3.3. Przykłady

Tranzystor AFZ-12 dla częstotliwości 100 MHz w konfiguracji *OE* ma następujące parametry [9]:

$$y_{11} = 25{,}4+j22{,}2 = 33{,}7/41°10' \text{ mS},$$

$$y_{22} = 0{,}5+j1{,}5 = 1{,}58/71°30' \text{ mS},$$

$$y_{21} = 21{,}2-j74 = 77{,}0/-74° \text{ mS},$$

$$y_{12} = 0-j0{,}437 = 0{,}437/-90° \text{ mS}.$$

Obliczone na ich podstawie parametry $[z]$ mają wartości:

$$z_{11} = 26{,}3-j3{,}27 = 26{,}6/-7° \ \Omega,$$

$$z_{22} = 450-j343 = 566/-37°30' \ \Omega,$$

$$z_{21} = 1150+j596 = 1290/27°30' \ \Omega,$$

$$z_{12} = 7{,}22+j1{,}47 = 7{,}36/11°30' \ \Omega.$$

Dokonując obliczeń mamy:

$$U = 117 \ W/W; \quad \frac{1}{A} = \frac{z_{12}}{z_{21}} = \frac{y_{12}}{y_{21}} = 5{,}67 \cdot 10^{-3}/-16° = (5{,}55-j1{,}56)10^{-3};$$

$$\frac{U}{A} = 0{,}648-j0{,}182;$$

$$\alpha_z = \pm 90°-27°30' = 62°31' \text{ dla indukcyjności} = -117°30' \text{ dla pojemności}.$$

Na rys. 2b punkt A odpowiada obliczonej wartości $\frac{U}{A}$; prosta a obrazuje ruch punktu wywołany dodaniem reaktancji Z_3. Z rysunku wynika, że tranzystor jest bezwzględnie wewnętrznie stabilny i „leży" dosyć daleko od granicy stabilności bezwzględnej. Pojemność szeregowa powoduje wzrost skutecznego maksymalnego wzmocnienia mocy oraz zbliża wzmacniacz do granicy potencjalnej niestabilności. Indukcyjność początkowo oddala od granicy niestabilności, a następnie, przy dalszym jej wzroście — zbliża; maksymalne skuteczne wzmocnienie mocy początkowo maleje, a potem rośnie.

Ze wzoru (14a) wynika, że do wyjścia poza granicę bezwzględnej stabilności potrzeba: dla indukcyjności:

$$U\frac{|Z_3|}{|z_{21}|} = 1{,}6 \text{ (z wykresu), skąd } |Z_3| = 17{,}6 \ \Omega, \text{ czyli } 27{,}8 \text{ nH},$$

dla pojemności:

$$U\frac{|Z_3|}{|z_{21}|} = 0{,}66 \text{ (z wykresu), skąd } |Z_3| = 7{,}27 \ \Omega, \text{ czyli } 219 \text{ pF}.$$

Wykres na rys. 2b sugeruje drogę postępowania przy odblokowywaniu pojemnością elektrody tranzystora wspólnej dla obwodów wejściowego i wyjściowego. Gdy bowiem okaże się, że indukcyjność doprowadzeń wpływa niekorzystnie na pracę wzmacniacza,

można w szereg z nią włączyć pojemność o takiej wartości, by „sprowadzić" wzmacniacz z powrotem do p-tu A wykresu. Innymi słowy, pojemność ta powinna być w rezonansie z indukcyjnością doprowadzeń. Stosowanie dużych pojemności blokujących mija się z celem, gdyż będzie to powodować zwiększenie indukcyjnego charakteru szeregowego „obwodu rezonansowego" utworzonego z indukcyjności szeregowej i pojemności blokującej. Takie rozwiązanie może być oczywiście skuteczne w wąskim pasmie częstotliwości.

Powracając do naszego przykładu załóżmy, że indukcyjności $L_1 = L_2 = L_3 = 10$ nH, co dla częstotliwości 100 MHz stanowi reaktancję $Z = Z_1 = Z_2 = Z_3 = \mathrm{j}\,6\Omega$. Nowa wartość stosunku $\frac{U}{A}$ znajdzie się w odległości $U\frac{|Z_3|}{|Z_{21}|} = 0{,}545$ od p-tu A (punkt B na rys. 2b)

Nowe wartości parametrów $[z']$ wynoszą:

$$z'_{11} = 26{,}3+\mathrm{j}8{,}7 = 27{,}7/18°30'\ \Omega,$$

$$z'_{22} = 450-j331 = 558/-36°30'\ \Omega,$$

$$z'_{21} = 1150+j600 = 1290/27°30'\ \Omega,$$

$$z_{12} = 7{,}22+j7{,}47 = 10{,}36/44°\ \Omega.$$

Obliczone na ich podstawie parametry $[y']$:

$$y'_{11} = 25{,}5+j10{,}3 = 27{,}5/22°\ \mathrm{mS},$$

$$y'_{22} = 0{,}292+j1{,}31 = 1{,}35/77°30'\ \mathrm{mS},$$

$$y'_{21} = -3{,}85-j62{,}6 = 62{,}8/-93°30'\ \mathrm{mS},$$

$$y'_{12} = -0{,}113-j0{,}491 = 0{,}503/-77°\ \mathrm{mS},$$

$$\alpha_y = \pm 90°-(-93°30') = 183°30' \text{ dla indukcyjności} = 3°30' \text{ dla pojemności.}$$

Na rysunku 2b naniesiona jest „linia dodawania Y_3" oznaczona jako „b". Przechodzi ona przez p-kt B pod kątem α_y do poziomu. W celu zaobserowowania wpływu indukcyjności szeregowych na kierunek prostej b na płaszczyźnie wzmocnienia mocy, przeprowadzono przez p-kt A prostą c odpowiadającą dodawaniu susceptancji Y_3 przy $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0$. Kąt α_y wynosi w tym przypadku $-16°$. Na prostych b i c zaznaczono również punkty odpowiadające dodaniu równoległej pojemności 1 pF (p-ty C i C').

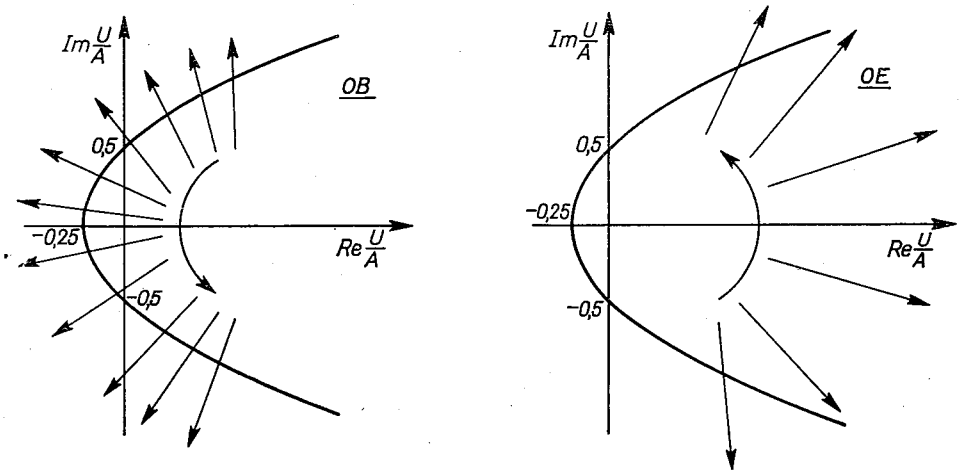
Z rysunku 2a można również wyciągnąć wniosek, że dodanie równolegle między wejście i wyjście czwórnika $[k]$ indukcyjności może zapewnić całkowitą unilateryzację wzmacniacza, gdyż prosta c przechodzi przez początek układu współrzędnych $\left(\text{gdy } y_{12} = 0, \text{ to } \frac{U}{A} = \frac{U \cdot y_{12}}{y_{21}} = 0\right)$. Fakt ten wynika oczywiście z braku części rzeczywistej parametru y_{12}.

Odczytując z rysunku 2b odległość punktu A od początku układu współrzędnych można obliczyć, że indukcyjność unilateryzująca wynosi 3,6 μH. Jej susceptancja jest równa wartości y_{12}. Indukcyjność równa lub mniejsza od 2,58 μH powoduje wyjście poza granicę stabilności bezwzględnej.

Powyższy przykład ilustruje zalety stosowania do obliczeń tego rodzaju płaszczyzny wzmocnienia mocy. Przy jej pomocy można projektować układy neutralizacji i unilatery-

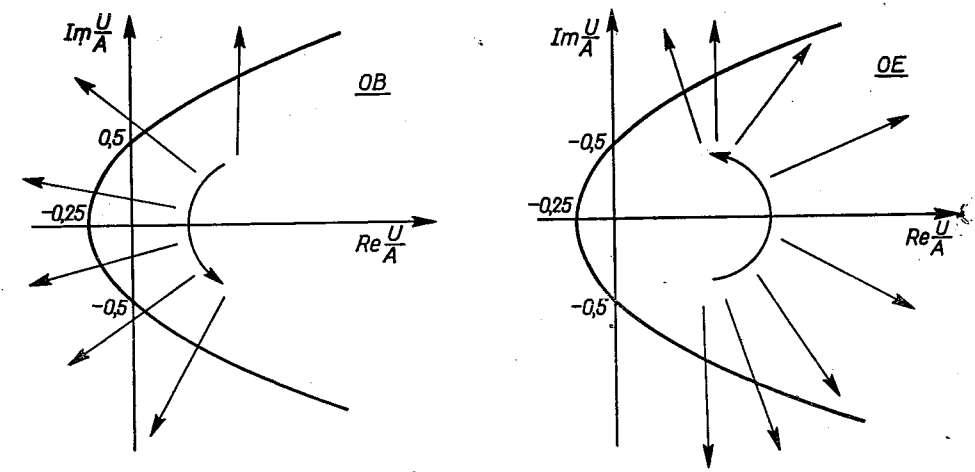
zacji, oceniać wpływ sprzężeń na skuteczne maksymalne wzmocnienie mocy i stabilność wewnętrzną tranzystora.

Korzystając z opisanej wyżej metody oszacowano wpływ reaktancji Y_3 i Z_3 na pracę typowych tranzystorów wielkiej częstotliwości w konfiguracjach *OB* i *OE*.



Rys. 3. Wpływ indukcyjności wspólnej elektrody na właściwości wzmacniaczy w układzie *OE* i *OB* dla typowych tranzystorów wielkiej częstotliwości. Półkolista strzałka pokazuje wzrost częstotliwości

Rysunek 3 pokazuje, w jaki sposób indukcyjność szeregowa wspólnej elektrody może wpływać na właściwości wzmacniacza w układzie *OB* i *OE*, w szerokim zakresie często-



Rys. 4. Wpływ pojemności równoległej łączącej wyjście z wejściem czwórnika na właściwości wzmacniaczy w układzie *OE* i *OB* dla typowych tranzystorów wielkiej częstotliwości. Półkolista strzałka pokazuje wzrost częstotliwości

tliwości. Podobnie rysunek 4 obrazuje możliwy wpływ pojemności równoległej wyjście-wejście. Rysunki sporządzono na podstawie typowych wartości arg z_{21} i arg y_{21} i ich zmian w funkcji częstotliwości dla tranzystorów przeznaczonych do pracy w zakresie częstotliwości od około 50 MHz do 1000 MHz.

Z przedstawionych rysunków wynika, że dla układu *OB* pojemności wyjście-wejście i indukcyjności wspólnej elektrody w całym zakresie użytecznych częstotliwości zbliżają tranzystor do granicy bezwzględnej stabilności. Dlatego też w tym układzie sprawa szkodliwych pojemności i indukcyjności doprowadzeń nabiera zasadniczej wagi. Układ *OE* wykazuje przeciwne zmiany współczynnika stabilności przy takich sprzężeniach.

4. WPŁYW SPRZĘŻEŃ REAKTANCYJNYCH NA STABILNOŚĆ ROBOCZĄ WZMACNIACZA

4.1. Graficzne przedstawienie stabilności roboczej

Metoda podana przez A. Singhakowintę, mimo wykazanych jej zalet, nie daje jednak odpowiedzi na pytanie, jak sprzężenia reaktancyjne wpływają na stabilność roboczą wzmacniacza. Przesunięcie punktu na płaszczyźnie wzmocnienia mocy poza graniczną parabolę oznacza tylko, że czwórnik utworzony z reaktancji zewnętrznych i „czystego" tranzystora stał się potencjalnie niestabilny. Brak jest jednak danych do stwierdzenia, czy wzmacniacz obciążony przez konduktancje: obciążenia i generatora jest stabilny, czy nie. Konduktancje te są obliczone przy pominięciu sprzężeń reaktancyjnych tak, by zapewniały odpowiednią wartość wzmocnienia mocy i odpowiedni margines stabilności. Problem ten ma zwłaszcza zasadniczą wagę przy rozpatrywaniu wpływu sprzężeń reaktancyjnych na pracę wzmacniaczy z tranzystorami potencjalnie niestabilnymi, pracującymi w stabilnym wzmacniaczu.

Warunek stabilności roboczej wzmacniacza obciążonego obwodami rezonansowymi i przewodnościami na wejściu i wyjściu można przedstawić przy pomocy metody graficznej [4].

Wzmacniacz taki przedstawiony jest na rysunku 5. Admitancje Y_g i Y_L mogą w ogólności zawierać w sobie obwody rezonansowe i przewodności tłumiące.

Wprowadzimy oznaczenia:

$$Y_1 = Y_g + y_{11} = G_1(1+j\xi_1), \tag{15a}$$

$$Y_2 = Y_L + y_{22} = G_2(1+j\xi_2), \tag{15b}$$

gdzie:

$$G_1 = g_{11} + G_g,$$

$$G_2 = g_{22} + G_L,$$

oraz:

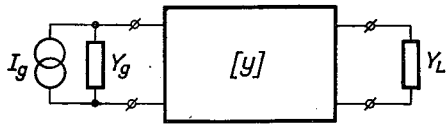
$$\xi_1 = Q_1\left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega}\right), \tag{16a}$$

$$\xi_2 = Q_2\left(\frac{\omega}{\omega_2} - \frac{\omega_2}{\omega}\right), \tag{16b}$$

przy czym Q_1 i Q_2 oraz ω_1 ω_2 są odpowiednio dobrociami i częstotliwościami rezonansowymi obwodów na wejściu i wyjściu czwórnika łącznie ze zwarciowymi admitancjami y_{11} i y_{22}.

Można udowodnić [4], [1], że dla zapewnienia stabilnej pracy wzmacniacza konieczne jest spełnienie warunku:

$$(1+j\xi_1)(1+j\xi_2) > \frac{y_{12} \cdot y_{21}}{G_1 G_2}. \tag{17}$$



Rys. 5. Czwórnik obciążony na wejściu i wyjściu

Wielkość

$$\frac{y_{12} \cdot y_{21}}{G_1 \cdot G_2} = T \cdot e^{j\theta} \tag{18}$$

nazywa się stosunkiem zwrotnym.

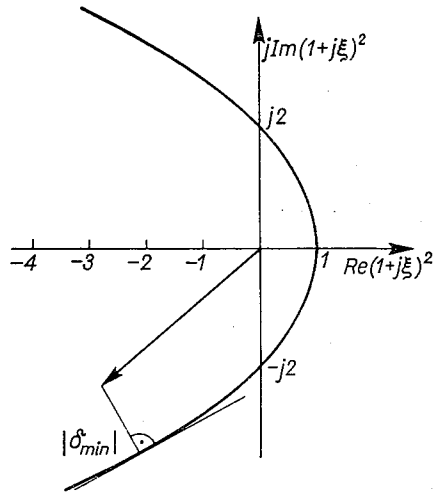
Dla szczególnego przypadku $Q_1 = Q_2$ i $\omega_1 = \omega_2$ zachodzi: $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ i warunek (17) przybiera postać:

$$(1+j\xi)^2 > T \cdot e^{j\theta}. \tag{19}$$

Dla przypadku granicznej stabilności mamy:

$$(1+j\xi)^2 = T_g \cdot e^{j\theta}, \tag{20}$$

gdzie T_g jest wartością graniczną T.



Rys. 6. Graficzne przedstawienie warunku stabilnej pracy wzmacniacza tranzystorowego

Lewa strona nierówności (19) przedstawia parabolę na płaszczyźnie zespolonej $[Re(1+j\xi)^2, Im(1+j\xi)^2]$. Prawa strona jest wektorem zależnym tylko od parametrów tranzystora i przewodności tłumiących, niezależnym od częstotliwości (dla wąskiego pasma wzmacnianych częstotliwości).

Wielkość ξ zmienia się w szerokim zakresie podczas strojenia lub przy zmianach częstotliwości. Z warunku (19) wynika, że wzmacniacz jest niestabilny, gdy wektor $T \cdot e^{j\theta}$ dotyka lub przecina parabolę.

Można wykazać, że warunek (19) prowadzi do znanego warunku bezwzględnej stabilności roboczej:

$$2G_1G_2 > |y_{12} \cdot y_{21}| + Re(y_{12} \cdot y_{21}|), \tag{21}$$

gdzie $G_1 > 0$ i $G_2 > 0$,
który inaczej można przedstawić jako $S > 1$, gdzie

$$S = \frac{2G_1G_2}{|y_{12} \cdot y_{21}| + Re(y_{12} \cdot y_{21})}; \tag{22}$$

S jest tu znanym współczynnikiem stabilności Sterna.

Na wykresie z rysunku 6 można nanieść linie stałej wartości S. Okazuje się bowiem, że zachodzi równość:

$$S = \frac{T_g}{T}. \tag{23}$$

Krzywe $T = \frac{T_g}{S} = \frac{2}{S(1+\cos\theta)}$ są również w funkcji θ parabolami współogniskowymi z parabolą graniczną.

Z rysunku 6 można także określić wielkość skutecznego wzmocnienia mocy. Jest ono tym większe, im bliżej granicy stabilności leży koniec wektora $T \cdot e^{j\theta}$.

Jeśli $|\delta_{min}|$ oznacza minimalną odległość końca wektora od paraboli granicznej, to skuteczne wzmocnienie mocy osiąga w funkcji częstotliwości wartość maksymalną wyrażającą się wzorem [4]:

$$G_{ps} = 4G_g \cdot G_L \frac{|y_{21}|^2}{G_1^2 \cdot G_2^2 |\delta_{min}|^2}. \tag{24}$$

4.2. Wpływ sprzężeń reaktancyjnych

Wpływ elementów reaktancyjnych można uwzględnić rozpatrując wywołaną przez nie zmianę stosunku zwrotnego. W przypadku równoległych obwodów wejściowych i wyjściowych w sposób prosty da się to zrobić tylko dla susceptancji równoległej Y_3. Dodawanie bowiem do czwórnika tej susceptancji powoduje ruch po prostej końca wektora $T \cdot e^{j\theta}$. Dla reaktancji szeregowej Z_3 nie da się znaleźć prostego wyrażenia na zmianę wektora $T \cdot e^{j\theta}$ w funkcji Z_3.

Natomiast w przypadku szeregowych obwodów na wejściu i wyjściu zachodzi sytuacja odwrotna: w sposób prosty da się przedstawić dodawanie reaktancji Z_3 przy zastosowaniu macierzy $[z]$ tranzystora, natomiast nie da się tego zrobić dla Y_3.

Rozpatrzmy najpierw wpływ susceptancji równoległej Y_3 i obwodów równoległych.

Korzystając ze wzoru (6) zastosowanego do czwórnika $[y]$ zamiast $[y']$ mamy:

$$T' \cdot e^{j\theta'} = \frac{(y_{12}-Y_3)(y_{21}-Y_3)}{G_1 \cdot G_2} \approx \frac{(y_{12}-Y_3) \cdot y_{21}}{G_1 \cdot G_2} = \frac{y_{12} \cdot y_{21}}{G_1 \cdot G_2} - \frac{Y_3 \cdot y_{21}}{G_1 \cdot G_2}$$

albo

$$T' \cdot e^{j\theta'} = T \cdot e^{j\theta} + \frac{|Y_3||y_{21}|}{G_1 \cdot G_2} e^{j\left(\pm\frac{\pi}{2} + \arg y_{21}\right)}, \tag{25}$$

gdzie T' i θ' oznaczają wartość stosunku zwrotnego z uwzględnieniem susceptancji Y_3. Znak plus odnosi się do indukcyjnego, minus do pojemnościowego charakteru Y_3. Jak wynika ze wzoru (25), dodawanie susceptancji Y_3 powoduje ruch po prostej końca wektora $T \cdot e^{j\theta}_{11}$.

W podobny sposób możemy uwzględnić dodawanie reaktancji szeregowej Z_3 w przypadku obciążenia wejścia i wyjścia szeregowymi obwodami rezonansowymi.

W tym przypadku można wykazać, że warunek stabilności przybiera postać analogiczną do wyrażenia (19), lecz przy zastosowaniu parametrów macierzy impedancyjnej $[z]$:

$$(1+jx)^2 > T_z \cdot e^{j\theta_z}, \tag{26}$$

gdzie:

$$T_z \cdot e^{j\theta_z} = \frac{z_{12} \cdot z_{21}}{R_1 \cdot R_2} \tag{27}$$

jest stosunkiem zwrotnym dla macierzy $[z]$ i szeregowych obwodów wejściowych i wyjściowych, które opisać można zależnościami:

$$Z_1 = Z_g + z_{11} = R_1(1+jx_1), \tag{28a}$$

$$Z_2 = Z_L + z_{22} = R_2(1+jx_2), \tag{28b}$$

gdzie:

$$R_1 = Re(Z_g) + Re(z_{11}),$$

$$R_2 = Re(Z_L) + Re(z_{22})$$

oraz:

$$x_1 = Q_1\left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega}\right), \tag{29a}$$

$$x_2 = Q_2\left(\frac{\omega}{\omega_2} - \frac{\omega_1}{\omega}\right). \tag{29b}$$

Dla $Q_1 = Q_2$ i $\omega_1 = \omega_2$ zachodzi $x_1 = x_2 = x$ i dla tego przypadku jest słuszny wzór (26).

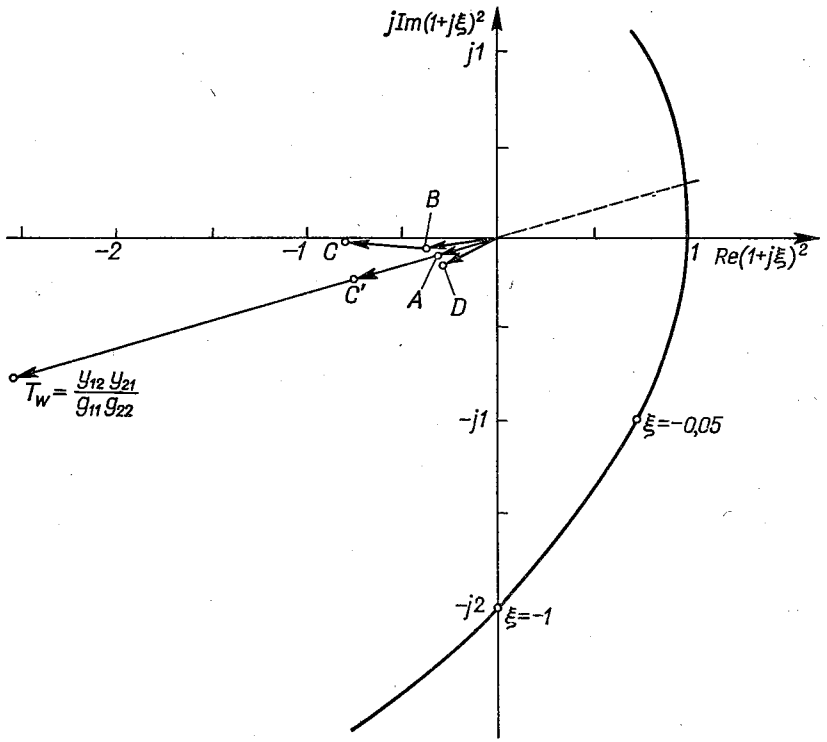
Postępując podobnie jak przy wyprowadzeniu wzoru (25) możemy przedstawić dodawanie szeregowej reaktancji Z_3 w postaci wyrażenia:

$$T'_z \cdot e^{j\theta'_z} = T_z \cdot e^{j\theta_z} + \frac{|Z_3||z_{21}|}{R_1 \cdot R_2} e^{j\left(\pm\frac{\pi}{2} + \arg z_{21}\right)}; \tag{30}$$

znak plus dotyczy indukcyjności, minus pojemności.

4.3. Przykłady

Zbadajmy, jak wpływa dodawanie równoległej susceptancji Y_3 dla tranzystora z przykładu w p. 3.3 (rys. 7).



Rys. 7. Wpływ sprzężeń reaktancyjnych w warunkach roboczych dla tranzystora AFZ-12 wg danych z przykładu z punktu 4.3. $G_g = 47$ mS; $G_L = 1$ mS. Punkty A, B, C, C', jak na rysunku 2b. Punkt D odpowiada dodaniu indukcyjności $L_3 = 27{,}8$ nH ($Z_3 = 17{,}6\,\Omega$) powodującej potencjalną niestabilność tranzystora nieobciążonego

Przewodności G_g i G_L, dobrane ze względu na uzyskanie maksymalnego skutecznego wzmocnienia mocy mają wartość:

$$G_g = 47 \text{ mS}; \quad G_L = 1 \text{ mS}.$$

Dokonując obliczeń na podstawie parametrów $[y]$ otrzymujemy:

$$G_1 = G_g + g_{11} = 72{,}4 \text{ mS}; \quad G_2 = G_L + g_{22} = 1{,}5 \text{ mS},$$

$$T = \frac{|y_{12} \cdot y_{21}|}{G_1 \cdot G_2} = 0{,}31; \quad \theta = -164°; \quad T_w = \frac{|y_{12} \cdot y_{21}|}{g_{11} \cdot g_{22}} = 2{,}65.$$

Wektorowi $T \cdot e^{j\theta}$ odpowiada punkt A na rysunku 7.

$$\frac{y_{21} \cdot |Y_3|}{G_1 \cdot G_2} = 0{,}708 \cdot |Y_3|; \quad -\frac{\pi}{2} + \arg y_{21} = -164° \text{ (dla pojemności)};$$

$$T_g = \frac{2}{1+\cos\theta} = 51{,}3; \quad s = 160; \quad s_w = 19{,}3.$$

Współczynnik stabilności s oraz współczynnik stabilności wewnętrznej s_w odpowiadający wzmacniaczowi nie obciążonemu są dużo większe od jedności. W omawianym przypadku

linia dodawania Y_3 pokrywa się z wektorem $T \cdot e^{j\theta}$. Wynika to z braku części rzeczywistej parametru y_{12}. Ze wzoru (25) i rysunku 7 można obliczyć, że indukcyjność neutralizująca (zapewniająca $T = 0$) musi być równa 3,6 μH, co pokrywa się z wartością obliczoną w przykładzie 1. W tym przypadku wyjście poza granicę stabilności powoduje równoległa indukcyjność $\leqslant 0{,}840$ μH, czyli przeszło 3 razy mniejsza niż w przykładzie z p. 3.3, nie uwzględniającym obciążenia obwodami rezonansowymi.

Jak już wspomniano, nie da się wyprowadzić prostej postaci wyrażenia opisującego dodawanie szeregowych reaktancji Z_1, Z_2, Z_3. By uwzględnić wpływ tych reaktancji, należy więc dokonać obliczeń parametrów $[y']$ dla kilku wartości indukcyjności korzystając ze wzorów (2) do (5). W przykładzie w p. 3.3 dokonano obliczeń tych parametrów dla $L_1 = L_2 = L_3 = 10$ nH ($Z = j6\Omega$). Nowa wartość stosunku zwrotnego wynosi:

$$T = 0{,}365; \quad \theta = -170°30' \text{ (punkt } B \text{ na rys. 7).}$$

Podobnie dokonano obliczeń dla indukcyjności 27,8 nH ($Z_3 = j17{,}6\ \Omega$) powodującej potencjalną niestabilność wewnętrzną tranzystora. W tym przypadku:

$$T = 0{,}325; \quad \theta = -153° \text{ (punkt } D \text{ na rys. 7).}$$

Z rysunku 7 wynika, że dodawanie indukcyjności szeregowej Z_3 powoduje bardzo nieznaczne ruchy w obrębie paraboli bezwzględnej stabilności roboczej. Reaktancja indukcyjna $\sim j18\ \Omega$, powodująca potencjalną niestabilność wewnętrzną tranzystora (przykład z p. 3.3), we wzmacniaczu zaprojektowanym z myślą o osiągnięciu maksymalnego wzmocnienia mocy ma wpływ pomijalny (rys. 7 punkt D).

Potwierdzenie znajduje fakt, że reaktancja szeregowa $j6\ \Omega$ (rys. 2b, punkt B) powoduje spadek maksymalnego wzmocnienia mocy (koniec wektora $T \cdot e^{j\theta}$ oddala się od granicy stabilności) oraz że wzrost tej reaktancji do około $j\,18\ \Omega$ powoduje wzrost wzmocnienia mocy.

Dla porównania z rysunkiem 2b, na rysunku 7 wrysowano linię obrazującą wpływ pojemności równoległej 1 pF przy równoczesnym istnieniu indukcyjności szeregowych o reaktancjach $Z = j\,6\Omega$ (punkt C).

Należy zwrócić uwagę na fakt, że w przykładzie tym rozpatrujemy inne zagadnienie niż w przykładzie z p. 3.3. Tam badało się wpływ reaktancji szeregowych i susceptancji równoległych na G_{psmax}. Nowe punkty na płaszczyźnie wzmocnienia mocy odpowiadające dodawaniu sprzężeń pozwalały bezpośrednio odczytać nową wielkość G_{psmax}. Ale ta nowa wielkość G_{psmax} jest uzyskiwana przy innych niż bez sprzężeń admitancjach G_g i G_L, gdyż zmianie ulega wypadkowa macierz czwórnika. By obliczyć nowe wartości G_g i G_L, trzeba dokonać obliczeń tej nowej macierzy.

W niniejszym przykładzie rozpatrujemy natomiast zagadnienie najczęściej występujące w praktyce: admitancje G_g i G_L mają wartość optymalną obliczoną bez uwzględnienia Y_3 i Z_3 i są stałe. Jeżeli teraz dodamy sprzężenia poprzez Y_3 i Z_3 (lub będą to nie zamierzone sprzężenia szkodliwe), to zmienią się parametry $[y]$ tranzystora i dla tego „nowego" tranzystora wielkość wyrażona wzorem (24) nie będzie już maksymalnym skutecznym wzmocnieniem mocy, gdyż G_g i G_L pozostały nie zmienione.

Wzór (24) w połączeniu z rysunkiem 7 odpowiedzą natomiast na pytanie, jakie będzie aktualne skuteczne wzmocnienie mocy w tych warunkach.

Z przytoczonych w tym punkcie rozważań wynika, że w warunkach roboczych wpływ reaktancji i susceptancji sprzęgających bądź szkodliwych ulega znacznemu ograniczeniu, zwłaszcza gdy wzmacniacz jest zaprojektowany z dużym marginesem stabilności.

5. WPŁYW SPRZĘŻEŃ REAKTANCYJNYCH NA IMMITANCJĘ WEJŚCIOWĄ

5.1. Graficzne przedstawienie admitancji na wejściu wzmacniacza

Całkowitą admitancję na wejściu można określić z wyrażenia: [2]

$$Y_{we} = Y_g + y_{we} = Y_g + y_{11} - \frac{y_{12}y_{21}}{y_{22}+Y_L}. \tag{31}$$

W wyrażeniu tym za Y_{we} uważa się sumę admitancji wejściowej y_{we} i admitancji generatora Y_g.

Korzystając ze wzorów (15a, b) wzór (31) można przekształcić do postaci:

$$\frac{Y_{we}}{G_1} = 1+j\xi_1 - \frac{y_{12}\cdot y_{21}}{G_1\cdot G_2}\cdot\frac{1}{1+j\xi_2}. \tag{32a}$$

Albo, korzystając ze wzoru (18):

$$\frac{Y_{we}}{G_1} = 1+j\xi+T\cdot e^{j(\theta-180°)}\frac{1}{1+j\xi}, \tag{32b}$$

gdzie założono, że $\xi_1 = \xi_2 = \xi$.

Wyrażenie (32b) można podzielić na dwa człony:

$$A = 1+j\xi = A_r+jA_i, \tag{33a}$$

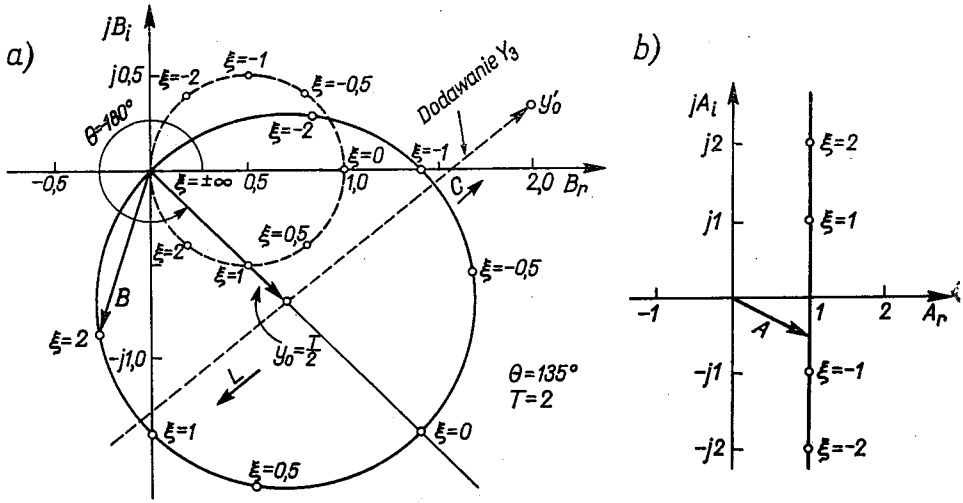
$$B = T\cdot e^{j(\theta-180°)}\frac{1}{1+j\xi} = B_r+jB_i. \tag{33b}$$

Wyrażenie $\frac{1}{1+j\xi}$ przedstawia na płaszczyźnie zespolonej okrąg o środku leżącym na osi rzeczywistej w odległości $\frac{1}{2}$ od środka współrzędnych (B_r, B_i) i promieniu równym $\frac{1}{2}$ (rys. 8a). Na okręgu tym można zaznaczyć punkty odpowiadające wartościom odstrojeń ξ.

Wyrażenie $T\cdot e^{j(\theta-180°)}$ oznacza obrót okręgu o kąt $\theta-180°$ oraz jego podobieństwo w stosunku T, tzn. promień wodzący każdego p-tu należy obrócić o $\theta-180°$ i pomnożyć jego wartość przez T. Wynika stąd, że środek okręgu po dokonanym przekształceniu znajdzie się w punkcie określonym we współrzędnych (B_r, B_i) wektorem:

$$y_0 = \frac{1}{2}T\cdot e^{j(\theta-180°)}. \tag{34}$$

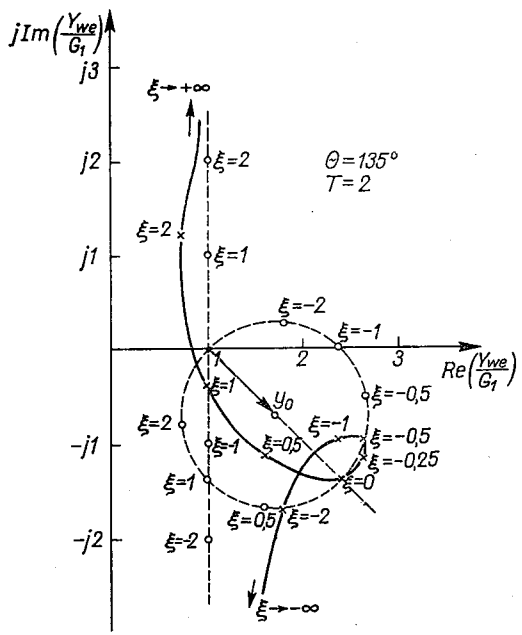
Wyrażenie (33a) przedstawia natomiast obwód wejściowy z dołączoną admitancją zwarciową y_{11}. Wykresem tego wyrażenia jest prosta równoległa do osi urojonej, przechodząca przez punkt (1, 0) (rys. 8b).



Rys. 8 a) Graficzne przedstawienie wyrażenia (33b); $\theta = 135°$, $T = 2$; b) Graficzne przedstawienie wyrażenia (33a)

By wykonać konstrukcję zredukowanej admitancji $\frac{Y_{we}}{G_1}$, należy zsumować wektory A i B dla tych samych rozstrojeń ξ (rys. 9).

Jak widać z rysunku 9, kształt krzywej opisującej przebieg $\frac{Y_{we}}{G_1}$ w funkcji częstotliwości jest zależny głównie od wielkości T i θ. Gdy $\theta = 0$ lub 180°, przebieg jest symetryczny



Rys. 9. Konstrukcja graficzna przebiegu admitancji wejściowej w funkcji częstotliwości; $\theta = 135°$, $T = 2$

względem osi rzeczywistej. Gdy $T = 0$, przebieg sprowadza się do wyrażenia (33a), czyli do prostej równoległej do osi urojonej.

Wykres z rysunku 9 może służyć do oceny stabilności roboczej wzmacniacza. Łatwo zauważyć, że dla pewnych wartości T i θ część rzeczywista $\frac{Y_{we}}{G_1}$ może się stać ujemna, a to oznaczać będzie niestabilność wzmacniacza.

Przypadek graniczny stabilności roboczej zachodzi, gdy okrąg z rysunku 9 dotyka osi urojonej. Można udowodnić na podstawie rysunku 9, że dla danej wartości θ spełniona jest wówczas równość $T = \frac{2}{\cos\theta+1}$. Wzmacniacz jest stabilny zawsze, gdy $T < \frac{1}{\cos\theta+1}$. Jest to nieco inna postać warunku stabilności roboczej (21) [1], [4].

Z rysunku 9 wynika również, że wzmacniacz jest stabilny dla dowolnej wartości θ, gdy $T < 1$.

Jeżeli uwzględnia się tylko admitancję wejściową y_{we}, bez uwzględnienia obwodów wejściowych, to wyrażenie (32b) przybiera postać:

$$\frac{y_{we}}{g_{11}} = 1+j\frac{b_{11}}{g_{11}} + \frac{|y_{12}\cdot y_{21}|}{g_{11}\cdot G_2} e^{j(\theta-180°)} \frac{1}{1+j\xi}. \tag{35}$$

Wówczas, dla wąskiego pasma częstotliwości, wykres zredukowanej względem g_{11} admitancji wejściowej ogranicza się do okręgu [druga część wzoru (35)] przesuniętego o wektor $\left(1+j\frac{b_{11}}{g_{11}}\right)$ względem początku układu współrzędnych.

5.2. Wpływ susceptancji Y_3

Dodanie do czwórnika równoległej susceptancji Y_3 prowadzi do ruchu po prostej środka okręgu z rys. 8a. Wynika to bezpośrednio z wyrażenia (25) obrazującego wpływ admitancji Y_3 na wektor różnicy zwrotnej $T \cdot e^{j\theta}$.

Jeśli więc pierwotne położenie środka okręgu opisane jest wzorem (34), to po dodaniu susceptancji Y_3 położenie to opisane będzie wektorem y_0' we współrzędnych (B_r, B_i):

$$y_0' = y_0 + \frac{|Y_3|\,|y_{21}|}{2G_1\cdot G_2} e^{j\left(\pm\frac{\pi}{2}+\arg y_{21}\right)}; \tag{36}$$

znak „—" dotyczy indukcyjności, znak „+" pojemności. Okrąg przechodzi nadal przez początek układu współrzędnych (B_r, B_i).

5.3. Wpływ reaktancji Z_3

Korzystając z macierzy admitancyjnej $[y]$ oraz wyrażeń wyprowadzonych poprzednio, trudno jest określić na płaszczyźnie $\frac{Y_{we}}{G_1}$ zmiany Y_{we} spowodowane dodaniem reaktancji Z_3. Należy więc określić nowe parametry $[y']$ wg wzoru (5) i znaleźć stąd nową wartość wektora $y_0' = \frac{1}{2}T'\cdot e^{j\theta'}$ określającego położenie środka okręgu.

W przypadku obwodów szeregowych na wejściu i wyjściu wzmacniacza zagadnienie jest proste, jeżeli rozpatrywać wpływ Z_3 na impedancję wejściową Z_{we} i korzystać z macierzy $[z]$ tranzystora.

Wówczas wyrażenie na zredukowaną wartość $\frac{Z_{we}}{R_1}$ przybierze postać analogiczną do wyrażenia (32b):

$$\frac{Z_{we}}{R_1} = 1+jx_1+T_z \cdot e^{j(\theta_z-180°)}\frac{1}{1+jx_2}, \tag{37}$$

zaś wpływ reaktancji Z_3 opisany jest przez wyrażenie (30).

Praktyczne znaczenie ma jednak przede wszystkim przypadek obwodów równoległych na wejściu i wyjściu. W tym przypadku nie da się przedstawić wyrażenia na impedancję wejściową w postaci wzoru (37). Wynika to z faktu, że całkowita impedancja na wyjściu przy zastosowaniu macierzy $[z]$ wyraża się wzorem:

$$Z_2 = r_{22}+\frac{G_L}{G_L^2+B_L^2}+j\left(x_{22}-\frac{B_L}{G_L^2+B_L^2}\right) = R_2+jX_2. \tag{38}$$

W tym wyrażeniu R_2 zmienia się w obrębie pasma i wyrażenie (37) staje się nieprzydatne. Operując jednak impedancją wejściową:

$$z_{we} = z_{11}-\frac{z_{12} \cdot z_{21}}{z_{22}+\dfrac{1}{Y_L}} \tag{39}$$

wzór (39) można przekształcić do postaci:

$$\frac{z_{we}}{r_{11}} = 1+j\vartheta_{11}-\frac{z_{12} \cdot z_{21}}{r_{11} \cdot r_{22}} \cdot \frac{1}{1+j\vartheta_{22}+\dfrac{1}{r_{22} \cdot G_L(1+j\xi_L)}}; \tag{40}$$

we wzorze tym:

$$\vartheta_{11} = \frac{x_{11}}{r_{11}} = \operatorname{tg}(\arg z_{11}), \tag{41a}$$

$$\vartheta_{22} = \frac{x_{22}}{r_{22}} = \operatorname{tg}(\arg z_{22}), \tag{42b}$$

$$\xi_L = Q_L\left(\frac{\omega}{\omega_L}-\frac{\omega_L}{\omega}\right), \tag{43}$$

przyjmujemy przy tym, że Y_L ma charakter rezonansowy, tzn. jest obwodem o dobroci Q_L i częstotliwości rezonansowej ω_L.

Wzór (40) można napisać w postaci:

$$\frac{z_{we}}{r_{11}} = 1+j\vartheta_{11}+t_z \cdot e^{j(\theta_z-180°)}\frac{1}{W}, \tag{44}$$

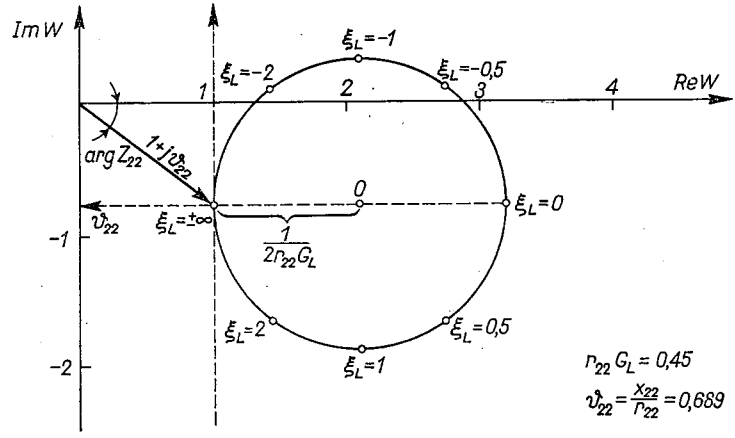
gdzie:

$$t_z \cdot e^{j\theta_z} = \frac{z_{12} \cdot z_{21}}{r_{11} \cdot r_{22}}. \tag{45}$$

Wyrażenie:

$$W = 1 + j\vartheta_{22} + \frac{1}{r_{22} G_L (1 + j\xi_L)} \tag{46}$$

przedstawia na płaszczyźnie zespolonej W okrąg o promieniu $\frac{1}{2r_{22}G_L}$ przesunięty względem początku układu współrzędnych o wektor $1 + j\vartheta_{22}$ (rys. 10). Jest to słuszne z wystarczającą w praktyce dokładnością, gdyż ϑ_{22} zmienia się nieznacznie w pasmie częstotliwości wzmacnianych.



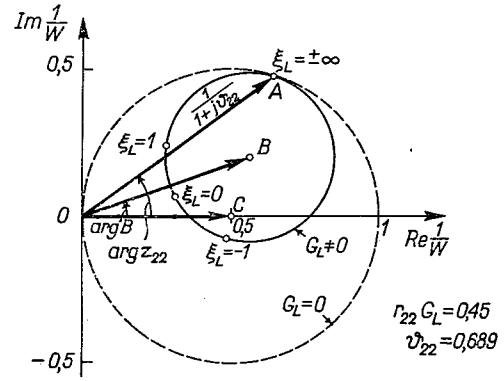
Rys. 10. Wykres zredukowanej impedancji W [wzór (46)] na płaszczyźnie zespolonej wg danych z przykładów z punktów 3.3 i 4.3; $r_{22}G_L = 0{,}45$, $\vartheta_{22} = 0{,}689$

Należy zwrócić uwagę na to, by nie mylić wartości parametrów ξ_L z rysunku 10 z parametrami ξ z rysunków 6, 7, 8, 9. Rozstrojenie ξ_L dotyczy bowiem tylko równoległego obwodu rezonansowego na wyjściu wzmacniacza, bez uwzględnienia parametru y_{22}. Wartość $\xi_L = 0$ oznacza, że obwód rezonansowy na wyjściu jest w rezonansie.

Natomiast parametr ξ jest rozstrojeniem obwodu utworzonego ze zwarciowej admitancji y_{22} i obwodu rezonansowego na wyjściu wzmacniacza. Wartości $\xi_L = 0$ i $\xi = 0$ odpowiadają więc różnym częstotliwościom.

Z rysunku 10 wynika, że zmniejszanie wartości G_L prowadzi do zwiększenia promienia okręgu. Gdy G_L dąży do zera, okręg przekształca się w prostą $Re\, W = 1$.

Wyrażenie $\frac{1}{W}$ ze wzoru (44) można otrzymać przez inwersję płaszczyzny W, co pokazano na rysunku 11. Okrąg przechodzący przez początek układu współrzędnych, o środku określonym wektorem C, odpowiada prostej $Re\, W = 1$, okrąg o środku określonym wektorem B jest przekształconym okręgiem z rysunku 10. Punkt $\xi_L = \pm\infty$ przechodzi w punkt określony wektorem A na płaszczyźnie $\frac{1}{W}$.



Rys. 11. Inwersja zredukowanej impedancji W z rysunku 10

Łatwo wykazać, że wektory A, B, C z rysunku 11 są określone zależnościami:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1+\vartheta_{22}^2}} e^{j(-\arg z_{22})}, \tag{47}$$

$$B = \frac{\sqrt{\left(1+\frac{1}{2r_{22}G_L}\right)^2+\vartheta_{22}^2}}{1+\frac{1}{r_{22}G_L}+\vartheta_{22}^2} e^{j\arcsin\frac{-\vartheta_{22}}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{2r_{22}G_L}\right)^2+\vartheta_{22}^2}}} \tag{48}$$

$$C = \frac{1}{2}. \tag{49}$$

Człon $t_z \cdot e^{j(\theta_z-180°)}$ oznacza obrót płaszczyzny $\frac{1}{W}$ o kąt $\theta_z - 180°$ i podobieństwo w stosunku t_z.

Ostatecznie więc okręgi z rysunku 11 opisane wektorami A, B, C, po tym ostatnim przekształceniu opisane są wektorami A_t, B_t, C_t we współrzędnych $\left[Re\left(\frac{z_{21}\cdot z_{12}}{r_{11}\cdot r_{22}}\cdot\frac{1}{W}\right), Im\left(\frac{z_{21}\cdot z_{12}}{r_{11}\cdot r_{21}}\cdot\frac{1}{W}\right)\right]$:

$$A_t = t_z \cdot |A| \cdot e^{j(\alpha+\theta_z-180°)}, \tag{50}$$

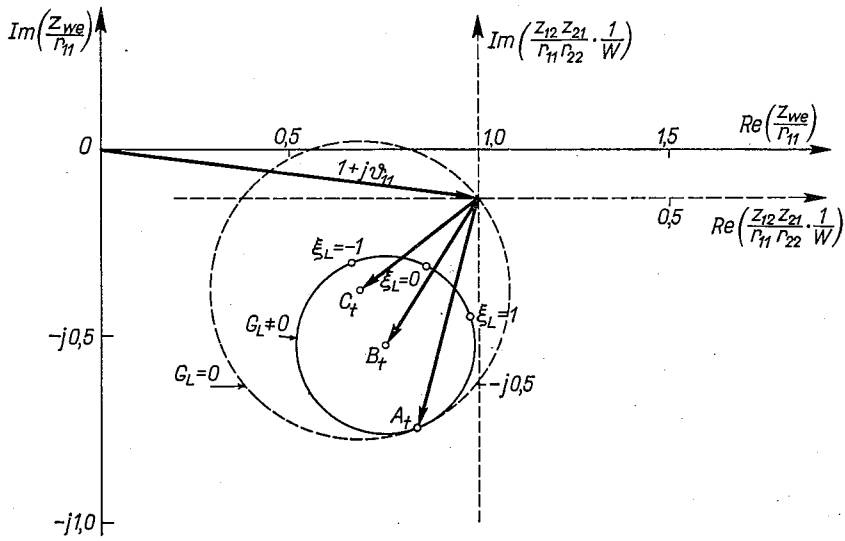
$$B_t = t_z \cdot |B| \cdot e^{j(\beta+\theta_z-180°)}, \tag{51}$$

$$C_t = \frac{1}{2} t_z \cdot e^{j(\theta_z-180°)}, \tag{52}$$

gdzie:

$|A|$ — moduł wektora A,
$|B|$ — moduł wektora B,
α — argument wektora A,
β — argument wektora B.

Przekształcenie to pokazane jest na rysunku 12. Na rysunku tym wrysowano również osie $Re\frac{z_{we}}{z_{11}}$ i $Im\frac{z_{we}}{z_{11}}$ osiągnięte z przesunięcia układu współrzędnych o wektor $1+\vartheta_{11}$. Na uwagę zasługuje fakt, że inwersja spowodowała zmianę rozmieszczenia punktów ξ_L (odpowiadających różnym rozstrojeniom obwodu wyjściowego) na okręgu obrazującym przebieg impedancji wejściowej dla przypadku $G_L \neq 0$ (rys. 12). Nowe rozmieszczenie punktów ξ_L znaleźć można metodą graficzną.



Rys. 12. Przebieg zredukowanej impedancji $\frac{Z_{we}}{r_{11}}$ w funkcji częstotliwości wg danych z przykładów z punktów 3.3 i 4.3; $r_{22}G_L = 0{,}45$, $\vartheta_{22} = 0{,}689$, $\vartheta_{11} = 0{,}124$, $t_z = 0{,}8$, $\theta_z = 39°$

Należy podkreślić, że wykres admitancji wejściowej z rysunku 9 i wykres impedancji z rysunku 12 wzajemnie sobie odpowiadają. Różnice polegają tylko na tym, że rysunek 9 uwzględnia również wpływ obwodów wejściowych, czego nie ma na rysunku 12.

Chcąc dla danej częstotliwości znaleźć z rysunku 12 wartość admitancji wejściowej, należy znaleźć odpowiadające tej częstotliwości rozstrojenie obwodu na wyjściu wzmacniacza ξ_L oraz odpowiadającą mu wartość $\frac{z_{we}}{r_{11}}$. Stąd znajdujemy z_{we} i $y_{we} = \frac{1}{z_{we}}$. By znaleźć całkowitą wartość admitancji na wejściu Y_{we}, należy do y_{we} dodać wartość Y_g. W ten sposób można porównać dla danego wzmacniacza wykresy immitancji wejściowych, przedstawione na rysunkach 9 i 12.

Dołączenie reaktancji Z_3 oznacza zmianę t_z i θ_z. Korzystając ze wzoru (30), w którym w miejsce R_1, R_2 i T należy wstawić r_{11}, r_{22}, t oraz wzorów (50)÷(52) można udowodnić, że nowe wektory A_t', B_t' i C_t' uwzględniające wpływ reaktancji Z_3 przybiorą postać:

$$A_t' = A_t + \frac{|z_{21}||Z_3||A|}{r_{11} \cdot r_{22}} e^{j(\pm 90° + \arg z_{21} - \arg z_{22})}, \tag{53}$$

$$B'_t = B_t + \frac{|z_{21}||Z_3||B|}{r_{11} \cdot r_{22}} e^{j(\pm 90° + \arg z_{21} + \beta)}, \tag{54}$$

$$C'_t = C_t + |z_{21}||Z_3| \frac{1}{2r_{11} \cdot r_{22}} e^{j(\pm 90° + \arg z_{21})}. \tag{55}$$

Znak (+) oznacza tu pojemność, znak (—) indukcyjność.

Ostatnie wzory pozwalają wyznaczyć wpływ Z_3 na impedancję wejściową. Na płaszczyźnie $\frac{z_{we}}{r_{11}}$ można narysować proste, po których poruszają się końce wektorów A'_t, B'_t, C'_t i wrysowywać okręgi odpowiadające poszczególnym wartościom Z_3.

W analogiczny sposób, korzystając z podobieństwa wyrażeń, można określić wpływ Y_3 i Z_3 na admitancję i impedancję wyjściową wzmacniacza.

5.4. Przykład

Przedstawiony zostanie obecnie wpływ sprzężeń reaktancyjnych z przykładów z pp. 3,3, 4.3 na admitancję wejściową.

a. *Admitancja wejściowa*

Korzystając z wyników przykładu z p. 4.3 i wzoru (34) mamy:

$$y_0 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}31 e^{j(-164° + 180°)} = 0{,}155 e^{j16°}.$$

Ze wzoru (36) obliczamy nowe położenie środka okręgu we współrzędnych (B_r, B_i) odpowiadające dodaniu równoległej pojemności 1 pF

$$y'_0 = y_0 + 0{,}35|Y_3|e^{j16°} = y_0 + 0{,}22e^{j16°}$$

dla pojemności $\frac{\pi}{2} + \arg y_{21} = 16°$.

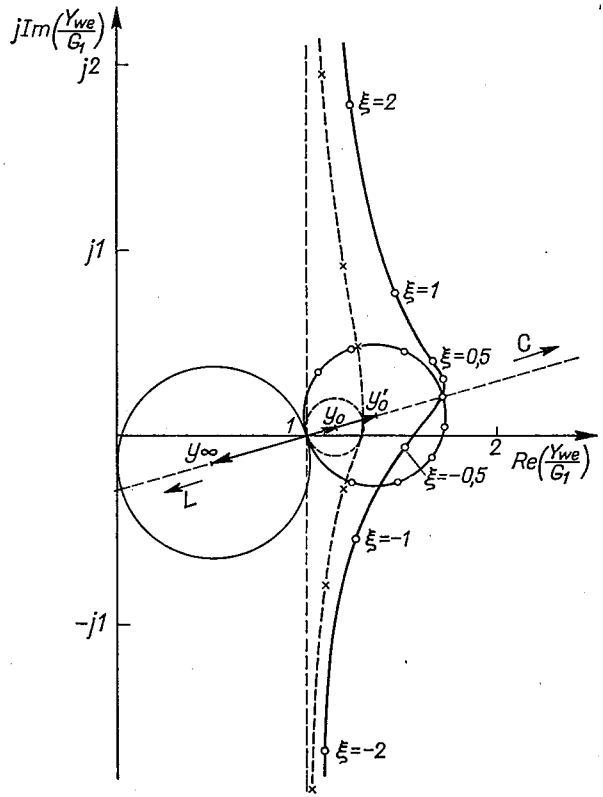
Na rysunku 13 jest przedstawiony przebieg admitancji wejściowej dla tego przypadku. Linią przerywaną naniesiony jest przebieg $\frac{Y_{we}}{G_{11}}$ dla czwórnika bez sprzężenia. Kształt krzywych jest tu inny niż na rysunku 9, gdyż $T < 1$.

Jak widać z rysunku, dodanie pojemności powoduje zwiększenie zmian admitancji wejściowej w obrębie pasma. A więc pomimo że pojemność równoległa nie wpływa znacznie na stabilność wzmacniacza, a nawet ją nieco zwiększa, to jej wpływ jest niekorzystny, gdyż zwiększa wzajemne rozstrajanie obwodów rezonansowych i zmiany tłumienia w pasmie.

Punkt $y\infty$ oznacza dodatnie indukcyjności równoległej, która powodować będzie $G_{we} \leqslant 0$, a więc niestabilność wzmacniacza. Wynosi ona zgodnie z obliczeniami z p. 3.3 0,840 μH.

I w tym przykładzie potwierdzenie znajduje fakt, że równoległa indukcyjność może prowadzić do unilateryzacji wzmacniacza $\left(\text{p-kt 1,0 na płaszczyźnie } \frac{Y_{we}}{G_1}\right)$.

W podobny sposób można przedstawić wpływ indukcyjności szeregowej. Należy skorzystać z obliczonych na podstawie parametrów [y'] nowych wartości wektora $\frac{1}{2} T' \cdot e^{j\theta'}$,



Rys. 13. Przebieg zredukowanej całkowitej admitancji na wejściu $\frac{Y_{we}}{G_{11}}$ w funkcji częstotliwości wg danych z przykładu z punktu 5.4a

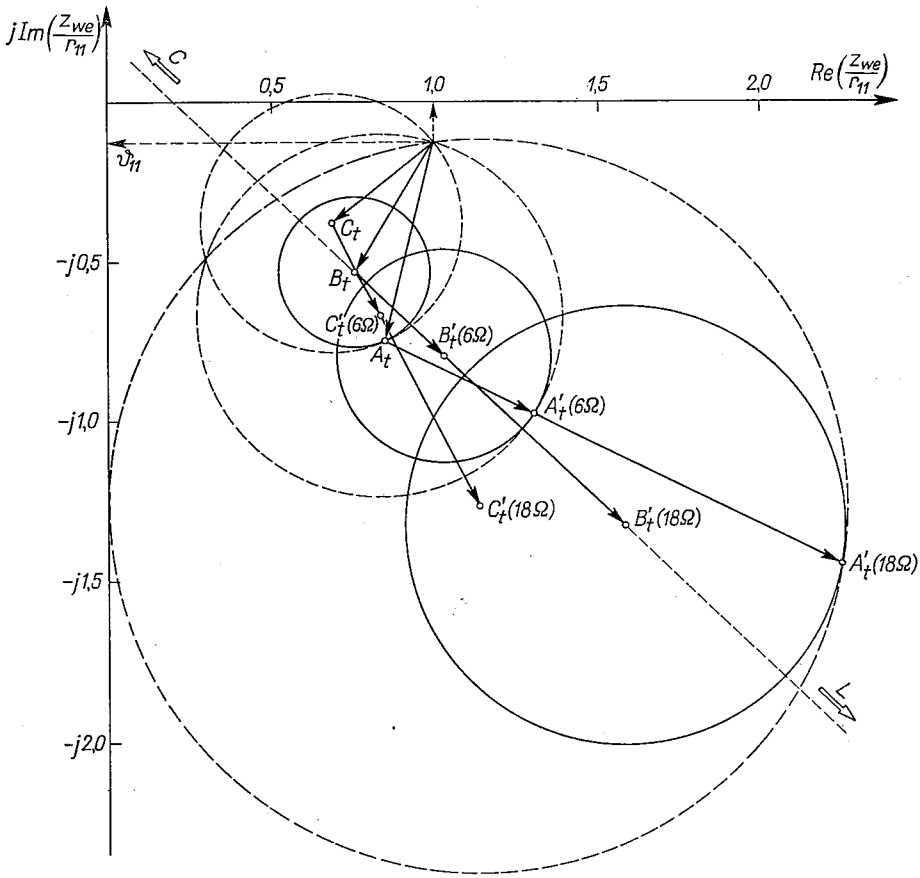
który określi położenie y'_0 środka okręgu na płaszczyźnie $\frac{Y_{we}}{G_1}$. Z rysunku 7 widać, że wpływ indukcyjności na ten wektor jest niezbyt duży, więc niewiele wpłynie na kształt charakterystyki $\frac{Y_{we}}{G_1}(\xi)$.

b. *Impedancja wejściowa*

Korzystając z podanych w p. 3.3 parametrów [z] oraz wzorów (47)÷(52) obliczamy wektory A_t, B_t i C_t

$$A'_t = 0{,}636/\underline{-103°30'}$$
$$B'_t = 0{,}464/\underline{-121°}$$
$$C_t = 0{,}401/\underline{-141°}$$

Nanosząc te wektory na płaszczyznę $\frac{z_{we}}{r_{11}}$ narysowano okrąg zmian impedancji wejściowej dla przypadku $G_L = 1$ mS i $G_L = 0$ (rys. 14).



Rys. 14. Przebieg zredukowanej impedancji wejściowej $\frac{Z_{we}}{r_{11}}$ w funkcji częstotliwości dla $G_L = 0$ (linie przerywane) i $G_L = 1$ mS (linie ciągłe) wg danych z przykładu z punktu 5.4b

Na tym samym rysunku naniesiono okręgi zmian $\frac{z_{we}}{r_{11}}$ dla $Z_3 = j6\Omega$ i $Z_3 = j18\Omega$, korzystając z obliczonych wielkości:

$$A'_t = A_t + 0{,}0866\,|Z_3|\underline{/-25°}$$

$$B'_t = B_t + 0{,}063\,|Z_3|\underline{/-42°30'}$$

$$C'_t = C_t + 0{,}0544\,|Z_3|\underline{/-62°30'}$$

Z rysunku wynika, że dla $G_L = 0$ i $Z_3 = j\,18\Omega$ istnieje częstotliwość, dla której $r_{we} = 0$. Oznacza to, że dla tej właśnie wartości Z_3 tranzystor staje się potencjalnie niestabilny. Jest to zgodne z wynikami przykładu z punktu 3.3.

Można również zauważyć, że szeregowa pojemność może spowodować niestabilność wzmacniacza, gdyż powoduje zbliżanie się p-tu B_t do osi $Im\left(\frac{Z_{we}}{r_{11}}\right)$.

6. WNIOSKI

W zakresie bardzo wielkich częstotliwości, na których pracują współczesne wzmacniacze tranzystorowe nie można uniknąć sprzężeń reaktancyjnych.

Wynikają one z rozproszonych pojemności i indukcyjności doprowadzeń, a czasami celowo wprowadzamy sprzężenia reaktancyjne, by poprawić właściwości wzmacniacza. Dlatego też analiza wpływu sprzężeń reaktancyjnych ma w wielu praktycznych przypadkach istotne znaczenie.

Ujęcie analityczne tych zagadnień prowadzi do skomplikowanych zależności i jest uciążliwe.

Metody graficzne przedstawione w niniejszym artykule pozwalają na przejrzystą i łatwiejszą analizę wpływu sprzężeń reaktancyjnych na takie parametry wzmacniacza, jak stabilność, skuteczne wzmocnienie mocy, admitancja wejściowa itp.

Na zakończenie autor pragnie gorąco podziękować p. dr inż. Andrzejowi Filipkowskiemu za wnikliwe dyskusje i pomoc przy opracowaniu niniejszej pracy.

LITERATURA CYTOWANA W TEKSCIE

1. A. Filipkowski, Wzmacniacze tranzystorowe selektywne, WNT, Warszawa 1968.
2. W. Golde, Wzmacniacze tranzystorowe, małej częstotliwości, prądu stałego, szerokopasmowe, WNT, Warszawa 1968.
3. M. Grobelny, Zarys liniowej teorii układów elektronicznych, Wyd. Komunikacji i Łączności, Warszawa 1968.
4. W. Th. H. Hetterscheid, Transistor Bandpass Amplifiers, Philips Technical Library, 1964.
5. J. G. Linvill, J. F. Gibbons, Transistors and Active Circuits, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., 1961.
6. S. J. Mason, Power Gain in Feedback Amplifiers, IRE Trans. on CT-1, June 1954.
7. A. Singhakowinta, A. R. Boothroyd, On Linear Two Port Amplifiers, IEEE Trans., CT-11, pp. 169, March 1964.
8. R. Spence, Linear Active Networks, Imperial College, Lecture 6, London 1966.
9. M. Stybliński, Tranzystorowy wzmacniacz pośredniej częstotliwości 100 MHz. Praca dyplomowa, Politechnika Warszawska, 1966/1967.

M. STYBLIŃSKI

LOSSLESS FEEDBACK IN TRANSISTOR HIGH FREQUENCY BANDPASS AMPLIFIERS

Summary

Methods of analysis of lossless feedback which appears in transistor high frequency bandpass amplifiers are presented in this paper.

The effects of reactive feedback on: power gain, stability, input and output immitance etc. are consi-

dered. Graphical methods are presented to solve the most of these problems. Examples are given how lead inductance and output-input capacitance affect amplifier parameters.

The methods presented may be useful in the analysis of any active twoport with transfer function of resonance type.

M. STYBLIŃSKI

LES COUPLAGES DE RÉACTANCE DANS LES AMPLIFICATEURS HAUTE FRÉQUENCE À TRANSISTORS

Résumé

On a étudié dans l'oeuvre présent les méthodes de l'analyse de l'influence des couplages de réactance apparaissant dans les amplificateurs haute fréquence à transistors sur de tels paramêtres, comme amplification de puissance, stabilité, immitance d' éntrée. On a présenté des exemples de l'influence de l'induction des connexions et de la capacité sortie-entrée sur l'action de l'amplificateur haute fréquence à transistors. Les considérations présentées peuvent etre utilisées aux quadripôles actifs quelconques à caractéristique passe-bande.

М. СТЫБЛИНСКИ

РЕАКТИВНАЯ СВЯЗЬ В ТРАНЗИСТОРНЫХ УСИЛИТЕЛЯХ ВЫСОКОЙ ЧАСТОТЫ

Резюме

В статье рассмотрены методы анализа влияния реактивных связей, выступающих в транзисторных усилителях высокой частоты, на такие параметры, как усиление мощности, стабильность, входные реактивные сопротивления и проводимости. Главным образом применены графические методы. Приведены примеры влияния индуктивности выводов и емкости выход-вход на работу транзисторного высокочастотного усилителя. Произведенные рассуждения могут применяться к любым активным четырехполюсникам с резонансной характеристикой.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 15, 3, ss. 423–434
INSTYTUT TECHNOLOGII ELEKTRONOWEJ PAN, WARSZAWA 1969

Zagadnienia związane z projektowaniem wzmacniaczy grupowych o małym wzmocnieniu

JĘDRZEJ BROŻYNA (WARSZAWA)

Katedra Urządzeń Teletransmisyjnych i Telegraficznych Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 27.12.1968

W urządzeniach transferowych i końcowych telefonicznych systemów nośnych spotyka się charakterystyczną grupę wzmacniaczy grupowych o małym[1]) wzmocnieniu i płaskiej charakterystyce częstotliwościowej.

Celem niniejszej pracy jest omówienie szeregu zagadnień związanych z projektowaniem wzmacniaczy tego typu w postaci układu dwustopniowego z dopasowaniem czynnym od strony końcówek wejściowych i wyjściowych. Podane zależności pozwalają na stosunkowo szybkie określenie, czy dany wzmacniacz można zrealizować w powyższym układzie i oszacować podstawowe parametry tranzystorów konieczne do jego realizacji.

1. WPROWADZENIE

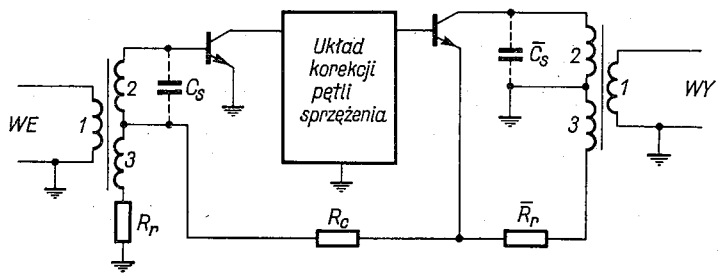
W urządzeniach końcowych i transferowych systemów nośnych spotyka się charakterystyczną grupę wzmacniaczy, których cechą wyróżniającą jest ich małe wzmocnienie przy jednoczesnym zachowaniu podstawowych cech wzmacniaczy grupowych, a mianowicie: ostrych wymagań na wielkość współczynnika szumów, zniekształceń nieliniowych, zniekształceń charakterystyki częstotliwościowej i stałości wzmocnienia. Wzmacniacze te używane w celu kompensacji strat sygnału w procesie tworzenia i rozdziału pasma liniowego muszą posiadać regulowane wzmocnienie o płaskiej charakterystyce częstotliwościowej.

Obserwacje i badania autora wskazują na celowość osobnego omówienia pewnych zagadnień związanych z projektowaniem tego typu wzmacniaczy, tak ze względu na ich ilość w systemie, jak i trudności konstrukcyjne. Jak zaznaczono wyżej, podstawową cechą charakterystyczną tych wzmacniaczy jest ich małe wzmocnienie i pod tym kątem widzenia muszą być projektowane. I tak ze względu na wielkość współczynnika szumów wzmacniacz taki powinien mieć obwód wejściowy rozwiązany w układzie dopasowania czynnego ze sprzężeniem zwrotnym podanym na bazę pierwszego stopnia. Zastosowanie dopasowania biernego przy małych wzmocnieniach znacznie zwiększa szumy, a współczynniki szumów dla obu rozwiązań mogą różnić się nawet o rząd wielkości [1]. Również ze względu na małe wzmocnienie nie wydaje się celowe stosowanie większej ilości stopni niż dwa, co przy stosowanym rozwiązaniu obwodu wejściowego pociąga konieczność brania syg-

[1]) Wzmacniacze, w których wielkość wzmocnienia ogranicza możliwość optymalizacji wzmacniacza z punktu widzenia szumów i zniekształceń nieliniowych przez ograniczenie przekładni transformatorów — zależność (2).

nału sprzężenia zwrotnego z emitera drugiego stopnia i powoduje, że oporność wyjściowa stopnia końcowego będzie „duża".

Jeżeli weźmie się pod uwagę, że oporność obciążenia stopnia końcowego jest ograniczona przekładnią transformatora, a ewentualne dopasowanie bierne zmniejsza tę oporność dwukrotnie — widać, że tranzystor w drugim stopniu, przy stosunkowo niewielkiej wymaganej mocy admisyjnej musiałby pozwalać na stosunkowo duże wysterowanie prądowe, co pociąga za sobą oprócz oczywistej straty wzmocnienia konieczność zastosowania specjalnego tranzystora (stosowane w systemach o wyższej krotności tranzystory epitaksialne-planarne pozwalają wprawdzie na duże wysterowanie prądowe, jednak zniekształcenia wyraźnie rosną przy takim ich wykorzystaniu), jak również znacznie zwiększa moc czerpaną przez stopień, przy ustalonym napięciu zasilania. Z tych względów wydaje się bardzo korzystne stosowanie dopasowania czynnego również po stronie wyjściowej, tym bardziej, że stosowany tu transformator może być znacznie gorszy poza pasmem użytecz-



Rys. 1. Ogólny układ rozpatrywanego wzmacniacza. Cyframi oznaczono uzwojenia transformatorów, a linią przerywaną kondensatory separujące C_s

nym od wejściowego, gdyż stosunkowo łatwiej można ograniczyć wpływ jego parametrów na pętlę sprzężenia zwrotnego. W końcu biorąc pod uwagę, że dla osiągnięcia minimalnych wzmocnień i prostej regulacji wzmocnienia gałąź sprzężenia wygodnie jest realizować jednym elementem, dochodzi się do ogólnego układu wzmacniacza pokazanego na rys. 1.

W tego typu układzie, wzmocnienie napięciowe, a szczególnie część objętą główną pętlą sprzężenia zwrotnego uzyskuje się z pierwszego stopnia. Praktycznie o wielkości tego wzmocnienia decyduje wielkość impedancji w kolektorze pierwszego stopnia. Stopień drugi nie powinien obciążać obwodu kolektora (oczywiście należy liczyć się z pojemnością wejściową drugiego stopnia — ze względu na tę pojemność przy większych wzmocnieniach napięciowych drugiego stopnia często stosuje się dodatkowy stopień separujący w tym układzie), powinien stanowić rodzaj separatora wtórnikowego separującego transformator wyjściowy i zapewniać wymaganą moc wyjściową.

Problem w tego typu układzie stanowi osiągnięcie możliwie dużej głębokości głównej pętli sprzężenia zwrotnego przy określonej wielkości minimalnego wzmocnienia i jednoczesnym zapewnieniu minimalnych szumów oraz zniekształceń nielinowych. Wzmocnienie w rozpatrywanym układzie, przy założeniu dostatecznej wielkości sprzężenia zwrotnego, można określić zależnością:

$$k = \frac{R_c}{2R_a p_{31}\bar{p}_{31}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{p}_{21}}{p_{31}} + \frac{p_{21}}{\bar{p}_{31}}\right), \tag{1}$$

której pierwszy składnik wskazuje na możliwość regulacji wzmocnienia przez zmiany oporności R_c, a drugi określa minimalne wzmocnienie możliwe do uzyskania w tym układzie ($R_c = 0$).

Dwie podstawowe wielkości charakteryzujące transformator — przekładnie $p_{21}+p_{31}$ oraz p_{23} można określić w następujący sposób.

Przekładnię $p_{21}+p_{31}$ powinno się określać z warunku na minimalny współczynnik szumów dla tranzystora wejściowego i ze względu na możliwość wykorzystania charakterystyki tranzystora (minimalizacja harmonicznych) na wyjściu. W praktyce jednak, dla systemów o stosunkowo szerokim pasmie, konstruktor jest ograniczony możliwością wykonania odpowiedniego transformatora, gdyż dające się zrealizować przekładnie są mniejsze niż optymalne. W związku z tym zwykle zakłada się maksymalną dopuszczalną przekładnię p_{21} (a nie $p_{21}+p_{31}$), przy której transformator będzie stosunkowo dobry i prosty w wykonaniu.

Przekładnia p_{23} w transformatorze wejściowym powinna być możliwie duża:

1) ze względu na wielkość pętli głównej sprzężenia zwrotnego dla małych częstotliwości, którą przy określonym wzmocnieniu maksymalnym k_{max} można określić orientacyjnie z zależności (13):

$$k\beta \approx -\frac{R_{kol}}{r_{e1}} \cdot \frac{\alpha p_{23}}{k_{max}+1},$$

gdzie przez R_{kol} i r_{e1} oznaczono odpowiednio wypadkową oporność obciążenia pierwszego stopnia oraz oporność emitera w układzie *W.B.*

2) ze względu na częstotliwość graniczną charakterystyki $k\beta$ (spadek o 3dB), która zależy od wielkości oporności R_{zst} widzianej przez wejście tranzystora pierwszego stopnia; wielkość tej oporności, dla tranzystora o określonej pojemności kolektor-baza C_{kb1} i oporności bazy r_{b1}, bezpośrednio wyznacza maksymalną wartość obciążenia kolektora R_{kol} [z zależności (14)].

Analogicznie dla transformatora wyjściowego przekładnia $\bar{p}_{23}$ powinna być maksymalna ze względu na:

3) sprawność obwodu wyjściowego $\eta_{obc/kol}$, to jest stosunek mocy użytecznej do mocy sygnału otrzymywanej z obwodu wyjściowego tranzystora (przekładnia $\bar{p}_{23}$ określa bowiem procent mocy traconej na oporności $\bar{R}_r$).

4) ze względu na możliwość wykorzystania wzmocnienia drugiego stopnia; wzmocnienie napięciowe tego stopnia jest określone przez przekładnię $\bar{p}_{23}$, z kolei zwiększenie wzmocnienia tego stopnia pozwala na zwiększenie sprzężenia pętli głównej.

Powyższe rozumowanie wskazuje na celowość dawania dużych przekładni p_{23} i $\bar{p}_{23}$ (belką oznaczone są elementy obwodu wyjściowego). Trudno jest w sposób ogólny określić, zwiększenie której z tych przekładni jest bardziej korzystne, wynika to zwykle z konkretnych warunków na wzmacniacz oraz zastosowanych elementów; wiadomo jednak, że ich maksymalna wielkość jest ograniczona przez przyjęte minimalne wzmocnienie wzmacniacza:

$$k_{min} = \frac{1}{2}\left(\frac{p_{21}}{\bar{p}_{31}} + \frac{\bar{p}_{21}}{p_{31}}\right). \tag{2}$$

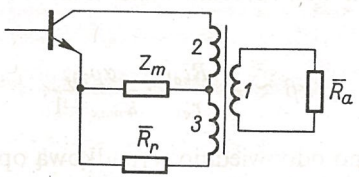
Często ze względów produkcyjnych daje się identyczne transformatory wejściowy i wyjściowy, wówczas warunek na maksymalną wartość przekładni p_{23} będzie:

$$p_{23max} = k_{min}. \tag{3}$$

Jest to podstawowy warunek wyróżniający wzmacniacze o małym wzmocnieniu ze względu na rozwiązanie w podanym układzie, decydujący o trudnościach wykonania tego typu wzmacniaczy. Wykonywane w podanym wyżej układzie wzmacniacze o większych minimalnych wzmocnieniach można optymalizować ze względu na warunki wynikające z punktów 1÷4, co daje większą możliwość wykorzystania stopni.

2. OBCIĄŻENIE I SPRAWNOŚĆ

W rozważanym typie wzmacniaczy, ze względu na małe wzmocnienie występuje problem obciążania obwodu wyjściowego przez elementy sprzężenia zwrotnego. Obciążenie to zależy bezpośrednio od impedancji elementu pozwalającego na regulację wzmocnienia



Rys. 2. Obwód kolektora drugiego stopnia

(R_c — na rys. 1) i w związku z tym impedancja obciążenia stopnia oraz sprawność obwodu wyjściowego zależą od wzmocnienia wzmacniacza. Zakładając, że w pasmie użytecznym transformatory można traktować jako idealne, impedancję obciążenia drugiego stopnia (z rys. 2) można określić zależnością:

$$Z_{obc} = \frac{\bar{R}_a\bar{R}_r\bar{p}_{21}^2 + Z_m[\bar{R}_r + \bar{R}_a(\bar{p}_{21}+\bar{p}_{31})^2]}{\bar{R}_r + \bar{R}_a\bar{p}_{31}^2 + Z_m}, \tag{4}$$

gdzie przez Z_m oznaczono wypadkową impedancję elementów sprzężenia zwrotnego układu wejściowego i elementu regulacyjnego (oporność potencjometru R_c):

$$Z_m = R_c + \frac{Z_{we1}(R_r + R_a p_{31}^2) + R_r R_a p_{21}^2}{Z_{we1} + R_r + R_a(p_{21}+p_{31})^2} \tag{5}$$

oraz przez $\bar{R}_r$, R_r, R_a, Z_{we1} oznaczono odpowiednio oporności, na których uzyskuje się prądowe i szeregowe sprzężenie zwrotne, oporności obciążenia wzmacniacza oraz impedancję wejściową tranzystora pierwszego stopnia.

Drugim istotnym parametrem jest sprawność obwodu wyjściowego rozumiana jako stosunek mocy sygnału wydzielanej na obciążeniu wzmacniacza do mocy pozornej uzyskiwanej w obwodzie kolektorowym tranzystora. Można ją określić jako:

$$\eta_{obc/kol} = \left| \frac{\bar{R}_a[\bar{R}_r\bar{p}_{21} + Z_m(\bar{p}_{21}+\bar{p}_{31})]^2}{(Z_m + \bar{R}_r + \bar{R}_a\bar{p}_{31}^2)[\bar{R}_r Z_m + \bar{R}_a\bar{R}_r\bar{p}_{21}^2 + Z_m\bar{R}_a(\bar{p}_{21}+\bar{p}_{31})^2]} \right|. \tag{6}$$

W przypadku idealnym, gdy pętla sprzężenia nie obciąża obwodu wyjściowego, oraz przy uwzględnieniu, że $\overline{R}_a\overline{p}_{31}(\overline{p}_{21}+\overline{p}_{31}) = \overline{R}_r$, zależności (4) i (6) upraszczają się do postaci:

$$Z_{obc} = \overline{R}_r(2+\overline{p}_{23}) \tag{7}$$

oraz

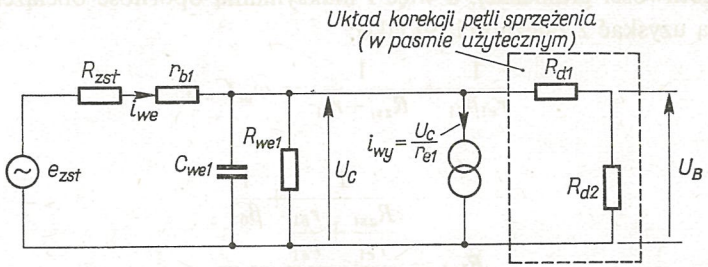
$$\eta_{obc/kol} = \frac{1}{\frac{1}{\overline{p}_{23}^2+1}+1}. \tag{8}$$

Z powyższej zależności widać, że straty obwodu wyjściowego są określone w tym przypadku procentową stratą mocy na oporności $\overline{R}_r$. Zależności (7) i (8) można użyć w przypadku wzmacniaczy o dużym wzmocnieniu, gdy wpływ elementów sprzężenia zwrotnego na obwód wyjściowy jest pomijalny, lub jako punkt odniesienia dla określenia zmiany impedancji obciążenia i wzrostu strat. Z zależności (4) i (6) widać, że obciążenie tranzystora oraz sprawność zależą od zmiennej wartości oporności R_c i z tego względu przeliczając proste pracy oraz polaryzacje tranzystora należy brać pod uwagę obie krańcowe wartości tego elementu. Jest to szczególnie ważne przy bardzo małych wzmocnieniach i przy dużych procentowych zmianach wzmocnienia ze względu na regulację.

Wyżej wprowadzone założenie idealności transformatorów w pasmie użytecznym jest dopuszczalne, gdyż wymagana płaskość charakterystyki częstotliwościowej wzmocnienia i mała wartość współczynnika niedopasowania zmuszają do dokładnej ich korekcji.

3. TRANSMITANCJA PĘTLI SPRZĘŻENIA ZWROTNEGO W PASMIE UŻYTECZNYM

Rozpatrując pętlę sprzężenia zwrotnego w pasmie użytecznym i korzystając z powyższego założenia idealności transformatorów, układ zastępczy reprezentujący pętlę główną sprzężenia zwrotnego można przedstawić w sposób pokazany na rys. 3. W układzie tym



Rys. 3. Układ zastępczy do obliczania transmisji pętli sprzężenia zwrotnego w pasmie użytecznym

transformator wejściowy zastąpiono źródłem o sile elektromotorycznej e_{zst} oraz oporności R_{zst}, dołączonym do wejścia tranzystora pierwszego stopnia. Wpływ impedancji wejściowej i przenoszenie drugiego stopnia pominięto. Pomijając również wpływ elementów reaktancyjnych układu korekcyjnego pętli sprzężenia w pasmie użytecznym obciążenie stopnia pierwszego można traktować jako sumaryczną oporność wejściową tego układu $R_{kol} = R_{d1}+R_{d2}$, a współczynnik przenoszenia tej sieci jako $\alpha = R_{d1}/(R_{d1}+R_{d2})$. Przy tych założeniach transmitancję pętli głównej sprzężenia zwrotnego można zapisać w postaci:

$$k\beta = \frac{\alpha \frac{R_{kol}}{r_{e1}} \cdot \frac{e_{zst}}{U_B}}{(R_{zst}+r_{b1})\left(\frac{1}{R_{we1}}+j\omega C_{we1}\right)+1}, \tag{9}$$

gdzie przez r_{b1}, r_{e1}, R_{we1}, C_{we1} oznaczono odpowiednie elementy schematu zastępczego pierwszego tranzystora, oraz:

$$\frac{e_{zst}}{U_B} = \frac{R_r+R_a p_{31}(p_{21}+p_{31})}{R_r+R_c+R_a p_{31}^2}, \tag{10}$$

$$R_{zst} = \frac{R_c[R_r+R_a(p_{21}+p_{31})^2]+R_a R_r p_{21}^2}{R_c+R_r+R_a p_{31}^2}. \tag{11}$$

Bezpośrednie korzystanie z powyższych zależności ze względu na ich złożoną postać byłoby uciążliwe. Wygodniej jest obliczyć w sposób przybliżony wielkość transmitancji pętli sprzężenia zwrotnego dla małych częstotliwości oraz częstotliwość graniczną, określoną pojemnością wejściową pierwszego stopnia. Zakładając, że transformatory są identyczne, można zależność (9) dla małych częstotliwości zapisać:

$$k\beta = -\frac{R_{kol}}{r_{e1}} \cdot \frac{\alpha p_{23}}{k_{max}+1+\frac{R_a}{2R_r^2}[R_a p_{21}^2-(R_c+2R_r)p_{31}^2]} \cdot \frac{2}{1+\frac{R_{zst}+r_{b1}}{r_{e1}\cdot\beta_{01}}} \tag{12}$$

i stąd, pomijając w mianowniku składnik

$$\frac{R_a}{2R_r^2}[R_a p_{21}^2-(R_c+2R_r)p_{31}^2]$$

oraz przyjmując założenie, że $r_{e1}\beta_{01} \approx R_{zst}+r_{b1}$, otrzymuje się zależność orientacyjną:

$$k\beta \approx -\frac{R_{kol}}{r_{e1}} \cdot \frac{\alpha p_{23}}{k_{max}+1}. \tag{13}$$

Wartość częstotliwości granicznej, a więc i maksymalną oporność obciążenia pierwszego stopnia można uzyskać z zależności (9) jako:

$$\frac{1}{r_{e1}\beta_{01}}+\frac{1}{R_{zst}+r_{b1}} = \omega_{gr} C_{we1}$$

co daje:

$$R_{kol} = \frac{\frac{1}{\frac{R_{zst}}{r_{e1}}+\frac{r_{b1}}{r_{e1}}}+\frac{1}{\beta_{01}}}{\omega_{gr} C_{kb1}}. \tag{14}$$

W wyrażeniu (14) użyto uproszczonej zależności na pojemność wejściową tranzystora $C_{we1} \approx C_{kb1}R_{kol}/r_{e1}$, co jest dopuszczalne ze względu na duże wartości oporności obciążenia pierwszego stopnia, wynikające z konieczności uzyskania dużego wzmocnienia. Dokładniej zależność na pojemność wejściową można określić jako:

$$C_{we1} = C_{eb1}+C_{kb1}\left(\frac{R_{kol}}{r_{e1}}+1\right),$$

gdzie przez C_{eb1}, C_{kb1} oznaczono odpowiednio pojemności baza-emiter i baza-kolektor tranzystora pierwszego stopnia.

4. IMPEDANCJA WEJŚCIOWA DRUGIEGO STOPNIA

W omawianym układzie istotną rolę odgrywa impedancja wejściowa drugiego stopnia. Jej wielkość (obok pojemności wejściowej pierwszego stopnia) ogranicza dopuszczalną impedancję obciążenia, a więc i wielkość transmitancji głównej pętli sprzężenia zwrotnego w pasmie użytecznym, jak również impedancję wyjściową sieci korekcyjnej poza pasmem użytecznym. Ogólnie można ją zapisać następująco:

$$Z_{we2} = r_{b2} + \frac{1}{\frac{1}{R_{we2}} + j\omega C_{we2}} \left(1 + \frac{R_{rwn}}{r_{e2}}\right), \tag{15}$$

gdzie przez $\frac{1}{R_{we2}} + j\omega C_{we2}$ oznaczono admitancję wejściową tranzystora drugiego stopnia, bez oporności bazy r_{b2}, z aktualnym obciążeniem Z_{obc} [zależność (4)], oraz przez R_{rwn} równoważną oporność w emiterze drugiego stopnia:

$$Z_{rwn} = \frac{Z_m[\bar{R}_r + \bar{R}_a \bar{p}_{31}(\bar{p}_{21} + \bar{p}_{31})]}{Z_m + \bar{R}_r + \bar{R}_a \bar{p}_{31}^2}. \tag{16}$$

Stąd, pomijając r_{b2}, oporność i pojemność wejściową drugiego stopnia można zapisać:

$$R_{we2} = (r_{e2} + Re\, Z_{rwn})\beta_{02} \tag{17}$$

oraz:

$$C_{we2} = \frac{C_{eb2} + C_{kb2}\left(1 + \frac{Re\, Z_{obc}}{r_{e2}}\right)}{1 + \frac{Re\, Z_{rwn}}{r_{e2}}}. \tag{18}$$

Przy dużych wartościach $Re\, Z_{obc}$ i $Re\, Z_{rwn}$ można tę pojemność ująć zależnością uproszczoną:

$$C_{we2} \approx C_{kb2} \cdot \frac{Re\, Z_{obc}}{Re\, Z_{rwn}}. \tag{19}$$

Powyższe zależności ze względu na założenie idealności transformatorów są słuszne jedynie w pasmie użytecznym wzmacniacza, a ściślej biorąc w pasmie przepustowym filtrów, do których można sprowadzić układy zastępcze transformatorów wprowadzając dodatkowe elementy. Poza tym pasmem impedancja wejściowa filtru powinna maleć z szybkością określoną przez stopień filtru, z tym, że należy się liczyć z pasożytniczym rezonansem pojemności separującej C_s z indukcyjnością rozproszenia uzwojenia drugiego. W powyższych zależnościach należałoby podstawić zamiast $\bar{R}_a$ odpowiednią wielkość zespoloną, dążącą ze wzrostem częstotliwości do reaktancji pojemności separującej $\omega \bar{C}_s p_{21}^2$.

Dokładne określenie wielkości impedancji wejściowej drugiego stopnia w tym zakresie jest trudne ze względu na skomplikowaną postać układu zastępczego i praktycznie nieopłacalne, szczególnie jeżeli weźmie się pod uwagę, że schemat zastępczy transformatora dla dostatecznie dużych częstotliwości przestaje być słusznym. Zwykle wystarcza orientacyjne określenie tej wielkości. I tak, ponieważ poza pasmem użytecznym impedancja wejściowa pierwszego stopnia jest bliska wartości oporności bazy r_{b1} i jest zwykle porówny-

walna z wielkością R_r, to z zależności (5) widać, że impedancja Z_m nie zmienia się w sposób istotny i dąży do wartości $R_c+R_r r_{b1}/(R_r+r_{b1})$ przyjmując powyżej pasma użytecznego wartości prawie rzeczywiste. Drugi składnik licznika zależności (16), $\bar{R}_a\bar{p}_{31}(\bar{p}_{21}+\bar{p}_{31})$, w pasmie użytecznym równy $\bar{R}_r$ szybko maleje i wartość impedancji Z_{rwn} zmniejsza się w przybliżeniu do połowy, to jest do $Z_m R_r/(Z_m+R_r)$.

Oczywiście należy uwzględnić, że obciążenie tranzystora drugiego stopnia nie jest czysto rzeczywiste, w związku z czym dochodzi istotny składnik do zależności (17), spowodowany częścią urojoną impedancji obciążenia, co wraz ze zmniejszeniem się wartości Z_{rwn} powoduje stosunkowo szybkie zmniejszanie się wartości R_{we2}. Wartość pojemności C_{we2} może być określona w pasmie użytecznym z zależności (18) lub (19); bezpośrednio poza pasmem obserwuje się jej wzrost spowodowany wzrostem części rzeczywistej impedancji obciążenia na skutek rezonansu pasożytniczego, przy większych częstotliwościach pojemność ta maleje według zależności (18) prawie do wartości C_{bk2}.

Przeprowadzone pomiary wskazują, że wpływ obu wielkości C_{we2} i R_{we2} jest tego samego rzędu i żadnej z tych wielkości względem drugiej nie można pominąć.

5. KOREKCJA TRANSMITANCJI PĘTLI SPRZĘŻENIA ZWROTNEGO POZA PASMEM UŻYTECZNYM

Jak powiedziano wyżej, wielkość transmitancji pętli sprzężenia zwrotnego jest określona przez wzmocnienie tranzystora pierwszego stopnia; można ją ogólnie zapisać jako:

$$k\beta = \frac{i_{we}}{U_B} \cdot \frac{i_{wy}}{i_{we}} \cdot \frac{U_B}{i_{wy}}, \tag{20}$$

gdzie U_B/i_{wy} w przypadku ogólnym jest transmitancją sieci korekcyjnej obciążonej impedancją drugiego stopnia Z_{we2}. Stosunek i_{wy}/i_{we} jest wzmocnieniem prądowym tranzystora i przy założeniu, że moduł impedancji obciążenia jest mały w porównaniu z wielkością reaktancji pojemności C_{bk1}, przy częstotliwościach małych w porównaniu z częstotliwością graniczną tranzystora ($\omega \ll \omega_T$) może być określony:

$$\frac{i_{wy}}{i_{we}} \approx \frac{\dfrac{1}{r_{e1}}}{\dfrac{1}{R_{we1}}+j\omega C_{we1}}, \tag{21}$$

gdzie przy obciążeniu tranzystora szeregowym połączeniem oporności R_d i pojemności C_d:

$$R_{we1} = \frac{1}{\dfrac{1}{r_{e1}}\left(\dfrac{1}{\beta_{01}}+\dfrac{C_{bk1}}{C_d}\right)} \tag{22}$$

oraz

$$C_{we1} = C_{eb1}+C_{kb1}\left(1+\frac{R_d}{r_{e1}}\right). \tag{23}$$

Stosunek i_{we1}/U_B określa wpływ impedancji wejściowej i dla częstotliwości pasma użytecznego może być określony z zależności (10) i (11) jako:

$$\frac{i_{we}}{U_B} = \frac{R_r + R_a p_{31}(p_{21}+p_{31})}{R_r Z_{we1} + R_a(R_r p_{21}^2 + Z_{we1} p_{31}^2) + R_c[Z_{we1} + R_r + R_a(p_{21}+p_{31})^2]} \tag{24}$$

oraz przy minimalnym wzmocnieniu ($R_c = 0$) i przy założeniu $R_r \gg R_a p_{31}^2$ można tę wielkość zapisać w postaci:

$$\frac{i_{we}}{U_B} = \frac{1 + \dfrac{R_a p_{31}(p_{21}+p_{31})}{R_r}}{Z_{we1} + R_a(p_{21}^2 + p_{31}^2)}, \tag{25}$$

gdzie przez Z_{we1} oznaczono impedancję wejściową tranzystora.

Poza pasmem użytecznym (a ściślej poza pasmem przepustowym filtru, do którego można sprowadzić układy zastępcze transformatorów wprowadzając dodatkowe elementy), zależność (25) znacznie się komplikuje. Orientacyjne określenie otrzymanej charakterystyki, złożonej z odcinków łamanej, można uzyskać zakładając, że poza pasmem przepustowym oporność $R_a p_{21}^2$ przechodzi w reaktancję pojemności separującej C_s. Przy tym założeniu zależność (25) poza pasmem przepustowym może być zapisana jako:

$$\frac{i_{we}}{U_B} \approx \frac{1 + \dfrac{p_{32}(1+p_{32})}{j\omega C_s R_r}}{r_{b1} + \dfrac{1+p_{32}^2}{j\omega C_s} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_{we1}} + j\omega C_{we1}}}. \tag{26}$$

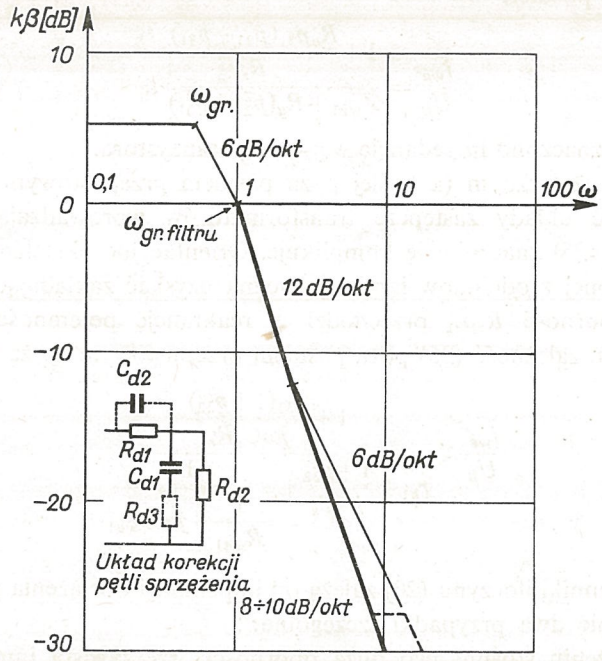
Wszystkie trzy czynniki iloczynu (20) zależą od impedancji obciążenia pierwszego stopnia. Można tu wyróżnić dwa przypadki szczególne:

1. Przy obciążeniu stosunkowo dużą opornością rzeczywistą impedancja wejściowa pierwszego tranzystora jest bliska wartości oporności bazy r_{b1} i mianownik zależności (26) maleje w przybliżeniu od wartości $r_{b1} + R_a(p_{21}^2 + p_{31}^2)$ do wartości r_{b1} z jednostkową szybkością 6 dB/okt. Licznik zależności (26) maleje bezpośrednio poza pasmem przepustowym o 6 dB od wartości $2R_r$ w pasmie przepustowym. Oba te czynniki powodują powstanie typowego schodka na sześciodecybelowej asymptocie wzmocnienia prądowego i_{wy}/i_{we}. Przy małych opornościach obciążenia R_d charakter wykresu poza pasmem przepustowym pozostaje ten sam, ponieważ mianownik zależności (26) skraca się ze wzmocnieniem i_{we}/i_{wy}, co w wyniku daje charakterystykę $k\beta$ płaską, z sześciodecybelowym schodkiem bezpośrednio poza pasmem przepustowym.

2. Przy obciążeniu pojemnościowym oporność wejściowa R_{we1} znacznie maleje przy stosunkowo małej pojemności C_{we1}, w związku z czym mianownik zależności (26) określa w przybliżeniu połączenie szeregowe pojemności C_s z opornością $r_{b1} + R_{we1}$. Ze względu na wzrost wartości oporności długość odcinka wznoszącego się znacznie maleje. Poza tym występują tu dwie stałe czasu związane z drugim i trzecim czynnikiem iloczynu (20). Charakterystyka składa się z wielu krótkich odcinków i wraz ze wzrostem pojemności C_d charakterystyczny kształt schodka zaciera się.

W rozpatrywanym układzie obwód kolektora jest praktycznie jedynym miejscem dla przeprowadzenia korekcji transmitancji pętli sprzężenia zwrotnego. Bezpośrednia korekcja (dwójnikowa) pętli np. pojemnością w kolektorze pierwszego stopnia nie jest korzystna ze względu na otrzymywany kształt charakterystyki — o małym nachyleniu bez-

pośrednio poza pasmem użytecznym, rosnącym przy wyższych częstotliwościach. W związku z tym wydaje się celowe przeprowadzenie korekcji czwórnikowej. Obciążając tranzystor szeregowym połączeniem oporności R_{d1} i pojemności C_{d1} (rys. 4) można uzyskać,



Rys. 4. Skorygowana charakterystyka transmitancji pętli sprzężenia zwrotnego i układ korekcji. Dla układu trójelementowego (R_{d1}, C_{d1}, R_{d2}) linia cienka — przebieg uzyskiwany teoretycznie, linia gruba — przebieg uzyskiwany eksperymentalnie. Linią przerywaną zaznaczono wpływ oporności R_{d3}

kosztem głębokości pętli sprzężenia w pasmie użytecznym, charakterystykę o przebiegu pośrednim wykazującym charakterystyczny schodek poza pasmem użytecznym (ze względu na część opornościową obciążenia) i dodatkowe nachylenie w poziomej jego części (ze względu na fakt, że napięcie sterujące drugi stopień zbierane jest z reaktancyjnej części obciążenia).

Pozostaje tu problem właściwego zestawienia poszczególnych odcinków charakterystyki. Wydaje się celowe:

1. projektowanie transformatora na pasmo równe z pasmem użytecznym wzmacniacza, tak aby impedancja wejściowa filtru, do którego został dopełniony układ zastępczy transformatora, możliwie szybko dążyła do wartości reaktancji skrajnego elementu (pojemności separującej C_s),

2. ustawienie częstotliwości granicznej ω_{gr} [zależność (9)] blisko górnego krańca pasma użytecznego, o ile jest możliwe z innych względów,

3. dobranie oporności R_{d1} i pojemności C_{d1} tak, aby częstotliwości $\frac{1}{C_{d1}R_{d2}}$ i $\frac{1}{C_{d1}R_{d1}}$ wypadały na krańcu odcinka opadającego schodka.

Należy się liczyć z tym, że tak zestawiona charakterystyka praktycznie będzie przebiegać bardziej stromo na skutek czynników dodatkowych nie uwzględnionych w powyższym rozważaniu (zob. rys. 4). Wprowadzenie elementów zaznaczonych linią przerywaną znacznie poprawia charakterystykę fazową. Przy doborze oporności R_{d3} należy brać pod uwagę impedancję wejściową drugiego stopnia.

6. ZAKOŃCZENIE

W niniejszej pracy zakłada się, że konstruktor przystępując do zaprojektowania wzmacniacza należącego do grupy wyżej omawianych dysponuje odpowiednim rozwiązaniem transformatora o określonej maksymalnej przekładni p_{21} z układem korekcyjnym, pozwalającym spełnić warunki na płaskość charakterystyki wzmocnienia i współczynnik niedopasowania, oraz że dodatkowa pojemność separująca C_{sd} stanowi główną część pojemności zewnętrznej układu korekcyjnego (przez C_{sd} rozumie się tu pojemność C_s po odjęciu pojemności własnej transformatora).

Niniejsza praca pozwala określić, czy dany wzmacniacz można zrealizować w podanym układzie i oszacować podstawowe parametry tranzystorów konieczne do realizacji wzmacniacza, a następnie, przy uzyskaniu pozytywnego wyniku, określić pozostałe elementy wzmacniacza.

Przy powyższym założeniu kolejność postępowania może być następująca:

1. Określenie podstawowych elementów układu. Dla obliczeń wstępnych wygodnie jest założyć, że transformatory są identyczne. Z warunku na k_{min} określić przekładnię p_{23}, a z warunku na k_{max} znaleźć maksymalną wartość oporności R_c z zależności:

$$k = \frac{R_r+R_c}{R_r}p_{23}-\frac{R_aR_c}{2R_r^2}(p_{21}^2-p_{31}^2), \tag{27}$$

gdzie przy obliczeniach szacunkowych można pominąć drugi składnik, sprawdzając, jaki błąd się przy tym popełnia. Wielkość R_r jest znana z warunku na dopasowanie.

2. Określenie dopuszczalnych wartości pojemności C_{kb}. Z warunku na minimalną głębokość pętli sprzężenia zwrotnego, przy założonych wstępnie polaryzacjach tranzystorów, określić $C_{kb1\,max}$ (przy założonym napięciu kolektora) z zależności (13) i (14). Można tu korzystać z uproszczonej postaci zależności (11): $R_{zst} \approx 3R_cR_r/(R_c+R_r)+R_ap_{21}^2$. Sprawdzić, czy wielkość impedancji wejściowej drugiego stopnia w pasmie przepustowym jest dostateczna, ewentualnie określić $C_{kb2\,max}$ — zależności (17), (19). Można tu stosować uproszczoną postać zależności (5): $Z_m \approx R_c+R_r$.

3. Określenie wymagań dotyczących drugiego stopnia. Obliczyć obciążenie i sprawność i z tego polaryzację i proste pracy tranzystora drugiego stopnia — zależności (4), (6), uproszczona zależność (5).

O ile posiadane półprzewodniki spełniają powyższe warunki, należy przeliczyć współczynnik szumów oraz optymalną oporność źródła [1]. Sprawdzić położenie prostych pracy na charakterystykach tranzystora wyjściowego. Przeprowadzić ewentualną korekcję przekładni p_{21} i $\bar{p}_{21}$ oraz przeliczyć dokładniej poszczególne elementy wraz z układem korekcji pętli sprzężenia zwrotnego.

LITERATURA CYTOWANA W TEKSCIE

1. J. Brożyna, Współczynnik szumów wzmacniaczy grupowych, Rozprawy Elektrotechn., **14**, 2, 299—309, 1968.

J. BROŻYNA

PROBLEMS RELATED TO SMALL-GAIN CARRIER AMPLIFIERS DESIGNING

Summary

In the transfer and terminal devices of the telephonic carrier systems one meets the characteristic group of amplifiers — with flat frequency-dependence and small gain.

This paper deals with some problems related to designing of the amplifiers in form of hybrid coil feedback pair. Given relations permit to determine quickly whether one can realize an amplifier in the circuit, and estimate basic properties of transistors necessary to realize it.

J. BROŻYNA

LES PROBLÈMES LIÉS AVEC LE PROJET DE L'AMPLIFICATEUR DE GROUPE À AMPLIFICATION PETITE

Résumé

Dans les appareils de transfert ainsi que terminaux des systèmes téléphoniques haute fréquence on rencontre un ensemble caractéristique des amplificaters de groupe à amplification petite et à caractéristique amplification-fréquence plate.

Le but de l'oeuvre présent consiste à effectuer une analyse de quelques problèmes liés avec l'accomplissement d'un projet de l'amplificateur de tel type sous la forme du schéma de deux étages à l'accord actif du coté des bornes l'entrée et de sortie. Les dépendances données permettent de déterminer relativement vite est-ce-que l'amplificateur donné peut être réalisé d'après le schéma ci-dessus ainsi qu'évaluer des caractéristiques principales de transistors nécessaires à réaliser l'amplificateur mentionné.

Е. БРОЖЫНА

ВОПРОСЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ГРУППОВЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ МАЛОГО УСИЛЕНИЯ

Резюме

В промежуточных и оконечных устройствах телефонных уплотненных систем встречается характеристическая группа групповых усилителей малого усиления с плоской амплитудно-частотной характеристикой.

Целью настоящей работы является рассмотрение ряда вопросов, связанных с проектированием усилителей вышеуказанного типа в виде двухкаскадной схемы с активным согласованием со стороны входных и выходных зажимов. Приведенные зависимости позволяют относительно быстро определить можно-ли данный усилитель построить по вышеуказанной схеме и какими должны быть приближенно основные параметры транзисторов для реализации такого усилителя.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 15, 3, ss. 435–465
INSTYTUT TECHNOLOGII ELEKTRONOWEJ PAN, WARSZAWA 1969

Aproksymacja charakterystyki amplitudowej liniowego układu elektrycznego zmodyfikowaną metodą charakterystyk logarytmicznych

JERZY CHIRKOWSKI (WARSZAWA)

Katedra Teletransmisji Przewodowej Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 22.12.1968

W artykule przedstawiono zmodyfikowaną metodę aproksymacji charakterystykami logarytmicznymi, która znacznie upraszcza i skraca uciążliwy proces aproksymacji charakterystyki amplitudowej liniowego układu elektrycznego.

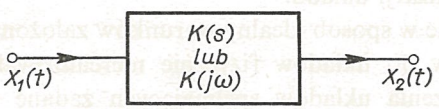
Modyfikacja metody charakterystyk logarytmicznych polega na wprowadzeniu logarytmicznej pulsacji znormalizowanej $\omega_{\gamma i}$ oraz znormalizowanej elementarnej logarytmicznej charakterystyki amplitudowej $L_{\gamma i}(\omega_{\gamma i})$, która została podana w postaci odpowiednio opracowanych tablic. Dzięki tak przeprowadzonej modyfikacji wszystkie skomplikowane i uciążliwe obliczenia matematyczne w procesie aproksymacji zostały zastąpione najprostszymi działaniami arytmetycznymi — dodawaniem i odejmowaniem.

Praktyka w pełni potwierdziła zalety zmodyfikowanej metody aproksymacji. Między innymi okazało się, że czas pracy potrzebny do wykonania aproksymacji charakterystyki amplitudowej metodą zmodyfikowaną (z dostatecznie dużą dokładnością) jest kilkanaście razy krótszy od czasu potrzebnego do wykonania tej aproksymacji w sposób klasyczny.

1. WSTĘP

Własności transmisyjne każdego liniowego układu dynamicznego można scharakteryzować jednoznacznie pewną funkcją, którą nazywamy transmitancją. Rozróżniamy między innymi transmitancję operatorową i widmową.

Transmitancją operatorową układu dynamicznego (np. czwórnika) nazywamy następującą funkcję zmiennej zespolonej s (rys. 1):



Rys. 1. Układ dynamiczny o jednym wejściu i jednym wyjściu

$$K(s) = \frac{\mathscr{L}\{x_2(t)\}}{\mathscr{L}\{x_1(t)\}} = \frac{x_2(s)}{x_1(s)}, \tag{1}$$

gdzie:

$\mathscr{L}$ jest symbolem przekształcenia Laplace'a,

$x_2(t)$ — sygnał wyjściowy układu,

$x_1(t)$ — sygnał wejściowy układu.

Transmitancją widmową układu dynamicznego nazywamy następującą funkcję zmiennej urojonej $j\omega$ (rys. 1):

$$K(j\omega) = \frac{F\{x_2(t)\}}{F\{x_1(t)\}}, \tag{2}$$

gdzie F jest symbolem przekształcenia Fouriera.

Oczywiście słuszna jest następująca zależność:

$$K(j\omega) = \left.\frac{\mathcal{L}\{x_2(t)\}}{\mathcal{L}\{x_1(t)\}}\right|_{s=j\omega}, \tag{3}$$

która określa związek pomiędzy transmitancją operatorową i widmową.

Transmitancję $K(j\omega)$ jako funkcję zespoloną można przedstawić w następującej postaci:

$$K(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \tag{4}$$

lub

$$K(j\omega) = |K(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = |K(j\omega)|[\cos\varphi(\omega) + j\sin\varphi(\omega)], \tag{5}$$

gdzie:

$|K(j\omega)| = K_o(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$ — charakterystyka amplitudowa,

$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$ — charakterystyka fazowa,

$P(\omega) = K_o(\omega)\cos\varphi(\omega)$ — charakterystyka składowej rzeczywistej,

$Q(\omega) = K_o(\omega)\sin\varphi(\omega)$ — charakterystyka składowej urojonej.

Ponieważ sygnały $x_1(t)$ i $x_2(t)$ w przypadku układu elektrycznego oznaczają zwykle prąd lub napięcie, rozróżniamy transmitancję napięciową $K_u(s)$ lub $K_u(j\omega)$, transmitancję prądową $K_i(s)$ lub $K_i(j\omega)$ i transmitancje mieszane: napięciowo-prądową $K_{ui}(s)$ lub $K_{ui}(j\omega)$ i prądowo-napięciową $K_{iu}(s)$ lub $K_{iu}(j\omega)$.

Pod terminem „synteza układu" rozumiemy zazwyczaj postępowanie mające na celu określenie układu spełniającego w sposób optymalny z góry założone wymagania. Wymagania narzucone na układ podlegający syntezie mogą być formułowane w różnorodny sposób, a mianowicie np. za pomocą funkcji podanych w postaci wzoru analitycznego, za pomocą danych liczbowych lub za pomocą wykresów. Synteza układu rozumiana w powyższy sposób obejmuje dwa następujące podstawowe zagadnienia:

a) zagadnienie aproksymacji,

b) zagadnienie realizacji układu.

Ad a). Ponieważ spełnienie w sposób idealny warunków założonych prowadziłoby w większości przypadków do układów fizycznie nierealizowalnych, zachodzi więc konieczność wyznaczenia układów spełniających zadane warunki jedynie w przybliżeniu. Staje się więc rzeczą konieczną przybliżanie funkcji, które chcemy realizować, za pomocą funkcji spełniających warunki fizycznej realizacji. Problemem tym zajmuje się właśnie aproksymacja.

ad b). Realizacja układu polega na wyznaczeniu (w oparciu o uzyskaną w procesie aproksymacji realizowaną fizycznie funkcję) struktury układu oraz wartości jego elementów.

W zagadnieniach syntezy częstotliwościowej czwórników elektrycznych problem aproksymacji sprowadza się zazwyczaj do następujących czterech przypadków [5]:

1) Aproksymacja charakterystyki amplitudowej (tłumieniowej) w skończonym lub nieskończonym przedziale częstotliwości

2) Jednoczesna aproksymacja charakterystyki amplitudowej i fazowej w skończonym przedziale częstotliwości

3) Aproksymacja charakterystyki fazowej w skończonym przedziale częstotliwości

4) Aproksymacja charakterystyki rzeczywistej lub urojonej w skończonym lub nieskończonym przedziale częstotliwości.

Z punktu widzenia praktycznych zastosowań, w wielu zagadnieniach technicznych teletransmisji najważniejszy jest przypadek aproksymacji charakterystyki amplitudowej, który między innymi dotyczy zagadnień projektowania filtrów elektrycznych, korektorów tłumieniowych, torów sztucznych oraz wydłużników torowych.

Przy projektowaniu metodami syntezy korektorów tłumieniowych, torów sztucznych oraz wydłużników torowych szczególnie użyteczna jest aproksymacja metodą charakterystyk logarytmicznych. Wymieniona metoda posiada następujące główne zalety:

1) Jest znacznie prostsza i mniej pracochłonna w porównaniu z innymi metodami aproksymacji.

2) W przypadku aproksymacji charakterystyki o przebiegu monotonicznym (co zwykle w praktyce jest spełnione) uzyskujemy zawsze funkcję realizowaną fizycznie.

3) Metoda charakterystyk logarytmicznych umożliwia wykonanie aproksymacji z dostatecznie dużą dokładnością (nawet poniżej 0,001 N).

Trzeba podkreślić, że zazwyczaj w procesie syntezy liniowych układów elektrycznych najbardziej pracochłonnym i skomplikowanym jest etap aproksymacji. Należy również zaznaczyć, że chociaż metoda aproksymacji charakterystykami logarytmicznymi jest znacznie prostsza i mniej pracochłonna w porównaniu z innymi metodami, to jednak przeliczenia matematyczne stosowane w procesie aproksymacji tą metodą są skomplikowane i bardzo uciążliwe.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie zmodyfikowanej (ulepszonej) metody aproksymacji, która znacznie upraszcza i skraca proces aproksymacji charakterystykami logarytmicznymi. Modyfikacja metody charakterystyk logarytmicznych polega na wprowadzeniu logarytmicznej pulsacji znormalizowanej ω_{γ_i} oraz znormalizowanej elementarnej logarytmicznej charakterystyki amplitudowej $L_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i})$, która została podana w postaci odpowiednio opracowanych tablic.

2. ZMODYFIKOWANA METODA APROKSYMACJI CHARAKTERYSTYKAMI LOGARYTMICZNYMI

2.1. Nachylenie asymptot 6 dB/okt

Przedstawmy transmitancję operatorową aproksymującą w postaci:

$$K(s) = K_o \frac{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)\dots(s+\alpha_i)\dots(s+\alpha_m)}{(s+\beta_1)(s+\beta_2)\dots(s+\beta_i)\dots(s+\beta_n)}, \tag{6}$$

gdzie: $-\alpha_i$ — zera transmitancji,

$-\beta_i$ — bieguny transmitancji,

$\pm K_o$ — statyczny współczynnik transmitancji,

β_i, K_o — liczby rzeczywiste dodatnie,

α_i — liczby rzeczywiste,

$m \leqslant n+1$ — w przypadku transmitancji mieszanej (napięciowo-prądowej lub prądowo-napięciowej),

$m \leqslant n$ — w przypadku transmitancji jednorodnej (napięciowej lub prądowej).

Podstawiając we wzorze (6) $s = j\omega$ oraz logarytmując funkcję $|K(j\omega)|$ otrzymamy

$$L(\omega) = \ln|K(j\omega)| = \ln K_o + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \ln(\alpha_i^2+\omega^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \ln(\beta_i^2+\omega^2), \tag{7}$$

gdzie $L(\omega)$ — logarytmiczna charakterystyka amplitudowa układu.

Powyższa postać logarytmicznej charakterystyki amplitudowej obowiązuje w przypadku liniowych układów biernych (zbudowanych ze skończonej liczby elementów skupionych), których transmitancje posiadają zera i bieguny rzeczywiste.

Funkcję (7) można przedstawić w następującej postaci:

$$L(\omega) = \ln K_o' + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \ln\left[1+\left(\frac{\omega}{\alpha_i}\right)^2\right] - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \ln\left[1+\left(\frac{\omega}{\beta_i}\right)^2\right], \tag{8}$$

przy czym:

$$\ln K_o' = \ln K_o + \sum_{i=1}^{m} \ln|\alpha_i| - \sum_{i=1}^{n} \ln\beta_i. \tag{9}$$

Wprowadzając logarytmiczną pulsację znormalizowaną określoną wzorem:

$$\omega_{\gamma_i} = \ln\frac{\omega}{\gamma_i} = \ln\omega - \ln\gamma_i, \tag{10}$$

gdzie γ_i — pulsacja normalizująca, która przybiera kolejno wartości $|\alpha_i|$, gdzie $i = 1, 2, \ldots, m$, oraz β_i, gdzie $i = 1, 2, \ldots, n$, równanie (8) przyjmie postać

$$L(\omega) = \ln K_o' + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \ln[1+e^{2\omega_{\gamma_i}}]|_{\gamma_i=|\alpha_i|} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \ln[1+e^{2\omega_{\gamma_i}}]|_{\gamma_i=\beta_i}. \tag{11}$$

Wprowadzając oznaczenie

$$L_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i}) = \frac{1}{2}\ln[1+e^{2\omega_{\gamma_i}}], \tag{12}$$

gdzie $L_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i})$ — znormalizowana elementarna logarytmiczna charakterystyka amplitudowa,

równanie (11) przyjmie postać

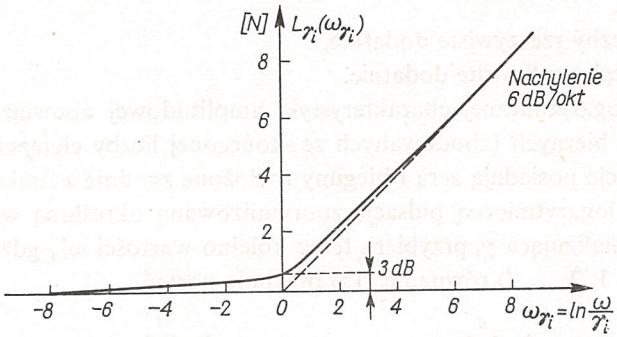
$$L(\omega) = \ln K_o' + \sum_{i=1}^{m} L_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i})|_{\gamma_i=|\alpha_i|} - \sum_{i=1}^{n} L_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i})|_{\gamma_i=\beta_i}. \tag{13}$$

Dla składnika przedstawionego wzorem (12) zachodzą następujące przybliżenia:

$$L_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i}) = \begin{cases} 0 \text{ dla } \omega_{\gamma_i} \ll 0 \text{ (asymptota pozioma)} \\ \omega_{\gamma_i} \text{ dla } \omega_{\gamma_i} \gg 0 \text{ (asymptota o nachyleniu 6 dB/okt).} \end{cases} \tag{14}$$

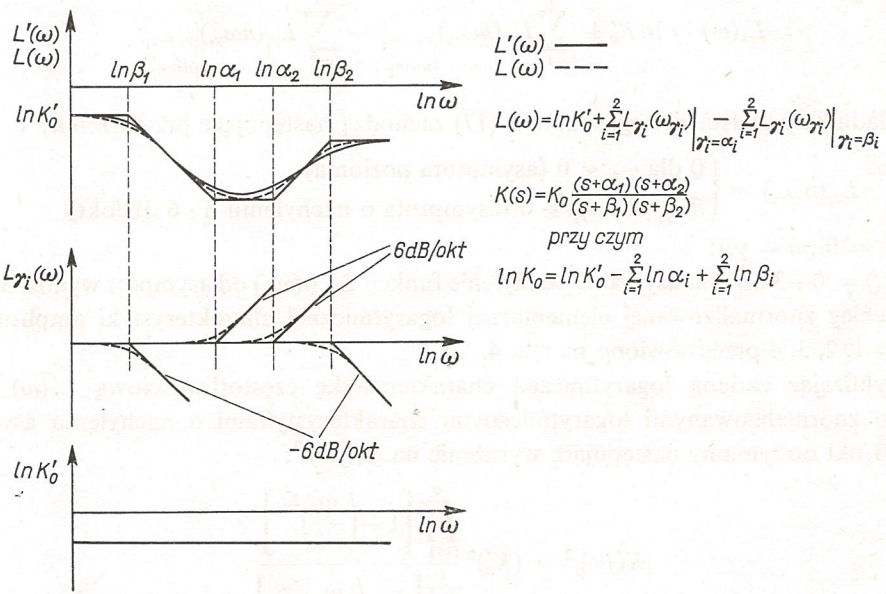
Dla $\omega_{\gamma_i} = 0$ $(\omega = \gamma_i)$:
$L_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i}) = 0+3$ dB (maksymalne odchylenie funkcji $L_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i})$ od asymptot wynosi 3 dB).

Przebieg znormalizowanej elementarnej logarytmicznej charakterystyki amplitudowej przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Przebieg znormalizowanej elementarnej logarytmicznej charakterystyki amplitudowej

Zadaną logarytmiczną charakterystykę częstotliwościową $L'(\omega)$ można więc aproksymować przez dodawanie i odejmowanie odpowiednio znormalizowanych elementarnych logarytmicznych charakterystyk o postaci (12). Taką charakterystykę aproksymowaną oraz sposób aproksymacji pokazano na rys. 3.



Rys. 3. Przykład aproksymacji charakterystykami logarytmicznymi o nachyleniu asymptot 6 dB/okt

2.2. Nachylenie asymptot n · 6 dB/okt

Przedstawmy logarytmiczną charakterystykę amplitudową układu w postaci:

$$L_n(\omega) = \ln K_o' + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q} \ln\left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_i'}\right)^{2n_i'}\right] - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}\left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_i''}\right)^{2n_i''}\right], \tag{15}$$

gdzie:

ω_i', ω_i'' — liczby rzeczywiste dodatnie,

n_i', n_i'' — liczby całkowite dodatnie.

Powyższa postać logarytmicznej charakterystyki amplitudowej obowiązuje w przypadku liniowych układów biernych (zbudowanych ze skończonej liczby elementów skupionych), których transmitancje posiadają zera i bieguny rozłożone zgodnie z funkcją Butterwortha.

Wprowadzając logarytmiczną pulsację znormalizowaną określoną wzorem (10) (przy czym pulsacja normalizująca γ_i przybiera teraz kolejno wartości ω_i', gdzie $i = 1, 2, \ldots, q$, oraz ω_i'', gdzie $i = 1, 2, \ldots, l$) równanie (15) przyjmie postać

$$L_n(\omega) = \ln K_o' + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q} \ln[1+e^{2n_i'\omega_{\gamma i}}]|_{\gamma_i=\omega_i'} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l} \ln[1+e^{2n_i''\omega_{\gamma i}}]|_{\gamma_i=\omega_i''}. \tag{16}$$

Wprowadzając oznaczenie

$$L_{\gamma_i}(n\omega_{\gamma_i}) = \frac{1}{2}\ln[1+e^{2n\omega_{\gamma i}}], \tag{17}$$

gdzie $L_{\gamma_i}(n\omega_{\gamma_i})$ — znormalizowana elementarna logarytmiczna charakterystyka amplitudowa,

równanie (16) przyjmie postać:

$$L_n(\omega) = \ln K_o' + \sum_{i=1}^{q} L_{\gamma_i}(n\omega_{\gamma_i})\Big|_{\substack{\gamma_i=\omega_i' \\ n=n_i'}} - \sum_{i=1}^{l} L_{\gamma_i}(n\omega_{\gamma_i})\Big|_{\substack{\gamma_i=\omega_i'' \\ n=n_i''}}. \tag{18}$$

Dla składnika przedstawionego wzorem (17) zachodzą następujące przybliżenia:

$$L_{\gamma_i}(n\omega_{\gamma_i}) = \begin{cases} 0 \text{ dla } \omega_{\gamma_i} \ll 0 \text{ (asymptota pozioma)} \\ n\omega_{\gamma_i} \text{ dla } \omega_{\gamma_i} \gg 0 \text{ (asymptota o nachyleniu n · 6 dB/okt)} \end{cases}$$

Dla $\omega_{\gamma_i} = 0$ $(\omega = \gamma_i)$:

$L_{\gamma_i}(n\omega_{\gamma_i}) = 0+3$ dB (maksymalne odchylenie funkcji $L_{\gamma_i}(n\omega_{\gamma_i})$ od asymptot wynosi 3 dB).

Przebieg znormalizowanej elementarnej logarytmicznej charakterystyki amplitudowej dla $n = 1, 2, 3, 4$ przedstawiono na rys. 4.

Przybliżając zadaną logarytmiczną charakterystykę częstotliwościową $L_n'(\omega)$ odpowiednio znormalizowanymi logarytmicznymi charakterystykami o nachyleniu asymptot n · 6 dB/okt otrzymamy następujące wyrażenie na $|K(j\omega)|^2$:

$$|K(j\omega)|^2 = (K_o')^2 \frac{\prod_{i=1}^{q}\left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_i'}\right)^{2n_i'}\right]}{\prod_{i=1}^{l}\left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_i''}\right)^{2n_i''}\right]}. \tag{20}$$

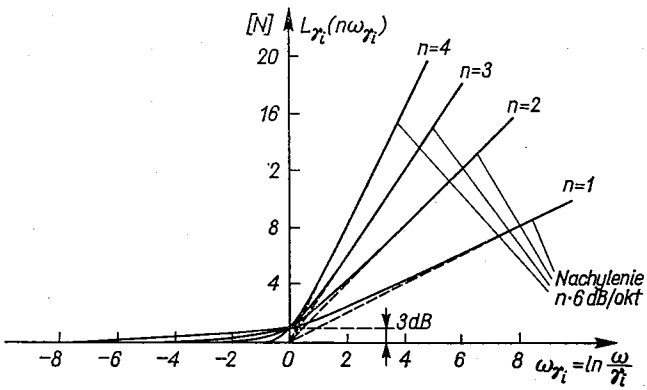
Transmitancję operatorową $K(s)$ wyznaczamy na podstawie następujących zależności:

$$K(s) \cdot K(-s) = K_o^2(js), \tag{21}$$

gdzie: $K_o(\omega) = |K(j\omega)|$.

Zatem:

$$K_o^2(js) = (K_o')^2 \frac{\prod_{i=1}^{q} \left[1+(-1)^{n_i'}\left(\frac{s}{\omega_i'}\right)^{2n_i'}\right]}{\prod_{i=1}^{l} \left[1+(-1)^{n_i''}\left(\frac{s}{\omega_i''}\right)^{2n_i''}\right]}. \tag{22}$$

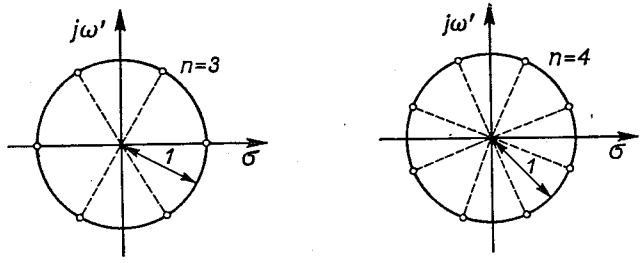


Rys. 4. Przebieg znormalizowanej elementarnej logarytmicznej charakterystyki amplitudowej dla $n = 1, 2, 3, 4$

Konieczność rozłożenia funkcji (22) na proste mnożniki prowadzi do wyznaczenia pierwiastków następującego równania:

$$1+(-1)^n p^{2n} = 0, \tag{23}$$

gdzie $p = \frac{s}{\omega_i}$.



Rys. 5. Rozłożenie pierwiastków równania (23) dla $n = 3$ i $n = 4$

Pierwiastki te są określone wzorem

$$p_\nu = \exp\left[j\pi\frac{2\nu+n-1}{2n}\right] = \sigma+j\omega' = \cos\left[\pi\frac{2\nu+n-1}{2n}\right]+j\sin\left[\pi\frac{2\nu+n-1}{2n}\right], \tag{24}$$

$$\nu = 1, 2, 3, \ldots, 2n.$$

Są one zatem rozłożone symetrycznie na okręgu koła o promieniu 1. Na rys. 5 pokazano rozłożenie pierwiastków równania (23) dla $n = 3$ i $n = 4$.

Lewą stronę równania (23) można więc przedstawić w następującej postaci:

$$1+(-1)^n p^{2n} = W_n(p)W_n(-p), \tag{25}$$

przy czym funkcja $W_n(p)$ (zwana wielomianem Butterwortha n-tego stopnia) posiada tylko zera znajdujące się w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej p, natomiast funkcja $W_n(-p)$ posiada zera znajdujące się wyłącznie w prawej półpłaszczyźnie zmiennej p. Dla ułatwienia obliczeń w tablicy 1 przedstawiono funkcję $W_n(p)$ rozłożoną na mnożniki dla $n = 1, 2, \ldots, 8$.

Tablica 1

Rozłożony na mnożniki wielomian Butterwortha n-tego stopnia dla $n = 1, 2, \ldots, 8$

n	$W_n(p)$
1	$(1+p)$
2	$(1+1{,}4142p+p^2)$
3	$(1+p)(1+p+p^2)$
4	$(1+0{,}7653p+p^2)(1+1{,}8477p+p^2)$
5	$(1+p)(1+0{,}6180p+p^2)(1+1{,}6180p+p^2)$
6	$(1+0{,}5176p+p^2)(1+1{,}4142p+p^2)(1+1{,}9318p+p^2)$
7	$(1+p)(1+0{,}4449p+p^2)(1+1{,}2465p+p^2)(1+1{,}8022p+p^2)$
8	$(1+0{,}3896p+p^2)(1+1{,}1110p+p^2)(1+1{,}6630p+p^2)(1+1{,}9622p+p^2)$

Łatwo zauważyć, że pierwiastki p_v wyznaczone z równania (23) są zerami względnie biegunami funkcji $K_o^2(js)$. Oczywiście transmitancja operatorowa $K(s)$ zawiera bieguny leżące wyłącznie w lewej półpłaszczyźnie zmiennej s, gdyż musi reprezentować układ stabilny.

Przykład. Załóżmy, że zadana logarytmiczna charakterystyka częstotliwościowa $L_n'(\omega)$ ma kształt jak na rys. 6. Charakterystykę tę można aproksymować przy pomocy pięciu znormalizowanych elementarnych charakterystyk logarytmicznych o następujących pulsacjach normalizujących γ_i i nachyleniach n:

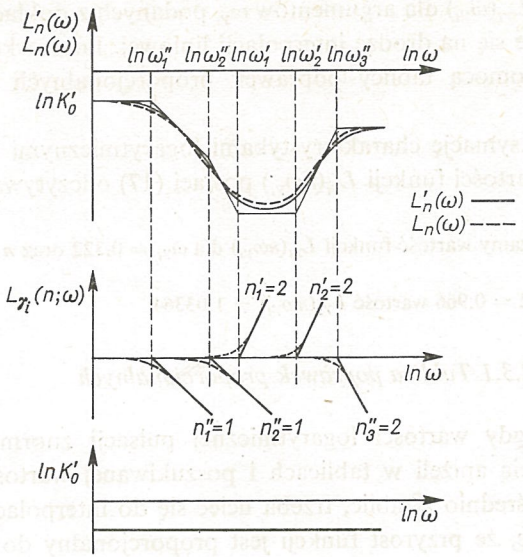
$\gamma_i =$	ω_1';	ω_2';	ω_1'';	ω_2'';	ω_3'';
$n =$	2;	2;	1;	1;	2.

Wówczas:

$$L_n(\omega) = \ln K_o' + L_{\gamma_i}(n\omega_{\gamma_i})\Big|_{\substack{\gamma_i=\omega_1'\\ n=2}} + L_{\gamma_i}(n\omega_{\gamma_i})\Big|_{\substack{\gamma_i=\omega_2'\\ n=2}} - L_{\gamma_i}(n\omega_{\gamma_i})\Big|_{\substack{\gamma_i=\omega_1''\\ n=1}} + \\ - L_{\gamma_i}(n\omega_{\gamma_i})\Big|_{\substack{\gamma_i=\omega_2''\\ n=1}} - L_{\gamma_i}(n\omega_{\gamma_i})\Big|_{\substack{\gamma_i=\omega_3''\\ n=2}}, \tag{26}$$

a stąd

$$|K(j\omega)|^2 = (K_o')^2 \frac{\left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_1'}\right)^4\right]\left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_2'}\right)^4\right]}{\left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_1'}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_2''}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_3''}\right)^4\right]}. \tag{27}$$



Rys. 6. Przykład aproksymacji charakterystykami logarytmicznymi o nachyleniu asymptot $n \cdot 6$ dB/ok

Posługując się tablicą 1 otrzymamy (w wyniku procesu aproksymacji) transmitancję operatorową $K(s)$ o następującej postaci:

$$K(s) = K_0' \frac{\left[1+1{,}4142\frac{s}{\omega_1'}+\left(\frac{s}{\omega_1'}\right)^2\right]\left[1+1{,}4142\frac{s}{\omega_2'}+\left(\frac{s}{\omega_2'}\right)^2\right]}{\left[1+\frac{s}{\omega_1''}\right]\left[1+\frac{s}{\omega_2''}\right]\left[1+1{,}4142\frac{s}{\omega_3''}+\left(\frac{s}{\omega_3''}\right)^2\right]}. \tag{28}$$

2.3. Tablice znormalizowanej elementarnej logarytmiczne charakterystyki amplitudowej

Tablice znormalizowanej elementarnej logarytmicznej charakterystyki amplitudowej zostały obliczone na maszynie matematycznej „Odra 1003". Podane są w nich wartości funkcji $L_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i})$ postaci (12) o pięciu cyfrach po przecinku.

Tablica I podana w załączniku zawiera wartości funkcji $L_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i})$ dla logarytmicznej pulsacji znormalizowanej $\omega_{\gamma_i} = -5.9(0.1)-3$[1]; $\omega_{\gamma_i} = -3(0.01)-1.1$; $\omega_{\gamma_i} = -1.1(0.001)3.5$.

Tablica II w załączniku zawiera wartości funkcji $L_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i})$ dla $\omega_{\gamma_i} = 3.5(0.01)5$; $\omega_{\gamma_i} = 5(0.1)5.9$.

Dla logarytmicznej pulsacji znormalizowanej $\omega_{\gamma_i} \leqslant -5.9$ funkcja $L_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i}) = 0$ z dokładnością do pięciu cyfr po przecinku. Dla $\omega_{\gamma_i} \geqslant 5.9$ funkcja $L_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i}) = \omega_{\gamma_i}$ również z dokładnością pięciu cyfr po przecinku.

Należy zwrócić uwagę, że wartości funkcji $L_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i})$ dla $\omega_{\gamma_i} < 0$ są równe wartościom funkcji $L_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i})-\omega_{\gamma_i}$ dla $\omega_{\gamma_i} > 0$ dla tych samych wartości $|\omega_{\gamma_i}|$.

[1]) Skrócony zapis $\omega_{\gamma_i} = -5.9\ (0.1)-3$ oznacza, że argument ω_{γ_i} zmienia się od wartości -5.9 do wartości -3 skokiem co 0.1.

Wartości funkcji $L_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i})$ dla argumentów ω_{γ_i} podanych z dokładnością większą aniżeli w tablicach otrzymuje się na drodze interpolacji liniowej. Poprawkę interpolacyjną można łatwo obliczyć za pomocą tablicy poprawek proporcjonalnych podanej w załączniku do niniejszej pracy.

Wykonując aproksymację charakterystykami logarytmicznymi o nachyleniu asymptot n.6 dB/okt, należy wartości funkcji $L_{\gamma_i}(n\omega_{\gamma_i})$ postaci (17) odczytywać z tablic dla wartości argumentu $n \cdot \omega_{\gamma_i}$.

Przykład. Obliczamy wartość funkcji $L_{\gamma_i}(n\omega_{\gamma_i})$ dla $\omega_{\gamma_i} = 0.322$ oraz $n = 3$. W tablicy I w załączniku znajdujemy:

dla $n \cdot \omega_{\gamma_i} = 3 \cdot 0.322 = 0.966$ wartość $L_{\gamma_i}(n\omega_{\gamma_i}) = 1.03364$.

2.3.1 Tablica poprawek proporcjonalnych

W przypadkach gdy wartości logarytmicznej pulsacji znormalizowanej podane są z większą dokładnością aniżeli w tablicach i poszukiwanej wartości funkcji $L_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i})$ nie można znaleźć bezpośrednio z tablic, trzeba uciec się do interpolacji liniowej. Przy interpolacji tej zakłada się, że przyrost funkcji jest proporcjonalny do przyrostu argumentu. Jeżeli podana wartość argumentu ω_{γ_i} leży pomiędzy znajdującymi się w tablicy wartościami ωo_{γ_i} i $\omega 1_{\gamma_i} = \omega o_{\gamma_i} + h$ i wartościom tym odpowiadają wartości funkcji $L_{\gamma_i}(\omega o_{\gamma_i})$ i $L_{\gamma_i}(\omega 1_{\gamma_i}) = L_{\gamma_i}(\omega o_{\gamma_i}) + \Delta$, to przyjmuje się, że:

$$L_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i}) = L_{\gamma_i}(\omega o_{\gamma_i}) + \frac{\omega_{\gamma_i} - \omega o_{\gamma_i}}{h} \Delta. \tag{29}$$

Poprawkę interpolacyjną $\frac{\omega_{\gamma_i} - \omega o_{\gamma_i}}{h} \Delta$ łatwo oblicza się za pomocą tablicy poprawek proporcjonalnych. Podaje ona iloczyny wartości różnicy Δ (od 1 do 100) przez 0.1, 0.2, ..., 0.9.

Przykład. Obliczamy wartość funkcji $L_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i})$ dla $\omega_{\gamma_i} = 0.86467$. W tablicy I w załączniku znajdujemy:

$$\text{dla } \omega o_{\gamma_i} = 0.864 \quad \text{wartość } L_{\gamma_i}(\omega o_{\gamma_i}) = 0.94576,$$

$$\text{dla } \omega 1_{\gamma_i} = 0.865 \quad \text{wartość } L_{\gamma_i}(\omega 1_{\gamma_i}) = 0.94660.$$

$$\Delta = 84^{1}).$$

Z tablicy poprawek proporcjonalnych (tablica III w załączniku) mamy:

$$0{,}6 \cdot 84 = 50{,}4; \quad 0{,}07 \cdot 84 = 5{,}88;$$

$$\frac{\omega_{\gamma_i} - \omega o_{\gamma_i}}{h} \Delta = 50{,}4 + 5{,}88 \approx 56,$$

a więc uwzględniając (29)

$$\begin{array}{rr} & 0{,}94576 \\ + & \quad 56 \\ \hline L_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i}) = & 0{,}94632. \end{array}$$

Błąd w interpolacji liniowej nie przewyższa jednostki ostatniej cyfry wartościowej, jeżeli dwie kolejne różnice Δ różnią się nie więcej niż o 4 jednostki ostatniego rzędu [2].

[1]) Wartości Δ, Δ', A_0, A_1 oraz poprawkę interpolacyjną wyrażamy w jednostkach ostatniego rzędu wartości funkcji $L_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i})$, bez wypisywania początkowych zer oraz przecinka dziesiętnego.

Tablice znormalizowanej elementarnej logarytmicznej charakterystyki amplitudowej obliczono tak, aby wymieniony warunek został spełniony i można było z wystarczającą dokładnością stosować interpolację liniową.

Przy wyznaczaniu poprawek interpolacyjnych w tablicy II wygodnie jest skorzystać z istniejących następujących zależności:

$$\begin{aligned} L_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i}) &= \omega_{\gamma_i}+A, \\ L_{\gamma_i}(\omega o_{\gamma_i}) &= \omega o_{\gamma_i}+A_o, \\ L_{\gamma_i}(\omega 1_{\gamma_i}) &= \omega 1_{\gamma_i}+A_1, \end{aligned} \tag{30}$$

przy czym stałe A, A_o, A_1 można łatwo wyznaczyć z tablicy II. Uwzględniając w równaniu (29) wzory (30) otrzymamy:

$$\omega_{\gamma_i}+A = \omega o_{\gamma_i}+A_o+\frac{\omega_{\gamma_i}-\omega o_{\gamma_i}}{h}\Delta. \tag{31}$$

Ponieważ

$$\Delta = L_{\gamma_i}(\omega 1_{\gamma_i})-L_{\gamma_i}(\omega o_{\gamma_i}) = (\omega 1_{\gamma_i}-\omega o_{\gamma_i})-(A_o-A_1), \tag{32}$$

więc

$$A = A_o-\frac{\omega_{\gamma_i}-\omega o_{\gamma_i}}{h}(A_o-A_1) = A_o-\frac{\omega_{\gamma_i}-\omega o_{\gamma_i}}{h}\Delta', \tag{33}$$

gdzie $\Delta' = A_o-A_1$.

Ostatecznie mamy:

$$L_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i}) = \omega_{\gamma_i}+A_o-\frac{\omega_{\gamma_i}-\omega o_{\gamma_i}}{h}\Delta'. \tag{34}$$

Przykład. Obliczamy wartość funkcji $L_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i})$ dla $\omega_{\gamma_i} = 3.63842$. W tablicy II w załączniku znajdujemy:

dla $\omega o_{\gamma_i} = 3.63$ wartość A_o [1] $= 35$,

dla $\omega 1_{\gamma_i} = 3.64$ wartość $A_1 = 34$,

$$\Delta' = 1$$

Poprawka interpolacyjna wynosi:

$$\frac{\omega_{\gamma_i}-\omega o_{\gamma_i}}{h}\Delta' = 0{,}842 \approx 1,$$

a więc uwzględniając (34)

$$\begin{array}{rr} & 3{,}63842 \\ + & 34 \\ \hline L_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i}) = & 3{,}63876. \end{array}$$

[1] Wyjaśnienie znajduje się na stronie 444.

2.4. Przykład zastosowania zmodyfikowanej metody charakterystyk logarytmicznych do aproksymacji charakterystyki tłumieniowej odcinka małowymiarowego toru współosiowego o długości $l = 1{,}73$ km w procesie syntezy wydłużnika torowego do urządzeń traktu liniowego systemu teletransmisyjnego (TNW-300)

Wydłużniki torowe są układami symulującymi charakterystyki tłumieniowe odcinków toru kablowego. Układy tego rodzaju są stosowane w systemach nośnych dużej krotności, między innymi w polskim systemie 300-krotnym TNW-300 [3].

Charakterystyka tłumieniowa wydłużnika torowego związana jest z logarytmiczną charakterystyką amplitudową następującą zależnością:

$$A(\omega) = -L(\omega), \tag{35}$$

gdzie:

$A(\omega)$ — charakterystyka tłumieniowa wydłużnika torowego,

$L(\omega)$ — logarytmiczna charakterystyka amplitudowa wydłużnika torowego.

Aproksymowana charakterystyka tłumieniowa odcinka małowymiarowego toru współosiowego o długości $l = 1{,}73$ km podana jest w tablicy 2.

Tablica 2

Aproksymowana charakterystyka tłumieniowa odcinka małowymiarowego toru współosiowego o długości $l = 1{,}73$ km

f	[MHz]	0,06	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,3
$A_w(f)$	[N]	0,307	0,372	0,492	0,672	0,816	0,936	1,044	1,200

Wprowadzając następujące oznaczenie:

$$A_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i}) = L_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i}), \tag{36}$$

gdzie $A_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i})$ — znormalizowana elementarna charakterystyka tłumieniowa, otrzymamy w oparciu o wzory (13) oraz (36):

$$A(\omega) = -L(\omega) = -\ln K_o' + \sum_{i=1}^{n} A_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i})|_{\gamma_i=\beta_i} - \sum_{i=1}^{m} A_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i})|_{\gamma_i=|\alpha_i|}, \tag{37}$$

przy czym:

$-\alpha_i$ — zera transmitancji wydłużnika torowego,

$-\beta_i$ — bieguny transmitancji wydłużnika torowego.

Sposób postępowania przy aproksymacji zadanej charakterystyki tłumieniowej odcinka toru współosiowego można streścić następująco:

a) rysujemy na papierze milimetrowym charakterystykę aproksymowaną w logarytmicznej skali pulsacji (częstotliwości),

b) przybliżamy zadaną funkcję asymptotami w postaci krzywej schodkowej o nachyleniu asymptot $6 \cdot$ dB/okt, punkty załamania asymptot przyjmujemy uwzględniając najlepszą dokładność aproksymacji,

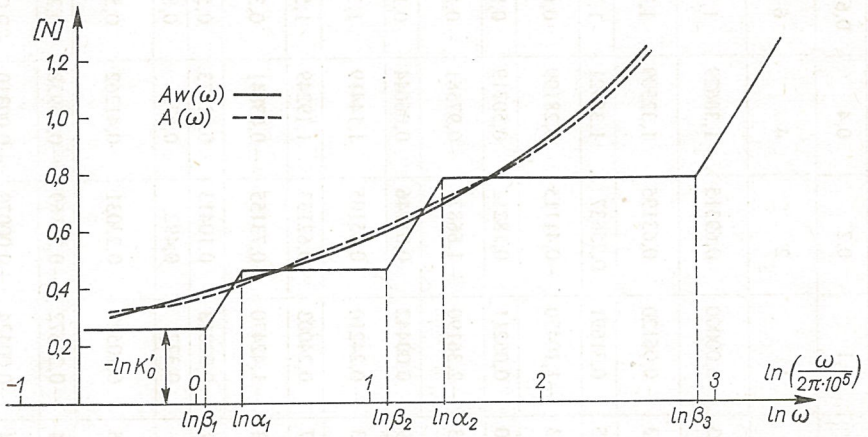
c) wyznaczamy na osi $\ln \omega$ wartości $\ln|\alpha_i|$ oraz $\ln\beta_i$,

d) dokonujemy właściwych normalizacji pulsacji, przy czym pulsacjami normalizującymi są $\gamma_i = |\alpha_i|$ oraz $\gamma_i = \beta_i$,

e) korzystając z tablic w załączniku oraz uwzględniając wzór (36) wyznaczamy odpowiednio znormalizowane elementarne charakterystyki tłumieniowe $A_{\gamma_i}(\omega_{\gamma_i})$, gdzie $\gamma_i = |\alpha_i|$ oraz $\gamma_i = \beta_i$,

f) w oparciu o wzór (37) sprawdzamy uzyskaną dokładność aproksymacji,

g) przez dobór wartości $\ln K_o'$ możemy przesuwać charakterystykę aproksymującą równolegle do góry i do dołu, wybieramy wartość $\ln K_o'$, która zapewnia najlepszą dokładność aproksymacji.



Rys. 7. Aproksymacja charakterystyki tłumieniowej odcinka małowymiarowego toru współosiowego o długości $l = 1{,}73$ km

Jeżeli dokładność jest wystarczająca, uważamy aproksymację za skończoną i wyznaczamy zera — α_i; bieguny — β_i oraz współczynnik K_o transmitancji. O ile w otoczeniu jakiegoś punktu dokładność aproksymacji odbiega od wymaganej, zmieniamy odpowiednio (posługując się tablicami) położenie asymptot schodkowych, aż do momentu uzyskania wystarczającej dokładności aproksymacji. Sposób postępowania przy aproksymacji ilustruje rys. 7 oraz tablica 3.

W procesie aproksymacji otrzymano następującą funkcję aproksymującą:

$$A(\omega) = -\ln K_o' + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \ln\left[1+\left(\frac{\omega}{\beta_i}\right)^2\right] - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \ln\left[1+\left(\frac{\omega}{\alpha_i}\right)^2\right], \tag{38}$$

gdzie:

$$\ln\beta_1 = 0{,}0612 + \ln 2\pi \cdot 10^5 \qquad \beta_1 = 1{,}06311 \cdot 2\pi \cdot 10^5$$
$$\ln\beta_2 = 1{,}1043 + \ln 2\pi \cdot 10^5 \qquad \beta_2 = 3{,}01711 \cdot 2\pi \cdot 10^5$$
$$\ln\beta_3 = 2{,}3619 + \ln 2\pi \cdot 10^5 \qquad \beta_3 = 10{,}61109 \cdot 2\pi \cdot 10^5$$
$$\ln\alpha_1 = 0{,}2421 + \ln 2\pi \cdot 10^5 \qquad \alpha_1 = 1{,}27392 \cdot 2\pi \cdot 10^5$$
$$\ln\alpha_2 = 1{,}4247 + \ln 2\pi \cdot 10^5 \qquad \alpha_2 = 4{,}15661 \cdot 2\pi \cdot 10^5$$
$$\ln K_o' = -0{,}26248.$$

Tablica 3

Przykład aproksymacji charakterystyki tłumieniowej odcinka małowymiarowego toru współosiowego o długości l = 1,73 km

f[MHz]	0,06	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,3
$\frac{\omega}{2\pi}10^{-5}$[rd sek^{-1}]	0,6	1	2	4	6	8	10	13
$\ln\left[\frac{\omega}{2\pi}10^{-5}\right]$	−0,51083	0,00000	0,69315	1,38629	1,79176	2,07944	2,30258	2,56495
ω_{γ_i} $\gamma_i = \beta_1$	−0,57203	−0,06120	0,63195	1,32509	1,73056	2,01824	2,24138	2,50375
$A_{\gamma i}(\omega_{\gamma i})\vert_{\gamma i=\beta_1}$	0,13825	0,31691	0,75637	1,35921	1,74601	2,02700	2,24700	2,50708
ω_{γ_i} $\gamma_i = \beta_2$	−1,61513	−1,10430	−0,41115	0,28199	0,68746	0,97514	1,19828	1,46065
$A_{\gamma i}(\omega_{\gamma i})\vert_{\gamma i=\beta_2}$	0,01940	0,05211	0,18212	0,50719	0,80018	1,04163	1,24184	1,48688
ω_{γ_i} $\gamma_i = \beta_3$	−2,87273	−2,36190	−1,66875	−0,97561	−0,57014	−0,28246	−0,05932	0,20305
$A_{\gamma i}(\omega_{\gamma i})\vert_{\gamma i=\beta_3}$	0,00159	0,00442	0,01746	0,06644	0,13872	0,22503	0,31779	0,45834
ω_{γ_i} $\gamma_i = \alpha_1$	−0,75293	−0,24210	0,45105	1,14419	1,54966	1,83734	2,06048	2,32295
$A_{\gamma i}(\omega_{\gamma i})\vert_{\gamma i=\alpha_1}$	0,10017	0,24003	0,62133	1,19249	1,57171	1,84986	2,06853	2,32773
ω_{γ_i} $\gamma_i = \alpha_2$	−1,93553	−1,42470	−0,73155	−0,03841	0,36706	0,65474	0,87788	1,14025
$A_{\gamma i}(\omega_{\gamma i})\vert_{\gamma i=\alpha_2}$	0,01031	0,02813	0,10413	0,32773	0,56306	0,77423	0,95757	1,18892
$A_w(f)$[N]	0,307	0,372	0,492	0,672	0,816	0,936	1,044	1,200
$W(f) = \sum_{i=1}^{3} A_{\gamma i}(\omega_{\gamma i})\vert_{\gamma i=\beta_i} - \sum_{i=1}^{2} A_{\gamma i}(\omega_{\gamma i})\vert_{\gamma i=\alpha_i}$	0,04876	0,10528	0,23031	0,41262	0,55014	0,66957	0,78053	0,93565
$H(f) = W(f) - A_w(f)$	−0,25824	−0,26672	−0,26169	−0,25938	−0,26586	−0,26643	−0,26347	−0,26435
błąd aproksymacji $\Delta A = A - Aw = H - \ln K_o'$ dla $\ln K_o' = -0{,}26248$	+0,00424	−0,00424	+0,00079	+0,00310	−0,00388	−0,00395	−0,00099	−0,00187

$$\ln K_{D}' = \frac{\max H(f) + \min H(f)}{2}$$

Tak więc funkcja transmitancji napięciowej wydłużnika torowego przyjmie postać

$$K(s) = K_o \frac{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)}{(s+\beta_1)(s+\beta_2)(s+\beta_3)}, \tag{39}$$

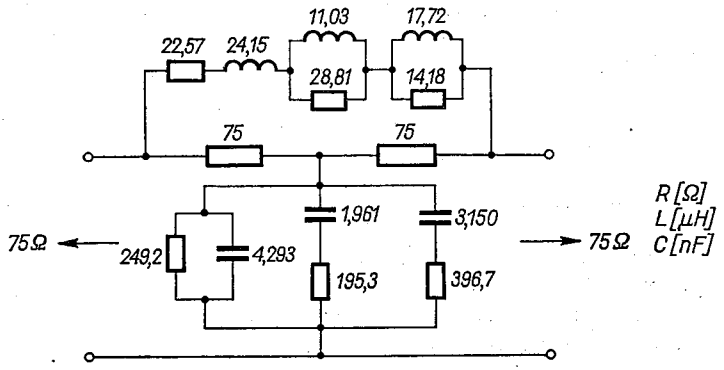
przy czym:

$$\ln K_o = \ln K_o' + \sum_{i=1}^{3} \ln \beta_i - \sum_{i=1}^{2} \ln \alpha_i, \tag{40}$$

$$\ln K_o = 1{,}59812 + \ln 2\pi \cdot 10^5, \quad K_o = 4{,}94377 \cdot 2\pi \cdot 10^5.$$

Przebieg błędu aproksymacji w funkcji częstotliwości podano w tablicy 3. Maksymalny błąd w pasmie 0,06÷1,3 MHz wynosi ±0,00424 N.

Wydłużnik torowy realizujemy w układzie stałooporowego czwórnika „T-zbocznikowane". Schemat wydłużnika torowego zaprojektowanego w oparciu o funkcję transmitancji napięciowej uzyskaną w procesie aproksymacji przedstawiono na rys. 8.



Rys. 8. Schemat wydłużnika torowego zaprojektowanego w oparciu o funkcję transmitancji napięciowe uzyskaną w procesie aproksymacji

Poprawność wykonania projektu wydłużnika torowego zbadano wstępnie przy użyciu teletransmisyjnej elektronicznej maszyny analogowej TEMA-1 w Katedrze Teletransmisji Przewodowej Politechniki Warszawskiej.

Na podstawie przeprowadzonych pomiarów na maszynie analogowej można było z całą pewnością stwierdzić, że projekt wydłużnika torowego został wykonany poprawnie.

3. ZAKOŃCZENIE

Na zakończenie należy stwierdzić, że praktyka w pełni potwierdziła zalety zmodyfikowanej metody aproksymacji charakterystykami logarytmicznymi. Okazało się np., że czas pracy potrzebnej do wykonania aproksymacji charakterystyki amplitudowej metodą zmodyfikowaną (z dostatecznie dużą dokładnością) jest kilkanaście razy krótszy od czasu potrzebnego do wykonania tej aproksymacji w sposób klasyczny. Dzięki wprowadzeniu logarytmicznej pulsacji znormalizowanej oraz znormalizowanej elementarnej logarytmicznej charakterystyki amplitudowej i jej stablicowaniu, wszystkie skomplikowane i uciążliwe obliczenia matematyczne zostały zastąpione najprostszymi działaniami arytmetycznymi — dodawaniem i odejmowaniem.

Praktyczną przydatność omówionej w tej pracy metody aproksymacji potwierdza również fakt zaprojektowania przy jej zastosowaniu zestawu wydłużników torowych do systemu teletransmisyjnego TNW-300. Aproksymację wykonano w stosunkowo krótkim czasie z dostatecznie dużą dokładnością.

Maksymalny błąd aproksymacji charakterystyk amplitudowych poszczególnych wydłużników zawierał się mianowicie w granicach: od $\pm 0{,}002$ N do $\pm 0{,}005$ N.

Według danych zawartych w projekcie wstępnym radzieckiego systemu 300-krotnego K-300, maksymalny błąd aproksymacji charakterystyk amplitudowych poszczególnych wydłużników tego systemu zawiera się w granicach od $\pm 0{,}006$ N do $\pm 0{,}007$ N, a więc aproksymację wykonano z mniejszą dokładnością aniżeli w przypadku systemu TNW-300.

Pragnę zaznaczyć, że niniejsza praca powstała w wyniku mojego udziału przy opracowywaniu części urządzeń teletransmisyjnego systemu 300-krotnego w Katedrze Urządzeń Teletransmisyjnych i Telegraficznych Politechniki Warszawskiej.

Chciałbym podziękować Prof. dr Witoldowi Nowickiemu, Prof. dr Stanisławowi Bellertowi, doc. Juliuszowi Grabowskiemu oraz dr Piotrowi Bublewiczowi za życzliwość, pomoc i cenne rady, które przyczyniły się do ulepszenia treści i formy niniejszej pracy.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. S. Bellert, Zarys teorii syntezy liniowych układów elektrycznych, Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1964.
2. I. N. Bronsztejn, K. A. Siemiendiajew, Sprawocznik po matiematikie dla inżenierow i uczaszczichsja wtyzow, Izdatielstwo „Nauka", 1967.
3. J. Chirkowski, Synteza wydłużników torowych do urządzeń traktu liniowego systemu TNW-300, praca magisterska, Politechnika Warszawska, Warszawa 1967.
4. E. A. Guillemin, Synthesis of Passive Networks, John Wiley and Sons, New York 1957.
5. J. E. Storer, Passive Network Synthesis, Mc Graw-Hill Book Company, New York 1957.
6. W. W Sołodownikow, Statisticzeskaja dinamika liniejnych sistiem awtomaticzeskogo uprawlenija, Fizmatgiz, Moskwa 1960.

ZAŁĄCZNIK

Tablica I

Znormalizowana elementarna logarytmiczna charakterystyka amplitudowa

$$L_{\gamma i}(\omega_{\gamma i}) = \frac{1}{2}\ln[1+e^{2\omega_{\gamma i}}]$$

$\omega_{\gamma i}$	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Δ
-5.	0. 00000	00000	00001	00001	00001	00001	00001	00002	00002	00002	1
-4.	0. 00003	00003	00004	00005	00006	00008	00009	00011	00014	00017	2
-3.	0. 00020	00025	00031	00037	00046	00056	00068	00083	00101	00124	15
-2.9	0. 00126	00129	00131	00134	00137	00140	00142	00145	00148	00151	3
.8	0. 00154	00157	00160	00164	00167	00170	00174	00177	00181	00185	3
.7	0. 00188	00192	00196	00200	00204	00208	00212	00217	00221	00225	4
.6	0. 00230	00234	00239	00244	00249	00254	00259	00264	00270	00275	5
.5	0. 00281	00286	00292	00298	00304	00310	00316	00323	00329	00336	6
-2.4	0. 00343	00349	00356	00364	00371	00378	00386	00394	00402	00410	7
.3	0. 00418	00426	00435	00444	00453	00462	00471	00481	00490	00500	9
.2	0. 00510	00520	00531	00542	00552	00563	00575	00586	00598	00610	11
.1	0. 00622	00635	00648	00661	00674	00687	00701	00715	00730	00744	13
.0	0. 00759	00774	00790	00806	00822	00838	00855	00872	00890	00907	16
-1.9	0. 00926	00944	00963	00982	01002	01022	01042	01063	01085	01106	20
.8	0. 01128	01151	01174	01197	01221	01246	01270	01296	01322	01348	25
.7	0. 01375	01402	01430	01458	01488	01517	01547	01578	01609	01641	29
.6	0. 01674	01707	01741	01776	01811	01847	01883	01921	01959	01998	36
.5	0. 02037	02078	02119	02161	02203	02247	02291	02336	02382	02429	44
-1.4	0. 02477	02526	02576	02626	02678	02731	02784	02839	02895	02952	53
.3	0. 03010	03068	03129	03190	03252	03316	03381	03447	03514	03582	64
.2	0. 03652	03723	03796	03869	03944	04021	04099	04178	04259	04342	77
.1	0. 04426	04511	04598	04687	04777	04869	04963	05058	05155	05254	92
-1.09	0. 05264	05274	05284	05294	05304	05314	05324	05334	05345	05355	10
.08	0. 05365	05375	05385	05396	05406	05416	05426	05437	05447	05457	10
.07	0. 05468	05478	05488	05499	05509	05520	05530	05541	05551	05562	10
.06	0. 05572	05583	05593	05604	05614	05625	05636	05646	05657	05668	11
.05	0. 05679	05689	05700	05711	05722	05732	05743	05754	05765	05776	11
-1.04	0. 05787	05798	05809	05820	05831	05842	05853	05864	05875	05886	11
.03	0. 05897	05908	05919	05931	05942	05953	05964	05975	05987	05998	11
.02	0. 06009	06021	06032	06043	06055	06066	06078	06089	06101	06112	12
.01	0. 06124	06135	06147	06158	06170	06181	06193	06205	06216	06228	12
.00	0. 06240	06252	06263	06275	06287	06299	06311	06323	06334	06346	12

$\omega_{\gamma i}$	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Δ
-0.99 0.	06358	06370	06382	06394	06406	06418	06430	06442	06455	06467	12
.98 0.	06479	06491	06503	06515	06528	06540	06552	06564	06577	06589	12
.97 0.	06601	06614	06626	06639	06651	06664	06676	06689	06701	06714	13
.96 0.	06726	06739	06751	06764	06777	06789	06802	06815	06828	06840	13
.95 0.	06853	06866	06879	06892	06905	06917	06930	06943	06956	06969	13
-0.94 0.	06982	06995	07008	07022	07035	07048	07061	07074	07087	07101	13
.93 0.	07114	07127	07140	07154	07167	07180	07194	07207	07221	07234	13
.92 0.	07248	07261	07275	07288	07302	07315	07329	07343	07356	07370	14
.91 0.	07384	07397	07411	07425	07439	07453	07467	07480	07494	07508	14
.90 0.	07522	07536	07550	07564	07578	07592	07606	07621	07635	07649	14
-0.89 0.	07663	07677	07692	07706	07720	07734	07749	07763	07778	07792	14
.88 0.	07806	07821	07835	07850	07864	07879	07894	07908	07923	07937	14
.87 0.	07952	07967	07982	07996	08011	08026	08041	08056	08071	08086	15
.86 0.	08100	08115	08130	08145	08161	08176	08191	08206	08221	08236	15
.85 0.	08251	08267	08282	08297	08312	08328	08343	08358	08374	08389	15
-0.84 0.	08405	08420	08436	08451	08467	08482	08498	08514	08529	08545	15
.83 0.	08561	08577	08592	08608	08624	08640	08656	08672	08688	08703	16
.82 0.	08719	08736	08752	08768	08784	08800	08816	08832	08848	08865	16
.81 0.	08881	08897	08913	08930	08946	08963	08979	08995	09012	09028	16
.80 0.	09045	09062	09078	09095	09111	09128	09145	09161	09178	09195	17
-0.79 0.	09212	09229	09246	09262	09279	09296	09313	09330	09347	09364	17
.78 0.	09382	09399	09416	09433	09450	09467	09485	09502	09519	09537	17
.77 0.	09554	09571	09589	09606	09624	09641	09659	09676	09694	09712	18
.76 0.	09729	09747	09765	09783	09800	09818	09836	09854	09872	09890	18
.75 0.	09908	09926	09944	09962	09980	09998	10016	10034	10052	10071	18
-0.74 0.	10089	10107	10126	10144	10162	10181	10199	10218	10236	10255	19
.73 0.	10273	10292	10310	10329	10348	10366	10385	10404	10423	10442	19
.72 0.	10460	10479	10498	10517	10536	10555	10574	10593	10612	10632	19
.71 0.	10651	10670	10689	10708	10728	10747	10766	10786	10805	10825	20
.70 0.	10844	10864	10883	10903	10922	10942	10962	10981	11001	11021	20
-0.69 0.	11041	11060	11080	11100	11120	11140	11160	11180	11200	11220	20
.68 0.	11240	11261	11281	11301	11321	11341	11362	11382	11402	11423	20
.67 0.	11443	11464	11484	11505	11525	11546	11567	11587	11608	11629	21
.66 0.	11650	11670	11691	11712	11733	11754	11775	11796	11817	11838	21
.65 0.	11859	11880	11901	11923	11944	11965	11986	12008	12029	12050	21
-0.64 0.	12072	12093	12115	12136	12158	12180	12201	12223	12245	12266	22
.63 0.	12288	12310	12332	12354	12375	12397	12419	12441	12463	12486	22
.62 0.	12508	12530	12552	12574	12596	12619	12641	12663	12686	12708	22
.61 0.	12731	12753	12776	12798	12821	12844	12866	12889	12912	12934	23
.60 0.	12957	12980	13003	13026	13049	13072	13095	13118	13141	13164	23
-0.59 0.	13187	13210	13234	13257	13280	13304	13327	13350	13374	13397	23
.58 0.	13421	13444	13468	13492	13515	13539	13563	13587	13610	13634	24
.57 0.	13658	13682	13706	13730	13754	13778	13802	13826	13850	13875	24
.56 0.	13899	13923	13948	13972	13996	14021	14045	14070	14094	14119	24
.55 0.	14143	14168	14193	14218	14242	14267	14292	14317	14342	14367	25
-0.54 0.	14392	14417	14442	14467	14492	14517	14542	14568	14593	14618	25
.53 0.	14644	14669	14695	14720	14746	14771	14797	14822	14848	14874	26
.52 0.	14900	14925	14951	14977	15003	15029	15055	15081	15107	15133	26
.51 0.	15159	15185	15212	15238	15264	15290	15317	15343	15370	15396	26
.50 0.	15423	15449	15476	15502	15529	15556	15583	15609	15636	15663	27

$\omega_{\gamma i}$	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Δ
-0.49 0.	15690	15717	15744	15771	15798	15825	15852	15879	15907	15934	27
.48 0.	15961	15989	16016	16043	16071	16098	16126	16154	16181	16209	28
.47 0.	16237	16264	16292	16320	16348	16376	16404	16432	16460	16488	28
.46 0.	16516	16544	16572	16600	16629	16657	16685	16714	16742	16771	28
.45 0.	16799	16828	16856	16885	16914	16942	16971	17000	17029	17058	29
-0.44 0.	17087	17116	17145	17174	17203	17232	17261	17290	17320	17349	29
.43 0.	17376	17408	17437	17466	17496	17525	17555	17585	17614	17644	30
.42 0.	17674	17704	17733	17763	17793	17823	17853	17883	17913	17943	30
.41 0.	17974	18004	18034	18064	18095	18125	18156	18186	18217	18247	30
.40 0.	18278	18308	18339	18370	18401	18431	18462	18493	18524	18555	31
-0.39 0.	18586	18617	18648	18679	18711	18742	18773	18804	18836	18867	31
.38 0.	18899	18930	18962	18993	19025	19057	19088	19120	19152	19184	32
.37 0.	19216	19247	19279	19311	19344	19376	19408	19440	19472	19505	32
.36 0.	19537	19569	19602	19634	19667	19699	19732	19764	19797	19830	33
.35 0.	19862	19895	19928	19961	19994	20027	20060	20093	20126	20159	33
-0.34 0.	20193	20226	20259	20292	20326	20359	20393	20426	20460	20493	33
.33 0.	20527	20561	20594	20628	20662	20696	20730	20764	20798	20832	34
.32 0.	20866	20900	20934	20968	21003	21037	21071	21106	21140	21175	34
.31 0.	21209	21244	21279	21313	21348	21383	21418	21452	21487	21522	35
.30 0.	21557	21592	21627	21663	21698	21733	21768	21804	21839	21874	35
-0.29 0.	21910	21945	21981	22017	22052	22088	22124	22159	22195	22231	36
.28 0.	22267	22303	22339	22375	22411	22447	22483	22520	22556	22592	36
.27 0.	22629	22665	22702	22738	22775	22811	22848	22885	22921	22958	37
.26 0.	22995	23032	23069	23106	23143	23180	23217	23254	23291	23329	37
.25 0.	23366	23403	23441	23478	23516	23553	23591	23628	23666	23704	38
-0.24 0.	23742	23779	23817	23855	23893	23931	23969	24007	24046	24084	38
.23 0.	24122	24160	24199	24237	24275	24314	24352	24391	24430	24468	38
.22 0.	24507	24546	24585	24624	24662	24701	24740	24779	24819	24858	39
.21 0.	24897	24936	24975	25015	25054	25094	25133	25173	25212	25252	39
.20 0.	25292	25331	25371	25411	25451	25491	25531	25571	25611	25651	40
-0.19 0.	25691	25731	25771	25812	25852	25892	25933	25973	26014	26054	40
.18 0.	26095	26136	26177	26217	26258	26299	26340	26381	26422	26463	41
.17 0.	26504	26545	26587	26628	26669	26710	26752	26793	26835	26876	41
.16 0.	26918	26960	27001	27043	27085	27127	27169	27211	27253	27295	42
.15 0.	27337	27379	27421	27463	27506	27548	27590	27633	27675	27718	42
-0.14 0.	27760	27803	27846	27888	27931	27974	28017	28060	28103	28146	43
.13 0.	28189	28232	28275	28318	28362	28405	28448	28492	28535	28579	43
.12 0.	28622	28666	28710	28753	28797	28841	28885	28929	28972	29017	44
.11 0.	29061	29105	29149	29193	29237	29282	29326	29370	29415	29459	44
.10 0.	29504	29548	29593	29638	29682	29727	29772	29817	29862	29907	45
-0.09 0.	29952	29997	30042	30087	30133	30178	30223	30269	30314	30360	45
.08 0.	30405	30451	30496	30542	30588	30634	30679	30725	30771	30817	46
.07 0.	30863	30909	30955	31002	31048	31094	31140	31187	31233	31280	46
.06 0.	31326	31373	31420	31466	31513	31560	31607	31653	31700	31747	47
.05 0.	31794	31841	31889	31936	31983	32030	32078	32125	32172	32220	47
-0.04 0.	32267	32315	32363	32410	32458	32506	32554	32601	32649	32697	48
.03 0.	32745	32793	32842	32890	32938	32986	33035	33083	33131	33180	48
.02 0.	33228	33277	33326	33374	33423	33472	33521	33569	33618	33667	49
.01 0.	33716	33765	33815	33864	33913	33962	34012	34061	34110	34160	49
.00 0.	34209	34259	34309	34358	34408	34458	34508	34557	34607	34657	50

ω_{ri}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ
0.00	0. 34657	34707	34757	34808	34858	34908	34958	35009	35059	35109	50
.01	0. 35160	35210	35261	35312	35362	35413	35464	35515	35565	35616	51
.02	0. 35667	35718	35769	35821	35872	35923	35974	36026	36077	36128	51
.03	0. 36180	36231	36283	36335	36386	36438	36490	36542	36593	36645	52
.04	0. 36697	36749	36801	36854	36906	36958	37010	37063	37115	37167	52
0.05	0. 37220	37272	37325	37378	37430	37483	37536	37589	37641	37694	53
.06	0. 37747	37800	37853	37907	37960	38013	38066	38119	38173	38226	53
.07	0. 38280	38333	38387	38440	38494	38548	38602	38655	38709	38763	54
.08	0. 38817	38871	38925	38979	39034	39088	39142	39196	39251	39305	54
.09	0. 39360	39414	39469	39523	39578	39633	39687	39742	39797	39852	55
0.10	0. 39907	39962	40017	40072	40127	40182	40238	40293	40348	40404	55
.11	0. 40459	40515	40570	40626	40682	40737	40793	40849	40905	40961	56
.12	0. 41016	41072	41129	41185	41241	41297	41353	41410	41466	41522	56
.13	0. 41579	41635	41692	41748	41805	41862	41918	41975	42032	42089	57
.14	0. 42146	42203	42260	42317	42374	42431	42488	42546	42603	42660	57
0.15	0. 42718	42775	42833	42890	42948	43006	43063	43121	43179	43237	58
.16	0. 43295	43353	43411	43469	43527	43585	43643	43701	43760	43818	58
.17	0. 43876	43935	43993	44052	44110	44169	44228	44287	44345	44404	59
.18	0. 44463	44522	44581	44640	44699	44758	44817	44877	44936	44995	59
.19	0. 45054	45114	45173	45233	45292	45352	45412	45471	45531	45591	60
0.20	0. 45651	45711	45771	45831	45890	45951	46011	46071	46131	46192	60
.21	0. 46252	46312	46373	46433	46494	46554	46615	46675	46736	46797	61
.22	0. 46858	46919	46979	47040	47101	47162	47224	47285	47346	47407	61
.23	0. 47468	47530	47591	47652	47714	47775	47837	47899	47960	48022	62
.24	0. 48084	48146	48207	48269	48331	48393	48455	48517	48579	48642	62
0.25	0. 48704	48766	48828	48891	48953	49016	49078	49141	49203	49266	62
.26	0. 49329	49391	49454	49517	49580	49643	49706	49769	49832	49895	63
.27	0. 49958	50021	50085	50148	50211	50275	50338	50402	50465	50529	63
.28	0. 50592	50656	50720	50783	50847	50911	50975	51039	51103	51167	64
.29	0. 51231	51295	51359	51424	51488	51552	51617	51681	51745	51810	64
0.30	0. 51874	51939	52004	52068	52133	52198	52263	52327	52392	52457	65
.31	0. 52522	52587	52652	52718	52783	52848	52913	52979	53044	53109	65
.32	0. 53175	53240	53306	53371	53437	53503	53568	53634	53700	53766	66
.33	0. 53832	53898	53964	54030	54096	54162	54228	54294	54361	54427	66
.34	0. 54493	54560	54626	54693	54759	54826	54892	54959	55026	55093	67
0.35	0. 55159	55226	55293	55360	55427	55494	55561	55628	55695	55762	67
.36	0. 55830	55897	55964	56032	56099	56167	56234	56302	56369	56437	67
.37	0. 56505	56572	56640	56708	56776	56844	56911	56979	57048	57116	68
.38	0. 57184	57252	57320	57388	57457	57525	57593	57662	57730	57799	68
.39	0. 57867	57936	58004	58073	58142	58211	58279	58348	58417	58486	69
0.40	0. 58555	58624	58693	58762	58831	58901	58970	59039	59108	59178	69
.41	0. 59247	59317	59386	59456	59525	59595	59664	59734	59804	59874	70
.42	0. 59943	60013	60083	60153	60223	60293	60363	60433	60504	60574	70
.43	0. 60644	60714	60785	60855	60925	60996	61066	61137	61208	61278	70
.44	0. 61349	61420	61490	61561	61632	61703	61774	61845	61916	61987	71
0.45	0. 62058	62129	62200	62271	62342	62414	62485	62556	62628	62699	71
.46	0. 62771	62842	62914	62985	63057	63129	63200	63272	63344	63416	72
.47	0. 63488	63560	63632	63704	63776	63848	63920	63992	64064	64137	72
.48	0. 64209	64281	64354	64426	64498	64571	64643	64716	64789	64861	72
.49	0. 64934	65007	65080	65152	65225	65298	65371	65444	65517	65590	73

$\omega_{\gamma i}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ
0.50	0. 65663	65736	65809	65883	65956	66029	66102	66176	66249	66323	73
.51	0. 66396	66470	66543	66617	66690	66764	66838	66912	66985	67059	74
.52	0. 67133	67207	67281	67355	67429	67503	67577	67651	67725	67800	74
.53	0. 67874	67948	68022	68097	68171	68246	68320	68395	68469	68544	74
.54	0. 68618	68693	68768	68843	68917	68992	69067	69142	69217	69292	75
0.55	0. 69367	69442	69517	69592	69667	69742	69818	69893	69968	70044	75
.56	0. 70119	70194	70270	70345	70421	70496	70572	70648	70723	70799	76
.57	0. 70875	70951	71026	71102	71178	71254	71330	71406	71482	71558	76
.58	0. 71634	71710	71787	71863	71939	72015	72092	72168	72244	72321	76
.59	0. 72397	72474	72550	72627	72704	72780	72857	72934	73010	73087	77
0.60	0. 73164	73241	73318	73395	73472	73549	73626	73703	73780	73857	77
.61	0. 73934	74012	74089	74166	74244	74321	74398	74476	74553	74631	77
.62	0. 74708	74786	74863	74941	75019	75096	75174	75252	75330	75408	78
.63	0. 75486	75563	75641	75719	75797	75875	75954	76032	76110	76188	78
.64	0. 76266	76345	76423	76501	76580	76658	76736	76815	76893	76972	78
0.65	0. 77050	77129	77208	77286	77365	77444	77523	77601	77680	77759	79
.66	0. 77838	77917	77996	78075	78154	78233	78312	78391	78470	78550	79
.67	0. 78629	78708	78787	78867	78946	79025	79105	79184	79264	79343	79
.68	0. 79423	79502	79582	79662	79741	79821	79901	79981	80061	80140	80
.69	0. 80220	80300	80380	80460	80540	80620	80700	80780	80860	80941	80
0.70	0. 81021	81101	81181	81262	81342	81422	81503	81583	81664	81744	80
.71	0. 81825	81905	81986	82066	82147	82228	82308	82389	82470	82551	81
.72	0. 82632	82712	82793	82874	82955	83036	83117	83198	83279	83360	81
.73	0. 83442	83523	83604	83685	83766	83848	83929	84010	84092	84173	81
.74	0. 84255	84336	84418	84499	84581	84662	84744	84826	84907	84989	82
0.75	0. 85071	85152	85234	85316	85398	85480	85562	85644	85726	85808	82
.76	0. 85890	85972	86054	86136	86218	86300	86383	86465	86547	86629	82
.77	0. 86712	86794	86876	86959	87041	87124	87206	87289	87371	87454	82
.78	0. 87537	87619	87702	87785	87867	87950	88033	88116	88199	88281	83
.79	0. 88364	88447	88530	88613	88696	88779	88862	88946	89029	89112	83
0.80	0. 89195	89278	89361	89445	89528	89611	89695	89778	89862	89945	83
.81	0. 90028	90112	90195	90279	90363	90446	90530	90613	90697	90781	84
.82	0. 90865	90948	91032	91116	91200	91284	91368	91452	91535	91619	84
.83	0. 91703	91788	91872	91956	92040	92124	92208	92292	92377	92461	84
.84	0. 92545	92629	92714	92798	92882	92967	93051	93136	93220	93305	84
0.85	0. 93389	93474	93558	93643	93728	93812	93897	93982	94067	94151	85
.86	0. 94236	94321	94406	94491	94576	94660	94745	94830	94915	95000	85
.87	0. 95086	95171	95256	95341	95426	95511	95596	95682	95767	95852	85
.88	0. 95937	96023	96108	96194	96279	96364	96450	96535	96621	96706	85
.89	0. 96792	96877	96963	97049	97134	97220	97306	97392	97477	97563	86
0.90	0. 97649	97735	97821	97906	97992	98078	98164	98250	98336	98422	86
.91	0. 98508	98594	98680	98766	98853	98939	99025	99111	99197	99284	86
.92	0. 99370	99456	99543	99629	99715	99802	99888	99975	1.00061	1.00148	86
.93	1. 00234	00321	00407	00494	00580	00667	00754	00840	00927	01014	87
.94	1. 01101	01187	01274	01361	01448	01535	01622	01708	01795	01882	87
0.95	1. 01969	02056	02143	02230	02317	02405	02492	02579	02666	02753	87
.96	1. 02840	02928	03015	03102	03189	03277	03364	03451	03539	03626	87
.97	1. 03714	03801	03888	03976	04063	04151	04239	04326	04414	04501	87
.98	1. 04589	04677	04764	04852	04940	05028	05115	05203	05291	05379	88
.99	1. 05467	05554	05642	05730	05818	05906	05994	06082	06170	06258	88

$\omega_{\gamma i}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ
1.00	1. 06346	06434	06523	06611	06699	06787	06875	06963	07052	07140	88
.01	1. 07228	07316	07405	07493	07581	07670	07758	07847	07935	08024	88
.02	1. 08112	08201	08289	08378	08466	08555	08643	08732	08821	08909	89
.03	1. 08998	09087	09175	09264	09353	09442	09531	09619	09708	09797	89
.04	1. 09886	09975	10064	10153	10242	10331	10420	10509	10598	10687	89
1.05	1. 10776	10865	10954	11043	11132	11222	11311	11400	11489	11579	89
.06	1. 11668	11757	11846	11936	12025	12114	12204	12293	12383	12472	89
.07	1. 12562	12651	12741	12830	12920	13009	13099	13188	13278	13368	90
.08	1. 13457	13547	13637	13726	13816	13906	13996	14085	14175	14265	90
.09	1. 14355	14445	14534	14624	14714	14804	14894	14984	15074	15164	90
1.10	1. 15254	15344	15434	15524	15614	15705	15795	15885	15975	16065	90
.11	1. 16155	16246	16336	16426	16516	16607	16697	16787	16877	16968	90
.12	1. 17058	17149	17239	17329	17420	17510	17601	17691	17782	17872	90
.13	1. 17963	18053	18144	18235	18325	18416	18506	18597	18688	18779	91
.14	1. 18869	18960	19051	19141	19232	19323	19414	19505	19596	19686	91
1.15	1. 19777	19868	19959	20050	20141	20232	20323	20414	20505	20596	91
.16	1. 20687	20778	20869	20960	21051	21142	21234	21325	21416	21507	91
.17	1. 21598	21690	21781	21872	21963	22055	22146	22237	22329	22420	91
.18	1. 22511	22603	22694	22785	22877	22968	23060	23151	23243	23334	91
.19	1. 23426	23517	23609	23700	23792	23884	23975	24067	24158	24250	92
1.20	1. 24342	24434	24525	24617	24709	24800	24892	24984	25076	25168	92
.21	1. 25259	25351	25443	25535	25627	25719	25811	25903	25995	26087	92
.22	1. 26179	26270	26362	26455	26547	26639	26731	26823	26915	27007	92
.23	1. 27099	27191	27283	27376	27468	27560	27652	27744	27837	27929	92
.24	1. 28021	28113	28206	28298	28390	28483	28575	28667	28760	28852	92
1.25	1. 28945	29037	29129	29222	29314	29407	29499	29592	29684	29777	92
.26	1. 29869	29962	30054	30147	30240	30332	30425	30518	30610	30703	93
.27	1. 30796	30888	30981	31074	31166	31259	31352	31445	31538	31630	93
.28	1. 31723	31816	31909	32002	32095	32187	32280	32373	32466	32559	93
.29	1. 32652	32745	32838	32931	33024	33117	33210	33303	33396	33489	93
1.30	1. 33582	33675	33768	33862	33955	34048	34141	34234	34327	34421	93
.31	1. 34514	34607	34700	34793	34887	34980	35073	35167	35260	35353	93
.32	1. 35447	35540	35633	35727	35820	35913	36007	36100	36194	36287	93
.33	1. 36381	36474	36568	36661	36755	36848	36942	37035	37129	37222	93
.34	1. 37316	37409	37503	37597	37690	37784	37878	37971	38065	38159	94
1.35	1. 38252	38346	38440	38533	38627	38721	38815	38908	39002	39096	94
.36	1. 39190	39284	39377	39471	39565	39659	39753	39847	39941	40035	94
.37	1. 40129	40223	40317	40410	40504	40598	40692	40786	40880	40974	94
.38	1. 41069	41163	41257	41351	41445	41539	41633	41727	41821	41915	94
.39	1. 42010	42104	42198	42292	42386	42480	42575	42669	42763	42857	94
1.40	1. 42952	43046	43140	43235	43329	43423	43517	43612	43706	43801	94
.41	1. 43895	43989	44084	44178	44272	44367	44461	44556	44650	44745	94
.42	1. 44839	44934	45028	45123	45217	45312	45406	45501	45595	45690	95
.43	1. 45785	45879	45974	46068	46163	46258	46352	46447	46542	46636	95
.44	1. 46731	46826	46920	47015	47110	47204	47299	47394	47489	47583	95
1.45	1. 47678	47773	47868	47963	48057	48152	48247	48342	48437	48532	95
.46	1. 48627	48721	48816	48911	49006	49101	49196	49291	49386	49481	95
.47	1. 49576	49671	49766	49861	49956	50051	50146	50241	50336	50431	95
.48	1. 50526	50621	50716	50811	50906	51002	51097	51192	51287	51382	95
.49	1. 51477	51572	51668	51763	51858	51953	52048	52144	52239	52334	95

ω_{pi}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ
1.50	1. 52429	52525	52620	52715	52810	52906	53001	53096	53192	53287	95
.51	1. 53382	53478	53573	53668	53764	53859	53955	54050	54145	54241	95
.52	1. 54336	54432	54527	54623	54718	54814	54909	55005	55100	55196	96
.53	1. 55291	55387	55482	55578	55673	55769	55864	55960	56056	56151	96
.54	1. 56247	56342	56438	56534	56629	56725	56821	56916	57012	57108	96
1.55	1. 57203	57299	57395	57490	57586	57682	57777	57873	57969	58065	96
.56	1. 58161	58256	58352	58448	58544	58639	58735	58831	58927	59023	96
.57	1. 59119	59214	59310	59406	59502	59598	59694	59790	59886	59982	96
.58	1. 60078	60173	60269	60365	60461	60557	60653	60749	60845	60941	96
.59	1. 61037	61133	61229	61325	61421	61517	61613	61709	61806	61902	96
1.60	1. 61998	62094	62190	62286	62382	62478	62574	62670	62767	62863	96
.61	1. 62959	63055	63151	63247	63344	63440	63536	63632	63728	63825	96
.62	1. 63921	64017	64113	64210	64306	64402	64498	64595	64691	64787	96
.63	1. 64884	64980	65076	65172	65269	65365	65461	65558	65654	65751	96
.64	1. 65847	65943	66040	66136	66232	66329	66425	66522	66618	66715	96
1.65	1. 66811	66907	67004	67100	67197	67293	67390	67486	67583	67679	96
.66	1. 67776	67872	67969	68065	68162	68258	68355	68451	68548	68645	97
.67	1. 68741	68838	68934	69031	69128	69224	69321	69417	69514	69611	97
.68	1. 69707	69804	69901	69997	70094	70191	70287	70384	70481	70577	97
.69	1. 70674	70771	70867	70964	71061	71158	71254	71351	71448	71545	97
1.70	1. 71641	71738	71835	71932	72029	72125	72222	72319	72416	72513	97
.71	1. 72609	72706	72803	72900	72997	73094	73191	73287	73384	73481	97
.72	1. 73578	73675	73772	73869	73966	74063	74160	74256	74353	74450	97
.73	1. 74547	74644	74741	74838	74935	75032	75129	75226	75323	75420	97
.74	1. 75517	75614	75711	75808	75905	76002	76099	76196	76293	76390	97
1.75	1. 76488	76585	76682	76779	76876	76973	77070	77167	77264	77361	97
.76	1. 77459	77556	77653	77750	77847	77944	78041	78139	78236	78333	97
.77	1. 78430	78527	78624	78722	78819	78916	79013	79110	79208	79305	97
.78	1. 79402	79499	79597	79694	79791	79888	79986	80083	80180	80277	97
.79	1. 80375	80472	80569	80667	80764	80861	80959	81056	81153	81251	97
1.80	1. 81348	81445	81543	81640	81737	81835	81932	82029	82127	82224	97
.81	1. 82322	82419	82516	82614	82711	82809	82906	83003	83101	83198	97
.82	1. 83296	83393	83491	83588	83686	83783	83880	83978	84075	84173	97
.83	1. 84270	84368	84465	84563	84660	84758	84855	84953	85050	85148	98
.84	1. 85246	85343	85441	85538	85636	85733	85831	85928	86026	86124	98
1.85	1. 86221	86319	86416	86514	86612	86709	86807	86904	87002	87100	98
.86	1. 87197	87295	87393	87490	87588	87686	87783	87881	87979	88076	98
.87	1. 88174	88272	88369	88467	88565	88662	88760	88858	88955	89053	98
.88	1. 89151	89249	89346	89444	89542	89640	89737	89835	89933	90031	98
.89	1. 90128	90226	90324	90422	90519	90617	90715	90813	90911	91008	98
1.90	1. 91106	91204	91302	91400	91498	91595	91693	91791	91889	91987	98
.91	1. 92085	92182	92280	92378	92476	92574	92672	92770	92868	92965	98
.92	1. 93063	93161	93259	93357	93455	93553	93651	93749	93847	93945	98
.93	1. 94043	94140	94238	94336	94434	94532	94630	94728	94826	94924	98
.94	1. 95022	95120	95218	95316	95414	95512	95610	95708	95806	95904	98
1.95	1. 96002	96100	96198	96296	96394	96492	96590	96688	96786	96884	98
.96	1. 96982	97080	97179	97277	97375	97473	97571	97669	97767	97865	98
.97	1. 97963	98061	98159	98257	98356	98454	98552	98650	98748	98846	98
.98	1. 98944	99042	99141	99239	99337	99435	99533	99631	99729	99828	98
.99	1. 99926	2.00024	00122	00220	00318	00417	00515	00613	00711	00809	98

ω_{γ_i}		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ
2.00	2.	00908	01006	01104	01202	01300	01399	01497	01595	01693	01792	98
.01	2.	01890	01988	02086	02184	02283	02381	02479	02577	02676	02774	98
.02	2.	02872	02971	03069	03167	03265	03364	03462	03560	03659	03757	98
.03	2.	03855	03953	04052	04150	04248	04347	04445	04543	04642	04740	98
.04	2.	04838	04937	05035	05133	05232	05330	05428	05527	05625	05724	98
2.05	2.	05822	05920	06019	06117	06215	06314	06412	06511	06609	06707	98
.06	2.	06806	06904	07003	07101	07199	07298	07396	07495	07593	07692	98
.07	2.	07790	07888	07987	08085	08184	08282	08381	08479	08578	08676	98
.08	2.	08774	08873	08971	09070	09168	09267	09365	09464	09562	09661	99
.09	2.	09759	09858	09956	10055	10153	10252	10350	10449	10547	10646	99
2.10	2.	10744	10843	10941	11040	11138	11237	11335	11434	11533	11631	99
.11	2.	11730	11828	11927	12025	12124	12222	12321	12420	12518	12617	99
.12	2.	12715	12814	12912	13011	13110	13208	13307	13405	13504	13603	99
.13	2.	13701	13800	13898	13997	14096	14194	14293	14392	14490	14589	99
.14	2.	14687	14786	14885	14983	15082	15181	15279	15378	15477	15575	99
2.15	2.	15674	15773	15871	15970	16069	16167	16266	16365	16463	16562	99
.16	2.	16661	16759	16858	16957	17055	17154	17253	17352	17450	17549	99
.17	2.	17648	17746	17845	17944	18043	18141	18240	18339	18438	18536	99
.18	2.	18635	18734	18832	18931	19030	19129	19227	19326	19425	19524	99
.19	2.	19622	19721	19820	19919	20018	20116	20215	20314	20413	20511	99
2.20	2.	20610	20709	20808	20907	21005	21104	21203	21302	21401	21499	99
.21	2.	21598	21697	21796	21895	21993	22092	22191	22290	22389	22488	99
.22	2.	22586	22685	22784	22883	22982	23081	23180	23278	23377	23476	99
.23	2.	23575	23674	23773	23871	23970	24069	24168	24267	24366	24465	99
.24	2.	24564	24662	24761	24860	24959	25058	25157	25256	25355	25454	99
2.25	2.	25553	25651	25750	25849	25948	26047	26146	26245	26344	26443	99
.26	2.	26542	26641	26739	26838	26937	27036	27135	27234	27333	27432	99
.27	2.	27531	27630	27729	27828	27927	28026	28125	28224	28323	28422	99
.28	2.	28521	28619	28718	28817	28916	19015	29114	29213	29312	29411	99
.29	2.	29510	29609	29708	29807	29906	30005	30104	30203	30302	30401	99
2.30	2.	30500	30599	30698	30797	30896	30995	31094	31193	31292	31391	99
.31	2.	31490	31589	31688	31787	31886	31986	32085	32184	32283	32382	99
.32	2.	32481	32580	32679	32778	32877	32976	33075	33174	33273	33372	99
.33	2.	33471	33570	33669	33768	33867	33967	34066	34165	34264	34363	99
.34	2.	34462	34561	34660	34759	34858	34957	35056	35156	35255	35354	99
2.35	2.	35453	35552	35651	35750	35849	35948	36047	36146	36246	36345	99
.36	2.	36444	36543	36642	36741	36840	36939	37039	37138	37237	37336	99
.37	2.	37435	37534	37633	37732	37832	37931	38030	38129	38228	38327	99
.38	2.	38426	38526	38625	38724	38823	38922	39021	39121	39220	39319	99
.39	2.	39418	39517	39616	39716	39815	39914	40013	40112	40211	40311	99
2.40	2.	40410	40509	40608	40707	40807	40906	41005	41104	41203	41303	99
.41	2.	41402	41501	41600	41699	41799	41898	41997	42096	42195	42295	99
.42	2.	42394	42493	42592	42691	42791	42890	42989	43088	43188	43287	99
.43	2.	43386	43485	43585	43684	43783	43882	43981	44081	44180	44279	99
.44	2.	44378	44478	44577	44676	44775	44875	44974	45073	45172	45272	99
2.45	2.	45371	45470	45569	45669	45768	45867	45967	46066	46165	46264	99
.46	2.	46364	46463	46562	46661	46761	46860	46959	47059	47158	47257	99
.47	2.	47356	47456	47555	47654	47754	47853	47952	48052	48151	48250	99
.48	2.	48349	48449	48548	48647	48747	48846	48945	49045	49144	49243	99
.49	2.	49343	49442	49541	49640	49740	49839	49938	50038	50137	50236	99

ω_{fi}		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ
2.50	2.	50336	50435	50534	50634	50733	50832	50932	51031	51130	51230	99
.51	2.	51329	51428	51528	51627	51727	51826	51925	52025	52124	52223	99
.52	2.	52323	52422	52521	52621	52720	52819	52919	53018	53118	53217	99
.53	2.	53316	53416	53515	53614	53714	53813	53913	54012	54111	54211	99
.54	2.	54310	54409	54509	54608	54708	54807	54906	55006	55105	55205	99
2.55	2.	55304	55403	55503	55602	55701	55801	55900	56000	56099	56199	99
.56	2.	56298	56397	56497	56596	56696	56795	56894	56994	57093	57193	99
.57	2.	57292	57391	57491	57590	57690	57789	57889	57988	58087	58187	99
.58	2.	58286	58386	58485	58585	58684	58783	58883	58982	59082	59181	99
.59	2.	59281	59380	59479	59579	59678	59778	59877	59977	60076	60176	99
2.60	2.	60275	60375	60474	60573	60673	60772	60872	60971	61071	61170	99
.61	2.	61270	61369	61469	61568	61667	61767	61866	61966	62065	62165	99
.62	2.	62264	62364	62463	62563	62662	62762	62861	62961	63060	63160	99
.63	2.	63259	63359	63458	63558	63657	63757	63856	63955	64055	64154	99
.64	2.	64254	64353	64453	64552	64652	64751	64851	64950	65050	65149	99
2.65	2.	65249	65348	65448	65547	65647	65746	65846	65945	66045	66145	99
.66	2.	66244	66344	66443	66543	66642	66742	66841	66941	67040	67140	99
.67	2.	67239	67339	67438	67538	67637	67737	67836	67936	68035	68135	99
.68	2.	68234	68334	68434	68533	68633	68732	68832	68931	69031	69130	99
.69	2.	69230	69329	69429	69528	69628	69728	69827	69927	70026	70126	99
2.70	2.	70225	70325	70424	70524	70624	70723	70823	70922	71022	71121	100
.71	2.	71221	71320	71420	71520	71619	71719	71818	71918	72017	72117	100
.72	2.	72216	72316	72416	72515	72615	72714	72814	72913	73013	73113	100
.73	2.	73212	73312	73411	73511	73611	73710	73810	73909	74009	74108	100
.74	2.	74208	74308	74407	74507	74606	74706	74806	74905	75005	75104	100
2.75	2.	75204	75303	75403	75503	75602	75702	75801	75901	76001	76100	100
.76	2.	76200	76299	76399	76499	76598	76698	76797	76897	76997	77096	100
.77	2.	77196	77296	77395	77495	77594	77694	77794	77893	77993	78092	100
.78	2.	78192	78292	78391	78491	78591	78690	78790	78889	78989	79089	100
.79	2.	79188	79288	79387	79487	79587	79686	79786	79886	79985	80085	100
2.80	2.	80185	80284	80384	80483	80583	80683	80782	80882	80982	81081	100
.81	2.	81181	81281	81380	81480	81579	81679	81779	81878	81978	82078	100
.82	2.	82177	82277	82377	82476	82576	82676	82775	82875	82974	83074	100
.83	2.	83174	83273	83373	83473	83572	83672	83772	83871	83971	84071	100
.84	2.	84170	84270	84370	84469	84569	84669	84768	84868	84968	85067	100
2.85	2.	85167	85267	85366	85466	85566	85665	85765	85865	85964	86064	100
.86	2.	86164	86263	86363	86463	86562	86662	86762	86861	86961	87061	100
.87	2.	87160	87260	87360	87459	87559	87659	87759	87858	87958	88058	100
.88	2.	88157	88257	88357	88456	88556	88656	88755	88855	88955	89054	100
.89	2.	89154	89254	89354	89453	89553	89653	89752	89852	89952	90051	100
2.90	2.	90151	90251	90351	90450	90550	90650	90749	90849	90949	91048	100
.91	2.	91148	91248	91348	91447	91547	91647	91746	91846	91946	92045	100
.92	2.	92145	92245	92345	92444	92544	92644	92743	92843	92943	93043	100
.93	2.	93142	93242	93342	93441	93541	93641	93741	93840	93940	94040	100
.94	2.	94140	94239	94339	94439	94538	94638	94738	94838	94937	95037	100
2.95	2.	95137	95236	95336	95436	95536	95635	95735	95835	95935	96034	100
.96	2.	96134	96234	96334	96433	96533	96633	96732	96832	96932	97032	100
.97	2.	97131	97231	97331	97431	97530	97630	97730	97830	97929	98029	100
.98	2.	98129	98229	98328	98428	98528	98628	98727	98827	98927	99026	100
.99	2.	99126	99226	99326	99425	99525	99625	99725	99824	99924	3.00024	100

$\omega_{\gamma i}$		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ
3.00	3.	00124	00223	00323	00423	00523	00623	00722	00822	00922	01022	100
.01	3.	01121	01221	01321	01421	01520	01620	01720	01820	01919	02019	100
.02	3.	02119	02219	02318	02418	02518	02618	02717	02817	02917	03017	100
.03	3.	03117	03216	03316	03416	03516	03615	03715	03815	03915	04014	100
.04	3.	04114	04214	04314	04414	04513	04613	04713	04813	04912	05012	100
3.05	3.	05112	05212	05312	05411	05511	05611	05711	05810	05910	06010	100
.06	3.	06110	06210	06309	06409	06509	06609	06708	06808	06908	07008	100
.07	3.	07108	07207	07307	07407	07507	07607	07706	07806	07906	08006	100
.08	3.	08105	08205	08305	08405	08505	08604	08704	08804	08904	09004	100
.09	3.	09103	09203	09303	09403	09503	09602	09702	09802	09902	10002	100
3.10	3.	10101	10201	10301	10401	10500	10600	10700	10800	10900	10999	100
.11	3.	11099	11199	11299	11399	11499	11598	11698	11798	11898	11998	100
.12	3.	12097	12197	12297	12397	12497	12596	12696	12796	12896	12996	100
.13	3.	13095	13195	13295	13395	13495	13594	13694	13794	13894	13994	100
.14	3.	14094	14193	14293	14393	14493	14593	14692	14792	14892	14992	100
3.15	3.	15092	15191	15291	15391	15491	15591	15691	15790	15890	15990	100
.16	3.	16090	16190	16289	16389	16489	16589	16689	16789	16888	16988	100
.17	3.	17088	17188	17288	17388	17487	17587	17687	17787	17887	17987	100
.18	3.	18086	18186	18286	18386	18486	18585	18685	18785	18885	18985	100
.19	3.	19085	19184	19284	19384	19484	19584	19684	19783	19883	19983	100
3.20	3.	20083	20183	20283	20382	20482	20582	20682	20782	20882	20981	100
.21	3.	21081	21181	21281	21381	21481	21580	21680	21780	21880	21980	100
.22	3.	22080	22180	22279	22379	22479	22579	22679	22779	22878	22978	100
.23	3.	23078	23178	23278	23378	23477	23577	23677	23777	23877	23977	100
.24	3.	24077	24176	24276	24376	24476	24576	24676	24775	24875	24975	100
3.25	3.	25075	25175	25275	25375	25474	25574	25674	25774	25874	25974	100
.26	3.	26074	26173	26273	26373	26473	26573	26673	26773	26872	26972	100
.27	3.	27072	27172	27272	27372	27472	27571	27671	27771	27871	27971	100
.28	3.	28071	28171	28270	28370	28470	28570	28670	28770	28870	28969	100
.29	3.	29069	29169	29269	29369	29469	29569	29668	29768	29868	29968	100
3.30	3.	30068	30168	30268	30367	30467	30567	30667	30767	30867	30967	100
.31	3.	31067	31166	31266	31366	31466	31566	31666	31766	31865	31965	100
.32	3.	32065	32165	32265	32365	32465	32565	32664	32764	32864	32964	100
.33	3.	33064	33164	33264	33364	33463	33563	33663	33763	33863	33963	100
.34	3.	34063	34163	34262	34362	34462	34562	34662	34762	34862	34962	100
3.35	3.	35061	35161	35261	35361	35461	35561	35661	35761	35860	35960	100
.36	3.	36060	36160	36260	36360	36460	36560	36659	36759	36859	36959	100
.37	3.	37059	37159	37259	37359	37459	37558	37658	37758	37858	37958	100
.38	3.	38058	38158	38258	38357	38457	38557	38657	38757	38857	38957	100
.39	3.	39057	39157	39256	39356	39456	39556	39656	39756	39856	39956	100
3.40	3.	40056	40155	40255	40355	40455	40555	40655	40755	40855	40955	100
.41	3.	41054	41154	41254	41354	41454	41554	41654	41754	41854	41953	100
.42	3.	42053	42153	42253	42353	42453	42553	42653	42753	42853	42952	100
.43	3.	43052	43152	43252	43352	43452	43552	43652	43752	43851	43951	100
.44	3.	44051	44151	44251	44351	44451	44551	44651	44751	44850	44950	100
3.45	3.	45050	45150	45250	45350	45450	45550	45650	45750	45849	45949	100
.46	3.	46049	46149	46249	46349	46449	46549	46649	46749	46848	46948	100
.47	3.	47048	47148	47248	47348	47448	47548	47648	47748	47848	47947	100
.48	3.	48047	48147	48247	48347	48447	48547	48647	48747	48847	48946	100
.49	3.	49046	49146	49246	49346	49446	49546	49646	49746	49845	49946	100

Tablica II

Znormalizowana elementarna logarytmiczna charakterystyka amplitudowa

$$L_{\gamma i}(\omega_{\gamma i}) = \frac{1}{2}\ln[1+e^{2\omega_{\gamma i}}]$$

$\omega_{\gamma i}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3.5	3. 50046	51045	52044	53043	54042	55041	56040	57040	58039	59038
.6	3. 60037	61037	62036	63035	64034	65034	66033	67032	68032	69031
.7	3. 70031	71030	72029	73029	74028	75028	76027	77027	78026	79026
.8	3. 80025	81025	82024	83024	84023	85023	86022	87022	88021	89021
.9	3. 90020	91020	92020	93019	94019	95019	96018	97018	98017	99017
4.0	4. 00017	01016	02016	03016	04015	05015	06015	07015	08014	09014
.1	4. 10014	11013	12013	13013	14013	15012	16012	17012	18012	19011
.2	4. 20011	21011	22011	23011	24010	25010	26010	27010	28010	29009
.3	4. 30009	31009	32009	33009	34008	35008	36008	37008	38008	39008
.4	4. 40008	41007	42007	43007	44007	45007	46007	47007	48006	49006
4.5	4. 50006	51006	52006	53006	54006	55006	56005	57005	58005	59005
.6	4. 60005	61005	62005	63005	64005	65005	66004	67004	68004	69004
.7	4. 70004	71004	72004	73004	74004	75004	76004	77004	78004	79003
.8	4. 80003	81003	82003	83003	84003	85003	86003	87003	88003	89003
.9	4. 90003	91003	92003	93003	94003	95003	96002	97002	98002	99002
5.0	5. 00002	01002	02002	03001	04001	05001	06001	07001	08000	09000

Poprawki proporcjonalne

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1
2	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2
3	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3,0	3
4	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6	4,0	4
5	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5
6	0,6	1,2	1,8	2,4	3,0	3,6	4,2	4,8	5,4	6,0	6
7	0,7	1,4	2,1	2,8	3,5	4,2	4,9	5,6	6,3	7,0	7
8	0,8	1,6	2,4	3,2	4,0	4,8	5,6	6,4	7,2	8,0	8
9	0,9	1,8	2,7	3,6	4,5	5,4	6,3	7,2	8,1	9,0	9
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	1
2	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	2
3	3,3	3,6	3,9	4,2	4,5	4,8	5,1	5,4	5,7	6,0	3
4	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4	6,8	7,2	7,6	8,0	4
5	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0	5
6	6,6	7,2	7,8	8,4	9,0	9,6	10,2	10,8	11,4	12,0	6
7	7,7	8,4	9,1	9,8	10,5	11,2	11,9	12,6	13,3	14,0	7
8	8,8	9,6	10,4	11,2	12,0	12,8	13,6	14,4	15,2	16,0	8
9	9,9	10,8	11,7	12,6	13,5	14,4	15,3	16,2	17,1	18,0	9
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
1	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	1
2	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,2	5,4	5,6	5,8	6,0	2
3	6,3	6,6	6,9	7,2	7,5	7,8	8,1	8,4	8,7	9,0	3
4	8,4	8,8	9,2	9,6	10,0	10,4	10,8	11,2	11,6	12,0	4
5	10,5	11,0	11,5	12,0	12,5	13,0	13,5	14,0	14,5	15,0	5
6	12,6	13,2	13,8	14,4	15,0	15,6	16,2	16,8	17,4	18,0	6
7	14,7	15,4	16,1	16,8	17,5	18,2	18,9	19,6	20,3	21,0	7
8	16,8	17,6	18,4	19,2	20,0	20,8	21,6	22,4	23,2	24,0	8
9	18,9	19,8	20,7	21,6	22,5	23,4	24,3	25,2	26,1	27,0	9
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
1	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	1
2	6,2	6,4	6,6	6,8	7,0	7,2	7,4	7,6	7,8	8,0	2
3	9,3	9,6	9,9	10,2	10,5	10,8	11,1	11,4	11,7	12,0	3
4	12,4	12,8	13,2	13,6	14,0	14,4	14,8	15,2	15,6	16,0	4
5	15,5	16,0	16,5	17,0	17,5	18,0	18,5	19,0	19,5	20,0	5
6	18,6	19,2	19,8	20,4	21,0	21,6	22,2	22,8	23,4	24,0	6
7	21,7	22,4	23,1	23,8	24,5	25,2	25,9	26,6	27,3	28,0	7
8	24,8	25,6	26,4	27,2	28,0	28,8	29,6	30,4	31,2	32,0	8
9	27,9	28,8	29,7	30,6	31,5	32,4	33,3	34,2	35,1	36,0	9
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
1	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	1
2	8,2	8,4	8,6	8,8	9,0	9,2	9,4	9,6	9,8	10,0	2
3	12,3	12,6	12,9	13,2	13,5	13,8	14,1	14,4	14,7	15,0	3
4	16,4	16,8	17,2	17,6	18,0	18,4	18,8	19,2	19,6	20,0	4
5	20,5	21,0	21,5	22,0	22,5	23,0	23,5	24,0	24,5	25,0	5
6	24,6	25,2	25,8	26,4	27,0	27,6	28,2	28,8	29,4	30,0	6
7	28,7	29,4	30,1	30,8	31,5	32,2	32,9	33,6	34,3	35,0	7
8	32,8	33,6	34,4	35,2	36,0	36,8	37,6	38,4	39,2	40,0	8
9	36,9	37,8	38,7	39,6	40,5	41,4	42,3	43,2	44,1	45,0	9

	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	
1	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0	1
2	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0	2
3	15,3	15,6	15,9	16,2	16,5	16,8	17,1	17,4	17,7	18,0	3
4	20,4	20,8	21,2	21,6	22,0	22,4	22,8	23,2	23,6	24,0	4
5	25,5	26,0	26,5	27,0	27,5	28,0	28,5	29,0	29,5	30,0	5
6	30,6	31,2	31,8	32,4	33,0	33,6	34,2	34,8	35,4	36,0	6
7	35,7	36,4	37,1	37,8	38,5	39,2	39,9	40,6	41,3	42,0	7
8	40,8	41,6	42,4	43,2	44,0	44,8	45,6	46,4	47,2	48,0	8
9	45,9	46,8	47,7	48,6	49,5	50,4	51,3	52,2	53,1	54,0	9
	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	
1	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0	1
2	12,2	12,4	12,6	12,8	13,0	13,2	13,4	13,6	13,8	14,0	2
3	18,3	18,6	18,9	19,2	19,5	19,8	20,1	20,4	20,7	21,0	3
4	24,4	24,8	25,2	25,6	26,0	26,4	26,8	27,2	27,6	28,0	4
5	30,5	31,0	31,5	32,0	32,5	33,0	33,5	34,0	34,5	35,0	5
6	36,6	37,2	37,8	38,4	39,0	39,6	40,2	40,8	41,4	42,0	6
7	42,7	43,4	44,1	44,8	45,5	46,2	46,9	47,6	48,3	49,0	7
8	48,8	49,6	50,4	51,2	52,0	52,8	53,6	54,4	55,2	56,0	8
9	54,9	55,8	56,7	57,6	58,5	59,4	60,3	61,2	62,1	63,0	9
	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	
1	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8,0	1
2	14,2	14,4	14,6	14,8	15,0	15,2	15,4	15,6	15,8	16,0	2
3	21,3	21,6	21,9	22,2	22,5	22,8	23,1	23,4	23,7	24,0	3
4	28,4	28,8	29,2	29,6	30,0	30,4	30,8	31,2	31,6	32,0	4
5	35,5	36,0	36,5	37,0	37,5	38,0	38,5	39,0	39,5	40,0	5
6	42,6	43,2	43,8	44,4	45,0	45,6	46,2	46,8	47,4	48,0	6
7	49,7	50,4	51,1	51,8	52,5	53,2	53,9	54,6	55,3	56,0	7
8	56,8	57,6	58,4	59,2	60,0	60,8	61,6	62,4	63,2	64,0	8
9	63,9	64,8	65,7	66,6	67,5	68,4	69,3	70,2	71,1	72,0	9
	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	
1	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0	1
2	16,2	16,4	16,6	16,8	17,0	17,2	17,4	17,6	17,8	18,0	2
3	24,3	24,6	24,9	25,2	25,5	25,8	26,1	26,4	26,7	27,0	3
4	32,4	32,8	33,2	33,6	34,0	34,4	34,8	35,2	35,6	36,0	4
5	40,5	41,0	41,5	42,0	42,5	43,0	43,5	44,0	44,5	45,0	5
6	48,6	49,2	49,8	50,4	51,0	51,6	52,2	52,8	53,4	54,0	6
7	56,7	57,4	58,1	58,8	59,5	60,2	60,9	61,6	62,3	63,0	7
8	64,8	65,6	66,4	67,2	68,0	68,8	69,6	70,4	71,2	72,0	8
9	72,9	73,8	74,7	75,6	76,5	77,4	78,3	79,2	80,1	81,0	9
	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	
1	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9	10,0	1
2	18,2	18,4	18,6	18,8	19,0	19,2	19,4	19,6	19,8	20,0	2
3	27,3	27,6	27,9	28,2	28,5	28,8	29,1	29,4	29,7	30,0	3
4	36,4	36,8	37,2	37,6	38,0	38,4	38,8	39,2	39,6	40,0	4
5	45,5	46,0	46,5	47,0	47,5	48,0	48,5	49,0	49,5	50,0	5
6	54,6	55,2	55,8	56,4	57,0	57,6	58,2	58,8	59,4	60,0	6
7	63,7	64,4	65,1	65,8	66,5	67,2	67,9	68,6	69,3	70,0	7
8	72,8	73,6	74,4	75,2	76,0	76,8	77,6	78,4	79,2	80,0	8
9	81,9	82,8	83,7	84,6	85,5	86,4	87,3	88,2	89,1	90,0	9

J. CHIRKOWSKI

The APPROXIMATION OF MAGNITUDE-FREQUENCY CHARACTERISTIC OF LINEAR ELECTRIC NETWORK BY MEANS OF MODIFIED LOGARITHMIC CHARACTERISTICS METHOD

Summary

The author presents the modified method of approximation by means of logarithmic characteristic, which greatly simplifies the difficult process of the approximation of magnitude frequency characteristic of linear electric network.

The modification of the logarithmic characteristics method consists in the introduction of normalized logarythmic pulsation $\omega_{\gamma i}$ and normalized elementary logarythmic magnitude-frequency characteristic $L_{\gamma i}(\omega_{\gamma i}^{\sim})$, which was given in the form of adequate tables.

Thanks to this approach to modification all complicated and intricate mathematical computations were replaced by the simplest arithmetical operations in the process of approximation by addition and substraction.

Practice has fully confirmed the advantages of the modified method of approximation.

It has been shown among others, that the time necessary to accomplish the approximation of magnitude-frequency characteristic by means of the modified method (with sufficient accuracy) is several times shorter than the time needed to execute this approximation in the classical way.

J. CHIRKOWSKI

L'APPROXIMATION DE LA CARACTÉRISTIQUE AMPLITUDE-FRÉQUENCE DU SCHÉMA LINÉAIRE ÉLECTRIQUE D'APRÈS UNE MÉTHODE MODIFIÉE DES CARACTÉRISTIQUES LOGARITHMIQUES

Résumé

On a présenté dans l'oeuvre une méthode modifiée de l'approximation par des caractéristiques logarithmiques, qui simplifie sensiblement et réduit l'action onéreuse de l'approximation de la caractéristique amplitude-fréquence du schéma électrique linéaire.

La modification de la méthode des caractéristiques logarithmiques consiste à introduire la pulsation logarithmique normalisée $\omega_{\gamma i}$ ainsi qu'une caractéristique amplitude-fréquence logarithmique élémentaire normalisée $L_{\gamma i}(\omega_{\gamma i}^{\sim})$, qui a été donnée sous la forme des tableaux convenablement élaborés. Grâce à une modification effectuée de cette manière, tous les calculs mathématiques compliqués et onéreux au cours de l'approximation ont été remplacés par les opérations arithmétiques les plus simples — par l'addition et la soustraction.

La pratique a prouvé totalement les valeurs de la méthode modifiée de l'approximation. Entre autres il parut, que la durée de travail nécessaire à accomplir l'approximation de la caractéristique amplitude-fréquence d'après la méthode modifiée (à l'exactitude suffisamment élevée) est plus de dix fois plus courte que le temps nécessaire à effectuer cette approximation de la manière classique.

Е. ХИРКОВСКИ

АППРОКСИМАЦИЯ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ МОДИФИЦИРОВАННЫМ МЕТОДОМ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Резюме

В статье представлен модифицированный метод аппроксимации логарифмическими характеристиками, который значительно упрощает и сокращает трудный процесс аппроксимации амплитудно-частотной характеристики линейной электрической цепи.

Модификация метода логарифмических характеристик основана на введении логарифмической нормализированной пульсации $\omega_{\gamma i}$, а также нормализированной элементарной логарифмической амплитудно-частотной характеристики $L_{\gamma i}(\omega_{\gamma i})$, которая была приведена в виде соответственно составленных таблиц.

Благодаря так проведенной модификации все сложные и трудные математические вычисления в процессе аппроксимации были заменены наиболее простыми арифметическими действиями — сложением и вычитанием.

Практика вполне справдала достоинства модифицированного метода аппроксимации. Между прочим оказалось, что время нужное для выполнения аппроксимации амплитудно-частотной характеристики модифицированным методом (с достаточно большой точностью) сокращается более чем в десять раз по сравнению с временем, которое необходимо для выполнения такой аппроксимации классическим способом.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 15, 3, ss. 467—478
INSTYTUT TECHNOLOGII ELEKTRONOWEJ PAN, WARSZAWA 1969

Kalorymetryczna metoda pomiaru strat w miniaturowych rdzeniach ferrytowych

WALERIAN GRUSZCZYŃSKI, EUGENIUSZ KLUGMANN, HENRYK WIERZBA (GDAŃSK)

Katedra Teletransmisji Politechniki Gdańskiej

Otrzymano 4.9.1968

W artykule zreferowano zagadnienie strat w substancjach magnetycznych w oparciu o teorię klasyczną i kwantową oraz omówiono problem rozdziału strat w słabych polach z uwzględnieniem relaksacji spinowej. Pomiarów dokonano w skonstruowanym kalorymetrze różnicowym przy pomocy termistorów w układzie mostkowym. Jako wskaźnika użyto galwanometru. Uzyskano czułość temperaturową $5 \cdot 10^{-4}$ °C. Dokonano kalorymetrycznych pomiarów strat mocy w miniaturowych rdzeniach ferrytowych z dokładnością do 25 μW, w zakresie częstotliwości od 100 kHz do 1 MHz — dla kilku wartości indukcji magnetycznej. Uzyskane rezultaty porównano z wynikami otrzymanymi z pomiarów impedancji. Straty właściwe w funkcji indukcji magnetycznej w skali podwójnie logarytmicznej zmieniają się liniowo.

1. WSTĘP

W pełnym bilansie energetycznym strat mocy występujących w materiałach magnetycznych podczas przemagnesowania należy uwzględnić straty na histerezę magnetyczną, prądy wirowe, opóźnienie magnetyczne i relaksację spinową. Z wyłączeniem mikrofalowego zakresu częstotliwości, w którym przenikalność magnetyczna przyjmuje charakter tensorowy, można w celu określenia strat posługiwać się przenikalnością zespoloną

$$\mu = \mu_1 - i\mu_2. \tag{1}$$

Straty mocy powodują bowiem odstawanie w fazie wektora indukcji magnetycznej względem wektora natężenia pola o kąt δ, którego tangens przyjęto jako miarę współczynnika strat.

Z przedstawienia tych wektorów w układzie Gaussa (rys. 1) wynika:

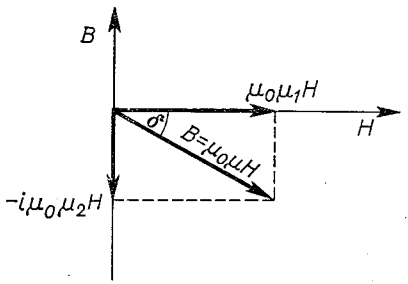
$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \tag{2}$$

gdzie:

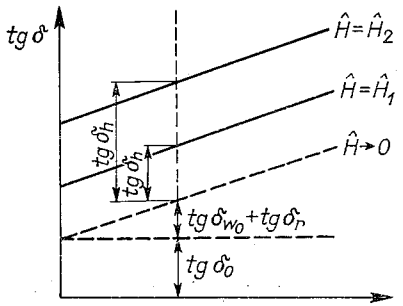
$$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\delta_h + \operatorname{tg}\delta_{w0} + \operatorname{tg}\delta_0 + \operatorname{tg}\delta_r, \tag{3}$$

tzn. współczynnik pełnych strat mocy składa się addytywnie ze współczynnika strat na histerezę, prądy wirowe, opóźnienie magnetyczne i relaksację spinową. Ilustruje to również rys. 2 przedstawiający Jordanowską metodę rozdziału strat.

Do bezpośrednich metod wyznaczenia strat w ferro i ferrimagnetykach należą metody cieplne, w których moc pełnych strat wyznacza się kalorymetrycznie, mierząc bezpośrednio ilość ciepła wydzielonego w próbce, oraz metody elektryczne, gdzie moc strat wyznacza się mierząc w różnych układach składową czynną całkowitej mocy prądu płynącego w uzwojeniu rdzenia magnetycznego.



Rys. 1. Geometryczne przedstawienie zespolonej przenikalności magnetycznej



Rys. 2. Graficzna metoda rozdziału strat, według Jordana

Do pośrednich należą metody pozwalające określić pole powierzchni objęte pętlą histerezy przy pomocy ferrometru lub ferrografu i metody pomiaru parametrów obwodów elektrycznych z badanym rdzeniem, przy pomocy których znaleźć można lub obliczyć całkowitą moc strat.

Parametry do określenia mocy strat mierzy się przy pomocy różnych układów mostkowych i potencjometrycznych oraz mierników dobroci. Straty w rdzeniach ferrytowych, w odróżnieniu od litych — metalicznych magnetyków — pochodzą przede wszystkim od histerezy magnetycznej. Dla słabych pól i niskich częstotliwości są one wielkością stałą. Jednak dla indukcji powyżej 10 Gs i częstotliwości powyżej 20 kHz współczynnik strat na histerezę przestaje być wielkością stałą i jego znajomość nie wystarcza już do określenia strat w ferrytach. Począwszy od pewnej częstotliwości zaczyna szybko rosnąć współczynnik strat na opóźnienie magnetyczne, tak że udział strat na opóźnienie magnetyczne staje się w zakresie częstotliwości radiowych przeważający, a w zakresie wysokich częstotliwości mamy do czynienia z polami rzędu milierstedów, tak, że do określenia strat wystarczy wówczas jedynie znajomość współczynnika na opóźnienie magnetyczne [1].

2. STRATY NA HISTEREZĘ

Z pierwszej zasady termodynamiki w odniesieniu do substancji magnetycznych wynika, że elementarna zmiana energii wewnętrznej wywołana zmianą magnesowania

$$dU = \delta Q + \delta L, \tag{4}$$

gdzie wyrażenie: $\delta L = HdJ$ przedstawia elementarną pracę namagnesowania. Ponieważ energia wewnętrzna U jest funkcją jednoznaczną temperatury i objętości, więc przy jednorazowym izotermicznym obiegu pętli histerezy:

$$\oint dU = \oint \delta Q + \oint HdJ = 0. \tag{5}$$

Wynika stąd, że przy obiegu pętli histerezy (przemagnesowaniu substancji ferromagnetycznej) wydziela się pewna ilość ciepła, tzw. ciepło histerezy. Jeżeli natężenie pola magnetycznego ma przebieg sinusoidalny:

$$H = \hat{H}\cos\omega t, \tag{6}$$

to praca namagnesowania:

$$L = \oint HdJ = \frac{1}{4\pi}\oint HdB$$

obliczona na jeden cykl w polach słabych jest równa pracy fali podstawowej i przedstawia całkowitą powierzchnię pętli Rayleigha. W tym obszarze pól:

$$B = (\mu_0 + \nu\hat{H})\hat{H}\cos\omega t + \frac{4}{3\pi}\nu\hat{H}^2\sin\omega t = \hat{B}\cos(\omega t - \delta_h) \tag{8}$$

i tangens kąta strat na histerezę:

$$\operatorname{tg}\delta_h = \frac{4\nu\hat{H}}{3\pi(\mu_0 + \nu\hat{H})} = \frac{4\nu\hat{H}}{3\pi\mu_m} \tag{9}$$

nie zależy od częstotliwości. Stąd otrzymujemy również pracę na przemagnesowanie wyrażoną poprzez tangens kąta strat:

$$L_h = \frac{1}{4}\hat{H}\hat{B}\sin\delta_h = \frac{1}{4}H_m B_m \operatorname{tg}\delta_h, \tag{10}$$

gdzie $H_m = \hat{H}$ oraz $B_m = \hat{B}\cos\delta_h$ są wartościami maksymalnymi natężenia pola oraz indukcji magnetycznej.

3. STRATY NA PRĄDY WIROWE I ROZDZIAŁ STRAT

W teorii klasycznej oblicza się straty mocy na prądy wirowe dla przypadku granicznego — małych częstotliwości i słabych pól. Przy tym zakłada się, że zarówno natężenie pola, jak i indukcja są w pierwszym przybliżeniu w całym przekroju poprzecznym próbki jednorodne. Zaniedbując więc ekranujące działanie prądów wirowych, zakłada się, że amplituda indukcji pozostaje nie zmieniona, występuje natomiast przesunięcie fazowe między $B(t)$ i $H(t)$. Przy tych założeniach tangens kąta strat na prądy wirowe w polu sinusoidalnym np. dla blachy o grubości d i gęstości ϱ[2] wynosi:

$$\operatorname{tg}\delta_w = \frac{\omega\mu_0 d^2}{12\varrho} \tag{11}$$

i jest liniową funkcją częstotliwości. Jordan [3] dokonał doświadczalnego rozdziału strat wykreślając tangens kąta strat w funkcji częstotliwości (rys. 2).

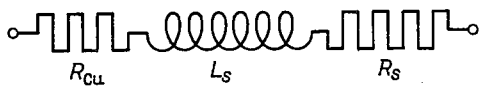
Gdyby straty na histerezę i prądy wirowe były jedynymi stratami mocy występującymi w próbce, wówczas ekstrapolacja do zera częstotliwości i zerowego pola prowadziłaby do zerowego kąta start. W istocie znajdujemy jednak skończoną, niezależną w pierwszym przybliżeniu od częstotliwości wartość resztkową strat: $\operatorname{tg}\delta_0$. Straty te Jordan przypisał opóźnieniu magnetycznemu: opóźnianie się B względem H w fazie musi bowiem w efekcie prowadzić do powstania dodatkowego przesunięcia fazowego.

Ponieważ zagadnienie start w słabych polach jest szczególnie ważne w teletechnice, problem ten był dokładnie badany w wielu ośrodkach. Richter [4] i Schulze [5] stwierdzili że w nawęglonym żelazie straty resztkowe są zależne od temperatury i częstotliwości, Szczegółowo tą sprawą zajmował się Feldkeller i jego współpracownicy [6]. Stwierdzili oni, że po ekstrapolacji do zerowego pola i po odjęciu strat na prądy wirowe, można w ferromagnetykach wyróżnić dwa typy strat resztkowych [7]:

a) straty zależne wprawdzie od częstotliwości, ale bardzo mało zależne od temperatury (tzw. straty Jordana),

b) straty silnie zależne od częstotliwości i od temperatury (zwane stratami Richtera).

W tej samej próbce mogą występować obydwa rodzaje strat jednocześnie, przy czym straty a) spowodowane są przez opóźnienie fluktuacyjne, pochodzące z fluktuacji termicznych wektora namagnesowania, straty b) natomiast są spowodowane przez opóźnienie dyfuzyjne lub orientacyjne, pochodzące z oddziaływania między atomowymi defek-



Rys. 3. Szeregowy układ zastępczy cewki z rdzeniem R_{Cu} — oporność uzwojenia, R_s — szeregowa oporność strat w rdzeniu, L_s — indukcyjność szeregowa

tami siatki krystalicznej a namagnesowaniem. W zakresie słabych pól (w obszarze Rayleigha) można otrzymać współczynniki charakteryzujące poszczególne rodzaje strat posługując się szeregowym zastępczym układem cewki z rdzeniem z badanego materiału (rys. 3).

Oporność strat R_s i indukcyjność L_s (rys. 3) otrzymuje się z pomiarów mostkowych.

Dla wypadkowego tangensa kąta strat (w słabych polach) otrzymuje się związek empiryczny:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{R_s}{\omega \cdot L_s} = \frac{\mu_i}{2\pi}[a \cdot B_{max} + e \cdot f + c], \tag{12}$$

gdzie:

a — współczynnik strat na histerezę,

e — współczynnik strat na prądy wirowe i relaksację spinową,

c — współczynnik strat resztkowych.

Współczynniki te wyznacza się mierząc R_s i L_s przy różnych częstotliwościach. Powyższy wzór empiryczny jest słuszny dla ferrytów w zakresie częstotliwości poniżej 20 kHz i dla słabych pól magnetycznych.

Landau i Lifszic [8], Döring [9] oraz Becker [10] wykazali, że poruszająca się ścianka domenowa ferromagnetyka na skutek posiadania spinowych momentów magnetycznych zachowuje się tak, jakby posiadała masę. W ruchu tej ścianki w polu magnetycznym przemiennym, na skutek prądów wirowych i z innych jeszcze względów, których w tej pracy nie omawia się, występują siły tarcia. Przy czystym tarciu, pochodzącym od prądów wirowych, rachunek klasyczny, zakładający jednorodność przenikalności, prowadzi do wyrażenia (11). Jeżeli jednak grubość blachy [wyrażenie (11)] jest mała — rzędu średnicy domen, wówczas klasyczny rachunek prądów wirowych nie jest słuszny. Należy wówczas w obliczeniach tarcia uwzględnić strukturę domenową. Obliczenia takie dla pojedynczych

ścianek Blocha wykonali Williams, Schockley i Kittel [11] oraz Polivanov [12], Brouwer [13] i później Pry i Bean [14].

Dla sztywnych, płaskich ścianek domenowych (jednorodne w całym przekroju natężenie pola, niska częstotliwość) otrzymuje się:

$$\operatorname{tg}\delta_w = \frac{8\mu_0\omega d^2}{\pi^3 \varrho}\cdot\frac{l}{d}\sum{}' n^{-3}\operatorname{ctg} h\frac{n\pi l}{d}; \tag{13}$$

$\sum'$ oznacza sumowanie po nieparzystych n.

Z obliczeń Landaua — Lifszica [8] i Beckera [17] przy czystej relaksacji spinowej i zaniedbaniu energii naprężeń mechanicznych otrzymuje się dla tangensa kąta strat relaksacji spinowej:

$$\operatorname{tg}\delta_r = \frac{3\omega\mu_0 lq\lambda\sqrt{K}}{4\pi^2 pJ_s^2\gamma^2\sqrt{A}}, \tag{14}$$

gdzie: $q = 2$ lub 1 dla 180° lub 90° ścianki domenowej — odpowiednio,

λ — częstotliwość relaksacji spinowej,

K — stała energii anizotropii magnetycznej,

$\gamma = \frac{e}{mc}$ — stosunek żyromagnetyczny dla spinu elektronowego,

A — stała energii wymiany.

Problem rozdzielenia strat pochodzących od prądów wirowych i relaksacji spinowej jest trudny ze względu na taką samą zależność od częstotliwości. Ale ponieważ istnieje różna zależność współczynnika start na prądy wirowe i relaksację spinową od grubości np. blachy (stałych materiałowych), Boll [16] dokonał tego rozdziału mierząc stosunek:

$$\beta = \frac{\operatorname{tg}\delta_{w0}+\operatorname{tg}\delta_r}{\operatorname{tg}\delta_{w0}} = p\frac{l}{d}+Q\frac{l}{d^2} = \beta_w+\beta_r, \tag{15}$$

gdzie: P,Q — stałe materiałowe,

l — odległość ścianek Blocha.

Stosunek ten zależy również od wielkości ziaren polikryształu, tekstury oraz od sposobu rozmagnesowania. Inną wartość otrzymuje się np. dla 50% stopu FeNi po rozmagnesowaniu termicznym, a inną sposobem zmiennoprądowym.

4. ZASADA I METODYKA POMIARU STRAT METODĄ KALORYMETRYCZNĄ

Spośród znanych obecnie metod pomiaru strat w materiałach ferromagnetycznych metoda kalorymetryczna najlepiej spełnia współczesne wymagania w zakresie dokładności, adekwatności i prowadzenia pomiarów w szerokim zakresie częstotliwości.

Jeżeli przyjmiemy, że straty mocy w próbce ferromagnetycznej przy jej przemagnesowaniu zamieniają się ostatecznie całkowicie w ciepło, to z równania równowagi cieplnej:

$$Mdt = \sum_{i=1}^{n} c_i m_i dT_i + \alpha S(T-T_o)dt \tag{16}$$

można jednocześnie wyznaczyć moc strat M wydzieloną w naczyniu kalorymetrycznym;

$\sum_i c_i m_i dT_i$ — zmiana ilości ciepła układu kalorymetru w czasie dt,

α — współczynnik przewodnictwa cieplnego układu,

S — pole powierzchni ochładzania układu kalorymetrycznego,

T — temperatura układu w chwili t,

T_o — temperatura otoczenia.

Na równaniu (16) oparta jest zasada pomiaru strat w różnych urządzeniach kalorymetrycznych. Metodę kalorymetryczną cechuje wysoka dokładność pomiaru (błąd pomiaru wynosi ok. 1%) i stosuje się ją w szerokim zakresie częstotliwości — od bardzo niskich do setek megaherców. Dokładność określenia strat tą metodą nie zależy od kształtu krzywej namagnesowania i przebiegu prądu magnesującego (efekty włączeniowe, prądy stałe, prądy zmienne, prądy o dwóch częstotliwościach, prądy impulsowe itd.).

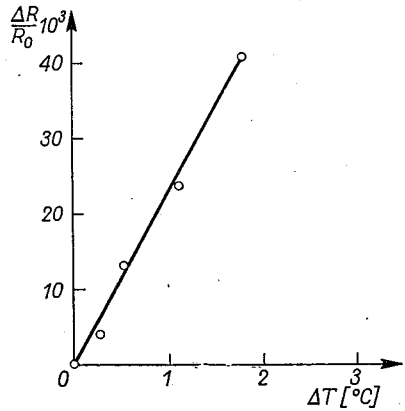
Podstawowym mankamentem metody kalorymetrycznej jest długi czas pomiaru, co ogranicza jej uniwersalność w zastosowaniu. Zatem metody kalorymetryczne do chwili obecnej stosuje się jedynie w badaniach laboratoryjnych, dla uzyskania atestowanych próbek wzorcowych oraz w celu kalibracji innych urządzeń pomiarowych. Pewnym udoskonaleniem tej metody jest zastosowanie w ostatnich latach układu automatycznej regulacji kalorymetru różnicowego do pomiaru strat w rdzeniach toroidalnych w zakresie częstotliwości do 2 MHz. Najprostszym i budzącym nadzieję układem automatycznej regulacji jest układ przerywany impulsowo z automatyką regulacji temperatury [15].

5. REALIZACJA UKŁADU POMIAROWEGO

Konstrukcja kalorymetru różnicowego jest oparta na następującej zasadzie: jeżeli dwa układy różnicowe posiadają jednakowe współczynniki przewodnictwa cieplnego α, to przy doprowadzeniu do nich równych mocy cieplnych układy te nagrzewają się do jednakowych temperatur. Zatem przy znanej mocy wydzielonej w jednym z układów można określić moc wydzieloną w drugim.

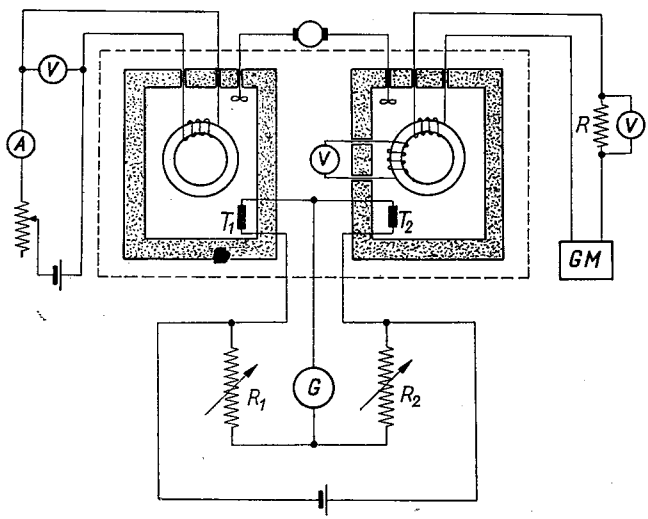
Kalorymetr skonstruowano w ten sposób, że temperatura T naczynia kalorymetrycznego z badanym rdzeniem wzrastała liniowo z czasem, dostatecznie długo. Prostoliniowość zmian temperatury zachodziła w czasie 20—40 minut przy odpowiednio dobranej izolacji cieplnej układu. Po tym czasie w miarę wzrostu temperatury coraz większe są ilości ciepła przekazywane do otoczenia. Tempo wzrostu temperatury obniża się i po 2—4 godzinach, w zależności od rozmiarów kalorymetru, układ zmierza do stanu stacjonarnego — ustaje dalszy wzrost temperatury. Aby znajdujący się w tym stanie układ sprowadzić szybko do warunków początkowych, należy wymienić ciecz w kalorymetrze. Pomiary wykonywano na liniowej części charakterystyki temperaturowej, mierząc po czasie trzech minut zasilania przyrost temperatury ciekłej parafiny, w której znajdował się rdzeń ferrytowy (uzwojenie zasilano prądem zmiennym z generatora mocy). W tym czasie przyrost temperatury ΔT parafiny jest proporcjonalny do strat mocy w próbce i uzwojeniu. Jednocześnie w uzwojeniu drugiego, analogicznego rdzenia, w drugim naczyniu płynął prąd stały o tym samym natężeniu — z akumulatora.

W celu uzyskania wymaganej dokładności pomiaru w obu naczyniach kalorymetru umieszczono identyczną objętość 15 cm^3 parafiny, w której zanurzono badane rdzenie toroidalne ferrytu MnZn o średnicy zewnętrznej 0,497 cm, wewnętrznej 0,307 cm i wyso-



Rys. 4. Krzywa skalowania termistorów w układzie mostkowym

kości 0,302 cm, punktowy termistor oraz mieszadło elektryczne z polistyrenu. Przy stosunku objętości cieczy do objętości próbki 400 : 1 otrzymano podczas mieszania cieczy równomierny rozkład temperatury w całej objętości naczynia.



Rys. 5. Schemat układu pomiarowego

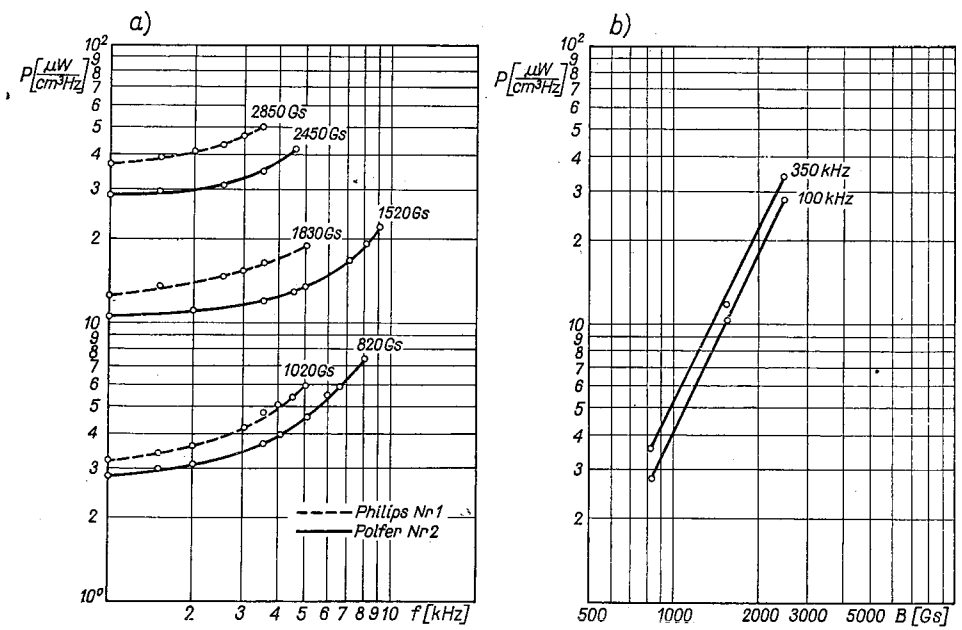
Ponieważ przy wysokich częstotliwościach istnieje możliwość wystąpienia strat na prądy wirowe w ściankach naczynia Dewara, więc naczynie z polistyrenu z parafiną umieszczono w odległości kilku centymetrów od ścian naczynia Dewara. Naczynie Dewara oraz naczynie z cieczą izolowano od zewnątrz pianką polietylenową (ciepło właś-

ciwe $c = (0{,}038—0{,}04)\ \frac{\text{kcal}}{\text{m}^3 \cdot \text{godz.}°\text{C}}$; cały układ posiadał obudowę z grubej emaliowanej blachy żelaznej, która służyła jednocześnie jako ekran pól elektromagnetycznych.

Kalorymetr został obliczony na pomiar małych strat mocy — różnica temperatur w obu naczyniach podczas pomiarów wynosiła ułamki stopnia. Tę różnicę temperatur mierzono w układzie mostka Weatstonea przy pomocy termistorów o oporności 51 kΩ i czułości 4,55%/°C oraz galwanometru magnetoelektrycznego o czułości (0,94—3,21) 10^{-9}A/dz. Termistorowy układ mostkowy wyskalowano w ten sposób, że zmianom oporności $\frac{\Delta R}{R_0} = \frac{R_2(T) - R_2(o)}{R_2(o)}$ w jednej z gałęzi mostka ($R(o) = 10$ kΩ) przyporządkowano różnice temperatur ΔT pomierzone na rtęciowym termometrze Beckmanna z dokładnością do 0,01°C (rys. 4). Próg czułości kalorymetru różnicowego przy zastosowaniu wyżej wymienionych termistorów w układzie mostkowym z galwanometrem (rys. 5) wynosi $5 \cdot 10^{-4}$°C. Taka różnica temperatur odpowiada różnicy mocy wydzielonych w naczyniach kalorymetru wielkości 25 μW.

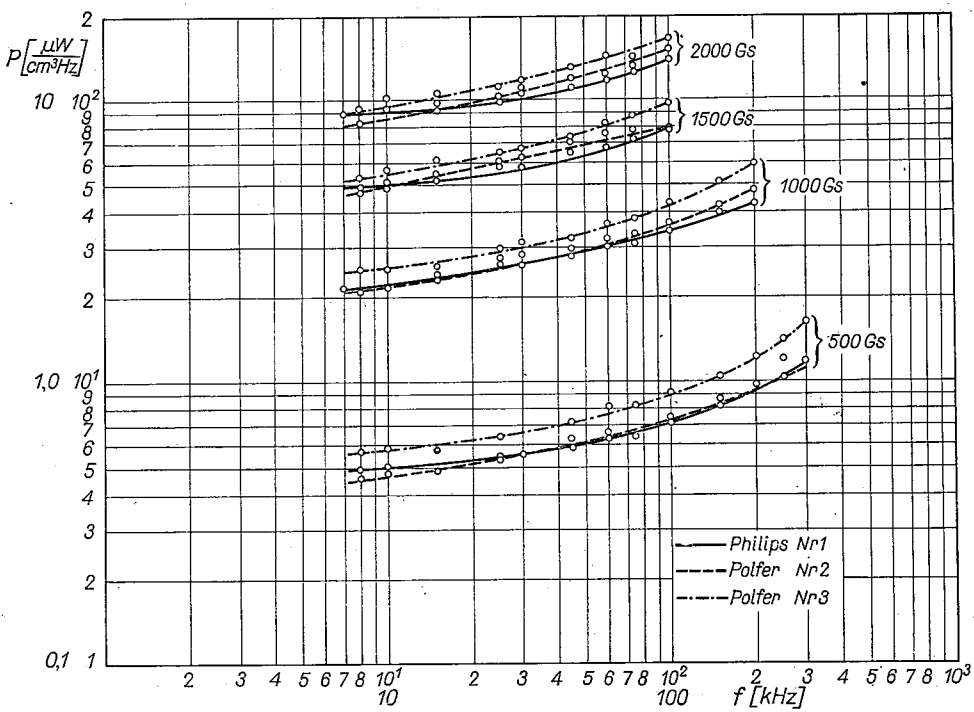
6. REZULTATY POMIARÓW STRAT MOCY W TOROIDALNYCH RDZENIACH FERRYTOWYCH

Na rdzeniach toroidalnych, których wymiary zostały podane powyżej, o podobnych własnościach magnetycznych i indukcji nasycenia rzędu 3000 Gs dokonano pomiarów strat metodą kalorymetryczną (rys. 6) w zakresie częstotliwości od 100 kHz do 1 MHz



Rys. 6. Straty właściwe rdzeni ferrytowych: a) w funkcji częstotliwości (pomiary kalorymetryczne), b) w funkcji indukcji magnetycznej (pomiary kalorymetryczne)

oraz przy pomocy mostka impedancji w zakresie częstotliwości od 10 kHz do 100 kHz (rys. 7). Sinusoidalny prąd magnesujący o wartości skutecznej około 10 mA, 14 mA i 25 mA był regulowany dla ustalenia indukcji magnetycznej. Przy tych wartościach prądów magnesujących otrzymano indukcje magnetyczne w rdzeniu produkcji Polferu odpowiednio



Rys. 7. Straty właściwe rdzeni ferrytowych w funkcji częstotliwości (pomiary na mostku impedancji)

820 Gs, 1520 Gs i 2450 Gs, natomiast w rdzeniu produkcji Philipsa odpowiednio 1020 Gs 1630 Gs, 2850 Gs. Uzwojenie magnesujące zawierało $n_1 = 10$ zwojów licy $7 \times 0{,}07$ mm i było zasilane z generatora mocy wysokiej częstotliwości. Przy wykorzystaniu maksymalnej mocy generatora i przy indukcji 2850 Gs możliwy był pomiar strat w funkcji częstotliwości do 500 kHz. Straty w miedzi wyeliminowano mierząc oddzielnie ciepło wydzielone w uzwojeniu magnesującym (bez rdzenia) metodą tego samego kalorymetru różnicowego w tych samych warunkach.

Celem niniejszej pracy było porównanie pomiarów mostkowych i kalorymetrycznych strat mocy w identycznych rdzeniach ferrytowych. Metoda kalorymetryczna pomiaru pełnych strat mocy pozwala znacznie rozszerzyć zakres pomiarów w funkcji częstotliwości oraz przedstawia potwierdzenie pomiarów mostkowych wykonanych na tych samych rdzeniach przez Tomasza Postupolskiego z Zakładów Materiałów Magnetycznych w Warszawie, którego uprzejmości zawdzięczamy możliwość zamieszczenia wyników przedstawionych na rys. 7 oraz otrzymanie próbek. Z rysunku 6 wynika, że powyżej 500 kHz

straty właściwe $P = \frac{M}{V \cdot f}$, gdzie V — objętość rdzenia, rosną szybko z częstotliwością, a rozdzielenie strat w tym obszarze częstotliwości staje się bezskuteczne. Straty mocy P w funkcji indukcji magnetycznej w skali podwójnie logarytmicznej rosną w zakresie częstotliwości do 500 kHz liniowo (rys. 6b). Przy większych wartościach indukcji magnetycznej, np. w transformatorach siłowych, przyjmuje się zwykle jedynie proporcjonalność strat mocy na prądy wirowe do kwadratu częstotliwości, a na histerezę do pierwszej potęgi częstotliwości, bez teoretycznego uzasadnienia współczynników proporcjonalności. Taki charakter ma również formuła Steinmetza:

$$M = \eta B^{1,6} \cdot f + eB^2 \cdot f^2 \tag{17}$$

na moc pełnych strat, która jest stosowana w zasadzie dla indukcji rzędu 10^3 Gs.

Ponieważ w badanym zakresie częstotliwości w rdzeniach ferrytowych przeważają straty na histerezę, więc zgodnie z formułą (17) wykres strat właściwych w funkcji indukcji magnetycznej w skali podwójnie logarytmicznej (rys. 6b) jest prostoliniowy.

7. ZAKOŃCZENIE

Metody kalorymetryczne pomiaru strat w ferromagnetykach stosowano dotychczas wyłącznie w badaniach laboratoryjnych w celu sprawdzenia i kalibracji innych metod pomiarowych oraz dla otrzymania atestowanych próbek wzorcowych. Wzrost wymagań stawianych w zakresie dokładności pomiaru, konieczność pomiaru strat w złożonych warunkach przemagnesowania materiałów magnetycznych lub przy indukcjach bliskich nasyceniu prowadzi stale do udoskonalenia metody kalorymetrycznej i do wprowadzenia automatyki pomiaru kalorymetrycznego.

Szerokie zastosowanie, szczególnie w zakresie mikrofal, znajduje ostatnio metoda kalorymetrycznego pomiaru strat przy pomocy cieczy opływającej próbkę, w której określa się moc strat mierząc różnicę temperatur cieczy wpływającej i wypływającej z naczynia kalorymetrycznego. Najszersze zastosowanie w praktyce pomiarów magnetycznych ma jednak metoda klasycznego pomiaru ciepła strat w izotermicznym, diatermicznym lub adiabatycznym kalorymetrze.

Mankamentem pomiarów kalorymetrycznych jest stosunkowo długi czas pojedynczego pomiaru, wynoszący od 20—30 minut. Wprowadzenie automatyki skraca ten czas dziesięciokrotnie.

LITERATURA CYTOWANA W TEKSCIE

1. A. Góral, Rozprawy Elektrotechn., **5**, 587, 1959.
2. E. Kneller, Ferromagnetismus, Springer, Berlin 1962.
3. H. Jordan, Elektr. Nachrichtentechnik, **1**, 7, 1924.
4. G. Richter, Ann. der Phys., **29**, 605, 1937.
5. H. Schulze, Wiss. Veröff., Siemens-Werke, **27**, 39, 59, 68, 1938.
6. R. Feldtkeller, H. Wilde, Elektrotechnik und Maschinenbau, **61**, 317, 1943.
7. R. Feldtkeller, H. Hettich, Z. angew. Phys., **2**, 494, 1950.
8. L. Landau, E. Lifszic, Phys. Z. Sowiet., **8**, 153, 1935.

9. W. Döring, Z. Naturforsch, 3a, 373, 1948.
10. R. Becker, J. Phys. Radium, **12**, 332, 1951.
11. H. J. Williams, J. Schockley, C. Kittel, Phys. Rev., **80**, 1090, 1950.
12. K. M. Polivanow, Izwiestia Akadiemii Nauk SSSR, ser. Fiz., **16**, 449, 1952.
13. G. Brouwer, J. Appl. Phys., **26**, 1297, 1955.
14. R. H. Pry, C. P. Bean, J. Appl. Phys., **29**, 532, 1958.
15. O. A. Goraszczenko, Woprosy magnitnich izmierienij, A. N. USSR, Kijew 1961.
16. R. Boll, Diss., Stuttgart 1959 (Berichte, der Arbeitsgemeinschaft Ferromagnetismus, s. 66, 1959).
17. R. Becker, Z. Phys., 123, 134, 1952.

W. GRUSZCZYŃSKI, E. KLUGMANN, H.WIERZBA

CALORIMETRIC METHOD OF LOSSES MEASUREMENT IN MINIATURE FERRITE CORES

Summary

The paper deals with the problem of losses in magnetic substances on the basis of the classical theory and the quantum theory. It also discusses the distribution of losses in weak fields with spin relaxation taken into account. The measurements were carried out by means of bridge connected thermistors in a differentia calorimeter. A galvanometer was used as indicator. Temperature sensitivity obtained was $5 \cdot 10^{-4}$ °C. Calorimetric measurements of power losses were carried out in miniature ferrite cores with exactitude up o 25 μW within the frequency range from 100 kHz to 1 MHz for several values of magnetic induction. The results obtained were compared with the results obtained in impedance measurements. Proper losses in the function of magnetic induction in the doubly logarithmic scale change in a linear way.

W. GRUSZCZYŃSKI, E. KLUGMANN, H. WIERZBA

LA MÉTHODE CALORIMÉTRIQUE DE MESURE DES PERTES DANS LES NOYAUX DE FERRITE MINIATURISÉS

Résumé

On a rapporté dans l'oeuvre présent le problème des pertes dans des matériaux magnétiques en s'appuyant sur la théorie classique ainsi que quantique et on a analysé le problème de la répartition des pertes dans les champs faibles en considérant la rélaxation de spin. Les mesures ont été effectuées dans un calorimètre différentiel construit à l'aide des termistors dans le schéma de pont. On a employé un galvanomètre comme indicateur. On a obtenu la sensibilité de température $5 \cdot 10^{-4}$ °C. On a effectué des mesures calorimétriques des pertes de la puissance dans des noyaux de ferrite miniaturisés d'exactitude 25 μW, dans la bande des fréquences de 100 kHz à 1 MHz — pour quelques valeurs de l'induction magnétique. On a comparé les résultats obtenus avec les résultats obtenus des mesures de l'impédance. Les pertes spécifiques en fonction de l'induction magnétique en échelle double logarithmique se changent linéairement.

В. ГРУЩИНСКИ, Е. КЛЮГМАНН, Г. ВЕЖБА

КАЛОРИМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ПОТЕРЬ В МИНИАТЮРНЫХ ФЕРРИТОВЫХ СЕРДЕЧНИКАХ

Р е з ю м е

В статье изложен вопрос потерь в магнитных веществах на основании классической и квантовой теории, а также рассмотрена проблема распределения потерь в слабых полях с учетом спиновых колебаний. Измерения производились в построенном дифференциальном калориметре с помощью термисторов, соединенных по мостовой схеме. В качестве индикаторного прибора был применен гальванометр. Получена температурная чувствительность $5 \cdot 10^{-4}$ °Ц. Произведены калориметрические измерения потерь мощности в миниатюрных ферритовых сердечниках с точностью до 25 мквт, в диапазоне частот от 100 кгц до 1 Мгц — при нескольких значениях магнитной индукции. Полученные результаты сравнены с результатами, полученными при измерениях импеданса. Удельные потери в зависимости от магнитной индукции в двойном логарифмическом масштабе изменяются линейно.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 15, 3, ss. 479–493
INSTYTUT TECHNOLOGII ELEKTRONOWEJ PAN, WARSZAWA 1969

Optymalizacja układu logicznego negacji sumy metodą ślepego przeszukiwania przestrzeni zmiennych decyzyjnych

STANISŁAW BUDKOWSKI (WARSZAWA)

Katedra Budowy Maszyn Matematycznych Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 20.11.1968

Podano opis formalny zagadnienia optymalizacji układów logicznych, a następnie opisano krótko algorytm optymalizacji metodą ślepego przeszukiwania przestrzeni zmiennych decyzyjnych. W dalszym ciągu opisano zastosowanie tej metody do optymalizacji układu logicznego negacji sumy (NOR) w technice oporowo-tranzystorowej.

1. WSTĘP

Dynamiczny rozwój maszyn cyfrowych i urządzeń automatyki spowodował wzrost wymagań w stosunku do jakości wykorzystywanych układów logicznych. Istotna poprawa jakości układów jest jednak niemożliwa bez stosowania nowych metod projektowania — metod umożliwiających optymalizację tych układów. Układem optymalnym nazywa się układ, w którym wartości cech elementów składowych, wartości napięć zasilających itp. zostały dobrane w ten sposób, aby układ spełniał wszystkie stawiane mu wymagania oraz aby wartość pewnej wyróżnionej cechy (kryterium optymalizacji) osiągała wartość największą lub najmniejszą.

Wśród cech układu, w stosunku do których formułowane są wymagania, można wyróżnić m.in.:

1) rodzaj spełnianej przez układ funkcji logicznej,

2) odporność na zakłócenia, których miarą jest progowy poziom zakłóceń powodujących nieprawidłową pracę układu,

3) dopuszczalne marginesy np. napięć zasilających,

4) „giętkość" logiczna, której miarą jest dopuszczalna liczba wejść i wyjść (dopuszczalne obciążenie); odzwierciedla ona stopień trudności realizacji złożonych sieci logicznych przy dysponowaniu układami o zadanej liczbie wejść i wyjść;

5) bezwładność układu związana z czasem trwania procesów przejściowych,

6) straty mocy, których miarą jest moc tracona w układzie lub w pewnych jego elementach,

7) koszty realizacji, których miarą są ceny wykorzystywanych elementów związane z tolerancjami wartości nominalnych ich cech, liczba odrzuconych sztuk elementów z zakupionej partii (ze względu na konieczność selekcji),

8) niezawodność, której miarą jest prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że układ w zadanym przedziale czasu $[t_0, t_1]$ spełnia narzucone mu wymagania.

Konstruktor układu po ewentualnym uzgodnieniu z przyszłymi użytkownikami formułuje zbiór wymagań w stosunku do cech układu oraz wyróżnia jedną z cech, z punktu widzenia której układ ma być optymalny. Wymagania formułowane są przy tym zwykle w postaci nierówności, tzn. żąda się, aby wartość cechy była nie mniejsza lub nie większa od pewnej ustalonej wartości progowej. Ponieważ cechy układu są pewnymi funkcjami cech elementów składowych, wartości napięć zasilających itp. (zwanych ogólnie zmiennymi decyzyjnymi), określonymi na podstawie znanych metod analizy sieci elektrycznych, więc zbiór wymagań określa jednoznacznie pewien zbiór kombinacji wartości zmiennych decyzyjnych, zwany zbiorem rozwiązań dopuszczalnych lub obszarem sprawności układu.

Problem optymalizacji układu polega na wyszukiwaniu ze zbioru rozwiązań dopuszczalnych takiej kombinacji wartości cech elementów, zwanej rozwiązaniem optymalnym, dla której wyróżniona cecha układu osiąga wartość największą lub najmniejszą.

2. OPIS FORMALNY ZAGADNIENIA OPTYMALIZACJI

Oznaczmy przez $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ zmienne decyzyjne, tzn. wielkości, co do wartości których podejmowana jest decyzja w procesie optymalizacji (np. oporność opornika, pojemność kondensatora, napięcie zasilające).

Oznaczmy przez

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1}$$

wektor decyzyjny, którego składowymi są zmienne decyzyjne; każda realizacja wektora $\mathbf{X}$ określa jednoznacznie pewne rozwiązanie optymalizowanego układu.

Oznaczmy przez $p_l (l = 1, 2, \ldots, k)$ parametry, tzn. te wielkości, których wartości stanowią dane w procesie optymalizacji, a przez

$$\mathbf{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_l)$$

wektor parametryczny.

Oznaczmy przez

$$g_j(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \leqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k \tag{2}$$

układ więzów będący formalnym zapisem wymagań stawianych układowi.

Oznaczmy przez

$$f(\mathbf{X}, \mathbf{P})$$

funkcję celu opisującą wyróżnioną cechę układu, stanowiącą kryterium optymalizacji.

Oznaczmy przez S przestrzeń zmiennych decyzyjnych

$$S = L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_n,$$

przy czym: L_i są zbiorami wartości, jakie przebiegają zmienne decyzyjne x_i, $x_i \in L_i$, a symbol „$\times$" jest symbolem iloczynu kartezjańskiego.

Oznaczmy przez D

$$\{\mathbf{X}: \mathbf{X} \in \mathrm{S}, \mathbf{G}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \leqslant \mathbf{O}\}, \tag{3}$$

przy czym

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \underset{\text{df}}{=} [g_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}), g_2(\mathbf{X}, \mathbf{P}), \ldots, g_k(\mathbf{X}, \mathbf{P})]$$

zbiór rozwiązań dopuszczalnych.

Oznaczmy przez $\mathbf{X}^0$ rozwiązanie optymalne, tzn. taki wektor decyzyjny ze zbioru D, że:

$$(\forall \mathbf{X} \in D)[f(\mathbf{X}^0, \mathbf{P}) \geqslant f(\mathbf{X}, \mathbf{P})] \tag{4}$$

lub

$$(\forall \mathbf{X} \in D)[f(\mathbf{X}^0, \mathbf{P}) \leqslant f(\mathbf{X}, \mathbf{P})]$$

w zależności od tego, czy żądamy, aby wyróżniona cecha układu osiągała odpowiednio wartość największą lub najmniejszą na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych.

Jak widać, zagadnienie optymalizacji układu sprowadza się do znalezienia takiego wektora decyzyjnego $\mathbf{X} = \mathbf{X}^0$, dla którego funkcja celu osiąga wartość największą lub najmniejszą na zbiorze $\boldsymbol{D}$

$$f(\mathbf{X}^0, \mathbf{P}) = \operatorname*{Sup}_{\mathbf{X} \in D} f(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \tag{5}$$

ub

$$f(\mathbf{X}^0, \mathbf{P}) = \operatorname*{Inf}_{\mathbf{X} \in D} f(\mathbf{X}, \mathbf{P}).$$

Funkcje $f(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ i $g_j(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ stanowią model matematyczny układu.

Wybór, jakie wielkości traktować jako zmienne decyzyjne, a jakie jako parametry, jest decyzją wstępną konstruktora. Podstawą podjęcia takiej decyzji jest m. in. możliwość niezależnego doboru ich wartości, możliwość metody optymalizacji, jaką zamierza się stosować (np. niekiedy przez odpowiedni wybór zmiennych decyzyjnych można doprowadzić do tego, że funkcje stanowiące model matematyczny układu są liniowe lub wypukłe względem tych zmiennych i można zastosować do optymalizacji metodę programowania liniowego lub wypukłego).

W tym artykule o funkcjach $f(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ i $g_j(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ zakładamy jedynie, że są to funkcje, dla których istnieje $\mathbf{X}^0$.

Pewną niejasność może budzić jeszcze sposób uwzględnienia wymagań w stosunku do niezawodności R układu. Wymaganie to można zapisać następująco:

$$R(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = P\{\mathbf{G}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \leqslant 0\} \geqslant R_{min}, \tag{6}$$

gdzie R_{min} — minimalna dopuszczalna niezawodność układu.

W zależności od tego, czy znane są rozkłady prawdopodobieństwa przyjmowania przez poszczególne zmienne decyzyjne wartości z ich przedziałów zmienności (określonych tolerancjami i wartościami nominalnymi), czy też nie, należy rozważyć odrębne przypadki. W przypadku gdy są one znane, mamy do czynienia z tzw. probabilistycznym modelem zagadnienia optymalizacji, a w przypadku przeciwnym — z tzw. modelem strategicznym.

Rozważmy model strategiczny odpowiadający najczęstszemu przypadkowi praktycznemu. W takim modelu uwzględnienie wymagania na niezawodność w postaci (6) jest możliwe poprzez zastosowanie do każdej z osobna nierówności wchodzącej w skład układu więzów zasady najgorszego przypadku (z ang. worst case design). Polega ona na

zastąpieniu każdej zmiennej decyzyjnej x_i, w każdej z osobna nierówności, przez kres górny $\overline{x}_i$ lub dolny $\underline{x}_i$ tej zmiennej

$$\begin{aligned} \underline{x}_i &= (1-d_i)x_i, \\ \overline{x}_i &= (1+d_i)x_i, \end{aligned} \tag{7}$$

tak aby zmniejszyć możliwość spełnienia danej nierówności (d_i — zadana tolerancja realizacji zmiennej decyzyjnej x_i). Zastosowanie tej zasady prowadzi do takiego zawężenia zbioru rozwiązań dopuszczalnych, że dla każdego elementu tego zawężonego zbioru:

$$R(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = 1.$$

Wymaganie na niezawodność układu można również uwzględnić w sposób pośredni, np. poprzez zastosowanie kryterium równych marginesów [3].

3. ALGORYTM OPTYMALIZACJI METODĄ ŚLEPEGO PRZESZUKIWANIA PRZESTRZENI ZMIENNYCH DECYZYJNYCH [1]

Tok postępowania dla metody ślepego przeszukiwania przestrzeni zmiennych decyzyjnych jest następujący:

1. przy pomocy specjalnego programu dla maszyny cyfrowej generuje się kolejne realizacje wektora **X**;

2. dla każdego **X** sprawdza się, czy spełniony jest układ więzów

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \leqslant \mathbf{O}?,$$

tzn., czy

$$\mathbf{X} \in D?$$

Jeżeli odpowiedź jest negatywna, to generuje się następne **X** dopóty, dopóki nie natrafi się na $\mathbf{X} \in D$.

3. dla $\mathbf{X} \in D$ oblicza się wartość funkcji celu $f(\mathbf{X}, \mathbf{P})$; w przypadku gdy nowo otrzymana wartość jest nie większa od poprzednio zapamiętanej wartości (w pierwszym kroku ustala się tę wartość zewnętrznie, np. równą A), generuje się następny wektor **X** (c.d. p. 2); w przypadku gdy nowo otrzymana wartość jest większa od poprzednio zapamiętanej, zapamiętuje się ją wraz ze składowymi wektora **X** zamiast wartości poprzednich (odpowiednio w komórkach pamięci A i B) i generuje się następny wektor decyzyjny (c.d. p. 2).

4. postępowanie zostaje zakończone, gdy

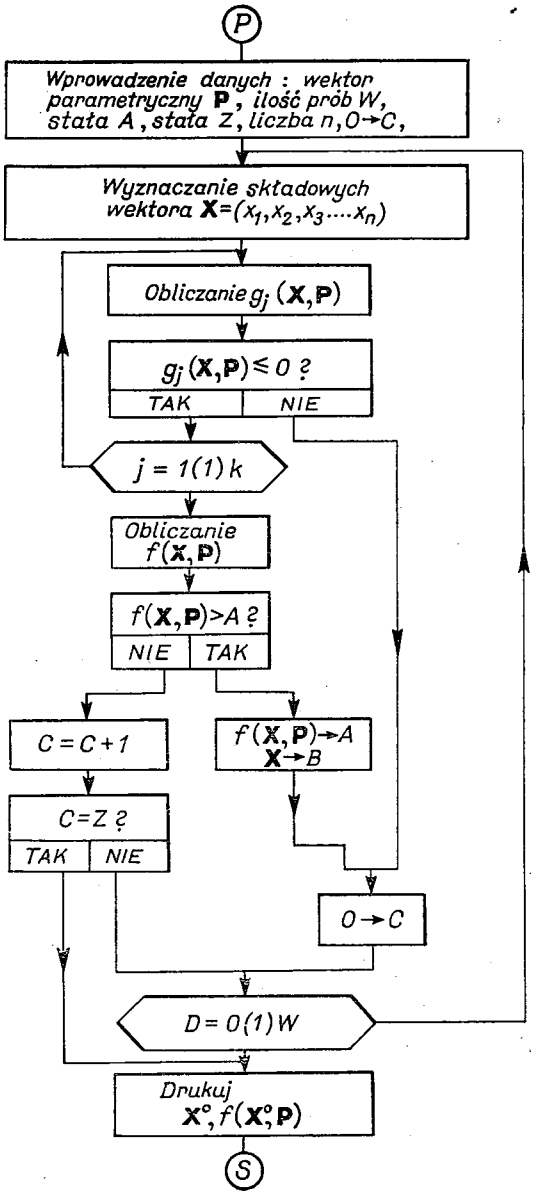
a) liczba wszystkich prób przekroczyła pewną ustaloną a priori wartość W

lub

b) liczba prób spełniających układ więzów, która nie doprowadziła do zmiany wektora **X** przechowywanego w pamięci, przekroczyła ustalona a priori wartość Z.

Wybór wartości W i Z jest decyzją wstępną konstruktora, który na podstawie oceny już otrzymanych wyników i możliwości dalszego eksperymentowania uzna, że można zakończyć postępowanie. Zwykle program nie zawiera warunków badania Z i W i drukowane są wszystkie wyniki coraz lepsze. Daje to dodatkowo możliwość bezpośredniego śledzenia przebiegu procesu i wysnucia wniosków o położeniu obszarów „podejrzanych", w których funkcja celu posiada duże wartości. Po pewnej liczbie prób można wtedy zawęzić kostkę, w której prowadzi się poszukiwania (metoda „lupy").

Schemat blokowy programu optymalizacji układu w oparciu o metodę ślepego przezukiwania przestrzeni zmiennych decyzyjnych podany jest na rys. 1.



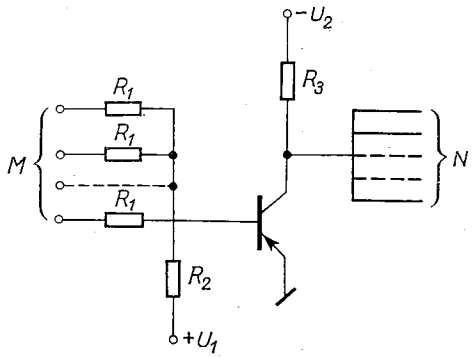
Rys. 1. Schemat blokowy programu optymalizacji układu w oparciu o metodę ślepego przeszukiwania przestrzeni zmiennych decyzyjnych

Kolejne wektory $\mathbf{X} \in S$ mogą być generowane różnie, np. w sposób systematyczny, przypadkowy lub ekwipartywny (metoda liczb złotych). Szczegółowe omówienie algorytmów generacji tych wektorów znaleźć można w [1, 2]. Zaznaczmy jedynie, że w przypadku za-

stosowania metody liczb złotych, wskutek wykorzystania własności ekwipartycji tych liczb, rozmieszczenie punktów próbkowych jest w przybliżeniu równomierne w dowolnej chwili trwania przeszukiwania. Gwarantuje to, że przerywając obliczenia nie pozostawiamy obszarów nie zbadanych, w których funkcja celu mogła by mieć szczególnie dużą wartość.

4. PRZYKŁAD OPTYMALIZACJI UKŁADU LOGICZNEGO NOR W TECHNICE OPOROWO-TRANZYSTOROWEJ

Układ logiczny negacji sumy („NOR"), którego schemat podany jest na rys. 2, stosowany jest powszechnie w układach automatyki i stanowi jeden z układów szeregu LOGISTER E-50 produkowanego w Polsce.



Rys. 2. Schemat układu NOR w technice oporowo-tranzystorowej

Oznaczenia:

E_1 — wartość bezwzględna napięcia reprezentującego zmienną binarną „1"

$$\underline{E}_1 \leqslant E_1 \leqslant \overline{E}_1,$$

E_0 — wartość bezwzględna napięcia reprezentującego zmienną binarną „0"

$$\underline{E}_0 \leqslant E_0 \leqslant \overline{E}_0,$$

U_W — wartość bezwzględna napięcia na bazie tranzystora odciętego,

U_B — wartość bezwzględna napięcia na bazie tranzystora przewodzącego w nasyceniu,

U_C — wartość bezwzględna napięcia kolektor-emiter tranzystora przewodzącego w nasyceniu,

I_0 — wartość bezwzględna natężenia prądu zerowego I_{CB0} tranzystora odciętego,

β — wzmocnienie stałoprądowe tranzystora na granicy nasycenia,

M — liczba wejść układu,

N — liczba wyjść układu (obciążalność układu),

U_{BEmx} — dopuszczalna wartość (bezwzględna) napięcia baza emiter odciętego tranzystora,

I_{Cmx} — dopuszczalna wartość (bezwzględna) natężenia prądu kolektora,

U_{CEmx} — dopuszczalna wartość (bezwzględna) napięcia kolektor-emiter tranzystora odciętego,

I_{Bmx} — dopuszczalna wartość (bezwzględna) natężenia prądu bazy przewodzącego tranzystora.

Zbiór wymagań w stosunku do cech układu jest następujący:

1. Realizacja przez układ funkcji boolowskiej negacji sumy
2. Liczba wejść układu nie mniejsza od M
3. Obciążalność układu nie mniejsza od N
4. Spełnienie przez układ wymagań 1, 2, 3 w najgorszych okolicznościach
5. Najmniejsza moc tracona w opornikach układu.

Warunkiem realizacji przez układ funkcji negacji sumy jest, aby:

a) na wyjściu układu istniało napięcie reprezentujące „1", gdy na wszystkich wejściach istnieje napięcie reprezentujące „0",

b) na wyjściu układu istniało napięcie reprezentujące „0", gdy na co najmniej jednym z wejść układu istnieje napięcie reprezentujące „1".

Warunek a) będzie spełniony, gdy zapewnimy, aby napięcie na bazie tranzystora było nie mniejsze od zera przy istnieniu na wszystkich wejściach napięcia $-E_0$ (gdyż wtedy tranzystor będzie odcięty), i zapewnimy, aby napięcie na wyjściu układu zawierało się w przedziale napięć reprezentujących „1". A zatem oznaczając przez U_w i $-U_k$ odpowiednio napięcia na bazie i na kolektorze tranzystora odciętego wymagamy, aby

$$U_w \geqslant 0, \tag{8}$$

$$-U_2 \leqslant -U_k \leqslant -E_1. \tag{9}$$

Lewa strona nierówności (9) jest naturalnie zawsze spełniona.

Obliczając U_w i U_k z równań (10) i (11)

$$\frac{U_1-U_w}{R_2} - \frac{U_w+E_0}{R_1} \cdot M - I_0 = 0, \tag{10}$$

$$\frac{U_2-U_k}{R_3} - \frac{U_k-U_B}{R_1} \cdot N - I_0 = 0, \tag{11}$$

nierówności (8) i (9) można przekształcić do postaci

$$-R_1U_1+ME_0R_2+I_0R_1R_2 \leqslant 0, \tag{12}$$

$$E_1 - \frac{U_2R_1+NU_BR_3-I_0R_1R_3}{R_1+NR_3} \leqslant 0. \tag{13}$$

W celu spełnienia warunku b) wystarczy zapewnić, aby punkt pracy tranzystora znajdował się w obszarze nasycenia, gdyż wtedy napięcie na wyjściu układu będzie się zawierać w przedziale napięć reprezentujących „0". Czyli wystarczy spełnić nierówność:

$$-\beta\left(\frac{E_1'-U_B}{R_1} - (M-1)\frac{U_B-E_0}{R_1} - \frac{U_1+U_B}{R_2}\right) + N\frac{U_B-U_C}{R_1} + \frac{U_2-U_C}{R_3} \leqslant 0. \tag{14}$$

Nierówności (12), (13) i (14) determinują układ więzów funkcjonalnych.

Ze względu na możliwość realizacji układu należy dodatkowo spełnić następujące wymagania:

— napięcie na bazie tranzystora, gdy wszystkie wejścia są odłączone, powinno być nie większe od U_{BEmx}; czyli

$$U_1-I_0R_2-U_{BEmx} \leqslant 0; \tag{15}$$

— prąd kolektora powinien być nie większy od I_{Cmx}; czyli

$$\frac{U_2-U_C}{R_3}+N\frac{U_B-U_C}{R_1}-I_{Cmx}\leqslant 0; \tag{16}$$

— napięcie kolektor-emiter tranzystora, gdy wszystkie wejścia i wyjścia są odłączone, powinno być nie większe od U_{Cmx}

$$U_2-I_0R_3-U_{CEmx}\leqslant 0; \tag{17}$$

— prąd bazy przewodzącego tranzystora powinien być mniejszy od I_{Bmx}

$$M\cdot\frac{E_1-U_B}{R_1}-\frac{U_1+U_B}{R_2}-I_{Bmx}\leqslant 0. \tag{18}$$

Nierówności (15) — (17) determinują układ więzów realizacyjnych.

Stosując zasadę najgorszego przypadku do (każdej z osobna) nierówności (12) — (18) można otrzymać następujący ostateczny układ więzów (zapewni to automatycznie spełnienie wymagania 4):

$$-\underline{U}_1\underline{R}_1+M\overline{E}_0\overline{R}_2+\overline{I}_0\underline{R}_1\overline{R}_2\leqslant 0, \tag{19}$$

$$\underline{E}-\frac{\underline{U}_2\underline{R}_1+N\underline{U}_B\overline{R}_3-\overline{I}_0\underline{R}_1\overline{R}_3}{\underline{R}_1+N\overline{R}_3}\leqslant 0, \tag{20}$$

$$-\underline{\beta}\left(\frac{\underline{E}_1+(M-1)\underline{E}_0-M\overline{U}_B}{\overline{R}_1}-\frac{\overline{U}_1+\overline{U}_B}{\underline{R}_2}\right)+N\cdot\frac{\overline{U}_B-\underline{U}_C}{\overline{R}_1}+\frac{\overline{U}_2-\underline{U}_C}{\underline{R}_3}\leqslant 0, \tag{21}$$

$$\overline{U}_1-\underline{I}_0\underline{R}_2-U_{BEmx}\leqslant 0, \tag{22}$$

$$\frac{\overline{U}_2-U_C}{\underline{R}_3}+N\frac{\overline{U}_B-\underline{U}_C}{R_1}-I_{Cmx}\leqslant 0, \tag{23}$$

$$\overline{U}_2-\overline{I}_0\underline{R}_3-U_{CEmx}\leqslant 0, \tag{24}$$

$$M\cdot\frac{\overline{E}_1-\underline{U}_B}{\underline{R}_1}-\frac{\underline{U}_1+\underline{U}_B}{\overline{R}_2}-I_{Bmx}\leqslant 0. \tag{25}$$

Moc tracona w opornikach układu P może być oszacowana jako średnia arytmetyczna mocy traconej, gdy tranzystor jest przewodzący i odcięty, w przeciętnych warunkach wysterowania i obciążenia. Czyli

$$P=\frac{1}{2}\left[\frac{M}{2}\frac{2(U_C+U_w)^2+U_9^2+U_{13}^2}{R_1}+\frac{(U_1+U_w)^2+U_{10}^2}{R_2}+\frac{e}{R_3}\right], \tag{26}$$

gdzie

$U_9 = E_1-U_B,$
$U_{10} = U_1+U_B,$
$U_{13} = U_B-U_C,$
$e = (U_2-E_1)^2+(U_2-U_C)^2.$

Tak więc nierówności (19) — (25) stanowią układ więzów, a funkcja (26) jest przyjętą funkcją celu.

Przyjmijmy za zmienne decyzyjne opory oporników

$$x_1 = R_1,$$
$$x_2 = R_2,$$
$$x_3 = R_3,$$

traktując pozostałe wielkości jako parametry.

Bezwzględne wartości średnie oraz kresy dolne i górne parametrów zestawione są w tabl. 1.

Tablica 1

Parametr	min	śr	mx	Uwagi
U_1[V]	11,4	12	12,6	
U_2[V]	11,4	12	12,6	
E_1[V]	6	9	—	
E_0[V]	0	0,15	0,3	
U_B[V]	0,15	0,25	0,35	
U_C[V]	0,03	0,1	0,15	
I_0[μA]	0,5	15	70	
β	46	60	90	po uwzględnieniu temperatury i procesów starzeniowych
I_{Cmx} [mA]	200			
I_{Bmx} [mA]	30			
U_{BEmx} [V]	20			
U_{CEmx} [V]	20			
δ	5%			tolerancja oporów
Δ	5%			tolerancja napięć zasilających
N	4			
M	4			

Ustalono następującą kostkę, w której prowadzi się poszukiwania wektora $\mathbf{X}^\circ$

$$2 \cdot 10^3 \leqslant x_1 \leqslant 15 \cdot 10^3,$$
$$10 \cdot 10^3 \leqslant x_2 \leqslant 100 \cdot 10^3,$$
$$0{,}3 \cdot 10^3 \leqslant x_3 \leqslant 6 \cdot 10^3.$$

Można zauważyć, że przy przyjęciu takich wymiarów kostki i wartości parametrów jak w tabl. 1 układ więzów redukuje się do nierówności (19) — (21).

Stosując metodę liczb złotych do generacji kolejnych wektorów **X** za rozwiązanie optymalne przyjęto rozwiązanie uzyskane po wykonaniu $h = 976$ prób w czasie ok. 30 min (obliczeń dokonano na maszynie cyfrowej UMC-10, wykonującej ok. 3000 operacji/sek)

$$\mathbf{X}^\circ = (12{,}4 \cdot 10^3,\ 62{,}89 \cdot 10^3,\ 2{,}56 \cdot 10^3),$$
$$P(\mathbf{X}^\circ) = 38{,}1 \text{ mW}.$$

Rozwiązanie optymalne sprowadzone do wartości znormalizowanych zmiennych decyzyjnych jest następujące

$$\mathbf{X} = (12 \cdot 10^3,\ 62 \cdot 10^3,\ 2{,}4 \cdot 10^3),$$
$$P(\mathbf{X}^\circ) = 40{,}2 \text{ mW}.$$

Sformułowany powyższy układ więzów jest na ogół znany. Na przykład w pracy K. M. Trampela [4] podano nierówności (19), (20) i (21). Odmienny jest natomiast sposób wyszukania rozwiązania. W cytowanej wyżej pracy autor ustala arbitralnie wartość oporu R_3 i z (20) określa, że R_1 musi być nie mniejsze od pewnej wartości. Następnie wyszukuje najbliższą wartość ze standartowego szeregu, która spełnia tę nierówność otrzymując wartość R_1. Znając wartość R_1 i R_3 określa według (19) i (20) dopuszczalny zakres R_2 wybierając arbitralnie dowolną wartość ze standartowego szeregu zawierającą się w tym zakresie. Jeżeli wartości takiej nie ma, to wybiera się nową wartość R_3 (lub R_1) itd. W ten sposób K. M. Trampel znajduje pewne rozwiązanie dopuszczalne, o którym trudno powiedzieć, czy jest optymalne, bo autor nie formułuje funkcji celu (wiadomo jednak, że jest to rozwiązanie, dla którego $R = 1$).

5. PRZYKŁAD JEDNOCZESNEJ OPTYMALIZACJI 3 UKŁADÓW LOGICZNYCH NOR O RÓŻNYCH ZYSKACH LOGICZNYCH W TECHNICE OPOROWO-TRANZYSTOROWEJ

W praktyce często się zdarza, że ze względu na pewne globalne wymagania trzeba optymalizować nie jeden układ, a jednocześnie kilka wchodzących w skład pewnego zestawu.

Na przykład w skład zestawu elementów logicznych „LOGISTER E-50" wchodzą 3 układy NOR o zysku logicznym N, równym odpowiednio 2, 4 i 6.

Ze względów użytkowych wygodne jest przy tym, aby oporniki wejściowe R_1 i R_2 wszystkich tych układów były jednakowe. Problem, jaki postawiono autorowi, był w związku z tym następujący.

Określić wartości oporów R_1, R_2, R_3^1, R_3^2, R_3^3, tak aby w urządzeniu, w którym pracuje 35 procent układów o $N = 2$, 50 procent układów o $N = 4$ i 15 procent układów o $N = 6$ była tracona najmniejsza moc w opornikach.

Dodatkowo program powinien uwzględniać możliwość optymalizacji każdego układu z osobna.

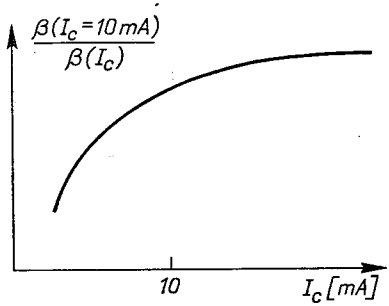
Oprócz parametrów jak w przykładzie omówionym w poprzednim punkcie pracy dla $N = 4$ (tabl. 1) przyjęto, że β dla układu o $N = 2$ jest zawarte w przedziale [30,6; 60], a dla układu o $N = 6$ w przedziale [69; 150].

Uwzględniono również zależność β od prądu I_C zadaną poprzez eksperymentalnie określoną krzywą[1)]

[1)] Dane udostępnione przez Instytut Elektrotechniki.

$$\frac{\beta(I_C = 10\text{mA})}{\beta(I_C)} = f(I_C)$$

podaną na rys. 3.



Rys. 3. Zależność znormalizowanego wzmocnienia stałoprądowego β tranzystora od prądu kolektora I_C

Przyjmując, że

$$I_C = \frac{U_2}{R_3},$$

określono na podstawie tej krzywej kres dolny $\underline{\beta}$ wartości β dla przedziałów wartości R_3 (tabl. 2).

Tablica 2

R_3[kΩ]	$\underline{\beta}_1$	$\underline{\beta}_2$	$\underline{\beta}_3$
	$N = 2$	$N = 4$	$N = 6$
$R_3 < 0{,}86$	$33{,}7 = \underline{\beta}_{1\,mx}$	$50{,}5 = \underline{\beta}_{2\,mx}$	$75{,}8 = \underline{\beta}_{3\,mx}$
$0{,}86 \leqslant R_3 < 1{,}0$	32,2	48,2	72,4
$1{,}0 \leqslant R_3 \leqslant 1{,}37$	30,6	45,8	68,8
$1{,}37 \leqslant R_3 < 1{,}75$	29,0	43,6	65,4
$1{,}75 \leqslant R_3 < 2{,}0$	27,7	41,2	61,9
$2{,}0 \leqslant R_3 < 2{,}74$	26,0	39,0	58,5
$2{,}74 \leqslant R_3 < 3{,}34$	24,5	36,7	55,0
$3{,}34 \leqslant R_3 < 4{,}32$	23,0	34,4	51,6
$4{,}32 \leqslant R_3 < 6{,}1$	21,4	32,2	48,2
$R_3 \geqslant 6{,}1$	19,8	29,8	44,7

Zależności (20) i (21) zostały przekształcone do poniżej podanych postaci Z (20)

$$R_3 \leqslant \frac{d}{N+f} = R_{3mx}, \tag{27}$$

gdzie

$$d = a\underline{R}_1; \quad a = \frac{U_3}{(1+\delta)U_4}; \quad U_3 = \underline{U}_2 - \underline{E}_1; \quad U_4 = \underline{E}_1 - \underline{U}_B;$$

$$f = \frac{\bar{I}_0 \underline{R}_1}{U_4}.$$

Z (21)

$$R_3 \geqslant \frac{C}{U_k} = R_{3min}, \tag{28}$$

gdzie

$$C = U_5 \cdot \bar{R}_1; \quad U_5 = \frac{\bar{U}_2 - \underline{U}_C}{1-\delta},$$

$$U_k = \underline{\beta} b - N U_6; \quad b = U_8 - U_7 \frac{\bar{R}_1}{\underline{R}_2}; \quad U_8 = \underline{E}_1 + (M-1)\underline{E}_0 - M\bar{U}_B;$$

$$U_7 = \bar{U}_1 + \bar{U}_B.$$

Funkcja celu przyjmuje postać

$$P = 0{,}35P_1 + 0{,}5P_2 + 0{,}15P_3, \tag{29}$$

w której P_1, P_2, P_3 są mocami traconymi odpowiednio w opornikach układu o $N = 2$, $N = 4$, $N = 6$. Wartości P_1, P_2, P_3 można więc obliczać z zależności (26) wstawiając zamiast R_3 odpowiednio R_3^1, R_3^2, R_3^3, czyli opory dla układu o odpowiednio $N = 2$, $N = 4$, $N = 6$.

Program jednoczesnej optymalizacji 3 układów NOR wykonano na maszynie cyfrowej UMC-10 skonstruowanej w Katedrze Budowy Maszyn Matematycznych Politechniki Warszawskiej. Program jest tak zbudowany, że umożliwia również optymalizację pojedynczego układu.

Program jest przy tym ogólny w tym sensie, że można przy jego pomocy określić rozwiązanie optymalne przy dowolnych danych dotyczących parametrów. Tak więc w przypadku np. konieczności zmiany typu tranzystora nowe rozwiązanie optymalne może być określone w bardzo krótkim czasie (rzędu godziny).

Wartości nominalne $R_1, R_2, R_3^1, R_3^2, R_3^3$ określone wstępnie przy stosowaniu tradycyjnych metod projektowania przez konstruktorów zestawu LOGISTER E-50 są następujące:

$$R_1 = 7{,}5\ \text{k}\Omega; \quad R_2 = 39\ \text{k}\Omega;$$

$$R_3^1 = 3\ \text{k}\Omega; \quad R_3^2 = 1{,}5\ \text{k}\Omega; \quad R_3^3 = 1\ \text{k}\Omega.$$

Obliczając wg zależności (29) wartość traconej mocy w opornikach układu otrzymamy:

$$P = 59{,}37\ \text{mW}.$$

Rozwiązanie optymalne otrzymane w wyniku zastosowania metody ślepego przeszukiwania zmiennych decyzyjnych jest następujące:

$$R_1 = 12\ \text{k}\Omega; \quad R_2 = 62\ \text{k}\Omega;$$

$$R_3^1 = 4{,}3\ \text{k}\Omega; \quad R_3^2 = 2{,}4\ \text{k}\Omega; \quad R_3^3 = 1{,}6\ \text{k}\Omega.$$

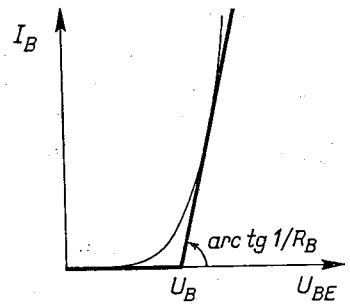
Moc tracona w opornikach układu wynosi obecnie

$$P = 37{,}75\ \text{mW}.$$

Jak widać, uzyskane wyniki wskutek zastosowania metody ślepego przeszukiwania pozwalają na konstrukcję urządzenia składającego się z 35% układów NOR o $N = 2$, 50% układów o $N = 4$ i 15% układów o $N = 6$ (a taki rozkład procentowy występuje najczęściej zgodnie z informacjami przekazanymi przez użytkowników), w którym moc tracona w opornikach układów jest o ok. 37% mniejsza.

Biorąc pod uwagę, że w średnich urządzeniach automatyki cyfrowej pracuje kilkaset układów NOR, pozwala to istotnie zmniejszyć wymaganą moc urządzeń zasilających a także wydajność urządzeń chłodzących.

Przy wprowadzeniu zależności wchodzących w skład układu więzów uwzględniono stosunkowo najprostszy model funkcjonalny tranzystora. Nie uwzględniono np. nieliniowej zależności napięcia baza-emiter U_{BE} od prądu bazy I_B.



Rys. 4. Odcinkowa linearyzacja charakterystyki wejściowej tranzystora

Naturalnie uwzględnienie tej zależności jest możliwe. Można np. przyjąć zastępcze źródło napięcia U_B o skończonej oporności wewnętrznej R_B (sposób określenia wartości U_B i R_B ilustruje rys. 4) lub też wykonać aproksymację wieloodcinkową i zastosować pewną procedurę iteracyjną. Uwzględnić można również nieliniową zależność U_C od prądu kolektora I_C analogicznie jak to zrobiono w przypadku zależności $\beta = f(I_C)$. Uwzględnienie powyżej omówionych zależności przy optymalizacji układu wymaga pewnej rozbudowy programu optymalizacji, a zatem prowadzi do zwiększenia czasu wyszukiwania rozwiązania optymalnego. W przypadku gdy wartości napięć zasilających oraz wartość napięcia reprezentującego „1" są dostatecznie duże w porównaniu z napięciem na bazie lub kolektorze przewodzącego tranzystora, wpływ zmian tych parametrów na dobór optymalnych wartości R_1, R_2, R_3 jest nieduży i wydaje się, że w takim przypadku nie ma istotnej potrzeby uwzględnienia tych nieliniowości.

Przy określaniu warunku na odcięcie tranzystora [zal. (8)] przyjęto, że wystarczy w tym celu zapewnić, aby napięcie na bazie tranzystora *p-n-p* (gdy na wszystkich wejściach układu istnieje napięcie reprezentujące „0") było nie mniejsze od zera. Jeżeli zdefiniować odcięcie tranzystora jako stan, w którym złącze baza-emiter jest spolaryzowane w kierunku zaporowym, to dla tranzystorów krzemowych jest to słuszne. Natomiast dla tranzystorów germanowych należałoby raczej przyjąć, że napięcie na bazie powinno być większe od 0,5÷0,2 V.

Efektem nieuwzględnienia tego problemu może być to, że w rzeczywistości natężenie prądu zerowego kolektora jest większe od przyjętej wartości I_{CBo}, co wpływa poprzez zależność (13) na zmniejszenie wartości N przy ustalonym E_1. Ponieważ jednak wiadomo z analizy statystycznej takich układów, że rzeczywista wartość N dla większości egzemplarzy produkowanych układów (obliczona dla rzeczywistych wartości zmiennych decyzyjnych i parametrów podczas gdy przy wyborze wartości zmiennych decyzyjnych przyjmowano wartości skrajne ich możliwych zmian zgodnie z zasadą najgorszego przypadku) jest dużo większa od przyjętej w obliczeniach, więc zdecydowano przyjąć warunek $U_w \geqslant 0$.

W rozpatrywanych przykładach przyjęto za zmienne decyzyjne oporności R_1, R_2, R_3. Można by naturalnie przyjąć większy ich zestaw, np. dodatkowo napięcie E_1 reprezentujące binarne „1" oraz napięcia zasilania U_1, U_2, których wartości przyjęto w przykładach zgodnie z ustalonymi dla całego zestawu układów LOGISTER-50 zawierającego jeszcze inne układy oprócz układów NOR tu optymalizowanych.

Do zestawu wymagań stawianych rozpatrywanym układom NOR nie wprowadzono wymagań na czasy przełączania. Wymagania takie naturalnie można sformułować w postaci nierówności typu $g_j(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \leqslant \mathbf{O}$ w oparciu o znane zależności podane przez R. B. Beaufoy'a i J. J. Sparkesa [5]. Badając wartości tych czasów na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych okazało się, że zmiany ich są stosunkowo małe. Ponieważ wymagania na te czasy praktycznie nie ograniczały zbioru dopuszczalnych rozwiązań, więc ich uwzględnianie okazało się zbyteczne.

6. ZAKOŃCZENIE

Podany opis zastosowania metody ślepego przeszukiwania do optymalizacji układu logicznego NOR w technice oporowo-tranzystorowej jest skrótem części pracy autora [6] dotyczącej ogólnych metod optymalizacji układów logicznych.

Pragnę w tym miejscu podziękować promotorowi pracy profesorowi A. Kilińskiemu za cenną pomoc przy jej wykonywaniu, mgrowi inż. A. Paplińskiemu za napisanie i uruchomienie programu dla maszyny UMC-10 oraz pracownikom Zespołu Układów Cyfrowych Instytutu Elektrotechniki, a w szczególności mgrowi inż. J. Zakrzewskiemu, mgrowi inż. M. Marczewskiemu oraz A. Cyranowi za udostępnienie materiałów i rzeczowe dyskusje.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. S. Budkowski, O pewnych metodach optymalizacji układów logicznych, Archiwum Automatyki i Telemechaniki (w druku).
2. S. Budkowski, O pewnej metodzie generacji współrzędnych punktów równomiernie rozmieszczonych w kostce n-wymiarowej, Algorytmy (w druku).
3. A. Sielicki, O wykorzystaniu kryterium równych marginesów dla optymalizacji projektowania podstawowych układów logicznych, Zeszyty Naukowe Politechniki Wrocławskiej, Automatyka I, 1964.
4. K. M. Trampel, Designing NOR Circuit for Maximum Reliability. Worst Case Condition Used as Examples, Electronics, June 2, 1961.
5. R. B. Beaufoy, J. J. Sparkes, The Junction Transistor as a Charge Controlled Device, ATEI, **13**, 4.
6. S. Budkowski, O pewnych metodach optymalizacji układów logicznych, praca doktorska, Politechnika Warszawska, 1967.

S. BUDKOWSKI

LOGIC CIRCUIT OPTIMALISATION BY MEANS OF A FREE SCANNING OF THE DECISION VARIABLES SPACE

Summary

The algorithm of logic circuit optimalisation by means of a free scanning the decision variables space is described having given the formal description of the optimalisation problem. The application of that method to TRL NOR-circuit optimalisation is shown in particular.

S. BUDKOWSKI

OPTIMALISATION D'UN CIRCUIT LOGIQUE NOR

Résumé

Après une description du problème d'optimalisation des circuits logiques on donne un algorithme d'optimalisation, qui consiste à chercher la solution optimale dans les points disloqués uniformement dans l'espace de la solution réalisable. Ensuite on décrit l'application de cette méthode à l'optimalisation d'un circuit logique NOR.

С. БУДКОВСКИ

ОПТИМИЗАЦИЯ ЛОГИЧЕСКОЙ СХЕМЫ „ИЛИ-НЕ'' МЕТОДОМ СЛЕПОГО ПОИСКА В ПРОСТРАНСТВЕ ПЕРЕМЕННЫХ РЕШЕНИЯ

Резюме

Приводится формальное описание задачи оптимализации логических схем и описывается кратко алгоритм оптимизации методом слепого поиска в пространстве переменных. Описывается применение этого метода для оптимализации логической схемы „или-не'' с резисторами и с транзисторным усилителем.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 15. 3, ss. 495–513
INSTYTUT TECHNOLOGII ELEKTRONOWEJ PAN, WARSZAWA 1969

Generowanie drzew i multidrzew multigrafów metodą liczb strukturalnych binarnych za pomocą maszyn cyfrowych

CZESŁAW SYC (WARSZAWA)

Wojskowa Akademia Techniczna

Otrzymano 9.12.1968

W artykule podano jeden z możliwych sposobów kodowania liczb strukturalnych [1], [2] dla maszyn cyfrowych oraz sposób wyznaczania za ich pomocą drzew i multidrzew multigrafów spójnych.

Przyjęty sposób kodowania liczb strukturalnych oparty jest na binarnej reprezentacji każdego elementu kolumny oraz kolumn każdej liczby strukturalnej. Przedstawiony w artykule algorytm generowania drzew multigrafu spójnego wyznacza wszystkie możliwe drzewa bez powtórzeń.

1. WPROWADZENIE

Algebra liczb strukturalnych w związku z możliwością zastosowania jej do analizy i syntezy układów elektrotnicznych za pomocą maszyn cyfrowych nabiera coraz większego znaczenia praktycznego.

Praktyczne zastosowanie liczb strukturalnych do analizy i syntezy sieci elektrycznych jak dotąd ograniczone było trudnościami wynikającymi z niedostatecznej mocy obliczeniowej maszyn cyfrowych, jak również braku odpowiednich algorytmów generowania drzew pełnych i ich pochodnych.

Przedstawienie liczby strukturalnej w postaci binarnej stwarza nowe możliwości zarówno w dziedzinie analizy, jak i syntezy układów elektronicznych metodą liczb strukturalnych dzięki zbliżeniu języka liczb strukturalnych do jego reprezentacji maszynowej, co daje dużą oszczędność pojemności pamięci maszyny oraz znacznie redukuje czas wyznaczania drzew.

Wprowadzimy obecnie pewne określenia użytych pojęć występujących w artykule.

Definicja 1

Siecią będziemy nazywać skończony zbiór wierzchołków **V** (niepusty) oraz skończony zbiór gałęzi **E**

$$\mathbf{S} = (\mathbf{V}, \mathbf{E}). \tag{1}$$

Definicja 2

Siecią zdeterminowaną $\mathbf{S}_d$ będziemy nazywać sieć **S**, w której każdemu wierzchołkowi $v \in \mathbf{V}$ i każdej gałęzi $e \in \mathbf{E}$ przyporządkowano różną liczbę naturalną. Sieć zdeterminowaną

można opisać następującą trójką

$$\mathbf{S}_d = (\mathbf{V}, \mathbf{E}, f), \tag{2}$$

gdzie f — funkcja determinizmu przyporządkowująca każdemu wierzchołkowi $v \in \mathbf{V}$ i każdej gałęzi $e \in \mathbf{E}$ liczbę naturalną ze zbioru N.

Sieć zdeterminowaną, zawierającą co najmniej dwie gałęzie równoległe, będziemy nazywać multigrafem zdeterminowanym M, zaś sieć nie posiadającą gałęzi równoległych — grafem zdeterminowanym G.

Definicja 3

Drzewem multigrafu spójnego M_d będziemy nazywać graf spójny G_d, który posiada $\bar{\bar{v}}(\bar{\bar{v}} = \text{card}\,\{\mathbf{V}\})$ wierzchołków oraz $\bar{\bar{v}}-1$ gałęzi. Ogólnie każde drzewo multigrafu M_d można opisać następującą trójką

$$G_d = (\mathbf{V}, \mathbf{E}^*, f), \tag{3}$$

gdzie $\mathbf{E}^* \subset \mathbf{E}$.

Wszystkie wprowadzone wyżej pojęcia dotyczą multigrafu niezorientowanego. Metoda wyznaczania drzew i multidrzew, opisana w niniejszym artykule, ma zastosowanie tylko do multigrafów niezorientowanych.

2. BINARNA REPREZENTACJA LICZB STRUKTURALNYCH

Liczbą strukturalną binarną $\mathbf{A}^*$ będziemy nazywać tablicę o postaci

$$\mathbf{A}^* \overset{\text{df}}{=} \begin{bmatrix} \alpha_{11}^* & \alpha_{12}^* \dots \alpha_{1n}^* \\ \alpha_{21}^* & \alpha_{22}^* \dots \alpha_{2n}^* \\ \dots & \dots \\ \alpha_{r1}^* & \alpha_{r2}^* \dots \alpha_{rn}^* \end{bmatrix}, \tag{4}$$

gdzie $\alpha_{ij}^* \in \{0, 1\}$.

Liczbę tę możemy rozważać jako nieuporządkowany zbiór kolumn, które traktować będziemy jako liczby binarne.

$$\mathbf{A}^* \overset{\text{df}}{=} \left\{ a_j^* \middle| a_j^* = \bigcup_{i=1}^{r} \alpha_{ij}^{**}, \quad \alpha_{ij}^{**} = \alpha_{ij}^* \cdot 2^{\alpha_{ij}^* \cdot (i-1)} \right\} \tag{5}$$

Przykład 1

Jeśli dana jest liczba strukturalna binarna

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

to zgodnie ze wzorem (5) mamy:

$$a_1^* = [1\ 1\ 0\ 1\ 0]^T, \quad a_2^* = [0\ 1\ 1\ 0\ 1]^T, \quad a_3^* = [1\ 0\ 1\ 1\ 0]^T,$$

$$\alpha_{11}^* = 1, \quad \alpha_{21}^* = 1, \quad \alpha_{31}^* = 0, \quad \alpha_{41}^* = 1, \quad \alpha_{51}^* = 0,$$

$$\alpha_{11}^{**} = \alpha_{11}^* \cdot 2^{\alpha_{11}^* \cdot (1-1)}\big|_2 = 1 \cdot 2^{1 \cdot (1-1)}\big|_2 = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T,$$

$$\alpha_{21}^{**} = \alpha_{21}^* \cdot 2^{\alpha_{21}^* \cdot (2-1)}\big|_2 = 1 \cdot 2^{1 \cdot (2-1)}\big|_2 = [0\ 1\ 0\ 0\ 0]^T,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\alpha_{51}^{**} = \alpha_{51}^* \cdot 2^{\alpha_{51}^* \cdot (5-1)}\big|_2 = 0 \cdot 2^{0 \cdot (5-1)}\big|_2 = [0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T.$$

Załóżmy, że dany jest system algebraiczny liczb strukturalnych

$$\mathscr{A} = \left\{A, +, \cdot, d, \frac{\partial}{\partial\alpha}, \frac{\delta}{\delta\alpha}, \det, \mathrm{Sim}\right\}, \tag{6}$$

gdzie:

A — zbiór liczb strukturalnych,

$$\mathbf{A} = \{\mathrm{a}_j | \mathrm{a}_j = \alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{mj};\ \alpha_{ij} \neq \alpha_{jk},\ i \neq j\}, \tag{7}$$

$+$ — operator sumy liczb strukturalnych,

$\cdot$ — operator iloczynu liczb strukturalnych,

d — operator dopełnienia algebraicznego,

$\frac{\partial}{\partial\alpha}$ — operator pochodnej,

$\frac{\delta}{\delta\alpha}$ — operator copochodnej,

det — operator wyznacznikowy,

Sim — operator funkcji jednoczesności.

Określimy obecnie odwzorowanie $t: \mathscr{A} \to \mathscr{A}^*$, które przekształca liczbę strukturalną A z systemu algebraicznego $\mathscr{A}$ na system algebraiczny $\mathscr{A}^*$.

$$\mathscr{A}^* = \left\{A^*, +, \cdot, d, \frac{\partial}{\partial\alpha^{**}}, \frac{\delta}{\delta\alpha^{**}}, \det, \mathrm{Sim}\right\}, \tag{8}$$

gdzie:

A^* — zbiór liczb strukturalnych binarnych,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^* &\overset{\mathrm{df}}{=} t\{\mathrm{a}\ |a = \mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_n;\ \mathrm{a}_k \neq \mathrm{a}_l,\ k \neq l\}|_2 \\ &= \{t\mathrm{a}\ |t\mathrm{a} = t\mathrm{a}_1, t\mathrm{a}_2, \ldots, t\mathrm{a}_n;\ t\mathrm{a}_k \neq t\mathrm{a}_l,\ k \neq l\}|_2 \\ &= \{\mathrm{a}^*|\mathrm{a}^* = \mathrm{a}_1^*, \mathrm{a}_2^*, \ldots, \mathrm{a}_n^*;\ \mathrm{a}_k^* \neq \mathrm{a}_l^*,\ k \neq l\}|_2\end{aligned} \tag{9}$$

$$\mathrm{a}_j^* = t\mathrm{a}_j = \sum_{k=1}^{m} 2^{\alpha_{kj}-1}|_2 \tag{10}$$

$$j = 1, 2, \ldots, n; \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Łatwo zauważyć, że w tym przypadku

$$\alpha_{ij}^{**} = 2^{\alpha_{kj}-1}|_2, \tag{11}$$

zaś

$$\alpha_{ij}^{*} = \begin{cases}1 & \text{dla } \alpha_{kj} \neq 0, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.}\end{cases} \tag{12}$$

Przykład 2

Dana jest liczba strukturalna $\mathbf{A}$ w systemie $\mathscr{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 5\end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć jej reprezentację binarną w systemie $\mathscr{A}^*$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^* &= t\{(1,2,3),\ (4,6,5),\ (1,3,5)\}|_2 = \{t(1,2,3),\ t(4,6,5),\ t(1,3,5)\}|_2\\ &= \{(2^{1-1}+2^{2-1}+2^{3-1}),\ (2^{4-1}+2^{6-1}+2^{5-1}),\ (2^{1-1}+2^{3-1}+2^{5-1})\}|_2\\ &= \{7, 56, 21\}|_2 = \{[1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0]^T, [0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1]^T, [1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0]\}^T,\end{aligned}$$

stąd

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jeśli dane są dwie liczby strukturalne binarne

$$\mathbf{A}^* = \{a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*\},$$

$$\mathbf{B}^* = \{b_1^*, b_2^*, \ldots, b_r^*\},$$

to równość, sumę i iloczyn w systemie $\mathscr{A}^*$ można zdefiniować w sposób następujący:

2.1. Równość liczb strukturalnych binarnych

$$(\mathbf{A}^* \overset{\text{df}}{=} \mathbf{B}^*) \Leftrightarrow (t\mathbf{A} = t\mathbf{B}). \tag{14}$$

Przykład 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.2. Suma liczb strukturalnych binarnych

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^* + \mathbf{B}^* &\overset{\text{df}}{=} t(\mathbf{A}+\mathbf{B})\\ &= t\mathbf{A} + t\mathbf{B} = \mathbf{A}^* \cup \mathbf{B}^* - \mathbf{A}^* \cap \mathbf{B}^*\\ &= \mathbf{A}^* \oplus \mathbf{B}^*,\end{aligned} \tag{15}$$

gdzie znak $\oplus$ oznacza różnicę symetryczną zbiorów.

Przykład 4

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.3. Iloczyn liczb strukturalnych binarnych

$$\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{B}^* \overset{\text{df}}{=} t(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = t\mathbf{A} \cdot t\mathbf{B}. \tag{16}$$

Zgodnie z definicją iloczynu liczb strukturalnych [1], [2] mamy

$$\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{B}^* = \left\{ \bigcup_{h=1}^{n_2} \bigcup_{k=1}^{n_1} (\mathrm{a}_k^* \cup \mathrm{a}_h^*) \middle| \mathrm{a}_k^* \cap \mathrm{a}_h^* = 0 \text{ z wyjątkiem największej parzystej liczby kolumn identycznych.} \right\}. \tag{17}$$

Przykład 5

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.4. Liczba strukturalna binarna dopełniająca

$$(\mathbf{A}^*)^d \overset{\text{df}}{=} t\mathbf{A}^d \Leftrightarrow \mathbf{A}^{*d} = \bigcup_{k=1}^{m} [(\bigcup_{j=1}^{m} \mathrm{a}_j^*) \cap \overline{\mathrm{a}_k^*}], \tag{18}$$

gdzie a_k^* — zanegowana wartość k-tej kolumny liczby strukturalnej binarnej $\mathbf{A}^*(\overline{\mathrm{a}_k^*} = \mathrm{a}^{*d})$, ogólnie

$$\overline{\mathrm{a}_k^*} = \Big(\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}\Big) \oplus \mathrm{a}_k^*. \tag{19}$$

Przykład 6

Dana jest liczba strukturalna binarna

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć liczbę strukturalną binarną dopełniającą do $\mathbf{A}^*$.

Rozwiązanie:

1. $\sum_{j=1}^{4} \mathrm{a}_j^* = [1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1]^{\mathrm{T}}$.

2. $\overline{\mathrm{a}_1^*} = [1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]^{\mathrm{T}} \oplus [1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1]^{\mathrm{T}} = [0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0]^{\mathrm{T}}$,

$\overline{\mathrm{a}_2^*} = [1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]^{\mathrm{T}} \oplus [0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0]^{\mathrm{T}} = [1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1]^{\mathrm{T}}$,

$\overline{\mathrm{a}_3^*} = [1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]^{\mathrm{T}} \oplus [0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1]^{\mathrm{T}} = [1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0]^{\mathrm{T}}$,

$\overline{\mathrm{a}_4^*} = [1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]^{\mathrm{T}} \oplus [1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1]^{\mathrm{T}} = [0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$,

skąd

$$\mathbf{A}^{*d} = \begin{bmatrix} \overline{1} \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \underline{1} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} \overline{0\ 1\ 1\ 0} \\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ \underline{0\ 1\ 0\ 0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{0\ 1\ 1\ 0} \\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ \underline{0\ 1\ 0\ 0} \end{bmatrix}.$$

2.5. Pochodna algebraiczna liczby strukturalnej binarnej

Pochodną algebraiczną liczby strukturalnej binarnej $\mathbf{A}^*$ względem elementu α^{**} jest liczba strukturalna binarna $\frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial \alpha^{**}}$ określona jako

$$\frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial \alpha^{**}} \stackrel{\text{df}}{=} t\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \alpha} = \frac{\partial t\mathbf{A}}{\partial t\alpha}. \tag{20}$$

W celu wyznaczenia pochodnej można się posługiwać następującym wzorem:

$$\frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial \alpha^{**}} = \left\{(a_k^* \cap \overline{\alpha^{**}}) | a_k^* \cap \alpha^{**} \neq 0,\ \overline{\alpha^{**}} = \left(\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}\right) \oplus \alpha^{**}\right\}. \tag{21}$$

Przykład 7

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} \overline{1\ 0\ 1\ 0\ 1} \\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1 \\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0 \\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ \underline{0\ 0\ 1\ 0\ 1} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial [0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}} = \begin{bmatrix} \overline{1\ 0} \\ 0\ 0 \\ 0\ 0 \\ 1\ 1 \\ 0\ 1 \\ \underline{0\ 0} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial [0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}_d} = \begin{bmatrix} \overline{0\ 1} \\ 0\ 0 \\ 0\ 0 \\ 1\ 0 \\ 1\ 0 \\ \underline{0\ 1} \end{bmatrix}.$$

W przypadku kiedy mamy do czynienia z pochodnymi wyższych rzędów, wzór na obliczanie pochodnej jest podobny do wzoru (21)

$$\frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial \{\alpha_{p_k}^{**}\}} = \left\{a_k^* \cap \overline{\left(\bigcup_{p_k=1}^{s} \alpha_{p_k}^{**}\right)} \,|\, a_k^* \cap \left(\bigcup_{p_k=1}^{s} \alpha_{p_k}^{**}\right) = \bigcup_{p_k=1}^{s} \alpha_{p_k}^{**}\right\}. \tag{22}$$

Z łatwością można wykazać słuszność następujących związków dla dwóch dowolnych liczb strukturalnych binarnych $\mathbf{A}^*$ i $\mathbf{B}^*$:

$$\frac{\partial(\mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*)}{\partial \alpha^{**}} = \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial \alpha^{**}} + \frac{\partial \mathbf{B}^*}{\partial \alpha^{**}}, \tag{23}$$

$$\frac{\partial(\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{B}^*)}{\partial \alpha^{**}} = \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial \alpha^{**}} \cdot \mathbf{B}^* + \frac{\partial \mathbf{B}^*}{\partial \alpha^{**}} \cdot \mathbf{A}^*. \tag{24}$$

2.6. Copochodna liczby strukturalnej binarnej

Copochodną liczby strukturalnej binarnej **A*** względem elementu będziemy nazywać liczbę strukturalną binarną

$$\frac{\delta \mathbf{A}^*}{\delta \alpha^{**}} \stackrel{\mathrm{df}}{=} t\frac{\delta A}{\delta \alpha} = \frac{\delta t\mathbf{A}}{\delta t\alpha}. \tag{25}$$

W celu wyznaczenia copochodnej można posłużyć się następującym wzorem ogólnym

$$\frac{\delta \mathbf{A}^*}{\delta \alpha^{**}} = \{a_k^* \mid a_k^* \cap \alpha^{**} = 0\}. \tag{26}$$

Przykład 8

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\delta \mathbf{A}^*}{\delta [0\,1\,0\,0\,0\,0]^{\mathrm{T}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\delta \mathbf{A}^*}{\delta [0\,0\,1\,0\,0\,0]^{\mathrm{T}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podobnie jak w punkcie 2.6 można i dla copochodnej udowodnić następujące związki:

$$\frac{\delta}{\delta \alpha^{**}}(\mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*) = \frac{\delta \mathbf{A}^*}{\delta \alpha^{**}} + \frac{\delta \mathbf{B}^*}{\delta \alpha^{**}}, \tag{27}$$

$$\frac{\delta}{\delta \alpha^{**}}(\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{B}^*) = \frac{\delta \mathbf{A}^*}{\delta \alpha^{**}}\mathbf{B}^* + \frac{\delta \mathbf{B}^*}{\delta \alpha^{**}}\mathbf{A}^* + \mathbf{A}^*\mathbf{B}^*. \tag{28}$$

2.7. Wyznacznik liczby strukturalnej binarnej

Wyznacznikiem liczby strukturalnej binarnej **A*** będziemy nazywać funkcję

$$\det_Y \mathbf{A}^* \stackrel{\mathrm{df}}{=} \det_Y \mathbf{A}. \tag{29}$$

W szczególnym przypadku mamy:

$$\det_Y \mathbf{A}^* = \det_Y \begin{bmatrix} \alpha_{11}^* & \alpha_{12}^* & \dots & \alpha_{1n}^* \\ \alpha_{21}^* & \alpha_{22}^* & \dots & \alpha_{2n}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1}^* & \alpha_{r2}^* & \dots & \alpha_{rn}^* \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{r} y_\beta \big|_{y_0=1}, \tag{30}$$

gdzie $\beta = \alpha_{ij}^* \cdot i$.

Przykład 9

Określić wyznacznik liczby strukturalnej binarnej

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

dla typu Y.

Rozwiązanie:

$$\det_{Y}\mathbf{A}^* = \sum_{j=1}^{16}\prod_{i=1}^{6} y_{\alpha_{ij}\cdot i}\big|_{y_0=1} \tag{32}$$

$$= y_1y_2y_3y_0y_0y_0+y_1y_2y_0y_0y_5y_0+\ \dots\ +y_0y_0y_3y_0y_5y_6\big|_{y_0=1}$$

$$= y_1y_2y_3+y_1y_2y_5+y_1y_2y_6+y_1y_3y_4+y_1y_3y_5+y_1y_4y_5+y_1y_4y_6+$$

$$+y_1y_5y_6+y_2y_3y_4+y_2y_3y_6+y_2y_4y_5+y_2y_4y_6+y_2y_5y_6+y_3y_4y_5+$$

$$+y_3y_4y_6+y_3y_5y_6.$$

2.8. Funkcja jednoczesności

$$\operatorname*{Sim}_{Z}\left(\frac{\partial\mathbf{A}^*}{\partial\alpha_1^{**}}, \frac{\partial\mathbf{A}^*}{\partial\alpha_2^{**}}\right) \overset{\text{df}}{=} \operatorname*{Sim}_{Z}\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\alpha_1}, \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\alpha_2}\right). \tag{33}$$

3. DEKODOWANIE LICZB STRUKTURALNYCH BINARNYCH NA LICZBY STRUKTURALNE BELLERTA

Problem dekodowania sprowadza się do odwrotnego odwzorowania systemu $\mathscr{A}^*$: $t^{-1}\mathbf{A}^* \to \mathrm{A}$.

$$\mathrm{A} = t^{-1}\mathbf{A}^*$$

$$= \{t^{-1}\mathrm{a}^*|t^{-1}\mathrm{a}_1^*, t^{-1}\mathrm{a}_2^*, \dots, t^{-1}\mathrm{a}_n^*;\ t^{-1}\mathrm{a}_i^* \neq t^{-1}\mathrm{a}_j^*;\ i \neq j\}$$

$$= \{\mathrm{a}|\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_n;\ \mathrm{a}_i \neq \mathrm{a}_j;\ i \neq j\}; \tag{34}$$

$$\mathrm{a}_j = \begin{cases} \{\log_2\alpha_{kj}^{**}+1\} \text{ dla } \alpha_{kj}^{**} \neq 0, \\ \{0\} \text{ w przeciwnym przypadku,} \end{cases} \tag{35}$$

gdzie $k = 1, 2, \dots, r$.

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \log_2\alpha_{kj}^{**}+1 \text{ dla } \alpha_{kj}^{**} \neq 0 \\ \{0\} \text{ w przeciwnym przypadku} \end{cases} \tag{36}$$

$= 1, 2, \dots, n;\ i = 1, 2, \dots, m.$

Przykład 10

Dana jest liczba strukturalna binarna

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{37}$$

— przedstawić ją w systemie $\mathscr{A}$.

Rozwiązanie: Wyznaczamy α_{1j}, α_{2j}, α_{3j} dla k równego od 1 do maksymalnej liczby jedynek m w jednej z kolumn liczby strukturalnej binarnej stałowierszowej (37) lub kolumnie zawierającej maksymalną liczbę jedynek dla liczby strukturalnej binarnej

niestałowierszowej. Wyliczając według wzoru (36) poszczególne elementy α_{ij} liczby strukturalnej otrzymamy:

$$\alpha_{11} = 0+1 = 1 \quad \alpha_{12} = 3+1 = 4 \quad \alpha_{13} = 0+1 = 1$$
$$\alpha_{21} = 1+1 = 2 \quad \alpha_{22} = 4+1 = 5 \quad \alpha_{23} = 2+1 = 3$$
$$\alpha_{31} = 2+1 = 3 \quad \alpha_{32} = 5+1 = 6 \quad \alpha_{33} = 4+1 = 5$$

$$\mathrm{a}_1 = t^{-1}\mathrm{a}_1^* = \{\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}\}$$
$$\mathrm{a}_2 = t^{-1}\mathrm{a}_2^* = \{\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}\}$$
$$\mathrm{a}_3 = t^{-1}\mathrm{a}_3^* = \{\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33}\}$$

$$\mathrm{A} = t^{-1}\mathrm{A}^* = \{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3\}$$
$$= \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Analogicznie jak do systemu algebraicznego $\mathscr{A}$ można również zastosować binaryzację do systemu algebraicznego liczb strukturalnych zupełnych opisanych przez H. Woźniackiego [3]. Również i w tym przypadku słuszne są wszystkie wyprowadzone zależności.

4. GENEROWANIE DRZEW

Algorytm generowania drzew dowolnego multigrafu spójnego opisany w tym artykule jest oparty na następującej definicji drzewa.

D e f i n i c j a 4

Drzewem multigrafu zdeterminowanego spójnego M nazywać będziemy graf G_d opisany za pomocą trójki (3), jeśli spełnia on następujące warunki:

1° — posiada N gałęzi,

2° — posiada n wierzchołków,

3° — jest grafem spójnym.

Spełnienie tych trzech postulatów jest warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia drzew.

D e f i n i c j a 5

Liczbę N będziemy nazywać liczbą acyklomatyczną multigrafu $N = n-1$, gdzie n — liczba wierzchołków multigrafu.

D e f i n i c j a 6

Macierz $\overline{\mathrm{A}}$ będziemy nazywać macierzą incydencyjną multigrafu M, jeżeli jej wiersze są liczbami strukturalnymi binarnymi jednowierszowymi, odpowiadającymi wszystkim wierzchołkom multigrafu M.

D e f i n i c j a 7

Macierz incydencyjną $\overline{\mathrm{A}}$ będziemy nazywać macierzą zmodyfikowaną $\overline{\mathrm{A}}^m$, jeśli liczba jej kolumn niezerowych jest równa dokładnie liczbie acyklomatycznej N.

Macierz incydencyjną zmodyfikowaną $\overline{A}^m$ można utworzyć z macierzy incydencyjnej

przez przemnożenie każdego jej wiersza przez kolumnę o liczbie elementów równej liczbie acyklomatycznej N. Kolumnę tę w dalszym ciągu będziemy nazywać maską.

Definicja 8

Maską multigrafu M będziemy nazywać uporządkowany zbiór N elementowy kodów gałęzi multigrafu. Łatwo zauważyć, że dla multigrafu M posiadającego m gałęzi i n wierzchołków liczba wszystkich możliwych masek może być obliczona według wzoru Newtona

$$k = \binom{m}{N} = \frac{m!}{(m-(n-1))!\,(n-1)!} \tag{38}$$

Definicja 9

Maskę będziemy nazywać kodem drzewa, jeśli odpowiadająca jej macierz incydencyjna zmodyfikowana jest spójna.

Definicja 10

Macierz incydencyjną zmodyfikowaną $\bar{A}^m$ będziemy nazywać spójną wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadający jej graf jest spójny i odwrotnie.

Twierdzenie 1

Macierz incydencyjna zmodyfikowana $\bar{A}^m$ jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy w N^2 krokach można zsumować wszystkie jej wiersze przy zachowaniu warunku, że wiersz sumowany z sumą wierszy posiada przekrój niepusty. Powyższe można zapisać w sposób rekurencyjny następująco:

$$\begin{gathered} A_0 \mid\!\rightarrow a_0 \\ a_j^i \cap A_0 \neq 0 \;\rightarrow\; A_0 \mid\!\rightarrow a_j^i \cup A_0 \\ i = 1, 2, \ldots, N \qquad j = 1, 2, \ldots, N, \end{gathered} \tag{39}$$

gdzie:

$\rightarrow$ oznacza operator warunkowy;

$\mid\!\rightarrow$ oznacza przyporządkowanie lewej stronie strzałki wartość wyrażenia występującego po jej prawej stronie;

$a_0, a_1, \ldots, a_N$ — wiersze macierzy incydencyjnej zmodyfikowanej $\bar{\mathbf{A}}^m$;

A_0 — suma wierszy macierzy $\bar{\mathbf{A}}^m$ spełniających warunek $a_j^i \cap A_0 \neq 0$.

i — i-ty cykl iteracji

Dowód. Zgodnie ze znanym pojęciem intuicyjnym spójności grafu wiadomo, że graf jest spójny wtedy, gdy istnieje przejście z dowolnego i-tego wierzchołka do każdego j-tego. Ponieważ wiersze macierzy incydencyjnej zmodyfikowanej odpowiadają wierzchołkom grafu zgodnie z definicją 6 i 7, to proces sumowania wierszy przy spełnionym warunku lewostronnym (39) jest niczym innym jak sprawdzeniem, czy istnieje przejście z dowolnego i-tego wierzchołka (zaczynając od zerowego) do każdego j-tego. Jeśli zatem istnieje suma wszystkich n wierszy przy zachowaniu warunku (39), to macierz incydencyjna jest spójna i odpowiadający jej graf jest spójny.

Nietrudno zauważyć, że po to, by stwierdzić, czy macierz incydencyjna jest spójna (39), niekoniecznie trzeba wykonać aż N^2 kroków. W niektórych przypadkach można to uczynić w N krokach, w innych $2N$, $3N$ itd.

Algorytm generowania drzew metodą liczb strukturalnych binarnych oparty jest na definicji drzewa 4 oraz definicjach 5÷10 i twierdzeniu 1. Składa się on z algorytmów: tzw. generatora masek (rys. 1) oraz generatora drzew (rys. 2) i sprowadza się do generowania masek oraz badania spójności macierzy incydencyjnej zmodyfikowanej odpowiadającej każdej masce. W przypadku gdy macierz incydencyjna zmodyfikowana odpowiadająca masce D_r^* jest spójna, maska D_r jest kodem drzewa t_r, zaś dana macierz — jego macierzą incydencyjną.

4.1. Zasada działania generatora masek

Generatorem masek będziemy nazywać algorytm (rys. 1) generujący wszystkie możliwe maski, których liczba w zależności od wielkości grafu może być określona za pomocą następującego wzoru:

$$\operatorname{card}\{D^M\} = \binom{m}{N} = \frac{m!}{(m-N)!N!}$$

gdzie:

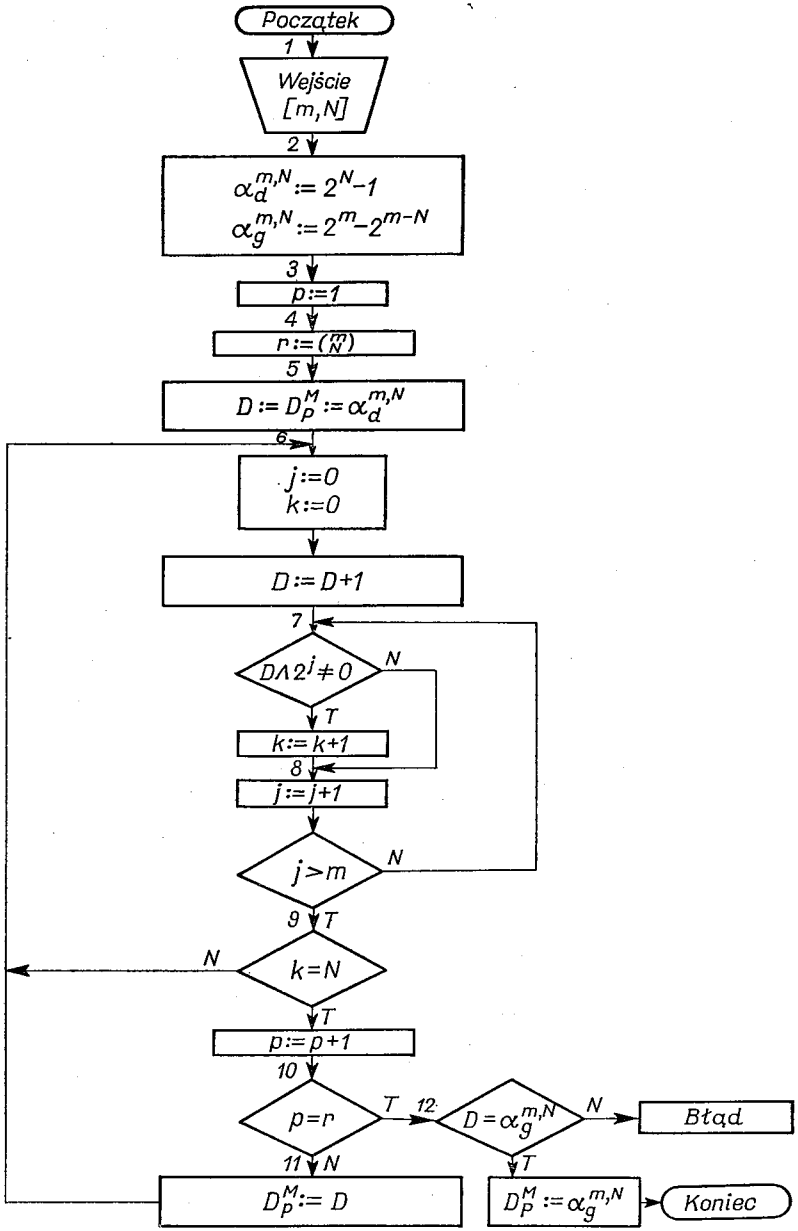
m — liczba gałęzi grafu,

N — liczba acyklomatyczna grafu ($N = n-1$),

n — liczba wierzchołków grafu.

W celu wygenerowania przez generator wszystkich możliwych masek w maszynie wykonywane są następujące czynności:

1. Wprowadzenie do pamięci maszyny liczb m oraz N.
2. Obliczanie przez maszynę przedziału liczb naturalnych. W tym celu maszyna wyznacza kres dolny $\alpha_d^{m,N} := 2^N-1$ oraz kres górny $\alpha_g^{m-N} := 2^m-2^{m-N}$.
3. Ustawienie początkowej wartości licznika $p := 1$.
4. Obliczenie wartości wyrażenia: $r := \binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!n!}$.
5. Podstawienie: $D := D_p^M := \alpha_d^{m,N}$.
6. Ustawienie początkowych wartości liczników $j := 0$ i $k := 0$ oraz zwiększenie D o 1 ($D := D+1$).
7. Badanie warunku $D \wedge 2^j \neq 0$. W przypadku gdy warunek ten jest spełniony, licznik cykli k zostaje zwiększony o 1 ($k := k+1$). W przeciwnym przypadku ma miejsce przejście do wykonywania czynności 8.
8. Zwiększenie licznika cykli j o 1 ($j := j+1$) oraz badanie warunku $j > m$. W przypadku gdy warunek ten nie jest spełniony, ma miejsce przejście do wykonywania czynności 7, zaś w przeciwnym przypadku — wykonywania czynności 9.
9. Badanie warunku $k = N$. W przypadku gdy warunek ten nie jest spełniony, ma miejsce przejście do wykonania czynności 6. W przeciwnym przypadku licznik cykli p zostaje zwiększony o 1 ($p := p+1$) i ma miejsce przejście do wykonania czynności 10.
10. Badanie warunku $p = r$, gdzie $r = \frac{m!}{(m-N)!N!}$. Jeśli warunek ten jest spełniony, to ma miejsce przejście do wykonywania czynności 12. W przeciwnym przypadku następuje przejście do wykonania czynności 11.



Rys. 1. Generator masek D_p^M

11. Podstawienie $D_p^M := D$ i przejście do wykonywania czynności 6.
12. Badanie warunku $D = \alpha_g^{m,N}$, a jeśli warunek jest spełniony, to ma miejsce podstawienie typu $D_p^M := \alpha_g^{m,N}$. W przeciwnym przypadku następuje zasygnalizowanie błędu „BŁĄD".

KONIEC — w tym przypadku następuje zatrzymanie procesu generowania masek.

Użyte w algorytmie oznaczenia mają następujące znaczenie:

$:=$ — znak podstawienia, używany w języku ALGOL;

$=$ — relacja porównania;

D, T — wartości logiczne N (NIE), T (TAK);

D — komórka robocza, w której przechowywana jest liczba z przedziału $\langle \alpha_d^{m,N}, \alpha_g^{m,N} \rangle$ poddana analizie kryteriom właściwym masce;

D_p^M — komórka pamięci, w której przechowywana jest p-ta maska;

r — komórka, w której przechowywana jest wartość (m);

p, j, k — liczniki cykli;

$m, N, \binom{m}{N}$ — ograniczniki.

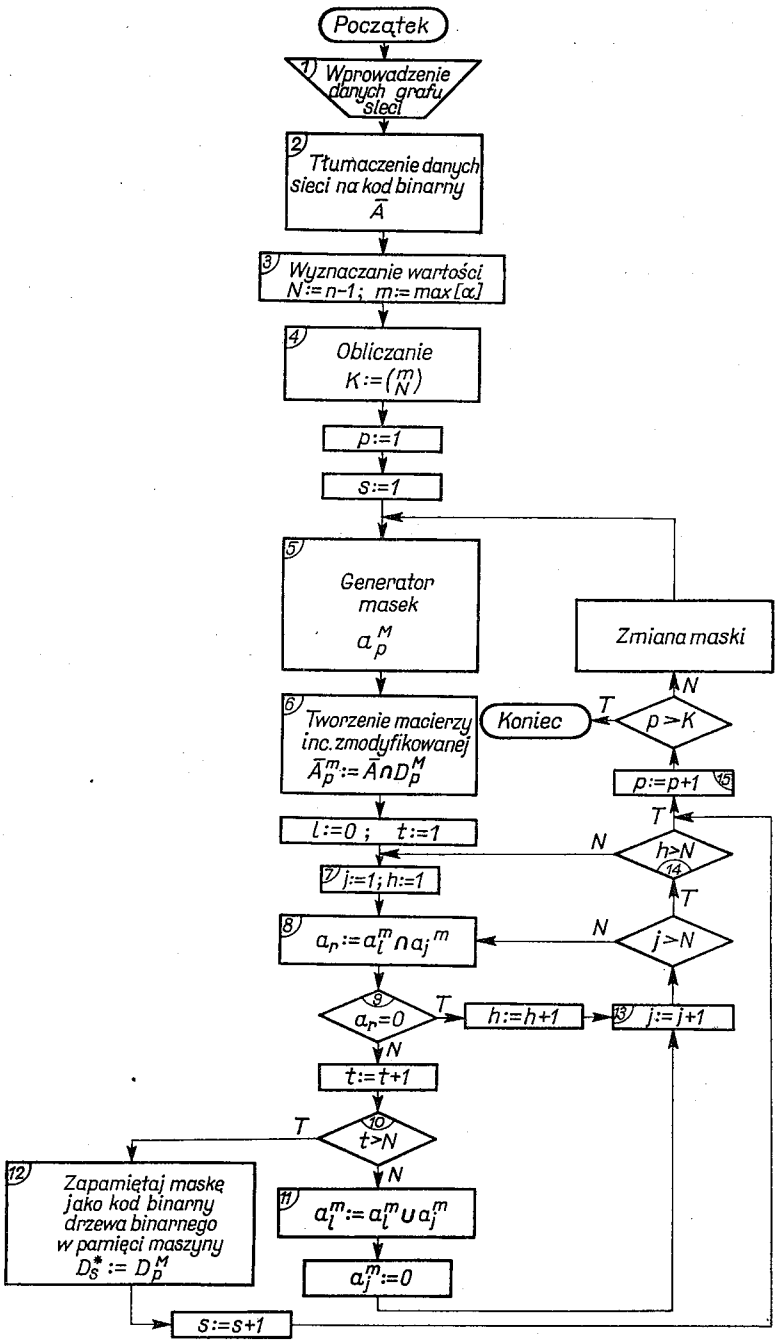
4.2. Zasada działania generatora drzew

Generatorem drzew, a raczej binarnych kodów drzew, nazywać będziemy algorytm, którego schemat blokowy przedstawiono na rys. 2.

Algorytm ten w oparciu o dany zbiór wszystkich możliwych masek D^M, wygenerowany przez generator masek oraz macierz incydencyjną $\overline{A}$, bada spójność każdej zmodyfikowanej macierzy incydencyjnej $\overline{A}_p^m$, odpowiadającej danej masce D_p^m. Badanie spójności macierzy incydencyjnej zmodyfikowanej przebiega w ten sposób, że algorytm sumuje te wiersze macierzy, które mają wspólny element z wierszami już zsumowanymi itd. Jeśli takie sumowanie jest możliwe dla wszystkich wierszy macierzy incydencyjnej zmodyfikowanej, to odpowiadający tej macierzy graf jest spójny (tw. 1). W przeciwnym przypadku — graf nie jest spójny.

W celu wyznaczenia ze zbioru masek D^M tylko tych, które są drzewami binarnymi, algorytm wymaga wykonania przez maszynę następujących czynności:

1. Wprowadzenie do pamięci maszyny danych opisujących graf sieci.
2. Przetłumaczenie danych grafu sieci na kod binarny, czyli utworzenie macierzy incydencyjnej $\overline{A}$.
3. Wyznaczenie wartości $N := n-1$ oraz $m := \max[\alpha]$.
4. Obliczenie wartości $K := \binom{m}{N}$ oraz podstawienie typu $p := 1$ i $s := 1$.
5. Pobranie z generatora masek lub z pamięci maszyny do arytmometru p-tą maskę D_p^M.
6. Utworzenie macierzy incydencyjnej zmodyfikowanej $\overline{A}_p^m := \overline{A} \cap D_p^M$ z macierzy incydencyjnej $\overline{A}$ przez uczynienie w niej zerowymi tych kolumn, które odpowiadają gałęziom usuniętym z rozpatrywanego podgrafu, których indeksy nie występują w masce D_p^M. Ustawienie wartości $l := 0$ oraz $t := 1$.
7. Ustawienie wartości $j := 1$ oraz $h := 1$.
8. Wykonanie czynności mnożenia logicznego i podstawienie typu
$$a_r := a_l^m \cup a_j^m. \tag{41}$$
9. Badanie warunku $a_r \stackrel{?}{=} 0$. W przypadku gdy warunek ten jest spełniony, tzn. $a_r = 0$, ma miejsce zwiększenie h o 1 ($h := h+1$) i przejście do wykonywania czynności 13, zaś w przeciwnym przypadku zostaje zwiększona wartość t o 1 ($t := t+1$) i ma miejsce przejście do wykonywania czynności 10.



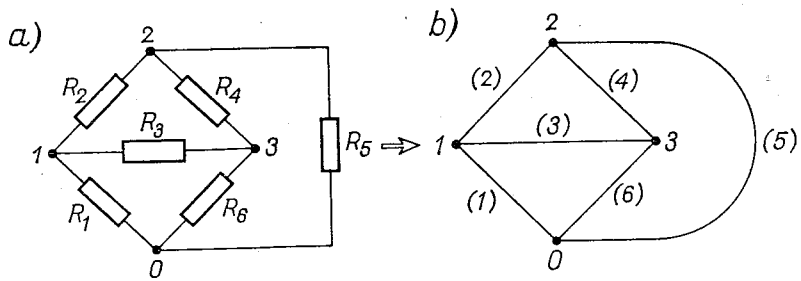
Rys. 2. Schemat blokowy algorytmu generowania drzew metodą liczb strukturalnych binarnych

10. Badany jest warunek $t \overset{?}{>} N$. W przypadku gdy warunek ten jest spełniony, wykonywana jest czynność 12. W przeciwnym przypadku, tzn., gdy $t \not> N$ — wykonywana jest czynność 11.
11. Ma miejsce podstawienie typu
$$a_i^m := a_i^m \cup a_j^m \tag{42}$$
oraz $a_j^m := 0$ i przejście do wykonywania czynności 13.
12. Zapamiętywana jest w pamięci maszyny maska jako kod binarny drzewa przez podstawienie typu $D_s^* := D_p^M$, następnie zwiększona zostaje wartość s o 1 ($s := s+1$) i ma miejsce przejście do wykonywania czynności 15.
13. Odbywa się podstawienie typu $j := j+1$ oraz badany jest warunek $j \overset{?}{>} N$. W przypadku gdy warunek ten jest spełniony, wykonywana jest czynność 14, zaś w przeciwnym przypadku — czynność 8.
14. Badany jest warunek $h \overset{?}{>} N$. W przypadku gdy ten warunek jest spełniony, wykonywana jest czynność 15, zaś w przeciwnym przypadku — czynność 7.
15. Następuje zwiększenie zawartości p o 1, czyli podstawienie typu $p := p+1$ oraz badanie warunku $p > K$. W przypadku gdy warunek ten jest spełniony, wykonywana jest czynność KONIEC, zaś w przeciwnym przypadku następuje zmiana maski i przejście do wykonywania czynności 5.

KONIEC: Następuje zakończenie generowania zbioru wszystkich możliwych drzew, czyli liczby strukturalnej binarnej **D***.

Przykład 11

Dany jest graf na rys. 3b, odpowiadający sieci przedstawionej na rys. 3a — należy wyznaczyć opisaną metodą wszystkie możliwe jego drzewa.



Rys. 3. Schemat zastępczy układu: a) sieć **S**, b) graf G zdeterminowany sieci **S**

Rozwiązanie:

1. Dane grafu (rys. 3b) można wprowadzić do pamięci maszyny jako liczby strukturalne jednowierszowe, odpowiadające poszczególnym wierzchołkom grafu (rys. 3b):
$$\begin{aligned} a_0 &= [4\ 5\ 6] \\ a_1 &= [1\ 2\ 3] \\ a_2 &= [2\ 4\ 5] \\ a_3 &= [3\ 4\ 6] \end{aligned} \tag{43}$$

2. Po przetłumaczeniu danych grafu (rys. 3b) na kod binarny otrzymamy:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{matrix} \\ a_0^* \\ a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{44}$$

3. $N := n-1 := 4-1 = 3$
   $m := 6$

4. $K := \dfrac{m!}{(m-N)!\,N!} = \dfrac{6!}{3!\,3!}$
   $p := 1,\ s := 1$

5. Generator masek generuje w tym przypadku $k = 20$ masek. Zestaw tych masek podany jest w tablicy 1.

Tablica 1

Zestaw masek dla grafu z rys. 3

Numer maski	Maska	Numer maski	Maska	Numer maski	Maska	Numer maski	Maska
1	111000	6	101010	11	011100	16	010011
2	110100	7	101001	12	011010	17	001110
3	110010	8	100110	13	011001	18	001101
4	110001	9	100101	14	010110	19	001011
5	101100	10	100011	15	010101	20	000111

W wyniku wykonania pozostałych czynności (6÷15), określonych w algorytmie generowania drzew (rys. 2), otrzymujemy kody binarne drzew, których zestaw podano w tablicy 2.

Tablica 2

Zestaw drzew dla grafu z rys. 3, wygenerowanych w oparciu o zestaw masek z tabl. 1

Numer drzewa	Kod drzewa	Numer drzewa	Kod drzewa	Numer drzewa	Kod drzewa	Numer drzewa	Kod drzewa
1	111000	5	101010	9	011010	13	010011
2	110100	6	100110	10	011001	14	001110
3	110001	7	100101	11	010110	15	001101
4	101100	8	100011	12	010101	16	001011

W ten sposób wygenerowana została liczba strukturalna binarna

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{D}^* = \left|\begin{array}{cccccccccccccccc} 1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&1&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1\\ 0&1&0&1&0&1&1&0&0&0&1&1&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&1&0&1&1&0&1\\ 0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&0&1&1&0&1&1 \end{array}\right| \tag{45}$$

Nietrudno zauważyć, że każda kolumna te liczby jest kodem binarnym drzewa. Znając kody poszczególnych drzew oraz macierz incydencyjną $\overline{\mathbf{A}}$, można zawsze wyznaczyć macierz incydencyjną danego drzewa ze wzoru

$$\overline{\mathbf{A}}_r^m = \overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{D}_r^*$$

gdzie:

$\overline{\mathbf{A}}$ — macierz incydencyjna,

$\mathbf{D}_r^*$ — kod binarny r-tego drzewa.

Na podstawie macierzy incydencyjnej danego drzewa t_r można łatwo narysować jego graf, będący podgrafem grafu wyjściowego.

5. GENEROWANIE WIELODRZEW

Wielodrzewami grafu G nazywać będziemy drzewa podgrafów utworzonych z danego grafu G przez połączenie w nim odpowiednich wierzchołków. Jeśli w grafie zdeterminowanym zostały połączone ze sobą dwa wierzchołki, to wielodrzewa tego typu nazywać będziemy dwudrzewami. Jeśli połączone zostały ze sobą trzy wierzchołki, to takie wielodrzewa nazywać będziemy trójdrzewami itd.

Zbiór kodów dwudrzew grafu G można traktować jako liczbę strukturalną binarną powstałą z liczby strukturalnej binarnej grafu G przez zróżniczkowanie jej względem odpowiedniego kodu g_{ij} elementu g grafu G.

$$\mathbf{D}^{(2d)} = \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial g_{ij}^{**}}, \tag{46}$$

gdzie g_{ij} — jest tym elementem grafu G, który łączy jego wierzchołki podlegające połączeniu dla utworzenia odpowiednich dwudrzew.

W przypadku gdy wierzchołki (i, j) podlegające połączeniu nie są połączone gałęzią, to różniczkowanie przeprowadza się względem k wszystkich kodów elementów należących do ścieżki P_{ij}, a następnie mnoży się każdą kolumnę tak otrzymanej liczby strukturalnej binarnej przez wszystkie $\binom{k}{p}$ kombinacji kodów elementów należących do tej ścieżki. W tym przypadku mamy:

$$\mathbf{D}^{(2d)} = \left\{ \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial P_{ij}^{**}} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{j1} \\ \gamma_{j2} \\ \vdots \\ \gamma_{jp} \end{bmatrix} \right\}, \qquad j = 1, 2, \ldots, p, \tag{47}$$

gdzie $p = N-k$.

Wszystkich możliwych kolumn, przez które mnożona jest pochodna $\frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial P_{ij}^{**}}$, jest

$$s = \binom{k}{p} = \frac{k!}{(k-p)!p!} \tag{48}$$

Innym rozwiązaniem tego samego problemu jest wprowadzenie do grafu G fikcyjnej gałęzi g_{ij} łączącej wierzchołki (i, j), względem których ma być wyznaczony zbiór dwudrzew, a następnie wyznaczenie zbioru dwudrzew wg wzoru (46).

6. WNIOSKI

Zastosowanie metody liczb strukturalnych binarnych do analizy i syntezy sieci elektrycznych i elektronicznych pozwala całkowicie zautomatyzować proces projektowania układów za pomocą maszyn cyfrowych. Metoda ta pozwala na pominięcie rozwiązywania układu równań algebraicznych, opisujących zależności prądowe i napięciowe w sieciach. Wyniki analizy otrzymywane są w postaci standartowej, bez konieczności dokonywania przekształceń zarówno w postaci wzorów analitycznych, jak i w postaci liczbowej. Metoda nie wprowadza redundancji wyrazów koniecznych do skracania.

LITERATURA CYTOWANA W TEKSCIE

1. S. Bellert, Computer Four-Pole Synthesis Based on the Method of Structural Numbers, Arch. Elektrotechn., **13**, 1964.
2. S. Bellert, H. Woźniacki, Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych, WNT, Warszawa 1968.
3. H. Woźniacki, Analiza blokowych układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych, Arch. Elektrotechn., **15**, 2, 3, 1966.
4. S. L. Hakimi, D. G. Green, Generation and Realization of Trees and k-Tress, IEEE Trans. on Circuit Theory, CT-11, 247—255, June, 1964.
5. W. Mayeda, S. Seshu, Generation of Trees without Duplications, IEEE Trans. on Circuit Theory, CT-12, 181—185, June, 1965.
6. M. Piekarski, Listing of All Possible Trees of Linear Graph, IEEE Trans. on Circuit Theory, CT-12, 1, 124, 1965.
7. C. Syc, O pewnym sposobie kodowania liczb strukturalnych Bellerta dla maszyn cyfrowych, Biul. WAT, 7, 1968.
8. C. Syc, Wyznaczanie drzew i wielodrzew grafów opisanych metodą liczb strukturalnych binarnych za pomocą maszyn cyfrowych, Biul. WAT, 10, 1968.

C. SYC

COMPUTER-AIDED GENERATING OF TREES AND k-TREES OF MULTIGRAPHS BASED ON THE METHOD OF STRUCTURAL NUMBERS

Summary

In this paper we have presented one of the possible ways of coding structural numbers [1], [2] for digital computers as well as the way of getting by their means the trees and k-trees of connected multigraphs.

The accepted way of coding of structural numbers is based on binary representation of each column and its elements. The described algorithm for generating the binary structural number (the set of all trees) of connected multigraph gives all possible columns (trees) without duplication if the incidence matrix of the multigraph is given.

C. SYC

GÉNÉRATION DES ARBRES ET *k*-ARBRES DES MULTIGRAPHES À L'AIDE DE LA MÉTHODE DES NOMBRES STRUCTURAUX

Résumé

Dans cet article on a présenté un de moyens possibles de la codification des nombres structuraux [1], [2] pour les calculatrices digitales aussi qu'un moyen de fixer à leur aide des arbres et *k*-arbres des multigraphes joints.

Le moyen admis pour coder les nombers structuraux est basé sur représentation binaire de chaque colonne du nombre structural ainsi que de son élément. L'algorithme de génération du nombre structural binaire (ensemble des arbres) d'un multigraphe joint fixe toutes les colonnes (arbres) possibles sans les répeter en se basant sut la matrice incidentelle du multigraphe donné.

C. SYC

DIGITALRECHNERISCHE ERZEUGUNG DER BÄUME UND *k*-BÄUME MITTELS DER METHODE DER STRUKTURALZAHLEN

Zusammenfassung.

In diesem Artikel ist eine Möglichkeit der Kodierung der Strukturalzahlen [1], [2] für einen Digitalrechner, sowie ein Weg zur digitalen Bestimmung von Bäumen und *k*-Bäumen der zusammenhängenden Multigraphen dargestellt. Die hier benutzte Kodierungsweise der Strukturalzahlen beruht der Binärdarstellung jeder Spalte der Strukturalzahl sowie ihrer Elemente.

Der hier beschriebene Algorithmus der Erzeugung der binären Strukturalzahl (der Menge der Bäume) eines zusammenhängenden Multigraphen bestimmt alle möglichen Spalten (Bäume) ohne Wiederholung und zwar auf Grund der Inzidenzmatrix des gegebenen Multigraphen.

Ч. СЫЦ

ГЕНЕРИРОВАНИЕ ДЕРЕВЬЕВ И *к*-ДЕРЕВЬЕВ МУЛЬТИГРАФОВ МЕТОДОМ БИНАРНЫХ СТРУКТУРНЫХ ЧИСЕЛ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРОННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН

Резюме

В статье приведен один из возможных методов кодирования структурных чисел [1], [2] для вычислительных машин, а также метод определения с их помощью деревьев и *к*-деревьев связных мультиграфов.

Принятый метод кодировки структурных чисел основан на двоичном представлении каждого элемента столбца, а также каждого столбца структурного числа. Приведенный в статье алгоритм генерирования деревьев связного мультиграфа определяет все возможные деревья без повторений.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 15, 3, ss. 515–531
INSTYTUT TECHNOLOGII ELEKTRONOWEJ PAN, WARSZAWA 1969

Symulacja sygnału odbieranego w radarach dopplerowskich z sinusoidalną modulacją częstotliwości

ANDRZEJ LIZOŃ (WARSZAWA)

Katedra Radiolokacji Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 25.4.1968

W pracy omówiono zasadę symulacji niefluktuującego sygnału odbieranego w radarach dopplerowskich z sinusoidalną modulacją częstotliwości, pochodzącego od obiektu ruchomego względem radaru. Sygnał symulujący jest wytwarzany w wyniku modulacji amplitudowej lub fazowej sygnału nadajnika. Jest on podawany do mieszacza mikrofalowego badanego radaru w takiej fazie, by sygnał wypadkowy powstający na wejściu tego mieszacza po zsumowaniu się z sygnałem heterodyny posiadał największą zmianę amplitudy. W wyniku przeprowadzonej analizy uzyskano zależności określające wymagany wybór parametrów modulacji sygnału symulującego. Wymagana amplituda sygnału symulującego uzależniona jest od odległości obiektu odbijającego od radaru. Podobnie od odległości tej zależy wymagana faza przebiegu modulującego. Zależności te podano na wykresach. Omówiono także niektóre układy wytwarzające sygnał symulujący w wyniku modulacji sygnału przenoszonego w układach falowodowych. Układy te umożliwiają zarówno badanie radarów dopplerowskich posiadających oddzielne anteny do nadawania i do odbioru, jak i radarów posiadających jedną wspólną antenę.

1. WSTĘP

Przy badaniu radaru dopplerowskiego w warunkach laboratoryjnych konieczne jest wytworzenie sygnału symulującego sygnał odbierany pochodzący od obiektu ruchomego względem radaru. Ważna jest wówczas dokładna znajomość amplitudy tego sygnału oraz jego przesunięcia dopplerowskiego.

Zależnie od rodzaju badanego radaru występują różne problemy przy wytwarzaniu takiego sygnału. W najprostszym radarze dopplerowskim o fali ciągłej [1], [3] sygnał nadajnika jest niemodulowany. Sygnał odbierany przy stałej prędkości promieniowej obiektu jest także niemodulowany (pomijając ewentualne fluktuacje amplitudy i fazy powstające przy odbiciu od obiektu), częstotliwość jego jest jednak przesunięta względem częstotliwości sygnału nadajnika o wartość równą częstotliwości dopplerowskiej. W wyniku zmieszania sygnału odbieranego z sygnałem nadajnika, spełniającym rolę heterodyny, na wyjściu mieszacza mikrofalowego uzyskuje się sygnał o częstotliwości dopplerowskiej i o amplitudzie zależnej tylko od amplitudy sygnału odbieranego. W radarze takim sygnał odbierany można symulować przebiegiem otrzymywanym w wyniku modulacji jednowstęgowej sygnału nadajnika z częstotliwością dopplerowską. Sygnał odbierany można także symulować przebiegiem uzyskiwanym w wyniku sinusoidalnej modulacji ampli-

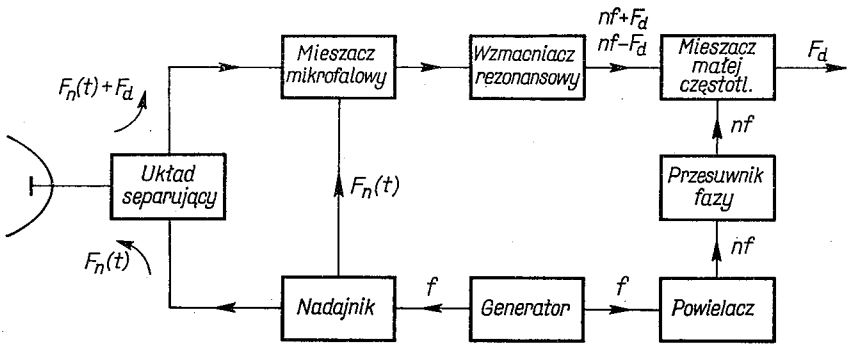
tudowej lub fazowej sygnału nadajnika przy odpowiednim przesunięciu go w fazie [5]. Przebieg powstający wówczas na wyjściu mieszacza mikrofalowego jest identyczny z powstającym przy odbiorze sygnału w rzeczywistych warunkach.

W radarze dopplerowskim z sinusoidalną modulacją częstotliwości [2], [4] sygnał odbierany zmodulowany jest analogicznie jak sygnał nadajnika. Widmo sygnału odbieranego jest jednak przesunięte względem widma sygnału nadajnika o częstotliwość dopplerowską. W wyniku zmieszania sygnału odbieranego z sygnałem nadajnika na wyjściu mieszacza mikrofalowego powstaje oczywiście sygnał zawierający częstotliwość dopplerowską, lecz także i częstotliwości różniące się od harmonicznych częstotliwości modulującej o wartość równą częstotliwości dopplerowskiej. Do wydzielenia częstotliwości dopplerowskiej wykorzystuje się zwykle dwie składowe leżące w pobliżu wybranej harmonicznej częstotliwości modulującej. Amplitudy tych składowych zależą jednak nie tylko od amplitudy sygnału odbieranego, lecz także od opóźnienia tego sygnału względem sygnału nadajnika. Przy opóźnieniu bliskim zeru składowe te posiadają amplitudy również bliskie zeru. Do wytworzenia sygnału symulującego sygnał odbierany konieczne jest zatem przesunięcie widma sygnału nadajnika o częstotliwość dopplerowską oraz opóźnienie jego w czasie o wartość równą realnemu opóźnieniu sygnału odbieranego. Sprawia to jednak wiele trudności nie tylko ze względu na konieczność stosowania modulacji jednowstęgowej, głównie jednak ze względu na trudności wprowadzenia niezbędnego opóźnienia w czasie sygnału nadajnika. Trudności te można ominąć, jeśli sygnał odbierany zastąpić sygnałem nadajnika zmodulowanym odpowiednio w amplitudzie lub fazie. Modulacje taką można uzyskać w bardzo prosty sposób.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie zasady symulacji niefluktuującego sygnału odbieranego w radarach dopplerowskich z sinusoidalną modulacją częstotliwości. Zasada ta oparta jest na wykorzystaniu modulacji amplitudowej sygnału nadajnika. Symulację taką można uzyskać analogicznie także w wyniku modulacji fazowej sygnału nadajnika. Przytoczone rozważania są rozwinięciem koncepcji przedstawionych w pracy [5] dla radaru dopplerowskiego o fali ciągłej.

2. ANALIZA DZIAŁANIA RADARU

Schemat blokowy radaru dopplerowskiego z sinusoidalną modulacją częstotliwości pokazany jest na rys. 1. Zasada jego działania jest następująca. Na wejście mieszacza



Rys. 1. Schemat blokowy radaru dopplerowskiego z sinusoidalną modulacją częstotliwości

mikrofalowego dochodzą jednocześnie zmodulowane w częstotliwości sygnał odbierany oraz sygnał nadajnika. Sygnały te po zsumowaniu tworzą sygnał wypadkowy przykładany na diodę mieszającą. Punkt pracy diody mieszającej określony jest przez amplitudę sygnału nadajnika, ponieważ amplituda ta jest znacznie większa od amplitudy sygnału odbieranego. W wyniku przesunięcia widma sygnału odbieranego o częstotliwość dopplerowską oraz opóźnienia go w czasie względem sygnału nadajnika, sygnał wypadkowy na wyjściu mieszacza posiada amplitudę zmienną z częstotliwością dopplerowską oraz z częstotliwościami różniącymi się od harmonicznych częstotliwości modulującej o częstotliwość dopplerowską. Na wyjściu mieszacza mikrofalowego wydzielane są składowe różniące się od wybranej harmonicznej częstotliwości modulującej o częstotliwość dopplerowską. Zależą one tylko od zmian obwiedni sygnału wypadkowego na wejściu mieszacza. Częstotliwość dopplerowską wyodrębnia się następnie przez zmieszanie tych składowych z odpowiednią harmoniczną częstotliwości modulującej.

Analizę właściwości uzyskiwanych sygnałów można w uproszczeniu przedstawić w sposób następujący. Jeśli przyjąć, że częstotliwość sygnału nadajnika zmienia się zgodnie z zależnością

$$F(t) = F_n + \Delta F_n \sin \omega t, \tag{1}$$

sygnał jego można przedstawić w postaci

$$u_n = U_n \sin\left(\Omega_n t - \frac{\Delta F_n}{f}\cos\omega t + \varphi_1\right) = U \sin \varphi_n(t), \tag{2}$$

gdzie:

U_n — amplituda,

$\frac{\Omega_n}{2\pi}$ — częstotliwość nośna,

$\frac{\Delta F_n}{f}$ — wskaźnik modulacji,

$f = \frac{\omega}{2\pi}$ — częstotliwość modulacji,

φ_1 — dowolne początkowe przesunięcie fazy.

Sygnał powracający do radaru określony jest wyrażeniem

$$u_0 = U_0 \sin\left[\Omega_n (t - t_1) - \frac{\Delta F_n}{f}\cos\omega(t - t_1) + \varphi_1 + \varphi_c\right] = U_0 \sin \varphi_0(t), \tag{3}$$

gdzie:

U_0 — amplituda,

t_1 — czas opóźnienia sygnału odbieranego równy $2R/c$,

R — chwilowa odległość między obiektem odbijającym i radarem,

c — prędkość rozchodzenia się fal elektromagnetycznych,

φ_c — w przybliżeniu stałe przesunięcie fazy będące sumą przesunięć fazowych powstających przy odbiciu od obiektu oraz przy przesyłaniu sygnału odbieranego w obwodach wejściowych odbiornika.

Obwiednia sygnału wypadkowego powstającego na wejściu mieszacza mikrofalowego w wyniku zsumowania tych sygnałów równa jest

$$U_{m_1} = [U_n^2 + U_0^2 + 2U_n U_0 \cos(\varphi_n - \varphi_0)]^{\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

co dla $U_0 \ll U_n$ upraszcza się dając

$$U_{m_1} \cong U_n + U_0 \cos(\varphi_n - \varphi_0). \tag{5}$$

Wyrażenie to uwzględniając (2) i (3) można sprowadzić do postaci

$$U_{m_1} \cong U_n + U_0 \cos\left[\Omega_n t_1 - \varphi_c + \beta \sin\omega\left(t - \frac{t_1}{2}\right)\right], \tag{6}$$

gdzie

$$\beta = \frac{2\Delta F_n}{f} \sin\omega\frac{t_1}{2} = \frac{2\Delta F_n}{f} \sin\omega\frac{R}{c}. \tag{7}$$

Jeśli obiekt odbijający oddala się od radaru jednostajnym ruchem promieniowym z prędkością znacznie mniejszą od prędkości rozchodzenia się fal elektromagnetycznych

$$t_1 \cong \frac{2R}{c} = \frac{2V}{c}t + \frac{2R_0}{c}, \tag{8}$$

$$\Omega_n t_1 - \varphi_c \cong \Omega_n \frac{2V}{c}t + \Omega_n \frac{2R_0}{c} - \varphi_c = \Omega_d t + \Psi, \tag{9}$$

gdzie:

$\frac{\Omega_d}{2\pi}$ — częstotliwość dopplerowska odbieranego sygnału,

V — prędkość promieniowa obiektu odbijającego.

Obwiednia sygnału na wejściu mieszacza wyraża się zatem zależnością[1)]

$$U_{m_1} = U_n + U_0 \cos\left[\Omega_d t + \Psi + \beta \sin\omega\left(t - \frac{t_1}{2}\right)\right]. \tag{10}$$

Widmo tej obwiedni po rozwinięciu na szereg można sprowadzić do postaci [4]

$$U_{m_1} = U_n + U_0 J_0(\beta)\cos(\Omega_d t + \Psi) + $$

$$+ 2U_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_n(\beta) \cos\left(\Omega_d t + \Psi + n\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(n\omega t - n\omega\frac{t_1}{2} + n\frac{\pi}{2}\right) \tag{11}$$

lub

$$U_{m_1} = U_n + U_0 J_0(\beta)\cos(\Omega_d t + \Psi) +$$

$$+ U_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_n(\beta) \left\{\cos\left[(n\omega + \Omega_d)t - n\omega\frac{t_1}{2} + \Psi + n\pi\right] + \cos\left[(n\omega - \Omega_d)t - n\omega\frac{t_1}{2} - \Psi\right]\right\}, \tag{12}$$

[1)] W zależności tej informacja o ruchu obiektu odbijającego jest zawarta w częstotliwości dopplerowskiej $\frac{\Omega_d}{2\pi}$, zależnej tylko od częstotliwości nośnej nadajnika oraz w fazie przebiegu modulującego $\omega\frac{t_1}{2}$, ponieważ zawsze $\omega \ll \Omega_n$.

gdzie $J_n(\beta)$ oznacza funkcję Bessela pierwszego rodzaju n-tego rzędu od argumentu β. Sygnał ten w mieszaczu mikrofalowym poddawany jest demodulacji amplitudowej. Z produktów uzyskiwanych na wyjściu mieszacza wydzielane są we wzmacniaczu rezonansowym dwie składowe o częstotliwościach $\frac{n\omega+\Omega_d}{2\pi}$ i $\frac{n\omega-\Omega_d}{2\pi}$. Pozostałe składowe ulegają stłumieniu. Sygnał o częstotliwości dopplerowskiej otrzymuje się w wyniku zmieszania wydzielonych składowych z n-tą harmoniczną częstotliwości modulującej

$$u_p = U_p \sin(n\omega t+\varphi) \tag{13}$$

i wyfiltrowaniu składowej o częstotliwości różnicowej. Tak uzyskany sygnał wyraża się zależnością [4]

$$u_d = d'' U_0 J_n(\beta)(-1)^n \sin\left(\varphi+n\omega\frac{t_1}{2}-n\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\Omega_d t+\Psi+n\frac{\pi}{2}\right), \tag{14}$$

gdzie d'' oznacza współczynnik proporcjonalności.

Sygnał ten zależy tylko od składowych przebiegu (12) o częstotliwościach $\frac{n\omega+\Omega_d}{2\pi}$ i $\frac{n\omega-\Omega_d}{2\pi}$. Nie ulegnie on zmianie, jeśli na wejściu mieszacza mikrofalowego sygnał wypadkowy posiadać będzie obwiednię

$$U_{m_1} = U_n+U_0(-1)^n J_n(\beta)\left\{\cos\left[(n\omega+\Omega_d)t-n\omega\frac{t_1}{2}+\Psi+n\pi\right]+\right.$$
$$\left.+\cos\left[(n\omega-\Omega_d)t-n\omega\frac{t_1}{2}-\Psi\right]\right\} \tag{15}$$

lub

$$U_{m_1} = U_n+2U_0(-1)^n J_n(\beta)\cos\left(\Omega_d t+\Psi+n\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(n\omega t-n\omega\frac{t_1}{2}+n\frac{\pi}{2}\right). \tag{16}$$

Obwiednia ta posiada składową stałą równą U_n oraz składowe zmienne sinusoidalnie o częstotliwościach $\frac{n\omega+\Omega_d}{2\pi}$ i $\frac{n\omega-\Omega_d}{2\pi}$, [por. wzór (15)]. Amplitudy tych zmian są jednakowe i równe iloczynowi amplitudy sygnału odbieranego i funkcji Bessela $J_n(\beta)$.

Amplituda sygnału (14) o częstotliwości dopplerowskiej jest proporcjonalna do amplitudy zmian obwiedni sygnału wypadkowego, jest jednak także funkcją wyrażenia

$$\sin\left(\varphi+n\omega\frac{t_1}{2}-n\frac{\pi}{2}\right) \tag{17}$$

zależnego od fazy przebiegu o częstotliwości $\frac{n\omega}{2\pi}$ [por. wzór (16)]. Przy symulacji sygnału odbieranego konieczne jest zatem odtworzenie amplitudy zmian obwiedni sygnału wypadkowego oraz fazy przebiegu o częstotliwości $\frac{n\omega}{2\pi}$.

3. ZASADA SYMULACJI SYGNAŁEM NADAJNIKA ZMODULOWANYM W AMPLITUDZIE

Pożądane zmiany obwiedni sygnału wypadkowego na wejściu mieszacza mikrofalowego można uzyskać, jeśli sygnał symulujący zostanie wytworzony w wyniku modulacji amplitudowej części sygnału nadajnika przebiegiem

$$U_s \sin(\omega_s t - \varphi_s) \sin \Omega_s t \tag{18}$$

otrzymanym w procesie modulacji amplitudowej ze stłumieniem fali nośnej.

Sygnał symulujący ma wówczas postać

$$u_{sa} = U_{sa}[1 + m \sin(\omega_s t - \varphi_s) \sin \Omega_s t] \sin\left(\Omega_n t - \frac{\Delta F_n}{f} \cos \omega t + \varphi_{sa}\right), \tag{19}$$

gdzie m oznacza głębokość modulacji. Obwiednia przebiegu wypadkowego powstałego w wyniku zsumowania sygnału (19) z sygnałem „heterodyny" (2) równa jest zatem

$$U_{ma} = \{U_n^2 + U_{sa}^2[1 + m \sin(\omega_s t - \varphi_s) \sin \Omega_s t]^2 + 2U_n U_{sa}[1 + m \sin(\omega_s t - \varphi_s) \sin \Omega_s t] \cos(\varphi_{sa} - \varphi_1)\}^{\frac{1}{2}}, \tag{20}$$

co dla $U_{sa} \ll U_n$ uprości się dając

$$U_{ma} \cong U_n + U_{sa} \cos(\varphi_{sa} - \varphi_1) + m U_{sa} \cos(\varphi_{sa} - \varphi_1) \sin(\omega_s t - \varphi_s) \sin \Omega_s t. \tag{21}$$

Zmiany obwiedni przebiegu wypadkowego zależą od przesunięcia fazy sygnału symulującego względem sygnału „heterodyny". Aby uniezależnić się od tego, najlepiej wybrać

$$\cos(\varphi_{sa} - \varphi_1) = \pm 1.$$

Wówczas amplituda zmian obwiedni jest największa. Oznacza to, że musi być spełniona zależność

$$\varphi_{sa} - \varphi_1 = k\pi; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{22}$$

Z porównania zależności (16) i (21) wynika, że zmiany obwiedni sygnału wypadkowego w obu wypadkach są identyczne, jeśli przy spełnieniu warunku (22)[1)]

$$m U_{sa} = 2U_0 |J_n(\beta)|, \tag{23}$$

$$\omega_s = n\omega, \tag{24}$$

$$\Omega_s = \Omega_d, \tag{25}$$

$$|\sin(\omega_s t - \varphi_s)| = \left|\cos\left(n\omega t - n\omega \frac{t_1}{2} + n\frac{\pi}{2}\right)\right|. \tag{26}$$

Warunki (24) i (25) wymagają wytworzenia przebiegu (18) w wyniku modulacji amplitudowej n-tej harmonicznej częstotliwości modulującej nadajnik z częstotliwością równą pożądanej częstotliwości dopplerowskiej. Warunek (23) uzależnia amplitudę zmian obwiedni od amplitudy sygnału symulującego oraz od głębokości modulacji m. Warunek (26) wymaga odpowiedniego opóźnienia w fazie obwiedni sygnału (18) względem przebiegu

[1)] Zależność (23) i (26) otrzymano zakładając identyczność amplitud sygnałów o częstotliwości dopplerowskiej otrzymanych na wyjściu mieszacza małej częstotliwości. Faza tych sygnałów może być zwykle pominięta.

modulującego w częstotliwości sygnał nadajnika. Z warunku tego wynika, że musi być spełnione

$$\left|\cos\left(\omega_s t-\varphi_s-\frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|\cos\left(n\omega t-n\omega\frac{t_1}{2}+n\frac{\pi}{2}\right)\right|, \tag{27}$$

tzn. że opóźnienie fazy φ_s powinno wynosić

$$\varphi_s = n\omega\frac{t_1}{2}+(n-1)\frac{\pi}{2}+k\pi; \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{28}$$

Dla n parzystego otrzyma się zatem

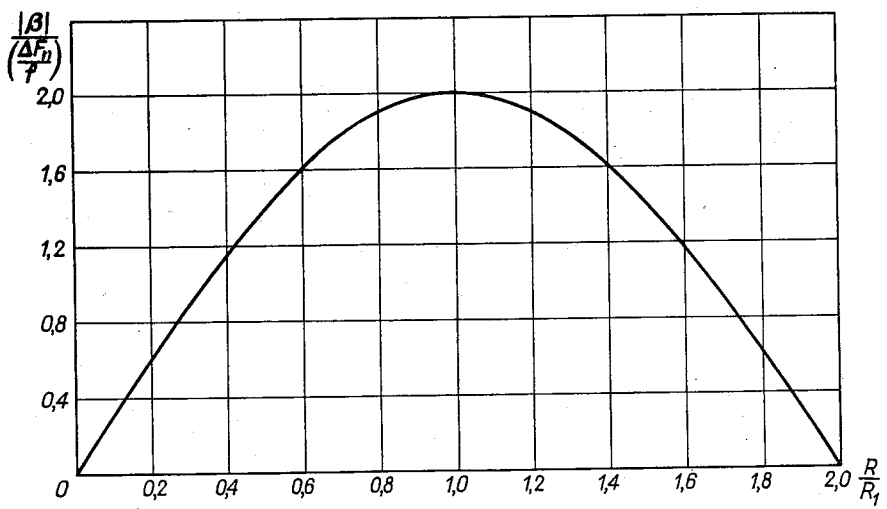
$$\varphi_s = n\omega\frac{t_1}{2}+\frac{\pi}{2}+k\pi; \quad k = 0, \pm1, \pm 2, \ldots, \tag{29}$$

natomiast dla n nieparzystego

$$\varphi_s = n\omega\frac{t_1}{2}+k\pi. \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{30}$$

Warunek (23) wymaga wybrania iloczynu mU_{sa} w zależności od wartości modułu funkcji Bessela $|J_n(\beta)|$, tzn. w zależności od odległości R obiektu odbijającego od radaru [por. wzór (7)]. Dla każdej zatem wartości R, dla której symuluje się sygnał odbierany, konieczne jest wyznaczenie wartości $|J_n(\beta)|$. Aby uniknąć niezbędnych przeliczeń, można skorzystać z wykresów przedstawionych na rys. 2 i 3. Na rys. 2 przedstawiony jest przebieg $\frac{|\beta|}{\left(\frac{\Delta F_n}{f}\right)}$ w funkcji $\frac{R}{R_1}$, gdzie R_1 określone jest zależnością

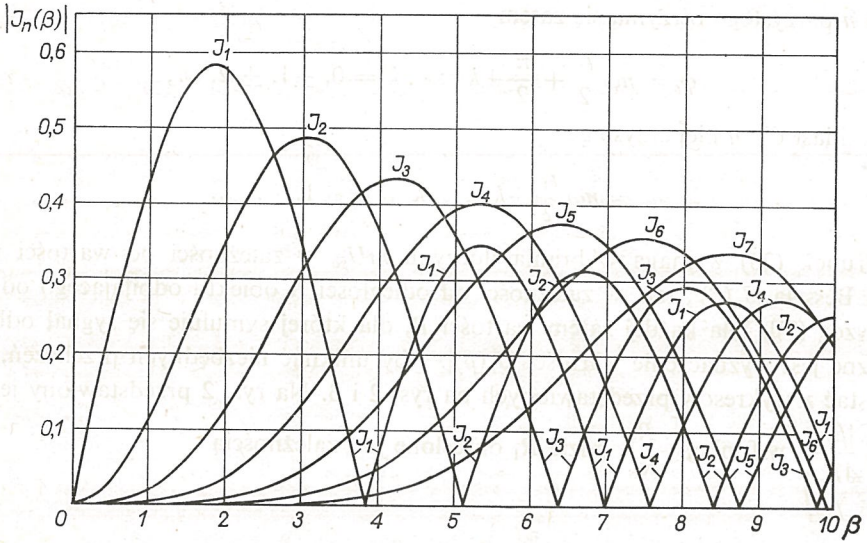
$$R_1 = \frac{c}{4f}. \tag{31}$$



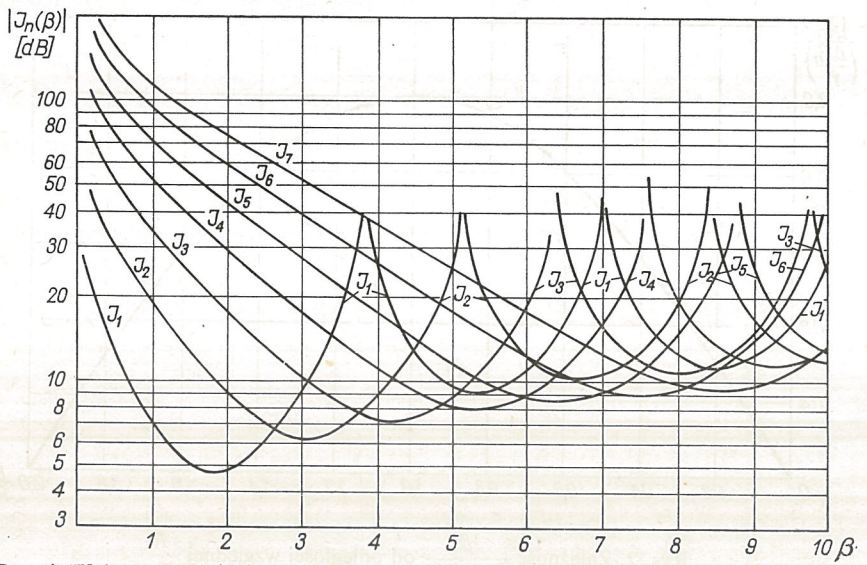
Rys. 2. Zależność $\frac{|\beta|}{\left(\frac{\Delta F_n}{f}\right)}$ od odległości względnej $\frac{R}{R_1}$

Wykres ten wykonany jest dla R zmieniającego się od zera do $2R_1$. Dalsze zmiany R powodują cykliczne powtarzanie się funkcji $\frac{|\beta|}{\left(\frac{\Delta F_n}{f}\right)}$ z okresem R równym $2R_1$. Wyznaczając na podstawie tego wykresu wartość $|\beta|$ można korzystając następnie z wykresów przedstawionych na rys. 3 wyznaczyć wartość modułu funkcji Bessela $|J_n((\beta)|$ pamiętając, że

$$|J_n(\beta)| = |J_n(|\beta|)|. \tag{32}$$



Rys. 3. Wykresy modułu funkcji Bessela $J_n(\beta)$



Rys. 4. Wykresy modułu funkcji Bessela wyrażone w decybelach, obliczone z zależności $|J_n(\beta)|_{\mathrm{dB}} = -20\lg|J_n(\beta)|$

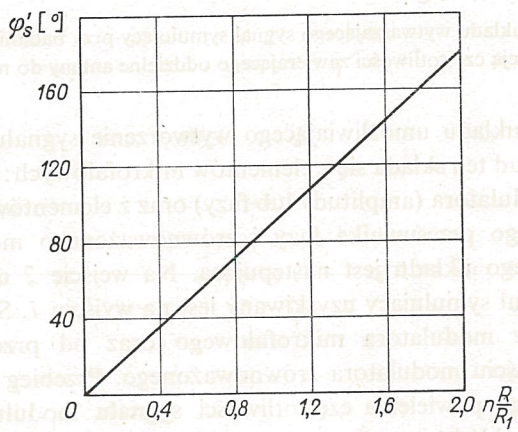
Dla dodatkowego ułatwienia na rys. 4 wykreślone są funkcje Bessela wyrażone w decybelach, wyznaczone na podstawie zależności

$$|J_n(\beta)|_{dB} = -20\lg|J_n(\beta)|. \tag{33}$$

Podobnie warunek (29) lub (30) uzależnia wartość opóźnienia fazy φ_s od odległości R [por. wzór (8)]. wartość φ_s można określić z wykresu przedstawionego na rys. 5. Na wykresie tym przedstawiony jest przebieg

$$\varphi_s' = n\omega\frac{t_1}{2} = n\frac{\pi}{2}\frac{R}{R_1} \tag{34}$$

w funkcji $n\frac{R}{R_1}$ dla R zmieniającego się od zera do $\frac{2R_1}{n}$. Odpowiada temu zmiana φ_s' od zera do π. Dalsze zmiany R powodują cykliczne powtarzanie się funkcji φ_s' z okresem $R = \frac{2R_1}{n}$.



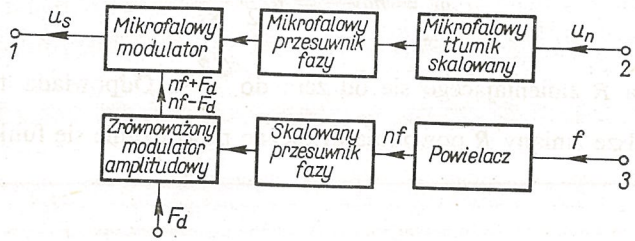
Rys. 5. Zależność opóźnienia fazy φ_s' od odległości względnej $n\frac{R}{R_1}$

Wartości funkcji przedstawionych na rys. 2÷5 zebrane są w tablicach umieszczonych w Dodatku.

4. SPOSOBY WYTWARZANIA SYGNAŁU SYMULUJĄCEGO

Omówiona powyżej zasada symulacji sygnału odbieranego wykorzystuje modulację amplitudową sygnału nadajnika dwoma częstotliwościami. Sygnał symulujący można podobnie uzyskać w wyniku modulacji fazowej sygnału nadajnika [5]. W obu przypadkach modulacja ta dla każdej częstotliwości powinna być z tą samą znaną głębokością modulacji lub z tym samym znanym wskaźnikiem modulacji. Zastosowany do tego celu modulator mikrofalowy powinien zapewnić jeden rodzaj modulacji, przy modulacji amplitudowej nie powinna występować jednocześnie niepożądana modulacja fazowa, natomiast przy modulacji fazowej nie powinna występować modulacja amplitudowa [5]. Znane powinno być także tłumienie przy przechodzeniu sygnału modulowanego przez modulator.

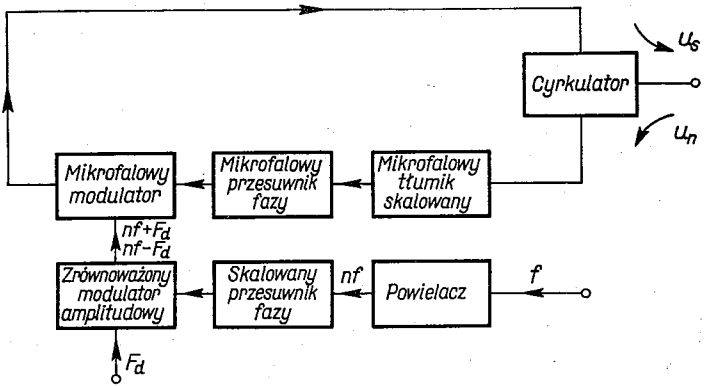
Sygnał modulujący podawany do modulatora mikrofalowego można wytworzyć w wyniku modulacji amplitudowej w układzie zrównoważonym n-tej harmonicznej przebiegu modulującego w częstotliwości sygnał nadajnika badanego radaru. Częstotliwość modulacji powinna być równa pożądanej częstotliwości dopplerowskiej. Przesunięcie fazy przebiegu o n-tej harmonicznej podawanego na wejście modulatora zrównoważonego względem fazy przebiegu modulującego sygnał nadajnika w częstotliwości powinno być dokładnie znane i dobrane w zależności od wymaganej odległości R.



Rys. 6. Schemat blokowy układu wytwarzającego sygnał symulujący przy badaniu radaru dopplerowskiego z sinusoidalną modulacją częstotliwości zawierającego oddzielne anteny do nadawania i do odbioru

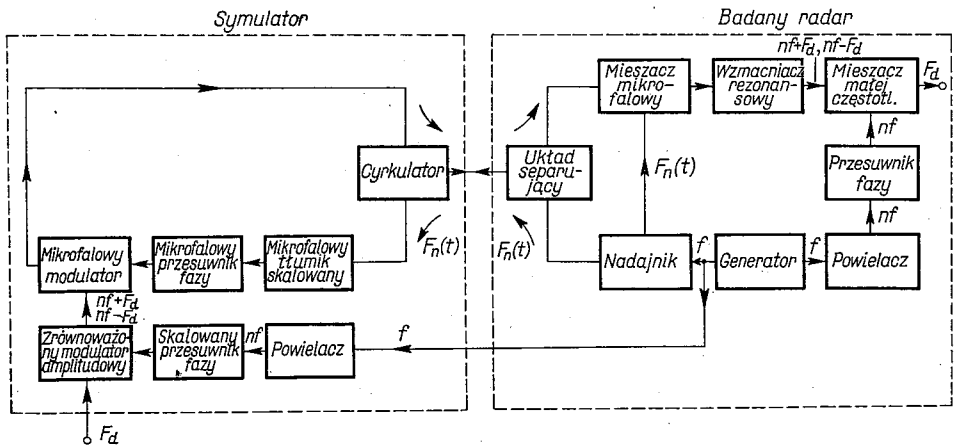
Schemat blokowy układu umożliwiającego wytworzenie sygnału symulującego pokazany jest na rys. 6. Układ ten składa się z elementów mikrofalowych: tłumika skalowanego, przesuwnika fazy i modulatora (amplitudy lub fazy) oraz z elementów małej częstotliwości: powielacza, skalowanego przesuwnika fazy i zrównoważonego modulatora amplitudowego. Zasada pracy tego układu jest następująca. Na wejście *2* układu podawany jest sygnał nadajnika. Sygnał symulujący uzyskiwany jest na wyjściu *1*. Sposób jego modulacji zależy od parametrów modulatora mikrofalowego oraz od przebiegu modulującego otrzymywanego na wyjściu modulatora zrównoważonego. Przebieg modulujący uzyskuje się w wyniku n-krotnego powielenia częstotliwości sygnału modulującego nadajnik podawanego na wejście *3* układu oraz w wyniku modulacji amplitudowej z pożądaną częstotliwością dopplerowską F_d w układzie zrównoważonym. Fazę sygnału podawanego do modulatora zrównoważonego w odniesieniu do fazy sygnału modulującego nadajnik można określić na podstawie wskazań skalowanego przesuwnika fazy oraz znajomości przesunięcia fazy w powielaczu. Faza sygnału symulującego w odniesieniu do fazy sygnału nadajnika może być zmieniana za pomocą mikrofalowego przesuwnika fazy, aż do uzyskania maksymalnych zmian obwiedni sygnału wypadkowego na wejściu mieszacza mikrofalowego badanego radaru. Amplituda sygnału symulującego może być określona w odniesieniu do amplitudy sygnału nadajnika na podstawie wskazań tłumika skalowanego oraz znajomości tłumienia modulatora. Głębokość modulacji lub wskaźnik modulacji sygnału mikrofalowego można określić znając właściwości modulacyjne modulatora mikrofalowego, modulatora zrównoważonego oraz mierząc amplitudy napięć podawanych do modulatora zrównoważonego.

Omówiony wyżej układ przystosowany jest do badania radaru posiadającego oddzielne anteny do nadawania i do odbioru. Przy badaniu radaru o jednej antenie wspólnej układ taki powinien mieć wspólne wejście sygnału nadajnika i wyjście sygnału symulującego. Schemat blokowy takiego układu pokazany jest na rys. 7. Oprócz elementów wchodzących



Rys. 7. Schemat blokowy układu wytwarzającego sygnał symulujący przy badaniu radaru dopplerowskiego z sinusoidalną modulacją częstotliwości zawierającego jedną antenę wspólną do nadawania i do odbioru

w skład poprzedniego układu zawiera on dodatkowo cyrkulator określający kierunek przechodzenia sygnału mikrofalowego. Kierunek ten oznaczono na rysunku strzałkami. Zasada pracy tego układu jest identyczna jak w przypadku poprzednim. Przy określaniu amplitudy sygnału symulującego należy uwzględnić dodatkowo tłumienie wnoszone przez cyrkulator.



Rys. 8. Połączenie układu wytwarzającego sygnał symulujący z badanym radarem dopplerowskim

Na rys. 8 przykładowo pokazano współpracę układu symulacji sygnału odbieranego z badanym radarem.

5. ZAKOŃCZENIE

Omówiony powyżej sposób symulacji sygnału odbieranego umożliwia zbadanie radaru dopplerowskiego wraz z jego częścią mikrofalową za pomocą układów złożonych z typowych elementów stosowanych w technice pomiarowej. Pozwala on uniknąć modulacji

jednowstęgowej sygnału nadajnika oraz znacznego opóźnienia w czasie tego sygnału, co w obu przypadkach w warunkach laboratoryjnych sprawiałoby wiele kłopotu. Wymagane jest jednak przy tym uwzględnianie zależności amplitudy sygnału symulującego oraz fazy jego modulacji od odległości. Właściwość ta jest wynikiem uzależnienia w radarze z sinusoidalną modulacją częstotliwości amplitudy sygnału o częstotliwości dopplerowskiej od opóźnienia sygnału odbieranego względem sygnału nadajnika.

LITERATURA CYTOWANA W TEKSCIE

1. E. I. Barlow, Doppler Radar, Proc. IRE, **37**, 340—355, April, 1949.
2. K. C. M. Glegg, A low Noise CW Doppler Technique, Proc. of the National Conference on Aeronautical Electronics, 1958, 133—144.
3. A. Lizoń, Radar dopplerowski o fali ciągłej, Rozprawy Elektrotechn., **13**, 2, 331—345, 1967.
4. A. Lizoń, Radar dopplerowski z sinusoidalną modulacją częstotliwości, Rozprawy Elektrotechn., **13**, 3, s, 477—493, 1967.
5. A. Lizoń, Symulacja sygnału odbieranego w radarach dopplerowskich, Rozprawy Elektrotechn. **13**, 3, 495—505, 1967.

Tablica 1

DODATEK

Zależność opóźnienia fazy φ_s' od odległości R dla R zmieniającego się od zera do $\frac{2R_1}{n}$. Dalsze zmiany R powodują okresowe zmiany φ_s' z okresem $R = \frac{2R_1}{n}$

$n\frac{R}{R_1}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
φ_s'[°]	0	9	18	27	36	45	54
$n\frac{R}{R_1}$	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
φ_s' [°]	63	72	81	90	99	108	117
$n\frac{R}{R_1}$	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
φ_s' [°]	126	135	144	153	162	171	180

Tablica 2

Zależność $\frac{|\beta|}{\left(\frac{\Delta F_n}{f}\right)}$ od odległości R dla R zmieniającego się od zera do $2R_1$. Dalsze zmiany R powodują okresowe zmiany $\frac{|\beta|}{\left(\frac{\Delta F_n}{f}\right)}$ z okresem $R = 2R_1$

$\frac{R}{R_1}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$\frac{\lvert\beta\rvert}{\left(\frac{\Delta F_n}{f}\right)}$	0	0,313	0,618	0,908	1,18	1,41	1,62
$\frac{R}{R_1}$	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
$\frac{\lvert\beta\rvert}{\left(\frac{\Delta F_n}{f}\right)}$	1,78	1,90	1,98	2,00	1,98	1,90	1,78
$\frac{R}{R_1}$	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\frac{\lvert\beta\rvert}{\left(\frac{\Delta F_n}{f}\right)}$	1,62	1,41	1,18	0,908	0,618	0,313	0

Zależność modułu funkcji Bessela $|J_n|$ od argumentu β dla β zmieniającego się od zera do 10,0

β	$\lvert J_1\rvert$	$\lvert J_2\rvert$	$\lvert J_3\rvert$	$\lvert J_4\rvert$	$\lvert J_5\rvert$	$\lvert J_6\rvert$	$\lvert J_7\rvert$
0,2	099	$0^{2}50$	$0^{3}17$	$0^{5}42$	$0^{7}83$	$0^{8}14$	$0^{12}20$
0,4	196	020	$0^{2}13$	$0^{4}66$	$0^{5}27$	$0^{7}89$	$0^{8}25$
0,6	287	044	$0^{2}44$	$0^{3}33$	$0^{4}20$	$0^{5}10$	$0^{7}43$
0,8	369	076	010	$0^{2}10$	$0^{4}83$	$0^{5}57$	$0^{6}48$
1,0	440	115	020	$0^{2}25$	$0^{3}25$	$0^{4}21$	$0^{5}15$
1,2	498	159	033	$0^{2}50$	$0^{3}61$	$0^{4}62$	$0^{5}52$
1,4	542	207	050	$0^{2}91$	$0^{2}13$	$0^{3}15$	$0^{4}15$
1,6	570	257	073	015	$0^{2}25$	$0^{3}33$	$0^{4}38$
1,8	582	306	099	023	$0^{2}43$	$0^{3}66$	$0^{4}86$
2,0	577	353	129	034	$0^{2}70$	$0^{2}12$	$0^{3}18$
2,2	556	395	162	048	011	$0^{2}21$	$0^{3}33$
2,4	520	431	198	064	016	$0^{2}34$	$0^{3}59$
2,6	471	459	235	084	023	$0^{2}52$	$0^{2}10$
2,8	410	478	273	107	032	$0^{2}79$	$0^{2}16$
3,0	339	486	309	132	043	011	$0^{2}25$
3,2	261	484	343	160	056	016	$0^{2}38$
3,4	179	470	373	189	072	022	$0^{2}56$
3,6	095	445	399	220	090	029	$0^{2}80$
3,8	013	409	418	251	110	038	011
4,0	066	364	430	281	132	049	015
4,2	139	311	434	310	156	062	020
4,4	203	250	430	336	182	076	026
4,6	257	185	417	359	208	093	034
4,8	299	116	395	378	235	111	043
5,0	328	047	365	391	261	131	053
5,2	343	022	327	398	287	153	065
5,4	345	087	281	399	310	175	079
5,6	334	146	230	393	331	199	094
5,8	311	199	174	379	349	222	111
6,0	277	243	115	358	362	246	130
6,2	233	277	054	329	371	269	149
6,4	182	300	$0^{2}59$	295	374	290	170
6,6	125	312	064	254	372	309	191
6,8	065	312	118	208	363	326	212
7,0	$0^{2}47$	301	168	158	348	339	234
7,2	054	280	210	105	327	349	254
7,4	110	249	244	051	299	353	274
7,6	159	210	270	$0^{2}31$	266	354	292
7,8	201	164	285	056	228	348	308
8,0	235	113	291	105	186	338	321
8,2	258	059	287	151	140	321	330
8,4	271	$0^{2}47$	273	190	092	300	336
8,6	273	049	250	223	042	273	338
8,8	264	099	219	249	$0^{2}70$	240	335
9,0	245	145	181	265	055	204	327
9,2	217	184	137	274	101	164	315
9,4	182	215	090	273	142	122	297
9,6	140	238	040	263	179	077	275
9,8	093	251	$0^{2}97$	245	210	031	248
10,0	043	255	058	220	234	014	217

U w a g a. Wartość funkcji wyznacza się z tabeli następująco:
wartość odczytu 125 = wartość funkcji 0,125;
wartość odczytana O^{3} 25 = wartość funkcji 0,00025.

Tablica 4

Zależność modułu Bessela $|J_n|$ od argumentu β wyznaczona w decybelach według wzoru $|J_n(\beta)|_{dB} = -20\lg|J_n(\beta)|$ dla β zmieniającego się w granicach od zera do 10,0

β	$\lvert J_1\rvert$	$\lvert J_2\rvert$	$\lvert J_3\rvert$	$\lvert J_4\rvert$	$\lvert J_5\rvert$	$\lvert J_6\rvert$	$\lvert J_7\rvert$
0,2	20,1	46,0	75,4	107,5	141,6	177,1	254,0
0,4	14,2	34,0	57,3	83,6	111,4	141,0	172,0
0,6	10,8	27,1	47,1	69,6	94,0	120,0	147,3
0,8	8,7	22,4	40,0	60,0	81,6	104,9	126,4
1,0	7,1	19,9	34,0	52,0	72,0	93,6	116,5
1,2	6,1	16,0	29,6	46,0	64,3	84,2	105,7
1,4	5,3	13,7	26,0	40,8	57,7	76,5	96,5
1,6	4,9	11,8	22,7	36,5	52,0	69,6	88,4
1,8	4,7	10,3	20,1	32,8	47,3	63,6	81,3
2,0	4,8	9,0	17,8	29,4	43,1	59,8	74,9
2,2	5,1	8,1	15,8	26,4	39,9	53,6	69,6
2,4	5,7	7,3	14,1	23,9	35,9	49,4	64,6
2,6	6,6	6,8	12,6	21,5	32,8	45,7	60,0
2,8	7,7	6,4	11,3	19,9	29,9	42,0	55,9
3,0	9,4	6,2	10,2	17,6	27,3	39,9	52,0
3,2	11,7	6,3	9,3	15,9	25,0	35,9	48,4
3,4	14,4	6,6	8,6	14,5	22,9	33,2	45,0
3,6	20,4	7,0	8,0	13,2	20,9	30,8	41,9
3,8	37,7	7,7	7,6	12,0	19,2	28,4	39,9
4,0	23,6	8,8	7,3	11,0	17,6	26,2	36,5
4,2	17,1	10,1	7,2	10,2	16,2	24,2	34,0
4,4	13,8	12,0	7,3	9,5	14,8	22,4	31,7
4,6	11,8	14,7	7,6	8,9	13,6	20,6	29,4
4,8	10,5	18,7	8,1	8,4	12,6	19,1	27,3
5,0	9,7	26,6	8,8	8,2	11,7	17,7	25,5

β	$\lvert J_1\rvert$	$\lvert J_2\rvert$	$\lvert J_3\rvert$	$\lvert J_4\rvert$	$\lvert J_5\rvert$	$\lvert J_6\rvert$	$\lvert J_7\rvert$
5,2	9,3	33,2	9,7	8,0	10,8	16,2	23,7
5,4	9,2	21,2	11,0	8,0	10,2	15,1	22,0
5,6	9,5	16,7	12,8	8,1	9,6	14,0	20,5
5,8	10,1	14,0	15,2	8,4	9,1	13,1	19,1
6,0	11,1	12,3	18,8	8,9	8,8	12,2	17,7
6,2	12,6	11,1	25,4	9,7	8,6	11,4	16,5
6,4	14,8	10,5	44,6	10,6	8,5	10,8	15,4
6,6	18,1	10,1	23,9	11,9	8,6	10,2	14,4
6,8	23,7	10,1	18,6	13,6	8,8	9,7	13,5
7,0	46,6	10,4	15,5	16,0	9,2	9,4	12,6
7,2	25,4	11,1	13,6	19,6	9,7	9,1	11,9
7,4	19,2	12,1	12,3	25,8	10,5	9,0	11,2
7,6	16,0	13,6	11,4	50,2	11,5	9,0	10,7
7,8	13,9	15,7	10,9	25,0	12,8	9,2	10,2
8,0	12,6	18,9	10,7	19,6	14,6	9,4	9,9
8,2	11,8	24,6	10,8	16,4	17,1	9,9	9,6
8,4	11,3	46,6	11,3	14,6	20,7	10,5	9,5
8,6	11,3	26,2	12,0	13,0	27,3	11,3	9,4
8,8	11,6	20,1	13,2	12,1	43,1	12,4	9,5
9,0	12,2	16,8	14,8	11,3	25,2	13,8	9,7
9,2	13,3	14,7	17,3	11,2	19,9	15,7	10,0
9,4	14,8	13,4	20,9	11,3	17,0	18,4	10,5
9,6	17,1	12,5	28,0	11,6	14,9	22,3	11,2
9,8	20,6	12,0	40,3	12,2	13,6	30,2	12,1
10,0	27,3	11,9	24,7	13,2	12,6	37,1	13,3

A. LIZON

RECEIVED SIGNAL SIMULATION IN SINUSOIDALLY FREQUENCY-MODULATED DOPPLER RADARS

Summary

The paper discussed the principle of simulating the nonfluctuating signal received in sinusoidally frequency modulated doppler radars and obtained from an object moving in relation to the radar. The simulating signal is generated as a result of amplitude or phase modulation of transmitter signal. It is fed to this mixer of the examined radar in such a phase that the resultant signal at the microwave mixer input following the summation with the ,,heterodyne'' signal have the maximum amplitude change. As a result of the analysis, formulas were obtained wich determine the required choice of parameters of simulating signal modulation. Required amplitude of simulating signal is a function of distance to a reflected target. A phase of modulating signal is also a function of this distance. These functions are shown on diagrams. The paper deals with the basic systems generating the simulating signal due to modulation of the signal carried in waveguide elements. These systems allow to examine both the doppler radars having separate antennas for transmission and reception, and the radars having one joint antenna.

A. LIZON

LA SIMULATION DU SIGNAL REÇU DANS LE RADAR DE DOPPLER À MODULATION SINUSOÏDALE DE FRÉQUENCE

Résumé

On a présenté dans l'oeuvre le principe de la simulation du signal non fluctuant reçu dans le radar de Doppler à modulation sinusoïdale de fréquence, provenant de l'objet mobile par rapport au radar. Le signal simulant est produit en résultat de la modulation d'amplitude ou de phase du signal de l'émetteur. Il est transmis au mélangeur microonde du radar étudié dans une telle phase, que le signal résultant, apparaissant à l'entrée de ce mélangeur après la sommation avec le signal de l'hétérodyne, aurait le changement d'amplitude maximal. En résultat de l'analyse effectuée on a obtenu les dépendances, déterminant le choix exigé des caractéristiques de la modulation du signal simulant. L'amplitude exigée du signal simulant dépend de la distance de l'objet réfléchissant du radar. Analogiquement la phase exigée du signal modulé dépend aussi de ce distance. Ces dépendances sont présentées sur les diagrammes. On a décrit aussi quelques systèmes produisant le signal simulant en effet de la modulation du signal, transmis dans le schémas guide-ondes. Ces systèmes permettent d'étudier le radar de Doppler ayant une antenne séparée à la réception et celle à la transmission ainsi que le radar ayant une antenne commune.

А. ЛИЗОНЬ

ИМИТАЦИЯ ПРИЕМНОГО СИГНАЛА В ДОППЛЕРОВСКИХ РАДИОЛОКАТОРАХ С СИНУСОИДАЛЬНОЙ ЧАСТОТНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

Резюме

В работе изложен принцип имитации нефлюктуирующего сигнала принимаевого допплеровскими радиолокаторами с синусоидальной частотной модуляцией исходящего от объекта, движущегося относительно радиолокатора. Имитирующий сигнал формируется в итоге амплитудной или фазовой модуляцией сигнала передатчика. Имитирующий сигнал подается на сверхвысокочастотный смеситель испытуемого радиолокатора с такой фазой, чтобы у результирующего сиг-

нала, возникшего на входе этого смесителя после сложения с сигналом „гетеродина", было наибольшее изменение амплитуды.

В итоге проведенного анализа получены зависимости, определяющие выбор параметров модуляции имитирующего сигнала. Необходимая амплитуда имитирующего сигнала является функцией расстояния до отражающего объекта. Фаза модулирующего сигнала также является функцией этого расстояния. Эти зависимости представлены на графиках. Рассмотрены основные схемы, формирующие имитирующий сигнал в результате модуляции сигнала, передаваемого в волноводных элементах. Эти схемы дают возможность испытания допплеровских радиолокаторов с отдельными антеннами для передачи и приема, а также радиолокаторов с одной общей антенной.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 15, 3, ss. 533—581
INSTYTUT TECHNOLOGII ELEKTRONOWEJ PAN, WARSZAWA 1969

Zniekształcenia aperturowe układów analizy obrazów telewizyjnych i metody ich korekcji

ANDRZEJ TCHORZEWSKI (WARSZAWA)

Komitet do Spraw Radia i Telewizji

Otrzymano 18.9.1968

W artykule podano wyjaśnienie zjawiska zniekształceń aperturowych zachodzących w każdym układzie przekształcania obrazu optycznego na sygnał elektryczny oraz w samych układach optycznych. Omówiono jego wpływ na jakość sygnału elektrycznego przetwornika elektrooptycznego.

Wprowadzono związki określające zależności pomiędzy takimi parametrami otworu analizującego, jak kształt, wymiary, rozkład przezroczystości itp., a charakterystyką przejściową odtwarzanego skoku jednostkowego. Analogiczne zależności obowiązują również w procesie analizy wiązką elektronów w telewizyjnych lampach analizujących.

Podano związki między charakterystyką przejściową a funkcją przenoszenia układu przetwarzającego. Na tej podstawie wprowadzono pojęcie czwórnika równoważnego przetwornika elektrooptycznego, mającego określoną funkcję przenoszenia. Z określenia tego czwórnika wynikają niezbędne przesłanki do opracowania układów elektrycznej korekcji zniekształceń aperturowych. Następnie omówiono wpływ akumulacji ładunków w procesie analizy na charakterystyki przejściowe przetworników. Wykazano, iż powstają wówczas pewne dodatkowe zniekształcenia fazowe, których wpływ może być w pewnych przypadkach uznany za pozytywny.

Omówiono ponadto szeroko zasadnicze metody korekcji: metodę obwodów różniczkujących i metodę linii długiej. Przeprowadzono analizę obydwóch metod podając wnioski i praktyczne przesłanki do opracowywania opartych na nich układów korektorów.

1. WSTĘP

Wszystkie procesy przekazywania obrazu, zarówno optyczne, jak i elektryczne, cechuje wspólna właściwość, jaką jest spadek rozróżnialności szczegółów. Wynika to z procesów zachodzących w samym oku ludzkim, jak i ze zjawisk powstających we wszystkich układach optycznych, przetwarzających i elektrycznych. W najogólniejszym znaczeniu każdemu układowi przekształcania czy przenoszenia obrazu można podporządkować pewną „charakterystykę częstotliwości", która przedstawia przebieg sygnału wyjściowego w funkcji wielkości elementu obrazu, co ma sens przy przyjęciu zasady wybierania liniowego. Wówczas zmniejszanie się rozmiarów elementów obrazu można powiązać ze wzrostem częstotliwości sygnału. Przyjęcie fizycznych podstaw wybierania liniowego obrazu jest bardzo korzystne przy rozważaniach dotyczących przenoszenia drobnych szczegółów przez układy przekształcające.

W myśl tych zasad określamy element wybierający obraz. Zjawiska związane ze skończonymi rozmiarami geometrycznymi i funkcją rozkładu czynnika wybierającego w obszarze owego elementu określamy jako *zjawisko apertury*. Elementem wybierającym może być rzeczywisty otwór, jak w przypadku tarczy Nipkowa lub dysektora obrazu, co uzasadnia w aspekcie historycznym przyjęcie dla zjawisk związanych z jego rozmiarami i kształtem nazwy zjawiska apertury. Analogiczne zjawiska zachodzą także i wówczas, gdy elementem wybierającym będzie strumień elektronów, światła lub nawet „krążek rozproszenia" jak w przypadku układów optycznych. Zależnie od rozmiarów, kształtu i rozkładu energii w przekroju strumienia wybierającego (optycznego lub elektronowego) powstają zniekształcenia w przenoszeniu drobnych szczegółów oraz ostrości konturów obrazu. Zniekształcenia te noszą nazwę *zniekształceń aperturowych.*

Przedmiotem niniejszej pracy będzie przeprowadzenie analizy zjawiska i podanie zależności prowadzących do opracowywania układu elektrycznej korekcji zniekształceń aperturowych w kamerach telewizyjnych. W odniesieniu do urządzeń TV zniekształcenia te powodują zmianę charakterystyk przejściowych, co objawia się na ekranie urządzenia odbiorczego nieostrością przejścia pomiędzy bielą a czernią. Można tu przyjąć te same pojęcia co dla charakterystyk przejściowych dowolnych układów linearnych, a więc czas narastania lub obszar nieostrości i przerost.

Zniekształcenia aperturowe najłatwiej można zanalizować na przykładzie analizy obrazu przy użyciu rzeczywistego „otworu optycznego", jak np. przy użyciu tarczy Nipkowa. Możliwość rozróżnienia w sygnale elektrycznym dwóch blisko siebie położonych szczegółów obrazu zależy od wielkości otworu w tarczy Nipkowa. Otwór ten w celu zapewnienia dobrej rozróżnialności szczegółów musi być jak najmniejszy. Oczywiście w rozmiarach tych pomijamy wpływ innych czynników na rozróżnialność szczegółów, jak parametry systemu TV, toru transmisyjnego itp.

W rzeczywistości nie można zrealizować otworu analizującego o wymiarach nieskończenie małych. Skończone rozmiary otworu powodują zatem spadek rozróżnialności szczegółów zarówno wzdłuż linii, jak i w poprzek obrazu. Za graniczną wielkość elementu wybierającego przyjmujemy wielkość elementu obrazu wynikającą z przyjętego systemu podziału liniowego, o średnicy równej szerokości jednej linii.

Zajmiemy się szczegółowo zbadaniem przypadku zmiany rozróżnialności wzdłuż linii siatki obrazowej, gdyż przypadek ten ma zasadnicze znaczenie dla jakości przekazywanego obrazu. Zbadamy charakterystyki przejściowe i odpowiadające im charakterystyki amplitudowe i fazowe układów analizujących, nie wykorzystujących zasady akumulacji i wykorzystujących tę zasadę.

Przytoczone wywody mogą jednak, jak to już wspomniano wyżej, mieć także ogólniejsze znaczenie i mogą być pomocne nie tylko przy rozpatrywaniu zjawisk związanych z telewizją, ale i z fototelegrafią, układami optycznego i magnetycznego zapisu i odczytu sygnałów oraz z optyką.

2. FUNKCJA ROZKŁADU STRUMIENIA ANALIZUJĄCEGO

Obecnie rozważymy wpływ kształtu i rozkładu przezroczystości otworu wybierającego na charakterystykę przejściową odtworzonej granicy pomiędzy bielą a czernią.

Zakładamy, iż otwór może nie być równomiernie przezroczysty, ale że w różnych jego miejscach przepuszczany strumień świetlny jest różny. Analogicznie do rozkładu przezroczystości otworu można mówić o rozkładzie gęstości prądu w przekroju elektronowej wiązki w lampie analizującej lub w kineskopie. Wprowadzimy pojęcie funkcji rozkładu jednostkowego strumienia świetlnego $R(\eta)$. Wielkość ta przedstawia sobą zmianę strumienia świetlnego (lub elektronowego) przy analizie danym otworem białego paska na ciemnym tle, prostopadłego do kierunku analizy i o szerokości dostatecznie małej w porównaniu ze średnicą otworu. Całkowity strumień świetlny przepuszczany badanymi otworami przyjmujemy za równy 1. Załóżmy dalej, iż otwór określony za pomocą współrzędnych x, y prostokątnego układu współrzędnych przesuwa się zgodnie z kierunkiem osi x i jest równomiernie przezroczysty. Przy analizie wspomnianego już białego paska o szerokości dx elementarny strumień świetlny przepuszczany przez otwór w punkcie x wyniesie

$$dF = K \cdot y(x)\,dx. \tag{1}$$

Stałą K możemy wyznaczyć z warunku, iż całkowity strumień świetlny równa się jedności

$$\int_S dF = K \int_{-\infty}^{+\infty} y(x)\,dx = 1, \tag{2}$$

gdzie S jest powierzchnią otworu; stąd $K = \frac{1}{S}$.

Wyznaczamy wówczas $R(x)$ jako

$$R(x) = \frac{dF}{dx} = \frac{1}{S} y(x). \tag{3}$$

Złożony wpływ kształtu otworu i jego przezroczystości można wyrazić posługując się pojęciem „przestrzennego modelu apertury". Model ten przedstawia sobą pewną bryłę o podstawie odpowiadającej kształtowi otworu, wyrażonej we współrzędnych x, y. Wysokość tej bryły, która w ogólnym przypadku jest funkcją zmiennych x, y [co zapisujemy $z(x, y)$], przedstawia sobą rozkład przezroczystości otworu. Zatem elementarny strumień świetlny dF zależeć będzie również od funkcji $z(x, y)$ i wyrazi się wzorem:

$$dF = \frac{1}{V}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} z(x, y)\,dy\right]dx, \tag{4}$$

a rozkład strumienia

$$R(x) = \frac{1}{V} \int_{-\infty}^{+\infty} z(x, y)\,dy, \tag{5}$$

gdzie V jest objętością przestrzennego modelu otworu.

W dalszym ciągu zajmiemy się czterema charakterystycznymi modelami otworów i ich wpływem na charakterystyki przejściowe i równoważne charakterystyki amplitudowe układów analizujących. Podane funkcje rozkładu strumienia wyprowadzono w założeniu, że objętości V wszystkich modeli są sobie równe i że powierzchnie otworów S też są sobie równe; innymi słowy oznacza to, że całkowity strumień świetlny przepuszczany przez wszystkie otwory jest jednakowy.

2.1. Otwór kwadratowy o równomiernej przezroczystości (Model sześcienny) i o boku ξ

Z uwagi na symetrię wszystkich modeli przeniesiemy początek układu osi współrzędnych x, y, z do punktu $x = \frac{1}{2}\xi$ i określimy zredukowaną wielkość $\eta = \frac{x}{\xi}$.
Funkcja rozkładu strumienia przybierze postać

$$R(\eta) = 1, \quad -\frac{1}{2} < \eta < \frac{1}{2};$$

$$R(\eta) = 0, \quad -\frac{1}{2} \geqslant \eta \geqslant \frac{1}{2}. \tag{6}$$

2.2. Otwór okrągły równomiernie przezroczysty o średnicy ξ

$$R(\eta) = \frac{4}{\pi}\sqrt{1-4\eta^2} \quad \text{dla } -\frac{1}{2} < \eta < \frac{1}{2};$$

$$R(\eta) = 0 \quad \text{dla } -\frac{1}{2} \geqslant \eta \geqslant \frac{1}{2}. \tag{7}$$

2.3. Otwór okrągły o średnicy ξ i rozkładzie przezroczystości symetrycznym wg funkcji $\cos^2$

$$R(\eta) = 2\cos^2 \pi\eta = 1+\cos 2\pi\eta \quad \text{dla } -\frac{1}{2} < \eta < \frac{1}{2};$$

$$R(\eta) = 0 \quad \text{dla } -\frac{1}{2} \geqslant \eta \geqslant \frac{1}{2}. \tag{8}$$

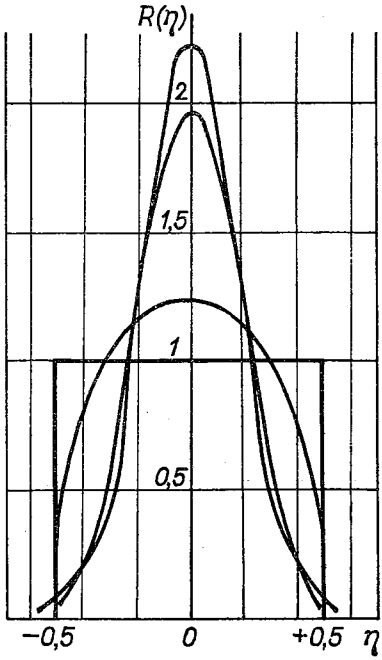
2.4. Otwór okrągły o przezroczystości rozłożonej zgodnie z krzywą „dzwonową"

$$e^{-\left(\frac{4\varrho}{\xi}\right)^2} \qquad \eta = \frac{2\varrho}{\xi},$$

gdzie ϱ oznacza bieżący promień otworu ($\varrho = x$).
Tutaj

$$R(\eta) = \frac{4}{\pi}e^{-(4\eta)^2} \quad \text{dla wszystkich } \eta. \tag{9}$$

Ten ostatni przypadek jest z punktu widzenia przetworników elektronooptycznych najbardziej interesujący. Rozkład bowiem gęstości prądu w plamce wiązki elektronowej, na który wpływają takie czynniki, jak rozkład początkowej prędkości elektronów, aberacje soczewek elektronowych działa itp., określony jest z dobrym przybliżeniem przez tę właśnie funkcję. W tym przypadku funkcja rozkładu $R(\eta)$ nie ma ostrych ograniczeń i istnieje teoretycznie dla wszystkich η.



Rys. 1. Funkcja rozkładu czynnika analizującego

Tablica 1

Wykres funkcji R(η) dla czterech rodzajów otworów

Otwór / η	R(η) 1	2	3	4
$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0,041
$-\frac{1}{4}$	1	1,1	1	0,82
$-\frac{1}{8}$	1	1,25	1,64	1,7
0	1	1,28	2	2,26
$\frac{1}{8}$	1	1,25	1,64	1,7
$\frac{1}{4}$	1	1,1	1	0,82
$\frac{1}{2}$	0	0	0	0,041

Na podstawie podanych zależności możemy sporządzić wykres $R(\eta)$ dla czterech rodzajów otworów. W przypadku niesymetrycznych otworów zarówno pod względem kształtu, jak i przezroczystości wykres $R(\eta)$ jest bardziej złożony.

3. CHARAKTERYSTYKI PRZEJŚCIOWE UKŁADÓW ANALIZUJĄCYCH NIE WYKORZYSTUJĄCYCH ZASADY AKUMULACJI

Do grupy wymienionych w tytule układów możemy zaliczyć wszystkie układy optyczne oraz przetworniki elektronooptyczne, takie jak system analizujący z tarczą Nipkowa, dysektor obrazu, kineskop (np. w systemie nadawania filmów metodą ruchomego promienia świetlnego „flying spot"). Określenie charakterystyki przejściowej układu analizującego będzie polegać na znalezieniu kształtu sygnału elektrycznego odpowiadającego ostremu przejściu z czerni do bieli w obrazie optycznym. Innymi słowy — na znalezieniu odpowiedzi układu na skok jednostkowy sygnału.

Znając funkcję rozkładu strumienia $R(\eta)$ otworu analizującego określimy charakterystykę przejściową jako

$$A_p(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} R(\eta)\,d\eta. \tag{10}$$

Charakterystyki przejściowe dla podanych czterech rodzajów otworów będą miały postać:

1) $$A_p(\eta) = \frac{1}{2} + \eta, \tag{11}$$

2) $$A_p(\eta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}(2\eta\sqrt{1-4\eta^2} + \arcsin 2\eta), \tag{12}$$

3) $$A_p(\eta) = \frac{1}{2} + \eta + \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi\eta, \tag{13}$$

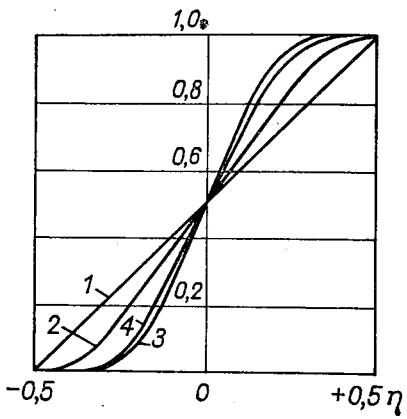
4) $$A_p(\eta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(4\sqrt{2}\,\eta), \tag{14}$$

gdzie

$$\Phi(4\sqrt{2}\,\eta) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{4\sqrt{2}\eta} e^{-(4\eta)^2} d\eta$$

nosi nazwę całki prawdopodobieństwa, której wartości podawane są w podręcznikach matematyki.

Charakterystyki przejściowe dla czterech rodzajów otworów przedstawione są na rys. 2.



Rys. 2. Charakterystyki przejściowe układów nieakumulujących

Jak widać, przebieg charakterystyk dla otworów z cosinusoidalnym lub gaussowskim rozkładem gęstości strumienia jest znacznie korzystniejszy. Obszar nieostrości w tym przypadku wynosi ok. 0,5 obszaru nieostrości dla krzywych *1* i *2*.

3.1. Określenie równoważnych charakterystyk amplitudowych i fazowych

Na podstawie przeprowadzonych wywodów możemy założyć idealny układ analizujący, który nie wnosi żadnych zniekształceń charakterystyki przejściowej. Załóżmy dalej iż w elektryczny tor sygnału wtrącamy czwórnik liniowy o takich charakterystykach amplitudowo-fazowych, aby na jego wyjściu uzyskać charakterystykę przejściową, odpowiadającą rzeczywistemu układowi analizującemu. Zniekształcenia powstające w procesie analizy będziemy mogli wówczas wyrazić za pomocą amplitudowo-fazowej charakterystyki obwodu linearnego.

Znajomość charakterystyki umożliwi opracowanie czwórnika o odwrotnym przebiegu charakterystyk, a zatem — układu elektrycznej korekcji zniekształceń aperturowych.

Równoważne charakterystyki amplitudowo-fazowe wyznaczymy posługując się analizą widmową sygnału o określonej charakterystyce przejściowej, przy pomocy całki Fouriera.

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} dt, \tag{15}$$

gdzie $S(\omega)$ jest gęstością widmową i jest wyrażana jako

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt. \tag{16}$$

Znając przebieg charakterystyki przejściowej $F(t)$ możemy określić rozkład widmowy impulsu. W naszym przypadku zależności liniowej η odpowiada ściśle zależność czasowa, przyjmując, iż czas wybierania elementu o średnicy równej średnicy otworu wynosi T. Wówczas η wyrazi się również jako

$$\eta = \frac{t}{T}, \tag{17}$$

$$A_p(\eta) = A_p\left(\frac{t}{T}\right). \tag{18}$$

Gęstość widmowa funkcji wejściowej, którą jest skok jednostkowy wynosi

$$S_1(\omega) = \frac{1}{j\omega}. \tag{19}$$

Gęstość widmową sygnału wyjściowego wyznaczymy z zależności

$$S_2(\omega) = S_1(\omega) \cdot A_p(\omega), \tag{20}$$

gdzie $A_p(\omega)$ jest funkcją przenoszenia układu.

Gęstość widmową sygnału wyjściowego określamy przy pomocy całki Fouriera z charakterystyki przejściowej, zatem możemy napisać

$$A_p(\omega) = j\omega \int_{-\infty}^{+\infty} A_p\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j\omega t} dt = j\omega T \int_{-\infty}^{+\infty} A_p(\eta) e^{-j\omega T\eta} d\eta. \tag{21}$$

Podstawiamy do (21) wyrażenie określające charakterystykę przejściową w zależności od rodzaju otworu (10)

$$A_p(\omega) = j\omega T \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega T\eta} \int_{-\infty}^{\eta} R(\mu) d\mu d\eta. \tag{22}$$

Dla jasności zapisu zastąpiono zmienną η w (10) zmienną μ. Po scałkowaniu otrzymujemy

$$A_p(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\eta) e^{-j\omega T\eta} d\eta. \tag{23}$$

Otrzymana zależność przedstawia sobą gęstość widmową funkcji rozkładu strumienia $R(\eta)$. Funkcja przenoszenia równoważnego czwórnika linearnego ma zatem charakterystykę amplitudową ściśle odpowiadającą widmu impulsu o kształcie funkcji rozkładu strumienia $R(\eta)$.

Otrzymany wynik jest bardzo ciekawy; wystarczy bowiem znać kształt funkcji rozkładu strumienia otworu analizującego, aby określić odpowiadającą mu charakterystykę amplitudową. Po podstawieniu do (23) odpowiednich wyrażeń na $R(\eta)$ i rozwiązaniu całki otrzymamy zależności

1) $$A_p(\omega) = \frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}, \tag{24}$$

2) $$A_p(\omega) = 2\frac{J_1\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}}, \tag{25}$$

gdzie J_1 — funkcja Bessela pierwszego rodzaju,

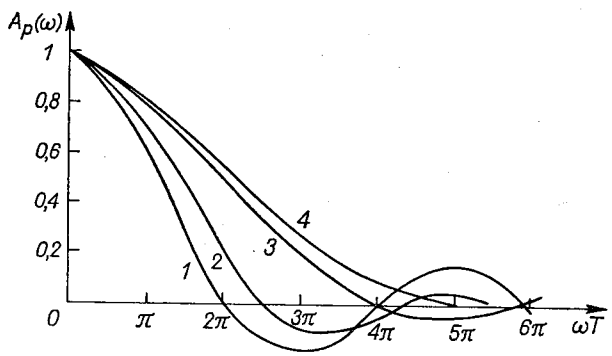
3) $$A_p(\omega) = \frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}\left[1-\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)^2\right]}, \tag{26}$$

4) $$A_p(\omega) = e^{-\left(\frac{\omega T}{8}\right)^2}. \tag{27}$$

Pojęcie częstotliwości jest tutaj ukryte. Należy je rozumieć jako odwrotność czasu analizy jednego okresu analizowanego przebiegu. Jeśli ten czas wynosi T, czyli jest równy czasowi przebiegu średnicy otworu analizującego, to wówczas średnica otworu analizującego równa się długości fali badanego przebiegu
gdy $t = T$ to $\xi = \lambda$,

zatem $\eta = \frac{t}{T} = \frac{x}{\xi} = \frac{\lambda}{\xi}$, zaś $\omega = 2\pi\frac{t}{T}$.

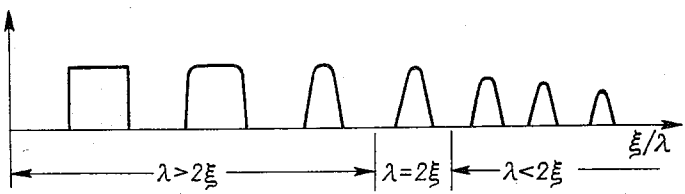
Przedstawione na wykresie (rys. 3) charakterystyki wyglądają, jak następuje:



Rys. 3. Równoważne charakterystyki amplitudowe dla układów bez akumulacji ładunków

Otrzymane wartości ujemne przy pewnych rodzajach otworów oznaczają zmianę fazy o π sygnałów odpowiednich częstotliwości. Uzyskane rozwiązania (23) są rzeczywistymi funkcjami ωT. Oznacza to, iż zniekształcenia aperturowe systemów nieakumulujących nie wprowadzają zniekształceń fazowych. Wyniku tego można było oczekiwać ze względu na symetryczny przebieg charakterystyk przejściowych w stosunku do środka otworu analizującego. W praktyce telewizyjnej dla określenia zdolności rozdzielczej, a także zniekształceń aperturowych używa się tablic testowych z białoczarnymi pasami lub klinami.

Przyjmując długość linii za $2a$ oznaczymy ilość okresów testu w stosunku do długości linii przez $m = \frac{2a}{\lambda}$. Przyjmując analogicznie $M = \frac{2a}{\xi}$ (ξ — średnica otworu analizującego) określimy dwie ważne zależności i odpowiadające im charakterystyki. Pierwszą będzie zależność amplitudy strumienia świetlnego $A_{(\lambda)}$ przepuszczonego przez otwór dla sygnału prostokątnego (odpowiadającego pasom czarno-białym) od stosunku-średnicy otworu analizującego do długości fali sygnału prostokątnego. Stosunek ten może być wyrażony jako stosunek zależności liniowych $\frac{\xi}{\lambda}$ lub czasowych $\frac{T}{t}$, gdyż w procesie analizy liniowej jednostkom czasu odpowiadają liczbowo jednostki długości. Przy $\lambda \gg \xi$ amplituda strumienia jest stała, niezależna od λ. Dla $\lambda < 2\xi$ amplituda maleje.



Rys. 4. Kształt sygnału wyjściowego przy analizie pasów biało-czarnych otworem o różnej średnicy

Poszukiwana zależność wyraża się złożoną funkcją $A_p(\omega)$ i analityczne jej znalezienie jest zagadnieniem czysto matematycznym. Jest rzeczą oczywistą, iż charakter zmienności będzie zależał od charakteru zmienności $A_p(\omega)$, a więc od rodzaju otworu. Amplituda strumienia świetlnego dla każdej λ_{pr} (prostokątnej) będzie sumą amplitud wszystkich harmonicznych o amplitudach wynikających z danej charakterystyki amplitudowej otworu $A_p(\omega)$. Zatem słuszna będzie zależność

$$A_{\lambda_{pr}} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{A_p(\omega)\left[(2k-1)\frac{\xi}{\lambda_{pr}}\right]}{2k-1}, \tag{28}$$

gdzie $A_p(\omega)\left[(2k-1)\frac{\xi}{\lambda_{pr}}\right]$ oznacza amplitudę odpowiedniej harmonicznej $k = 1, 2, 3 \ldots$ sygnału o parametrach $\frac{\xi}{\lambda_{pr}}$ określonej przy pomocy charakterystyki amplitudowej równoważnego czwórnika $A_p(\omega)$.

Zależność (28) można powiązać z (23)

$$A_{(\lambda_{pr})} = \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\eta) \left[\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{e^{-j\omega T\eta(2k-1)}}{2k-1} \right] d\eta. \tag{29}$$

Dla $-\frac{\pi}{2} < \omega T\eta < \frac{\pi}{2}$

wyrażenie w nawiasie kwadratowym przybiera wartość $\frac{\pi}{4}$,

stąd

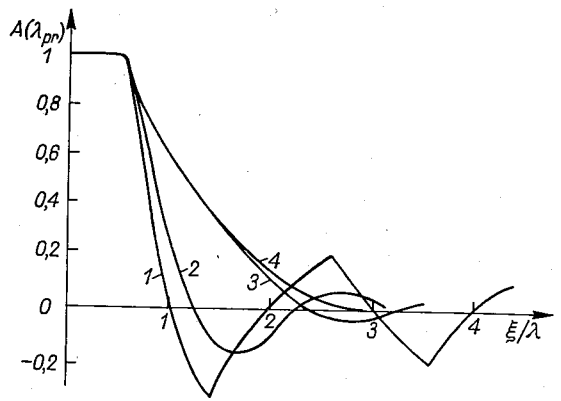
$$A_{(\lambda_{pr})} = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\eta)\, d\eta = 1,$$

co jest zrozumiałe.

Można również określić zależność analityczną dla $\lambda_{pr} < 2\xi$. W założeniu symetrii funkcji rozkładu strumienia $R(\eta) = R(-\eta)$ i ograniczeniu zakresu zmienności $\eta\left(-\frac{1}{2} < \eta < \frac{1}{2}\right)$ wyrażenie (29) przybiera postać

$$A_{(\lambda_{pr})} = 2 \int_{0}^{\frac{1}{2}} R(\eta) \left[\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{e^{-j\omega T\eta(2k-1)}}{2k-1} \right] d\eta. \tag{30}$$

Rozwiązanie tego wyrażenia dla różnych otworów, czyli różnych funkcji rozkładu strumienia $R(\eta)$ jest, jak już wspomniano, problemem czysto matematycznym. Wyniki przedstawimy w formie wykresu. Na osi rzędnych wyrazimy amplitudę sygnału (strumienia



Rys. 5. Amplituda sygnału wyjściowego w funkcji $\frac{\xi}{\lambda}$ dla sygnału pasów biało-czarnych dla różnych otworów

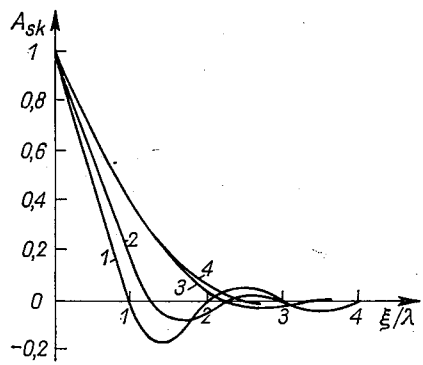
świetlnego lub napięcia na wyjściu urządzenia) w jednostkach względnych odniesioną do amplitudy sygnału o częstotliwości zerowej. Na osi odciętych zaś — wielkość częstotliwości sygnału również w jednostkach względnych — odniesionych do średnicy otworu analizującego. Takie przedstawienie zależności sprawia, iż wykres ten jest wykresem uniwersalnym.

Wykres wykonany na podstawie przytoczonych założeń matematycznych wykazuje dużą zgodność z wykresami uzyskiwanymi drogą eksperymentalną. Potwierdza to słuszność przyjętych założeń i metody analizy zjawiska, jak również umożliwia na podstawie znajomości średnicy otworu oraz przebiegu $A_{(\lambda_{pr})} = f\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$ obliczenie charakterystyk przejściowych i amplitudowych równoważnego czwórnika.

Podane zależności i wykres określają amplitudę strumienia, a ogólniej sygnału wyjściowego. Interesować nas będzie jednak nie tyle amplituda, co rozróżnialność szczegółów, określona jako kontrast szczegółów. Otóż wrażenie kontrastu szczegółów zależy nie tylko od stosunku maksymalnego do minimalnego strumienia, lecz i od stromości granicy między ciemnym i jasnym pasem. Oczywiście, iż przy danym otworze analizującym stromość granicy jest również określona przebiegiem sygnału wejściowego. I tak inny będzie kształt sygnału wyjściowego dla pasów czarno-białych z prostokątnym rozkładem jasności, a inny dla sygnału z sinusoidalnym czy trapezoidalnym rozkładem jasności.

W celu uniezależnienia się od rodzaju badanego obiektu określamy zależność a m p l i t u d y strumienia dla r ó w n o w a ż n e g o sygnału prostokątnego od stosunku $\frac{\xi}{\lambda}$.

Przez równoważny sygnał prostokątny rozumiemy sygnał prostokątny o tej samej λ co rzeczywisty i o wartości skutecznej równej rzeczywistemu. Jest rzeczą jasną, iż wówczas amplituda tego sygnału będzie zawsze mniejsza lub najwyżej równa rzeczywistemu sygnałowi (zależnie od kształtu). W ten sposób uwzględniamy wpływ chyrakterystyk przejściowych. Otrzymane przy tym założeniu charakterystyki będą odzwierciedlać rzeczywisty wpływ zjawiska apertury na przekazywanie obrazu. Wykres (rys. 6) przedstawia zależność wartości skutecznej przepuszczonego przez dany otwór strumienia świetlnego (w jednostkach względnych) od długości fali przebiegu względem średnicy szczeliny. Oczywiście przebieg krzywych odnosi się również do strumienia elektronowego o określonym przekroju, zgodnie z przyjętymi wyżej założeniami.



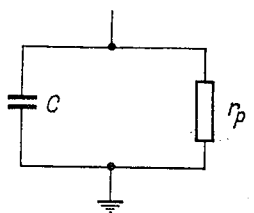
Rys. 6. Skuteczna wartość sygnału wyjściowego w funkcji stosunku $\frac{\xi}{\lambda}$

4. CHARAKTERYSTYKI PRZEJŚCIOWE UKŁADÓW ANALIZUJĄCYCH WYKORZYSTUJĄCYCH ZASADĘ AKUMULACJI ŁADUNKÓW

W dotychczasowych rozważaniach zakładaliśmy, że całkowity strumień świetlny przepuszczany przez otwór zależał tylko od własności tego otworu. W odniesieniu do elektronowych lamp analizujących rolę otworu analizującego spełnia promień elektronów. Pełna analogia do przeprowadzonych rozważań wymaga, aby wszystkie elektrony wiązki w równym stopniu wpływały na stabilizację potencjału elementu elektrody akumulującej. Jak przekonamy się dalej, zjawisko przebiega nieco inaczej. Liczba elektronów osiadających na danym elemencie elektrody akumulującej zależy nie tylko od gęstości strumienia elektronów (analogia — przezroczystość otworu), ale także od chwilowego potencjału danego punktu elektrody. W związku z tym na wytworzenie sygnału obrazu największy wpływ ma czołowa część przekroju wiązki analizującej. Zanim bowiem cały „przekrój" wiązki elektronów znajdzie się na danym elemencie elektrody, potencjał tego elementu już będzie ustabilizowany przez elektrony przedniej części „przekroju" strumienia. Pozostałe elektrony zostaną zawrócone do anody. Zasadniczy wpływ na to zjawisko ma prędkość wybierania, pojemność elektrody akumulującej oraz natężenie prądu wiązki. Zbadajmy, jak zmienia się potencjał przy analizie jednej linii fragmentu bardzo wąskiego paska elektrody akumulującej, prostopadłego do kierunku wybierania, leżącego w odległości η od środka przekroju wiązki elektronowej (η ma to samo znaczenie co poprzednio).

Zakładamy, iż na elektrodzie istnieje pewien ustalony obraz potencjałów.

Schemat zastępczy obwodu elektrycznego będzie wyglądać jak na rys. 7.



Rys. 7. Schemat zastępczy elementu elektrody akumulującej lampy analizującej

Pojemność C jest pojemnością elementarną owego paska elektrody, na której ustaliło się napięcie przed rozpoczęciem analizowania, proporcjonalne do oświetlenia danego elementu obrazu. Opór r_p jest odwrotnością liczby elektronów wiązki wybierającej potrzebnej do zneutralizowania jednostkowego potencjału obrazu elektronowego na pojemności C. Innymi słowy jest to oporność rozładowania C. Słuszna będzie zatem zależność

$$\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{r_p(t)C} u_c(t) = 0. \tag{31}$$

Podstawiając za zmienną t wartość $\eta = \frac{t}{T}$ otrzymamy

$$\frac{du_c(\eta)}{d\eta} + \frac{T}{r_p(\eta)C} u_c(\eta) = 0. \tag{32}$$

Równanie (32) jest równaniem parametrycznym, ponieważ opór r_p zmienia się w zależności od czasu

$$r_p(\eta) = \frac{R_p}{R(\eta)}, \tag{33}$$

gdzie $R(\eta)$ jest funkcją rozkładu jednostkowego strumienia elektronowego analogiczną do funkcji rozkładu jednostkowego strumienia świetlnego. Po podstawieniu (33) do (32) i rozdzieleniu zmiennych otrzymamy

$$\frac{du_c(\eta)}{d\eta} = -\frac{T}{R_p C} R(\eta) = -BR(\eta), \tag{34}$$

gdzie

$$B = \frac{T}{R_p C}. \tag{35}$$

Wielkość B przedstawia sobą stosunek czasu wybierania elementu o średnicy równej średnicy wiązki analizującej do stałej czasu rozładowania elementu elektrody. Wartość R_p jest średnią wartością oporności rozładowania i zależy oczywiście od funkcji rozkładu $R(\eta)$

Po scałkowaniu otrzymujemy

$$\ln u_c(\eta) = -B \int_{-\infty}^{\eta} R(\eta)\, d\eta, \tag{36}$$

stąd

$$u_c(\eta) = e^{-B\int_{-\infty}^{\eta} R(\eta)d\eta} = e^{-BA_p(\eta)}. \tag{37}$$

Obecnie określimy przebieg charakterystyki przejściowej. Będzie to zależność prądu pobieranego z wiązki na zneutralizowanie zakumulowanego ładunku ostrego przejścia z czerni do bieli od położenia plamki wybierającej względem owej granicy przejścia. Przed wybraniem potencjał obszaru elektrody po lewej stronie granicy wynosi 0, a po prawej stronie 1.

Całkowity ładunek neutralizowany jest w każdej chwili proporcjonalny

$$\Delta Q \approx \int_{-\infty}^{\eta} \Delta u_c\, d\eta = \int_{-\infty}^{\eta} [1 - u_c(\eta)]\, d\eta,$$

a całkowity prąd sygnału

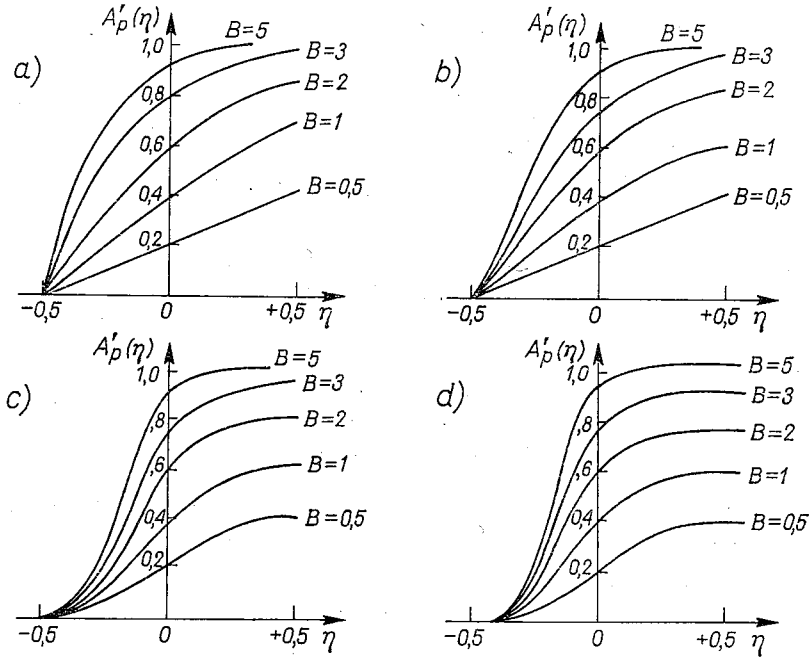
$$\frac{d\Delta Q}{dt} \div 1 - u_c(\eta) = 1 - e^{-B \cdot A_p(\eta)} = A'_p(\eta). \tag{38}$$

Zależność (38) przedstawia sobą przejściową charakterystykę systemu analizującego z akumulacją ładunków. Przebieg charakterystyki przejściowej zależy od $R(\eta)$, a więc od rozkładu elektronów w wiązce analizującej i od stałej B. Stała B charakteryzuje sobą wielkości związane z prędkością wybierania, pojemnością akumulującą oraz natężeniem prądu wiązki.

Obecnie przedstawimy na wykresach przebiegi $A_p(\eta)$ dla czterech rodzajów rozkładu elektronów w wiązce (analogicznie jak w rozdziale o systemach nieakumulujących dla czterech rodzajów otworów).

Rys. 8a odnosi się do rozkładu gęstości równomiernej i przekroju kwadratowego wiązki. Odpowiednio rys. 8b — do gęstości równomiernej i przekroju kołowego; rys. 8c — do rozkładu cosinusoidalnego i wreszcie rys. 8d — do rozkładu gaussowskiego. Parametrem wszystkich wykresów jest stała B.

Z wykresów widać, iż przy małych B charakterystyka przejściowa jest symetryczna względem środka plamki wybierającej i odpowiada wtedy w przybliżeniu charakterystyce przejściowej układu nieakumulującego. Dzieje się tak, ponieważ strumień elektronów



Rys. 8. Charakterystyki przejściowe systemu analizującego z akumulacją ładunku dla różnych rodzajów otworów

analizuje element krótko, cały „przekrój" wiązki bierze jednakowy udział w neutralizowaniu ładunku elementu i chwilowa wartość prądu sygnałowego zależy tylko od rozkładu elektronów w przekroju wiązki. Nie ma wtedy pełnego wykorzystania zakumulowanego ładunku.

Natomiast przy większych B przejawia się niejednakowy udział obszaru „przekroju" wiązki w neutralizowaniu ładunku. Wykorzystanie zakumulowanego ładunku jest większe, charakterystyka przejściowa ma większą stromość, lecz pojawia się niesymetria względem środka plamki wybierającej.

Niesymetryczny kształt charakterystyki przejściowej oznacza, jak wiadomo z teorii obwodów liniowych, istnienie zniekształceń fazowych. W rzeczywistych lampach anali-

zujących spotykamy rozkłady strumienia elektronów cosinusoidalne lub wg krzywej dzwonowej.

Bliższe rozeznanie krzywych z rys. 8d dla np. $B = 0{,}5$ i $B = 5$ wykazuje, iż środek symetrii przesuwa się o ok. $0{,}2\eta$, a więc odstępstwo od kształtu symetrycznego jest niewielkie. Zniekształcenia fazowe wnoszone przez równoważny czwórnik są małe, a ich wpływ jest korzystny, gdyż zwiększa się stromość charakterystyki przejściowej. Jest to równoznaczne ze zmniejszeniem średnicy plamki wybierającej. Dla $B = 5$ oznacza to prawie dwukrotne pozorne zmniejszenie średnicy plamki wybierającej. Przeprowadzone wywody wykazują możliwość poprawienia subiektywnego odczucia ostrości obrazu przy zmniejszeniu prędkości wybierania, a więc obniżenia standardu telewizyjnego. Oczywiście obniżenie standardu, a więc zawężenie pasma częstotliwości kanału ogranicza możliwość przekazywania drobnych szczegółów obrazu. Ograniczenie to nie oznacza jednak proporcjonalnego obniżenia subiektywnej oceny ostrości obrazu, na którą właśnie decydujący wpływ mają charakterystyki przejściowe. Na ostateczny kształt charakterystyki przejściowej sygnału mają wpływ charakterystyki przejściowe poszczególnych ogniw toru. Można wykazać, iż wypadkowa charakterystyka przejściowa przy zwiększaniu liczby ogniw dąży do funkcji Laplace'a

$$A_p(\eta)_{wyp} = \frac{1}{2}[1 \pm \Phi(|\eta|)]$$

niezależnie od kształtu charakterystyk przejściowych poszczególnych ogniw. Jest to charakterystyka graniczna przy przechodzeniu sygnału przez tor z dużą liczbą ogniw. Oznacza to, iż decydujący wpływ na określenie charakterystyki przejściowej toru ma ogniwo o najgorszej charakterystyce przejściowej. W prawidłowo opracowanym torze transmisyjnym takim najgorszym ogniwem jest lampa analizująca. Nowoczesne kineskopy o dużej średnicy ekranu dają bowiem bardzo małe zniekształcenia apertury. Rzeczywista lampa analizująca może być również uważana za układ szeregowy kilku ogniw, z których każde wprowadza pewne zniekształcenia aperturowe. Będą to takie ogniwa, jak układ optyczny, układ ogniskowania obrazu elektronowego (superikonoskop, ortikon obrazowy) oraz wpływ oporności poprzecznej elektrody sygnałowej.

W przedstawionej analizie zjawiska ograniczono się tylko do rozpatrzenia wpływu plamki wybierającej, gdyż jest to wpływ dominujący. Rzeczywiste charakterystyki aperturowe lamp analizujących zdejmuje się, jak to już wspomniano, doświadczalnie. Na ich podstawie można przystąpić do opracowania układów korekcji tych zniekształceń.

5. METODY I UKŁADY KOREKCJI ZNIEKSZTAŁCEŃ APERTUROWYCH W URZĄDZENIACH TELEWIZYJNYCH

We współczesnej technice telewizyjnej wykorzystuje się kilka metod korekcji zniekształceń aperturowych powstających w procesie analizy obrazu. Wspólnym zadaniem wszystkich układów jest wprowadzenie charakterystyki tłumieniowej o odwrotnym przebiegu w stosunku do przebiegu wejściowego. Układ korekcji nie powinien przy tym wprowadzać zniekształceń fazowych. W zasadzie każdy układ korygujący charakterystykę wzmocnienia toru na większych częstotliwościach będzie również korygował zniekształ-

cenia aperturowe. Tak więc można użyć dowolnego układu kompensacji szerokopasmowej. Jednak przy tego typu układach korekcyjnych nie można uzyskać dostatecznie małych zniekształceń fazowych oraz właściwego dla zjawiska apertury ukształtowania charakterystyki częstotliwościowej. Dodatkową trudność stanowi problem regulacji stopnia kompensacji, co powinno cechować tego typu układy ze względu na rozrzut parametrów lamp analizujących. Stosuje się jednak niekiedy ten uproszczony sposób, gdyż nie wymaga on wprowadzenia dodatkowych stopni lampowych lub tranzystorowych — funkcję korektora spełniać bowiem może jeden ze stopni wzmocnienia toru kamerowego. W celu poprawienia charakterystyk fazowych można stosować korektory fazy, co komplikuje jednak układ. Istnieją dwie zasadnicze metody korekcji zniekształceń aperturowych, przy których uzyskuje się dobrą zgodność przebiegów charakterystyk amplitudowych korektorów i lamp analizujących, minimalne zniekształcenia fazowe oraz łatwość regulacji charakterystyki kompensacji. Metody te polegają:

1) na stosowaniu w układach korektorów obwodów różniczkujących (metoda różniczkowania),

2) na stosowaniu linii długiej.

W ramach każdej z tych metod można opracować kilka układów korekcyjnych. Tyczy się to szczególnie metody różniczkowania. Metoda różniczkowania umożliwia osiągnięcie lepszej zgodności przebiegów charakterystyk tłumieniowych. W praktycznych jednak rozwiązaniach wprowadza zawsze pewne zniekształcenia fazowe. Przy metodzie linii długiej nie można uzyskać tak dobrej zgodności kształtów charakterystyk, za to zniekształcenia fazy są mniejsze.

Niżej będą omówione nieco szczegółowiej obie ww. metody oraz będą podane układy z omówieniem ich właściwości.

5.1. Kompensacja metodą obwodów różniczkujących

Metoda ta polega na wykorzystaniu faktu, iż charakterystyka amplitudowa czwórnika równoważnego lampy analizującej posiada przebieg opisany funkcją rozkładu prawdopodobieństwa (krzywa dzwonowa) (rys. 3, krzywa *4*). Funkcję tę napiszemy jako

$$\alpha = e^{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}, \tag{39}$$

gdzie ω_0 — częstotliwość, przy której spadek charakterystyki wynosi *e*.

Dla przyjętych poprzednio oznaczeń ω_0 odpowiada sygnałowi, którego długość fali $\lambda_0 = \frac{\pi}{4}\xi$ (czas analizy $t_0 = \frac{\pi}{4}T$. T — czas analizy elementu o długości równej średnicy plamki wybierającej ξ).

Wyrażenie (39) można przedstawić w postaci szeregu

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1!} + \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}{2!} + \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^6}{3!} + \ldots +}, \tag{39a}$$

a charakterystykę aperturową w postaci

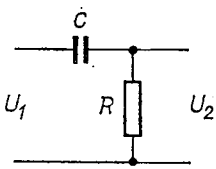
$$A_p(\omega) = \frac{1}{1+a_2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+a_4\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4+a_6\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^6+\ldots}. \tag{40}$$

Charakterystyka amplitudowa układu korekcyjnego musi mieć przebieg odwrotny, a zatem

$$A_p(\omega)_k = 1+a_2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+a^4\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4+a^6\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^6+\ldots \tag{41}$$

Należy zatem zastosować układy, w których napięcie wyjściowe będzie proporcjonalne do parzystych potęg częstotliwości. Układem o takiej zależności napięcia będzie podwójny obwód różniczkujący *RC*

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{R}{R+\frac{1}{j\omega C}} = j\omega\frac{RC}{1+j\omega RC}.$$



Rys. 9. Obwód różniczkujący typu *RC*

Przy połączeniu kaskadowym dwóch takich obwodów wypadkowa funkcja przenoszenia będzie iloczynem poszczególnych funkcji przenoszenia

$$\frac{U_{wyj}}{U_{wej}} = -\frac{\omega^2R^2C^2}{1-\omega^2R^2C^2+2j\omega RC} \approx -\omega^2R^2C^2, \tag{42}$$

gdyż zazwyczaj $\omega RC \ll 1$ (dla układu idealnego — w założeniu braku pojemności szkodliwych).

Rozpatrzmy schemat przedstawiony na rys. 10. Całkowite napięcie wyjściowe będzie się składać z sumy napięć poszczególnych gałęzi.

Napięcie wyjściowe z lampy L_0 wynosi

$$U'_{wyj} = k_0 \cdot U_{wej} \tag{43}$$

(przez $k_0, k_1, k_2, k_3 \ldots$ oznaczać będziemy wzmocnienia stopni).

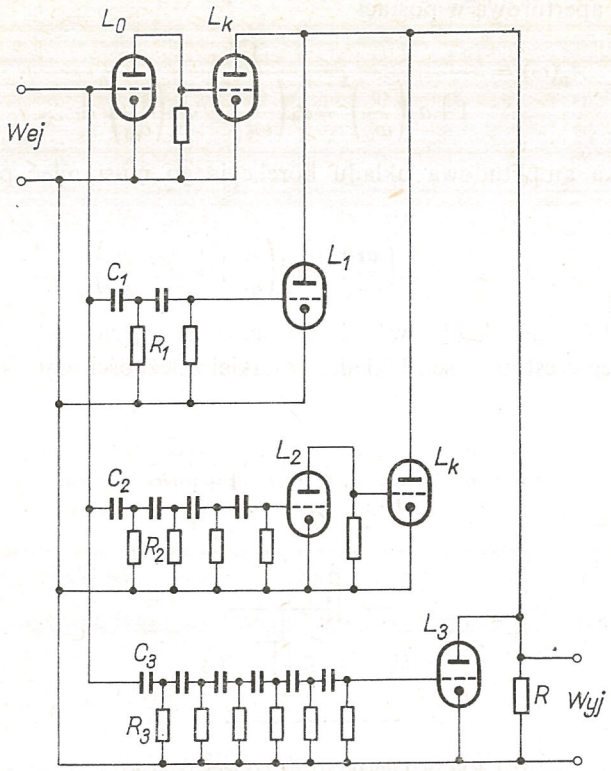
Napięcie wyjściowe z lampy L_1 wyniesie

$$U''_{wyj} = U_{wej}(-\omega^2R_1^2C_1^2)(-k_1) = U_{wej}\omega^2R_1^2C_1^2. \tag{44}$$

W stopniach L_2 i L_k następuje wzmocnienie sygnału proporcjonalnie do czwartej potęgi częstotliwości bez odwrócenia fazy

$$U'''_{wyj} = U_{wej}(\omega^4R_2^4C_2^4)k_2 \tag{45}$$

itd. itd.



Rys. 10. Schemat układu realizującego charakterystykę według wzoru (41)

Wypadkowe napięcie wyjściowe układu wyniesie

$$U_{wyj} = U'_{wyj}+U''_{wyj}+U'''_{wyj}+ \ldots = U_{wej}(k_0+k_1\omega^2C_1^2R_1^2+k_2\omega^4R_2^4C_2^4+ \ldots . \tag{46}$$

Stopnie L_k — służą do odwracania fazy o 180°; ich wzmocnienie wynosi 1.

Współczynnik wzmocnienia układu wyniesie zatem

$$m = \frac{U_{wyj}}{U_{wej}} = k_0+k_1(\omega C_1R_1)^2+k_2(\omega C_2R_2)^4+k_3(\omega C_3R_3)^6+ \ldots \tag{47}$$

Względny współczynnik wzmocnienia wyniesie

$$\beta = 1+\frac{k_1}{k_0}(\omega R_1C_1)^2+\frac{k_2}{k_0}(\omega C_2R_2)^4+\frac{k_3}{k_0}(\omega C_3R_3)^6+ \ldots \tag{48}$$

W celu zrównania wyrażeń (48) i (41) należy tak dobrać stałe k, R i C, aby spełnić warunki

$$\frac{k_1}{k_0}(C_1R_1)^2 = \frac{a_2}{\omega_0^2}, \tag{49a}$$

$$\frac{k_2}{k_0}(C_2R_2)^4 = \frac{a_4}{\omega_0^4}, \tag{49b}$$

$$\frac{k_3}{k_0}(C_3R_3)^6 = \frac{a_6}{\omega_0^6}. \tag{49c}$$

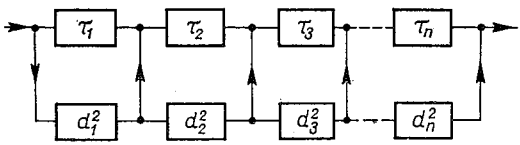
Wówczas charakterystyka amplitudowa układu korekcyjnego wyrażona będzie za pomocą współczynnika a i częstotliwości granicznej ω_0.

Przedstawiony na rys. 10 schemat wyjaśnia zasadę omawianej metody korekcji.

Aby układ nie wprowadzał zniekształceń fazowych w roboczym zakresie częstotliwości, należy odpowiednio dobrać stałe czasu obwodów różniczkujących. Okazuje się, iż przy zachowaniu tych warunków stałe czasu obwodów wypadają zbyt małe, aby zapewnić dostateczną wielkość sygnałów poszczególnych gałęzi. Dotyczy to szczególnie obwodów 4- i 6-krotnego różniczkowania. Natomiast dla obwodów dwukrotnego różniczkowania zniekształcenia fazowe są do pominięcia przy realnych praktycznie wartościach RC. Drugim istotnym problemem w tego typu układach jest zapewnienie jednakowych czasów opóźnień poszczególnych składowych napięcia wyjściowego.

Dla zapewnienia tego warunku należy stosować obwody opóźniające. Obwody te winny posiadać stałe opóźnienie czasowe τ w roboczym pasmie częstotliwości.

Jako obwody opóźniające można stosować linie długie lub stopnie wzmacniające z odpowiednią kompensacją wzmocnienia na większych częstotliwościach. Strukturalny schemat układu korekcji ilustrujący metodę obwodów różniczkujących może być przed-



Rys. 11. Kaskadowe łączenie obwodów różniczkujących

stawiony w dwóch wariantach. Wariant pierwszy — w którym obwody dwukrotnego różniczkowania są połączone kaskadowo, a sygnały o odpowiedniej krotności różniczkowania są pobierane z odpowiednich miejsc łańcucha tych obwodów (rys. 11).

Obwody dwukrotnego różniczkowania oznaczono na rys. 11 symbolami d_1^2, d_2^2 itd., a obwody opóźniające — τ. Z punktu widzenia ekonomiki układu wariant ten ma niewątpliwie zalety. Tor sygnału podstawowego składa się z łańcucha obwodów opóźniających, w który wtrącane są sygnały o odpowiedniej krotności różniczkowania; i tak sygnał po dwukrotnym zróżniczkowaniu w obwodzie d_1^2 dodawany jest do sygnału podstawowego i jednocześnie różniczkowany dalej w obwodzie d_2^2, po czym po dodaniu już czterokrotnie zróżniczkowanego sygnału do sygnału podstawowego — dalej różniczkowany w obwodzie d_3^2 itd.

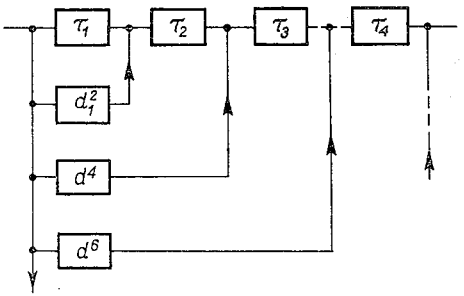
Opóźnienie τ wszystkich obwodów opóźniających jest jednakowe i równe opóźnieniu wnoszonemu przez obwód dwukrotnego różniczkowania. Cały układ korektora składa się z jednakowych ogniw obwodów opóźniających i różniczkujących. Łatwo zauważyć, że w układach o takiej strukturze zmiana współczynnika wzmocnienia jednego z ogniw różniczkowania niższych rzędów wpływa na wzmocnienie wszystkich sygnałów, a zatem w znacznym stopniu na kształt wypadkowej charakterystyki amplitudowej. Wpływ ten jest szczególnie duży przy wzrastającej liczbie ogniw. Wady tej nie posiada wariant z niezależnymi obwodami różniczkowania (rys. 12 — oznaczenia jak poprzednio).

Układ korektora w tym wariancie jest bardziej rozbudowany i nie składa się już z jednakowych obwodów opóźniających i różniczkujących. Opóźnienia poszczególnych obwodów

muszą spełniać zależności:

$$\tau_1 = \tau_{d^2}, \quad \tau_1+\tau_2 = \tau_{d^4}, \quad \tau_1+\tau_2+\tau_3 = \tau_{d^6} \text{ itd.}$$

W obydwu wariantach układów korekcji istnieje możliwość łatwej regulacji wypadkowej charakterystyki korekcji przez zmianę poszczególnych składowych sygnału wyjściowego. Ma to duże znaczenie w praktyce, gdyż umożliwia dopasowanie układu do indy-



Rys. 12. Równoległe łączenie obwodów różniczkujących

widualnych właściwości poszczególnych lamp analizujących. Poszczególne nawet egzemplarze tego samego typu lampy analizującej różnią się bowiem często pod względem poziomu zniekształceń aperturowych. Regulacja poziomów sygnałów poszczególnych składowych nie może wprowadzać zmian stałych czasowych obwodów różniczkujących. Musi się ona odbywać przy użyciu potencjometrów o dostatecznie małych wartościach oporności lub poprzez regulację nachylenia charakterystyk lamp układu.

W układach tego typu stałe czasowe wszystkich poszczególnych obwodów różniczkowania powinny być zasadniczo jednakowe, jednak ze względu na potrzebę ograniczania wpływu zakłóceń fluktuacyjnych w pobliżu częstotliwości granicznej celowe jest zwiększanie stałych czasowych obwodów różniczkujących wyższych rzędów. Pogarsza to aproksymację charakterystyk układu do charakterystyki idealnej, lecz ogranicza wzmocnienie szumów. Aby zapewnić odpowiednie fazy poszczególnych składowych sygnału wyjściowego, należy stosować stopnie odwracające fazę. Sumowanie składowych odbywać się może w obwodach anodowych inwertorów lub w specjalnym stopniu sumującym. Jak widać, metoda różniczkowania polega na algebraicznym sumowaniu poszczególnych składowych widma sygnału wyodrębnionych z sygnału zniekształconego przy pomocy obwodów różniczkujących.

Aczkolwiek metoda ta zapewnia bardzo dobre charakterystyki korekcji, to jednak ze względu na skomplikowanie układu w klasycznej postaci rzadko jest stosowana. Okazuje się, iż wystarcza dla dostatecznie dobrej korekcji wykorzystanie różniczkowania tylko drugiego rzędu. Zanim omówimy układy praktyczne oparte na tej metodzie, celowe będzie przeanalizowanie właściwości obwodów różniczkujących i opóźniających.

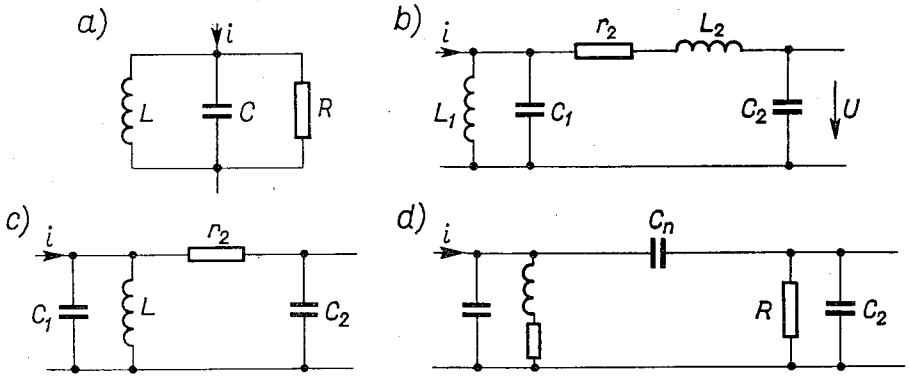
5.1.1. Analiza obwodów różniczkujących i opóźniających

Obwody różniczkujące

Zasadniczym członem układu jest obwód dwukrotnego różniczkowania. Obwód taki może się składać z dwóch członów złożonych z jednakowych lub różnych elementów

połączonych szeregowo. Pojęcie obwodu różniczkującego zapożyczono tutaj z techniki impulsowej, choć interesować nas będzie raczej przenoszenie sygnałów sinusoidalnych, a więc przebiegi charakterystyk amplitudowo-fazowych.

Jako obwód różniczkujący może służyć klasyczny człon *RC* lub *RL* (w praktycznym układzie zawsze z pojemnością własną). Można też wybrać układ bardziej złożony. Poszczególne układy obwodów różniczkujących różnią się między sobą przebiegiem charakterystyk amplitudowo-fazowych. Przebieg tych charakterystyk ma zasadnicze znaczenie dla prawidłowego działania korektora zniekształceń aperturowych. Przebieg charakterystyk amplitudowych poszczególnych członów korektora powinien być jak najbardziej płaski w zakresie ich częstotliwości pracy, a ostro opadać powyżej górnej częstotliwości granicznej ω_0 ze względu na szumy. Charakterystyka fazy natomiast powinna być maksymalnie liniowa, aby nie wprowadzać zniekształceń fazowych. Warunki te, jak wiadomo z teorii obwodów, są ze sobą sprzeczne. Występują tu zagadnienia analogiczne do problemów kompensacji wzmacniaczy szerokopasmowych. Stosowane obwody są podobne do obwodów kompensacji szeregowej lub równoległej. Zastosujemy jednak nieco inny sposób analizy omawianych obwodów. Rozważymy cztery rodzaje obwodów różniczkujących.



Rys. 13. Schematy różnych rodzajów obwodów różniczkujących. Schematy a) i d) — stosowane szerzej w układach korekcji apertury; schemat d) przedstawia skorygowany człon różniczkujący *RC*. Schematy b) i c) są spotykane w obwodach wzmacniaczy szerokopasmowych

W schematach z rysunku 13 uwzględniono wpływ pojemności szkodliwych i oporności własnych cewek.

Schematy z rysunków 13a i 13d znalazły szersze zastosowanie w układach korekcji zniekształceń aperturowych. Schemat z rysunku 13d przedstawia skorygowany człon różniczkujący *RC*. Układy z rysunków 13b i 13c spotykane są raczej w obwodach wzmacniaczy szerekopasmowych. Wszystkie obwody rozpatrujemy w układzie z generatorem prądowym ($R_w = \infty$).

Dla każdego układu można określić stosunek $\frac{u}{i}$. Określimy współczynnik dwukrotnego różniczkowania jako współczynnik przy drugiej potędze ω we wzorze (41) — a_2.

W przypadku gdy wyrażenie typu $a\omega^2$ uzyskuje się poprzez kaskadowe połączenie dwóch ogniw różniczkujących, możemy mówić o współczynniku różniczkowania pojedynczego

ogniwa jako o pierwiastku kwadratowym wielkości a_2 we wzorze (41). Wielkość ta określa funkcję przenoszenia pojedynczego obwodu. Moduł współczynnika różniczkowania określać będzie przebieg charakterystyki amplitudowej — zaś argument — fazowej obwodu. Dla porównania właściwości obwodów różniczkujących wygodne jest określenie względnej wartości modułu współczynników różniczkowania. Przez względną wartość współczynnika różniczkowania rozumieć będziemy stosunek wielkości

$$|\alpha| = \sqrt{\frac{a_2}{a_{2(\omega=0)}}}. \tag{50}$$

W ten sposób dla wartości $\omega = 0$ względna wartość współczynnika różniczkowania przybierze wartość równą 1, co pozwoli na bardzo proste porównanie poszczególnych obwodów na wspólnym wykresie $|\alpha|^2 = f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$. Wielkość $|\alpha|^2$ określi nam szerokopasmowość poszczególnych typów obwodów i pozwoli wybrać najkorzystniejszy. Autor opisywanej metody korekcji zniekształceń apertury, a zarazem twórca sposobu obliczania charakterystyk wzmaniaczy szerokopasmowych metodą szeregu potęgowego, znany specjalista w dziedzinie teorii obwodów G.W. Braude, podaje wzory na obliczenie kąta fazowego oraz opóźnienia dla poszczególnych typów obwodów [6], [7]. Wzory te można wyprowadzić przekształcając odpowiednio funkcję przenoszenia każdego obwodu oraz korzystając z zależności (50). Wzory te podane będą w ostatecznej postaci dla warunku optymalnej charakterystyki amplitudowej. Wyprowadzenie ich jest bardzo żmudne i nie wnosi nic ciekawego z punktu widzenia omawianej metody. Warunek optymalnej charakterystyki amplitudowej jest b. interesujący, gdyż wtedy uzyskuje się korzystniejsze charakterystyki przejściowe kosztem ewentualnych niewielkich przerostów, co jak wiadomo może być nawet korzystne. I tak dla obwodu z rys. 13a mamy:

$$|\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^4 L^2 C^2}}; \tag{51}$$

kąt fazowy

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \omega \frac{\sqrt{2LC}}{1-\omega^2 LC}, \tag{51a}$$

a opóźnienie

$$\tau = \frac{d\varphi}{d\omega_{\omega=0}} = -\sqrt{2LC}. \tag{51b}$$

Dla obwodu z rys. 13b odpowiednio:

$$|\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^4}\omega^8 L^4 C^4}}, \tag{52}$$

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \omega \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}} \sqrt{LC} \frac{1-\frac{1}{1+\sqrt{2}}\omega^2 LC}{1-\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\omega^2 LC}, \tag{52a}$$

$$\tau = \frac{d\varphi}{d\omega_{\omega=0}} = -\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}}\sqrt{LC} \tag{52b}$$

w założeniu

$$\frac{C_1}{C_1+C_2} = \frac{C_1}{C} = \frac{1}{1+\sqrt{2}},$$

$$\frac{L_2}{L} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$r_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Dla obwodu z rys. 13c

$$|\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{8}\omega^6 L^3 C^3}}, \tag{53}$$

$$\varphi = -\operatorname{arctg}\omega \frac{\sqrt{2LC}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\omega^2 LC\right)}{1-\omega^2 LC}, \tag{53a}$$

$$\tau = \frac{d\varphi}{d\omega_{\omega=0}} = -\sqrt{2LC} \tag{53b}$$

w założeniu

$$\frac{C_1}{C_1+C_2} = \frac{C_1}{C} = \frac{1}{4},$$

$$r = \frac{4}{3}\sqrt{2\frac{L}{C}},$$

a dla obwodu z rys. 13d

przy założeniu $y = \frac{C_n}{C_1+C_2} = 1$, zaś $x = \frac{C_1}{C_1+C_2} = \frac{1}{3}$.

Maksymalną płaskość charakterystyki amplitudy współczynnika różniczkowania uzyskuje się dla

$$L = 1{,}41r^2C, \quad R = 0{,}9r;$$

wówczas

$$|\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3{,}33L_0^3C^3\omega^6}{1+2{,}22L_0C\omega^2}}}, \tag{54}$$

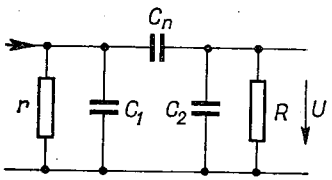
gdzie

$$L_0 = RrC_n = 0{,}9r^2C, \quad C = C_1+C_2, \tag{54a}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\omega 1{,}48\sqrt{L_0 C} - \operatorname{arctg}\omega 1{,}05\sqrt{L_0 C}\,\frac{2{,}83-1{,}7L_0C\omega^2}{1-3{,}28\omega^2 L_0 C\omega^2},$$

$$\tau = \frac{d\varphi}{d\omega_{\omega=0}} = -1{,}48\sqrt{L_0 C} = -1{,}41r\cdot C. \tag{54b}$$

Ciekawe będzie porównanie otrzymanych wyników z wynikami dla nieskorygowanego układu różniczkującego *RC*.



Rys. 14. Nieskorygowany obwód różniczkujący *RC*

Przy wyborze najbardziej optymalnych zależności

$$\frac{C_n}{C_1+C_2} = 1 \text{ i } \frac{C_1}{C_1+C_2} = \frac{1}{3}, \quad R = 0{,}9r,$$

odpowiednie zależności można napisać:

$$|\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+6{,}5\omega^2 L_0 C+1{,}5\omega^4 L_0^2 C^2}}, \tag{55}$$

$$\varphi = -\operatorname{arctg}\omega 2{,}97\sqrt{L_0 C}, \tag{55a}$$

$$\tau = \frac{d\varphi}{d\omega_{\omega=0}} = -2{,}97\sqrt{L_0 C}, \tag{55b}$$

gdzie $L_0 = R\cdot r\cdot C_n = 0{,}9r^2 C$.

Na rys. 15 przedstawiono wykres zależności $|\alpha|^2 = f(\Delta)$, gdzie:

$$\Delta = \omega\sqrt{LC} \ (\text{lub } \Delta = \omega\sqrt{L_0 C}).$$

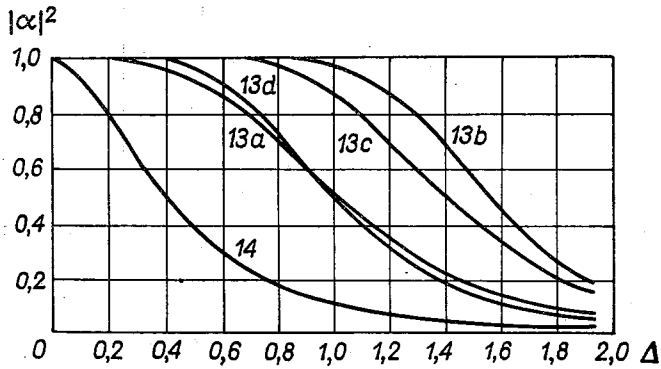
Przedstawienie kwadratu modułu daje jednoznaczne porównanie poszczególnych obwodów przy ich zastosowaniu w układzie dwukrotnego różniczkowania.

Łatwo zauważyć, iż przemnożenie kwadratu modułu współczynnika różniczkowania (wsp. dwukrotnego różniczkowania) przez kwadrat względnej częstotliwości daje wyrażenie określające charakterystykę amplitudową obwodu w jednostkach względnych. (Oznaczenia krzywych odpowiadają numerom rysunków odpowiednich obwodów).

Porównanie krzywych na poziomie np. $|\alpha|^2 = 0{,}9$ obrazuje szerokopasmowość poszczególnych obwodów. Z wykresu widać wyraźnie, iż pasmo częstotliwości układów z rys. 13a i 13d jest ok. 3 razy większe niż prostego obwodu *RC*. Jeszcze większe jest pasmo złożonych obwodów korekcji (rys. 13b i 13c), lecz przebieg ich charakterystyk jest mniej korzystny (zbyt szybkie opadanie). W celu porównania obwodów pod względem przebiegu charakterystyki w górnym zakresie częstotliwości sporządzimy wykres $|\alpha|^2$ odniesiony dla wszyst-

kich obwodów do wartości Δ przy $|\alpha|^2 = 0{,}9$, a zatem obierzemy nową względną częstotliwość jako

$$\Delta_1 = \frac{\Delta}{\Delta_{|\alpha^2|=0,9}}.$$



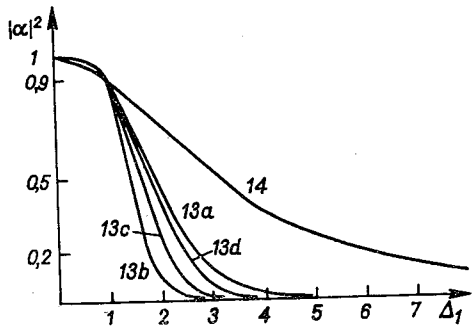
Rys. 15. Porównanie charakterystyk amplitudowych obwodów różniczkujących

Oznaczenia krzywych jak poprzednio.

Widzimy, jak powoli opada charakterystyka dla zwykłego obwodu *RC*.

Wreszcie ostatni wykres porównawczy dla wykazania względnej wartości współczynnika przenoszenia (tłumienia obwodu) w funkcji względnej wartości szerokości pasma.

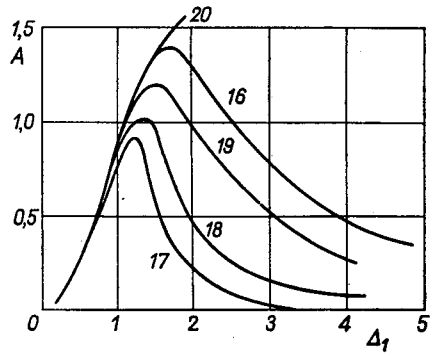
$$A = |\alpha|^2 \cdot \Delta_1^2.$$



Rys. 16. Porównanie właściwości pasmowych obwodów różniczkujących w górnym zakresie częstotliwości

Przedstawione wykresy uwidaczniają cechy poszczególnych typów obwodów. Widać z nich wyraźnie korzyści wynikające ze stosowania złożonych obwodów różniczkujących. Najkorzystniejszy przy tym jest obwód przedstawiony na rys. 13a i 13d, gdyż wykazuje dostateczne tłumienie częstotliwości poza górną częstotliwością graniczną przy dość szerokim pasmie i stosunkowo najmniejszym tłumieniu. Pozostałe dwa typy obwodów wprowadzają zbyt duże tłumienie i zniekształcenia fazy.

Często stosuje się również obwód dwukrotnego różniczkowania będący połączeniem obwodów z rys. 13a i 13d. Obwód ten odznacza się korzystnym przebiegiem charaktery-



Rys. 17. Porównanie tłumienia obwodów w funkcji szerokości pasma

styki amplitudy, zbliżonym do przebiegu obwodu z rys. 13c — przy małym tłumieniu, odpowiadającym obwodowi z rys. 13a. Jego moduł względnego współczynnika różniczkowania wyraża się wzorem:

$$|\alpha| = \frac{1}{\sqrt{[1+\omega^2 KR^2C_1^2(1+y)]^2+\omega^2R^2C_1^2[(x+y)(1-\omega^2KR^2C_1^2)-\omega^2KR^2C_1^2xy]^2}}, \tag{56}$$

kąt fazowy

$$\varphi = -\operatorname{arctg}\omega RC_1\frac{(x+y)-K(x+y-xy)\omega^2R^2C_1^2}{1-K(1+y)\omega^2R^2C_1^2}, \tag{56a}$$

a czas opóźnienia

$$\tau = \frac{d\varphi}{d\omega_{\omega=0}} = -RC_1(x+y), \tag{56b}$$

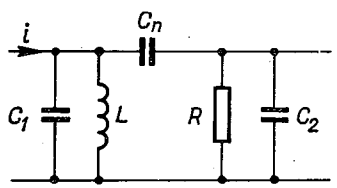
gdzie:

$$x = \frac{C_2}{C_1},$$

$$y = \frac{C_1+C_2}{C_1} = \frac{C}{C_1},$$

$$K = \frac{L}{R^2C_1}.$$

Schemat tego obwodu przedstawiono na rys. 18.



Rys. 18. Obwód dwukrotnego różniczkowania będący połączeniem obwodów z rysunków 13a i 13b

Przytoczona analiza i porównanie różnych rodzajów obwodów różniczkujących umożliwiają wybór najodpowiedniejszego obwodu dla celów korekcji zniekształceń aperturowych. Rozważania te mają również ogólniejsze znaczenie i mogą być pomocne przy rozpatrywaniu przechodzenia sygnałów wizyjnych przez tego typu obwody.

Obwody opóźniające

Jako obwody opóźniające mogą być stosowane bądź odcinki linii długich, bądź ogniwa sztucznych linii długich typu *K* lub *m*.

Jeśli chodzi o linie długie, to można zastosować zwykły kabel współosiowy lub specjalny kabel o dużym czasie opóźnienia. Jak wiadomo, oporność charakterystyczna linii współosiowych bez strat

$$Z_0 = 138\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \log \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{L}{C}},$$

gdzie:

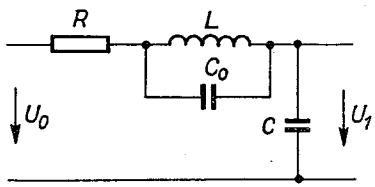
ε — stała dielektryczna ośrodka izolacyjnego,

a i b — średnice zewnętrznego i wewnętrznego przewodu linii.

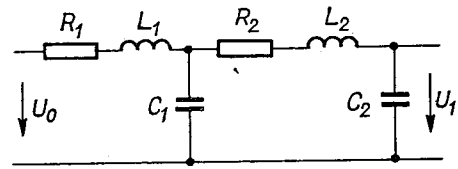
Czas opóźnienia takiej linii wyraża się zależnością $\tau = \sqrt{LC}$. Linia o najmniejszym tłumieniu posiada stosunek $a/b = 3{,}6$, co daje $Z_0 = 77\ \Omega$. τ wynosi dla przeciętnych kabli współosiowych ok. 0,005 μsek/m. Stosuje się specjalne kable o zwiększonej oporności charakterystycznej i czasie opóźnienia. Pozwala to na uzyskiwanie w kablach opóźnień rzędu $\tau = 0{,}2—3$ μsek/m i $Z_0 = 500—3000\ \Omega$. Są to kable o specjalnej konstrukcji, polegającej na nawijaniu środkowego przewodu na cienki rdzeń magnetyczny. Przewód zewnętrzny też nawija się w postać uzwojenia. Kable te odznaczają się dość silnym tłumieniem wyższych częstotliwości i dlatego jako ogniwa opóźniające w urządzeniach telewizyjnych nie są raczej stosowane.

W układach korekcji zniekształceń aperturowych wymagane opóźnienia nie są duże i wystarczy zastosować jedno lub kilka ogniw sztucznej linii opóźniającej. Rolę tę można również spełniać stopień wzmacniacza szerokopasmowego o odpowiednim układzie kompensacji (w postaci ogniwa filtru typu π). Dobre rezultaty uzyskuje się również stosując jedno lub dwa ogniwa całkujące *RC* o skorygowanej charakterystyce amplitudowej.

Stosuje się ogniwa o postaci podanej na rysunkach 19 i 20.



Rys. 19. Skorygowane ogniwo całkujące *RC*



Rys. 20. Podwójne skorygowane ogniwo całkujące *RC*

Interesować nas będzie funkcja przenoszenia ogniw dla warunku optymalnej charakterystyki amplitudowej. W tym przypadku bowiem zniekształcenia fazowe będą zbliżone do zniekształceń wnoszonych przez obwody różniczkujące, które były analizowane z podobnym założeniem. Układ z rys. 19 i 20 posiada funkcję przenoszenia

$$a = \frac{1-\omega^2 LC_0}{1-\omega^2 L(C+C_0)+j\omega RC(1-\omega^2 LC_0)} \tag{57}$$

przy założeniu

$$K = \frac{L}{R^2 C_0} \quad \text{i} \quad x = \frac{C_0}{C}.$$

Charakterystyka amplitudowa wyrazi się wzorem

$$|a| = \frac{1-K\cdot x\cdot R^2C^2\omega^2}{\sqrt{[1-K(1+x)R^2C^2\omega^2]^2+R^2C^2\omega^2(1-K\cdot x\cdot R^2C^2\omega^2)^2}}, \tag{58}$$

a kąt fazowy

$$\varphi = -\operatorname{arctg}\omega RC\frac{1-K\cdot x\cdot R^2C^2\omega^2}{1-K(1+x)R^2C^2\omega^2}. \tag{58a}$$

Opóźnienia czasowe zaś

$$\tau = \frac{d\varphi}{d\omega_{\omega=0}} = -RC. \tag{58b}$$

Dla warunku maksymalnej płaskości

$$K = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad x = \frac{1}{2},$$

zatem

$$|a| = \frac{1-\frac{1}{4}R^2C^2\omega^2}{\sqrt{1-\frac{1}{2}R^2C^2\omega^2+\frac{1}{16}R^4C^4\omega^4+\frac{1}{16}R^6C^6\omega^6}} =$$

$$= \frac{1-\frac{1}{4}\tau^2\omega^2}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\tau^2\omega^2+\frac{1}{16}\tau^4\omega^4+\frac{1}{16}\tau^6\omega^6}}, \tag{60}$$

$$\varphi = -\operatorname{arctg}\omega\tau\frac{1-\frac{1}{4}\tau^2\omega^2}{1-\frac{3}{4}\tau^2\omega^2}. \tag{60a}$$

Dla układu z rys. 20 odpowiednio przy założeniu:

$$R_1 = R_2 = R, \quad K_1 = \frac{L_1}{R^2C_1}, \quad K_2 = \frac{L_2}{R^2C_2}, \quad x = \frac{C_1}{C_2}$$

$$|a| = \frac{1}{\sqrt{1+a'R^2C_2^2\omega^2+b'R^4C_2^4\omega^4+cR^6C_2^6\omega^6+d'R^8C_2^8\omega^8}}, \tag{61}$$

gdzie:

$$a' = 4+x^2+2x-2K_1x-2K_2-2K_1x^2,$$

$$b' = x^2+K_1^2x^2+K_1^2x^4+K_2^2+2K_1K_2+2K_1^2x^3+4K_1K_2x^2-2K_2x-2K_2x^2-2K_1x^2,$$

$$c' = K_2^2+K_1^2x^4-2K_1^2K_2^2x^3-2K_1^2K_2x^4-2K_1K_2^2x^2,$$

$$d' = K_1^2K_2^2x^4,$$

$$\varphi = -\operatorname{arctg}\omega RC_2\frac{2+x-R^2C_2^2\omega^2(K_2x+x^2)}{1-R^2C_2^2\omega^2(x+K_1x+K_1x^2+K_2)+K_1K_2x^2R^4C_2^4\omega^2}, \tag{61a}$$

$$\tau = \frac{d\varphi}{d\omega_{\omega=0}} = -(2+x)RC_2.$$

Dla maksymalnej płaskości amplitudy

$$x = 1{,}925; \quad K_1 = 0{,}332; \quad K_2 = 3{,}908;$$

$$|a| = \frac{1}{\sqrt{1+23R^8C_2^8\omega^8}} = \frac{1}{\sqrt{1+0{,}00041\tau^8\omega^8}}; \tag{62}$$

$$\tau = -3{,}925RC_2 \tag{62a}$$

$$\varphi = -\operatorname{arctg}\omega\tau\frac{1-0{,}728\tau^2\omega^2}{1-0{,}5\tau^2\omega^2+0{,}019\tau^4\omega^4}. \tag{63b}$$

Dla układu całkującego RC nieskorygowanego

$$|\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}, \tag{64}$$

$$\tau = -RC, \tag{64a}$$

$$\varphi = -\operatorname{arctg}\tau\omega. \tag{64b}$$

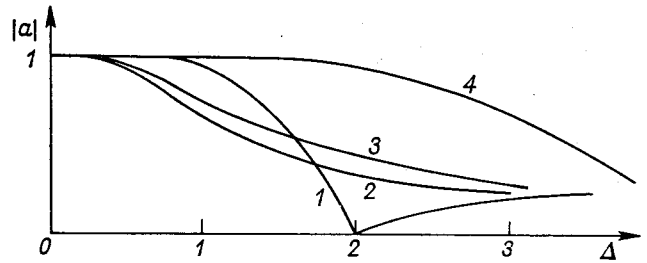
Natomiast dla dwóch ogniw połączonych kaskadowo przy tych samych założeniach co dla obwodu skorygowanego, a więc

$$x = \frac{C_1}{C_2} = 2, \quad \tau = -4RC_2,$$

$$|a| = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{4}\tau^2\omega^2+\frac{1}{64}\tau^4\omega^4}}, \tag{65}$$

$$\varphi = -\operatorname{arctg}\omega\tau\frac{1-\frac{1}{16}\tau^2\omega^2}{1-\frac{1}{8}\tau^2\omega^2}. \tag{65a}$$

Na rys. 21 przedstawiono charakterystyki amplitudowe omawianych obwodów w odniesieniu do częstotliwości względnej Δ. Krzywa *2* przedstawia charakterystykę amplitudy jednoczłonowego obwodu RC bez korekcji, a krzywa *1* — z korekcją. Odpowiednio krzywa



Rys. 21. Charakterystyki amplitudowe skorygowanych obwodów całkujących

4 i *3* — dla obwodu dwuczłonowego. Widać z wykresu, iż obwody korygowane dają korzystniejsze przebiegi charakterystyk amplitudowych ze względu na szybsze opadanie poza częstotliwością graniczną. Okazuje się, iż przy stosowaniu jako członu różniczkującego obwodu dwukrotnego różniczkowania lub obwodów prostej szeregowej kompensacji indukcyjności (rys. 13a), lub wreszcie skorygowanych obwodów *CR* (rys. 13d) — wystarczy zastosować jako ogniwo opóźniające skorygowany pojedynczy obwód opóźniający.

W przypadku stosowania do różniczkowania obwodów złożonych (rys. 13b i 13c) korekcji indukcyjności — należy stosować skorygowany układ dwuczłonowy.

Przytoczone wywody wyczerpują w zasadzie zagadnienia związane z metodą różniczkowania. Jak już wspomniano, obwody różniczkujące różnych typów mogą stanowić elementy sprzęgające i korekcji charakterystyki wzmacniaczy szerokopasmowych. W praktyce okazało się, iż wystarczy wprowadzenie tylko członu dwukrotnego różniczkowania. Upraszcza to znacznie układy korektorów i ich projektowanie. W toku dalszej części pracy będą omówione najczęściej spotykane układy korektorów opartych na tych metodach.

5.2. Metoda korekcji zniekształceń aperturowych oparta na wykorzystaniu linii długiej

O ile w metodzie różniczkowania można osiągnąć kształt charakterystyki korekcji odpowiadający przebiegowi tłumienia wywołanego zniekształceniami aperturowymi, to w układach opartych na wykorzystaniu linii długiej jest to niemożliwe. Jak pamiętamy, zjawisko apertury opisane jest najdokładniej dla telewizyjnych lamp analizujących funkcją typu $e^{-\omega^2}$.

Zbliżony w kształcie przebieg charakterystyki zniekształceń aperturowych, jak widać z wykresu na rys. 3, odpowiada przebiegowi rozkładu cosinusoidalnego. Jeślibyśmy zatem zapewnili charakterystykę amplitudową korektora o kształcie cosinusoidalnym, uzyskalibyśmy dość dobre zbliżenie do kształtu idealnego. Taki właśnie przebieg wzmocnienia wzrastającego ze wzrostem f wg funkcji cosinusa wykazują korektory z linią długą. Układy te mogą nawet przewyższać układy z różniczkowaniem tylko dwukrotnym, które są najczęściej stosowane w praktyce. Zniekształcenia fazowe wnoszone w procesie korekcji są praktycznie do pominięcia pod warunkiem zastosowania linii o małych stratach, co jest łatwe do spełnienia.

Rozważmy napięcie i prąd na początku linii długiej.

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_2 \cosh \gamma l + \frac{\hat{I}_2}{Z_0} \sinh \gamma l, \tag{66a}$$

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_2 \cosh \gamma l + \frac{\hat{U}_2}{Z_0} \sinh \gamma l. \tag{66b}$$

W przypadku linii bezstratnych, gdy $\alpha = 0$, stała propagacji

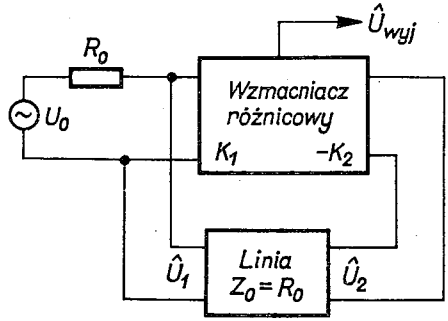
$$\gamma = \alpha + j\beta = j\beta = j\omega\sqrt{LC}$$

i równania impedancyjne przybierają postać

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_2 \cos \beta l + j \frac{\hat{I}_2}{Z_0} \sin \beta l, \tag{67a}$$

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_2 \cos \beta l + j \frac{\hat{U}_2}{Z_0} \sin \beta l. \tag{67b}$$

W opisywanej metodzie wykorzystuje się zjawiska zachodzące w linii otwartej na końcu, połączonej w układzie jak następuje:



Rys. 22. Układ blokowy korekcji z linią długą

Dla linii otwartej na końcu, a dopasowanej na wejściu $R_0 = Z_0$, równania (67) upraszczają się

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_2 \cos \beta l, \tag{68a}$$

$$\hat{i}_1 = j \frac{\hat{U}_2}{Z_0} \sin \beta l. \tag{68b}$$

Impedancja wejściowa takiej linii jest równa

$$\hat{Z}_1 = \frac{\hat{U}_1}{\hat{i}_1} = -jZ_0 \operatorname{ctg} \beta l \tag{69}$$

i jest czystą reaktancją.

Dla wartości $\beta l = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ reaktancja przybiera wartości zerowe, natomiast dla wartości $0, \pi, 2\pi$ otrzymujemy rezonanse równolegle. Składowa urojona stałej propagacji β oznacza

zmianę kąta wektora napięcia lub prądu wzdłuż linii w radianach na jednostkę długości. Wielkość l jest elektryczną długością linii wyrażaną zwykle w długościach fali λ. W opisywanej metodzie stosuje się linie o długości elektrycznej $l = \frac{\lambda}{4}$ lub $l = \frac{\lambda}{2}$, czyli linie ćwierćfalowe i półfalowe. W przypadku linii półfalowej uzyskuje się większe współczynniki korekcji, lecz na skutek większej długości linii rosną jej straty i zniekształcenia fazowe.

Jak wiadomo, $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$, stąd, gdy linia jest półfalowa $\left(l = \frac{\lambda}{2}\right)$, wówczas wektor napięcia po przejściu przez linię będzie obrócony o kąt π.

W celu wyjaśnienia metody rozważymy układ z linią półfalową. Oznacza to, iż dla częstotliwości, dla której chcemy uzyskać największy współczynnik korekcji, czyli górnej częstotliwości granicznej ω_g, długość linii wynosi $\frac{\lambda}{2}$. Jak już powiedziano, linia jest dopasowana na wejściu a otwarta na wyjściu. Oba końce linii są przyłączone do dwóch wejść wzmacniacza różnicowego. Napięcie uzyskiwane na jego wyjściu będzie algebraiczną różnicą napięć $\hat{U}_2$ i $\hat{U}_1$

$$\hat{U}_{wyj} = K_1\hat{U}_1 - K_2\hat{U}_2,$$

gdzie K_1 i K_2 — współczynniki wzmocnienia.

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_0 \frac{-jZ_0 \operatorname{ctg}\beta l}{R_0 - jZ_0 \operatorname{ctg}\beta l} = \hat{U}_0 \frac{\cos\beta l}{\cos\beta l + j\sin\beta l} = \hat{U}_0 \cos\beta l \cdot e^{-j\beta l}, \tag{70}$$

$$\hat{U}_2 = \frac{\hat{U}_1}{\cos\beta l} = \hat{U}_0 e^{-j\beta l}. \tag{71}$$

Otrzymany wynik jest nieco zaskakujący, gdyż wykazuje, iż napięcie na wejściu linii i napięcie na wyjściu są zgodne w fazie. Tak jest istotnie, pod warunkiem, iż linia jest bezstratna. Wyjaśni to prosta analiza wektorowa.

Jak wiadomo z teorii linii długich, napięcie w dowolnym punkcie linii składa się z wektorowej sumy napięć fali padającej i fali odbitej. Falą padającą nazywamy falę napięcia lub prądu podążającą od generatora do obciążenia. Falą odbitą będzie zatem fala poruszająca się w przeciwnym kierunku. W przypadku obustronnego dopasowania, tzn. gdy zarówno oporność wewnętrzna generatora, jak i obciążenia są równe oporności charakterystycznej linii — istnieje w niej jedynie fala padająca. W przypadku linii bezstratnej otwartej na końcu napięcie w każdym punkcie linii jest wynikiem superpozycji dwóch fal o różnych amplitudach podążających w przeciwnych kierunkach. W przypadku zasilania linii napięciem sinusoidalnym w warunkach dopasowania na wejściu a otwarcia na wyjściu powstaje w linii fala stojąca o cosinusoidalnym rozkładzie napięcia. Jest rzeczą oczywistą, iż odbicie na końcu zachodzi w tym przypadku bez zmiany fazy, a zatem amplituda napięcia na końcu będzie równa podwójnej amplitudzie napięcia fali padającej.

Oznaczmy falę padającą (stosując oznaczenia rys. 22) jako $\hat{U}_1^+ = \frac{\hat{U}_0}{2}$, co wynika z definicji, a falę odbitą — $\hat{U}_1^-$.

Zgodnie ze wzorem (71) napięcie na końcu linii będzie wynosiło:

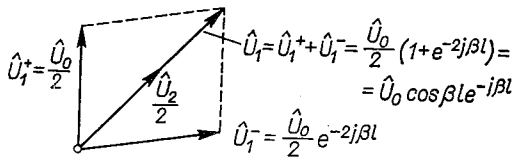
$$\hat{U}_2 = \hat{U}_0 e^{-j\beta l} = 2 \cdot \frac{\hat{U}_0}{2} \cdot e^{-j\beta l} = \hat{U}_0 e^{-j\beta l}.$$

Napięcie na początku linii $\hat{U}_1$ będzie sumą napięć fali padającej i odbitej

$$\hat{U}_1 = \frac{\hat{U}_0}{2} + \hat{U}_1^-. \tag{72}$$

Fala odbita przebywa drogę dwukrotnie większą od długości linii, zatem zapis jej wyrazi się zależnością

$$\hat{U}_1^- = \frac{\hat{U}_0}{2} e^{-2j\beta l}. \tag{73}$$



Rys. 23. Wykres wektorowy napięć w linii długiej dla $\beta l < \frac{\pi}{2}\left(l > \frac{\lambda}{4}\right)$

Przedstawmy to na wykresie wektorowym — rys. 23. Wyrażenie

$$\hat{U}_1 = \frac{\hat{U}_0}{2}(1+e^{-j2\beta l}) = \hat{U}_0 \cos\beta l e^{-j\beta l}$$

można również wyprowadzić analitycznie

$$\frac{\hat{U}_0}{2}(1+e^{-2j\beta l}) = \frac{\hat{U}_0}{2}(1+\cos 2\beta l - j\sin 2\beta l) =$$

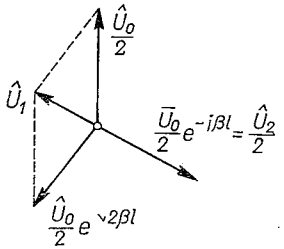
$$= \frac{\hat{U}_0}{2}(2\cos^2\beta l - j\sin 2\beta l) = \frac{\hat{U}_0}{2}(2\cos^2\beta l - j2\sin\beta l \cdot \cos\beta l) =$$

$$= \frac{\hat{U}_0}{2} 2\cos\beta l(\cos\beta l - j\sin\beta l) = \hat{U}_0 \cos\beta l \cdot e^{-j\beta l}.$$

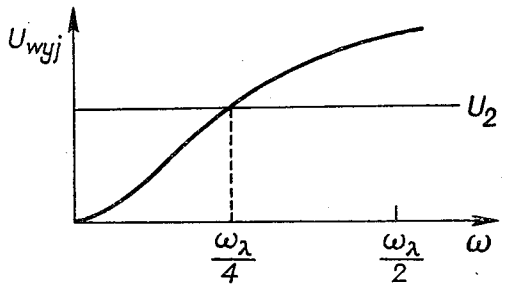
Widzimy więc, iż napięcie wejściowe jest w fazie z wyjściowym. Zgodność ta będzie zachowana dla $\beta l < \frac{\pi}{2}$, a zatem dla fal o długościach większych od 4 l. Gdy $l > \frac{\lambda}{4}$, wówczas $\cos\beta l$ zmienia znak, co oznacza, iż napięcie wejściowe jest w przeciwfazie do wyjściowego. Widać to wyraźnie z wykresu wektorowego.

Napięcie wejściowe będzie zatem zawsze w fazie z napięciem wyjściowym dla długości fali większych od $4l\left(l < \frac{\lambda}{4}\right)$ o amplitudzie malejącej do zera $\left(\text{dla } l = \frac{\lambda}{4}\right)$ wg funkcji cosinusa, lub w przeciwfazie — dla $l > \frac{\lambda}{4}$. Po połączeniu linii w układzie wzmacniacza różnicowego (rys. 22) uzyskujemy przebieg napięcia wyjściowego wg krzywej z rys. 25. Faza tego napię-

cia U_{wyj} będzie ściśle zgodna (lub przeciwna) z fazą napięcia wejściowego U_1 pod warunkiem, iż wzmacniacz nie wprowadza zniekształceń fazy oraz że linia długa jest bezstratna. W przypadku gdyby tłumienia w linii nie można było pominąć, przebieg napięcia wyjściowego w funkcji częstotliwości odbywałby się raczej wg funkcji cosinusa hiperbolicznego oraz powstawałyby dodatkowe zniekształcenia fazowe.



Rys. 24. Wykres wektorowy napięć w linii długiej dla $l < \frac{\lambda}{4}$



Rys. 25. Przebieg napięcia na wyjściu wzmacniacza różnicowego

W układach korektorów zniekształceń aperturowych stosuje się przeważnie linie sztuczne składające się z kilku ogniw LC typu m — pochodne. Linie takie odznaczają się bowiem stałym przebiegiem $Z_0 = f(\omega)$ oraz $\tau = f(\omega)$. Wymagane opóźnienia nie są zbyt wielkie i łatwo jest wykonać linię o żądanych parametrach Z_0 i τ oraz minimalnych stratach i dostatecznie dużej częstotliwości granicznej. Stosuje się niekiedy też specjalne kable współosiowe o zwiększonym czasie opóźnienia, lecz są one trudne w wykonaniu, a korzyści wynikające ze stosowania obwodu o stałych rzeczywiście rozłożonych ze względu na i tak już przybliżony przebieg charakterystyki kompensacji, co wynika z założeń samej metody, są niewielkie.

Wymagany kształt charakterystyki kompensacji uzyskuje się dobierając właściwą częstotliwość graniczną (długość elektryczną linii) oraz stosunki wzmocnienia dwóch członów wzmacniacza różnicowego. Operując tymi wielkościami można osiągnąć zadowalające rezultaty.

Jak wiadomo, właściwości linii sztucznej zależą od parametru m. Dla celów zastosowania w układzie korektora zniekształceń aperturowych linia powinna odznaczać się dobrą stałością przebiegu $Z = f(\omega)$ i $\tau = f(\omega)$. Otóż optymalny przebieg tych wartości uzyskuje się dla parametru $m = 1{,}14$. Odpowiada to linii (rys. 26) złożonej z ogniw LC typu π o współczynniku wzajemnego sprzężenia $K = \frac{M}{L} = 0{,}125$. Korzystając ze znanych zależności $\tau_s = m\sqrt{LC}$ oraz $Z_0 \cong \sqrt{\frac{L}{C}}$ dla $\omega \ll \omega_{gr.\ linii}\left(\omega_{gr.\ linii} = \frac{1}{\pi\sqrt{LC}}\right)$ można obliczyć wartości L i C ogniw.

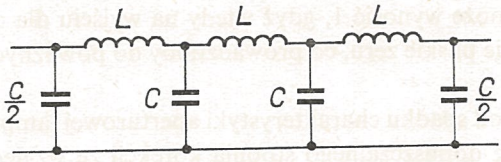
$$L = 0{,}4\frac{Z_0}{nf_p}, \tag{74}$$

$$C = \frac{0{,}5}{nf_pZ_0}. \tag{75}$$

gdzie:

n — ilość ogniw,

f_p — częstotliwość maksymalna kompensacji (częstotliwość graniczna kompensacji).



Rys. 26. Schemat odcinka sztucznej linii

Współczynniki 0,4 i 0,5 są uzależnione przy danym m od długości elektrycznej linii, a więc od tego, czy używamy linii ćwierćfalowej, czy półfalowej. Wiemy bowiem, że

$$\beta l = \omega\tau \quad (\tau = n\tau_s \text{ — całkowite opóźnienie linii}),$$

a więc dla $l = \frac{\lambda}{2}$, czyli dla $f = f_p$

$$2\pi f_p \tau = \pi, \quad \text{zatem } \tau = \frac{1}{2f_p},$$

dla $l = \frac{\lambda}{4}$ $(f = f_p)$

$$2\pi f_p \tau = \frac{\pi}{2}, \quad \text{zatem } \tau = \frac{1}{4f_p}$$

i wzory (74) i (75) przybiorą postać

$$L = \frac{0{,}2 Z_0}{n f_p}, \qquad C = \frac{0{,}25}{n f_p Z_0}.$$

Wartość Z_0 wybiera się w praktyce niezbyt dużą. Chodzi o to, aby zapewnić niezbędną szerokopasmowość stopnia sterującego i możliwie mały wpływ pojemności lamp. Wzmocnienie nie jest tu czynnikiem istotnym. Dlatego wartości Z_0 wahają od 400 do 600 Ω.

Podamy teraz pewne ogólne przesłanki projektowania korektorów tego typu, a następnie sposób obliczania układów korektora o stałej i regulowanej charakterystyce wzmocnienia.

Wracając do rys. 22 widzimy, iż

$$\hat{U}_{wyj} = -\hat{U}_2 K_2 + \hat{U}_1 K_1 = -K_2\left(\hat{U}_2 - \hat{U}_1 \frac{K_1}{K_2}\right) = -\hat{U}_0 K_2 (1 - k\cos\beta l) e^{-j\beta l}, \tag{76}$$

ponieważ $k = \frac{K_1}{K_2}$, zatem wzmocnienie układu możemy zapisać jako

$$K = \frac{\hat{U}_{wyj}}{\hat{U}_0} = -K_2(1 - k\cos\omega\tau) e^{-j\omega\tau}. \tag{76a}$$

Maksymalny stosunek wzmocnień układu przy f_{min} i $f_{max} = f_p$ wyniesie

$$B_m = \frac{K_{\omega\tau=\pi}}{K_{\omega\tau=0}} = \frac{1+k}{1-k}. \tag{77}$$

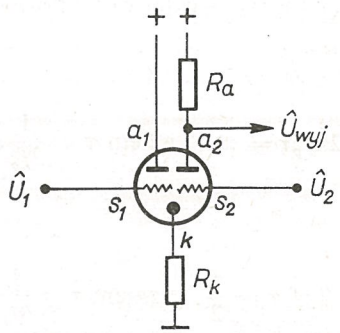
Zwykle przy projektowaniu zakłada się B_m i oblicza k

$$k = \frac{B_m - 1}{B_m + 1}. \tag{78}$$

Widzimy, iż k nie może wynosić 1, gdyż wtedy na wyjściu dla częstotliwości b. małych otrzymalibyśmy napięcie bliskie zeru, co prowadziłoby do poważnych zniekształceń sygnału wizyjnego.

Wielkość B_m zależy od spadku charakterystyki aperturowej lampy analizującej na częstotliwości granicznej oraz dopuszczalnego stopnia korekcji ze względu na wzmocnienie szumów. B_m zwykle wynosi od 3 do 5. Np. przy $B_m = 4$ $K = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

Obecnie podamy sposób obliczenia układu wzmacniacza różnicowego dla stałej charakterystyki korekcji.



Rys. 27. Układ wzmacniacza różnicowego dla stałej charakterystyki korekcji

Wzmocnienie sygnału od siatki s_1 do anody a_2 wynosi

$$K_1 = \frac{K_a}{1 + \frac{2\varrho_a}{R_a} + \frac{\varrho_a(\varrho_a + R_a)}{R_a R_k (K_a + 1)}}, \tag{79}$$

a od siatki s_2 do anody a_2

$$K_2 = \frac{K_a + \frac{K_a}{K_a + 1} \cdot \frac{\varrho_a}{R_k}}{1 + \frac{2\varrho_a}{R_a} + \frac{\varrho_a(\varrho_a + R_a)}{R_a R_k (K_a + 1)}}, \tag{80}$$

stąd

$$k = \frac{K_1}{K_2} = \frac{K_a}{K_a + \frac{K_a}{K_a + 1} \cdot \frac{\varrho_a}{R_k}} \cong \frac{S_a R_k}{1 + S_a R_k} \tag{81}$$

przy założeniu $\frac{K_a + 1}{\varrho_a} = S_a$, co jest słuszne dla lamp o dużym wsp. amplifikacji.

Na podstawie wyrażeń (78) i (81) otrzymuje zależność na R_k dla pożądanego B_m

$$R_k = \frac{B_m - 1}{2 S_a}. \tag{82}$$

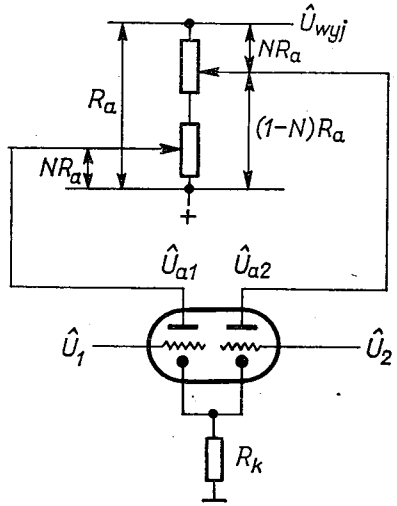
Podstawiając (82) do (80) otrzymujemy

$$K_2 = \frac{K_a R_a (B_m+1)}{(B_m+1)R_a + 2\varrho_a B_m} \cong \frac{K_a R_a (B_m+1)}{2\varrho_a B_m} = \frac{S_a R_a}{2} \cdot \frac{B_m+1}{B_m}, \tag{83}$$

gdyż $(B_m+1)R_a \ll 2\varrho_a B_m$.

Błąd, jaki popełniamy przyjmując uproszczenie $\frac{K_a+1}{\varrho_a} = S_a$, dochodzi max. do 4,3% przy $B_m = 10$ i $R_a = 500\,\Omega$.

W wielu przypadkach korzystny jest układ o regulowanej charakterystyce kompensacji. Ze wzoru (82) widać, iż w prosty sposób można zmienić B_m przez regulację R_k. Bliższa jednak analiza wykazuje, iż ten sposób regulacji zmieniałby również całkowicie wzmocnienie układu, co prowadziłoby do zniekształceń kontrastu. W przypadku stosowania



Rys. 28. Układ wzmacniacza różnicowego dla regulacji charakterystyki korekcji

regulacji przy pomocy R_k należałoby zastosować dodatkowy stopień o sprzężonej regulacji wzmocnienia. Wady tej nie posiada schemat podany na rys. 28. Zastosowano tu, jako wspólne obciążenie anodowe dla obu lamp wzmacniacza różnicowego, podwójny sprzężony potencjometr. Potencjometr ten połączono w ten sposób, że gdy napięcie anodowe $\hat{U}_{a1}$ lampy pierwszej maleje, to napięcie anodowe $\hat{U}_{a2}$ — rośnie. Jak widać z równań (79) i (80), wzmocnienia K_1 i K_2 rosną w przybliżeniu liniowo przy zmianie R_a (w założeniu $\Delta R_a \ll \varrho_a$). Wypadkowe napięcia wyjściowe U_{wyj} jest wynikiem superpozycji napięć $\hat{U}_{a1}$ i $\hat{U}_{a2}$.

$$\hat{U}_{a1} = U_0 K_2 N(k - \cos\beta l) e^{-j\beta l}, \tag{84}$$

$$\hat{U}_{a2} = -U_0 K_2 (1-N)(1 - k\cos\beta l) e^{-j\beta l}. \tag{85}$$

Napięcie wyjściowe $\hat{U}_{wyj}$ będzie sumą napięć $\hat{U}_{a1}$ i $\hat{U}_{a2}$.

$$\hat{U}_{wyj} = \hat{U}_{a1} + \hat{U}_{a2} = -U_0 K_2 \{1 - N(1+k) + [N(1+k) - k]\cos\beta l\} e^{-j\beta l}, \tag{86}$$

a wzmocnienie całkowite K

$$K = K_2\{1-N(1+k)+[N(1+k)-k]\cos\beta l\}e^{-j\beta l}. \tag{87}$$

Dla częstotliwości zerowej $\omega = 0$ ($\beta l = 0$), $\cos\beta l = 1$ i wyrażenie w nawiasach redukuje się do wielkości $(1-k)$, a więc niezależnej od N. Widać z tego, iż zmiana charakterystyki nie spowoduje zmiany wzmocnienia na niskich częstotliwościach.

Określimy teraz współczynnik korekcji analogicznie jak w (77)

$$B = \frac{K_{\omega\tau=\pi}}{K_{\omega\tau=0}} = \frac{1-N(1+k)-[N(1+k)-k]}{1-N(1+k)+[N(1+k)-k]} = \frac{1+k}{1-k}(1-2N). \tag{88}$$

Maksymalny współczynnik korekcji (B_{max}) uzyskamy dla $N = 0$

$$B_m = \frac{1+k}{1-k},$$

a zatem analogicznie jak w równaniu (77).

Stosunek współczynnika korekcji do maksymalnego współczynnika korekcji

$$\frac{B}{B_m} = 1-2N \tag{89}$$

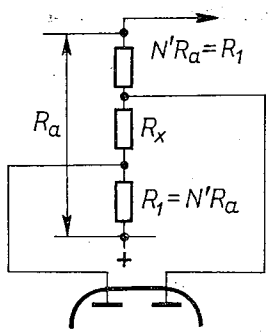
lub

$$N = \frac{1}{2}\left(1-\frac{B}{B_m}\right). \tag{90}$$

Dla maksymalnego współczynnika korekcji $B = B_m$ i $N = 0$. Natomiast dla uzyskania płaskiego przebiegu charakterystyki korekcji $B = 1$, zatem

$$N' = \frac{B_m-1}{2B_m}. \tag{91}$$

Układ osiągnie ten warunek już przed przeciwnym krańcowym położeniem potencjometrów. Przy dalszym wzroście N nastąpiłoby dodatkowe tłumienie na wyższych częstotliwościach, do czego nie powinno się dopuścić. W celu uniknięcia tego wtrąca się w gałąź oporu anodowego w szereg z potencjometrami pewien stały opór o wartości



Rys. 29. Skorygowany układ regulacji wzmacniacza różnicowego

$$R = R_a-2R_1 = \frac{R_a}{B_m}. \tag{92}$$

Oznaczenie wartości R_1 i R_2 wynika z rys. 29.

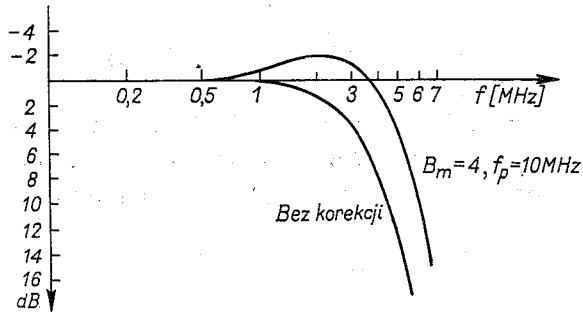
Względna zmiana wzmocnienia układu w zależności od N wyrazi się wzorem

$$\Delta k = \frac{1}{2}\left\{[B_m(1-2N)+1]-[B_m(1-2N)-1]\cos\pi\left(\frac{f}{f_p}\right)\right\} e^{-j\pi\left(\frac{f}{f_p}\right)}. \tag{93}$$

Wykres $k = k_{N=0} - \Delta k = f(N)_{\substack{f_p = \text{const} \\ B_m = \text{const}}}$ przedstawia sobą charakterystyki amplitudowe korektora zniekształceń aperturowych.

Jak już wspomniano, układy korektorów oparte na opisywanej metodzie posiadają charakterystyki amplitudowe o przebiegu cosinusoidalnym, podczas gdy charakterstyki aperturowe lamp analizujących posiadają przebieg wg krzywej dzwonowej. W celu uzyskania optymalnej korekcji należy dobrać do danej charakterystyki aperturowej odpowiedni przebieg charakterystyk korektora. Przy kształtowaniu charakterystyki korekcj możemy wpływać na nią dwoma parametrami — B_m i f_p. Dobierając odpowiednie wartości tych parametrów wyznaczymy już łatwo na podstawie podanych wzorów wszystkie elementy układu.

Podamy tutaj przykładowo przebieg charakterystyki aperturowej pewnego widikonu typu 6198 oraz przebieg charakterystyki amplitudowej toru kamery z korektorem o parametrach $B_m = 4$ i $f_p = 10$ MHz.



Rys. 30. Przykład charakterystyki korekcji apertury metodą linii długiej

Z wykresu na rys. 30 widać, iż układ korektora zapewnia płaski przebieg charakterystyk w granicach ± 2 dB do częstotliwości ok. 5 MHz, podczas gdy bez korektora tłumienie na tej częstotliwości wynosiłoby już ok. 10 dB. Oczywiście nie należy zapominać, iż każdy układ korekcji wprowadza również wzmocnienie szumów, których źródłem może być sama lampa analizująca, jak i stopnie wzmacniające przed korektorem. Im większą przyjmiemy częstotliwość maksymalnej korekcji f_p oraz większy współczynnik B_m, tym bardziej uwypuklone zostaną szumy.

Częstotliwość f_p wybiera się o wartości ok. 2 razy większej od górnej częstotliwości pasma użytecznego wizji, tj. dla naszego systemu ok. 10 MHz. Szumy leżące w zakresie częstotliwości powyżej pasma użytecznego wizji są tłumione w dalszych stopniach toru wizyjnego, którego pasmo jest ograniczone, a tego typu wybór f_p zapewnia dobre przybliżenia kształtów charakterystyk.

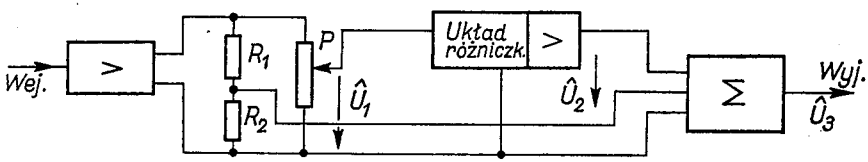
Korektor zniekształceń aperturowych nie może być wtrącany w tor w miejscu o niskim poziomie sygnału ze względu na gorszy stosunek sygnału do szumów własnych korektora.

W praktyce wystarczy jednak jeden lub dwa stopnie wzmocnienia między lampą analizującą a korektorem. Zapewnia to już dostatecznie mały wpływ szumów obwodu wejściowego i lamp samego korektora.

Podane tu rozważania wyjaśniają zagadnienia związane z zasadami metody oraz projektowania układów korekcyjnych.

6. UKŁADY PRAKTYCZNE OPARTE NA METODZIE RÓŻNICZKOWANIA

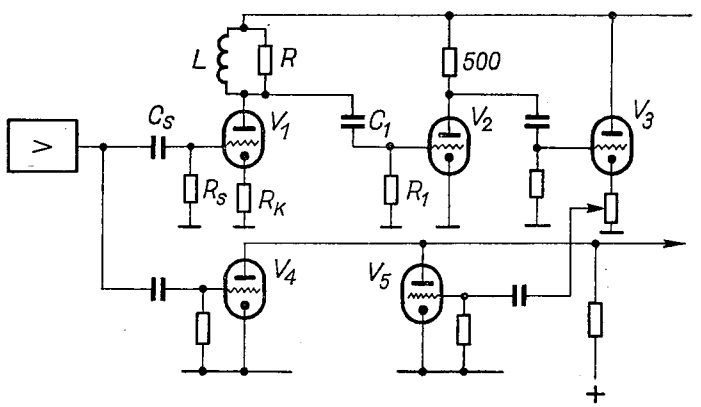
Układ blokowy każdego korektora opartego na wykorzystaniu obwodów różniczkujących przedstawia rys. 31. Stopień sterujący zasila stopień sumujący oraz układ różniczkowania wraz ze wzmacniaczem. Oporności R_1R_2 zapewniają właściwą proporcję sygnałów nieskorygowanego i korygującego, a potencjometr P umożliwia płynną regulację charakterystyki korekcji.



Rys. 31. Układ blokowy korektora opartego na metodzie różniczkowania

Jako układy różniczkujące stosowane bywają obwody z rysunków 13a-13d w różnych kombinacjach lub obwód z rys. 18.

Jak już wspomniano, w praktycznych układach nie stosuje się wyższych rzędów różniczkowania niż drugi. Nie stosuje się też często obwodów opóźniających, gdyż opóźnienia powodowane przez obwody różniczkujące nie są wielkie, co praktycznie niewiele pogarsza jakość obrazu.

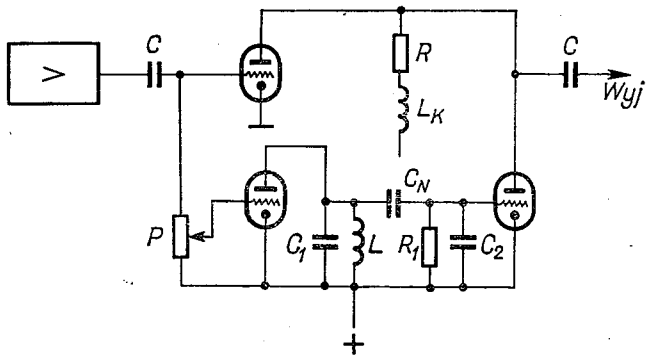


Rys. 32. Układ korektora z wykorzystaniem prostych obwodów różniczkujących

Układ korektora z wykorzystaniem prostych obwodów różniczkujących przedstawia rys. 32. Obwodami różniczkującymi są tu: obwód R_sC_s w siatce i obwód LR w anodzie lampy V_1. Lampa V_2 stanowi stopień odwracający fazę, a potencjometr P służy do regulacji charakterystyki. Lampy V_4 i V_5 są stopniem sumującym.

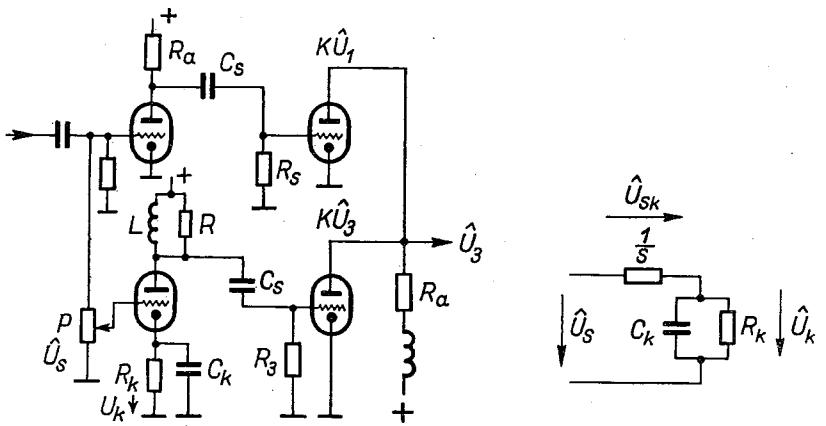
Inny układ z wykorzystaniem obwodu złożonego z rys. 18 pokazano na rys. 33. Tutaj obwód podwójnego różniczkowania stanowią elementy $C_1C_2C_NLR_1$.

Podobny w działaniu do obwodu różniczkującego RC jest układ oparty na wykorzystaniu ujemnego sprzężenia zwrotnego na oporze katodowym zablokowanym małą



Rys. 33. Układ korektora z obwodem z rys. 18

pojemnością, tzw. układ „peak-cathode". W układzie tym sprzężenie zwrotne zależy od częstotliwości, a zatem osiąga się skutek analogiczny do obwodu różniczkowania. Drugim obwodem różniczkującym może być obwód LR w anodzie lampy (rys. 34). Aby układ różniczkowania w katodzie nie wprowadzał dużych zniekształceń fazowych, należy odpowiednio dobrać elementy R_kC_k.



Rys. 34. Układ korektora z różniczkowaniem w obwodzie katody

Schemat zastępczy układu siatka-katoda przedstawiony jest także na rys. 34. Na podstawie tego schematu przeanalizujemy działanie układu i określimy kryteria doboru optymalnych wartości C_k i R_k.

Zależność $\hat{U}_{sk} = f(\omega)$ wyraża sobą charakterystykę amplitudowo-fazową stopnia.

$$\hat{U}_{sk} = \hat{U}_s \frac{\frac{1}{S}}{\frac{1}{S} + \frac{R_k \frac{1}{j\omega C_k}}{R_k + \frac{1}{j\omega C_k}}} = \hat{U}_s \frac{1+j\omega C_k R_k}{1+SR_k+j\omega C_k R_k}, \tag{94}$$

ostatecznie

$$\frac{\hat{U}_{sk}}{\hat{U}_s} = \frac{1+SR_k+\omega^2 C_k^2 R_k^2+j\omega C_k S R_k^2}{1+2SR_k+S^2R_k^2+\omega^2 R_k^2 C_k^2}.$$

Kąt fazowy wyraża się zależnością

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega C_k S R_k^2}{1+SR_k+\omega^2 C_k R_k^2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\frac{1+SR_k}{\omega C_k S R_k^2} + \frac{\omega C_k}{S}}, \tag{95}$$

gdzie S — nachylenie charakterystyki prądu anodowego lampy.

W założeniu $SR_k \gg 1$, co ma miejsce w praktyce, wyrażenie upraszcza się

$$\varphi \cong \operatorname{arctg} \frac{\omega C_k S R_k}{S+\omega^2 C_k^2 R_k^2}. \tag{95a}$$

Z wyrażenia (95) widać, iż przebieg kąta fazowego jest złożoną funckją ω i będzie posiadał maksimum dla pewnej częstotliwości. Wartość tej częstotliwości można określić z warunku

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{C_k S R_k^2(1+SR_k+\omega^2 C_k R_k^2) - 2\omega^2 C_k^2 S R_k^4}{(1+SR_k+\omega^2 C_k^2 R_k)^2 + \omega^2 C_k^2 S^2 R_k^4},$$

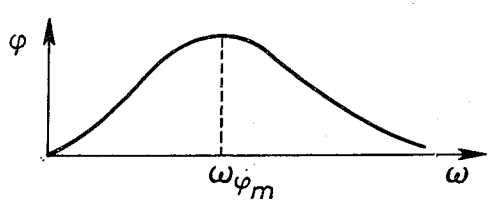
$$\frac{d\varphi}{d\omega} = 0, \quad \text{gdy } C_k S R_k^2(1+SR_k+\omega^2 C_k R_k^2) = 2\omega^2 C_k^2 S R_k^4, \tag{96}$$

stąd

$$C_k S R_k^2(1+SR_k) = \omega^2 C_k^2 S R_k^4,$$

$$\omega\varphi_m = \frac{\sqrt{1+SR_k}}{C_k R_k}. \tag{97}$$

Przebieg kąta fazowego w funkcji ω można wyrazić w wykresie podanym na rys. 35.



Rys. 35. Przebieg kąta fazowego w funkcji ω dla obwodu $R_k C_k$

Dla częstotliwości położonych w pobliżu ω_{max} wartość $\omega_{max} C_k R_k \gg 1$ i z wyrażenia (95a) można określić C_k

$$C_k < \frac{S \operatorname{tg}\varphi}{\omega_{max}} \tag{98}$$

przy założonym kącie fazowym φ. Z wykresu na rys. 35 widać, że kąt φ będzie zawsze mniejszy od φ_m (dla ω_{φ_m}).

Jak widać z równania (97) dla danej lampy (S), przy danym C_k i określonym $\omega_{\varphi_{max}}$ wyznaczamy R_k. Określenia $\omega_{\varphi_{max}}$ dokonuje się w sposób następujący. Jeśli stosunek napięcia wyjściowego korektora dla częstotliwości maksymalnych korekcji do napięcia przy małych częstotliwościach, czyli zgodnie z oznaczeniami rys. 31

$$\frac{\hat{U}_3}{\hat{U}_1} = \frac{\hat{U}_2+\hat{U}_1}{\hat{U}_1} = x$$

w założeniu $U_1 = f(\omega) = \text{const}$ (wzmocnienie stopnia sumującego przyjmujemy równe 1), wówczas

$$\hat{U}_2 = (x-1)\hat{U}_1. \tag{99}$$

Wielkość tego stosunku dla częstotliwości minimalnego kąta fazowego ω_{φ_m} określamy przez współczynnik $p = \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2}$.

$$\hat{U}_2 = \frac{\hat{U}_1}{p}. \tag{99a}$$

Wiemy, iż zgodnie z zasadą działania układu korekcji napięcie $\hat{U}_2$ jest proporcjonalne do kwadratu częstotliwości, a zatem wyrażenie (99) odpowiada $(\omega_{max})^2$, a wyrażenie (99a) — $(\omega_{\varphi_{max}})^2$. Biorąc stosunek tych wyrażeń otrzymamy zależność

$$\left(\frac{\omega_{max}}{\omega_{\varphi_m}}\right)^2 = p(x-1), \tag{100}$$

a stąd

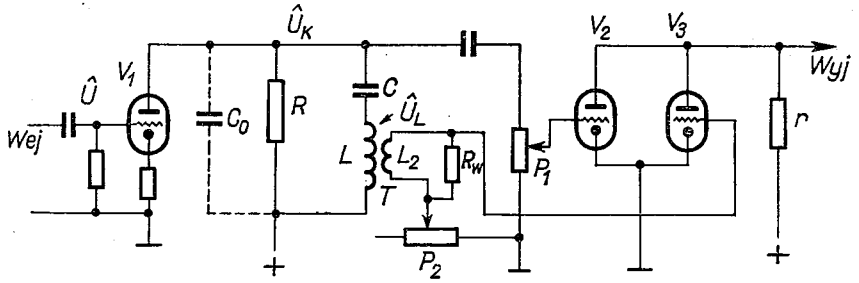
$$\omega_{\varphi_m} = \frac{\omega_{max}}{\sqrt{p(x-1)}}. \tag{100a}$$

Z wyrażenia tego dla założonej wartości x i p oraz znanej ω_{max} możemy określić ω_{φ_m}. W praktycznie spotykanych układach współczynnik p obiera się w granicach między 5—10. Określoną stąd wielkość podstawia się do (97), skąd wyznacza się R_k

$$R_k = \frac{S_k}{2\omega_{\varphi_m}^2 C_k^2}\left[1 \pm \sqrt{1+\frac{4\omega_{\varphi_m}^2 C_k}{S_k^2}}\right]. \tag{101}$$

Na marginesie przytoczonych rozważań należy dodać, iż układ ten bywa również stosowany jako układ korekcji przeciwszumowej w przedwzmacniaczach kamer telewizyjnych. Oczywiście jednym ze stopni przedwzmacniacza jest lampa z układem C_kR_k. Rola i przebieg charakterystyki amplitudowej takiego stopnia jest zupełnie inny i jedyną wspólną cechą z układami korekcji zniekształceń aperturowych jest wzrost wzmocnienia w funkcji częstotliwości.

Innym ciekawym układem korekcji zniekształceń aperturowych opartym na metodzie różniczkowania jest układ z transformatorem różniczkującym. Zasadniczy schemat układu przedstawia rysunek 36.



Rys. 36. Układ korektora z transformatorem różniczkującym

W obwodzie anodowym lampy V_1 znajduje się układ trzech równolegle połączonych gałęzi: C_0, R oraz obwodu LC. Impedancja obwodu anodowego lampy V_1 wynosi

$$\hat{Z} = R(1-\omega^2 LC)\hat{M}(\omega), \tag{102}$$

gdzie

$$\hat{M}(\omega) = \frac{1}{1-\omega^2 LC + j\omega R(C+C_0-\omega^2 LCC_0)}.$$

Napięcie na obwodzie $\hat{U}_k = -\hat{U} \cdot S_1 \cdot \hat{Z}$, gdzie $\hat{U}$ — napięcie wejściowe, S_1 — nachylenie charakterystyki prądu anodowego lampy V_1. Napięcie to podawane jest na siatkę lampy V_2 układu sumującego. Na siatkę V_3 zaś podawane jest napięcie zdejmowane z indukcyjności obwodu LC przy pomocy transformatora T. W obwodzie anodowym lamp V_2 i V_3 otrzymujemy sumę tych napięć. Wzajemną proporcję tych napięć, a więc ostateczny przebieg charakterystyki korekcji możemy regulować przy pomocy potencjometrów P_1 i P_2. Napięcie na pierwotnym uzwojeniu transformatora T wynosi

$$\hat{U}_L = \hat{U}_k \frac{j\omega L}{j\omega L - j\frac{1}{\omega C}} = -\hat{U}_k \frac{\omega^2 LC}{1-\omega^2 LC} = \hat{U} S_1 R\omega^2 LC \cdot \hat{M}(\omega). \tag{103}$$

Napięcie na wspólnej oporności anodowej lamp V_2 i V_3 wyniesie

$$\hat{U}_{wy} = \hat{U} S_1 R S_2 r\left[1+\omega^2 LC\left(n\frac{S_3}{S_2}-1\right)\right]\hat{M}(\omega), \tag{104}$$

gdzie:

S_2 i S_3 — nachylenia lamp V_2 i V_3,

n — przekładnia transformatora T.

Funkcja $\hat{M}(\omega)$ wyraża odchylenie kształtu charakterystyki korekcji od pożądanego, tzn. o przebiegu proporcjonalnym do częstotliwości jedynie w drugiej potędze, bez zniekształceń fazowych. Okazuje się jednak, iż przy odpowiednim doborze elementów układu wpływ tej funkcji jest praktycznie do pominięcia. I tak dla $C = 3\,C_0$, zaś $R = \sqrt{\frac{9}{8}\frac{L}{C}}$, moduł funkcji $\hat{M}(\omega)$, którą można też nazwać współczynnikiem zniekształceń liniowych, wyrazi się wzorem

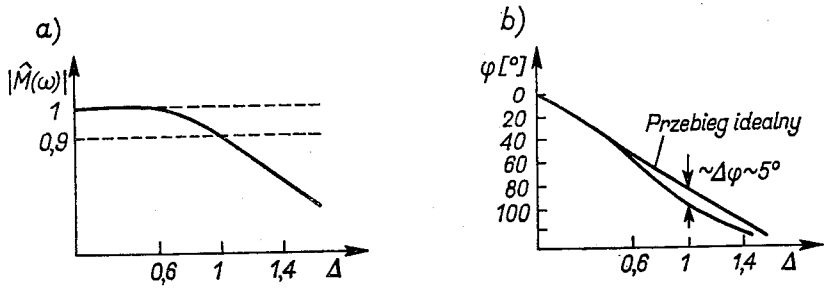
$$|\hat{M}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{8}\omega^6 L^3 C^3}} \tag{105}$$

a kąt fazowy

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega\sqrt{LC}}{\sqrt{8}} \frac{4-\omega^2 LC}{1-\omega^2 LC}. \tag{106}$$

Zależności te przedstawimy na wykresie (rys. 37) w funkcji

$$\Delta = \frac{\omega}{\omega_{rez}} = \omega\sqrt{LC}.$$



Rys. 37. Przebieg modułu (a) i kąta fazowego (b) funkcji $\hat{M}(\omega)$

Widać, iż dla częstotliwości rezonansowej obwodu, która jest położona zwykle już powyżej górnej częstotliwości granicznej korekcji, zniekształcenia amplitudowe nie przekraczają 9%, a fazowe — 5°.

W zakresie częstotliwości do $\omega_{rez} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ układ spełnia niemal idealnie warunki korekcji zniekształceń aperturowych.

Kształt charakterystyki korekcji opisany jest funkcją typu $\alpha = 1+a\Delta^2$ (104), gdzie a jest współczynnikiem korekcji; $a = n\frac{S_3}{S_2} - 1$. Przebieg charakterystyki korekcji zależny jest od wartości współczynnika a, który może przybierać wartości od -1 (przy $S = 0$) do wartości dodatnich, uzależnionych od n i S_2. Maksymalna wartość n ograniczona jest wielkością pojemności wejściowej lampy V_3 i praktycznie nie przekracza $n = 2$. Indukcyjność wtórnego uzwojenia wraz z pojemnością wejściową lampy V_3 stanowi obwód rezonansowy. W celu stłumienia szkodliwych oscylacji tego obwodu bocznikuje się wtórne uzwojenie opornością R. Wartość tej oporności można wyznaczyć z zależności

$$R_w = \sqrt{\frac{L_2}{2C_3}},$$

gdzie:
L_2 — indukcyjność uzw. wtórnego,
C_3 — poj. wejściowa obwodu siatki lampy V_3.

Wartość nachylenia S_2 można przyjąć dowolnie małą, jednak praktycznie wybiera się taką, aby wzmocnienie całego korektora dla niskich częstotliwości było równe jedności. Przy zastosowaniu lamp o $S = 10$ mA/V i obraniu $f_{gr} = 6$ MHz można osiągnąć w opisywanym układzie wielkości $a = 20$.

W praktycznym schemacie lampę V_2 steruje się z części oporu anodowego R, co jest równoznaczne ze zmniejszeniem S_2. Opisywany układ odznacza się dużą prostotą, stabilnością pracy i łatwością konstrukcji. Może być stosowany ogólnie tam, gdzie zależy na korekcji charakterystyki amplitudowej w górnym zakresie częstotliwości bez wprowadzania zniekształceń fazy.

W układach korektorów zniekształceń aperturowych spotyka się czasem również inne rozwiązania, oparte na wykorzystaniu obwodu rezonansowego. We wszystkich tych układach zgodnie z równaniem (103) otrzymamy zależność wzmocnienia od kwadratu częstotliwości, a więc warunek niezbędny przy korekcji zniekształceń aperturowych.

Na tym zakończymy krótki przegląd układów opartych na metodzie różniczkowania. Przytoczone tutaj rozważania dają zasadniczy obraz przyczyn i analizę różnego typu zniekształceń aperturowych.

W nieniejszej pracy starano się omówić w sposób możliwie jak najszerszy sens fizyczny i podstawowe zależności opisujące samo zjawisko zniekształceń aperturowych, a następnie podano zasadnicze sposoby ich korekcji w procesie telewizyjnego przekształcania obrazów.

7. CHARAKTERYSTYKI APERTUROWE LAMP ANALIZUJĄCYCH I SPOSOBY ICH ZDEJMOWANIA

Na zakończenie jeszcze kilka uwag dotyczących przebiegów charakterystyk aperturowych telewizyjnych lamp analizujących oraz sposobów ich zdejmowania.

Charakterystyki lamp tego samego typu mają zbliżony przebieg, aczkolwiek różnice między poszczególnymi egzemplarzami bywają dość duże. Każda telewizyjna lampa analizująca wykazuje spadek amplitudy sygnału w miarę wzrostu częstotliwości. Spadek ten jest tym większy, im gorsze są warunki ogniskowania strumienia analizującego oraz im mniejsza jest powierzchnia, na której dokonuje się analizy obrazu ładunków. Widać z tego, iż największe zniekształcenia apertury wnoszone będą przez widikony. Lampy typu superortikonu posiadają dwa źródła zniekształceń tego typu połączone kaskadowo. Jedno to układ przenoszenia obrazu elektronowego, a drugie — układ analizy. W takim przypadku, jak to już wyjaśniono wyżej, wypadkowe zniekształcenia będą zbliżone do zniekształceń źródła o gorszych właściwościach.

Teoretycznie można zawsze zbudować układ korekcyjny, który by likwidował w zupełności zniekształcenia tego typu w torze sygnału. Praktycznie okazuje się, iż jest to nieopłacalne. Lampy typu np. superortikon, powszechnie dziś stosowane w kamerach telewizyjnych, odznaczają się stosunkowo znacznymi szumami fluktuacyjnymi, których stosunek do sygnału pogarsza się ze wzrostem częstotliwości. Dlatego w starszych torach kamerowych z lampami tego typu w ogóle nie stosowało się korektorów apertury, a w niektórych stosuje się korekcję o małym współczynniku. Korektory o dużym współczynniku korekcji stosuje się natomiast w torach kamer widikonowych (pod warunkiem zastosowania wzmacniaczy kamerowych o małych szumach) i w torach telekin typu „flying spot", czy w urządzeniach zapisu obrazu TV. W torach tych dąży się do osiągnięcia idealnej korekcji zniekształceń aperturowych. Lampa analizująca typu widikon odznacza się bowiem stosunkiem sygnału do szumu rzędu 300:1 przy stosunku 20:1 lub nawet 10:1 dla superortikonu.

Charakterystyki aperturowe lamp analizujących zdejmuje się doświadczalnie, obserwując na oscyloskopie amplitudę i kształt sygnału obrazu pionowych pasów czarno-bia-

łych o różnych szerokościach. Użyty do tego celu oscyloskop powinien posiadać szerokość pasma przenoszonego o wartości co najmniej dwukrotnie większej od górnej częstotliwości granicznej kanału. Takie samo pasmo powinien przenosić tor kamerowy, w którym bada się lampę, przy czym charakterystyka amplitudowa toru i oscyloskopu powinna być w całym pasmie płaska. Wymaga to toru o właściwej korekcji przeciwszumowej. Obserwowany w tych warunkach sygnał na ekranie oscyloskopu będzie wyglądał tak jak na rys. 4. Amplituda jego zacznie maleć przy częstotliwości pasów, przy której szerokość pasa czarnego (lub białego) będzie równa średnicy plamki analizującej $\frac{\lambda}{\xi} - = 0{,}5$. Charakterystyki te można przedstawić w formie wykresu z rys. 5 lub rys. 6. W pierwszym przypadku będzie to charakterystyka amplitudowa dla sygnału prostokątnego i dla jej zdjęcia wystarczy obserwować wyłącznie amplitudę sygnału na oscylografie. W drugim wypadku będzie to charakterystyka amplitudowa dla równoważnego sygnału prostokątnego i w celu jej zdjęcia należy przeliczyć powierzchnię obserwowanego sygnału, a zatem określić wartość skuteczną.

Określenie częstotliwości odpowiadającej danej ilości pasów wynika z zależności:

$$f = \frac{4a}{\lambda_{pr}(T_h - T_g)} \tag{107}$$

(słusznej oczywiście dla danego standardu),
gdzie:

$2a$ — długość linii rastru,
λ_{pr} — długość fali sygnału pasów równa szerokości pasa czarnego i białego,
T_h — okres jednej linii wynoszący jak wiadomo 64 μsek,
T_g — czas poziomego wygaszania równy 12 μs.

Częstotliwość, przy której zaczyna maleć amplituda sygnału, wyraża się wzorem

$$f_g = \frac{2a}{\xi(T_h - T_g)} = \frac{M}{(T_h - T_g)}, \tag{108}$$

gdzie ξ — średnica plamki wybierającej.

Z tej ostatniej zależności można obliczyć ξ.

Mając określoną charakterystykę aperturową lampy możemy przystąpić do opracowania układu korektora wg jednej z omówionych metod. W praktyce zagadnienie można znacznie uprościć, gdyż zakładamy znany kształt przebiegu charakterystyki apertury. Badamy jedynie amplitudę sygnału odpowiadającego górnej częstotliwości granicznej kanału, na której chcemy osiągnąć maksymalne podniesienie charakterystyki korektora. Następnie określamy pożądany maksymalny współczynnik korekcji B_m, co już wystarcza do zaprojektowania korektora, gdyż kształt charakterystyki korekcji będzie odpowiadał zawsze kształtowi charakterystyki aperturowej.

LITERATURA CYTOWANA W TEKSCIE

1. O. P. Schade, Electronooptical Characteristics of TV Images, RCA Review, **1**, 4, 1948.
2. J. Dennison, Aperture Compensation for Television Cameras, RCA Review, March, 1953.
3. W. Dillenburger, Schaltunger zur Aperturblendenkorrektur in Fernsehaufnahmegeräten, Frequenz, Juni, 1955.

4. S. J. Bialik, Charaktieristika apierturnogo effiekta w telewidienii, Radiotiechnika, 3, 1957.
5. J. Valsa, O aperturovem skresleni, Slaboproudny Obzor, 7, 1960.
6. S. Braude, Korekcija apierturnych isskażeń pri pomoszczi diffierencijowojuszczich cepiej, Tiechnika Kino- i Tielewidienija, luty 1957.
7. S. Braude, A. Uszakow, Prieďwaritielnyj usilitiel tielewizjonnogo kinokanała, Tiechnika Kino- i Telewidienija, marzec 1967.
8. S. Braude, C. Makarow, Nowaja schjema diffierencijalnoj apierturnoj korekcji, Tiechnika Kino- i Telewidienija, lipiec 1961.
9. Mann, Fisher, Fernsehtechnik, Band II, Fachbuch Verlag, Leipzig 1959.
10. Fink, Television Engineering Handbook, Mc Graw-Hill Book, 1957.
11. A. M. Chałfin, Podstawy techniki telewizyjnej, Wyd. Komunikacji i Łączności, Warszawa 1957.
12. J. Chabłowski, Technika odbioru TV, PWT, Warszawa 1960.
13. J. Millman, H. Taub, Pulse and Digital Circuits, Mc Graw-Hill Book, 1956.
14. F. E. Terman, Radiotechnika, t. I, PWT, Warszawa 1952.

A. TCHORZEWSKI

APERTURE DISTORTIONS IN THE ANALYSIS OF TV IMAGE AND THE METHODS OF THEIR CORRECTIONS

Summary

In the article the nature of aperture distorions is explained. These distortions are present in every transformation of an optical image into electrical signals. They exist also in the image which is passed through optical devices only. The influence of these distortions on the output signal from the electronooptical transducer has been discussed.

The relations between the transient response of an electrical (output) signal and the step function of optical (input) signal have been established depending on the analysing aperture shape.

Considering the full analogy between the real aperture and the shape of spot of the electron beam in the television pick-up tubes, the equivalent network and its transfer function of the aperture distortions. has been established. This allowed to determine the rules for calculating the electrical correction circuits

Two methods of correction have been explained: one based on the differentiaiting circuits and the other on half-wave transmission line.

A. TCHORZEWSKI

LES DISTORSIONS D'OUVERTURE APPARAISSANT PENDANT L'ANALYSE DE L'IMAGE DANS LA TÉLÉVISION AINSI QUE LES MÉTHODES DE LEUR CORRECTION

Résumé

Dans cette étude on a expliqué les problèmes des distorsions specifiques, nommées les distorsions d'ouverture, liées à chaque transformation d'une image optique au signal électrique, ou bien à une autre image optique. On a donné les rélations entre les caractéristiques de transition d'une fonction analysé et les paramètres géometriques et physiques d'une ouverture d'analyse comme forme, dimensions, transparence et ct.

En cas des tubes de prise de vues de télévision on utilise les mêmes rélations mathématiques, en considérant le spot analyseur comme une ouverture réelle. On a prouvé les liaisons entre une fonction de transition et une fonction de transfert d'un dispositif de transformation d'un signal. Ceci permet d'introduire une conception d'un quadripôle équivalent des distorsions d'ouverture, qui conduit directement aux considérations permettant de calculer des circuits de correction électrique. Enfin, on a expliqué deux méthodes principales de correction des distorsions en question à l'aide des circuits de différentiation et de la ligne longue.

А. ТХОЖЕВСКИ

АПЕРТУРНЫЕ ИСКАЖЕНИЯ ПРИ АНАЛИЗЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ В ТЕЛЕВИДЕНИИ И МЕТОДЫ ИХ КОРРЕКЦИИ

Р е з ю м е

В работе приведено определение апертурных искажений. Обоснована аналогия геометрическими соотношениями анализирующего отверстия и геометрическими соотношениями и распределением плотности тока в телевизионных передающих трубках. Приведены зависимости между переходными характеристиками и функциями пропускания частот анализирующих схем для различных геометрических отношений анализирующего пучка.

Определено понятие „эквивалентного четырехполюсника" апертурного искажения и на базе этого обоснованы условия схем коррекции. Приведено отличие между переходными характеристиками для схем анализа изображения без накопления и с накоплением зарядов. Изложены идеальной коррекции апертурных искажений. Проведен глубокий анализ дифференцирующих схем и схем задержки с точки зрения их пригодности для схем коррекции.

Описан метод приближенной коррекции при помощи длинной линии.

В окончании приведен принцип разработки схемы коррекции апертурных искажений.

TREŚĆ

J. Srzednicki: Mostki RC przestrajane jednym elementem 359
Z. Korzec, J. Korzyński: Przesuwnik fazowy RC z tranzystorem polowym pracującym jako opornik o sterowanej rezystancji 387
M. Stybliński: Sprzężenia reaktancyjne w tranzystorowych wzmacniaczach wielkiej częstotliwości 395
J. Brożyna: Zagadnienia związane z projektowaniem wzmacniaczy grupowych o małym wzmocnieniu 423
J. Chirkowski: Aproksymacja charakterytyki amplitudowej liniowego układu elektrycznego zmodyfikowaną metodą charakterystyk logarytmicznych 435
W. Gruszczyński, E. Klugmann, H. Wierzba: Kalorymetryczna metoda pomiaru strat w miniaturowych rdzeniach ferrytowych 467
S. Budkowski: Optymalizacja układu logicznego negacji sumy metodą ślepego przeszukiwania przestrzeni zmiennych decyzyjnych 479
C. Syc: Generowanie drzew i multidrzew multigrafów metodą liczb strukturalnych binarnych za pomocą maszyn cyfrowych 495
A. Lizoń: Symulacja sygnału odbieranego w radarach dopplerowskich z sinusoidalną modulacją częstotliwości 515
A. Tchorzewski: Zniekształcenia aperturowe układów analizy obrazów telewizyjnych i metody ich korekcji 533

CONTENTS — TABLE DES MATIÈRES — INHALT

J. Srzednicki: Single-Control Element RC Bridges 359
Les ponts RC accordés par un seul élément 359
Mit einem Element abstimmbare RC-Brücken 359
Z. Korzec, J. Korzyński: The Phase Shift Bridge with a Field Effect Transistor as a Variable Resistor 387
Déphaseur RC avec un transistor à effet de champ opérant comme une résistance à résistivite commandé 387
M. Stybliński: Lossless Feedback in Transistor High Frequency Bandpass Amplifiers . . . 395
Les couplages de réactance dans les amplificateurs haute fréquence à transistors 395
J. Brożyna: Problems Related to Small-Gain Carrier Amplifiers Designing 423
Les problèmes liés avec le projet de l'amplificateur de groupe à amplification petite 423
J. Chirkowski: The Approximation of Magnitude-Frequency Characteristic of Linear Electric Network by Means of Modified Logarithmic Characteristics Method 435
L'approximation de la caractéristique amplitude-fréquence du schéma linéaire électrique d'après une méthode modifiée des caractéristiques logarithmiques 435
W. Gruszczyński, E. Klugmann, H. Wierzba: Calorimetric Method of Losses Measurement in Miniature Ferrite Cores 467
La méthode calorimétrique de mesure des pertes dans les noyaux de ferrite miniaturisés 467
S. Budkowski: Logic Circuit Optimalisation by Means of a Free Scanning of the Decision Variables Space 479
Optimalisation d'un circuit logique NOR 479

C. Syc: Computer-Aided Generating of Trees and k-Trees of Multigraphs Based on the Method of Structural Numbers 495
Génération des arbres et k-arbres des multigraphes à l'aide de la méthode des nombres structuraux 495
Digitalrechnerische Erzeugung der Bäume und k-Bäume mittels der Methode der Strukturalzahlen 495
A. Lizoń: Received Signal Simulation in Sinusoidally Frequency-Modulated Doppler Radars 515
La simulation du signal reçu dans le radar de Doppler à modulation sinusoïdale de fréquence 515
A. Tchorzewski: Aperture Distortions in the Analysis of TV Image and the Methods of their Corrections 533
Les distorsions d'ouverture apparaissant pendant l'analyse de l'image dans la télévision ainsi que les méthodes de leur correction 533

СОДЕРЖАНИЕ

Я. Сжедницки: Мостики RC перестраиваемые одним элементом 359
З. Кожец, Я. Кожиньски: Мостовый фазовращатель RC с полевым транзистором в качестве сопротивления регулированного напряжением 387
М. Стыблиньски: Реактивная связь в транзисторных усилителях высокой частоты 395
Е. Брожына: Вопросы проектирования групповых усилителей малого усиления . . 423
Е. Хирковски: Аппроксимация амплитудно-частотной характеристики линейной электрической цепи модифицированным методом логарифмических характеристик . . 435
В. Грущиньски, Е. Клюгман, Г. Вежба: Калориметрический метод измерения потерь в миниатюрных ферритовых сердечниках 467
С. Будковски: Оптимизация логической схемы „или-не" методом слепого поиска в пространстве переменных решения 479
Ч. Сыц: Генерирование деревьев и *к*-деревьев мультиграфов методом бинарных структурных чисел с помощью электронных вычислительных машин 495
А. Лизонь: Имитация приемного сигнала в допплеровских радиолокаторах с синусоидальной частотной модуляцией 515
А. Тхожевски: Апертурные искажения при анализе изображения в телевидении и методы их коррекции 533

INSTYTUT TECHNOLOGII ELEKTRONOWEJ
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XV · ZESZYT 4

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1969

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor Naczelny
PROF. WITOLD NOWICKI

Sekretarz
JULIUSZ MIERZEJEWSKI

ADRES REDAKCJI

Warszawa, Politechnika, Plac Jedności Robotniczej 1
Katedra Teletransmisji Przewodowej, Gmach Elektroniki,
pokój 483, tel. 21-007 w. 794

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
Warszawa, Miodowa 10

Nakład 700 (572+128)	Oddano do składania 2. VIII. 1969 r.
Ark. wyd. 14,25 ark. druk. 11,0	Podpisano do druku w grudniu 1969
Papier druk. sat. kl. III, 80 g, 70×100	Druk ukończono w grudniu 1969
Zamówienie nr 1459/69	Cena zł 40.— P-95

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 15, 4, ss. 587 — 624
INSTYTUT TECHNOLOGII ELEKTRONOWEJ PAN, WARSZAWA 1969

621.317.08

Matematyczne podstawy metody linearyzacji harmonicznych

JACEK KUDREWICZ (WARSZAWA)
Instytut Automatyki Polskiej Akademii Nauk

Otrzymano 31.1.1969

Treścią pracy są twierdzenia o istnieniu okresowych rozwiązań w układach, do badania których stosuje się zwykle przybliżoną metodę linearyzacji harmonicznych (metodę funkcji opisującej). W pracy zakłada się znajomość przybliżonego rozwiązania uzyskanego tą metodą i formułuje się założenia, przy których dokładne rozwiązanie mieści się w zadanym z góry otoczeniu przybliżonego rozwiązania. Praca składa się z następujących rozdziałów:

1. Wstęp
2. Dwa twierdzenia o istnieniu ciągłych rozwiązań
3. Twierdzenia porównawcze dla równań w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych
4. Układ nieautonomiczny z nieliniowością typu $f(x)$
5. Drgania subharmoniczne
6. Prostownik jednokierunkowy
7. Układ autonomiczny z nieliniowością typu $f(x, \dot{x})$
8. Układ z przełącznikiem

Dodatek: Rotacja pól wektorowych.

Wstęp jest poświęcony postawieniu zagadnienia. W rozdz. 3 formułuje się pewne specjalne twierdzenia o istnieniu rozwiązań równań operatorowych, oparte o zasadę odwzorowań przybliżających i o twierdzenie Rouchégo (przytoczone w rozdz. 2) — przeprowadza się dowód tych twierdzeń. Dalsza część pracy ma za cel pokazanie, że abstrakcyjna teoria przedstawiona w rozdz. 3 może być bezpośrednio wykorzystana do efektywnego badania drgań okresowych w różnych typach układów fizycznych.

1. WSTĘP

Metoda linearyzacji harmonicznych jest jedną z najczęściej stosowanych metod poszukiwania drgań okresowych w nieliniowych układach dynamicznych. Istotę metody najłatwiej pokazać na przykładzie prostego układu ze sprzężeniem zwrotnym (rys. 1) opisanego równaniem $x = Fx$, gdzie operacja F charakteryzująca otwarty układ przekształca funkcje okresowe w funkcje okresowe o tym samym okresie.

1.1. Zakładamy, że drgania w układzie zamkniętym są bliskie drganiom sinusoidalnym:

$$x^*(t) = 2|a|\cos(\Omega t + \arg a) \tag{1.1}$$

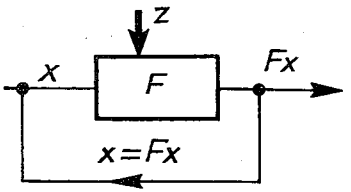
i że operacja F przekształca funkcję $x^*(t)$ w funkcję, której amplituda pierwszej harmonicznej jest duża w porównaniu z amplitudami wszystkich pozostałych harmonicznych.

Pomijając te ostatnie, otrzymamy przybliżoną równość[1]):

$$[Fx^*](t) = 2|A(\Omega, a)| \cdot \cos[\Omega t + \arg A(\Omega, a)], \tag{1.2}$$

gdzie $A(\Omega, a)$, może być bezpośrednio obliczone z równań opisujących układ F. Wobec tego w układzie ze sprzężeniem zwrotnym zachodzi przybliżona równość:

$$a = A(\Omega, a). \tag{1.3}$$



Rys. 1. Układ opisany równaniem $x = Fx$

Można rozróżnić dwa zasadnicze przypadki:

1) Operacja F, opisująca otwarty układ nieliniowy, zależy od zewnętrznego pobudzenia $z(t)$ będącego funkcją okresową o okresie $2\pi/\Omega$. Poszukujemy wówczas rozwiązania o tym samym okresie, liczba Ω jest znana, a z równania (1.3) wyznaczamy amplitudę $2|a|$ i fazę $\arg a$ przybliżonego rozwiązania.

2) Operacja opisująca układ nieliniowy jest operacją stacjonarną, to znaczy spełniającą tożsamość:

$$[Fx(\tau)](t) \equiv [Fx(\tau + t_0)](t - t_0) \quad \text{dla każdego} \quad t, t_0 \in (-\infty, \infty).$$

Wówczas okres ewentualnych drgań powstałych w układzie zamkniętym nie jest znany. Wiadomo natomiast, że jeżeli funkcja $x(t)$ jest rozwiązaniem równania opisującego układ zamknięty, to dla dowolnego t_0 funkcja $x(t+t_0)$ jest również rozwiązaniem tego równania. Można zatem w dowolny sposób ustalić fazę pierwszej harmonicznej, np. $\arg a = 0$, a z równania (1.3) wyznaczyć amplitudę $2|a|$ i częstotliwość Ω.

W obu przypadkach równanie (1.3) jest równaniem nieliniowym w dwuwymiarowej rzeczywistej przestrzeni. Rozwiązywanie równania (1.3) i dyskutowanie zależności rozwiązań od parametrów układu nie przedstawia na ogół dużych trudności i dlatego opisana powyżej metoda bywa często stosowana do badania rozmaitych układów fizycznych. Poświęcono jej nawet oddzielną monografię [1].

1.2. Bezpośrednim i naturalnym uogólnieniem przedstawionej powyżej metody jest metoda polegająca na poszukiwaniu przybliżonych rozwiązań w postaci:

$$x^*(t) = a_0 + 2|a_1|\cos(\Omega t + \arg a_1) + \ldots + 2|a_k|\cos(k\Omega t + \arg a_k). \tag{1.4}$$

Jeśli pominiemy wszystkie pozostałe harmoniczne, to zamiast równania (1.3) otrzymamy układ równań:

$$a_p = A_p(\Omega; a_0, a_1, \ldots, a_k), \quad p = 0, 1, 2, \ldots, k, \tag{1.5}$$

w $(2k+1)$-wymiarowej przestrzeni rzeczywistej. Funkcja rzeczywista A_0 i funkcje zespolone $A_1, A_2, \ldots, A_k$ są kolejnymi współczynnikami Fouriera funkcji $[Fx^*](t)$, zależnymi od współczynników $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k$ i od częstotliwości Ω.

[1]) Przez $y = Fx$ oznaczamy wynik operacji F działającej na funkcję x, a przez $[Fx](t)$ lub $[Fx(\tau)](t)$ wartość w chwili t funkcji y będącej wynikiem działania operacji F na funkcję x.

1.3. Zarówno równanie (1.3), jak i równanie (1.5) stanowią pewne przybliżenie dokładnego równania $x(t) = [Fx(\tau)](t)$ opisującego układ w nieskończenie wymiarowej przestrzeni. Powstają one przez „zrzutowanie" równania $x = Fx$ na skończenie wymiarową podprzestrzeń. Zasadniczym problemem, omawianym w tej pracy, jest ustalenie zależności pomiędzy dokładnym rozwiązaniem $x(t)$ równania $x = Fx$ opisującego układ zamknięty i przybliżonym rozwiązaniem uzyskanym metodą linearyzacji harmonicznych. Zależność tę przedstawiono w postaci twierdzeń o istnieniu okresowych rozwiązań równania $x(t) = [Fx(\tau)](t)$ w określonym otoczeniu przybliżonego rozwiązania $x^*(t)$ uzyskanego z równań (1.3) lub (1.5). W rozdz. 3 udowodnione zostały ogólne twierdzenia porównawcze, które następnie wyspecjalizowano w rozdziałach 4÷8 do badania drgań okresowych w różnych typach układów fizycznych. W rozdz. 2 przytoczono bez dowodów dwa podstawowe twierdzenia, na których opiera się cała teoria. W dodatku podano kilka pojęć i twierdzeń topologii algebraicznej, które są niezbędne dla dowodu twierdzenia 2.

1.4. Omawiany w tej pracy problem był już wielokrotnie poruszany w literaturze technicznej. W 1960 r. R. W. Bass przedstawił na pierwszym Kongresie IFAC pracę [2], w której dla uzasadnienia metody linearyzacji harmonicznych stosował metody topologiczne. Otrzymane przez niego rezultaty są jednak mało efektywne głównie ze względu na to, że zostały sformułowane dla wektorowego równania różniczkowego $\ddot{x} = \Phi(x, \dot{x})$ przy stosunkowo silnym założeniu symetrii funkcji $\Phi: \Phi(x, y) = -\Phi(-x, -y)$.

Podobny problem był rozpatrywany przez E. N. Rozenwassera [3] przy wykorzystaniu formalizmu równań całkowych. Oszacowanie błędu metody linearyzacji harmonicznych przeprowadzono tam przy założeniu istnienia okresowych rozwiązań, pomimo że istnienie to nie jest bezpośrednio oczywiste.

Na wymienienie zasługuje również praca I. W. Sandberga [4], w której istnienie okresowego rozwiązania, bliskiego przybliżonemu rozwiązaniu, dowodzi się przy pomocy zasady odwzorowań zwężających (przy silnych założeniach).

Inne, ze znanych autorowi, próby uzasadnienia metody linearyzacji harmonicznych, np. podana przez E. P. Popowa i I. P. Paltowa w [1], są mało przekonywające, ponieważ nie prowadzą do twierdzeń o istnieniu rozwiązań okresowych ani do efektywnej oceny błędu metody, aczkolwiek stanowią bardzo interesujące porównanie z innymi przybliżonymi metodami badania układów nieliniowych.

Przedstawiona praca jest luźno związana z pracami [2], [3], [4] i stanowi kontynuację idei występującej już w [5] i w [6] rozdz. IV. Względnie efektywne rezultaty przedstawione tu w twierdzeniach 6—11 udało się uzyskać przede wszystkim dzięki wykorzystaniu twierdzenia Rouché [7] § 5.

2. DWA TWIERDZENIA O ISTNIENIU CIĄGŁYCH ROZWIĄZAŃ

Matematyczne uzasadnienie metody linearyzacji harmonicznych można przeprowadzić w oparciu o przedstawione poniżej twierdzenia o istnieniu rozwiązań. Pierwsze z nich jest pewnym uzupełnieniem zasady odwzorowań zbliżających [9], a drugie jest wnioskiem z topologicznej zasady rotacji ciągłych pól wektorowych [7].

2.1. Niech X i V będą dwoma przestrzeniami metrycznymi. Rozpatrzmy operację $F(x, v)$ określoną na iloczynie kartezjańskim $X \times V$ przestrzeni X i V i przyjmującą wartości

w przestrzeni X. Mówimy, że operacja F jest jednostajnie (względem $v \in V$) zwężająca (lub zbliżająca) w przestrzeni X, jeżeli istnieje stała $\alpha < 1$ taka, że dla wszystkich $x_1, x_2 \in X$ i $v \in V$ zachodzi nierówność:

$$\varrho_x\big(F(x_1, v), F(x_2, v)\big) \leqslant \alpha \varrho_x(x_1, x_2). \tag{2.1}$$

Jeżeli przy ustalonym $(x, v) \in X \times V$ z warunku $\varrho_v(v_n, v) \to 0$ wynika, że

$$\varrho_x\big(F(x, v_n), F(x, v)\big) \to 0, \tag{2.2}$$

to operacja F jest ciągła względem drugiej zmiennej w punkcie $(x, v) \in X \times V$. Operację $F(x, v)$ nazywamy ciągłą względem v w przestrzeni $X \times V$, jeżeli jest ciągła względem v w każdym punkcie $(x, v) \in X \times V$.

Twierdzenie 1. (Banach). Rozpatrzmy w zupełnej przestrzeni metrycznej X równanie

$$x = F(x, v) \tag{2.3}$$

zależne od parametru v należącego do przestrzeni metrycznej V. Jeżeli operacja F jest jednostajnie względem $v \in V$ zwężającą w przestrzeni X, to dla każdego $v \in V$ istnieje w X dokładnie jedno rozwiązanie

$$x = R(v), \quad v \in V \tag{2.4}$$

równania (2.3). Operacja R jest zatem określona na całej przestrzeni V i przyjmuje wartości w X.

Jeżeli ponadto operacja $F(x, v)$ jest ciągła względem v w punkcie $\big(R(v_0), v_0\big) \in X \times V$, to operacja R jest ciągła w punkcie $v_0 \in V$.

Jeżeli operacja $F(x, v)$ jest ciągła względem v w przestrzeni $X \times V$, to operacja R jest ciągła w całej przestrzeni V.

Jeżeli operacja $F(x, v)$ spełnia jednostajny warunek Lipschitza: $\varrho_x\big(F(x, v_1), F(x, v_2)\big) \leqslant \beta \varrho_v(v_1, v_2)$ dla wszystkich $x \in X, v_1, v_2 \in V$, to operacja R spełnia również warunek Lipschitza:

$$\varrho_x(Rv_1, Rv_2) \leqslant \frac{\beta}{1-\alpha} \varrho_v(v_1, v_2) \quad \text{dla wszystkich } v_1, v_2 \in V. \tag{2.5}$$

Istnienie rozwiązania równania (2.3) wynika z zasady odwzorowań zbliżających, a ciągłość rozwiązania można wyprowadzić z nierówności:

$$\begin{aligned} \varrho(Rv, Rv_0) &= \varrho\big(F(Rv, v), F(Rv_0, v_0)\big) \leqslant \\ &\leqslant \varrho\big(F(Rv, v), F(Rv_0, v)\big) + \varrho\big(F(x_0, v), F(x_0, v_0)\big) \leqslant \\ &\leqslant \alpha \varrho(Rv, Rv_0) + \varrho\big(F(x_0, v), F(x_0, v_0)\big), \quad \text{gdzie } x_0 = R(v_0). \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy nierówność:

$$\varrho(Rv, Rv_0) \leqslant \frac{1}{1-\alpha} \varrho\big(F(x_0, v), F(x_0, v_0)\big), \tag{2.6}$$

z której wynika ciągłość operacji R i warunek Lipschitza (2.5).

2.2. Zajmiemy się teraz sformułowaniem drugiego twierdzenia o istnieniu rozwiązania równania w skończenie wymiarowej rzeczywistej przestrzeni E^n.

Niech D będzie pewnym ograniczonym obszarem w skończenie wymiarowej przestrzeni E^n. Oznaczmy przez $L = \overline{D}/D$ brzeg tego obszaru.

Symbolem $||v||$ będziemy oznaczać długość wektora $v \in E^n$, przy czym przez długość wektora będziemy rozumieli liczbę spełniającą aksjomaty:

1) $||v|| > 0$ dla $v \neq \theta$ i $||\theta|| = 0$.

2) $||v_1+v_2|| \leqslant ||v_1||+||v_2||$.

3) $||\lambda v|| \leqslant \lambda||v||$ dla $\lambda > 0$.

Niech $\Phi(v)$ będzie ciągłą funkcją wektorową (przekształceniem) określoną w otoczeniu punktu $v_0 \in E^n$ i przyjmującą wartości w przestrzeni E^n. Punkt $v_0 \in E^n$ nazywamy punktem regularnym przekształcenia Φ, jeżeli funkcja Φ odwzorowuje wzajemnie jednoznacznie pewne otoczenie punktu v_0 w otoczeniu punktu $\Phi(v_0)$. Dostatecznym (ale nie koniecznym) warunkiem lokalnej wzajemnej jednoznaczności przekształcenia jest istnienie w otoczeniu punktu v ciągłej pochodnej $\Phi'(v)$ i nieznikanie jakobianu: $\det [\Phi'(v_0)] \neq 0$.

T w i e r d z e n i e 2. (Rouché). Niech $\Phi(v)$ i $\varphi(v)$ będą ciągłymi funkcjami wektorowymi określonymi na $\overline{D}$ i przyjmującymi wartości w przestrzeni E^n. Załóżmy, że $v^* \in D$ jest jedynym rozwiązaniem równania $\Phi(v) = 0$ w domknięciu $\overline{D}$ obszaru D i że v^* jest punktem regularnym przekształcenia Φ.

Jeżeli dla wszystkich punktów $v \in L$ zachodzi nierówność $||\varphi(v)|| < ||\Phi(v)||$, to równanie:

$$\Phi(v)+\varphi(v) = 0 \tag{2.7}$$

ma w obszarze D co najmniej jedno rozwiązanie.

Powyższe twierdzenie określa warunki, przy których mała deformacja równania powoduje małe zmiany rozwiązania. Jeżeli na przykład obszar D będzie kulą $||v-v^*|| < r$, to liczba r określa odchylenie rozwiązania v równania (2.7) od punktu v^*, dla którego $\Phi(v^*) = 0$. Dowód twierdzenia przeprowadza się metodami topologii algebraicznej. W dodatku podano szkic teorii, z której wynika twierdzenie 2.

3. TWIERDZENIE PORÓWNAWCZE DLA RÓWNAŃ W PRZESTRZENI NIESKOŃCZENIE-WYMIAROWEJ

3.1. Rozpatrzmy układ równań:

$$\Phi(v, w) = 0, \tag{3.1}$$

$$w = F(v, w), \tag{3.2}$$

gdzie operacje Φ i F są określone dla v należących do domkniętego obszaru $\overline{D}$ n-wymiarowej przestrzeni i dla w należących do zupełnej przestrzeni metrycznej W. Wartości operacji F należą do przestrzeni W, a wartości operacji Φ należą do n-wymiarowej przestrzeni E^n.

W przestrzeni E^n można wprowadzić (na wiele sposobów) pojęcie długości wektora φ, którą będziemy oznaczać symbolem $||\varphi||$. Zakładamy, że długość wektora spełnia aksjomaty przedstawione w rozdz. 2.2.

Niech θ będzie ustalonym elementem przestrzeni W. Załóżmy, że $v^* \in D$ jest jedynym rozwiązaniem równania:

$$\Phi(v, \theta) = 0 \quad (\text{gdzie } v \in \overline{D},\ \Phi(v, \theta) \in E^n) \tag{3.3}$$

w domkniętym obszarze $\overline{D}$ i że v^* jest punktem regularnym przekształcenia $\Phi(v, \theta)$.

T w i e r d z e n i e 3. Załóżmy, że operacja F jest jednostajnie ze względu na $v \in \overline{D}$ zwężająca w przestrzeni W i ciągła względem v (w całym zbiorze $\overline{D}$) przy każdym ustalonym $w \in W$.

Jeżeli operacja $\Phi(v, w)$ jest ciągła względem obu zmiennych dla $v \in \overline{D}$, $w \in W$ i jeżeli zachodzi nierówność:

$$\sup_{v \in \overline{D},\, w \in W} ||\Phi(v, w) - \Phi(v, \theta)|| < \min_{v \in L} ||\Phi(v, \theta)||, \tag{3.4}$$

gdzie $L = \overline{D}/D$ jest brzegiem obszaru D, to istnieje co najmniej jedna para $(v^0, w^0) \in D \times W$ spełniających układ równań (3.1—3.2)[1]).

D o w ó d. Pierwsze z założeń gwarantuje, że dla dowolnego ustalonego $v \in \overline{D}$ istnieje w przestrzeni W dokładnie jedno rozwiązanie $w = w(v)$ równania (3.2) zależne w sposób ciągły od wektora v. Podstawiając je do równania (3.1) otrzymamy równanie

$$\Phi(v, \theta) + [\Phi(v, w(v)) - \Phi(v, \theta)] = 0$$

w skończenie-wymiarowej przestrzeni E^n. Wobec nierówności (3.4) funkcja wektorowa $\varphi(v) = \Phi(v, w(v)) - \Phi(v, \theta)$ spełnia założenia twierdzenia 2 i w obszarze D istnieje co najmniej jedno rozwiązanie v^0 równania $\Phi(v, w(v)) = 0$. Para $(v^0, w(v^0)) \in D \times W$ spełnia wówczas układ równań (3.1—3.2), c.n.d.

3.2. Przedstawione powyżej twierdzenie określa warunki, przy których z istnienia rozwiązania v^* równania (3.3) w skończenie wymiarowej przestrzeni E^n można wnioskować o istnieniu rozwiązania układu (3.1—3.2) w nieskończenie-wymiarowej przestrzeni. W zastosowaniach twierdzenia 3 zbiory W i $\overline{D}$ są zwykle kulami w przestrzeniach Banacha, a θ jest elementem zerowym. Wówczas parę (v^*, θ), gdzie v^* spełnia równanie (3.3), nazywamy przybliżonym rozwiązaniem układu równań (3.1—3.2), a promienie kul W i $\overline{D}$ określają, w jakim otoczeniu przybliżonego rozwiązania znajduje się dokładne rozwiązanie układu (3.1—3.2).

3.3 Wyspecjalizujemy teraz twierdzenie 3 dla równań o postaci:

$$x = AGx + z, \tag{3.5}$$

gdzie A jest operacją liniową o pewnych specjalnych własnościach, a G operacją nieliniową.

Oznaczmy przez X i Y dwie przestrzenie Banacha, a przez $P(X) = P(Y)$ pewną skończenie-wymiarową podprzestrzeń obu przestrzeni X i Y. Niech A będzie operacją liniową przekształcającą przestrzeń Y w przestrzeń X i przemienną z operacją P rzutowania na podprzestrzeń $P(X)$.

Załóżmy, że istnieje operacja liniowa Γ odwrotna względem operacji $PAP = PA = AP$ rozpatrywanej jako przekształcenie przestrzeni $P(X)$ w siebie.

---

[1]) Warunek (3.4) można osłabić zastępując lewą stronę (3.4) przez $\sup_{v \in \overline{D}} ||\Phi(v, w(v)) - \Phi(v, \theta)||$, gdzie $w(v)$ jest rozwiązaniem równania (3.2) w przestrzeni W.

Jeżeli na przykład $X = m$, $Y = l$, a $P(X) = P(Y)$ jest przestrzenią jednowymiarową: $P\{x_1, x_2, x_3, \ldots\} = x_1$[1]) to przykładem operacji A o opisanych powyżej własnościach jest macierz:

$$A = \begin{bmatrix} a, 0, 0, 0, \ldots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ a_{ij} \\ i, j = 2, 3, 4, \ldots \end{matrix}, \quad \text{gdzie} \quad a \neq 0 \quad \text{i} \quad \sup|a_{ij}| < \infty; \quad i, j = 2, 3, 4 \ldots$$

Wówczas PAP jest operacją mnożenia przez liczbę a w jednowymiarowej przestrzeni, a Γ jest operacją mnożenia przez $1/a$.

Równanie (3.5) będzie miało sens wtedy, gdy dziedzina operacji nieliniowej G leży w przestrzeni X, a przeciwdziedzina leży w Y oraz gdy $z \in X$.

Załóżmy, że $z \in P(X) \subset X$. Jeżeli wektor $v^* \in P(X)$ spełnia równanie:

$$v = PAGv + z \tag{3.6}$$

w skończenie-wymiarowej przestrzeni $P(X)$, to nazwiemy go przybliżonym rozwiązaniem równania (3.5). Równanie (3.6) otrzymuje się przez „zrzutowanie" równania (3.5) na podprzestrzeni $P(X)$. Wobec założeń dotyczących operacji A równanie (3.6) jest równoważne równaniu:

$$\Phi(v) = 0, \quad \text{gdzie} \quad \Phi(v) = \Gamma(v - z) - PGv \tag{3.7}$$

w skończenie-wymiarowej przestrzeni $P(X)$.

Załóżmy dalej, że operacja G spełnia w kuli $||x - v^*||_X \leqslant \varrho$ przestrzeni X warunek Lipschitza:

$$||Gx_1 - Gx_2||_Y \leqslant q(\varrho)||x_1 - x_2||_X. \tag{3.8}$$

Twierdzenie 4. Niech r i h będą danymi liczbami dodatnimi. Załóżmy, że v^* (dla którego $\Phi(v^*) = 0$) jest regularnym punktem przekształcenia Φ i

$$||\Phi(v)|| > 0 \quad \text{dla} \quad 0 < ||v - v^*|| \leqslant r. \tag{3.9}$$

Jeżeli zachodzi nierówność:

$$||(I-P)A||_{Y \to X} < \min\left\{\frac{h}{M(r,h)}, \frac{1}{q(r+h)}, \frac{\min\limits_{||v-v^*||=r} ||\Phi(v)||}{q(r+h) \cdot M(r,h)}\right\}, \tag{3.10}$$

gdzie $M(r, h) = \max\limits_{||Px|| \leqslant r,\, ||(I-P)x|| \leqslant h} ||G(v^* + Px + (I-P)x)||$,

to istnieje w przestrzeni X rozwiązanie x^0 równania (3.5) i

$$||Px^0 - v^*|| < r, \quad ||(I-P)x^0|| \leqslant h. \tag{3.11}$$

Dowód. Oznaczmy: $I - P = Q$, $Px = v$, $Qx = w$ i przepiszmy równanie (3.5) w postaci układu równań:

$$v = PAG(v + w) + z, \tag{3.12}$$

$$w = QAG(v + w). \tag{3.13}$$

[1]) to znaczy, że: $||x||_Y = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|$, $||x||_X = \sup\limits_i ||x_i||$ i $||Px||_X = ||Px||_Y = |x_1|$.

Z założeń dotyczących operacji PA wynika, że równanie (3.12) można przepisać w postaci:

$$\Phi(v, w) = 0, \quad \text{gdzie} \quad \Phi(v, w) \triangleq \Gamma(v-z) - PG(v+w). \tag{3.14}$$

Do równań (3.14—3.13) zastosujemy twierdzenie 3 przyjmując, że $\overline{D}$ jest kulą $||v-v^*|| \leqslant r$ przestrzeni $P(X)$, a W jest kulą $||w||_X \leqslant h$ przestrzeni Banacha $Q(X)$.

Musimy pokazać, że operacja $F(v, w) \triangleq QAG(v+w)$ odwzorowuje $\overline{D} \times W$ w przestrzeń W i jest jednostajnie zbliżająca. Istotnie:

$$||F(v, w)||_X \leqslant ||QA||_{Y \to X} \max_{||v-v^*|| \leqslant r,\ ||w|| \leqslant h} ||G(v+w)||_Y = ||QA|| \cdot M(r, h)$$

i z nierówności (3.10) wynika, że $||F(v, w)||_X \leqslant h$ dla dowolnych (v, w) spełniających warunki $||v-v^*|| \leqslant r$, $||w|| \leqslant h$. Z (3.10) wynika ponadto, że $||QA|| \cdot q(r+h) < 1$ i wobec tego operacja F spełnia warunek Lipschitza:

$$||F(v_1, w_1) - F(v_2, w_2)||_X \leqslant ||QA|| \cdot q(r+h)(||w_1-w_2|| + ||v_1-v_2||)$$

dla $v_1, v_2 \in \overline{D}$ i $w_1, w_2 \in W$ ze stałą mniejszą od jedności. Operacja $F(v, w)$ jest zatem jednostajnie zwężająca w zupełnej przestrzeni metrycznej W i ciągła względem v dla $v \in \overline{D}$.

Sprawdzimy jeszcze, że spełniony jest osłabiony (zob. odnośnik na str. 592) warunek (3.4). Istotnie dla dowolnego $v \in \overline{D}$ i dla $w(v) \in W$ będącego rozwiązaniem równania (3.13) zachodzi oszacowanie:

$$||\Phi(v, w(v)) - \Phi(v, \theta)|| \leqslant ||G(v+w(v)) - G(v)||_Y \leqslant$$
$$\leqslant \varrho(r+h) \cdot ||w(v)|| \leqslant \varrho(r+h)\, ||QA|| \cdot M(r, h)$$

i z (3.10) wynika spełnienie osłabionego warunku (3.4). Zgodnie z twierdzeniem 3 istnieje para $(v^0, w(v^0))$ spełniająca układ równań (3.14—3.13) i nierówności $||v^0-v^*|| < r$, $||w(v^0)|| \leqslant h$, czyli istnieje rozwiązanie $x^0 = v^0 + w(v^0)$ równania (3.5) o własnościach (3.11), c.n.d.

3.4. W dowodzie twierdzenia 4 kilkakrotnie korzystaliśmy z nierówności $||x|| = ||Px + Qx|| \leqslant ||Px|| + ||Qx||$. Jeżeli X jest przestrzenią Hilberta i podprzestrzenie $P(X)$ i $Q(X)$ są do siebie prostopadłe, to norma elementu x spełnia równość:

$$||x|| = \sqrt{||Px||^2 + ||Qx||^2}.$$

Wówczas w nierówności (3.10) można wszędzie zastąpić $\varrho(r+h)$ przez $\varrho(\sqrt{r^2+h^2})$ i uzyskać w ten sposób pewne osłabienie założeń twierdzenia 4. Ponadto zachodzi oszacowanie

$$M(r, h) \leqslant ||G(v^*)|| + ||G(v^*+Px+Qx) - G(v^*)|| \leqslant ||G(v^*)|| + \varrho(\sqrt{r^2+h^2}) \cdot \sqrt{r^2+h^2}.$$

3.5. Twierdzenie 2 nie daje żadnej odpowiedzi na pytania dotyczące ilości rozwiązań równania (2.7) w obszarze D. Wobec tego z twierdzenia 4 nie wynika lokalna jednoznaczność rozwiązania równania (3.5) w otoczeniu przybliżonego rozwiązania v^*, pomimo że przybliżone rozwiązanie jest odosobnione. Dla uzyskania twierdzenia o lokalnej jednoznaczność rozwiązania równania (3.5) trzeba zastosować inną metodę badania równań (3.14—3.13) (opartą na zasadzie odwzorowań zwężających), która wymaga znacznie silniejszych założeń.

Przyjmujemy te same oznaczenia i założenia, które poprzedzają twierdzenie 4 w rozdz. 3.3.

Twierdzenie 5. Załóżmy, że operacja G ma ciągłą pochodną Frecheta w otoczeniu punktu v^* przestrzeni X i jakobian $\det[\Phi'(v)]$ przekształcenia Φ określonego przez (3.7) jest różny od zera w punkcie v^*. Jeżeli liczba $\|(I-P)A\|_{Y\to X}$ jest dostatecznie mała, to istnieje w przestrzeni X takie otoczenie punktu v^*, w którym równanie (3.5) ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Szkic dowodu: Z istnienia ciągłej pochodnej Frecheta operacji G wynika, że przekształcenie Φ ma w otoczeniu punktu $v^* \in P(X)$ ciągłą macierz Jakobiego $\Phi'(v)$. Ponieważ w punkcie v^* macierz Jakobiego jest nieosobliwa, więc istnieje przekształcenie Φ^{-1} odwrotne względem Φ, które odwzorowuje pewne otoczenie zera przestrzeni $P(X)$ w otoczeniu punktu $v^* \in P(X)$.

Dla dostatecznie małych $\|QA\|$ równanie (3.13) ma dokładnie jedno rozwiązanie $w = w(v)$ i istnieją stałe c_1, c_2 takie, że dla v bliskich v^* zachodzą oszacowania: $\|w(v)\| \leqslant c_1\|QA\|$ i $\|w(v_1)-w(v_2)\| \leqslant c_2\|QA\| \cdot \|v_1-v_2\|$. Wstawiając $w(v)$ do równania (3.14) otrzymamy:

$$\Phi(v) = P[G(v+w(v))-G(v)] \quad \text{lub} \quad v = \Phi^{-1}P[G(v+w(v))-G(v)].$$

Dla dostatecznie małych $\|QA\|$ prawa strona ostatniego równania odwzorowuje pewne otoczenie punktu v^* przestrzeni $P(X)$ w siebie i spełnia warunek Lipschitza ze stałą:

$$\sup_v \|[\Phi'(v)]^{-1}\| \cdot \Big\{ \sup_{\|x\| \leqslant c_1\|QA\|} \sup_v \|G'(v+x)-G'(v)\| + \sup_v \|G'(v)\| \cdot c_2\|QA\| \Big\},$$

gdzie $\sup_v$ dotyczy pewnego otoczenia punktu v^*. Dla dostatecznie małych $\|QA\|$ stała Lipschitza jest mniejsza od jedności i w otoczeniu punktu $v^* \in P(X)$ istnieje jednoznaczne rozwiązanie v^0 równania (3.14), a w konsekwencji jednoznaczne rozwiązanie x^0 równania (3.5). Pełen dowód polega na pokazaniu możliwości liczbowego oszacowania wspomnianych powyżej otoczeń punktu v^*.

3.6. Dalszy ciąg pracy ma na celu pokazanie kilku przykładów bezpośredniego zastosowania twierdzeń 3 i 4 do udowodnienia istnienia rozwiązań okresowych w zadanym otoczeniu przybliżonego rozwiązania uzyskanego metodą linearyzacji harmonicznych.

4. UKŁAD NIEAUTONOMICZNY Z NIELINIOWOŚCIĄ TYPU $f(x)$

4.1. Niech $\gamma(t)$ będzie funkcją z ograniczonym wahaniem $\underset{[0,\infty)}{Var}\gamma < \infty$, a z i ω — liczbami dodatnimi. Rozpatrzymy równanie:

$$x(t) = \int_0^\infty f[x(t-\tau)]\,d\gamma(\tau) + 2z\cos\omega t, \qquad t \in (-\infty, \infty), \tag{4.1}$$

w którym funkcja f spełnia warunek Lipschitza: $|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant q|x_1-x_2|$ dla wszystkich $x_1, x_2 \in (-\infty, \infty)$ i $f(0) = 0$.

Będziemy szukać okresowych rozwiązań równania (4.1) w postaci szeregu Fouriera:

$$x(t) = x_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\cos(n\omega t + \arg x_n) \equiv \sum_n x_n e^{jn\omega t}, \quad \text{gdzie} \quad x_{-n} \equiv \bar{x}_n. \tag{4.2}$$

Wstawiając (4.2) do równania (4.1) otrzymamy równoważny układ równań dla wszystkich współczynników Fouriera funkcji $x(t)$:

$$x_n = K(jn\omega)\cdot f_n(x_0, x_1, x_2, \ldots)+\delta_n z, \quad n = 0, 1, 2, 3 \ldots, \tag{4.3}$$

gdzie

$$K(j\omega) \triangleq \int_0^\infty e^{-j\omega t}\, d\gamma(t)$$

jest funkcją jednostajnie ciągłą dla $\omega \in (-\infty, \infty)$,

$$\delta_n \triangleq \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = 1 \\ 0 & \text{dla} \quad n = 0, 2, 3, 4, \ldots, \end{cases}$$

a $f_n(x_0, x_1, \ldots)$ są współczynnikami Fouriera funkcji $f[x(t)]$:

$$f_n(x_0, x_1, x_2, \ldots) \triangleq \frac{1}{T}\int_0^T f\Big[\sum_p x_p e^{jp\omega t}\Big] e^{-jn\omega t}\, dt, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

4.2. Zgodnie z metodą pierwszej harmonicznej funkcję:

$$x^*(t) = 2|a|\cos(\omega t+\arg a) \tag{4.4}$$

będziemy nazywać przybliżonym rozwiązaniem równania (4.1), pod warunkiem, że liczba zespolona a spełnia równanie:

$$a = K(j\omega)u(a)+z, \tag{4.5}$$

gdzie:

$$u(a) \triangleq f_1(0, a, 0, 0, \ldots) = \frac{1}{T}\int_0^T f[2|a|\cos(\omega t+\arg a)]e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= e^{j\arg a}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f[2|a|\cos\tau]\cos\tau\, d\tau = e^{j\arg a}\cdot u(|a|). \tag{4.6}$$

Podamy geometryczną konstrukcję rozwiązania równania (4.5).

Przepiszmy równanie (4.5) w postaci:

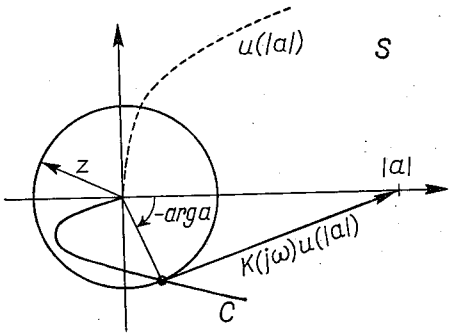
$$|a|-K(j\omega)u(|a|) = ze^{-j\arg a}$$

i wykreślimy na płaszczyźnie zmiennej zespolonej S krzywą C o równaniu parametrycznym $s = |a|-K(j\omega)u(|a|)$, gdzie $|a|$ jest parametrem krzywej. Krzywa ta powstaje przez liniowe skośnokątne przekształcenie linii: $u = u(|a|)$. Przecięcie krzywej C z okręgiem $|s| = z$ wyznacza wszystkie rozwiązania równania (4.5) (rys. 2). Konstrukcja taka ułatwia przedyskutowanie ilości rozwiązań w zależności od parametrów $K(j\omega)$ i z.

4.3. Niech a będzie ustalonym rozwiązaniem równania (4.5) [przy danych parametrach z i $K(j\omega)$], a $x^*(t)$ odpowiadającym mu przybliżonym rozwiązaniem równania (4.1). Niech

r i h będą danymi liczbami dodatnimi. Określimy warunki, przy których równanie (4.1) [lub równoważny mu układ (4.3)] ma rozwiązanie o postaci (4.2) spełniające warunki:

$$|2x_1-2a| < r\sqrt{2} \quad \text{oraz} \quad \sqrt{x_0^2+2\sum_{n=2}^{\infty}|x_n|^2} \leqslant h. \tag{4.7}$$



Rys. 2. Konstrukcja rozwiązania równania (4.5)

Nierówności (4.7) oznaczają, że zespolona amplituda $2a$ przybliżonego rozwiązania $x^*(t)$ odchyla się mniej niż o $r\sqrt{2}$ od amplitudy pierwszej harmonicznej dokładnego rozwiązania, a wartość skuteczna składowej stałej i wszystkich pozostałych harmonicznych nie przewyższa liczby h. Liczby r i h określają takie otoczenie przybliżonego rozwiązania $x^*(t)$, w którym mieści się dokładne rozwiązanie równania (4.1).

Oznaczmy przez $\Phi(v)$ funkcję zespoloną

$$\Phi(v) = \frac{v-z}{K(j\omega)} - u(v) \tag{4.8}$$

zmiennej zespolonej v. Oczywiście $\Phi(a) = 0$.

T w i e r d z e n i e 6. Załóżmy, że a jest punktem regularnym przekształcenia Φ (to znaczy, że na rys. 2 krzywa C nie jest styczna do okręgu w punkcie $ze^{-j\arg a}$ przecięcia krzywej z okręgiem) i $|\Phi(v)| > 0$ dla $0 < \sqrt{2}|v-a| \leqslant r$.

Jeżeli zachodzi nierówność:

$$\sup_{n=0,2,3,4,\ldots}|K(jn\omega)| < \frac{1}{q^2\sqrt{(\sqrt{2}|a|+r)^2+h^2}} \min\left\{hq, \sqrt{2}\min_{\sqrt{2}|v-a|=r}|\Phi(v)|\right\}, \tag{4.9}$$

to równanie (4.1) ma okresowe rozwiązanie o postaci (4.2) spełniające warunki (4.7).

D o w ó d. Skorzystamy z twierdzenia 4 przyjmując, że $X = Y = l^2$ jest przestrzenią rzeczywistych funkcji okresowych $x(t) = \sum_n x_n e^{jn\omega t}$ (gdzie $x_{-n} = \bar{x}_n$) z normą:

$$\|x\| = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt} \equiv \sqrt{x_0^2+2\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2}, \tag{4.10}$$

a $P(x)$ jest podprzestrzenią (dwuwymiarową) funkcji o postaci $[Px](t) = x_1 e^{j\omega t} + \bar{x}_1 e^{-j\omega t}$ z normą $||Px|| = \sqrt{2}|x_1|$ (albo izometryczną z nią przestrzenią liczb zespolonych x_1 z normą $||x_1|| = \sqrt{2}|x_1|$).

Dla operacji liniowej

$$[Ax](t) \triangleq \int_0^\infty x(t-\tau)\,dh(\tau) \equiv \sum_n K(jn\omega)\,x_n e^{jn\omega t}$$

przekształcającej l^2 w siebie zachodzi równość:

$$||(I-P)A|| = \sup_{n=0,2,3,4,\ldots} |K(jn\omega)|.$$

Operacja nieliniowa $[Gx](t) \triangleq f[x(t)]$ spełnia warunek Lipschitza:

$$||Gx_\alpha - Gx_\beta|| = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |f[x_\alpha(t)]-f[x_\beta(t)]|^2 dt} \leqslant$$

$$\leqslant q\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |x_\alpha(t)-x_\beta(t)|^2 dt} = q||x_\alpha - x_\beta||$$

ze stałą q w całej przestrzeni l^2.

Funkcja $\Phi(v)$ występująca w twierdzeniu 4 [wzór (3.7)] jest w tym przypadku identyczna z funkcją (4.8), a nierówność (3.9) przyjmuje postać:

$$\sqrt{2}\left|\frac{v-z}{K(j\omega)} - u(v)\right| > 0 \quad \text{dla} \quad 0 < \sqrt{2}|v-a| \leqslant r.$$

Stała $M(r, h)$ może być oszacowana przez:

$$M(r,h) = \max||G(x^*+Px+Qx)|| \leqslant q\max||x^*+Px+Qx|| \leqslant q\sqrt{(\sqrt{2}|a|+r)^2+h^2}.$$

Ponieważ $h/M(r, h) < 1/q$, więc nierówność (3.10) sprowadzi się w tym przypadku do (4.9). Z twierdzenia 4 wynika istnienie rozwiązania równania (4.1) o własnościach (4.7), c.n.d.

4.4. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest nieparzysta, a funkcja okresowa

$$x(t) = -x\left(t+\frac{T}{2}\right) = \sum_{n=1,3,5,\ldots} 2|x_n|\cos(n\omega t + \arg x_n) \tag{4.11}$$

ma tylko nieparzyste harmoniczne, to funkcja okresowa $f[x(t)]$ ma również tylko nieparzyste harmoniczne.

W tym przypadku sensowne jest poszukiwanie rozwiązań równania (4.1) nie w całe, przestrzeni funkcji okresowych z normą (4.10), lecz w podprzestrzeni l^2_{sym} funkcji symetrycznych, dla których parzyste współczynniki Fouriera są równe zeru. Operacja $(I-P)A$ przekształcająca l^2_{sym} w siebie ma normę:

$$||(I-P)A||_{sym} = \sup_{n=3,5,7,\ldots} |K(jn\omega)|. \tag{4.12}$$

Jeżeli zatem $f(x) = -f(-x)$ i spełnione są założenia twierdzenia 6 z tą zmianą, że lewa strona nierówności (4.9) ma postać (4.12), to istnieje symetryczne rozwiązanie równania (4.1) mające postać (4.11) i takie, że $\sqrt{2}|x_1-a| < r$ oraz $\sqrt{2\sum_{n=3,5,7,\ldots}|x_n|^2} \leqslant h$.

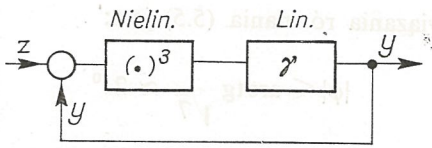
5. DRGANIA SUBHARMONICZNE

Rozpatrzymy układ (rys. 3) opisujący się równaniem

$$y(t) = \int_0^\infty f[y(t-\tau)+2z\cos 3\omega(t-\tau)]\,d\gamma(\tau), \tag{5.1}$$

gdzie $\underset{[0,\infty)}{Var}\,\gamma < \infty$ i gdzie $z > 0$.

Załóżmy, że charakterystyka elementu nieliniowego ma postać $f(x) = x^3$. Określimy warunki, przy których istnieje okresowe rozwiązanie równania (5.1) o okresie $T = \frac{2\pi}{\omega}$.



Rys. 3. Schemat układu opisanego równaniem (5.1)

Wówczas trzecia harmoniczna drgań $y(t)$ jest zsynchronizowana z sygnałem wejściowym $z(t) = 2z\cos\omega t$.

5.1. Zgodnie z metodą pierwszej harmonicznej funkcję

$$y^*(t) = ae^{j\omega t}+\bar{a}e^{-j\omega t} = 2|a|\cos(\omega t+\arg a) \tag{5.2}$$

będziemy nazywać przybliżonym rozwiązaniem równania (5.1) pod warunkiem, że liczba a spełnia równanie:

$$a = K(j\omega)u(a), \tag{5.3}$$

gdzie:

$$K(j\omega) = \int_0^\infty e^{-j\omega t}\,d\gamma(t),$$

$$u(a) = \frac{1}{T}\int_0^T f[y^*(t)+2z\cos 3\omega t]e^{-j\omega t}\,dt. \tag{5.4}$$

Kładąc $f(x) = x^3$, otrzymamy:

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[ae^{j\tau}+\bar{a}e^{-j\tau}+ze^{3j\tau}+ze^{-3j\tau}]^3e^{-j\tau}\,d\tau = 3a(|a|^2+z|a|e^{-3j\arg a}+2z^2)$$

i równanie (5.3) sprowadza się do równania:

$$a\left(|a|^2+z|a|e^{-3j\arg a}+2z^2-\frac{1}{3K(j\omega)}\right)=0.$$

Jednym z rozwiązań równania (5.3) jest $a=0$, a dla pozostałych rozwiązań liczba $|a|^2$ spełnia równanie kwadratowe:

$$|a|^4+\left(3z^2-2Re\frac{1}{3K(j\omega)}\right)|a|^2+\left|2z^2-\frac{1}{3K(j\omega)}\right|^2=0. \tag{5.5}$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$\varphi\triangleq\arg K(j\omega),\qquad R\triangleq Re\frac{1}{3K(j\omega)},\qquad Z\triangleq\frac{z^2}{2R} \tag{5.6}$$

i przedstawmy rozwiązanie równania (5.5) w postaci:

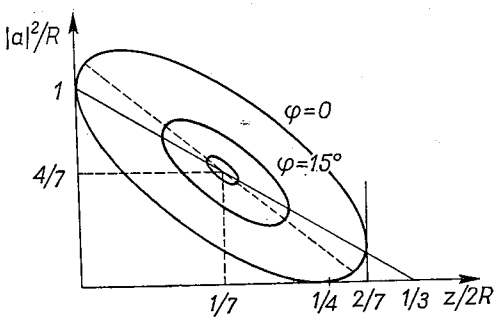
$$|a|^2=R\left(1-3Z\pm\sqrt{2Z-7Z^2-\operatorname{tg}^2\varphi}\right). \tag{5.7}$$

Warunkiem istnienia rozwiązania równania (5.5) jest:

$$|\varphi|\leqslant\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{7}}\approx 21^0$$

i

$$1-\sqrt{1-7\operatorname{tg}^2\varphi}\leqslant 7Z\leqslant 1+\sqrt{1-7\operatorname{tg}^2\varphi}. \tag{5.8}$$



Rys. 4. Wykres funkcji określonych wzorem (5.7)

Równanie (5.5) przedstawia w płaszczyźnie $|a|^2$, z^2 rodzinę elips pokazanych na rys. 4. Znając $|a|$ można wyznaczyć $\arg a$ ze wzoru:

$$\arg a=-\frac{1}{3}\arg\left\{\frac{1}{3K(j\omega)}-2z^2-|a|^2\right\}. \tag{5.9}$$

5.2. Dla $|a|$ i $\arg a$ danych wzorami (5.7) i (5.9), funkcję $y^*(t)$ [wzór (5.2)] nazywamy przybliżonym rozwiązaniem równania (5.1). Aby oszacować błąd tego przybliżenia, będziemy korzystać z twierdzenia 4 przyjmując, że $X=Y=C_{ST}$ jest przestrzenią cią-