INSTYTUT TECHNOLOGII ELEKTRONOWEJ
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

432

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XV · ZESZYT 1

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1969

INSTYTUT TECHNOLOGII ELEKTRONOWEJ
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

KWARTALNIK

SPIS TREŚCI DO TOMU XV — 1969

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA

SPIS TREŚCI DO TOMU XV

J. Brożyna: Korekcja transformatorów wejściowych wzmacniaczy grupowych 313
J. Brożyna: Obwody wejściowe wzmacniaczy grupowych 325
J. Brożyna: Zagadnienia związane z projektowaniem wzmacniaczy grupowych o małym wzmocnieniu 423
S. Budkowski: Optymalizacja układu logicznego negacji sumy metodą ślepego poszukiwania przestrzeni zmiennych decyzyjnych 479
J. Chirkowski: Aproksymacja charakterystyki amplitudowej liniowego układu elektrycznego zmodyfikowaną metodą charakterystyk logarytmicznych 435
M. Dąbrowski: Korekcja transwersalna zniekształceń interferencyjnych w transmisji danych 53
S. Dobosz: Metoda poprawiania stabilności wyzwalania końca impulsu w tranzystorowym generatorze samodławnym 337
S. Dobosz: Tranzystorowy przełącznik kanałów 347
Z. Flisowski: Obliczanie przepięć atmosferycznych w liniach energetycznych na podstawie antenowej teorii fal 177
W. Gruszczyński, E. Klugman, H. Wierzba: Kalorymetryczna metoda pomiaru strat w miniaturowych rdzeniach ferrytowych 467
J. Kaliński: Stabilizacja poziomu sygnału w mikrofalowych układach pomiarowych metodą podwójnej modulacji 635
F. Kamiński: Wybrane aspekty syntezy torów niejednorodnych złożonych z odcinków jednorodnych, o charakterystyce Czebyszewa 23
F. Kamiński: Synteza łańcuchowych filtrów elektromechanicznych za pomocą układów zastępczych o stałych rozłożonych 717
A. Karczmarewicz: Binarne kody skorupowe 305
A. Karczmarewicz: Miara odporności systemów transmisji danych na zakłócenia seryjne 301
E. Kącki: Badanie stanów nieustalonych w niejednorodnej linii elektrycznej za pomocą maszyny analogowej 89
H. Konczyński: Ekwipotencjalny układ uziemień telekomunikacyjnych 73
Z. Korzec: Podstawy teoretyczne reflektometrii czasowej 269
Z. Korzec, J. Korzyński: Przesuwnik fazowy RC z tranzystorem polowym pracującym jako opornik o sterowanej rezystancji 387
J. Kudrewicz: Matematyczne podstawy metody linearyzacji harmonicznych 587
A. Kurbiel: Ocena względnej przydatności torów wielkoprądowych pieców łukowych . . . 129
A. Lizoń: Symulacja sygnału odbieranego w radarach dopplerowskich z sinusoidalną modulacją częstotliwości 515
W. Majewski jr: Zagadnienie minimalizacji liczby stanów automatów skończonych . . . 199
J. Migdalski: Niektóre zagadnienia analizy i syntezy niezawodnościowej układów elektrycznych 625
J. Migdalski: Synteza niezawodnościowa układu zawierającego elementy przełączające — przełączniki 3
J. Nadratowski: Metoda liczb strukturalnych na tle klasycznych metod analizy układów liniowych 237
Z. Perkowski: Wyznaczanie pojemności torów współosiowych o przewodach wielodrutowych 105
L. Referowski: Optymalizacja układu do pomiaru słabych pól magnetycznych metodą kompensacyjną z cewką solenoidalną 655

A. Skorupski, J. Kochman: Powstawanie impulsów fałszywych na wyjściach dekodera licznika . . . 751
J. Srzednicki: Mostki RC przestrajane jednym elementem . . . 359
J. Srzednicki: Optymalne parametry przestrajanego mostkowego generatora RC . . . 253
M. Styblíński: Sprzężenia reaktancyjne w tranzystorowych wzmacniaczach wielkiej częstotliwości . . . 395
C. Syc: Generowanie drzew i multidrzew multigrafów metodą liczb strukturalnych binarnych za pomocą maszyn cyfrowych . . . 495
A. Tchorzewski: Zniekształcenia aperturowe układów analizy obrazów telewizyjnych i metody ich korekcji . . . 533
J. Turowski: Wzór na straty mocy w kadziach nieekranowanych wielkich transformatorów jednofazowych . . . 149
R. Vogel: Własności kierunkowe i filtrujące dwóch równoległych linii sprzężonych . . . 281

CONTENTS

J. Brożyna: Correction of Input Transformers in Hybrid Coil Feedback Amplifiers . . . 313
J. Brożyna: Input Circuits of Hybrid Coil Feedback Amplifiers . . . 325
J. Brożyna: Problems Related to Small-Gain Carrier Amplifiers Designing . . . 423
S. Budkowski: Logic Circuit Optimalisation by Means of a Free Scanning of the Decision Variables Space . . . 479
J. Chirkowski: The Approximation of Magnitude-Frequency Characteristic of Linear Electric Network by Means of Modified Logarithmic Characteristics Method . . . 435
M. Dąbrowski: The Minimizing of Intersymbol Interference with the Aid of Transversal Filter . . . 53
S. Dobosz: Method of Improvement of Release Stability of the End of Impulse in a Self-Choke Transistor Generator . . . 337
S. Dobosz: Transistorised Channel Selector . . . 347
Z. Flisowski: Calculation of Atmospheric Overvoltages in Power Lines on the Basis of the Antenna Wave Theory . . . 177
W. Gruszczyński, E. Klugman, H. Wierzba: Calorimetric Method of Losses Measurement in Miniature Ferrite Cores . . . 467
J. Kaliński: Stabilization of Signal Level in Microwave Measuring Set-Ups with the Double Modulation Method . . . 635
F. Kamiński: Selected Problems of the Synthesis of Transmission Lines in Cascade with the Chebyshev Transmission Characteristic . . . 23
F. Kamiński: The Synthesis of Electromechanical Chain Filters by Means of Equivalent Circuits with Distributed Parameters . . . 717
A. Karczmarewicz: A New Class of Binary Codes — „Crust-Codes" . . . 305
A. Karczmarewicz: Measure of Insensitivity of Data Transmission Systems to Burst-Noise 301
E. Kącki: Study of Non-Steady States of a Non-Homogeneous Electrical Line with the Aid of an Analog Computer . . . 89
H. Konczyński: Equipotential Arrangement of Telecommunication Earth Electrodes . . 73
Z. Korzec: Basic Theory of Time Domain Reflectometry . . . 269
Z. Korzec, J. Korzyński: The Phase Shift Bridge with a Field Effect Transistor as a Variable Resistor . . . 387
J. Kudrewicz: Mathematical Basis of Describing Function Method . . . 587
A. Kurbiel: Evaluation of Relative Usefulness of Great Current Circuits in Arc Furnaces . . . 129
A. Lizoń: Received Signal Simulation in Sinusoidally Frequency-Modulated Doppler Radars 515
W. Majewski jr: The Problem of State Minimization for Finite Automata . . . 199
J. Migdalski: On Certain Problems of Reliability Analysis and Synthesis of Electrical Systems . . . 625

J. Migdalski: Switching System Reliability Synthesis 3
J. Nadratowski: Method of Strutural Numbers Versus Classical Methods of Linear System Analysis 237
Z. Perkowski: Determination of Capacitance of Coaxial Lines Having Bunched Conductors 105
L. Referowski: The Optimization of the Circuit for the Measurement of Small Magnetic Fields by the Compensation Method with a Solenoidal Coil 655
A. Skorupski, J. Kochman: False Pulses on the Outputs of Counter Decoder 751
J. Srzednicki: Single-Control Element RC Bridges 359
J. Srzednicki: Optima Parameters of Tuned RC Bridge Oscillator 253
M. Styblíński: Lossless Feedback in Transistor High Frequency Bandpass Amplifiers . . 395
C. Syc: Computer-Aided Generating of Trees of Multigraphs Based on the Method of Structural Numbers 495
A. Tchorzewski: Aperture Distortions in the Analysis of TV Image and the Methods of their Corrections 533
J. Turowski: Formula for the Calculation of Stray Losses in Nonshielded Tanks of Single-Phase Large Transformers 149
R. Vogel: Directional and Filtering Properties of Two Parallel Coupled Lines 281

TABLE DES MATIÈRES

J. Brożyna: La correction des transformateurs d'entrée des amplificateurs de groupe . . . 313
J. Brożyna: Les circuits d'entrée des amplificateurs de groupe 325
J. Brożyna: Les problèmes liés avec le projet de l'amplificateur de groupe à amplification petite 423
S. Budkowski: Optimalisation d'un circuit logique NOR 479
J. Chirkowski: L'approximation de la caractéristique amplitude-fréquence du schéma linéaire électrique d'après une méthode modifiée des caractéristiques logarithmiques 435
M. Dąbrowski: La correction transversalle des distorsions d'interférence dans la transmission des données 53
S. Dobosz: La méthode d'amélioration de la stabilité du déclenchement du bout de l'impulsion dans un générateur bloqué à transistor 337
S. Dobosz: Commutateur de canaux transistorisé 347
Z. Flisowski: Le calcul des surtensions atmosphériques dans les lignes d'énergie sur la base de la théorie d'antenne des ondes 177
W. Gruszczyński, E. Klugmann, H. Wierzba: La méthode calorimétrique de mesure des pertes dans les noyaux de ferrite miniaturisés 467
J. Kaliński: La stabilisation du niveau du signal dans les circuits hyperfréquences de mesure d'aprés la méthode de la modulation à deux reprises 635
F. Kamiński: Les aspects choisis de la synthèse des lignes non-homogénes composées de secteurs homogènes à caractéristique Tchebycheff 23
F. Kamiński: La synthèse des filtres électromécaniques en échelle à l'aide des schémes équivalents à constantes réparties 717
A. Karczmarewicz: Codes „En croûte", binaires 305
A. Karczmarewicz: Mesure d'immunité des systèmes de trasmission des données contre les bruits prolongés 301
E. Kącki: Étude des régimes non-stationnaires dans une ligne électrique irrégulière à l'aide d'une machine calculatrice analogue 89
H. Konczyński: Système équipotentiel des prises de terre des télécommunications 73
Z. Korzec: Les fondements théoriques de la réflectométrie temporaire 269
Z. Korzec, J. Korzyński: Déphaseur RC avec un transistor à effet de champ opérant comme une résistance à résistive commandé 387

J. Kudrewicz: Les fondements mathématiques de la méthode de la linéarisation des harmoniques 587
A. Kurbiel: L'évaluation de l'utilité relative des voies grand courant des fours à l'arc 129
A. Lizoń: La simulation du signal reçu dans le radar de Doppler à modulation sinuoidale de fréquence 515
W. Majewski jr: Le problème de la minimalisation du nombre des états des automates définis 199
J. Migdalski: Quelques problèmes de l'analyse et synthèse des circuits électriques du point de vue de leur infaillibilité 625
J. Migdalski: La synthèse du système avec des éléments commutateurs du point de vue de la sécurité. 3
J. Nadratowski: La méthode des nombres structurels sur le fond des méthodes classiques de l'analyse des schémas linéaires 237
Z. Perkowski: La détermination de la capacitance des lignes coaxialles à conducteurs à fils multiples 105
L. Referowski: L'optimisation du schéma de mesure petits champs magnétiques d'après la méthode de compensation avec bobine-solenoide 655
A. Skorupski, J. Kochman: La naissance de faux impulsions aux sorties d'un déchiffreur du calculateur 751
J. Srzednicki: Les ponts RC accordés par un seul élément 359
J. Srzednicki: Les paramètres optimaux du générateur RC de pont à réglage 253
M. Stybliński: Les couplages de réactance dans les amplificateurs haute fréquence à transistors 395
C. Syc: Génération des arbres et k-arbres des multigraphes à l'aide de la méthode des nombres structuraux 495
A. Tchorzewski: Les distorsions d'ouverture apparaissant pendant l'analyse de l'image dans la télévision ainsique le méthodes de leur correction 533
J. Turowski: La formule des pertes de puissance dans des bacs sans écrans de grands transformateurs uniphasés 149
R. Vogel: Les propriétés directives et filtrantes de deux lignes de transmission couplées . . . 281

INHALT

S. Dobosz: Verfahren zur Stabilisierung der Auslösung von Endflanken der vom Blockinggenerator erzeugten Impulsen. 337
S. Dobosz: Transistor Kanalumschalter 347
F. Kamiński: Ausgewählte Probleme der Synthese von tschebyscheffschen Leitungsketten mit homogenen Leitungsstücken 23
F. Kamiński: Die Synthese von elektromechanischen Siebketten auf Grund Ersatzvierpole mit verteilten Konstanten 717
A. Karczmarewicz: Binäre Schalencode 305
A. Karczmarewicz: Die Auswertung der Widerstandsfähigkeit der Datenübertragungssysteme auf die Serienstörungen 301
H. Konczyński: Äquipotential Erdungssystem der Fernmeldetechnik 73
A. Kurbiel: Beurteilung relativer Brauchbarkeit der Hochstromleitungsanlagen für Lichtbogenöfen 129
Z. Perkowski: Die Berechnung der Kapazitäten koaxialer Leitungen mit Reusenleitern . . 105
L. Referowski: Die Optimalisierung der Schaltung für die Messung kleiner magnetischer Felder nach der Kompensationsmethode mit der solenoidischen Spule 655
J. Srzednicki: Mit einem Element abstimmbare RC-Brücken 359
J. Srzednicki: Optimale Parameter eines abstimmbaren RC-Brückenoszillators 253

C. Syc: Digitalrechnerische Erzeugung der Bäume und k-Bäume mittels der Methode der Strukturalzahlen 495
R. Vogel: Grundriss der Theorie zweier parallel gekoppelter Leitungen 281

СОДЕРЖАНИЕ

Е. Брожина: Вопросы проектирования групповых усилителей малого усиления . . 423
Е. Брожина: Входные контуры групповых усилителей 325
Е. Брожина: Коррекция входных трансформаторов групповых усилителей 313
С. Будкowски: Оптимизация логической схемы „или-не" методом слепого поиска в пространстве переменных решения 479
Р. Вогель: Направленные и фильтрирующие свойства двух связанных параллельных линий передачи 281
В. Грущиньски, Е. Клюгман, Г. Вежба: Калориметрический метод измерения потерь в миниатюрных ферритовых сердечниках 467
С. Добош: Метод повышения стабильности пуска окончания импульса в блокинг-генераторе на полупроводниковом триоде 337
С. Добош: Переключатель каналов на полупроводниковых триодах 347
М. Домбровски: Коррекция интерференционных искажений передачи данных при использовании гармонических фильтров 53
Е. Калиньски: Стабилизация уровня сигнала в измерительных устройствах сверхвысокой частоты по методу двухкратной модуляции 635
Ф. Каминьски: Избранные вопросы синтеза чебышевских ступенчатых линий . . 23
Ф. Каминьски: Синтез электромеханических цепочечных фильтров на основе прототипов с распределенными постоянными 717
А. Карчмаревич: Коровые-двоичные коды 305
А. Карчмаревич: Мера устойчивости систем передачи данных в серийным помехам 301
З. Кожец: Теоретические основы временной рефлектометрии 269
З. Кожец, Я. Кожиньски: Мостовый фазовращатель RC с полевым транзистором в качестве сопротивления регулированного напряжением 387
Э. Концки: Исследование неустановившихся режимов в неоднородной электрической линии с помощью аналогового вычислительного устройства 89
Г. Коньчиньски: Эквипотенциальная система заземлений в электросвязи . . . 73
Я. Кудревич: Математические основы метода линеаризации гармоник 587
А. Курбель: Оценка относительной пригодности коротких сетей электрических дуговых печей 129
А. Лизонь: Имитация приемного сигнала в допплеровских радиолокаторах с синусоидальной частотной модуляцией 515
В. Маевски юр: Вопрос минимизации числа состояний конечных автоматов 199
Я. Мигдальски: Некоторые проблемы анализа и синтеза электрических систем с точки зрения надежности 625
Я. Мигдальски: Синтез системы с переключающими элементами с точки зрения надежности 3
Я. Надратовски: Метод структурных чисел на фоне классических методов анализы линейных цепей 237
З. Перковски: Определение емкости коаксиальных кабелей с многопроволочными проводами 105
Л. Рэфэровски: Оптимизация схемы для измерения слабых магнитных полей компенсационным методом с соленоидной катушкой 655
Я. Сжедницки: Мостики RC перестраиваемые одним элементом 359
Я. Сжедницки: Оптимальные параметры перестраиваемого мостикового RC генератора 253

А. Скорупски, Я. Кохман: Ложные импульсы на выводе дешифратора счётчика 751
М. Стыблиньски: Реактивная связь в транзисторных усилителях высокой частоты 395
Ч. Сыц: Генерирование деревьев и к-деревьев мультиграфов методом бинарных структурных чисел с помощью электронных вычислительных машин 495
Я. Туровски: Формула для расчета потерь мощности в неэкранированных баках мощных однофазных трансформаторов 149
А. Тхожевски: Апертурные искажения при анализе изображения в телевидении и методы их коррекции 533
З. Флисовски: Расчет атмосферных перенапряжений в линиях передачи электрической энергии на основании антенной теории волн 177
Е. Хирковски: Аппроксимация амплитудно-частотной характеристики линейной электрической цепи модифицированным методом логарифмических характеристик . . 435

INSTYTUT TECHNOLOGII ELEKTRONOWEJ
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XV · ZESZYT 1

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1969

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor Naczelny
PROF. WITOLD NOWICKI

Sekretarz
JULIUSZ MIERZEJEWSKI

ADRES REDAKCJI

Warszawa, Politechnika, Plac Jedności Robotniczej 1
Katedra Teletransmisji Przewodowej, Gmach Elektroniki,
pokój 483, tel. 21-007 w. 794

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
Warszawa, Miodowa 10

Nakład 700 (560+140)	Oddano do składania 22.XI.1968 r.
Ark. wyd. 16,0; ark. druk. 12,25	Podpisano do druku w marcu 1969
Papier druk. sat. kl. III, 80 g, 70×100	Druk ukończono w marcu 1969
Zamówienie nr 2050/68	Cena zł 40.— P-98

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

621.3.062.8

JANUSZ MIGDALSKI

Synteza niezawodnościowa układu zawierającego elementy przełączające — przełączniki

Rękopis dostarczono 3. 9. 1967

Niezawodność elementu przełączającego scharakteryzowana przez prawdopodobieństwo jego poprawnej pracy (p) jest dla celów syntezy niezawodnościowej układu złożonego z elementów przełączających niewystarczająca.

W pracy — na przykładzie syntezy niezawodnościowej układów zawierających jeden, a następnie dwa elementy przełączające — wykazano, że dokonanie takiej syntezy daje się przeprowadzić dopiero wówczas, kiedy niezawodność elementu przełączającego zostanie scharakteryzowana przez prawdopodobieństwo przerwy (q_p) oraz prawdopodobieństwo zwarcia (q_z) elementu przełączającego, a więc przez parę liczb $\langle q_p, q_z \rangle$.

1. WSTĘP

W roku 1956 E. Moore i C. Shannon [8], w klasycznej już dzisiaj pracy dotyczącej syntezy niezawodnościowej układu z elementami przełączającymi, wykazali, że stosując dostateczną ilość takich elementów można zbudować sieć przełączającą, równoważną w działaniu pojedynczemu elementowi, której niezawodność załączenia bądź niezawodność odłączenia będzie dowolnie duża, bez względu na niezawodność elementów tej sieci. Autorzy oparli swoje rozważania na elementach wyidealizowanych, dla których pominięto: rezystancję przejścia elementów, zagadnienie obciążalności elementów, możliwość występowania przerw połączeń elektrycznych (np. lutowań) łączących elementy sieci [4], możliwość wystąpienia zwarć pomiędzy poszczególnymi punktami sieci [2], stany przejściowe [7], [9], [10] dla elementów oraz sieci itp.

Prócz tego, co jest sprawą zasadniczą, praca [8] omawia jedynie niezawodność załączenia sieci otwartej bądź też niezawodność odłączenia sieci zamkniętej, natomiast nie omawia niezawodności przełączenia sieci, tzn. obu wymienionych czynności łącznie, na co zwrócono uwagę w pracach [1], [3], [11].

Wymienione powyżej przyczyny spowodowały, że do chwili obecnej na temat syntezy niezawodnościowej układów (sieci) zawierających elementy przełączające ukazały się dziesiątki najrozmaitszych prac[1]). Ogólnie prace te dadzą się podzielić na dwie grupy:

a) Prace dotyczące syntezy niezawodnościowej układów (sieci) przełączających w oparciu o elementy rzeczywiste, przy czym zasadnicza uwaga jest skierowana na zwiększenie niezawodności załączania bądź niezawodności odłączania sieci.

---

[1]) Spis prac polskich na ten temat można znaleźć w pracy [6].

Prace te (bardzo liczne) są kontynuacją koncepcji zawartych w pracy [8].

b) Prace dotyczące syntezy niezawodnościowej układów (sieci) przełączających w oparciu o elementy rzeczywiste, przy czym zasadnicza uwaga jest skierowana na zwiększenie niezawodności przełączania sieci.

Prace te (bardzo nieliczne) dają zasadniczo pełniejszy opis funkcjonowania układów (sieci) przełączających i stanowią istotne rozszerzenie koncepcji zawartych w pracy [8].

Należy podkreślić, że proces przełączenia sieci[1]) przełączającej, a zatem i pojedynczego elementu przełączającego składa się — zależnie od konstrukcji sieci (elementu):

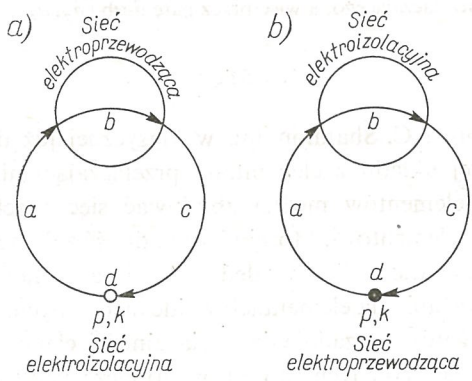
a) z procesu załączenia (odłączenia) sieci w wyniku sygnału pobudzającego, tj. z procesu przejścia sieci ze stanu wyjściowego do stanu pobudzenia,

b) z pozostawania sieci w stanie pobudzonym przez czas trwania sygnału pobudzającego,

c) z procesu odłączenia (załączenia) sieci w wyniku sygnału pobudzającego, tj. z procesu przejścia (powrotu) sieci ze stanu pobudzenia do stanu wyjściowego,

d) z pozostawania sieci w stanie niepobudzonym aż do czasu pojawienia się następnego sygnału.

Sieć przełączająca zatem, w odróżnieniu od sieci elektroprzewodzącej bądź elektroizolacyjnej, może zostać uszkodzona w wyniku przerwy albo w wyniku zwarcia. Obrazowo można powiedzieć, że sieć przełączająca w procesie przełączania przechodzi przez nastę-



Rys. 1. Cykl zamknięty obrazujący proces przełączania sieci przełączającej: a) normalnie otwartej, b) normalnie zamkniętej; p, k — oznaczają odpowiednio początek i koniec cyklu

pujący (rys. 1) cykl zamknięty: jest najpierw siecią elektroizolacyjną (sieć normalnie otwarta), następnie siecią elektroprzewodzącą, i wreszcie ponownie siecią elektroizolacyjną. Dla sieci normalnie zamkniętej (rys. 1b) jest przeciwnie.

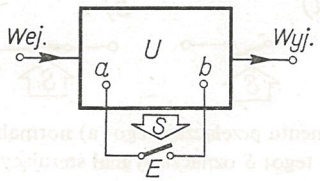
Wyróżnienie dwu rodzajów uszkodzeń mogących wystąpić w pojedynczym cyklu pracy sieci zmienia w sposób zasadniczy postępowanie przy syntezie niezawodnościowej[2]) układów z elementami przełączającymi.

W niniejszej pracy przeprowadzono szczegółową syntezę niezawodnościową układu zawierającego jeden, a następnie dwa elementy przełączające. Oczywiście, ażeby taka syn-

[1]) W dowolnie wybranym takcie (cyklu) pracy sieci.

[2]) Ogólnie pod pojęciem syntezy niezawodnościowej układu będziemy rozumieli każde racjonalne postępowanie zmierzające do zwiększenia niezawodności tego układu.

teza była możliwa, przyjęto, że pozostałe elementy układu, nie będące elementami przełączającymi, są sprawne technicznie. Dla odróżnienia układu (U) od elementu przełączającego (E) należącego do tego układu wprowadzono umowne oznaczenia graficzne układu i elementu przełączającego, jak na rys. 2.



Rys. 2. Umowne przedstawienie graficzne układu U zawierającego jeden element przełączający E; S oznacza sygnał sterujący

W oparciu o przeprowadzone rozważania omówiono także problem syntezy niezawodnościowej układu zawierającego większą liczbę elementów przełączających.

W wyniku rozważań określono parametry, które w sposób jednoznaczny charakteryzują niazawodność elementu przełączającego oraz których znajomość jest niezbędna dla przeprowadzenia optymalnej syntezy niezawodnościowej układu zawierającego elementy przełączające. Na zakończenie rozważań podano wnioski oraz uwagi praktyczne.

2. SYNTEZA NIEZAWODNOŚCIOWA UKŁADU ZAWIERAJĄCEGO JEDEN ELEMENT PRZEŁĄCZAJĄCY

Na pozór wydaje się, że rozważanie problemu syntezy niezawodnościowej układu zawierającego jeden element przełączający jest trywialne lub że w ogóle nie może być mowy o takim problemie. Jednakże, jak zostanie wykazane dalej, problem ten wystąpi, jeżeli w rozważaniach niezawodnościowych zostaną uwzględnione (podobnie jak to postulowane jest w pracach [1], [3], [11]) dwa rodzaje uszkodzeń w elementach przełączających. Na rysunku 2 przedstawiono schematycznie układ, który zawiera dokładnie jeden element przełączający.

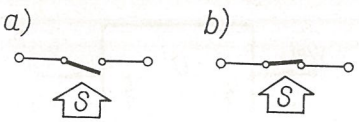
W rozważaniach ograniczono się do rozpatrzenia zagadnienia syntezy niezawodnościowej układu z dwukońcówkowymi elementami przełączającymi takimi, jak zestyki hermetyczne, fotorezystory, kriotrony itp.

Jest rzeczą oczywistą, że uszkodzenie elementu przełączającego w układzie może pociągnąć za sobą uszkodzenie układu bądź spowodować jego wadliwe działanie. Wadliwe działanie układu może objawić się w postaci zmienionej odpowiedzi wyjścia układu — *Wyj* na określone pobudzenie wejścia układu — *Wej* (rys. 2). Rodzaj uszkodzenia układu zależy od rodzaju uszkodzenia jego elementów, a więc również od rodzaju uszkodzenia elementów przełączających.

Elementy przełączające możemy podzielić w sposób następujący:

1) Elementy przełączające normalnie otwarte (rys. 3a), to znaczy takie, których obwód jest otwarty (wówczas rezystancja r mierzona na ich zaciskach wynosi $r = \infty$) przy braku impulsu pobudzającego.

2) Elementy przełączające normalnie zamknięte (rys. 3b), to znaczy takie, których obwód jest zamknięty (wówczas rezystancja r mierzona na ich zaciskach wynosi $r = 0$) przy braku impulsu pobudzającego. Oba rodzaje elementów przełączających będziemy przedstawiać umownie jak na rys. 3.



Rys. 3. Umowne przedstawienie elementu przełączającego: a) normalnie otwartego, b) normalnie zamkniętego; S oznacza sygnał sterujący

W dalszych rozważaniach będziemy zajmować się syntezą niezawodnościową układu zawierającego elementy przełączające normalnie otwarte.

Ażeby sprawdzić, czy konkretny element przełączający — po uprzednim zidentyfikowaniu stanu spoczynkowego — jest uszkodzony, czy też nie, należy go pobudzić odpowiednim sygnałem kontrolnym S i następnie stwierdzić, czy pod wpływem sygnału S dokona prawidłowego przełączenia. W wyniku takiego pobudzenia element przełączający może dokonać prawidłowego przełączenia obwodu, to znaczy zachować posiadaną własność przełączania, bądź też nie dokonać prawidłowego przełączenia obwodu na skutek wystąpienia przerwy lub zwarcia, to znaczy utracić posiadaną własność przełączania.

Od poprawnie funkcjonującego elementu przełączającego wymagamy, ażeby pod wpływem kolejnych sygnałów pobudzających dokonywał prawidłowego przełączania obwodu, w którym się znajduje. Uszkodzenie elementu przełączającego objawi się zatem jako utrata jego własności przełączania.

W celu wyznaczenia niezawodności p elementu przełączającego, gdzie przez p będziemy rozumieć prawdopodobieństwo zdarzenia „*element przełączający posiada własności przełączania*", przyjmijmy następujące oznaczenia zdarzeń:

A — element przełączający dokona prawidłowego przełączenia[1]) obwodu pomiędzy punktami a—b (rys. 2) pod wpływem impulsu pobudzającego S.

$P(A) = p$ — prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A.

B — element przełączający nie dokona prawidłowego przełączenia obwodu pomiędzy punktami a—b (rys. 2) pod wpływem impulsu pobudzającego S w wyniku wystąpienia zwarcia.

$P(B) = q_z$ — prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia B.

C — element przełączający nie dokona prawidłowego przełączenia obwodu pomiędzy punktami a—b (rys. 2) pod wpływem impulsu pobudzającego S w wyniku wystąpienia przerwy.

$P(C) = q_p$ — prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia C.

---

[1]) Przez przełączenie prawidłowe elementu przełączającego (przełącznika) rozumie się przełączenie, które rozpoczyna się w momencie pojawienia się sygnału S, a kończy w momencie zaniku tego sygnału (impulsu). Ponadto w rozważaniach przyjmuje się, że element przełączający jest sprawny technicznie w chwili pojawienia się sygnału S, natomiast utrata własności przełączania w wyniku zwarcia bądź przerwy ma charakter przejścia nieodwracalnego w rozpatrywanym takcie pracy. Konsekwencją tego założenia jest wzajemne wykluczanie się zdarzeń A, B oraz C. W dalszych rozważaniach zamiast mówić o zdarzeniach A, B oraz C będziemy również mówić o stanach niezawodnościowych odpowiadających tym zdarzeniom.

Zgodnie z uczynionymi uwagami możemy napisać następujące związki:

$$A \cup B \cup C = \mathbf{I}, \tag{1}$$

$$A \cap B \cap C = \mathbf{0}, \tag{2}$$

gdzie **I** oznacza zdarzenie pewne, natomiast **0** oznacza zdarzenie niemożliwe, oraz odpowiednio

$$P(A \cup B \cup C) = P(\mathbf{I}) = 1, \tag{3}$$

$$P(A)+P(B)+P(C) = 1 = p+q_z+q_p. \tag{4}$$

Z równania (4) możemy wyznaczyć niezawodność p elementu przełączającego

$$p = 1-q_z-q_p = 1-(q_z+q_p). \tag{5}$$

Prawdopodobieństwa p, q_z, q_p mogą przyjmować wartości

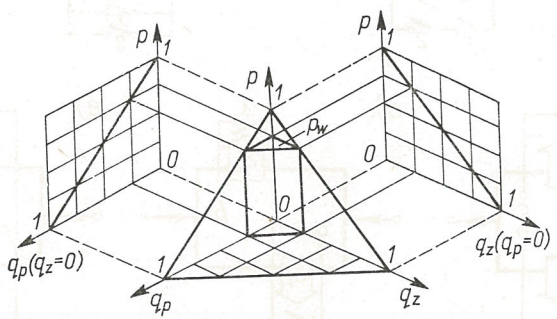
$$0 \leqslant p \leqslant 1, \tag{6}$$

$$0 \leqslant q_z \leqslant 1, \tag{7}$$

$$0 \leqslant q_p \leqslant 1, \tag{8}$$

przy czym dla q_z i q_p musi być spełniona nierówność

$$0 \leqslant (q_z+q_p) \leqslant 1. \tag{9}$$



Rys. 4. Przebieg funkcji niezawodności pojedynczego elementu przełączającego, dla którego uwzględniono dwa rodzaje uszkodzeń

Równaniu (5) możemy przyporządkować rysunek 4. Z rysunku tego oraz z analizy równania (5) wynika, że dla ustalonej z góry (wymaganej) wartości $p = p_w = \text{const}$ istnieje nieskończona ilość par wartości q_z oraz q_p spełniająca równanie

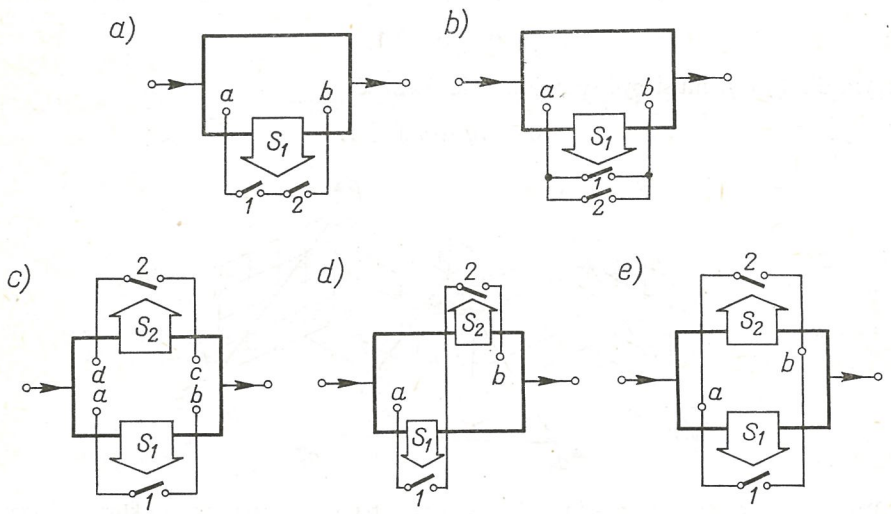
$$p = p_w = 1-(q_z+q_p) = \text{const}. \tag{10}$$

W języku technicznym oznacza to, że możemy mieć do dyspozycji dowolną ilość różnych elementów przełączających o tej samej niezawodności p_w. Zagadnienie syntezy układu zawierającego jeden element przełączający sprowadzi się zatem do wyboru takiego elementu przełączającego, żeby ewentualne uszkodzenie elementu przełączającego przyniosło najmniejsze straty gospodarcze, powstałe na skutek błędnego funkcjonowania bądź uszkodzenia układu. Oznacza to, że jeżeli ewentualne straty gospodarcze poniesione w wyniku na przykład zwarcia elementu przełączającego będą znacznie większe w porów-

naniu do ewentualnych strat poniesionych w wyniku przerwy elementu przełączającego, wówczas do układu należy zainstalować element przełączający o małym prawdopodobieństwie q_z, a dużym q_p. W tym przypadku zdarzeniom A, B, C oprócz prawdopodobieństw $P(A) = p$, $P(B) = q_z$, $P(C) = q_p$ należałoby przypisać odpowiednią wagę $W(A) = w$, $W(B) = w_z$, $W(C) = w_p$. Jednakże zagadnieniem tym nie będziemy w niniejszej pracy zajmować się.

3. SYNTEZA NIEZAWODNOŚCIOWA UKŁADU ZAWIERAJĄCEGO DWA ELEMENTY PRZEŁĄCZAJĄCE

Na rysunku 5 podano pięć różnych układów, z których każdy zawiera dokładnie dwa elementy przełączające. Cechą charakterystyczną układów podanych na rysunkach 5a i 5b jest to, że oba elementy przełączające (oznaczone odpowiednio numerami *1* i *2*) są



Rys. 5. Układy zawierające po dwa elementy przełączające: a) układ typu *NS*, b) układ typu *NR*, c) układ szeregowy, d) układ realizujący koniunkcję, e) układ realizujący alternatywę; S_1 i S_2 oznaczają odpowiednio sygnały sterujące, działające na elementy *1* i *2*

pobudzane jednocześnie jednym sygnałem S_1. Z uwagi na funkcjonowanie układów (rys. 5a, b) elementy przełączające oznaczone numerem *2* są oczywiście zbędne. Układy te będziemy nazywać układami nadmiarowymi: typu *NS* (nadmiar szeregowy), rys. 5a, oraz typu *NR* (nadmiar równoległy), rys. 5b. W dalszych rozważaniach podamy, dla jakich wartości q_z i q_p stosowanie takich układów jest sensowne.

Cechą charakterystyczną układów podanych na rys. 5c, d, e jest to, że każdy element przełączający jest pobudzany innym sygnałem, jak również to, że oba elementy są niezbędne do funkcjonowania tychże układów. Element przełączający *1* jest pobudzany sygnałem S_1, natomiast element przełączający *2* jest pobudzany sygnałem S_2.

Układ podany na rys. 5c jest układem szeregowym (z punktu widzenia niezawodności), ponieważ funkcjonuje poprawnie jedynie wówczas, gdy oba elementy przełączające[1]) nie są uszkodzone.

Układy podane na rys. 5d, e są układami logicznymi, realizującymi odpowiednio koniunkcję (rys. 5d) oraz alternatywę (rys. 5e).

W związku z powyższym od układu realizującego koniunkcję (rys. 5d) będziemy wymagać, aby dokonał poprawnego przełączenia obwodu pomiędzy punktami *a*—*b* przy jednoczesnym podaniu sygnałów sterujących S_1 i S_2, natomiast od układu realizującego alternatywę (rys. 5e) będziemy wymagać, aby dokonał poprawnego przełączenia obwodu pomiędzy punktami *a*—*b*, gdy zostanie podany sygnał S_1 bądź S_2, bądź S_1 i S_2 jednocześnie. W wyniku dalszych rozważań będziemy mogli stwierdzić, że jeżeli sygnały S_1 i S_2 będą sobie równe i będą się pojawiały jednocześnie, wówczas układy realizujące koniunkcję i alternatywę będziemy mogli traktować jak układy nadmiarowe typu *NS* oraz *NR*.

Obecnie przeprowadzimy szczegółową syntezę niezawodnościową poszczególnych układów.

3.1. Synteza niezawodnościowa układu nadmiarowego typu *NS* (rys. 5a)

W celu wyznaczenia niezawodności układu podanego na rys. 5a skorzystajmy z tablicy 1. Stany niezawodnościowe elementu *1* i *2* oznaczono odpowiednio dużymi literami A_1, B_1, C_1 i A_2, B_2, C_2, natomiast stany niezawodnościowe układu dużymi literami *A*, *B*, *C*.

Tablica 1

Stany niezawodnościowe układów z dwoma elementami przełączającymi

Stany niezawodnościowe elementu		Stany niezawodnościowe układu				
2	*1*	typu *NS*	typu *NR*	szeregowego	realizującego koniunkcję	realizującego alternatywę
A_2	A_1	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*
A_2	B_1	*A*	*B*		*A*	*B*
A_2	C_1	*C*	*A*		*C*	*A*
B_2	A_1	*A*	*B*		*A*	*B*
B_2	B_1	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*
B_2	C_1	*C*	*B*		*C*	*B*
C_2	A_1	*C*	*A*		*C*	*A*
C_2	B_1	*C*	*B*		*C*	*B*
C_2	C_1	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*

A, A_1, A_2 — oznacza przełączanie poprawne,
B, B_1, B_2 — oznacza wystąpienie zwarcia,
C, C_1, C_2 — oznacza wystąpienie przerwy.

[1]) W tym układzie jeden element przełączający może być normalnie otwarty, natomiast drugi może być normalnie zamknięty.

Korzystając z tablicy 1 oraz oznaczeń wprowadzonych poprzednio otrzymujemy wzór na niezawodność R_a układu typu NS[1]):

$$R_a = p_1p_2+q_{z1}p_2+p_1q_{z2}. \tag{11}$$

Ponieważ wartości p_1 oraz p_2 wynoszą

$$p_1 = 1-(q_{z1}+q_{p1}), \tag{12}$$

$$p_2 = 1-(q_{z2}+q_{p2}), \tag{13}$$

otrzymujemy wzór

$$R_a = (1-q_{z1}-q_{p1})(1-q_{p2})+q_{z1}(1-q_{z2}-q_{p2}) = 1-q_{p1}-q_{p2}+q_{p1}q_{p2}-q_{z1}q_{z2}. \tag{14}$$

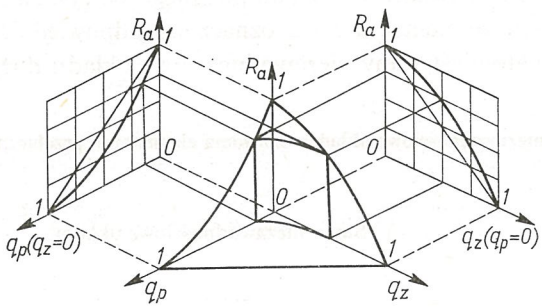
Dla zaznaczenia, że niezawodność R_a układu zależy od q_{p1}, q_{z1}, q_{p2}, q_{z2}, wzór (14) możemy również zapisać następująco:

$$R_a(q_{p1}, q_{z1}, q_{p2}, q_{z2}) = 1-q_{p1}-q_{p2}+q_{p1}q_{p2}-q_{z1}q_{z2}. \tag{15}$$

W szczególnym przypadku, gdy $q_{p1} = q_{p2} = q_p$ oraz $q_{z1} = q_{z2} = q_z$, otrzymujemy wzór

$$R_a(q_{p1} = q_{p2} = q_p,\ q_{z1} = q_{z2} = q_z) = 1-2q_p+q_p^2-q_z^2 = (1-q_p)^2-q_z^2 =$$

$$= (1-q_p-q_z)(1-q_p+q_z). \tag{16}$$



Rys. 6. Przebieg funkcji niezawodności dla układu typu *NS*

Wyrażeniu (16) możemy przyporządkować wykres jak na rys. 6.

Ażeby uniknąć niepotrzebnych przeliczeń wartości R_a z wyrażenia (16), wykonano tablicę 2.

Interesujące wydaje się rozpatrzenie przypadku, kiedy w elementach przełączających obserwuje się tylko jeden rodzaj uszkodzeń. Załóżmy, że w elementach przełączających nie obserwuje się uszkodzeń typu przerwy albo inaczej mówiąc że dysponujemy takimi elementami przełączającymi, dla których prawdopodobieństwo wadliwego zadziałania układu z winy przerwy w elementach przełączających jest praktycznie pomijalne, czyli

$$q_p = 0. \tag{17}$$

Zgodnie z założeniem (17) niezawodność R_a układu wyniesie

$$R_a(q_p = 0, q_{z1} = q_{z2} = q_z) = (1-q_z)(1+q_z) = 1-q_z^2, \tag{18}$$

[1]) Przy założeniu wzajemnej niezależności dotyczącej uszkodzeń poszczególnych elementów układu.

gdzie

$$q_z = 1-p. \tag{19}$$

Wstawiając zależność (19) do wzoru (18) otrzymujemy

$$R_a(q_p = 0, p_1 = p_2 = p) = 1-(1-p)^2 = 2p-p^2. \tag{20}$$

Tablica 2

Tablica pomocnicza do wyznaczania niezawodności układu nadmiarowego typu NS

q_z \ q_p	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,	1,0	0,81	0,64	0,49	0,36	0,25	0,16	0,09	0,04	0,01	0
0,1	0,99	0,80	0,63	0,48	0,35	0,24	0,15	0,08	0,03	0	
0,2	0,96	0,77	0,60	0,45	0,32	0,21	0,12	0,05	0		
0,3	0,91	0,72	0,55	0,40	0,27	0,16	0,07	0			
0,4	0,87	0,65	0,48	0,33	0,20	0,09	0				
0,5	0,75	0,56	0,39	0,24	0,11	0					
0,6	0,64	0,45	0,28	0,13	0						
0,7	0,51	0,32	0,15	0							
0,8	0,36	0,17	0								
0,9	0,19	0									
1,0	0	$R_a(q_z, q_p) = (1-q_p)^2-q_z^2$									

Odpowiednio, jeżeli prawdopodobieństwo zwarcia w elementach przełączających będzie praktycznie pomijalne, czyli dla $q_z = 0$, otrzymamy wzór

$$R_a(q_{p1} = q_{p2} = q_p, q_z = 0) = (1-q_p)^2, \tag{21}$$

gdzie

$$q_p = 1-p. \tag{22}$$

Wstawiając zależność (22) do wzoru (21) otrzymamy

$$R_a(p_1 = p_2 = p, q_z = 0) = p^2. \tag{23}$$

Wyrażeniom (18), (21) oraz (20), (23) przyporządkowano odpowiednie wykresy podane na rysunkach 7 i 8.

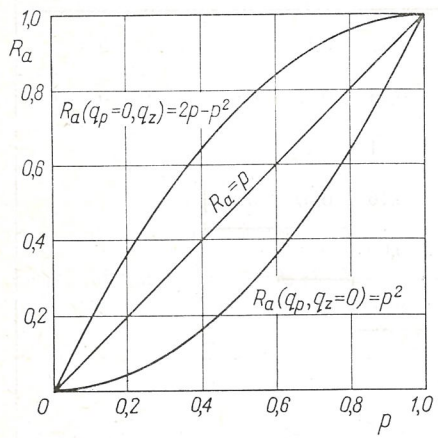
Z wyrażeń (20) oraz (23) widać, że temu samemu układowi połączeń elementów przełączających mogą odpowiadać dwie różne struktury niezawodnościowe. Jak łatwo sprawdzić, dla $q_p = 0$ rozważanemu układowi odpowiada równoległa struktura niezawodnościowa, natomiast dla $q_z = 0$ rozważanemu układowi odpowiada szeregowa struktura niezawodnościowa.

W celu zorientowania się, dla jakich wartości q_z oraz q_p budowa układu nadmiarowego jest sensowna, wprowadźmy następującą funkcję $\gamma(q_z, q_p)$ efektywności rezerwowania [5] układu:

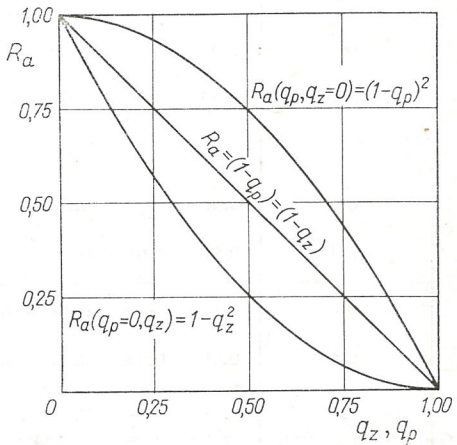
$$\gamma(q_z, q_p) = \frac{R_n}{R = p} = \frac{R_n}{p}, \tag{24}$$

$$0 \leqslant \gamma(q_z, q_p) \leqslant \infty, \tag{25}$$

gdzie R_n jest niezawodnością układu nadmiarowego, natomiast $R = p$ jest niezawodnością układu bez nadmiaru.



Rys. 7. Przebiegi R_a dla układu typu *NS* jako funkcji p w przypadku występowania w elementach przełączających uszkodzeń jednego rodzaju



Rys. 8. Przebiegi R_a dla układu typu *NS* jako funkcji q_p bądź q_z w przypadku występowania w elementach przełączających uszkodzeń jednego rodzaju

Oczywiście, rezerwowanie lub ogólnie mówiąc rozbudowa układu jest sensowna, jeżeli zostanie spełniony warunek

$$\gamma(q_z, q_p) > 1, \quad \text{to znaczy} \quad R_n > R = p. \tag{26}$$

W przypadku układu nadmiarowego typu *NS*, dla którego funkcja $R_n = R_a$ wyraża się wzorem (16), mamy

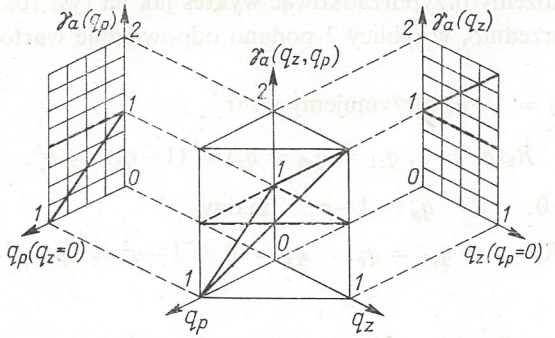
$$\gamma_a(q_z, q_p) = \frac{R_a}{p} = \frac{(1-q_p-q_z)(1-q_p+q_z)}{1-q_p-q_z} = 1-q_p+q_z. \tag{27}$$

Wyrażeniu (27) przyporządkowano wykres jak na rys. 9.

Z wyrażenia (27) oraz z wykonanego wykresu wynika, że budowa układu typu *NS* jest sensowna jedynie wówczas, gdy

$$q_z > q_p; \qquad \frac{q_z}{q_p} > 1. \tag{28}$$

Jeżeli natomiast $q_z < q_p$, wówczas rozbudowa układu prowadzi jedynie do pogorszenia niezawodności układu.



Rys. 9. Przebieg funkcji efektywności rezerwowania układu typu *NS*

W przypadku gdy $q_z = q_p$, nie dostajemy zwiększenia niezawodności, jednakże rozbudowa układu może mieć sens, jeżeli poprawią się na przykład jego własności funkcjonalne albo — mówiąc ogólniej — jeżeli poprawi się jakość układu.

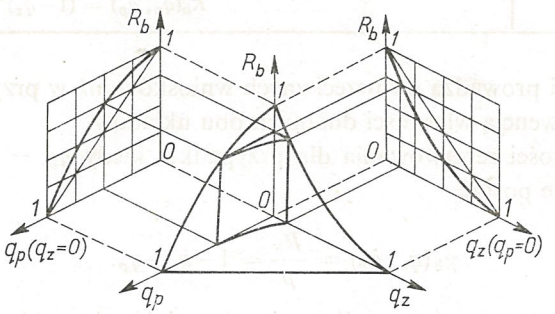
Jeżeli $q_{z1} \neq q_{z2}$ oraz $q_{p1} \neq q_{p2}$, dla oceny efektywności rezerwowania należy skorzystać ze wzoru (24).

3.2. Synteza niezawodnościowa układu nadmiarowego typu *NR* (rys. 5b)

Posługując się tablicą 1 możemy sprawdzić, że niezawodność R_b układu nadmiarowego typu *NR* wyraża się wzorem

$$R_b = p_1p_2 + q_{p1}p_2 + p_1q_{p2}. \tag{29}$$

Łatwo zauważyć, że wzór (29) można otrzymać bezpośrednio ze wzoru (11), jeżeli zamiast odpowiednich wartości q_z wstawi się odpowiadające im wartości q_p. Wynika to stąd, że struktury połączeń obu elementów przełączających w rozważanych układach są strukturami wzajemnie dualnymi.



Rys. 10. Przebieg funkcji niezawodności dla układu typu *NR*

W szczególnym przypadku, kiedy $q_{p1} = q_{p2} = q_p$ oraz $q_{z1} = q_{z2} = q_z$, otrzymujemy wzór

$$R_b(q_{p1} = q_{p2} = q_p, q_{z1} = q_{z2} = q_z) = (1-q_z-q_p)(1-q_z+q_p) = (1-q_z)^2 - q_p^2. \tag{30}$$

Wyrażeniu (30) możemy przyporządkować wykres jak na rys. 10.

Podobnie jak poprzednio, w tablicy 3 podano odpowiednie wartości R_b dla wyrażenia (30).

Jeżeli $q_p = 0$, a $q_z = 1-p$, otrzymujemy wzór

$$R_b(q_p = 0,\ q_{z1} = q_{z2} = q_z) = (1-q_z)^2 = q^2, \tag{31}$$

natomiast jeżeli $q_z = 0$, a $q_p = 1-p$, mamy

$$R_b(q_{p1} = q_{p2} = q_p,\quad q_z = 0) = 1-q_p^2 = 2p-p^2. \tag{32}$$

Tablica 3

Tablica pomocnicza do wyznaczania niezawodności układu nadmiarowego typu NR

q_z \ q_p	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	1	0,99	0,96	0,91	0,84	0,75	0,64	0,51	0,36	0,19	0
0,1	0,81	0,80	0,77	0,72	0,65	0,56	0,45	0,32	0,17	0	
0,2	0,64	0,63	0,60	0,55	0,48	0,39	0,28	0,15	0		
0,3	0,49	0,48	0,45	0,40	0,33	0,24	0,13	0			
0,4	0,36	0,35	0,32	0,27	0,20	0,11	0				
0,5	0,25	0,24	0,21	0,16	0,09	0					
0,6	0,16	0,15	0,12	0,07	0						
0,7	0,09	0,08	0,05	0							
0,8	0,04	0,03	0								
0,9	0,01	0									
1,0	0	$R_b(q_z, q_p) = (1-q_z)^2-q_p^2$									

Otrzymane wyniki prowadzą do przeciwnych wniosków niż w przypadku poprzednim, co jest dalszą konsekwencją własności dualnych obu układów.

Funkcja efektywności rezerwowania dla przypadku, kiedy $q_{p1} = q_{p2} = q_p$ oraz $q_{z1} = q_{z2} = q_z$, przyjmuje postać

$$\gamma_b(q_z, q_p) = \frac{R_b}{p} = 1-q_z+q_p. \tag{33}$$

Wyrażeniu (33) możemy przyporządkować wykres jak na rys. 11.

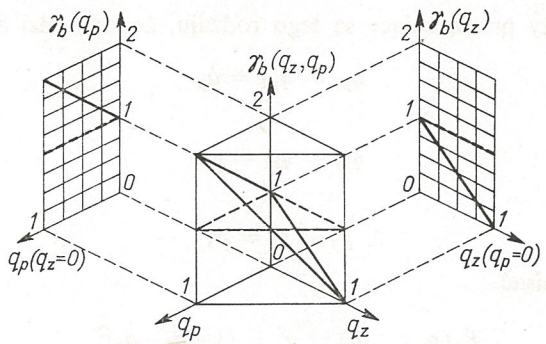
Z wyrażenia (33) oraz wykonanego wykresu wynika, że budowa układu nadmiarowego typu *NR* jest sensowna jedynie wówczas, kiedy

$$q_p > q_z;\qquad \frac{q_p}{q_z} > 1. \tag{34}$$

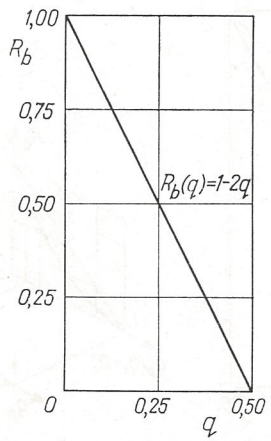
Dla $q_p = q_z$ nie dostajemy zwiększenia niezawodności układu [zob. wzór (33)], jednakże, tak jak poprzednio, rozbudowa układu może mieć sens, jeżeli będzie prowadziła do poprawy jego jakości.

Obecnie wyznaczymy niezawodność układu nadmiarowego typu *NR* dla przypadku, kiedy

$$q_{p1} = q_{p2} = q_{z1} = q_{z2} = q. \tag{35}$$



Rys. 11. Przebieg funkcji efektywności rezerwowania układu typu *NR*



Rys. 12. Przebieg funkcji niezawodności dla układu typu *NR* w przypadku, gdy $q_{p1} = q_{p2} = q_{z1} = q_{z2} = q$

Wykorzystując wzór (30) otrzymujemy

$$R_b(q) = (1-q)^2 - q^2 = 1-2q. \tag{36}$$

Ponieważ $R_b(q) \geqslant 0$, zatem

$$1-2q \geqslant 0; \quad q \leqslant \frac{1}{2}. \tag{37}$$

Wyrażeniu (36) możemy przyporządkować wykres jak na rys. 12.

3.3. Synteza niezawodnościowa układu szeregowego (rys. 5c)

Jak już powiedziano, układ podany na rys. 5c, który został nazwany układem szeregowym, funkcjonuje poprawnie jedynie wówczas, kiedy oba elementy przełączające są nieuszkodzone. Zatem niezawodność układu szeregowego możemy wyrazić wzorem

$$R_c = p_1 p_2 = (1-q_{p1}-q_{z1})(1-q_{p2}-q_{z2}). \tag{38}$$

Jeżeli oba elementy przełączające są tego rodzaju, że zachodzi związek

$$q_{p1} = q_{p2} = q_p \tag{39}$$

oraz

$$q_{z1} = q_{z2} = q_z, \tag{40}$$

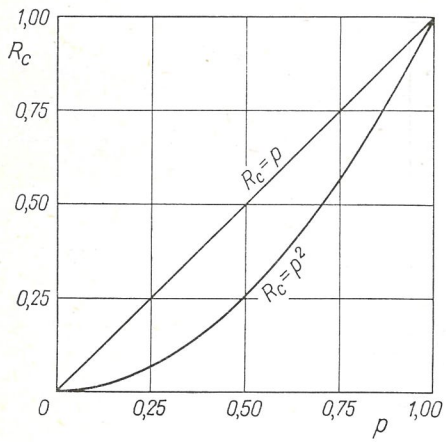
a więc również

$$p_1 = p_2 = p, \tag{41}$$

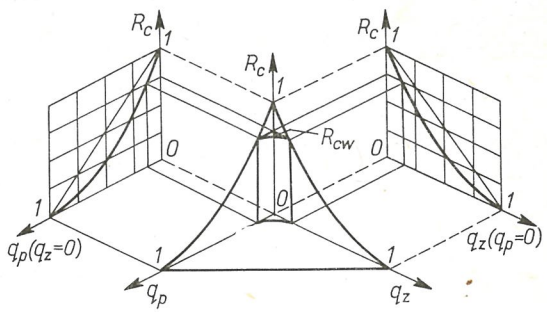
wówczas możemy napisać

$$R_c(p, q_p, q_z) = p^2 = (1-q_p-q_z)^2. \tag{42}$$

Wyrażeniu (42) możemy przyporządkować wykresy jak na rysunkach 13 i 14.



Rys. 13. Przebieg funkcji niezawodności R_c w zależności od p dla układu szeregowego



Rys. 14. Przebieg funkcji niezawodności R_c w zależności od q_z oraz q_p dla układu szeregowego

Z analizy równania (42) wynika, że dla R_{cw} z góry ustalonego (wymaganego) (rys. 14) otrzymujemy — podobnie jak w przypadku syntezy układu z jednym elementem przełączającym — nieskończoną ilość par wartości q_z oraz q_p spełniających to równanie. W związku z tym w procesie syntezy układu szeregowego obok wymagań niezawodnościowych należy również uwzględnić inne kryteria przy doborze parametrów q_p oraz q_z.

W szczególnym przypadku, kiedy $q_p = q_z = q$, otrzymujemy

$$R_c(q_p = q_z = q) = (1-2q)^2; \quad q \leqslant 0{,}5. \tag{43}$$

3.4. Synteza niezawodnościowa układu realizującego koniunkcję (rys. 5d)

Od układu realizującego koniunkcję będziemy wymagać, ażeby dokonał poprawnego przełączenia obwodu pomiędzy punktami a—b przy jednoczesnym doprowadzeniu sygnałów sterujących S_1 i S_2. W tablicy 1 wymaganie to oznaczono jako zdarzenie A. Analizując poszczególne stany niezawodnościowe układu widzimy, że zdarzenie A zajdzie nie tylko wówczas, gdy oba elementy przełączające będą nieuszkodzone (zdarzenie $A_1 \cap A_2$), lecz nawet wówczas, kiedy jeden z elementów przełączających będzie uszkodzony w wyniku zwarcia[1]), czyli jeżeli zajdzie zdarzenie $(B_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap B_2)$. Możemy zatem napisać

$$A = (A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap B_2). \tag{44}$$

Ponieważ zdarzenia te wykluczają się wzajemnie, zaś uszkodzenia obu elementów przełączających są wzajemnie niezależne, możemy napisać

$$P(A) = R_d = P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap B_2) = P(A_1)P(A_2) + P(B_1)P(A_2) + P(A_1)P(B_2) = p_1p_2 + q_{z1}p_2 + p_1q_{z2} = 1 - q_{p1} - q_{p2} + q_{p1}q_{p2} - q_{z1}q_{z2}. \tag{45}$$

Jeżeli $q_{p1} = q_{p2} = q_p$ oraz $q_{z1} = q_{z2} = q_z$, otrzymujemy

$$R_d(q_p, q_z) = (1-q_p)^2 - q_z^2 = (1-q_p-q_z)(1-q_p+q_z). \tag{46}$$

W szczególnym przypadku, kiedy $q_p = 0$, wówczas oczywiście $q_z = 1-p$, otrzymujemy

$$R_d(q_p = 0, q_z) = (1-q_z)(1+q_z) = 2p-p^2, \tag{47}$$

natomiast jeżeli $q_z = 0$, wówczas $q_p = 1-p$, dostajemy wyrażenie

$$R_d(q_p, q_z = 0) = (1-q_p)^2 = p^2. \tag{48}$$

Z otrzymanych wzorów wynika, że przy syntezie niezawodnościowej układu realizującego koniunkcję za pomocą elementów przełączających, należy dążyć do tego, aby w użytych elementach prawdopodobieństwo $q_p \to 0$. Wówczas układowi realizującemu koniunkcję będzie odpowiadała równoległa struktura niezawodnościowa. Natomiast jeżeli w elementach przełączających będą występowały jedynie uszkodzenia typu przerwy, wówczas układowi realizującemu koniunkcję będzie odpowiadała szeregowa struktura niezawodnościowa.

Na uwagę zasługuje tu fakt, że niezawodność układu możemy zwiększyć nie tylko drogą jego rozbudowy (nadmiaru), lecz również w wyniku racjonalnego doboru jego elementów składowych — w naszym przypadku przez zastosowanie elementów przełączających, dla których $q_p = 0$. Oczywiście, ażeby dokonanie optymalnej syntezy układu było możliwe, konieczna jest znajomość wartości prawdopodobieństw q_p oraz q_z produkowanych elementów.

3.5. Synteza niezawodnościowa układu realizującego alternatywę (rys. 5e)

W tablicy 1 — podobnie jak dla innych układów — stany sprawności technicznej układu realizującego alternatywę oznaczono literą A. Łatwo zauważyć, że układ będzie realizował alternatywę nie tylko wówczas, kiedy oba elementy przełączające będą nie-

[1]) Oczywiście tylko w danym takcie pracy układu.

uszkodzone, lecz nawet wówczas, kiedy jeden z elementów przełączających będzie uszkodzony w wyniku przerwy[1]).

Posługując się tablicą 1 możemy sprawdzić, że niezawodność R_e układu realizującego alternatywę wyraża się wzorem

$$R_e = p_1p_2+p_1q_{p2}+q_{p1}p_2 = 1-q_{z1}-q_{z2}+q_{z1}q_{z2}-q_{p1}q_{p2}. \tag{49}$$

Jeżeli $q_{p1} = q_{p2} = q_p$ oraz $q_{z1} = q_{z2} = q_z$, otrzymujemy

$$R_e(q_p, q_z) = (1-q_z)^2-q_p^2. \tag{50}$$

W szczególnym przypadku, kiedy $q_z = 0$, wówczas oczywiście $q_p = 1-p$, otrzymujemy

$$R_e(q_p, q_z = 0) = (1-q_p)(1+q_p) = 2p-p^2, \tag{47}$$

natomiast, kiedy $q_p = 0$, wówczas $q_z = 1-p$, dostajemy wyrażenie

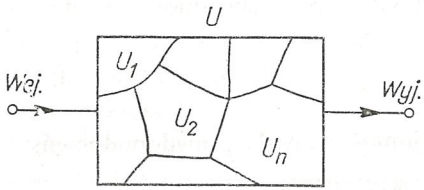
$$R_e(q_p = 0, q_z) = p^2. \tag{48}$$

Z otrzymanych zależności wynika, że w układzie realizującym alternatywę lepsze są elementy, dla których $q_z \to 0$. Również i w tym przypadku niezawodność układu możemy istotnie zwiększyć nie tylko drogą jego rozbudowy (nadmiaru), lecz również w wyniku racjonalnego doboru jego elementów składowych.

4. PROBLEM SYNTEZY NIEZAWODNOŚCIOWEJ UKŁADU ZAWIERAJĄCEGO WIĘCEJ NIŻ DWA ELEMENTY PRZEŁĄCZAJĄCE

W miarę wzrostu liczby elementów przełączających w układzie zagadnienie syntezy niezawodnościowej układu staje się coraz trudniejsze. Również narzucenie szeregu ograniczeń na układ i jego elementy niewiele zmniejsza stopień trudności syntezy niezawodnościowej. Dla przykładu, ażeby z trzech funkcjonalnie równoważnych układów, z których każdy zawiera dokładnie 10 elementów przełączających, wybrać układ o największej niezawodności, należy w ogólnym przypadku rozpatrzyć $3 \cdot 3^{10}$ stanów.

Synteza niezawodnościowa układu U zawierającego skończoną ilość elementów przełączających może się uprościć wówczas, kiedy rozważany układ da się rozbić na odpowiednią ilość wzajemnie niezależnych podukładów $U_1, U_2, \ldots, U_n$ takich, że każdy z nich



Rys. 15. Umowne przedstawienie układu zawierającego skończoną ilość elementów przełączających

będzie zawierał jeden bądź dwa elementy przełączające. Układ taki przedstawiono schematycznie na rysunku 15. Jeżeli dekompozycja (rozbicie) układu U zostanie przeprowadzona w ten sposób, że każdy podukład $U_1, U_2, \ldots, U_n$ układu U będzie należał do któregoś z układów omawianych w rozdziałach 2 i 3, wówczas niezawodność R_u układu U da się

[1]) Zob. odnośnik na str. 10.

wyrazić jako funkcja niezawodności układów już znanych. W ten sposób przez dokonanie syntezy niezawodnościowej poszczególnych podukładów $U_1, U_2, \ldots U_n$ można będzie przeprowadzić syntezę niezawodnościową układu U.

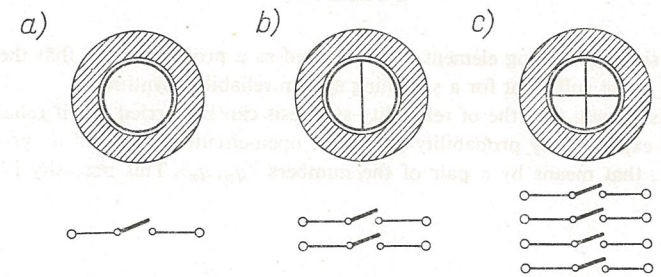
5. WNIOSKI I UWAGI PRAKTYCZNE

1. Niezawodność pojedynczego elementu przełączającego wyznaczona wzorem $p = 1-q_p-q_z$ jest jednoznacznie scharakteryzowana za pomocą parametrów q_p oraz q_z. Stąd od producenta elementów przełączających należy wymagać podania tych właśnie parametrów zamiast parametru p. Jak wykazano w niniejszej pracy, parametr p nie charakteryzuje w sposób jednoznaczny elementu przełączającego.

2. Zwiększenie niezawodności układu zawierającego jeden element przełączający daje się zawsze zrealizować dla wszystkich wartości q_p oraz q_z spełniających warunek $q_p \neq q_z$, przez wprowadzenie do tego układu takiego samego (w sensie niezawodności) dodatkowego elementu przełączającego.

3. Niezawodność układów logicznych realizujących koniunkcję oraz alternatywę możemy istotnie zwiększyć nie tylko przez ich rozbudowę (nadmiar), lecz również przez właściwy dobór elementów przełączających. Jednakże, aby taki dobór był możliwy, musi być spełniony warunek 1.

4. Dla umożliwienia praktycznej realizacji niezawodnościowo optymalnych układów z elementami przełączającymi krajowy przemysł elektroniczny powinien rozpatrzyć możliwość budowy układowo nowych elementów przełączających.



Rys. 16. Fotorezystory jako elementy przełączające w układach: a) pojedynczym, b) podwójnym, c) poczwórnym

Przykładowo na rys. 16 pokazano taką możliwość na przykładzie fotorezystorów. Fotorezystory w układzie podwójnym oraz poczwórnym powinny być tak usytuowane, ażeby umożliwiły łatwą realizację chociażby układów omówionych w rozdziale 3.

5. Na ogół układowi zawierającemu elementy przełączające nie jesteśmy w stanie przyporządkować określonej struktury niezawodnościowej (por. rozdziały 3.1, 3.4).

Instytut Automatyki PAN

WYKAZ LITERATURY

1. Drużynin G. W.: Nadiożnost' ustrojstw awtomatiki. Moskwa — Leningrad 1964.
2. Fabrikant W. L.: O postrojenii nadiożnych schiem iz nienadiożnych riele. — Elektriczestwo, 1967, nr 7.

3. James D. C., Kent A. H., Holloway J. A.: Redundancy and the Detection of First Failures. — IRE Transactions on Reliability and Quality Control, 1962, October, nr 3.
4. Migdalski J.: Niektóre problemy niezawodności przekaźnika elektromechanicznego z zestykami hermetycznymi. — Prace Instytutu Automatyki, 1968, z. 70.
5. Migdalski J.: Niezawodność sieci informacyjnych o strukturze złożonej. — Pomiary, Automatyka, Kontrola, 1967, nr 2.
6. Migdalski J.: Teoria niezawodności i jej zastosowania. Bibliografia piśmiennictwa polskiego za lata 1957—1966. — Prace Instytutu Automatyki, 1967, z. 65.
7. Moisil Gr. C.: Zastosowanie algebr Łukasiewicza do teorii układów przekaźnikowo-stykowych, część I. Wyd. PAN — Ośr. Kształc. i Doskonalenia Kadr Naukowych, 1966.
8. Moore E., Shannon C.: Reliable Circuits Using Less Reliable Relays. — Journal of the Frankl. Inst., 1956, nry 3 i 4.
9. Pach A.: Możliwości zastosowania logiki trójwartościowej oraz teorii ciał skończonych Galois do opisu rzeczywistej pracy przekaźnika. — Zeszyty Naukowe AGH, Automatyka, 1966, nr 4.
10. Pach A.: Elementy rzeczywiste i idealne w układach przekaźnikowych. — Prace 3. Krajowej Konferencji Automatyki — Gliwice 1965. Gliwice, Politechnika Śląska, 1966, t. 2.
11. Parszin W. G.: K woprosu opredielenija nadiożnosti kontaktnych izbytocznych sistiem klassa-„H". — Izw. Sib. Otd. AN SSSR, Ser. Tiechn. Nauk., 1965, nr 2.

J. MIGDALSKI

SWITCHING SYSTEM RELIABILITY SYNTHESIS

Summary

Reliability of a single switching element, characterised as a probability (p) that the element does not fail during its work, is not sufficient for a switching system reliability synthesis.

In the paper it is shown, that the of reliability synthesis can be carried out if reliability of the single switching element is expressed by probability (q_p) of an open-circuit failure and by probability (q_z) of an closed-circuit failure, that means by a pair of the numbers $\langle q_p, q_z \rangle$. This necessity is illustrated by few examples.

J. MIGDALSKI

LA SYNTHÈSE DU SYSTÈME AVEC DES ÉLÉMENTS COMMUTATEURS DU POINT DE VUE DE LA SÉCURITÉ

Résumé

La sécurité d'un élément commutateur déterminée par la probabilité de son travail correct (p) est insuffisante pour accomplir la synthèse du système, contenant les éléments commutateurs, du point de vue de la sécurité.

Dans l'oeuvre, sur l'exemple de la synthèse du point de vue de la sécurité des systèmes contenant un et puis deux éléments commutateurs, on a prouvé, qu'on peut réaliser une telle synthèse seulement alors, quand la sécurité de l'élément commutateur sera caractérisée par la probabilité des interruptions (q_p) et par la probabilité de court-circuit (q_z) de l'élément commutateur, en conséquence par une paire des nombres $\langle q_p, q_z \rangle$.

Я. МИГДАЛЬСКИ

СИНТЕЗ СИСТЕМЫ С ПЕРЕКЛЮЧАЮЩИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ

Р е з ю м е

Надежность переключающего элемента, определена как вероятность его исправной работы (p), является недостаточной для целей синтеза системы с точки зрения надежности. В работе, на примере синтеза систем с одним и двумя переключающими элементами, доказано, что проведение такого синтеза будет возможно только в тех случаях, когда надежность переключающего элемента будет определена вероятностью обрыва (q_p) и вероятностью короткого замыкания (q_z), то есть двумя числами $\langle q_p, q_z \rangle$.

621.394.73

FRANCISZEK KAMIŃSKI

Wybrane aspekty syntezy torów niejednorodnych, złożonych z odcinków jednorodnych, o charakterystyce Czebyszewa

Rękopis dostarczono 4. 12. 1967

W pracy podano ścisłe uzasadnienie fizycznie realizowalnej postaci funkcji strat dla syntezy torów niejednorodnych, złożonych z bezstratnych odcinków jednorodnych, o charakterystyce Czebyszewa. Wykazano, że wymienione tory są optymalne w grupie torów filtrujących lub dopasowujących. Osobną uwagę zwrócono na tory niejednorodne złożone z odcinków jednorodnych ze stratami. Podano postacie kwadratu modułu funkcji transmisji, które umożliwiają syntezę torów tego rodzaju przy założeniu charakterystyki równomiernie falistej. Szczególną uwagę zwrócono na te aspekty syntezy, które wynikają z założenia o istnieniu strat w odcinkach jednorodnych.

1. WSTĘP

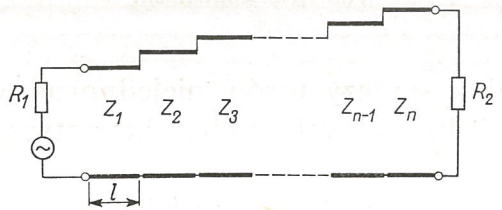
Tory niejednorodne złożone z odcinków jednorodnych o charakterystyce Czebyszewa znajdują szerokie zastosowanie w technice. Należą do nich m.in. elektromechaniczne filtry łańcuchowe, tory dopasowujące (dopasowniki) w liniach przesyłowych, niektóre rodzaje filtrów mikrofalowych. Problematyka syntezy omawianych torów obejmuje kilka zagadnień, jak np. poszukiwanie postaci funkcji strat, uwzględnianie strat własnych w odcinkach linii długiej, metody wyznaczania parametrów odcinków jednorodnych itp. Konieczność praktycznego rozwiązania tych zagadnień spowodowała ukazanie się licznych publikacji, m.in. [5—7], [12], [15—20], [25], [27]. Analiza wymienionych prac wykazuje, że główny akcent został położony na uzyskanie praktycznych wyników w zakresie syntezy torów niejednorodnych bez strat własnych, mniej uwagi natomiast zwrócono na te problemy teoretyczne, które są istotne dla poprawności rozumowania, a jednocześnie pozostają poza zasięgiem codziennej praktyki inżynierskiej.

Biorąc powyższe pod uwagę zdecydowano się w niniejszej pracy podać szersze omówienie tych aspektów syntezy torów niejednorodnych złożonych z odcinków jednorodnych, które dotychczas nie zostały w sposób dostateczny uwypuklone w literaturze fachowej. Tematyka pracy obejmuje następujące zagadnienia: a) postacie funkcji strat torów filtrujących i dopasowujących o charakterystyce Czebyszewa (równomiernie falistej), b) optymalny charakter torów o charakterystyce Czebyszewa, c) wybrane aspekty syntezy torów niejednorodnych przy występowaniu strat własnych w odcinkach linii długiej.

2. CHARAKTERYSTYKA ZAGADNIENIA

Przedmiot rozważań pracy stanowią tory niejednorodne, złożone z odcinków jednorodnych, wykorzystywane jako tory dopasowujące i filtrujące.

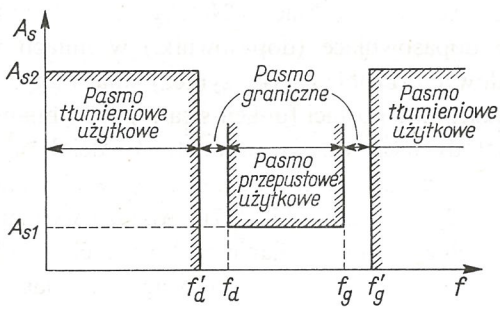
Niejednorodne tory dopasowujące służą do stworzenia optymalnych warunków transmisji sygnału między torami jednorodnymi o oporach falowych R_1, R_2, względnie między źródłem o oporze R_1 i odbiornikiem o oporze R_2, przy czym $R_1 \neq R_2$ (rys. 1). Jakość



Rys. 1. Tor dopasowujący złożony z odcinków jednorodnych o jednakowej długości (tor typu N_0 lub N_1

transmisji jest określona przez maksymalnie dopuszczalną wartość współczynnika odbicia (ew. tłumienności skutecznej) w zadanym pasmie częstotliwości. Niejednorodne tory filtrujące służą do usuwania z przesyłanego sygnału składowych występujących poza pożądanym pasmem częstotliwości.

Zazwyczaj za punkt wyjścia syntezy omawianej klasy torów służą warunki ujęte w poniższej tablicy, a dodatkowo wyjaśnione na rys. 2. Zestaw warunków I dotyczy torów dopasowujących złożonych z bezstratnych odcinków jednorodnych; zestaw warunków II



Rys. 2. Wymagania dotyczące toru filtrującego typu N_0

dotyczy torów dopasowujących przy uwzględnianiu strat własnych w odcinkach jednorodnych. Podobne rozróżnienie występuje także przy syntezie torów filtrujących (zestaw warunków III i IV). Przytoczone zestawy warunków nie są jedyne; spotyka się również inne, posługujące się takimi pojęciami, jak selektywność, współczynnik prostokątności, jednakże różnice te nie są istotne dla dalszych rozważań.

W tym miejscu warto zauważyć, że niejednorodne tory filtrujące, które są analizowane w niniejszej pracy, nie mogą spowodować z przyczyn fizycznych tłumienności skutecznej $A_s = \infty$, jak również zapewnić $A_s \geqslant A_{s2}$ na całej osi częstotliwości poza pasmem przepustowym. Ogólnie można powiedzieć, że tory filtrujące są wielopasmowe i wymagania dotyczą jednego z pasm, najczęściej najniższego (nie licząc pasma przy $f = 0$).

Tablica

Warunki do syntezy torów niejednorodnych

Lp.	Parametry założone	Warunki dotyczą torów i obejmują parametry:			
		dopasowujących		filtrujących	
		bez strat	ze stratami	bez strat	ze stratami
1	Częstotliwości skrajne pasma przepustowego użytkowego f_d, f_g $(f_d < f_g)$	x	x	x	x
2	Częstotliwości skrajne pasma tłumieniowego użytkowego f_d', f_g' $(f_d' < f_g')$	—	—	x	x
3	Opór pracy na wejściu toru R_1	x	x	x	(x)
4	Opór pracy na wyjściu toru R_2	x	x	x	(x)
5	Maksymalna wartość tłumienności skutecznej w paśmie przepustowym użytkowym A_{s1}	(x)	—	x	—
6	Wahania tłumienności skutecznej, liczone w odniesieniu do minimalnej wartości tłumienności, w pasmie przepustowym użytkowym nie mogą przekraczać ΔA_{s1}	—	x	—	x
7	Minimalna wartość tłumienności skutecznej w pasmie tłumieniowym użytkowym A_{s2}	—	—	x	—
8	Przyrost tłumienności skutecznej w pasmie tłumieniowym użytkowym, liczony w odniesieniu do minimalnej wartości tłumienności skutecznej w pasmie przepustowym użytkowym, nie może być mniejszy od ΔA_{s2}	—	—	—	x
9	Tłumienność skuteczna w pasmie przepustowym użytkowym powinna być możliwie mała	—	x	—	x
10	Maksymalna wartość współczynnika odbicia w pasmie przepustowym użytkowym Γ_m	x	—	(x)	—
11	Jednostkowa tłumienność falowa linii jednorodnej β_0	—	x	—	x
12	Kształt charakterystyki toru (krzywa aproksymacji): równomiernie falista w pasmie przepustowym użytkowym	x	x	x	x

Uwaga: Symbol (x) wskazuje na możliwość występowania danej pozycji w odpowiednim zestawie warunków. Na rys. 2 podano niezbędne wyjaśnienia dotyczące używanych pojęć.

Analiza problemu prowadzona jest w oparciu o pojęcie unormowanej macierzy transmisyjnej toru $T(p)$ [6], [7], [12], [14]:

$$T(p) = \begin{bmatrix} t_{11}(p) & t_{12}(p) \\ t_{21}(p) & t_{22}(p) \end{bmatrix} = M_1 J_1 M_2 \dots M_i J_i M_{i+1} \dots M_n J_n M_{n+1} \tag{1}$$

$$J_i = \begin{bmatrix} e^{p(Kl)_i} & 0 \\ 0 & e^{-p(Kl)_i} \end{bmatrix}; \quad M_i = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{m_i}\right) & \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{m_i}\right) \\ \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{m_i}\right) & \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{m_i}\right) \end{bmatrix}; \tag{2}$$

$$m_1 = \frac{R_1}{Z_1}, \quad m_i = \frac{Z_{i-1}}{Z_i}, \quad i = 2, 3, \ldots, n; \quad m_{n+1} = \frac{Z_n}{R_2},$$

gdzie: $p = \alpha + j\omega$, ω — pulsacja, Z_i — opór falowy i-tego odcinka linii jednorodnej, K_i — odwrotność prędkości fazowej, l_i — długość i-tego odcinka linii, n — liczba odcinków jednorodnych.

Element $t_{11}(p)$ macierzy $T(p)$ nosi nazwę funkcji transmisji, a element $t_{21}(p)$ — funkcji filtracji toru.

Elementy macierzy $T(p)$ pozostają ze sobą w następujących związkach [6], [14]:

$$t_{11}(-p) = t_{22}(p), \quad t_{21}(-p) = t_{12}(p), \tag{3}$$

$$t_{11}(p)t_{22}(p) = 1 + t_{12}(p)t_{21}(p), \tag{4}$$

przy czym dla $\alpha = 0$ zachodzi:

$$t_{11}^*(j\omega) = t_{22}(j\omega), \quad t_{21}^*(j\omega) = t_{12}(j\omega), \tag{5}$$

$$|t_{11}(j\omega)|^2 = 1 + |t_{21}(j\omega)|^2, \tag{6}$$

gdzie symbol $*$ wskazuje na wartość sprzężoną. Jednocześnie obowiązuje związek [3], [14]:

$$t_{11} = e^{G_s}, \tag{7}$$

gdzie G_s — tamowność skuteczna czwórnika.

Funkcję $L(p) = t_{11}(p)t_{22}(p)$ określa się mianem funkcji strat toru, zaś $|t_{11}(j\omega)|$ — charakterystyki (amplitudowej) toru.

Tory niejednorodne, których macierz transmisyjna daje się zapisać w postaci (1), będą umownie nazywane torami typu N. W przypadku szczególnym, jeżeli stosunek dwu dowolnych parametrów $(Kl)_i$ oraz $(Kl)_k$, $i \neq k$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$, jest liczbą wymierną, tor typu N jest torem niejednorodnym złożonym z bezstratnych odcinków jednorodnych o jednakowej długości (elektrycznej) [5], [14], [22]; w odniesieniu do torów tego rodzaju przyjmuje się określenie tory typu N_0. Macierz transmisyjna torów typu N daje się zapisać w postaci [12], [14]:

$$T(s) = M_1 J(s) M_2 \ldots M_i J(s) M_{i+1} \ldots M_n J(s) M_{n+1}, \tag{8}$$

$$J(s) = \begin{bmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{bmatrix}, \quad s = \tau p = \sigma + j\theta, \quad \tau > 0,$$

gdzie θ — przesuwność falowa odcinka jednorodnego. Elementy macierzy $T(s)$ są wielomianami wykładniczymi zmiennej zespolonej s o współczynnikach rzeczywistych.

Badanie zagadnienia syntezy torów niejednorodnych złożonych z jednorodnych odcinków linii długiej ze stratami własnymi jest prowadzone również w oparciu o pojęcie macierzy transmisyjnej T. W niniejszej pracy zakres rozważań tego problemu jest ograniczony do torów niejednorodnych złożonych z odcinków jednorodnych o jednakowej długości i jednakowej stałej tłumienności falowej σ_0 w każdym odcinku, przy obciążeniu rzeczywistym; tory tego rodzaju są umownie określane mianem torów typu N_1. Przyjęcie podanych założeń odpowiada z dobrym przybliżeniem faktycznym warunkom pracy układów w roboczym pasmie częstotliwości. Z poczynionych uwag wynika, że macierz T toru typu N_1 ma postać:

$$T(s) = M_1 J(s+\sigma_0) M_2 \ldots M_i J(s+\sigma_0) M_{i+1} \ldots M_n J(s+\sigma_0) M_{n+1}. \tag{9}$$

Elementy macierzy $T(s)$ toru typu N_1 są wielomianami wykładniczymi zmiennej s o współczynnikach rzeczywistych. Należy także zaznaczyć, że w danym przypadku elementy macierzy $T(s)$ są w dalszym ciągu związane zależnością (4), natomiast nie dotyczą ich wzory (3), (5), (6).

Przedstawione zależności analityczne są podstawowe dla syntezy rozpatrywanej klasy czwórników przy pomocy parametrów skutecznych. Jak wiadomo [6], celem syntezy toru niejednorodnego złożonego z odcinków jednorodnych jest wyznaczenie — na podstawie poczynionych warunków — liczby odcinków jednorodnych toru oraz oporu falowego i długości każdego z nich, tak aby realizowana charakterystyka odpowiadała krzywej aproksymacji.

W niniejszej pracy przedstawiono następujące wybrane aspekty syntezy torów niejednorodnych:

1. Wyznaczenie postaci funkcji strat torów filtrujących typu N spełniających warunki III. Optymalny charakter tych torów.
2. Wyznaczenie postaci funkcji strat torów dopasowujących typu N spełniających warunki I. Optymalny charakter tych torów.
3. Synteza torów dopasowujących typu N_1 według warunków II.
4. Synteza torów filtrujących typu N_1 spełniających warunki IV.

3. OGÓLNY SCHEMAT SYNTEZY TORÓW TYPU N_0 I N_1

Zgodnie z [6], [11], [15], [20], [22] synteza torów typu N_0 i N_1 przebiega następująco:

1. Ustalenie postaci kwadratu modułu funkcji transmisji $|t_{11}(j\theta)|^2$.
2. Wyznaczenie — w oparciu o dane pkt. 1 — elementów macierzy transmisyjnej $T(s)$.
3. Wyznaczenie parametrów projektowanego toru niejednorodnego.

Ad 1. Zadanie tego etapu polega na dobraniu postaci kwadratu modułu funkcji transmisji

$$|t_{11}(s)|^2_{s=j\theta} = W[1+H(s)]_{s=j\theta}, \tag{10}$$

$W \geqslant 1$, $H(s)$ — funkcja zmiennej zespolonej,

w ten sposób, aby odpowiadała ona warunkom fizycznej realizacji toru niejednorodnego.

W przypadku torów typu N_0 warunek (10) daje się również sformułować jako [zob. (4), (6)]:

$$L(s) = t_{11}(s)t_{22}(s) = 1+t_{12}(s)t_{21}(s) = W[1+H(s)] = 1+H(s), \tag{11}$$

czyli problem sprowadza się do ustalenia realizowalnej postaci funkcji strat $L(s)$. Do tego celu służy następujące twierdzenie o warunkach fizycznej realizacji funkcji $L(s)$ toru typu N_0 [14], [16].

Twierdzenie 1. (Twierdzenie o warunkach fizycznej realizacji funkcji strat torów typu N_0)

Funkcja $K(s)$, $s = \sigma+j\theta$, jest wtedy i tylko wtedy funkcją strat $L(s)$ toru niejednorodnego typu N_0, jeżeli jest wielomianem wykładniczym o współczynnikach rzeczywistych, parzystym względem ch s i przyjmującym na osi urojonej $Im\ s$ wartości nie mniejsze od jedności, czyli jeżeli:

$$1.\ K(s) = A\prod_{\nu=1}^{n}(\mathrm{ch}^2 s - \mathrm{ch}^2 s_\nu) \tag{12}$$

2. zera zespolone $\pm s_\nu = \pm(\sigma_\nu + j\theta_\nu)$, położone w pasie poziomym $\theta' \leqslant Im\, s < \theta' + 2\pi$, θ' — liczba dowolna, po odwzorowaniu na płaszczyznę $Y = e^s$ występują w parach sprzężonych;

3. A — liczba rzeczywista,

4. $K(j\theta) \geqslant 1$.

W przypadku syntezy torów typu N_1 korzysta się z postaci (10), w odniesieniu do którego słuszne jest następujące twierdzenie o warunkach fizycznej realizacji kwadratu modułu funkcji transmisji torów typu N_1 [15].

Twierdzenie 2. (Twierdzenie o warunkach fizycznej realizacji kwadratu modułu funkcji transmisji torów typu N_1).

Funkcja $K(s)$ przy $s = j\theta$ jest wtedy i tylko wtedy kwadratem modułu funkcji transmisji $|t_{11}(s)^2|$, $s = j\theta$, toru niejednorodnego złożonego z odcinków jednorodnych o jednakowej długości i o jednakowej stałej tłumienności falowej σ_0 przy obciążeniu rzeczywistym, jeżeli są spełnione następujące warunki:

1. $K(s) = A \prod_{\nu=1}^{n} (\mathrm{ch}^2 s - \mathrm{ch}^2 s_\nu)$,

2. zera zespolone $\pm s_\nu = \pm(\sigma_\nu + j\theta_\nu)$, położone w pasie poziomym $\theta' \leqslant Im\, s < \theta' + 2\pi$, θ' — liczba dowolna, po odwzorowaniu na płaszczyznę $Y = e^s$ występują w parach sprzężonych;

3. A — liczba rzeczywista,

4. $\min |\sigma_\nu| > \sigma_0$,

5. funkcja pomocnicza

$$K'(t) = A \prod_{\nu=1}^{n} [\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{ch}^2(s_\nu + \sigma_0)], \tag{13}$$

$t = s + \sigma_0$, $Re\, s_\nu < 0$, przyjmuje na osi $t = j\theta$ wartości nie mniejsze od jedności, czyli $K'(j\theta) \geqslant 1$.

Ad 2. Po zrealizowaniu pktu 1 przystępuje się do wyznaczania elementów macierzy transmisyjnej $T(s)$. Do tego celu służą zalecenia podane w [6], [14—16], [20], [22].

W przypadku syntezy torów typu N_0 elementy $t_{11}(s)$, $t_{21}(s)$ poszukiwanej macierzy $T(s)$ mają postać [14], [16]:

$$\left.\begin{aligned} t_{11}(s) &= A_1 e^{-ns} \prod_{\nu=1}^{n} (e^s - e^{s_\nu})(e^s + e^{s_\nu}), \qquad Re\, s_\nu < 0, \\ A_1 &= 2^{-n} \sqrt{|A|} \prod_{\nu=1}^{n} e^{-\sigma_\nu}, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

gdzie $s_\nu = \sigma_\nu + j\theta_\nu$ — zera funkcji strat w lewej półpłaszczyźnie zmiennej s w pasie $\theta' \leqslant Im\, s < \theta' + \pi$, θ' — liczba dowolna, A — mnożnik funkcji $L(s)$ zapisanej w postaci (12), n — połowa stopnia funkcji strat.

$$\left.\begin{aligned} t_{21}(s) &= B_1 e^{-ns} V(s) \prod_{\varrho=q+1}^{n} (e^s - e^{s_\varrho})(e^s + e^{s_\varrho}), \\ V(s) &= \prod_{\varrho=1}^{q} (e^s - e^{j\theta_\varrho})(e^s + e^{j\theta_\varrho}), \qquad B_1 = \pm 2^{-n} \sqrt{|A|} \prod_{\varrho=1}^{n} e^{-\sigma_\varrho}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Wielomian wykładniczy $V(s)$ obejmuje zera funkcji $L(s)-1$ położone w przedziale $[\theta', \theta'+\pi)$ (θ' — liczba dowolna) na osi urojonej $Im\, s$, przy czym wskaźnik ich krotności jest obniżony o połowę. Punkty s_ϱ, $\varrho = q+1, \ldots, n$, są zerami funkcji $L(s)-1$ położonymi w pasie poziomym $\theta' \leqslant Im\, s < \theta'+\pi$ z wyłączeniem zer na osi $Im\, s$, dobranymi w ten sposób, aby na płaszczyźnie $Y = e^s$ zbiór tych zer ze znakiem minus (tzn. zbiór punktów e^{-s_ϱ}) odpowiadał zbiorowi pozostałych zer funkcji $L(s)-1$ w podanym pasie (poza osią $Im\, s$). Jak z tego widać, w przypadku ogólnym wyznaczenie funkcji filtracji nie jest jednoznaczne.

W przypadku syntezy symetrycznych i antymetrycznych torów N_0 wskazane jest obniżenie stopnia elementów macierzy transmisyjnej w oparciu o metodę macierzy R [10], [11], [17], [18]. Metoda ta polega na zastąpieniu macierzy transmisyjnej $T(s)$, opisującej właściwości wymienionej grupy torów, macierzą pomocniczą $R(s)$, która jest macierzą transmisyjną części składowej toru i tym samym posiada elementy-wielomiany stopnia niższego aniżeli elementy macierzy $T(s)$.

Sposób wyznaczania elementów macierzy $T(s)$ torów typu N_1 pozostaje w ścisłym związku ze wzorami (14), (15); przypadek ten posiada własną specyfikę, która zostanie szerzej omówiona w innym miejscu.

Ad 3. Metody wyznaczania parametrów toru niejednorodnego są różnorodne i zależą od sposobu sformułowania problemu. Do metod podstawowych należy zaliczyć następujące:

a. metoda macierzy transmisyjnej [11], [14], [17], która polega na kolejnym wydzielaniu macierzy-mnożników typu $J(s)$ i M z macierzy $T(s)$;

b. metoda macierzy łańcuchowej [6], [20], [22], która polega na kolejnym wydzielaniu z macierzy łańcuchowej $A(s)$ macierzy-mnożników $A_i(s)$ o właściwościach macierzy łańcuchowej poszczególnych odcinków jednorodnych;

c. metoda impedancji wejściowej [14], [22], która polega na kolejnym obniżaniu stopnia licznika i mianownika impedancji wejściowej toru;

d. metoda ułamka łańcuchowego [14], oparta na rozwinięciu współczynnika odbicia (od wejścia) $\Gamma_w(s)$ na ułamek łańcuchowy;

e. metoda bezpośrednia [11], [14], [17], [20], [27], która polega na wyznaczaniu parametrów toru niejednorodnego przy pomocy pewnego zestawu wzorów.

W niniejszej pracy skoncentrowano się przede wszystkim na tych zagadnieniach syntezy torów typu N_0 i N_1, które są związane z pkt. 1 i 2.

Z przedstawionego schematu syntezy toru wynika, że ustalenie postaci funkcji strat i postaci kwadratu modułu funkcji transmisji należy do jednego z podstawowych zadań, jakie stoją przed projektantem układu. Dlatego wydaje się celowe szersze omówienie tej problematyki; rozważania będą dotyczyć torów z charakterystyką równomiernie falistą, co nada przedstawionym wynikom bardziej skonkretyzowaną formę.

4. POSTAĆ FUNKCJI STRAT TORÓW FILTRUJĄCYCH TYPU N O CHARAKTERYSTYCE RÓWNOFALISTEJ

W niniejszym rozdziale przedstawiono sposób wyznaczania postaci funkcji strat $L(s)$ torów filtrujących typu N o właściwościach transmisyjnych według warunków III. Za podstawę rozważań służy następujące sformułowanie problemu.

Problem A. Synteza toru filtrującego typu N. Należy tak dobrać liczbę odcinków jednorodnych oraz opór falowy i długość każdego z nich, aby moduł funkcji filtracji toru filtrującego, obciążonego oporami R_1, R_2, spełniał następujące warunki:

a. $|t_{21}(j\omega)| \leqslant h$ dla $\omega_d \leqslant \omega \leqslant \omega_g$,

gdzie

$$h = \sqrt{e^{2A_{s1}} - 1} = \max_{\omega_d \leqslant \omega \leqslant \omega_g} |t_{21}(j\omega)|,$$

b. $|t_{21}(j\omega)| \geqslant H$ dla $\omega_d'' \leqslant \omega \leqslant \omega_d'$, $\omega_g' \leqslant \omega \leqslant \omega_g''$,

gdzie

$$H = \sqrt{e^{2A_{s2}} - 1} = \min_{\substack{\omega_d'' \leqslant \omega \leqslant \omega_d' \\ \omega_g' \leqslant \omega \leqslant \omega_g''}} |t_{21}(j\omega)|,$$

ω_d'', ω_g'' — minimalna i maksymalna częstotliwość kontrolowanego pasma tłumieniowego użytkowego,

zaś długość całkowita l_c toru była najmniejsza z możliwych[1]). (W związku z tym wymaganiem należy przyjąć, że prędkość fazowa jest jednakowa we wszystkich odcinkach jednorodnych torów porównywanych).

Poszukiwanie postaci funkcji strat toru niejednorodnego spełniającego wymagania problemu A jest realizowane w dwu etapach. W trakcie etapu I zostaje wyznaczona funkcja strat toru typu N_0, która czyni zadość postawionym warunkom. Z kolei w ramach etapu II udowadnia się, że rozwiązanie uzyskane w trakcie etapu I jest jedyne w całej klasie torów typu N.

4.1. Poszukiwanie funkcji strat toru filtrującego typu N_0 odpowiadającego wymaganiom problemu A

Zgodnie z (3) — (6), (8) kwadrat modułu funkcji filtracji toru niejednorodnego typu N_0 daje się wyrazić następująco:

$$|t_{21}(j\theta)|^2 = t_{12}(s)t_{21}(s)|_{s=j\theta} = L(s)|_{s=j\theta} - 1.$$

Uwzględniając w tym związku ogólną postać funkcji $L(s)$, określoną przez wyrażenie (12) i wprowadzając oznaczenie

$$Q(s) = t_{12}(s)t_{21}(s)$$

otrzymuje się, że funkcja $Q(s)$ jest wielomianem wykładniczym o współczynnikach rzeczywistych, parzystym względem ch s, czyli ma postać

$$Q(s) = L(s) - 1 = b_{2n}\mathrm{ch}^{2n}s + b_{2n-2}\mathrm{ch}^{2n-2}s + \ldots + b_2\mathrm{ch}^2 s + b_0, \tag{16}$$

gdzie współczynniki b_{2i} są rzeczywiste. Należy także nadmienić, że ze sposobu określenia funkcji $Q(s)$ wynika, że jest ona nieujemna na osi $Im\, s$: $Q(j\theta) \geqslant 0$, a dla $s = 0$ zachodzi

[1]) Warunek ten może dotyczyć zarówno całkowitej długości fizycznej toru niejednorodnego (dla zadanej prędkości fazowej), jak i całkowitej długości elektrycznej (lub inaczej sumy przesuwności falowych odcinków jednorodnych) dla środkowej częstotliwości pasma przepustowego użytkowego.

$$Q(0) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} - \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right)^2. \tag{17}$$

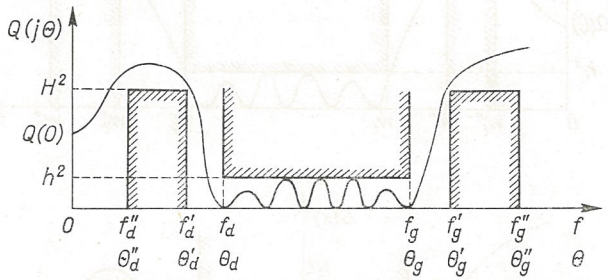
Orientacyjny wykres funkcji $Q(s)$, $s = j\theta$, spełniającej wymagania problemu A podany jest na rys. 3.

Dla lepszego zrozumienia dalszych rozważań przyjmuje się, że dana jest funkcja $Q(v)$, $v = r+jw$, o postaci analogicznej jak (16):

$$Q(v) = q_{2n}\mathrm{ch}^{2n} v + q_{2n-2}\mathrm{ch}^{2n-2} v + \ldots + q_2 \mathrm{ch}^2 v + q_0,$$

q_{2i} — współczynniki rzeczywiste

i o identycznych właściwościach (na płaszczyźnie zmiennej zespolonej v) co i funkcja $Q(s)$; m.in. oznacza to, że zachodzi $Q(jw) \geqslant 0$.



Rys. 3. Przykład funkcji $Q(j\theta)$ spełniającej wymagania problemu A

Jeżeli w powyższym wzorze uwzględnić równość $\mathrm{ch}\, v = 2\mathrm{ch}^2 \frac{v}{2} - 1$ oraz dokonać odwzorowania $z = x+jy = \mu \mathrm{ch}^2 \frac{v}{2} + \eta$, $\mathrm{ch}^2 \frac{v}{2} = \frac{z-\eta}{\mu}$, μ, η — parametry rzeczywiste, to otrzyma się zależność

$$Q(v) = q_{2n}\left(2\frac{z-\eta}{\mu} - 1\right)^{2n} + q_{2n-2}\left(2\frac{z-\eta}{\mu} - 1\right)^{2n-2} + \ldots + q_0 =$$

$$= g_{2n} z^{2n} + g_{2n-1} z^{2n-1} + \ldots + g_0 = G(z). \tag{18}$$

Wartości współczynników g_i wynikają jednoznacznie z podanej równości.

Dokonana zamiana zmiennej charakteryzuje się tym, że:

a. oś urojona *Im v* przechodzi w odcinek osi rzeczywistej *Re z*, przy czym przedział $0 \leqslant w \leqslant \pi$ na osi urojonej *Im v* zostaje odwzorowany na przedział zmiennej x, zawarty między liczbami $\mu+\eta$ a η;

b. wielomian wykładniczy $Q(v)$ stopnia $2n$ zostaje przekształcony w wielomian algebraiczny $G(z)$ stopnia $2n$ o współczynnikach rzeczywistych.

Wartości parametrów μ, η można dobrać tak, aby zadany przedział $[w_1, w_2]$, $0 < w_1 < w_2 < \pi$ na osi urojonej *Im v* był odwzorowany na przedział $[-1, 1]$. W tym celu stawia się warunki:

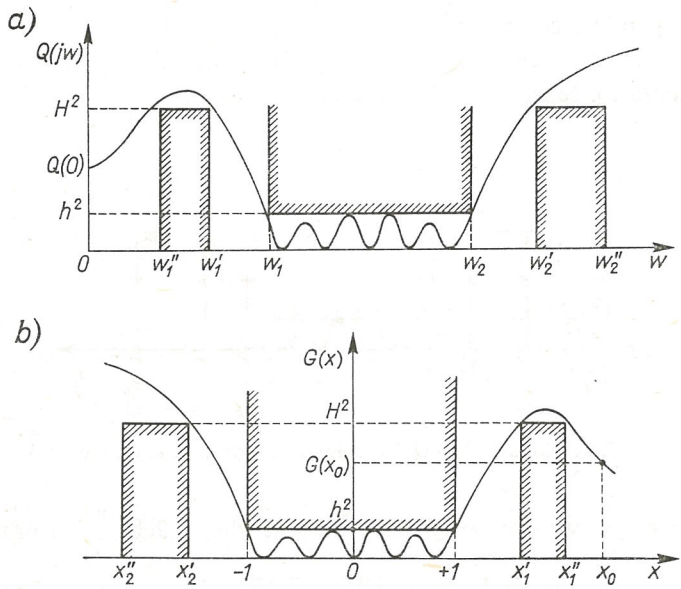
$$\mu \cos^2 \frac{w_1}{2} + \eta = 1, \qquad \mu \cos^2 \frac{w_2}{2} + \eta = -1,$$

skąd

$$\mu = \frac{4}{\cos w_1 - \cos w_2}, \qquad \eta = -\frac{2+\cos w_1+\cos w_2}{\cos w_1 - \cos w_2}. \tag{19}$$

Parametry μ, η dobrane zgodnie z (19) będą oznaczane jako μ_0, η_0.

Jeżeli z kolei zażądać, aby funkcja $Q(v)$ w określonym przedziale na osi $Im\ v$ czyniła zadość analogicznym warunkom co i poszukiwana funkcja $Q(s)$ według sformułowania problemu A (zob. rys. 4a), to wtedy odpowiadająca jej funkcja $G(z)$ będzie wykazywała następujące właściwości (zob. rys. 4b):



Rys. 4. Wykres funkcji $G(x)$, odpowiadający funkcji $Q(jw)$

a. $0 \leqslant G(x) \leqslant h^2$ dla x między $x_2 = \mu\cos^2\frac{w_2}{2}+\eta$ a $x_1 = \mu\cos^2\frac{w_1}{2}+\eta$;

b. $G(x) \geqslant H^2$ dla x między $x_1' = \mu\cos^2\frac{w_1'}{2}+\eta$ a $x_1'' = \mu\cos^2\frac{w_1''}{2}+\eta$,

oraz dla x między

$$x_2'' = \mu\cos^2\frac{w_2''}{2}+\eta \quad \text{a} \quad x_2' = \mu\cos^2\frac{w_2'}{2}+\eta;$$

c. $G(x_0) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} - \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right)^2$, $x_0 = \mu+\eta$ [na podstawie (17)].

Ostatecznie po wprowadzeniu dodatkowej funkcji pomocniczej $G'(z) = G(z) - \frac{h^2}{2}$ i dobraniu parametrów μ, η zgodnie z (19) można sformułować problem równoważny do problemu A, a dotyczący już nowej funkcji $G'(z)$:

Spośród wszystkich wielomianów algebraicznych stopnia parzystego o współczynnikach rzeczywistych, spełniających na osi $Re\ z = x$ warunki:

1. $|G'(x)| \leqslant \frac{h^2}{2}$ dla $-1 \leqslant x \leqslant 1$,

2. $G'(x) \geqslant H^2 - \frac{h^2}{2}$ dla $x_2'' \leqslant x \leqslant x_2' < -1$ oraz $1 < x_1' \leqslant x \leqslant x_1''$,

3. $G'(x_0) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} - \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right)^2 - \frac{h^2}{2}$,

4. $G'(x) \geqslant -\frac{h^2}{2}$ $\quad x_2'' \leqslant x \leqslant x_0$

wyznaczyć taki, który by gwarantował — po odwrotnym przetransformowaniu funkcji $G(x)$ na $Q(v)$ i wprowadzeniu zmiennej s — minimum długości całkowitej $l_c = 2nl$ (l — długość odcinka jednorodnego, $2n$ — stopień wielomianu algebraicznego, a także liczba odcinków jednorodnych) przy jednoczesnym zadośćuczynieniu warunkom a. i b. problemu A.

Postawiony problem pozostaje w ścisłym związku z zagadnieniem poszukiwania wielomianu najlepszego przybliżenia w sensie Czebyszewa funkcji $f(x) \equiv 0$ w przedziale $[-1, 1]$ przy występowaniu warunków dodatkowych, ograniczających zachowanie się wielomianu poza przedziałem $[-1, 1]$. Jest to zrozumiałe, gdyż — jak wiadomo [8], [9] — wielomian taki najlepiej realizuje założoną dokładność aproksymacji przy jednoczesnym spełnieniu innych warunków dodatkowych spośród wszystkich wielomianów stopnia $2n$. (Uzupełniające uwagi na ten temat są podane w dodatku 1). Zatem wielomian $G'(z)$ powinien być tak dobrany, aby była spełniona tożsamość:

$$G'(z) \equiv W_{2n}(z), \tag{20}$$

gdzie $W_{2n}(z)$ — ten z wielomianów najlepszego przybliżenia stopnia parzystego, spełniających warunki 1—4 postawionego problemu, który realizuje $l_c = \min_{\mu_0, \eta_0} (2nl)$. Wykres funkcji $G'(z)$ według (20) w przedziale $[-1, 1]$ będzie równofalisty, co wynika z właściwości wielomianów najlepszego przybliżenia w sensie Czebyszewa.

Jeżeli obecnie we wzorze (20) przeprowadzić omówione przekształcenia zmiennych w odwrotnej kolejności, czyli przejść od $G'(z)$ — poprzez $Q(v)$, wzór (18) — do $Q(s)$, $L(s)$, wzór (16), przez wykorzystanie podstawienia $v = 2s$, to w wyniku uzyska się poszukiwaną f i z y c z n i e r e a l i z o w a l n ą postać funkcji strat $L(s)$, która będzie rozwiązaniem problemu A w klasie torów filtrujących typu N_0 o c h a r a k t e r y s t y c e r ó w n o f a l i s t e j:

$$L(s) = 1 + \frac{h^2}{2} + W_{2n}(\mu_0 \operatorname{ch}^2 s + \eta_0). \tag{21}$$

Parametry w tym wzorze dobiera się tak, aby warunki a., b. problemu A były spełnione przy n a j m n i e j s z e j c a ł k o w i t e j d ł u g o ś c i toru filtrującego typu N_0.

Na uwagę zasługuje fakt, że w przypadku ogólnym funkcja $L(s)$ według (21) jest wielomianem wykładniczym stopnia $4n$, to znaczy, że odpowiedni tor filtrujący obejmuje $2n$ odcinków jednorodnych. Jest to istotna wskazówka, którą należy się kierować przy rozwiązywaniu konkretnego problemu syntezy.

Co się tyczy postaci analitycznej wielomianów $W_{2n}(z)$, to w przypadku ogólnym nie jest ona znana. W trakcie syntezy układu należy posługiwać się znanymi algorytmami, umożliwiającymi obliczenie współczynników wielomianu najlepszego przybliżenia w sensie

Czebyszewa dla konkretnych warunków pracy; zob. np. [8, 29]. Warto wszakże nadmienić, iż w niektórych przypadkach można wskazać analityczną postać poszukiwanego wielomianu; jej znajomość może być także pomocna w charakterze pierwszego przybliżenia przy poszukiwaniu rozwiązania dla odmiennych warunków syntezy. Dalsze uwagi na ten temat są podane w rozdz. 6 oraz dodatku 1.

Z kolei należy zbadać, czy długość toru opisanego przez funkcję strat (21) jest najmniejsza z możliwych w grupie torów typu N_0 zgodnie ze sformułowaniem problemu A. Postawione zagadnienie daje się sformułować następująco.

Czy istnieje tor typu N_0 o następujących właściwościach: a. $h_2 \leqslant h_1$; b. $l_{c2} < l_{c1}$; c. pozostałe właściwości transmisyjne wymienione w zestawie warunków problemu A są identyczne? (Indeks 1 wskazuje na parametry toru o funkcji strat według wzoru (21), a indeks 2 — na parametry toru poszukiwanego; $h_i = \max\limits_{\omega_d \leqslant \omega \leqslant \omega_g} |t_{21}(j\omega)|_i$, $i = 1, 2$).

Pełna analiza postawionego zagadnienia jest podana w dodatku 2. Wykazano w nim, że tor o funkcji strat według wyrażenia (21) spełnia warunki problemu A przy najmniejszej długości całkowitej toru w klasie torów typu N_0, czyli jest torem optymalnym w tej klasie.

W ten sposób zadanie etapu I zostało wykonane: określono właściwości funkcji strat toru filtrującego typu N_0, które umożliwiają jednoznaczne obliczenie tej funkcji jako rozwiązania problemu A.

4.2. Optymalny charakter toru o funkcji strat według (21) w całej klasie torów typu N spełniających warunki problemu A

Zadanie etapu II polega na wykazaniu, że rozwiązanie problemu A w postaci funkcji strat (21) jest optymalne dla wszystkich torów niejednorodnych typu N. Należy zatem dać odpowiedź na następujące pytanie:

Czy istnieje tor typu N (tor 2) różny od toru 1, określonego przez funkcję strat $L(s)$ według (21), o następujących parametrach (porównaj sformułowanie problemu A): a. $h_2 < h_1$, $h_i = \max\limits_{\omega_d \leqslant \omega \leqslant \omega_g} |t_{21}(j\omega)|_i$ $i = 1, 2$; b. $L_1(j\omega_d') < L_2(j\omega_d')$, $L_1(j\omega_d'') < L_2(j\omega_d'')$, $L_1(j\omega_g') < L_2(j\omega_g')$, $L_1(j\omega_g'') < L_2(j\omega_g'')$; c. $L_1(0) = L_2(0)$; d. $l_{c1} \geqslant l_{c2}$?

Oczywiście takie porównanie jest możliwe — podobnie jak i w poprzednich rozważaniach — jedynie przy założeniu, że prędkość fazowa jest jednakowa we wszystkich odcinkach jednorodnych obu torów (to znaczy $K_i = K_0$).

Rozumowanie przebiega jak następuje. Niech dany będzie tor 2 o macierzy transmisyjnej według (1):

$$T_2(p) = [M_1 J(K_0 l_1 p) M_2 \ldots M_n J(K_0 l_n p) M_{n+1}]_2,$$

przy czym zakłada się, że przynajmniej jeden iloraz $l_i : l_k$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$, jest liczbą niewymierną (gdyż w przeciwnym razie tor 2 należałby do klasy torów N_0). Ponieważ funkcja $L_2(j\omega)$ jest ciągła ze względu na parametry $(l_i)_2$, a więc dla każdego $\varrho > 0$ można

wskazać taki tor 3, który spełnia następujące warunki: a. $(l_i)_3 \leqslant (l_i)_2$; b. wszystkie ilorazy $(l_i : l_k)_3$ są liczbami wymiernymi; c. w paśmie $\omega_d'' \leqslant \omega \leqslant \omega_g''$ zachodzi: $|L_2(j\omega)-L_3(j\omega)| < \varrho$; d. $L_2(0) = L_3(0)$, (wartość $L(p)$ dla $p = 0$ nie zależy od doboru parametru l_i, zaś współczynniki m_i nie uległy zmianie). Z przytoczonych warunków wynika, że tor 3 należy do grupy torów typu N_0, a jego długość całkowita l_{c3} jest nie większa od l_{c2}. Uwagi dotyczące właściwości toru 3 typu N_0 służą za podstawę dalszego rozumowania.

Celem wykazania optymalnego charakteru rozwiązania (21) przyjmuje się, że tor 2 wykazuje lepsze właściwości transmisyjne niż tor 1 według (21), czyli są spełnione warunki a.—d. sformułowanego na wstępie problemu. Oznacza to, że można wskazać taki tor 3 typu N_0, który przy spełnieniu warunku $0 < \varrho < \varrho_0$, gdzie

$$\varrho_0 \leqslant \min\{h_1^2-h_2^2,\ L_2(j\omega_d')-L_1(j\omega_d'),\ L_2(j\omega_d'')-L_1(j\omega_d''),\ L_2(j\omega_g')-L_1(j\omega_g'),\ L_2(j\omega_g'')-L_1(j\omega_g'')\}$$

będzie miał długość całkowitą $l_{c3} \leqslant l_{c1}$ i wykazywał następujące właściwości transmisyjne:

$$h_1^2 > h_2^2+\varrho > h_3^2, \quad h_3^2 = \max_{\omega_d \leqslant \omega \leqslant \omega_g} L_3(j\omega),$$

$$L_1(j\omega_d') < L_2(j\omega_d')-\varrho < L_3(j\omega_d'); \quad L_1(j\omega_d'') < L_2(j\omega_d'')-\varrho < L_3(j\omega_d'')$$

$$L_1(j\omega_g') < L_2(j\omega_g')-\varrho < L_3(j\omega_g'); \quad L_1(j\omega_g'') < L_2(j\omega_g'')-\varrho < L_3(j\omega_g''), \quad L_1(0) = L_3(0).$$

Jak widać, z przyjęcia założenia o istnieniu toru typu N (tor 2) o lepszych właściwościach transmisyjnych niż tor 1 według (21) wypływa teza o istnieniu toru typu N_0 (tor 3), także jakościowo lepszego w porównaniu z torem 1. Wynik ten jest sprzeczny z wywodami pkt. 4.1 o optymalnym charakterze toru według (21) w klasie torów typu N_0, a zatem tor 2 typu N o założonych właściwościach nie istnieje.

W ten sposób zagadnienie wyznaczenia postaci funkcji strat toru filtrującego spełniającego warunki problemu A zostało ostatecznie rozwiązane. Z przeprowadzonych rozważań wynika, że tor o funkcji strat $L(s)$ według zależności (21) charakteryzuje się najmniejszą długością całkowitą spośród wszystkich torów typu N spełniających warunki tego problemu albo najlepszą jakością transmisji przy tej samej długości obu torów; charakterystyka tego toru jest równofalista.

Na zakończenie warto nadmienić, że przeprowadzone rozważania i uzyskane wyniki stanowią realizację zadania według pktu 1 ogólnego schematu syntezy (rozdz. 3).

5. POSTAĆ FUNKCJI STRAT DLA TORÓW DOPASOWUJĄCYCH TYPU N O CHARAKTERYSTYCE RÓWNOFALISTEJ

Rozważania są prowadzone na podstawie problemu B, będącego odpowiednikiem problemu A przy syntezie torów dopasowujących.

Problem B. Synteza toru dopasowującego typu N. Należy tak dobrać liczbę odcinków jednorodnych oraz opór falowy i długość każdego z nich, aby funkcja filtracji toru dopasowującego obciążonego oporami R_1, R_2, przy czym — nie zmniejszając ogólności — przyjmuje się $R_1 < R_2$, spełniała następujące warunki:

a. $|t_{21}(j\omega)| \leqslant h$ dla $\omega_d \leqslant \omega \leqslant \omega_g$, $h = \max_{\omega_d \leqslant \omega \leqslant \omega_g} |t_{21}(j\omega)|$,

b. $t_{21}(0) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} - \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right) > 0,$

zaś długość całkowita l_c toru była najmniejsza z możliwych.

Przy rozwiązywaniu problemu B uwzględnia się warunki I przytoczone w rozdz. 2 (tablica).

Poszukiwanie postaci funkcji strat, odpowiadającej wymaganiom problemu B, jest realizowane w sposób analogiczny do przedstawionego w rozdz. 4. Jednakże należy zauważyć, że w danym przypadku postępowanie jest ułatwione, gdyż charakterystyka toru jest kontrolowana jedynie w pasmie przepustowym i przy częstotliwości zerowej, brak jest natomiast ograniczeń dotyczących właściwości transmisyjnych toru w pasmie tłumieniowym. Biorąc to pod uwagę poniżej przytoczono jedynie zarys postępowania.

Rozumując identycznie jak w pkt. 4.1, a w szczególności dokonując odwzorowania $z = x+jy = \mu_0 \mathrm{ch}^2\frac{v}{2} + \eta_0$, $\mathrm{ch}^2\frac{v}{2} = \frac{z-\eta_0}{\mu_0}$, μ_0, η_0 — parametry rzeczywiste według (19), oraz wprowadzając funkcję $G'(z)$, dochodzi się do wniosku, że problem B w odniesieniu do wielomianów algebraicznych daje się sformułować następująco:

Spośród wszystkich wielomianów algebraicznych stopnia parzystego o współczynnikach rzeczywistych, spełniających na osi $Re\, z = x$ warunki:

1. $|G'(x)| \leqslant \frac{h^2}{2}$ dla $-1 \leqslant x \leqslant 1,$

2. $G'(x_0) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} - \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right)^2 - \frac{h^2}{2} = G'_0, \quad x_0 = \mu_0+\eta_0,$

wyznaczyć taki, który by gwarantował — po odwrotnym przetransformowaniu funkcji $G'(x)$ na $Q(v)$ i wprowadzeniu zmiennej $s = \frac{v}{2}$ — minimum długości całkowitej $l_c = 2nl$ (l — długość odcinka jednorodnego, $2n$ — stopień wielomianu algebraicznego, a także liczba odcinków jednorodnych) przy jednoczesnym zadośćuczynieniu warunkom a. i b. problemu B.

Jeżeli wspomniany wielomian $G'(z)$ będzie znany, to po wprowadzeniu zmiennej $s = \frac{v}{2}$ zamiast $z = x+jy$ i utworzeniu funkcji

$$K(s) = 1 + \frac{h^2}{2} + G'(\mu_0 \mathrm{ch}^2 s + \eta_0)$$

można twierdzić (w oparciu o Twierdzenie 1), że funkcja $K(s)$ należy do klasy funkcji fizycznie realizowalnych jako funkcji strat torów typu N_0, a zatem może być utożsamiona z funkcją strat toru dopasowującego:

$$K(s) \equiv L(s) = 1 + \frac{h^2}{2} + G'(\mu_0 \mathrm{ch}^2 s + \eta_0). \tag{22}$$

Rozwiązanie postawionego problemu wygodnie jest przeprowadzić w dwu etapach. W trakcie etapu I zostaje wyznaczona analityczna postać funkcji strat, właściwa dla postawionego problemu. Z kolei, w ramach etapu II, wyznacza się takie wartości parametrów

μ_0, η_0 oraz n, dla których długość całkowita toru dopasowującego jest najmniejsza; ta część zagadnienia jest szerzej omówiona w rozdz. 6.

Z uwag przytoczonych w dodatku 1 wynika, że postawiony problem wiąże się z zagadnieniem znalezienia spośród wszystkich wielomianów stopnia $2n$, przyjmujących w punkcie $x_0 (x_0 > 1$ lub $x_0 < -1)$ wartość G_0', wielomianu najlepszego przybliżenia funkcji $f(x) \equiv 0$ w przedziale $[-1, 1]$. Rozwiązanie tego zagadnienia jest zawarte w wielu pracach, np. [8], [9]; brzmi ono następująco: Wielomian

$$F(x) = \frac{G_0'}{P_{2n}(x_0)} P_{2n}(x) = \frac{h^2}{2} P_{2n}(x),$$

gdzie $P_{2n}(x) = \mathrm{ch}[2n(\mathrm{Arch}\, x)]$ jest wielomianem Czebyszewa I rodzaju stopnia $2n$, przyjmuje w przedziale $[-1, 1]$ najmniejszą wartość $\max|F(x)| = \frac{h^2}{2}$ ze wszystkich wielomianów stopnia $2n$, wykazujących w punkcie x_0 wartość G_0'. Wielomian $F(x)$ o danych właściwościach jest jedyny.

Jeżeli postawić warunek $G'(x) \equiv F(x)$ i wprowadzić zmienną $s = \frac{\nu}{2}$ zamiast $z = x + jy$, to na podstawie (22) można twierdzić, iż funkcja strat

$$L(s) = 1 + \frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{2} P_{2n}(\mu_0 \mathrm{ch}^2 s + \eta_0) = 1 + h^2 \mathrm{ch}^2[n \mathrm{Arch}(\mu_0 \mathrm{ch}^2 s + \eta_0)], \tag{23}$$

w której parametry n, μ_0 oraz η_0 dobiera się tak, aby warunki a. i b. problemu B były spełnione przy najmniejszej całkowitej długości toru dopasowującego, stanowi rozwiązanie problemu B w klasie torów typu N_0 o charakterystyce równofalistej.

Z kolei należy zbadać, czy długość toru dopasowującego opisanego przez funkcję strat (23) jest najmniejsza z możliwych w grupie torów typu N_0 zgodnie ze sformułowaniem problemu B. Postawione zagadnienie daje się sformułować następująco.

Czy istnieje tor typu N_0 o następujących właściwościach: a. $h_2^2 \leqslant h_1^2$; b. $l_{c2} < l_{c1}$; c. $L_1(0) = L_2(0)$, (gdzie indeks 1 wskazuje na parametry toru o funkcji strat według wzoru (23) z uwzględnieniem uwag odnośnie do parametrów μ_0, η_0 oraz n, a indeks 2 — na parametry toru poszukiwanego; $h_i^2 = \max_{(\theta_d)_i \leqslant \theta_i \leqslant (\theta_g)_i} L_i(j\theta_i)$, $i = 1, 2$)?

Analiza tego zagadnienia przebiega podobnie jak w przypadku toru filtrującego przy badaniu problemu A (patrz dodatek 2). W wyniku dochodzi się do wniosku, że tor dopasowujący o funkcji strat (23) (z uwzględnieniem uwagi o sposobie doboru n, μ_0 oraz η_0) spełnia warunki problemu B przy najmniejszej długości całkowitej toru w grupie torów typu N_0, czyli jest torem optymalnym w tej grupie.

Z kolei, rozumując analogicznie jak w pkt. 4.2, dochodzi się do wniosku, że omawiane rozwiązanie problemu B jest optymalne dla wszystkich torów typu N, to znaczy, że określa tor dopasowujący o najmniejszej długości całkowitej wśród torów spełniających warunki I lub pozwala uzyskać lepszą jakość transmisji przy tej samej długości toru; charakterystyka optymalnego toru dopasowującego jest równofalista.

Ze wzoru (23) widać, że tor dopasowujący, będący rozwiązaniem problemu B, jest antymetryczny, przy czym wszystkie zera jego funkcji filtracji leżą wyłącznie na osi urojonej $Im\, s$. Dodatkowe uwagi o obliczaniu parametrów funkcji $L(s)$ według (23) są podane w rozdz. 6.

6. UWAGI O OBLICZANIU PARAMETRÓW OKREŚLAJĄCYCH FUNKCJE STRAT WEDŁUG (21) i (23)

Podstawowe parametry określające funkcję strat optymalnego toru dopasowującego [wzór (23)] oblicza się na podstawie następującego schematu postępowania.

Za punkt wyjścia służy równanie

$$\operatorname{th}\frac{1}{2n}\left(\operatorname{Arch}\frac{\sqrt{G_0}}{h}\right)=\frac{\sin 2\pi\dfrac{l}{\lambda_d}}{\sin 2\pi\dfrac{l}{\lambda_g}}; \qquad G_0=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}-\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right)^2, \tag{24}$$

gdzie h — na podstawie warunku a. problemu B, $2n$ — liczba odcinków jednorodnych w torze, l — długość odcinka jednorodnego, λ_d, λ_g — długości fali w linii odpowiadające częstotliwościom f_d, f_g.

Z równania (24) wyznacza się taką liczbę $2n$, dla której zachodzi minimum wyrażenia $l_c = 2nl$. W ten sposób będzie znana liczba odcinków jednorodnych $2n$ oraz długość odcinka l. Z kolei ze wzoru

$$\mu_0=\frac{2}{\cos^2\theta_d-\cos^2\theta_g}; \qquad \eta_0=-\frac{\cos^2\theta_d+\cos^2\theta_g}{\cos^2\theta_d-\cos^2\theta_g}, \qquad \theta=2\pi\frac{l}{\lambda} \tag{25}$$

oblicza się parametry skali μ_0, η_0 i na tym kończy się zadanie określenia funkcji strat toru dopasowującego odpowiadającego warunkom problemu B. Dalsze postępowanie przebiega zgodnie z uwagami o syntezie torów typu N_0 ujętymi w rozdz. 3.

Synteza optymalnych torów filtrujących jest zadaniem bardziej skomplikowanym. Jeżeli wymagania formułuje się tak, iż zachodzi

$$\frac{H^2-\dfrac{h^2}{2}}{G_0-\dfrac{h^2}{2}}\leqslant\frac{\operatorname{ch}[2n(\operatorname{Arch}x_i')]}{\operatorname{ch}[2n(\operatorname{Arch}x_0)]}, \qquad i=1,2,$$

$$x_0=\mu_0+\eta_0, \qquad x_1'=\mu_0\cos^2\theta_d'+\eta_0, \qquad x_2'=\mu_0\cos^2\theta_g'+\eta_0,$$

gdzie parametry H i h są określone przez warunki a., b. problemu A, to synteza toru filtrującego pokrywa się z syntezą toru dopasowującego. W tych warunkach postępuje się zgodnie z uwagami podanymi na wstępie niniejszego rozdziału.

W innych przypadkach zachodzi konieczność wyznaczania funkcji strat według (21) na podstawie pracochłonnych i żmudnych obliczeń (nawet dla małych wartości $2n$). Np. jeżeli zachodzi przypadek $G'(x_0) = -h^2/2$, rozpatrzony w dodatku 1, to zgodnie ze wzorami (1D.3), (1D.4) należy wyznaczyć wielkości k (lub K), $2n$, ε oraz l z następującego układu równań:

$$1+\frac{h^2}{2}+\varepsilon P_{2n}(\mu_0+\eta_0, 2, k)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}+\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right)^2,$$

$$1+\frac{h^2}{2}+\varepsilon P_{2n}(x_i', 2, k)\geqslant 1+H^2, \quad i=1,2,$$

$$|\varepsilon L|=\frac{h^2}{2}$$

z uwzględnieniem zależności (25) przy warunku dodatkowym $l_c=\min(2nl)$. Po wyznaczeniu parametrów charakteryzujących funkcję strat według (1D.4) należy obliczyć jej współczynniki jako wielomianu względem $\mathrm{ch}^2 s$. W tym celu postępuje się następująco:

Na podstawie związków między sinusem eliptycznym Jacobiego $\mathrm{sn}\,u$ a funkcjami theta $H(u)=\vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\right)$, $\theta(u)=\vartheta_0\left(\frac{u}{2K}\right)$ [4], [21] dla danego modułu funkcji eliptycznej k otrzymuje się następującą tożsamość:

$$L(s)-1=b_{4n}\mathrm{ch}^{4n}s+b_{4n-2}\mathrm{ch}^{4n-2}s+\ldots+b_0=$$

$$=b_{4n}\left(\frac{1}{\mu_0}\cdot\frac{\mathrm{sn}^2u+\mathrm{sn}^2\frac{K}{n}}{\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\frac{K}{n}}-\frac{\eta_0}{\mu_0}\right)^{2n}+b_{4n-2}\left(\frac{1}{\mu_0}\cdot\frac{\mathrm{sn}^2u+\mathrm{sn}^2\frac{K}{n}}{\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\frac{K}{n}}-\frac{\eta_0}{\mu_0}\right)^{2n-1}+$$

$$+\ldots+b_0\equiv\frac{h^2}{2}+\varepsilon\frac{L}{2}\left[\frac{\theta(0)}{\sqrt{k}\,\theta\left(\frac{K}{n}\right)\theta(u)}\right]^{4n}\frac{\left[H\left(u+\frac{K}{n}\right)\right]^{4n}+\left[H\left(u-\frac{K}{n}\right)\right]^{4n}}{\left(\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\frac{K}{n}\right)^{2n}}.$$

Stąd

$$b_{4n}\left[\frac{1}{\mu_0}\left(\mathrm{sn}^2u+\mathrm{sn}^2\frac{K}{n}\right)-\frac{\eta_0}{\mu_0}\left(\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\frac{K}{n}\right)\right]^{2n}+$$

$$+b_{4n-2}\left(\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\frac{K}{n}\right)\left[\frac{1}{\mu_0}\left(\mathrm{sn}^2u+\mathrm{sn}^2\frac{K}{n}\right)-\frac{\eta_0}{\mu_0}\left(\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\frac{K}{n}\right)\right]^{2n-1}+\ldots$$

$$+b_0\left(\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\frac{K}{n}\right)^{2n}\equiv\frac{h^2}{2}\left(\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\frac{K}{n}\right)^{2n}+$$

$$+\varepsilon\frac{L}{2}\left[\frac{\theta(0)}{\sqrt{k}\,\theta\left(\frac{K}{n}\right)\theta(u)}\right]^{4n}\left\{\left[H\left(u+\frac{K}{n}\right)\right]^{4n}+\left[H\left(u-\frac{K}{n}\right)\right]^{4n}\right\}. \tag{26}$$

Jak wynika z zależności (26), poszukiwane współczynniki b_{2i} funkcji strat można wyznaczyć po kolei, różniczkując postać (26) względem u i podstawiając $u=\frac{K}{n}$. Np. współczynnik b_{4n} uzyskuje się wprost z (26) po podstawieniu $u=\frac{K}{n}$, współczynnik b_{4n-2} można obliczyć po jednokrotnym zróżniczkowaniu postaci (26), współczynnik b_{4n-4} — po dwukrotnym itd.

Trudności obliczeniowe związane z korzystaniem z postaci (21) można częściowo zmniejszyć, jeżeli w miejsce rozwiązania ścisłego wprowadzić przybliżone. Np. jeżeli wiadomo, że projektowany układ filtrujący ma być wąskopasmowy, to wtedy jego funkcja strat o przebiegu równofalistym da się w pierwszym przybliżeniu przedstawić następująco:

$$L(s) \cong 1+\varepsilon(\mathrm{ch}^2 s-\beta_1)(\mathrm{ch}^2 s-\beta_2)\mathrm{ch}^2[(n-1)\mathrm{Arch}(\mu_0\mathrm{ch}^2 s+\eta_0)]. \tag{27}$$

Postać (27) funkcji strat jest fizycznie realizowalna, co łatwo sprawdzić w oparciu o Twierdzenie 1 (rozdz. 3); określa ona tor typu N_0 złożony z $2n$ odcinków jednorodnych, którego charakterystyka w przedziale $-1 \leqslant \mu_0\mathrm{ch}^2 j\theta+\eta_0 \leqslant 1$ ma przebieg falisty. W przypadku układów wąskopasmowych przebieg ten jest dostatecznie bliski do równofalistego. Wartości parametrów występujących we wzorze (27) są obliczane w oparciu o warunki III, przy czym sposób podejścia jest zbliżony do omówionego wyżej.

Przytoczone uwagi dotyczą optymalnych torów filtrujących i dopasowujących, tzn. takich, które czynią zadość warunkom problemu A lub B. Przy omawianiu tych zagadnień stwierdzono, że nie wyklucza się istnienia kilku torów o charakterystyce równofalistej, spełniających identyczne warunki a. i b. odpowiedniego problemu, a mających różne długości całkowite l_c. Do takich torów należą m.in. ćwierćfalowe tory typu N_0 o charakterystyce Czebyszewa. Jak wiadomo [6], [20,] funkcja strat ćwierćfalowego toru dopasowującego o charakterystyce równofalistej ma postać

$$L(s) = 1+h^2\mathrm{ch}^2\left(n\mathrm{Arch}\frac{\mathrm{ch}\, s}{S}\right),$$

gdzie n — liczba odcinków jednorodnych, $0 < S < 1$ — współczynnik skali. Metody syntezy tego typu torów są szczegółowo omówione w literaturze, np. w [6], [11], [20], [27].

W przypadku syntezy ćwierćfalowych torów filtrujących o charakterystyce Czebyszewa przyjmuje się funkcję strat w postaci

$$L(s) = 1+\frac{h^2}{2}+\varepsilon P_n\left(2\frac{\mathrm{ch}^2 s}{S^2}-1, 1, k\right) = 1+\frac{h^2}{2}+$$

$$+\varepsilon\frac{L}{2}\left\{\left[\frac{H\left(u-\frac{K}{n}\right)}{H\left(u+\frac{K}{n}\right)}\right]^n+\left[\frac{H\left(u+\frac{K}{n}\right)}{H\left(u-\frac{K}{n}\right)}\right]^n\right\}; \qquad \frac{\mathrm{ch}^2 s}{S^2} = \frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 u-\mathrm{sn}^2\frac{K}{n}}.$$

Sens poszczególnych symboli jest podany w dodatku 1. Parametry w tym wzorze muszą być tak dobrane, aby były spełnione warunki a. i b. problemu A. Słuszność tej postaci uzasadnia się w sposób analogiczny do przedstawionego w dodatku 1; obok tego pomocne mogą być uwagi przytoczone w [1]. Warto nadmienić, że wielomian n-tego stopnia $P_n(x, 1, k)$ należy do grupy uogólnionych wielomianów Czebyszewa (zob. [2]); posiada on n—1 zer w przedziale $[-1, 1]$ oraz jedno zero dla $x > 1$; współczynnik przy x^n jest równy jedności.

7. UWAGI O SYNTEZIE TORÓW NIEJEDNORODNYCH O CHARAKTERYSTYCE CZEBYSZEWA W PRZYPADKU WYSTĘPOWANIA STRAT W ODCINKACH JEDNORODNYCH

Dotychczasowe rozważania dotyczyły torów niejednorodnych złożonych z odcinków jednorodnych bez strat. Taka idealizacja problemu jest uzasadniona w wielu przypadkach.

Jednakże występują sytuacje wymagające bardziej dokładnego uwzględnienia stanu faktycznego. W tym przypadku mogą być przydatne poniższe uwagi dotyczące syntezy torów typu N_1 o charakterystyce Czebyszewa.

Zagadnienie syntezy sprowadza się w danym przypadku do tego, aby w oparciu o zadany kwadrat modułu funkcji transmisji na osi urojonej $Im\,s$

$$|t_{11}(s)|^2_{s=j\theta} = W[1+H(s)]_{s=j\theta} \tag{10}$$

oraz o warunki II lub IV z uwzględnieniem wymagania minimalnej długości całkowitej toru, wyznaczyć elementy macierzy $T(s)$ według (9) i następnie obliczyć opór falowy i długość poszczególnych odcinków jednorodnych toru typu N_1. Warunki fizycznej realizacji tak sformułowanego problemu są podane w Twierdzeniu 2, rozdz. 3.

7.1. Synteza toru dopasowującego typu N_1 spełniającego warunki II

Jak wynika z Twierdzenia 2 oraz z rozważań rozdz. 5, fizycznie realizowalna postać kwadratu modułu funkcji transmisji na osi $Im\,s$ w przypadku torów dopasowujących N_1 o charakterystyce Czebyszewa jest następująca:

$$|t_{11}(j\theta)|^2 = W\{1+h^2\mathrm{ch}^2[n\,\mathrm{Arch}(\mu_0\mathrm{ch}^2 s+\eta_0)]\}_{s=j\theta}, \tag{28}$$

przy czym parametry w tym związku muszą być dobrane z uwzględnieniem wartości tłumienności falowej σ_0 odcinka jednorodnego, a $W > 1$.

Parametry we wzorze (28) oblicza się za pomocą metody kolejnych przybliżeń. Na początku przyjmuje się założenie o braku strat w odcinkach jednorodnych, co jest równoznaczne z warunkiem $W = 1$; postępowanie w tym przypadku przebiega identycznie jak przedstawiono w rozdz. 6, wzory (24), (25), z tą różnicą, że parametr h oblicza się za pomocą wyrażenia

$$h = \sqrt{e^{2\Delta A_{s1}}-1}, \tag{29}$$

gdzie ΔA_{s1} — według zestawu warunków II, rozdz. 2.

W ten sposób znane będą wstępne wartości parametrów n, l, μ_0 oraz η_0, a także $\sigma_0 = \beta_0 l$, β_0 — według zestawu warunków II. To pozwala przejść do obliczania współczynnika W, do czego pomocna jest funkcja strat $L(t) \equiv K'(t)$, $t = s+\sigma_0$, gdzie funkcja $K'(t)$ ma postać określoną przez wyrażenie (13). Można z łatwością przekonać się, że funkcja $L(t)$ jest funkcją strat pewnego toru typu N_0, którego macierz $T(t)$ obejmuje te same macierze typu M, co i macierz $T(s)$ omawianego toru ze stratami [15]. Na tej podstawie

$$L(t=0) = \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}+\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right)\right]^2,$$

a jednocześnie

$$L(t=0) = A\prod_{\nu=1}^{2n}\mathrm{sh}^2(s_\nu+\sigma_0), \qquad Re\,s_\nu < 0,$$

czyli

$$A = \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}+\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right)\prod_{\nu=1}^{2n}\frac{1}{\mathrm{sh}(s_\nu+\sigma_0)}\right]^2, \qquad Re\,s_\nu < 0. \tag{30}$$

Stąd po uwzględnieniu wzoru (28) otrzymuje się

$$W=\left[\frac{1}{h\mu_0^n 2^n}\left(\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}+\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right)\prod_{\nu=1}^{2n}\frac{1}{\operatorname{sh}(s_\nu+\sigma_0)}\right]^2, \quad Re s_\nu<0. \tag{31}$$

Jak wynika ze wzoru (28), minimalna wartość tłumienności skutecznej w pasmie przepustowym użytkowym wynosi

$$A_{smin}=\frac{1}{2}\ln W \tag{32}$$

Ponieważ wskazane jest, aby tłumienność ta była możliwie mała, więc należy zbadać, jak się zmienia parametr W według (31) w zależności od liczby odcinków jednorodnych. Ostatecznie do realizacji przyjmuje się taką liczbę $2n$, dla której współczynnik W według (31) przyjmuje wartość możliwie najmniejszą. W ten sposób wszystkie parametry występujące we wzorze (28) zostały wyznaczone; należy jeszcze tylko sprawdzić, czy jest spełniony warunek 4 Twierdzenia 2.

Dalsze postępowanie zmierza do wyznaczenia elementów macierzy $T(t)$ toru opisanego przez funkcję strat $L(t)$; służą do tego wzory (14), (15) oraz odpowiednie wskazówki zawarte w rozdz. 3. W oparciu o elementy macierzy $T(t)$ przeprowadza się syntezę toru typu N_0, który charakteryzuje się identycznymi skokami oporu falowego co tor N_1 o kwadracie modułu funkcji transmisji na osi urojonej $Im\, s$ według (28). Do tego celu wykorzystuje się metodę macierzy transmisyjnej lub inne równoważne, przedstawione w rozdz. 3. Na tym proces syntezy toru dopasowującego typu N_1 o charakterystyce równomiernie falistej jest zakończony. Trzeba zauważyć, że wynik syntezy nie jest jednoznaczny, to znaczy, że istnieje kilka różnych torów typu N_1 spełniających warunek (28) przy ustalonych parametrach h, μ_0, η_0, n oraz W.

W sposób podobny do przedstawionego realizuje się także syntezę ćwierćfalowych torów dopasowujących N_1 o charakterystyce równofalistej.

7.2. Synteza toru filtrującego typu N_1 spełniającego warunki IV

W przypadku syntezy torów filtrujących typu N_1 o charakterystyce Czebyszewa otrzymuje się z rozważań rozdz. 4 [wzór (21)] przy uwzględnieniu Twierdzenia 2 następującą fizycznie realizowalną postać funkcji $|t_{11}(j\theta)|^2$:

$$|t_{11}(j\theta)|^2=W\left[1+\frac{h^2}{2}+W_{2n}(\mu_0\operatorname{ch}^2 s+\eta_0)\right]_{s=j\theta}. \tag{33}$$

Jeżeli poprzestać na rozwiązaniu przybliżonym, to uwzględniając (27)

$$|t_{11}(j\theta)|^2\cong W\{1+\varepsilon(\operatorname{ch}^2 s-\beta_1)(\operatorname{ch}^2 s-\beta_2)\operatorname{ch}^2[(n-1)\operatorname{Arch}(\mu_0\operatorname{ch}^2 s+\eta_0)]\}_{s=j\theta}. \tag{34}$$

Obliczenia przeprowadza się w oparciu o zestaw warunków IV z uwzględnieniem (29); parametry we wzorach (33), (34) tak się dobiera, aby były spełnione założenia Twierdzenia 2. W tym celu na początku przyjmuje się założenie $W=1$ i wyznacza się — zgodnie z wytycznymi rozdz. 4 — wielomian $W_{2n}(\mu_0\operatorname{ch}^2 s+\eta_0)$. Stąd znane będą wstępne wartości parametrów n, l, μ_0 oraz η_0, a także $\sigma_0=\beta_0 l$. Następnie w oparciu o metodę kolejnych przybliżeń wyznacza się współczynnik W.

Rozumując jak w pkcie 7.1 wprowadza się do analizy funkcję strat $L(t) \equiv K'(t)$, gdzie $K'(t)$ jest określona wzorem (13). Jeżeli obok tego uwzględnić warunek minimalnej tłumienności skutecznej w pasmie przepustowym, który jest wymieniony w zestawie warunków IV, to uzyskuje się następujące zależności, określające parametr A [mnożnik funkcji $L(t)$] i w konsekwencji współczynnik W:

$$A = \max_{0 \leqslant \theta \leqslant \pi} \prod_{\nu=1}^{2n} [\mathrm{ch}^2 j\theta - \mathrm{ch}^2(s_\nu + \sigma_0)]^{-1}, \quad Re s_\nu < 0,$$
$$W = \frac{A}{w_{2n}\mu_0^{2n}}, \tag{35}$$

gdzie w_{2n} — współczynnik przy zmiennej x^n w wielomianie $W_{2n}(x)$.

Po ustaleniu wartości parametrów we wzorach (33) lub (34) należy sprawdzić, czy został spełniony warunek 4 Twierdzenia 2. Z kolei można dokonać analizy zależności mnożnika W według (35) od liczby odcinków jednorodnych $2n$, aby przekonać się, czy nie dałoby się uzyskać mniejszej wartości A_{smin} według (32) dla tej samej wartości ΔA_{s1} i ΔA_{s2}. W wyniku realizacji powyższych wskazówek otrzymuje się wartości wszystkich parametrów niezbędnych do jednoznacznego określenia funkcji (33), (34). Warto także nadmienić, że pewne informacje pomocnicze można znaleźć w [23].

Dalsze postępowanie zmierza do wyznaczenia elementów macierzy transmisyjnej $T(t)$ toru typu N_0 opisanego przez funkcję strat $L(t)$ o postaci (13). Służą do tego wzory (14), (15) oraz odpowiednie wskazówki zawarte w rozdz. 3. Po wyznaczeniu elementów macierzy $T(t)$ przystępuje się do obliczania parametrów odcinków jednorodnych za pomocą jednej ze znanych metod syntezy toru typu N_0. Ze względu na niejednoznaczność doboru funkcji filtracji $t_{21}(t)$ w wyniku syntezy otrzymuje się jedynie jedno z możliwych rozwiązań; w związku z tym warto sprawdzić, czy obliczenia za pomocą innej funkcji filtracji $t_{21}(t)$ nie dałyby lepszych rezultatów (z punktu widzenia technologiczno-konstrukcyjnego).

W sposób podobny do przedstawionego realizuje się także syntezę ćwierćfalowych torów filtrujących N_1 o charakterystyce równofalistej.

8. UWAGI KOŃCOWE

W niniejszej pracy przedstawiono zarys postępowania, mającego na celu ustalenie fizycznie realizowalnych funkcji strat $L(s)$ [wzór (11)] bądź kwadratu modułu funkcji transmisji $|t_{11}(i\theta)|^2$ [wzór (10)] dla syntezy torów niejednorodnych złożonych z odcinków jednorodnych o charakterystyce Czebyszewa. Całość rozważań jest oparta na pojęciu unormowanej macierzy transmisyjnej toru T [wzory (1), (8), (9)] z uwzględnieniem najnowszych wyników w postaci Twierdzeń 1 i 2 o warunkach fizycznej realizacji funkcji $L(s)$ torów typu N_0 i funkcji $|t_{11}(j\theta)|^2$ torów typu N_1.

Po omówieniu warunków pracy torów oraz ogólnego schematu ich syntezy (rozdział 3) podano ścisłe uzasadnienie postaci funkcji strat torów filtrujących N_0 spełniających warunki III (problem A) oraz torów dopasowujących N_0 spełniających warunki I (problem B). Analiza dokonana w rozdziale 4 wykazała, że tor filtrujący typu N_0 o funkcji strat według (21) jest optymalny wśród torów o właściwościach transmisyjnych według warunków a. i b. problemu A. Analogiczne rozważania odnoszące się do torów dopasowujących N_0 wyka-

zały, że tor o funkcji strat według (23) jest optymalny wśród torów spełniających warunki a. i b. problemu B (rozdz. 5).

Rezultaty rozdziałów 4 i 5 łącznie z Twierdzeniem 2 umożliwiły wyznaczenie fizycznie realizowalnej funkcji $|t_{11}(j\theta)|^2$ dla torów typu N_1 o charakterystyce Czebyszewa [rozdział 7, wzory (28), (33), (34)]. Przytoczone uwagi nakreślają kierunek postępowania przy syntezie omawianych torów, przy czym za punkt wyjścia służą zestawy warunków II i IV. W tym miejscu należy zauważyć, że synteza torów typu N_1 wymaga dużego wysiłku obliczeniowego i dlatego wydaje się celowe, aby realizować ją w oparciu o odpowiednie programy dla komputerów.

Na zakończenie warto zauważyć, że przedstawione rezultaty mogą być także pomocne przy syntezie torów niejednorodnych o innych charakterystykach, jak np. o charakterystyce Butterwortha.

Autor wyraża podziękowanie prof. drowi Józefowi Lenkowskiemu za zapoznanie się z rękopisem pracy i poczynienie szeregu cennych uwag.

Instytut Technologii Elektronowej PAN
Zakład Piezotroniki

Dodatek 1

UWAGI O DOBORZE WIELOMIANU $W_{2n}(z)$

W pkcie 4.1 został sformułowany następujący problem:

Spośród wszystkich wielomianów algebraicznych stopnia parzystego o współczynnikach rzeczywistych spełniających na osi $Re\, z = x$ warunki:

1. $|G'(x)| \leqslant \frac{h^2}{2}$ dla $-1 \leqslant x \leqslant 1$,

2. $G'(x) \geqslant H^2 - \frac{h^2}{2}$ dla $x_2'' \leqslant x \leqslant x_2' < -1$ oraz dla $1 < x_1' \leqslant x \leqslant x_1''$,

3. $G'(x_0) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} - \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right)^2 - \frac{h^2}{2} = G_0'$,

4. $G'(x) \geqslant -\frac{h^2}{2}$ $x_2'' \leqslant x \leqslant x_0$

wyznaczyć taki, który by gwarantował — po odwrotnym przetransformowaniu funkcji $G'(x)$ na $Q(v)$ i wprowadzeniu zmiennej $s = \frac{v}{2}$ — minimum długości całkowitej toru: $l_c = \min_{\mu_0, \eta_0} (2nl)$, μ_0, η_0 — według wzoru (19).

Rozwiązanie tego problemu składa się z dwu części. W części pierwszej określa się cechy szczególne poszukiwanej funkcji, na podstawie których można wyodrębnić takie wielomiany algebraiczne stopnia $2n$, które najlepiej spełniają wymienione warunki 1—4 (to znaczy: wykazują najmniejszy moduł ekstremalnej wartości w przedziale $[-1, 1]$ przy jednoczesnym spełnieniu warunków 2—4) spośród wszystkich wielomianów tego samego stopnia. W części drugiej dokonuje się obliczenia parametrów poszukiwanego wielomianu, tzn. wielomianu $W_{2n}(z)$, oraz funkcji strat toru filtrującego.

Przystępując do realizacji części pierwszej wygodnie jest zapisać wielomiany poszukiwanej grupy w postaci

$$G'(x) = P(x) \prod_{k=0}^{2} (x - x_k) + \sum_{i=0}^{2} G'(x_i) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{2} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \tag{1D.1}$$

$x_1 = x_1'$ lub $x_1 = x_1''$; $x_2 = x_2'$ lub $x_2 = x_2''$ (w zależności od konkretnej sytuacji),

$$G'(x_i) \geqslant H^2 - \frac{h^2}{2}, \quad i = 1, 2;$$

gdzie $P(x)$ — wielomian stopnia $2n$—3. Należy zatem zminimalizować wyrażenie

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |G'(x)| = \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \left| \prod_{k=0}^{2} (x - x_k) \right| \left| \sum_{i=0}^{2} \frac{G(x_i)}{x - x_i} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{2} (x_i - x_k)^{-1} + P(x) \right|. \tag{1D.2}$$

Z powyższego widać, że należy znaleźć wielomian najlepszego przybliżenia stopnia $2n$—3 funkcji

$$\sum_{i=0}^{2} \frac{G(x_i)}{x - x_i} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{2} (x_i - x_k)^{-1} \quad \text{z wagą} \quad q(x) = \left| \prod_{k=0}^{2} (x - x_k) \right|.$$

Zgodnie z [8], [9] warunek konieczny i wystarczający na to, aby wielomian $P(z)$ stopnia nie większego od n był wielomianem najlepszego przybliżenia funkcji $f(x)$ z wagą $q(x)$ w przedziale $[-1, 1]$ brzmi:

W przedziale $[-1, 1]$ istnieją co najmniej $n+2$ punkty $x_1^0 < x_2^0 \ldots < x_{n+2}^0$ takie, że w nich funkcja

$$R(x) \equiv q(x)|f(x) - P(x)|$$

przyjmuje ekstremalne wartości równe na przemian $+L$ i $-L$, gdzie

$$L = \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} q(x)|f(x) - P(x)|.$$

Jak widać, problem poszukiwania wielomianów $G'(x)$, wśród których znajduje się wielomian $W_{2n}(x)$, odpowiada warunkom przytoczonego twierdzenia, a zatem wielomian $G'(x)$ powinien przyjmować na przemian w co najmniej $2n$—1 punktach przedziału $[-1, 1]$ wartość ekstremalną L i $-L$.

Reasumując: Poszukiwana grupa wielomianów algebraicznych stopnia parzystego o współczynnikach rzeczywistych charakteryzuje się tym, że każdy z jej wielomianów przyjmuje:

a. w przedziale $[-1, 1]$ na przemian w co najmniej $2n-1$ punktach wartość ekstremalną $\frac{h^2}{2}$ i $-\frac{h^2}{2}$, gdzie $2n$ — stopień wielomianu;

b. wartość G_0' w punkcie x_0;

c. wartości nie mniejsze od $H^2 - \frac{h^2}{2}$ w przedziale $[x_1', x_1'']$ oraz $[x_2'', x_2']$;

d. maksymalną wartość z możliwych w punkcie x_1' (lub x_2').

Powyższe właściwości są całkowicie wystarczające na to, aby dla ustalonych wartości parametrów skali μ_0, η_0 wyznaczyć w sposób jednoznaczny taki wielomian $G'(x)$, który posiada najniższy stopień $2n$ spośród wszystkich wielomianów stopnia parzystego, spełniających warunki 1—4 podanego na wstępie problemu; w tym celu można wykorzystać algorytmy opisane w [8], [28].

Jak już w rozdz. 4 wspomniano, postać analityczna poszukiwanych wielomianów w przypadku ogólnym nie jest znana. Jednakże w przypadkach szczególnych udaje się podać rozwiązanie w postaci zwartej. Tak jest np. wtedy, gdy

$$\left(H^2 - \frac{h^2}{2}\right) / G_0' \leqslant \operatorname{ch}(2n \operatorname{Arch} x_i') / \operatorname{ch}(2n \operatorname{Arch} x_0), \quad i = 1, 2,$$

bowiem w tym przypadku postawiony problem pokrywa się z problemem badanym w rozdz. 5, a jego rozwiązanie jest uwidocznione w postaci wzoru (23). Warto także przytoczyć inny przykład rozwiązania analitycznego. Mianowicie, jeżeli $G'(x_0) = -\frac{h^2}{2}$, to poszukiwana grupa wielomianów obejmuje jeden typ tzw. uogólnionych wielomianów Czebyszewa, dokładnie zbadanych przez Achiezera w [2]. Tam wykazano, że wielomian $P_n(x, 2, k)$ stopnia n według wzoru

$$P_n(x,2,k)=\frac{L}{2}\left\{\left[\frac{H\left(u-\frac{2K}{n}\right)}{H\left(u+\frac{2K}{n}\right)}\right]^n+\left[\frac{H\left(u+\frac{2K}{n}\right)}{H\left(u-\frac{2K}{n}\right)}\right]^n\right\},$$

$$x=\frac{\mathrm{sn}^2u+\mathrm{sn}^2\frac{2K}{n}}{\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\frac{2K}{n}},\qquad L=\frac{1}{2^{n-1}}\left[\frac{\sqrt{k}\,\theta_1^2(0)}{H_1\left(\frac{2K}{n}\right)\theta_1\left(\frac{2K}{n}\right)}\right]^{2n} \tag{1D.3}$$

przyjmuje w przedziale $[-1, 1]$ wartość L ze znakami naprzemiennymi dokładnie $n-1$ razy. Oznaczenia występujące w podanych wzorach mają następujący sens:

k — moduł funkcji eliptycznej,

$\mathrm{sn}\,u$ — sinus eliptyczny Jacobiego o module k,

K — pełna całka eliptyczna pierwszego rodzaju odpowiadająca modułowi k [4], [8], [21];

n — stopień wielomianu,

L — moduł ekstremalnej wartości wielomianu $P_n(x, 2, k)$ w przedziale $[-1, 1]$;

$H(u)=\vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\right)$, $H_1(u)=\vartheta_2\left(\frac{u}{2K}\right)$, $\theta_1(u)=\vartheta_3\left(\frac{u}{2K}\right)$ — funkcje theta Jacobiego — patrz [4], [21]; np.

$$H(u)=2\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi u}{2K}-2\sqrt[4]{q^9}\sin\frac{3\pi u}{2K}+\ldots;\qquad q=e^{-\pi\frac{K'}{K}}$$

Uogólniony wielomian Czebyszewa charakteryzuje się tym, że wykazuje przebieg równofalisty w dwu przedziałach, z których jeden jest $[-1, 1]$, o jednakowej wartości L; współczynnik przy x^n jest równy jedności. Zapis przy użyciu oznaczenia $P_n(x, 2, k)$ wskazuje na stopień wielomianu (n), liczbę jego zer położonych na prawo od przedziału $[-1, 1]$ (w danym przypadku dwa zera) oraz na moduł k funkcji eliptycznej występującej w obliczeniach danego wielomianu.

W ten sposób zostało wykazane, że w przypadku $G'(x_0)=-\frac{h^2}{2}$ poszukiwany wielomian $W_{2n}(z)$, $z=x+jy$, powinien być tak dobrany, aby zachodziła równość:

$$W_{2n}(z)=\varepsilon P_{2n}(z,2,k),$$

gdzie ε — współczynnik rzeczywisty. Stąd zgodnie z (21)

$$L(s)=1+\frac{h^2}{2}+\varepsilon P_{2n}(\mu_0\,\mathrm{ch}^2 s+\eta_0,2,k), \tag{1D.4}$$

gdzie parametry funkcji P_{2n} są dobierane tak, aby uzyskać $l_c=\min(2nl)$. Należy zauważyć, że w danym przypadku $L(0)=1$, a tym samym wszystkie zera funkcji filtracji toru filtrującego leżą na osi Ims, a opory obciążenia na obu końcach toru są jednakowe.

Wzory (1D.3) i (1D.4) stanowią efektywne zakończenie części pierwszej. W ramach części drugiej oblicza się konkretne wartości parametrów n, k, ε, μ_0 oraz η_0, dla których występuje minimum długości całkowitej toru filtrującego zgodnie ze sformułowaniem problemu A.

Dodatek 2

OPTYMALNY CHARAKTER TORU O FUNKCJI STRAT WEDŁUG (21) W GRUPIE TORÓW N_0

Badany problem formułuje się następująco:

Czy istnieje tor typu N_0 (tor 2) o lepszych właściwościach transmisyjnych niż tor 1 o funkcji strat według (21), czyli spełniający warunki:

a. $h_2^2 \leqslant h_1^2$, $h_i^2 = \max\limits_{(\theta_d)_i \leqslant \theta_i \leqslant (\theta_g)_i} L_i(j\theta_i)$, $i = 1, 2$;

b. $L_1(j\theta_i) \leqslant L_2(j\theta_i)$ dla $(\theta_d'')_i \leqslant \theta_i \leqslant (\theta_d')_i$, $(\theta_g')_i \geqslant \theta_i \leqslant (\theta_g'')_i$,

c. $L_1(0) = L_2(0)$;

d. $l_{c2} < l_{c1}$.

Otóż zostanie wykazane, że tor 2 o podanych wyżej właściwościach nie istnieje, a zatem tor według (21) jest optymalny w klasie torów typu N_0, to znaczy, że spełnia warunki problemu A przy najmniejszej długości całkowitej toru (wśród torów rozpatrywanej klasy).

Niech dane będą dwa tory typu N_0, które zostały wyznaczone na podstawie identycznych warunków a., b. problemu A. Tor 1 jest złożony z $2n_1$ odcinków jednorodnych, a jego długość całkowita wynosi l_{c1}. Tor 2 jest złożony z $2n_2$ odcinków jednorodnych, a jego długość całkowita wynosi l_{c2}. Zakłada się, że $l_{c2} < l_{c1}$ oraz że funkcja strat toru 1 czyni zadość zależności (21), a właściwości transmisyjne toru 2 punktom a. — c. sformułowanego na wstępie problemu; prędkość fazowa jest jednakowa we wszystkich odcinkach jednorodnych obu torów.

Na podstawie znajomości parametrów toru 2 można obliczyć współczynniki skali μ_0, η_0, wzór (19), a następnie wyznaczyć wielomian algebraiczny $G'(z)$ stopnia $2n_2$ oraz punkt $x_0, x_1', x_1'', x_2', x_2''$, podobnie jak to uczyniono w pkt. 4.1. Uzyskane wyniki dają podstawę do rozwiązania następującego zagadnienia.

Spośród wszystkich wielomianów algebraicznych stopnia $2n_2$ o współczynnikach rzeczywistych, spełniających na osi $Re z = x$ warunki:

1. $G'(x) \geqslant H^2 - \dfrac{h^2}{2}$ dla $x_2'' \leqslant x \leqslant x_2' < -1$ oraz $1 < x_1' \leqslant x \leqslant x_1''$,

2. $G'(x_0) = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{\dfrac{R_2}{R_1}} - \sqrt{\dfrac{R_1}{R_2}}\right)^2 - \dfrac{h^2}{2}$,

3. $G'(x) \geqslant -\dfrac{h^2}{2}$ dla $x_2'' \leqslant x \leqslant x_0$

wyznaczyć taki, który minimalizuje wielkość $\max\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |G'(x)|$. Na podstawie literatury wiadomo, że rozwiązanie tego problemu istnieje i że jest ono jedyne, przy czym wielomian ten należy do grupy wielomianów najlepszego przybliżenia w sensie Czebyszewa funkcji $f(x) \equiv 0$ w przedziale $[-1, 1]$ przy występowaniu warunków dodatkowych, ograniczających zachowanie się tego wielomianu poza przedziałem $[-1, 1]$. Jeżeli wielomian ten oznaczyć symbolem $W'_{2n_2}(z)$, to można twierdzić, że funkcja

$$L_3(s_3) = 1 + \frac{h^2}{2} + W'_{2n_2}(\mu_0 \operatorname{ch}^2 s_3 + \eta_0)$$

należy do klasy funkcji fizycznie realizowalnych jako funkcje strat torów typu N_0.

Z poczynionych założeń oraz z właściwości wielomianu $W'_{2n_2}(z)$ wynika, że funkcje $L_1(s_1)$, $L_2(s_2)$ oraz $L_3(s_3)$ spełniają następujące nierówności:

a. $h_3^2 \leqslant h_2^2 \leqslant h_1^2$, $h_i^2 = \max\limits_{(\theta_d)_i \leqslant \theta_i \leqslant (\theta_g)_i} L_i(j\theta_i)$, $i = 1, 2, 3$;

b. $L_1(j\theta_1) \leqslant L_2(j\theta_2) \leqslant L_3(j\theta_3)$ dla $(\theta_d'')_i \leqslant \theta_i \leqslant (\theta_d')_i$, $(\theta_g')_i \leqslant \theta_i \leqslant (\theta_g'')_i$;

c. $L_1(0) = L_2(0) = L_3(0)$;

d. $s_2 = s_3$, $\theta_2 = \theta_3$.

Obok tego wiadomo, że długość l_{c3} toru opisanego przez funkcję strat $L_3(s_3)$ jest równa l_{c2}, a zatem zachodzi $l_{c3} = l_{c2} < l_{c1}$.

Przytoczone wyniki są sprzeczne z poczynionym na wstępie założeniem, że funkcja $L_1(s_1)$ jest funkcją strat według (21), czyli należy do tej samej klasy funkcji co funkcja $L_3(s_3)$, a jej parametry zostały dobrane tak, aby zminimalizować długość całkowitą toru filtrującego, przynależnego do grupy torów typu N_0.

spełniających warunki a., b. problemu A w oparciu o wielomiany najlepszego przybliżenia. Można więc twierdzić, że tor 2 o właściwościach według przyjętych założeń nie istnieje, co było do wykazania.

Uwaga. Konieczność rozróżniania zmiennych za pomocą indeksu „i" wynika z faktu, iż zgodnie z określeniem zmiennej s, wzór (8), jej wartość zależy od długości odcinka jednorodnego. W tej sytuacji w każdym z badanych torów typu N_0 tej samej częstotliwości może odpowiadać inna wartość przesuwności falowej $\theta = 2\pi l/\lambda$.

WYKAZ LITERATURY

1. Achiezer N. I.: Teoria aproksymacji. PWN, Warszawa 1957.
2. Achiezer N. I.: Über einige Funktionen, welche in zwei gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen. — Izw. AN SSSR, otd. matem. i estestw. nauk, seria 7, No 9, 1932, s. 1163; No 3, 1933, s. 309; No 4, 1933, s. 499.
3. Bellert S.: Zarys teorii syntezy liniowych układów elektrycznych. Wydawnictwa PW, Warszawa 1964.
4. Cayley A.: An Elementary Treatise on Elliptic Functions. Sec. edit. Dover Publications, Inc. New York 1961.
5. Collin R. E.: Theory and Design of Wide-Band Multisection Quarter-Wave Transformers. — Proc. of IRE, v. 43, No 2, 1955, s. 179—185.
6. Feldsztejn A. L., Jawicz L. R.: Sintiez czetyrechpolusnikow i wosmipolusnikow na SWCz. Izd. „Swiaz", Moskwa 1965.
7. Feldsztejn A. L., Jawicz L R., Smirnow W. P.: Sprawocznik po elemientam wołnowodnoj tiechniki. Goseniergoizdat, Moskwa 1963.
8. Golde W., Norek C., Paszkowski S.: Zarys teorii aproksymacji i jej zastosowań w elektrotechnice. PWN, Warszawa 1958.
9. Gonczarow W. L.: Tieorija interpolirowanija i pribliżenija funkcij. Gostiechizdat, Moskwa 1954.
10. Kamiński F.: O pewnej metodzie obniżania stopnia elementów macierzy transmisyjnej torów niejednorodnych. — Archiwum Elektrotechniki, t. 17, No 3, 1968, s. 434—447.
11. Kamiński F.: Synteza torów dopasowujących o charakterystyce przenoszenia Czebyszewa. — Archiwum Elektrotechniki, t. 14, z. 1, 1965, s. 41—70.
12. Kamiński F.: Cechy charakterystyczne torów niejednorodnych złożonych z odcinków jednorodnych. — Przegląd Telekomunikacyjny, rok 38/32, No 8, 1966, s. 225 — 229.
13. Kamiński F.: Metoda syntezy filtrów elektromechanicznych za pomocą układów zastępczych o stałych rozłożonych. — Archiwum Elektrotechniki, t. 17, No 3, 1968, s. 449—467.
14. Kamiński F.: Synteza torów niejednorodnych złożonych z odcinków jednorodnych. Rozprawa doktorska, Instytut Automatyki PAN, Warszawa 1966.
15. Kamiński F.: K woprosu o sintiezie nieodnorodnych linij sostojaszczich iz odnorodnych otriezkow s potieriami. — Radiotiechnika i elektronika, t. 12, No 5, 1967, s. 932—935.
16. Kamiński F.: Warunki fizycznej realizacji pewnej klasy torów niejednorodnych. — Rozprawy Elektrotechniczne, t. 13, No 4, 1967, s. 627—646.
17. Kamiński F.: Sintiez stupienczatych pieriechodow s bolszim czisłom zwienjew. — Radiotiechnika i elektronika, t. 10, No 12, 1965, s. 2134—2145.
18. Kamiński F.: Rasszczeplenie matricy pieredaczi stupienczatych pieriechodow na dwie matricy-somnożiteli. — Radiotiechnika i elektronika, t. 10, No 11, 1965, s. 2000—2009.
19. Kurth C.: Anwendung der Betriebsparametertheorie bei der Berechnung von Siebschaltungen, die sich aus in Kette geschalteten Leitungsstücken zusammensetzen. — Frequenz, t. 16, No 12, 1962, s. 482—495.
20. Matthaei G. L., Young L., Jones E. M. T.: Microwave Filters, Impedance Matching Networks and Coupling Structures. Mc Graw-Hill, New York 1964.
21. Oberhettinger F., Magnus W.: Zastosowania funkcji eliptycznych w fizyce i technice. PWN, Warszawa 1963.

22. Riblet H. J.: General Synthesis of Quarter-Wave Impedance Transformers. — IRE Trans. on Microwave Theory and Techniques, v. MTT-5, No 1, 1957, s. 36—43.
23. Sobeffin J. A.: Rasczet polinomialnych filtrow. Swiazizdat, Moskwa 1963.
24. Solymar L.: Some Notes on the Optimum Design of Stepped Transmission-Line Transformers. — IRE Trans. on Microwave Theory and Techniques, v. MTT-6, No 4, 1958, s. 374—378.
25. Turower J. M., Strutinskij N. I.: Primienienje polinomow Czebyszewa dla rasczeta stupienczatych pieriechodow. — Radiotiechnika i elektronika, t. 1, No 2, 1956, s. 143—161.
26. Wiesiełkow G. P.: K woprosu ob optimalnosti stupienczatych czebyszewskich transformatorow. — Izw. Wysszich Uczebnych Zawiedienij, Radiotechnika, t. 6, No 3, 1963, s. 316—319.
27. Young L.: Stepped-Impedance Transformers and Filter Prototypes. — IRE Trans. on Microwave Theory and Techniques, v. MTT-10, No 5, 1962, s. 339—359.
28. Guter R. S., Kudriawcew Ł. D., Lewitan B. M.: Elementy tieorii funkcji. PAN, Warszawa 1967.
29. Matthaei G. L.: Short-Step Chebyshev Impedance Transformers. — IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, v. MTT-14, No 8, 1966, s. 372—383.

F. KAMIŃSKI

SELECTED PROBLEMS OF THE SYNTHESIS OF TRANSMISSION LINES IN CASCADE WITH THE CHEBYSHEV TRANSMISSION CHARACTERISTIC

Summary

The paper is devoted to the discussion of selected problems of the synthesis of cascaded structures consisting of uniform transmission lines terminating in resistors R_1, R_2. The following problems are presented.

1. The general procedure of the synthesis of transmission lines in cascade (section 3).

2. The determination of the form of the insertion loss function L[eq.(11)] for a transmission line in cascade with properties of a bandpass filter provided that:

a. $|t_{21}(j\omega)| \leqslant h \quad (\omega_d \leqslant \omega \leqslant \omega_g), \quad h = \max\limits_{\omega_d \leqslant \omega \leqslant \omega_g} |t_{21}(j\omega)|;$

b. $|t_{21}(j\omega)| \geqslant H \quad (\omega_d'' \leqslant \omega \leqslant \omega_d', \quad \omega_g' \leqslant \omega \leqslant \omega_g''), \quad H = \min\limits_{\substack{\omega_d'' \leqslant \omega \leqslant \omega_d' \\ \omega_g'' \geqslant \omega \geqslant \omega_g'}} |t_{21}(j\omega)|,$

$t_{21}(j\omega)$ — the filtration (characteristic) function;

c. the overall electrical length of this transmission line should be minimum.

It is the problem A which is under discussion in detail in section 4. The solution of this problem is presented by eq. (21). The bandpass response of this network has the Chebyshev behaviour.

3. The determination of the form of the insertion loss function for a stepped impedance transformer provided that:

a. $|t_{21}(j\omega)| \leqslant h \quad (\omega_d \leqslant \omega \leqslant \omega_g);$

b. $t_{21}(0) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} - \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right), \quad R_2 > R_1;$

c. the overall electrical length of this impedance transformer should be minimum.

It is the problem B which is under discussion in section 5. The solution of this problem is presented by eq. (23). The insertion loss function corresponding to above conditions includes the Chebyshev polynomial of the first kind. Hence the reflection factor characteristic of this network has the Chebyshev behaviour over the matching range.

4. The design for a transmission line in cascade according to the problem A and B (section 6).

5. The specific difficulties of the Chebyshev transmission line synthesis those come into existence from the presence of losses in uniform lines [eq. (28), (33), (34), section 7].

F. KAMIŃSKI

LES ASPECTS CHOISIS DE LA SYNTHÈSE DES LIGNES NON-HOMOGÈNES COMPOSÉES DE SECTEURS HOMOGÈNES À CARACTÉRISTIQUE TCHEBYCHEFF

Résumé

L'oeuvre contient qulques problèmes choisis, liés avec la synthèse des lignes non-homogènes, composées des secteurs homogènes à caractéristique Tchebycheff. On a donné le fondement exact de l'éspèce de la fonction des pertes $L(s)$ des lignes d'adaptation et de filtration en acceptant que tous les secteurs particuliers homogènes sont sans pertes. On a prouvé, que les lignes à caractéristique des pertes $L(s)$ d'après (21) et (23) remplissent optimalement les conditions I, III (problème A dans le chapitre 4 et problème B dans le chapitre 5).

On a consacré beaucoup d'attention à la synthèse des lignes non-homogènes, composées des secteurs homogènes ayant des pertes. On a accepté le principe, que l'affaiblissement caractéristique du secteur de la ligne longue dans la bande des fréquences considérée est constant et différent de zéro. On a donné les formules du module élevé au carré de la fonction de transmission, qui permettent la synthèse de telles lignes en acceptant la caractéristique Tchebycheff [formules (28), (33) et (34)]. On a présenté les moyens de calculer les paramètres déterminant la fonction de transmission cherchée. Il résulte de ces considérations, que le problème de la synthèse des lignes à pertes a la solution indéterminée, ce que crée une tâche additive de rechercher la solution la plus utile.

F. KAMIŃSKI

AUSGEWÄHLTE PROBLEME DER SYNTHESE VON TSCHEBYSCHEFFSCHEN LEITUNGSKETTEN MIT HOMOGENEN LEITUNGSSTÜCKEN

Zusammenfassung

Die Arbeit ist den ausgewählten Fragen der Synthese von Schaltungen, die aus der Kette von homogenen Leitungsstücken bestehen, gewidmet. Die folgenden Probleme werden behandelt.

1. Das Grundschema vom Verfahren der Synthese zum Entwurf eines Vierpols von der obengenannten Art mit vorgeschriebener Betriebsdämpfung unter Voraussetzung, dass der Generatorwiderstand R_1 und der Abschlusswiderstand R_2 ohmisch sind (Kapitel 3).

2. Die Bestimmung der Form der sogenannten Verlustfunktion [Gl. (11)] der aus homogenen verlustfreien Leitungsstücken in Kette gebildeten Siebschaltung unter der Bedingung, dass

a. $|t_{21}(j\omega)| \leqslant h \quad (\omega_d \leqslant \omega \leqslant \omega_g), \quad h = \max\limits_{\omega_d \leqslant \omega \leqslant \omega_g} |t_{21}(j\omega)|;$

b. $|t_{21}(j\omega)| \geqslant H \quad (\omega_d'' \leqslant \omega \leqslant \omega_d', \quad \omega_g' \leqslant \omega \leqslant \omega_g''), \quad H = \min\limits_{\substack{\omega_d'' \leqslant \omega \leqslant \omega_d' \\ \omega_g'' \geqslant \omega \geqslant \omega_g'}} |t_{21}(j\omega)|,$

$t_{21}(j\omega)$ — die sogenannte charakteristische Funktion vom Vierpole;

c. die elektrische Gesamtlänge der unhomogenen Leitung möglichst klein sein soll.

Es ist das Problem A, das im Kapitel 4 eingehend dargelegt wurde. Die Lösung dieser Aufgabe wird durch Gl. (21) ausgedrückt. Die Betriebsdämpfung hat im Durchlassbereich dasTschebyscheff-Verhalten.

3. Die Bestimmung der Form der Verlustfunktion der Anpassungsschaltung, die sich aus in Kette geschalteten Leitungsstücken zusammensetzt, unter der Bedingung, dass

a. $|t_{21}(j\omega)| \leqslant h \quad (\omega_d \leqslant \omega \leqslant \omega_g);$

b. $t_{21}(0) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} - \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right), \quad R_2 > R_1;$

c. die elektrische Gesamtlänge der unhomogenen Leitung möglichst klein sein soll.

Es ist das Problem B, das im Kapitel 5 behandelt wurde. Die Lösung dieser Aufgabe wird in Gl. (23) gefasst. Die Verlustfunktion dieser Anpassungsleitung enthält das tschebyscheffsche Polynom erster Art. Der Reflexionsfaktorbetrag dieser Leitung im Anpassungsbereich hat das Tschebyscheff-Verhalten.

4. Das Verfahren der Synthese zum Entwurf einer unhomogenen Leitung mit laut des Problems A und B vorgeschriebener Betriebsdämpfung (Kapitel 6).

5. Die spezifischen, mit der Verlustberücksichtigung verbundenen Schwierigkeiten, die bei der Synthese von den tschebyscheffschen Leitungsketten mit der Berücksichtigung der Verluste in Leitungsstücken [Gl. (28), (33), (34)] entstehen (Kapitel 7).

Ф. КАМИНЬСКИ

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ СИНТЕЗА ЧЕБЫШЕВСКИХ СТУПЕНЧАТЫХ ЛИНИЙ

Резюме

В статье рассмотрены на основании рабочих параметров четырёхполюсника следующие вопросы синтеза ступенчатых линий:

1. Общая схема синтеза ступенчатых линий (гл. 3)

2. Определение вида функции потерь ступенчатой линии-фильтра, которая отвечает следующим условиям (проблема А, гл. 4):

а) $|t_{21}(j\omega)| \leqslant h$, $(\omega_d \leqslant \omega \leqslant \omega_g)$, $h = \max\limits_{\omega_d \leqslant \omega \leqslant \omega_g} |t_{21}(j\omega)|$

б) $|t_{21}(j\omega)| \geqslant H \quad (\omega_d'' \leqslant \omega \leqslant \omega_d', \ \omega_g' \leqslant \omega \leqslant \omega_g'')$, $\quad H = \min\limits_{\substack{\omega_d'' \leqslant \omega \leqslant \omega_d' \\ \omega_g' \geqslant \omega \geqslant \omega_g''}} |t_{21}(j\omega)|$

где $t_{21}(j\omega)$ — функция фильтрации ступенчатой линии.

в) электрическая длина линии должна быть самой малой из возможных.

Решение этой задачи представлено формулой (21). Амплитудно-частотная характеристика линии является равноволновой в полосе пропускания.

3. Определение вида функции потерь ступенчатого перехода, который отвечает следующим условиям (проблема Б, гл. 5):

а) $|t_{21}(j\omega)| \leqslant h$, $(\omega_d \leqslant \omega \leqslant \omega_g)$

б) $t_{21}(0) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} - \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right)$, $R_2 > R_1$,

где R_1, R_2 — сопротивления нагрузки.

в) электрическая длина перехода должна быть наименьшой из возможных.

Решение этой задачи дано формулой (23). Функция потерь содержит полиномы Чебышева первого рода. Изменение модуля коэффициента отражения такого перехода имеет чебышевский характер в полосе согласования.

4. Способ расчета ступенчатых линий, функции потерь которых являются решением проблемы А или Б (гл. 6).

5. Специфические трудности, выступающие при синтезе ступенчатых линий с учетом потерь в ступеньках (гл. 7). Рассмотрены некоторые вопросы, связанные с синтезом чебышевских ступенчатых линий [формулы (28), (33), (34)] при учете потерь в звеньях.

При решении вышеупомянутых вопросов главное внимание было обращено на возможно полное освещение тех проблем, которые до сих пор в недостаточной мере представлены в литературе.

621.391.883

MARIAN DĄBROWSKI

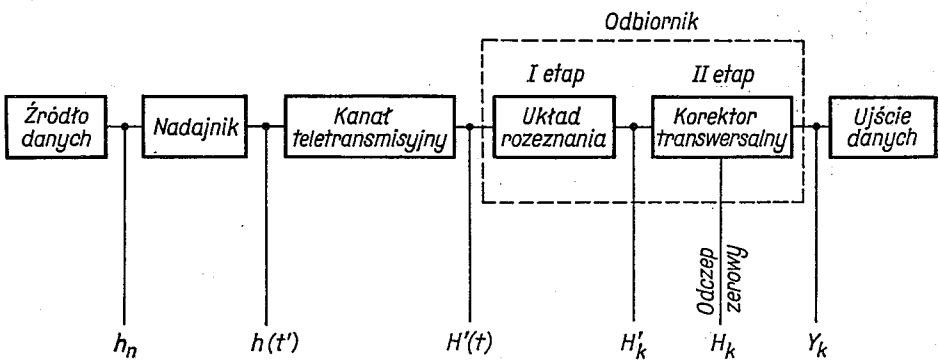
Korekcja transwersalna zniekształceń interferencyjnych w transmisji danych

Rękopis dostarczono 31. 3. 1967

Dokonano przeglądu zagadnień związanych z korekcją transwersalną zniekształceń interferencyjnych w m-wartościowej transmisji danych. Zniekształcenia interferencyjne są związane z ograniczeniem pasma częstotliwości, niestałością charakterystyki amplitudowej i nieliniowością charakterystyki fazowej kanału liniowego. Omówiono zasady korekcji zniekształceń interferencyjnych przy użyciu filtrów transwersalnych. Wykazano, że korekcja może być dokonana przy transmisji pojedynczego impulsu tak samo dobrze, jak przy transmisji dowolnego ciągu impulsów. Podano założenia, przy których zniekształcenia Δ_K są funkcją wypukłą i liniową wzmocnień w_i korektora. Omówiono twierdzenie Lucky'ego odnoszące się do korekcji zniekształceń interferencyjnych przy $\Delta < 1$.

1. WSTĘP

Rozpatrzymy następujący schemat (rys. 1) kanału łączności.



Rys. 1. Schemat omawianego kanału łączności

Źródło danych wysyła wiadomości w postaci ciągów, których elementami są liczby rzeczywiste. Największą z tych liczb oznaczymy przez h_{max}, natomiast najmniejszą — przez h_{min}, przy czym zachodzi:

$$h_{min} = -h_{max}. \tag{1}$$

Symbolem h_n oznaczymy element wiadomości w postaci liczby całkowitej h, wysłany ze źródła danych w n-tym przedziale czasowym.

Nadajnik przyporządkowuje liczbie całkowitej h_n, wysłanej ze źródła danych, impuls prostokątny $h(t')$ taki, że jego wysokość jest równa h w przedziale czasu

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\varepsilon \leqslant t' < \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\varepsilon, \tag{2}$$

gdzie: n jest liczbą całkowitą, ε jest odstępem jednostkowym.
Jak widać, wartości chwilowe $h(t')$ w momentach $t' = n\cdot\varepsilon$ są równe h_n. Sygnał nadawany jest w pełni określony przez ciąg:

$$\vec{h} = (\ldots, h_{-n}, \ldots, h_{-1}, h_0, h_1, \ldots h_n, \ldots). \tag{3}$$

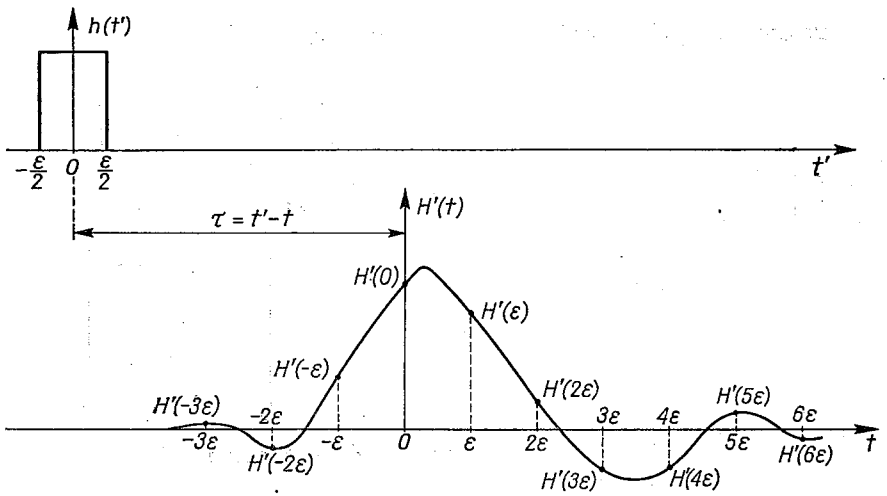
W dalszych rozważaniach będziemy przyjmować zawsze, że kanał transmisyjny przenoszący sygnały $h(t')$ jest układem liniowym. Oznacza to, że:

1) nie są uwzględniane ewentualne zniekształcenia nielinearne kanału teletransmisyjnego, oraz że

2) zakłada się transmisję w pasmie naturalnym lub transmisję z modulacją jednowstęgową i detekcją synchroniczną.

Można również uznać [1], [2], że otrzymane wyniki będą dobrym przybliżeniem dla tzw. modulacji niesymetrycznej (ang. Vestigal Sideband Transmission).

Przez $H'(t)$ oznaczymy odpowiedź kanału teletransmisyjnego na sygnał nadany określony przez h_n. Ponieważ w rzeczywistych kanałach teletransmisyjnych pasmo przenoszonych częstotliwości jest ograniczone do $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ i ponieważ charakterystyka amplitudowa



Rys. 2. Odpowiedź kanału $H'(t)$ na impuls nadany $h(t')$

$A(\omega)$ nie jest stała jako funkcja częstotliwości i charakterystyka fazowa $B(\omega)$ nie jest funkcją liniową częstotliwości, to odpowiedź kanału $H'(t)$ odbiega od kształtu prostokątnego. Jeśli czas trwania ε przesyłanych impulsów jest znacznie krótszy od $2\pi/\omega_0$, gdzie ω_0 jest pulsacją graniczną kanału, to odbierany przebieg posiada kształt podobny do podanego na rys. 2 [10].

Istotne różnice między przebiegiem wyjściowym $H'(t)$ i przebiegiem wejściowym $h(t')$ polegają na tym, że:

1) Skala czasu t jest przesunięta względem skali czasu t' (rys. 2) o wartość $\tau = t'-t$. Przesunięcie τ jest związane z charakterystyką fazową drogi transmisyjnej. Ogólnie, charakterystykę fazową $B(\omega)$ można rozpatrywać jako sumę trzech składników. Pierwszy składnik $B_1(\omega) = \omega \cdot \tau$ jest liniowy i reprezentuje opóźnienie (czas propagacji) τ, stałe dla wszystkich pulsacji ω. Składnik drugi $B_2(\omega)$ jest związany z charakterystyką amplitudową układu np. za pomocą „całki Bodego". Trzeci składnik $B_3(\omega)$ reprezentuję układy o zwiększonym przesunięciu fazowym (układy kratowe), które mogą być celowo włączane w kanał teletransmisyjny. W dalszym ciągu będziemy zakładać, że przesunięcie czasowe

$$t'-t = \tau = \frac{B_1(\omega)}{\omega}. \tag{4}$$

2) Funkcja $H'(t)$ nie posiada stałej wartości w przedziale czasowym o szerokości ε i nie jest równa zeru poza tym przedziałem.

3) Funkcja $H'(t)$ nie jest parzysta, to znaczy $H'(t) \neq H'(-t)$. Główną przyczyną nieparzystości $H'(t)$ są zniekształcenia fazowe drogi transmisyjnej [3].

Zauważmy, że sygnał $H'(t)$ w przypadku idealnego układu teletransmisyjnego o charakterystyce amplitudowej $A(\omega) = 1$ i charakterystyce fazowej $B(\omega) = \omega\tau$ w nieograniczonym zakresie pulsacji ω, gdy nadany był sygnał $h(t')$, wynosi:

$$H'(t) = h(t'), \tag{5}$$

gdzie:

$$t = t'-\tau.$$

Wartości chwilowe sygnału nadanego $h(t')$ w momencie $t' = n \cdot \varepsilon$ i sygnału odebranego $H'(t)$ w momencie $t = n \cdot \varepsilon$ przy powyższych założeniach są równe:

$$H'(t = n \cdot \varepsilon) = h(t' = n \cdot \varepsilon) = h_n. \tag{6}$$

Odpowiedź $H'(t)$ rzeczywistego układu teletransmisyjnego na sygnał nadany, określony przez

$$\vec{h} = \vec{\delta}_n,$$

gdzie $\vec{\delta}_n$ jest ciągiem, w którym wyraz n-ty jest równy jedności, a pozostałe wyrazy są zerowe, oznaczymy przez $P'_n(t)$.

Wobec przyjętego założenia o liniowości kanału teletransmisyjnego, odpowiedź $H'(t)$ na sygnał $\vec{h} = \ldots, 0, h_n, 0, \ldots$ wynosi:

$$H'(t) = h_n \cdot P'_n(t). \tag{7}$$

Detekcja sygnału odebranego $H'(t)$ odbywa się w odbiorniku w dwóch etapach (rys. 1):

1) rozeznanie,

2) korekcja.

W pierwszym etapie wykorzystuje się w odbiorniku źródło dyskretnej skali czasowej, synchronicznej ze skalą czasu współpracującego nadajnika. Sygnał $H'(t)$ jest badany w momentach czasowych $t = k \cdot \varepsilon$, zwanych momentami rozeznania. Impulsy rozeznające określimy za pomocą funkcji $\delta(k \cdot \varepsilon)$, takiej, że:

$$\delta(k\cdot\varepsilon)=\begin{cases}1 \text{ dla } k \text{ całkowitych}\\ 0 \text{ dla } k \text{ niecałkowitych.}\end{cases} \tag{8}$$

Wartość chwilowa przebiegu $H'(t)$ w momencie rozeznania $t=k\cdot\varepsilon$ przy warunku, że nadany był sygnał $\vec{h}\ldots, 0, h_n, 0, \ldots$ jest równa:

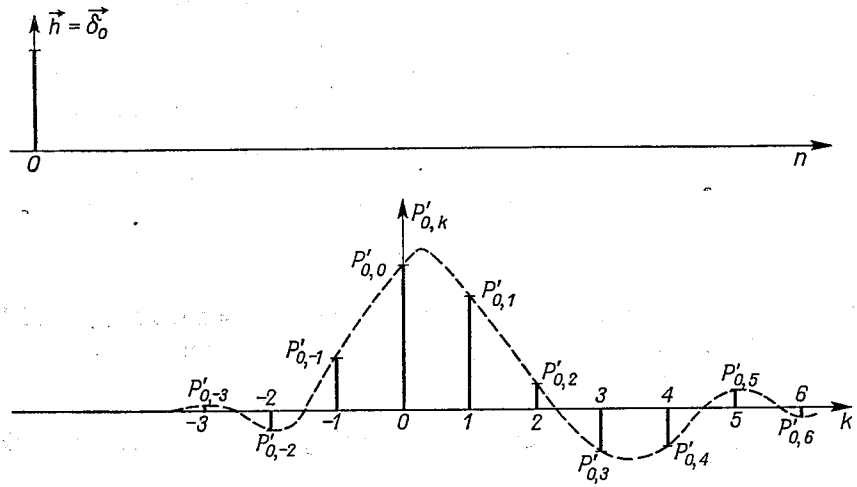
$$H'(t)\cdot\delta(k\cdot\varepsilon)=H'(k\cdot\varepsilon)=h_n\cdot P'(k\cdot\varepsilon). \tag{9}$$

Dalej będziemy się interesować wartościami chwilowymi odpowiedzi $H'(t)$ tylko w momentach $t=k\cdot\varepsilon$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Dla uproszczenia oznaczeń wprowadzimy zamiast ciągłej zmiennej czasowej t zmienną dyskretną k, oznaczając przez φ_k wartość dowolnej funkcji $\varphi(t)$ w k-tym momencie, to znaczy:

$$\varphi_k \overset{\text{df}}{=} \varphi(t=k\cdot\varepsilon). \tag{10}$$

Wartości chwilowe odpowiedzi $P'_n(t)$ w momentach $t=k\cdot\varepsilon$ oznaczymy przez $P'_{n,k}$ (rys.3).

$$P'_{n,k}\overset{\text{df}}{=}P'_n(t=k\cdot\varepsilon). \tag{11}$$



Rys. 3. Wartości chwilowe $P_{0,k}$ odpowiedzi w k-tych momentach na sygnał nadany $\vec{h}=\vec{\delta}_0$

Podstawiając równanie (11) do (9) otrzymamy odpowiedź kanału na pojedynczy impuls h_n, w formie:

$$H'(t=k\cdot\varepsilon)=H'_k=h_n\cdot P'_{n,k}. \tag{12}$$

Przy innych nadawanych sygnałach, H'_k jest superpozycją wartości $h_n\cdot P'_{n,k}$ pochodzących od impulsów h_n dla $n\in(-\infty,+\infty)$.

$$H'_k=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h_n\cdot P'_{n,k}. \tag{13}$$

Wartość chwilowa przebiegu odebranego H'_k jest podstawą decyzji odbiornika o nadanym impulsie h_k. Dla prawidłowej decyzji wystarcza, aby wartości H'_k i h_k spełniały I kryterium Nyquista[1]) (np. [2], [8]).

[1]) W transmisji impulsowej jest rozpatrywane również II i III kryterium Nyquista [8].

I kryterium Nyquista — wartość chwilowa H'_k sygnału odebranego w k-tym momencie rozeznania i wartość impulsu nadanego h_k powinny być do siebie proporcjonalne dla wszystkich k i $\vec{h}$.

W technicznej rzeczywistości powyższa proporcjonalność na ogół nie zachodzi na skutek zniekształceń interferencyjnych omówionych szczegółowo w rozdziale 2.

Proces korekcji polegający na przekształceniu sygnału H'_k na sygnał Y_k spełniający I kryterium Nyquista odbywa się w drugim etapie detekcji sygnału odbieranego (rys. 1). W rozdziałach 3, 4 i 5 będziemy się zajmować korekcją w sensie I kryterium Nyquista, przy użyciu filtrów transwersalnych.

Korektor transwersalny opóźnia odebrany sygnał o czas równy:

$$\tau_0 = J \cdot \varepsilon, \tag{14}$$

gdzie J jest ilością ogniw linii opóźniającej (rozdz. 3) od wejścia do „odczepu zerowego". Oznaczymy przez H_k sygnał, który pojawia się na „zerowym odczepie" korektora w momencie $t = (k+J)\varepsilon$. Inaczej mówiąc, wprowadzamy dla sygnałów w korektorze nową skalę czasową t'', opóźnioną względem skali czasowej t wejścia odbiornika o $\tau_0 = J \cdot \varepsilon$, czyli

$$t'' = t - \tau_0. \tag{15}$$

Ponieważ opóźnienie $J \cdot \varepsilon$ jest dla danego korektora stałe, to wartości chwilowe sygnału odebranego H'_k w skali czasu t oraz sygnału H_k na „zerowym odczepie" w opóźnionej skali czasu t'' są równe dla $t = t''$, a więc:

$$H'_k = H_k. \tag{16}$$

Do ujścia danych (rys. 1) przesyłane są decyzje odbiornika w postaci ciągów $\vec{Y}_k$.

2. MIARA ZNIEKSZTAŁCEŃ INTERFERENCYJNYCH

Równanie (13), określające wartość chwilową sygnału odbieranego w k-tym momencie, można zapisać jako sumę trzech składników:

$$H'_k = \sum_{n=-\infty}^{k-1} h_n P'_{n,k} + h_k \cdot P'_{k,k} + \sum_{n=k+1}^{+\infty} h_n \cdot P'_{n,k}, \tag{17}$$

gdzie:

$\sum_{n=-\infty}^{k-1} h_n \cdot P'_{n,k}$ jest interferencją pochodzącą od impulsów nadanych wcześniej od h_k,

$h_k \cdot P'_{k,k}$ jest odpowiedzią pochodzącą od k-tego impulsu,

$\sum_{n=k+1}^{+\infty} h_n \cdot P'_{n,k}$ jest interferencją pochodzącą od impulsów nadanych później od h_k.

Odpowiedź H'_k jest proporcjonalna do wysokości h_k (tzn. jest spełnione I kryterium Nyquista), jeżeli interferencja D od sąsiednich impulsów w k-tym momencie jest równa zeru, czyli:

$$D \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{n=-\infty}^{k-1} h_n \cdot P'_{n,k} + \sum_{n=k+1}^{+\infty} h_n \cdot P'_{n,k} = 0. \tag{18}$$

Wartość interferencji D jest funkcją określoną na zbiorze $\{\vec{h}\}$ wszystkich ciągów $\vec{h}$.

Za miarę zniekształceń interferencyjnych przyjmiemy stosunek maksimum wartości bezwzględnej interferencji dla wszystkich k i $\vec{h}$ do wartości bezwzględnej odpowiedzi na pojedynczy impuls h_k o maksymalnej wysokości[1]). Miarę tę oznaczać będziemy dalej symbolem Δ[2]):

$$\Delta \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\max\limits_{k,\vec{h}} |D|}{|(\max h_k) \cdot P'_{k,k}|}. \tag{19}$$

Uwzględniając założenia podane na wstępie w rozdz. 1, można zapisać:

$$|(\max h_k) \cdot P'_{n,k}| = h_{max} \cdot |P'_{n,k}|. \tag{20}$$

Wartość bezwzględna interferencji w k-tym momencie wynosi:

$$|D| = \left| \sum_{n=-\infty}^{k-1} h_n \cdot P'_{n,k} + \sum_{n=k+1}^{+\infty} h_n \cdot P'_{n,k} \right|. \tag{21}$$

Maksimum $|D|$ wystąpi wówczas, gdy wartości bezwzględne h_n dla $n \neq k$ są równe h_{max}, to znaczy:

$$|h_n| = h_{max} \tag{22}$$

oraz gdy wszystkie iloczyny

$$h_n \cdot P'_{n,k} \geqslant 0 \quad \text{dla } n \neq k \tag{23}$$

lub gdy wszystkie iloczyny

$$h_n \cdot P'_{n,k} \leqslant 0 \quad \text{dla } n \neq k. \tag{24}$$

Korzystając z wyrażeń (22), (23) lub (22) i (24) maksimum $|D|$ można zapisać jako sumę wartości bezwzględnych iloczynów $|h_{max} \cdot P'_{n,k}|$:

$$\max_{k,\vec{h}} |D| = \sum_{n=-\infty}^{k-1} |h_{max} \cdot P'_{n,k}| + \sum_{n=k+1}^{+\infty} |h_{max} \cdot P'_{n,k}| = \sum_{n=-\infty}^{k-1} h_{max} |P'_{n,k}| + \sum_{n=k+1}^{+\infty} h_{max} |P'_{n,k}|. \tag{25}$$

Wysokość h_{max} w równaniu (25) nie zależy od wskaźnika sumowania n, wobec czego można wyłączyć ją przed znak sumy. Otrzymamy wówczas:

$$\max_{k,\vec{h}} |D| = h_{max} \left[\sum_{n=-\infty}^{k-1} |P'_{n,k}| + \sum_{n=k+1}^{+\infty} |P'_{n,k}| \right]. \tag{26}$$

Po podstawieniu równań (20) i (26) do wzoru (19) zniekształcenia interferencyjne określone będą równaniem:

---

[1]) W literaturze anglosaskiej [2], [7], [10] tego rodzaju zniekształcenia są nazywane interferencjami międzyelementowymi (intersymbol interference).

[2]) W przypadkach nie powodujących nieporozumień będziemy używać dla wygodyte rminu,, zniekształcenia interferencyjne", mającego sens miary Δ.

$$\Delta = \frac{\sum_{n=-\infty}^{k-1} |P'_{n,k}| + \sum_{n=k+1}^{+\infty} |P'_{n,k}|}{|P'_{k,k}|}. \tag{27}$$

Dla skrócenia notacji wyrażeń wprowadzimy symbol $\overline{\delta}_{a,b}$ taki, że:

$$\overline{\delta}_{a,b} \overset{\text{df}}{=} \begin{cases} 1, \text{ gdy } a \neq b, \\ 0, \text{ gdy } a = b, \end{cases} \tag{28}$$

gdzie a, b są liczbami całkowitymi.

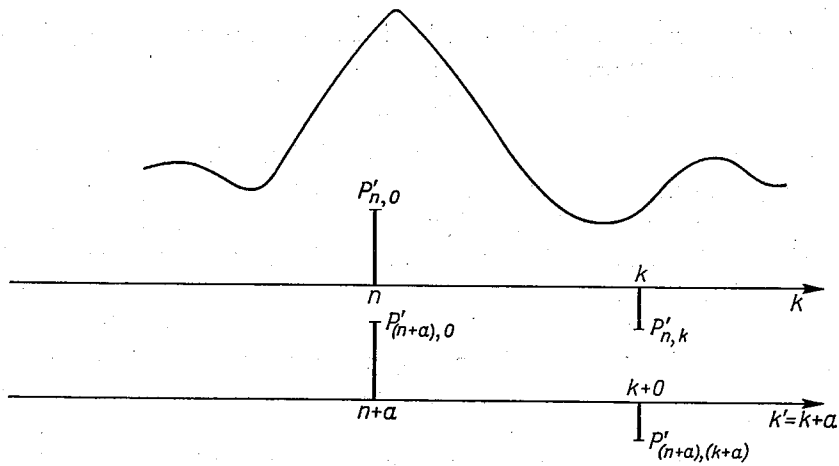
Korzystając z wprowadzonego symbolu $\overline{\delta}_{a,b}$ równanie (27) przyjmie postać:

$$\Delta = \frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{\delta}_{n,k} \cdot |P'_{n,k}|}{|P'_{k,k}|}. \tag{29}$$

Zniekształcenia interferencyjne Δ określone równaniem (29) można zapisać w innych, równoważnych formach, które okażą się dogodniejsze w zastosowaniach.

Oczywiste jest (rys. 4), że składowa interferencyjna $P'_{n,k}$ w k-tym momencie, pochodząca od n-tego impulsu nadanego, jest równa składowej interferencyjnej $P'_{(n+a),(k+a)}$ w momencie $(k+a)$, pochodzącej od impulsu $(n+a)$, ponieważ moment, od którego zaczynamy mierzyć czas, nie może mieć wpływu na przebiegi. Zachodzi więc:

$$P'_{n,k} = P'_{(n+a),(k+a)}. \tag{30}$$



Rys. 4. Ilustracja równania (30)

Podstawiając równanie (30) dla $a = -k$ do równania (29) oraz podstawiając w (29) zamiast wskaźnika sumowania n nowy wskaźnik $n' = n-k$, otrzymujemy:

$$\Delta = \frac{\sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \overline{\delta}_{n',0} \cdot |P'_{n',0}|}{|P'_{0,0}|}. \tag{31}^{1}$$

[1]) Dalej będziemy pisać n zamiast n'.

Podobnie podstawiając $a = -n$ i $k = 0$ w równaniu (30), otrzymujemy

$$P_{n,0} = P_{0,-n} \tag{32}$$

dla dowolnego n.

Podstawiając (32) do każdego wyrazu sumy w liczniku (31) otrzymujemy po zmianie oznaczeń $P_{0,-n}$ na $P_{0,k}$ i granic sumowania, następującą postać wyrażenia na zniekształcenia interferencyjne:

$$\Delta = \frac{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overline{\delta}_{0,k} \cdot |P_{0,k}|}{|P_{0,0}|}. \tag{33}$$

Równanie (31) i (33) są równoważne z równaniem (29).

Określenie zniekształceń interferencyjnych Δ równaniem (33) jest wygodne m. in. ze względów pomiarowych. Pomiaru Δ można dokonać np. z oscylogramu odpowiedzi układu teletransmisyjnego na pojedynczy impuls o szerokości ε.

3. ZASADA KOREKCJI TRANSWERSALNEJ

Zadaniem procesu korekcji w sensie I kryterium Nyquista jest przekształcenie sygnału odbieranego H'_k, określonego równaniem (17), na sygnał Y_k, taki że:

$$Y_k = a \cdot h_k \tag{34}$$

dla wszystkich k i $\vec{h}$.

Współczynnik a jest stały, niezależny od k i $\vec{h}$. Dla uproszczenia przyjmiemy $a = 1$, wobec czego równanie (34) przyjmie postać:

$$Y_k = h_k. \tag{35}$$

Jak widać z porównania równań (17) i (35), w procesie korekcji jest sprowadzony do zera wpływ składowych interferencyjnych sygnału odbieranego H'_k.

Gibsson [4] zaproponował dla rozwiązania korekcji użycie filtrów transwersalnych opisanych przez Kallmanna [5]. Korekcję sygnału odbieranego przy użyciu tych filtrów nazwiemy korekcją transwersalną.

Korektor transwersalny (rys. 5) składa się z:

1) linii opóźniającej o $(2J+1)$ odczepach ponumerowanych kolejno $-J, \ldots, -i, \ldots, -1, 0, +1, \ldots, +i, \ldots, +J$, przy czym na każdym i-tym odczepie przebieg jest opóźniony o ε względem odczepu $(i-1)$-ego;

2) wzmacniaczy o regulowanym wzmocnieniu W_i połączonych z odczepami, przy czym

$$-1 \leqslant W_i \leqslant +1; \tag{36}$$

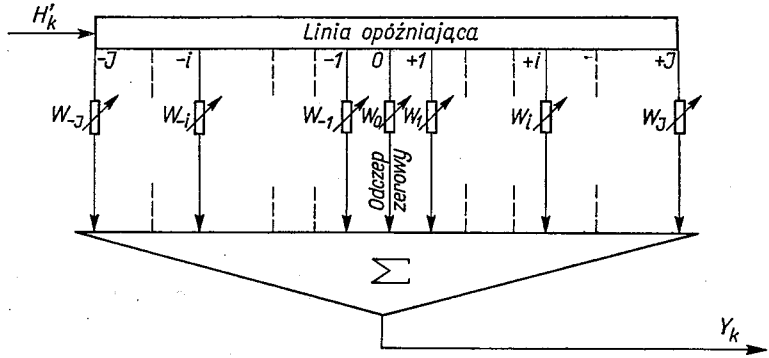
3) sumatora $\sum$, na którego wyjściu sygnał jest algebraiczną sumą sygnałów wejściowych.

Rozpatrzymy działanie korektora, gdy nadany był sygnał $\vec{h} = \vec{\delta}_0$, a więc gdy na wejście linii opóźniającej podany jest sygnał $P'_{0,k}$.

Zgodnie z równaniem (16) sygnał na odczepie $i = 0$ będziemy oznaczać przez $P_{0,k}$. W momencie $k = 0$ sygnał $P_{0,0}$ wystąpi na odczepie $i = 0$, sygnały $P_{0,1}; P_{0,2}; \ldots; P_{0,i}$ wystąpią odpowiednio na odczepach $-1, -2, \ldots, -i$-tym, natomiast sygnały $P_{0,-1}; P_{0,-2}; \ldots; P_{0,-i}$ — na odczepach $1, 2, \ldots, i$-tym.

Sygnał wyjściowy korektora, gdy na odczepie zerowym ($i = 0$) występuje sygnał $P_{0,k}$, oznaczymy przez $Y_{0,k}$. Sygnał wyjściowy korektora w k-tym momencie $Y_{0,k}$ jest określony równaniem:

$$Y_{0,k} = \sum_{i=-J}^{+J} W_i \cdot P_{0,k-i}. \tag{37}$$



Rys. 5. Schemat korektora transwersalnego

W szczególnym przypadku, dla $k = 0$, zachodzi:

$$Y_{0,0} = \sum_{i=-J}^{+J} W_i \cdot P_{0,-i}. \tag{38}$$

Jeżeli sygnałem wejściowym korektora jest H'_k, określone równaniem (17), to odpowiedź korektora w k-tym momencie, Y_k otrzymamy przez podstawienie w równaniu (37) w miejsce $P_{0,k-i}$ wyrażenia H_{k-i}. Po podstawieniu otrzymamy:

$$Y_k = \sum_{i=-J}^{+J} W_i \cdot H_{k-i} = \sum_{i=-J}^{+J} W_i \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n \cdot P_{n,k-i} =$$

$$= h_k \cdot \sum_{i=-J}^{+J} W_i \cdot P_{k,k-i} + \sum_{i=-J}^{+J} W_i \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{\delta}_{n,k} \cdot h_n \cdot P_{n,k-i}, \tag{39}$$

gdzie $\overline{\delta}_{n,k}$ jest zdefiniowana przez (28).

Składnik

$$h_k \cdot \sum_{i=-J}^{+J} W_i \cdot P_{k,k-i} \tag{40}$$

jest odpowiedzią korektora, gdyby nadany był ciąg $\vec{h} = \ldots, 0, h_k, 0, \ldots$, natomiast:

$$\sum_{i=-J}^{+J} W_i \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{\delta}_{n,k} \cdot h_n \cdot P_{n,k-i} \tag{41}$$

jest składową interferencyjną odpowiedzi korektora w k-tym momencie, pochodzącą od impulsów nadanych wcześniej i później od h_k. Składową interferencyjną, określoną równa-

niem (41), będziemy oznaczać przez D_K. Miarę zniekształceń interferencyjnych sygnału Y_k[1]) zdefiniujemy analogicznie jak miarę zniekształceń sygnału odbieranego H'_k, a mianowicie:

Zniekształceniami końcowymi nazwiemy stosunek maksimum wartości bezwzględnej interferencji D_K dla wszystkich k i $\vec{h}$, do wartości bezwzględnej odpowiedzi korektora, gdy nadany był ciąg $\vec{h} = \ldots, 0, h_{max}, 0, \ldots$, czyli:

$$\Delta_K \overset{\text{df}}{=} \frac{\max\limits_{k,\vec{h}} |D_K|}{\left| h_{max} \sum\limits_{i=-J}^{+J} W_i \cdot P_{k,k-i} \right|}. \tag{42}$$

Równanie (42) doprowadzimy do postaci dogodniejszej w zastosowaniach. Wartość bezwzględna interferencji D_K wynosi:

$$|D_K| = \left| \sum_{i=-J}^{+J} W_i \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{\delta}_{n,k} \cdot h_n \cdot P_{n,k-i} \right| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{\delta}_{n,k} \cdot h_n \cdot \sum_{i=-J}^{+J} W_i \cdot P_{n,k-i} \right|. \tag{43}$$[2])

Maksimum $|D_k|$ wystąpi wówczas, gdy

$$|h_n| = h_{max} \tag{44}$$

oraz gdy wszystkie iloczyny

$$h_n \cdot \sum_{i=-J}^{+J} W_i \cdot P_{n,k-i} \geqslant 0 \quad \text{dla} \quad n \neq k \tag{45}$$

lub gdy wszystkie iloczyny

$$h_n \cdot \sum_{i=-J}^{+J} W_i \cdot P_{n,k-i} \leqslant 0 \quad \text{dla} \quad n \neq k. \tag{46}$$

Korzystając z wyrażeń (44) i (45) lub (44) i (46), maksimum $|D_K|$ można zapisać jako sumę wartości bezwzględnych iloczynów

$$\max_{k,\vec{h}} |D_K| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{\delta}_{n,k} \cdot \left| h_{max} \cdot \sum_{i=-J}^{+J} W_i \cdot P_{n,k-i} \right|. \tag{47}$$

Ponieważ czynnik h_{max} nie zależy od wskaźnika sumowania n, to można go wyłączyć przed znak sumy. Otrzymamy wówczas:

$$\max_{k,\vec{h}} |D_K| = h_{max} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{\delta}_{n,k} \cdot \left| \sum_{i=-J}^{+J} W_i \cdot P_{n,k-i} \right|. \tag{48}$$

Po podstawieniu równania (48) do (42) zniekształcenia końcowe wyniosą:

$$\Delta_K = \frac{\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{\delta}_{n,k} \cdot \left| \sum\limits_{i=-J}^{+J} W_i \cdot P_{n,k-i} \right|}{\left| \sum\limits_{i=-J}^{+J} W_i \cdot P_{k,k-i} \right|}. \tag{49}$$

[1]) Dalej używać będziemy terminu „zniekształcenie końcowe", mającego sens miary Δ_K zniekształceń interferencyjnych sygnału Y_k.

[2]) Zamiana kolejności sumowania nie zmienia wyniku sumowania, ponieważ szereg jest zbieżny.

Korzystając z równania (30) dla $a = -k$ otrzymamy:

$$P_{k,k-i} = P_{0,-i}, \tag{50}$$

natomiast dla $a = -n$

$$P_{n,k-i} = P_{0,k-n-i}. \tag{51}$$

Przeprowadzając rozumowanie analogiczne jak w rozdz. 2, po podstawieniu (50) i (51) do równania (49) otrzymamy ostateczną postać wyrażenia na zniekształcenia końcowe jako:

$$\Delta_K = \frac{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{\delta}_{0,k} \left| \sum_{i=-J}^{+J} W_i \cdot P_{0,k-i} \right|}{\left| \sum_{i=-J}^{+J} W_i \cdot P_{0,-i} \right|}. \tag{52}$$

Zwróćmy uwagę, że [zob. równania (37) i (38)]:

$$\left| \sum_{i=-J}^{+J} W_i \cdot P_{0,k-i} \right| = |Y_{0,k}|$$

$$\left| \sum_{i=-J}^{+J} W_i \cdot P_{0,-i} \right| = |Y_{0,0}|.$$

A zatem definicja zniekształceń końcowych (miary zniekształceń interferencyjnych sygnału Y_k) podana poprzednio jest równoważna następującemu określeniu:

Zniekształcenia końcowe Δ_K są stosunkiem sumy bezwzględnych wartości odpowiedzi korektora $Y_{0,k}$ w momentach $k \in (-\infty, -1]$, $[+1, +\infty)$ do wartości bezwzględnej odpowiedzi $Y_{0,0}$ w momencie $k = 0$, gdy nadany był ciąg $\vec{h} = \vec{\delta}_0$.

Równanie (52) posiada istotne znaczenie praktyczne. Pracę korektora transwersalnego można w pełni analizować przy sygnale nadawanym $\vec{h} = \vec{\delta}_0$.

Zadanie procesu korekcji, podane na początku tego rozdziału, sprowadza się do minimalizacji zniekształceń końcowych, których miara Δ_K jest określona równaniem (52).

Problem korekcji można sformułować następująco:

Przy danej odpowiedzi układu teletransmisyjnego $P_{0,k}$ na sygnał nadany $\vec{h} = \vec{\delta}_0$ oraz przy danej długości linii opóźniającej $(2J+1)$ należy wyznaczyć wzmocnienia W_i, przy których zniekształcenia końcowe Δ_K będą minimalne.

4. WŁASNOŚCI FUNKCJI Δ_K

Omówimy dwie własności zniekształceń końcowych Δ_K jako funkcji wzmocnień W_i.

Wartość wzmocnień w_i, $i \neq 0$, będziemy traktować jako i-te współrzędne $2J$ wymiarowego wektora $\vec{w}$ w przestrzeni euklidesowej E^{2J}. Wektor $\vec{w}$ będziemy nazywać wektorem stanu korektora.

Funkcja $\Delta_K(\vec{w})$ odwzorowuje przestrzeń wektorów $\vec{w}$ w ciało skalarów.

Własność 1. Funkcja $\Delta_K(\vec{w})$ określona przez (52) jest ciągła i liniowa w obszarach przestrzeni E^{2J}, dla których zachodzi:

$$\operatorname{sgn} Y_{0,k} = \operatorname{sgn}\Big(\sum_{i=-J}^{+J} w_i \cdot P_{0,k-i}\Big) = \text{const}, \tag{53}$$

gdzie:

$$\operatorname{sgn} Y_{0,k} \stackrel{df}{=} \begin{cases} -1 \text{ dla } Y_{0,k} < 0 \\ 0 \text{ dla } Y_{0,k} = 0 \\ +1 \text{ dla } Y_{0,k} > 0, \end{cases} \tag{54}$$

przy założeniu, że

$$Y_{0,0} = \sum_{i=-J}^{+J} w_i \cdot P_{0,-i} = 1. \tag{55}$$

Z założenia (55) wynika, że

$$w_0 = \frac{1}{P_{0,0}} \cdot \Big[1 - \sum_{i=-J}^{+J} \delta_{0,i} \cdot w_i \cdot P_{0,-i}\Big]. \tag{56}$$

Równanie (37), wyrażające odpowiedź $Y_{0,k}$, przekształcimy podstawiając w miejsce w_0 prawą stronę równania (56):

$$Y_{0,k} = \sum_{i=-J}^{+J} w_i \cdot P_{0,k-i} = w_0 \cdot P_{0,k} + \sum_{i=-J}^{+J} \bar{\delta}_{0,i} \cdot w_i \cdot P_{0,k-i} =$$

$$= \frac{P_{0,k}}{P_{0,0}}\Big[1 - \sum_{i=-J}^{+J} \bar{\delta}_{0,i} \cdot w_i \cdot P_{0,-i}\Big] + \sum_{i=-J}^{+J} \bar{\delta}_{0,i} \cdot w_i \cdot P_{0,k-i} =$$

$$= \frac{1}{P_{0,0}}\Big[P_{0,k} + \sum_{i=-J}^{+J} \bar{\delta}_{0,i} \cdot w_i (P_{0,0} \cdot P_{0,k-i} - P_{0,k} \cdot P_{0,-i})\Big]. \tag{57}$$

Po podstawieniu równań (55) i (57) do (52) otrzymamy:

$$\Delta_K(\vec{w}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{\delta}_{0,k} \Big| \frac{1}{P_{0,0}}\Big[P_{0,k} + \sum_{i=-J}^{+J} \bar{\delta}_{0,i} \cdot w_i (P_{0,0} \cdot P_{0,k-i} - P_{0,k} \cdot P_{0,-i})\Big]\Big| \tag{58}$$

Korzystając z definicji (54), równanie (58) zapiszemy w postaci:

$$\Delta_K(\vec{w}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{\delta}_{0,k} \frac{1}{P_{0,0}}\Big[P_{0,k} + \sum_{i=-J}^{+J} \bar{\delta}_{0,i} \cdot w_i (P_{0,0} P_{0,k-i} - P_{0,k} P_{0-i})\Big] \operatorname{sgn} Y_{0,k} \tag{59}$$

gdzie $Y_{0,k}$ określone jest równaniem (57).

Po przeprowadzeniu elementarnych przekształceń, równanie (59) przyjmie postać:

$$\Delta_K(\vec{w}) = \sum_{i=-J}^{+J} \bar{\delta}_{0,i} \cdot w_i \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{\delta}_{0,k} \cdot \operatorname{sgn} Y_{0,k} \cdot \frac{1}{P_{0,0}} (P_{0,0} \cdot P_{0,k-i} - P_{0,k} \cdot P_{0,-i}) +$$

$$+ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{\delta}_{0,k} \cdot \operatorname{sgn} Y_{0,k} \cdot \frac{P_{0,k}}{P_{0,0}} = \sum_{i=-J}^{+J} \bar{\delta}_{0,i} \cdot w_i \cdot A + B, \tag{60}$$

gdzie:

$$A = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{\delta}_{0,k} \cdot \operatorname{sgn} Y_{0,k} \cdot \frac{1}{P_{0,0}} (P_{0,0} \cdot P_{0,k-i} - P_{0,k} \cdot P_{0,-i}), \tag{61}$$

$$B = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{\delta}_{0,k} \cdot \operatorname{sgn} Y_{0,k} \frac{P_{0,k}}{P_{0,0}}, \tag{62}$$

$Y_{0,k}$ podane jest przez równanie (57).

Funkcja $\Delta_K(\vec{w})$, określona przez (60), jest liniowa dla takich składowych w_i wektora $\vec{w}$, przy których współczynnik A określony przez równanie (61) jest stały, a czynnik B określony równaniem (62) jest liniowy. Czynniki A i B zależą od w_i tylko poprzez funkcję sgn $Y_{0,k}$ [równanie (57)], która z założenia (53) jest stała.

Własność 1 została wykazana.

Przykład 1: Wyznaczyć funkcję $\Delta_K(\vec{w}^1)$, gdzie:

1)
$$\vec{w}^1 = \begin{cases} w_1 = \text{zmienne} \\ w_0 = \dfrac{1}{P_{0,0}} [1 - w_1 \cdot P_{0,-1}] \\ w_i = 0 \text{ dla } i \neq 0, 1 \end{cases}$$

2) Wartości $P_{0,k}$ na zerowym odczepie korektora wynoszą:

$$P_{0,k} = \begin{cases} 1 & \text{dla } k = 0 \\ 0{,}5 & \text{dla } k = 1 \\ -0{,}25 & \text{dla } k = -1 \\ 0 & \text{dla } -1 > k > 1. \end{cases}$$

Rozwiązanie: Korzystając z równań (60), (61) i (62) przy powyższych założeniach otrzymamy:

$$\Delta_K(\vec{w}^1) = Aw_1 + B,$$

gdzie:

$$A = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{\delta}_{0,k} \cdot \operatorname{sgn} Y_{0,k} (P_{0,k-1} + 0{,}25 \cdot P_{0,k}),$$

$$B = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{\delta}_{0,k} \cdot \operatorname{sgn} Y_{0,k} \cdot P_{0,k},$$

gdzie sgn $Y_{0,k}$ zgodnie z równaniem (57) wynosi:

$$\operatorname{sgn} Y_{0,k} = \operatorname{sgn}[P_{0,k} + w_1 (P_{0,k-1} + 0{,}25 P_{0,k})].$$

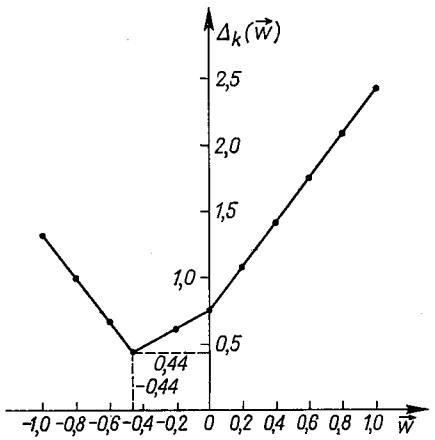
Podstawiając dane liczbowe do równań wyrażających sgn $Y_{0,k}$; A; B i $\Delta_K(\vec{w}^1)$, otrzymamy następujące wyniki:

w_1	−1	−0,8	−0,6	−0,44(4)	−0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
sgn $Y_{0,1}$	−1	−1	−1	0	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
sgn $Y_{0,2}$	−1	−1	−1	−1	−1	0	+1	+1	+1	+1	+1
sgn $Y_{0,-1}$	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
A	−1,5625	−1,5625	−1,5625	−0,4375	0,6875	1,1875	1,6875	1,6875	1,6875	1,6875	1,6875
B	−0,25	−0,25	−0,25	0,25	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75
Δ_K	1,3125	1	0,6875	0,4444	0,6125	0,750	1,0875	1,425	1,7625	2,10	2,375

Zmiana wartości współczynników A i B zachodzi dla $w_1 = 0$, ponieważ sgn $Y_{0,2}(w_1 = 0) = 0$, oraz dla $w_1 = -0{,}44(4)$, ponieważ sgn $Y_{0,1}(w_1 = -0{,}44(4)) = 0$.

Minimum funkcji $\Delta_K(\vec{w}^1)$ występuje dla

$$w_1 = -0{,}44(4).$$



Rys. 6. Wykres funkcji $\Delta_k(\vec{w})$ wg przykładu 1

Własność 2. Funkcja $\Delta_K(\vec{w})$ jest wypukła przy założeniu (55). Funkcja $\Delta_K(\vec{w})$ jest wypukła [6], jeżeli dla dowolnych wektorów $\vec{w}^1$ i $\vec{w}^2$, należących do obszaru określoności funkcji oraz dla λ takiego, że:

$$0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \tag{63}$$

zachodzi:

$$\Delta_K[\lambda\vec{w}^1+(1-\lambda)\vec{w}^2] \leqslant \lambda\Delta_K(\vec{w}^1)+(1-\lambda)\Delta_K(\vec{w}^2). \tag{64}$$

Dla wykazania tej własności skorzystamy z postaci $\Delta_K(\vec{w})$ wyrażonej równaniem (58). Zniekształcenia Δ_K dla

$$\vec{w} = \lambda\cdot\vec{w}^1+(1-\lambda)\vec{w}^2 \tag{65}$$

wynoszą:

$$\Delta_K[\lambda\cdot\vec{w}+(1-\lambda)\vec{w}^2] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{\delta}_{0,k}\left|\frac{P_{0,k}}{P_{0,0}}+\frac{1}{P_{0,0}}\sum_{i=-J}^{+J}\bar{\delta}_{0,i}[\lambda\cdot w_i^1+(1-\lambda)w_i^2](P_{0,0}P_{0,k-i}-P_{0,k}P_{0,-i})\right| =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{\delta}_{0,k} \left| \left[\frac{P_{0,k}}{P_{0,0}} \lambda + \frac{1}{P_{0,0}} \sum_{i=-J}^{+J} \bar{\delta}_{0,i} \cdot \lambda \cdot w_i^1 (P_{0,0} P_{0,k-i} - P_{0,k} P_{0,-i}) \right] + \right.$$

$$\left. + \left[(1-\lambda) \frac{P_{0,k}}{P_{0,0}} + \frac{1}{P_{0,0}} \sum_{i=-J}^{+J} \bar{\delta}_{0,i} (1-\lambda) \cdot w_i^2 (P_{0,0} P_{0,k-i} - P_{0,k} P_{0,-i}) \right] \right|. \tag{66}$$

Korzystając z nierówności trójkąta

$$|a+b| \leqslant |a| + |b| \tag{67}$$

można zapisać:

$$\Delta_K[\lambda \cdot \vec{w}^1 + (1-\lambda) \cdot \vec{w}^2] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{\delta}_{0,k} \cdot \lambda \cdot \left| \frac{P_{0,k}}{P_{0,0}} + \frac{1}{P_{0,0}} \sum_{i=-J}^{+J} \bar{\delta}_{0,i} \cdot w_i^1 (P_{0,0} P_{0,k-i} + P_{0,k} P_{0,-i}) \right| +$$

$$+ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{\delta}_{0,k} (1-\lambda) \left| \frac{P_{0,k}}{P_{0,0}} + \frac{1}{P_{0,0}} \sum_{i=-J}^{+J} \delta_{0,i} \cdot w_i^2 (P_{0,0} P_{0,k-i} - P_{0,k} P_{0,-i}) \right| =$$

$$= \lambda \cdot \Delta_K(\vec{w}^1) + (1-\lambda) \cdot \Delta_K(\vec{w}^2). \tag{68}$$

Z faktu, że funkcja $\Delta_K(\vec{w})$ jest wypukła, wynika następujący wniosek: Jeżeli dla pewnego wektora $\vec{w} = \vec{w}^0$ funkcja $\Delta_K(\vec{w}^0)$ posiada minimum lokalne, to nie istnieje inny wektor $\vec{w}$ w całym obszarze określoności $\Delta_K(\vec{w})$, przy którym wartość funkcji $\Delta_K(\vec{w})$ jest mniejsza od $\Delta_K(\vec{w}^0)$.

5. KOREKCJA ZNIEKSZTAŁCEŃ PRZY $\Delta < 1$

Omówimy sposób wyznaczenia takiego wektora $\vec{w}^0$, dla którego zachodzi:

$$\Delta_K(\vec{w}^0) \leqslant \Delta_K(\vec{w}) \tag{69}$$

w przypadku, gdy miara zniekształceń interferencyjnych sygnału odbieranego H_K jest mniejsza od jedności, to znaczy:

$$\Delta = \frac{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{\delta}_{0,k} \cdot |P_{0,k}|}{|P_{0,0}|} < 1. \tag{70}$$

Lucky [7] udowodnił następujące twierdzenie: Jeżeli zniekształcenia interferencyjne sygnału odbieranego są mniejsze od jedności, to minimum zniekształceń końcowych

$$\Delta_K(\vec{w}) = \min_{\vec{w}} \Delta_K \tag{71}$$

występuje dla wektora $\vec{w} = \vec{w}_0$, którego składowe w_i^0 spełniają równanie:

$$\sum_{k=-J}^{+J} \bar{\delta}_{0,k} \left| P_{0,k} + \sum_{i=-J}^{+J} \bar{\delta}_{0,i} \cdot w_i^0 (P_{0,0} P_{0,k-i} - P_{0,k} P_{0,-i}) \right| = 0. \tag{72}$$

Równanie (72) jest równoważne następującemu układowi $2J$ równań liniowych:

$$\left.\begin{aligned}
&P_{0,-J}+\sum_{i=-J}^{+J}\bar{\delta}_{0i}\cdot w_i^0(P_{0,0}\cdot P_{0,-J-i}-P_{0,-J}\cdot P_{0,-i})=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&P_{0,-1}+\sum_{i=-J}^{+J}\bar{\delta}_{0,i}\cdot w_i^0(P_{0,0}\cdot P_{0,-1-i}-P_{0,-1}\cdot P_{0,-i})=0\\
&P_{0,1}+\sum_{i=-J}^{+J}\bar{\delta}_{0,i}\cdot w_i^0(P_{0,0}\cdot P_{0,1-i}-P_{0,1}\cdot P_{0,-i})=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&P_{0,J}+\sum_{i=-J}^{+J}\bar{\delta}_{0,i}\cdot w_i^0(P_{0,0}\cdot P_{0,J-i}-P_{0,J}\cdot P_{0,-i})=0
\end{aligned}\right\}\tag{73}$$

Przez porównanie układu równań (73) z równaniem (57) widać, że minimum zniekształceń końcowych $\Delta_K(\vec{w})$ występuje dla takiego wektora $\vec{w}^0$, dla którego odpowiedź korektora $Y_{0,k}$ jest równa zeru w momentach

$$k=-J,\ldots,-1,+1,\ldots,+J,$$

czyli

$$Y_{0,k}=\frac{1}{P_{0,0}}\left[P_{0,k}+\sum_{i=-J}^{+J}\bar{\delta}_{0,i}\cdot w_i^0(P_{0,0}\cdot P_{0,k-i}-P_{0,k}\cdot P_{0,-i})\right]\Big|_{k\in\{\varkappa\}}=0,\tag{74}$$

gdzie:

$$\{\varkappa\}=\{-J,\ldots,-1,+1,\ldots,+J\}.\tag{75}$$

Zwróćmy uwagę, że równanie (57) wyraża odpowiedź korektora $Y_{0,k}$ w zależności od $2J$ wzmocnień w_i dla $i\neq 0$ przy założeniu, że w_0 spełnia równanie (56), to znaczy przy założeniu, że $Y_{0,0}=1$. Wobec tego składowe wektora $\vec{w}^0$ możemy wyznaczyć z układu $(2J+1)$ równań liniowych o postaci:

$$\left.\begin{aligned}
Y_{0,k}&=\sum_{i=-J}^{+J}w_i^0\cdot P_{0,k-i}\Big|_{k\in\{\varkappa\}}=0,\\
Y_{0,0}&=\sum_{i=-J}^{+J}w_i^0\cdot P_{0,-i}=1,
\end{aligned}\right\}\tag{76}$$

gdzie $\{\varkappa\}$ określony jest przez (75).

Jak widać, cytowane twierdzenie Lucky'ego sprowadza problem znajdowania wektora $\vec{w}^0$ minimalizującego funkcję $\Delta_K(\vec{w})$ w przypadku $\Delta<1$, do rozwiązania układu $(2J+1)$ równań liniowych o postaci (76).

Podstawiając równania (76) do (52) otrzymamy wyrażenie na minimum zniekształceń końcowych w formie:

$$\min_{\vec{w}}\Delta_K(\vec{w})=\Delta_K(\vec{w}^0)=\sum_{k=-\infty}^{-J-1}\left|\sum_{i=-J}^{+J}w_i^0\cdot P_{0,k-i}\right|+\sum_{k=J+1}^{+\infty}\left|\sum_{i=-J}^{+J}w_i^0\cdot P_{0,k-i}\right|.\tag{77}$$

Wprowadzimy definicję współczynnika korekcji α, jako stosunek zniekształceń interferencyjnych Δ do zniekształceń końcowych Δ_K

$$\alpha \overset{\text{df}}{=} \frac{\Delta}{\Delta_K}. \tag{78}$$

Jeżeli zniekształcenia sygnału odbieranego $\Delta < 1$, to po podstawieniu równań (77) i (33) do (78) otrzymamy wyrażenie na maksimum współczynnika korekcji w postaci:

$$\alpha_{max} = \frac{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overline{\delta}_{k,0} |P_{0,k}|}{|P_{0,0}| \cdot \sum_{k=-\infty}^{-J-1} \left| \sum_{i=-J}^{+J} w_i^0 \cdot P_{0,k-i} \right| + \sum_{k=J+1}^{+J} \left| \sum_{i=-J}^{+J} w_i^0 \cdot P_{0,k-i} \right|}. \tag{79}$$

Przykład 2. Odpowiedź kanału teletransmisyjnego $P_{0,k}$ na sygnał $\vec{h} = \vec{\delta}_0$ wynosi:

$$P_{0,-1} = -0{,}25$$
$$P_{0,0} = 1$$
$$P_{0,1} = 0{,}25$$
$$P_{0,k} = 0 \quad \text{dla} \quad 1 < k < -1.$$

Linia opóźniająca posiada trzy odczepy $+2J+1 = 3$.

Wyznaczyć wzmocnienie w_{-1}^0, w_0^0, w_1^0, oraz $\Delta_{K\,min}$.

Rozwiązanie: Zniekształcenia interferencyjne sygnału odbieranego wynoszą:

$$\Delta = \frac{|P_{0,-1}| + |P_{0,1}|}{|P_{0,0}|} = 0{,}75 < 1.$$

Wobec tego wzmocnienia w_i^0, przy których zniekształcenia końcowe będą minimalne, są pierwiastkami następującego układu równań:

$$\left.\begin{aligned} Y_{0,0} &= w_{-1}^0 \cdot P_{0,+1} + w_0^0 \cdot P_{0,0} + w_1^0 \cdot P_{0,-1} = 1 \\ Y_{0,1} &= w_{-1}^0 \cdot P_{0,2} + w_0^0 \cdot P_{0,1} + w_1^0 \cdot P_{0,0} = 0. \\ Y_{0,-1} &= w_{-1}^0 \cdot P_{0,0} + w_0^0 \cdot P_{0,-1} + w_1^0 \cdot P_{0,-2} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych i rozwiązaniu względem w_1^0, w_0^0 i w_{-1}^0 otrzymamy:

$$w_{-1}^0 = 0{,}2$$
$$w_0^0 = 0{,}8$$
$$w_1^0 = -0{,}4.$$

Zniekształcenia końcowe po podstawieniu wartości liczbowych do równania (77) wynoszą:

$$\Delta_K = 0{,}17.$$

Współczynnik korekcji α jest równy:

$$\alpha = \frac{\Delta}{\Delta_K} = \frac{0{,}75}{0{,}17} = 4{,}4.$$

Przykład 3. Przy założeniach jak w przykładzie 1, obliczyć $\Delta_{K\,min}$.

$$Y_{0,1} = P_{0,1} + w_1^0 (P_{0,0} + 0{,}25 \cdot P_{0,1}) = 0.$$

Stąd:

$$w_1^0 = -\frac{P_{0,1}}{P_{0,0}+0{,}25 \cdot P_{0,1}} = \frac{-0{,}5}{1+0{,}25 \cdot 0{,}5} = -0{,}44(4),$$

$$\Delta_{K\,min} = 0{,}444.$$

Wynik ten jest zgodny z wykresem funkcji $\Delta_K(w_i)$ podanym na rys. 6.

6. ZNIEKSZTAŁCENIA $\Delta > 1$

Jeżeli zniekształcenia interferencyjne Δ sygnału odbieranego H_k są mniejsze od jedności, to twierdzenie podane w rozdz. 5 pozwala w sposób jednoznaczny określić wzmocnienia w_i, przy których zniekształcenia końcowe Δ_K osiągają minimum. W przypadku gdy zniekształcenia Δ są większe od jedności, to wówczas wyznaczenie wzmocnień w_i metodą podaną w rozdz. 5 nie musi prowadzić do minimalizacji Δ_K. Pokażemy to na następującym przykładzie:

Przykład 4. Odpowiedź kanału na sygnał $\vec{h} = \vec{\delta}_0$ wynosi:

$$P_{0,k} = 0 \quad \text{dla} \quad k \leqslant -5$$

$$P_{0,-4} = 0{,}5 \qquad P_{0,-1} = 0{,}2 \qquad P_{0,2} = -0{,}75$$

$$P_{0,-3} = -0{,}75 \qquad P_{0,0} = 1 \qquad P_{0,3} = 0{,}75$$

$$P_{0,-2} = 0{,}75 \qquad P_{0,1} = 0{,}05 \qquad P_{0,4} = -0{,}5$$

$$P_{0,k} = 0 \quad \text{dla} \quad k \geqslant 5.$$

Linia opóźniająca korektora posiada 3 odczepy: $2J+1 = 3$. Wyznaczyć zniekształcenia końcowe Δ_K, jeżeli wzmocnienia w_{-1}, w_0 i w_1 zostały wyznaczone zgodnie z twierdzeniem Lucky'ego [równania (76)].

Rozwiązanie. Zniekształcenia interferencyjne Δ po podstawieniu wartości liczbowych do równania (33) wynoszą:

$$\Delta = 4{,}25.$$

Wartości wzmocnień w_i znajdziemy z układu równań:

$$\left.\begin{aligned} w_{-1}+0{,}2 \cdot w_0+0{,}75 \cdot w_1 &= 0 \\ 0{,}05w_{-1}+w_0+0{,}2 \cdot w_1 &= 1 \\ -0{,}75w_{-1}+0{,}05w_0+w_1 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Po rozwiązaniu otrzymamy:

$$\begin{aligned} w_{-1} &= -0{,}101 \\ w_0 &= 1 \\ w_1 &= -0{,}132. \end{aligned}$$

Wartości chwilowe sygnału wyjściowego $Y_{0,k}$ otrzymamy po podstawieniu wartości liczbowych do równania:

$$Y_{0,k} = \sum_{i=-1}^{+1} w_i \cdot P_{0,k-i}.$$

Po obliczeniu mamy:

$$Y_{0,-5} = 0{,}0505 \qquad Y_{0,2} = -0{,}83235$$
$$Y_{0,-4} = 0{,}57575 \qquad Y_{0,3} = 0{,}8995$$
$$Y_{0,-3} = -0{,}89175 \qquad Y_{0,4} = -0{,}599$$
$$Y_{0,-2} = 0{,}8288 \qquad Y_{0,5} = 0{,}066$$
$$Y_{0,-1} = 0 \qquad Y_{0,k} = 0 \quad \text{dla} \quad -5 > k > 5$$
$$Y_{0,0} = 1$$
$$Y_{0,1} = 0$$

Zniekształcenia końcowe Δ_K otrzymamy po podstawieniu wartości $Y_{0,k}$ do wzoru (52):

$$\Delta_K = \frac{\sum_{k=-5}^{+1} \bar{\delta}_{0,k} |Y_{0,k}|}{|Y_{0,0}|} = 4{,}743.$$

Współczynnik korekcji

$$\alpha = \frac{\Delta}{\Delta_K} = \frac{4{,}25}{4{,}743} \simeq 0{,}9.$$

Jak widać, jeżeli korektor nastawiony będzie wg algorytmu słusznego dla $\Delta < 1$, to zniekształcenia końcowe Δ_K będą większe od zniekształceń Δ sygnału odbieranego.

Politechnika Warszawska
Katedra Urządzeń Teletransmisyjnych i Telegraficznych

WYKAZ LITERATURY

1. Baran Z.: Transmisja z niesymetryczną modulacją fazy. Rozprawa doktorska, 1966.
2. Bennett W. R., Davey J. R.: Data Transmission. McGraw-Hill Book Company, 1965.
3. Cuccia C. L.: Harmonics, Sidebands and Transients in Communication Engineering. McGraw-Hill Book Company, 1952.
4. Gibson E. D.: An Intersymbol Adjustment Method of Distortion Compensation. 5th National Convention on Military Electronics, 1961, pp. 196—207.
5. Kallman H. E.: Transversal Filters. — Proc. IRE, vol. 28, July 1940, pp. 302—310.
6. Karlin S.: Matiematiczeskije mietody w tieorii igr, programmirowanii i ekonomikie. — Mir, Moskwa 1964.
7. Lucky R. W.: Automatic Equalization for Digital Communication. — BSTJ, April 1965, Nr. 4, pp. 547—588.
8. Nyquist H.: Certain Topics in Telegraph Transmission Theory. — Trans. AIEE, Nr. 47, 1928.
9. Rappeport M. A.: Automatic Equalization of Data Transmission Facility Distortion Using Transversal Equalizers. — AIEE Trans. on Communication Technology, September 1964, pp. 65—73.
10. Sunde E. D.: Theoretical Fundamentals of Pulse Transmission. — BSTJ, May 1954, pp. 721—788, i BSTJ, July 1954, pp. 987—1010.

M. DĄBROWSKI

THE MINIMIZING OF INTERSYMBOL INTERFERENCE WITH THE AID OF TRANSVERSAL FILTER

Summary

This paper considers the problem of intersymbol interference in M-ary data transmission. The correction of intersymbol interference with the aid of transversal filters is discussed. The properties of the remaining distortion are described as a function of tap gains of the transversal equalizers.

M. DĄBROWSKI

LA CORRECTION TRANSVERSALLE DES DISTORSIONS D'INTERFÉRENCE DANS LA TRANSMISSION DES DONNÉES

Résumé

On a effectué une révue des problèmes liés avec la correction transversalle des distorsions d'interférence dans la transmission des données à m-valeurs. Les distorsions d'nterférence sont liées avec la limitation de la bande des fréquences, l'instabilité de la caractéristique amplitude-fréquence ainsi qu'avec non-linéarité de celle phase-fréquence du canal de ligne. On a analysé les principes de la correction des distorsions d'interférence en employant les filtres transversaux. On a prouvé, que la correction peut être réalisée en cas de la transmission d'une unique impulsions aussi bien qu'en cas de la transmission d'une série quelconque des impulsions. On a présenté des fonctions en cas de lesquelles les distorsions Δ_k constituent une fonctions convexe et linéaire des amplifications w_i du correcteur. On a considéré la théorème de Lucky concernant la correction des distorsions d'interférence en cas de $\Delta < 1$.

М. ДОМБРОВСКИ

КОРРЕКЦИЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ИСКАЖЕНИЙ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ

Резюме

Представлен обзор вопросов, связанных с коррекцией интерференционных искажений в каналах передачи данных. Интерференционные искажения связаны с ограничением полосы частот, неустойчивостью амплитудно-частотной характеристики и нелинейностью фазо-частотной характеристики канала передачи данных. Рассмотрены основы коррекции интерференционных искажений с помощью гармонических фильтров. Доказано, что можно осуществить коррекцию при передаче одиночного импульса так же успешно, как при передаче произвольного ряда импульсов. Приведены предварительные положения, при которых искажения Δ_k являются выпуклой и линейной функцией усилений w_i корректора. Рассмотрена тоже теорема Люки о коррекции интерференционных искажений при $\Delta < 1$.

621.3.053

HENRYK KONCZYŃSKI

Ekwipotencjalny układ uziemień telekomunikacyjnych

Rękopis dostarczono 16. 1. 1968

W artykule rozpatrzono zagadnienie układu sieci uziemiającej dla obiektów telekomunikacyjnych w powiązaniu z obowiązującymi obecnie wymaganiami dotyczącymi dziedziny urządzeń elektroenergetycznych, kabli transmitujących wysokie częstotliwości oraz ochrony odgromowej.

W wyniku rozważań opracowano unowocześniony układ uziemień zamiast układu uziemień dotychczas stosowanego w Polsce dla obiektów telekomunikacyjnych. Dotychczasowy układ uziemień nie odpowiada już nowym wymaganiom wymienionych wyżej dziedzin, a ponadto wykonanie według dawnych założeń odbiega w praktyce od rozwiązań teoretycznych, a więc nie zapobiega skutecznie różnym zakłóceniom przesyłanych sygnałów telekomunikacyjnych i powiększa niebezpieczeństwo korozji kabli.

1. WSTĘP

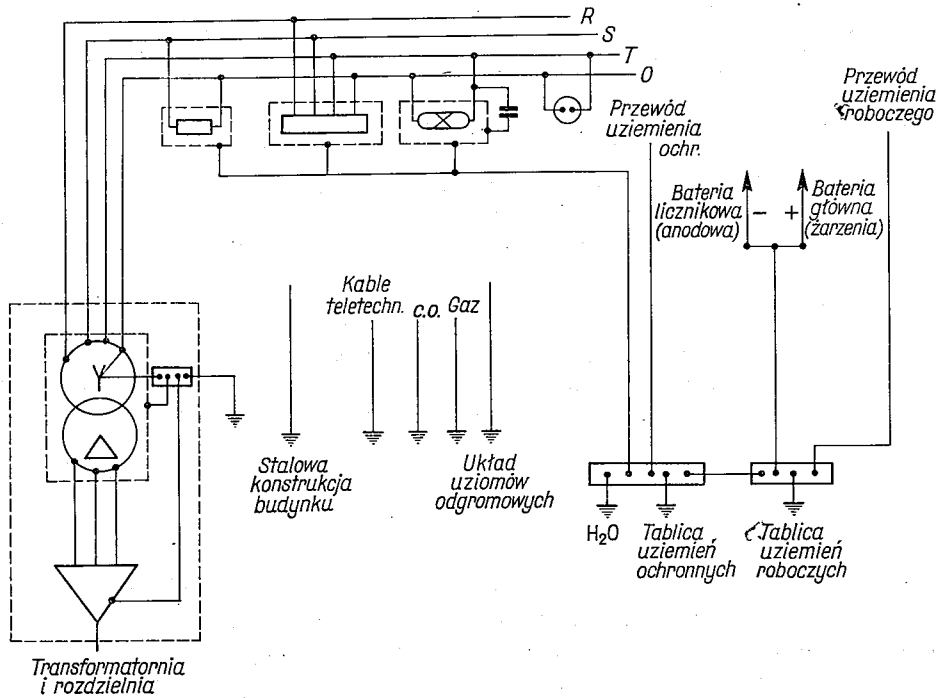
W obiektach telekomunikacyjnych stosuje się dotychczas w Polsce osobne układy uziemień energetycznych, piorunochronnych, telekomunikacyjnych roboczych, telekomunikacyjnych ochronnych, a niekiedy również osobne układy innych uziemień, np. ekranowych. Zwłaszcza uziemienia piorunochronne stanowią nieruszalny dotychczas osobny układ uziemień. To samo dotyczy układu uziemień energetycznych, których nie łączono nigdy z układem uziemień telekomunikacyjnych, niezależnie od tego, czy stosowano zerowanie, czy uziemienia. To oddzielanie uziemień telekomunikacyjnych o różnych przeznaczeniach od innych uziemień nie jest ani słuszne, ani konieczne przy zachowaniu jednak pewnych niezbędnych warunków, które będą omówione poniżej.

Na początek zaznaczmy, że szybki postęp elektryfikacji kraju oraz wprowadzenie zerowania jako środka bezpieczeństwa, stwarzają coraz większe niebezpieczeństwo przenikania do obwodów rozmównych prądów indukowanych o częstotliwościach 50 Hz i ich wyższych harmonicznych. Do tego dochodzą jeszcze zakłócenia powstające od nadajników średnio i długofalowych o dużej mocy, nakładające się na pasma częstotliwości nośnej o tej samej częstotliwości, jeżeli obiekt łączności znajduje się w pobliżu obiektu nadawczego radia lub telewizji. Wszystkie te i inne zakłócenia mogą przenikać najłatwiej poprzez przewody uziemienia roboczego, którego jednym z zadań jest ustalenie potencjału na jednym z biegunów obwodów rozmównych.

2. UKŁAD UZIEMIEŃ DOTYCHCZAS STOSOWANY

Aby zapobiec przenikaniu prądów zakłócających do obwodów rozmównych, stosowany jest powszechnie w kraju i za granicą gwiaździsty układ uziemień. W układzie tym przewody

od uziomów ochronnych biegną do tabliczki uziemienia ochronnego, od której odchodzą promieniowo do obudowy przyrządów i konstrukcji teletechnicznych podlegających uziemieniu. To samo tyczy się przewodów dochodzących do tabliczki uziemienia roboczego. Obydwa rodzaje przewodów muszą ponadto być tak prowadzone, aby żaden z nich nie tworzył pętli, a więc wszelkie ciągi przewodów uziemionych każdego uziemienia nie po-



Rys. 1. Układ uziemień w obiektach telekomunikacyjnych CA bądź SW dotychczas zalecany

winny nigdzie łączyć się galwanicznie poza właściwą tabliczką uziemień. W ten sposób każdy punkt urządzeń technicznych w obiekcie telekomunikacyjnym podlegający uziemieniu musiał być dołączony do odpowiedniej tabliczki uziemień tylko jeden raz. Aby zasada ta była konsekwentnie przeprowadzona, należało przestrzegać nie tylko oddzielnego prowadzenia przewodów ochronnych i roboczych i skutecznego ich wzajemnego izolowania, lecz również unikania wszelkich zbędnych połączeń między urządzeniami.

Należy nadmienić, że utrzymując w mocy wszystko wyżej powiedziane zaczęto od pewnego czasu łączyć tabliczkę uziemień roboczych z tabliczką uziemień ochronnych bez zmiany układu gwiaździstego uziemień, co nie wprowadzało dostrzegalnych dodatkowych zakłóceń. Nie zmieniono jednak w dalszym ciągu układu gwiaździstego uziemień, wobec czego ekrany kabli stacyjnych mogły być łączone do przewodu uziemiającego tylko na jednym końcu.

Poza skutecznym rozdziałem przewodów biegnących do tabliczki uziemień roboczych od przewodów biegnących do tabliczki uziemień ochronnych i utrzymaniem układu gwiaździstego (według dotychczasowych zasad), ołowiane powłoki kabli TKD i TKO musiały

być oddzielane na stacjach telekomunikacyjnych za pomocą muf izolacyjnych od ustawionych w sposób izolowany od ziemi stojaków głowicowo-transformatorowych. W ten sposób starano się zapobiec przedostawaniu się do obwodów rozmównych zakłóceń płynących po powłokach kabli. Sposób ten zabezpieczał jednocześnie obsługę przed porażeniem przy wystąpieniu indukowanych napięć w żyłach kabli telekomunikacyjnych.

W praktyce jednak okazało się, że gwiaździsty system uziemień już po krótkim okresie eksploatacji obiektów zostaje zatracony. Dlatego też ostatnimi czasy niektóre biura projektowe przestały przestrzegać zasad systemu gwiaździstego uziemień, wprowadzając jednocześnie łączenie wielu uziomów naturalnych do wspólnej tabliczki uziemień. Nie zwrócono jednak uwagi, że takie łączenie powłok kabli bez przestrzegania pełnej ekwipotencjalności układu i zasad podanych w niniejszej pracy (rozdz. 3.1) może przyspieszyć korozję kabli.

Ponadto wprowadzone przez niektóre biura projektowe przy systemie zerowania wykorzystywanie przewodu zerującego do uziemiania obudowy przyrządów jest błędem (bez przestrzegania zasad podanych w 3.2.1 i 3.2.2) i musi spowodować zwiększony poziom zakłóceń w obwodach rozmównych. Z tych względów powinien być (o czym będzie jeszcze mowa poniżej) instalowany dodatkowo przewód ochronny, niezależnie od tego, czy jest na obiekcie własny transformator, czy też go nie ma, oraz czy jest stosowane zerowanie, czy uziemienie. Nawet bowiem wzdłuż krótkich odcinków przewodu zerującego i dołączonych do niego obudów przyrządów będą płynąć po obwodach prądy wyrównawcze i indukować w urządzeniach teletechnicznych prądy zmienne o różnej częstotliwości.

3. PRZYSZŁOŚCIOWY UKŁAD UZIEMIEŃ

Celem opisanego poniżej układu uziemień jest powiązanie bezpieczeństwa obsługi ze zmniejszeniem zakłóceń w obwodach rozmównych oraz z uzyskaniem niskiej impedancji (Z) przy wielkich częstotliwościach stosowanych w technice teletransmisyjnej (1 MHz) i telewizyjnej (5 MHz). Jednocześnie proponowany poniżej układ uziemień ma na celu wyeliminowanie zupełnie zbędnych wydatków na izolowanie poszczególnych urządzeń czy układów.

Otóż z licznych badań i pomiarów przeprowadzanych od roku 1959 przez Instytut Łączności w obiektach telekomunikacyjnych na terenie Polski [7.9] wynika, że wymagane odizolowanie stojaków głowicowo-transformatorowych i ciągów przewodów uziemionych ma miejsce jedynie w nowouruchamianych obiektach łączności i że po bardzo krótkim okresie eksploatacji obiektu, a nawet przed ukończeniem budowy, powyżej podane odizolowanie zatraca się, wobec czego zasada gwiaździstego układu uziemień przestaje istnieć. W wyniku takich nieintencjonalnych połączeń następuje zazwyczaj zwiększanie poziomu zakłóceń i przesłuchów oraz zwiększone niebezpieczeństwo korozji kabli dalekosiężnych wprowadzonych do stacji teletransmisyjnych.

Niezależnie jednak od tego, po wprowadzeniu do eksploatacji kabli współosiowych i kabli symetrycznych telefonii nośnej o dużej krotności oraz kanałów dla telewizji, sama zasada gwiaździstego prowadzenia przewodów uziemionych nie może być utrzymana, gdyż:

a) w telefonicznych kablach symetrycznych o zakresie przenoszenia częstotliwości ponad 250 kHz [3] należy ze względu na przesłuchy łączyć powłokę metalową kabli z uziemieniem roboczym urządzeń wzmacniakowych;

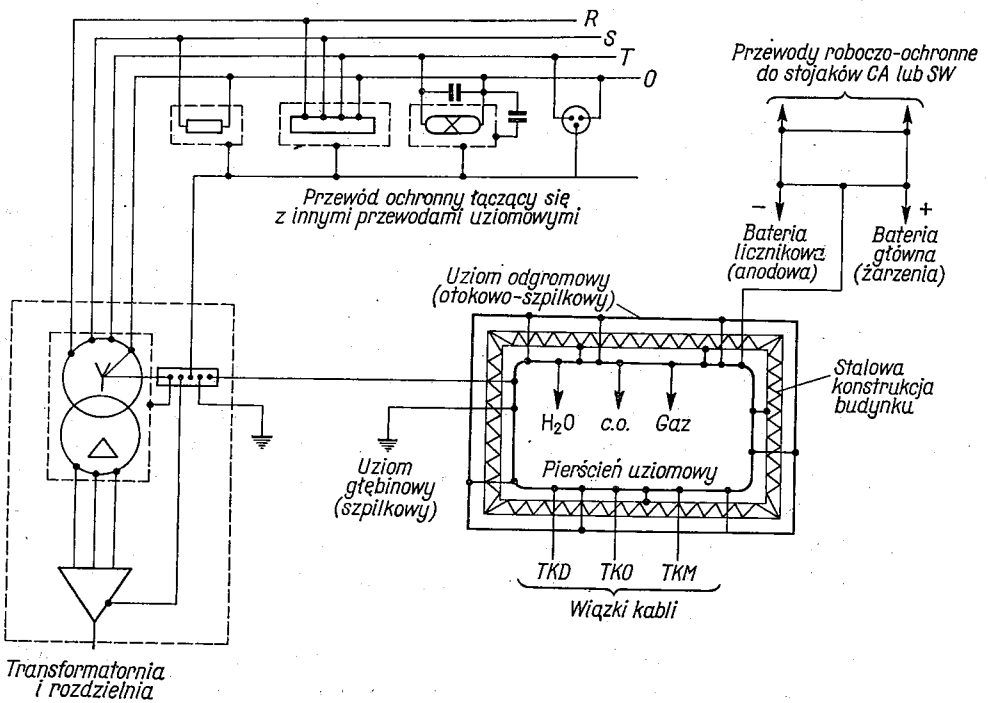
b) w kablach współosiowych przewód zewnętrzny (rura) powinien być połączony z metalową uziemioną powłoką kabla na obydwu końcach, w celu zmniejszenia wpływu zakłóceń; ponadto przewód zewnętrzny (rura) powinien być połączony z obudową urządzeń wzmacniakowych dla uniknięcia przesłuchów;

c) ze względu na oddziaływanie linii elektroenergetycznych na telekomunikacyjne linie kablowe powłoki kabli telekomunikacyjnych na obydwu końcach powinny być uziemione, a rezystancja uziemień powinna być możliwie jak najmniejsza;

d) w celu zmniejszenia wpływu zakłócającego na częstotliwościach nośnych, przychodzącego od nadajników średnio i długofalowych o dużej mocy, należy uziemiać na obydwu końcach ekrany okablowania stacyjnego; można wówczas uzyskać działanie redukcyjne ekranów na płynące po nich prądy zakłócające w.cz. [1].

Wykonując wszystkie wyżej podane połączenia wprowadzimy galwaniczne powiązania „ziemi" roboczej czy ochronnej oraz jednej z drugą w wielu punktach poza tabliczką uziemień, a więc gwiaździsty układ uziemień przestanie istnieć. Postępując dalej konsekwentnie można by łączyć również wszystkie konstrukcje metalowe do wspólnego uziemienia.

Jeżeli jeszcze do tego układu dołączylibyśmy konstrukcję metalową budynku oraz w pewnych miejscach (rys. 2) i pod pewnymi niezbędnymi warunkami (rozdziały 3.2 oraz 3.3) przewód zerowy sieci elektroenergetycznej i instalację piorunochronną, wówczas



Rys. 2. Ekwipotencjalny układ uziemień proponowany dla obiektów telekomunikacyjnych CA bądź SW

otrzymalibyśmy ostatecznie ekwipotencjalny układ uziemień o postaci zbliżonej do siatki rozciągającej się na cały obszar obiektu łączności i wyrównujący wszelkie różnice potencjałów pomiędzy poszczególnymi urządzeniami obiektu. Aby drogi łączenia wszystkich po-

wyżej podanych urządzeń były jednak jak najkrótsze, należałoby w układzie tym zamiast dwu szyn (tablic) zbiorczych uziemienia roboczego i ochronnego zastosować pierścień uziomowy umieszczony w piwnicy budynku i obiegający od wewnątrz w zasadzie wszystkie ściany zewnętrzne budynku. Pierścień ten tworzyłby obwód zamknięty. Taki układ szyny zbiorczej miałby tę zaletę, że obniżałby rezystancję uziemienia, gdyż powłoki kablowe, rura zewnętrzna kabla współosiowego, przewody wodociągowe, gazowe, ogrzewnicze, stal konstrukcyjna budynku oraz wszelkie metalowe urządzenia byłyby dołączone najkrótszą drogą do tego pierścienia uziomowego, stanowiącego szynę zbiorczą uziemień. Do tego pierścienia dołączony byłby również środek uzwojenia wtórnego transformatora zasilającego.

Ekwipotencjalny układ uziemień będzie więc, jak z powyższego wynika, wielokrotnie zamkniętym układem, skutkiem czego na wszystkich wyznaczonych do uziemienia punktach urządzeń telekomunikacyjnych będzie istniał w zasadzie jednakowy potencjał. Im więcej punktów uziemionych będzie między sobą połączonych, tym mniejsze będą występować różnice potencjałów (rzędu miliwoltów), a więc i tym mniejsze będą prądy zakłócające. Tak więc, dzięki łączeniu wszelkich mas metalowych, kabli, rur wodociągowych i gazowych, otrzymane uziemienie ekwipotencjalne będzie posiadało małą rezystancję, a dzięki wyżej podanym połączeniom kabli — małą reaktancję, co wpłynie na zmniejszenie zakłóceń od napięć w.cz. (między innymi od trzasków rozłączania różnych urządzeń) oraz na zwiększenie bezpieczeństwa dotyku.

Jedynym wyjątkiem mogłyby być istniejące jeszcze stojaki głowicowo-transformatorowe z głowicami starego typu, które ze względu na bezpieczeństwo obsługi miały być według przepisów [12, 13, 16] izolowane elektrycznie, dopóki nie zostałyby wymienione na nowy typ głowic. Należy jednak zauważyć, że Instytut Łączności wykonał [7, 9] pomiary rezystancji izolacji stojaków głowicowo-transformatorowych na kilkudziesięciu stacjach teletransmisyjnych i tylko w jednym przypadku stacji, będącej jeszcze w końcowej fazie budowy, stojak ten był izolowany. Natomiast na pozostałych badanych obiektach stojaki głowicowo-transformatorowe były nieintencjonalnie uziemione w różny sposób, np. przez rurki stalowe i bergmanowskie zwierające drabinki z wstawkami izolacyjnymi, przez dodatkowo ułożone dla potrzeb wewnętrznych stacji jedno- lub kilkuparowe kable w płaszczu ołowianym, przez instalacje kontroli ciśnieniowej, przez nieizolowane linki uziemienia ochronnego itp. Ze względu więc bezpieczeństwa obsługi byłoby lepiej, gdyby stojaki te były świadomie uziemione, a obsługa stacji informowana wywieszką z ostrzeżeniem, że stojaki te nie są izolowane od ziemi.

Korzyści ekonomiczne ekwipotencjalnego układu uziemień polegają na wykorzystywaniu obudowy przyrządów i wszelkich konstrukcji metalowych jako przewodów odprowadzających, a ponadto na zbędności izolowania niektórych urządzeń. Na tym zbędnym izolowaniu całych konstrukcji stojaków od ścian i podłogi za pomocą izolatorów wsporczych i na zbędnym izolowaniu drabinek oraz ciągów kablowych można poczynić bardzo duże oszczędności w gospodarce narodowej. Ponadto doświadczenie wykazało, że uziemienie robocze urządzeń teletransmisyjnych jest powodem zakłóceń pochodzących od wpływów innych uziemień zbudowanych dla tego samego budynku, czego unika się przy zredukowaniu prądów wyrównawczych dzięki sprowadzeniu potencjałów we wszystkich punktach uziemionych do jednego w przybliżeniu poziomu.

Największą jednak zaletą układu ekwipotencjalnego uziemień jest to, że przy rozdzielonym prowadzeniu przewodów do uziemień roboczych i ochronnych możliwe jest prawie bez strat rozchodzenie się fal od napięć zakłócających wielkiej częstotliwości, powodujących zakłócenia w obwodach telekomunikacyjnych, np. od trzasków rozłączania obwodów, co da się skutecznie zmniejszyć właśnie przez niskoomowe połączenie uziemień roboczego i ochronnego, powodując usunięcie różnicy potencjałów między urządzeniami. Mianowicie gdy punkty uziemień, do których ekrany kabli powinny być z obu stron przyłączone, nie wykazują różnicy potencjałów, wówczas działanie redukcyjne ekranu będzie najskuteczniejsze i unikniemy wpływów zakłócających.

Mogą jednak powstać obawy, że ten system uziemień spowoduje:

a) zwiększenie niebezpieczeństwa korozji kabli,

b) nadal jeszcze za mało skuteczne zmniejszenie zakłóceń w teletransmisji.

Rozpatrzymy po kolei te dwa zagadnienia.

3.1. Niebezpieczeństwo korozji kabli

W celu rozpatrzenia tego zagadnienia podajemy na wstępie tablice 1 i 2, zawierające wyniki pomiarów rezystancji uziemień w kilkunastu istniejących centralach telefonicznych i stacjach wzmacniakowych.

Tablica 1

Rezystancje uziomów central telefonicznych w omach

Nr porządkowy centrali	Ilość numerów centrali	R_r	R_o	R_h	R_g	R_s	R_k	R_w
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1400	2,0	0,1	1,4	0,35	0,07	1,12	0,06
2	1000	0,56	0,57	1,52	132	0,4	0,42	0,3
3	1000	0,19	0,35	2,06	38	0,18	0,2	0,17
4	5000	0,28	0,3	0,2	—	0,09	0,1	0,08
5	1400	28	59	5,0	77	5,1	0,46	0,44
6	10000	0,54	2,3	0,2	—	0,16	0,17	0,1
7	10000	1,0	—	0,2	—	0,2	0,21	0,17
8	CMM	0,17	0,2	0,21	5,1	0,17	0,12	0,1

R_r rezystancja uziomu roboczego
R_o ,, ,, ochronnego
R_g ,, ,, odgromowego
R_h ,, sieci wodociągowej
R_s ,, sumaryczna $(R_r+R_o+R_h+R_g)$
R_k ,, sieci kablowej
R_w ,, wynikowa (R_s+R_k)

Tablica 2

Rezystancje uziomów stacji teletransmisyjnych w omach*)

Nr porządkowy SW	Ilość łączy	R_r	R_0	R_h	R_g	R_s	R_k	R_w
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	320	3,8	3,0	2,1	3,65	0,7	0,65	0,6
2	72	0,15	0,17	0,2	0,7	0,1	0,25	0,08
3	72	3,4	3,5	5,5	14,1	14,1	0,44	0,36
4	72	500	4,2	0,9	1,2	0,5	0,19	0,16
5	72	12,1	3,0	1,0	2,9	0,5	0,25	0,16
6	96	8,5	8,45	0,97	8,8	0,88	0,76	0,55
7	96	3,1	9	1,2	17	1,1	0,97	0,7
8	320	6,5	4,7	0,58	2,5	0,37	0,35	0,2
9	240	0,12	0,17	1,9	0,6	0,11	0,12	0,1
10	240	2,7	1,6	0,95	4,1	0,9	1,1	0,85
11	320	2	2,3	1,65	3,6	0,98	1,5	0,95
12	312	1,25	0,88	2	2,5	0,25	0,15	0,11
13	312	0,5	0,85	0,8	2,2	0,24	0,22	0,2

[1]) Oznaczenie rezystancji jak w tablicy 1.

Otóż w niektórych kołach teletechników istnieje obawa, że skutkiem dołączenia powłok ołowianych kabli do konstrukcji stojaków, a jednocześnie pośrednio, dołączenia do konstrukcji uziemionego bieguna baterii, mogłoby nastąpić szkodliwe dla powłok kabli odgałęzienie prądu i w wyniku tego korozja kabli. Obawa ta nie jest jednak słuszna, jeżeli zmniejszymy jak najbardziej spadek napięcia na uziemionej szynie zasilającej oraz na zamkniętym pierścieniu uziomowym, powodującym niwelowanie wpływających do niego prądów. Nie będzie wówczas wyraźnej różnicy potencjałów między powłoką kabla a ziemią odniesienia skutkiem spadku napięcia na przewodach. W tym celu przekrój szyny zasilającej powinien być odpowiednio duży. Oczywiście przekrój pierścienia uziomowego (Cu) musi być również odpowiednio duży, aby prąd stały wchodzący do niej rozgałęział się we wszystkie strony i na wszystkie uziomy, których ilość (naturalnych i roboczych) powinna być duża. Należy zwracać uwagę, aby spadek napięcia w przewodzie biegnącym od uziemionego bieguna źródła prądu stałego do stojaków, z którymi są połączone powłoki kabli, nie przekraczał 0,45 V [3], gdyż mogłaby powstać obawa, że większy spadek napięcia mógłby ewentualnie wpłynąć na korozję powłok kabli. Oczywiście, że tej wielkości spadku napięcia nie jest trudno utrzymać.

Należy jeszcze nadmienić, że obawiać się korozji od zasilania stacji prądem stałym można byłoby jedynie przy bardzo dużych stacjach CA lub SW, gdzie prądy wyrównawcze (upływu) do ziemi mogą być duże. Z drugiej strony, im większa stacja, tym więcej kabli, więcej rur o różnym przeznaczeniu, a więc niewielki prąd nie zniwelowany w pierścieniu uziomowym będzie się rozpływać wieloma drogami, co łatwo wywnioskować z załączonych tablic 1 i 2.

Niewspółmiernie zresztą mniejsze będzie niebezpieczeństwo korozji kabli od prądów wyrównawczych (upływu) przy systemie ekwipotencjalnym uziemień niż przy dotychczasowym systemie gwiaździstym, przy którym kable zawsze są połączone przypadkowo i najróżnorodniej z siecią uziemień. Dlatego też w ostatnich czasach przepisy w niektórych krajach, np. w Holandii dozwalają w centralach uziemienia telekomunikacyjne zastępować przez same kable w powłokach przewodzących. Oczywiście stawiane są wówczas pewne niezbędne warunki, dotyczące np. ilości i długości kabli dochodzących do obiektu. Przy takich rozwiązaniach budowa osobnych uziemień energetycznych i odgromowych nadal jednak obowiązuje według przepisów tych krajów.

Uziemienie jednak wyłącznie za pośrednictwem kabli nie wydaje się, naszym zdaniem, słuszne, gdyż odprowadzenie ciągłych prądów upływu wyłącznie przez kable może dać ujemne skutki. Ponieważ w istniejących stacjach rezystancja R_s jest co najwyżej równa rezystancji kabli R_k (tablice 1 i 2), więc naszym zdaniem należy budować dodatkowe uziemienia sztuczne o małym oporze, a więc głębinowe (szpilkowe). Jest to tym bardziej słuszne dla warunków gruntowych w Polsce, że w okresie mrozów ziemia przemarza w Polsce na głębokość do 1,2 metra, a uziomy poziome układane są na głębokości około 0,75 m; rezystywność zaś gruntu zwiększa się przy obniżaniu jego temperatury kilkadziesięciokrotnie.

Co się jeszcze tyczy prądów wyrównawczych powstających między różnymi współpracującymi ze sobą centralami telefonicznymi, to są one o zmiennym natężeniu i kierunku, a więc wzajemnie się kompensują.

Jeżeli chodzi o urządzenia trójprzewodowe, używane np. w telegrafii, z uziemionym przewodem środkowym, to w tym przypadku płynie w przewodzie zerowym tylko nieznaczny prąd i to w jednym lub drugim kierunku, a więc działania jego kompensują się.

Z powyższych rozważań wynika, że niebezpieczeństwo korozji kabli przy układzie ekwipotencjalnym uziemień praktycznie nie będzie istnieć, jeżeli zostanie właściwie wykonana całość sieci uziemiającej.

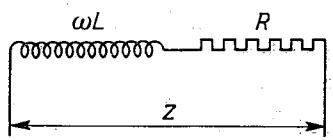
3.2. Prądy zakłócające

Stosowanie jako uziomów wyłącznie płaszczy kabli dla central telefonicznych (jak podano w 3.1) nie jest słuszne.

Poza innymi znanymi powszechnie przeciwwskazaniami wiemy, że płaszcze kabli i pary żył (*a* i *b*) są ze sobą sprężone przez pojemności *Ca* i *Cb*, prąd więc zakłócający I_z, spływający do ziemi z płaszcza kabla, będzie przenosił się na pary rozmówne o natężeniu $\Delta I_z = I_{za} - I_{zb}$ odpowiednio do wielkości $\Delta C = Ca - Cb$; wiemy zaś, że różnica między pojemnością *Ca* i pojemnością *Cb* jest przy budowie kabli nieunikniona. Oczywiście, im większa jest częstotliwość prądów zakłócających, tym niebezpieczeństwo indukowania

się ich w parach rozmównych jest większe, gdyż reaktancja $X_c = \frac{1}{\omega \Delta C}$. (Dotyczy to w pierwszym rzędzie techniki przenoszenia).

Ponadto przenoszone zakłócenia, np. od impulsów wybierakowych lub telegraficznych, będą tym większe, im Z_s jest większe w porównaniu z Z_{TK}, gdzie Z_{TK} — impedancja kabli, zaś Z_s — impedancja sumaryczna wszystkich pozostałych uziomów. Dlatego właśnie w systemie ekwipotencjalnym, gdzie odprowadzanie prądów zakłócających odbywa się wieloma drogami, $\Delta I_z = I_{za} - I_{zb}$ nie może osiągać wielkości szkodliwej.



Rys. 3. Elektryczny układ zastępczy uziomu

Tablica 3

Wielkość zakłóceń dróg połączeniowych wewnątrz centrali

Nr CA	Ilość numerów CA	Grupa (setki)	Poziom zakłóceń w mV psof.	
			Stan istniejący uziemień $R_r+R_o+R_k$	Wszystkie uziemienia połączone $R_r+R_o+R_k+R_h+R_g$
1	1400	1—4 2—5	0,09	0,09
2	1400	6—7 8—9	0,07	0,07
		1—4 2—3	0,06	0,06
3	1000	0—1 4—5	0,08	0,07
		5—6 2—3	0,12	0,11
		6—7 8—9	0,11	0,09
4	1000	0—1 2—3 5—6 8—9	0,08 0,1	0,08 0,09
		0—1 5—6	0,1	0,1
		1—2 4—5	0,11	0,11

W celu zmniejszenia jeszcze bardziej zakłócającego prądu w. cz. odpływającego przez kabel, a więc w celu właściwego rozdziału prądu na wiele uziomów, należy starać się, aby było $Z_s < Z_{TK}$ lub przynajmniej nieznacznie przewyższało Z_{TK}, gdzie impedancja kabli $Z_{TK} = R_{TK} + j\omega L_{TK}$ (rys. 1), zaś impedancja sumeryczna wszystkich pozostałych uziomów $Z_s = R_s + j\omega L_s$, przy czym $R_s = R_u + R_{co} + R_{H20} + \ldots$, wówczas będzie $I_s > I_{TK}$.

Tablica 4

Wielkość zakłóceń dróg połączeniowych wewnątrz centrali wraz z łączem abonenckim

	Nr CA	Ilość numerów CA	Poziom zakłóceń mV psof.		Długość linii abonenta
			Stan istniejący uziemień $R_r+R_o+R_k$	Wszystkie uziemienia połączone $R_r+R_o+R_h+R_g+R_k$	
Łącza napowietrzne	1	1400	0,14	0,08	4 km*)
			0,1	0,1	
	2	1400	0,8	0,8	2,5 km
	3	1000	1,2	1,0	3 km**)
	4	1000	2,3	2,3	1 km
Łącza kablowe	2	1400	0,4	0,4	0,1 km
			2	1,8	0,1 km
	3	1000	0,9	0,9	2 km
			1,0	0,8	0,1 km
	4	1000	3.	3.	0,5 km

*) Linia równoległa do sieci trakcyjnej.
**) Linia równoległa do linii WN.

Wiemy ponadto, że w miarę zwiększania długości uziomu impedancja bardzo szybko przestaje maleć, a więc przy prądach zakłócającycyh w. cz. tylko nieznaczna długość powłok kabli bierze udział w odprowadzaniu prądu do ziemi, rezystancja natomiast maleje proporcjonalnie do długości uziomu.

Tablica 5

Wielkość zakłóceń urządzeń teletransmisyjnych z kablem i wzmacniakiem przelotowym. Średnia z 12 kanałów

Nr SW	Ilość łączy	Poziom zakłóceń mV psof.	
		Stan istniejący uziemień R_o+R_r	Wszystkie uziemienia połączone $R_o+R_r+R_k+R_h+R_g$
1	72	1,77	1,79
2	72	1,23	1,20
3	320	2,2	2,1

Tak więc prąd stały jak również prądy o częstotliwościach rzędu nie przekraczającego kilku kHz będą odpływać przez kabel do ziemi na wielkiej długości, natomiast prądy zakłócające w. cz. wzdłuż coraz krótszego odcinka kabla w miarę wzrostu częstotliwości. Z tych względów należy starać się, aby odprowadzenie od pierścienia do uziomu głębino-

Tablica 6

Wielkość przesłuchów dróg połączeniowych na stacjach przelotowych teletransmisyjnych (rys. 4a)

Nr SW	Wszystkie uziomy odłączone	Uziomy załączone $R_r+R_o+R_k+R_h+R_g$
1	−9,28 Nep	−9,4 Nep
2	−8,0 „	−8,15 „
3	−8,85 „	−8,9 „
4	−8,4 „	−8,45 „

wego i do rur wodociągowych, jak również c.o. i innych uziomów było możliwie najkrótsze. Ponadto wskazane byłoby, zwłaszcza w obiektach z telefonią nośną, unikanie żelaza do wykonywania tych połączeń, gdyż μ powiększa indukcyjność własną i zjawisko naskórkowości przy w.cz. Należałoby ponadto unikać przekroju prostokątnego, gdyż wprowadza on dodatkowy wzrost reaktancji przy w.cz. w stosunku do reaktancji przy przekroju kołowym. Zauważmy jeszcze, że z pomiarów przeprowadzonych na stacjach SW i CA (tablice 1 i 2) wynika, że rezystancja sumaryczna uziomów ($R_s = R_r+R_o+R_g+R_h$) jest mniejsza, a co najwyżej niewiele większa od rezystancji powłok kabli (R_k). Tak więc będzie $Z_s \leqslant Z_{TK}$.

Tablica 7

Wielkość przesłuchów dróg połączeniowych wraz z dochodzącym kablem na stacjach teletransmisyjnych.
Długość kabli 18 m÷25 m (rys. 4b)

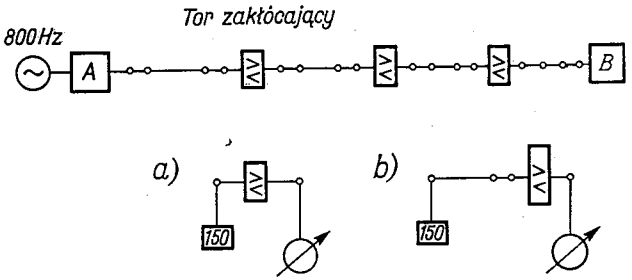
Nr SW	Wszystkie uziomy odłączone	Uziomy załączone $R_r+R_o+R_k+R_h+R_g$
1	−8,35 Nep	−8,55 Nep
2	−7,65 „	−7,9 „
3	−6,4 „	−6,55 „
4	−6,15 „	−6,3 „
5	−8,05 „	−8,1 „
6	−6,8 „	−6,9 „
7	−6,85 „	−6,9 „
8	−7,5 „	−7,85 „

Zauważmy ponadto, że przy stosowaniu pierścienia uziomowego istnieje wiele dróg odpływu prądów oraz kompensacji prądów w samym zamkniętym pierścieniu uziomowym, będzie więc $I_{TK} \ll I_s$.

Tak więc rozdział prądów zakłócających w istniejących obiektach telekomunikacyjnych po wprowadzeniu zamkniętego pierścienia uziemiającego będzie obniżał prądy zakłócające płynące wzdłuż kabli. Można ponadto, w przypadku nieco niższej rezystancji kabli w sto-

sunku do pozostałych uziomów, zastosować doprowadzenia od pierścienia uziemiającego do powłok kabli nieco dłuższe niż ich wzajemna odległość (np. w formie kilku zwojów).

W przypadku gdyby R_s było wyraźnie większe od R_k, należałoby wybudować dla danego obiektu dodatkowy uziom głębinowy o małej rezystancji.



Rys. 4. Schemat pomiaru przesłuchów: a) do tablicy 6, b) do tablicy 7

Jak przedstawia się pomiar poziomu zakłóceń na istniejących obiektach telekomunikacyjnych w zależności od łączenia lub rozłączania uziemień, widać z kilku pomiarów podanych na załączonych tablicach 3—7. Z tablic tych widać, że połączenie wszystkich uziomów obniża w większości przypadków poziom zakłóceń. Mimo że przy tych pomiarach nie osiągano jeszcze pełnego układu ekwipotencjalnego, jednak polepszenie poziomu zakłóceń jest dostrzegalne.

3.2.1. *Prądy zakłócające przychodzące z zewnątrz budynku telekomunikacyjnego*

W celu wyeliminowania prądów zakłócających przychodzących z zewnątrz budynku telekomunikacyjnego należy stosować układ ekwipotencjalny uziemień (zwłaszcza w dużych centralach i wszędzie tam, gdzie przewiduje się instalowanie urządzeń nośnych). W ten sposób prądy zmienne i ich wyższe harmoniczne przychodzące z obcych źródeł zakłócających, a przedostające się do budynku przez uziomy, jak powłoki kabli i inne instalacje przewodzące prąd, będą poprzez pierścień uziomowy odprowadzane najkrótszą drogą do ziemi, sposobem jakby drenażu. Ponadto, dzięki wielokrotnym dołączeniom uzbrojenia budynku do pierścienia uziomowego i przyłączeniu do tegoż pierścienia wszelkich innych metalowych części urządzeń, można różnice potencjałów między urządzeniami zainstalowanymi w odległych nawet częściach budynku zniwelować i doprowadzić do stanu niemal ekwipotencjalnego. Oczywiście przekrój pierścienia uziomowego musi być wystarczająco duży (np. ca 120 mm^2 Cu), aby spadki potencjałów na pierścieniu spowodowane prądami wyrównawczymi były poniżej 1 mV [1]. (Wymiary pierścienia uziomowego należy oczywiście przeliczać na spadek napięcia). Wypada ponadto zaznaczyć, że w przypadku własnej ransformatorni, należącej do danego obiektu łączności, osobne uziemienie ochronne po stronie W. N. musi być również dołączone do wspólneg o pierścienia uziomowego. Ponadto w przypadku gdy kabel telekomunikacyjny zbliża się wzdłuż swej trasy do przewodów, przez które przepływają prądy przemienne, wówczas w celu zapobieżenia przedostawaniu się zakłóceń do obwodów rozmównych wskazane jest uziemianie obydwu końców odcinka kabla telekomunikacyjnego przebiegającego w pobliżu instalacji zakłócających.

3.2.2. *Prądy zakłócające powstające wewnątrz budynku telekomunikacyjnego*

Instalacje elektryczne wewnątrz budynku muszą być tak wykonywane, aby o ile możności nie powstawały prądy zakłócające. Zazwyczaj istnieją w budynkach telekomunikacyjnych dwa główne źródła prądów zakłócających: a) od sieci energetycznej oraz b) od urządzeń odkłócających.

a) Sieć energetyczna

Ponieważ w Polsce stosuje się przeważnie system zerowania, więc przy nierównomiernym obciążeniu trzech faz może wystąpić rozgałęzienie prądu w miejscu połączenia przewodu zerowego z obudową urządzeń i wówczas wystąpi prąd zakłócający z mniejszą lub większą zawartością wyższych harmonicznych o natężeniu nawet ponad 50 mA [2], zależnie od układu sieci i od rodzaju pracy urządzeń (rys. 2).

Aby zapobiec tym zakłóceniom, nie należy w budynkach z urządzeniami telekomunikacyjnymi wykorzystywać (zerowania) przewodu zerującego jako przewodu uziemienia ochronnego. Należy więc do środka gwiazdy (uzwojenia wtórnego transformatora zasilającego urządzenia znajdujące się w budynku) dołączyć dodatkowy przewód ochronny (rys. 2), niezależny od przewodu zerującego. Przewód ten, do którego łączona jest obudowa aparatury, powinien być przyłączony do pierścienia uziomowego niezależnie od dołączenia do tego pierścienia przewodu zerującego. Zauważmy, że ten dodatkowy przewód ochronny powinien służyć zarówno dla obudowy aparatów zasilających prądem zmiennym (wejściowym), jak też dla obudowy aparatury prądu stałego. Do tego przewodu ochronnego powinny być dołączone również zaciski (trzpienie) ochronne w gniazdach wtykowych umieszczonych na konstrukcjach wsporczych. Przewód natomiast zerowy powinien być w izolacji i poza dołączeniem go do pierścienia uziomowego nie powinien być nigdzie więcej dołączony do uziemionych mas metalowych. Dzięki zainstalowaniu przewodu ochronnego prądy wyrównawcze i ich wyższe harmoniczne popłyną tylko izolowanym przewodem zerowym, nie powodując w zasadzie zakłóceń w obwodach telekomunikacyjnych. W ogóle, przewody, po których mogą płynąć jakieś prądy wyrównawcze (zakłócające), nie powinny wchodzić w skład sieci uziemiającej, a powinny być izolowane i łączyć się z pierścieniem uziomowym tylko w jednym punkcie.

b) Urządzenia odkłócające lamp jarzeniowych lub innych urządzeń

Przez kondensatory odkłócające płyną prądy zakłócające do obudowy urządzeń, gdy przewód zerowy jest jednocześnie ochronnym. Aby temu zapobiec, urządzenia powinny być instalowane w taki sposób, aby prądy zakłócające spływały tylko po przewodzie zerowym. Natomiast metalowe części urządzeń powinny być przyłączone do przewodu ochronnego, o którym była mowa wyżej, i nie muszą być izolowane od sufitu i od ścian. To samo tyczy się obudowy lamp jarzeniowych. Kondensatory odkłócające lamp jarzeniowych należy łączyć nie jak dawniej między przewodem fazowym i masą, a między przewodem fazowym i zerowym oraz zerowym i masą. W ten sposób zakłócenia od wyższych harmonicznych obniżamy kilkadziesiąt razy [1]. Co się tyczy ekranów przewodów, to z tych samych względów powinny być one uziemiane na obydwóch końcach.

3.3. Ochrona od wyładowań atmosferycznych

Instalacja odgromowa na obiektach łączności powinna zawsze posiadać własne uziemienie o małej impedancji, niezależnie od tego, jak małą ma impedancję pierścień uziomowy. To uziemienie odgromowe powinno być jednak dołączone do wspólnego pierścienia uziomowego. Jeżeli zastosowany jest uziom otokowy jako ochrona odgromowa, to powinien on być w wielu miejscach i najlepiej w równych odstępach dołączony do zwodu, jak też do pierścienia uziomowego. Taki uziom, mimo zazwyczaj nieco większej rezystancji niż powłoki kabli, będzie jednak miał mniejszą impedancję niż długi kabel [10, 20], a więc znaczna część ładunku elektrycznego przy wyładowaniu atmosferycznym popłynie do ziemi przez ten uziom. Uziom odgromowy powinien być dołączony do pierścienia uziomowego między innymi dlatego, że niemożliwością jest odsunąć uziom odgromowy i dołączone do niego przewody odprowadzające na odległość choćby 2 m od wchodzących do budynku kabli, rur wodociągowych itp., a tym bardziej od ścian budynku, do których przylegają rury wodociągowe i rury c. o. Ponadto rezystancja pierścienia uziomowego obiektu łączności będzie zawsze mniejsza niż rezystancja sztucznego uziemienia odgromowego, a przy natężeniu prądu wyładowania np. 100 kA lub więcej i niedołączeniu uziomu odgromowego do pierścienia wystąpią niezawodnie wysokie różnice potencjałów między nimi i niebezpieczeństwo porażeń. Układ ekwipotencjalny uziemień jest więc bardzo korzystny nie tylko dzięki obniżeniu poziomu zakłóceń w łączach telefonicznych, a zwłaszcza radiowych i telewizyjnych, ale również dla ochrony odgromowej, gdyż obniża różnicę potencjałów między różnymi punktami uziemionymi.

Co się tyczy ewentualnego zagrożenia kabli na przebicie podczas wyładowań atmosferycznych, to nie należy się tego obawiać, jeżeli przy każdej mufie druty opancerzenia kabla będą połączone między sobą i dołączone do ołowianej powłoki kabla. W przypadkach gdy grunt jest wyjątkowo źle przewodzący, dobrze jest układać dodatkowe uziomy taśmowe w połączeniu z uziomami głębinowymi (szpilkowymi) w celu odciążenia kabli od prądów mogących popłynąć po przewodzących powłokach kabli [3].

4. ZAKOŃCZENIE

Ekwipotencjalny układ uziemień przy obecnych zasadach dotyczących sieci telekomunikacyjnych, energetycznych i instalacji odgromowych wydaje się najbardziej odpowiednim, mogącym obniżyć poziom zakłóceń i zapewnić bezpieczeństwo.

Instytut Łączności
Warszawa

WYKAZ LITERATURY

1. Brusch J., Ziegler A.: Erdung und Störungsschutz in der Übertragungstechnik. — Siemens Zeitschrift, Heft 8, 1960.
2. Dreutler M.: Erdung und Starkstromschutz in der Vermittlungstechnik. — Siemens Zeitschrift, Heft 8, 1960.
3. Fernmeldetechnisches Zentralamt. Erdungen und Schutzmassnahmen in Fernmeldeanlagen.
4. Hackbart E.: Über das Verhalten von Erdern bei Spannungen mit Frequenzen zwischen 0 und 600 kHz. — Fernmelde Praxis, Heft 7 und 9, 1958.

5. International Telegraph and Telephone Consultative Committee. Special autonomous working party Nr 1. Contribution Nr 45, 11 January 1967.
6. Instalacje uziemień w obiektach telekomunikacji przewodowej. Wydawnictwo B.S. i P.Ł. 1967. Nr Archiw Wa—790—PT—7—P.
7. Konczyński H.: Możliwość zastosowania wspólnych uziemień urządzeń telekomunikacji przewodowej, instalacji siły i światła oraz urządzeń piorunochronnych. Instytut Łączności 1959.
8. Konczyński H., Żepielski K.: Uziemienia i środki ochronne w urządzeniach telekomunikacyjnych. Instytut Łączności 1961.
9. Konczyński H., Michalak J.: Badanie wspólnych układów uziemiających w obiektach telekomunikacji przewodowej. Instytut Łączności 1967.
10. Konczyński H.: Parametry uziomów głębokich. Rozprawa doktorska. Biblioteka Politechniki Warszawskiej, 1966.
11. Ministerstwo Łączności, B.S. i P.Ł.: Wytyczne techniczne projektowania urządzeń elektroenergetycznych w obiektach telekomunikacji przewodowej. Rozdział V, 1965.
12. Ministerstwo Łączności, B.S. i P.Ł.: Wytyczne techniczne projektowania telekomunikacyjnych linii kablowych dalekosiężnych.
13. Norma branżowa Nr BN-64-3220-02 Telekomunikacyjne linie kablowe międzymiastowe. Liniowe urządzenia kablowe.
14. PN-68/E-05003 Ochrona budowli od wyładowań atmosferycznych.
15. PN-66/E-05009 Urządzenia elektryczne. Ochrona przeciwporażeniowa w urządzeniach o napięciu znamionowym do 1000 V.
16. Przepisy bezpieczeństwa i higieny pracy w zakresie projektowania inwestycji łączności. Ministerstwo Łączności.
17. PN-65/T-05601 Telekomunikacyjne linie napowietrzne.
18. BN-64/3220-03 Urządzenia piorunochronne konstrukcji wsporczych.
19. Rukowodiaszczije ukazanja po projektirowaniu, stroitielstwu i ekspłuatacji zaziemlienij w ustanowkach prowodnoj swiazi. Ministierstwo Swiazi ZSRR, 1953.
20. Szpor St.: Ochrona odgromowa. P.W.T., Warszawa 1953.
21. Warmers O.: Die Flächenerdung in Fernmeldeanlagen. — N.T.Z., Heft 10, 1959.

H. KONCZYŃSKI

EQUIPOTENTIAL ARRANGEMENT OF TELECOMMUNICATION EARTH ELECTRODES

Summary

This article deals with the problem of arrangement of earthing network for telecommunication devices in connection with the compulsory requirements relative to power plant installations, power cables transmitting high frequency band and also dealing with lightning protection.

As a result, a new arrangement of telecommunication electrodes insted of the one employed in Poland at present, for telecommunication devices has been worked out. The previous system does not comply with the new requirements, and furthermore, the execution according to the old standards does not efficiently prevent various disturbances in the telecommunication signals being transmitted and increases the danger of corrosion.

H. KONCZYŃSKI

SYSTÈME ÉQUIPOTENTIEL DES PRISES DE TERRE DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

Résumé

Dans cet article on examina le problème d'un réseau de mise à la terre pour des installations de télécommunications par fil, satisfaisant les exigences actuellement en vigueur et concernant le domaine des

installations électroénergétiques, des câbles transmettant les hautes fréquences et de la protection contre les foudres.

En conséquence des considérations accomplies on élabora un système des prises de terre modernisé en comparaison des systèmes utilisés en Pologne jusqu'à présent pour les installations des télécommunications par fil.

L'ancien système des prises de terre n'est pas conforme à de nouvelles exigences dans les domaines cités ci-dessus et en plus sa réalisation selon les anciens principes s'écarte dans la pratique des solutions théoriques régulières et par conséquent ne protège pas les signaux des télécommunications transmis contre les perturbations diverses et en plus augmente le danger de la corrosion des câbles.

H. KONCZYŃSKI

ÄQUIPOTENTIAL ERDUNGSSYSTEM DER FERNMELDETECHNIK

Zusammenfassung

In diesem Aufsatz wurde die Frage des Systems des Erdungsnetzes für Fernmeldeanlagen betrachtet in Verbindung mit gegenwärtig verbindlichen Anforderungen, die Starkstromanlagen, Hochfrequenzkabel und Blitzschutz betreffen.

In Ergebniss der Betrachtungen wurde ein modernes Erdungssystem bearbeitet statt des bisher in Polen für Fernmeldeanlagen angewandten Erdungssystem. Das bisherige Erdungssystem entspricht doch den neuen Anforderungen der obenerwähnten Gebiete nicht mehr. Ausserdem schweift die Ausführung nach früheren Voraussetzungen in der Praxis von teorethischen Lösungen ab. Deshalb schützt das bisherige Erdungssystem wirksam gegen verschiedene Störungen der gesendeten Fernmelde signale nicht und vergrössert die Gefahr der Kabelkorrosion.

Х. КОНЧИНЬСКИ

ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНАЯ СИСТЕМА ЗАЗЕМЛЕНИЙ В ЭЛЕКТРОСВЯЗИ

Резюме

В настоящей статье рассмотрена проблема системы заземлений в установках проводной связи, соответствующей обязывающим современно требованиям в области устойств электропередачи, высокочастотных трансляционных кабелей и устройств грозозащиты.

В результате проведенного анализа была разработана система заземлений, модернизированная по сравнению с применяемой до настоящего времени для установок электросвязи. До сих пор применяемая система заземлений не соответствует новым требованиям в вышеуказанных областях, а кроме этого она отличается в практике от теоретических оснований таких систем и в связи с этим не дает эффективной защиты от различных помех, воздействующих на передаваемые сигналы электросвязи, а также увеличивает опасность коррозии кабелей.

621.317.34

EDWARD KĄCKI

Badanie stanów nieustalonych w niejednorodnej linii elektrycznej za pomocą maszyny analogowej

Rękopis dostarczono 21. 4. 1967

W pracy przedstawiono układy analogowe, w których są modelowane przebiegi napięcia $u(x, t)$ oraz natężenia prądu $i(x, t)$ wzdłuż niejednorodnej linii elektrycznej. Rozważania przeprowadzono dla ogólnie przyjętych warunków początkowych i dla napięcia zasilania linii o dowolnym przebiegu $f(t)$, uwzględniając przy tym siedem różnych rodzajów obciążenia linii. W pracy uwzględniono ponadto jako szczególne przypadki: kabel Thomsona oraz linię bez strat.

1. WSTĘP

Badanie stanów nieustalonych w niejednorodnej linii elektrycznej sprowadza się do dyskusji nad przebiegami zmian napięcia $u(x, t)$ lub natężenia prądu elektrycznego $i(x, t)$, a więc nad funkcjami będącymi rozwiązaniami równań różniczkowych telegrafistów

$$\begin{aligned} G(x)u &= -\frac{\partial i}{\partial x} - C(x)\frac{\partial u}{\partial t}, \\ R(x)i &= -\frac{\partial u}{\partial x} - L(x)\frac{\partial i}{\partial t} \end{aligned} \tag{1}$$

przy odpowiednich warunkach granicznych. Funkcje $G(x)$, $R(x)$, $C(x)$ i $L(x)$ są gęstościami liniowymi upływności, oporności, pojemności i indukcyjności linii.

Wyznaczenie dokładnego rozwiązania $u(x, t)$ lub $i(x, t)$ równań (1) w pewnej zamkniętej formie jest na ogół niemożliwe. Stosowanie natomiast przybliżonych metod numerycznych jest bardzo pracochłonne i bardziej lub mniej skomplikowane, w zależności od rodzaju warunków granicznych oraz od rodzaju funkcji G, R, C i L. O warunkach granicznych dla równań (1) decyduje sposób zasilania i obciążenia linii elektrycznej, natomiast charakter funkcji G, R, C i L zależy od rodzaju niejednorodności linii.

Przybliżone rozwiązanie uzyskane metodami numerycznymi na drodze bezpośrednich rachunków czy też z użyciem maszyny cyfrowej nie daje od razu poglądu na charakter badanego stanu nieustalonego w linii. Wyniki otrzymane w ten sposób stanowią zazwyczaj wiele stron tabel liczb, od których droga do zbadania przebiegów $u(x, t)$ oraz $i(x, t)$ jest jeszcze długa i mozolna.

Zastosowanie maszyny analogowej do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych (1) znacznie upraszcza badanie stanów nieustalonych w linii elektrycznej [5] i jednocześnie bardzo skraca czas badań.

2. PRZYPADEK OGÓLNY

Dla ustalenia uwagi oraz uzyskania możliwości podania schematów analogowych realizujących rozwiązania równań (1) ograniczymy się do rodziny rozwiązań odpowiadających tylko pewnej klasie warunków granicznych i dlatego ogólność rozważanego w tym rozdziale przypadku będzie polegała jedynie na rozpatrywaniu pełnych równań (1).

Przyjmujemy, że napięcie oraz natężenie prądu elektrycznego wzdłuż całej linii w chwili początkowej $t = 0$ są określone przez funkcje $\varphi(x)$ oraz $\psi(x)$ i stąd mamy dla funkcji $u(x, t)$ oraz $i(x, t)$ następujące warunki początkowe:

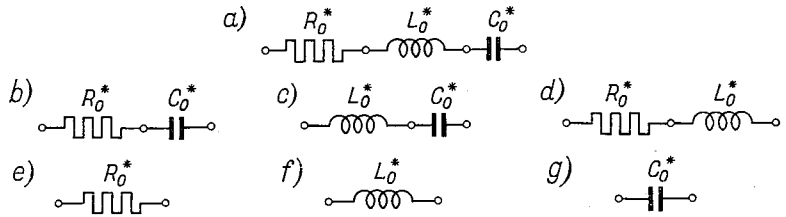
$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x) \\ i(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

gdzie $l > 0$ jest długością linii.

Na krańcu $x = 0$ linia zasilana jest napięciem o przebiegu $f(t)$ dla $t > 0$ i stąd mamy następujący warunek brzegowy:

$$u(0, t) = f(t) \quad \text{dla} \quad t > 0. \tag{3}$$

Drugi warunek brzegowy wynika ze sposobu obciążenia linii na krańcu $x = l$. W niniejszej pracy przyjmujemy, że obciążenie linii składa się z idealnych elementów, a mianowicie opornika, dławika i kondensatora. Wymienione elementy bądź wszystkie trzy są połączone w szereg, bądź po dwa, lub też są przyłączone do linii pojedynczo, jak to przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Rodzaje rozważanych w pracy obciążeń linii elektrycznej na krańcu $x = a$

Wypiszemy obecnie warunki brzegowe odpowiadające poszczególnym przypadkom obciążenia a, b, c, d, e, f, g, pokazanym na rys. 1.

a) Parametrami obciążenia są R_0^*, L_0^*, C_0^*

$$\left.\begin{aligned} u(l, t) &= L_0^* C_0^* \frac{d^2 u_c}{dt^2} + R_0^* C_0^* \frac{du_c}{dt} + u_c(t), \\ i(l, t) &= C_0^* \frac{du_c}{dt}, \\ G(l)\, u(l, t) &= -\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)_{x=l} - C(l)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=l} \end{aligned}\right\} \quad \text{dla} \quad t > 0, \tag{4}$$

gdzie $u_c(t)$ jest napięciem na zaciskach kondensatora, przy czym

$$u_c(0) = \left(\frac{du_c}{dt}\right)_{t=0} = 0. \tag{5}$$

b) Parametrami obciążenia są R_0^*, C_0^*

$$\left.\begin{aligned} u(l,t) &= R_0^* C_0^* \frac{du_c}{dt} + u_c(t), \\ i(l,t) &= C_0^* \frac{du_c}{dt}, \\ G(l)\,u(l,t) &= -\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)_{x=l} - C(l)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=l} \end{aligned}\right\} \quad \text{dla} \quad t > 0, \tag{6}$$

gdzie u_c, jak w przypadku a), spełnia warunki (6).

c) Parametrami obciążenia są L_0^*, C_0^*

$$\left.\begin{aligned} u(l,t) &= L_0^* C_0^* \frac{d^2 u_c}{dt^2} + u_c(t), \\ i(l,t) &= C_0^* \frac{du_c}{dt}, \\ G(l)\,u(l,t) &= -\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)_{x=l} - C(l)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=l} \end{aligned}\right\} \quad \text{dla} \quad t > 0, \tag{7}$$

gdzie u_c, jak w przypadku a), spełnia warunki (6).

d) Parametrami obciążenia są R_0^*, L_0^*

$$\left.\begin{aligned} &u(l,t) = \frac{L_0^*}{R_0^*}\frac{du_R}{dt} + u_R(t); \qquad i(l,t) = \frac{1}{R_0^*} u_R(t); \\ &G(l)\,u(l,t) = -\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)_{x=l} - C(l)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=l} \end{aligned}\right\} \quad \text{dla} \quad t > 0, \tag{8}$$

gdzie $u_R(t)$ jest napięciem na zaciskach opornika, przy czym

$$u_R(0) = 0. \tag{9}$$

e) Parametrem obciążenia jest R_0^*

$$\left.\begin{aligned} u(l,t) &= R_0^* i(l,t), \\ G(l)\,u(l,t) &= -\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)_{x=l} - C(l)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=l} \end{aligned}\right\} \quad \text{dla} \quad t > 0. \tag{10}$$

f) Parametrem obciążenia jest L_0^*

$$\left.\begin{aligned} u(l,t) &= L_0^*\left(\frac{di}{dt}\right)_{x=l}, \\ G(l)\,u(l,t) &= -\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)_{x=l} - C(l)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=l} \end{aligned}\right\} \quad \text{dla} \quad t > 0. \tag{11}$$

g) Parametrem obciążenia jest C_0^*

$$\left.\begin{aligned} i(l,t) &= C_0^*\left(\frac{du}{dt}\right)_{x=l}, \\ G(l)\,u(l,t) &= -\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)_{x=l} - C(l)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=l} \end{aligned}\right\} \quad \text{dla} \quad t > 0. \tag{12}$$

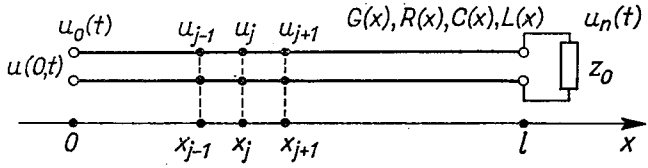
Warunki (4)÷(12) opisujące odpowiedni rodzaj obciążenia linii związane są z założonymi warunkami początkowymi (2), zatem w przypadku zmiany warunków (2) niektóre z warunków (4)÷(12) mogą w pewnym niewielkim stopniu ulec zmianie.

Przejście od równań różniczkowych (1) do układów równań różnicowo-różniczkowych umożliwia zastosowanie maszyny analogowej do analizy stanów nieustalonych w linii elektrycznej [5].

Obecnie w równaniach (1) zastępujemy pochodne względem zmiennej x przez odpowiednie ilorazy różnicowe i w ten sposób otrzymujemy układ równań różnicowo-różniczkowych [1]. Analogicznie postępujemy z odpowiednimi warunkami granicznymi.

Długość linii l dzielimy na n równych części i otrzymujemy stąd wartość przyrostu h zmiennej x

$$h = \frac{l}{n}. \tag{13}$$



Rys. 2. Punkty podziału linii

Za n przyjmujemy liczbę parzystą. Punktami podziału przedziału $< 0, l >$, a więc i rozważanej linii elektrycznej (rys. 2) są

$$x_j = jh \quad \text{dla} \quad j = 0, 1, 2, \ldots n, \tag{14}$$

przy czym $x_0 = 0$ oraz $x_n = l$.

Po wprowadzeniu oznaczeń $u_j(t) = u(x_j, t)$, $i_j(t) = i(x_j, t)$, $G_j = G(x_j)$, $R_j = R(x_j)$, $C_j = C(x_j)$ oraz $L_j = L(x_j)$ piszemy układ równań różnicowo-różniczkowych dla niejednorodnej linii

$$G_{2k}u_{2k}(t) = -\frac{i_{2k+1}(t) - i_{2k-1}(t)}{2h} - C_{2k}\frac{du_{2k}}{dt} \tag{15}$$

dla $k = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2} - 1$.

$$R_{2k-1}i_{2k-1}(t) = -\frac{u_{2k}(t) - u_{2k-2}(t)}{2h} - L_{2k-1}\frac{di_{2k-1}}{dt} \tag{16}$$

dla $k = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$. Dla funkcji $u_0(t)$, $u_n(t)$ oraz $i_n(t)$ otrzymujemy dodatkowe związki wynikające z przyjętych już warunków brzegowych.

Układ równań różniczkowych zwyczajnych (15), (16) możemy zapisać w następującej postaci:

$$\frac{du_{2k}}{dt} = -A_{2k}u_{2k} + B_{2k}i_{2k-1} - B_{2k}i_{2k+1} \tag{17}$$

dla $k = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2} - 1$, przy czym

$$A_j = \frac{G_j}{C_j}; \quad B_j = \frac{1}{2hC_j} \tag{18}$$

oraz

$$\frac{di_{2k-1}}{dt} = -D_{2k-1}i_{2k-1} + F_{2k-1}u_{2k-2} - F_{2k-1}u_{2k} \tag{19}$$

dla $k = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$, przy czym

$$D_j = \frac{R_j}{L_j}; \quad F_j = \frac{1}{2hL_j}. \tag{20}$$

Funkcje $u_j(t)$ oraz $i_j(t)$ dla $j = 1, 2, \ldots, n-1$ spełniają następujące warunki początkowe wynikające z warunków (2):

$$u_j(0) = \varphi(x_j); \quad i_j(0) = \psi(x_j). \tag{21}$$

Funkcja $u_0(t)$ jest określona przez warunek (3), zatem mamy

$$u_0(t) = f(t) \quad \text{dla} \quad t > 0. \tag{22}$$

Obecnie przedstawimy w postaci różnicowo-różniczkowej warunki brzegowe (4)÷(12) odnoszące się do krańca $x = l$ rozważanej linii elektrycznej.

a) Parametrami obciążenia są R_0^*, L_0^*, C_0^*

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2u_c}{dt^2} &= -\frac{R_0^*}{L_0^*}\frac{du_c}{dt} - \frac{1}{L_0^*C_0^*}u_c(t) + \frac{1}{L_0^*C_0^*}u_n(t), \\ \frac{du_n}{dt} &= -2B_nC_0^*\frac{du_c}{dt} - A_nu_n(t) + 2B_ni_{n-1}(t), \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

gdzie $u_c(0) = \left(\frac{du_c}{dt}\right)_{t=0} = 0.$

b) Parametrami obciążenia są R_0^*, C_0^*

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_c}{dt} &= -\frac{1}{R_0^*C_0^*}u_c(t) + \frac{1}{R_0^*C_0^*}u_n(t), \\ \frac{du_n}{dt} &= -2B_nC_0^*\frac{du_c}{dt} - A_nu_n(t) + 2B_ni_{n-1}(t), \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

gdzie $u_c(0) = \left(\frac{du_c}{dt}\right)_{t=0} = 0.$

c) Parametrami obciążenia są L_0^*, C_0^*

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2u_c}{dt^2} &= -\frac{1}{L_0^*C_0^*}u_c(t) + \frac{1}{L_0^*C_0^*}u_n(t), \\ \frac{du_n}{dt} &= -2B_nC_0^*\frac{du_c}{dt} - A_nu_n(t) + 2B_ni_{n-1}(t), \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

gdzie $u_c(0) = \left(\frac{du_c}{dt}\right)_{t=0} = 0.$

d) Parametrami obciążenia są R_0^*, L_0^*

$$\frac{du_R}{dt} = -\frac{R_0^*}{L_0^*}u_R(t)+\frac{R_0^*}{L_0^*}u_n(t),$$
$$\frac{du_n}{dt} = -A_n u_n(t)-\frac{2B_n}{R_0^*}u_R(t)+2B_n i_{n-1}(t), \tag{26}$$

gdzie $u_R(0) = 0$.

e) Parametrem obciążenia jest R_0^*

$$\frac{du_n}{dt} = -\left(A_n+\frac{2B_n}{R_0^*}\right)u_n(t)+2B_n i_{n-1}(t). \tag{27}$$

f) Parametrem obciążenia jest L_0^*

$$\frac{di_n}{dt} = \frac{1}{L_0^*}u_n(t),$$
$$\frac{du_n}{dt} = -A_n u_n(t)-2B_n i_n(t)+2B_n i_{n-1}(t). \tag{28}$$

g) Parametrem obciążenia jest C_0^*

$$\frac{du_n}{dt} = -\frac{hG_n}{C_n h+C_0^*}u_n(t)+\frac{1}{C_n h+C_0^*}i_{n-1}(t). \tag{29}$$

Przebiegi funkcji $u_j(t)$ oraz $i_j(t)$ dla $j = 1, 2, 3, \ldots n$ otrzymujemy na maszynie analogowej w układzie połączeń przedstawionym na rys. 3. Układ ten uwzględnia warunki początkowe (21) oraz warunek brzegowy dla krańca linii $x = 0$ w postaci (22). Jednak układ ten jest niekompletny, ponieważ nie uwzględnia on warunku brzegowego dla drugiego krańca $x = l$ rozważanej linii elektrycznej. Dla otrzymania pełnego układu analogowego uwzględniającego również jeden z warunków (4)÷(12) w postaci (23)÷(29) należy do końcówek P_1, P_2 układu podanego na rys. 3 dołączyć odpowiednie końcówki układu realizującego warunek brzegowy dla $x = l$ dla odpowiedniego rodzaju obciążenia linii. Schematy analogowe realizujące warunek brzegowy dla krańca $x = l$ linii przedstawione są na rysunkach 4÷9.

Schemat podany na rys. 4 dotyczy warunku brzegowego (4) wyrażonego w postaci (23). Współczynniki K_1, K_2, K_3 zaznaczone na rys. 4 określone są następującymi wzorami:

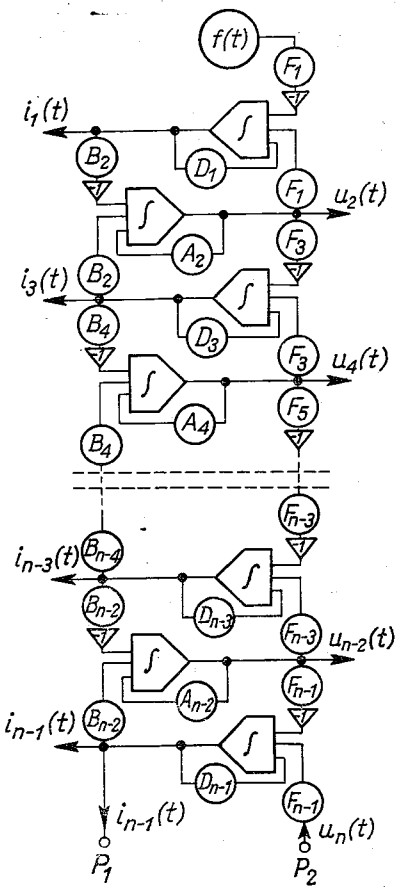
$$K_1 = \frac{C_0^*}{C_n h}; \quad K_2 = \frac{1}{L_0^* C_0^*}; \quad K_3 = \frac{R_0^*}{L_0^*}. \tag{30}$$

Schemat analogowy przedstawiony na rys. 5 odnosi się do warunku (6) wyrażonego w postaci (24). Współczynniki K_1, K_2, zaznaczone w wymienionym schemacie, określone są wzorami

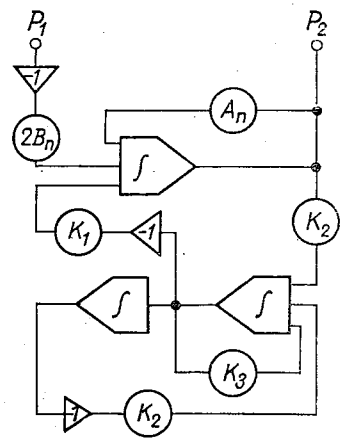
$$K_1 = \frac{C_0^*}{C_n h}; \quad K_2 = \frac{1}{R_0^* C_0^*}. \tag{31}$$

Schemat analogowy przedstawiony na rys. 6 odnosi się do warunku brzegowego (7) wyrażonego w postaci (25). Współczynniki K_1, K_2, zaznaczone w wymienionym schemacie, określone są wzorami

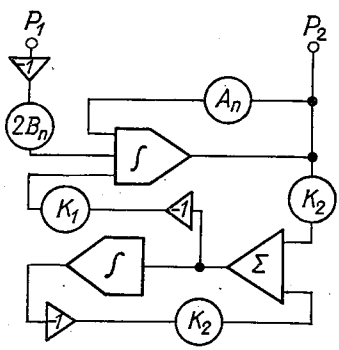
$$K_1 = 2B_n C_0^*; \quad K_2 = \frac{1}{L_0^* C_0^*}. \tag{32}$$



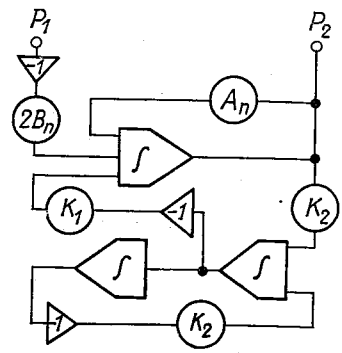
Rys. 3. Schemat analogowy układu równań (17) i (19)



Rys. 4. Układ analogowy realizujący warunek brzegowy (4)



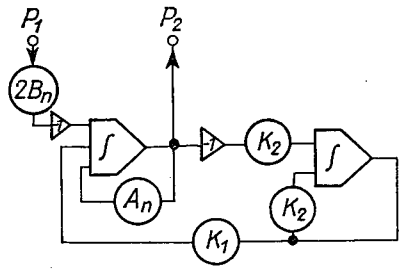
Rys. 5. Układ analogowy realizujący warunek brzegowy (6)



Rys. 6. Układ analogowy realizujący warunek brzegowy (7)

Schemat analogowy przedstawiony na rys. 7 odnosi się do warunku brzegowego (8) wyrażonego w postaci (26). Współczynniki K_1, K_2, zaznaczone w wymienionym schemacie, określone są wzorami

$$K_1 = \frac{2B_n}{R_0^*}; \quad K_2 = \frac{R_0^*}{L_0^*}. \tag{33}$$



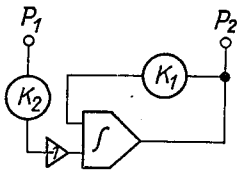
Rys. 7. Układ analogowy realizujący warunek brzegowy (8)

Schemat analogowy przedstawiony na rys. 8 odnosi się zarówno do warunku brzegowego (10) wyrażonego w postaci (27), jak też do warunku (12) wyrażonego przez (29). W przypadku warunku (10) współczynniki K_1, K_2, zaznaczone w wymienionym schemacie, określone są wzorami

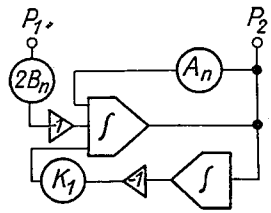
$$K_1 = \frac{G_n h R_0^* + 1}{C_n R_0^* h}; \quad K_2 = 2B_n; \tag{34}$$

natomiast dla warunku (12) współczynniki K_1, K_2 obliczamy ze wzorów

$$K_1 = \frac{hG_n}{C_n h + C_0^*}; \quad K_2 = \frac{1}{C_n h + C_0^*}. \tag{35}$$



Rys. 8. Układ analogowy realizujący warunki brzegowe (10) oraz (12)



Rys. 9. Układ analogowy realizujący warunek brzegowy (11)

Schemat analogowy przedstawiony na rys. 9 odnosi się do warunku brzegowego (11) wyrażonego w postaci (28). Współczynnik K_1, występujący w układzie, określony jest wzorem

$$K_1 = \frac{2B_n}{L_0^*}. \tag{36}$$

8. LINIA TYPU RC

Przypadek rozważany w tym rozdziale dotyczy niejednorodnej linii elektrycznej typu *RC*, a więc linii o indukcyjności $L = 0$ i upływności $G = 0$, jest on zatem szczególnym przypadkiem zagadnienia omówionego w rozdziale 2. Praktycznie rzecz biorąc dotyczy on linii o pomijalnie małej indukcyjności oraz upływności.

Obecnie równania (1) przyjmują następującą postać:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial i}{\partial x}+C(x)\frac{\partial u}{\partial t}=0,\\ &\frac{\partial u}{\partial x}=-R(x)i(x,t). \end{aligned} \tag{37}$$

Przedstawimy układ analogowy realizujący rozwiązanie równań (37) dla funkcji $u(x, t)$ oraz $i(x, t)$ spełniających warunki początkowe (2), warunek brzegowy (3), a ponadto warunek brzegowy odpowiadający obciążeniu linii typu „a", tzn. obciążeniu o parametrach R_0^*, L_0^*, C_0^* (zob. rys. 1). Jest to warunek dla krańca $x = l$ linii; przyjmuje on następującą postać:

$$\left.\begin{aligned} &u(l,t)=L_0^*C_0^*\frac{d^2u_c}{dt^2}+R_0^*C_0^*\frac{du_c}{dt}+u_c(t),\\ &i(l,t)=C_0^*\frac{du_c}{dt},\\ &\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)_{x=l}+C(l)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=l}=0, \end{aligned}\right\} \quad \text{dla} \quad t>0, \tag{38}$$

gdzie $u_c(t)$ jest napięciem na zaciskach kondensatora, przy czym

$$u_c(0)=\left(\frac{du_c}{dt}\right)_{t=0}=0. \tag{39}$$

Wzory (38) są szczególnym przypadkiem zależności (4).

Postępując analogicznie jak w rozdziale 2 przechodzimy od równań różniczkowych cząstkowych (37) do układu równań różniczkowych zwyczajnych [3]. Są to następujące równania:

$$\frac{du_{2k}}{dt}=B_{2k}i_{2k-1}-B_{2k}i_{2k+1}, \tag{40}$$

dla $k = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}-1$, przy czym współczynniki B_j określone są wzorem (18);

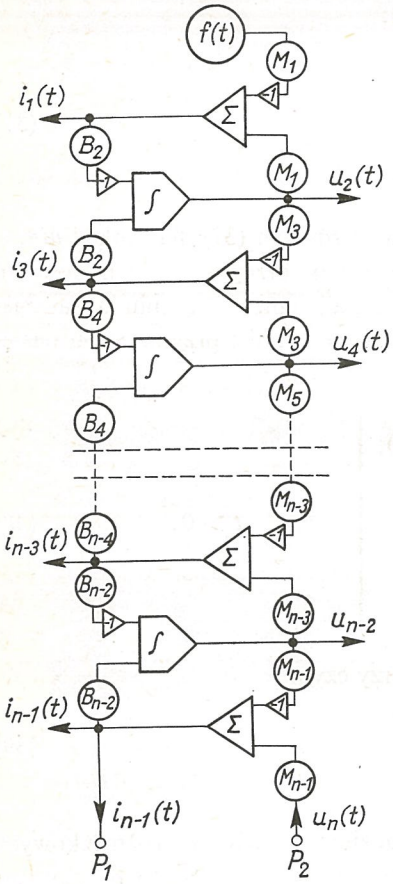
$$i_{2k-1}=M_{2k-1}u_{2k-2}-M_{2k-1}u_{2k} \tag{41}$$

dla $k = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$, przy czym

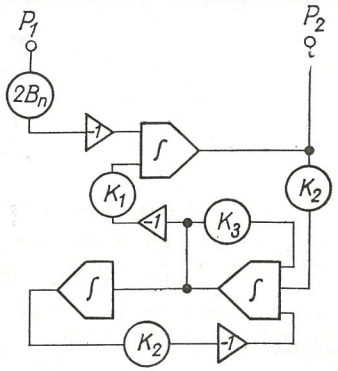
$$M_j=\frac{1}{2hR_j}. \tag{42}$$

Funkcje $u_{2k}(t)$ dla $k = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}-1$, spełniają warunki początkowe określone wzorem (21). Funkcja $u_0(t)$ określona jest przez warunek (22).

Obecnie przedstawimy w postaci różnicowo-różniczkowej warunek brzegowy (38) odnoszący się do krańca $x = l$ rozważanej linii elektrycznej.



Rys. 10. Układ analogowy modelujący przebiegi $u_j(t)$ oraz $i_j(t)$ wzdłuż kabla Thomsona (37)



Rys. 11. Układ analogowy realizujący warunek brzegowy (46)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2u_c}{dt^2} &= -\frac{R_0^*}{L_0^*}\frac{du_c}{dt} - \frac{1}{L_0^* C_0^*}u_c(t) + \frac{1}{L_0^* C_0^*}u_n(t), \\ \frac{du_n}{dt} &= -2B_n C_0^* \frac{du_c}{dt} + 2B_n i_{n-1}(t), \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

gdzie $u_c(0) = \left(\frac{du_c}{dt}\right)_{t=0} = 0.$

Przebiegi funkcji $u_j(t)$ oraz $i_j(t)$ otrzymujemy na maszynie analogowej w układzie połączeń przedstawionym na rys. 10. Układ ten uwzględnia warunki początkowe (21) dla funkcji $u_j(t)$ oraz warunek brzegowy (22). Układ ten nie uwzględnia warunku brzegowego dla drugiego krańca $x = l$ rozważanej linii elektrycznej. Dla realizacji warunku

brzegowego (38) w tym układzie analogowym należy do zacisków P_1, P_2 dołączyć odpowiednie zaciski P_1, P_2 układu przedstawionego na rys. 11. Postępujemy zatem w danym przypadku podobnie jak w przypadku opisanym w rozdziale 2. Współczynniki K_1, K_2, K_3 zaznaczone w schemacie na rys. 11 określone są wzorami

$$K_1 = 2B_n C_0^*; \quad K_2 = \frac{1}{L_0^* C_0^*}; \quad K_3 = \frac{R_0^*}{L_0^*}. \tag{44}$$

4. LINIA BEZ STRAT

Przypadek rozważany w tym rozdziale dotyczy niejednorodnej linii elektrycznej typu LC, a więc linii o oporności $R = 0$ i upływności $G = 0$, co stanowi szczególny przypadek zagadnienia przedstawionego w rozdziale 2. Praktycznie rzecz biorąc jest to linia o pomijalnie małej oporności i upływności.

Dla linii bez strat równania (1) przyjmują następującą postać:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial i}{\partial x} + C(x)\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + L(x)\frac{\partial i}{\partial t} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Przedstawimy układ analogowy realizujący rozwiązanie równań (44) dla funkcji $u(x, t)$ oraz $i(x, t)$ spełniających warunki początkowe (2), warunek brzegowy (3), a ponadto warunek brzegowy odpowiadający obciążeniu linii typu „a", tzn. obciążeniu o parametrach R_0^*, L_0^*, C_0^* (zob. rys. 1). Jest to warunek dla krańca $x = l$ linii; przyjmuje on w danym przypadku następującą postać:

$$\left.\begin{aligned} u(l, t) = L_0^* C_0^* \frac{d^2 u_c}{dt^2} + R_0^* C_0^* \frac{du_c}{dt} + u_c(t), \\ i(l, t) = C_0^* \frac{du_c}{dt}, \\ \left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)_{x=l} + C(l)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=l} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{dla} \quad t > 0 \tag{46}$$

gdzie $u_c(t)$ jest napięciem na zaciskach kondensatora, przy czym

$$u_c(0) = \left(\frac{du_c}{dt}\right)_{t=0} = 0. \tag{47}$$

Wzory (46) są szczególnym przypadkiem zależności (4).

Postępując analogicznie jak w rozdziale 2 przechodzimy od równań (45) do układu równań różniczkowych zwyczajnych. Są to następujące równania:

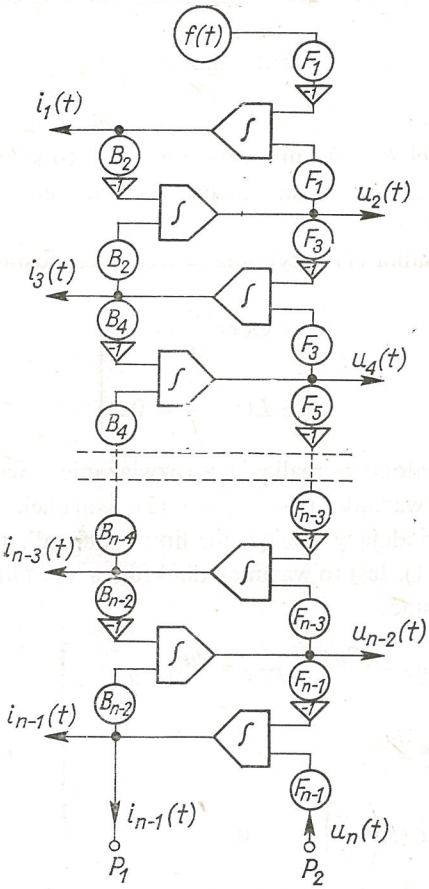
$$\frac{du_{2k}}{dt} = B_{2k} i_{2k-1} - B_{2k} i_{2k+1} \tag{48}$$

dla $k = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2} - 1$, przy czym współczynniki B_j są określone wzorem (18);

$$\frac{di_{2k-1}}{dt} = F_{2k-1}u_{2k-2} - F_{2k-1}u_{2k} \tag{49}$$

dla $k = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$, przy czym współczynniki F_j określone są wzorem (18).

Funkcje $u_{2k}(t)$ oraz $i_{2k-1}(t)$ spełniają warunki początkowe wyrażone wzorami (21). Funkcja $u_0(t)$ określona jest przez warunek (22).



Rys. 12. Układ analogowy modelujący przebiegi $u_j(t)$ oraz $i_j(t)$ wzdłuż linii bez strat (45)

Obecnie przedstawimy w postaci różnicowo-różniczkowej warunek brzegowy (46) odnoszący się do krańca $x = l$ rozważanej linii elektrycznej

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2u_c}{dt^2} &= -\frac{R_0^*}{L_0^*}\frac{du_c}{dt} - \frac{1}{L_0^*C_0^*}u_c(t) + \frac{1}{L_0^*C_0^*}u_n(t), \\ \frac{du_n}{dt} &= -2B_nC_0^*\frac{du_c}{dt} + 2B_ni_{n-1}(t), \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

gdzie u_c spełnia warunki początkowe (47).

Przebiegi funkcji $u_j(t)$ oraz $i_j(t)$ otrzymujemy na maszynie analogowej w układzie połączeń przedstawionym na rys. 12. Układ ten uwzględnia warunki początkowe (21) oraz

warunek brzegowy (22), natomiast nie uwzględnia on warunku brzegowego dla drugiego krańca $x = l$ rozważanej linii elektrycznej. Dla realizacji warunku brzegowego (46) w tym układzie analogowym należy do zacisków P_1, P_2 dołączyć odpowiednie zaciski P_1, P_2 układu przedstawionego na rys. 11. Postępujemy zatem podobnie jak w przypadkach przedstawionych w poprzednich rozdziałach 2 i 3.

5. ZAKOŃCZENIE

Błąd uzyskanych wyników na maszynie analogowej jest dodatkowo obarczony błędem samej metody różnic skończonych. Ze wzrostem liczby n punktów podziału linii maleje błąd tej metody; jest on proporcjonalny do h^2 [4].

Liczbę punktów podziału linii należy uzależniać od przewidywanej szybkości zmian oraz stromości badanych przebiegów $u(x, t)$ i $i(x, t)$, tzn. od kresu górnego bezwzględnych wartości pochodnych $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial i}{\partial t}$ i $\frac{\partial i}{\partial x}$. Im większe są szybkości zmian lub stromości badanych przebiegów przy danej długości linii, tym większą liczbę punktów podziału linii należy stosować dla uzyskania na maszynie analogowej dostatecznie dokładnych informacji o badanych przebiegach $u(x, t)$ oraz $i(x, t)$. Jednak ze wzrostem liczby n wzrasta również liczba równań układu (15), (16), co następnie powoduje wzrost liczby potrzebnych elementów liniowych maszyny analogowej do realizacji rozwiązania problemu. Dlatego maksymalna liczba punktów podziału linii ograniczona jest przez samą maszynę analogową, na której rozwiązujemy omawiane tutaj zagadnienie.

Politechnika Łódzka
Zakład Maszyn Matematycznych

WYKAZ LITERATURY

1. Collatz L.: Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych. PWN, Warszawa 1960.
2. Dekomska Z., Gawroński R.: Zarys techniki stosowania maszyn analogowych wraz z przykładami. — Prace Instytutu Automatyki PAN, 1965, z. 18.
3. Kącki E.: Zastosowanie maszyn analogowych do rozwiązywania zagadnień brzegowych przewodzenia ciepła. — Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, Elektryka, 1967, z. 23.
4. Kącki E.: Termokinetyka. WNT, Warszawa 1967.
5. Kącki E.: Zastosowanie maszyny analogowej do badania stanów nieustalonych w jednorodnej linii elektrycznej. — Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Automatyka 1967.

E. KĄCKI

STUDY OF NON-STEADY STATES OF A NON-HOMOGENEOUS ELECTRICAL LINE WITH THE AID OF AN ANALOG COMPUTER

Summary

The paper deals with the study of non-steady states of a non-homogeneous line of length l with the aid of an analog computer. The possibility of the application of an analog computer to modeling of voltage $u(x, t)$ and current $i(x, t)$ along the electrical line was obtained after the reduction of partial differential equations (1) to difference-differential equations. As a result an ordinary differential equation system

of second order (17, 19) was obtained. For that reason the line was divided into n equal parts of length $h = \frac{l}{n}$.

In this paper the analog system (fig. 3) is represented, in which the functions $u_j(t)$ and $i_j(t)$ are obtained along the line in the points of division. The considerations are conducted for the following initial conditions $u(x, 0) = \varphi(x)$ and $i(x, 0) = \psi(x)$ for $0 \leqslant x \leqslant 1$ and for the boundary condition $u(0, t) = f(t)$ for $t \geqslant 0$ characterizing the kind of feeding the line on the brink $x = 0$. The clips P_1, P_2, P_3 of the system presented on Fig. 3 should be connected with corresponding clips of one of the systems fulfilling the boundary condition for the respective kind of load of the line on the brink $x = 1$. Figures 4—9 represent analog systems fulfilling the boundary conditions described with equations (4) — (12).

In the paper the following particular cases are discussed: 1) line RC; 2) line LC. The considerations have been carried out only for one kind of load (see Fig. 1a). The corresponding analog systems are represented in figures 10 and 12.

At the end of the paper the influence of the number n of division points on the error of the results obtained is discussed briefly.

E. KONCKI

ÉTUDE DES RÉGIMES NON-STATIONNAIRES DANS UNE LIGNE ÉLECTRIQUE IRRÉGULIÈRE À L'AIDE D'UNE MACHINE CALCULATRICE ANALOGUE

Résumé

On a présenté dans l'oeuvre les schémas analogues dans lequels on a modelé les tensions $u(x, t)$ ainsi que les intensités de courant $i(x, t)$ le long de la ligne électrique irrégulière.

Les considérations sont effectuées en cas des conditions initiales généralement acceptées et de la tension d'alimentation de la ligne à marche quelconque $f(t)$; on a examiné les sept differentes sortes de la charge de la ligne. Dans l'oeuvre on a pris en considération deux cas singuliers de la ligne: le câble de Thomson et la ligne sans pertes.

Э. КОНЦКИ

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ В НЕОДНОРОДНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЛИНИИ С ПОМОЩЬЮ АНАЛОГОВОГО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА

Резюме

В работе представлено исследование неустановившихся режимов в неоднородной электрической линии длиною l с помощью аналоговой вычислительной машины. Возможность применения аналоговой машины для моделирования напряжения, $u(x, t)$ а также тока $i(x, t)$ вдоль линии была получена в итоге приведения дифференциальных уравнений с частными производными (1) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (17), (19). Это приведение получено поделив линию на n равных частей и применив метод конечных разностей.

В работе представлено аналоговую систему (рис. 3), моделирующую напряжение $u_j(t)$, а также $i_j(t)$ вдоль линии в точках разделения. Рассуждения проведены для следующих начальных условий $u(x, 0) = \varphi(x)$, $i(x, 0) = \psi(x)$ для $0 \leqslant x \leqslant l$ и граничного условия $u(0, t) = f(t)$ для $t \geqslant 0$, характеризующего метод питания линии на конце $x = 0$. К клеммам P_1, P_2, P_3 системы, представленной на рис. 3, надо приложить соответствующие клеммы одной из систем, реализирующих граничное условие, которое характеризует способ нагрузки линии на конце $x = l$. Аналоговые

системы, соответствующие 7 типам питания (рис. 1) линии, представленные на рис. 4—9, реализируют граничные условия, данные уравнениями (4)—(12).

В работе описаны кратко следующие частные случаи: 1) линия типа RC; 2) линия типа LC. Рассуждения проведены для одного рода нагрузки типа L_0^*, R_0^*, C_0^* (см. рис. 1a). Соответственные аналоговые системы представлены на рис. 10 и 12.

В заключении представлено кратко влияние числа n точек разделения линии на ошибки полученных результатов.

621.317.335

ZDZISŁAW PERKOWSKI

Wyznaczanie pojemności torów współosiowych o przewodach wielodrutowych

Rękopis dostarczono 20. 7. 1967

W artykule omówiono zastosowanie nowej przybliżonej metody obliczania pojemności w przypadku torów współosiowych o przewodach wielodrutowych. Zasady wspomnianej metody opisano we wcześniejszej pracy [4].

Wyprowadzone zależności pojemności toru współosiowego o przewodzie wewnętrznym wielodrutowym oraz toru o wielodrutowym przewodzie zewnętrznym od wymiarów geometrycznych przekrojów poprzecznych takich torów dają wyniki obliczeń zgodne z wcześniejszymi rezultatami Meyersa [3] i Kadena [2].

1. WSTĘP

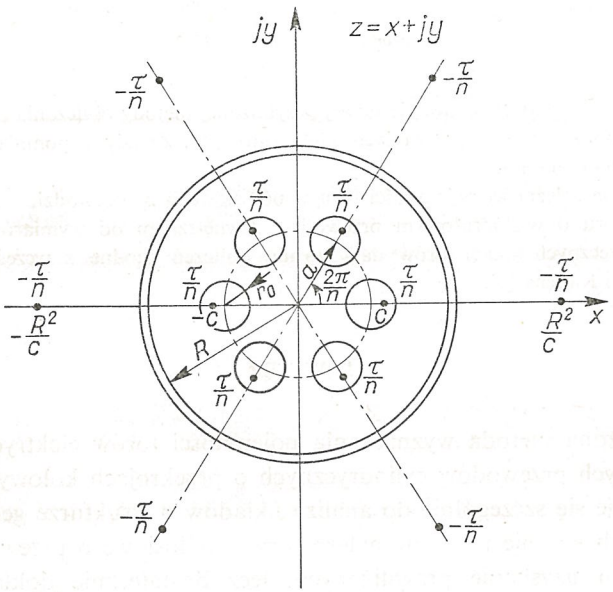
Nowa przybliżona metoda wyznaczania pojemności torów elektrycznych dowolnego układu równoległych przewodów cylindrycznych o przekrojach kołowych, przedstawiona w pracy [4], nadaje się szczególnie do analizy układów o strukturze geometrycznej symetrycznej. Do takich właśnie układów należą tory współosiowe o przewodach wielodrutowych, dla których uzyskanie przybliżonych, lecz dostatecznie dokładnych rozwiązań równania Laplace'a za pomocą znanych metod jest niezwykle trudne, w następstwie czego teoria rozpatrywanych torów praktycznie nie istnieje.

Dotychczasowa praktyka projektowania takich torów oparta była na badaniach Meyersa [3], który wykazał, że z punktu widzenia elektrostatyki każdy przewód wielodrutowy można zastąpić równoważnym mu z uwagi na pojemność przewodem jednodrutowym o nieco innej średnicy i podał współczynniki korekcyjne umożliwiające obliczenie tej średnicy. Postępowanie takie jest uzasadnione i daje dość dokładne rezultaty przy projektowaniu znormalizowanych giętkich kabli współosiowych o oporności falowej nie mniejszej od 50 omów, ponieważ wówczas korekcja dotyczy wyłącznie średnic wielodrutowych przewodów wewnętrznych. W przypadku kabli giętkich o oporności falowej znacznie mniejszej od 50 omów dokładność obliczeń staje się problematyczna i uwydatnia się wyraźnie wpływ gęstości przewodu zewnętrznego (oplotu) na wartość oporności falowej, trudny do zbadania za pomocą eksperymentu z uwagi na niejednorodność próbek kabli. Teoretyczna analiza wspomnianych zagadnień przy wykorzystaniu nowej metody przybliżonej prowadzi do nieskomplikowanych i łatwych do zinterpretowania rezultatów.

2. WYZNACZANIE POJEMNOŚCI TORÓW WSPÓŁOSIOWYCH O WIELODRUTOWYCH PRZEWODACH WEWNĘTRZNYCH

2.1. Przypadek ogólny

Przedmiotem analizy jest tor współosiowy, którego przewód wewnętrzny skręcony jest z dużej liczby pojedynczych drutów o jednakowej średnicy $2r_0$, natomiast przewód zewnętrzny jest jednolitym cylindrem przewodzącym o promieniu wewnętrznym równym R. Ponieważ w praktyce skok skrętu drutów jest zawsze wieloktrotnie większy od średnicy przewodu wewnętrznego, skręt drutów nie wywiera istotnego wpływu na pojemność toru i może być zaniedbany. Ponadto ładunki elektryczne przewodu wewnętrznego są rozmiesz-



Rys. 1. Tor współosiowy o przewodzie wewnętrznym wielodrutowym (przekrój poprzeczny)

czone na jego powierzchni zewnętrznej, którą tworzą powierzchnie n drutów znajdujących się w zewnętrznej warstwie skręconego przewodu, a więc pozostałe druty przewodu nie wpływają w ogóle na pojemność i mogą być usunięte. W konsekwencji z punktu widzenia elektrostatyki tor współosiowy o przewodzie wewnętrznym wielodrutowym może być zastąpiony modelem przedstawionym na rys. 1, którego przewód wewnętrzny składa się z n drutów o promieniu r_0, równomiernie rozmieszczonych na okręgu o promieniu a wewnątrz cylindrycznego ekranu o promieniu R. Przyjmuje się, że ładunek całkowity przewodu wewnętrznego modelu wynosi $+\tau$, a zatem ładunek całkowity każdego z drutów wynosi $+\frac{\tau}{n}$, natomiast ładunek całkowity cylindrycznego przewodu zewnętrznego wynosi $-\tau$, podczas gdy wnętrze modelu wypełnione jest izotropowym i jednorodnym dielektrykiem o przenikalności elektrycznej ε.

W myśl zasad nowej metody przybliżonej, przedstawionej w pracy [4], ładunki całkowite poszczególnych drutów przewodu wewnętrznego należy zastąpić pojedynczymi ła-

dunkami liniowymi $+\frac{\tau}{n}$, umiejscowionymi w punktach o współrzędnych $z'_k = ce^{jk\frac{2\pi}{n}}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) płaszczyzny zmiennej zespolonej z, natomiast ładunek przewodu zewnętrznego najlepiej jest zastąpić uzyskanymi przez inwersję obrazami elektrycznymi ładunków liniowych umiejscowionych wewnątrz cylindrycznego przewodu zewnętrznego (rys. 1), ponieważ wówczas powierzchnia wewnętrzna przewodu zewnętrznego jest powierzchnią ekwipotencjalną.

Ponieważ współrzędne obrazów elektrycznych uzyskanych przez inwersję na płaszczyźnie zmiennej zespolonej z będą równe $z''_k = \frac{R^2}{c} \cdot e^{jk\frac{2\pi}{n}}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), potencjał zespolony modelu toru współosiowego o przewodzie wewnętrznym wielodrutowym można przedstawić w postaci:

$$W(z) = -\frac{\tau}{2n\pi\varepsilon}\left[\sum_{k=1}^{n} \ln(z-z'_k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(z-z''_k)\right] =$$

$$= -\frac{\tau}{2n\pi\varepsilon} \ln \frac{\prod_{k=1}^{n}(z-z'_k)}{\prod_{k=1}^{n}(z-z''_k)} = -\frac{\tau}{2n\pi\varepsilon} \ln \frac{(z^n-c^n)}{\left(z^n-\frac{R^{2n}}{c^n}\right)}. \qquad (1)$$

Rozwijając powyższe wyrażenie w otoczeniu punktu $z = 0$ na szereg potęgowy zbieżny na okręgu $z_e = Re^{j\varphi}$

$$W(z) = -\frac{\tau}{2n\pi\varepsilon}\left\{-\ln\left(-\frac{R^{2n}}{c^n z^n}\right) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\left[\left(\frac{c}{z}\right)^{mn} - \left(\frac{zc}{R^2}\right)^{mn}\right]\right\}$$

otrzymuje się dla tego okręgu stałą wartość składowej rzeczywistej potencjału, równą

$$U(z_e) = \frac{\tau}{2n\pi\varepsilon} \ln \frac{R^n}{c^n}, \qquad (2)$$

ponieważ

$$Re\left[\left(\frac{z_e c}{R^2}\right)^{mn}\right] = Re\left[\left(\frac{c}{z_e}\right)^{mn}\right] = \left(\frac{c}{R}\right)^{mn} \cos mn\varphi.$$

Zgodnie z zasadami nowej metody przybliżonej parametr c, determinujący położenie ładunków liniowych, powinien być tak dobrany, ażeby linie ekwipotencjalne wypadkowego pola elektrycznego wszystkich ładunków liniowych oraz ich obrazów elektrycznych naśladowały możliwie najdokładniej ślady powierzchni poszczególnych drutów przewodu wewnętrznego na płaszczyźnie zmiennej zespolonej z. Najprostszym kryterium takiego doboru jest kryterium Breisiga [1], sprowadzające się do żądania, ażeby potencjał wypadkowego pola elektrycznego przyjmował jednakowe wartości w dwóch przeciwległych punktach $z_{n1} = a+r_0$ oraz $z_{n2} = a-r_0$ śladu $z_n = a+r_0 e^{j\varphi}$ n-tego drutu przewodu wewnętrznego, ponieważ wówczas będą identyczne wartości potencjału w dwóch punktach przecięcia

śladu każdego drutu z prostą łączącą oś symetrii drutu z osią symetrii przewodu wewnętrznego. Wykorzystanie kryterium Breisiga prowadzi do warunku:

$$\frac{\frac{R^{2n}}{c^n}-(a+r_0)^n}{(a+r_0)^n-c^n} = \frac{\frac{R^{2n}}{c^n}-(a-r_0)^n}{c^n-(a-r_0)^n} = F, \tag{3}$$

sprowadzalnego do równania:

$$c^{2n}-2Bc^n+R^{2n} = 0,$$

w którym:

$$B = \frac{R^{2n}+(a^2-r_0^2)^n}{(a+r_0)^n+(a-r_0)^n}. \tag{4}$$

Parametr c jest jednym z pierwiastków powyższego równania, ponieważ:

$$c^n = B-\sqrt{B^2-R^{2n}}. \tag{5}$$

Można wykazać, że w przypadku granicznym, gdy $a \to R-r_0$ $(a+r_0 \to R)$, $B \to R^n$, a wówczas $c \to R$.

Pojemność jednostkową toru współosiowego o przewodzie wewnętrznym wielodrutowym można wyznaczyć w pierwszym przybliżeniu przyjmując, że potencjał w punkcie $z_{n1} = a+r_0$ jest potencjałem przewodu wewnętrznego toru. Warunek (3) umożliwia wyznaczenie tego potencjału w postaci najwygodniejszej dla celów praktycznych. Zastępując wspomniany warunek równaniem:

$$\frac{R^{2n}}{c^n} = (F+1)(a+r_0)^n - Fc^n = -(F-1)(a-r_0)^n + Fc^n$$

otrzymuje się wielkość pomocniczą F w postaci:

$$F = \frac{(a+r_0)^n-(a-r_0)^n}{2c^n-(a+r_0)^n-(a-r_0)^n}.$$

Ponieważ potencjał w punkcie z_{n1} jest równy:

$$U(z_{n1}) = \frac{\tau}{2n\pi\varepsilon}\ln F,$$

natomiast potencjał przewodu zewnętrznego toru określa wyrażenie (2), więc pojemność jednostkową C toru współosiowego o przewodzie wewnętrznym wielodrutowym (n drutów w zewnętrznej warstwie przewodu) można w przybliżeniu obliczyć ze wzoru:

$$C \approx \frac{\tau}{U(z_{n1})-U(z_e)} = \frac{2n\pi\varepsilon}{\ln\frac{c^n[(a+r_0)^n-(a-r_0)^n]}{R^n[2c^n-(a+r_0)^n-(a-r_0)^n]}}, \tag{6}$$

w którym c jest parametrem określonym zależnością (5). Powyższy wzór daje poprawne rezultaty w przypadku granicznym, w którym $a \to R-r_0$, $(c \to R)$, ponieważ wówczas pojemność toru współosiowego rośnie nieograniczenie.

Dokładniejszą zależność pojemności toru współosiowego o przewodzie wewnętrznym wielodrutowym od wymiarów geometrycznych przekroju poprzecznego toru

można uzyskać, obliczając wartość średnią potencjału przewodu wewnętrznego modelu z rys. 1, równą wartości średniej potencjału dowolnego drutu tego przewodu.

Rozwijając potencjał zespolony (1) w otoczeniu punktu $z = a$ na szereg potęgowy zbieżny na okręgu $z_n = a + r_0 e^{j\varphi}$ otrzymuje się dla tego okręgu (ślad n-tego drutu przewodu wewnętrznego na płaszczyźnie z) po scałkowaniu szeregu wyraz po wyrazie następującą wartość średnią składowej rzeczywistej potencjału:

$$U_{śr}(z_n) = \frac{\tau}{2n\pi\varepsilon} \ln \frac{(R^{2n} - a^n c^n)(c-a)}{r_0 c^n (c^n - a^n)}. \tag{7}$$

Po obliczeniu różnicy potencjałów między przewodem wewnętrznym i zewnętrznym z wartości (7) i (2) otrzymuje się następujące wyrażenie na pojemność jednostkową toru współosiowego o przewodzie wewnętrznym wielodrutowym:

$$C \approx \frac{\tau}{U_{śr}(z_n) - U(z_e)} = \frac{2n\pi\varepsilon}{\ln \dfrac{(R^{2n} - a^n c^n)(c-a)}{r_0 R^n (c^n - a^n)}}, \tag{8}$$

w którym c jest parametrem określonym zależnością (5). Wyrażenie (8) umożliwia obliczanie z dużą dokładnością pojemności toru współosiowego z przewodem wewnętrznym wielodrutowym, zawierającym dowolną liczbę (n) drutów w zewnętrznej warstwie. Wyrażenie to może być wykorzystane przy dowolnych wymiarach przekroju poprzecznego toru bez względu na wartość jego oporności falowej.

2.2. Przypadek $R \gg a + r_0$

Jeżeli promień przekroju przewodu zewnętrznego toru współosiowego jest znacznie większy od promienia okręgu opisanego na przewodzie wewnętrznym, to kształty linii ekwipotencjalnych przebiegających w pobliżu okręgu o promieniu R na płaszczyźnie zmiennej zespolonej z są bardzo zbliżone do okręgów i nie występuje wówczas konieczność zastępowania ładunków rozmieszczonych na powierzchni wewnętrznej przewodu zewnętrznego obrazami elektrycznymi ładunków przewodu wewnętrznego. Potencjał zespolony toru można wówczas przedstawić w postaci:

$$W(z) = -\frac{\tau}{2n\pi\varepsilon} \ln (z^n - c^n). \tag{9}$$

Parametr c, determinujący położenia ładunków liniowych zastępujących ładunki całkowite $\frac{\tau}{n}$ poszczególnych drutów przewodu wewnętrznego modelu toru z rys. 1, można określić przy wykorzystaniu kryterium Breisiga, gwarantującego taki dobór parametru, przy którym linie ekwipotencjalne wypadkowego pola elektrycznego o potencjale zespolonym (9) dość dokładnie naśladują ślady powierzchni wszystkich drutów. Wykorzystanie wspomnianego kryterium sprowadza się do żądania, ażeby potencjał wypadkowego pola elektrycznego (składowa rzeczywista potencjału zespolonego) przyjmował jednakowe wartości w punktach $z_{n1} = a + r_0$ oraz $z_{n2} = a - r_0$ śladu n-tego drutu. Otrzymuje się wówczas warunek:

$$(a + r_0)^n - c^n = c_n - (a - r_0)^n,$$

zgodnie z którym:

$$c^n = \frac{1}{2}[(a+r_0)^n+(a-r_0)^n]. \tag{10}$$

Przy obliczaniu pojemności toru współosiowego za potencjał przewodu wewnętrznego można uważać jednakową dla dowolnego drutu wartość średnią potencjału n-tego drutu, którego ślad na płaszczyźnie z jest opisany równaniem:

$$z_n = a+r_0 e^{j\varphi}.$$

Wartość tę można obliczyć, rozwijając potencjał zespolony (9) w otoczeniu punktu $z = a$ na szereg potęgowy zbieżny na okręgu z_n i całkując składową rzeczywistą szeregu (potencjał elektrostatyczny) wyraz po wyrazie w granicach od $\varphi = 0$ do $\varphi = 2\pi$. Ostateczny wynik jest następujący:

$$U_{śr}(z_n) = -\frac{\tau}{2n\pi\varepsilon}\ln\left(r_0\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-k-1}c^k\right) = -\frac{\tau}{2n\pi\varepsilon}\ln\frac{r_0(c^n-a^n)}{c-a}. \tag{11}$$

Za potencjał przewodu zewnętrznego toru współosiowego można natomiast uważać wartość średnią potencjału obliczoną dla okręgu $z_e = Re^{j\varphi}$, którą można uzyskać wykorzystując rozwinięcie potencjału zespolonego (9) w otoczeniu punktu $z = 0$ na szereg potęgowy zbieżny na okręgu z_e:

$$W(z) = -\frac{\tau}{2n\pi\varepsilon}\ln\left[z^n-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{c}{z}\right)^{mn}\right].$$

Wspomniana wartość średnia jest równa:

$$U_{śr}(z_e) = -\frac{\tau}{2n\pi\varepsilon}\ln R^n,$$

a zatem pojemność jednostkową toru współosiowego o przewodzie wewnętrznym wielodrutowym w przypadku, gdy $R \gg a+r_0$ można obliczać ze wzoru:

$$C \approx \frac{\tau}{U_{śr}(z_n)-U_{śr}(z_e)} = \frac{2n\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{R^n(c-a)}{r_0(c^n-a^n)}}, \tag{12}$$

w którym c jest parametrem określonym zależnością (10). Wzór (12) w porównaniu ze wzorem dokładniejszym (8) daje błąd obliczeń nie większy, niż 0,2%, jeżeli $\frac{R}{c} \geqslant 3{,}5$. Nietrudno zauważyć, że wzór ten można otrzymać bezpośrednio z wyrażenia (8) pomijając iloczyn $a^n c^n$, mały w porównaniu z wielkością R^{2n} w przypadku, gdy $R \gg a+r_0$. Podobnie przy dużych promieniach przewodu zewnętrznego związek (5) określający parametr c daje się sprowadzić do związku (10). W tym celu należy wykorzystać rozwinięcie na szereg pierwiastka kwadratowego wyrażenia (5), ponieważ:

$$c^n = B\left(1-\sqrt{1-\frac{R^{2n}}{R^2}}\right) = B\left[1-\left(\frac{R^{2n}}{2B^2}-\frac{R^{4n}}{8B^4}-\dots\right)\right] = \frac{R^{2n}}{2B}+\frac{R^{4n}}{8B^3}+\dots$$

Uwzględniając zależność (4) otrzymuje się przy $R \to \infty$

$$c^n \to \frac{1}{2}[(a+r_0)^n+(a-r_0)^n]$$

jako granicę pierwszego wyrazu szeregu po prawej stronie powyższej równości, gdyż pozostałe wyrazy szeregu dążą do zera.

2.3. Przypadek $n = 1$

Usuwając wszystkie, z wyjątkiem jednego, druty przewodu wewnętrznego modelu toru współosiowego z rys. 1 otrzymuje się tak zwany tor ekscentryczny, którego przewód wewnętrzny o promieniu przekroju r_0 jest umieszczony w odległości a od osi symetrii przewodu zewnętrznego o promieniu R. Potencjał zespolony takiego toru otrzymuje się z wyrażenia (1), przyjmując $n = 1$:

$$W(z) = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{z-c}{z-\frac{R^2}{c}},$$

natomiast parametr c wyraża się wzorem (5) przy $n = 1$:

$$c = B-\sqrt{B^2-R^2}, \tag{13}$$

przy czym:

$$B = \frac{R^2+a^2-r_0^2}{2a}. \tag{14}$$

Pojemność toru ekscentrycznego można określić z zależności (6) albo z zależności (8) przy $n = 1$. Korzystając z zależności (8) można napisać:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{R^2-ac}{r_0 R}}. \tag{15}$$

Przy $a = 0$ (tor współosiowy) ostatnie wyrażenie przyjmuje powszechnie znaną postać dokładnego wzoru na pojemność toru współosiowego o promieniach przekrojów przewodów r_0 oraz R:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{R}{r_0}}.$$

Przy $a \neq 0$ (tor ekscentryczny) wyrażenie (15) można sprowadzić do powszechnie znanej postaci wzoru na pojemność toru ekscentrycznego. Wykorzystując związki (13) i (14) nietrudno sprawdzić, że:

$$\frac{R^2-ac}{r_0 R} = \frac{R^2+r_0^2-a^2}{2r_0 R} + \sqrt{\left(\frac{R^2+r_0^2-a^2}{2r_0 R}\right)^2-1},$$

a zatem wyrażenie (15) jest równoważne powszechnie znanej dokładnej zależności pojemności toru ekscentrycznego od wymiarów jego przekroju poprzecznego:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left[\frac{R^2+r_0^2-a^2}{2r_0R} + \sqrt{\left(\frac{R^2+r_0^2-a^2}{2r_0R}\right)^2 - 1}\right]} = \frac{2\pi\varepsilon}{\operatorname{arch}\frac{R^2+r_0^2-a^2}{2r_0R}}. \tag{16}$$

Można stąd wysnuć wniosek, że przedstawiona w pracy [4] nowa metoda przybliżona daje rezultaty przybliżone dopiero wtedy, gdy liczba przewodów cylindrycznych o przekroju kołowym, wchodzących w skład rozpatrywanego układu, jest większa od dwóch, natomiast w przypadku układów zawierających dwa przewody cylindryczne wspomniana metoda daje rezultaty dokładne.

2.4. Przypadek $n = 2$

Tor współosiowy o przewodzie wewnętrznym składającym się z dwóch jednakowych drutów był analizowany w pracy [4] jako tor niesymetryczny pary ekranowanej. Pojemność jednostkowa takiego toru wyraża się zależnością:

$$C \approx \frac{4\pi\varepsilon}{\ln\frac{R^4-a^2c^2}{r_0R^2(a+c)}}, \tag{17}$$

w której:

$$c^2 = B - \sqrt{B^2-R^4}, \tag{18}$$

natomiast

$$B = \frac{R^4+(a^2-r_0^2)^2}{(a+r_0)^2+(a-r_0)^2}. \tag{19}$$

W przypadku gdy przewód zewnętrzny toru ma średnicę znacznie większą od średnicy okręgu opisanego na przewodzie wewnętrznym zgodnie z rozdz. 2.2, można korzystać z zależności uproszczonych:

$$C \approx \frac{4\pi\varepsilon}{\ln\frac{R^2}{r_0(a+c)}}, \tag{20}$$

natomiast

$$c^2 = \frac{1}{2}[(a+r_0)^2+(a-r_0)^2] = a^2+r_0^2. \tag{21}$$

2.5. Przypadek $n = 4$

Tor współosiowy o przewodzie wewnętrznym składającym się z czterech jednakowych drutów był już analizowany w pracy [5] jako tor niesymetryczny ekranowanej czwórki gwiazdowej. Pojemność jednostkową takiego toru określa zależność:

$$C \approx \frac{8\pi\varepsilon}{\ln\frac{R^8-a^4c^4}{r_0R^4(a+c)(a^2+c^2)}} = \frac{8\pi\varepsilon}{\ln\frac{(R^8-a^4c^4)(c-a)}{r_0R^4(c^4-a^4)}}, \tag{22}$$

w której

$$c^4 = B - \sqrt{B^2 - R^8} \tag{23}$$

oraz

$$B = \frac{R^8 + (a^2 - r_0^2)^4}{(a+r_0)^4 + (a-r_0)^4}. \tag{24}$$

Jeżeli przewód zewnętrzny ma średnicę znacznie większą od średnicy okręgu opisanego na przewodzie wewnętrznym, wystarczającą dla celów praktycznych, dokładność obliczeń daje wzór uproszczony:

$$C \approx \frac{8\pi\varepsilon}{\ln \dfrac{R^4}{r_0(a+c)(a^2+c^2)}} = \frac{8\pi\varepsilon}{\ln \dfrac{R^4(c-a)}{r_0(c^4-a^4)}}, \tag{25}$$

w którym:

$$c^4 = \frac{1}{2}[(a+r_0)^4 + (a-r_0)^4]. \tag{26}$$

2.6. Przypadek $n = 6$

W kablach współosiowych giętkich bardzo często stosowany jest siedmiodrutowy przewód wewnętrzny, w którego zewnętrznej warstwie znajduje się sześć drutów. Z tego powodu rozważony tu przypadek $n = 6$ jest bardzo ważny z punktu widzenia potrzeb projektowania wspomnianych kabli.

Zgodnie z rozdz. 2.1 pojemność jednostkowa rozważanego toru wyraża się zależnością:

$$C \approx \frac{12\pi\varepsilon}{\ln \dfrac{(R^{12} - a^6c^6)(c-a)}{r_0 R^6(c^6-a^6)}}, \tag{27}$$

w której:

$$c^6 = B - \sqrt{B^2 - R^{12}} \tag{28}$$

oraz

$$B = \frac{R^{12} + (a^2 - r_0^2)^6}{(a+r_0)^6 + (a-r_0)^6}. \tag{29}$$

Jeżeli średnica przewodu zewnętrznego jest znacznie większa od średnicy przewodu wewnętrznego, zależności (27) i (28) można uprościć:

$$C \approx \frac{12\pi\varepsilon}{\dfrac{R^6(c-a)}{r_0(c^6-a^6)}}, \tag{30}$$

$$c^6 = \frac{1}{2}[(a+r_0)^6 + (a-r_0)^6]. \tag{31}$$

W kablach współosiowych giętkich poszczególne druty przewodu wewnętrznego siedmiodrutowego stykają się ze sobą, a zatem $a = 2r_0$. W takim przypadku $c = 2{,}6733r_0$

i wzór (30) przyjmuje postać:

$$C \approx \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{R}{2{,}7652 r_0}} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{R}{r_0} - 1{,}0171}. \tag{32}$$

2.7. Przypadek $n = 12$

Jeżeli kabel współosiowy giętki posiada przewód wewnętrzny skręcony z dziewiętnastu drutów, to w warstwie zewnętrznej skręconego przewodu znajduje się dwanaście drutów. Ponieważ kable o takiej konstrukcji występują bardzo często, rozpatrywany przypadek jest również bardzo ważny z punktu widzenia praktyki.

Pojemność jednostkowa toru współosiowego przy $n = 12$ wyraża się zależnością:

$$C \approx \frac{24\pi\varepsilon}{\ln\frac{(R^{24} - a^{12}c^{12})(c-a)}{r_0 R^{12}(c^{12} - a^{12})}}, \tag{33}$$

w której:

$$c^{12} = B - \sqrt{B^2 - R^{24}}, \tag{34}$$

oraz

$$B = \frac{R^{24} + (a^2 - r_0^2)^{12}}{(a+r_0)^{12} + (a-r_0)^{12}}. \tag{35}$$

W przypadku przewodu zewnętrznego o średnicy dużej w porównaniu ze średnicą przewodu wewnętrznego zależność (33) upraszcza się:

$$C \approx \frac{24\pi\varepsilon}{\ln\frac{R^{12}(c-a)}{r_0(c^{12} - a^{12})}}, \tag{36}$$

natomiast

$$c^{12} = \frac{1}{2}[(a+r_0)^{12} + (a-r_0)^{12}]. \tag{37}$$

Przy założeniu, że poszczególne druty przewodu wewnętrznego stykają się ze sobą, co ma miejsce w przypadku skręconych przewodów wewnętrznych giętkich kabli współosiowych, dla $n = 12$ otrzymuje się $a = 4\ r_0$ oraz $c = 4{,}7202\ r_0$. Wzór (36) przyjmuje wówczas kształt:

$$C \approx \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{R}{4{,}7918 r_0}} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{R}{r_0} - 1{,}5669}. \tag{38}$$

2.8. Zagadnienie przewodu wewnętrznego jednodrutowego równoważnego z uwagi na pojemność przewodowi wielodrutowemu

W dotychczasowej praktyce projektowania torów współosiowych o przewodach wewnętrznych wielodrutowych zastępowano każdy przewód wielodrutowy równoważnym z uwagi na pojemność przewodem jednodrutowym o tak dobranym promieniu r_e przekroju

poprzecznego, ażeby pojemność toru współosiowego z przewodem wielodrutowym była równa pojemności toru z równoważnym przewodem jednodrutowym. Pojemność obliczano następnie ze znanej zależności pojemności jednostkowej toru współosiowego o przewodzie wewnętrznym jednodrutowym od wymiarów geometrycznych toru:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{R}{r_e}}. \tag{39}$$

Przy obliczaniu promienia r_e posługiwano się współczynnikami podanymi przez Meyersa [3], które są stałe, niezależnie od stosunku promieni przewodów toru współosiowego. Takie postępowanie było uzasadnione tylko w ściśle określonym zakresie wartości wspomnianego stosunku, ponieważ jest faktem doświadczalnym nieograniczony wzrost pojemności w przypadku, gdy $a+r_0 \to R$, a zatem wówczas bez względu na liczbę drutów $r_e \to a+r_0$.

Ażeby znaleźć rzeczywistą wartość promienia r_e przekroju poprzecznego równoważnego przewodu wewnętrznego należy porównać wyrażenie (8) z wyrażeniem (39); z porównania wynika zależność:

$$r_e^n = \frac{r_0 R^{2n}(c^n - a^n)}{(R^{2n} - a^n c^n)(c-a)}, \tag{40}$$

w której c jest parametrem określonym przez związek (5). Uzyskane wyrażenie wskazuje, że promień przekroju przewodu wewnętrznego równoważnego ze względu na pojemność przewodowi wielodrutowemu zależy w znacznej mierze od promienia przewodu zewnętrznego. Dopiero wtedy, gdy $R \gg c$ można uważać promień r_e za niezależny od wyboru promienia przewodu zewnętrznego, ponieważ wówczas $R^{2n} \gg a^n c^n$ oraz

$$r_e^n \approx \frac{r_0(c^n - a^n)}{c-a}. \tag{41}$$

Tablica 1

Zależność współczynnika k_e od liczby drutów przewodu wewnętrznego wielodrutowego toru współosiowego

Całkowita liczba drutów	n	$\frac{a}{r_0}$	$\frac{r_e}{r_0}$	$k_e = \frac{r_e}{a+r_0}$	k_e wg Meyersa
2	2	1,0000	1,558	0,7789	—
3	3	1,1547	1,840	0,8542	0,871
4	4	1,4142	2,143	0,8877	—
7	6	2,0000	2,765	0,9217	0,939
12	9	3,1547	3,927	0,9452	0,957
19	12	4,0000	4,792	0,9584	0,970
27	15	5,1547	5,946	0,9661	0,976
37	18	6,0000	6,801	0,9716	0,980
61	24	8,0000	8,807	0,9785	0,985
91	30	10,0000	10,810	0,9827	0,988

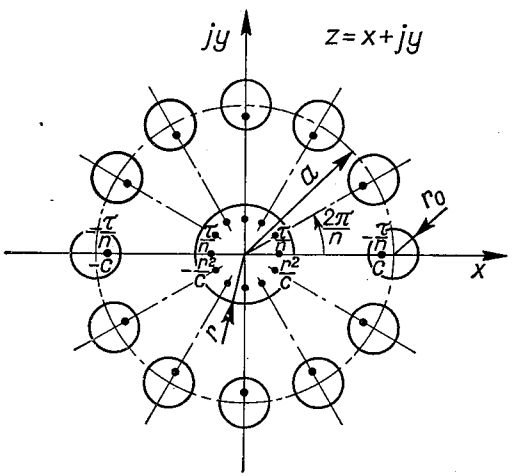
Przy wykorzystaniu ostatniego związku najmniejszy błąd obliczeń uzyskuje się korzystając równocześnie z przybliżonego związku (10) określającego parametr c. Błąd względny obliczeń dla $n = 2$, $a = r_0$ oraz $\frac{R}{c} = 3{,}5$ wynosi $-0{,}26\%$, a przy większych wartościach n błąd ten jest jeszcze mniejszy.

Współczynniki korekcyjne, umożliwiające obliczenie promienia r_e równoważnego z uwagi na pojemność przewodu wewnętrznego jednodrutowego podawane są zwykle w odniesieniu do promienia zewnętrznego przewodu wielodrutowego, to znaczy do promienia okręgu opisanego na przekroju poprzecznym takiego przewodu, równego $a+r_0$. W tablicy 1 zestawiono wartości współczynnika $k_e = \frac{r_e}{a+r_0}$ obliczone przy pomocy wzoru (41) dla przewodów wielodrutowych o różnej liczbie drutów z wartościami podanymi przez Meyersa [3]. Porównanie wskazuje, że największe różnice między wartościami k_e obliczonymi przy wykorzystaniu wzoru (41) a wartościami uzyskanymi przez Meyersa są rzędu 2% i występują przy małych wartościach n. Przy dużych wartościach n wspomniane różnice są bardzo małe.

3. WYZNACZANIE POJEMNOŚCI TORÓW WSPÓŁOSIOWYCH O WIELODRUTOWYCH PRZEWODACH ZEWNĘTRZNYCH

3.1. Przypadek ogólny

Poniżej rozpatrywany będzie tor współosiowy o przewodzie wewnętrznym w postaci jednolitego, przewodzącego cylindra o promieniu przekroju poprzecznego r i o przewodzie



Rys. 2. Tor współosiowy o przewodzie zewnętrznym wielodrutowym (przekrój poprzeczny)

zewnętrznym wykonanym z dużej liczby drutów o promieniach przekroju r_0, przy czym druty te rozmieszczone są równomiernie na okręgach w jednej lub kilku warstwach (obwój lub oploty). Ponieważ ładunki elektryczne przewodu zewnętrznego rozmieszczone są w zasadzie tylko na powierzchniach n drutów warstwy wewnętrznej, rozlokowanych

równomiernie na okręgu o promieniu a, pozostałe warstwy drutów przy stosowanych w praktyce dużych wartościach n nie wywierają istotnego wpływu na pojemność i mogą być pominięte. Pomijając ponadto dla uproszczenia rachunku wpływ na pojemność spiralnego ułożenia drutów przewodu zewnętrznego otrzymuje się przedstawiony na rys. 2 model rozważanego toru współosiowego, którego przewód zewnętrzny tworzy jedna warstwa równomiernie rozmieszczonych na okręgu drutów o prostopadłych do płaszczyzny przekroju osiach symetrii. Współrzędne osi na płaszczyźnie zmiennej zespolonej z, na którą naniesiono przekrój modelu toru współosiowego zgodnie z rys. 2, będą równe $z_{0k} = ae^{jk\frac{2\pi}{n}}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Przyjmuje się, że ładunek całkowity przewodu wewnętrznego modelu wynosi $+\tau$, natomiast ładunek całkowity przewodu zewnętrznego wynosi $-\frac{\tau}{n}$, a zatem ładunek całkowity każdego z drutów wynosi $-\frac{\tau}{n}$ oraz, że model „zanurzony" jest w ośrodku izotropowym i jednorodnym o przenikalności elektrycznej ε.

Zgodnie z zasadami nowej metody przybliżonej ładunki poszczególnych drutów przewodu zewnętrznego należy zastąpić pojedynczymi ładunkami liniowymi $-\frac{\tau}{n}$, umiejscowionymi w punktach o współrzędnych $z'_k = ce^{jk\frac{2\pi}{n}}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ płaszczyzny zmiennej zespolonej z, natomiast ładunek przewodu wewnętrznego najlepiej jest zastąpić uzyskanymi za pośrednictwem inwersji obrazami elektrycznymi ładunków liniowych wszystkich drutów (rys. 2), ponieważ wówczas powierzchnia zewnętrzna przewodu wewnętrznego jest powierzchnią ekwipotencjalną.

Ponieważ współrzędne obrazów elektrycznych ładunków liniowych na płaszczyźnie zmiennej zespolonej z będą równe $z''_k = \frac{r^2}{c} \cdot e^{jk\frac{2\pi}{n}}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, potencjał zespolony modelu rozpatrywanego toru współosiowego o przewodzie zewnętrznym wielodrutowym można przedstawić w postaci:

$$W(z) = -\frac{\tau}{2n\pi\varepsilon}\left[\sum_{k=1}^{n} \ln(z - z''_k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(z - z'_k)\right] = -\frac{\tau}{2n\pi\varepsilon} \ln \frac{z^n - \frac{r^{2n}}{c^n}}{z^n - c^n}. \tag{42}$$

Po podstawieniu do powyższego wyrażenia $z_i = re^{j\varphi}$ otrzymuje się:

$$W(z_i) = \frac{\tau}{2n\pi\varepsilon} \ln \frac{r^n e^{jn\varphi} - c^n}{r^n e^{jn\varphi} - \frac{r^{2n}}{c^n}} = \frac{\tau}{2n\pi\varepsilon}\left[\ln \frac{c^n}{r^n} + \ln \frac{-e^{jn\varphi}\left(e^{-jn\varphi} - \frac{r^n}{c^n}\right)}{e^{jn\varphi} - \frac{r^n}{c^n}}\right],$$

a więc składowa rzeczywista potencjału na okręgu z_i (potencjał przewodu wewnętrznego modelu toru z rys. 2) jest stała i równa:

$$U(z_i) = \frac{\tau}{2n\pi\varepsilon} \ln \frac{c^n}{r^n}. \tag{43}$$

Parametr c powinien być tak dobrany, ażeby linie ekwipotencjalne wypadkowego pola elektrostatycznego wszystkich ładunków liniowych oraz ich obrazów elektrycznych były

jak najbardziej zbliżone do śladów powierzchni wszystkich drutów przewodu zewnętrznego na płaszczyźnie zmiennej z. Wykorzystując najprostsze kryterium takiego doboru — kryterium Breisiga — należy zażądać, żeby wypadkowy potencjał pola elektrostatycznego przyjmował jednakowe wartości w dwóch przeciwległych punktach $z_{n1} = a+r_0$ oraz $z_{n2} = a-r_0$ okręgu o równaniu $z_n = a+r_0 e^{j\varphi}$, będącego śladem powierzchni n-tego drutu przewodu zewnętrznego. Otrzymuje się wówczas warunek:

$$\frac{(a+r_0)^n - c^n}{(a+r_0)^n - \frac{r^{2n}}{c^n}} = \frac{c^n - (a-r_0)^n}{(a-r_0)^n - \frac{r^{2n}}{c^n}} = F, \tag{44}$$

równoważny równaniu:

$$c^{2n} - 2Bc^n + r^{2n} = 0,$$

w którym:

$$B = \frac{r^{2n} + (a^2 - r_0^2)^n}{(a+r_0)^n + (a-r_0)^n}. \tag{45}$$

Parametr c jest jednym z pierwiastków powyższego równania, gdyż:

$$c^n = B + \sqrt{B^2 - r^{2n}}. \tag{46}$$

W przypadku granicznym, gdy $r \to a-r_0$, wielkość pomocnicza $B \to r^n$, a zatem $c \to r$. Jeżeli natomiast $r \to 0$, to zgodnie ze związkami (45) oraz (46)

$$c^n \to 2B \to \frac{2(a^2 - r_0^2)^n}{(a+r_0)^n + (a-r_0)^n}. \tag{47}$$

Przyjmując, że potencjał w punkcie $z_{n1} = a+r_0$ jest potencjałem wielodrutowego przewodu zewnętrznego toru współosiowego, z rys. 2 można wyznaczyć pojemność jednostkową tego toru w pierwszym przybliżeniu. Efektywne obliczenie wartości potencjału w punkcie z_{n1} w postaci najwygodniejszej dla praktyki umożliwia warunek (44). Zastępując ten warunek równaniem:

$$F\frac{r^{2n}}{c^n} = (a+r_0)^n(F-1) + c^n = (a-r_0)^n(F+1) - c^n$$

otrzymuje się wielkość pomocniczą F w postaci:

$$F = \frac{(a+r_0)^n + (a-r_0)^n - 2c^n}{(a+r_0)^n - (a-r_0)^n}.$$

Potencjał w punkcie z_{n1} jest równy

$$U(z_{n1}) = \frac{\tau}{2n\pi\varepsilon} \ln F,$$

natomiast potencjał przewodu wewnętrznego określa związek (43). Różnica tych dwóch wartości potencjału determinuje pojemność jednostkową C toru współosiowego o przewodzie zewnętrznym wielodrutowym (n drutów w wewnętrznej warstwie przewodu) w pierwszym przybliżeniu:

$$C \approx \frac{\tau}{U(z_i) - U(z_{n1})} = \frac{2n\pi\varepsilon}{\ln \frac{c^n[(a+r_0)^n - (a-r_0)^n]}{r^n[(a+r_0)^n + (a-r_0)^n - 2c^n]}}. \tag{48}$$

Uzyskana zależność daje poprawne rezultaty w przypadku granicznym, gdy $r \to a - r_0$, ponieważ wówczas $c \to r$ oraz $F \to 1$, a zatem pojemność rośnie nieograniczenie.

Dokładniejszą zależność pojemności jednostkowej toru współosiowego o przewodzie zewnętrznym wielodrutowym od wymiarów geometrycznych przekroju poprzecznego toru można otrzymać obliczając wartość średnią potencjału przewodu zewnętrznego modelu toru z rys. 2 (wartość ta jest równa wartości średniej potencjału dowolnego drutu przewodu) i traktując tę wartość jako potencjał przewodu zewnętrznego. Do obliczenia wspomnianej wartości średniej niezbędne jest przedstawienie potencjału zespolonego (42) w otoczeniu punktu $z_{0n} = a$ (ślad osi symetrii n-tego drutu) w postaci szeregu potęgowego zbieżnego na okręgu $z_n = a + r_0 e^{j\varphi}$ (ślad powierzchni n-tego drutu na płaszczyźnie zmiennej zespolonej z).

Nietrudno sprawdzić, że

$$\ln(z^n - c^n) = \ln \prod_{k=1}^{n} (z - ce^{jk\frac{2\pi}{n}}) = \ln(z-c) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln(z - ce^{jk\frac{2\pi}{n}}).$$

Pierwszy składnik prawej strony powyższej równości można przedstawić w postaci szeregu:

$$\ln(z-c) = \ln(z-a-c+a) = \ln(z-a) + \ln\left(1 - \frac{c-a}{z-a}\right) = \ln(z-a) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{c-a}{z-a}\right)^m, \quad (49)$$

ponieważ $|z-a| > a-c$ na okręgu z_n, natomiast drugi składnik równości przyjmie postać:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln(z - ce^{jk\frac{2\pi}{n}}) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(a - ce^{jk\frac{2\pi}{n}}) - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{z-a}{ce^{jk\frac{2\pi}{n}} - a}\right)^m =$$

$$= \ln\frac{a^n - c^n}{a-c} - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{z-a}{ce^{jk\frac{2\pi}{n}} - a}\right)^m, \quad (50)$$

gdyż $|z-a| < |ce^{jk\frac{2\pi}{n}} - a|$ na okręgu z_n dla $k \neq n$.

W podobny sposób otrzymuje się rozwinięcia pozostałych członów wyrażenia (42):

$$\ln\left(z^n - \frac{r^{2n}}{c^n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(z - \frac{r^2}{c} e^{jk\frac{2\pi}{n}}\right) = \ln\left(a^n - \frac{r^{2n}}{c^n}\right) - \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{z-a}{\frac{r^2}{c}e^{jk\frac{2\pi}{n}} - a}\right)^m, \quad (51)$$

ponieważ $|z-a| < \left|\frac{r^2}{c} e^{jk\frac{2\pi}{n}} - a\right|$ na okręgu z_n dla dowolnego k. Uwzględniając rozwinięcia (49), (50) i (51) potencjał zespolony (42) można przedstawić jak poniżej:

$$W(z) = -\frac{\tau}{2n\pi\varepsilon}\left[\ln\frac{\left(a^n - \frac{r^{2n}}{c^n}\right)(a-c)}{(z-a)(a^n - c^n)} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{z-a}{\frac{r^2}{c}e^{jk\frac{2\pi}{n}} - a}\right)^m + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{z-a}{ce^{jk\frac{2\pi}{n}} - a}\right)^m + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{c-a}{z-a}\right)^m\right]. \quad (52)$$

Powyższa zależność, zawierająca szeregi zbieżne na okręgu z_n, wskazuje, że wartość średnia składowej rzeczywistej potencjału obliczona dla wspomnianego okręgu jest równa:

$$U_{śr}(z_n) = -\frac{\tau}{2n\pi\varepsilon} \ln \frac{(a^n c^n - r^{2n})(a-c)}{r_0 c^n (a^n - c^n)}. \tag{53}$$

Dzieląc całkowity ładunek τ przewodu wewnętrznego toru współosiowego o przewodzie zewnętrznym wielodrutowym przez różnicę potencjałów obydwu przewodów obliczoną z wartości (43) i (53) otrzymuje się wyrażenie na pojemność jednostkową rozpatrywanego toru:

$$C \approx \frac{\tau}{U(z_i) - U_{śr}(z_n)} = \frac{2n\pi\varepsilon}{\ln \frac{(a^n c^n - r^{2n})(a-c)}{r_0 r^n (a^n - c^n)}}, \tag{54}$$

w którym c jest parametrem określonym wzorem (46). Ostatnie wyrażenie, pod względem formalnym prawie identyczne z wyrażeniem (8) (wzory te różnią się wartościami parametru c), umożliwia obliczanie z dużą dokładnością pojemności toru współosiowego o przewodzie zewnętrznym wielodrutowym, zawierającym dowolną liczbę (n) drutów w wewnętrznej warstwie przewodu. Może być ono wykorzystane przy dowolnych wymiarach przekroju poprzecznego toru bez względu na wartość jego oporności falowej i nadaje się szczególnie do badania zależności pojemności lub oporności falowej toru od liczby drutów jego przewodu zewnętrznego.

3.2. Przypadek $r \ll a - r_0$

Jeżeli promień przekroju poprzecznego przewodu wewnętrznego jest znacznie mniejszy od promienia okręgu wpisanego w przekrój przewodu zewnętrznego, to ładunki na powierzchni przewodu wewnętrznego rozmieszczone są praktycznie równomiernie i obrazy elektryczne ładunków przewodu zewnętrznego można zastąpić pojedynczym ładunkiem liniowym $+\tau$ umiejscowionym na osi symetrii przewodu wewnętrznego. Potencjał zespolony modelu toru z rys. 2 można wówczas przedstawić w postaci:

$$W(z) = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln z + \frac{\tau}{2n\pi\varepsilon} \ln(z^n - c^n) = -\frac{\tau}{2n\pi\varepsilon} \ln \frac{z^n}{z^n - c^n}. \tag{55}$$

Podobnie jak poprzednio parametr c, decydujący o położeniu ładunków liniowych, zastępujących ładunki całkowite $-\frac{\tau}{n}$ poszczególnych drutów przewodu zewnętrznego, należy tak dobrać, ażeby linie ekwipotencjalne wypadkowego pola elektrycznego jak najdokładniej naśladowały ślady powierzchni wszystkich drutów. Najprostsze kryterium takiego doboru — kryterium Breisiga — sprowadza się w rozpatrywanym przypadku do żądania, żeby wypadkowy potencjał, równy składowej rzeczywistej potencjału zespolonego (55), przyjmował jednakowe wartości w dwóch przeciwległych punktach $z_{n1} = a + r_0$ oraz $z_{n2} = a - r_0$ śladu n-tego drutu. Prowadzi ono do warunku:

$$\frac{(a+r_0)^n - c^n}{(a+r_0)^n} = \frac{-(a-r_0)^n + c^n}{(a-r_0)^n},$$

zgodnie z którym:

$$c^n = \frac{2(a^2-r_0^2)^n}{(a+r_0)^n+(a-r_0)^n}. \tag{56}$$

Taką samą wartość parametru c otrzymano już wcześniej z wyrażenia (46) w granicy przy $r \to 0$ [wzór (47)].

Do obliczenia pojemności toru współosiowego o przewodzie zewnętrznym wielodrutowym potrzebna jest wartość średnia składowej rzeczywistej potencjału (55) na okręgu o równaniu $z_n = a+r_0e^{j\varphi}$ (ślad n-tego drutu na płaszczyźnie z) oraz wartość średnia tej składowej na okręgu o promieniu r (ślad powierzchni przewodu wewnętrznego).

Pierwszą z dwóch wymienionych wyżej wartości można uzyskać rozwijając wyrażenie (55) w otoczeniu punktu $z_{0n} = a$ na szereg potęgowy zbieżny na okręgu z_n i całkując składową rzeczywistą szeregu względem zmiennej φ od 0 do 2π. Ostateczny wynik rachunku jest następujący:

$$U_{śr}(z_n) = -\frac{\tau}{2n\pi\varepsilon}\ln\frac{a^n(a-c)}{r_0(a^n-c^n)}. \tag{57}$$

Drugą wartość średnią potencjału, którą uważa się za potencjał przewodu wewnętrznego toru, można znaleźć wykorzystując rozwinięcie potencjału zespolonego (55) w otoczeniu punktu $z = 0$ na szereg potęgowy zbieżny na okręgu $z_i = re^{j\varphi}$. Wartość ta jest równa:

$$U_{śr}(z_i) = \frac{\tau}{2n\pi\varepsilon}\ln\frac{c^n}{r^n}, \tag{58}$$

a więc pojemność jednostkową toru współosiowego o przewodzie zewnętrznym wielodrutowym w przypadku, gdy $r \ll a-r_0$, można obliczać ze wzoru:

$$C \approx \frac{2n\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{a^nc^n(a-c)}{r_0r^n(a^n-c^n)}} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{c}{r}+\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{a^n(a-c)}{r_0(a^n-c^n)}}, \tag{59}$$

w którym c jest parametrem określonym zależnością (56). Wzór (59) w porównaniu ze wzorem dokładniejszym (54) daje błąd obliczeń nie większy niż 0,2%, jeżeli $\frac{c}{r} \geqslant 3{,}5$, i nadaje się jedynie do obliczania pojemności torów o oporności falowej nie mniejszej niż 50 omów. Wzór ten można uzyskać bezpośrednio ze związku (54), pomijając wielkość r^{2n}, małą w porównaniu z iloczynem $a^n\,c^n$, w przypadku gdy $r \ll a-r_0$.

W tablicy 2 przytoczono wyniki obliczeń otrzymane za pomocą zależności (59) i charakteryzujące zależność pojemności toru współosiowego o wymiarach $r = 0{,}442$ mm, $r_0 = 0{,}075$ mm oraz $a = 1{,}55$ mm od liczby drutów (n) przewodu zewnętrznego przy założeniu, że przenikalność elektryczna względna ośrodka wypełniającego wnętrze toru oraz ośrodka, w którym umieszczony jest tor, jest taka sama i wynosi 2,28. Przy $n \to \infty$ pojemność jednostkową obliczono z zależności:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{a-r_0}{r}}, \tag{60}$$

ponieważ wówczas $c \to a - r_0$, natomiast drugi składnik mianownika prawej strony wzoru (59) jest pomijalnie mały. Sens fizyczny powyższej zależności jest oczywisty: przy $n \to \infty$ przewód zewnętrzny wielodrutowy uzyskuje własności cylindrycznego przewodu jednolitego.

Tablica 2

Zależność pojemności jednostkowej toru współosiowego o wymiarach: $r=0{,}442$ mm, $a=1{,}55$ mm i $r_0=0{,}075$ mm od liczby drutów (n) przewodu zewnętrznego

n	c	C
—	mm	pF/m
2	1,544	52,44
4	1,541	76,28
8	1,534	92,69
16	1,522	100,55
32	1,505	103,49
∞	1,475	105,20

3.3. Przypadek $n = 1$

W przypadku gdy przewód zewnętrzny modelu toru współosiowego z rys. 2 stanowi tylko jeden drut o promieniu przekroju poprzecznego r_0, otrzymuje się tor o przewodach równoległych, którego drugi przewód o promieniu przekroju r umieszczony jest w odległości a obok pierwszego. Potencjał zespolony takiego toru można uzyskać z ogólnego wyrażenia (42), przyjmując $n = 1$:

$$W(z) = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{z-\frac{r^2}{c}}{z-c}, \tag{61}$$

natomiast parametr c determinuje związek (46) przy $n = 1$:

$$c = B+\sqrt{B^2-r^2}, \tag{62}$$

w którym:

$$B = \frac{r^2+a^2-r_0^2}{2a}. \tag{63}$$

Dokładną wartość pojemności jednostkowej rozpatrywanego toru można określić z zależności (48), bądź też z zależności (54). Wykorzystując tę drugą zależność otrzymuje się następujący wzór na pojemność toru o przewodach równoległych, których promienie przekroju są odpowiednio równe r_0 oraz r, a odległość osi przewodów wynosi a:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{ac-r^2}{r_0 r}}. \tag{64}$$

Powyższy wzór można sprowadzić do powszechnie znanej postaci, podawanej w wielu publikacjach. Przede wszystkim wzór (64) należy zastąpić równoważnym mu wzorem:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{c}{r} + \ln\frac{a-\frac{r^2}{c}}{r_0}}.$$

Drugi składnik mianownika ostatniego wzoru można przekształcić, uwzględniając tożsamość:

$$\frac{r^2}{c} = \frac{r^2}{B+\sqrt{B^2-r^2}} \equiv B-\sqrt{B^2-r^2}$$

oraz związek:

$$B^2-r^2 = (a-B)^2-r_0^2,$$

wynikający bezpośrednio ze związku (63). W konsekwencji można napisać:

$$\ln\frac{a-\frac{r^2}{c}}{r_0} = \ln\frac{a-B+\sqrt{(a-B)^2-r_0^2}}{r_0},$$

a więc wzór (64) przyjmie postać:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left[\frac{B}{r}+\sqrt{\left(\frac{B}{r}\right)^2-1}\right]+\ln\left[\frac{a-B}{r_0}+\sqrt{\left(\frac{a-B}{r_0}\right)^2-1}\right]} = \frac{2\pi\varepsilon}{\operatorname{arch}\frac{B}{r}+\operatorname{arch}\frac{a-B}{r_0}}. \tag{65}$$

Przy $r = r_0$ otrzymuje się znany wzór na pojemność toru symetrycznego nieekranowanego o identycznych przewodach umiejscowionych w odległości a od siebie,

$$C = \frac{\pi\varepsilon}{\operatorname{arch}\frac{a}{2r_0}},$$

ponieważ wówczas $B = a-B = \frac{a}{2}$.

Zastosowana w niniejszej pracy metoda przybliżona daje zatem dokładne rezultaty w przypadku torów elektrycznych dwuprzewodowych.

3.4. Tor o niejednorodnej izolacji

Jeżeli przewód zewnętrzny modelu toru współosiowego z rys. 2 składa się z niewielkiej liczby drutów rozmieszczonych równomiernie na izolacji przewodu wewnętrznego, to nawet w przypadku, w którym izolacja ta wykonana jest z jednorodnego materiału dielektrycznego, część linii sił wypadkowego pola elektrycznego przebiega na zewnątrz izolacji. Rozpatrywany tor współosiowy zachowuje się wówczas tak, jak tor o niejednorodnej izolacji, ponieważ przenikalność elektryczna ośrodka zewnętrznego, w którym umieszczony jest tor współosiowy, wywiera wpływ na pojemność tego toru. Im mniejsza jest liczba

drutów przewodu zewnętrznego, tym więcej linii sił przenika przez niejednolity przewód zewnętrzny do ośrodka zewnętrznego otaczającego tor współosiowy i tym bardziej pojemność toru zależy od własności wspomnianego ośrodka. Z tego powodu omawiany przypadek zasługuje na odrębną analizę.

Niech izolacja przewodu wewnętrznego toru współosiowego wykonana będzie w postaci jednolitego cylindra, którego oś symetrii pokrywa się z osią symetrii przewodu wewnętrznego, z izotropowego i jednorodnego dielektryka o przenikalności elektrycznej ε_1. W przypadku najważniejszym dla praktyki wszystkie druty przewodu zewnętrznego ściśle przylegają do powierzchni izolacji, a zatem promień dielektrycznego cylindra jest równy $a-r_0$. Ponieważ wartości natężenia pola elektrycznego poza granicami przewodu zewnętrznego są niewielkie i pole to występuje tylko w bezpośredniej bliskości przewodu, można przyjąć, że ośrodek zewnętrzny jest ośrodkiem jednorodnym o przenikalności elektrycznej ε_2, równej przenikalności bezpośredniego otoczenia przewodu zewnętrznego (na przykład przenikalności elektrycznej materiału powłoki termoplastycznej giętkiego kabla współosiowego). Usprawiedliwione jest także założenie, że pole elektryczne omówionego powyżej toru o izolacji niejednorodnej różni się nieznacznie od pola identycznego toru o izolacji jednorodnej (załamania linii sił na granicy dwóch dielektryków są niewielkie, gdyż stałe dielektryczne obydwu dielektryków są tego samego rzędu) i może być opisane za pomocą potencjału zespolonego (42), przy czym potencjał ten będzie teraz zarówno funkcją współrzędnych punktu, jak też i przenikalności elektrycznej ośrodka. W ośrodku o przenikalności elektrycznej ε_1 składowa rzeczywista potencjału zespolonego będzie zależna od ε_1, co można zapisać jako $U(z, \varepsilon_1)$, natomiast w ośrodku o przenikalności ε_2 wspomniana składowa będzie zależna od ε_2: $U(z, \varepsilon_2)$. Oznaczając ślad powierzchni izolacji na płaszczyźnie z przez $z_a = (a-r_0)e^{j\varphi}$, całkowitą różnicę potencjałów ΔU między przewodami toru współosiowego można wyrazić w następujący sposób:

$$\Delta U = U(z_i, \varepsilon_1) - U_{śr}(z_a, \varepsilon_1) + U_{śr}(z_a, \varepsilon_2) - U_{śr}(z_n, \varepsilon_2), \tag{66}$$

jeżeli konsekwentnie utożsamia się potencjał dowolnej powierzchni cylindrycznej z wartością średnią wypadkowego potencjału obliczoną dla tej powierzchni. Wartości potencjału $U(z_i, \varepsilon)$ oraz $U_{śr}(z_n, \varepsilon)$ określone są związkami (43) oraz (53), pozostaje zatem obliczyć wartość średnią potencjału na okręgu z_a. Podobnie jak poprzednio można tu wykorzystać rozwinięcie potencjału zespolonego (42) w otoczeniu punktu $z = 0$ na szereg potęgowy zbieżny na okręgu z_a:

$$W(z) = -\frac{\tau}{2n\pi\varepsilon}\left[\ln\frac{z^n}{-c^n} - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{r^2}{zc}\right)^{mn} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{z}{c}\right)^{mn}\right],$$

zgodnie z którym:

$$U_{śr}(z_a, \varepsilon) = -\frac{\tau}{2n\pi\varepsilon}\ln\frac{(a-r_0)^n}{c^n}. \tag{67}$$

Po uwzględnieniu związków (43), (53) i (67) różnica potencjałów (66) przyjmie postać:

$$\Delta U = \frac{\tau}{2n\pi\varepsilon}\left[\ln\frac{c^n}{r^n} + \ln\frac{(a-r_0)^n}{c^n}\right] + \frac{\tau}{2n\pi\varepsilon}\left[\ln\frac{c^n}{(a-r_0)^n} + \right.$$
$$\left. + \ln\frac{(a^n c^n - r^{2n})(a-c)}{r_0 c^n (a^n - c^n)}\right] = \frac{\tau}{2n\pi\varepsilon}\left[\ln\frac{(a-r_0)^n}{r^n} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\ln\frac{(a^n c^n - r^{2n})(a-c)}{r_0(a-r_0)^n(a^n - c^n)}\right].$$

Pojemność jednostkowa rozważanego toru o niejednorodnej izolacji wyraża się zatem zależnością:

$$C \approx \frac{\tau}{\Delta U} = \frac{2n\pi\varepsilon_1}{\ln\frac{(a-r_0)^n}{r^n} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\ln\frac{(a^nc^n-r^{2n})(a-c)}{r_0(a-r_0)^n(a^n-c^n)}} =$$

$$= \frac{2\pi\varepsilon_1}{\ln\frac{a-r_0}{r} + \frac{\varepsilon_1}{n\varepsilon_2}\ln\frac{(a^nc^n-r^{2n})(a-c)}{r_0(a-r_0)^n(a^n-c^n)}}, \tag{68}$$

w której c jest parametrem obliczonym ze związku (46). Przy $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ wzór (68) staje się identyczny ze wzorem (54), określającym pojemność toru współosiowego z przewodem zewnętrznym wielodrutowym o jednorodnej izolacji.

3.5. Porównania uzyskanych rezultatów z wynikami Kadena

Problemem wyznaczania parametrów jednostkowych toru współosiowego o przewodzie zewnętrznym wielodrutowym zajmował się Kaden [2]. Wykorzystując przybliżoną metodę oceny efektu bliskości otrzymał on następujący wzór na pojemność wspomnianego toru:

$$C \approx \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{a}{r} + \frac{1}{n}\ln\frac{a}{nr_0} - \frac{(n+1)^2}{n}\left(\frac{r_0}{2a}\right)^2}, \tag{69}$$

obowiązujący przy $a \gg r$ i przy $r_0 \ll a$. Można dowieść, że wzór (69) jest szczególnym przypadkiem wzoru (54) i przy $a-r_0 \gg r$ oraz $r_0 \ll a$ obydwa wzory dają praktycznie jednakowe wyniki. Jak wiadomo, przy zachowaniu warunku $a-r_0 \gg r$ wyrażenie (54) można z bardzo małym błędem zastąpić wyrażeniem (59), w którym parametr c wyraża się wzorem (56). Jeżeli jednak $r_0 \ll a$, to obowiązują zależności przybliżone (pierwsze wyrazy dwumianu Newtona):

$$(a+r_0)^n \approx a^n\left(1+n\frac{r_0}{a}+n\frac{n-1}{2}\frac{r_0^2}{a^2}\right),$$

$$(a-r_0)^n \approx a^n\left(1-n\frac{r_0}{a}+n\frac{n-1}{2}\frac{r_0^2}{a^2}\right),$$

$$(a^2-r_0^2)^n \approx a^{2n}\left(1-n\frac{r_0^2}{a^2}\right).$$

Po podstawieniu powyższych zależności do wzoru (56) i wykonaniu przybliżonego dzielenia otrzymuje się związek:

$$c^n \approx a^n\left(1-n\frac{n+1}{2}\frac{r_0^2}{a^2}\right),$$

z którego po przybliżonym pierwiastkowaniu wynika zależność:

$$c \approx a\left(1-\frac{n+1}{2}\frac{r_0^2}{a^2}\right). \tag{70}$$

Uwzględniając tę ostatnią zależność pierwszy składnik mianownika wyrażenia (59) można przedstawić w postaci:

$$\ln\frac{c}{r} \approx \ln\frac{a}{r} - \frac{n+1}{2}\frac{r_0^2}{a^2}. \tag{71}$$

Drugi składnik mianownika przekształca się w oparciu o związek:

$$\frac{a^n - c^n}{a-c} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} c^k,$$

do którego podstawia się przybliżoną zależność (70) i wykorzystuje się potęgowanie przybliżone:

$$\frac{a^n-c^n}{a-c} \approx \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}a^k\left(1-\frac{n+1}{2}\frac{r_0^2}{a^2}\right)^k \approx a^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-k\frac{n+1}{2}\frac{r_0^2}{a^2}\right) =$$

$$= a^{n-1}\left(n-\frac{n+1}{2}\frac{r_0^2}{a^2}\sum_{k=1}^{n-1}k\right) = na^{n-1}\left(1-\frac{n^2-1}{4}\frac{r_0^2}{a^2}\right).$$

Uwzględniając ostatni rezultat można zatem napisać:

$$\frac{1}{n}\ln\frac{a^n(a-c)}{r_0(a^n-c^n)} \approx \frac{1}{n}\ln\frac{a}{nr_0} + \frac{n^2-1}{4n}\frac{r_0^2}{a^2}. \tag{72}$$

Po podstawieniu przybliżonych związków (71) i (72) do wyrażenia (59) otrzymuje się zależność:

$$C \approx \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{a}{r} + \frac{1}{n}\ln\frac{a}{nr_0} - \frac{(n+1)^2}{4n}\frac{r_0^2}{a^2}}$$

identyczną z zależnością (69) podaną przez Kadena. Wspomniana zależność jest więc istotnie szczególnym przypadkiem wzoru (54), obowiązującym w przypadku, gdy $a \gg r$ oraz $a \gg r_0$.

Centralne Biuro Konstrukcji Kablowych Ożarów k. Warszawy

WYKAZ LITERATURY

1. Breisig F.: Theoretische Telegraphie, II Aufl., Friedrich Vieweg u. Sohn Akt. — Ges., Braunschweig 1924, s. 68—71.
2. Kaden H.: Wirbelströme und Schirmung in der Nachrichtentechnik, II Aufl., Springer-Verlag Berlin, J. F. Bergmann, München 1959, S. 305—307.
3. Meyers A. L.: Letter in Electrical Review, London 1942, No. 120, p. 791.
4. Perkowski Z.: Wyznaczanie pojemności torów elektrycznych pary symetrycznej ekranowanej. — Rozprawy Elektrotechniczne, t. XIII, 1967, z. 2, str. 307—329.
5. Perkowski Z.: Wyznaczanie pojemności torów elektrycznych ekranowanej czwórki gwiazdowej. — Archiwum Elektrotechniki, t. XVII, 1968, z. 3, str. 567—578.

Z. PERKOWSKI

DETERMINATION OF CAPACITANCE OF COAXIAL LINES HAVING BUNCHED CONDUCTORS

Summary

The paper deals with the application of a new approximate method of calculating the capacitance of coaxial lines having bunched conductors. The principles of the above mentioned method are described in a previous paper [4].

The dependences that have been derived of the capacitance of a coaxial line having a bunched inner conductor and of a line having a bunched outer conductor on the dimensions of geometric cros-sections of such lines yield calculation results that are in accordance with the previously obtained results of Meyers [3] and Kaden [2].

Z. PERKOWSKI

LA DÉTERMINATION DE LA CAPACITANCE DES LIGNES COAXIALLES À CONDUCTEURS À FILS MULTIPLES

Résumé

On à présenté dans l'article l'utilisation de la nouvelle méthode de calculer approximativement la capacitance en cas des lignes coaxialles à conducteurs à fils multiples. Les principes de la méthode mentionnés cidessus ont été présentés dans l'oeuvre publié plus tôt [4].

Les dépendances déduites de la capacitance de la ligne coaxialle à conducteur intérieur multifil et de la ligne à conducteur extérieur multifil des dimensions géométriques des sections transversalles donnent des résultats des calculs, qui sont d'accord avec ceux de Meyers [3] et de Kaden [2] obtenus plus tôt.

Z. PERKOWSKI

DIE BERECHNUNG DER KAPAZITÄTEN KOAXIALER LEITUNGEN MIT REUSENLEITERN

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde die Anwendung der neuen Näherungsmethode zur Berechnung der Kapazitäten im Falle koaxialer Leitungen mit Reusenleitern besprochen. Die Grundlagen der Methode waren in der früheren Arbeit [4] beschrieben worden.

Die abgeleiteten Zusammenhänge zwischen der Kapazität koaxialer Leitung, deren Innenleiter oder Aussenleiter ein Reusenleiter ist, und den Querschnittsabmessungen dieser Leitung geben gleiche Ergebnise der Berechnungen, wie frühere Resultate von Meyers [3] und Kaden [2].

З. ПЕРКОВСКИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЕМКОСТИ КОАКСИАЛЬНЫХ КАБЕЛЕЙ С МНОГОПРОВОЛОЧНЫМИ ПРОВОДАМИ

Резюме

В статье описано применение нового приближенного метода расчета емкости в случае коаксиальных кабелей с многопроволочными проводами. Принцип этого метода изложен в предыдущей статье [4].

Полученные зависимости емкости коаксиальных кабелей с внутренним или внешним многопроволочным проводом от геометрических размеров таких кабелей дают результаты расчета согласные с результатами, полученными Меерсом [3] и Каденом [2].

621.365.2

ALEKSY KURBIEL

Ocena względnej przydatności torów wielkoprądowych pieców łukowych

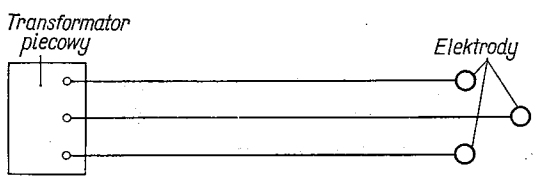
Rękopis dostarczono 29. 5. 1967

Określono względną przydatność dwóch torów wielkoprądowych, z których jeden ma większa rezystancję, a mniejszą reaktancję w porównaniu z analogicznymi wielkościami drugiego toru. Przydatność tę oceniono przez porównanie współczynników mocy i sprawności elektrycznych, wyznaczonych dla obu torów przy założeniu jednakowych mocy pieca. Podano nowe wskaźniki względnej przydatności torów wielkoprądowych, ułatwiające wybór najkorzystniejszego toru pieca łukowego.

1. WSTĘP

W urządzeniach łukowych stosuje się rozmaite układy torów wielkoprądowych. Wybór najkorzystniejszego układu toru jest zagadnieniem bardzo ważnym, zwłaszcza w odniesieniu do urządzeń łukowych o dużych mocach, gdyż oporności toru wielkoprądowego wpływają w dużym stopniu na współczynnik mocy i sprawność elektryczną urządzenia. W praktyce zdarzają się przypadki niepełnego wykorzystania mocy znamionowej urządzenia łukowego z powodu zbyt dużej reaktancji indukcyjnej toru wielkoprądowego.

Najprostszy konstrukcyjnie tor wielkoprądowy, utworzony przez trzy wiązki przewodów ułożonych obok siebie (rys. 1), stanowi rozwiązanie tradycyjne. Tor ten, nazwany tradycyjnym, może w niektórych przypadkach odznaczać się dużą reaktancją. Z tego powodu przy dużych piecach łukowych stosuje się też tory wielkoprądowe o innej budowie,

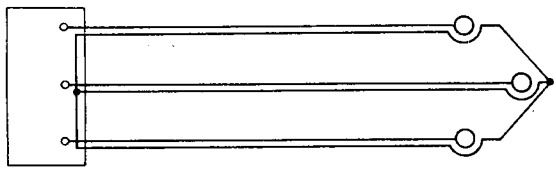


Rys. 1. Schemat tradycyjnego toru wielkoprądowego

zapewniającej małą ich reaktancję. Tory te są jednak bardziej złożone pod względem konstrukcyjnym i mają zazwyczaj większą rezystancję niż tor tradycyjny. Dla przykładu podano na rysunku 2 schemat toru skompensowanego. Małą reaktancję tego toru uzyskuje się kosztem zwiększenia jego rezystancji w porównaniu z torem tradycyjnym [1]. Pomiędzy opornościami dwóch torów wielkoprądowych o różnej budowie zachodzą więc najczęściej takie zależności, że rezystancja jednego z nich jest mniejsza, a reaktancja większa od ana-

logicznych oporności drugiego toru. W takim przypadku nie można bezpośrednio ocenić, który z powyższych torów jest korzystniejszy pod względem eksploatacyjnym pieca.

Korzystniejszy układ toru wielkoprądowego można ustalić na podstawie analizy stanów pracy pieca łukowego, zasilanego kolejno przez oba porównywane tory przy założeniu jednakowych mocy łuków w obu przypadkach. Torem bardziej przydatnym dla pieca jest



Rys. 2. Schemat skompensowanego toru wielkoprądowego

ten tor, przy którego zastosowaniu uzyskuje się lepszy współczynnik mocy oraz lepszą lub nie gorszą sprawność elektryczną urządzenia łukowego niż przy zastosowaniu drugiego rozpatrywanego toru. Taka ocena względnej przydatności dwóch różnych torów jest pod względem ekonomicznym całkowicie uzasadniona.

Na podstawie analizy stanów pracy pieca łukowego uwzględniającej powyższe kryterium przydatności torów przedstawiono nowe wskaźniki, ułatwiające wybór najkorzystniejszego toru wielkoprądowego dla takiego pieca.

2. ANALIZA STANÓW PRACY PIECA ŁUKOWEGO ZASILANEGO PRZEZ RÓŻNE TORY WIELKOPRĄDOWE

Zamiana toru wielkoprądowego, np. tradycyjnego (rys. 1), o dużej reaktancji i małej rezystancji, na tor, np. skompensowany (rys. 2), o mniejszej reaktancji i większej rezystancji w porównaniu z poprzednimi wartościami, powoduje zmianę przebiegu charakterystyk roboczych pieca łukowego. Analizując stany pracy pieca występujące w obu przypadkach torów wielkoprądowych można ustalić, przy którym z omawianych torów uzyskuje się lepsze wyniki eksploatacyjne pieca. Ocenę tę można ustalić na podstawie wykresów kołowych sporządzonych dla urządzenia łukowego z torem tradycyjnym i skompensowanym.

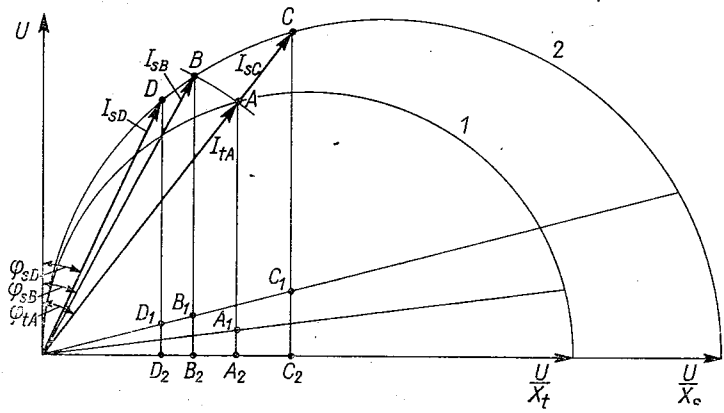
Do wykonania wykresów kołowych potrzebna jest znajomość napięcia fazowego urządzenia łukowego oraz rezystancji i reaktancji układu zasilającego piec (toru energetycznego). Układ zasilający z tradycyjnym torem wielkoprądowym określono rezystancją R_t i reaktancją X_t, przy czym są to średnie wartości oporności fazowych. Po zamianie toru tradycyjnego na tor skompensowany średnia wartość reaktancji układu zasilającego piec zmaleje i będzie wynosić X_s, a średnia wartość rezystancji układu wzrośnie do wartości R_s. Stosunki oporności obu rozpatrywanych układów zasilających oznaczono następująco:

$$\alpha = \frac{X_s}{X_t} < 1, \tag{1}$$

$$\beta = \frac{R_s}{R_t} > 1. \tag{2}$$

Poza tym założono, że oporności R_t, X_t, R_s, X_s nie zależą od prądu łuku.

Na rysunku 3 przedstawiono dwa wykresy kołowe, z których mniejszy (*1*) odnosi się do urządzenia łukowego z torem tradycyjnym, zaś większy (*2*) — do urządzenia z torem skompensowanym. Następnie przyjęto, że w przypadku zastosowania toru tradycyjnego prąd roboczy pieca wynosi I_{tA}, któremu odpowiada moc łuku P_{tA}. Stan pracy pieca przy tym prądzie jest oznaczony na wykresie kołowym *1* przez punkt *A*.



Rys. 3. Wykresy kołowe urządzenia łukowego z torem wielkoprądowym tradycyjnym (wykres *1*) i skompensowanym (wykres *2*)

Po zastąpieniu toru tradycyjnego przez tor skompensowany i utrzymaniu poprzedniej wartości prądu łuku $I_{sB} = I_{tA}$ otrzymuje się nowy stan pracy pieca, określony przez punkt *B* na wykresie kołowym *2*. Pomiędzy mocą łuku odpowiadającą temu punktowi (odcinek BB_1) a mocą łuku P_{tA} (odcinek AA_1) mogą zachodzić następujące zależności:

$$P_{sB} = P_{tA}, \tag{3}$$

$$P_{sB} < P_{tA}, \tag{4}$$

$$P_{sB} > P_{tA}. \tag{5}$$

Gdy zachodzi równość mocy łuków (3), to pomiędzy współczynnikami mocy i sprawnościami elektrycznymi odpowiadającymi punktom *A* i *B* na wykresach kołowych (rys. 3) zachodzą następujące zależności:

$$\cos\varphi_{sB} > \cos\varphi_{tA}, \tag{6}$$

$$\eta_{sB} = \frac{P_{sB}}{P_{sB}+I_{sB}^2 R_s} < \eta_{tA} = \frac{P_{tA}}{P_{tA}+I_{tA}^2 R_t}, \tag{7}$$

gdyż $\varphi_{sB} < \varphi_{tA}$ oraz $R_s > R_t$ [założenie (2)]. W tym przypadku moc strat elektrycznych $I_{sB}^2 R_s$ w układzie zasilającym z torem skompensowanym jest β-krotnie większa niż moc strat $I_{tA}^2 R_t$ w układzie z torem tradycyjnym.

Przy występowaniu nierówności mocy łuków (4) należy po zainstalowaniu toru skompensowanego utrzymać prąd łuku I_s większy od prądu I_{tA}, aby uzyskać moc łuku P_s równą mocy P_{tA}. Może się zdarzyć, że moc tę osiąga się przy prądzie I_{sC} (rys. 3), któremu odpowiada równość współczynników mocy

$$\cos\varphi_{sC} = \cos\varphi_{tA}. \tag{8}$$

W tym przypadku zastosowanie toru skompensowanego jest niekorzystne, gdyż nie uzyskuje się polepszenia współczynnika mocy, a pogarsza się sprawność elektryczną urządzenia.

Jeśli przy prądzie I_s spełniającym nierówność $I_{tA} < I_s < I_{sC}$ moc łuku P_s jest równa mocy P_{tA}, to zastosowanie toru skompensowanego zamiast tradycyjnego poprawia współczynnik mocy urządzenia, lecz pogarsza znacznie jego sprawność elektryczną, gdyż moc strat $I_s^2 R_s$ może być dużo większa od mocy strat $I_{tA}^2 R_t$.

Pogorszenie zarówno współczynnika mocy, jak i sprawności elektrycznej urządzenia następuje po zamianie toru tradycyjnego na skompensowany wtedy, gdy moc P_s osiąga wartość mocy P_{tA} przy prądzie $I_s > I_{sC}$. Może się też zdarzyć, że w urządzeniu z torem skompensowanym nie uzyska się w ogóle mocy łuku równej mocy P_{tA}.

W przypadku nierówności mocy łuków (5) można po zastosowaniu toru skompensowanego zmniejszyć moc łuku P_s do wartości P_{tA} przez zmniejszenie prądu do odpowiedniej wartości $I_{sD} < I_{tA}$. Prądowi I_{sD} odpowiada współczynnik mocy (rys. 3)

$$\cos\varphi_{sD} > \cos\varphi_{tA}. \tag{9}$$

Natomiast pomiędzy mocami strat elektrycznych $I_{sD}^2 R_s$, $I_{tA}^2 R_t$ (odcinki D_1D_2, A_1A_2 na rysunku 3) oraz sprawnościami elektrycznymi η_{sD}, η_{tA} odpowiadającymi punktom D i A na wykresach kołowych, mogą zachodzić następujące zależności:

$$I_{sD}^2 R_s = I_{tA}^2 R_t; \quad \eta_{sD} = \eta_{tA}; \tag{10}$$

$$I_{sD}^2 R_s > I_{tA}^2 R_t; \quad \eta_{sD} < \eta_{tA}; \tag{11}$$

$$I_{sD}^2 R_s < I_{tA}^2 R_t; \quad \eta_{sD} > \eta_{tA}. \tag{12}$$

Gdy więc zachodzi nierówność mocy (5), to zainstalowanie w urządzeniu łukowym toru skompensowanego zamiast tradycyjnego powoduje zawsze poprawienie współczynnika mocy [wzór (9)] oraz może pogorszyć albo nie zmienić, lub też polepszyć sprawność elektryczną urządzenia. Szczególnie dużą przydatnością względną odznacza się taki tor skompensowany, po zastosowaniu którego występują nierówności (9) i (12).

3. WSKAŹNIKI WZGLĘDNEJ PRZYDATNOŚCI TORÓW WIELKOPRĄDOWYCH

Ocenę względnej przydatności dwóch różnych torów wielkoprądowych powodujących wystąpienie zależności (1) i (2) można też wyprowadzić analitycznie. Analizę ułatwia wyznaczenie charakterystyk roboczych pieca w funkcji mocy łuku. Posługując się takimi charakterystykami można wyznaczyć odpowiednie wskaźniki, ułatwiające ocenę przydatności torów.

Moc łuku P wyznacza zależność

$$P = \frac{U^2 r}{(R+r)^2 + X^2}, \tag{13}$$

w której R, X oznaczają rezystancję i reaktancję układu zasilającego piec, zaś U jest napięciem fazowym urządzenia. Z równania (13) otrzymuje się rezystancję r łuku;

$$r = \frac{U^2}{2P} - R \pm \sqrt{\left(\frac{U^2}{2P} - R\right)^2 - R^2 - X^2}. \tag{14}$$

Wartość wyrażenia pod pierwiastkiem we wzorze (14) maleje ze wzrostem mocy łuku P. Wyrażenie to nie może jednak mieć wartości ujemnej. Maksymalna moc łuku P_m możliwa do osiągnięcia w danym urządzeniu wystąpi więc wówczas, gdy

$$\left(\frac{U^2}{2P_m}-R\right)^2-R^2-X^2=0. \tag{15}$$

Wyznaczona z równania (15) moc P_m wynosi

$$P_m=\frac{U^2}{2(R+\sqrt{R^2+X^2})}. \tag{16}$$

Na podstawie zależności (14) można wykazać, że mocy P_m odpowiada następująca wartość rezystancji łuku

$$r_m=\sqrt{R^2+X^2}. \tag{17}$$

Występujący w wyrażeniu (14) dla rezystancji łuku r znak „+" przed pierwiastkiem odnosi się do wartości $r>r_m$, zaś znak „—" — do wartości $r<r_m$. W dalszych rozważaniach będzie używany tylko znak „+" w powyższym wyrażeniu, gdyż praca pieca przy rezystancji łuku $r<r_m$ jest — jak wiadomo — niedopuszczalna.

Przy uwzględnieniu wyrażenia (14) można wyznaczyć prąd łuku, współczynnik mocy i sprawność elektryczną urządzenia w funkcji mocy łuku:

$$I=\sqrt{\frac{P}{r}}=\sqrt{\frac{P}{\frac{U^2}{2P}-R+\sqrt{\left(\frac{U^2}{2P}\right)^2-R\frac{U^2}{P}-X^2}}}; \tag{18}$$

$$\cos\varphi=\frac{R+r}{\sqrt{(R+r)^2+X^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left[\frac{X}{\frac{U^2}{2P}+\sqrt{\left(\frac{U^2}{2P}\right)^2-R\frac{U^2}{P}-X^2}}\right]^2}}; \tag{19}$$

$$\eta=\frac{r}{R+r}=1-\frac{R}{\frac{U^2}{2P}+\sqrt{\left(\frac{U^2}{2P}\right)^2-R\frac{U^2}{P}-X^2}}. \tag{20}$$

Dla przykładu podano na rysunku 4 wykresy powyższych wielkości oraz innych wielkości, jak rezystancji łuku r, mocy pozornej P_p, urządzenia mocy czynnej urządzenia P_{cz}, mocy biernej urządzenia P_b, i mocy strat elektrycznych P_{se}. Ponieważ każdej wartości mocy łuku odpowiadają dwie wartości omawianych wielkości, więc dla lepszej przejrzystości narysowano liniami ciągłymi te odcinki charakterystyk roboczych pieca, które odpowiadają rezystancji łuku r większej od rezystancji r_m (17).

Na podstawie zależności (18) można ustalić, że przy utrzymaniu jednakowych prądów łuków, wynoszących na przykład I_{tA}, zarówno przy zastosowaniu toru tradycyjnego, jak i skompensowanego zachodzi równość

$$\frac{P_{tA}}{\frac{U^2}{2P_{tA}}-R_t+\sqrt{\left(\frac{U^2}{2P_{tA}}\right)^2-R_t\frac{U^2}{P_{tA}}-X_t^2}}=\frac{P_{sB}}{\frac{U^2}{2P_{sB}}-R_s+\sqrt{\left(\frac{U^2}{2P_{sB}}\right)^2-R_s\frac{U^2}{P_{sB}}-X_s^2}}, \tag{21}$$

przy czym występujące w tej równości i we wszystkich następnych zależnościach wielkości z symbolem t odnoszą się do urządzenia łukowego z torem tradycyjnym, zaś wielkości z symbolem s — do urządzenia z torem skompensowanym. Przy zadanym współczynniku β (2) można obliczyć z zależności (21) taką reaktancję X_{s1}, przy której występuje równość mocy łuków (3). W tym przypadku współczynnik $\alpha_I = \frac{X_{s1}}{X_t}$ wynosi

$$\alpha_I = \frac{1}{X_t}\sqrt{\left(\frac{U^2}{2P_{tA}}\right)^2 - \beta R_t \frac{U^2}{P_{tA}} - \left[(\beta-1)R_t + \sqrt{\left(\frac{U^2}{2P_{tA}}\right)^2 - R_t\frac{U^2}{P_{tA}} - X_t^2}\right]^2}. \quad (22)$$

Z zależności (14) ze znakiem + przed pierwiastkiem wynika, że wzrost reaktancji X przy nie zmienionych pozostałych warunkach powoduje zmniejszenie się rezystancji łuku r. Uwzględniając tę zależność we wzorze (18) można stwierdzić, że wzrost reaktancji X przy nie zmienionym prądzie I powoduje zmniejszenie się mocy P. Stąd wynika wniosek, że przy nierówności $X_{s1} < X_s$, czyli gdy współczynnik α_I jest mniejszy od wartości α (1), zachodzi nierówność mocy łuków (4). Natomiast nierówności współczynników $\alpha_I > \alpha$ odpowiada nierówność mocy (5).

Gdy więc zachodzi nierówność $\alpha_I < \alpha$, to po zastosowaniu toru skompensowanego w miejsce tradycyjnego należy zwiększyć prąd, aby uzyskać poprzednią wartość mocy łuku, przy czym — jak już wykazano — w takim przypadku urządzenie łukowe z torem skompensowanym ma zawsze gorszą sprawność elektryczną oraz lepszy, jednakowy lub gorszy współczynnik mocy niż urządzenie z torem tradycyjnym.

Przy zadanym współczynniku β (2) istnieje taka największa wartość reaktancji X_{sP} urządzenia z torem skompensowanym, przy której maksymalna moc łuku P_{sm} jest równa mocy np. P_{tA} utrzymywanej w urządzeniu z torem tradycyjnym. Z założenia równości $P_{sm} = P_{tA}$ oraz z zależności dla P_{sm} ustalonej na podstawie wyrażenia (16) przy uwzględnieniu wyrażenia (2) i przyjęciu oznaczenia $\alpha_P = \frac{X_{sP}}{X_t}$ wynika następujące równanie

$$P_{tA} = \frac{U^2}{2\left[\beta R_t + \sqrt{(\beta R_t)^2 + (\alpha_P X_t)^2}\right]}. \quad (23)$$

Wyznaczony z tego równania współczynnik α_P wynosi

$$\alpha_P = \frac{1}{X_t}\sqrt{\left(\frac{U^2}{2P_{tA}}\right)^2 - \beta R_t \frac{U^2}{P_{tA}}}. \quad (24)$$

Jeżeli współczynnik α_P (24) jest mniejszy od współczynnika α (1), to w urządzeniu łukowym z torem skompensowanym nie osiągnie się w ogóle mocy P_{tA}. Wynika to z równości (23), której prawa strona przedstawia maksymalną moc łuku P_{sm}. Gdy natomiast współczynnik α (1) jest mniejszy od obliczonego α_I (22), to utrzymując jednakowe prądy w obu przypadkach porównywanych torów uzyskuje się nierówność mocy łuków (5). Przez zmniejszenie prądu w urządzeniu łukowym z torem skompensowanym do odpowiedniej wartości I_{sD} można osiągnąć moc łuku P_{sD} równą mocy P_{tA}. Odpowiadające tym mocom sprawności elektryczne wyznaczone na podstawie zależności (20) są jednakowe [równość

(10)] wtedy, gdy reaktancja $X_{s\eta}$ układu zasilającego z torem skompensowanym spełnia równanie

$$\frac{R_t}{\frac{U^2}{2P_{tA}}+\sqrt{\left(\frac{U^2}{2P_{tA}}\right)^2-R_t\frac{U^2}{P_{tA}}-X_t^2}}=\frac{R_s}{\frac{U^2}{2P_{sD}}+\sqrt{\left(\frac{U^2}{2P_{sD}}\right)^2-R_s\frac{U^2}{P_{sD}}-X_{s\eta}^2}} \tag{25}$$

Wyznaczony w tym przypadku współczynnik $\alpha_\eta=\frac{X_{s\eta}}{X_t}$ przy zadanym współczynniku β (2) wynosi:

$$\alpha_\eta=\frac{1}{X_t}\sqrt{\left(\frac{U^2}{2P_{tA}}\right)^2-\beta R_t\frac{U^2}{P_{tA}}-\left[(\beta-1)\frac{U^2}{2P_{tA}}+\beta\sqrt{\left(\frac{U^2}{2P_{tA}}\right)^2-R_t\frac{U^2}{P_{tA}}-X_t^2}\right]^2}. \tag{26}$$

Z zależności (20) wynika, że sprawność elektryczna urządzenia łukowego maleje przy wzroście reaktancji X w tych samych pozostałych warunkach. Jeżeli więc faktyczna wartość X_s jest większa od $X_{s\eta}$, czyli gdy współczynnik α (1) jest większy od α_η (26), to zachodzi nierówność sprawności elektrycznych (11). Natomiast nierówności współczynników $\alpha<\alpha_\eta$ odpowiada nierówność sprawności (12).

Przez porównanie z sobą współczynników α_I (22), α_P (24), α_η (26) i przy uwzględnieniu nierówności $\frac{U^2}{2P_{tA}}>R_t$, wynikającej stąd, że najmniejsza wartość wyrażenia $\frac{U^2}{2P_{tA}}$ występuje przy $P_{tA}=P_{tm}$ [wzór (16)] i wynosi $R_t+\sqrt{R_t^2+X_t^2}$, dochodzi się do nierówności

$$\alpha_\eta<\alpha_I<\alpha_P. \tag{27}$$

Z przeprowadzonej dyskusji wynika, że znajomość współczynników α_η, α_I, α_P ułatwia ustalenie, który z porównywanych torów wielkoprądowych, powodujących wystąpienie nierówności (1) i (2), jest korzystniejszy ze względu na współczynnik mocy i sprawność elektryczną urządzenia łukowego. Z tego powodu współczynniki α_η, α_I, α_P nazwano *wskaźnikami względnej przydatności torów wielkoprądowych.*

Na podstawie zależności występujących pomiędzy współczynnikiem α (1) a współczynnikami α_η, α_I, α_P można ustalić rodzaj zmian prądu, współczynnika mocy urządzenia, sprawności elektrycznej urządzenia, powstających po zamianie toru tradycyjnego na skompensowany i przy utrzymaniu jednakowych mocy łuków w obu przypadkach torów. Wszystkie możliwe przypadki tych zmian zestawiono w tablicy 1.

Najkorzystniejszy przypadek zamiany toru tradycyjnego na skompensowany zachodzi wtedy, gdy $\alpha<\alpha_\eta$. Po tej zamianie uzyskuje się polepszenie zarówno współczynnika mocy, jak i sprawności elektrycznej urządzenia łukowego. Natomiast nierówność $\alpha>\alpha_\eta$ oznacza, że zastosowanie toru skompensowanego zamiast tradycyjnego może spowodować poprawienie współczynnika mocy, lecz pogarsza sprawność elektryczną. Należy przy tym zaznaczyć, że im bardziej wzrasta wartość α w porównaniu z wartością α_η, tym mniejsza jest wspomniana poprawa współczynnika mocy, a większe pogorszenie sprawności elektrycznej.

Na podstawie porównania współczynnika α ze wskaźnikiem α_I można ustalić, czy po zastosowaniu toru skompensowanego należy prąd zmniejszyć, nie zmienić lub zwiększyć, aby uzyskać tę samą moc łuku, jaką założono w urządzeniu z torem tradycyjnym. Mocy tej w ogóle nie uzyska się w urządzeniu z torem skompensowanym, jeżeli zachodzi nierówność $\alpha>\alpha_P$.

Tablica 1

Lp.	Zależności między α oraz α_η, α_I, α_P	$\frac{P_s}{P_t}$	$\frac{\cos\varphi_s}{\cos\varphi_t}$	$\frac{\eta_s}{\eta_t}$	$\frac{I_s}{I_t}$
1	$\alpha < \alpha_\eta$	1	> 1	> 1	< 1
2	$\alpha = \alpha_\eta$	1	> 1	$= 1$	< 1
3	$\alpha_\eta < \alpha < \alpha_I$	1	> 1	< 1	< 1
4	$\alpha = \alpha_I$	1	> 1	< 1	$= 1$
5	$\alpha_I < \alpha < \alpha_P$	1	$\gtrless 1$	< 1	> 1
6	$\alpha = \alpha_P$	1	$\gtrless 1$	< 1	> 1
7	$\alpha > \alpha_P$	nie uzyska się mocy $P_s = P_t$			

Wskaźniki α_I (22), α_P (24), α_η (26) są funkcjami napięcia fazowego U, współczynnika β (2), rezystancji R_t i reaktancji X_t układu zasilającego z torem tradycyjnym oraz zadanej mocy łuku P_{tA} w urządzeniu z tym torem. Wkaźniki te — jak wynika z ich wzorów — maleją przy wzroście współczynnika β (2). Wartość wskaźnika α_P zmniejsza się również przy wzroście oporności R_t, X_t oraz mocy P_{tA}.

Dla określenia wpływu zmian R_t, X_t, P_{tA} na wskaźniki α_I, α_η wyrazimy je w funkcji rezystancji łuku urządzenia z torem tradycyjnym. W tym celu mianownik lewej strony równania (21), określający wspomnianą rezystancję łuku, oznaczymy przez r_t. Po odpowiednim przekształceniu tego równania i przyjęciu równości mocy $P_{tA} = P_{sB}$ oraz po uwzględnieniu zależności

$$\frac{U^2 r_t}{P_{tA}} = (r_t + R_t)^2 + X_t^2$$

dochodzi się do wzoru

$$\alpha_I = \sqrt{1 - (\beta^2 - 1)\left(\frac{R_t}{X_t}\right)^2 - 2(\beta - 1)\frac{R_t r_t}{X_t^2}}. \tag{28}$$

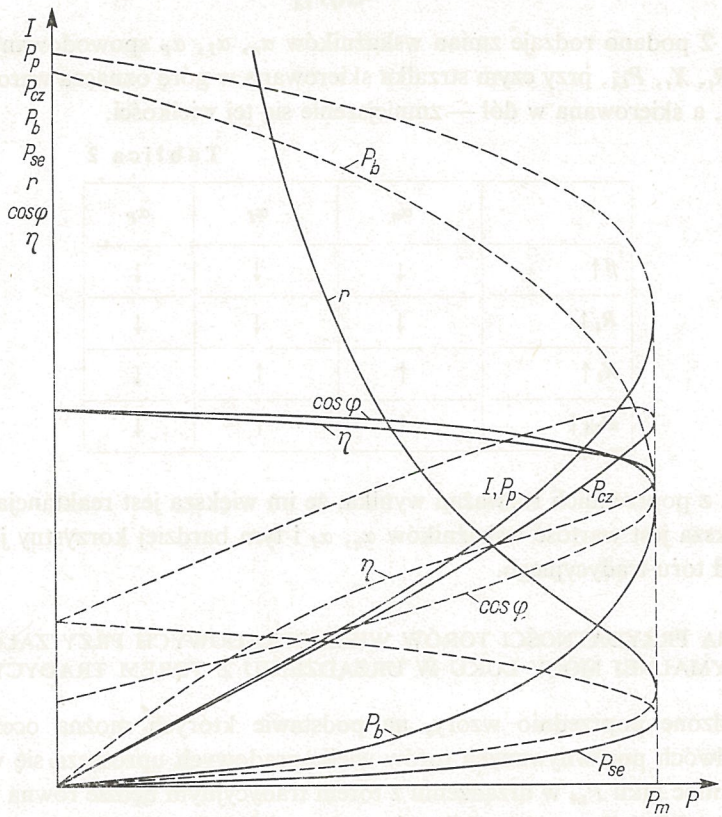
Ze wzoru tego wynika, że wskaźnik α_I rośnie przy wzroście X_t i maleje przy wzroście R_t oraz r_t, przy czym wzrostowi r_t odpowiada zmniejszenie się mocy P_{tA} (rys. 4).

Istnieje poza tym graniczna wartość współczynnika $\beta = \beta_I$, której przekroczenie powoduje, że utrzymując jednakowe prądy łuków w obu przypadkach torów wielkoprądowych uzyskuje się zawsze nierówność mocy łuków (4), nawet w przypadku teoretycznym, gdyby reaktancja urządzenia łukowego z torem skompensowanym zmalała do zera. Współczynnik β_I można obliczyć z zależności (28) zakładając w niej $\alpha_I = 0$. Współczynnik ten ma wartość

$$\beta_I = \sqrt{\left(1 + \frac{r_t}{R_t}\right)^2 + \left(\frac{X_t}{R_t}\right)^2} - \frac{r_t}{R_t}. \tag{29}$$

W celu wyznaczenia wskaźnika α_η w funkcji rezystancji łuku r_t uwzględnimy wyrażenie (14) w równaniu (25) i oznaczymy mianownik lewej strony tego równania przez r_t+R_t. Przekształcając odpowiednio to równanie i zakładając równość mocy $P_{tA} = P_{sD}$ można wyznaczyć reaktancję $X_{s\eta}$ i odpowiadający jej wskaźnik α_η. Wskaźnik ten jest następujący:

$$\alpha_\eta = \sqrt{\beta\left[1-(\beta-1)\left(\frac{R_t+r_t}{X_t}\right)^2\right]}. \tag{30}$$



Rys. 4. Charakterystyki robocze pieca łukowego wyznaczone w funkcji mocy łuku P

Wartość tego wskaźnika maleje przy wzroście rezystancji R_t, a rośnie wraz ze wzrostem reaktancji X_t. Również przy wzroście mocy P_{tA} następuje zmniejszenie się rezystancji łuku r_t i wzrost α_η.

Z zależności (24) wynika, że graniczna wartość współczynnika $\beta = \beta_\eta$, przy której następuje równość $\alpha_\eta = 0$, wynosi

$$\beta_\eta = 1+\left(\frac{X_t}{R_t+r_t}\right)^2. \tag{31}$$

Jeżeli wartość współczynnika β (2) jest większa od β_η (31), to po zastosowaniu toru skompensowanego zamiast tradycyjnego nastąpi zawsze pogorszenie sprawności elektrycznej urządzenia [nierówność (11)], chociażby nawet reaktancja X_s tego urządzenia zmalała do zera.

Zbyt duża wartość współczynnika β może spowodować, że w urządzeniu łukowym z torem skompensowanym nie uzyska się zadanej mocy P_{tA} nawet wtedy, gdyby reaktancja X_s tego urządzenia była równa zeru. Przypadkowi temu odpowiada ujemna wartość wyrażenia pod pierwiastkiem we wzorze (24). Zachodzi to przy współczynniku β większym od współczynnika β_P, który wynosi

$$\beta_P = \frac{U^2}{4R_t P_{tA}}. \tag{32}$$

W tablicy 2 podano rodzaje zmian wskaźników α_η, α_I, α_P spowodowanych wzrostem wielkości β, R_t, X_t, P_{tA}, przy czym strzałka skierowana w górę oznacza wzrost odpowiedniej wielkości, a skierowana w dół — zmniejszenie się tej wielkości.

Tablica 2

	α_η	α_I	α_P
$\beta\uparrow$	↓	↓	↓
$R_t\uparrow$	↓	↓	↓
$X_t\uparrow$	↑	↑	↓
$P_{tA}\uparrow$	↑	↑	↓

Z tabl. 2 i z poprzednich rozważań wynika, że im większa jest reaktancja X_t oraz moc P_{tA}, tym większa jest wartość wskaźników α_η, α_I i tym bardziej korzystny jest tor skompensowany od toru tradycyjnego.

4. OCENA PRZYDATNOŚCI TORÓW WIELKOPRĄDOWYCH PRZY ZAŁOŻENIU MAKSYMALNEJ MOCY ŁUKU W URZĄDZENIU Z TOREM TRADYCYJNYM

Wyprowadzone poprzednio wzory, na podstawie których można ocenić względną przydatność dwóch porównywanych torów wielkoprądowych uproszczą się w przypadku, gdy założona moc łuku P_{tA} w urządzeniu z torem tradycyjnym będzie równa maksymalnej mocy łuku P_{tm}. Moc P_{tm} można obliczyć z zależności (16) podstawiając w niej za R, X wartość R_t, X_t. Eksploatując piec przy tej mocy uzyskuje się największą jego przelotność [3].

Przy założeniu równości $P_{tA} = P_{tm}$ wzory na prąd I_{tm}, $\cos\varphi_{tm}$ i sprawność η_{tm} urządzenia z torem tradycyjnym, wyznaczone na podstawie zależności (18), (19), (20), i przy uwzględnieniu wyrażenia dla P_{tm}, mają postacie:

$$I_{tm} = \frac{U}{\sqrt{2\sqrt{R_t^2+X_t^2}\,(R_t+\sqrt{R_t^2+X_t^2})}}, \tag{33}$$

$$\cos\varphi_{tm} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{X_t}{R_t+\sqrt{R_t^2+X_t^2}}\right)^2}}, \tag{34}$$

$$\eta_{tm} = \frac{\sqrt{R_t^2+X_t^2}}{R_t+\sqrt{R_t^2+X_t^2}}. \tag{35}$$

Wzory na wskaźniki α_I (22), α_P (24), α_η (26) uproszczą się natomiast przy powyższej równości mocy łuków do postaci

$$\alpha_{Im} = \sqrt{1-(\beta^2-1)\left(\frac{R_t}{X_t}\right)^2 - 2(\beta-1)\frac{R_t}{X_t}\sqrt{1+\left(\frac{R_t}{X_t}\right)^2}}, \tag{36}$$

$$\alpha_{Pm} = \sqrt{\left[\sqrt{1+\left(\frac{R_t}{X_t}\right)^2} - (\beta-1)\frac{R_t}{X_t}\right]^2 - \left(\beta\frac{R_t}{X_t}\right)^2}, \tag{37}$$

$$\alpha_{\eta m} = \sqrt{\beta^2 - 2\beta(\beta-1)\left[1+\left(\frac{R_t}{X_t}\right)^2 + \frac{R_t}{X_t}\sqrt{1+\left(\frac{R_t}{X_t}\right)^2}\right]}. \tag{38}$$

Ze wzorów tych widać, że omawiane wskaźniki zależą tylką od stosunku $\frac{R_t}{X_t}$ i od współczynnika β (2).

Gdy współczynnik $\alpha(1)$ jest równy $\alpha_{Im}(36)$, to w urządzeniu z torem skompensowanym otrzymuje się moc łuku P_s równą mocy P_{tm} przy następujących wartościach prądu, współczynnika mocy i sprawności elektrycznej

$$I_{s1} = I_{tm}, \tag{39}$$

$$\cos\varphi_{s1} = \sqrt{1 - \frac{(\alpha_{Im}X_t)^2}{(\beta R_t + \sqrt{R_t^2+X_t^2})^2 + X_t^2}} > \cos\varphi_{tm}, \tag{40}$$

$$\eta_{s1} = \frac{\sqrt{R_t^2+X_t^2}}{\beta R_t + \sqrt{R_t^2+X_t^2}} < \eta_{tm}. \tag{41}$$

Wielkości I_{s1}, $\cos\varphi_{s1}$, η_{s1} wyznaczono na podstawie zależności (18), (19) i (20) przy założeniu, że $P = P_{tm}$, $R = \beta R_t$, $X = \alpha_{Im}\cdot X_t$, oraz przy uwzględnieniu wyrażeń dla P_{tm} i α_{Im} (36).

W przypadku jednakowych wartości współczynnika α i wskaźnika α_{Pm} (37) moc łuku P_s jest równa mocy P_{tm} przy I_{s2}, $\cos\varphi_{s2}$, η_{s2}, wynoszących

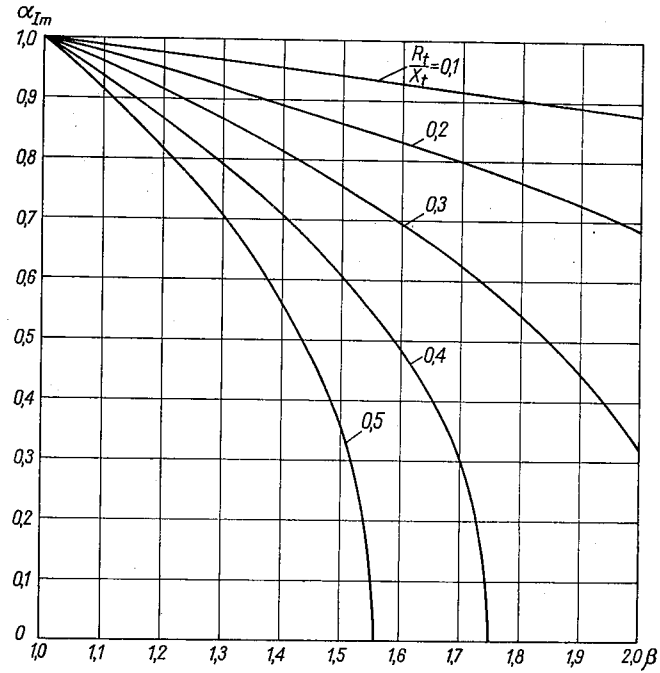
$$I_{s2} = \frac{U}{\sqrt{2[\sqrt{R_t^2+X_t^2} - (\beta-1)R_t](R_t+\sqrt{R_t^2+X_t^2})}} > I_{tm}, \tag{42}$$

$$\cos\varphi_{s2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{X_t^2 - 2(\beta-1)R_t(R_t+\sqrt{R_t^2+X_t^2})}{(R_t+\sqrt{R_t^2+X_t^2})^2}}} > \cos\varphi_{tm}, \tag{43}$$

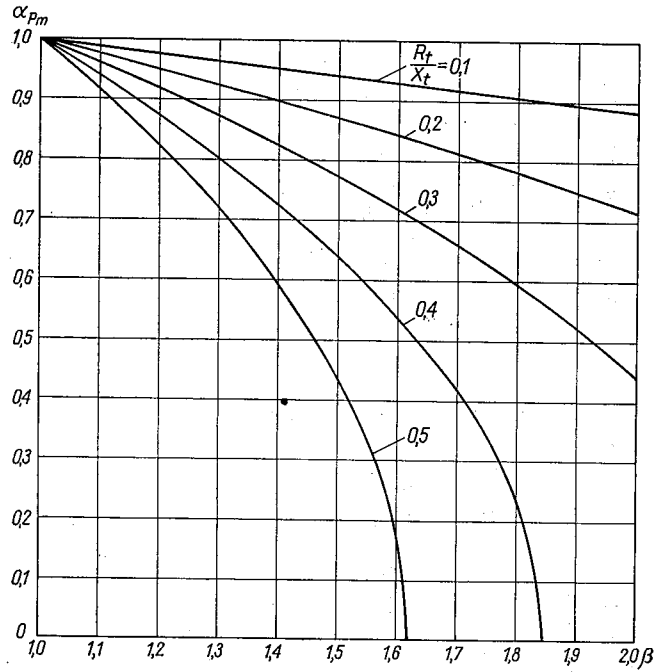
$$\eta_{s2} = \frac{\sqrt{R_t^2+X_t^2} - (\beta-1)R_t}{R_t+\sqrt{R_t^2+X_t^2}} < \eta_{tm}. \tag{44}$$

Jeśli natomiast wskaźnik $\alpha_{\eta m}$ (38) spełnia równość $\alpha_{\eta m} = \alpha$, to mocy P_s równej P_{tm} odpowiadają następujące wartości omawianych wielkości:

$$I_{s3} = \frac{U}{\sqrt{2\beta\sqrt{R_t^2+X_t^2}\,(R_t+\sqrt{R_t^2+X_t^2})}} = \frac{I_{tm}}{\sqrt{\beta}}, \tag{45}$$



Rys. 5. Zależność $\alpha_{Im} = f(\beta)$ dla różnych wartości stosunku $\frac{R_t}{X_t} = \text{const}$



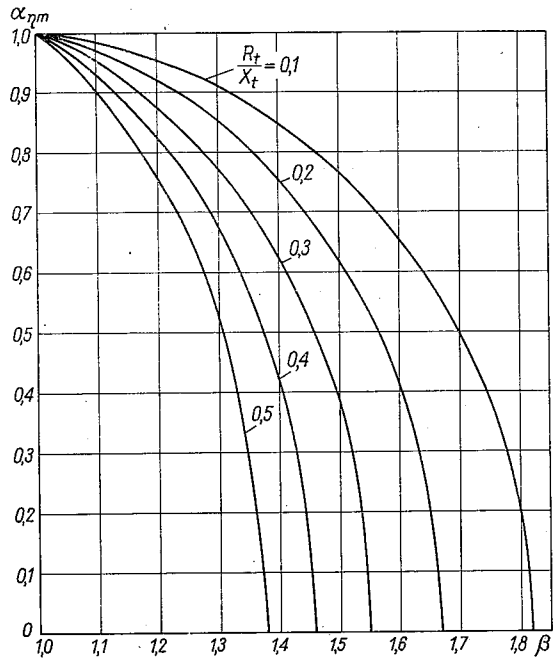
Rys. 6. Zależność $\alpha_{Pm} = f(\beta)$ dla różnych wartości stosunku $\frac{R_t}{X_t} = \text{const}$

$$\cos\varphi_{s3} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha_{\eta m}}{\beta}\,\frac{X_t}{R_t+\sqrt{R_t^2+X_t^2}}\right)^2}} > \cos\varphi_{tm}, \tag{46}$$

$$\eta_{s3} = \eta_{tm}. \tag{47}$$

Na podstawie znanych zależności pomiędzy współczynnikiem α (1) a wskaźnikami α_{Im} (36), α_{Pm} (37), $\alpha_{\eta m}$ (38) można ustalić rodzaj zmian prądu, współczynnika mocy i sprawności elektrycznej urządzenia łukowego, spowodowanych zamianą toru tradycyjnego na skompensowany. Przy ustaleniu tych zmian można również posługiwać się tablicą 1 po zastąpieniu w niej wskaźników α_η, α_I, α_P odpowiednio przez $\alpha_{\eta m}$, α_{Im}, α_{Pm} oraz zakładając, że $P_t = P_{tm}$, $\cos\varphi_t = \cos\varphi_{tm}$, $\eta_t = \eta_{tm}$, $I_t = I_{tm}$. Należy przy tym uwzględnić, że przy nierówności $\alpha \leqslant \alpha_{Pm}$ i przy założeniu równości $\frac{P_s}{P_{tm}} = 1$ występuje zawsze nierówność $\frac{\cos\varphi_s}{\cos\varphi_{tm}} > 1$.

Zamiast obliczać wskaźniki α_{Im} (36), α_{Pm} (37), $\alpha_{\eta m}$ (38) można je wyznaczyć z wykresów podanych na rysunkach 5, 6 i 7. Posługiwanie się tymi wykresami i tablicą 1 zmienioną w sposób wyżej podany bardzo ułatwia przeprowadzenie oceny względnej przydatności



Rys. 7. Zależność $\alpha_{\eta m} = f(\beta)$ dla różnych wartości stosunku $\frac{R_t}{X_t}$ = const

dwóch różnych torów wielkoprądowych, powodujących wystąpienie nierówności (1) i (2). Dla przeprowadzenia tej oceny należy obliczyć tylko wartości współczynników α i β oraz wartość stosunku $\frac{R_t}{X_t}$.

Na podstawie zależności (36), (37) i (38) można wyznaczyć takie wartości współczynnika β, oznaczone odpowiednio przez β_{Im}, β_{Pm}, $\beta_{\eta m}$, dla których wskaźniki α_{Im}, α_{Pm}, $\alpha_{\eta m}$ mają wartości równe zeru. Omawiane wartości współczynnika β wynoszą

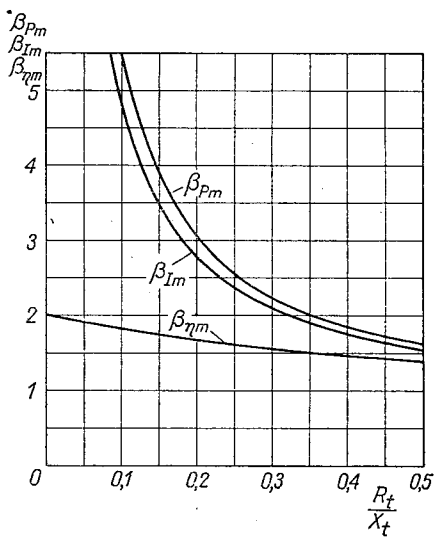
$$\beta_{Im} = \sqrt{\left(\frac{X_t}{R_t}\right)^2 + \left[1+\sqrt{1+\left(\frac{X_t}{R_t}\right)^2}\right]^2} - \sqrt{1+\left(\frac{X_t}{R_t}\right)^2}, \tag{48}$$

$$\beta_{Pm} = \frac{1}{2}\left[1+\sqrt{1+\left(\frac{X_t}{R_t}\right)^2}\right], \tag{49}$$

$$\beta_{\eta m} = 1+\frac{1}{\left(\frac{R_t}{X_t}+\sqrt{1+\frac{R_t}{X_t}}\right)^2}. \tag{50}$$

Ze wzorów tych widać, że wskaźniki β_{Im}, β_{Pm}, $\beta_{\eta m}$ zależą tylko od stosunku $\frac{R_t}{X_t}$. Zależności te przedstawiono graficznie na rys. 8. Z wykresów tych wynika nierówność

$$\beta_{\eta m} < \beta_{Im} < \beta_{Pm}. \tag{51}$$



Rys. 8. Zależności: $\beta_{Pm} = f\left(\frac{R_t}{X_t}\right)$; $\beta_{Im} = f\left(\frac{R_t}{X_t}\right)$; $\beta_{\eta m} = f\left(\frac{R_t}{X_t}\right)$

Jeżeli wartość współczynnika $\beta(2)$ jest większa od wartości $\beta_{\eta m}$, to przy równości mocy $P_s = P_{tm}$ zachodzi zawsze, to znaczy przy $X_s \geqslant 0$, nierówność $\eta_s < \eta_{tm}$. Wspomnianej równości mocy i nierówności $\beta > \beta_{Im}$ odpowiada zawsze nierówność prądów $I_s > I_{tm}$. Natomiast nierówność $\beta > \beta_{Pm}$ oznacza, że w urządzeniu łukowym z torem skompensowanym nie osiągnie się mocy o wartości P_{tm} nawet wtedy, gdyby $X_s = 0$.

5. PRZYKŁADY LICZBOWE OCENY WZGLĘDNEJ PRZYDATNOŚCI TORÓW WIELKOPRĄDOWYCH

Dla zilustrowania przedstawionej metody oceny względnej przydatności torów wielkoprądowych przedyskutowano celowość wymiany tradycyjnych torów wielkoprądowych na inne w stalowniczym urządzeniu łukowym i w redukcyjnym urządzeniu łukowo-oporowym.

Przykład 1. Stalowniczy piec łukowy jest zasilany przez transformator o następujących danych odnoszących się do najwyższego stopnia napięciowego

moc $P_p = 10\,000$ kVA,
napięcie wtórne fazowe $U = 153{,}5$ V,
prąd wtórny $I = 21{,}8$ kA,
rezystancja $R_T = 0{,}07$ mΩ,
reaktancja $X_T = 0{,}50$ mΩ.

Transformator jest połączony z elektrodami pieca tradycyjnym torem wielkoprądowym, którego średnie wartości rezystancji i reaktancji wynoszą

$$R_{Tw} = 0{,}63 \text{ m}\Omega; \quad X_{Tw} = 2{,}70 \text{ m}\Omega.$$

W urządzeniu nie stosuje się dławika ze względu na dużą reaktancję toru wielkoprądowego.

Całkowita rezystancja i reaktancja transformatora i toru tradycyjnego mają wartości

$$R_t = 0{,}70 \text{ m}\Omega; \quad X_t = 3{,}20 \text{ m}\Omega.$$

Moc łuku (jednej fazy pieca) występująca przy znamionowym prądzie transformatora wynosi

$$P_{tA} = I^2\left(\sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - X_t^2} - R_t\right) = 2650 \text{ kW}.$$

Mocy tej odpowiadają następujące wartości rezystancji łuku, współczynnika mocy i sprawności elektrycznej urządzenia:

$$r_{tA} = 5{,}68 \text{ m}\Omega; \quad \cos\varphi_{tA} = 0{,}88; \quad \eta_{tA} = 0{,}875.$$

Natomiast maksymalna moc łuku i odpowiadający jej prąd, obliczone ze wzorów (16) i (33), mają wartości

$$P_{tm} = 2970 \text{ kW}; \quad I_{tm} = 30{,}2 \text{ kA}.$$

W omawianym przypadku praca pieca przy prądzie I_{tm} jest wyjątkowo niedopuszczalna ze względu na duże przeciążenie transformatora i dlatego ocena przydatności torów wielkoprądowych będzie przeprowadzona nie przy uwzględnieniu mocy łuku P_{tm}, lecz mocy P_{tA}, której odpowiada prąd znamionowy transformatora.

Załóżmy, że inny tor wielkoprądowy, np. skompensowany, który można zastosować w omawianym urządzeniu łukowym, odznacza się następującą rezystancją i reaktancją

$$R'_{Tw} = 0{,}84 \text{ m}\Omega; \quad X'_{Tw} = 1{,}90 \text{ m}\Omega.$$

W tym przypadku całkowita rezystancja i reaktancja transformatora i nowego toru wynoszą

$$R_s = 0{,}91 \text{ m}\Omega; \quad X_s = 2{,}40 \text{ m}\Omega.$$

Współczynniki α (1) i (β) (2) mają wartości

$$\alpha = 0{,}75; \quad \beta = 1{,}30.$$

Obliczona z zależności (31) wartość współczynnika $\beta_\eta = 1{,}25$ jest mniejsza od wartości β i dlatego w urządzeniu łukowym z torem skompensowanym w ogóle nie osiągnie się sprawności $\eta_s = \eta_{tA}$ przy mocy łuku $P_s = P_{tA}$.

Wartość wskaźnika α_I obliczona z zależności (28) dla powyższych wartości r_t, R_t, X_t, β wynosi $\alpha_I = 0{,}83$.

Ponieważ zachodzi nierówność $\alpha < \alpha_I$, więc — jak wynika z tabl. 1 — zastosowanie toru skompensowanego zamiast tradycyjnego spowoduje poprawienie współczynnika mocy, a pogorszenie sprawności elektrycznej urządzenia przy utrzymywaniu mocy łuku $P_s = P_{tA}$, przy czym moc tę uzyska się przy prądzie $I_s < I_{tA}$. Wartości $\cos\varphi_s$ i η_s obliczone na podstawie zależności (19) i (20) dla powyżej założonej mocy P_s wynoszą

$$\cos\varphi_s = 0{,}944; \quad \eta_s = 0{,}87.$$

A więc urządzenie z torem skompensowanym odznacza się dużo lepszym współczynnikiem mocy, a tylko nieznacznie gorszą sprawnością elektryczną w porównaniu z urządzeniem z torem tradycyjnym. Należy przy tym zaznaczyć, że w omawianym urządzeniu z torem skompensowanym nie jest wymagane stosowanie dławika, gdyż prądy zwarć eksploatacyjnych nie przekraczają 3-krotnej wartości prądu znamionowego transformatora.

Przykład 2. Piec łukowo-oporowy (karbidowy) jest zasilany przez transformator o danych:

moc $P_p = 26670$ kVA,
napięcie wtórne fazowe $U = 153{,}5$ V,
prąd wtórny $I = 73{,}5$ kA,
rezystancja $R_T = 0{,}02$ mΩ,
reaktancja $X_T = 0{,}20$ mΩ.

Dane te odnoszą się do najwyższego stopnia napięciowego transformatora.

Tor wielkoprądowy zastosowany przy piecu jest wykonany w układzie tradycyjnym. Wartości średnie jego rezystancji i reaktancji wynoszą

$$R_{TW} = 0{,}11 \text{ mΩ}; \quad X_{TW} = 0{,}98 \text{ mΩ}.$$

Oporności całkowite transformatora i toru wielkoprądowego mają więc wartości

$$R_t = 0{,}13 \text{ mΩ}; \quad X_t = 1{,}18 \text{ mΩ}.$$

Obliczone dla tych oporności i powyższego napięcia fazowego maksymalna moc fazowa pieca i odpowiadający jej prąd, współczynnik mocy i sprawność elektryczna są następujące:

$P_{tm} = 5550$ kW,
$I_{tm} = 68{,}3$ kA,
$\cos\varphi_{tm} = 0{,}746$,
$\eta_{tm} = 0{,}902$.

Moc P_{tm} występuje przy prądzie mniejszym od prądu znamionowego transformatora. Przy uwzględnieniu tej mocy zostanie przeprowadzona ocena przydatności torów wielkoprądowych.

Załóżmy, że zamiast toru tradycyjnego zastosowano tor np. skompensowany, o opornościach

$$R'_{TW} = 0{,}15\ \text{m}\Omega; \quad X'_{TW} = 0{,}70\ \text{m}\Omega.$$

W tym przypadku oporności całkowite transformatora i toru wielkoprądowego wynoszą

$$R_s = 0{,}17\ \text{m}\Omega; \quad X_s = 0{,}90\ \text{m}\Omega.$$

Na podstawie powyższych danych obliczono współczynniki α (1) i β (2)

$$\alpha = 0{,}763; \quad \beta = 1{,}31.$$

Dla powyższej wartości β i stosunku $\frac{R_t}{X_t} = 0{,}11$ wyznaczono z wykresów na rys. 5 wartość $\alpha_{\eta m} = 0{,}90$.

Zachodzi więc nierówność $\alpha < \alpha_{\eta m}$, która oznacza — jak wynika z tabl. 1 — że tor skompensowany jest korzystniejszy od toru tradycyjnego zarówno ze względu na współczynnik mocy, jak i sprawność elektryczną urządzenia. Po zastosowaniu toru skompensowanego moc fazową pieca $P_s = P_{tm}$ uzyskuje się przy następującym prądzie, współczynniku mocy i sprawności elektrycznej

$I_s \quad = 54{,}8$ kA,
$\cos\varphi_s = 0{,}92$,
$\eta_s \quad = 0{,}915$.

Z porównania wartości $\cos\varphi_s$ i $\cos\varphi_{tm}$ wynika, że rozpatrywany tor skompensowany znacznie poprawia współczynnik mocy urządzenia. Poza tym w urządzeniu z torem skompensowanym można uzyskać większą moc pieca niż P_{tm}. Na przykład przy znamionowym prądzie transformatora $I = 73{,}5$ kA uzyskuje się moc fazową pieca $P_s = 6530$ kW. Zastosowanie więc w omawianym urządzeniu łukowo-oporowym toru skompensowanego zamiast tradycyjnego jest pod każdym względem korzystniejsze.

Należy zaznaczyć, że przyjęte w powyższych przykładach liczbowych wartości rezystancji R'_{TW} i reaktancji X'_{TW} toru zastępczego można wyznaczyć w różny sposób przed zbudowaniem tego toru. I tak na przykład oporności te możemy obliczyć korzystając przy tym z odpowiednio dokładnych metod liczenia. Można też zmierzyć odpowiednie parametry elektryczne pojedynczych przewodów stosowanych w torach wielkoprądowych, a następnie posługując się tymi parametrami obliczyć omawiane oporności. Jeszcze inny sposób polega na pomiarze oporności modelu toru wykonanego w małej skali i zasilanego prądem o odpowiednio dobranej częstotliwości.

6. PODSUMOWANIE

Przeprowadzone rozważania umożliwiają przeprowadzenie oceny względnej przydatności dwóch torów wielkoprądowych z których jeden ma większą rezystancję a mniejszą reaktancję w porównaniu z tymi samymi wielkościami drugiego toru. Względną przydatność tych torów ocenia się na podstawie współczynników mocy i sprawności elektrycznych urządzenia, występujących po zastosowaniu w nim kolejno obu rozpatrywanych torów. Przykładowa analiza oceny względnej przydatności toru skompensowanego i toru tradycyjnego jest ważna również dla dowolnych dwóch torów, przy których występują nierówności (1) i (2).

Opracowane wskaźniki α_I (22), α_P (24), α_η (26) ułatwiają przeprowadzenie wyboru najkorzystniejszego toru wielkoprądowego dla pieca łukowego. Znając te wskaźniki oraz współczynnik α (1) można na podstawie tablicy 1 ustalić, jak zmienią się prąd, współczynnik mocy i sprawność elektryczna urządzenia po zamianie w nim rozpatrywanych torów wielkoprądowych. Ten sposób oceny względnej przydatności torów wielkoprądowych jest łatwy do przeprowadzenia i dlatego wskaźniki α_I, α_P, α_η mają duże znaczenie praktyczne.

Z podanych rozważań wynika również, że zastąpienie toru wielkoprądowego o dużej reaktancji i małej rezystancji przez tor o mniejszej reaktancji i większej rezystancji w porównaniu z poprzednimi wartościami może w wielu przypadkach przyczynić się do znacznego usprawnienia pracy urządzenia łukowego. Tor o małej reaktancji nie tylko polepsza współczynnik mocy, lecz może również spowodować podwyższenie sprawności elektrycznej urządzenia.

Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
Katedra Elektrotermii

WYKAZ LITERATURY

1. Kurbiel A.: Skompensowany tor wielkoprądowy pieców łukowych. Wydawnictwo zbiorowe pt. „III Krajowa Konferencja Elektrotermii", t. I, Gliwice 1965.
2. Schwartz T.: Elektrotermia, t. II, Warszawa 1953.
3. Schwartz T.: Wyznaczanie wielkości charakteryzujących stalownicze urządzenia łukowe. — Rozprawy Elektrotechn., 1962, z. 2.

A. KURBIEL

EVALUATION OF RELATIVE USEFULNESS OF GREAT CURRENT CIRCUITS IN ARC FURNACES

Summary

Relative usefulness of two great current circuits has been defined, from which the resistance of the first is higher and the reactance lower than the corresponding values of the other. The usefulness has been evaluated by comparing the coefficients of power and of electric efficiency determined for either circuit; the same furnace power has been assumed. New indicators of relative usefulness of great current circuits have been given, facilitating the selection of an optimum arc furnace circuit.

A. KURBIEL

L'ÉVALUATION DE L'UTILITÉ RELATIVE DES VOIES GRAND COURANT DES FOURS À L'ARC

Résumé

On a déterminé l'utilité relative de deux voies grand courant, l'une de lesquelles possède une résistance plus grande mais une réactance plus petite en comparaison avec des grandeurs analogiques de l'autre.

On a effectué cette évaluation en comparant les coéfficients de la puissance et les rendements électriques, déterminés pour les deux voies en acceptant les puissances égales du four. On a donné les indices nouveaux de l'utilité relative des voies grand courant faisant plus facile le choix de la voie optimale du four à l'arc.

A. KURBIEL

BEURTEILUNG RELATIVER BRAUCHBARKEIT DER HOCHSTROMLEITUNGSANLAGEN FÜR LICHTBOGENÖFEN

Zusammenfassung

Es wurde die Beurteilung der relativen Brauchbarkeit von zwei Hochstromleitungsanlagen durchgeführt, von denen die eine grösseren Ohmschen und kleineren induktiven Widerstand als die andere Anlage hat. Diese Beurteilung beruht auf Vergleich der Leistungsfaktoren und elektrischen Wirkungsgrades von Lichtbogenanlage, die für beide Falle der Hochstromleitungsanlagen unter Voraussetzung einer konstanten Ofenleistung bestimmt werden.

Man hat neue relative Brauchbarkeitsindexen bearbeitet, die eine Auswahl von günstigsten Hochstromleitungsanlagen für Lichtbogenöfen erleichtern.

А. КУРБЕЛЬ

ОЦЕНКА ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ПРИГОДНОСТИ КОРОТКИХ СЕТЕЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ДУГОВЫХ ПЕЧЕЙ

Резюме

Проведено оценку относительной пригодности двух коротких сетей, одна из которых обладает большим активным, но зато меньшим реактивным сопротивлением, по сравнению с теми же величинами другой.

Оценка основана на сравнении коэффициентов мощности и электрических коэффициентов полезного действия электродуговой установки, определенных для обоих примеров сети, исходя из равенства мощностей печей.

Разработаны новые показатели относительной пригодности коротких сетей, облегчающие выбор найболее пригодной по конструктивным свойствам.

621.314.2

JANUSZ TUROWSKI

Wzór na straty mocy w kadziach nieekranowanych wielkich transformatorów jednofazowych[1])

Rękopis dostarczono 8. 11. 1967

Znane z literatury nieliczne wzory na straty mocy w kadziach transformatorów są oparte bądź na założeniu stałej przenikalności magnetycznej stali, bądź mają charakter empiryczny, o bardzo ograniczonym zakresie zastosowania.

W pracy, opierając się na sprawdzonym doświadczalnie wzorze (1) na straty w ścianie stalowej, wyprowadzono wzór na straty w ścianach kadzi transformatora jednofazowego z uwzględnieniem zmiennej przenikalności stali. Obliczenie zostało sprawdzone doświadczalnie na modelach w toku wyprowadzenia, a końcowy wzór sprawdzono na wynikach badań fabrycznych wielkiego transformatora jednofazowego wyprodukowanego w Zakładach Škoda w Pilznie [2].

W pracach [1] i [3], wychodząc z równań Maxwella, wyprowadzono wzór (1) na straty mocy w nieskończenie rozległej płycie stalowej umieszczonej w polu nieskończenie długich szyn równoległych (rys. 1). Wzór ten był także referowany w skrócie w pracy [6]. Wzór (1) został sprawdzony doświadczalnie na małym modelu w pracach [1] i [3]. Na rys. 2 natomiast przedstawiono wymiary dużego modelu i układ pomiarowy z elektronicznym watomierzem kompensacyjnym *4* opisanym w pracy [5]. Porównanie strat obliczonych za pomocą wzoru (1) ze stratami zmierzonymi na dużym modelu (linia ciągła) podano na rys. 3. Współczynnik empiryczny niepełnego odbicia zwierciadlanego η jest rzędu 0,8 do 0,7, w zależności od nasycenia. Niekiedy przy silnych polach może on spaść nawet do 0,6. Współczynnik ten zredukuje się sam przy dalszych obliczeniach.

Aby wzór wyjściowy (1) mógł znaleźć zastosowanie przy obliczaniu strat rozproszeniowych w kadziach transformatorów, należy przystosować go do tego celu uwzględniając: a) podział szczelinowego strumienia rozproszenia pomiędzy rdzeń i kadź, b) wpływ dwuwymiarowego (pętlowego) kształtu dróg prądów wirowych w rzeczywistej kadzi transformatora, c) zmienną odległość kadzi od uzwojeń wskutek krzywizny uzwojeń, d) nakładanie się pól uzwojeń sąsiednich kolumn, e) krzywiznę układu.

Czynniki te zbadano i uwzględniono w kolejnych rozdziałach 3, 4, 5 i 6.

Straty w kadzi powoduje nie cały strumień rozproszenia $\hat{\Phi}_\delta$ (rys. 4), lecz tylko jego część $\hat{\Phi}_k$, która zamyka się przez kadź. Przy założeniu $\delta \ll h$ szczelina powietrzna δ' stanowi główną reluktancję na drodze całkowitego strumienia rozproszenia $\hat{\Phi}_\delta$ szyn i jego składowych $\hat{\Phi}_k$ i $\hat{\Phi}_r$. Strumienie te są zatem proporcjonalne do prądu wzbudzenia I. Dotyczy to także strumienia $\hat{\Phi}_z$ (rys. 1), który jest proporcjonalny do prądu I występującego we wzorze (1). Jeżeli więc I jest prądem rzeczywistym, to straty w płycie masywnej na rys. 4 można obliczać w przybliżeniu za pomocą wzoru (1), jeżeli zamiast prądu rzeczywistego I podstawimy prąd obliczeniowy I_k przeliczony w stosunku (3) i następnie (5).

Sprawdzenie doświadczalne podziału strumienia szczelinowego $\hat{\Phi}_\delta$ (4) pomiędzy ściany modelujące rdzeń i kadź podano w tablicy 1. Współczynnik k_p (4a) uwzględnia bocznikowanie

[1]) Referat zgłoszony na Konferencję Transformatorową organizowaną przez Komitet Elektrotechniki PAN, SEP i Katedrę Maszyn Elektrycznych i Transformatorów Polit. Łódzkiej w Łodzi w r. 1970

strumienia $\hat{\Phi}_k$ przez warstwę powietrzną o szerokości c_k (rys. 12). Stosunek strumieni $\hat{\Phi}_\delta/\hat{\Phi}_z$ występujący we wzorze (5) obliczono na podstawie równań (6), (8) i (9). W przykładzie 2 podano wyniki sprawdzenia doświadczalnego wzoru (9).

Wzór (10) przedstawia straty mocy w jednej z masywnych płyt stalowych umieszczonych z obu stron nieskończonych szyn równoległych (rys. 4).

W rozdziale 4 wykazano na drodze teoretycznej, że straty mocy w układzie dwuwymiarowym rozpływu prądów wirowych na powierzchni (rys. 6) są ok. 2-krotnie mniejsze [wzór (32)] niż w układzie jednowymiarowym (rys. 5), przy takim samym wzbudzeniu. W tabl. 2 podano wyniki sprawdzenia doświadczalnego tego wniosku.

W rozdziale 5 podano wzór (33) na straty mocy w częściach zaokrąglonych kadzi *a—b—c* — rys. 10, o stałej odległości uzwojeń od kadzi, z uwzględnieniem krzywizny uzwojeń (stosunek D/D_z).

W rozdziale 6 obliczono średnią odległość uzwojeń od kadzi (35) dla części *c—d* (rys. 10) obwodu kadzi.

Straty całkowite w kadzi wyrażają się wzorem (38). Ponieważ drugi składnik we wzorze (38) jest 3 do 4-krotnie mniejszy od pierwszego, nie popełnimy większego błędu, jeśli uprościmy ten wzór przyjmując w przybliżeniu, że w dużych transformatorach $I_{k1} = 0{,}63\ I_k$. Wykazano to na przykładach 1, 2 i 3 podanych poniżej wzoru (39).

Ostateczny wzór na straty w kadzi transformatora jednofazowego dwukolumnowego ma postać (40) lub (40a) — dla 50 Hz, gdzie I_k — prąd zredukowany jednego uzwojenia obliczony według wzoru (34) w amperach, z — liczba zwojów tego uzwojenia; f — częstotliwość w Hz; γ — konduktywność stali w S/m; wymiary liniowe — według rys. 12, w metrach; k_1 i k_2 — współczynniki proporcji geometrycznych uzwojeń (rys. 11) obliczone za pomocą elektronicznej cyfrowej maszyny liczącej.

Wzór wynikowy sprawdzono w oparciu o opublikowane w pracy [2] wyniki badań doświadczalnych (tabl. 3) transformatora jednofazowego $\frac{250}{3}$ MVA, $\frac{242}{\sqrt{3}} \Big/ 13{,}8$ kV produkcji Zakładów Škoda w Pilznie.

Po podstawieniu do wzoru (40a) wymiarów uzwojeń obliczono, że straty w kadzi tego transformatora wynoszą 92,2 kW. Według danych doświadczalnych z tablicy 3 wynika, że zmierzone w laboratorium fabrycznym straty w kadzi są rzędu 398—310 = 88 kW lub 398—307 = 91 kW. Jedna i druga liczba dobrze potwierdza wynik otrzymany za pomocą wzoru teoretycznego (40).

Ze względu na nieuniknione uproszczenia w czasie wyprowadzeń, w pracy zwrócono szczególną uwagę na doświadczalne sprawdzanie poszczególnych etapów i pośrednich wzorów wyprowadzenia. Mimo to wzór końcowy należy nadal sprawdzać doświadczalnie. Ewentualne korekty powinny dotyczyć przede wszystkim współczynnika k_p (4a) i obliczeniowej wysokości $h_{śr}$ (rys. 12).

Dane z tablicy 3 potwierdzają także wniosek z pracy [8], że wyznaczenie strat w kadzi przez porównanie strat zwarcia zmierzonych z kadzią i bez kadzi jest możliwe, gdy stosunek odległości a_k/a_r jest większy od pewnej wartości krytycznej, która jest rzędu 3 do 3,5 [8]. W rozpatrywanym transformatorze firmy Škoda stosunek a_k/a_r wynosił około 5. Oznacza to, że w tym transformatorze wyjęcie części wyjmowalnej z kadzi nie spowoduje istotnych zmian w rozpływie strumienia rozproszenia.

1. WSTĘP

Znane z literatury [1] nieliczne wzory na straty mocy w kadziach transformatorów są oparte bądź na założeniu stałej przenikalności stali, bądź mają charakter empiryczny, przystosowany do konkretnej i nieznanej bliżej konstrukcji. Otrzymywane przy pomocy tych wzorów wyniki różnią się znacznie między sobą, przy czym nie ma pewności, czy

w ogóle w jakimś stopniu odpowiadają rzeczywistym stratom i procesom elektromagnetycznym w kadzi.

W niniejszej pracy, opierając się na sprawdzonym dotychczas wzorze (1) na straty w ścianie stalowej, wyprowadzono wzór na straty w ścianach kadzi transformatora jednofazowego z uwzględnieniem zmiennej przenikalności stali i wszystkich ważniejszych czynników konstrukcyjnych. Wzór ten został sprawdzony doświadczalnie na modelach w toku wyprowadzenia, a w końcowej postaci — na wynikach badań wielkiego transformatora jednofazowego o mocy $\frac{250}{3}$MVA i napięciach $\frac{242}{\sqrt{3}}/13{,}8$ kV produkcji Zakładów Škoda w Pilznie [2].

2. WZÓR NA STRATY MOCY W PŁYCIE STALOWEJ UMIESZCZONEJ W POLU NIESKOŃCZENIE DŁUGICH SZYN RÓWNOLEGŁYCH

W pracy [1] i [3] wychodząc z równań Maxwella wyprowadzono wzór na straty mocy w nieskończenie rozległej masywnej płycie stalowej umieszczonej w polu nieskończenie długich szyn równoległych (rys. 1):

$$P_1 = 1{,}75 \cdot 10^{-11} hf\sqrt{f\gamma}\,\eta^2 I^2 (k_1 + 6{,}6 \cdot 10^{-9} k_2 \sqrt{f\gamma}\,\eta I), \tag{1}$$

w którym:

P_1 — straty mocy czynnej w płycie stalowej na jednostkę długości szyn w W/m,

h — wysokość szyn w m; f — częstotliwość prądu w Hz;

γ — konduktywność (przewodność właściwa) stali w S/m;

I — wartość skuteczna prądu (lub przepływu Iz) w szynach w A;

$\eta = \frac{1+I_r/I}{2}$ — empiryczny współczynnik „odbicia zwierciadlanego" prądu przemiennego w powierzchni masywnej płyty stalowej, przy czym I_r — fikcyjny prąd odbity w powierzchni stali;

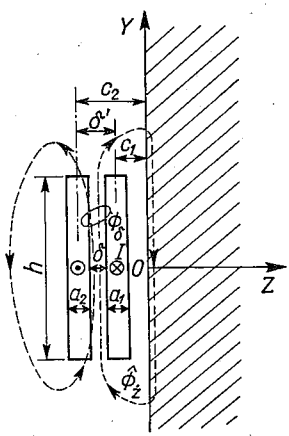
k_1 i k_2 — współczynniki proporcji geometrycznych szyn lub uzwojeń zależne od stosunku wymiarów h/c_1 i c_2/c_1 (rys. 12), przy czym

c_1 i c_2 — są odległościami odpowiednio bliższej i dalszej szyny od powierzchni badanej ściany stalowej (rys. 1).

Współczynniki k_1 i k_2 obliczono za pomocą elektronicznej maszyny cyfrowej ZAM-2Beta [4] — rys. 11.

Wzór (1) uwzględnia zmienność przenikalności stali zarówno w głąb metalu, jak i na jego powierzchni. Wzór ten został wielokrotnie sprawdzony doświadczalnie na małym modelu w pracach [1] i [3] oraz na modelu dużym w niniejszej pracy. Jedynie empiryczny współczynnik niepełnego odbicia zwierciadlanego η występujący w tym wzorze, jest wielkością wymagającą dalszego badania zarówno pod względem teoretycznym, jak i doświadczalnym. Uwzględnia on wpływ nasycenia i reakcji prądów wirowych w ścianie stalowej na zmniejszenia pola magnetycznego wyznaczonego metodą odbicia zwierciadlanego prądu stałego w idealnym żelazie. Straty wyznaczone za pomocą wzoru (1) w istotny sposób zależą od przyjętej wartości empirycznego współczynnika η. Jak jednak wykażemy dalej, współczynnik ten w ostatecznym wzorze na straty w kadzi odgrywa znacznie mniejszą

rolę. Mimo to konieczne jest dalsze jego uściślenie. Doświadczenie wykazuje, że przy przeciętnych nasyceniach i przy częstotliwości 50 Hz współczynnik odbicia η jest rzędu 0,8 do 0,7, a nawet mniej, co odpowiada fikcyjnemu prądowi odbitemu rzędu $I_r = (0{,}6$



Rys. 1. Masywna ściana stalowa w polu szyn równoległych

do 0,4) I. Mniejsza wartość współczynnika odpowiada polom silniejszym (np. jak w wielkich transformatorach), a większa — słabszym (np. w przypadku pojedynczych szyn). W rzeczywistości obraz prądu odbitego jest rozmazany, co daje dodatkowe zniekształcenia pola.

Przyjmując przeciętną konduktywność stali (przewodność właściwą) $\gamma = 7 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ i $f = 50$ Hz, wzór (1) możemy przedstawić w postaci:

przy $\eta = 1{,}0$ $$P_1 = 16{,}35 \cdot 10^{-6} h \cdot I^2 (k_1 + 12{,}3 \cdot 10^{-5} k_2 I), \tag{1a}$$

przy $\eta = 0{,}8$ $$P_1 = 10{,}5 \cdot 10^{-6} h \cdot I^2 (k_1 + 9{,}85 \cdot 10^{-5} k_2 I), \tag{1b}$$

przy $\eta = 0{,}7$ $$P_1 = 8{,}0 \cdot 10^{-6} h \cdot I^2 (k_1 + 8{,}64 \cdot 10^{-5} k_2 I). \tag{1c}$$

Przykład 1

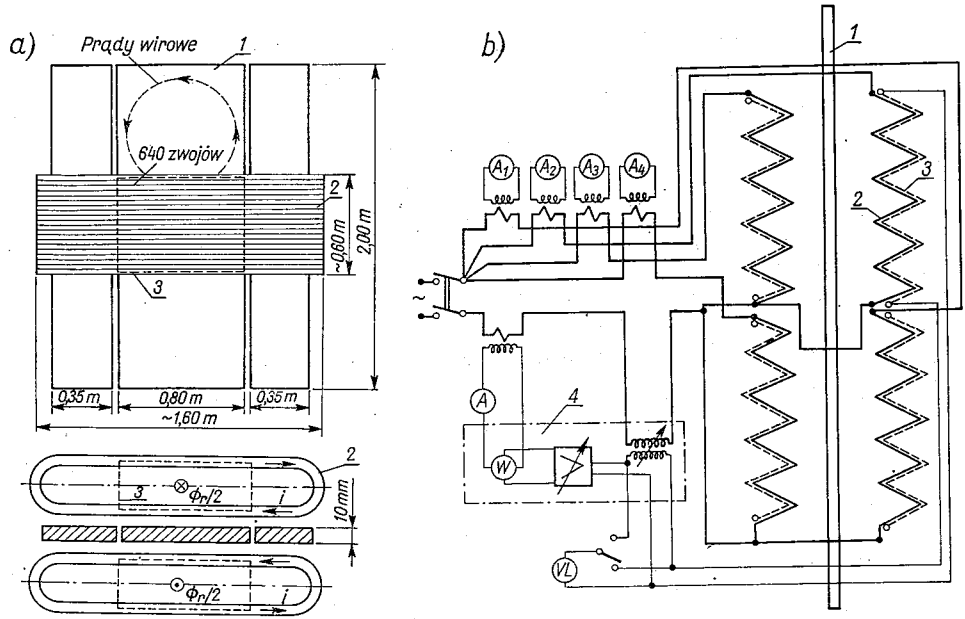
Obliczyć straty mocy w grubej płycie stalowej, w pobliżu której przebiega układ dwóch szyn równoległych (rys. 1) o wymiarach $h = 9{,}9$ cm, $c_1 = 1{,}8$ cm, $c_2 = 8{,}3$ cm, wiodący prąd 7050 A przy 50 Hz.

Rozwiązanie. Z wykresów podanych w pracy [4] znajdujemy dla $c_2/c_1 = 8{,}3/1{,}8 = 4{,}6$ i $h/c_1 = 9{,}9/1{,}8 = 5{,}5$ współczynniki $k_1 = 2{,}4$ i $k_2 = 4{,}4$.

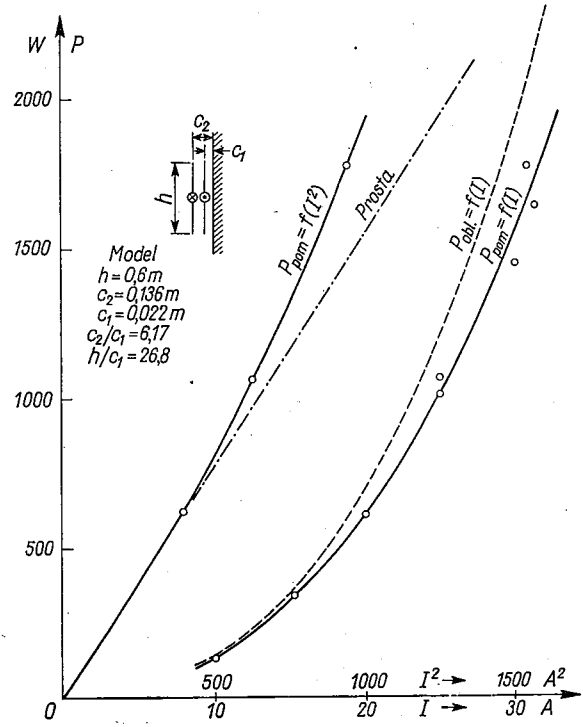
Ze wzoru (1b):

$P_1 = 10{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}099 \cdot 7050^2 (2{,}4 + 9{,}85 \cdot 10^{-5} \cdot 4{,}4 \cdot 7050) = 51{,}5(2{,}4 + 3{,}05) = \underline{280 \text{ W/m}}$. Z pomiarów na odpowiednim modelu [3] otrzymano 270 W/m.

W celu upewnienia się, że wzór (1) jest poprawny również w przypadku modelu dużego, o rozmiarach zbliżonych do rozmiarów rzeczywistego transformatora, zbudowano model, którego schemat jest przedstawiony na rys. 2. Ze względu na bardzo niski współczynnik mocy pomiary wykonano za pomocą watomierza kompensacyjnego *4* opisanego w publikacji [5]. W celu wyeliminowania z pomiaru strat mocy w uzwojeniu wzbudzającym *2* zastosowano dodatkowe pomiarowe uzwojenie napięciowe *3* pokrywające się przestrzennie z uzwojeniem wzbudzającym.



Rys. 2. Szkic wymiarowy dużego modelu (a) i schemat układu pomiarowego (b), *1* — badana ściana stalowa, *2* — uzwojenie wzbudzające prądowe, *3* — uzwojenie napięciowe pomiarowe, *4* — lampowy watomierz kompensacyjny, *VL* — woltomierz lampowy



Rys. 3. Sprawdzenie doświadczalne wzoru (1) na dużym modelu oraz zależności strat w ścianie stalowej od prądu

Wyniki pomiarów sprawdzających i porównanie ich ze stratami obliczonymi za pomocą wzoru (1) przy założeniu $\eta = 0{,}6$ przedstawiono na rys. 3. Jak wynika z tych danych, również przy silnych polach i znacznych rozmiarach ściany stalowej ($0{,}8 \times 2$ m) straty w tej ścianie wzrastają szybciej niż proporcjonalnie do kwadratu prądu wzbudzającego.

Należy jednak podkreślić, że wykładnik potęgi przy prądzie we wzorze na straty w masywnych ciałach stalowych nie zawsze jest większy od 2. W pracach [4] i [6] wykazano, że o charakterze zależności strat od prądu, częstotliwości i temperatury w znacznym stopniu decyduje rozkład pola magnetycznego na powierzchni stali. Tak w przypadku pola stycznego, jak np. w pokrywach transformatorów, straty zależą od prądu w potędze rzędu 1,5, przy sinusoidalnym natomiast rozkładzie składowej normalnej pola magnetycznego na powierzchni — w potędze 2 [4].

Aby wzór (1) mógł znaleźć zastosowanie przy obliczaniu strat rozproszeniowych w kadzi transformatora, należy go przystosować do tego celu uwzględniając:

a) podział szczelinowego strumienia rozproszenia $\hat{\Phi}_\delta$[1]) pomiędzy rdzeń i kadź,

b) wpływ dwuwymiarowego (pętlowego) kształtu dróg prądów wirowych w rzeczywistej kadzi transformatora,

c) zmienną odległość kadzi od uzwojeń wskutek krzywizny uzwojeń,

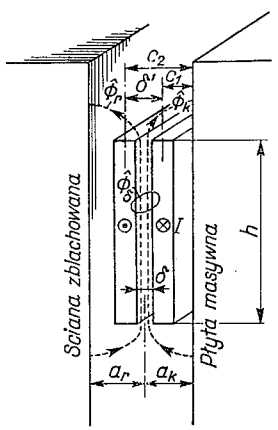
d) nakładanie się pól uzwojeń sąsiednich kolumn,

e) krzywiznę układu.

Uwzględnimy te czynniki kolejno.

3. WPŁYW PODZIAŁU STRUMIENIA ROZPROSZENIA POMIĘDZY RDZEŃ I KADŹ

Straty mocy w kadzi powoduje nie cały strumień rozproszenia $\hat{\Phi}_\delta$, lecz tylko ta jego część, która zamyka się przez kadź ($\hat{\Phi}_k$). Należy zatem zbadać i uwzględnić ten podział. Rozpatrzmy przypadek (rys. 4), gdy szyny równoległe są umieszczone pomiędzy dwiema



Rys. 4. Szyny z prądem pomiędzy dwiema ścianami stalowymi

ścianami stalowymi, przy czym odległości w kierunku poprzecznym są dużo mniejsze od wysokości szyn h. Przy założeniu $\delta \ll h$ szczelina powietrzna δ' stanowi główną reluktancję (opór magnetyczny) na drodze całkowitego strumienia rozproszenia $\hat{\Phi}_\delta$ szyn i jego

[1]) Zgodnie z normą PN-64/E-01100 maksymalne wartości będą oznaczane daszkiem, np. $\hat{A}$, a zespolone — podkreśleniem $\underline{A}$. Wektory zaś $\vec{A}$.

składowych $\hat{\Phi}_k$ i $\hat{\Phi}_r$ skręcających odpowiednio do ścian stalowych (rys. 4), przy czym:

$$\underline{\hat{\Phi}}_\delta = \underline{\hat{\Phi}}_k + \underline{\hat{\Phi}}_r. \tag{2}$$

Wzór (2) jest poprawny jedynie w przypadku, gdy pominiemy niewielką część strumienia zamykającą się w powietrzu pomiędzy ścianą stalową i uzwojeniem.

Decydująca rola szczeliny powietrznej δ powoduje, że strumienie występujące w równaniu (2) są praktycznie proporcjonalne do prądu I. Dotyczy to także strumienia $\underline{\hat{\Phi}}_z$ (rys. 1), który jest proporcjonalny do prądu I występującego we wzorze (1).

Wykorzystując tę proporcjonalność można za pomocą wzoru podstawowego (1), dotyczącego układu szyn podanego na rys. 1, obliczyć w przybliżeniu także straty mocy w masywnej ścianie stalowej w układzie przedstawionym na rys. 4. Zakładamy przy tym, że pojawienie się ściany stalowej po przeciwległej stronie szyn nie wpływa w sposób istotny na rozkład strumienia wchodzącego do ściany masywnej, a jedynie zmniejsza go z wartości $\hat{\Phi}_z$ (rys. 1) do wartości $\hat{\Phi}_k$ (rys. 4).

Jeżeli zatem I jest prądem rzeczywistym, to straty w płycie stalowej masywnej na rys. 4 można by było obliczać jak w układzie na rys. 1, zmniejszając tylko prąd rzeczywisty I do wartości obliczeniowej I_k w stosunku

$$I_k/I = \hat{\Phi}_k/\hat{\Phi}_z. \tag{3}$$

Przy założonych proporcjach, występujących w dużych transformatorach, i przy słabszych polach strumień szczelinowy $\hat{\Phi}_\delta$ dzieli się w przybliżeniu pomiędzy rdzeń $\hat{\Phi}_r$ i kadź $\hat{\Phi}_k$ odwrotnie proporcjonalnie do odległości powierzchni rdzenia a_r i kadzi a_k od osi szczeliny (rys. 4). Zatem

$$\frac{\hat{\Phi}_k}{\hat{\Phi}_\delta} \approx \frac{a_r}{a_k + a_r}. \tag{4}$$

Wzór (4) jest oczywiście tym mniej dokładny, im większa jest odległość kadzi od uzwojeń oraz im większy jest stosunek odległości kadzi a_k do odległości rdzenia a_r.

Na podział strumienia między rdzeń i kadź może mieć także pewien wpływ stan powierzchni stalowych. Prądy wirowe płynące w kadzi mogą powodować zmniejszenie strumienia wnikającego do kadzi i odpowiednie powiększenie strumienia zamykającego się przez zblachowany rdzeń. Zjawisko to jednak nie występuje zbyt wyraźnie ze względu na przeważającą w tym przypadku reluktancję szeregowo „włączonych" warstw powietrza.

Przy normalnych proporcjach nie przekraczających a_k/a_r 3 do 3,5 dokładność wzoru (4) jest na ogół wystarczająca, co potwierdzają wyniki sprawdzenia doświadczalnego przedstawione w tablicy 1. Znaczną część rozbieżności pomiarów i obliczeń w tablicy 1 należy przypisać uchybom pomiarów, które są tu wyjątkowo trudne i uciążliwe. Nieco niższe wartości strumienia pomierzonego są uzasadnione zamykaniem się części strumienia $\hat{\Phi}_k$ w przestrzeni powietrznej pomiędzy kadzią i uzwojeniem. Zjawisko to występuje przy dużych odległościach kadzi od uzwojeń, a więc przy transformatorach wysokonapięciowych. Można je uwzględnić przez wprowadzenie współczynnika zmniejszającego k_p. Strumień $\hat{\Phi}_k$ dzieli się w tym przypadku na strumień wnikający do kadzi $\hat{\Phi}'_k = k_p \cdot \hat{\Phi}_k$ i strumień bocznikowany przez powietrze $\hat{\Phi}_{kp}$, przy czym

$$k_p = \frac{\hat{\Phi}'_k}{\hat{\Phi}_k} = \frac{R_p}{R_p + R_k} = \frac{1}{1 + \frac{c_k}{\mu_r}\sqrt{\omega\mu\gamma}}$$

a $R_p = \frac{h}{\mu_0 c_k}$ i $R_k = \frac{h}{\mu \cdot \delta_{Fe}}$ — równoległe reluktancje jednostkowe kadzi i przyległej warstwy powietrza o szerokości c_k, $\delta_{Fe} = \sqrt{\frac{1}{\omega\mu\gamma}}$ — zastępcza głębokość wnikania strumienia do ściany kadzi stalowej z uwzględnieniem zmian przenikalności i strat histerezowych. Przyjmując $f = 50$ Hz, $\gamma = 7 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ i przenikalność względną stali $\mu_r = 380$ otrzymamy ostatecznie jako współczynnik poprawkowy wzór liczbowy

$$k_p \cong \frac{1}{1 + 2{,}7 c_k} \qquad (c_k \text{ w metrach}). \tag{4a}$$

Tablica 1

Sprawdzenie doświadczalne wzoru (4) na małym modelu opisanym w pracy [3] przy $Iz = 30$ A $\times$ 144 zw. $= 4320$ A

$\frac{a_k}{a_r}$	a_k	a_r	$\hat{\Phi}_k/\hat{\Phi}$	
	cm	cm	obl. wz. (4)	pomiar
1,74	6,6	3,8	0,365	0,30
1,17	5,6	4,8	0,461	0,47
1,00	3,8	3,8	0,500	0,48
0,675	5,8	8,6	0,598	0,50
0,576	3,8	6,6	0,635	0,60
0,50	4,8	9,6	0,667	0,57
0,46	5,8	12,6	0,685	0,56
0,359	3,8	10,6	0,736	0,67
0,353	4,8	13,6	0,740	0,65
0,260	3,8	14,6	0,790	0,68

Po podstawieniu równania (4) do równania (3) i uwzględniając (4a) otrzymamy prąd obliczeniowy

$$I_k = I \frac{k_p a_r}{a_r + a_k} \cdot \frac{\hat{\Phi}_\delta}{\hat{\Phi}_z}. \tag{5}$$

Stosunek strumieni $\Phi_\delta/\hat{\Phi}_z$ wyznaczymy na podstawie następujących rozważań. Strumień całkowity w szczelinie $\hat{\Phi}_\delta$ można obliczyć za pomocą klasycznego wzoru dla cylindrycznych uzwojeń transformatorów

$$\hat{\Phi}_\delta = \frac{\sqrt{2}\, Iz \mu_0 \delta'}{h_R}, \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{przy czym } \delta' = \delta + \frac{a_1+a_2}{2}, \\ &h_R = \frac{h}{K}, \quad K \cong 1 - \frac{a_1+a_2+\delta}{\pi h} < 1 \text{ — współczynnik Rogowskiego.} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Strumień zaś $\hat{\Phi}_{\dot{z}}$ (rys. 1) można obliczyć[1]) całkując od zera do nieskończoności składową normalną natężenia pola magnetycznego na powierzchni ściany stalowej od strony powietrza, wyznaczoną w pracy [1] i [3]:

$$\hat{H}_{z0} = \eta \frac{\sqrt{2}\, Iz}{2\pi h}\left[\ln\frac{c_1^2+(y+h/2)^2}{c_1^2+(y-h/2)^2} - \ln\frac{c_2^2+(y+h/2)^2}{c_2^2+(y-h/2)^2}\right], \qquad \text{to znaczy}$$

$$\hat{\Phi}_{\dot{z}} = \int_0^\infty \mu_0 \hat{H}_{z0}\, dy = \eta\mu_0 \frac{\sqrt{2}\cdot Iz}{2\pi h}\left| h\cdot\ln\frac{h^2+4c_1^2}{h^2+4c_2^2} + 4\left(c_1 \operatorname{arctg}\frac{h}{2c_1} - c_2 \operatorname{arctg}\frac{h}{2c_2}\right)\right|. \tag{8}$$

Z wyrażeń (9) i (6) otrzymujemy

$$\frac{\hat{\Phi}_\delta}{\hat{\Phi}_{\dot{z}}} = \frac{2\pi}{\eta}\,\frac{\delta'}{h_R}\left|\frac{1}{\ln\dfrac{1+(2c_1/h)^2}{1+(2c_2/h)^2} + 2\left(\dfrac{2c_1}{h}\operatorname{arctg}\dfrac{h}{2c_1} - \dfrac{2c_2}{h}\operatorname{arctg}\dfrac{h}{2c_2}\right)}\right|. \tag{9}$$

Wzór (9) został także sprawdzony doświadczalnie w oparciu o wyniki pomiarów wykonanych na małym modelu [3]. Zilustrujemy to w formie przykładu obliczeniowego.

Przykład 2

Model układu z rys. 4 ma wymiary $a_r = 9{,}6$ cm, $a_k = 4{,}8$ cm, $h = 9{,}9$ cm, szerokość szyn $a_1 = a_2 = 1{,}6$ cm, szczelinę $\delta = 4{,}8$ cm, $c_1 = 1{,}4$ cm, $c_2 = 8$ cm.

Obliczymy stosunek strumieni za pomocą wzoru (9):

$$\delta' = 4{,}8 + \frac{3{,}2}{2} = 6{,}4 \text{ cm},$$

$$K = 1 - \frac{3{,}2+4{,}8}{\pi 9{,}9} = 1 - 0{,}257 = 0{,}743; \qquad h_R = \frac{9{,}9}{0{,}743} = 13{,}3 \text{ cm}.$$

$$\frac{\hat{\Phi}_\delta}{\hat{\Phi}_{\dot{z}}} = \frac{2\pi}{\eta}\cdot\frac{6{,}4}{13{,}3}\left|\frac{1}{\ln\dfrac{1+\left(\dfrac{2\cdot 1{,}4}{9{,}9}\right)^2}{1+\left(\dfrac{2\cdot 8}{9{,}9}\right)^2} + 2\left(\dfrac{2{,}8}{9{,}9}\operatorname{arctg}\dfrac{9{,}9}{2{,}8} - \dfrac{16}{9{,}9}\operatorname{arctg}\dfrac{9{,}9}{16}\right)}\right| = \frac{2\pi}{\eta}\,\frac{0{,}48}{2{,}284} = \frac{1{,}32}{\eta}.$$

Zakładając $\eta = 0{,}85$ otrzymamy $\hat{\Phi}_\delta/\hat{\Phi}_{\dot{z}} = 1{,}55$.

Z pomiarów na modelu otrzymano:

dla I =	35	30	20	15	10	A
$\hat{\Phi}_\delta/\hat{\Phi}_{\dot{z}}$ =	1,48	1,46	1,39	1,40	1,45	—

Biorąc pod uwagę trudności pomiarowe również i tę zgodność można uznać za zadowalającą. W tym przypadku jednak jeszcze dobór współczynnika niepełnego odbicia η ma wpływ na dokładność. W dalszym ciągu obliczeń trudność ta w zasadzie zniknie.

[1]) T. Janowski: Metody doświadczalnego wyznaczania dodatkowych strat obciążeniowych. Praca doktorska. Kat. Maszyn El. i Transformatorów Polit. Łódzkiej. VI. 1968 r.

Jeżeli teraz podstawimy równanie (9) do (5), a następnie równanie (5) do (1), to zauważymy, że uciążliwy i najmniej dokładny współczynnik „niepełnego odbicia zwierciadlanego" prądu η sam się zredukuje i nie będzie występował w dalszych wzorach. Tak więc straty mocy w jednej z płyt stalowych umieszczonych z obu stron nieskończonych szyn równoległych możemy obliczać ze wzoru

$$P_1 = 1{,}75 \cdot 10^{-11} hf\sqrt{f\gamma} \cdot I_k^2 (k_1 + 6{,}6 \cdot 10^{-9} k_2 \sqrt{f\gamma} I_k), \tag{10}$$

przy czym

$$I = I \cdot k_p \cdot \frac{2\pi a_r}{a_r + a_k} \cdot \frac{\delta'}{h_R} \left| \frac{1}{\ln \frac{1+(2c_1/h)^2}{1+(2c_2/h)^2} + 2\left(\frac{2c_1}{h}\operatorname{arctg}\frac{h}{2c_1} - \frac{2c_2}{h}\operatorname{arctg}\frac{h}{2c_2}\right)} \right|. \tag{11}$$

Pozostałe oznaczenia jak przy wzorze (1), (7) i (9).

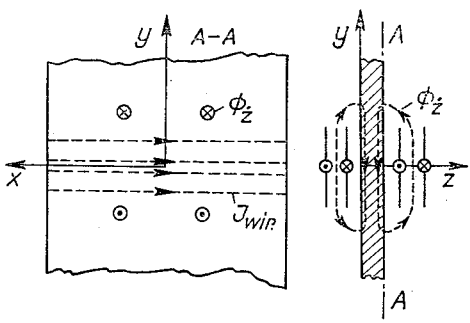
Przy założeniu $f = 50$ Hz i $\gamma = 7 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$:

$$P_1 = 16{,}35 \cdot 10^{-6} h \cdot I_k^2 (k_1 + 12{,}3 \cdot 10^{-5} k_2 \cdot I_k). \tag{10a}$$

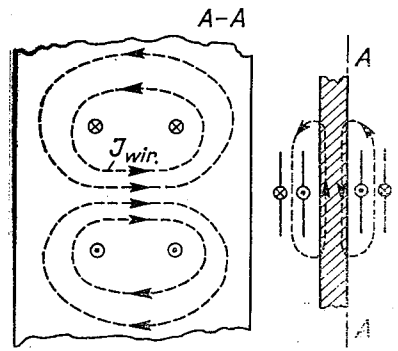
4. WPŁYW DWUWYMIAROWEGO (PĘTLOWEGO) KSZTAŁTU DRÓG PRĄDÓW WIROWYCH NA WEWNĘTRZNEJ POWIERZCHNI KADZI

4.1. Analiza jakościowa

Wzór podstawowy (1) dotyczy jednowymiarowego pola na powierzchni masywnej płyty stalowej (rys. 5). W rzeczywistości na powierzchni kadzi transformatora pole zmienia się zarówno wzdłuż wysokości, jak i długości kadzi. Jest więc to pole dwuwymiarowe



Rys. 5. Linie gęstości prądów wirowych J_{wir} na powierzchni płyty stalowej w przypadku pola jednowymiarowego na powierzchni $H_z(y)$



Rys. 6. Linie gęstości prądów wirowych J_{wir} na powierzchni płyty stalowej w przypadku dwuwymiarowego pola na powierzchni $H_z(x, y)$

$H(x, y)$. Pole takie można wymodelować (odwzorować) w przybliżeniu zmieniając kierunki prądu w uzwojeniu wzbudzającym po jednej stronie modelu (rys. 6). Płyta stalowa na rys. 6 może więc być dość wiernym modelem wewnętrznej powierzchni kadzi transformatora jednofazowego. W obu przypadkach występują na powierzchniach cztery ćwiartki

zamkniętych pętel prądów wirowych. Łatwo zauważyć, że przy tym samym wzbudzeniu prądy wirowe na rys. 6 mają do przebycia dłuższą drogę niż prądy wirowe na rys. 5. Dzięki temu straty w kadzi transformatora wypadają odpowiednio mniejsze niż w modelu jednowymiarowym przedstawionym na rys. 5. Już w pracy [3] zwrócono uwagę na ten fakt i stwierdzono wstępnie na podstawie doświadczeń, że straty w dwuwymiarowym układzie pola na powierzchni stanowią 50 do 40% strat w układzie jednowymiarowym ([3] rys. 16). Zagadnienie to należy zbadać i uzasadnić teoretycznie. Uczynimy to wychodząc z założenia, że stosunek strat w obu układach nie zależy od tego, czy materiał jest ferromagnetyczny, czy nie. Jest to o tyle uzasadnione, że decydują tu kształty dróg prądów wirowych, które mało zależą od własności fizycznych stosunkowo jednorodnego środowiska, jakim jest ściana stalowa. Możemy więc obliczenia te prowadzić przy założeniu $\mu = \text{const}$.

4.2. Gęstość mocy wnikającej do ściany kadzi

Jeżeli przyjmiemy układ współrzędnych prostokątnych usytuowany tak, że jego płaszczyzna XY pokrywać się będzie z powierzchnią ściany stalowej, na którą pada fala elektromagnetyczna, to gęstość mocy wnikającej do tej ściany możemy wyrazić przez składową wektora Poyntinga skierowaną wzdłuż osi Z:

$$S_z = E_x H_y - E_y H_x. \tag{12}$$

Pole na powierzchni stali może mieć ogólnie dowolny rozkład przestrzenny. Przy założeniu stałej przenikalności metalu każdą z harmonicznych rozkładu przestrzennego możemy analizować oddzielnie, a następnie sumować straty wytworzone przez poszczególne harmoniczne. Przyjmując sinusoidalną zmienność w czasie pola na powierzchni otrzymamy zespoloną moc m-tej n-tej harmonicznej przestrzennej rozkładu pola na powierzchni w postaci

$$\underline{S}_{zmn} = \frac{1}{2}(\hat{\underline{E}}_{sx}\hat{\underline{H}}^*_{sy} - \hat{\underline{E}}_{sy}\hat{\underline{H}}^*_{sx}), \tag{13}$$

przy czym $\hat{\underline{E}}_{sx}$ i $\hat{\underline{E}}_{sy}$ — zespolone wartości składowych stycznych natężenia pola elektrycznego na wewnętrznej powierzchni kadzi, wartości maksymalne w czasie.

$\hat{\underline{H}}^*_{sy}$ i $\hat{\underline{H}}^*_{sx}$ — sprzężone wartości składowych stycznych natężenia pola magnetycznego na powierzchni wewnętrznej kadzi, wartości maksymalne w czasie.

W wyrażeniu (13) dla skrócenia zapisu opuszczono po prawej stronie indeksy wskazujące rząd harmonicznych rozkładu pola.

Składowe $\hat{\underline{E}}_{sx}$ i $\hat{\underline{E}}_{sy}$ niezbędne do obliczenia za pomocą wzoru (13) mocy prądów wirowych płynących w ścianie metalowej znajdziemy w oparciu o metodę potencjału wektorowego.

Podstawowe równania pola magnetycznego w metalu mają postać

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \gamma\vec{E}; \quad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0; \quad \operatorname{div}\vec{D} = 0. \tag{14}$$

Z tożsamości rachunku wektorowego $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} \equiv 0$ wynika, że wektor $\vec{A}$ określony równaniem

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} \tag{15}$$

spełnia trzecie z równań (14). Wektor $\vec{A}$ jest magnetycznym potencjałem wektorowym. Podstawiając (15) do pierwszego z równań (14) i uwzględniając tożsamość rot rot $\vec{A} \equiv$ $\equiv$ grad div $\vec{A} - \nabla^2\vec{A}$ otrzymamy

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \nabla^2\vec{A} = \mu\gamma\vec{E};$$

$\vec{A}$ jest funkcją wieloznaczną, możemy więc tu obrać warunek

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0, \tag{15a}$$

skąd otrzymamy podstawowe równanie

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu\gamma\vec{E}. \tag{16}$$

Podstawiając (15) do drugiego z równań (14) otrzymamy

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \tag{17}$$

zatem

$$\nabla^2\vec{A} = \mu\gamma\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}. \tag{18}$$

4.3. Straty mocy w ścianie stalowej o $\mu = \text{const}$ przy polu jednowymiarowym na powierzchni

Pole na powierzchni ściany stalowej, w pobliżu której przebiegają nieskończenie długie szyny równoległe (rys. 7), wytworzone jest przez przepływ szyn, który można rozłożyć na szereg Fouriera wzdłuż osi y:

$$\hat{\underline{I}} = \sum_{n=1}^{\infty} I_{0n}\cos n\eta y \cdot e^{j\omega t},$$

gdzie $\hat{I}_{0n} = \frac{2}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} f(y)\cdot\cos n\eta y\cdot dy$ i $\eta = \frac{\pi}{\tau}$.

Ogólnie potencjał wektorowy w metalu może tu zawierać dwie składowe n-tej harmonicznej

$$\begin{aligned}\hat{\underline{A}}_{nz} &= \varphi\cos n\eta y\cdot e^{j\omega t},\\ \hat{\underline{A}}_{nx} &= \psi\cos n\eta y\cdot e^{j\omega t}.\end{aligned} \tag{19}$$

Składowa A_{ny} nie istnieje, ponieważ zgodnie z założeniem prąd w kierunku osi Y nie płynie. φ i ψ są nieznanymi na razie zespolonymi funkcjami współrzędnej z.

Podstawiając (19) do równania (18) otrzymamy dla składowej A_{nx} potencjału wektorowego równanie skalarne:

$$\frac{\partial^2\hat{\underline{A}}_{nx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\hat{\underline{A}}_{nx}}{\partial z^2} = \mu\gamma\frac{\partial\hat{\underline{A}}_{nx}}{\partial t}, \tag{20}$$

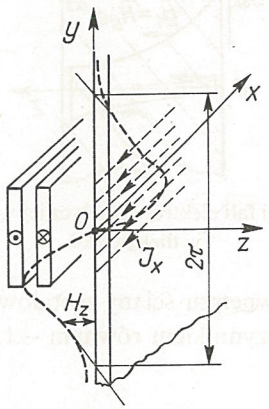
$$-\psi n^2\eta^2 \cos n\eta y \cdot e^{j\omega t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \cos n\eta y \cdot e^{j\omega t} = j\omega\mu\gamma\psi \cdot \cos n\eta y \cdot e^{j\omega t},$$

skąd

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = (n^2\eta^2 + j\omega\mu\gamma)\psi; \tag{21}$$

analogicznie

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = (n^2\eta^2 + j\omega\mu\gamma)\varphi. \tag{21a}$$



Rys. 7. Wzbudzanie prądów wirowych w płycie stalowej przy jednowymiarowym polu na powierzchni

Rozwiązania ogólne tych równań mają postać

$$\varphi = M_1 e^{\alpha z} + M_2 e^{-\alpha z},$$

$$\psi = N_1 e^{\alpha z} + N_2 e^{-\alpha z},$$

przy czym:

$$\alpha^2 = n^2\eta^2 + j\omega\mu\gamma;$$

$$|\alpha^2| = \sqrt{n^4\eta^4 + \omega^2\mu^2\gamma^2}; \quad |\alpha| = \sqrt[4]{n^4\eta^4 + \omega^2\mu^2\gamma^2};$$

$$Re\{\alpha\} = \sqrt{\frac{|\alpha|^2 + n^2\eta^2}{2}}; \quad Im\{\alpha\} = \sqrt{\frac{|\alpha|^2 - n^2\eta^2}{2}}.$$

Wracając do (19) otrzymamy ogólnie

$$\left.\begin{aligned} \hat{\underline{A}}_{nz} &= (M_1 e^{\alpha z} + M_2 e^{-\alpha z}) \cos n\eta y \cdot e^{j\omega t}, \\ \hat{\underline{A}}_{nx} &= (N_1 e^{\alpha z} + N_2 e^{-\alpha z}) \cos n\eta y \cdot e^{j\omega t}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Z warunku (15a)

$$\frac{\partial \hat{\underline{A}}_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\underline{A}}_{nz}}{\partial z} = 0;$$

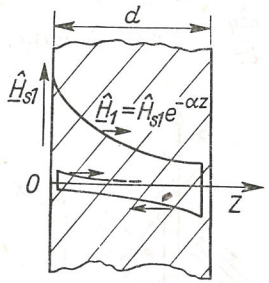
$$\frac{\partial \hat{\underline{A}}_{nz}}{\partial z} = \alpha(M_1 e^{\alpha z} - M_2 e^{-\alpha z}) \cos n\eta y \cdot e^{j\omega t} = 0, \quad \text{gdyż } \frac{\partial \hat{\underline{A}}_{nx}}{\partial x} = 0.$$

Zatem $M_1 e^{\alpha z} - M_2 e^{-\alpha z} = 0$.

Dla $z \to \infty$, $e^{\alpha z} \to \infty$. Jest to niemożliwe, gdyż pole nie może wzrastać do nieskończoności. Zatem $M_1 = 0$, a więc i $M_2 = 0$, skąd

$$\hat{A}_{nz} = 0.$$

W przypadku gdy ściana kadzi graniczy z dielektrykiem, można przyjąć, że na zewnętrznej powierzchni kadzi natężenie pola magnetycznego $H_{s2y} = 0$. Wynika to z zasady odbicia



Rys. 8. Odbicia składowej magnetycznej fali elektromagnetycznej we wnętrzu ściany stalowej umieszczonej w dielektryku

składowej magnetycznej fali we wnętrzu ściany metalowej (rys. 8). Fala ta odbija się od powierzchni dielektryka ze współczynnikiem równym -1. Ten proces odbicia został omówiony szczegółowiej w pracy [8].

Z równania (15) wynika:

$$\hat{\underline{B}}_{ny} = \frac{\partial \hat{\underline{A}}_{nx}}{\partial z} = \alpha(N_1 e^{\alpha z} - N_2 e^{-\alpha z}) \cos n\eta y \cdot e^{j\omega t}. \tag{23}$$

Na zewnętrznej powierzchni blachy odpowiadającej $z = d$, $B_{ny}(z = d) = 0$, zatem:

$$N_1 e^{\alpha d} - N_2 e^{-\alpha d} = 0. \tag{24}$$

Jeżeli pole styczne na wewnętrznej powierzchni kadzi wyrazimy wzorem:

$$\hat{\underline{B}}_{ny}(z = 0) = \hat{\underline{B}}_{0ny} \cos n\eta y \cdot e^{j\omega t}, \tag{25}$$

to porównując (23) dla $z = 0$ z (25) otrzymamy

$$\hat{\underline{B}}_{0ny} = \alpha(N_1 - N_2). \tag{26}$$

Z równań (24) i (26) otrzymujemy

$$N_1 = -\frac{\hat{\underline{B}}_{0ny} e^{-\alpha d}}{2\alpha \operatorname{sh} \alpha d}; \quad N_2 = -\frac{\hat{\underline{B}}_{0ny} e^{\alpha d}}{2\alpha \operatorname{sh} \alpha d};$$

$$N_1 e^{\alpha z} + N_2 e^{-\alpha z} = -\frac{\hat{\underline{B}}_{0ny}}{\alpha} \cdot \frac{\operatorname{ch} \alpha(d - z)}{\operatorname{sh} \alpha d}.$$

Podstawiając te stałe do wzorów (22) otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} \hat{\underline{A}}_{nz} &= 0, \\ \hat{\underline{A}}_{nx} &= -\frac{\hat{\underline{B}}_{0ny}}{\alpha} \cdot \frac{\operatorname{ch} \alpha(d - z)}{\operatorname{sh} \alpha d} \cos n\eta y \cdot e^{j\omega t}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Wobec założonej na początku liniowości środowiska wszystkie harmoniczne można zsumować, w wyniku czego otrzymamy szereg:

$$\underline{\hat{A}}_x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{B}_{0ny}}{\alpha} \cdot \frac{\mathrm{ch}\alpha(d-z)}{\mathrm{sh}\alpha d} \cos n\eta y \cdot e^{j\omega t}. \tag{28}$$

Moc prądów wirowych wyznaczymy ze wzoru (13). Tutaj $E_y = 0$ i $H_x = 0$, zatem

wg (17): $$\underline{\hat{E}}_{nx} = -\frac{\partial \underline{\hat{A}}_{nx}}{\partial t} = j\omega \frac{\hat{B}_{0ny}}{\alpha} \cdot \frac{\mathrm{ch}\alpha(d-z)}{\mathrm{sh}\alpha d} \cos n\eta y \cdot e^{j\omega t},$$

wg (25): $$\underline{\hat{H}}^*_{ny} = \underline{\hat{H}}^*_{0ny} \cos n\eta y \cdot e^{-j\omega t}.$$

Wartość skuteczna zespolonego wektora Poyntinga na powierzchni blachy:

$$\underline{S}_z(z=0) = \frac{1}{2} \underline{\hat{E}}_{sx} \cdot \underline{\hat{H}}^*_{sy} = \frac{j\omega\mu}{2\alpha} \hat{H}^2_{0ny} \cdot \mathrm{cth}\alpha d \cdot \cos^2 n\eta y. \tag{29}$$

Średnie straty mocy pozornej na jednostkę powierzchni blachy w granicach od 0 do $\tau = \frac{\pi}{\eta}$ dla n-tej harmonicznej:

$$\underline{S}_{nśr} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\pi} \underline{S}_z(z=0) \cdot dy = \frac{j\omega\mu \cdot \hat{H}^2_{0ny} \mathrm{cth}\,\alpha d}{2\alpha\tau n\eta} \int_{y=0}^{y=\tau} \cos^2(n\eta y) \cdot d(n\eta y) =$$

$$= \frac{j\omega\mu \mathrm{cth}\alpha d}{2\alpha\pi \cdot n} \hat{H}^2_{0ny} \left(\frac{1}{4} \sin 2n\pi + \frac{n\pi}{2} \right) = \frac{j\omega\mu}{4\alpha} \hat{H}^2_{0n} \mathrm{cth}\alpha d, \tag{30}$$

gdzie $\hat{H}_{0n}$ — amplituda n-tej harmonicznej składowej stycznej natężenia pola magnetycznego na powierzchni wewnętrznej kadzi.

Otrzymany wzór należy porównać ze wzorem na straty mocy występujące w przypadku pola dwuwymiarowego, jakie występuje na powierzchni rzeczywistej kadzi z materiału o stałej przenikalności.

4.4. Straty mocy w ścianie stalowej o $\mu = \mathrm{const}$ przy polu dwuwymiarowym na powierzchni

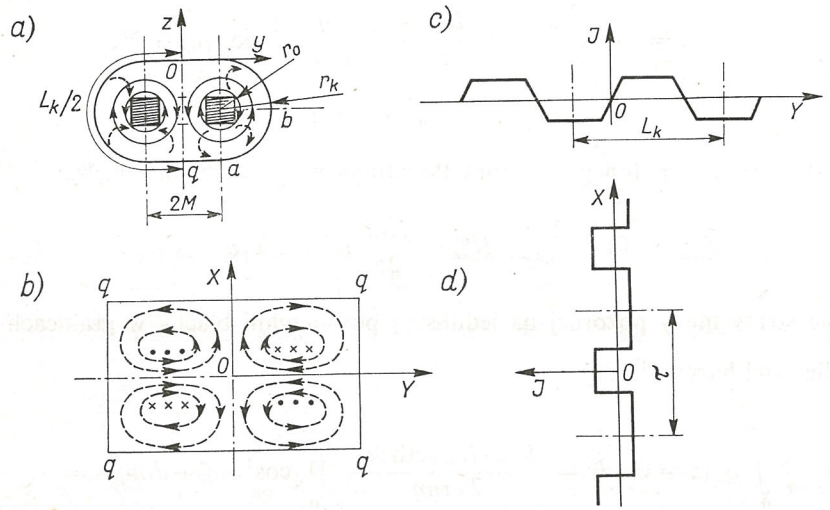
Pole na powierzchni kadzi transformatora jednofazowego może być rozpatrywane jako zmieniające się okresowo wzdłuż osi uzwojenia oraz wzdłuż obwodu kadzi (rys. 9). Na rysunkach 9c i 9d przedstawiono schematycznie okresowy rozkład gęstości prądu wzdłuż przyjętych osi X i Y. Wykres tego prądu można rozłożyć na podwójny szereg Fouriera wzdłuż tych osi:

$$\underline{\hat{J}} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{J}_{0mn} \cos vmx \cdot \sin n\eta y \cdot e^{j\omega t},$$

w którym

$$\hat{J}_{0mn} = \frac{4}{L_k \tau} \int_{-L_k/2}^{L_k/2} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(x,y) \cdot \cos \nu m x \cdot \sin n\eta y \cdot dx \cdot dy,$$

$\nu = \frac{\pi}{\tau}$, $\eta = \frac{2\pi}{L_k}$ — odległość pomiędzy dolną i górną belką jarzmową; L_k — obwód kadzi.



Rys. 9. Okresowy rozkład amperozwojów (c) i (d) oraz prądów wirowych (b) na powierzchni kadzi transformatora jednofazowego (a)

Zagadnienie strat w takiej kadzi wykonanej ze stali o stałej przenikalności zostało rozwiązane w pracy [7]. Zasada tych obliczeń jest podana w skrócie w książce [8]. Średnie straty mocy pozornej na jednostkę powierzchni kadzi w granicach od 0 do $\frac{\tau}{2}$ i od 0 do $\frac{L_k}{2}$ dla m-tej, n-tej harmonicznej przestrzennej wyrażą się wzorem:

$$\underline{S}_{mn\,śr} = \frac{4}{\tau L_k} \int_0^{\tau/2} \int_0^{L_k/2} \underline{S}_{zmn} \cdot dx\,dy = \frac{j\omega\mu}{8\alpha} \hat{H}^2_{0mn} \operatorname{cth} \alpha d. \tag{31}$$

Stosunek strat przy polu dwuwymiarowym (31) do strat przy polu jednowymiarowym (30) na powierzchni blachy przy pozostałych warunkach stałych i przy założeniu, że rozkład składowej normalnej natężenia pola magnetycznego na powierzchni blachy w obu przypadkach jest zbliżony i podobny do rozkładu występującego przy prądzie stałym, wynosi zatem:

$$\frac{P_{2wym}}{P_{1wym}} = \frac{\underline{S}_{n\,śr}}{\underline{S}_{mn\,śr}} = 0{,}5. \tag{32}$$

Wzór (32) sprawdzono doświadczalnie na dużym modelu (rys. 2, 5 i 6). Wyniki tego sprawdzenia podano w tablicy 2. Potwierdza ona słuszność wzoru (32). Stosunek tego samego rzędu, lub nieco mniejszy, otrzymano także przy dawniejszych badaniach wykonanych na małym modelu przy słabszych polach [3].

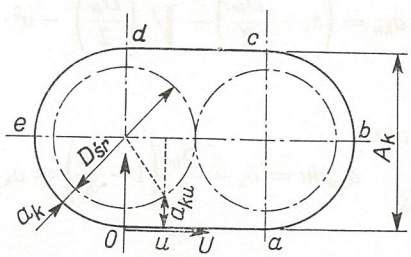
Tablica 2

Doświadczalne sprawdzenie stosunku strat przy polu dwu- i jednowymiarowym na powierzchni masywnej ściany stalowej [wzór (32)]

Prąd wzbudzający		Straty w układzie		$\frac{P_{2\text{-wym.}}}{P_{1\text{-wym.}}}$
I	Iz	1-wym.	2-wym.	
A	A	W	W	—
10	6400	126	55,5	0,485
15	9600	345	152,5	0,442
20	12800	600	247,5	0,413
25	16000	1012	491	0,487
30	19200	1447	715	0,495

5. STRATY MOCY W ZAOKRĄGLONYCH CZĘŚCIACH KADZI O STAŁEJ ODLEGŁOŚCI UZWOJEŃ OD KADZI

Zaokrąglone, krańcowe części kadzi *a-b-c* (rys. 10) o stałej odległości uzwojeń od powierzchni kadzi są jednocześnie dostatecznie odległe od siebie i wzajemnie zasłaniane tak, że można przyjąć, że pola sąsiednich kolumn praktycznie na siebie nie oddziałują. Obie



Rys. 10. Schemat obliczeniowy przekroju transformatora jednofazowego; *a—b—c* — część o stałej odległości od kadzi a_k; *c—d* — część o zmiennej odległości a_{ku}

badane półkoliste powierzchnie kadzi tworzą wspólnie okrąg o średnicy $D+2(a_r+a_k)$ równej szerokości kadzi A_k (rys. 10). Przy czym D jest średnicą kolumny, zaś a_r i a_k — odległościami według rys. 4.

Ze względu na krzywiznę układu strumień skręcający do kadzi $\hat{\Phi}_k$ płynie większym przekrojem niż strumień $\hat{\Phi}_r$ skręcający ku rdzeniowi. Można to uwzględnić zastępując wymiary a_r i a_k we wzorze (11) wartościami $\left(a_r \frac{D_{śr}}{D}\right)$ i $\left(a_k \frac{D_{śr}}{D}\right)$.

Uwzględniając powyższe oraz wnioski z rozdziałów 2, 3 i 4, straty w zaokrąglonych częściach kadzi możemy obliczyć [na podstawie wzorów (10), (11) i (32)] za pomocą wzoru:

$$P_D = \pi A_k \cdot \frac{1{,}75}{2} 10^{-11} hf\sqrt{f\gamma} \cdot I_k^2 z^2 (k_1 + 6{,}6 \cdot 10^{-9} k_2 \sqrt{f\gamma} \cdot I_k z), \tag{33}$$

przy czym:

$$I_k = I \cdot k_p \frac{2\pi a_r}{a_r + a_k(D/D_z)} \cdot \frac{\delta'}{h_R} \left| \frac{1}{\ln \frac{1+(2c_1/h)^2}{1+(2c_2/h)^2} + 2\left(\frac{2c_1}{h} \operatorname{arctg} \frac{h}{2c_1} - \frac{2c_2}{h} \operatorname{arctg} \frac{h}{2c_2}\right)} \right|; \tag{34}$$

A_k — szerokość kadzi;
D — średnica kolumny; $D_z = A_k - 2c_k$ — zewnętrzna średnica uzwojeń;
k_p — współczynnik wg wzoru (4a).

6. ŚREDNIA ODLEGŁOŚĆ OD KADZI W PROSTOLINIOWYCH CZĘŚCIACH KADZI O ZMIENNEJ ODLEGŁOŚCI UZWOJEŃ OD KADZI WSKUTEK KRZYWIZNY UZWOJEŃ

Straty w tej części kadzi (część $2M$ — rys. 9a, lub cd — rys. 10) określimy w sposób przybliżony wyznaczając średnią odległość osi szczeliny od kadzi oraz zakładając, że sąsiednie uzwojenia stykają się ze sobą na średnich średnicach $D_{śr}$, gdyż część kadzi między tymi średnicami jest praktycznie nieczynna.

Odległość osi szczeliny od kadzi a_{ku} w miejscu u na obwodzie kadzi (rys. 10) wyraża się wzorem

$$a_{ku} = \left(a_k + \frac{D_{śr}}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{D_{śr}}{2}\right)^2 - u^2}.$$

Średnia odległość zaś

$$a_{k\,śr} \cong \frac{2}{D_{śr}} \int_0^{D_{śr}/2} a_{ku}\,du = a_k + \frac{D_{śr}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = a_k + 0{,}108 D_{śr}. \tag{35}$$

7. STRATY W KADZI TRANSFORMATORA JEDNOFAZOWEGO

W transformatorze jednofazowym (rys. 9a), w części obwodu $2M$ o zmiennej odległości uzwojeń od kadzi, strumień rozproszenia przebiega tak, jak to pokazano strzałkami przerywanymi, to znaczy strumienie sąsiednich kolumn wzajemnie osłabiają swoje oddziaływanie na kadź. To osłabienie jest największe tam, gdzie straty są i tak małe (największa odległość od kadzi). Części natomiast, gdzie odległość od kadzi jest mniejsza, są oddalone od sąsiedniej kolumny, a więc i jej oddziaływanie jest dużo mniejsze. Możemy więc przyjąć, że pola magnetyczne rozproszenia sąsiednich kolumn nie osłabiają się wzajemnie, i obliczać straty w części $2M$ (rys. 9a) posługując się odległością średnią (35), to znaczy:

$$P_M = 2A_k \frac{1{,}75}{2} 10^{-11} hf\sqrt{f\gamma} \cdot I_{k1}^2 z^2 (k_1 + 6{,}6 \cdot 10^{-9} k_2 \sqrt{f\gamma}\, I_{k1} z), \tag{36}$$

przy czym

$$I_{k1} = I \frac{1}{1+a_{k\acute{s}r}} \frac{2\pi a_r}{a_r + a_{k\acute{s}r}} \frac{\delta'}{h_R} \left| \frac{1}{\ln \frac{1+(2c_1/h)^2}{1+(2c_2/h)^2} + 2\left(\frac{2c_1}{h} \operatorname{arctg} \frac{h}{2c_1} - \frac{2c_2}{h} \operatorname{arctg} \frac{h}{2c_2} \right)} \right|. \tag{37}$$

Całkowite straty w transformatorze jednofazowym (rys. 9a) wyrażają się wzorem

$$P_{1faz} = P_D + P_M = 1{,}75 \cdot 10^{-11} A_k hf \sqrt{f\gamma} \cdot z^2 \left[\frac{\pi}{2} I_k^2 (k_1 + 6{,}6 \cdot 10^{-9} k_2 \sqrt{f\gamma} \cdot I_k z) + \right.$$

$$\left. + I_{k1}^2 (k_1 + 6{,}6 \cdot 10^{-9} k_2 \sqrt{f\gamma} \cdot I_{k1} z) \right], \tag{38}$$

gdzie I_k wyraża się wzorem (34), a I_{k1} — wzorem (37), czyli

$$I_{k1} = I_k \frac{1+c_k}{1+a_{k\acute{s}r}} \frac{a_r + a_k \frac{D}{D_z}}{a_r + a_{k\acute{s}r}} \approx I_k \frac{1+c_k}{1+a_{k\acute{s}r}} \frac{a_r + a_k}{a_r + a_{k\acute{s}r}}. \tag{39}$$

W celu uzyskania bardziej prostej postaci powyższych wzorów porównajmy prądy I_k i I_{k1} na konkretnych przykładach:

1) W transformatorze trójfazowym 63 MVA, 121/10,5 kV, $D_{\acute{s}r} = 1{,}066$ m, $a_k + a_r = 0{,}334$ m $= 0{,}313\, D_{\acute{s}r}$, $a_k = 0{,}206$ m, $c_k = 0{,}088$ m

$$I_{k1} = I_k \frac{1+0{,}088}{1+0{,}206+0{,}108 \cdot 1{,}066} \cdot \frac{0{,}313 D_{\acute{s}r}}{0{,}313 D_{\acute{s}r} + 0{,}108 D_{\acute{s}r}} = 0{,}822 \cdot 0{,}745 I_k = \underline{0{,}612 I_k}$$

2) W transformatorze trójfazowym 200 MVA, 257 kV, $D_{\acute{s}r} = 1{,}404$ m, $a_k + a_r = 0{,}5$ m $= 0{,}356\, D_{\acute{s}r}$, $a_k = 0{,}349$ m, $c_k = 0{,}165$ m.

$$I_{k1} = I_k \frac{1+0{,}165}{1+0{,}349+0{,}108 \cdot 1{,}404} \cdot \frac{0{,}356 D_{\acute{s}r}}{0{,}356 D_{\acute{s}r} + 0{,}108 D_{\acute{s}r}} = 0{,}775 \cdot 0{,}767 I_k = \underline{0{,}595 I_k}$$

3) W transformatorze jednofazowym $\frac{250}{3}$ MVA, $\frac{242}{\sqrt{3}}$ kV, $D_{\acute{s}r} = 1{,}154$ m, $a_k + a_r = 0{,}687$ m $= 0{,}595\, D_{\acute{s}r}$, $a_k = 0{,}573$ m, $c_k = 0{,}3205$ m,

$$I_{k1} = I_k \frac{1+0{,}320}{1+0{,}573+0{,}108 \cdot 1{,}154} \cdot \frac{0{,}595 D_{\acute{s}r}}{0{,}595 D_{\acute{s}r} + 0{,}10 D_{\acute{s}r}} = 0{,}778 \cdot 0{,}846 I_k = \underline{0{,}657 I_k}.$$

Jak wynika z tych przykładów, stosunek prądów I_{k1}/I_k wykazuje dużą stałość w szerokich granicach mocy i typów transformatorów. Wynosi on przeciętnie 0,6 do 0,66. Biorąc pod uwagę zależność strat od prądu w potędze 2,2 do 2,5 stwierdzimy, że drugi składnik wzoru (38) jest $1{,}57 \left(\frac{1}{0{,}7} \right)^{2{,}2 \text{ do } 2{,}5} = 3{,}5$ do 3,8-krotnie mniejszy od pierwszego. Można więc nie popełniając istotnego błędu uprościć wzór (38) przyjmując $I_{k1} = 0{,}63\, I_k$ dla wszystkich transformatorów jednakowo. Otrzymamy wtedy ostateczny wzór na straty w kadzi transformatora jednofazowego dwukolumnowego (rys. 9a) w postaci:

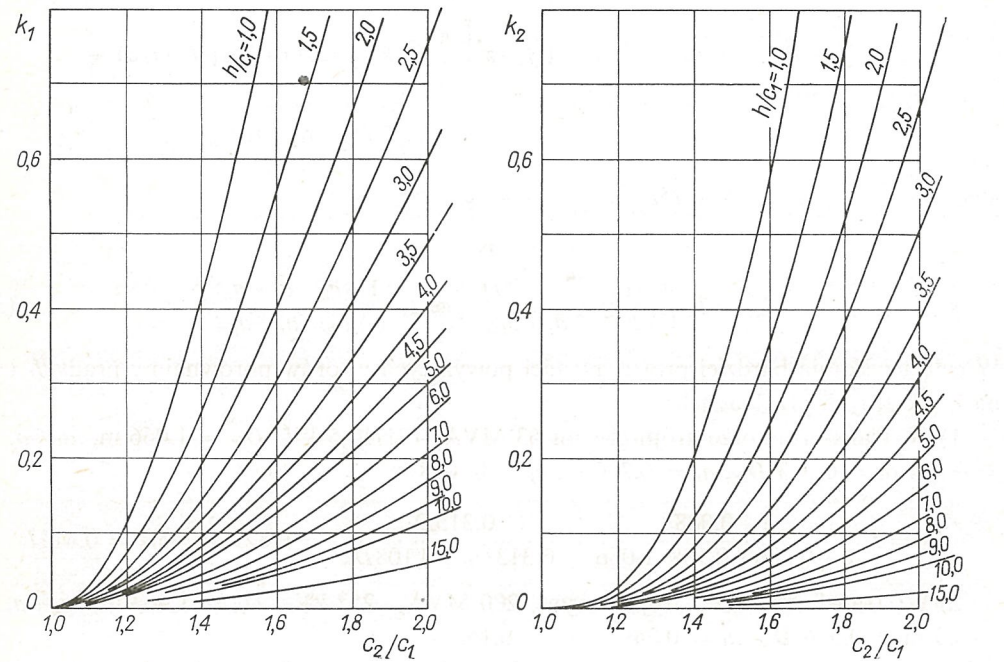
$$P_{1faz} \cong 3{,}44 \cdot 10^{-11} A_k h f \sqrt{f\gamma}\, I_k^2 z^2 (k_1 + 6{,}1 \cdot 10^{-9} k_2 \sqrt{f\gamma} \cdot I_k z). \quad (40)$$ [1)]

Zakładając jak poprzednio $f = 50$ Hz i $\gamma = 7 \cdot 10^6$ S/m otrzymamy

$$P_{1faz} \cong 3{,}22 \cdot 10^{-5} A_k h I_k^2 z^2 (k_1 + 1{,}14 \cdot 10^{-4} k_2 I_k z), \quad (40a)$$

przy czym

A_k — szerokość kadzi w m; h — wysokość uzwojeń w m; I_k — prąd zredukowany jednej fazy wg wzoru (34), w którym a_r i a_k są odległościami osi szczeliny od rdzenia i kadzi



Rys. 11. Współczynniki proporcji geometrycznych uzwojeń wyznaczone za pomocą elektronicznej maszyny cyfrowej ZAM-2Beta

w m, k_p — współczynnik zmniejszający wg wzoru (4a), c_k — odległość kadzi od uzwojeń w m. Pozostałe wielkości jak we wzorze (1). Wszystkie jednostki w układzie SI. Współczynniki k_1 i k_2 dla proporcji stosowanych w dużych transformatorach podane są na rys. 11. Dla innych proporcji wykresy te podano w pracy [8].

8. SPRAWDZENIE W PRAKTYCE WZORU (40) NA STRATY W KADZI WIELKIEGO TRANSFORMATORA JEDNOFAZOWEGO

Przykład i jednocześnie sprawdzenie doświadczalne wzorów (40) oparto na materiałach doświadczalnych fabryki Škoda w Pilznie opublikowanych w pracy [2]. W pracy tej podano wyniki badań strat mocy w kadzi transformatora jednofazowego dwukolumno-

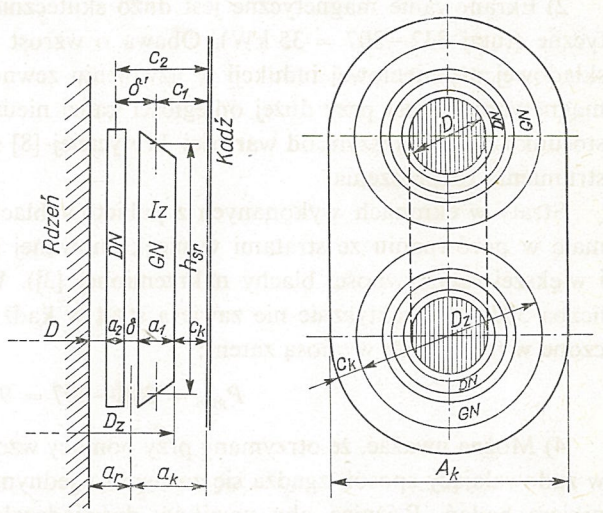
[1)] Wzór ten może być podstawą do obliczeń strat również i w innych transformatorach. W przypadku transformatorów o danych odbiegających od przyjętych założeń prawą stronę wzoru należy pomnożyć przez współczynnik empiryczny $k_m < 1$ (transformator płaszczowy) lub $k_m > 1$ (transformator trójfazowy).

wego o mocy $\frac{250}{3}$ MVA, $\frac{243}{\sqrt{3}}$ /13,8/ 13,8 kV. Wyniki te zestawione są w tablicy 3.

Po podstawieniu danych wymiarowych tego transformatora do wzoru (40a) otrzymano straty mocy w kadzi równe

$$P_{obl.} = 92{,}2 \text{ kW}.$$

Niezbędne do obliczeń wymiary podano na rys. 12. Ze względu na nieuniknione uproszczenia konieczne jest dalsze sprawdzanie wzoru w praktyce. Ewentualne korekty powinny dotyczyć przede wszystkim współczynnika k_p (w kierunku zmniejszenia) i zastępczej wy-



Rys. 12. Wymiary transformatora niezbędne do obliczeń

sokości uzwojeń $h_{śr}$. Podany sposób obliczenia strat nie jest oczywiście jedynym. Ostatnio w pracy [9] podano inny sposób podejścia do tego zagadnienia, w którym zastosowano inne uproszczenia. Każde uproszczenie prowadzić może do istotnych różnic w zależnościach funkcyjnych strat obliczonych od parametrów fizycznych, dlatego w pracy niniejszej zwrócono szczególną uwagę na sprawdzenie doświadczalne założeń upraszczających i poszczególnych etapów wyprowadzenia.

Tablica 3

Wpływ różnych sposobów ekranowania kadzi na napięcie zwarcia i całkowite straty zwarcia w dwukolumnowym transformatorze jednofazowym 250/3 MVA, $\frac{242+5\%}{\sqrt{3}}$ /13,8/13,8 kV (na zaczepie znamionowym przy 20°C) produkcji Škoda-Plzeń [2]

Pomiary	u_z [%]	P_z [kW]
— bez kadzi	12,0	310
— w kadzi bez ekranowania	11,85	398
— w kadzi ekranowanej blachą aluminiową	11,62	342
— w kadzi ekranowanej pakietami blachy transformatorowej	12,07	307

Dane z badań fabrycznych podane w tabl. 3 potwierdzają w całości wyniki i wnioski z dotychczasowych badań autora nad tym zagadnieniem [1], [3], [8]. Wnioski te można ująć krótko w następujący sposób.

1) Wyznaczanie strat mocy w kadzi przez porównanie strat zwarcia zmierzonych z kadzią i bez kadzi jest możliwe tylko wtedy, gdy stosunek a_k/a_r jest większy od pewnej wartości krytycznej, która jest rzędu 3 do 3,5 [8]. W rozpatrywanym transformatorze firmy Škoda stosunek a_k/a_r wynosił około 5. Pomierzone zatem straty mocy w kadzi można oszacować jako różnicę:

$$P_{pom} = 398-310 = 88 \text{ kW}.$$

2) Ekranowanie magnetyczne jest dużo skuteczniejsze niż ekranowanie elektromagnetyczne (tutaj 342—307 = 35 kW). Obawa o wzrost strat dodatkowych wskutek wzrostu składowej promieniowej indukcji w uzwojeniu zewnętrznym przy zastosowaniu ekranów magnetycznych jest przy dużej odległości kadzi nieuzasadniona. Wynika to stąd, że przy stosunku a_k/a_r większym od wartości krytycznej [8] stan kadzi mało wpływa na rozpływ strumienia rozproszenia.

Straty w ekranach wykonanych z pakietów blachy transfosmatorowej są pomijalnie małe w porównaniu ze stratami w nieekranowanej ścianie kadzi (wskutek uwarstwienia i większej rezystywności blachy nakrzemionej [3]). W związku z tym można uważać, że liczba 307 kW praktycznie nie zawiera strat w kadzi. Pomierzone straty w kadzi wyznaczone w ten sposób wyniosą zatem:

$$P_{pom} = 398-307 = 91 \text{ kW}.$$

4) Można uważać, że otrzymany przy pomocy wzoru teoretycznego (40) wynik 92,2 kW w zadowalający sposób zgadza się zarówno z jednym (88 kW), jak i drugim (91 kW) wynikiem badań. Różnica obu wyników doświadczalnych leży w granicach możliwej do osiągnięcia dokładności pomiarów lub obliczeń.

Autor pragnie podziękować Kierownictwu Fabryki Transformatorów i Aparatury Trakcyjnej „Elta" w Łodzi za sfinansowanie kosztownych badań, Biuru Konstrukcyjnemu Zakładów Škoda w Pilznie — za udostępnienie danych wymiarowych transformatora 250 MVA oraz Kolegom drowi T. Janowskiemu, drowi K. Zakrzewskiemu i mgrowi S. Pietrzakowi za pomoc przy budowie modeli i przy pomiarach.

Politechnika Łódzka
Katedra Maszyn Elektrycznych i Transformatorów

WYKAZ LITERATURY

1. Turowski J.: Metody obliczania strat dodatkowych wywołanych polem rozproszenia w transformatorze. — Rozprawy Elektrotechn., 1962, z. 4, str. 563—599.
2. Klesa J., Kopeček J.: Některé problemy návrhu nádob velkých transformatorů. — Elektrot. Obzor, 1967, Nr. 2, str. 53—56.
3. Turowski J.: Straty i lokalne przegrzania wywołane strumieniami rozproszenia. — Politechnika Łódzka, „Elektryka", 1963, Nr 11, str. 89—179.
4. Turowski J.: Uogólniona metoda obliczania strat rozproszeniowych w stalowych częściach konstrukcyjnych. — Rozprawy Elektrotechn., 1968, z. 1, str. 179—196.
5. Turowski J.: Power Measurement at Very Low Power Factor or Low Voltage. — Proc. IEE, vol. 112, No 4, April 1965, str. 740—741 (zob. także „Przegląd Elektrotechniczny" Nr 4/1964 i Nr 6/1966).

6. Jezierski E., Turowski J.: Dependence of Stray Losses on Current and Temperature. CIGRE, Paris, Report 102, 1964.
7. Markwart J. G.: Elektromagnitnyje rasczoty transformatorow. Moskwa. ONTI, 1938, str. 91—136.
8. Turowski J.: Elektrodynamika techniczna. WNT, Warszawa 1968.
9. Bieriezowskij A.A., Krawczenko A.N., Niżnik A.P: Rasczot dobawocznych potier w bakie transformatora. — Elektriczestwo, 1966, No 9, str. 1—7.
10. Turowski J.: Eine Methode der maschinellen Berechnung der Wirbelstromverluste in massiven Eisenteilen. XI Internat. Wissenschaftliches Kolloquium der TH Ilmenau 1966. „Elektrische Maschinen", Teil I, str. 51—55.

J. TUROWSKI

FORMULA FOR THE CALCULATION OF STRAY LOSSES IN NONSHIELDED TANKS OF SINGLE-PHASE LARGE TRANSFORMERS

Summary

Formulas for stray losses in transformer tanks known from the literature are based on the assumption of constant permeability of steel or have an empirical character, with a very limited sphere of application.

In this paper on the basis of the experimentally verified formula (1) for losses in a steel wall, the formula for losses in tank walls of a single-phase transformer, taking into account the variation of steel permeability, has been derived. The derivation of formulas has been verified experimentally on simplified models during the development, and the final formula has been verified on the basis of the results of factory tests of a large single-phase transformer manufactured at the Škoda Works, Plzeň [2].

In papers [1] and [3], on the basis of Maxwell equations, author has derived the formula (1) for the calculation of power losses in an infinitely extensive solid steel plate placed in a field of two infinite parallel bus-bars (fig. 1). The basic formula (1) has been briefly described in Ref. [6]. It has been verified experimentally on a small model in papers [1] and [3]. Fig. 2 shows dimensions of a large model and the scheme of measurement with an electronic compensation wattmeter *4*, described in Ref. [5]. The comparison of the loss calculated on the basis of formula (1) with the one measured on the large model (continuous line) is given in Fig. 3. The empirical coefficient of the non-full mirror reflection η has an order of 0,8 to 0,7, depending on saturation. Sometimes this coefficient may decrease at strong fields to the amount of 0,6. The coefficient η will disappear during the further development of the formula.

In order to adapt the formula (1) for the calculating of stray losses in tanks of transformers, the following factors must be taken into account: a) influence of the presence of the core on the division of the air-gap stray flux between the core and tank, b) influence of the two-dimensional form (loop-form) of the lines of eddy currents in the real tank, c) variable distance of the winding to the tank due to the winding curvature, d) interference between the fields of adjacent legs, e) the curvature of the system.

These factors have been investigated and taken into account in items 3, 4, 5 and 6.

Losses in tank are caused not by the total air-gap stray flux $\hat{\Phi}_\delta$ (Fig. 4), but only by its part $\hat{\Phi}_k$, which closes through the tank wall. The air-gap δ' is, at the assumption $\delta \ll h$, the main reluctance in the way of the total stray flux $\hat{\Phi}_\delta$ and in the way of its components $\hat{\Phi}_k$ and $\hat{\Phi}_r$. Therefore, the fluxes mentioned above are proportional to the excitation current I. This applies also to the stray flux $\hat{\Phi}_z$ (Fig. 1), which is proportional to current I in the formula (1). If I is the real current, the losses in the solid steel plate in Fig. 4 may be calculated approximately with the application of formula (1), when instead of the real current I the reduced current I_k, recalculated according to (3) and (5), is substituted.

The experimental verification of the division of the air-gap flux $\hat{\Phi}_\delta$ (4) between model core and tank wall is given in Table 1. Coefficient k_p (4a) takes into account the shunt effect of the flux $\hat{\Phi}_k$ by the air layer c_k (Fig. 12). The relation of the fluxes $\hat{\Phi}_\delta/\hat{\Phi}_z$ in formula (5) has been calculated on the basis of equations (6), (8) and (9). Example 2 shows the results of the experimental verification of formula (9).

Formula (10) gives the stray-loss in one of two solid steel plates placed on both sides of infinitely long parallel bus-bars (Fig. 4).

Chapter 4 shows on a theoretical basis that the power loss in a two-dimensional system of eddy currents (Fig. 6) is approximately twice lower (Form. 32) than that in the single-dimensional system (Fig. 5), at equal excitation. Table 2 presents the results of an experimental verification of this conclusion.

In chapter 5 the formula (33) for the calculation of the power loss in circular parts *a-b-c* (Fig. 10) of the tank, with constant distance to winding, is given. Relation D/D_z takes into account the curvature of the winding.

In chapter 6 average distance of the windings from the tank wall (35) for the parts *c-d* (Fig. 10) of the tank circumference is given.

Formula (38) gives the total power loss in a tank. Owing to the fact that the second component of formula (38) is as much as 3 to 4 times greater than the first one, we shall not make any significant error if formula (38) is simplified, assuming that in large transformers $I_{k1} = 0{,}63\ I_k$. This assumption is based on examples 1), 2) and 3) under formula (39).

The final formula for power losses in the tank of a single-phase two-leg transformer is (40) or (40a) — for 50 Hz and conductivity $\gamma = 7 \cdot 10^6 \frac{S}{m}$, where I_k = reduced r.m.s. current of the winding recalculated according to formula (34) in A; γ = steel conductivity in S/m; linear dimensions — according to Fig. 12 in m; k_1 and k_2 = coefficients of the geometric proportion of windings (Fig. 11), calculated with the aid of an electronic digital computer ZAM-2Beta, Ref. [4].

The final formula has been finally verified on the basis of results published in paper [2], of plant tests (Table 3) of a single-phase transformer $\frac{250}{3}$ MVA, $\frac{242}{\sqrt{3}} / 13{,}8$ kV, manufactured at Škoda Works (Czechoslovakia).

After the substitution of the dimensions of that transformer, received from Škoda Works, into formula (40) it has been calculated that losses in a tank of this transformer amount to 92,2 kW. According to the experimental results given in Table 3, the factory measured losses in a tank amount to 398−310 = 88 kW or 398−307 = 91 kW. Both numbers confirm the result of the theoretical calculation on the basis of formula (40).

Because of an inevitable simplification during the derivation of formulas, particular attention was paid to the experimental verification of particular steps and partial formulas of the derivation. In spite of that, the final formula must be verified henceforth. The possible correction ought to concern coefficient k_p (4a) and calculated height $h_{śr}$ (Fig. 12).

The results of Table 3 also confirm the conclusion of book [8], that the determination of tank loss by the comparison of short-circuit losses measured with and without tank is possible, when the relation of distances a_k/a_r is greater than a certain critical number, which is of the order of 3 to 3,5 [8]. In the Škoda transformer mentioned above the relation a_k/a_r amounts to 5. That means, that in this case no essential alteration in the distribution of the stray flux will occur if the transformer is taken out of the tank.

J. TUROWSKI

LA FORMULE DES PERTES DE PUISSANCE DANS DES BACS SANS ÉCRANS DE GRANDS TRANSFORMATEURS UNIPHASÉS

Résumé

Connues de la littérature technique les formules peu nombreuses des pertes de puissance dans les bacs de grands transformateurs se basent sur une fondation acceptée de la perméabilité magnétique d'acier constante ou bien elles ont le caractère empirique et concernent une sphère d'utilisation très limitée.

On a déduit dans l'oeuvre, en s'appuyant sur la formule vérifiée expérimentalement (1) concernant les pertes dans une paroi d'acier, une formule des pertes dans les parois du bac de transformateur uniphasé

en considérant la perméabilité variable d'acier. Le calcul a été vérifié expérimentalement sur les modèles au cours de déduire la formule finale, qui a été vérifiée faisant une comparaison avec les résultats des éssais de fabrique d'un grand transformateur uniphasé construit par l'usine Škoda à Pilzen [2].

Dans des oeuvres [1] et [3] en partant des équations de Maxwell on a déduit la formule (1) des pertes de puissance dans une plaque d'acier vaste à l'infini, posée dans le champ des rails parallèles à longueur infinie (fig. 1). Cette formule a été aussi présenté en abrégé dans l'oeuvre [6]. La formule (1) a été vérifiée expérimentalement sur un petit modèle et les résultats sont publiés dans les oeuvres [1] et [3]. Sur la figure 2, par contre, on a présenté les dimensions d'un grand modèle et le schéma de mesure avec un wattmètre électronique compensateur *4*, décrit dans l'oeuvre [5]. La comparaison des pertes calculées à l'aide de la formule (1) avec des pertes mesurées sur un grand modèle (ligne continu) est présentée sur la figure 3. Le coefficient empirique de la réflection régulière partielle η est d'ordre 0,8 à 0,7 dépendant de la saturation Autrefois en cas des champs forts ce coefficient peut descendre même jusqu'à 0,6. Il va se réduire au cours des calculs suivants.

Afin que la formule initiale (1) pourrait trouver l'application au cours de calculer les pertes de dissipation dans les bacs des transformateurs il faut l'adapter à ce but en considérant: a) division du flux de dissipation de la fente entre le noyau et le bac, b) influence de la forme à deux dimensions (bouclée) des voies des courants de Foucault dans le bac réel du transformateur, c) distance variable du bac et des enroulements à cause de leur courbure, d) recouvrement des champs des enroulements des colonnes voisines, e) courbure du système. Les facteurs mentionnés ci-dessus ont été étudiés et considérés dans les chapitres suivants 3, 4, 5 et 6.

Les pertes dans le bac sont causées pas par le flux total de dissipation $\hat{\Phi}_\delta$ (fig. 4), mais seulement par sa partie $\hat{\Phi}_k$, qui se ferme par le bac. En acceptant $\delta \ll h$ la fente aérienne δ' constituée la reluctance principale sur la voie du flux total de dissipation $\hat{\Phi}_\delta$ des rails et de ses composantes $\hat{\Phi}_k$ et $\hat{\Phi}_r$. Ces flux sont en conséquence proportionnels au courant d'excitation I. Ceci concerne aussi le flux $\hat{\Phi}_z$ (fig. 1), qui est proportionnel au courant I se trouvant dans la formule (1). Si I c'est le courant réel, on peut calculer les pertes dans une plaque massive sur la figure 4 approximativement à l'aide de la formule (1), si au du lieu courant réel I on substituera le courant de calcul I_k, évalué dans la relation (3) et puis (5).

La vérification expérimentale de la distribution du flux de fente $\hat{\Phi}_\delta$ (4) entre les parois modélant le noyau et le bac est donnée sur le tableau 1. Le coefficient k_p (4a) prend en considération le shuntage de $\hat{\Phi}_k$ par une couche aérienne de largeur c_k (fig. 12). Le rapport des flux $\hat{\Phi}_\delta/\hat{\Phi}_z$ se trouvant dans la formule (5) a été calculé en se basant sur les équations (6), (8) et (9). Dans l'exemple 2 on a donné les résultats de la vérification expérimentale de la formule (9).

La formule (10) présente les pertes de puissance dans une des plaques massives d'acier posées de deux côtés des rails infinis parallèles (fig. 4).

Dans le point 4 on a prouvé sur la voie théorique, que les pertes de puissance dans le système à deux dimensions causées par la répartitions des courants de Foucault sur la surface (fig. 6) sont à peu près deux fois plus petites [formule (32)] que celles dans le système unidimensionnel (fig. 5) en cas des excitations égales. Sur le tableau 2 on a donnée les résultats de la vérification expérimentale de cette conclusion.

Dans le points 5 on a donné la formule (33) des pertes de puissance dans les parties arrondies du bac *a-b-c* — fig. 10 à une distance constante entre les enroulements et le bac, en considérant courbure des enroulements $\left(\text{le rapport } \frac{D}{D_z}\right)$.

Dans le point 6 on a calculé la distance moyenne des enroulements envers le bac (35) pour les parties *c-d* (fig. 10) de la circonférence du bac.

Les pertes totales dans le bac s'expriment par la formule (38). Ayant la seconde composante dans la formule (38) 3 à 4 fois plus petite que la prémière, on n'accomplira pas une faute valable si on réduira cette formule en acceptant en approximation, que dans les grands transformateurs $I_{k1} = 0{,}63\ I_k$. On l'a prouvé sur des exemples 1, 2 et 3 présentés au dessous de la formule (39).

La formule finale des pertes dans le bac du transformateur uniphasé à deux colonnes obtient la forme (40) ou (40a) — pour 50 Hz; ou I_k — le courant réduit d'un enroulement calculé d'après la formule (34) en ampères, z — nombre des tours de cet enroulement, f — la fréquence en Hz, γ — la conductivité d'acier

en S/m, dimensions linéaires — d'après la fig. 12, en mètres, k_1 et k_2 — coefficients des proportions géométriques des enroulements (fig. 11) calculés à l'aide d'une machine calculatrice digitale.

La formule finale a été vérifiée en s'appuyant sur les résultats des éssais expérimentaux (tableau 3) du transformateur uniphasé $\frac{250}{3}$ MVA $\frac{242}{\sqrt{3}} / 13{,}8$ kV construit par l'usine Škoda à Pilzen, publiés dans l'oeuvre [2].

Après la substitution dans la formule (40a) des dimensions de ce transformateur, obtenues grace à la collaboration avec le Bureau de constructions de l'usine Škoda, on a calculé, que les pertes dans le bac de ce transformateur constituent 92,2 kW. D'après les donnéses expérimentales de tableau 3 il résulte, que les pertes dans le bac, mesurées au laboratoire de fabrique, sont d'ordre 398−310 = 88 kW ou 398−307 = = 91 kW. Les nombres — le prémier et le second — confirment suffisamment le résultat obtenu à l'aide de la formule théorique (40).

Prenant en considération les simplifications indispensables au cours de déduire les formules dans l'oeuvre on a fait une attention singulière à la vérification expérimentale des étapes successifs ainsi que des formules intermédiaires. Malgré cela la formule finale doit etre encore vérifiée expérimentalement. Les corrections éventuelles doivent concerner avant tout le coefficient k_p (4a) et l'hauteur de calcul $h_{śr}$ (fig. 12).

Les données de tableau 3 confirment aussi la conclusion du livre [8], que la détermination des pertes dans le bac par comparaison aux pertes court-circuit mesurées ensemble avec le bac et sans le bac est possible, quand les rapport des distances a_k/a_r est plus grand qu'une certaine valeur critique, qui est d'ordre 3 à 3,5 [8]. Dans le transformateur en considération construit à l'usine Škoda le rapport a_k/a_r était à peu près 5. Ca veut dire, que dans ce transformateur l'extraction de la partie tirable du bac ne causera pas de changements signifiants de la distribution du flux de dissipation.

Я. ТУРОВСКИ

ФОРМУЛА ДЛЯ РАСЧЁТА ПОТЕРЬ МОЩНОСТИ В НЕЭКРАНИРОВАННЫХ БАКАХ МОЩНЫХ ОДНОФАЗНЫХ ТРАНСФОРМАТОРОВ

Р е з ю м е

Известные из литературы немногочисленные формулы для расчета потерь в баке трансформаторов основаны или на предположении постоянной магнитной проницаемости стали, или же имеют эмпирический характер, с очень ограниченной областью применения.

В работе, исходя из проверенной экспериментально формулы (1) для потерь мощности в бесконечно располагающейся стальной плите, была выведена формула потерь в стенках бака однофазного трансформатора с учетом переменной проницаемости стали. Расчеты проверялись экспериментально на моделях в течение вывода, а окончательная формула была проверена на основании заводских испытаний мощного однофазного трансформатора производства завода Шкода (Škoda) Пльзень [2].

В работе [1] и [3], исходя из уравнений Максвелла, была выведена формула (1) для потерь мощности в бесконечной стальной стене, помещенной в поле бесконечно длинных параллельных шин (рис. 1). Формула эта была также приведена в сообщении [6]. Формула (1) была проверена экспериментально на малой модели в работах [1] и [3]. На рис. 2 представлен эскиз большой модели и схема измерения с электронным компенсационным ваттметром *4* описанным в работе [5]. Сравнение потерь, рассчитанных применяя формулу (1), с потерями, измеренными на большой модели (сплошная линия) приведено на рис. 3. Эмпирический коэффициент неполного зеркального изображения η оказывается порядка 0,8 до 0,7, в зависимости от насыщения. Иногда, при сильных полях, может он сойти даже к значению 0,6. Коэффициент исчезает при дальнейших расчетах, в результате сокращения.

Чтобы исходная формула (1) могла найти применение при расчете потерь от рассеяния в баках трансформаторов следует приспособить ее к этой цели, учитывая: а) раздел зазорного потока

рассеяния между сердечником и баком, б) влияние двухмерной (петлевой) формы путей вихревых токов в действительном баке трансформатора, в) различное расстояние стенок бака от обмоток в результате кривизны обмоток, г) наложение полей обмоток соседних стержней, д) кривизну системы.

Факторы эти были исследованы и учтены в последующих пунктах 3, 4, 5 и 6.

Потери в баке вызываются не всем потоком рассеяния $\hat{\Phi}_\delta$ (рис. 4), но только его частью $\hat{\Phi}_k$, замыкающейся через бак. При положении $\delta \ll h$ воздушный зазор δ' является основным релюктансом на пути полного потока рассеяния $\hat{\Phi}_\delta$ шин и его составляющих $\hat{\Phi}_k$ и $\hat{\Phi}_r$. Потоки эти таким образом пропорциональны возбуждающему току I. Относится это также к потоку $\hat{\Phi}_z$ (рис. 1), который пропорционален току I выступающему в формуле (1). Итак, если I является действительным током, то потери в массивной стальной плите на рис. 4 можно приближенно рассчитывать с помощью формулы (1), если вместо действительного тока I вставим в нее расчетный ток I_k, пересчитанный в соотношении (3) и затем (5).

Экспериментальная проверка распределения потока рассеяния $\hat{\Phi}_\delta$ (4) между стенками моделирующими сердечник и бак дана в таблице 1. Коэффициент k_p (4a) учитывает шунтирование потока $\hat{\Phi}_k$ слоем воздуха шириною c_k (рис. 12). Отношение потоков $\hat{\Phi}_\delta/\hat{\Phi}_z$ выступающее в формуле (5) было рассчитано на основании уравнений (6), (8) и (9). В примере 2 приведены результаты экспериментальной проверки формулы (9).

Формула (10) представляет потери мощности в одной из массивных стальных стен расположенных с обеих сторон бесконечных параллельных шин (рис. 4).

В пункте 4 теоретическим путем было показано, что потери мощности в двухмерной системе распределения вихревых токов на поверхности (рис. 6) около в 2 раза меньше (формула 32) потерь в одномерной системе (рис. 5), при таком же возбуждении. В таблице 2 даны результаты экспериментальной проверки этого вывода.

В пункте 5 дана формула (33) для потерь мощности в закругленных частях бака $a-b-c$ — рис. 10, с постоянным расстоянием обмоток от поверхности бака, с учетом кривизны обмоток $\left(\text{соотношение } \frac{D}{D_z}\right)$.

В пункте 6 было расчитано среднее расстояние обмоток от бака (35) для частей c—d (рис. 10) периметра бака.

Общие потери в баке выражаются формулой (38). Так как второй член в формуле (38) 3 до 4 раза меньше первого, не будет большой ошибки если упростит эту формулу принимая приближенно, что в мощных трансформаторах $I_{k1} = 0{,}63\ I_k$. Обоснование этого положения дано в примерах 1), 2), и 3) ниже формулы (39).

Окончательная формула потерь в баке однофазного, двухстержневого трансформатора имеет вид (40) или (40a) — для 50 Hz и удельной проводимости стали $\gamma = 7 \cdot 10^6 \frac{\text{сименс}}{\text{м}}$. В этих формулах J_k — приведенный ток одной обмотки рассчитанный по формуле (34) в амперах; z — количество витков этой обмотки; f — частота в герцах; γ — удельная проводимость стали в $\frac{\text{сим}}{\text{м}}$; линейные размеры — согласно рис. 12 в метрах; k_1 и k_2 — коэффициенты геометрических пропорций обмоток (рис. 11) расчитанные с помощью электронной вычислительной машины дискретного действия типа ZAM-2 Beta.

Окончательная формула была проверена на основании опубликованных в статье [2] результатов экспериментальных исследований (табл. 3) однофазного трансформатора мощностью $\frac{250}{3}$ мгва, $\frac{242}{\sqrt{3}} \Big/ 13{,}8$ кв производства завода Шкода (Škoda) Пльзень (Ч.С.С.Р.).

После подстановки в формулу (40a) размеров этого трансформатора, полученных от конструкционного бюро завода Шкода, было рассчитано, что потери в баке этого трансформатора составляют

92,2 квт. По экспериментальным данным из таблицы 3 получается, что измеренные в заводской лаборатории потери в баке составляют мощность порядка 398 − 310 = 88 квт или 398 − 307 = 91 квт. Так одним, как и другим значением потерь хорошо подтверждается результат полученный с помощью теоретической формулы (40).

Ввиду неизбежных упрощений во время вывода, в статье было обращено особое внимание на экспериментальную проверку последовательных этапов и формул вывода. Несмотря на это окончательную формулу следует проверять и в дальнейшем. Возможные поправки должны относиться в первой степени к коэффициенту k_p (4a) и расчетной высоте $h_{śr}$ (рис. 12).

Данные из таблицы 3 подтверждают также вывод из кничи [8], что определение потерь в баке путём сравнения потерь короткого замыкания, измеренных с баком и без бака, возможно, если соотношение расстояний a_k/a_r больше некоторого критического значения порядка 3 до 3,5 [8]. В рассматриваемом трансформаторе фирмы Шкода это соотношение составляет $a_k/a_r = 5$. Это обозначает, что в данном случае выемка из бака выемочной части трансформатора не вызовет существенных изменений в распределении потока рассеяния.

621.3.015.38

ZDOBYSŁAW FLISOWSKI

Obliczanie przepięć atmosferycznych w liniach energetycznych na podstawie antenowej teorii fal

Rękopis dostarczono 5. 1. 1968

W pracy podano matematyczne podstawy oraz zasadę stosowania antenowej teorii fal do obliczania przepięć atmosferycznych w wysokonapięciowych liniach energoelektrycznych. Przedstawiono i poddano analizie metody obliczeniowe oparte na tej teorii. W analizie zwrócono szczególną uwagę na znaczenie kompensacji składowej stycznej natężenia pola elektrycznego na powierzchniach przewodzących oraz poddano ocenie wartość praktyczną omawianych metod.

1. WSTĘP

Doświadczenia eksploatacyjne, sięgające połowy lat pięćdziesiątych wykazały [4], [10], [11], że problem ochrony odgromowej linii energoelektrycznych, a więc i związanych z ochroną obliczeń odporności burzowej tych linii nie jest jeszcze definitywnie rozwiązany. Stwierdzono bowiem w Ameryce, że linie najwyższych napięć (345 kV), o wysokich słupach, wykazują znacznie większą liczbę wyłączeń na 100 mil na rok, niżby to wynikało z obliczeń.

Roczna liczba wyłączeń linii jest proporcjonalna do odsetka piorunów trafiających w linię i przekraczających wartość graniczną prądu, powyżej której występują na izolacji linii napięcia wystarczające do wywołania przeskoków iskrowych. Jeżeli przy tym piorun uderza w słup lub w przewód odgromowy, co ma miejsce w przeważającej części przypadków, to na elementach tych jest znacznie wyższe napięcie niż na przewodzie roboczym. W tych warunkach przeskok następuje od słupa (elektrody uziemionej) do przewodu roboczego (elektrody wysokonapięciowej) i nosi nazwę przeskoku odwrotnego [12]. Istnieje więc oczywista zależność między roczną liczbą wyłączeń a wartością napięcia przeskoku odwrotnego. Dlatego też podejmując próbę wyjaśnienia przyczyn stwierdzonych w amerykańskich liniach anomalii zwrócono między innymi uwagę na to [1], [4], że dotychczasowe obliczenia napięć przeskoku odwrotnego mogły być oparte na nieprawidłowych założeniach. Przystąpiono więc do rewizji podstaw obliczania przepięć atmosferycznych. W tym zakresie pionierską rolę odegrali R. Lundholm [6], [8] i C. F. Wagner [13], [14]. Ich główna idea polegała na zastosowaniu do obliczeń antenowej teorii fal [8] i oszacowaniu na jej podstawie napięć wywołanych na izolacji linii przez fale w kanale piorunu oraz fale wymuszone w układzie linii, przy bezpośrednim uderzeniu piorunu w wierzchołek słupa. Zwrócono bowiem uwagę na fakt, że klasyczna teoria fal wędrownych nie może być ekstrapolowana dla przypadków, w których jej podstawowe założenia odnośnie do przestrzennej struktury pola nie są spełnione, i traci sens konwencjonalne pojęcie oporu falowego. Taki właśnie przypadek ma miejsce przy uderzeniu piorunu w pionowy słup [4], [7].

Niezależnie od tego, w jakim stopniu to podejście pozwoli ostatecznie wyjaśnić stwierdzone nieprawidłowości ochrony, otwiera ono nowe możliwości, a zastosowanie teorii antenowej fal do obliczania przepięć atmosferycznych należy uznać za pewnego rodzaju nowość w elektrotechnice. Dzięki niej rozszerzyły się możliwości dokonywania analizy skomplikowanych zjawisk zachodzących w linii przy wyładowaniach piorunowych oraz powstały nowe metody obliczeniowe [2], [7], [9], [15], [16]. Na uwagę zasługuje tu przede wszystkim metoda napięcia obiegowego [8], [9], która łącznie z metodą średnich potencjałów [16] zwana jest „uproszczoną metodą Wagnera" [16]. Również bardzo interesująca jest metoda kasowania pola [15], która daje duże usługi przy analizowaniu zjawisk towarzyszących wyładowaniom piorunowym oraz — według poglądów jej twórcy — pozwala na trafną ocenę przepięć atmosferycznych. Jeszcze inna metoda, nazwana metodą prądów kompensujących [2] jest przydatna do analizy zjawiska kompensacji składowej stycznej natężenia pola elektrycznego.

Metody te pozwalają wyznaczyć przepięcia atmosferyczne bez konieczności określania wartości oporów falowych słupa i przewodów linii. Przeciwnie, opory falowe mogą być wyznaczone w wyniku zastosowania tych metod. Ponadto okazuje się, że klasyczna teoria fal może być uważana za szczególny przypadek antenowej teorii fal.

To interesujące i bardzo ważne dla rozwoju linii najwyższych napięć podejście do zagadnienia przepięć atmosferycznych, omawiane w literaturze światowej, wymaga dalszych badań i jak dotychczas zbyt mało miejsca zajmuje w polskiej literaturze technicznej [4], [5]. Z tego względu podjęcie tego tematu jest jak najbardziej uzasadnione. Dokonywana w niniejszej pracy analiza istniejących metod obliczeniowych wydaje się być najwłaściwszą drogą do dalszego rozwoju tych interesujących metod.

2. MATEMATYCZNE PODSTAWY I ZASADA STOSOWANIA ANTENOWEJ TEORII FAL

Elementem wyjściowym do rozważań jest koncepcja prostokątnej fali ładunku i prądu, poruszającej się wzdłuż przewodu o pomijalnej grubości. Fala ta, nazwana w dalszym ciągu falą wymuszającą jest źródłem zaburzenia elektromagnetycznego, które dociera do punktów otaczającej przestrzeni z różnym opóźnieniem, stosownie do odległości rozpatrywanego punktu przestrzeni od elementu przewodu. Ujęcie ilościowe wpływu fali wymuszającej winno więc opierać się na potencjałach opóźnionych skalarnym V i wektorowym A. W dowolnym punkcie P odległym o a od elementu przewodu dx_1 (rys. 1) natężenie pola elektrycznego wynosi:

$$E = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial A}{\partial t}. \tag{1}$$

Wzory na opóźnione potencjały (skalarny i wektorowy), przy uwzględnieniu oznaczeń z rys. 1 mają postać:

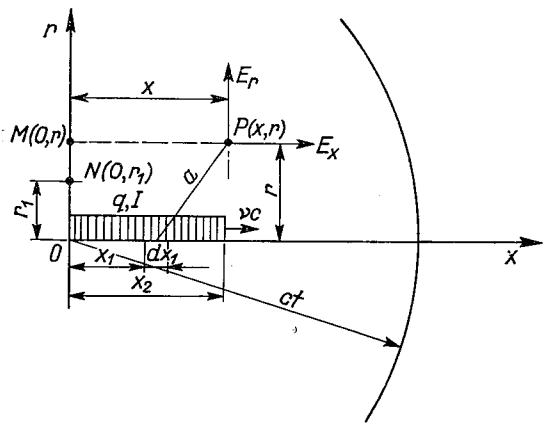
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{q\left[x_1;\left(t-\frac{a}{c}\right)\right]}{a}\,dx_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{x_2} \frac{dx_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+r^2}}, \tag{2}$$

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\left[x_1;\left(t-\frac{a}{c}\right)\right]}{a}dx_1 = \frac{I\mu_0}{4\pi}\int_0^{x_2}\frac{dx_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+r^2}}, \tag{3}$$

przy czym zachodzi zależność:

$$t-\frac{x_2}{v_c} = \frac{\sqrt{(x-x_2)^2+r^2}}{c}. \tag{4}$$

We wzorach tych q oznacza liniową gęstość ładunku, a I — natężenie prądu. Prąd I jest wektorem, gdyż zastępuje tu gęstość prądu, która jest wektorem. Wartość q oraz $I = vcq$ odpowiadają odcinkowi przewodu dx_1 i występują nie w rozważanej chwili t, lecz w chwili



Rys. 1. Wymuszająca fala ładunku i prądu

wcześniejszej $t-\frac{a}{c}$. W ten sposób uwzględnione jest opóźnienie w dojściu fali elektromagnetycznej od elementu dx_1 do rozważanego punktu. Symbol c oznacza prędkość fali w próżni ($c = 300$ m/μs), a v jest współczynnikiem liczbowym ($v \leqslant 1$), który wskazuje, ile razy prędkość fali wymuszającej jest mniejsza od prędkości c.

Jeżeli przyjąć, że w chwili $t = 0$ fala wymuszająca startuje w punkcie 0 (rys. 1), to w dowolnej chwili $t > 0$ zaburzenie elektromagnetyczne dociera do punktów położonych w obrębie kuli o promieniu ct i o środku w punkcie 0. Kulę tę nazwiemy strefą oddziaływania fali wymuszającej. W punktach położonych poza strefą oddziaływania wielkości V, A i E mają wartości równe zeru. W chwili dotarcia do tych punktów zaburzenia, wielkości V, A i E przyjmują skokowo wartości wynikające ze wzorów (1), (2) i (3), a następny ich przebieg zależy od czasu w sposób ciągły.

Wyrażając długość w metrach, czas w sekundach, a prąd w amperach oraz uwzględniając, że

$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} \quad \text{i} \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$$

otrzymujemy zależności

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{30I}{\nu}, \qquad \frac{I\mu_0}{4\pi} = \frac{30I}{c}, \tag{5}$$

przy których potencjały wyrażone będą odpowiednio w woltach i weberach na metr, a natężenie pola elektrycznego w woltach na metr.

Po dokonaniu całkowania we wzorach (2) i (3) z uwzględnieniem zależności (4) i (5) otrzymujemy wyrażenia na potencjały V i A w punkcie $P(x, r)$ w funkcji czasu:

$$V = \frac{30I}{\nu}\left[\operatorname{arsh}\frac{x}{r} + \operatorname{arsh}\frac{\nu ct - x}{r\sqrt{1-\nu^2}} + \ln\sqrt{\frac{1-\nu}{1+\nu}}\right], \tag{6}$$

$$A = \frac{30I}{c}\left[\operatorname{arsh}\frac{x}{r} + \operatorname{arsh}\frac{\nu ct - x}{r\sqrt{1-\nu^2}} + \ln\sqrt{\frac{1-\nu}{1+\nu}}\right]. \tag{7}$$

Natężenie pola elektrycznego (1) jako pochodna potencjałów opóźnionych w wybranym kierunku ma następujące składowe:

składową osiową w kierunku drogi fali wymuszającej

$$E_x = E_{ex} + E_{mx} = -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial t} \tag{8}$$

oraz składową promieniową w kierunku prostopadłym do drogi fali wymuszającej

$$E_r = E_{er} = -\frac{\partial V}{\partial r}. \tag{9}$$

Pochodna $-\frac{\partial A}{\partial t} = E_{mx}$ ma zawsze kierunek zgodny z kierunkiem przepływu prądu i uwzględniamy ją tylko przy obliczaniu składowej osiowej. Dla ułatwienia rozważań nazwiemy ją składową magnetyczną w odróżnieniu od składowych $E_{ex} = -\frac{\partial V}{\partial x}$ i $E_{er} = -\frac{\partial V}{\partial r}$, związanych z opóźnionym potencjałem skalarnym, które nazywać będziemy składowymi elektrycznymi.

Ze wzorów (6) i (7) zgodnie z zależnościami (8) i (9) otrzymujemy:

$$E_{ex} = \frac{30I}{\nu}\left[-\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}} + \frac{1}{\sqrt{(\nu ct-x)^2 + r^2(1-\nu^2)}}\right], \tag{10}$$

$$E_{mx} = -\frac{30I}{\nu}\,\frac{\nu^2}{\sqrt{(\nu ct-x)^2 + r^2(1-\nu^2)}} \tag{11}$$

oraz

$$E_x = \frac{30I}{\nu}\left[-\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}} + \frac{1-\nu^2}{\sqrt{(\nu ct-x)^2 + r^2(1-\nu^2)}}\right], \tag{12}$$

$$E_r = \frac{30I}{\nu \cdot r}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}} + \frac{\nu ct - x}{\sqrt{(\nu ct-x)^2 + r^2(1-\nu^2)}}\right]. \tag{13}$$

W szczególnym przypadku, kiedy prędkość fali wymuszającej jest równa prędkości fali elektromagnetycznej ($v = 1$), wzory te upraszczają się do postaci:

$$E_{ex} = 30I\left[-\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}}+\frac{1}{ct-x}\right], \tag{14}$$

$$E_{mx} = -30I\frac{1}{ct-x}, \tag{15}$$

$$E_x = -30I\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}}, \tag{16}$$

$$E_r = \frac{30I}{r}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}+1\right]. \tag{17}$$

Na rys. 2 wykreślono krzywe rozkładu natężenia pola elektrycznego w otoczeniu przewodu wzdłuż jego osi w odległości $r = 1$ m, przy założeniu jednostkowej wartości prądu $I = 1$ A dla dwu przypadków $v = 0{,}3$ [rys. a) i b)] oraz $v = 1$ [rys. c) i d)]. Składowe elektryczne E_{ex} (rys. 2a i 2c) i $E_{er} = E_r$ (rys. 2b i 2d) przedstawiono w postaci dwu komponent. Komponenty E'_{ex} i E'_r mają charakter fal stojących o wartościach niezmiennych w czasie, a komponenty E''_{ex} i E''_r mają charakter fal biegnących z czołem fali wymuszającej. Składowa magnetyczna E_{mx} ma również charakter fali biegnącej z czołem fali prądu. Ma ona kształt zbliżony do kształtu komponenty E''_{ex}, ale różni się od niej wartością i znakiem. Jeżeli prędkość fali wymuszającej jest mniejsza od prędkości fali elektromagnetycznej, to wartość składowej E_{mx} jest mniejsza niż wartość komponenty E''_{ex}. Przy prędkościach równych ($v = 1$), wartości ich są równe i chociaż przy czole fali wymuszającej wypadają nieskończenie duże, znoszą się. Pozostaje tylko komponenta E'_{ex}, co oznacza, że wypadkowa składowa osiowa $E_x = E'_{ex}$ (rys. 2c) ma charakter fali stojącej.

Obecność pola elektromagnetycznego w otoczeniu przewodu powoduje zmienne w czasie napięcie między dwoma punktami, takimi jak $P(x, r)$ i $N(0, r_1)$ na rysunku 1. W polu potencjalnym ładunków mamy:

$$U_{ePN} = -\int_0^x E_{ex}\,dx - \int_{r_1}^r E_{er}\,dr \tag{18}$$

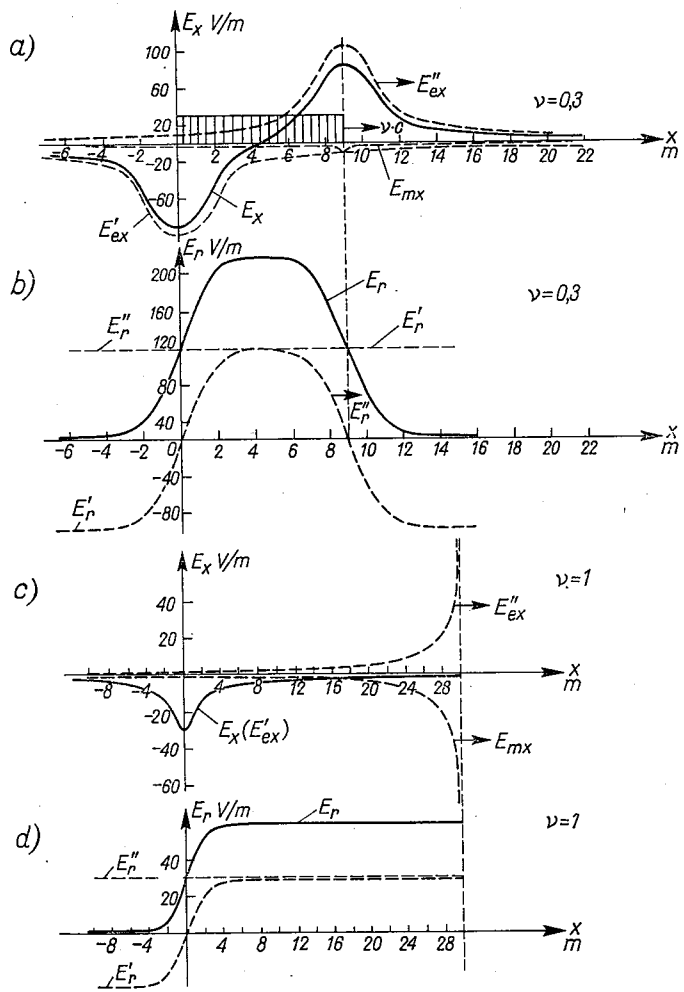
lub bezpośrednio z różnicy potencjałów skalarnych (6):

$$U_{ePN} = \frac{30I}{v}\left[\operatorname{arsh}\frac{x}{r}+\operatorname{arsh}\frac{vct-x}{r\sqrt{1-v^2}}-\operatorname{arsh}\frac{vct}{r_1\sqrt{1-v^2}}\right]. \tag{19}$$

W polu wirowym napięcie nie jest jednoznaczne, gdyż zależy od umownej drogi całkowania składowej magnetycznej natężenia pola. Wieloznaczność tę można w znacznym stopniu ograniczyć przez przyjęcie wyraźnej umowy odnośnie do wyboru drogi całkowania. W zasadzie całkowania należałoby dokonać wzdłuż drogi zamkniętej, łączącej w danym przypadku punkty N i P (rys. 1) z jednej strony poprzez strefę oddziaływania fali wymuszającej, z drugiej zaś w sposób możliwie najkrótszy, tj. wzdłuż odcinka odpowiadającego uproszczonej drodze przeskoku. Jednakże całka na drodze łączącej punkty N i P wzdłuż odcinków prostopadłych do toru fali prądowej a następnie wzdłuż strefy oddziaływania jest równa zeru, ponieważ składowa magnetyczna na tej drodze jest równa zeru. Oznacza to jedno-

cześnie, że całka na odcinku NM jest równa zeru. Dlatego też przy przejściu od punktu P do N najkrótszą drogę całkowania — odpowiadającą uproszczonej drodze przeskoku — stanowi odcinek MP. Jedynie na tym odcinku całka składowej magnetycznej nie równa się zeru i daje napięcie U_{mPN} wyrażone wzorem:

$$U_{mPN} = -\int_0^x E_{mx}\,dx = 30Iv\left[\operatorname{arsh}\frac{vct}{r\sqrt{1-v^2}} - \operatorname{arsh}\frac{vct-x}{r\sqrt{1-v^2}}\right]. \tag{20}$$



Rys. 2. Krzywe rozkładu składowych natężenia pola elektrycznego $I = 1$ A, $r = 1$ m i $t = 0{,}1$ μs

Napięcie całkowite U_{PN} między punktami P i N jest równe sumie napięć określonych wzorami (19) i (20)

$$U_{PN} = \frac{30I}{v}\left[\operatorname{arsh}\frac{x}{r} + (1-v^2)\operatorname{arsh}\frac{vct-x}{r\sqrt{1-v^2}} - \operatorname{arsh}\frac{vct}{r_1\sqrt{1-v^2}} + v^2\operatorname{arsh}\frac{vct}{r\sqrt{1-v^2}}\right]. \tag{21}$$

Przy prędkości fali wymuszającej równej prędkości światła wzór ten upraszcza się do postaci

$$U_{PN} = 30I\left[\operatorname{arsh}\frac{x}{r} - \ln\frac{r}{r_1}\right]. \tag{22}$$

Zastosowanie wzorów od (10) do (22) do wyznaczenia napięcia na izolacji linii przesyłowej w czasie wyładowania piorunowego wymaga przyjęcia pewnych założeń, dotyczących nie tylko mechanizmu wyładowania, ale również geometrycznych i fizycznych własności układu.

Zakłada się mianowicie, że w chwili uderzenia piorunu w wierzchołek słupa, kiedy wyładowanie wstępne przechodzi w wielkoprądowe wyładowanie główne, w wierzchołku zjawiają się dwie fale wymuszające. Jedna, w 90% przypadków dodatnia, biegnie w górę kanału z prędkością v razy mniejszą od prędkości fali elektromagnetycznej. Druga, przeciwnej biegunowości, wchodzi do układu słup-przewód odgromowy i dzieli się odpowiednio między jego elementy, po których biegnie z prędkością c równą prędkości fali elektromagnetycznej w próżni. Słup i przewody linii traktowane są jako walcowe powierzchnie doskonale przewodzące, o promieniach wynikających z ich przekroju poprzecznego. Oś kanału usytuowana jest na przedłużeniu osi słupa. Ziemia traktowana jest jako pozioma płaska powierzchnia, również o doskonałej przewodności, tak że jej obecność uwzględniana jest przez stosowanie metody lustrzanego odbicia. Obliczenia wykonuje się dla fal o kształcie prostokątnym. Uzyskane tak wyniki można przeliczyć dla fal o innym kształcie, za pomocą całki Duhamela.

Z przyjętych założeń wynika, że w rozważaniach należy uwzględnić superpozycję wpływów kilku fal wymuszających. Każda z nich może być traktowana jako niezależne źródło pola elektromagnetycznego, które oddziałuje na wszystkie elementy układu rzeczywistej linii przesyłowej. Nasuwa się przy tym pytanie, czy do ujęcia wpływu poszczególnych fal wymuszających, działających w układzie przewodów rzeczywistych, mogą być stosowane zależności antenowej teorii fal wyprowadzone dla przewodów o pomijalnej grubości. Otóż istotą dopuszczalności stosowania w tym przypadku tych zależności jest znany z elektrostatyki fakt, że pole elektryczne dla układu walcowego o ładunku rozmieszczonym równomiernie wzdłuż jego osi ma — na zewnątrz walca i na jego powierzchni — taki sam kształt jak pole elektryczne ładunku rozmieszczonego równomiernie na powierzchni walca. Na tej zasadzie równomiernie rozmieszczony na powierzchni rzeczywistego przewodu ładunek prostokątnej fali wymuszającej zastępuje się — do celów obliczeniowych — równoważnym ładunkiem równomiernie rozłożonym wzdłuż osi przewodu. Następnie wyznacza się natężenie pola elektrycznego w otoczeniu przewodu i ustala warunki brzegowe na jego powierzchni. Składowe styczne natężenia pola wzdłuż walcowych powierzchni przewodów rzeczywistych muszą zniknąć, gdyż powierzchnie te uważa się w pierwszym przybliżeniu za idealnie przewodzące ($\gamma = \infty$). Oznacza to, że wprowadzone na oś przewodu fale ładunku i prądu nie mogą utrzymać swego początkowego kształtu, a nowy kształt uzależniony jest w każdej chwili od brzegowego warunku na powierzchni przewodu. Wyznaczenie tego kształtu jest niezmiernie trudne. Opanowanie tych trudności ułatwia założenie niezmiennego kształtu fali wymuszającej i wprowadzenie do rozważań pojęcia ładunków i prądów kompensujących, które stanowiąc dodatkowe źródło pola elektrycznego

umożliwiają spełnienie warunku brzegowego $E_x = 0$ na powierzchni przewodu. W ten sposób, oprócz wymuszonej składowej stycznej E_x, na powierzchni przewodu zjawia się dodatkowa składowa kasująca E_k, która w każdej chwili i w każdym punkcie powierzchni w obrębie strefy oddziaływania jest równa składowej E_x, lecz ma przeciwny znak, tak że

$$E_x + E_k = 0. \tag{23}$$

Warunek ten łącznie z założeniem skupienia drogi prądu wzdłuż osi przewodu stanowi istotną cechę stosowania teorii antenowej fal do obliczania przepięć atmosferycznych w liniach przesyłowych. Jest on podstawą wszystkich metod obliczeniowych, niezależnie od tego, czy mechanizm kompensacji składowej stycznej E_x analizowany jest bardziej szczegółowo (metoda kasowania pola), czy też zastosowanie tego warunku następuje bez wnikania w mechanizm kompensacji (metoda napięcia obiegowego).

3. METODY OBLICZENIOWE OPARTE NA ANTENOWEJ TEORII FAL

W podanej przez R. Lundholma metodzie napięcia obiegowego [7÷9] napięcie na izolacji linii wyznacza się z całki natężenia pola elektrycznego na odpowiednio wybranej drodze zamkniętej. Całka całkowitego natężenia pola na drodze zamkniętej jest równa całce składowej magnetycznej, gdyż całka składowej elektrycznej na tej drodze jest równa zeru. Mamy więc:

$$\oint_l E_l dl = \oint_l E_{el} dl + \oint_l E_{ml} dl = \oint_l E_{ml} dl \tag{24}$$

wobec

$$\oint_l E_{el} dl = 0.$$

Taką typową drogę, zamkniętą w danym przypadku, stanowi pętla *a—b—c—d—e′—f—a* przedstawiona na rys. 3 i utworzona przez przewód odgromowy i roboczy, granicę strefy oddziaływania fal wymuszających, górną część słupa z poprzeczką i wreszcie przez łańcuch izolatorów. Z punktu widzenia obliczeń napięcia na izolacji linii równoważna jej, a przy tym bardziej prosta jest pętla *a—b—c—d—e—a*, gdyż można wykazać[1]), że napięcie na przerwie izolacyjnej *d—e′* jest równe napięciu na odcinku *d—e*

$$U_{de'} = U_{de}.$$

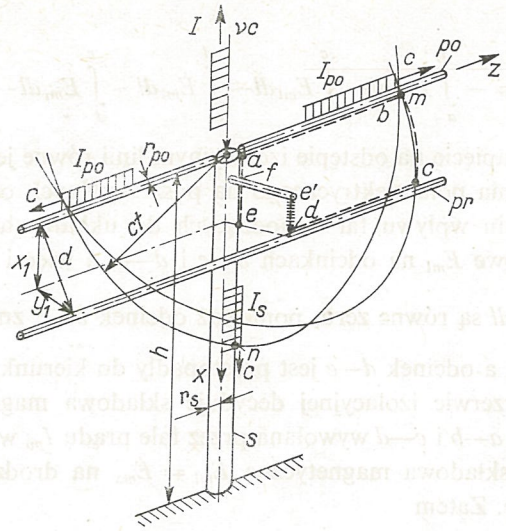
---

[1]) Wynika to z następującego rozumowania w odniesieniu do zamkniętej drogi *d—e—f—e′—d* z rys. 3. Napięcie U_{df} można otrzymać przez całkowanie składowych natężenia pola albo wzdłuż drogi *d—e—f*, albo wzdłuż drogi *d—e′—f*.

Mamy więc zależność

$$U_{d-e'-f} = U_{d-e-f} - \oint_{d-e-f-e'-d} E_{ml} dl,$$

w której składowa E_{ml} wywołana falą prądu w słupie istnieje tylko na odcinku *d—e′* i *e—f*. Należy zauważyć, że przy prędkości fali równej prędkości światła ($v = 1$) składowa E_{ml} w określonej chwili zależy tylko od współrzędnej x [zob. wzór (15)]. Oznacza to, że $E_{m(fe)} = E_{m(e'd)}$ i całka



Rys. 3. Układ obliczeniowy — metoda napięcia obiegowego

Równanie (24) w odniesieniu do tej drugiej pętli można napisać w postaci

$$\oint_l E_l dl = \int_{l_1} E_l dl + \int_d^e E_l dl = \oint_l E_{ml} dl,$$

przy czym l oznacza zamkniętą drogę całej pętli, a l_1 — jej część e—a—b—c—d.

Całka całkowitego natężenia pola $\int_{l_1} E_l dl$ jest równa zeru, gdyż na poszczególnych odcinkach jej drogi całkowania l_1 nie istnieje składowa styczna natężenia pola elektrycznego. Mianowicie odcinek b—c leży poza strefą oddziaływania fali wymuszającej, gdzie natężenie pola nie istnieje, a pozostałe odcinki e—a, a—b i c—d biegną wzdłuż powierzchni doskonałego przewodnika i w myśl warunku (23) składowa styczna E_l jest równa zeru; pole elektryczne jest prostopadłe do powierzchni przewodnika. Nie jest natomiast równa zeru całka $\int_d^e E_l dl$, która przedstawia poszukiwane napięcie na izolacji linii. Tak więc otrzymujemy zależność

$$\oint_l E_l dl = \int_d^e E_l dl = -U_{de} = -U_{iz} = \oint_l E_{ml} dl$$

$$-\oint_{d-e-f-e'-d} E_{ml}\, dl = -\int_{x_f=x_{e'}}^{x_e=x_d} [E_{m(fe)} dx - E_{m(e'd)}\, dx] = 0.$$

W wyniku tego otrzymujemy

$$U_{d-e'-f} = U_{d-e-f}.$$

Odcinki f—e i f—e' są z założenia doskonale przewodzące. Powoduje to skompensowanie składowej stycznej wzdłuż tych odcinków, tak że napięcie $U_{fe} = U_{fe'} = 0$, a zatem napięcie

$$U_{de'} = U_{de}.$$

lub w postaci

$$U_{iz} = -\int_a^b E_{ml}dl - \int_b^c E_{ml}dl - \int_c^d E_{ml}dl - \int_d^e E_{ml}dl - \int_e^a E_{ml}dl,$$

z której wynika, że napięcie na odstępie izolacyjnym linii równe jest sumie całek składowej magnetycznej natężenia pola elektrycznego na poszczególnych odcinkach całej pętli.

Przy uwzględnieniu wpływu fal wchodzących do układu słup-przewód odgromowy, jak na rys. 3, składowe E_{ml} na odcinkach b—c i d—e, a więc i odpowiadające im całki $-\int_b^c E_{ml}dl$ i $-\int_d^e E_{ml}dl$ są równe zeru, ponieważ odcinek b—c znajduje się poza granicą strefy oddziaływania, a odcinek d—e jest prostopadły do kierunku fal prądowych. O wartości napięcia na przerwie izolacyjnej decyduje składowa magnetyczna natężenia pola $E_{ml} = E_{mz}$ na drodze a—b i c—d wywołana przez fale prądu I_{po} w obu gałęziach przewodu odgromowego oraz składowa magnetyczna $E_{ml} = E_{mx}$ na drodze e—a wywołana przez falę prądu I_s w słupie. Zatem

$$U_{iz} = -\int_a^b E_{mz}dz - \int_c^d E_{mz}dz - \int_e^a E_{mx}dx. \tag{25}$$

Występujące w równaniu tym składowe E_{mz} i E_{mx} określone są wzorem (15), w którym należy uwzględnić odpowiednio prądy I_s i I_{po}. Granice całkowania wynikają z oznaczeń na rys. 3. Po dokonaniu przekształceń otrzymujemy następującą postać wzoru:

lub

$$\left.\begin{aligned} U_{iz} &= Z'_{po}I_{po} - \Delta Z'_s I_s - Z'_{po-pr}I_{po} \\ U_{iz} &= Z'_s I_s - \Delta Z'_s I_s - Z'_{po-pr}I_{po}, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

gdzie:

$$\left.\begin{aligned} Z'_s &= 60\ln\sqrt{2}\frac{ct}{r_s}, \\ Z'_{po} &= 60\ln\frac{ct}{r_{po}}, \\ Z'_{po-pr} &= 60\ln\frac{ct}{d}, \\ \Delta Z'_s &= 30\ln\frac{ct}{ct-x_1}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Należy zwrócić uwagę na fakt, że zależności te są analogiczne do zależności występującej w klasycznej teorii fal. Prowadzi to do wniosku, że teorię klasyczną można traktować jako przybliżenie teorii antenowej. Wprowadzone tu wielkości takie, jak Z'_s i Z'_{po}, określające zależność napięć od prądów, odpowiadają formalnie oporom falowym słupa i przewodu odgromowego według klasycznej teorii fal. Jest znamienne, że w ujęciu tym opory falowe są funkcjami czasu i jeżeli przyjąć za t chwilę $\frac{2h}{c}$, to wzór na Z'_{po} staje się identyczny ze wzorem klasycznej teorii fal, natomiast wzór na opór falowy słupa Z'_s jest wzorem nowym.

We wzorach (26) prądy I_s i I_{po} nie są znane. Można je wyznaczyć w zależności od wchodzącego do układu w wierzchołku słupa prądu I, znanego z założenia. Mianowicie w wierzchołku słupa następuje taki podział prądu I na prądy I_s i I_{po}, że wywołane tymi prądami napięcie w pętli $a—m—n—a$ (rys. 3), nie posiadającej przerwy izolacyjnej, będzie równe zeru. Stąd układ równań:

$$\int_n^m E_{mz}\,dz + \int_n^a E_{mx}\,dx = 0,$$

$$I = I_s + 2I_{po}, \tag{28}$$

którego rozwiązaniem jest

$$I_{po} = \frac{Z_s'}{Z_{po}' + 2Z_s'} I,$$

$$I_s = I - 2I_{po}. \tag{29}$$

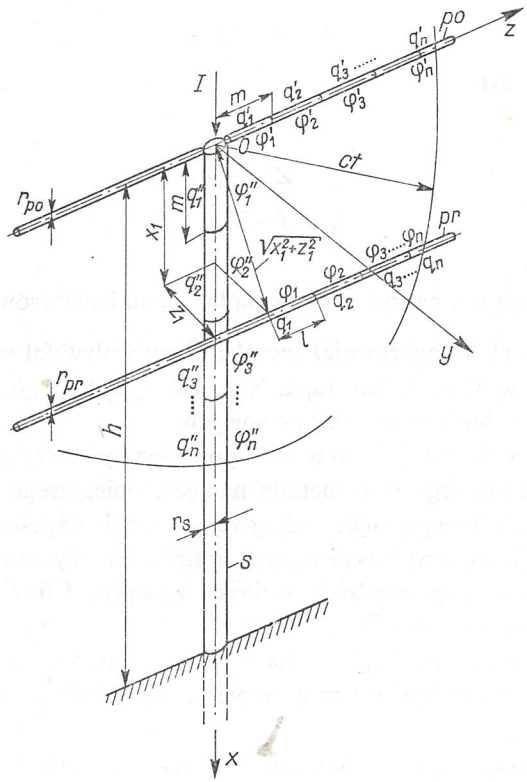
Wzory (26) pozwalają wyznaczyć napięcie na łańcuchu izolatorów w czasie $t \leqslant \frac{2h - x_1}{c}$. Po upływie tego czasu musi być również uwzględniony wpływ fal wynikających z odbicia i nowego ich podziału w wierzchołku słupa. Napięcia wywołane tymi falami są sumowane z zachowaniem odpowiednich przesunięć czasowych.

Oprócz wpływu fal wchodzących do układu powinien być uwzględniony również wpływ fal w kanale piorunu. Do tego celu metoda napięcia obiegowego nie jest odpowiednia, gdyż powstające tu prądy kompensujące odgrywają znacznie większą rolę niż w przypadku fal wchodzących do układu, a wyznaczenie tych prądów jest zbyt skomplikowane. Bez nich metoda napięcia obiegowego prowadzi do wniosku, że wpływ fali w kanale piorunu nie ma praktycznego znaczenia. Jest to wniosek błędny, bo jak wynika z obliczeń metodą kasowania pola, podaną przez C. F. Wagnera, napięcie wywołane falą w kanale może osiągnąć wartość tego samego rzędu co wartość napięcia wywołanego przez fale wchodzące do układu.

Aby uzasadnić przyczynę tych różnic, należy wniknąć nieco w mechanizm kompensacji. Jak już wspomniano, trzeba przyjąć, że ładunki i prądy kompensujące zjawiają się w elementach przewodzących w obrębie strefy oddziaływania tam, gdzie wymuszona przez nie zmieniające swego kształtu fale prądowe składowa natężenia pola elektrycznego, działająca wzdłuż elementu przewodzącego, nie równa się zeru. Prądy kompensujące towarzyszą zawsze ruchowi (zmianie rozkładu) ładunków kompensujących i występować mogą również wtedy, kiedy składowa magnetyczna jest równa zeru, a oddziałuje jedynie składowa elektryczna. Na przykład, przy prędkości fali wymuszającej znacznie mniejszej od prędkości światła lub w przewodzie prostopadłym do kierunku fali wymuszającej prądy kompensujące są konieczne głównie dla skompensowania składowej elektrycznej. Jest więc oczywiste, że prądy kompensujące mogą mieć duże znaczenie również wtedy, kiedy składowa magnetyczna natężenia pola nie istnieje lub jest bardzo mała. Taki właśnie przypadek ma miejsce przy obliczaniu wpływu kanału piorunu, jak również występuje, chociaż w niewielkim stopniu, przy falach wchodzących do układu.

Fakt ten wskazuje na konieczność dokonywania obliczeń w oparciu o całkowite natężenie pola, a nie w oparciu wyłącznie o składową magnetyczną.

Na wniosku tym oparł swe rozważania C. F. Wagner, opracowując metodę nazwaną umownie „metodą kasowania pola" [15]. Przy analizie mechanizmu kompensacji w oparciu o całkowite natężenie pola elektrycznego wykazał on, że prądy związane z przesuwaniem się ładunków kompensujących odgrywają w tym mechanizmie tylko nieznaczną rolę w porównaniu z działaniem samych ładunków, tj. wytwarzaniem przez nie elektrycznej składowej pola. Również z rozważań A. Braunsteina, opartych na uwzględnieniu prądów



Rys. 4. Układ obliczeniowy — metoda kasowania pola

kompensujących [2], wynika, że wystarczająca kompensacja składowej stycznej natężenia pola na powierzchni przewodu występuje przez nagromadzenie ładunków w jego części najbliższej źródła fali wymuszającej dzięki odpowiedniemu chwilowemu rozkładowi ładunków wzdłuż przewodu. Rola prądów ogranicza się w zasadzie do zmiany rozkładu ładunków, a ich bezpośredni udział w kompensacji przez wytwarzanie składowej magnetycznej pola elektrycznego jest znikomy. Fakt ten pozwala rozważać problem pola kasującego jako problem elektrostatyczny i stanowi podstawę metody kasowania pola. W metodzie tej stosuje się prawa elektrostatyki do układu ładunków w dowolnej chwili, nie uwzględniając przebiegów wyrównawczych, związanych z przejściem od danego układu ładunków do innego w następnej chwili. Przy odpowiednio dużej liczbie układów chwilowych można otrzymać szybkozmienny przebieg napięcia na izolacji linii. Konkretny układ ładunków

dla określonej chwili wyznacza się dzieląc słup, przewód odgromowy i przewód roboczy na dostatecznie małe odcinki o jednakowej długości (rys. 4). Zakłada się przy tym, że odcinki te są chwilowo izolowane i mają różne liniowe gęstości ładunków q_j. Ładunki wszystkich odcinków wywołują w środkowym punkcie ich powierzchni potencjał, który jest równy sumie znanej wartości φ_i potencjału wymuszonego w tym punkcie (ze znakiem przeciwnym) i nieznanej stałej wartości, oznaczonej przez φ_0 dla przewodu roboczego i przez $\varphi_0' = \varphi_0''$ dla słupa i przewodu odgromowego. Wynika stąd następujące równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} \varphi_i + \varphi_0 \\ \varphi_i' + \varphi_0' \\ \varphi_i'' + \varphi_0' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij} & D_{ij} & F_{ij} \\ E_{ij} & B_{ij} & H_{ij} \\ G_{ij} & K_{ij} & C_{ij} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_j \\ q_j' \\ q_j'' \end{bmatrix}, \tag{30}$$

w którym wskaźniki $i = 1, 2 \ldots n$ oraz $j = 1, 2 \ldots n$ oznaczają liczby porządkowe odcinków, a indeksy prim (') i bis ('') wprowadzone są dla odróżnienia odcinków przewodu odgromowego (') od odcinków słupa ('') i odcinków przewodu roboczego (bez kreski). Odpowiednie współczynniki potencjalne A_{ij}, B_{ij}, ... K_{ij} wyznacza się z danych geometrycznych układu [3]. Rozwiązanie równania (30) względem niewiadomych φ_0 i φ_0' jest możliwe po wykorzystaniu warunku, zgodnie z którym suma ładunków w przewodzie roboczym oraz suma ładunków w słupie i w przewodzie odgromowym równa jest zeru. Przy jednakowej długości odcinków warunek ten można napisać następująco:

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} (2q_j' + q_j'') = 0. \tag{31}$$

Napięcie na łańcuchu izolatorów w rozważanej chwili jest równe różnicy stałych φ_0 i φ_0':

$$U_{iz} = \varphi_0 - \varphi_0'. \tag{32}$$

Równanie (30) jest bardzo rozbudowane i rozwiązanie jego wymaga użycia matematycznej maszyny cyfrowej. Powtórzenie obliczeń musi następować przy każdej kolejnej chwili czasu, gdyż zmienia się rozkład ładunków i inna jest liczba odcinków. Ponadto przy czasie $t > \frac{2h}{c}$ w równaniu tym należy uwzględnić wpływ odcinków układu z lustrzanego odbicia.

Przy obliczaniu wpływu fal wchodzących do układu powstaje dodatkowa trudność związana z wyznaczeniem podziału fali wymuszającej między słup i przewód odgromowy. Trudność tę można pokonać wykonując obliczenia zgodnie z podanym przebiegiem dla dwu przypadków. W pierwszym przypadku zakłada się, iż cała fala wchodzi do słupa, a w drugim, że cała fala wchodzi do przewodu odgromowego i dzieli się na równe części między obie jego gałęzie. Rozwiązując równanie (30) należy uwzględnić warunek, że suma ładunków w układzie słup-przewód odgromowy równa się ładunkowi wprowadzonemu przez falę wymuszającą. W układzie następuje przemieszczenie się ładunków indukowanych między słupem i przewodem odgromowym, tak że ładunek wypadkowy w każdym

z tych elementów jest częścią ładunku wprowadzonego do układu. Proporcjonalnie do ładunku dzieli się prąd wchodzący do układu. Uzyskiwane wartości prądu w obu przypadkach nieznacznie różnią się między sobą. Metodą kolejnych przybliżeń, wykorzystując wartości uzyskane, otrzymuje się rzeczywiste wartości prądu. Dostateczne przybliżenie uzyskuje się również przyjmując wartości średnie z obu przypadków.

Napięcie na łańcuchu izolatorów można otrzymać przez powtórzenie obliczeń dla wyznaczonych prądów lub wykorzystać stałe φ_0 i φ'_0 z obu rozpatrywanych przypadków według następującej zależności:

$$U_{iz} = (\varphi_{01} - \varphi'_{01})\frac{I_s}{I} + (\varphi_{02} - \varphi'_{02})\frac{2I_{po}}{I}, \tag{33}$$

w której $\varphi_{01}, \varphi'_{01}, \varphi_{02}, \varphi'_{02}$ oznaczają odpowiednie stałe z przypadku pierwszego i drugiego, I_s i I_{po} są prądami słupa i przewodu odgromowego, a I jest prądem fali wymuszającej.

Jak widać z podanego przebiegu obliczeń, metoda kasowania pola jest bardzo pracochłonna. Sam autor traktuje ją nie jako metodę praktyczną, ale jako sposób badania bardzo złożonych zjawisk i drogę do uzyskania danych dla oceny przydatności innych metod, bardziej prostych.

Mając na uwadze konieczność uwzględnienia w sposób bardziej praktyczny wpływu fal wchodzących do układu i wpływu fal w kanale piorunu C. F. Wagner i A. R. Hileman zaproponowali metodę uproszczoną [16]. W metodzie tej do obliczania wpływu fal wymuszających w układzie słup-przewód odgromowy zalecili (mimo zastrzeżeń) stosowanie omówionej już metody napięcia obiegowego, a dla obliczenia wpływu fal w kanale piorunu opracowali metodę średnich potencjałów.

Pierwszą czynnością w metodzie średnich potencjałów jest wyznaczenie potencjałów wzdłuż objętych strefą oddziaływania odcinków przewodu roboczego i odgromowego, przy założeniu, że są one nieprzewodzące i że przewód odgromowy jest izolowany od słupa. Ponieważ w rzeczywistości rozważane przewody mają bardzo małą rezystancję, to na całej ich powierzchni wystąpi praktycznie jednakowy potencjał, równy średniej wartości potencjałów wymuszonych: $V_{śr(pr)}$ — na przewodzie roboczym i $V_{(śr)po}$ — na przewodzie odgromowym.

Jeżeli w dalszym ciągu pomijać istnienie słupa, to napięcie między tymi przewodami można wyznaczyć według następującego wzoru:

$$U_{iz} = V_{(śr)pr} - k_{pr-po} V_{(śr)po}. \tag{34}$$

Uwzględnienie obecności słupa wprowadza do wzoru (34) dodatkowy składnik $-\frac{k}{t} V_{(śr)s}$ i wzór ten przyjmuje postać:

$$U_{iz} = V_{(śr)pr} - k_{po-pr} V_{(śr)po} - \frac{k}{t} V_{(śr)s}, \tag{35}$$

przy czym

k_{pr-po} — jest współczynnikiem sprzężenia między przewodem roboczym i odgromowym,

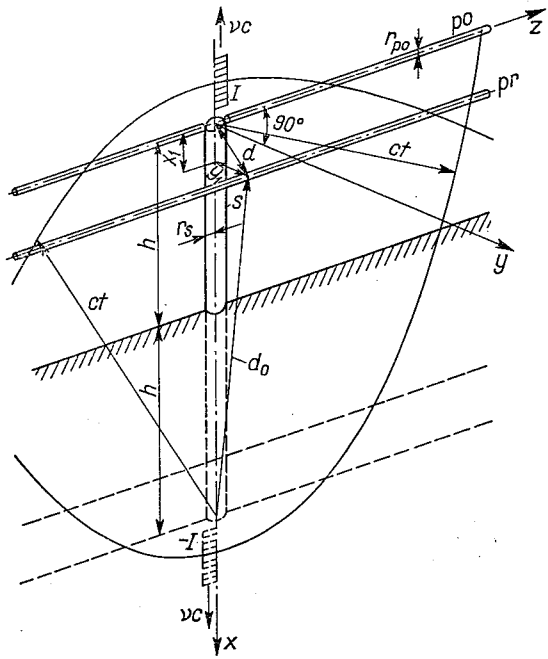
$\frac{k}{t}$ — ujmuje sprzężenia słup-przewód roboczy i słup-przewód odgromowy, które maleją w miarę upływu czasu t,

$V_{(śr)s}$ — jest średnim potencjałem słupa.

Dodatkowy składnik $\frac{k}{t}V_{(śr)s}$ jest mały i gra rolę poprawki.

Wartość współczynnika k wyrażona w μs została ustalona na podstawie przeliczeń metodą kasowania pola dla linii o różnych parametrach.

Dla linii z 1 przewodem odgromowym $k = 0{,}015+0{,}00295\frac{hr_s}{d}$, a dla linii z 2 przewodami odgromowymi $k = 0{,}010+0{,}00164\frac{hr_s}{d}$, przy czym wartości h, r_s i d wyrażamy w metrach. Układ obliczeniowy z oznaczeniami przedstawiony jest na rys. 5.



Rys. 5. Układ obliczeniowy — metoda średnich potencjałów

Poszczególne potencjały oblicza się na podstawie wzoru (6), w którym dla fali rzeczywistej w kanale, przy współrzędnej x należy uwzględnić znak minus, dla fali biegnącej w lustrzanym odbiciu kanału należy zastąpić x przez $2h-x$ oraz w obu przypadkach zamiast r podstawić $\sqrt{z^2+y^2}$. Otrzymujemy wówczas wzór na potencjał wywołany falą rzeczywistą:

$$V = \frac{30I}{v}\left[-\operatorname{arsh}\frac{x}{\sqrt{z^2+y^2}}+\operatorname{arsh}\frac{vct+x}{\sqrt{(z^2+y^2)(1-v^2)}}+\ln\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}\right] \tag{36}$$

oraz wzór na potencjał wywołany falą w lustrzanym odbiciu kanału

$$V^0 = \frac{30I}{v}\left[\operatorname{arsh}\frac{2h-x}{\sqrt{z^2+y^2}}-\operatorname{arsh}\frac{vot+2h-x}{\sqrt{(z^2+y^2)(1-v^2)}}-\ln\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}\right]. \tag{37}$$

Obliczenia wykonuje się dla czasu $t > \frac{2h}{c}$, tj. po osiągnięciu wierzchołka słupa przez strefę oddziaływania fali z lustrzanego odbicia, kiedy prąd w kanale piorunu zaczyna mieć wpływ na wartość przepięć. Średnie wartości potencjałów określonych wzorami (36) i (37) począwszy od chwili $t = \frac{2h}{c}$ oblicza się wg następujących zależności:

dla przewodu odgromowego

$$V_{(śr)po} = \frac{1}{ct}\left[\int_{r_s}^{z_1} (V_{po}+V_{po}^0)\,dz + \int_{z_1}^{ct} V_{po}\,dz\right], \tag{38}$$

dla przewodu roboczego

$$V_{(śr)pr} = \frac{1}{z_3}\left[\int_{0}^{z_2} (V_{pr}+V_{pr}^0)\,dz + \int_{z_2}^{z_3} V_{pr}\,dz\right], \tag{39}$$

dla słupa

$$V_{(śr)s} = \frac{1}{h}\int_{0}^{h} (V_s+V_s^0)\,dx, \tag{40}$$

przy czym

$$Z_1 = \sqrt{(ct)^2-(2h)^2},$$

$$Z_2 = \sqrt{(ct)^2-d_0^2},$$

$$Z_3 = \sqrt{(ct)^2-d^2}.$$

Metoda średnich potencjałów pozwala stosunkowo dokładnie obliczyć wpływ fal w kanale piorunu. Nie jest ona metodą uzasadnioną ściśle teoretycznie. Ujęcie to jednak usprawiedliwione jest uzyskiwaniem wyników obliczeń zgodnych w dużej liczbie przypadków z wynikami obliczeń otrzymywanych metodą kasowania pola. Przebieg obliczeń jest niewątpliwie dużo prostszy.

4. WNIOSKI

Na podstawie przeprowadzonej analizy metod obliczeniowych opartych na antenowej teorii fal można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Metoda napięcia obiegowego nie ma zastosowania do obliczania wplywu fal w kanale piorunu, a przy obliczaniu wpływu fal wchodzących do układu nie pozwala wprawdzie na uwzględnienie wpływu prądów kompensujących, lecz błąd powstający z tego powodu jest niewielki.

2. Metoda kasowania pola pozwala trafnie ocenić wartość przepięć atmosferycznych, ale wymaga niezmiernie żmudnych obliczeń, tak iż nie nadaje się do praktycznych zastosowań.

3. Metoda średnich potencjałów w ujęciu Wagnera pozwala obliczyć tylko wpływ fal w kanale piorunu i jest również dość pracochłonna.

4. Badania w zakresie metod obliczeniowych są celowe i powinny zmierzać w kierunku opracowania takiej metody, która w sposób jednolity i stosunkowo prosty umożliwiłaby

wykonanie obliczeń zarówno wpływu fal w kanale piorunu, jak i fal wchodzących do układu w wierzchołku słupa.

5. Przepięcia wywołane przez fale w kanale piorunu mogą osiągać wartości tego samego rzędu co przepięcia wywołane przez fale wchodzące do układu w wierzchołku słupa.

6. Obliczenia muszą być w zasadzie oparte na obydwu składowych wymuszonych natężenia pola elektrycznego, tj. na składowej elektrycznej oraz na składowej magnetyczne i jeżeli prędkość fal wymuszających jest zbliżona do prędkości światła, można przy tym pominąć wpływ prądów związanych z przesuwaniem się ładunków kompensujących.

7. Przy prędkości fali wymuszającej dużo mniejszej od prędkości światła może być pominięta raczej składowa magnetyczna fali wymuszającej niż prądów związanych z ruchem ładunków kompensujących.

Politechnika Warszawska
Katedra Wysokich Napięć

WYKAZ LITERATURY

1. Armstrong H.R., Whitehead E.R.: A Study of the Mechanism of Lightning Strokes to Transmission Lines. Report. CIGRE Study Committee Nr 8, 1966.
2. Braunstein A.: Contribution to the Lightning Response of Power Transmission Lines. Gothenburg, Sweden, 1964.
3. Flisowski Z.: Uproszczona metoda obliczania piorunowego linii energoelektrycznych w oparciu o antenową teorię fal. Praca doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa 1966.
4. Jakubowski J.L.: Aktualne problemy ochrony odgromowej linii najwyższych napięć. — Przegl. Elektrotechn., 1967, z. 2.
5. Jakubowski J.L.: Podstawy teorii przepięć w układach energoelektrycznych. PWN, Warszawa 1968.
6. Lundholm R., Rusck S.: Nouvelles expériences concernant la technique des mises à la terre des pylones et des postes eléctriques. CIGRE, 1952, Ref. 305.
7. Lundholm R., Finn R.B., Price W.S.: Calculation of Transmission Line Lightning Voltages by Field Concepts. — Trans. AIEE III, Febr. 1958, p. 1271—1283.
8. Lundholm R.: Overvoltage in a Direct Lightning-Stroke to a Transmission-Line Tower. CIGRE 1958, Ref. 333.
9. Lundholm R.: The Loo-Voltage-Method for the Calculation of Overvoltage at a Lightning-Stroke. — Elteknik, 1962, Nr 3, s. 29—34.
10. Rorden H.L., Zobel E.S., Lippert G.D.: Two-Year Lightning Experience on 345 kV Lines. — Trans. AIEE, vol. 76, 1957, p. 954—960.
11. Schloman R.H., Price W.S., Johnson O.B., Anderson I.G.: 1956 Lightning Field Investigation on the OVEC 345 kV System. — Trans. AIEE, vol. 76, 1957, p. 1447.
12. Szpor S., Dzierżek H., Winiarski W.: Technika wysokich napięć. WNT, Warszawa 1967.
13. Wagner C.F., Mc Cann G.D.: Induced Voltages on Transmission Lines. — Trans. AIEE, vol. 61, 1942, p. 916—930.
14. Wagner C.F.: A New Approach to the Calculation of the Lightning Performance of Transmission Lines. — Trans. AIEE III, vol. 75, 1956, p. 1233—1256.
15. Wagner C.F., Hileman A.R.: A New Approach to Calculation of Lightning Performance of Transmission Lines — II. — Trans. AIEE III, vol. 78, 1959, p. 996—1021.
16. Wagner C.F., Hileman A.R.: A New Approach to the Calculation of the Lightning Performance of Transmission Lines — III. A Simplified Method Stroke to Tower. — Trans. AIEE III, vol. 79, 1960, p. 589—602.

Z. FLISOWSKI

CALCULATION OF ATMOSPHERIC OVERVOLTAGES IN POWER LINES ON THE BASIS OF THE ANTENNA WAVE THEORY

Summary

The paper deals with the mathematical foundations and principles of application of the antenna wave theory to the calculation of atmospheric overvoltages in H. T. power lines. Calculation methods based on the theory are presented and analysed. In the analysis special attention is paid to the importance of compensation of the tangent component of the electric field intensity on conductive areas. The practical value of the methods under discussion is evaluated.

Z. FLISOWSKI

LE CALCUL DES SURTENSIONS ATMOSPHÉRIQUES DANS LES LIGNES D'ÉNERGIE SU R LA BASE DE LA THÉORIE D'ANTENNE DES ONDES

Résumé

On a donné dans l'oeuvre les fondations mathématiques ainsi que le principe d'appliquer de la théorie d'antenne des ondes à calculer les surtensions atmosphériques dans les lignes électriques haute tension. On a présenté et analysé les méthodes de calcul appuyées sur cette théorie. Dans l'analyse on a considéré singulièrement la valeur de la compensation de la composante tangente de l'intensité du champ électrique sur les surfaces conductives ainsi que la valeur pratique des méthodes présentées.

З. ФЛИСОВСКИ

РАСЧЕТ АТМОСФЕРНЫХ ПЕРЕНАПРЯЖЕНИЙ В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ НА ОСНОВАНИИ АНТЕННОЙ ТЕОРИИ ВОЛН

Резюме

В труде приведены математические основы и принцип применения антенной теории волн для расчета атмосферных перенапряжений в высоковольтных линиях передачи электрической энергии. Представлены и подвергнуты анализу расчетные методы основанные на вышеуказанной теории. В анализе обращено особое внимание на значение компенсации касательной составляющей напряженности электрического поля на проводящих поверхностях и проведена оценка практических достоинств представленных методов.

TREŚĆ

J. Migdalski: Synteza niezawodnościowa układu zawierającego elementy przełączające — przełączniki 3
F. Kamiński: Wybrane aspekty syntezy torów niejednorodnych złożonych z odcinków jednorodnych, o charakterystyce Czebyszewa 23
M. Dąbrowski: Korekcja transwersalna zniekształceń interferencyjnych w transmisji danych 53
H. Konczyński: Ekwipotencjalny układ uziemień telekomunikacyjnych 73
E. Kącki: Badanie stanów nieustalonych w niejednorodnej linii elektrycznej za pomocą maszyny analogowej 89
Z. Perkowski: Wyznaczanie pojemności torów współosiowych o przewodach wielodrutowych 105
A. Kurbiel: Ocena względnej przydatności torów wielkoprądowych pieców łukowych 129
J. Turowski: Wzór na straty mocy w kadziach nieekranowanych wielkich transformatorów jednofazowych 149
Z. Flisowski: Obliczanie przepięć atmosferycznych w liniach energetycznych na podstawie antenowej teorii fal 177

CONTENTS — TABLE DES MATIÈRES — INHALT

J. Migdalski: Switching System Reliability Synthesis 3
La synthèse du système avec des éléments commutateurs du point de vue de la sécurité . . . 3
F. Kamiński: Selected Problems of the Synthesis of Transmission Lines in Cascade with the Chebyshev Transmission Characteristic 23
Les aspects choisis de la synthèse des lignes non-homogènes composées de secteurs homogènes à caractéristique Tchebycheff 23
Ausgewählte Probleme der Synthese von tschebyscheffschen Leitungsketten mit homogenen Leitungsstücken 23
M. Dąbrowski: The Minimizing of Intersymbol Interference with the Aid of Transversal Filter 53
La correction transversalle des distorsions d'interférence dans la transmission des données 53
H. Konczyński: Equipotential Arrangement of Telecommunication Earth Electrodes . . . 73
Système équipotentiel des prises de terre des télécommunications 73
Äquipotential Erdungssystem der Fernmeldetechnik 73
E. Kącki: Study of Non-Steady States of a Non-Homogeneous Electrical Line with the Aid of an Analog Computer 89
Étude des régimes non-stationnaires dans une ligne électrique irrégulière à l'aide d'une machine calculatrice analogue 89
Z. Perkowski: Determination of Capacitance of Coaxial Lines Having Bunched Conductors 105
La détermination de la capacitance des lignes coaxialles à conducteurs à fils multiples . . . 105
Die Berechnung der Kapazitäten koaxialer Leitungen mit Reusenleitern 105
A. Kurbiel: Evaluation of Relative Usefulness of Great Current Circuits in Arc Furnaces 129
L'évaluation de l'utilité relative des voies grand courant des fours à l'arc 129
Beurteilung relativer Brauchbarkeit der Hochstromleitungsanlagen für Lichtbogenöfen 129
J. Turowski: Formula for the Calculation of Stray Losses in Nonshielded Tanks of Single-Phase Large Transformers 149
La formule des pertes de puissance dans des bacs sans écrans de grands transformateurs uniphasés 149

Z. Flisowski: Calculation of Atmospheric Overvoltages in Power Lines on the Basis of the Antenna Wave Theory 177
Le calcul des surtensions atmosphériques dans les lignes d'énergie sur la base de la théorie d'antenne des ondes 177

СОДЕРЖАНИЕ

Я. Мигдальски: Синтез системы с переключающими элементами с точки зрения надежности 3
Ф. Каминьски: Избранные вопросы синтеза чебышевских ступенчатых линий . . . 23
М. Домбровски: Коррекция интерференционных искажений передачи данных при использовании гармонических фильтров 53
Г. Кончиньски: Эквипотенциальная система заземлений в электросвязи 73
Э. Концки: Исследование неустановившихся режимов в неоднородной электрической линии с помощью аналогового вычислительного устройства 89
З. Перковски: Определение емкости коаксиальных кабелей с многопроволочными проводами 105
А. Курбель: Оценка относительной пригодности коротких сетей электрических дуговых печей 129
Я. Туровски: Формула для расчета потерь мощности в неэкранированных баках мощных однофазных трансформаторов 149
З. Флисовски: Расчет атмосферных перенапряжений в линиях передачи электрической энергии на основании антенной теории волн 177

INSTYTUT TECHNOLOGII ELEKTRONOWEJ
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XV · ZESZYT 2

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1969

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor Naczelny
PROF. WITOLD NOWICKI

Sekretarz
JULIUSZ MIERZEJEWSKI

ADRES REDAKCJI

Warszawa, Politechnika, Plac Jedności Robotniczej 1
Katedra Teletransmisji Przewodowej, Gmach Elektroniki,
pokój 483, tel. 21-007 w. 794

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
Warszawa, Miodowa 10

Nakład 700 (570+130)	Oddano do składania 19.II.1969 r.
Ark. wyd. 13,5; ark. druk. 10,0	Podpisano do druku 2. VI 1969
Papier druk. sat. kl. III, 80 g, 70×100	Druk ukończono w czerwcu 1969
Zamówienie nr 369/69	Cena zł 40.— P-98

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

512.9

WŁADYSŁAW MAJEWSKI JR

Zagadnienie minimalizacji liczby stanów automatów skończonych

Rękopis dostarczono 14.11.1968

Artykuł przedstawia zagadnienie minimalizacji liczby stanów automatów skończonych — szczególnie automatów niezupełnych.

We wstępie (rozdział 1) podana jest ogólna charakterystyka układów sekwencyjnych i ich modeli matematycznych — automatów oraz omówione są etapy syntezy.

W dalszym ciągu (rozdział 2) podane są definicje z teorii automatów w zakresie niezbędnym do dalszych rozważań. W szczególności podano definicję sekwencji odpowiedniej dla danego stanu automatu niezupełnego.

Następnie (rozdział 3) przedstawiono wprowadzenie w zagadnienie minimalizacji liczby stanów. Zdefiniowano relację „pokrywania" w zbiorze automatów niezupełnych oraz pojęcia automatu zredukowanego i automatu minimalnego.

W dalszym ciągu (rozdział 4) przedstawiono zagadnienie minimalizacji liczby stanów dla automatów zupełnych. Zdefiniowano relację równoważności stanów i relację równoważności automatów oraz pojęcia automatu zredukowanego i automatu minimalnego w tym szczególnym przypadku. Podano podstawowe twierdzenie o minimalizacji automatów zupełnych oraz jeden z algorytmów wyznaczania relacji równoważności stanów.

Następnie (rozdział 5) omówiono podstawowe problemy związane z minimalizacją automatów niezupełnych. Najpierw omówiono metodę minimalizacji automatu niezupełnego polegającą na minimalizowaniu wszystkich odpowiadających mu automatów zupełnych i wykazano na przykładzie (stosując rozszczepienie stanu), że metoda ta nie zawsze prowadzi do prawidłowego rozwiązania. Na tym tle przedyskutowano w sposób fizyczny znaczenie „kreski" w tablicy automatu. Dalej wprowadzono relację zgodności stanów automatu i podano algorytmy wyznaczania tej relacji. Następnie podano podstawowe twierdzenie o minimalizacji automatów zupełnych. Założenia twierdzenia podają sposób konstrukcji dla danego automatu M pewnego automatu M^*. Konstrukcja ta polega: 1) na wyznaczaniu relacji zgodności stanów i rodziny maksymalnych zbiorów stanów zgodnych $\{Q_j\}$, 2) wyznaczaniu rodziny zbiorów $\{P_j\}$ przez wybór niektórych zbiorów rodziny $\{Q_j\}$ lub ich części, 3) właściwej konstrukcji automatu M^*. Teza twierdzenia mówi, że tak skonstruowany automat M^* jest automatem minimalnym pokrywającym automat M. Z twierdzenia wynika, że etapy 1) i 3) konstrukcji mają charakter algorytmiczny, a etap 2) może być rozwiązany jedynie metodą prób. Podano także oszacowanie liczby stanów automatu minimalnego ułatwiające rozwiązanie etapu 2). Dalej podano wnioski dotyczące własności automatów uzyskiwanych w oparciu o podane twierdzenie. Podano też przykłady minimalizacji.

W dalszym ciągu (rozdział 6) omówiono metodę wyznaczania rodziny $\{P_j\}$ dla pewnego szczególnego przypadku, tzw. automatów z ograniczonym wejściem.

Następnie (rozdział 7) podano pewną metodę systematyczną wyznaczania rodziny $\{P_j\}$. Wymagało to wprowadzenia nowych definicji i algorytmów. Metoda ta, jakkolwiek pożyteczna, nie daje zupełnie ogólnego rozwiązania i jest dość złożona.

Dalej (rozdział 8) omówiono redukcję wstępną i uogólniono pojęcia równoważności stanów i równoważności automatów na przypadek automatów niezupełnych.

Na zakończenie (rozdział 9) podano rys historyczny oraz przedstawiono wykaz literatury.

Artykuł wykorzystuje elementy teorii zbiorów i teorii relacji oraz rachunku zdań i ma charakter częściowo teoretyczny. Zawiera jednak także liczne przykłady oraz podaje interpretacje techniczne problemów teoretycznych. Artykuł opiera się na podstawowej literaturze przedmiotu w tym także na pozycjach stosunkowo nowych (1967).

ZASTOSOWANE SYMBOLE MATEMATYCZNE

$x \wedge y$ oznacza „x i y"
$x \vee y$ oznacza „x lub y"
$\neg x$ oznacza „nieprawda, że x"
$x \leftrightarrow y$ oznacza „x wtedy i tylko wtedy, gdy y"
$x \rightarrow y$ oznacza „jeżeli x, to y"
$\bigwedge x$ oznacza „dla każdego x ..."
$\bigvee x$ oznacza „istnieje takie x, że ..."
$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ oznacza zbiór o elementach $x_1, x_2, \ldots, x_n$
$x \in X$ oznacza, że x należy do zbioru X
$A \cup B$ oznacza sumę zbiorów A i B
$A \cap B$ oznacza iloczyn zbiorów A i B
$A - B$ oznacza różnicę zbiorów A i B
$A \subset B$ oznacza, że A jest podzbiorem B
$\varnothing$ oznacza zbiór pusty
$X = \{x | x$ ma własność $p\}$ oznacza zbiór x-ów mających własność p
$\langle x, y \rangle$ oznacza parę uporządkowaną o elementach x i y
$X \times Y = \{\langle x, y \rangle | x \in X \wedge y \in Y\}$ oznacza iloczyn kartezjański zbiorów X i Y

$$\left.\begin{array}{l} R \subset X \times Y \\ xRy \leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R \\ x \in X, \quad y \in Y \end{array}\right\} R \text{ oznacza relację binarną}$$

Przykłady

1. $A = \{a, b, c, d\} \quad B = \{a, b, e\} \quad C = \{c, d\}$
   $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$
   $A \cap B = \{a, b\}$
   $B \cap C = \varnothing$
   $C \subset A$
   $A \subset A$
   $B \times C = \{\langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \ldots, \langle e, c \rangle, \langle e, d \rangle\}$
2. $X = Y = \{1, 2, 3\}$
   Niech R oznacza relację $\leqslant$ (R i $\leqslant$ oznaczają tu funkcję zdaniową). Wtedy $R = \leqslant =$
   $= \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ (R i $\leqslant$ oznaczają tu podzbiór $X \times Y$).
3. $\bigwedge x, y \quad (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
   $\bigvee x \quad x + a = 0$