

W tym przypadku równania (10) mogą być sprowadzone do postaci

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos[(\omega_0 + x_2)t + x_3] dt, \\ \int_0^T t y(t) \sin[(\omega_0 + x_2)t + x_3] dt &= 0, \\ \int_0^T y(t) \sin[(\omega_0 + x_2)t + x_3] dt &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Schemat blokowy odbiornika, którego działanie opisują te równania, pokazany jest na rysunku 3.

Częstotliwość i fazę sygnału sinusoidalnego należy tak dobrać, aby uzyskać zerowe wartości na wyjściach dwu zaznaczonych układów całkujących. Odczytane w momencie zerowania częstotliwość i faza są decyzjami x_2^* oraz x_3^* . Decyzja x_1^* jest wartością wyjściową górnego układu całkującego.

3. METODA OBLICZANIA PRZYBLIŻONYCH WARTOŚCI BŁĘDÓW ŚREDNIOKWADRATOWYCH DECYZJI

Załóżmy teraz, że nadano zespół wiadomości $(x'_1, x'_2, \dots, x'_M)$, a zatem do kanału został wprowadzony sygnał $s(t; x'_1, x'_2, \dots, x'_M)$. Sygnał odebrany jest wówczas realizacją procesu stochastycznego

$$\underline{Y}(t) = s(t; x'_1, x'_2, \dots, x'_M) + \underline{Z}(t). \quad (19)$$

Podstawiając ten proces do równań (9), po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^T [s(t; x_1, \dots, x_M) - s(t; x'_1, \dots, x'_M)] \frac{\partial s(t; x_1, \dots, x_M)}{\partial x_m} dt &= \\ &= \int_0^T \underline{Z}(t) \frac{\partial s(t; x_1, \dots, x_M)}{\partial x_m} dt. \end{aligned} \quad (20)$$

Oznaczmy lewe strony powyższych równań przez $D_m(x_1, \dots, x_M; x'_1, \dots, x'_M)$, zaś prawe strony przez $\underline{V}_m(x_1, \dots, x_M)$, tj.

$$\begin{aligned} D_m(x_1, \dots, x_M; x'_1, \dots, x'_M) &= \\ &= \int_0^T [s(t; x_1, \dots, x_M) - s(t; x'_1, \dots, x'_M)] \frac{\partial s(t; x_1, \dots, x_M)}{\partial x_m} dt, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\underline{V}_m(x_1, \dots, x_M) = \int_0^T \underline{Z}(t) \frac{\partial s(t; x_1, \dots, x_M)}{\partial x_m} dt. \quad (22)$$

Ponieważ zmienne $\underline{V}_m(x_1, \dots, x_M)$, $(m = 1, 2, \dots, M)$ są funkcjami liniowymi białego szumu gaussowskiego, zatem są to zmienne losowe gaussowskie.

Równania (9) możemy teraz zapisać w krótkiej formie

$$D_m(x_1, \dots, x_M; x'_1, \dots, x'_M) = \underline{V}_m(x_1, \dots, x_M); \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (23)$$

Ważnym założeniem w naszych rozważaniach jest założenie występowania w kanale szumu na tyle małego, iż można przyjąć że różnica między nadaną wiadomością a decyzją jest mała. W oparciu o powyższe założenie można rozwinąć w szeregi potęgowe obydwie strony równań (23). Rozwijając lewe strony równań otrzymujemy

$$\begin{aligned} D_m(x_1, \dots, x_M; x'_1, \dots, x'_M) = D_m + \sum_i^M D_{m,i}(x_i - x'_i) + \sum_i^M \sum_j^M D_{m,ij}(x_i - x'_i)(x_j - x'_j) + \\ + \sum_i^M \sum_j^M \sum_n^M D_{m,ijn}(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)(x_n - x'_n) + \dots, \quad m = 1, 2, \dots, M, \end{aligned} \quad (24)$$

gdzie

$$D_{m,i_1 i_2 \dots i_u} = \frac{1}{u!} \left[\frac{\partial^u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_u}} D_m(x_1, \dots, x_M; x'_1, \dots, x'_M) \right]_{x_1 = x'_1; \dots; x_M = x'_M}. \quad (25)$$

Wygodnie jest wprowadzić oznaczenia

$$\begin{aligned} B_{p_1, r_1; p_2, r_2; \dots; p_n, r_n; l_1, t_1; l_2, t_2; \dots; l_m, t_m} = \\ = \left\{ \int_0^T \left[\frac{\partial^{r_1 + r_2 + \dots + r_n} s(t; x_1, \dots, x_M)}{\partial x_{p_1}^{r_1} \partial x_{p_2}^{r_2} \dots \partial x_{p_n}^{r_n}} \frac{\partial^{t_1 + t_2 + \dots + t_m} s(t; x_1, \dots, x_M)}{\partial x_{l_1}^{t_1} \partial x_{l_2}^{t_2} \dots \partial x_{l_m}^{t_m}} \right] dt \right\}_{x_1 = x'_1; \dots; x_M = x'_M}. \end{aligned} \quad (26)$$

Przy pomocy zdefiniowanych wyżej współczynników można wyrazić wszystkie współczynniki w rozwinięciu (24). Tak więc mamy np.

$$\begin{aligned} D_k &= 0, \\ D_{k,i} &= B_{k,1;i,1}, \\ D_{k,ij} &= \frac{1}{2!} (B_{i,1;k,1;j,1} + B_{j,1;k,1;i,1} + B_{i,1;j,1;k,1}), \\ D_{k,ijm} &= \frac{1}{3!} (B_{i,1;j,1;k,1;m,1} + B_{i,1;k,1;m,1;j,1} + B_{j,1;k,1;m,1;i,1} + B_{i,1;j,1;m,1;k,1} + \\ &+ B_{i,1;k,1;j,1;m,1} + B_{j,1;k,1;i,1;m,1} + B_{k,1;m,1;i,1;j,1}; \\ k, i, j, m &= 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (27)$$

Rozwińmy teraz prawe strony równań (23)

$$\begin{aligned} \underline{V}_m(x_1, x_2, \dots, x_M) = \underline{V}'_m + \sum_i^M \underline{V}'_{m,i}(x_i - x'_i) + \sum_i^M \sum_j^M \underline{V}'_{m,ij}(x_i - x'_i)(x_j - x'_j) + \\ + \sum_i^M \sum_j^M \sum_n^M \underline{V}'_{m,ijn}(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)(x_n - x'_n) + \dots, \end{aligned} \quad (28)$$

gdzie

$$\underline{V}'_{m,i_1 i_2 \dots i_u} = \frac{1}{U!} \left[\frac{\partial^u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_u}} \underline{V}_m(x_1, \dots, x_M) \right]_{x_1 = x'_1; \dots; x_M = x'_M}, \quad (29)$$

$$k, i_1, i_2, \dots, i_u = 1, 2, \dots, M.$$

Ze wzorów (22) i (29) wynika, że zmienne losowe $\underline{V}_{m,i_1 i_2 \dots i_u}$ są funkcjami liniowymi białego szumu gaussowskiego. Łatwo można znaleźć, że ich wartości średnie i dyspersje są następujące:

$$\begin{aligned} E\underline{V}'_{k,i} &= 0, \\ \sigma^2(\underline{V}'_{k,i}) &= S_o B_{k,1;i,1:k,1;i,1}, \\ E\underline{V}'_{k,ij} &= 0, \\ \sigma^2(\underline{V}'_{k,ij}) &= S_o B_{k,1;i,1;j,1:k,1;i,1;j,1}, \\ E\underline{V}'_{k,ijn} &= 0, \\ \sigma^2(\underline{V}'_{k,ijn}) &= S_o B_{k,1;i,1;j,1;n,1:k,1;i,1;j,1;n,1}. \end{aligned} \quad (30)$$

Wprowadźmy nowe zmienne

$$\underline{V}_{k,i \dots j} = \frac{\underline{V}'_{k,i \dots j}}{\sigma(\underline{V}'_{k,i \dots j})}. \quad (31)$$

Zmienne $\underline{V}_{k,i \dots j}$ są unormowanymi zmiennymi losowymi gaussowskimi. Ich wartości średnie są równe zeru, zaś dyspersje są jednostkowe. Podstawiając dyspersje opisane wzorami (30) do definicji wyrażonej formułą (31) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \underline{V}_k &= \frac{\underline{V}'_k}{\sqrt{S_o B_{k,1:k,1}}}, \\ \underline{V}_{k,i} &= \frac{\underline{V}'_{k,i}}{\sqrt{S_o B_{k,1;i,1:k,1;i,1}}}, \\ \underline{V}_{k,ij} &= \frac{\underline{V}'_{k,ij}}{\sqrt{S_o B_{k,1;i,1;j,1:k,1;i,1;j,1}}}, \\ \underline{V}_{k,ijn} &= \frac{\underline{V}'_{k,ijn}}{\sqrt{S_o B_{k,1;i,1;j,1;n,1:k,1;i,1;j,1;n,1}}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Prawe strony równań (23) wyrażone przez powyższe zmienne losowe mają postać

$$\begin{aligned} \underline{V}_m(x_1, \dots, x_M) &= \sqrt{S_o B_{m,1:m,1}} \left[\underline{V}_m + \sum_i \sqrt{\frac{B_{m,1;i,1:m,1;i,1}}{B_{m,1:m,1}}} \underline{V}_{m,i}(x_i - x'_i) + \right. \\ &\quad + \sum_i \sum_j \sqrt{\frac{B_{m,1;i,1;j,1:m,1;i,1;j,1}}{B_{m,1:m,1}}} \underline{V}_{m,ij}(x_i - x'_i)(x_j - x'_j) + \\ &\quad \left. + \sum_i \sum_j \sum_k \sqrt{\frac{B_{m,1;i,1;j,1;k,1:m,1;i,1;j,1;k,1}}{B_{m,1:m,1}}} \underline{V}_{m,ijk}(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)(x_k - x'_k) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Wprowadzając oznaczenia

$$b_{m,1i_1i_2\dots i_n} = \sqrt{\frac{B_{m,1;i_1,1;i_2,1;\dots;i_n,1;m,1;i_1,1;i_2,1;\dots;i_n,1}}{B_{m,1:m,1}}}, \quad (34)$$

forma (33) upraszcza się

$$\begin{aligned} \underline{V}_m(x_1, \dots, x_M) = & \sqrt{S_o B_{m,1:m,1}} \left[\underline{V}_m + \sum_i b_{m,i} \underline{V}_{m,i} (x_i - x'_i) + \right. \\ & + \sum_i \sum_j b_{m,ij} \underline{V}_{m,ij} (x_i - x'_i) (x_j - x'_j) + \\ & \left. + \sum_i \sum_j \sum_k b_{m,ijk} \underline{V}_{m,ijk} (x_i - x'_i) (x_j - x'_j) (x_k - x'_k) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Wzory (24) oraz (35) przedstawiają odpowiednio rozwinięcia lewych i prawych stron równań (23), a zatem równania te mogą być przedstawione w następującej postaci

$$\begin{aligned} & \left[\sum_i D_{m,i} (x_i - x'_i) + \sum_i \sum_j D_{m,ij} (x_i - x'_i) (x_j - x'_j) + \right. \\ & \left. + \sum_i \sum_j \sum_k D_{m,ijk} (x_i - x'_i) (x_j - x'_j) (x_k - x'_k) + \dots \right] = \\ & = \sqrt{\frac{S_o}{B_{m,1:m,1}}} D_{m,m} \left[\underline{V}_m + \sum_i b_{m,i} (x_i - x'_i) + \sum_i \sum_j b_{m,ij} \underline{V}_{m,ij} (x_i - x'_i) (x_j - x'_j) + \right. \\ & \left. + \sum_i \sum_j \sum_k b_{m,ijk} \underline{V}_{m,ijk} (x_i - x'_i) (x_j - x'_j) (x_k - x'_k) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

Jedynymi współczynnikami w powyższych równaniach, które zależą od szumu są współczynniki

$$\gamma_m = \sqrt{\frac{S_o}{B_{m,1:m,1}}}; \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (37)$$

Z wzoru powyższego wynika, że współczynniki γ_m maleją w miarę jak zmniejsza się szum. Parametry $B_{m,1:m,1}$ występujące w mianownikach ułamków pod pierwiastkiem zależą od sposobu przyporządkowywania sygnałów nadawanym wiadomościom. Przyporządkowanie jest tym lepsze, im wartości parametrów $B_{m,1:m,1}$ są większe. Parametry γ_m mogą zatem osiągać małą wartość w wyniku odpowiedniej modulacji sygnałów lub dla małego szumu, albo w przypadku gdy obydwa wymienione czynniki występują jednocześnie. Z uwagi na wcześniejsze założenie o małym szumie w kanale (a zatem o małych wartościach parametrów γ_m), rozwiązania układu równań (36) mogą być przedstawione w postaci następującego szeregu:

$$x_i - x'_i = A_{i,1} \gamma_i + A_{i,2} \gamma_i^2 + A_{i,3} \gamma_i^3 + \dots, \quad (38)$$

gdzie $A_{i,l}$ są pewnymi współczynnikami liczbowymi.

Zespół wiadomości $x'_i (i = 1, 2, \dots, M)$ jest ustalony, zaś rozwiązania układu równań (36) są optymalnymi decyzjami. Z uwagi na szum w kanale, optymalne decyzje $\underline{X}_i^*$ są zmiennymi losowymi; w związku z tym w rozwinięciu (38) współczynniki $A_{i,l}$ też mają charakter zmiennych losowych. Zamiast rozwinięcia (38) mamy zatem

$$x'_i - \underline{X}_i^* = \underline{A}_{i,1}\gamma_i + \underline{A}_{i,2}\gamma_i^2 + \underline{A}_{i,3}\gamma_i^3 + \dots \quad (39)$$

Podstawiając powyższe rozwinięcie do równań (36) otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \sum_i D_{m,i}(\underline{A}_{i,1}\gamma_i + \underline{A}_{i,2}\gamma_i^2 + \dots) + \\ & \sum_i \sum_j D_{m,ij}(\underline{A}_{i,1}\gamma_i + \underline{A}_{i,2}\gamma_i^2 + \dots)(\underline{A}_{j,1}\gamma_j + \underline{A}_{j,2}\gamma_j^2 + \dots) + \dots = \\ & = D_{m,m}\gamma_m \left[\underline{V}_m + \sum_i b_{m,i} \underline{V}_{m,i}(\underline{A}_{i,1}\gamma_i + \underline{A}_{i,2}\gamma_i^2 + \dots) + \dots \right]; \end{aligned} \quad (40)$$

$$m = 1, 2, \dots, M.$$

Ponieważ rozważania nasze dotyczą sytuacji, w której przyjmujemy małe wartości współczynników γ_m , zatem kolejne potęgi parametrów γ_m stają się coraz mniejsze i mogą być pomijane. Tak więc biorąc pod uwagę jedynie składniki pierwszego rzędu, równania (40) upraszczają się do postaci

$$\sum_i D_{m,i}(\underline{A}_{i,1}\gamma_i) = D_{m,m}\gamma_m \underline{V}_m; \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (41)$$

Pierwsze przybliżenia błędów decyzji są zatem rozwiązaniami układu równań liniowych, czyli

$$x'_i - \underline{X}_i^* \approx \underline{A}_{i,1}\gamma_i = \frac{\begin{vmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} & \dots & D_{1,i-1} & \gamma_1 & D_{1,1} & \underline{V}_1 & D_{1,i+1} & \dots & D_{1,M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{M,1} & D_{M,2} & \dots & D_{M,i-1} & \gamma_M & D_{M,1} & \underline{V}_M & D_{M,i+1} & \dots & D_{M,M} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D_{1,1} & \dots & D_{1,M} \\ \dots & \dots & \dots \\ D_{M,1} & \dots & D_{M,M} \end{vmatrix}}. \quad (42)$$

Pierwsze przybliżenie różnicy między ustaloną nadaną wiadomością x'_i a decyzją ma charakter zmiennej losowej. Jest to bowiem kombinacja liniowa zmiennych losowych gaussowskich $\underline{V}_m$ ($m = 1, 2, \dots, M$), będących funkcjami liniowymi szumu występującego w kanale. Po wyznaczeniu pierwszego przybliżenia błędu decyzji, w oparciu o równania (40) znajduje się przybliżenie rzędu drugiego. Biorąc pod uwagę wyrazy kwadratowe współczynników γ_m w równaniach (40), mamy

$$\sum_i D_{m,i}(\underline{A}_{i,2}\gamma_i^2) + \sum_i \sum_j D_{m,ij}(\underline{A}_{i,1}\gamma_i)(\underline{A}_{j,1}\gamma_j) = \sum_i b_{m,i} D_{m,m}(\gamma_m \underline{V}_{m,i})(\gamma_i \underline{A}_{i,1}), \quad (43)$$

czyli wyznaczniki występujące we wzorach (45) i (46) wyrażają się w przybliżeniu następująco

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} \\ D_{2,1} & D_{2,2} \end{vmatrix} &\approx \frac{(x'_1)^2 T^4}{12}, \\ \begin{vmatrix} \gamma_1 D_{1,1} \underline{V}_1 & D_{1,2} \\ \gamma_2 D_{2,2} \underline{V}_2 & D_{2,2} \end{vmatrix} &\approx \sqrt{\frac{S_o T}{2}} \frac{T^3 (x'_1)^2}{6} \underline{V}_1, \\ \begin{vmatrix} D_{1,1} & \gamma_1 D_{1,1} \underline{V}_1 \\ D_{2,1} & \gamma_2 D_{2,2} \underline{V}_2 \end{vmatrix} &\approx \sqrt{\frac{S_o T}{6}} \frac{x'_1 T^2}{2} \underline{V}_2. \end{aligned} \quad (48)$$

Podstawiając powyższe wartości do wzorów (45) i (46) otrzymujemy

$$\begin{aligned} x'_1 - \underline{X}_1^* &\approx 2 \sqrt{\frac{S_o}{2T}} \underline{V}_1, \\ x'_2 - \underline{X}_2^* &\approx \sqrt{\frac{6S_o}{x'_1 T}} \underline{V}_2. \end{aligned} \quad (49)$$

Ponieważ zmienne $\underline{V}_1$ i $\underline{V}_2$ są unormowanymi zmiennymi losowymi gaussowskimi, z ostatnich dwu wzorów wynikają następujące warunkowe wartości błędów średnio-kwadratowych decyzji przy ustalonych wiadomościach nadanych

$$\begin{aligned} E_{X^*|x'_1 x'_2} (X_1^* - x'_1)^2 &\approx \frac{2S_o}{T}, \\ E_{X^*|x'_1 x'_2} (X_2^* - x'_2)^2 &\approx \frac{6S_o}{T^3 (x'_1)^2}. \end{aligned} \quad (50)$$

Założyliśmy wcześniej, że wiadomości są statystycznie niezależne i mają rozkłady równomierne, tzn.

$$p_{x_i}(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x_i} & \text{dla } x_i \in \langle x_{i_a}, x_{i_b} \rangle, \\ 0 & \text{dla } x_i \notin \langle x_{i_a}, x_{i_b} \rangle \end{cases} \quad (51)$$

gdzie

$$x_{i_b} > x_{i_a} > 0 \quad \text{oraz} \quad x_{i_b} - x_{i_a} = \Delta x_i. \quad (52)$$

Uśredniając średnie warunkowe (50) po nadawanych wiadomościach otrzymuje się wartości błędów średnio-kwadratowych decyzji:

$$E(X_1 - \underline{X}_1^*)^2 \approx \frac{2S_o}{T} \quad (53)$$

$$E(X_2 - \underline{X}_2^*)^2 \approx \frac{6S_o}{T^3 x_{i_a} x_{i_b}} \quad (54)$$

Dla sygnałów z modulacją amplitudy i częstotliwości, przybliżona wartość stosunku sygnału do szumu $\bar{q}$ wyraża się wzorem

$$\bar{q} = \sqrt{\frac{\bar{E}}{S_o}} \approx \sqrt{\frac{T}{6S_o}} \Delta x_1. \quad (55)$$

Wyrażając błędy średnio kwadratowe decyzji przez stosunek sygnału do szumu otrzymujemy

$$E(\underline{X}_1 - \underline{X}_1^*)^2 \approx \frac{(\Delta x_1)^2}{3\bar{\rho}^2}, \quad (56)$$

$$E(\underline{X}_2 - \underline{X}_2^*)^2 \approx \frac{(\Delta x_1)^2}{T\bar{\rho}^2 x_{1a} x_{1b}}. \quad (57)$$

Widać stąd, że dla sygnałów z modulacją amplitudy i częstotliwości, błędy średnio-kwadratowe decyzji maleją z kwadratem stosunku sygnału do szumu.

Należy pamiętać, że wzory (56) i (57) wyrażają wartości przybliżone błędów; w obliczeniach uwzględnione zostały jedynie pierwsze wyrazy rozwinięć błędów decyzji w szeregi potęgowe.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. Seidler, Lecture Notes on Communication Systems — Part II — Feedback, Multiple Access and Adaptive Communication Systems, Information Sciences Program Report, University of Hawaii Spring 1970.
2. W. Sobczak, Optimization of the Central Multiplexing Systems, Information Sciences Program Technical Report IS 71—1, University of Hawaii, February 1971.

W. SOBCZAK

OPTIMIZATION PROBLEMS FOR CENTRAL MULTIPLEXING SYSTEMS

Summary

This paper gives a method of calculation of mean square errors for central multiplexing systems, i.e., the systems serving to transmit several continuous messages simultaneously. The existence of small Gaussian white noise is assumed, which allows the use of the method of power expansion of function. The general considerations are illustrated by examples.

W. SOBCZAK

OPTIMALISATIONSPROBLEME DER MEHRZUGANGSSYSTEME MIT ZENTRALER VERVIELFACHUNG

Zusammenfassung

Dieser Beitrag betrifft Optimalisationsprobleme mit zentraler Vervielfachung, wobei sich die aus verschiedenen Quellen transferierten Informationen kontinuierlich verändern können. Es wurde die Berechnungsmethode für die optimale Güte der Empfänger angegeben. Allgemeine Betrachtungen wurden mit Beispielen von Systemen ergänzt, in denen gleichzeitig Amplituden-, Frequenz- und Phasenmodulation angewandt wird.

В. СОБЧАК

ВОПРОСЫ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ С МНОЖЕСТВЕННЫМ ДОСТУПОМ
И ЦЕНТРАЛЬНЫМ УПЛОТНЕНИЕМ

Р е з ю м е

В работе рассмотрены системы с множественным доступом и центральным уплотнением для передачи аналоговых сообщений из разных источников. Подан метод определения качества оптимальных приемников. Общее решение иллюстрировано примерами систем с одновременной модуляцией амплитуды, частоты и фазы.

TREŚĆ

C. S y c: Analiza stałoprądowych liniowych układów elektronicznych metodą liczb strukturalnych sprzężonych za pomocą maszyn cyfrowych	3
A. S k i b a, E. G o c: Realizacja filtrów środkowoprzepustowych z liniową fazą przez zastosowanie ogniw pięcioelementowych	17
S. A p a n a s e w i c z: Rozkład pola elektromagnetycznego w układzie: grupa przewodników równoległych, ekran, półprzestrzeń metalowa	37
E. T o t a - R a m i s z: Maszynowa analiza tranzystorowych złożonych liniowych układów wzmacniających prądu stałego w oparciu o parametry czwórnika zastępczego	49
Z. C z y ż y k o w s k i: Analiza i synteza nieliniowego członu operacyjnego modelującego dynamiczne pętle histerezy	63
Z. D u n a j s k i: Układ z hallotronami przeznaczony do pomiaru rezystancji przy prądzie zmiennym	77
J. S a w i c k i: Dokładność omiomyrów zwyczajnych	117
A. K r a s z e w s k i: Pomiar wilgotności metodą mikrofalową	137
I. K u z o r a, J. B a j o r e k: Wyznaczanie pojemności niesymetrycznych linii paskowych metodą elektroanalogii	165
T. K o t e r, W. L a s o c k i: Parametry w zastępczym schemacie cieplnym transformatora suchego przy chłodzeniu naturalnym	179
W. S o b c z a k: Problemy optymalizacji systemów wielodostępowych ze zwielokrotnianiem centralnym	197

CONTENTS — TABLE DES MATIÈRES — INHALT

C. S y c: D-C Analysis of Electronic Linear Circuits by the Method of Structural Conjugate Numbers by Means of Digital Computers	14
Analyse des circuits linéaires à courant direct par la méthode des nombres structuraux conjugués à l'aide des machines mathématiques	15
Analyse elektrischer, linearer, mittels Methode verkoppelter Strukturalzahlen mit Hilfe von Digitalrechnern berechneter Gleichstromsysteme	15
A. S k i b a, E. G o c: Realization of Constant-Delay Band-Pass Filters by Means of Five-Element Sections	35
Réalisation des filtres passe-bandes avec le temps de propagation de groupe constante qui sont composés de cinq éléments cellulaires	36
Aufbau von Bandpassfiltern mit linearem Phasengang durch Anwendung von Gliedern mit je fünf Bauelementen	36
S. A p a n a s e w i c z: Electromagnetic Field Distribution in a Screening Semi-Infinite Solid Due to Currents in Parallel Conductors	47
La distribution du champ électromagnétique dans le système: un groupe de conducteurs parallèles, écran, demi-espace métallique	47
Verteilung des elektromagnetischen Feldes im System: Gruppe paralleler Leitungen, Flachschild und metallischer Halbraum	47
E. T o t a - R a m i s z: Computer Analysis of Complicated Linear Transistor Direct Current Amplifiers Based on Twoport Parameters	60
Maschinelle Analyse verstärkender, zusammengesetzter Lineargleichstrom-Transistorensysteme in Anlehnung an Parameter eines Ersatzvierpols	60

Z. Czyżykowski: Analysis and Projecting of Nonlinear System With Operational Amplifier for Modelling of Dynamical Hysteresis Loop	75
Analyse und Synthese dynamische Schleifen modellierender Operationselemente	75
Z. Dunajski: Hall Effect Resistance A. C. Measuring System	114
Schaltung mit Hallgeneratoren zur Messung von ohmschen Widerständen bei Wechselstrom . .	114
J. Sawicki: Accuracy of Standard Ohmmeters	134
Exactitude des ohmmètres ordinaires	134
Genauigkeit einfacher Ohmmeter	135
A. Kraszewski: Measurement of Water Content by Microwave Method	163
Feuchtigkeitsmessung mittels Mikrowellenmethode	163
I. Kuzora, J. Bajorek: Analogue Method to Calculate Capacitance of Microstrip Transmission Lines	176
Détermination de la capacité non symétrique des lignes à bandes par la méthode électroanalogue	177
Bestimmung der Mikrowellen-Streifenleitungskapazität mittels Elektroanalogiemethode . . .	177
T. Kotter, W. Lasocki: Parameters in the Thermal Equivalent Circuit of a Dry Transformer in the Case of Natural Cooling	194
L'analyse des paramètres d'un circuit équivalent thermique du transformateur sec	194
Parameter im Wärmeersatzschaltung des Trockentransformators bei natürlicher Kühlung . . .	194
W. Sobczak: Optimization Problems for Central Multiplexing Systems	208
Optimalisationsprobleme der Mehrzugangssysteme mit zentraler Vervielfachung	208

СОДЕРЖАНИЕ

Ч. Сыц: Анализ линейных электронных схем постоянного тока методом сопряженных структурных чисел с помощью цифровых вычислительных машин	14
А. Скиба, Е. Гоц: Реализация полосовых фильтров с линейным фазовым сдвигом путем применения пятиэлементных звеньев	36
С. Апанасевич: Распределение электро-магнитного поля в системе: группа параллельных проводов, экран, металлическое полупространство	48
Э. Тот-Рашиш: Машинный метод анализа сложных транзисторных линейных усилительных схем постоянного тока обоснованный на приведении схемы к четырехполуснику	61
З. Чижиковский: Анализ и проектирование нелинейной схемы с решающим усилителем моделирующей динамические петли гистерезиса	75
З. Дунайский: Схема с датчиками Холла для измерения сопротивления при переменном токе	115
Е. Савицкий: Точность обыкновенных омметров	135
А. Крашевски: Измерение влажности на сверхвысоких частотах	163
И. Кузора, Е. Байорек: Определение емкости несимметрических полосковых линий методом электроанalogии	177
Т. Коттер, В. Лясоцки: Параметры в тепловой схеме замещения сухого трансформатора при естественном охлаждении	195
В. Собчак: Вопросы оптимизации систем с множественным доступом и центральным уплотнением	209

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTROTECHNIKI

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XIX·ZESZYT 2

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1973

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor Naczelny

PROF. DR WITOLD NOWICKI

Członkowie

PROF. TADEUSZ CHOLEWICKI, PROF. EUGENIUSZ JEZERSKI,
PROF. DR WITOLD ROSIŃSKI, PROF. DR STANISŁAW RYŻKO

Sekretarz

JANINA MATHEISEL

ADRES REDAKCJI

*Warszawa, Politechnika, Plac Jedności Robotniczej 1
Instytut Teleelektroniki, Gmach Elektroniki
pokój 343, tel. 21-007-564 oraz 25-09-10*

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
Warszawa, Miodowa 10

Nakład 660 (544+116)	Oddano do składania 7. XII. 1972 r.
Ark. wyd. 16,0 ark. druk. 12,25	Podpisano do druku w kwietniu 1973 r.
Papier druk. sat. kl. III, 80 g, 70×100	Druk ukończono w kwietniu 1973 r.
Zamówienie nr 1708/72	Cena zł 40,— R-30

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

Analiza pewnej klasy nieliniowych obwodów rezystancyjnych w przestrzeni m_n

MICHAŁ TADEUSIEWICZ (ŁÓDŹ)

Instytut Podstaw Elektrotechniki Politechniki Łódzkiej

Otrzymano 10.2.1972

Tematem pracy jest analiza rozgałęzionych obwodów elektrycznych zawierających liniowe i nieliniowe oporniki. Wymuszeniami w rozważanych obwodach są niezależne, stałe w czasie napięcia i prądy źródłowe. W oparciu o pewne pojęcia i twierdzenia analizy funkcjonalnej opracowano w kilku wariantach metodę numeryczną rozwiązywania obwodów oraz określono zakres jej przydatności. Wyniki rozważań pozwalają ułożyć program obliczeń na maszynie cyfrową. Wykazano ponadto, że przedstawiona metoda może służyć do rozwiązywania obwodów zawierających poza wymienionymi elementami również tranzystory.

1. WSTĘP

Rozgałęzione, nieliniowe obwody elektryczne mogą być analizowane bądź na modelach fizycznych, bądź też na drodze analitycznej. Badania modelowe można przeprowadzić przy użyciu maszyny analogowej, co pozwala uwzględnić różne warianty problemu, ale otrzymane rezultaty są na ogół mało dokładne. Alternatywnym rozwiązaniem zagadnienia jest opracowanie matematycznego algorytmu umożliwiającego wykonywanie obliczeń na maszynie cyfrowej. Istotną zaletą tego rodzaju postępowania jest możliwość wykorzystania wspólnego programu do rozwiązywania rozmaitych obwodów o różnej konfiguracji, przy czym zmianie podlegają tylko dane wejściowe. Wyniki obliczeń charakteryzują się dużą dokładnością i są podawane w postaci tabel lub obserwowane na ekranach, jeżeli maszyna cyfrowa zaopatrzona jest w odpowiednie przystawki.

Metody obliczania odpowiedzi nieliniowych obwodów elektrycznych są omówione między innymi w pracach [1], [3], [5-6], [8], [10-13], [16-20].

Jednym z aktualnych, interesujących problemów teorii obwodów jest analiza nieliniowych obwodów rezystancyjnych. Zagadnieniu temu poświęcono w ostatnich latach wiele publikacji, jak np. [1-3], [6], [10-11], [16-18], [20].

To szczególne zainteresowanie obwodami rezystancyjnymi wynika z następujących powodów.

1) Obwody R , L , C , w których wymuszeniami są stałe w czasie napięcia i prądy źródłowe zachowują się w stanie ustalonym jak obwody rezystancyjne otrzymane w rezultacie zwarcia cewek i usunięcia kondensatorów.

2) Można wykazać [19], że obliczanie w stanie nieustalonym obwodów zawierających liniowe i nieliniowe oporniki, cewki i kondensatory może być sprowadzone do rozwiązania odpowiedniego, zastępczego nieliniowego obwodu rezystancyjnego.

3) Wiele nieliniowych obwodów rezystancyjnych zawierających np. diody, warystory, tranzystory ma duże znaczenie praktyczne.

Omówione w literaturze metody obliczania nieliniowych obwodów rezystancyjnych wymagają na ogół spełnienia założeń silnie ograniczających zakres zastosowań. Metody bardziej ogólne są z kolei skomplikowane pod względem rachunkowym. W związku z tym wydaje się sprawą nadal otwartą opracowanie metody pozwalającej szybko i wygodnie obliczać omawiane obwody.

2. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA

Zostaną rozpatrzone obwody zawierające liniowe i nieliniowe oporniki, w których wymuszeniami są stałe w czasie, niezależne napięcia i prądy źródłowe. Przyjęto, że wszystkie nieliniowe oporniki mogą być opisane bądź za pomocą charakterystyk rezystancyjnych $u = r(i)$, bądź też charakterystyk konduktancyjnych $i = g(u)$ będących funkcjami jednoznacznymi, nie malejącymi o ciągłych pochodnych pierwszego rzędu.

W niniejszej pracy pod pojęciem gałęzi należy rozumieć część obwodu zawierającą tylko jeden element dwukońcówkowy, którym może być opornik (liniowy lub nieliniowy), idealne źródło napięcia lub idealne źródło prądu.

Założono, że obwód ma następujące właściwości topologiczne:

1) można w nim wybrać takie drzewo, że wszystkie idealne źródła napięciowe i nieliniowe oporniki znajdują się wśród jego gałęzi, a wszystkie idealne źródła prądowe wśród dopełnień;

2) badany obwód można również podzielić na drzewo i dopełnienie w ten sposób, że wszystkie idealne źródła napięciowe znajdują się wśród jego gałęzi, a wszystkie idealne źródła prądowe i nieliniowe oporniki wśród dopełnień.

3. WYPROWADZENIE RÓWNAŃ OBWODU

Z obwodu wyodrębniono wszystkie gałęzie zawierające nieliniowe oporniki, umieszczając pozostałą jego część wewnątrz prostokąta, jak na rys. 1. Korzystając z twierdzenia o kompensacji zastąpiono nieliniowe oporniki odpowiednimi równoważnymi idealnymi źródłami napięciowymi lub prądowymi (rys. 2 i rys. 3). W rezultacie otrzymano obwody liniowe, do których można zastosować zasadę superpozycji w celu obliczenia prądów lub napięć. W przypadku obwodu przedstawionego na rys. 2 znajduje się

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_z - \mathbf{J}' \quad (3.1)$$

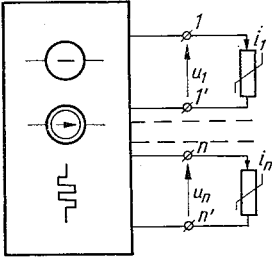
natomiast dla obwodu z rys. 3 otrzymuje się

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 - \mathbf{U}', \quad (3.2)$$

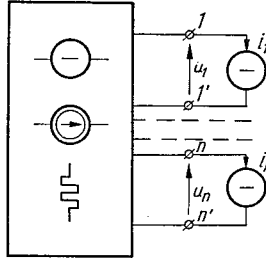
gdzie

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_z = \begin{bmatrix} i_{1z} \\ \vdots \\ i_{nz} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} u_{10} \\ \vdots \\ u_{n0} \end{bmatrix},$$

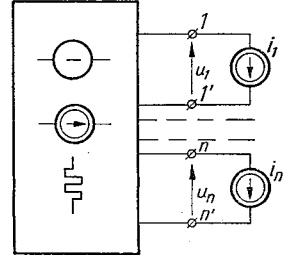
przy czym i_{kz} jest prądem w gałęzi kk' skierowanym od zacisku k do k' w stanie zwarcia (gdy wszystkie zaciski $11'$, ..., nn' są zwarte), zaś u_{k0} jest napięciem na zaciskach kk' skie-



Rys. 1. Obwód z wyodrębnionymi nieliniowymi opornikami

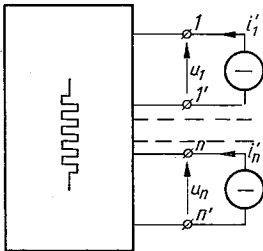


Rys. 2. Obwód z rys. 1 po zastosowaniu twierdzenia o kompensacji (napięciowego)

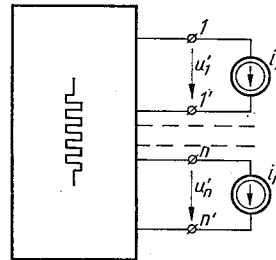


Rys. 3. Obwód z rys. 1 po zastosowaniu twierdzenia o kompensacji (prądowego)

rowanym od k' do k w stanie jałowym (gdy wszystkie zaciski $11'$, ..., nn') są rozwarte. $\mathbf{J}'$ i $\mathbf{U}'$ są macierzami kolumnowymi o n wierszach, których elementami są odpowiednio prądy i_1' , ..., i_n' stanowiące odpowiedź obwodu z rys. 4 oraz napięcia u_1' , ..., u_n' będące odpowiedzią obwodu przedstawionego na rys. 5.



Rys. 4. Obwód z rys. 2 po zwarcu niektórych źródeł napięcia i usunięciu źródeł prądu



Rys. 5. Obwód z rys. 3 po zwarcu źródeł napięcia i usunięciu niektórych źródeł prądu

Wewnątrz prostokątów pokazanych na rys. 4 i 5 znajduje się część liniowa obwodu z rys. 1, w której zwarte zostały wszystkie idealne źródła napięcia i usunięte wszystkie idealne źródła prądu. Jeżeli spełnione są założenia 1) i 2) z p. 2, to zarówno przy danych napięciach $u_1, \dots, u_n$ są wyznaczalne prądy $i_1', \dots, i_n'$ (rys. 4) jak i na odwrót, przy danych prądach $i_1, \dots, i_n$ są wyznaczalne napięcia $u_1', \dots, u_n'$ (rys. 5).

Na podstawie zasady superpozycji zastosowanej do obwodów z rys. 4 i 5 znajduje się następujące równania macierzowe:

$$\mathbf{J}' = \mathbf{G}\mathbf{U} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{U}' = \mathbf{R}\mathbf{J},$$

gdzie $\mathbf{G}$ i $\mathbf{R}$ są macierzami kwadratowymi stopnia n oraz $\mathbf{R} = \mathbf{G}^{-1}$.

Zakładając, że wszystkie nieliniowe oporniki mogą być opisane przy pomocy charakterystyk konduktancyjnych oraz podstawiając $i_k = g_k(u_k)$, ($k = 1, \dots, n$), otrzymuje się z równania (3.1)

$$\begin{bmatrix} g_1(u_1) \\ \vdots \\ g_n(u_n) \end{bmatrix} + \mathbf{G}\mathbf{U} = \mathbf{J}_z. \quad (3.3)$$

Podobnie przyjmując, że wszystkie nieliniowe oporniki mogą być opisane przy pomocy charakterystyk rezystancyjnych oraz oznaczając $u_k = r_k(i_k)$, ($k = 1, \dots, n$) znajduje się z równania (3.2)

$$\begin{bmatrix} r_1(i_1) \\ \vdots \\ r_n(i_n) \end{bmatrix} + \mathbf{R}\mathbf{J} = \mathbf{U}_0. \quad (3.4)$$

Podane w dodatku twierdzenia 1 i 2 precyzują własności macierzy $\mathbf{R}$ i $\mathbf{G}$.

4. ROZWIĄZANIE RÓWNIANIA OBWODU

Wyprowadzone w p. 3 nieliniowe równania (3.3) i (3.4) mogą być ogólnie przedstawione w postaci

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) + \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}, \quad (4.1)$$

gdzie

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \text{są punktami } n\text{-wymiarowej przestrzeni arytmetycznej } m_n[9],$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1) \\ \vdots \\ f_n(x_n) \end{bmatrix}$$

jest nieliniową operacją określoną na elementach przestrzeni m_n , o wartościach z przestrzeni m_n , natomiast $\mathbf{A}$ jest macierzą kwadratową stopnia n , której własności określają twierdzenia 1 i 2 podane w dodatku.

Wprowadzona do rozważań przestrzeń m_n jest liniową, unormowaną i zupełną przestrzenią (typu Banacha), w której normę określa się za pomocą wzoru [9], [15]

$$\|\mathbf{X}\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

W p. 2 przyjęto, że funkcje $f_k(x_k)$ są nie malejące oraz mają ciągłe pochodne pierwszego rzędu. Zakłada się ponadto, że funkcje $f_k(x_k)$, ($k = 1, \dots, n$), odwzorowują przestrzeń m_1

w zbiór $\langle \gamma_k, \delta_k \rangle$, przy czym $-\infty \leq \gamma_k < \delta_k \leq +\infty$. Zbiór zdefiniowanych w ten sposób operacji $F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$ zostanie oznaczony przez $\Phi^n(m_n; \gamma, \delta)$. Z rozważań przeprowadzonych w pracy [16] wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3. Jeżeli $A \in P$ oraz $F \in \Phi^n(m_n; \gamma, \delta)$, to równanie (4.1) ma jedno i tylko jedno rozwiązanie.¹⁾

Niżej zostanie przedstawionych kilka wariantów metod numerycznych pozwalających rozwiązać badane równanie (4.1). Idea wszystkich tych metod jest wspólna i polega na wprowadzeniu do równania pewnego parametru α , będącego elementem przestrzeni m_1 , w ten sposób, aby dla $\alpha = 0$ otrzymać łatwe do rozwiązania równanie liniowe lub równanie nieliniowe o znanym rozwiązaniu i aby dla $\alpha = 1$ równanie przyjęło postać (4.1). Zgodnie z powyższym zostanie rozpatrzone równanie

$$P(\alpha, X) = \Theta, \quad (4.2)$$

w którym P jest nieliniowym operatorem określonym na elementach α przestrzeni m_1 i elementach X przestrzeni m_n o wartościach z przestrzeni m_n , zaś Θ jest elementem zerowym przestrzeni m_n . W przypadku, gdy nie jest znane przybliżone rozwiązanie równania (4.1) operatorowi $P(\alpha, X)$ nadana zostanie postać

$$P_1(\alpha, X) = F(\alpha X) + AX - B. \quad (4.3)$$

Jeżeli dysponuje się przybliżeniem Z_0 bliskim rozwiązania dokładnego, to można rozpatrywać operator

$$P_2(\alpha, X) = F[Z_0 + \alpha(X - Z_0)] + AX - B. \quad (4.4)$$

Gdy wreszcie przez X_0 oznaczy się pewne przybliżenie początkowe (niekoniecznie bliskie rozwiązania dokładnego), wówczas można wziąć pod uwagę operator

$$P_3(\alpha, X) = F(X) + AX - \alpha(B - B_0) - B_0, \quad (4.5)$$

gdzie

$$B_0 = F(X_0) + AX_0. \quad (4.6)$$

Dla zdefiniowanych wyżej operatorów (4.3), (4.4) i (4.5) otrzymuje się odpowiednio przy $\alpha = 0$ następujące równania:

$$AX = B - F(\Theta), \quad (4.7)$$

następnie

$$AX = B - F(Z_0), \quad (4.8)$$

wreszcie

$$F(X) + AX = B_0. \quad (4.9)$$

¹⁾ W dodatku omówiono klasę macierzy P oraz wykazano, że dla rozpatrywanych w niniejszym artykule obwodów $A \in P$.

Równania (4.7) i (4.8) są liniowe i wobec nieosobliwości macierzy A mają jednoznaczne rozwiązania, łatwe do znalezienia. Rozwiązaniem nieliniowego równania (4.9) jest z założenia (wzór 4.6) przybliżenie początkowe X_0 . Łatwo zauważyć, że dla $\alpha = 1$, równanie (4.2) (bez względu na to, która z trzech zależności (4.3), (4.4) czy (4.5) definiuje operator P) przyjmuje postać (4.1). W celu znalezienia rozwiązania równania (4.2) przy $\alpha = 1$ przyjmuje się na wstępie, że znane jest rozwiązanie $X = X_k$ równania $P(\alpha_k, X) = \Theta$ dla $\alpha_k \in \langle 0, 1 \rangle$. Jeżeli w równaniu (4.2) α będzie bliskie α_k , to można przypuszczać, że rozwiązanie $X(\alpha)$ będzie bliskie X_k . Przy ustalaniu tego faktu istotną rolę odgrywa twierdzenie o funkcjach uwikłanych sformułowane na gruncie analizy funkcjonalnej [9], [12], [14]. Twierdzenie to zostanie przedstawione w ujęciu podanym w pracy [12].

Twierdzenie 4. Jeżeli spełnione są warunki:

$$1) \quad P(\alpha_k, X_k) = \Theta, \quad (4.10)$$

2) operator $P(\alpha, X)$ ma w otoczeniu punktu (α_k, X_k) ciągłe (względem α, X) różniczkki cząstkowe $d_\alpha P_{(\alpha, X)}(\Delta\alpha)$ i $d_X P_{(\alpha, X)}(\Delta X)$,

3) istnieje operator $[d_X P_{(\alpha_k, X_k)}]^{-1}$ odwrotny do $d_X P_{(\alpha_k, X_k)}$ odwzorowujący przestrzeń m_n w m_n ,

to istnieje operacja $Q(\alpha)$ określona w pewnym otoczeniu punktu α_k (i ciągła w α_k) przestrzeni m_1 przekształcająca ją w przestrzeń m_n , taka że:

a) $P[\alpha, Q(\alpha)] = \Theta$ dla każdego α należącego do otoczenia α_k ,

b) $Q(\alpha_k) = X_k$.

Ponadto operator $Q(\alpha)$ jest różniczkowalny w otoczeniu punktu α_k i zachodzi równość:

$$d_\alpha Q_{\alpha_k}(\alpha - \alpha_k) = -[d_X P_{(\alpha_k, X_k)}]^{-1} d_\alpha P_{(\alpha_k, X_k)}(\alpha - \alpha_k). \quad (4.11)$$

W pewnym otoczeniu punktu α_k równość $X = Q(\alpha)$ jest więc równoważna równości (4.2), a jej liniowe przybliżenie ma postać

$$X \cong X_k - [d_X P_{(\alpha_k, X_k)}]^{-1} d_\alpha P_{(\alpha_k, X_k)}(\alpha - \alpha_k). \quad (4.12)$$

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że warunek 1 twierdzenia 4 może być zawsze spełniony dla $\alpha_0 = 0$. Istnienie ciągłych różniczek cząstkowych, o których mowa w warunku 2 twierdzenia 4 wynika z założeń sprecyzowanych w p. 2, a w szczególności z założenia, że funkcje $f_i(x_i)$, ($i = 1, \dots, n$), mają ciągłe pochodne pierwszego rzędu. Rozważane różniczkki (Frecheta) oblicza się według wzorów podawanych w wielu pracach, jak np. [9], [12], [13], [14], [15].

Wzmiankowane wzory zastosowane do badanego równania pozwalają otrzymać następujące zależności:

1) Dla operatora (4.3)

$$d_\alpha P_{1(\alpha_k, X_k)}(\alpha - \alpha_k) = F'_{(\alpha_k, X_k)} \cdot X_k(\alpha - \alpha_k) \quad (4.13)$$

oraz

$$d_X P_{1(\alpha_k, X_k)}(X - X_k) = [\alpha_k F'_{(\alpha_k, X_k)} + A](X - X_k). \quad (4.14)$$

2) W przypadku operatora (4.4)

$$d_\alpha P_{2(\alpha_k, X_k)}(\alpha - \alpha_k) = F'_{[(\alpha_0 + \alpha_k(X_k - Z_0))]} \cdot (X_k - Z_0)(\alpha - \alpha_k) \quad (4.15)$$

oraz

$$d_{\mathbf{x}} \mathbf{P}_{2(\alpha_k, \mathbf{x}_k)} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_k) = [\alpha_k \mathbf{F}'_{[z_0 + \alpha_k(\mathbf{x}_k - z_0)]} + \mathbf{A}] (\mathbf{X} - \mathbf{X}_k). \quad (4.16)$$

3) Gdy rozpatruje się operator (4.5)

$$d_{\alpha} \mathbf{P}_{3(\alpha_k, \mathbf{x}_k)} (\alpha - \alpha_k) = -(\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) (\alpha - \alpha_k) \quad (4.17)$$

oraz

$$d_{\mathbf{x}} \mathbf{P}_{3(\alpha_k, \mathbf{x}_k)} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_k) = [\mathbf{F}'_{(\mathbf{x}_k)} + \mathbf{A}] (\mathbf{X} - \mathbf{X}_k). \quad (4.18)$$

W powyższych wzorach

$$\mathbf{F}'_{(y_k)} = \begin{bmatrix} f'_1[(y_1)_k] & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & f'_n[(y_n)_k] \end{bmatrix},$$

gdzie $f'_i(y_i) = \frac{df_i}{dy_i}$, przy czym dla y_i należy przyjąć αx_i w przypadku równań (4.13) i (4.14), $z_{0i} + \alpha(x_i - z_{0i})$ gdy korzysta się z równań (4.15) i (4.16) oraz x_i w przypadku posługiwania się równaniem (4.18).

Obecnie zostaną zbadane własności liniowego operatora $[\alpha_k \mathbf{F}'_{(y_k)} + \mathbf{A}]$. Przy przyjętych założeniach $\mathbf{F}'_{(y_k)}$ jest macierzą diagonalną, której wszystkie elementy leżące na głównej przekątnej są nieujemne. Ponieważ $\mathbf{A}$ jest macierzą klasy P oraz $\alpha_k \in \langle 0, 1 \rangle$, więc również macierz $[\alpha_k \mathbf{F}'_{(y_k)} + \mathbf{A}] \in P$. Jak bowiem wynika z warunku 2 podanego w dodatku istnieje taki indeks m , że $Z_m(\mathbf{A}\mathbf{Z})_m > 0$ dla każdego $\mathbf{Z} \neq \mathbf{\Theta}$ [16], zatem $Z_m[(\alpha_k \mathbf{F}'_{(y_k)} + \mathbf{A})\mathbf{Z}]_m = \alpha_k f'_m[(y_m)_k] z_m^2 + z_m(\mathbf{A}\mathbf{Z})_m > 0$. Oznacza to w szczególności, że istnieje macierz odwrotna $[\alpha_k \mathbf{F}'_{(y_k)} + \mathbf{A}]^{-1}$ i spełniony jest trzeci warunek twierdzenia 4. Wykorzystując zależności (4.12) i podstawiając wyznaczone wyżej różniczki Frecheta otrzymuje się następujące wzory:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k - [\alpha_k \mathbf{F}'_{(\alpha_k \mathbf{x}_k)} + \mathbf{A}]^{-1} \cdot \mathbf{F}'_{(\alpha_k \mathbf{x}_k)} \cdot \mathbf{X}_k (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \quad (4.19)$$

dla operatora (4.3),

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k - [\alpha_k \mathbf{F}'_{[z_0 + \alpha_k(\mathbf{x}_k - z_0)]} + \mathbf{A}]^{-1} \cdot \mathbf{F}'_{[z_0 + \alpha_k(\mathbf{x}_k - z_0)]} \cdot (\mathbf{X}_k - \mathbf{Z}_0) (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \quad (4.20)$$

w przypadku operatora (4.4) oraz

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + [\mathbf{F}'_{(\mathbf{x}_k)} + \mathbf{A}]^{-1} \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) (\alpha_{k+1} - \alpha_k), \quad (4.21)$$

gdys operator ma postać (4.5).

Powyższe zależności pozwalają znaleźć rozwiązanie $\mathbf{X}_{k+1}$ równania $\mathbf{P}(\alpha_{k+1}, \mathbf{X}) = \mathbf{\Theta}$ w zależności od rozwiązania $\mathbf{X}_k$ równania $\mathbf{P}(\alpha_k, \mathbf{X}) = \mathbf{\Theta}$ dla α_{k+1} bliskiego α_k .

Startując z przybliżenia początkowego $\mathbf{X}_0$ (będącego rozwiązaniem jednego z równań (4.7), (4.8) lub (4.9)) i dzieląc przedział $\langle 0, 1 \rangle$ ze względów metodycznych na M równych części oraz przyjmując $\alpha_k = \frac{k}{M}$, ($k = 0, 1, \dots, M-1$), można przy pomocy odpowiedniej zależności (4.19), (4.20) lub (4.21) znaleźć rozwiązanie równania (4.1) wykonując M kroków obliczeniowych.

5. OSZACOWANIE BŁĘDU

W celu dokonania oceny błędu przyjęto, że dla pewnego α_k znaleziono przybliżone rozwiązanie X_k równania $P(\alpha_k, X) = \Theta$. Oznacza to, że zachodzi równość

$$P(\alpha_k, X_k) = \epsilon_k, \quad (5.1)$$

gdzie ϵ_k jest elementem przestrzeni m_n , którego norma stanowi miarę niedokładności rozwiązania przybliżonego. Stosując omówioną metodę zakłada się, że rozwiązanie równania

$$P(\alpha_k + \Delta\alpha, X) = \Theta \quad (5.2)$$

ma postać:

$$X_{k+1} = X_k + d_{\alpha} Q_{\alpha_k} \Delta\alpha, \quad (5.3)$$

gdzie $d_{\alpha} Q_{\alpha_k}$ definiuje wzór (4.11) oraz $\Delta\alpha = \alpha_{k+1} - \alpha_k$. Wstawiając wyrażenie (5.3) w miejsce X po lewej stronie równania (5.2) otrzyma się po prawej stronie tego równania pewien element ϵ_{k+1} . Korzystając następnie z zależności (5.1) otrzymuje się

$$\Delta\epsilon = P(\alpha_k + \Delta\alpha, X_k + d_{\alpha} Q_{\alpha_k} \Delta\alpha) - P(\alpha_k, X_k), \quad (5.4)$$

gdzie $\Delta\epsilon = \epsilon_{k+1} - \epsilon_k$.

Z równania (5.4) przy uwzględnieniu (4.11) można po prostych przekształceniach znaleźć zależność

$$\lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta\epsilon}{\Delta\alpha} = \Theta, \quad (5.5)$$

pozwalającą określić normę $\Delta\epsilon$ następującym wzorem:

$$\|\Delta\epsilon\| = (\Delta\alpha) \cdot S(\Delta\alpha),$$

przy czym

$$\lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} S(\Delta\alpha) = 0. \quad (5.6)$$

Całkowity błąd można więc oszacować ze wzoru

$$\|\epsilon\| \leq \sum_{i=1}^M \|\Delta\epsilon_i\| = \sum_{i=1}^M (\Delta\alpha) \cdot S_i(\Delta\alpha) \leq M \cdot \Delta\alpha \cdot \max_i S_i(\Delta\alpha).$$

Ponieważ $M = \frac{1}{\Delta\alpha}$, więc $\|\epsilon\| \leq \max_i S_i(\Delta\alpha)$ i zgodnie z równością (5.6) otrzymuje się

$$\|\epsilon\| \rightarrow 0 \quad \text{gdy} \quad \Delta\alpha \rightarrow 0.$$

Z powyższych rozważań wynika więc, że omówiona metoda pozwala otrzymać rozwiązanie równania (4.1) z żadaną dokładnością, tym lepszą im większe przyjęto M .

Metoda rozwiązywania równania (4.1) przy zastosowaniu zależności (4.19) nie wymaga znajomości przybliżenia początkowego (otrzymuje się je w wyniku rozwiązania liniowego równania (4.7)).

Posługiwanie się metodą wykorzystującą wzór (4.20) ma sens tylko wówczas, gdy Z_0 mało różni się od rozwiązania dokładnego.

Na podstawie wzoru (4.21) znajduje się rozwiązanie bardzo szybko i wygodnie, gdy $\mathbf{X}_0$ jest dobrym przybliżeniem początkowym (bliskim rozwiązania dokładnego). Przyjmując małą wartość $\Delta\alpha$ można z niego korzystać również w przypadku, gdy $\mathbf{X}_0$ jest niedokładnym oszacowaniem tego rozwiązania, a nawet dowolnie wybranym elementem przestrzeni m_n .

Należy podkreślić, że każda z zależności (4.19), (4.20) lub (4.21) wraz z odpowiednim równaniem (4.7), (4.8) lub (4.9) stanowi podstawę do opracowania odpowiedniego programu obliczeń na maszynie cyfrową.

6. OBLICZANIE MACIERZY ODWROTNEJ

Najbardziej uciążliwym i pracochłonnym fragmentem obliczeń w przedstawionej metodzie jest znajdowanie macierzy odwrotnej. Łatwo zauważyć, że w każdym kroku obliczeniowym należy w zależności od wybranego wariantu określić odwrotność macierzy $[\mathbf{A} + \alpha_k \mathbf{F}'_{(y_k)}]$ lub $[\mathbf{A} + \mathbf{F}'_{(y_k)}]$, w której $\mathbf{F}'_{(y_k)}$ jest macierzą diagonalną o elementach zależnych od wyników poprzedniego kroku, natomiast macierz $\mathbf{A}$ nie ulega zmianie w całym procesie obliczeniowym. Dla skrócenia zapisu zostanie rozpatrzona macierz $[\mathbf{A} + \mathbf{W}]$, gdzie $\mathbf{W}$ jest odpowiednią macierzą diagonalną, której elementy położone na głównej przekątnej będą oznaczone przez $w_1, \dots, w_n$. Poniżej przedstawiona zostanie pewna metoda pozwalająca w sposób szybki, przejrzysty i wygodny znajdować odwrotność rozpatrywanych macierzy.

Punktem wyjścia wzmiankowanej metody jest podana w pracy [7] zależność

$$(\mathbf{A} + \mathbf{U}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{V})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{S} + \mathbf{V}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}\mathbf{A}^{-1}. \quad (6.1)$$

Obliczenie odwrotności macierzy kwadratowej $[\mathbf{A} + \mathbf{W}]$ stopnia n podzielono na n etapów. Na wstępie zostanie obliczona odwrotność pewnej macierzy $\mathbf{D}_1$ określonej wzorem

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{A} + \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

Łatwo sprawdzić, że macierz $\mathbf{D}_1$ można przedstawić w postaci

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{A} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} w_1 [1 \ 0 \ \dots \ 0], \quad (6.3)$$

przy czym występujące we wzorze (6.3) macierze kolumnowe i wierszowe zawierają n elementów. Gdy przyjmie się oznaczenia

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = [1 \ 0 \ \dots \ 0], \quad \mathbf{S}^{-1} = w_1,$$

wówczas korzystając ze wzoru (6.1) i uwzględniając symetrię macierzy $\mathbf{D}_1$ otrzyma się po elementarnych przekształceniach

$$\mathbf{D}_1^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - (w_1^{-1} + \mathbf{A}_{11})^{-1} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1^T, \quad (6.4)$$

gdzie $\mathbf{A}_1^T = [A_{11}, A_{21}, \dots, A_{n1}]$, A_{kl} , ($k, l = 1, \dots, n$) jest odpowiednim elementem macierzy $\mathbf{A}^{-1}$, natomiast symbol T oznacza transpozycję.

Przy pomocy wzoru (6.4) można szybko i wygodnie obliczyć odwrotność macierzy $\mathbf{D}_1$ gdy znana jest macierz $\mathbf{A}^{-1}$. Następnie należy znaleźć odwrotność macierzy $\mathbf{D}_2$ zdefiniowanej następująco:

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{A} + \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{D}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} w_2 [0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0].$$

Korzystając ponownie ze wzoru (6.1) otrzymuje się po prostych przekształceniach

$$\mathbf{D}_2^{-1} = \mathbf{D}_1^{-1} - (w_2^{-1} + D_{22})^{-1} \mathbf{D}_2^{(1)} [\mathbf{D}_2^{(1)}]^T,$$

gdzie

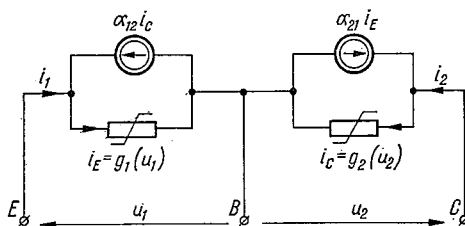
$$[\mathbf{D}_2^{(1)}]^T = [D_{21}, \dots, D_{2n}],$$

przy czym D_{kl} jest odpowiednim elementem macierzy $\mathbf{D}_1^{-1}$.

Proces obliczeniowy kontynuuje się znajdując kolejno macierze $\mathbf{D}_3^{-1}, \dots, \mathbf{D}_n^{-1} = (\mathbf{A} + \mathbf{W})^{-1}$. Przedstawiona metoda pozwala obliczyć odwrotność macierzy $[\mathbf{A} + \mathbf{W}]$ w sposób szybki, wygodny i przejrzysty dając znaczne korzyści w porównaniu z metodami klasycznymi. Czynnością wstępną w opisanej metodzie jest znalezienie odwrotności macierzy $\mathbf{A}$, która nie ulega zmianie w całym procesie obliczeniowym. Macierz diagonalna $\mathbf{W}$ jest natomiast inna w każdym kroku obliczeniowym. Im więcej tych kroków wykonuje się i im wyższy jest stopień macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$, tym wyraźniejsza jest korzyść z przedstawionej metody.

7. OMÓWIENIE OBWODÓW ZAWIERAJĄCYCH TRANZYSTORY

Przypadek, gdy w badanym obwodzie oprócz omówionych wyżej elementów występują również tranzystory, wymaga specjalnego rozpatrzenia. Korzystając bowiem z nieliniowego



Rys. 6. Schemat zastępczy tranzystora

schematu zastępczego Ebersa i Molla (rys. 6) [16], [17] wprowadza się do obwodu prądowe źródła sterowane, których istnienie było w dotychczasowych rozważaniach wykluczone. Niżej zostanie wykazane, że omówiona w pracy metoda obliczania nieliniowych obwodów

rezystancyjnych obejmuje również obwody zawierające tranzystory pod warunkiem, że spełnione są pewne dodatkowe założenia. Przyjmuje się mianowicie, że rozpatrywany obwód zawiera k tranzystorów oraz n nieliniowych oporników, które mogą być opisane przy pomocy charakterystyk konduktancyjnych. Zostanie ponadto założone, że charakterystyki te są jednoznaczными funkcjami, ściśle monotonicznie rosnącymi o ciągłych, dodatnich pochodnych pierwszego rzędu.

Rozpatruje się następnie schemat Ebersa i Molla (rys. 6) otrzymując po opisaniu go równaniami Kirchhoffa następujące zależności [16]:

$$\begin{aligned} i_1 &= g_1(u_1) - \alpha_{12} g_2(u_2), \\ i_2 &= -\alpha_{21} g_1(u_1) + g_2(u_2), \end{aligned} \quad (7.1)$$

przy czym $0 < \alpha_{12} < 1$, $0 < \alpha_{21} < 1$, natomiast funkcje g_1 i g_2 są ściśle monotonicznie rosnące (typu $f(x) = I_0(e^{\lambda x} - 1)$).

Wyodrębniając z obwodu wszystkie nieliniowe oporniki i tranzystory oraz rozumując analogicznie jak w p. 3 otrzymuje się następujące równanie

$$\mathbf{J} + \mathbf{G}\mathbf{U} = \mathbf{J}_z, \quad (7.2)$$

opisujące badany obwód. Macierze $\mathbf{G}$, $\mathbf{U}$ oraz $\mathbf{J}_z$ zostały zdefiniowane w p. 3, natomiast $\mathbf{J}$ jest macierzą kolumnową, określoną zależnością (7.3)

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_{2k} \\ i_{2k+1} \\ \vdots \\ i_{2k+n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \mathbf{T} & & \mathbf{0} \\ & \vdots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(u_1) \\ \vdots \\ g_{2k}(u_{2k}) \\ g_{2k+1}(u_{2k+1}) \\ \vdots \\ g_{2k+n}(u_{2k+n}) \end{bmatrix}. \quad (7.3)$$

$\mathbf{0}$ i $\mathbf{1}$ są odpowiednio macierzami zerową i jednostkową, zaś macierz $\mathbf{T}$ definiuje wzór

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_{12}^{(1)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\alpha_{21}^{(1)} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{12}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_{21}^{(k)} & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.4)$$

Oznaczając przez $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ macierz kolumnową będącą mnożnikiem po prawej stronie zależności (7.3) otrzymuje się z równania (7.2) po prostych przekształceniach

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) + \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \mathbf{G}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \mathbf{J}_z. \quad (7.5)$$

Należy podkreślić, że macierz $\mathbf{T}$ jest nieosobliwa, bowiem $0 < \alpha_{12}^{(i)} < 1$ oraz $0 < \alpha_{21}^{(i)} < 1$ (dla $i = 1, \dots, k$), a ponadto elementy t_{ij} tej macierzy spełniają warunek

$$t_{jj} > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k |t_{ij}|; \quad j = 1, \dots, k. \quad (7.6)$$

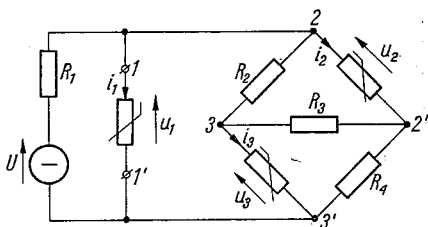
Jeżeli przyjmie się dodatkowo, że w przypadku macierzy G zachodzi nierówność

$$g_{jj} \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{2k+n} |g_{ij}|, \quad j = 1, \dots, 2k+n, \quad (7.7)$$

to spełnione będą założenia twierdzenia 8 podanego w pracy [16], którego teza głosi, że macierz $A = \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} G$ należy do klasy P_0 . Łatwo ponadto zauważyć, że podobnie jak macierz G również i macierz $\begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ należy do klasy P , z czego w szczególności wynika, że $\det A > 0$. Warunki powyższe wystarczają, aby równanie (7.2) miało jednoznaczne rozwiązanie [17]. Ponieważ elementy macierzy $\alpha_k F'_{(y_k)}$ są obecnie dodatnie dla $\alpha_k \in (0, 1)$, więc z powyższych rozważań oraz z rozumowania przeprowadzonego na str. 221 wynika, że macierz $[\alpha_k F'_{(y_k)} + A]$ należy do klasy P . Dla każdego $\alpha_k \in (0, 1)$ istnieje odwrotność tej macierzy, w związku z czym przedstawiona w pracy metoda może być wykorzystana do rozwiązywania równania (7.5).

8. PRZYKŁAD LICZBOWY

Tytułem przykładu rozpatrzono nieliniowy obwód rezystancyjny zawierający trzy warystory, w którym wymuszeniem jest niezmiennie w czasie napięcie źródłowe U (rys. 7).



Rys. 7. Obwód z nieliniowymi opornikami

Przyjęto, że $U = 124 \text{ V}$, $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 0,5 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 35 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 0,5 \text{ k}\Omega$. Założono ponadto, że warystory są jednakowe a ich charakterystyka konduktancyjna dana jest wzorem:

$$i = 5 \cdot 10^{-3} u + 7,5 \cdot 10^{-5} u^3,$$

przy czym napięcie u wyrażone jest w woltach a prąd i w miliamperach.

Łatwo sprawdzić, że rozpatrywany obwód może być opisany przy pomocy następującego równania:

$$\begin{bmatrix} 5 \cdot 10^{-3} u_1 + 7,5 \cdot 10^{-5} u_1^3 \\ 5 \cdot 10^{-3} u_2 + 7,5 \cdot 10^{-5} u_2^3 \\ 5 \cdot 10^{-3} u_3 + 7,5 \cdot 10^{-5} u_3^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4,529 & -2,029 & -2,029 \\ -2,029 & 2,029 & 0,029 \\ -2,029 & 0,029 & 2,029 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.1)$$

Do rozwiązania równania (8.1) wykorzystano metodę wynikającą z zastosowania wzoru (4.21). W omawianym przykładzie obliczenia mogą być dokonywane bez użycia maszyny cyfrowej, przy pomocy prostych i ogólnie dostępnych środków, takich jak arytmetr lub nawet suwak logarytmiczny.

W celu znalezienia przybliżenia zerowego będącego punktem wyjścia w stosowanej metodzie zastąpiono warystory liniowymi opornikami o konduktancji $G = 0,755 \cdot 10^{-3} S$. Rozwiązując (przy pomocy arytmetru Cellatron) odpowiednie liniowe równanie macierzowe otrzymano:

$$U_0 = \begin{bmatrix} 26,29 \\ 18,97 \\ 18,97 \end{bmatrix}.$$

Startując z przybliżenia początkowego U_0 i przyjmując $\Delta\alpha = \frac{1}{2}$ znajduje się po wykonaniu dwóch kroków obliczeniowych

$$U_1 = \begin{bmatrix} 57,61 \\ 52,41 \\ 52,41 \end{bmatrix}.$$

W celu dalszego uściślenia rozwiązania można potraktować U_1 jako nowe przybliżenie zerowe. Jeśli przyjmie się obecnie $\Delta\alpha = 1$, to należy wykonać zaledwie jeden krok obliczeniowy otrzymując w rezultacie

$$U_2 = \begin{bmatrix} 55,83 \\ 50,31 \\ 50,31 \end{bmatrix},$$

przy czym $\|\epsilon\| = 0,06$.

Dodatek

WŁASNOŚCI MACIERZY R i G

Twierdzenie 1

Jeżeli obwód spełnia założenia 1 i 2 z p. 2, to macierz R (oraz G) jest symetryczna, ma dodatnie elementy na głównej przekątnej oraz każdy element położony na głównej przekątnej tej macierzy jest nie mniejszy od wartości bezwzględnej dowolnego elementu położonego w tym samym wierszu (lub w tej samej kolumnie).

Dowód

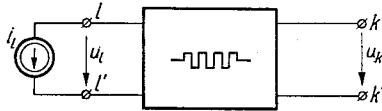
Dowolny element R_{kl} , ($k, l = 1, \dots, n$), macierzy R można obliczyć ze wzoru $R_{kl} = \frac{u'_k}{i_l}$ w obwodzie przedstawionym na rys. 5, po usunięciu z niego wszystkich idealnych źródeł prądu oprócz źródła prądu i_l . W szczególnym przypadku, gdy $k = l$, wówczas odpowiedni element położony na głównej przekątnej macierzy R wyznacza się pozostawiając tylko jedno źródło prądowe i_k oraz obliczając lub mierząc napięcie

u'_k . Jeżeli spełniony jest warunek 2 założeń sformułowanych w p. 2, to źródło prądowe i_k stanowi element przynajmniej jednego oczka, w skład którego mogą ponadto wchodzić tylko liniowe oporniki, co oznacza, że $0 \leq R_{kk} < \infty$.

Warunek 1 wzmiankowanych założeń wyklucza możliwość zwarcia, wobec czego $R_{kk} > 0$.

Z opisanego sposobu wyznaczania współczynnika R_{kl} oraz z twierdzenia o wzajemności węzłowego [4] wynika, że zachodzi równość $R_{kl} = R_{lk}$, ($k, l = 1, \dots, n$).

W celu wykazania słuszności nierówności $R_{ll} \geq |R_{kl}|$ rozpatrzono obwód przedstawiony na rys. 5 i usunięto z niego wszystkie oprócz i_l idealne źródła prądu oraz wyodrębniono tylko dwie pary zacisków ll' i kk' przyjmując, że pozostałe zaciski są rozwarne (rys. D1). Przyjęto, że do zacisków ll' załączone zostało



Rys. D1. Czwórnik rozpatrywany w dowodzie twierdzenia 1

idealne źródło prądu o prądzie źródłowym $i_l > 0$. Ponieważ otrzymany czwórnik jest rezystancyjny i pasywny, więc zachodzi nierówność $u_l \geq |u_k|$. Wynika stąd, że $R_{ll} = \frac{u_l}{i_l} \geq \frac{|u_k|}{i_l} = |R_{kl}|$.

Podobnie można wykazać, że twierdzenie jest słuszne dla macierzy G .

W pracy [16] określono pewne klasy P i P_0 macierzy oraz podano warunki wystarczające, aby macierz kwadratowa A stopnia n o elementach rzeczywistych należała do jednej z tych klas. Do dalszych rozważań wystarczająca jest następująca definicja: Klasa macierzy spełniających jeden z podanych niżej równoważnych warunków jest oznaczona przez P .

1) Wszystkie minory główne macierzy A są dodatnie.

2) Dla każdej macierzy kolumnowej o n wierszach $X_i \neq \Theta$ (Θ jest macierzą kolumnową zawierającą n elementów zerowych) istnieje taki indeks m , że $x_m y_m > 0$, gdzie $Y = AX$.

Jeżeli w powyższych warunkach znak $>$ zostanie zastąpiony przez $\geq$, to otrzyma się definicję klasy P_0 . Obecnie zostanie udowodnione następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2

Jeżeli spełnione są założenia 1 i 2 z p. 2, to macierz R (oraz G) należy do klasy P .

Dowód

Zostanie wykazane, że macierz R spełnia sformułowany wyżej warunek 2. W tym celu rozpatrzono obwód przedstawiony na rys. 5, dla którego słuszna jest zależność

$$U' = RJ.$$

Gdy spełnione są założenia twierdzenia 2, wówczas w badanym obwodzie nie ma oczek złożonych wyłącznie ze źródeł prądowych. Oznacza to, że dla dowolnej macierzy kolumnowej J o n elementach, różnej od Θ przynajmniej w jednym oporniku płynie prąd. Z bilansu mocy wynika więc następująca nierówność

$$u'_1 i_1 + \dots + u'_n i_n > 0.$$

Wobec tego przynajmniej jeden ze składników $u'_m i_m$ ($m = 1, \dots, n$) spełnia nierówność

$$u'_m i_m > 0,$$

co oznacza, że macierz R należy do klasy P .

Podobnie można wykazać, że macierz G należy do klasy P .

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. G. Birkhoff, J. B. Diaz, Non-linear Network Problems, Quarterly of Applied Mathematics, nr 4, 1956.
2. W. M. Bazilewicz, L. A. Sinickij, Ob urawnieniach bezreaktywnej nieliniowej cipi, Teoreticzeskaja Elektrotechnika, wydruk 11, Lwów 1971.
3. M. A. Bondar, A. A. Łanne, Ob analizie odnogo klasa nieliniownych rezystiwnych cipej, Teoreticzeskaja Elektrotechnika, wydruk 11, Lwów 1971.
4. T. Cholewicki, Elektrotechnika teoretyczna, tom I, WNT, Warszawa 1967.
5. T. Cholewicki, Elektrotechnika teoretyczna, tom II, WNT, Warszawa 1971.
6. A. Gerscho, Solving Nonlinear Network Equations Using Optimization Techniques, BSTJ, nr 9, 1969.
7. A. S. Hauscholder, Osnowy czislennogo analiza, Izdatjelstwo Innostrannoj Litjeratury, Moskwa 1956.
8. T. Kaczorek, Obliczanie rozgałęzionych obwodów nieliniowych przy użyciu maszyn cyfrowych, Archiwum Elektrotechniki, nr 4 1963.
9. L. W. Kantorowicz, G. J. Akiłow, Funkcjonalnyj analiz w normirowannych prostranstwach, Fiz — mat — giz, Moskwa 1959.
10. J. Katzenelson, An Algorithm for Solving Nonlinear Resistor Networks, BSTJ, nr 8, 1965.
11. J. Katzenelson, L. H. Seitelman, An Iterative Method for Solution of Networks of Nonlinear Monotone Resistors, IEEE Transactions on CT, nr 2, 1966.
12. J. Kudrewicz, O przybliżeniu układu nieliniowego przez liniowy, Archiwum Elektrotechniki, nr 3, 1962.
13. J. Kudrewicz, O pewnej metodzie obliczania układów parametrycznych, Archiwum Elektrotechniki, nr 1, 1963.
14. L. A. Lusternik, W. I. Sobolew, Elementy analizy funkcjonalnej, PWN, Warszawa 1959.
15. L. B. Rail, Computational Solution of Nonlinear Operator Equations, John Wiley & Sons, Inc. New York-London-Sydney-Toronto, 1969.
16. I. W. Sandberg, A. N. Willson, Some Theorems on Properties of DC Equations of Nonlinear Networks, BSTJ, nr 1, 1969.
17. I. W. Sandberg, A. N. Willson, Some Network-Theoretic Properties of Nonlinear DC Transistor Networks, BSTJ, nr 5, 1969.
18. I. W. Sandberg, Theorems on the Analysis of Nonlinear Transistor Networks, BSTJ, nr 1, 1970.
19. M. Tadeusiewicz, Praca doktorska, Łódź 1971.
20. A. N. Willson, On the Solutions of Equations for Nonlinear Resistive Networks, BSTJ, nr 8, 1968.

M. TADEUSIEWICZ

AN ANALYSIS OF A CERTAIN CLASS OF NON-LINEAR RESISTIVE NETWORKS IN THE m_n SPACE

Summary

The subject of the present work is an analysis of the branched electrical networks composed of linear and non-linear resistors which are excited by independent voltage and current sources, the latter being constant in time.

On the basis of certain concepts and theorems existing in the functional analysis there has been worked out a numerical method for solving networks in some variants. The range of its usability has also been specified.

The results of considerations provide a means for arranging a calculational program for a digital computer.

Moreover, it has been shown that the presented method may also be utilised for solving the networks including also the transistors in addition to the elements specified above.

M. TADEUSIEWICZ

ANALYSE D'UN CERTAIN TYPE DES CIRCUITS NON LINÉAIRES DES RÉSISTANCES DANS L'ESPACE m_n

Résumé

Le travail analyse les circuits électriques ramifiés comprenant des résistors linéaires ainsi que non linéaires excités par d'indépendantes sources d'énergie électrique, forces électromotrices et sources de courant, invariables dans le temps. Le calcul numérique de ces circuits et son utilité pratique ont été présentés à l'aide de l'analyse fonctionnelle. Le calcul peut être effectué en utilisant l'ordinateur. En outre, la méthode peut aussi servir à résoudre les circuits comprenant des transistors.

M. TADEUSIEWICZ

ANALYSE VON NICHTLINEAREN RESISTANZKREISEN BESTIMMTER KLASSE IM m_n -RAUM

Zusammenfassung

Das Thema dieser Bearbeitung ist die Analyse verzweigter elektrischer Kreise mit linearen und nicht-linearen Widerständen. Die Erzwingungen sind in den erwogenen Kreisen unabhängige Größen, die bei Spannung konstant bleiben, sowie Quellenströmungen. In Anlehnung an bestimmte Begriffe und Theorien der Funktionsanalyse wurden einige Varianten numerischer Methode zur Lösung von Kreisen bearbeitet und auch der Anwendungsbereich dieser Methode bestimmt. Die Analysenergebnisse lassen ein Programm für die elektronische Rechenmaschine aufstellen. Es wurde weiterhin bewiesen, daß die dargestellte Methode zur Lösung von Kreisen dienen kann, die außer der genannten Elemente auch noch Transistoren haben.

М. ТАДЕУСЕВИЧ

АНАЛИЗ ОДНОГО ИЗ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ m_n

Резюме

Темой труда является анализ разветвленных электрических цепей с линейными и нелинейными резисторами, возбужденными независимыми, постоянными во времени, напряжениями и токами источников. При использовании некоторых элементов функционального анализа разработано несколько вариантов численного метода решения этих цепей и определены области их применения. Результаты представлены в виде приспособленном к решениям при помощи ЭЦВМ. Кроме того доказано, что предлагаемый метод пригоден тоже к решениям цепей с нелинейными резисторами и транзисторами.

Uogólniona teoria skośnika

BOGDAN GALIŃSKI (WARSZAWA)

Instytut Podstaw Elektroniki Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 7.9.1972

Przedmiotem rozważań niniejszej pracy jest skośnik, będący elementem utworzonym z odcinka jednorodnej dwuprzewodowej linii przesyłowej zasilanego w ten sposób, że źródło dołączone jest do początku jednego przewodu linii i przeciwległego końca drugiego jej przewodu. Powstaje w ten sposób dwójnik o właściwościach odmiennych niż właściwości odcinka tej samej linii zasilanej w sposób konwencjonalny. Pojęcie skośnika wprowadzone zostało przez Rajskiego, który opracował teorię skośnika opartą na koncepcjach obwodowych. Teoria ta została następnie rozwinięta przez Strużaka.

Autor niniejszej pracy dokonał krytycznej analizy dotychczasowej obwodowej teorii skośnika formułując jej ograniczenia. Wykazał on na gruncie teorii pola elektromagnetycznego, że omawiany element może być zawsze przedstawiony jako szeregowe połączenie odcinka rozwartej linii długiej o rozkładzie pola TEM oraz elementu utworzonego również z tego samego odcinka linii, lecz o polu występującym między przewodami linii a otoczeniem. Dla dostatecznie małych częstotliwości, gdy ten ostatni element może być przedstawiony w postaci elementu o stałych skupionych, teoria dotychczasowa i teoria autora prowadzą do identycznych rezultatów. Przedstawioną tezę autor potwierdził eksperymentalnie, na przykładzie skośnika utworzonego z odcinka kabla współosiowego zwiniętego w pętlę kołową.

1. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU I TEZA NAUKOWA PRACY

Teoria linii długich należy obecnie do klasycznych działów elektrotechniki teoretycznej i literatura poświęcona temu zagadnieniu jest niezwykle obszerna. Wiąże się to niewątpliwie z istotną rolą, jaką linie te odgrywają w technice, gdzie stosowane są głównie do celów przesyłania energii tak w zakresie małych, jak i wielkich częstotliwości. Służą one ponadto, głównie w paśmie mikrofal, jako elementy obwodów elektrycznych, a także do innych celów, takich jak formowanie i opóźnianie impulsów. Istnieje ponadto cały szereg układów elektrycznych, które mogą być w pewnych warunkach z powodzeniem opisywane przy pomocy modelu linii długiej. Do układów takich zaliczyć można przykładowo cewki i kondensatory pracujące w zakresie wielkich częstotliwości.

W związku z powyższym zaistniała jednak konieczność rozszerzenia teorii linii długich w kierunku uwzględnienia bardziej ogólnego sposobu ich zasilania, niż to ma miejsce w przypadku klasycznym, gdy suma prądów w przewodach linii jest w każdym jej przekroju poprzecznym równa zero. Najwcześniejszą znaną autorowi próbą rozwiązania tego zagadnienia jest praca Puchowa [14], w której podaje on równania linii długiej dla nierównych prądów w przewodach oraz określa parametry uogólnionego czwórnik

ważnego odcinkowi takiej linii. W pracy Rajskiego [15] przedstawiono teorię skośnika będącego dwójnikiem utworzonym z odcinka dwuprzewodowej linii długiej w ten sposób, że jednym zaciskiem dwójnika jest początek jednego przewodu linii, a drugim zaciskiem jest koniec drugiego przewodu. Teoria ta została następnie uogólniona przez Strużaka w jego kolejnych pracach [16], [18] i [19] na przypadek zasilania odcinka linii w dowolnych punktach obu jej przewodów, znajdując w dalszych pracach tego autora zastosowanie do analizy zjawisk zachodzących w ceramicznych kondensatorach rurkowych [17] i cewkach indukcyjnych [20]. Gwiazdowski [7] podał zastosowanie teorii skośnika do analizy szerokopasmowej pracy transformatora różnicowego.

Zasadniczą cechą teorii skośnika i wszystkich wymienionych jej uogólnień jest ich czysto obwodowy charakter. Teorie te zostały bowiem wyprowadzone na gruncie obwodowego modelu linii długiej bez sprecyzowania i uzasadnienia założeń, od spełnienia których zależy zgodność powstałego w ten sposób uogólnionego modelu obwodowego z rzeczywistością. Problem rozchodzenia się fal elektromagnetycznych w linii długiej może być bowiem rozwiązany w sposób ścisły jedynie na gruncie teorii pola elektromagnetycznego, a model obwodowy linii opisywany przy pomocy równań telegraficznych słuszny jest jedynie pod warunkiem spełnienia określonych założeń upraszczających, do których należy wymaganie, aby suma prądów w przewodach linii była równa zero, co w przypadku skośnika nie jest spełnione.

Pewna próba sformułowania i uzasadnienia założeń stosowalności teorii skośnika była podjęta przez autora w pracy [5], lecz problem wart jest bardziej szerokiego i wyczerpującego potraktowania, a wnioski jakie zostaną stąd wyciągnięte staną się podstawą do utworzenia uogólnionego modelu skośnika, którego zakres stosowalności nie podlega ograniczeniom przedstawionym w pracy [5].

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie w oparciu o teorię pola elektromagnetycznego zjawisk zachodzących w skośniku oraz utworzenie na tej podstawie uogólnionego modelu obwodowego skośnika, którego zakres stosowalności nie podlega ograniczeniom obowiązującym dla teorii Rajskiego.

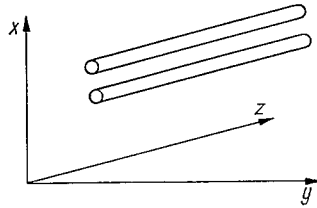
2. POŁOWA TEORIA SKOŚNIKA

2.1. Połowa teoria linii długich

Literatura poświęcona teorii linii długich jest, jak zaznaczono we wstępie, niezwykle obszerna, lecz z punktu widzenia celu niniejszej pracy wydaje się celowe krótkie przedstawienie tych jej fragmentów, które są niezbędne dla dokonania analizy zjawisk zachodzących w skośniku. Jest to wskazane zwłaszcza z uwagi na fakt, iż poszczególne prace poświęcone omawianemu zagadnieniu różnią się znacznie tak ujęciem, jak i zakresem wyłożonego materiału.

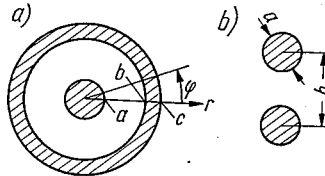
Ograniczymy się do rozpatrzenia linii dwuprzewodowych (rys. 2-1), wśród których najbardziej rozpowszechnione są linie dwu typów: koncentryczna i dwuprzewodowa symetryczna, o przekrojach przedstawionych na rys. 2-2.

W liniach tego rodzaju mogą jak wiadomo rozchodzić się ogólnie biorąc zarówno fale typu TEM, nie zawierające składowych pól równoległych do kierunku rozchodzenia się fali, jak i fale typu falowodowego, zawierające składowe wzdłużne pól. Z punktu



Rys. 2-1. Dwuprzewodowa linia długa

widzenia klasycznych zastosowań najważniejszy jest przypadek, gdy podstawowym rodzajem fali w linii jest fala TEM, a pozostałe rodzaje można pominąć. Zachodzi to ściśle biorąc jedynie w przypadku idealnym, gdy można przyjąć, iż przewodniki linii mają nieskończoną przewodność właściwą, a wymiary poprzeczne linii są dużo mniejsze od



Rys. 2-2. Przekrój linii długiej: a) linia koncentryczna, b) linia symetryczna

długości fali. Linie spotykane w praktyce mają zawsze przewodność skończoną, lecz jest ona zwykle na tyle duża, iż można je analizować jako linie bez strat, a następnie wprowadzić odpowiednie poprawki, uwzględniające efekty związane ze skończoną przewodnością przewodów linii, sprowadzające się do zaburzenia podstawowej fali TEM w taki sposób, iż pojawia się niewielka składowa wzdłużna pola elektrycznego, niezbędna do podtrzymania prądu w przewodach o skończonym oporze.

2.1.1. Fale TEM w liniach doskonale przewodzących

Równania Maxwella

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B}, \quad (2-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J}, \quad (2-2)$$

obowiązujące w przypadku pól o harmonicznej zależności od czasu, redukują się dla fal TEM w idealnych liniach przesyłowych i przy założeniu braku swobodnych ładunków i jednorodności ośrodka otaczającego przewody linii do postaci

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (2-3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0. \quad (2-4)$$

Występujące w powyższych równaniach amplitudy zespolone wektorów pól $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ są funkcjami jedynie współrzędnych x i y (rys. 2-1). Z równań tych wynika, iż wektory pól $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ są gradientami potencjałów skalarnych

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad (2-5)$$

$$\mathbf{H} = -\nabla\varphi_m, \quad (2-6)$$

przy czym zarówno wektory $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$, jak potencjały φ i φ_m spełniają dwuwymiarowe równanie Laplace'a

$$\nabla^2 \mathbf{E} = 0, \quad (2-7)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = 0, \quad (2-8)$$

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad (2-9)$$

$$\nabla^2 \varphi_m = 0. \quad (2-10)$$

Problem znalezienia pól w linii sprowadza się więc w omawianym przypadku do rozwiązania równania Laplace'a w obszarze ograniczonym przez przewodniki linii. Biorąc pod uwagę stałość potencjału φ na powierzchni każdego z przewodów linii w dowolnej płaszczyźnie prostopadłej do osi z , rozwiązanie to jest jednoznaczne, gdy wartości potencjałów wszystkich przewodów linii $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ są znane. W każdym konkretnym przypadku wartości te zależą od sposobu pobudzenia fali w linii, czyli od sposobu jej zasilania.

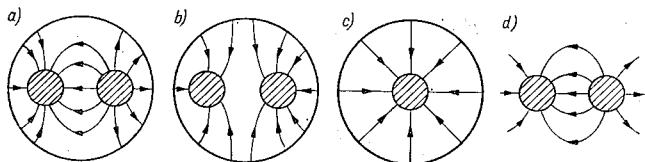
Każde rozwiązanie $\varphi(x, y)$ równania (2-9) może być przedstawione w postaci liniowej superpozycji pewnych rozwiązań prostych $\varphi_k(x, y)$, $k = 1, 2, \dots, n$, otrzymanych w przypadku gdy

$$\varphi_i = \begin{cases} 1 \text{ V, dla } i = k, \\ 0, \text{ dla } i \neq k. \end{cases} \quad (2-11)$$

Zachodzi wówczas równość

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{n-1} C_k \varphi_k(x, y) + C_n, \quad (2-12)$$

w której występuje $n-1$ stałych C_k , $k = 1, 2, \dots, n-1$, zależnych od zadanych wartości potencjałów $n-1$ przewodów linii, oraz stałej dowolnej C_n , której występowanie wynika z faktu, iż potencjał określony jest z dokładnością do stałej addytywnej. W związku z tym, spośród n rozwiązań prostych $\varphi_k(x, y)$ równania Laplace'a otrzymanych przy warunkach

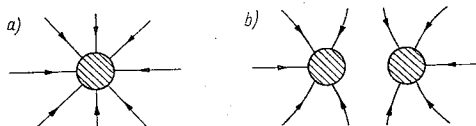


Rys. 2-3. Rozkłady pola elektrycznego fali TEM w liniach długich: a) i b) linia trójprzewodowa, c) i d) linie dwuprzewodowe.

(2-11), tylko $n-1$ jest niezależnych od siebie, co oznacza, iż w omawianej linii n -przewodowej może wzbudzić się $n-1$ niezależnych rodzajów fal TEM. W szczególności, w przypadku rozpatrywanych przez nas linii dwuprzewodowych, możliwe jest wzbudzenie dokładnie jednego rodzaju TEM. Na rys. 2-3 przedstawiono dla porównania rozkłady pola

elektrycznego odpowiadające dwu możliwym do wzbudzenia rodzajom TEM w zaekranowanej linii symetrycznej trójprzewodowej oraz w liniach dwuprzewodowych z rys. 2-2.

Z powyższych względów nie jest możliwe wzbudzenie fali TEM w linii jednoprzewodowej, ani „symetrycznej” fali TEM w linii dwuprzewodowej (rys. 2-4).



Rys. 2-4. Niemożliwe do wzbudzenia rodzaje TEM w liniach: a) jednoprzewodowej, b) dwuprzewodowej

Fale tego typu przenosiłyby, jak łatwo wykazać, przez każdy przekrój poprzeczny nieskończenie wielką moc.

Znając rozkład potencjału $\varphi(x, y)$ można znaleźć rozkład pola $\hat{E}_T(x, y)$ w płaszczyźnie prostopadłej do osi linii, a następnie po uwzględnieniu zależności od współrzędnej z , całkowity jego rozkład w przestrzeni $E(x, y, z)$

$$E(x, y, z) = E_T(x, y) e^{-j\beta z} \quad (2-13)$$

gdzie β oznacza stałą fazową dla fali w ośrodku otaczającym przewody linii

$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon \mu} . \quad (2-14)$$

Znając impedancję falową tego ośrodka

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (2-15)$$

można określić pole magnetyczne H z zależności

$$H = \frac{E}{Z} . \quad (2-16)$$

Związane z polami E i H prądy o gęstości J_s , płynące po powierzchniach przewodów, mają kierunek osi z , a rozkład pól w każdym przekroju poprzecznym linii można, z uwagi na związki (2-7) i (2-8), uważać za quasistacjonarny.

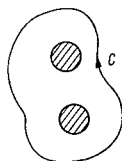
Jak wiadomo, pole elektromagnetyczne jest quasistacjonarne w danym obszarze, jeśli można w tym obszarze pominąć wszelkie efekty opóźnienia, związane ze skończoną prędkością rozchodzenia się fali elektromagnetycznej. Zmiany pola elektromagnetycznego w czasie można wówczas uważać za synchroniczne ze zmianami prądów i ładunków, które to pole wywołują. W przypadku pól o sinusoidalnej zależności od czasu, warunek quasistacjonarności jest spełniony, gdy największy wymiar geometryczny rozpatrywanego obszaru l_{max} jest dużo mniejszy od długości fali

$$l_{max} \ll \lambda . \quad (2-17)$$

Dla rozpatrywanych linii długich, ostatni warunek jest spełniony jedynie w odniesieniu do ich rozmiarów poprzecznych i dlatego, aby pole było w każdym przekroju poprzecznym

linii quasistacjonarne, musi być dodatkowo spełniony warunek, aby całka z wektora $\mathbf{H}$ po dowolnym konturze obejmującym oba jej przewody była równa zeru (rys. 2-5)

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0. \quad (2-18)$$



Rys. 2-5. Droga całkowania we wzorze (2-18)

Przy spełnieniu powyższego warunku pole w linii ma charakter lokalny, co oznacza, że można przyjąć, iż pola w odległych przekrojach poprzecznych linii nie oddziałują na siebie. W tych warunkach możliwe jest wprowadzenie napięcia między przewodami linii $U(z)$.

W ogólnym przypadku napięcie U_{ab} między dwoma dowolnymi punktami a i b jest zdefiniowane wzorem

$$U_{ab} = \int_a^b \mathbf{E} d\mathbf{l}. \quad (2-19)$$

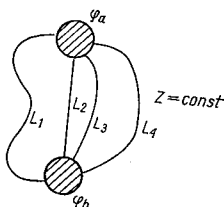
Dla zmiennych pól elektromagnetycznych pole $\mathbf{E}$ wyraża się zależnością

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - j\omega\mathbf{A}, \quad (2-20)$$

gdzie $\mathbf{A}$ oznacza potencjał wektorowy pola. Całka we wzorze (2-19) zależy od drogi całkowania i napięcie U_{ab} nie jest określone jednoznacznie. Biorąc pod uwagę wzór (2-20) otrzymamy bowiem

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b - j\omega \int_b^a \mathbf{A} d\mathbf{l}. \quad (2-21)$$

Napięcie U_{ab} nie zależy od drogi całkowania tylko wtedy, gdy całka po prawej stronie wzoru (2-21) znika. W przypadku omawianej linii długiej, z uwagi na fakt, iż potencjał



Rys. 2-6. Możliwe drogi całkowania we wzorze (2-21)

wektorowy $\mathbf{A}$ ma jedynie składową A_z , całka ta jest równa zeru, jeśli tylko punkty a i b oraz krzywa całkowania leżą w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku osi z (rys. 2-6).

Jeśli punkty a i b obierzemy tak, iż będą one leżały na powierzchniach obu przewodów linii (rys. 2-6), to możliwe jest jednoznaczne wprowadzenie napięcia między przewodami linii w jej dowolnym przekroju poprzecznym, zgodnie ze wzorem

$$U(z) = \varphi_a(z) - \varphi_b(z). \quad (2-22)$$

Z faktu, iż potencjał wektorowy $\mathbf{A}$ posiada tylko składową A_z wynika ponadto, że prądy powierzchniowe płynące w obu przewodach linii posiadają także jedynie składową wzdłużną J_z . Pozwala to na wprowadzenie prądów przewodowych $I_1(z)$ oraz $I_2(z)$, określonych zależnościami

$$I_1(z) = \iint_{S_1} J_z dS, \quad (2-23)$$

$$I_2(z) = \iint_{S_2} J_z dS, \quad (2-24)$$

gdzie całkowanie rozciąga się na przekroje przewodów linii, prostopadłe do osi z . Po wprowadzeniu prądów przewodowych $I_1(z)$ oraz $I_2(z)$, warunek (2-18) przybiera postać

$$I_1(z) + I_2(z) = 0, \quad (2-25)$$

co oznacza, iż w przypadku fali TEM suma prądów przewodowych jest w każdym przekroju poprzecznym linii równa zeru.

2.1.2. Fale TEM w liniach ze stratami

Jeśli przewody linii mają przewodność skończoną, fala w linii nie jest już czystą falą TEM, gdyż dla podtrzymania prądu w przewodach powinna istnieć wówczas składowa E_z pola elektrycznego. Aby można była nadal uważać, iż prądy przewodowe mają jedynie składowe o kierunku osi z , przewodność właściwa przewodów σ_1 winna być dostatecznie duża w porównaniu z przewodnością właściwą ośrodka je otaczającego σ_2 , aby zachodziła nierówność

$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} \gg \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2}. \quad (2-26)$$

W tych warunkach uważa się w przybliżeniu falę w linii nadal za falę TEM, o rozkładzie poprzecznym $\mathbf{E}_T(x, y)$ oraz $\mathbf{H}_T(x, y)$ takim, jak dla linii bez strat, lecz rozkłady przestrzenne znajduje się z zależności

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}_T(x, y) e^{-\gamma z}, \quad (2-27)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{H}_T(x, y) e^{-\gamma z}. \quad (2-28)$$

Występująca w powyższych wzorach stała przenoszenia γ jest liczbą zespoloną

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu_2(\sigma_2 + j\omega\varepsilon_2)}, \quad (2-29)$$

której część rzeczywista α wyraża tłumienie fali wzdłuż linii.

2.1.3. Fale typu falowodowego w liniach długich

W liniach długich mogą się poza falami TEM w pewnych warunkach rozchodzić również rodzaje typu falowodowego. Ma to miejsce, gdy rozmiary przekroju poprzecznego linii są współmierne z długością przesyłanej fali. Dla linii koncentrycznej, o promieniach przewodów odpowiednio a i b (rys. 2-2), podstawowym rodzajem tego typu jest rodzaj oznaczany, przez analogię z odpowiednim rodzajem wzbudzany w falowodzie cylindrycznym, jako H_{11} , o długości fali granicznej

$$\lambda_{gr} = \pi(a+b). \quad (2-30)$$

Innym często spotykanym rodzajem jest rodzaj E_{02} , dla którego

$$\lambda_{gr} \cong 2(b-a). \quad (2-31)$$

Dla linii omawianego typu należy także wziąć pod uwagę możliwość rozchodzenia się fal powierzchniowych. W szczególności, dla linii koncentrycznej, fala taka może zostać wzbudzona w obszarze zewnątrz linii, w którym pole fali TEM nie występuje.

Jak wiadomo z literatury, wzdłuż pojedynczego cylindrycznego przewodu o skończonym przewodnictwie może rozchodzić się fala, dla której prędkość fazowa jest mniejsza od prędkości światła, a amplitudy poszczególnych składowych pola maleją wraz ze zwiększaniem się odległości od powierzchni przewodu. Wektor Poyntinga w każdym punkcie płaszczyzny prostopadłej do osi linii jest do niej nachylony na ogół pod kątem różnym od zera. Składowa wektora Poyntinga równoległa do osi odpowiada przenoszeniu energii wzdłuż linii przez falę powierzchniową typu falowodowego, a składowa prostopadła do osi przewodu charakteryzuje straty energii na skutek promieniowania.

Tłumienie fali wzdłuż osi przewodu jest spowodowane skończoną jego przewodnością właściwą, przy czym zmniejszanie przewodności powoduje wzrost tłumienia, przy jednoczesnym zmniejszaniu obszaru wokół przewodu, w którym występuje pole i na odwrót. Jeśli przewodność ta nieograniczenie rośnie, to omawiana fala przechodzi w granicy w niemożliwą do wzbudzenia, z racji niesionej przez nią nieskończonej energii, falę TEM z rys. 2-3a.

W tym idealnym przypadku, wokół przewodu o nieskończonej przewodności możliwy jest do wzbudzenia rozkład pola, odpowiadający modelowi idealnej anteny cylindrycznej i posiadający jedynie składowe H_φ , E_r i E_z .

Pokrycie przewodu cylindrycznego warstwą dielektryka umożliwia natomiast rozchodzenie się fali typu powierzchniowego o ograniczonym zasięgu promieniowym nawet wówczas, gdy przewodność przewodu jest nieskończona. Dla linii koncentrycznej przypadek ten zachodzi, gdy linia posiada zewnętrzną warstwę dielektryka, a ze względu na sposób jej zasilania, po zewnętrznej powierzchni jej zewnętrznego przewodu płyną prądy.

Istotną cechą fali powierzchniowej jest fakt, iż nie posiada ona, w odróżnieniu od poprzednio omawianych rodzajów falowodowych, częstotliwości krytycznej. Ze względu na symetrię osiową możliwej do wzbudzenia fali powierzchniowej, związany z tą falą prąd płynący w przewodzie posiada, podobnie jak dla fali TEM, jedynie składową skierowaną wzdłuż osi przewodu.

2.2. Model obwodowy linii długiej i warunki jego stosowalności

Możliwość jednoznacznego określenia prądu i napięcia dla fali TEM pozwala na wprowadzenie modelu obwodowego linii długiej, opisywanego przy pomocy równań telegraficznych.

Weźmy pod uwagę dwuprzewodową linię długą, przedstawioną na rys. 2-2. Materiał, z którego wykonano przewody linii charakteryzuje się parametrami $\mu_0, \varepsilon_1, \sigma_1$, a ośrodek między przewodami linii parametrami $\mu_0, \varepsilon_2, \sigma_2$. Zakładamy, że oba ośrodki są jednorodne, liniowe i izotropowe. Gdy spełnione są następujące założenia:

1. wymiary poprzeczne linii są dużo mniejsze od długości fali

$$b \ll \lambda, \quad (2-32)$$

2. przewodność właściwa materiału, z którego wykonano przewody jest dużo większa od przewodności właściwej ośrodka je otaczającego, tzn. spełniony jest warunek (2-26)

$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} \gg \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2},$$

3. linia zasilana jest w ten sposób, iż spełniony jest warunek (2-18), co oznacza, że oba prądy przewodowe są w każdym przekroju poprzecznym równe i przeciwnie skierowane

$$I_1(z) = -I_2(z) = I(z), \quad (2-33)$$

to wówczas:

— w linii rozchodzą się tylko fale typu TEM, a rodzaje falowodowe i efekt promieniowania można pominąć,

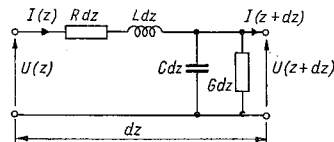
— możliwe jest wprowadzenie prądu i napięcia w linii,

— pole w linii ma charakter lokalny, tzn. strumień magnetyczny $\Phi(z)$ i ładunek elektryczny $q(z)$, przypadający na jednostkę długości linii w danym przekroju poprzecznym, zależą wyłącznie odpowiednio od prądu $I(z)$ i napięcia $U(z)$ w tym samym jej przekroju

$$\Phi(z) = L \cdot I(z), \quad (2-34)$$

$$q(z) = C \cdot U(z). \quad (2-35)$$

W tych warunkach możliwe jest wprowadzenie obwodowego schematu zastępczego elementarnego odcinka linii o długości dz w postaci przedstawionej na rys. 2-7.



Rys. 2-7. Schemat zastępczy elementarnego odcinka linii

Występujące w tym schemacie wielkości R, L, G i C zwane są parametrami jednostkowymi linii długiej. Układając dla powyższego schematu równania praw Kirchhoffa, dochodzimy do równań telegraficznych, które dla przebiegów sinusoidalnych mają postać

$$\frac{d^2 U(z)}{dz^2} - (R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C) \cdot U(z) = 0, \quad (2-36)$$

$$\frac{d^2 I(z)}{dz^2} - (R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C) \cdot I(z) = 0. \quad (2-37)$$

Jeśli linia długa będzie zasilana w ten sposób, iż suma prądów przewodowych $I_1(z)$ oraz $I_2(z)$ przestanie być równa zero, to powyższe równania przestaną być oczywiście słuszne. W związku z tym King wprowadza w pracy [9] podział na linie zrównoważone, dla których warunek (2-33) jest spełniony i linie niezrównoważone, które tego warunku nie spełniają. Dla linii niezrównoważonych można, korzystając z zasady superpozycji, przedstawić prądy przewodowe w postaci

$$I_1(z) = I_{c1}(z) + I_{o1}(z), \quad (2-38)$$

$$I_2(z) = I_{c2}(z) + I_{o2}(z), \quad (2-39)$$

przy czym zachodzi związek

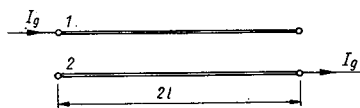
$$I_{o1}(z) = -I_{o2}(z). \quad (2-40)$$

Model obwodowy pozostaje słuszny dla składowych $I_{o1}(z)$ i $I_{o2}(z)$, a prądy $I_{c1}(z)$ i $I_{c2}(z)$ nie zależą od parametrów R , L , G i C określonych dla fali typu TEM i należy je określać na podstawie teorii anten.

2.3. Pole w linii długiej zasilanej skośnikowo

Skośnikiem nazywamy, zgodnie z definicją podaną przez Rajskiego [15], dwójnik utworzony z odcinka dwuprzewodowej linii długiej w ten sposób, iż jednym zaciskiem dwójnika jest początek jednego przewodu linii, a drugim zaciskiem jest koniec drugiego przewodu linii. Z definicji tej wynika, iż skośnik różni się od klasycznej linii długiej jedynie sposobem zasilania. Fakt ten posiada jednak zasadniczy wpływ na charakter rozkładu pól, który jest w przypadku skośnika zasadniczo różny od rozkładu występującego w zwykłej linii długiej.

Weźmy pod uwagę skośnik o długości $2l$, przedstawiony schematycznie na rys. 2-8.



Rys. 2-8. Schematyczny rysunek skośnika

Założmy, iż odcinek linii długiej, z której utworzono skośnik spełnia warunki (2-26) i (2-32), podane w punkcie 2.2 niniejszej pracy. W tej sytuacji możliwe jest wprowadzenie prądów w przewodach linii $I_1(z)$ oraz $I_2(z)$. Z uwagi jednak na sposób zasilania skośnika (rys. 2-8), prowadzący do następujących warunków brzegowych

$$I_1(-l) = I_2(l) = I_g, \quad (2-41)$$

$$I_1(l) = I_2(-l) = 0, \quad (2-42)$$

nie jest spełniony warunek (2-25), suma prądów przewodowych w skośniku jest różna od zera i równa prądowi skośnika $I_s(z)$

$$I_1(z) + I_2(z) = I_s(z). \quad (2-43)$$

Linia długa zasilana skośnikowo jest więc, zgodnie z tym co powiedziano w punkcie 2.2, linią niezerównoważoną. W linii takiej, oprócz fali TEM związanej ze składowymi $I_{o1}(z)$ oraz $I_{o2}(z)$ prądów przewodowych (wzory (2-38) i (2-39)), występują dodatkowe pola typu antenowego, związane ze składowymi $I_{c1}(z)$ oraz $I_{c2}(z)$. W dużej odległości od osi linii skośnik zachowuje się więc w przybliżeniu jak pojedynczy przewód, przez który płynie prąd sumaryczny $I_s(z)$. W szczególnym przypadku skośnika utworzonego z linii koncentrycznej, rozkład pola zewnątrz niej będzie dokładnie taki, jak dla pojedynczego przewodu cylindrycznego, o tej samej średnicy co zewnętrzna średnica linii.

Jak wynika bowiem z rozważań przedstawionych w punkcie 2.1, w linii dwuprzewodowej może istnieć tylko jeden niezależny rozkład pola typu TEM (rys. 2-3c i d), przy czym suma prądów przewodowych z nim związanych jest w każdym przekroju linii równa zeru. Jeśli więc linia będzie zasilana tak, iż powyższy rozptyw prądów nie będzie zgodny z warunkami brzegowymi, co ma miejsce właśnie w przypadku skośnika, popłyną w przewodach linii pewne dodatkowe prądy $I_{c1}(z)$ oraz $I_{c2}(z)$, zapewniające spełnienie warunków brzegowych. Jest to równoważne powstaniu nowego, dodatkowego rozkładu pola, którego charakter będzie oczywiście zależał od geometrii skośnika i parametrów tworzących go ośrodków. Ogólnie biorąc, pole to będzie sumą rodzajów typu falowodowego, związanych z przenoszeniem energii wzdłuż linii, oraz rozkładu typu antenowego, któremu towarzyszy zjawisko promieniowania energii w przestrzeń otaczającą skośnik.

O ile w przypadku zrównoważonej linii długiej, spełniającej warunek (2-25) model obwodowy jest dla linii symetrycznej i koncentrycznej taki sam, to przy próbach tworzenia modelu obwodowego linii niezerównoważonej, jaką jest skośnik, napotykamy pewne istotne różnice, na które zwrócimy uwagę w toku dalszych rozważań.

2.3.1. Przypadek skośnika koncentrycznego

Biorąc pod uwagę skośnik utworzony z linii koncentrycznej (rys. 2-2a) zauważmy, iż pole elektromagnetyczne występuje tu ogólnie biorąc w czterech obszarach:

- we wnętrzu przewodu wewnętrznego, dla $0 \leq r \leq a$,
- w obszarze między przewodami, dla $a < r < b$,
- we wnętrzu zewnętrznego przewodu, dla $b \leq r \leq c$,
- w obszarze zewnątrz skośnika, dla $r > c$.

Gęstość prądów w przewodach nie będzie na ogół w ich przekrojach poprzecznych stała, z uwagi na zjawisko naskórkowości i efekt zbliżenia. Ze względu na symetrię osiową można w przypadku linii koncentrycznej założyć, iż gęstość ta zależy tylko od współrzędnej r (rys. 2-2a).

W zależności od zakresu częstotliwości i przewodności właściwej przewodów, rozpatruje się zwykle następujące przypadki:

1. dla małych częstotliwości, gdy głębokość wnikania δ jest dużo większa od grubości przewodów, zakłada się stałość gęstości prądu w całym przekroju każdego przewodu,
2. dla wielkich częstotliwości, gdy głębokość wnikania δ jest dużo mniejsza od grubości przewodów, zakłada się, iż gęstość prądu jest stała w cienkich warstwach naskórkowych przewodów, o grubości δ , a równa zeru poza tymi warstwami.

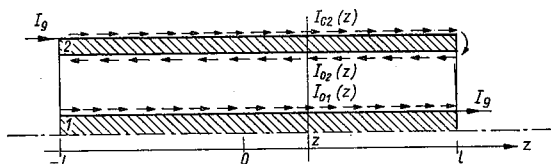
Z uwagi na fakt, iż głębokość wnikania δ związana jest z przewodnością właściwą σ , przenikalnością magnetyczną μ i częstotliwością f , przy pomocy zależności

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \sigma \mu}} \quad (2-44)$$

dla przewodników o pomijalnych stratach, tzn. przy $\sigma \rightarrow \infty$, wprowadza się pojęcie prądów powierzchniowych i zakłada, iż we wnętrzu przewodników natężenia pól i gęstość prądu są równe zero. W przypadku, gdy przewodność σ ma wartość skończoną, lecz na tyle dużą, iż spełniony jest warunek (2-26), ograniczamy się zazwyczaj do rozpatrywania pól w obszarach między przewodami, a wpływ pola w ich wnętrzu uwzględniamy jedynie przy obliczaniu parametrów jednostkowych linii uważając, iż energia przenoszona jest jedynie poprzez obszary otaczające przewody.

W związku z powyższym należy, podobnie jak to uczynił Strużak w odniesieniu do kondensatora rurkowego [17], rozpatrzyć dwa przypadki:

1. gdy prądy płyną jedynie w cienkich warstwach naskórkowych przewodów,
2. gdy gęstość prądu jest w przekrojach przewodów stała. W pierwszym przypadku, rozptyw prądów dla skośnika koncentrycznego może być przedstawiony umownie, jak na rys. 2-9.



Rys. 2-9. Rozptyw prądów w skośniku koncentrycznym przy silnym efekcie naskórkowym

Jak widać, całkowity prąd przewodowy $I_1(z)$ w przewodzie wewnętrznym płynie po jego powierzchni. Wywołuje on w obszarze między przewodami pole magnetyczne

$$\mathbf{H}(r, z) = \frac{I_1(z)}{2\pi r} \mathbf{i}_\varphi \quad (2-45)$$

związane z falą typu TEM, rozchodzącą się w tym obszarze. Aby we wnętrzu zewnętrznego przewodu linii pole magnetyczne było równe zero, prąd $I_{o2}(z)$, płynący po jego wewnętrznej powierzchni, musi spełniać równość

$$I_{o2}(z) = -I_1(z). \quad (2-46)$$

Z porównania związków (2-38) i (2-39) oraz równości (2-46) otrzymamy

$$I_1(z) = I_{o1}(z), \quad (2-47)$$

$$I_2(z) = -I_{o1}(z) + I_{c2}(z), \quad (2-48)$$

$$I_{c1}(z) = 0. \quad (2-49)$$

A zatem, w przypadku skośnika koncentrycznego, prąd antenowy płynie tylko w przewodzie zewnętrznym, po jego zewnętrznej powierzchni. W przestrzeni między przewodami rozchodzi się fala TEM, a w obszarze zewnątrz skośnika pole jest takie, jak pole wokół

przewodu cylindrycznego o promieniu c (rys. 2-2), przez który płynie prąd sumaryczny $I_s(z)$ równy prądowi $I_{c2}(z)$ we wzorze (2-41).

W omawianym przypadku silnego efektu naskórkowego, prądy $I_{o2}(z)$ i $I_{c2}(z)$ nie oddziałują na siebie, a więc oba przedstawione rozkłady pól są od siebie oddzielone przez obszar zewnętrznego przewodu skośnika, w którym pole jest równe zeru.

W przypadku drugim, przy braku efektu naskórkowego, gdy gęstości prądów przewodowych są w przekrojach poprzecznych przewodów stałe, rozkłady pól są w obszarach poza przewodami takie same, jak poprzednio. W przewodzie wewnętrznym nadal będzie płynął prąd $I_{o1}(z)$, a w przewodzie zewnętrznym prąd $I_2(z) = -I_{o1}(z) + I_{c2}(z)$, przy czym jego składowe nie będą już rozdzielone przestrzennie i pola będą w obszarach obu przewodów różne od zera.

2.3.2. Przypadek skośnika symetrycznego

Dla skośnika utworzonego z linii symetrycznej o przekroju przedstawionym na rys. 2-2b, prądy antenowe płyną w obu przewodach i aby składowe $I_{o1}(z)$ oraz $I_{o2}(z)$ spełniały równość (2-40), należy założyć [9], iż prądy $I_{c1}(z)$ oraz $I_{c2}(z)$ są sobie równe

$$I_{c1}(z) = I_{c2}(z) = I_c(z). \quad (2-50)$$

Prądy przewodowe można zatem, dla skośnika utworzonego z linii symetrycznej, przedstawić w postaci

$$I_1(z) = I_c(z) + I_o(z), \quad (2-51)$$

$$I_2(z) = I_c(z) - I_o(z). \quad (2-52)$$

W tym przypadku efekt zbliżenia i zjawisko naskórkowości wpłyną także na rozkład gęstości prądu w przekrojach poprzecznych przewodów. W zakresie występowania silnego efektu naskórkowego, prądy te będą płynęły w warstwach powierzchniowych przewodów, lecz w odróżnieniu od przypadku skośnika koncentrycznego, składowe $I_o(z)$ oraz $I_c(z)$, a także związane z nimi rozkłady pól, nie będą przestrzennie oddzielone od siebie. Gdy linia zostanie wykonana z przewodów o różnych przekrojach, to równości (2-51) i (2-52) pozostaną nadal słuszne, lecz rozkład pola i rozkład gęstości prądów przewodowych ulegną wówczas zmianie. Zbadanie rozkładu poprzecznego prądów w przewodach skośnika tego typu jest w ogólnym przypadku, przy uwzględnieniu efektu zbliżenia i zjawiska naskórkowości, zagadnieniem skomplikowanym i wykraczającym poza zamierzone ramy niniejszej pracy.

2.3.3. Możliwości wyznaczenia rozkładów pól w skośniku

Rozkład pól TEM i związany z nim rozkład prądu $I_o(z)$ jest łatwy do wyznaczenia i był wielokrotnie omawiany w literaturze [9], [16]. Rozkład pola związany ze składowymi $I_c(z)$ prądów przewodowych może być natomiast wyznaczony w sposób ścisły jedynie przy pomocy teorii anten [9], przy czym próba dokładnego rozwiązania powyższego

zagadnienia prowadzi, nawet dla układów o stosunkowo prostej geometrii, do równań całkowych, rozwiązywalnych przy pomocy skomplikowanych metod matematycznych i to jedynie w postaci przybliżonej. Zagadnieniom tym poświęcone są między innymi prace Halléna [8], Schelkunoffa oraz praca Brundella [1], dotycząca teorii anteny pętlowej.

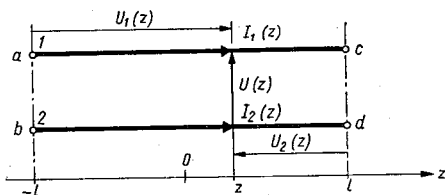
Wymienione trudności skłoniły wielu autorów do poszukiwania rozwiązań przybliżonych, na drodze przyjęcia a priori pewnych rozkładów prądu wzdłuż anteny i znajdowania na tej podstawie rozkładu pól w przestrzeni otaczającej antenę, oraz takich, ważnych z punktu widzenia zastosowań, jej parametrów, jak oporność promieniowania, zysk kierunkowy itp. Dla anten krótkich w porównaniu z długością fali przyjmowano zazwyczaj równomierny rozkład prądu $I(z) = \text{const}$ [3], a dla anten długich rozkład sinusoidalny [11], lub sinusoidalny tłumiony wykładniczo [6], [11]. Założenia tego rodzaju, choć ściśle biorąc niesłuszne, prowadzą w wielu przypadkach do wyników dostatecznie dokładnych z punktu widzenia ich praktycznego wykorzystania. W szczególności, przyjęcie rozkładu sinusoidalnego prowadzi do stosunkowo małych błędów, w przypadku cienkich anten liniowych o pomijalnych stratach spowodowanych istnieniem skończonej przewodności przewodu anteny [8], [10].

W ramach niniejszej pracy ograniczymy się do rozpatrzenia skośnika utworzonego z odcinka linii długiej, cienkiej w stosunku do długości skośnika i długości fali. Dla linii takich przyjęcie rozkładu sinusoidalnego tłumionego wydaje się uzasadnione, przy czym odnosi się to także do skośnika zwiniętego w pętlę [11]. Fakt ten umożliwi przejście od skośnika, którego oś jest prostą, do skośnika zwiniętego, bez konieczności modyfikacji założonego uprzednio rozkładu prądu $I_c(z)$. Podobnie, w przypadku wzbudzenia fali o charakterze powierzchniowym, z uwagi na symetrię osiową możliwego do wzbudzenia rodzaju, omawiany rozkład prądu pozostaje bez zmian.

3. UOGÓLNIONY MODEL OBWODOWY SKOŚNIKA

3.1. Wprowadzenie

Weźmy pod uwagę odcinek dwuprzewodowej linii długiej o długości $2l$, równoległej do osi z układu współrzędnych prostokątnych, przedstawiony na rys. 3-1.



Rys. 3-1. Odcinek linii długiej o długości $2l$

Gdy linia taka jest zasilana w sposób konwencjonalny na jednym z końców, prądy $I_1(z)$ i $I_2(z)$ spełniają w każdym przekroju z zależność $I_1(z) = -I_2(z)$. Mamy wówczas do

czynienia z linią zrównoważoną, dla której możliwe jest wprowadzenie znanego modelu obwodowego linii długiej [9]. W przypadku zasilania skośnikowego, np. na zaciskach $a-d$ (rys. 3-1), model ten nie jest słuszny, co stało się punktem wyjścia do poszukiwania teorii, przedstawionej przez Rajskiego w pracy [15] i uogólnionej następnie przez Strużaka w pracach [17] i [19].

Jak wynika jednak z analizy przeprowadzonej w rozdziale 2 niniejszej pracy, charakter rozkładu pola jest w przypadku skośnika zasadniczo różny od rozkładu pola w konwencjonalnej linii długiej, co powoduje, iż teoria Rajskiego pozostaje, jak zobaczymy, słuszna jedynie dla skośników dostatecznie krótkich w porównaniu z długością fali, przy czym nawet wówczas rozważania prowadzące do układu równań różniczkowych skośnika mają charakter przybliżony, nie uwzględniający całej rzeczywistości fizycznej problemu. Fakt ten stał się dla autora niniejszej pracy punktem wyjścia dla sformułowania uogólnionego modelu obwodowego skośnika, którego zakres stosowalności nie podlega ograniczeniom, obowiązującym dla teorii Rajskiego. Model ten zostanie przedstawiony w niniejszym rozdziale, przy czym wprowadzenie go poprzedzimy krótkim omówieniem konwencjonalnej obwodowej teorii skośnika [15] oraz sformułowaniem i uzasadnieniem w oparciu o teorię pola elektromagnetycznego założeń, jakie muszą być spełnione, aby teoria ta była słuszna i aby układ fizyczny przez nią opisywany był realizowany. Autor ogranicza się przy tym, podobnie jak w rozdziale 2 niniejszej pracy, do przypadku stanu ustalonego przy pobudzeniu sinusoidalnym.

3.2. Konwencjonalna obwodowa teoria skośnika

Teoria skośnika przedstawiona przez Rajskiego zajmuje się określeniem impedancji skośnika, utworzonego z odcinka dwuprzewodowej linii długiej (rys. 3-1). Autor ogranicza się do rozpatrzenia linii dwu typów: symetrycznej i koncentrycznej (rys. 2-2), oraz przyjmuje następujące założenia:

1. promień krzywizny osi podłużnej skośnika jest w każdym jej punkcie znacznie większy od wymiarów poprzecznych linii,

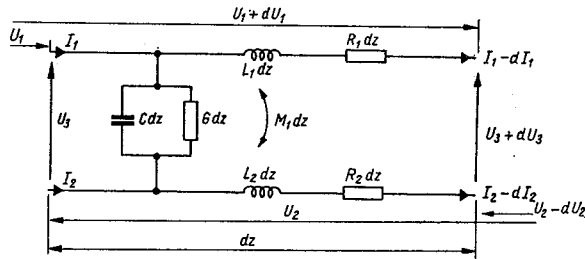
2. odległość między dwoma dowolnymi punktami osi skośnika, z wyjątkiem punktów należących do sąsiednich przekrojów oraz punktów przyległych do początku i końca linii, jest znacznie większa od jej wymiarów poprzecznych,

3. suma prądów przewodowych skośnika $I_1(z)$ oraz $I_2(z)$ jest w każdym jego przekroju poprzecznym stała i równa prądowi generatora I_g .

W tych warunkach, jeśli skośnik zasilany jest na zaciskach $a-d$ (rys. 3-1), to jego impedancja jest zdefiniowana wzorem

$$Z_s = \frac{U_{ad}}{I_g}. \quad (3-1)$$

W celu znalezienia równań różniczkowych skośnika, elementarny jego odcinek, zawarty między przekrojami o współrzędnych z i $z+dz$, przedstawiono w postaci schematu zastępczego z rys. 3-2.

Rys. 3-2. Element skośnika o długości dz

Układając dla powyższego schematu równania praw Kirchhoffa dochodzimy do układu pięciu równań różniczkowych względem zmiennych $I_1(z)$, $I_2(z)$, $U_1(z)$, $U_2(z)$, $U_3(z)$, które po odpowiednich podstawieniach i wprowadzeniu, zgodnie z rys. 3-2, oznaczeń

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1 - j\omega M, \quad (3-2)$$

$$Z_2 = R_2 + j\omega L_2 - j\omega M, \quad (3-3)$$

$$Z_w = Z_1 + Z_2, \quad (3-4)$$

$$\sigma = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad (3-5)$$

$$Y = G + j\omega C, \quad (3-6)$$

$$\gamma^2 = Y \cdot Z_w, \quad (3-7)$$

$$I_g = I_1(z) + I_2(z), \quad (3-8)$$

$$I_3(z) = I_1(z) - I_2(z), \quad (3-9)$$

dają się sprowadzić do jednego równania różniczkowego względem prądu $I_3(z)$

$$\frac{d^2 I_3(z)}{dz^2} = \gamma^2 I_3(z) + \sigma \gamma^2 I_g. \quad (3-10)$$

Rozwiązanie powyższego równania ma postać

$$I_3(z) = Ae^{-\gamma z} + Be^{\gamma z} + \sigma \gamma^2 I_g, \quad (3-11)$$

gdzie A i B są stałymi dowolnymi. Po uwzględnieniu warunków początkowych (2-41) i (2-42) prowadzi ono do następującego wzoru na impedancję skośnika

$$2Z_s = Z_f \operatorname{cth} \gamma l + \sigma^2 Z_f \operatorname{th} \gamma l + (1 - \sigma^2) Z_f \gamma l + j4\omega Ml. \quad (3-12)$$

We wzorze tym Z_f oznacza impedancję falową linii, określoną zależnością

$$Z_f = \sqrt{\frac{Z_w}{Y}}. \quad (3-13)$$

Dla linii symetrycznej $\sigma = 0$ i wzór (3-12) przyjmuje postać

$$2Z_s = Z_f \operatorname{cth} \gamma l + Z_f \gamma l + j4\omega Ml. \quad (3-14)$$

W przypadku skośnika bez strat otrzymujemy stąd wzór

$$2Z_s = j \sqrt{\frac{L}{C}} \left[\left(1 + \frac{4M}{L} \right) \beta l - \operatorname{ctg} \beta l \right], \quad (3-15)$$

w którym przyjęto

$$L = L_1 + L_2 - 2M. \quad (3-16)$$

Napięcia i prądy wyrażają się zależnościami

$$I_1(z) = \frac{I_g}{2} \left(1 - \frac{\text{sh} \gamma z}{\text{sh} \gamma l} \right), \quad (3-17)$$

$$I_2(z) = \frac{I_g}{2} \left(1 + \frac{\text{sh} \gamma z}{\text{sh} \gamma l} \right), \quad (3-18)$$

$$U_1(z) = \frac{Z_f I_g}{4} \frac{\text{ch} \gamma l - \text{ch} \gamma z}{\text{sh} \gamma l} + \frac{I_g}{2} (Z_1 + j2\omega M)(l+z), \quad (3-19)$$

$$U_2(z) = \frac{Z_f I_g}{4} \frac{\text{ch} \gamma l - \text{ch} \gamma z}{\text{sh} \gamma l} + \frac{I_g}{2} (Z_2 + j2\omega M)(l-z), \quad (3-20)$$

$$U_3(z) = \frac{Z_f I_g}{2} \frac{\text{ch} \gamma z}{\text{ch} \gamma l}. \quad (3-21)$$

Dla linii koncentrycznej natomiast, gdy $M = L_2$ oraz przy założeniu

$$R_2 \ll \omega(L_1 - L_2), \quad (3-22)$$

można przyjąć, iż $\sigma \approx 1$ i impedancja skośnika wyrazi się wzorem

$$Z_s = Z_f \text{cth} 2\gamma l + 2l(R_2 + j\omega L_2), \quad (3-23)$$

a rozkłady prądów i napięć zależnościami

$$I_1(z) = I_g \frac{\text{sh} \gamma(l+z)}{\text{sh} 2\gamma l}, \quad (3-24)$$

$$I_2(z) = I_g \left(1 - \frac{\text{sh} \gamma(l+z)}{\text{sh} 2\gamma l} \right), \quad (3-25)$$

$$U_1(z) = \frac{I_g Z_g}{2} \frac{\text{ch} 2\gamma l + \text{ch} \gamma(l+z)}{\text{sh} 2\gamma l} + I_g j\omega M(l+z), \quad (3-26)$$

$$U_2(z) = \frac{I_g Z_g}{2} \frac{\text{ch} 2\gamma l + \text{ch} \gamma(l+z)}{\text{sh} 2\gamma l} + I_g (Z_2 + j\omega M)(l-z), \quad (3-27)$$

$$U_3(z) = I_g Z_f \frac{\text{sh} \gamma(l+z)}{\text{sh} 2\gamma l}. \quad (3-28)$$

3.3. Warunki stosowalności konwencjonalnej obwodowej teorii skośnika

Opierając się na przeprowadzonych w punkcie 2.3 rozważaniach, dotyczących polowego obrazu zjawisk zachodzących w skośniku, zajmiemy się obecnie krytyczną oceną teorii Rajskiego i sprecyzujemy warunki określające zakres jej stosowalności. Przytoczone w punkcie 3.2 założenia 1 i 2, poczynione przez autora pracy [15], precyzują bowiem jedynie pewne wymagania odnośnie geometrii skośnika, a założenie 3 jest konsekwencją

przyjęcia schematu zastępczego jego elementarnego odcinka, w postaci z rys. 3-2. Z faktu, iż autor operuje jako punktem wyjścia, konwencjonalnym schematem zastępczym nie-skończenie krótkiego odcinka linii długiej wynika, iż zakłada on ważność tego schematu w swojej teorii. Wymaga to z kolei spełnienia założeń stosowalności obwodowej teorii linii długiej. Założenia te zostały przedstawione w punkcie 2.2 niniejszej pracy i sformułowane w postaci warunków (2-26), (2-32) i (2-33). Dwa pierwsze warunki, dotyczące geometrii linii tworzącej skośnik i parametrów ośrodków z jakich on zbudowany, są oczywiście możliwe do spełnienia, lecz z uwagi na warunki brzegowe (2-41) i (2-35), wynikające ze sposobu zasilania skośnika, nie będzie spełniony warunek (2-33), niezbędny dla zapewnienia poprzecznej quasistacjonarności i lokalnego charakteru wypadkowego rozkładu pola. Rozkład ten nie będzie już czystym rodzajem TEM, lecz superpozycją rodzaju TEM i rodzaju typu antenowego (patrz punkt 2.3).

Jedną z konsekwencji tego faktu jest stwierdzenie, iż konwencjonalny schemat zastępczy elementarnego odcinka linii długiej odnosi się w przypadku skośnika jedynie do składowych obwodowych $I_{o1}(z)$ oraz $I_{o2}(z)$, spełniających warunek (2-40), a nie do całkowitych prądów przewodowych $I_1(z)$ i $I_2(z)$, jak to zakłada teoria Rajskiego. Na własność tę, obowiązującą dla dowolnej linii niezrównoważonej, zwrócił już uwagę King w pracy [9].

Jeśli jednak skośnik jest na tyle krótki w porównaniu z długością fali, iż składowe antenowe prądy przewodowych $I_{c1}(z)$ oraz $I_{c2}(z)$ są wzdłuż linii stałe i przyjmują wartości wynikające z warunków brzegowych (2-41) i (2-42), to wówczas założenie, iż schemat z rys. 3-2 odnosi się do całkowitych prądów przewodowych, choć w gruncie rzeczy niesłuszne, prowadzi do poprawnych wyników końcowych, co autor pracy [15] weryfikuje na drodze eksperymentalnej.

Jak długo teoria rozpatruje skośnik, którego oś jest prostą, to jest ona po uwzględnieniu powyższego ograniczenia ścisła, lecz zasilanie skośnika prostego jest trudno realizowalne lub niewykonalne, a ponadto próba wyznaczenia jego indukcyjności jednostkowej prowadzi do całki rozbieżnej [5]. Dla uniknięcia rozbieżności całki i umożliwienia praktycznej realizacji zasilania skośnika, autor pracy [15] zakłada możliwość takiej jego konfiguracji, że końce skośnika są położone blisko siebie. Przyjmując, że punkty osi linii, z wyjątkiem punktów należących do sąsiednich przekrojów oraz punktów przyległych do jej początku i końca, znajdują się w odległościach dużo większych od średnicy linii, autor stawia hipotezę, iż teoria skośnika sformułowana dla przypadku osi prostej pozostaje w przybliżeniu ważna. Hipotezę tę autor pracy [15] weryfikuje również wyłącznie eksperymentalnie.

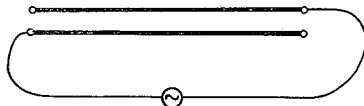
Konieczność rozpatrywania skośnika zwiniętego wiąże się ponadto ze sprawą uniezależnienia się od wpływu przewodów doprowadzających do generatora zasilającego, a także sensu fizycznego pojęcia impedancji skośnika, traktowanego jako dwójnik. Sprawy te zostały przedstawione przez Eberta w pracy [2] oraz przez autora niniejszej pracy w artykule [5] i rozważania tam zawarte można streścić następująco:

— pojęcie impedancji dwójnika ma sens jedynie wówczas, gdy odległość między zaciskami tego dwójnika jest dużo mniejsza od długości fali;

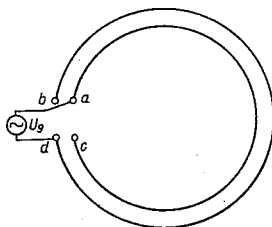
— w przypadku zasilania skośnika prostego, np. w sposób przedstawiony na rys. 3-3, przewody doprowadzające do generatora tworzą wraz ze skośnikiem pętlę o pewnym, na ogół nieregularnym kształcie. Parametry jednostkowe skośnika zależą wówczas od geometrii doprowadzeń, gdyż te ostatnie wywierają zasadniczy wpływ na rozkład pola

zewnątrz skośnika. Ponadto, możliwe jest zdefiniowanie impedancji jedynie względem zacisków generatora, a więc jedynie dla dwójnika, który stanowi skośnik, łącznie z doprowadzeniami;

— jeśli skośnik tworzy pętlę, np. kołową (rys. 3-4), a odstęp między jego końcami jest dużo mniejszy od długości skośnika i długości fali, to wpływ doprowadzeń do generatora



Rys. 3-3. Zasilanie skośnika prostego



Rys. 3-4. Skościński zwinięty w pętlę kołową

można uczynić dowolnie małym, a impedancja będzie określona względem faktycznych zacisków skośnika.

Obecnie możemy zatem sformułować warunki, przy spełnieniu których konwencjonalna obwodowa teoria skośnika pozostaje słuszna:

1. wymiary poprzeczne linii, z której utworzono skośnik, są dużo mniejsze od długości fali;

2. przewodność właściwa materiału, z którego wykonano przewody linii, jest dużo większa od przewodności właściwej ośrodka je otaczającego;

3. skośnik jest na tyle krótki w porównaniu z długością fali, iż rozkład składowych $I_{c1}(z)$ oraz $I_{c2}(z)$ prądów przewodowych można uważać za stały. Jak pokazano wyżej, w punkcie 3.7, dla skośnika o długości $2l \leq \frac{\lambda}{6}$ błąd względny, wynikający ze stosowania teorii Rajskego nie przekracza 8,7%;

4. skośnik jest zwinięty w pętlę, przy czym odległość między jego końcami jest dużo mniejsza od długości skośnika i długości fali;

5. promień krzywizny osi podłużnej skośnika jest w każdym jej punkcie znacznie większy od długości linii;

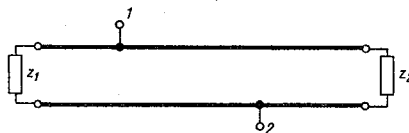
6. odległość między dwoma dowolnymi punktami osi linii, z wyjątkiem punktów należących do sąsiednich przekrojów oraz punktów przyległych do jej początku i końca, jest znacznie większa od wymiarów poprzecznych linii.

Podane warunki 1 i 2 są takie same, jak dla klasycznej linii długiej. Dochodzą ponadto dodatkowe założenia 3, 4, 5 i 6. Konieczność spełnienia założenia 3 wiąże się z faktem, iż skośnik jest linią niezrównoważoną i z wymaganiem, aby suma prądów przewodowych była w każdym przekroju skośnika stała i równa prądowi generatora. Założenie 4 jest

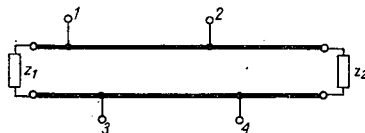
natomiast związane z możliwością zdefiniowania jego parametrów jednostkowych i impedancji wejściowej oraz z możliwością praktycznej realizacji zasilania skośnika. Założenia 5 i 6 umożliwiają wreszcie zastosowanie teorii sformułowanej dla skośnika prostego, do przypadku skośnika zwiniętego w pętlę.

3.4. Możliwości uogólnienia teorii skośnika

Teoria skośnika przedstawiona w punkcie 3.2 została uogólniona przez Strużaka w jego kolejnych pracach [16], [18] i [19]. W pracy [16] rozpatruje on przypadek odcinka linii długiej, zasilanego w sposób dowolny, otrzymując przebiegi czasowe i rozkłady napięć i prądów przy dowolnych warunkach brzegowych dla obu końców linii. W pracach [18] i [19] autor ten zajmuje się analizą odcinka linii długiej, obciążonego na obu końcach dowolnymi impedancjami Z_1 i Z_2 , rozpatrywanego bądź jako dwójnik [18] o zaciśkach



Rys. 3-5. Dwójnik utworzony z odcinka linii długiej

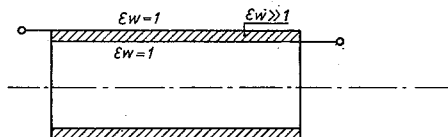


Rys. 3-6. Czwórnik utworzony z odcinka linii długiej

umieszczonych w dowolnych punktach obu przewodów linii (rys. 3-5), bądź jako czwórnik [19] (rys. 3-6).

Podana w powyższych pracach teoria stanowi dla jej autora podstawę do przeprowadzenia analizy pracy rurkowych kondensatorów ceramicznych w zakresie wielkich częstotliwości [17]. Omawiane uogólnienia teorii skośnika opierają się na tych samych założeniach, co teoria Rajskiego, a więc podlegają tym samym ograniczeniom.

W analizowanym przez Strużaka przypadku ceramicznego kondensatora rurkowego (rys. 3-7), z uwagi na dużą (rzędu 10^3) przenikalność dielektryczną ϵ_w ośrodka między



Rys. 3-7. Przekrój ceramicznego kondensatora rurkowego

okładkami, mamy do czynienia z sytuacją, w której dla fali TEM rozchodzącej się w dielektryku między okładkami, kondensator jest elektrycznie długi, a dla prądów płynących po zewnętrznej powierzchni zewnętrznej okładki jest na tyle krótki, iż zachowuje się jak element skupiony i teoria Rajskiego pozostaje słuszna.

W tej sytuacji celem autora niniejszej pracy jest takie uogólnienie obwodowej teorii skośnika, aby mogła być ona stosowana w przypadku, gdy skośnik jest elektrycznie długi zarówno dla składowych $I_{o1}(z)$, $I_{o2}(z)$, jak i dla składowych $I_{c1}(z)$, $I_{c2}(z)$ prądów przewodowych, a więc w sytuacji, gdy nie daje się on sprowadzić do szeregowego lub równoległego połączenia pewnej liczby odcinków konwencjonalnej linii długiej i elementów skupionych (patrz np. wzór 3-23).

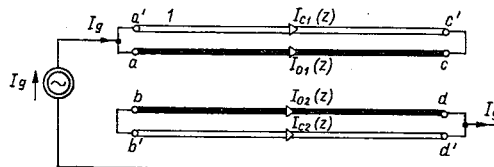
Podstawowa trudność, z jaką należy się tutaj liczyć polega, jak to już zasygnalizowano w punkcie 2.3, na wyznaczeniu rozkładu prądów antenowych $I_{c1}(z)$ oraz $I_{c2}(z)$. Korzystając z wyników uzyskanych w teorii anten, można bądź założyć pewien rozkład prądów (patrz punkt 2.3.3), bądź też, dla pewnych konfiguracji skośnika, takich jak np. pętla kołowa utworzona z linii koncentrycznej, wykorzystać gotowe zależności, określające impedancję wejściową odpowiedniego typu anteny, a będące wynikiem przybliżonych metod rozwiązywania odpowiednich równań całkowych. W przypadku skośnika koncentrycznego zwiniętego w pętlę kołową można do tego celu wykorzystać rezultaty uzyskane przez Brundella [1]. Ta ostatnia metoda mało nadaje się jednak do praktycznego wykorzystania, gdyż istniejące metody teorii anten nie prowadzą do zamkniętych wyrażeń na impedancję wejściową, dając jedynie rozwiązania w postaci szeregów, wymagające dla ich zastosowania pracochłonnych metod numerycznych. Z tego względu autor niniejszej pracy zdecydował się na przyjęcie modelu prostego, wykorzystującego założenie z góry pewnego rozkładu prądów $I_{c1}(z)$ i $I_{c2}(z)$.

3.5. Ustawienie równań różniczkowych uogólnionej obwodowej teorii skośnika

Rozpatrzmy skośnik utworzony z odcinka linii długiej przedstawionego na rys. 3-1 i zasilanego ze źródła napięcia sinusoidalnego U_g na zaciskach a - d . Prądy przewodowe spełniają w dowolnym przekroju skośnika zależności:

$$I_1(z) = I_{c1}(z) + I_o(z), \quad (3-29)$$

$$I_2(z) = I_{c2}(z) - I_o(z). \quad (3-30)$$

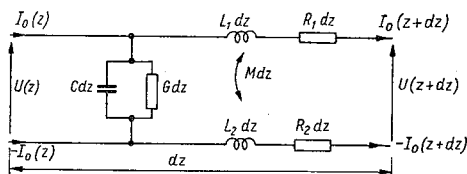


Rys. 3-8. Schematyczne przedstawienie uogólnionego modelu skośnika

Zgodnie z rozważaniami przedstawionymi w rozdziale 2 niniejszej pracy, można rozpatrywany skośnik przedstawić przy pomocy modelu, złożonego z konwencjonalnej linii długiej i anteny, połączonych w taki sposób, aby spełnione były warunki brzegowe (2-41) i (2-42). Model ten przedstawiono schematycznie na rys. 3-8, gdzie para linii grubych zaczernionych symbolizuje linię długą, a linie niezaczernione — anteny dla każdego z przewodów skośnika.

Przyjęto przy tym, iż punkty a i a' , b i b' , c i c' oraz d i d' mają w każdej chwili te same potencjały.

Biorąc pod uwagę linię długą o zaciskach $abcd$ (rys. 3-8), rozważmy elementarny jej odcinek o długości dz , przedstawiony na rys. 3-9.



Rys. 3-9. Elementarny odcinek linii o zaciskach $abcd$

Zachodzą tu związki

$$I_o(z+dz) = I_o(z) + \frac{dI_o(z)}{dz} dz, \quad (3-31)$$

$$U(z+dz) = U(z) + \frac{dU(z)}{dz} dz. \quad (3-32)$$

Układając równania praw Kirchhoffa dla czwórnika z rys. 3-9 otrzymujemy

$$-\frac{dU(z)}{dz} dz = I_o(z) (R_1 + R_2) dz + (L_1 + L_2 + 2M) j\omega I_o(z) dz, \quad (3-33)$$

$$-\frac{dI_o(z)}{dz} dz = (G + j\omega C) U(z) dz. \quad (3-34)$$

Dzieląc powyższe związki obustronnie przez dz otrzymujemy stąd równania linii długiej o zaciskach $abcd$, w postaci

$$\frac{dU(z)}{dz} + [R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)] I_o(z), \quad (3-35)$$

$$\frac{dI_o(z)}{dz} + (G + j\omega C) U(z) = 0. \quad (3-36)$$

Biorąc pod uwagę związki (3-29) i (3-30), możemy zapisać pełny układ równań opisujących przyjęty model skośnika

$$I_1(z) = I_{c1}(z) + I_o(z),$$

$$I_2(z) = I_{c2}(z) - I_o(z),$$

$$\frac{dI_o(z)}{dz} = -(G + j\omega C) U(z),$$

$$\frac{dU(z)}{dz} = -[R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)] I_o(z).$$

Rozwiązania powyższych równań spełniać powinny następujące warunki brzegowe (rys. 3-8)

$$I_1(-l) = I_{c1}(-l) + I_o(-l) = I_g, \quad (3-37)$$

$$I_1(l) = I_{c1}(l) + I_o(l) = 0, \quad (3-38)$$

$$I_2(-l) = I_{c2}(-l) - I_o(-l) = 0, \quad (3-39)$$

$$I_2(l) = I_{c2}(l) - I_o(l) = I_g. \quad (3-40)$$

3.6. Rozwiązanie równań

Układ równań (3-29), (3-30), (3-35) i (3-36) składa się z dwu równań różniczkowych, wiążących ze sobą napięcie $U(z)$ oraz prąd $I_o(z)$, oraz dwu równań algebraicznych, wiążących prąd $I_o(z)$ z całkowitymi prądami przewodowami $I_1(z)$ i $I_2(z)$. Występujące w tych równaniach prądy $I_{c1}(z)$ oraz $I_{c2}(z)$ powinny być wyznaczone na podstawie teorii anten i zgodnie z rozważaniami zawartymi w punktach 2.3 i 2.4 ich rozkład zostanie przyjęty w postaci

$$I_{c1}(z) = Ce^{-\gamma_c z} + De^{\gamma_c z}, \quad (3-41)$$

$$I_{c2}(z) = Ee^{-\gamma_c z} + Fe^{\gamma_c z}, \quad (3-42)$$

gdzie C , D , E i F są stałymi dowolnymi, a stała propagacji γ_c może być zapisana, podobnie jak stała propagacji γ występująca we wzorze (2-29), w postaci

$$\gamma_c = \alpha_c + j\beta_c. \quad (3-43)$$

Stała fazowa β_c wyraża się wzorem (2-14), przy czym występują w nim parametry ε i μ ośrodka otaczającego skośnik, w którym występuje pole typu antenowego. Stała tłumienia α_c reprezentująca straty spowodowane skończoną przewodnością właściwą przewodów skośnika oraz straty na promieniowanie może być w przypadku pewnych określonych konfiguracji skośnika określona na podstawie wzorów podanych w literaturze [6], [11].

Obecnie zajmujemy się wyznaczeniem prądu $I_o(z)$ oraz napięcia $U(z)$ na podstawie równań (3-35) i (3-36), które po wprowadzeniu oznaczeń (3-2), (3-3) i (3-4) można przedstawić w postaci

$$\frac{dI_o(z)}{dz} + YU(z) = 0, \quad (3-44)$$

$$\frac{dU(z)}{dz} + Z_w I_o(z) = 0. \quad (3-45)$$

Różniczkując jedno z tych równań względem z i podstawiając do drugiego, a także stosując oznaczenie

$$\gamma_o^2 = Z_w Y, \quad (3-46)$$

otrzymamy dla napięcia i prądu następujące dwa równania

$$\frac{d^2 U(z)}{dz^2} - \gamma_o^2 U(z) = 0, \quad (3-47)$$

$$\frac{d^2 I_o(z)}{dz^2} - \gamma_o^2 I_o(z) = 0. \quad (3-48)$$

Rozwiązaniami powyższych równań są funkcje

$$U(z) = Ae^{-\gamma_0 z} + Be^{\gamma_0 z}, \quad (3-49)$$

$$I_o(z) = \frac{1}{Z_f}(Ae^{-\gamma_0 z} - Be^{\gamma_0 z}), \quad (3-50)$$

gdzie Z_f oznacza impedancję falową linii, określoną wzorem (3-13). Należy tu podkreślić, iż stała przenoszenia γ_0 , występująca w ostatnich wyrażeniach, jest ogólnie biorąc różna od stałej γ_c , występującej we wzorach (3-41) i (3-42).

Biorąc pod uwagę zależności (3-29) i (3-30), otrzymujemy dla prądów przewodowych oraz dla napięcia między przewodami skośnika następujące wyrażenia:

$$I_1(z) = Ce^{-\gamma_0 z} + De^{\gamma_0 z} + \frac{1}{Z_f}(Ae^{-\gamma_0 z} - Be^{\gamma_0 z}), \quad (3-51)$$

$$I_2(z) = Ee^{-\gamma_0 z} + Fe^{\gamma_0 z} - \frac{1}{Z_f}(Ae^{-\gamma_0 z} - Be^{\gamma_0 z}), \quad (3-52)$$

$$U(z) = Ae^{-\gamma_0 z} + Be^{\gamma_0 z}. \quad (3-53)$$

Stałe A, B, C, D, E i F , występujące w ostatnich wzorach, mogą być znalezione na podstawie warunków brzegowych.

3.7. Przypadek skośnika symetrycznego

Dla skośnika utworzonego z odcinka symetrycznej linii dwuprzewodowej składowe $I_{c1}(z)$ oraz $I_{c2}(z)$ prądów przewodowych są sobie równe w każdym przekroju linii, zgodnie ze wzorem (2-50). Uwzględnienie tej zależności w równaniach (3-37) ÷ (3-40) prowadzi do następujących warunków brzegowych:

$$I_1(-l) = I_c(-l) + I_o(-l) = I_g, \quad (3-54)$$

$$I_1(l) = I_c(l) + I_o(l) = 0, \quad (3-55)$$

$$I_2(-l) = I_c(-l) - I_o(-l) = 0, \quad (3-56)$$

$$I_2(l) = I_c(l) - I_o(l) = I_g. \quad (3-57)$$

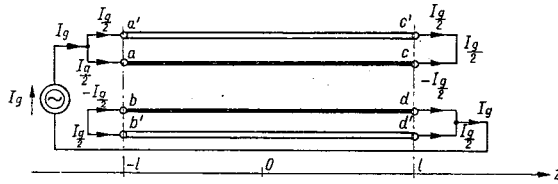
Dodając lub odejmując od siebie parami równania (3-54) i (3-56) oraz (3-55) i (3-57), otrzymujemy stąd odpowiednio warunki dla składowych obwodowych

$$I_o(-l) = \frac{I_g}{2}, \quad I_o(l) = -\frac{I_g}{2} \quad (3-58)$$

oraz dla składowych antenowych

$$I_c(-l) = \frac{I_g}{2}, \quad I_c(l) = \frac{I_g}{2}. \quad (3-59)$$

Rozpływ prądów w skośniku symetrycznym przedstawiono schematycznie na rys. 3-10.



Rys. 3-10. Rozpływ prądów w skośniku symetrycznym

Warunki (3-58) i (3-59) posłużą nam obecnie do wyznaczenia stałych A , B , C , D , E i F , występujących we wzorach (3-51) ÷ (3-53). Podstawiając zależności (3-58) kolejno do równania (3-49) otrzymamy związki

$$Ae^{\gamma_o l} - Be^{-\gamma_o l} = \frac{I_g Z_f}{2}, \quad (3-60)$$

$$Ae^{-\gamma_o l} - Be^{\gamma_o l} = -\frac{Z_g I_f}{2}, \quad (3-61)$$

z których wyznaczamy stałe A i B

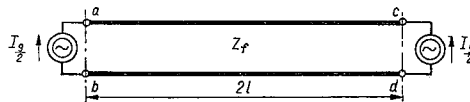
$$A = B = -\frac{I_g Z_f}{4 \operatorname{sh} \gamma_o l}. \quad (3-62)$$

Równości (3-48) i (3-49) przybiorą wówczas postać

$$U(z) = \frac{I_g Z_f}{2 \operatorname{sh} \gamma_o l} \operatorname{ch} \gamma_o z, \quad (3-63)$$

$$I_o(z) = \frac{-I_g}{2 \operatorname{sh} \gamma_o l} \operatorname{sh} \gamma_o z. \quad (3-64)$$

Otrzymany rozkład napięcia $U(z)$ i prądu $I_o(z)$ jest taki, jak dla linii długiej, zasilanej na obu końcach z idealnych źródeł prądowych o jednakowych wydajnościach $\frac{I_g}{2}$ (rys. 3-11).



Rys. 3-11. Zastępcza linia długa dla składowych $U(z)$ i $I_o(z)$

Podstawiając zależności (3-59) kolejno do (3-41) i (3-42) z uwzględnieniem (2-50), otrzymujemy zależności

$$Ce^{\gamma_o l} + De^{-\gamma_o l} = Ee^{\gamma_o l} + Fe^{-\gamma_o l} = \frac{I_g}{2}, \quad (3-65)$$

$$Ce^{-\gamma_o l} + De^{\gamma_o l} = Ee^{-\gamma_o l} + Fe^{\gamma_o l} = \frac{I_g}{2}, \quad (3-66)$$

na podstawie których wyznaczamy stałe C , D , E i F

$$C = D = E = F = \frac{I_g}{4\text{ch}\gamma_c l}. \quad (3-67)$$

Wyrażenia (3-41) i (3-42) przybiorą postać

$$I_c(z) = I_{c1}(z) = I_{c2}(z) = \frac{I_g}{2\text{ch}\gamma_c l} \text{ch}\gamma_c z. \quad (3-68)$$

Dla prądów przewodowych $I_1(z)$ i $I_2(z)$ oraz napięcia $U(z)$ otrzymujemy zatem następujące zależności:

$$I_1(z) = \frac{I_g}{2} \left(\frac{\text{ch}\gamma_c z}{\text{ch}\gamma_c l} - \frac{\text{sh}\gamma_o z}{\text{sh}\gamma_o l} \right). \quad (3-69)$$

$$I_2(z) = \frac{I_g}{2} \left(\frac{\text{ch}\gamma_c z}{\text{ch}\gamma_c l} + \frac{\text{sh}\gamma_o z}{\text{sh}\gamma_o l} \right), \quad (3-70)$$

$$U(z) = \frac{I_g Z_f}{2} \frac{\text{ch}\gamma_o z}{\text{sh}\gamma_o l}. \quad (3-71)$$

Dla skośnika krótkiego, dla którego $l \ll \lambda$, można przyjąć, że $|\gamma_c z| \leq |\gamma_c l| \ll 1$. Wówczas $I_c(z) \cong \frac{I_g}{2}$ i zależności (3-69)÷(3-71) pokrywają się, po przyjęciu oznaczenia $\gamma_o = \gamma$, ze wzorami (3-17), (3-18) i (3-21), podanymi przez Rajskiego.

Obecnie zajmiemy się wyprowadzeniem wzoru na impedancję wejściową skośnika symetrycznego, określoną wzorem (3-1)

$$Z_s = \frac{U_{ad}}{I_g} = \frac{U_{ab} + U_{bd}}{I_g} = \frac{U_{ac} + U_{cd}}{I_g}. \quad (3-72)$$

Napięcia U_{ab} i U_{cd} określamy na podstawie wzoru (3-71)

$$U_{ab} = U(-l); \quad U_{cd} = U(l). \quad (3-73)$$

Napięcia U_{bd} i U_{ac} są napięciami wzdłużnymi, mierzonymi odpowiednio między zaciskami przewodu 2 i 1 skośnika (rys. 3-1). W celu znalezienia napięcia U_{bd} zauważmy, iż dla elementu dz przewodu 2 możemy napisać

$$\frac{dU_2(z)}{dz} = Z_{c2} I_c(z) - Z_2 I_o(z). \quad (3-74)$$

We wzorze tym Z_2 jest określone związkiem (3-3), a Z_{c2} oznacza impedancję, przypadającą na jednostkę długości przewodu 2 linii, dla składowej $I_c(z)$ prądu przewodowego. Po obustronnym scałkowaniu ostatniej zależności w granicach od $-l$ do l otrzymamy

$$U_{bd} = Z_{c2} \int_{-l}^l I_c(z) dz - Z_2 \int_{-l}^l I_o(z) dz. \quad (3-75)$$

Po podstawieniu zależności (3-64) i (3-68) dostaniemy stąd związek

$$U_{bd} = \frac{I_g Z_{c2}}{2\text{ch}\gamma_c l} \int_{-l}^l \text{ch}\gamma_c z dz + \frac{I_g Z_2}{2\text{sh}\gamma_o l} \int_{-l}^l \text{sh}\gamma_o z dz, \quad (3-76)$$

który po wykonaniu całkowania przybiera postać

$$U_{bd} = \frac{Z_{c2} I_g}{\gamma_c} \operatorname{th} \gamma_c l. \quad (3-77)$$

Impedancja skośnika Z_s wyrazi się wzorem

$$Z_s = \frac{U_{ab} + U_{bd}}{I_g} = \frac{Z_f}{2} \operatorname{cth} \gamma_o l + \frac{Z_{c2}}{\gamma_c} \operatorname{th} \gamma_c l. \quad (3-78)$$

Dla skośnika krótkiego $|\gamma_c l| \ll 1$ i można przyjąć $\operatorname{th} \gamma_c l \approx \gamma_c l$. Jeśli $Z_{c2} = Z_2 + j\omega 2M = R_2 + j\omega L_2 + j\omega M$ oraz $\gamma_c = \gamma_o = \gamma$, otrzymujemy wzór

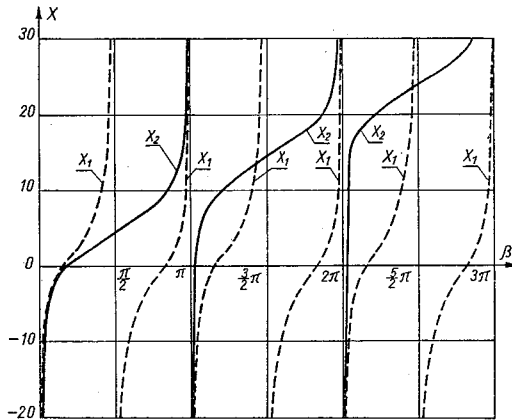
$$Z_s = \frac{Z_f}{2} \operatorname{cth} \gamma l + Z_2 l + j\omega 2Ml, \quad (3-79)$$

który po prostych przekształceniach pokrywa się ze wzorem (3-14) podanym przez Rajskiego. Dla skośnika bez strat wzór (3-79) przyjmuje postać

$$Z_s = j \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \left[\left(1 + \frac{4M}{L} \right) \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda} - \operatorname{ctg} 2\pi \frac{l}{\lambda} \right]. \quad (3-80)$$

Interesujące wydaje się porównanie powyższego wzoru ze wzorem (3-14), podanym przez Rajskiego. W tym celu na rys. 3-12 przedstawiono przebieg impedancji skośnika w funkcji jego długości elektrycznej βl . Za autorem pracy [15] przyjęto przypadek, gdy

$$1 + \frac{4M}{L} = 3.$$



Rys. 3-12. Przebieg zredukowanej reaktancji skośnika symetrycznego bez strat o długości $2l$: x_1 — według teorii uogólnionej, x_2 — według teorii Rajskiego

Na wykresie tym przedstawiono przebieg wielkości zredukowanych

$$x_1 = 3 \operatorname{tg} \beta l - \operatorname{ctg} \beta l \quad (3-81)$$

oraz

$$x_2 = 3 \beta l - \operatorname{ctg} \beta l \quad (3-82)$$

otrzymanych odpowiednio na podstawie teorii uogólnionej i teorii Rajskiego.

Porównanie obu wykresów pozwala wyciągnąć szereg interesujących wniosków.

a) Dla małych długości elektrycznych skośnika obie teorie dają wyniki zgodne, przy czym dla $\beta l \leq \frac{\pi}{6}$ błąd względny nie przekracza 8,7%. Odpowiada to skośnikowi o długości $2l \leq \frac{\lambda}{6}$.

b) Reaktancja skośnika liczona zgodnie z teorią uogólnioną przyjmuje wartości nieskończenie wielkie przy

$$\frac{2l}{\lambda} = \frac{k}{2}, \quad \text{gdzie} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3-83)$$

podczas gdy teoria Rajskiego daje wynik

$$\frac{2l}{\lambda} = k. \quad (3-84)$$

c) Reaktancja skośnika, liczona zgodnie z teorią uogólnioną, jest względem βl funkcją okresową, o okresie π .

d) Reaktancja ta przyjmuje wartości zerowe dla

$$\left(1 + \frac{4M}{L}\right) \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x. \quad (3-85)$$

Rozwiązanie powyższego równania nie przedstawia trudności, dając w wyniku

$$\frac{2l}{\lambda} = \pm \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4M}{L}}}. \quad (3-86)$$

Należy tu podkreślić, iż z uwagi na zjawisko promieniowania, związane z istnieniem składowych $I_c(z)$ prądów przewodowych, nawet przy założeniu braku strat w samej linii długiej, przy $R = 0$ oraz $G = 0$, impedancja skośnika będzie posiadać składową rzeczywistą równą oporności promieniowania. Oporność tę można, dla każdego konkretnego skośnika, wyliczyć metodami połowymi [9], [10]. Całkowita impedancja skośnika przyjmie wówczas postać

$$Z_s = R_p + R_s + jX_s, \quad (3-87)$$

gdzie R_p oznacza oporność promieniowania, a R_s i X_s odpowiednio część rzeczywistą i urojoną wyrażenia (3-78).

3.8. Przypadek skośnika koncentrycznego

Dla skośnika utworzonego z odcinka linii koncentrycznej o przekroju przedstawionym na rys. 2-2a należy przyjąć, zgodnie z rozważaniami przeprowadzonymi w punkcie 2.3, iż prąd antenowy płynie jedynie po zewnętrznym przewodzie linii

$$I_{c1}(z) = 0; \quad I_{c2}(z) = I_c(z). \quad (3-88)$$

Obowiązują wówczas równości

$$I_1(z) = I_o(z), \quad (3-89)$$

$$I_2(z) = I_c(z) - I_o(z), \quad (3-90)$$

a warunki brzegowe są następujące

$$I_1(-l) = I_o(-l) = 0, \quad (3-91)$$

$$I_1(l) = I_o(l) = I_g, \quad (3-92)$$

$$I_2(-l) = I_c(-l) - I_o(-l) = I_g, \quad (3-93)$$

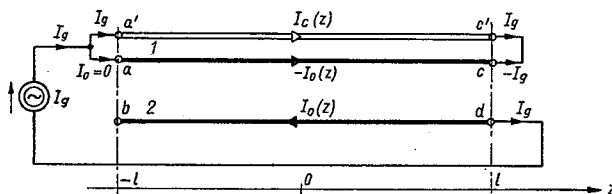
$$I_2(l) = I_c(l) - I_o(l) = 0. \quad (3-94)$$

Dla prądu antenowego i obwodowego otrzymujemy stąd odpowiednio

$$I_c(-l) = I_g, \quad I_c(l) = I_g; \quad (3-95)$$

$$I_o(-l) = 0, \quad I_o(l) = -I_g. \quad (3-96)$$

Rozpływ prądów dla skośnika koncentrycznego przedstawiono schematycznie na rys. 3-13.



Rys. 3-13. Rozpływ prądów dla skośnika koncentrycznego

Podstawiając zależności (3-96) do równania (3-49) otrzymujemy związki

$$Ae^{\gamma_o l} - Be^{-\gamma_o l} = 0, \quad (3-97)$$

$$Ae^{-\gamma_o l} - Be^{\gamma_o l} = -I_g Z_f, \quad (3-98)$$

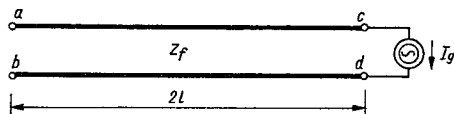
z których wyznaczamy stałe A i B

$$A = \frac{I_g Z_f}{2\text{sh}\gamma_o l} e^{-\gamma_o l}, \quad B = \frac{I_g Z_f}{2\text{sh}\gamma_o l} e^{\gamma_o l}. \quad (3-99)$$

Prąd $I_o(z)$ i napięcie $U(z)$ wyrażą się wzorami

$$I_o(z) = -I_g \frac{\text{sh}\gamma_o(l+z)}{\text{sh}2\gamma_o l}, \quad (3-100)$$

$$U(z) = I_g Z_f \frac{\text{ch}\gamma_o(l+z)}{\text{sh}2\gamma_o l}. \quad (3-101)$$



Rys. 3-14. Zastępcza linia długa dla składowych $I_o(z)$ oraz $U(z)$, w przypadku skośnika koncentrycznego

Otrzymany rozkład napięcia i prądu jest taki, jak dla linii długiej o długości $2l$, zasilanej na jednym końcu z idealnego źródła prądowego o wydajności I_g , a rozwartej na drugim końcu (rys. 3-14).

Podstawiając zależności (3-95) do wzoru (3-42), otrzymujemy równania

$$Ee^{\gamma_c l} + Fe^{-\gamma_c l} = I_g, \quad (3-102)$$

$$Ee^{-\gamma_c l} + Fe^{\gamma_c l} = I_g, \quad (3-103)$$

z których wyznaczamy stałe E i F

$$E = F = \frac{I_g}{2\text{ch}\gamma_c l}. \quad (3-104)$$

Prąd $I_c(z)$ wyrazi się wzorem

$$I_c(z) = \frac{I_g \text{ch}\gamma_c z}{\text{ch}\gamma_o l}. \quad (3-105)$$

Dla prądów przewodowych $I_1(z)$ oraz $I_2(z)$ i napięcia międzyprzewodowego $U(z)$ skośnika koncentrycznego otrzymamy wyrażenia

$$I_1(z) = I_g \frac{\text{sh}\gamma_o(l+z)}{\text{sh}2\gamma_o l}, \quad (3-106)$$

$$I_2(z) = I_g \left(\frac{\text{ch}\gamma_c z}{\text{ch}\gamma_c l} - \frac{\text{sh}\gamma_o(l+z)}{\text{sh}2\gamma_o l} \right), \quad (3-107)$$

$$U(z) = I_g Z_f \frac{\text{ch}\gamma_o(l+z)}{\text{sh}2\gamma_o l}. \quad (3-108)$$

Dla skośnika krótkiego, gdy $|\gamma_c z| \leq |\gamma_c l| \ll 1$, $I_c(z) \approx I_g$ i dla prądu $I_2(z)$ otrzymamy wyrażenie, pokrywające się ze wzorem (3-25), wynikającym z teorii Rajskiego.

Impedancję Z_s skośnika koncentrycznego wyznaczymy, podobnie jak dla skośnika symetrycznego, wychodząc z zależności

$$Z_s = \frac{U_{ac} + U_{cd}}{I_g}. \quad (3-109)$$

Napięcie międzyprzewodowe U_{cd} ma postać

$$U_{cd} = U(l) = I_g Z_f \text{cth}2\gamma_o l. \quad (3-110)$$

Napięcie wzdłużne U_{ac} wyznaczymy ze wzoru

$$U_{ac} = \int_{-l}^l [Z_2 I_o(z) + Z_{c2} I_c(z)] dz. \quad (3-111)$$

Występująca w ostatnim wyrażeniu impedancja jednostkowa Z_2 przewodu 2 jest określona wzorem (3-3), a Z_{c2} oznacza odpowiednią impedancję dla składowej $I_c(z)$. Dla omawianego skośnika koncentrycznego będzie ona równa sumie oporności jednostkowej R_{2c} , jaką przedstawia dla składowej $I_c(z)$ zewnętrzna warstwa zewnętrznego przewodu kabla, oraz indukcyjności jednostkowej L_2 , związanej z polem magnetycznym w przestrzeni otaczającej kabel skośnika

$$Z_{c2} = R_{2c} + j\omega L_2. \quad (3-112)$$

Po podstawieniu do wzoru (3-111) wyrażeń (3-100) i (3-105) i wykonaniu całkowania otrzymamy związek

$$U_{ac} = I_g \left(\frac{2Z_{c2}}{\gamma_c} \operatorname{th} \gamma_c l - \frac{Z_2}{\gamma_o} \operatorname{th} \gamma_o l \right) \quad (3-113)$$

ślusznym w przypadku słabego efektu naskórkowego, gdy składowe $I_o(z)$ oraz $I_c(z)$ nie są przestrzennie oddzielone od siebie. Impedancja skośnika koncentrycznego wyrazi się wówczas wzorem

$$Z_s = \frac{2Z_{c2}}{\gamma_c} \operatorname{th} \gamma_c l + Z_f \operatorname{cth} 2\gamma_o l - \frac{Z_2}{\gamma_o} \operatorname{th} \gamma_o l; \quad (3-114)$$

dla skośnika krótkiego, $\operatorname{th} \gamma_c l \approx \gamma_c l$ i przy $\gamma_c = \gamma_o = \gamma$, wzór ten przyjmuje postać

$$Z_s = Z_f \operatorname{cth} 2\gamma l + l(R_{2c} + j\omega 4L_2). \quad (3-115)$$

W przypadku skośnika bez strat wzór (3-114) można zapisać w postaci

$$Z = -j \sqrt{\frac{L}{C}} \left(\operatorname{ctg} \beta_o l + 4 \frac{L_2}{L_2 - L_1} \operatorname{tg} \beta_c l \right). \quad (3-116)$$

W zakresie występowania silnego efektu naskórkowego, gdy prądy $I_c(z)$ oraz $I_o(z)$ w zewnętrznym przewodzie skośnika są przestrzennie odseparowane od siebie, wzór (3-111) nie jest słuszny i należy go zastąpić zależnością

$$U_{ac} = \int_{-l}^l Z_{c2} I_c(z) dz. \quad (3-117)$$

Po uwzględnieniu wzoru (3-105) i wykonaniu całkowania otrzymamy

$$U_{ac} = I_g \frac{2(R_{2c} + j\omega L_2)}{\gamma_c} \operatorname{th} \gamma_c l. \quad (3-118)$$

Impedancja skośnika Z_s wyrazi się wówczas wzorem

$$Z_s = Z_f \operatorname{cth} 2\gamma_o l + (R_{2c} + j\omega L_2) \frac{2\operatorname{th} \gamma_c l}{\gamma_c}. \quad (3-119)$$

Dla skośnika krótkiego, przy $\operatorname{th} \gamma_c l \cong \gamma_c l$ i $R_{2c} = R_2$, wynik ten pokrywa się z podanym przez Rajskiego wzorem (3-23). Należy zwrócić uwagę na fakt, iż zbędne są do tego założenia upraszczające (3-22), jakie muszą być spełnione przy wyprowadzeniu wzoru (3-23). Dla skośnika koncentrycznego bez strat wzór (3-119) można przepisać w postaci

$$Z_s = jZ_f \left[0,5 \left(\frac{4M}{L} + 1 \right) \operatorname{tg} \beta_c l - \operatorname{ctg} \beta_o l \right] \quad (3-120)$$

różniący się od wzoru (3-80) jedynie stałym mnożnikiem 0,5 przy pierwszym składniku. Przebieg reaktancji skośnika koncentrycznego będzie więc podobny do przedstawionego na rys. 3-12 pod warunkiem, iż stałe fazowe β_o i β_c będą sobie równe.

Dla linii bez strat, gdy można przyjąć

$$\beta_o = \frac{2\pi}{\lambda_o} \quad \text{oraz} \quad \beta_c = \frac{2\pi}{\lambda_c}, \quad (3-121)$$

stałe te są sobie równe, gdy długość fali λ_o rozchodzącej się w ośrodku wypełniającym wnętrze kabla jest równa długości fali λ_c rozchodzącej się w przestrzeni otaczającej zewnętrzny jego przewód. W większości przypadków kabel jest umieszczony w próżni, a jego wnętrze wypełnia dielektryk o przenikalności elektrycznej $\epsilon_w > 1$. Wówczas należy przyjąć

$$\lambda_o = \frac{\lambda_c}{\sqrt{\epsilon_w}} \quad (3-122)$$

i stałe fazowe β_o i β_c , występujące we wzorze na impedancję skośnika, nie będą sobie równe. W przypadku, gdy $\epsilon_w \gg 1$, co ma miejsce np. dla rurkowych kondensatorów ceramicznych [17], okazuje się, iż zwykle $2l \ll \lambda_c$, co oznacza, że dla składowych $I_c(z)$ skośnik przedstawia sobą układ o stałych skupionych. Fakt ten tłumaczy zgodność modelu kondensatora rurkowego, podanego przez Strużaka, z klasyczną teorią Rajskiego.

Traktowanie skośnika koncentrycznego jako układu bez strat możliwe jest, podobnie jak w przypadku skośnika symetrycznego, jedynie wówczas, gdy można pominąć zarówno straty w samym kablu, jak i straty związane ze zjawiskiem promieniowania. Uwzględnienie tych strat prowadzi do wyrażenia (3-87), przy czym w szczególnym przypadku skośnika koncentrycznego zwiniętego w pętlę kołową i umieszczonego w próżni, dla obliczania oporności promieniowania wykorzystać można znany prosty wzór, wyprowadzony dla anteny ramowej, utworzonej z przewodu cylindrycznego [10]

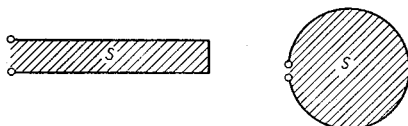
$$R_p = 197 \left(\frac{2l}{\lambda_c} \right)^4. \quad (3-123)$$

Jak widać z powyższego wzoru, straty na promieniowanie rosną szybko wraz ze wzrostem długości elektrycznej skośnika i dlatego na ogół decydują one o jego stratach całkowitych.

Znając opór promieniowania skośnika zwiniętego w pętlę kołową R_p można, posługując się przybliżonym wzorem podanym przez Schelkunoffa [6], wyrazić stałą tłumienia α_c , występującą we wzorze (3-43) przy pomocy zależności

$$\alpha_c = \frac{R_p}{Z_o l \left(1 + \frac{\sin 2\beta_c l}{2\beta_c l} \right)}. \quad (3-124)$$

We wzorze tym Z_o oznacza impedancję falową zwartego odcinka o długości l zastępczej dwuprzewodowej linii długiej, o średnicy przewodów takiej, jak średnica kabla, z którego



Rys. 3-15. Zastępcza linia długa o impedancji falowej Z_o oraz rozpatrywany skośnik o tym samym polu S

utworzono skośnik, oraz o tak dobranej odległości między przewodami, aby zawarte między nimi pole S było takie same, jak pole pętli skośnika (rys. 3-15).

Powyższa metoda liczenia stałej tłumienia α_c została sprawdzona doświadczalnie przez Głinskiego [6], dla przypadku anteny pętlowej o długości λ .

4. SPRAWDZENIE EKSPERYMENTALNE

4.1. Wybór modelu do badań eksperymentalnych

Celem niniejszego rozdziału jest potwierdzenie eksperymentalne słuszności uogólnionego modelu skośnika, przedstawionego w rozdziale 3. Jako obiekt badań obrano skośnik utworzony z odcinka kabla koncentrycznego, zwiniętego w pętlę kołową. Powinien on spełniać następujące założenia:

1. średnica kabla jest dużo mniejsza od długości skośnika i długości fali,
2. średnica pętli jest dużo większa od średnicy kabla,
3. odległość między końcami skośnika jest dużo mniejsza od długości fali,
4. kabel, z którego utworzono skośnik, jest jednorodny,
5. straty w skośniku związane z opornością przewodów, wpływnością kabla i promieniowaniem są niewielkie.

Spełnienie założenia 1 zapewnia rozchodzenie się wewnątrz kabla jedynie fali typu TEM oraz pozwala na przyjęcie sinusoidalnego rozkładu prądu antenowego, płynącego po zewnętrznej powierzchni zewnętrznego przewodu skośnika. Założenie 2 pozwala na zastosowanie teorii wyprowadzonej dla skośnika prostego, do przypadku skośnika zwiniętego. Założenie 3 umożliwia fizyczną realizację zasilania skośnikowego oraz jednoznaczne określenie i pomiar jego impedancji. Spełnienie założenia 4 wymagane jest przy wyprowadzeniu równań (3-35) i (3-36), a założenie 5 pozwala przyjąć, iż w pewnym zakresie częstotliwości i wymiarów skośnika można będzie porównywać zmierzone wartości jego impedancji z wartościami teoretycznymi, obliczonymi na podstawie wzoru (3-120), dla skośnika bezstratnego.

Konieczność spełnienia powyższych założeń narzuca określone, następujące związki między wymiarami skośnika a zakresem częstotliwości pomiarowych.

1. Ze względu na fakt, iż przebieg impedancji skośnika w funkcji jego długości elektrycznej l/λ , określony zależnością (3-80), różni się od przebiegu wynikającego z teorii klasycznej i określonego wzorem (3-23) w sposób dostrzegalny począwszy od $2l = \lambda/6$ (rys. 3-8), pożądane jest aby

$$2l \geq \frac{\lambda}{6}, \quad (4-1)$$

co daje następujący warunek dla częstotliwości generatora

$$f_{[\text{MHz}]} \geq \frac{50}{2l_{[\text{m}]}}. \quad (4-2)$$

2. Częstotliwość pomiarowa f ograniczona jest od góry przez warunek, aby długość fali w ośrodku otaczającym kabel była dużo większa od jego średnicy zewnętrznej d oraz odległości między końcami skośnika l_1 . Aby można było pominąć wpływ pojemności występujących między końcami skośnika, należy ponadto przyjąć

$$l_p \gg d. \quad (4-3)$$

3. Dodatkowe ograniczenie od góry dopuszczalnej długości elektrycznej skośnika wynika z warunku, aby mógł on być rozpatrywany jako układ o małych stratach. Decydujący

wpływ na straty, przy stosunkowo dużych długościach elektrycznych skośnika, ma opór promieniowania R_p , który dla pętli kołowej wyraża się prostym wzorem (3-123). Przy jego wyprowadzeniu zakłada się wprowadzić równomierny rozkład prądu w antenie, lecz wiadomo, iż przy $2l/\lambda_c \leq 1/3$ błąd, jaki popełnia się przy jego stosowaniu, nie przekracza 2% [28]. Skośnik można uważać za bezstratny, gdy

$$R_p \ll \omega L_z. \quad (4-4)$$

We wzorze tym L_z oznacza całkowitą indukcyjność zewnętrzną skośnika, wyrażoną zależnością

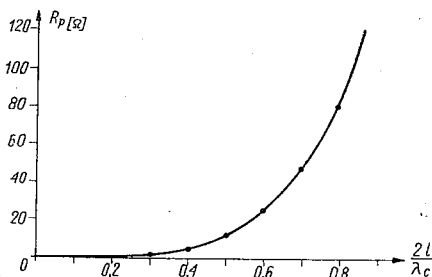
$$L_z = 6,3 \cdot 10^{-3} D_{\text{cm}} \left(\ln \frac{D}{d} + 0,08 \right) [\mu\text{H}], \quad (4-5)$$

gdzie:

$$D = \frac{2l}{\pi} \text{ — średnica pętli,}$$

$$d \text{ — średnica kabla.}$$

Przybliżoną zależność oporności promieniowania od stosunku $\frac{2l}{\lambda_c}$, obliczonej ze wzoru (3-123), przedstawiono na rys. 4-1.



Rys. 4-1. Zależność oporności promieniowania od długości elektrycznej skośnika

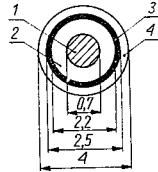
Jak widać z tego rysunku, dla $\frac{2l}{\lambda_c} > 0,4$ straty na promieniowanie rosną szybko i z tego względu należy się wówczas spodziewać rozbieżności między przebiegiem impedancji w funkcji częstotliwości skośnika bez strat, a tym samym przebiegiem dla skośnika rzeczywistego.

Przyjęcie teoretycznego przebiegu impedancji skośnika, określonego wzorem (8-87), uwzględniającego zjawisko promieniowania, pozwala uwzględnić powyższe straty, lecz jest to w dalszym ciągu ujęcie przybliżone [11], co sprawia, iż należy się spodziewać wpływu strat promieniowania na przebieg reaktancji skośnika X_s , określonej wzorem (3-120), szczególnie w okolicy rezonansów równoległych, dla których $\text{ctg} \beta_c l \rightarrow \infty$, co ma miejsce dla

$$\frac{2l}{\lambda_c} = k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4-6)$$

4.2. Wybór mierzonych parametrów i wymiarów skośnika

W celu eksperymentalnego sprawdzenia uogólnionego modelu skośnika zmierzono przebieg jego impedancji w funkcji częstotliwości, a następnie porównano z zależnością teoretyczną określoną wzorem (3-120). Pomiarom poddano skośnik utworzony z pojedynczego zwoju kołowego kabla koncentrycznego, przedstawionego w przekroju na rys. 4-2.



Rys. 4-2. Przekrój mierzonego kabla

1 — przewód wewnętrzny, 2 — izolacja polietylenowa, 3 — przewód zewnętrzny, 4 — izolacja zewnętrzna

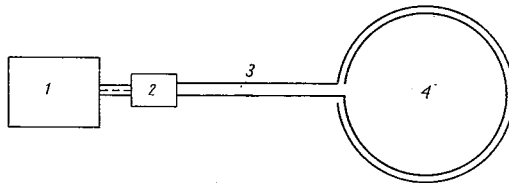
Biorąc pod uwagę rozważania podane w punkcie 4.1, obrano długość skośnika 104,8 cm, co daje średnicę zwoju 33,8 cm. Odstęp między końcami skośnika l_1 , uwarunkowany geometrią układu pomiarowego, wyniósł 2,5 cm. Na podstawie warunku (4-2) otrzymujemy wówczas $f_{\min} = 50$ MHz. Ponadto $l_1 = 10d$ i warunek (4-3) można uważać za spełniony. Jeśli przyjąć, zgodnie z uwagą 2 punktu 4.1

$$\frac{l_1}{\lambda_c} \leq \frac{1}{50}, \quad (4-7)$$

otrzymamy dodatkowy warunek, określający maksymalną częstotliwość pomiarową, skąd otrzymamy $f_{\max} = 250$ MHz.

4.3. Wybór układu pomiarowego

Z uwagi na konieczność pomiarów w stosunkowo szerokim zakresie częstotliwości, zdecydowano się na wybór mostkowej metody pomiaru impedancji skośnika. Przy dostatecznej dokładności pomiarów metoda ta zapewnia, dzięki zwartej budowie i wspólnemu



Rys. 4-3. Schemat blokowy układu pomiarowego

1 — mostek impedancji TESLA, typ BM 431 E, na zakres $f = 1 \div 250$ MHz, z wyjściem niesymetrycznym, 2 — transformator symetryzujący, 3 — symetryczna linia dwuprzewodowa o $Z_0 = 250 \Omega$, 4 — mierzony skośnik

zaekranowaniu mostka wraz z generatorem, ograniczenie do minimum wpływu zakłócającego własnych pól rozproszonych na badany obiekt. Schemat blokowy zastosowanego układu pomiarowego przedstawiono na rys. 4-3.

Zastosowanie transformatora symetryzującego stało się niezbędne z uwagi na symetryczny, względem zacisków skośnika, rozkład składowych antenowych jego prądów przewodowych, przy braku mostka z wyjściem symetrycznym na żądany zakres częstotliwości. Dwuprzewodowa linia pośrednicząca pozwala, przez oddalenie skośnika od uziemionej masy mostka, na ograniczenie do minimum szkodliwych pojemności między skośnikiem a ziemią, oraz ewentualnych zakłóceń ze strony generatora własnego mostka. Linia ta pełni ponadto rolę transformatora impedancji, co umożliwia pomiar impedancji leżących poza zakresem pomiarowym samego mostka.

4.4. Przebieg pomiarów impedancji skośnika

Pomiary przeprowadzono, zgodnie z uwagami zawartymi w punkcie 4.1, w zakresie częstotliwości $f = 60 \div 250$ MHz, co odpowiada zakresowi długości elektrycznych skośnika $2l/\lambda_c = 0,2 \div 0,85$.

Dla każdej częstotliwości pomiarowej, po wyzerowaniu mostka, dokonywano dwu pomiarów: przy dołączonym skośniku oraz przy zwartej linii pośredniczącej. Pozwalało to na określenie tłumienia, wnoszonego przez transformator symetryzujący i linię pośredniczącą, a także na określenie długości elektrycznej tej linii. Na podstawie pomiaru impedancji przy zwarcu określono każdorazowo wartość modułu współczynnika odbicia $|T|$, charakteryzującego tłumienie wnoszone przez symetryzator i linię. Jak wykazały te pomiary, moduł współczynnika odbicia mierzony dla układu zwartego był w całym zakresie częstotliwości pomiarowych bliski jedności i mieścił się w granicach $|T| = 0,95 \div 0,98$.

Impedancję skośnika znajdowano każdorazowo, dokonując transformacji impedancji mierzonej na zaciskach samego mostka, za pomocą wykresu Smitha.

4.5. Wyniki pomiarów i ich interpretacja

Uzyskane wyniki pomiarów przedstawiono na rys. 4-4, gdzie wykreślono także dla porównania przebieg teoretyczny reaktancji skośnika, obliczony na podstawie wzoru (3-120).

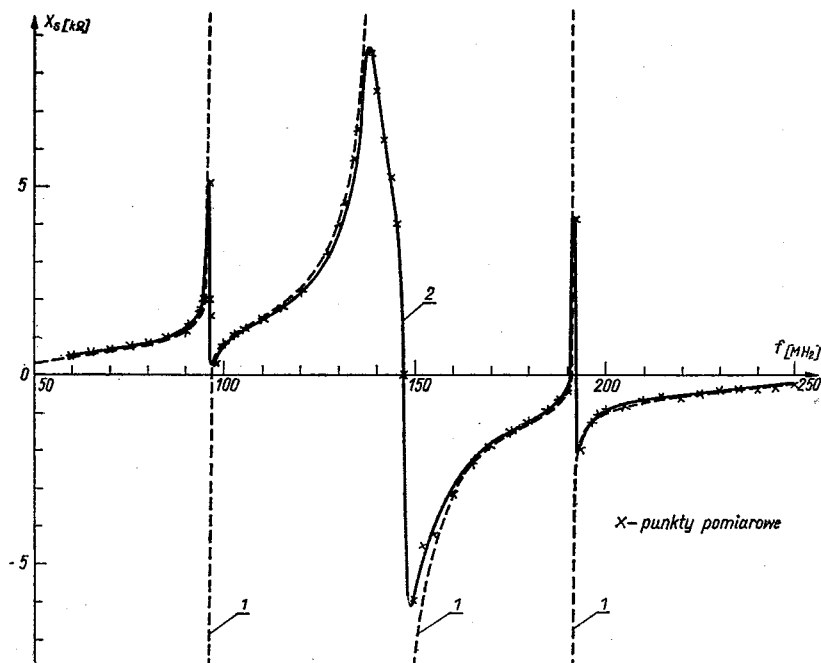
Jak można stwierdzić na podstawie rys. 4-4, uzyskano w zasadzie zadawalającą zgodność z modelem teoretycznym, a w szczególności:

1. częstotliwości rezonansowe pokrywają się z przewidywanymi przez teorię,
2. w znacznej części zakresu pomiarowego krzywa doświadczalna pokrywa się z teoretyczną.

Odchylenia krzywej doświadczalnej od modelu teoretycznego są następujące:

1. Dla częstotliwości odpowiadającej rezonansowi szeregowemu, dla $f = 97$ MHz, reaktancja skośnika osiąga minimum, lecz nie jest równa zero. Jest to spowodowane bliskością rezonansów: szeregowego i równoległego w omawianym przypadku, co przy dużym nachyleniu krzywej teoretycznej i istnieniu niewielkich strat daje omawiany efekt;
2. W okolicy rezonansu równoległego, odpowiadającego warunkowi (4-6), reaktancja skośnika przebiega podobnie, jak dla obwodu rezonansowego o skończonej dobroci, od-

biegając od krzywej teoretycznej dla skośnika bez strat, przy czym częstotliwość rezonansowa wynosi $f = 147$ MHz i różni się od obliczonej teoretycznie częstotliwości $f_{r2} = 143$ MHz o $+3$ MHz. Wynika to z jednej strony z faktu, iż w omawianym zakresie częstotliwości straty na promieniowanie są już znaczne, gdy np. dla $f = 150$ MHz $R_p = 15 \Omega$, a z drugiej strony z faktu, iż badany skośnik tylko w przybliżeniu jest układem



Rys. 4-4. Przebieg reaktancji mierzonego skośnika
1 — krzywa teoretyczna dla skośnika bez strat, 2 — krzywa pomiarowa

izolowanym, jak to zakłada teoria. W istniejących warunkach pomiarowych nie udaje się bowiem wyeliminować całkowicie wpływu szkodliwych sprzężeń i pojemności do ziemi otaczających przedmiotów i osoby dokonującej pomiarów. Nie do pominięcia jest także wpływ obcych pól zakłócających. Jak wykazały pomiary przeprowadzone przez Eberta [2], wpływ otoczenia na dobroć cewki nieekranowanej, jaką stanowi w gruncie rzeczy skośnik, może być znaczny.

Należy przy tym zaznaczyć, iż pomiary w omawianym zakresie częstotliwości nastęcają zwykle wiele trudności, gdyż o ile metody opracowane dla niższych częstotliwości nie zapewniają już dostatecznie dużych dokładności, nie ujawniają się tu jeszcze zalety metod typu mikrofalowego, opracowanych dla częstotliwości $f > 300$ MHz. Dodatkowe trudności wynikają z faktu, iż dla $f = 90 \div 200$ MHz krzywa teoretyczna reaktancji skośnika posiada duże nachylenie, co wpływa na zmniejszenie dokładności i powtarzalności wyników pomiarów. Zjawisko to występuje szczególnie w okolicach rezonansów równoległych. Ponadto, przy ograniczonej możliwości zwiększania impedancji falowej dwu-

przewodowej linii pośredniczącej, która w zastosowanym układzie pomiarowym wynosiła 250 Ω , dokładność pomiaru dużych impedancji, dla $|Z| > 10 Z_f$ jest stosunkowo mała.

Należy wreszcie jeszcze raz podkreślić, iż przedstawiony uogólniony model skośnika jest modelem przybliżonym, gdyż zakłada sinusoidalny rozkład prądu w zastępczej antenie ramowej. Przy skończonej grubości kabla tworzącego skośnik, model ten prowadzi zatem do przebiegu impedancji w funkcji częstotliwości, różniącego się od przebiegu rzeczywistego. Z uwagi na zastosowanie kabla o stosunkowo małej średnicy zewnętrznej, wynoszącej 2,5 mm, różnice te są, jak widać z krzywej pomiarowej, niewielkie w badanym zakresie częstotliwości. Mając na względzie powyższe uwagi, należy uznać uzyskane wyniki za zadowalające z punktu widzenia celu niniejszej pracy.

5. WNIOSKI KOŃCOWE

W oparciu o analizę przeprowadzoną w trakcie niniejszej pracy, można wyciągnąć następujące wnioski.

1. Teoria skośnika w ujęciu Rajskiego i jej uogólnienia podane przez Strużaka pozostają słuszne jedynie w przypadku, gdy składowe antenowe prądów przewodowych linii długiej tworzącej skośnik są stałe w funkcji długości linii, co ma miejsce jedynie, gdy linia ta jest dla tych składowych elektrycznie krótka.

2. Linie długą zasilaną w sposób skośnikowy, lub w bardziej ogólny sposób rozpatrywany przez Strużaka, można zawsze przedstawić w postaci szeregowego lub równoległego połączenia pewnej liczby konwencjonalnych linii długich, opisywanych równaniami telegraficznymi, oraz elementów skupionych R , L , C , bądź układów niestacjonarnych o charakterze anten, w zależności od długości i konfiguracji linii tworzącej skośnik oraz parametrów otaczających ośrodków.

3. O ile teoria konwencjonalnych linii długich, opisywanych równaniami telegraficznymi, jest na tyle ogólna, iż odnosi się do linii o dowolnej konfiguracji wzdłużnej, zarówno koncentrycznych, jak i symetrycznych, to w przypadku linii niezerównoważonych, nie spełniających równań telegraficznych, do których należy skośnik, teoria powinna być zawsze sformułowana dla ściśle określonej jej konfiguracji.

4. Jak wykazały pomiary przeprowadzone w rozdziale 4 niniejszej pracy, możliwe jest wprowadzenie prostego modelu obwodowego, ujmującego wpływ niestałości składowych antenowych prądów przewodowych w skośniku koncentrycznym, tworzącym pętlę kołową. Model ten okazuje się, po uwzględnieniu ograniczeń wymienionych w punkcie 4.5, zgodny z rzeczywistością, przynajmniej w zakresie długości elektrycznych skośnika, zbadanym przez autora. Wprowadzając bardziej złożony model anteny ramowej [1], możliwe jest, za cenę znacznych trudności obliczeniowych, wyznaczenie dokładniejszych wyrażeń na impedancję skośnika w przypadku, gdyby okazało się to celowe z punktu widzenia ewentualnych zastosowań.

5. Przedstawiona w niniejszej pracy uogólniona teoria skośnika może znaleźć zastosowanie w przypadku budowy anten ramowych utworzonych z kabla koncentrycznego i zasilanych w sposób skośnikowy, co pozwoliłoby na uzyskanie bardziej korzystnego

z punktu widzenia zastosowań przebiegu impedancji anteny od częstotliwości, niż w przypadku anten wykonanych ze zwykłego przewodu.

Inne możliwe zastosowanie wiąże się z transformatorami mocy używanymi w zakresie w.cz., wykonanymi z odcinków kabla koncentrycznego [13], umieszczonych wewnątrz rdzenia ferrytowego o dużej przenikalności magnetycznej μ i zasilanych w ten sposób, iż suma prądów przewodowych nie jest równa zeru. Z uwagi na dużą przenikalność rdzenia może się zdarzyć, iż dla składowych antenowych odcinków zewnętrznego przewodu kabla jest elektrycznie długi, co odpowiada przypadkowi przedstawionemu przez autora niniejszej pracy.

Na zakończenie autor pragnie wyrazić wdzięczność Panu Profesorowi Czesławowi Rajskiemu za opiekę i pomoc przy wykonywaniu niniejszej pracy, a także Panu Profesorowi Jerzemu Osowskiemu za cenne uwagi, które przyczyniły się do skryształizowania jej koncepcji oraz usunięcia szeregu usterek.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. P. O. Brundell, Current and Potential Distribution on a Circular Loop Antenna, Trans. Roy. Inst. Techn. nr 154, Stockholm 1960.
2. J. Ebert, Rezonanse wielokrotne cewek indukcyjnych, Arch. Elektrot., nr 1, 1968.
3. D. Foster, Loop Antennas with Uniform Current, Proc. of the IRE, 1944.
4. B. Galiński, O pewnej próbie wyprowadzenia równań linii długiej w oparciu o uogólnione sformułowanie zasady Hamiltona dla układów o nieskończonej liczbie stopni swobody, Arch. Elektrot., nr 3, 1971.
5. B. Galiński, O zakresie stosowalności teorii skońnika, Arch. Elektrot., nr 2, 1972.
6. G. Gliniski, Note on Circular Loop Antennas with non Uniform Current Distribution, J. Appl. Phys., nr 19, 1947.
7. S. Gwiazdowski, Szerokopasmowa praca układu różnicowego (dysertacja), Politechnika Warszawska, 1965.
8. E. Hallén, Theoretical Investigation Into the Transmitting and Receiving Qualities of Antennae, Nova Acta reg. soc. sci. Upps., Ser. IV, nr 4, Uppsala 1938.
9. R. King, Transmission Line Theory, New York 1955.
10. J. D. Kraus, Antennas, Mc Graw-Hill, New York 1950.
11. J. E. Lindsay Jr., A Circular Loop Antenna with Nonuniform Current Distribution, IRE Trans. on Antennas and Propagation, 1960.
12. L. L. Libby, Special Aspects of Balanced Shielded Loops, Proc. of the IRE, vol. 34, IX, 1946.
13. A. H. Hilbers, High-Frequency Wideband Power Transformers, Electronic Applications, vol. 30, nr 2, 1970.
14. G. E. Puchow, Urawnienija dlinnoj linii pri nierawnych tokach w prowadach, Naucznyje Zapiski Lwowskowo Politechniczeskowo Instituta, Sierija Elektrotechniczeskaja, nr 5, 1949.
15. Cz. Rajski, Teoria skońnika, Arch. Elektrot., nr 1, 1953.
16. R. G. Strużak, Ogólny przypadek prądów i napięć w jednorodnym torze elektrycznym, Arch. Elektrot., nr 2, 1963.
17. R. G. Strużak, Rezonanse w ceramicznych kondensatorach rurkowych, Rozpr. Elektrot., Tom XI, z. 2, 1965.
18. R. G. Strużak, Przyczynek do teorii dwójnika utworzonego z odcinka jednorodnego toru elektrycznego, Arch. Elektrot., nr 2, 1963.

19. R. G. S t r u ż a k, Ogólna teoria czwórnika w zastosowaniu do układów o parametrach rozłożonych jednorodnie, Arch. Elektrot., nr 4, 1965.
20. R. G. S t r u ż a k, Impedancja, układ zastępczy i pojemność własna symetrycznej (bifilarnej) cewki indukcyjnej, Arch. Elektrot., nr 3, 1967.

B. GALIŃSKI

GENERALISED THEORY OF CROSS-CONNECTED LONG LINE

Summary

The author gives a generalised theory of the cross-connected long line i.e. an element built of a sector of an uniform two-wire long line regarded as a two-pole network with one pole at the beginning of one conductor and the other pole at the end of another conductor. This two-pole network has properties different from the same long line fed in the classical manner, when the sum of the conductor currents equals zero. The theory of the cross-connected long line, based on circuit theory concepts, was given for the first time by Rajski [15] and developed by Strużak [16], [18], [19].

The author presents a critical analysis of the existing theory and its limitations. He proves on the basis of the electromagnetic field theory that the cross-connected long line can always be represented by a serial connection of a sector of an opened-circuit long line with TEM field distribution fed in the classical manner at one end, and of an element built of the same long line, but with an additional electromagnetic field existing in the space between the line conductors and the environment. Only for low frequencies, when that element can be represented as a lumped-circuit element, the existing theory and the generalised theory give the same results.

The above thesis has been confirmed by the author experimentally for the cross-connected long line in the form of a circular loop made of coaxial cable.

B. GALIŃSKI

LA THÉORIE GÉNÉRALISÉE D'UNE LIGNE ÉLECTRIQUE
EN CONNEXION DIAGONALE

Résumé

L'auteur présente la théorie généralisée d'un élément constitué d'un segment d'une ligne électrique à deux conducteurs, considérée comme un dipôle dont les deux bornes sont formées par l'origine du premier conducteur et par le bout du deuxième conducteur. Les propriétés de ce dipôle sont différentes de celles d'un segment d'une ligne électrique alimentée à la manière conventionnelle à l'origine, quand la somme des courants dans les deux conducteurs de la ligne fait zéro. La théorie existante, fondée sur des notions de la théorie des circuits, était formulée pour la première fois par Rajski [15] et développée ensuite par Strużak [16], [18], [19].

L'auteur donne l'analyse critique et formule des limitations de la théorie existante. Il prouve, à l'aide de la théorie du champs électromagnétique, que l'élément en question peut toujours être représenté par la connexion en série d'un segment d'une ligne électrique alimentée à la mode conventionnelle à l'origine, ouverte à l'extrémité et un autre élément constitué par la même ligne, mais avec le champs électromagnétique additionnel, existant dans l'espace autour de la ligne. La théorie existante et la théorie généralisée ne donnent les mêmes résultats, que pour les fréquences relativement basses, quand ce dernier élément peut être considéré comme un élément aux constantes concentrées.

Cette thèse est confirmée par les expériences faits pour le cas de la ligne coaxiale en forme d'un boucle circulaire.

B. GALIŃSKI

DIE VERALLGEMEINTE THEORIE DER ELEKTRISCHEN FELDLINIE
IN DIAGONALER VERBINDUNG

Zusammenfassung

Der Verfasser zeigt die verallgemeinte Theorie der elektrischen Feldlinie in diagonalen Verbindung, d.h. eines aus einer Strecke einer Doppelleitung bestehenden Zweipols. Die Klemmen dieser Doppelleitung sind der Anfang der ersten Verbindungsleitung und das Ende der zweiten. Die Eigenschaften dieses Zweipols sind ganz anders, als die der elektrischen Feldlinie, wenn sie üblicherweise am Anfang gespeist wird. Die auf der Schaltungskonzeption gegründete Theorie der elektrischen Feldlinie in diagonalen Verbindung wurde zum ersten Mal von Rajski [15] aufgestellt, und dann von Strużak [16], [18], [19] entwickelt.

Der Verfasser hat die bestehende Theorie auf Grund der Theorie des elektromagnetischen Feldes kritisch analysiert und bewiesen, daß die elektrische Feldlinie in diagonalen Verbindung immer als Reihenschaltung der allgemeinen Feldlinie mit TEM-Welle und einem durch die gleiche Linie geschaffenen Element betrachtet werden kann, jedoch eine andere Feldverteilung aufweist. Nur im Niederfrequenzbereich, wenn das letztgenannte Element als konzentriertes Element betrachtet werden kann, weisen die bestehende Theorie und die Theorie des Verfassers dieselben Ergebnisse auf. Vorstehende These wurde auch versuchsweise bestätigt.

Б. ГАЛИНСКИ

ОБОВЩЕННАЯ ТЕОРИЯ ДИАГОНАЛЬНОГО СОЕДИНЕНИЯ
ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДЛИННОЙ ЛИНИИ

Резюме

Представлена обобщенная теория диагонального соединения электрической длинной одно-родной линии, представленной в виде двухполюсника, одним зажимом которого является начало одного ее проводника, а другим его зажимом — конец второго проводника. Такой двухполюсник имеет совсем другие свойства чем отрезок длинной линии питаемый обычным способом на одном конце, когда сумма токов в проводниках линии равна нулю в каждом ее поперечном сечении.

Теория диагонального соединения длинной линии была в первый раз представлена Райским [15], а потом развита Стружаком [16], [18], [19].

Автор настоящего труда провел критический анализ существующей теории и сформулировал ее ограничения. Он представил доказательство обоснованной на теории электромагнитного поля, что диагонально соединенная длинная линия может быть всегда представлена в виде последовательного соединения отрезка обычной разомкнутой на конце длинной линии питаемой классическим способом на одном конце и элемента образованного из того же отрезка длинной линии, но с другим типом распределения поля в пространстве между проводниками линии и окружающей средой. Только для низких частот, когда этот элемент может быть представлен как элемент с сосредоточенными параметрами, существующая до сих пор теория и обобщенная теория разработанная автором ведут к тем же самым результатам.

Теоретические результаты были проверены экспериментально для случая диагонально соединенной длинной линии в форме круговой петли изготовленной из коаксиального кабеля.

O możliwości budowy neurystorowych sieci logicznych

BOGDAN MACIEJ WILAMOWSKI (GDAŃSK)

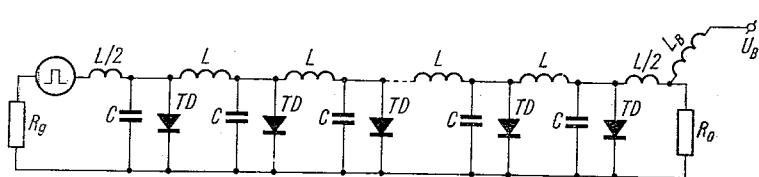
Instytut Technologii Elektronicznej Politechniki Gdańskiej

Otrzymano 12.1.1972

Zaproponowano nowy sposób budowy sieci neurystorowej logicznej bez złącz typu R , a z wykorzystaniem efektu anihilacji impulsów i progowych właściwości neurystora. Przedstawiona jest zasada działania neurystorowych elementów AND, OR i NOT oraz podany sposób budowy pamięci.

1. WSTĘP

W oparciu o badania prowadzone nad budową systemów nerwowych powstała idea elektronicznego elementu spełniającego funkcje podobne do aksonu — fragmentu komórki nerwowej. Element ten został nazwany neurystorem. Neurystor jest linią przenoszącą i kształtującą impulsy. Szczególnie rokującym nadzieje jest model zbudowany w oparciu o sztuczną linię opóźniającą, w którym zarówno pojemności jak i indukcyjności rozproszenia mogą być wykorzystane dla zapewnienia właściwego działania układu.



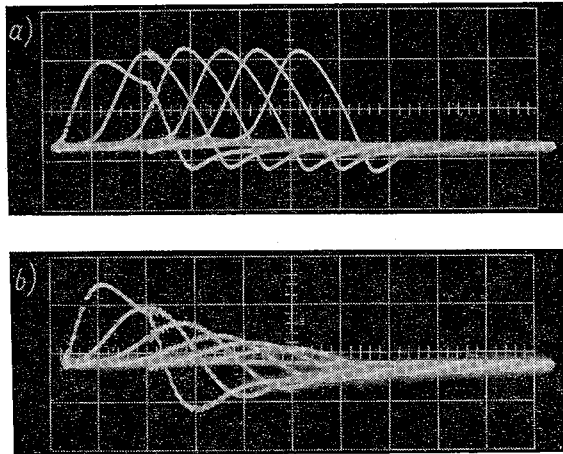
Rys. 1. Schemat linii neurystorowej

Linia neurystorowa pokazana na rysunku 1 posiada szereg interesujących właściwości:

- 1) próg, powyżej którego możliwa jest transmisja impulsów, a poniżej którego następuje ich tłumienie (rys. 2a, b),
- 2) właściwości kształtowania impulsu w czasie jego propagacji (rys. 3a, b, c, d),
- 3) stałą szybkość propagacji impulsów,
- 4) właściwość anihilacji impulsów w przypadku ich zderzenia (rys. 4a, b).

Teoretyczną analizę linii neurystorowej, wyjaśnienie fizycznej istoty zjawiska oraz warunki występowania przedstawionych powyżej właściwości neurystora zawierają wcześniejsze publikacje autora [1], [2].

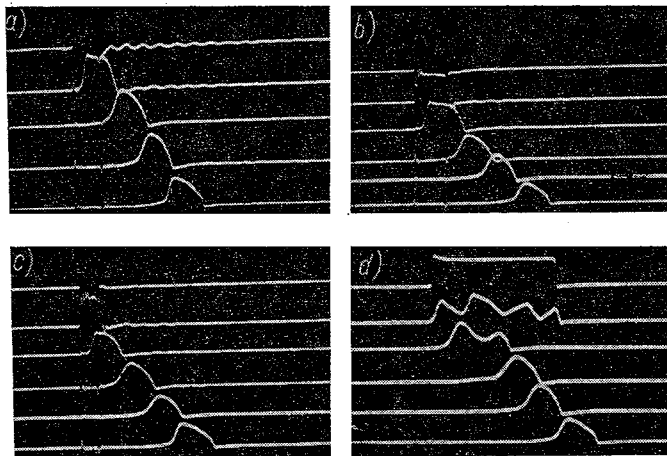
H. Crane — twórca idei neurystora — podał również sposób budowy neurystorowych układów logicznych [3]. Crane zaproponował dwa rodzaje połączeń linii neurystorowych —



Rys. 2. Efekt progowy: a) impuls o amplitudzie wyższej od progu jest regenerowany w trakcie transmisji b) impuls o amplitudzie poniżej progu jest tłumiony. Numery określają przebiegi na kolejnych stopniach linii $L = 72 \mu\text{H}$, $C = 7,2 \text{ nF}$, poz. $1 \mu\text{s/dz.}$, pion. 200 mV/dz

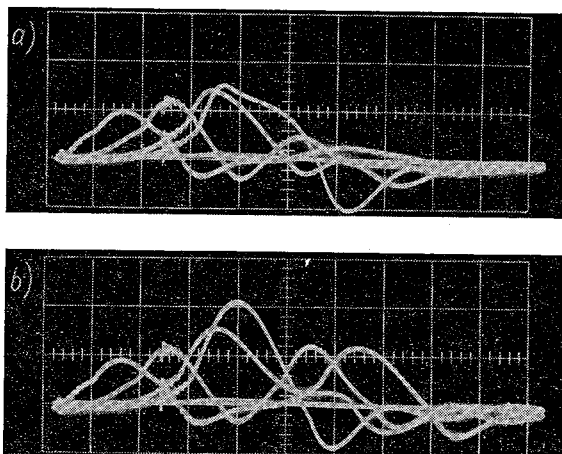
połączenie typu T (trigier) i typu R (refraktory). W złączu typu T (rys. 5a) impulsy mogą rozchodzić się we wszystkich kierunkach. W złączu typu R (rys. 5b) obecność impulsów w jednej linii powoduje zanik impulsów w linii drugiej. W wyniku łączenia linii neurystorowych tymi dwoma rodzajami połączeń, możliwa jest budowa sieci spełniającej funkcje logiczne w sposób analogiczny jak w sieci przekąźnikowej.

Od czasu publikacji Crane'a wielu autorów publikowało różne modele linii neurystorowych, ograniczając się zazwyczaj do problemu regeneracji kształtu transmitowanych impulsów [5], [6], [7], [8], [9], [10]. Główną trudnością i przeszkodą w budowie neurystorowych sieci logicznych jest fakt, że jedynie dla modelu Cote'a [4] udało się, jak dotychczas, wykonać konkretną realizację złącza typu R . Są to jednak elementy skomplikowane ukła-



Rys. 3. Efekt kształtowania impulsów wejściowych

a) normalnych, b) wysokich, c) wąskich, d) szerokich. Numery określają przebiegi na kolejnych stopniach linii. $L = 72 \mu\text{H}$, $C = 450 \text{ pF}$, poz. $1 \mu\text{s/dz.}$, pion. 1 V/dz

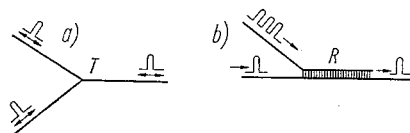


Rys. 4. Efekt anihilacji impulsów w przypadku ich zderzenia

a) wysoki próg linii — następuje anihilacja, b) niski próg linii — impulsy po zderzeniu są zgenerowane. $L = 72 \mu\text{H}$, $C = 7,2 \text{ nF}$

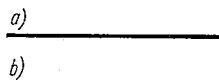
dowo i technologicznie, co praktycznie uniemożliwia budowę sieci logicznych z wykorzystaniem złącza typu R .

Poniżej zostanie wykazana możliwość budowy neurystorowych układów logicznych bez złącza typu R , a z wykorzystaniem progowych właściwości neurystora.

Rys. 5. Połączenie typu $T(a)$, połączenie typu $R(b)$

Rozpatrzmy najpierw dwa rodzaje linii neurystorowych:

- 1) linie z progiem normalnym (rys. 6a),
- 2) linie z progiem bardzo wysokim (rys. 6b).



Rys. 6. Linia neurystorowa (a), linia tłumiąca (b)

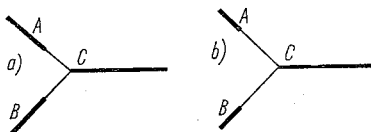
Ponieważ drugi rodzaj linii jedynie tłumi impulsy (tzn. próg może być nawet nieskończenie wysoki), mogą to być linie np. bez źródeł zasilania lub bez elementów aktywnych. Przy użyciu wymienionych wyżej dwóch rodzajów linii realizacja funkcyj OR i AND staje się stosunkowo łatwa.

2. POŁĄCZENIE TYPU OR I AND

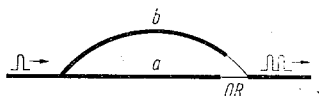
W funkcyjze OR (rys. 7a) odcinki linii tłumiącej są na tyle krótkie, że każdy z impulsów z punktów A lub B może osiągnąć punkt C . W funkcyjze AND (rys. 7b) odcinki linii tłumiącej są na tyle długie, że jedynie w przypadku jednoczesnego pojawienia się im-

pulsów w punktach A i B ich suma przekroczy próg w punkcie C . Pojedyncze impulsy na wejściach A i B zostaną wytłumione.

Realizacja negacji logicznej jest bardziej skomplikowana i zostanie omówiona w dalszej części artykułu.



Rys. 8. Połączenie typu OR (a), połączenie typu AND (b)

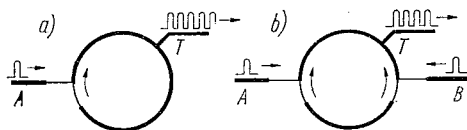


Rys. 8. Generator pary impulsów

Stosując złącze typu OR w układzie jak na rysunku 8, jeden impuls wejściowy może spowodować generację pary impulsów. Jeżeli szybkość przechodzenia impulsów w liniach jest jednakowa, czas między impulsami będzie proporcjonalny do różnicy długości odcinków a i b . W podobny sposób można generować dowolne ciągi impulsów.

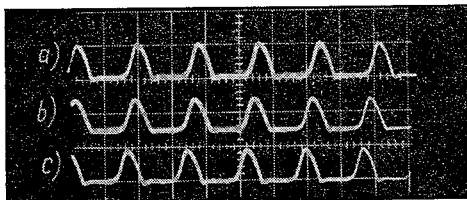
3. PIERŚCIEŃ PAMIĘCI

Przez wykorzystanie złącza typu OR można również zrealizować pierścień pamięci (rys. 9a). Impuls po przejściu przez złącze typu OR krążyć będzie w ustalonym kierunku, podczas gdy na złączu typu T generowany będzie ciąg impulsów (patrz także oscylogram



Rys. 9. Pierścień pamięci: a) bez kasowania, b) z kasowaniem

10). Aby zatrzymać krążący impuls należy przez podobne złącze typu OR wprowadzić impuls krążący w przeciwnym kierunku (rys. 9b). W wyniku zderzenia impulsy ulegną anihilacji.



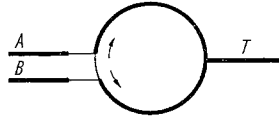
Rys. 10. Impulsy na wyjściu pierścienia pamięci (rys. 9a)

a) po 1 min po wstrzyknięciu, b) po 5 min po wstrzyknięciu, c) po 1 godz. po wstrzyknięciu. $L = 72 \mu\text{H}$, $C = 1,8 \text{ nF}$, $1 \mu\text{s/dz}$

Element pokazany na rysunku 11 może być rozpatrywany jako element pamięci o 3 stanach, przy czym:

- 1-szy stan odpowiada impulsowi krążącemu w jednym kierunku,
- 2-gi stan odpowiada sytuacji, gdy nie ma krążącego impulsu,
- 3-ci stan odpowiada impulsowi krążącemu w przeciwnym kierunku.

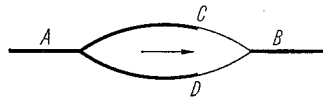
Element ten może być również rozpatrywany jako przerzutnik.



Rys. 11. Trzystanowy element pamięci

4. DIODA NEURYSTOROWA

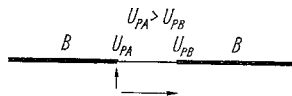
Propagację impulsów tylko w jednym kierunku można uzyskać przez zbudowanie diody neurystorowej z wykorzystaniem złącza typu AND (rys. 12).



Rys. 12. Dioda neurystorowa z elementem AND

W kierunku przewodzenia impulsy łączą się w punkcie B i ich suma jest wyższa od progu, a co za tym idzie możliwa jest dalsza transmisja impulsów. W przeciwnym kierunku impuls podlega rozdziałowi w punkcie B na dwa impulsy, które po przejściu odcinków tłumiących nie mogą przekroczyć progu w punktach C lub D. Transmisja impulsów w tym kierunku jest niemożliwa.

Jeden kierunek propagacji impulsów może być też osiągnięty wtedy, gdy próg w punkcie A będzie większy, niż w punkcie B, lub na odwrót. Struktura systemu uprosi się znacznie jeżeli w układzie zastosujemy segmenty linii neurystorowych o podwyższonych progach



Rys. 13. Dioda neurystorowa z wykorzystaniem linii neurystorowych o różnych progach

(rys. 13). Podwyższenie progu można osiągnąć dla konkretnego — opisanego na wstępie — modelu przez zastosowanie diod tunelowych o większych prądach szczytowych, albo po prostu połączyć równolegle dwie standartowe diody tunelowe.

5. BRAMKA NEURYSTOROWA

Bramka neurystorowa może być wykonana przy użyciu złącza typu OR i dwóch diod neurystorowych (rys. 14). Impulsy mogą być transmitowane z punktu A do B tylko wtedy,

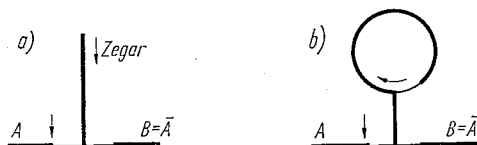
jeżeli nie nadchodzą impulsy z punktu C . W przeciwnym przypadku impulsy będą się zderzać i podlegać anihilacji na odcinku MN , a co za tym idzie, nie będą mogły osiągnąć punktu B . Połączenie to spełnia rolę konwencjonalnego Crane'owskiego złącza typu R .



Rys. 14. Bramka neurystorowa

6. FUNKTOR NEGACJI

Konstrukcja elementu NOT przedstawiona jest na rysunku 15a. Impulsy z zegara mogą osiągnąć punkt B tylko wtedy, jeżeli nie ma impulsów z punktu A . Każdy z impulsów z punktu A po przejściu złącza OR w wyniku zderzenia spowoduje anihilację jednego impulsu zegarowego. Impulsy zegarowe mogą więc osiągnąć punkt B tylko wtedy, jeżeli nie ma impulsów z punktu A . Przebieg na wyjściu B jest negacją przebiegu na wejściu A .



Rys. 15. Element NOT: a) ogólnie, b) z wykorzystaniem pierścienia pamięci

W punkcie D próg musi być zwiększony, ażeby impulsy zegara nie przedostawały się na wejście A . Jako zegar może być użyty pierścień pamięci, który na wyjściu generuje ciąg impulsów (rys. 15b). Można też zastosować jeden pierścień pamięci jako zegar całej sieci logicznej.

Element NOT jest bardziej skomplikowany niż elementy typu OR i AND, dlatego syntezę neurystorowych sieci logicznych należy przeprowadzać minimalizując liczbę funkcyj NOT.

7. WNIOSKI

Możliwość syntezy sieci logicznych i pamięci przy pomocy neurystorów powoduje, że mogą one znaleźć zastosowanie jako mikrologiczne elementy przy budowie szybkich maszyn cyfrowych. Logika neurystorowa jest szczególnie użyteczna przy kodowaniu i dekodowaniu ciągów impulsów przenoszących informację rozłożoną w czasie. Właściwości progowe i zjawisko kształtowania impulsów w linii neurystorowej sprawiają, że linia ta może być wysoce niezawodna zarówno przy kodowaniu jak i przesyłaniu impulsów w systemach PCM. Należy podkreślić, że zaproponowana metoda pozwala realizować sieci logiczne przy użyciu większości ze znanych modeli neurystorów.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. B. Wilamowski, H. Yokogawa, J. Nishizawa, Neuristor Propagation in Low Impedance Line, *Int. J. Electronics* 29, 2, 101—137, 1970.
2. B. M. Wilamowski, Analysis of the Neuristor Line, *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, ser. tech.*, No 2, 1972, 37—44.
3. H. D. Crane, Neuristor — a Novel Device and System Concept, *Proc. IRE*, 50, 2048—2060, 1962.
4. A. J. Cote, Simulating Nerve Networks With Four Layer Diodes, *Electronics*, 34, 51—53, 1961.
5. A. Ambroziak, Semidistributed Neuristor Line Using Unijunction Transistors, *Sol. State Elect.*, 7, 259—265.
6. R. H. Mattson, A Neuristor Realization, *Proc. of IEEE*, 52, 618—619, 1964.
7. J. Nagumo, S. Arimoto and S. Yoshizawa, An Active Pulse Transmission Line Simulating Nerve Axon, *Proc. of IRE*, 50, 2061—2070, 1962.
8. R. D. Parmentier, informacja prywatna dotycząca prac subsydiowanych przez National Science Foundation na temat: Large Scale Integrated Superconductive Information Processing Systems, 1970.
9. A. Rosengreen, Experimental Neuristor Gives Nerve-like Pulse Propagation, *Electronics*, 36, 25—27, 1963.
10. A. C. Scot, Neuristor Propagation on a Tunnel Diode Loaded Line, *Proc. of IEEE*, 51, 240, 1963.

B. M. WILAMOWSKI

POSSIBILITIES OF CONSTRUCTING NEURISTOR LOGIC NETWORK

Summary

A new way of neuristor logic construction, without *R*-type junction, but taking advantage of annihilation effect and threshold property of neuristor is proposed. Principles of action of neuristor elements such as AND, OR, NOT and memory are presented.

B. M. WILAMOWSKI

SUR LA POSSIBILITÉ DE LA CONSTRUCTION
DES RÉSEAUX LOGIQUES À NEURISTOR

Résumé

On a proposé une nouvelle méthode de la construction du réseau logique à neuristor sans jonction de type *R*, mais profitant de l'effet d'annihilation et de seuil. On a présenté le principe de fonctionnement d'éléments à neuristor AND, OR, NOT et une méthode de la construction de la mémoire.

B. M. WILAMOWSKI

BAUMÖGLICHKEITEN VON NEURISTISCHEN LOGISCHEN NETZEN

Zusammenfassung

Es wurde eine neue Baumethode von neuristischen logischen Netzen ohne *R*-Stoß, dagegen mit Ausnutzung des Annihilationsimpulseeffektes sowie der Schwelleneigenschaften des Neuristors vorgeschlagen. Im weiteren wird der Wirkungsgrundsatz von Neuristorelementen AND, OR und NOT dargestellt, als auch die Speicherbauweise angeführt.

Б. М. ВИЛЯМОВСКИ

О СПОСОБАХ ПОСТРОЙКИ НЕВРИСТОРНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ КОНТУРОВ

Р е з ю м е

Предлагается новый метод конструкции невристорных логических контуров без переходов типа R , но с использованием эффекта аннигиляции импульсов и пороговых свойств невристора. Представлен принцип действия невристорных элементов AND, OR и NOT а также показан метод постройки памяти.

Właściwości cieplne diod lawinowych

JANUSZ GULCZYŃSKI (GDAŃSK), ZBIGNIEW STASZAK (GDAŃSK)

Instytut Technologii Elektronicznej Politechniki Gdańskiej

Otrzymano 21.2.1972

W pracy przeanalizowano właściwości cieplne diod lawinowych rozpatrując charakterystykę cieplną przyrządu półprzewodnikowego. Przedyskutowano zależność charakterystyki prądowo-napięciowej diody lawinowej od temperatury. Korzystając z modelu termicznego przyrządu półprzewodnikowego przedstawiono teoretyczne podstawy metody pomiaru rezystancji termicznej. Uzyskuje się ją z pomiarów elektrycznych w danych warunkach pracy.

1. WSTĘP

Problem odprowadzania ciepła nabiera szczególnej wagi w takich przypadkach, w których występuje duża koncentracja mocy w małych objętościach. Ogólnie biorąc dotyczy to wszystkich przyrządów półprzewodnikowych. Obszar wydzielania ciepła jest w nich ograniczony do samego złącza $p-n$, lub kilku złącz ze sobą sąsiadujących. W przypadku złego odprowadzenia ciepła prowadzi to do wzrostu temperatury, która może osiągnąć wartości powodujące zniszczenie przyrządu półprzewodnikowego. Pomiedzy temperaturą złącza T_j , temperaturą obudowy T_c oraz mocą traconą w złączu P_j , dla warunków stacjonarnych zachodzi związek:

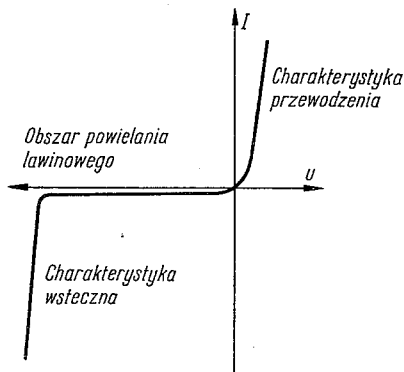
$$T_j - T_c = R_{thj-c} P_j, \quad (1)$$

gdzie R_{thj-c} oznacza rezystancję termiczną złącze-obudowa [$^{\circ}\text{C}/\text{W}$].

Z powyższego widać, że znajomość rezystancji termicznej przyrządu półprzewodnikowego dla określonych warunków chłodzenia pozwala wyciągnąć wnioski dotyczące temperatury złącza, jeżeli znana jest moc wydzielana w złączu.

Wielkość rezystancji termicznej daje także szereg informacji o konstrukcji i procesie wytwarzania przyrządu półprzewodnikowego. Osiągnięcie minimalnej wartości rezystancji termicznej przy jednoczesnym utrzymaniu lub nawet poprawieniu osiągniętych parametrów elektrycznych jest jednym z najpoważniejszych problemów w technologii przyrządów półprzewodnikowych. Zagadnienie to jest szczególnie ważne w przyrządach półprzewodnikowych, których głównym zadaniem jest generacja mocy. O ile o sprawności energetycznej generatora będą decydowały właściwości elektryczne elementu, o tyle o bezwzględnej wartości mocy otrzymanej zadecyduje w ostatecznym rachunku wartość rezystancji termicznej.

Jednym z przyrządów półprzewodnikowych używanych do generacji mocy mikrofalowej jest dioda lawinowa. Charakterystyka statyczna diody lawinowej jest typowa dla większości diod ze złączem $p-n$ (rys. 1). Punkt pracy umieszczony jest w obszarze powielania lawinowego wstecznie spolaryzowanej diody. Pojawiająca się wtedy ujemna rezystancja jest wykorzystywana do odtłumienia mikrofalowych obwodów rezonansowych.



Rys. 1. Statyczna charakterystyka prądowo-napięciowa diody lawinowej

Istnieje szereg typów mikrofalowych diod lawinowych, z których można wymienić diody IMPATT (IMPact ionization Avalanche Transit Time — diody lawinowo-przelotowe), TRAPATT (TRApped Plasma Avalanche Triggered Transit — diody lawinowo-plazmowe) oraz diody $p-i-n$ [1], [2], [3].

Podobne właściwości posiadają diody waraktorowe oraz diody Zenera o większych napięciach pracy, gdzie także występuje zjawisko powielania lawinowego.

Zjawiska cieplne występujące w diodach lawinowych są szczególnie krytyczne. Wynika z tego, że podczas pracy diody gęstość mocy osiąga wartość 10^6 W/cm^2 . W takich warunkach niezapewnienie dobrego odprowadzenia ciepła prowadzi do lokalnego przegrzania i zniszczenia diody. Oczywiście jest, że wzrost temperatury złącza diody powoduje zmianę parametrów elektrycznych, co prowadzi do pogorszenia jej warunków pracy jako elementu czynnego generatora.

W pracy niniejszej przeprowadzono analizę warunków cieplnych panujących w diodzie lawinowej. Wychodząc ze struktury fizycznej diody oraz wykorzystując zależności parametrów elektrycznych od temperatury, wyprowadzono związki, z których korzystając można w prosty sposób wyznaczyć wartość rezystancji termicznej diody lawinowej.

2. ZALEŻNOŚĆ CHARAKTERYSTYKI PRĄDOWO-NAPIĘCIOWEJ DIODY LAWINOWEJ OD TEMPERATURY

W części tej zostaną podane zależności pomiędzy parametrami elektrycznymi i cieplnymi diody oraz pokazana możliwość wykorzystania różniczkowej rezystancji elektrycznej diody lawinowej do wyznaczania rezystancji termicznej.

Uwzględniając wpływ nagrzewania się złącza $p-n$ na charakterystykę prądowo-napięciową diody lawinowej¹⁾ można w całkowitej rezystancji elektrycznej diody R_{sd} wyróżnić składniki określające procesy elektryczne w rozważanej diodzie dla $T = \text{const}$ oraz składnik termiczny opisujący efekty cieplne.

W ten sposób różniczkowa rezystancja elektryczna diody lawinowej może być przedstawiona następująco:

$$R_{sd} = R_{sc} + R_{sp} + R_T, \quad (2)$$

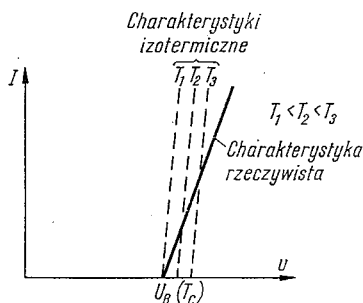
gdzie:

R_{sc} — rezystancja ładunku przestrzennego wskazująca wpływ ładunku przestrzennego powstałego w warstwie zaporowej złącza $p-n$,

R_{sp} — pasożytnicza rezystancja szeregową (rozproszenia),

R_T — termiczny składnik rezystancji elektrycznej związany ze zmianą współczynników jonizacji lawinowej α_i i prądu nasycenia I_s wraz z temperaturą.

Ponieważ rezystancja rozproszenia jest znacznie mniejsza od pozostałych składników równania (2), dla uproszczenia rozważań można ją pominąć. Założenie to jest tym bardziej słuszne, gdyż z uwagi na właściwości szumowe i generacyjne mikrofalowych diod lawino-



Rys. 2. Wpływ temperatury na charakterystykę lawinową $I = f(U)$

¹⁾ Wpływ temperatury złącza $p-n$ na charakterystykę prądowo-napięciową diody lawinowej określony jest głównie przez dwa czynniki:

— eksponencjalną zależność od temperatury T prądu nasycenia I_s wyrażającą się związkami [4]:

$$I_s \sim T^3 \exp\left(-\frac{E_g}{kT}\right) = f(T),$$

gdzie: E_g — przerwa energetyczna w [eV],

k — stała Boltzmanna,

T — temperatura w [°K];

— zmianę wraz z temperaturą współczynników jonizacji lawinowej (zderzeniowej) α_i definiowanych jako liczba par elektron-dziura średnio wytworzonych przez nośnik na jednostkę długości w kierunku pola elektrycznego E i aproksymowanych równaniem [2] [5]:

$$\alpha_i = A_i \exp\left[\left(-\frac{b}{E}\right)^m\right] = f[E(U, I, T), T]$$

gdzie: A_i , b są wielkościami charakteryzującymi nośniki, natomiast m odnosi się do rodzaju materiału półprzewodnikowego i wynosi 1 dla Ge i Si oraz 2 dla GaAs i GaP.

wych we współczesnych rozwiązaniach konstrukcyjnych dąży się do uzyskania minimalnej wartości R_{sd} . Tak więc

$$R_{sd} \cong R_{sc} + R_T. \quad (3)$$

Rozważając charakterystykę prądowo-napięciową diody lawinowej, otrzymuje się wyrażenie wiążące prąd I płynący przez wstecznie spolaryzowane złącze $p-n$ ze spadkiem napięcia U na złączu:

$$U = R_{sc} \cdot I + U_B(T_c) + \Delta U_B, \quad (4)$$

gdzie:

$U_B(T_c)$ — wartość napięcia powielania lawinowego, gdy temperatura złącza jest równa temperaturze obudowy,

ΔU_B — przyrostowa zmiana napięcia powielania lawinowego spowodowana przez wzrost temperatury złącza.

Zależność napięcia powielania lawinowego U_B od temperatury w szerokim zakresie temperatur ($-100^\circ\text{C} \div +100^\circ\text{C}$) można uważać za liniową:

$$U_B(T_j) = U_B(T_c) [1 + \beta \cdot (T_j - T_c)] = U_B(T_c) + \Delta U_B, \quad (5)$$

gdzie:

β — temperaturowy współczynnik napięcia powielania lawinowego definiowany

$$\text{jako } \frac{1}{U_B(T_c)} \frac{dU_B}{dT},$$

$(T_j - T_c)$ — przyrost temperatury złącza.

Oznaczając $U_B(T_c) \equiv U_B$ oraz przyjmując, że dla małych prądów $U \cong U_B$, można wzrost temperatury złącza wyrazić jako:

$$T_j - T_c = R_{thj-c} \cdot U \cdot I \cong R_{thj-c} \cdot U_B \cdot I. \quad (6)$$

Stąd nachylenie rzeczywistej charakterystyki prądowo-napięciowej wynosi:

$$R_{sd} = R_{sc} + \beta \cdot R_{thj-c} \cdot U_B^2. \quad (7)$$

Termiczny składnik rezystancji elektrycznej diody lawinowej określony jest więc związkiem:

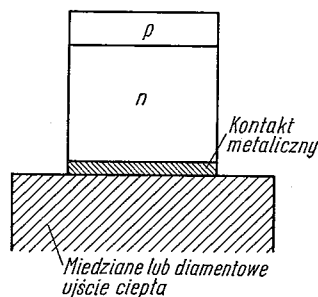
$$R_T = \beta \cdot R_{thj-c} \cdot U_B^2. \quad (8)$$

Z przytoczonych rozważań wynika, że istnieje możliwość otrzymania wartości R_{thj-c} drogą pomiaru rezystancji różniczkowej diody lawinowej. Trudność tkwi w rozdzieleniu od siebie składników równania (7) oraz określenia wartości liczbowej współczynnika β . Oba te problemy zostaną przeanalizowane w następnych częściach pracy.

3. MODEL TERMICZNY DIODY LAWINOWEJ

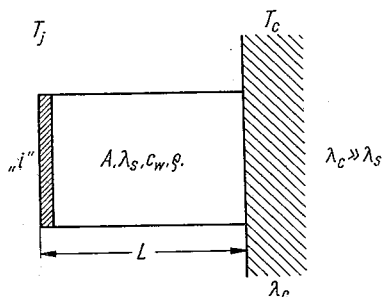
Rozważania można przeprowadzić dla uproszczonej struktury fizycznej diody lawinowej, wykorzystując cechy konstrukcyjne diod półprzewodnikowych. Wynika z nich m.in., że złącza (jedno lub więcej) uformowane w warstwie epitaksjalnej utworzonej z jednej strony płytki półprzewodnika są płaskie oraz że grubość złącza jest dużo mniejsza od średnicy.

Dioda ma kształt cylindryczny o przekroju A . Miejscem, w którym następuje maksymalna generacja ciepła, a tym samym temperatura jest tam największa, jest obszar złącza. Ciepło generowane w złączu przepływa przez obszar silnie domieszkowanego półprzewodnika i metaliczny kontakt, nim osiągnie miedziane lub diamentowe ujęcie ciepła.



Rys. 3. Struktura diody lawinowej

Przepływem ciepła ze złącza do otoczenia rządzą prawa dyfuzji. Zagadnienie to, po uwzględnieniu dróg rozprzysygu oraz miejsca generacji ciepła, sprowadza się do prostego, jednowymiarowego modelu przepływu ciepła przez płytkę półprzewodnika. Jest on analogiczny do przepływu prądu elektrycznego przez przewodnik elektryczności. W tej analogii rezystancja termiczna R_{thj-c} [°C/W] odpowiada rezystancji elektrycznej R [Ω].



Rys. 4. Uproszczona struktura fizyczna diody lawinowej

L — grubość płytki materiału półprzewodnikowego, A — jej stały przekrój, λ_s — konduktywność termiczna, c_w — ciepło właściwe, ρ — gęstość, λ_c — konduktywność termiczna materiału ujęcia ciepła

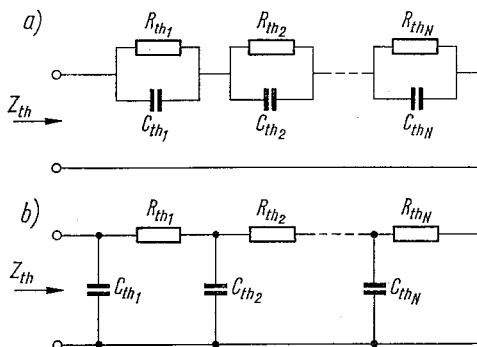
W rozważanej strukturze generacja ciepła jest schematycznie reprezentowana przez źródło o natężeniu i umieszczone na końcu płytki materiału półprzewodnikowego o parametrach jak na rysunku 4, a obudowa przez ujęcie ciepła o stałej temperaturze T_c . Długość obszaru generacji ciepła, czyli grubość złącza, jest znacznie mniejsza od grubości L płytki półprzewodnika. Odprowadzenie ciepła z drugiej strony źródła i jest pominięte.

Przyjmuje się, że konduktywność termiczna materiału odprowadzającego ciepło λ_c jest znacznie większa od konduktywności termicznej materiału półprzewodnikowego λ_s [3], co powoduje, że można pominąć rezystancję termiczną ujęcia ciepła, która jest odwrotnie proporcjonalna do λ_c .

Przykładowe wartości λ [W/cm °K] wynoszą: dla krzemu 0.80, złota — 3.0, miedzi — 3.9, diamentu — 20.0. Wartość dla krzemu podana jest dla temperatury $T = 500^\circ\text{K}$ będą-

cej maksymalną temperaturą pracy tego materiału półprzewodnikowego. Dla pozostałych materiałów przytoczone wartości odnoszą się dla temperatury $T = 300^\circ\text{K}$, gdyż ich zmiana z temperaturą jest niewielka.

Opierając się na tych założeniach można zbudować termiczny model przyrządu półprzewodnikowego. Istnieje szereg takich modeli, jednakże w literaturze najczęściej spotyka się tylko dwa, a mianowicie typu Forstera (rys. 5a) oraz Cauera (rys. 5b). Porównując oba



Rys. 5. Termiczny model przyrządu półprzewodnikowego

a) sieć typu Forstera, b) sieć typu Cauera. R_{thk} i C_{thk} oznaczają odpowiednio rezystancję i pojemność termiczną poszczególnych obszarów materiału półprzewodnikowego

modele, można wykazać, że model Cauera lepiej odzwierciedla procesy cieplne i jest łatwiejszy w interpretacji zjawisk fizycznych.

Ścisły opis zachodzących zjawisk cieplnych wymaga, aby model składał się z nieskończonej ilości elementów. Często w praktyce zastępuje się go mniej dokładnym modelem, w którym poszczególne sekcje R_{thk} , C_{thk} obrazują obszary o różnych właściwościach termicznych. W omawianym przypadku, ze względu na założoną jednorodność materiału oraz kształt kryształu półprzewodnika, rezystywne składniki modelu oraz termiczne stałe czasowe są odpowiednio sobie równe. Można zatem operować stałymi rozłożonymi oraz korzystać z odpowiednich metod analizy [7].

Z tych względów najlepiej opisać model termiczny diody lawinowej identycznymi równaniami jak w przypadku jednorodnej linii RC o stałych rozłożonych. Traktując układ zastępczy z rys. 5b jako czwórnik można napisać równanie macierzowe w postaci:

$$\begin{bmatrix} U_{th1} \\ U_{th2} \end{bmatrix} = [Z_{thik}] \begin{bmatrix} I_{th1} \\ I_{th2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

gdzie:

U_{th1} — napięcie termiczne na wejściu układu, $U_{th1} = T_j - T_c$, przy czym T_j jest temperaturą złącza, a T_c określa temperaturę obudowy,

I_{th1} — wejściowy prąd termiczny określony wartością mocy ogrzewającej złącze.

Podobne znaczenie mają wielkości U_{th2} i I_{th2} , lecz odnoszą się do końcówek wyjściowych linii. W omawianym przypadku linii termicznej wyjście jest zwarte, co wynika z założonej małej rezystancji termicznej ujścia ciepła, a temu odpowiada $U_{th2} = 0$. Można tu skorzystać z ogólnej postaci macierzy impedancji termicznych w celu obliczenia stosunku

odpowiedzi U_{th1} do pobudzenia I_{th1} , oznaczającego poszukiwane wyrażenie na impedancję termiczną diody lawinowej.

Macierz impedancji $[Z_{thik}]$ ma postać [7]:

$$[Z_{thik}(\omega)] = \sqrt{\frac{R_{th}}{j\omega C_{th}}} \begin{bmatrix} \operatorname{ctgh} \sqrt{j\omega R_{th} C_{th}} & \operatorname{csech} \sqrt{j\omega R_{th} C_{th}} \\ \operatorname{csech} \sqrt{j\omega R_{th} C_{th}} & \operatorname{ctgh} \sqrt{j\omega R_{th} C_{th}} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

gdzie R_{th} i C_{th} oznaczają odpowiednio całkowitą rezystancję termiczną i całkowitą pojemność termiczną diody i wyrażają się związkami:

$$R_{th} = \frac{L}{\lambda_s \cdot A} = \sum_1^N R_{thk} \quad (11)$$

$$C_{th} = c_w \cdot L \cdot A \cdot \varrho = \sum_1^N C_{thk}.$$

Korzystając teraz z ogólnego wyrażenia na impedancję wejściową czwórnika oraz oznaczając:

$$\sqrt{j\omega R_{th} C_{th}} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega R_{th} C_{th}}{2}} = (1+j)a,$$

$$a = \sqrt{\frac{\omega R_{th} C_{th}}{2}},$$

otrzymuje się wyrażenie:

$$Z_{th} = \sqrt{\frac{R_{th}}{j\omega C_{th}}} \left[\operatorname{ctgh}(1+j)a - \frac{\operatorname{csech}^2(1+j)a}{\operatorname{ctgh}(1+j)a} \right] = \sqrt{\frac{R_{th}}{\omega C_{th}}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{(1+j)} \cdot \frac{\sinh(1+j)a}{\cosh(1+j)a}. \quad (12)$$

Impedancja ta po rozdzieleniu na części rzeczywistą i urojoną przyjmuje postać:

$$Z_{th} = \sqrt{\frac{R_{th}}{2\omega C_{th}}} \cdot \frac{\sinh 2a + \sin 2a + j(\sin 2a - \sinh 2a)}{\cosh 2a + \cos 2a}. \quad (13)$$

Rozwijając z kolei funkcje hiperboliczne i trygonometryczne w szeregi potęgowe uzyskuje się z (13) wyrażenie, które pozwala na prostą analizę zależności impedancji termicznej diody od częstotliwości pobudzenia. Dzieliąc oś częstotliwości, dla ułatwienia rozważań, na dwa zakresy otrzymuje się:

1) dla $2a \ll 1$, a tym samym dla częstotliwości małych $\omega \ll \frac{1}{2R_{th}C_{th}}$, wielkość impedancji termicznej równą

$$Z_{th} = R_{th} \left(1 - j\omega \frac{R_{th}C_{th}}{3} \right), \quad (14)$$

2) dla $2a \gg 1$, czyli dla częstotliwości wielkich $\omega \gg \frac{1}{2R_{th}C_{th}}$,

$$Z_{th} = \sqrt{\frac{R_{th}}{2\omega C_{th}}} (1-j). \quad (15)$$

Powyższe związki wskazują na charakter zależności impedancji termicznej od pulsacji prądu termicznego, czyli mocy pobudzającej.

Oznaczając przez ω_c wartość pulsacji, dla której $2a = 1$, tzn. $\omega_c = \frac{1}{2R_{th}C_{th}}$ i wyznaczając moduł Z_{th} , uzyskuje się:

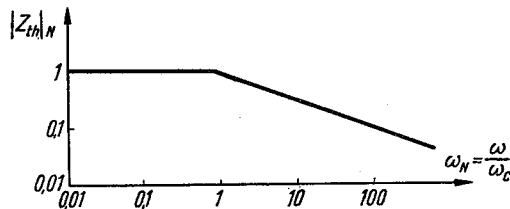
— dla $\omega \ll \frac{1}{2R_{th}C_{th}} = \omega_c$

$$|Z_{th}| = R_{th} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{6\omega_c}\right)^2} \cong R_{th}, \quad (16)$$

— dla $\omega \gg \frac{1}{2R_{th}C_{th}} = \omega_c$

$$|Z_{th}| = \sqrt{\frac{R_{th}}{\omega C_{th}}}. \quad (17)$$

Wykres zmian $|Z_{th}|$ w funkcji pulsacji mocy pobudzającej przedstawiono na rys. 6.



Rys. 6. Wykres modułu impedancji termicznej w funkcji częstotliwości dla struktury z rys. 4

Jak wykazała powyższa analiza, impedancja termiczna diod lawinowych jest funkcją pulsacji prądu termicznego (tzn. mocy wydzielanej w złączu). Dla przebiegów wolno-zmiennych jej moduł przyjmuje wartość bliską wartości rezystancji termicznej (wzór 16), natomiast dla dużych wartości ω zmienia się zgodnie z zależnością (17), tzn. maleje z nachyleniem 3 dB/okt. Wynika stąd wniosek, że dla $\omega \rightarrow \infty$ modułu impedancji termicznej osiąga wartość równą zero. Ten zaskakujący rezultat można wyjaśnić opierając się o przesłanki fizyczne, jak też wykorzystując przyjęty na wstępie model termiczny. Zgodnie z zależnościami analogowymi impedancja termiczna wyraża stosunek amplitudy zmian temperatury do amplitudy mocy, która te zmiany wywołuje. Jeżeli przyjmie się, że amplituda zmian mocy ΔP_j doprowadzonej do diody jest stała, to według zależności (16) i (17) wyróżnić można dwa przypadki:

a) częstotliwość zmian mocy jest mała, wtedy temperatura złącza zmieniać się będzie zgodnie ze wzorem:

$$\Delta T_j(\omega) \cong R_{th} \cdot \Delta P_j(\omega), \quad (16a)$$

przy czym przybliżenie to będzie tym lepsze, im silniej spełniona jest zależność $\omega \ll \omega_c$;

b) częstotliwość zmian mocy jest duża, tzn. $\omega \gg \omega_c$, wtedy

$$\Delta T_j(\omega) = |Z_{th}(\omega)| \cdot \Delta P_j(\omega), \quad (17a)$$

gdzie $|Z_{th}(\omega)|$ określone jest zależnością (17). Oznaczać to będzie, że dla większych wartości pulsacji mocy przy tej samej amplitudzie zmian, amplituda zmian temperatury będzie ma-

łała wraz ze wzrostem częstotliwości. Inaczej oznacza to, że zwiększając częstotliwość zmian mocy wydzielanej temperatura przestaje nadążać za tymi zmianami i w przypadku skrajnie dużych częstotliwości ustala się na stałym poziomie, tzn. że moduł impedancji termicznej jest równy zero.

Aczkolwiek rozważania, przeprowadzone dla uproszczonej konfiguracji diody i przy uproszczeniach spowodowanych warunkami brzegowymi i początkowymi, mają charakter bardziej jakościowy niż ilościowy, to jednak wynika z nich zasadnicza właściwość impedancji termicznej, a mianowicie charakter jej zależności od częstotliwości. Ta właściwość, a co za tym idzie także termicznego składnika rezystancji szeregowej diody, zdeterminuje metodę jej pomiaru.

4. TEMPERATUROWY WSPÓŁCZYNNIK NAPIĘCIA POWIELANIA LAWINOWEGO

W równaniu (8) wiążącym termiczny składnik rezystancji różniczkowej diody z rezystancją termiczną występuje temperaturowy współczynnik napięcia powielania lawinowego definiowany jako:

$$\beta = \frac{1}{U_B} \cdot \frac{dU_B}{dT}. \quad (18)$$

Interesującym jest przeanalizowanie zależności β od rozkładu pola elektrycznego wewnątrz warstwy zaporowej oraz od domieszkowania dla kilku podstawowych struktur diod lawinowych.

Korzystając z wyników rozwiązania równania Poissona dla jednowymiarowego złącza p - n [4], [8]²⁾ można wyznaczyć zmianę napięcia powielania lawinowego w funkcji temperatury.

²⁾ dla złącza skokowego p^+-n (lub p - n^+)

$$U_B = \frac{eN}{2\varepsilon} W^2,$$

$$W = \frac{2U_B}{E_B},$$

natomiast dla złącza liniowego p - n

$$U_B = \frac{2ea}{3\varepsilon} W^3,$$

$$W = \frac{3}{4} \frac{U_B}{E_B}$$

gdzie:

N — koncentracja nośników w warstwie zaporowej złącza skokowego,

a — gradient koncentracji nośników w warstwie zaporowej złącza liniowego,

e — ładunek elektryczny,

ε — przenikalność elektryczna półprzewodnika,

W — szerokość warstwy zaporowej (obszar jonizacji lawinowej i unoszenia nośników),

E_B — wartość natężenia pola elektrycznego w złączu, dla którego zachodzi zjawisko powielania lawinowego.

Uzyskane zależności przedstawiają się następująco:

— dla złącza skokowego p^+-n (lub $p-n^+$)

$$\frac{dU_B}{dT} = \frac{dU_B}{dW} \cdot \frac{dW}{dT} = W \cdot \frac{dE_B}{dT}, \quad (19)$$

— dla złącza liniowego $p-n$

$$\frac{dU_B}{dT} = 2W \frac{dE_B}{dT}. \quad (20)$$

Ze związków (18), (19) i (20) otrzymuje się wyrażenia na temperaturowy współczynnik napięcia powielania lawinowego w postaci:

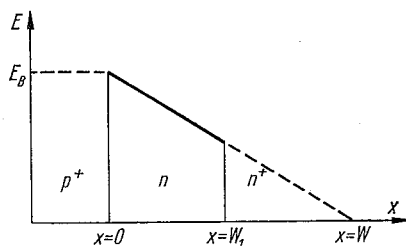
— dla złącza skokowego

$$\beta_o = \frac{1}{U_B} \cdot \frac{dU_B}{dT} = \frac{2}{E_B} \cdot \frac{dE_B}{dT}, \quad (21)$$

— dla złącza liniowego

$$\beta' = \frac{1}{U_B} \cdot \frac{dU_B}{dT} = \frac{3}{2E_B} \cdot \frac{dE_B}{dT}. \quad (22)$$

Wychodząc ze struktury diody Reada [1], która dała podstawę szerokiej rodzinie diod lawinowych, można otrzymać dwie struktury diodowe szeroko stosowane w mikrofalowych diodach lawinowych, a mianowicie dioda $p-i-n$ oraz p^+-n-n^+ .



Rys. 7. Rozkład pola elektrycznego dla struktury p^+-n-n^+

Rozkład pola elektrycznego dla diody p^+-n-n^+ , w której jonizacja lawinowa powstaje w złączu p^+-n , a unoszenie nośników w warstwie n , przedstawia się następująco [9]:

$$E(x) = E_B - \frac{eN_1}{\epsilon} x = E_B \left(1 - \frac{eN_1}{\epsilon E_B} \cdot x \right), \quad (23)$$

gdzie N_1 jest koncentracją domieszek w obszarze n diody.

Można zauważyć, że $\frac{eN_1}{\epsilon E_B}$ ma postać odwrotności szerokości warstwy ładunku przetrzennego (warstwy zaporowej) W dla skokowego złącza p^+-n (lub $p-n^+$). Stąd

$$E(x) = E_B \left(1 - \frac{x}{W} \right), \quad (24)$$

$$U_B = \int_0^{W_1} E_B \left(1 - \frac{x}{W}\right) dx = E_B W_1 \left(1 - \frac{W_1}{2W}\right), \quad (25)$$

gdzie W_1 jest szerokością obszaru n diody.

Dla tej struktury temperaturowy współczynnik napięcia powielania lawinowego wynosi [10]:

$$\beta^* = \frac{1}{U_B} \cdot \frac{dU_B}{dT} = \frac{2}{2 - \frac{W_1}{W}} \cdot \frac{1}{E_B} \cdot \frac{dE_B}{dT}. \quad (26)$$

Powiązując temperaturowe współczynniki napięcia powielania lawinowego β^* dla diod p^+-n-n^+ oraz β' dla diod $p-n$ o złączu liniowym z wielkością β_o dla diod p^+-n o złączu skokowym otrzymuje się:

$$\beta^*(U_B) = \frac{\beta_o(U_B)}{2 - \frac{W_1}{W}}, \quad (27)$$

$$\beta'(U_B) = \frac{3}{4} \cdot \beta_o(U_B). \quad (28)$$

Dokonana analiza współczynników β dla złącza skokowego, liniowego i struktury p^+-n-n^+ wskazuje na istotne różnice tej wielkości w zależności od rodzaju złącza. Empiryczne wartości β dla złącza skokowego są często podawane w najnowszych katalogach, jako że jest to struktura podstawowa. Należy jednak pamiętać, że przeprowadzona analiza odnosi się do złącz o tych samych napięciach powielania lawinowego U_B .

W spotykanych strukturach z Ge, Si i GaAs mikrofalowych diod lawinowych β jest w granicach $7 \div 15 \times 10^{-4}/^\circ\text{C}$, natomiast dla diod Zenera pracujących w zakresie powielania lawinowego i diod waraktorowych jest rzędu od $3 \div 4 \times 10^{-4}/^\circ\text{C}$, wzrastając ze zwiększeniem U_B i zmniejszeniem koncentracji domieszek aż do wartości skończonej [11].

5. PODSUMOWANIE

Analiza przeprowadzona w niniejszej pracy wskazuje na możliwość pomiaru rezystancji termicznej diod lawinowych drogą pomiarów elektrycznych. Biorąc pod uwagę, że różniczkowa rezystancja elektryczna diody jest sumą dwóch składników (równanie 3), z których jeden jest bezpośrednio powiązany z rozważanym parametrem cieplnym (równanie 8), należy oba te składniki rozdzielić. Jak wykazano w części trzeciej, termiczny składnik rezystancji szeregowej diody jest funkcją częstotliwości. Ponieważ rezystancja ładunku przestrzennego R_{sc} jest niezależna od częstotliwości dla $\omega \ll \omega_a$ (gdzie ω_a jest pulsacją powielania [12]), stąd metoda rozdzielania obu składników wydaje się być jednoznacznie określona.

Wyznaczając nachylenie charakterystyki statycznej oraz dynamicznej w wybranym punkcie pracy i dla częstotliwości rzędu 1 MHz (tzn. dla częstotliwości, przy której wartość

składnika termicznego maleje do wartości pomijalnej względem wartości dla prądu stałego otrzymuje się z różnicy obu nachyleń wartość R_T , a to z kolei, korzystając ze związku (8), pozwala na wyznaczenie R_{th-c} .

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. T. Read, A Proposed High-Frequency Negative-Resistance Diode, *Bell Sys. Tech. J.*, **37**, 3, 1958.
2. J. L. Moll, *Physics of Semiconductors*, McGraw Hill, New York, 1964.
3. S. M. Sze, R. M. Ryder, Microwave Avalanche Diodes, *Proc. IEEE* **59**, 8, 1971.
4. W. Rosiński, *Zasady działania tranzystora i jego parametry*, WNT, Warszawa 1963.
5. A. G. Chynoweth, Ionization Rates for Holes and Electrons in Silicon, *Phys. Rev.*, **109**, 5, 1958.
6. S. M. Sze, G. Gibbons, Avalanche Breakdown Voltages of Abrupt and Linearly Graded *p-n* Junctions in Ge, Si, GaAs and GaP, *Appl. Phys. Letters*, **8**, 5, 1966.
7. P. M. Chirlian, *Integrated and Active Network Analysis and Synthesis*, Prentice-Hall, Inc. England Cliffs, New Jersey 1967.
8. M. Singh Tyagi, Zener, and Avalanche Breakdown in Silicon Alloyed Junctions, *Solid-State Electronics*, **11**, 1, 1968.
9. S. M. Sze, *Physics of Semiconductor Devices*, Wiley, New York 1969.
10. R. H. Haitz, H. J. Stover, N. J. Tolar, A Method for Heat Flow Resistance Measurements in Avalanche Diodes, *IEEE Trans. Electron Devices*, **ED-16**, 5, 1969.
11. M. Gilden, M. E. Hines, Electronic Tuning Effects in the Read Microwave Avalanche Diode, *IEEE Trans. Electron Devices*, **ED-13**, 1, 1966.
12. R. Hall, Temperature Coefficient of Breakdown Voltage of *p-n* Junction, *Int. J. Electronics*, **22**, 6, 1967.

J. GULCZYŃSKI, Z. STASZAK

THERMAL PROPERTIES OF AVALANCHE DIODES

Summary

The paper presents an analysis of thermal properties of avalanche diodes based on the thermal characteristics of a semiconductor device. The temperature dependence of the avalanche current-voltage characteristics of a diode has been discussed. Using a thermal equivalent circuit of a semiconductor device the theoretical principles of a method for thermal resistance measurements are presented. The thermal resistance is obtained by electrical measurements in given operating conditions.

J. GULCZYŃSKI, Z. STASZAK

LES PROPRIÉTÉS THERMIQUES DES DIODES À AVALANCHE

Résumé

Dans cet article on a analysé les propriétés thermiques des diodes à avalanche après avoir étudié la caractéristique thermique. On a discuté le changement de caractéristique courant-tension de diode à avalanche en fonction de température. On a présenté les principes de mesure de la résistance thermique profitant d'un model thermique de dispositif semiconducteur. On a dérivé la résistance thermique des mesures électriques dans des conditions de fonctionnement définies.

J. GULCZYŃSKI, Z. STASZAK

THERMISCHE EIGENSCHAFTEN VON LAWINENDIODEN

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit sind die thermischen Eigenschaften von Lawinendioden analysiert worden. Es wurde die Abhängigkeit der Strom-Spannungskennlinien von der Temperatur diskutiert.

Auf Grund eines Wärmemodells des Halbleiterelements wurden theoretische Grundlagen der Messung des Wärmewiderstandes dargestellt. Der Wärmewiderstand wird aus elektrischen Messungen in gegebenen Arbeitsbedingungen ermittelt.

Я. ГУЛЬЧИНЬСКИ, З. СТАШАК

ТЕПЛОВЫЕ СВОЙСТВА ЛАВИННЫХ ДИОДОВ

Резюме

В труде проанализированы тепловые свойства лавинных диодов путем исследования тепловой характеристики полупроводникового прибора. Рассмотрена зависимость вольтамперной характеристики лавинного диода от температуры. Пользуясь термической моделью полупроводникового прибора, представлены теоретические основы метода измерения теплового сопротивления. Тепловое сопротивление определяется по электрическим измерениям в определенных условиях работы.

Pomiar rezystancji termicznych diod lawinowych

JANUSZ GULCZYŃSKI (GDAŃSK), ZBIGNIEW STASZAK (GDAŃSK)

Instytut Technologii Elektronicznej Politechniki Gdańskiej

Otrzymano 21.2.1972

Praca przedstawia metodę wyznaczania rezystancji termicznych diod lawinowych drogą pomiarów parametrów elektrycznych. Po przedyskutowaniu wymagań stawianych badaniom parametrów cieplnych przytoczono szczegółowy opis zastosowanej metody wykorzystującej temperaturową zależność charakterystyki lawinowej diody. Zacytowano uzyskane wyniki pomiarów dokonanych na diodach wykazujących charakterystykę lawinową (diody lawinowe, waraktorowe i Zenera) oraz uzasadniono celowość stosowania przedstawionej techniki.

1. WPROWADZENIE

Podstawą pomiarów najważniejszego parametru cieplnego, rezystancji termicznej, charakteryzującego dopuszczalną moc admisyjną diody dla danych warunków chłodzenia jest wyrażenie

$$R_{thj-c}^{**} = \frac{T_j - T_c}{P_j} [^{\circ}C/W], \quad (1)$$

gdzie:

P_j — moc wydzielana w złączu diody,

T_j — maksymalna temperatura złącza w warunkach stacjonarnych dla P_j , T_c — temperatura obudowy.

Wynika stąd, że dla uzyskania wartości rezystancji termicznej diody należy zmierzyć wielkość mocy P_j wydzielonej w złączu oraz temperaturę T_j .

Ze względu na oczywistą niemożliwość bezpośredniego pomiaru temperatury złącza należy stosować metody pośrednie, wykorzystując w tym celu parametry termoczułe.

Metoda pomiaru rezystancji termicznej jest zdeterminowana warunkami w jakich dioda normalnie pracuje. Wybiera się taki sposób doprowadzenia prądu termicznego, czyli mocy ogrzewającej, do złącza diody, który jest łatwy w realizacji i pomiarze, a także zapewnia warunki ogrzewania złącza zbliżone do warunków pracy diody. Wybrany parametr termoczuły musi odpowiadać zastosowanej metodzie ogrzewania, wykazywać liniową zależność od temperatury i być łatwym do zmierzenia.

Główna trudność pomiaru z wykorzystaniem wzoru (1) polega na jednoczesnym pomiarze mocy traconej na złączu i jego temperatury. Typowe parametry termoczułe, jak napięcie przewodzenia diody, prąd wsteczny, czy też napięcie wsteczne mierzone normal-

nie przy pomijalnie małym poborze mocy, nie mogą być wykorzystane w chwili, gdy w diodzie jest wydzielona duża moc ogrzewająca. Rozwiązuje się ten problem w sposób kompromisowy z zastosowaniem techniki impulsowej. Polega on na ogrzewaniu złącza prostokątnym impulsem mocy o wartości maksymalnej P_j , przez okres wielokrotnie dłuższy od termicznej stałej czasowej diody. Uzyskuje się przez to stan ustalony, w którym złącze osiąga maksymalną temperaturę odpowiadającą mocy P_j . Następnie po szybkim wyłączeniu mocy mierzy się zmiany wartości wybranego parametru termoczułego uzyskując w ten sposób informację o temperaturze złącza. Ze względu na to, że złącze po wyłączeniu mocy chłodzi się i temperatura jego maleje z szybkością określoną stałymi termicznymi czasowymi diody, muszą być spełnione dwa podstawowe warunki. Po pierwsze — przedział czasu między wyłączeniem mocy a rozpoczęciem pomiaru temperatury powinien być jak najkrótszy, po drugie — czas trwania pomiaru temperatury powinien być bardzo mały.

Dla diod średniej mocy czasy te nie powinny przekraczać wartości $100 \div 200$ nanosekund. Jednocześnie dla uzyskania średnich błędów pomiaru rezystancji termicznych w granicach $5 \div 10\%$ wymagana jest duża dokładność pomiaru amplitudy impulsów z błędem nie większym niż $0,1\%$. Ten zespół wymagań stwarza poważne kłopoty przy projektowaniu i konstrukcji aparatury pomiarowej prowadząc z reguły do jej dużej komplikacji. Nie można przy tym zagwarantować odpowiedniej dokładności pomiaru, niezawodności czy też prostoty obsługi.

Z wymienionych powodów przedstawiona niżej metoda pomiaru rezystancji termicznych wydaje się mieć dużą przewagę nad innymi. Jej szczególną zaletą jest to, że wykorzystuje ona bezpośrednio zależność pomiędzy rezystancją termiczną a parametrami elektrycznymi diody lawinowej. Parametrem tym jest łatwa do zmierzenia elektryczna rezystancja dynamiczna diody w obszarze lawinowym. Czynnikiem termoczułym jest tutaj napięcie wsteczne o liniowej zależności od temperatury w dość szerokim zakresie temperatur. Istota metody tkwi w odseparowaniu termicznego składnika rezystancji od całkowitej rezystancji dynamicznej diody lawinowej. Termiczny składnik rezystancji R_T , powodowany przez temperaturowe wahania współczynników jonizacji lawinowej, powiązany jest z rezystancją termiczną R_{thj-c} związkiem $R_{thj-c} \cong R_T \cdot \beta^{-1} \cdot U_B^{-2}$, gdzie β jest temperaturowym współczynnikiem napięcia powielania lawinowego U_B [1]. Tego typu parametr termoczuły pozwala na dokonywanie pomiaru w sposób ciągły w normalnych warunkach pracy diody przy użyciu niemodulowanych sygnałów harmoniczných.

2. OPIS ZASTOSOWANEJ METODY POMIARU

Teoretyczne podstawy metody pomiaru rezystancji termicznych diod lawinowych, wykorzystującej temperaturową zależność charakterystyki lawinowej, podano w pracy [1].

Jak wiadomo, diodę lawinową charakteryzuje się m.in. napięciem powielania lawinowego U_B , które jest funkcją temperatury, ze względu na temperaturową zależność współczynników jonizacji lawinowej elektronów i dziur [2].

Różniczkowa rezystancja obszaru powielania dla prądu stałego składa się z trzech składników:

$$R_{sd} = R_{sp} + R_{sc} + R_T, \quad (2)$$

gdzie:

R_{sp} — rezystancja rozproszenia materiału półprzewodnikowego,

R_{sc} — rezystancja ładunku przestrzennego,

R_T — termiczny składnik rezystancji elektrycznej.

Pomijając R_{sp} , której wielkość jest bardzo mała, można związek (2) przepisać jako

$$R_{sd} \cong R_{sc} + R_T. \quad (3)$$

Rezystancja R_{sc} określona jest przez parametry ładunku przestrzennego nośników wytworzonych w obszarze przejściowym i wynosi [3], [4]:

$$R_{sc} = \frac{l_u^2}{2\varepsilon v_u A}, \quad (4)$$

gdzie:

l_u — długość obszaru unoszenia nośników,

ε — przenikalność dielektryczna materiału półprzewodnikowego,

v_u — nasycona prędkość unoszenia nośników,

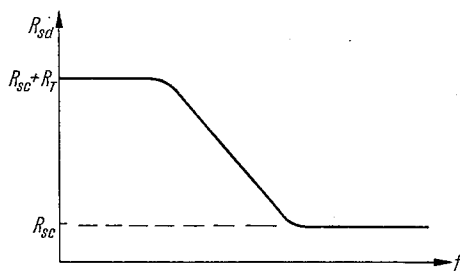
A — powierzchnia złącza.

Ten składnik rezystancji różniczkowej jest niezależny od częstotliwości dla $\omega \ll \omega_a$, gdzie ω_a jest pulsacją jonizacji lawinowej (powielania) [4].

Należy tu zauważyć, że wygodniej i dokładniej można określać R_{sc} eksperymentalnie, niż licząc to ze związku (4). Jak to wykazano w [5], [3], z równania (4) otrzymano za duże wartości dla diod *p-i-n*.

Pozostały składnik rezystancji różniczkowej diody, a mianowicie R_T jest termicznym składnikiem rezystancji elektrycznej, powodowanym przez temperaturowe wahania współczynników jonizacji. Zależność między R_T a rezystancją termiczną R_{th-c} przedstawia się następująco [1], [6]:

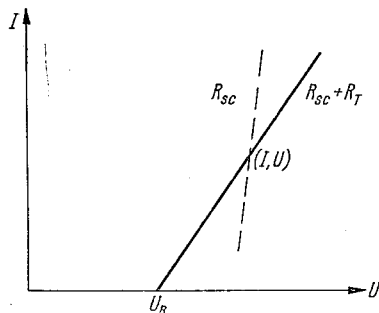
$$R_{th-c} \cong R_T \cdot \beta^{-1} \cdot U_B^{-2}. \quad (5)$$



Rys. 1. Schematyczne przedstawienie zależności rezystancji diody od częstotliwości

Wykorzystując zależność R_T od częstotliwości można łatwo odseparować R_T od R_{sc} . Składnik R_T jest maksymalny dla prądu stałego, ale dla częstotliwości $f \geq 1$ MHz maleje do wartości pomijalnej. Rys. 1 i 2 ilustrują ten efekt.

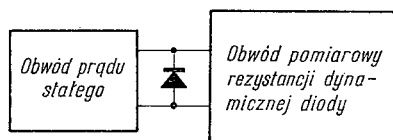
Dla prądu stałego lub prądu zmiennego o częstotliwościach ok. 100 Hz, nachylenie charakterystyki prądowo-napięciowej określone jest przez R_{sc} i R_T , a przy wystarczająco wielkich częstotliwościach ($f \geq 1$ MHz) nachylenie w punkcie pracy (I, U) określone jest



Rys. 2. Statyczna charakterystyka prądowo-napięciowa diody lawinowej (linia ciągła) i charakterystyka dynamiczna w punkcie pracy dla $f \geq 1$ MHz

tylko przez R_{sc} . Termiczny składnik rezystancji elektrycznej otrzymuje się jako różnicę pomiędzy wartościami R_{sd} dla małych i wielkich częstotliwości.

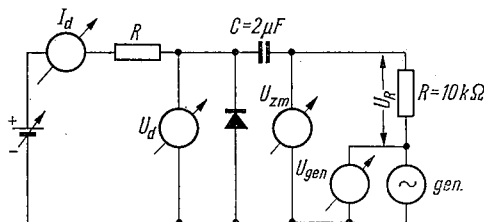
Blokowy układ pomiarowy przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Blokowy układ pomiarowy R_{sd}

3. TECHNIKA POMIARU

Układ użyty w niniejszych badaniach, przedstawiony na rys. 4, jest zmodyfikowaną wersją układu zaproponowanego przez Haitza i innych [6].



Rys. 4. Układ pomiarowy elektrycznej rezystancji szeregowej diody lawinowej

Charakterystykę prądowo-napięciową zdejmuje się przy pomocy miernika prądu stałego I_d i woltomierza cyfrowego U_d . Wyznaczenie napięcia powielania lawinowego U_B następuje poprzez aproksymację charakterystyki lawinowej diody linią prostą aż do przecięcia się z osią napięć. Jednocześnie wyznacza się różniczkową rezystancję diody $R_{sd} =$

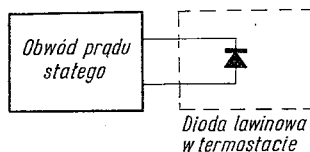
$= R_{sd1}$. Następnie mierzy się rezystancję małosygnałową R_{sd2} dla $f \geq 1$ MHz przy stałym prądzie wstecznym płynącym przez diodę (punkt pracy). W tym celu dokonuje się pomiaru prądu zmiennego I_{zm} płynącego przez diodę drogą rejestracji spadku napięcia U_R na kalibrowanym oporniku R . Rezystancję małosygnałową R_{sd2} uzyskuje się ze związku:

$$R_{sd2} = \frac{U_{zm}}{I_{zm}} = \frac{U_{zm}}{U_R/R} = \frac{U_{zm} \cdot R}{U_{gen} - U_{zm}}, \quad (6)$$

gdzie U_{zm} jest napięciem zmiennym panującym na diodzie¹⁾.

Różnica w nachyleniu charakterystyki statycznej i dynamicznej w wybranym punkcie pracy jest wartością R_T , a stąd ze związku (5) przy znajomości temperaturowego współczynnika napięcia powielania lawinowego β i wartości U_B łatwo wyznacza się rezystancję termiczną R_{thj-c} .

Pozostaje więc jeszcze wyznaczenie temperaturowego współczynnika napięcia powielania lawinowego. Wartość uzyskuje się z pomiarów w układzie jak na rysunku 5.



Rys. 5. Blokowy układ pomiarowy β

Przy stałym poziomie prądu w punkcie pracy podgrzewa się diodę w termostacie, rejestrując przyrost temperatury i napięcia, a z definicji otrzymuje się żadaną wielkość.

4. WYNIKI POMIARÓW

Badania przeprowadzono na diodach lawinowych typu IMPATT, waraktorowych i Zenera. W czasie pomiarów stworzono warunki zbliżone do tych, w jakich diody normalnie pracują.

Pomierzono szereg egzemplarzy diod lawinowych, waraktorowych, a przykładowe, typowe wyniki przedstawiono w tablicy 1.

Zasadniczych badań dokonano na diodzie lawinowej DC 1100-03, prod. AEI Semiconductors. Jest to dioda mikrofalowa, w hermetycznym opakowaniu pigułkowym, przeznaczona do pracy w zakresie X i o mocy wyjściowej do 50 mW.

Sposób zamocowania diody w radiatorze przedstawiono na rys. 6.

Odprowadzenie ciepła jest w tym przypadku bardzo dobre, zbliżone do idealnego. Płytki z miedzi przylegają do znacznej powierzchni diody, a dodatkowo miejsce styku pokryto smarem krzemowym, co eliminuje tworzenie się dodatkowych rezystancji termicznych, wywołanych przez nierównomierność stykających się płaszczyzn i falistość ich powierzchni.

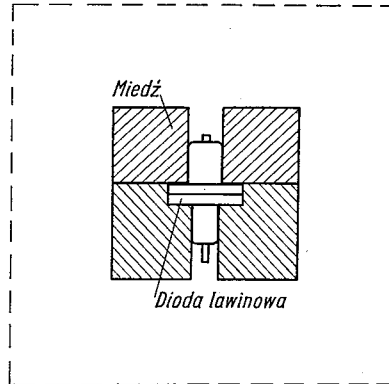
¹⁾ Przy wyznaczaniu rezystancji małosygnałowej dla częstotliwości małych należy uwzględnić spadek napięcia na pojemności $C = 2 \mu\text{F}$.

Tablica 1

Przykładowe wyniki pomiarów rezystancji termicznych diod lądowych

Rodzaj diody	Punkty pracy		Napięcie powielania lądowego U_B [V]	Temp. współ. nap. pow. ląd. $\beta \cdot 10^{-4}$ [°C]	Nachylenie charakterystyki prądowo-napięciowej		Termiczny składnik rezystancji $R_T = R_{sd1} + R_{sd2}$	Rezystancja termiczna $R_{thj-c} = \frac{R_T}{\beta \cdot U_B^2}$ [°C/W]
	U [V]	I [mA]			-statycznej R_{sd1} [Ω]	-dynamicznej R_{sd2} [Ω] ($f = 1$ MHz)		
Dioda lądowa DC-1100-03	63,4	10,0	61,2	12,5	220,0	34,0	186,0	39,7
Dioda waraktorowa WK-50-12, nr 27	16,7	9,0	16,45	10,2	28,0	12,5	15,5	56,2
Dioda waraktorowa BAY 66	111,6	5,0	107,0	10,1	920,0	210,0	710,0	61,5

Producent badanej diody lawinowej nie podaje dokładnej wartości rezystancji termicznej dla konkretnej diody, a tylko typową wartość dla całej grupy diod z serii DC-1100. Wartość ta, wynosząca 30°C/W , będąca wartością dla idealnych warunków odprowadzania ciepła, jest więc zbliżona do wartości pomierzonej niniejszą metodą.



Rys. 6. Sposób zamocowania diody lawinowej DC 1100-03 w radiatorze

Pomiary diod waraktorowych typu WK-50-12 produkcji IPPT Warszawa przeprowadzono w radiatorze mosiężnym ściśle dopasowanym do kształtu diody. Uzyskano dobrą zgodność z pomiarami wykonanymi metodą przejściowych charakterystyk termicznych, której zasady przedstawiono w pracy [8].

Dla diody waraktorowej typu BAY66 produkcji Philips warunki odprowadzania ciepła były gorsze niż dla innych diod. Konstrukcja głowicy pomiarowej zapewniała dobry kontakt termiczny tylko w obrębie podstawy diody a nie na jej całej powierzchni. Zmierzona wartość rezystancji termicznej diody odpowiadać będzie zatem przypadkowi, jaki występuje w normalnych warunkach eksploatacji diody z zastosowaniem radiatora o bardzo dużej pojemności termicznej. Uzyskana wartość rezystancji termicznej jest większa niż dla przypadku z ujściem ciepła o nieskończenie dużej konduktywności termicznej (wartość katalogowa dla tego przypadku wynosi 10°C/W), lecz bardziej odpowiada praktycznie realizowanemu przypadkowi.

Przebadano również niektóre diody Zenera o większych napięciach U_B i uzyskano zadowalające rezultaty.

Należy zwrócić uwagę na dwie poprawki, które przyjęto w obliczeniach rezystancji termicznej R_{thj-c} :

1) w związku (5) zamiast U_B^2 użyto iloczynu $U \cdot U_B$, gdzie U jest napięciem stałym na diodzie w punkcie pracy, celem poprawienia uproszczeń przy wyprowadzaniu wzoru (5) [1],

2) wartość składnika termicznego R_T obliczono z różnicy wartości R_{sd} dla $f = 100$ Hz i 1 MHz, a więc tym samym zestawem przyrządów, unikając w ten sposób błędu systematycznego.

Wyniki pomiarów otrzymane przy uwzględnieniu wymienionych poprawek przedstawione są w tablicy 2.

T a b l i c a 2

Wyniki pomiarów rezystancji termicznych diod lawinowych z tabl. 1 z uwzględnieniem onówionych powyżej poprawek

Rodzaj diody	Punkty pracy		Napięcie powielania lawinowego U_B [V]	Temper. współ. nap. pow. lawin. $\beta \cdot 10^{-4}$ [°C]	Nachylenie dynamicz. charakterystyk prądowo-napięciowych		Termiczny składnik rezystancji $R_T = R_{sd1} - R_{sd2}$ [Ω]	Rezystancja termiczna $R_{thj-c} = \frac{R_T}{\beta \cdot U \cdot U_B}$ [°C/W]	Wartość rezystancji termicznej pomierzzonej innymi metodami [°C/W]
	U [V]	I [mA]			$f = 100 \text{ Hz}$ R_{sd1} [Ω]	$f = 1 \text{ MHz}$ R_{sd2} [Ω]			
Dioda lawinowa DC-I100-03	63,4	10,0	61,2	12,5	203,0	34,0	169,0	35,0	30 ^{*)}
Dioda waraktorowa WK-50-12, nr 27	16,7	9,0	16,45	10,2	28,0	12,5	15,5	55,5	57
Dioda waraktorowa BAY 66	111,6	5,0	107,0	10,1	885,0	210,0	675,0	56,0	—

*) Wartość katalogowa

Błędy pomiarowe występujące przy badaniu rezystancji termicznej diod lawinowych i innych pracujących w zakresie wstecznym wynikają z niejednorodności procesu powielania lawinowego wzdłuż obszaru lawinowego [7], pomiaru β i niedokładności oszacowania rezystancji ładunku przestrzennego R_{sc} (przy założeniu, że $R_{sc} = R_{sd2}(1 \text{ MHz})$) popełnia się ok. 3% błąd w wyznaczaniu R_{sc}). Biorąc to pod uwagę oraz dokładność przyrządów pomiarowych, ocenia się popełnione błędy na ok. $10 \div 15\%$.

5. UWAGI KOŃCOWE

Technika pomiarowa w niniejszej pracy, wykorzystująca temperaturową zależność charakterystyki wstecznej, jest techniką prostą. Pomiar ogranicza się zaledwie do kilku operacji i nie jest zbyt pracochłonny. Dokonywany jest w warunkach zbliżonych do warunków pracy diody. Biorąc pod uwagę, że prąd grzejący złącza jest zarazem prądem pomiarowym, można powiedzieć, że w odniesieniu do wzoru (1) zachodzi tutaj jednoczesny pomiar mocy P_j oraz temperatury złącza T_j . Jest to niewątpliwą zaletą metody pomiaru, szczególnie dlatego, że eliminuje konieczność uwzględnienia termicznych stałych czasowych badanego elementu półprzewodnikowego.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. Gulczyński, Z. Staszak, Właściwości cieplne diod lawinowych, Rozprawy Elektrotechniczne, 1973, z. 2.
2. S. M. Sze, G. Gibbons, Avalanche Breakdown Voltages of Abrupt and Lineary Graded $p-n$ Junctions in Ge, Si, GaAs and GaP, Appl., Phys., Letters, 8, 5, 1966.
3. S. M. Sze, Physics of Semiconductor Devices, Wiley, New York 1969.
4. M. Gilden, M. E. Hines, Electronic Tuning Effects in the Read Microwave Avalanche Diode, IEEE Trans. Electron Devices, ED-13, 1, 1966.
5. R. H. Haitz, Nonuniform Thermal Conductance in Avalanche Microwave Oscillators, IEEE Trans. Electron Devices, ED-15, 6, 1968.
6. R. H. Haitz, H. J. Stover, N. J. Tolar, A Method for Heat Flow Resistance Measurements in Avalanche Diodes, IEEE Trans. Electron Devices, ED-16, 5, 1969.
7. R. L. Batdorf, A. G. Chynoweth, G. C. Dacey, P. W. Foy, Uniform Silicon $p-n$ Junctions. I. Broad Area Breakdown, J. Appl. Phys., 31, 6, 1960.
8. J. Gulczyński, Pomiar oporności termicznych diod półprzewodnikowych. Metoda wyznaczania wartości elementów termicznego układu zastępczego przyrządów półprzewodnikowych, Mat. z Konf. „Mikrofalowa Elektronika Ciała Stałego”, Zakopane 7÷10 października 1968, PWN, Warszawa 1969.

J. GULCZYŃSKI, Z. STASZAK

MEASUREMENT OF THERMAL RESISTANCE IN AVALANCHE DIODES

Summary

The article presents a method of evaluating the thermal resistance in avalanche diodes by electrical parameters measurements. After discussing the requirements for investigations of thermal parameters, a detailed description of applied method utilizing the temperature dependence of the avalanche characteristics is given. The obtained results of measurements on diodes showing the avalanche characteristics (avalanche, varactor and Zener diodes) are reported. Usefulness of this technique is justified.

J. GULCZYŃSKI, Z. STASZAK

LA MÉSURE DE RÉSISTANCE THERMIQUE DES DIODES À AVALANCHE

Résumé

Ce travail nous présente une méthode d'obtenir les résistances thermiques des diodes à avalanche à l'aide des mesures des paramètres électriques. Après avoir discuté des exigences posées à l'analyse des paramètres thermiques on a donné une description détaillée d'une méthode appliquée qui utilise la dépendance thermique de la caractéristique à avalanche. On a cité les résultats obtenus des mesures faites sur les diodes qui ont la caractéristique à avalanche (diodes à avalanche, diodes de varacteur, diodes de Zener) et on a prouvé la possibilité d'utiliser la technique présentée.

J. GULCZYŃSKI, Z. STASZAK

MESSUNG DES WÄRMEWIDERSTANDES VON LAWINENDIODEN

Zusammenfassung

In der Arbeit wurde eine Methode zur Bestimmung der Wärmewiderstände von Lawinendioden durch Messung elektrischer Parameter dargestellt. Nach einer Diskussion über die Anforderungen an die Messung von thermischen Parametern folgt eine ausführliche Beschreibung der angewandten Messmethode, in der die Abhängigkeit der Kennlinien der Lawinendioden von der Temperatur ausgenutzt wird. Es werden die erreichten Meßergebnisse für Dioden mit Lawinen-Kennlinien angegeben (Lawinendioden, Varaktoren und Zenerdioden) und die Zweckmäßigkeit der angewandten Messmethode wird begründet.

Я. ГУЛЬЧИНСКИ, З. СТАШАК

ИЗМЕРЕНИЕ ТЕПЛОВЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ ЛАВИННЫХ ДИОДОВ

Резюме

В труде представлен метод определения теплового сопротивления лавинных диодов путем измерения их электрических параметров. Приведено подробное описание метода использующего температурную зависимость характеристики лавинного диода. Представлены результаты измерений диодов проявляющих лавинную характеристику (лавинные, варакторные и Зенера), а также доказана целесообразность использования предложенного метода.

Trójwrotowe symetryczne dzielniki mocy i ich zastosowań w mikrofalowych układach scalonych

ZDZISŁAW SAWICKI (GDAŃSK)

Przemysłowy Instytut Telekomunikacji, Oddział Gdańsk

RYSZARD VOGEL (GDYNIA)

Instytut Telekomunikacji Politechniki Gdańskiej

Otrzymano 22.4.1972

W pracy przedstawiono zarys teorii symetrycznego trójwrotowego dzielnika mocy ze skupionym elementem opornościowym. W celu określenia własności rozważanego układu wykorzystano, zmodyfikowaną dla przypadku trójwrotników, metodę pobudzeń w fazie i przeciwfazie. W oparciu o tę metodę wyznaczono macierz rozproszenia, której znajomość pozwala określić warunki na dopasowanie wszystkich wrót trójwrotnika i nieskończenie wielką izolację pomiędzy wrotami połączonymi skupionym opornikiem. Wyznaczono również częstotliwościowe charakterystyki parametrów roboczych trójwrotnika. Bardziej szczegółowo rozpatrzono, interesujący z punktu widzenia zastosowań w mikrofalowych układach scalonych, przypadek trójwrotowego dzielnika mocy zrealizowanego w oparciu o niesymetryczne linie paskowe. W szczególności rozważono wpływ tolerancji wykonania poszczególnych elementów dzielnika na jego parametry robocze. Zaproponowano również metodę projektowania dzielnika z uwzględnieniem nieciągłości wywołanych rozgałęzieniami typu T .

1. WSTĘP

Ostatnie osiągnięcia w dziedzinie techniki półprzewodnikowej stwarzają nowe możliwości miniaturyzacji sprzętu elektronicznego pracującego w paśmie mikrofalowym. Znaczne moce uzyskiwane w półprzewodnikowych generatorach mikrofalowych (diody lawinowe, Gunna i LSA) pozwalają na zasilanie kilku niezależnych obwodów (np. zasilanie dwóch mieszaczy z jednego oscylatora lokalnego). W związku z tym zaistniała konieczność budowy odpowiednich dzielników mocy mikrofalowej charakteryzujących się izolowanymi wyjściami.

Przedmiotem pracy są dzielniki mocy mikrofalowej dla zastosowań w mikrofalowych układach scalonych (MUS). Dzielniki te pracują z falą rodzaju TEM i posiadają dwa synfazowe izolowane wyjścia, o z góry założonym stosunku podziału mocy.

W związku ze wspomnianym zastosowaniem, w pracy ograniczono się do rozpatrzenia własności oraz do określenia metod projektowania symetrycznych dzielników z jednym skupionym elementem stratnym. Pominięto natomiast bardziej rozbudowane, a tym samym dużo większe i nie zawsze przydatne w MUS dzielniki z wieloma elementami skupio-

nymi [1], jak też rzadziej spotykane w praktyce dzielniki o niesymetrycznym podziale mocy [2].

Własności elektryczne rozpatrywanych w pracy dzielników o symetrycznym podziale mocy przeanalizowano w oparciu o macierze rozproszenia. Macierze te określono przy zastosowaniu metody pobudzeń w fazie i przeciwfazie [3], [4].

Korzystając z macierzy rozproszenia wyznaczono zależności będące podstawą projektowania dzielników. W analizie uwzględniono również wpływ niedopasowania wrót dzielnika i wyprowadzono zależności określające własności elektryczne całego układu łącznie z obciążeniami. Wymienione wyżej elementy pracy mają charakter ogólny i są słuszne dla wszystkich linii transmisyjnych (TEM).

Biorąc pod uwagę docelowe wykorzystanie dzielnika w MUS przyjęto, że jego realizacja będzie oparta o najczęściej stosowaną w tych układach prowadnicę — niesymetryczną linię paskową (NLP). W związku z tym rozważono tolerancje wykonania poszczególnych części dzielnika oraz zaproponowano metodę uwzględnienia wpływu rozgałęzień T w projektowaniu dzielników z NLP.

W y k a z w a ż n i e j s z y c h o z n a c z e ń

- a — amplituda napięciowej fali dobiegającej
- B — susceptancja schematu zastępczego rozgałęzienia typu T
- b — amplituda napięciowej fali odbiegającej
- C — sprzężenie
- f — częstotliwość
- g — konduktancja znormalizowana
- I — izolacja
- j — $\sqrt{-1}$
- l — długość odcinka
- n — przekładnia transformatora
- P — moc
- q — efektywny współczynnik wypełnienia
- h — grubość podłoża
- R — rezystancja
- r — rezystancja znormalizowana
- S — element nieznormalizowanej macierzy rozproszenia
- s — element znormalizowanej macierzy rozproszenia
- t — element znormalizowanej falowej macierzy transmitancji, grubość warstwy przewodnika
- w — szerokość przewodnika w niesymetrycznej linii paskowej
- y — admitancja znormalizowana
- Z — impedancja
- z — impedancja znormalizowana
- β — współczynnik fazowy
- Γ — współczynnik odbicia
- Δ — przyrost

- ε — przenikalność dielektryczna
 Θ — kąt, długość elektryczna
 λ — długość fali

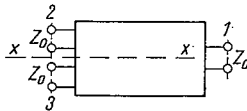
2. ELEMENTY ANALIZY IDEALNEGO TRÓJWROTOWEGO DZIELNIKA MOCY MIKROFALOWEJ

2.1. Metoda pobudzeń w fazie i przeciwfazie dla przypadku trójwrotników

Własności n -wrotowych układów mikrofalowych, a w szczególności trójwrotników, wygodnie jest określać w oparciu o falowe macierze rozproszenia $[s]$. Macierz $[s]$ trójwrotnika można wyznaczyć korzystając ze znanej w przypadku czterowrotników [3] [4] metody pobudzeń w fazie i przeciwfazie.

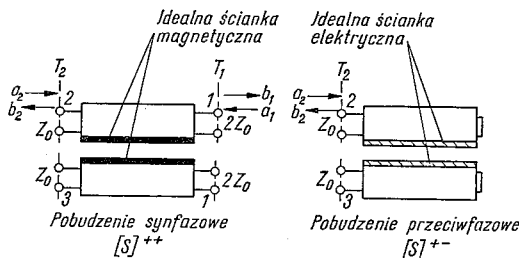
W przypadku analizy symetrycznych osiowo trójwrotników metoda ta ulega pewnej modyfikacji i w związku z tym będzie tu w skrócie przedstawiona.

Załóżmy, że wrota 2, symetrycznego względem osi $x-x$ trójwrotnika (rys. 1) są pobudzone falą padającą o amplitudzie równej dwa. Takie pobudzenie można zastąpić równo-



Rys. 1. Symetryczny trójwrotnik

ważną parą fal synfazowych we wrotach 2 oraz parą fal przeciwfazowych we wrotach 3 o amplitudach równych jedności. Po zgrupowaniu pobudzeń synfazowych i przeciwfazowych względem osi $x-x$ we wrotach 2 i 3 otrzymuje się dwa różne przypadki pobudzeń trójwrotnika. Przy pobudzeniu synfazowym (+ +) wrót 2 i 3, w każdym punkcie osi sy-



Rys. 2. Równoważne trójwrotnikowi dwu- i jednowrotniki

metrii występuje maksimum napięcia (prądy równe zero), co odpowiada rozwarciu w tej płaszczyźnie. Przy pobudzeniu przeciwfazowym (+ -) wrót 2 i 3 z warunku symetrii trójwrotnika wynika, że wzdłuż osi symetrii napięcie jest równe zero. Odpowiada to zwarcie w tej płaszczyźnie. Zatem symetryczny trójwrotnik można rozdzielić na dwie niezależne pary dwuwrotników i jednowrotników o macierzach rozproszenia $[s]^{++}$ i $[s]^{+-}$ (rys. 2).

Jak zaznaczono poprzednio, amplitudy wszystkich fal pobudzających synfazowo i przeciwfazowo są równe jedności, zatem elementy nieznormalizowanych macierzy rozproszenia dwuwrotników są liczbowo równe amplitudom odpowiadających im fal.

Aby otrzymać wynikowe fale wychodzące z poszczególnych wrót trójwrotnika wystarczy dodać odpowiednie elementy nieznormalizowanych macierzy rozproszenia $[s]^{++}$ i $[s]^{+-}$ uwzględniając ich znak¹⁾. Dzieląc wynikowe fale wychodzące z poszczególnych wrót trójwrotnika przez 2, tj. przez amplitudę fali padającej we wrota 2, otrzymuje się wszystkie elementy nieznormalizowanej macierzy rozproszenia trójwrotnika, która ze względu na równe impedancje normalizujące w poszczególnych wrotach jest jednocześnie macierzą znormalizowaną. Elementy znormalizowanej macierzy trójwrotnika mają postać:

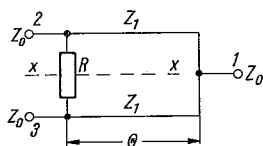
$$\begin{aligned} s_{11} &= S_{11} = S_{11}^{++} = s_{11}^{++}, \\ s_{12} &= S_{12} = \frac{1}{2} S_{12}^{++} = \frac{1}{\sqrt{2}} s_{12}^{++}, \\ s_{22} &= S_{22} = \frac{1}{2} (S_{22}^{++} + S_2^{+-}) = \frac{1}{2} (s_{22}^{++} + s_2^{+-}), \\ s_{23} &= S_{23} = \frac{1}{2} (S_{22}^{++} - S_2^{+-}) = \frac{1}{2} (s_{22}^{++} - s_2^{+-}), \\ s_{13} &= s_{12} = s_{31} = s_{21}, \\ s_{32} &= s_{23}, \\ s_{33} &= s_{22}, \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie:

s — elementy macierzy znormalizowanych,
 S — elementy macierzy nieznormalizowanych.

2.2. Macierz rozproszenia idealnego trójwrotowego dzielnika mocy mikrofalowej ze skupionym elementem stratnym

Rozpatrywany w pracy dzielnik mocy ze skupionym elementem stratnym ma strukturę przedstawioną na rys. 3.



Rys. 3. Struktura symetrycznego dzielnika mocy mikrofalowej

Otrzymane w wyniku pobudzeń synfazowych i przeciwfazowych dwuwrotniki i jednowrotniki przybierają w tym przypadku postać pokazaną na rys. 4.

¹⁾ Operowanie macierzami nieznormalizowanymi jest konieczne ze względu na różne impedancje normalizujące w poszczególnych wrotach dwuwrotników i jednowrotników.

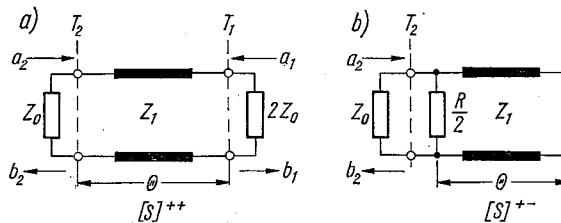
Znormalizowaną macierz rozproszenia dwuwrotownika $[s]^{++}$ (rys. 4a) można wyznaczyć dokonując przejścia z łatwej do obliczenia falowej macierzy transmitancji $[t]$, która ma dla takiego dwuwrotownika postać następującą:

$$[t] = \begin{bmatrix} \frac{(R_1+1)(R_2+1)e^{j\theta} + (R_1-1)(R_2-1)e^{-j\theta}}{4\sqrt{R_1 R_2}} & \frac{(R_1+1)(R_2-1)e^{j\theta} + (R_1-1)(R_2+1)e^{-j\theta}}{4\sqrt{R_1 R_2}} \\ \frac{(R_1-1)(R_2+1)e^{j\theta} + (R_1+1)(R_2-1)e^{-j\theta}}{4\sqrt{R_1 R_2}} & \frac{(R_1-1)(R_2-1)e^{j\theta} + (R_1+1)(R_2+1)e^{-j\theta}}{4\sqrt{R_1 R_2}} \end{bmatrix} \quad (2)$$

gdzie:

$$R_1 = \frac{Z_1}{Z_0}; \quad R_2 = 2 \frac{Z_0}{Z_1},$$

$\Theta = \beta l$ — długość elektryczna odcinka linii transmisyjnej.



Rys. 4. Schemat dwuwrotownika (a) i jednowrotownika (b)

Otrzymany w wyniku pobudzeń przeciwfazowych jednowrotownik posiada macierz rozproszenia $[s]^{+-}$ określoną jednym elementem s_2 reprezentującym wejściowy współczynnik odbicia w płaszczyźnie T_2 (rys. 4b).

Korzystając z zależności (1) oraz dokonując niezbędnych przekształceń otrzymuje się znormalizowaną macierz rozproszenia dzielnika, określoną przez następujące elementy:

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{-y_1 \operatorname{ctg} \Theta + j(1 - 2y_1^2)}{3y_1 \operatorname{ctg} \Theta + j(1 + 2y_1^2)}, \\ s_{12} &= \frac{2y_1}{\sin \Theta [3y_1 \operatorname{ctg} \Theta + j(1 + 2y_1^2)]}, \\ s_{22} &= \frac{2[1 - y_1^2 - g]y_1 \operatorname{ctg} \Theta + j[1 - 4y_1^2 g + y_1^2 \operatorname{ctg}^2 \Theta]}{2[2 + y_1^2 + 3g]y_1 \operatorname{ctg} \Theta + j[1 + 2y_1^2 + 2g + 4y_1^2 g - 3y_1^2 \operatorname{ctg}^2 \Theta]}, \\ s_{23} &= \frac{4gy_1 \operatorname{ctg} \Theta + j2[g - y_1^2 - y_1^2 \operatorname{ctg}^2 \Theta]}{2[2 + y_1^2 + 3g]y_1 \operatorname{ctg} \Theta + j[1 + 2y_1^2 + 2g + 4y_1^2 g - 3y_1^2 \operatorname{ctg}^2 \Theta]}, \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie:

$$g = \frac{1}{r} = \frac{Z_0}{R} \text{ — odwrotność znormalizowanej rezystancji szeregowej } R,$$

$$y_1 = \frac{1}{z_1} = \frac{Z_0}{Z_1} \text{ — odwrotność znormalizowanej impedancji charakterystycznej } Z_1$$

Wyznaczona macierz rozproszenia dzielnika pozwala określić warunki na długość i impedancję charakterystyczną gałęzi sprzęgających (wielkości Θ i Z_1) oraz rezystancję szeregową R , zapewniające dopasowanie i izolację wrót. Warunki te, będące jednocześnie zależnościami projektowymi, otrzymuje się rozwiązując układ równań:

$$\left. \begin{aligned} s_{11} &= 0 \\ s_{22} &= 0 \\ s_{23} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

Rozwiązanie ma postać następującą:

$$\begin{aligned} \Theta &= \Theta_0 = \frac{\pi}{2}, \\ Z_1 &= \sqrt{2} Z_0, \\ R &= 2 Z_0, \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie:

$$\Theta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} l,$$

l — długość fizyczna gałęzi sprzęgającej,

λ_0 — długość fali rodzaju TEM w gałęzi sprzęgającej.

Dla wyżej określonych warunków (5) element s_{12} macierzy rozproszenia, określający sprzężenie między wejściem a jednym z wyjść, przyjmuje wartość: $s_{12} = s_{13} = \frac{1}{j\sqrt{2}}$.

2.3. Charakterystyki częstotliwościowe parametrów roboczych dzielnika

Do parametrów roboczych dzielnika zalicza się:

— wejściowe współczynniki fali stojącej w poszczególnych wrotach WFS_i ($i = 1, 2, 3$).

$$WFS_i = \frac{1 + |s_{ii}|}{1 - |s_{ii}|}, \quad (6)$$

gdzie: s_{ii} — wejściowy współczynnik odbicia określony przez wzory (3);

— sprzężenia C między wejściem 1 i wyjściami 2 i 3 definiowane jako stosunek mocy padającej we wrota 1 (P_1) do mocy wychodzącej z wrót 2 lub 3 (P_2 lub P_3):

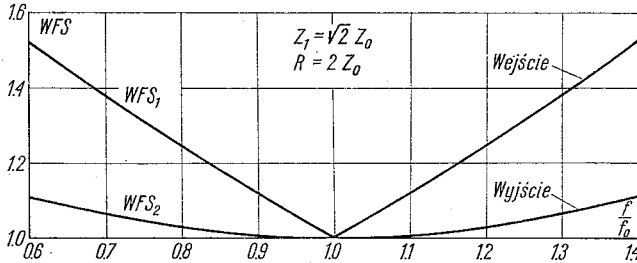
$$C = 10 \lg \frac{1}{|s_{12}|^2} \text{ [dB]}, \quad (7)$$

— izolację I między wrotami wyjściowymi 2 i 3 definiowaną jako stosunek mocy padającej we wrota 3 (P_3) do mocy wychodzącej z wrót 2 (P_2):

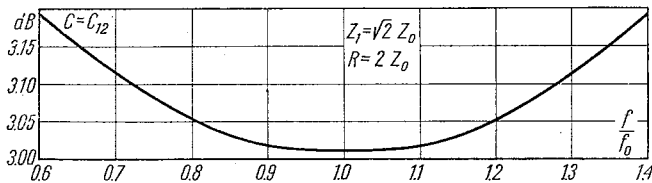
$$I = 10 \lg \frac{1}{|s_{23}|^2} \text{ [dB]}, \quad (8)$$

— szerokość pasma $\frac{f_2}{f_1}$, związaną bezpośrednio z charakterystykami częstotliwościowymi — WFS_i , C , I , gdzie f_1 i f_2 oznaczają odpowiednio dolną i górną częstotliwość graniczną odpowiadającą określonym wartościom wymienionych wyżej parametrów.

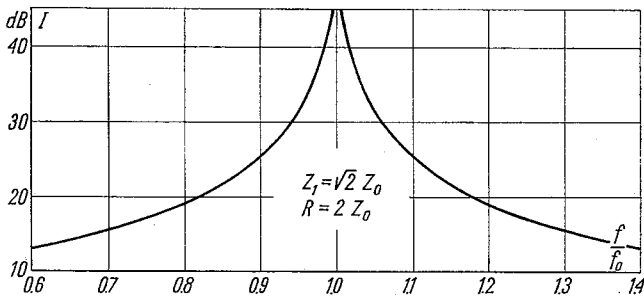
Korzystając z macierzy rozproszenia dzielnika określonej zależnościami (3) oraz z definicji (6), (7), (8) obliczono przebieg zmian parametrów roboczych w funkcji częstotliwości. Wyniki obliczeń przedstawiają rys. 5 ÷ 7.



Rys. 5. Charakterystyki częstotliwościowe współczynników fali stojącej dzielnika



Rys. 6. Charakterystyka częstotliwościowa sprzężenia dzielnika



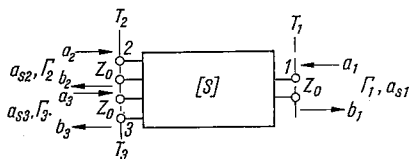
Rys. 7. Charakterystyka częstotliwościowa izolacji dzielnika

Jak widać z przedstawionych charakterystyk, szerokość pasma pracy takiego dzielnika jest ograniczana głównie przez współczynnik fali stojącej na wejściu oraz izolację. Np. dla $WFS_1 < 1,1$ i $I > 26$ dB pasmo f_2/f_1 wynosi 1,19.

3. WPŁYW NIEDOPASOWANIA WRÓT NA PARAMETRY ROBOCZE DZIELNIKA

W dotychczasowych rozważaniach przyjmowano, że wszystkie wrota dzielnika są zakończone dopasowanymi impedancjami, co nie zawsze jest spełnione w praktyce. W celu określenia wpływu niedopasowań na parametry dzielnika rozważono przypadek trójwrot-

nika z niedopasowanymi zakończeniami wrót (rys. 8) i jednocześnie uogólniono definicje poszczególnych parametrów roboczych dzielnika.



Rys. 8. Trójwrotnik z niedopasowanymi zakończeniami

Trójwrotnik przedstawiony schematycznie na rys. 8 można scharakteryzować dwoma równaniami macierzowymi:

$$b] = [s] a] \quad (9)$$

$$a] = [I] b] + a_s], \quad (10)$$

gdzie:

$a]$ — macierz kolumnowa znormalizowanych amplitud napięciowych fal dobiegających do poszczególnych wrót,

$b]$ — macierz kolumnowa fal odbiegających od poszczególnych wrót,

$[s]$ — znormalizowana kwadratowa macierz rozproszenia trójwrotnika,

$[I]$ — diagonalna macierz współczynników odbicia Γ_i ($i = 1, 2, 3$) obciążeń,

$a_s]$ — macierz kolumnowa fal dobiegających do wrót, pochodzących od źródeł sygnałowych znajdujących się na zewnątrz trójwrotnika.

Eliminując z układu równań (9), (10) macierz $a]$, otrzymuje się równanie macierzowe opisujące trójwrotnik łącznie z zakończeniami:

$$b] = \{[I] - [s][I]\}^{-1} \cdot [s] a_s] = [D] a_s]. \quad (11)$$

Korzystając z równania (11) oraz z własności macierzy rozproszenia symetrycznego dzielnika, otrzymuje się wyrażenia na uogólnione parametry dzielnika. Stopień niedopasowania w poszczególnych wrotach określa współczynnik fali stojącej, który w tym przypadku ma postać:

$$WFS_i = \frac{1 + |\Gamma_{wei}|}{1 - |\Gamma_{wei}|}, \quad (12)$$

gdzie:

Γ_{wei} jest wejściowym współczynnikiem odbicia w i -tych wrotach,

$$\Gamma_{we1} = \frac{b_1}{a_1} \Bigg|_{\text{tylko } a_{s1} \neq 0} = s_{11} + \frac{s_{12}^2 [2(s_{23} - s_{22})\Gamma_2\Gamma_3 + \Gamma_2 + \Gamma_3]}{(1 - s_{22}\Gamma_2)(1 - s_{22}\Gamma_3) - s_{23}^2\Gamma_2\Gamma_3},$$

$$\Gamma_{we2} = \frac{b_2}{a_2} \Bigg|_{\text{tylko } a_{s2} \neq 0} = s_{22} + \frac{[s_{12}^2(2s_{23} - s_{22}) - s_{11}s_{23}^2]\Gamma_1\Gamma_3 + s_{12}^2\Gamma_1 + s_{23}^2\Gamma_3}{(1 - s_{11}\Gamma_1)(1 - s_{22}\Gamma_3) - s_{12}^2\Gamma_1\Gamma_3}. \quad (13)$$

W celu pełnego scharakteryzowania transmisji mocy od źródła sygnału do obciążenia, wprowadza się definicje skutecznych paramterów sprzężenia C_s i izolacji J_s . Pierwszy z wymienionych parametrów ma postać:

$$C_s = 10 \lg \frac{P_{d1}}{P_{o2}} \Bigg|_{\text{tylko } a_{s1} \neq 0}, \quad (14)$$

gdzie:

$$P_{d1} \text{ — moc dysponowana we wrotach wejściowych 1 określona zależnością } P_{d1} = \frac{|a_{s1}|^2}{1-|I_1|^2},$$

$$P_{o2} \text{ — moc tracona w obciążeniu wrót 2 określona zależnością } P_{o2} = (1-|I_2|^2)|b_2|^2.$$

Podstawiając do definicji (14) wynik rozwiązania równania (11) uzyskuje się wyrażenie:

$$C_{s2_3} = 10 \lg \frac{|(1-s_{11}I_1)(1-s_{22}I_2)(1-s_{22}I_3)-s_{12}^2I_1[(1-s_{22}I_2)I_3+(1-s_{23}I_3)I_2]-2s_{12}^2s_{23}I_1I_2I_3|^2}{|s_{12}|^2|1-(s_{23}-s_{22})I_3|^2(1-|I_1|^2)(1-|I_2|^2)} \quad [dB]. \quad (15)$$

Analogicznie można zdefiniować izolację skuteczną:

$$I_s = 10 \lg \frac{P_{d3}}{P_{o2}} \Big|_{\text{tylko } a_{s3} \neq 0}, \quad (16)$$

gdzie:

$$P_{d3} = \frac{|a_3|^2}{1-|I_3|^2} \text{ — moc dysponowana we wrotach 3,}$$

$$P_{o2} = (1-|I_2|^2)|b_2|^2 \text{ — moc tracona w obciążeniu wrót 2.}$$

Definicja (16) z uwzględnieniem rozwiązania równania (11) przyjmuje postać:

$$I_s = 10 \lg \frac{|(1-s_{11}I_1)(1-s_{22}I_2)(1-s_{22}I_3)-s_{12}^2I_1[(1-s_{22}I_2)I_3+(1-s_{23}I_3)I_2]-s_{23}^2I_2I_3(1-s_{11}I_1)-2s_{12}^2s_{23}I_1I_2I_3|^2}{|s_{23}+(s_{12}^2-s_{11}s_{23})I_1|^2(1-|I_2|^2)(1-|I_3|^2)} \quad [dB] \quad (17)$$

W przypadku pracy dzielnika na częstotliwości środkowej, przytoczone tu ogólne wyrażenia ulegają znacznemu uproszczeniu. Mianowicie przyjmują one postać:

$$\begin{aligned} \Gamma_{we1} &= s_{12}^2(\Gamma_2 + \Gamma_3), \\ \Gamma_{we2} &= \frac{s_{12}^2\Gamma_1}{1-s_{12}^2\Gamma_1\Gamma_3}, \\ C_{s2_3} &= 10 \lg \frac{|1-s_{12}^2\Gamma_1(\Gamma_2 + \Gamma_3)|^2}{|s_{12}|^2(1-|\Gamma_1|^2)(1-|\Gamma_2|^2)}, \\ I_s &= 10 \lg \frac{|1-s_{12}^2\Gamma_1(\Gamma_2 + \Gamma_3)|^2}{|s_{12}^2\Gamma_1|^2(1-|\Gamma_2|^2)(1-|\Gamma_3|^2)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Z przedstawionych wyżej wyrażeń można wysnuć praktyczne wnioski dotyczące techniki pomiarowej stosowanej przy badaniu modeli dzielników. Jak widać występujący tu czynnik $(\Gamma_2 + \Gamma_3)$ może być zredukowany do zera przez odpowiedni dobór modułu i fazy współczynników odbicia obciążeń Γ_2 i Γ_3 . Natomiast wielkość wejściowego współczynnika

odbicia Γ_{we2} zależy głównie od czynnika $s_{12}^2 \Gamma_1$, co sugeruje na zwrócenie szczególnej uwagi w trakcie pomiarów współczynnika fali stojącej, na wyjściach, na jakość obciążenia we wrotach wejściowych (1).

4. PROJEKTOWANIE I REALIZACJA DZIELNIKA MOCY Z NIESYMETRYCZNYMI LINIAMI PASKOWYMI

Jak wspomniano we wstępie, wykorzystanie dzielnika mocy w MUS, narzuca konieczność stosowania do jego konstrukcji przewodnicy falowej charakteryzującej się małymi wymiarami. Warunek ten spełnia niesymetryczna linia paskowa, której dodatkową zaletą jest, korzystna z technologicznego punktu widzenia, planarna struktura. Wybór tego typu linii transmisyjnej wpływa na konieczność uwzględnienia jej specyfiki w projektowaniu dzielników mocy. W związku z tym, niżej przedstawione zostaną podstawowe zależności, użyteczne w projektowaniu *NLP*, a następnie w oparciu o nie rozpatrzony będzie wpływ tolerancji wykonania linii na parametry robocze dzielnika oraz wpływ występujących w dzielniku rozgałęzień typu *T* na jego projektowanie.

4.1. Projektowanie niesymetrycznej linii paskowej

Niesymetryczna linia paskowa mimo swej prostoty geometrycznej (rys. 9) jest jedną z najtrudniejszych z teoretycznego punktu widzenia przewodnic falowych. Jej parametry, takie jak impedancja charakterystyczna, prędkość fazowa i tłumienie jednostkowe zależą zarówno od wymiarów geometrycznych jak i od częstotliwości. Brak dokładnych wyrażeń



Rys. 9. Przekrój poprzeczny niesymetrycznej linii paskowej

na parametry *NLP* zmusza do stosowania zależności przybliżonych, słusznych dla określonych założeń. W praktycznych zastosowaniach użyteczne są wzory projektowe uzyskane przez Schneidera [5], określające impedancję charakterystyczną z dokładnością $\pm 0,25\%$

dla wymiarów linii zawartych w granicach $0 \leq \frac{w}{h} \leq 10$ oraz $\pm 1\%$ dla $\frac{w}{h} > 10$ w paśmie częstotliwości, w którym efekt dyspersji może być pominięty. Wzory te mają postać:

$$Z_0 \sqrt{\epsilon_{ef}} = 60 \ln \left(\frac{8h}{w} + \frac{w}{4h} \right) \quad \text{dla } \frac{w}{h} \leq 1,$$

$$Z_0 \sqrt{\epsilon_{ef}} = \frac{120\pi}{\frac{w}{h} + 2,42 - 0,44 \frac{w}{h} + \left(1 - \frac{h}{w}\right)^6} \quad \text{dla } \frac{w}{h} \geq 1, \quad (19)$$

przy czym ϵ_{ef} oznacza efektywną przenikalność dielektryczną, uwzględniającą niejednorodność ośrodka.

Wielkość tę można określić na podstawie zależności [6]:

$$\varepsilon_{ef} = 1 + q(\varepsilon_r - 1), \quad (20)$$

gdzie:

ε_r — względna przenikalność dielektryczna podłoża,

q — efektywny współczynnik wypełnienia, który z wystarczającą dokładnością można określić w oparciu o wzory podane przez Sobola [7]:

$$\begin{aligned} q &= 0,63 \left(\frac{w}{h} \right)^{0,1265} & \text{dla } \frac{w}{h} \geq 0,6, \\ q &= 0,60 \left(\frac{w}{h} \right)^{0,0297} & \text{dla } \frac{w}{h} \leq 0,6. \end{aligned} \quad (21)$$

Podane wyżej wzory słuszne są przy zerowej grubości przewodnika ($t = 0$). Grubość przewodnika można uwzględnić wprowadzając poprawkę na szerokość paska (Δw) [6]. Wielkość tej poprawki można obliczyć z następujących wzorów:

$$\begin{aligned} \Delta w &= \frac{t}{\pi \varepsilon_r} \left(\ln \frac{2h}{t} + 1 \right) & \text{dla } \frac{w}{h} > \frac{1}{2\pi} > \frac{2t}{h}, \\ \Delta w &= \frac{t}{\pi \varepsilon_r} \left(\ln \frac{4\pi w}{t} + 1 \right) & \text{dla } \frac{1}{2\pi} > \frac{w}{h} > \frac{2t}{h}. \end{aligned} \quad (22)$$

Wprowadzenie poprawki na grubość przewodnika odzwierciedla się więc w nowej efektywnej szerokości paska

$$w_{ef} = w + \Delta w. \quad (23)$$

Pomijany dotychczas efekt dyspersji można uwzględnić wprowadzając pojęcie *prawdziwej* (różnej od efektywnej) przenikalności dielektrycznej ε_p . Przydatną w praktyce, empiryczną zależność określającą prawdziwą przenikalność dielektryczną podał Chudobiak

[8]. Dla $2 \leq \varepsilon_r \leq 10$ i $0,9 \leq \frac{w}{h} \leq 13$ ma ona postać:

$$\varepsilon_p = 1,1811 \cdot 10^{-7} (\varepsilon_r + 1) (\varepsilon_r - 1) h \left\{ \frac{Z_0}{x} \left(\frac{w_{ef}}{h} \right)^y \right\}^{\frac{1}{2}} (f - f_d) + \varepsilon_{ef}, \quad (24)$$

gdzie:

$$x = y = 1 \text{ dla } \frac{w_{ef}}{h} \leq 4 \text{ oraz } x = 3, y = 2 \text{ dla } \frac{w_{ef}}{h} > 4,$$

Z_0 — impedancja charakterystyczna określona wzorem (19) w $[\Omega]$,

h — grubość podłoża w $[\mu\text{m}]$,

w_{ef} — efektywna szerokość paska określona przez zależności (22) i (23).

$f_d = \frac{30,2}{(\varepsilon_r - 1)^{1/4}} \sqrt{\frac{Z_0}{h}} [\text{GHz}]$ — częstotliwość, poniżej której dyspersja może być pominięta,

ε_{ef} — efektywna przenikalność dielektryczna określona wzorem (20).

Następnym ważnym parametrem NLP, związanym z prędkością fazową, jest długość fali λ_g . Korzystając z zależności (24) można ją zapisać następująco:

$$\lambda_g = \frac{\lambda_o}{\sqrt{\epsilon_p}}, \quad (25)$$

gdzie: λ_o — długość fali TEM w wolnej przestrzeni.

Podane wyżej wzory pozwalają zarówno na zaprojektowanie NLP o określonej impedancji charakterystycznej, jak też na obliczenie długości fali propagowanej w linii o konkretnych wymiarach. Często interesujące jest również wyznaczenie tłumienia jednostkowego w linii. Tłumienie to można określić w oparciu o wyrażenia podane w pracach Schneidera [5] [9], które ze względu na swą złożoność nie będą tu przytoczone.

4.2. Wpływ tolerancji wykonania na parametry robocze dzielnika

W trakcie realizacji dzielnika poszczególne jego elementy będą wykonywane z określonymi tolerancjami, co spowoduje pewną zmianę parametrów roboczych. W celu przeanalizowania wpływu niedokładności wykonania założono, że dzielnik pracuje na częstotliwości środkowej f_o , co znacznie upraszcza macierz rozproszenia dzielnika (3). Realizowane w praktyce wielkości R , Z_1 i Z_0 można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} R &= R_n + \Delta R, \\ Z_1 &= Z_{1n} + \Delta Z_1, \\ Z_0 &= Z_{0n} + \Delta Z_0, \end{aligned} \quad (26)$$

gdzie: R_n , Z_{1n} , Z_{0n} — wielkości nominalne określone wyrażeniami (5).

Wprowadzając zapis (26) do wyrażeń (3) uzyskuje się uzależnienie współczynników macierzy rozproszenia dzielnika od względnych zmian wielkości R , Z_1 i Z_0 .

$$\begin{aligned} |s_{11}| &= \frac{|a^2 - b^2|}{a^2 + b^2}, \\ |s_{12}| &= \frac{\sqrt{2} a \cdot b}{a^2 + b^2}, \\ |s_{22}| &= \frac{|a^2 c - b^3|}{(a^2 + b^2)(c + b)}, \\ |s_{23}| &= \frac{|a^2 b - b^2 c|}{(a^2 + b^2)(c + b)}, \end{aligned} \quad (27)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} a &= 1 + \frac{\Delta Z_1}{Z_{1n}}, \\ b &= 1 + \frac{\Delta Z_0}{Z_{0n}}, \\ c &= 1 + \frac{\Delta R}{R_n}. \end{aligned}$$

Uwzględniając powyższe zależności we wzorach (6) ÷ (8) można określić wpływ niedokładności wykonania poszczególnych elementów dzielnika na jego parametry.

Zakładając określony typ przewodnicy falowej można występujące tu impedancje charakterystyczne Z_1 i Z_0 uzależnić od konkretnych wymiarów geometrycznych. W przypadku

NLP wymiary te określa stosunek $\frac{w}{h} = X$. Stosunek ten można zapisać:

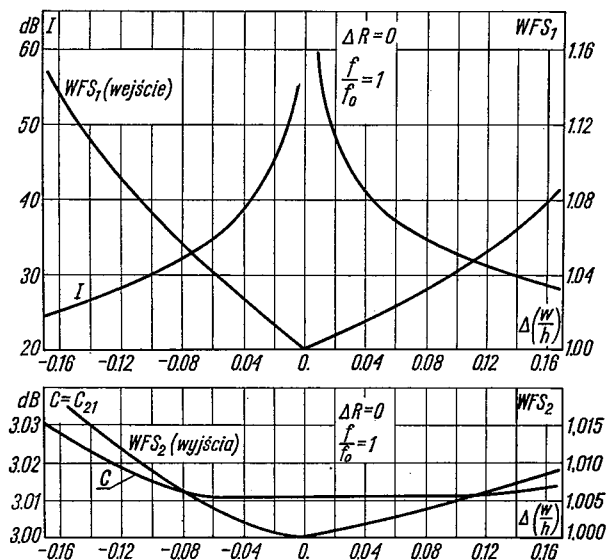
$$X = X_n + \Delta X, \quad (28)$$

gdzie X_n — wielkość nominalna, odpowiadająca nominalnej wartości impedancji Z_n .

Występujące w (27) odchyłki ΔZ można zatem obliczyć jako różnicę:

$$\Delta Z = Z(X_n + \Delta X) - Z(X_n). \quad (29)$$

W oparciu o podaną procedurę przeprowadzono obliczenia dla dzielnika o impedancjach charakterystycznych $Z_{0n} = 50 \Omega$ i $Z_{1n} = 70,7 \Omega$, wykonanego na podłożu z ceramiki alundowej o $\epsilon_r = 9,5$. Wyniki obliczeń przedstawione są na rysunku 10.



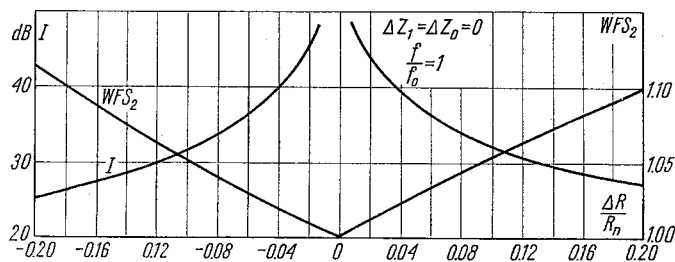
Rys. 10. Izolacja i WFS oraz sprzężenie dzielnika w funkcji odchyłek wymiarów poprzecznych

Wpływ niedokładności realizacji rezystora R uwzględniono w oddzielnych obliczeniach i przedstawiono na rys. 11.

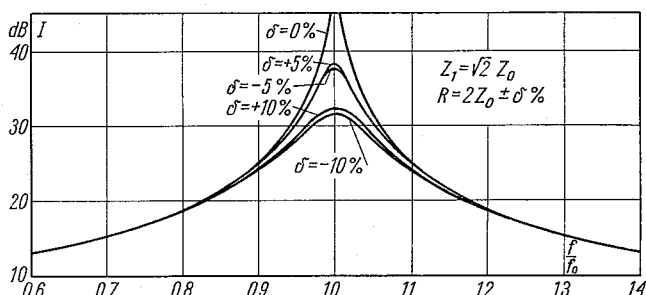
Wykorzystując macierz rozproszenia dzielnika, zbadano również wpływ tolerancji rezystora R na charakterystyki częstotliwościowe parametrów roboczych. Wyniki obliczeń przedstawiają rysunki 12 i 13.

Dotychczasowe rozważania dotyczyły głównie tolerancji wymiarów poprzecznych. Jeżeli chodzi o tolerancje wykonania wymiarów podłużnych odcinków sprzęgających o długości l , to zgodnie z (5) wpływają one przede wszystkim na częstotliwość środkową dzielnika. Zagadnienie tolerancji długości odcinków sprzęgających nabiera szczególnego

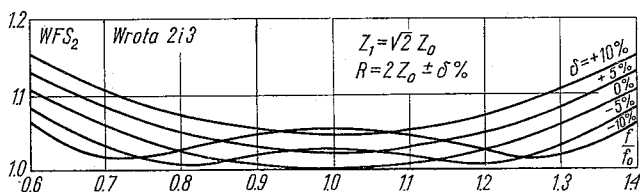
znaczenia przy projektowaniu dzielników na wyższe częstotliwości (pasmo X), przy których wymiary poprzeczne przewodnic i rozgałęzień zaczynają być porównywalne z długością fali.



Rys. 11. Izolacja i WFS dzielnika w funkcji względnych odchyłek rezystancji $\left(\frac{\Delta R}{R_n}\right)$



Rys. 12. Izolacja wyjść dzielnika w funkcji częstotliwości dla różnych procentowych odchyłek rezystancji $\left(\delta = \frac{\Delta R}{R_n} 100\%\right)$



Rys. 13. WFS wyjść dzielnika w funkcji częstotliwości dla różnych procentowych odchyłek rezystancji $\left(\delta = \frac{\Delta R}{R_n} 100\%\right)$

Wpływ wspomnianych tolerancji na przesunięcie częstotliwości środkowej dzielnika można określić wzorem:

$$\frac{f_o}{f_{no}} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta l}{l_{no}}}, \quad (30)$$

gdzie:

$l_{no} = \Theta_o \frac{\lambda_o}{2\pi}$ — nominalna długość odcinka sprzęgającego,

f_{no} — nominalna częstotliwość odpowiadająca l_{no} .

Częstotliwość środkowa dzielnika zależy również od rozrzutu przenikalności dielektrycznej podłoża ϵ_r , co dla przypadku NLP można ująć wzorem:

$$\frac{f}{f_{no}} = \frac{1}{\sqrt{1 + q \frac{\Delta \epsilon_r}{\epsilon_{efn}}}}, \quad (31)$$

gdzie:

q — efektywny współczynnik wypełnienia,

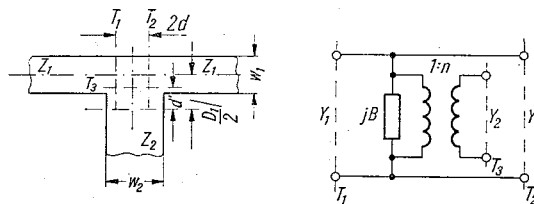
ϵ_{efn} — nominalna efektywna stała dielektryczna.

Z przeprowadzonych tu rozważań można wysnuć wiele praktycznych wniosków dotyczących realizacji dzielnika, jak np. wymagań na przedział tolerancji szerokości pasków Δw przy określonej tolerancji grubości podłoża Δh , wymagań na dokładność realizacji rezystora. Dla przykładu można tu podać, że w celu zapewnienia dobrych parametrów dzielnika ($WFS \leq 1,02$; $I \geq 40$ dB) wykonanego na podłożu alundowym o grubości nominalnej $h_n = 490 \mu\text{m}$ — szerokości pasków powinny być realizowane z odchyłkami nie przekraczającymi przedziału $15 \mu\text{m} \leq \Delta w \leq 22 \mu\text{m}$, przy tolerancji grubości podłoża $\Delta h = \pm 5 \mu\text{m}$. W rzeczywistości określone wyżej tolerancje powinny być ostrzejsze, ponieważ na ogół wartość rezystancji R odbiega od nominalnej ($\Delta R \neq 0$).

Zgodnie z rys. 11 w celu zapewnienia dobrych parametrów roboczych dzielnika rezystor powinien być realizowany z tolerancjami mniejszymi od $\pm 5\%$.

4.3. Uwzględnienie wpływu rozgałęzień T w projektowaniu dzielnika

W przeprowadzonej wyżej analizie własności dzielnika mocy, przyjmowano idealizację polegającą na pominięciu wpływu nieciągłości spowodowanej istnieniem rozgałęzień T . W rzeczywistości rozgałęzienie takie wprowadza nieciągłość, którą można uwzględnić w projektowaniu dzięki wprowadzeniu schematu zastępczego rozgałęzienia z elementami

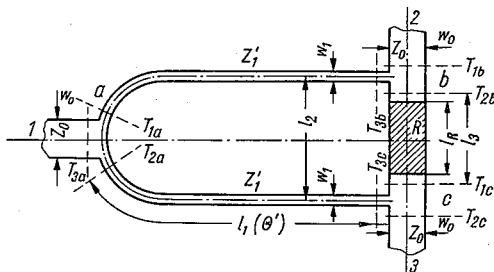


Rys. 14. Rozgałęzienie T i jego schemat zastępczy o stałych skupionych

o stałych skupionych. Rozgałęzienie T w niesymetrycznej linii paskowej wraz z jego schematem zastępczym z elementami o stałych skupionych można przedstawić w postaci podanej na rys. 14.

Aby w pełni scharakteryzować takie rozgałęzienie należy określić parametry jego schematu zastępczego. Dokładne określenie tych parametrów w przypadku NLP jest zagadnieniem bardzo złożonym i trudnym z matematycznego punktu widzenia. Parametry te można jednak wyznaczyć w sposób przybliżony, opierając się na analogii między rozgałęzieniem T

w płaszczyźnie E falowodu prostokątnego, którego schemat zastępczy określił Marcuvitz [10], a rozgałęzieniem T w NLP. Powyższa procedura określenia parametrów rozgałęzienia T w NLP została przeprowadzona w pracy [11]. Znajomość schematu zastępczego rozgałęzienia T jest bardzo użyteczna w projektowaniu dzielnika mocy, ponieważ pozwala wy-

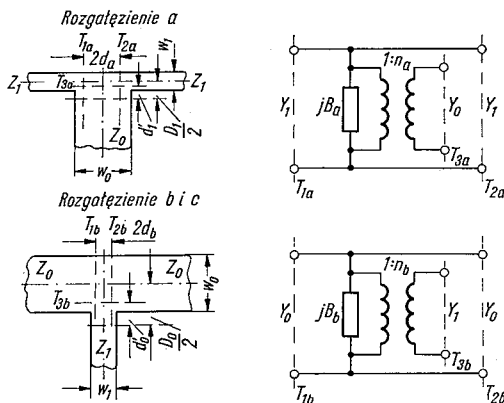


Rys. 15. Struktura dzielnika mocy wykonanego w oparciu o NLP

znaczyć przekroje, względem których należy określać długość poszczególnych ćwierćfalowych odcinków sprzęgających.

Ponadto istnienie susceptencji bocznikującej B oraz transformatora o przekładni n powoduje, że idealizowane wielkości projektowe (5), tj. impedancja charakterystyczna Z_1 odcinków sprzęgających oraz ich długość elektryczna Θ muszą być odpowiednio skorygowane.

W przypadku dzielnika o konfiguracji przedstawionej na rys. 15 występują dwa różne rozgałęzienia T . Rozgałęzienia te wraz z odpowiadającymi im schematami zastępczymi przedstawia rys. 16.



Rys. 16. Rozgałęzienia T występujące w dzielniku

Zaznaczona na rys. 15 długość l_3 jest całkowitą długością rezystora R , z założenia skupionego, w związku z czym musi ona spełniać warunek: $l_3 \ll \lambda_g$.

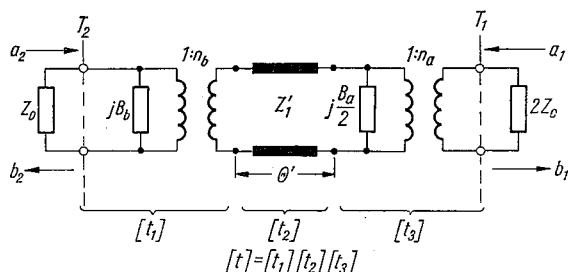
W celu znalezienia skorygowanych wielkości impedancji charakterystycznej Z_1' odcinków sprzęgających i ich długości Θ' rozważa się przypadek pobudzenia synfazowego we wrotach wyjściowych. Podobnie jak w przypadku dzielnika idealnego otrzymano równo-

ważny dwuwrotnik (rys. 17) odpowiadający dzielnikowi rzeczywistemu. Porównując odpowiadające sobie wyrazy falowej macierzy transmitancji $[t]$ dwuwrotnika idealnego (2) oraz dwuwrotnika rzeczywistego (rys. 17) otrzymuje się wyrażenia określające Z'_1 i Θ' :

$$Z'_1 = \frac{\sqrt{2} n_b Z_0}{n_a \sin \Theta'},$$

$$\Theta' = \arccos \frac{\sqrt{2} n_b \cdot Z_0 (B_a - n_a^2 B_b)}{n_a (2 - n_a^2 n_b^2)},$$
(32)

przy czym indeksy a i b przy poszczególnych wielkościach oznaczają odpowiednio parametry schematu zastępczego rozgałęzień a i b z rys. 16.



Rys. 17. Schemat zastępczy dwuwrotnika uwzględniającego rozgałęzienia T

Należy zaznaczyć, że obliczenie uwzględniające wpływ rozgałęzień T w projektowaniu dzielnika trzeba przeprowadzić kilkakrotnie metodą kolejnych przybliżeń, ponieważ parametry schematu zastępczego rozgałęzień T są funkcjami impedancji charakterystycznych. Dopiero po ostatecznym określeniu Z'_1 można określić przekroje odniesienia, względem których wyznacza się długości Θ' odcinków sprzęgających.

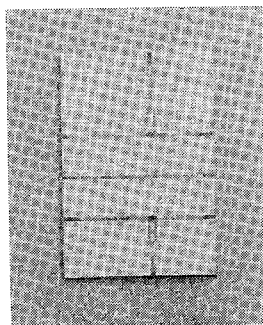
4.4. Praktyczna realizacja dzielnika z NLP

W oparciu o podane wyżej metody projektowe zrealizowano symetryczny dzielnik mocy mikrofalowej z jednym skupionym elementem stratnym przeznaczony do pracy w paśmie X . Model dzielnika wykonano na podłożu z ceramiki alundowej Al_2O_3 o wymiarach 20×30 mm. Warstwy przewodzące tworzące NLP o żądanej konfiguracji zrealizowano na drodze próżniowego naparowania warstwy miedzi o grubości około $1 \mu m$ przez maski mechaniczne z ciekim podkładem chromowym ($\sim 200 \text{ \AA}$) niezbędnym ze względu na dobrą adhezję z podłożem.

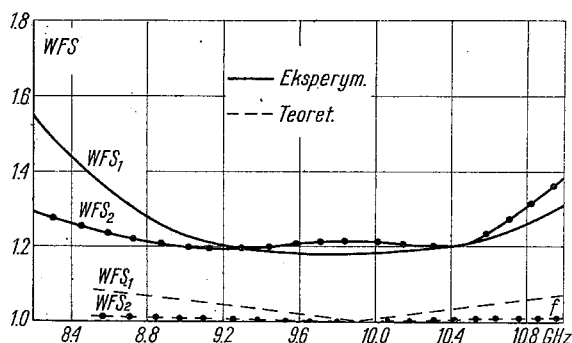
Skupiony element stratny zrealizowano jako cienkowarstwowy nichromowy rezystor, również techniką selektywnego naparowania. Ponieważ naparowane warstwy miedziane były bardzo cienkie, pogrubiono je galwanicznie do około $10 \mu m$ w celu zmniejszenia strat w przewodnikach.

Widok zrealizowanego dzielnika przedstawiono na rys. 18. W dzielniku tym impedancje charakterystyczne Z_0 linii doprowadzających równe są 50Ω , a odpowiadające nominalne wartości: oporności rezystora $R = 100 \Omega$ i impedancji charakterystycznej gałęzi sprzęga-

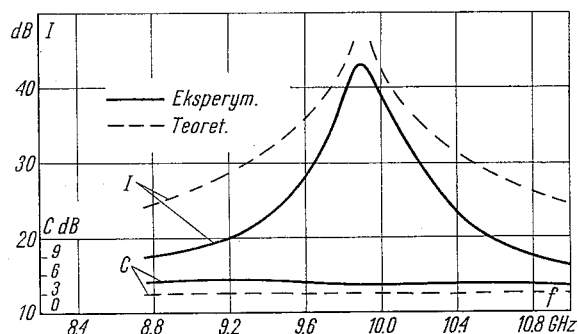
jących $Z_1 = 70,71 \Omega$. Ze względu na uściślenie pomiarów na płytce podłożonej wykonano dwa identyczne dzielniki odpowiednio usytuowane względem krawędzi płytki. Wyniki przeprowadzonych pomiarów przedstawiono na rys. 19 i 20, na których dla porównania naniesiono krzywe teoretyczne. Jak widać z przedstawionych wykresów wyniki badań od-



Rys. 18. Fotografia zrealizowanych dzielników mocy



Rys. 19. Współczynniki fali stojącej na wejściu i wyjściach zrealizowanych dzielników



Rys. 20. Przebiegi izolacji i sprzężenia zrealizowanych dzielników

biegają w sposób ilościowy od obliczonych na drodze teoretycznej. Jest to spowodowane głównie niedokładnościami realizacji (uzyskane paski były szersze: w_0 o 1,4%, a w_1 o 18,4%), niewystarczającą gładkością płytek podłożonych oraz niezbyt dobrymi obciążeniami jakimi dysponowano w trakcie pomiarów.

5. PODSUMOWANIE

Przeprowadzona w pracy analiza symetrycznych dzielników mocy mikrofalowej pozwala w pełni określić ich własności elektryczne oraz tolerancję realizacji. Wyznaczone zależności pozwalają na wyciągnięcie wniosków praktycznych dotyczących realizacji, jak również i metod pomiarowych stosowanych przy badaniu zrealizowanych modeli. Dzięki wprowadzeniu schematu zastępczego rozgałęzienia T w niesymetrycznej linii paskowej można omawiane wyżej dzielniki projektować z dużą dokładnością, stosując kompensację nieciągłości wywołanej tym rozgałęzieniem.

Przeprowadzone badania dzielników potwierdziły rozważania teoretyczne, istnieje zatem możliwość zastosowania tego typu dzielników w mikrofalowych układach scalonych pracujących w paśmie X . W celu uzyskania dobrych parametrów roboczych dzielników niezbędne jest jednak wykonanie ich z ostrymi tolerancjami, co przy zastosowaniu nowoczesnych i precyzyjnych urządzeń technologicznych nie powinno stwarzać większych trudności. Szczególną uwagę należy zwrócić na dokładną realizację rezystorów, które w tym paśmie częstotliwości mają bardzo małe wymiary geometryczne — wymaga to stosowania płytek podłożowych o dużej gładkości powierzchni. Aby zapewnić dużą dokładność wykonania należy w trakcie realizacji stosować raczej maski kontaktowe niż mechaniczne.

Na zakończenie trzeba zaznaczyć, że uzyskanie dobrych parametrów elektrycznych omawianych dzielników jest możliwe tylko przy współpracy z dopasowanymi zakończeniami poszczególnych wrót, ze względu na interferencyjną zasadę pracy układu.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. S. B. Cohn, A Class of Broadband Three-Port TEM-Mode Hybrids, IEEE Trans. on MTT, vol. MTT-16, no. 2, February 1968, pp. 110—116.
2. L. I. Parad, R. L. Moynihan, Split-Tee Power Divider, IEEE Trans. on MTT, vol. MTT-13, no. 1, January 1965, pp. 91—95.
3. A. L. Fieldstiejn, L. R. Jawicz, Sintez czetyriochpoljuskow i wosmipoljuskow na SWCz, Izdatielstwo „Swjaż”, Moskwa 1971.
4. J. Reed, G. E. Wheeler, A Method of Analysis of Symmetrical Four-Port Networks, IRE Trans. on MTT, vol. MTT-4, October 1956, pp. 246—252.
5. M. V. Schneider, Microstrip Lines for Microwave Integrated Circuits, The Bell System Technical Journal, vol. BSTJ-48, no. 5, 1969, pp. 1421—1444.
6. H. A. Wheeler, Transmission-Line Properties of Parallel Strips Separated by a Dielectric Sheet, IEEE Trans. on MTT, vol. MTT-13, March 1965, pp. 172—185.
7. H. Sobol, Extending IC Technology to Microwave Equipment, Electronics, vol. 40, March 1967, pp. 112—124.
8. W. J. Chudobiak, O. P. Jain, V. Makios, The Dispersive Behaviour of Microstrip Transmission Lines, Proc. 1971 European Microwave Conference, Stockholm, August 1971, pp. C-3/s:1-C3/5:4.
9. M. V. Schneider, Dielectric Loss in Microstrip Lines, The Bell System Technical Journal, vol. BSTJ-48, no. 8, September 1969, pp. 2325—2332.
10. N. Marcuvitz, Waveguide Handbook, Dover Publications, Inc., New York 1965.
11. R. Vogel, Schemat zastępczy rozgałęzienia T w niesymetrycznej linii paskowej, Mikrofalowa Elektronika Ciała Stałego, Mat. II Krajowej Konferencji MECS, Zakopane, wrzesień 1971, cz. I, str. 103—109.

Z. SAWICKI, R. VOGEL

THREE-PORT SYMMETRICAL HYBRID FOR APPLICATIONS IN MICROWAVE INTEGRATED CIRCUITS

Summary

The paper briefly discusses some aspects of the theory of three-port hybrid. The circuit of this type is useful both as a power divider and power combiner. The analysis is performed with the use of the even and odd excitation method, modified for the case of symmetrical three-ports.

On the basis of this method the derivation of the formulas from which the unit may be designed and its performance predicted are given. The properties of microstrip three-port hybrid is described more thoroughly. In particular the characteristic impedance and resistor dependence on inaccuracy of realisation of such hybrid is discussed. The design method of a microstrip three-port divider with discontinuity effects of the tee junction taken into account is also described.

Z. SAWICKI, R. VOGEL

HYBRID SYMÉTRIQUE HEXAPÔLE POUR CIRCUITS INTÉGRÉS À MICROONDES

Résumé

Cet article présente un étude théorique du diviseur symétrique hexapôle de la puissance (avec une résistance à constantes localisées). On a calculé une matrice de diffraction S du hexapôle en utilisant la méthode de réflexions images. Une discussion de cette matrice permet de déterminer les conditions d'adaptation dans tous les bras du hexapôle et celles d'isolation infinie entre les bras unis par la résistance. Le cas du diviseur hexapôle, réalisé à ligne asymétrique de transmission à bande, est examiné plus en détail. On a étudié aussi l'influence des tolérances de la réalisation des éléments particuliers du diviseur sur leur paramètres. On a également proposé une méthode d'exécution du diviseur compte tenu de la discontinuité causée par la ramification du type T .

Z. SAWICKI, R. VOGEL

SECHSPOL-LEISTUNGSTEILER FÜR DIE ANWENDUNG IN INTEGRIERTEN SCHALTUNGEN IM MIKROWELLENBEREICH

Zusammenfassung

In der Arbeit wird ein Abriss der Theorie des symmetrischen Sechspol-Leistungsteilers mit konzentriertem Widerstandselement beschrieben. Zur Bestimmung der Eigenschaften der betrachteten Schaltung wurde die auf den Sechspolfall modifizierte Methode der gleich- und gegenphasigen Erregung angewandt. In Anlehnung an diese Methode wurde die Streumatrix bestimmt, deren Kenntnis zur Ermittlung der Anpassungsbedingungen für alle Tore des Sechspols und für eine unendlich große Isolation zwischen den Toren dient, die durch einen konzentrierten Widerstand verbunden werden. Es wurde auch die Frequenzabhängigkeit der Arbeitsparameter des Sechspols bestimmt. Ausführlich wurde der Fall des mit unsymmetrischen Streifenleitungen realisierten Sechspol-Leistungsteilers untersucht, besonders interessant wegen der Anwendung in integrierten Schaltungen im Mikrowellenbereich. Insbesondere wurde der Einfluß der Fertigungstoleranzen einzelner Elemente des Leistungsteilers auf seine Arbeitsparameter untersucht. Es wurde auch eine Methode zum Entwerfen eines Teilers unter Berücksichtigung der durch T -Verzweigungen hervorgerufenen Unstetigkeiten vorgeschlagen.

З. САВИЦКИ, Р. ВОГЕЛЬ

СИММЕТРИЧНЫЕ ДЕЛИТЕЛИ МОЩНОСТИ ДЛЯ ПРИМЕНЕНИЙ
В ИНТЕГРАЛЬНЫХ СХЕМАХ СВЧ

Р е з ю м е

В труде изложены элементы теории симметричных шестиполосников, употребляемых как делители мощности. Введение метода зеркальных изображений позволило определить матрицу рассеяния такой схемы. На основании элементов матриц рассеяния определены условия, которые должны быть выполнены, чтобы использованная схема характеризовалась идеальным согласованием всех плеч и идеальной развязкой между двумя плечами. Более подробно рассмотрены делители с микрополосковыми линиями, а именно: рассчитано влияние неточного исполнения элементов делителя на его рабочие параметры, а также представлен метод проектирования делителя с учетом эквивалентной схемы Т-образного разветвления.

Próba oceny predykcji obciążeń czynnych okręgu energetycznego

ZBIGNIEW KIERZKOWSKI (POZNAŃ)

Ośrodek Elektronicznej Techniki Obliczeniowej Politechniki Poznańskiej

EDWARD WEKSEJ (BIELSKO-BIAŁA)

Ośrodek Wdrażania Postępu Technicznego w Energetyce

Otrzymano 10.3.1972

Przeanalizowano trafność predykcji obciążeń (operatywne prognozowanie grafików obciążeń dobowych) w oparciu o aproksymację ich przebiegu stacjonarnym procesem stochastycznym oraz ekstrapolację liniową. Opracowano algorytm obliczeń na maszynach cyfrowych. Na dokładność predykcji mają wpływ: h — wielkość przedziału danych dla wyznaczenia własności statystycznych zmian obciążeń oraz n — wielkość przedziału, na podstawie którego ekstrapoluje się te własności przy wyznaczaniu predykcji. Optymalne wartości tych wielkości dla okręgu energetycznego przy predykcji obciążenia w dniach roboczych wynoszą $h = 25 \div 30$ oraz $n = 3$. Algorytm można również zastosować do predykcji obciążeń czynnych w dniach nieroboczych. Optymalne wartości h wynoszą $10 \div 15$.

1. WPROWADZENIE

Jednym z ważnych zadań w planowaniu operatywnym pracy układu energetycznego jest krótkoterminowe prognozowanie obciążeń [5]. Jak dotąd, np. w okręgu energetycznym, polega ono na przybliżonym wykreślaniu grafików obciążenia przez służby dyspozytorskie. Podjęliśmy próby oceny zastosowania do określania grafików obciążeń dobowych metod predykcji opartych o ekstrapolację liniową.

Zmiany obciążenia dają się aproksymować procesami stochastycznymi stacjonarnymi [1] lub niestacjonarnymi [2, 3]. Ograniczyliśmy się do oceny możliwości wykorzystania aproksymacji procesem stacjonarnym. Rozważyliśmy obciążenia czynne, eksperymentując obliczeniowo na zmianach obciążenia okręgu energetycznego oraz na zmianach obciążeń odbiorów o mniejszej mocy zasilanych promieniowo z układu energetycznego okręgu.

2. METODA

Jeżeli przyjąć, że zmiany obciążeń czynnych (Dodatek, rys. D1) można opisać za pomocą procesu stochastycznego stacjonarnego, wtedy predykcja obciążeń, tj. prognoza dobowych grafików, daje się łatwo zalgorytmizować do obliczeń na maszynach cyfrowych. Opracowano w tym celu programy [4], których schemat blokowy podano w Dodatku (rys. D2).

Opierając się na tym algorytmie można określić prognozę obciążeń dobowych. Niezbędne do tego celu jest posiadanie przebiegów zmian obciążenia w h dobach poprzedzających, określone w i -tych dyskretnych chwilach — x_i , np. co godzinę ($i = 1, 2, 3, \dots, 24$). W poszczególnych godzinach odchyłki obciążenia y_i od wartości średniej $\bar{x}_i$ traktujemy jako proces stochastyczny stacjonarny, opisany przez wartość oczekiwaną $\bar{y}_i = 0$ oraz funkcję korelacji $R_i(\tau)$. Zastosowanie ekstrapolacji liniowej prowadzi do wyznaczenia wartości prognozowanego przebiegu zmian obciążenia w dyskretnych momentach czasowych z zależności

$$z_{im} = \bar{x}_i + \sum_{k=1}^n a_{ik} y_{i,h+1-k}, \quad (1)$$

gdzie:

z_{im} — obciążenie prognozowane w i -tej godzinie m -tego dnia ($i = 1, 2, \dots, 24$;
 $m = 1, 2, \dots, w$),

$\bar{x}_i = \frac{\sum_{j=1}^h x_{ij}}{h}$ — średnia wartość obciążenia w i -tej godzinie,

h — liczba grafików obciążenia użytych do określenia funkcji korelacji odchyłek obciążenia od wartości średnich,

n — liczba dni poprzedzających okres prognozowania, przyjętych do wyznaczenia prognozy,

a_{ik} — współczynniki obliczone według D7 (Dodatek),

y_{ik} — odchyłki od wartości średnich.

Ocenę trafności prognozy oparto na wyznaczeniu błędów: względnego $\Delta w\%$ oraz średniego kwadratowego $\delta_{sr}\%$.

3. BADANIA NAD USTALENIEM OKRESU OPTIMALNEGO DLA WYZNACZANIA WŁAŚCIWOŚCI STATYSTYCZNYCH (h) ORAZ OKRESU DO WYZNACZANIA PROGNOZY (n)

Błędy prognozy grafiku obciążeń są zależne od wartości h . Wynika to stąd, że zależą one od prehistorii (okresu statystycznego), która jest podstawą wyznaczenia właściwości statystycznych procesu zmian obciążeń, tj. funkcji korelacji $R_i(\tau)$ ($i = 1, 2, \dots, 24$; $\tau = 1, 2, \dots, h-2$). Zbyt długi lub zbyt krótki okres statystyczny jest niekorzystny.

Trafność prognozy opierającej się na liniowej ekstrapolacji odchyłek w dniach poprzedzających okres prognozowany zależy także od liczby n dni (rys. D1), które decydują o wartości współczynników ekstrapolacji liniowej.

Do badań wzięto pod uwagę grafiki obciążeń okręgu energetycznego. Dane dobrano w ten sposób, że określano prognozy obciążeń tych samych dni przy różnych wartościach h i n . Obliczenia wykonano na maszynach cyfrowych ODRA 1013 i Mińsk 22. Były one pracochłonne, co ograniczyło liczbę wariantów. Klasyfikację liczności błędów prognozy we wszystkich przeliczonych wariantach zestawiono w formie histogramów w tabl. 1 i tabl. 2.

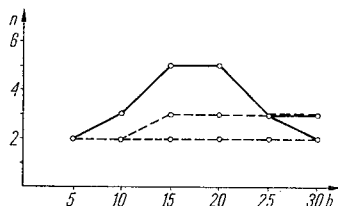
Tablica 1
Klasyfikacja liczebności średniego błędu kwadratowego predykcji (δ_{3T})

h	n	Ilość prognoz z odchyleniem w przedziałach					Liczba wariantów
		do 3%	3 ÷ 6%	6 ÷ 9%	9 ÷ 12%	ponad 12%	
30	2	12					12
	3	12					
	5	11	1				
	10	11	1				
	15	10	2				
	20	10	1	1			
25	2	35					35
	3	35					
	5	29	6				
	10	22	9	4			
20	2	35					35
	3	35					
	5	26	9				
	10	24	6	2	3		
15	2	35					35
	3	35					
	5	26	8	1			
	10	21	11	2	1		
10	2	30					30
	3	29		1			
	5	23	3	3	1		
	9	14	7	2	2	5	
5	2	14	1				15
	3	13	2				
	4	13	2				

Tablica 2
Klasyfikacja liczebności błędu względnego predykcji (Δw)

h	n	Ilość prognoz z odchyleniem w przedziałach					Liczba wariantów
		do 3%	3 ÷ 6%	6 ÷ 9%	9 ÷ 12%	ponad 12%	
30	2	8	4				12
	3	8	4				
	5	9	3				
	10	8	3	1			
	15	7	3	1	1		
	20	5	4	2	1		
25	2	14	12	9			35
	3	17	8	10			
	5	12	11	10	2		
	10	10	9	7	5	4	
20	2	13	12	10			35
	3	14	12	9			
	5	16	10	9			
	10	10	8	8	2	7	
15	2	14	11	10			35
	3	16	10	9			
	5	22	3	7	1	2	
	10	6	6	7	6	10	
10	2	16	5	5	3	1	30
	3	18	4	5	3		
	5	14	8	5	3		
	9	3	6	6	4	11	
5	2	9	6				15
	3	3	7	5			
	4	5	3	3	4		

Z analizy histogramów wynikają określone prawidłowości. Na rys. 1 zestawiono wartości h i n , przy których prognozy osiągały największe liczebności w przedziałach błędów Δw i δ_{sr} w granicach do 3%. Okazuje się, że najlepsze wyniki, oceniane względem Δw i δ_{sr} osiąga się przy dość dużych wartościach h , rzędu $15 \div 30$ (tabl. 1 i 2), a stosunkowo małych



Rys. 1. Zależności $n(h)$, dla których osiągnano największą liczebność w przedziałach błędów do 3%
(— dla δ_{sr} , — dla Δw)

wartościach n , rzędu 3 (rys. 1). Taki dobór h i n jest podyktowany także złożonością obliczeń. Czas bowiem wyznaczania prognoz zależy w dużej mierze od wartości n , wpływającej na rząd układu równań liniowych, z których wyznacza się współczynniki ekstrapolacji liniowej.

Otrzymane wyniki dotyczą badań na podstawie danych z określonego okręgu energetycznego. Można się spodziewać, że w przypadku terenów o innej specyfice mogą one być inne.

Omówiony w opracowaniu eksperyment obliczeniowy przeprowadzono na podstawie danych, którymi był zbiór obciążeń układu energetycznego w dniach roboczych. Progno-

Podzbiory danych	Dni tygodnia									
	piątek	sob.	niedz.	pon.	wt.	śr.	czw.	piąt.	sob.	niedz.
Dni robocze	1.00	1.00			1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	
		10.00							10.00	
	24.00			11.00	24.00	24.00	24.00	24.00		11.00
Dni św. 1			1.00							1.00
			24.00							24.00
Dni św. 2				1.00						1.00
				10.00						10.00
		11.00							11.00	
		24.00							24.00	

Rys. 2. Podział tygodniowych grafików obciążenia na podzbiory danych

zowanie ciągle wymaga operowania czterema niezależnymi zbiorami danych, stanowiącymi zestawienia obciążeń z następujących rodzajów dni: robocze, przedświąteczne, poświąteczne, świąteczne.

Obserwacja zmian grafików obciążenia w dniach przedświątecznych i poświątecznych nasunęła pomysł nieco innego podziału zbioru danych z dni nieroboczych. W ten sposób powstały następujące podzbiory danych — grafików obciążeń:

1^o — dni robocze — wtorek, środa, czwartek, piątek oraz sztuczny „dzień”, na który składają się okresy: godz. 1⁰⁰ do 10⁰⁰ dnia przedświątecznego oraz godz. 11⁰⁰ do 24⁰⁰ dnia poświątecznego;

2^o — dni świąteczne pierwszego rodzaju (św. 1) — niedziele i święta, tj. dni ustawowo wolne od pracy;

3^o — dni świąteczne drugiego rodzaju (św. 2) — „dni” utworzone sztucznie z pozostałych części dni przedświątecznych i poświątecznych, które obejmują: godz. 11⁰⁰ do 24⁰⁰ dnia przedświątecznego oraz godz. 1⁰⁰ do 10⁰⁰ dnia poświątecznego.

Graficzną ilustrację tej propozycji przedstawia rys. 2.

Prognozy w przypadku „dnia” roboczego złożonego z części dnia przedświątecznego w godz. 1⁰⁰ do 10⁰⁰ i poświątecznego w godz. 11⁰⁰ do 24⁰⁰, opierają się o dane z poprzednich dni roboczych. Stąd nawiązuje się do odległych dni świątecznych tylko dla 2, a nie 3 zbiorów. Prowadzi to do zwiększenia trafności prognoz. Wniosek taki potwierdziły badania obliczeniowe. Obliczenia odbywają się według jednego algorytmu. Przyjąć tu należy mniejsze wartości h z uwagi na istotność korelacji danych niezbyt od siebie odległych; h rzędu $10 \div 15$.

4. WNIOSKI

1. Zasadniczym celem badań obliczeniowych była próba oceny zastosowania w praktyce algorytmu krótkoterminowego prognozowania obciążeń systemu energetycznego w oparciu o aproksymację zmian obciążeń stacjonarnym procesem stochastycznym i ekstrapolację liniową oraz ustalenie zaleceń odnośnie dobierania okresu do opisu właściwości statystycznych — h i wielkości n jako podstawy ekstrapolacji. Przy optymalnych wartościach $h = 25 \div 30$ i $n = 3$ trafność prognozy jest zupełnie zadowalająca, przeważająca większość prognoz zawiera się w granicach błędów względnego i średniego kwadratowego do $\pm 3\%$. Badania pozwoliły nadto stwierdzić, że można zastosować ten algorytm do prognozy obciążeń także w dniach nieroboczych. Dokładność wyników poprawia się przy podziale danych z tych dni na dwa podzbiory.

2. Rozważany algorytm predykcji grafików obciążenia można zastosować do planowania obciążeń oddzielnych rejonów okręgów, a tym samym całego systemu energetycznego.

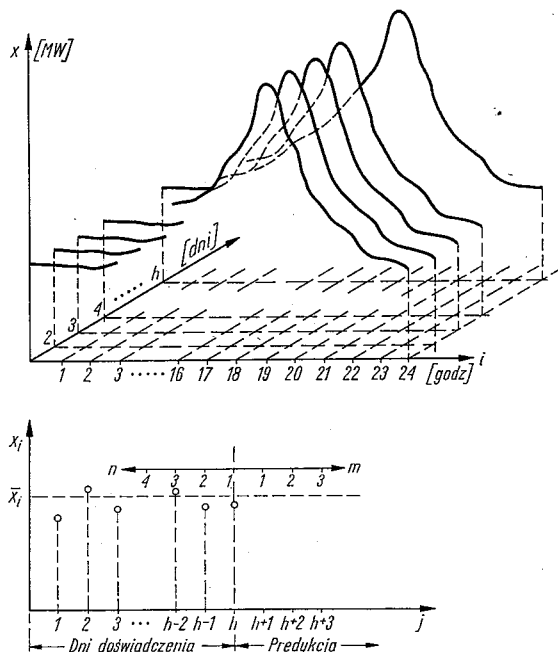
D o d a t e k

OPIS ALGORYTMU

Zmienność obciążenia systemu elektroenergetycznego w czasie jest procesem, na który wywierają wpływ czynniki przypadkowe i nieprzypadkowe (regularne). Aby można było traktować ten proces jako proces losowy, należy wyeliminować zmiany, jakie zostały spowodowane czynnikami nieprzypadkowymi. W dobowych wykresach zmienności obciążenia dowolnego systemu energetycznego jest to możliwe, gdy rozważyć obciążenia w określonej godzinie w następujących po sobie dniach. Jednakże tygodniowa zmienność obciążenia także wykazuje pewne cechy regularności, które trzeba uwzględnić przy zmienności dobowej. Można wyraźnie odróżnić 4 odmienne, z uwagi na przebieg zmian obciążenia, rodzaje dni w tygod-

niu. Są to mianowicie dni: robocze, świąteczne, przedświąteczne i poświąteczne. W zbiorach danych z tych dni występują korelacje. Niezbędne jest zatem zestawianie wykresów obciążenia w poszczególnych zbiorach dni.

Zmiany dobowe obciążenia systemu energetycznego można aproksymować procesem stochastycznym stacjonarnym lub niestacjonarnym. Ograniczamy się do aproksymacji zmian obciążeń procesem stochastycznym stacjonarnym [1]. Pozwala to skonstruować algorytm predykcji, który poniżej opiszemy.



Rys. D1. Zbiór h grafików obciążenia dobowego oraz ich przekrój dla i -tej godziny przez h dni

Zakładamy h krzywych reprezentujących dobowe zmiany obciążeń czynnych rozpatrywanego systemu energetycznego (rys. D.1) przedstawione w i ($i = 1, 2, \dots, 24$) dyskretnych momentach czasowych. Zbiór ten ma postać macierzy

$$\underline{X} = [x_{ij}] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1h} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{24,1} & x_{24,2} & \dots & x_{24,h} \end{bmatrix}, \quad (\text{D.1})$$

gdzie: $i = 1, 2, \dots, 24$ (godziny), $j = 1, 2, \dots, h$ (dni).

W każdej i -tej godzinie można wyznaczyć obciążenie średnie, mamy zatem

$$[\bar{x}_i] = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_{24} \end{bmatrix}, \quad (\text{D.2})$$

$$\text{gdzie: } \bar{x}_i = \frac{\sum_{j=1}^h x_{ij}}{h}.$$

Odchylenia od wartości średnich wynoszą

$$\underline{Y} = [y_{ij}] = \begin{bmatrix} x_{11} & -\bar{x}_1 & x_{12} & -\bar{x}_1 & \dots & x_{1h} & -\bar{x}_1 \\ x_{21} & -\bar{x}_2 & x_{22} & -\bar{x}_2 & \dots & x_{2h} & -\bar{x}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{24,1} & -\bar{x}_{24} & x_{24,2} & -\bar{x}_{24} & \dots & x_{24,h} & -\bar{x}_{24} \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

Zbiory złożone z tych odchyłeń można aproksymować stochastycznym procesem stacjonarnym. Tutaj $\bar{y}_i = 0$, a ponadto zakładamy, że $R_i(\tau) \rightarrow 0$, gdy $\tau \rightarrow \infty$. Jest to słuszne jedynie w przybliżeniu. Proces ten jest zatem scharakteryzowany tylko funkcją korelacji o właściwości $R(\tau) = R(-\tau)$. Ekstrapolacja liniowa właściwości statystycznych pozwala określić predykcję odchyłeń z zależności

$$y_{i,h+m} = \sum_{k=1}^n a_{ik} y_{i,h+1-k}, \quad (\text{D.4})$$

gdzie:

$y_{i,h+m}$ — prognozowane odchylenie obciążenia od średniej, które powinno wystąpić w i -tej godzinie m -tego dnia prognozy,

h — liczba dni pomiarów, z których dane przyjęto do wyznaczenia właściwości statystycznych ciągu losowego zmian obciążenia,

n — liczba dni bezpośrednio poprzedzających okres prognozowany, z których dane wykorzystano do ekstrapolacji liniowej ($n \leq h-1$).

Szuka się takich wartości współczynników a_{ik} , przy których średni błąd kwadratowy

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^2 = E \left[y_{i,h+m} - \sum_{k=1}^n a_{ik} y_{i,h+1-k} \right]^2 &= E \left[y_{i,h+m}^2 - 2 y_{i,h+m} \sum_{k=1}^n a_{ik} y_{i,h+1-k} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{il} a_{ik} y_{i,h+1-l} y_{i,h+1-k} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

będzie przyjmować wartości minimalne.

Ponieważ jednak

$$E[y_{i,h+m} y_{i,h+1-k}] = R_i(m+k-1)$$

oraz

$$E[y_{i,h+1-l} y_{i,h+1-k}] = R_i(k-l), \quad (\text{D.6})$$

gdzie R_i jest funkcją korelacji (ciągłym korelacyjnym), przeto

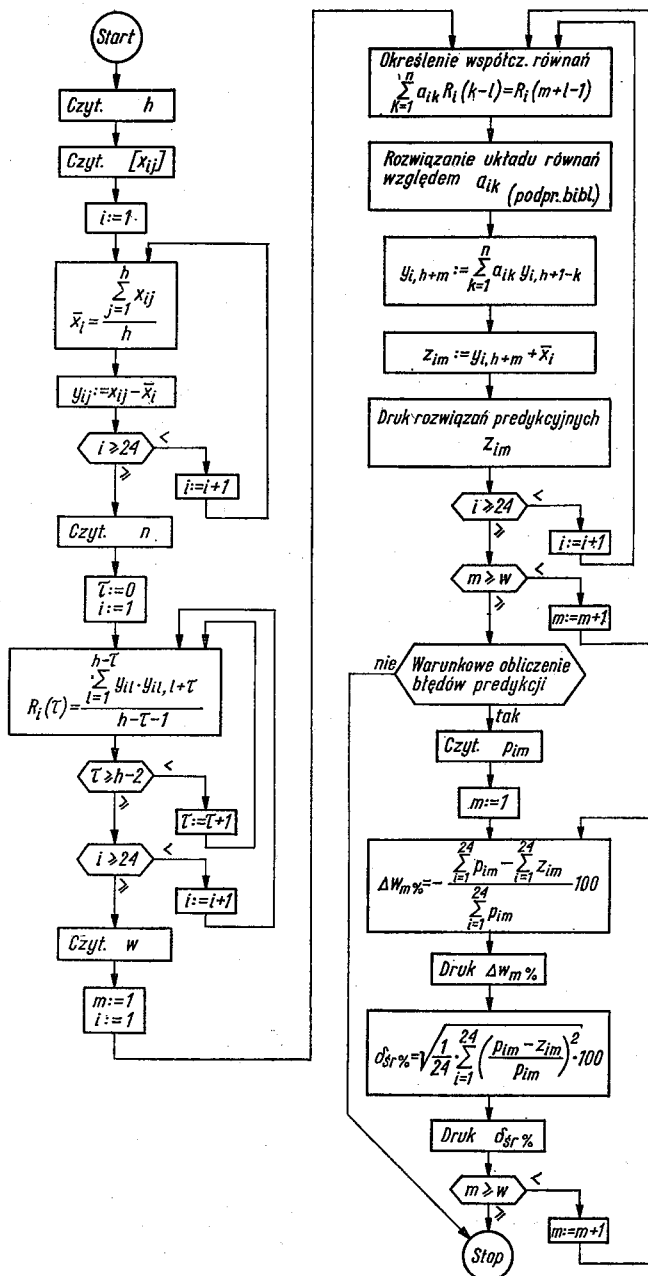
$$\varepsilon_i^2 = R_i(0) - 2 \sum_{l=1}^n a_{il} R_i(m+l-1) + \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{il} a_{ik} R_i(k-l).$$

Warunkiem koniecznym występowania minimum wartości powyższego wyrażenia są zerowe wartości pierwszych pochodnych

$$\frac{\partial \varepsilon_i^2}{\partial a_{il}} = -2 R_i(m+l-1) + \sum_{k=1}^n a_{ik} R_i(k-l) = 0,$$

co prowadzi do równań

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{ik} R_i(k-l) &= R_i(m+l-1) \\ (l = 1, 2, \dots, n; \quad i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$



Rys. D2. Algorytm predykcji zmian dobowych obciążeń czynnych w układzie elektroenergetycznym

Rozwiązanie układów równań (D.7) w celu wyznaczenia współczynników a_{ik} możliwe będzie po uprzednim wyliczeniu funkcji korelacji, które znaleźć można na podstawie macierzy odchyłeń (D.3) z zależności

$$R_l(\tau) = \frac{\sum_{l=1}^{h-\tau} y_{ll} \cdot y_{l+\tau}}{h-\tau-1} \quad (D.8)$$

$$(l = 1, 2, \dots, h; \quad \tau = 0, 1, 2, \dots, h-2),$$

przyjmując nadto, że

$$R_l(\tau) = 0 \text{ dla } \tau \geq h.$$

Otrzymujemy zatem macierz wartości funkcji korelacji

$$R_l(\tau) = \begin{bmatrix} R_1(0) & R_1(1) & R_1(2) & \dots & R_1(h-2) \\ R_2(0) & R_2(1) & R_2(2) & \dots & R_2(h-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{24}(0) & R_{24}(1) & R_{24}(2) & \dots & R_{24}(h-2) \end{bmatrix}, \quad (D.9)$$

z której, po przegrupowaniu, można wyznaczyć potrzebne wartości współczynników do układu równań (D.7).

Utworzone w ten sposób układy równań liniowych można rozwiązać przy pomocy dowolnie obranej metody, np. metody eliminacji zmiennych (Gaussa). Otrzymamy wówczas współczynniki a_{ik} kombinacji liniowej (D.4), a po ich podstawieniu do tego wyrażenia — poszukiwane odchylenia $y_{i, h+m}$ obciążenia od wartości średniej w dniach prognozy.

Obecnie łatwo już wyznaczyć rozwiązania predykcyjne dodając te odchylenia do wyznaczonych uprzednio wartości obciążenia w poszczególnych, i -tych godzinach. Powstaje w ten sposób macierz rozwiązań predykcyjnych

$$\underline{Z} = [z_{im}], \quad (D.10)$$

której wyrazy obliczamy z zależności

$$z_{im} = y_{im} + \bar{x}_i. \quad (D.11)$$

Do oceny trafności prognozy wykorzystane zostaną odczyty obciążenia dokonane w dniach, dla których wyznaczono prognozy. Dane z odczytów można również przedstawić w postaci macierzy

$$\underline{P} = [p_{i,m}] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{24,1} & p_{24,2} & p_{24,3} & \dots & p_{24,m} \end{bmatrix}. \quad (D.12)$$

Trafność prognozy można ocenić obliczając

a) procentowy błąd względny

$$\Delta w_{m\%} = \frac{\sum_{i=1}^{24} p_{im} - \sum_{i=1}^{24} z_{im}}{\sum_{i=1}^{24} p_{im}} \cdot 100, \quad (D.13)$$

b) średni błąd kwadratowy

$$\delta_{sr, m\%} = \sqrt{\frac{1}{24} \sum_{i=1}^{24} \left(\frac{p_{im} - z_{im}}{p_{im}} \right)^2} \cdot 100. \quad (D.14)$$

Schemat blokowy algorytmu predykcji zmian dobowych obciążeń czynnych systemu energetycznego przedstawiono na rys. D2. Obliczenia wykonywano na maszynach cyfrowych Odra 1013 oraz Mińsk 22 [4].

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. S. Konowałow, I. B. Kugielewiczus, Prognozirowanie sutocznych grafikow aktywnej moszczności nagruzok energosistem s primieniem CWM, Elektrieskije Stancii, maj 1966.
2. E. D. Farmier, Miedod predskazaniya niestacionarnych processow i jego primienienie k zadaczce ocenki nagruzok, Trudy II. Miež. Kongressa IFAK, Izdat. Nauka, Moskwa 1965.
3. A. G. Iwachnienko, W. S. Łapa, Algorytmy i urządzenia realizujące predykcję, WNT, Warszawa 1967 (tłum. z jęz. rosyjskiego).
4. Z. Kierzkowski, Programy operatywnego prognozowania obciążeń w układzie elektroenergetycznym na maszyny cyfrowe Odra 1013 i Mińsk 22, opracowanie wewnętrzne Politechniki Poznańskiej, 1969—70.
5. Praca zbiorowa, Analiza i prognoza obciążeń elektroenergetycznych, WNT, Warszawa 1971.

Z. KIERZKOWSKI, E. WEKSEJ

AN ATTEMPT TO EVALUATE A PREDICTION OF ACTIVE LOADS OF A POWER SYSTEM DISTRICT

Summary

The correctness of a prediction of loads (operative forecasting of the graphics of twenty-four hours loads) has been analyzed on the basis of the approximation of their course, by means of the stationary stochastic process and linear extrapolation [1]. The changes of loads in i ($i = 1, 2, \dots, 24$) discrete time moments for j ($j = 1, 2, \dots, h$) days, have been considered. Deviations y_i from the mean value constitute a sequence, with $\bar{y}_i = 0$. Besides, one may assume that $R_i(\tau) \rightarrow 0$, when $\tau \rightarrow \infty$, with $R_i(\tau)$ — correlation function. The linear extrapolation of the statistic properties from the last $n \leq h$ (Fig. D.1) days, allows to determine the prediction of the deviations (D.4) and loads (1), on the basis of the algorithm from Fig. D.3.

The h and n values influence the accuracy of the prediction. The first quantity describes the range of data for the determination of statistic properties of load changes. The second one determines the range, on the basis of which one should extrapolate these quantities, when determining predictions. The correctness of the load predictions for the chosen power system district or radially supplied receptions of smaller power, on the working days is satisfactory, i.e. the majority (tab. 1 and 2) of relative errors and square means does not exceed $\pm 3\%$, the values being $h = 25 \div 30$ and $n = 3$. The above procedure may also be applied to load predictions on non-working days. One should assume smaller values for h , equal to $10 \div 15$. The predictions become more precise when the data from these days are divided into two subsets (see Fig. 2).

Z. KIERZKOWSKI, E. WEKSEJ

ESSAI D'APRÉCIATION D'UNE PRÉDICTION DES CHARGES ACTIVES D'UNE RÉGION ÉNERGÉTIQUE

Résumé

On a analysé la justesse d'une prédiction des charges (prognose opérative des graphiques des charges dans les 24 heures) s'appuyant sur l'approximation de leur cours stationnaire d'un procès stochastique et sur l'extrapolation linéaire [1]. On a examiné des changements des charges dans i ($i = 1, 2, \dots, 24$) aux moments discrets du temps pour j ($j = 1, 2, \dots, h$) jours. Des déviations y_i des moyennes constituent une suite pour laquelle $\bar{y}_i = 0$ et on peut admettre que $R_i(\tau) \rightarrow 0$ quand $\tau \rightarrow \infty$ où $R_i(\tau)$ est la fonction de la corrélation. L'extrapolation linéaire des particularités statistiques de derniers $n \leq h$ jours (des. D.1) permet de déterminer la prédiction des déviations (D.4) et des charges (1) sur la base d'algorithme du dessin D.3.

Les valeurs h et n influencent la précision de la prédiction. La première grandeur détermine la séparation des données pour la désignation des particularités statistiques des changements des charges, et la seconde — la séparation qui doit servir de base pour extrapoler ces particularités en désignant la prédiction. La justesse de la prédiction des charges d'une région énergétique choisie ou des réceptions de moindre puissance alimentées radialement d'un système énergétique pour des jours ouvrables est satisfaisante, c'est-à-dire la plupart (tab. 1 et 2) des erreurs relatives et moyennes carrées ne dépassent pas $\pm 3\%$ pour les valeurs: $h = 25 \div 30$ et $n = 3$. On peut appliquer le procés ci-dessus à la prédiction des charges aussi pour des jours non ouvrables. Il faut accepter des valeurs moindres h d'ordre $10 \div 15$. La précision de prédiction augmente avec la division des données de ces jours-ci en deux sous-ensembles selon des. 2.

Z. KIERZKOWSKI, E. WEKSEJ

BEURTEILUNGSVERSUCH DER WIRKBELASTUNGSPREDIKTION EINES ENERGIEKREISES

Zusammenfassung

Die Richtigkeit der Wirkbelastungsprediktion (operative Prognose der graphischen Tagesbelastungsstellungen) wurde in Anlehnung an die Approximation ihres Verlaufes mittels eines stationär-stochastischen Prozesses und linearer Extrapolation analysiert [1]. Man überlegte Lastwechsel in i ($i = 1, 2, \dots, 24$) diskreten Zeitmomenten für j ($j = 1, 2, \dots, h$) Tage. Die y_i -Abweichungen von den Mittelwerten stellten eine Folge dar, wo $\bar{y}_i = 0$ und wo man annehmen kann, daß $R_i(\tau) \rightarrow 0$, wenn $\tau \rightarrow \infty$ und $R_i(\tau)$ Korrelationsfunktion ist. Lineare Extrapolation statistischer Eigenschaften aus den letzten Tagen $n \leq h$ (Bild D.1) läßt die Abweichungs- (D.4) und Belastungsprediktion (1) an Hand des Algorithmus gemäß Bild D.3 bestimmen.

Die h - und n -Werte beeinflussen die Prediktionsgenauigkeit. Der erste Wert bestimmt das Datenintervall, das zur Bestimmung der statistischen Eigenschaften des Lastwechsels dient, der zweite Wert das Intervall, auf Grund dessen diese Eigenschaften bei Bestimmung der Prediktion extrapoliert werden müssen. Die Richtigkeit der Belastungsprediktion des gewählten Energiekreises bzw. der Empfänge kleinerer Leistungen, die mittels eines Energieversorgungssystems radialbeaufschlagt werden, ist für die Arbeitstage befriedigend, d.h. die überwiegende Mehrheit (Bild 1 und 2) von relativen Fehlern und Quadratmitteln im Umfang von $\pm 3\%$ bei $h = 25 \div 30$ und $n = 3$ wird umfaßt. Das vorgenannte Verfahren kann auch zur Bestimmung der Belastungsprediktion während arbeitsfreier Tage angewandt werden. Man muß hierzu kleinere h -Werte von etwa $10 \div 15$ annehmen. Die Genauigkeit der Prediktion wird bei Datenteilung für diese Tage in zwei Teilmengen, nach Bild 2, verbessert.

З. КЕЖКОВСКИ, З. ВЭКСЭЙ

ПОПЫТКА ОЦЕНКИ ПРЕДСКАЗАНИЯ АКТИВНЫХ НАГРУЗОК ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Резюме

Проведен анализ точности предсказания нагрузок (оперативное предсказание графиков суточных нагрузок), на основании аппроксимации их пробега стационарным стохастическим процессом, а также линейной экстраполяции [1]. Обсуждены изменения нагрузок в i ($i = 1, 2, \dots, 24$) дискретных моментах для j ($j = 1, 2, \dots, h$) дней. Отклонения y_i от средних значений составляют последовательность, для которой $\bar{y}_i = 0$, а также можно предполагать, что $R_i(\tau) \rightarrow 0$ когда $\tau \rightarrow \infty$, где $R_i(\tau)$ является функцией корреляции. Линейная экстраполяция статистических свойств из последних $n \leq h$ (рис. D.1) дней позволяет определить предсказание отклонений (рис. D.4.) и нагрузок (1) на основании алгоритма по рис. D.3.

Значения h и n влияют на точность предсказания. Первая величина определяет предел данных для определения статистических свойств изменений нагрузок, вторая же определяет предел, на основании которого следует экстраполировать эти свойства при определении предсказания. Точность предсказания нагрузок избранной энергетической области или приемов с меньшей мощностью, питаемых радиально из энергетической системы для рабочих дней является удовлетворительной, т. е. значительное большинство (табл. 1 и 2) относительных и средних квадратичных ошибок содержится в пределах $\pm 3\%$, при значениях $h = 25 \div 30$ и $n = 3$. Вышеуказанный процесс можно применить для предсказания нагрузок также в нерабочих днях. Следует принимать меньшие величины h порядка $10 \div 15$. Точность предсказания улучшается при разделении данных из этих дней на два подмножества по рис. 2.

Pomiary modelowe i obliczenia przebiegów przy próbach udarowych autotransformatora regulacyjnego 100 MVA; 220/110 kV

ANDRZEJ ROSICKI (ŁÓDŹ)

Instytut Elektrotechniki, Oddział w Łodzi, Zakład Transformatorów

Otrzymano 28.2.1972

Wysokonapięciowe autotransformatory regulacyjne znajdują coraz szersze zastosowanie w sieciach krajowych. Polski przemysł transformatorowy buduje obecnie dwa typy autotransformatorów regulacyjnych przeznaczonych do sprzęgania sieci 220 i 110 kV o mocach 160 i 100 MVA i układzie uzwojeń jak analizowany w niniejszej pracy.

Zagadnienia regulacyjne w wysokonapięciowych autotransformatorach regulacyjnych należą do problemów trudnych i mimo publikowanych prac z tej dziedziny nie w pełni rozwiązanych. W pracy podano krytykę sugerowanej przez niektóre fabryki metodyki prób udarowych autotransformatorów o uzwojeniach regulacyjnych zabezpieczonych przez odgromniki „wewnętrzne” oraz sprawdzoną propozycję poprawnej metody wykonywania tej próby. Podano nową metodę obliczeniową wyznaczania rozkładu „początkowego” napięcia w dwuczęściowym schemacie zastępczym autotransformatora wielouzwojeniowego oraz przykładowe rozwiązanie problemu upraszczania schematów zastępczych wielouzwojeniowych autotransformatorów regulacyjnych dla przybliżonego obliczania amplitud i częstotliwości oscylacji w poszczególnych uzwojeniach. Możliwość przybliżonej oceny wytrzymałości udarowej układów izolacyjnych wysokonapięciowych autotransformatorów w trakcie projektowania usprawnia znacznie przebieg prac pozwalając zarówno trafnie wybrać zasadniczą strukturę układu, jak i opracować jego szczegóły w sposób bliski jego wersji ostatecznej.

Obliczenia i wnioski zostały zweryfikowane za pomocą pomiarów wykonanych na modelu fizycznym, w którym autotransformator był reprezentowany przez tzw. elektromagnetyczny model Abettiego, a odgromnik przez analogowy układ elektroniczny.

1. WSTĘP

Zwiększenie zakresu stosowania autotransformatorów w liniach najwyższych napięć spowodowało znaczny rozwój prac badawczych w tej dziedzinie. Również i w Polsce rośnie szybko zapotrzebowanie na autotransformatory regulacyjne. Obecnie w kraju budowane są autotransformatory regulacyjne o przekładni 220/110 kV i o mocy 160 MVA w oparciu o licencję oraz 100 MVA własnej konstrukcji.

Specyfiką konstrukcji licencyjnej, przyjętą również w konstrukcji krajowej, jest stosowanie odgromników „wewnętrznych”, których zadaniem jest ograniczenie przebiegów w uzwojeniach regulacyjnych.

Przebiegi udarowe w autotransformatorach regulacyjnych są bardziej złożone, niż w transformatorach dwuuzwojeniowych, do których odnoszą się prawie wszystkie znane

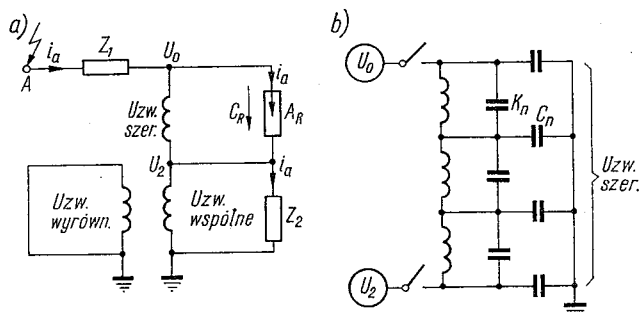
metody obliczeniowe. Metodyka prób napięciem udarowym zaproponowana przez licencjodawcę autotransformatorów 160 MVA; 220/110 kV nie jest w pełni zgodna z normą krajową i — jak wykazano to poniżej — nie odtwarza wiernie warunków eksploatacji.

Opanowanie metod projektowania i budowy autotransformatorów regulacyjnych stawia — jak widać — konstruktora przed trudnymi i nie w pełni wyjaśnionymi przez teorię problemami. W dalszej części niniejszej publikacji podano niektóre wyniki prac eksperymentalnych i obliczeniowych autora dotyczących metodyki prób udarowych i metod obliczania przebiegów udarowych w autotransformatorach regulacyjnych chronionych odgromnikami „wewnętrznymi” [1].

2. WYBÓR SCHEMATU PRÓBY UDAROWEJ AUTOTRANSFORMATORA Z UZWOJENIAMI REGULACYJNYMI ZABEZPIECZONYMI ODGROMNIKAMI „WEWNĘTRZNYMI”

2.1. Problematyka badań

Z punktu widzenia konstruktora największe znaczenie mają badania dotyczące naprężeń występujących w izolacji podczas próby udarowej. Energetykę interesuje natomiast przede wszystkim, czy wykonane w wytwórni próby odwzorowują warunki eksploatacji. Podstawowym problemem dla obu stron, jak i dla instytucji odpowiedzialnych za normalizację,



Rys. 1. Schematy zastępcze autotransformatora 220 MVA 400 kV chronionego odgromnikiem „wewnętrznym”

a) schemat zastępczy autotransformatora atakowanego przez falę wędrowną w warunkach eksploatacji, b) schemat zastępczy podczas poprawnej próby udarowej autotransformatora, reprezentującej przypadek a). Autotransformator atakowany jest równocześnie udarami przez dwa generatory udarowe (U_0 i U_2)

jest zatem ustalenie właściwego schematu połączeń autotransformatora poddanego próbie udarowej.

Zastosowanie odgromników „wewnętrznych” do ochrony uzwojeń szeregowych autotransformatorów zaproponował W. Rabus [2]. Wprawdzie koncepcja ta nie znalazła szerszego zastosowania do uzwojeń szeregowych (co przyznaje sam W. Rabus w swych nowszych publikacjach [3]), natomiast okazała się bardzo celowa i skuteczna do ochrony uzwojeń regulacyjnych [4], [5], [6], [7].

Podczas próby udarowej autotransformatorów, których uzwojenia regulacyjne chronione są za pomocą odgromników „wewnętrznych”, występują istotne komplikacje. Odgromników tych nie można zdjąć, gdyż należy uwzględnić fakt ograniczenia przez nie przepięć między odpowiednimi punktami wykorzystany już przez konstruktora przy projektowaniu układu izolacyjnego. Nie można ich również pozostawić, gdyż wyładowania w odgromniku utrudniłyby, lub wręcz uniemożliwiły, ocenę wyników próby udarowej.

W. Rabus [8] proponuje zastąpienie odgromnika, na czas próby udarowej, przez odpowiednio dobrany opornik. W. Auth [9] poddał tę koncepcję eksperymentalnej weryfikacji na modelach i stwierdził, że przebiegi w uzwojeniach zabezpieczonych równoległym odgromnikiem różnią się w sposób istotny od przebiegów w uzwojeniach zabezpieczonych opornikiem. Zaproponował on schemat próby udarowej odpowiadający warunkom eksploatacji (rys. 1), w którym autotransformator poddany byłby jednoczesnemu zaatakowaniu przez dwa generatory. Wartość szczytowa udaru U_0 doprowadzonego z generatora pierwszego do uzwojenia szeregowego jest w tym schemacie równa napięciu probierczemu zacisku tegoż uzwojenia. Wartość szczytowa udaru U_2 doprowadzonego z drugiego generatora do zacisku liniowego uzwojenia wspólnego reprezentuje spadek napięcia na oporności falowej dołączonej w eksploatacji do zacisku „wspólnego”. Metoda dwóch generatorów wydaje się rozwiązaniem wykonalnym, lecz niezmiernie kosztownym.

Innym wariantem schematu próby udarowej, zaproponowanym przez W. Autha, jest zastąpienie odgromnika „wewnętrznego” oporowym dzielnikiem napięcia, co jest wykonalne w przypadku uzwojenia szeregowego, ale w przypadku uzwojeń regulacyjnych nie daje korzyści w porównaniu z zastąpieniem odgromnika przez opornik.

Przegląd konstrukcji realizowanych przez najbardziej znane wytwórnie transformatorów pozwala na stwierdzenie, iż koncepcje Rabusa i Autha nie rozpowszechniły się.

Dalszych wskazówek dla przeprowadzenia pełnowartościowej próby udarowej autotransformatorów regulacyjnych w literaturze technicznej brak. Firma ELIN stosuje przy próbie udarowej swych autotransformatorów zwieranie uzwojeń regulacyjnych.

W [1] wykazano, iż zwarcie uzwojeń regulacyjnych powoduje nie tylko likwidację napięć probierczych na ich izolacji poprzecznej, lecz także na izolacji wzdłużnej.

Jak widać problem doboru właściwego schematu próby udarowej jest kontrowersyjny i wymaga wyjaśnienia przez prace na modelach.

2.2. Opis obiektu badań

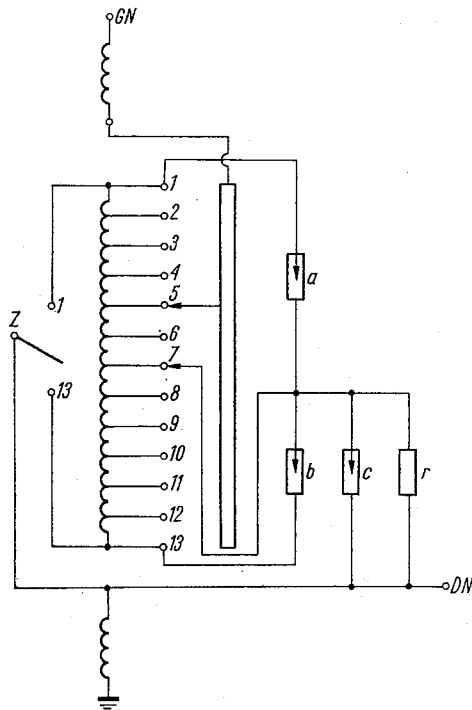
2.2.1. Model autotransformatora

Badania przeprowadzono dla autotransformatora 100 MVA o przekładni 230/120 kV z regulacją napięcia górnego pod obciążeniem o zakresie $\pm 12\%$ w ± 9 stopniach. Schemat uzwojeń przedstawiono na rys. 2a i 2b.

Badania przeprowadzono metodą modelową opisaną przez Abettiego [10]. Z publikacji W. Dudka [11], jak również z własnych doświadczeń Oddziału Łódzkiego Instytutu Elektrotechniki wynika, iż metoda ta zapewnia wystarczającą dokładność dla potrzeb konstrukcyjnych.

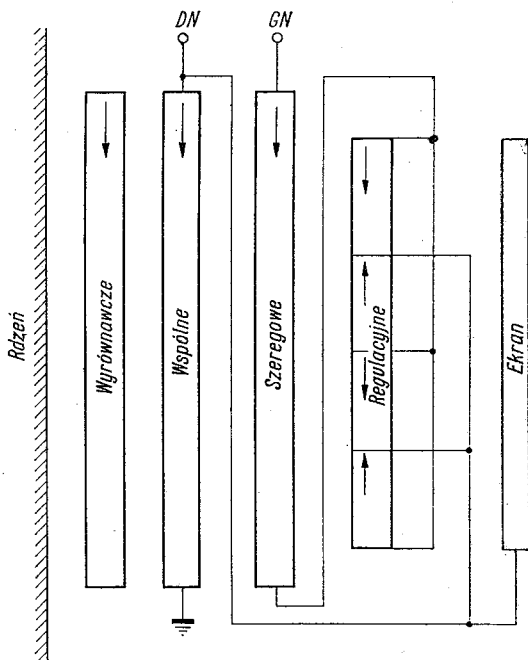
Przyjęto następujące skale modelu:

skala wymiarów liniowych $l = 1:5$, skala indukcyjności $L = 1:5$;
 skala czasów $t = 3:1$, skala oporności czynnej $R = 1:15$;
 skala liczby zwojów $N = 1:1$, skala tłumienia $\delta = 8,65:1$;
 skala pojemności $C = 45:1$.



Rys. 2a). Schemat połączeń badanego autotransformatora

a , b , c — odgromniki XAA 37s, r — opornik 150 k Ω



Rys. 2b). Schemat rozmieszczenia uzwojeń badanego autotransformatora

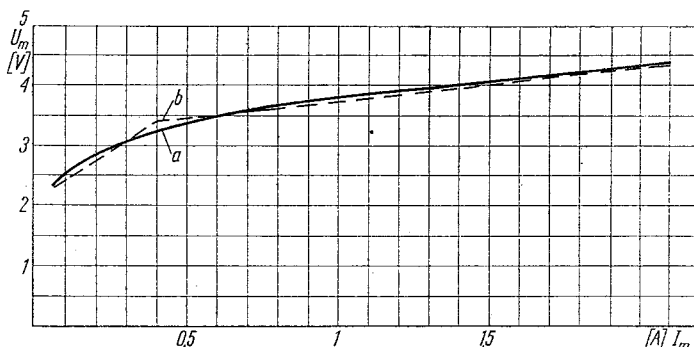
Jak wiadomo [10] w modelu elektromagnetycznym trzy skale można obrać dowolnie. Pozostałe są wynikiem praw podobieństwa Abettiego. Kierując się możliwościami warsztatowymi oraz szybkością zapisu posiadanej aparatury pomiarowej wybrano skalę wymiarów liniowych l , skalę czasu t i skalę liczby zwojów N jako parametry podstawowe.

2.2.2. Model odgromnika

Odgromnik jako element nieliniowy nie może być traktowany w metodzie modeli elektromagnetycznych w oparciu o prawa podobieństwa. Nie można było również wykorzystać proponowanej przez W. Autha [9] koncepcji zastąpienia odgromnika przez podświetlany iskiernik kulowy połączony szeregowo z opornikiem. Model taki działa bowiem

poprawnie dopiero przy napięciu kilkuset woltów. Nie może być zatem stosowany przy badaniach generatorem udarów powtarzalnych, co stanowi istotną cechę metody Abettiiego.

Odgromniki wewnętrzne pracują w szeregowym połączeniu z dużą impedancją. Z tego względu model musi odtworzyć również zakres małych prądów wyładowczych. Charakterystykę napięciowo-prądową, którą można przedstawić równaniem (1) [12] aproksymowano w modelu linią łamaną dwuodcinkową (rys. 3)



Rys. 3. Charakterystyka napięciowo-prądowa modelu odgromnika XAA 37s
a — charakterystyka aproksymowana równaniem (1), b — charakterystyka zrealizowana w modelu

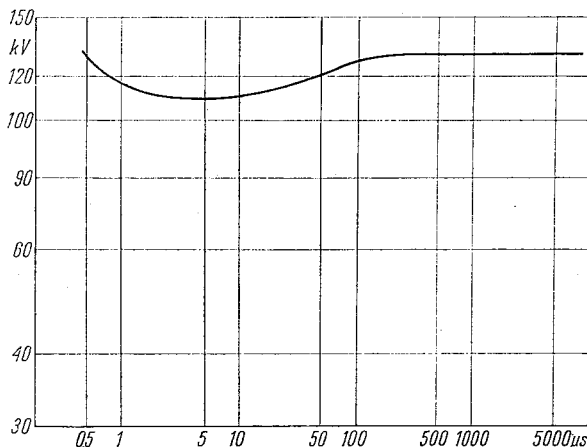
$$U_o = k_o I^{\alpha_o} \quad (1)$$

gdzie:

k_o — współczynnik zależny od wymiarów stosu,

α_o — współczynnik zaworowości stosu.

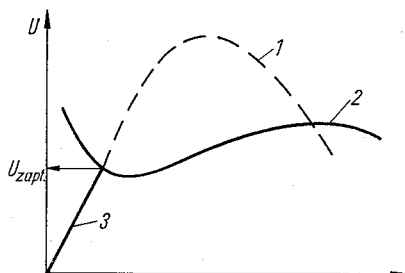
Charakterystyka udarowego napięcia zapłonu w funkcji czasu do ucięcia dla odgromnika XAA37s (stanowiącego obiekt badań wraz z autotransformatorem) ma kształt podany na rys. 4, praktycznie niemożliwy do odtworzenia na modelu elektronicznym. Zastosowano zatem regulację ręczną napięcia zapłonu. Napięcie zapłonu wyznaczono graficznie jako punkt przebiegu charakterystyki napięciowo-czasowej odgromnika z przebiegiem napięcia



Rys. 4. Charakterystyka napięcia zapłonu odgromnika XAA 37s f-my ASEA

rejestrowanym na uzwojeniu regulacyjnym po zdjęciu odgromnika. Rzędna punktu przecięcia wskazuje, na jaki poziom winno być nastawione napięcie zapłonu modelu (rys. 5).

Model, ze względu na kierunkowe działanie układów elektronowych, ucina tylko jedną połówkę przebiegów oscylacyjnych. Wady tej można uniknąć stosując dwa przeciwsośnie



Rys. 5. Graficzna metoda wyznaczania napięcia zapłonu modelu odgromnika

1 — przebieg bez odgromnika, 2 — charakterystyka napięciowo-czasowa odgromnika, 3 — przebieg z odgromnikiem

ze sobą połączone układy zapłonowe. Jednakże przy badaniach prowadzonych w niniejszej pracy nie było potrzeby stosowania dwóch przeciwsośnych układów ucinających. Tłumienie przebiegów badanych jest tak silne, że druga „połówka” przebiegu osiąga wartości niższe od napięcia zapłonu odgromnika.

2.3. Sposób pomiarów i ich wyniki

Na modelu miniaturowym autotransformatora wraz z modelem odgromników przeprowadzono pomiary w układzie połączeń podanym na rys. 6. Do uzwojeń modelu doprowadzono udar z generatora udarów o kształcie $3/150 \mu s$. Przebiegi rejestrowano oscylografem katodowym i fotografowano.

Na schemacie uzwojeń autotransformatora litery oznaczają:

S — uzwojenia szeregowo, W — uzwojenie wspólne,
 R — uzwojenia regulacyjne, D — uzwojenie stabilizujące.

Liczby za literami oznaczają numerację punktów pomiarowych modelu. Opornik R_3 dołączono do zacisku niebadanego. Odzworowywał on, zgodnie z wymaganiami normy PN-63/E-04062 [13], oporność falową linii.

Na rys. 7 i 8 pokazano schematy uzwojeń w czterech wybranych, charakterystycznych położeniach przełącznika zaczepów. Na rys. 7 przedstawiono schematy przy doprowadzeniu udaru do uzwojenia szeregowego, a na rys. 8 przy doprowadzeniu udaru do uzwojenia wspólnego.

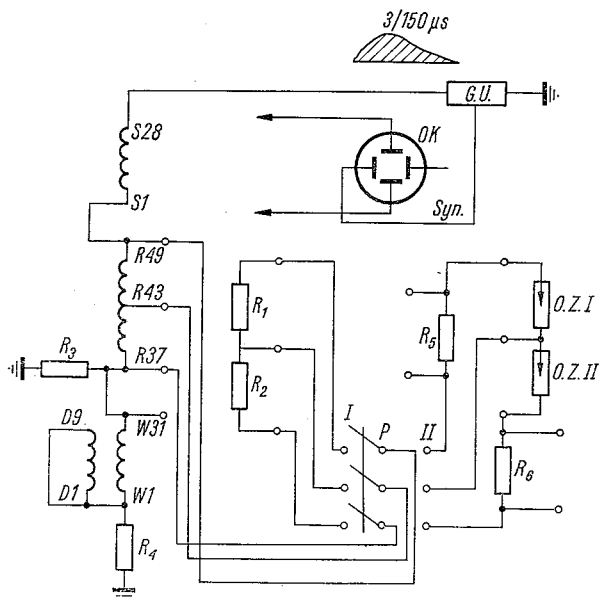
Wyznaczono przebiegi w czterech charakterystycznych położeniach przełącznika zaczepów doprowadzając udar do zacisków liniowych uzwojenia szeregowego i wspólnego:

- przy uzwojeniu regulacyjnym niezabezpieczonym,
- przy uzwojeniu regulacyjnym zwartym,
- przy uzwojeniu regulacyjnym zwartym poprzez oporniki R_1 i R_2 , których oporności dobierano tak, by amplituda przepięcia między punktami $R_{49}-R_{43}$ i $R_{43}-R_{37}$ była

równa odpowiedniej, maksymalnej amplitudzie przepięcia między tymi punktami, gdy między nimi włączone były modele odgromników (z uwzględnieniem ząbka zapłonowego),

d) przy uzwojeniu regulacyjnym zabezpieczonym odgromnikami O.Z.I i O.Z.II (rys. 6)

Do uzwojenia szeregowego doprowadzono udar pełny o wartości szczytowej 825 kV, a do uzwojenia wspólnego — 550 kV.



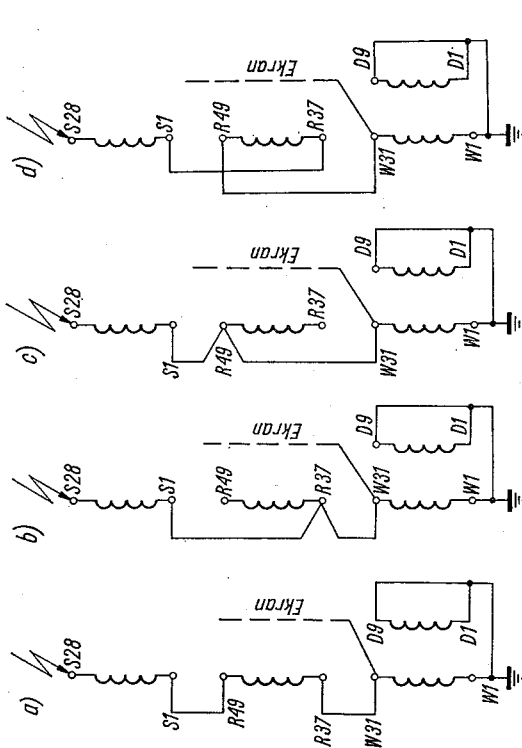
Rys. 6. Układ połączeń

a) R49-R43 i R43-R37 otwarte (położenie $p-, 0''$), b) R49-R43 i R43-R37 zwarte (położenie $p-, I''$, $R_1 = 0$; $R_2 = 0$), c) między R49-R43 i R43-R37 włączone oporniki R_1 i R_2 (poł. $p-, I''$), d) między R49-R43 i R43-R37 włączone odgromniki O.Z.I i O.Z.II (położenie $p-, II''$)

G.U. — generator uderów wielokrotnych, udar $3/150 \mu s$ o amplitudzie regulowanej w granicach $20 \div 50$ V, O.K. — oscylograf katodowy OS 102 z wkładką różnicową O.S. 102—3, O.Z.I. — model odgromnika, O.Z.II. — model odgromnika, R_1 — opornik dekadowy $1-100000 \Omega$, R_2 — opornik dekadowy $1-100000 \Omega$, R_3 — opornik $1-1000 \Omega$, R_4 — opornik 1Ω , R_5 — opornik normalny 1Ω , R_6 — opornik normalny 1Ω , P — przełącznik

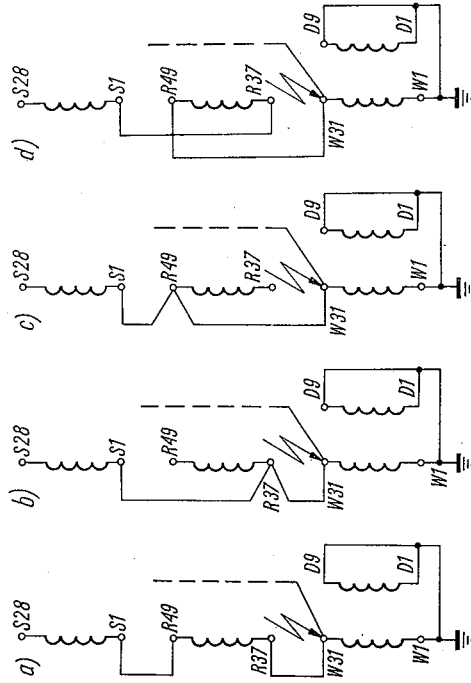
W tablicy 1 zestawiono największe z pomierzonych przepięć. Jak należało oczekiwać, zagrożenie izolacji przy próbie uderowej autotransformatora z niezabezpieczonymi uzwojeniami regulacyjnymi jest bardzo duże i w wielu punktach większe od zagrożenia tej izolacji przy zabezpieczeniu uzwojenia regulacyjnego odgromnikami.

Przy zwartych zaciskach uzwojeń regulacyjnych oscylacje w tym uzwojeniu wywołują tylko nieznaczne naprężenia w izolacji między tym uzwojeniem i sąsiadującym ekranem. Z tablicy widać ponadto, iż przy zwartych uzwojeniach regulacyjnych naprężenia w innych punktach układu niewiele różnią się od naprężeń występujących przy uzwojeniach regulacyjnych zabezpieczonych odgromnikami. Można zatem wyciągnąć wniosek, że próba uderowa ze zwartymi uzwojeniami regulacyjnymi nie jest w pełni adekwatna dla każdego układu izolacji poszczególnych uzwojeń, niemniej jednak może być uważana za trafny sprawdzian dla wszystkich fragmentów izolacji, z wyjątkiem uzwojenia regulacyjnego. Ponieważ jednak izolacja tych uzwojeń jest bardzo ważnym elementem układu, trzeba stwierdzić, że luka ta jest bardzo dotkliwa.



Rys. 7. Schemat połączeń uzwojeń (udar doprowadzony do uzwojenia szeregowego)

a) Zaczep 1, b) Zaczep 14(1), c) Zaczep 14(27) d) Zaczep 27
Liczby oznaczające położenia przełączników zaczepów odpowiadają numeracji na napędzie przełącznika oraz na rysunku fabrycznym



Rys. 8. Schemat połączeń uzwojeń (udar doprowadzony do uzwojenia wspólnego)

a) Zaczep 1, b) Zaczep 14(1), c) Zaczep 14(27), d) Zaczep 27

Tablica 1

Zestawienie największych przepięć

Miejsce pomiaru	Największe przepięcie w kV przy uzwojeniu regulacyjnym			
	zabezpieczonym		zwartym	niezabezpieczonym
	odgromnikiem	opornikiem		
1. Uzwojenie wspólne				
1.1. Koniec górny — ziemia	550	550	550	550
1.2. Środek — ziemia	390	390	370	390
1.3. Koniec dolny — ziemia	0	0	0	0
2. Uzwojenie szeregowie				
2.1. Koniec górny — ziemia	825	825	825	825
2.2. Koniec dolny — ziemia	550	550	550	590
2.3. Koniec górny — koniec górny uzw. wsp.	730	730	730	730
2.4. środek — środek uzw. wsp.	760	720	700	760
3. Uzwojenie regul.				
3.1. Koniec górny — ziemia	685	550	550	550
3.2. Koniec górny — koniec górny uzw. szereg.	730	730	730	730
3.3. środek — środek uzw. szereg.	695	710	710	810
3.4. Koniec dolny — koniec dolny uzw. szer.	130	140	370	370
3.5. uzw. reg. — ekran	175	220	0	380
3.6. koniec górny — środek	100—115	100—115	0	210
3.7. środek — koniec górny	100—115	100—115	0	200

Przy uzwojeniach regulacyjnych zabezpieczanych opornikami izolacja uzwojenia regulacyjnego oraz izolacja doziemna uzwojenia szeregowego są naprężane analogicznie, jak przy zabezpieczeniu uzwojeń regulacyjnych odgromnikami, a izolacja między uzwojeniem szeregowym i wspólnym o 5% mniej. Można uznać, iż to złagodzenie, które leży w granicach błędów pomiarowych, jest nieistotne.

Izolacja jarzmowa uzwojenia regulacyjnego naprężana jest o ok. 10% mniej. Uzwojenie regulacyjne jest jednak z reguły niższe od uzwojenia szeregowego. Izolację jarzmową uzwojenia regulacyjnego stanowi izolacja wyrównująca różnicę wysokości oraz izolacja wspólna z izolacją uzwojenia szeregowego, która jest naprężana napięciem 825 kV (poz. 2.1 tabl. 1), tj. napięciem o 20% większym od przepięcia na izolacji jarzmowej uzwojenia regulacyjnego. Zatem obniżenie przepięcia na tej izolacji jest nieistotne.

Izolacja między uzwojeniem regulacyjnym i ekranem przy uzwojeniach regulacyjnych zabezpieczonych opornikami jest naprężana o 25% więcej niż przy zabezpieczeniu tych uzwojeń odgromnikiem. Jednakże biorąc pod uwagę, że przepięcie na tej izolacji jest sumą napięć na dwóch odgromnikach połączonych szeregowo trzeba stwierdzić, że w najnie-

korzystniejszym, czysto teoretycznym, przypadku suma ta równałaby się sumie napięć zapłonu obydwu odgromników.

W rzeczywistości zapłon obu odgromników nie następuje jednocześnie. Prądy wyładowcze w tych odgromnikach są niewielkie, a więc występuje ostry „ząbek” zapłonowy. Napięcie obniżone jest w tym przypadku znacznie mniejsze od napięcia zapłonu. Tym należy tłumaczyć, że przepięcie na izolacji między uzwojeniem regulacyjnym a ekranem jest mniejsze od sumy przepięć na połówkach tego uzwojenia, tj. od sumy napięć zapłonu na obydwu w szereg połączonych odgromnikach. Stopień obniżenia sumy napięć na dwu szeregowo połączonych odgromnikach zależy od wielu czynników i ma charakter czysto stochastyczny. Należy zatem przyjąć, że zawsze posiada pewien procent prawdopodobieństwa. Trudno spodziewać się, by wyniki pomiarów mogły pozwolić na uogólnienie rozwiązania tego problemu. Wydaje się zatem słuszne, by izolacja między uzwojeniem regulacyjnym a ekranem była próbowana największym napięciem jakie teoretycznie może się na tej izolacji pojawić, tzn. napięciem stanowiącym sumę napięć zapłonu obydwu szeregowo połączonych odgromników. Taka wartość napięcia pojawia się na w.w. izolacji również przy zastąpieniu odgromników opornikami. Dlatego też należy uznać, że naprężenia izolacji między uzwojeniami regulacyjnymi a ekranem (w konkretnie mierzonym przypadku o 25% większe od naprężeń występujących przy zabezpieczeniu uzwojeń regulacyjnych odgromnikami) powstające przy zabezpieczeniu uzwojeń regulacyjnych opornikami są właściwe dla sprawdzenia tej izolacji w czasie próby udarowej autotransformatora.

Przy próbie udarem uciętym stosowanie oporników zamiast odgromników łagodzi przepięcia na izolacji wzdłużnej o ok. 10%. Dla autotransformatorów o stosowanej w kraju konstrukcji uzwojeń złagodzenie to jest jednak nieistotne, gdyż przepięcia na izolacji wzdłużnej uzwojeń regulacyjnych nie przekraczają 50% wartości przepięć dopuszczalnych według Panowa [14]. Przewymiarowanie z punktu widzenia przepięć izolacji wzdłużnej uzwojeń regulacyjnych podyktowane jest względami chłodzenia.

Reasumując należy uznać próbę udarową:

- a) z niezabezpieczonymi uzwojeniami regulacyjnymi za niedopuszczalną,
- b) ze zwartymi uzwojeniami regulacyjnymi za niepoprawną dla uzwojenia regulacyjnego,
- c) z uzwojeniem regulacyjnym zwartym poprzez odpowiednio dobrane oporniki za zadowalająco odtwarzającą, z punktu widzenia przepięć, rzeczywiste warunki pracy autotransformatora w sieci elektroenergetycznej, niemal w tym samym stopniu, w jakim normalna próba udarowa odtwarza warunki eksploatacji transformatora dwuuzwojowego.

3. UPROSZCZONE METODY WYZNACZANIA PRZEPIĘĆ UDAROWYCH W UKŁADACH IZOLACYJNYCH AUTOTRANSFORMATORÓW

3.1. P r o b l e m a t y k a b a d a ń

Do wyznaczania naprężeń dielektrycznych przy projektowaniu układów izolacyjnych transformatorów o skomplikowanym układzie połączeń stoją do dyspozycji w zasadzie dwie metody. Są to:

a) metoda modeli miniaturowych (zastosowana po raz pierwszy przez Abettiego w 1953 r.) [10],

b) odwzorowanie całego zespołu uzwojeń przez siatkę pojemności i indukcyjności, a następnie obliczenie napięć w węzłach tej siatki za pomocą maszyn analogowych lub cyfrowych (metoda zastosowana po raz pierwszy przez Mc. Whirtera, J. Fahrnkopfa i C. Steela w 1955 r.) [15].

W Polsce opracowaniem programów na maszynę cyfrową zajmuje się od kilku lat Zakład Wysokich Napięć Instytutu Elektrotechniki.

W. Lech [16] rozwinął metodę prądów węzłowych Coltriego, stosowaną między innymi w koncernie Westinghousa, rezygnując z uproszczenia geometrii sprzężeń indukcyjnych (tj. stosując układ współrzędnych walcowych zamiast współrzędnych kartezjańskich). Wprowadził również do obliczeń współczynniki tłumienności i opracował program na maszynę cyfrową „Eliot” wykorzystywaną w Instytucie Elektrotechniki. Ta wielka praca nie jest jeszcze w pełni zakończona. Próby zastosowania programów do konkretnych autotransformatorów regulacyjnych nie dały, jak dotąd, wyników pozytywnych z punktu widzenia zgodności obliczeń z pomiarami.

Obie metody wymienione w punktach a) i b) mogą być stosowane po całkowitym zaprojektowaniu transformatora i prawie wszystkich szczegółów układu izolacyjnego. Wszelkie zmiany konstrukcyjne wymagają bądź wykonania nowego modelu (lub jego rekonstrukcji) (a), bądź zmiany założeń dla maszyny matematycznej (b). Wobec zatracania się sensu fizycznego przy obliczeniach na maszynach matematycznych, efektu wprowadzonych zmian nie można z góry przewidzieć. Z tego względu w wielu ośrodkach konstrukcyjnych transformatorów korzysta się przy wstępnych obliczeniach z metod uproszczonych.

Spośród wielu prac, w których proponowane są mniej lub bardziej skomplikowane schematy zastępcze, wyróżnia się swą prostotą, zarówno jeśli chodzi o układ jak i o sposób obliczania parametrów, praca G. Preiningera [17]. Otrzymywana zgodność obliczeń z pomiarami jest o wiele lepsza, niż w wielu bardziej rozbudowanych schematach. Stosowane przez Preiningera metody upraszczania schematów, mimo iż niewystarczające dla tak skomplikowanych schematów, jak uzwojenia autotransformatorów regulacyjnych z uzwojeniem stabilizującym, niemniej jednak w znacznym stopniu wskazują na kierunek, w którym należy szukać metod upraszczania schematów transformatorów wielouzwojeniowych, koniecznych niejednokrotnie w wielu rozwiązaniach technicznych, aby przyjętej metodzie nadać wartość praktyczną.

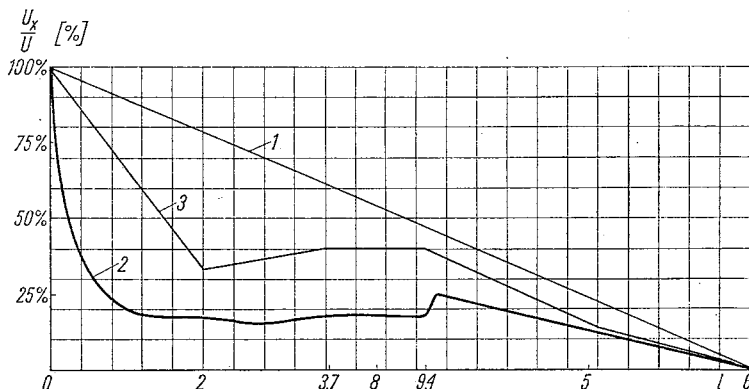
W niniejszej pracy podjęto się zbadania i rozszerzenia zakresu stosowalności klasycznych, prostych metod obliczeniowych opartych na pojęciach *rozkładu początkowego* oraz *oscylacji własnych* i *oscylacji wymuszonych* obwodów sprzężonych pojemnościowo i indukcyjnie.

Drogą konsekwentnych, kolejnych uproszczeń bardzo rozbudowanego, „rzeczywistego” schematu wyjściowego starano się uzyskać schematy zastępcze dostosowane do klasycznych metod obliczeniowych i nie zniekształcające w istotny sposób przebiegów badanych.

Założono, że „początkowy” rozkład napięcia w samotnym uzwojeniu jednorodnym z uziemionym końcem można zastąpić przez krzywą wykładniczą (założenie słuszne dla

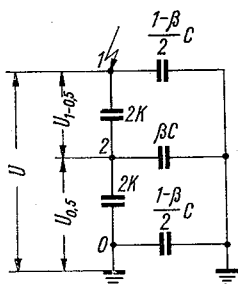
$$\alpha = \sqrt{\frac{C}{K}} \geq 3 \text{ [20]})$$

$$u_x = U \cdot e^{-\alpha(1-x)}. \quad (2)$$

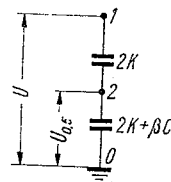


Rys. 10. Rozkład „początkowy” przy doprowadzeniu uderu do zacisku liniowego uzwojenia szeregowego
1 — rozkład końcowy, 2 — rozkład początkowy pomierzony na modelu, 3 — rozkład początkowy otrzymany ze schematu na rys. 9

Odrzucając stosowaną uprzednio koncepcję podziału pojemności doziemnej C w ten sposób, by w środku dwuczęściowego schematu uzwojenia umieścić pojemność doziemną $\frac{C}{2}$, a na krańcach schematu pojemności $\frac{C}{4}$ (rys. 9) przyjęto założenie ogólniejsze, iż w środku schematu dołączona jest pojemność βC , a na krańcach pojemności $\frac{1-\beta}{2} C$ (rys. 11).



Rys. 11. Dwuczęściowy schemat pojemnościowy



Rys. 12. Dwuczęściowy schemat pojemności wypadkowych

Dla doboru współczynnika β przyjęto postulat, by wartość napięcia początkowego w środku uzwojenia była dla schematu dwuczęściowego równa wartości napięcia obliczonej według wzoru (2).

Pojemności dołączone w punktach 1 i 0 nie mają wpływu na rozkład napięcia wzdłuż uzwojenia, zatem siatkę pojemności z rys. 11 można zastąpić dzielnikiem przedstawionym na rys. 12.

Dla takiego dzielnika można napisać zależność:

$$\frac{U_{0,5}}{U} = \frac{2K}{4K + \beta C} \quad (3)$$

Zgodnie z wyżej poczynionym założeniem napięcie p. 2 (rys. 12) dane zależnością (3) winno być równe napięciu według zależności (2) dla $x = 0,5$; stąd:

$$\frac{2K}{4K + \beta C} = e^{-0,5\alpha} \quad (4)$$

rozwiązując względem β otrzymujemy:

$$\beta = \frac{2K(1 - 2e^{0,5\alpha})}{C \cdot e^{-0,5\alpha}}, \quad (5)$$

a po zastąpieniu stosunku $\frac{K}{C}$ przez $\frac{1}{\alpha^2}$ otrzymuje się:

$$\beta = \frac{2}{\alpha^2}(e^{0,5\alpha} - 2). \quad (6)$$

Następnie obliczono błąd względny $\Delta_{0,5}$ popełniony przy określeniu napięcia początkowego w środku uzwojenia za pomocą konwencjonalnego schematu zastępczego, tj. schematu, dla którego $\beta = 0,5$ (rys. 9)

$$\Delta_{0,5} = \frac{A_{rzecz} - A_{obl}}{A_{rzecz}};$$

jako A_{rzecz} przyjęto wartość daną równaniem (2), a jako A_{obl} przyjęto wartość daną równaniem (3) przy $\beta = 0,5$.

Stąd:

$$\Delta_{0,5} = \frac{e^{-0,5\alpha} - \frac{2K}{4K - 0,5C}}{e^{-0,5\alpha}} \quad (7)$$

przekształcając otrzymujemy:

$$\Delta_{0,5} = 1 - \frac{e^{-0,5\alpha}}{2 + 0,25\alpha^2}. \quad (8)$$

W analogiczny sposób obliczono również błąd wynikający z przyjęcia w schemacie zastępczym współczynnika $\beta = 1$

$$\Delta_{1,0} = 1 - \frac{e^{-0,5\alpha}}{2 + 0,5e^2}. \quad (9)$$

Aproksymacja rozkładu „początkowego” za pomocą funkcji wykładniczej jest dla $\alpha > 3$ na ogół niedopuszczalna. Rozkład zależy tu od warunków brzegowych.

Dla $\alpha > 3$ rozkład początkowy w uzwojeniu samotnym z uziemionym końcem uzwojenia dany jest zależnością:

$$\frac{u_x}{U} = \frac{\sinh \alpha x}{\sinh \alpha}, \quad (10)$$

a z izolowanym końcem:

$$\frac{u_x}{U} = \frac{\cosh \alpha x}{\cosh \alpha}. \quad (11)$$

Obliczając $U_{0,5}$ według równania (10) otrzymuje się:

$$\beta = \frac{4}{\alpha^2} (\cosh 0,5\alpha - 1), \quad (12)$$

$$\Delta_{0,5} = 1 - \frac{\cosh 0,5\alpha}{1 - 0,125\alpha}, \quad (13)$$

$$\Delta_{1,0} = 1 - \frac{\cosh 0,5\alpha}{1 - 0,25\alpha}, \quad (14)$$

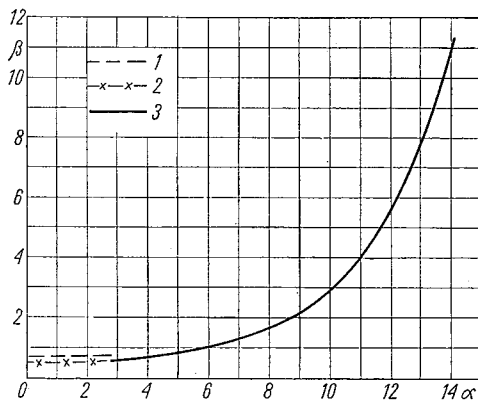
a według (11) otrzymuje się:

$$\beta = \frac{2(\cosh \alpha - \cosh 0,5\alpha)}{\alpha^2 \cosh 0,5\alpha}, \quad (15)$$

$$\Delta_{0,5} = 1 - \frac{\cosh \alpha}{(1 + 0,25\alpha^2) \cosh 0,5\alpha}, \quad (16)$$

$$\Delta_{1,0} = 1 - \frac{\cosh \alpha}{(1 + 0,5\alpha^2) \cosh 0,5\alpha}. \quad (17)$$

Na rys. 13 przedstawiono graficznie zależności (6), (12) i (15), a na rys. 14 zależności (8), (13), (14), (16) i (17).



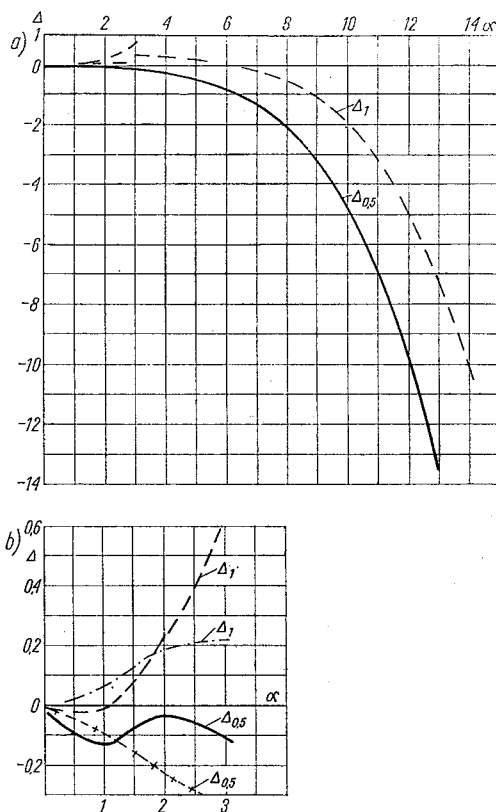
Rys. 13. Wykres współczynnika $\beta = f(\alpha)$

----- β dla $\alpha < 3$ — koniec izolowany, - x - x - x - x - x - β dla $\alpha < 3$ — koniec uziemiony,
————— β dla $\alpha > 3$

Współczynnik β dany zależnością (6) został wyznaczony w założeniu uzwojenia samotnego uziemionego na końcu (rys. 12).

Ponieważ dla $\alpha > 3$ krzywa rozkładu „początkowego” dla uzwojenia samotnego z izolowanym końcem praktycznie nie różni się od krzywej dla uzwojenia uziemionego, zależności (6) można stosować również dla uzwojenia samotnego z izolowanym końcem.

Przy przekładni większej od 4 (wg Abettiego) uzwojenia wtórne można traktować jako uziemioną powierzchnię ekwipotencjalną. Stąd wyprowadzone poprzednio zależności dla uzwojenia samotnego można stosować również dla transformatorów dwu lub więcej



Rys. 14. Wykresy $\Delta_{0,s}$ i Δ_1 w funkcji α

a) dla α od 0 do 14, b) dla $\alpha < 3$

- - - - - uziemiony koniec uzwojenia Δ_1 ,
- . - . - . izolowany koniec uzwojenia Δ_1 ,
- uziemiony koniec uzwojenia $\Delta_{0,s}$,
- + - + - + - + - izolowany koniec uzwojenia $\Delta_{0,s}$

uzwojeniowych o przekładniach między uzwojeniem rozpatrywanym a sąsiednimi większych od 4.

Jeśli przekładnie sąsiednich uzwojeń różnią się mniej niż w stosunku 4:1, uzwojenia wtórne nie można traktować jako uziemioną powierzchnię ekwipotencjalną. Oprócz pojemności wzdłużnej uzwojenia pierwotnego (K_1) oraz pojemności tego uzwojenia względem uziemionej kadzi (C_1) i względem uzwojenia wtórne (C) wystąpią pojemności wzdłużne uzwojenia wtórne (K_2) i pojemności uzwojenia wtórne względem ziemi (C_2).

Bewley [21] podał algebraiczne rozwiązanie dla różnych warunków brzegowych. Wzory Bewleya są zbyt uciążliwe do praktycznych obliczeń. W [20] podano metodę uproszczoną, przystosowaną także do uzwojeń niejednorodnych. Metoda ta polega na pomnożeniu

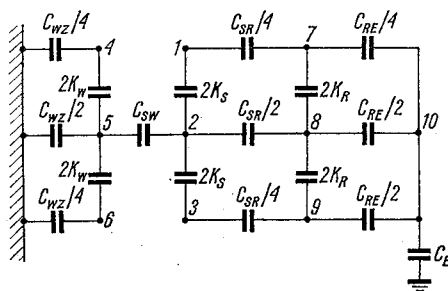
współczynnika α_1 uzwojenia pierwotnego, wyznaczonego jak dla uzwojenia jednorodnego samotnego, przez współczynnik k_σ będący funkcją parametrów:

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{C_2}{K_2}}; \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_2}; \quad \Psi = \frac{C+C_2}{C_2}.$$

Współczynnik ten można obliczyć dla różnych warunków brzegowych w równaniach Biewlewa.

Wprowadzając poprawkowy współczynnik k_α można rozszerzyć stosowanie współczynnika podziału pojemności β w schemacie dwuczęściowym na uzwojenia niejednorodne i o przekładniach mniejszych od 4:1.

Wykresy podane na rys. 13 i 14 pozwalają zatem na wyciągnięcie wniosków praktycznych dotyczących stosowalności podziału poszczególnych uzwojeń na dwie części w przypadku ogólniejszym. Można przypuszczać, iż dla tego przypadku uzyska się za pomocą siatki pojemnościowej rozkład początkowy dość zbliżony do rzeczywistego, obliczając w węźle siatki reprezentującym środek danego uzwojenia pojemności $\beta_{ik} C_{ik}$, gdzie C_{ik} jest pojemnością rozpatrywanego uzwojenia i względem sąsiedniego k .



Rys. 15. Siatka pojemności dla autotransformatora o uzwojeniach usytuowanych zgodnie z rys. 2

- C_{WZ} — pojemność między uzwojeniem wspólnym i stabilizującym,
 C_{SW} — pojemność między uzwojeniem wspólnym i szeregowym,
 C_{SR} — pojemność między uzwojeniem szeregowym i regulacyjnym,
 C_{RE} — pojemność między uzwojeniem regulacyjnym i ekranem,
 C_E — pojemność między ekranem i ziemią,
 K_W — pojemność wzdlużna uzwojenia wspólnego,
 K_S — pojemność wzdlużna uzwojenia szeregowego,
 K_R — pojemność wzdlużna uzwojenia regulacyjnego

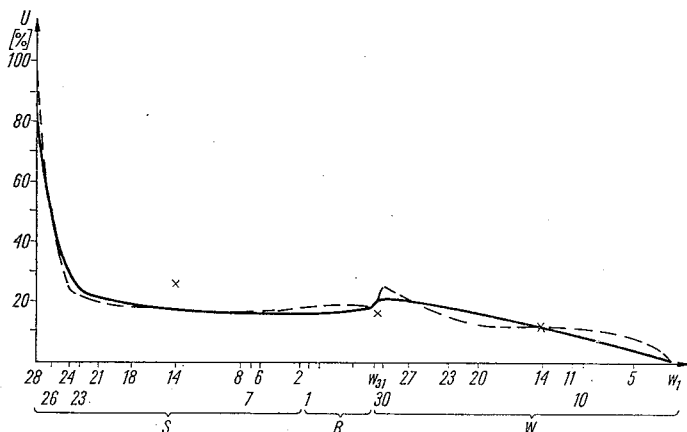
Dla wyznaczania β_{ik} za pomocą wzorów (6), (12) i (15) lub z wykresu na rys. 13, trzeba obliczyć α_{ik} , które jest w tym przypadku wielkością umowną, równą: $\alpha_{ik} = \sqrt{\frac{C_{ik}}{K_{ik}}}$.

Jak widać z rys. 13, dla uzwojeń o małych α_{ik} wartość β_{ik} nie ma istotnego wpływu na wyniki obliczeń $U_{0,5}$. Można bez popełnienia istotnego błędu stosować bądź $\beta_{ik} = 0,5$, bądź 1. Dla uzwojeń o dużych α_{ik} współczynnik β_{ik} winien być obliczany.

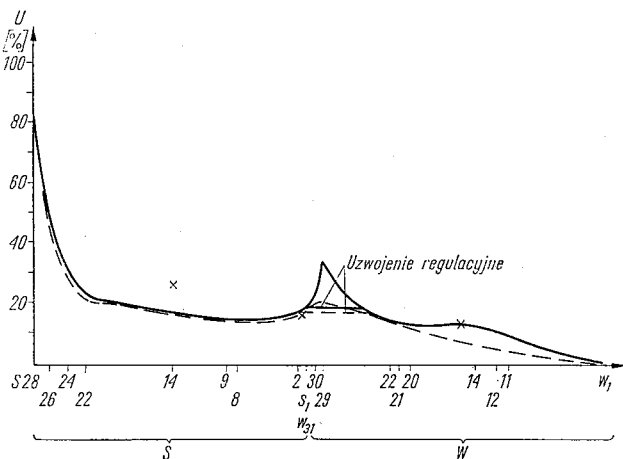
Opisaną wyżej metodę doboru schematu pojemności można znacznie uprościć posługując się wybiórczo tylko dwoma wartościami współczynnika β : $\beta = 0,5$ i $\beta = 1$.

Wartość $\beta = 0,5$ odpowiada zwyczajowi stosowanemu dotychczas ogólnie do konstruowania obwodu o stałych skupionych przy obliczeniach na maszynach cyfrowych. Alternatywne wprowadzenie wartości $\beta = 1$ pozwala na bardzo istotną korekturę schematów o sta-

łych skupionych i, jak zostało stwierdzone w rozwiązaniach praktycznych, daje dostateczną zgodność z pomiarem (znacznie lepszą niż obliczenia wykonane przy pomocy maszyn cyfrowych, lecz oparte na uniwersalnym stosowaniu współczynnika $\beta = 0,5$).



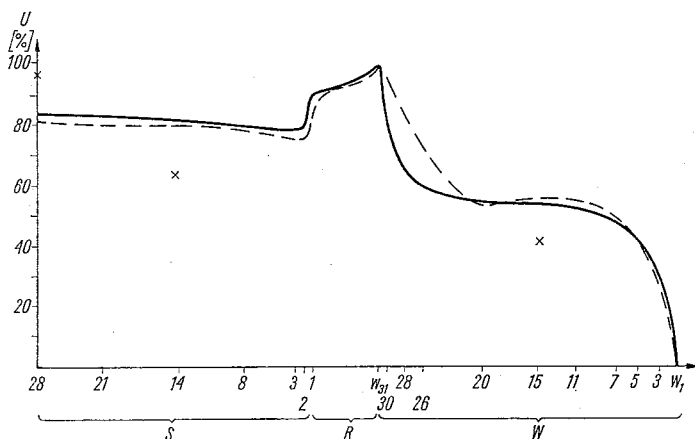
Rys. 16. Rozkład „początkowy” przy doprowadzeniu uderu do zacisków liniowych uzwojenia szeregowego — — — — — pomierzony w położeniu przełącznika zaczepów 1, ————— pomierzony w położeniu przełącznika zaczepów 27, x — punkty otrzymane z obliczeń, S — uzwojenie szeregowe, R — uzwojenie regulacyjne, W — uzwojenie wspólne



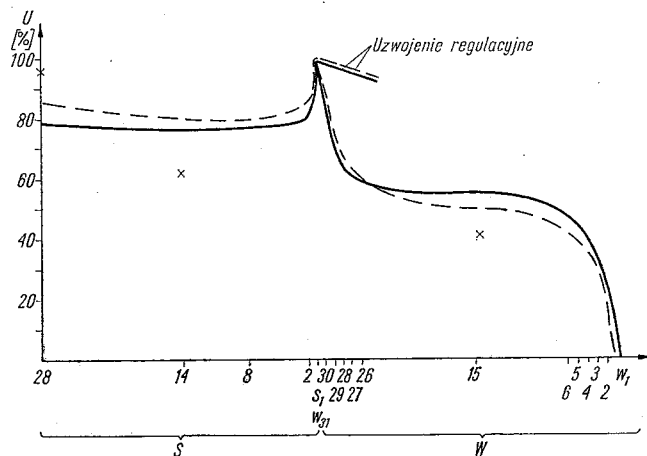
Rys. 17. Rozkład „początkowy” przy doprowadzeniu uderu do zacisków liniowych uzwojenia szeregowego — — — — — pomierzony w położeniu przełącznika zaczepów 14(1), ————— pomierzony w położeniu przełącznika zaczepów 14(27), x — punkty otrzymane z obliczeń S — uzwojenie szeregowe, W — uzwojenie wspólne

Zwraca uwagę (patrz rys. 13), że przy przyjętej metodzie obliczania współczynnik β może przyjmować wartości większe od 1, co oznacza, że przyjmując $\beta = 1$ dopuszczamy dość znaczny błąd względny w określaniu położenia środka uzwojenia, lecz błąd ten odnosi się w danym przypadku do bardzo małych bezwzględnych wartości początkowych środka uzwojenia. Wartości $\beta = 1$ występują przy dużych wartościach współczynnika α .

Już dla $\alpha = 6$ wartość napięcia początkowego wynosi zaledwie 5% wartości uderu przyłożonego. Nie ma więc potrzeby stosowania w schemacie dwuczęściowym współczynnika $\beta > 1$.



Rys. 18. Rozkład „początkowy” przy doprowadzeniu uderu do zacisków liniowych uzwojenia wspólnego
 - - - - - pomierzony w położeniu przełącznika zaczepów 1, ————— pomierzony w położeniu przełącznika zaczepów 27,
 x — punkty otrzymane z obliczeń, S — uzwojenie szeregowe, R — uzwojenie regulacyjne, W — uzwojenie wspólne



Rys. 19. Rozkład „początkowy” przy doprowadzeniu uderu do zacisków liniowych uzwojenia wspólnego
 - - - - - pomierzony w położeniu przełącznika zaczepów 14(1), ————— pomierzony w położeniu przełącznika zaczepów 14(27),
 x — punkty otrzymane z obliczeń, S — uzwojenie szeregowe, W — uzwojenie wspólne

Weryfikację podanych wyżej rozważań przeprowadzono na przykładzie autotransformatora zawierającego cztery uzwojenia i ekran usytuowane i połączone zgodnie z rysunkiem 2a i 2b. Zbudowano siatkę pojemności według wyżej podanej metody. Przyjęto: $\beta_{WZ} = 0,5$; $\beta_{WS} = 1$; $\beta_{SR} = 0,5$; $\beta_{RE} = 0,5$ (indeksy odnoszą się: W — do uzwojenia

wspólnego, S — do uzwojenia szeregowego, R — do uzwojenia regulacyjnego, E — ekranu, Z — ziemi).

Otrzymałą siatkę przedstawiono na rys. 15.

Obliczono napięcia rozkładu „początkowego” w węzłowych punktach schematu dwuczęściowego dla wymienionego autotransformatora zarówno przy doprowadzeniu udaru do zacisków liniowych uzwojenia szeregowego jak i wspólnego.

Na rys. 16÷19 przedstawiono pomierzone „rozkłady początkowe”. Na wykresy naniesiono napięcia „początkowe” obliczone wyżej opisaną metodą.

Przykład ten wykazał, że nawet dla autotransformatorów o skomplikowanej budowie uzwojeń, posiadających ponadto ekrany, można w bardzo prosty sposób obliczyć (z dokładnością wystarczającą dla wstępnych obliczeń konstruktorskich) napięcia „rozkładu początkowego” w węzłowych punktach uzwojenia.

Posiadając wyznaczony „rozkład początkowy” i „końcowy” galwanicznie ze sobą połączonych uzwojeń autotransformatora można wnioskować o stopniu zagrożenia izolacji wzdłużnej poszczególnych jego uzwojeń bądź bezpośrednio, tj. z zagrożeń odniesionych do chwili doprowadzenia udaru, bądź pośrednio — badając przebiegi wyrównawcze (oscylacje) między rozkładami „początkowym” i „końcowym”.

3.3. Oscylacje napięcia na krańcach uzwojeń

3.3.1. Obliczanie amplitud i częstotliwości oscylacji

Jednym z najtrudniejszych problemów przy obliczaniu transformatorów wielouzwojeniowych jest wyznaczanie przebiegów udarowych w węzłowych punktach, którymi są początki i końce poszczególnych uzwojeń. Wyznaczenie tych przebiegów jest niezbędne przy obliczaniu izolacji głównej uzwojeń (międzyuzwojeniowej i jarzmowej). Konstruktora interesują prawie wyłącznie wartości szczytowe napięć na tych układach izolacyjnych. Przybliżone wartości szczytowe można oszacować znając rozkład „końcowy”, którego wyznaczenie jest problemem prostym, i amplitudę oscylacji w poszczególnych węzłach.

W rozdziale niniejszym rozpatrzono ten problem na konkretnym przykładzie autotransformatora regulacyjnego opisanego w p.2. Pełny schemat sprzężeń pojemnościowych i indukcyjnych rozłożono w tym celu na dwa schematy uproszczone, z których każdy pozwalał na przybliżone obliczanie amplitud i podstawowej częstotliwości oscylacji między krańcami dwóch uzwojeń.

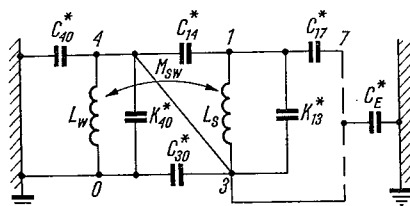
Obliczanie częstotliwości oscylacji podstawowych harmonicznnych jest wprawdzie z punktu widzenia konstruktora problemem mniej interesującym, niemniej jednak wydaje się, że częstotliwość oscylacji w znacznie większym stopniu niż amplituda charakteryzuje fizyczny przebieg zjawiska, stanowi zatem bezcenny wskaźnik przy porównaniu obliczeń z pomiarami.

Przeprowadzenie uproszczonych obliczeń amplitud i częstotliwości oscylacji, przy uwzględnieniu w schemacie wszystkich uzwojeń, jest praktycznie niemożliwe bez zastosowania maszyn matematycznych ze względu na liczbę i stopień otrzymywanych równań.

3.3.2. Schemat zastępczy eliminujący uzwojenie regulacyjne

Uzwojenie regulacyjne rozpatrywanego autotransformatora podzielone jest na cztery grupy równoległe. Każda sąsiednia grupa nawijana jest w przeciwnym kierunku. W tym układzie, jak widać to z rysunku 2b, górny, dolny oraz środkowy punkt uzwojenia regulacyjnego mają ten sam potencjał i są połączone galwanicznie z górnym końcem uzwojenia wspólnego. Przebiegi w pozostałych punktach uzwojenia regulacyjnego też „powtarzają” się czterokrotnie na jego wysokości.

Oddziaływanie tak zbudowanego uzwojenia na uzwojenia sąsiednie można zastąpić oddziaływaniem ekranu o stałym potencjale. Na rys. 20 przedstawiono schemat zastępczy



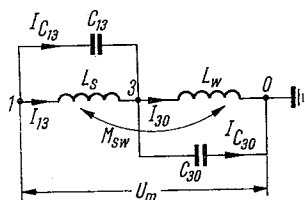
Rys. 20. Schemat zastępczy uzwojenia szeregowego i wspólnego autotransformatora
1—3 — uzwojenie szeregowe, 4—0 — uzwojenie wspólne,

uzwojeń autotransformatora w położeniu przełącznika zaczeów 14(1)¹⁾ (rys. 7) zastępując uzwojenie regulacyjne przez ekran o stałym potencjale dołączony do początku uzwojenia wspólnego.

Na rys. 21 przedstawiono ten schemat w postaci „zwinętej”, łatwiejszej do obliczeń. Udar doprowadzono do uzwojenia szeregowego. Pojemności z rys. 21 odpowiadają pojemnościom z rys. 20 według poniższych zależności:

$$C_{13} = K_{13}^* + C_{17}^* + C_{14}^*,$$

$$C_{30} = C_{40}^* + C_{30}^* + C_E^* + K_{40}^*$$



Rys. 21. „Zwinęty” schemat uzwojenia z rys. 20 przy doprowadzeniu udaru do uzwojenia szeregowego
 U_m — wartość maksymalna doprowadzonego udaru, J_{ik} — prąd płynący przez pojemność C_{ik} , J_{ik} — prąd płynący przez indukcyjność uzwojenia $i-k$, C_{ik} — pojemność zastępcza między punktami $i-k$, L_s — indukcyjność własna uzwojenia szeregowego, L_w — indukcyjność własna uzwojenia wspólnego, M_{sw} — indukcyjność wzajemna między uzwojeniem wspólnym i szeregowym

¹⁾ Oznaczenia położenia przełącznika zaczeów są podane na rys. 7 i odpowiadają oznaczeniom stosowanym przez wytwórnictwo na napędzie przełącznika.

Rozwiązując układ równań ułożony dla tego schematu otrzymano następujące zależności:

$$u_{13} = U_m \left[\frac{L_S + M_{SW}}{L_S + L_W + 2M_{SW}} + \left(\frac{C_{30}}{C_{13} + C_{30}} - \frac{L_S + M_{SW}}{L_S + L_W + 2M_{SW}} \right) \cos \omega t \right], \quad (18)$$

$$u_{30} = U_m \left[\frac{L_W + M_{SW}}{L_S + L_W + 2M_{SW}} + \left(\frac{C_{13}}{C_{13} + C_{30}} - \frac{L_W + M_{SW}}{L_S + L_W + 2M_{SW}} \right) \cos \omega t \right], \quad (19)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{L_W + L_S + 2M_{SW}}{(C_{13} + C_{30})(L_S L_W - M_{SW}^2)}}. \quad (20)$$

Równanie (18) przedstawia oscylacje w uzwojeniu szeregowym, dla których rozkład końcowy $u \cdot \frac{L_S + M_{SW}}{L_S + L_W + 2M_{SW}}$ jest osią.

Analogicznie równanie (19) przedstawia oscylacje w uzwojeniu wspólnym, dla których rozkład końcowy $u \cdot \frac{L_W + M_{SW}}{L_S + L_W + 2M_{SW}}$ jest osią.

W każdym z uzwojeń przebieg składa się z dwóch składników: napięcia przeniesionego pojemnościowo: $U_m \frac{C_{30}}{C_{13} + C_{30}} \cos \omega t$ dla uzwojenia szeregowego i $U_m \frac{C_{13}}{C_{30} + C_{13}} \cos \omega t$ dla uzwojenia wspólnego oraz napięcia indukowanego: $U_m \frac{L_S + M_{SW}}{L_S + L_W + 2M_{SW}} (1 - \cos \omega t)$ w uzwojeniu szeregowym i $U_m \frac{L_W + M_{SW}}{L_S + L_W + 2M_{SW}} (1 - \cos \omega t)$ w uzwojeniu wspólnym.

Napięcia u_{13} i u_{30} osiągają ekstrema dla czasów $t_1 = 0$ i $t_2 = \frac{\pi}{\omega}$. Pierwsze ekstremum występuje na początku przebiegu, następne po połowie okresu oscylacji:

$$U_{13(0)} = \frac{C_{30}}{C_{13} + C_{30}} U_m, \quad (21)$$

$$U_{30(0)} = \frac{C_{13}}{C_{13} + C_{30}} U_m, \quad (22)$$

$$U_{13}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = \left(2 \frac{L_S + M_{SW}}{L_S + L_W + 2M_{SW}} - \frac{C_{30}}{C_{13} + C_{30}} \right) U_m, \quad (23)$$

$$U_{30}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = \left(2 \frac{L_W + M_{SW}}{L_S + L_W + 2M_{SW}} - \frac{C_{13}}{C_{13} + C_{30}} \right) U_m. \quad (24)$$

Podstawowe harmoniczne obydwóch uzwojeń drgają z tą samą pulsacją ω , daną wzorem (20).

Na rys. 22 pokazano „zwinięty” schemat uzwojeń z rys. 20 przy doprowadzeniu udaru do uzwojenia wspólnego. Rozwiązując układ równań dla tego przypadku otrzymano następujące zależności:

$$u_{30} = U_m, \quad (25)$$

$$u_{13} = U_m \left[\frac{L_S + M_{SW}}{L_W + M_{SW}} + \left(\frac{C_{30}}{C_{13}} - \frac{L_S + M_{SW}}{L_W + M_{SW}} \right) \cos \omega t \right], \quad (26)$$

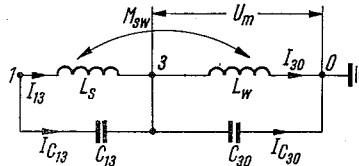
$$\omega = \sqrt{\frac{L_W + M_{SW}}{(L_S L_W - M_{SW}^2) C_{13}}}. \quad (27)$$

Odpowiednie ekstrema napięcia u_{13} dla czasu $t_1 = 0$ wynoszą:

$$U_{13(0)} = \frac{C_{30}}{C_{13}} U_m, \quad (28)$$

a dla czasu $t_2 = \frac{\pi}{\omega}$

$$U_{13}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = \left(2 \frac{L_s + M_{SW}}{L_w + M_{SW}} - \frac{C_{30}}{C_{13}}\right) U_m. \quad (29)$$

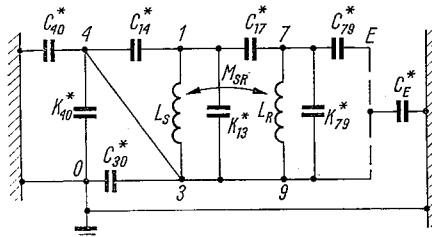


Rys. 22. „Zwinięty” schemat uzwojenia z rys. 20 przy doprowadzeniu uderu do uzwojenia wspólnego
Oznaczenia jak na rys. 21

3.3.3. Schemat zastępczy eliminujący uzwojenie wspólne

W niniejszym punkcie zbudowano schemat mający na celu umożliwienie znalezienia przebiegów w uzwojeniu regulacyjnym.

Uzwojenie regulacyjne znajduje się na zewnątrz uzwojenia szeregowego i jest tym ostatnim ekranowane od uzwojenia wspólnego. Indukcyjność wzajemna między uzwojeniem regulacyjnym a wspólnym jest przy takim rozmieszczeniu uzwojeń przynajmniej o rząd wielkości mniejsza od indukcyjności wzajemnej między sąsiadującymi uzwojeniami: szeregowym i wspólnym. Biorąc to pod uwagę w schemacie zastępczym, mającym odwzorować przebiegi udarowe w uzwojeniu regulacyjnym pomijam sprzężenia indukcyjne między uzwojeniem wspólnym i regulacyjnym. Uzwojenie wspólne odwzorowuję jedynie przez pojemność wzdłużną i doziemną.



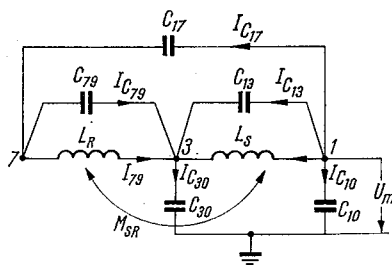
Rys. 23. Schemat zastępczy uzwojenia szeregowego i regulacyjnego autotransformatora
1—3 — uzwojenie szeregowe, 4—0 — uzwojenie wspólne, E — ekran, 7—9 — uzwojenie regulacyjne

Na rys. 23 przedstawiono schemat zastępczy zawierający jedynie uzwojenie szeregowe i regulacyjne w położeniu przełącznika zaczeń 14 (I). Na rys. 24 przedstawiono powyższy schemat w postaci „zwiniętej”. Udar doprowadzono do uzwojenia szeregowego.

Pojemności z rys. 24 odpowiadają pojemnościom z rys. 23 według poniższych zależności: $C_{17} = C_{17}^*$; $C_{13} = K_{13}^* + C_{14}^*$; $C_{30} = K_{40}^* + C_{30}^* + C_{40}^* + C_E^*$; $C_{79} = K_{79}^* + C_{79}^*$. Rozwiązując układ równań ułożonych dla tego przypadku otrzymano następujące zależności:

$$u_{13} = \frac{U_m}{\alpha v + \delta} \left\{ \left[\frac{v \omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} - \frac{L_S}{(L_S L_R - M_{SR}^2)(\omega_1^2 - \omega_2^2)} C_{17} \right] \cos \omega_1 t + \right. \\ \left. - \left[\frac{v \omega_2^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} - \frac{L_S}{(L_S L_R - M_{SR}^2)(\omega_1^2 - \omega_2^2)} C_{17} \right] \cos \omega_2 t \right\}, \quad (30)$$

$$u_{79} = \frac{U_m}{\alpha v + \delta} \left\{ \left[\frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} - \frac{M_{SR}}{C_{17}(L_S L_R - M_{SR}^2)(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \right] \cos \omega_1 t + \right. \\ \left. - \left[\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} - \frac{M_{SR}}{C_{17}(L_S L_R - M_{SR}^2)(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \right] \cos \omega_2 t \right\}, \quad (31)$$



Rys. 24. „Zwinięty” schemat uzwojenia z rys. 23 przy doprowadzeniu uderu do uzwojenia szeregowego

J_{ik} — prąd płynący przez indukcyjność uzwojenia $i-k$, J_{cik} — prąd płynący przez pojemność uzwojenia C_{ik} , C_{ik} — pojemność zastępcza między punktami $i-k$, L_S — indukcyjność własna uzwojenia szeregowego, L_R — indukcyjność własna uzwojenia regulacyjnego, M_{SR} — indukcyjność wzajemna między uzwojeniem szeregowym i regulacyjnym, U_m — wartość maksymalna doprowadzonego uderu

gdzie:

$$\alpha = \frac{C_{13}}{C_{30}} + 1; \quad v = \frac{C_{79}}{C_{17}} + 1; \quad \delta = \frac{C_{79}}{C_{30}}; \quad (32)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}}, \quad (33)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}}, \quad (34)$$

przy czym

$$a = \frac{\left(\frac{1}{C_{17}} \alpha + \frac{1}{C_{30}} \right) L_S - \frac{2}{C_{30}} M_{SR} + \frac{1}{C_{30}} v L_R}{(\alpha v + \delta)(L_S L_R - M_{SR}^2)}, \quad (35)$$

$$b = \frac{1}{C_{30} C_{17} (\alpha v + \delta)(L_S L_R - M_{SR}^2)}. \quad (36)$$

Mianownik wyrażenia (35) można jeszcze przekształcić wykorzystując zależności (32)

$$a = \frac{(C_{13} + C_{30})L_S + (C_{79} + C_{17})L_R - 2C_{17}M_{SR}}{C_{30}C_{17}(\alpha v + \delta)(L_S L_R - M_{SR}^2)} \quad (35/1)$$

Równania (33) ÷ (35) są w ogólnej postaci mało przejrzyste. Celem uproszczenia analizując wyrażenia (35/1) i (36). W autotransformatorach rozpatrywanej budowy pojemności C_{30} , C_{79} i C_{17} są tego samego rzędu. Pojemność C_{13} jest znacznie mniejsza. Indukcyjność uzwojenia szeregowego L_S jest większa o rząd wielkości od indukcyjności uzwojenia regulacyjnego L_R i indukcyjności wzajemnej M_{SR} ; L_R i M_{SR} są tego samego rzędu. Stąd:

$$(C_{13} + C_{30})L_S + (C_{79} + C_{17})L_R - 2C_{17}M_{SR} \approx C_{30}L_S,$$

więc:

$$a \approx \frac{C_{30}L_S}{C_{17}C_{30}} \frac{1}{(\alpha v + \delta)(L_S L_R - M_{SR}^2)}.$$

Wyrażenie a jest $C_{30}L_S$ razy większe od wyrażenia b . Przyjmując w równaniach (33) i (34) $a \gg b$ otrzymamy:

$$\omega_2 \approx \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{(C_{13} + C_{30})L_S + (C_{79} + C_{17})L_R - 2C_{17}M_{SR}}{C_{30}C_{17}(\alpha v + \delta)(L_S L_R - M_{SR}^2)}}, \quad (37)$$

$$\omega_1 \approx \sqrt{a} = \sqrt{\frac{1}{(C_{13} + C_{30})L_S + (C_{79} + C_{17})L_R - 2C_{17}M_{SR}}}, \quad (38)$$

lub inną postać:

$$\omega_2 = \sqrt{a} = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{C_{17}}\alpha + \frac{1}{C_{30}}\right)L_S - \frac{2}{C_{30}}M_{SR} + \frac{1}{C_{30}}vL_R}{(\alpha v + \delta)(L_S L_R - M_{SR}^2)}}. \quad (37/1)$$

Poza tym $\omega_1 < \omega_2$, a więc $\omega_1^2 \ll \omega_2^2$;
stąd:

$$\omega_1^2 - \omega_2^2 \approx -\omega_2^2, \\ \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \approx 0; \quad \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \approx -1.$$

Równania (30) i (31) przyjmują zatem postać:

$$u_{13} = U_m \left\{ \frac{v}{\alpha v + \delta} \cos \omega_2 t + \frac{L_S}{C_{17} \left[\left(\frac{1}{C_{17}}\alpha + \frac{1}{C_{30}} \right) L_S - \frac{2}{C_{30}} M_{SR} + \frac{1}{C_{30}} v L_R \right]} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \right\} \quad (30/1)$$

$$u_{79} = U_m \left\{ \frac{1}{\alpha v + \delta} \cos \omega_2 t + \frac{M_{SR}}{C_{17} \left[\left(\frac{1}{C_{17}}\alpha + \frac{1}{C_{30}} \right) L_S - \frac{2}{C_{30}} M_{SR} + \frac{1}{C_{30}} v L_R \right]} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \right\}. \quad (31/1)$$

Równania (30/1) i (31/1) przedstawiają oscylacje uzwojeń z niską częstotliwością ω_1 i nakładającą się na nią znacznie wyższą częstotliwością ω_2 . Wobec różnicy o kilka rzędów wielkości między ω_1 i ω_2 oraz krótkich okresów, w których rozpatruje się oscylacje uzwojeń można przyjąć $\omega_1 \approx 0$ i $\cos \omega_1 t \approx 1$. Wtedy:

$$u_{13} = U_m \left\{ \frac{L_S}{C_{17} \left[\left(\frac{1}{C_{17}} \alpha + \frac{1}{C_{30}} \right) L_S - \frac{2}{C_{30}} M_{SR} + \frac{1}{C_{30}} v L_R \right]} + \right. \\ \left. + \left[\frac{v}{\alpha v + \delta} - \frac{L_S}{C_{17} \left[\left(\frac{1}{C_{17}} \alpha + \frac{1}{C_{30}} \right) L_S - \frac{2}{C_{30}} M_{SR} + \frac{1}{C_{30}} v L_R \right]} \right] \cos \omega_2 t \right\}, \quad (30/2)$$

$$u_{79} = U_m \left\{ \frac{M_{SR}}{C_{17} \left[\left(\frac{1}{C_{17}} \alpha + \frac{1}{C_{30}} \right) L_S - \frac{2}{C_{30}} M_{SR} + \frac{1}{C_{30}} v L_R \right]} + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{\alpha v + \delta} - \frac{M_{SR}}{C_{17} \left[\left(\frac{1}{C_{17}} \alpha + \frac{1}{C_{30}} \right) L_S - \frac{2}{C_{30}} M_{SR} + \frac{1}{C_{30}} v L_R \right]} \right] \cos \omega_2 t \right\}. \quad (31/2)$$

Równania (30/2) i (31/2) mają postać analogiczną do równań (18) i (19) z p. 3.3.2.

Napięcia u_{13} i u_{79} osiągają ekstrema dla czasów $t_1 = 0$ i $t_2 = \frac{\pi}{\omega}$. Pierwsze ekstremum występuje na początku przebiegu, a następnie po połowie okresu oscylacji z pulsacją ω_2 :

$$U_{13(0)} = U_m \frac{v}{\alpha v + \delta}, \quad (39)$$

$$U_{79(0)} = U_m \frac{1}{\alpha v + \delta}, \quad (40)$$

$$U_{13}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = U_m \left\{ \frac{2L_S}{C_{17} \left[\left(\frac{1}{C_{17}} \alpha + \frac{1}{C_{30}} \right) L_S - \frac{2}{C_{30}} M_{SR} + \frac{1}{C_{30}} v L_R \right]} - \frac{v}{\alpha v + \delta} \right\}, \quad (41)$$

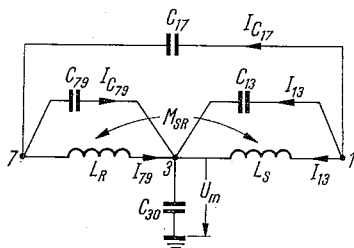
$$U_{79}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = U_m \left\{ \frac{2M_{SR}}{C_{17} \left[\left(\frac{1}{C_{17}} \alpha + \frac{1}{C_{30}} \right) L_S - \frac{2}{C_{30}} M_{SR} + \frac{1}{C_{30}} v L_R \right]} - \frac{1}{\alpha v + \delta} \right\}. \quad (42)$$

Podstawowe harmoniczne obydwu uzwojeń oscylują z tą samą pulsacją ω_2 daną wzorem (37/1).

Na rys. 25 pokazano „zwinięty” schemat uzwojeń z rys. 23 przy doprowadzeniu udaru do uzwojenia wspólnego. Bez uwzględnienia pojemności doziemnych punktów 7 i 1 układ ten nie będzie oscylował.

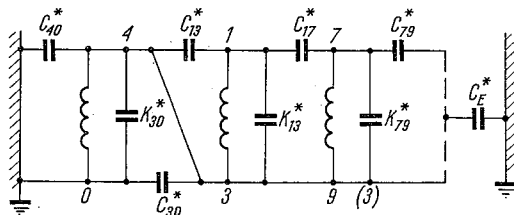
Celem znalezienia pojemności doziemnych punktów 7 i 1 należy przeanalizować pełen schemat autotransformatora przedstawiony w rozpatrywanym położeniu przełącznika zaczepów 14 (1) na rys. 26.

Jak widać z rys. 26 punkt 1 (koniec uzwojenia szeregowego) schematu jest ekranowany od ziemi z jednej strony uzwojeniem wspólnym, a z drugiej strony uzwojeniem regulacyjnym. Punkt 7 jest związany pojemnością C_{79}^* z punktem 9, to znaczy z ekranem, a dopiero punkt 9 (ekran) jest związany pojemnościowo z ziemią. Punkty 7 są związane pojemnościowo z ziemią jedynie przez pojemność pierścienia potencjalnego do jarzma. Pojemność ta jest jednak pomijalnie mała. Stąd wynika wniosek, że układ z rysunku 25 nie będzie miał własnych oscylacji przy doprowadzeniu napięcia między punkt 3 i ziemię.



Rys. 25. „Zwinięty” schemat uzwojenia z rys. 23 przy doprowadzeniu uderu do uzwojenia wspólnego. Oznaczenia jak na rys. 24

W ekranowanym z jednej strony uzwojeniem szeregowym, z drugiej strony ekranem, uzwojeniu regulacyjnym nie wytworzą się oscylacje własne. Punkty 7 i 9 przyjmują potencjały równe potencjałowi punktu 3, czyli napięciu przyłożonemu. Przebiegi oscylacyjne w uzwojeniu regulacyjnym 7 ÷ 9 powstaną natomiast na skutek przeniesienia się zarówno



Rys. 26. Schemat zastępczy autotransformatora w położeniu przełącznika zaczepów 14(1)

przez sprzężenia pojemnościowe, jak i magnetyczne przebiegów wytworzonych w sąsiadującym uzwojeniu szeregowym.

Odpowiada to przyjęciu w schemacie z rys. 25 znanego napięcia u_{13} na zaciskach uzwojenia szeregowego. Rozwiązując układ równań dla wymienionego przypadku otrzymano następujące zależności:

$$u_{79} = u_{13} \left[\frac{M_{SR}}{L_S} + \left(\frac{1}{v} - \frac{M_{SR}}{L_S} \right) \cos \omega_R t \right], \quad (43)$$

$$\omega_R = \sqrt{\frac{L_S}{C_{17} v (L_S L_R - M_{SR}^2)}}. \quad (44)$$

Napięcie uzwojenia szeregowego u_{13} znaleziono w p. 3.3.2 i dane jest równaniem (26), a częstotliwości oscylacji tegoż uzwojenia równaniem (27).

Równanie (43) przedstawia oscylacje uzwojenia regulacyjnego o częstotliwości ω_R nakładające się na oscylacje o częstotliwości oscylacji własnych uzwojenia szeregowego.

Amplitudy i częstotliwości oscylacji obliczono dla autotransformatora 100 MVA; 230/120 kV rozpatrywanego w niniejszej pracy.

W tablicy 2 zestawiono wyniki pomiarów z wynikami obliczeń.

Tablica 2

Zestawienie pomierzonych i obliczonych amplitud i okresów oscylacji w uzwojeniach autotransformatora
Położenie przełącznika zaczepów 14(1)

Porównywana wielkość	udar doprowadzony do uzwojenia			
	szeregowego		wspólnego	
	wartość		wartość	
	pomierzona	obliczona	pomierzona	obliczona
a) uzwojenie szeregowe $\frac{u_{13 \max}}{U_m}$	0,79	0,754	1,21	1,5
$T(\mu s)$	188	215	276	244
b) uzwojenie wspólne $\frac{u_{30 \max}}{U_m}$	0,445	0,445	1	1
$T(\mu s)$	188	215	—	—
c) uzwojenie regulacyjne $\frac{u_{79 \max}}{U_m}$	0,29	0,204	0,335	0,46
$T(\mu s)$	156	135	288	124/244*)

*) $T_R = 124 \mu s$; $T_S = 244 \mu s$.

Największa różnica między amplitudą obliczoną a pomierzoną występuje dla uzwojenia regulacyjnego i wynosi ok. 35% amplitudy pomierzonej.

Dla uzwojenia wspólnego otrzymano daleko idącą zgodność. Dla uzwojenia szeregowego przy doprowadzeniu udaru do zacisków liniowych uzwojenia wspólnego różnica wynosi 24%, a przy doprowadzeniu udaru do zacisków liniowych uzwojenia szeregowego 4,5%. Różnice między pomierzonymi a obliczonymi okresami częstotliwości oscylacji podstawowej harmonicznej są mniejsze i zawierają się w granicach od 12% do 15%. Otrzymana z obliczeń zgodność okresów oscylacji poszczególnych uzwojeń z wartościami pomierzonymi pozwala wnioskować, że uproszczenia poczynione w schematach zastępczych nie zniekształciły w zasadniczy sposób zjawisk w uzwojeniach.

Przy obliczeniach amplitud nie uwzględniono tłumienia oraz kształtu udaru. Obydwa czynniki wpływają zmniejszająco na amplitudy oscylacji. Należało zatem oczekiwać, że amplitudy otrzymane z obliczeń będą większe od pomierzonych. Jak widać z tablicy 2 — tak jest istotnie.

Wyjątek stanowi amplituda oscylacji w uzwojeniu regulacyjnym, której wartość obliczana przy doprowadzeniu udaru do zacisków uzwojenia szeregowego wypadła o ok. 35% mniejsza od pomierzonej. Występujące w tym przypadku duże różnice spowodowane są między innymi podziałem uzwojenia regulacyjnego na cztery grupy równoległe (patrz rys. 2). Skomplikowane tym podziałem sprzężenia magnetyczne i pojemnościowe trzeba było w obliczeniach przybliżonych zastąpić pewną wartością średnią.

Można zatem uznać, że wykazano na konkretnym, bardzo trudnym przykładzie, iż — zależnie od geometrycznej sytuacji rozpatrywanego uzwojenia oraz od struktury i wewnętrznych połączeń — można eliminować ze schematu zastępczego niektóre uzwojenia słabo z nim sprzężone, zastępując je ekranem lub stałymi skupionymi.

Stosowana metoda rozwiązywania schematów zastępczych jest w zasadzie metodą klasyczną. Istotnym postępem uzyskanym w niniejszej pracy jest wskazanie sposobu postępowania przy kolejnym upraszczaniu schematów sprzężeń pojemnościowych i magnetycznych transformatorów wielouzwojeniowych.

4. UWAGI KOŃCOWE

Próba udarowa autotransformatora regulacyjnego, którego uzwojenia regulacyjne chronione są odgromnikami „wewnętrznymi”, nie może być wykonywana przy niezabezpieczonych uzwojeniach regulacyjnych ze względu na możliwość uszkodzenia izolacji tych uzwojeń. Próby tej również nie powinno przeprowadzić się przy zwartych uzwojeniach regulacyjnych, gdyż nie są wtedy prawidłowo odtworzone zagrożenia uzwojeń regulacyjnych występujące w eksploatacji.

Zaproponowany przez autora niniejszej pracy schemat próby udarowej autotransformatorów, w którym uzwojenia regulacyjne zwarte są przez odpowiednio dobrany opornik pozwala na poprawne odtworzenie z punktu widzenia przepięć przy próbie udarowej rzeczywistych warunków pracy autotransformatora w sieci elektro-energetycznej.

Symetryczny podział pojemności w schemacie typu „E” (rys. 9), stosowany na ogół przy zastępowaniu stałych rozłożonych transformatora przez stałe skupione, nie jest podziałem optymalnym i w wielu przypadkach nie pozwala na rzetelne wyznaczenie rozkładu początkowego.

Autor opracował nową metodę doboru pojemności skupionych w dwuczęściowym schemacie transformatora opartą na założeniach wiernego odtworzenia napięcia środkowego punktu uzwojenia, zastąpienia pojemności wzdlużnych przez dwie równe pojemności szeregowo, spełnienia warunku, by suma pojemności doziemnych modelu równała się pojemności doziemnej oryginału.

Przy umiejętnym stosowaniu uproszczonych schematów o stałych skupionych można wyznaczyć z dostateczną (dla wstępnej oceny zjawisk) dokładnością wartość szczytową i częstotliwość oscylacji w poszczególnych uzwojeniach. Stosowanie zaprojektowanych, uproszczonych metod obliczania przebiegów udarowych w transformatorach może być bardzo użyteczne, szczególnie w pierwszej fazie projektowania.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. Rosicki, Metody obliczania i sprawdzania wytrzymałości udarowej autotransformatorów regulacyjnych chronionych odgromnikami „wewnętrznymi”, Rozprawa doktorska przeprowadzona na Wydziale Elektrycznym Politechniki Łódzkiej w 1971 r.
2. W. R a b u s, Problèmes relatifs aux enroulementsserie d'autotransformateurs soumis a des tensions de choc et protégés par des parafouders monté en parallèle, CIGRE, Referat 108, 1960.

3. W. Rabus, Der Überspannungsschutz von Mittel- und Großtransformatoren, Technische Mitteilungen AEG-Telefunken, 59 (1969), 2, s. 138—143.
4. J. Müller, 300 kV-Längs- und 132 kV-Querregeltransformatoren für Südastralien, Elin-Zeitschrift, 1960, z. 2.
5. J. Drabeck, R. Kuchler, K. Schlosser, Die 380-kV-Transformatoren in Rommerskirchen und Hoheneck, ETZ-A, 7/1958.
6. J. Tournier, Autotransformateurs à 500 kV avec dispositif de réglage en charge incorpore, Rev. Gen. de El., nr 1/1962, s. 19.
7. W. Pagostin, Wybor naprężenia gaszenia razriadnikow zaszciszczajuszczich regulirowocznyje obmotki wysokowoltnych awtotransformatorow, Elektrotechnicheskaja Promyslennost, 1969, s. 16—21.
8. W. Rabus, Anordnung zur Stoßprüfung eines Spartransformators, dessen Zusatzwicklung durch einen Überspannungsableiter geschützt ist, DBP 965258, z. 4. 3, 1955.
9. W. Auth, Stoßspannungsprüfung der mit einem Parallelableiter geschützten Reihenumwicklung von Spartransformatoren, ETZ-A, nr 120, 1961.
10. P. A. Abetti, H. B. Belck, Long Time — Scale Models of Transformers for the Determination of Transient Voltages, Trans. AIEE (1954), t. III, s. 345.
11. W. Dudek, R. Jarzabek, W. Stan, Pomiary przepięć uderowych w autotransformatorach RTd×P 125000/200; 160/160/50 MVA, $230 \pm 12 \times 1$, 01%/120/10,5 kV uzyskane z elektromagnetycznego modelu miniaturowego, IEL-TWN, dokumentacja techniczna nr 92/66.
12. E. Jezierski, Transformatory. Podstawy teoretyczne, wyd. III, WNT, 1965.
13. PN/63/E-04062 — Transformatory. Próby wytrzymałości elektrycznej.
14. Panow, Rekomendacji po izmienienu technicheskich instrukcji maskowskovo elektrozawoda T.J. 422. 1 i T.J. 422. 1, Otczet 3864-01.
15. J. F. Whirter, C. D. Fahrnkopf, J. M. Steele, Determination of Impulse Stresses Within Transformer Windings by Computers, AIEE Trans., 75, t. III (1956), 1267.
16. W. Lech, Obliczanie przepięć uderowych w transformatorach przy zastosowaniu matematycznych maszynki cyfrowych, Postępy Techniki Wysokich Napięć, 1965, z. 4.
17. G. Preininger, Die Übertragung von Stoßspannungen in Transformatoren, Praca niepublikowana.
18. Z. Hasterman, Przebiegi uderowe w transformatorach, PWT, 1960.
19. M. Wellauer, Das Verhalten von Regulierspartransformatoren gegenüber Stoßspannungen, Bull. Schw. El. Ver., tom 46, 1955, nr 6.
20. Praca zbiorowa IEL-TWN, Zagadnienia izolacyjne w transformatorach, Skrypt wyd. IEL, Warszawa 1960.
21. L. V. Bewley, Travelling Waves on Transmission Systems, New York 1951

A. ROSICKI

SURGE MEASUREMENTS ON A MODEL AND CALCULATIONS OF SURGES IN IMPULSE TEST CONDITION OF THE REGULATING AUTOTRANSFORMER 100 MVA; 220/110 kV

Summary

The paper describes the correct method of carrying out the impulse test on H.V. power autotransformers with regulating windings protected by parallel lightning arresters.

The new method of determination by calculating the initial voltage distribution in two-element equivalent circuit of the multi-winding autotransformer is given. The paper contains an example of solving the problem of simplifying the equivalent circuits of the multi-winding autotransformers for rough estimation of magnitudes and frequency of oscillations in each winding.

The calculations and conclusions have been verified on an electromagnetic model.

A. ROSICKI

MESURAGES DE MODEL ET CALCULES DES SURTENSIONS DES ESSAIS AUX ONDES
DE CHOC D'AUTOTRANSFORMATEUR DE REGLAGE 100 MVA; 220/110 kV

Résumé

Dans ce travail on a présenté une proposition vérifiée de la réalisation des essais aux ondes de choc des autotransformateurs avec les enroulements de commande assurés par les parafoudres „intérieurs”. On a aussi donné une méthode nouvelle du calcul de la distribution de la tension „initiale” au schéma biparti équivalent dans l'autotransformateur avec les enroulements multiples. Comme exemple on a montré le moyen de la simplification des schémas équivalents des ces autotransformateurs pour le calcul approximatif des amplitudes et des fréquences de l'oscillation dans les enroulements particuliers. Les calculs et les conclusion sont vérifiés sur le modèle électromagnétique.

A. ROSICKI

MODELLMESSUNGEN UND ÜBERSPANNUNGSBERECHNUNGEN BEI
STOßSPANNUNGSPRÜFUNGEN DES REGULAUTOTRANSFORMATORS 100 MVA; 220/110 kV

Zusammenfassung

Hochspannungsspartransformatoren finden zurzeit in unseren Netzen immer größere Anwendung. In unseren Transformatorenwerken werden bis jetzt zwei Spartransformatortypen mit Spannungsregelung unter Last, mit Durchgangsleistungen von 100 und 160 MVA und Übersetzung 220/110 kV hergestellt. Die Isolationsprobleme in Spartransformatoren sind schwierig und trotz mehrerer veröffentlichten Arbeiten nicht voll gelöst.

In dieser Arbeit wird die durch einige Transformatorenwerke vorgeschlagene Methode der Stoßspannungsprüfung von Spartransformatoren, deren Regelwicklungen von Parallelableitern geschützt werden, kritisch dargestellt. Es ist dieser Methode ein geprüftes, fehlerfreies Programm der Stoßspannungsprüfung entgegengestellt worden.

Eine neue Berechnungsmethode der Anfangsspannungsverteilung im zweiteiligen Ersatzschema von Mehrwicklungsspartransformatoren ist beschrieben worden.

Es wird auch eine vereinfachte Lösung des Ersatzschemas von Mehrwicklungsspartransformatoren welche für vereinfachte Berechnung der Oszillations- und Frequenzamplituden in jeder Wicklung dient, dargestellt. Die Möglichkeit einer annähernden Beurteilung der Stoßspannungsbeanspruchung der Isolation in Hochspannungstransformatoren während der Projektierung erleichtert die Konstruktionsarbeiten und ermöglicht die richtige Wahl einer korrekten Isolationsanordnung mit vielen Details, welche sehr nahe der endgültigen Fassung liegt. Berechnungen und Schlußfolgerungen sind mit einem elektromagnetischen Abettimodell nachgeprüft worden, und der Parallelableiter mittels einer elektronischen Anordnung ersetzt.

A. РОСИЦКИ

ИЗМЕРЕНИЯ НА МОДЕЛИ И РАСЧЕТ ПЕРЕНАПРЯЖЕНИЙ
ПРИ ВОЛНОВЫХ ИСПЫТАНИЯХ РЕГУЛИРОВОЧНОГО
АВТОТРАНСФОРМАТОРА 100 МВА, 220/110 кВ

Резюме

В труде представлен проверенный метод импульсного испытания автотрансформаторов с регулировочными обмотками снабженными „внутренними” предохранителями. Описан новый метод расчета „начального” распределения напряжения в двухзвеньевой схеме замещения многообмоточного автотрансформатора. В виде примера показан метод упрощения схемы замещения автотрансформатора для приближенного расчета амплитуд и частот осцилляции в частных обмотках. Расчет и заключения проверены на электромагнитной модели.

Metody obliczania pola i parametrów bieźni indukcyjnych silników liniowych

JANUSZ TUROWSKI (ŁÓDŹ)

Instytut Transformatorów, Maszyn i Aparatów Elektrycznych Politechniki Łódzkiej

Otrzymano 20.3.1972

Przedstawiono w skrócie podstawy elektrodynamiki indukcyjnych silników liniowych. Indukcję w szczelinie określono analogicznie jak w konwencjonalnym silniku indukcyjnym. Uwzględniono przy tym możliwość występowania wyższych harmonicznych rozkładu przestrzennego pola wzdłuż i w poprzek bieźni. Na podstawie analizy pola opartej na równaniach Maxwella, wyprowadzono przybliżone wzory na: parametry bieźni (47), (50), (45), prędkość synchroniczną (7), siłę ciągu (51), napięcie magnetyczne w bieźni (52) i przepływ w silnikach liniowych z bieźnią stalową (43).

Podano także sposób przeprowadzania analogicznych obliczeń w silnikach z bieźnią nieferromagnetyczną prostokątną i z bieźnią walcową. Wyjaśniono wpływ skończonej długości twornika na powstawanie nieruchomej w przestrzeni fali oscylującej, która powoduje modulację amplitudy pola biegnącego w szczelinie.

1. WSTĘP

Dzięki prostocie budowy i łatwości obsługi, silniki liniowe budzą coraz szersze zainteresowanie nie tylko w zakresie ich zastosowań w trakcji elektrycznej [2], [6], ale także w układach automatyki i napędu [3]. W zależności od potrzeb i zadań mogą one występować jako trójfazowe, dwufazowe-wykonawcze, a nawet jednofazowe ze zwartą fazą pomocniczą. Możliwe są także różne warianty rozwiązania konstrukcyjnego bieźni i twornika. W silnikach płaskich liniowych i łukowych stosuje się bieźnie masywne lub drabinkowe (klatkowe) z dobrze przewodzącego materiału (Al, Cu). W silnikach liniowych z bieźnią walcową najlepsze wyniki dają bieźnie stalowe, ewentualnie pokryte miedzią lub lekko użłobkowane.

Wspólną cechą omawianych silników jest podobieństwo ich teorii do teorii zwykłego silnika asynchronicznego, wirującego. Specyfika zaś teorii tych maszyn wynika z ruchu posuwistego, niesymetrii obwodu magnetycznego oraz wpływu efektów brzegowych. W każdym przypadku jednym z najważniejszych elementów obliczenia maszyny jest wyznaczenie parametrów bieźni R'_2 , X'_2 , I'_2 , niezbędnych do zbudowania schematu zastępczego i wyznaczenia charakterystyk roboczych. Obliczenia te prowadzi się w oparciu o podstawowe równania i metody elektrodynamiki technicznej [9].

Równanie (1) przedstawia indukcję chwilową pola biegnącego w kierunku osi x_0 z prędkością synchroniczną

$$v_1 = \frac{\omega \tau}{\pi} = 2f\tau. \quad (3)$$

Bieżnia zaś, przy poślizgu s , porusza się względem twornika z prędkością

$$v = v_1(1-s). \quad (4)$$

Np. przy podziałce biegunowej $\tau = 5$ cm i $f = 50$ Hz, $v_1 = 5$ m/s.

Zależność (1) w postaci symbolicznej wyraża się równaniem

$$B_{mz1} = B_{mz1} e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau} x_0\right)}; \quad (1a)$$

ν -ta harmoniczna rozkładu przestrzennego pola w miejscu x_0 na obwodzie twornika zmienia się względem układu x_0, y_0, z_0 według zależności

$$B_{zv} = B_{mzv} \cos\left(\omega t \pm \nu \frac{\pi}{\tau} x_0\right), \quad (5)$$

przy czym

$$\left. \begin{aligned} B_{mzv} &= \left(\sin \frac{\nu \pi}{2}\right) B_{mz1} \cdot \frac{1}{\nu} \frac{\zeta_v}{\zeta_1} = \frac{\mu_0}{2\delta_p} F_{mv}, \\ F_{mv} &= \left(\sin \nu \frac{\pi}{2}\right) \frac{2\sqrt{2}}{\pi \cdot \nu} m_1 \frac{z_1 \zeta_v}{p} I. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Równanie (5) przedstawia pole biegnące z prędkością

$$v_v = \pm \frac{1}{\nu} \frac{\omega \tau}{\pi} = \pm 2f \frac{\tau}{\nu}. \quad (7)$$

Znak „+” w równaniu (5) dotyczy harmonicznych rzędu $\nu = 5, 11, 17, \dots, (6a-1)$; znak „-” dotyczy $\nu = 1, 7, 13, \dots, (6a+1)$; w równaniu (7)

—odwrotnie, $a = 0, 1, 2, 3, \dots$ oraz $\sin \nu \frac{\pi}{2} = \pm 1$.

W zapisie symbolicznym

$$B_{mzv} = B_{mzv} \cdot e^{j\left(\omega t \pm \nu \frac{\pi}{\tau} x_0\right)}. \quad (5a)$$

Przechodząc do układu współrzędnych x, y, z związanego z powierzchnią bieźni należy dokonać zmiany zmiennych przyjmując

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 - vt = x_0 - \frac{\tau}{\pi} \omega t (1-s), \\ x_0 &= x + \frac{\tau}{\pi} \omega t (1-s), \\ y &= y_0 \quad \text{oraz} \quad z = z_0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

tzn.

W nowym układzie współrzędnych x, y, z równania (1) i (5) przybiorą postać

$$B_{z1} = B_{mz1} \cos\left(s\omega t - \frac{\pi}{\tau}x\right), \quad (9)$$

$$\underline{B}_{mz1} = B_{mz1} \cdot e^{j(s\omega t - \frac{\pi}{\tau}x)}, \quad (9a)$$

oraz dla ν -tej harmonicznej

$$B_{zv} = B_{mzv} \cdot \cos\left[(1 \pm \nu \pm s\nu)\omega t \pm \nu \frac{\pi}{\tau}x\right], \quad (10)$$

$$\underline{B}_{mzv} = B_{mzv} \cdot e^{j[(1 \pm \nu \pm s\nu)\omega t \pm \nu \frac{\pi}{\tau}x]}. \quad (10a)$$

Górne znaki w równaniach (9) i (10) dotyczą harmonicznych $\nu = 5, 11, \dots, (6a-1)$; dolne znaki — harmonicznych $\nu = 1, 7, 13, \dots, (6a+1)$.

Prędkość synchroniczna ν -tej harmonicznej wyraża się obecnie wzorem

$$v_v = \mp (1 \pm \nu \mp s\nu) \frac{\omega \tau}{\nu \pi}.$$

Wyrażenia (9) i (10) opisują składowe indukcji prostopadłe do powierzchni bieźni. Mają one taką samą postać zarówno w szczelinie powietrznej, jak i wewnątrz bieźni, z tą różnicą, że wewnątrz bieźni amplituda pola jest tłumiona w miarę wnikania w głąb materiału (por. równanie 30) zmieniając się stopniowo na składową B_x , podczas gdy w obrębie szczeliny powietrznej przyjmuje się zwykle, że składowa H_z jest stała wzdłuż osi z na całej długości szczeliny δ .

Należy podkreślić, że założenie iż składowa H_x w szczelinie nie występuje jest uproszczeniem, ponieważ przy założeniu takim nie będzie spełnione pierwsze równanie Maxwella $\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$. Jeżeli mianowicie [11] dla pewnego punktu w szczelinie przyjmiemy $H_x = 0$ oraz H_z opisane równaniem (1), to nawet dla maszyny nieskończenie szerokiej w kierunku osi y (tzn. $H_y = 0, \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0$) odpowiednie rzuty rotacji wyniosą

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_y H &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{\pi}{\tau} H_{mz1} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau}x_0\right) \\ \text{rot}_x H &= 0 \quad \text{i} \quad \text{rot}_z H = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Oznaczałoby to, że $\text{rot}_y H \neq 0$, podczas gdy prąd w szczelinie nie istnieje i powinno być $\text{rot } \vec{H} = 0$. Warunek ten będzie spełniony tylko wtedy, jeżeli zgodnie z [11] przyjmiemy, że cały prąd wzbudzający twornika przeniesiony jest do szczeliny i rozmieszczony jest w niej równomiernie z gęstością $J_y = J = -\frac{\pi}{\tau} H_{mz1} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau}x_0\right)$ oraz $J_x = J_z = 0$. W przypadku wyższych harmonicznych należy założyć ponadto, że szczelina jest wypełniona także równomiernie nieskończenie cienkimi przewodami, w których płyną wyższe harmoniczne przestrzenne gęstości prądu. Analizę pola w szczelinie przy założeniu, że prąd rozłożony jest na powierzchni twornika w postaci nieskończenie cienkiej warstwy, podano w pracach [4] i [11]. W wielu przypadkach praktycznych wystarczy jednak wyżej podane założenie upraszczające.

2.2. Pole biegnące wewnątrz bieźni

Natężenie pola magnetycznego w bieźni masywnej, w dowolnym punkcie x, y, z , opisują równania Maxwella

$$\text{rot} \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E}, \quad \text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (12)$$

z których przy założeniu $\mu = \text{const}$ otrzymujemy równanie różniczkowe [9]

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Dla składowej $H_{zv} = \frac{1}{\mu} B_{zv}$ przybiera ono postać

$$\nabla^2 H_{zv} = \mu \gamma \frac{\partial H_{zv}}{\partial t}. \quad (13)$$

Wprowadzając (10a) do (13) otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 \underline{H}_{mzv}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{H}_{mzv}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{H}_{mzv}}{\partial z^2} = \alpha_v^2 \underline{H}_{mzv}, \quad (14)$$

przy czym

$$\alpha_v = \sqrt{j(1 \pm \nu \mp s\nu)\omega\mu\gamma} = \sqrt{1 \pm \nu \mp s\nu} \cdot \alpha, \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \sqrt{j\omega\mu\gamma} = (1+j)k = \sqrt{2} k e^{j \frac{\pi}{4}}, \\ k &= \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}, \\ \omega &= 2\pi f. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Dla pierwszej harmonicznej ($\nu = 1$) w równaniu (15) ważne są znaki dolne, więc

$$\alpha_{v=1} = \sqrt{s} \alpha. \quad (15a)$$

Rozwiązanie równania (14) metodą Fouriera [9], przy założeniu okresowego rozkładu pola, prowadzi do wyrażenia w postaci ogólnej

$$\underline{H}_{mzv} = X_n(x) \cdot Y_n(y) \cdot Z_n(z), \quad (17)$$

przy czym

$$\left. \begin{aligned} X_n(x) &= C_{1n} \cos \beta_n x + C_{2n} \sin \beta_n x, \\ Y_n(y) &= C_{3n} \cos \eta_n y + C_{4n} \sin \eta_n y, \\ Z_n(z) &= C_{5n} \exp(-\sqrt{\alpha_v^2 + \beta_n^2 + \eta_n^2} \cdot z) + C_{6n} \exp(\sqrt{\alpha_v^2 + \beta_n^2 + \eta_n^2} \cdot z). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Funkcja (17) po przejściu $2c$ podziałek biegunowych τ_v powinna mieć tę samą wartość, czyli

$$\begin{aligned} \cos \beta_n x_1 &= \cos \beta_n (x_1 + 2c\tau_v) \quad \text{oraz} \\ \sin \beta_n x_1 &= \sin \beta_n (x_1 + 2c\tau_v), \end{aligned}$$

zatem

$$\beta_n x_1 = \beta_n (x_1 + 2c\tau_v) \pm 2c\pi,$$

skąd

$$\beta_n = \pm \frac{\pi}{\tau_v} = \pm \nu \frac{\pi}{\tau}, \quad (19)$$

bowiem $\tau_v = \frac{1}{\nu} \tau$.

Wstawiając (19) do (18), a następnie porównując funkcję $X(x)$ ze wzorów (17) i (18) z wyrażeniem (10a), widzimy że w obu przypadkach występują te same czynniki, związane wzorem Eulera

$$e^{\pm j\nu \frac{\pi}{\tau} x} = \cos \nu \frac{\pi}{\tau} x \pm j \sin \nu \frac{\pi}{\tau} x,$$

skąd wynika że stała $C_{2n} = jC_{1n}$.

Zakładając następnie, że rozkład indukcji wzdłuż osi y jest okresowy, z okresem $2L$ (rys. 1), przy czym występują tu tylko funkcje parzyste (kosinusoidy), otrzymujemy $C_{3n} \neq 0$ i $C_{4n} = 0$ oraz dla $y = \frac{L}{2}$, $Y_n(y) = C_{3n} \cos \eta_n \frac{L}{2} = 0$ — przy wszystkich x oraz z , skąd

$$\eta_n = (2n-1) \frac{\pi}{L}, \quad (20)$$

przy czym $n = 1, 2, 3, \dots$ rząd harmonicznej rozkładu przestrzennego natężenia pola magnetycznego $\hat{H}_{zs}$ na powierzchni bieźni (przy $z = 0$) wzdłuż szerokości maszyny L . Ze względu na symetrię układu należy się na ogół liczyć z występowaniem tylko harmonicznych nieparzystych $n = 1, 3, 5, \dots$

Metoda doboru stałych C_{5n} i C_{6n} zależy od stosunku głębokości wnikania pola elektromagnetycznego do metalu

$$\delta_v = \frac{1}{k_v} = \sqrt{\frac{2}{(1 \pm \nu \mp s\nu)\omega\mu\gamma}} \quad (21)$$

do grubości d bieźni (rys. 1). Przy $d > 2\delta$, bieźnię można rozpatrywać w przybliżeniu jako ciało nieskończenie grube, tzn. jako półprzestrzeń metalową o powierzchni pokrywającej się z płaszczyzną $x, y, 0$.

W przypadku $d \leq 2\delta$, należy uwzględnić wzajemne nakładanie się pól elektromagnetycznych wnikających do bieźni przez obie jej przeciwległe powierzchnie.

Przynależność analizowanej maszyny do jednego z wymienionych przypadków zależy jak widać z (21) od częstotliwości napięcia zasilającego, poślizgu s , przenikalności μ i przewodności właściwej γ metalu, z którego zbudowana jest bieźnia.

2.3. Bieźnia stalowa prostokątna

W przypadku bieźni stalowej równoważna głębokość wnikania (21) jest przy dużych poślizgach rzędu 1 do 3 mm, co pozwala rozpatrywać bieźnię jako ciało nieskończenie grube. W tym przypadku poszukiwane stałe określamy na podstawie założenia, że przy

$z \rightarrow \infty$ natężenie pola magnetycznego (17) w metalu nie może wzrastać do nieskończoności, a zatem $C_{6n} = 0$.

Ostatecznie chwilowa wartość ν -tej, n -tej harmonicznej przestrzennej składowej normalnej natężenia pola magnetycznego, przy założeniu stałej przenikalności, wyrazi się według (17) wzorem

$$\underline{H}_{mzv,n} = C_n e^{j(1 \pm \nu \mp sv)\omega t} \cdot e^{\pm j\nu \frac{\pi}{\tau} x} \cdot \cos(2n-1) \frac{\pi}{L} y \cdot e^{-\sqrt{\alpha_v^2 + \left(\nu \frac{\pi}{\tau}\right)^2 + (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{L^2}} \cdot z} \quad (22)$$

Dla $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$ i $t = 0$, $\underline{H}_{mzv,n} = \frac{1}{\mu} B_{mzv,n}$, gdzie $B_{mzv,n} = \frac{\mu_0}{2\delta_p} F_{mzn}$ — amplituda ν -tej, n -tej harmonicznej rozkładu indukcji w szczelinie. Uwzględniając (6) otrzymujemy:

$$C_n = H_{mzv,n} = \left(\sin \nu \frac{\pi}{2} \right) \frac{B_{mz1,n}}{\mu} \cdot \frac{\zeta_\nu}{\zeta_1} \cdot \frac{1}{\nu}. \quad (23)$$

Rozwiązanie ogólne równania (14) jest sumą rozwiązań szczególnych (22). Tak więc wypadkowa wartość chwilowa natężenia pola magnetycznego w punkcie (x, y, z) nieskończenie długiej bieźni, przy niesinusoidalnym polu w szczelinie wyraża się zależnością

$$\underline{H}_{mz} = \frac{\mu_0}{2\delta_p \mu \zeta_1} \sum_{\nu=1}^{v=i} \sum_{n=1}^{n=j} \left(\sin \frac{\nu\pi}{2} \right) F_{m1n} \frac{\zeta_\nu}{\nu} \cdot e^{j(1 \pm \nu \mp sv)\omega t} \cdot e^{\pm j\nu \frac{\pi}{\tau} x} \cdot \cos(2n-1) \frac{\pi}{L} y \cdot e^{-\alpha_{vn} z}, \quad (24)$$

gdzie i oraz j — liczba harmonicznych uwzględnionych w analizie, znaki — jak w równaniu (10) oraz

$$\alpha_{vn} = \sqrt{\alpha_v^2 + \left(\nu \frac{\pi}{\tau}\right)^2 + (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{L^2}}. \quad (25)$$

W przypadku założenia prostokątnego rozkładu przepływu w kierunku osi Y , o wysokości prostokąta równej F_{m11} i podstawie L :

$$F_{m1n} = \left(\sin \frac{n\pi}{2} \right) \frac{4}{\pi} \cdot \frac{F_{m11}}{n}.$$

W wielu przypadkach badania można ograniczyć do analizy pierwszej harmonicznej rozkładu pola wzdłuż bieźni ($\nu = 1$). Wtedy wartość chwilowa

$$\underline{H}_{mz} = \frac{\mu_0}{2\delta_p \mu} \cdot e^{js\omega t} \cdot e^{-j \frac{\pi}{\tau} x} \sum_{n=1}^{n=j} F_{m1n} e^{-\alpha_n z} \cdot \cos(2n-1) \frac{\pi}{L} y, \quad (26)$$

przy czym

$$\alpha_n = \sqrt{s\alpha^2 + \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 + (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{L^2}}. \quad (27)$$

Dla stali o danych $\mu_r = 500$ do 1000, $\gamma = 7 \cdot 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ oraz przy poślizgu $s = 1$, $|\alpha^2| = \omega \mu \gamma = (140 \text{ do } 280) \cdot 10^4 \frac{1}{\text{m}}$. Dzięki temu, przy niezbyt dużej liczbie harmonicznych rozkładu pola wzdłuż szerokości maszyny i przy niezbyt małym poślizgu można przyjąć

$$\operatorname{Re}\{s\alpha^2\} \gg \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 + (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{L^2},$$

czyli

$$\alpha_n \approx \sqrt{s} \cdot \alpha. \quad (28)$$

W tym przypadku czynnik $e^{-\alpha_n z}$ we wzorze (26) można wynieść przed znak sumy, dzięki czemu suma ta staje się w istocie rzeczy rozkładem na szereg Fouriera krzywej $B_{mp}(y)$ — tzn. rozkładu czasowej amplitudy indukcji — na powierzchni bieżni w kierunku osi y (rys. 1)

$$B_{mp}(y) = \frac{\mu_0}{2\delta_p} \sum_{n=1}^{n=j} F_{m1n} \cos(2n-1) \cdot \frac{\pi}{L} y. \quad (29)$$

W ten sposób równanie (26) przybiera postać

$$\underline{H}_{mz} = \frac{1}{\mu} B_{mp}(y) \cdot e^{js\omega t} \cdot e^{-j\frac{\pi}{\tau} x} \cdot e^{\sqrt{s}\alpha z} = H_{mz} e^{js\omega t}. \quad (30)$$

Rozkład $B_{mp}(y)$ na szerokości bieżni L ma kształt zbliżony do prostokąta lub trapezu; $\delta_p = \delta \cdot k_C$ — zastępcza szczelina powietrzna z uwzględnieniem wpływu żłobków; k_C — współczynnik Cartera.

Jak wynika z (30) w nieskończenie długim silniku amplitudy pola na całej jego długości mają jednakową wartość, a jedynie zmienia się ich przesunięcie fazowe o kąt $-\frac{\pi}{\tau} x$. Jest to odpowiednik pola wirującego kołowego w silniku indukcyjnym obrotowym.

Analogiczne równania jak (26) można otrzymać dla wszystkich wielkości H_m , E_m , J_m i ich składowych.

2.3.1. Silnik wolnobieżny z szeroką bieżnią stalową

Zgodnie ze wzorem (3) przy 50 Hz, prędkość synchroniczna v_1 silnika w m/s równa się podziałce biegunowej τ wyrażonej w cm. Maszyny wolnobieżne mają więc małe podziałki biegunowe. Jeżeli jednocześnie szerokość bieżni L jest dostatecznie duża, to w pierwszym przybliżeniu można przyjąć $L \gg \tau$. Badając zwłaszcza pole w pobliżu środka szerokości bieżni, możemy przyjąć dla uproszczenia $L \rightarrow \infty$. Wtedy składowe $E_x = E_z = 0$, $H_y = 0$, $\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0$ oraz $\cos(2n-1) \frac{\pi}{L} y \rightarrow 1$.

Wyrażenie (27) przybiera postać

$$\alpha_n = \sqrt{s\alpha^2 + \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2} \approx \sqrt{s} \cdot \alpha.$$

Przy tych założeniach, podstawiając (30) do drugiego równania Maxwella (12) otrzymujemy równanie dla amplitud

$$\frac{\partial E_{my}}{\partial x} = -js\omega\mu H_{mz},$$

skąd

$$E_{my} = \frac{J_{my}}{\gamma} = -js\omega\mu \int H_{mz} dx + C = \frac{s\omega\tau}{\pi} B_{mp} e^{-\sqrt{s}az} \cdot e^{-j\frac{\pi}{\tau}x} + C. \quad (31)$$

Chwilowa wartość gęstości prądu na powierzchni bieźni ($z = 0$) w postaci symbolicznej

$$\underline{J}_{ys} = \frac{s\omega\gamma\tau}{\pi} B_{mp} \cdot e^{j\left(s\omega t - \frac{\pi}{\tau}x\right)} + C \cdot e^{j\omega t},$$

lub w zwykłej postaci — wartość chwilowa

$$J_{ys} = \frac{s\omega\gamma\tau}{\pi} B_{mp} \cos\left(s\omega t - \frac{\pi}{\tau}x\right) + C \cos s\omega t. \quad (32)$$

Stałą C określimy z warunku $\int_0^{2\tau} J_{ys} dx = 0$ przy $t = 0$, to znaczy

$$\begin{aligned} \frac{s\omega\gamma\tau}{\pi} B_{mp} \int_0^{2\tau} \cos \frac{\pi}{\tau} x \cdot dx + C \int_0^{2\tau} dx &= 0, \\ \frac{s\omega\gamma\tau}{\pi} B_{mp} \frac{\tau}{\pi} \left| \sin \frac{\pi}{\tau} x \right|_0^{2\tau} + 2\tau C &= 0, \quad \text{skąd} \quad C = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Zespolona amplituda gęstości prądu w bieźni, po podstawieniu (33) do (31), wyrazi się wzorem

$$J_m = J_{ms} \cdot e^{-\sqrt{s} \cdot kz} \cdot e^{-j\left(\sqrt{s} \cdot kz + \frac{\pi}{\tau}x\right)}, \quad (34)$$

gdzie

$$J_{ms} = \frac{s\omega\gamma\tau}{\pi} B_{mp} \quad (35)$$

— maksymalna w czasie i w przestrzeni gęstość prądu na powierzchni bieźni.

Moduł wartości skutecznej gęstości prądu w bieźni

$$|J_{sk}| = \frac{J_{ms}}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{s} \cdot kz}. \quad (36)$$

Wracając do (31), mamy

$$E_{my} = \frac{J_{ms}}{\gamma} \cdot e^{-\sqrt{s}az} \cdot e^{-j\frac{\pi}{\tau}x}. \quad (31a)$$

Podstawiając z kolei (31a) do drugiego równania Maxwella (przy $E_z = 0$)

$$\frac{\partial E_{my}}{\partial z} = js\omega\mu H_{mx},$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} H_{mx} &= \frac{1}{j\omega\mu} \frac{dE_{my}}{dz} = \frac{j\alpha\sqrt{s}\tau}{\mu\pi} B_{mp}(y) \cdot e^{-\sqrt{s}\alpha z} \cdot e^{-j\frac{\pi}{\tau}x} = \\ &= -\frac{\sqrt{2s}k\tau}{\mu\pi} B_{mp} \cdot e^{-\sqrt{s}kz} \cdot e^{-j\left(\frac{\pi}{\tau}x + \sqrt{s}kz + \frac{\pi}{4}\right)}, \end{aligned} \quad (37)$$

przy czym $j\alpha = (-1+j)k = -\sqrt{2}ke^{-j\frac{\pi}{4}}$.

Uwzględniając (35) możemy wzór (37) zapisać w postaci

$$\widehat{H_{mx}} = \frac{j\alpha}{\sqrt{s}\omega\mu\gamma} J_{ms} \cdot e^{-\sqrt{s}\alpha z} \cdot e^{-j\frac{\pi}{\tau}x}. \quad (37a)$$

Porównując (37) z amplitudą (30) znajdujemy stosunek modułów wartości maksymalnych składowych normalnej i stycznej do powierzchni wirnika (dla wszystkich wartości z od 0 do nieskończoności):

$$\frac{|B_{mx}|}{|B_{mp}|} = \frac{|H_{mx}|}{|H_{ms}|} = \frac{\sqrt{2s}k\tau}{\pi}, \quad (38)$$

lub

$$|H_{mxs}| = \frac{\tau}{\pi} \sqrt{\frac{s\omega\gamma}{\mu}} B_{mp}. \quad (39)$$

Moc pozorną pola elektromagnetycznego wnikająca do bieźni przez 1m^2 jej powierzchni równa się składowej normalnej zespolonego wektora Poyntinga [9] obliczonego dla $z = 0$:

$$\begin{aligned} S_z = S_{zp} + jS_{zq} &= -\frac{1}{2}(E^*_{my} \cdot H_{mx})_{z=0} = -\frac{1}{2} \frac{J_{ms}}{\gamma} e^{j\frac{\pi}{\tau}x} \cdot \frac{j\alpha}{\sqrt{s}\omega\mu\gamma} J_{ms} e^{-j\frac{\pi}{\tau}x} = \\ &= (1-j) \frac{k}{2\sqrt{s}\omega\mu\gamma^2} J_{ms}^2 = (1-j) \frac{s\omega\tau^2}{2\mu\pi^2} \sqrt{s} k B_{mp}^2. \end{aligned} \quad (40)$$

Analizę powyższą przeprowadzono przy założeniu upraszczającym $\mu = \text{const}$. Istnieje kilka sposobów uwzględnienia wpływu zmiennej przenikalności i strat histerezowych w stali. Jednym z najprostszych sposobów jest pomnożenie strat mocy czynnej (lub rezystancji) przez stały współczynnik $a_p = 1,35$ do $1,45$ i mocy biernej (lub reaktancji) przez $a_q = 0,85$ [9].

W ten sposób straty mocy czynnej przypadające na jednostkę powierzchni bieźni w W/m^2 równają się w przybliżeniu

$$P_1 = a_p \frac{k}{2\sqrt{s}\omega\mu_s\gamma^2} J_{ms}^2 = a_p \frac{s\omega\tau^2}{2\mu_s\pi^2} \sqrt{s} k B_{mp}^2, \quad (41)$$

a pobór mocy biernej $\left(\text{w } \frac{\text{var}}{\text{m}^2}\right)$:

$$Q_1 = \frac{a_q}{a_p} P_1, \quad (42)$$

przy czym μ_s — przenikalność stali na powierzchni ciała, określona na podstawie krzywej magnesowania $\mu = f(H)$ dla wartości H obliczonej ze wzoru (37) metodą kolejnych przybliżeń lub w inny sposób.

Wzory (34), (41) i (42) mogą być podstawą do przybliżonego obliczania parametrów R'_2, X'_2, I'_2 masywnej bieźni stalowej, sprowadzonych do obwodu stojana.

2.3.2. Sprowadzenie parametrów bieźni do obwodu twornika

Analizę i obliczenia silnika indukcyjnego liniowego prowadzimy podobnie jak dla silnika konwencjonalnego, w oparciu o schemat zastępczy. Potrzebne do budowy schematu parametry twornika określamy podobnie jak w zwykłym silniku indukcyjnym wirującym. Parametry wirnika natomiast znajdujemy w oparciu o wyżej podaną analizę. Indukcja w szczelinie B_{mp} jest wytworzona przez przepływ wypadkowy F_{m1} otrzymany w wyniku nałożenia się przepływów twornika F_{mt} i bieźni F_{m2} , które dodają się wektorowo zgodnie z (2). Wpływ przepływu F_{m2} jest tym mniejszy im poślizg s jest mniejszy. Przy $s = 0$ mamy idealny bieg jałowy i wtedy $F_{m2} = 0$.

Przy polu odkształconym (5) sumowanie przepływów należy przeprowadzić dla każdej z harmonicznych F_{mv} (6) oddzielnie. Obecnie ograniczymy się jednak tylko do pierwszej harmonicznej przepływu.

Przepływ maksymalny prądów wirowych bieźni (34) na jedną podziałkę biegunową i na jedną stronę bieźni wynosi

$$\begin{aligned} F_{m2} &= \int_0^\infty \int_0^\tau J_{my} dz \cdot dx = J_{ms} \int_0^\infty e^{-\sqrt{s} \alpha z} \cdot dz \int_0^\tau e^{j - \frac{\pi}{\tau} x} dx = \\ &= -(1+j) \frac{\tau}{\pi \sqrt{s} k} J_{ms} = - \frac{\sqrt{2} \tau}{\pi \sqrt{s} k} J_{ms} \cdot e^{j \frac{\pi}{4}}. \end{aligned} \quad (43)$$

Przyrównując moduł amplitudy rzeczywistego przepływu bieźni (43) do tegoż przepływu, ale wyrażonego przez prąd I'_2 sprowadzony do uzwojenia twornika

$$F_{m2} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} m_1 \frac{z_1 \zeta_1}{p} I'_2, \quad (44)$$

znajdujemy fazowy prąd bieźni sprowadzony do uzwojenia twornika

$$I'_2 = \frac{p\tau}{2\sqrt{s} k m_1 z_1 \zeta_1} J_{ms} = \frac{\sqrt{s} \omega \gamma p \tau^2}{2\pi k m_1 z_1 \zeta_1} B_{mp}. \quad (45)$$

Przyrównując z kolei całkowite straty mocy na powierzchni bieźni, określone z wzoru (41), do strat na rezystancji sprowadzonej R'_2 :

$$2 \cdot L_b \cdot L \cdot a_p \frac{k}{2\sqrt{s} \omega \mu_s \gamma^2} J_{ms}^2 = m_1 I'_2 R'_2, \quad (46)$$

znajdujemy sprowadzoną do obwodu stojana rezystancję fazową bieźni stalowej

$$R'_2 = a_p \frac{4m_1(z_1 \zeta_1)^2}{p} \cdot \frac{\sqrt{s} kL}{\gamma \tau} \cdot k_{cz}, \quad (47)$$

gdzie:

$$k_{cz} \cong 1 + \frac{2\tau}{\pi L} \quad (48)$$

— współczynnik poprawkowy uwzględniający, podobnie jak w silniku wirującym, z masywnym wirnikiem [7], dodatkową rezystancję bocznych krawędzi bieźni,

$$L_b = 2p\tau \quad (49)$$

— czynna długość bieźni.

W podobny sposób jak R'_2 , wykorzystując (42) obliczamy reaktancję fazową bieźni stalowej X'_2 , sprowadzoną do obwodu twornika

$$X'_2 \cong \frac{a_q}{a_p} R'_2 = 0,6 R'_2. \quad (50)$$

Wykorzystując pracę [10] można obliczenie parametrów bieźni stalowej przeprowadzić nieco dokładniej, otrzymując nieco inne zależności funkcyjne od parametrów fizycznych i materiałowych niż we wzorze (41).

Siła ciągu silnika liniowego. Siłę ciągu obliczamy, podobnie jak w silniku indukcyjnym obrotowym ze wzoru wiążącego moc elektromagnetyczną pola biegnącego P_e ze stratami w uzwojeniu wirnika

$$sP_e = m_1 I_2'^2 R'_2,$$

przy czym $P_e = F \cdot v_1$, a prawa strona równania — według (41) i (45a); v_1 — według (3).

W ten sposób siła ciągu F silnika indukcyjnego liniowego z bieźnią stalową wyrazi się wzorem

$$F = \frac{m_1 I_2'^2 R'_2}{2sf} = a_p \frac{kL_b L}{4\pi s \sqrt{s} f^2 \mu_s \gamma^2 \tau} J_{ms}^2 = a_p \frac{\sqrt{s} kL_b L \tau}{\pi \mu_s} B_{mp}^2. \quad (51)$$

Prąd magnesujący silnika indukcyjnego liniowego. Prąd magnesujący silnika liniowego z masywną bieźnią stalową obliczamy także podobnie jak w zwykłym silniku indukcyjnym, wychodząc z prawa przepływu dla n odcinków obwodu magnetycznego

$$\sum_n H_k l_k = iz,$$

z tą różnicą, że napięcie magnetyczne $V_{\mu 2}$ w bieźni obliczamy na podstawie wzoru (37) dla $z = 0$

$$V_{\mu 2} = \int_0^\tau H_{mx} dx = \frac{2\sqrt{s} \alpha \tau^2}{\mu \pi^2} B_{mp} = \frac{2\sqrt{2s} k \tau^2}{\mu \pi^2} B_{mp} \cdot e^{j \frac{\pi}{4}}. \quad (52)$$

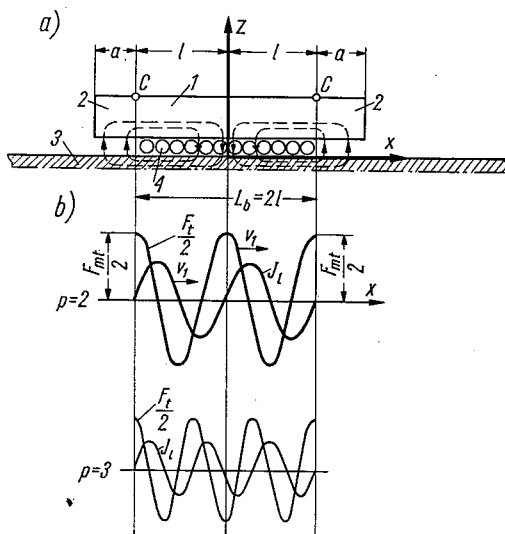
Zespolony charakter napięcia magnetycznego wynika z wpływu reakcji prądów wirowych w bieźni, które w obwodach magnetycznych działają podobnie jak siła elektromotoryczna samoindukcji w obwodach elektrycznych.

3. WPŁYW SKOŃCZONEJ DŁUGOŚCI BIEŻNI NA POLE W SZCZELINIE

Jednym z ważniejszych czynników różniących teorię silnika liniowego od teorii zwykłego silnika wielofazowego jest występowanie w szczelinie, oprócz pola biegnącego, dodatkowych pól nieruchomych w przestrzeni i przemennych w czasie, tzn. składowej oscylującej pola. Składowa ta powstaje pod wpływem zjawisk brzegowych spowodowanych tym, że obwód magnetyczny maszyn liniowych jest otwarty wskutek skończonej długości rdzenia twornika. Zjawisko to nie występuje w maszynach wirujących, których obwód magnetyczny jest zamknięty.

3.1. Pole w szczelinie

Rozpatrzmy maszynę o skończonej długości $L_b = 2p\tau$ (rys. 2a), której twornik zaopatrzone jest na końcach w nieuzwojone i nieuzwojone boczniaki o długości a , w formie przedłużeń rdzenia. Rozkład gęstości liniowej prądu J_l i przepływu twornika F_t , dla chwili gdy na krawędziach twornika występuje przepływ maksymalny F_{mt} , przedstawiono na rys.



Rys. 2. a) Schemat twornika 1 z nieuzwojonymi bocznikami 2 i maszyną bieźnią stalową 3, 4 — fikcyjne uzwojenie wielofazowe umieszczone w szczelinie, $2p$ -biegunowe; b) Biegające fale gęstości prądu J_l i napięcia magnetycznego twornika F_t w szczelinie silnika liniowego

2b. Ponieważ fala przepływu biegnie urywając się (bądź rozpoczynając) na krawędziach c twornika, na krawędziach tych, jak i na całym odcinku a boczniaka wystąpi oscylujące napięcie magnetyczne. Napięcie to wywoła oscylujący, nieruchomy w przestrzeni strumień, który zamknie się przez roboczy odcinek szczeliny — jak na rys. 2a, nakładając się na pole biegnące.

Początek układu współrzędnych OXZ zwiążemy obecnie ze środkiem twornika (rys. 2). Na pole biegnące o amplitudzie B_{mp} nałoży się pole oscylujące o amplitudzie B_0 , dając w sumie indukcję

$$B = B_{mp} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau} x\right) \mp B_0 \sin \omega t, \quad (53)$$

przy czym znaki „-” i „+” dotyczą odpowiednio parzystej lub nieparzystej liczby par biegunów p , ogólnie $-(-1)^p$ [11]. Zmiana znaku indukcji B_0 wraz ze zmianą p oznacza zmianę znaku pola przemiennego w porównaniu ze znakiem indukcji pola biegnącego przy $x = 0$ (rys. 2b). Amplitudę pola oscylującego w szczelinie B_0 określamy w następujący sposób.

Zakładając, że w żelazie $\mu = \infty$ przyrównujemy maksymalną wartość przemiennego przepływu w punkcie c (rys. 2) $\frac{F_{mtc}}{2}$ do spadków napięcia magnetycznego od strumienia oscylującego Φ_{om} na szeregowo połączonych oporach szczelin na odcinku l i a :

$$\frac{F_{mt}}{2} = \Phi_{om} \left(\frac{\delta}{\mu_0 a L} + \frac{\delta}{\mu_0 l L} \right) = \Phi_{om} \frac{\delta}{\mu_0 L} \cdot \frac{l+a}{al} = B_0 \frac{\delta}{\mu_0} \cdot \frac{l+a}{a}, \quad (54)$$

przy czym $B_0 = \frac{\Phi_0}{l \cdot L},$

Porównując (54) z (2), otrzymujemy

$$k_0 = \frac{B_0}{B_{mp}} = \frac{a}{l+a}. \quad (55)$$

Jak wynika z (55) wpływ zjawisk brzegowych jest tym mniejszy, im większa jest czynna długość maszyny $L_b = 2l$ i im mniejsza jest długość a końcowych boczników magnetycznych. Z tego względu tego typu boczników magnetycznych się nie stosuje, a rolę ich wypełnia w naturalny sposób ukształtowane pole rozproszenia na końcach twornika. Dla pola takiego można w oparciu o badania doświadczalne wyznaczyć równoważną długość bocznika [11].

Przy dokładniejszych obliczeniach parametrów maszyny należy uwzględnić także straty mocy spowodowane przez składową oscylującą pola, o ile nie została ona w sposób zadawalający stłumiona.

3.2. Wpływ nasycenia obwodu magnetycznego na obwiednię amplitudy pola w szczelinie

Równania (53) do (55) otrzymano przy założeniu $\mu_{Fe} = \infty$. Uwzględnienie nasycenia poszczególnych odcinków obwodu magnetycznego prowadzi do bardziej złożonego wzoru [11] na indukcję w szczelinie

$$B = B_{mp} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau} x\right) - (-1)^p B_c \operatorname{ch} \beta x \cdot \sin \omega t - (-1)^p B_s \operatorname{sh} \beta x \cdot \cos \omega t, \quad (56)$$

przy czym

$$\beta = \sqrt{\frac{2\mu_0}{\mu_t \delta_z h}},$$

μ_t — przenikalność jarzma twornika,

$\delta_z = \delta \cdot k_C k_Z$ — zastępcza szczelina powietrzna,

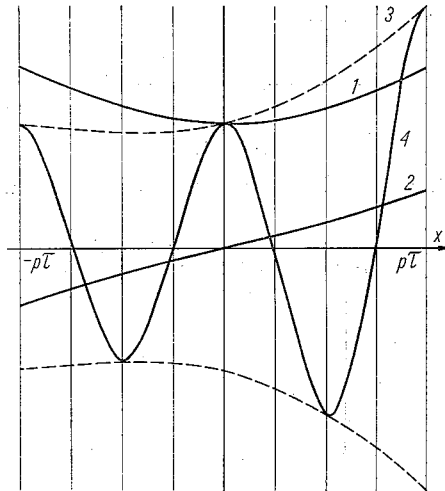
k_C — współczynnik Cartera uwzględniający wpływ żłobków,

$k_Z = 1 + \frac{F_z}{F_\delta}$ — współczynnik uwzględniający nasycenie zębów, F_z — napięcie magnetyczne

w zębach, F_δ — napięcie magnetyczne na szczelinie obliczeniowej $\delta \cdot k_C$,

B_c — największa amplituda składowej pola przemiennego zmieniającej się wzdłuż szczeliny według kosinusa hiperbolicznego,

B_s — największa amplituda składowej pola przemiennego zmieniającej się wzdłuż szczeliny według sinusa hiperbolicznego (rys. 3).



Rys. 3. Wpływ nasycenia obwodu magnetycznego na rozkład pola biegnącego w szczelinie

1 — obwiednia amplitud $B_c \operatorname{ch} \beta x$, 2 — obwiednia $B_s \operatorname{sh} x$, 3 — obwiednia wypadkowa pola oscylującego, 4 — fala indukcji pola biegnącego, według równania (56), bez uwzględnienia efektów krańcowych

Jak widać z rys. 3 zbudowanego na podstawie (56), opory magnetyczne na drodze strumienia (tzn. $\mu_{Fe} \neq \infty$) powodują niesymetryczny rozkład indukcji wzdłuż długości maszyny, wywołując pewne jej spiętrzenie na jednym końcu i obniżenie — na drugim końcu twornika. Jak jednak wykazano w pracy [11], w większości przypadków można przyjąć $\mu = \infty$ i $\beta = 0$, tzn. nie uwzględniać omówionego tu zjawiska.

3.3. Wpływ efektów końcowych na obwiednię amplitud pola w szczelinie

Obwiednia pola biegnącego, jako krzywa niezależna od czasu, musi spełniać warunek

$$\frac{\partial B}{\partial t} = 0. \quad (57)$$

Stosując ten warunek do równania (53) otrzymujemy równanie trygonometryczne

$$M \cos \omega t + N \sin \omega t = 0, \quad (58)$$

gdzie: $M = \cos \frac{\pi}{\tau} x \mp k$, $N = \sin \frac{\pi}{\tau} x$, $\operatorname{tg} \omega t = -\frac{M}{N}$.

Z równania (58) znajdujemy funkcje trygonometryczne spełniające warunek (57)

$$\sin \omega t = \frac{-M}{\pm \sqrt{M^2 + N^2}} \quad \text{i} \quad \cos \omega t = \frac{N}{\pm \sqrt{M^2 + N^2}}. \quad (59)$$

Podstawiając (59) do (53) znajdujemy równania obwiedni górnej i dolnej (rys. 4):

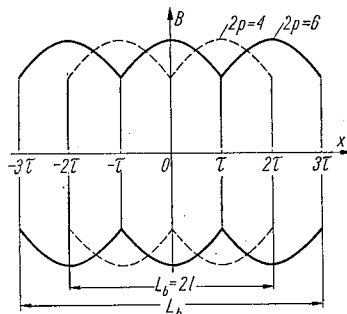
$$B_{obw} = \mp B_{mp} \sqrt{M^2 + N^2} = -B_{mp} \sqrt{1 \mp 2k_o \cos \frac{\pi}{\tau} x + k_o^2}, \quad (60)$$

przy czym znaki pod pierwiastkiem zależą od liczby par biegunów p , jak we wzorze (53).

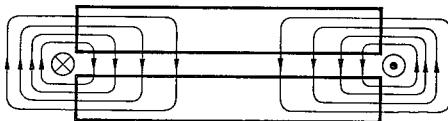
Dla przypadku $\mu \neq 0$ Woldek [11] wyprowadził dokładniejsze, ale i bardziej złożone równanie obwiedni:

$$B_{obw} = \pm B_{mp} \sqrt{\left[\cos \frac{\pi}{\tau} x - (-1)^p k_c \operatorname{ch} \beta x \right]^2 + \left[\sin \frac{\pi}{\tau} x + (-1)^p k_s \operatorname{sh} \beta x \right]^2}. \quad (61)$$

Przy założeniu $\mu_{Fe} = \infty$, tzn. $\beta = 0$, równanie (61) przechodzi w (60).



Rys. 4. Wpływ skończonej długości twornika L_b i liczby par biegunów na kształt obwiedni pola w szczelinie silnika liniowego



Rys. 5. Zasada kompensacji pola przemiennego B_o za pomocą dodatkowej cewki zasilanej prądem przemiennym [11]

Funkcje (60) i (61) są parzyste względem zmiennej x i ich maksima występują co $x = 2\tau$. Są więc one symetryczne względem osi $x = 0$ (środek maszyny). Na końcach twornika zawsze występują minima obwiedni.

Łatwo zauważyć, że im mniejsza jest wartość k_o (55) tym obwiednie są bardziej zbliżone do prostych poziomych, jak w maszynie nieskończenie długiej. Zmniejszenie dolin w ob-

wiedniach można więc uzyskać bądź przez wydłużenie maszyny, bądź też przez stłumienie składowej przemiennej pola B . Tłumienie to można zrealizować za pomocą cewek kompensacyjnych jednofazowych (rys. 5). Istnieje także szereg innych rozwiązań technicznych i patentów na tego rodzaju kompensację [11]. Podobne efekty, choć nieco słabsze, mogą dawać odpowiednio usytuowane ekrany miedziane lub zwoje zwarte.

4. STRUMIEŃ MAGNETYCZNY W JARZMIE TWORNIKA

Strumień Φ_j w jarzmie twornika silnika liniowego zawiera składową od pola biegnącego Φ_{bj} i składową od pola przemiennego Φ_{oj} . Chwilowa wartość strumienia od pola biegnącego przy sinusoidalnym rozkładzie indukcji wynosi [11]:

$$\Phi_{bj} = \int_{-l}^x B_{mp} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau} x\right) dx = \frac{\tau}{\pi} B_{mp} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau} x\right) - (-1)^p \frac{\tau}{\pi} B_{mp} \cos \omega t. \quad (62)$$

Jak widać, pole biegnące w szczeliny silnika liniowego wytwarza w jarzmie oprócz pola biegnącego także pole oscylujące (przemienne). To pole przemienne powstaje wskutek niezamknięcia obwodu magnetycznego i w normalnych maszynach nie występuje. Jak widać z (62) amplituda strumienia biegnącego w jarzmie równa się połowie amplitudy strumienia wirującego $\Phi_{m,w} = \frac{2}{\pi} \tau B_{mp}$ w szczeliny normalnej maszyny.

Strumień oscylujący, dzięki założeniu równomiernego rozkładu indukcji B_o w szczeliny, przybiera w dowolnym miejscu x (rys. 2a) wartość

$$\Phi_{o,x} = -(-1)^p \cdot x \cdot B_o \sin \omega t. \quad (63)$$

Wypadkowy strumień chwilowy w jarzmie na jednostkę szerokości maszyny, w dowolnym przekroju o współrzędnej x , otrzymamy dodając strumienie (62) i (63)

$$\Phi_j = B_j h_j = -B_{mp} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau} x\right) - (-1)^p \frac{\tau}{\pi} B_{mp} \cos \omega t - (-1)^p \sin \omega t, \quad (64)$$

gdzie B_j — indukcja w jarzmie i h_j — wysokość jarzma.

Obwiednię strumienia w jarzmie znajdziemy jak poprzednio, z warunku

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial t} = 0, \quad (65)$$

który wraz z (64) daje równanie

$$\left[\sin \frac{\pi}{\tau} x + (-1)^p \frac{\pi}{\tau} k_o \right] \cos \omega t - \left[\cos \frac{\pi}{\tau} x + (-1)^p \right] \sin \omega t = 0. \quad (66)$$

Po wyznaczeniu z (66) wartości $\cos \omega t$ i $\sin \omega t$ jak w równaniu (58), podstawiamy je do (64), skąd otrzymujemy równanie obwiedni strumienia w jarzmie [11]

$$\Phi_{j,obw} = \mp \Phi_{mj} \sqrt{2 - (-1)^{2p} \cos \frac{\pi}{\tau} x - (-1)^{2p} \frac{\pi}{\tau} k_o x \sin \frac{\pi}{\tau} x + \frac{\pi^2}{\tau^2} k_o^2 x^2}, \quad (67)$$

gdzie $\Phi_{mj} = \frac{\tau}{\pi} B_{mp}$.

W przypadku wytlumienia strumienia przemiennego ($k_o = 0$) wyrażenie (67) przybiera postać

$$\Phi_{j,obw} = \mp \sqrt{2} \Phi_{mj} \sqrt{1 - (-1)^p 2 \cos \frac{\pi}{\tau} x}. \quad (68)$$

Obwódnie strumienia jarzmowego są symetryczne względem środka maszyny ($x = 0$) i mają okres zmienności 2τ . Według (68) otrzymano [11] $\Phi_{j,min} = 0$ i $\Phi_{j,max} = 2\Phi_{mj}$. Tak więc w silniku indukcyjnym liniowym maksymalny strumień w jarzmie jest przy $k_o = 0$ dwa razy większy niż w normalnej maszynie. Jest to spowodowane tym, że wskutek tego iż obwód magnetyczny jest otwarty, strumień podziałki biegunowej w określonych chwilach nie rozdwaja się w jarzmie jak w maszynie normalnej.

W silnikach indukcyjnych liniowych możliwe jest także stosowanie uzwojeń niesymetrycznych, dających tzw. „nieparzystą” względnie „ułamkową” liczbę biegunów. Zagadnienie to rozpatrzono szczegółowo w pracy [11].

5. POLE W BIEŻNI PROSTOKĄTNEJ NIEFERROMAGNETYCZNEJ

Głębokość wnikania pola elektromagnetycznego (21) do metali nieferromagnetycznych (jak np. Al) jest zwykle większa od grubości szyn, z których wykonana jest bieźnia. Z tego względu obliczeniowy model elektrodynamiczny bieźni nie może już być oparty na półprzestrzeni metalowej, jak w przypadku stali, lecz winien uwzględniać wzajemne nakładanie się i interferencję fal wnikających do szyny z obu jej powierzchni czynnych. Wpływa to na inny niż dotychczas dobór stałych C_{5n} i C_{6n} w równaniach (17) i (18).

Ponieważ pole magnetyczne powinno przenikać prostopadle bieźnię niemagnetyczną w kierunku osi z (rys. 1), wobec tego do określenia stałych możemy wykorzystać warunek

$$H_{mz}(z = 0) = H_{mz}(z = d), \quad (69)$$

który po podstawieniu do (17) i (18) daje równanie

$$C_{5n} + C_{6n} = C_{5n} e^{-qd} + C_{6n} e^{qd},$$

stąd

$$C_{6n} = C_{5n} \cdot e^{-qd}, \quad (70)$$

gdzie

$$q = \sqrt{\alpha_v^2 + \nu^2 \frac{\pi^2}{\tau^2} + (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{L^2}}. \quad (71)$$

Podstawiając (70) do (18) otrzymujemy:

$$Z_n(z) = C_{5n} [e^{-qz} + e^{q(z-d)}] = 2C_{5n} \cdot e^{-\frac{qd}{2}} \operatorname{ch} q \left(z - \frac{d}{2} \right).$$

Tym razem wypadkowa wartość chwilowa składowej normalnej natężenia pola magnetycznego we wnętrzu bieźni wyrazi się według (17) wzorem analogicznym do (24)

$$\begin{aligned} \frac{H_{mz}}{2\delta_p} &= \frac{\mu_o}{2\delta_p} \cdot \frac{F_{m1}}{\mu \xi_1} \sum_{v=1}^i \sum_{n=1}^j \left(\sin \nu \frac{\pi}{2} \right) \frac{\xi_v}{\nu} e^{j(1 \pm v \mp s v) \omega t} \times \\ &\times e^{\pm j v \frac{\pi}{\tau} x} \cos(2n-1) \frac{\pi}{L} y \cdot e^{-\frac{qd}{2}} \operatorname{ch} \left(z - \frac{d}{2} \right). \end{aligned} \quad (72)$$

Pozostałe składowe pola $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{J}$ znajdujemy stosując równania Maxwella (12) do wyrażenia (72). Moc prądów wirowych i parametry bieźni obliczamy w oparciu o twierdzenie Poyntinga, podobnie jak w przypadku wyrażenia (40), lecz całkując ten wektor na obu powierzchniach

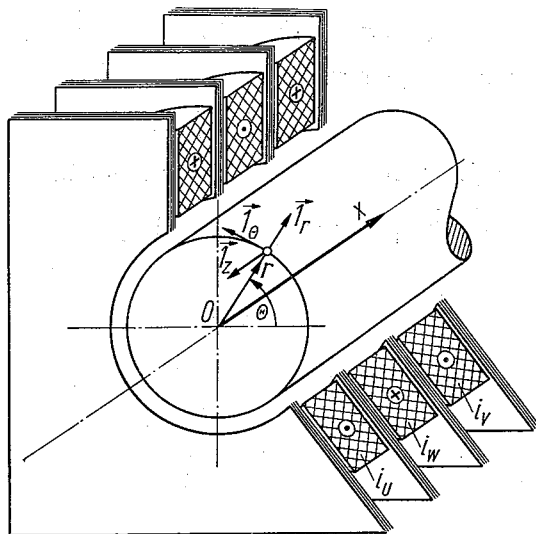
$$\Delta P_{u2} + j\Delta Q_{u2} = (E_{my}^* \cdot H_{mx})_{z=0}. \quad (73)$$

Obliczenia prowadzi się podobnie jak dla blach przenikalnych dla fali elektromagnetycznej [9].

6. POLE MASZyny NIESKOŃCZENIE DŁUGIEJ Z BIEŻNIĄ WALCOWĄ

Postępując analogicznie jak w rozdziale 2.2 zapisujemy równanie (14) we współrzędnych cylindrycznych, dla $\frac{\partial H_m}{\partial \theta} = 0$:

$$\frac{\partial^2 H_{mr\vartheta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_{mr\vartheta}}{\partial r} - \frac{H_{mr\vartheta}}{r^2} + \frac{\partial^2 H_{mr\vartheta}}{\partial x^2} = \alpha^2 H_{mr\vartheta}. \quad (74)$$



Rys. 6. Układ współrzędnych w przekroju bieźni walcowej

Przy założeniu nieskończenie długiej bieźni cylindrycznej (rys. 6) występują w niej tylko składowe H_{mr} , H_{mx} , $E_{m\theta}$, $J_{m\theta}$. Składowa H_{mr} prostopadła do powierzchni walca, wraz ze składową styczną $E_{m\theta}$ daje wektor Poyntinga $\vec{S}_x$ przedstawiający ruch mocy pola wzdłuż osi bieźni. Moc ta nie jest potrzebna do obliczania parametrów bieźni. Moc wnikającą do bieźni określa składowa wektora Poyntinga $S_r = \frac{1}{2} E_{m\theta} H_{mx}$. Ponieważ warunki graniczne określone są przez składową normalną indukcji (1) i (5) na powierzchni bieźni,

za podstawę analizy przyjmujemy równanie (74), które rozwiązujemy metodą Fouriera, przewidując rozwiązanie w postaci

$$H_{mrv} = R_n(r) \cdot X_n(x). \quad (75)$$

Po podstawieniu (75) do (74) otrzymujemy dla n -tej harmonicznej

$$\frac{R_n'' + \frac{1}{r}R_n' - \frac{1}{r^2}R_n}{R_n} + \frac{X_n'' - \alpha^2 X_n}{X_n} = 0. \quad (76)$$

Ponieważ każdy ze składników równania (76) zależy tylko od jednej i to innej zmiennej niezależnej, a jednocześnie muszą one być równe i przeciwnego znaku, to mogą się one równać jedynie stałej, to znaczy

$$\frac{R_n'' + \frac{1}{r}R_n' - \frac{1}{r^2}R_n}{R_n} = -\frac{X_n'' - \alpha^2 X_n}{X_n} = A_n,$$

skąd

$$\left. \begin{aligned} R_n'' + \frac{1}{r}R_n' - \frac{1}{r^2}R_n - A_n R_n &= 0, \\ X_n'' - (\alpha^2 - A_n)X_n &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Wprowadzając nową zmienną jak w [9]

$$p = r\sqrt{-A_n} \quad (77)$$

do równań (76), otrzymujemy układ równań różniczkowych:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 R_n}{dp^2} + \frac{1}{p} \frac{dR_n}{dp} + \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) R_n &= 0, \\ \frac{d^2 X_n}{dx^2} - (\alpha^2 - A_n) X_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Rozwiązanie drugiego z równań (78) może mieć postać wykładniczą (jeśli założymy $A_n < 0$), lub trygonometryczną, jeśli znak stałej A_n jest dodatni [9]. Ponieważ pole w rozpatrywanym modelu (rys. 6) zmienia się wzdłuż osi X okresowo, wobec tego obieramy od razu drugie rozwiązanie. Dzięki temu rozwiązania równań (78), przy założeniu $A_n = b_n^2$, przybiorą postać [9]:

$$R_n(p) = C_{1n} H_1^{(1)}(p) + C_{2n} H_1^{(2)}(p), \quad (79)$$

$$X_n(x) = C_{3n} \cos(b_n^2 - \alpha_v^2)x + C_{4n} \sin(b_n^2 - \alpha_v^2)x, \quad (80)$$

bądź też rozwiązanie (79) można przedstawić w postaci:

$$R_n(p) = C_{1n} I_1(p) + C_{2n} N_1(p), \quad (79a)$$

przy czym:

$H_1^{(1)}(p)$ i $H_1^{(2)}(p)$ — wzajemnie sprzężone funkcje Hankela rzędu pierwszego,

$I_1(p)$ — funkcja Bessela 1 rodzaju, rzędu pierwszego,

$N_1(p)$ — funkcja Bessela 2 rodzaju, rzędu pierwszego, tzn. funkcja Neumanna.

Funkcja $X_n(x)$, po przejściu $2c$ podziałek biegunowych $\tau_v = \frac{1}{\nu} \tau$, winna mieć tę samą wartość, to znaczy:

$$\begin{aligned}\cos(b_n^2 - \alpha_v^2)x &= \cos(b_n^2 - \alpha_v^2) \cdot (x + 2c\tau_v), \\ \sin(b_n^2 - \alpha_v^2)x &= \sin(b_n^2 - \alpha_v^2) \cdot (x + 2c\tau_v);\end{aligned}$$

zatem

$$(b_n^2 - \alpha_v^2)x = (b_n^2 - \alpha_v^2) \cdot (x + 2c\tau_v) \mp 2c\pi,$$

skąd

$$b_n^2 - \alpha_v^2 = \pm \nu \frac{\pi}{\tau} \quad \text{oraz} \quad b_n = \pm \sqrt{\alpha_v^2 \pm \nu \frac{\pi}{\tau}}. \quad (81)$$

Tak więc argument (77) przybiera postać:

$$p = jrb_n = jr \sqrt{\alpha_v^2 \pm \nu \frac{\pi}{\tau}}. \quad (82)$$

Podobnie jak przy równaniu (28), dla niezbyt małych podziałek biegunowych τ (to znaczy dla niezbyt małych prędkości synchronicznych), niezbyt wysokich rzędów harmonicznych i niezbyt małych poślizgów, można przyjąć w przybliżeniu:

$$\left. \begin{aligned} p &\cong jr\alpha_v = \varrho j \sqrt{j}, \\ \text{przy czym } \varrho &= r \sqrt{(1 \pm \nu \mp s\nu)\omega\mu\gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Stałe równania (80) określimy wstawiając doń (81) i porównując wynik z rozkładem pola na powierzchni (10a):

$$C \cdot e^{\pm j\nu \frac{\pi}{\tau} x} = C_{3n} \cos \nu \frac{\pi}{\tau} x \pm C_{4n} \sin \nu \frac{\pi}{\tau} x, \quad (84)$$

skąd wynika warunek dla stałych: $C_{4n} = jC_{3n}$.

Tak więc rozwiązanie (80) ma postać:

$$X_n(x) = C_{3n} e^{\pm j\nu \frac{\pi}{\tau} x}. \quad (85)$$

Wybór jednego z rozwiązań (79) lub (79a) zależy od tego, które z nich szybciej prowadzi do prostych postaci końcowych. W pracy [9] wykazano przydatność praktyczną formy (79), dla której istnieją wygodne wzory asymptotyczne [1], [9]. Rozwiązania o argumentcie zespolonym $p = \varrho j \sqrt{j}$ można przedstawić za pomocą funkcji Thomsona (Kelvina) pierwszego i trzeciego rodzaju, dla których istnieją tablice [1]. Według [1] (str. 505):

$$\left. \begin{aligned} H_p^{(1)}\left(z \cdot e^{\pm j\frac{3}{4}\pi}\right) &= \text{her}_p(z) \pm j \text{hei}_p(z), \\ \text{hei}_p(z) &= -\frac{2}{\pi} \text{ker}_p(z), \quad \text{her}_p(z) = \frac{2}{\pi} \text{kei}_p(z), \\ I_p\left(z \cdot e^{\pm j\frac{3}{4}\pi}\right) &= \text{ber}_p(z) \pm j \text{bei}_p(z), \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

skąd otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} H_1^{(1)}(\varrho j \sqrt{j}) &= H_1^{(1)}\left(\varrho \cdot e^{j\frac{3}{4}\pi}\right) = \text{her}_1 \varrho + j \text{hei}_1 \varrho = \frac{2}{\pi} (\text{kei}_1 \varrho - j \text{ker}_1 \varrho), \\ I_1(\varrho j \sqrt{j}) &= I_1\left(\varrho \cdot e^{j\frac{3}{4}\pi}\right) = \text{ber}_1 \varrho + j \text{bei}_1 \varrho. \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Według [8] (str. 360):

$$H_p^{(2)}(z \cdot e^{-j\pi}) = -e^{j\pi p} \cdot H_p^{(1)}(z). \quad (88)$$

Uwzględniając, że $e^{\pm j\pi} = -1$ mamy:

$$H_1^{(2)}(\varrho j \sqrt{j}) = H_1^{(1)}(-\varrho j \sqrt{j}). \quad (89)$$

Z kolei według [1] (str. 470):

$$H_p^{(1)}(z \cdot e^{j\pi p}) = e^{-j\pi p} H_p^{(1)}(z) - 2e^{-j\pi p} \frac{\sin m p \pi}{\sin p \pi} \cdot I_p(z); \quad (90)$$

skąd uwzględniając (89) otrzymujemy:

$$H_1^{(2)}(\varrho j \sqrt{j}) = H_1^{(1)}(-\varrho j \sqrt{j}) = H_1^{(1)}(\varrho j \sqrt{j} \cdot e^{j\pi}) = -H_1^{(1)}(\varrho j \sqrt{j}) + 2I_1(\varrho j \sqrt{j}). \quad (91)$$

Po podstawieniu (87) do (91) mamy ostatecznie

$$H_1^{(2)}(\varrho j \sqrt{j}) = -\text{her}_1 \varrho - j \text{hei}_1 \varrho + 2\text{ber}_1 \varrho + j 2\text{bei}_1 \varrho. \quad (92)$$

Wstawiając (87) i (92) do (79) znajdujemy drugą z funkcji:

$$R_n(p) \cong C_{1n} \frac{2}{\pi} (\text{kei}_1 \varrho - j \text{ker}_1 \varrho) - C_{2n} \frac{2}{\pi} (\text{kei}_1 \varrho - j \text{ker}_1 \varrho - \pi \text{ber}_1 \varrho - j \pi \text{bei}_1 \varrho). \quad (93)$$

Po wstawieniu (85) i (93) do (75) znajdujemy ogólne wyrażenie na składową promieniową pola:

$$H_{mrv} = C_{3n} \cdot e^{\pm j\nu \frac{\pi}{\tau} x} \cdot \frac{2}{\pi} [C_{1n} (\text{kei}_1 \varrho - j \text{ker}_1 \varrho) - C_{2n} (\text{kei}_1 \varrho - j \text{ker}_1 \varrho - \pi \text{ber}_1 \varrho - j \pi \text{bei}_1 \varrho)]. \quad (94)$$

Stałe w wyrażeniu (94) określamy z warunku, że przy $r \rightarrow 0$ ($\varrho \rightarrow 0$): $\text{kei}_1 \varrho \rightarrow \infty$, $\text{ker}_1 \varrho \rightarrow \infty$, $\text{ber}_1 \varrho \rightarrow 0$, $\text{bei}_1 \varrho \rightarrow 0$ — dla wszystkich x . Należy więc (94) tak przegrupować, by wydzielić funkcje typu kei i ker

$$H_{mrv} = C_{3n} e^{\pm j\nu \frac{\pi}{\tau} x} \cdot \frac{2}{\pi} [(C_{1n} - C_{2n}) (\text{kei}_1 \varrho - j \text{ker}_1 \varrho) + C_{2n} \pi (\text{ber}_1 \varrho + j \text{bei}_1 \varrho)]. \quad (94a)$$

Ponieważ przy $r = 0$ natężenie pola nie może równać się nieskończoności, zatem $(C_{1n} - C_{2n}) = 0$, czyli $C_{2n} = C_{1n}$, skąd zakładając $C = 2C_{3n} C_{1n}$, mamy

$$H_{mrv} = C e^{\pm j\nu \frac{\pi}{\tau} x} (\text{ber}_1 \varrho + j \text{bei}_1 \varrho). \quad (94b)$$

Przy $r = R$, to znaczy $\varrho = \varrho_R$ oraz dla $x = 0$, $H_{mrv} = H_{mrvs}$, zatem

$$C = \frac{H_{mrvs}}{\text{ber}_1 \varrho_R + j \text{bei}_1 \varrho_R}$$

Wstawiając tę wartość do (94b) otrzymujemy

$$H_{mrv} = H_{mrvs} \cdot e^{\pm jv \frac{\pi}{\tau} x} \frac{\text{ber}_1 \varrho + j \text{bei}_1 \varrho}{\text{ber}_1 \varrho_R + j \text{bei}_1 \varrho_R}. \quad (95)$$

Wykorzystując warunek graniczny dla składowej normalnej na powierzchni bieźni $H_{mrvs} = \frac{1}{\mu} B_{mrvs}$, możemy analogicznie jak przy (24) określić ostateczne wyrażenie na wypadkową chwilową wartość natężenia pola magnetycznego w punkcie (r, θ, x) nieskończenie długiej bieźni walcowej, przy niesinusoidalnym rozkładzie przestrzennym przepływu twornika

$$\underline{H}_{mr} = \frac{\mu_0}{2\delta_p} \cdot \frac{F_{m1}}{\mu \cdot \zeta_1} \sum_{v=1}^{v=i} \left(\sin v \frac{\pi}{2} \right) \frac{\zeta_v}{v} e^{j(\pm v \mp sv)\omega t} \cdot e^{\pm jv \frac{\pi}{\tau} x} \frac{\text{ber}_1 \varrho + j \text{bei}_1 \varrho}{\text{ber}_1 \varrho_R + j \text{bei}_1 \varrho_R}. \quad (96)$$

Pozostałe składowe pola i parametry bieźni znajdujemy jak poprzednio, wykorzystując równania Maxwella (12) przedstawione we współrzędnych cylindrycznych. W pracy [1] znaleźć można wzory asymptotyczne, umożliwiające przedstawienie wyników w postaci analitycznej.

7. ZAKOŃCZENIE

Teoria i metody obliczeń indukcyjnych silników liniowych mają wiele wspólnego ze zwykłymi silnikami indukcyjnymi obrotowymi. Istnieje jednak także i pewna specyfika tych maszyn wymagająca specjalnego podejścia. Dotyczy to w szczególności parametrów bieźni i wpływu zjawisk wynikających ze skończonej długości twornika. W pracy przedstawiono podstawowe metody analizy procesów elektromagnetycznych zachodzących w silnikach liniowych i wykazano ważniejsze różnice obliczeniowe w stosunku do silników indukcyjnych o polu wirującym kołowym. Ocena dokładności obliczeń i ich zastosowanie do konkretnej maszyny będą przedmiotem oddzielnego opracowania.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. Antoniewicz, Tablice funkcji dla inżynierów, PWN, Warszawa 1969.
2. E. R. Laithwaite, Propulsion Without Wheels, London, The English Universities Press Ltd.
3. J. Laronze, A. Faure, Moteurs linéaires, Techniques CEM, No 81, 1971, s. 3—11.
4. J. Lasociński, Pole elektromagnetyczne w szczelinie maszyny o masywnym wirniku ferromagnetycznym, przy uwzględnieniu skończonej długości maszyny, Rozprawy Elektrot., nr 1, 1966, t. XII, s. 69—92.
5. S. Nitka, Problemy przetwarzania energii w silnikach asynchronicznych o ruchu posuwistym liniowym, Rozprawa doktorska, Akad. Gór. Hutnicza, Kraków 1969, s. 1—107.
6. M. Poloujadoff, Theorie des linearen Induktionsmotors in vereinfachter Darstellung, ETZ-A, 90, Nr 11, 1969, s. 545—548.
7. I. M. Postnikov, Projektowanie električeskich mašin, Kijev 1960.
8. I. M. Rižik, I. S. Gradštejn, Tablicy integralów, summ, riadov i proizviedienij, Gos. Izd. Tiechn. Tieoret. Literatury, Moskva 1951.

9. J. Turowski, *Elektrodynamika techniczna*, WNT, Warszawa 1968.
10. J. Turowski, *Uogólniona metoda obliczania strat rozproszonych w stalowych częściach konstrukcyjnych*, *Rozprawy Elektrot.*, nr 1, tom XIV, 1968, s. 179—195.
11. A. I. Woldek, *Indukcionnyje magnitogidrodinamičeskiye mašiny s židkometalličeskim rabočim tiełom*, Izd. „Energiya”, Leningrad 1970.

J. TUROWSKI

METHODS OF THE CALCULATION OF FIELD AND SECONDARY PARAMETERS OF LINEAR INDUCTION MOTORS

Summary

The principles of electrodynamics of linear induction motors, especially taking into account small ones with a steel rail race have been presented briefly. On the basis of the analogy to conventional rotating induction motors, the expression for the flux density in the air gap, in coordinates x_0, y_0, z_0 — fixed to the armature (exciter) (6) and x, y, z — fixed to the rail race (10), has been derived. The possibility of the occurrence in field distribution of the higher harmonics of order ν — along the race axis and of the order n — across the race axis has been taken into account.

On the basis of Maxwell's equations the electromagnetic field inside the race has been analysed. A constant for the function expressing the field distribution along and across of the race axis has been determined from the condition of the periodism of field. The constants for the function of the field distribution inside the material depend on the relation between the depth of penetration of electromagnetic wave δ (21) and the race thickness d . In the case of steel races and large slips ($d > 2\delta$), one can approximately assume the infinite thickness of the rail race. On the basis of such an assumption the following formulas for linear induction motors with massive steel race have been derived: — for secondary parameters of steel rail race R'_2, X'_2, I_2 ; — for push force (51), — for synchronous speed (7), — for magnetic voltage drop in rail race (52) and for air gap magnetic voltage (43).

The principles of the analogical calculation for the linear motors with the nonmagnetic rectangular ($d < 2\delta$) and cylindrical rail race has been proposed. At the sufficiently large diameter the final expressions may be, with the help of the handy asymptotic formulas [9], brought to simple algebraic forms, as was done in the work [9] in the case of cylindrical electromagnetic shields.

The considerations were made on the assumption of the infinite length of machine. The effects caused by the ends of armature of finite length are considered separately. In particular (taking advantage of other works [11]), the reason for the arising of immovable, oscillating wave of field and its influence on the modulation of the amplitudes of a field running in an air gap, is explained.

The evaluation of the accuracy of the above calculations and their application to the actual types of motors will be the subject of another paper.

J. TUROWSKI

MÉTHODES DE CALCUL DU CHAMP ELECTROMAGNÉTIQUE ET DES PARAMÈTRES SECONDAIRES DU MOTEUR ASYNCHRONE LINÉAIRE

Résumé

On a brièvement rappelé les bases électrodynamiques des moteurs asynchrones linéaires. L'induction dans l'entrefer est déterminée de la même façon que dans les moteurs conventionnels. On a tenu compte des harmoniques spatiales du champ le long du secondaire ainsi qu'en quadrature à cette direction. A la base de l'analyse du champ appuyée sur les équations de Maxwell on a déduit des formules approximatives:

pour les paramètres secondaires (47, 50, 45), — pour la vitesse synchrone (7), — pour la poussée (51), — pour la tension magnétique dans l'induit (52) et pour la force magnetomotrice (43), dans les moteurs linéaires avec l'induit massif ferromagnétique.

On a aussi présente une pareille méthode de calcul pour les moteurs avec le secondaire nonmagnétique rectangulaire ou cylindrique.

On a explique l'influence d'une longueur déterminée d'excitateur sur la formation d'une onde oscillante immobile dans l'espace. Cette onde provoque la modulation de l'amplitude du champ courant dans l'entrefer.

J. TUROWSKI

BERECHNUNGSMETHODEN DES FELDES UND DER PARAMETER DES LÄUFERS VON INDUKTIONSLINEARMOTOREN

Zusammenfassung

Es wurden die Grundlagen der Elektrodynamik von Induktionslinearmotoren kurz dargestellt. Die Induktion im Luftspalt ist ähnlich, wie im Falle eines konventionellen Motors ermittelt worden; es wurde dabei die Möglichkeit des Auftretens von Raumberwellen längs und quer zur Läuferichtung berücksichtigt.

Aufgrunde der Maxwell'schen Analyse sind approximative Formeln zur Bestimmung von: Läuferparametern (47), (50), (45), — synchroner Drehzahl (7), — Ziehkraft (51), — magnetischer Spannung im Läufer (52), sowie Durchflutung im Linearmotor mit Stahlläufer (43) abgeleitet worden.

Es wurde ebenfalls das Verfahren mittels analogischer Berechnungen von Motoren mit nichtferromagnetischem Läufer in Form eines Rechtecks sowie eines Zylinders angegeben.

Zum Schluß ist der Einfluß der endlichen Ankerlänge auf das Entstehen einer unbeweglich oszillierenden Raumwelle geschildert worden, die die Amplituden des im Spalt laufenden Feldes zur Folge hat.

Я. ТУРОВСКИ

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПОЛЯ И ПАРАМЕТРОВ РЕЛЬСА ИНДУКЦИОННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

Резюме

В сокращенном виде представлены основы электродинамики индукционных линейных двигателей с особым учетом малых исполнительных двигателей с массивным стальным рельсом. Используя сходство с обыкновенным вращающимся асинхронным двигателем, представлена магнитная индукция в зазоре в системе декартовых координат x_0, y_0, z_0 связанной с якорем (индуктором) (6), а также x, y, z — связанной с рельсом (10). Учитывалась при этом возможность появления в кривой поля высших пространственных гармоник: порядка n — вдоль рельса и поядка n — поперек рельса.

На основании уравнений Максвелла проведен анализ электромагнитного поля внутри тела рельса. Постоянные для функций выражающих изменения поля вдоль и поперек оси рельса определялись из условия периодичности распределения поля. Постоянные для функции выражающей изменения вглубь металла зависят от соотношения глубины проникновения электромагнитной волны δ , (21) и толщины рельса d . В случае стальных рельсов и значительных скольжений ($d > 2\delta$) можно в первом приближении принять допущение бесконечной толщины рельса. Исходя из такого предположения был разработан метод расчета: — параметров рельса R'_2, X'_2, I'_2 , —

силы тяги двигателя (51), — синхронной скорости (7), — падения магнитного напряжения внутри рельса (52) и полного тока рельса (43) в двигателях со стальным прямоугольным рельсом.

Приведен также метод подхода к аналогичным расчетам для двигателей с неферромагнитным прямоугольным рельсом ($d < 2\delta$) и с цилиндрическим рельсом. В случае достаточно большого диаметра цилиндра окончательные формулы можно, с помощью удобных асимптотических формул [9], свести к простому алгебраическому виду, подобно тому, как это было сделано в работе [9] для цилиндрического экрана.

Анализ проводился в основном при предположении машин бесконечной длины. Эффекты вытекающие из конечной длины якоря обсуждались отдельно, в частности (при учете работ других авторов [11]) были выяснены причины появления пульсирующей волны полного тока неподвижной в пространстве и ее влияние на модуляцию бегущего поля в зазоре.

Оценка точности расчетов и их применение к конкретным видам машин будут темой отдельной работы.

Niektóre zagadnienia związane ze skalowaniem statystycznym przełączników termobimetalowych

WITOLD BOBROWSKI (BRWINÓW)

Instytut Elektrotechniki

Otrzymano 20.3.1972

W artykule omówiono niektóre zagadnienia związane ze skalowaniem przełączników termobimetalowych oraz rozpatrzono możliwość wyznaczania położenia punktów nastawczych przy użyciu metod statystycznych.

1. WSTĘP

W artykule omówiono niektóre zagadnienia związane ze skalowaniem przełączników termobimetalowych. W szczególności przeprowadzono analizę możliwości wyznaczania punktów nastawczych na skali przełącznika przy użyciu metod statystycznych. Skalowanie przełączników cieplnych w warunkach eksploatacyjnych jak i w warunkach produkcyjnych jest procesem czasochłonnym. Zastosowanie metod statystycznych przy skalowaniu przełączników termobimetalowych mogłoby przynieść znaczne skrócenie czasu skalowania.

2. STAN ZAGADNIENIA

Do zabezpieczenia silników elektrycznych od przeciążeń stosowane są zabezpieczenia cieplne. Najbardziej rozpowszechnionymi zabezpieczeniami cieplnymi są przełączniki termobimetalowe. Elementy termobimetalowe wchodzące w skład przełącznika umożliwiają uzyskanie zależnej charakterystyki czasowo-prądowej działania przełącznika.

Ze względów eksploatacyjnych byłoby pożądane całkowite dopasowanie przebiegu charakterystyki przełącznika do charakterystyki cieplnej zabezpieczanego silnika. W praktyce dobór przebiegu charakterystyki przełącznika cieplnego, a w szczególności wartości jego cieplnej stałej czasowej, do wartości cieplnej stałej czasowej zabezpieczanego silnika, przeprowadza się jedynie dla bardzo dużych obiektów. Do zabezpieczania powszechnie stosowanych silników niskiego napięcia stosuje się przełączniki termobimetalowe, których przebieg charakterystyki czasowo-prądowej ujęty jest w postaci tablicy [5]. Tablica ta podaje wartości współrzędnych punktów, pomiędzy którymi powinna przebiegać charakterystyka czasowo-prądowa przełącznika.

Zgodnie z wymaganiami normy [5] przełącznik termobimetalowy powinien mieć podane na podziałce co najmniej trzy wartości prądów nastawczych. Przy nastawianiu na te punkty

przekaznik powinien spełniać wymagania dotyczące przebiegu charakterystyki. Wyznaczenie w sposób właściwy punktów nastawczych jest więc jednym z czynników decydujących o jakości wyrobu.

Norma [5] wymaga aby przekaznik nie zadziałał w czasie dwóch godzin przy przeciążeniu prądem o wartości 1,05 prądu nastawczego od stanu nienagrzanego, natomiast powinien zadziałać w czasie dwudziestu minut, przy przeciążeniu prądem o wartości 1,20 prądu nastawczego po wstępnym nagrzaniu prądem o wartości równej prądowi nastawczemu. W podanym powyżej zakresie prądów powinna więc znajdować się wartość prądu rozruchowego przekazywacza. Wartość ta nazywana jest również prądem granicznym, jest to bowiem najmniejsza wartość prądu przy której następuje jeszcze zadziałanie przekazywacza.

Proces skalowania przekazywacza sprowadza się do takiego wyznaczenia położenia punktu nastawczego, aby odpowiadający mu punkt graniczny mieścił się w podanym powyżej zakresie prądowym.

Istnieje wiele metod skalowania przekazywaczy termobimetalowych [4], a ich stosowanie uzależnione jest od istniejącej technologii produkcji, wymaganej jakości wyrobów, organizacji kontroli itp.

Stosowane metody skalowania przekazywaczy można podzielić na cztery następujące grupy:

1. skalowanie mechaniczne,
2. skalowanie prądami przeciążeniowymi,
3. skalowanie prądem granicznym,
4. skalowanie mieszane.

Skalowanie mechaniczne sprowadza się na ogół do nastawienia określonej długości drogi wyzwiania przekazywacza termobimetalowego. Regulacja odbywa się za pomocą środków mechanicznych (np. wkretów regulacyjnych). Długość drogi wyzwiania jest wyznaczana zwykle na podstawie prób. Stosowanie tej metody wymaga zachowania ścisłych tolerancji wykonawczych wszystkich pozostałych elementów układu pomiarowo-wyzwalającego przekazywacza.

Skalowanie prądami przeciążeniowymi polega na przeciążeniu przekazywacza prądem o wartości odpowiednio przekraczającej wartość prądu nastawczego przy jednoczesnym ustawieniu mechanizmu regulacyjnego tak, aby zadziałanie przekazywacza nastąpiło w określonym przedziale czasowym. Wartość czasu skalowania wyznacza się zwykle doświadczalnie na podstawie dokładnie przebadanych przekazywaczy wzorcowych. W przypadku przekazywaczy trójbiegunowych zachodzi konieczność wstępnego zerowania przekazywaczy, czyli jednakowego ustawienia bimetalu we wszystkich trzech torach prądowych.

Stosowana jest również metoda skalowania prądami przeciążeniowymi kolejno w trzech torach przekazywacza. Skalowanie prądami przeciążeniowymi podobnie jak skalowanie mechaniczne wymaga zachowania odpowiednich tolerancji produkcyjnych dla dotrzymania zgodności parametrów z przekazywaczami wzorcowymi.

Skalowanie prądem granicznym polega na bezpośrednim wyznaczaniu punktów nastawczych przy nagrzewaniu przekazywaczy prądem granicznym (o wartości 1,10—1,15 I_{nast}) do stanu cieplnie ustalonego. Po ustaleniu się temperatury każdy biegun przekazywacza regulowany jest oddzielnie przez ustawienie go na granicy zadziałania mechanizmu wyzwającego.

Pewną odmianę metody skalowania prądem granicznym stanowi metoda skalowania naturalnego [6]. Metoda ta polega na samoczynnym ustawianiu się termoutwardzalnej listwy wyzwajającej w procesie skalowania przy nagrzewających się bimetalach. Po utwardzeniu się listwy wyzwajającej przekładnik jest wyskalowany jednocześnie we wszystkich trzech biegach.

Skalowanie metodami mieszanymi sprowadza się do częściowego wykorzystania opisanych powyżej metod. Istnieje wiele możliwości łączenia tych metod. Najczęściej łączona jest metoda skalowania prądem przeciążeniowym z metodą skalowania prądem granicznym. Połączenie to daje stosunkowo największą dokładność skalowania przy jednoczesnym znacznym skróceniu czasu nagrzewania przekładnika w stosunku do czasu nagrzewania przy skalowaniu prądem granicznym. Metody mieszane, w których zastosowano to połączenie nazywane są zwykle metodami skróconego nagrzewania [3].

3. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Przy zastosowaniu opisanych powyżej metod skaluje się przekładnik dla jednej z wybranych wartości prądu nastawczego. Podanie trzech wartości prądów nastawczych wymaga więc trzykrotnego powtórzenia cyklu skalowania.

Poniżej przeprowadzono analizę możliwości wyznaczania niektórych punktów nastawczych na skali przekładnika przy użyciu metod statystycznych. W szczególności przeanalizowano możliwość wyznaczania statystycznego punktów nastawczych pośrednich.

Ocenę możliwości wyznaczania statystycznego punktów nastawczych danego przekładnika termobimetalowego przeprowadzono za pomocą badania szerokości odpowiedniego przedziału ufności wyznaczonego z próby losowej pobranej z populacji rozpatrywanych przekładników.

4. ANALIZA ZAGADNIENIA

4.1. Zakres dopuszczalny wartości prądów rozruchowych przekładnika termobimetalowego

Norma [5] nie precyzuje zakresu dopuszczalnego wartości prądów rozruchowych przekładnika termobimetalowego podając jedynie cytowane powyżej ograniczenie czasów zadziałania przekładnika. Takie sformułowanie ograniczeń uzależnia dopuszczalny zakres wartości prądów rozruchowych od wartości cieplnej stałej czasowej przekładnika.

Czas zadziałania przekładnika termobimetalowego wyraża się zależnością [2]:

$$t = T \ln \frac{p^2 - v^2}{p^2 - g^2}, \quad (1)$$

w której:

t — czas zadziałania przekładnika,

T — cieplna stała czasowa przekładnika,

$p = \frac{I}{I_n}$ — krotność przeciążenia w stosunku do wartości prądu nastawczego,

$v = \frac{I_o}{I_n}$ — stosunek wartości prądu nagrzewania wstępnego do wartości prądu nastawczego,

$g = \frac{I_r}{I_n}$ — stosunek wartości prądu rozruchowego do wartości prądu nastawczego.

Z zależności (1) otrzymujemy przy uwzględnieniu wymagań normy [5] następującą relację określającą dopuszczalny zakres wartości prądów rozruchowych przekąźnika termobimetalowego:

$$1,05 I_n \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{t_1}{T}\right)} < I_r < 1,20 I_n \sqrt{1 - 0,306 \exp\left(-\frac{t_2}{T}\right)}, \quad (2)$$

gdzie:

$$t_1 = 120 \text{ min}, \quad t_2 = 20 \text{ min}.$$

Z relacji (2) wynika, że ze wzrostem wartości cieplnej stałej czasowej przekąźnika dopuszczalny zakres prądów rozruchowych przekąźnika termobimetalowego ulega zawężeniu.

Wartość cieplnej stałej czasowej termobimetalu przekąźnika można wyznaczyć z zależności (1) na podstawie przebiegu charakterystyki czasowo-prądowej przekąźnika lub ze wzoru uproszczonego w postaci

$$T = \frac{cV}{\alpha A},$$

w której:

c — ciepło właściwe bimetalu,

V — objętość bimetalu,

A — powierzchnia chłodzenia,

α — współczynnik oddawania ciepła.

Dla najczęściej spotykanych wartości cieplnych stałych czasowych rzędu kilku minut dopuszczalny zakres wartości prądów rozruchowych wynosi praktycznie

$$1,05 I_n < I_r < 1,20 I_n. \quad (3)$$

4.2. Punkty nastawcze na podziałce przekąźnika

Przekąźniki termobimetalowe wyposażone są w mechanizm nastawczy z podziałką umożliwiającą nastawienie wybranej wartości prądu nastawczego I_n przekąźnika. Zmiana położenia mechanizmu nastawczego powoduje zmianę wartości prądu rozruchowego. Zmiana nastawienia przekąźnika może się odbywać na ogół w sposób płynny. Zależność pomiędzy położeniem wskaźnika na podziałce a wartością rozruchową przekąźnika jest więc funkcją ciągłą

$$I_r = f(x), \quad (4)$$

gdzie:

x — położenie wskaźnika na podziałce,

I_r — wartość rozruchowa przekąźnika.