1. WSTĘP

Zadaniem niniejszego artykułu jest przedstawienie zagadnienia minimalizacji liczby stanów automatów skończonych — przede wszystkim w przypadku automatów skończonych niezupełnych. Inne zagadnienia z teorii automatów skończonych i z teorii układów sekwencyjnych przedstawione są jedynie w zakresie niezbędnym do przeprowadzenia rozważań podstawowych.

Automat skończony — nazywany też maszyną sekwencyjną skończoną — jest modelem matematycznym układu sekwencyjnego[1]. Układy sekwencyjne spotykane w praktyce są na ogół układami binarnymi. Układ taki posiada n wejść i m wyjść, a sygnały na każdym z wejść i wyjść mogą przyjmować dwie wartości, oznaczane 0 i 1. Tak więc całkowity stan wejść i wyjść układu w danej chwili może być opisany odpowiednio przy pomocy n-tki lub m-tki zer i jedynek. Układ sekwencyjny nazywamy układem synchronicznym, jeżeli zmiany sygnałów wejściowych i wyjściowych mogą zachodzić tylko w określonych punktach dyskretnej skali czasu. Skala taka może być realizowana w postaci ciągu impulsów zegarowych.

W dalszym ciągu niniejszego artykułu zajmować się będziemy w zasadzie wyłącznie układami synchronicznymi, chociaż podane rozważania mogą być uogólnione na układy nie posiadające podanej wyżej własności — noszące nazwę układów asynchronicznych. Stan wyjść układu sekwencyjnego w danej chwili k zależy od stanu wejść układu sekwencyjnego w chwili $k-1$ oraz od poprzednich stanów wejść tworzących „historię" układu[2]. „Historia" ta może być scharakteryzowana przy pomocy tzw. stanów wewnętrznych układu sekwencyjnego. W układzie binarnym stany te są rozróżniane przy pomocy dwustanowych elementów pamięciowych. Jeżeli układ zawiera p takich elementów, to stanem układu jest p-tka zer i jedynek. Układ sekwencyjny (binarny) o n wejściach, m wyjściach i p elementach pamięciowych ma 2^n różnych stanów wejść, 2^m różnych stanów wyjść i 2^p różnych stanów wewnętrznych — nie wszystkie z tych stanów muszą być wykorzystywane.

Synteza układu sekwencyjnego polega na zaprojektowaniu układu w taki sposób, by pracował on zgodnie z założeniami i aby był możliwie prosty. W syntezie można wydzielić kilka etapów podstawowych. Etap 1 — synteza właściwa — polega na zaprojektowaniu automatu skończonego zdolnego do realizowania założonego sposobu pracy układu. Etap 2 — minimalizacja liczby stanów — polega na zaprojektowaniu automatu zdolnego do wykonywania przynajmniej takiej samej pracy jak automat otrzymany w wyniku etapu 1, a posiadającego możliwie niewielką liczbę stanów wewnętrznych. Etap 3 — kodowanie wejść, wyjść i stanów wewnętrznych — polega na przekształceniu automatu otrzymanego w etapie 2 na układ sekwencyjny. Etap 4 — synteza kombinacyjna — polega na zaprojektowaniu układów sterowania elementów pamięciowych oraz układów wyjściowych dla układu sekwencyjnego otrzymanego w etapie 3. Tak więc najpierw przekształcamy układ sekwencyjny na automat, a potem przekształcamy automat na układ sekwencyjny. Postępowanie takie jest wygodne, gdyż w etapie 1 i 2 nie jest potrzebne operowanie n-tkami

[1] W niektórych publikacjach nie odróżnia się układu sekwencyjnego od jego modelu matematycznego stosując termin „automat" jako synonim terminu „układ sekwencyjny".

[2] Zob. np. M. Minsky: Computation — Finite and Infinite Machines, Prentice Hall 1967.

zer i jedynek; mogą być one zastąpione pojedynczymi symbolami tak jak w teorii automatów[1].

Stopień skomplikowania, a więc także koszt układu sekwencyjnego zależy zarówno od liczby stanów wewnętrznych (etap 2), jak i od wariantu kodowania i typu elementów pamięciowych (etapy 3 i 4). Zwykle (ale nie zawsze) minimalizacja stanów prowadzi do obniżenia kosztu układu. Dlatego zagadnienie to jest zagadnieniem ważnym.

W dalszym ciągu artykułu omówimy podstawowe pojęcia z teorii automatów skończonych (rozdział 2), wprowadzenie do minimalizacji (rozdział 3), minimalizację automatów zupełnych (rozdział 4), minimalizację automatów niezupełnych (rozdział 5), minimalizację automatów z ograniczonym wejściem (rozdział 6), zagadnienie wyznaczania rodziny $\{P_j\}$ (rozdział 7), redukcję wstępną (rozdział 8) oraz rys historyczny i sugestię z zakresu literatury przedmiotu (rozdział 9).

Główny nacisk jest położony na zagadnienia związane z automatami niezupełnymi. Zagadnienia te są stosunkowo nowe i stosunkowo mało znane w Polsce.

Artykuł napisany jest w sposób „dwutorowy" — z jednej strony został w nim zastosowany formalny język matematyczny[2] umożliwiający ścisłe i zwięzłe formułowanie myśli, z drugiej strony podana jest interpretacja inżynierska definicji i twierdzeń oraz przykłady.

Artykuł nie zawiera dowodów twierdzeń — autor wychodzi tu z założenia, że bardzo niewielu Czytelników będzie interesować się odpowiednimi dowodami, a umieszczenie dowodów wymagałoby nadmiernego powiększenia objętości artykułu. Odpowiednie dowody podane są w cytowanej literaturze.

Zakłada się, że Czytelnik zna ogólną problematykę układów sekwencyjnych i automatów skończonych zupełnych oraz podstawowe pojęcia z rachunku zdań, rachunku zbiorów i teorii relacji. Czytelnikom chcącym uzupełnić swoje wiadomości matematyczne poleca się elementarną, ale bardzo dobrą książeczkę Mosznera [24].

2. PODSTAWOWE DEFINICJE

D e f i n i c j a 2.1. Automatem (skończonym) (niezupełnym)[3] M nazywamy uporządkowaną piątkę[4]

$$\langle S, X, Y, \delta, \lambda \rangle,$$

gdzie:

S — zbiór stanów (wewnętrznych),
X — zbiór liter wejściowych — alfabet wejściowy,
Y — zbiór liter wyjściowych — alfabet wyjściowy,
S, X, Y są zbiorami skończonymi i niepustymi,
$\delta : D_\delta \to S$,
$\lambda : D_\lambda \to Y$,
D_δ, D_λ są podzbiorami zbioru $S \times X$.

[1] W przypadku stosowania innej terminologii — bez rozróżniania układu sekwencyjnego od automatu — etapy 1 i 2 bywają nazywane syntezą abstrakcyjną, a etapy 3 i 4 syntezą strukturalną.

[2] Zob. Zastosowane symbole matematyczne.

[3] Wyrazy podane w nawiasie będą w dalszym ciągu opuszczane, jeżeli nie będzie to prowadzić do nieporozumień.

[4] Podana definicja odnosi się do automatu Mealy'ego; w dalszym ciągu będziemy posługiwać się tylko takimi automatami. Dla automatu Moore'a $D_\lambda \subset S$.

Funkcja δ przyporządkowuje więc każdej parze $\langle s, x\rangle \in D_\delta$ element $s' \in S$. Stan następny zależy więc od stanu obecnego i obecnej litery wejściowej. Funkcja δ nie jest określona dla par $\langle s, x\rangle \in (S\times X - D_\delta)$. Podobnie funkcja λ przyporządkowuje każdej parze $\langle s, x\rangle \in D_\lambda$ element $y \in Y$. Następna litera wyjściowa jest więc funkcją stanu obecnego i obecnej litery wejściowej[1]. Funkcja λ nie jest określona dla par $\langle s, x\rangle \in (S\times X - D_\lambda)$.

Definicja 2.2. Automatem zupełnym nazywamy automat z definicji 2.1., jeżeli $D_\delta = D_\lambda = S\times X$.

Definicja 2.3. Automatem symetrycznie niezupełnym nazywamy automat z definicji 2.1., jeżeli $D_\delta = D_\lambda$.

Automaty są najczęściej opisywane przy pomocy tablic przejść-wyjść. Tablica taka podaje zbiory S, X, Y i funkcje δ i λ. Graficznym odpowiednikiem tablicy przejść-wyjść jest graf stanów.

Przykład 2.1

Tablice 2.1. a, b, c opisują odpowiednio automat niezupełny, automat zupełny i automat symetrycznie niezupełny.

Tablice 2.1

a)

	a	b	c	a	b	c
p	p	s	s	y	y	z
q	q	—	—	y	—	z
r	r	—	q	y	z	y
s	s	p	r	y	z	—

b)

	a	b	c	a	b	c
p	p	s	s	y	y	z
q	q	q	p	y	y	z
r	r	r	q	y	z	y
s	s	p	r	y	z	y

c)

	a	b	c	a	b	c
p	p	s	s	y	y	z
q	q	—	p	y	—	z
r	r	r	q	y	z	y
s	s	p	—	y	z	—

Mamy tu $S = \{p, q, r, s\}$, $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{y, z\}$, $S\times X = \{\langle p, a\rangle, \langle p, b\rangle, \ldots$ $\ldots, \langle q, a\rangle, \langle q, b\rangle, \ldots, \langle s, c\rangle\}$.

Definicja 2.4. Słowem wejściowym nazywamy sekwencję złożoną ze skończonej liczby liter. Długością słowa nazywamy liczbę liter w nim zawartych. Słowem pustym e nazywamy słowo o długości zero.

Definicja 2.5. Słownikiem wejściowym nazywamy zbiór $\overline{X}$ złożony ze wszystkich możliwych słów. Jest to zbiór nieskończony.

$$\overline{X} = \{\overline{x} \mid \overline{x} = x_1 \ldots x_k \wedge x_i \in X, i = 1, \ldots, k \wedge k = 1, 2, \ldots\} \cup \{e\}.$$

[1] Między momentem pojawienia się $\langle s, x\rangle$ i momentem pojawienia się $s' = \delta(s, x)$ i $y = \lambda(s, x)$ występuje więc przesunięcie czasowe nie uwidocznione wyraźnie w definicji 2.1.

D e f i n i c j a 2.6. Rozszerzeniem funkcji δ na zbiór $\overline{D}_\delta \supset D_\delta$[1] nazywamy funkcję $\overline{\delta}$ spełniającą następujące warunki:

$\overline{\delta} : \overline{D}_\delta \to S$;

$\overline{D}_\delta = \{\langle s, \overline{x}\rangle | s \in S, \overline{x} = x_1 \dots x_k \in \overline{X} \wedge \langle s_i, x_i\rangle \in D_\delta,$

gdzie: $s_1 = s, s_{i+1} := \delta(s_i, x_i), 1 \leqslant i \leqslant k\} \cup \{\langle s, e\rangle\}$,

$\overline{\delta}(s, e) = s$,

$\overline{\delta}(s, \overline{x}) = s_{k+1}$.

Wartość funkcji $\overline{\delta}(s, \overline{x})$ jest więc określona, jeżeli kolejne stany $s_2, \dots, s_{k+1}$ są określone, i wynosi s_{k+1}. Fizycznie $\overline{\delta}(s, \overline{x})$ oznacza stan końcowy automatu, który będąc w stanie s został pobudzony słowem wejściowym $\overline{x}$.

D e f i n i c j a 2.7. Rozszerzeniem funkcji λ na zbiór $\overline{D}_\lambda \supset D_\lambda$ nazywamy funkcję $\overline{\lambda}$ spełniającą następujące warunki:

$\overline{\lambda} : \overline{D}_\lambda \to Y$;

$\overline{D}_\lambda = \{\langle s, \overline{x}x\rangle | s \in S, \overline{x}x = x_1 \dots x_k x_{k+1} \wedge \langle s_i, x_i\rangle \in D_\delta,$

gdzie: $s_1 = s, s_{i+1} = \delta(s_i, x_i), 1 \leqslant i \leqslant k \wedge \langle s_{k+1}, x_{k+1}\rangle \in D_\lambda\}$,

$\overline{\lambda}(s, \overline{x}x) = \lambda(s_{k+1}, x_{k+1})$.

Wartość funkcji $\overline{\lambda}(s, \overline{x}x)$ jest więc określona, jeżeli określona jest wartość funkcji $\overline{\delta}(s, \overline{x})$ oraz określona jest wartość funkcji $\lambda(s_{k+1}, x_{k+1})$. Wartość funkcji $\overline{\lambda}(s, \overline{x}x)$ wynosi $\lambda(s_{k+1}, x_{k+1})$. Fizycznie $\overline{\lambda}(s, \overline{x}x)$ oznacza literę wyjściową wytwarzaną, gdy automat, który początkowo znajdował się w stanie s i otrzymał pobudzenie w postaci słowa wejściowego $\overline{x}x$, wykonuje swój ostatni „skok", tj. otrzymuje pobudzenie $x = x_{k+1}$ będąc w stanie s_{k+1}.

D e f i n i c j a 2.8. Słowo $\overline{x}x = x_1 \dots x_k x_{k+1}$ nazywamy słowem odpowiednim[2] dla automatu w stanie s $(\overline{x}x||s)$, jeżeli $\overline{\lambda}(s, \overline{x}x)$ istnieje.

Można to również zapisać w postaci:

$$\overline{x}x||s \leftrightarrow \langle s, \overline{x}\rangle \in \overline{D}_\delta \wedge \langle s_{k+1}, x_{k+1}\rangle \in D_\lambda.$$

Tak więc słowo $\overline{x}$ nie jest słowem odpowiednim w dwóch następujących przypadkach:

a) jeden z kolejnych stanów nie jest określony (jak wynika z definicji, stan ostatni może nie być określony); wtedy dowolne słowo postaci $\overline{x}y$ jest również słowem nieodpowiednim,

b) litera wyjściowa otrzymana podczas ostatniego skoku układu jest nieokreślona; wtedy słowo postaci $\overline{x}y$ może być słowem odpowiednim.

P r z y k ł a d 2.2

Rozważmy automat opisany tablicą 2.1.a (przykład 2.1). Jeżeli automat ten znajduje się w stanie q, to słowo b i wszystkie słowa rozpoczynające się od b nie są słowami od-

[1] Identyfikujemy tu zbiór X ze zbiorem słów o długości jeden; nie jest to ściśle — zbiory te są zbiorami izomorficznymi, a nie identycznymi.

[2] Podana definicja oparta jest na [16]. W literaturze spotyka się również inne definicje. W [18] podana jest definicja wymagająca, aby tylko kolejne stany były określone. Okazuje się, że ta różnica w definicjach nie jest zbyt istotna. W [2] podawana jest definicja wymagająca, aby nie tylko kolejne stany, ale także kolejne litery wyjściowe były określone. Definicja ta — bardzo przejrzysta pod względem teoretycznym — jest o wiele mniej przydatna praktycznie.

powiednimi. Słowo c jest słowem odpowiednim, ale wszystkie słowa rozpoczynające się od c nie są słowami odpowiednimi. Jeżeli automat znajduje się w stanie s, to słowo c nie jest słowem odpowiednim. Słowa ca, cb, cc oraz caa, ccc są słowami odpowiednimi. Słowo cbc jest słowem nieodpowiednim.

Przykład 2.3

Należy zaprojektować układ sekwencyjny o jednym wejściu i jednym wyjściu, w którym sygnał wyjściowy wynosi jeden, gdy liczba jedynek w dwóch kolejnych sygnałach wejściowych jest nieparzysta, oraz sygnał wyjściowy wynosi zero, gdy liczba jedynek w dwóch kolejnych sygnałach wejściowych jest parzysta. Tak więc sygnał wyjściowy jest określony co drugi skok układu[1]).

Łatwo sprawdzić, że automat skończony odpowiadający poszukiwanemu układowi sekwencyjnemu może być skonstruowany w sposób podany w tablicy 2.2.

Tablica 2.2

	0	1	0	1
p	q	r	—	—
q	p	p	0	1
r	p	p	1	0

Mamy tu $S = \{p, q, r\}$, $X = \{0, 1\}$, $Y = \{0, 1\}$.

Należy zwrócić uwagę, że z warunków zadania wynika, że interesują nas tu jedynie słowa wejściowe o długościach $2, 4, 6, \ldots$ Słowa o długościach $1, 3, 5$ są słowami nieodpowiednimi — słowa takie nie interesują nas zupełnie.

Zagadnieniem minimalizacji liczby stanów otrzymanego automatu zajmiemy się w dalszym ciągu artykułu.

3. WPROWADZENIE W ZAGADNIENIE MINIMALIZACJI LICZBY STANÓW

Minimalizacja liczby stanów automatu skończonego sprowadza się do wyznaczenia dla danego automatu M_1 automatu M_2 „zdolnego do wykonywania przynajmniej takiej samej pracy" co automat M_1, a posiadającego najmniejszą możliwie liczbę stanów.

Wprowadzimy także kilka definicji ujmujących w sposób ścisły myśli wprowadzone w powyższym sformułowaniu.

Definicja 3.1. Automat M_2 w stanie s_2 obejmuje[2]) automat M_1 w stanie $s_1 (s_2 \geqslant s_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy każde słowo odpowiednie dla M_1 w stanie s_1 jest słowem odpowiednim dla M_2 w stanie s_2 (nie musi być odwrotnie) oraz $\overline{\lambda}_1(s_1, \overline{x}) = \overline{\lambda}_2(s_2, \overline{x})$.

Zakładamy tu, że alfabety wejściowe i wyjściowe obu automatów są odpowiednio jednakowe.

---

[1]) Układ taki może być zrealizowany szczególnie prosto jako układ synchroniczny z sygnałami potencjałowymi.

[2]) W języku polskim nie ma ustalonej terminologii z zakresu automatów niezupełnych; autor artykułu używa w [11] terminu „pokrywa" zamiast używanego obecnie terminu „obejmuje".

D e f i n i c j a 3.2. Automat M_2 obejmuje automat M_1 ($M_2 \geqslant M_1$) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego stanu $s_1 \in S_1$ istnieje taki stan $s_2 \in S_2$ (przynajmniej jeden), że $s_2 \geqslant s_1$.

Postać formalna definicji:

$$\bigwedge M_1 \bigwedge M_2 \quad M_2 \geqslant M_1 \leftrightarrow \bigwedge s_1 \in S_1 \bigvee s_2 \in S_2 \quad s_2 \geqslant s_1.$$

Definicja 3.2. jest ścisłym przedstawieniem myśli „automat M_2 jest zdolny do wykonywania przynajmniej takiej pracy, którą wykonuje automat M_1." Słowo „przynajmniej" jest tu użyte dlatego, że mogą istnieć słowa wejściowe odpowiednie dla automatu M_2, a nieodpowiednie dla automatu M_1. M_2 może więc „wykonywać pracę", której nie może wykonać M_1.

Relacja $\geqslant$ w zbiorze stanów jednego automatu oraz relacja $\geqslant$ w zbiorze automatów jest relacją zwrotną i przechodnią — nie jest relacją symetryczną[1].

Definicja 3.3. Automat M_r nazywamy automatem zredukowanym odpowiadającym automatowi M:

$$M_r = red(M) \leftrightarrow M_r \geqslant M \wedge |S_r| \leqslant |S|^{2}.$$

D e f i n i c j a 3.4. Automat M_{min} nazywamy automatem minimalnym odpowiadającym automatowi M:

$$M_{min} = min(M) \leftrightarrow M_{min} = red(M) \wedge \bigwedge M^* = \mathrm{red}(M) \quad |S^*| \geqslant |S_{min}|.$$

Tak więc automatem minimalnym nazywamy taki automat zredukowany, że nie istnieje inny automat zredukowany o mniejszej liczbie stanów.

Dla każdego automatu mamy oczywiście $M = \mathrm{red}(M)$ — jest to przypadek trywialny. Dla danego automatu M, jak to zobaczymy później, albo istnieje kilka różnych automatów minimalnych, albo istnieje jeden automat minimalny M_{min} taki, że $|S_{min}| < |S|$, albo nie istnieje żaden automat minimalny różny od M; wtedy jest oczywiście $M = \min(M)$.

P r z y k ł a d 3.1

Oznaczmy automaty scharakteryzowane tablicami 2.1.a, b, c odpowiednio M_1, M_2, M_3. Wtedy możemy napisać $M_2 \geqslant M_1$ oraz $M_2 \geqslant M_3$. Wynika to stąd, że M_2 różni się od M_1 i od M_3 tylko tym, że „—" występujące w tablicach M_1 i M_2 są w nim zastąpione symbolami.

P r z y k ł a d 3.2

Między automatem M_1 z przykładu 2.3. (tablice 2.2) a automatem M_2 opisanym tablicą 3.1.a zachodzi relacja $M_2 \geqslant M_1$.

---

[1] Relację R nazywamy:
a) zwrotną, gdy $\bigwedge x \; xRx$,
b) symetryczną, gdy $\bigwedge x, y \; xRy \leftrightarrow yRx$,
c) przechodnią, gdy $\bigwedge x, y, z \; xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$.

[2] $|A|$ oznacza tu liczbę elementów zbioru A.

Tablica 3.1.a

	0	1	0	1
s	s	t	0	1
t	s	t	1	0

Tablica 3.1.b

	0	1	0	1
p	q	r	0	0
q	p	p	0	1
r	p	p	1	0

Można to wykazać bezpośrednio przy pomocy def. def. 3.1., 3.2. Można to też stwierdzić prościej, jak zobaczymy w dalszym ciągu artykułu.

Ponadto mamy $M_2 = \mathrm{red}(M_1)$, a jak zobaczymy później, również $M_2 = \min(M_1)$. Automat M_3 opisany tablicą 3.1.b. jest również związany z M_1 relacją $M_3 \geqslant M_1$. Mamy też $M_3 = \mathrm{red}(M_1)$, ale jest to przypadek trywialny, gdyż $|S_3| = |S_1|$.

W dalszym ciągu artykułu rozważymy przypadek szczególny — minimalizację liczby stanów automatów zupełnych (rozdział 4). W dalszych rozdziałach przedstawimy minimalizację liczby stanów w przypadku ogólnym.

4. MINIMALIZACJA LICZBY STANÓW AUTOMATÓW ZUPEŁNYCH

W przypadku automatu zupełnego[1] wszystkie słowa $\bar{x}$ należące do $\bar{X}$ są słowami odpowiednimi. Minimalizacja liczby stanów sprowadza się do wyznaczenia dla danego automatu M_1 automatu M_2 zdolnego do wykonywania takiej samej pracy, a posiadającego najmniejszą możliwą liczbę stanów.

Podamy teraz odpowiednie definicje.

D e f i n i c j a 4.1. Automat M_2 w stanie s_2 jest równoważny automatowi M_1 w stanie s_1 ($s_2 \equiv s_1$) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego słowa wejściowego $\bar{x}$: $\bar{\lambda}_1(s_1, \bar{x}) = \bar{\lambda}_2(s_2, \bar{x})$. Zakładamy tu, że alfabety wejściowe i wyjściowe obu automatów są odpowiednio jednakowe.

Definicja 4.1. jest szczególnym przypadkiem definicji 3.1. Oznacza to, że dla automatów zupełnych relacje $\geqslant$ i $\equiv$ są relacjami identycznymi (w zbiorze stanów danego automatu).

D e f i n i c j a 4.2. Automat M_2 jest równoważny automatowi M_1:

$$M_2 \equiv M_1 \Leftrightarrow \bigwedge s_2 \in S_2 \bigvee s_1 \in S_1 \quad s_2 \equiv s_1$$
$$\wedge \bigwedge s_1 \in S_1 \bigvee s_2 \in S_2 \quad s_1 \equiv s_2 .$$

Definicja 4.2. jest szczególnym przypadkiem definicji 3.2. Oznacza to, że dla automatów zupełnych relacje $\geqslant$ i $\equiv$ są relacjami identycznymi w zbiorze automatów[2].

Relacja $\equiv$ w zbiorze stanów jednego automatu oraz relacja $\equiv$ w zbiorze automatów jest relacją zwrotną, symetryczną i przechodnią[3]; jest więc relacją równoważnościową.

D e f i n i c j a 4.3. Rodziną maksymalnych zbiorów stanów równoważnych nazywamy zbiór klas równoważności relacji $\equiv$.

Rodzina ta $\{B_1, B_2, \ldots, B_p\}$ ma następujące własności:

1. $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_p = S$

[1] W niniejszym rozdziale słowo „zupełny" będzie opuszczane.

[2] W przypadku automatów mocno spójnych; automatem mocno spójnym nazywamy taki automat, że dla każdej pary jego stanów $\langle s_1, s_2 \rangle$ istnieje takie słowo $\bar{x}$, że $\bar{\delta}(s_1, \bar{x}) = s_2$.

[3] Zob. odnośnik [1] na str. 206.

2. $B_i \cap B_j = \varnothing$ dla $i, j = 1, 2, \ldots, p \quad i \neq j$

3. $s_j \in B_i \leftrightarrow \bigwedge s_k \quad s_k \equiv s_j \quad s_k \in B_i$ [1].

Definicja 4.4

$$M_r = \mathrm{red}(M) \Leftrightarrow M_r \equiv M \wedge |S_r| \leqslant |S|.$$

Definicja 4.5

$$M_{min} = \min(M) \Leftrightarrow M_{min} = \mathrm{red}(M) \wedge \bigwedge M^* = \mathrm{red}(M) \quad |S^*| \geqslant |S_{min}|.$$

Definicje 4.4 i 4.5 są ścisłymi odpowiednikami definicji 3.3 i 3.4.

Podamy obecnie podstawowe twierdzenie teorii automatów zupełnych. Twierdzenie to podaje rozwiązanie zagadnienia minimalizacji.

Twierdzenie 4.1

A. Dla automatu zupełnego $M = \langle S, X, Y, \delta, \lambda \rangle$ skonstruujmy rodzinę maksymalnych zbiorów stanów równoważnych $\{B_1, B_2, \ldots, B_p\}$.

B. Skonstruujmy automat $M^* = \langle S^*, X, Y, \delta^*, \lambda^* \rangle$,

gdzie:

a) $S^* = \{s_1, s_2, \ldots, s_p\}$, przy czym istnieje funkcja f — „bijekcja" („1:1"), taka, że $f: \{B_1, B_2, \ldots, B_p\} \to S^*$, $f(B_i) = s_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, p$

b) $\delta^*(s_i, x) = s_j \leftrightarrow \delta(B_i, x) \subset B_j$ [2]

c) $\lambda^*(s_i, x) = \lambda(s^i, x)$ dla dowolnego $s_i \in B_i$

Wówczas $M^* = \min(M)$. Ponadto, jeżeli istnieje $M^{**} = \min(M)$, to M^* i M^{**} różnią się jedynie oznaczeniami stanów [3].

Podamy obecnie jeden z algorytmów wyznaczania relacji $\equiv$.

Algorytm 4.1

1. Należy skonstruować relację równoważnościową [4]

$$A_0 = \{(s_i, s_j) | \lambda(s_i, x) = \lambda(s_j, x) \ \bigwedge x\}.$$

2. Należy skonstruować kolejno relacje $A_1, A_2, \ldots$ tak, że

$$A_{k+1} = \{(s_i, s_j) | (\delta(s, x), \delta(s_j, x)) \in A_k \ \bigwedge x\}.$$

3. Jeżeli $A_m = A_{m+1}$, to $A_m = \equiv$ [5].

Algorytm ten prowadzi do wyznaczenia relacji $\equiv$ w skończonej liczbie kroków.

Istnieje również tablicowa postać tego algorytmu, bardziej odpowiednia do celów praktycznych. Nie będziemy jej tu rozważać, gdyż ten algorytm tablicowy jest powszechnie znany. Podobny algorytm wyznaczania relacji $\sim$ omówiony jest w rozdziale 5.

Istnieje też inny algorytm, bardzo wygodny, podany np. w [21].

---

[1] Do B_i należą więc wszystkie stany równoważne stanowi s_j i tylko takie stany.

[2] $\delta(B_i, x)$ oznacza zbiór stanów następnych otrzymywanych dla stanów należących do B_i pod wpływem x.

[3] M^* i M^{**} są automatami izomorficznymi.

[4] Ze względu na symetrię relacji pary (s_i, s_j) mogą być traktowane jako pary nie uporządkowane.

[5] Symbol $\equiv$ oznacza tu podzbiór zbioru $S \times S$ ($\langle s_1, s_2 \rangle \in \equiv$); ten sam symbol może też oznaczać funkcję zdaniową ($s_1 \equiv s_2$). Uwaga ta odnosi się także do relacji $\sim$ (rozdział 5).

Przykład 4.1

Należy wyznaczyć $M^* = \min(M)$ dla automatu M opisanego tablicą 4.1.

Tablica 4.1

	0	1	0	1
1	1	6	0	1
2	4	3	1	0
3	4	2	1	0
4	1	3	0	0
5	1	2	0	0
6	3	5	0	1

Najpierw wyznaczamy relację $\equiv$. Mamy: $A_0 = \{(16), (23), (45)\} \cup Z$, gdzie $Z = \{(11), \ldots (66)\}$. Wyznaczamy teraz pary stanów następnych par należących do A_0 i sprawdzamy, czy pary te należą do A_0. Mamy: (16)—(13), (56), (23)—(44), (23), (45)—(11), (23). Wobec tego otrzymujemy $A_1 = \{(23), (45)\} \cup Z$. W dalszym ciągu wyznaczamy pary stanów następnych par należących do A_1. Stwierdzamy, że $A_2 = \{(23), (45)\} \cup Z = A_1$. Mamy więc $\equiv = A_1$.

Ostatecznie $\equiv = \{(23), (45)\} \cup \{(11), (22), \ldots, (55)\}$. Zwykle drugi człon opuszczamy — jego istnienie wynika ze zwrotności relacji. Podobnie z symetrii relacji wynika możność pisania (kn) zamiast $\langle kn \rangle$. Jeżeli $\langle kn \rangle \in \equiv$, to również $\langle nk \rangle \in \equiv$. Otrzymujemy stąd rodzinę maksymalnych zbiorów stanów równoważnych $\{B\} = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{6\}\}$.

Automat M^* konstruujemy w sposób następujący: $f: \{B\} \to S^*$ $f(\{1\}) = p, f(\{2, 3\}) = q, f(\{4, 5\}) = r, f(\{6\}) = s$; $\delta^*(q, 0) = r$, gdyż $\delta(2, 0) = \delta(3, 0) \in \{4, 5\}$ $f(\{4, 5\}) = r$; $\delta^*(q, 1) = q$, gdyż $\delta(2, 1) = 3 \in \{2, 3\}$, $\delta(3, 1) = 2 \in \{2, 3\}$, $f(\{2, 3\}) = q$

$$\lambda^*(q, 0) = \lambda(2, 0) = \lambda(3, 0) = 1, \quad \lambda^*(q, 1) = \lambda(2, 1) = \lambda(3, 1) = 0.$$

Postępując w analogiczny sposób otrzymamy pełną tablicę 4.2.

Tablica 4.2

	0	1	0	1
p	p	s	0	1
q	r	q	1	0
r	p	q	0	0
s	q	r	0	1

Należy zwrócić uwagę, że przyjmując zamiast $\{B\}$ rodzinę $\{B^*\} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{45\}, \{6\}\}$ ($\{B^*\}$ — nie jest rodziną maksymalnych zbiorów stanów równoważnych) i konstruując automat M^0 w analogiczny sposób otrzymamy $M^0 = \text{red}(M)$; M^0 ma pięć stanów, wobec sześciu stanów M i czterech stanów M^*.

5. MINIMALIZACJA LICZBY STANÓW AUTOMATÓW NIEZUPEŁNYCH

Układ sekwencyjny otrzymany w etapie 3 syntezy (zob. rozdział 1) może być układem zupełnym lub układem niezupełnym, w zależności od rodzaju automatu otrzymanego w etapie 2 i wariantu kodowania przyjętego w etapie 3. Podczas syntezy kombinacyj-

nej etapu 4 układ ten w każdym razie staje się układem zupełnym. Wynika stąd, że można przyjąć, że już w etapie 2 dążymy do otrzymania automatu zupełnego[1]. Wydaje się więc, że można przyjąć następującą metodę minimalizacji liczby stanów automatu niezupełnego:

1. dla danego automatu niezupełnego M skonstruować wszystkie możliwe automaty zupełne M' takie, że $M' \geqslant M$; można to zrobić bardzo prosto zastępując wszystkie kreski wszystkimi możliwymi kombinacjami symboli należących do S lub do Y;

2. przeprowadzić minimalizację liczby stanów otrzymanych automatów zupełnych i wybrać ten, który ma najmniejszą liczbę stanów (M'').

Postępowanie to jest stosunkowo proste, ale nie daje w ogólnym przypadku prawidłowego rozwiązania. Automaty M'' i M nie muszą być związane zależnością $M'' = \min(M)$. Rozważmy prosty przykład.

Przykład 5.1

Rozważmy automat M_1 z przykładu 2.3. (tablica 5.1.a). Automat zupełny M_2 (przykład 3.2) opisany tablicą 5.1.b. obejmuje automat M_1: $M_2 \geqslant M_1$. Automat M_2 jest, jak łatwo sprawdzić, automatem minimalnym. Inne automaty zupełne o własności $M' \geqslant M_1$ są również automatami minimalnymi (automatów takich jest razem 4). Wydaje się więc, że nie jest możliwe otrzymanie automatu obejmującego automat M_1, a mającego mniej niż 3 stany.

Tablica 5.1.(a)

	0	1	0	1
p	q	r	—	—
q	p	p	0	1
r	p	p	1	0

Tablica 5.1.(b)

	0	1	0	1
p	q	r	0	0
q	p	p	0	1
r	p	p	1	0

Tablica 5.1.(c)

	0	1	0	1
p_1	q	r	0	1
p_2	q	r	1	0
q	p_1	p_2	0	1
r	p_1	p_2	1	0

Tablica 5.1.(d)

	0	1	0	1
$s(p_1, q)$	s	t	0	1
$t(p_2, r)$	s	t	1	0

Zwróćmy uwagę na istotny szczegół: z warunków postawionych automatowi M_1 (przykład 2.3) wynika, że określona ma być co druga litera wyjściowa. Pozostałe litery wyjściowe nas nie interesują. Automat M_2 jest automatem zupełnym — wszystkie litery wyjściowe muszą być określone. Ponadto jednakowym sekwencjom wejściowym odpowiadają jednakowe sekwencje wyjściowe. Jest to więcej, niż wynika z warunków. Możemy przyjąć, że jednakowym sekwencjom wejściowym odpowiadają sekwencje wyjściowe o jednakowych tylko tych literach, które nas interesują (co druga litera). Pozostałe litery są również określone, ale nie muszą być zawsze jednakowe. Zagadnienie polega na skonstruowaniu automatu mogącego pracować w ten sposób.

[1] Z punktu widzenia prostoty układów otrzymanych w wyniku syntezy kombinacyjnej takie założenie nie jest zbyt korzystne.

„Rozszczepiając" stan p w dwa stany p_1 i p_2, różniące się literami wyjściowymi, otrzymamy automat opisany w tablicy 5.1.c. Odpowiadający mu automat minimalny M_3 opisany jest przy pomocy tablicy 5.1.d. Ten automat rozważaliśmy już w przykładzie 3.2. Mamy $M_3 = \min(M_1)$. Załóżmy, że automat ten będąc w stanie s otrzymuje słowo wejściowe 01. Automat przechodzi kolejno ze stanu s do stanu s i ze stanu s do stanu t, a odpowiednie słowo wyjściowe ma postać 01. Załóżmy następnie, że automat w stanie t otrzymał powtórnie słowo 01. Automat przechodzi kolejno z t do s i z s do t, a odpowiednie słowo wyjściowe ma postać 11. Tak więc słowu wyjściowemu 01 odpowiadają dwa różne słowa wyjściowe 01 i 11 o jednakowej drugiej literze.

Oczywiście podana procedura może być stosowana tylko w bardzo prostych przypadkach i ma charakter intuicyjny. Zanim podamy metodę systematyczną równoważną metodzie „rozszczepienia", ale znacznie bardziej doskonałą, zastanowimy się nad znaczeniem symbolu „—" w tablicy przejść — wyjść w świetle definicji rozdziału 2 i przykładu 5.1.

Jeżeli parze $\langle s, x\rangle$ odpowiada kreska w tablicy przejść, to możliwe są dwie interpretacje: a) automat w stanie s nie może być pobudzany literą x; wtedy w odpowiednim miejscu tablicy przejść również występuje kreska, b) automat otrzymując w stanie s literę wejściową x przechodzi w „stan martwy" i nie może już być wyprowadzony z tego stanu; wtedy odpowiednia litera wyjściowa generowana przy przejściu do tego stanu martwego może być określona albo nieokreślona. Przy przyjęciu interpretacji b) i założeniu, że litera wyjściowa jest nieokreślona, najbardziej naturalna interpretacja tej nieoznaczoności polega na przyjęciu, że litera nieokreślona jest jedną z liter alfabetu wyjściowego — nie wiemy, jaka to litera, i dopuszczamy występowanie różnych liter w różnych okolicznościach. Podobną interpretację można przyjąć, gdy dla danej pary $\langle s, x\rangle$ określony jest stan następny, a nie jest określona litera wyjściowa. Z punktu widzenia metod minimalizacji interpretacje a) i b) prowadzą do jednakowych wyników — w obu przypadkach kreska może być zastąpiona określonym symbolem, przy czym symbol ten może ulegać zmianie zależnie od okoliczności — co odpowiada „rozszczepieniu".

Obecnie omówimy systematyczną metodę minimalizacji automatów niezupełnych.

D e f i n i c j a 5.1. Stany s_1 i s_2 automatu M nazywamy stanami zgodnymi[1] ($s_1 \sim s_2$) wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich słów wejściowych odpowiednich dla automatu M w stanie s_1 i w stanie s_2 odpowiednie litery słów wyjściowych dla obu tych stanów są równe, jeżeli obie są określone.

Relacja $\sim$ jest relacją zwrotną i symetryczną, ale nie jest relacją przechodnią. Z tego, że $p \sim q$ i $q \sim r$, nie wynika, że $p \sim r$ — mogą bowiem istnieć słowa $\bar{x}$ odpowiednie dla p i r, a nieodpowiednie dla q, takie, że $\bar{\lambda}(p, \bar{x}) \neq \bar{\lambda}(r, \bar{x})$.

D e f i n i c j a 5.2. Stany sprzeczne. $s_1 \nsim s_2 \leftrightarrow \neg(s_1 \sim s_2)$.

D e f i n i c j a 5.3. Zbiór stanów zgodnych $Q_\sim$.

$$Q_\sim = \{s_i | i = 1, 2, \ldots, p \bigwedge j, k \in \{0, 1, \ldots, p\}\ \ s_j \sim s_k\}.$$

D e f i n i c j a 5.4. Maksymalny zbiór stanów zgodnych Q^{max}

$$Q^* = Q^{max} \Leftrightarrow Q^* = Q_\sim \wedge \neg(\bigvee Q'_\sim \quad Q_\sim \neq Q'_\sim \wedge Q_\sim \subset Q'_\sim).$$

Tak więc zbiorem stanów zgodnych jest taki zbiór, że każda para stanów do niego należących jest w relacji $\sim$. Zbiór stanów zgodnych jest zbiorem maksymalnym stanów

[1] W [11] autor używa terminu „niesprzeczne".

zgodnych, jeżeli nie jest podzbiorem właściwym innego zbioru stanów zgodnych. Należy zwrócić uwagę na to, że maksymalne zbiory stanów zgodnych dla danego automatu nie muszą być zbiorami rozłącznymi; wynika to z faktu, że relacja $\sim$ nie jest relacją przechodnią.

Podobnie definiujemy zbiór stanów sprzecznych $R_{\sim}$ i maksymalny zbiór stanów sprzecznych $R^{max}_{\sim}$.

Podamy obecnie podstawowe twierdzenie teorii automatów niezupełnych. Twierdzenie to daje częściowe rozwiązanie zagadnienia minimalizacji.

Twierdzenie 5.1.

A. Dla automatu niezupełnego $M = \langle S, X, Y, \delta, \lambda\rangle$ utwórzmy rodzinę maksymalnych zbiorów stanów zgodnych $\{Q_1, \ldots, Q_k\}$ oraz rodzinę maksymalnych zbiorów stanów sprzecznych $\{R_1, \ldots, R_m\}$.

B. Utwórzmy rodzinę $\{P_1, \ldots, P_n\}$ o następujących własnościach:

1) $\bigwedge P_j \bigvee Q_i \;\; P_j \subset Q_i$

2) $\bigcup_{j=1}^{n} P_j = S$

3) $\bigwedge x \bigwedge P_j \bigvee P_i \;\; \delta(P_j, x) \subset P_i$.

4) rodzina $\{P_1, \ldots, P_n\}$ zawiera najmniejszą możliwą liczbę zbiorów P_j.

C. Skonstruujmy automat $M^* = \langle S^*, X, Y, \delta^*, \lambda^*\rangle$, gdzie:

a) $S^* = \{p_1, \ldots, p_n\}$, przy czym istnieje funkcja f
—„bijekcja", taka, że
$f: \{P_1, \ldots, P_n\} \to S^*$
$f(P_i) = p_i \quad i = 1, \ldots, n$

b) $\langle p_j, x\rangle \in D_{\delta^*} \leftrightarrow \bigvee s_j \in P_j \;\; \langle s_j, x\rangle \in D_\delta$,
$\langle s_j, x\rangle \in D_{\delta^*} \to \delta^*(p_j, x) = p_i \leftrightarrow \delta(P_j, x) \subset P_i$

c) $\langle p_j, x\rangle \in D_{\lambda^*} \leftrightarrow \bigvee s_j \in P_j \;\; \langle s_j, x\rangle \in D_\lambda$
$\langle p_j, x\rangle \in D_{\lambda^*} \to \lambda^*(p_j, x) = \lambda(s_j, x) \;\; \bigwedge s_j \in P_j \wedge \langle s_j, x\rangle \in D_\lambda$.

Wtedy

I $M^* = \min(M) = M_{min}$

II $d \leqslant n \leqslant g$

gdzie:

$n = |S^*|$ — liczba stanów automatu M_{min}

$g = \min(k, t)$

$t = |S|$ — liczba stanów automatu M

$k =$ liczba zbiorów w rodzinie $\{P_j\}$

d[1] $= \max(v_1, \ldots, v_m) \quad v_i = |R_i|$.

Tak więc minimalizacja liczby stanów automatu niezupełnego sprowadza się do

1) wyznaczenie relacji $\sim$ i rodziny $\{Q_1, \ldots, Q_k\}$,

2) wyznaczenia rodziny $\{P_1, \ldots, P_n\}$,

3) właściwej konstrukcji automatu minimalnego.

Rozwiązanie punktu 1) sprowadza się do wykorzystania stosunkowo prostych algorytmów, które podamy w dalszym ciągu niniejszego rozdziału. Również rozwiązanie

[1] d może być również wyznaczone jako najmniejsza liczba zbiorów Q_j, które należy wybrać, aby spełnić warunek 2).

punktu 3) nie nastręcza trudności. Najtrudniejsze jest rozwiązanie punktu 2). Istniejące metody systematyczne są dość skomplikowane i dlatego często bardziej celowe jest wykorzystanie metody prób w oparciu o część II powyższego twierdzenia.

Obecnie przedyskutujemy w sposób mniej formalny własności rodziny $\{P_j\}$. Warunek 1) oznacza, że elementy rodziny są albo maksymalnymi zbiorami stanów zgodnych, albo ich podzbiorami. Warunek 2) oznacza, że każdy stan automatu M musi występować w przynajmniej jednym zbiorze rodziny. Jeżeli rodzina $\{P_j\}$ spełnia ten warunek, to mówimy, że pokrywa ona zbiór S. Warunek 3) oznacza, że zbiór stanów następnych dla każdego elementu rodziny i dla każdej litery wejściowej musi być albo elementem rodziny, albo podzbiorem elementu rodziny. Jeżeli rodzina $\{P_j\}$ spełnia ten warunek, to nazywamy ją rodziną zamkniętą. Tak więc rodzina $\{P_j\}$ spełniająca warunki 1—4 jest minimalną (warunek 4), zamkniętą (warunek 3) rodziną zbiorów stanów zgodnych (warunek 1), pokrywającą zbiór stanów automatu M (warunek 2).

Omówimy obecnie konstrukcję automatu M^* w sposób mniej formalny:

a) każdemu zbiorowi P_i rodziny $\{P_j\}$ przyporządkowujemy element p_i zbioru S^* automatu M^*,

b) funkcja $\delta^*(p_j, x)$ jest określona, jeżeli istnieje taki stan $s^j \in P_j$, że $\delta(s^j, x)$ jest określona; jeżeli funkcja $\delta^*(p_j, x)$ jest określona, to dla wyznaczenia jej wartości należy wybrać wszystkie stany $s^j \in P_j$ takie, że $\delta(s^j, x)$ jest określone, i sprawdzić, do którego ze zbiorów rodziny $\{P_j\}$ należą stany $\delta(s^j, x)$ dla wszystkich s^j; jeżeli $\delta(s^j, x) \in P_i$, to należy przyjąć $\delta^*(p_j, x) = p_i$.

c) funkcja $\lambda^*(p_j, x)$ jest określona, jeżeli istnieje taki stan $s^j \in P_j$, że $\lambda(s^j, x)$ jest określona; jeżeli funkcja ta jest określona, to $\lambda^*(p_j, x) = \lambda(s^j, x)$, gdzie s^j jest dowolnym stanem należącym do P_j takim, że $\lambda(s^j, x)$ jest określone.

Konstrukcja ta jest analogiczna do konstrukcji automatu zupełnego w twierdzeniu 4.1. Główne różnice polegają na tym, że teraz konieczne jest badanie, czy odpowiednie funkcje istnieją, i na tym, że w niektórych przypadkach możliwe jest otrzymanie kilku automatów, gdyż rodzina $\{P_j\}$ (w przeciwieństwie do rodziny $\{B_j\}$ z twierdzenia 4.1.) nie jest rodziną zbiorów rozłącznych.

Podamy teraz wnioski wypływające z tezy twierdzenia (I i II) oraz ze sposobu konstrukcji automatu M.

W n i o s e k 5.1. Rodzina $\{Q_j\}$ maksymalnych zbiorów stanów zgodnych spełnia warunki 1), 2), 3) twierdzenia 5.1. Jeżeli liczba zbiorów zawartych w tej rodzinie jest mniejsza od liczby stanów automatu $M (k < t)$, to automat M^* skonstruowany w oparciu o rodzinę $\{Q_j\}$ ma własność $M^* = \mathrm{red}(M)$. Dla $k = t$ mamy przypadek trywialny.

W n i o s e k 5.2. Jeżeli $d = g$ i $k \geqslant t$, to nie istnieje układ minimalny $\min(M)$ z wyjątkiem samego układu M.

W n i o s e k 5.3. Jeżeli $k \leqslant t$, to istnieje zawsze układ $\mathrm{red}(M)$ o k stanach. Jeżeli nie istnieje taka rodzina $\{P_j\}$, że $n < k$, to układ ten jest także układem minimalnym.

W n i o s e k 5.4. Dla danego automatu M może istnieć więcej niż jedna rodzina $\{P_j\}$ spełniająca warunki 1—4 twierdzenia 5.1.

W n i o s e k 5.5. Dla danej rodziny $\{P_j\}$ może istnieć więcej niż jeden automat skonstruowany zgodnie z C. (twierdzenie 5.1). Może się zdarzyć, że $\delta(P_j, x) \subset P_i$ oraz $\delta(P_j, x) \subset P_k$. Wtedy można przyjąć $\delta^*(p_j, x) = p_i$ albo $\delta^*(p_j, x) = p_k$.

W n i o s e k 5.6. Automat otrzymany w C może być automatem niezupełnym. Jeżeli nie istnieje takie $s_j \in P_j$, że $\langle s_j, x\rangle \in D_\delta$, to $\delta^*(p_j, x)$ jest nieokreślone. Jeżeli nie istnieje takie $s_j \in P_j$, że $\langle s_j, x\rangle \in D_\lambda$, to $\lambda^*(p_j, x)$ jest nieokreślone. Automat zupełny M^{**} otrzymany z automatu niezupełnego M^* przez zastąpienie kresek dowolnymi symbolami[1] ma również własność $M^{**} = \min(M)$.

Podamy obecnie jeden z algorytmów wyznaczania relacji $\sim$.

A l g o r y t m 5.1

1. Należy skonstruować relację:[2]

$$A_0 = \{(s_i, s_j) | \langle s_i, x\rangle \in D_\lambda \wedge \langle s_j, x\rangle \in D_\lambda \Rightarrow \lambda(s_i, x) = \lambda(s_j, x) \bigwedge x\}.$$

2. Należy skonstruować kolejno relacje $A_1, A_2, \ldots$ tak, że

$$A_{k+1} = \{(s_i, s_j) | \langle s_i, x\rangle \in D_\delta \wedge \langle s_j, x\rangle \in D_\delta \Rightarrow (\delta(s_i, x), \delta(s_j, x)) \in A_k \bigwedge x\}.$$

3. Jeżeli $A_m = A_{m+1}$, to $\sim = A_m$.

Algorytm ten prowadzi do wyznaczenia relacji $\sim$ w skończonej liczbie kroków.

Istnieje również postać tablicowa tego algorytmu, bardzo wygodna w praktyce — rozpatrzymy ją na przykładach.

P r z y k ł a d 5.2

Należy wyznaczyć automat minimalny dla automatu opisanego tablicą 5.2.

Najpierw wyznaczamy relację $\sim$. Korzystamy z podanego algorytmu. Mamy:

$$A_0 = \{(16), (23), (24), (25), (27), (34), (35), (37), (45), (47), (57), \} \cup Z,$$

gdzie $Z = \{(11), (22), \ldots, (77)\}$.

Wyznaczamy teraz pary stanów następnych par należących do A_0 i sprawdzamy, czy pary te (jeżeli oba stany następne są określone) należą do A_0. Otrzymujemy: (16)—(—), (23)—(24), (24)—(25), (25)—(—), (27)—(26) itd. Mamy więc:

$$A_1 = \{(16), (23), (24), (25), (34), (35), (57)\} \cup Z.$$

Wyznaczamy teraz pary stanów następnych par należących do A_1 i sprawdzamy, czy należą do A_1. Otrzymujemy w ten sposób:

$$A_2 = \{(16), (23), (24), (25), (35), (57)\} \cup Z.$$

Dalej wyznaczamy w analogiczny sposób A_3 i stwierdzamy, że $A_3 = A_2$. Tak więc $\sim = A_2$.

Podamy teraz algorytm tablicowy stanowiący bardziej „upraktycznioną" wersję rozważanego algorytmu.

1. Konstruujemy tablicę (tablica 5.3) ułatwiającą porównanie stanów parami.

2. Wpisujemy $\times$ w kratki odpowiadające tym parom, które nie należą do A_0.

3. W pozostałe kratki wpisujemy: a) znaczek $\vee$, jeżeli dla dowolnego x albo para stanów następnych należy do Z (stany te są identyczne), albo jeden ze stanów jest nieokreślony, albo para stanów następnych jest taka sama jak para stanów obecnych; pary

[1] Stopień skomplikowania końcowego układu sekwencyjnego zależy między innymi od sposobu przejścia od M^* do M^{**}.

[2] Jest to relacja zwrotna i symetryczna.

oznaczone ∨ należą do wszystkich A_k — należą więc do ~, b) pary stanów następnych, jeżeli nie spełniają warunków a).

4. Dla każdej pary (*ij*), której kratka została w p. 2 oznaczona ×, sprawdzamy, czy istnieją kratki (*nm*), w które wpisano zgodnie z p. 3b symbol (*ij*). W takich kratkach wpisujemy symbol × na symbolu (*ij*). Po dokonaniu sprawdzenia uzupełniamy kratkę(*ij*) zawierającą symbol × — symbolem ○. Pary, których kratki nie mają symboli × (wpisanych w punkcie 2 lub w punkcie 4), należą do A_1.

5. Dla każdej pary (*nm*), której kratka została uzupełniona symbolem × w punkcie 4, dokonujemy sprawdzenia jak w punkcie 4 stosując identyczne oznaczenia.

6. Procedurę kończymy, gdy wszystkie kratki posiadające symbole × (wpisane w p. 2 lub w punktach późniejszych) mają także symbole ○. Kratki nie posiadające symboli × odpowiadają parom należącym do relacji ~.

Tablica 5.3 prowadzi do identycznego wyniku, co poprzednio stosowany algorytm.

Następnie wyznaczamy rodzinę maksymalnych zbiorów stanów zgodnych[1]. Sprawdzamy, czy nie można utworzyć zbiorów zawierających 3 stany. Ze względu na to, że pary (23), (25) i (35) należą do relacji ~, zbiór {2, 3, 5} jest zbiorem maksymalnym. Mamy więc:

$$\{Q_j\} = \{\{1, 6\}, \{2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{5, 7\}\}$$

Tablica 5.2

	0	1	0	1
1	3	2	0	0
2	—	2	—	1
3	—	4	—	1
4	7	5	1	1
5	6	—	1	—
6	—	—	0	0
7	6	6	1	1

Tablica 5.3

	1	2	3	4	5	6
2	× ○					
3	× ○	24				
4	× ○	25	~~45~~ ○			
5	× ○	v	v	~~67~~ ○		
6	v	× ○	× ○	× ○	× ○	
7	× ○	~~26~~ ○	~~46~~ ○	~~56~~ ~~57~~ ○	v	× ○

Tablica 5.4

6	67
5	67 56
4	~~67~~ ~~56~~ ~~47~~ ~~46~~ ~~45~~ 467 456
3	~~467~~ 456 ~~37~~ ~~36~~ ~~34~~ 3467
2	3467 456 ~~27~~ ~~26~~ 267
1	3467 456 267 ~~17~~ ~~15~~ ~~14~~ ~~13~~ ~~12~~ 1347 127 154

Z tablicy 5.3. można bezpośrednio odczytać również relację ≁.

Dla wyznaczenia rodziny maksymalnych zbiorów stanów sprzecznych konstruujemy tablicę 5.4. Wiersze tej tablicy odpowiadają kolumnom tablicy 5.3. Wypisujemy kolejne pary stanów sprzecznych od prawej do lewej i tworzymy możliwie jak największe zbiory stanów sprzecznych. Otrzymujemy ostatecznie:

$$\{R_j\} = \{\{1347\}, \{3467\}, \{456\}, \{267\}, \{127\}, \{154\}\}.$$

[1] Istnieje także inny algorytm umożliwiający wyznaczanie rodziny $\{Q_j\}$ bez wyznaczania relacji ~ — zob. [16].

Ten sam algorytm może być stosowany do wyznaczenia rodziny $\{Q_j\}$, gdy znana jest relacja $\sim$.

Obecnie wyznaczymy ograniczenia na liczbę stanów układu minimalnego zgodnie z p. II twierdzenia 5.1. Mamy:

liczba zbiorów rodziny $\{Q_j\}$ $k = 4$,

liczba stanów automatu M $t = 7$,

granica górna $g = \min(4, 7) = 4$,

granica dolna $d = \max(4, 4, 3, 3, 3, 3) = 4$.

Również najmniejsza liczba zbiorów Q_j potrzebnych do pokrycia zbioru S wynosi 4 (zob. odnośnik na str. 212). Mamy stąd

$$4 \leqslant n \leqslant 4 \text{ — a więc } n = 4.$$

Następnie wyznaczamy rodziny $\{P_j\}$. Z powyższego oszacowania wynika, że otrzymamy układ minimalny przyjmując $\{P_j\} = \{Q_j\}$. Inne rodziny spełniające warunki 1) i 2) twierdzenia 5.1. są: $\{\{1, 6\}, \{4\}, \{2, 3, 5\}, \{5, 7\}\}$, $\{\{1, 6\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \{5. 7\}\}$, ..., ..., $\{\{1, 6\}, \{2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{7\}\}$. Tylko ostatnia z nich spełnia także warunek 3. Można to stwierdzić stosunkowo łatwo przy pomocy tablicy 5.5.

Tablica 5.5

x \ P_j	1 6	2 4	2 3 5	5 7
0	3 —	— 7	— — 6	6 6
1	2 —	2 5	2 4 —	— 6

Teraz wyznaczamy automaty M^*. Najpierw przyjmiemy $\{P_j\} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, gdzie $P_1 = \{1, 6\}$, $P_2 = \{2, 4\}$, $P_3 = \{2, 3, 5\}$, $P_4 = \{7\}$.

a) Określamy funkcję f tak, że $f(P_i) = p_i$, $i = 1, \ldots, 4$;

b) Wyznaczamy funkcję δ^*

$\delta^*(p_1, 0) = p_3$, gdyż $1 \in P_1$, $\delta(1, 0) = 3 \in P_3$

$\delta^*(p_1, 1) = p_2$ albo p_3, gdyż $1 \in P_1$, $\delta(1, 1) = 2 \in P_2$ oraz P_3

$\delta^*(p_2, 0) = p_4$, gdyż $4 \in P_2$, $\delta(4, 0) = 7 \in P_4$

$\delta^*(p_2, 1) = p_3$, gdyż $2 \in P_2$, $\delta(2, 1) = 2 \in P_3$ oraz $4 \in P_2$

$\delta(4, 1) = 5 \in P_3$ itd.

Można stosować również zapis skrócony — bardzo wygodny:

np. $\delta(P_2, 1) = \delta(\{2, 4\}, 1) = \{2, 5\} \subset \{2, 3, 5\} = P_3$, a więc $\delta^*(p_2, 1) = p_3$.

c) Wyznaczamy funkcję

$\lambda^*(p_1, 0) = \lambda(1, 0) = \lambda(6, 0) = 0$

$\lambda^*(p_1, 0) = \lambda(1, 1) = \lambda(6, 1) = 0$

$\lambda^*(p_2, 0) = \lambda(4, 0) = 1$, $\lambda(2, 0)$ — nieokreślone

$\lambda^*(p_2, 1) = \lambda(2, 1) = \lambda(4, 1) = 1$ itd.

Otrzymujemy ostatecznie automat opisany tablicą 5.6.

Tablica 5.6

	0	1	0	1
p_1	p_3	$p_2 \vee p_3$	0	0
p_2	p_4	p_3	1	1
p_3	p_1	p_2	1	1
p_4	p_1	p_1	1	1

W etapie 4 syntezy trzeba przyjąć albo $\delta^*(p_1, 1) = p_2$, albo $\delta^*(p_1, 1) = p_3$. Dalsze projektowanie dotyczy układu w pełni określonego.

Przyjmując $P_4 = \{5, 7\}$ otrzymamy, jak łatwo sprawdzić, identyczny automat.

Przykład 5.3

Należy wyznaczyć automat minimalny dla automatu opisanego tablicą 5.7. Automat ten pracuje w sposób podobny jak automat z przykładu 2.3.: sygnał wyjściowy określony jest co trzeci krok; wynosi on 0, jeżeli liczba jedynek w sygnale wejściowym podczas trzech kroków układu była parzysta, a 1, jeżeli była nieparzysta.

Tablica 5.7

	0	1	0	1
1	2	3	—	—
2	4	5	—	—
3	5	4	—	—
4	1	1	0	1
5	1	1	1	0

Tablica 5.8

2	24, 35			
3	25, 34	~~45~~ o		
4	12, 13	14, 15	14, 15	
5	12, 13	14, 15	14, 15	× o
	1	2	3	4

Najpierw wyznaczamy relację $\sim$. Wyniki podane są w tablicy 5.8. Następnie wyznaczamy rodzinę $\{Q_j\}$ przy pomocy tablicy 5.9.

Tablica 5.9

4	—												
3	35	34											
2	35	34	25	24									
1	~~35~~	~~34~~	~~25~~	~~24~~	~~15~~	~~14~~	~~13~~	~~12~~	124	125	134	135	

Mamy więc $\{Q_j\} = \{\{124\}, \{125\}, \{134\}, \{135\}\}$.
Mamy też $\{R_j\} = \{\{4, 5\}, \{2,3\}\}$.

W dalszym ciągu wyznaczamy ograniczenia na liczbę stanów układu minimalnego. Mamy

$k = 4$, $t = 5$. Stąd

$$\max(2, 2) \leqslant n \leqslant \min(4, 5)$$
$$2 \leqslant n \leqslant 4$$

Granicę dolną można też wyznaczyć biorąc pod uwagę, że minimalna liczba zbiorów Q_j takich, że $\bigcup Q_i = S$, wynosi 2.

Obecnie wyznaczamy rodzinę $\{P_j\}$. Sporządzamy tablicę 5.10.

Tablica 5.10

x \ P_j	124	125	134	135
0	241	241	251	251
1	351	351	341	341

Najpierw szukamy rodzin o dwóch elementach. Istnieją dwie rodziny spełniające warunek pokrycia zbioru S, a mianowicie $\{\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 5\}\}$ oraz $\{\{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}\}$. Jak łatwo sprawdzić przy pomocy tablicy 5.10., żadna z tych rodzin nie jest rodziną zamkniętą. Teraz należałoby rozpatrzyć wszystkie rodziny trzyelementowe — jest to procedura dość długa. W rozważanym przypadku można prościej otrzymać rozwiązanie wychodząc ze zbiorów stanów sprzecznych. Warunkiem otrzymania rodziny trzyelementowej jest, aby przynajmniej dwa stany, z których każdy należy do innego zbioru R, były zawarte w jednym zbiorze Q. Załóżmy, że są to stany (24). Pary stanów następnych odpowiednie dla $x = 0, 1$ są (14), (15). Dla każdej z tych par pary stanów następnych są odpowiednio (12), (13). Dla pary (12) otrzymamy (24), (35); dla (13)—(25), (34). Nie można skonstruować takiej zamkniętej rodziny o trzech elementach, aby żadne z powyższych par nie uległy podziałowi. Inne możliwe pary początkowe są (34), (25), (35). Pary stanów następnych dla każdej z tych par są (14), (15). Tak więc nie istnieje rodzina $\{P_j\}$ o trzech elementach spełniająca założenia twierdzenia 4.1. Dalsze próby powinny dotyczyć rodzin czteroelementowych. Ponieważ rodzina $\{Q_j\}$ zawiera cztery elementy, można przyjąć $\{P_j\} = \{Q_j\}$.

Następny etap polega na konstrukcji automatu M^*. Przyjmując $\{P_j\} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\} = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}\}$ oraz f takie, że $f(P_j) = p_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, otrzymamy automat opisany tablicą 5.11.

Tablica 5.11

	0	1	0	1
p_1	p_1	p_4	0	1
p_2	p_1	p_4	1	0
p_3	p_2	p_3	0	1
p_4	p_2	p_3	1	0

6. MINIMALIZACJA LICZBY STANÓW AUTOMATÓW Z OGRANICZONYM WEJŚCIEM

Z rozważań poprzedniego rozdziału wynika, że najtrudniejszym etapem minimalizacji automatu niezupełnego jest wyznaczanie rodziny $\{P_j\}$. Zagadnienie to może być rozwiązane szczególnie prosto dla pewnej szczególnej klasy automatów symetrycznie niezupełnych.

Definicja 6.1. Automatem z ograniczonym wejściem nazywamy automat, na którego wejściu nie pojawiają się pewne słowa wejściowe, a ograniczenie na słowa zakazane ma postać: po literze x_i nie może pojawiać się bezpośrednio litera x_j, gdzie $i \neq j$ lub $i = j$. Automat taki nie ma nieoznaczoności innego typu.

Wniosek 6.1. Automat z ograniczonym wejściem jest automatem symetrycznie niezupełnym[1].

Twierdzenie 6.1

W przypadku automatu z ograniczonym wejściem rodzina $\{P_j\} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ taka, że $P_i \in \{Q_j\}$ dla $i = 1, \ldots, n$ oraz $P_1 \cup P_2 \ldots \cup P_n = S$, jest rodziną zamkniętą.

[1] Przyjmujemy tu interpretację a) nieoznaczoności automatu — zob. str. 211.

Należy zwrócić uwagę, że powyższe twierdzenie nie obowiązuje, gdy $P_i \subset Q_i$ oraz $P_i \neq Q_i$.

Tak więc dla wyznaczenia automatu minimalnego należy wybrać minimalną rodzinę maksymalnych zbiorów zgodnych pokrywającą zbiór stanów automatu pierwotnego. Otrzymany w ten sposób automat jest automatem minimalnym, chociaż mogą istnieć także inne automaty minimalne (o takiej samej liczbie stanów).

Przykład 6.1

Należy wyznaczyć automat minimalny dla automatu opisanego tablicą 6.1. Nieoznaczoności tego automatu wynikają z założenia, że nie pojawiają się słowa wejściowe, w których x_1 następuje po x_3, oraz słowa, w których x_2 następuje po x_4.

Tablica 6.1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1	x_2	x_3	x_4
1	6	1	2	4	0	0	0	0
2	—	6	2	4	—	0	0	0
3	—	1	3	4	—	0	0	0
4	5	—	2	4	1	—	0	0
5	5	5	3	4	1	0	0	0
6	1	6	3	4	0	0	0	0

Wyznaczamy kolejno relacje $\sim$ i $\nsim$ oraz $\{Q_j\}$ i $\{R_j\}$. Wyniki podane są w tablicach 6.2 i 6.3.

Tablica 6.2

2	16				
3	23	16			
4	× o	v	23		
5	× o	23, ~~36~~ o	~~15~~ o	23	
6	23	23	16	× o	× o
	1	2	3	4	5

Tablica 6.3

5	—							
4	45							
3	45	36	34					
2	45	~~36~~	~~34~~	~~26~~	~~24~~	~~23~~	236	234
1	234	~~236~~	45	~~16~~	~~13~~	~~12~~	1236	

$$\{Q_j\} = \{\{1, 2, 3, 6\}, \{2, 3, 4\}, \{4, 5\}\}$$

$$\{R_j\} = \{\{5, 6\}, \{4, 6\}, \{3, 5\}, \{2, 5\}, \{1, 5\}, \{1, 4\}\}$$

$$\max(2, \ldots 2) \leqslant n \leqslant \min(3, 6)$$

$$2 \leqslant n \leqslant 3.$$

Rodzina $\{\{1, 2, 3, 6\}, \{4, 5\}\}$ spełnia warunki założenia twierdzenia 6.1.

Przyjmując $\{P_j\} = \{P_1, P_2\} = \{\{1, 2, 3, 6\}, \{4, 5\}\}$ otrzymamy automat opisany tablicą 6.4.

Tablica 6.4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1	x_2	x_3	x_4
p_1	p_1	p_1	p_1	p_2	0	0	0	0
p_2	p_2	p_2	p_1	p_2	1	0	0	0

7. ZAGADNIENIE WYZNACZANIA RODZINY $\{P_j\}$

Jak widzieliśmy z dotychczasowych rozważań, jedynym istotnie trudnym problemem minimalizacji automatów niezupełnych jest wyznaczenie rodziny $\{P_j\}$ spełniającej warunki twierdzenia 5.1. Najczęściej stosowane są tu metody prób wychodzące z oszacowania liczby stanów automatu minimalnego. Stosowana bywa również metoda wykorzystująca rodzinę $\{R_j\}$[1] zastosowana w przykładzie 5.3.

Istnieją również dwie stosunkowo nowe metody systematyczne wyznaczania rodziny $\{P_j\}$[2]. Obie te metody, a zwłaszcza pierwsza z nich[3], są dość skomplikowane i ich wykorzystanie nie jest łatwe. Przedstawimy tu metodę podaną przez Meisela w oparciu o pierwszą część metody podanej przez Grasselliego i Lucciego.

D e f i n i c j a 7.1. Zbiorem stanów następnych zbioru stanów zgodnych $T = \{s_1, s_2, \ldots, s_q\}$ uzyskanych pod wpływem litery wejściowej x_i nazywamy zbiór

$$T_i = \{s | s = \delta(s_j, x_i) \quad s_j \in T\}.$$

D e f i n i c j a 7.2. Rodziną właściwą zbiorów stanów następnych zbioru stanów zgodnych T nazywamy rodzinę:

$$V = \{T_i | x_i \in X \wedge |T_i| > 1 \wedge \neg(T_i \subset T) \wedge \neg(\bigvee T_i^* \in V \quad T \subset T_i^* \wedge T_i \neq T_i^*)\}.$$

Tak więc do rodziny właściwej zbiorów stanów następnych V zbioru stanów zgodnych T należą zbiory stanów następnych otrzymane dla wszystkich liter wejściowych x_i z wyjątkiem a) zbiorów jednoelementowych, b) zbiorów będących podzbiorami zbioru T, c) zbiorów będących podzbiorami właściwymi innych zbiorów należących do rodziny V. Tak określona rodzina V charakteryzuje zbiór T z punktu widzenia zamkniętości.

D e f i n i c j a 7.3. Zbiór stanów zgodnych T_k wyklucza zbiór stanów zgodnych T_m, jeżeli $T_m \subset T_k \wedge T_m \neq T_k$ oraz $V_k \subset V_m$, gdzie V_k i V_m są odpowiednio rodzinami właściwymi zbiorów stanów następnych zbiorów T_k i T_m.

Wobec $T_m \nsubseteq T_k$ operowanie zbiorem T_m nie jest potrzebne z punktu widzenia warunku pokrycia, a wobec $V_k \subset V_m$ operowanie zbiorem T_k jest wygodniejsze z punktu widzenia warunku zamkniętości.

Z podanej definicji wynikają następujące wnioski:

[1] Metodę tę wprowadza Unger w [20].
[2] Grasselli i Luccio [6] oraz Meisel [17].
[3] Metoda [6] nadaje się raczej do zaprogramowania dla maszyny cyfrowej.

Wniosek 7.1. Jeżeli $T_m \subsetneq T_k$, $V_k = \varnothing$, $V_m \neq \varnothing$, to T_k wyklucza T_m.

Wniosek 7.2. Jeżeli $T_m \subsetneq T_k$, $V_k = V_m$, to T_k wyklucza T_m.

Wniosek 7.3. Jeżeli $T_m \subsetneq T_k$, $V_k = \varnothing$, to T_k wyklucza T_m dla dowolnego V_m.

Definicja 7.4. Zbiór stanów zgodnych, który nie jest wykluczony przez żaden inny zbiór stanów zgodnych, nazywamy pierwotnym zbiorem stanów zgodnych.

Wniosek 7.4. Zbiór maksymalny stanów zgodnych jest pierwotnym zbiorem stanów zgodnych.

Twierdzenie 7.1

Przynajmniej jedna minimalna zamknięta rodzina zbiorów stanów zgodnych pokrywająca zbiór S jest rodziną złożoną wyłącznie z pierwotnych zbiorów stanów zgodnych.

Tak więc rozważając jedynie pierwotne zbiory stanów zgodnych można wyznaczyć rodzinę spełniającą warunki twierdzenia 5.1. Mogą jednak istnieć także inne rodziny, które zawierają również zbiory nie będące zbiorami pierwotnymi, a spełniające również warunki twierdzenia 5.1.

Rozważymy obecnie zagadnienie wyznaczania pierwotnych zbiorów stanów zgodnych. Punktem wyjścia jest tu rodzina maksymalnych zbiorów stanów zgodnych. Wyznaczanie pierwotnych zbiorów stanów zgodnych polega na sprawdzeniu, czy istnieją takie podzbiory zbiorów maksymalnych, które nie są wykluczane przez żaden zbiór stanów zgodnych. Podzbiory tych zbiorów maksymalnych, których rodzina właściwa jest pusta, nie mogą być zbiorami pierwotnymi (wniosek 7.3); takich zbiorów maksymalnych nie musimy więc brać pod uwagę w procesie wyznaczania zbiorów pierwotnych. Podamy obecnie algorytm wyznaczania zbiorów pierwotnych stanów zgodnych[1].

Algorytm 7.1

1. Na listę zbiorów pierwotnych stanów zgodnych należy wpisać największe maksymalne zbiory stanów zgodnych o liczności n.

2. Na listę zbiorów pierwotnych stanów zgodnych należy wpisać te podzbiory zbiorów z punktu 1 o liczności $n-1$, które nie są wykluczane przez żaden ze zbiorów z punktu 1 oraz maksymalne zbiory stanów zgodnych o liczności $n-1$.

3. Na listę zbiorów pierwotnych stanów zgodnych należy wpisać te zbiory o liczności $i-1$, które są podzbiorami zbiorów o liczności $n, n-1, \ldots, i$, wpisanymi już na tworzoną listę, i nie są wykluczane przez żaden z tych zbiorów.

4. Procedurę należy kontynuować aż do $i-1 = 1$.

5. Należy skreślać z listy zbiory powtarzające się.

Definicja 7.5. Łańcuchem nazywamy uporządkowany zbiór elementów $\langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \rangle$. Element α_1 nazywamy elementem generującym, element α_n elementem końcowym, a liczbę n — długością łańcucha.

Definicja 7.6. Zbiór łańcuchów

$$\{\langle \alpha_1^1, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_{n_1}^1 \rangle, \langle \alpha_1^2, \alpha_2^2, \ldots, \alpha_{n_2}^2 \rangle, \ldots, \langle \alpha_1^m, \alpha_2^m, \ldots, \alpha_{n_m}^m \rangle\}$$

nazywamy drzewem, jeżeli

$$\bigwedge i, j \in \{1, 2, \ldots, m\} \quad \bigvee k < \min(n_i, n_j) \quad \alpha_l^i = \alpha_l^j, \quad l \leqslant k.$$

[1] Algorytm ten oraz wszystkie poprzednie definicje i twierdzenia zostały podane w [6]; dalsze rozważania oparte są na [17]; postać formalna dalszych definicji pochodzi od autora artykułu.

W dalszym ciągu będziemy rozważać łańcuchy i drzewa, których elementami są zbiory pierwotne stanów zgodnych.

Definicja 7.7. Łańcuch pierwotnych zbiorów stanów zgodnych $\langle T_1, T_2, \ldots, T_q \rangle$ spełnia warunek pokrycia zbioru stanów S, jeżeli $T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_q = S$.

Oznacza to, że każdy stan układu sekwencyjnego należy do przynajmniej jednego zbioru T_j.

Definicja 7.8. Łańcuch pierwotnych zbiorów stanów zgodnych $\langle T_k \rangle$ spełnia warunek zamkniętości, jeżeli

$$\bigwedge T_j \in \langle T_k \rangle \; [V_j = \varnothing \vee \bigwedge T_{ji} \in V_j \bigvee T_l \in \langle T_k \rangle \; T_{ij} \subset T_l] .$$

Oznacza to, że dla każdego zbioru T_j wchodzącego w skład łańcucha musi zachodzić jeden z następujących przypadków: a) rodzina właściwa jest rodziną pustą $V_j = \varnothing$, albo b) dla każdego zbioru stanów następnych T_{ji} (otrzymanego pod wpływem litery wejściowej x_i) należącego do rodziny właściwej istnieje taki zbiór T_l wchodzący w skład łańcucha, że T_{ji} jest podzbiorem (właściwym lub niewłaściwym) T_l.

Definicja 7.9. Łańcuch spełniający warunki pokrycia i zamkniętości nazywamy łańcuchem prawidłowym.

Definicja 7.10. Łańcuchem minimalnym nazywamy taki łańcuch prawidłowy, że nie istnieje żaden inny łańcuch prawidłowy o mniejszej długości.

Wyznaczenie łańcucha minimalnego jest więc równoznaczne wyznaczeniu jednej z minimalnych rodzin zamkniętych pokrywających zbiór S.

Obecnie podamy algorytm wyznaczania drzew zawierający łańcuchy minimalne.

Algorytm 7.2

Oznaczmy rodzinę zbiorów pierwotnych stanów zgodnych przez $\{T_1, T_2, \ldots, T_p\} = \{T_k\}$

1. Należy wybrać jeden ze stanów (należących do zbioru S) występujący w najmniejszej liczbie zbiorów T_j. Wszystkie zbiory T_j zawierające ten wybrany stan należy przyjąć jako elementy generujące. Liczba konstruowanych drzew równa jest więc liczbie tych zbiorów.

2. Należy powiększać długość łańcuchów wchodzących w skład danego drzewa zgodnie z następującymi zasadami

a) jeżeli łańcuch $\langle T_1, T_2, \ldots, T_n \rangle$ nie spełnia warunku zamkniętości, to należy utworzyć wszystkie możliwe łańcuchy $\langle T_1, T_2, \ldots, T_n, T^j_{n+1}, \ldots, T^j_m \rangle$ (tworzące drzewo) spełniające warunek zamkniętości;

b) jeżeli łańcuch $\langle T_1, T_2, \ldots, T_n \rangle$ spełnia warunek zamkniętości, a nie spełnia warunku pokrycia, gdyż stany $s^1, s^2, \ldots$ nie należą do żadnego elementu łańcucha, należy wybrać jeden z tych stanów należący do najmniejszej liczby zbiorów rodziny $\{T_k\}$ i utworzyć wszystkie możliwe łańcuchy $\langle T_1, T_2, \ldots, T_n, T^j_{n+1} \rangle$, gdzie T^j_{n+1} oznacza zbiór, do którego ten wybrany stan należy.

3. Należy kontynuować procedurę opisaną w punkcie 2 sprawdzając najpierw warunek zamkniętości, a potem warunek pokrycia dla wszystkich łańcuchów wchodzących w skład każdego z tworzonych drzew.

4. Procedurę należy zakończyć po znalezieniu wszystkich najkrótszych łańcuchów prawidłowych.

Przykład 7.1

Należy wyznaczyć automat minimalny dla automatu opisanego tablicą 7.1.

Tablica 7.1

	0	1	0	1
1	3	—	0	—
2	4	3	0	0
3	—	5	—	1
4	6	6	—	0
5	6	6	0	—
6	—	—	—	—

Tablica 7.2

{1, 4, 5, 6}	{{36}}
{2, 4, 5, 6}	{{36}}
{1, 3, 5, 6}	Ø

Rodzina maksymalnych zbiorów stanów zgodnych może być wyznaczona jak poprzednio.

$$\{Q_j\} = \{\{1, 4, 5, 6\}, \{2, 4, 5, 6\}, \{1, 3, 5, 6\}\}.$$

Liczba stanów automatu minimalnego ograniczona jest nierównością $2 \leqslant n \leqslant 3$.

W tablicy 7.2 podano rodziny właściwe zbiorów stanów następnych dla zbiorów rodziny $\{Q_j\}$. Zbiór {4, 6} jest również zbiorem stanów następnych zbioru {2, 4, 5, 6}, ale {4, 6} jest podzbiorem tego zbioru — dlatego nie należy do rodziny właściwej. W tablicy 7.3. podane są podzbiory zawierające po 3 elementy dwóch pierwszych zbiorów tablicy 7.2. Te z nich, które są zbiorami pierwotnymi, oznaczone są znaczkiem v. Podzbiory zbioru {1, 3, 5, 6} nie są wypisywane, gdyż rodzina właściwa tego zbioru jest rodziną pustą. W tablicy 7.4. podane te dwuelementowe podzbiory zbiorów z tablicy 7.2., które mogą być zbiorami pierwotnymi; nie są tu podane zbiory będące podzbiorami zbiorów {4, 5, 6}, oraz {1, 3, 5, 6}, gdyż odpowiednie rodziny właściwe są puste.

Należałoby teraz wyznaczyć te zbiory jednoelementowe, które mogą być zbiorami pierwotnymi. Jednak wszystkie te zbiory są wykluczone: zbiór {1, 3, 5, 6} wyklucza zbiory {1}, {3}, {5}, {6}; zbiór {4, 5, 6} wyklucza zbiory {4}, {5}, {6}; wreszcie zbiór {2, 6} wyklucza zbiory {2}, {6}.

W tablicy 7.5 podano wszystkie zbiory pierwotne. Są to zbiory maksymalne oraz zbiory z tablic 7.3. i 7.4. oznaczone v.

Tablica 7.3

{1, 4, 5}	{{3, 6}}
{1, 4, 6}	{{3, 6}}
{1, 5, 6}	{{3, 6}}
{4, 5, 6} v	Ø
{2, 4, 5}	{{3, 6}, {4, 6}}
{2, 4, 6}	{{3, 6}}
{2, 5, 6}	{{3, 6}, {4, 6}}

Tablica 7.4

{1, 4}	{{3, 6}}
{2, 4}	{{3, 6}, {4, 6}}
{2, 5}	{{3, 6}, {4, 6}}
{2, 6} v	Ø

Tablica 7.5

{1, 4, 5, 6}	{{36}}
{2, 4, 5, 6}	{{36}}
{1, 3, 5, 6}	Ø
{4, 5, 6}	Ø
{2, 6}	Ø

Obecnie konstruujemy odpowiednie drzewa. W tablicy 7.6. podano liczbę zbiorów T_j, w których występuje każdy stan. Stan 3 występuje (jako jedyny stan) tylko w jednym zbiorze T_j.

Tablica 7.6

s	1	2	3	4	5	6
liczba T_j	2	2	1	3	4	5

Zbiór ten {1, 3, 5, 6} jest elementem generującym. Łańcuch jednoelementowy ⟨{1, 3, 5, 6}⟩ spełnia warunek zamkniętości, a nie spełnia warunku pokrycia — stany 2, 4, 6 nie są elementami zbioru wchodzącego w skład łańcucha. Do dalszej „rozbudowy" łańcucha wybieramy element 2 (występuje w dwóch T_j) i otrzymujemy dwa możliwe łańcuchy ⟨{1, 3, 5, 6}, {2, 6}⟩ oraz ⟨{1, 3, 5, 6}, {2, 4, 5, 6}⟩. Pierwszy z tych łańcuchów nie spełnia warunku pokrycia (nie zawiera stanu 4). Drugi spełnia oba warunki — jest więc minimalnym łańcuchem prawidłowym. Odpowiedni automat podany jest w tablicy 7.7.

Oczywiście rozważany przykład był tak prosty, że metoda prób byłaby o wiele bardziej odpowiednia. Taki prosty przykład wybrano dla lepszego zilustrowania metody.

Tablica 7.7

		0	1	0	1
p	{2, 4, 5, 6}	p	q	0	0
q	{1, 3, 5, 6}	q	$p \vee q$	0	1

Przykład 7.2

Należy wyznaczyć łańcuch minimalny dla automatu rozważanego w przykładzie 5.3. Pierwotne zbiory stanów zgodnych i odpowiadające im rodziny właściwe podane są w tablicy 7.8.

Tablica 7.8

{124}	{{135}}
{125}	{{124}, {135}}
{134}	{{125}}
{135}	{{125}, {134}}
{12}	{{24}, {35}}
{14}	{{12}, {13}}
{24}	{{14}, {15}}
{15}	{{12}, {15}}
{25}	{{14}, {15}}

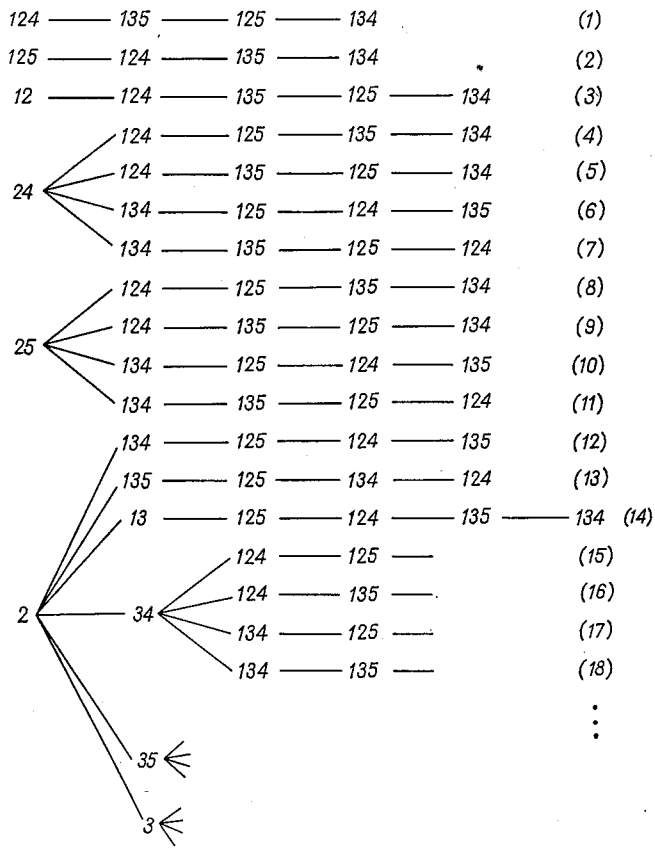
{13}	{{25}, {34}}
{34}	{{15}, {14}}
{35}	{{15}, {14}}
{1}	Ø
{2}	Ø
{3}	Ø
{4}	Ø
{5}	Ø

Tablica 7.9

1	2	3	4	5
9	6	6	6	6

W tablicy 7.9 podano liczbę zbiorów pierwotnych, w których występują poszczególne stany. Wybierając stan 2 otrzymamy 6 elementów generacyjnych i 6 drzew jak na rys. 7.1.

Opiszemy przykładowo sposób tworzenia kilku z powyższych drzew. (1). Element generujący {124}. Łańcuch ⟨{124}⟩ nie jest zamknięty, gdyż rodzina właściwa wynosi {{135}}. Dołączając {135} otrzymamy łańcuch nie spełniający warunku zamkniętości,



Rys. 7.1. Łańcuchy prawidłowe do przykładu 7.2

gdyż {135} ma rodzinę {{125}, {134}}. Dołączając zbiory {125} i {134} otrzymamy łańcuch zamknięty i pokrywający zbiór S. (12), (13), ... Element generujący {2}. Łańcuch ⟨{2}⟩ jest łańcuchem zamkniętym, ale nie spełnia warunku pokrycia. Wybieramy stan 3 (moglibyśmy także wybrać 4 lub 5) i dołączamy zbiory zawierające ten stan otrzymując 6 nowych łańcuchów. Każdy z tych łańcuchów badamy na warunek zamkniętości. Rozważmy łańcuch ⟨{2}, {3, 4}⟩. Łańcuch ten nie jest łańcuchem zamkniętym, gdyż rodzina właściwa

odpowiadająca $\{3, 4\}$ jest $\{\{1, 5\}, \{1, 4\}\}$. Mamy $\{1, 5\} \subset \{1, 2, 5\}$ oraz $\{1, 5\} \subset \{1, 3, 5\}$. Podobnie $\{1, 4\} \subset \{1, 2, 4\}$ oraz $\{1, 4\} \subset \{1, 3, 4\}$. Otrzymamy cztery nowe łańcuchy nie spełniające warunku zamkniętości. Przedłużanie tych łańcuchów nie jest jednak celowe, gdyż ich długość wynosi już 4, a łańcuchy (1) i (2) o długości 4 są łańcuchami prawidłowymi.

Ostatecznie otrzymaliśmy dwa łańcuchy minimalne różniące się jedynie porządkiem elementów. Łańcuchy te odpowiadają jednej rodzinie minimalnej spełniającej warunki zamkniętości i pokrycia. (zob. przykład 5.3.)

Przykład 7.3

Należy wyznaczyć automat minimalny dla automatu opisanego tablicą 7.10.

Tablica 7.10

	a	b	c	d	a	b	c	d
1	1	3	—	5	y	z	—	v
2	2	7	—	8	y	v	—	y
3	6	3	4	5	y	z	t	v
4	1	—	4	—	y	—	t	—
5	9	—	4	5	y	—	t	v
6	6	3	4	—	y	z	t	—
7	9	7	—	8	y	v	—	y
8	2	3	—	8	y	z	—	y
9	9	—	4	8	y	—	t	y

Tablica 7.11

{1346}	Ø
{356}	{{69}}
{279}	Ø
{89}	{{29}}
{69}	Ø
{8}	Ø
{5}	Ø

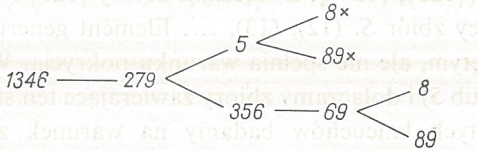
Tablica 7.12

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	1	2	3	1	2	3

Rodzina zbiorów maksymalnych stanów zgodnych ma postać $\{Q_j\} = \{\{1346\}, \{356\}, \{279\}, \{89\}, \{69\}\}$, a liczba stanów automatu minimalnego ograniczona jest nierównością $4 \leqslant n \leqslant 5$.

W tablicy 7.11 podano zbiory pierwotne. W tablicy 7.12. podano, w ilu zbiorach pierwotnych występuje każdy stan.

Wybieramy stan 1 i otrzymujemy jako element generujący zbiór $\{1346\}$. Łańcuch jednoelementowy nie spełnia warunku pokrycia. Wybierając stan 2 dołączamy zbiór $\{279\}$, który również nie spełnia warunku pokrycia (nie „zawiera" 5 i 8). Wybierając 5 otrzymujemy dwa łańcuchy (z $\{5\}$ i z $\{356\}$). Pierwszy z nich nie spełnia warunku pokrycia



Rys. 7.2. Łańcuchy prawidłowe do przykładu 7.3

(brak 8). Dołączając {8} albo {89} otrzymamy dwa łańcuchy prawidłowe i minimalne. Drugi łańcuch nie spełnia warunku zamkniętości. Dołączając {69} otrzymamy łańcuch zamknięty, ale nie spełniający warunku pokrycia. Konieczne jest dołączenie {8} albo {89} — otrzymane łańcuchy są łańcuchami prawidłowymi, ale nie są minimalnymi. Ostatecznie mamy dwa łańcuchy minimalne oznaczone × na rys. 7.2. Otrzymamy dwa automaty minimalne opisane tablicami 7.13. i 7.14.

Tablica 7.13

	a	b	c	d	a	b	c	d
p(1346)	p	p	p	r	y	z	t	v
q(279)	q	q	p	s	y	v	t	y
r(5)	q	—	p	r	y	—	t	v
s(8)	q	p	—	s	y	z	—	y

Tablica 7.14

	a	b	c	d	a	b	c	d
p(1346)	p	p	p	r	y	z	t	v
q(279)	q	q	p	s	y	v	t	y
r(5)	q	—	p	r	y	—	t	v
s(89)	q	p	p	s	y	z	t	y

Do dalszej realizacji należałoby wybrać raczej pierwszy z tych automatów, gdyż daje on więcej swobody w syntezie kombinacyjnej.

Podana metoda umożliwia wyznaczenie rodziny $\{P_j\}$ w sposób systematyczny. Metoda jest jednak dość skomplikowana, co ogranicza zakres jej zastosowania.

8. REDUKCJA WSTĘPNA LICZBY STANÓW AUTOMATÓW NIEZUPEŁNYCH

Z rozważań rozdziału 3 wynika, że redukcja liczby stanów automatu niezupełnego oparta na zastępowaniu pewnych kresek określonymi symbolami może prowadzić do automatu, który nie jest automatem minimalnym, ale nie może być minimalizowany metodami omówionymi w rozdziałach 5, 6, 7. Możliwe jest jednak przeprowadzanie minimalizacji wstępnej pozbawionej tej istotnej wady w oparciu o pojęcie równoważności automatów niezupełnych[1]).

Podamy kilka definicji.

D e f i n i c j a 8.1. Automat M_2 w stanie s_2 jest równoważny automatowi M_1 w stanie s_1, jeżeli słowo $\bar{x}$ jest słowem odpowiednim dla M_2 w stanie s_2 wtedy i tylko wtedy, gdy jest słowem odpowiednim dla M_1 w stanie s_1 oraz dla każdego takiego odpowiedniego słowa litery wyjściowe odpowiadające sobie są albo nieokreślone (obie) albo równe sobie.

[1]) Zagadnienie to pierwszy poruszył Unger [20] podając odpowiednie definicje i twierdzenia; zob. również [10]. Także Huffman [9] zajmował się znacznie wcześniej analogicznym zagadnieniem — jednak przy zupełnie innych założeniach.

Definicja 8.2. Automat M_2 jest równoważny automatowi M_1:

$$M_2 \equiv M_1 \leftrightarrow \bigwedge s_2 \in S_2 \bigvee s_1 \in S_1 \quad s_2 \equiv s_1 \wedge$$
$$\bigwedge s_1 \in S_1 \bigvee s_2 \in S_2 \quad s_1 \equiv s_2$$

albo

$$M_2 \equiv M_1 \leftrightarrow M_2 \geqslant M_1 \wedge M_1 \geqslant M_2.$$

Relacja $\equiv$ w zbiorze stanów danego automatu oraz relacja $\equiv$ w zbiorze automatów są relacjami równoważnościowymi.

Podamy obecnie algorytm wyznaczania automatu $M^0 = \mathrm{red}(M)$ dla danego automatu M.

Algorytm 8.1

1. Należy zastąpić automat niezupełny
   $M = \langle S, X, Y, \delta, \lambda\rangle$[1] automatem zupełnym
   $M' = \langle S', X', Y', \delta', \lambda'\rangle$ skonstruowanym w sposób następujący:
   a) $S' = S \cup \{q\}$
   b) $X' = X$
   c) $Y' = Y \cup \{z\}$
   d) $\delta'(s, x) = \delta(s, x)$ dla $\langle s, x\rangle \in D_\delta$
      $\delta'(s, x) = q$ dla $\langle s, x\rangle \in S \times X - D_\delta$
      $\delta'(q, x) = q$ dla $x \in X$
   e) $\lambda'(s, x) = \lambda(s, x)$ dla $\langle s, x\rangle \in D_\lambda$
      $\lambda'(s, x) = z$ dla $\langle s, x\rangle \in S \times X - D_\lambda$
      $\lambda'(q, x) = z$ dla $x \in X$
2. Należy wyznaczyć automat minimalny M'' dla automatu zupełnego M'.
3. Należy zastąpić automat zupełny M'' automatem niezupełnym $M^0 = \langle S^0, X^0, Y^0, \delta^0, \lambda^0\rangle$ skonstruowanym w sposób następujący:
   a) $S^0 = S'' - \{q\}$
   b) $X^0 = X''$
   c) $Y^0 = Y'' - \{z\}$
   d) $\langle s, x\rangle \in D_{\delta 0} \leftrightarrow \delta''(s, x) \neq q$
      $\langle s, x\rangle \in D_{\delta 0} \rightarrow \delta^0(s, x) = \delta''(s, x)$
   e) $\langle s, x\rangle \in D_{\lambda 0} \leftrightarrow \lambda''(s, x) \neq z$
      $\langle s, x\rangle \in D_{\lambda 0} \rightarrow \lambda^0(s, x) = \lambda''(s, x)$

Tak więc należy: 1) kreski w tablicy przejść zastąpić symbolem q; kreski w tablicy wyjść zastąpić symbolem z; dodać nowy wiersz q zawierający symbole q w tablicy przejść i symbole z w tablicy wyjść; 2) wyznaczyć automat minimalny dla otrzymanego w p. 1) automatu zupełnego; 3) skreślić dodatkowy wiersz q oraz zastąpić symbole q i z kreskami w tablicy automatu otrzymanego w punkcie 2.

Można też wyznaczyć relację $\equiv$ przy pomocy algorytmu analogicznego do algorytmu 4.1, bezpośrednio dla automatu M, oraz skonstruować automat M^0 przy pomocy twier-

[1] Zakładamy, że automat M nie jest automatem zdegenerowanym, tj. nie posiada stanów r, dla których wszystkie $\delta(r, x)$, $\lambda(r, x)$ są nieokreślone.

dzenia analogicznego do twierdzenia 4.1. Sposób postępowania nie będzie różnić się w sposób istotny od podanego wyżej.

Twierdzenie 8.1.

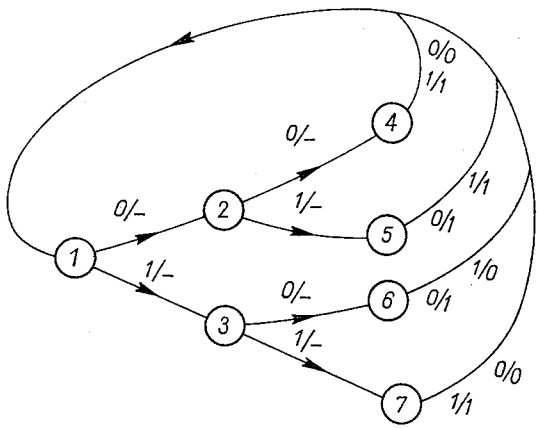
Automat M^0 otrzymany przy pomocy algorytmu 8.1. dla automatu M ma następujące własności:

1. $M^0 \equiv M$ w sensie definicji 8.2.
2. $M^0 = \mathrm{red}(M)$ w sensie definicji 3.3.
3. $M^* = \min(M) \leftrightarrow M^* = \min(M^0)$.

Tak więc dalsza redukcja może być przeprowadzana; redukcja wstępna na ogół upraszcza dalszy proces redukcji.

Przykład 8.1

W przykładzie 5.3. podano tablicę przejść — wyjść automatu zdolnego do wykonywania pewnej pracy już w postaci uproszczonej. Łatwo sprawdzić, że synteza bez żadnych uproszczeń prowadzi do automatu opisanego tablicą przejść 8.1. i grafem stanów rys. 8.1.



Rys. 8.1. Graf stanów do przykładu 8.1

Automat M' przedstawiono w tablicy 8.2. Wyznaczając relację $\equiv$ dla tego automatu otrzymamy $4 \equiv 7$ oraz $5 \equiv 6$. Automaty M'' i M^0 przedstawione są w tablicach 8.3. i 8.4. Automat podany w tablicy 8.4. jest identyczny z automatem rozważanym w przykładzie 5.3.

Tablica 8.1

	0	1	0	1
1	2	3	—	—
2	4	5	—	—
3	6	7	—	—
4	1	1	0	1
5	1	1	1	0
6	1	1	1	0
7	1	1	0	1

Tablica 8.2

	0	1	0	1
1	2	3	z	z
2	4	5	z	z
3	6	7	z	z
4	1	1	0	1
5	1	1	1	0
6	1	1	1	0
7	1	1	0	1
q	q	q	z	z

Tablica 8.3.

	0	1	0	1
1	2	3	z	z
2	4	5	z	z
3	5	4	z	z
4	1	1	0	1
5	1	1	1	0
q	q	q	z	z

Tablica 8.4.

	0	1	0	1
1	2	3	—	—
2	4	5	—	—
3	5	4	—	—
4	1	1	0	1
5	1	1	1	0

Stosując procedurę podaną w rozdziale 5 bezpośrednio do automatu opisanego tablicą 8.1. otrzymamy

$$\{Q_j\} = \{\{1247\}, \{1256\}, \{1347\}, \{1356\}\},$$

co prowadzi do identycznego automatu minimalnego.

Przykład 8.2

Wyznaczyć automat M^0 dla automatu M opisanego tablicą 8.5. W tablicy 8.6. przedstawiono odpowiedni automat zupełny M'. Relacja $\equiv$ dla tego automatu ma postać:

$$\equiv = \{(12), (13), (23), (45)\} \cup \{(11), (22), \ldots, (55), (qq)\}.$$

Otrzymujemy stąd automat M'' podany w tablicy 8.7. a odpowiadający mu automat M^0 — w tablicy 8.8.

Tablica 8.5.

	a	b	c	a	b	c
1	1	2	5	0	—	0
2	2	3	4	0	—	0
3	2	1	4	0	—	0
4	—	2	7	—	—	1
5	—	1	7	—	—	1
6	1	2	5	—	—	0
7	1	2	8	1	1	0
8	6	3	6	0	0	1

Tablica 8.6.

	a	b	c	a	b	c
1	1	2	5	0	z	0
2	2	3	4	0	z	0
3	2	1	4	0	z	0
4	q	2	7	z	z	1
5	q	1	7	z	z	1
6	1	2	5	z	z	0
7	1	2	8	1	1	0
8	6	3	6	0	0	1
q	q	q	q	z	z	z

Tablica 8.7.

	a	b	c	a	b	c
1(1, 2, 3)	1	1	2	0	z	0
2(4, 5)	q	1	4	z	z	1
3(6)	1	1	2	z	z	0
4(7)	1	1	5	1	1	0
5(8)	3	1	3	0	0	1
q	q	q	q	z	z	z

Tablica 8.8.

	a	b	c	a	b	c
1	1	1	2	0	—	0
2	—	1	4	—	—	1
3	1	1	2	—	—	0
4	1	1	5	1	1	0
5	3	1	3	0	0	1

Automat $M^* = \min(M^0)$ opisany jest przy pomocy tablicy 8.9.

Tablica 8.9.

	a	b	c	a	b	c
r	r	r	s	0	—	0
s	t	r	t	0	0	1
t	r	r	s	1	1	0

Mamy tu $P_j = \{R, S, T\}$, gdzie $R = \{1\}$, $S = \{2, 5\}$, $T = \{3, 4\}$. Łatwo wykazać, że wyznaczając bezpośrednio $\min(M)$ otrzymamy ten sam automat M^*.

9. RYS HISTORYCZNY

Zagadnienie minimalizacji automatów zupełnych było po raz pierwszy rozważane przez Moore'a [15], Huffmana [9] i Mealyego [14]. Zagadnienie to omówione jest wyczerpująco przez Ginsburga [2], Gilla [3], Głuszkowa [4], [5]. Z innych pozycji można wymienić książki Wawiłowa i Portnoja [21], Harrisona [7], Hartmanisa i Stearnsa [8], Phistera [19].

Zagadnienie minimalizacji automatów niezupełnych było po raz pierwszy rozważane jeszcze przez Huffmana [9] i Mealyego [14]. Jednak istotny postęp w rozwoju metod rozwiązywania tego zagadnienia był związany z uświadomieniem sobie, że kreski w tablicy automatu mogą odpowiadać nie tylko niedozwolonym słowom wejściowym (tak jak u Huffmana), ale także słowom wejściowym, które są wprawdzie dozwolone, ale nie są, jak to wynika z założeń wstępnych, interesujące. Drugim istotnym punktem, było przyjęcie założenia, że w słowach wyjściowych automatu niezupełnego zastąpionego automatem zupełnym, ta sama kreska może oznaczać różne symbole, zależnie od okoliczności. Takie nowe spojrzenie na zagadnienie przedstawili Ginsburg [1] oraz Paul i Unger [18]. Paul i Unger podali pierwsi stosunkowo proste algorytmy wyznaczania relacji $\sim$ i rodziny $\{Q_j\}$ oraz konstrukcji automatu M^*. Prace Ginsburga [1] oraz [2] mają znaczenie raczej teoretyczne. Z innych prac można wymienić książkę Millera [16] przedstawiającą zarówno podstawy teoretyczne, jak i aspekty praktyczne zagadnienia (inny algorytm wyznaczania $\{Q_j\}$ oraz przyczynki do wyznaczania $\{P_j\}$), oraz książkę Kriegera [10] ujętą w sposób bardziej praktyczny.

Zagadnienie minimalizacji automatów z ograniczonym wejściem było rozważane przez Ungera [20], a przedtem (przy znacznie ostrzejszych założeniach) przez Mc Cluskeyego [13].

Zagadnienie redukcji wstępnej po raz pierwszy rozważał Unger [20]. Oba te zagadnienia są też omówione przez Kriegera [10].

Algorytmy wyznaczania rodziny $\{P_j\}$ podają Grasselli i Luccio [6] oraz Meisel [17].

Całość zagadnienia (z wyjątkiem problematyki rozdziału 7) omówiona jest też w skrypcie [11] oraz w książce [12].

Politechnika Warszawska
Katedra Teletransmisji Przewodowej

WYKAZ LITERATURY

1. Ginsburg S.: A Technique for the Reduction of a Given Machine to a Minimal State Machine. — IRE Trans. on EC, Vol. EC-8. Sept. 1959.
2. Ginsburg S.: An Introduction to Mathematical Machine Theory. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading Mass., 1962.
3. Gill A.: Introduction to the Theory of Finitestate Machine Theory. Mc Graw-Hill Book Company, New York 1962.
4. Głuszkow W.: Wstęp do cybernetyki. Książka i Wiedza, Warszawa 1967 (tłumaczenie z rosyjskiego).
5. Głuszkow W.: Synteza automatów cyfrowych. WNT, Warszawa 1968 (tłumaczenie z rosyjskiego).
6. Graselli A., Luccio F.: A Method for Minimizing the Number of Internal States in Incompletely Specified Sequential Networks. — IEEE Trans. on EC, Vol. EC-14, June 1965.
7. Harrison M. A.: Introduction to Switching and Automata Theory. Mc Graw-Hill Book Company, New York 1965.
8. Hartmanis J., Stearns R. E.: Algebraic Structure Theory of Sequential Machines. Prentince-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.Y. 1966.
9. Huffman D. A.: The Synthesis of Sequential Switching Circuits. — Journal of the Franklin Institute, Vol. 257, Nos. 3 and 4, 1954.
10. Krieger M.: Basic Switching Circuit Theory. The Macmillan Company, New York 1967.
11. Majewski W.: Układy logiczne. Skrypt. Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1969.
12. Mc Cluskey E. J., Bartee T. C.: A Survey of Switching Circuit Theory. Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York 1962.
13. Mc Cluskey E. J.: Minimum-State Sequential Circuits for a Restricted Class Incompletely Specified Flow Tables. — BSTJ, Vol. 4, Nov. 1962.
14. Mealy G. H.: Method for Synthesizing Sequential Circuits. — BSTJ, 1965.
15. Moore E. F.: Gedanken — Experiments on Sequential Machines. — Automata Studies Ann. Math. 1956.
16. Miller R. E.: Switching Theory. John Willey, New York 1965.
17. Meisel W. S.: A Note on Internal State Minimization in Incompletely Specified Sequential Networks. — IEEE Trans. on EC, Vol. EC-16, August 1967.
18. Paul M. C., Unger S. H.: Minimizing the Number of States in Incompletely Specified Sequential Switching Function. — IRE Trans. on EC, EC-8, Sept. 1959.
19. Phister M.: Logical Design of Digital Computers. John Wiley, New York 1958.
20. Unger S. H.: Flow Table Simplification — Some Useful Aids. — IEEE Trans. on EC, Vol. EC-14, June 1965.
21. Wawiłow E. N., Portnoj G. P.: Synteza układów elektronicznych maszyn cyfrowych. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1967 (tłumaczenie z rosyjskiego).

Uzupełniająca literatura matematyczna

22. Kuratowski K., Mostowski A.: Teoria mnogości, PWN, Warszawa 1966.
23. Monjallon A.: An Introduction to Modern Mathematics. Oliver and Boyel Ltd., London 1967 (również w oryginale francuskim).
24. Moszner Z.: O teorii relacji. PZWS, Warszawa 1967.
25. Rasiowa H.: Wstęp do matematyki współczesnej. PWN, Warszawa 1968, oraz odpowiednie rozdziały książek [2], [7], [8], [11].

W. MAJEWSKI JR

THE PROBLEM OF STATE MINIMIZATION FOR FINITE AUTOMATA

Summary

The paper deals with the problem of state minimization for finite automata especially when incomplete automata are concerned.

First (in Chapter 1) general descriptions of sequential circuits and their mathematical models, which are called automata, are given.

Next (in Chapter 2) some definitions, which are necessary to solve the problem of state minimization for finite automata, are given. One of the most important is the definition of the sequence that is applicable to an automaton in some state.

Then (in Chapter 3) the principles of state minimization are given. The inclusion relation for automata and the concepts of a reduction M' for an automaton M and a minimum state automaton M^* for an M are presented.

Next (in Chapter 4) the problem of state minimization for complete automata is discussed. The equivalence relation for states and the equivalence relation for automata are defined. The concepts of a reduction and a minimum state automaton are also presented for this case. The basic theorem for minimization for complete automata and the algorithm for the determining of the state equivalence relation are given too.

Then (in Chapter 5) basic problems connected with the state minimization for incomplete automata are discussed. First the method of minimization by transformation of an incomplete automaton in to all possible complete automata is given. There is an example presented which demonstrates that this method is not always proper; sometimes it is possible to obtain a simpler automaton by splitting one of the states into two new states. The actual meaning of an unspecified output entry in connection with the example is discussed too. Next the compatibility relation for states is introduced and the algorithm which is used for the determination of this relation is given. The basic theorem for state minimization for incomplete automata is also given. The assumptions of the theorem explain how to construct some new automaton M^* for an automaton M. This construction consists of: 1) determining the compability relation and the family of maximal compatible sets $\{Q_j\}$ for an automaton M; 2) determining the family $\{P_j\}$ which is created by the selection of some elements of $\{Q_j\}$ family or of some parts of these elements; 3) constructing the automaton M^* for the family $\{P_j\}$. The thesis of the theorem says that the M^* is the minimum state automaton for M. The steps 1) and 3) are well defined, but the step 2) is not; it is necessary to use the trial-and-error procedure to solve it. Some examples of state minimization are given too.

Next (in Chapter 6) the method for solving step 2 in the special case of an input-restricted automaton is discussed.

Then (in Chapter 7) some general method for executing step 2 is presented. So some new definition and algorithms are given. The method is rather complicated and the solution does not cover all possible solutions: in spite of that, it is useful.

Next (in Chapter 8) partial reduction is presented. The equivalence relation for states and the equivalence relation for automata are given in the general case of an incomplete automaton.

Then (in Chapter 9) the history of the studies on state minimization is presented and the bibliography is discussed.

There are some mathematical tools eg. set theory and relation theory applied in the paper; so it is rather a theoretical one. In spite of it some problems of interest for circuit designers are presented as well. The paper is based on the books and paper, especially American ones, in which problems of the state minimization are discussed.

W. MAJEWSKI

LE PROBLÈME DE LA MINIMALISATION DU NOMBRE DES ÉTATS DES AUTOMATES DÉFINIS

Résumé

L'article présente le problèmé de la minimalisation du nombre des états des automates définis — en particulièrement des automates incomplèts.

Dans l'introduction (chapitre 1) on a donné la caractéristique générale des schémas séquentiels et de leurs modèles mathématiques — automates et on a presenté les étapes de la synthèse.

Ensuite (chapitre 2) on a donné des définitions prises de la théorie des automates en étendue nécéssaire aux considérations suivantes. Particulièrement on a donné la défitinion de la séquence convénable a l'état donné d'un automate incomplet.

Plus loin (chapitre 3) on a presenté l'introduction dans le problème de la minimalisation du nombre des états. On a defini la rélation de „récouvrement" dans l'ensemble des automates incomplets ainsi que l'idée de l'automate réduit et de l'automate minimal.

Ensuite (chapitre 4) on a presenté le problème de la minimalisation du nombre des états en cas des automates complets. On a defini la rélation d'équivalence des états et la rélation d'équivalence des automates ainsi que des idées de l'automate réduit et de l'automate minimal en ce cas singulier. On a donné la théorème fondamentale sur la minimalisation des automates complets ainsi qu'un algorithme de la détermination de la rélation d'équivalence des états.

Puis (chapitre 5) on a présenté des problèmes fondamentales liés avec la minimalisation des automates incomplets. Premièrement on a décrit la méthode de la minimalisation de l'automate incomplet consistant minimaliser de tous correspondant à lui automates complets et on a prouvé sur un exemple (employant la disjonction de l'état), que cette méthode pas toujours conduit à la solution correcte. Sur ce fond on a discuté de manière physique l'importance de „trait" dans le tableau de l'automate. Ensuite on a introduit la rélation d'accord des états de l'automate et on a donné les algorithmes de déterminer cette rélation. Ensuite on a présenté la théorème fondamentale sur la minimalisation des automates complets. Les fondations de cette théorème donnent le moyen de construire pour un automate connu M un automate M^*. Cette construction consiste à 1) déterminer la rélation d'accord des états et de la famille des ensembles maximaux des états accordés $\{Q_j\}$; 2) déterminer la famille des ensembles $\{P_j\}$ par le choix de certaine ensembles de la famille $\{Q_j\}$ ou de leur partie, 3) construire convenablement l'automate M^*. La thèse de la théorème dit, que tellement construit l'automate M^* est un automate minimal recouvrant l'automate M. Il résulte de cette théorème, que les étapes 1) et 3) de la construction ont le caractère algorithmique et que l'étape 2) peut être résolu seulement à l'aide de la méthode des épreuves. On a donné aussi l'évaluation du nombre des états de l'automate minimal facilitant la solution de l'étape 2). Puis on a presenté des résolutions concernant les propriétés des automates obtenues sur la base de la théorème ci-dessus. On a donné aussi des exemples de la minimalisation.

Ensuite (chapitre 6) on a décrit la méthode de déterminer la famille $\{P_j\}$ pour un certain cas singulier de si nommés automates à l'entrée limitée.

Plus loin (chapitre 7) on a presenté une certaine méthode systematique de déterminer la famille $\{P_j\}$. En conséquence il faudrait d'introduire de nouvelles définitions et algorithmes. Cette méthode, quoique utile, ne conduit pas à la solution entièrement générale et est assez compliquée.

Plus (chapitre 8) on a décrit la réduction préliminaire, on a generalisé les notions d'équivalence des états et d'équivalence des automates en cas des automates incomplets.

Enfin (chapitre 9) on a donné un aperçu historique et on à presenté la litterature.

L'oeuvre utilise les éléments de la théorie des ensembles et de la théorie des rélations ainsi que du calcul des propositions et a le caractère partiellement théorique. Mais il contient aussi de nombreux exemples et présente les interpretations techniques des problèmes théoriques. L'article se base sur la litterature fondamentale sur ce sujet dans ce nombre aussi sur les positions rélativement nouvelles (1967).

В. МАЕВСКИ

ВОПРОС МИНИМИЗАЦИИ ЧИСЛА СОСТОЯНИЙ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

Резюме

Статья представляет вопрос минимизации числа состояний конечных автоматов — в особенности неполностью определенных автоматов.

Во введении (глава 1) приведена общая характеристика последовательных схем и их математических моделей автоматов, а также описаны этапы синтеза.

В дальнейшем (глава 2) приведены определения из теории автоматов в объеме, который является необходимым для дальнейших рассуждений. В отдельности приведено определение последовательности, соответствующей для данного состояния неполностью определенного автомата.

Далее (глава 3) представлено введение в вопрос минимизации числа состояний. Определено соотношение „перекрытия" в множестве неполностью определенных автоматов и представлены понятия редуцированного автомата и минимального автомата.

В дальнейшем (глава 4) представлен вопрос минимизации числа состояний для полностью определенных автоматов. Определено соотношение эквивалентности состояний и соотношение эквивалентности автоматов, а также понятия редуцированного автомата и минимального автомата в этом отдельном случае. Приведена основная теорема о минимизации полностью определенных автоматов и один из алгоритмов определения отношения эквивалентности состояний.

Далее (глава 5) описаны основные проблемы, связанные с минимизацией неполностью определенных автоматов. Во первых рассмотрен метод минимизации неполностью определенного автомата, состоящий в приведении к минимуму сех, соответствующих ему, полностью определенных автоматов и доказано на примере (применяя расщепление состояния), что этот метод не всегда приводит к правильному решению. Учитывая вышеуказанное, проанализировано физическим способом значение „черточки" в таблице автомата. Далее введено отношение согласия состояний автомата и приведены алгоритмы определения этого отношения. Далее приведена основная теорема о минимизации полностью определенных автоматов. Предварительные положения теоремы дают способ построения для данного автомата — некоторого автомата M^*. Это построение заключается в: 1) определении отношения согласия состояний и семьи максимальных множеств согласных состояний Q_j, 2) определении семьи множеств P_j путем выбора некоторых множеств семьи Q_j или их частей, 3) правильном построении автомата M^*. Тезис теоремы провозглашает, что так построенный автомат M^* является минимальным автоматом, перекрывающим автомат M) Из теоремы вытекает, что этапы 1) и 3) построения имеют алгоритмический характер, а этап 2. может быть решен только методом проб. Приведена тоже оценка числа состояний минимального автомата, облегчающая решение этапа 2). Далее приведены выводы, касающиеся свойств автоматов, получаемых на основании приведенной выше теоремы. Приведены тоже примеры минимизации.

В дальнейшем (глава 6) описан метод определения семьи $\{P_j\}$ для некоторого особенного случая так называемых автоматов с ограниченным входом.

Далее (глава 7) приведен некоторый систематический метод определения семьи $\{P_j\}$. Это требовало введения новых определений и алгоритмов. Этот метод, хотя и полезный, не дает вполне общего решения и является довольно сложным.

Далее (глава 8) описана предварительная редукция обобщенного понятия эквивалентности состояний и эквивалентности автоматов в случае неполностью определенных автоматов.

В окончании (глава 9) приведен исторический очерк и предтсавлена сводка литературы.

Статьей использованы элементы теории множеств и теории отношений, а также исчисления предложений и у нее частично теоретический характер. Она заключает тоже многочисленные примеры и приводит технические истолкования теоретических вопросов. Статья базирует на основной литературе по данной теме, в этом тоже на относительно новых (1967) позициях.

511.2

JAN NADRATOWSKI

Metoda liczb strukturalnych na tle klasycznych metod analizy układów liniowych

Rękopis dostarczono 30.9.1967

W pracy omówiono własności metody liczb strukturalnych z pominięciem jej podstaw. Określenia i zasadnicze twierdzenia odnoszące się to tej metody można znaleźć w [1], [2], [3], [4], [12] i [20]. Szczególnie podkreślono własności mające związek ze strukturą geometryczną układu elektrycznego. Przeprowadzono porównanie metody liczb strukturalnych z klasycznymi metodami analizy, a mianowicie z metodą prądów obwodowych i potencjałów węzłowych. Uwypuklono cechy różniące i cechy wspólne tych metod. W pracy podano również uogólnione wnioski umożliwiające ocenę przydatności metody liczb strukturalnych do rozwiązywania zagadnień analizy sieci elektrycznych.

1. UWAGI OGÓLNE

Celowe jest rozpatrywać i oceniać nowe metody postępowania w zestawieniu z metodami powszechnie znanymi i stosowanymi w danej gałęzi wiedzy. Umożliwia to należyte zrozumienie nowatorskich myśli oraz właściwą ocenę metody poprzez porównanie. Za kryterium porównawcze, które może być miarą przydatności metody obliczeniowej, można na przykład przyjąć średni czas niezbędny do rozwiązania określonego zagadnienia za pomocą tej metody. Czas ten zależy od czynników następujących:

1) od zastosowanej metody,
2) od użytych pomocy technicznych,
3) od rozwiązywanego zagadnienia.

Rozpatrując wpływ czynnika pierwszego należałoby wziąć również pod uwagę następujące własności metod:

1) pracochłonność przekształceń i operacji,
2) przejrzystość i standardowość wzorów,
3) możliwości pomyłek,
4) stopień trudności opanowania metody,
5) łatwość stosowania.

Większość z tych właściwości nie może być scharakteryzowana liczbowo i w tym tkwi podstawowa trudność powodująca niemożliwość posługiwania się w celach porównawczych czasem niezbędnym do rozwiązania danego zagadnienia, bez uciekania się do skomplikowanych i długotrwałych pomiarów. Z tego względu należy zdać się na bardziej subiektywną ocenę, ograniczając się do wyławiania zalet i wad danej metody, a w następstwie tego do uogólnionych wniosków umożliwiających ocenę przydatności. Tego typu ocena przydatności ma charakter „jakościowy", tzn. podaje własności metody bez wnikania w zależ-

ności liczbowe. Przystępując do omawiania metody liczb strukturalnych można i należy wskazać na pewne analogie z metodami klasycznymi analizy obwodów elektrycznych, tzn. np. prądów obwodowych i potencjałów węzłowych, oraz na istotne — oczywiste zresztą — różnice czyniące odmiennymi własności tych metod. Porównania z metodami klasycznymi są czynione w odniesieniu do zapisu macierzowego tych metod, gdyż zapis taki jest powszechnie uznany ze względu na zwartą formę umożliwiającą usystematyzowanie rachunków.

Poniższe wywody nie mają charakteru systematycznego wykładu. W pracy świadomie potraktowano skrótowo opis metody liczb strukturalnych, gdyż szerszy opis wraz z odpowiednimi definicjami i twierdzeniami jest podany w publikacjach: [1], [2], [3], [4], [20]. Słownictwo i symbolika dotycząca algebry liczb strukturalnych są używane zgodnie z proponowanymi w powyższych publikacjach. Aksjomatyka algebry liczb strukturalnych jest podana w publikacji [12] oraz w książce S. Bellerta i H. Woźniackiego: „Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych", która ukaże się w 1968 r. nakładem WNT.

Metoda liczb strukturalnych jest metodą stosunkowo młodą. Jej początki wywodzą się z pracy K. T. Wanga [17] z 1934 r., który podał pewną receptę postępowania dotyczącego analizy sieci elektrycznych. Następnie H. Woźniacki w swojej pracy [18] zupełnie niezależnie, nie znając pracy K. T. Wanga, doszedł do podobnych wyników, formułując już podstawy pewnej metody algebraicznej, którą nazwał „algebrą sieciową". Algebrę liczb strukturalnych należy uważać za kontynuację idei zaproponowanej przez Wanga. Koncepcja tej metody została sformułowana przez S. Bellerta w pracy [1], a następnie rozwinięta przez H. Woźniackiego [19], [20] i K. Psarskiego [12]. W ostatecznej wersji znacznie ona odbiega od pierwotnej koncepcji Wanga. W obecnej postaci algebrę liczb strukturalnych można uważać za zalgebraizowany sposób określania operacji dokonywanych w teorii drzew.

Zakres zastosowań metody liczb strukturalnych ograniczony jest do liniowych układów elektrycznych. W obecnym stanie zaawansowania znajduje ona zastosowanie w analizie układów biernych i czynnych, a także przy uniwersalnej syntezie układów biernych. Są również czynione próby zastosowania jej w syntezie układów czynnych. Możliwość określenia transmitancji operatorowej wskazuje na przydatność metody do badania zarówno stanu ustalonego, jak i nieustalonego.

Metoda liczb strukturalnych wymaga stosowania zasady superpozycji. Obecnie znane algorytmy obliczeniowe nie uwzględniają elementów sprzężonych indukcyjnie.

2. ILUSTRACJA METODY LICZB STRUKTURALNYCH PRZYKŁADEM OBLICZENIOWYM

Ze względu na ograniczoną objętość pracy zrezygnowano ze szczegółowego opisu zasad metody liczb strukturalnych. W celu zorientowania czytelnika wymienione jednak zostaną poniżej pojęcia, których znajomość jest konieczna do zrozumienia dalszej części artykułu. Niektóre z tych pojęć zostaną zilustrowane na przykładzie obliczeniowym.

Liczba strukturalna jest pojęciem podobnym do pojęcia macierzy, jednakże rachunek jest odmienny i opiera się głównie na algebrze zbiorów. W najprostszym przypadku (jeżeli graf jest zdeterminowany elementami ze zbioru liczb naturalnych) pod pojęciem liczby

strukturalnej A rozumiana jest tablica liczb naturalnych α_{ik}, rozważana jako zbiór kolumn C_k, przy czym kolumny odzwierciedlają drzewa grafu. W formalizmie algebry zbiorów i logiki matematycznej można to zapisać następująco:

$$A = \{C_k | C_k = \{\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \ldots, \alpha_{mk}\}\}, \tag{1}$$

gdzie:

m i k są liczbami naturalnymi skończonymi,

$\{\}$ oznacza zbiór.

Algebra liczb strukturalnych opiera się na definicjach równości, sumy oraz iloczynu liczb strukturalnych. Dla liczb strukturalnych określone są następujące pojęcia:

1) obraz geometryczny liczby strukturalnej,

2) liczba dopełniająca — A^d i przeciwobraz liczby strukturalnej,

3) pochodna algebraiczna liczby strukturalnej — $\frac{\partial A}{\partial \alpha}$,

4) przeciwpochodna algebraiczna liczby strukturalnej — $\frac{\delta A}{\delta \alpha}$,

5) funkcja wyznacznikowa — $\underset{z}{\det} A$ lub $\underset{y}{\det} A$,

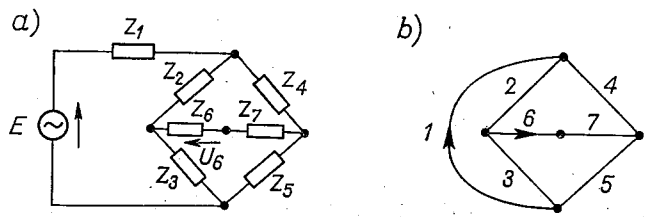
6) funkcja jednoczesności — $\underset{z}{\mathrm{sim}}(A_1, A_2)$ lub $\underset{y}{\mathrm{sim}}(A_1, A_2)$.

Ścisłe definicje wszystkich powyższych pojęć można znaleźć w publikacjach: [1], [2], [3], [4], [12].

W celu zobrazowania procedury postępowania przy stosowaniu metody liczb strukturalnych posłużymy się konkretnym przykładem obliczeniowym.

Przykład 1

Należy wyznaczyć transmitancję napięciową $T = \frac{U_6}{E}$ układu określonego jak na rys. 1a.



Rys. 1. Układ elektryczny i jego graf: a) Układ, b) Zdeterminowany graf układu

Ograniczymy się do podania rozwiązania w postaci impedancyjnej. Odpowiedni algorytm obliczeniowy ma postać następującą:

$$T = \frac{U_\beta}{E} = \frac{Z_\beta \cdot \underset{z}{\mathrm{sim}}\left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha}, \frac{\partial A^d}{\partial \beta}\right)}{\underset{z}{\det} A^d}. \tag{2}$$

W naszym przypadku $\alpha = 1$,

$$\beta = 6.$$

Liczbę strukturalną dopełniającą A^d można określić z iloczynu jednowierszowych liczb strukturalnych dotyczących wszystkich niezależnych obwodów sieci, a więc

$$A^d = A_I \cdot A_{II} \cdot A_{III} = [1\ 2\ 3]\,[2\ 4\ 6\ 7]\,[3\ 5\ 6\ 7].$$

Iloczyn liczb strukturalnych jest sumą mnogościową wszystkich kombinacji kolumn liczb A_I, A_{II}, A_{III} z pominięciem parzystej liczby kolumn identycznych i kolumn, w których jakikolwiek element powtarza się. Otrzymujemy zatem w wyniku mnożenia

$$A^d = [1\ 2\ 3]\,[2\ 4\ 6\ 7]\,[3\ 5\ 6\ 7] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 7 & 4 & 6 & 7 & 2 & 4 & 6 & 7 \end{bmatrix} [3\ 5\ 6\ 7] =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 7 & 4 & 6 & 7 & 2 & 4 & 6 & 7 & 4 & 6 & 7 & 2 & 4 & 6 & 7 & 2 & 4 & 7 & 4 & 7 & 2 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 7 & 4 & 6 & 7 & 4 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

Kolejność występowania danego elementu w kolumnie oczywiście nie jest istotna, co wynika z definicji liczby strukturalnej jako rodziny zbiorów.

Wyznaczenie pochodnej algebraicznej $\frac{\partial A^d}{\partial \alpha}$ prowadzi do pominięcia w liczbie strukturalnej A^d kolumn nie zawierających elementu α oraz pominięcia elementu α. Zgodnie z powyższym otrzymujemy:

$$\frac{\partial A^d}{\partial \alpha} = \frac{\partial A^d}{\partial 1} = \begin{bmatrix} 2 & \boxed{4} & 6 & 7 & \boxed{2} & 4 & 6 & 7 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & \boxed{3} & 3 & 3 & \boxed{5} & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial A^d}{\partial \beta} = \frac{\partial A^d}{\partial 6} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \boxed{2} & 3 & 1 & 1 & 2 & \boxed{3} \\ 3 & 5 & \boxed{5} & 5 & 2 & 4 & 4 & \boxed{4} \end{bmatrix}$$

Funkcja wyznacznikowa $\underset{z}{\det} A$ jest określona wzorem następującym:

$$\underset{z}{\det} A = \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} Z\alpha_{ik}, \tag{3}$$

gdzie: Z jest danym zbiorem liczb zespolonych $Z\alpha_{ik}$, a sumowanie i iloczyn są rozumiane w sensie dodawania i mnożenia liczb strukturalnych.

W naszym przypadku

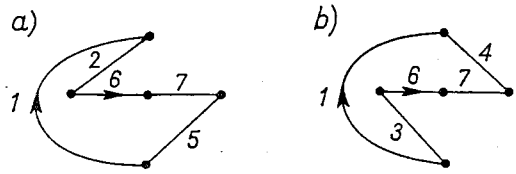
$$\begin{aligned} \underset{z}{\det} A^d = {} & Z_1Z_2Z_3+Z_1Z_4Z_3+Z_1Z_6Z_3+Z_1Z_7Z_3+Z_2Z_4Z_3+ \\ & +Z_1Z_2Z_5+Z_1Z_4Z_5+Z_1Z_6Z_5+Z_1Z_7Z_5+Z_2Z_4Z_5+ \\ & +Z_2Z_6Z_5+Z_2Z_7Z_5+Z_3Z_2Z_5+Z_3Z_4Z_5+Z_3Z_6Z_5+ \\ & +Z_3Z_7Z_5+Z_1Z_2Z_6+Z_1Z_4Z_6+Z_2Z_4Z_6+Z_3Z_4Z_6+ \\ & +Z_1Z_2Z_7+Z_1Z_4Z_7+Z_2Z_4Z_7+Z_3Z_4Z_7. \end{aligned}$$

Funkcja jednoczesności $\underset{z}{\mathrm{sim}}\left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha}, \frac{\partial A^d}{\partial \beta}\right)$ jest liniową kombinacją o współczynnikach „+1" i „−1" wyrazów jednocześnie występujących w funkcjach $\underset{z}{\det} \frac{\partial A^d}{\partial \alpha}$ i $\underset{z}{\det} \frac{\partial A^d}{\partial \beta}$.

O znaku wyrazu decyduje zgodna (+1) lub przeciwna (−1) orientacja obwodu powstałego po usunięciu z przeciwobrazu liczby A^d (z grafu) gałęzi określonych przez elementy danego wyrazu. Otrzymujemy:

$$\frac{\partial A^d}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial A^d}{\partial \beta} = \frac{\partial A^d}{\partial 1} \cap \frac{\partial A^d}{\partial 6} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Znaki wyrazów określimy rozpatrując graf po usunięciu odpowiednich gałęzi, co ilustruje rys. 2.



Rys. 2. Graf układu z usuniętymi niektórymi gałęziami: a) Usunięte gałęzie 3 i 4 — orientacja zgodna, b) Usunięte gałęzie 2 i 5 — orientacja przeciwna

Tak więc funkcja jednoczesności

$$\underset{z}{\mathrm{sim}}\left(\frac{\partial A^d}{\partial 1}, \frac{\partial A^d}{\partial 6}\right) = Z_3 Z_4 - Z_2 Z_5.$$

Zgodnie ze wzorem (2) rozwiązanie ma postać następującą:

$$T = \frac{U_6}{E} = \frac{Z_6(Z_3 Z_4 - Z_2 Z_5)}{\underbrace{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_4 Z_3 + Z_1 Z_6 Z_3 + \ldots + Z_2 Z_4 Z_7 - + Z_3 Z_4 Z_7}_{\text{24 składniki — 24 kolumny liczby } A^d}}.$$

Z przytoczonego przykładu wynika, że wzór końcowy został określony na podstawie znajomości struktury geometrycznej układu elektrycznego oraz że wszystkie istotne działania odbywają się na indeksach będących liczbami naturalnymi.

Rozwiązując powyższy przykład w oparciu o macierzowy zapis metody prądów obwodowych należy określić odpowiednie macierze i wykonać działania zgodnie z algorytmem następującym:

$$\mathbf{I}_0 = [\mathbf{C}_t \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{C}]^{-1} \cdot \mathbf{C}_t \cdot \mathbf{E}_g, \tag{4}$$

$$\mathbf{I}_g = \mathbf{C}\mathbf{I}_0,$$

gdzie:

$\mathbf{I}_0$ — macierz kolumnowa prądów obwodowych,
$\mathbf{C}$ — macierz incydencji ($\mathbf{C}_t$ — macierz transponowana),
$\mathbf{Z}$ — macierz diagonalna impedancji gałęziowych,
$\mathbf{E}_g$ — macierz kolumnowa *SEM* w poszczególnych gałęziach,
$\mathbf{I}_g$ — prądy gałęziowe.

Ze względu na powszechną znajomość metod klasycznych rozwiązywanie przykładu powyższą metodą, li tylko w celach porównawczych, wydaje się zbędne i dlatego pozostawia się ocenę złożoności obliczeń czytelnikowi.

Można by oczywiście porównywać złożoność obliczeń przy stosowaniu innych metod analizy, np. metody grafów przepływowych, ale takie rozważania przekraczałyby ramy niniejszej pracy.

Na podstawie przytoczonego przykładu widać wyraźnie, że stosowanie metody liczb strukturalnych wyklucza konieczność określania odwrotnej macierzy impedancyjnej (admitancyjnej), a więc rozwijania wyznacznika głównego i jego dopełnień, co w metodach klasycznych głównie stanowi o pracochłonności przekształceń.

Liczba strukturalna jako specyficzny zapis struktury geometrycznej odznacza się dużą ilością elementów w porównaniu z zapisem struktury geometrycznej w postaci macierzy incydencji. W rozważanym przykładzie liczba strukturalna A^d zawiera $24\times 3 = 72$ elementy, gdy nie będziemy brać pod uwagę kolumn pominiętych, natomiast liczba elementów macierzy incydencji **C** wynosi $7\times 4 = 28$ elementów. Ta cecha metody liczb strukturalnych decyduje o tym, że pracochłonność przekształceń jest związana z wykonywaniem operacji porównywania elementów lub kolumn w tablicach liczb o znacznych ilościach elementów.

Problem, jak rośnie w miarę komplikacji grafu liczba elementów liczby strukturalnej w stosunku do liczby elementów macierzy incydencji, jest w przypadku ogólnym zagadnieniem samym w sobie. W sposób prosty można to jedynie przedstawić dla grafu zupełnego, tzn. takiego, w którym między każdymi dwoma węzłami istnieje jedno połączenie bezpośrednie. Jeżeli liczbę węzłów grafu oznaczymy przez w, liczbę gałęzi przez g, a liczbę drzew przez d, wówczas dla grafu zupełnego otrzymujemy zależności następujące:

$$\left.\begin{aligned} g &= \frac{w(w-1)}{2}, \\ d &= w^{(w-2)}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Liczba g przedstawia ilość kolumn macierzy incydencji **C**. Liczba d przedstawia ilość kolumn liczby strukturalnej A lub A^d. Ilość wierszy liczby strukturalnej A oraz macierzy incydencji **C** jest jednakowa i wynosi $w-1$. Ilość wierszy liczby strukturalnej dopełniającej A^d wynosi:

$$g-(w-1) = \frac{(w-1)\,(w-2)}{2}.$$

Zgodnie z powyższym stosunek ilości elementów liczby strukturalnej A (lub A^d) do ilości elementów macierzy incydencji **C**, oznaczony przez R (lub R^d) wyraża się wzorem następującym:

$$R = \frac{2w^{(w-3)}}{w-1}; \qquad R^d = \frac{(w-2)w^{(w-3)}}{w-1}. \tag{6}$$

Zależności (6) dają wyobrażenie o progresywnym charakterze wzrostu ilości elementów liczby strukturalnej w porównaniu z ilością elementów odpowiedniej macierzy incydencji oraz o wadze zagadnień związanych z wyznaczaniem i operowaniem tablicami liczb, znacznie rozbudowanymi w przypadku bardziej skomplikowanych układów elektrycznych.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że w przypadku ogólnym liczba elementów liczby strukturalnej A może się różnić od liczby elementów liczby strukturalnej dopełniającej A^d.

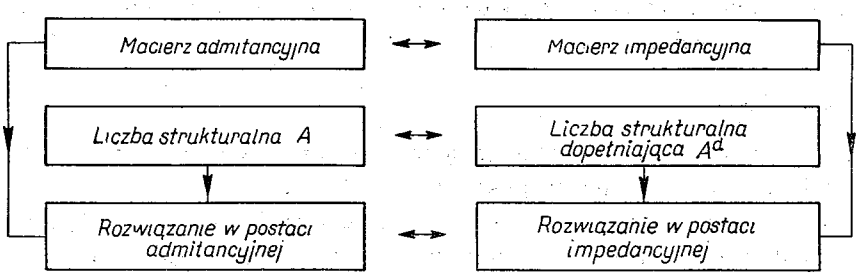
W pewnych przypadkach może to stanowić o celowości wykorzystywania do obliczeń odpowiedniej liczby strukturalnej, co przesądza o postaci rozwiązania jako admitancyjnej lub impedancyjnej. Wybór liczby strukturalnej może zależeć od stosunku pomiędzy ilością węzłów w a ilością gałęzi g w danym grafie. Odpowiednie zależności można przedstawić następująco:

$2(w-1) = g \Rightarrow$ liczba elementów $A =$ liczbie elementów A^d
$2(w-1) > g \Rightarrow$ „ „ $A >$ liczby „ „
$2(w-1) < g \Rightarrow$ „ „ $A <$ „ „ „

3. ANALOGIE ZACHODZĄCE POMIĘDZY METODĄ LICZB STRUKTURALNYCH A METODAMI KLASYCZNYMI

Oczywiście w obrębie zastosowań do teorii sieci elektrycznych metodą liczb strukturalnych badamy te same zagadnienia co i metodami klasycznymi.

Jedną z charakterystycznych cech tej metody jest dualność wzorów. Zagadnienie to omówimy bardziej szczegółowo. Schematowo i w uproszczony sposób przedstawia cechę dualności rys. 3.



Rys. 3. Uproszczony schemat dualności wzorów

Układ fizyczny określony za pomocą liczby strukturalnej A ma swoje odwzorowanie geometryczne, którym jest graf układu. Graf ten jest nazywany obrazem geometrycznym liczby strukturalnej A. Obraz geometryczny liczby strukturalnej dopełniającej A^d (nazywany przeciwobrazem liczby strukturalnej A) ma strukturę dualną w sensie Cauera względem obrazu geometrycznego liczby strukturalnej A. Własność ta wraz z odpowiednią ilustracją podana jest w [4].

Poniżej przytoczymy najprostsze przykłady dualnych pojęć z algebry liczb strukturalnych:

A	—	A^d
$\det_y A$	—	$\det_z A^d$
$\operatorname{sim}_y\left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta}\right)$	—	$\operatorname{sim}_z\left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha}, \frac{\partial A^d}{\partial \beta}\right)$
$A[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k] = 0$	—	$A^d[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_t] = 0$
gdzie: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ są gałęziami incydentnymi z określonym węzłem grafu		gdzie: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_t$ są gałęziami przedstawiającymi określony cykl w grafie

Formalną analogię do metod prądów obwodowych i potencjałów węzłowych stanowi wyznaczanie liczby strukturalnej A^d z jednowierszowych liczb strukturalnych dotyczących wszystkich niezależnych obwodów sieci oraz wyznaczanie liczby strukturalnej A z jednowierszowych liczb strukturalnych dotyczących wszystkich niezależnych węzłów sieci. Odpowiednie twierdzenia zawarte są w pracy [3] i [4]. Mają one zasadnicze znaczenie, gdyż rozwiązują zagadnienie dogodnego znajdowania wszystkich drzew a także przeciwdrzew grafu.

Ponieważ własności fizyczne układu elektrycznego zależą od jego struktury geometrycznej, więc zarówno w liczbie strukturalnej, jak w macierzy impedancyjnej i admitancyjnej jest oczywiście „zaszyfrowana" ta struktura. Własność ta jest wspólna, chociaż sposoby realizacji „szyfrowania" struktury geometrycznej są odmienne.

Pomiędzy metodą liczb strukturalnych a metodami klasycznymi istnieją pewne równoważności. Metoda liczb strukturalnych opiera się na teorii drzew, tzn. odpowiednie algorytmy topologiczne mogą być przedstawione w formaliźmie algebry liczb strukturalnych. Podstawowe własności sformułowane przez Percivala [10] można przedstawić następująco:

Własność 1

Suma iloczynów admitancji wszystkich wartości drzew grafu jest równa wyznacznikowi macierzy admitancyjnej układu.

Własność 2

Suma iloczynów impedancji wszystkich wartości przeciwdrzew grafu jest równa wyznacznikowi macierzy impedancyjnej układu.

Ponieważ kolumny liczby strukturalnej A reprezentują drzewa grafu, a kolumny liczby strukturalnej dopełniającej A^d reprezentują przeciwdrzewa grafu, więc powyższe własności można zapisać w następującej postaci:

$$\text{Własność 1} \qquad \det ||\mathbf{Y}'|| = \det_{y} A,$$

$$\text{Własność 2} \qquad \det ||\mathbf{Z}'|| = \det_{z} A^d,$$

gdzie: $\det ||\mathbf{Y}'||$, $\det ||\mathbf{Z}'||$ — wyznaczniki macierzy admitancyjnej i impedancyjnej,
$\det_{y} A$, $\det_{z} A^d$ — funkcje wyznacznikowe odpowiednich liczb strukturalnych.

Formalne analogie pomiędzy metodą liczb strukturalnych a metodami klasycznymi można prosto przedstawić na przykładzie algorytmów obliczeniowych dla sieci biernych. Przy stosowaniu metod klasycznych wyrażenie określające rozwiązanie, tzn. zależność prądu w określonej gałęzi lub spadku napięcia na określonej gałęzi od zadanej *SEM* lub wydajności prądowej źródła, posiada pewne cechy ogólne:

1) mianownik wyrażenia jest wyznacznikiem głównym macierzy impedancyjnej lub admitancyjnej,

2) licznik wyrażenia jest podwyznacznikiem lub kombinacją liniową podwyznaczników macierzy impedancyjnej lub admitancyjnej.

Odpowiednie algorytmy zapisane w formaliźmie algebry liczb strukturalnych mają postać następującą:

$$\frac{i_\beta}{E} = \frac{\underset{z}{\operatorname{sim}}\left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha}, \frac{\partial A^d}{\partial \beta}\right)}{\underset{z}{\det} A^d}; \tag{7}$$

$$\frac{u_\beta}{J} = \frac{\underset{y}{\operatorname{sim}}\left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta}\right)}{\underset{y}{\det} A}; \tag{8}$$

gdzie:

i_β, u_β — prąd i napięcie na gałęzi β,

E, J — *SEM* i wydajność prądowa źródła,

α — oznaczenie gałęzi reprezentującej opór wewnętrzny źródła.

Zależności (7) i (8) są przykładem dualności wzorów oraz wykazują, że wyznaczeniu funkcji jednoczesności odpowiada obliczenie podwyznaczników macierzy impedancyjnej lub admitancyjnej. Dowód tej odpowiedniości podany jest w [1] i [2].

4. CECHY RÓŻNIĄCE METODĘ LICZB STRUKTURALNYCH Z METODAMI KLASYCZNYMI

Układ elektryczny jest opisany, gdy znamy:

1) strukturę geometryczną,
2) wypełnienie struktury geometrycznej
   a) jakościowe — typ elementu,
   b) ilościowe — wartość elementu.

Określenie liczby strukturalnej, jako algebraicznego zapisu struktury geometrycznej, nie opisuje więc całkowicie własności układu, gdyż spełnia jedynie pierwszy warunek. Oczywiste jest jednak stwierdzenie, że funkcje opisujące własności układu elektrycznego zależą w sposób istotny od jego struktury geometrycznej. Metoda liczb strukturalnych przekonywająco uwypukla powyższy wniosek, gdyż wyraźnie rozgranicza działania mające związek z własnościami struktury geometrycznej układu od działań związanych z własnościami wynikającymi z wypełnienia fizycznego struktury geometrycznej.

Analizując algorytmy zapisane w formaliźmie algebry liczb strukturalnych widać, że większość istotnych działań wykonywanych jest wyłącznie na liczbie strukturalnej i dopiero w końcowej fazie operacji wprowadzane są do wzorów poprzez funkcje wyznacznikowe wartości elementów.

W metodach klasycznych podstawą jest określenie macierzy admitancyjnej $\mathbf{Y}'$ lub impedancyjnej $\mathbf{Z}'$ układu elektrycznego. Odpowiednie wzory (wg symboliki Le Corbeillera) [8] mają postać następującą:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{Y}' &= \mathbf{A}_t \mathbf{Y} \mathbf{A}, \\ \mathbf{Z}' &= \mathbf{C}_t \mathbf{Z} \mathbf{C}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Pomijając szczegółowy opis użytych symboli, które są powszechnie znane i używane w literaturze, można stwierdzić, że macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{C}$ (nazywane macierzami incydencji lub

łączącymi) przedstawiają zapis struktury geometrycznej układu, natomiast macierze **Y** i **Z** (nazywane macierzami gałęziowymi) przedstawiają szczególny zapis wypełnienia fizycznego struktury geometrycznej z pominięciem źródeł prądowych i napięciowych. Tak więc macierze admitancyjna **Y**′ i impedancyjna **Z**′, chociaż zawierają pełniejsze dane odnoszące się do właściwości układu niż liczba strukturalna, nie rozgraniczają jednak w sposób wyraźny wpływu struktury od wpływu wypełnienia fizycznego tej struktury.

Omawiana powyżej cecha metody liczb strukturalnych ma swoje konsekwencje rachunkowe. W początkowej fazie obliczeń wykorzystywane są tylko dane odnoszące się do struktury geometrycznej. Wykonywanie takich operacji, jak wyznaczanie pochodnych i przeciwpochodnych liczby strukturalnej, koniunkcji i mnożenia liczb strukturalnych, dzięki temu, że odbywają się one na indeksach w postaci liczb naturalnych, można łatwo „zmechanizować", co jest równoznaczne z możliwością opracowania programów obliczeniowych na maszyny cyfrowe. Wykonywanie operacji wyłącznie na indeksach stanowi także o prostocie i możliwości stosunkowo szybkiego uzyskiwania wzorów końcowych, decyduje również o zwięzłej tabelarycznej formie zapisu wyników pośrednich i ma wpływ na ograniczenie pracochłonności przekształceń. Początkowa faza obliczeń kończy się określeniem odpowiednich wzorów, których poszczególne elementy mają postać tablicy liczb naturalnych. Dopiero w tym stanie wprowadzane są poprzez funkcje wyznacznikowe dane mające związek z wypełnieniem fizycznym struktury geometrycznej. Podawane algorytmy obliczeniowe dotyczą takich wielkości charakteryzujących układ, jak impedancje, admitancje, transmitancje, różnica zwrotna bez nakładania ograniczeń co do struktury badanego układu. Stanowi to o ogólności i uniwersalności algorytmów obliczeniowych, co jest nie bez znaczenia w analizie, a szczególnie w syntezie układów elektrycznych. Ten charakter metody jest więc cechą dodatnią, gdyż wprowadzając pewną systematykę umożliwia jednocześnie „mechanizację" procesu analizy i daje przesłanki dla uniwersalnej syntezy, pojętej ogólnie w sensie stosowania różnorakich kryteriów optymalizacyjnych.

W metodzie liczb strukturalnych o postaci wzorów końcowych decyduje konfiguracja geometryczna układu elektrycznego. Otrzymuje się je w standartowej postaci jako stosunek odpowiednich sum z iloczynów admitancji lub impedancji. Istotną wydaje się być cecha umożliwiająca wyznaczenie rozwiązania ogólnego w postaci symbolicznej. Uzyskane to może być prosto poprzez wprowadzenie w drugiej fazie obliczeń zamiast danych dotyczących wartości elementów i ich typu odpowiadających im symboli.

W metodach klasycznych również możliwe jest uzyskanie rozwiązania w postaci symbolicznej, jednak oznaczenie symbolami elementów należy wprowadzić przed przystąpieniem do obliczeń. Ta na pozór drobna różnica ma znaczne konsekwencje przy stosowaniu maszynowego liczenia. W przypadku metod klasycznych wszystkie operacje (np. mnożenie macierzy, wyznaczanie macierzy odwrotnej) muszą być wykonywane na symbolach, co prowadzi do znacznej komplikacji opracowywanych programów. Większa efektywność wyznaczania wzorów w postaci symbolicznej przy użyciu formuł topologicznych jest uznana, por. [9].

Pracochłonność związana ze stosowaniem danej metody jest zależna od ilości i rodzaju wykonywanych operacji. Trudno jest porównywać rodzaje operacji w omawianych metodach, gdyż jedyną cechą łączącą jest algebraiczny ich charakter przy wszystkich różnicach, jakie występują pomiędzy rachunkiem wyznacznikowym a algebrą zbiorów. Ogólnie ope-

racje wykonywane na liczbie strukturalnej zastępują konieczność wyznaczania odwrotnej macierzy impedancyjnej czy admitancyjnej. Można stwierdzić, że ze względu na prostotę podstawowych operacji w metodach klasycznych i metodzie liczb strukturalnych różnice w pracochłonności zasadzają się nie tyle na rodzaju wykonywanych operacji, co na ich ilości.

Pracochłonność związana z praktycznym stosowaniem metod klasycznych ma progresywny charakter w miarę komplikacji układu elektrycznego i wynika z konieczności obliczania wyznaczników i podwyznaczników odpowiednich macierzy. W trakcie obliczania wyznaczników pojawiają się człony o różnych znakach, które nie mają bezpośredniego odzwierciedlenia w wyniku ostatecznym i z tego punktu widzenia można je uznać za operacje zbędne — niepotrzebny bagaż metody.

Przy stosowaniu metody liczb strukturalnych pracochłonność ma również progresywny charakter w miarę komplikacji układu i jest głównie związana z ilością operacji porównywania zbiorów i elementów w zbiorach. Liczba strukturalna charakteryzująca układ posiada tylko te składniki, które mają swoje odbicie we wzorze ostatecznym, jednakże w metodzie liczb strukturalnych istnieje również redundancja ilości operacji, wynikająca np. z konieczności eliminacji parzystej liczby jednakowych kolumn.

W metodach klasycznych zagadnienie wyznaczania znaków poszczególnych składników sumy algebraicznej, jaką reprezentuje rozwinięty wyznacznik, nie ma wpływu na zwiększenie ilości działań, gdyż znaki te niejako automatycznie są określane podczas kolejnych operacji. Natomiast sposób wyznaczania znaków wyrazów funkcji jednoczesności prowadzi do nowych operacji. Algebraiczne metody (a przede wszystkim takie mają znaczenie przy stosowaniu maszynowego liczenia) określania znaków wyrazów funkcji jednoczesności [3], [20] prowadzą dodatkowo do konieczności wyznaczania koniunkcji zbiorów o znacznej liczbie elementów. Ma to tym większe znaczenie, im bardziej jest skomplikowany układ elektryczny. Dla zobrazowania wagi zagadnienia można się posłużyć przykładem podanym w pracy [9], której autor stwierdza, że użycie formuł topologicznych do analizy sieci nie jest zbyt dogodne ze względu na fakt znacznej ilości drzew opisujących układ elektryczny, np. dla sieci zawierającej 11 węzłów i 21 gałęzi jest ich około 13 000.

Obecnie problem określania drzew z odpowiednim znakiem jest najważniejszym problemem w topologicznej analizie i syntezie sieci. W tym względzie są czynione próby w celu opracowania odpowiednich metod i jak najbardziej optymalnych programów na maszyny cyfrowe.

W odniesieniu do metody liczb strukturalnych jedną z możliwości znacznego zmniejszenia ilości operacji związanych z wyznaczaniem i porównywaniem dużej liczby drzew kryje w sobie zastosowanie liczb strukturalnych wyższych kategorii [18], [19], [20]. Ogólnie jest to idea układów blokowych przeniesiona w dziedzinę liczb strukturalnych i polegająca między innymi na podziale sieci na bloki. Ułatwienie obliczeń polega tu na tym, że liczby strukturalne charakteryzujące poszczególne bloki nie mają wspólnych elementów, co ułatwia wyznaczanie funkcji jednoczesności i zmniejsza ilość operacji porównywania kolumn, gdyż mamy do czynienia ze zbiorami mniej licznymi, niżby to miało miejsce przy stosowaniu liczb strukturalnych pierwszej kategorii. Istotnym przy tym faktem jest konsekwentne używanie algebry liczb strukturalnych w oparciu o nie zmienione podstawowe działania.

Inną możliwość, być może, zmniejszenia ilości operacji przy wyznaczaniu funkcji jednoczesności kryje w sobie specyfika tej funkcji. Funkcja jednoczesności odpowiada podwyznacznikowi lub kombinacji liniowej podwyznaczników macierzy impedancyjnej lub admitancyjnej. W przypadku rozpatrywania sieci biernych i potraktowaniu odpowiednich dopełnień algebraicznych wyznacznika macierzy impedancyjnej czy admitancyjnej jako funkcji jednoczesności problem znaku jest sprowadzony do określenia znaku odpowiednich dopełnień. Wówczas bowiem wszystkie wyrazy funkcji jednoczesności muszą mieć jednakowy znak. Idea powyższa zastosowana jest w [7], gdzie autor proponuje użycie liczb strukturalnych do automatyzacji obliczeń przy wyznaczaniu dopełnień algebraicznych wyznacznika głównego układu elektronicznego. Oczywiście w celu określenia znaku dopełnienia algebraicznego należy sięgnąć do danej odpowiedniej macierzy. Fakt ten jest zjawiskiem ujemnym, gdyż stwarza konieczność określania oprócz liczby strukturalnej także macierzy impedancyjnej lub admitancyjnej.

Przy stosowaniu metody liczb strukturalnych do maszynowej analizy i syntezy układów elektrycznych znaczny wpływ na ilość operacji może mieć sposób programowania. W przeciwieństwie do arytmetycznego charakteru operacji w metodach klasycznych, który umożliwiał, z dobrym skutkiem, algorytmiczny sposób programowania, charakter logiczny większości istotnych działań w metodzie liczb strukturalnych wskazuje na większą przydatność w tym zakresie programowania w języku wewnętrznym maszyny. Nie bez znaczenia jest również sposób zapisu danych wejściowych i wyników pośrednich. Przykładowy zapis liczby strukturalnej nie jako tablicy liczb naturalnych, ale tablicy liczb binarnych (0, 1) [15] daje wyraźną korzyść w zmniejszeniu ilości operacji poprzez zastąpienie porównywania wszystkich elementów tablicy między sobą porównywaniem jedynie całych kolumn między sobą, które są wówczas zapisywane jako liczba binarna w jednej komórce pamięci maszyny.

W metodzie liczb strukturalnych jest widoczne i uchwytne powiązanie liczby strukturalnej oraz niektórych operacji ze strukturą geometryczną. Na przykład wyznaczaniu pochodnej algebraicznej $\frac{\partial A}{\partial \alpha}$ (gdy liczba A ma obraz geometryczny) odpowiada zwarcie i usunięcie gałęzi α w grafie przedstawiającym obraz. Odpowiednio wyznaczenie przeciwpochodnej $\frac{\delta A}{\delta \alpha}$ jest równoważne rozwarciu gałęzi α w danym grafie. Scisłe powiązanie liczby strukturalnej ze strukturą geometryczną jest cechą szczególnie ważną w zastosowaniu do syntezy układów elektrycznych. Podstawowe twierdzenie ujmujące warunki konieczne i dostateczne na to, aby liczba strukturalna miała obraz, podane jest w [2] i [4].

W przypadku rachunku macierzowego i wyznacznikowego nie ma powyższego powiązania, gdyż wszystkie operacje są czysto analityczne. Rzutuje to na trudny, wręcz niemożliwy do oceny w czasie obliczeń wpływ poszczególnych parametrów układu na wynik ostateczny.

W analizie układów czynnych metodami klasycznymi podstawowa trudność polega na złożoności określenia macierzy impedancyjnej lub admitancyjnej opisującej układ. Procedura postępowania jest znana, ale nie jest zbyt dogodna do automatyzacji obliczeń. Przy stosowaniu metody liczb strukturalnych analiza układów czynnych jest możliwa poprzez wydzielenie z układu źródeł sterowanych prądowo lub napięciowo, charakteryzujących

elementy czynne, oraz rozpatrywanie wyłącznie części biernej układu elektronicznego. Otrzymane tą drogą algorytmy charakteryzuje znaczna komplikacja ich formy, ale są one dogodne do automatyzacji obliczeń. Idea analizy układów czynnych była przedstawiona w referacie S. Bellerta [6] i M. Piekarskiego [11]. Znajduje ona potwierdzenie w [7], gdzie autor na innej drodze dochodzi do analogicznych wyników. W oparciu o [7] i algebrę liczb strukturalnych przedstawiony jest w [16] szkic programu analizy układów elektronicznych przy użyciu maszyny cyfrowej.

5. WNIOSKI KOŃCOWE

Trudno mówić o wyższości metody liczb strukturalnych nad metodami klasycznymi, bowiem dopełnia ona tylko metody klasyczne nie powodując ich zaniechania. Klasyczne metody analizy mają znaczenie podstawowe i nadal służą jako narzędzie do uogólnionych rozważań z zakresu elektrotechniki teoretycznej. Metody nowe pozwalają zazwyczaj ujrzeć i ująć pewne zagadnienia w sposób prostszy.

Bezsprzeczną zaletą teorii grafów, a więc i metody liczb strukturalnych, gdyż na grafach się opiera, jest fakt powiązania otrzymywanych wyników bezpośrednio ze strukturą geometryczną układu. Oznacza to, że wynik może być określony ze struktury układu, przy czym łatwiejszy jest do oceny wpływ parametrów tej struktury, co przy stosowaniu metod klasycznych — analitycznych jest utajone w operacjach matematycznych i w związku z tym trudno uchwytne. Powyższa cecha metody liczb strukturalnych jest wielce obiecująca w zastosowaniach do uniwersalnej syntezy układów elektrycznych.

Metoda liczb strukturalnych jest metodą podającą ogólne i uniwersalne algorytmy obliczeniowe. Tym samym umiejętność ich stosowania pozwala w stosunkowo prosty sposób otrzymać końcowe wyniki, mimo że forma ich zapisu może być skomplikowana. Metoda liczb strukturalnych jest algebraizacją metody drzew i wymaga opanowania niezbyt trudnego, ale nowego narzędzia pracy. Korzystne cechy metody liczb strukturalnych wynikają z prostego odwzorowania układu fizycznego przez liczbę strukturalną oraz nieskomplikowanej algebry, gdyż operacje odbywają się na indeksach w postaci liczb naturalnych. Omawiana metoda wydaje się być predysponowana do automatyzacji obliczeń, szczególnie gdy chodzi o uzyskanie wyników w postaci symbolicznej.

Obecnie naturalną dążnością w analizie układów elektrycznych jest chęć zastosowania maszyn cyfrowych i w związku z tym próby adaptacji znanych już metod analizy do opracowywania odpowiednich programów. Problem jest złożony, gdyż opracowanie optymalnych metod postępowania wiąże się jednocześnie z opracowywaniem jak najprostszych danych wejściowych i sposobem ich wprowadzania, opracowywaniem specjalnych języków dla maszyny i budową maszyn o dużej pamięci operacyjnej i znacznych szybkościach działania. Wymaga to żmudnych prac badawczych zespołu naukowców o różnych specjalnościach. W tym stanie rzeczy możliwość sukcesu jednej z metod analizy jest uzależniona od odpowiednich osiągnięć innych dziedzin teoretycznych, technologicznych i konstrukcyjnych. Obiecującą ze względu na zastosowanie maszynowego liczenia wydaje się metoda liczb strukturalnych, ewentualnie połączenie rachunku macierzowego z algebrą liczb strukturalnych. Obecnie istnieje cały szereg specjalistycznych programów analizy układów elek-

trycznych. Większość z nich opiera się na rachunku macierzowym i wyznacznikowym ze względu na gotowe, sprawdzone procedury postępowania, np. gotowe (używane do innych celów) programy odwracania macierzy.

Przy ocenie metody liczb strukturalnych należy wziąć pod uwagę fakt, że jest to metoda nowa, dopiero kształtująca się, w której „ostatnie słowo" nie zostało jeszcze wypowiedziane.

W zakończeniu składam wyrazy podziękowania prof. Stanisławowi Bellertowi oraz prof. Tadeuszowi Cholewickiemu za życzliwe uwagi, które były pomocne przy redagowaniu niniejszej pracy.

Politechnika Warszawska
Katedra Teletransmisji Przewodowej

WYKAZ LITERATURY

1. Bellert S.: Topological Analysis and Synthesis of Linear Systems. Jour. of the Franklin Institute, Vol. 274, Nr 6, December 1962.
2. Bellert S.: Topological Considerations and Synthesis of Linear Networks by Means of the Method of Structural Numbers. — Archiwum Elektrotechniki, tom XII, z. 3, 1963.
3. Bellert S.: Computer Four-Pole Synthesis Based on the Method of Structural Numbers. — Archiwum Elektrotechniki, tom XIII, z. 3, 1964.
4. Bellert S.: Topologiczna analiza i synteza układów liniowych. — Zeszyty Naukowe PW, Elektryka nr 37, 1964.
5. Bellert S.: Maszynowa synteza czwórników metodą liczb strukturalnych. Materiały Sympozjum Teletransmisyjnego, Sekcja S2, Warszawa 1963.
6. Bellert S.: Analiza i synteza układów czynnych metodą liczb strukturalnych. Konferencja „Zastosowanie metod analizy funkcjonalnej i topologii w teorii układów", Jabłonna 1965 (streszczenie referatu na prawach rękopisu).
7. Kałnibołotskij J. H.: Analiz liniejnych elektronnych schiem mietodom wydielenija niesymietricznoj czasti opredielitielia matricy schiemy. — Izwiestia Wuzow SSSR — Radioelektronika. tom X, nr 7.
8. Le Corbeiller P.: Matrix Analysis of Electric Networks. Cambridge, Mass. Harvard U. Press 1950.
9. Mittleman J.: Circuit Analysis by Computer. — Electronics, September 1966, str. 120.
10. Percival W. S.: Solution of Passive Electrical Networks by means of Mathematical Trees. — J. Inst. Elect. Engrs. (London) 100 (part III), 1953.
11. Piekarski M.: Formuły topologiczne dla funkcji transmitancji układów linearnych czynnych, Konferencja „Zastosowanie metod analizy funkcjonalnej i topologii w teorii układów", Jabłonna 1965 (streszczenie referatu na prawach rękopisu).
12. Psarski K.: O algebrze liczb strukturalnych. — Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Łódzkiego. Nauk Matematyczno-Przyrodn., seria II, z. 26, 1967.
13. Rysin W. S.: Topologiczeskije swojstwa niekotorych summarnych algebraiczeskich dopołnienij. — Izwiestia Wuzow SSSR — Radioelektronika, tom X, nr 7.
14. Seshu S., Reed M. B.: Linear Graphs and Electrical Networks. Addison-Wesley Publ. Comp. 1961.
15. Syc Cz.: O pewnym sposobie kodowania liczb strukturalnych Bellerta dla maszyn cyfrowych. — Biuletyn WAT, nr 4, 1968.
16. Tabarnyj W. G.: Analiz elektronnych schiem na ECWM w obszczem widie. — Izwiestia Wuzow SSSR — Radioelektronika, tom X, nr 7.
17. Wang K. T.: On a New Method for the Analysis of Electrical Networks. — Nat. Res. Inst. Eng. Academia Sinica, Memoir nr 2, 1934.

18. Woźniacki H.: Obliczanie i analiza sieci elektrycznych metodą wielomianów charakterystycznych. — Archiwum Elektrotechniki, tom X, z. 1, 1961.
19. Woźniacki H.: Analiza grafów i elektrycznych sieci złożonych metodą liczb strukturalnych. Praca doktorska, Pol. War., 1965.
20. Woźniacki H.: Analiza blokowych układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych. — Archiwum Elektrotechniki, z. 2 i z. 3, 1966.

J. NADRATOWSKI

METHOD OF STRUCTURAL NUMBERS VERSUS CLASSICAL METHODS OF LINEAR SYSTEM ANALYSIS

Summary

The paper deals with the properties of the method of structural numbers, leaving out the method's foundations. The definitions and basic theorems relative to the method can be found in [1], [2], [3], [4], [12], [20]. The properties connected with the geometric structure of an electric system have been stressed particularly. A comparison has been carried out of the structural number method with the classical analysis methods, that is with the meshmethod and node-pair method. Characteristics common to the methods and those making them different have been rendered conspicuous. The paper also gives generalised conclusions that make it possible to evaluate the suitability of the structural number method for the solution of the problems of electric network analysis.

J. NADRATOWSKI

LA MÉTHODE DES NOMBRES STRUCTURELS SUR LE FOND DES MÉTHODES CLASSIQUES DE L'ANALYSE DES SCHÉMAS LINÉAIRES

Résumé

On a présenté dans l'oeuvre les propriétés de la méthode des nombres structurels sans raconter les fondements. Les définitions ainsi que les théorèmes fondamentales concernant cette méthode sont publiées dans [1], [2], [3], [4], [12], [20]. On a souligné particuliérement les qualités liées avec la structure géométrique du schéma électrique. On a fait une comparaison de la méthode des nombres structurels avec les méthodes classiques de l'analyse, c. à d. avec la méthode des courants de circuit et des potentiels de noeud. On a souligné les propriétés communes et les différences de ces méthodes. On a donné aussi dans l'oeuvre les conclusions généralisées permettant d'évaluer l'utilité de la méthode des nombres structurels à résoudre les problèmes de l'analyse des réseaux électriques.

Я. НАДРАТОВСКИ

МЕТОД СТРУКТУРНЫХ ЧИСЕЛ НА ФОНЕ КЛАССИЧЕСКИХ МЕТОДОВ АНАЛИЗЫ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

Резюме

В работе описаны характерные свойства метода структурных чисел с упущением его основ. Определения и основные теоремы, касающиеся этого метода можно найти в [1], [2], [3], [4], [12] и [20]. Особенное внимание обращено на свойства, связанные с геометрической структурой элек-

трической цепи. Произведено сравнение метода структурных чисел с классическими методами анализа, такими как метод контурных токов и узловых потенциалов. Подчеркнуты отличительные и общие черты этих методов. В работе приведены тоже обобщенные выводы, позволяющие оценить пригодность метода структурных чисел для решения вопросов анализа электрических сетей.

621.373.431

JAN SRZEDNICKI

Optymalne parametry przestrajanego mostkowego generatora RC

Rękopis dostarczono 24.6.1968

W pracy rozpatrzono zależność stałości częstotliwości i zniekształceń nieliniowych mostkowego generatora RC od parametrów zastosowanego w nim czteroelementowego selektywnego czwórnika sprzężenia zwrotnego. Wykazano, że przez zastąpienie mostka Wiena mostkiem z czwórnikiem typu obróconego zbocznikowanego T można uzyskać ponad dwukrotnie mniejszą zarówno zawartość harmonicznych, jak i niestałość częstotliwości generatora.

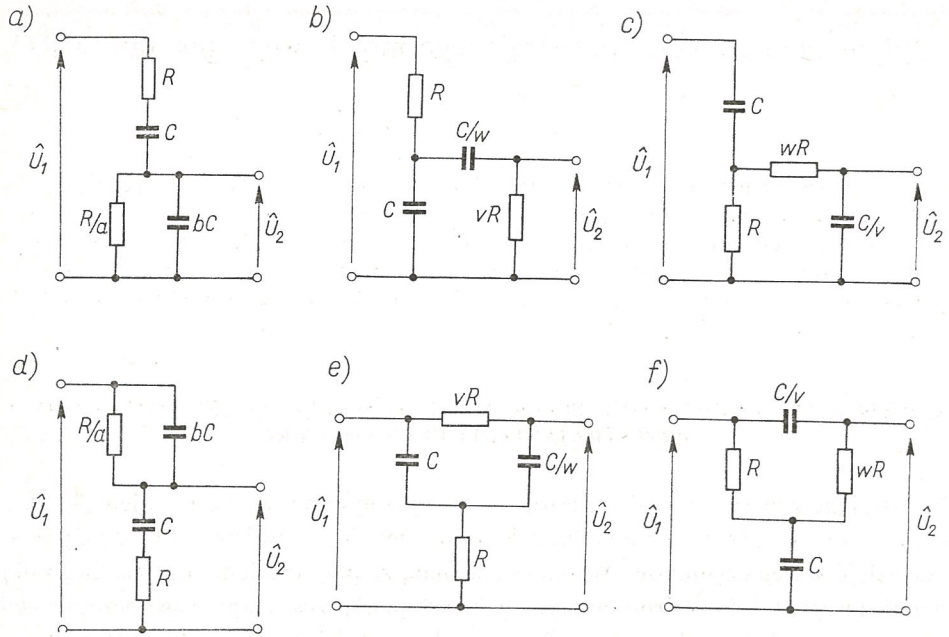
1. WYBÓR TYPU CZWÓRNIKA SELEKTYWNEGO SPRZĘŻENIA ZWROTNEGO DLA PRZESTRAJANEGO GENERATORA RC

Przestrajane generatory małej częstotliwości wykonywane są obecnie niemal wyłącznie jako generatory *RC*. O wyborze najbardziej odpowiedniego czwórnika dla takiego generatora decyduje szereg czynników. Wydaje się jednak, że przy ustalaniu optymalnego układu można nie uwzględniać czwórników wymagających przy przestrajaniu równoczesnej zmiany wartości więcej niż dwu elementów. Znane najkorzystniej dobrane układy tego typu nie wykazują znacznie lepszych własności selektywnych w porównaniu z czteroelementowymi czwórnikami *RC*, a niedogodności związane ze stosowaniem wieloelementowych zespołów *R* lub *C* o zmienianej wartości są znaczne.

Najprostsze konstrukcyjnie są układy przestrajane jednym elementem (np. [5]). Jednakże mają one szereg wad, np. ograniczony różnymi względami zakres przestrajanych częstotliwości i niezbyt dobre, zmieniające się przy przestrajaniu własności selektywne. Dlatego też układy takie wymagają osobnego omówienia, a podsumowując wszystkie ich cechy trudno jest zaliczyć je do układów optymalnych. Należy przy tym nadmienić, że najlepiej nadające się do praktycznego zastosowania układy *RC* przestrajane jednym elementem stanowią odmiany znanych czteroelementowych czwórników *RC*.

Spośród czteroelementowych czwórników *RC* przestrajanych za pomocą zmiany wartości dwu elementów należy wyróżnić układy pokazane na rys. 1. Rys. 1a przedstawia czwórnik Wiena, a rys. 1e i rys. 1f czwórniki T zbocznikowane opornością wzgl. pojemnością. Te same czwórniki jednak z inaczej zlokalizowanym wyjściem przedstawiają rysunki 1d, 1b i 1c. Czwórniki według rysunków 1d, 1e i 1f są włączane w generatorach do gałęzi ujemnego sprzężenia zwrotnego wzmacniacza, którego kąt fazowy wzmocnienia powinien wynosić $\frac{\pi}{2}$. Natomiast czwórniki według rysunków 1a, 1b i 1c włącza się do gałęzi dodatniego sprzężenia zwrotnego, a wzmacniacz generatora ma co najmniej dwa stopnie wzmoc-

nienia napięciowego. W takim przypadku wzmocnienie wzmacniacza jest z reguły większe niż w przypadku wzmacniacza o kącie wzmocnienia $\frac{\pi}{2}$. Wprawdzie przesunięcie fazowe $\frac{\pi}{2}$ można uzyskać np. w trójstopniowym wzmacniaczu, ale w praktyce układów takich nie stosuje się w generatorach m.i. ze względu na trudności związane z usunięciem oscylacji



Rys. 1. Czwórniki używane w przestrajanych generatorach RC: a) i d) — Wiena, b), c), e) i f) — typu zbocznikowanego T

pasożytniczych. Ponieważ własności mostkowych generatorów *RC* polepszają się wraz ze wzmocnieniem wzmacniacza i przy dwustopniowym wzmacniaczu są już bardzo dobre, więc niżej będą omawiane tylko układy z czwórnikami według rysunków 1a, 1b i 1c. Jednakże wiele z podanych niżej wzorów odnosi się także do układów z pozostałymi czwórnikami pokazanymi na rys. 1.

Dla nie obciążonego czwórnika Wiena (rys. 1a) funkcja przejścia wynosi:

$$\hat{\beta}_w = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{1}{1+a+b+j\sqrt{ab}\left(x-\frac{1}{x}\right)}, \tag{1}$$

przy czym

$$x = \frac{\omega}{\omega_0}, \tag{2}$$

a

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}\sqrt{\frac{a}{b}}. \tag{3}$$

Podobnie dla obu czwórników pokazanych na rysunkach 1b i 1c, a nazywanych w niniejszej pracy obrócone zbocznikowane T[1] otrzymujemy

$$\hat{\beta}_T = \frac{1}{1+\frac{1}{v}+\frac{w}{v}+j\sqrt{\frac{w}{v}}\left(x-\frac{1}{x}\right)}. \tag{4}$$

Pulsacja ω_0 wynosi

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}\sqrt{\frac{w}{v}} \quad \text{dla układu według rys. 1b} \tag{5a}$$

i

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}\sqrt{\frac{v}{w}} \quad \text{dla układu według rys. 1c.} \tag{5b}$$

Dla tych wszystkich trzech czwórników funkcję przejścia można napisać w następującej uogólnionej postaci:

$$\hat{\beta} = \frac{1}{A+jBs}, \tag{6}$$

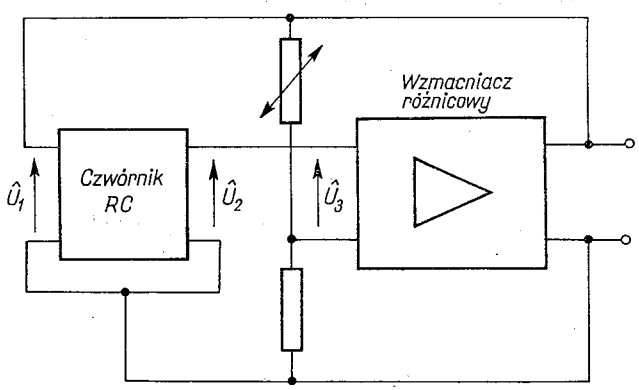
gdzie

$$s = x-\frac{1}{x}. \tag{7}$$

Wyrażenie A jest tłumieniem przy częstotliwości rezonansowej (tj., gdy $\omega = \omega_0$).

2. FUNKCJA PRZEJŚCIA I WŁASNOŚCI SELEKTYWNE CZWÓRNIKA PRACUJĄCEGO W UKŁADZIE GENERACYJNYM

Schemat generatora RC pokazuje rys. 2. W takim układzie selektywny czwórnik wraz z oporowym dzielnikiem napięcia tworzą mostek. Mostek nie jest całkowicie zrównowa-



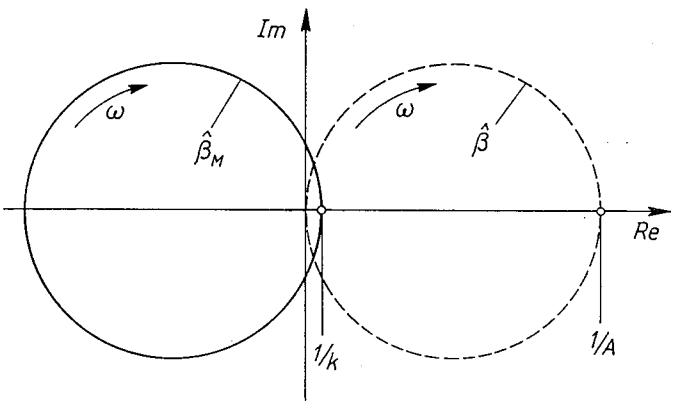
Rys. 2. Uproszczony schemat mostkowego generatora RC

[1] W literaturze spotyka się dla tych czwórników także nazwy: CRRC wzgl. RCCR lub czwórnik Sulzera.

żony przy częstotliwości rezonansowej, przy czym wartość potrzebnego rozrównoważenia wynika z warunku amplitudy układu generacyjnego. Dlatego też rozrównoważenie to może być podane jako funkcja wzmocnienia napięciowego k wzmacniacza użytego w generatorze. Stąd dla nie obciążonego mostka otrzymujemy następującą funkcję przejścia:

$$\hat{\beta}_M = \frac{\hat{U}_3}{\hat{U}_1} = \frac{A-jBs}{A^2+B^2s^2} - \frac{k-A}{Ak} = \frac{(A^2+B^2s^2)A-B^2s^2k-jABks}{Ak(A^2+B^2s^2)}. \tag{8}$$

Charakterystykę amplitudowo-fazową $\hat{\beta}_M$ pokazano na rys. 3.



Rys. 3. Charakterystyka amplitudowo-fazowa funkcji przejścia mostka przeznaczonego dla generatora RC. Linią przerywaną oznaczono charakterystykę dla samego czwórnika

Jeśli przez ψ oznaczymy przesunięcie fazowe między napięciem wyjściowym a wejściowym mostka, to

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{ABks}{(A^2+B^2s^2)A-B^2s^2k}. \tag{9}$$

W pobliżu częstotliwości rezonansowej, gdy $s \to 0$,

$$\psi \cong -\frac{B}{A^2}ks. \tag{10}$$

Ponieważ dla małych wartości s

$$\Delta s \cong 2\Delta x, \tag{11}$$

więc ze znanych z literatury definicji oraz ze wzorów (10) i (11) można obliczyć dobroć zastępczą Q_z takiego układu

$$Q_z = \frac{B}{A^2}k. \tag{12}$$

Wartość dobroci według wzoru (12) różni się w sposób zasadniczy od dobroci obliczonej tylko dla samego czwórnika według rys. 1. Dla takiego przypadku największą dobroć uzyskuje się przy $\beta \to 0$, a wskutek tego daje to całkowicie fałszywy obraz własności selektywnych układów, w których wartość funkcji przejścia odgrywa równie ważną rolę. W literaturze zwraca uwagę na ten fakt szereg autorów (np. [6]). Natomiast ocena selektywności

układów *RC* na podstawie wartości pochodnej $\frac{dIm(\hat{\beta})}{dx}$ prowadzi w omawianych przypadkach do prawidłowych wyników, gdyż m.i. zarówno dla samego czwórnika *RC*, jak i dla mostka składowa urojona $Im(\hat{\beta})$ funkcji przejścia ma taką samą wartość. Dla układu mostkowego

$$\frac{B}{A^2} = \frac{Q_z}{k} = \left|\left(\frac{dIm(\hat{\beta})}{ds}\right)_{s\to 0}\right| = \left|\frac{1}{2}\left(\frac{dIm(\hat{\beta})}{dx}\right)_{x\to 1}\right|. \tag{13}$$

Obliczmy dobroć zastępczą mostków z czwórnikami pokazanymi na rys. 1. Dla mostków Wiena

$$Q_z = k\frac{B}{A^2} = k\frac{\sqrt{ab}}{(1+a+b)^2}. \tag{14}$$

Największą wartość tego wyrażenia otrzymuje się, gdy $a = b = 0{,}5$. Wtedy $Q_z = \frac{k}{8}$. Natomiast dla $a = b = 1$, $Q_z = \frac{k}{9}$. Zatem dobroć optymalna różni się tylko nieznacznie od dobroci dla zazwyczaj stosowanego układu mostka Wiena.

Dla wszystkich mostków z czwórnikami zbocznikowane T otrzymujemy

$$Q_z = k\frac{\sqrt{\frac{w}{v}}}{\left(1+\frac{1}{v}+\frac{w}{v}\right)^2}. \tag{15}$$

Jeśli $w = v = 1$, to podobnie jak dla mostka Wiena $Q_z = \frac{k}{9}$. Jednakże przy odpowiednio dobranych wartościach parametrów v i w można uzyskać znacznie korzystniejsze własności selektywne niż w mostku Wiena.

Dla danej wartości w największą dobroć osiąga się przy

$$v_{opt} = 3(w+1). \tag{16}$$

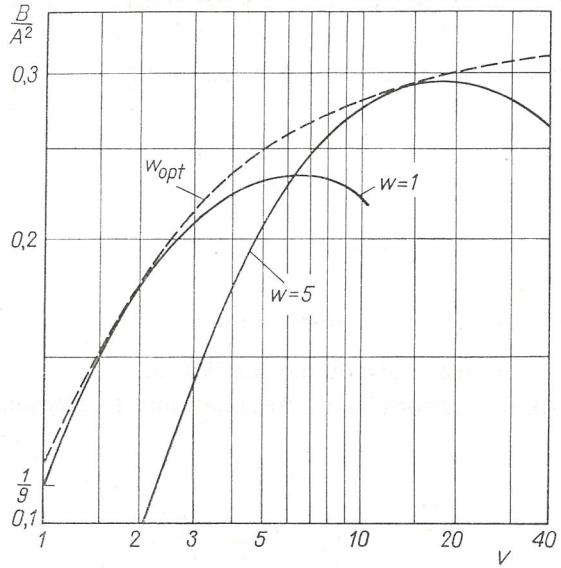
Natomiast po przyjęciu parametru v optymalna wartość w wynosi:

$$w_{opt} = \frac{1+w}{3}. \tag{17}$$

Wartości $\frac{B}{A^2} = \frac{Q_z}{k}$ przy $w = 1$, $w = 5$ i w_{opt} w zależności od parametru v można odczytać z wykresu rys. 4.

Dla bardzo dużych wartości obu parametrów i zachowaniu stosunku $\frac{v}{w} \cong 3$ można osiągnąć $\frac{Q_z}{k}$ bliskie 0,325. Jest to ok. 2,6 razy więcej niż w przypadku optymalnie dobranych parametrów mostka Wiena. Jednakże znaczne powiększanie parametrów v i w rzadko jest celowe, gdyż dla $v > 10$ osiąga się już tylko bardzo nieznaczne polepszenie selektyw-

ności, a ze stosowaniem układów o dużych wartościach v i w łączy się szereg niedogodności. Ponadto ze względów konstrukcyjnych jest korzystnym, gdy oba zmienne elementy R lub C mają takie same wartości. Z tych powodów należy wyróżnić przypadek $w = 1$, przy którym dla $v_{opt} = 6$, $\frac{Q_z}{k} = 0{,}243$ (por. także [6]).



Rys. 4. Współczynnik selektywności mostków z czwórnikami typu zbocznikowanego T dla różnych wartości parametrów w i v. Dla mostka Wiena o $a = b = 1$ wynosi on $\frac{1}{9}$

3. STAŁOŚĆ CZĘSTOTLIWOŚCI

Zagadnieniu stałości częstotliwości generatorów poświęconych jest szereg publikacji, nie byłoby więc celowe obszerniejsze zajmowanie się tym tematem. Niżej będą omówione zatem tylko te przyczyny niestałości, które mają bezpośredni związek z doborem parametrów czwórnika sprzężenia zwrotnego. Należy przy tym przypomnieć, że w przestrajanych generatorach duże znaczenie ma także i zmiana częstotliwości w stosunku do częstotliwości rezonansowej czwórnika. Zmiana taka, jeśli jest zależna od częstotliwości, powoduje błędy odczytu, gdy skala jest wspólna dla wszystkich zakresów.

Ponieważ optymalny dobór parametrów czwórnika ma przede wszystkim znaczenie przy projektowaniu generatorów wysokiej jakości (a zatem o dużej stałości częstotliwości i małych błędach odczytu), więc w podanych niżej wzorach korzystano z uproszczeń słusznych dla przypadków małych względnych zmian $\frac{\Delta f}{f_0}$ częstotliwości.

Główną przyczyną niestałości częstotliwości może być przesunięcie fazowe między napięciem wejściowym a wyjściowym wzmacniacza. Jeśli więc kąt fazowy wzmocnienia wynosi φ, to względną zmianę częstotliwości można obliczyć z następującego wzoru:

$$\left(\frac{\Delta f}{f_0}\right)_\varphi \cong \frac{1}{2}\cdot\frac{A^2}{kB}\cdot\varphi = \frac{\varphi}{2Q_z}. \tag{18}$$

Widoczne jest, że minimalne zmiany częstotliwości wywołane kątem fazowym φ wzmocnienia uzyska się dla mostków o własnościach selektywnych dobranych optymalnie zgodnie z wywodami zamieszczonymi w poprzednim rozdziale.

Zmianę częstotliwości spowodowaną efektami nieliniowymi generatora *RC* można wyznaczyć ze wzoru podanego przez Zagajewskiego [10], a wyprowadzonego w oparciu o metodę harmonicznych Groszkowskiego (np. [2], [3]):

$$\frac{\Delta f}{f_0} = -\frac{1}{\left(\frac{dIm(\hat{\beta})}{dx}\right)_{x\to 1}}\sum_{2}^{\infty} m\beta_{jm}\cdot h_{mg}^2. \tag{19}$$

We wzorze tym β_{jm} jest składową bierną współczynnika sprzężenia zwrotnego dla m-tej harmonicznej, m jest rzędem harmonicznej, a h_{mg} zawartością m-tej harmonicznej generatora.

Zawartość harmonicznych generatora może być wyrażona przy założeniach podanych w pracy [8] za pomocą względnej zawartości harmonicznych (por. także [4], [7])

$$H_m = \frac{h_{mg}}{h_{mw}} = \frac{1}{|k(\beta_1 - \hat{\beta}_m)|}. \tag{20}$$

h_{mw} oznacza zawartość m-tej harmonicznej wzmacniacza użytego w generatorze i sterowanego napięciem sinusoidalnym przy braku działania sprzężeń zwrotnych wprowadzanych przez mostek *RC*. Zakładamy przy tym, że w obu porównywanych przypadkach (tj. wzmacniacza i generatora) układ pracuje w tych samych warunkach, a więc przede wszystkim amplitudy napięcia wyjściowego o częstotliwości podstawowej sprowadzone są do tej samej wartości.

Podstawiając do wzoru (19) wartości ze wzorów (8), (13) i (20) otrzymujemy następujący wzór na zmianę częstotliwości generatora spowodowaną zawartością harmonicznych:

$$\left(\frac{\Delta f}{f_0}\right)_h = -\frac{1}{2}\left(\frac{A^2}{kB}\right)^2\sum_{2}^{\infty} h_{mw}\frac{m^2}{m^2-1} \cong -\frac{1}{2}\left(\frac{A^2}{kB}\right)^2 h_w^2 = -\frac{h_w^2}{2Q_z^2}. \tag{21}$$

h_w oznacza współczynnik zniekształceń nieliniowych wzmacniacza użytego w generatorze.

Ze wzorów (18) i (21) wynika, że dla obu omawianych wyżej przypadków przyczyn zmian częstotliwości optymalny układ uzyskuje się przy tych samych parametrach czwórnika sprzężenia zwrotnego. Spotykane w literaturze odmienne sugestie (np. [1]) w świetle podanych wyżej wzorów nie znajdują potwierdzenia.

Korzystając ze wzorów (18) i (21) możemy wyznaczyć stosunek zmian częstotliwości wywołanych przesunięciem fazowym we wzmacniaczu do zmian częstotliwości spowodowanych wpływem harmonicznych:

$$\frac{\Delta f_\varphi}{\Delta f_h} \cong -\frac{\varphi Bk}{h_w^2 A^2} = -\frac{\varphi}{h_w^2}Q_z. \tag{22}$$

W najczęściej spotykanych układach generatorów z czwórnikiem selektywnym w gałęzi dodatniego sprzężenia zwrotnego $k > 500$, a współczynnik zniekształceń nieliniowych wzmacniacza nigdy nie powinien być większy od 0,1 (10%). Dla konwencjonalnego mostka Wiena $\frac{B}{A^2} = \frac{1}{9}$, zatem zwykle spełniona jest nierówność:

$$\left|\frac{\Delta f_\varphi}{\Delta f_h}\right| > |5000\varphi|. \tag{23}$$

Jeśli więc φ wynosi zaledwie 10^{-3} radiana, to i tak zmiana częstotliwości spowodowana przesunięciem fazowym w obwodach wzmacniacza jest co najmniej 5 razy większa od zmian wywołanych wpływem harmonicznych. Tymczasem w przestrajanych generatorach *RC* trudno jest uzyskać w całym pasmie generowanych częstotliwości kąty fazowe wzmocnienia rzędu 10^{-3}. Zwykle są one o dwa rzędy wielkości większe przy krańcowych częstotliwościach generatora. Dla wysokiej jakości generatorów $Q_z > 100$, a zmiany częstotliwości wywołane wpływem harmonicznych są rzędu 10^{-7} i można je wobec pozostałych zmian całkowicie pominąć. To samo odnosi się też i do niestałości częstotliwości, chociaż zmiany wzmocnienia wywierają znaczny wpływ na wartość zmian częstotliwości podanych wzorem (21).

Duży wpływ na częstotliwość może mieć oporność wejściowa wzmacniacza, zwłaszcza tranzystorowego. Przy ustalaniu tego wpływu wydaje się już zbędne zajmowanie się mostkiem Wiena, gdyż jak wyżej wykazano ma on gorsze własności selektywne od mostków z czwórnikami odwrócone zbocznikowane T. Z obu tych ostatnich czwórników bardziej odpowiedni dla przestrajanego generatora ze wzmacniaczem tranzystorowym jest czwórnik pokazany na rys. 1c. Wynika to z konieczności regulowania w takich układach częstotliwości za pomocą zmiennych oporników (zmienne kondensatory powietrzne mają zbyt dużą impedancję przy małych częstotliwościach), a wyżej wykazano, że nawet przy dwu jednakowych takich opornikach (co jest dogodne ze względów konstrukcyjnych) można uzyskać dobre własności selektywne. Z tych powodów ograniczymy rozważania tylko do zbadania wpływu oporności wejściowej wzmacniacza na częstotliwość generatora z mostkiem zawierającym czwórnik obrócone T zabocznikowane pojemnością według rys. 1c.

Po przyłączeniu do wyjścia czwórnika według rys. 1c oporności zR funkcja przejścia będzie miała wartość

$$\hat{\beta}'_T = \frac{1}{1+\frac{w}{v}+\frac{1}{v}+\frac{w}{z}+j\sqrt{\frac{w(1+w+z)}{vz}}\left(x-\frac{1}{x}\right)}. \tag{24}$$

Częstotliwość rezonansowa f_1 wyniesie wówczas:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi RC}\sqrt{\frac{v(1+w+z)}{wz}}. \tag{25}$$

Stąd względna zmiana częstotliwości w stosunku do częstotliwości f_0 [wzór (5)], gdy $z \gg 1+w$, wyniesie

$$\frac{\Delta f}{f_0} \cong \frac{1}{2}\frac{1+w}{z}. \tag{26}$$

Załóżmy w dalszych rozważaniach, że oporność dzielnika napięcia mostka jest znacznie mniejsza od oporności wejściowej r_{we} wzmacniacza i oporności R. Ma to zwykle miejsce w generatorach wysokiej jakości.

Przy częstotliwości generowanej czwórnik jest obciążony opornością

$$zR \cong r_{we}\frac{k}{A}. \tag{27}$$

Zatem z zależności (26) i (27) otrzymujemy:

$$\frac{\Delta f}{f_0} \cong \frac{1}{2}\frac{1+w}{k}A\frac{R}{r_{we}} = \frac{1}{2}\frac{(1+w)(v+w+1)}{vk}\cdot\frac{R}{r_{we}}. \tag{28}$$

Jeśli np. $R = 10\ \text{k}\Omega$, $r_{we} = 3\ \text{k}\Omega$, $A = 3$, $w = 1$ i $k = 500$, to $\frac{\Delta f}{f_0} = 2\cdot 10^{-2}$. Jest to już zmiana istotna, dlatego w generatorach wysokiej jakości oporność wejściowa powinna być dodatkowo powiększana np. przy pomocy wtórnika emiterowego.

Zmiany częstotliwości wynikające z zależności (28) można również zmniejszyć dobierając odpowiednio małe oporności R. Nie zawsze jednak daje to zadowalające wyniki, gdyż rośnie wówczas wpływ oporności wyjściowej wzmacniacza na częstotliwość. Wpływ ten wynika z obciążenia wyjścia wzmacniacza admitancją wejściową czwórnika. Dla czwórnika obrócone T zbocznikowane pojemnością wynosi ona przy częstotliwości rezonansowej

$$\hat{Y} = \frac{1}{RA} + j\frac{A-1}{RAB}. \tag{29}$$

Jeśli następnie przez R_1 oznaczymy wypadkową oporność powstałą w wyniku równoległego połączenia oporności: AR, dzielnika napięcia mostka oraz wewnętrznej wzmacniacza, to otrzymamy dodatkowe przesunięcie fazowe φ_d między napięciem wejściowym a wyjściowym wzmacniacza

$$\varphi_d \cong -\frac{A-1}{AB}\frac{R_1}{R}. \tag{30}$$

Korzystając ze wzoru (18) można obliczyć zmianę częstotliwości spowodowaną przesunięciem fazowym φ_d. W przypadku, gdy oporność wejściowa r_{we} nie jest dostatecznie duża w porównaniu z impedancją wyjściową Z_{wy} czwórnika, we wzorze tym należy podstawić odpowiednio mniejszą wartość wzmocnienia napięciowego k. Jeśli wejście czwórnika jest zwarte stosunkowo małą impedancją, to przy częstotliwości rezonansowej $\hat{Z}_{wy}$ wynosi

$$\hat{Z}_{wy} \cong R\frac{w-j(w+1)B}{A}. \tag{31}$$

Wzory (30) i (31) pozwalają na obliczenie optymalnej oporności R, przy której wpływy oporności wejściowej i wyjściowej wzmacniacza na częstotliwość znoszą się wzajemnie. Ta optymalna oporność wynosi

$$R = R_{opt} \cong R_1\left(\frac{1}{2A} + \sqrt{\frac{1}{4A^2} + \frac{r_{we}}{wR_1}}\right). \tag{32}$$

Jednak generator jest przestrajany za pomocą oporności R, a więc taka kompensacja obu wpływów jest możliwa tylko przy jednej częstotliwości danego zakresu.

Założenia, jakie zostały przyjęte przy wyprowadzaniu wzorów (28), (30) i (32), nie zawsze są spełnione w praktyce. Np. wpływ oporności R, zmienianej przy przestrajaniu, na wypadkową oporność R_1 może być znaczny, a wówczas wzmocnienie napięciowe k zależne od tej oporności nie jest stałe. Z tego i z innych powodów rzeczywista optymalna wartość R może odbiegać od obliczonej ze wzoru (32). Ponadto nie zawsze minimalne zmiany częstotliwości są jedynym kryterium doboru oporności R. Na przykład we wspomnianym wyżej przypadku, gdzie wzmocnienie jest zależne od oporności R i gdy nie jest ono duże, należy liczyć się także ze zmianami amplitudy przy przestrajaniu. Zmniejszenie takiego odziaływania jest możliwe przez obieranie możliwie dużych oporności R, większych, niż to wynika ze wzoru (32). Z drugiej strony względy konstrukcyjne samych oporników regulowanych nie pozwalają na dowolne powiększanie tej oporności.

Na podstawie podanych wyżej wzorów można obliczyć także i niestałość częstotliwości, gdy w konkretnych przypadkach znane są zmiany wzmocnienia lub zmiany innych wielkości układu wpływających na zmianę częstotliwości.

4. ZNIEKSZTAŁCENIA NIELINIOWE

Podany wyżej wzór (20) na względną zawartość harmonicznych generatora można stosować oczywiście tylko wówczas, gdy generator jest eksploatowany w takich warunkach, w jakich ustalano zniekształcenia samego wzmacniacza. Z tych względów m.in. obciążenie wyjścia wzmacniacza w obu porównywanych przypadkach musi być jednakowe. Można jednak zbadać zniekształcenia samego wzmacniacza dowolną metodą (analityczną, graficzną lub na drodze pomiaru) również i przy zmiennych warunkach jego pracy (np. przy zmiennym obciążeniu), a następnie posługując się względną zawartością harmonicznych określić zniekształcenia generatora. Dodać także należy, że wzór (20) został wyprowadzony dla układu o charakterystyce roboczej wzmacniacza nie odbiegającej znacznie od kształtu prostoliniowego. W omawianych generatorach ma to zwykle miejsce, gdyż obszar wysterowania wzmacniacza jest ograniczony dzięki stabilizacji amplitudy. Wzór (20) nie może być zastosowany w przypadku wprowadzania zniekształceń przez nieliniowe elementy gałęzi sprzężenia zwrotnego. Ma to miejsce przy najmniejszych częstotliwościach, jeśli bezwładność cieplna żarówki lub termistora stabilizacji amplitudy jest zbyt mała.

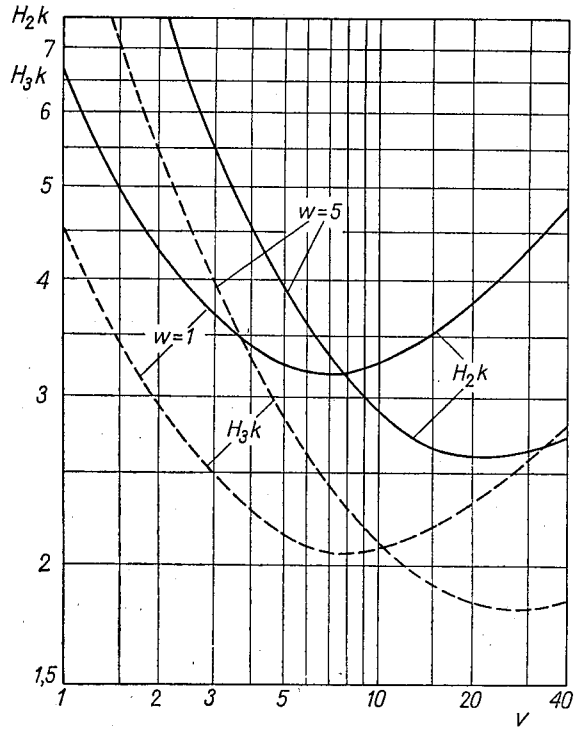
Po podstawieniu wartości funkcji przejścia (6) do wzoru (20) otrzymujemy

$$H_m = \frac{A}{k}\sqrt{1+\left(\frac{A}{Bs}\right)^2}. \tag{33}$$

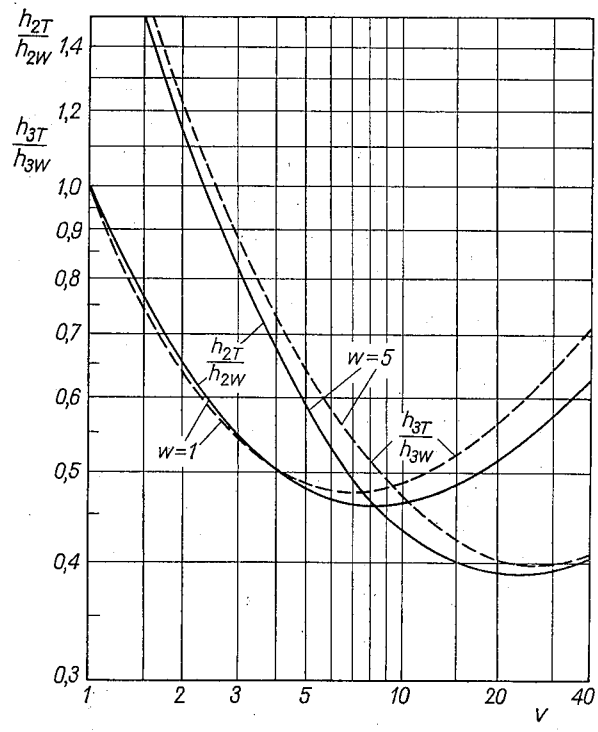
Korzystając z zależności (12) można przekształcić wzór (33) w postać następującą:

$$H_m = \frac{1}{Q_z s}\sqrt{1+\left(\frac{B}{A}s\right)^2}. \tag{34}$$

Dla drugiej harmonicznej $s = 1{,}5$, a dla układów konwencjonalnych lub zbliżonych do optymalnych $0{,}2 < \frac{B}{A} < 0{,}45$. Stąd nie popełniając większego błędu niż $\pm 10\%$ można



Rys. 5. Iloczyny względnych zawartości harmonicznych (drugiej i trzeciej) i wzmocnienia dla generatorów mostkowych z czwórnikami typu zbocznikowanego T przy różnych wartościach parametrów w i v



Rys. 6. Zawartości drugiej i trzeciej harmonicznych generatorów mostkowych z czwórnikami typu zbocznikowanego T w stosunku do podobnych zawartości generatorów z konwencjonalnym mostkiem Wiena ($a = b = 1$)

dla 2-giej harmonicznej napisać:

$$h_{2g} \cong \frac{3}{4} \cdot \frac{h_{2w}}{Q_z}. \tag{35}$$

Względna zawartość harmonicznych generatorów z mostkiem Wiena obliczona ze wzoru (33) wynosi

$$H_m = \frac{a+b+1}{k} \sqrt{1+\frac{(a+b+1)^2}{abs^2}}. \tag{36}$$

Najmniejsze zniekształcenia osiąga się dla $a = b \cong 0{,}4$ [8]. Wówczas $H_2 = \frac{5{,}7}{k}$ i $H_3 = \frac{3{,}53}{k}$.

Dla konwencjonalnego mostka Wiena o $a = b = 1$, $H_2 = \frac{6{,}7}{k}$, a $H_3 = \frac{4{,}5}{k}$.

Dla wszystkich czwórników typu zbocznikowanego T według rys. 1 otrzymujemy

$$H_m = \frac{v+w+1}{vk} \sqrt{1+\frac{(w+v+1)^2}{vws^2}}. \tag{37}$$

Rys. 5 pokazuje iloczyny H_2k i H_3k generatora z czwórnikami zbocznikowane T w zależności od parametru v dla $w = 1$ i $w = 5$. Natomiast rys. 6 przedstawia podobne zależności jednakże przeliczone w stosunku do zawartości harmonicznych generatora z konwencjonalnym mostkiem Wiena ($a = b = 1$). Należy dodać, że wyrażenia $|\beta_1 - \hat{\beta}_m|$ dla obwodów *RC* typu T były już obliczone przez Zagajewskiego [9]. Jeśli $w = 5$ i $v \cong 25$, to przy użyciu tego samego wzmacniacza uzyskuje się ok. 2,2 razy mniejszą zawartość drugiej harmonicznej niż przy optymalnie dobranych wartościach parametrów w generatorze z mostkiem Wiena.

Minimum zawartości harmonicznych jest nieznacznie przesunięte względem maksimum dobroci. Różnice są jednak tak małe, że w praktyce przy wyborze optymalnego układu można kierować się łatwiejszymi do wyznaczenia wartościami dobroci zastępczej.

Przy obliczaniu zniekształceń generatorów tranzystorowych trzeba w podanych wyżej wzorach podstawiać wartości wzmocnienia napięciowego uwzględniające oporność wejściową wzmacniacza i impedancję wyjściową czwórnika. Ta ostatnia rośnie przy zmniejszaniu częstotliwości, więc zwykle w generatorach tranzystorowych występuje wzrost zniekształceń w obszarze mniejszych częstotliwości danego zakresu.

Na zakończenie należy wspomnieć, że stosowanie układów optymalnych może przynieść spodziewane wyniki, jeśli konstrukcja wzmacniacza zapewni prawidłową pracę układu. Na przykład w konwencjonalnym układzie ok. $\frac{1}{3}$ napięcia wyjściowego doprowadzona jest gałęzią ujemnego sprzężenia zwrotnego do wejścia wzmacniacza, podczas gdy w układach optymalnych wartość ta jest około dwa razy większa. Dlatego też konieczne jest zastosowanie odpowiedniego rozwiązania konstrukcyjnego wejścia wzmacniacza, aby wprowadzanie tak dużego napięcia nie pogarszało własności wzmacniacza.

5. WNIOSKI

Najczęściej dotychczas spotykany w przestrajanych generatorach *RC* mostek Wiena nie zapewnia optymalnych własności układu. Zamiast mostka Wiena należy stosować

mostki z czwórnikami obrócone zbocznikowane T (rys. 1b i rys. 1c) o zróżnicowanych wartościach elementów R wzgl. C. W ten sposób wykorzystując ten sam wzmacniacz można zmniejszyć conajmniej dwukrotnie zniekształcenia nieliniowe i zmiany częstotliwości.

W generatorach z omawianymi 4-elementowymi czwórnikami RC (rys. 1) minimalne zmiany częstotliwości wywołane zarówno przesunięciami fazowymi w obwodach wzmacniacza, jak i wpływem zawartości harmonicznych uzyskuje się przy tych samych parametrach czwórnika. Jednakże zmiany wywołane zawartością harmonicznych są pomijalnie małe w przestrajanych generatorach tego typu wobec zmian spowodowanych pozostałymi przyczynami.

Zakład Doświadczalny przy Zakładach TELPOD
w Krakowie

WYKAZ LITERATURY

1. Clifford F. G.: Comparison of RC Network for Frequency Stability in Oscillators. — Proceed IEE, 112 (1965), s. 1704.
2. Groszkowski J.: Generatory oporowo-pojemnościowe w ujęciu teorii nieliniowej. — Arch. Elektrotechn., 1954, z. 3, s. 387.
3. Groszkowski J.: Wytwarzanie drgań elektrycznych. PWT, Warszawa 1958.
4. Kononowicz Ł. M.: Wybor schiemy obratnoj swiazi w gienieratorach RC. — Radiotiechnika, 10/1965, Nr 1, s. 70.
5. Löffler D.: Mit einem Element abstimmbare RC-Sperrfiiter für selektive Verstärker und Oszillatoren. — Rohde & Schwarz-Mitteilungen, Ausg. 21, Nov. 1967, s. 307.
6. Mehta V. B.: Comparison of RC Network for Frequency Stability in Oscillators. — Proceed. IEE, 112 (1965), s. 296.
7. Mehta V. B.: Distortion in RC Feedback Oscillators. — Electronic Eng. 39 (1967), Nr 475 (9), s. 582.
8. Srzednicki J.: Zniekształcenia nieliniowe generatorów RC z mostkiem Wiena. — Arch. Elektrotechn., 1968, z. 1, s. 89.
9. Zagajewski T.: Optymalne parametry generatorów lampowych z obwodami typu T. — Arch. Elektrotechn., 1960, z. 1, s. 17.
10. Zagajewski T.: Optymalizacja generatorów lampowych ze względu na stałość częstotliwości i zniekształcenia nieliniowe. — Arch. Elektrotechn., 1963, z. 1, s. 547.

J. SRZEDNICKI

OPTIMA PARAMETERS OF TUNED RC BRIDGE OSCILLATOR

Summary

Voltage transfer function $\hat{\beta}$ of selective RC networks shown in Figs. 1a, 1b and 1c can be given by general equation (6). However, in an oscillator selective RC network and frequency independent voltage divider form the bridge circuit of which transfer function depends on amplifier's voltage gain k according to eq. (8). By means of this equation equivalent bridge circuit quality factor Q_z may be determined, For Wien bridge the maximum quality factor $Q_z = \frac{k}{8}$ can be reached with $a = b = 0{,}5$ while for the conventional circuit ($a = b = 1$) $Q_z = \frac{k}{9}$. Using the amplifier with the same k much higher Q_z can be achieved

if Wien circuit in the bridge is replaced by one of the networks shown in Figs. 1b, 1c, 1e and 1f [eq. (15)]. It can be found from Fig. 4 that for these four networks Q_z may exceed $0{,}3k$. It should be noted that circuits shown in Figs. 1b and 1c (named here reversed bridged-T networks) are the same bridged-T networks as those shown in Figs. 1e and 1f but in this case another of three network terminals is common for input and output. It is why many formulas are just the same for all the networks in this group.

Oscillator's frequency stability depends on network's selectivity. The frequency change caused by the amplifier's phase shift φ is given in eq. (18) and the change evoked by harmonic contens is given in eq. (21). It can be found from these equations that the bridge with maximum Q_z should be applied in order to achieve optimum frequency stability. In high quality oscillators frequency changes caused by harmonics are usually much smaller then those produced by other reasons. In transistor oscillators amplifier's input resistance r_{we} may have considerable influence on frequency stability. However, it's unadmissible to illimitable decrease network's resistance R in order to avoid frequency changes caused by the input resistance, becuse an additional phase shift could be introduced. This phase shift φ_d, due to the effect of loading the amplifier's output with the input admittance of the network, causes the frequency change which has the opposite sign than this one evoked by input resistance influence. For the network shown in Fig. 1c the R value for which both frequency changes eliminate each other can be found from eq. (32).

Nonlinear distortion in RC oscillator can be expressed by means of relative harmonic content H_m i.e. the amplitude's ratio of oscillator and amplifier harmonic [eqs. (20), (33) and (34)]. Relative harmonic content value is given in eq. (36) for oscillators with Wien bridge circuit and in eq. (37) for oscillators with type bridged-T networks shown in Figs. 1b, 1c, 1e and 1f. From Fig. 6 can be seen that is possible to decrease harmonic distortion more than twice if the Wien network is substituted for the network according to Fig. 1b or 1c with R and C elements adequately chosen. The displacement between the minimum of distortion and maximum of quality factor is so small that it is practically negligible.

J. SRZEDNICKI

LES PARAMÈTRES OPTIMAUX DU GÉNÉRATEUR RC DE PONT À RÉGLAGE

Résumé

On a analysé dans l'oeuvre la dépendance de la stabilité de fréquence et des distorsions non-linéaires du générateur RC de pont des paramètres d'un quadripôle sélectif à quatre éléments de réaction variable utilisé dans ce générateur. On a prouvé, qu'en remplaçant le pont de Wien par le pont avec un quadripôle du type T ponté renversé on peut obtenir plus que deux fois plus petits le contenu des harmoniques ainsi que l'instabilité de fréquence du générateur.

J. SRZEDNICKI

OPTIMALE PARAMETER EINES ABSTIMMBAREN RC-BRÜCKENOSZILLATORS

Zusammenfassung

Die Spannungsübersetzung β der in Abb. 1a, 1b und 1c gezeigten selektiven Netzwerke kann in allgemeiner Form durch Gleichung (6) gegeben werden. Im RC-Oszillator bilden aber das selektive Netzwerk samt mit frequenzunabhängigen Spannungsteiler eine Brücke, die eine andere von Spannungsverstärkung k des Verstarkers abhängige Übersetzung hat, wie das aus der Gl. (8) folgt. Aus Gl. (8) lässt sich die Formel für äquivalenten Gütefaktor Q_z solcher Brücken ableiten. Für die Wien-Brücke erreicht man den maximalen Wert des Gütefaktors $Q_z = \frac{k}{8}$, wenn $a = b = 0{,}5$, während für konventionelle Schaltung (d.h. $a = b = 1$) $Q_z = \frac{k}{9}$. Einen viel besseren Gütefaktor, als das für Wien-Brücke der Fall ist, erreicht man bei

derselben Verstärkung k für die Brücken mit Netzwerken von Abb. 1b, 1c, 1e und 1f [siehe Gl. (15)]. Wie aus der Abb. 4 ersichtlich ist, kann Q_z für diese vier Schaltungen den Wert $0{,}3k$ überschreiten. Dabei ist zu bemerken, dass die Netzwerke von Abb. 1b und 1c dieselben uberbrückte T-Schaltungen sind wie die Netzwerke von Abb. 1e und 1f, nur in diesem Fall die andere aus drei Netzwerkklemmen ist für Eingang und Ausgang gemeinsam. Deshalb sind viele Formeln für diese ganze Gruppe von Schaltungen gleich und die beiden Netzwerke nach Abb. 1b und 1c werden hier als umgekehrte überbrückte T-Schaltungen genannt.

Die Frequenzstabilität des Oszillators ist von der Selektivität des Netzwerkes abhängig. Die Frequenzänderung, die durch die Phasenverschiebung φ in Verstärker verursacht wird, kann man aus der Gl. (18) ermitteln. Der Einfluss der Harmonischen auf die Frequenzänderung wird dagegen durch die Gl. (21) gegeben. Aus Gleichungen (18) und (21) geht hervor, dass die grösste Frequenzstabilität bei Anwendung der Netzwerke mit maximalem Q_z erreicht wird. Die Frequenzänderungen, die durch Harmonischen verursacht werden, sind gewöhnlich in RC-Oszillatoren guter Qualität viel kleiner als diejenige die andere Gründe haben. In Transistor-RC-Oszillatoren kann der Eingangswiderstand r_{we} des Verstärkers beträchtlich die Frequenz beeinflussen. Es lässt sich ein solcher Netzwerkwiderstand R finden, bei welchem dieser Einfluss und der Einfluss der mit dem Netzwerk hervorgerufener Belastung des Verstärkerausganges sich gegenseitig aufheben. Dieser Widerstand R_{opt} wird für das Netzwerk nach Abb. 1c (das für abstimmbare RC-Oszillatoren besonders gut geeignet ist) durch die Gl. (32) angegeben.

Nichtlineare Verzerungen des RC-Oszillators können bei manchen Bedingungen mit Hilfe der relativen Gehälte der Harmonischen H_m ausgedrückt werden [siehe Gl. (20), (33) und (34)]. Die Werten H_m können für die Wien-Brücke aus Gl. (36) und für die Brücken mit überbrückte T-Schaltungen aus Gl. (37) entnommen werden. Aus diesen Gleichungen und aus Kurven von Abb. 6 ist zu erkennen, dass das Ersetzen des konventionellen Wien-Netzwerk mit einer der Netzwerke von Abb. 1b und 1c eine mehr als doppelte Verringerung der Verzerungen mit sich bringen kann. Das Minimum der Verzerungen und das Maximum des Gütefaktors sind gegeneinander gering verschoben. Die Unterschiede sind aber ohne praktischer Bedeutung.

Я. СЖЕДНИЦКИ

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ПЕРЕСТРАИВАЕМОГО МОСТИКОВОГО RC ГЕНЕРАТОРА

Р е з ю м е

В работе рассмотрена зависимость стабильности частоты и нелинейных искажений мостикового RC генератора от параметров примененного в нем четырехэлементного избирательного четырехполюсника обратной связи. Доказано, что применяя вместо моста Вина мост с четырехполюсником типа обращенного перекрытого Т можно получить свыше в два раза меньше так содержание гармоник как и нестабильность частоты генератора.

621.3.083.721

ZDZISŁAW KORZEC

Podstawy teoretyczne reflektometrii czasowej

Rękopis dostarczono 9.4.1968

W artykule omówiono metodykę pomiarów reflektometrii czasowej oraz podano podstawy teoretyczne tej techniki. Wyprowadzono zasadnicze wzory określające podstawowe odbicia oraz odbicia w przypadku obiektu o stałych rozłożonych. We wnioskach oceniono praktyczną przydatność reflektometrii czasowej.

1. WSTĘP

Właściwe projektowanie układów zawierających przyrządy półprzewodnikowe wymaga znajomości parametrów tych przyrządów, takich jak parametry h, y czy z. Dokładne wyznaczenie tego rodzaju parametrów w szerokim zakresie częstotliwości jest trudne, gdyż wymaga dokonania dużej liczby pomiarów. Klasyczne metody pomiarowe stosowane do tego celu są obarczone stosunkowo dużym błędem, wynikającym z wpływu reaktancji oporników, pojemności rozproszonych itp., a w zakresie większych częstotliwości — błędem wynikającym z trudności uzyskania idealnych warunków zwarcia i rozwarcia oraz wykonania łącz i elementów mostka pomiarowego o małych współczynnikach odbicia.

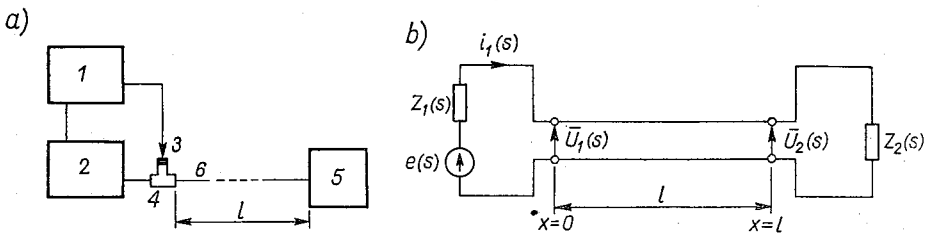
Mała dokładność pomiarów oraz trudność ich zautomatyzowania była powodem opracowania nowych metod pomiarowych, takich jak technika pomiaru przy ciągłej zmianie częstotliwości (Swept Frequency Techniques [1]) czy technika reflektometrii czasowej (Time Domain Reflectometry [2]), której poświęcony jest niniejszy artykuł.

2. METODYKA POMIARÓW

Reflektometria czasowa stanowi technikę pomiarową opartą na analizie kształtu impulsów wysyłanych i odbitych od badanego obiektu. Jest to zatem pewnego rodzaju zamknięty układ radarowy, w którym nadajnikiem impulsów wysyłanych jest generator, odbiornikiem zaś oscylograf. Metoda tego rodzaju pomiarów była od dawna stosowana do wykrywania uszkodzeń w kablach przesyłowych. W tym przypadku wykorzystywało się generatory impulsów mikrosekundowych oraz oscylografy o pasmach przenoszenia rzędu kilku megaherców. W pomiarach parametrów czwórników lub innych pomiarach laboratoryjnych konieczne jest stosowanie generatorów impulsów nanosekundowych o bardzo stromym czole i oscylografów stroboskopowych o pasmie przenoszenia rzędu gigaherców. Rozwój generatorów i oscylografów, jaki nastąpił w ostatnich latach dzięki

wprowadzeniu nowych przyrządów półprzewodnikowych, takich jak diody tunelowe lub diody o szybkim rozładowaniu (step recovery diod), pozwolił na spełnienie tych warunków i wprowadzenie reflektometrii czasowej do pomiarów laboratoryjnych.

Na rys. 1a jest pokazany zasadniczy układ pomiarowy reflektometrii czasowej, składający się z a) generatora impulsów, b) oscylografu, c) linii opóźniającej i d) badanego obiektu.



Rys. 1. Układ pomiarowy reflektometrii czasowej a) i jego uproszczony model b): *1* — oscylograf stroboskopowy, *2* — generator impulsów prostokątnych, *3* — sonda o dużej impedancji wejściowej, *4* — trójnik pomiarowy, *5* — badany obiekt, *6* — linia opóźniająca

W reflektometrii czasowej mogą być wykorzystywane impulsy prostokątne jak również impulsy szpilkowe (Diraca). W praktyce głównie znalazły zastosowanie impulsy prostokątne, gdyż pozwalają na znacznie lepszą interpretację wyników pomiaru niż impulsy szpilkowe. Aby na ekranie oscylografu obserwować jednocześnie czoło impulsu wysyłanego i jego odbicie, konieczne jest stosowanie linii opóźniającej o określony czas powrót odbitego impulsu od badanego obiektu w stosunku do czoła impulsu pierwotnego (linia o długości l na rys. 1). Linia ta nie powinna zniekształcać impulsu pomiarowego — powinna zatem mieć właściwości linii bezstratnej. Stosowane w praktyce odcinki kabli koncentrycznych lub powietrznych spełniają ten warunek. Znając wymagany czas opóźnienia T (czas potrzebny na przejście impulsu do obiektu badanego i z powrotem) oraz prędkość propagacji v dla danego kabla można określić długość kabla $l = vT/2$. Prędkość propagacji podawana jest w katalogach lub może być określona doświadczalnie (w tym ostatnim przypadku należy pomierzyć czas odbicia impulsu od końca odcinka kabla o znanej długości).

Generator impulsów prostokątnych posiada zazwyczaj impedancję wyjściową wartości 50 Ω lub 75 Ω. W przypadku gdy impedancja obwodu zewnętrznego jest znacznie większa od impedancji wewnętrznej generatora, generator należy uważać za źródło napięciowe. W przypadku gdy impedancja obwodu zewnętrznego jest znacznie mniejsza od impedancji wewnętrznej generatora, należy przyjmować, że ma się do czynienia z generatorem prądowym.

Przyłączony równolegle do zacisków generatora oscylograf stroboskopowy musi mieć dużą impedancję wejściową, aby nie powodować bocznikowania sygnału i powstawania dodatkowych odbić (stosowane do tego celu oscylografy mają sondy pomiarowe o impedancji wejściowej rzędu 100 kΩ). W dalszych rozważaniach wpływ impedancji wejściowej oscylografu na badane przebiegi zostanie pominięty.

3. ANALIZA PODSTAWOWYCH ODBIĆ

Zgodnie z poczynionymi wyżej uwagami i założeniami model układu do pomiarów reflektometrycznych można zobrazować schematem zastępczym przedstawionym na rys. 1b, gdzie Z_1 — impedancja generatora impulsów, Z_2 — impedancja badanego obiektu, l — linia bezstratna o indukcyjności jednostkowej L i pojemności jednostkowej C (zgodnie z przyjętym założeniem rezystancja jednostkowa R i konduktancja jednostkowa G linii bezstratnej jest równa zeru).

Transformaty rozwiązań równań linii przedstawionej na rys. 1b można określić zależnościami [3], [4].

$$\bar{u}(x, s) = \frac{Z_f \bar{e}(s)}{Z_1+Z_f} \frac{e^{-\gamma x}+q_2 e^{-\gamma(2l-x)}}{1-q_1 q_2 e^{-2\gamma l}}, \tag{1}$$

$$\bar{i}(x, s) = \frac{Z_f \bar{e}(s)}{Z_1+Z_f} \frac{e^{-\gamma x}+q_2 e^{-\gamma(2l-x)}}{1-q_1 q_2 e^{-2\gamma l}} \tag{2}$$

gdzie:

współczynnik odbicia pierwotny

$$q_1 = \frac{Z_1-Z_f}{Z_1+Z_f}; \tag{3}$$

współczynnik odbicia wtórny

$$q_2 = \frac{Z_2-Z_f}{Z_2+Z_f}, \tag{4}$$

impedancja falowa linii bezstratnej

$$Z_f = Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}, \tag{5}$$

współczynnik przenoszenia linii bezstratnej

$$\gamma = \frac{s}{v}. \tag{6}$$

W pomiarach reflektometrycznych istotne jest uzyskanie na ekranie oscylografu jedynie impulsu pierwotnego i pierwszego odbicia od badanego obiektu. Z tego względu obwód wejściowy jest dopasowany falowo, tzn. impedancja wyjściowa generatora Z_1 jest równa impedancji falowej Z_f linii. Stąd współczynnik odbicia pierwotny $q_1 = 0$, a zależność (1) przybierze postać

$$\bar{u}(x, s) = \frac{1}{2}\bar{e}(s)\left[e^{-\frac{s}{v}x}+q_2 e^{-\frac{s}{v}(2l-x)}\right]. \tag{7}$$

Przekształcenie odwrotne Laplace'a wyrażenia (7) dla przypadku wymuszenia funkcją jednostkową $\bar{e}(s)$ można przedstawić w postaci

$$u(x, t) = \mathscr{L}^{-1}\{\bar{u}(x, s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}E\frac{1}{s}\left[e^{-\frac{s}{v}x}+q_2 e^{-\frac{s}{v}(2l-x)}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}E\left[\mathbf{1}\left(t-\frac{x}{v}\right)+q_2\mathbf{1}\left(t-\frac{2l-x}{v}\right)\right]. \tag{8}$$

Ponieważ oscylograf pomiarowy jest umieszczony na początku linii opóźniającej, zatem interesują nas przebiegi napięć na początku linii, tzn. dla $x = 0$, stąd zależność (8) przybiera postać

$$u_1(0, t) = \frac{1}{2}E\left[\mathbf{1}(t)+q_2\mathbf{1}\left(t-\frac{2l}{v}\right)\right]. \tag{9}$$

Jak wynika z ostatniej zależności, na ekranie obserwuje się impuls pierwotny $\frac{1}{2}E\mathbf{1}(t)$ oraz impuls odbity $\frac{1}{2}Eq_2\mathbf{1}\left(t-\frac{2l}{v}\right)$ pojawiający się na ekranie po czasie $2l/v$. Kształt tego impulsu zależy od współczynnika odbicia wtórnego q_2, określonego zależnością (4). Właściwa interpretacja oglądanych na ekranie przebiegów stanowi podstawę pomiarów reflektometrycznych. Każdy złożony przebieg można przeanalizować znając podstawowe odbicia, które zostaną omówione w dalszym ciągu.

Odbicie w przypadku $Z_2 = R_2$. Jeżeli obiektem badanym byłby opór o rezystancji R_2, wtedy współczynnik odbicia można wyrazić w postaci

$$q_2 = \frac{R_2-\sqrt{L/C}}{R_2+\sqrt{L/C}}, \tag{10}$$

a fala odbita będzie stanowiła impuls prostokątny o amplitudzie zależnej od wartości q_2. Dla przypadku szczególnego, gdy $R_2 = \infty$ (linia na końcu rozwarta) współczynnik q_2 przybiera największą wartość, równą $+1$, zaś napięcie

$$u_1(0, t) = \frac{1}{2}E\left[\mathbf{1}(t)+\mathbf{1}\left(t-\frac{2l}{v}\right)\right]. \tag{11}$$

Jeżeli linia na końcu jest zwarta, tzn. $R_2 = 0$, wtedy $q_2 = -1$, a we wzorze (11) wystąpi znak minus. Dla wartości R_2 zawartych między $R_2 = 0$ i $R_2 = \infty$ amplituda impulsu obserwowanego na ekranie po czasie $2l/v$ będzie zatem zmieniała się od wartości maksymalnej, równej podwójnej amplitudzie impulsu pierwotnego w przypadku $R_2 = \infty$, do wartości minimalnej, równej zeru w przypadku $R_2 = 0$. W szczególowym przypadku, gdy $R_2 = Z_f$, wówczas $q_2 = 0$, tzn. na ekranie będzie obserwowana tylko fala pierwotna.

Wykorzystanie uzyskanych odbić do pomiaru rezystancji R_2 badanego obiektu wymagałoby naniesienia na ekran odpowiedniej skali (od 0 do ∞), podobnej do stosowanej w omomierzach bateryjnych. Omówione przebiegi są przedstawione na rys. 2a.

Odbicie w przypadku $Z_2 = 1/sC_2$. W przypadku gdy obiekt badany stanowi pojemność C_2, współczynnik odbicia można wyrazić wzorem

$$q_2 = \frac{a-s}{a+s}, \tag{12}$$

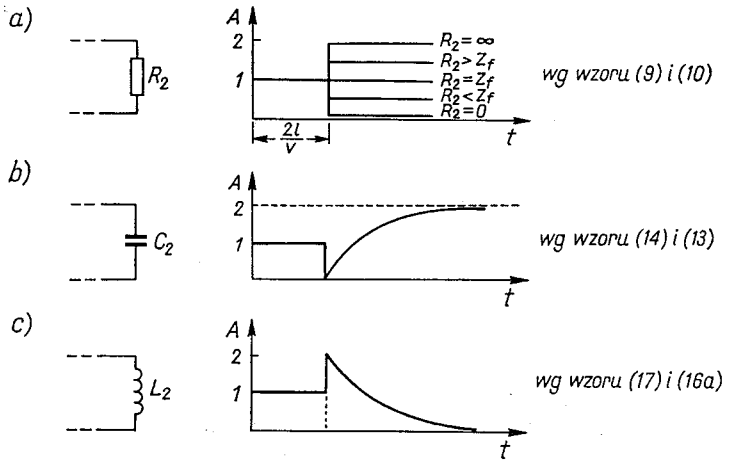
gdzie

$$a = \frac{1}{C_2}\sqrt{\frac{C}{L}}. \tag{13}$$

Podstawiając (12) do (7) i stosując przekształcenie odwrotne Laplace'a otrzymamy

$$u_1(0, t) = \frac{1}{2}E\left[\mathbf{1}(t)+(1-2e^{-a/t})\mathbf{1}\left(t-\frac{2l}{v}\right)\right]. \tag{14}$$

Po czasie $2l/v$ na ekranie obserwuje się narastanie impulsu od wartości zerowej do wartości równej podwójnej amplitudzie impulsu pierwotnego ze stałą czasową $T = 1/a$ (rys. 2b). Jest to oczywiście zgodne z prostą interpretacją fizyczną: w pierwszym momencie kondensator stanowi zwarcie (przypadek $R_2 = 0$), natomiast po ustaniu przebiegów przejściowych odpowiada warunkom linii otwartej $R_2 = \infty$.



Rys. 2. Podstawowe odbicia dla przypadków: a) $Z_2 = R_2$, b) $Z_2 = 1/sC_2$, c) $Z_2 = sL_2$ (A — wartość względna amplitudy impulsu)

W przypadku gdy obiekt badany stanowi impedancję równolegle połączonej pojemności C_2 i rezystancji R_2, wtedy przebieg napięcia będzie określony zależnością (14), z tym jednak, że stała czasowa będzie określona wzorem

$$T = \frac{1}{a} = \frac{1}{C_2}\sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{1}{R_2 C_2}, \tag{15}$$

a amplituda przebiegu ustalonego będzie odpowiadała warunkom obciążenia linii rezystancją R_2.

Odbicie w przypadku $Z_2 = sL_2$. W przypadku gdy obiekt badany stanowi indukcyjność L_2, współczynnik odbicia można wyrazić wzorem

$$q_2 = \frac{s-a}{s+a}, \tag{16}$$

gdzie

$$a = \frac{1}{L_2}\sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{16a}$$

Podstawiając (16) do (7) i stosując przekształcenie odwrotne Laplace'a otrzymamy

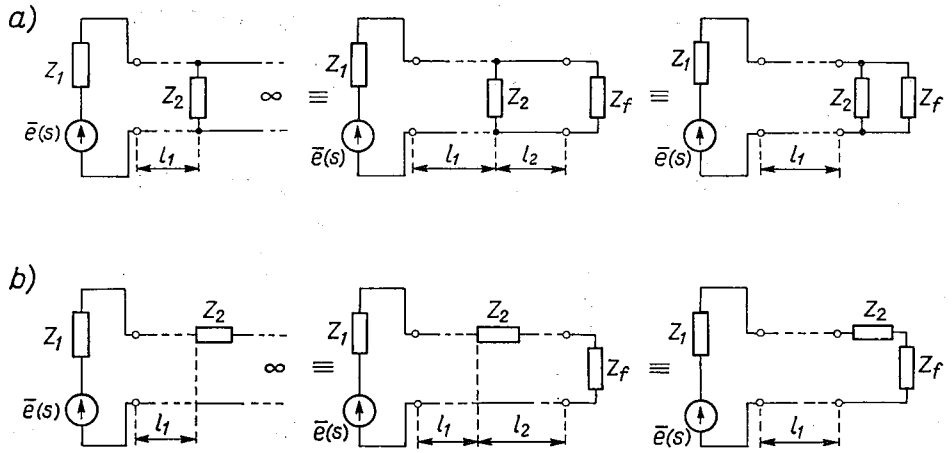
$$u_1(0, t) = \frac{1}{2}E\left[\mathbf{1}(t) - (1-2e^{-at})\mathbf{1}\left(t - \frac{2l}{v}\right)\right]. \tag{17}$$

Jak wynika z podanej zależności, po czasie $2l/v$ impuls od skokowo uzyskanej amplitudy równej podwójnej wartości amplitudy impulsu pierwotnego (obwód otwarty) maleje do wartości zerowej (obwód zwarty) ze stałą czasową $T = 1/a$ (rys. 2c).

4. ODBICIA OD IMPEDANCJI SZEREGOWYCH I RÓWNOLEGŁYCH

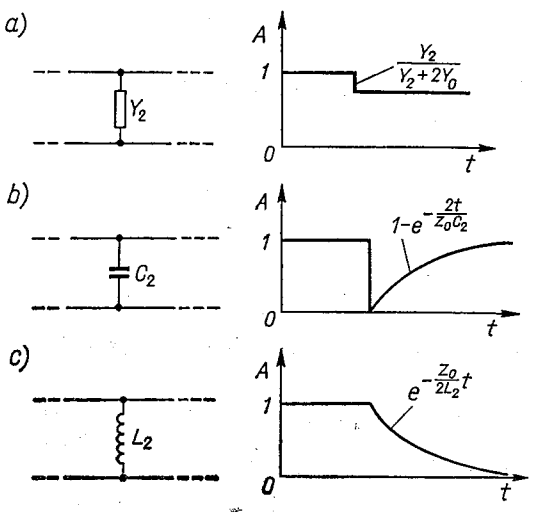
W układach, w których dokonuje się pomiaru, często występują impedancje szeregowe lub równoległe, powodujące powstawanie odbić.

Rozpatrzmy linię bezstratną o długości l obciążoną opornością falową Z_f, w której, w dowolnym miejscu odległym o l_1 od początku, występuje impedancja równoległa Z_2 (rys. 3a). Jak wiadomo [3], [4], dla linii o skończonej długości dopasowanej falowo (lub



Rys. 3. Linia długa bezstratna z wtrąconą impedancją: a) równoległą, b) szeregową

dla linii nieskończenie długiej) stosunek transformaty napięcia do transformaty prądu w dowolnym punkcie x linii jest stały i równy impedancji falowej (nie występuje fala odbita). Wynika stąd wniosek, że problem uwzględnienia równolegle występującej w linii

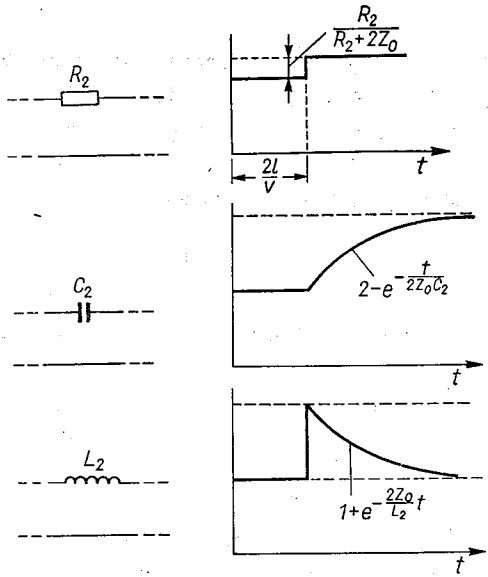


Rys. 4. Odbicia w przypadku wtrąconej impedancji równoległej: a) $Z_2 = R_2$, b) $Z_2 = 1/sC_2$, c) $Z_2 = sL_2$

impedancji Z_2 sprowadza się do rozpatrzenia linii o długości l_1 obciążonej równolegle połączonymi impedancjami Z_2 i Z_f (rys. 3a). Współczynnik odbicia w tym przypadku wyrazi się zależnością

$$q_2 = \frac{Y_2}{Y_2+2Y_f}. \tag{18}$$

Na rysunku 4 podano zestawienie przebiegów oglądanych na ekranie oscylografu w przypadku odbić od wtrąconych równolegle w linię impedancji o charakterze: a) rezystancji, b) pojemności, c) indukcyjności. Wyrażenia określające te przebiegi można obliczyć korzystając ze wzoru (7) i uwzględniając wzór (18).



Rys. 5. Odbicia w przypadku wtrąconej impedancji szeregowej: a) $Z_2 = R_2$, b) $Z_2 = 1/sC_2$, c) $Z_2 = sL_2$

W podobny sposób można rozważać przypadek impedancji szeregowej wtrąconej w dowolnym miejscu linii (rys. 3b). Współczynnik odbicia można wyrazić wtedy zależnością

$$q_2 = \frac{Z_2}{Z_2+2Z_f}. \tag{19}$$

Zestawienie przebiegów dla przypadku szeregowo wtrąconej rezystancji, pojemności i indukcyjności podano na rys. 5.

5. ODBICIE OD LINII ZE STRATAMI

Rozpatrywane powyżej odbicia odnosiły się do przypadków występowania w układzie pomiarowym stałych skupionych R, L lub C. W praktyce obiekt badany może się składać ze stałych rozłożonych, które mogą być zobrazowane przy pomocy linii długiej stratnej.

Rozpatrzmy odbicia, jakie występują w przypadku dołączenia na końcu linii opóźniającej (bezstratnej) linii stratnej, nieskończenie długiej (lub o skończonej długości, obciążonej falowo). Impedancja wejściowa linii ze stratami wyniesie

$$Z_{wej} = Z_f = \sqrt{\frac{R+sL}{G+sC}}, \tag{20}$$

zaś współczynnik odbicia wyrazi się następująco:

$$q_2 = \frac{Z_{wej}-Z_0}{Z_{wej}+Z_0} = \frac{\sqrt{s+\eta}-\sqrt{s+\sigma}}{\sqrt{s+\eta}+\sqrt{s+\sigma}}, \tag{21}$$

gdzie $\eta = \frac{R}{L}$ i $\sigma = \frac{G}{C}$.

Rozwiązanie równania (8) przy uwzględnieniu współczynnika odbicia określonego zależnością (21) nie daje wyników łatwych do interpretacji i przydatnych w praktyce. Duże znaczenie praktyczne mają natomiast dwa przypadki graniczne: 1) kiedy można pominąć upływność ($\sigma = 0$) i 2) kiedy można pominąć oporność szeregową ($\eta = 0$).

Dla warunku $\sigma = 0$ współczynnik odbicia q_2 wynosi

$$q_2 = \frac{\sqrt{s+\eta}-\sqrt{s}}{\sqrt{s+\eta}+\sqrt{s}}, \tag{22}$$

a uzyskany przebieg napięcia można określić wzorem (wyprowadzenie w odnośniku[1])

---

[1]) Szukane jest przekształcenie odwrotne wyrażenia

$$\bar{u}(0, s) = \frac{1}{2}\frac{E}{s}\left(1+q_2 e^{-\frac{2l}{v}s}\right), \quad \text{gdzie } q_2 = \frac{\sqrt{s+\eta}-\sqrt{s}}{\sqrt{s+\eta}+\sqrt{s}}.$$

Znajdźmy przekształcenie odwrotne funkcji $\bar{f}(s)$, dla której

$$\bar{f}(s+a) = \frac{1}{s}\frac{\sqrt{(s+a)^3-a^2}-s}{\sqrt{(s+a)^2-a^2}+s}, \quad \text{gdzie } a = \frac{\eta}{2}.$$

Korzystając z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie zespolonej

$$\mathcal{L} f(t)e^{-at} = \bar{f}(s+a)$$

możemy napisać

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{s-a}\frac{\sqrt{s^2-a^2}-(s-a)}{\sqrt{s^2-a^2}+(s-a)}.$$

Po przekształceniach algebraicznych otrzymujemy

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{1-a} - \left(\frac{s}{a\sqrt{s^2-a^2}} - \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{s^2-a^2}}\right),$$

stąd

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\bar{f}(s) = e^{at} - [I_1(at)+I_0(at)].$$

Uwzględniając dokonane przesunięcie w dziedzinie zespolonej oraz przesunięcie w dziedzinie rzeczywistej, jakie daje człon $e^{-s\frac{2l}{v}}$ otrzymujemy jako wynik końcowy

$$u_1(0, t) = 1(t) + \{1-e^{-at}[I_0(at)+I_1(at)]\}\,1\left(t-\frac{2l}{v}\right).$$

W analogiczny sposób wyprowadza się wzór (25).

$$u_1(0, t) = \mathbf{1}(t) + \left\{1 - e^{-\frac{\eta}{2}t}\left[I_0\left(\frac{\eta}{2}t\right) + I_1\left(\frac{\eta}{2}t\right)\right]\right\}\mathbf{1}\left(t - \frac{2l}{v}\right). \tag{23}$$

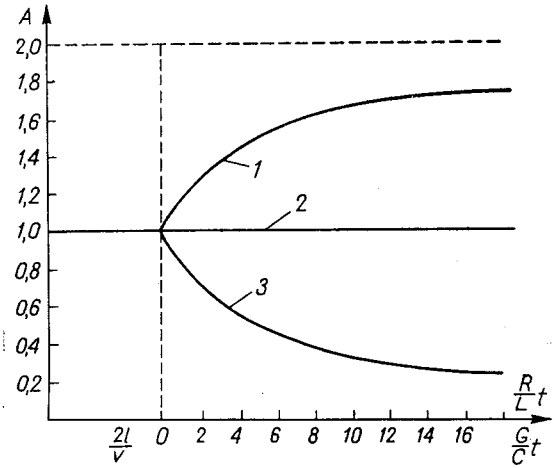
Dla warunku $\eta = 0$ współczynnik odbicia q_2 wynosi

$$q_2 = \frac{\sqrt{s} - \sqrt{s+\sigma}}{\sqrt{s} - \sqrt{s+\sigma}}, \tag{24}$$

a uzyskany przebieg napięcia określa wzór

$$u_1(0, t) = \mathbf{1}(t) + \left\{e^{-\frac{\sigma t}{2}}\left[I_0\left(\frac{\sigma}{2}t\right) + I_1\left(\frac{\sigma}{2}t\right)\right]\right\}\mathbf{1}\left(t - \frac{2l}{v}\right). \tag{25}$$

Krzywe określone wzorami (23) i (25) są przedstawione na rys. 6.



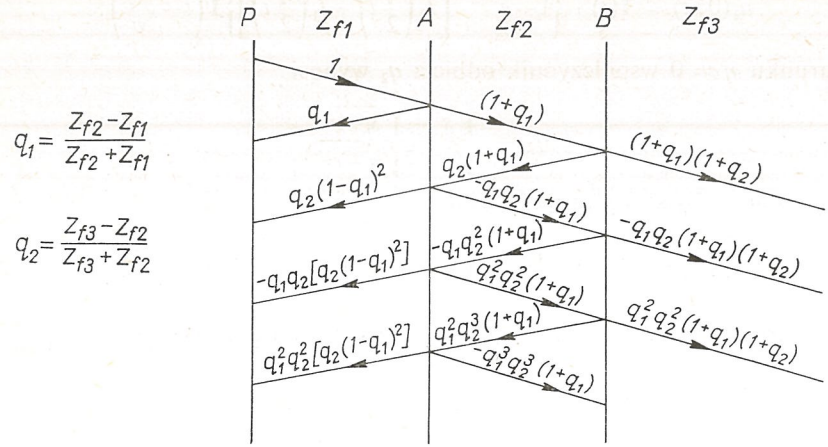
Rys. 6. Odbicia od linii stratnej nieskończenie długiej: *1* — krzywa wykreślona wg wzoru (23) — przypadek $G = 0$, *2* — krzywa wykreślona wg wzoru (25) — przypadek $R = 0$, *3* — przypadek linii zrównoważonej $R/L = G/C$

W przypadku linii bez upływności wartość, do jakiej dąży krzywa określona zależnością (23) odpowiada warunkom obwodu otwartego, natomiast w przypadku linii bez oporności szeregowej wartość, do jakiej dąży krzywa określona wzorem (25), odpowiada warunkom obwodu zwartego. Dla linii zrównoważonej, dla której spełniony jest warunek $R/L = G/C$, brak jest fali odbitej.

Z początkowego nachylenia krzywej wykreślonej zgodnie ze wzorem (23) można wnioskować o wartości oporności szeregowej badanego obiektu, natomiast z początkowego nachylenia krzywej wykreślonej zgodnie ze wzorem (25) można wnioskować o wartości upływności badanego obiektu.

6. ODBICIA WIELOKROTNE

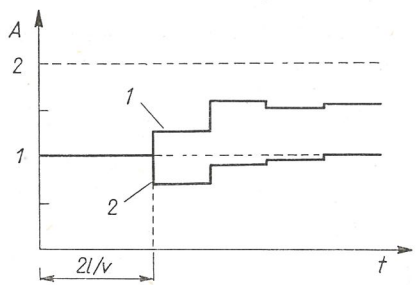
Każda zmiana impedancji w obwodzie pomiarowym i badanym obiekcie oraz każda nieciągłość jest powodem powstania odbić. Jeżeli jest kilka nieciągłości, powstają odbicia wielokrotne, które utrudniają właściwą interpretację obserwowanych przebiegów i zmniej-



Rys. 7. Odbicia wielokrotne w układzie połączonych szeregowo trzech kabli o impedancjach Z_{f1}, Z_{f2}, Z_{f3}

szają dokładność pomiaru. Rozpatrzmy dla przykładu trzy połączone ze sobą odcinki kabla o impedancjach falowych odpowiednio Z_{f1}, Z_{f2} i Z_{f3} (rys. 7). Fala pierwotna o amplitudzie jednostkowej po dojściu do punktu A zostaje częściowo odbita, a częściowo przechodzi do punktu B, gdzie następuje częściowe odbicie i częściowe przejście do kabla o impedancji Z_{f3}. Fala pierwotna ulega odbiciu w punkcie A ze współczynnikiem odbicia

$$q_1 = \frac{Z_{f2}-Z_{f1}}{Z_{f2}+Z_{f1}}. \tag{26}$$



Rys. 8. Przykład odbić wielokrotnych w przypadku połączonych szeregowo odcinków kabli o impedancjach Z_{f1}, Z_{f2}, Z_{f3}: *1* — $Z_{f2}/Z_{f1} = 2$, $Z_{f3}/Z_{f2} = 2$; *2* — $Z_{f2}/Z_{f1} = 0{,}5$, $Z_{f3}/Z_{f2} = 2$

Do odcinka AB zostaje przepuszczona fala ze współczynnikiem przepuszczania

$$1+q_1 = \frac{2Z_{f2}}{Z_{f2}+Z_{f1}}. \tag{27}$$

Na rysunku 7 przedstawiono współczynniki, z jakimi zostają kolejno odbite i przepuszczone fale w punktach nieciągłości linii.

Druga fala odbita, jaka wraca do początku linii i jest obserwowana na oscylografie, jest zmniejszona o współczynnik $(1-q_1)^2$. Wszystkie następne fale odbite mają amplitudę

$-q_1 q_2$ razy mniejszą od poprzednich. Ponieważ $q_1 q_2 < 1$, stąd wynika wniosek, że odbicia poza dwoma pierwszymi mogą być pominięte.

Każdy z odbitych impulsów jest oczywiście przesunięty o czas t_0 wynikający z występowania w wyrażeniu (8) członów o postaci e^{-st_0}. Obserwując zatem na ekranie oscylografu uzyskane odbicia można określić stosunek impedancji poszczególnych odcinków oraz przybliżone długości tych odcinków (rys. 8).

7. WNIOSKI

Na podstawie przedstawionych wyżej rozważań teoretycznych można wysnuć następujące wnioski ogólne:

1) Przeprowadzenie właściwej analizy obserwowanych na ekranie przebiegów jest możliwe tylko w przypadku dokładnego dopasowania impedancji generatora, łącz i linii opóźniającej oraz zastosowania oscylografu z sondą o dużej oporności wejściowej. Jakiekolwiek niedopasowania powodują odbicia wielokrotne utrudniające pomiary odbić od obiektu badanego.

2) Na dokładność pomiaru posiada decydujący wpływ stromość impulsu pomiarowego, pasmo przenoszenia oscylografu oraz oporność i upływność linii opóźniającej (wymagane jest spełnienie warunku $R = 0$ i $G = 0$). Przebiegi mogą być dobrze zinterpretowane, jeżeli minimalna odległość między poszczególnymi odbiciami jest większa od połowy całkowitego czasu narastania impulsu.

Stosowana dotąd metoda pomiaru odbić w linii długiej polegała na pomiarze współczynnika fali stojącej. Uzyskane wykresy amplitudy i fazy tego współczynnika (wykonane na podstawie pomiarów dla szeregu częstotliwości) pozwalają w prostych przypadkach na określenie miejsca i charakteru odbić. Przy każdej zmianie, zamierzonej bądź przypadkowej, trzeba dokonać nowej serii pomiarów i ich interpretacji. Proces ten jest zarówno skomplikowany, jak i czasochłonny. Reflektometria czasowa w porównaniu z tą metodą wydaje się znacznie prostsza i mniej czasochłonna. Układy pomiarowe reflektometrii czasowej, w których całkowity czas narastania impulsu (generatora i oscylografu) jest rzędu 150 psek [2], znalazły praktyczne zastosowanie w pomiarach laboratoryjnych — do pomiaru parametrów małych sygnałów czwórników czynnych, profilowania anten i falowodów itp.

Politechnika Łódzka
Katedra Elektroniki Przemysłowej

WYKAZ LITERATURY

1. Ely P. C.: Swept-Frequency Techniques. — Proc. IEEE, v. 55, Nr. 6, June 1967, s. 991—1002.
2. Oliver B. M.: Time Domain Reflectometry. — Hewlett-Packard Journal, v. 15, Nr. 6, February 1964.
3. Osiowski J.: Zarys rachunku operatorowego. PWN, Warszawa 1965.
4. Wagner K. W.: Rachunek operatorowy i przekształcenie Laplace'a. PWN, Warszawa 1964.

Z. KORZEC

BASIC THEORY OF TIME DOMAIN REFLECTOMETRY

Summary

Time Domain Reflectometry is a new measurement technique based on incident and reflected waves analyses. A step function with very short rise time as a test signal is used. In this paper the basic theory of this technique is given. The typical reflected waveforms in the case of lumped and distributed networks are considered. Attention is paid to the multiple reflections which can cause errors of interpretation. In the laboratory measurements nanosecond pulse generators and gigacycle bandwidth oscilloscopes must be used to display the reflections.

Z. KORZEC

LES FONDEMENTS THÉORIQUES DE LA RÉFLECTOMÉTRIE TEMPORAIRE

Résumé

La réflectométrie temporaire constitue une technique de mesure nouvelle appuyée sur l'analyse de la forme des impulsions rectangulaires émises et réfléchies de l'objet étudié. Dans l'oeuvre on a décrit la méthodique des mesures et on a donné les fondements théoriques de cette technique. On a déduit des expressions déterminant la forme des impulsions réfléchies dans le cas de charger par l'impédance à paramètres concentrés ainsi qu'à paramètres distribués. On a fait l'attention sur l'influence défavorable des réflections multiples et sur l'importance du choix convenable des paramètres de l'appareillage de mesure.

La réflectométrie temporaire, en cas d'employer un générateur des impulsions de nanoséconde et un oscillographe à bande des fréquences égale aux quelques milles mégahertz, peut être utilisée pour les mesures de laboratoire (pour la mesure des paramètres des quadripôles actifs, pour réaliser le profil du guide d'ondes etc.).

З. КОЖЕЦ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ВРЕМЕННОЙ РЕФЛЕКТОМЕТРИИ

Резюме

Временная рефлектометрия составляет новую измерительную технику основанную на анализе формы прямоугольных импульсов, высылаемых к исследуемому объекту и отраженных от него. В статье описана методика измерений, приведены теоретические основы этой техники. Выведены выражения, определяющие форму импульсов, отраженных в случае нагрузки импедансом с сосредоточенными постоянными как и импедансом с распределенными постоянными. Подчеркнуто отрицательное влияние многократных отражений и обращено внимание на значение правильного подбора параметров измерительной аппаратуры.

Временная рефлектометрия, с применением генератора наносекундных импульсов и осциллографа полосой частот порядка нескольких тысяч Мгц, может быть использована в лабораторных измерениях (для измерения активных четырехполюсников, для профилирования волноводов и др.).

621.372.82

RYSZARD VOGEL

Własności kierunkowe i filtrujące dwóch równoległych linii sprzężonych

Rękopis dostarczono 12.3.1968

W pracy przedstawiono zarys teorii dwóch równoległych linii sprzężonych. Dzięki wprowadzeniu do analizy falowych macierzy transmisji i rozproszenia omówiono własności idealnego sprzęgacza kierunkowego zbudowanego z odcinka dwóch równoległych linii sprzężonych. W dalszej części pracy przedstawiono możliwości stosowania takich linii do konstrukcji czwórników filtrujących, co można uzyskać dzięki odpowiedniemu obciążeniu dwóch gałęzi czterowrotnika kierunkowego (sprzęgacza). Omówiono zrealizowane w ten sposób półogniwo filtru pasmowo-przepustowego i pasmowo-zaporowego. Podano również inne przykłady zastosowań linii sprzężonych w układach mikrofalowych. W końcowej części pracy przedstawiono przykłady realizacji omówionych układów przy zastosowaniu techniki linii paskowych.

1. WSTĘP

Sprzężone z sobą prowadnice falowe są bardzo szeroko stosowane w technice mikrofalowej jako sprzęgacze kierunkowe, filtry, układy opóźniające itp. W ostatnich latach szczególnie dużo uwagi poświęca się sprzężonym liniom paskowym — zarówno symetrycznym, jak i niesymetrycznym. Wynika to z dążenia do jak najdalej idącej miniaturyzacji sprzętu mikrofalowego, a ściśle mówiąc z zastosowań w mikrofalowych układach scalonych, gdzie linie wykonywane są w wersji niesymetrycznych linii paskowych na podłożach ceramicznych o dużej stałej dielektrycznej ($\varepsilon_r = 9$), co dodatkowo pozwala zmniejszyć wymiary elementów. Metody fotomaskowania stosowane w mikrofalowych układach scalonych pozwalają na uzyskanie bardzo małych odległości między dwoma sprzężonymi z sobą liniami paskowymi (rzędu 10 μm), co w rezultacie daje możność realizowania silnych sprzężeń, trudnych do osiągnięcia w układach konwencjonalnych.

W związku z podanymi wyżej zastosowaniami celowe wydaje się przedstawienie w możliwie jednolitej formie teorii dwóch równoległych linii sprzężonych oraz omówienie zastosowań do konstrukcji sprzęgaczy kierunkowych i filtrów.

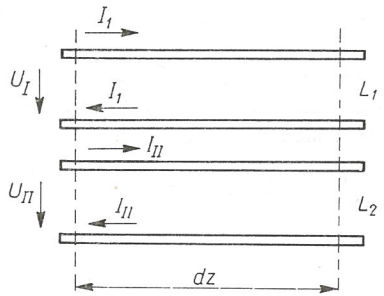
W sposób ogólny będą przedstawione fizyczne własności tego typu układów i wynikające stąd zastosowania. Będzie to możliwe dzięki wprowadzeniu falowych macierzy transmisji $[T]$ i rozproszenia $[S]$, które mają bardzo prostą interpretację fizyczną. Dla danego układu macierze te można uzyskać z macierzy $[A]$, którą otrzymuje się na podstawie rozwiązania uogólnionych dla przypadku dwóch sprzężonych z sobą linii, równań telegrafistów. Rezultaty rozwiązań tych równań mogą być uogólnione dla prowadnic falowych dowolnego typu, niezależnie od rodzaju rozchodzących się w nich fal. Można mianowicie wykazać, że amplitudowe funkcje $U(z)$ i $I(z)$, proporcjonalne do $\exp(-\gamma z)$, występujące w wyrażeniach na składowe poprzeczne pola w prowadnicy $\vec{E}_t = U(z)\vec{e}(x, y)$ i $\vec{H}_t =$

$= I(z)\vec{h}(x, y)$, są analogiczne do napięć i prądów figurujących w równaniach (opisujących linię dwuprzewodową) telegrafistów[1].

Jeżeli znane są funkcje $\vec{e}$ i $\vec{h}$, które można określić rozwiązując równanie Helmholtza dla danej prowadnicy i dla danego rodzaju drgań, to wszystkie pozostałe informacje dotyczące przesyłu energii elektromagnetycznej uzyskamy rozpatrując równoważną linię długą o znormalizowanej impedancji charakterystycznej Z_0 i stałej propagacji (odpowiadających danemu rodzajowi drgań).

2. TEORIA DWÓCH RÓWNOLEGŁYCH LINII SPRZĘŻONYCH

Zajmijmy się odcinkiem dwóch sprzężonych z sobą linii o długości dz, przedstawionym schematycznie na rys. 1.



Rys. 1. Odcinek dz dwóch równoległych linii sprzężonych

Jeżeli przez U_{I}, U_{II} oraz I_{I}, I_{II} oznaczymy napięcia i prądy na wejściach obu linii i dla prostoty rozważań założymy, że obie linie mają identyczne parametry, to równania telegrafistów dla tego przypadku mają postać [1]:

$$-\frac{dU_{\mathrm{I,II}}}{dz} = ZI_{\mathrm{I,II}} + Z_{12} I_{\mathrm{II,I}}, \tag{1}$$

---

[1] Wektorowe funkcje $\vec{e}$ i $\vec{h}$ mają postać $\vec{e}(x, y) = c_1\vec{F}_1(x, y)$, $\vec{h}(x, y) = c_2\vec{F}_2(x, y)$, gdzie funkcje $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ zależą od rodzaju drgań w prowadnicy, a c_1 i c_2 są dowolnymi stałymi. Funkcje amplitudowe mają postać $U(z) = U_0\exp(-\gamma z)$, $I(z) = \frac{U_0}{Z_0}\frac{c_1}{c_2}\exp(-\gamma z)$, gdzie Z_0 jest impedancją falową dla danego rodzaju. Jeżeli zróżniczkujemy te dwa ostatnie wyrażenia ze względu na z, to uzyskamy układ równań identyczny z równaniami telegrafistów opisującymi zmienność osiową napięcia i prądu w dwuprzewodowej bezstratnej linii przesyłowej o impedancji charakterystycznej $Z_c = \frac{U(z)}{I(z)} = Z_0\frac{c_1}{c_2}$ i stałej propagacji γ. Widzimy więc, że zmienność osiowa poprzecznych składowych pola w prowadnicy falowej i zmienność osiowa napięcia i prądu w linii o podanych parametrach są identyczne. Moc płynąca w prowadnicy będzie równa mocy w linii, jeżeli stałe c_1 i c_2 będą spełniać warunek normujący $\int[\vec{e}\times\vec{h}]\,\vec{i}_z\,dS = 1$. Linia spełniająca wyżej wymienione warunki może być traktowana jako układ zastępczy prowadnicy. Impedancja charakterystyczna równoważnej linii zależy od wyboru stałych c_1 i c_2 (przy spełnionym warunku normującym) i będzie równa impedancji falowej prowadnicy dla danego rodzaju jedynie w przypadku równości stałych c_1 i c_2. Gdy $c_1 \neq c_2$, to impedancja charakterystyczna linii zastępczej będzie inna niż impedancja falowa prowadnicy. Jednakże impedancje znormalizowane w przekroju prowadnicy i linii zastępczej są sobie równe i jeżeli będziemy operować pojęciem impedancji znormalizowanych, wybór parametrów linii zastępczej nie jest istotny.

$$-\frac{dI_{I,II}}{dz} = YU_{I,II}+Y_{12}U_{II,I}. \tag{2}$$

W równaniach tych indeksy I i II oznaczają odpowiednio pierwszą i drugą linię. Założyliśmy również przy tym, że zmienność w czasie jest typu $\exp(j\omega t)$; czynnik ten dla prostoty został opuszczony. Symbole Z i Y oznaczają odpowiednio impedancję i admitancję własną na jednostkę długości, a Z_{12} i Y_{12} impedancję i admitancję wzajemną na jednostkę długości.

Różniczkując równanie (1) względem z i podstawiając wartość pochodnych prądu z równania (2) otrzymamy następujący układ równań różniczkowych drugiego stopnia:

$$\frac{d^2U_{I,II}}{dz^2}-a^2U_{I,II}-b^2U_{II,I} = 0, \tag{3}$$

gdzie:

$$a^2 = ZY(1+k_U k_I), \tag{4}$$

$$b^2 = ZY(k_U+k_I), \tag{5}$$

przy czym współczynniki k_U i k_I zdefiniowane są następująco

$$k_U = \frac{Y_{12}}{Y}, \tag{6}$$

$$k_I = \frac{Z_{12}}{Z} \tag{7}$$

i oznaczają odpowiednio współczynnik sprzężenia napięciowego i prądowego.

Szukamy rozwiązań szczególnych równań (3) w postaci fal rozchodzących się równocześnie w obu liniach:

$$U_{I,II} = A_{I,II}e^{\gamma z}, \tag{8}$$

gdzie γ oznacza stałą propagacji, zaś $A_{I,II}$, są stałymi całkowania.

Podstawiając zależności (8) do układu równań (3) otrzymamy:

$$(\gamma^2-a^2)A_{I,II}-b_2A_{II,I} = 0. \tag{9}$$

Przyrównując do zera wyznacznik układu (9) i rozwiązując równanie dwukwadratowe ze względu na γ określimy cztery wartości stałej propagacji

$$\begin{aligned}\gamma_{1,2} &= \mp\gamma_{oe} = \mp\sqrt{a^2+b^2} = \mp\sqrt{ZY(1+k_U)(1+k_I)},\\ \gamma_{3,4} &= \mp\gamma_{oo} = \mp\sqrt{a^2-b^2} = \mp\sqrt{ZY(1-k_U)(1+k_I)}.\end{aligned} \tag{10}$$

Widzimy więc, że otrzymaliśmy dwie różne co do wartości stałe propagacji, co wskazuje na to, że mamy do czynienia z dwoma rodzajami drgań, które będą omówione w dalszym ciągu artykułu.

Znajdziemy teraz ogólne rozwiązanie dla fal rozchodzących się wzdłuż sprzężonych z sobą linii. Jak wynika z otrzymanych stałych propagacji, w każdej linii mamy do czynienia z kombinacją czterech fal, które są szczególnymi rozwiązaniami układu równań (3). Jeżeli podstawimy teraz zależności (10) do układu (9), to otrzymamy następujące warunki na amplitudy fal (stałe całkowania) w liniach:

$A_{Ioe} = A_{IIoe} = A_{oe}$ — dla fali rozchodzącej się w kierunku $+z$ ze stałą propagacji γ_{oe},

$A_{Ioe} = A_{IIoe} = B_{oe}$ — dla fali rozchodzącej się w kierunku $-z$ ze stałą propagacji γ_{oe},

$A_{Ioo} = -A_{IIoo} = A_{oo}$ — dla fali rozchodzącej się w kierunku $+z$ ze stałą propagacji γ_{oo},

$A_{Ioo} = -A_{IIoo} = B_{oo}$ — dla fali rozchodzącej się w kierunku $-z$ ze stałą propagacji γ_{oo}[1].

Uwzględniając te warunki możemy przedstawić rozwiązania szczególne w następującej postaci:

$$\begin{aligned} U_{I,II} &= A_{oe}e^{-\gamma_{oe}z}; \qquad U_{I,II} = B_{oe}e^{\gamma_{oe}z}; \\ U_{I,II} &= \pm A_{oo}e^{-\gamma_{oo}z}; \qquad U_{I,II} = \pm B_{oo}e^{\gamma_{oo}z} \end{aligned} \tag{11}$$

Znając szczególne rozwiązania dla fali napięcia możemy określić rozwiązania dla prądów w obu liniach. Jeżeli wprowadzimy oznaczenie

$$Z_{oe,oo} = \sqrt{\frac{Z}{Y}\frac{1\pm k_I}{1\pm k_U}} \tag{12}$$

i wstawimy wyrażenia (11) do układu równań (1), otrzymamy wartości prądów dla wszystkich czterech fal:

$$\begin{aligned} I_{I,II} &= \frac{A_{oe}}{Z_{oe}}e^{-\gamma_{oe}z}; \qquad I_{I,II} = -\frac{B_{oe}}{Z_{oe}}e^{+\gamma_{oe}z}; \\ I_{I,II} &= \pm\frac{A_{oo}}{Z_{oo}}e^{-\gamma_{oo}z}; \qquad I_{I,II} = \mp\frac{B_{oo}}{Z_{oo}}e^{+\gamma_{oo}z} \end{aligned} \tag{13}$$

Ogólne rozwiązanie układów równań (1) i (2), będące liniową kombinacją rozwiązań cząstkowych (11) i (13), ma postać następującą:

$$\begin{aligned} U_{I,II} &= (A_{oe}e^{-\gamma_{oe}z} + B_{oe}e^{\gamma_{oe}z}) \pm (A_{oo}e^{-\gamma_{oo}z} + B_{oo}e^{\gamma_{oo}z}), \\ I_{I,II} &= \frac{1}{Z_{oe}}(A_{oe}e^{-\gamma_{oe}z} - B_{oe}e^{\gamma_{oe}z}) \pm \frac{1}{Z_{oo}}(A_{oo}e^{-\gamma_{oo}z} - B_{oo}e^{\gamma_{oo}z}). \end{aligned} \tag{14}$$

Występujące w tym układzie stałe całkowania A i B mogą być określone na podstawie warunków brzegowych. Jeżeli przyjmiemy, że w przekroju $z = 0$ napięcia i prądy przybierają wartości

$$U_I = U_{Io}; \qquad U_{II} = U_{IIo}; \qquad I_I = I_{Io}; \qquad I_{II} = I_{IIo},$$

to po uwzględnieniu tego w równaniach (14) otrzymamy następujące wartości stałych całkowania:

$$\begin{aligned} A_{oe,oo} &= \frac{1}{4}[U_{Io} \pm U_{IIo} + Z_{oe,oo}(I_{Io} \pm I_{IIo})], \\ B_{oe,oo} &= \frac{1}{4}[U_{Io} \pm U_{IIo} - Z_{oe,oo}(I_{Io} \pm I_{IIo})]. \end{aligned} \tag{15}$$

Przedstawione powyżej rozwiązania (14) równań telegrafistów składają się z rozwiązań cząstkowych, będących falami czterech typów. Każdej fali odpowiada struktura pola wy-

[1] Indeks „e" oznacza rodzaj parzysty, zaś indeks „o" — nieparzysty. Sens obu tych rodzajów będzie wyjaśniony w dalszej części pracy.

nikająca z określonego rozkładu napięcia i prądu. Widzimy, że zarówno w pierwszej, jak i drugiej linii występują fale charakteryzujące się różnymi stałymi propagacji γ_{oe} i γ_{oo} oraz różnymi impedancjami Z_{oe} i Z_{oo}.

Tak więc w każdej linii mamy do czynienia z falami o innej strukturze pola, z tym że danemu rodzajowi odpowiadają dwie fale rozchodzące się w przeciwnych kierunkach.

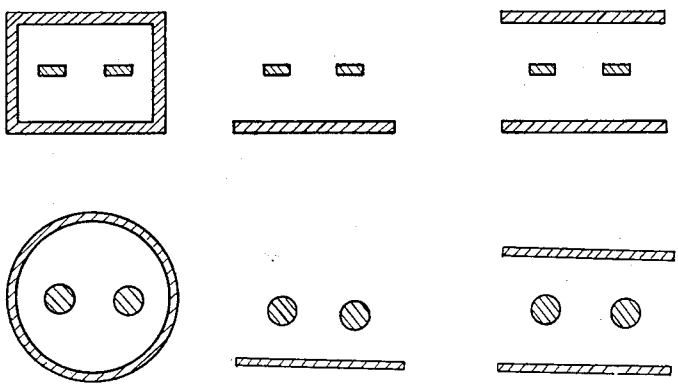
Jeżeli porównamy wyrażenia na U_{I} i U_{II}, to stwierdzimy, że przedstawiają one odpowiednio sumę i różnicę wyrażeń $[A_{oe}\exp(-\gamma_{oe}z)+B_{oe}\exp(+\gamma_{oe}z)]$ i $[A_{oo}\exp(-\gamma_{oo}z)+B_{oo}\exp(\gamma_{oo}z)]$, czyli mamy do czynienia z superpozycją dwóch rodzajów drgań.

Fale pierwszego rodzaju charakteryzują się jednakowymi fazami napięć i prądów w obu sprzężonych liniach, a fale drugiego rodzaju fazami przeciwnymi. Przyjęto pierwszy rodzaj nazwać parzystym (indeks „e" ozn. „even"-parzysty), drugi rodzaj nieparzystym (indeks „o" ozn. „odd"-niepaızysty).

3. LINIE SPRZĘŻONE Z FALAMI RODZAJU TEM

Zajmiemy się teraz przypadkiem szczególnie ważnym, a mianowicie liniami sprzężonymi, w których rozchodzą się fale rodzaju TEM.

Rozpatrując układy praktyczne często zakłada się, że mamy do czynienia z rodzajem TEM, gdyż pozwala to na dużo prostszą analizę, a błąd wynikający z tej idealizacji jest stosunkowo niewielki. Przeprowadzone niżej rozważania pozwolą na wyciągnięcie szeregu praktycznych wniosków dotyczących dwóch linii sprzężonych o konfiguracjach przedstawionych na rys. 2.



Rys. 2. Typowe konfiguracje dwóch równoległych linii sprzężonych

Jeżeli założymy, że występujące w równaniach (1) i (2) impedancje i admitancje mają charakter reaktancji i susceptancji, to możemy je zapisać w postaci:

$$Z = j\omega L, \quad Y = j\omega C, \quad Z_{12} = j\omega L_{12}, \quad Y_{12} = -j\omega C_{12}.$$

Przy tych założeniach współczynniki sprzężenia napięciowego i prądowego mają postać:

$$k_U = -k_C = \frac{C_{12}}{C}; \quad k_I = k_L = \frac{L_{12}}{L}$$

wyrażenia na stałe propagacji mogą być przedstawione następująco:

$$\gamma_{oe} = j\omega\sqrt{LC}\sqrt{(1-k_C)(1+k_L)} = j\beta_{oe} = j\omega\sqrt{L_{oe}C_{oe}},$$
$$\gamma_{oo} = j\omega\sqrt{LC}\sqrt{(1+k_C)(1-k_L)} = j\beta_{oo} = j\omega\sqrt{L_{oo}C_{oo}}, \tag{16}$$

gdzie

$$L_{oe} = L(1+k_L), \quad L_{oo} = L(1-k_L),$$
$$C_{oe} = C(1-k_C), \quad C_{oo} = C(1+k_C).$$

Możemy teraz wprowadzić pojęcia prędkości fazowych dla obu rodzajów drgań:

$$v_{oe} = \frac{\omega}{\beta_{oe}} = \frac{1}{\sqrt{LC}\sqrt{(1-k_C)(1+k_L)}};$$
$$v_{oo} = \frac{\omega}{\beta_{oo}} = \frac{1}{\sqrt{LC}\sqrt{(1+k_C)(1-k_L)}} \tag{17}$$

oraz określić wartości impedancji charakterystycznych:

$$Z_{oe} = \frac{1}{v_{oe}C_{oe}} = \sqrt{\frac{L_{oe}}{C_{oe}}} = \sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{\frac{1+k_L}{1-k_C}} = Z_o\sqrt{\frac{1+k_L}{1-k_C}},$$
$$Z_{oo} = \frac{1}{v_{oo}C_{oo}} = \sqrt{\frac{L_{oo}}{C_{oo}}} = \sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{\frac{1-k_L}{1+k_C}} = Z_o\sqrt{\frac{1-k_L}{1+k_C}}. \tag{18}$$

Wiadomo jednak, że fale rodzaju TEM, bez względu na strukturę pola, rozchodzą się bez tłumienia i z jednakową prędkością. W naszym przypadku będzie to spełnione, gdy:

$$k_C = k_L = k, \quad v_{oe} = v_{oo} = v = \frac{1}{\sqrt{LC}\sqrt{1-k^2}},$$
$$Z_{oe}\cdot Z_{oo} = Z_o^2, \quad \gamma_{oe} = \gamma_{oo} = \gamma = j\beta = j\frac{\omega}{v} = j\omega\sqrt{LC}\sqrt{1-k^2}. \tag{19}$$

Przy podanych wyżej założeniach równania (14) przedstawiają się następująco:

$$U_{I,II} = (A_{oe} \pm A_{oo})e^{-j\beta z} + (B_{oe} \pm B_{oo})e^{j\beta z},$$
$$I_{I,II} = \left(\frac{A_{oe}}{Z_{oe}} \pm \frac{A_{oo}}{Z_{oo}}\right)e^{-j\beta z} - \left(\frac{B_{oe}}{Z_{oe}} \pm \frac{B_{oo}}{Z_{oo}}\right)e^{j\beta z}. \tag{20}$$

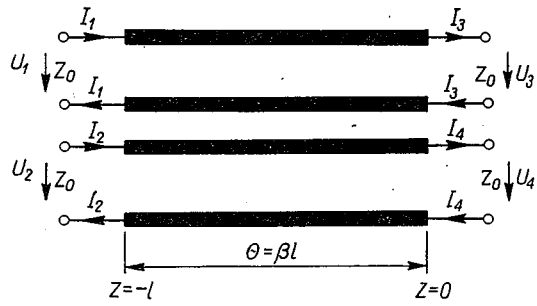
Podstawiając teraz wartości stałych całkowania (15) oraz wartości Z_{oe}, Z_{oo} (18) możemy uzyskać rozwiązania w postaci trygonometrycznej:

$$U_{I,II} = U_{Io,IIo}\cos\beta z - \frac{jZ_o}{\sqrt{1-k^2}}(I_{Io,IIo} + kI_{IIo,Io})\sin\beta z,$$
$$I_{I,II} = I_{Io,IIo}\cos\beta z - \frac{j}{Z_o\sqrt{1-k^2}}(U_{Io,IIo} - kU_{IIo,Io})\sin\beta z. \tag{21}$$

Na podstawie tych równań możemy określić wartości napięć i prądów wzdłuż obu sprzężonych linii. Uzyskane tu wyniki będą teraz zastosowane do analizy przykładów praktycznego wykorzystania dwóch równoległych sprzężonych z sobą linii.

4. SPRZĘGACZ KIERUNKOWY ZBUDOWANY Z ODCINKA DWÓCH RÓWNOLEGŁYCH LINII SPRZĘŻONYCH

Rozpatrzymy teraz czterowrotnik będący odcinkiem dwóch sprzężonych z sobą linii o długości elektrycznej $\theta = \beta l$ (rys. 3).



Rys. 3. Czterowrotnik utworzony z odcinka dwóch równoległych linii sprzężonych

Jeżeli do układu równań (21) podstawimy wartości napięć i prądów zgodnie z oznaczeniami jak na rys. 3, a mianowicie $U_{1o} = U_3$, $I_{1o} = I_3$, $U_{2o} = U_4$, $I_{2o} = I_4$, to omawiany czterowrotnik można opisać następującym układem równań:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_3 \cos\theta + \frac{jZ_o}{\sqrt{1-k^2}}(I_3 + kI_4)\sin\theta, \\ U_2 &= U_4 \cos\theta + \frac{jZ_0}{\sqrt{1-k^2}}(I_4 + kI_3)\sin\theta, \\ I_1 &= I_3 \cos\theta + \frac{j}{Z_o\sqrt{1-k^2}}(U_3 - kU_4)\sin\theta, \\ I_2 &= I_4 \cos\theta + \frac{j}{Z_o\sqrt{1-k^2}}(U_4 - kU_3)\sin\theta, \end{aligned} \tag{22}$$

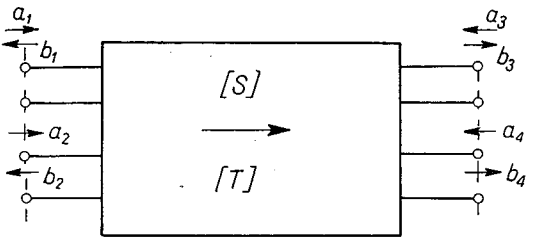
który można przedstawić w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}, \tag{23}$$

gdzie macierz $[A]$ przedstawia się następująco:

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \frac{jZ_o\sin\theta}{\sqrt{1-k^2}} & \frac{jkZ_o\sin\theta}{\sqrt{1-k^2}} \\ 0 & \cos\theta & \frac{jkZ_o\sin\theta}{\sqrt{1-k^2}} & \frac{jZ_o\sin\theta}{\sqrt{1-k^2}} \\ \frac{j\sin\theta}{Z_o\sqrt{1-k^2}} & \frac{-jk\sin\theta}{Z_o\sqrt{1-k^2}} & \cos\theta & 0 \\ \frac{-jk\sin\theta}{Z_o\sqrt{1-k^2}} & \frac{j\sin\theta}{Z_o\sqrt{1-k^2}} & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{24}$$

Celowe będzie wyznaczenie znormalizowanych falowych macierzy transmisji $[T]$ i rozproszenia $[S]$. Współczynniki tych macierzy mają prostą interpretację fizyczną i pozwolą



Rys. 4. Ogólny schemat czterowrotnika z zaznaczonymi falami padającymi i odbitymi

określić własności kierunkowe analizowanego czterowrotnika. Dla przypomnienia podajemy tu, że jeżeli mamy czterowrotnik jak na rysunku 4, to macierze $[T]$ i $[S]$ są zdefiniowane w następujący sposób:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_3 \\ b_4 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

gdzie:

a_i — znormalizowane fale padające,

b_i — znormalizowane fale odbite ($i = 1, 2, 3, 4$).

Korzystając z zależności między macierzami $[A]$, $[T]$ i $[S]$ [3] możemy obliczyć współczynniki macierzy transmisji i rozproszenia dla rozpatrywanego czterowrotnika, przy założeniu, że wszystkie gałęzie są obciążone impedancjami charakterystycznymi Z_o. Tak więc współczynniki macierzy $[T]$ są równe:

$$T_{11} = T_{22} = \cos\theta + \frac{j\sin\theta}{\sqrt{1-k^2}},$$

$$T_{12} = T_{21} = T_{13} = T_{24} = T_{31} = T_{42} = T_{34} = T_{43} = 0,$$

$$T_{14} = -T_{41} = \frac{-jk\sin\theta}{\sqrt{1-k^2}},$$

$$T_{32} = -T_{23} = \frac{jk\sin\theta}{\sqrt{1-k^2}},$$

$$T_{33} = T_{44} = \cos\theta - \frac{j\sin\theta}{\sqrt{1-k^2}},$$

a sama macierz ma postać

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 & T_{14} \\ 0 & T_{11} & T_{14} & 0 \\ 0 & -T_{14} & T_{33} & 0 \\ -T_{14} & 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix} \tag{25}$$

Możemy teraz przejść do macierzy rozproszenia [S], której współczynniki przyjmą wartości:

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{44} = 0,$$
$$S_{14} = S_{41} = S_{23} = S_{32} = 0,$$
$$S_{13} = S_{31} = S_{24} = S_{42} = t,$$
$$S_{12} = S_{21} = S_{34} = S_{43} = c,$$

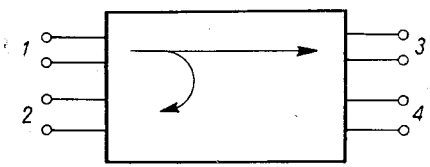
w związku z czym macierz [S] ma postać:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & c & t & 0 \\ c & 0 & 0 & t \\ t & 0 & 0 & c \\ 0 & t & c & 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

gdzie

$$t = \frac{\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{1-k^2}\cos\theta + j\sin\theta},$$
$$c = \frac{jk\sin\theta}{\sqrt{1-k^2}\cos\theta + j\sin\theta}. \tag{27}$$

Na podstawie (26) i (27) możemy stwierdzić, że mamy do czynienia z czterowrotnikiem symetrycznym, którego wszystkie gałęzie są idealnie dopasowane. Widzimy również, że przesunięcie fazy między falami w wyjściowych gałęziach wynosi 90°. Widać także,



Rys. 5. Schemat sprzęgacza o sprzężeniu „wstecznym" przy pobudzonej gałęzi 1

że zmiana kierunku przesyłu energii na przeciwny nie zmieni postaci macierzy [S]. Tak więc, rozpatrywany czterowrotnik jest idealnym sprzęgaczem kierunkowym o nieskończonej kierunkowości i sprzężeniu określonym wyrażeniem na c.

Jeżeli w takim sprzęgaczu doprowadzimy moc do gałęzi pierwszej (rys. 5), to zostanie ona podzielona między gałęzie 2 i 3, natomiast gałąź 4 będzie niepobudzona. Stopień podziału mocy scharakteryzowany jest wyrażeniami (27), które — jak widać — zależą od długości elektrycznej sprzęgacza. Wykres $|c|$ i $|t|$ w funkcji elektrycznej długości sprzęgacza θ przedstawiony jest na rys. 6.

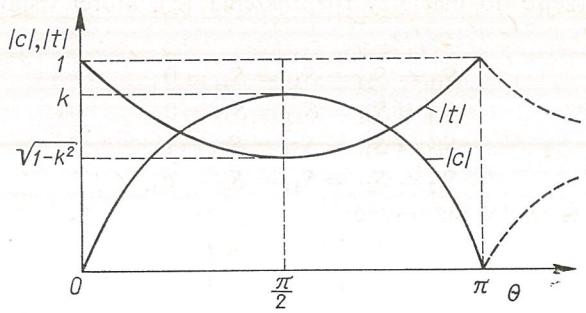
Można oczywiście wykazać, że dla każdej długości elektrycznej θ spełniona będzie zależność:

$$|c^2| + |t^2| = 1,$$

co zgodne jest z warunkiem na bezstratność czterowrotnika:

$$[\overline{S_t}] \cdot [S] = 1,$$

gdzie $[\overline{S_t}]$ jest transponowaną macierzą rozproszenia, której elementy zastąpione są zespolono-sprzężonymi wielkościami.



Rys. 6. Przebieg sprzężenia c i współczynnika transmisji t w funkcji długości elektrycznej $\theta = \frac{\omega l}{v} = \beta l$

Dotychczas zajmowaliśmy się przypadkiem, dla którego wszystkie gałęzie sprzęgacza były obciążone impedancjami charakterystycznymi Z_o. Jeżeli teraz założymy, że gałęzie 2, 3, 4 będą zakończone impedancjami różnymi od Z_o, to będą istnieć odbicia określone współczynnikami Γ_2, Γ_3, Γ_4. Również w gałęzi pierwszej, do której doprowadzamy moc, wystąpi fala odbita b_1, scharakteryzowana współczynnikiem odbicia Γ_1.

Rozpisując macierz $[S]$ możemy wyznaczyć fale odbite b_i we wszystkich gałęziach sprzęgacza w funkcji fali wejściowej a_1 oraz współczynników odbicia Γ_2, Γ_3, Γ_4. Mają one następującą postać:

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \frac{c^2\Gamma_2 + t^2\Gamma_3 - \Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4(c^2 - t^2)}{1 - \Gamma_4(c^2\Gamma_3 + t^2\Gamma_2)} a_1, \\
b_2 &= c\,\frac{1 + \Gamma_3\Gamma_4(t^2 - c^2)}{1 - \Gamma_4(c^2\Gamma_3 + t^2\Gamma_2)} a_1, \\
b_3 &= t\,\frac{1 + \Gamma_2\Gamma_4(c^2 - t^2)}{1 - \Gamma_4(c^2\Gamma_3 + t^2\Gamma_2)} a_1, \\
b_4 &= ct\,\frac{\Gamma_2 + \Gamma_3}{1 - \Gamma_4(c^2\Gamma_3 + t^2\Gamma_2)} a_1.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Występujące w zależnościach (28) współczynniki c^2 i t^2 są określone wyrażeniami

$$
t^2 = \frac{1 - k^2}{1 - k^2\cos^2\theta}\, e^{-2j\,\mathrm{arctg}\left[\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\,\mathrm{tg}\,\theta\right]},
$$

$$
c^2 = -\frac{k^2\sin^2\theta}{1 - k^2\cos^2\theta}\, e^{-2j\,\mathrm{arctg}\left[\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\,\mathrm{tg}\,\theta\right]}.
$$

Jak widać z zależności (28), sprzęgacz nie jest już idealny i charakteryzuje się skończoną kierunkowością, a sprzężenie i współczynnik transmisji nie są określone prostymi wyrażeniami c i t, lecz bardziej złożonymi wzorami.

Zajmijmy się nieco prostszym przypadkiem szczególnym, dla którego $\Gamma_2 = \Gamma_3 = \Gamma_4 = \Gamma$, co może odpowiadać odbiciom wynikającym z niezbyt dokładnego spełnienia warunku $Z_{oe}Z_{oo} = Z_o^2$.

Wartość kierunkowości możemy obliczyć z definicji

$$D = \frac{|b_2|^2}{|b_4|^2}$$

uwzględniając zależność (28). Otrzymamy wówczas

$$D = \frac{(1-\Gamma^2)^2 - [k^2\Gamma^4 - 2(2-k^2)\Gamma^2 + k^2]\cos^2\theta}{4\Gamma^2(1-k^2)}. \tag{29}$$

Jak widać z tego wyrażenia, istnieje pewna wartość współczynnika odbicia Γ, przy której kierunkowość nie zależy od częstotliwości. Wartość ta będzie pierwiastkiem równania dwukwadratowego ze względu na Γ:

$$k^2\Gamma^4 - 2(2-k^2)\Gamma^2 + k^2 = 0$$

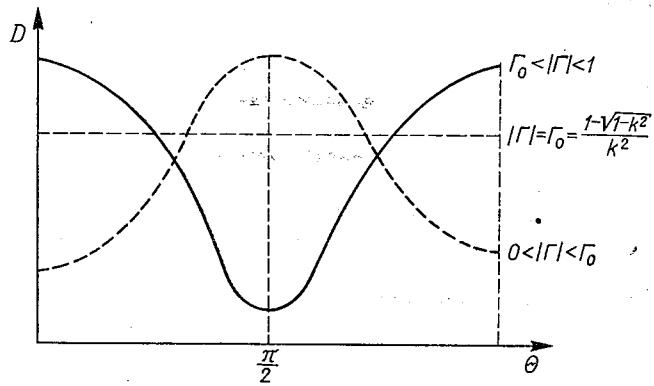
i równa jest

$$\Gamma_0 = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{k}.$$

Dla wszystkich Γ różnych od tej wartości kierunkowość będzie zależna od częstotliwości z tym, że w zależności od przedziału wartości, w jakim mieści się Γ, kierunkowość może być w środku pasma maksymalna bądź też minimalna. Sytuacja ta jest przedstawiona na rys. 7.

Kierunkowość w środku pasma przyjmuje wartości

$$D_0 = \frac{(1-\Gamma^2)^2}{4\Gamma^2(1-k^2)}.$$



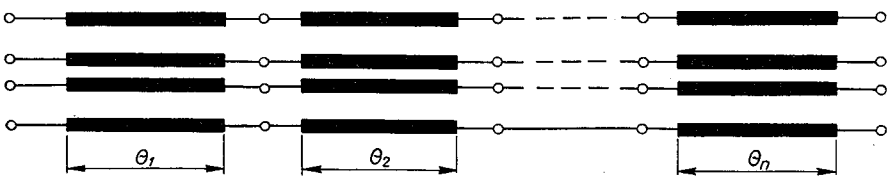
Rys. 7. Przebieg kierunkowości w funkcji długości elektrycznej θ dla różnych wartości współczynnika odbicia Γ

Dla ilustracji można tu podać, że dla sprzęgacza 3 dB $\Gamma_0 = 0{,}414$, co dla środka pasma odpowiada kierunkowości $D_0 \approx 3$ dB, natomiast dla sprzęgacza 20 dB $\Gamma_0 \approx 0{,}05$, co odpowiada kierunkowości $D_0 > 20$ dB.

5. KASKADOWE ŁĄCZENIE SPRZĘGACZY

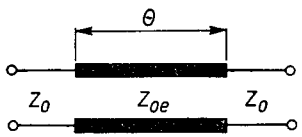
W praktyce jest często stosowane kaskadowe łączenie sprzęgaczy (rys. 8), dzięki czemu uzyskuje się zwiększenie pasma częstotliwości. W ogólnym przypadku każda sekcja wchodząca w skład n-sekcyjnego sprzęgacza może charakteryzować się inną wartością współ-

czynnika sprzężenia k_i, a w związku z tym innymi impedancjami (Z_{oe}) i (Z_{oo}). Parametry te są dobierane z punktu widzenia uzyskania odpowiedniego kształtu charakterystyki częstotliwościowej sprzęgacza (np. charakterystyka maksymalnie płaska lub równofalista). Metody projektowania tego typu sprzęgaczy są omówione dokładnie w literaturze [2], dlatego też nie będziemy ich tu przytaczać. Rozpatrzymy jedynie w sposób ogólny



Rys. 8. Kaskadowe połączenie sprzęgaczy

metodę określania współczynnika transmisji sprzęgacza składającego się z n sekcji o identycznych impedancjach charakterystycznych Z_o, lecz o różnych wartościach współczynnika k_i, co odpowiada różnym wartościom (Z_{oe}) oraz (Z_{oo}) . (Spełniony musi być oczywiście warunek $(Z_{oe})_i \cdot (Z_{oo})_i = Z_o^2$). W tym celu udowodnimy, że współczynnik transmisji i sprzężenie sprzęgacza o impedancji Z_o i długości elektrycznej θ, określone wyrażeniami t i c (27), odpowiadają współczynnikowi transmisji i odbicia odcinka linii o tej samej długości elektrycznej θ, lecz o impedancji charakterystycznej Z_{oe}, włączonego do toru o impedancji Z_o (rys. 9).



Rys. 9. Odcinek linii o długości elektrycznej θ i impedancji charakterystycznej Z_{oe} włączonej do toru o impedancji Z_o

Falowa macierz transmisji odcinka takiej linii ma postać

$$[T] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\cos\theta + j\left(\frac{Z_{oe}}{Z_o} + \frac{Z_o}{Z_{oe}}\right)\sin\theta; & j\left(\frac{Z_o}{Z_{oe}} - \frac{Z_{oe}}{Z_o}\right)\sin\theta \\ j\left(\frac{Z_{oe}}{Z_o} - \frac{Z_o}{Z_{oe}}\right)\sin\theta; & 2\cos\theta - j\left(\frac{Z_{oe}}{Z_o} + \frac{Z_o}{Z_{oe}}\right)\sin\theta \end{bmatrix} \tag{30}$$

a po podstawieniu zależności na Z_{oe}

$$[T] = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\begin{bmatrix} \sqrt{1-k^2}\cos\theta + j\sin\theta; & -jk\sin\theta \\ jk\sin\theta; & \sqrt{1-k^2}\cos\theta - j\sin\theta \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Odpowiadająca jej macierz rozproszenia przedstawia się następująco:

$$[S] = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}\cos\theta + j\sin\theta}\begin{bmatrix} jk\sin\theta; & \sqrt{1-k^2} \\ \sqrt{1-k^2}; & jk\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & t \\ t & c \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Widzimy więc, że współczynniki tej macierzy, mające sens współczynników odbicia i transmisji, pokrywają się z wyrażeniami (27). Wynika stąd, że jeżeli połączymy kaskadowo n sprzęgaczy o impedancjach charakterystycznych Z_o oraz długościach θ_i i współczynnikach sprzężenia k_i, to uzyskamy nowy sprzęgacz, którego współczynniki transmisji i sprzężenia są odpowiednio równe współczynnikowi transmisji i odbicia czwórnika złożonego z n odcinków linii o impedancjach charakterystycznych równych odpowiednio $(Z_{oe})_i$ oraz długościach elektrycznych θ_i. Macierz $[T]$ tego równoważnego czwórnika równa jest iloczynowi macierzy $[T]_i$.

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = [T_1][T_2] \ldots [T_i] \ldots [T_n], \tag{33}$$

gdzie

$$[T_i] = \frac{1}{\sqrt{1-k_i^2}} \begin{bmatrix} \sqrt{1-k_i^2}\cos\theta_i + j\sin\theta_i; & -jk_i\sin\theta_i \\ jk_i\sin\theta_i; & \sqrt{1-k_i^2}\cos\theta_i - j\sin\theta_i \end{bmatrix}.$$

Współczynnik transmisji czwórnika, równy współczynnikowi transmisji n-sekcyjnego sprzęgacza, ma postać:

$$S_{21} = t_{wyp} = \frac{1}{T_{11}}, \tag{34}$$

a współczynnik odbicia czwórnika odpowiadający sprzężeniu n-sekcyjnego sprzęgacza równy jest:

$$\Gamma = C_{wyp} = S_{11} = \frac{T_{21}}{T_{11}}. \tag{35}$$

6. ZASTOSOWANIE LINII SPRZĘŻONYCH DO BUDOWY CZWÓRNIKÓW FILTRUJĄCYCH

Dzięki odpowiedniemu obciążeniu dwóch gałęzi czterowrotnika można uzyskać czwórnik (dwuwrotnik), którego własności określa się na podstawie znajomości macierzy $[S]$ wyjściowego czterowrotnika oraz współczynników odbicia obciążonych gałęzi. Można to wykorzystać w przypadku dwóch równoległych linii sprzężonych o długości elektrycznej θ, które — jak już wykazano wyżej — tworzą idealny sprzęgacz kierunkowy. Sprzęgacz ten może być układem wyjściowym do konstruowania różnych elementów posiadających własności filtrujące.

Układy uzyskane tą drogą są szczególnie często wykonywane przy zastosowaniu linii paskowych i dzięki temu są łatwe do realizacji oraz odznaczają się małymi wymiarami.

Niżej przedstawionych będzie kilka typowych przykładów czwórników filtrujących uzyskanych dzięki zwieraniu lub rozwieraniu dwóch gałęzi idealnego sprzęgacza kierunkowego. Czwórniki te mogą być podstawowymi półogniwami bardziej skomplikowanych układów filtrujących, o zadanych z góry charakterystykach przenoszenia, które mogą być kształtowane dzięki odpowiedniemu wyborowi parametrów (k_i) półogniw składowych. Metody projektowania tego typu filtrów podane są w literaturze [2], [3] i dlatego też nie będą tu przytaczane. Podane będą jedynie macierze transmisji $[T]$ i rozproszenia $[S]$

podstawowych czwórników oraz obliczone na ich podstawie wyrażenia na charakterystyki częstotliwościowe tłumienia i przesunięcia fazowego.

Aby obliczyć macierz rozproszenia czwórnika uzyskanego w podany wyżej sposób, można oprzeć się na następującym twierdzeniu [3]:

Jeżeli w dowolnym n-wrotniku, określonym macierzą rozproszenia $[S]$, k-ta gałąź zostanie zakończona obciążeniem o współczynniku odbicia Γ_k, to elementy macierzy $[S']$ otrzymanego w ten sposób nowego $(n-1)$-wrotnika określone są następującą zależnością:

$$S'_{ij} = S_{ij} + \frac{S_{ik} S_{kj} \Gamma_k}{1 - S_{kk} \Gamma_k}, \tag{36}$$

gdzie:

i — numer wiersza,

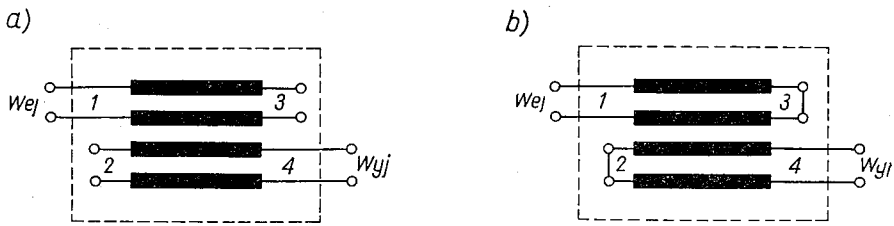
j — numer kolumny.

Stosując tę metodę dwukrotnie w przypadku czterowrotnika, uzyskamy szukane macierze interesujących nas dwuwrotników. Nie będziemy tu przytaczać wszystkich przeliczeń, podamy jedynie wynikowe macierze $[S]$ i $[T]$ poszczególnych układów oraz pewne wnioski dotyczące konkretnych zastosowań.

6.1. Gałęzie 2 i 3 sprzęgacza rozwarte lub zwarte (rys. 10)

Dla tego przypadku $\Gamma_2 = \Gamma_3 = \pm 1$. Po dwukrotnym zastosowaniu zależności (36) uzyskamy macierz $[S]$ o następującej postaci:

$$[S] = \frac{j(1-k^2)\sin\theta}{(\sqrt{1-k^2}\cos\theta + j\sin\theta)^2} \begin{bmatrix} \pm j\dfrac{1-k^2(1+\sin^2\theta)}{(1-k^2)\sin\theta}; & \pm\dfrac{2k}{\sqrt{1-k^2}} \\ \pm\dfrac{2k}{\sqrt{1-k^2}}; & \pm j\dfrac{1-k^2(1+\sin^2\theta)}{(1-k^2)\sin\theta} \end{bmatrix} \tag{37}$$



Rys. 10. a) Sprzęgacz o rozwartych gałęziach 2 i 3; b) Sprzęgacz o zwartych gałęziach 2 i 3

oraz macierz $[T]$

$$[T] = \frac{1}{j2k\sqrt{1-k^2}\sin\theta} \begin{bmatrix} \pm(\sqrt{1-k^2}\cos\theta + j\sin\theta)^2; & -[1-k^2(1+\sin^2\theta)] \\ 1-k^2(1+\sin^2\theta); & \pm(\sqrt{1-k^2}\cos\theta - j\sin\theta)^2 \end{bmatrix}. \tag{38}$$

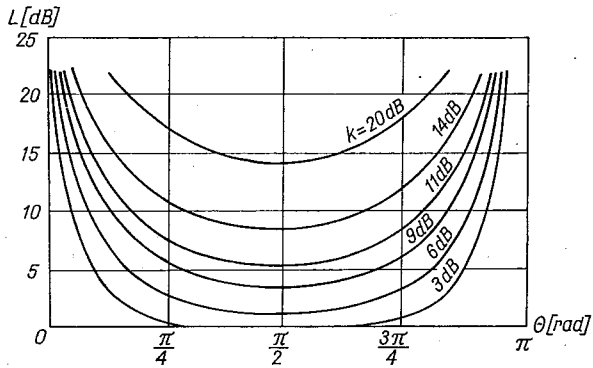
Na podstawie znajomości macierzy $[T]$ możemy obliczyć charakterystyki częstotliwościowe roboczego tłumienia i przesunięcia fazowego. Dane są one następującymi zależnościami:

$$L[\mathrm{dB}] = 10\lg|T_{11}|^2 = 20\lg\left|\frac{1-k^2\cos^2\theta}{2k\sqrt{1-k^2}\sin\theta}\right|, \tag{39}$$

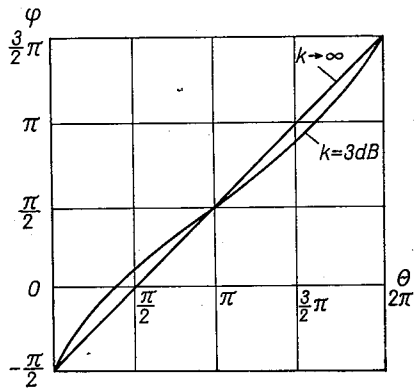
$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{ImT_{11}}{ReT_{11}} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-k^2}\sin 2\theta}{\cos 2\theta - k^2\cos^2\theta} - \frac{\pi}{2} \tag{40}$$

oraz przedstawione na rysunkach 11 i 12.

Tłumienie robocze takiego elementu zmienia się z częstotliwością dość łagodnie, lecz



Rys. 11. Wykres tłumienia roboczego w funkcji długości elektrycznej θ pojedynczego elementu pasmowo-przepustowego



Rys. 12. Wykres przesunięcia fazowego dla elementu pasmowo-przepustowego

dzięki kaskadowemu łączeniu można uzyskać charakterystyki o bardziej rezonansowym przebiegu i kształcie uzależnionym od ilości półogniw oraz od wartości parametrów k_i [2], [3].

6.2. Gałęzie 2 i 4 sprzęgacza rozwarte lub zwarte (rys. 13)

Dla tego przypadku $\Gamma_2 = \Gamma_4 = \pm 1$ i macierze $[S]$ i $[T]$ mają postać

$$[S] = \frac{1}{(2-k^2)-2j\sqrt{1-k^2}\operatorname{ctg}\theta}\begin{bmatrix} \pm k^2; & \dfrac{-j2\sqrt{1-k^2}}{\sin\theta} \\ \dfrac{-j2\sqrt{1-k^2}}{\sin\theta}; & \pm k^2; \end{bmatrix}, \tag{41}$$

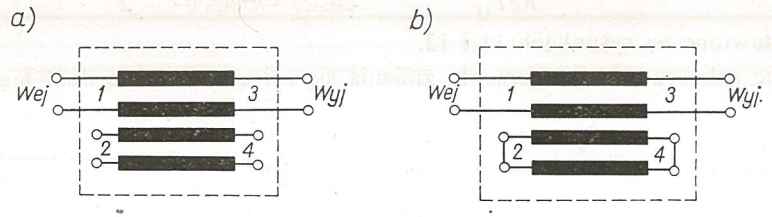
$$[T] = \frac{1}{2\sqrt{1-k^2}}\begin{bmatrix} 2\sqrt{1-k^2}\cos\theta + j(1-k^2)\sin\theta; & \pm jk^2\sin\theta \\ \pm jk^2\sin\theta; & 2\sqrt{1-k^2}\cos\theta - j(2-k^2)\sin\theta \end{bmatrix}. \tag{42}$$

Podobnie jak poprzednio obliczamy wyrażenia na częstotliwościowe charakterystyki robocze czwórnika:

$$L[\mathrm{dB}] = 10\lg|T_{11}|^2 = 10\lg\left|1+\frac{k^4\sin^2\theta}{4(1-k^2)}\right|, \tag{43}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{ImT_{11}}{ReT_{11}} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-k^2}}{2}\operatorname{tg}\theta. \tag{44}$$

Jak widać z wyrażenia (43), tłumienie robocze zmienia się bardzo nieznacznie z częstotliwością, osiągając wartość maksymalną dla $\theta = \frac{\pi}{2}$, z tym jednak, że nie jest ona zbyt



Rys. 13. a) Sprzęgacz kierunkowy o rozwartych gałęziach 2 i 4; b) Sprzęgacz kierunkowy o zwartych gałęziach 2 i 4

duża. Dlatego też czwórniki tego typu nie są stosowane jako ogniwa filtrów pasmowo-zaporowych. Warto jednak zwrócić uwagę na pewną własność tego czwórnika. Mianowicie, jeżeli gałąź 3 zakończymy obciążeniem o współczynniku odbicia Γ_3, to można wykazać, że współczynnik odbicia na wejściu jest równy

$$\Gamma_1 = \frac{\pm k^2 + (2-k^2)\Gamma_3 + 2j\sqrt{1-k^2}\,\Gamma_3 \operatorname{ctg}\theta}{\pm k^2\Gamma_3 - (2-k^2) + 2j\sqrt{1-k^2}\operatorname{ctg}\theta}. \tag{45}$$

Jeżeli założymy teraz, że Γ_3 przyjmuje wartości ± 1 (co odpowiada rozwarciu i zwarciu) i obliczymy impedancję wejściową tak obciążonego czwórnika, to stwierdzimy, że dla przypadku $\Gamma_2 = \Gamma_4 = -1$ jest on równoważny linii o impedancji charakterystycznej $Z_0\sqrt{1-k^2}$, a dla przypadku $\Gamma_2 = \Gamma_4 = 1$ — linii o impedancji $\frac{Z_0}{\sqrt{1-k^2}}$. Dzięki temu możemy uzyskać układy równoważne zwartym lub rozwartym na końcu liniom o impedancjach charakterystycznych trudnych do realizowania w praktyce.

6.3. Gałąź 2 rozwarta (lub zwarta), gałąź 4 zwarta (lub rozwarta), rys. 14

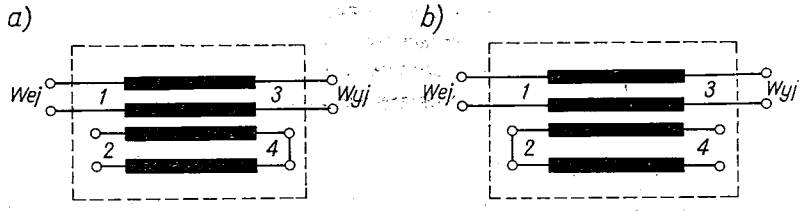
Dla tego przypadku współczynniki odbicia obciążeń są równe $\Gamma_2 = -\Gamma_4 = \pm 1$. Macierze $[S]$ i $[T]$ przyjmują postać

$$[S] = \frac{1}{(1-k)^2 + (\sqrt{1-k^2}\cos\theta + j\sin\theta)^2} \begin{bmatrix} \pm k^2\sin^2\theta; & 2(1-k^2)\cos\theta \\ 2(1-k^2)\cos\theta; & \pm k^2\sin^2\theta \end{bmatrix}, \tag{46}$$

$$[T] = \frac{1}{2\cos\theta(1-k^2)} \begin{bmatrix} [(1-k^2) + (\sqrt{1-k^2}\cos\theta + j\sin\theta)^2]; & \pm k^2\sin\theta \\ \pm k^2\sin\theta; & [(1-k^2) + (\sqrt{1-k^2}\cos\theta - j\sin\theta)^2] \end{bmatrix}. \tag{47}$$

Wyrażenia na częstotliwościowe charakterystyki robocze mają postać:

$$L[\mathrm{dB}] = 10\lg|T_{11}|^2 = 10\lg\left[\frac{(1-k^2)+k^4\sin^4\theta}{4(1-k^2)^2\cos^2\theta}\right], \tag{48}$$

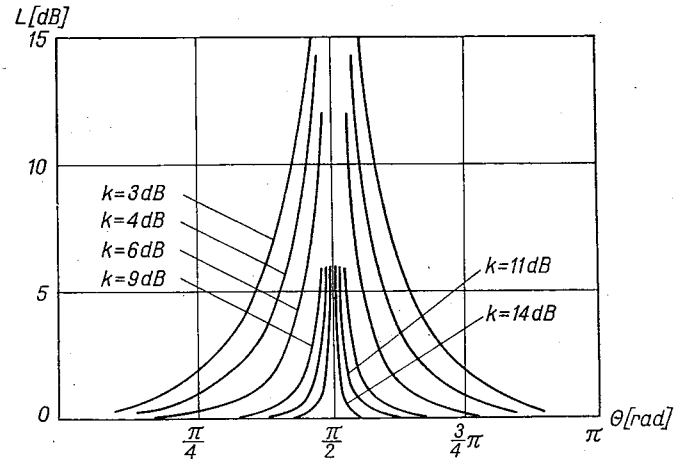


Rys. 14. a) Sprzęgacz o rozwartej gałęzi 2 i zwartej gałęzi 4; b) Sprzęgacz o zwartej gałęzi 2 i rozwartej gałęzi 4

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{ImT_{11}}{ReT_{11}} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-k^2}\sin 2\theta}{2-k^2(1+\cos^2\theta)}. \tag{49}$$

Przebieg tłumienia w funkcji częstotliwości jest przedstawiony na rys. 15.

Widzimy więc, że element tego rodzaju może być stosowany jako podstawowe ogniwo do konstruowania filtrów pasmowo-zaporowych.



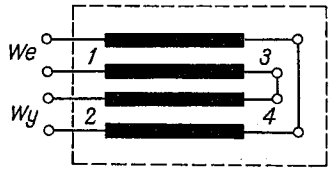
Rys. 15. Wykres tłumienia w funkcji długości elektrycznej θ dla elementu pasmowo-zaporowego

6.4. Gałęzie 3 i 4 sprzęgacza są ze sobą połączone (rys. 16)

Macierze $[S]$ i $[T]$ przedstawiają się następująco:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0; & \dfrac{1+k^2\cos 2\theta}{k+\cos 2\theta+j\sqrt{1-k^2}\sin 2\theta} \\ \dfrac{1+k^2\cos 2\theta}{k+\cos 2\theta+j\sqrt{1-k^2}\sin 2\theta}; & 0 \end{bmatrix}; \tag{50}$$

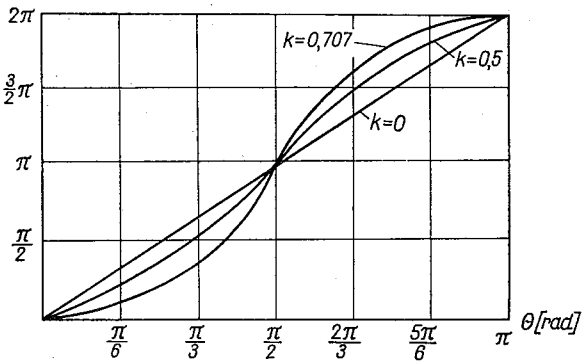
$$[T] = \begin{bmatrix} k+\cos 2\theta+j\sqrt{1-k^2}\sin 2\theta; & 0 \\ 0; & k+\cos 2\theta-j\sqrt{1-k^2}\sin 2\theta \end{bmatrix}. \tag{51}$$



Rys. 16. Sprzęgacz o połączonych z sobą gałęziach 3 i 4

Jeżeli obliczymy teraz tłumienie robocze, to okaże się, że przyjmuje ono wartość równą zeru, natomiast przesunięcie fazowe wyraża się wzorem:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{ImT_{11}}{ReT_{11}} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-k^2}\sin 2\theta}{k+\cos 2\theta} = -2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\operatorname{tg}\theta\right). \tag{52}$$

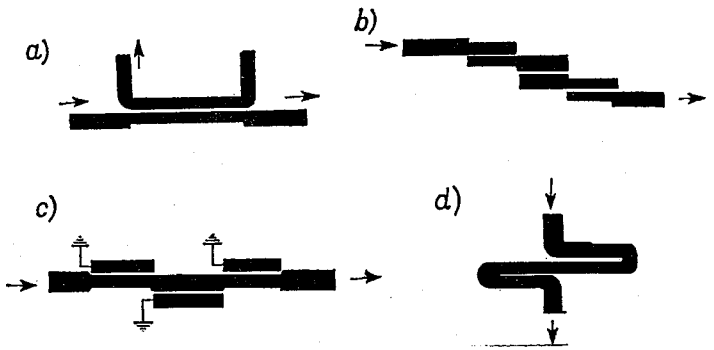


Rys. 17. Wykres przesunięcia fazowego w funkcji θ dla różnych wartości k

Widzimy więc, że czwórnik ten nie jest elementem filtrującym oraz jest dopasowany na wejściu i wyjściu. Może być jednak stosowany jako przesuwnik fazowy, o przesunięciu fazowym zależnym od współczynnika k. Przebieg φ w funkcji częstotliwości dla $k = 0{,}5$, $k = 0{,}7$ i $k = 0$ jest przedstawiony na rys. 17.

7. ZASTOSOWANIE LINII PASKOWYCH DO REALIZACJI UKŁADÓW

Jak już wspomniano, omówione wyżej układy są często wykonywane w wersji paskowej. Kilka typowych przykładów realizacji przedstawiono na rys. 18. (Dla prostoty na rysunku zaznaczono jedynie główne przewody linii paskowej).



Rys. 18. Przykłady realizacji układów sprzężonych przy zastosowaniu linii paskowych. a) Sprzęgacz kierunkowy; b) Filtr pasmowo-przepustowy; c) Filtr pasmowo-zaporowy; d) Przesuwnik fazowy

Przy projektowaniu układów realizowanych przy pomocy linii paskowych zasadniczą sprawą jest określenie wymiarów linii (szerokości pasków i odległości między paskami na odcinku, na którym zachodzi efekt sprzężenia) w celu uzyskania odpowiednich wartości impedancji Z_{oe} i Z_{oo} dla zadanych wartości k oraz Z_o. Odpowiednie wzory i krzywe do projektowania dla przypadku symetrycznych linii paskowych są spotykane w literaturze [2], [3]. Brak natomiast wygodnych wzorów i wykresów projektowych dla niesymetrycznych linii paskowych, które są ostatnio coraz częściej stosowane ze względu na ich większą przydatność w mikrofalowych układach scalonych.

8. PODSUMOWANIE

Jak wynika z przytoczonych wyżej rozważań, dwie równoległe linie sprzężone mogą być z powodzeniem wykorzystane do konstrukcji sprzęgaczy kierunkowych, filtrów i przesuwników fazy. Wykazano, że odcinek dwu równoległych linii sprzężonych tworzy idealny sprzęgacz kierunkowy. Jeżeli dwie z czterech gałęzi takiego sprzęgacza będą obciążone w odpowiedni sposób (rozwarcie lub zwarcie), to można uzyskać dwuwrotniki filtrujące, a w szczególności półogniwa filtrów pasmowo-przepustowych i pasmowo-zaporowych, odznaczające się dużą stromością zboczy częstotliwościowych charakterystyk tłumienia roboczego. W przypadku połączenia z sobą dwóch gałęzi czterowrotnika można uzyskać przesuwnik fazy, który z powodzeniem może być wykorzystywany w praktyce.

Autor składa wyrazy podziękowania Panu Docentowi Doktorowi Krzysztofowi Grabowskiemu za wiele cennych uwag, które były pomocne w opracowaniu niniejszego artykułu.

Politechnika Gdańska
Katedra Techniki Fal Ultrakrótkich

WYKAZ LITERATURY

1. Włostowskij E. G.: K tieorii swiazannych linij pieriedaczi. — Radiotiechnika, t. 22, nr 4, 1967
2. Matthaei G. L., Young L., Jones E. M. T.: Microwave Filters, Impedance-Matching Networks and Coupling Structures. Mc Graw-Hill Book Company, 1964.
3. Fieldsztiejn A. Ł, Jawicz Ł. R.: Sintiez czietyriochpoljusnikow i wosmipoljusnikow na SWCZ. Izdatielstwo „Swjaź", Moskwa 1965.

R. VOGEL

DIRECTIONAL AND FILTERING PROPERTIES OF TWO PARALLEL COUPLED LINES

Summary

The paper discusses briefly some aspects of the theory of two parallel coupled lines and describes the properties of the ideal coupler which is built of such lines. The analysis of four-port directional devices is performed with the use of the transmission and scattering wave matrices.

An application of the coupled lines in the filtering networks by proper loading of particular branches of the coupler is also discussed. Pass-band and stop-band filtering half-sections made according to these principles are described. Also some other examples of the use of coupled lines in microwave circuits are suggested. Strip line realizations of the circuits described are mentioned.

R. VOGEL

LES PROPRIÉTÉS DIRECTIVES ET FILTRANTES DE DEUX LIGNES DE TRANSMISSION COUPLÉES

Résumé

Dans cet article on présente l'étude théorique de deux lignes de transmission couplées. En utilisant dans l'analyse les matrices de transmission et de dispersion on décrit les propriétés d'un coupleur directif construit d'une section de deux lignes parallèles couplées. Ensuite on discute l'application de ces lignes à la construction des quadripôles de filtrage par un chargement convenable de deux branches d'un octopôle directif (coupleur). On décrit les cellules de filtre passe-bande et coupe-bande réalisées de cette façon. D'autres possibilitiés d'application des lignes couplées ainsi que les exemples des montages réalisés en utilisant la technique des lignes à ruban sont presentés.

R. VOGEL

GRUNDRISS DER THEORIE ZWEIER PARALLEL GEKOPPELTER LEITUNGEN

Zusammenfasung

In dieser Arbeit wird ein Grundriss der Theorie zweier parallel gekoppelter Leitungen vorgestellt. Ausserdem werden die Eigenschaften eines idealen, aus einer Strecke dieser Leitungen gebauten, Richtkoppler's besprochen. Die Analyse der Richtachtpole wurde mit Hilfe der Wellen-Ausbreitung und Streung Matrixe durchgeführt. Auch die Möglichkeit der Verwendung gekoppelter Leitungen für die Konstruktion der Sieb-Vierpole, die man durch entsprechende Belastung eines Zweigpaares der Richtachtpole erhält, wurde behandelt. Weiter wurde ein nach dieser Methode realisierter Halbkreis eines Durchlass- und Sperrbandfilter's betrachtet. Andere Beispiele der Verwendung gekoppelter Leitungen in der Mikrowellentechnik wurden ebenfalls diskutiert. Zuletzt wurden Beispiele der beschriebenen Schaltungen in Streifenleiterausführung vorgelegt.

Р. ВОГЕЛЬ

НАПРАВЛЕННЫЕ И ФИЛЬТРИРУЮЩИЕ СВОЙСТВА ДВУХ СВЯЗАННЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ ПЕРЕДАЧИ

Резюме

В статье изложены элементы теории двух связанных параллельных линий передачи и рассчитаны свойства идеального направленного ответвителя построенного на базе таких линий. Введение волновых матриц рассеяния и передачи усовершенствовало анализ параметров направленных восьмиполюсников.

Рассмотрены фильтры построенные из направленных восмиполюсников с двумя накоротко замкнутыми и разомкнутыми плечами. Даны примеры основных полузвеньев пропускающих полосовых и заграждающих полосовых фильтров. Представлено также применение полосковых линий в связанных схемах сверхвысоких частот.

621.391

ANDRZEJ KARCZMAREWICZ

Miara odporności systemów transmisji danych na zakłócenia seryjne

Rękopis dostarczono 5.1.1968

Zaproponowano pewną miarę odporności systemów transmisji danych na zakłócenia seryjne. Miara ta jest oparta o analizę zachowania się systemu w czasie zaniku zdolności transmisyjnych kanału. Zaproponowana miara może być użyteczna dla porównawczej oceny systemów transmisji danych.

1. WSTĘP

Systemy transmisji danych realizowane są na ogół w oparciu o przewodowe sieci telekomunikacyjne. Zakłócenia występujące w tych sieciach mają przeważnie postać rzadko pojawiających się serii silnych zakłóceń. Większość badań nad systemami transmisji danych nie obejmuje problemów odporności tych systemów na zakłócenia seryjne. Można przypuszczać, że przyczyn tego stanu rzeczy należy szukać w braku dogodnych kryteriów ocen i modeli matematycznych. Próby sprowadzenia zakłóceń seryjnych do postaci modelu matematycznego (np. [1]) prowadzą do wyników, których zastosowanie do ocen systemów wiąże się ze znacznymi trudnościami obliczeniowymi.

Niniejszy artykuł zawiera pewną propozycję miary odpornościowej systemów transmisji danych na zakłócenia seryjne (dalej oznaczanej skrótem *MOS*). Zaproponowana *MOS* ma służyć do p o r ó w n a w c z e j oceny systemów transmisji danych i nie wydaje się, aby była przydatna dla oszacowania jakości konkretnego systemu zastosowanego w konkretnym kanale telekomunikacyjnym. Powyższe ograniczenie pozwoliło na uzyskanie znacznej prostoty obliczeniowej.

2. DEFINICJA MIARY I DOBÓR PARAMETRÓW

Założymy, że w czasie trwania serii zakłóceń prawdopodobieństwo błędu elementu binarnego wynosi p i jest niezależne od wartości elementu oraz poprzednich błędów.

D e f i n i c j a *M O S*. Miara odporności systemu na zakłócenia seryjne (*MOS*) jest to największy, zmierzony w całkowitych jednostkach czas trwania serii zakłóceń, dla którego zachodzi:

$$P_b \leqslant \vartheta, \tag{1}$$

gdzie:

P_b — prawdopodobieństwo błędu końcowego, tj. błędu przesłanego do ujścia danych;

ϑ — parametr.

Jeżeli (1) nie jest spełnione nawet dla jednej jednostki czasu, to

$$MOS \stackrel{\mathrm{df}}{=} 0. \tag{2}$$

Dobór jednostki czasu. Przyjmiemy za jednostkę czasu 1 blok. Do takiego wyboru skłania to, że urządzenia zabezpieczenia przed błędami w systemach transmisji danych przeważnie pracują blokowo. Pojęcie błędu końcowego ma sens jedynie w odniesieniu do całych bloków. Trzeba również zauważyć, że obiektywne jednostki czasu, np. sekunda, miałyby sens jedynie w połączeniu z urządzeniem transmisyjnym (modemem), o konkretnej szybkości modulacji. Przyjęcie bloku za jednostkę pozwala oceniać system transmisji danych niezależnie od użytego modemu.

Dobór p. Przyjmiemy arbitralnie, że w czasie serii zakłóceń zanika zupełnie zdolność kanału do przesyłania informacji, a więc, że $p = 0{,}5$. Takie założenie ułatwia obliczenia MOS dla konkretnych systemów. Nie wydaje się przy tym, aby inna wartość p była istotnie dogodniejsza dla oceny systemów.

Dobór ϑ. Przyjmiemy arbitralnie $\vartheta = 10^{-2}$.

Przedstawimy teraz definicję MOS w nieco innej, dogodniejszej użytkowo postaci.

MOS jest to największa liczba bloków objętych całkowitym zanikiem właściwości transmisyjnych kanału, dla której prawdopodobieństwo błędu końcowego nie przekracza 10^{-2}. *Jeśli powyższy warunek nie jest spełniony nawet dla zaniku obejmującego tylko jeden blok, to*

$$MOS \stackrel{\mathrm{df}}{=} 0.$$

3. PRZYKŁADY

Przykład 1. Kod korygujący błędy, liniowy, o liczbie pozycji informacyjnych i. Dla jednego bloku

$$P_b(1) = \frac{2^i - 1}{2^i} \geqslant 10^{-2},$$

stąd

$$MOS = 0.$$

Przykład 2. System ze sprzężeniem zwrotnym decyzji. W kanale podstawowym zastosowano detekcyjny kod liniowy o liczbie pozycji informacyjnych i oraz liczbie pozycji kontrolnych k. Zakłócenia seryjne występują tylko w kanale podstawowym, kanał zwrotny jest bezbłędny.

Dla jednego bloku

$$P_b(1) = \frac{2^i - 1}{2^{i+k}};$$

dla dostatecznie dużych i można przyjąć

$$P_b(1) \approx \frac{2^i}{2^{i+k}} = 2^{-k}.$$

MOS będzie największą liczbą bloków m, dla której będzie spełniona poniższa nierówność:

$$P_b(m) = 1-(1-2^{-k})^m \leqslant 10^{-2},$$

gdzie $P_b(m)$ — prawdopodobieństwo przynajmniej jednego błędu końcowego w m blokach. Po skorzystaniu ze wzorów na dwumian Newtona otrzymujemy wzór:

$$P_b(m) = \left[m2^{-k} - \frac{m(m-1)}{2} 2^{-2k} + \ldots\right] \leqslant 10^{-2}.$$

Po uwzględnieniu, że dla spełnionej powyższej nierówności $m2^{-k}$ jest znacznie większe od pozostałych wyrazów rozwinięcia Newtona, otrzymujemy w przybliżeniu:

$$P_b(m) \approx m2^{-k} \leqslant 10^{-2},$$

a więc

$$MOS \leqslant \frac{2^k}{10^2}.$$

Zależność *MOS* od kilku przykładowych wartości k podaje poniższa tablica.

k	7	8	9	10
MOS	1	2	5	10

Politechnika Warszawska
Katedra Urządzeń Teletransmisyjnych i Telegraficznych

WYKAZ LITERATURY

1. Gilbert E. N.: Capacity of a Burst-Noise Channel. — Bell Syst. Techn. J., vol. 39, sept. 1960.
2. Karczmarewicz A.: Sprzężenie zwrotne informacji dla transmisji binarnej. Przegląd zagadnień.— Rozprawy Elektrotechn., zeszyt 1, 1965.

A. KARCZMAREWICZ

MEASURE OF INSENSITIVITY OF DATA TRANSMISSION SYSTEMS TO BURST-NOISE

Summary

Some measure of insensitivity of data transmission systems to burst noise is proposed. The measure is based upon the analysis of system behaviour during black-out. An advantage of the measure may be taken by a comparison of different data transmission systems.

A. KARCZMAREWICZ

MESURE D'IMMUNITÉ DES SYSTÈMES DE TRANSMISSION DES DONNÉES CONTRE LES BRUITS PROLONGÉS

Résumé

Une mesure definissant l'immunité des systèmes de transmission des données contre les bruits prolongés fut suggérée. Cette mesure se base sur l'étude de la conduite du système pendant la disparition de la capabilité de transmission du canal. La mesure peut être utile pour évaluer et comparer des systèmes de transmission des données.

A. KARCZMAREWICZ

DIE AUSWERTUNG DER WIDERSTANDSFÄHIGKEIT DER DATENÜBERTRAGUNGSSYSTEME AUF DIE SERIENSTÖRUNGEN

Zusammenfassung

Es wurde eine gewisse Auswertung der Widerstandsfähigkeit der Datenübertragungssysteme auf die Serienstörungen vorgeschlagen. Diese Auswertung wurde auf Grund der Analyse der Systemzustände während des Verlustes der Übertragungsfähigkeiten des Kanals eingeführt. Die vorgeschlagene Auswertung kann für den Vergleich der Datenübertragungssysteme verwendet werden.

А. КАРЧМАРЕВИЧ

МЕРА УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ К СЕРИЙНЫМ ПОМЕХАМ

Резюме

Предложена некоторая мера устойчивости систем передачи данных к серийным помехам. Эта мера основана на анализе поведения системы во время заникания трансляционных свойств канала. Предложенная мера может быть использована для сравнительной оценки систем передачи данных.

621.391

ANDRZEJ KARCZMAREWICZ

Binarne kody skorupowe

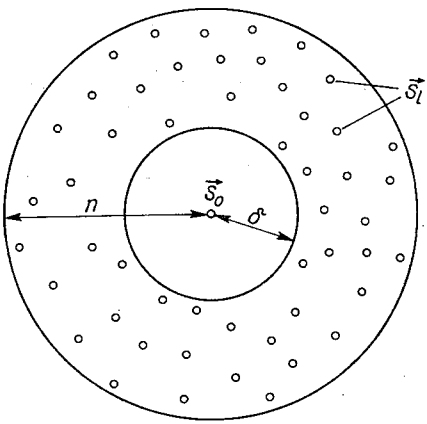
Rękopis dostarczono 17.6.1968

W niektórych bardziej rozbudowanych systemach transmisji danych powstaje potrzeba przesyłania pewnych dodatkowych wiadomości, które nazwano wiadomościami zerowymi w odróżnieniu od wiadomości użytkowych, przekazywanych użytkownikowi systemu. Wynikowa jakość systemu na ogół silnie zależy od możliwości przekłamania wiadomości zerowej na użytkową lub odwrotnie.

Zaproponowano pewną klasę kodów, dającą małe prawdopodobieństwa takich przekłamań. Podano algorytmy kodowania i dekodowania dla przypadku, gdy nadmiar wynosi 1 element.

1. WSTĘP

W tym artykule zostanie zaproponowana pewna klasa równomiernych (o stałej długości ciągów kodowych) kodów, nazwanych binarnymi kodami skorupowymi.



Binarnym kodem skorupowym nazwiemy taki binarny kod zawierający $L+1$ ciągów kodowych $\vec{s}_0, \vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_L$, którego ciągi spełniają zależność (1).

$$d(\vec{s}_0, \vec{s}_l) \geqslant \delta > 1 \quad \text{dla każdego} \quad l \neq 0, \tag{1}$$

gdzie $d(\vec{a}, \vec{b})$ — odległość (w sensie Hamminga, zob. [4]) między ciągami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
Nazwę „kody skorupowe" usprawiedliwia następujący model geometryczny tych kodów.

Wyobraźmy sobie, że wszystkie ciągi binarne o długości n tworzą bryłę o promieniu n i ciągu $\vec{s}_0$ w centrum — zob. rysunek. Ciągi kodowe $\vec{s}_l$ dla $l \neq 0$ rozmieszczone są w odległości $d \geqslant \delta$ ($\delta > 1$) od $\vec{s}_0$, a więc leżą wewnątrz skorupy umyślonej bryły.

Podamy teraz w uproszczeniu uzasadnienie celowości zainteresowania się takimi kodami.

W niektórych bardziej rozbudowanych systemach transmisji danych istnieje potrzeba przesyłania pewnej dodatkowej wiadomości, którą nazwiemy wiadomością zerową. Wiadomość zerowa x_0 nie należy do zbioru wiadomości x_l, $l \neq 0$, które nazwiemy wiadomościami użytkowymi, przesyłanych przez system od źródła do ujścia wiadomości. Przesyłanie wiadomości zerowej jest niezbędne dla prawidłowego działania systemu. Przykładem zastosowania może być dwukierunkowy system ze sprzężeniem zwrotnym decyzji (SZD) oraz system ze sprzężeniem zwrotnym informacji (SZI), zob. [2]. Wynikowa jakość systemu na ogół znacznie silniej zależy od możliwości przekłamania wiadomości zerowej na użytkową lub odwrotnie, niż od możliwości przekłamania jednej wiadomości użytkowej na inną. Istnieje więc potrzeba stosowania takich kodów, które zapewniałyby możliwie dużą odległość (w sensie Hamminga) pomiędzy ciągiem kodowym $\vec{s}_0$ odpowiadającym wiadomości zerowej (dalej — ciągiem zerowym) a każdym ciągiem kodowym $\vec{s}_l$ ($l \neq 0$) odpowiadającym wiadomości użytkowej (dalej — ciąg użytkowy). Na potrzebę takich kodów i możliwość ich skonstruowania wskazał Chang [1], rozpatrując system z dwukierunkowym SZD. Wydaje się także celowe zastosowanie takich kodów w systemach SZI, które z kodami liniowymi wykazują dość niską jakość [3].

Przyjmiemy w dalszym ciągu, że wiadomości użytkowe x_l ($l \neq 0$) dane są w postaci binarnych ciągów $\vec{x}_l$ o długości i. Liczebność zbioru wiadomości użytkowych wynosi więc $L = 2^i$.

2. RODZAJE KODÓW SKORUPOWYCH

Podzielimy kody skorupowe na dwie grupy: 1) kody proste; 2) kody nadmiarowe.

Kody proste. Kod skorupowy nazwiemy prostym, jeżeli spełniona jest zależność (2).

$$1 \leqslant \frac{\sum_{\nu=\delta}^{n} \binom{n}{\nu}}{L} < 2, \tag{2}$$

gdzie:

n — długość ciągów kodowych;

L — liczba wiadomości użytkowych;

δ — najmniejsza odległość między ciągami użytkowymi a ciągiem zerowym.

Suma we wzorze (2) daje liczbę ciągów binarnych zawartych w skorupie. Jak widać, w kodzie prostym ciągi użytkowe rozmieszczone są w skorupie tak gęsto, że liczby ich nie można podwoić bez zmiany pozostałych parametrów kodu (n, δ).

Interesujący jest przypadek, gdy $n = i+1$. Wtedy, jak łatwo sprawdzić korzystając z (2) oraz z zależności:

$$\binom{n}{\nu} = \binom{n}{n-\nu},$$

zachodzi:

$$\frac{n}{2} \leqslant \delta \leqslant \frac{n+1}{2}. \tag{3}$$

K o d y n a d m i a r o w e. Kod skorupowy nazwiemy nadmiarowym, jeżeli odległości między ciągami użytkowymi wynoszą co najmniej λ ($\lambda > 1$). Można zauważyć, że nie będzie wtedy spełnione (2). W modelu geometrycznym kodu „skorupa" w tym przypadku zbudowana jest z ciągów użytkowych rozmieszczonych w pewnych odległościach od siebie i poprzedzielanych niewykorzystanymi ciągami binarnymi.

W dalszym ciągu tego artykułu zajmiemy się wspomnianym wyżej przypadkiem kodu prostego o $n = i+1$.

3. KOD PROSTY, $n = i+1$, ALGORYTMY

Zaproponujemy pewien algorytm kodowania i wykażemy, że zapewnia on uzyskanie prostego kodu skorupowego o $n = i+1$ oraz $\delta \geqslant \frac{n}{2}$ dla dowolnego $i > 1$. Techniczna realizacja tego algorytmu wydaje się zupełnie łatwa.

A l g o r y t m k o d o w a n i a przedstawiony jest wzorem (4)

$$\vec{s}(x_l) = \begin{cases} \vec{0}_n, & \text{gdy} \quad l = 0 \\ (\vec{x}_l, 0), & \text{gdy} \quad l \neq 0 \quad \text{i} \quad w(\vec{x}_l) \geqslant \frac{n}{2} \\ (\vec{x}_l, 0) \oplus \vec{1}_n, & \text{gdy} \quad l \neq 0 \quad \text{i} \quad w(\vec{x}_l) < \frac{n}{2} \end{cases} \tag{4}$$

gdzie:

$\vec{s}$ — ciąg kodowy o długości n;

$\vec{x}_l$ — wiadomość przedstawiona w postaci ciągu binarnego o długości $i = n-1$;

$(\vec{x}_l, 0)$ — ciąg o długości n, składający się z $\vec{x}_l$ oraz jednego zera;

$\vec{1}_n, \vec{0}_n$ — ciąg odpowiednio n jedynek, zer;

$\oplus$ — suma modulo 2;

$w(.)$ — waga ciągu binarnego wyrażona liczbą jedynek tego ciągu.

Waga użytkowego ciągu kodowego jest równocześnie odległością tego ciągu od ciągu zerowego ze względu na (4). Wykażemy, że stosowanie algorytmu (4) zapewnia spełnienie warunku:

$$w(\vec{s}) \geqslant \frac{n}{2}.$$

W przypadku $w(\vec{x}_l) \geqslant \frac{n}{2}$ zachodzi $w(\vec{s}_l) = w(\vec{x}_l) \geqslant \frac{n}{2}$.

W przypadku $w(\vec{x}_l) < \frac{n}{2}$ zachodzi $w(\vec{s}_l) = n - w(\vec{x}_l)$, ponieważ zgodnie z (4) każda jedynka ciągu $\vec{x}_l$ da w wyniku zero w $\vec{s}(\vec{x}_l)$.

Ponieważ $w(\vec{x}_l) < \frac{n}{2}$, to $w(\vec{s}_l) > \frac{n}{2}$.

Wykażemy teraz, że dla każdej pary wiadomości $\vec{x}_a$, $\vec{x}_b$ zachodzi $\vec{s}(\vec{x}_a) \neq \vec{s}(\vec{x}_b)$, jeśli $\vec{x}_a \neq \vec{x}_b$. Zauważmy, że $\vec{s}_a = \vec{s}_b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{s}_a \oplus \vec{s}_b = \vec{0}_n$.

Rozpatrzymy trzy przypadki:

1) $w(\vec{x}_a) \geqslant \frac{n}{2}$ $\qquad$ $w(\vec{x}_b) \geqslant \frac{n}{2}$

$\vec{s}(\vec{x}_a) = (\vec{x}_a, 0)$ $\qquad$ $\vec{s}(\vec{x}_b) = (\vec{x}_b, 0)$

$\vec{s}(\vec{x}_a) \oplus \vec{s}(\vec{x}_b) = [(\vec{x}_a \oplus \vec{x}_b), 0] \neq \vec{0}_n$, jeśli tylko $\vec{x}_a \neq \vec{x}_b$;

2) $w(\vec{x}_a) < \frac{n}{2}$ $\qquad$ $w(\vec{x}_b) < \frac{n}{2}$

$\vec{s}(\vec{x}_a) = (\vec{x}_a, 0) \oplus \vec{1}_n$ $\qquad$ $\vec{s}(\vec{x}_b) = (\vec{x}_b, 0) \oplus \vec{1}_n$

$\vec{s}(\vec{x}_a) \oplus \vec{s}(\vec{x}_b) = [(\vec{x}_a \oplus \vec{x}_b), 0] \neq \vec{0}_n$, jeśli tylko $\vec{x}_a \neq \vec{x}_b$;

3) $w(\vec{x}_a) \geqslant \frac{n}{2}$ $\qquad$ $w(\vec{x}_b) < \frac{n}{2}$

$\vec{s}(\vec{x}_a) = (\vec{x}_a, 0)$ $\qquad$ $\vec{s}(\vec{x}_b) = (\vec{x}_b, 0) \oplus \vec{1}_n$

$\vec{s}(\vec{x}_a) \oplus \vec{s}(\vec{x}_b) = [(\vec{x}_a \oplus \vec{x}_b \oplus \vec{1}_{n-1}), 1] \neq \vec{0}_n$.

Więcej przypadków nie ma, a więc każdej wiadomości odpowiada inny ciąg kodowy.

A l g o r y t m d e k o d o w a n i a. Zaproponujemy poniższy, dwustopniowy proces dekodowania. W I stopniu dekodowania podejmuje się według reguły decyzyjnej (5) decyzję, czy przesłana została wiadomość zerowa, czy użytkowa.

$$\begin{aligned} x^* &= x_0, \quad \text{jeśli} \quad w(\vec{y}) < \beta, \\ x^* &\in \{x_l\}, \quad \text{jeśli} \quad w(\vec{y}) \geqslant \beta, \end{aligned} \tag{5}$$

gdzie:

$\vec{y}$ — ciąg odebrany o długości n;
$\{x_l\}$ — zbiór wiadomości użytkowych;
β — parametr dekodowania.

Jeżeli $x^* \in \{x_l\}$, to przeprowadza się II stopień dekodowania według reguły decyzyjnej (6), polegający na podjęciu decyzji o przesłanej wiadomości użytkowej.

$$\begin{aligned} x^* &= \vec{y}|_{n-1}, \quad \text{jeśli} \quad y^{(n)} = 0, \\ x^* &= \vec{y}|_{n-1} \oplus \vec{1}_{n-1}, \quad \text{jeśli} \quad y^{(n)} = 1, \end{aligned} \tag{6}$$

gdzie:

$\vec{y}|_{n-1}$ — ciąg składający się z pierwszych $n-1$ elementów ciągu $\vec{y}$;
$y^{(n)}$ — n-ty element ciągu $\vec{y}$.

4. KOD PROSTY, $n = i+1$, WŁAŚCIWOŚCI

Oszacujemy prawdopodobieństwa błędnych decyzji I stopnia dekodowania. Możliwe są dwa przypadki:

a) nadana została wiadomość zerowa, podjęta została decyzja o nadaniu wiadomości użytkowej;

b) nadana została wiadomość użytkowa, podjęta została decyzja o nadaniu wiadomości zerowej.

Prawdopodobieństwo przypadku a) wyniesie:

$$P(x^* \in \{x_l\}/x_0) = \sum_{w(\vec{y})\geqslant\beta} P(\vec{y}/\vec{s}_0), \tag{7}$$

gdzie $P(\vec{y}/\vec{s}_0)$ — prawdopodobieństwo warunkowe odebrania ciągu $\vec{y}$ przy warunku, że nadany został ciąg $\vec{s}_0$.

Załóżmy, że kanał jest bezpamięciowy i symetryczny, a więc że błędy elementarne w kanale podlegają rozkładowi Bernoulliego:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \tag{8}$$

gdzie:

$P_n(k)$ — prawdopodobieństwo przekłamania k elementów w n-elementowym ciągu;

p — prawdopodobieństwo błędu elementarnego — elementowa stopa błędów.

Podstawiając (4) i (8) do (7) otrzymujemy:

$$P(x^* \in \{x_l\}/x_0) = \sum_{\nu=\beta}^{n} \binom{n}{\nu} p^\nu (1-p)^{n-\nu}. \tag{9}$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia b) przy warunku, że nadana została konkretna wiadomość x_l, wyniesie:

$$P(x^* = x_0/x_l) = \sum_{w(\vec{y})<\beta} P(\vec{y}/\vec{s}_l), \quad l \neq 0, \tag{10}$$

gdzie $P(\vec{y}/\vec{s}_l)$ — prawdopodobieństwo warunkowe odebrania ciągu $\vec{y}$ przy warunku, że nadany został ciąg $\vec{s}_l$.

Oszacujemy maksimum wyrażenia (10) dla wszystkich x_l w przypadku kanałów spełniających (8). Łatwo zauważyć, że dla takich kanałów:

$$\max_{x_l} P(x^* = x_0/x_l) = P(x^* = x_0/x_{l'}) = \sum_{w(\vec{y})<\beta} P(\vec{y}/\vec{s}_{l'}), \tag{11}$$

gdzie $x_{l'}$ — dowolna z wiadomości, dla których spełnione jest $w(\vec{s}_{l'}) = \delta$.

Podstawiając do (11) wzór (P1-3) z przypisu, otrzymujemy ostatecznie:

$$\max_{x_l} P(x^* = x_0/x_l) = \sum_{\nu=\delta-\beta+1}^{\nu=n} p^\nu (1-p)^{n-\nu} \sum_{\gamma>\frac{\delta+\nu-\beta}{2}}^{\gamma=\nu} \binom{\delta}{\gamma}\binom{n-\delta}{\nu-\gamma}. \tag{12}$$

Na zakończenie przytoczymy przykład liczbowy:

1) $n = 30 \quad \delta = 15 \quad \beta = 7$

2) $n = 60 \quad \delta = 30 \quad \beta = 15$

$p = 10^{-3}; 10^{-4}; 10^{-5}$

	1)			2)		
p	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
$P(x^* \in \{x_l\}/x_0)$	$1{,}4 \cdot 10^{-20}$	$1{,}4 \cdot 10^{-29}$	$1{,}4 \cdot 10^{-38}$	$1{,}4 \cdot 10^{-34}$	$1{,}5 \cdot 10^{-50}$	$1{,}5 \cdot 10^{-66}$
$P(x^* = x_0/x_{l'})$	$5 \cdot 10^{-24}$	$5 \cdot 10^{-33}$	$5 \cdot 10^{-42}$	$1{,}4 \cdot 10^{-40}$	$1{,}5 \cdot 10^{-40}$	$1{,}5 \cdot 10^{-58}$

Przypis 1

Korzystając z (8) obliczymy wartość wyrażenia

$$\sum_{w(\vec{y})<\beta} P(\vec{y}/\vec{s}_{l'}),$$

gdzie $w(\vec{s}_{l'}) = \delta$.

Rozpatrzymy, w jakich przypadkach wystąpienie ν błędów elementarnych w ciągu o długości n spowoduje, że $w(\vec{y}) < \beta$, jeżeli $w(\vec{s}_{l'}) = \delta$. Przyjmijmy, że γ błędów trafi na jedynki zmieniając je na zera, a pozostałe $\nu-\gamma$ błędów zmieni zera na jedynki. Liczba takich kombinacji wyniesie:

$$\binom{\delta}{\gamma} \cdot \binom{n-\delta}{\nu-\gamma}.$$

Spowoduje to, że ciąg odebrany $\vec{y}$ będzie miał wagę:

$$w(\vec{y}) = \delta-\gamma+(\nu-\gamma) = \delta+\nu-2\gamma.$$

Z warunku $w(\vec{y}) < \beta$ otrzymujemy:

$$\gamma > \frac{\delta+\nu-\beta}{2}. \tag{P1-1}$$

Stąd prawdopodobieństwo, że otrzymamy $w(\vec{y}) < \beta$ w wyniku ν błędów elementarnych, będzie:

$$p^{\nu}(1-p)^{n-\nu} \sum_{\gamma > \frac{\delta+\nu-\beta}{2}}^{\gamma=\nu} \binom{\delta}{\gamma}\binom{n-\delta}{\nu-\gamma}.$$

Najmniejszą liczbę błędów, która może dać $w(\vec{y}) < \beta$, otrzymamy podstawiając $\nu = \gamma$ do (P1-1):

$$\nu > \delta-\beta. \tag{P1-2}$$

Stąd prawdopodobieństwo otrzymania $w(\vec{y}) < \beta$ wyniesie:

$$\sum_{w(\vec{y})<\beta} P(\vec{y}/\vec{s}_{l'}) = \sum_{\nu=\delta-\beta+1}^{\nu=n} p^{\nu}(1-p)^{n-\nu} \sum_{\gamma > \frac{\delta+\nu-\beta}{2}}^{\gamma=\nu} \binom{\delta}{\gamma}\binom{n-\delta}{\nu-\gamma}. \tag{P1-3}$$

Politechnika Warszawska
Katedra Urządzeń Teletransmisyjnych i Telegraficznych

WYKAZ LITERATURY

1. Chang S. S. L.: Improvement of Two-Way Communication by Means of Feedback. — IRE Conv. Rec., 1961, p. 4.
2. Karczmarewicz A.: Sprzężenie zwrotne informacji. Przegląd zagadnień. — Rozprawy Elektrotechn., 1965, zeszyt 1.
3. Karczmarewicz A.: Efektywne kodowanie dla systemów binarnych ze sprzężeniem zwrotnym informacji. — Rozprawy Elektrotechn., 1966, zeszyt 2.
4. Peterson W. W.: Error-Correcting Codes. — J.W.a.s., N.Y., 1961.

A. KARCZMAREWICZ

A NEW CLASS OF BINARY CODES — „CRUST-CODES"

Summary

It is necessary to transmit an additional message in some more complicated data transmission systems. This message is called zero information in contradiction to that, we make use of. The possibility of conversion of one kind of information into another essentially determine a quality of system.

A class of codes proposed, provides a small probability of such conversion. Algorithms of coding and decoding for the case of one-element redundancy are given.

A. KARCZMAREWICZ

CODES „EN CROÛTE", BINAIRES

Résumé

Dans quelques systèmes de transmission des données plus developpés il est nécessaire de transmettre certaines informations nommées ici „zéro", pour distinguer des informations essentielles envoyées aux usagers. La qualité résultante du fonctionnement du système dépend fortement de la probabilité de récevoir faussement l'information „zéro" comme une information utile ou inversement.

Une classe des codes a été proposée, qui assure une faible probabilité des fautes mentionnées ci-dessus. Des algorithmes du codage et du décodage sont donnés pour les cas d'une rédondance à un élément.

A. KARCZMAREWICZ

BINÄRE SCHALENCODE

Zusammenfassung

In einigen mehr ausgebauten Datenübertragungssystemen ist ein Bedürfnis nach der Übertragung gewisser Zusatznachrichten vorhanden, die im Unterschied zu den dem Verwender des Systems übertragenen Verwendungsnachrichten Nullnachrichten genannt worden sind. Die Schlussqualität des Systems hängt in der Regel von der Wahrscheinlichkeit des Fehlers ab, der auf dem Empfangen der Nullnachricht beruht, wenn die Verwendungsnachricht gesendet worden ist (oder umgekehrt).

Es wurde eine gewisse Klasse der Code vorgeschlagen, bei der die oben erwähnte Wahrscheinlichkeit gering ist. Es wurden die Algorithmen des Schlüsselns und des Entschlüsselns für den Fall, wenn die Redundanz 1 Signalelement ausmacht, angegeben.

А. КАРЧМАРЕВИЧ

КОРОВЫЕ-ДВОИЧНЫЕ КОДЫ

Р е з ю м е

В некоторых более сложных системах передачи данных есть необходимость передачи некоторых добавочных сведений, которые названы нулевыми сведениями, чтобы указать на их различие с потребительскими сведениями, передаваемыми потребителю системы. Результирующее качество системы в общем сильно зависит от возможности ошибочного подмена нулевого сведения потребительским и наоборот.

Предложен некоторый класс кодов, дающий незначительную вероятность таких ошибочных подменов. Приведены алгоритмы кодирования и декодирования для случая, когда избыточность составляет один элемент.

621.375.1

JĘDRZEJ BROŻYNA

Korekcja transformatorów wejściowych wzmacniaczy grupowych

Rękopis dostarczono 10.1.1968

W pracy omówiono zagadnienie poszukiwania maksymalnych wartości pojemności kondensatora separującego (na przykład C_{sd} na rysunku 1) oraz indukcyjności głównej transformatorów pracujących we wzmacniaczach szerokopasmowych, którym stawiane są ostre warunki dotyczące równomierności częstotliwościowej charakterystyki wzmocnienia oraz współczynnika niedopasowania. Podane zależności mogą być użyte również przy korekcji dowolnego transformatora zamkniętego obustronnie na oporności nominalne.

1. WPROWADZENIE

Tylko w stosunkowo wąskim zakresie częstotliwości transformator można uważać za przekładnik idealny. Konieczność zastosowania transformatora w urządzeniach przenoszących szersze pasmo częstotliwości wymaga zwykle wprowadzenia elementów korekcyjnych, które mają kompensować wpływ poszczególnych elementów schematu zastępczego w określonym zakresie częstotliwości. Ten zakres częstotliwości jest wykorzystywany jako pasmo użyteczne urządzenia. Dokładność przenoszenia transformatora poza tym pasmem zwykle nie jest istotna, jednakże w pewnych przypadkach zachodzi konieczność kontrolowania wpływu transformatora na urządzenie w paśmie częstotliwości przekraczającym górną granicę pasma użytecznego o kilka oktaw i w tym celu mogą być wprowadzone elementy separujące transformator.

Praca niniejsza jest poświęcona określeniu maksymalnej wielkości pojemności separującej transformator, którą można skompensować z wymaganą dokładnością w zadanym pasmie częstotliwości.

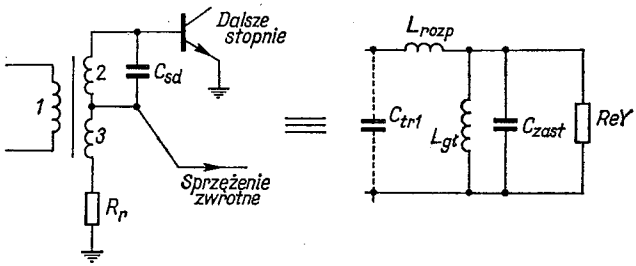
Zagadnienie to rozpatrzono na przykładzie wzmacniacza grupowego, jednakże określone poniżej możliwości kompensacji można traktować zupełnie ogólnie.

Na rys. 1 przykładowo pokazano powszechnie stosowane rozwiązanie układu wejściowego. Transformator jest tu użyty również jako element pętli sprzężenia zwrotnego, a pojemność C_{sd} separuje transformator poza pasmem użytecznym i ze względu na stabilność wzmacniacza powinna być możliwie duża.

Przekładnia p_{23} i oporność R_r określają stosunek sprzężenia równoległego do szeregowego, czyli przy zachowaniu dostatecznie silnego sprzężenia zwrotnego określają admitancję wejściową wzmacniacza. Admitancję tę po przeniesieniu na stronę pierwotną transformatora można określić w następujący sposób:

$$Y = \frac{p_{21}^2}{Z_n+Z_s} + \frac{p_{31}[Z_s p_{21}+(Z_n+Z_s)p_{31}]}{Z_r(Z_n+Z_s)}, \tag{1}$$

gdzie przez Z_n oznaczono impedancję szeregowego połączenia oporności strat i indukcyjności rozproszenia uzwojenia *2*, przez Z_r impedancję szeregowego połączenia analogicznych wielkości dla uzwojenia *3* z opornością R_r, przez Z_s impedancję pojemności C_s.



Rys. 1. Typowy obwód wejściowy wzmacniacza grupowego i równoważny mu układ zastępczy

Zakładając dla uproszczenia, że w pasmie użytecznym:

$$|Z_s|(p_{21}+p_{31}) \gg |Z_n|p_{31} \tag{2}$$

oraz biorąc pod uwagę, że zwykle $R_r^2 \gg \omega^2 L_r^2$ (gdzie przez L_r oznaczono indukcyjność rozproszenia uzwojenia *3*), można wyrażenie (1) napisać w postaci:

$$Y = j\omega C_{zast} + \frac{p_{31}(p_{21}+p_{31})}{R_r} \tag{3}$$

oraz

$$C_{zast} = C_s\left(p_{21}^2 - \frac{L_r}{C_s R_r} ReY\right), \tag{4}$$

gdzie C_s jest sumą pojemności separującej C_{sd} i pojemności wtórnych uzwojeń transformatora C_{tr2}. Z zależności (3) widać, że przy założeniu (2) admitancja wejściowa przeniesiona na stronę pierwotną transformatora składa się z równoległego połączenia, niezależnej od częstotliwości części rzeczywistej i pojemności C_{zast}. Wprowadzając do tego układu dalsze elementy schematu zastępczego, a mianowicie: indukcyjność główną $L_{gł}$ oraz indukcyjność rozproszenia L_{rozp} i pojemność C_{tr1}, odpowiadające uzwojeniu pierwotnemu, otrzymamy reaktancyjną sieć zamkniętą stałym w funkcji częstotliwości rzeczywistym obciążeniem. Problem polega na określeniu maksymalnej wartości pojemności C_s (C_{zast}) przy zadanych wartościach maksymalnych: współczynnika odbicia $\varrho(\omega)$ i nierównomierności funkcji przenoszenia $t(\omega)$ w określonym pasmie przepustowym. Przy założeniu, że sieć jest bezstratna, obie te wielkości są związane zależnością (5) i wystarczy zakładać jedną z nich.

$$|t(j\omega)|^2 = 1 - |\varrho(j\omega)|^2. \tag{5}$$

Ze względu na stosunkowo szerokie pasmo wzmacniaczy grupowych można i jest wygodnie rozpatrywać zagadnienie kompensacji osobno na górnych i dolnych częstotliwościach pasma przepustowego:

1. Dla częstotliwości dolnych należy dążyć do utworzenia sieci, która pozwoliłaby spełnić założony warunek na współczynnik niedopasowania przy minimalnej wartości

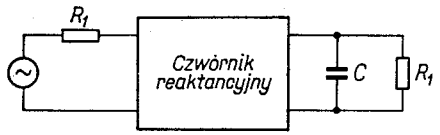
indukcyjności głównej $L_{gł}$. Wartość tej indukcyjności, przy założonym rdzeniu, określa bezpośrednio minimalną ilość zwojów, a co za tym idzie i minimalne wartości indukcyjności rozproszeń przy określonych przekładniach.

2. Na częstotliwościach górnych, przy określonych w punkcie pierwszym minimalnych wartościach indukcyjności rozproszeń, należy dążyć do utworzenia sieci, która spełniałaby warunek na współczynnik niedopasowania przy maksymalnej wartości pojemności C_{zast}, przy spełnionym założeniu (2).

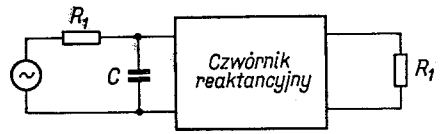
Można zauważyć, że oba powyższe punkty dotyczą identycznego problemu — określenia maksymalnej wartości admitancji głównego elementu pasożytniczego, połączonego równolegle z obciążeniem sieci, i z tego względu w dalszej części tej pracy będzie rozpatrywane to zagadnienie tylko dla częstotliwości górnej granicy pasma przepustowego.

2. OKREŚLENIE MAKSYMALNEJ POJEMNOŚCI

Ogólnie sieć reaktancyjną zawierającą kompensowany element pasożytniczy włączony równolegle do obciążenia można przedstawić jak na rys. 2. Z zależności (5) oraz z zasady wzajemności bezpośrednio wynika, że dla czwórników reaktancyjnych $|\varrho(j\omega)|$ nie zależy od tego, po której stronie czwórnika będzie mierzone. Nasze zagadnienie można więc sprowadzić do zagadnienia rozpatrywanego przez Bodego [1] — szukania maksymalnej pojemności w układzie pokazanym na rys. 3.



Rys. 2. Włączenie pojemności w rozpatrywanym układzie



Rys. 3. Włączenie pojemności w układzie rozpatrywanym przez Bodego

Przez obliczenie całki krzywoliniowej z $\ln\frac{1}{\varrho}$ po półokręgu otrzymuje się zależność między pojemnością C (rys. 3) a współczynnikiem niedopasowania ϱ (czwórnika z pojemnością) jako:

$$\int_0^\infty \ln\left|\frac{1}{\varrho}\right| d\omega = \frac{\pi}{CR_1} - \pi\sum a_i, \tag{6}$$

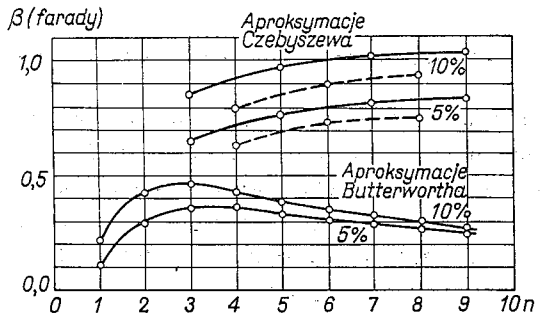
gdzie przez a_i oznaczono zera funkcji $\varrho(s)$ w prawej półpłaszczyźnie. Zera te mogą być rzeczywiste lub zespolone sprzężone i z tego względu $\sum a_i$ musi być wielkością rzeczywistą dodatnią. Jej istnienie ogranicza wielkość pojemności C przy określonej wartości całki z zależności (6). Maksymalną wartość C otrzymuje się przy warunku:

$$\sum a_i = 0, \tag{7}$$

to znaczy wówczas, gdy funkcja nie ma zer w prawej półpłaszczyźnie.

Aby znaleźć sieć kompensującą, należy znaleźć funkcję $|t(j\omega)|^2$ aproksymującą w dostateczny sposób żądaną funkcję przenoszenia, następnie z zależności (5) obliczyć $|\varrho(j\omega)|^2$

oraz tak dobrać z tego funkcję $\varrho(s)$, aby nie miała zer w prawej półpłaszczyźnie. Znając funkcję $\varrho(s)$ można drogą syntezy otrzymać żądaną sieć [2]. Na uwagę zasługuje aproksymacja wielomianami Butterwortha i Czebyszewa zależnie od tego, czy charakterystyka przenoszenia musi być płaska, czy też może wykazywać falowanie w pasmie przepustowym. Aproksymacja tymi funkcjami w przypadku czwórnika zamkniętego obustronnie na oporności nominalne prowadzi do sieci antymetrycznych przy parzystym stopniu wielomianu oraz symetrycznych przy stopniu nieparzystym, możliwych do realizacji w układzie drabinkowym. Przy takim zamknięciu (z wyłączeniem przypadku wielomianów Czebyszewa parzystych stopni) wszystkie zera wielkości $|\varrho(i\omega)|^2$ leżą na osi urojonych, w związku z tym spełniony jest warunek (7).



Rys. 4. Zależność maksymalnej wartości admitancji elementu pasożytniczego, którą można skompensować dopełniając układ do filtrów o charakterystykach Butterwortha i Czebyszewa, od ilości elementów n dla współczynnika niedopasowania 5 i 10%. Dla aproksymacji typu Czebyszewa linie ciągłe odpowiadają sieciom symetrycznym, a linie przerywane — sieciom antymetrycznym

Wielkości pojemności, które można skompensować dopełniając układ do filtrów Butterwortha i Czebyszewa, w zależności od ilości elementów (stopnia wielomianu) podaje rys. 4. Punkty na tym rysunku [3] odpowiadające określonej ilości elementów n zostały policzone przy założeniu, że w unormowanym pasmie częstotliwości $x \in [0,1]$ współczynnik niedopasowania nie przekracza odpowiednio 5 i 10%, przy unormowanej wielkości oporności obciążenia 1 Ω.

Funkcja podcałkowa wyrażenia (6) przybiera stosunkowo małe wartości poza pasmem użytecznym, można więc licząc się z pewnym błędem, przeprowadzać całkowanie w granicach pasma użytkowego. Biorąc średnie wartości współczynnika niedopasowania w pasmie użytecznym $\varrho_{śr}$ zależność (6) przy spełnieniu warunku (7) można zapisać[1])

$$\ln\left|\frac{1}{\varrho_{śr}}\right| \cong \frac{\pi}{\Delta\omega C R_1}, \tag{8}$$

a przy założeniu unormowanych wartości $\Delta\omega$ i R_1 otrzymamy:

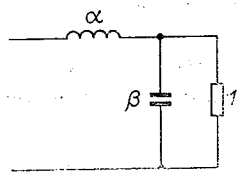
$$C_{max} \cong \frac{\pi}{\ln\left|\frac{1}{\varrho_{śr}}\right|}. \tag{9}$$

[1]) W zależności (8) wprowadzono oznaczenie zakresu częstotliwości jako $\Delta\omega$ ze względu na to, że pasmo częstotliwości użytecznych ogólnie biorąc jest ograniczone z obu stron.

W celu otrzymania maksymalnej pojemności, w układzie jak na rys. 2 należy tak wybrać parametry sieci reaktancyjnej, żeby sieć ta spełniała warunek (7) oraz miała dużą wartość średniego współczynnika niedopasowania w pasmie użytecznym, oczywiście przy zachowaniu jego wartości maksymalnej. Kształtowanie współczynnika niedopasowania poza pasmem użytecznym ma znacznie mniejsze znaczenie.

3. UKŁADY KOREKCYJNE ($n = 2$ i $n = 3$)[1]

Układ dwóch wzajemnie kompensujących się elementów jest pokazany na rys. 5. Założono, że przy unormowanej oporności obciążenia 1 Ω, α i β określają wielkości in-



Rys. 5. Rozpatrywany układ dwuelementowy ($n = 2$)

dukcyjności i pojemności układu. Bezpośrednio z rysunku 5 można obliczyć kwadrat modułu funkcji przenoszenia, którą można zrealizować w tym układzie

$$|t(jx)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2 x^2+\left(\frac{\alpha\beta}{2}\right)^2 x^4}, \tag{10}$$

gdzie przez x oznaczono częstotliwość unormowaną tak, żeby w pasmie użytecznym $x \in [0,1]$ współczynnik odbicia $|\varrho(jx)| \leqslant \varepsilon$.

1. Charakterystykę maksymalnie płaską $|t(jx)|$ odpowiadającą aproksymacji wielomianem Butterwortha określa się przez podstawienie w mianowniku zależności (10) wielomianu $1+\varepsilon^2x^4$; daje to

$$\frac{\beta-\alpha}{2} = 0; \qquad \frac{\alpha\beta}{2} = \varepsilon,$$

stąd maksymalną pojemność dla aproksymacji Butterwortha można określić jako:

$$\beta^2 = 2\varepsilon, \quad (\alpha = \beta). \tag{11}$$

2. Maksymalna pojemność[2] w obwodzie z rys. 5 może być otrzymana dla $\alpha = \frac{\beta}{1+\beta^2}$ i wynosi:

$$\beta^2_{max} = \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}; \tag{12}$$

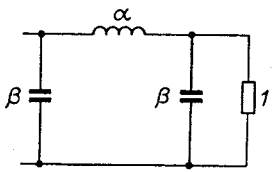
[1] Istnieją zależności pozwalające na bezpośrednie określenie wielkości elementów filtrów typu Butterwortha i Czebyszewa dowolnego stopnia — E. Kudrewicz „Obliczanie filtrów elektrycznych o zadanej tłumienności skutecznej" (Tablica 14), „Postępy Telekomunikacji", nr 6 z 1964 r.

[2] Wynika ona bezpośrednio z przedstawienia impedancji wejściowej czwórnika z rys. 5 we współrzędnych biegunowych.

odpowiada to punktowi granicznemu:

$$ImY_{x=1} = 0,$$

$$ReY_{x=1} = 1+\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} = 1+\beta_{max}^2. \tag{13}$$



Rys. 6. Rozpatrywany układ trójelementowy ($n = 3$)

Postępując analogicznie można określić maksymalne pojemności w układach trójelementowych (rys. 6). Kwadrat modułu funkcji przenoszenia takiego układu można zapisać:

$$|t(jx)|^2 = \frac{1}{1+\left[\frac{2\beta-\alpha}{2}x-\frac{\alpha\beta^2}{2}x^3\right]^2}. \tag{14}$$

1. Dla aproksymacji funkcją maksymalnie płaską (wielomianem Butterwortha) należy podstawić wielomian $1+\varepsilon^2x^6$; daje to

$$\frac{1}{2}\alpha\beta^2 = \varepsilon \qquad \frac{1}{2}(2\beta-\alpha) = 0;$$

otrzymana stąd pojemność wynosi:

$$\beta^3 = \varepsilon, \quad (\alpha = 2\beta). \tag{15}$$

2. Dla aproksymacji funkcją falistą (wielomianem Czebyszewa) należy podstawić w mianowniku wyrażenia (14) wielomian $4x^3-3x$; otrzymuje się wówczas:

$$\frac{1}{2}\alpha\beta^2 = 4\varepsilon, \qquad \frac{1}{2}(2\beta-\alpha) = 3\varepsilon$$

oraz

$$\beta^2(\beta-3\varepsilon) = 4\varepsilon, \tag{16}$$

stąd zaś otrzymuje się $\beta_{max}(\varepsilon)$ oraz $\alpha = \frac{8\varepsilon}{\beta^2}$.

Równanie (16) ma jeden pierwiastek rzeczywisty, który można łatwo znaleźć dla żądanego ε drogą kolejnych przybliżeń. Istotne w tym przypadku wstępne określenie wielkości β można wziąć z rys. 4 lub z tablic [3].

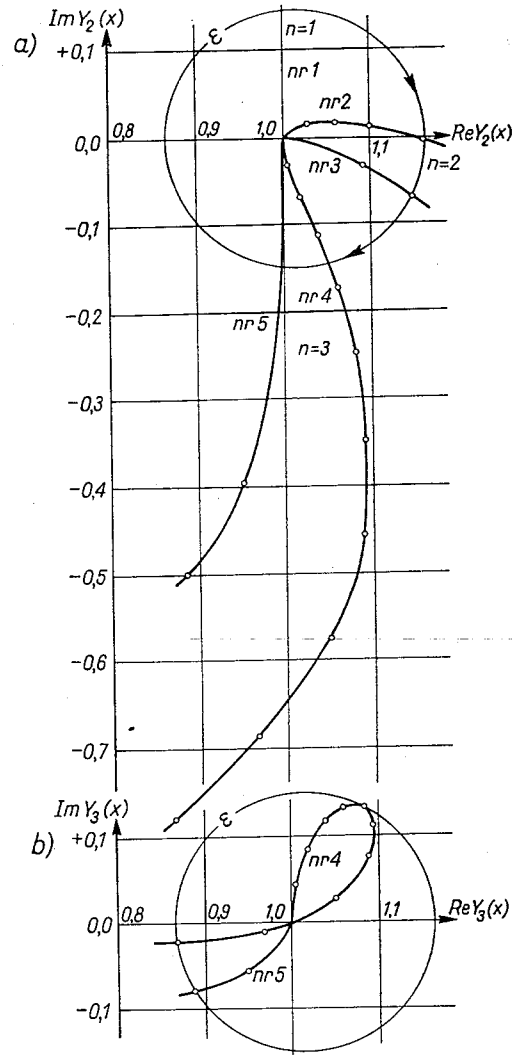
4. ADMITANCJA WEJŚCIOWA

Zależność ogólną na admitancję wejściową układu z rys. 5, Y_2, można napisać w sposób następujący:

$$ReY_2 = \frac{1}{(1-\alpha\beta x^2)^2+\alpha^2x^2}, \tag{17}$$

$$ImY_2 = -\frac{(\alpha-\beta)x+\alpha\beta^2x^3}{(1-\alpha\beta x^2)^2+\alpha^2x^2}; \tag{18}$$

można zauważyć, że dodanie następnej pojemności β w celu przejścia na układ z rys. 6 nie zmienia części rzeczywistej admitancji wejściowej, $ReY_3 = ReY_2$ oraz przesuwa część urojoną o wartość admitancji dołączonego elementu $ImY_3 = ImY_2 + \beta x$.



Rys. 7. Charakterystyki admitancji wejściowej układów: dwuelementowego (a) oraz trójelementowego (b) wyliczone z zależności (17) i (18) dla różnych stosunków α/β. Strzałki wskazują wzrost stosunku α/β. Okręgi odpowiadają współczynnikowi niedopasowania $\varepsilon = 7{,}5\%$

Na rysunkach 7a i 7b pokazano przebieg charakterystyk admitancji wejściowej układu dwuelementowego Y_2 (z rys. 5) i trójelementowego (z rys. 6) we współrzędnych biegunowych, w zależności od stosunku α do $\beta(\varepsilon)$.

Częstotliwości dla poszczególnych charakterystyk są tak unormowane, żeby w zakresie częstotliwości użytecznych $x \in [0,1]$, moduł współczynnika niedopasowania nie przekraczał wartości ε. Odpowiada to warunkowi, aby odpowiednia charakterystyka w zakresie częstotliwości $x \in [0,1]$ mieściła się w zaznaczonym na rysunku kole o środku w punkcie $\left(1+\frac{2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}, 0\right)$ i o promieniu $\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$.

Poszczególne krzywe można scharakteryzować w następujący sposób:

nr 1. $\alpha = 0$, $\beta(\varepsilon)$ odpowiada przypadkowi, gdy występuje tylko element kompensowany ($n = 1$). Dopuszczalną wielkość elementu $\beta(\varepsilon)$, która może być obliczona z zależności:

$$\beta^2 = \frac{4\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}, \tag{19}$$

można traktować jako wielkość odniesienia przy określaniu ewentualnego zysku, który można osiągnąć stosując układ korekcyjny.

nr 2. $\alpha = \frac{\beta(\varepsilon)}{1+\beta^2(\varepsilon)}$ odpowiada maksymalnej wartości β w układach dwuelementowych ($n = 2$); wartość β może być obliczona z zależności (12). Jest to przypadek graniczny, w którym admitancja wejściowa Y_2 w całym pasmie użytecznym ma charakter pojemnościowy.

nr 3. $\alpha = \beta(\varepsilon)$ odpowiada aproksymacji wielomianem Butterwortha drugiego stopnia ($n = 2$). Jest to przypadek graniczny, w którym admitancja Y_2 w całym pasmie częstotliwości ma charakter indukcyjny.

nr 4. $\alpha = \frac{8\varepsilon}{\beta^2(\varepsilon)}$ odpowiada aproksymacji wielomianem Czebyszewa trzeciego stopnia ($n = 3$). Charakterystycznym elementem jest tu częstotliwość, dla której część rzeczywista admitancji wejściowej osiąga maksimum; obliczone z warunku $\frac{d}{dx}\operatorname{Re} Y_{2,3} = 0$ wynosi

$$x = \sqrt{\frac{2\beta-\alpha}{2\alpha\beta^2}}. \tag{20}$$

Ten sam układ bez elementu zewnętrznego β ($n = 3-1$) opisuje krzywa 4 z rys. 7a.

nr 5. $\alpha = 2\beta(\varepsilon)$ odpowiada aproksymacji wielomianem Butterwortha trzeciego stopnia ($n = 3$). Jest to przypadek graniczny, w którym rzeczywista część admitancji wejściowej $\operatorname{Re} Y_{2,3}$ ma charakter monotoniczny.

Ten sam układ bez elementu zewnętrznego β ($n = 3-1$) opisuje krzywa 5 z rys. 7a.

5. ZAGADNIENIE STRAT

W powyższych rozważaniach nie uwzględniono strat elementów układu. Z uzwojeniem pierwotnym transformatora jest związana jego oporność, która na skutek efektu naskórkowości znacznie rośnie ze wzrostem częstotliwości. Ze względu na bardzo ostry zwykle warunek na charakterystykę wzmocnienia, efekt ten należy uwzględniać.

Jeżeli przez ΔR oznaczymy maksymalną zmianę oporności uzwojenia pierwotnego transformatora w pasmie użytecznym, to maksymalne zmiany tłumienności skutecznej

obwodu korekcyjnego można wyrazić następującą zależnością:

$$\Delta A_{sk_{max}} \cong \frac{1}{2}\Delta R \cdot ReY + \frac{\varepsilon^2}{2}. \tag{21}$$

Zależność ta daje dostatecznie dokładne wyniki dla tłumienności nie przekraczających kilku setnych nepera, co w praktyce jest zwykle wystarczające.

Wpływ strat na współczynnik niedopasowania jest pomijalny, a więc podane wyżej zależności są słuszne również dla elementów stratnych.

6. WNIOSKI KOŃCOWE

Na podstawie wyżej przeprowadzonych rozważań można określić, jaką sieć warto stosować w celu uzyskania maksymalnej wielkości admitancji głównego elementu pasożytniczego, włączonego równolegle z rzeczywistym obciążeniem. Z wykresów na rys. 4 widać, że wprowadzenie drugiego elementu pozwala na ponad dwukrotne (w zależności od dopuszczalnego współczynnika ε) zwiększenie dopuszczalnej admitancji elementu pasożytniczego. Przy tym maksymalna możliwa do osiągnięcia w tym układzie wielkość admitancji tego elementu mało się różni od wartości uzyskiwanej przy aproksymacji wielomianem Butterwortha [por. zależności (11) i (12)].

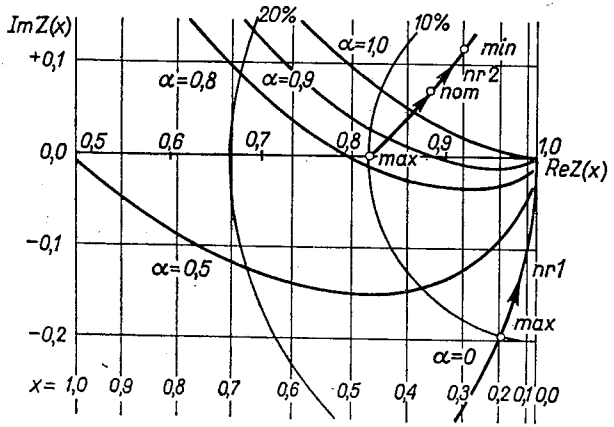
Dalsze zwiększenie ilości elementów przy aproksymacji wielomianami Butterwortha jest niecelowe, gdyż wprowadzenie trzeciego elementu ($n = 3$) daje bardzo mały wzrost dopuszczalnej wartości admitancji, a wprowadzenie dalszych elementów powoduje jej spadek. W związku z tym przy założeniu charakterystyki maksymalnie płaskiej w zasadzie nie opłaca się stosować sieci o większej ilości elementów niż dwa ($n = 2$) chyba, że korygowany podzespół zawiera ten element. Wprowadzenie dalszych elementów daje konkretny zysk przy aproksymacji wielomianami Czebyszewa nieparzystych rzędów (krzywe ciągłe na rys. 4). Dodanie trzeciego elementu ($n = 3$) powoduje tu dalszy, prawie dwukrotny, wzrost dopuszczalnej admitancji elementu pasożytniczego; wprowadzanie dalszych elementów w układach symetrycznych daje szybko malejące przyrosty omawianej admitancji, w związku z czym nie wydaje się celowe, z punktu widzenia maksymalizacji dopuszczalnej wartości admitancji elementu pasożytniczego, dalsze zwiększanie ilości elementów dla charakterystyk Czebyszewowskich.

W przypadku transformatorów układu wejściowego i wyjściowego wzmacniacza grupowego należy rozpatrzyć dwa zakresy częstotliwości:

1. Na częstotliwościach górnych pasma dobre rezultaty daje stosowanie sieci dwu- i trójelementowych, zależnie od możliwości uzyskania dostatecznie dużej indukcyjności rozproszenia odpowiadającej uzwojeniu pierwotnemu, z tym, że przy stosowaniu obwodu dwuelementowego nie należy go liczyć na maksymalną wartość β (wykres nr 2 z rys. 7a), gdyż sam układ zastępczy transformatora obwodu wejściowego wprowadza pojemność C_{tr1} (rys. 1), która wraz z pojemnościami montażowymi daje trzeci element. Wartość tych pojemności jest zwykle mała, jednak powoduje przesunięcie odpowiedniej charakterystyki w górę. Z tego względu bardziej celowe wydaje się stosowanie charakterystyki Butterwortha (wykres 3 na rys. 7a) lub pośredniej. Przy sieciach dwu- i trójelementowych można w sposób prosty, posługując się wykresami z rys. 7a i 7b skorygować ostatecznie otrzymaną sieć. W tym celu podano powyżej wykresy i opis charakterystycznych

przypadków funkcji $Y(x)$. Wykonując analogiczny wykres dla konkretnego obciążenia i maksymalnego współczynnika niedopasowania ε bezpośrednio przez pomiar kompletnej sieci ($n = 3$) lub sieci bez trzeciego elementu ($n = 3-1$) można określić z zależności na $ReY_{2,3max}$, czy w badanym układzie stosunek α do β jest prawidłowy. Jest to istotne, gdyż indukcyjność w tym układzie (jako indukcyjność rozproszenia) jest uzyskiwana przez odpowiednie nawinięcie transformatora i jej wartość nie jest zwykle dokładnie znana. Odnosi się to również do pojemności własnych transformatora C_{tr1} i C_{tr2}. Dodatkowe ograniczenie dla sieci trójelementowych stanowią rozmiary okna transformatora, nie zawsze pozwalające na uzyskanie dostatecznie dużych rozproszeń związanych z uzwojeniem pierwotnym, przy utrzymaniu oporności strat na stosunkowo niskim poziomie. Może to prowadzić do konieczności zastosowania indukcyjności dodatkowej (zewnętrznej).

2. Na częstotliwościach dolnych pasma przepustowego występuje tylko jeden element pasożytniczy (indukcyjność główna). Zwiększenie jego admitancji można uzyskać dodając odpowiednią pojemność. Dodanie dalszego elementu jest raczej nieopłacalne, gdyż pociąga konieczność zastosowania dodatkowej indukcyjności.



Rys. 8. Charakterystyki impedancji wejściowej układu dwuelementowego wyliczone z zależności (22) i (23) dla różnych wartości α ($\beta = 1$). Zaznaczono okręgi odpowiadające 10 i 20% współczynnika niedopasowania. Strzałki wskazują kierunki zmian wielkości $Z(x)$ przy wzroście impedancji elementu pasożytniczego (np. w granicach tolerancji stałej rdzenia AL $\pm 25\%$)

Przy rozpatrywaniu sieci dwuelementowych na małych częstotliwościach (dolne częstotliwości pasma przepustowego) wygodnie jest założyć, że $\beta = 1$ (inna normalizacja), wówczas częstotliwość graniczną pasma można określić jako punkt przecięcia danej charakterystyki z okręgiem odpowiadającym określonemu współczynnikowi niedopasowania. W tym przypadku oś odciętych na wykresie biegunowym $Z(x)$ można bezpośrednio wyskalować w częstotliwości x, gdyż

$$ReZ(x) = \frac{1}{1+x^2}, \tag{22}$$

$$ImZ(x) = \frac{(\alpha-1)x+\alpha x^3}{1+x^2}. \tag{23}$$

Na rysunku 8 są pokazane wykresy $Z(x)$ w zależności od parametru α. Z rysunku tego widać, że przy danym $\beta = 1$ największą częstotliwość graniczną $Re\,Z(x)_{min}$ można uzyskać dla $Im\,Z(x) = 0$. Indukcyjność główna transformatora nie jest elementem określonym; znamy najczęściej tylko jej wartości graniczne wynikające z fabrycznych warunków na stałą rdzenia (AL). Warunek ten jest podawany w postaci $AL_{nom} \pm 25\%$; w takim przypadku należy obliczyć transformator tak, aby spełniał warunek na współczynnik niedopasowania przy minimalnej wartości stałej $AL_{nom} - 25\%$. Na rys. 8 pokazano również przebieg charakterystyk impedancji wejściowej $Z(x)$ w zależności od rozrzutu wartości stałej AL dla samego elementu pasożytniczego oraz dla sieci dwuelementowej (odpowiednio krzywe *1* i *2*). Zastosowanie na przykład dodatkowej pojemności powodujące przejście z charakterystyki 1 na 2 na rys. 8, pozwala przy maksymalnym współczynniku niedopasowania 10% zmniejszyć konieczną indukcyjność o 57,5%, co odpowiada zmniejszeniu o 34,8% ilości zwojów transformatora.

Politechnika Warszawska
Katedra Urządzeń Teletransmisyjnych i Telegraficznych

WYKAZ LITERATURY

1. Bode H. W.: Network Analysis and Feedback Amplifier Design. New York 1946.
2. Guillemin E. A.: Synthesis of Passive Networks. New York 1957.
3. Glowatzki E.: Katalog der Potenz- und Tschebyscheff-Filter bis zum Grade $n = 5$. — Telefunken-Zeitung, März 1955.
4. Glowatzki E.: Katalog der Potenz- und Tschebyscheff-Filter vom Grade $n = 6$ bis 9. — Telefunken-Zeitung, Juni 1961.

J. BROŻYNA

CORRECTION OF INPUT TRANSFORMERS IN HYBRID COIL FEEDBACK AMPLIFIERS

Summary

The paper discusses the problem of seeking maximum values of the separating capacitor capacitance (for example, C_{sd} in Fig. 1) and of main inductance of transformers working in broadband amplifiers which face rigid conditions concerning the frequency uniformity of amplification characteristics and the coefficient of mismatching.

The dependences in the paper may be employed also in the correction o any given transformer, closed bilaterally to nominal reactances.

J. BROŻYNA

LA CORRECTION DES TRANSFORMATEURS D'ENTRÉE DES AMPLIFICATEURS DE GROUPE

Résumé

L'oeuvre décrit le problème de chercher les valeurs maximales de la capacité séparant (par ex. C_{sd} sur la fig. 1) et de l'inductance principale des transformateurs appliqués dans les amplificateurs large-bande, à qui les conditions rigoureuses concernant la régularité de la caractéristique amplification-fréquence ainsi que le coéfficient de la désadaptation sont présentées.

Les rélations données peuvent être utilisées aussi pour la correction du transformateur quelconque, fermé de deux côtés par les résistances nominales.

Е. БРОЖЫНА

КОРРЕКЦИЯ ВХОДНЫХ ТРАНСФОРМАТОРОВ ГРУППОВЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ

Р е з ю м е

Рассматривается вопрос определения максимальных значений емкости отделяющего конденсатора (нап. C_{sd} на рис. 1) и главной индуктивности трансформаторов, работающих в широкополосных усилителях, которым предъявляются строгие условия, касающиеся равномерности амплитудно-частотной характеристики, а также коэффициента несогласования.

Приведенные зависимости могут применяться тоже при коррекции любого трансформатора, нагруженного с обеих сторон номинальными сопротивлениями.

621.391.816.2

JĘDRZEJ BROŻYNA

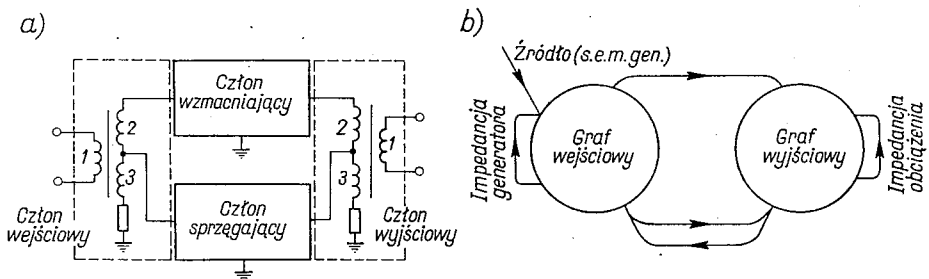
Obwody wejściowe wzmacniaczy grupowych[1)]

Rękopis dostarczono 12.1.1968

Praca niniejsza w oparciu o przyjęty schemat zastępczy transformatora (zawierający na częstotliwościach górnych pasma użytecznego indukcyjności rozproszenia, oporności strat uzwojeń i skupioną pojemność własną na jednym z uzwojeń) oraz założenie dostatecznej głębokości pętli sprzężenia zwrotnego, rozpatruje częstotliwościową zależność wzmocnienia oraz impedancji wejściowej wzmacniacza grupowego, wykonanego w typowym układzie z tzw. „dopasowaniem czynnym". Praca zawiera pewną ogólną propozycję wykonania, w określony sposób korygowanego, transformatora wejściowego oraz omawia pewne ograniczenia pasma użytecznego spowodowane wpływem elementów pasożytniczych transformatora.

1. WPROWADZENIE

Wzmacniacz grupowy można przedstawić w postaci blokowej, jak na rys. 1a. Jest to ogólne przedstawienie wzmacniacza z jedną pętlą sprzężenia zwrotnego. Większość nowoczesnych wzmacniaczy grupowych wykonuje się właśnie w tym układzie. Jeżeli występują inne sprzężenia zwrotne, to ich charakter jest lokalny, a wielkość mała w porównaniu



Rys. 1. Ogólne przedstawienie rozpatrywanego wzmacniacza: a) Podział na człony, b) Wydzielenie grafów wejściowego i wyjściowego na podstawie założeń 1 i 2

z pętlą główną. Nie mogąc z jakichkolwiek względów wykonać wzmacniacza w tej prostej formie dzieli się wzmacniacz na dwie części i wtedy każdą z tych części można przedstawić w podobny sposób. W zależności od funkcji spełnianych w układzie wyodrębniono tu cztery zasadnicze człony:

[1)] Wzmacniacze grupowe są to stosowane w telefonicznych systemach wielokrotnych wzmacniacze wzmacniające widma grup kanałów (Projekt PN/T-01002). W niniejszej pracy pod tym określeniem rozumie się również wzmacniacze liniowe, tj. wzmacniacze wzmacniające całe widma liniowe zestroju.

— Człon wzmacniający — musi mieć dostatecznie duże wzmocnienie w celu zapewnienia wymaganej wielkości wzmocnienia oraz dostatecznej wielkości sprzężenia zwrotnego, a jego częstotliwościowa charakterystyka wzmocnienia może być odpowiednio kształtowana ze względu na stabilność wzmacniacza. W celu uzyskania dostatecznej wielkości wzmocnienia człon ten wykonuje się w postaci kilku stopni połączonych kaskadowo, co powoduje, że praktycznie jest to układ unilateralny.

— Człon sprzęgający — stanowi czwórnik, który zależnie od przeznaczenia jak i rozwiązania wzmacniacza może być wykonany w różnych układach. Przy dostatecznie silnym sprzężeniu oraz przy idealnym wykonaniu członów wejściowego i wyjściowego czwórnik ten bezpośrednio określa wzmocnienie wzmacniacza; dlatego jest często wykorzystywany jako korektor, do otrzymania żądanych charakterystyk częstotliwościowych wzmocnienia wzmacniacza.

— Człony wejściowy i wyjściowy — są rozwiązywane zwykle w postaci transformatorów z dzielonym uzwojeniem wtórnym, pracujących w układzie mostkowym, w celu otrzymania wymaganego dopasowania do oporności źródła lub obciążenia.

Przy założeniu transformatorów idealnych oraz dostatecznie silnego sprzężenia zwrotnego można uzyskać dopasowanie niezależnie od stanu równowagi mostka oraz od parametrów członu sprzęgającego.

Aby wyniki poniższej analizy miały charakter dostatecznie ogólny oraz pozwalały w sposób prosty opisać rozpatrywany wzmacniacz grafem przepływowym, wprowadzono następujące założenia wstępne:

Założenie 1. — Człon wzmacniający jest unilateralny;

Założenie 2. — Człon sprzęgający jest dowolnym czwórnikiem określonym parametrami admitancyjnymi Y_{ijB}, zapewniającymi wymagany przebieg charakterystyki wzmocnienia wzmacniacza.

Powyższe założenia określają ogólną formę grafu wzmacniacza tego typu, narzucając minimalną ilość gałęzi łączących grafy odpowiadające członom wejściowemu i wyjściowemu.

Ze względu na założenie 1 należy wprowadzić jedną gałąź odpowiadającą np. wzmocnieniu prądowemu członu wzmacniającego oraz ze względu na założenie 2 — dwie gałęzie odpowiadające parametrom przejściowym członu sprzęgającego. Pozostałą część grafu przepływowego można dołączyć do grafów odpowiadających członom: wejściowemu i wyjściowemu. W ten sposób otrzymuje się w grafie wzmacniacza, rys. 1b, poza gałęziami łączącymi, dwa grafy, które będą dalej nazywane odpowiednio wejściowym i wyjściowym, a odpowiadające im układy elementów schematu zastępczego — układem zastępczym obwodu wejściowego i wyjściowego wzmacniacza. Przy dostatecznie silnym sprzężeniu zwrotnym obwody te określają dwa parametry zewnętrzne wzmacniacza:

1) wielkość i zależność od częstotliwości admitancji wejściowych wzmacniacza,

2) dokładność odtworzenia charakterystyk częstotliwościowych wzmocnienia z parametrów Y_{ijB} członu sprzęgającego.

Praca niniejsza stanowi próbę optymalizacji obwodów wejściowych ze względu na powyższe parametry zewnętrzne. Oczywiście optymalizacja ta musi uwzględniać wpływ obwodu wejściowego na transmitancję pętli sprzężenia zwrotnego poza pasmem użytecznym. Z warunków na parametry zewnętrzne i rozważań optymalizacyjnych powinno się otrzymać warunki na obwód wejściowy oraz na sam transformator.

Przy rozpatrywaniu obwodu wejściowego podstawowe znaczenie dla tych rozważań ma współczynnik szumów wzmacniacza, stąd ostateczne zalecenia powinny stanowić kompromis pomiędzy tymi dwoma grupami warunków.

Optymalna oporność źródła obliczana ze względu na szumy [2] wychodzi zwykle większa niż ta, którą można dopuścić ze względu na możliwość wykonania transformatora i dlatego przekładnię transformatora wejściowego $p_{21}+p_{31}$ należy dawać maksymalną, jaką można osiągnąć w danych warunkach.

Analogicznie, rozpatrując obwód wyjściowy bierze się pod uwagę możliwość minimalizacji produktów nieliniowych oraz straty mocy.

Aby teraz scharakteryzować wyżej omawiany wzmacniacz pod względem parametrów zewnętrznych, należy znaleźć np. jego czwórnikowe parametry admitancyjne Y_{ij}.

Z założonego grafu wzmacniacza, rys. 1b, widać, że każdy z parametrów admitancyjnych, obliczony np. ze wzoru Masona [1], można przedstawić w postaci ilorazu, w którym tak licznik, jak i mianownik ma postać:

$$\text{mianownik (licznik) } Y_{ij} = A_{ij}(\omega)+k_i(\omega)B_{ij}(\omega), \tag{1}$$

gdzie przez $k_i(\omega)$ oznaczono wzmocnienie prądowe członu wzmacniającego.

W dalszych rozważaniach przyjęto założenie dostatecznej wielkości sprzężenia zwrotnego w postaci:

Z a ł o ż e n i e 3. — Wielkość $k_i(\omega)$ jest na tyle duża, że składniki $A_{ij}(\omega)$ można pominąć w pasmie użytecznym wzmacniacza.

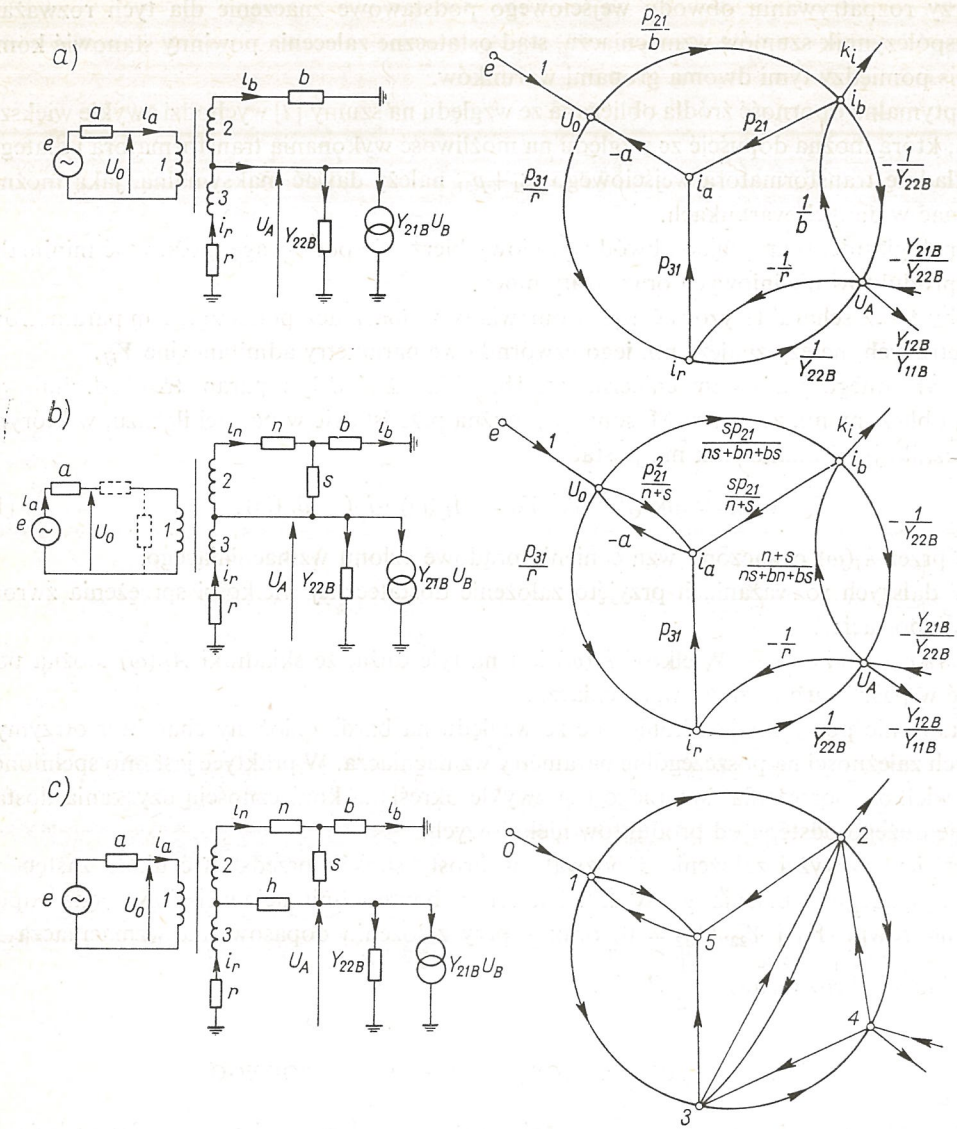
Założenie powyższe jest konieczne ze względu na bardzo złożony charakter otrzymywanych zależności na poszczególne parametry wzmacniacza. W praktyce jest ono spełnione, gdyż wielkość sprzężenia zwrotnego jest zwykle określana koniecznością uzyskania dostatecznie dużego odstępu od produktów nieliniowych.

Przyjęte powyżej założenie 3 pozwala w prosty sposób przedstawić układ zastępczy rozpatrywanego wzmacniacza. W układzie tym robocze admitancje wejściowe będą odpowiednio równe Y_{11} i Y_{22} ($Y_{12} = 0$) oraz — przy założeniu dopasowania wzmacniacza — wzmocnienie będzie równe $\frac{1}{2}R_a Y_{21}$.

2. GRAF PRZEPŁYWOWY OBWODU WEJŚCIOWEGO

Do obliczenia omawianych parametrów należy znać odpowiednie grafy: wejściowy i wyjściowy z rys. 1b. Obwód wejściowy rozpatrywanego wzmacniacza można opisać schematem zastępczym i grafem przepływowym pokazanym na rys. 2a. Dla układu wyjściowego otrzymuje się analogiczny schemat zastępczy i identyczny graf przepływowy. Literami alfabetu łacińskiego a, b, r oznaczono odpowiednio impedancje: generatora, wejściową pierwszego stopnia oraz elementu, na którym uzyskuje się składową szeregową sprzężenia zwrotnego. Przeprowadzenie analizy układu na podstawie powyższego grafu wejściowego prowadzi jednak do bardzo uproszczonych wyników. Do uzyskania dostatecznej dokładności w pasmie użytecznym wzmacniacza wystarcza zwykle wprowadzenie następujących elementów schematu zastępczego transformatora (rys. 2b):

1) indukcyjności głównej dla dolnych częstotliwości pasma użytecznego,



Rys. 2. Schemat zastępczy obwodu wejściowego rozpatrywanego układu i odpowiadający mu graf przepływowy: a) przy założeniu, że transformator jest idealny, b) przy uwzględnieniu elementów szeregowych w gałęziach oraz pojemności po stronie uzwojenia 2, c) układ zmodyfikowany (węzły odpowiadają analogicznym napięciom i prądom grafu z rysunku 2b — oznaczono je cyframi); transmitancje gałęzi są podane w tekście

2) indukcyjności rozproszenia i oporności strat w gałęziach szeregowych oraz wypadkowej pojemności dla częstotliwości górnych pasma użytecznego. Można założyć, że główna część pojemności wypadkowej transformatora jest włączona po stronie uzwojenia drugiego (zob. oznaczenie na rys. 2b).

Część tych elementów, a mianowicie: indukcyjność główną oraz elementy szeregowe gałęzi wejściowej można w prosty sposób uwzględnić w ostatecznych wynikach i dlatego nie zostały one wprowadzone do schematu zastępczego (zaznaczono je linią przerywaną).

Impedancje elementów poszczególnych gałęzi oznaczono dla przejrzystości literami:

a — impedancja generatora (w razie potrzeby można uważać, że są tu dołączone elementy gałęzi wejściowej transformatora — pominięte wyżej),

b — impedancja wejściowa pierwszego stopnia,

n — impedancja szeregowych elementów gałęzi drugiej transformatora,

r — impedancje szeregowego połączenia elementów gałęzi trzeciej transformatora z opornością r_0,

s — impedancja sumy pojemności transformatora i dowieszonej — $C_{tr}+C_{sd}$.

Rys. 2b przedstawia graf przepływowy obwodu wejściowego utworzony z układu analogicznych równań co graf z rys. 2a. Można zauważyć, że wprowadzenie dodatkowych elementów, chociaż nie wpłynęło w zasadzie na kształt grafu (doszła jedna gałąź o transmitancji $\frac{p_{21}^2}{n+s}$), to w dużym stopniu skomplikowało postać transmitancji jego gałęzi. Wprowadzenie dalszych elementów powoduje znaczne komplikowanie się grafu.

W nowych rozwiązaniach wzmacniaczy można zaobserwować pewną modyfikację klasycznego już układu obwodu wejściowego, polegającą na innym dołączeniu kondensatora, oznaczonego literą s, które jest pokazane na rys. 2c. Założono tu, że pojemność własna transformatora jest na tyle mała, że można ją dołączyć do elementu s.

Dodatkowy element, oznaczony literą h stanowi zwykle niezbyt dużą oporność, jednak w grafie jest traktowany jako dowolna impedancja. Rys. 2c pokazuje również graf przepływowy odpowiadający temu układowi; transmitancje gałęzi oznaczone odpowiednio przez t_{ij} można wyrazić następująco:

$$t_{10} = 1; \qquad t_{34} = -\frac{n+s+h}{r(n+s+h)+h(n+s)};$$

$$t_{19} = -a; \qquad t_{42} = -\frac{1}{Y_{22B}};$$

$$t_{21} = \frac{p_{21}s}{b(n+s+h)+s(n+h)}; \qquad t_{43} = \frac{1}{Y_{22B}};$$

$$t_{23} = \frac{hs}{b(n+s+h)+s(n+h)}; \qquad t_{51} = \frac{p_{21}^2}{n+s+h};$$

$$t_{24} = \frac{n+s+h}{b(n+s+h)+s(n+h)}; \qquad t_{52} = \frac{p_{21}s}{n+s+h};$$

$$t_{31} = \frac{p_{31}(n+s+h)+p_{21}h}{r(n+s+h)+h(n+s)}; \qquad t_{53} = \frac{p_{31}(n+s+h)+p_{21}h}{n+s+h}.$$

$$t_{32} = \frac{hs}{r(n+s+h)+h(n+s)};$$

Znając grafy przepływowe obwodów wejściowego i wyjściowego oraz sposób ich łączenia (rys. 1b) można bezpośrednio napisać zależności na parametry zewnętrzne Y_{ij} rozpatrywanego wzmacniacza. Należy się liczyć z tym, że postać otrzymanych wyników będzie bardzo złożona i bezpośrednie wyciągnięcie jakichkolwiek wniosków z tej ogólnej postaci byłoby niemożliwe. W celu uproszczenia otrzymywanych zależności wprowadzono założenie 3. Przy tym założeniu, dla układu i grafu przepływowego z rys. 2b otrzymuje się zależności:

$$Y_{11} = \frac{p_{21}^2}{n+s} + \frac{p_{31}[sp_{21}+(n+s)p_{31}]}{r(n+s)}, \tag{2}$$

$$Y_{21} = \frac{1}{Y_{21B}r\bar{r}}\left\{\frac{s}{n+s}\frac{\bar{s}}{\bar{n}+\bar{s}}p_{21}\bar{p}_{21}[r\bar{r}(Y_{11B}Y_{22B}-Y_{12B}Y_{21B})+rY_{22B}+\bar{r}Y_{11B}+1]+\right.$$

$$\left.+\frac{\bar{s}}{\bar{n}+\bar{s}}p_{31}\bar{p}_{21}(\bar{r}Y_{11B}+1)+\frac{s}{n+s}\bar{p}_{31}p_{21}(rY_{22B}+1)+p_{31}\bar{p}_{31}\right\}, \tag{3}$$

gdzie litery z belką oznaczają odpowiednie impedancje obwodu wyjściowego.

Analogiczne zależności dla obwodu wejściowego z rys. 2c mają znacznie bardziej złożony charakter i ponieważ otrzymuje się je bezpośrednio z grafu, nie będą tu podane.

3. ROZWIĄZANIE TRANSFORMATORA

Z wyników otrzymanych powyżej (2) i (3) widać, że zasadniczy wpływ na omawiane parametry wzmacniacza ma rozwiązanie transformatorów. Należałoby dążyć do minimalizacji elementów pasożytniczych, i tak dla górnych częstotliwości pasma użytecznego należałoby zmniejszyć do minimum indukcyjności rozproszeń oraz pojemności własne transformatorów. Przy zastosowaniu obecnie dostępnych materiałów taka minimalizacja wystarcza jedynie dla wzmacniaczy systemów o małej krotności. Dla systemów o wyższej krotności nie można pominąć efektu wszystkich indukcyjności rozproszenia, jednakże zbliżenie dwóch uzwojeń pozwala na znaczne zmniejszenie indukcyjności szeregowych związanych z tymi uzwojeniami, kosztem indukcyjności związanej z uzwojeniem trzecim.

Interesujące są dwa przypadki:

1. Zmniejszając wartości indukcyjności L_a i L_r kosztem L_n przy zachowaniu niezbyt dużych pojemności własnych transformatora C_{tr} można znacznie poszerzyć zakres częstotliwości, w którym będą spełnione warunki na częstotliwościową charakterystykę wzmocnienia oraz dopuszczalny współczynnik niedopasowania.

Zależności (2) i (3) można w tym przypadku zapisać:

$$Y_{11} = \frac{p_{31}(p_{21}+p_{31})}{r}, \tag{4}$$

$$Y_{21} = \frac{1}{Y_{21B}r\bar{r}}\{p_{21}\bar{p}_{21}[r\bar{r}(Y_{11B}Y_{22B}-Y_{12B}Y_{21B})+rY_{22B}+\bar{r}Y_{11B}+1]+$$

$$+p_{31}\bar{p}_{21}(\bar{r}Y_{11B}+1)+\bar{p}_{31}p_{21}(rY_{22B}+1)+p_{31}\bar{p}_{31}\}. \tag{5}$$

Indukcyjność L_r jest tu stosunkowo mała, a indukcyjność L_a można skompensować pojemnością po stronie wejściowej.

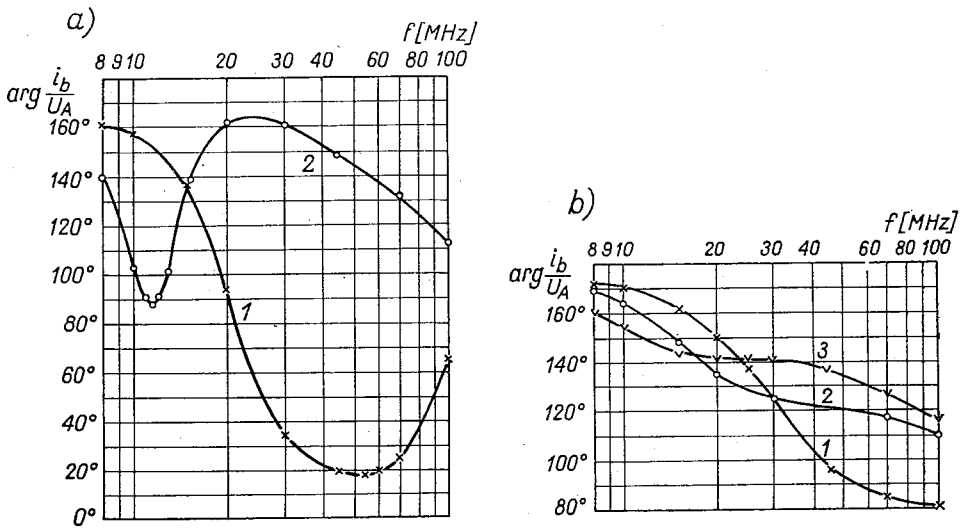
Takie rozwiązanie transformatora pozwala w prosty sposób osiągnąć spełnienie warunków na parametry zewnętrzne, jednakże jest ono bardzo niekorzystne ze względu na wpływ transformatora na pętlę sprzężenia zwrotnego poza pasmem użytecznym. Z grafu przepływowego (rys. 2b) można określić ten wpływ jako:

$$\frac{i_b}{U_A} = \frac{sap_{31}(p_{31}+p_{21})+a(np_{31}^2+rp_{21}^2)+r(n+s)}{sa(np_{31}^2+rp_{21}^2+bp_{31}^2)+ba(np_{31}^2+rp_{21}^2)+r(sn+bn+bs)}. \tag{6}$$

Dla tego rozwiązania transformatora przebieg charakterystyki częstotliwościowej $\frac{i_b}{U_A}$ będzie głównie zależał od części wyrażenia (6), a mianowicie od wielkości:

$$\frac{1}{\frac{sn}{n+s}+b}, \tag{7}$$

która wskazuje na możliwość zarysowania się dwóch rezonansów: rezonansu równoległego elementów C_s i L_n oraz wcześniejszego i słabszego rezonansu tego obwodu z pojemnością wejściową tranzystora. Oczywiście zależność (6) należy traktować jako orientacyjną, gdyż użyty do obliczeń schemat zastępczy transformatora jest słuszny w ograniczonym pasmie częstotliwości. Zależność ta jednak pozwala uchwycić ogólny charakter zmian.



Rys. 3. Typowy przebieg przesunięcia fazowego transmitancji $\frac{i_b}{U_A}$ w zależności od wielkości pojemności dowieszonej C_{sd}: a) dla transformatora o zmniejszonych indukcyjnościach szeregowych gałęzi 1 i 3: wykres *1* — $C_{sd} = 0$, wykres *2* — $C_{sd} = 56$ pF (przybliżony rozkład indukcyjności szeregowych: $L_a = 160$ nH, $L_n = 4000$ nH, $L_r = 35$ nH); b) dla transformatora o zmniejszonych indukcyjnościach szeregowych gałęzi 2 i 3: wykres *1* — $C_{sd} = 0$, wykres *2* — $C_{sd} = 56$ pF, wykres *3* — $C_{sd} = 150$ pF (przybliżony rozkład indukcyjności szeregowych: $L_a = 1000$ nH, $L_n = 130$ nH, $L_r = 35$ nH)

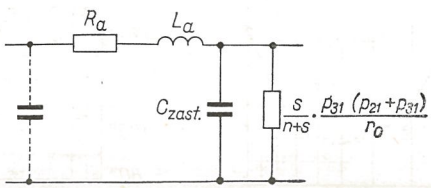
Rysunek 3a pokazuje typowy przebieg przesunięcia fazowego odpowiadającego wielkości $\frac{i_b}{U_A}$ dla transformatora o zmniejszonych indukcyjnościach szeregowych uzwojeń *1* i *3* (L_a, L_r). Krzywa *1* odpowiada tu zerowej pojemności dodatkowej ($C_{sd} = 0$). Obserwowane minimum przesunięcia fazowego jest spowodowane pojemnością własną transformatora. Krzywa *2* odpowiada dołączeniu pojemności $C_{sd} = 56$ pF.

2. Zmniejszając indukcyjności L_n i L_r kosztem L_a przy zachowaniu niezbyt dużych pojemności własnych transformatora można znacznie zmniejszyć wpływ wyżej opisanych rezonansów.

Rysunek 3b pokazuje typowy przebieg przesunięcia fazowego transmitancji $\frac{i_b}{U_A}$ dla transformatora tego typu przy dodatkowych pojemnościach C_{sd}. Z rysunku tego widać, że wzrost pojemności C_{sd} powoduje przesuwanie się wgłębienia charakterystyki w lewo. Wgłębienie to jest spłaszczone ze względu na małe wartości indukcyjności L_n w porównaniu z innymi elementami. Porównanie rysunków 3a i 3b prowadzi do wniosku, że we wzmacniaczach systemów o większej krotności, gdzie ze względu na ograniczenie pasma użytych półprzewodników problem stabilności staje się główną trudnością, należy stosować drugi sposób wykonania transformatora, z możliwie maksymalną pojemnością C_{sd}, chociaż pociąga to za sobą konieczność kompensacji wpływu tej pojemności i indukcyjności L_a na współczynnik odbicia i wzmocnienie. W schemacie zastępczym pokazano, że pojemność własna transformatora włącza się równolegle z pojemnością C_{sd}. Jest to słuszne tylko dla stosunkowo małych częstotliwości, bliskich pasma przepustowego wzmacniacza. Należy dążyć oczywiście do tego, aby pojemność transformatora była minimalna, a maksymalizować pojemność dołączoną. Przy takim wykonaniu transformatora, ponieważ $r_0^2 \gg \omega^2 L_r^2$, zależność (2) można zapisać:

$$Y_{11} = j\omega C_{zast} + \frac{s}{n+s} \cdot \frac{p_{31}(p_{21}+p_{31})}{r_0} \tag{8}$$

przy pominięciu strat w gałęzi szeregowej ΔR_a, część urojoną powyższej admitancji można zastąpić pojemnością C_{zast}, którą oblicza się z zależności (2) i (8). Oczywiście dla dostatecznie małych indukcyjności L_n i L_r zależność (8) upraszcza się i pojemność C_{zast} redukuje się do $C_s p_{21}^2$.



Rys. 4. Układ zastępczy obwodu wejściowego wzmacniacza po dołączeniu elementów szeregowych gałęzi 1 transformatora (pojemność zaznaczona linią przerywaną stanowi część pojemności transformatora, indukcyjności głównej transformatora nie zaznaczono)

Korzystając z zależności (8) układ zastępczy obwodu wejściowego można przedstawić jak na rys. 4. Dla skompensowania wpływu pojemności C_{zast} w przepustowym pasmie częstotliwości, należy odpowiednio dobrać wartość indukcyjności L_a, uzupełniając układ do odpowiedniej sieci filtru dolnoprzepustowego [3].

Z zależności (8) i (3) wynika również drugie ograniczenie częstotliwościowe obwodu wejściowego; aby je rozpatrzyć odrzucono elementy ogniwa filtru z rys. 4 zostawiając jedynie jego obciążenie $\frac{s}{n+s} \cdot \frac{p_{31}(p_{21}+p_{31})}{r}$.

Ze względu na złożony charakter zależności (2) i (3) trudno w sposób ogólny podać zależności na admitancję wejściową i wzmocnienie. Można to zrobić przy założeniu:

$$|n| \ll |s|, \tag{9}$$

a nawet przy założeniu słabszym

$$|n|p_{31} \ll |s|p_{21}. \tag{10}$$

Trudno jest określić w sposób ogólny, jaki błąd popełnia się w obu przypadkach, jednakże wiadomo, że wynik dokładny jest zawarty między wynikami otrzymanymi przy tych założeniach.

Rozpatrując zależność (2) przy założeniu (9) po odrzuceniu pierwszego składnika otrzymuje się:

$$Y_{11.id.} = \frac{p_{31}(p_{21}+p_{31})}{r}. \tag{11}$$

Ten wynik jako niezależny od n i s można nazwać „idealnym".

Przy założeniu (10) otrzymuje się:

$$Y_{11.max.} = \frac{s}{n+s} Y_{11.id.}. \tag{12}$$

Wielkość części rzeczywistej admitancji wejściowej Y_{11} można określić w przybliżeniu jako iloczyn jej wartości dla środka pasma (niezależnej od częstotliwości) oraz współczynnika rosnącego z częstotliwością, którego maksymalna wartość może wynosić $\frac{s}{n+s}$.

Postępując analogicznie z wyrażeniem (3), i obliczając z obu tych wyrażeń wzmocnienie otrzymuje się, że przy założeniu (10):

$$k = \frac{1}{\left(1+\frac{n}{2s}\right)\left(1+\frac{\bar{n}}{2\bar{s}}\right)} \frac{1}{2} a Y_{21.id.}. \tag{13}$$

A więc maksymalny współczynnik wprowadzany do zależności na wzmocnienie, spowodowany skończoną wartością indukcyjności L_n przypadający na jeden z transformatorów, może wynosić:

$$1+\frac{n}{2s} = 1-\frac{\omega^2}{2} L_n C_s. \tag{14}$$

Ze względu na indukcyjność szeregową L_n w układzie z rys. 2b otrzymuje się wzrost wzmocnienia na górnym krańcu pasma. Dokładniej efekt ten można przeliczyć dla konkretnego transformatora z zależności (2) i (3), znając indukcyjności szeregowe oraz pojemność.

4. ZAKOŃCZENIE

A. — Praca niniejsza jest pomyślana jako próba optymalizacji obwodów wejściowych (tak można ogólnie nazwać obwody wejściowy i wyjściowy) wzmacniacza grupowego.

Ogólnie rozumowanie to można przedstawić następująco — np. obwód wejściowy musi spełniać dwa zasadnicze warunki:

1) zapewniać minimalny współczynnik szumów,

2) wnosić minimalne przesunięcie fazowe do pętli sprzężenia, poza pasmem użytecznym.

W celu spełnienia tych warunków trzeba wykonać obwód wejściowy w układzie z rys. 1a [2] z transformatorem o zmniejszonych indukcyjnościach L_r i L_n oraz z maksymalną pojemnością C_{sd} (rozdział 3 niniejszej pracy).

Wielkość pojemności C_{sd} jest ograniczona przede wszystkim dwoma warunkami:

1) możliwością korekcji pojemności C_{sd} [3] w pasmie użytecznym,

2) dostateczną odległością rezonansu elementów L_n i C_s od krańca pasma użytecznego (warunek $|n| \ll |s|$).

Oba te ograniczenia można rozpatrywać oddzielnie, gdyż powodowane nimi dopuszczalne zmiany wzmocnienia są małe. Niespełnienie warunku $|n| \ll |s|$ powoduje wzrost wzmocnienia na krańcu pasma; jeżeli jest on mały, to w pewnym stopniu kompensuje wpływ strat w uzwojeniu pierwszym (ΔR_a). Wydaje się celowe liczyć wielkość pojemności C_{sd} z warunku pierwszego i sprawdzać spełnienie warunku drugiego.

Bezpośrednie korzystanie z zależności (2) i (3) w postaci ogólnej jest bardzo pracochłonne, pozwala jednak na dopuszczenie gorszych transformatorów przez korekcję charakterystyki wzmocnienia.

B. — Przyjęty do rozważań układ (rys. 1a) odpowiada wzmacniaczom z nieparzystą ilością stopni, pracujących w układzie wspólnego emitera i połączonych sprzężeniem zwrotnym kolektor-baza. Ze względu na przyjęte określenie obwodu wejściowego, wszystkie podane zależności (oraz grafy) są słuszne również dla modyfikacji tego układu dostosowanej do parzystej ilości stopni np. ze sprzężeniem zwrotnym emiter-baza. Oczywiście spotykane czasem rozwiązania wzmacniaczy z tzw. dopasowaniem biernym stanowią szczególne przypadki powyższych rozwiązań podstawowych. Powstają one przez podstawienie $p_{21} = 0$ lub $p_{31} = 0$.

C. — Rysunek 2c przedstawia graf przepływowy stosunkowo rozbudowanego układu wejściowego; traktując jego elementy jako dowolne impedancje można w zasadzie każdy spotykany w literaturze układ tego typu wzmacniacza sprowadzić do tego schematu zastępczego i zapisać podanym grafem. Znając grafy obwodów wejściowych (rys. 2) i sposób ich łączenia (rys. 1b) można bezpośrednio określić dowolne parametry układu — jako transmitancje wiążące sygnały w dostępnych węzłach.

Należy zaznaczyć, że praktyczną możliwość korzystania z wyników otrzymywanych z grafu z rys. 2, w postaci ogólnej, dałoby dopiero opracowanie programu na maszynę cyfrową. Postać grafu z rys. 2 nie jest przypadkowa, dobór przyjętych węzłów zapewnia dostęp do interesujących zwykle wielkości, a konfiguracja gałęzi jest tak pomyślana, aby odpowiadała podstawowym zależnościom układu. Umożliwia to dokonywanie pewnych zmian wprost na grafie przepływowym.

Politechnika Warszawska
Katedra Urządzeń Teletransmisyjnych i Telegraficznych

WYKAZ LITERATURY

1. Chow Y., Cassignol E.: Linear Signal — Flow Graphs and Applications.
2. Brożyna J.: Współczynnik szumów wzmacniaczy grupowych. — Rozprawy Elektrotechn., tom XIV, 1968, z. 2, str. 299—309.
3. Brożyna J.: Korekcja transformatorów wejściowych wzmacniaczy grupowych. — Rozprawy Elektrotechn., tom XV, 1969, z. 2, str. 313—324.

J. BROŻYNA

INPUT CIRCUITS OF HYBRID COIL FEEDBACK AMPLIFIERS

Summary

On the basis of an accepted equivalent network of a transformer (having leakage inductances, loss reactances of the windings and lupmed own capacitance on one of the windings in the upper frequencies of the usable band) and assuming a sufficient depth of the faeedback loop, the present paper considers the frequency dependance of amplification and input impedance of hybrid coil feedback amplifiers. The paper contains a general proposal for manufacturing an input transformer corrected in definite manner and discusses certain limitations of the usable band due to the influence of parasitic elements of the transformer.

J. BROŻYNA

LES CIRCUITS D'ENTRÉE DES AMPLIFICATEURS DE GROUPE

Résumé

L'oeuvre présent, en s'appuyant sur le schéma équivalent accepté du transformateur (contenant sur les hautes fréquences de la bande utilisée une inductance de dissipation, une résistance de pertes des bobinages et une propre capacité concentrée sur un des bobinages) et partant de principe que la profondeur de la boucle de réaction est suffisante, analyse les caractéristiques amplification-fréquence et impédance d'antrée-fréquence-d'un amplificateur de groupe, construit d'après le schéma typique avec une ci-nommée ,adaptation active". L'oeuvre contient une certaine proposition générale d'effectuer un transformateur d'entrée avec une correction déterminée et discute aussi une certaine limitation de la bande utile, causée par l'influence des éléments parasites du transformateur.

Е. БРОЖЫНА

ВХОДНЫЕ КОНТУРЫ ГРУППОВЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ

Резюме

Настоящая работа на основании принятой эквивалентной схемы трансформатора (заключающей на верхних частотах используемой полосы индуктивности рассеяния, сопротивления потерь в обмотках и сосредоточенную собственную емкость на одной из обмоток) и предположения достаточной глубины петли обратной связи, рассматривает частотную зависимость усиления и входного импеданса группового усилителя, построенного по типовой схеме с так называемым ,,активным согласованием''. Работа содержит некоторое общее предложение построения, корректированного определенным образом, входного трансформатора и занимается некоторым ограничением используемой полосы, вызываемым влиянием паразитных элементов трансформатора.

621.373.52

STANISŁAW DOBOSZ

Metoda poprawiania stabilności wyzwalania końca impulsu w tranzystorowym generatorze samodławnym

Rękopis dostarczono 2.5.1968

Wyzwalanie końca impulsu w tranzystorowym generatorze samodławnym przebiegiem szpilkowym przyłożonym na wejście jest utrudnione ze względu na to, że występuje w warunkach nasycenia, kiedy tranzystor nie jest elementem czynnym, a jego oporność wejściowa spada do kilkunastu omów. Prawdopodobieństwo prawidłowego wyzwalania w tych warunkach nie jest wysokie.

W artykule omówiono metodę wyzwalania końca impulsu drogą impulsowego odcinania zasilania kolektora, która charakteryzuje się dużą pewnością działania. Jako przykład zastosowania opisano laboratoryjny generator impulsów służący do badania właściwości dynamicznych mierników wysterowania w radiofonii.

1. WSTĘP

Generator samodławny w układzie klasycznym generuje impuls, którego czas trwania jest zależny od parametrów układu. Impuls ten charakteryzuje się stosunkowo dużą mocą oraz płaskim wierzchołkiem, co jest cenną zaletą tego typu generacji. Stabilność czasu T_1 trwania impulsu nie jest jednak wysoka, ponieważ T_1 zmienia się w sposób niekontrolowany, w zależności od egzemplarza tranzystora, obciążenia, temperatury itd.

W pracy wyzwalanej można uzyskać generację impulsów o narzuconych momentach wystąpienia początku i końca impulsu. Do wyzwalania początku i końca impulsu stosuje się na ogół odpowiednio spolaryzowane przebiegi szpilkowe.

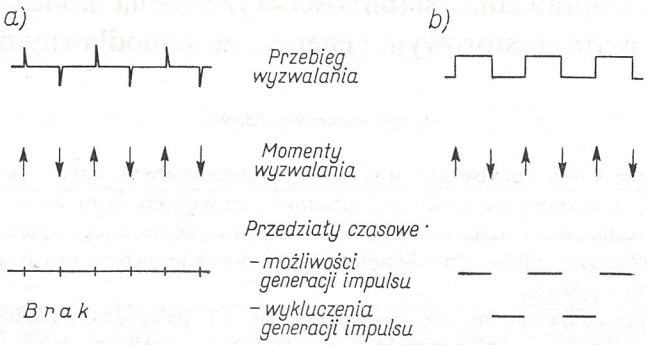
Prawdopodobieństwo prawidłowego wyzwolenia początku impulsu przy odpowiednio dobranej amplitudzie i kształcie przebiegu szpilkowego jest na ogół bardzo wysokie, bliskie jedności. Wyzwalanie natomiast końca impulsu w tranzystorowym generatorze samodławnym jest operacją technicznie trudniejszą i mniej pewną, zależną od egzemplarza tranzystora oraz od tego, o ile impuls wyzwalany jest krótszy od impulsu generacji własnej, o szerokości T_0. Trudności wynikają stąd, że wyzwalanie końca impulsu występuje w warunkach nasycenia, kiedy to tranzystor nie jest elementem czynnym, a jego oporność wejściowa spada do kilkunastu omów.

Tematem pracy jest metoda, która umożliwia uzyskanie wysokiego prawdopodobieństwa wyzwalania końca impulsu, praktycznie równego jedności. Metodę tę nazwał autor *metodą bezwzględnego wyzwalania końca impulsu.*

Warto zauważyć, że przy istniejącym wysokim prawdopodobieństwie wyzwalania początku impulsu stanowi ona równocześnie metodę bezwzględnego wyzwalania przebiegu impulsowego wytwarzanego w generatorze samodławnym.

2. METODA BEZWZGLĘDNEGO WYZWALANIA PRZEBIEGU IMPULSOWEGO

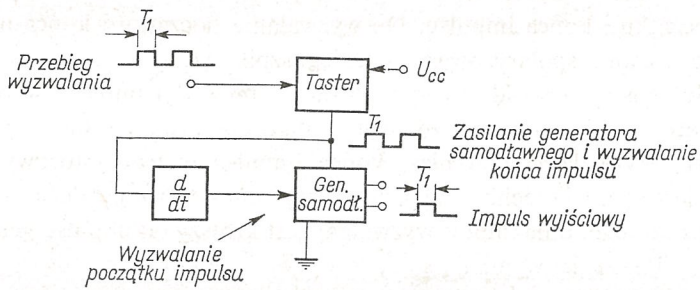
Metoda ta różni się od stosowanych powszechnie sposobów wyzwalania początku i końca impulsu ciągiem przebiegów szpilkowych tym, że wymaga innego przebiegu wyzwalającego (rys. 1) — najlepiej prostokątnego. Przebieg ten w razie potrzeby można łatwo uzyskać z przebiegu szpilkowego.



Rys. 1. a) Wyzwalanie przebiegiem szpilkowym, b) Wyzwalanie przebiegiem prostokątnym

Szpilkowy przebieg wyzwalający pokazany na rys. 1a niesie przede wszystkim informację o momentach i kierunkach wyzwalania. Prostokątny przebieg wyzwalania pokazany na rys. 1b:

— niesie informację o momentach i kierunkach wyzwalania (podobnie jak przebieg szpilkowy),
— ustala przedziały czasowe możliwości generacji impulsu,
— ustala przedziały czasowe w y k l u c z e n i a impulsu.



Rys. 2. Układ zasilania generatora samodławnego poprzez taster

Wykorzystanie informacji niesionej przez przebieg wyzwalania odbywa się praktycznie w ten sposób, że generator samodławny zasilany jest nie wprost z baterii kolektorowej, lecz poprzez tak zwany taster, który jest kluczem elektronowym otwieranym i zamykanym przebiegiem wyzwalania (rys. 2). Wyzwalanie końca impulsu odbywa się więc drogą odcinania zasilania i jest procesem o dużej pewności.

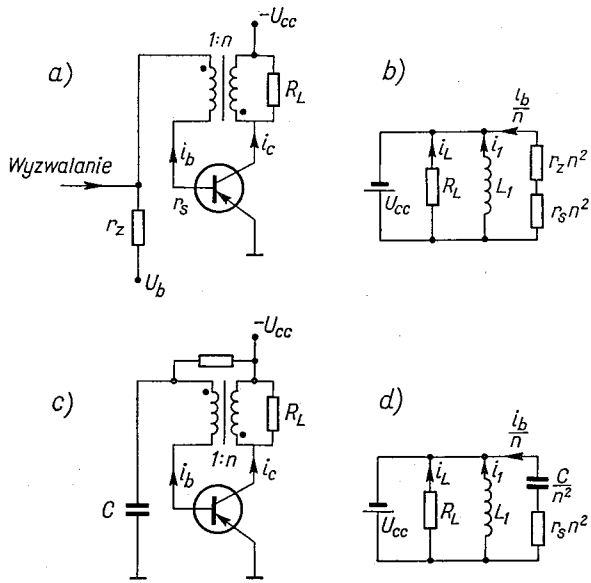
3. WARUNKI POPRAWNEJ PRACY UKŁADU BEZWZGLĘDNEGO WYZWALANIA

Do bezwzględnego wyzwalania najlepiej nadaje się przebieg prostokątny, przy czym wypełnienie przebiegu może być różne. Przebiegiem wyzwalania może być również przebieg sinusoidalny, w którym przejścia przez zero niosą informację o momentach wyzwalania, przy czym części przebiegu położone z jednej strony osi zerowej niosą informację o przedziałach czasowych możliwości generacji impulsu, natomiast położone z drugiej strony osi zerowej ustalają przedziały czasowe wykluczenia impulsu. Stabilność wyzwalania przy zastosowaniu przebiegu sinusoidalnego jest nieco gorsza niż przy przebiegu prostokątnym.

Generator samodławny powinien być tak zbudowany, aby w pracy bez wyzwalania końca impulsu generował impuls o czasie trwania T_0 większym niż czas trwania impulsu T_1 określony przebiegiem wyzwalania. Korzystnie jest przyjąć:

$$T_0 \cong 1{,}2T_1.$$

T_0 jest czasem przebywania tranzystora w nasyceniu i może być uznane jako czas trwania impulsu w pracy bez wyzwalania końca impulsu. T_0 zależne jest od elementów układu generatora samodławnego w sposób wynikający z następującej analizy.



Rys. 3. Dwa typy generatorów samodławnych oraz ich układy zastępcze sprowadzone do strony kolektorowej dla zakresu formowania wierzchołka impulsu (tranzystor w nasyceniu); a), b) — układ bez kondensatora w obwodzie bazy, c), d) — układ z kondensatorem w obwodzie bazy

W momencie wyzwolenia początku impulsu (początek T_0) następuje proces regeneracyjny, w ciągu którego tworzone jest zbocze narastania impulsu. Proces ten trwa do czasu osiągnięcia przez prąd bazy zakresu nasycenia. W momencie tym proces regeneracyjny ustaje i rozpoczyna się proces formowania wierzchołka impulsu. Dla procesu formowania wierzchołka impulsu obowiązują układy zastępcze generatora samodławnego podane na rys. 3.

Prąd kolektora wynosi:

$$i_c = i_1 + i_L + \frac{i_b}{n}. \tag{1}$$

Koniec procesu formowania wierzchołka impulsu i początek regeneracyjnego formowania końca impulsu zaczyna się, gdy tranzystor zaczyna wychodzić z nasycenia i przechodzi w zakres aktywny, to znaczy, gdy zaczyna obowiązywać zależność:

$$i_c = \beta_0 \cdot i_b. \tag{2}$$

Wstawiając zależność (2) do wzoru (1) otrzymujemy:

$$i_1 + i_L + \frac{i_b}{n} = \beta_0 i_b, \tag{3}$$

$$i_1 + i_L = i_b n\left(\frac{\beta_0}{n} - \frac{1}{n^2}\right). \tag{4}$$

W przypadku zerowych warunków początkowych oraz dla U_{cc} = constans otrzymujemy dla obu układów (rys. 3a i 3c):

$$i_1 = \frac{U_{cc}}{L} t, \tag{5}$$

$$i_L = \frac{U_{cc}}{R_L}, \tag{6}$$

natomiast i_b nie jest jednakowe dla obu układów i wynosi:
— w układzie a)

$$i_b = \frac{U_{cc}(t)}{n(r_s + r_z)}, \tag{7}$$

— w układzie c)

$$i_b = \frac{U_{cc}}{nr_s} e^{-\frac{t}{r_s C}}. \tag{8}$$

Czas T_0 trwania impulsu dla U_{cc} = constans i zerowych warunków początkowych w układzie przedstawionym na rysunku 3a można obliczyć wstawiając zależności (5), (6), (7) do wzoru (4); wynosi on:

$$T_0 = \left(\frac{\beta_0}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{r_s + r_z}{R_L}\right) \frac{L}{r_s + r_z}. \tag{9}$$

Dla układu c) pokazanego na rys. 3c przy U_{cc} = constans i zerowych warunkach początkowych czas T_0 trwania wierzchołka impulsu można obliczyć z równania (10), które uzyskano przez wstawienie zależności (5), (6), (8) do wzoru (4).

$$\left(\frac{T_0}{\frac{L_1}{r_s}} + \frac{r_s}{R_L}\right) e^{\frac{T_0}{r_s C}} = \left(\frac{\beta_0}{n} - \frac{1}{n^2}\right). \tag{10}$$

Zależności (9) i (10) nie uwzględniają strat zachodzących na oporności uzwojeń cewek. Analizę tę pozwolił sobie autor pominąć jako zagadnienie drugoplanowe w tej pracy.

We wzorach (9) i (10) r_s jest równe średniemu nachyleniu charakterystyki wejściowej tranzystora w zakresie nasycenia i wynosi od kilku do kilkunastu omów dla tranzystorów małej mocy.

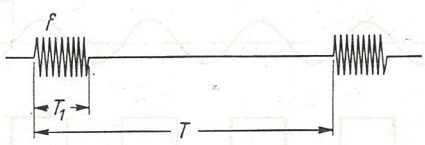
4. PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA METODY BEZWZGLĘDNEGO WYZWALANIA ORAZ UZYSKANE WYNIKI

Jako przykład zastosowania metody bezwzględnego wyzwalania może służyć wykonany przez autora laboratoryjny generator impulsów testowych służący do kontroli właściwości dynamicznych mierników wysterowania stosowanych w radiofonii, który jest źródłem impulsów o następujących parametrach:

Czas trwania impulsu: od 3 do 10 msek, wyzwalane przebiegiem sinusoidalnym o przestrajanej częstotliwości.

Czas repetycji impulsów: od 0,3 do 6 sek.

Generator ten ma za zadanie otwieranie bramki sygnałowej, przez którą przechodzi w czasie T_1 przebieg sinusoidalny o częstotliwości f położonej w pasmie akustycznym (rys. 4).



Rys. 4. Ciąg impulsów pomiarowych

Wymagane jest, aby dokładność T_1 odpowiadała dokładności częstotliwości przebiegu wyzwalającego pobieranego z generatora akustycznego wysokiej klasy.

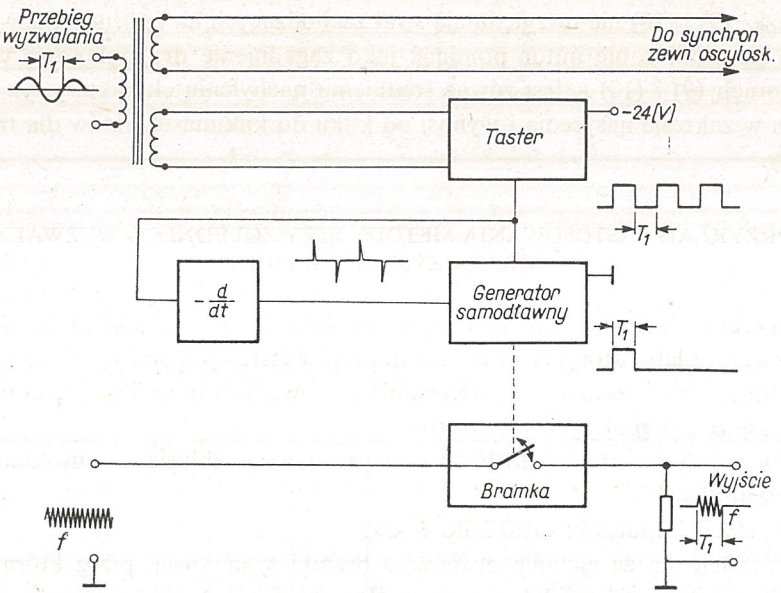
Omawiany generator impulsów został zaprojektowany w układzie funkcjonalnym pokazanym na rys. 5, natomiast przebiegi operacyjne pokazane są na rys. 6. Generator samodławny zaprojektowany jest tak, że w przypadku zasilania go wprost z baterii kolektorowej generowałby impuls o czasie trwania

$$T_0 = 1{,}2T_1(\text{mx}) = 12 \text{ msek}.$$

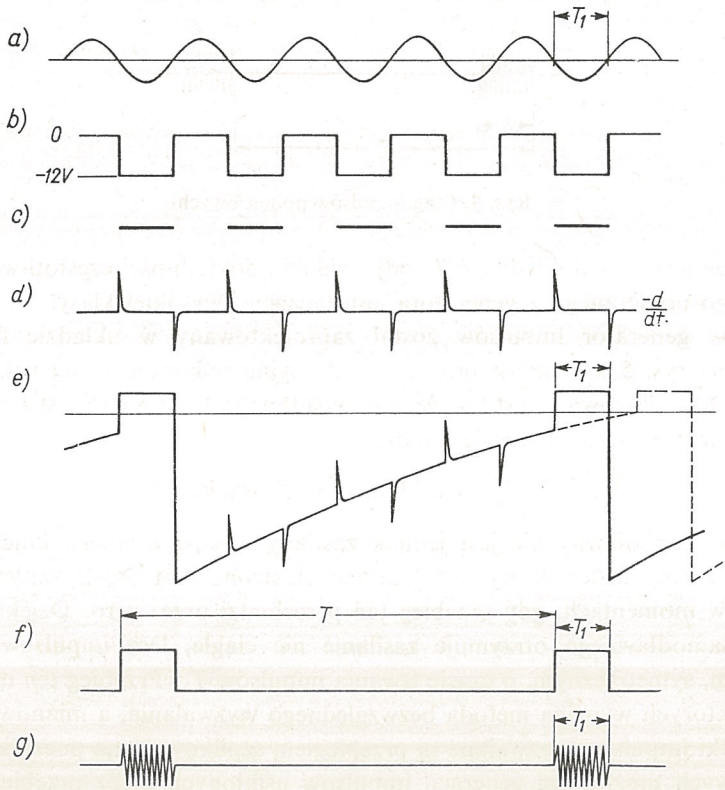
Generator samodławny nie jest jednak zasilany wprost z baterii kolektorowej, lecz poprzez tak zwany taster, który jest kluczem elektronowym przełączanym przebiegiem wyzwalania w momentach, gdy przebieg ten przechodzi przez zero. Dzięki temu stopień generatora samodławnego otrzymuje zasilanie nie ciągłe, lecz impulsowe przebiegiem prostokątnym, symetrycznym, o czasie trwania impulsów T_1. Przebieg ten niesie wszystkie informacje, których wymaga metoda bezwzględnego wyzwalania, a mianowicie:

— początki impulsów wyzwalane są przebiegiem szpilkowym na początku przedziałów czasowych możliwości generacji impulsów ustalonych przez przebieg wyzwalania,

— końce impulsów ustalone są w czasie przez przebieg wyzwalania i wyzwalane drogą odcinania zasilania przez układ tastera. Impulsy są więc skracane w ten



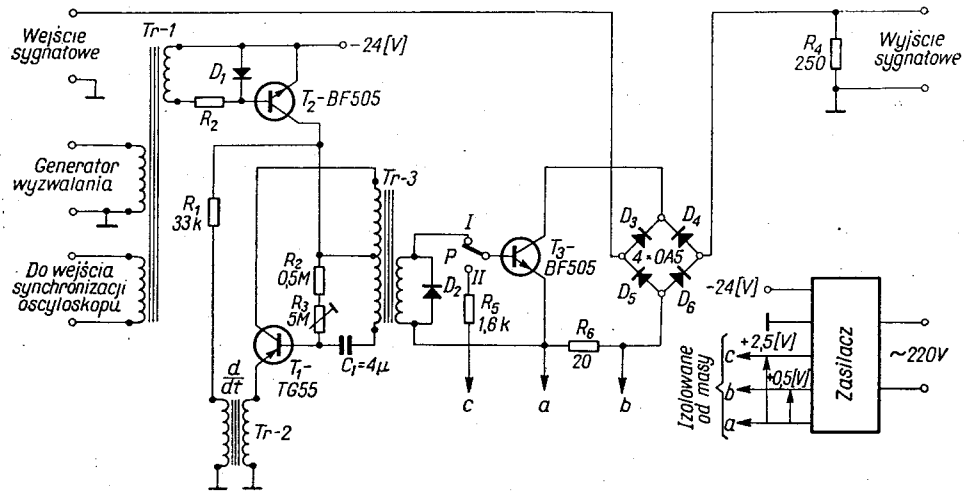
Rys. 5. Układ funkcjonalny generatora



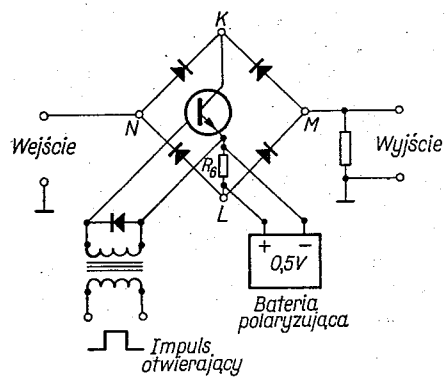
Rys. 6. Przebiegi operacyjne: a) przebieg wyzwalania, b) przebieg zasilania i wyzwalania końca impulsu, c) przedziały czasowe możliwości generacji impulsu, d) przebieg wyzwalania początku impulsu, e) przebieg na bazie, f) generowany impuls, g) przebieg wyjściowy

sposób z naturalnej szerokości T_0 do wymaganej T_1. Dzięki temu czas trwania impulsu jest dokładnie kontrolowany przebiegiem wyzwalania.

Częstotliwość repetycji impulsów (okres T) regulowana jest potencjometrem R_3 (rys. 7a).



Rys. 7a. Schemat generatora



Rys. 7b. Układ bramki sygnałowej

Ze względów schematowych generator i taster zostały rozwiązane na dwóch tranzystorach przeciwstawnych, chociaż możliwe jest również rozwiązanie na tranzystorach jednakowych.

W celu uzyskania przełączania tastera w momentach przechodzenia przez zero przebiegu wyzwalającego konieczne jest stworzenie jednakowego obciążenia uzwojenia wtórnego transformatora TR-1 dla obu kierunków prądu. W tym celu do tranzystora krzemowego T_2 pracującego w stopniu tastera została dobrana dioda krzemowa o charakterystyce napięciowo-prądowej możliwie zbliżonej do charakterystyki napięciowo-prądowej baza-emiter tranzystora. Dioda ta jest załączona między bazę i emiter i dzięki temu transformator TR-1 jest obciążony jednakowo dla obu kierunków indukowanej w uzwojeniu wtórnym siły elektromotorycznej.

Interesujący jest układ bramki sygnałowej, który warto omówić z uwagi na nietypowe rozwiązanie. Jest to bramka diodowo-tranzystorowa. Działa następująco:

— gdy nie ma impulsu otwierającego, tranzystor T_3, znajdujący się w przekątnej mostka, nie przewodzi, prąd kolektora nie płynie, bramka jest zamknięta,

— gdy pojawi się impuls otwierający, tranzystor przewodzi, bramka jest otwarta.

Tranzystor T_3 użyty jest więc tu jako zwieracz. Przepływa przez niego tylko prąd sygnału, natomiast nie ma w obwodzie żadnych źródeł zasilania.

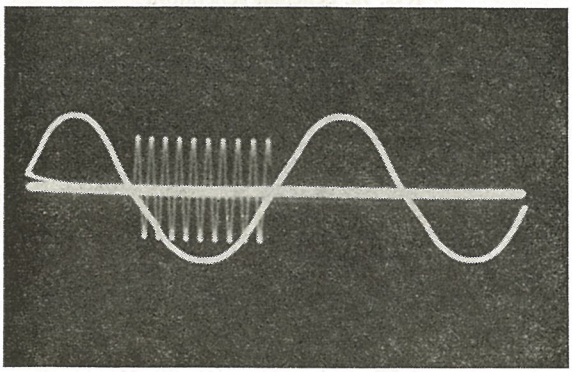
Aby uniknąć zniekształceń nieliniowych wynikających z tego, że prąd przez diodę germanową zaczyna płynąć praktycznie przy napięciu około 0,2 V, a nie od zera, wprowadzono do przekątnej mostka stałe napięcie polaryzujące o wielkości około 0,5 V, wspólne dla wszystkich diod. (Sygnał przechodzi zawsze szeregowo przez dwie diody i tranzystor). Napięcie to uzyskuje się na oporności $R_6 = 20$ omów, przez którą przepływa prąd 25 mA z części zasilacza izolowanej od masy.

Przełącznik P służy do trwałego otworzenia bramki. Bramka charakteryzuje się następującymi parametrami:

— tłumienność w stanie zamkniętym — większa niż 40 dB,

— oporność przejścia — około 80 omów,

— maksymalne napięcie wyjściowe na oporności 250 omów wynosi 15 woltów.



Rys. 8. Przebieg wyjściowy o $T_1 = 10$ msek na tle przebiegu wyzwalania, którym jest w tym przypadku napięcie z sieci oświetleniowej

Pracę urządzenia można ocenić na podstawie fotografii przebiegu wyjściowego na tle przebiegu wyzwalania, wykonanej z ekranu oscyloskopu dwustrumieniowego (rys. 8). Przebiegiem wyzwalającym jest w tym przypadku napięcie z sieci oświetleniowej o częstotliwości 50 Hz, ustalające $T_1 = 10$ msek.

5. UWAGI KOŃCOWE

Opisaną metodę bezwzględnego wyzwalania zastosował autor w trzech wykonanych różnych urządzeniach impulsowych zbudowanych dla $T_1 = 0{,}5$ mikrosekundy, 5 mikrosekund, 3—10 milisekund. We wszystkich przypadkach uzyskano bardzo dużą pewność

i precyzję działania oraz całkowitą niezależność pracy od elementów tranzystorów i warunków zewnętrznych.

Reasumując stwierdzić można, że metoda bezwzględnego wyzwalania dodaje do znanych zalet generatora samodławnego (duża moc w impulsie, płaski wierzchołek i inne) jeszcze jedną, a mianowicie możliwość bardzo pewnej regulacji czasu trwania impulsu T_1.

Centralne Naukowo-Badawcze Laboratorium
Radia i Telewizji, Warszawa

WYKAZ LITERATURY

1. Baranowski J., Jankowski T.: Tranzystorowe układy impulsowe. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1961.
2. Hunter L. P.: Elektronika półprzewodnikowa. Państwowe Wydawnictwa Techniczne, Warszawa 1960.

S. DOBOSZ

METHOD OF IMPROVEMENT OF RELEASE STABILITY OF THE END OF IMPULSE IN A SELF-CHOKE TRANSISTOR GENERATOR

Summary

The release of the end of impulse in a self-choke transistor generator by means of a pin run applied at the entry is difficult due to the fact that it occurs in the conditions of saturation, when the transistor is not an active element and its entry resistance falls down to a dozen or so ohms.

The likelihood of correct release is not high in such conditions.

The paper discusses the method of release of the end of impulse by means of impulse cut-off of collector supply which is characterized by a considerable reliability of action.

By way of example, a laboratory impulse generator has been described which is used to investigate the dynamic properties of control meters in broadcasting.

S. DOBOSZ

LA MÉTHODE D'AMÉLIORATION DE LA STABILITÉ DU DÉCLENCHEMENT DU BOUT DE L'IMPULSION DANS UN GÉNÉRATEUR BLOQUÉ À TRANSISTOR

Résumé

Le déclenchement du bout de l'impulsion dans le générateur bloqué à transistor par le signal-aiguille apporté à l'entrée est difficile car il arrive dans les conditions de la saturation, ou le transistor n'est pas un élément actif et sa résistance d'entrée tombe à valeur de 10 a 20 oms.

La probabilité du déclenchement correct n'est pas grande.

Dans l'oeuvre on a décrit la méthode du déclenchement le bout de l'impulsion par la coupure de l'alimentation du collecteur, qui assure une grande certitude d'action.

Comme un exemple d'utilisation on a décrit un générateur d'impulsions de laboratoire, qui permet d'étudier les propriétés dynamiques des hypsomètres dans la radiodiffusion.

S. DOBOSZ

VERFAHREN ZUR STABILISIERUNG DER AUSLÖSUNG VON ENDFLANKEN DER VOM BLOCKINGGENERATOR ERZEUGTEN IMPULSEN

Zusammenfassung

Die Auslösung der Endflanken vom einem Blockinggenerator erzeugten Impulsen durch an den Eingang angelegten Nadelspannungen ist erschwert dadurch, dass der Transistor im gesättigten Zustande ist, wobei sein Eingangswiderstand den Wert von 20 Ohms nicht überschreitet.

In diesem Zustande ist die Wahrscheindlichkeit der Exakheit der Auslösung nicht gross.

Es wird ein Verfahren beschrieben, dass das Abschalten der Kolektorspannung des Transistors impulsartig bewirkt und dadurch grosse Exaktheit der Auslösung der generirten Impulse sichert.

Als Beispiel wird eine Einrichtung zur Kontrolle der dynamischen Parameter des Austeuerungsmessers im Rundfunk beschrieben die von dem angegebenen Verfahren Gebrauch macht.

С. ДОБОШ

МЕТОД ПОВЫШЕНИЯ СТАБИЛЬНОСТИ ПУСКА ОКОНЧАНИЯ ИМПУЛЬСА В БЛОКИНГГЕНЕРАТОРЕ НА ПОЛУПРОВОДНИКОВОМ ТРИОДЕ

Резюме

Стабилизация пуска окончания импульса, получаемого от транзисторного блокинг-генератора кратковременными импульсами, подаваемыми на вход, является затруднительной по той причине, что пуск окончания импульса происходит в условиях, соответствующих режиму насыщения транзистора, когда транзистор перестает быть активным элементом схемы, а его входное сопротивление уменьшается до 10÷20 ом.

Вероятность правильного пуска окончания импульса в этих условиях незначительна.

В работе описан разработанный автором, метод пуска окончания импульса путем импульсной отсечки питания коллектора; этим методом обеспечивается значительная вероятность стабильности пуска окончания импульса.

В качестве примера описан лабораторный импульсный генератор, предназначенный для испытания динамических свойств измерителей уровня, применяемых в радиовещании.

621.395.652

STANISŁAW DOBOSZ

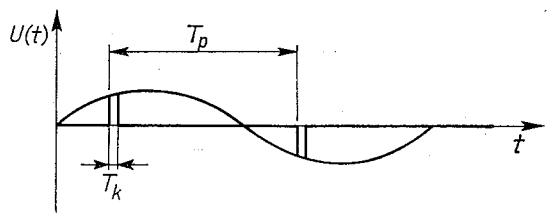
Tranzystorowy przełącznik kanałów

Rękopis dostarczono 2.5.1968

W pracy omówiono tranzystorowy przełącznik kanałów wykonany w oparciu o opisaną w zeszycie 2 z 1969 r. „Rozpraw Elektrotechnicznych" metodę poprawiania stabilności wyzwalania końca impulsu w tranzystorowym generatorze samodławnym.

1. WSTĘP

W systemach telefonii wielokrotnej opartych na kryterium położenia w czasie proces zwielokratniania odbywa się we współpracujących ze sobą elektronowych przełącznikach kanałów urządzenia nadawczego i odbiorczego. Zwielokrotnienie to uzyskiwane jest drogą zastąpienia połączenia ciągłego w kanale przez krótkotrwałe połączenia impulsowe trwające przez czas próbkowania T_k i powtarzane w okresach próbkowania T_p (rys. 1).



Rys. 1. Otwieranie bramki sygnałowej w kanale

Wymagany okres próbkowania T_p dla prawidłowego przeniesienia w kanale założonego pasma częstotliwości zależny jest od najwyższej częstotliwości f_{max} tego pasma:

$$T_p \leqslant \frac{1}{2f_{max}}.$$

Czas próbkowania T_k natomiast, chociaż pożądany byłby jak najdłuższy, jest ograniczony zależnością

$$T_k \leqslant \frac{T_p}{N},$$

gdzie N jest krotnością systemu.

Stąd wynikają warunki na bramki sygnałowe w kanałach, które otwierać się muszą na czas T_k co okres czasu T_p.

W technice układów lampowych przełączniki elektronowe realizowane są w specjalnych lampach strumieniowych zwanych cyklofonami. W technice układów tranzystorowych można uniknąć stosowania drogiego cyklofonu i przełączniki kanałów budować z elementów biernych i półprzewodnikowych.

Przełączniki tego typu składają się:

[1] z krokowych rozdzielaczy impulsów, [2] z bramek sygnałowych.

Krokowy rozdzielacz impulsów jest zbudowany z łańcucha ogniw, w którym przesuwa się tak zwany impuls wędrujący w takt przyłożonego z zewnątrz przebiegu przełączania. Przesuwanie się impulsu wędrującego odbywa się w ten sposób, że za każdym impulsem przebiegu przełączania impuls wędrujący przesuwa się o jedno ogniwo — robi jeden krok i znajduje się w coraz to dalszym ogniwie łańcucha, skąd może być pobrany i dowolnie wykorzystany na przykład jak w naszym przypadku, do otwierania bramki sygnałowej kolejnego kanału.

Bramki sygnałowe są na ogół bramkami symetrycznymi zbudowanymi z diod półprzewodnikowych, przy czym budowa ich jest różna w przełącznikach nadawczym i odbiorczym z uwagi na inne warunki elektryczne, jakie muszą spełniać.

2. PRZEGLĄD NIEKTÓRYCH STOSOWANYCH ROZWIĄZAŃ, ANALIZA ICH PRZYDATNOŚCI ORAZ ZAŁOŻENIA METODY ROZWIĄZANIA WŁASNEGO

W krokowych rozdzielaczach impulsów jako ogniwa łańcucha bywają stosowane:

— rdzenie ferromagnetyczne [2],

— przerzutniki dwustanowe [3], [4], [7],

— diody specjalne, zdolne do magazynowania ładunków mniejszościowych [5],

— diody czterowarstwowe [6].

Układy na rdzeniach ferromagnetycznych stosowane w maszynach liczących uznano w tym przypadku za trudne do zastosowania z uwagi na duże moce i prądy potrzebne do przełączania rdzeni.

Układy na przerzutnikach dwustanowych uznano za nieodpowiednie ze względu na to, że wymagają zastosowania w każdym ogniwie dwu tranzystorów, co łącznie z dużą ilością elementów biernych prowadzi do znacznej rozbudowy urządzenia.

Układy na diodach specjalnych, zdolnych do magazynowania ładunków mniejszościowych, oraz układy na diodach czterowarstwowych, chociaż rokują nadzieję niezwykle prostych rozwiązań, nie mogły być zastosowane wobec braku tych elementów.

Wymienione aspekty skłoniły do podjęcia prac naukowo-badawczych nad opracowaniem własnych, możliwie prostych i pewnie działających urządzeń.

Warunek prostoty układu skłonił autora do użycia w każdym ogniwie łańcucha tylko po jednym tranzystorze i budowy ogniwa łańcucha w układzie jednostanowego generatora samodławnego, który — jak wiadomo — charakteryzuje się dużą mocą w impulsie, płaskim wierzchołkiem oraz wygodnym transformatorowym wyjściem, co umożliwia łatwe wykonanie symetrycznych układów bramkowych.

Aby przy tych zaletach zapewnić dobre spełnienie drugiego warunku — precyzyjnego i niezawodnego działania — zastosowano oryginalną metodę bezwzględnego wyzwalania

[1] Krokowy rozdzielacz impulsów jest przedmiotem zgłoszenia patentowego nr 133817.

przebiegu impulsowego opracowaną przez autora i opisaną w pracy „Metoda poprawiania stabilności wyzwalania końca impulsu w tranzystorowym generatorze samodławnym" (Rozprawy Elektrotechniczne, z. 2/1969, str. 337—346).

Metoda ta zapewnia wysoką precyzję i pewność działania dzięki dokładnemu wyzwalaniu początku i końca impulsu.

Pewne wyzwalanie początku impulsu nie jest trudne i prawdopodobieństwo wykonania tej operacji przy prawidłowo dobranej amplitudzie i kształcie przebiegu szpilkowego wyzwalającego jest wysokie.

Wyzwalanie natomiast końca impulsu w tranzystorowym generatorze samodławnym jest operacją znacznie trudniejszą i mniej pewną, zależną od egzemplarza tranzystora oraz od tego, o ile impuls wyzwalany jest krótszy od impulsu generacji własnej T_0. Trudności wynikają stąd, że wyzwalanie końca impulsu występuje w warunkach nasycenia, kiedy to tranzystor nie jest elementem czynnym, a jego oporność wejściowa spada do kilkunastu omów.

Metoda bezwzględnego wyzwalania polega na wyzwalaniu końca impulsu nie przy pomocy przebiegów szpilkowych doprowadzonych do obwodu bazy, lecz drogą odcinania zasilania stopnia. Umożliwia to uzyskanie wysokiego prawdopodobieństwa wyzwalania końca impulsu, praktycznie równego jedności.

Warto zauważyć, że przy istniejącym wysokim prawdopodobieństwie wyzwalania początku impulsu, stanowi ona równocześnie metodę bezwzględnego wyzwalania przebiegu impulsowego wytwarzanego w generatorze samodławnym, co umożliwia bardzo pewną i precyzyjną pracę urządzeń, w których została zastosowana.

3. UKŁAD BLOKOWY WYKONANEGO PRZEŁĄCZNIKA KANAŁÓW

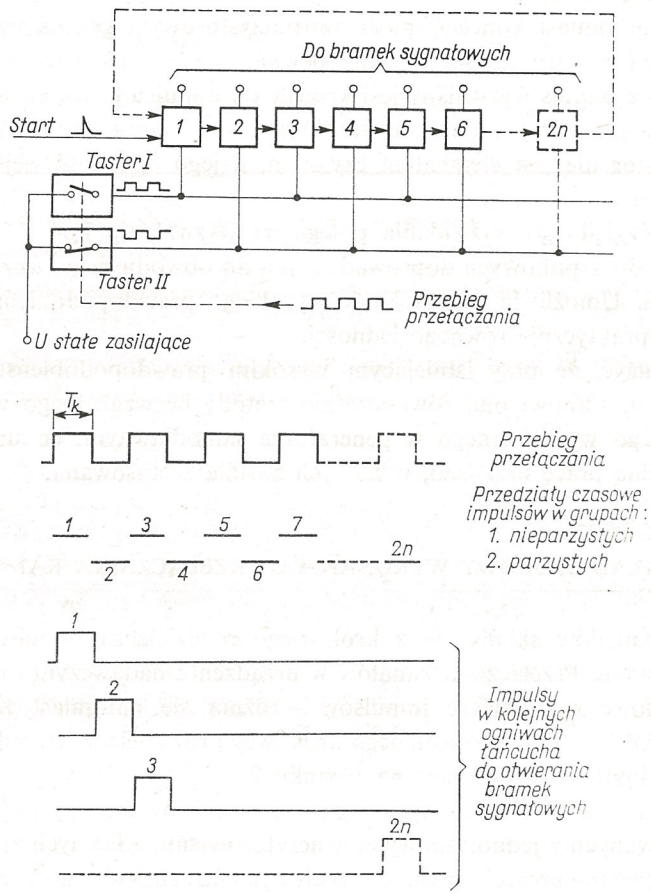
Przełącznik kanałów składa się z krokowego rozdzielacza impulsów oraz zespołu bramek sygnałowych. Przełączniki kanałów w urządzeniu nadawczym i odbiorczym mają identyczne krokowe rozdzielacze impulsów — różnią się natomiast zespołem bramek sygnałowych. Układ blokowy wykonanego krokowego rozdzielacza impulsów wraz z przebiegami operacyjnymi pokazany jest na rysunku 2.

Rozdzielacz impulsów składa się z grupy parzystych oraz grupy nieparzystych ogniw łańcucha zbudowanych z jednostanowych generatorów samodławnych zasilanych oddzielnie dwoma przebiegami prostokątnymi o przeciwnych fazach, które generowane są w dwóch sprzężonych ze sobą tasterach. Łańcuch może zawierać dowolną, ale zawsze parzystą ilość ogniw.

Jednostanowy generator samodławny znajdujący się w każdym ogniwie jest tak zbudowany, że w przypadku zasilania go składową stałą wprost z baterii, bez użycia tastera, generowałby impuls o czasie trwania T_0 większym od T_k.

Przy zasilaniu tegoż ogniwa przebiegiem prostokątnym z tastera, który daje impulsy zasilania o czasie trwania T_k, impuls generowany w ogniwie łańcucha jest s k r a c a n y do wymaganej wielkości T_k i w ten sposób skutecznie kalibrowany. Skracanie to odbywa się w prosty i pewny sposób — drogą pozbawienia ogniwa łańcucha zasilania po upływie czasu T_k.

Taster jest kluczem elektronowym sterowanym prostokątnym przebiegiem przełączania i ma za zadanie włączyć napięcie zasilające na swoją grupę ogniw w momentach przewidzianych na początek impulsu w ogniwach tej grupy i wyłączyć w momentach przewidzianych na koniec impulsu. Prosty przebieg prostokątny przychodzący z tastera niesie więc zarówno energię potrzebną do zasilania łańcucha, jak też pewną w 100% synchronizację początku i końca impulsu.



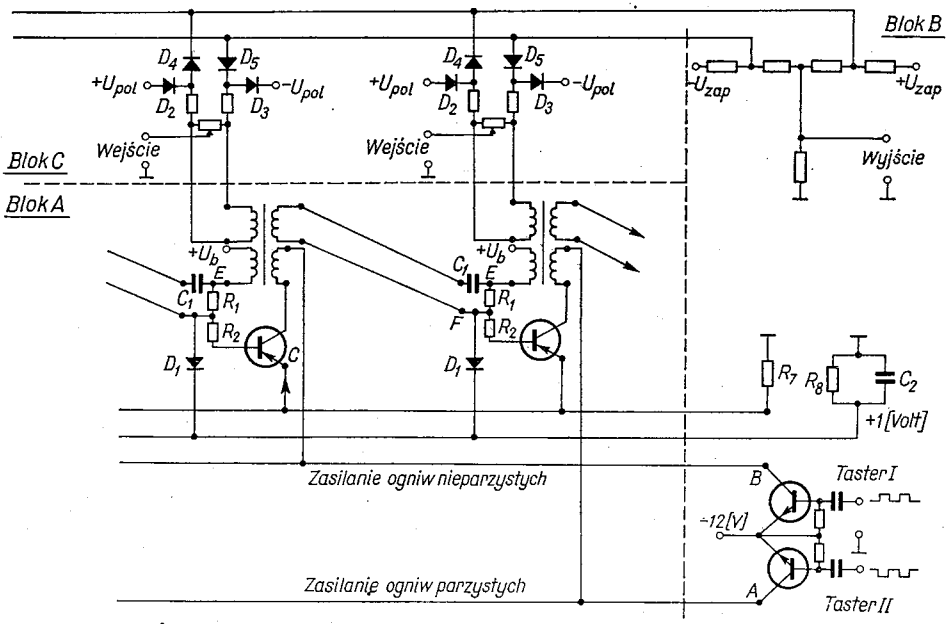
Rys. 2. Układ blokowy przełącznika oraz przebiegi operacyjne

Kryterium generacji impulsu w ogniwie łańcucha jest koincydencja impulsu szpilkowego pochodzącego od końca impulsu w poprzednim ogniwie z impulsem prostokątnym przychodzącym z tastera, przy czym energia generowanego impulsu jest dostarczana całkowicie przez impuls tastera.

Dzięki tak ustalonym warunkom powstawania impulsu w ogniwie, każdy generowany impuls jest właściwie nie synchronizowany, lecz wymuszany, a następnie gaszony, co jest procesem o większej pewności niż synchronizacja.

4. UKŁAD SZCZEGÓŁOWY PRZEŁĄCZNIKA ORAZ MECHANIZM GENERACJI IMPULSÓW

Schemat szczegółowy przełącznika kanałów jest przedstawiony na rys. 3, natomiast mechanizm generacji impulsu w ogniwie łańcucha na rys. 4.



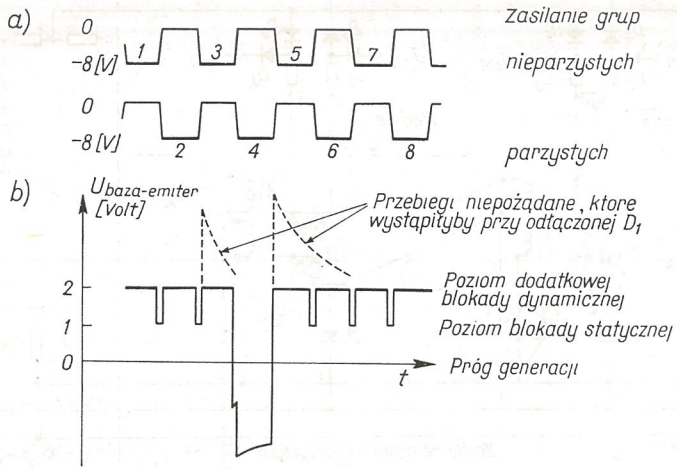
Rys. 3. Tranzystorowy przełącznik kanałów. Blok A — krokowy rozdzielacz impulsów, blok B — część wspólna przełącznika, blok C — zespół bramek sygnałowych

Stałe napięcie dodatnie $+U_b$ powoduje przepływ niewielkiego prądu poprzez oporności R_1, diody D_1 we wszystkich stopniach oraz oporność R_8 wspólną dla wszystkich stopni — do masy. Na oporności R_8 występuje od przepływu tego prądu napięcie stałej blokady statycznej baz wielkości około 1 wolta. Blokada statyczna konieczna dla pracy jednostanowej generatorów samodławnych sprawia, że żadne ogniwo nie generuje impulsu w stanie spoczynkowym.

Do rozpoczęcia generacji i krążenia impulsu wędrującego konieczne jest wyzwolenie impulsu w którymkolwiek ogniwie łańcucha przez sygnał startowy doprowadzony z zewnątrz. Sygnał startowy powoduje generację impulsu w ogniwie, do którego został doprowadzony, np. w pierwszym, który to impuls trwa do momentu zaniku impulsu z tastera (zanik zasilania). Zbocze zanikania generowanego w ogniwie, np. pierwszym, impulsu po zróżniczkowaniu w układzie R_1C_1 daje na R_1 przebieg polaryzujący bazę następnego stopnia, np. drugiego, w kierunku przewodzenia i tym samym przygotowuje ten stopień do generacji, która rozpocznie się w momencie, gdy pojawi się napięcie zasilające z tastera. Następuje wtedy generacja impulsu w stopniu drugim, który trwa do momentu zaniku napięcia z tastera, czyli przez czas T_k.

W ten sposób impulsy są generowane jeden po drugim w kolejnych ogniwach łańcucha, trwają czas T_k i na taki też czas otwierają bramki sygnałowe kolejnych kanałów.

W czasie gdy generowany jest impuls w ogniwie, wszystkie inne ogniwa znajdują się pod działaniem d o d a t k o w e j blokady dynamicznej, która uniemożliwia w tym czasie generację drugiego impulsu w łańcuchu. Blokada ta realizowana jest następująco: wszystkie emitery tranzystorów połączone są nie do masy, lecz do wspólnego opornika R_7,



Rys. 4. Mechanizm generacji impulsu: a) Przebiegi z tasterów, b) Napięcie baza-emiter w ogniwie czwartym (przykładowo)

którego drugi koniec przyłączony jest do masy. Generowany w którymkolwiek ogniwie impuls prądowy wywołuje spadek napięcia na R_7 wielkości około 1 wolta, co powoduje podniesienie potencjałów wszystkich emiterów do tego napięcia, a tym samym przesunięcie punktów pracy tranzystorów niepracujących o 1 wolt głębiej w zakres odcięcia prądu kolektora.

Dioda D_1 służąca do likwidacji nadmiernych, niepożądanych napięć między bazą a emiterem w kierunku zaporowym (rys. 4) spełnia rolę diody poziomującej.

Przebieg napięcia na R_7, oglądany na oscyloskopie synchronizowanym ciągiem impulsów z któregokolwiek ogniwa, daje obraz impulsów prądowych kolejnych ogniw łańcucha, co jest bardzo wygodną kontrolą jego pracy.

Bramki sygnałowe wykonane są w układzie jak na rys. 3 i nie wymagają omówienia, poza informacją, że źródło $+U_{zap}$, $-U_{zap}$ powinno być izolowane od masy.

5. ANALIZA UKŁADU FUNKCJONALNEGO PRZEŁĄCZNIKA W ASPEKCIE PEWNOŚCI DZIAŁANIA

Poprawna praca przełącznika kanałów zależna jest głównie od prawidłowego działania krokowego rozdzielacza impulsów. Zespoły bramek sygnałowych jako układy bierne nie budzą obaw w tym zakresie.

Koncepcja układowa przełącznika oparta o metodę bezwzględnego wyzwalania zapewnia wykluczenie szeregu nieprawidłowości pracy, do których mogłyby być skłonne układy łańcuchowe tego typu.

W wykonanym przełączniku kanałów niemożliwe jest:

— pozostawienie w ogniwie impulsu dłużej niż przez czas T_k, ponieważ po upływie tego czasu ogniwo zostaje pozbawione zasilania,

— równoczesne pobudzenie ogniwa właściwego i następnego, ponieważ ogniwo następne jest pozbawione zasilania,

— równoczesne krążenie w łańcuchu więcej niż jednego impulsu, ponieważ zabezpiecza przed tym układ dodatkowej blokady dynamicznej (rys. 4).

Poza tym dzięki poziomującemu działaniu diod D_1 układ nie jest praktycznie wrażliwy na rozrzuty parametrów zastosowanych tranzystorów, jak również nie wymaga stosowania ostrych tolerancji na inne elementy.

Dzięki przewidzianym zabezpieczeniom, które w sposób układowy wykluczają szereg nieprawidłowości pracy, uzyskano dużą precyzję i stabilność działania.

WYKAZ LITERATURY

1. Błocki F., Skarbiński Z.: Systemy wielokrotne w telekomunikacji. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1962.
2. Perry G. H., Shallow E. W.: Ministry of Aviation, Royal Radar Research Establishment, England, „Selected Semiconductor Circuits Handbook", Seymour Schwartz; wydanie polskie: „Wybrane układy półprzewodnikowe", Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1963.
3. Carlson A. W.: Transistor Applications, Inc., „Selected Semiconductor Circuits Handbook", Seymour Schwartz; wydanie polskie: „Wybrane układy półprzewodnikowe", Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1963.
4. King O. B.: Army Ballistic Missile Agency, „Selected Semiconductor Circuits Handbook", Seymour Schwartz; wydanie polskie: „Wybrane układy półprzewodnikowe", Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1963.
5. Hunter L. P.: Handbook of Semiconductor Electronics; wydanie polskie: „Elektronika półprzewodnikowa", Państwowe Wydawnictwa Techniczne, Warszawa 1960.
6. Ziemerman R., Kachlicki Z.: Półprzewodnikowe diody specjalne, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 1965.
7. Lipman R. A.: Połuprowodnikowyje relje; wydanie polskie: „Przekaźniki tranzystorowe", Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1965.

S. DOBOSZ

TRANSISTORISED CHANNEL SELECTOR

Summary

The paper discusses a transistorised channel selector made on the basis of the method of improving the stability of releasing the end of the impulse in a transistorised self-choking generator. The method was described in the 2nd issue of „Rozprawy Elektrotechniczne" in 1969.

S. DOBOSZ

COMMUTATEUR DE CANAUX TRANSISTORISÉ

Résumé

On a présenté dans l'oeuvre le commutateur des canaux construit en s'appuyant sur une méthode publiée dans le cahier 2 de l'année 1969 de ,,Rozprawy Elektrotechniczne" concernant l'amélioration de la stabilité du declenchement du bout de l'impulsion dans l'oscillateur bloqué à transistor.

S. DOBOSZ

TRANSISTOR KANALUMSCHALTER

Zusammenfassung

Es wird eine Schaltung von Kanalumschalter im Fernsprech — Mehrkanalsystem beschrieben, die von dem im Nr 2/69 ,,Rozprawy Elektrotechniczne" angegebene ,,Verfahren zur Stabilisierung der Auslösung von Endflanken der vom Blockinggenerator erzeugten Impulsen" Gebrauch macht.

С. ДОБОШ

ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬ КАНАЛОВ НА ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ТРИОДАХ

Резюме

В статье описан переключатель каналов на полупроводниковых триодах, построенный согласно описанному в журнале ,,Труды по электротехнике" в тетради 2-1969 г. (,,Rozprawy Elektrotechniczne"), разработанному автором методу улучшения стабильности пуска окончания импульса, получаемого от транзисторного блокинг-генератора.

TREŚĆ

W. Majewski jr: Zagadnienie minimalizacji liczby stanów automatów skończonych 199
J. Nadratowski: Metoda liczb strukturalnych na tle klasycznych metod analizy układów liniowych 237
J. Srzednicki: Optymalne parametry przestrajanego mostkowego generatora *RC* 253
Z. Korzec: Podstawy teoretyczne reflektometrii czasowej 269
R. Vogel: Własności kierunkowe i filtrujące dwóch równoległych linii sprzężonych 281
A. Karczmarewicz: Miara odporności systemów transmisji danych na zakłócenia seryjne 301
A. Karczmarewicz: Binarne kody skorupowe 305
J. Brożyna: Korekcja transformatorów wejściowych wzmacniaczy grupowych 313
J. Brożyna: Obwody wejściowe wzmacniaczy grupowych 325
S. Dobosz: Metoda poprawiania stabilności wyzwalania końca impulsu w tranzystorowym generatorze samodławnym 337
S. Dobosz: Tranzystorowy przełącznik kanałów 347

CONTENTS — TABLE DES MATIÈRES — INHALT

W. Majewski jr: The Problem of State Minimization for Finite Automata 199
Le problème de la minimalisation du nombre des états des automates définis 199
J. Nadratowski: Method of Structural Numbers Versus Classical Methods of Linear System Analysis 237
La méthode des nombres structurels sur le fond des méthodes classiques de l'analyse des schémas linéaires 237
J. Srzednicki: Optima Parameters of Tuned RC Bridge Oscillator 253
Les paramètres optimaux du générateur RC de pont à réglage 253
Optimale Parameter eines abstimmbaren RC-Brückenoszillators 253
Z. Korzec: Basic Theory of Time Domain Reflectometry 269
Les fondements théoriques de la réflectométrie temporaire 269
R. Vogel: Directional and Filtering Properties of Two Parallel Coupled Lines 281
Les propriétés directives et filtrantes de deux lignes de transmission couplées 281
Grundriss der Theorie zweier parallel gekoppelter Leitungen 281
A. Karczmarewicz: Measure of Insensitivity of Data Transmission Systems to Burst-Noise 301
Mesure d'immunité des systèmes de transmission des données contre les bruits prolongés . . . 301
Die Auswertung der Widerstandsfähigkeit der Datenübertragungssysteme auf die Serienstörungen 301
A. Karczmarewicz: A New Class of Binary Codes — „Crust-Codes" 305
Codes „En croûte", binaires 305
Binäre Schalencode 305
J. Brożyna: Correction of Input Transformers in Hybrid Coil Feedback Amplifiers 313
La correction des transformateurs d'entrée des amplificateurs de groupe 313
J. Brożyna: Input Circuits of Hybrid Coil Feedback Amplifiers 325
Les circuits d'entrée des amplificateurs de groupe 325
S. Dobosz: Method of Improvement of Release Stability of the End of Impulse in a Self-Choke Transistor Generator 337
La méthode d'amélioration de la stabilité du déclenchement du bout de l'impulsion dans un générateur bloqué à transistor 337
Verfahren zur Stabilisierung der Auslösung von Endflanken der vom Blockinggenerator erzeugten Impulsen 337

S. Dobosz: Transistorised Channel Selector 347
Commutateur de canaux transistorisé 347
Transistor Kanalumschalter 347

СОДЕРЖАНИЕ

В. Маевски юр: Вопрос минимизации числа состояний конечных автоматов . . . 199
Я. Надратовски: Метод структурных чисел на фоне классических методов анализы линейных цепей 237
Я. Сжедницки: Оптимальные параметры перестраиваемого мостикового RC генератора 253
З. Кожец: Теоретические основы временной рефлектометрии 269
Р. Вогель: Направленные и фильтрирующие свойства двух связанных параллельных линий передачи 281
А. Карчмаревич: Мера устойчивости систем передачи данных к серийным помехам 301
А. Карчмаревич: Коровые-двоичные коды 305
Е. Брожына: Коррекция входных трансформаторов групповых усилителей 313
Е. Брожына: Входные контуры групповых усилителей 325
С. Добош: Метод повышения стабильности пуска окончания импульса в блокинг-генераторе на полупроводниковом триоде 337
С. Добош: Переключатель каналов на полупроводниковых триодах 347

INSTYTUT TECHNOLOGII ELEKTRONOWEJ
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XV · ZESZYT 3

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1969

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor Naczelny
PROF. WITOLD NOWICKI

Sekretarz
JULIUSZ MIERZEJEWSKI

ADRES REDAKCJI

Warszawa, Politechnika, Plac Jedności Robotniczej 1
Katedra Teletransmisji Przewodowej, Gmach Elektroniki,
pokój 483, tel. 21-007 w. 794

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
Warszawa, Miodowa 10

Nakład 700 (571+129)	Oddano do składania 30.V.1969 r.
Ark. wyd. 17,5; ark. druk. 14,25	Podpisano do druku 30.IX.1969
Papier druk. sat. kl. III, 80 g, 70×100	Druk ukończono w październiku 1969
Zamówienie nr 1092/69	Cena zł 40.— P-98

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 15, 3, ss. 359—385
INSTYTUT TECHNOLOGII ELEKTRONOWEJ PAN, WARSZAWA 1969

Mostki RC przestrajane jednym elementem

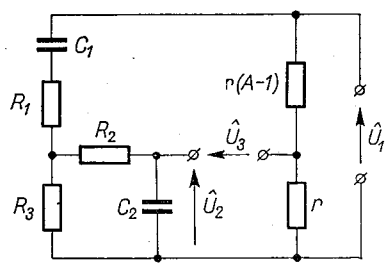
JAN SRZEDNICKI (KRAKÓW)

Zakład Doświadczalny przy Zakładach Telpod w Krakowie

Otrzymano 30.11.1968

W pracy omawia się własności kilku mostków *RC* należących do tej samej grupy co mostek Wiena, lecz przestrajanych tylko jednym elementem. W takich układach stosunek przestrajanych częstotliwości największej do najmniejszej jest ograniczony głównie ze względu na pogarszanie się selektywności i trudności związane z wykonaniem elementu regulacyjnego o odpowiedniej charakterystyce. Bardziej szczegółowo omówiono trzy mostki wyróżniające się najlepszymi własnościami. Mostki te skonstruowane dla stosunku przestrajanych częstotliwości $1:\sqrt{10}$ są w przybliżeniu tak samo selektywne, jak zwykły mostek Wiena.

Konwencjonalne mostki RC wymagają przy przestrajaniu dokładnie współbieżnej zmiany dwu lub więcej elementów *R* lub *C*. Jest to istotna niedogodność konstrukcyjna utrudniająca praktyczne wykorzystanie takich układów i dlatego poszukiwane są rozwiązania umożliwiające strojenie tylko jednym elementem. Przegląd znanych filtrów zaporowych *RC* tego typu znajduje się w pracy [2]. Niżej omawia się własności tylko jednej grupy takich układów, a mianowicie mostków, w których dwie gałęzie stanowią oporowy dzielnik napięcia niezależny od częstotliwości, natomiast pozostałą częścią motka jest selektywny trójnik *RC*. Są to więc mostki tego samego typu co mostek Wiena i mogą być zastosowane we wzmacniaczach selektywnych i oscylatorach.



Rys. 1. Mostek *RC* powstały z połączenia układów Wiena i zbocznikowane *T*

Podstawowy układ, z którego można wyprowadzić większość omawianych niżej mostków, pokazano na rys. 1. Jeśli w takim mostku $R_1 = 0$, to część selektywna staje się trójnikiem T zbocznikowanym pojemnością, natomiast dla $R_2 = 0$ otrzymujemy mostek Wiena. Podobnie też jak dla trójnika Wiena czy trójnika zbocznikowane T funkcja przejścia może być wyrażona uogólnionym wzorem

$$\hat{\beta} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{1}{A + jB(x - 1/x)}, \tag{1}$$

gdzie

$$x = \frac{\omega}{\omega_o}. \tag{2}$$

Dla układu według rys. 1 otrzymujemy

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)}}, \tag{3}$$

$$A = 1 + \frac{R_1}{R_3} + \frac{C_2}{C_1}\left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right), \tag{4}$$

$$B = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \frac{\sqrt{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}}{R_3}. \tag{5}$$

W pracy [4] wykazano, że własności selektywne mostków tego typu określa wyrażenie $\frac{B}{A^2}$. Od wartości tego wyrażenia zależy też w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalnie zawartość harmonicznych generatora, w którym mostek został użyty. Wzór na względną zawartość H_m m-tej harmonicznej jest następujący ([3], [4]):

$$H_m = \frac{A^2}{kB\left(m - \frac{1}{m}\right)} \sqrt{1 + \left[\frac{B}{A}\left(m - \frac{1}{m}\right)\right]^2}; \tag{6}$$

k oznacza wzmocnienie wzmacniacza użytego w generatorze. Wzór ten nie dotyczy jednak tych zniekształceń, które zostały spowodowane nieliniowym sprzężeniem zwrotnym, np. wprowadzonym w zakresie małych częstotliwości przez żaróweczkę lub termistor stabilizacji amplitudy.

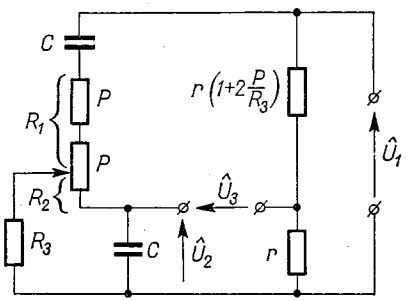
Z podanych wyżej równań wynika, że jeśli $\frac{C_2}{C_1} = 1$, to własności selektywne mostka są takie same zarówno w przypadku mostka z trójnikiem zbocznikowane T ($R_1 = 0$), jak i mostka Wiena ($R_2 = 0$). Jednakże przy odpowiednim zróżnicowaniu elementów R i C mostek z trójnikiem zbocznikowane T wykazuje znacznie lepsze własności selektywne. Ta wskazówka może okazać się cenna przy projektowaniu i wyborze typu mostka przestrajanego jednym elementem, gdyż selektywność jest głównym kryterium jakości poszczególnych układów. Dla konwencjonalnego trójnika Wiena ($R_2 = 0$, $R_1 = R_3$, $C_1 = C_2$) tłumienie przy częstotliwości rezonansowej $A = 3$, a $B = 1$, więc współczynnik selektywności $\frac{B}{A^2} = \frac{1}{9}$.

Warunkiem poprawnego strojenia jednym elementem jest uzyskanie zera napięcia wyjściowego mostka dla każdej ustawionej tym elementem częstotliwości rezonansowej. W większości układów warunek ten realizuje się wykonując trójnik selektywny o tłumieniu A niezależnym od częstotliwości rezonansowej. W układach innego typu wartość A

nie jest stała, lecz współbieżnie z nią zmienia się też odpowiednio i wartość dzielnika napięcia.

Prosty mostek przestrajany jednym elementem pokazuje rys. 2. Jeśli w układzie z rys. 1 $C_1 = C_2 = C$, to uzyskując w sposób pokazany na rys. 2 stałą wartość sumy R_1+R_2, a zatem i stałą wartość tłumienia A [por. wzór (4)], otrzymamy następującą pulsację rezonansową:

$$\omega_o = \frac{1}{C\sqrt{(2P-R_2)R_2+2PR_3}}. \tag{7}$$



Rys. 2. Mostek przestrajany potencjometrem P

Dla $R_2 = 0$ układ staje się mostkiem Wiena. ω_0 ma wówczas największą wartość:

$$\omega_{omax} = \frac{1}{C\sqrt{2PR_3}}. \tag{8}$$

Dla $R_2 = P$ częstotliwość jest najmniejsza:

$$\omega_{omin} = \frac{1}{C\sqrt{P^2+2PR_3}}. \tag{9}$$

Ze wzorów (8) i (9) otrzymujemy stosunek F częstotliwości rezonansowych największej f_{omax} do najmniejszej f_{omin}:

$$F = \frac{f_{omax}}{f_{omin}} = \sqrt{\frac{P}{2R_3}+1}\,. \tag{10}$$

Tłumienie A przy częstotliwości rezonansowej f_0 jest

$$A = 2\left(1+\frac{P}{R_3}\right) = 2(2F^2-1). \tag{11}$$

Ponieważ

$$B = \frac{\omega_{omax}}{\omega_o} 2\sqrt{F^2-1}\,, \tag{12}$$

więc współczynnik selektywności ma następującą wartość:

$$\frac{B}{A^2} = \frac{\omega_{omax}}{\omega_o}\,\frac{\sqrt{F^2-1}}{2(2F^2-1)^2}. \tag{13}$$

Powyższy wzór wskazuje na niekorzystne własności układu według rys. 2. Selektywność zmniejsza się bardzo szybko przy powiększaniu obranego stosunku F. Już np. dla $F = 2$

jest ona około 3 do 6 razy mniejsza niż dla konwencjonalnego mostka Wiena. Znaczne jej zmiany, odwrotnie proporcjonalne do częstotliwości rezonansowej, stanowią dalszą niekorzystną własność tego układu. Dlatego mostek według rys. 2 może znaleźć zastosowanie jedynie w tych przypadkach, gdy wymagany jest tylko mały zakres przestrajania.

W mostku Halla [1] pokazanym na rys. 3 zastosowany jest podobny sposób regulacji częstotliwości, jak w układzie według rys. 2. Dla mostka według rys. 3 otrzymujemy następujące równania:

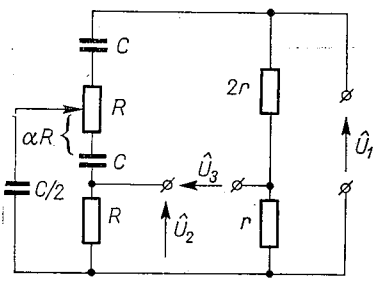
$$\omega_0 = \frac{1}{RC}\sqrt{\frac{5}{1-\alpha^2}}, \tag{14}$$

$$B = \frac{1}{2}\sqrt{5(1-\alpha^2)} = \frac{\omega_{omin}}{\omega_o}\frac{\sqrt{5}}{2} \tag{15}$$

oraz

$$\frac{B}{A^2} = \frac{\omega_{omin}}{\omega_o}\frac{\sqrt{5}}{18}, \tag{16}$$

gdyż $A = 3$.

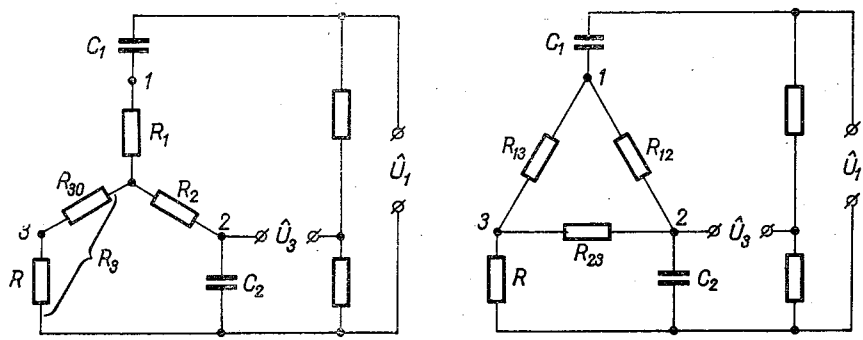


Rys. 3. Mostek Halla

Przy najmniejszej częstotliwości rezonansowej współczynnik selektywności wynosi ok. 1/8, a więc jest o kilkanaście procent lepszy niż dla konwencjonalnego mostka Wiena. Jednakże współczynnik ten zmniejsza się odwrotnie proporcjonalnie do częstotliwości, podobnie jak w układzie według rys. 2. Jakkolwiek więc zakres przestrajanych częstotliwości może być w tym układzie dowolnie duży, gdyż dla $\alpha \to 1$, $F \to \infty$, to jednak niekorzystne pogarszanie się selektywności ogranicza zastosowanie takiego mostka. Konieczność równoczesnej zmiany 3 pojemności przy zmianie zakresu częstotliwości również należy zaliczyć do ujemnych cech tego układu.

Inne możliwości przestrajania uzyskuje się, gdy układ oporników połączonych w gwiazdę z rys. 1 zastąpi się układem trójkąt tak, jak to pokazuje rys. 4. Należy przypomnieć, że zmiana tylko jednej rezystancji w układzie trójkąt jest równoważna zmianie 3 rezystancji

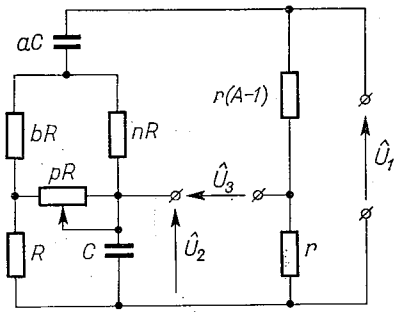
$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}, \\ R_2 &= \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}, \\ R_{3o} &= R_3 - R = \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$



Rys. 4. Mostek z układem oporników połączonych w gwiazdę i równoważny mu układ z opornikami połączonymi w trójkąt

układu gwiazdowego. Na podstawie wzorów (4) i (17) można dojść do wniosku, że w pokazanym na rys. 4 układzie przy odpowiednio dobranych elementach można uzyskać stałą wartość tłumienia A pomimo zmieniania rezystancji R_{13} lub R_{23}. Mostek, w którym zmieniana jest wartość opornika R_{13}, został podany przez Wigana [5]. W mostku tego typu impedancja wejściowa zmienia się bardzo znacznie przy przestrajaniu. Pod tym względem lepszy jest układ ze zmienianą rezystancją R_{23}[1]. Ze wzorów (3), (4), (5) oraz (17) wynika, że dla $C_1 = C_2$ inne podstawowe parametry obu tych układów jak ω_0, F, A i B muszą być identyczne.

Poniżej najpierw będzie omówiony bardziej szczegółowo układ o regulowanej rezystancji R_{23}, natomiast w dalszej części pracy powraca się do układu Wigana omawiając głównie jego odmienne własności dla przypadku $C_1 \neq C_2$.



Rys. 5. Mostek *RC* przestrajany jednym opornikiem

W celu uzyskania bardziej przejrzystych wzorów przyjęto oznaczenia elementów mostka takie, jak na rys. 5. Jeśli A ma mieć stałą wartość, to powinna być spełniona następująca zależność:

$$n = b[a(1+b)-1]. \tag{18}$$

Rezonansowa pulsacja wynosi

$$\omega_o = \frac{1}{RC\sqrt{an}} \sqrt{\frac{p+b+n}{p(1+b)+b}}. \tag{19}$$

[1] Zgł. w Urz. Pat. PRL dn. 8.2.1968, Nr P125121.

Najmniejszą częstotliwość rezonansową f_{omin} otrzymujemy dla $p = \infty$. Część selektywna mostka jest wtedy trójnikiem zbocznikowane T, przy czym

$$\omega_{omin} = \frac{1}{RC\sqrt{an(1+b)}}. \tag{20}$$

Dla $p = 0$ układ staje się mostkiem Wiena, a częstotliwość rezonansowa jest wtedy największa. Mamy wtedy

$$\omega_{omax} = \frac{1}{RC}\sqrt{\frac{b+n}{abn}}. \tag{21}$$

Ze wzorów (20, (21) i (17) obliczamy stosunek F częstotliwości rezonansowych największej do najmniejszej:

$$F = \frac{f_{omax}}{f_{omin}} = \sqrt{a}\,(1+b) = \frac{\frac{n}{b}+1}{\sqrt{a}} = \sqrt{(1+b)\left(\frac{n}{b}+1\right)}. \tag{22}$$

Stąd wynika, że dla osiągnięcia żądanego stosunku F, parametr b powinien być

$$b = \frac{F}{\sqrt{a}} - 1. \tag{23}$$

Korzystając z zależności (22) parametr n można wyrazić następującym wzorem:

$$n = b(F\sqrt{a}-1) = (F\sqrt{a}-1)\left(\frac{F}{\sqrt{a}}-1\right). \tag{24}$$

Między względną częstotliwością $\frac{f_o}{f_{omax}}$ a wyrażoną przez p wartością opornika regulowanego istnieje następująca zależność:

$$p = \frac{F(F-\sqrt{a})\left[1-\left(\frac{f_o}{f_{omax}}\right)^2\right]}{F^2\left(\frac{f_o}{f_{omax}}\right)^2 - 1}. \tag{25}$$

Dla uzyskania uniwersalnych charakterystyk regulacji częstotliwości okazuje się celowe wprowadzenie dwu pomocniczych wielkości: średniej częstotliwości rezonansowej

$$f_{os} = \sqrt{f_{omin} \cdot f_{omax}} \tag{26}$$

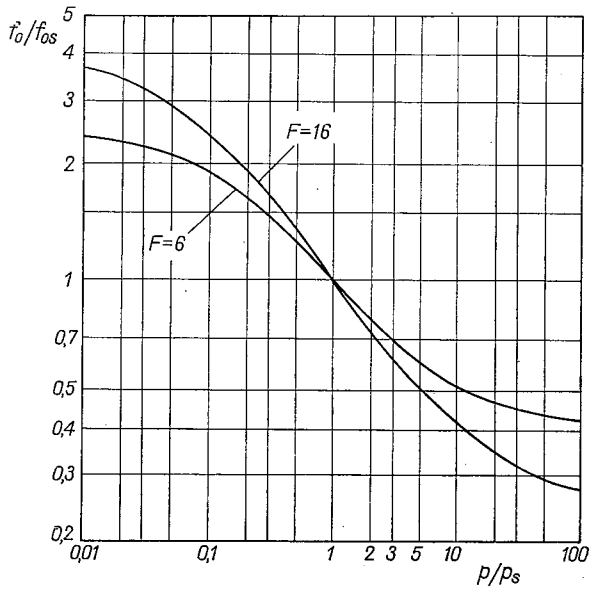
oraz średniej wartości p_s parametru p, przy której częstotliwość rezonansowa jest równa f_{os}. Ze wzorów (20) i (21) otrzymujemy

$$\omega_{os} = 2\pi f_{os} = \frac{1}{RC\sqrt{n\sqrt{a}}}, \tag{27}$$

natomiast ze wzorów (18), (19), (23) i (26) obliczamy:

$$p_s = b\sqrt{a} = \frac{b+n}{F} = F - \sqrt{a}, \tag{28}$$

$$\frac{f_o}{f_{os}} = \sqrt{\frac{\frac{p}{p_s}+F}{\frac{p}{p_s}F+1}}. \tag{29}$$



Rys. 6. Uniwersalne charakterystyki regulacji częstotliwości dla mostków wykorzystujących przekształcenie układu gwiazda w trójkąt

Wzór (29) dzięki wyeliminowaniu w nim parametru a może być zastosowany i do innych mostków o podobnej regulacji częstotliwości. Rysunek 6 pokazuje zależność względnej częstotliwości $\frac{f_o}{f_{os}}$ od względnej wartości parametru p dla $F = 6$ i $F = 16$.

Tłumienie A trójnika selektywnego przy częstotliwości rezonansowej i wyrażenie B są odpowiednio:

$$A = 1+\frac{1}{a}\left(1+\frac{n}{1+b}\right) = 1+\frac{1}{a}+\frac{bn}{b+n} = \frac{F+\frac{1}{F}}{\sqrt{a}}, \tag{30}$$

$$B = \sqrt{\frac{n}{a}}\,\frac{\sqrt{(p+b+n)[p(1+b)+b]}}{p(1+b)+b+n}. \tag{31}$$

Wzory (23), (24), (25), (30) i (31) pozwalają na obliczenie zależności współczynnika selektywności B/A^2 od względnej częstotliwości f_o/f_{omax}:

$$\frac{B}{A^2} = \frac{f_o}{f_{omax}}\cdot\frac{F^2-1}{(F^2+1)^2}\cdot\frac{\sqrt{F\sqrt{a}(F\sqrt{a}-a)(F\sqrt{a}-1)}}{1-\left(\frac{f_o}{f_{omax}}\right)^2+F\sqrt{a}\left[\left(\frac{f_o}{f_{omax}}\right)^2-\frac{1}{F^2}\right]}. \tag{32}$$

Optymalną wartość tego współczynnika uzyskuje się dla

$$\frac{f_o}{f_{omax}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{a}/F}{F\sqrt{a}-1}}. \tag{33}$$

Zależność współczynnika selektywności od względnej częstotliwości przy trzech wartościach parametru a, dla układów o $F = 6$ i $F = 10$, jest przedstawiona na rys. 7. Z rysunku 7 wynika, że przez powiększanie stosunku pojemności $a = \frac{C_1}{C_2}$ można osiągnąć znaczne polepszenie selektywności, szczególnie w zakresie mniejszych względnych częstotliwości, gdzie może być ona wtedy lepsza niż dla zwykłego mostka Wiena. Jednakże zakres ten w przypadku ciągłej regulacji częstotliwości zwykle nie może być wykorzystany ze względu na trudności związane z wykonaniem opornika regulowanego o bardzo dużych względnych zmianach rezystancji. Selektywność mostka znacznie się pogarsza wraz z powiększaniem stosunku częstotliwości F. Pokazuje to lepiej rys. 8, gdzie wykreślona jest zależność współczynnika selektywności od stosunku F dla różnych wartości parametru a i dla dwu przypadków: f_{os} i f_{omax}. Z tego wykresu widać też, że nadmierne zwiększanie stosunku pojemności a przy mniejszych wartościach F nie powoduje już poprawy selektywności, a przeciwnie — może ją pogorszyć.

W przestrajanych mostkach konwencjonalnych równowagę dla wszystkich częstotliwości rezonansowych uzyskuje się m. in. przez dokładną współbieżność zmiennych elementów R lub C. W mostkach przestrajanych jednym elementem dla osiągnięcia tego samego celu należy dokładnie dobrać elementy układu zgodnie z podanymi wyżej wzorami. W praktyce, gdy elementy te odbiegają wartościami od teoretycznie obliczonych, należy przeprowadzić dwupunktową korekcję: przy największej wartości p i przy $p = 0$. W przypadku $p = 0$ korekcję tłumienia trójnika należy przeprowadzać zmieniając opornik bR, gdyż wtedy wpływ stosunku pojemności a oraz opornika nR jest niewielki, natomiast przy $p = \infty$ równowaga w znacznym stopniu zależy od parametrów a i n.

Rysunek 9 przedstawia mostek Wigana. Przyjęto odmienny niż w pracy [5] sposób oznaczania elementów układu, co przyczyniło się do uzyskania znacznie mniej uwikłanej postaci wyprowadzonych zależności. Różnice między wzorami dla mostków z rys. 5 i rys. 9 wynikają z innego warunku zachowania tłumienia A, niezależnego od częstotliwości rezonansowej. Dla mostka według rys. 9 otrzymujemy:

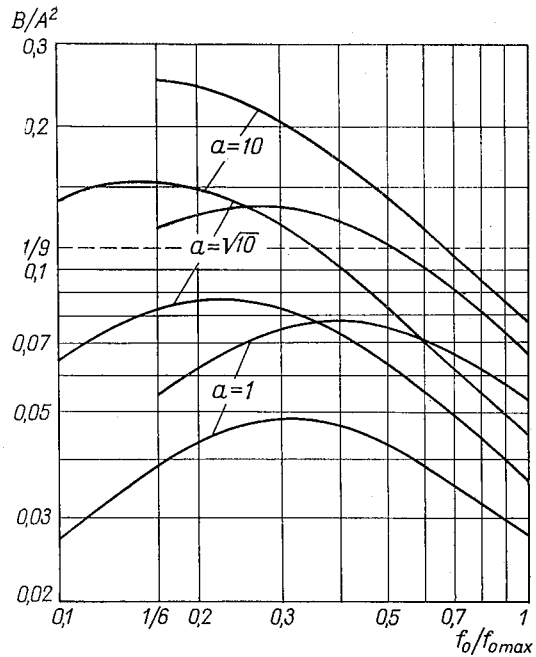
$$n = y\left(\frac{y+1}{a} - 1\right) \tag{34}$$

oraz

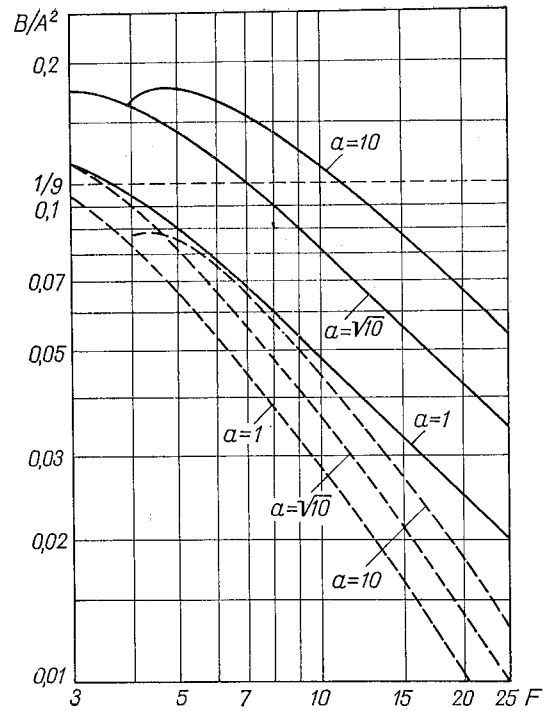
$$y = F\sqrt{a} - 1. \tag{35}$$

Jednakże wyrażając n za pomocą F i a otrzymujemy taką samą zależność, jak dla mostka według rys. 5, a mianowicie:

$$n = (F\sqrt{a} - 1)\left(\frac{F}{\sqrt{a}} - 1\right). \tag{36}$$



Rys. 7. Współczynnik selektywności mostka według rysunku 5 w zależności od względnej częstotliwości rezonansowej dla $F = 6$ i $F = 10$ przy trzech różnych stosunkach pojemności a. Linią przerywaną oznaczono poziom współczynnika selektywności dla konwencjonalnego mostka Wiena. Wykres ten może odnosić się również do mostka według rysunku 9, jeżeli wartości osi odciętych będą stosunkiem $\frac{f_{omin}}{f_o}$

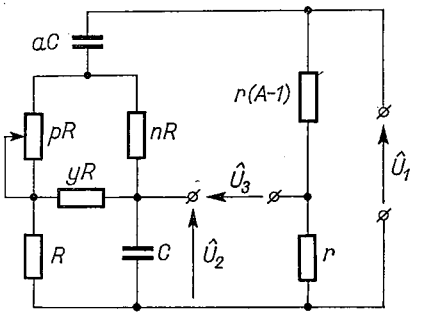


Rys. 8. Współczynnik selektywności mostka według rysunku 5 w zależności od stosunku częstotliwości F przy trzech wartościach parametru a dla przypadków: średniej częstotliwości f_{os} i najmniejszej selektywności (linia przerywana), która występuje przy f_{omax}

Większość wzorów dla mostka według rys. 5 można stosować też dla mostka Wigana po podstawieniu $b = y$. W szczególności następujące wzory są wówczas identyczne: na częstotliwość (19), (20), (21), wyrażenia A i B oraz wzór (29). Inne są natomiast wzory na F i p_s:

$$F = \frac{1+y}{\sqrt{a}} = \left(\frac{n}{y}+1\right)\sqrt{a} = \sqrt{(1+y)\left(\frac{n}{y}+1\right)}, \tag{37}$$

$$p_s = \frac{y}{\sqrt{a}}. \tag{38}$$



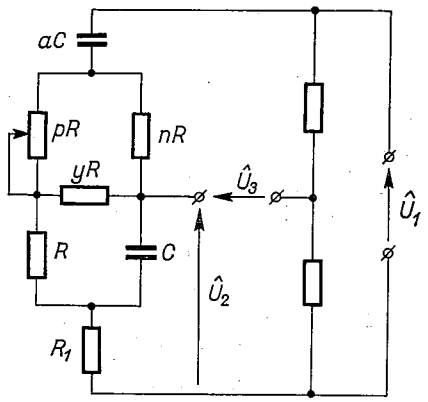
Rys. 9. Mostek Wigana typ I

Należy także zwrócić uwagę, że z powodu różnic wartości parametrów b i y takie wielkości, jak ω_0 i B mają dla mostka Wigana inne wartości niż dla mostka według rys. 5. Tak np. w celu uzyskania tej samej częstotliwości rezonansowej f_0, jak w mostku według rys. 5, i przy zachowaniu tej samej wartości parametru n, rezystancja R powinna być w mostku Wigana $\sqrt{a}$ razy mniejsza. Z tego też powodu współczynnik selektywności mostka Wigana wyrażony za pomocą względnej częstotliwości jest dla $a \neq 1$ inny niż dla mostka według rys. 5. Dla mostka Wigana otrzymujemy:

$$\frac{B}{A^2} = \frac{f_{omin}}{f_o}\frac{F^2-1}{(F^2+1)^2}\frac{\sqrt{F\sqrt{a}(F\sqrt{a}-1)(F\sqrt{a}-a)}}{1-\left(\frac{f_{omin}}{f_o}\right)^2+F\sqrt{a}\left[\left(\frac{f_{omin}}{f_o}\right)^2-\frac{1}{F^2}\right]}. \tag{39}$$

Wzór ten różni się od wzoru (32) jedynie tym, że zamiast względnej częstotliwości $\frac{f_o}{f_{omax}}$ zawiera wyrażenie $\frac{f_{omin}}{f_o}$. Można więc uwzględniając powyższe posługiwać się wykresem z rys. 7. Jak już wspomniano, selektywność obu mostków przy $a = 1$ jest identyczna. Dla $a \neq 1$ może wydawać się też, że średnia selektywność jest taka sama. Jednakże dla mostka Wigana lepszą selektywność uzyskuje się w obszarze $p \to 0$ ($\omega_o \to \omega_{max}$), a nie przy $p \to \infty$ ($\omega_o \to \omega_{min}$), jak to ma miejsce w mostku według rys. 5. Jest to zgodne z nadmienionymi na wstępie uwagami, gdyż w obu tych przypadkach lepszych własności układy te stają się trójnikami zbocznikowane T. Ten właśnie fakt sprawia, że selektywność mostka Wigana o parametrze $a > 1$ może w praktyce okazać się lepsza, gdyż jak wspomniano obszar $p \to \infty$ nie zawsze może być wykorzystany, szczególnie przy ciągłej regulacji częstotliwości.

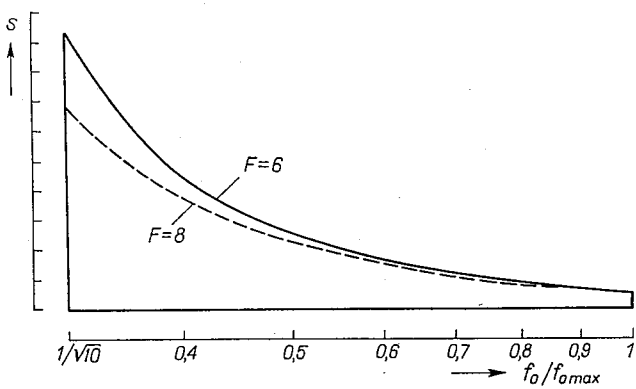
Wigan w swej pracy wyraża pogląd (rozpowszechniany też i w innych publikacjach, np. [2]), że mostek według rys. 9 pozwala w praktyce na uzyskanie tylko $F < 3$, na co ma składać się szereg przyczyn. W celu łatwiejszego osiągnięcia dużych wartości Wigan w pracy [5] proponuje wprowadzenie dodatkowego opornika R_1 włączonego szeregowo z częścią selektywną mostka, jak to pokazuje rys. 10. W takim układzie można osiągnąć $F \to \infty$ przy $p > 0$. Jednakże łatwo wykazać, że przez włączenie opornika R_1 znacznie pogarszają się własności selektywne w porównaniu z własnościami układu podstawowego według rys. 9 (w pracy [5] nie bada się selektywności układów z rys. 9 i 10). Szczególnie niekorzystnie przedstawia się zawartość harmonicznych generatora *RC* po zastosowaniu w nim takiego mostka. Należy przy tym zwrócić uwagę na fakt, że w przeciwieństwie do pozostałych rozpatrywanych tu mostków charakterystyka amplitudowo-fazowa $\hat{\beta}$ układu według rys. 10 nie jest kołem i dla $f_0 \to \infty$, $\hat{U}_2$ nie zmniejsza się do zera. Uogólnione równanie (1) nie może być zatem zastosowane dla takiego układu. Mostek według rys. 10 nie będzie więc tu omawiany, gdyż nie widać korzyści, jakie mógłby on przynieść w porównaniu z układem według rys. 9 czy też według rys. 5, tym bardziej, że dotychczasowe rozważania nie potwierdzają poglądu jakoby F w praktyce mogło wynosić najwyżej 3. Wigan uzasadnia ograniczenie wartości F głównie gwałtownymi zmianami impedancji wejściowej trójnika selektywnego oraz potrzebą zwiększania w przypadkach dużych F stosunku pojemności a, co ma pogarszać własności selektywne układu. Poglądy te zawierają jednak nieścisłości. Chociaż istotnie podczas przestrajania impedancja wejściowa mostka według rys. 9 może zmieniać się przy większych wartościach a w stosunku jeden do kilkudziesięciu i więcej, ale może to nie mieć większego ujemnego wpływu, jeśli przyjęta rezystancja R będzie dostatecznie duża. Ze wzoru (37) i innych wynika natomiast, że zwiększenie parametru a wiąże się jedynie z koniecznością innego dobrania elementów układu i, jak już wykazano, może to poprawić własności selektywne mostka według rys. 9. Tymczasem głównym czynnikiem wpływającym na ograniczenie stosunku F dla tego, jak i dla innych omawianych tu mostków przestrajanych jednym elementem, jest pogorszenie selektywności (por. np. wykres z rys. 8). Jeśli jednak dla konkretnych zastosowań mostka będzie ona jeszcze dostateczna, to uzyskanie F wynoszącego kilkanaście nie powinno nastręczać większych trudności konstrukcyjnych.



Rys. 10. Mostek Wigana typ II

Od teoretycznie możliwego zakresu przestrajanych częstotliwości F, który można uzyskać tylko przy zmianach p od zera do nieskończoności, należy odróżnić praktycznie osiągalny stosunek częstotliwości największej do najmniejszej. Ten ostatni wiąże się ściśle z możliwościami wykonania odpowiedniego elementu regulacji częstotliwości. Charakterystyka tej regulacji przedstawia się znacznie mniej korzystnie niż w układach konwencjonalnych. Na przykład podczas gdy w mostku Wiena przestrajanym przez równoczesną zmianę rezystancji dwu oporników o liniowej charakterystyce regulacji względne przyrosty częstotliwości zagęszczają się na skali proporcjonalnie do częstotliwości, to w mostku przestrajanym jednym podobnym opornikiem takie zagęszczenie skali byłoby proporcjonalne co najmniej do kwadratu częstotliwości. Tymczasem w optymalnym przypadku dokładność ustawienia częstotliwości powinna być w każdym miejscu skali jednakowa. Zwykle realizuje się to nawijając drut oporowy na pasku o wykroju potrzebnym do uzyskania skali logarytmicznej. Wtedy w omawianych tu mostkach, w których wykorzystuje się przekształcenie gwiazdy w trójkąt, względna częstotliwość f_o/f_{omax} i odpowiadająca tej częstotliwości szerokość s paska powinny być związane następującą zależnością:

$$s = \text{const} \frac{\left(\frac{f_o}{f_{omax}}\right)^2}{\left[\left(F\frac{f_o}{f_{omax}}\right)^2 - 1\right]^2}. \tag{40}$$



Rys. 11. Wykrój paska opornika regulowanego, potrzebny do uzyskania logarytmicznej skali częstotliwości przy $F = 6$ i $F = 8$

Dla przykładu na rys. 11 pokazano wykrój paska opornika regulowanego przeznaczonego dla mostka przestrajanego w stosunku $1:\sqrt{10}$ przy F = 6 i $F = 8$. Jest widoczne, że realizacja regulacji częstotliwości w myśl powyższych założeń nie będzie łatwa przy stosunku przestrajanych częstotliwości wynoszącym tylko nieco więcej niż 3. Przy znacznie większych wartościach tego stosunku (np. 10) i zastosowaniu zwykłych rozwiązań konstrukcyjnych zmiennych oporników trzeba zrezygnować z uzyskania przy większych względnych częstotliwościach równie dokładnej regulacji, jak przy częstotliwościach mniejszych.

Reasumując powyższe rozważania trzeba stwierdzić, że trudności związane z wykonaniem odpowiedniego opornika regulowanego oraz szybkie pogarszanie się własności

selektywnych wraz ze zwiększaniem wartości F przemawiają za ograniczeniem przestrajanych częstotliwości do stosunku $\sqrt{10}:1$, przy którym jednak F powinno być większe od 5.

Tablica

Wartość elementów R i C oraz współczynnika selektywności mostków według rys. 5 i rys. 9 dla $F = 6$ i przy zakresie przestrajanych częstotliwości od 24,6 Hz do 78 Hz, uzyskanym zmianą rezystancji pR od 0 do 10 kΩ

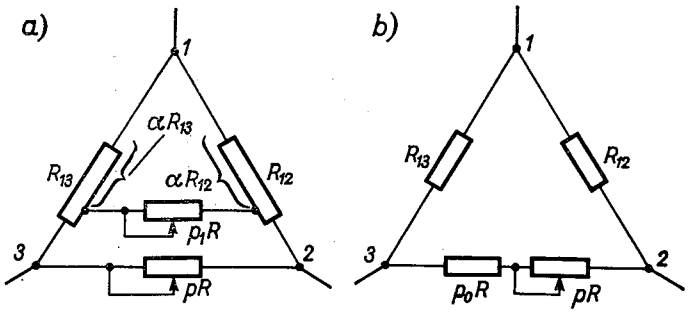
Parametr	Mostek					
	rys. 5			rys. 9		
a	1	$\sqrt{10}$	10	1	$\sqrt{10}$	10
C_1 μF	1	2,06	3,95	1	1,52	2,5
C_2 μF	1	0,652	0,395	1	0,48	0,25
R kΩ	1	1,2	1,75	1	0,92	0,88
bR kΩ	5	2,83	1,58	—	—	—
yR kΩ	—	—	—	5	8,9	15,7
nR kΩ	25	27,4	28,4	25	21	14,05
$A-1$	5,167	2,46	0,95	5,167	2,46	0,95
$(B/A^2)_{min}$	0,054	0,07	0,077	0,054	0,11	0,14
$(B/A^2)_{max}$	0,077	0,13	0,20	0,077	0,14	0,245

Porównanie wartości elemetów R i C układów według rys. 5 i rys. 9 umożliwia tablica zamieszczona powyżej. Została ona sporządzona przy założeniu, że w obu porównywanych przypadkach $F = 6$, użyteczny zakres przestrajanych częstotliwości wynosi od 24,6 Hz do 78 Hz, a opornik regulowany $(pR)_{max} = 10\,\text{k}\Omega$. Dane zawarte w tablicy wykazują, że dla $F = 6$ i przy przyjętym stosunku przestrajanych częstotliwości $1:\sqrt{10}$ praktyczna realizacja obu układów nie powinna napotykać na większe trudności konstrukcyjne. Jeśli jednak przy zastosowaniu układu Wigana obciążenie wyjścia wzmacniacza impedancją wejściową trójnika przy $pR = 0$ byłoby zbyt duże, to należy wówczas zastosować układ według rys. 5. Należy zwrócić uwagę na konieczność zwiększania pojemności C_1 w mostkach o $a > 1$, co może utrudnić wykonanie takich układów przeznaczonych dla bardzo małych częstotliwości.

Z własności układu trójkąt wynika, że oprócz opornika pR czy też zamiast niego, można włączyć jeden lub kilka oporników w taki sposób, w jaki został włączony opornik p_1R na rys. 12a. Odczepy na opornikach dzielą rezystancję R_{12} i R_{13} w jednakowym stosunku α. Jest zrozumiałe, że opornik p_1R będzie regulował częstotliwość mostka w węższych granicach niż opornik pR. Jednak przez równoczesne zastosowanie obu tych oporników nie można zrealizować niezależnej zgrubnej i dokładnej regulacji częstotliwości. Dlatego regulacja częstotliwości za pomocą opornika przyłączanego do zaczepów nie wnosi żadnych praktycznych korzyści. Prostszy sposób zmniejszenia stosunku przestra-

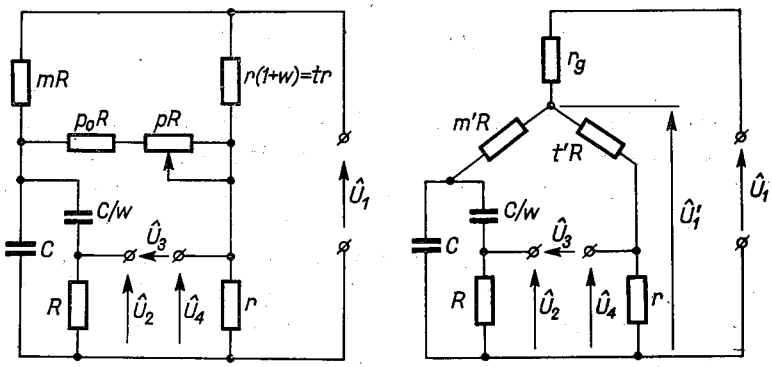
janych częstotliwości jest pokazany na rys. 12b. Przez dobranie wartości opornika p_0R można łatwo dokładnie ustalić przyjętą maksymalną częstotliwość rezonansową.

W mostkach według rysunków 5 i 10 można zastąpić oporniki kondensatorami i odwrotnie. Ograniczona wartość stosunku pojemności maksymalnej do minimalnej kondensatorów o zmiennej pojemności nie pozwala na uzyskanie w takich układach stosunku przestrajanych częstotliwości znacznie większych niż 3.



Rys. 12. Sposoby regulacji rezystancji układu trójkąt

Możliwości przestrajania, jakie uzyskuje się dzięki przekształceniu układu gwiazdy w trójkąt, wykorzystane są w innej grupie mostków przestrajanych jednym elementem, gdzie zmieniane są równocześnie wartości oporników układu selektywnego i dzielnika napięcia[1]. Taka regulacja częstotliwości da się zastosować w mostku Wiena i w mostku



Rys. 13. Mostek z trójnikiem zbocznikowane T przestrajany jednym elementem i jego układ zastępczy

z trójnikiem zbocznikowane T. Ten ostatni odznacza się w tym układzie nie tylko lepszą selektywnością, ale i dodatkowymi zaletami. Wynikają one z prostej konstrukcji, gdyż węzeł dla wyjścia mostka i opornika regulowanego jest wspólny. Dzięki temu dobór elementów mostka i jego zestrajanie są szczególnie ułatwione. Mostek taki pokazuje rys. 13. W przypadku gdy $p = \infty$, rezonansowa prędkość kątowa jest najmniejsza i jak wiadomo (np. [4]) wynosi

$$\omega_{omin} = \frac{1}{RC}\sqrt{\frac{w}{m}}. \tag{41}$$

[1] Zgł. w Urz. Pat. PRL dn. 7.3.1968 r., Nr P125674.

Dla skończonych wartości p, posługując się zastępczym układem pokazanym również na rys. 13, otrzymujemy:

$$m' = \frac{m(p_o+p)}{m+p_o+p+t} \tag{42}$$

i

$$\omega_o = \frac{1}{RC}\sqrt{\frac{w}{m'}} = \frac{1}{RC}\sqrt{\frac{w(m+p_o+p+t)}{m(p_o+p)}}. \tag{43}$$

Stąd względna częstotliwość

$$\frac{f_o}{f_{omin}} = \sqrt{\frac{m}{m'}} = \sqrt{\frac{m+t}{p_o+p}+1}. \tag{44}$$

Wzory (41) ... (44) pozwalają na wyprowadzenie następujących zależności:

$$F = \frac{f_{omax}}{f_{omin}} = \sqrt{\frac{m+t}{p_o}+1}, \tag{45}$$

$$p_o = \frac{m+t}{F^2-1}, \tag{46}$$

$$p_s = p_o F, \tag{47}$$

$$\frac{f_o}{f_{os}} = \sqrt{\frac{p/p_s+F}{p/p_s F+1}}. \tag{48}$$

Wzór (48) jest identyczny ze wzorem (29), dlatego można i w tym przypadku posługiwać się wykresem z rys. 6. Słuszne są też dla tego typu mostka i pozostałe rozważania dotyczące projektowania opornika regulacji częstotliwości, jak np. wzór (40) i rys. 11.

Przy obliczaniu funkcji przejścia selektywnej części układu według rys. 13, trzeba uwzględnić zmniejszenie napięcia zasilającego mostek z $\hat{U}_1$ na $\hat{U}_1'$. Jeśli przyjmemy, że $t \ll m$, to

$$\frac{\hat{U}_1'}{\hat{U}_1} \cong \frac{1+m'(1+w)}{1+m(1+w)}. \tag{49}$$

Funkcja przejścia $\hat{\beta}$ wyraża się więc następującym wzorem (por. też np. [4]):

$$\hat{\beta} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} \cong \frac{1+m'(1+w)}{1+m(1+w)} \cdot \frac{1}{1+m'(1+w)+j\sqrt{m'w}\left(x-\frac{1}{x}\right)}. \tag{50}$$

Stąd

$$A = 1+m(1+w) \tag{51}$$

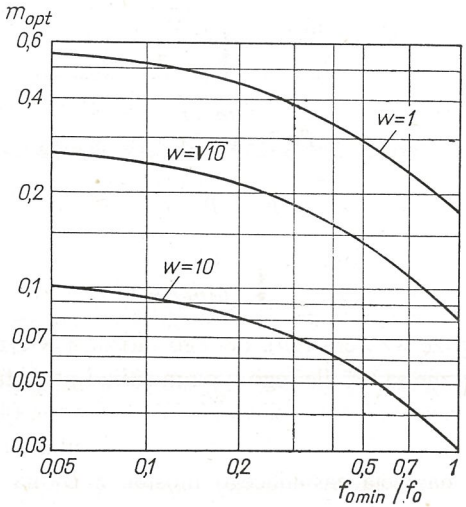
$$B \cong \sqrt{m'w}\,\frac{m(1+w)+1}{m'(1+w)+1}. \tag{52}$$

Z zależności (44), (51) i (52) otrzymujemy dla mostka według rys. 12 współczynnik selektywności

$$\frac{B}{A^2} \cong \frac{\frac{f_{omin}}{f_o}\sqrt{wm}}{[1+m(1+w)]\left[1+m(1+w)\left(\frac{f_{omin}}{f_o}\right)^2\right]}. \tag{53}$$

Współczynnik selektywności B/A^2 jest największy przy

$$m_{opt} = \frac{\sqrt{\left[1+\left(\frac{f_{omin}}{f_o}\right)^2\right]^2 + 12\left(\frac{f_{omin}}{f_o}\right)^2} - \left[1+\left(\frac{f_{omin}}{f_o}\right)^2\right]}{6(1+w)\left(\frac{f_{omin}}{f_o}\right)^2}. \tag{54}$$



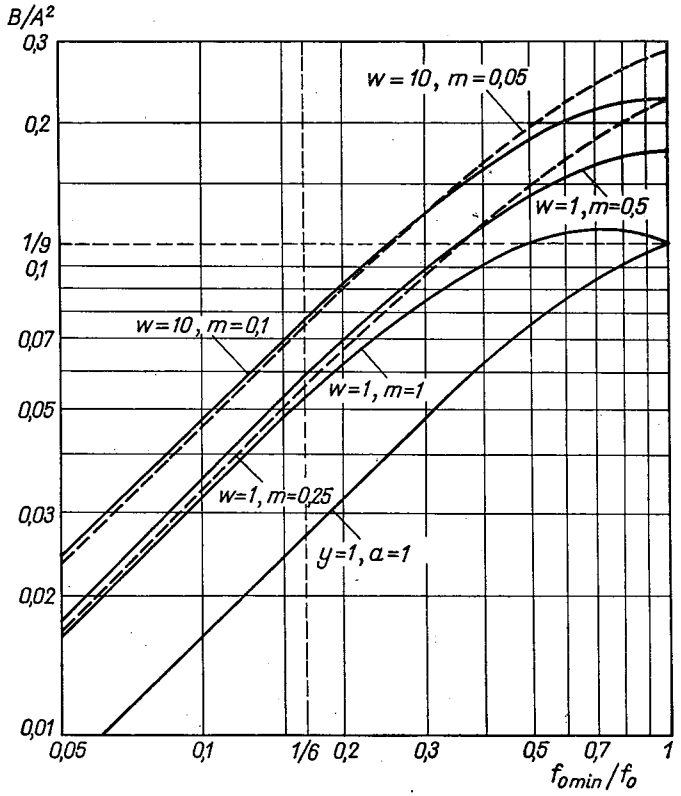
Rys. 14. Optymalna wartość parametru m dla mostka według rysunku 13 w zależności od stosunku częstotliwości $\frac{f_{omin}}{f_o}$ przy różnych wartościach parametru w

Na rys. 14 przedstawiona jest zależność optymalnego parametru m od stosunku $\frac{f_{omin}}{f_o}$ przy różnych wartościach parametru w, natomiast współczynnik selektywności w zależności od $\frac{f_{omin}}{f_o}$ przy różnych wartościach parametrów m i w pokazuje rys. 15. Z obu tych rysunków wynika, że dobór parametru m nie jest krytyczny. Podobnie jak to ma miejsce w układzie według rys. 5, najlepszą selektywność uzyskuje się przy $p \to \infty$ (tzn. $\omega_o \to \omega_{omin}$), a więc w obszarze, który zwykle nie może być wykorzystany. Bardziej pożądane byłoby zatem zwiększenie selektywności w zakresie większych względnych częstotliwości. Dla tego zakresu, gdy $\frac{f_{omin}}{f_o} < \frac{1}{5}$,

$$m_{opt} \cong \frac{1}{1+w}. \tag{55}$$

Wtedy

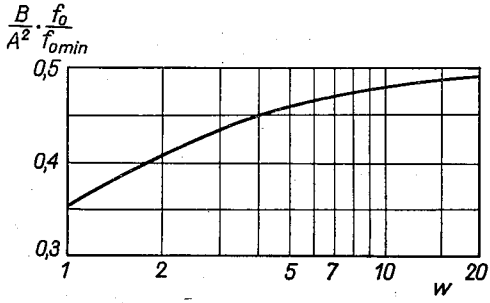
$$\frac{B}{A^2} \cong \frac{1}{2}\frac{f_{omin}}{f_o}\sqrt{\frac{w}{1+w}}. \tag{56}$$



Rys. 15. Współczynnik selektywności mostka z trójnikiem zbocznikowane T według rysunku 13 w zależności od stosunku częstotliwości rezonansowych $\frac{f_{omin}}{f_o}$ dla różnych wartości parametrów w i m. Krzywa oznaczona $y = 1$ i $a = 1$ odnosi się do mostka Wiena — zob. rys. 20

Rysunek 16 pokazuje zależność iloczynu współczynnika selektywności B/A^2 i stosunku f_o/f_{omin} od parametru w przy wartościach m zbliżonych do optymalnych. Z wykresu tego wynika, że przez powiększenie stosunku pojemności można wprawdzie polepszyć selektywność przy większych względnych częstotliwościach rezonansowych, lecz poprawa ta nie jest duża i praktycznie nie może wynosić więcej niż ok. 40% w stosunku do wartości przy $w = 1$. Tymczasem mostki, w których parametr w ma dużą wartość, a parametr m małą, są z innych względów niekorzystne. Dotyczy to szczególnie mostków przeznaczonych dla generatora *RC*.

Zastosowanie mostka według rys. 13 w generatorze wymaga obszerniejszego omówienia, gdyż trzeba także uwzględnić zjawiska nie występujące w konwencjonalnych układach.



Rys. 16. Iloczyn współczynnika selektywności i względnej częstotliwości rezonansowej w zależności od parametru w mostka według rysunku 13. Wykres sporządzono dla optymalnej wartości parametru m i przy założeniu, że $\frac{f_o}{f_{omin}} > 5$

Wskutek obciążenia dzielnika napięcia admitancją wejściową Y trójnika selektywnego, która dla częstotliwości rezonansowej wynosi:

$$Y_o = \frac{1}{R}\,\frac{1+w+j\sqrt{\frac{w}{m'}}}{m'(1+w)+1}, \tag{57}$$

powstaje przesunięcie fazowe φ między napięciami: wyjściowym $\hat{U}_1$ generatora i zasilającym $\hat{U}_1'$ mostek, lub między $\hat{U}_1$ i $\hat{U}_4$. Uwzględniając zależności (44) i (57) otrzymujemy:

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_4\left[A+j\frac{t\sqrt{wm}}{m+t}\left(\frac{f_o}{f_{omin}}-\frac{f_{omin}}{f_o}\right)\right]. \tag{58}$$

Przesunięcie fazowe φ, które można obliczyć na podstawie powyższej zależności, dodaje się do kąta fazowego wzmocnienia, a więc może być przyczyną niestałości częstotliwości generatora (por. np. [4]). Tymczasem przesunięcie to powiększa się przy takich wartościach parametrów m i w, które są optymalne dla uzyskania dużej selektywności. Między innymi z tych powodów po uwzględnieniu, że dla $w > 1$ uzyskuje się już tylko nieznaczny wzrost selektywności, można uznać dla większości przypadków generatorów mostek o $w = 1$ i $m = 1$ za zbliżony do optymalnego.

Najprostszym sposobem zmniejszenia wpływu przesunięcia fazowego φ byłoby zwiększenie rezystancji R (tzn. zmniejszenie parametru t), ale istnieją powody, dla których nie może być ona dowolnie duża. Ograniczenie wartości R wynika np. z praktycznie osiągalnej maksymalnej zmiennej rezystancji pR opornika regulowanego. W generatorach tranzystorowych natomiast konieczne jest utrzymanie niewielkiej wartości stosunku rezystancji R do impedancji wejściowej wzmaniacza, a to ze względu na stałość częstotliwości, skuteczność działania ujemnego sprzężenia zwrotnego i szumy wzmacniacza. Tak np. jeśli na impedancję wejściową wzmacniacza składa się praktycznie tylko rezystancja R_{we}, to względna zmiana częstotliwości rezonansowej wyniesie

$$\frac{\Delta f_o}{f_o} \cong \frac{1}{2}\frac{R}{R_{we}}, \tag{59}$$

przy czym

$$R_{we} \cong \frac{r_{we}k}{A}; \tag{60}$$

k jest wzmocnieniem napięciowym wzmacniacza, a r_{we} rezystancją wejściową przy braku sprzężenia zwrotnego. Ponieważ na rezystancję wejściową wzmacniacza ze sprzężeniem zwrotnym mogą się składać także i rezystancje niezależne od sprzężenia zwrotnego, dlatego wzór (60) podaje wartość przybliżoną.

Selektywność wzmacniacza ze sprzężeniem zwrotnym, czy też zawartość harmonicznych generatora mostkowego, zależy od wzmocnienia napięciowego $\hat{k}$. We wzmacniaczach tranzystorowych trzeba uwzględnić wpływ impedancji wyjściowej $\hat{Z}$ trójnika selektywnego na działanie sprzężenia zwrotnego przyjmując, że wzmocnienie napięciowe ma wartość

$$\hat{k}_1 = \hat{k}\frac{r_{we}}{\hat{Z}+r_{we}}. \tag{61}$$

Ponieważ $\hat{Z}$ rośnie przy zmniejszeniu częstotliwości, więc wskutek tego może pogorszyć się selektywność, mimo że w zakresie małych częstotliwości współczynnik B/A^2 ma większą wartość.

Z zależności (58) wynika, że przy stabilizacji amplitudy generatora za pomocą żaróweczki dążącej do utrzymania stałej wartości napięcia $\hat{U}_4$, napięcie $\hat{U}_1$ powinno wzrastać wraz z częstotliwością. Jednak powstałe w ten sposób zmiany amplitudy są zwykle mniejsze od zmian o przeciwnym znaku wywołanych niezrównoważeniem mostka. Przyjmując, że $k = k$, otrzymamy napięcie wyjściowe $\hat{U}_3$ mostka potrzebne dla spełnienia warunku amplitudy generatora:

$$\hat{U}_3 = \frac{\hat{U}_1}{k}. \tag{62}$$

Przy przestrajaniu mostka według rys. 13 zmienia się czułość układu, zależna od stosunku $\frac{t'R}{r}$, tzn. względna zmiana oporności r (lub tR) potrzebna dla uzyskania napięcia $\hat{U}_3$ nie jest stała. Dla dużych względnych częstotliwości stosunek $\frac{t'R}{r}$ rezystancji gałęzi mostka ma małą wartość, co równoznaczne jest z małą czułością i pogorszeniem stabilizacji amplitudy. Wtedy dla uzyskania tej samej wartości napięcia $\hat{U}_3$ potrzebne są znaczne zmiany $\Delta r/r$. Wyrażając je jako funkcję dwu krańcowych częstotliwości rezonansowych danego zakresu otrzymujemy:

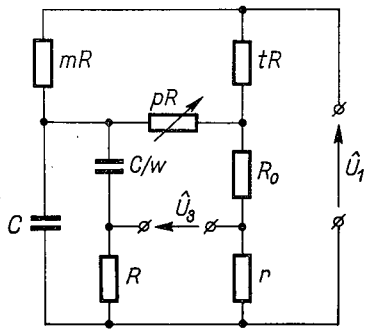
$$\frac{\Delta r}{r} \cong \frac{A\left[\left(\frac{f_{o1}}{f_{omin}}\right)^2 - \left(\frac{f_{o2}}{f_{omin}}\right)^2\right]}{(A-1)k+\left(\frac{f_{o1}}{f_{omin}}\right)^2+\left(\frac{f_{o2}}{f_{omin}}\right)^2}. \tag{63}$$

Jeśli elementem stabilizującym amplitudę jest żarówka wolframowa, to względne zmiany napięcia $\hat{U}_4$ lub $\hat{U}_1$ są około 2,5 razy większe od względnych zmian oporności r (dotyczy

to jednak tylko małych zmian napięcia). Mimo to zmiany te przy dużym wzmocnieniu wzmacniacza i przy ograniczeniu stosunku $\frac{f_{o2}}{f_{omin}}$ do kilku mogą być w większości przypadków wystarczająco małe.

W celu uniknięcia zmian rezystancji dzielnika przy przestrajaniu generatora można rozrównoważyć mostek przez dodanie opornika o rezystancji

$$R_o = \frac{tR+r}{k}, \tag{64}$$

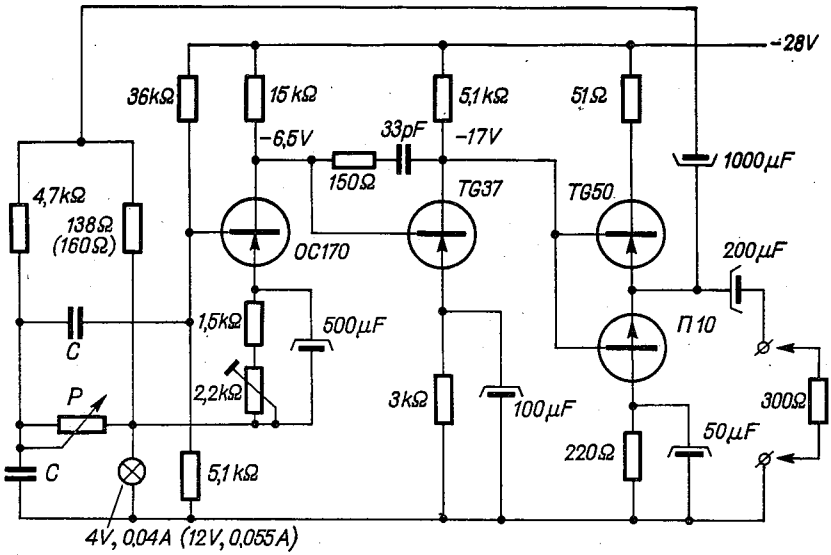


Rys. 17. Mostek z trójnikiem zbocznikowane T przeznaczony dla generatora *RC*, zawierający dodatkowy opornik R_o dla uzyskania niezależnego od rezystancji pR rozrównoważenia układu

jak to pokazuje rys. 17. Jednak w praktyce kompensacja zmian amplitudy tym sposobem może okazać się niecałkowicie skuteczna. Wynika to z faktu, że zwykle $\hat{k} \neq k$ i zmienia się w zakresie generowanych częstotliwości. Poza tym zmiany równowagi mostka mogą być spowodowane także niestałością tłumienia A, wywołaną wielkościami szczątkowymi trójnika selektywnego.

Pogorszenie stabilizacji amplitudy w zakresie większych względnych częstotliwości jest jednym z argumentów przemawiających za zmniejszeniem stosunku przestrajanych częstotliwości w tym typie mostka zastosowanym w generatorze *RC*.

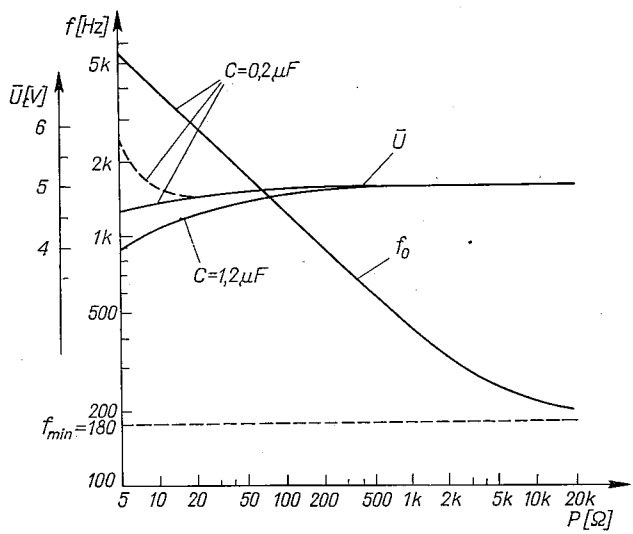
Jako przykład zastosowania mostka według rys. 13 pokazano na rys. 18 schemat generatora *RC* przestrajanego za pomocą zmiennego opornika *P*. We wzmacniaczu użyto tranzystorów o współczynniku wzmocnienia prądowego 60÷70, dzięki czemu przy $f =$ $= 800$ Hz i obciążeniu 300 Ω wzmocnienie napięciowe wynosi ok. 7000. Rysunek 19 pokazuje zależność częstotliwości od oporności *P*, gdy $C = 0{,}2$ μF. Ponadto na wykresie naniesiono zależność amplitudy napięcia wyjściowego $\overline{U}$ od częstotliwości zmierzoną dla $C = 0{,}2$ μF i $C = 1{,}2$ μF. Ta ostatnia zależność odpowiada dość dobrze wpływowi niezrównoważenia obliczonemu ze wzoru (63) po uwzględnieniu charakterystyki użytej żarówki. Przy $C = 0{,}2$ μF widoczny jest znaczny wpływ wielkości szczątkowych trójnika. Krzywe ciągłą i przerywaną uzyskano dla dwu oporników *P* różniących się szkodliwymi indukcyjnościami. Przy $C = 0{,}2$ μF w całym pasmie częstotliwości przy amplitudzie 5 V współczynnik zniekształceń nieliniowych wynosi mniej niż 0,1%. Trzeba przy tym dodać, że przy najmniejszych częstotliwościach tego zakresu jest on spowodowany głównie trzecią harmoniczną wprowadzoną przez nieliniowy element sprzężenia zwrotnego — żarówkę.



Rys. 18. Generator *RC* z trójnikiem zbocznikowane T przestrajany opornikiem *P*

To zjawisko, które wywołane jest zbyt małą bezwładnością cieplną żarówki, powoduje, że dla $C = 1{,}2\ \mu F$ i $f_{omin} = 30$ Hz (tj. dla $p = \infty$) współczynnik zniekształceń nieliniowych wynosi 0,55% przy żaróweczce 4 V, 0,04 A i 0,28% przy żaróweczce 12 V, 0,055 A. Selektywność mostka, jak również przyłączanie bądź odłączanie obciążenia mają w takim przypadku drugorzędny wpływ na wartość zniekształceń.

Rysunek 20 przedstawia mostek Wiena przestrajany za pomocą jednego opornika

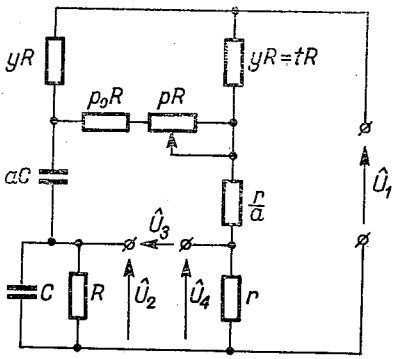


Rys. 19. Zależność częstotliwości f i amplitudy $\overline{U}$ napięcia wyjściowego generatora według rysunku 18 od rezystancji opornika *P*

Dla tego mostka

$$\omega_{omin} = \frac{1}{RC\sqrt{ay}}. \tag{65}$$

Do obliczenia wielu innych wielkości można posłużyć się wzorami (44)...(48) po podstawieniu y zamiast m.



Rys. 20. Mostek Wiena przestrajany jednym elementem

Współczynnik selektywności dla mostka według rys. 20 jest

$$\frac{B}{A^2} = \frac{\frac{f_{omin}}{f_o}\sqrt{\frac{y}{a}}}{\left(1+\frac{1}{a}+y\right)\left[1+\frac{1}{a}+y\left(\frac{f_{omin}}{f_o}\right)^2\right]}. \tag{66}$$

Różnicowanie elementów R i C w mostku Wiena przynosi tylko nieznaczne polepszenie selektywności (por. np. [3], [4]). Dlatego własności układu o $a = 1$ i $y = 1$ są w większości przypadków bardzo zbliżone do optymalnych. Należy zwrócić uwagę na to, że o ile w mostku z trójnikiem zbocznikowane T o $m = w = 1$ dla $\frac{f_{omin}}{f_o} \to 0$, $\frac{B}{A^2} \to \frac{1}{3}\frac{f_{omin}}{f_o}$, to współczynnik ten przy niezróżnicowanych elementach mostka Wiena przestrajanego jednym opornikiem jest w podobnych warunkach dwa razy gorszy. Zależność współczynnika B/A^2 od stosunku $\frac{f_{omin}}{f_o}$ dla mostka Wiena o $a = y = 1$ naniesiono na wykresie rys. 15.

Selektywność mostka Wiena jest gorsza od uzyskiwanej w mostku z trójnikiem zbocznikowane T, ale pod względem stałości amplitudy w zakresie większych względnych częstotliwości $\frac{f_o}{f_{omin}}$ mostek Wiena przestrajany jednym opornikiem jest zdecydowanie lepszy. Wynika to z faktu, że stosunek rezystancji dzielnika samego mostka (tj. w układzie zastępczym po pominięciu opornika szeregowego z mostkiem) jest zawsze większy od $1/a$. Dla uzyskania jednakowej amplitudy niezależnej od częstotliwości wymagane jest tylko dobranie stosunku rezystancji yr i r/a dzielnika. Oczywiście przy zmianie zakresu częstotliwości stosunek pojemności a powinien być możliwie dokładnie zachowany.

W wyniku porównania własności mostków według rys. 13 i rys. 20 należy stwierdzić, że we wzmacniaczach selektywnych mostek z trójnikiem zbocznikowane T jest lepszy, gdyż jest selektywniejszy, prostszy konstrukcyjnie i nie wymaga dwupunktowego korygowania oporników dzielnika. Również w generatorach *RC* o małym zakresie przestrajania układ według rys. 13 jest na ogół korzystniejszy. W generatorach o znacznym zakresie przestrajania i przy dużych wymaganiach co do stabilności amplitudy lepiej jest zastosować mostek Wiena, chociaż trzeba się wtedy liczyć z tym, że zniekształcenia będą w przybliżeniu dwa razy większe. Jednak odpowiednia konstrukcja generatora może zapewnić wystarczająco małą zawartość harmonicznych. Na przykład po zastosowaniu w układzie pokazanym na rys. 18 mostka Wiena według rys. 20 uzyskany z $C = 0{,}2$ μF dla P zmienianego od 5Ω do ∞ (tj. przy $F \cong 30$) współczynnik zniekształceń nieliniowych jest mniejszy od 0,2% przy amplitudzie 5 V i równoczesnej bardzo dobrej jej stałości.

WNIOSKI

W mostkach przestrajanych jednym elementem stosunek częstotliwości rezonansowych $F = \frac{f_{omax}}{f_{omin}}$, jaki można by uzyskać w większości układów jedynie przy zmianach rezystancji opornika regulacji częstotliwości od zera do nieskończoności, jest ograniczony ze względu na pogarszającą się selektywność układu. W porównaniu z F praktycznie uzyskiwany stosunek częstotliwości jest dla większości omówionych wyżej układów ok. dwa razy mniejszy, a to ze względu na trudności związane z wykonaniem odpowiedniego opornika regulacyjnego. Stosunek ten może dla układów według rysunków 5, 9, 13 i 20 wynosić 1:10 i więcej, ale aby uzyskać dobrą selektywność i korzystną charakterystykę regulacji częstotliwości, lepiej jest go ograniczyć do wartości $1:\sqrt{10}$.

Spośród omówionych wyżej układów najlepsze własności wykazują mostki według rysunków 5, 9 i 13. Największą selektywność można uzyskać w układzie według rys. 9, jednak jego wadą jest niekorzystnie malejąca impedancja wejściowa przy zwiększaniu częstotliwości opornikiem pR. Wady tej nie posiada układ według rys. 5, lecz praktycznie osiągana selektywność jest tu nieznacznie mniejsza. Mostek z trójnikiem zbocznikowane T według rys. 13 wyróżnia się najprostszą konstrukcją i szczególnie łatwym doborem elementów układu. Jego selektywność jest tylko nieznacznie gorsza od selektywności w układach według rysunków 5 i 9. Przy ograniczeniu praktycznie uzyskiwanego stosunku przestrajanych częstotliwości do wartości $1:\sqrt{10}$ otrzymywane w tych trzech układach selektywności są w przybliżeniu takie, jak dla zwykłego mostka Wiena. Oprócz tych trzech układów na uwagę zasługuje mostek Wiena przestrajany jednym opornikiem (rys. 20), który choć jest mniej selektywny, lecz zastosowany w generatorze RC umożliwia lepszą stabilizację amplitudy jak mostek z trójnikiem zbocznikowane T według rys. 13.

LITERATURA CYTOWANA W TEKSCIE

1. H. P. Hall, RC Networks with Single-Component Frequency Control, IRE Transactions — Circuit Theory CT-2, 1955, September, 283—284.
2. D. Löffler, Mit einem Element abstimmbare RC Sperrfilter für selektive Verstärker und Oszillatoren, Rohde & Schwarz Mitteilungen, **21**, 307—316, 1967.

3. J. Srzednicki, Zniekształcenia nieliniowe generatorów RC z mostkiem Wiena, Arch. Elektrotechniki, **17**, 1, 89—96, 1968.
4. J. Srzednicki, Optymalne parametry przestrajanego mostkowego generatora RC, Rozprawy Elektrotechn., **15**, 2, 253—267, 1969.
5. E. R. Wigan, Single-Control Element Wien Bridge, Electronic Technology, **37**, 223—231, Juni, 1960.

J. SRZEDNICKI

SINGLE-CONTROL ELEMENT RC BRIDGES

Summary

The bridges discussed in this paper are of the same type as the Wien bridge and each includes a selective *RC* network and a frequency independent voltage divider. These bridges are designed also primarily for oscillators and selective amplifiers. However, contrary to conventional circuits they are tuned by a single element only, which is of great importance in practical applications.

The voltage transfer function $\hat{\beta}$ of selective part (i.e. of selective *RC* network only) of each of the bridges considered here may be given by the general equation

$$\hat{\beta} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{1}{A + jB\left(x - \frac{1}{x}\right)}.$$

In [4] it has been shown that the selective properties of the whole bridge depend on the factor $\frac{B}{A^2}$. This factor should be mainly taken in to consideration by the choice of a proper bridge.

Most of the examined circuits may be derived from the bridge shown in Fig. 1. This circuit turns to the Wien bridge when $R_2 = 0$, on the other hand by $R_1 = 0$ its selective network becomes bridged-T.

In one group of circuits the attenuation A is kept constant in order to achieve single-control tuning. For example, it is possible in the circuit of Fig. 1 when by $C_1 = C_2$ the sum $R_1 + R_2$ remains unchanged. However, such a circuit (see Fig. 2) has a poor selectivity if a considerable range of frequency variation is required. The best bridges of this group are obtained when in the bridge shown in Fig. 1 the three star connected resistances are converted in to equivalent delta connection (see Fig. 4). Then the attenuation A may be independent either of R_{13} or of R_{23} when the bridge elements are properly proportioned.

The bridge tuned by means of resistance R_{23} is shown in Fig. 5. The highest and the lowest frequencies f_{omax} and f_{omin} (i.e. by $p = 0$ and $p = \infty$) are given by Eqs. (20) and (21), respectively. For the chosen frequency ratio $F = \frac{f_{omax}}{f_{omin}}$ the parameters b and n follow from Eqs. (23) and (24). The universal control characteristics are shown in Fig. 6. p_s is the value of parameter p at the middle resonant frequency f_{os} [see Eqs. (26) and (28)]. The selectivity factor $\frac{B}{A^2}$ versus relative frequency is shown in Fig. 7. It is evident that the selectivity decreases with increasing frequency ratio F. The same results from Fig. 8 where the relations for the cases f_{os} and f_{omax} are drawn. From both Figs. 7 and 8 it can also be seen that by increase of capacitance ratio a the selectivity may be improved. The bridge of Fig. 4 with variable resistance R_{13} was given by Wigan [5]. This circuit is illustrated in Fig. 9. All the formulas concerning the frequency and in the case $a = 1$ also the other formulas are the same for both the circuits shown in Figs. 5 and 9 by substituting $y = b$. A disadvantage of the bridge of Fig. 9 is that input impedance of *RC* network by diminution of pR (i. e. by increase of the frequency) violently decreases. The factor $\frac{B}{A^2}$ can also be taken from Fig. 7 but in this case the values of the abscissa give the ratio $\frac{f_{omin}}{f_o}$ $\left(\text{instead of } \frac{f_o}{f_{omax}}\right)$. The region of lower

relative frequencies (i. e. $p \to \infty$) cannot be usually utilized particularly by continously controled resistance pR, therefore, by $a > 1$ selectivity of the bridge of Fig. 9 may appear a little better in practice than that of the bridge of Fig. 5.

In the second group of circuits the attenuation A is varied by tuning but simultaneously the voltage divider's value changes, too. Here also the star-to-delta transformation is utilized. This method of tuning can be used by the Wien bridge (Fig. 20) and by the bridge with bridged-T network (Fig.13). The latter is particularly advantageous since its RC network elements need not be chosen or adjusted to achieve the bridge balance at all resonant frequencies. Besides, their selectivity is about two times better than that in the case of single-control element Wien bridge of Fig. 20. However, the circuit analysis shows that at higher relative frequencies, i. e. by $p \to 0$, the amplitude stability of an oscillator in which the bridge of Fig. 13 is applied may be not sufficient. Therefore, the bridge of Fig. 20 instead that shown in Fig. 13 is preferable in RC oscillators with great tuning range and very good amplitude stability required. Otherwise, for example in selective amplifiers, the bridge of Fig. 13 should be used. The characteristics shown in Fig. 6 are valid for both the bridges of Figs. 13 and 20 but equations (46) and (47) should be regarded.

The achievment of good selectivity is not the only reason for limitation of frequency ratio F in all single-controled RC bridges. It is evident from Fig. 6 that at greater F — ratios serious difficulties appear in obtaining suitable characteristic of control element. Both these reasons suggest that a small practically available frequency ratio (that is usually about twice smaller that F) should be chosen, for instance, equal to $\sqrt{10}$, though the values of 10 and more can be reached without considerable difficulties. These remarks refer also to the Wigan bridge Fig. 9. Thus the opinion that only $F \cong 3$ is available with this circuit is to be considered as faulty on the basis of the analysis accomplished in this paper.

In the experimental RC oscillator shown in Fig. 18 the frequency ratio approaches 30 (see Fig 19). By this considerable value the harmonic distortions do not exceed 0,1 per cent when the output voltage amplitude amounts to 5 V. Using the bridge of Fig. 20 in this oscillator makes the amplitude perfectly independent of the tuning but the distortions are approximately doubled.

J. SRZEDNICKI

LES PONTS RC ACCORDÉS PAR UN SEUL ÉLÉMENT

Résumé

On présente dans l'oeuvre les proprietés de quelques ponts RC appartenant au même groupe, que le pont de WIEN, mais accordés seulement par un élément. Dans les schémas comme ça le rapport des fréquences accordées, de celle la plus grande à celle la plus petite, est limité principalement à cause de l'empirement de la sélectivité et des difficultés, liées avec une construction d'un élément accordant ayant une caractéristique convenable. On a analysé plus en détail les trois ponts se distinguant par des meilleurs qualités. Ces ponts sont construits pour avoir le rapport des fréquences accordées $1 : \sqrt{10}$ et ils sont approximativement ainsi sélectifs comme le pont simple de Wien.

J. SRZEDNICKI

MIT EINEM ELEMENT ABSTIMMBARE RC-BRÜCKEN

Zussamenfassung

In dieser Arbeit werden einige aus selektivem RC-Netzwerk und frequenzunabhängigem Spannungsteiler zusammengesetzten Brücken behandelt, die hauptsächlich für Oszillatoren und selektive Verstärker bestimmt sind. Es sind also die Brücken von ähnlicher Type wie die Wien-Brücke, aber sie lassen sich im Gegensatz zu konventionellen Schaltungen nur mit einem Element abstimmen, was von wesentlicher Bedeutung für praktische Anwendungen ist.

Die Spannungsübersetzung des selektive Teiles jeder hier näher betrachtenen Brücke (d. h. nur des *RC*-Netzwerkes) kann in allgemeiner Form

$$\hat{\beta} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{1}{A + jB\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

gegeben werden. In [4] ist gezeigt, dass die selektiven Eigenschaften der ganzen Brücke dem Faktor $\frac{A}{B^2}$ proportional sind. $\left(\text{für gewöhnliche Wien-Brücke } \frac{A}{B^2} = \frac{1}{9}\right)$. Dieser Faktor ist eine der wichtigsten Grössen, die bei der Wahl der richtigen Schaltung massgebend sind.

Die Mehrheit der untersuchenen Schaltungen lässt sich aus der in Abb. 1 gezeigten Brücke ableiten. Mit $R_2 = 0$ geht diese Schaltung in die Wien-Brücke über, dagegen bei $R_1 = 0$ wird das selektive Netzwerk zur überbrückten T-Schaltung. In einer Gruppe der Schaltungen die geforderte Bedingung die Resonanzfrequenz mit einem Element abzustimmen, wurde durch unveränderbare Dämpfung A bei dieser Frequenz erzielt. Das ist z. B. in der Schaltung nach Abb. 1 möglich, wenn, bei $C_1 = C_2$, die Summe $R_1 + R_2$ konstanten Wert hat [siehe Gl. (4)]. Solche Schaltung (Abb. 2) hat aber schlechte selektive Eigenschaften, wenn der angenommene Abstimmbereich nicht gering ist. Die besten Brücken dieser Gruppe erhält man dagegen, wenn in der Schaltung nach Abb. 1 die drei in Stern geschalteten Widerstande mit äquivalenter Dreieckschaltung ersetzt werden, wie das Abb. 4 zeigt. Bei richtig bemessenen Netzwerkelementen kann dann die Dämpfung A entweder von R_{13} oder von R_{23} unabhängig sein. Die Brücke, in welcher die Resonanzfrequenz mit dem Widerstand R_{23} abgestimmt wird, zeigt Abb. 5. Die maximale und minimale Resonanzfrequenzen, f_{omax} und f_{omin} (für $p = 0$ und $p = \infty$), geben die Gleichungen (20) und (21) an. Für das angenommene Frequenzverhältnis $F = \frac{f_{omax}}{f_{omin}}$ kann man aus Gl. (23) und (24) die beiden Parameter b und n ermitteln. In Abb. 6 sind die universalen Regelkennlinien gezeigt. Durch p_s ist ein Wert des Parameters p bezeichnet, bei welchem die mittlere Resonanzfrequenz f_{os} erreicht wird [siehe Gl. (26) und (28)]. Abb. 7 stellt die Beziehung zwischen Selektivitätsfaktor $\frac{B}{A^2}$ und relativer Frequenz dar. Die Selektivität der Brücke nimmt mit dem angenommenen Frequenzverhältnis F ab. Das ist besser aus der Abb. 8 ersichtlich, wo die Beziehungen für die Fälle f_{os} und f_{omax} aufgetragen sind. Aus beiden Abbildungen 7 und 8 folgt, dass man durch Vergrössern von Kapazitätsverhältnis a die Selektivität der Brücke verbessern kann. Die Brücke nach Abb. 4, in welcher der Widerstand R_{13} veränderbar ist, wurde von Wigan [5] gegeben. Diese Schaltung zeigt Abb. 9. Alle Formeln, die die Frequenz betreffen und im Falle $a = 1$ auch die übrige Formeln, sind für beide Brücken nach Abb. 5 und Abb. 9 gleich, wenn man $b = y$ setzt. In der Brücke nach Abb. 9 ist es nachteilig, dass die Eingangsimpedanz des RC-Netzwerkes beim Verringern von pR (d. h. bei der Erhöhung der Frequenz) stark abnimmt. Der Faktor $\frac{B}{A^2}$ kann auch aus Abb. 7 abgelesen werden, aber in diesem Fall drücken die Werte der Abzissachse das Verhaltnis $\frac{f_{omin}}{f_o}$ $\left(\text{und nicht } \frac{f_o}{f_{omax}}\right)$ aus. Da sich der Bereich der kleinsten relativen Frequenzen (d.h. bei $p \to \infty$) bei stetigweise regelbarem Widerstand pR nich ausnutzen lässt, kann in der Praxis, wenn $a > 1$, die Brücke nach Abb. 9 gegenüber der Brücke nach Abb. 5 etwas bessere Selektivität aufweisen.

In der zweiten Gruppe des Schaltungen ist zwar die Dämpfung A nicht konstant, aber gleichzeitig wird entsprechend der Wert des Spannungsteilers geändert. Auch hier wird die Umwandlung Stern—Dreieck ausgenutzt. Dieses Verfahren lässt sich für die Wien-Brücke (Abb. 20) sowie für die Brücke mit überbrückter T-Schaltung (Abb. 13) anwenden. Diese letzte Brücke ist besonders vorteilhaft, da ihr Gleichgewicht für alle mit dem Widerstand pR eingestellten Resonanzfrequenzen ohne Bemessung und Abgleich des RC-Netzwerkes erzielt wird. Ausserdem ist die Selektivität dieser Brücke etwa zweimal besser als diejenige der mit einem Element abstimmbaren Wien-Brücke nach Abb. 20 (siehe Abb. 15). Die durchgeführten Betrachtungen zeigen aber, dass bei höheren relativen Frequenzen (d. h., bei $p \to 0$) die Ampli-

tudenstabilität eines Oszillators mit der Brücke nach Abb. 13 nicht günstig sein kann. Deshalb fur *RC*-Oszillatoren, bei welchen ein breiter Frequenzabstimmbereich und sehr konstante Amplitude verlangt werden, ist die Brücke nach Abb. 20 statt der Brücke nach Abb. 13 zu empfehlen. Sonst (z. B. in selektiven Verstärkern) soll man aber die Schaltung nach Abb. 13 anwenden. Für beide Brücken nach Abb. 13 und 20 gelten die Kennlinien nach Abb. 6; man soll nur die Gleichungen (46) und (47) berücksichtigen.

Die Begrenzung des Frequenzverhältnises F wird in aller mit einem Element abstimmbaren Brücken nicht nur zwecks Erhaltens einer möglichst guter Selektivität empfohlen. Aus der Abb. 6 ist zu erkennen, dass bei grösseren F-Werten wesentliche Schwierigkeiten mit der Erlangung einer vorteilhaften Kennlinie des Regelelementes auftreten. Aus diesen beiden Gründen ist es zweckmässig das in der Praxis auftretende Frequenzverhältnis (das üblich zweimal kleiner als F ist) möglichst klein, z.B. gleich $\sqrt{10}$, zu wählen, doch das Verhältnis 10 und auch viel grössere Werte sind ohne besondere Massnahmen zu erzielen. Obiges betrifft ebenso die Wigan-Brücke nach Abb. 9, also die Meinung, dass mit dieser Schaltung nur $F \cong 3$ erreichbar ist ([2], [5]), muss man auf Grund durchgeführten Betrachtungen als nicht richtig annehmen.

Mit dem in Abb. 18 gezeigten experimentalen RC-Oszillator wird ein Frequenzverhältnis von beinahe 30 erzielt (siehe Abb. 19) dabei die Verzerungen von 0,1% bei einer Amplitude der Ausgangsspannung von 5 V noch nicht überschritten werden. Durch die Anwendung der Wien-Brücke nach Abb. 20 wird in dieser Schaltung ein vorzüglicher Frequenzgang erreicht, aber die Verzerrungen ungefähr zweifach zunehmen.

Я. СЖЕДНИЦКИ

МОСТИКИ RC ПЕРЕСТРАИВАЕМЫЕ ОДНИМ ЭЛЕМЕНТОМ

Р е з ю м е

Представлены свойства нескольких мостиков RC из этой же самой группы, что и мостик Вина но перестраиваемых только одним элементом. В таких схемах отношение перестраиваемых частот найбольшой к найменьшей ограничено главным образом в виду ухудшения избирательности и трудностей, связанных с изготовлением регуляционного элемента обладающего соответственной характеристикой. Более подробно рассмотрены три мостика отличающиеся найлучшими свойствами. Эти мостики построены для отношения перестраиваемых частот $1:\sqrt{10}$ и они приближенно так избирательны, как обычный мостик Вина.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 15, 3, ss. 387—394
INSTYTUT TECHNOLOGII ELEKTRONOWEJ PAN, WARSZAWA 1969

Przesuwnik fazowy RC z tranzystorem polowym pracującym jako opornik o sterowanej rezystancji

ZDZISŁAW KORZEC, JAN KORZYŃSKI (ŁÓDŹ)

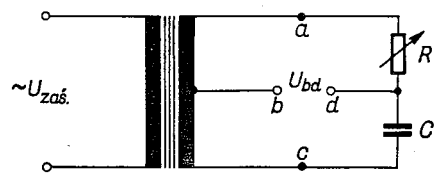
Katedra Elektroniki Przemysłowej Politechniki Łódzkiej
Pracownia Pomiarów Przyrządów Półprzewodnikowych ITE PAN

Otrzymano 5.9.1968

Tranzystor polowy pracujący w obszarze triodowym charakterystyk wyjściowych może być wykorzystany jako opornik o rezystancji sterowanej napięciem bramki. W artykule omówiono podstawowe zależności teoretyczne oraz podstawowe charakterystyki zdjęte doświadczalnie dotyczące pracy tranzystora polowego w obszarze triodowym a także charakterystyki przesuwnika fazowego, w którym wykorzystano tego rodzaju pracę tranzystora polowego.

1. WSTĘP

Przesuwnik fazowy RC (rys. 1) stanowi jeden z podstawowych podzespołów elektronicznych układów sterowania i automatyki. Zmianę kąta fazowego φ między napięciem U_{bd} i U_{ac} można uzyskać zmieniając wartość pojemności kondensatora C lub rezystancji opornika R. W układach stosowanych w praktyce jako opornik o rezystancji sterowanej



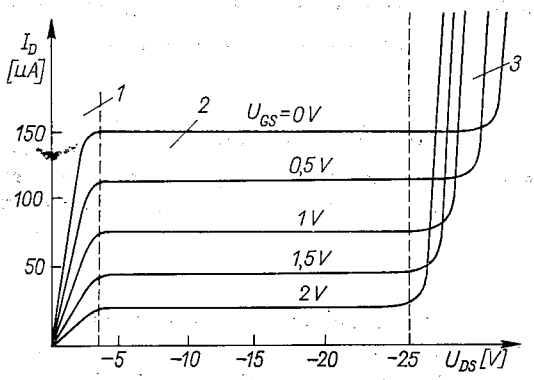
Rys. 1. Przesuwnik fazowy *RC*

napięciem była wykorzystywana lampa regulacyjna (trioda). Zakres regulacji w tym przypadku był ograniczony do ujemnych napięć siatki (rzędu kilku woltów). Zastąpienie lampy tranzystorem polowym pracującym w zakresie triodowym pozwala na wykonanie przesuwnika fazowego sterowanego zarówno napięciem stałym, jak i zmiennym, oraz posiadającego wszystkie zalety układów półprzewodnikowych (małe wymiary, odporność na wstrząsy i radiacje, duża sprawność itp.).

Artykuł niniejszy jest poświęcony omówieniu zasadniczych problemów związanych z pracą tranzystora w obszarze triodowym, gdzie tranzystor może być traktowany jako opornik sterowany napięciem bramki, oraz ze stosowaniem tranzystorów polowych w przesuwnikach fazowych.

2. PRACA TRANZYSTORA POLOWEGO W OBSZARZE TRIODOWYM

Na rys. 2 przedstawione są typowe charakterystyki wyjściowe tranzystora polowego złączowego. Można wyróżnić trzy zasadnicze obszary charakterystyk, a mianowicie: 1) obszar triodowy ograniczony krzywą $U_{GS}+U_{DS}=U_p$ (gdzie U_p napięcie odcięcia



Rys. 2. Charakterystyki wyjściowe tranzystora polowego
1 — obszar triodowy, *2* — obszar pentodowy, *3* — obszar powielania lawinowego

kanału), 2) obszar pentodowy, w którym tranzystor pracuje przy napięciach większych od napięcia odcięcia kanału, 3) obszar powielania lawinowego — w normalnej pracy nie wykorzystywany ze względu na możliwość trwałego uszkodzenia tranzystora.

Nachylenie charakterystyk wyjściowych w obszarze triodowym, określające przewodność kanału między drenem i źródłem, jest zależne od napięcia bramki. Nachylenie to jest względnie stałe w zakresie małych napięć drenu przy danym napięciu bramki. Można zatem w tym obszarze tranzystor polowy traktować jako opornik, którego rezystancja jest zależna od napięcia bramki.

2.1. Zależności teoretyczne

W zakresie triodowym, dla przypadku kanału jednorodnego, konduktancję kanału można określić zależnością [1]

$$G_d = \frac{dI_D}{dU_{DS}}\bigg|_{U_{GS}} = G_o\left[1-\left(\frac{U_{DS}+U_{GS}+\Phi}{U_p}\right)^{1/2}\right], \tag{1}$$

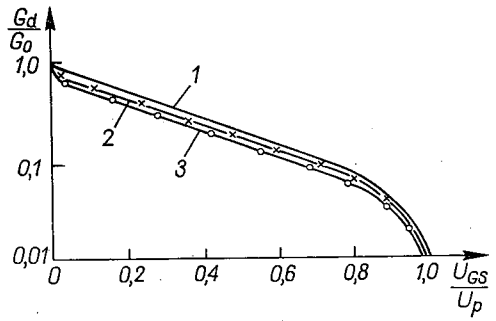
gdzie:

G_o — całkowita, statyczna, konduktancja kanału,
U_{DS}, U_{GS} — odpowiednio napięcie drenu i napięcie bramki,
U_p — napięcie odcięcia kanału,
Φ — potencjał kontaktowy złącza.

Dla małych napięć drenu można przyjąć, że konduktancja kanału zależy jedynie od napięcia bramki. Zależność (1) upraszcza się wtedy do postaci

$$G_d = G_o\left[1-\left(\frac{U_{GS}}{U_p}\right)^{1/2}\right]. \tag{2}$$

Przedstawiona na rys. 3 krzywa *1* została wykreślona na podstawie zależności (2), w skali logarytmicznej. Krzywa ta posiada trzy wyraźnie występujące obszary: początkowy, w którym istnieje szybka zmiana konduktancji, drugi, środkowy, w którym zmiany są

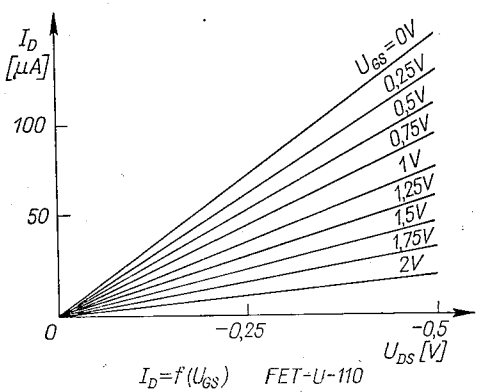


Rys. 3. Zależność konduktancji kanału od napięcia sterującego bramki
1 — krzywa teoretyczna [wg zależności (2)], *2* — krzywa pomierzona — tranzystor typu 2N3823, *3* — krzywa pomierzona — tranzystor typu U-110

w przybliżeniu liniowe, oraz trzeci, w którym występuje stopniowe zmniejszanie konduktancji przy zwiększaniu napięcia odcięcia. Przebieg krzywej jest słuszny zarówno dla konduktancji przy napięciach stałych, jak i przy małych częstotliwościach.

2.2. Wyniki pomiarów

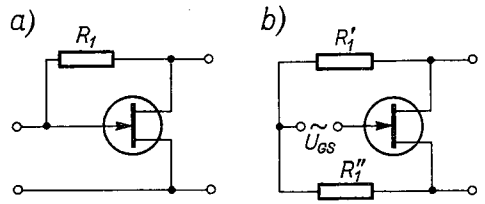
Na rys. 4 zostały przedstawione charakterystyki wyjściowe tranzystora polowego typu U-110 dla zakresu triodowego. Jak wynika z przebiegu krzywych, w zakresie małych napięć (mniejszych od U_p) przebieg charakterystyk jest praktycznie liniowy. Na rys. 3 (krzywa *2*)



Rys. 4. Charakterystyka wyjściowa tranzystora polowego w zakresie triodowym

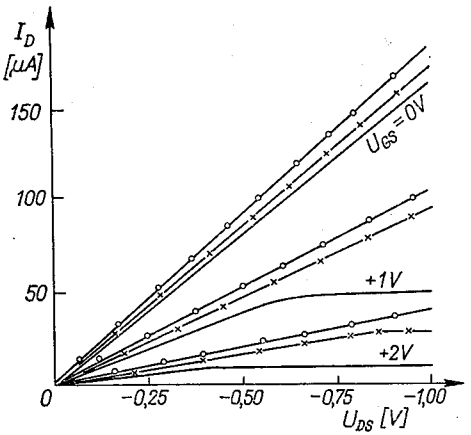
wykreślono krzywą $G_d/G_o = f(U_{GS}/U_p)$ dla tego tranzystora. Konduktancja G_o została obliczona z nachylenia charakterystyki wykreślonej przy $U_{GS} = 0$. Wartość napięcia odcięcia przyjęto równą napięciu bramki, przy którym konduktancja kanału maleje do 0,01 wartości G_o ($U_p \approx 2{,}5$ V).

Zakres liniowych zmian konduktancji kanału można zwiększyć stosując sprzężenie zwrotne między drenem i bramką (opornik R_1 na rys. 5). Na rys. 6 przedstawiono przykładowo charakterystyki $I_D = f(U_{GS})$ w zakresie triodowym przy oporności sprzęgającej

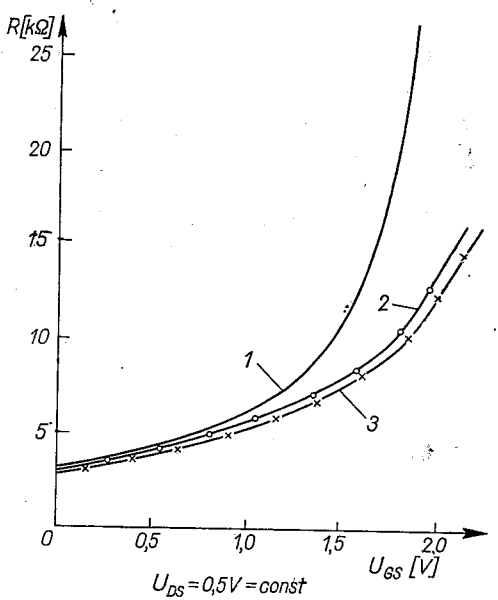


Rys. 5. Tranzystor polowy pracujący jako opornik o rezystancji sterowanej napięciem bramki: a) układ pojedynczy, b) układ symetryczny

$R_1 = 100$ kΩ i $R_1 = 1{,}5$ MΩ, zaś na rys. 7 wykres rezystancji kanału w funkcji napięcia sterującego bramki przy tych samych wartościach oporności sprzęgającej. Zastosowanie opornika sprzęgającego rzędu 100 kΩ powoduje wyraźne zwiększenie zakresu liniowego przebiegu charakterystyk przy nieznacznym zwiększeniu wypadkowej wartości dI_D/dU_{DS}



Rys. 6. Wpływ oporności sprzęgającej R_1 na przebieg charakterystyk wyjściowych w obszarze triodowym (tranzystor typu U-110) $-R_1 = \infty$; x–x–x $R_1 = 100$ kΩ; o–o–o $R_1 = 1{,}5$ MΩ

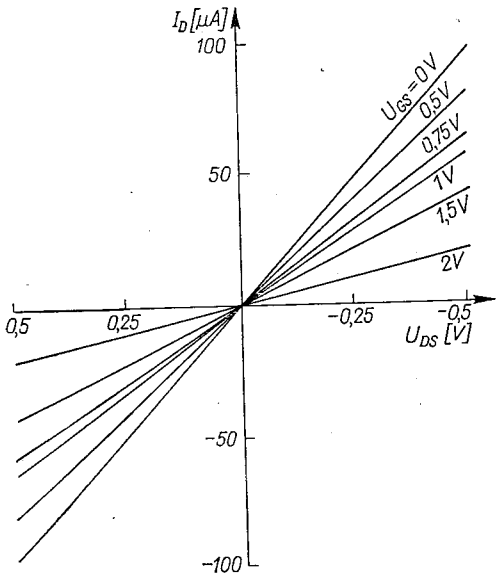


Rys. 7. Wykres oporności kanału w funkcji napięcia sterującego bramki
1 — bez sprzężenia ($R_1 = \infty$), *2* — z opornikiem sprzęgającym ($R_1 = 100$ kΩ), *3* — z opornikiem sprzęgającym ($R_1 = 1{,}5$ MΩ)

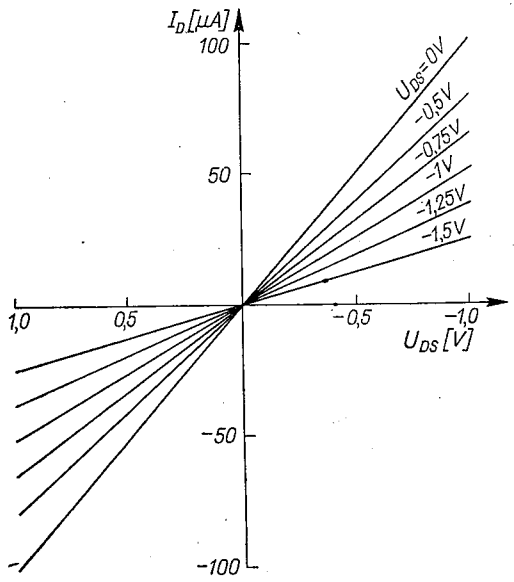
Dużą zaletą tranzystorów polowych wykorzystywanych jako oporniki o sterowanej rezystancji napięciem bramki jest możliwość ich pracy w układach symetrycznych (rys. 5b). Charakterystyki wykreślone w obszarze ćwiartki pierwszej i trzeciej (rys. 8 i 9) są w dużym

stopniu symetryczne. W tym przypadku również zakres liniowych zmian konduktancji można zwiększyć stosując sprzężenie zwrotne (oporniki R_1' i R_1'' na rys. 5b).

Tranzystor pracujący w układzie symetrycznym może być sterowany napięciem zmiennym, co jest bardzo pożądane w wielu układach automatycznej regulacji. Na tego rodzaju pracę nie pozwalały stosowane dotąd lampy regulacyjne.



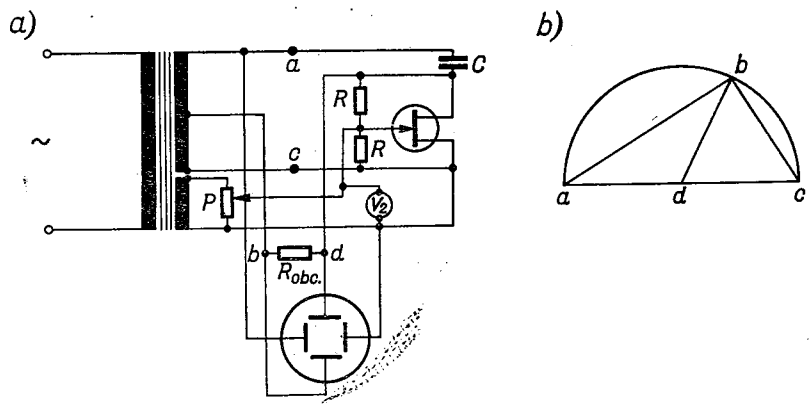
Rys. 8. Charakterystyki wyjściowe tranzystora polowego w obszarze I i III ćwiartki (tranzystor typu U-110)



Rys. 9. Charakterystyki wyjściowe tranzystora polowego w obszarze I i III ćwiartki (tranzystor typu 2N3823)

3. PRZESUWNIK FAZOWY

Na rys. 10 został przedstawiony prosty układ przesuwnika fazowego, w którym jako opornik o zmiennej rezystancji został wykorzystany tranzystor polowy pracujący w obszarze triodowym. Wykres wskazowy napięć dla tego układu, przy założeniu, że przez przekątną



Rys. 10. a) Układ do pomiaru charakterystyk przesuwnika fazowego z tranzystorem polowym, b) Wykres wskazowy dla przypadku $I_{obc} = 0$

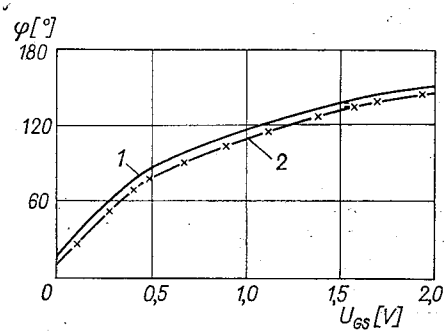
mostka *b-d* nie płynie prąd, przedstawiono na rys. 10b. Kąt przesunięcia fazowego φ między napięciem wyjściowym U_{bd} i napięciem zasilającym U_{ac} można wyrazić zależnością

$$\varphi = 2\,\mathrm{arctg}\,\omega CR \tag{3}$$

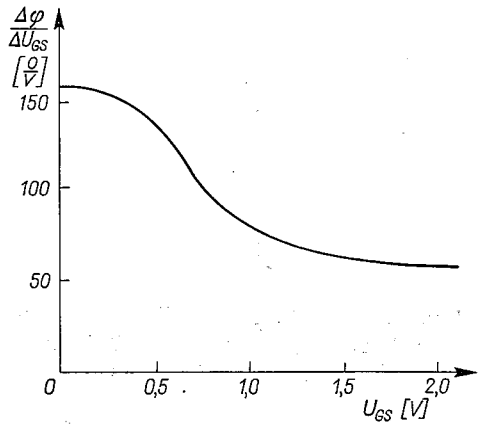
lub — podstawiając jako wartość rezystancji R wyrażenie (2) określające zmianę konduktancji kanału tranzystora — zależnością

$$\varphi = 2\,\mathrm{arctg}\,\omega C \frac{1}{G_o\left[1-\left(\frac{U_{GS}}{U_p}\right)^{1/2}\right]}. \tag{4}$$

Przy danym napięciu zasilającym i przyjętej pojemności C kąt przesunięcia jest funkcją G_o oraz stosunku U_{GS}/U_p. Dla danego typu tranzystora wartość konduktancji G_o i napięcia odcięcia U_p są stałe, zatem kąt φ jest jedynie funkcją napięcia sterującego bramki U_{GS}.



Rys. 11. Wykres zależności kąta przesunięcia fazowego φ od napięcia bramki U_{GS}
1 — przy napięciu U_{DS} = 0,5 V, *2* — przy napięciu U_{DS} = 1 V; tranzystor typu FET U-110



Rys. 12. Wykres czułości przesuwnika w funkcji napięcia sterującego

Na rys. 11 przedstawiono wykres $\varphi = f(U_{GS})$ przy napięciu U_{DS} = const, zaś na rys. 12 wykres czułości $\frac{\Delta\varphi}{\Delta U_{GS}} = f(U_{GS})$. Jak wynika z zależności (4) i z przebiegu krzywych, czułość nie jest stała i zmienia swoją wartość mniej więcej dwukrotnie w zakresie zmian napięcia sterującego bramki od 0 do 2 V. Największa czułość (rzędu 150°/V) występuje przy zmianach napięcia od 0 do +0,5 V, co odpowiada zmianie kąta od 20° do 90°. Uzyskiwany w praktyce zakres zmian kąta zawiera się w granicach 20° do 150°.

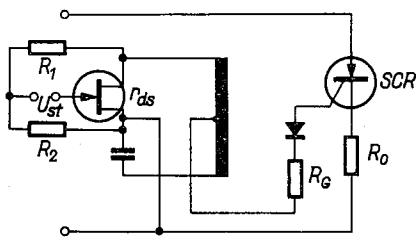
4. WNIOSKI

Zastosowanie tranzystora polowego jako opornika o zmiennej rezystancji sterowanej napięciem bramki pozwala na wykonanie przesuwnika fazowego mającego znacznie korzystniejsze właściwości niż znane dotąd układy tego rodzaju.

Przesuwnik fazowy z tranzystorem polowym ma wszystkie zalety układów półprzewodnikowych, a mianowicie: 1) małe wymiary — praktycznie ograniczone wymiarami transformatora, 2) odporność na wstrząsy mechaniczne, 3) dużą sprawność itp. W porównaniu z podobnymi układami, w których stosowano tranzystor bipolarny, układy z tranzystorem polowym odznaczają się dużą impedancją wejściową oraz odpornością na radiacje. Szczególnie dużą impedację wejściową można uzyskać stosując jako opornik o sterowanej oporności tranzystor polowy z izolowaną bramką [2].

Dzięki symetrii charakterystyk wyjściowych w ćwiartce I i III sterowanie przesuwnika może być dokonywane zarówno napięciem stałym, jak i zmiennym.

Wadą rozważanego układu przesuwnika jest mały zakres napięć, źródło-dren, w którym tranzystor pracuje w obszarze triodowym, oraz mały zakres liniowych zmian kąta przesunięcia w funkcji napięcia sterującego bramki. Zwiększenie zakresu triodowego napięć źródło-dren można dokonać stosując sprzężenie zwrotne oraz wykorzystując tranzystor polowy o dużej wartości napięcia odcięcia kanału. W bardziej złożonych układach sterowania czy regulacji zastosowanie nieliniowego sprzężenia zwrotnego pozwala na zwiększenie liniowości zmian kąta przesunięcia fazowego w funkcji napięcia sterującego bramkę.



Rys. 13. Przykład zastosowania przesuwnika fazowego z tranzystorem polowym do sterowania tyrystorów

Przykładem zastosowania omówionego w artykule przesuwnika fazowego może być układ sterowania tyrystora [3] przedstawiony na rys. 13. W tym przypadku wartość napięć stosowanych do sterowania bramki tyrystora nie przekracza kilku woltów, natomiast stosunkowo mała oporność obwodu bramki tyrystora wymaga uwzględnienia w obliczeniach oporności obciążenia przesuwnika.

LITERATURA CYTOWANA W TEKSCIE

1. W. Golde, Wzmacniacze tranzystorowe, WNT, Warszawa 1967.
2. A. Bilotti, Operation of MOS Transistor as a Variable Resistor, Proc. IEEE, **54**, 1093—1094, Aug. 1966.
3. Z. Korzec, Możliwości zastosowania tranzystorów polowych w układach sterowania tyrystorów, Przegląd Elektrotechn., 8, 1968.

Z. KORZEC J. KORZYŃSKI

THE PHASE SHIFT BRIDGE WITH A FIELD EFFECT TRANSISTOR AS A VARIABLE RESISTOR

Summary

The basic theoretical equations and empirical triod characteristics of the Field Effect Transistor ave discussed. In the triod region FET can be used as a voltage variable resistor. The application of such a voltage variable resistor in the phase shift bridge is described.

Z. KORZEC J. KORZYŃSKI

DÉPHASEUR RC AVEC UN TRANSISTOR À EFFET DE CHAMP OPÉRANT COMME UNE RÉSISTANCE A RÉSISTIVITE COMMANDÉ

Résumé

Transistor à effet de champ opérant dans le domaine de triode des caractéristiques de sortie peut être utilisé comme une résistance à résistivite commandée par la tension du circuit de porte. Dans l'oeuvre on a présenté les dépendances théoriques fondamentales et les caractéristiques principales obtenues expérimentalement concernant l'opération du transistor â effet de champ dans le domaine de triode ainsi que les caractéristiques du déphaseur, dans lequel on a utilisé un tel facon de l'opération du transistor â effet de champ.

З. КОЖЕЦ, Я. КОЖИНЬСКИ

МОСТОВЫЙ ФАЗОВРАЩАТЕЛЬ RC С ПОЛЕВЫМ ТРАНЗИСТОРОМ В КАЧЕСТВЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ РЕГУЛИРОВАННОГО НАПРЯЖЕНИЕМ

Резюме

Исследуются свойства мостового фазовращателя RC с применением полевого транзистора, работающего как сопротивление регулированное напряжением.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 15, 3, ss. 395–421
INSTYTUT TECHNOLOGII ELEKTRONOWEJ PAN, WARSZAWA 1969

Sprzężenia reaktancyjne w tranzystorowych wzmacniaczach wielkiej częstotliwości

MACIEJ STYBLIŃSKI (WARSZAWA)

Katedra Układów Elektronicznych Politechniki Warszawskiej

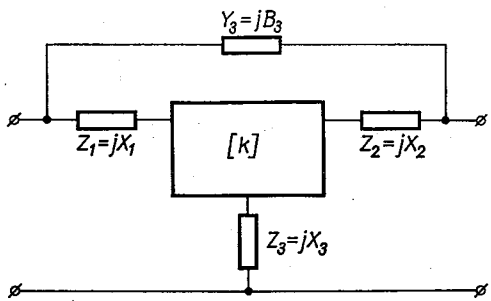
Otrzymano 4.12.1968

W artykule rozpatrzono metody analizy wpływu sprzężeń reaktancyjnych występujących w tranzystorowych wzmacniaczach wielkiej częstotliwości na takie parametry, jak wzmocnienie mocy, stabilność, immitancja wejściowa. Główny nacisk położno na metody graficzne. Podano przykłady wpływu indukcyjności doprowadzeń i pojemności wyjście — wejście na pracę wzmacniacza tranzystorowego wielkiej częstotliwości. Przeprowadzone rozważania mogą mieć zastosowanie do dowolnych czwórników aktywnych o charakterystyce rezonansowej.

1. WSTĘP

Sprzężenia reaktancyjne występujące w tranzystorowych wzmacniaczach wielkiej częstotliwości, a ogólniej we wszelkiego rodzaju czwórnikach aktywnych o charakterystyce rezonansowej można podzielić na dwa rodzaje: na sprzężenia zamierzone i sprzężenia szkodliwe.

Pierwsze z nich stosuje się głównie przy neutralizacji lub unilateryzacji bezstratnej, drugie mogą być spowodowane np. pojemnościami rozproszonymi pomiędzy wyjściem



Rys. 1. Sprzężenia reaktancyjne w czwórniku

i wejściem wzmacniacza lub indukcyjnościami doprowadzeń elektrody. Rysunek 1 przedstawia czwórnik z uwzględnieniem możliwych sprzężeń reaktancyjnych. Schemat ten przedstawia także ogólny model unilateryzacji bezstratnej [1], może też stanowić podstawę do analizy wpływu na właściwości wzmacniacza indukcyjności doprowadzeń tranzystora

i pojemności między nimi. Zwykle tak złożonych układów unilateryzujących jak na rysunku 1 nie stosuje się i niektóre z reaktancji lub susceptancji są w przybliżeniu równe zeru i można je pominąć. I tak, np. gdy $Y_3 = 0$ mamy unilateryzację typu z, gdy $Z_1 = 0$, $Z_2 = 0$, $Z_3 = 0$ otrzymamy unilateryzację typu y, gdy $Z_1 = 0$ i $Z_2 = 0$ mamy kombinację unilateryzacji typu y i z. Możliwe są oczywiście również inne przypadki. W niniejszym artykule zostaną podane metody analizy przedstawionych na rysunku 1 sprzężeń reaktancyjnych na właściwości wzmacniacza, a głównie sprzężeń poprzez susceptancję Y_3 i reaktancję Z_3. Specjalny nacisk zostanie położony na metody graficzne analizy tych sprzężeń. Wyciągnięte również zostaną wnioski dotyczące wpływu sprzężeń na parametry robocze wzmacniaczy wielkiej częstotliwości.

2. WPŁYW SPRZĘŻEŃ REAKTANCYJNYCH NA PARAMETRY MACIERZY ADMITANCYJNEJ

Przy projektowaniu oraz w rozważaniach teoretycznych nad tranzystorowymi wzmacniaczami wielkiej częstotliwości najczęściej stosowane są parametry macierzy admitancyjnej $[y]$ tranzystora. Podyktowane to jest między innymi prostotą określania parametrów roboczych wzmacniacza, a to głównie z powodu stosowania zwykle na wejściu i wyjściu tranzystora obwodów rezonansowych równoległych, opisywanych najprościej przy pomocy admitancji Y_s i Y_L. W przypadku stosowania obwodów szeregowych dogodniej byłoby używać parametrów $[z]$ lub $[h]$. Uwzględnienie wpływu reaktancji szeregowych Z_1, Z_2, Z_3 (rys. 1) jest natomiast wygodniejsze, gdy zamiast parametrów $[y]$ używa się parametrów $[z]$. Jeśli tranzystor opisany jest macierzą $[y]$:

$$[y] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

to odpowiadająca tej macierzy macierz $[z]$ tranzystora ma postać [2]:

$$[z] = \begin{bmatrix} \frac{y_{22}}{\Delta^y}; & \frac{-y_{12}}{\Delta^y} \\ \frac{-y_{21}}{\Delta^y}; & \frac{y_{11}}{\Delta^y} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

gdzie: $\Delta^y = y_{11} \cdot y_{22} - y_{21} \cdot y_{12}$ — wyznacznik macierzy $[y]$ oraz

$$[z] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}.$$

Macierz impedancyjna czwórnika z uwzględnieniem reaktancji szeregowych ma postać [4]:

$$[z'] = \begin{bmatrix} z_{11}+Z_1+Z_3; & z_{12}+Z_3 \\ z_{21}+Z_3; & z_{22}+Z_2+Z_3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

lub

$$[z'] = \begin{bmatrix} z'_{11} & z'_{12} \\ z'_{21} & z'_{22} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Dokonując zamiany macierzy $[z']$ na macierz admitancyjną otrzymuje się:

$$[y'] = \begin{bmatrix} \frac{z'_{22}}{\Delta^{z'}} & \frac{-z'_{12}}{\Delta^{z'}} \\ \frac{-z'_{21}}{\Delta^{z'}} & \frac{z'_{11}}{\Delta^{z'}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z_{22}+Z_2+Z_3}{\Delta^{z'}} & \frac{-z_{12}-Z_3}{\Delta^{z'}} \\ \frac{-z_{21}+Z_3}{\Delta^{z'}} & \frac{z_{11}+Z_1+Z_3}{\Delta^{z'}} \end{bmatrix} \tag{5}$$

gdzie: $\Delta^{z'} = z'_{11} \cdot z'_{22} - z'_{12} \cdot z'_{21}$ — wyznacznik macierzy $[z']$. Macierz $[y']$ zawiera w sobie wpływ impedancji indukcjności Z_1, Z_2, Z_3. Uwzględniając teraz susceptancję Y_3 otrzyma się:

$$[y''] = \begin{bmatrix} y'_{11}+Y_3; & y'_{12}-Y_3 \\ y_{21}-Y_3; & y'_{22}+Y_3 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

a uwzględnienie zależności (1) do (6) prowadzi ostatecznie do wyrażenia:

$$[y''] = \begin{vmatrix} \frac{y_{11}}{\Delta^y}+Z_2+Z_3 & \frac{-y_{12}}{\Delta^y}+Z_3 \\ \frac{\Delta^{z'}}{\Delta^{z'}}+Y_3; & \frac{\Delta^{z'}}{\Delta^{z'}}-Y_3 \\ \frac{-y_{21}}{\Delta^y}+Z_3 & \frac{y_{22}}{\Delta^y}+Z_1+Z_3 \\ \frac{\Delta^{z'}}{\Delta^{z'}}-Y_3; & \frac{\Delta^{z'}}{\Delta^{z'}}+Y_3 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Macierz $[y'']$ opisuje czwórnik z uwzględnieniem reaktancji Z i susceptancji Y.

Najprostszą, ale jednocześnie najbardziej żmudną i mało przejrzystą metodą jest obliczenie wypadkowej macierzy $[y'']$ i nowych parametrów roboczych wzmacniacza. Okazuje się jednak, że przy pomocy metod graficznych można w znacznie prostszy sposób zaobserwować wpływ sprzężeń na poszczególne parametry robocze wzmacniacza.

3. WPŁYW SPRZĘŻEŃ REAKTANCYJNYCH NA WZMOCNIENIE MOCY I BEZWZGLĘDNĄ STABILNOŚĆ WZMACNIACZA

3.1. Płaszczyzna wzmocnienia mocy

W roku 1963 A. Singhakowinta [7] opracował graficzną metodę określania maksymalnego skutecznego wzmocnienia mocy G_{psmax} czwórnika na podstawie znajomości wprowadzonej jeszcze przez Masona [6] tzw. aktywności czwórnika U i wielkości $A = \frac{y_{21}}{y_{12}}$, której moduł nosi nazwę maksymalnego stabilnego wzmocnienia mocy.

Jednocześnie metoda ta umożliwia analizę wpływu reaktancji szkodliwych na maksymalne wzmocnienie mocy oraz na bezwzględną stabilność wzmacniacza i jest bardzo dogodna do analizy układów neutralizacji i unilateryzacji bezstratnej.

Podstawą metody jest wyprowadzona przez A. Singhakowintę zależność:

$$\frac{G_{psmax}}{U} = \left| \frac{A-G_{psmax}}{A-1} \right|^2 \approx \left| 1-\frac{G_{psmax}}{A} \right|^2, \tag{8}$$

gdzie $A = \frac{y_{21}}{y_{12}} = \frac{z_{21}}{z_{12}}$ jest zwykle znacznie większe od jedności, a aktywność U wyraża się

wzorem:

$$U = \frac{|y_{21}-y_{12}|^2}{4(g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21})} = \frac{|z_{21}-z_{12}|^2}{4(r_{11}r_{22}-r_{12}r_{21})}, \tag{9}$$

w których wielkości g i r są częściami rzeczywistymi odpowiednich parametrów macierzy $[y]$ i $[z]$. Wyrażenie (8) można również przedstawić w postaci:

$$\sqrt{\frac{G_{psmax}}{U}} = \left|1-\frac{G_{psmax}}{U}\cdot\frac{U}{A}\right|. \tag{10}$$

W wyrażeniu tym znormalizowane maksymalne skuteczne wzmocnienie mocy $\frac{G_{psmax}}{U}$ (będące liczbą rzeczywistą) jest wyrażone jako funkcja wielkości zespolonej $\frac{U}{A}$. Takie ujęcie ma szereg zalet, gdyż — jak wiadomo — U nie zależy od dodawania elementów bezstratnych (jest niezmiennikiem transformacji bezstratnych), natomiast A nie zależy od obciążania wyjścia i wejścia dowolną admitancją i jest niezmiennikiem macierzowym $\left(\frac{y_{21}}{y_{12}} = \frac{z_{21}}{z_{12}} = \frac{h_{21}}{h_{12}} = \frac{m_{21}}{m_{12}} = \frac{s_{21}}{s_{12}}\right)$.

Korzystając z wyrażenia (10) można wprowadzić tzw. płaszczyznę wzmocnienia mocy o osi rzędnych $Re\left(\frac{U}{A}\right)$ i osi odciętych $Im\left(\frac{U}{A}\right)$. Na płaszczyźnie tej, jak można udowodnić, linie $\frac{G_{psmax}}{U} = \text{const}$ są okręgami o środkach leżących na osi rzeczywistej w punktach $Re\left(\frac{U}{A}\right) = \frac{U}{G_{psmax}}$ i mającymi promień równy $\sqrt{\frac{U}{G_{psmax}}}$.

Na płaszczyźnie wzmocnienia mocy można również określić linię będącą granicą bezwzględnej wewnętrznej stabilności czwórnika. Można udowodnić [1], [8], że warunek bezwzględnej stabilności można wyrazić w postaci:

$$G_{psmax} < |A|. \tag{11}$$

Korzystając z zależności (10) można sprowadzić to wyrażenie do postaci:

$$\left[Im\left(\frac{U}{A}\right)\right]^2 < Re\left(\frac{U}{A}\right) + \frac{1}{4}. \tag{12}$$

Nierówność ta wyznacza parabolę z wierzchołkiem w punkcie $Re\left(\frac{U}{A}\right) = -0{,}25$, przechodzącą przez punkty $Im\left(\frac{U}{A}\right) = \pm 0{,}5$. Czwórniki, dla których wielkość $\frac{U}{A}$ leży wewnątrz paraboli są bezwzględnie stabilne. Na rysunku 2a przedstawiona jest płaszczyzna wzmocnienia mocy z wrysowanymi kołami $\frac{G_{psmax}}{U} = \text{const}$ i granicą stabilności.

3.2. Sprzężenia reaktancyjne zobrazowane na płaszczyźnie wzmocnienia mocy

Zbadajmy teraz, czemu na płaszczyźnie wzmocnienia mocy odpowiada dodawanie do czwórnika czynnego immitancji przedstawionych na rysunku 1. Rozpatrzmy wpływ samych tylko reaktancji Z_1, Z_2, Z_3. Wielkość $\left(\frac{1}{A}\right)_z$ odpowiadająca czwórnikowi utworzonemu z tych reaktancji i czwórnika [k] jest, korzystając ze wzoru (3) równa:

$$\left(\frac{1}{A}\right)_z = \frac{z'_{12}}{z'_{21}} = \frac{z_{12}+Z_3}{z_{21}+Z_3} \approx \frac{z_{12}}{z_{21}} + \frac{Z_3}{z_{21}} = \frac{1}{A} + \frac{Z_3}{z_{21}} \ldots \tag{13}$$

Przybliżenie w powyższym wzorze jest dopuszczalne, gdyż zwykle $z_{21} \gg Z_3$. Ze wzoru tego wynika, że wartość $\left(\frac{1}{A}\right)_z$ nie zależy od reaktancji Z_1 i Z_2.

Nowa wartość stosunku $\frac{U}{A}$ wyraża się teraz wzorem:

$$\left(\frac{U}{A}\right)_z = \frac{U}{A} + U\frac{Z_3}{z_{21}} = \frac{U}{A} + U\frac{|Z_3|}{|z_{21}|}e^{j\alpha_z}, \tag{14a}$$

gdzie $\alpha_z = \pm\frac{\pi}{2} - \arg z_{21}$.

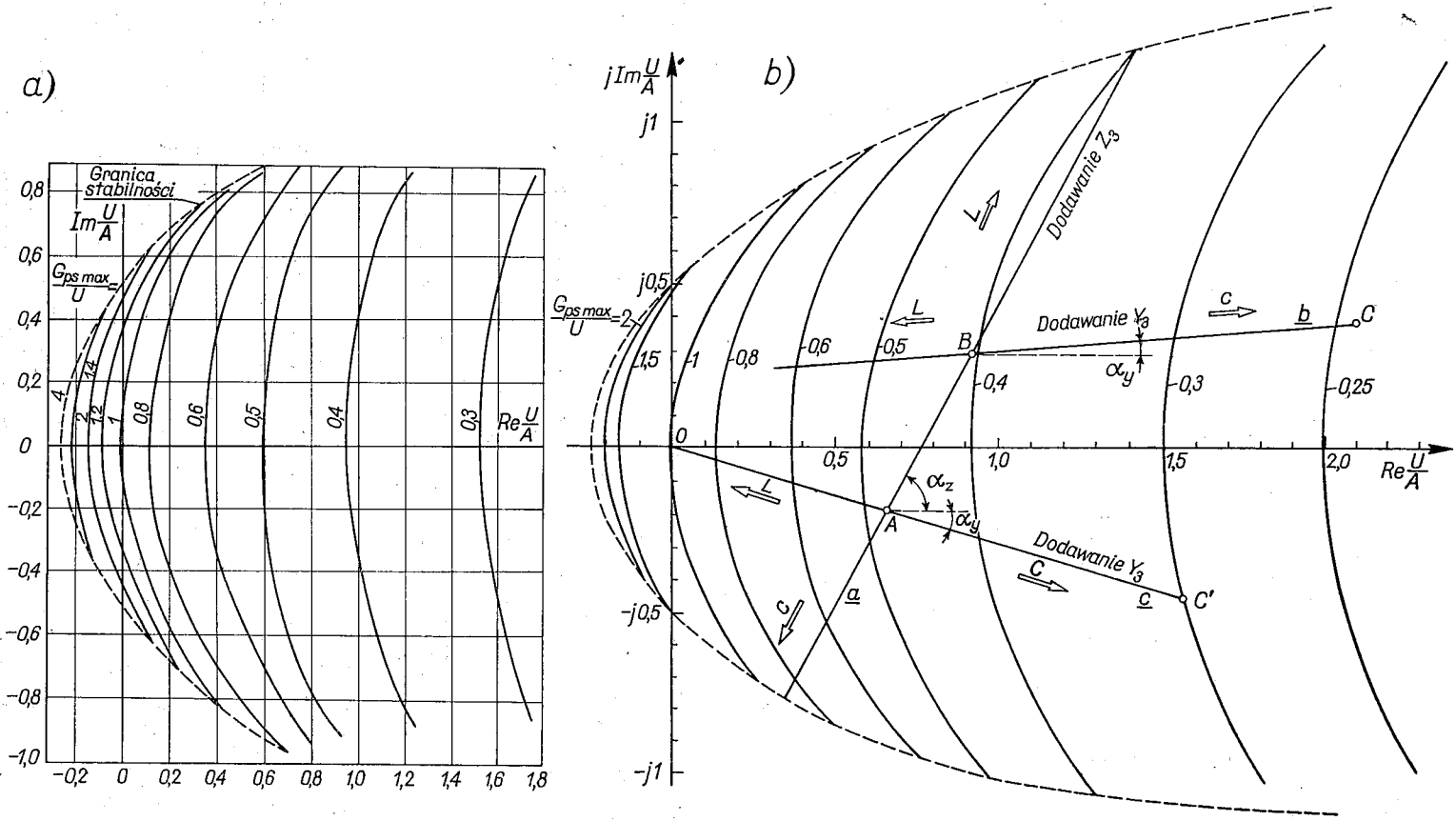
Dodanie do czwórnika reaktancji Z_3 odpowiada więc na płaszczyźnie wzmocnienia mocy ruchowi po prostej nachylonej do osi rzeczywistej pod kątem $\pm\frac{\pi}{2} - \arg z_{21}$ na odległość równą $U\frac{|Z_3|}{|z_{21}|}$, gdzie znak plus odpowiada dodawaniu indukcyjności, a minus pojemności. Podobnie, gdy do czwórnika [k] dodać samą tylko susceptancję Y_3, przy braku reaktancji Z_1, Z_2, Z_3, nowa wartość stosunku $\left(\frac{U}{A}\right)$ ma postać:

$$\left(\frac{U}{A}\right)_Y = \frac{U}{A} - U\frac{Y_3}{y_{21}} = \frac{U}{A} + U\frac{|Y_3|}{|y_{21}|}e^{j\alpha_y}, \tag{14b}$$

gdzie $\alpha_y = \pm\frac{\pi}{2} - \arg y_{21}$;

znak plus odpowiada, jak poprzednio, indukcyjności, zaś minus pojemności. Dodanie do czwórnika [k] susceptancji Y_3 odpowiada więc również ruchowi po prostej na płaszczyźnie wzmocnienia mocy.

Chcąc ocenić łączny wpływ Z_1, Z_2, Z_3 i Y_3 należy na płaszczyźnie wzmocnienia mocy dokonać najpierw przesunięcia odpowiadającego reaktancji Z_3 [wzór (14a)], następnie należy obliczyć parametry [y'] odpowiadające dodaniu do czwórnika [k] reaktancji Z_1, Z_2, Z_3, które posłużą do określenia dalszego przesunięcia zgodnie ze wzorem (14b), w którym w miejsce $\frac{U}{A}$ podstawić należy wartość $\left(\frac{U}{A}\right)_z$, a w miejsce y_{21} wartość y'_{21}. Można również zastosować odwrotną kolejność, ale tylko gdy Z_1 i Z_2 są równe zeru.



Rys. 2 a). Płaszczyzna wzmocnienia mocy. b) Rozwiązanie graficzne przykładu z punktu 3.3. Punkt A odpowiada tranzystorowi bez sprzężeń reaktancyjnych, punkt B — dodaniu reaktancji $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 6\ \Omega$ (10 nH), punkty C i C' — dodaniu równoległej pojemości $C_3 = 1$ pF. Tranzystor AFZ-12, częstotliwość pracy 100 MHz