocy przy dopasowaniu dla opisanych czterech odmian układu.

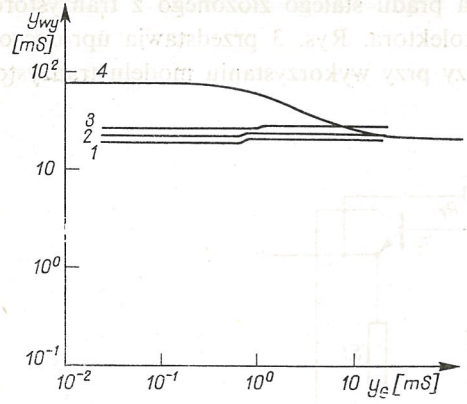


Rys. 4. Schemat zastępczy badanego wzmacniacza

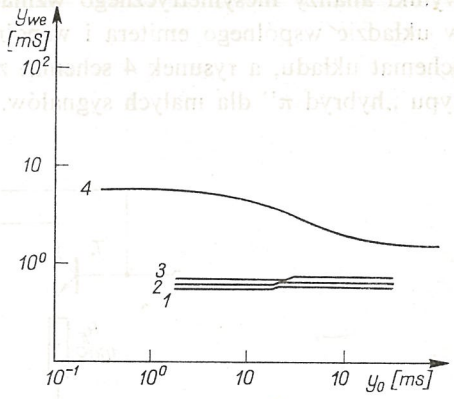
Tablica 5

Wyniki obliczeń dla układu podanego na rys. 3

Nr odmiany układu	1	2	3	4
R_{K1} [kΩ]	3,3	2,2	1,2	3,3
R_F[kΩ]				10
K_{u12}	30	20	11,9	30
Y_{11} [ms]	0,72	0,73	0,74	1,72
$K_{p\max} \cdot 10^3$	15,3	7,57	2,57	2,96



Rys. 5. Zależność przewodności wyjściowej od przewodności źródła dla różnych odmian badanego wzmacniacza



Rys. 6. Zależność przewodności wejściowej od przewodności obciążenia dla różnych odmian badanego wzmacniacza

Rysunek 5 przedstawia zależność przewodności wyjściowej od przewodności źródła, a rysunki 6 i 7 przedstawiają kolejno zależność przewodności wejściowej oraz wzmocnienia napięciowego i prądowego układu od przewodności obciążenia.

Tablica 6

Czułość wzmocnienia napięciowego na zmiany elementów układu

Nr odmiany układu / Czułość S	1		2		3		4	
	$G_o = 0$	$G_o = 10$ mS	$G_o = 0$	$G_o = 10$ mS	$G_o = 0$	$G_o = 10$ mS	$G_o = 0$	$G_o = 10$ mS
$S_{G_{K1}}$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$S_{G_{m1}}$	0,37	0,37	0,36	0,36	0,35	0,35	0,37	0,38
$S_{G_{e1}}$	−1,0	−1,0	−1,0	−1,0	−1,0	−1,0	−1,0	−1,0
$S_{G_{B'E1}}$	−0,033	−0,033	−0,033	−0,033	−0,033	−0,033	−0,013	−0,012
$S_{G_{B'C2}}$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$S_{G_{e2}}$	−0,005	−0,005	−0,005	−0,005	−0,005	−0,005	−0,005	−0,05
$S_{G_{m2}}$	−1,98	−1,98	−1,99	−1,99	−1,99	−1,99	−1,99	−1,98

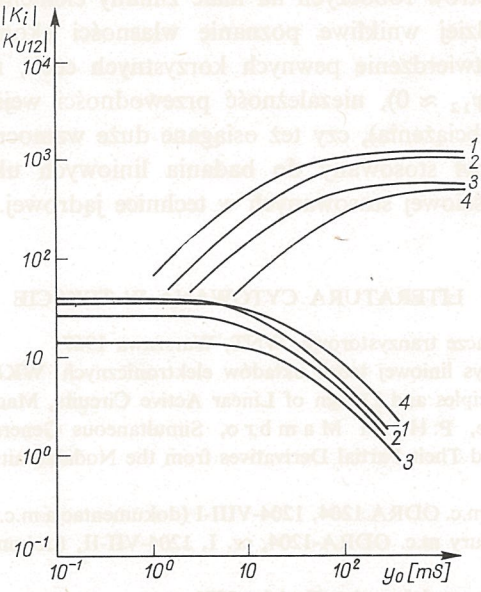
[57]

Tablica 7

Czułość przewodności wejściowej na zmiany elementów układu

Nr odmiany układu / Czułość S	1		2		3		4	
	$G_o = 0$	$G_o = 10$ mS	$G_o = 0$	$G_o = 10$ mS	$G_o = 0$	$G_o = 10$ mS	$G_o = 0$	$G_o = 10$ mS
$S_{G_{K1}}$	1,0	0,98	1,1	0,99	1,05	0,995	0,15	0,16
$S_{G_{m1}}$	−0,3	−0,2	−0,055	−0,012	0,14	0,15	3,1	2,8
$S_{G_{e1}}$	0,3	0,32	0,34	0,35	0,37	0,37	0,75	0,70
$S_{G_{B'E1}}$	0,12	0,12	0,12	0,12	0,11	0,11	0,008	0,012
$S_{G_{e2}}$	0,01	0,006	0,008	0,005	0,006	0,005	0,0015	0,0011
$S_{G_{B'C2}}$	0,01	0,008	0,006	0,005	0,003	0,003	0,0012	0,003
$S_{G_{m2}}$	0,98	0,66	1,0	0,67	0,98	0,88	0,85	0,75

Tablica 6 podaje wartość czułości współczynnika wzmocnienia napięciowego, a tablica 7 wartości czułości przewodności wejściowej przy zmianach elementów obwodu dla układu nieobciążonego i dla przewodności obciążenia $G_o = 10$ mS.



Rys. 7. Zależność wzmocnienia napięciowego K_{u12} i prądowego K_i od przewodności obciążenia dla różnych odmian badanego wzmacniacza

Z analizy podanych tutaj wyników obliczeń dla badanego układu nasuwają się następujące wnioski:

— jeśli maleje oporność w kolektorze pierwszego tranzystora R_K, to maleje wzmocnienie napięciowe i prądowe i tym samym wzmocnienie mocy, a rośnie nieznacznie przewodność wejściowa i wyjściowa układu;

— dla układu bez równoległego sprzężenia zwrotnego przewodność wejściowa (wyjściowa) prawie nie zależy od przewodności obciążenia (źródła); w warunkach dopasowania przewodność źródła (obciążenia) jest bliska wartości $y_{11}(y_{22})$;

— układ wykazuje największą czułość wzmocnienia napięciowego i przewodności wejściowej przy zmianach współczynników G_{m1} i G_{m2} tranzystorów i przy zmianach elementu sprzężenia zwrotnego G_{e1}, przy czym czułość układu obciążonego jest mniejsza niż nieobciążonego; na skutek stabilizującego wpływu opornika w emiterze pierwotnego tranzystora — R_{e1}, wpływ zmian współczynnika G_{m1} jest mniejszy niż wpływ zmian G_{m2} i to tym bardziej, im mniejsza jest wartość oporności R_K.

4. WNIOSKI

Opisana tutaj metoda postępowania przy analizie złożonych liniowych tranzystorowych układów wzmacniających może mieć zastosowanie do badania wzmacniaczy prądu stałego, jak również wzmacniaczy szerokopasmowych lub impulsowych dla średniego zakresu częstotliwości ich pasma.

Przy pomocy opracowanego programu można badać związki parametrów roboczych układu ze współczynnikami macierzy [y] czwórnika oraz dokonać analizy zmian tych parametrów przy zmianie przewodności źródła i obciążenia i równocześnie przeprowadzić analizę czułości parametrów roboczych na małe zmiany elementów obwodu.

Umożliwia to bardziej wnikliwe poznanie własności skomplikowanych układów, porównanie ich oraz stwierdzenie pewnych korzystnych cech, np. brak oddziaływania z wyjścia na wejście ($y_{12} \approx 0$), niezależność przewodności wejściowej (wyjściowej) od przewodności źródła (obciążenia), czy też osiągane duże wzmocnienie mocy w układzie.

Opisany program był stosowany do badania liniowych układów wzmacniających o dużej impedancji wejściowej stosowanych w technice jądrowej.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. Golde, Wzmacniacze tranzystorowe, WNT, Warszawa 1967.
2. M. Grobelny, Zarys liniowej teorii układów elektronicznych, WKŁ, Warszawa 1967.
3. M. G. Ghausi, Principles and Design of Linear Active Circuits, Mac Graw Hill Book C., 1965.
4. O. P. D. Cutteridge, P. H. di Mambro, Simultaneous Generation of the Coefficients of Network Polynomials and Their Partial Derivatives from the Nodaladmittance Matrix, El. Let., v. 6, Nr 10, 1970.
5. Systemy programowania m.c. ODRA 1204, 1204-VIII-I (dokumentacja m.c. ODRA 1204), Wrocław1970
6. ODRA ALGOL, Procedury m.c. ODRA-1204, cz. I, 1204-VII-II, (dokumentacja m.c. ODRA 1204), Wrocław 1970.
7. E. Tota-Ramisz, Praca doktorska, Kraków 1971.

E. TOTA-RAMISZ

COMPUTER ANALYSIS OF COMPLICATED LINEAR TRANSISTOR DIRECT CURRENT AMPLIFIERS BASED ON TWOPORT PARAMETERS

Summary

Computer analysis of direct current transistor amplifiers based on the replacement of complicated network by linear twoport is described.

Relations between circuit and twoport parameters and changes of parameters with change of source or load admittance are considered and also relative changes of value of the circuit parameters by small relative changes of the parameters of the circuit elements are determined.

Example of application and results of computation are given.

E. TOTA-RAMISZ

MASCHINELLE ANALYSE VERSTÄRKENDER, ZUSAMMENGESETZTER LINEARGLEICHSTROM-TRANSISTORENSYSTEME IN ANLEHNUNG AN PARAMETER EINES ERSATZVIERPOLS

Zusammenfassung

Es wurde eine maschinelle Analysenmethode verstärkter, zusammengesetzter Lineartransistorensysteme für Gleichstrom dargestellt, die Prüfung von Zusammenhängen der Arbeitsparameter des Systems mit Matrixbeiwerten [y] eines Ersatzvierpols, Änderungsanalyse dieser Parameter bei Admitanzänderung der

Quelle und Belastung sowie Empfindlichkeitsanalyse der Arbeitsparameter auf Änderungen von Kreiselementen ermöglicht.

Angeführte Analysenergebnisse erläutern die Anwendung des in Anlehnung an den dargestellten Algorythmus erarbeiteten Berechnungsprogramms.

Э. ТОТА-РАМИШ

МАШИННЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА СЛОЖНЫХ ТРАНЗИСТОРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УСИЛИТЕЛЬНЫХ СХЕМ ПОСТОЯННОГО ТОКА ОБОСНОВАННЫЙ НА ПРИВЕДЕНИИ СХЕМЫ К ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКУ

Р е з ю м е

В статье рассмотрен метод анализа сложных транзисторных усилительных схем постоянного тока обоснованный на приведении схемы к четырехполюснику, для которого исследуется связь схемных функций с параметрами четырехполюсника и изменения схемных функций при изменениях проводимости источника и нагрузки, а также определяются относительные приращения схемных функций при малых относительных приращениях параметров элементов.

Приведен пример применения и результаты вычислений.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1973, 19, z. 1, ss. 63-75

621.317.63

Analiza i projektowanie nieliniowego członu operacyjnego modelującego dynamiczne pętle histerezy

ZDZISŁAW CZYŻYKOWSKI (ŁÓDŹ)

Ośrodek Elektronicznej Techniki Obliczeniowej Politechniki Łódzkiej

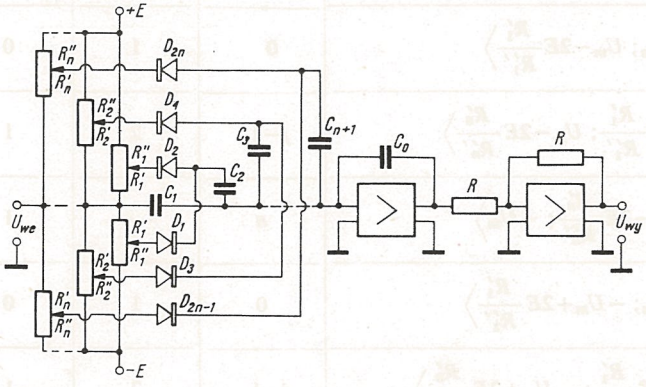
Otrzymano 3.1.1972

W pracy podano analizę i projektowanie pewnego układu zawierającego wzmacniacz operacyjny. Podany układ modeluje dynamiczne symetryczne i niesymetryczne pętle histerezy oraz luz i może stanowić standardowe wyposażenie maszyny analogowej.

1. WSTĘP

Obecnie coraz częściej przy rozwiązywaniu konkretnych zagadnień fizycznych stosujemy technikę analogową. Okazuje się jednak, że nie wszystkie zagadnienia często występujące w praktyce jesteśmy w stanie rozwiązać dysponując typowymi liniowymi i nieliniowymi członami operacyjnymi maszyny analogowej.

Brak w wyposażeniu maszyny analogowej elementów pozwalających modelować dynamiczne pętle w sposób dość znaczny ogranicza możliwości analogowej techniki obliczeniowej w dziedzinie badania dynamicznych stanów pracy układów zawierających rdzeń magnetyczny itp.



Rys. 1. Schemat układu modelującego dynamiczne symetryczne i niesymetryczne pętle

Nieliczni autorzy [1], [3], [4], [5] w swych publikacjach podają specjalne układy elektroniczne, które to układy pozwalają na mniej lub bardziej dokładne odwzorowanie rzeczy-

wistych własności materiałów magnetycznych. Proponowane układy są na ogół skomplikowane, a w pracach brakuje określenia wpływu zmian poszczególnych parametrów układów na ich charakterystyki we-wy. Wobec powyższych faktów autorzy nie podejmowali żadnych kroków w kierunku syntezy.

Niniejsza praca stanowi próbę przedstawienia analizy i projektowania pewnego nieliniowego członu operacyjnego, przy pomocy którego możemy modelować dynamiczne symetryczne i niesymetryczne pętle. Schemat rozpatrywanego układu przedstawia rys. 1.

2. ANALIZA MATEMATYCZNA UKŁADU

Założenia

Napięcie wejściowe jest przemienne o wartości maksymalnej U_m.
Oprócz tego:

$$E = U_m,$$
$$R_1' < R_2' < R_3' < \ldots < R_n',$$
$$R_1'' > R_2'' > R_3'' > \ldots > R_n'',$$
$$R_1' < R_1''; \; R_2' < R_2''; \ldots R_n' < R_n''.$$

Tablica 1

Wartości współczynników i wskaźników stałej całkowania k dla odpowiednich przedziałów zmian napięcia U_{we}

Poziom U_{we}	$m(U_{we})$	$j(U_{we})$	$A(U_{we})$	$B(U_{we})$
$\left\langle 0; E\frac{R_1'}{R_1''}\right\rangle$	0	—	0	0
$\left\langle E\frac{R_1'}{R_1''}; U_m\right\rangle$	n	—	−1	0
$\left\langle U_m; U_m-2E\frac{R_1'}{R_1''}\right\rangle$	0	1	0	1
$\left\langle U_m-2E\frac{R_1'}{R_1''}; U_m-2E\frac{R_n'}{R_n''}\right\rangle$	$j-1$	2	1	1
$\left\langle U_m-2E\frac{R_n'}{R_n''}; -U_m\right\rangle$	n	—	1	0
$\left\langle -U_m; -U_m+2E\frac{R_1'}{R_1''}\right\rangle$	0	1	0	−1
$\left\langle -U_m+2E\frac{R_1'}{R_1''}; -U_m+2E\frac{R_n'}{R_n''}\right\rangle$	$j-1$	2	−1	−1
$\left\langle -U_m+2E\frac{R_n'}{R_n''}; U_m\right\rangle$	n	—	−1	0

Pracę układu rozpatrujemy od chwili gdy napięcie U_{we} zaczyna rosnąć od zera. Stan pracy układu zależy od poziomu napięcia U_{we}. Równanie różniczkowe opisujące zachowanie się układu w pełnym zakresie zmian wartości napięcia U_{we} przedstawia zależność (1):

$$\frac{dU_{wy}}{dt} - A^*(U_{we})\frac{dU_{we}}{dt} = 0. \tag{1}$$

Wartość współczynnika $A^*(U_{we})$ zależy od poziomu napięcia wymuszającego U_{we}.

Po odpowiednim scałkowaniu równania (1) otrzymamy:

$$U_{wy}(t) = \frac{1}{C_o}\sum_{l=0}^{m(U_{we})} C_{l+1}\, U_{we}(t) + k. \tag{2}$$

Dla całego rozpatrywanego przedziału zmian wartości napięcia U_{we} możemy stałą całkowania przedstawić jako:

$$k = \frac{1}{C_o}\left[A(U_{we})\sum_{l=1}^{m(U_{we})} C_{l+1} E\frac{R'_l}{R''_l} + B(U_{we})\sum_{j(U_{we})}^{n} C_{j+1}\left(U_m - E\frac{R'_j}{R''_j}\right)\right]. \tag{3}$$

Wartości współczynników $A(U)$, $B(U)$ oraz wskaźników $m(u)$, $j(u)$ dla poszczególnych przedziałów zmian napięcia U_{we} przedstawia tablica 1. Podstawiając odpowiednie (przedstawione w tablicy 1) wartości współczynników A, B oraz wskaźników j, m do zależności (2) otrzymamy równania opisujące zachowanie się układu w konkretnych przedziałach zmian napięcia wymuszającego.

Zakładając przy tym sinusoidalny charakter zmian napięcia U_{we} otrzymamy zależności przedstawione w tablicy 2.

3. PROJEKTOWANIE UKŁADU

Obecnie podany zostanie sposób wyznaczania parametrów układu (pojemności i oporności), jak również określenie wpływu zmian parametrów układu na jego charakterystykę $U_{wy} = f(U_{wo})$. Rozpatrywany układ wykorzystajmy do modelowania dynamicznych pętli histerezy w przedziale do kolana krzywej magnesowania.

Punktem wyjścia do projektowania jest pierwotna krzywa magnesowania modelowanego materiału. Zakładamy ilość odcinków linearyzacji $(n+1)$, dokonujemy następnie linearyzacji $(n+1)$ odcinkowej, przy czym jak wspomniano wyżej nasza linearyzacja kończy się na kolanie tej krzywej. Dla ilustracji metody postępowania rozpatrzmy pierwotną krzywą magnesowania przedstawioną na rys. 2.

Znając wartości kątów $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ możemy określić wartości pojemności układu z zależności:

$$\operatorname{tg}\alpha_j = \frac{1}{C_o}\sum_{j=0}^{n} C_{j+1}. \tag{4}$$

Tablica 2

Wartości czasu t oraz napięcia $U_{wy}(t)$ dla odpowiednich przedziałów sinusoidalnie zmiennego napięcia $U_{we}(t)$

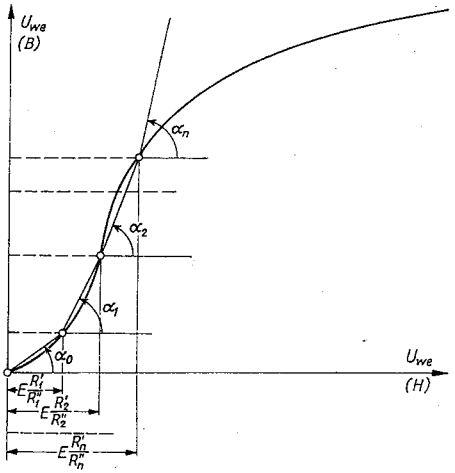
Poziom U_{we}	Czas t	$U_{wy} = f(U_{we})$
$\left\langle 0;\ E\frac{R_1'}{R_1''}\right\rangle$	$\left\langle 0;\ \frac{1}{\omega}\arcsin\frac{ER_1'}{U_mR_1''}\right\rangle$	$U_{wy} = \frac{C_1}{C_0}U_{we}$
$\left\langle E\frac{R_1'}{R_1''};\ E\frac{R_2'}{R_2''}\right\rangle$	$\left\langle \frac{1}{\omega}\arcsin\frac{ER_1'}{U_mR_1''};\ \frac{1}{\omega}\arcsin\frac{ER_2'}{U_mR_2''}\right\rangle$	$U_{wy} = \frac{C_1+C_2}{C_0}U_{we} - \frac{C_2}{C_0}E\frac{R_1'}{R_1''}$
$\left\langle E\frac{R_n'}{R_n''};\ U_m\right\rangle$	$\left\langle \frac{1}{\omega}\arcsin\frac{ER_n'}{U_mR_n''};\ \frac{\pi}{2\omega}\right\rangle$	$U_{wy} = \frac{1}{C_0}\left[\sum_{j=1}^{n+1}C_jU_{we} - \sum_{j=1}^{n}C_{(j+1)}E\frac{R_j'}{R_j''}\right]$
$\left\langle U_m-2E\frac{R_1'}{R_1''}\right\rangle$	$\left\langle \frac{\pi}{2\omega};\ \frac{\pi}{\omega}-\frac{1}{\omega}\arcsin\frac{U_m-2E\frac{R_1'}{R_1''}}{U_m}\right\rangle$	$U_{wy} = \frac{1}{C_0}\left[C_1U_{we} + \sum_{j=1}^{n}C_{(j+1)}\left(U_m-E\frac{R_1'}{R_1''}\right)\right]$
$\left\langle U_m-2E\frac{R_{j-1}'}{R_{j-1}''};\ U_m-2E\frac{R_j'}{R_j''}\right\rangle$	$\left\langle \frac{\pi}{\omega}-\frac{1}{\omega}\arcsin\frac{U_m-2E\frac{R_{j-1}'}{R_{j-1}''}}{U_m};\ \frac{\pi}{\omega}-\frac{1}{\omega}\arcsin\frac{U_m-2E\frac{R_j'}{R_j''}}{U_m}\right\rangle$	$U_{wy} = \frac{1}{C_0}\left[\sum_{l=1}^{j}C_lU_{we} + \sum_{l=1}^{j-1}C_{(l+1)}E\frac{R_l'}{R_l''} + \sum_{j}^{n}C_{(j+1)}\left(U_m-E\frac{R_j'}{R_j''}\right)\right]$ $j = 2, 3, 4, \ldots, n-1$
$\left\langle U_m-2E\frac{R_n'}{R_n''};\ -U_m\right\rangle$	$\left\langle \frac{\pi}{\omega}-\frac{1}{\omega}\arcsin\frac{U_m-2E\frac{R_n'}{R_n''}}{U_m};\ \frac{3}{2}\frac{\pi}{\omega}\right\rangle$	$U_{wy} = \frac{1}{C_0}\left[\sum_{l=1}^{n+1}C_lU_{we} - \sum_{l=1}^{n}C_{(l+1)}E\frac{R_l'}{R_l''}\right]$

Tablica 2 (cd.)

Poziom U_{we}	Czas t	$U_{wy} = f(U_{we})$
$\left\langle -U_m;\ -U_m+2E\frac{R_1'}{R_1''}\right\rangle$	$\left\langle \frac{3}{2}\frac{\pi}{\omega};\ \frac{2\pi}{\omega}-\frac{1}{\omega}\arcsin\frac{U_m-2E\frac{R_1'}{R_1''}}{U_m}\right\rangle$	$U_{wy}=\frac{1}{C_0}\left[C_1 U_{we}-\sum_{j=1}^{n} C_{(j+1)}\left(U_m-E\frac{R_j'}{R_j''}\right)\right]$
$\left\langle -U_m+2E\frac{R_{j-1}'}{R_{j-1}''};\right.$ $\left. -U_m+2E\frac{R_j'}{R_j''}\right\rangle$	$\left\langle \frac{2\pi}{\omega}-\frac{1}{\omega}\arcsin\frac{U_m-2E\frac{R_{j-1}'}{R_{j-1}''}}{U_m};\right.$ $\left. \frac{2\pi}{\omega}-\frac{1}{\omega}\arcsin\frac{U_m-2E\frac{R_j'}{R_j''}}{U_m}\right\rangle$	$U_{wy}=\frac{1}{C_0}\left[\sum_{l=1}^{j} C_l U_{we}-\sum_{l=1}^{j-1} C_{(l+1)} E\frac{R_l'}{R_l''}-\sum_{j}^{n} C_{(j+1)}\left(U_m-E\frac{R_j'}{R_j''}\right)\right]$ $j=2,3,\ldots,n-1$
$\left\langle -U_m+2E\frac{R_n'}{R_n''};\ U_m\right\rangle$	$\left\langle \frac{2\pi}{\omega}-\frac{1}{\omega}\arcsin\frac{U_m-2E\frac{R_n'}{R_n''}}{U_m};\ \frac{5\pi}{2\omega}\right\rangle$	$U_{wy}=\frac{1}{C_0}\left[\sum_{l=1}^{n+1} C_l U_{we}-\sum_{l=1}^{n} C_{(l+1)} E\frac{R_l'}{R_l''}\right]$

Korzystając ze wzoru (4) oraz przyjmując odpowiednią wartość pojemności C_o wzmacniacza operacyjnego możemy wyznaczyć kolejno wartości pojemności:

$$C_1, C_2, C_3, \ldots C_{n+1}.$$



Rys. 2. Odcinkowa aproksymacja pierwotnej krzywej magnesowania modelowanego materiału

Drugim etapem projektowania jest dobór właściwych wartości stosunków oporności

$$\frac{R_1'}{R_1''}; \frac{R_2'}{R_2''}; \ldots \frac{R_n'}{R_n''}.$$

W tym przypadku przyjmujemy z reguły:

$$R_1'+R_1'' = R_2'+R_2'' = \ldots = R_n'+R_n''. \tag{5}$$

Na podstawie aproksymowanej pierwotnej krzywej magnesowania (rys. 2) możemy wyznaczyć w woltach wartości:

$$E\frac{R_1'}{R_1''}; E\frac{R_2'}{R_2''}; \ldots, E\frac{R_n'}{R_n''}.$$

Zakładając następnie wartość E oraz uwzględniając (5) możemy wyznaczyć:

$$\frac{R_1'}{R_1''}; \frac{R_2'}{R_2''}; \ldots \frac{R_n'}{R_n''}.$$

W ten sposób zostały określone wszystkie parametry układu. Można więc przystąpić do wyznaczenia charakterystyki $U_{wy} = f(U_{we})$ układu, a następnie do badania zachowania się układu na zmiany wartości jego parametrów, używając do tego celu maszyny cyfrowej.

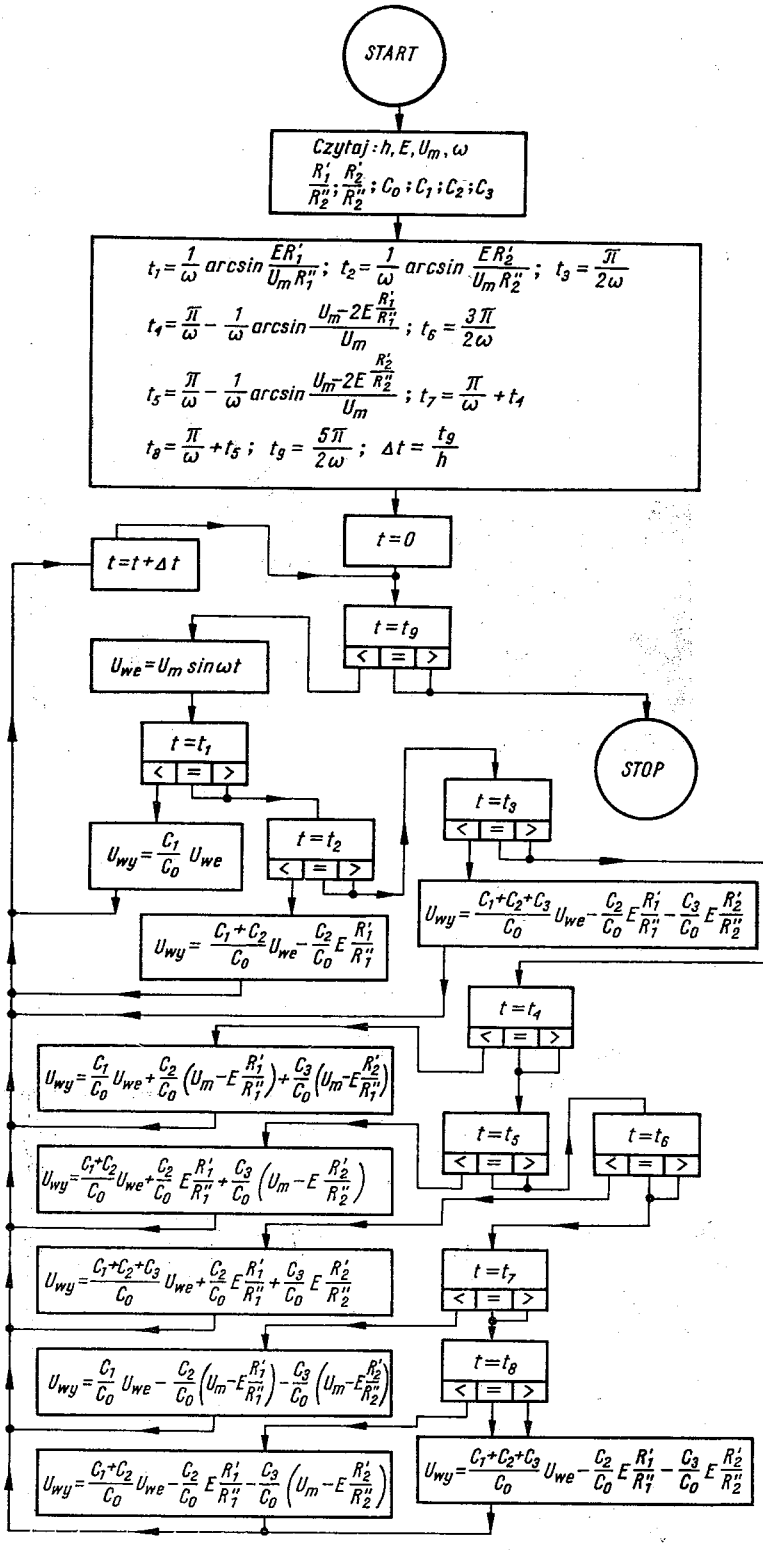
Obliczanie charakterystyki $U_{wy} = f(U_{we})$ układu

Na podstawie przeprowadzonej analizy pracy układu algorytm obliczania $U_{wy} = f(U_{we})$ podany w postaci blokowego schematu działań przedstawiono na rys. 3.

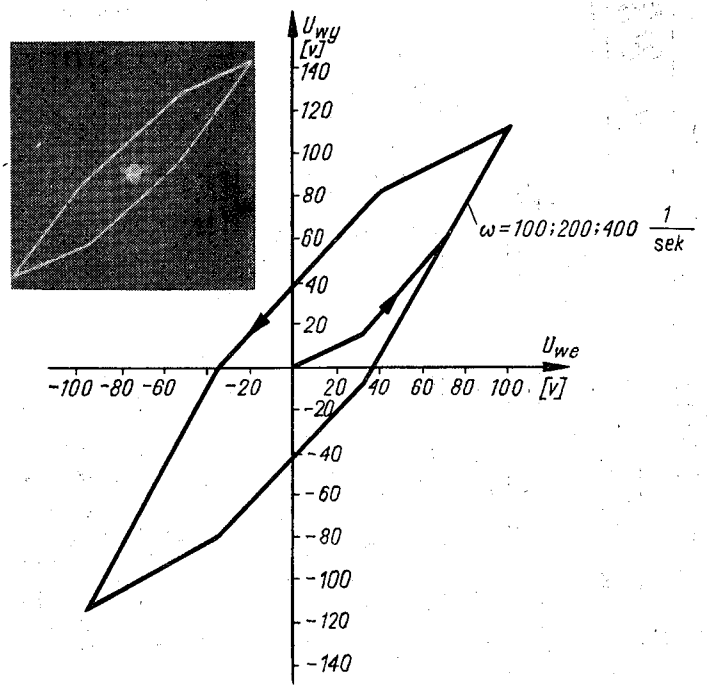
Założono przy tym, że $n+1 = 3$, zaś napięcie U_{we} ma postać:

$$U_{we} = U_m \sin \omega t.$$

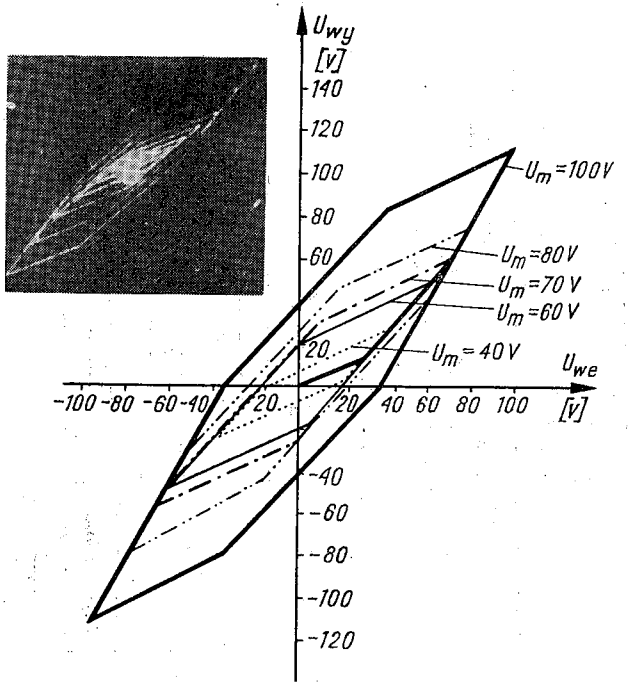
Oczywiście zależność (2) jest słuszna dla dowolnego przemiennego sygnału wejściowego o wartości maksymalnej U_m. Charakterystyki obliczone na podstawie algorytmu podanego na rys. 3 przedstawiono na rys. 4, 5, 6, 7, 8.



Rys. 3. Schemat blokowy obliczania charakterystyk $U_{wy} = f(U_{we})$ układu dla $n = 2$



Rys. 4. Charakterystyka $U_{wy} = f(U_{we})$ dla ω = var



Rys. 5. Charakterystyka $U_{wy} = f(U_{we})$ dla U_m = var

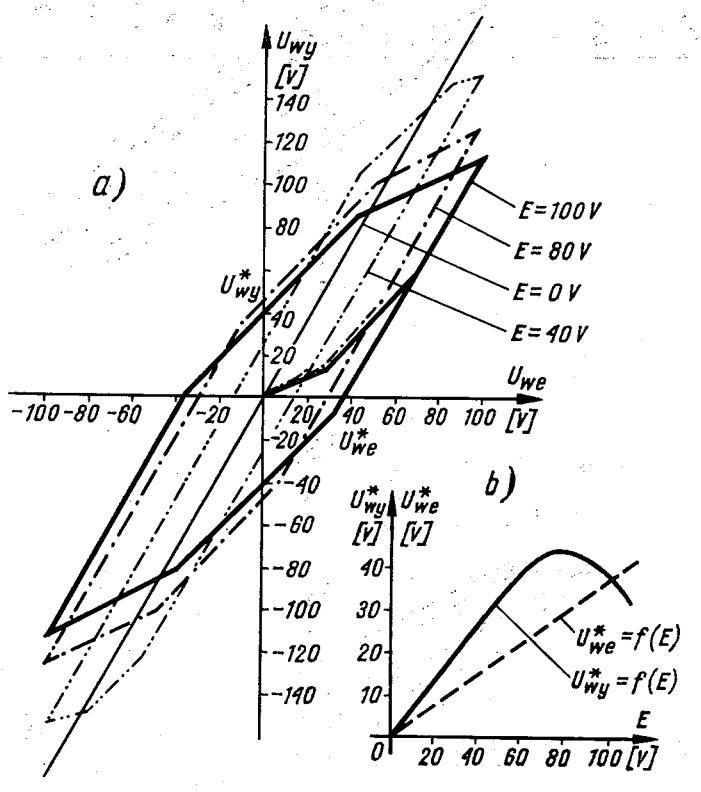
Badanie wpływu zmian wartości parametrów układu na jego charakterystykę $U_{wy} = f(U_{we})$

Przyjęto, że napięcie wejściowe ma postać:

$$U_{we}(t) = U_m \sin \omega t.$$

W oparciu o algorytm obliczeń podany w formie schematu blokowego (rys. 3) przy użyciu maszyny cyfrowej wyznaczono:

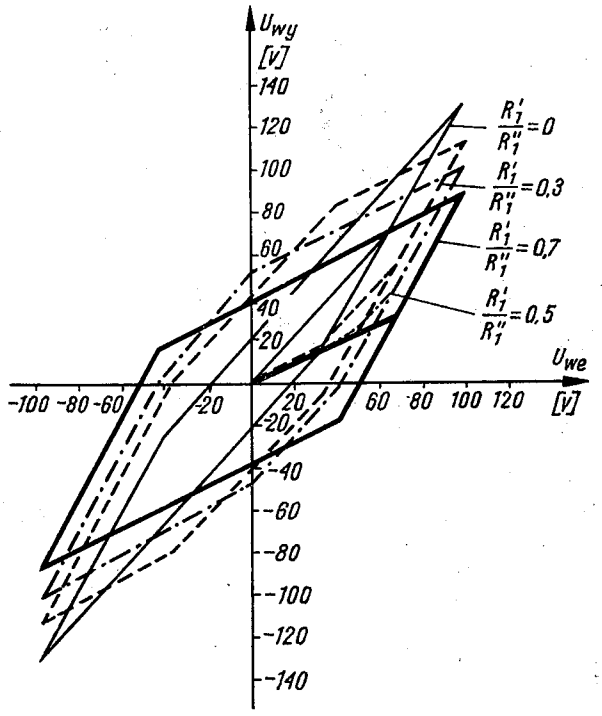
1. charakterystyki $U_{wy} = f(U_{we})$ dla pewnych przyjętych stałych parametrów układu przy ω = var (rys. 4),
2. charakterystyki $U_{wy} = f(U_{we})$ dla ω = const, U_m = var (rys. 5),



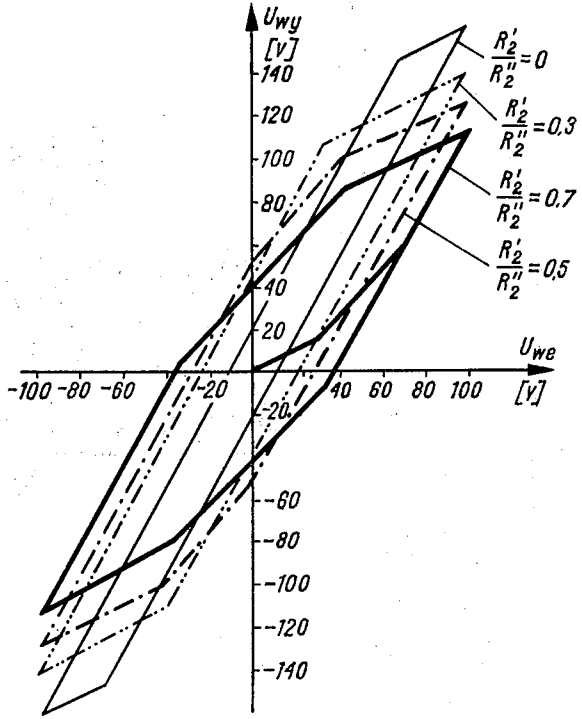
Rys. 6. Charakterystyka $U_{wy} = f(U_{we})$ dla E = var

3. charakterystyki $U_{wy} = f(U_{we})$ dla ω = const, U_m = const, E = var (rys. 6),
4. charakterystyki $U_{wy} = f(U_{we})$ dla R_1'/R_1'' = var (pozostałe parametry stałe) (rys. 7),
5. charakterystyki $U_{wy} = f(U_{we})$ dla R_2'/R_2'' = var (rys. 8).

Badania przedstawione wyżej miały na celu określenie zachowania się układu w zależności od zmian pewnych typowych jego elementów. Informacja o tych zmianach jest konieczna przy posługiwaniu się w praktyce tym układem jako elektronicznym modelem materiału, bądź też układem zawierającym elementy posiadające charakterystykę niejednoznaczną.



Rys. 7. Charakterystyka $U_{wy} = f(U_{we})$ dla $R_1'/R_1'' = \text{var}$



Rys. 8. Charakterystyka $U_{wy} = f(U_{we})$ dla $R_2'/R_2'' = \text{var}$

W wyniku przeprowadzonej analizy uzyskanych charakterystyk (rys. 4, 5, 6, 7, 8) możemy wnioskować o zachowaniu się układu co następuje.

a) Zgodnie z rys. 4, charakterystyki $U_{wy} = f(U_{we})$ nie zależą od częstotliwości (oczywiście w pewnym jej zakresie ograniczonym chociażby pasmem przenoszenia wzmacniacza operacyjnego).

b) Analizując przebiegi przedstawione na rys. 5 widzimy, że zachodzi zmiana kształtu i pola pętli wraz ze zmianą wartości maksymalnej U_m napięcia wejściowego. Dla wartości amplitud U_m spełniających zależność:

$$U_m \leqslant E\frac{R_2'}{R_2''}$$

otrzymujemy charakterystykę $U_{wy} = f(U_{we})$ o kształcie równoległoboku.

c) Wraz ze zmianą wartości napięcia polaryzacji E, od $E = U_m$ do $E = 0$, następuje zmiana kształtu pętli (rys. 6a) i dla $E = 0$ otrzymujemy linię prostą, której tangens nachylenia do osi odciętych wyrażony jest wzorem:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{C_o}.$$

Jeżeli oznaczymy przez U_{we}^* wartość sygnału wejściowego, dla którego $U_{wy} = 0$, oraz przez U_{wy}^* wartość sygnału wyjściowego, dla którego $U_{we} = 0$, to funkcje $U_{wy}^* = f(E)$, $U_{we}^* = f(E)$ przedstawia rys. 6b. Ciekawą jest zależność $U_{wy} = f(E)$ posiadająca ekstremum.

d) Przebiegi przedstawione na rys. 7 ilustrują wpływ zmian stosunku oporności R_1'/R_1'' na charakter funkcji $U_{wy} = f(U_{we})$. Można w tym przypadku zaobserwować, że dla $R_1'/R_1'' = 0$ oraz $R_1'/R_1'' = R_2'/R_2''$ otrzymujemy charakterystykę typu równoległoboku, natomiast dla $R_1'/R_1'' \in (0; R_2'/R_2'')$ otrzymujemy pętlę o zmieniającym się kształcie.

e) Rozpatrując wpływ zmian stosunku oporności R_2'/R_2'' (rys. 8) na charakterystykę $U_{wy} = f(U_{we})$ dochodzimy (czego należało się zresztą spodziewać) do tych samych wniosków, jak w punkcie d.

4. PODSUMOWANIE

Analiza i projektowanie nieliniowego członu operacyjnego modelującego dynamiczne pętle miały na celu określenie prostego i łatwego do regulacji elementu nieliniowego maszyny analogowej, przy pomocy którego możemy modelować dynamiczne symetryczne i niesymetryczne pętle typu np. luz lub histereza.

Aby osiągnąć ten cel należało dokonać analizy zaproponowanego układu, a następnie jego projektowania. Niezależnie od tego zbudowano w oparciu o rys. 1, dla $n+1 = 3$, układ, który jako blok nieliniowy stanowił wyposażenie maszyny analogowej WAT 101. Parametry układu były następujące:

$R_1' = 50\ \text{k}\Omega$; $R_1'' = 150\ \text{k}\Omega$; $R_2' = 82\ \text{k}\Omega$, $R_2'' = 118\ \text{k}\Omega$, $C_1 = 0.047\ \mu\text{F}$,

$C_2 = 0.062\ \mu\text{F}$, $C_3 = 0.073\ \mu\text{F}$, $E = 100\ \text{V}$, $U_m = 100\ \text{V}$.

Napięcie wymuszające:

$$U = U_m \sin \omega t.$$

Następnie zdjęto dwie charakterystyki $U_{wy} = f(U_{we})$ układu
— dla ω = var — oscylogram na rys. 4,
— dla U_m = var — oscylogram na rys. 5.

Porównując otrzymane oscylogramy z odpowiednimi charakterystykami widzimy dużą zbieżność teoretycznych, otrzymanych w wyniku przeprowadzonej analizy charakterystyk z przebiegami rzeczywistymi. Potwierdza to w pełni słuszność przeprowadzonych rozważań.

Zaproponowany w niniejszej publikacji sposób analizy i projektowania pewnego nieliniowego członu operacyjnego nie jest jedynym sposobem rozwiązania zadania.

Równie dobrze można było badać wpływ zmian wartości parametrów członu na charakterystykę $U_{wy} = f(U_{we})$ na drodze doświadczalnej. O słuszności tej metody postępowania świadczy chociażby zbieżność otrzymanych oscylogramów (rys. 4 i 5) z odpowiednimi charakterystykami otrzymanymi w wyniku analizy numerycznej z zastosowaniem maszyny cyfrowej.

5. ZASTOSOWANIA

Za pomocą przedstawionego układu możemy modelować między innymi dynamiczne symetryczne i niesymetryczne krzywe zamknięte, których aproksymacja odcinkowo-liniowa spełnia następujące warunki:

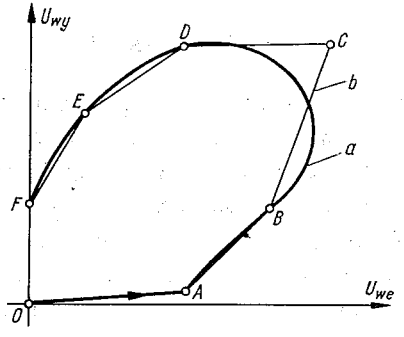
a) dla $U_{we} \in \langle 0, +U_m \rangle$

$$\operatorname{tg}\alpha_i < \operatorname{tg}\alpha_{i+1},$$

gdzie: α_i — kąt nachylenia i-tego odcinka do osi odciętych,

$$i \in \langle 0, n \rangle,$$

b) dla $U_{we} \in \langle +U_m, 0 \rangle$ odcinki aproksymujące żądaną krzywą muszą być równoległe do odpowiednich odcinków z rozpatrywanego w punkcie a przedziału zmian U_{we}.



Rys. 9. Aproksymacja modelowanej charakterystyki $U_{wy} = f(U_{we})$

Zatem aproksymacja krzywej a przedstawionej na rys. 9 winna być przeprowadzona np. łamaną b (rys. 9), gdyż istotnie w tym przypadku $DC||OA$, $DE||AB$, $EF||BC$.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. Auer, Analiza właściwości statycznych i dynamicznych procesu magnesowania przy pomocy nieliniowego układu z ujemnym sprzężeniem zwrotnym, Rozprawa doktorska, 1964, Biblioteka Politechniki Wrocławskiej.
2. Z. Czyżykowski, Analiza i synteza układów elektronicznych modelujących krzywe zamknięte ze szczególnym uwzględnieniem pętli histerezy, Rozprawa doktorska, 1971, Biblioteka Gł. Politechniki Łódzkiej.
3. Ja. S. Gielfand, Isledowanije pieriechodnych procesow w transformatorach toka na maszinach niepierierywnowo diejstwija, Elektriczіestwo, 1961, nr 12.
4. Ju. P. Rozuwajew, S. W. Szapiro, Matematiczieskoje modelirowanije sistiem awtomaticzeskowo regulirowanija s podmagniczіwajennymi transformatorami, Praca zbiorowa AN ZSSR.
5. B. G. Wasiliew, B. A. Zwieriew, Elektronnoje modielirowanije gistieriezisnych charakteristik fierromagnitnych matieriałow, Elektromiechanika, 1959, nr 9.

Z. CZYŻYKOWSKI

ANALYSIS AND PROJECTING OF NONLINEAR SYSTEM WITH OPERATIONAL AMPLIFIER FOR MODELLING OF DYNAMICAL HYSTERESIS LOOP

Summary

In this paper have been presented analysis and projecting of nonlinear system containing operational amplifier. This system may be used for modelling of symmetrical and unsymmetrical hysteresis loop and for modelling of backlash.

Z. CZYŻYKOWSKI

ANALYSE UND PROJEKTIERUNG DYNAMISCHE SCHLEIFEN MODELIERENDER OPERATIONSELEMENTE

Zusammenfassung

In dieser Bearbeitung wurden Analyse und Projektierung gewisser, einen Operationsverstärker enthaltender Systeme dargestellt. Die Systeme modelieren dynamische, symmetrische und unsymmetrische Histereseschleifen sowie den toten Gang, und könnten Standardbestückung eines Analogrechners sein.

З. ЧИЖИКОВСКИ

АНАЛИЗ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СХЕМЫ С РЕШАЮЩИМ УСИЛИТЕЛЕМ МОДЕЛИРУЮЩЕЙ ДИНАМИЧЕСКИЕ ПЕТЛИ ГИСТЕРЕЗИСА

Резюме

В работе рассмотрены анализ и проектирование нелинейной схемы с операционным усилителем. Эта схема моделирующая динамические петли гистерезиса и люфта может составлять оборудование АВМ.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1973, 19, z. 1, ss. 77-115

621.317.332

Układ z hallotronami przeznaczony do pomiaru rezystancji przy prądzie przemiennym

ZBIGNIEW DUNAJSKI (WARSZAWA)

Instytut Cybernetyki Stosowanej PAN

Otrzymano 11.2.1972

W artykule opisano nowy układ do pomiaru rezystancji elementów przy prądzie przemiennym. Układ ten charakteryzuje się bardzo prostym sposobem wykonywania pomiaru wymagającym wykonania przy pomiarze tylko jednej operacji. Dzięki temu, że pomiar odbywa się metodą zerową można uzyskać duże dokładności pomiaru, a wahania napięcia zasilającego nie mają wpływu na dokładność pomiaru. Prosty sposób równoważenia umożliwia stosowanie układu do budowy przyrządów automatycznych. Podano analizę działania tego układu przy pomiarze rezystancji elementów liniowych i nieliniowych oraz analizę uchybów i sposoby ich kompensacji.

1. WSTĘP

Metody pomiaru indukcyjności, pojemności i rezystancji stanowią jeden z szerszych działów miernictwa elektrycznego. Swe poważne miejsce zawdzięczają one temu, że stosunkowo dużą ilość zagadnień w technice pomiarowej rozwiązuje się drogą pomiaru R, L lub C. Pomiary pojemności, indukcyjności i rezystancji wykonywane są zarówno przy badaniu obwodów elektrycznych i ich elementów, jak i przy pomiarze wielkości nieelektrycznych metodami elektrycznymi. Czujniki o zmiennej indukcyjności, pojemności lub rezystancji są często stosowane do pomiaru wielkości nieelektrycznych w wielu procesach produkcyjnych. Automatyzacja tych procesów wymaga również stosowania automatycznych przyrządów pomiarowych charakteryzujących się dużą szybkością działania i stosunkowo dużą dokładnością. W przypadku stosowania czujników o zmiennych R, L lub C, o szybkości wykonania pomiaru najczęściej decyduje zastosowana metoda pomiarowa.

Dokładniejsze pomiary indukcyjności, pojemności i rezystancji przeprowadza się najczęściej za pomocą zrównoważonych mostków prądu przemiennego, które umożliwiają osiągnięcie największych dokładności. Stan równowagi mostka prądu przemiennego osiąga się również przez zrównanie amplitud i faz napięć w dwóch jego gałęziach, co wymaga wykonania szeregu operacji związanych ze zmianą dwóch jego parametrów. Złożony proces równoważenia mostków znacznie utrudnia ich automatyzację. Mostki automatyczne prądu przemiennego są przyrządami drogimi (w porównaniu np. z mostkami automatycznymi prądu stałego) i są one rzadko stosowane w praktyce.

Dążenie do uproszczenia procesu równoważenia mostków prądu przemiennego doprowadziło do opracowania całej klasy mostków quasizrównoważonych charakteryzujących się prostym sposobem wykonania pomiaru [1, 2]. Mostki quasizrównoważone są jednak układami złożonymi i mają szereg niedostatków, które zmuszają konstruktorów do poszukiwania nowych rozwiązań oraz do opracowywania nowych układów pomiarowych.

Prosty sposób wykonania pomiaru i dużą dokładność może zapewnić metoda zerowa zrealizowana w ten sposób, że element badany znajduje się w obwodzie prądu przemiennego, a porównywanie odbywa się w obwodzie prądu stałego. Rozwiązania takie stosowane są już od dawna, np. w komparatorach prądu lub napięcia. Do pomiaru R, L, C mogą być stosowane specjalne układy zawierające elementy mnożące, których wejścia włączone są w obwód prądu przemiennego, a wyjścia w obwód służący do ustalania stanu równowagi. Równowaga układu określana jest równością składowych stałych napięć wyjściowych. W szczególnym przypadku, w układach tych może być zastosowany hallotronowy element mnożący. Pierwsze koncepcje układów z hallotronami zostały opatentowane w 1960 r. [3, 4, 5].

Do pomiaru R, L, C mogą być również wykorzystane znane układy przesuwników fazy, do których w odpowiedni sposób zostanie włączony element mnożący. Możliwość ta wynika z faktu, że wartość średnia napięcia wyjściowego

$$U_w = \frac{1}{T}\int_0^T i_1 i_2 \, dt = k \cos \psi$$

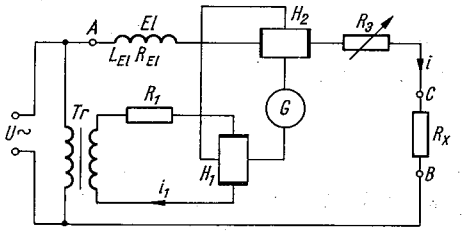
przy sinusoidalnych sygnałach wejściowych i_1 i i_2 jest proporcjonalna do cosinusa przesunięcia faz ψ między nimi. Element mnożący należy włączyć tak, aby faza jednego sygnału wejściowego była zależna od parametrów elementu badanego. Oczywiście najwygodniej jest tu wykorzystać warunek $\cos\psi = 0$, gdyż w tym przypadku pomiar będzie odbywał się metodą zerową. Układ tego typu z hallotronowym elementem mnożącym został opisany przez autora w [6, 7].

Obserwowany rozwój technologii elementów półprzewodnikowych sprawia że ukazują się ostatnio nowe typy hallotronów charakteryzujące się dużą czułością, stałością parametrów i niższym kosztem. Przeprowadzone badania wykazały również że hallotrony mają bardzo długi czas pracy i dużą niezawodność. Dzięki tym cechom hallotrony są już często stosowane w technice pomiarowej. Prostota układów z hallotronami do pomiaru R, L, C pozwala mieć nadzieję, że i one mogą być stosowane w praktyce.

2. OPIS UKŁADU

Układ do pomiaru rezystancji dla prądu przemiennego, pokazany jest na rys. 1 [12, 13]. W układzie tym zastosowano dwa hallotrony umieszczone w polu magnetycznym cewki *E1*. Hallotron H_1 pracuje w układzie przetwornika mocy, a hallotron H_2 jako kwadrator prądu. Indukcja magnetyczna B wytwarzana w cewce *E1* jest proporcjonalna do prądu i, a prąd sterujący i_1 hallotronu H_1 jest proporcjonalny do napięcia zasilającego U. W wyniku przemnożenia B oraz i_1 na wyjściu hallotronu H_1 pojawia się napięcie o składowej stałej proporcjonalnej do mocy czynnej traconej w gałęzi AB. Składowa stała napięcia wyjścio-

wego hallotronu H_2 jest proporcjonalna do I^2. Wyjścia hallotronów połączone są przeciwsobnie, a różnica napięć wyjściowych podawana jest na galwanometr. Galwanometr znajdujący się na wyjściu układu służy do ustalenia równości składowych stałych napięć wyjściowych obu hallotronów. Stan, w którym składowe stałe napięć wyjściowych obu hallotronów są sobie równe, czyli gdy galwanometr magnetoelektryczny wskazuje zero, będziemy w dalszym ciągu nazywali stanem równowagi.



Rys. 1. Układ pomiarowy

Transformator *Tr*, z którego zasilany jest hallotron H_1 rozdziela galwanicznie obwody obu hallotronów. Pokazany na rys. 1 układ ma pewne cechy wspólne ze stosowaną nieraz w praktyce metodą techniczną [14]. W metodzie technicznej mierzy się moc czynną P oraz wartość skuteczną prądu I w elemencie badanym, a znając te dwie wielkości wylicza się rezystancję w zależności

$$R = \frac{P}{I^2}. \tag{1}$$

W podanym układzie również mierzy się moc czynną oraz prąd w elemencie badanym i, jak to będzie pokazane dalej, do wyznaczenia rezystancji wykorzystuje się zależność (1). Przedstawiony układ ma tę przewagę nad metodą techniczną, że pomiar odbywa się metodą zerową, pozwalającą wyeliminować wpływ wahań napięcia źródła zasilającego i uzyskać stosunkowo dużą dokładność.

2.1. Zasada działania

Załóżmy, że układ podany na rys. 1 składa się z elementów liniowych i jest zasilany ze źródła o napięciu sinusoidalnym

$$u = U_m \sin \omega t. \tag{2}$$

Prąd i w elemencie badanym o rezystancji R_x jest określany zależnością

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi), \tag{3}$$

przy czym

$$I_m = \frac{U_m}{Z}, \tag{3a}$$

Z — impedancja obwodu AB składającego się z: El, H_2, R_3 i elementu badanego,
φ — kąt fazowy impedancji Z.

Indukcja magnetyczna w cewce *El*

$$B = kI_m \sin(\omega t - \varphi) \tag{4}$$

jest proporcjonalna do prądu w cewce. Stała proporcjonalności k, wyrażona w T/A, będzie w dalszym ciągu nazywana stałą cewki.

Napięcie wyjściowe hallotronu H_2 jest równe

$$u_{H2} = \gamma_2 Bi = \gamma_2 k I_m^2 \sin^2(\omega t - \varphi), \tag{5}$$

gdzie γ_2 — czułość hallotronu H_2.

Wyrażenie to można przepisać w postaci

$$u_{H2} = \gamma_2 k I^2 [1 - \cos 2(\omega t - \varphi)], \tag{6}$$

z której widać, że na wyjściu hallotronu mamy dwie składowe napięcia — składową stałą i składową zmienną. Z punktu widzenia omawianego układu interesuje nas składowa stała

$$U_{H2} = \frac{1}{T} \int_0^T u_{H2}\, dt = \gamma_2 k I^2, \tag{7}$$

która w tym przypadku jest proporcjonalna do kwadratu prądu I. Z zależności (7) widać, że składowa stała napięcia wyjściowego hallotronu H_2 nie zależy od kąta φ.

Załóżmy, że punkt pracy na charakterystyce fazowej transformatora został wybrany tak, że prąd sterujący hallotronu H_1 jest proporcjonalny do napięcia zasilającego układ

$$i_1 = \xi U_m \sin \omega t. \tag{8}$$

Jeżeli założenie to jest spełnione, to napięcie wyjściowe hallotronu H_1

$$u_{H1} = \gamma_1 Bi_1 = \gamma_1 k \xi UI [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] \tag{9}$$

ma składową stałą

$$U_{H1} = \gamma_1 k \xi UI \cos \varphi = KP \tag{10}$$

proporcjonalną do mocy czynnej traconej w impedancji Z.

Ponieważ $P = I^2 R$, możemy napisać

$$U_{H1} = \gamma_1 k \xi I^2 R, \tag{11}$$

gdzie R jest rezystancją gałęzi AB. Składowa stała napięcia na wyjściu układu jest równa różnicy składowych stałych napięć wyjściowych hallotronów

$$\Delta U_H = U_{H1} - U_{H2} = kI^2(\gamma_1 \xi R - \gamma_2). \tag{12}$$

Rezystancja R jest sumą rezystancji elementu badanego R_x, cewki R_{El}, potencjometru R_3 i hallotronu R_{H2}

$$R = R_x + R_{El} + R_{H2} + R_3. \tag{13}$$

Przed włączeniem elementu badanego można tak dobrać elementy układu, aby napięcie wyjściowe U_H było równe zeru przy $R_x = 0$, tj. przy zwartych zaciskach BC. Po wstawieniu tych wartości do równania (12) otrzymuje się warunek początkowej równowagi układu

$$\gamma_1 \xi (R_{El} + R_{H2} + R_3) - \gamma_2 = 0. \tag{14}$$

Mając wybrane hallotrony oraz daną rezystancję cewki, warunek początkowej równowagi można osiągnąć przez dobór współczynnika ξ oraz odpowiedniej wartości R_3.

Jeżeli do zrównoważonego układu zostanie włączony element badany o nieznanej rezystancji R_x, to na wyjściu układu pojawi się składowa stała napięcia, którą można wyznaczyć z równania (12) po uwzględnieniu warunku (14)

$$\Delta U_H = k\gamma_1 \xi I^2 R_x. \tag{15}$$

Ponieważ stan równowagi początkowej ($R_x = 0$) otrzymuje się przy współczynniku $\xi = \dfrac{\gamma_2}{\gamma_1(R_{El}+R_{H2}+R_3)}$, równanie (15) można napisać w postaci

$$\Delta U_H = \frac{k\gamma_2}{R_{El}+R_{H2}+R_3} I^2 R_x. \tag{16}$$

Z powyższych zależności widać, że napięcie wyjściowe jest proporcjonalne do kwadratu prądu I i rezystancji R_x, czyli do mocy traconej w elemencie badanym. Napięcie wyjściowe układu jest oczywiście tym większe, im większe są napięcia wyjściowe z obu hallotronów w stanie początkowej równowagi. Dlatego też przy rezystancji układu należy tak dobierać elementy układu, aby iloczyn $k\gamma_2 = k\gamma_1 \xi(R_{El}+R_{H2}+R_3)$ był możliwie największy.

Napięcie pojawiające się na wyjściu układu po włączeniu elementu badanego można sprowadzić do zera dwoma sposobami:

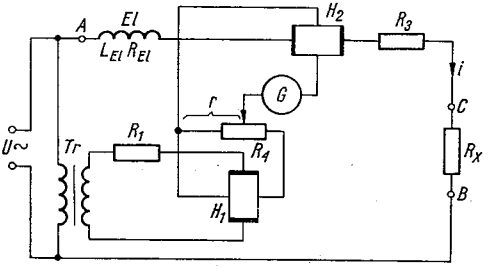
1) zmniejszając rezystancję potencjometru R_3 o wartości R_x,

2) zmniejszając napięcie wyjściowe hallotronu H_1 za pomocą np. włączonego w tym celu dzielnika napięcia.

W pierwszym przypadku rezystancję wnoszoną przez element badany, wynikającą z szeregowego schematu zastępczego, kompensujemy przez zmniejszenie rezystancji potencjometru R_3 o wartości R_x. Po sprowadzeniu układu do stanu równowagi, rezystancję elementu badanego wyznacza się z różnicy nastawionych rezystancji potencjometru R_3 w dwóch stanach równowagi, tj. przy zwartych zaciskach BC i z włączonym elementem badanym

$$R_x = \Delta R_3. \tag{17}$$

Potencjometr R_3 może być wykonany w postaci wzorcowej dekady, wycechowanej w wartościach R_x, z której można bezpośrednio odczytać wartość rezystancji mierzonej.



Rys. 2. Układ pomiarowy równoważony za pomocą dzielnika napięcia

Wykonując pomiar drugim z wymienionych sposobów, sprowadza się układ do stanu równowagi za pomocą dzielnika napięcia umieszczonego na wyjściu hallotronu H_1. Układ z dzielnikiem napięcia pokazany jest na rys. 2.

W układzie tym nie ma potencjometru R_3. Zamiast niego może być włączona stała

rezystancja, którą oznaczamy również przez R_3, służąca do zabezpieczenia hallotronu H_2 przed ewentualnymi przeciążeniami przy zwartych zaciskach BC i ograniczająca uchyb temperaturowy układu.

Elementy układu powinny być tak dobrane, aby przy zwartych zaciskach BC, tj. przy $R_x = 0$, układ znajdował się w równowadze. Temu stanowi równowagi odpowiada początkowe ustawienie dzielnika napięcia.

Po włączeniu do zrównoważonego układu elementu badanego, na wyjściu pojawi się składowa stała napięcia

$$\Delta U_H = kI^2(\gamma_1 \xi \Theta R - \gamma_2), \tag{18}$$

którą sprowadzamy do zera przez zmianę położenia suwaka potencjometru R_4. Nowy stan równowagi wystąpi, gdy spełniona będzie równość

$$\gamma_1 \Theta' \xi R = \gamma_2, \tag{19}$$

przy czym

$$\Theta = \frac{R_4}{R_4 + R_{H1}^*}, \qquad \Theta' = \frac{r_4}{R_4 + R_{H1}^*},$$

R_4 — rezystancja całego potencjometru,

r_4 — rezystancja części potencjometru, między punktem wspólnym i suwakiem,

R_{H1}^* — rezystancja hallotronu między elektrodami napięciowymi

$$R = R_{El} + R_{H2} + R_3 + R_x.$$

Na osi potencjometru R_4 można umieścić tarczę z podziałką wyskalowaną w jednostkach rezystancji i z niej odczytywać wartość mierzonej R_x.

Z powyższych rozważań widać, że zasada działania wywodzi się bezpośrednio z definicji określającej rezystancję jako element obwodu, w którym następuje dyssypacja mocy.

W przedstawionych układach pomiar rezystancji odbywa się metodą zerową, która — jak to już było wspomniane — umożliwia osiągnięcie stosunkowo dużych dokładności i uniezależnia pomiar od wahań napięcia zasilającego. W obu przypadkach, podobnie jak w mostkach zrównoważonych, do równań opisujących stan równowagi nie wchodzi częstotliwość napięcia zasilającego. Podane układy mogą być stosowane do pomiaru rezystancji, wynikającej z szeregowego schematu zastępczego elementów o charakterze indukcyjnym i pojemnościowym.

2.2. Napięcie wyjściowe

Do wyznaczenia czułości układu i zakresów pomiarowych potrzebna jest zależność napięcia wyjściowego w funkcji rezystancji R_x przy niezmiennym napięciu źródła zasilania. Zależność tę otrzymuje się z równania (16) po uwzględnieniu (3a)

$$\Delta U_H = \frac{k\gamma_2}{R_{El} + R_{H2} + R_3} \cdot \frac{U^2}{(R_{El} + R_{H2} + R_3 + R_x)^2 + X^2} R_x, \tag{20}$$

gdzie X — reaktancja gałęzi AB.

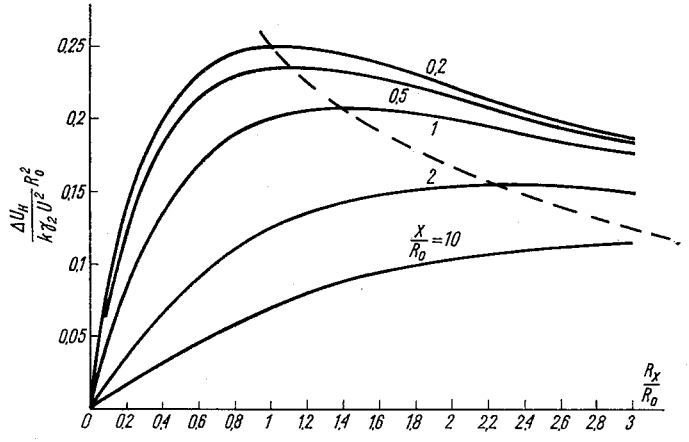
Maksimum napięcia wyjściowego otrzymuje się dla

$$R_x = \sqrt{(R_{El} + R_{H2} + R_3)^2 + X^2}. \tag{21}$$

Na rys. 3 podano w jednostkach względnych krzywe, przedstawiające zależność napięcia wyjściowego w funkcji rezystancji mierzonej, przy stałym napięciu źródła zasilania. Krzywe te opisane są następującym równaniem

$$\frac{\Delta U_H}{k\gamma_2 U^2} R_o^2 = \frac{\dfrac{R_x}{R_o}}{\left(1+\dfrac{R_x}{R_o}\right)^2 + \left(\dfrac{X}{R_o}\right)^2}, \tag{22}$$

gdzie $R_o = R_{E1} + R_{H2} + R_3$.



Rys. 3. Zależność napięcia wyjściowego od włączonej rezystnacji R_x

Pokazana zależność napięcia wyjściowego od rezystancji R_x jest korzystna z punktu widzenia wskaźnika równowagi, gdyż zagięcie krzywej napięcia przy dużych rezystancjach zabezpiecza go przed nadmiernym przeciążeniem. Na rys. 3 krzywą przerywaną zaznaczono punkty odpowiadające maksimum napięcia wyjściowego, które występuje przy spełnionym warunku (21).

3. ANALIZA UCHYBÓW

Rozpatrując zasadę działania układów podanych na rys. 1 i 2 przyjęto założenia: elementy układu są liniowe, prąd sterujący hallotronu H_1 jest w fazie z napięciem zasilającym, indukcja magnetyczna w cewce jest w fazie z prądem I oraz że hallotron jest idealnym elementem mnożącym. W rzeczywistości prąd sterujący i_1 może być przesunięty w fazie względem napięcia U, a przesunięcie to może zmieniać się ze zmianą napięcia zasilającego i częstotliwości. Zmiany przesunięcia wprowadzą uchyb pomiaru. Indukcja magnetyczna będzie przesunięta w fazie względem prądu I, jeżeli w cewce będzie rdzeń ferromagnetyczny. Układ mający cewkę z rdzeniem ferromagnetycznym będzie omówiony w punkcie 6. Zjawiska pasożytnicze występujące w hallotronach mogą również wprowadzać dodatkowe uchyby.

3.1. Uchyb wywołany przesunięciem prądu i_1 względem napięcia U

Założenie, że prąd sterujący i_1 jest w fazie z napięciem zasilającym U jest słuszne w przypadku, gdy częstotliwość napięcia zasilającego odpowiada przesunięciu równemu zeru na charakterystyce fazowej transformatora $\nu = f(\omega)$. Jeżeli warunek ten nie jest spełniony i istnieje przesunięcie fazy ν, tj. $i = \xi I_m \sin(\omega t - \nu)$, składowa stała napięcia wyjściowego hallotronu H_1 będzie równa

$$U_{H1} = \gamma_1 k \xi I^2 R(\cos\nu + \operatorname{tg}\varphi \sin\nu), \tag{23}$$

a napięcie wyjściowe układu określone poprzednio równaniem (12) będzie teraz wynosiło

$$\Delta U_H = kI^2[\gamma_1 \xi R(\cos\nu + \operatorname{tg}\varphi \sin\nu) - \gamma_2]. \tag{24}$$

Układ można sprowadzić do stanu równowagi przy rezystancji gałęzi AB równej

$$R' = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 \xi} \frac{\cos\varphi}{\cos(\varphi - \nu)}, \tag{25}$$

a nie jak poprzednio przy rezystancji $R = \dfrac{\gamma_2}{\gamma_1 \xi}$.

Rezystancja R' może być mniejsza lub większa od R zależnie od znaków kątów φ i ν. Różnica

$$\Delta R = R - R' = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 \xi} 2 \sin\frac{\nu}{2} \frac{\sin\left(\varphi - \dfrac{\nu}{2}\right)}{\cos(\varphi - \nu)} \tag{26}$$

zależna jest od kąta φ. Zmiany kąta φ, które powstają przy włączeniu różnych elementów badanych, wywołują zmiany ΔR, które są nieznane wykonującemu pomiar. Zmiany te można traktować jako uchyby. Celem wyznaczenia tego uchybu załóżmy, że przed włączeniem elementu badanego, układ był zrównoważony przy zwartych zaciskach BC i kąt fazowy był równy φ_o. Po włączeniu elementu badanego nowy stan równowagi otrzyma się, gdy rezystancja R' będzie równa

$$R' = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 \xi} \frac{\cos\varphi_1}{\cos(\varphi_1 - \nu)}. \tag{27}$$

Różnica rezystancji R, przy której układ był w równowadze przed i po włączeniu elementu badanego, jest uchybem pomiaru ΔR_x, gdyż przy sprowadzaniu układu do stanu równowagi rezystancję R_3 należy zmniejszyć o $R_x + \Delta R'$. Wartość bezwzględna uchybu jest równa

$$\Delta R_x = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 \xi} \frac{\sin\nu \sin(\varphi_1 - \varphi_o)}{\cos(\varphi_0 - \nu)\cos(\varphi_1 - \nu)}, \tag{28}$$

przy czym:

φ_o — przesunięcie fazy między prądem I i napięciem U w zrównoważonym układzie przy zwartych zaciskach BC,

φ_1 — przesunięcie fazy po sprowadzeniu układu z włączonym elementem badanym do stanu równowagi.

Z zależności tej widać, że dla dodatniej wartości kąta, tj. gdy napięcie U wyprzedza prąd i_1, uchyb jest dodatni, jeżeli element badany ma charakter indukcyjny, a ujemny jeżeli elementem badanym jest pojemność.

Uchyb względny

$$\delta_\nu = \frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{R}{R_x} \frac{\sin\nu \sin(\varphi_1 - \varphi_o)}{\cos(\varphi_o - \nu)\cos(\varphi_1 - \nu)} \tag{29}$$

zależy nie tylko od różnicy kątów φ ale i od wielkości rezystancji mierzonej. Przy niezbyt dużych kątach ν w stosunku do φ równanie (29) możemy przepisać w postaci

$$\delta_\nu = \frac{\omega L_x}{R_x} \sin\nu \quad \text{lub} \quad \delta_\nu = -\frac{1}{\omega C R_x} \sin\nu, \tag{29a}$$

z której widać, że uchyb wywołany przesunięciem ν jest proporcjonalny do dobroci elementu badanego.

3.2. Uchyb od nieliniowości charakterystyk hallotronów

W przytoczonych rozważaniach przyjęto, że czułość hallotronów jest wielkością stałą. Czułość hallotronów zależna jest jednak od temperatury i od indukcji magnetycznej. Zależność czułości od indukcji magnetycznej może być wywołana dwoma czynnikami: zależnością stałej Halla od indukcji magnetycznej i skończonymi wymiarami hallotronu. Zależność stałej Halla od pola magnetycznego została wyprowadzona teoretycznie i sprawdzona doświadczalnie dla szeregu półprzewodników. Dokładny opis wyników badań przedstawiony jest w szeregu publikacjach [15, 16, 17]. Zmiany stałej Halla w funkcji indukcji magnetycznej silniej występują dopiero w polu o indukcji kilku tesli, którego nie stosuje się w elementach mnożących.

W przedstawionych układach indukcja magnetyczna w cewce *El* może wynosić od kilku mT do kilkuset mT i wpływ pola magnetycznego na stałą Halla dla hallotronów litych może być pominięty. W hallotronach napylanych zmiany czułości występują przy znacznie niższych wartościach indukcji magnetycznej niż w hallotronach wykonanych z materiałów litych. Zmiany te wywołane są zjawiskami zachodzącymi na granicach ziarn napylonego półprzewodnika.

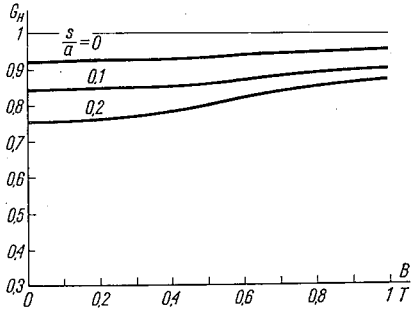
Drugim czynnikiem, który wywołuje większe zmiany czułości hallotronów w funkcji indukcji magnetycznej, jest skończony stosunek długości do szerokości hallotronu oraz szerokość elektrod napięciowych. Wzór na napięcie Halla z uwzględnieniem wymiarów hallotronu i szerokości elektrod napięciowych jest następujący:

$$U_H = \frac{\mathscr{R}_H}{d} G_H\left(\frac{a}{b}, \frac{s}{a}, B\right) i B, \tag{30}$$

przy czym:

$\mathscr{R}_H$ — stała Halla,
d — grubość płytki półprzewodnikowej,
a — długość płytki półprzewodnikowej,
b — szerokość płytki półprzewodnikowej,
s — szerokość elektrod napięciowych.

Funkcja $G_H(a/b, s/a, B)$ uwzględniająca wymiary hallotronu nazywana jest funkcją poprawkową. Równanie tej funkcji wyprowadzone przy założeniu stosunku $s/a = 0$, czyli dla punktowych elektrod napięciowych i krzywe dla różnych stosunków s/a podane są w [15, 16]. Na rys. 4 pokazano przykładowo zależności funkcji poprawkowej od pola magnetycznego dla hallotronu wykonanego z InAs o stosunku długości do szerokości



Rys. 4. Zależność funkcji poprawkowej od indukcji magnetycznej

$a/b = 2$ i trzech wartościach stosunku s/a [15]. Z rysunku tego widać, że im szersze są elektrody napięciowe tym większe są zmiany funkcji poprawkowej w zależności od pola magnetycznego. Funkcja poprawkowa dąży asymptotycznie do 1 przy wzroście indukcji magnetycznej. Dla małych indukcji magnetycznych zmiany funkcji poprawkowej są małe i czułość hallotronu jest praktycznie stała.

Czułość hallotronu w funkcji pola magnetycznego można przedstawić następująco

$$\gamma(B) = \gamma[1+f(B)]. \tag{31}$$

Ponieważ w rozpatrywanym układzie indukcja magnetyczna jest okresowo zmienna, funkcja $f(B)$ może być przedstawiona w postaci szeregu Fouriera $f'(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$. Stan równowagi układu otrzymuje się, gdy składowe stałe napięć wyjściowych obu hallotronów są równe

$$\frac{1}{T}\int_0^T \gamma_2(B)\, Bi\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \gamma_1(B)\, Bi_1\, dt. \tag{32}$$

Po wstawieniu zależności (4) i (8), równanie to można zapisać w postaci

$$\frac{\gamma_2 k I_m^2}{T}\int_0^T \left[1+a_0'' + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n'' \cos n\omega t + b_n'' \sin n\omega t)\right] \sin^2(\omega t - \varphi)\, dt =$$

$$= \frac{\gamma_1 k \xi I_m U_m}{T}\int_0^T \left[1+a_0' + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n' \cos n\omega t + b_n' \sin n\omega t)\cdot \sin(\omega t-\varphi)\sin\omega t\right] dt, \tag{33}$$

z której po wykonaniu całkowania otrzymuje się

$$\gamma_2(1+a_0'')\, I^2 - \frac{\gamma_2 I^2}{2}(a_2'' \cos 2\varphi + b_2'' \sin 2\varphi) = \gamma_1(1+a_0')\,\xi\, UI \cos\varphi -$$

$$-\frac{\gamma_1 \xi UI}{2}(a_2' \cos\varphi + b_2' \sin\varphi),$$

przy czym wskaźnikiem „prim" oznaczono współczynniki opisujące czułość hallotronu H_1, a wskaźnikiem „wtór" — hallotronu H_2.

Stąd rezystancja

$$R = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 \xi} \frac{1 + a_0'' - \frac{1}{2}(a_2'' \cos 2\varphi + b_2'' \sin 2\varphi)}{1 + a_0' - \frac{1}{2\cos\varphi}(a_2' \cos\varphi + b_2' \sin\varphi)}, \tag{34}$$

lub

$$R = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 \xi} + \Delta, \tag{35}$$

przy czym

$$\Delta = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 \xi} \frac{2(a_0'' - a_0') - (a_2'' - a_2') - \operatorname{tg}\varphi(b_2'' - b_2')}{2 + 2a_0' - a_2' - b_2' \operatorname{tg}\varphi} + \\ + \frac{+\operatorname{tg}\varphi(a_2'' \sin 2\varphi - b_2'' \cos 2\varphi)}{2 + 2a_0' - a_2' - b_2' \operatorname{tg}\varphi} \tag{36}$$

jest uchybem wywołanym nieliniowością hallotronu.

W praktyce oba hallotrony mogą być tego samego typu, mające jednakową zależność czułości od indukcji magnetycznej, tj. jednakowe $f(B)$. Uchyb Δ przy obu hallotronach tego samego typu jest równy

$$\Delta = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 \xi} \frac{\operatorname{tg}\varphi(a_2 \sin 2\varphi - b_2 \cos 2\varphi)}{2 - 2a_0 - a_2 - b_2 \operatorname{tg}\varphi}. \tag{37}$$

Zależność czułości od pola magnetycznego hallotronów napylanych może być często aproksymowana funkcją kwadratową $\gamma = \gamma_0(1 + \sigma B^2)$. Dla sinusoidalnego przebiegu indukcji magnetycznej (4) i kwadratowej zależności czułości, współczynniki szeregu Fouriera są równe

$$a_2 = -k^2 \sigma I^2 \cos 2\varphi,$$
$$b_2 = -\sigma k^2 I^2 \sin 2\varphi,$$

a uchyb Δ określony wzorem (37) jest równy zeru. Celem wyeliminowania uchybu wywołanego nieliniowością hallotronów, oba hallotrony powinny mieć jednakową zależność czułości od indukcji oraz należy wybierać zakres zmian indukcji magnetycznej odpowiadający liniowym bądź kwadratowym odcinkom funkcji $\gamma(B)$.

3.3. Uchyb od napięć asymetrii

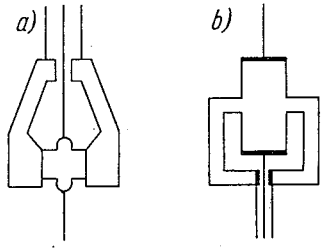
Na wyjściu hallotronów, oprócz sygnału użytecznego pojawiają się napięcia pasożytnicze wynikające z niedoskonałości technologii. Napięcia te są wynikiem szeregu innych zjawisk fizycznych zachodzących zarówno w samej płytce półprzewodnikowej, jak i na połączeniach płytki z elektrodami. W literaturze poświęconej hallotronom, napięcia wywołane innymi czynnikami niż efektem Halla przyjęto nazywać napięciami asymetrii. Napięcia

asymetrii można podzielić na dwie składowe, a mianowicie: asymetrię pierwotną wywołaną nieekwipotencjalnym umieszczeniem elektrod napięciowych (składowa ta jest liniowo zależna od prądu sterującego) oraz asymetrię wtórną, która jest nieliniową funkcją prądu sterującego. Dokładniejsza analiza zjawisk wywołujących napięcie asymetrii podana jest między innymi w [15, 18, 19, 20]. Napięcie asymetrii pierwotnej, liniowo zależne od prądu sterującego, może być łatwo skompensowane za pomocą specjalnych układów. Istnieją układy kompensacyjne wykonane z rezystorów liniowych, zapewniające kompensacje przy zmianach temperatury otoczenia [21].

W przypadku niedokładnej kompensacji asymetrii pierwotnej na wyjściu hallotronu pojawia się składowa zmienna napięcia o częstotliwości równej częstotliwości prądu sterującego, która w rozpatrywanych układach nie wpływa na dokładność pomiaru. Istnienie tej składowej nie jest oczywiście sprawą obojętną, gdyż może ona powodować rozmycie plamki galwanometru o małej bezwładności organu ruchomego.

Dokładność pomiaru zależy natomiast od asymetrii wtórnej, której głównym składnikiem jest napięcie termoelektryczne powstające na wyjściu hallotronu w przypadku nierównomiernego odprowadzania ciepła z powierzchni płytki lub w przypadku niejednorodnej rezystancji materiału, która jest przyczyną powstawania różnic temperatur w hallotronie.

Odprowadzanie ciepła z hallotronu umieszczonego w powietrzu następuje poprzez promieniowanie i konwekcję. Z hallotronu obudowanego, umieszczonego np. między nabiegunnikami elektromagnesu, ciepło jest odprowadzane do podłoża przez przewodzenie. Jeżeli kontakt cieplny między hallotronami i podłożem nie jest równomierny, to mogą powstawać różnice temperatur między elektrodami. Różnice temperatur mogą również powstawać skutkiem efektu Peltiera. Różnice temperatur wywołane efektem Peltiera są jednak małe w porównaniu do różnic wywołanych nierównomiernym odprowadzaniem ciepła i w większości przypadków mogą być pominięte. Umieszczenie hallotronu na dobrze przewodzącym podłożu często nie daje zadawalających rezultatów ze względu na istnienie gradientu temperatur w samym podłożu, wywołanego przez czynniki zewnętrzne, np. pod-

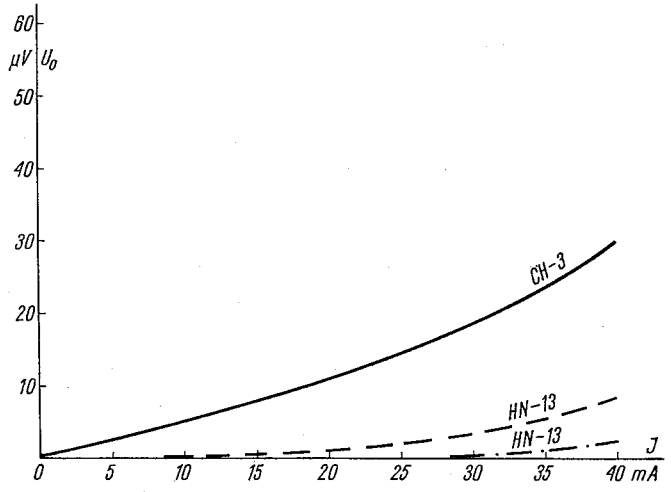


Rys. 5. Specjalne konstrukcje hallotronów

grzewanie z jednej strony od znajdującego się w pobliżu źródła ciepła. Celem zmniejszenia wpływu czynników zewnętrznych na powstawanie napięć termoelektrycznych stosowane są specjalne hallotrony, w których miedziane odprowadzenia z elektrod umieszczone są blisko siebie. Na rys. 5a pokazana jest konstrukcja hallotronu z InSb stosowanego w modulatorach małych napięć stałych [15]. Elektrody prądowe i hallotron wykonane są z tego samego półprzewodnika tak, że w obwodzie prądowym przejścia Cu-InSb i InSb-Cu są

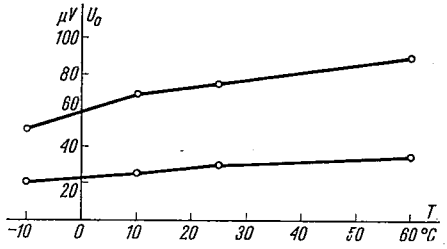
oddalone o 0,3 mm. Takie ukształtowanie elektrod pozwala uzyskać stabilność punktu zerowego lepszą niż 0,2 μV/C.

W modulatorach małych prądów stałych kształtowane są elektrody prądowe, gdyż napięcia termoelektryczne powstające w tym obwodzie mają wpływ na dokładność. Celem zmniejszenia napięć termoelektrycznych na wyjściu hallotronu można podobnie wykonać elektrody napięciowe. Hallotron o specjalnym kształcie elektrod napięciowych pokazany jest na rys. 5b [17, 18].



Rys. 6. Składowa stała napięcia asymetrii hallotronów produkcji krajowej

Wartość napięcia termoelektrycznego zależna jest również od rodzaju materiału, z którego został wykonany hallotron i w każdym egzemplarzu danego typu jest inna. Największe napięcie termoelektryczne obserwuje się w hallotronach germanowych, rzędu kilkuset mikrowoltów, a najmniejsze w hallotronach z arsenku kadmu [18]. Na rys. 6 podano zależność składowej stałej napięcia asymetrii, dla kilku typów hallotronów produkcji krajowej umieszczonych przy pomiarze na podłożu dobrze przewodzącym ciepło i zasilanych prądem o częstotliwości 50 Hz.



Rys. 7. Zależność napięcia asymetrii wtórnej od temperatury

Wartość napięcia asymetrii wtórnej zależna jest również od temperatury hallotronu, przy czym, jak wykazują pomiary, zmiany tego napięcia w funkcji temperatury są różne dla poszczególnych hallotronów tego samego typu. Zależność napięcia asymetrii wtórnej od temperatury dla hallotronów typu HA-1 pokazana jest na rys. 7.

Jeżeli składowa stała napięć asymetrii hallotronów zastosowanych w układzie nie może być pominięta, to napięcie wyjściowe, określone równaniem (12) można zapisać w postaci

$$\Delta U_H = kI^2(\gamma_1 \xi R - \gamma_2) \pm U_o' \pm U_o'', \tag{38}$$

gdzie:

U_o' — składowa stała napięcia asymetrii hallotronu H_1,

U_o'' — składowa stała napięcia asymetrii hallotronu H_2.

Stan równowagi układu otrzymuje się przy rezystancji gałęzi AB równej

$$R'' = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 \xi} \frac{U_o' \pm U_o''}{kI^2 \gamma_1 \xi}. \tag{39}$$

Drugi człon tego równania stanowi uchyb, którego wartość względna w odniesieniu do rezystancji R gałęzi AB określonej wzorem (14) dla zerowych napięć asymetrii, wynosi

$$\delta_o = \frac{\Delta R}{R} = \frac{U_o' \pm U_o''}{kI^2 \gamma_2}. \tag{40}$$

Uchyb ten jest tym mniejszy, im większy jest sygnał użyteczny. Zmniejszenie uchybu wywołanego napięciami asymetrii możliwe jest przez dobór hallotronów z małym U_0 oraz przez umieszczenie hallotronów na podłożu dobrze przewodzącym ciepło w celu wyrównania temperatur między elektrodami napięciowymi. Znak „$-$" w równaniu (40) jest dla przypadku, gdy napięcia asymetrii w obu hallotronach wzajemnie się kompensują. Dobór hallotronów o jednakowych napięciach asymetrii i włączeniu ich w układ tak aby napięcia się kompensowały nie likwiduje całkowicie uchybu ze względu na zmiany prądu sterującego hallotronu H_2 zależne od elementu badanego.

3.4. Uchyb temperaturowy

Stan równowagi układu $\Delta U_H = 0$, określony równością składowych stałych napięcia hallotronu pracującego w układzie przetwornika mocy i hallotronu pracującego w układzie kwadratora prądu, może ulec zmianie pod wpływem zmian temperatury otoczenia. Ze zmianą temperatury zmieniają się rezystancje hallotronów, rezystancje uzwojeń transformatora i cewki oraz czułość hallotronów. W związku z tym istnieje konieczność zbadania wpływu zmian poszczególnych parametrów na dokładność pomiaru oraz określenie sposobu ich kompensacji.

Zmiany rezystancji hallotronów wykonanych z germanu, arsenku indu i tellurku rtęci w przedziale dopuszczalnych temperatur pracy można traktować jako liniowe. Zmiany rezystancji hallotronów wykonanych z antymonku indu są większe i opisuje się je funkcją wykładniczą [22, 23, 18]. Dla hallotronów o liniowej zmianie rezystancji

$$R_T = R_{To}(1 + \alpha \Delta T)$$

współczynnik zmian rezystancji α może być ujemny lub dodatni w zależności od koncentracji nośników prądu. Produkowane hallotrony z materiałów litych mają współczynnik dodatni, a hallotrony napylane ujemny.

Temperatura ma również wpływ na wartość stałej Halla. W temperaturach powyżej 0°C, wraz ze wzrostem temperatury, czułość hallotronów maleje w przybliżeniu liniowo,

a tylko dla hallotronów z InSb wykładniczo. W literaturze, procentową zmianę czułości przyjęto oznaczać przez β, przy czym

$$\beta = \frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dT}.$$

Trzecim elementem, którego zmiany należy uwzględnić przy kompensacji jest rezystancja cewki. Rezystancję uzwojeń transformatora znajdującego się w układzie podanym na rys. 1 możemy pominąć, gdyż transformator i obwód sterujący hallotronu H_1 można tak zaprojektować, aby zmiany jego parametrów nie miały znacznego wpływu na pracę układu.

Składowa stała napięcia wyjściowego hallotronu H_1 w stanie równowagi układu może być zapisana w postaci

$$U_{H1} = \gamma_1 k\varkappa \frac{U^2}{R_1+R_{H1}} \frac{R}{R^2+X^2}, \tag{41}$$

gdzie $\varkappa$ — przekładnia transformatora,

$$R = R_{El}+R_{H2}+R_3.$$

Przy zmianie temperatury o ΔT napięcie to zmieni się o

$$\Delta U_{H1} = \frac{dU_{H1}}{dT}\Delta T = U_{H1}\left[\beta_1 - \frac{\alpha_1 R_{H1}}{R_1+R_{H1}} + \frac{(\alpha_{Cu} R_{El}+\alpha_2 R_{H2})(X^2-R^2)}{R(R^2+X^2)}\right]\Delta T, \tag{42}$$

przy czym:

α_1 — współczynnik temperaturowy zmian rezystancji hallotronu H_1,

α_2 — współczynnik temperaturowy zmian rezystancji hallotronu H_2,

α_{Cu} — współczynnik temperaturowy zmian rezystancji cewki

przy założeniu, że rezystancje R_1 i R_3 nie są zależne od temperatury, np. wykonane z manganinu.

W temperaturze znamionowej napięcie wyjściowe hallotronu H_2 jest równe

$$U_{H2} = \gamma_2 kI^2 = \gamma_2 k\frac{U^2}{R^2+X^2}. \tag{43}$$

Ze zmianą temperatury napięcie to zmieni się o

$$\Delta U_{H2} = \frac{dU_{H2}}{dT}\Delta T = U_{H2}\left[\beta_2 - \frac{2R(\alpha_{Cu} R_{El}+\alpha_2 R_{H2})}{R^2+X^2}\right]\Delta T. \tag{44}$$

W równaniach powyższych X — reaktancja gałęzi AB.

Układ znajdujący się w równowadze przy temperaturze znamionowej powinien być również w równowadze przy innej temperaturze otoczenia. Warunek ten będzie spełniony gdy $\Delta U_{H1} = \Delta U_{H2}$. Ponieważ w temperaturze znamionowej, w stanie równowagi $U_{H1} = U_{H2}$, możemy napisać warunek

$$\beta_1 - \frac{\alpha_1 R_{H1}}{R_1+R_{H1}} + \frac{(\alpha_{Cu} R_{El}+\alpha_2 R_{H2})(X^2-R^2)}{R(R^2+X^2)} = \beta_2 - \frac{2R(\alpha_{Cu} R_{El}+\alpha_2 R_2)}{R^2+X^2}, \tag{45}$$

przy spełnieniu którego wpływ temperatury będzie skompensowany. Budując przyrząd mamy z reguły zadane zakresy pomiarowe i związaną z tym rezystancję potencjometru R_3, która powinna być równa zakresowi pomiarowemu, oraz wybrane typy hallotronów. Parametrem, który możemy zmieniać w stosunkowo szerokich granicach jest rezystancja R_1. Można ją tak dobrać, aby był spełniony warunek (45). Z równania (45) mamy

$$R_1 = \frac{\alpha_1 R_{H1} R}{R(\beta_1 - \beta_2) + \alpha_{Cu} R_{El} + \alpha_2 R_{H2}} - R_{H1}. \tag{46}$$

W przypadku zastosowania hallotronów tego samego typu o współczynnikach $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$; $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, rezystancja R_1 dla skompensowanego układu będzie równa

$$R_1 = \frac{R_{H1} R}{\frac{\alpha_{Cu}}{\alpha} R_{El} + R_{H2}} - R_{H1}. \tag{47}$$

Przeprowadzone rozważania wykazują, że układ może być skompensowany dla całego przedziału temperatur, w którym przyrosty rezystancji i czułość hallotronów są liniowe.

Zmiana temperatury w układzie nieskompensowanym wywoła pojawienie się na wyjściu zrównoważonego układu napięcia

$$\Delta U_H = U_H \left(\beta_1 - \beta_2 - \frac{\alpha_1 R_{H1}}{R_1 + R_{H1}} + \frac{\alpha_{Cu} R_{El} + \alpha_2 R_{H2}}{R} \right) \Delta T, \tag{48}$$

gdzie $U_H = U_{H1} = U_{H2}$ — napięcie hallotronu w stanie równowagi przy temperaturze znamionowej, które może być zrównoważone przez zmianę rezystancji gałęzi AB o

$$\Delta R = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 \varkappa} (R_1 + R_{H1}) \frac{(\beta_2 - \beta_1)\Delta T}{1 + \beta_1 \Delta T} +$$

$$+ \frac{\gamma_2}{\gamma_1 \varkappa} \frac{1 + \beta_2 \Delta T}{1 + \beta_1 \Delta T} R_{H1} \alpha_1 \Delta T - \alpha_{Cu} R_{El} \Delta T - \alpha_2 R_{H2} \Delta T. \tag{49}$$

Jeżeli więc nieskompensowany układ przed przystąpieniem do pomiarów nie był zrównoważony przy danej temperaturze otoczenia, to pomiar będzie wykonany z uchybem względnym wynoszącym

$$\delta_T = \frac{\Delta R}{R_x}. \tag{50}$$

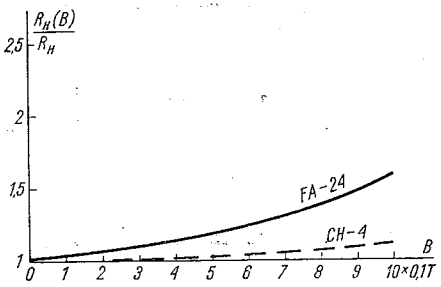
3.5. Uchyb wywołany zjawiskiem magnetorezystancji

Rezystancja hallotronu zmienia się pod wpływem zmian pola magnetycznego skutkiem zjawiska magnetorezystancji (zjawisko Gaussa). W zakresie małych pól magnetycznych przyrost rezystancji jest proporcjonalny do kwadratu iloczynu ruchliwości nośników prądu i indukcji magnetycznej. W większych polach magnetycznych wzrost rezystancji jest w przybliżeniu liniowy [15, 18, 24]. Na rys. 8 podano przykładowo charakterystyki rezystancji wejściowej kilku hallotronów w funkcji pola magnetycznego. Charakter zmian rezystancji wyjściowej hallotronów jest taki sam, jak rezystancji wejściowej.

Zmiana rezystancji hallotronów wywołuje niepożądane zmiany prądu będące przyczyną powstawania uchybu. Celem wyznaczenia wpływu zjawiska Gaussa na pracę układu, przyjmujemy kwadratowy charakter zmian rezystancji hallotronu

$$R_H(B) = R_H(1+aB^2), \tag{51}$$

który dość wiernie opisuje krzywe podane na rys. 8



Rys. 8. Wzrost rezystancji hallotronów pod wpływem pola magnetycznego

Tablica 1

Wartości współczynnika a wzrostu rezystancji wywołanej zjawiskiem magnetorezystancji

Typ hallotronu	CH-3	CH-4	HA-1	HN-13	FA-24
$a[1/T^2]$	0,1	0,1	0,75	0,1	0,75

Współczynnik a z równania (51) zależny jest od typu hallotronu. Przybliżone jego wartości podane są w tablicy 1.

Ponieważ indukcja magnetyczna w cewce El jest proporcjonalna do prądu I, rezystancję hallotronu można zapisać w funkcji tego prądu

$$R_H(i) = R_H(1+ak^2i^2). \tag{52}$$

Przebieg prądu i przy uwzględnieniu zjawiska magnetorezystancji i zasilaniu układu ze źródła o sinusoidalnym napięciu można wyznaczyć w sposób przybliżony, stosując metodę równań całkowych Lalesco do rozwiązania nieliniowego równania różniczkowego [25]. Dla obwodu, w którym znajduje się hallotron H_2 (rys. 1) można napisać następujące równanie różniczkowe

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i + \frac{R_{H2}ak^2}{L}i^3 = \frac{U_m}{L}\sin\omega t, \tag{53}$$

gdzie:

R — rezystancja gałęzi AB,

L — indukcyjność gałęzi AB.

Transformując równanie (53) według Laplace'a otrzymujemy

$$I(s) = \frac{\frac{U_m}{L}\omega}{(s^2+\omega^2)\left(s+\frac{R}{L}\right)} + \frac{I(o)}{s+\frac{R}{L}} - \frac{\alpha\left[\frac{R_{H2}\,ak^2}{L} i^3\right]}{s+\frac{R}{L}}. \tag{54}$$

W pierwszym przybliżeniu pomijamy człon nieliniowy i wyznaczamy przebieg prądu przy założeniu zerowego warunku początkowego $i(o) = 0$:

$$i_o(t) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \sin(\omega t-\varphi) + \frac{U_m e^{-\frac{R}{L}t}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \sin\varphi, \tag{55}$$

gdzie $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}$.

Aby obliczyć drugie przybliżenie, obliczamy transformatę pominiętego członu nieliniowego.

Ponieważ interesuje nas przebieg prądu w stanie ustalonym, pomijamy człon przejściowy równania (55) przy wyznaczeniu transformaty członu nieliniowego

$$\mathscr{L}\left(\frac{R_{H2}\,ak^2}{L} i^3\right) = \mathscr{L}\left[\frac{R_{H2}\,ak^2}{L} \frac{U_m^3}{(R^2+\omega^2L^2)^{\frac{3}{2}}} \sin^3(\omega t-\varphi)\right]. \tag{56}$$

Rozkładając $\sin^3(\omega t-\varphi) = \frac{3}{4}\sin(\omega t-\varphi) \frac{1}{4}\sin^3(\omega t-\varphi)$ otrzymujemy

$$\mathscr{L}\left(\frac{R_{H2}\,ak^2}{L} i^3\right) = \frac{R_{H2}\,ak^2U_m^3}{L(R^2+\omega^2L^2)^{\frac{3}{2}}} \times$$

$$\times\left[\frac{3}{4}\frac{\omega\cos\varphi-s\sin\varphi}{s^2+\omega^2} - \frac{1}{4}\frac{3\omega\cos 3\varphi-s\sin 3\varphi}{s^2+9\omega^2}\right]. \tag{57}$$

Dzieląc równanie (57) przez $s+\frac{R}{L}$ otrzymujemy transformatę członu nieliniowego równania (54), z którego po wykonaniu przekształceń znajdujemy Δi dla stanu ustalonego

$$\Delta i = \frac{R_{H2}\,ak^2U_m^3}{(R^2+\omega^2L^2)^{3/2}}\left[\frac{3}{4}\frac{\sin(\omega t-2\varphi)}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} - \frac{1}{4}\frac{\sin(3\omega t-3\varphi-\varphi_3)}{\sqrt{R^2+(3\omega L)^2}}\right], \tag{58}$$

gdzie $\varphi_3 = \operatorname{arctg}\frac{3\omega L}{R}$.

Sumując (55) i (58) otrzymuje się drugie przybliżenie prądu w stanie ustalonym

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \sin(\omega t-\varphi) +$$

$$+\frac{R_{H2}\,ak^2U_m^3}{(R^2+\omega^2L^2)^{3/2}}\left[\frac{3}{4}\frac{\sin(\omega t-2\varphi)}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} - \frac{1}{4}\frac{\sin(3\omega t-3\varphi-\varphi_3)}{\sqrt{R^2+(3\omega L)^2}}\right]. \tag{59}$$

W rozpatrywanym przypadku można poprzestać na drugim przybliżeniu, z którego widać, że zjawisko Gaussa jest przyczyną powstania trzeciej harmonicznej prądu przy sinusoidalnym napięciu zasilania.

Drugi człon równania (59) może wprowadzać uchyb pomiaru. Określenie wartości uchybu przeprowadzimy przy założeniu, że wpływ efektu Gaussa na prąd sterujący hallotronu H_1 jest pomijalny, co w praktyce można zawsze zrealizować przez dobranie odpowiednio dużej rezystancji włączonej szeregowo z tym hallotronem. Równowagę układu $\Delta U_H = 0$ można zapisać w postaci

$$\gamma_1 \xi \int_0^T u i \, dt = \gamma_2 \int_0^T i^2 \, dt, \tag{60}$$

z której po wstawieniu równania (59) i wykonaniu odpowiednich działań otrzymuje się zależność

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1 \xi} = R \left(1 + \frac{3}{4} \frac{ak^2 R_{H2} U_m^2}{Z^2} \frac{\dfrac{\cos 2\varphi}{R} - \dfrac{3ak^2 R_{H2} U_m^2}{4Z^4} - \dfrac{2}{Z}}{1 + \dfrac{9}{16} \dfrac{a^2 k^4 R_{H2}^2 U_m^4}{Z^6} + \dfrac{3}{2} \dfrac{ak^2 R_{H2} U_m^2}{Z^3}} \right), \tag{61}$$

przy spełnieniu której układ będzie w równowadze. Drugi człon prawej strony wyrażenia (61) określa przyrost rezystancji, zależny od indukcji magnetycznej w cewce.

Dla mniej korzystnego przypadku, tj. gdy reaktancja układu jest pomijalna, względny przyrost rezystancji wynosi

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{3ak^2 R_{H2} U^2}{2R^3 + 3ak^2 R_{H2} U^2}. \tag{62}$$

Równanie to można przepisać w zależności od indukcji $B_{sk} = k \dfrac{U}{R}$.

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\dfrac{3}{2} a \dfrac{R_{H2}}{R} B^2 sk}{1 + \dfrac{3}{2} a \dfrac{R_{H2}}{R} B_{sk}^2}. \tag{63}$$

Przyrost rezystancji wywołany efektem Gaussa można ograniczyć przez dobranie odpowiednio dużej rezystancji R. Z opisanej zasady działania układu podanego na rys. 1 wynika, że rezystancja R jest zawsze większa od górnej granicy zakresu pomiarowego. W układzie przystosowanym do pomiaru dużych rezystancji wpływ efektu Gaussa może być pominięty, natomiast w układzie przystosowanym do pomiaru małych rezystancji efekt Gaussa może wprowadzać znaczne uchyby.

Zakładając dopuszczalny przyrost rezystancji i indukcję magnetyczną w cewce, można z równania (63) wyznaczyć minimalną wartość rezystancji R, przy której uchyb wywołany zjawiskiem Gaussa nie przekracza założonej wartości. Układ, w którym zastosowane są np. hallotrony z arsenku indu o rezystancji $R_{H2} = 2\ \Omega$ i cewka dająca maksymalną indukcję 0,1 T, będzie miał uchyb poniżej 0,1% przy $R > 13\ \Omega$.

Przy większym zakresie pomiarowym dla założonej dokładności wpływ efektu Gaussa można pominąć.

4. PRACA UKŁADU Z NIELINIOWYM ELEMENTEM BADANYM

W praktyce pomiarowej element badany może być często nieliniowy, jak np. cewka z rdzeniem ferromagnetycznym. Nasuwa się wówczas pytanie, co zostanie zmierzone za pomocą układu podanego na rys. 1.

Aby odpowiedzieć na to pytanie, przeprowadzimy analizę pracy układu przy sinusoidalnym napięciu zasilania (2). Ze względu na nieliniowość elementu badanego prąd i będzie odkształcony

$$i = I_o + \sum_{n=1}^{\infty} I_{mn} \sin(n\omega t - \varphi_n). \tag{64}$$

Zgodnie z zależnością (4), przebieg indukcji magnetycznej w cewce będzie następujący

$$B = k\left[I_o + \sum_{n=1}^{\infty} I_{mn} \sin(n\omega t - \varphi_n)\right]. \tag{65}$$

Napięcie wyjściowe hallotronu H_2 zawiera składową stałą równą

$$U_{H2} = \gamma_2 k \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2, \tag{66}$$

a składowa stała napięcia wyjściowego hallotronu H_1

$$U_{H1} = \gamma_1 k \xi \frac{1}{T} \int_0^T U_m \sin\omega t \left[I_o + \sum_{n=1}^{\infty} I_{mn} \sin(n\omega t - \varphi_n)\right] dt = \gamma_1 k \xi U I_1 \cos\varphi_1 \tag{67}$$

jest proporcjonalna do mocy czynnej rozpraszanej w gałęzi AB. Jeżeli zastąpimy prąd odkształcony równoważnym mu prądem sinusoidalnym o wartości skutecznej $I = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} I_n^2}$, to równanie (67) można zapisać w postaci

$$U_{H1} = \gamma_1 k \xi I^2 R_z, \tag{68}$$

gdzie R_z jest zastępczą rezystancją elementów połączonych szeregowo z cewką

$$R_z = R_{zx} + R_{El} + R_{H2} + R_3. \tag{69}$$

Równowaga układu będzie osiągnięta dla

$$(\gamma_1 \xi R_z - \gamma_2) k \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2 = 0, \tag{70}$$

czyli dla rezystancji

$$R_z = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 \xi}. \tag{71}$$

Po sprowadzeniu układu do stanu równowagi z potencjometru R_3 odczytujemy rezystancję zastępczą elementu badanego przedstawionego według szeregowego schematu zastępczego

$$R_{zx} = \Delta R_3 \tag{72}$$

dla danej wartości skutecznej prądu I.

Na podkreślenie zasługuje tu fakt, że w przeciwieństwie do zrównoważonych mostków prądu przemiennego, układ można sprowadzić do stanu równowagi przy nieliniowym elemencie badanym, przy czym w tym elemencie może pojawić się składowa stała prądu.

5. CZUŁOŚĆ UKŁADU

Czułość układów zrównoważonych określa się w bardzo wąskim przedziale odchyleń wielkości wyjściowej od stanu równowagi. Czułość ta jest równa czułości początkowej układu. W pracach poświęconych analizie układów zrównoważonych [8, 10, 11, 26, 27] jako podstawę analizy czułości przyjmuje się następujące definicje:

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{\delta w}{\delta x};$$

czułość względna

$$S^* = \frac{\partial w}{\partial x} x,$$

gdzie:

w — wielkość wyjściowa,

x — wielkość wejściowa mierzona.

Czułość układu podanego na rys. 1, określoną jako zmianę napięcia wyjściowego w funkcji zmiany rezystancji na wejściu przy danym napięciu źródła zasilania, można wyznaczyć z równania (20) przy założeniu stałej reaktancji gałęzi AB

$$S = \frac{\partial(\Delta U_H)}{\partial R_x} = k\gamma_1 \xi U^2 \frac{(R_{El}+R_{H2}+R_3)^2 - R_x^2 + X^2}{[(R_{El}+R_{H2}+R_3+R_x)^2+X^2]^2}. \tag{73}$$

Przy małych odchyleniach od stanu równowagi, równanie to można przepisać w postaci

$$S = k\gamma_1 \xi U^2 \frac{1}{Z^2}. \tag{74}$$

Z równania (74) widać, że czułość układu jest tym większa im większa jest indukcja w cewce El oraz prądy w hallotronach, czyli im większe są napięcia wyjściowe poszczególnych hallotronów. Czułość układu przy danym napięciu źródła zasilania zależy od iloczynu czułości hallotronu i dopuszczalnego prądu sterującego γI. Przy porównywaniu układów, w których zastosowane są różne typy hallotronów wygodniej jest posłużyć się określeniem czułości względnej, którą dla omawianych układów można określić następująco

$$S^* = \frac{\partial(\Delta U_H)}{\partial R_x} R_x = k\gamma_1 I_1 I \frac{R_x}{Z}; \tag{75}$$

I_1 — prąd sterujący hallotronu H_1.

Orientacyjne wartości czułości układów z zastosowaniem kilku typów hallotronów podane są w tablicy 2. Obliczenia przeprowadzono przy założeniu, że oba hallotrony znajdujące się w układzie są tego samego typu i wysterowane są prądem znamionowym. Wartości czułości podane są nie dla jednej wartości współczynnika k, lecz dla stałej wartości

Tablica 2

Czułość układu przy różnych typach hallotronów

Typ hallotronu	Producent	I_{znam}	k	γ	Z	S	$S^* \cdot \frac{Z}{R_x}$
		mA	T/A	V/AT	Ω	μV	mV/l
CH-3	ITE-PAN	30	0,33	26	3330	2,3	7,8
HN-13	ITE-PAN	40	0,25	8	2500	1,3	3,2
HA-1	ITE-PAN	200	0,05	0,8	500	3,2	1,6
FA-24	Siemens	400	0,025	0,75	250	12	3
FC-33	Siemens	100	0,1	1,42	1000	1,4	1,4
FC-34	Siemens	200	0,05	1,45	250	5,8	2,9
SV-230	Siemens	100	0,1	6,5	1000	6,5	6,5
SV-110	Siemens	15	0,66	100	6660	2,2	15
SV-130	Siemens	35	0,286	100	2860	12,3	35

indukcji magnetycznej w cewce, wynoszącej $B = 0{,}01$ T. Przyjęcie stałej indukcji magnetycznej oznacza, że dla każdego typu hallotronu cewka ma inną ilość zwojów. Podane w tablicy 2 wartości czułości bezwzględnej obliczone są przy założeniu, że układ zasilany jest napięciem $U = 100$ V. Dla tego napięcia impedancja gałęzi AB przy znamionowym prędzie jest równa Z.

6. UKŁAD ZAWIERAJĄCY CEWKĘ Z RDZENIEM FERROMAGNETYCZNYM

Czułość układu może być zwiększona, jeżeli zamiast cewki powietrznej zostanie zastosowana cewka z rdzeniem ferromagnetycznym, w szczelinie którego umieszczone będą hallotrony. Zastosowanie rdzenia ferromagnetycznego zwiększa współczynnik k w równaniu (4) przy założonych amperozwojach.

Wprowadzenie rdzenia ferromagnetycznego powoduje jednak zniekształcenie przebiegu indukcji magnetycznej w stosunku do wywołującego ją prądu w uzwojeniu. Zniekształcenie to jest przyczyną powstania dodatkowego uchybu, którego nie ma przy stosowaniu cewki powietrznej. Określenie tego uchybu przeprowadzone będzie przy założeniu, że nieliniowość cewki z rdzeniem ma pomijalny wpływ na odkształcenie prądu w gałęzi pomiarowej, co jest słuszne w przypadku, gdy impedancja cewki jest mała w porównaniu z impedancją całej gałęzi AB. Przy tym założeniu prąd I określony jest głównie przez impedancję elementu badanego przez rezystancję R_3. Możemy więc przyjąć, że elektromagnes pracuje przy wymuszonym prądzie. Jeżeli element badany jest liniowy, to przy sinusoidalnym napięciu zasilania (2) prąd I będzie również sinusoidalny (3), a indukcja magnetyczna w szczelinie elektromagnesu odkształcona

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}(I) \sin(n\omega t - \varphi - \varepsilon_n); \tag{76}$$

ε_n — kąt opóźnienia n-tej harmonicznej indukcji względem prądu w uzwojeniu.

Napięcie wyjściowe hallotronu H_2

$$u_{H2} = \gamma_2 I_m \sin(\omega t - \varphi) \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}(I) \sin(n\omega t - \varphi - \varepsilon_n) \tag{77}$$

ma składową stałą równą

$$U_{H2} = \gamma_2 I B_{sk1}(I) \cos \varepsilon_1 . \tag{78}$$

Napięcie wyjściowe hallotronu H_1

$$u_{H1} = \gamma_1 \xi U_m \sin \omega t \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}(I) \sin(n\omega t - \varphi - \varepsilon_n) \tag{79}$$

ma składową stałą

$$U_{H1} = \gamma_1 \xi U B_{sk1}(I) \cos(\varphi + \varepsilon_1) . \tag{80}$$

Napięcie wyjściowe układu, które jest różnicą składowych stałych napięć wyjściowych obu hallotronów jest równe

$$\Delta U_H = U_{H1} - U_{H2} = B_{sk1}(I) [\gamma_1 \xi U \cos(\varphi + \varepsilon_1) - \gamma_2 I \cos \varepsilon_1] . \tag{81}$$

Jak w układzie z cewką powietrzną, elementy układu możemy dobrać w ten sposób, aby przy zwartych zaciskach BC składowa stała napięcia wyjściowego określona tym równaniem była równa zero. Warunek ten będzie spełniony, gdy

$$\gamma_1 \xi U \cos(\varphi + \varepsilon_1) = \gamma_2 I \cos \varepsilon_1 . \tag{82}$$

Po przekształceniu zależności (82) otrzymujemy równanie

$$\frac{U}{I} \cos \varphi = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 \xi} + \frac{U}{I} \sin \varphi \operatorname{tg} \varepsilon_1 , \tag{83}$$

którego lewa strona przedstawia rezystancję gałęzi AB

$$R = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 \xi} + \frac{U}{I} \sin \varphi \operatorname{tg} \varepsilon_1 . \tag{84}$$

Na stan równowagi ma więc w tym przypadku wpływ reaktancja układu, która zmienia się wraz ze zmianą elementu badanego oraz przesunięcie podstawowej harmonicznej indukcji magnetycznej względem prądu w cewce. Natomiast nieliniowość indukcji magnetycznej względem prądu I nie wpływa na pomiar. Brak wpływu nieliniowości na pomiar pozwala na stosowanie stosunkowo dużych indukcji magnetycznych, a jak to już było wspomniane, im większa indukcja tym większa czułość układu.

Jeżeli do układu znajdującego się w równowadze ($\Delta U_H = 0$) przy zwartych zaciskach BC włączony zostanie element badany, to nowy stan równowagi uzyska się, gdy zgodnie z równaniem (81) rezystancja gałęzi AB będzie równa

$$R''' = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 \xi} + \frac{U}{I'} \sin \varphi' \operatorname{tg} \varepsilon_1' , \tag{85}$$

gdzie:

I' — prąd w stanie równowagi po włączeniu elementu badanego,

φ' — przesunięcie fazowe po włączeniu elementu badanego,

ε_1' — opóźnienie pierwszej harmonicznej indukcji względem I'.

Różnica rezystancji określonej równaniem (85) i równanie (84) stanowi uchyb pomiaru

$$\Delta R = R' - R = X\frac{\sin(\varepsilon_1' - \varepsilon_1)}{\cos\varepsilon_1' \cos\varepsilon_1} + (X' - X)\operatorname{tg}\varepsilon_1', \tag{86}$$

przy czym:

X — reaktancja gałęzi AB przy zwartych zaciskach BC,

X' — reaktancja gałęzi AB z włączonym elementem badanym.

Różnica $X' - X$ nie przedstawia sobą reaktancji elementu badanego ze względu na zmianę reaktancji elektromagnesu przy zmianie prądu I.

Wprowadzając zależność określającą uchyb (86) przyjęto założenie, że prąd sterujący hallotronu H_1 jest w fazie z napięciem zasilającym. W rzeczywistym układzie może istnieć przesunięcie między prądem sterującym i napięciem zasilającym wprowadzonym przez transformator lub reaktancję w obwodzie sterującym hallotronu H_1.

Jeżeli istnieje opóźnienie ν między prądem i_1 i napięciem zasilającym, to napięcie wyjściowe określone równaniem (81) będzie równe

$$\Delta U_H^* = \gamma_1 B_{sk1}(I)\xi I\cos(\varepsilon_1 - \nu)\times$$
$$\times\left[R - X\operatorname{tg}(\varepsilon_1 - \nu) - \frac{\gamma_2}{\gamma_1\xi}\frac{\cos\varepsilon_1}{\cos(\varepsilon_1 - \nu)}\right], \tag{87}$$

a uchyb pomiaru określony równaniem (86) będzie miał wartość

$$\Delta R^* = (X' - X)\operatorname{tg}(\varepsilon_1' - \nu) + \frac{\sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_1')}{\cos(\varepsilon_1' - \nu)\cos(\varepsilon_1 - \nu)}\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1\xi}\sin\nu - X\right). \tag{88}$$

Porównując równania (86) i (88) widzimy, że przy istnieniu opóźnienia ν uchyb pomiaru jest mniejszy, a dla

$$\nu \cong \frac{X'\varepsilon_1' - \varepsilon_1 X}{(X' - X) - \frac{\gamma_2}{\gamma_1\xi}(\varepsilon_1 - \varepsilon_1')} \tag{89}$$

osiąga wartość równą zero.

Wielkość kąta ε można byłoby obliczyć, gdyby były znane: pętla histerezy i wymiary rdzenia ferromagnetycznego. Ze względu na brak równań ogólnych opisujących ściśle własności materiałów ferromagnetycznych można tylko oszacować przybliżone wartości kąta ε przyjmując odpowiednią dla danego materiału aproksymację pętli histerezy.

Celem oszacowania wielkości kąta ε dla rdzenia ze szczeliną powietrzną, najwygodniej ze względów rachunkowych jest aproksymować dynamiczną pętlę histerezy elipsą, mimo iż taka aproksymacja nie uwidacznia powstawania wyższych harmonicznych indukcji przy sinusoidalnym natężeniu pola. Przyjęcie eliptycznej pętli histerezy daje wartości kąta bardzo bliskie do tych, jakie otrzymuje się przy aproksymacji pętli histerezy za pomocą prostokąta lub paraboli, która jest stosowana do aproksymacij pętli histerezy rdzeni pracujących w małych polach magnetycznych (obieg Rayleigha). Przy sinusoidalnym prądzie w uzwojeniu, indukcja magnetyczna w rdzeniu o eliptycznej pętli histerezy (rys. 9) jest opóźniona o kąt ε

$$B = B_m \sin(\omega t - \varepsilon), \tag{90}$$

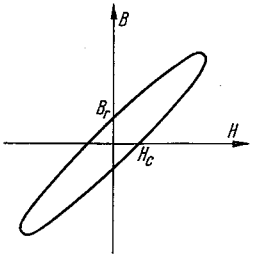
który wynosi:

$$\varepsilon = \arcsin\frac{H_c}{H_m} = \arcsin\frac{B_r}{B_m}, \tag{91}$$

gdzie:

H_c — dynamiczne natężenie koercji,

B_r — remanencja rdzenia ze szczeliną.



Rys. 9. Eliptyczna aproksymacja pętli histerezy

Amplituda natężenia pola magnetycznego może być zapisana w postaci:

$$H_m = \frac{I_m Z}{l} = H_{mż} + \frac{l_p}{\mu_o l} B_{mp}, \tag{92}$$

gdzie:

l_p — długość szczeliny,

l — średnia długość drogi magnetycznej w rdzeniu,

B_p — indukcja magnetyczna w szczelinie.

Pomijając rozproszenie strumienia magnetycznego i spadek napięcia magnetycznego w rdzeniu, z równania (91) po wstawieniu (92) otrzymujemy zależność

$$\varepsilon = \arcsin\left(\frac{\mu_o H_c}{\beta_m}\frac{l}{l_p}\right), \tag{93}$$

z której widać, że na rdzeń powinien być używany materiał o wąskiej pętli histerezy. Przy małych częstotliwościach rdzeń może być wykonany z permaloju, a przy większych częstotliwościach z ferrytu.

7. DOKŁADNOŚĆ POMIARU

Uchyb systematyczny pomiaru rezystancji za pomocą układu podanego na rys. 1 zależy od dokładności zastosowanej dekady wzorcowej i wartości uchybów wnoszonych przez pozostałe elementy. Przez odpowiednie zaprojektowanie układu, uchyby wnoszone przez poszczególne elementy mogą być ograniczone do stosunkowo małych wartości. Uchyb temperaturowy δ_t można łatwo wyeliminować przez zrównoważenie układu w danej temperaturze otoczenia przed przystąpieniem do wykonania pomiarów. Do dokładniejszych pomiarów można stosować cewkę bez rdzenia ferromagnetycznego i produkowane hallotrony mające liniowe charakterystyki dla indukcji magnetycznych o wartości kilkuset Gs.

Znacznie trudniej jest natomiast wyeliminować uchyby związane z przesunięciem ν i napięciami asymetrii. Uchyb od przesunięcia ν można ograniczyć przez dobór takiego punktu pracy na charakterystyce fazowej transformatora, aby kąt $\nu = 0$, lub przez zastosowanie specjalnej kompensacji, polegającej na włączeniu kondensatora lub dławika w obwód sterujący hallotronu H_1 zależnie od tego czy kąt ν dodatni czy ujemny. Kompensacje te będą skuteczne tylko w małym przedziale zmian częstotliwości napięcia zasilającego. Dlatego też, nawet w optymalnych warunkach uchyb pomiaru będzie sumą trzech składników

$$\delta = \delta_{R3} + \delta_\nu + \delta_o .$$

Ograniczenie uchybu wywołanego napięciami asymetrii δ_o uzyskuje się drogą wyboru hallotronów o małym U_o oraz przez umieszczenie ich na podłożu dobrze przewodzącym ciepło.

8. WPŁYW KSZTAŁTU KRZYWEJ NAPIĘCIA NA DOKŁADNOŚĆ POMIARU

Układ, złożony z elementów liniowych, w którym k, γ i ξ nie zależą od częstotliwości zasilany napięciem odkształconym, ma składowe stałe napięć wyjściowych proporcjonalne do kwadratu wartości skutecznej prądu odkształconego w elemencie badanym.

Równanie (12) określające składową stałą napięcia wyjściowego ma w tym przypadku postać

$$\Delta U_H = k \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2 (\gamma_1 \xi R - \gamma_2), \tag{94}$$

z której widać, że równowaga jest osiągana dla tej samej rezystancji gałęzi AB, dla której układ był w równowadze przy zasilaniu napięciem sinusoidalnym. Widzimy więc, że stan równowagi układu złożonego z liniowych elementów nie zależy od kształtu krzywej napięcia zasilającego.

Równanie (94) jest prawdziwe w przypadku, gdy transformator w układzie podanym na rys. 1 jest idealny, tj. ma jednakową przekładnię dla wszystkich harmonicznych oraz harmoniczne prądu w obwodzie wtórnym są w fazie z odpowiadającymi im harmonicznymi napięcia. W przypadku elementów nieliniowych oraz przy nieliniowym elektromagnesie stan równowagi układu zależeć będzie od częstotliwości i kształtu krzywej napięcia źródła zasilania.

Celem określenia rezystancji gałęzi AB, przy której układ zasilany napięciem odkształconym znajduje się w równowadze, przyjmiemy, podobnie jak w punkcie 6 założenie, że nieliniowość elektromagnesu ma pomijalny wpływ na odkształcenie prądu w gałęzi AB. Przy tym założeniu, odkształcone napięcie

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} U_m \sin(n\omega t - \Psi_n). \tag{95}$$

wywoła w gałęzi AB, z włączonym liniowym elementem badanym o charakterze indukcyjnym, prąd

$$i = \sum_{n=1}^{\infty} I_{mn} \sin(n\omega t - \Psi_n - \varphi_n). \tag{96}$$

Indukcja magnetyczna w szczelinie elektromagnesu może być zapisana w postaci

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin(n\omega t - \Psi_n - \varphi_n - \varepsilon_n), \tag{97}$$

przy czym ε_n — przesunięcie między n-tą harmoniczną prądu i n-tą harmoniczną indukcji wywołane stratami w rdzeniu ferromagnetycznym elektromagnesu.

Składowa stała napięcia wyjściowego hallotronu H_2

$$U_{H2} = \frac{\gamma_2}{T} \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} I_{mn} \sin(n\omega t - \varphi_n - \Psi_n) \times \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin(n\omega t - \Psi_n - \varphi_n - \varepsilon_n)\, dt$$

jest równa

$$U_{H2} = \gamma_2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n B_{skn} \cos \varepsilon_n. \tag{98}$$

Prąd sterujący hallotronu H_1, przy nieidealnym transformatorze w układzie 1 będzie równy

$$i_1 = \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \xi_n \sin(n\omega t - \Psi_n - \nu_n), \tag{99}$$

a składowa stała napięcia wyjściowego z hallotronu H_1

$$U_{H1} = \gamma_1 \sum_{n=1}^{\infty} U_n B_{skn} \xi_n \cos(\varphi_n + \varepsilon_n - \nu_n). \tag{100}$$

Stan równowagi układu otrzymujemy, gdy napięcia określone równaniami (98) i (100) będą jednakowe. Po wykonaniu przekształceń równość tę można zapisać w postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_{skn} \xi_n I_n \cos \varepsilon_n \times$$

$$\times \left\{ \frac{U_n}{I_n} \cos \varphi_n [1 - \operatorname{tg} \varphi_n \operatorname{tg}(\varepsilon_n - \nu_n)] \frac{\cos(\varepsilon_n - \nu_n)}{\cos \varepsilon_n} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1 \xi_n} \right\} = 0, \tag{101}$$

w której czynnik $\frac{U_n}{I_n} \cos \varphi_n$ przedstawia rezystancję gałęzi AB dla n-tej harmonicznej.

Przy przyjętych założeniach rezystancja ta jest stała dla dowolnej harmonicznej.

Z równania (101) otrzymujemy, że układ znajduje się w równowadze, gdy

$$R = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} B_{skn} I_n \cos \varepsilon_n}{\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n B_{skn} I_n \frac{\cos(\varphi_n + \varepsilon_n - \nu_n)}{\cos \varphi_n}}. \tag{102}$$

Zależność ξ, ε i ν od częstotliwości jest przyczyną zmian stanu równowagi wraz ze zmianą częstotliwości i zmianą zawartości harmonicznych. Zmiana rezystancji

$$\Delta R = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 \xi_1}\left[\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{skn}}{B_{sk1}}\frac{I_n}{I_1}\cos\varepsilon_n}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n}{\xi_1}\frac{B_{skn}}{B_{sk1}}\frac{I_n}{I_1}\frac{\cos(\varphi_n+\varepsilon_n-\nu_n)}{\cos\varepsilon_n}}-1\right], \tag{103}$$

przy czym:

$\xi_1 = \frac{U_1}{i_1}$ — współczynnik dla podstawowej harmonicznej,

B_{sk1} — wartość skuteczna podstawowej harmonicznej indukcji,

B_{skn} — wartość skuteczna n-tej harmonicznej indukcji,

I_1 — podstawowa harmoniczna prądu I, wywołana obecnością wyższych harmonicznych w napięciu zasilającym; może ona być traktowana jako dodatkowy uchyb bezwzględny wywołany zniekształceniem krzywej napięcia zasilającego.

9. WPŁYW OBCYCH PÓL MAGNETYCZNYCH

Zewnętrzne pole magnetyczne o częstotliwości równej częstotliwości napięcia źródła zasilania, mające składową normalną do powierzchni hallotronów

$$B' = B'_m \sin(\omega t + \Theta), \tag{104}$$

po przemnożeniu z prądami sterującymi, daje na wyjściu obu hallotronów dodatkowe składowe stałe napięć wyjściowych. Z równości składowych stałych napięć wyjściowych

$$\gamma_2 k I^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_2 B'_m I\cos(\varphi+\Theta) = \gamma_1 k\xi U I\cos\varphi + \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_1 B'_m \xi U\cos\Theta$$

otrzymuje się, że rezystancja gałęzi AB (rys. 1), przy której układ będzie w równowadze, jest równa

$$R = \frac{\gamma_2}{\gamma_1\xi} + \frac{\gamma_2 B'_m\cos(\varphi+\Theta)}{\sqrt{2}\,\gamma_1 k\xi I} - \frac{B'_m U\cos\Theta}{\sqrt{2}\,kI^2}. \tag{105}$$

Drugi i trzeci człon prawej strony równania (105) przedstawiają uchyb wywołany zewnętrznym polem magnetycznym. Biorąc pod uwagę, że $R = \frac{\gamma_2}{\gamma_1\xi}$ jest rezystancją gałęzi AB, przy której układ jest w równowadze bez zewnętrznego pola magnetycznego oraz że $\sqrt{2}kI = B_m$ jest amplitudą indukcji magnetycznej wytworzonej w cewce, po wykonaniu odpowiednich przekształceń, uchyb bezwzględny wywołany zewnętrznym polem magnetycznym można zapisać w postaci

$$\Delta_B = -R\frac{B'_m}{B_m}\operatorname{tg}\varphi\sin(\Theta+\varphi). \tag{106}$$

Z równania tego widać, że wartość uchybu zależna jest nie tylko od amplitudy i fazy Θ zewnętrznego pola magnetycznego ale i od kąta φ. Ograniczenie wpływu obcego pola magnetycznego można uzyskać przez zmniejszenie stosunku $\frac{B'_m}{B_m}$, lub przez zastosowanie ekranów.

10. ZAKRESY POMIAROWE

Podany na rys. 1 układ może być wykorzystany do pomiaru rezystancji w zakresie odpowiadającym wartości rezystancji potencjometru R_3. Maksymalna wartość rezystancji potencjometru R_3 odpowiadająca górnej granicy zakresu pomiarowego ograniczona jest wielkością napięcia źródła zasilania, gdyż ze względu na konieczność zapewnienia wymaganej czułości układu, prąd sterujący hallotronu H_2 musi mieć odpowiednią wartość. Jeżeli pomiar ma być wykonany z dokładnością δ, to pożądanym jest, aby uchyb wywołany nieczułością układu był pomijalnie mały. W pomiarach metodą zerową przyjmuje się zazwyczaj, że uchyb od nieczułości układu powinien być $5 \div 10$ razy mniejszy od uchybu dopuszczalnego. Przyjmując za podstawę wymaganą dokładność pomiaru i odpowiadającą jej czułość S^* możemy z równań (14) i (75) wyznaczyć górną granicę zakresu pomiarowego $R_{x\max}$ przy założonym napięciu źródła zasilania

$$R_{x\max} \cong \sqrt{\frac{k\gamma_2}{S^*}}\, U\cos\varphi - R_{H2} - R_{El}, \tag{107}$$

przy czym φ jest przesunięciem fazy między U i I po włączeniu elementu badanego. Górna granica pomiaru jest również ograniczona wielkością występujących szumów i napięć asymetrii hallotronów, które umożliwiają stosowanie zbyt czułych wskaźników zera. Stosując obecnie produkowane hallotrony, można mierzyć największe rezystancje o wartości kilkudziesięciu kΩ przy napięciu zasilania nie przekraczającym 200 V.

Najmniejsza wartość rezystancji R_x, jaka może być zmierzona za pomocą układu podanego na rys. 1, ograniczona jest założoną dokładnością pomiaru. Najczęściej spotykane dekady wzorcowe pozwalają nastawiać najmniejszą zmianę rezystancji równą 0,1 Ω. Stosując taką dekadę można nastawiać rezystancję R_3 z dokładnością 0,1 Ω, co przy pomiarze $R_x = 10$ Ω daje uchyb około 1%. Mniejsze rezystancje mogą być mierzone w układzie podanym na rys. 2. Zakres pomiarowy układu przedstawionego na rys. 2 podobny jest do zakresu pomiarowego omomierzy szeregowych z miernikiem magnetoelektrycznym.

11. OPIS I WYNIKI BADAŃ UKŁADU EKSPERYMENTALNEGO

11.1. Układ eksperymentalny

Na podstawie przeprowadzonych rozważań teoretycznych zbudowano model układu w celu przebadania poszczególnych uchybów i charakterystyk. W układzie eksperymentalnym zastosowano hallotrony napylane z tellurku rtęci typu HN-13, produkcji Instytutu Technologii Elektronowej PAN. Hallotrony zostały napylone na płytce z miki po obu

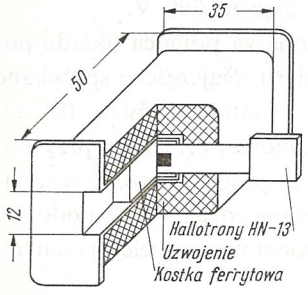
jej stronach, tak aby wzajemnie się pokrywały. Wykonany w ten sposób hallotron podwójny umożliwia znaczne zmniejszenie sił termoelektrycznych, powstających w obwodzie wyjściowym skutkiem nierównomiernego wzajemnego podgrzewania się, co ma miejsce w przypadku, gdy dwa nałożone jeden na drugim hallotrony są przesunięte względem siebie. Przed wykonaniem wyboru przebadano wszystkie typy hallotronów produkowanych w kraju. Przeprowadzone badania wykazały, że hallotrony germanowe nie mogą być zastosowane ze względu na duże wahania napięć asymetrii wtórnej w czasie pracy oraz ze względu na duże termiczne stałe czasu. Przy zmianach prądu w obwodzie sterującym hallotronów germanowych napięcia asymetrii ustalają się po czasie od kilku do kilkunastu sekund, co uniemożliwia szybkie wykonywanie pomiarów.

Tablica 3

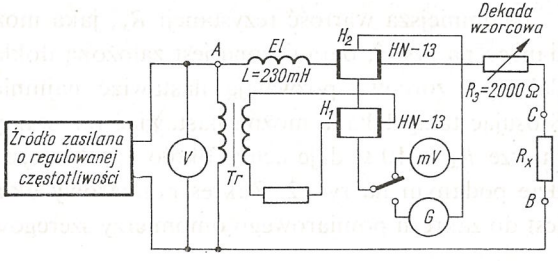
Parametry hallotronu podwójnego typ HN-16

Hallotron	R_H	R_H^*	γ	r_o	α	β	I_n
	Ω	Ω	V/AT	V/A	%/°C	%/°C	mA
H_1	35	30	7	0,01	−0,05	−0,2	40
H_2	42,2	35	8	0,1	−0,05	−0,2	40

W układzie mogą być stosowane hallotrony z arsenku indu typu HA-1. W przebadanej partii tych hallotronów obserwowano jednak znaczne różnice napięć asymetrii wtórnej między poszczególnymi egzemplarzami, która wynosiła od zera do około 100 μV, przy znamionowym prądzie sterującym. Trudność kompensacji napięć asymetrii wtórnej oraz niższa czułość hallotronów HA-1 w porównaniu do hallotronów napylanych pozwala



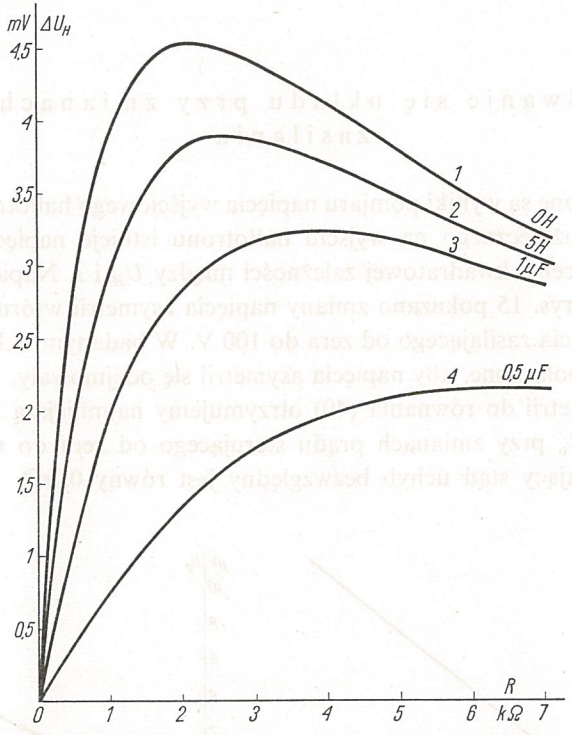
Rys. 10. Konstrukcja cewki



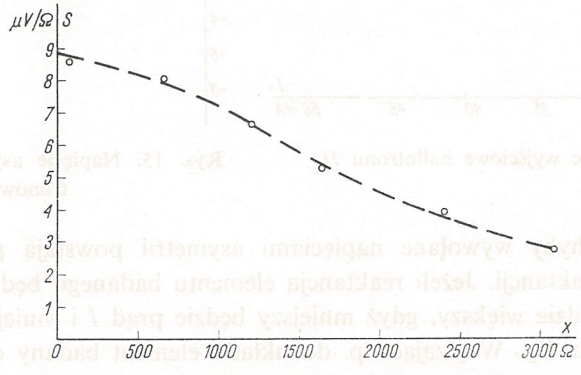
Rys. 11. Układ eksperymentalny

przypuszczać, że hallotrony napylane będą częściej stosowane w omawianych układach. Oprócz większej czułości, hallotrony napylane mają również tę zaletę, że mogą być ściskane, zginane i naklejane na podłoże dobrze przewodzące ciepło, co znacznie zmniejsza napięcie asymetrii wtórnej. Dane techniczne zastosowanych hallotronów podane są w tablicy 3. Hallotrony umieszczono wewnątrz cewki o $z = 3500$ zwojach, rezystancja uzwojenia $R_{El} = 35{,}3\ \Omega$. Wymiary cewki podane są na rys. 10. Stała cewki $k = 0{,}984$ T/A. Jako rezystancję R_3 zastosowano wzorcową dekadę. Transformator wyjściowy o przekładni

$\varkappa = U_1/U_2 = 3$ ma rdzeń z permaloju H79M5. Pozostałe dane podane są na schemacie układu pomiarowego rys. 11. Układ znajduje się w równowadze przy zwartych zaciskach BC, gdy rezystancja dekady $R_3 = 2000\ \Omega$. Indukcyjność cewki jest równa $L_{EI} = 230$ mH.



Rys. 12. Napięcie wyjściowe układu eksperymentalnego



Rys. 13. Czułość układu

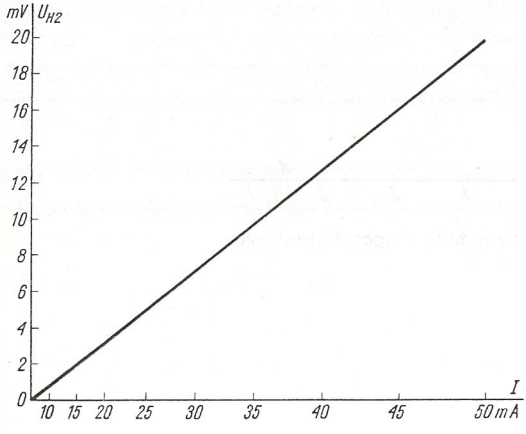
Wyniki pomiaru napięcia pojawiającego się na wyjściu, po włączeniu do zrównoważonego układu rezystancji R_x pokazane są na rys. 12. Podane na rys. 12 cztery krzywe zostały pomierzone: 1 — przy zwartych zaciskach BC; 2 — przy włączonej indukcyjności 5H;

3 — przy włączonym kondensatorze 1 μF; 4 — 0,5 μF. Układ był zasilany napięciem 100 V o częstotliwości 50 Hz. Wyniki pomiarów są zgodne z równaniem (20).

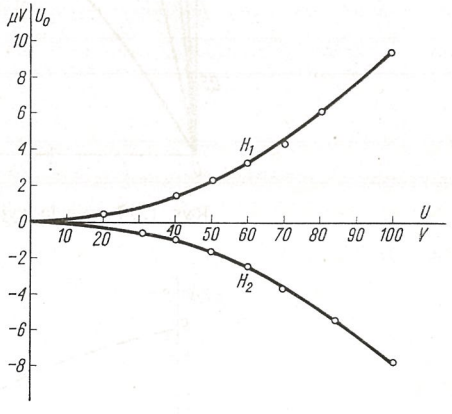
Wyniki pomiaru czułości bezwzględnej układu przy różnych reaktancjach pokazane są na rys. 13. Linią przerywaną oznaczono przebieg czułości obliczony ze wzoru (74).

11.2. Zachowanie się układu przy zmianach napięcia zasilania

Na rys. 14 pokazane są wyniki pomiaru napięcia wyjściowego hallotronu H_2. Wiadomo, że oprócz sygnału użytecznego na wyjściu hallotronu istnieje napięcie asymetrii, które powoduje zniekształcenie kwadratowej zależności między U_H i I. Napięcie to można zmierzyć oddzielnie. Na rys. 15 pokazano zmiany napięcia asymetrii wtórnej obu hallotronów przy zmianach napięcia zasilającego od zera do 100 V. W badanym układzie wyjścia hallotronów zostały tak połączone, aby napięcia asymetrii się odejmowały. Wstawiając wartość różnicy napięć asymetrii do równania (40) otrzymujemy najmniejszą wartość uchybu nie przekraczającą 0,01% przy zmianach prądu sterującego od zera do wartości znamionowej 40 mA. Wynikający stąd uchyb bezwzględny jest równy 0,2 Ω.



Rys. 14. Napięcie wyjściowe hallotronu H_2



Rys. 15. Napięcie asymetrii wtórnej hallotronów H_1 i H_2

Najmniejsze uchyby wywołane napięciami asymetrii powstają przy pomiarze elementów o małej reaktancji. Jeżeli reaktancja elementu badanego będzie duża, uchyb od napięć asymetrii będzie większy, gdyż mniejszy będzie prąd I i mniejsze będzie napięcie asymetrii hallotronu H_2. Włączając np. do układu element badany o indukcyjności 5H otrzymuje się uchyb wywołany napięciem asymetrii obliczony na podstawie równania (40) równy 0,04%, tj. uchyb bezwzględny równy 0,8 Ω. Zgodnie ze wzorem (40) uchyb wywołany napięciem asymetrii jest tym większy, im mniejszy jest prąd I, czyli przy stałej rezystancji R im większa jest reaktancja gałęzi pomiarowej z włączonym elementem badanym.

11.3. Uchyb wywołany zjawiskiem magnetorezystancji

Maksymalną wartość uchybu, który może powstać skutkiem zjawiska magnetorezystancji, można wyznaczyć ze wzoru (63). Współczynnik a we wzorze (52), dla zastosowanych hallotronów z tellurku rtęci, nie przekracza 0,1. Wstawiając do wzoru (63) zamiast rezystancji R rezystancję hallotronu R_{H2} otrzymujemy widziany przez układ względny przyrost rezystancji hallotronu, który przy indukcji o wartości skutecznej $B_{sk} = 0{,}04$ T jest równy

$$\frac{\Delta R_{H2}}{R_{H2}} = \frac{\frac{3}{2} a B_{sk}^2}{1 + \frac{3}{2} a B_{sk}^2} = 0{,}024\%.$$

Bezwzględny przyrost rezystancji hallotronu H_2 przy zmianie B od zera do 0,04 T jest równy $\Delta R_{H2} = 0{,}017\ \Omega$. Ponieważ przy włączaniu elementów badanych o różnych reaktancjach zmiany indukcji są mniejsze, uchyb pomiaru będzie mniejszy od 0,017 Ω. Uchyb wywołany zjawiskiem magnetorezystancji jest więc mały w porównaniu do uchybu wywołanego napięciami asymetrii.

11.4. Wpływ kształtu krzywej napięcia zasilającego na dokładność pomiaru

Badanie wpływu kształtu krzywej napięcia zasilającego przeprowadzono zasilając układ eksperymentalny z dwóch szeregowo połączonych źródeł napięcia. Pierwsze źródło dające podstawową harmoniczną miało częstotliwość 50 Hz, a drugie regulowaną częstotliwość i amplitudę. Pomiary przeprowadzono zmieniając zawartość harmonicznych od zera do 20%. Przy zwartych zaciskach BC trzecia harmoniczna zmieniana od zera do 20% nie wpływała w widoczny sposób na zmianę stanu równowagi układu. Natomiast jeżeli w napięciu zasilającym oprócz podstawowej harmonicznej było 20% piątej harmonicznej, równowaga układu nie była zachowana i celem sprowadzenia go ponownie do stanu równowagi należałoby zmniejszyć rezystancję $R_3 = 2000\ \Omega$ o 0,9 Ω, czyli o 0,045%. Podobnie przy 20% zawartości 7-mej harmonicznej, rezystancję R_3 należało zmniejszyć o 1,1 Ω, czyli o 0,05%.

Zmiany równowagi układu przy wzroście zawartości wyższych harmonicznych wywołane są przesunięciem fazowym ν_n między n-tą harmoniczną prądu sterującego hallotron H_1 i wywołującą go harmoniczną napięcia. Przesunięcie ν_n wywołane jest obecnością transformatora Tr (rys. 11), którego charakterystyka fazowa przechodzi przez zero przy częstotliwości 50 Hz. Zgodnie z wyprowadzoną w punkcie 8 zależnością (103), im większe przesunięcie ν_n tym większy jest wpływ zawartości harmonicznych na stan równowagi układu.

Zmiany stanu równowagi układu przy zmianach zawartości harmonicznych wywołują uchyb pomiaru określony wzorem (103). Np. w przeprowadzonych pomiarach rezystancji cewki o $R_x = 1860\ \Omega$ i indukcyjności 5 H, 20% zawartości trzeciej harmonicznej wywołało uchyb $\Delta R = -1{,}5\ \Omega$, czyli $-0{,}08\%$. Jeżeli układ z włączoną cewką znajdował się

w równowadze przy napięciu sinusoidalnym, a następnie dodano 20% piątej harmonicznej, uchyb wynosił $-1{,}8\ \Omega$, czyli $-0{,}097\%$, a przy 20% siódmej harmonicznej $-2\ \Omega$, czyli $-0{,}11\%$. Z przytoczonych cyfr widać, że wpływ harmonicznych na dokładność pomiaru nie jest duży, gdyż w praktyce zawartości harmonicznych w napięciu zasilającym są znacznie mniejsze.

11.5. Pomiar rezystancji elementów o charakterze indukcyjnym

Za pomocą opisanego układu, zasilanego napięciem o częstotliwości 50 Hz pomierzono rezystancję cewek bez rdzenia ferromagnetycznego o różnych indukcyjnościach. Wyniki pomiarów przedstawione są w tablicy 4.

Tablica 4

Wyniki pomiarów rezystancji

R^x	L	R	ΔR	δ
Ω	H	Ω	Ω	%
108,5	0,1	108,4	0,1	0,1
116,2	0,5	116	0,2	0,18
169,1	0,2	169,4	0,3	0,18
244,8	1	245,3	0,5	0,2
693,8	2	694,5	0,7	0,1
1851,4	5	1852,3	0,9	0,05

Symbole podane w tabeli oznaczają

R^x — rezystancja cewki pomierzona precyzyjnym mostkiem o dokładności 0,2%,

R — rezystancja pomierzona za pomocą układu,

L — indukcyjność cewki,

$\Delta R = R - R^x$ — uchyb bezwzględny pomiaru,

$\delta = \frac{\Delta R}{R^x} 100$ — uchyb względny pomiaru.

Z przedstawionych wyników pomiaru widać, że im większa jest wartość mierzona, tym większa dokładność. Uchyb względny odniesiony do końca zakresu pomiarowego (w tym przypadku 2000 Ω) nie przekracza 0,05%. Podany w tabeli uchyb pomiaru wynika z nieczułości układu i zmian napięcia asymetrii hallotronu H_2 przy zmianach prądu. Czułość bezwzględna układu, liczona jako przyrost rezystancji wywołujący odchylenie galwanometru o 1 działkę wynosiła 1 Ω/dz. Przyjmując, że można rozróżnić odchylenia $0{,}2 \div 0{,}3$ działki, uchyb bezwzględny wywołany nieczułością układu będzie wynosił około 0,3 Ω.

Uchyb od nieczułości zmienia się w zależności od reaktancji elementu badanego, gdyż ze zmianą X zmienia się czułość układu.

12. ZAKOŃCZENIE

Przedstawiony na rys. 1 układ ma prostą budowę, składa się z małej ilości elementów i zachowuje podstawowe zalety zrównoważonych mostków prądu przemiennego. Podobnie jak w zrównoważonych mostkach prądu przemiennego, na wynik pomiaru nie mają wpływu wahania napięcia źródła zasilania i małe zmiany częstotliwości, co pozwala osiągnąć stosunkowo duże dokładności pomiaru.

Przeprowadzona analiza przyczyn powstawania uchybów i badania przeprowadzone na modelu eksperymentalnym wykazały, że na ograniczenie dokładności pomiaru mają największy wpływ dwa czynniki, a mianowicie: napięcie asymetrii wtórnej hallotronów i przesunięcie fazowe ν między prądem sterującym hallotron H_1 i napięciem zasilającym. Uchyb wywołany przesunięciem można ograniczyć do małej wartości dobierając odpowiedni punkt pracy na charakterystyce fazowej transformatora, lub przez zastosowanie kompensacji. Celem skompensowania przesunięcia można np. zbocznikować część rezystancji R_1 kondensatorem. Uchyb ten może być również skompensowany przez wywołanie opóźnienia indukcji magnetycznej w cewce *El* względem prądu *I*.

Trudniejszym do wyeliminowania jest uchyb wywołany napięciami asymetrii wtórnej hallotronów. Nieliniowa zależność napięć asymetrii od prądu i ich zmiany w funkcji temperatury uniemożliwiają całkowitą kompensację tych napięć. Do budowy dokładnego przyrządu można jednak wybrać takie hallotrony, w których napięcie asymetrii wtórnej jest bardzo małe, lub hallotrony o specjalnej konstrukcji zapewniającej małą różnicę temperatur między elektrodami napięciowymi. W przypadku zastosowania hallotronów napylanych napięcia asymetrii wtórnej można ograniczyć, naklejając hallotrony na podłoże dobrze przewodzące ciepło.

Uchyby wynikające z nieliniowości charakterystyk hallotronów i zjawiska Gaussa są małe, gdyż w zakresie osiągalnych indukcji magnetycznych w cewce *El* charakterystyki większości hallotronów są praktycznie liniowe, a wzrost rezystancji wywołany zjawiskiem Gaussa może być ograniczony przez zastosowanie odpowiedniego typu hallotronu lub przez dodanie odpowiedniej rezystancji połączonej szeregowo z hallotronem H_2. Przeprowadzone badania wykazały, że uchyb wywołany zjawiskiem Gaussa może być wprowadzony do wartości poniżej setnych części procenta.

W układach zawierających elementy półprzewodnikowe jednym z trudniejszych do wyeliminowania czynników zewnętrznych, wywołujących dodatkowe uchyby są zmiany temperatury otoczenia. W przedstawionym układzie wpływ zmian temperatury otoczenia na dokładność pomiaru można skompensować przez zastosowanie odpowiedniej rezystancji R_1 (rys. 1), co zostało wykazane w punkcie 3.4. Wyprowadzone w punkcie 3.4 wzory są słuszne przy liniowych zależnościach czułości i rezystancji hallotronów od temperatury. Dla większości produkowanych obecnie typów hallotronów zmiany R_H i γ można uważać za liniowe przy temperaturze do 60°C, a hallotronów arsenkowych do 100°C. Przy bardzo dokładnych pomiarach wpływ zmian temperatury otoczenia można łatwo wyeliminować, sprowadzając w tym celu układ do stanu równowagi przy zwartych zaciskach *BC*, bezpośrednio przed wykonaniem pomiaru.

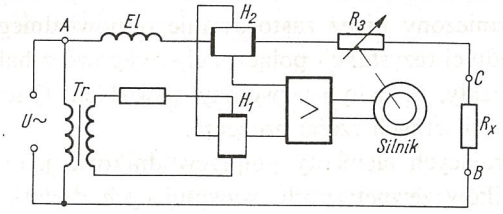
Możliwość łatwej kontroli sprawności układu, przez sprawdzenie zera przy zwartych zaciskach *BC* jest cenną zaletą, gdyż w czasie eksploatacji określenie czy przyrząd jest

sprawny nie wymaga użycia dodatkowych elementów wzorcowych i nie pociąga za sobą dużych strat czasu.

Najistotniejszą zaletą przedstawionego układu w porównaniu do zrównoważonych mostków prądu przemiennego jest wyjątkowo prosty sposób wykonywania pomiarów, wymagający, podobnie jak przy mostkach prądu stałego, wykonania podczas pomiaru tylko jednej operacji. Istotne jest również to, że za pomocą przedstawionego układu mierzy się rezystancję niezależnie od charakteru elementu badanego, przy czym element badany może być liniowy lub nieliniowy. W porównaniu do mostków quasizrównoważonych omówionych w punkcie 2 przedstawiony układ jest prostszy i ma znacznie prostszy, a więc i tańszy, wskaźnik równowagi oraz, co jest bardziej istotne, nie ustępuje im pod względem osiągalnych dokładności.

Przedstawiony układ wymaga większego napięcia zasilającego w porównaniu do mostków prądu przemiennego. Całość układu jest proporcjonalna do prądu w cewce El i hallotronie H_2, który zależnie od typu zastosowanych hallotronów może wynosić od kilku do kilkuset miliamperów. Dla uzyskania takiego prądu, przy większych impedancjach elementów badanych, potrzebne jest odpowiednio duże napięcie zasilania. Wada ta może być w przyszłości usunięta, dzięki postępom w technologii hallotronów zmierzającej do otrzymania większej czułości, lub przez zastosowanie innych elementów galwanomagnetycznych, takich jak np. gaussotrony lub diody magnetyczne. Na podstawie pojawiających się ostatnio prac dotyczących nowego elementu, stanowiącego połączenie hallotronu z tranzystorem polowym [28], można sądzić, że jego zastosowanie pozwoli na zmniejszenie prądu sterującego kilkadziesiąt razy.

Znajdujący się w układzie transformator Tr (rys. 1) ogranicza możliwość zmian w szerokim paśmie częstotliwości napięcia zasilającego. Przez zastosowanie jednak odpowiednich kompensacji można zmieniać częstotliwość skokowo, jak to ma miejsce w wielu obecnie produkowanych mostkach prądu przemiennego.



Rys. 16. Układ przyrządu automatycznego

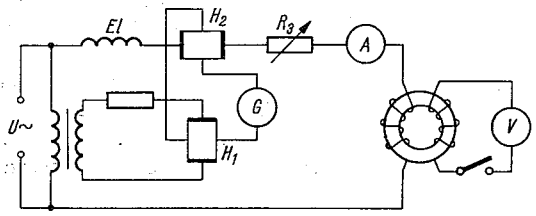
Prosty sposób sprowadzania do stanu równowagi oraz mała ilość elementów wchodzących w skład omawianego układu pozwalają na wykorzystanie go do budowy prostego przyrządu automatycznego, mogącego znaleźć zastosowanie w fabrykach przy sortowaniu i kontroli elementów lub, w połączeniu z przetwornikiem, do pomiaru innych wielkości fizycznych. Koncepcja przyrządu automatycznego pokazana jest na rys. 16.

Napięcie wyjściowe po wzmocnieniu podawane jest na silnik, który zmienia położenie suwaka potencjometru R_3. Podany układ, w porównaniu do automatycznych mostków prądu przemiennego ma tę zaletę, że nie wymaga stosowania dodatkowych układów do porównywania fazy, gdyż składowa stała sygnału wyjściowego ma przeciwne kierunki

zależne od tego, czy rezystancja elementu badanego jest większa czy mniejsza od rezystancji aktualnie wskazywanej przez potencjometr R_3.

Podobnie jak mostki prądu przemiennego, przedstawiony układ może również znaleźć zastosowanie do pomiaru strat w materiałach ferromagnetycznych.

Układ z rys. 1 przystosowany do pomiaru strat pokazany jest na rys. 17. Do zacisków *BC* podłączona jest cewka o znanej liczbie zwojów i rezystancji uzwojenia, rdzeń tej cewki stanowi próbka materiału badanego. Układ może być tak zestrojony, że składowa stała napięcia wyjściowego z obu hallotronów jest równa zero, gdy nie ma rdzenia w cewce



Rys. 17. Układ do pomiaru strat w materiałach ferromagnetycznych

magnesującej. Jeżeli do cewki magnesującej zostanie włożony rdzeń, to po sprowadzeniu układu do stanu równowagi, zostanie pomierzona rezystancja reprezentująca straty $\Delta R_3 = R_{Fe}$. Znając prąd w uzwojeniu magnesującym można obliczyć straty $P_{Fe} = I^2 \Delta R_3$. Charakterystykę strat w funkcji pola magnetycznego można pomierzyć, zmieniając amplitudę napięcia zasilającego. Ponieważ najczęściej straty przedstawione są nie w funkcji pola magnetycznego a w funkcji indukcji, na rdzeniu znajduje się dodatkowe uzwojenie, którego napięcie mierzone jest woltomierzem. Dokładność pomiaru strat za pomocą przedstawionego układu zależna jest głównie od dokładności użytego amperomierza i dekady R_3. Przedstawiony układ ma tę przewagę nad mostkami prądu przemiennego, że pojawiające się wyższe harmoniczne prądu nie utrudniają pomiaru i nie zmniejszają dokładności.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. K. B. Karandiejew, Spiecialnyje metody elektriczeskich izmierienij, Moskwa 1963.
2. K. B. Karandiejew, G. A. Sztambiergier, Obobszczennaja tieorija mostowych ciepiej pieriemiennowo toka, Izd. Sib. Otd. AN SSSR, 1961.
3. Ł. S. Pierielman, Sposob izmierienija aktiwnych i rieaktiwnych soprotiwlienij i prowodimostiej kompleksnoj nagruzki, Awt. Swiditielstwo, No 127750, 1960.
4. Ł. S. Pierielman, Ustrojstwo dla izmierienija aktiwnych i rieaktiwnych soprotiwlienij i prowodimostiej kompleksnoj nagruzki, Awt. Sw., No 128076, 1960.
5. Ł. S. Pierielman, Ustrojstwo dla izmierienija aktiwnych i rieaktiwnych soprotiwlenij i prowodimostiej kompleksnoj nagruzki, Awt. Swid., No 130576.
6. M. Nałęcz, Z. Dunajski, W. Torbicz, H. Ziomecki, Three-Variable Multiplier, Induktance Meter and Analog Memory Device on the Basis of Hall Effect, Acta IMEKO, 1967.
7. Z. Dunajski, Przyrząd do pomiaru indukcyjności i oporności, Patent 55855.
8. B. Hague, Alternating Current Bridge Methods, London 1957.
9. D. Karo, Electrical Measurements, London 1953.
10. A. D. Niestierienko, Osnowy rascziota elektroizmieritielnych schiem urawnowiesziwanija, Izd. AN USSR, 1960.

11. Z. Dunajski, Przyrząd do pomiaru rezystancji i strat w materiałach ferromagnetycznych oraz kondensatorach, Patent nr 58799.
12. Z. Dunajski, Nowyj nulewoj sposob izmierienija RLC, Mat. IX Wsiesojuznoj Konf. po awtomat. kontr. i mietodam elektr. izmierienij, Nowosibirsk 1968.
13. K. Drewnowski, Pomiary elektryczne, Warszawa 1961.
14. F. Kuhrt, M.J. Lippman, Hallgeneratoren, Berlin — New York 1968.
15. M.J. Lippman, F. Kuhrt, Der Geometrieeinfluss auf den Hall-Effect bei rechteckigen Halbleiterplatten, Z. Naturforschung 13a, 1958.
16. M. Weiss, Structure and Aplication of Galvanomagnetic Devices, Pergamon Press, 1969.
17. A. Kobus, J. Tuszyński, Hallotrony i gausotrony, Warszawa 1966.
18. E.H. Putley, The Hall-Effect and Related Phenomena, London 1960.
19. A. Kobus, Asymetria wtórna w hallotronach germanowych, Praca doktorska, Warszawa, IPPT PAN, 1963.
20. Z. L. Warsza, Niektóre metody poprawy własności metrologicznych gausomierzy hallotronowych, Praca doktorska, Politechnika Warszawska, 1967.
21. Kierunki rozwojowe w dziedzinie elementów automatyki, Red. M. Nałęcz, Warszawa 1969.
22. M. Nałęcz, Niektóre prace nad wykorzystaniem zjawiska Halla, Warszawa 1964, Prace IA PAN, z. 8.
23. M. Nałęcz, S. Drozdowski, O niektórych zastosowaniach zjawiska Gaussa w technice, Pomiary, 1966, nr 2.
24. P. J. Nowacki, Obliczanie nieliniowych obwodów elektrycznych i magnetycznych, Warszawa 1959.
25. K. M. Soboliewskij, Obobszczienniyij mietod analiza czuwstwitielnosti elektroizmieritielnych ciepiej urawnowiesziwanija, Awtomietrija, 1965, No 6.
26. W. Gąsowski, Analiza czułości mostków prądu zmiennego, Arch. Elektrot., nr 1 1969.
27. N. Wiełcziew, J. Kasabow, Siliszcziewi eliemienti na choł, Mat. II Mierzdunar. Cow. „Nowosti radioeliektroniki", Warna 1968.

Z. DUNAJSKI

HALL EFFECT RESISTANCE A.C. MEASURING SYSTEM

Summary

A new A. C. system for resistance measurement is presented. This system is very simple in operation. Only one manipulation is necessary for receving the measuring information. As measurement is accomplished in null method, high accuracy is obtained and supply voltage fluctuations do not effect the accuracy. The simple methods of balancing the system make its use possible in automatic measuring devices. The analysis of the system for linear and nonlinear components as well as error discusion and methods for its compensation are given.

Z. DUNAJSKI

SCHALTUNG MIT HALLGENERATOREN ZUR MESSUNG VON OHMSCHEN WIDERSTÄNDEN BEI WECHSELSTROM

Zusammenfassung

In der Bearbeitung wurde eine neue Schaltung zur Messung von Ohmschen Widerständen bei Wechselstrom beschrieben. Die Schaltung ermöglicht eine einfache Durchführung der Messung bei nur einmaliger Operation. Die Anwendung der Nullmethode lässt eine grosse Genauigkeit der Messung erreichen. Speisespannungschwankungen haben keinen Einfluss auf die Messgenauigkeit. Einfaches Ausgleichsverfahren

ermöglicht Anwendung der Schaltung beim Bau automatischer Messgeräte. Es wurde auch eine Analyse der Schaltung für die Widerstandsmessung linearer und nichtlinearer Elemente angeführt. Zum Schluss wurden auch eine Fehleranalyse sowie Kompensationsmethode für die Behebung der Fehler angegeben.

З. ДУНАЙСКИ

СХЕМА С ДАТЧИКАМИ ХОЛЛА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ ТОКЕ

Р е з ю м е

Описана новая схема предназначенная для измерения активного сопротивления элементов при переменном токе. Эта схема характеризуется простым способом измерений требующим выполнения только одной операции. Благодаря нулевому методу измерения можно получить результаты с большой точностью. На точность не имеют влияния колебания питающего напряжения. Простой способ уравновешивания позволяет применять описанную схему для создания автоматических приборов. Приведен анализ действия схемы при измерении сопротивления линейных и нелинейных элементов, анализ помех и методы их компенсации.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1973, 19, z. 1, ss. 117-135

621.317.734

Dokładność omomierzy zwyczajnych

JERZY SAWICKI (GDAŃSK)

Instytut Elektroenergetyki i Automatyki Politechniki Gdańskiej
Zakład Miernictwa Elektrycznego

Otrzymano 29.11.1971

Omomierze zwyczajne w układzie szeregowym lub równoległym należą do najbardziej rozpowszechnionych przyrządów przeznaczonych do pomiarów oporności. Dotychczasowy sposób podawania ich klasy niedokładności powoduje trudności w określeniu względnego uchybu wykonanego pomiaru. Poza środkową częścią podziałki uchyb ten przybiera niepokojąco duże wartości.

Radykalną poprawę sytuacji zapewnia konstrukcja omomierzy o podziałce skróconej. Pozwala ona nie tylko zwiększyć dokładność pomiaru, lecz także scharakteryzować przyrząd za pomocą klasy k_w, wyrażającej dopuszczalny względny uchyb pomiaru, a więc w sposób najdogodniejszy dla użytkownika.

Przeprowadzone rozważania pozwoliły sprecyzować zasadnicze dane konstrukcyjne omomierzy o przeciętnej klasie niedokładności ($k_w = 5$), jak również dla lepszych mierników ($k_w = 1{,}5$).

1. WSTĘP

Omomierze zwyczajne, szeroko stosowane w codziennej praktyce pomiarowej, mają klasę niedokładności wyrażoną w odniesieniu do długości łuku podziałki [3, 4]. Zapis taki umożliwia określenie, który z dwu omomierzy jest dokładniejszy, ale wyznaczenie uchybu pomiaru danym przyrządem nie jest dogodne. Zagadnienie to daje się rozwiązać dość prosto tylko w przypadku, gdy miernik oprócz podziałki oporności posiada jeszcze inną o przebiegu proporcjonalnym, jak to się spotyka w różnych typach uniwersalnych mierników prądu, napięcia i oporności. Znając tak ujętą klasę miernika k_L oraz zakres podziałki proporcjonalnej α_m wyrażony w działkach, bezwzględny uchyb $\Delta\alpha$ wyrażony w jednostkach odchylenia obliczamy według zależności

$$\Delta\alpha = \pm\frac{k_L}{100}\cdot\alpha_m. \tag{1}$$

Przyjmijmy, że w wykonanym pomiarze przyrząd wskazał wartość R_x, której na podziałce równomiernej odpowiada α_x działek. Z porównania obu podziałek ustalamy, że odchyleniu $(\alpha_x+\Delta\alpha)$ odpowiada wartość R'_x, natomiast odchyleniu $(\alpha_x-\Delta\alpha)$ odpowiada

wartość R_x''. Względny uchyb pomiaru oporności badanej można teraz obliczyć z zależności

$$\delta R_x = \pm \frac{R_x' - R_x''}{R_x' + R_x''}. \tag{2}$$

Wiele typów omomierzy nie posiada jednak drugiej podziałki proporcjonalnej i w takich przypadkach trzeba się uciekać do stosowania zależności analitycznych, wyprowadzonych w dalszym ciągu tych rozważań.

Względny uchyb wykonanego pomiaru jest dla ogromnej rzeszy użytkowników jedną z najważniejszych właściwości stosowanego miernika. Zupełnie zrozumiały jest tutaj postulat, by dopuszczalny uchyb względny miał wartość niezależną od aktualnego wskazania. Umieszczenie w kole liczby k_w określającej klasę stanowi umowne oznaczenie spełnienia tego wymagania. Wśród różnych popularnych typów mierników spotyka się hercomierze rezonansowe w takim wykonaniu. Liczne czynniki fizyczne, jak np. tarcie w łożyskach czy histereza sprężynek zwracających powodują, że przedstawionego postulatu nie da się na ogół zrealizować dla dowolnych mierników wskazówkowych. W przyrządach o praktycznie proporcjonalnym charakterze podziałki przyjęto jako wartość niezależną od aktualnego wskazania dopuszczalny bezwzględny uchyb pomiaru. Kompromis ten jest zadowalający dla użytkownika, gdyż umożliwia mu łatwe obliczenie dopuszczalnego uchybu względnego według zależności

$$\delta A_x = \pm \frac{k}{100} \cdot \frac{A_m}{A_x}, \tag{3}$$

gdzie k jest liczbą określającą klasę miernika, A_m oznacza zakres, zaś A_x wynik pomiaru.

Wynika stąd, że obecny sposób określania klasy omomierzy wyraźnie nie odpowiada potrzebom użytkowników. Krytykowany sposób ma jeszcze jedną zasadniczą wadę, sugeruje bowiem znacznie lepszą dokładność wyniku pomiaru niż to ma miejsce w rzeczywistości. Przybliżona analiza zagadnienia np. w [2, 5] wskazuje, iż nawet w najkorzystniejszym przypadku uchyb względny pomiaru jest 4 razy większy od wartości klasy k_L oznaczonej na przyrządzie! Sugestia ta w połączeniu z trudnością prawidłowego określenia dopuszczalnego względnego uchybu pomiaru omomierzem zwyczajnym prowadzi do ogromnej liczby pomyłek, popełnianych nawet przez dosyć doświadczonych pomiarowców.

Artykuł niniejszy przedstawia propozycję zmian w budowie omomierzy zwyczajnych, dających zmniejszenie dopuszczalnego względnego uchybu pomiaru.

2. WZGLĘDNY UCHYB POMIARU OMOMIERZEM ZWYCZAJNYM

W pierwszej kolejności rozpatrzymy omawiane zagadnienie w odniesieniu do omomierza w układzie szeregowym, gdyż jest on częściej spotykany od przyrządu o schemacie równoległym.

W rozważaniach zakładamy, że SEM źródła zasilającego jest sztywna, a stała prądowa ustroju tak wyregulowana, iż przy zwartych zaciskach obiektu badanego występuje odchylenie α_o; oporności badanej R_x odpowiada natomiast odchylenie α_x. Charakterystyka miernicza przyrządu dana jest wówczas zależnością

$$R_x = X \cdot R_w, \quad \text{gdzie} \quad X = \frac{\alpha_o - \alpha_x}{\alpha_x}, \tag{4}$$

przy czym R_w oznacza oporność wewnętrzną omomierza, a wielkość X będziemy nazywać *względną opornością mierzoną*. Dla omomierza szeregowego R_w jest określone jako opór zastępczy szeregowo połączonych oporności źródła, ustroju pomiarowego i opornika dodatkowego. Charakterystykę miernicza można także przedstawić w formie zależności odwrotnej, a mianowicie

$$\frac{\alpha_x}{\alpha_o} = \frac{1}{1+X}. \tag{4a}$$

Wyznaczenie względnego uchybu pomiaru opieramy na dyskusji wyrażeń (4); znajdujemy kolejno:

$$(\delta R_x)^2 = \left(\frac{\partial R_x}{\partial R_w} \cdot \frac{R_w}{R_x} \cdot \delta R_w\right)^2 + \left(\frac{\partial R_x}{\partial X} \cdot \frac{X}{R_x} \cdot \delta X\right)^2 = (\delta R_w)^2 + (\delta X)^2$$

oraz

$$(\delta X)^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial \alpha_o} \cdot \frac{\alpha_o}{X} \cdot \delta \alpha_o\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial \alpha_x} \cdot \frac{\alpha_x}{X} \cdot \delta \alpha_x\right)^2 = \left(\frac{\alpha_o}{\alpha_o - \alpha_x}\right)^2 [(\delta \alpha_o)^2 + (\delta \alpha_x)^2].$$

Ze złożenia tych zależności i przy uwzględnieniu wzoru (4a) dostajemy:

$$(\delta R_x)^2 = \left(\frac{1+X}{X}\right)^2 \cdot [(\delta \alpha_o)^2 + (\delta \alpha_x)^2] + (\delta R_w)^2. \tag{5}$$

W przypadku omomierza szeregowego o skróconej podziałce nie występują na niej wartości mniejsze od

$$R_g = (S-1) \cdot R_w, \tag{6}$$

gdzie parametr $S \geqslant 1$ nazywamy stopniem skrócenia podziałki; R_g odpowiada krańcowej wartości zakresu odchyleń α_m. Z powyższych uwag i zależności (4a) wynika więc związek

$$\alpha_o = S \cdot \alpha_m. \tag{7}$$

Charakterystyka miernicza omomierza jest teraz określona nowymi postaciami wzorów (4) i (4a), mianowicie:

$$X = \frac{S \cdot \alpha_m - \alpha_x}{\alpha_x}, \qquad \frac{\alpha_x}{\alpha_m} = \frac{S}{1+X}. \tag{8}$$

Wracając do wyznaczenia wartości $(\delta R_x)^2$, określamy względne uchyby obu odchyleń na podstawie wzoru (1) jako

$$\delta \alpha_o = \pm \frac{k_L}{100} \cdot \frac{\alpha_m}{\alpha_o} = \pm \frac{k_L}{100} \cdot \frac{1}{S}$$

oraz

$$\delta \alpha_x = \pm \frac{k_L}{100} \cdot \frac{\alpha_m}{\alpha_x} = \pm \frac{k_L}{100} \cdot \frac{1}{S} \cdot \frac{\alpha_o}{\alpha_x}.$$

Podstawienie tych wyrażeń — przy uwzględnieniu związku (4a) — do wzoru (5) nadaje mu nową postać

$$(\delta R_x)^2 = \left(\frac{k_L}{100} \cdot \frac{1}{S}\right)^2 \cdot \left(\frac{1+X}{X}\right)^2 \cdot [1+(1+X)^2] + (\delta R_w)^2. \tag{9}$$

Wobec znacznej wartości pierwszego członu sumy po prawej stronie wzoru (9), względny uchyb oporności wewnętrznej omomierza ma wpływ znikomo mały, o ile tylko

$$|\delta R_w| \leqslant \frac{k_L}{100}, \tag{10}$$

co bez trudności jest spełnione nawet dla omomierzy najlepszych klas. Słuszność tych uwag będzie wyraźnie widoczna z dalszych rozważań.

Wprowadzamy obecnie wskaźnik uchybu względnego zdefiniowany jako

$$W = \frac{1+X}{X} \cdot \sqrt{1+(1+X)^2} \tag{11}$$

i otrzymujemy następującą postać ostateczną wzoru na względny uchyb pomiaru omomierzem szeregowym:

$$\delta R_x = \pm \frac{k_L}{100} \cdot \frac{W}{S}. \tag{12}$$

Zależności (11) i (12) są ważne ogólnie; w przypadku podziałki nie skróconej współczynnik S przyjmuje poprostu wartość 1.

Analiza wzoru (11) wskazuje, że dla względnej oporności mierzonej $X_o = 1{,}206$ wskaźnik uchybu osiąga wartość minimalną $W_0 = 4{,}430$. Pominięcie w rozważaniach wartości δR_w powoduje powstanie pewnej niedokładności w wartości uchybu, która jest największa w punkcie X_o. Przy spełnionym wymaganiu (10) uchyb w tym punkcie może w rzeczywistości osiągnąć wartość

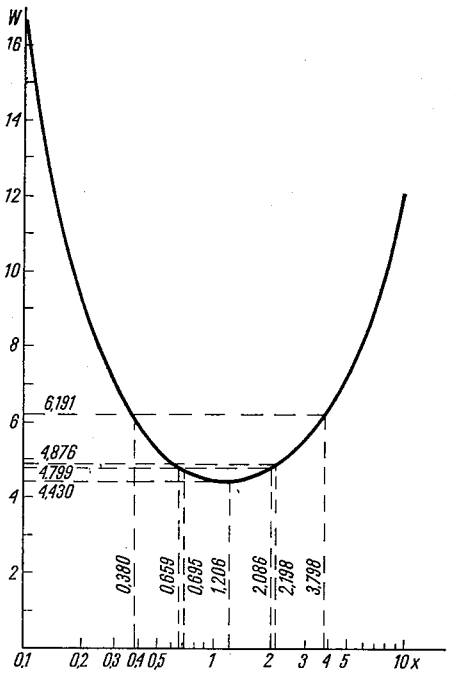
$$\pm \frac{k_L}{100} \cdot \sqrt{4{,}430^2+1^2} = \pm \frac{k_L}{100} \cdot 4{,}542,$$

podczas gdy przybliżenie według wzoru (12) daje $\pm \frac{k_L}{100} \cdot 4{,}430$. Rozbieżność tych wartości wynosi zaledwie 2,5%. Dla $X \neq X_o$ różnica staje się jeszcze mniejsza, gdyż $W > W_o$.

Charakter funkcji $W = f(X)$ ilustruje wykres na rys. 1.

Omomierze budowane są zazwyczaj jako przyrządy wielozakresowe. Poszczególnym zakresom odpowiadają normalnie mnożniki „$\times 1$", „$\times 10$", „$\times 100$" ... W takim przypadku daną oporność R_x można często mierzyć stosując różne zakresy przyrządu. Oporność wewnętrzna miernika przy zmianie zakresu zmienia się w taki sam sposób, jak odpowiadające mu wartości mnożników. Oznacza to, że odpowiednie względne oporności mierzone są odwrotnie proporcjonalne do mnożników rozpatrywanych zakresów. Jeżeli np. oporności badanej odpowiada wartość $X = 5$ na zakresie „$\times 1$", to na zakresie „$\times 10$" otrzymamy względną oporność mierzoną równą 0,5.

Z powyższego wynika, że w danych warunkach wybór użytego zakresu pomiaru wywiera wyraźny wpływ na względny uchyb pomiaru; w miarę możliwości należy stosować taki zakres, by wartość X wypadła w okolicy punktu 1, gdzie wskaźnik uchybu jest najmniejszy. Widać więc, że dla omomierza wielozakresowego istnieją charakterystyczne wartości względnej oporności mierzonej, przy których należy dokonać przełączenia.



Rys. 1. Wskaźnik uchybu w zależności od względnej oporności mierzonej

Wspomniane wartości charakterystyczne odpowiadają warunkowi jednakowej wartości wskaźnika uchybu dla dwu różnych oporności względnych, pozostających w stosunku określonym gradacją zakresów miernika. Badanie funkcji $W = f(X)$ według wzoru (11) pozwoliło określić dane liczbowe, zestawione w tablicy 1. Położenie punktów charakterystycznych jest uwidocznione na rys. 1.

Tablica 1

Punkty charakterystyczne dla różnych gradacji zakresów

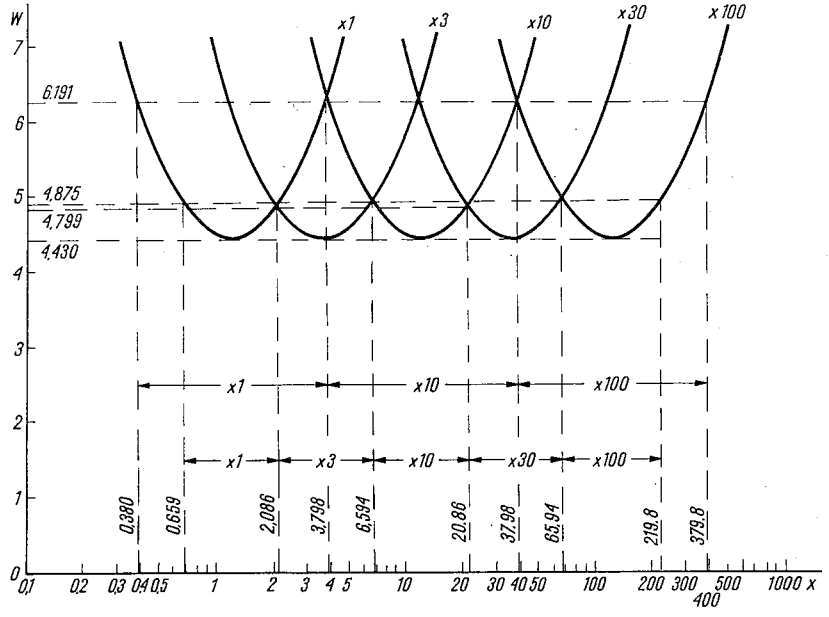
Gradacja	X'_c	X''_c	W_c
1:10	0,380	3,798	6,191
3:10	0,659	2,198	4,875
1:3	0,695	2,086	4,799

Przestrzeganie zasady należytego wyboru zakresu pozwala wykonać pomiar z uchybem względnym według wzoru (12) przy wskaźniku W zawartym w przedziale $W_o \leqslant W \leqslant W_c$ dla wartości R_x spełniających warunek

$$X'_c \cdot R_{w\min} \leqslant R_x \leqslant X''_c \cdot R_{w\max},$$

gdzie $R_{w\min}$ oraz $R_{w\max}$ oznaczają odpowiednio oporność wewnętrzną dla najmniejszego i największego zakresu miernika, natomiast X'_c oraz X''_c są punktami charakterystycznymi,

odpowiadającymi założonej wartości W_c. Rozważania te ilustruje wykres na rys. 2, gdzie przedstawiono wspólnie zarówno przypadek gradacji 1:10:100 ..., jak również 1:3:10: :30:100 .... Przy tak gęstym stopniowaniu zakresów miernik jest wyposażony w dwie podziałki, co pozwala uniknąć niewygodnego przeliczania wskazań.



Rys. 2. Wskaźnik uchybu dla omomierza wielozakresowego

Praktyczne wnioski z tych rozważań przedstawimy dla powszechnie znanego omomierza typu OME 5. Miernik klasy $k_L = 1{,}5$ o podziałce nieskróconej ($S = 1$) posiada trzy zakresy pomiarowe „$\times 1$", „$\times 10$", „$\times 100$", którym odpowiadają oporności wewnętrzne 50, 500, 5000 Ω. Oporności badane o wartościach od ok. 19 Ω do ok. 19 000 Ω można wyznaczyć z względnym uchybem pomiaru nie mniejszym niż $\pm 6{,}65\%$ i nie większym niż $\pm 9{,}29\%$. Przytoczone wartości uchybów trudno uznać za wystarczająco małe; trzeba też zauważyć, iż jako zakres pomiaru wytwórnia podaje przedział od 0 Ω aż do 100 000 Ω, podczas gdy w rzeczywistości dla oporności mniejszych od 19 Ω i większych niż 19 000 Ω dokładność staje się wręcz iluzoryczna.

3. PIERWSZY PRZYPADEK SKRÓCENIA PODZIAŁKI

Zależność (12) wskazuje, że zmniejszenie względnego uchybu pomiaru można łatwo osiągnąć przez zastosowanie podziałki skróconej, czyli $S > 1$. Rozpatrzymy teraz szereg różnorodnych skutków, jakie pociąga za sobą takie założenie konstrukcyjne. Przyjmujemy przy tym, że jedną z granic obszaru o założonym dopuszczalnym względnym uchybie pomiaru ma stanowić prawy skraj podziałki.

Podziałka rozpoczyna się teraz od wartości R_g, określonej równaniem (6), której odpowiada względna oporność mierzona $X'_g = S - 1$. Występujący tutaj wskaźnik uchybu

oznaczymy symbolem W_g. Z przebiegu funkcji $W = f(X)$ według wzoru (11) wynika, że istnieje X_g'', której odpowiada ta sama wartość W_g. Wyżej wymienione dane, jak również niektóre inne interesujące liczby, obliczone dla różnych stopni skrócenia podziałki, zestawiono w tablicy 2.

Tablica 2

Wpływ skrócenia podziałki

S	X_g'	X_g''	X_g''/X_g'	W_g/S	W_o/S	α_g''/α_m
1	0	∞	∞	∞	4,430	0
1,1	0,1	14,239	142,39	14,859	4,028	0,073
1,2	0,2	7,163	35,815	7,810	3,692	0,147
1,3	0,3	4,795	15,983	5,462	3,408	0,224
1,4	0,4	3,607	9,018	4,301	3,165	0,304
1,5	0,5	2,893	5,786	3,606	2,954	0,385
1,6	0,6	2,414	4,023	3,145	2,769	0,469
1,7	0,7	2,072	2,960	2,818	2,606	0,553
1,8	0,8	1,815	2,269	2,574	2,461	0,639
1,9	0,9	1,614	1,793	2,386	2,332	0,727
2,0	1,0	1,453	1,453	2,236	2,215	0,815
$1+X_o$	X_o	X_o	1	2,009	2,009	1

Wyżej przytoczone wartości wskazują, że zmniejszenie uchybu pomiaru poprzez przyjęcie większego stopnia skrócenia podziałki pociąga za sobą zwężenie zakresu oporności mierzonych. Wartość ilorazu (X_g''/X_g') malejąca ze wzrostem S uwidacznia potrzebę zwiększania liczby zakresów, koniecznej dla objęcia całego założonego interwału oporności mierzonych. Z uwagi na koszt produkcji przyrządu i wygodę użytkowania trudno byłoby się zgodzić na gradację gęściejszą niż 1:3:10:30:100 .... Wybrana wartość skrócenia podziałki musi być uzgodniona z przeciążalnością ustroju, bowiem przy zwarciu zacisków pomiarowych płynący prąd jest S-krotnie większy od wartości znamionowej dla danego miernika. Nie powoduje to jednak zasadniczych trudności, bowiem norma [3] przewiduje, że amperomierze klasy 1 muszą wytrzymywać nawet 10-krotne przeciążenie prądowe trwające aż 5 sekund. Ustroje lepszych klas muszą wytrzymywać tylko 2-krotne przeciążenie, ale i to jest wystarczające dla rozpatrywanego zastosowania.

Z przedstawionych rozważań wynika, że dla przedziału oporności mierzonych $X_g' \cdot R_w \leqslant R_x \leqslant X_g'' \cdot R_w$ względny uchyb pomiaru nie wychodzi poza granice określone nierównością

$$\frac{k_L}{100} \cdot \frac{W_o}{S} \leqslant |\delta R_x| \leqslant \frac{k_L}{100} \cdot \frac{W_g}{S}.$$

Oznacza to, że przy użyciu ustroju klasy k_L można zrealizować omomierz, który w wyżej określonym zakresie pomiaru będzie zachowywał klasę $k_w = k_L \cdot \frac{W_g}{S}$ (przy czym iloraz W_g/S musi posiadać odpowiednio dobraną wartość). Znormalizowane klasy k są jak wiadomo następujące: 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 5. Widać więc, że interesujące są tylko na-

stępujące ilorazy W_g/S: 5; $\frac{10}{3}$; 3; $\frac{5}{2}$; 2, przy czym wartość 2 należy wykluczyć jako niemożliwą — co jest widoczne z ostatniego wiersza tablicy 2.

Przeprowadzone obliczenia pozwoliły ustalić wartości stopnia skrócenia podziałki oraz granicznych względnych oporności mierzonych dla wyżej określonych ilorazów (W_g/S). Wyniki te, jak również niektóre inne interesujące dane, zestawiono w tablicy 3.

Tablica 3

Wybór wartości stopnia skrócenia podziałki

$\frac{W_g}{S}$	S	X'_g	X''_g	X''_g/X'_g	α''_g/α_m
5	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	4,320	12,962	0,251
$\frac{10}{3}$	1,555	0,555	2,611	4,708	0,431
3	1,640	0,640	2,263	3,534	0,503
$\frac{5}{2}$	1,836	0,836	1,736	2,076	0,671

W pierwszym rzędzie spostrzegamy, że dla $W_g/S = 5/2$ konieczne byłoby bardzo gęste stopniowanie zakresów 1:2:4:8:16 ..., co nie tylko powoduje wzrost ceny omomierza, lecz również komplikuje jego obsługę z uwagi na potrzebę częstego dokonywania przełączeń. Dla $W_g/S = 3$ lub $\frac{10}{3}$ widoczna jest potrzeba gradacji zakresów 1:3:10:30:100 ..., natomiast przy $W_g/S = 5$ zupełnie wystarczająca będzie gradacja 1:10:100 ....

Widzimy dalej, że zakres pomiaru — w zależności od wybranej wartości ilorazu W_g/S — obejmuje od 1/2 do 3/4 ogólnej długości podziałki. Jest więc interesujące, dla jakich względnych oporności mierzonych X_h, X_k występuje uchyb pomiaru np. 2-krotnie większy od przyjętej wartości $\frac{k_w}{100}$. Wyniki odpowiednich obliczeń zostały zestawione w tablicy 4, gdzie dodatkowo uwzględniono przypadek podziałki nieskróconej $S = 1$.

W wierszach tablicy 4 występują po dwie liczby (jedna nad drugą), określające wartości odpowiadające obu skrajom danego przedziału. Kreska oznacza, że odpowiedni punkt leży poza zasięgiem podziałki miernika (powyżej α_m).

Graniczne wartości W_g/S, W_h/S, W_k/S dla danego stopnia skrócenia podziałki zostały wybrane z myślą o ustrojach konkretnej klasy k_L, a mianowicie:

$S = \frac{4}{3}$ dla $k_L = 1$ czyli $k_w = 5$,

$S = 1{,}555$ dla $k_L = 1{,}5$ czyli $k_w = 5$,

$S = 1{,}640$ dla $k_L = 0{,}5$ czyli $k_w = 1{,}5$.

Tablica 4

Granice zwiększonych uchybów

S	$\frac{W_g}{S} = 5$		$\frac{W_h}{S} = 10$	
	X_g	α_g/α_m	X_h	α_h/α_m
1	0,611 2,372	0,621 0,297	0,183 7,808	0,845 0,114
$\frac{4}{3}$	0,333 4,320	1,000 0,251	— 11,199	— 0,109

S	$\frac{W_g}{S} = \frac{10}{3}$		$\frac{W_h}{S} = \frac{20}{3}$	
	X_g	α_g/α_m	X_h	α_h/α_m
1,555	0,555 2,611	1,000 0,431	— 8,180	— 0,169

S	$\frac{W_g}{S} = 3$		$\frac{W_h}{S} = 5$		$\frac{W_k}{S} = 10$	
	X_g	α_g/α_m	X_h	α_h/α_m	X_k	α_k/α_m
1,640	0,640 2,263	1,000 0,503	— 5,950	— 0,236	— 14,299	— 0,107

Wyniki dotychczasowych rozważań dowodzą jednoznacznie, iż bez specjalnych trudności można zbudować omomierz szeregowy o dokładności scharakteryzowanej dopuszczalnym względnym uchybem pomiaru. Widać również, że założoną klasę k_w można czasem uzyskać przez zastosowanie ustrojów, różniących się klasą k_L.

4. DRUGI PRZYPADEK SKRÓCENIA PODZIAŁKI

W poprzedniej części artykułu dobieraliśmy stopień skrócenia w taki sposób, by dolny kraniec przedziału, w którym względny uchyb pomiaru nie przekracza założonej wartości, odpowiadał maksymalnemu odchyleniu. Wybór stopnia skrócenia można jednak oprzeć na innej zasadzie, co będzie treścią obecnych rozważań.

Przyjmujemy obecnie zasadę takiego doboru wartości S przy danej gradacji zakresów, by względny uchyb pomiaru w punktach charakterystycznych X'_c oraz X''_c odpowiadał założonej klasie k_w. Wymienione wartości oporności mierzonej były poprzednio zdefiniowane jako te, którym odpowiada jednakowy uchyb pomiaru przy użyciu miernika na którymkolwiek z dwu kolejno następujących zakresów pomiaru.

Ze względów praktycznych należy brać pod uwagę tylko dwa typy gradacji zakresów, a mianowicie 1:10:100 ... (nazwa umowna „typ A"), lub 1:3:10:30:100 ... („typ B"). Jak wynika z tablicy 1, charakterystyczne wartości względnej oporności mierzonej X'_c, X''_c oraz odpowiadająca im wartość wskaźnika uchybu W_c są jednoznacznie określone dla gradacji typu A. W przypadku gradacji typu B występują pewne różnice w wymienionych danych zależnie od tego, czy kolejne zakresy odpowiadają stosunkowi 3:10 czy też ilorazowi 1:3. Przy gradacji zakresów typu B będziemy posługiwać się wartościami charakterystycznymi, odpowiadającymi ilorazowi kolejnych zakresów jak 3:10, co w najgorszym razie stwarza nieco mniej korzystne warunki ze względu na dokładność i zakres, niż zachodzące w rzeczywistości.

Przystępując do wyboru potrzebnych wartości S kierujemy się, podobnie jak poprzednio, znormalizowanym zestawem klas. Zarówno bowiem wartość k_L jak i żądana k_w muszą występować w tym zestawie. W ten sposób określamy kilka wartości ilorazu (W_c/S), jakie mogą wchodzić w rachubę, a następnie — przy wartości W_c określonej przez przyjęty typ gradacji zakresów — znajdujemy łatwo potrzebny stopień skrócenia podziałki. Wyniki odpowiednich obliczeń przedstawia poniższa tablica liczbowa.

Tablica 5

Stopień skrócenia podziałki S dla danej gradacji zakresów

$W_c/S =$	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{10}{3}$	5
gradacja typu A	2,476	2,064	1,857	1,238
gradacja typu B	1,950	1,625	1,463	(0,975)

W nawiasach okrągłych podano obliczoną wartość S, która zgodnie z definicją (6) jest nierealna, jako mniejsza od jedności. Dużych stopni skrócenia należy natomiast unikać ze względu na niebezpieczeństwo uszkodzenia ustroju w przypadku zwarcia zacisków obiektu badanego.

Stosownie do tych uwag i przy uwzględnieniu zestawu znormalizowanych klas, można przewidywać następujące przypadki zastosowań:

gradacja typu A:

$W_c/S = 10/3$ czyli $S = 1{,}857$ dla $k_w = 5$ przy $k_L = 1{,}5$,
$W_c/S = 5$ czyli $S = 1{,}238$ dla $k_w = 5$ przy $k_L = 1$;

gradacja typu B:

$W_c/S = 5/2$ czyli $S = 1{,}950$ dla $k_w = 2{,}5$ przy $k_L = 1$,
$W_c/S = 3$ czyli $S = 1{,}625$ dla $k_w = 1{,}5$ przy $k_L = 0{,}5$,
$W_c/S = 10/3$ czyli $S = 1{,}463$ dla $k_w = 5$ przy $k_L = 1{,}5$.

Podobnie jak w poprzednim rozdziale tak i tutaj zostały ustalone względne oporności mierzone X_d, przy których względny uchyb pomiaru osiąga przyjętą wartość, większą niż odpowiadająca założonej klasie k_w. Tak rozumiane granice zwiększonych uchybów są zestawione w tablicy 6, gdzie nie podano tym razem odpowiednich odchyleń α_d, gdyż

wartości te są zależne od przyjętego S, które może być różne (por. tabl. 5). Dla założonego stopnia skrócenia łatwo można obliczyć omawiane odchylenia na podstawie zależności (8).

Tablica 6

Granice zwiększonych uchybów dla danego typu gradacji

Krotność	Gradacja typu A		Gradacja typu B	
	X'_d	X''_d	X'_d	X''_d
$1 \cdot \frac{W_c}{S}$	0,380	3,798	0,659	2,198
$\frac{5}{3} \cdot \frac{W_c}{S}$			0,245	5,871
$2 \cdot \frac{W_c}{S}$	0,140	10,236	0,190	7,552
$\frac{10}{3} \cdot \frac{W_c}{S}$			0,101	14,145

Pozostawione w tablicy miejsca wolne odpowiadają tym krotnościom, które nie są interesujące dla przewidywanych zastosowań gradacji zakresów typu A.

Podobnie jak w poprzednio rozpatrzonym przypadku widzimy, że można zbudować omomierz szeregowy o dokładności scharakteryzowanej dopuszczalnym względnym uchybem pomiaru. Widać również, iż założoną klasę k_w można czasem uzyskać przez zastosowanie ustrojów, różniących się klasą k_L.

5. OMOMIERZ RÓWNOLEGŁY

W rozważaniach zakładamy, że SEM źródła zasilającego jest sztywna, a stała prądowa ustroju tak wyregulowana, że przy otwartych zaciskach obiektu badanego występuje odchylenie α_o; oporności badanej R_x odpowiada natomiast odchylenie α_x. Charakterystyka miernicza przyrządu dana jest wówczas zależnością

$$R_x = Y \cdot R_w, \quad \text{gdzie } Y = \frac{\alpha_x}{\alpha_o - \alpha_x}, \tag{13}$$

przy czym R_w oznacza oporność wewnętrzną omomierza, a wielkość Y będziemy nazywać *względną opornością mierzoną* dla rozpatrywanego układu przyrządu. Oporność wewnętrzna jest tutaj określona jako zastępcza dla równoległego połączenia gałęzi miernika i gałęzi źródła wraz z dodatkowym opornikiem. Charakterystykę mierniczą można także przedstawić w postaci zależności odwrotnej, a mianowicie

$$\frac{\alpha_x}{\alpha_o} = \frac{Y}{1+Y}. \tag{13a}$$

Zastosowanie do obecnych rozważań metodyki, którą przyjęliśmy przy badaniu omomierza szeregowego, prowadzi do innego niż wzór dla W wyrażenia $V = f(Y)$, będącego

wskaźnikiem uchybu omomierza równoległego. Nowa zależność V okazuje się podobnie niedogodna do dalszej dyskusji zagadnienia, jak poprzednio W. Można jednak uniknąć tej jałowej pracy dzięki odpowiedniemu przekształceniu charakterystyki mierniczej przyrządu według wzorów (13) i (13a). Przechodząc bowiem do wyrażeń wiążących przewodności G mamy:

$$R_x = \frac{1}{G_x}, \qquad R_w = \frac{1}{G_w}, \tag{14}$$

a następnie

$$G_x = X \cdot G_w, \text{ gdzie } X = \frac{\alpha_o - \alpha_x}{\alpha_x}, \tag{15}$$

$$\frac{\alpha_x}{\alpha_o} = \frac{1}{1+X}. \tag{15a}$$

Porównanie wzorów (15) i (15a) odpowiednio z (4) i (4a) ujawnia ich całkowitą zbieżność z tym tylko zastrzeżeniem, że symbol X oznacza teraz *względną przewodność mierzoną*. Z zależności (13), (14) i (15) wynika przy tym, że zachodzi związek

$$Y = \frac{1}{X}. \tag{16}$$

Można więc napisać $R_x = \frac{R_w}{X}$, a stąd otrzymuje się znaną metodą wyrażenie na względny uchyb oporności badanej

$$(\delta R_x)^2 = (\delta R_w)^2 + (\delta X)^2,$$

która ma identyczną postać jak dla omomierza szeregowego.

Trzeba teraz rozpatrzyć pojęcie stopnia skrócenia podziałki dla przypadku omomierza równoległego. Na podziałce nie występują przewodności mniejsze od wartości

$$G_g = (S-1) \cdot G_w, \tag{17}$$

przy czym parametr $S \geqslant 1$ nazywamy nadal stopniem skrócenia podziałki; graniczna przewodność G_g odpowiada krańcowej wartości zakresu odchyleń α_m. Z tych uwag i z zależności (15a) wynika związek

$$\alpha_o = S \cdot \alpha_m. \tag{18}$$

Charakterystyki miernicze (15) i (15a) przyjmują obecnie postać podaną poprzednio wzorami (8), a mianowicie

$$X = \frac{S \cdot \alpha_m - \alpha_x}{\alpha_x}, \qquad \frac{\alpha_x}{\alpha_m} = \frac{S}{1+X}.$$

Zastosowanie związku (16) prowadzi łatwo do wyrażeń

$$Y = \frac{\alpha_x}{S \cdot \alpha_m - \alpha_x}, \qquad \frac{\alpha_x}{\alpha_m} = \frac{S \cdot Y}{1+Y}. \tag{19}$$

Należy jeszcze zauważyć, że wartości graniczne, odpowiadające krańcowemu odchyleniu α_m są — zgodnie ze wzorem (17) — następujące:

$$R_g = \frac{R_w}{S-1}, \qquad Y_g = \frac{1}{S-1}. \tag{20}$$

Przytoczone wywody wskazują jednoznacznie, że wnioski wyprowadzone dla omomierza szeregowego są ważne bez żadnej zmiany dla miernika przewodności o układzie równoległym. Jeżeli jednak obecnie omawiany przyrząd chcemy traktować jako omomierz, to wszelkie interesujące wartości względnej oporności mierzonej Y wyrażają się jako odwrotności odpowiednich wartości X, wyznaczonych przy rozpatrywaniu przyrządu o układzie szeregowym. Wartości uchybów pozostają przy tym bez zmiany dla obu układów połączeń. Stopień skrócenia podziałki rozumie się obecnie zgodnie ze wzorem (20).

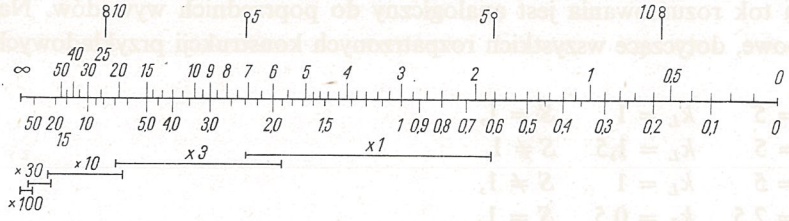
6. RÓŻNE ROZWIĄZANIA OMOMIERZY KLASY k_w

Z poprzednich rozważań widać wyraźnie, że założoną klasę k_w można uzyskać dla różnych par wartości k_L (klasa ustroju) oraz S (stopień skrócenia podziałki). Założone wartości tych parametrów definiują nie tylko przebieg podziałki i rozpiętość jej części roboczej, lecz również liczbę i gradację kolejnych zakresów.

Obecne rozważania ograniczymy do samego omomierza szeregowego z uwagi na daleko idącą analogię jaką wykazuje przyrząd o układzie równoległym, co było już obszernie omówione poprzednio.

Pierwszy przypadek skrócenia podziałki

W pierwszym rzędzie zajmiemy się rozpatrzeniem omomierza klasy $k_w = 5$. Przy założeniu podziałki nieskróconej $S = 1$ przyrząd taki można zbudować jedynie w oparciu o ustrój klasy $k_L = 1$ lub lepszej. Wniosek ten wynika z przebiegu funkcji $W = f(X)$, zobrazowanego rysunkiem 1: minimalna wartość wskaźnika uchybu wynosi bowiem $W_o = 4{,}430$.

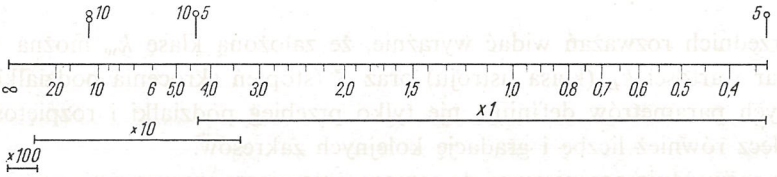


Rys. 3. Rozwinięcie podziałki omomierza o danych: $k_w = 5$, $k_L = 1$, $S = 1$

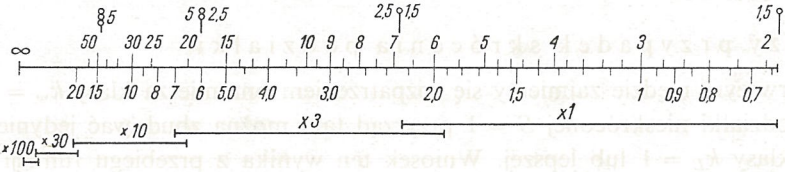
Zakładając $S = 1$ oraz $k_L = 1$ można już zbudować omomierz klasy $k_w = 5$. Przyjmując, że przyrząd ma być jednozakresowy, z pierwszego wiersza tablicy 4 określimy zakres pomiaru nierównością $0{,}611 \leqslant X \leqslant 2{,}372$. Iloraz $X''_g/X'_g = \dfrac{2{,}372}{0{,}611} = 3{,}884$ wskazuje jednoznacznie, że w przypadku miernika wielozakresowego konieczne jest zachowanie gradacji 1:3:10:30:100 ... Rozwinięcie podziałki tak zaprojektowanego przyrządu przedstawiono na rys. 3. Skalowanie jest wykonane w wartościach względnej oporności mierzonej X. Dodatkowe znaki nad podziałką wskazują przedziały, w których $0{,}05 \leqslant \leqslant \delta R_w \leqslant 0{,}10$. Kreski poziome poniżej rozwinięcia podziałki oznaczone „× 1", „× 3" ... pełnią rolę instrukcji prawidłowego stosowania, przemawiającą wizualnie do użytkownika

przyrządu. Pierwszy pomiar nieznanego oporu wykonuje się normalnie na najniższym zakresie „1 ×"; jeżeli wskazówka odchyli się do obszaru oznaczonego np. „ × 10", to obsługujący bez dalszych prób winien dokonać przełączenia na wskazany zakres, by otrzymać pomiar z uchybem według klasy k_w.

Przyjmując następnie jako podstawę konstrukcji ustrój klasy $k_L = 1{,}5$ musimy zastosować podziałkę skróconą, jak to widać z tablicy 3. o wartości $S = 1{,}555$. W takim przypadku podstawowy zakres pomiaru jest wyznaczony granicami $0{,}555 \leqslant X \leqslant 2{,}611$, których iloraz wynosi $X''_g/X'_c = 4{,}708$. Wynika stąd, że przyrząd wielozakresowy musi być zaprojektowany przy zachowaniu gradacji 1:3:10:30:100 ...



Rys. 4. Rozwinięcie podziałki omomierza o danych: $k_w = 5$, $k_L = 1$, $S = \frac{4}{3}$



Rys. 5. Rozwinięcie podziałki omomierza o danych: $k_w = 1{,}5$, $k_L = 0{,}5$, $S = 1{,}640$

Celem uzyskania pełniejszego obrazu zagadnienia zbadamy jeszcze dalsze przykłady, przy czym tok rozumowania jest analogiczny do poprzednich wywodów. Najważniejsze dane liczbowe, dotyczące wszystkich rozpatrzonych konstrukcji przykładowych, a mianowicie:

1) $k_w = 5$ $k_L = 1$ $S = 1$,
2) $k_w = 5$ $k_L = 1{,}5$ $S \neq 1$,
3) $k_w = 5$ $k_L = 1$ $S \neq 1$,
4) $k_w = 2{,}5$ $k_L = 0{,}5$ $S = 1$,
5) $k_w = 2{,}5$ $k_L = 0{,}5$ $S \neq 1$,
6) $k_w = 1{,}5$ $k_L = 0{,}5$ $S \neq 1$,

zostały zestawione w tablicy 7, gdzie symbol N umieszczony w nagłówku oznacza liczbę zakresów przy założeniu, że najmniejszy mnożnik wynosi „ × 1" a największy „ × 100".

Drugi przypadek skrócenia podziałki

Wywody, oparte na założeniu dochowania przyjętego uchybu wyłącznie między punktami charakterystycznymi dla danego zakresu, ilustrujemy również kilkoma wybranymi przykładami dla założonej klasy k_w.

W pierwszym rzędzie przyjmujemy gradację zakresów 1:10:100 (typ A) i wartości $k_w = 5$ oraz $k_L = 1{,}5$. Wynika stąd $\frac{W_c}{S} = \frac{k_w}{k_L} = \frac{10}{3}$ i zgodnie z danymi w tablicy 5

Tablica 7

Dane liczbowe rozpatrzonych przykładów

Lp.	S	N	$\frac{X'_{g\min}}{X''_{g\max}}$	$\frac{\alpha''/\alpha_m}{\alpha'/\alpha_m}$	Granice zwiększonego uchybu ±2,5%	±5%	±10%	Rys. nr
			Pierwszy przypadek skrócenia podziałki					
1	1	5	$\frac{0{,}611}{237{,}2} = 1:388{,}4$	$\frac{0{,}621}{0{,}297}$	—	—	$\frac{0{,}183}{780{,}8}$	3
2	1,555	5	$\frac{0{,}555}{261{,}1} = 1:470{,}8$	$\frac{1{,}000}{0{,}431}$	—	—	$\frac{—}{818{,}0}$	—
3	$\frac{4}{3}$	3	$\frac{0{,}333}{432{,}0} = 1:1296$	$\frac{1{,}000}{0{,}251}$	—	—	$\frac{—}{1120}$	4
4	1	5	$\frac{0{,}611}{237{,}2} = 1:388{,}4$	$\frac{0{,}621}{0{,}297}$	—	$\frac{0{,}183}{780{,}8}$	—	3
5	$\frac{4}{3}$	3	$\frac{0{,}333}{432{,}0} = 1:1296$	$\frac{1{,}000}{0{,}251}$	—	$\frac{—}{1120}$	—	4
6	1,640	5	$\frac{0{,}640}{226{,}3} = 1:353{,}4$	$\frac{1{,}000}{0{,}503}$	$\frac{—}{595{,}0}$	$\frac{—}{1430}$	—	5
			Drugi przypadek skrócenia podziałki					
7	1,238	3	$\frac{0{,}380}{379{,}8} = 1:1000$	$\frac{0{,}897}{0{,}258}$	—	—	$\frac{—}{1024}$	—
8	1,463	5	$\frac{0{,}659}{219{,}8} = 1:333{,}3$	$\frac{0{,}882}{0{,}457}$	—	—	$\frac{—}{755{,}2}$	—

Uwaga: kreska — oznacza, że dana wartość nie jest interesująca lub też leży poza zakresem odchyleń.

znajdujemy $S = 1{,}857$. Wybranej gradacji odpowiadają punkty charakterystyczne według tablicy 1: $X'_c = 0{,}380$ oraz $X''_c = 3{,}798$. Z definicji stopnia skrócenia wynika, że podziałka tego miernika będzie rozpoczynać się od wartości $X = S-1 = 0{,}857 > 0{,}380$. Wynika stąd, że punkt X'_c znajduje się poza zakresem odchyleń, co jest sprzeczne z uczynionym założeniem.

Przy zachowaniu założonej gradacji zakresów można natomiast zrealizować omomierz o $k_w = 5$ przy $k_L = 1$. Wykorzystanie ustroju klasy $k_L = 1{,}5$ do budowy miernika klasy $k_w = 5$ jest możliwe, wymaga jednak zastosowania gradacji zakresów typu B.

Realizacja omomierza klasy $k_w = 1{,}5$ przy użyciu ustroju $k_L = 0{,}5$ oznacza żądanie, by było $W_c/S = k_w/k_L = 3$; stosownie do tablicy 5 należy wybrać gradację typu B oraz wartość $S = 1{,}625$. Dla takiej gradacji mamy dolny punkt charakterystyczny $X'_c = 0{,}659$; zgodnie z równaniem podziałki skróconej (8) otrzymujemy $\alpha'_c/\alpha_m = 0{,}980$. Rezultat ten wskazuje, że obecnie rozpatrywany przykład będzie się tylko nieznacznie różnił od przykładu 6 dla pierwszego przypadku skrócenia podziałki, wobec czego nie wymaga dalszej analizy.

Zgodnie z powyższymi uwagami, rozpatrzono dokładniej tylko dwa przykłady, a mianowicie:

7) $k_w = 5$ $k_L = 1$ gradacja typu A czyli 3 zakresy,
8) $k_w = 5$ $k_L = 1{,}5$ gradacja typu B czyli 5 zakresów.

Wyniki obliczeń zostały ujęte w odpowiednich wierszach tablicy 7.

Porównanie danych liczbowych zamieszczonych we wspomnianej tablicy oraz rysunków przedstawiających rozwinięcie poszczególnych podziałek nasuwa następujące obserwacje:

— najlepsze z punktu widzenia użytkownika rozwiązanie konstrukcji omomierza klasy $k_w = 5$ daje przykład 3, charakteryzujący się najszerszym ogólnym zakresem pomiaru (1:1296) oraz małą częstotliwością manipulacji (3 zakresy),
— omomierz klasy $k_w = 1{,}5$ można zrealizować przy użyciu ustroju $k_L = 0{,}5$ według pierwszego lub drugiego przypadku skrócenia podziałki, przy czym obie wersje wypadają niemal jednakowe; należy wybrać pierwszą, bo daje ona minimalne „zachodzenie na siebie" zakresów, co zmniejsza liczbę manipulacji,
— dla przykładów innych niż rozpatrzone, można spodziewać się, że przypadek pierwszy skrócenia podziałki okaże się lepszy od drugiego.

7. ZAKOŃCZENIE

Przedstawione rozważania prowadzą do niżej wyrażonych wniosków praktycznych, mających znaczenie zarówno dla wytwórcy, jak i dla użytkowników omomierzy zwyczajnych:

1) przy zastosowaniu ustroju klasy $k_L = 1$ i stopnia skrócenia podziałki $S = \frac{4}{3}$ można zbudować omomierz o gradacji zakresów 1:10:100, w którym względny uchyb pomiaru nie przekroczy wartości $\pm 5\%$ (tj. $k_w = 5$) w przedziale określonym nierównością $0{,}333 \leqslant R_x/R_w \leqslant 4{,}320$;

2) przy zastosowaniu ustroju klasy $k_L = 0{,}5$ i stopnia skrócenia podziałki $S = 1{,}640$ można zbudować omomierz o gradacji zakresów 1:3:10:30:100, w którym względny uchyb pomiaru nie przekroczy wartości $\pm 1{,}5\%$ (tj. $k_w = 1{,}5$) w przedziale określonym nierównością $0{,}640 \leqslant R_x/R_w \leqslant 2{,}263$. Godząc się na względny uchyb pomiaru odpowiadający klasie $k_w = 2{,}5$ można badać opory $R_x \leqslant 5{,}950 \cdot R_w$, a przy klasie $k_w = 5$ nawet $R_x \leqslant 14{,}30 \cdot R_w$;

3) przyrządy takie muszą być wyposażone w możliwość dopasowania do aktualnej wartości SEM źródła zasilającego bez korzystania z elementów zewnętrznych. Postulat ten daje się łatwo spełnić przez wbudowanie odpowiednich oporników kontrolnych, włączanych za pomocą właściwych przycisków.

Pierwszy z tych wniosków pozwala na udoskonalenie właściwości mierniczych produkowanych obecnie omomierzy, natomiast drugi wskazuje założenia konstrukcyjne dla nowego typu przyrządów.

Obecnie produkowane omomierze typu OM-1 oraz OM-2 posiadają podziałkę nieskróconą, ustrój klasy $k_L = 1$ i trzy zakresy o gradacji 1:10:100. Według danych katalogowych [6] zakres pomiaru ma wynosić $0 \leqslant X \leqslant 50$ dla OM-1 względnie $0 \leqslant X \leqslant 20$ dla OM-2. Z przeprowadzonych badań wynika, że w przedziale $0{,}183 \leqslant R_x/R_w \leqslant 7{,}808$

względny uchyb pomiaru nie przekracza $\pm 10\%$. Widać więc, że trudno tu mówić o pomiarze oporności mniejszych niż 366 Ω lub większych niż 1,56 MΩ w przypadku miernika OM-1 i odpowiednio 9,2 Ω względnie 39 kΩ dla OM-2. Prosta i niezbyt kosztowna zmiana konstrukcji dałaby — stosownie do wniosku pierwszego — znacznie lepszy przyrząd pomiarowy: uchyb $\pm 5\%$ w przedziale od 666 Ω do 864 kΩ dla OM-1 względnie od 16,7 Ω do 21,6 kΩ dla OM-2. Dopuszczenie uchybu $\pm 10\%$ rozszerza odpowiednio te granice: do 2,24 MΩ lub 56 kΩ.

W dzisiejszej praktyce pomiarowej daje się odczuć potrzebę omomierzy o zwiększonej dokładności i zakresie pomiaru. W rozmaitych układach, niejednokrotnie bardzo ważnych i kosztownych, stosuje się oporniki o wartościach znamionowych dochodzących nawet do dziesiątków MΩ. Elementy takie często muszą być wybierane z zachowaniem dość wąskiej tolerancji z normalnych serii produkcyjnych. Biorąc pod uwagę obowiązujące tolerancje produkcyjne ($\pm 10\%$) musimy stwierdzić nieprzydatność do tego celu normalnie spotykanych omomierzy, w których względny uchyb pomiaru sięga tej samej, a niekiedy nawet większej wartości. Wystarczającą dokładność dadzą dopiero omomierze klasy $k_w = 1{,}5$, których dotąd nie produkuje się.

Omawiane zagadnienie występuje z pełną ostrością dopiero dla wartości oporów badanych przekraczających ca 50 kΩ. Mniejsze oporności można bowiem z wystarczającą dokładnością badać za pomocą technicznego mostka Wheatstone'a; przytoczona liczba stanowi górną granicę zakresu pomiarowego większości rozpowszechnionych konstrukcji. Produkcja omomierzy o zakresach mniejszych od wspomnianej granicy znajduje uzasadnienie w dążeniu użytkowników do ułatwienia i przyśpieszenia wykonywania pomiarów; należy zatem dostarczyć im możliwie dobrego i niedrogiego narzędzia.

W ramach prac Zakładu Miernictwa Elektrycznego Politechniki Gdańskiej autor zaprojektował oraz nadzorował wykonanie i próby omomierzy klasy $k_w = 1{,}5$. W przyrządzie zastosowano ustrój magnetoelektryczny klasy $k_L = 0{,}5$ o zakresie 0 ... 75 μA. Z uwagi na przewidywane zastosowanie omomierz posiada całkowity zakres pomiaru od 10 kΩ do 4 MΩ przy zachowaniu gradacji 1:3:10 ... i stopniu skrócenia $S = 2$. Źródłem napięcia pomiarowego (ok. 150 V) jest stabilizowany prostownik zasilany z sieci. Przyrząd został wyposażony w układ umożliwiający kontrolę „wewnętrzną" oraz ewentualne wyregulowanie wskazań. Podziałka jest zaopatrzona w oznaczenia, orientujące użytkownika w należytym doborze zakresu, tak jak to przedstawiono na rozwinięciach uwidocznionych na rys. 3 i następnych. Uchyby ustroju jako mikroamperomierza nie były badane. Po całkowitym zmontowaniu układu przeprowadzono znakowanie punktów do wykreślenia podziałki omomierzowej; przy tej okazji sprowadzono, że rozbieżności między podziałką empiryczną a teoretyczną są mniejsze niż to wynika z klasy ustroju $k_L = 0{,}5$. Pewną niespodziankę w trakcie wykonywania sprawiła tylko oporność wewnętrzna ustroju która okazała się aż o 5,7% większa od wartości podanej przez wytwórnię „Era".

Zagadnienie dokładności omomierzy zwyczajnych było już w literaturze poruszane niejednokrotnie. Cenne uwagi krytyczne do projektu odpowiedniej normy zgłosił w swoim czasie A. Spichalski [5]. Interesująca praca L. Kardysza [1] omawia obecny, niezadawalający stan rzeczy i wskazuje drogę do jego poprawy, zbliżoną do przedstawionych tutaj rozważań. Różnice w metodach rozważań stosowanych przez poszczególnych autorów odbijają się w pewnych rozbieżnościach między uzyskiwanymi danymi liczbowymi.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. L. Kardysz, Analiza niedokładności wskazań omomierzy, Biuletyn PIAP, zesz. 3/1970.
2. S. Lebson, Podstawy miernictwa elektrycznego, WNT, Warszawa 1966.
3. Polska Norma PN-64/E-06501, Mierniki elektryczne wskazówkowe — Ogólne wymagania techniczne.
4. Polska Norma PN-64/E-06505, Omomierze wskazówkowe — Wymagania i badania techniczne.
5. A. Spichalski, Przyczynek do projektu normy na omomierze wskazówkowe, Pomiary, Automatyka, Kontrola, zesz. 2/1965.
6. J. Ratajski, A. Sipowicz, T. Ustaborowicz, (Zjednoczenie ,,MERA"), Katalog 67-A, Mierniki przenośne, Wyd. Przem. Masz. ,,WEMA", Warszawa 1971.

J. SAWICKI

ACCURACY OF STANDARD OHMMETERS

Summary

The accuracy of standard ohmmeters in a series system or shunt system is characterised by an accuracy class k_L, which defines permissible error of deflexion as a fraction of the whole length of the scale. It is difficult to calculate the error of test resistance δR_x due to the hyperbolic characteristic of the scale. The above mentioned error depends greatly upon the ratio of the tested resistance R_x to the ohmmeter resistance R_w. The minimum $(\delta R_x)_{\min} \approx 4 \cdot k_L/100$ occurs at $R_x \approx R_w$; we obtain also $\lim (\delta R_x) = \infty$ for $(R_x/R_w) \to 0$ and also for $(R_x/R_w) \to \infty$.

In the case of an ohmmeter with a short scale according to formula (6) it is possible to fix such a measurement range in which the error of the tested resistance will not exceed constant value $\pm k_w/100$. The solutions below may be the best:

a) $k_w = 5$ at the degree of shortening $S = \frac{4}{3}$ and the application of ohmmeter which as ammeter has a class $k_L = 1$; the whole measurement range $0{,}333\ R_w \leqslant R_x \leqslant 432\ R_w$ is divided into 3 subranges with x-factors ,,$\times 1$", ,,$\times 10$", ,,$\times 100$".

b) $k_w = 1{,}5$ at $S = 1{,}640$ and ohmmeter $k_L = 0{,}5$, the whole measurement range $0{,}640\ R_w \leqslant R_x \leqslant 226\ R_w$ is divided into 5 subranges with factors ,,$\times 1$", ,,$\times 3$", ,,$\times 10$", ,,$\times 30$", ,,$\times 100$". Measurement range increases ($0{,}640\ R_w \leqslant R_x \leqslant 1530\ R_w$) if we assume $k_w = 5$.

J. SAWICKI

EXACTITUDE DES OHMMÈTRES ORDINAIRES

L'exactitude des ohmmètres, adaptant un montage ,,en série" ou ,,en parallèle", est caracterisée jusqu'ici par un nombre k_L signifiant que l'erreur ne doit pas dépasser $\pm k_L/100$ sur la longueur de l'échelle. Pour une courbe de graduation hypérbolique l'évaluation de l'erreur sur la valeur de la résistance mesurée δR_x est donc un peu compliquée. L'erreur δR_x dépend de la relation entre la résistance mesurée R_x et la résistance interne de l'appareil R_w. On trouve un minimum $(\delta R_x)_{\min} \approx 4.\ k_L/100$ pour $R_x \approx R_w$; on trouve également $\lim (\delta R_x) = \infty$ pour le rapport $(R_x/R_w) \to 0$ et pour $(R_x/R_w) \to \infty$.

Pour un ohmmètre a l'échelle courtisée selon la formule (6) il est possible d'obtenir une etendue de mesure assez vaste ou l'erreur sur la valeur mesurée ne dépassera un nombre constant $\pm k_w/100$. Comme les meilleurs paraissent les solutions suivantes:

a) $k_w = 5$ pour $S = \frac{4}{3}$ avec un appareil qui comme amperemètre porterait l'inscription $k_L = 1$; l'etendue de mesure est alors $0{,}333.\ R_w \leqslant R_x \leqslant 432.\ R_w$ dans les 3 diapasons ,,$\times 1$", ,,$\times 10$", ,,$\times 100$".

b) $k_w = 1{,}5$ pour $S = 1{,}640$ avec un appareil $k_L = 0{,}5$; l'etendue de mesure est $0{,}640 . R_w \leqslant R_x \leqslant 226 . . R_w$ dans les 5 diapasons „×1", „×3", „×10", „×30", „×100". L'etendue de mesure augmente ($0{,}640 . R_w \leqslant R_x \leqslant 1530 . R_w$) si l'on adopte $k_w = 5$.

J. SAWICKI

GENAUIGKEIT EINFACHER OHMMETER

Zusammenfassung

Die Genauigkeit der gewöhnlichen Ohmmeter mit Reihen- oder Parallelschaltung wird durch eine Klassenziffer k_L gekennzeichnet, die den zulässigen Anzeigefehler als Bruchteil der gesammten Skala-Länge bezeichnet. Die Berechnung des Messfehlers des gesuchten Widerstandswertes δR_x ist wegen der hyperbolischer Charakteristik der Teilung umständlich. Dieser Fehler hängt aber wesentlich von dem Verhältniss des gesuchten Widerstandes R_x zum Innenwiderstand des Gerätes R_w ab. Ein Minimum $(\delta R_x)_{\min} \approx \approx 4 . k_L/100$ tritt bei $R_x \approx R_w$ ein; ausserdem entspricht $\lim (\delta R_x) = \infty$ für $(R_x/R_w) \to 0$ wie auch für $(R_x/R_w) \to \infty$.

Für ein Ohmmeter mit verkürzter Teilung nach Formel (6) ist es möglich, einen solchen Messbereich zu ermitteln, wo der Messfehler des gesuchten Widerstandwertes den konstanten Wert von $\pm k_w/100$ nicht überschreitet. Als beste Lösungen sind zu nennen:

a) $k_w = 5$ für den Verkürzungsgrad $S = \frac{4}{3}$ und ein Gerät, das als Ampermeter die Klassenziffer $k_L = 1$ hätte; der gesammte Messbereich $0{,}333 . R_w \leqslant R_x \leqslant 432 . R_w$ ist auf 3 Teilbereiche mit Multiplikatoren „×1", „×10", „×100" unterteilt.

b) $k_w = 1{,}5$ für $S = 1{,}640$ und ein Gerät $k_L = 0{,}5$; der gesammte Messbereich $0{,}640 . R_w \leqslant R_x \leqslant 226 . R_w$ ist auf 5 Teilbereiche mit Multiplikatoren „×1", „×3", „×10", „×30", „×100" unterteilt. Bei Annahme des Wertes $k_w = 5$ wird der Messbereich vergrössert ($0{,}640 . R_w \leqslant R_x \leqslant 1530 . R_w$).

Е. САВИЦКИ

ТОЧНОСТЬ ОБЫКНОВЕННЫХ ОМОМЕТРОВ

Резюме

Точность обыкновенных омометров в сериесной или щунтовой схеме определяется классом k_L определяющим допустимую ошибку отклонения как дробь полного значения шкалы. Вычисление ошибки δR_x определения измеряемого сопротивления затруднительно из-за гиперболического деления шкалы. Упомянутая ошибки зависит в значительной степени от отношения измеряемого сопротивления R_x к внутреннему сопротивлению R_w прибора. Минимум $(\delta R_x)_{\min} \approx 4 \cdot k_L/100$ выступает при $R_x \approx R_w$ соответственно $\lim (\delta R_x) = \infty$ для $(R_x/R_w) \to 0$ как и для $(R_x/R_w) \to \infty$.

В случае омометра с сокращенной шкалой согласно формуле (6) можно определить такой диапазон измерений, в котором ошибка измеряемого сопротивления не превышает постоянного значения $\pm k_w/100$. Следующие решения можно в этом случае считать самыми лучшими:

а) $k_w = 5$ при сокращении шкалы $S = \frac{4}{3}$ и применении прибора, который в качестве амперметра имел бы класс $k_L = 1$; полный диапазон измерения $0{,}333 \cdot R_w \leqslant R_x \leqslant 432 \cdot R_w$ делится на 3 поддиапазона с множителями „×1", „×10", „×100",

б) $k_w = 1{,}5$ при $s \approx 1{,}640$ и приборе $k_L = 0{,}5$; полный диапазон измерения $0{,}640 \cdot R_w \leqslant R_x \leqslant 226 \cdot R_w$ делится на 5 поддиапазонов с множителями „×1", „×3", „×10", „×30", „×100". Диапазон измерения возрастает ($0{,}640 \cdot R_w \leqslant R_x \leqslant 1530 \cdot R_w$) если принять $k_w = 5$.

б) $k_{\text{ш}}^{\text{ш}} = 1{,}5$ при $S = 1{,}640$ имеет аппаратный $k_{\text{ш}}^{\text{ш}} = 0{,}5$. Граница де-мешке от $0{,}640 \cdot R_{\text{ш}}^{\text{ш}} \leqslant R_{\text{ш}}^{\text{ш}} \leqslant$ $\leqslant 2520 \cdot R_{\text{ш}}^{\text{ш}}$ дана 5 дисплеями $\times 1'', \ldots \times 3'', \ldots \times 10'', \ldots \times 30'', \ldots \times 100''$. Граница де-мешке аппаратно $(0{,}640 \cdot R_{\text{ш}}^{\text{ш}} \leqslant R_{\text{ш}}^{\text{ш}} < 1530 \cdot R_{\text{ш}}^{\text{ш}})$ ай Гон аппарат $k_{\text{ш}}^{\text{ш}} = 5$.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1973, 19, z. 1, ss. 137-163

621.317.39

Pomiar wilgotności metodą mikrofalową

ANDRZEJ KRASZEWSKI (WARSZAWA)

WILMER, Zakład Doświadczalny Instytutu Fizyki PAN, Warszawa

Otrzymano 4.1.1972

Przedstawiono całokształt zagadnień związanych z pomiarami zawartości wody w suchych substancjach metodą mikrofalową. Rozpatrzono ogólny schemat mikrofalowego układu pomiarowego i sprecyzowano kryteria wyboru poszczególnych podzespołów. Przedstawiono próbę systematyki tych układów oraz klasyfikacji czujników pomiarowych. Dokonano przeglądu schematów i konstrukcji istniejących na świecie mikrofalowych mierników wilgotności, przedstawiono osiągnięte wyniki oraz perspektywy dalszego rozwoju tej dziedziny miernictwa.

1. WPROWADZENIE

Pomysł wykorzystania promieniowania elektromagnetycznego do określania zawartości wody w substancjach stałych, ciekłych i gazowych zrodził się dość dawno, najpewniej wtedy, gdy stwierdzono, że deszcz padający na drodze rozchodzenia się fal elektromagnetycznych bardzo wielkiej częstotliwości, wykorzystywanych w urządzeniach radiolokacyjnych, w wyraźny sposób zmniejsza skuteczność transmisji. Z drugiej strony, problem określenia zawartości wody w surowcach, półfabrykatach i wyrobach gotowych należy do najbardziej ważkich i skomplikowanych problemów, z jakimi styka się człowiek w czasie swej działalności wytwórczej. Ze względu na powszechność występowania wody w przyrodzie oraz jej celowe wprowadzanie do szeregu procesów produkcyjnych, problem pomiaru, kontroli i regulacji ilości wody w różnych fazach procesów posiada istotne, niekiedy fundamentalne znaczenie w wielu gałęziach przemysłu, jak na przykład, żeby wymienić tylko najważniejsze, w przemyśle chemicznym, petrochemicznym, spożywczym, materiałów budowlanych, odlewniczym, przeróbki drewna, papierniczym, tekstylnym, itp. Kontrola wilgotności w tych gałęziach przemysłu powoduje poprawę jakości gotowych wyrobów, zmniejszenie zużycia surowców bądź usprawnienie procesów technologicznych, a wobec ogromnej wartości produkcji każda najmniejsza nawet poprawa istniejącego stanu rzeczy przynosi wymierne oszczędności sięgające kwot bardzo poważnych, wielokrotnie przewyższających koszt aparatury i badań poprzedzających jej instalację.

Najbardziej charakterystycznymi cechami promieniowania elektromagnetycznego wielkiej częstotliwości, zastosowanego do pomiaru i regulacji zawartości wody, jest to, że:

pomiary są bezstykowe, przez co przetwornik nie obciąża ani nie zakłóca badanej substancji, umożliwiając pomiar ciągły,

sygnał na wyjściu przetwornika jest proporcjonalny do mierzonej wielkości,

odczyt wyniku pomiaru jest natychmiastowy, uwarunkowany w zasadzie tylko bezwładnością układu odczytowego,

układ pomiarowy może być prosty, niezawodny i całkowicie bezpieczny dla obsługującego personelu,

przetworniki i czujniki mogą być odporne na działanie ostrych narażeń zewnętrznych.

Wymienione cechy charakterystyczne pozwalają stwierdzić wyższość metod mikrofalowych nad wieloma stosowanymi dotychczas metodami pomiaru wilgotności i ich pełną przydatność przy ciągłej regulacji zawartości wody, nawet w najcięższych warunkach przemysłowych.

Tak więc połączenie palących potrzeb przemysłu z jednej strony i dostrzeżonych możliwości opracowania nowej metody pomiaru z drugiej strony spowodowało, że w połowie lat pięćdziesiątych szereg badaczy rozpoczęło prace nad wykorzystaniem techniki mikrofalowej do określania wilgotności dielektycznych substancji stałych i ciekłych [1, 2]. Z upływem lat pracę tę podjęło szereg dalszych ośrodków i na początku lat sześćdziesiątych doprowadzono do powstania pierwszych mierników wilgotności, opartych na wykorzystaniu mikrofal [3]. Obecnie prace nad zagadnieniem pomiaru wilgotności różnych materiałów metodą mikrofalową trwają w Anglii [4, 5], w Związku Radzieckim [6÷11], w Szwecji [12÷16], w Stanach Zjednoczonych [17] oraz w NRF [18], a ostatnio również w Holandii i w Czechosłowacji. W Polsce prace nad tym zagadnieniem rozpoczęto w Unipanie w roku 1965 i do chwili obecnej opracowano mierniki, przy pomocy których określono przydatność metody dla kilku gałęzi przemysłu oraz przeprowadzono pomiary przemysłowe [19÷25].

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie całokształtu zagadnień związanych z pomiarem zawartości wody w suchych substancjach metodą mikrofalową, a więc omówienie właściwości fizycznych wody interesujących z punktu widzenia przeprowadzania pomiaru, przedstawienie systematyki mikrofalowych układów pomiarowych, służących do pomiaru wilgotności oraz kryteriów wyboru układu pomiarowego i rozwiązania czujników mikrofalowych. Dokonując przeglądu tej szerokiej obecnie dziedziny miernictwa, zwrócono uwagę tylko na te spośród licznych publikacji, które dotyczą rozwiązań i doświadczeń związanych z przemysłowym zastosowaniem, pomijając wiele ciekawych prac, układów i metod pomiarowych dotyczących badań laboratoryjnych.

2. WŁAŚCIWOŚCI FIZYCZNE BADANYCH SUBSTANCJI

Pod względem makroskopowym właściwości jednorodnej substancji są jednoznacznie określone przez parę tensorów — zespolony tensor przenikalności elektrycznej i zespolony tensor przenikalności magnetycznej. Jeżeli materiał można uważać za izotropowy, wtedy tensory przybierają postać prostych liczb zespolonych, a gdy dodatkowo nie wykazuje on przenikalności magnetycznej, jego właściwości można w pełni określić na podstawie znajomości zespolonej przenikalności elektrycznej

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon'' = \varepsilon' - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} = \varepsilon'(1 - j\operatorname{tg}\delta), \tag{1}$$

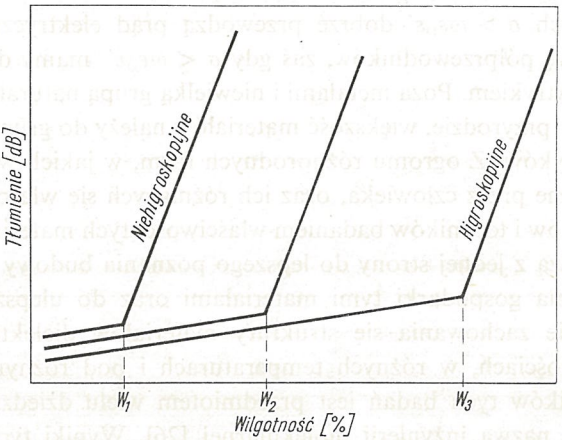
gdzie δ — konduktywność materiału, ω — częstotliwość pola elektromagnetycznego, ε_0 — stała dielektryczna próżni.

W zależności od wartości współczynnika strat, zwanego również tangensem kąta stratności $\operatorname{tg}\delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0\varepsilon'}$, materiały można podzielić na przewodzące i nieprzewodzące. Materiały, dla których $\sigma > \omega\varepsilon_0\varepsilon'$ dobrze przewodzą prąd elektryczny, przy $\sigma \approx \omega\varepsilon_0\varepsilon'$ materiały noszą nazwę półprzewodników, zaś gdy $\sigma < \omega\varepsilon_0\varepsilon'$ mamy do czynienia z izolatorem, zwanym dielektrykiem. Poza metalami i niewielką grupą naturalnych półprzewodników występujących w przyrodzie, większość materiałów należy do grupy mniej lub bardziej doskonałych dielektryków. Z ogromu różnorodnych form, w jakich występują dielektryki naturalne i wytwarzane przez człowieka, oraz ich różniących się właściwości wynika duże zainteresowanie fizyków i techników badaniem właściwości tych materiałów. Wyniki badań dielektryków prowadzą z jednej strony do lepszego poznania budowy materii, a z drugiej strony do poprawienia gospodarki tymi materiałami oraz do ulepszenia sposobów ich wytwarzania. Badanie zachowania się struktury materiałów dielektrycznych w polach o różnych częstotliwościach, w różnych temperaturach i pod różnymi ciśnieniami oraz interpretowanie wyników tych badań jest przedmiotem wielu dziedzin fizyki i techniki, znanych pod ogólną nazwą inżynierii molekularnej [26]. Wyniki tych badań mają bezpośredni związek z tą dziedziną miernictwa, która zajmuje się badaniem właściwości wilgotnych materiałów. Włączenie techniki mikrofalowej do badań mikroskopowych materii znacznie rozszerzyło zbiór użytecznych narzędzi badawczych w tej dziedzinie, wypełniając w oczywisty sposób lukę powstającą pomiędzy falami radiowymi a promieniowaniem świetlnym, wykorzystywanymi od dawna do badania właściwości materii.

Z fizycznego punktu widzenia, wilgotna substancja jest mieszaniną wielofazową, najczęściej trójfazową (substancja — woda — powietrze), rzadziej dwufazową. Mimo intensywnych prac nad rozwojem teorii mieszanin, nie można jeszcze obecnie określić właściwości powstałej mieszaniny na podstawie znajomości ilościowego jej składu i właściwości składników. Problem jest dodatkowo skomplikowany, gdy jednym ze składników jest woda. Elektromagnetyczne właściwości mieszaniny zależą od szeregu czynników trudnych do matematycznego zdefiniowania, a mianowicie od kształtu drobin materiału, ich rozkładu w mieszaninie, od różnych sposobów wiązania się molekuł wody z materiałem w zależności od stanu powierzchni materiału, ilości wody, temperatury itp. Jednakże ostatnia praca Tingi [27] na temat wielofazowych mieszanin celulozy wydaje się wskazywać na pewne możliwości rozwiązania problemów teoretycznych i ich zadawalającą przydatność praktyczną.

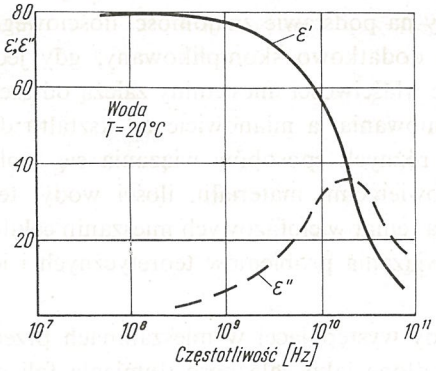
Dwoisty charakter wody występującej w mieszaninach przedstawiają zagięte krzywe, pokazane na rys. 1, wykreślone jako zależność tłumienia fali elektromagnetycznej przechodzącej przez mieszaninę od wilgotności (zawartości wody) mieszaniny. Z rysunku widać, że tłumienie wprowadzane przez mieszaninę wody i materiału dielektrycznego zależy od właściwości i struktury materiału oraz od ilości wody zawartej w mieszaninie. Interpretacja schematycznych przebiegów pokazanych na rysunku 1 związana jest z mechanizmem zawilgacania suchej substancji. Przy niewielkich zawartościach wody w mieszaninie wiąże się ona na powierzchniach drobin, cząstek, kapilar lub granulek materiału tworząc

warstwę wody molekularnie *związanej* z materiałem. W tym przypadku ograniczony jest ruch dipola molekuły wody, a w związku z tym woda związana posiada niewielką przenikalność elektryczną i niewielki współczynnik strat. W miarę przybywania wody w mieszaninie warstwy związane na powierzchniach stają się grubsze, woda jest związana w coraz



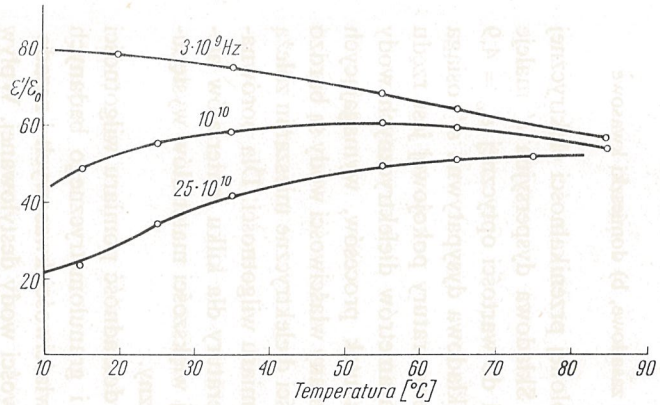
Rys. 1. Zależność tłumienia fali elektromagnetycznej wprowadzanego przez mieszaniny różnych materiałów od ich wilgotności

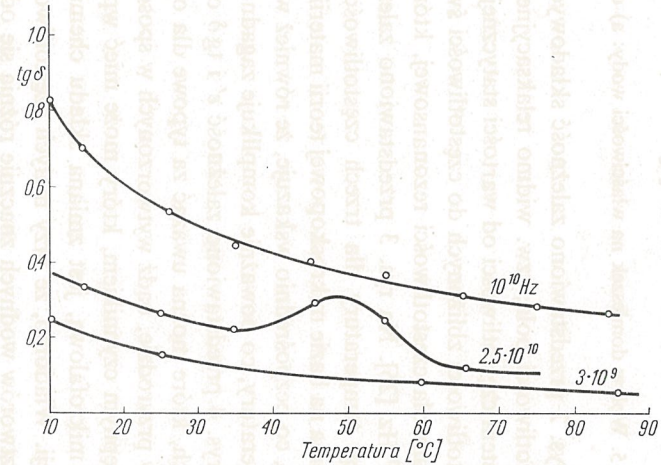
mniejszym stopniu z materiałem i jej właściwości ulegają zmianie, wreszcie dzięki lepkości wody zostają wypełnione przestrzenie pomiędzy sąsiednimi cząstkami materiału, a woda je wypełniająca posiada właściwości wody *wolnej*. Oczywiste, że w materiałach niehigroskopijnych ilość wody, jaka może zostać związana na powierzchniach, jest znacznie mniejsza



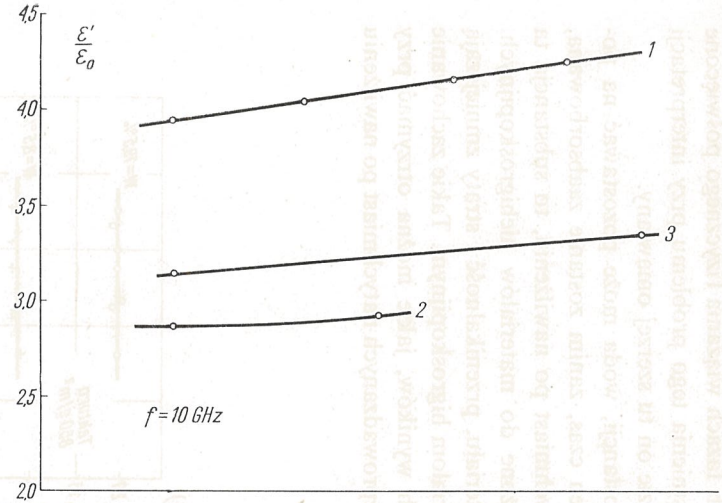
Rys. 2. Widmo relaksacyjne wody

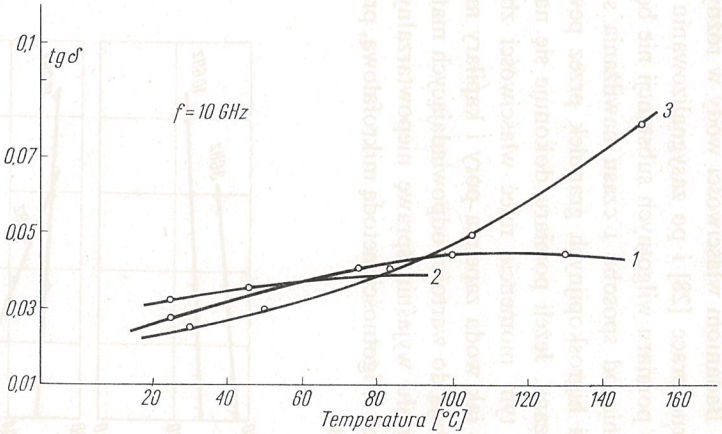
niż w przypadku materiału silnie higroskopijnego, dlatego też punkty załamania przedstawionych krzywych różnią się wyraźnie ($W_1 < W_3$). Po nasyceniu wodą kapilar i przestrzeni między cząsteczkami (dla $W > W_3$) w materiale higroskopijnym, materiały te z punktu widzenia ich właściwości dielektrycznych zachowują się jak materiały niehigro-





Rys. 3. Zależność parametrów wody od temperatury dla kilku częstotliwości



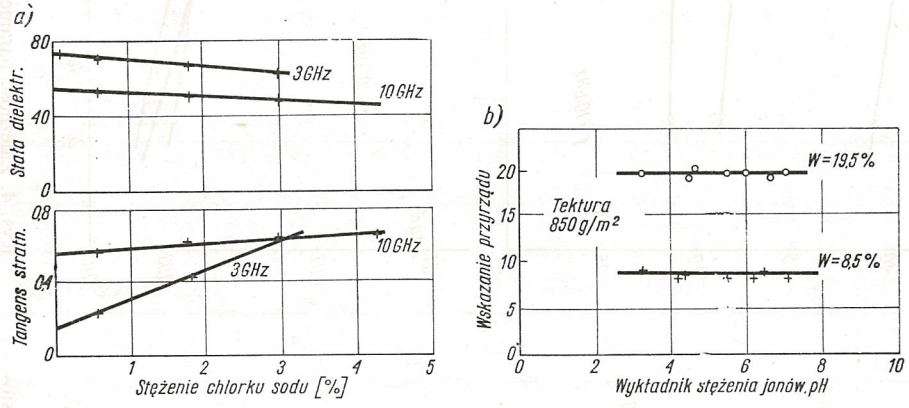


Rys. 4. Zależność parametrów substancji niepolarnych od temperatury

1 — żywica formaldehydowa, 2 — celuloza, 3 — poliester

skopijne. Badaniom właściwości wody w różnych fazach wiązania fizycznego poświęcone są obszerne prace [28] i po zasygnalizowaniu istnienia tego problemu przy interpretacji wyników pomiaru wilgotnych substancji nie będzie on tu szerzej omawiany.

Zależnie od sposobu i czasu nawilżania substancji, woda może pozostawać na powierzchni higroskopijnych granulek przez pewien czas, zanim zostanie zaabsorbowana, czy związana. Jeżeli pomiaru dokonuje się natychmiast po nawilżeniu, to substancja ta może w tym momencie mieć właściwości zbliżone do materiałów niehigroskopijnych. W miarę jak woda zapełnia pory i kapilary materiału, przenikalność i straty zmniejszają się i zbliżają do wartości odpowiadających materiałom higroskopijnym. Takie zachowanie się materiału wyjaśnia sprawę niepowtarzalnych wyników, jakie można otrzymać przy pomiarach wilgotności metodą mikrofalową, przeprowadzanych natychmiast po nawilżeniu materiału.



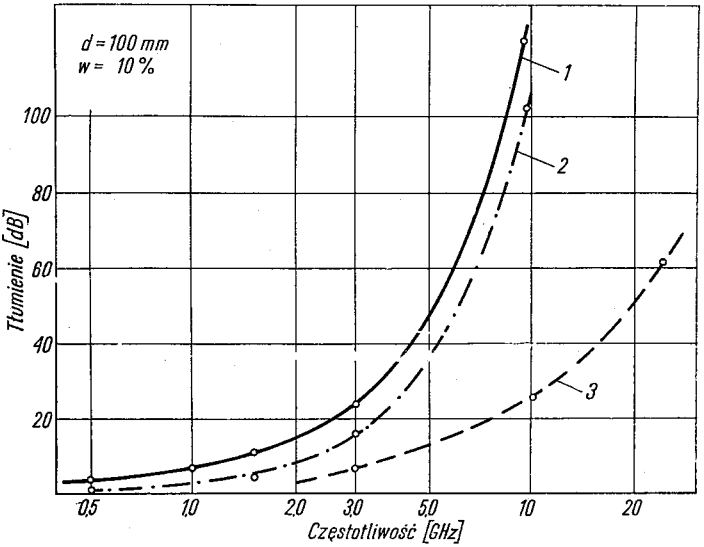
Rys. 5. Wpływ domieszek na właściwości wody: a) domieszki zasadowe, b) domieszki kwasowe

Na rys. 2 przedstawiono zależność składowych zespolonej przenikalności elektrycznej od częstotliwości pola, tzw. widmo relaksacyjne wody. Składowa dyspersyjna ε' maleje ze wzrostem częstotliwości od wartości statycznej $\varepsilon_s = 81$ do wartości optycznej $\varepsilon_\infty = 4{,}9$ dla częstotliwości zbliżonych do częstotliwości światła. Składowa dysypatywna ε'' osiąga maksimum dla częstotliwości rezonansowej, która dla temperatury pokojowej jest rzędu $2{,}7 \cdot 10^{10}$ Hz [26]. Na rys. 3 przedstawiono zależność parametrów dielektrycznych wody w funkcji temperatury dla trzech częstotliwości. Na skutek procesów, wymagających wyjaśnienia na bazie mikroskopowej teorii materii [28], zmiany właściwości wody są bardzo wyraźne, co bezpośrednio wskazuje, że również właściwości dielektryczne mieszanin zależą od temperatury, co poważnie komplikuje zagadnienie pomiaru wilgotności. Dla porównania, na rys. 4 przedstawiono zależność ε' i $\operatorname{tg}\delta$ od temperatury dla kilku materiałów niepolarnych, które można uważać za typowe dla ogromnej większości materiałów występujących w przyrodzie, bądź wytworzonych w sposób sztuczny.

Następnym czynnikiem, który może mieć wpływ na dokładność pomiaru wilgotności metodą mikrofalową, jest zmiana składu chemicznego i granulometrycznego badanych substancji. Wiadomo, że przy małych częstotliwościach właściwości kwasowych i zasadowych roztworów wodnych znacznie różnią się od właściwości wody destylowanej. Wpływ

domieszek kwasowych lub zasadowych, występujących w badanej substancji, nie jest dokładnie przebadany, lecz z dostępnych danych wynika, że przy częstotliwościach rzędu kilku tysięcy megaherców wpływ ten często może być pomijalnie mały w porównaniu z wpływem wywołanym zmianą ilości wody, co należy zaliczyć do zalet metody mikrofalowej. Na rys. 5 przedstawiono zmiany właściwości elektromagnetycznych wody w funkcji stężenia chlorku sodu [3] oraz wpływ stężenia jonów pH na tłumienie fali elektromagnetycznej w papierze [13].

Właściwości dielektryczne suchych materiałów niepolarnych nie zmieniają się przy zmianach częstotliwości w pasmie mikrofal. Jednak ze względu na dyspersyjne właściwości wody w tym zakresie należy się spodziewać, że wilgotne substancje będą wykazywały



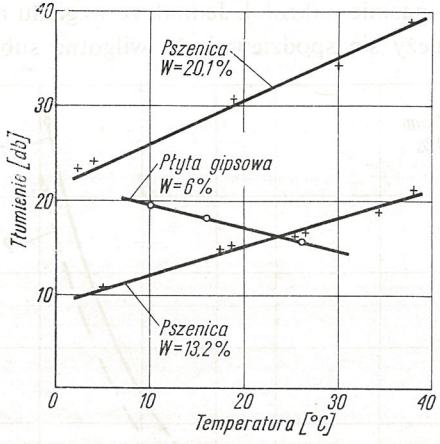
Rys. 6. Tłumienie wprowadzane przez wilgotne materiały dla różnych częstotliwości
1 — glina, 2 — piasek, 3 — cegła

zmiany swych właściwości przy zmianach częstotliwości. Na rys. 6 przedstawiono zależność tłumienia wprowadzonego przez wilgotną cegłę oraz warstwę piasku i gliny dla różnych częstotliwości. Widać, że dla fal krótszych tłumienie materiału gwałtownie wzrasta, a stopień tego wzrostu zależy od stopnia zawilgocenia materiału.

Na rys. 7 pokazano przebieg tłumienia wprowadzanego przez wilgotną pszenicę [3] oraz płytę gipsową [23] w funkcji temperatury. Widać, że temperaturowy współczynnik tłumienia jest dodatni dla pszenicy, a ujemny dla płyty gipsowej. Temperaturowy współczynnik tłumienia jest dodatni również dla mydła, tytoniu, nawozów sztucznych i marcepanu, zaś ujemny dla margaryny, piasku [3] oraz azbestocementu [6]. Wartość liczbowa tego współczynnika, określana w różnych warunkach wynosi od 0,05 do 0,2% H_2O/°C. Różne zachowanie się wilgotnych materiałów przy zmianach temperatury powoduje, że dla każdego materiału należy określać współczynnik temperaturowy indywidualnie.

Analiza krzywych podobnych do pokazanych na rys. 6 może stanowić podstawę do zbudowania mierników, które umożliwiłyby równoczesną ocenę gęstości i wilgotności badanego materiału. Problem jednoczesnego pomiaru gęstości i wilgotności przy pomocy

kilku częstotliwości w pasmie mikrofal wymaga jeszcze szerokich studiów, ale wydaje się, że przy pomocy reflektometrii przeprowadzanej w domenie czasu (ang. time-domain reflectometry) [29] możliwe będzie w niedalekiej przyszłości otrzymywanie widm relaksacyjnych mieszanin dielektrycznych (wilgotnych substancji), co może się przyczynić do wyeliminowania podstawowego mankamentu mikrofalowej metody pomiaru wilgotności, wynikającego z jej pośredniego charakteru, a mianowicie wpływu gęstości materiału na wynik pomiaru wilgotności.



Rys. 7. Zmiany tłumienia w funkcji temperatury dla wilgotnych materiałów: pszenica przy $f = 10{,}68$ GHz [3], płyta gipsowa przy $f = 9{,}40$ GHz [23]

Powyższe stwierdzenie wymaga kilku słów komentarza natury ogólnej. W potocznym zrozumieniu *wilgotność* materiału definiuje się w odniesieniu do masy suchego bądź wilgotnego materiału według wzoru:

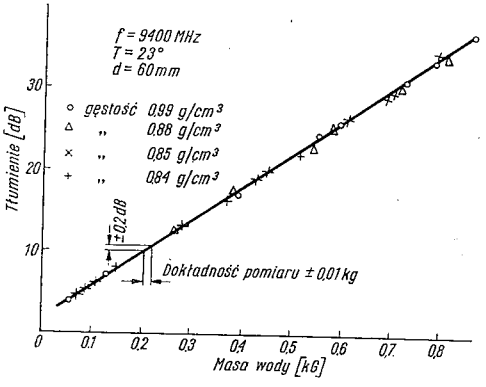
$$W_s = \frac{m_m - m_s}{m_s} 100\% = \frac{m_w}{m_s} 100\% \text{ (baza sucha)}, \tag{2}$$

$$W_m = \frac{m_m - m_s}{m_m} 100\% = \frac{m_w}{m_s + m_w} 100\% \text{ (baza mokra)}, \tag{3}$$

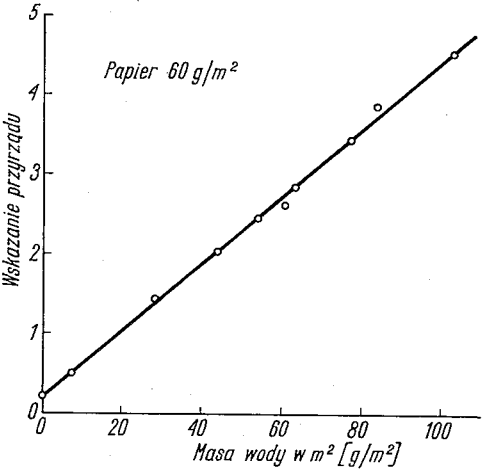
gdzie: m_s — masa suchej substancji, m_m — masa mokrej substancji, m_w — masa wody. Ponieważ zmiany parametrów fali elektromagnetycznej w.cz. po przejściu przez badany materiał zależą przede wszystkim od ilości wody występującej na drodze fali, a nieznacznie tylko od ilości (masy) suchej substancji, zgodnie z definicją (2) i (3) zmiany masy suchej substancji powodować będą wyraźny błąd pomiaru wilgotności. Podobną niedogodność wykazują wszystkie inne stosowane mierniki oparte na pośredniej metodzie pomiaru (np. mierniki pojemnościowe, oporowe, neutronowe, jądrowe itd.).

W celu usunięcia tego podstawowego mankamentu metody pomiarowej należy w czasie pomiaru dążyć do zachowania stałej masy w stałej objętości, a więc stałej gęstości badanego materiału. Z tego też względu wygodniej jest operować pojęciem *zawartości wody* w badanym materiale, gdyż jak potwierdzają to badania doświadczalne, tłumienie fali elektromagnetycznej jest liniową funkcją ilości wody w badanym materiale niezależnie od jego

gęstości [23] — patrz rys. 8, jak również zmiany częstotliwości rezonansowej są liniową funkcją ilości wody zawartej w materiale umieszczonym w rezonatorze wnękowym, niezależnie od jego wilgotności [14, 15] — patrz rys. 9. Metoda mikrofalowa pozwala określić ilość wody, a nie jej procentowy udział w mieszaninie wielofazowej, co z punktu widzenia użytkowników metody stanowi dość istotną różnicę. Jednakże w praktyce b. często udaje się utrzymywanie stałej gęstości materiału w czasie wzorcowania miernika jak i w czasie pomiaru, a w związku z tym można mówić o mikrofalowych *miernikach wilgotności.*



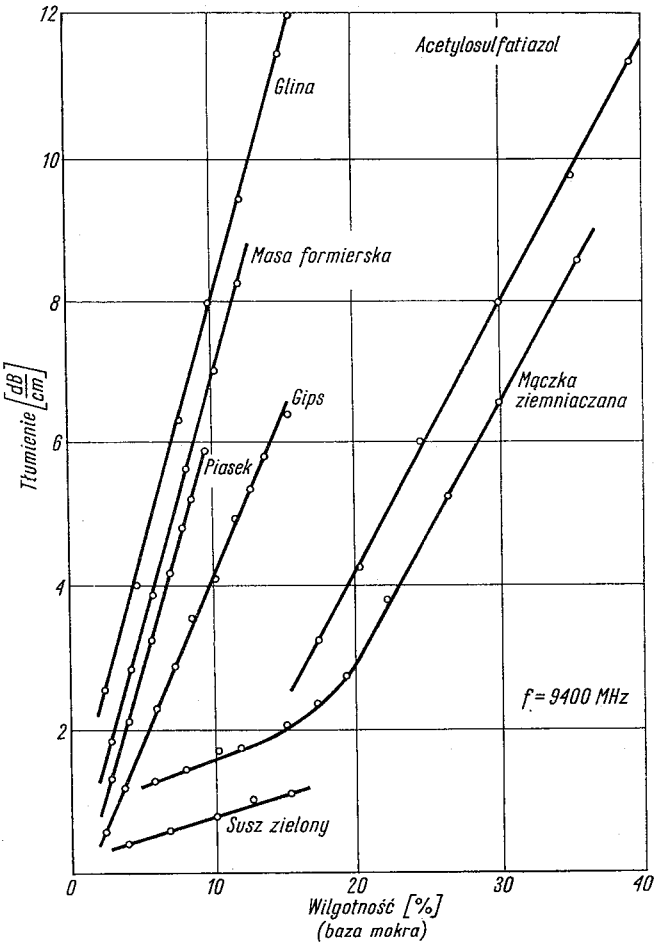
Rys. 8. Tłumienie w funkcji masy wody zawartej w płycie gipsowej dla kilku gęstości płyty. Masa suchej płyty ok. 5 kg [23]



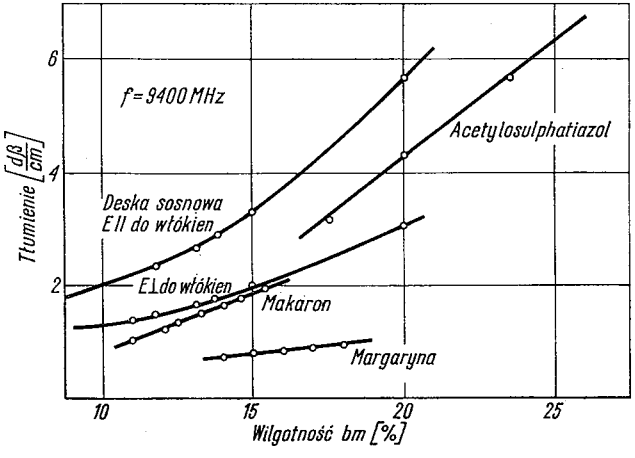
Rys. 9. Odczyt proporcjonalny do częstotliwości rezonansowej w funkcji masy wody w warstwie papieru o stałej gramaturze [14]

Z tego, co powiedziano dotychczas o właściwościach materiałów dielektrycznych oraz wody, jasno wynika, że podobnie jak wszystkie inne pośrednie mierniki wilgotności, również mikrofalowy miernik wilgotności przed wykonaniem pomiaru wymaga *wzorcowania.* Wzorcowanie polega na doświadczalnym określeniu zależności sygnału w.cz. oddziaływującego z badaną substancją od jej wilgotności. Ponieważ rodzaj substancji, jej struktura, gęstość, temperatura i niekiedy skład chemiczny wpływają na wynik pomiaru, miernik wymaga zwykle wzorcowania dla każdego materiału oddzielnie, a poza tym sam proces wzorcowania powinien przebiegać w warunkach jak najbardziej zbliżonych do warunków występujących normalnie w czasie pomiaru. Na rys. 10 i 11 przedstawiono dla przykładu kilka doświadczalnie zdjętych krzywych wzorcowania dla różnych materiałów [22, 23]. Na osi pionowej odłożono tłumienie fali elektromagnetycznej przy przejściu przez badaną substancję, unormowane do warstwy o grubości 1 cm, natomiast na osi poziomej wilgotność tych substancji określoną na bazie mokrej przy pomocy standardowej metody grawimetrycznej. Wszystkie wyniki doświadczalne otrzymano przy pomocy mikrofalowego miernika wilgotności Unipan typ 160 w warunkach laboratoryjnych.

Krzywe doświadczalne przedstawione na rys. 10 i 11 odnoszą się do materiałów ważnych z praktycznego punktu widzenia. Bardzo różnorodna jest struktura tych materiałów: piasek — ziarenka o średnicach rzędu 0,3 mm, makaron — porowate kolanka o średnicy 1 cm i długości ok. 2 cm, deski sosnowe — grubość 20 mm, budowa włóknista z widoczną



Rys. 10. Krzywe wzorcowania — zależność tłumienia od wilgotności dla kilku materiałów



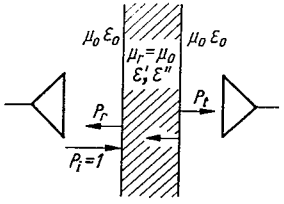
Rys. 11. Krzywe wzorcowania mikrofalowego miernika wilgotności Unipan typ 160 dla kilku materiałów

anizotropią, sulfatiazol i mączka ziemniaczana — sypkie proszki higroskopijne, margaryna — bezpostaciowa masa oleista, gips — związana płyta o grubości 80 mm. Różnorodność struktury materiałów, dla których w interesującym zakresie zmian wilgotności uzyskuje się prostoliniową zależność tłumienia fali elektromagnetycznej od wilgotności materiału, wskazuje na znaczną uniwersalność metody mikrofalowej oraz przydatność mikrofalowych mierników wilgotności w różnych gałęziach przemysłu.

Z punktu widzenia techniki pomiarowej problem określania zawartości wody w materiale sprowadza się do wyznaczenia parametrów dielektrycznych mieszaniny wielofazowej. Należy więc zdać sobie sprawę z tego, w jaki sposób dielektryk taki oddziaływuje na parametry przechodzącej przezeń fali elektromagnetycznej.

3. ODDZIAŁYWANIE POMIĘDZY WILGOTNĄ SUBSTANCJĄ A POLEM ELEKTROMAGNETYCZNYM

Jeżeli wilgotną substancję umieścić w wolnej przestrzeni na drodze rozchodzącej się elektromagnetycznej fali płaskiej, to po przejściu przez warstwę substancji amplituda i faza fali ulegnie zmianie, która to zmiana zależeć będzie od właściwości substancji — jej zespolonej przenikalności elektrycznej. Na rys. 12 przedstawiono falę płaską, padającą



Rys. 12. Oddziaływanie elektromagnetycznej fali płaskiej z warstwą dielektryczną

normalnie na warstwę dielektryka o odpowiednio dużych rozmiarach poprzecznych i grubości d. Tłumienie warstwy

$$A = 10 \log \frac{P_t}{P_i} \quad [\text{dB}], \tag{4}$$

zaś moc odbita od warstwy wynosi

$$R = 10 \log \frac{P_r}{P_i} \quad [\text{dB}]. \tag{5}$$

Wartość mocy przechodzącej P_t oraz mocy odbijającej się P_r można wyrazić w postaci

$$P_t = \frac{K^2(1-r^2)^2}{(1-r^2K^2)^2+4K^2r^2\sin^2\phi}, \tag{6}$$

$$P_r = \frac{r^2[(1-K^2)^2+4K^2\sin^2\phi]}{(1-r^2K^2)^2+4K^2r^2\sin^2\phi}, \tag{7}$$

gdzie $K = e^{-\alpha d}$ — tłumienie właściwe warstwy materiału o grubości d,
$\phi = \beta d$ — skuteczna elektryczna grubość warstwy materiału,

$r = \sqrt{\frac{(\beta-\beta_0)^2+\alpha^2}{(\beta+\beta_0)^2+\alpha^2}}$ — napięciowy współczynnik odbicia fali od powierzchni materiału,

$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{\varepsilon'}{2}(\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta}-1)}$ — stała tłumienia materiału,

$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{\varepsilon'}{2}(\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta}+1)}$ — stała fazy materiału,

$\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ — stała fazy w powietrzu,

λ — długość fali w powietrzu (wolnej przestrzeni).

W większości praktycznych przypadków (nawet dla bardzo wilgotnych materiałów) można przyjąć, że $\operatorname{tg}^2\delta \ll 1$, a wtedy wyrażenia powyższe sprowadzają się do postaci:

$$\alpha \cong \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\varepsilon'}\,\frac{\operatorname{tg}\delta}{2} = \frac{\pi\sqrt{\varepsilon'}}{\lambda}\operatorname{tg}\delta, \tag{8}$$

$$\beta \cong \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\varepsilon'}, \tag{9}$$

$$r \cong \frac{\sqrt{\varepsilon'}-1}{\sqrt{\varepsilon'}+1}. \tag{10}$$

Pomijając wpływ odbić od powierzchni materiału, co można założyć w przypadku warstw lub materiałów odpowiednio stratnych, wyrażenia na mierzone parametry fali można napisać w prostej postaci:

$$A = 10\log K^2 = 10\log\left[\exp -\frac{2\pi d}{\lambda}\sqrt{\varepsilon'}\operatorname{tg}\delta\right], \tag{11}$$

$$\Delta\theta = \frac{2\pi d}{\lambda}(\sqrt{\varepsilon'}-1), \tag{12}$$

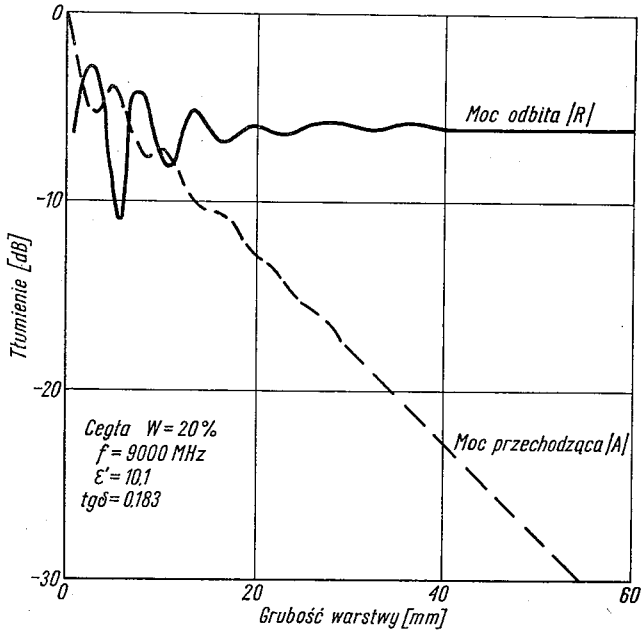
gdzie $\Delta\theta$ oznacza przesunięcie fazy fali przy przejściu przez warstwę materiału, a A jest tłumieniem wyrażonym w decybelach.

Dla grubych warstw lub silnie stratnych materiałów, gdy można zaniedbać odbicie pochodzące od drugiej powierzchni dielektryk-powietrze (co w praktyce ma miejsce, gdy tłumienie wprowadzane przez warstwę wynosi ponad 26 dB, $\alpha d \cong 3$), moc odbitą można zapisać jako

$$R = 20\log\left(\frac{\sqrt{\varepsilon'}-1}{\sqrt{\varepsilon'}+1}\right). \tag{13}$$

W przeciwnym przypadku, zarówno moc odbita jak i moc przechodząca zależą od grubości warstwy d. Na rys. 13 przedstawiono typowy przebieg A i R w funkcji grubości wilgotnej cegły o parametrach: $W = 20\%$, $\varepsilon' = 10{,}1$ i $\operatorname{tg}\delta = 0{,}183$ przy $\lambda = 3{,}33$ cm. Mimo, że rozważania powyższe przeprowadzono dla warstwy dielektrycznej w wolnej przestrzeni, wyniki odnoszą się również do warstw umieszczonych w prowadnicy falowej, po przeprowadzeniu nieznacznych adaptacji odnośnie długości fali.

Z analizy równ. (11)÷(13) wynika, że parametry fali przechodzącej przez badaną substancję zależą od grubości warstwy, długości fali oraz od dielektrycznych właściwości substancji. Wartość mocy odbitej, przy uczynionych wyżej założeniach, nie zależy od grubości warstwy, a zatem charakteryzuje tylko stan powierzchni badanego materiału.



Rys. 13. Zależność mocy przenoszonej i odbitej od grubości warstwy

Tak więc mimo, że mierniki odbiciowe umożliwiają pomiar materiału z jednej tylko strony, wynik uzyskany przy ich pomocy jest znacznie uboższy w informacje o stanie materiału, niż wynik uzyskany przy pomocy miernika przesyłowego. Przytłaczająca większość mikrofalowych mierników wilgotności, opracowanych dotychczas na świecie należy do grupy mierników przesyłowych.

4. MIKROFALOWE METODY POMIARU WILGOTNOŚCI

Mikrofalowa metoda pomiaru wilgotności opiera się na znacznych różnicach we właściwościach dielektrycznych (ε', ε'', $\operatorname{tg}\delta$) wody i suchych substancji. Z punktu widzenia techniki mikrofalowej pomiar parametrów wilgotnej substancji można traktować jak pomiar innych materiałów dielektrycznych i stosować do tego celu powszechnie znane układy pomiarowe. Znane metody pomiaru właściwości dielektrycznych można podzielić na [30, 31]:

metody impedancyjne (odbiciowe),
metody przesyłowe,
metody rezonansowe.

Pomiary mogą przebiegać albo w przestrzeni zamkniętej (rezonator wnękowy, prowadnica falowa) albo w wolnej przestrzeni.

Jak już wspomniano w p. 2, do wyznaczenia właściwości materiału dielektrycznego przy $\mu = 1$ wystarcza określenie dwu spośród wymienionych poniżej wielkości:

— moduł i argument zespolonego współczynnika odbicia $\hat{\Gamma}$,
— moduł i argument zespolonej impedancji wejściowej $\hat{z}$,
— moduł i argument zespolonego współczynnika przenoszenia $\hat{T}$,
— moduł i argument zespolonego współczynnika propagacji $\hat{\gamma}$,
— moduł i argument zespolonej częstotliwości rezonansowej $\hat{\omega}$.

Wprawdzie istnieje wieloznaczność takiego rozwiązania, wynikająca z falowego charakteru zjawisk i otrzymane wyniki odnosić się będą do nieskończonej ilości par wartości ε' i $\operatorname{tg}\delta$, to jednak trudność tę można ominąć albo przez wstępne oszacowanie prawdziwych wartości, lub przez powtórzenie pomiarów w warunkach nieco różniących się od warunków początkowych.

W przypadku, gdy można przyjąć, że $\operatorname{tg}^2\delta \ll 1$, do określenia wartości ε' potrzebna jest znajomość tylko jednej spośród wymienionych powyżej wielkości, w zasadzie dowolna. Po bliższej analizie okazuje się jednak, że wyznaczenie ε' na podstawie pomiaru na przykład $|T|$ jest mniej dokładne, niż przy wykorzystaniu do tego celu znajomości $\arg T$. Z drugiej strony, przy wyznaczaniu strat w materiale sytuacja jest odwrotna i pomiar $|T|$ pozwala uzyskać większą dokładność pomiaru, niż pomiar $\arg T$. Jeżeli do wyznaczania składowych przenikalności elektrycznej materiału wykorzystuje się $|r|$ i $\arg r$, wtedy błąd w określaniu strat materiału wynika głównie z niedokładności popełnionych w czasie pomiaru $\arg r$, zaś błąd w określeniu ε' wynika z niedokładnego pomiaru $|r|$. Tak więc możliwość pomiaru poszczególnych wielkości elektrycznych rzutuje bezpośrednio na wybór odpowiedniej metody pomiaru.

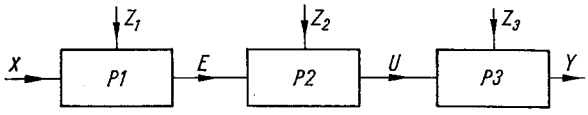
W celu określenia wtórnych parametrów materiału dielektrycznego w sposób ciągły, na przykład jego wilgotności, wystarczy znalezienie korelacji pomiędzy odpowiedzią układu pomiarowego a wartością tego parametru. Określenie tej zależności dokonuje się na podstawie jednej tylko informacji. Informacja ta może być wprawdzie wynikiem kombinacji innych informacji o właściwościach materiału, ale w przypadku pomiarów pośrednich znajomość czynników składowych nie ma istotnego znaczenia. Na przykład: moc przechodząca przez badany materiał zależy od modułu współczynnika przenoszenia $|T|$ oraz od modułu współczynnika odbicia $|r|$; oba te czynniki zmieniają się na skutek zmian parametrów dielektrycznych materiału — patrz równ. (4) ÷ (7), jednak przy pomiarach pośrednich wystarcza wnioskowanie o stanie materiału na podstawie informacji zawartych w mocy przechodzącej (pomiar tłumienia $A = |T|^2$), bez wnikania w to czy na przykład zmniejszenie się wartości mocy przechodzącej wynika tylko ze zmalenia współczynnika przenoszenia, czy również ze wzrostu współczynnika odbicia (przy zachowaniu warunku dopasowania). Nie zmienia to faktu, że posiadanie dodatkowych informacji o stanie materiału można wykorzystać do korekcji wpływów ubocznych na wynik pomiaru (np. wpływ temperatury, zmian składu chemicznego lub fizycznego).

Wybór metody pomiarowej zależy w dużym stopniu od struktury badanego materiału, wartości mierzonego parametru, wymaganej dokładności pomiaru i automatyzacji procesu pomiaru. Przy budowie miernika wilgotności należy unikać mechanicznego przenoszenia

metod pomiaru właściwości dielektryków, chociaż ich teoria i technika są doskonale opracowane [31]. I tak, szeroko stosowane zmienianie warunków pomiaru (pomiar pod kątem Brewstera, metoda dwu grubości, zmiana odległości od reflektora itp.) powodują znaczne skomplikowanie układu pomiarowego, zwiększenie niedokładności przez dwukrotne wykonywanie pomiaru oraz uniemożliwiają w zasadzie dokonywanie pomiarów ciągłych. Pomiar stratnych materiałów włóknistych wymaga zastosowania innej metody, niż pomiar małostratnych materiałów warstwowych, pomiaru materiałów występujących w grubych balach należy przeprowadzać inną metodą niż pomiar materiałów drobnosproszkowanych, jeszcze inne metody będą najwłaściwsze dla pomiaru cieczy, granulek czy płyt o stałej grubości.

5. UKŁADY MIKROFALOWE DO POMIARU WILGOTNOŚCI

Każdej metodzie pomiarowej wymienionej w p. 4 można przyporządkować odpowiedni układ pomiarowy służący do jej realizacji praktycznej. Jednak niezależnie od wszelkich różnic występujących pomiędzy poszczególnymi układami, przebieg pomiaru wilgotności można rozpatrzyć na przykładzie ogólnym.



Rys. 14. Ogólny schemat układu pomiarowego

Ogólny schemat układu pomiarowego przedstawiono na rys. 14. Na rysunku człon $P1$ odpowiada przetwarzaniu fizycznej wielkości mierzonej, wilgotności badanej substancji, oznaczonej symbolem X na wielkość elektryczną E, na przykład skuteczną przenikalność lub przewodność elektryczną; człon $P2$ obrazuje działanie przetwornika mikrofalowego (czujnika) wielkości elektrycznej E na naturalną wyjściową wielkość elektryczną U, na przykład współczynnik przenoszenia lub odbicia, impedancję lub częstotliwość rezonansową; człon $P3$ jest przetwornikiem wielkości elektrycznej U w sygnał wyjściowy napięcia lub prądu Y. Czynniki zakłócające przebieg pomiaru i wpływające na jego dokładność oznaczone są przez z_n. W odniesieniu do członu $P1$ zakłócenia z_1 odpowiadają zmianom stanu i właściwości badanego materiału w czasie pomiaru (skład chemiczny i grawimetryczny, temperatura, gęstość), czynnik z_2 opisuje zmiany warunków pomiaru — zmiany rozmiarów, przemieszczanie się materiału względem układu pomiarowego itp., natomiast czynnik z_3 uwzględnia wpływ szumów i zakłóceń typowych dla pomiarów elektrycznych.

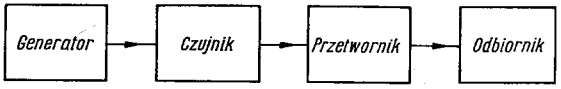
Matematyczny zapis funkcji przetwarzania członu $P1$ nie jest możliwy, gdyż, jak powiedziano w p. 2, formuły dla mieszanin wielofazowych, jakimi dysponuje współczesna fizyka, nie dają zadawalającego opisu właściwości rzeczywistych materiałów zawierających wodę. Podstawą prac projektowych jest więc najczęściej zdjęta doświadczalnie zależność $E = f(X, z_1)$ lub $U = \varphi(X, z_1, z_2)$, podobna do pokazanych na rys. 10 i 11.

Synteza optymalnego mikrofalowego układu do pomiaru wilgotności sprowadza się więc w odniesieniu do członów $P1$ i $P2$ do wyboru wartości parametrów (długość fali,

stopień zagęszczenia sypkich materiałów, usytuowanie materiału względem układu pomiarowego) oraz konfiguracji czujnika, zapewniających maksymalną wartość $\frac{\partial E}{\partial X}$ oraz $\frac{\partial U}{\partial E}$ przy minimalnej wartości $\frac{\partial E}{\partial z_1}$ i $\frac{\partial U}{\partial z_2}$. Jeżeli spełnione zostanie przytoczone wymaganie na czułość członu $P2$, zmniejszenie wpływu czynników zakłócających otrzymuje się przez stabilizację przy wzorcowaniu i w czasie eksploatacji takich warunków, jak jednorodność pola w obrębie obszaru objętego pomiarem, kształtu frontu fazowego fali, dyfrakcji fali na brzegach materiału itp.

Analiza źródeł ogólnych błędów w elektrycznych miernikach wilgotności [32, 33] wykazała, że ciężar gatunkowy błędów wprowadzanych przez układ pomiarowy jest niewielki w porównaniu z błędami popełnianymi w czasie wzorcowania i wywołanymi wpływem z_1. Dlatego nie jest celowe stawianie zbyt wygórowanych wymagań na dokładność członów $P2$ i $P3$, natomiast znaczenie podstawowe ma uwzględnienie nie tylko metrologicznych, lecz również i innych kryteriów optymalności, jak na przykład: minimalny koszt i prostota aparatury, niezawodność układu pomiarowego, możliwość automatyzacji procesu pomiaru, wykorzystanie wyników do regulacji itp.

Również niezależnie od wybranej metody pomiaru można przeanalizować wymagania stawiane zwykle podzespołom mikrofalowego miernika wilgotności. Ogólny schemat układów pomiarowych służących do tego celu przedstawiono na rys. 15. Układ taki składa się z czterech funkcjonalnych podzespołów: generatora, czujnika, przetwornika i odbiornika i może służyć do realizacji wszystkich znanych w metrologii metod pomiaru, a mianowicie metod odchyłowych, różnicowych lub zerowych (kompensacyjnych).

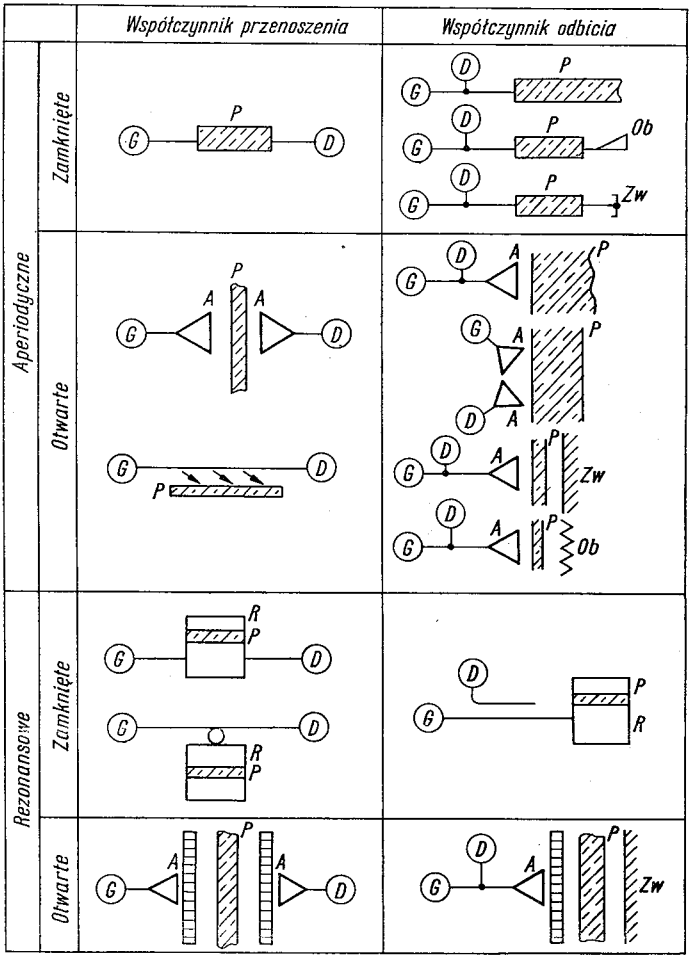


Rys. 15. Schemat blokowy mikrofalowego miernika wilgotności

W ogólnym schemacie pokazanym na rys. 15 generator oznacza układ wytwarzający sygnał elektryczny b. wielkiej częstotliwości, charakteryzujący się stałością w czasie i w funkcji zakłóceń zewnętrznych swoich parametrów, a mianowicie częstotliwość, amplituda i kształt generowanego przebiegu. Pojęciem generatora obejmuje się więc element wytwarzający drgania elektryczne wraz z dopasowanym układem separującym oraz stabilnymi układami zasilającymi i modulującymi. Mianem odbiornika określa się układ służący do wykrywania sygnału elektrycznego, zaopatrzony w tor przetwarzania sygnału oraz układ analogowego lub cyfrowego zobrazowania danych. Podstawową cechą odbiornika jest wierność przetwarzania, ograniczona zwykle przez zniekształcenia i bezwładność układów elektronicznych. Zależnie od realizowanej metody pomiaru różna może być fizyczna postać odbiornika, gdyż na przykład w metodzie zerowej pełni on rolę wskaźnika zaniku sygnału.

Mianem czujnika określa się układ służący do przetwarzania wielkości nieelektrycznej w wielkość elektryczną. Na skutek działania wody zawartej w substancji, zmiana właściwości substancji powoduje zmianę parametrów fali elektromagnetycznej. Każdej z metod

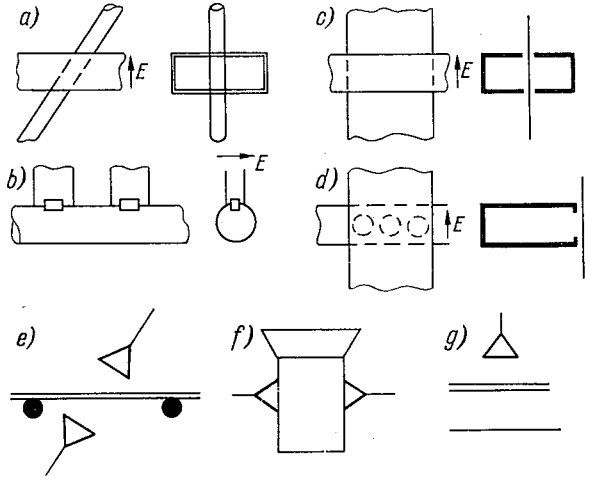
pomiaru wymienionych w p. 4 można przyporządkować pewną konfigurację czujnika, rozumiejąc przez to usytuowanie badanego materiału względem fali elektromagnetycznej i układ mikrofalowy do jego realizacji. Tak więc mikrofalowe czujniki pomiarowe pod względem charakteru występujących w nich zjawisk można podzielić na rezonansowe i aperiodyczne, a pod względem konstrukcji na zamknięte i otwarte, zaś w obu tych grupach można rozróżnić układy, w których informacje o stanie badanego materiału czerpie się z fali przechodzącej przez materiał lub z fali od niego odbitej, co może stanowić następne kryterium podziału na czujniki przesyłowe i odbiciowe.



Rys. 16. Zestawienie i klasyfikacja istniejących czujników mikrofalowych do pomiaru wilgotności

Na rys. 16 przedstawiono w schematycznej formie istniejące konfiguracje czujników mikrofalowych przeznaczonych do pomiaru wilgotności. Przykłady konkretnych rozwiązań pokazane zostały na rys. 17, gdzie czujniki a)÷d) są czujnikami zamkniętymi, aperiodycznymi i przesyłowymi, zaś czujniki e)÷g) są otwarte i aperiodyczne. Czujniki z rys. 17a i 17b służą do pomiaru zawartości wody w cieczach, czujniki c) i d) w cienkich warstwach,

takich jak papier czy tekstylia, czujniki e) i g) można wykorzystywać przy pomiarach płyt, zaś czujnik pokazany na rys. 17f umożliwia pomiar substancji przepływających w rurze dielektrycznej.

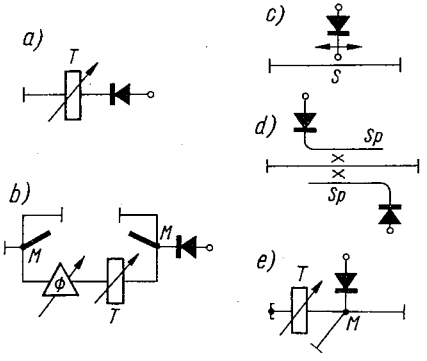


Rys. 17. Przykłady rozwiązań konstrukcyjnych czujników mikrofalowych przeznaczonych do ciągłych pomiarów wilgotności

Przetwornik w układzie pomiarowym jest przyrządem, podzespołem lub układem, przekształcającym jedną z doprowadzonych do niego wielkości elektrycznych na inną odpowiednią wielkość elektryczną. W mikrofalowym mierniku wilgotności przetwornik powoduje zmianę parametrów fali elektromagnetycznej na sygnał elektryczny napięcia lub prądu. Parametrami fali elektromagnetycznej, przechodzącej lub odbitej, które mogą zawierać informacje o stanie badanego materiału, są w zależności od wybranej metody pomiaru, konfiguracji czujnika itp.: dla fali ciągłej — amplituda fali, jej częstotliwość, faza i płaszczyzna polaryzacji lub prędkość rozchodzenia się, natomiast dla fali impulsowej dodatkowo jeszcze — długość impulsu, kształt i częstotliwość powtarzania lub jego widmo. W układzie pomiarowym pokazanym na rys. 15 przetwornikiem jest więc układ mikrofalowy, umożliwiający przetworzenie informacji zawartych na przykład w amplitudzie i fazie fali stojącej na sygnał elektryczny, którego amplituda jest proporcjonalna do wartości informacji zawartej w sygnale mikrofalowym.

Poszczególnym czujnikom przedstawionym schematycznie na rys. 16 można przyporządkować odpowiednie przetworniki mikrofalowe, zapewniające najbardziej skuteczny przebieg pomiaru, przy czym wybór czujnika determinuje w dużym stopniu rodzaj zastosowanego przetwornika. Czujnikom odbiciowym można przyporządkować grupę układów umożliwiających pomiar zespolonego współczynnika odbicia, do których należą: detektory fali stojącej, układy mostkowe i reflektometry. Czujniki przesyłowe współpracują z grupą przetworników przesyłowych, w skład której wchodzą głowice bolometryczne, głowice detekcyjne z diodami półprzewodnikowymi przy odchyłowej metodzie pomiaru, tłumik wzorcowy przy metodzie podstawienia oraz układ mostkowy przy zerowej metodzie pomiaru, a więc przyrządy i elementy umożliwiające określenie składowych zespolonego

współczynnika przenoszenia. Z czujnikami rezonansowymi współpracują przetworniki umożliwiające pomiar częstotliwości rezonansowej i dobroci rezonatora. Pośredni sposób pomiaru efektów zaburzania rezonatora (zamkniętego lub otwartego) przez badany materiał polega na określeniu zmian impedancji wejściowej rezonatora lub na określeniu zmian współczynnika przenoszenia energii przez rezonator, tak więc w wielu przypadkach do pomiaru efektów zaburzenia rezonatora wykorzystać można przetworniki podobne jak w przypadku czujników odbiciowych lub przesyłowych.

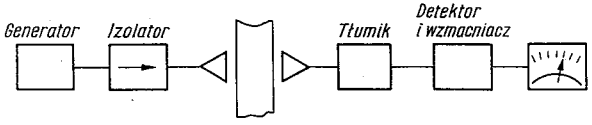


Rys. 18. Schematy ideowe przetworników mikrofalowych

Na rys. 18 przedstawiono schematy ideowe dwu omówionych powyżej grup przetworników mikrofalowych: konfiguracje a) i b) to przetworniki przesyłowe, układy c), d) i e) są przetwornikami odbiciowymi. Oznaczenia na rysunku: T — tłumik zmienny, M — rozgałęzienie hybrydowe, ϕ — przesuwnik fazy, s — sonda, sp — sprzęgacz kierunkowy.

6. MIKROFALOWE MIERNIKI WILGOTNOŚCI

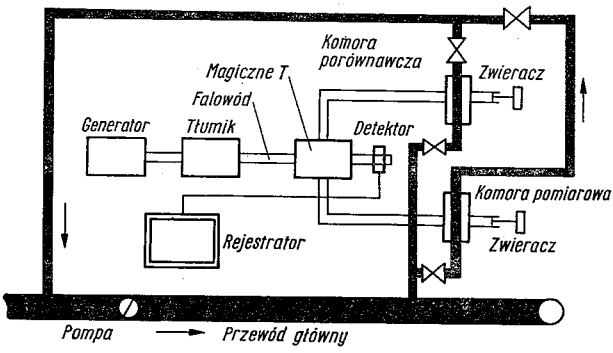
Na przykładzie istniejących i produkowanych obecnie na świecie mikrofalowych mierników wilgotności zilustrowane zostaną pewne tezy rozwinięte w poprzednich rozdziałach niniejszej pracy, jak również wykazane zostaną mankamenty i ograniczenia istniejących rozwiązań. Na rys. 19 przedstawiono schemat najprostszego ze znanych mierników, odchyłowy miernik firmy Tesla. Powiązane z wilgotnością materiału tłumienie fali elektro-



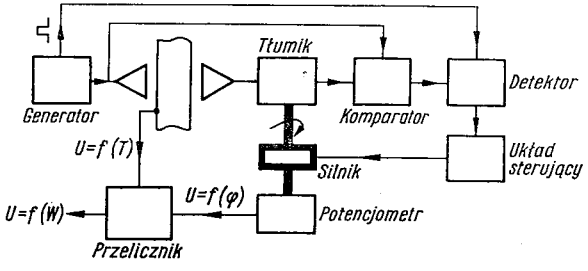
Rys. 19. Schemat blokowy miernika wilgotności firmy TESLA

magnetycznej jest mierzone metodą podstawienia tłumika mikrofalowego, co umożliwia wyeliminowanie charakterystyki diody detekcyjnej. Przyrząd o charakterze laboratoryjnym z niewielką możliwością wykorzystania przy przemysłowych pomiarach kontrolnych. Na rys. 20 przedstawiony jest układ mostkowy z zamkniętym czujnikiem odbiciowym

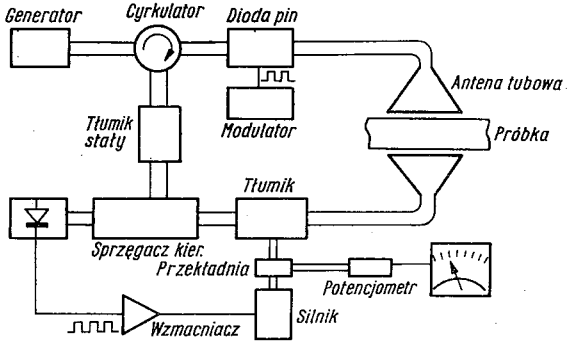
wykorzystywany przez firmę Philips do pomiaru zawartości wody w ropie naftowej. Pomiar polega na porównywaniu dwu sygnałów odbitych od próbki „wzorcowej" oraz badanej, a sygnał nierównowagi mostka mikrofalowego jest miarą odchyleń od wzorca o znanej zawartości wody.



Rys. 20. Schemat blokowy miernika firmy PHILIPS do pomiaru zawartości wody w ropie naftowej



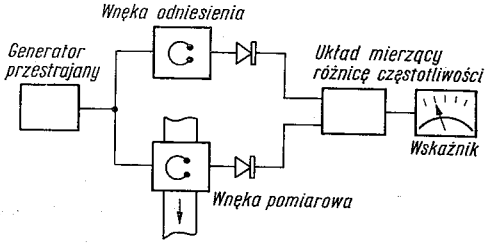
Rys. 21. Schemat blokowy miernika wilgotności firmy AEI (Anglia)



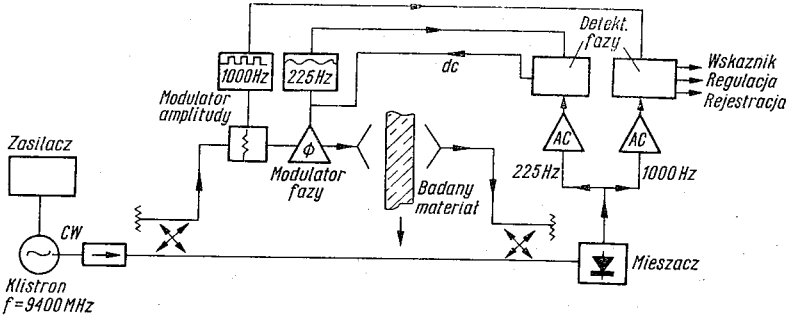
Rys. 22. Schemat blokowy miernika wilgotności firmy Microwave Instruments LTD. (Anglia)

Na rys. 21 pokazano schemat blokowy miernika wilgotności produkcji firmy AEI (Anglia) [3]. Pomiar odbywa się metodą podstawienia tłumika mikrofalowego przez automatyczną kompensację zmian tłumienia. Odczyt wilgotności oraz sygnał wyjściowy wykorzytywany do automatycznej regulacji procesu przemysłowego (nawilżania bądź suszenia), uwzględniają wprowadzoną automatycznie poprawkę na zmiany temperatury badanego materiału w czasie pomiaru.

Na rys. 22 przedstawiono układ porównujący z automatycznym przełącznikiem (400 Hz) produkcji firmy Microwave Instruments Ltd (Anglia) [4, 5]. Pomiar tłumienia odbywa się metodą kompensacyjną przez nastawianie tłumika dla uzyskania minimalnej różnicy tłumień w obu kanałach stwierdzanej przez zrównanie się dwu sygnałów na detektorze. Układ może współpracować z różnymi czujnikami i może być włączony w pętlę automatycznej regulacji.



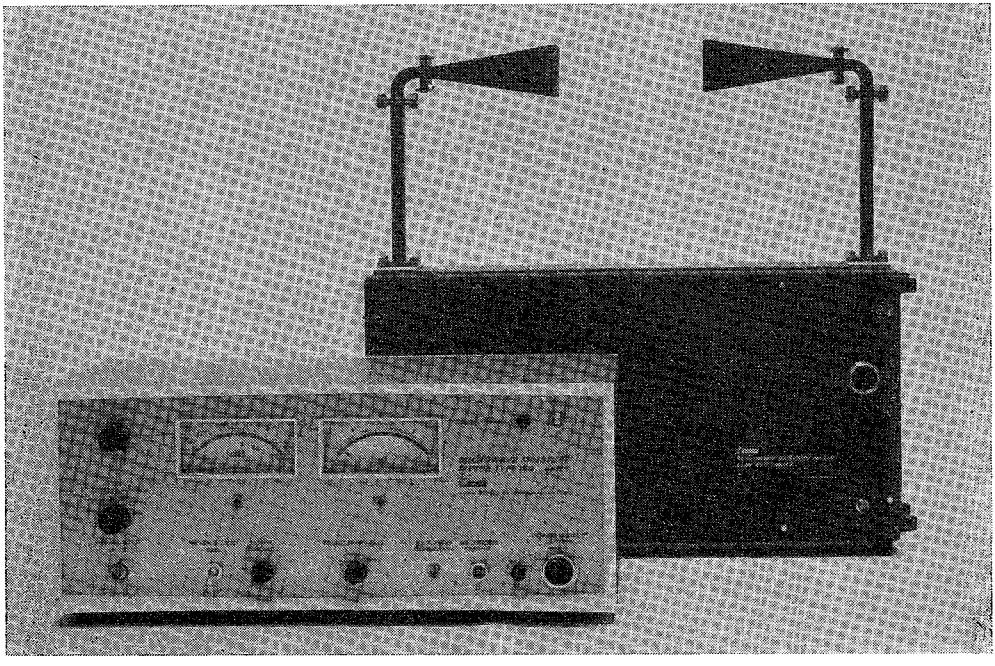
Rys. 23. Schemat blokowy szwedzkiego miernika do pomiaru wilgotności papieru



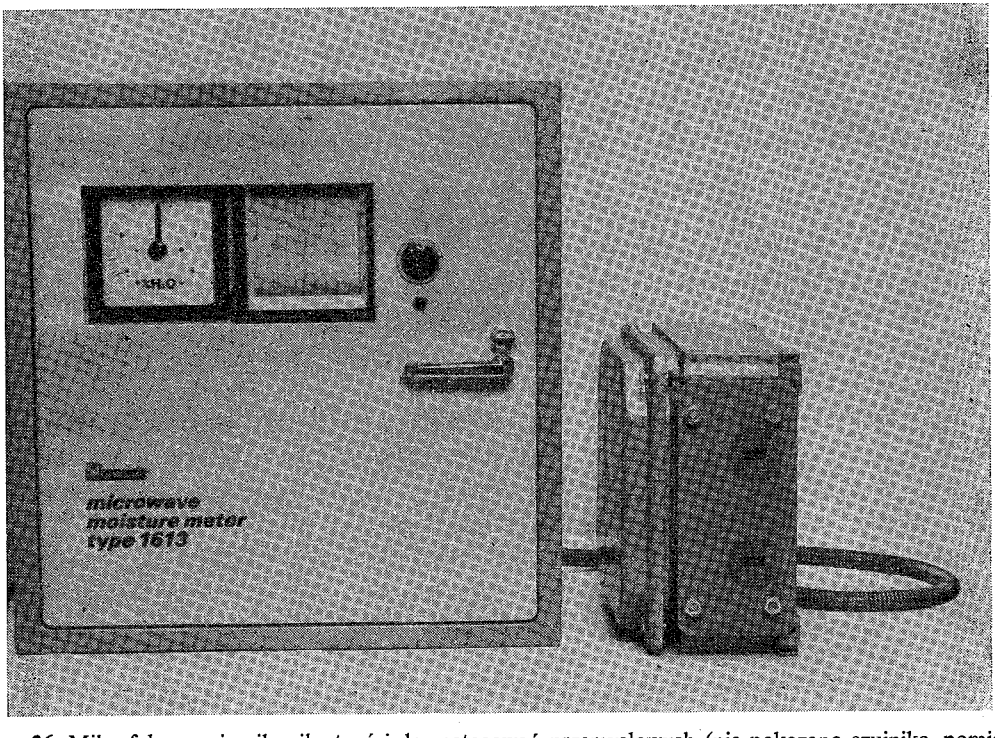
Rys. 24. Schemat blokowy mikrofalowego miernika wilgotności typ 161

Schemat jednego z nielicznych mierników wilgotności opartych o zamknięty czujnik rezonansowy przedstawiono na rys. 23. Układ ten opracowany i produkowany przez firmę Scanpro w Szwecji [12 ÷ 16] opiera się na pomiarze różnicy częstotliwości rezonansowych dwu rezonatorów, która jest miarą wilgotności badanego materiału, bez względu na zmiany tłumienia wprowadzanego do rezonatora.

Na rys. 24 przedstawiono schemat ideowy mikrofalowego miernika wilgotności WILMER typ 161 [19, 23, 25]. Miernik pracuje w układzie mostkowym z modulacją podnośnej [35] i automatycznym równoważeniem fazowym, przez co zapewnia dokładny pomiar tłumienia wprowadzanego przez badaną substancję. Miernik może pracować z różnymi czujnikami przesyłowymi; dzięki odpowiednim układom elektronicznym umożliwia odczyt mierzonej wielkości metodą odchyłową, sygnalizowania przekroczenia zadanych tolerancji wilgotności oraz regulację wilgotności w pętli automatycznej. Bliższe objaśnienie zasady działania miernika przedstawiono w Dodatku zamieszczonym na końcu pracy. Na rys. 25 pokazano wygląd zewnętrzny mikrofalowego miernika wilgotności typ 160, przeznaczonego do badań laboratoryjnych i pomiarów kontrolnych, natomiast na rys. 26 pokazano jeden z ostatnich mierników w wersji przemysłowej, przeznaczonych do automatycznej kontroli i regulacji



Rys. 25. Widok zewnętrzny laboratoryjnego mikrofalowego miernika wilgotności typ 160



Rys. 26. Mikrofalowy miernik wilgotności do zastosowań przemysłowych (nie pokazano czujnika pomiarowego)

wilgotności w procesach technologicznych. W zależności od zastosowania miernik wyposażony jest w różne czujniki (nie pokazane).

Ogólnie można stwierdzić, że większość produkowanych obecnie mierników przemysłowych wykorzystuje zależność tłumienia fali elektromagnetycznej od wilgotności badanej substancji. Powodem takiego stanu rzeczy jest niewątpliwie fakt, że pomiar tłumienia można przeprowadzić przy pomocy najprostszych i najtańszych układów pomiarowych o dużej niezawodności i prostocie obsługi. Tym niemniej, prowadzone są prace mające na celu znalezienie korelacji pomiędzy wilgotnością z wprowadzanym przesunięciem fazy fali przenoszonej, gdyż w układach takich kosztem rozbudowania może tkwić możliwość ograniczenia wielu czynników zakłócających pomiar tłumienia. Korzyści może dawać również jednoczesny pomiar amplitudy i fazy fali przenoszonej. Również w wielu przypadkach wiele korzyści mogą ofiarować metody rezonansowe.

Ilość materiałów przebadanych w warunkach laboratoryjnych, dla których określono krzywe wzorcowania, jest bardzo rozległa. Dla przykładu można wymienić: pszenica (ziarno), bawełna, marcepan, przędza nylonowa, glinka ogniotrwała [3], papier, masło, tkaniny [5] oraz materiały przedstawione na rys. 10 i 11 [22, 23]. W warunkach przemysłowych rozwiązano problem ciągłych pomiarów wilgotności dla wielu gałęzi ważnych z gospodarczego punktu widzenia. Przeprowadzono udane próby pomiaru wilgotności ropy naftowej, zboża w elewatorach, papieru, tektury, mydła, mas fornierskich, tkanin. W kraju mikrofalowe mierniki wilgotności zostały z powodzeniem wypróbowane przy pomiarach wilgotności płyt gipsowych [23], a prowadzone są prace wdrożeniowe przy zastosowaniu ich w pomiarach i automatycznej regulacji wilgotności margaryny, mieszanki wapienno-piaskowej używanej do produkcji cegieł silikatowych, piasku, szlamu i innych materiałów. Dokładności uzyskiwane przy pomocy mierników mikrofalowych w warunkach laboratoryjnych zawierają się w zakresie od $\pm 0{,}2$ do $0{,}5\%$ H_2O, zależnie od rodzaju materiału i zastosowanej aparatury pomiarowej, zaś w ciągłych pomiarach prowadzonych w warunkach przemysłowych w zakresie od $\pm 0{,}2$ do 1% H_2O w całym zakresie wilgotności interesującym z praktycznego punktu widzenia.

7. ZAKOŃCZENIE I WNIOSKI

Z przedstawionego przeglądu zagadnień związanych z pomiarami zawartości wody i wilgotności metodą mikrofalową wynika, że dzięki specyficznym właściwościom mikrofal metoda ta pozwala osiągnąć w ciężkich warunkach przemysłowych rezultaty trudne lub niemożliwe do osiągnięcia innymi metodami. Odnosi się to głównie do tych dziedzin przemysłu, w których warunkiem udanego pomiaru jest jego bezstykowość.

Oczywiście, nie można traktować metody mikrofalowej jako uniwersalnego środka na wszystkie trudności jakie występują w przemysłowych pomiarach wilgotności, gdyż w szeregu przypadków nie można jej wykorzystać, ale obszerna lista materiałów, dla których pomyślnie rozwiązano problem pomiarów ciągłych wskazuje, że można ją przyjąć jako cenne uzupełnienie arsenału metod już istniejących i szeroko wykorzystywanych.

Dalszy rozwój tej nowej dziedziny miernictwa mikrofalowego uzależniony jest w dużej mierze od postępu w badaniach właściwości fizycznych mieszanin, mających na celu

teoretyczne wyznaczanie zależności mieszaniny od ilości zawartej w niej wody, oraz w badaniach tychże właściwości w funkcji częstotliwości, które mogą doprowadzić do zrealizowania jednoczesnego pomiaru wilgotności i gęstości materiału przy różnych częstotliwościach, a także mogą się przyczynić do bardziej racjonalnego wyboru częstotliwości pracy mierników niż obecnie. W zakresie opracowywania układów pomiarowych konieczne jest prowadzenie badań nad syntezą optymalnych rozwiązań pod kątem ich niezawodnej pracy w układach automatycznej regulacji, badań nad określeniem przydatności metod odbiciowych, układów rezonansowych itp. Do ważnych zadań należy również sprecyzowanie grupy materiałów, których pomiar metodą mikrofalową jest najbardziej atrakcyjny oraz rozpropagowanie nowej metody w odpowiednich gałęziach przemysłu.

Dodatek

ZASADA DZIAŁANIA MIKROFALOWEGO UKŁADU Z MODULACJĄ W KANALE POD-NOŚNEJ DO POMIARU WILGOTNOŚCI

W układzie pokazanym schematycznie na rys. 24, który stanowi uproszczony schemat ideowy mikrofalowego miernika wilgotności, można łatwo wyróżnić dwa kanały: kanał niemodulowanego sygnału w.cz. — przez analogię z układem pośredniej częstotliwości zwany kanałem nośnej, oraz kanał zawierający badaną próbkę oraz mikrofalowy modulator amplitudy — tzw. kanał podnośnej (z ang. Subcarrier), przenoszący niewielką część mocy generowanej przez źródło w.cz. Jeżeli częstotliwość źródła w.cz. wynosi Ω, modulator zasilany jest napięciem o częstotliwości ω (najczęściej leżącej w pasmie akustycznym), a uzyskiwana głębokość modulacji scharakteryzowana jest współczynnikiem m, wtedy do detektora dochodzą dwie fale:

$$\text{fala ciągła } e_1 = E_1 \cos(\Omega t + \Phi) \tag{1}$$

oraz

$$\text{fala modulowana } e_2 = E_2 \cos(\Omega t + \Theta)\,[1 + m\cos\omega t], \tag{2}$$

gdzie Θ i Φ są przesunięciami fazowymi, jakim podlegają fale w obu kanałach.

Bez względu na impedancję wejściową i wyjściową, współczynnik szumów i czułość, charakterystykę przenoszenia detektora można zapisać w postaci

$$i_{wyj} = a_0 + a_1 e_{wyj} + a_2 e_{wyj}^2 + a_3 e_{wyj}^3 + \ldots + a_n e_{wyj}^n, \tag{3}$$

gdzie $e_{wyj} = e_1 \pm e_2$.

Gdy równ. (1) i (2) wprowadzi się do równ. (3), łatwo można wykazać, że wszystkie wyrazy o nieparzystych potęgach powodują powstawanie składowych o częstotliwości Ω, $\Omega \pm \omega$, $\Omega \pm 2\omega$ itd.

Jeżeli przyjąć, że selektywny wzmacniacz akustyczny nie przenosi sygnałów o częstotliwościach różnych od ω, wtedy interesujące są tylko wyrazy o potęgach parzystych. Po znalezieniu kwadratu e_{wej} i wyeliminowaniu wyrazów zawierających harmoniczne ω, otrzymuje się:

$$e_{wej}^2 \cong \frac{1}{2}(E_1^2 + E_2^2) + E_2^2\left(\frac{m^2}{4} + m\cos\omega t\right) + E_1 E_2 \cos(\Theta - \Phi)\cdot[1 + m\cos\omega t]. \tag{4}$$

Pierwsze trzy wyrazy odnoszą się do napięcia stałego i nie są istotne z punktu widzenia analizy pracy układu poza wytwarzaniem napięcia polaryzującego diodę.

Jeżeli E_1 jest dostatecznie duże, aby można było przyjąć, że $E_1 \gg E_2$, wtedy równ. (4) upraszcza się do postaci:

$$e_{wyj}^2 \cong \frac{E_1^2}{2} + m[E_2^2 \pm E_1 E_2 \cos(\Theta - \Phi)]\cos\omega t. \tag{5}$$

Z równ. (5) wynika, że sygnał na wyjściu detektora jest wprost proporcjonalny do wartości amplitud E_1, E_2, głębokości modulacji m oraz różnicy przesunięć fazy fal w obu kanałach. Jeżeli wartości E_1 i m są stałe,

układ umożliwia pomiar E_2 oraz $(\Theta-\Phi)$, a więc tłumienia i przesunięcia fazy wprowadzanego przez próbkę umieszczoną w kanale podnośnej.

Przy założeniu, że $E_1 \gg E_2$, parzyste potęgi w równ. (3) dają w efekcie napięcia

$$e_{wyj}^4 \cong \frac{3}{8} E_1^2 \left(E_1^2 + 4E_1E_2\, m \cos(\Theta-\Phi)\cos\omega t\right), \tag{6}$$

$$e_{wyj}^6 \cong \frac{5}{16} E_1^4 \left(E_1^2 + 6E_1E_2\, m \cos(\Theta-\Phi)\cos\omega t\right) \quad \text{itd.} \tag{7}$$

Wynika stąd, że spolaryzowanie diody zależy głównie od amplitudy fali nośnej E_1, która powinna być stała. Zdemodulowany sygnał o częstotliwości akustycznej przenosi informacje o tłumieniu i przesunięciu fazy badanej próbki, które można łatwo rozdzielić przez odpowiednie nastawienie przesuwnika fazy w kanale podnośnej. Maksimum sygnału na wyjściu detektora uzyskuje się, gdy w równ. (5) wprowadzi się $\Theta-\Phi = n\pi$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

Przy poprzednich założeniach sygnał wyjściowy jest wtedy wprost proporcjonalny do amplitudy E_2, która jest miarą tłumienia wprowadzanego przez próbkę. Jeżeli wprowadzić sprzężenie zwrotne pomiędzy wyjściem selektywnego wzmacniacza akustycznego a przesuwnikiem fazy, można uzyskać automatyczne dostrojenie układu na maksimum wskazań, a więc ciągły pomiar tłumienia niezależnie od zmian przesunięcia fazy wprowadzanego przez próbkę [25]. Rozwiązanie takie narzuca jednak b. ostre wymagania na przesuwnik fazy. Zmiany tłumienia przesuwnika są bowiem odbierane przez układ jako zmiany E_2, a więc tłumienia próbki, podobnie jak zmiany dopasowania powstałe przy zmianie przesunięcia fazy.

W przypadku pomiaru przesunięcia fazy wprowadzanego przez próbkę, najdokładniejszy wynik uzyskuje się zestrajając układ przesuwnikiem na minimum sygnału na wyjściu. Faza nośnej względem podnośnej wynosi wtedy $\Theta = \Phi \pm (\pi - \Delta\Phi)$. Kąt $\Delta\Phi$ jest zawsze mniejszy od 90° i jest funkcją stosunku amplitud fal w obu kanałach E_2/E_1, a z równ. (5) widać, że aby $e_{wej}^2 = 0$, musi być spełniony warunek:

$$\cos(\Theta-\Phi) = E_2/E_1. \tag{8}$$

Jeżeli stosunek amplitud jest równy 20 dB, wtedy kąt $\Delta\Phi$ jest o 5,7° mniejszy od 90°, przy 40 dB różnica ta maleje do 0,57°. Jednak w czasie normalnych pomiarów trudno jest określać każdorazowo stosunek E_2/E_1 i dlatego dla uzyskania dokładnego wyniku pomiaru przesunięcia faz konieczne jest powtórzenie pomiaru dla sąsiedniego minimum według procedury przytoczonej w oryginalnej pracy Schafera [34].

Zakres pomiarów tłumienia ograniczony jest z jednej strony szumami układu, z drugiej zaś dopuszczalnymi odchyleniami od liniowości detekcji, podobnie jak w układach pośredniej częstotliwości. Odchylenie 0,01 dB występuje przy stosunku amplitud E_2/E_1 równym -23 dB, zaś przy 0 dB nie przekracza 0,5 dB. Szumy małej częstotliwości są duże, co wynika z przykładania znacznego sygnału niemodulowanego na diodę. W celu zwiększania czułości układu należy stosować wyższe częstotliwości modulacji oraz zawężać szerokość pasma wzmacniacza. Łatwo jednak uzyskać można dynamiczny zakres jednoczesnego pomiaru fazy i amplitudy 50 dB lub więcej.

Głębokość modulacji nie powinna być mniejsza od 30%. Ponieważ jednak sygnał wyjściowy proporcjonalny jest do m, można wykorzystywać modulację 100% lub przemodulowanie. Napięcie modulujące może mieć również postać fali kwadratowej o współczynniku wypełnienia 0,5. Jednak wtedy, ponieważ za detektorem zawsze znajduje się selektywny wzmacniacz, falę kwadratową należy rozłożyć na składowe Fouriera i rozważać wpływ tylko składowych o częstotliwości podstawowej.

Ze względu na liniowy charakter detekcji, działanie układu nie zależy od charakterystyki detektora. Zmiana rezystancji obciążenia od 100 do 5000 Ω powoduje odchylenia od liniowości nie większe od 0,03 dB [35].

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. E. Niedzwieckij, Primieninie santimetrowych wołn dla izmierenija i awtomaticzeskowo kontrola włażnosti, Prim. tokow w.cz., str. 347—355, Riga 1957.
2. A. Watson, Improvements in and Relating to the Determination of Moisture Content, Brit. Pat. 897. 956, 22. 3. 1957.

3. H. B. Taylor, Microwave Moisture Measurements, Industr. Electronic, t. 3, Nr 2, str. 66—70, luty 1965.
4. S. Summerhill, Microwaves in the Measurement of Moisture, Instrum. Review, t. 14, Nr 190, str. 419—422, październik 1967.
5. T. Bailie, On-Line Measurement of Cloth Regain Using X-Band Microwaves, Measurement and Control, t. 1, Nr 2, str. 52—54, 1968.
6. M. A. Berliner, W. A., Ivanov, Charakteristiki włagomierow swierchwysokich czastot, Prib. i sistemy uprawlenja, Nr 3, str. 14—16, 1967.
7. M. A. Berliner, W. A. Ivanov, B. A. Kolokov, Izmierenje włażnosti betona i komponentow włagomierom sw. cz., Beton i Żelazobeton, Nr 2, str. 41—43, 1969.
8. M. A. Berliner, B. N. Lelanow, W. A. Iwanov, Kontrol na swierchwysokich czastotach rozpredelenija wody w dispersnych sistemach i niekatorych drugich parametrow materiałow, Izwiestia Wuzow, Priborostrojenie, Nr 2, str. 162—168, 1969.
9. S. I. Gołota, Swierchwysokoczastotnyj pribor kontrola włażnosti, Prib, i sistemy uprawlenja, Nr 1, str. 15—18, 1967.
10. R. A. Berenzweig, Izmierenja włażnosti azbestocementa pri swierchwysokich czastotach, Izmierit. Technika, Nr 12, str. 50, 1967.
11. W. K. Benzar, Swcz włagomier dla izmierenija włażnosti twjordych i sypuczich materiałow, Izmierit. Technika, Nr 3, str. 87, 1971.
12. N. B. Agdur, A Microwave Moisture Meter, Acta IMEKO 1967, str. 411.
13. N. B. Agdur, Vorrichtung zum Messen von Materialeigenschaften, Pat. Szwajc. 430.281, 29.5.1964.
14. K. Lindberg, U. Ternström, Microwave Mosture Meters for the Paper and Pulp Industry, Symp. on Moisture Measurement and Control, Maidstone, Anglia, wrzesień 1969.
15. K. Johansson, P. O. Lindby, Moisture Measurement on Board Using Microwaves, tamże.
16. K. Lindberg, Microwave Moisture Measurements in the Industry by Cavity Resonator Technique, European Microwave Conf., Stockholm, sierpień 1971.
17. C. E. Walker, Instrument for Measuring Moisture Content and the Like, US Patent 3.255.408, 25.2.1963.
18. H. Mahlo, Vorrichtung zur berührungslossen Messung hoher Feuchtigkeit von Warenbauen, BRD Patent 1.231.464, 8.1.1964.
19. S. Stuchły, A. Kraszewski, Sposób pomiaru zawartości wody w ciałach stałych i cieczach oraz układ do stosowania tego sposobu, Patent PRL 51.731, 3.2.1965.
20. S. Stuchły, A. Kraszewski, Pomiar wilgotności ciał stałych i cieczy metodą mikrofalową, PAK, t. 12, Nr 2, str. 51, Nr 4, str. 112, 1966.
21. S. Stuchły, A. Kraszewski, Microwave Methods for Measuring Nonelectrical Quantities, IMEKO Symp. on Microwave Measurements, Budapest, 1966.
22. S. Stuchły, A. Kraszewski, M. Rzepecka, Microwaves for Continuous Control of the Industrial Processes, Microwave Journal, t. 12, Nr 8, str. 51—57, 1969.
23. A. Kraszewski, Microwave Equipment for Industrial Moisture Measurement and Control, Acta IMEKO 1970, także PAK, t. 16, Nr 6, 252, 1970.
24. A. Kraszewski, Determination of Water Content in Biphase Amorphous Mixtures by Microwave Method, European Microwave Conf., Stockholm, sierpień 1971.
25. S. Stuchły, J. Kaliński, Sposób automatycznej regulacji kąta przesunięcia fazowego między sygnałami mikrofalowymi w kanałach nośnej i podnośnej oraz układ do realizacji tego sposobu, Patent PRL Nr 61.427, 29, 7.1968.
26. A. R. von Hippel, Dielektryki i fale, PWN, Warszawa 1963.
27. W. R. Tinga, Multiphase Dielectric Theory Applied to Cellulose Mixtures, Ph.D. Thesis, University of Alberta, Canada, 1969.
28. J. B. Hasted, Dielectric Properties of Water, Progress in Dielectrics, t. 3, London 1961.
29. G. Cortucci, G. Franceschetti, Time Domain Techniques for Measuring the Frequency Spectrum of Materials, Symp. Internatl. Microwave Power Institute, Scheveningen, Holandia, październik 1970.
30. A. F. Harvey, Microwave Engineering, Academic Press, London 1963.

31. A. A. Brandt, Issledowanie dielektrikow na swierchwysokich czastotach, Fizmatizdat, Moskwa 1963.
32. M. A. Berliner, Ocenka pogreszności elektriczeskich włagomierow, Izmierit. Technika, Nr 4, 1969.
33. W. A. Ivanov, Ocenka pogreszności s.wcz. włagomierow, Izmierit. Technika, Nr 7, s. 62, 1970.
34. G. E. Shafer, A Modulated Subcarrier Technique of Measuring Microwave Phase Shifts, IRE Trans. on Instrum., t. I—9, str. 217—219, wrzesień 1960.
35. G. E. Shafer, R. R. Bowman, A Modulated Subcarrier Technique of Measuring Microwave Attenuation, Proc. IEE (London), t. 109B, suppl. 23, str. 783—786, maj 1962.

A. KRASZEWSKI

MEASUREMENT OF WATER CONTENT BY MICROWAVE METHOD

Summary

The whole of the problems connected with water content measurement in dry substances by using microwave method are presented. The general measuring microwave circuit is considered and requirements as to particular subassemblies (generator, sensor, transducer, detector) are stated. Proposals on the circuits ordination, as well as classification of the microwave sensors are given. A wide review of microwave methods and meters produced and used in the world is presented, results obtained and further develpoments possibilities are discussed.

A. KRASZEWSKI

FEUCHTIGKEITSMESSUNG MITTELS MIKROWELLENMETHODE

Zusammenfassung

Es wurde hier das mit Wassergehaltmessungen in trockenen Substanzen mittels Mikrowellenmethode zusammenhängende Problem einheitlich dargestellt. Das allgemeine Schema des Mikrowellenmeßsystems wurde analysiert, und Wahlkriterien für einzelne Untergruppen bestimmt. Ferner ist der Versuch gemacht worden, diese Anordnungen zu systematisieren und die Meßfühler zu klassifiziern. Eine Übersicht von Schemen und Konstruktionen der zurzeit in der Welt bestehenden Mikrowellenfeuchtigkeitsmesser wurde vorgenommen; die erhaltenen Ergebnisse sowie Zukunftsperspektiven auf diesem Gebiet wurden dargestellt.

А. КРАШЕВСКИ

ИЗМЕРЕНИЕ ВЛАЖНОСТИ НА СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТАХ

Резюме

Представлена совокупность вопросов связанных с измерением микроволновым методом содержания воды в сухих субстанциях. Рассмотрена общая схема микроволновой измерительной схемы и определены критерии избрания отдельных элементов схемы. Представлена попытка систематизации этих схем и классификации измерительных датчиков. Приведен обзор схем и конструкций существующих в мире микроволновых измерителей влажности, представлены полученные результаты и перспективы развития этой области измерительной техники.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1973, 19, z. 1, ss. 165-177

621.372.821

Wyznaczanie pojemności niesymetrycznych linii paskowych metodą elektroanalogii

IRENA KUZORA (RZESZÓW), JERZY BAJOREK (RZESZÓW)

Zespół Elektrotechniki Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Rzeszowie

Otrzymano 14.12.1971

Metoda elektroanalogii w zastosowaniu do badania elektrostatycznych pól płaskorównoległych pozwala na ekonomiczne i szybkie wyznaczenie pojemności między dowolnymi układami przewodów. Metoda jest wystarczająco dokładna dla wstępnego projektowania niesymetrycznych linii paskowych (NLP).

W pracy podano technikę budowania modeli elektrycznych z papierów przewodzących typu Teledeltos i Safir.

Powiązanie pojemności NLP z wielkościami mierzonymi na modelu elektrycznym wynika z analizy wymiarowej problemu. Zakładając warunek $\partial\varphi/\partial n = 0$ na granicy warstw o różnej przenikalności dielektrycznej oraz analizując związany z tym niewielki błąd metody, pojemność linii w ośrodku niejednorodnym wyznaczono jako superpozycję pojemności mierzonych dla poszczególnych dielektryków.

W pracy podano przykładowe wyniki pomiarów pojemności dla ekranowanej NLP. Wyniki dla NLP bez ekranu porównano z wynikami analitycznymi.

1. WSTĘP

Większość równań różniczkowych cząstkowych, o złożonych warunkach brzegowych rozwiązuje się w chwili obecnej metodami przybliżonymi przyjmując różne założenia upraszczające. Wśród metod analogowych stosowanych do rozwiązywania tych równań można wyróżnić modelowanie elektryczne jako metodę ekonomiczną i szybką przy badaniu pewnej grupy zagadnień opisywanych równaniem Laplace'a. Są to na przykład stacjonarne procesy rozchodzenia się ciepła, rozpływ prądu elektrycznego w ośrodkach przewodzących, laminarny ruch cieczy idealnej, czy rozkład potencjału wokół kondensatorów, uziemień itp.

Matematyczne rozwiązanie równania różniczkowego nie wymaga sensu fizycznego dla opisywanej równaniem funkcji. Jeżeli opiszemy interesujące nas zagadnienie równaniem różniczkowym o parametrach bezwymiarowych i zbudujemy model elektryczny, w którym bezwymiarowa funkcja potencjału spełnia to samo równanie, to rozwiązanie problemu sprowadza się do pomiaru wielkości elektrycznych w modelu i odpowiednim przeliczeniu ich na wielkości lub parametry obiektu badanego [7].

Jednym z problemów, który można rozwiązać techniką modelowania na papierze elektroprzewodzącym jest analiza prowadnic falowych przy założeniu rodzaju pola TEM,

w szczególności wstępne projektowanie sprzężonych, ekranowanych, niesymetrycznych linii paskowych (NLP) stosowanych w technice mikrofalowej do budowy sprzęgaczy kierunkowych.

Przy założeniu propagacji fali TEM w NLP, prędkość propagacji wyraża się wzorem [3]

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{ef}}}, \tag{1}$$

a impedancja charakterystyczna wzorem

$$Z_o = \frac{1}{v \cdot C}, \tag{2}$$

gdzie:

$\varepsilon_{ef} = C/C_o$ jest efektywną przenikalnością dielektryczną związaną z zastosowaniem w linii dielektryka niejednorodnego,

c jest prędkością światła w próżni,

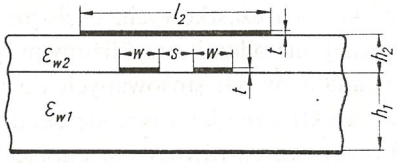
C jest elektrostatyczną pojemnością linii z dielektrykiem niejednorodnym,

C_o jest pojemnością analogicznego układu elektrod w powietrzu.

Z podanych zależności wynika, że wyznaczanie prędkości propagacji i impedancji charakterystycznej można sprowadzić w omawianym przypadku do wyznaczania pojemności C i C_o dla danego układu elektrod. Przedmiotem niniejszej pracy jest analiza ekranowanych, niesymetrycznych linii paskowych, a w szczególności zbadanie zależności C i C_o od parametrów NLP.

Przekrój badanej ekranowanej NLP jest przedstawiony na rys. 1.

Zakładając, że pole wokół układu elektrod ekranowanej NLP jest opisane dwuwymiarowym równaniem Laplace'a, co zachodzi w przybliżeniu dla częstotliwości do około 4 GHz [8], możemy w prosty sposób odwzorować je powierzchniowym polem przepły-



Rys. 1. Oznaczenia wymiarów badanych NLP

w — szerokość pasków, t — grubość pasków i ekranu, s — odległość między paskami, l_2 — szerokość ekranu, h_1 — grubość ceramiki o $\varepsilon_{w1} = 9{,}5$, h_2 — grubość ceramiki o $\varepsilon_{w2} = 6$

wowym. Zastosowanie metody modelowania pozwala w tym przypadku na szybkie wyznaczenie linii ekwipotencjalnych, linii natężenia pola, pojemności międzyelektrodowych przy dowolnym kształcie i liczbie pasków umieszczonych w powietrzu lub na dowolnie ukształtowanym podłożu ceramicznym. Analityczne rozwiązanie problemu jest nie tylko pracochłonne, ale możliwe w chwili obecnej tylko przy pewnych założeniach upraszczających dotyczących kształtu podłoża ceramicznego, czy wymiarów pasków, jak na przykład założenie zerowej ich grubości.

Modele opisane w pracy zbudowano w oparciu o papier elektroprzewodzący typu Safir i Teledeltos. Elektrody wykonano z folii miedzianej, a użyty w budowie modelu klej elektroprzewodzący przygotowano według specjalnej receptury.

2. WYZNACZANIE POJEMNOŚCI UKŁADU ELEKTROD NLP

Badanie rozkładu potencjału w polu przepływowym modelu ułatwia kontrolę poprawności jego budowy. Pomiary wielkości elektrycznych w modelu NLP pozwalają na wyznaczenie jej pojemności. Powiązanie parametrów pola elektrostatycznego i przepływowego wynika z analizy wymiarowej.

Zakładając, że płaskorównoległe pole elektrostatyczne spełnia wokół elektrod jak na rys. 1 równanie Laplace'a [5]

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_e^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y_e^2} = 0 \tag{3}$$

z warunkiem na powierzchni elektrody

$$\oint_{S_e} \overrightarrow{\operatorname{grad} V} \cdot \overrightarrow{dS_e} = -\frac{Q}{\varepsilon} \tag{4}$$

i w dostatecznie dużej odległości od układu elektrod

$$\lim_{x_e^2 + y_e^2 \to \infty} V = 0, \tag{5}$$

gdzie:

V — potencjał pola elektrostatycznego,
Q — ładunek zgromadzony na elektrodzie,
ε — przenikalność dielektryczna ośrodka,
x_e, y_e, z_e — współrzędne w polu elektrostatycznym,
S_e — powierzchnia elektrody w polu elektrostatycznym,
$\overrightarrow{dS_e}$ — element powierzchni w polu elektrostatycznym, zorientowany normalnie do powierzchni S_e,

można układ tych równań przekształcić do postaci uogólnionej wprowadzając zmienne bezwymiarowe V_1, ξ, η, σ oraz V_0, e jako wartości jednostkowe nieznanych na razie wielkości określonych w polu elektrostatycznym tak, aby zachodziły związki:

$$\begin{aligned} V &= V_o \cdot V_1, \\ x_e &= e \cdot \xi, \\ y_e &= e \cdot \eta, \\ z_e &= e \cdot \sigma, \\ \overrightarrow{dS_e} &= e^2 \cdot \overrightarrow{dS}, \end{aligned} \tag{6}$$

gdzie $\overrightarrow{dS}$ jest bezwymiarowym elementem powierzchni.

Określamy również Q_1 takie, że:

$$Q = Q_o Q_1, \tag{7}$$

gdzie:

Q_0 — jednostkowa wartość ładunku,

Q_1 — bezwymiarowy ładunek.

Wprowadzenie bezwymiarowych wielkości do równań (3), (4), (5) przekształca je w

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial \eta^2} = 0, \tag{8}$$

$$\oint_S \overrightarrow{\operatorname{grad} V_1} \cdot \overrightarrow{dS} = -\frac{Q_o Q_1}{\varepsilon \cdot V_o \cdot e}, \tag{9}$$

$$\lim_{\xi^2+\eta^2 \to \infty} V_1 = 0. \tag{10}$$

Dla rozważanego pola płaskorównoległego możemy wprowadzić

$$\overrightarrow{dS} = \sigma \cdot \overrightarrow{dl}, \tag{11}$$

a przy założeniu jednostkowej długości elektrod

$$\overrightarrow{dS} = \overrightarrow{dl}, \tag{12}$$

gdzie $\overrightarrow{dl}$ jest bezwymiarowym elementem długości zorientowanym normalnie do powierzchni S.

Oznaczając

$$A = -\frac{Q_o}{\varepsilon \cdot V_o \cdot e}, \tag{13}$$

możemy (9) napisać w postaci

$$\oint_l \overrightarrow{\operatorname{grad} V_1} \cdot \overrightarrow{dl} = A \cdot Q_1, \tag{14}$$

gdzie l jest konturem przekroju elektrody.

Podobnie prądowe pole przepływowe w dwuwymiarowym modelu NLP opisuje równanie

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_p^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_p^2} = 0 \tag{15}$$

z warunkiem na brzegu elektrody

$$\oint_{l_p} \overrightarrow{\operatorname{grad} \varphi} \, \overrightarrow{dl_p} = -WI \tag{16}$$

i w dostatecznie dużej odległości od elektrod

$$\lim_{x_p^2+y_p^2 \to \infty} \varphi = 0, \tag{17}$$

gdzie:

φ — potencjał pola przepływowego,

I — natężenie prądu dopływającego do elektrody,

W — rezystywność modelu,

x_p, y_p — współrzędne punktu modelu,

l_p — kontur elektrody w polu przepływowym,

$\overrightarrow{dl_p}$ — element długości w polu przepływowym, zorientowany normalnie do konturu elektrody.

Podobnie jak poprzednio można wprowadzić zmienne bezwymiarowe tak, aby zachodziły związki:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 \varphi_1, \\ x_p &= p\xi, \\ y_p &= p\eta, \\ \vec{dl}_p &= p\vec{dl}, \end{aligned} \tag{18}$$

gdzie: φ_1, $\vec{dl}$ są wielkościami bezwymiarowymi, a φ_0, p wartościami jednostkowymi wielkości określonych w polu przepływowym.

Także

$$I = I_0 I_1, \tag{19}$$

gdzie: I_0 jest jednostkową wartością natężenia prądu, a I_1 bezwymiarowym natężeniem prądu.

Zależności (15), (16), (17) można teraz napisać w postaci

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} = 0, \tag{20}$$

$$\oint_l \overrightarrow{\operatorname{grad} \varphi_1} \vec{dl} = -\frac{W I_0 I_1}{\varphi_0}, \tag{21}$$

$$\lim_{\xi^2+\eta^2 \to \infty} \varphi_1 = 0. \tag{22}$$

Określając

$$B = -W \frac{I_0}{\varphi_0}, \tag{23}$$

możemy (21) napisać w postaci

$$\oint_l \overrightarrow{\operatorname{grad} \varphi_1} \vec{dl} = B I_1. \tag{24}$$

Porównując uogólnione równania dla obu pól można stwierdzić, że:

1. bezwymiarowemu potencjałowi pola elektrostatycznego V_1 odpowiada bezwymiarowy potencjał pola przepływowego φ_1,
2. bezwymiarowemu ładunkowi Q_1 odpowiada bezwymiarowe natężenie prądu I_1.

Jeżeli założymy proporcjonalność wielkości bezwymiarowych

$$\begin{aligned} V_1 &= k\varphi_1, \\ Q_1 &= kI_1, \end{aligned} \tag{25}$$

to z (14) i (24) wynika, że $A = B$, czyli

$$\frac{Q_0}{\varepsilon \cdot V_0 \cdot e} = \frac{W I_0}{\varphi_0}; \tag{26}$$

$Q_0/V_0 \cdot e = C_0$ jest pojemnością przypadającą na jednostkę długości układu elektrod, a $I_0/\varphi_0 = G_0$ jest jednostką konduktancji.

Ponieważ założona została proporcjonalność wielkości bezwymiarowych, to z (26) wynika, że

$$C = W \cdot \varepsilon \cdot G. \tag{27}$$

Otrzymana zależność pozwala na obliczenie pojemności przypadającej na jednostkę długości NLP, jeżeli dana jest przenikalność dielektryczna ośrodka, w którym znajduje się linia, rezystywność modelu oraz jego konduktancja.

3. DWUWYMIAROWY MODEL NLP

Zwykły suchy papier jest, jak wiadomo, dobrym izolatorem. Jeżeli do masy papierowej wprowadzimy sadzę lub proszek grafitowy, to otrzymamy papier przewodzący prąd elektryczny. Powierzchnię takiego papieru pokrywa się zwykle z jednej strony lakierem, a z drugiej farbą aluminiową, co wzmacnia papier i zmniejsza wpływ warunków zewnętrznych na jego rezystywność. W technice modelowania najczęściej używane są papiery o rezystywności rzędu kilku kiloomów na kwadrat powierzchni papieru.

Modele badane w pracy wykonane były z papierów typu Teledeltos i Safir charakteryzujących się stosunkowo wysoką jednorodnością. Papiery te są w niewielkim stopniu czułe na zmiany temperatury, ale rezystywność papieru zmienia się w dużych granicach przy zmianie jego wilgotności.

Dostateczny kontakt między warstwami papieru, lub papierem a elektrodami z folii miedzianej zapewnia klej elektroprzewodzący. W pracy stosowano klej sporządzony według następującej receptury:

klej BWF/41	10 g,
sadza P-1250	0,25 g,
alkohol etylowy	3 g.

Klej ten zapewnia dobry kontakt, wytrzymałość mechaniczną, elastyczność i ścisłe przyleganie klejonych elementów.

Model wykonany z papieru elektroprzewodzącego odpowiada ściśle przekrojowi badanej NLP (rys. 1). Jak wynika z analizy wymiarowej, dielektrykowi o przenikalności dielektrycznej ε w rzeczywistej linii odpowiada w modelu warstwa przewodząca o konduktywności γ. Linii z dielektrykiem niejednorodnym odpowiada model z niejednorodnym papierem. Żądaną niejednorodność uzyskuje się przez sklejenie kilku warstw papieru. Ponieważ dla celów analizy wprowadza się pojęcie pobudzenia linii dwupaskowej w fazie i w przeciwfazie, w pracy przeprowadzono pomiary pojemności dla obu rodzajów pobudzeń zasilając odpowiednio elektrody modelu.

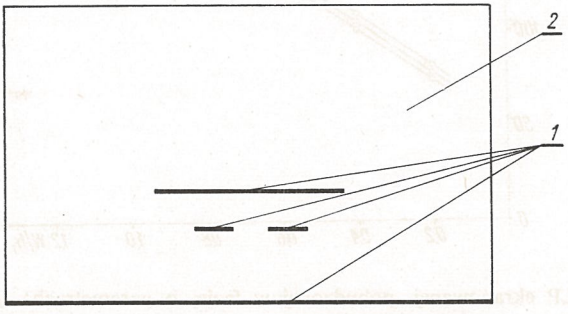
Tak wykonany model pozwala na sporządzenie siatki linii sił i linii ekwipotencjalnych pola przepływowego, określenie natężenia pola w dowolnym jego punkcie, a także na obliczenie pojemności NLP dla konkretnie ustalonych parametrów linii: $h_1, h_2, w, s, t, l_1, l_2$. Okazuje się, że jeden z tych parametrów można przyjąć dowolnie (zwykle przyjmuje się h_1) i obliczyć pojemność NLP dla ustalonych parametrów: w/h_1, t/h_1, s/h_1, h_2/h_1, l_2/h_1. Szerokość ceramiki przyjmuje się tak, aby można ją było z dostatecznym przybliżeniem uważać za nieskończenie szeroką; zwykle przyjmuje się $l_1 \geqslant 10\,(2w+s)$.

Z punktu widzenia projektowania linii interesująca jest zależność funkcyjna pojemności linii od jej wymiarów. Szczególnie przydatne są rodziny krzywych

$$C = f\left(\frac{w}{h_1}\right) \tag{28}$$

dla ustalonych: s/h_1, t/h_1, h_2/h_1. Wyznaczanie poszczególnych punktów rodziny krzywych poprzez wykonywanie kolejnych modeli o określonych parametrach jest sprawą nieopłacalną ze względu na zużycie papieru i duży rozrzut konduktancji różnych modeli o tych samych wymiarach. W pracy wybrano rozwiązanie polegające na zastąpieniu modelu z papierem niejednorodnym modelami cząstkowymi, odpowiadającymi poszczególnym warstwom o przenikalnościach dielektrycznych ε_o, ε_1, ε_2. Rozwiązania tego typu są spotykane w literaturze dotyczącej obliczania pojemności linii mikrofalowych [2].

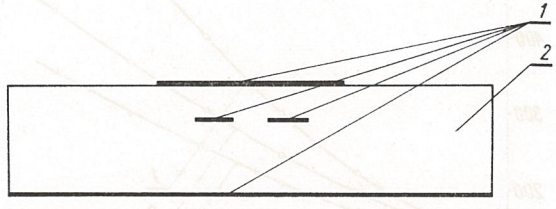
W naszym przypadku z papieru o rezystywności powierzchniowej W wykonujemy trzy modele cząstkowe.



Rys. 2. Model I NLP w ośrodku jednorodnym
1 — elektrody, *2* — arkusz papieru elektroprzewodzącego modelujący ośrodek nieograniczony (powietrze) otaczający linię

M o d e l I (rys. 2) o konduktancji G_1 odpowiada NLP z ekranem, umieszczonej w ośrodku jednorodnym (powietrzu) o przenikalności względnej $\varepsilon_{wo} = 1$. Pojemność takiej linii zgodnie z (27) wynosi

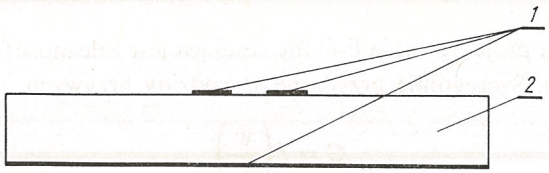
$$C_1 = \varepsilon_o \cdot W \cdot G_1. \tag{29}$$



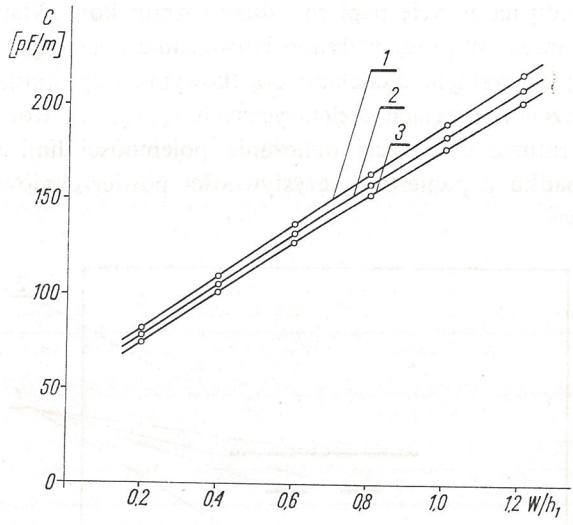
Rys. 3. Model II NLP z dielektrykiem między ekranem a podłożem
1 — elektrody, *2* — papier elektroprzewodzący modelujący dielektryk o ε_{w2}

M o d e l II (rys. 3) o konduktancji G_2 odpowiada NLP przy uwzględnieniu ośrodka o przenikalności względnej ε_{w2} między ekranem a płytą podłoża. Pojemność cząstkowa C_2 wynosi:

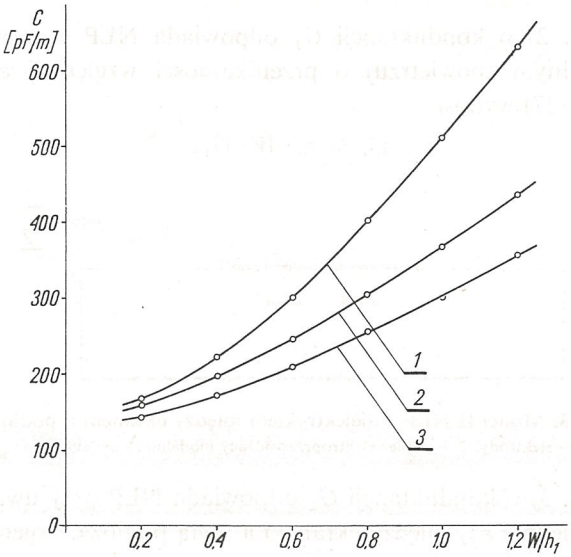
$$C_2 = \varepsilon_o \cdot \varepsilon_{w2} W \cdot G_2. \tag{30}$$



Rys. 4. Model III NLP z dielektrykiem między paskami a podłożem
1 — elektrody, 2 — papier elektroprzewodzący modelujący dielektryk o ε_{w1}



Rys. 5. Pojemność NLP ekranowanej, pobudzonej w fazie, o parametrach: $l_2 = s+4w$, $s/h_1 = 0{,}30$, $h_2/h_1 =$ dla krzywej *1* — 0,04, dla krzywej *2* — 0,08, dla krzywej *3* — 0,15.



Rys. 6. Pojemność NLP ekranowanej, pobudzonej w przeciwfazie, o parametrach: $l_2 = s+4w$, $s/h_1 = 0{,}30$, $h_2/h_1 =$ dla krzywej *1* — 0,04, dla krzywej *2* — 0,08, dla krzywej *3* — 0,15

Model III (rys. 4) o konduktancji G_3 odpowiada NLP przy uwzględnieniu tylko ośrodka o przenikalności względnej ε_{w1} między paskami linii a płytą podłoża. Pojemność cząstkowa C_3 wynosi:

$$C_3 = \varepsilon_o \varepsilon_{w1} W \cdot G_3. \tag{31}$$

Pojemność całej linii jest superpozycją pojemności cząstkowych i wynosi:

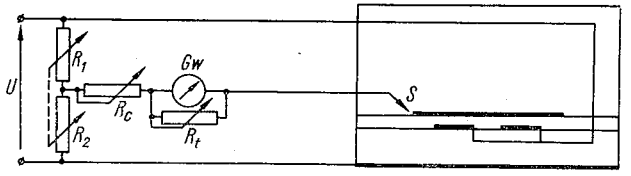
$$C = \varepsilon_o W[G_1 + (\varepsilon_{w2} - 1)G_2 + (\varepsilon_{w1} - \varepsilon_{w2})G_3], \tag{32}$$

gdzie przenikalności względne ε_{w1}, ε_{w2} są dane jako parametry linii, a W, G_1, G_2, G_3 otrzymamy z pomiarów na modelach cząstkowych. Na rys. 5 i 6 podane są przykładowe wyniki pomiarów pojemności liczonych według zależności (32) dla realnych wymiarów linii, oraz $\varepsilon_{w1} = 9{,}5$ (ceramika alundowa) i $\varepsilon_{w2} = 6$ (SiO_2).

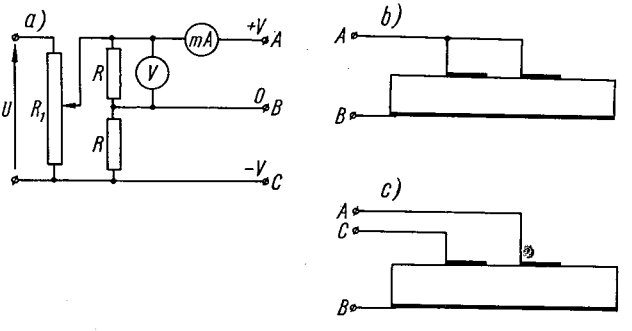
4. UKŁADY POMIAROWE DO BADANIA MODELI

Badanie pola przepływowego w modelu wymaga zastosowania metody kompensacyjnej pomiaru napięcia, ponieważ wysokoomowy obiekt badania nie może być obciążony prądem przyrządu pomiarowego. Ze względu na ograniczone wymagania dotyczące dokładności pomiaru, wystarcza prosty układ rezystorowego dzielnika napięcia przedstawiony na rys. 7.

Wyznaczenie linii ekwipotencjalnych polega na podaniu na sondę pomiarową S odpowiedniego potencjału z dzielnika napięcia i znalezieniu w badanym polu punktów posiada-



Rys. 7. Układ do wyznaczania linii ekwipotencjalnych na modelu NLP
R_1, R_2 — laboratoryjne rezystory precyzyjne, Gw — galwanometr magnetoelektryczny, R_c — szeregowy rezystor regulujący czułość galwanometru, R_t — rezystor tłumiący galwanometr, S — sonda pomiarowa



Rys. 8. Układ do pomiaru konduktancji modelu
a — schemat układu zasilania, b — polaryzacja elektrod dla pobudzenia w fazie, c — polaryzacja elektrod dla pobudzenia w przeciwfazie, R — rezystory dzielnika napięcia, V — woltomierz, mA — miliamperomierz

jących taki sam potencjał (galwanometr wskazuje wtedy zero). Linie sił pola można znaleźć metodą kwadratów krzywoliniowych w oparciu o wyznaczone doświadczalnie linie ekwipotencjalne.

Pomiar konduktancji modelu przeprowadza się w układach jak: na rys. 8a-b dla linii pobudzonej w fazie i na rys. 8a-c dla linii pobudzonej w przeciwfazie.

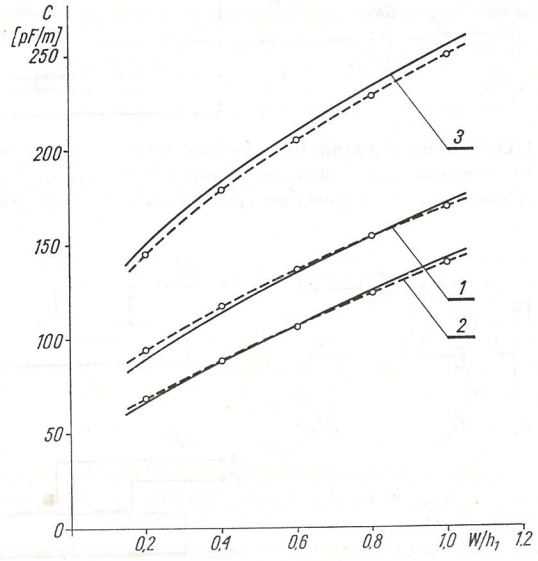
Jeżeli po przyłożeniu do elektrod napięcia U prąd płynący przez model wynosi I, to konduktancja modelu równa się

$$G = \frac{I}{U}. \tag{33}$$

Błąd pomiaru konduktancji związany z zastosowaniem metody dokładnie mierzonego prądu, a także wynikający z określonej klasy przyrządów pomiarowych jest niewielki w stosunku do błędu wykonania modelu.

5. OCENA BŁĘDU POMIARU POJEMNOŚCI

Dostępny papier elektroprzewodzący posiada rozrzut rezystywności o charakterze przypadkowym będący głównym źródłem błędu metody. Dokładne określenie tego błędu jest praktycznie niemożliwe. W literaturze dotyczącej modelowania jest on szacowany na kilka procent [4], [6]. Ponieważ błąd pomiaru konduktancji jest znacznie mniejszy, nie ma potrzeby dokładnego szacowania jego wielkości. Innym źródłem błędu jest zmiana rezystywności papieru wskutek zmiany jego wilgotności. Błąd ten można znacznie zmniejszyć przeprowadzając pomiary w warunkach ustalonej temperatury i wilgotności.

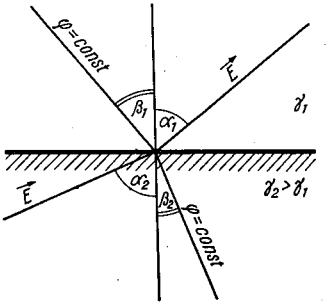


Rys. 9. Wyniki analityczne (linia ciągła) i otrzymane metodą modelowania (linia przerywana) dla NLP bez ekranu

1 — jednopaskowej, *2* — dwupaskowej pobudzonej w fazie, *3* — dwupaskowej pobudzonej w przeciwfazie

Aby oszacować dokładność otrzymanych wartości pojemności porównano je dla kilku przypadków linii jedno- i dwupaskowych bez ekranu z wynikami analitycznymi [1], [9]. Zestawienie wyników przedstawiono na rys. 9.

Jak wynika z podanego porównania, maksymalny błąd dla tego typu linii nie przekracza pięciu procent w stosunku do wyników otrzymanych analitycznie.



Rys. 10. Załamanie linii sił i linii ekwipotencjalnych na granicy ośrodków o różnej konduktywności γ
φ = const — styczna do linii ekwipotencjalnej na granicy ośrodków, $\vec{E}$ — styczna do linii sił pola na granicy ośrodków

Poprawność wyników uzyskanych metodą modeli cząstkowych sprawdzono porównując je z wynikami otrzymanymi na modelach klejonych z poszczególnych warstw papieru. Przeprowadzono także dodatkowe badania nad wpływem przyjętej metody modeli cząstkowych na błąd pomiaru. Jak wiadomo na granicy ośrodków o różnych konduktywnościach linie sił pola i linie ekwipotencjalne załamują się według zależności

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \qquad \frac{\operatorname{tg}\beta_1}{\operatorname{tg}\beta_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}. \tag{34}$$

Badając pole przepływowe w modelu NLP można stwierdzić, że prawie cały prąd płynie w obszarze bliskim elektrod. Ponieważ w metodzie modeli cząstkowych granice ośrodków o różnych konduktywnościach przechodzą w brzeg modelu, na którym spełniony jest warunek

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \tag{35}$$

to zastosowanie modeli cząstkowych będzie możliwe w przypadku, gdy składowa normalna wektora gęstości prądu będzie na granicy ośrodków niewielka, to znaczy niewielka część prądu płynącego w obszarze bliskim granicy warstw przepływa z ośrodka o konduktywności γ_2 do ośrodka o konduktywności γ_1. Badając układ linii ekwipotencjalnych w modelu stwierdzono, że styczne do linii φ = const w ośrodku o konduktywności γ_1 (przyjęto ośrodek o mniejszej konduktywności ze względu na możliwość przeprowadzenia dokładniejszych pomiarów kątów) w interesującym nas obszarze bliskim elektrod są nachylone pod kątem β_1 względem normalnej do granicy ośrodków nie większych niż 15°. Wynika stąd, że kąt β_2 pomiędzy styczną do linii φ = const a normalną do granicy ośrodków, w ośrodku w którym płynie większość prądu wynosi

$$\beta_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\operatorname{tg}\beta_1\right). \tag{36}$$

Nie przekracza więc on wartości

$$\beta_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{9{,}5}\operatorname{tg}15^\circ\right) = 25 \cdot 10^{-3}. \tag{37}$$

Ponieważ składowa normalna wektora gęstości prądu w ośrodku 2 wynosi

$$J_n = J\sin\beta_2, \tag{38}$$

to z (37) wynika, że nie przekracza ona 2,5%.

Rozważania powyższe prowadzą do wniosku, że przyjęcie warunku (35) na granicy ośrodków jest obarczone błędem kilku procent. Ze względu na mały udział prądu w obszarach bliskich granicy ośrodków w całkowitym prądzie płynącym przez model, różnica konduktancji modelu sklejonego z poszczególnych warstw papieru elektroprzewodzącego i konduktancji obliczonej dla modeli cząstkowych z warunkiem (35) na granicy ośrodków jest znacznie mniejsza od błędu wyliczonego z (38).

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. T. G. Bryant, J. A. Weiss, Parameters of Microstrip Transmission Lines and Coupled Pairs of Microstrip Lines, IEEE Trans. on MTT, **16**, 12, 1021—1027, 1968.
2. R. J. Collier, D. J. Price, Analogue Technique for Microstrip Parameters, Electronics Letters, **6**, 11, 338—339, 1970.
3. R. E. Collin, Prowadzenie fal elektromagnetycznych, WNT, Warszawa 1966.
4. P. F. Filczakow, W. I. Panczyszin, Integratory EGDA. Modelirowanie potencjalnych polej na elektroprowodnoj bumagie, Izd. A. N., Kijew 1961.
5. W. A. Goworkow, Pola elektryczne i magnetyczne, WNT, Warszawa 1962.
6. W. I. Karplus, Analog Simulation Solution of Field Problems, New York, Toronto, London 1958.
7. I. Kuzora, Analiza wymiarowa modelu dla równania Laplace'a z drugim i trzecim warunkiem brzegowym, Archiwum Hydrotechniki, **16**, 9, 9—22, 1969.
8. B. Ryś, R. Vogel, Materiały Sesji Naukowej Wydziału Elektroniki PG, czerwiec 1971.
9. M. V. Schneider, Microstrip Lines for Microwave Integrated Circuits, The Bell System Technical Journal, **48**, 5, 1421—1444, 1969.

I. KUZORA, J. BAJOREK

ANALOGUE METHOD TO CALCULATE CAPACITANCE OF MICROSTRIP TRANSMISSION LINES

Summary

An analogue method has been applied in the paper to calculate the capacitance of microstrip lines. An electrical model of the conductive papers Teledeltos and Saphir has been constructed. The realization's technique of the electrical models of the conductive papers has been described.

Connection between the electrostatic field parameters in the microstrip line and the electrical field parameters in the model results from the dimensional analysis of problem.

In the cases discussed, capacitance of the microstrip line in the heterogenous medium can be calculated as the superposition of the capacitance for each dielectric separately measured.

I. KUZORA, J. BAJOREK

DÉTÉRMINATION DE LA CAPACITÉ NON SYMÉTRIQUE DES LIGNES À BANDES PAR LA MÉTHODE ÉLÉCTROANALOGUE

Résumé

Dans ce travail on a employé la méthode de l'électroanalogie pour détérminer les capacités des lignes à bandes. On a décrit la technique de la réalisation des modèles électriques avec des papiers conducteurs Teledeltos et Saphir.

De l'analyse dimensionelle du problème s'ensuit le rapport des paramètres de l'air électrostatique dans la ligne avec les paramètres de l'air électrique dans le modèle.

La capacité de la ligne dans le milieu non homogène peut étre marquée, dans les cas ci-dessus, comme superposition de la capacité mesurée pour chaque diélectriqe séparément.

I. KUZORA, J. BAJOREK

BESTIMMUNG DER MIKROWELLEN-STREIFENLEITUNGSKAPAZITÄT MITTELS ELEKTROANALOGIEMETHODE

Zusammenfassung

In diesem Beitrag wurde zur Bestimmung der Mikrowellen-Streifenleitungskapazität die Methode der Elektroanalogie angewandt. Das elektrische Modell wurde aus elektroleitenden Papieren Teledeltos und Saphir aufgebaut. Die Fertigungstechnik elektrischer Modelle aus elektroleitenden Papieren ist hier eingehend beschrieben worden.

Die Dimensionsanalyse dieses Problems ergibt Zusammenhänge der Parameter des elektrostatischen Feldes in der Mikrowellen-Streifenleitung mit Parametern des elektrischen Feldes im Modell.

Die Mikrowellen-Streifenleitungskapazität kann im homogenen Medium in den besprochenen Fällen als Superposition der Kapazität — für jedes Dielektrikum einzeln berechnet — bestimmt werden.

И. КУЗОРА, Е. БАЙОРЕК

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЕМКОСТИ НЕСИММЕТРИЧЕСКИХ ПОЛОСКОВЫХ ЛИНИЙ МЕТОДОМ ЭЛЕКТРОАНАЛОГИИ

Резюме

В работе применен метод электроаналогии для определения емкости несимметрических полосковых линий. Электрические модели построены из электропроводящих бумаг Теледельтос и Сафир. В работе указан метод реализации электрических моделей из электропроводящей бумаги.

Из размерного анализа проблемы вытекает связь между параметрами электростатического поля в полосковой линии и параметрами электрического поля в модели.

Емкость линии в неоднородной среде может быть определена в обсуждаемых случаях суперпозицией емкости измеренной отдельно для каждого диэлектрика.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1973, 19, z. 1, ss. 179-195

621.314.2

Parametry w zastępczym schemacie cieplnym transformatora suchego przy chłodzeniu naturalnym

TADEUSZ KOTER (ŁÓDŹ), WIESŁAW LASOCKI (ŁÓDŹ)

Instytut Transformatorów, Maszyn i Aparatów Elektycznych Politechniki Łódzkiej

Otrzymano 3.2.1972

Artykuł jest kontynuacją tematu zagadnień cieplnych w transformatorach suchych, któtego pierwszą częścią jest praca [1]. Omówiono podstawowe zależności pozwalające wyznaczyć przewodności w zastępczym schemacie cieplnym. Przedstawiono wyniki doświadczalnego sprawdzenia współczynnika przejmowania ciepła na drodze konwekcji swobodnej z uzwojeń, które w ujęciu różnych autorów mają bardzo różniące się wartości.

Wskazano metodę wyznaczania współczynnika korekcyjnego uwzględniającego wpływ szerokości kanału na oddawanie ciepła drogą konwekcji swobodnej.

1. WSTĘP

Obserwuje się obecnie wzrost zainteresowania transformatorami suchymi, które będąc bezpieczne pod względem pożarowym są coraz częściej ustawiane w halach produkcyjnych. Powodowane jest to względami ekonomicznymi, które wymagają aby rozdział energii elektrycznej odbywał się w pobliżu głównych odbiorników elektrycznych. Transformatory suche mają także coraz większe zastosowanie jako transformatory rozdzielcze ustawiane w budynkach mieszkalnych. Po wprowadzeniu do produkcji transformatorów suchych materiałów izolacyjnych o wysokiej wytrzymałości cieplnej stają się one porównywalne pod względem gabarytu i ceny z transformatorami olejowymi.

W procesie obliczania transformatora suchego jednym z trudniejszych zagadnień jest obliczenie cieplne, szczególnie w transformatorach z chłodzeniem naturalnym. Proces przekazywania ciepła z transformatora suchego do otoczenia na drodze konwekcji przy chłodzeniu naturalnym jest odmienny od procesu występującego w transformatorze olejowym.

W transformatorze suchym czynnikiem chłodzącym jest zwykle powietrze i strefa konwekcji naturalnej jest znacznie większa od stosowanych szerokości kanałów między uzwojeniami lub uzwojeniem i rdzeniem. Stąd występuje wzajemne cieplne oddziaływanie na siebie poszczególnych części transformatora. Ponadto w transformatorze suchym ciepło z uzwojeń odprowadzane jest poza konwekcją także na drodze promieniowania, co powoduje wzajemne cieplne powiązanie nagrzanych części transformatora. Powyższe przy-

czyny sprawiają, że poszczególne elementy oddające ciepło w transformatorze suchym nie mogą być rozpatrywane oddzielnie, gdyż tworzą układ cieplnie sprzężony.

Obliczenie cieplne uzwojeń w transformatorze suchym można przeprowadzić stosując metodę schematu cieplnego, podobnie jak to jest stosowane do cieplnych obliczeń maszyn elektrycznych wirujących. Podstawy budowy schematu cieplnego transformatora suchego zostały podane w pracy [1]. Aby schemat ten mógł być wykorzystywany do obliczeń cieplnych, zachodzi potrzeba prawidłowego wyznaczenia jego poszczególnych elementów. Niniejszy artykuł jest poświęcony analizie i metodom wyznaczania elementów tego schematu — przewodności i pojemności cieplnych.

2. SCHEMAT CIEPLNY TRANSFORMATORA SUCHEGO

Schemat cieplny transformatora suchego z uzwojeniami cylindrycznymi [1] o k elementach można przedstawić jak pokazano na rys. 1.

W schemacie cieplnym transformatora na rys. 1 przyjęto następujące oznaczenia:

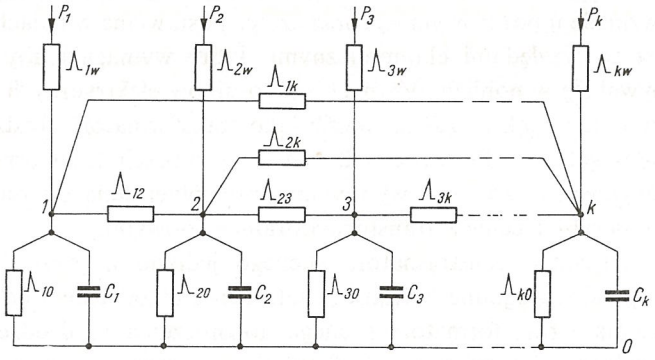
P_i — moce wydzielone w odpowiednich elementach i,

Λ_{iw} — przewodności cieplne odpowiadające spadkowi temperatury wewnątrz danych elementów i.

Λ_{ik} — przewodności cieplne odtwarzające przekazywanie ciepła z elementu i do elementu k,

Λ_{io} — przewodności cieplne odtwarzające przekazywanie ciepła z elementu i do otoczenia,

C_i — pojemności cieplne i-tych elementów.



Rys. 1. Schemat cieplny transformatora suchego bez obudowy

W schemacie cieplnym transformatora tuleję izolacyjną lub barierę międzyfazową reprezentuje element, w którym nie są wydzielane straty mocy $P_i = 0$.

Poszczególne części transformatora, jak rdzeń, uzwojenia, tuleje izolacyjne czy bariery międzyfazowe, w zastępczym schemacie są elementami o stałych skupionych w węzłach 1, 2, 3 ... k.

O wymianie ciepła decyduje temperatura powierzchni danych elementów. Przy obliczaniu średnich przyrostów temperatury w węzłach $1, 2, 3 \ldots k$ występują średnie wartości przyrostów temperatury powierzchni poszczególnych części transformatora.

Dla wyznaczenia przyrostów temperatur w oparciu o schemat cieplny poza zadanymi wartościami strat $P_1, P_2, P_3 \ldots P_k$ potrzebna jest znajomość przewodności cieplnych poprzecznych Λ_{ik} oraz podłużnych Λ_{ko}, które zależą od sposobu odprowadzania ciepła, wymiarów geometrycznych transformatora oraz od osiąganych przyrostów temperatur. Przy wyznaczaniu przebiegów cieplnie nieustalonych potrzebna jest także znajomość pojemności cieplnych C_i, jakie mają poszczególne części transformatora (rdzeń, uzwojenia, tuleje itd.). Przy chłodzeniu wymuszonym ciepło od poszczególnych części transformatora jest odprowadzane głównie na zasadzie konwekcji wymuszonej i współczynnik oddawania ciepła, a w związku z tym i przewodności cieplne, mają wartości stałe niezależnie od osiąganych przyrostów temperatur.

Zjawisko jest znacznie bardziej skomplikowane przy chłodzeniu naturalnym, w którym występuje zjawisko przekazywania ciepła na zasadzie konwekcji naturalnej (swobodnej), promieniowania, a także przewodzenia (np. kliny między uzwojeniami).

3. ANALIZA PRZEWODNOŚCI CIEPLNYCH

Przyrost temperatury ϑ ciała, w którym jest wydzielona moc przypadająca na jednostkę powierzchni q (strumień cieplny) przy współczynniku przejmowania ciepła α, jest określony ogólną zależnością Newtona

$$\vartheta = \frac{q}{\alpha} = \frac{P}{\alpha S} = \frac{P}{\Lambda_c}, \tag{1}$$

gdzie:

Λ_c — przewodność cieplna,

S — czynna powierzchnia odprowadzająca ciepło.

Przewodności poprzeczne. Przewodności cieplne odtwarzające przekazywanie ciepła z elementu i do elementu k Λ_{ik} składają się z dwu przewodności połączonych równolegle. Jedna z tych przewodności cieplnych odtwarza przekazywanie ciepła między tymi elementami na drodze promieniowania Λ_{ikr}, druga zaś na drodze przewodzenia Λ_{ikp}

$$\Lambda_{ik} = \Lambda_{ikr} + \Lambda_{ikp}. \tag{2}$$

Przewodności podłużne. Przewodności cieplne odtwarzające przekazywanie ciepła z elementu i do otoczenia Λ_{io} też składają się z dwu przewodności. Jedna z tych przewodności odtwarza przekazywanie ciepła z elementu do otoczenia na drodze promieniowania Λ_{ior}, druga zaś na drodze konwekcji Λ_{iok}

$$\Lambda_{io} = \Lambda_{ior} + \Lambda_{iok}. \tag{3}$$

Istota zagadnienia polega na wyznaczeniu przewodności podłużnych i poprzecznych w zastępczym schemacie cieplnym.

3.1. Przewodzenie

Przewodność cieplna odpowiadająca przewodzeniu materiałowemu Λ_{ikp} wyraża się zależnością [10]

$$\Lambda_{ikp} = \frac{\lambda S}{d}, \tag{4}$$

gdzie:

λ — przewodność cieplna materiału przewodzącego ciepło (np. klina),

S — powierzchnia materiału przewodzącego ciepło w kierunku przewodzenia,

d — długość drogi przewodzenia (np. dla klina jego grubość).

W transformatorach suchych wymiana ciepła na drodze przewodzenia występuje zasadniczo za pośrednictwem klinów między uzwojeniami oraz między uzwojeniem a rdzeniem oraz za pośrednictwem wstawek pomiędzy belką jarzmową a uzwojeniami.

Jak wynika z zależności (4) na wartość przewodności cieplnej Λ_{ikp} mają wpływ wielkości zależne od geometrii transformatora oraz własności zastosowanego materiału.

3.2. Promieniowanie

Przewodność cieplna, za pomocą której uzwojenie oddaje ciepło do otoczenia na drodze promieniowania, wyraża się zależnością

$$\Lambda_{ior} = \varphi_{rio} \cdot S_i \cdot \alpha_{rio}. \tag{5}$$

Przewodność uwzględniająca wymianę ciepła na drodze promieniowania z sąsiednim uzwojeniem lub rdzeniem ma postać

$$\Lambda_{ikr} = \varphi_{rik} \cdot S_i \cdot \alpha_{rik}. \tag{6}$$

W powyższych zależnościach:

α_{rio}, α_{rik} — współczynniki przejmowania ciepła na drodze promieniowania powierzchni S_i do otoczenia lub do sąsiedniej powierzchni S_k,

φ_{rio} — współczynnik konfiguracji powierzchni S_i do otoczenia,

φ_{rik} — współczynnik konfiguracji powierzchni S_i do powierzchni S_k.

Współczynnik przejmowania ciepła na drodze promieniowania może być wyznaczony z równania Stefana Boltzmana dla ciał szarych [10]

$$\alpha_{rik} = \frac{\varepsilon_{ik} C_o}{T_i - T_k}\left[\left(\frac{T_i}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_k}{100}\right)^4\right], \tag{7}$$

gdzie:

C_0 — stała promieniowania ciała doskonale czarnego

$$C_0 = 5{,}77\left[\frac{W}{m^2 deg}\right],$$

ε_{ik} — zastępczy względny współczynnik promieniowania obliczony z zależności

$$\varepsilon_{ik} = \frac{\varepsilon_i \cdot \varepsilon_k}{\varepsilon_i + \varepsilon_k - \varepsilon_i \cdot \varepsilon_k}, \tag{8}$$

ε_i, ε_k — względne współczynniki promieniowania powierzchni,
T_i, T_k — temperatury bezwzględne ciał wymieniających ciepło

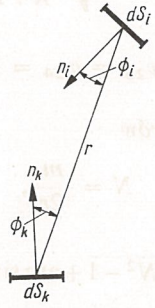
$$T_i = 273 + t_o + \vartheta_i,$$
$$T_k = 273 + t_o + \vartheta_k, \tag{9}$$

t_o — temperatura otoczenia.

Współczynnik konfiguracji φ_{rik} określony jest zależnością

$$\varphi_{rik} = \frac{1}{S_i}\int_{S_i}\int_{S_k} \frac{\cos\phi_i \cdot \cos\phi_k}{\pi r^2}\, dS_i \cdot dS_k. \tag{10}$$

Oznaczenia jak na rys. 2.



Rys. 2. Wymiana ciepła na drodze promieniowania pomiędzy dowolnymi elementami powierzchni

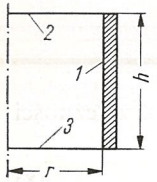
Współczynnik konfiguracji φ_{rik} z punktu widzenia fizycznego określa jaką część całkowitego promieniowania wysyłanego przez S_i pochłania S_k, zaś φ_{rki} określa jaką część całkowitego promieniowania powierzchni S_k pochłania powierzchnia S_i.

Jeżeli wymiana ciepła występuje między dwoma ciałami to wartości φ_{rik} oraz φ_{rki} są związane ze sobą następującą zależnością

$$S_i \varphi_{rik} = S_k \varphi_{rki} \tag{11}$$

Wzory na współczynniki konfiguracji najczęściej spotykanych układów występujących w transformatorach obliczone w oparciu o równanie (10) przedstawiają się następująco [9]:

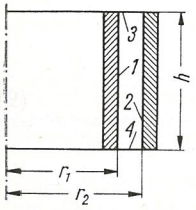
1. *cylinder samotny*



$$M = \frac{h}{r}.$$

$$\varphi_{12} = \varphi_{13} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{M^2+4} - M\right); \tag{12}$$

2. *dwa cylindry współśrodkowe*



$$L = \frac{h}{r_1},$$

$$R = \frac{r_2}{r_1},$$

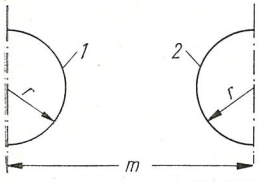
$$\varphi_{12} = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{R^2-1}} + \frac{1}{\pi L}\left\{(R^2-1)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{R+1}{R-1}} - \right.$$

$$-\sqrt{[L^2+(R+1)^2][L^2+(R-1)^2]}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{L^2+(R+1)^2(R-1)}{L^2+(R-1)^2(R+1)}} + \tag{13}$$

$$\left. + L^2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{R-1}{R+1}}\right\},$$

$$\varphi_{13} = \varphi_{14} = \frac{1-\varphi_{12}}{2}, \qquad \varphi_{23} = \varphi_{24} = \frac{1-\varphi_{12}}{2R}, \qquad \varphi_{21} = \frac{\varphi_{12}}{R};$$

3. *powierzchnie zewnętrzne dwóch cylindrów*

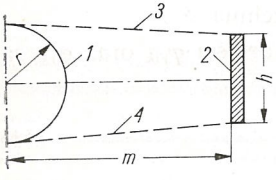


$$N = \frac{m}{2r},$$

$$\varphi_{12} = \frac{2}{\pi}\left[\sqrt{N^2-1} + \arcsin\frac{1}{N} - N\right], \tag{14}$$

$$\varphi_{10} = 1-\varphi_{12};$$

4. *powierzchnia zewnętrzna cylindra i płyty*



$$\varphi_{12} = \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{h}{2m},$$

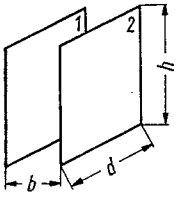
$$\varphi_{21} = 2\frac{r}{h}\operatorname{arc\,tg}\frac{h}{2m}, \tag{15}$$

$$\varphi_{13} = \varphi_{14} = \frac{1}{2}(1-\varphi_{12}),$$

$$\varphi_{23} = \varphi_{24} = \frac{1}{2}(1-\varphi_{21});$$

5. *dwie płyty równoległe*

$$B = \frac{h}{b}, \qquad C = \frac{d}{b},$$



$$\varphi_{12} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{BC}\ln\frac{1+B^2+C^2+B^2C^2}{1+B^2+C^2} + \right.$$
$$-\frac{2}{B}\operatorname{arc\,tg}C + \frac{2}{C}\sqrt{1+C^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{B}{\sqrt{1+C^2}} + \tag{16}$$
$$\left. -\frac{2}{C}\operatorname{arc\,tg}B + \frac{2}{B}\sqrt{1+B^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{C}{\sqrt{1+B^2}}\right),$$
$$\varphi_{10} = \varphi_{20} = 1-\varphi_{12}.$$

3.3. Konwekcja

Przewodność cieplna odtwarzająca oddawanie ciepła na drodze konwekcji wyraża się zależnością

$$\Lambda_{iok} = \varphi_k \cdot S_k \cdot \alpha_k, \tag{17}$$

gdzie:

S_k — powierzchnia wymieniająca ciepła na drodze konwekcji,

α_k — współczynnik przejmowania ciepła na drodze konwekcji swobodnej,

φ_k — współczynnik korekcyjny uwzględniający wpływ szerokości kanału na oddawanie ciepła drogą konwekcji swobodnej.

Współczynnik przejmowania ciepła na drodze konwekcji. Szerszego omówienia wymaga współczynnik przejmowania ciepła na drodze konwekcji swobodnej ze względu na bardzo różnorodne jego ujęcie przez różnych autorów.

Zjawisko konwekcji matematycznie jest opisane równaniem Newtona

$$q_k = \alpha_k(t_s - t_o) \tag{18}$$

gdzie:

q_k — strumień cieplny,

t_s — temperatura powierzchni oddającej ciepło na drodze konwekcji,

t_o — temperatura powietrza w dużej odległości od ścianki.

Równanie Newtona ma prostą postać, jednak określenie wartości współczynnika przejmowania ciepła jest trudne, gdyż fizyczny mechanizm zjawiska konwekcji swobodnej jest skomplikowany.

Wyznaczanie tego współczynnika w zależności od przyrostu temperatury ϑ zalecane jest w różny sposób przez poszczególnych autorów.

Nusselt w 1909 r. [4] określił współczynnik dla pionowych powierzchni o wymiarach $(0{,}45 \times 0{,}45)\ \mathrm{m}^2$

$$\alpha_k = 2{,}55\,\vartheta^{1/4}. \tag{19}$$

Montsinger [4] podał dla pionowej powierzchni w wysokości 0,6 m i dla przyrostów temperatur $\vartheta \leqslant 75$ deg

$$\alpha_k = 2{,}17\,\vartheta^{1/4} \tag{20}$$

Richter [4] opierając się na pracach Bindera podaje

$$\alpha_k = 6{,}55 + 0{,}05\,\vartheta. \tag{21}$$

Schmit i Beckman [4] w 1930 r. podali zależność

$$\alpha_k = 5{,}6 \sqrt[4]{\frac{\vartheta}{(273+t_0)\cdot h}} \cdot \sqrt{\frac{b}{760}}, \tag{22}$$

w której:

b — ciśnienie barometryczne w [mm Hg],

h — wysokość w [m],

t_o — temperatura otoczenia.

Należy podkreślić, że badania Schmidta i Beckmana były przeprowadzone dla płyty o stałej temperaturze wzdłuż wysokości.

Przyjmując warunki odniesienia $t_o = 20°C$ i $b = 760$ mmHg otrzymuje się

$$\alpha_k = 1{,}35 \left(\frac{\vartheta}{h}\right)^{1/4}. \tag{23}$$

Gotter [4] w zależności podanej przez Schmidta i Beckmana w miejsce wartości współczynnika 5,6 proponuje przyjąć wartość 10 i wtedy

$$\alpha_k = 2{,}42 \left(\frac{\vartheta}{h}\right)^{1/4}. \tag{24}$$

Eastgate [3] podaje zależność

$$\alpha_k = 2{,}08\,\vartheta^{1/3}. \tag{25}$$

Halacsy [5] podaje

$$\alpha_k = 1{,}41 \left(\frac{\vartheta}{h}\right)^{1/4}. \tag{26}$$

Popov i Genov [9] podają w swej pracy

$$\alpha_k = 2{,}06 \left(\frac{\vartheta}{h}\right)^{1/4}. \tag{27}$$

Lein [7] przyjmie w swoich obliczeniach

$$\alpha_k = 1{,}95\,\vartheta^{1/4}. \tag{28}$$

Dla porównania wartości współczynnika przejmowania ciepła na drodze konwekcji swobodnej w ujęciu różnych autorów przedstawiono graficznie na rys. 3 zależność $q_k = f(\vartheta)$ dla wysokości jednego metra odpowiednio do podanych wyżej zależności.

Na podstawie teorii podobieństwa przyjmuje się, że konwekcja swobodna jest opisana zależnością trzech liczb kryterialnych:
Nusselta, Grashofa i Prandtla w postaci:

$$Nu = k(Gr \cdot Pr)^n, \tag{29}$$

gdzie:

$$Nu = \frac{\alpha_k \cdot h}{\lambda}, \tag{30}$$

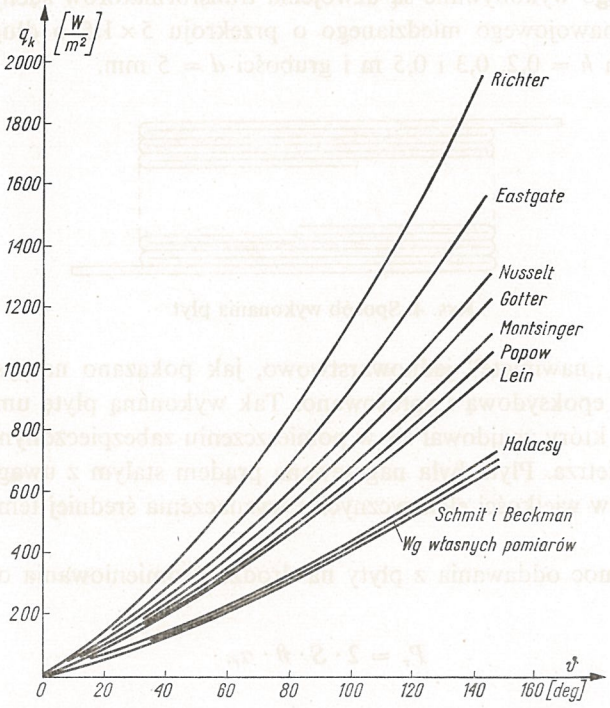
$$Gr = \frac{g\beta h^3 \vartheta}{\nu^2}, \tag{31}$$

$$Pr = \frac{\nu}{a}, \tag{32}$$

h — charakterystyczny wymiar liniowy (wysokość),
λ — przewodność cieplna,
g — przyśpieszenie grawitacyjne,
β — współczynnik rozszerzalności objętościowej,
ϑ — przyrost temperatury,
ν — lepkość kinematyczna,

$a = \frac{\lambda}{c_p \varrho}$ — współczynnik wyrównywania temperatury,

c_p — ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu,
ϱ — gęstość.



Rys. 3. Wykres zależności $q_k = f(\vartheta)$ dla wysokości 1 m według różnych autorów

Wartości stałych k i n w równaniu (29) zależą od rodzaju przepływu. Według Michiejewa [10] stałe te wynoszą:

a) $k = 1{,}18$, $n = 1/8$ — dla ruchu czysto laminarnego, tzn. dla

$$10^{-2} < Gr \cdot Pr < 10^{2};$$

b) $k = 0{,}54$, $n = 1/4$ — dla intensywnego ruchu laminarnego, tzn. dla

$$5 \cdot 10^{2} < Gr \cdot Pr < 2 \cdot 10^{7};$$

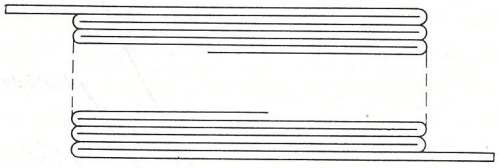
c) $k = 0{,}135$, $n = 1/3$ — dla ruchu burzliwego, tzn. dla

$$2 \cdot 10^{7} < Gr \cdot Pr < 10^{13}.$$

Przyjmując dla transformatorów suchych wysokości uzwojeń $h = (0{,}2 \ldots 0{,}5)$ m, temperaturę otoczenia $t_o = 20°C$ oraz przyrosty temperatur (10 ... 125) deg otrzymuje się iloczyn $Gr \cdot Pr = 8 \cdot 10^{6} \ldots 6 \cdot 10^{9}$. Według Michiejewa będzie to strefa przejściowa pomiędzy ruchem intensywnym laminarnym a burzliwym.

Mc Adams [8] podaje, że ruch intensywnie laminarny występuje w zakresie $10^{4} < Gr \cdot Pr < 10^{9}$ i wtedy $k = 0{,}59$ oraz $n = 1/4$, tak więc iloczyn $Gr \cdot Pr$ dla transformatorów suchych według Mc Adamsa zawierałby się w zakresie intensywnego ruchu laminarnego.

Ze względu na znaczne rozbieżności poglądów w sprawie wartości współczynnika przejmowania ciepła na drodze konwekcji zjawisko powyższe zostało sprawdzone w sposób doświadczalny z odtworzeniem warunków zbliżonych do tych, które występują w transformatorach suchych. Badania przeprowadzono przez nagrzewanie płyt wykonanych z materiału, z którego wykonywane są uzwojenia transformatorów suchych. Płyty wykonano z przewodu nawojowego miedzianego o przekroju $5 \times 1{,}5$ o długości $l = 0{,}6$ m, trzech wysokościach $h = 0{,}2$, 0,3 i 0,5 m i grubości $d = 5$ mm.



Rys. 4. Sposób wykonania płyt

Płyty te zostały „nawinięte" jednowarstwowo, jak pokazano na rys. 4, a następnie nasycono je żywicą epoksydową i sprasowano. Tak wykonaną płytę umieszczono w odpowiednim stojaku, który znajdował się w pomieszczeniu zabezpieczonym przed dodatkowymi ruchami powietrza. Płyta była nagrzewana prądem stałym z uwagi na łatwość dokonywania pomiarów wielkości elektrycznych i wyznaczenia średniej temperatury metodą oporową.

Przyjmując, że moc oddawania z płyty na drodze promieniowania określona jest zależnością

$$P_r = 2 \cdot S \cdot \vartheta \cdot \alpha_r, \tag{33}$$

gdzie:

$2S$ — całkowita powierzchnia płyty,

ϑ — przyrost temperatury wyznaczony metodą oporową,

α_r — współczynnik przejmowania ciepła na drodze promieniowania wyznaczony z zależności (7),

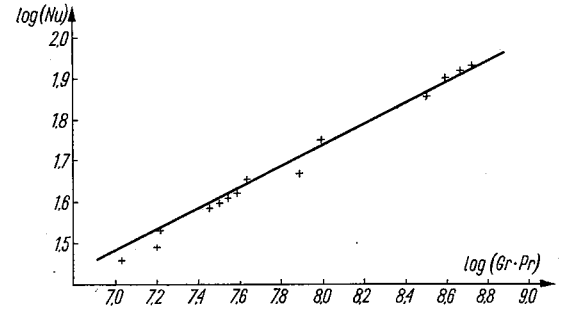
moc oddawana do otoczenia na drodze konwekcji P_k jest różnicą mocy dostarczonej do płyty P i odprowadzonej na drodze promieniowania P_r

$$P_k = P - P_r. \tag{34}$$

Średni współczynnik przejmowania ciepła na drodze konwekcji określony jest zależnością

$$\alpha_k = \frac{P_k}{2S\vartheta}. \tag{35}$$

Tak obliczony średni współczynnik przejmowania ciepła na drodze konwekcji dla płyt o wysokościach h posłużył do obliczenia liczb kryterialnych Nu oraz iloczynu $Gr \cdot Pr$.



Rys. 5. Zależność log $(Nu) = f[\log(Gr \cdot Pr)]$ przy konwekcji swobodnej dla płyt zastosowanych w badaniach doświadczalnych

Wyniki zależności $\log Nu = f[\log(Gr \cdot Pr)]$ przedstawiono na rys. 5. Punkty otrzymane na drodze pomiarowej przybliżono do linii prostej, która prowadzi do zależności

$$Nu = 0{,}537(Gr \cdot Pr)^{1/4}$$

dla (36)

$$Gr \cdot Pr = 10^{7{,}0} \ldots 10^{8{,}8}.$$

Jak wynika z przeprowadzonych badań i obliczeń, otrzymana zależność jest bardzo zbliżona do zależności podanej przez Schmidta i Beckmana w 1930 r.

Podstawiając do otrzymanej zależności wartości na liczby kryterialne Nu, Gr, Pr, możemy wyznaczyć współczynnik przejmowania ciepła na drodze konwekcji swobodnej

$$\alpha_k = 0{,}537\,\lambda \left(\frac{g\beta}{\nu a}\right)^{1/4} \left(\frac{\vartheta}{h}\right)^{1/4}, \tag{37}$$

którą można sprowadzić do postaci

$$\alpha_k = C\left(\frac{\vartheta}{h}\right)^{1/4}, \tag{38}$$

gdzie

$$C = 0{,}537\,\lambda\left(\frac{g\beta}{\nu a}\right)^{1/4}. \tag{39}$$

Powyższa zależność jest funkcją parametrów fizycznych gazu chłodzącego
a — współczynnik wyrównywania temperatury,
β — współczynnik rozszerzalności objętościowej,
λ — przewodność cieplna,
ν — lepkość kinematyczna,
oraz przyśpieszenia grawitacyjnego g.

Parametry fizyczne powietrza w niewielkim stopniu zmieniają się ze zmianą temperatury. Przyjmując temperaturę otoczenia 20°C oraz przyrosty temperatury 0...120 deg, wartość C zmienia się w granicach 1,41...1,34; przyjmując wartość średnią otrzymujemy $C = 1{,}38$.

Zależność współczynnika przejmowania ciepła na drodze konwekcji swobodnej otrzymana z pomiarów na płytach znajdujących się w przestrzeni nieograniczonej innymi ciałami, jest więc określona wzorem

$$\alpha_k = 1{,}38\left(\frac{\vartheta}{h}\right)^{1/4}. \tag{40}$$

Powyższa zależność jest praktycznie zgodna ze wzorem podanym przez Schmidta i Beckmana, z tym jednakże, że została ona sprawdzona dla płyty pionowej wykonanej z przewodu nawojowego stosowanego w transformatorach suchych. W wyniku tego sprawdzenia wydaje się, że nieuzasadnionym jest pogląd Gottera, że współczynnik 5,6 we wzorze (22) należy zastąpić współczynnikiem 10 przy obliczeniach uzwojeń transformatorów suchych.

Współczynnik korekcyjny uwzględniający wpływ szerokości kanału. W transformatorze suchym zjawisko konwekcji swobodnej odbywa się w kanale, którego szerokość ma istotny wpływ na proces oddawania ciepła. Dla uwzględnienia wpływu kanału wprowadza się pojęcia współczynnika korekcyjnego φ_k wyrażonego zależnością

$$\varphi_k = \frac{\alpha_{kk}}{\alpha_k}, \tag{41}$$

gdzie:

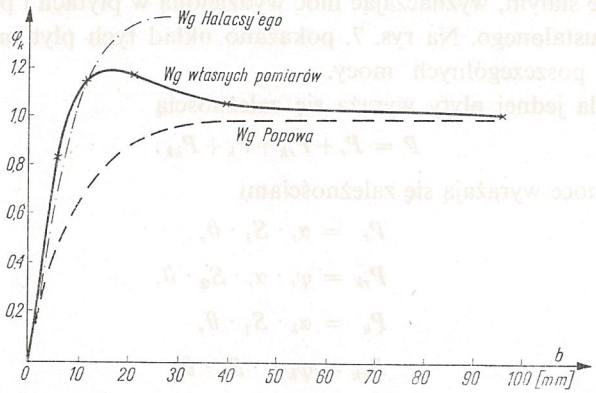
α_{kk} — współczynnik przejmowania ciepła na drodze konwekcji swobodnej powierzchni w kanale,

α_k — współczynnik przejmowania ciepła na drodze konwekcji swobodnej powierzchni nieograniczonej innymi ciałami.

Rozpatrując przypadki krańcowe można stwierdzić, że gdy szerokość kanału będzie się zwiększać nieograniczenie, to α_{kk} musi dążyć do α_k, czyli φ_k winien dążyć do jedności.

W drugim skrajnym przypadku szerokość kanału dąży do zera; wtedy nie występuje zjawisko oddawania ciepła na drodze konwekcji swobodnej z powierzchni w kanale i wobec tego φ_k dąży do zera.

Charakter przebiegu współczynnika φ_k w funkcji szerokości kanału jest w publikowanych pracach naświetlany bardzo różnie. Halacsy [5] podaje wykres zależności tego współczynnika w funkcji szerokości kanału b. Zależność tę przedstawia wykres na rys. 6. Jak wynika z tego wykresu wartość współczynnika dla szerokości kanału powyżej 9 mm



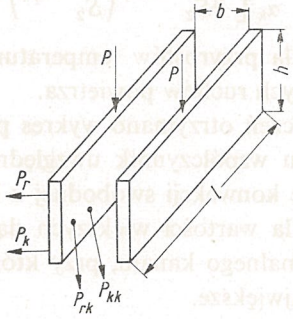
Rys. 6. Przebieg zależności współczynnika uwzględniającego wpływ szerokości kanału na oddawanie ciepła na drodze konwekcji swobodnej

jest większa od jedności. Halacsy podał tę zależność w zakresie szerokości kanału od zera do jednego cala. Popov i Genov [9] podają wzór na współczynnik φ_k w zależności od szerokości kanału w postaci

$$\varphi_k = 1 - e^{-0{,}111b}. \tag{42}$$

Zależność ta przedstawiona jest także na wykresie z rys. 6.

Z przebiegu krzywej wynika, że ze wzrostem szerokości kanału b wartość φ_k dąży do jedności nie osiągając wartości większych. Ze względu na to, że podane w literaturze zależności współczynnika różnią się dość znacznie, postanowiono współczynnik ten sprawdzić na drodze doświadczalnej.



Rys. 7. Układ płyt do wyznaczania współczynnika φ_k

P — moc wydzielona w jednej płycie, P_r, P_k — moc przekazywana z powierzchni zewnętrznej do otoczenia na drodze promieniowania i konwekcji, P_{rk}, P_{kk} — moc przekazywana z powierzchni wewnętrznej w kanale do otoczenia na drodze promieniowania i konwekcji

Badania przeprowadzono w układzie płaskim, który pozwalał na płynną zmianę szerokości kanału. Dwie płyty o wysokości $h = 0{,}2$ m i szerokości $l = 0{,}6$ m posiadały prak-

tycznie tę samą powierzchnię i te same rezystancje. Przy połączeniu szeregowym uzwojonych płyt prąd płynący przez nie wytwarzał praktycznie jednakowe straty mocy, a w związku z tym przyrosty temperatur były także praktycznie jednakowe. W takim układzie nie miała miejsca wymiana ciepła na drodze promieniowania między płytami. Pomiary przeprowadzono przy prądzie stałym, wyznaczając moc wydzieloną w płytach i przyrosty temperatur dla stanu cieplnie ustalonego. Na rys. 7. pokazano układ tych płyt oraz zaznaczono kierunki oddawania poszczególnych mocy.

Bilans mocy dla jednej płyty wyraża się zależnością

$$P = P_r + P_{rk} + P_k + P_{kk}. \tag{43}$$

Poszczególne moce wyrażają się zależnościami

$$\begin{aligned} P_r &= \alpha_r \cdot S_1 \cdot \vartheta, \\ P_{rk} &= \varphi_r \cdot \alpha_r \cdot S_2 \cdot \vartheta, \\ P_k &= \alpha_k \cdot S_1 \cdot \vartheta, \\ P_{kk} &= \varphi_k \alpha_k \cdot S_2 \cdot \vartheta. \end{aligned} \tag{44}$$

W powyższych zależnościach współczynnik przejmowania ciepła na drodze promieniowania α_r został określony z zależności (7).

Współczynnik przejmowania ciepła na drodze konwekcji swobodnej przyjęto wg zależności (40). Jako powierzchnię S_1 przyjęto powierzchnię jednostronną płyty oraz powierzchnię wynikającą z obwodu i grubości płyty:

$$S_1 = h \cdot l + 2(h+l)d. \tag{45}$$

Powierzchnia S_2 jest powierzchnią płyty w kanale

$$S_2 = h \cdot l. \tag{46}$$

Współczynnik konfiguracji φ_r dla dwu płyt równoległych obliczono z zależności (16). Na podstawie zależności (43) i (44) można wyznaczyć współczynnik korekcyjny φ_k

$$\varphi_k = \frac{1}{\alpha_k}\left[\frac{P}{\vartheta S_2} - \alpha_r\left(\frac{S_1}{S_2} + \varphi_r\right) - \frac{S_1}{S_2}\right]. \tag{47}$$

Badania przeprowadzono dla przyrostów temperatury w zakresie od 30 do 100 deg w pomieszczeniu bez dodatkowych ruchów powietrza.

W wyniku pomiarów i obliczeń otrzymano wykres przedstawiony na rys. 6.

Jak wynika z tego wykresu współczynnik uwzględniający wpływ szerokości kanału na oddawanie ciepła na drodze konwekcji swobodnej z kanału ma maksimum dla szerokości kanału $b \approx 15$ mm, a dla wartości większych dąży do jedności. Wynika z tego, że występuje zagadnienie optymalnego kanału, przy którym oddawanie ciepła na drodze konwekcji swobodnej będzie największe.

4. POJEMNOŚCI CIEPLNE

Pojemność cieplna jednorodnego elementu o masie m i cieple właściwym c_w wyraża się zależnością

$$C = m \cdot c_w. \tag{48}$$

Dla elementów w zastępczym schemacie cieplnym traktowanych jako jedno ciało (np. uzwojenie, rdzeń) a składających się w rzeczywistości z różnych materiałów (np. uzwojenie składa się z przewodu i materiału izolacyjnego) wyznacza się zastępczą pojemność cieplną sumując pojemności cieplne poszczególnych materiałów według zależności

$$C_i = \sum_{k=1}^{n} m_k c_{wk}. \tag{49}$$

W zastępczym schemacie cieplnym transformatora pojemności występują tylko wtedy, gdy wyznaczamy przebiegi cieplne nieustalone — charakterystyki temperaturowo-czasowe.

5. WNIOSKI

Wyznaczenie parametrów schematu cieplnego transformatora suchego przy chłodzeniu naturalnym polega na określeniu współczynników oddawania ciepła i współczynników konfiguracji powierzchni.

1. Współczynnik przejmowania ciepła na drodze promieniowania może być wyznaczony z równania Stefana Boltzmana (7), a współczynnik konfiguracji powierzchni przy promieniowaniu zależny jest od jej ukształtowania i może być wyznaczony z równania (10) lub (12), (13), (14) i (15).

2. Współczynnik przejmowania ciepła na drodze konwekcji swobodnej z powierzchni uzwojeń transformatora znajdującej się w przestrzeni nieograniczonej innymi ciałami może być obliczony z zależności

$$\alpha_k = 1{,}38 \left(\frac{\vartheta}{h}\right)^{1/4}.$$

Zależność ta pokrywa się praktycznie z wynikami badań Schmidta i Beckmana i została potwierdzona przez autorów na drodze doświadczalnej.

3. Współczynnik uwzględniający wpływ szerokości kanału na przejmowanie ciepła na drodze konwekcji swobodnej podany jest w postaci krzywej na rys. 6. Jak wynika z przebiegu tej krzywej występuje optymalna szerokość kanału, przy której oddawanie ciepła z powierzchni wewnętrznej do otoczenia jest największe.

4. Parametry pojemności cieplnych i przewodzenia materiałowego wylicza się z zależności (4) i (49) na podstawie własności fizycznych zastosowanych materiałów.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. Lasocki, Zastępczy schemat cieplny transformatora suchego, Rozprawy Elektrotechniczne, nr 1, 1972.
2. T. Koter, W. Lasocki, Zagadnienie oddawania ciepła na drodze konwekcji swobodnej z uzwojeń w transformatorach suchych, Materiały II Konferencji Transformatorowej, Łódź 1970.
3. C. Eastgate, Simplified Steady-State Thermal Calculations for Naturally Cooled Transformers, Proc. Inst. Electr. Engrs., No 6, 1965.
4. G. Gotter, Nagrewanije i ochłorzdienije elektriczeskich maszin, Moskwa 1961.
5. A. A. Halascy, Temperature Rise of Dry-Type Transformers, Power Apparatus and Systems, No 37, 1958.

6. E. Jezierski, Transformatory. Podstawy teoretyczne, WNT, Warszawa 1965.
7. P. Lein, Beitrag zur Erwärmungsberechnung von Trockentransformatoren mit axialen Kühlkanalen, Elektrie, Nr 5, 1967.
8. H. Mc Adams, Heat Transmission, New York 1954.
9. G. Popov, S. Genov, Berechnung der Erwärmung eines Trockentransformators, Wissenschaftl. Z. Elektrotechn., Nr 1, 1965.
10. B. Staniszewski, Wymiana ciepła. Podstawy teoretyczne, PWN, Warszawa 1963.

T. KOTER, W. LASOCKI

PARAMETERS IN THE THERMAL EQUIVALENT CIRCUIT OF A DRY TRANSFORMER IN THE CASE OF NATURAL COOLING

Summary

The paper continues the general topic of thermal questions in dry transformers. The first part was published in [1]. The basic equations are discussed permitting the determination of the thermal conductivity in an equivalent circuit. The results of an experimental test concerning the coefficient of heat transfer are shown in case of the free convection of heat from the windings. These coefficients in the papers of different authors are not similar.

The method is described for computing the correction coefficient taking into account the influence of the width of cooling ducts on the heat transfer with natural convection.

T. KOTER, W. LASOCKI

L'ANALYSE DER PARAMÈTRES D'UN CIRCUIT ÉQUIVALENT THERMIQUE DU TRANSFORMATEUR SEC

Résumé

L'article continue l'analyse des problèmes thermique dans les transformateurs secs, présentés dans l'ouverage [1].

Les auteurs exposent un procédé permettant de détérminer les conductivités et les capacités thermique d'un circuit equivalent thermique du transformateur sec. Ils présentent les résultats des recherches experimentalles visant à déterminer les coefficients de la convection naturelle des surfaces verticales externes des enroulements cylindriques. On discute aussi l'influence des canaux axiaux sur les coefficients de la convection naturelle des surfaces intérieurs des enroulements.

T. KOTER, W. LASOCKI

PARAMETER IM WÄRMEERSATZSCHALTUNG DES TROCKENTRANSFORMATORS BEI NATÜRLICHER KÜHLUNG

Zusammenfassung

Der Artikel enthält eine Fortsetzung der Analyse von Wärmeproblemen in Trockentransformatoren, die bereits in der Arbeit [1] beschrieben worden sind.

Im Artikel wurden grundsätzliche Abhängigkeiten zur Bestimmung von Wärmeleitfähigkeiten im Ersatzschaltbild besprochen. Auf experimentellem Weg ist der Koeffizient der natürlichen Wärmeabgabe

Wicklung-Luft bestimmt worden. Die nach verschiedenen Autoren angegebenen Werte dieses Koeffizienten unterscheiden sich sehr voneinander.

Es wird eine Methode beschrieben, die den Einfluss der Breite des Kühlungskanals auf die natürliche Konvektions-Wärmeabgabe berücksichtigt. Das Verfahren ermöglicht eine einfache Bestimmung des Korrektionskoeffizienten.

Т. КОТЕР, В. ЛЯСОЦКИ

ПАРАМЕТРЫ В ТЕПЛОВОЙ СХЕМЕ ЗАМЕЩЕНИЯ СУХОГО ТРАНСФОРМАТОРА ПРИ ЕСТЕСТВЕННОМ ОХЛАЖДЕНИИ

Р е з ю м е

Статья является продолжением работы [1] по вопросу тепловых проблем в сухих трансформаторах. Описаны основные зависимости, позволяющие определить теплопроводности в схеме замещения. Приводятся результаты экспериментальной проверки коэффициентов теплообмена обмоток при естественной конвекции. Предлагается метод определения корректирующего коэффициента учитывающего влияние ширины канала на отвод тепла путем естественной конвекции.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1973, 19, z. 1, ss. 197-209

621.391

Problemy optymalizacji systemów wielodostępowych ze zwielokrotnianiem centralnym

WOJCIECH SOBCZAK (GDAŃSK),

Wydział Elektroniki Politechniki Gdańskiej

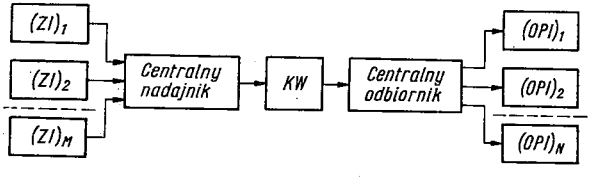
Otrzymano 29.11.1971

Praca niniejsza dotyczy systemów wielodostępowych ze zwielokrotnianiem centralnym, przy czym przekazywane od różnych źródeł informacje mogą się zmieniać w sposób ciągły. Podana została metoda obliczania jakości optymalnych odbiorników. Rozważania ogólne zilustrowano przykładami systemów, w których stosowana jest jednoczesna modulacja amplitudy, częstotliwości i fazy.

1. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA

Struktura systemów wielodostępowych ze zwielokrotnianiem centralnym pokazana jest na rysunku 1.

Zakładamy, że mamy M źródeł informacji. Każde ze źródeł może wysyłać wiadomość będącą elementem zbioru jednowymiarowego ciągłego. Wiadomość wysyłaną przez m-te źródło informacji oznaczmy przez $x_m (m = 1, 2, \ldots, M)$. Wiadomości przekazywane są do centralnego nadajnika, gdzie przyporządkowywany jest im sygnał $s(t; x_1, x_2, \ldots, x_M)$.



Rys. 1. Schemat blokowy systemów wielodostępowych ze zwielokrotnianiem centralnym; (ZI) — źródło informacji, KW — kanał wspólny, (OPI) — obiekt przeznaczenia informacji

Sygnał ten po przejściu przez kanał KW dociera do centralnego odbiornika. Sygnał odebrany $y(t)$ jest sumą sygnału nadanego $s(t; x_1, x_2, \ldots, x_M)$ oraz zakłócenia $z(t)$:

$$y(t) = s(t; x_1, x_2, \ldots, x_M) + z(t). \tag{1}$$

Szum $z(t)$ występujący w powyższym wzorze jest realizacją białego szumu gaussowskiego. Decyzje o nadanych wiadomościach są podejmowane w centralnym odbiorniku i mogą być ewentualnie przekazane dalej do obiektów przeznaczenia informacji (OPI). Liczba obiektów przeznaczenia informacji może być w ogólności różna od liczby źródeł

informacji. Celem naszym jest znalezienie optymalnych reguł decyzyjnych i określenie ich jakości.

Jako kryterium jakości odbioru przyjmiemy błędy średnio-kwadratowe decyzji. Aby osiągnąć zamierzony cel, należy wcześniej wyznaczyć warunkową gęstość prawdopodobieństwa wiadomości, przy warunku że dany jest sygnał odebrany $y(.)$. Zgodnie z twierdzeniem Bayesa, powyższa gęstość prawdopodobieństwa może być wyrażona następująco:

$$p_x[x_1, x_2, \ldots, x_M|y(\cdot)] = Cp_y[y(\cdot)|x_1, x_2, \ldots, x_M]p_x(x_1, x_2, \ldots, x_M), \tag{2}$$

gdzie C oznacza stałą, $p_x(x_1, x_2, \ldots, x_M)$ jest gęstością rozkładu a priori wiadomości, zaś $p_y[y(\cdot)|x_1, \ldots, x_M]$ jest warunkową gęstością prawdopodobieństwa sygnałów odbieranych, gdy ustalony jest zespół wiadomości nadanych.

Z uwagi na związek (1) warunkową gęstość prawdopodobieństwa $p_y[y(\cdot)|x_1\ x_2, \ldots, x_M]$ można wyrazić przez gęstość prawdopodobieństwa realizacji zakłóceń

$$p_y[y(\cdot)|x_1, \ldots, x_M] = p_z[y(\cdot) - s(\cdot; x_1, x_2, \ldots, x_M)]. \tag{3}$$

Ponieważ $z(t)$ jest realizacją białego szumu gaussowskiego, wobec tego

$$p_z[z(\cdot)] = C_1 \exp\left[-\frac{1}{2S_0}\int_0^T 2^2(t)dt\right], \tag{4}$$

gdzie S_0 jest stałą gęstością widma białego szumu, C_1 jest stałą normalizacyjną, zaś T jest czasem trwania sygnałów nadawanych.

Jeżeli z zależności (1) wyznaczymy $z(t)$ i podstawimy do wzoru (4), a następnie skorzystamy z zależności (3) i (2), to warunkowa gęstość prawdopodobieństwa wiadomości przy ustalonym sygnale odebranym ma postać następującą:

$$p_x[x_1, x_2, \ldots, x_M|y(\cdot)] = C'p_x(x_1, \ldots, x_M)\exp\left\{-\frac{1}{2S_0}\int_0^T [y(t) - s(t; x_1, \ldots, x_M)]^2\,dt\right\}. \tag{5}$$

Z uwagi na uproszczenie obliczeń, wygodnie jest wyeliminować funkcję wykładniczą po prawej stronie. Można to zrobić logarytmując obydwie strony

$$\ln p_x[x_1, x_2, \ldots, x_M|y(\cdot)] = C'' + \ln p_x(x_1, \ldots, x_M) - \frac{1}{2S_0}\int_0^T [y(t) - s(t; x_1, \ldots, x_M)]^2 dt. \tag{6}$$

Ponieważ funkcja logarytmiczna jest funkcją monotoniczną, więc funkcje opisane wzorami (5) i (6) osiągają maksimum dla tych samych wartości argumentów.

Załóżmy teraz, że wiadomości są statystycznie niezależne i mają rozkłady równomierne. Wówczas

$$\ln p_x(x_1, x_2, \ldots, x_M) = C_2 = \text{const}. \tag{7}$$

Uwzględniając powyższy fakt, zależność (6) upraszcza się do postaci

$$\ln p_x[x_1, x_2, \ldots, x_M|y(\cdot)] = c''' - \frac{1}{2S_0}\int_0^T [y(t) - s(t; x_1, x_2, \ldots, x_M)]^2 dt. \tag{8}$$

Decyzje optymalne $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_M^*)$ są tymi wartościami argumentów $(x_1, x_2, \ldots, x_M)$, dla których funkcja $\ln p_x[x_1, x_2, \ldots, x_M|y(\cdot)]$ osiąga maksimum. Są one zatem rozwiązaniami następującego układu M równań

$$\frac{\partial}{\partial x_m}\int_0^T [y(t)-s(t; x_1, x_2, \ldots, x_M)]^2 dt = 0; \quad m = 1, 2, \ldots, M. \tag{9}$$

Równania te można sprowadzić do postaci

$$\frac{\partial}{\partial x_m}[E(x_1, \ldots, x_M) - 2\int_0^T y(t)s(t; x_1, \ldots, x_M)dt] = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, M, \tag{10}$$

gdzie $E(x_1, x_2, \ldots, x_M)$ oznacza energię sygnału $s(t; x_1, x_2, \ldots, x_M)$, tj.

$$E(x_1, x_2, \ldots, x_M) = \int_0^T s^2(t; x_1, x_2, \ldots, x_M)dt. \tag{11}$$

Ze względu na to, że sygnał odebrany $y(t)$ jest realizacją procesu stochastycznego

$$\underline{Y}(t) = s(t; x_1, x_2, \ldots, x_M) + \underline{Z}(t), \tag{12}$$

zatem decyzje $(\underline{X}_1^*, \underline{X}_2^*, \ldots, \underline{X}_M^*)$ są zmiennymi losowymi.

W następnych punktach podamy przykłady optymalnych reguł decyzyjnych dla konkretnych przypadków oraz opiszemy metodę obliczania błędów średniokwadratowych.

2. PRZYKŁADY OPTYMALNYCH ODBIORNIKÓW W PRZYPADKU, GDY DWIE LUB TRZY WIADOMOŚCI SĄ PRZENOSZONE PRZEZ JEDEN SYGNAŁ

Jako pierwszy przykład rozważmy sygnały z modulowaną amplitudą i częstotliwością, tj.

$$s(t; x_1, x_2) = x_1 \cos[(\omega_0 + x_2)t]; \quad t \in \langle 0, T\rangle. \tag{13}$$

Przybliżona wartość energii powyższego sygnału wynosi

$$E(x_1, x_2) \approx \frac{1}{2}x_1^2 T. \tag{14}$$

Dla sygnałów (13), równania (10) mają postać

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{1}{2}x_1^2 T - 2x_1\int_0^T y(t)\cos[(\omega_0+x_2)t]dt\right\} = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\frac{1}{2}x_1^2 T - 2x_1\int_0^T y(t)\cos[(\omega_0+x_2)t]dt\right\} = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

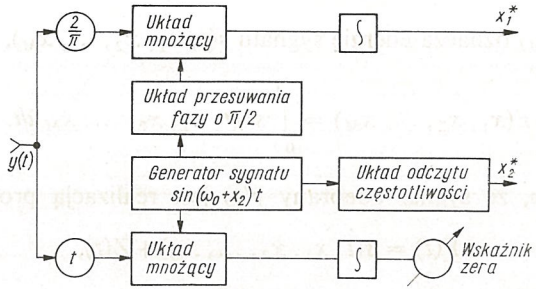
Rozwiązania powyższych równań są optymalnymi decyzjami.

Równania (15) mogą być uproszczone do postaci

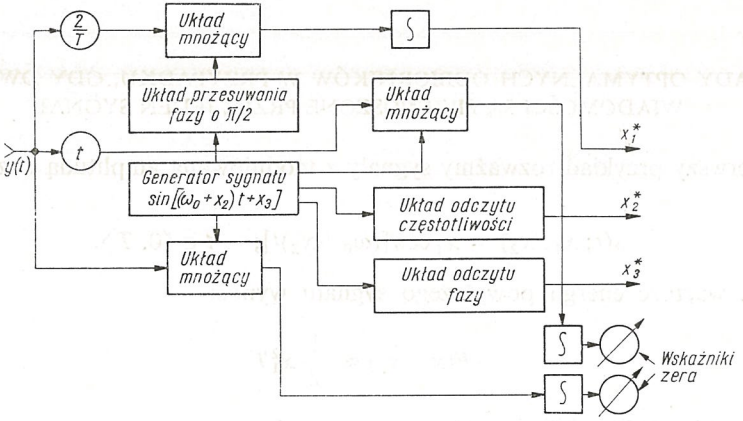
$$x_1 = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cos[(\omega_0 + x_2)t_2\,dt,$$

$$\int_0^T ty(t)\sin[(\omega_0 + x_2)t]\,dt = 0. \tag{16}$$

Struktura optymalnego odbiornika wynikająca z powyższych równań pokazana jest na rysunku 2.



Rys. 2. Struktura optymalnego odbiornika sygnałów z modulowaną amplitudą i częstotliwością



Rys. 3. Optymalny odbiornik sygnałów z modulacją amplitudy, częstotliwości i fazy

Zmianę częstotliwości sygnału sinusoidalnego należy doprowadzić do wartości zerowej w zaznaczonym miejscu. Zerująca częstotliwość jest optymalną decyzją x_2^*, zaś wartość na wyjściu górnego układu całkującego jest optymalną decyzją x_1^*.

Jako drugi przykład przytoczymy sygnały z modulowaną amplitudą, częstotliwością i fazą. Sygnały nadawane mają zatem postać

$$s(t; x_1, x_2, x_3) = x_1\cos[(\omega_0 + x_2)t + x_3]; \quad t \in \langle 0, T\rangle. \tag{17}$$