

W oparciu o model I i zasady podane w rozdz. 3 skonstruowano model zredukowany o postaci

$$\left. \begin{aligned} 1. Y_{1t}^0 &= c_1 + c_{11}x_{1t} + c_{12}x_{2t} = Y_{1t} \\ 2. Y_{2t}^0 &= c_2 + c_{21}x_{1t} + c_{22}x_{2t} \\ 3. Y_{3t}^0 &= c_3 + c_{31}x_{1t} + c_{32}x_{2t} + c_{33}x_{3t} \\ 4. Y_{4t}^0 &= c_4 + c_{41}x_{1t} + c_{42}x_{2t} + c_{43}x_{3t} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Parametry c_α i $c_{\alpha\beta}$ ($\alpha = 2, 3, 4, \beta = 1, 2, 3$) wyżej wymienionego modelu obliczono za pomocą maszyny ODRA 1013. Wyniki tych obliczeń podano w tablicy 2.

W odniesieniu do każdego równania modelu (54) oraz równania (53) dokonano następujących badań:

1. zweryfikowano hipotezę o przypadkowości odchyłeń bezwzględnych ($e_{at} = y_{at} - Y_{at}^0$) i względnych ($e_{at}^* = 100e_{at}y_{at}^{-1}$; $\alpha = 1, 2, \dots, 5$) za pomocą testów serii i znaków,
2. sprawdzono hipotezę o braku autokorelacji odchyłeń bezwzględnych i względnych za pomocą testów Durbina-Watsona, Neumanna i Fischera zakładając rząd autokorelacji $k = 1, 2, \dots, 5$,
3. zweryfikowano hipotezę o normalnym rozkładzie odchyłeń bezwzględnych i względnych za pomocą testów Massey'a i Hellwiga,
4. obliczono (za pomocą maszyny cyfrowej) współczynniki korelacji wielorakiej, stopnie regresji i wszystkie inne niezbędne statystyki,
5. zbadano zmianę w czasie wartości parametrów równań modeli integralnych.

Rezultatów tych badań nie podaje się w niniejszej pracy.

W załączniku przedstawiono, w charakterze przykładu, szczegółowy tok postępowania przy wyznaczaniu parametrów równań 1 i 2 strukturalnego modelu ekonometrycznego I metodą ograniczonej informacji i podwójną metodą najmniejszych kwadratów.

Modele (54) i (53) posłużyły do wyznaczenia prognoz krótkookresowych i sprawdzenia ich skuteczności drogą obliczenia błędów prognoz i prawdopodobieństwa błędów prognoz. Stwierdzono, że skonstruowany model ekonometryczny zredukowany może być podstawą przewidywań krótkookresowych (do 5 lat), przy czym okres predykcji zależy od założonego błędu prognozy i prawdopodobieństwa błędu prognozy. Na przykład średni błąd prognoz 1-roczych wszystkich rozpatrywanych zmiennych objaśnianych nie był większy od 3% przy prawdopodobieństwie 10-procentowego błędu prognozy zawierającym się w granicach $0,9 \div 1,0$.

5. ZAKOŃCZENIE

Wydaje się, że przedstawione metody mogą być wykorzystane do wyznaczania parametrów strukturalnych równań modeli ekonometrycznych systemów elektroenergetycznych.

Parametry prostych (nie współzależnych) równań ekonometrycznych najlepiej obliczać metodą najmniejszych kwadratów. W zależności od kryterium aproksymacji można stosować metodę najmniejszych kwadratów względnych lub bezwzględnych. Większe trudności rachunkowe występują w przypadku metody najmniejszych kwadratów względnych, jednakże przy dysponowaniu gotowymi programami maszynowymi ta niedogodność nie jest istotna.

Wartości parametrów równań zredukowanego modelu ekonometrycznego I

Równanie	Parametry		Nr modelu								
	Ozn.	Jedn.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2. (Y_2^0)	c_2	Mm	40,45	41,35	40,67	25,17	-3,288	-6,752	-7,765	-1,929	11,41
	c_{21}	Mm/ M_{odb}	-2,931	-1,695	0,037	8,538	23,12	25,91	27,36	22,23	15,49
	c_{22}	Mm/TWh	18,08	15,73	13,42	5,823	-6,765	-9,726	-11,34	-5,843	0,090
3. (Y_3^0)	c_3	szt.	30,58	30,36	23,78	51,28	164,1	44,00	-96,95	-127,5	-166,5
	c_{31}	szt./ M_{odb}	-0,555	-0,871	0,023	-21,61	-84,13	-30,10	35,93	37,35	80,94
	c_{32}	szt./TWh	3,423	8,087	8,571	-14,74	24,62	11,30	-14,89	-9,817	0,470
	c_{33}	szt./TWh	6,444	5,522	5,682	16,84	20,92	13,79	7,016	6,868	-5,883
4. (Y_4^0)	c_4	Mm	1,612	1,952	2,399	5,002	9,910	5,173	0,464	0,700	-4,426
	c_{41}	Mm/ M_{odb}	-0,039	-0,057	0,001	-0,940	-3,441	-1,189	1,304	1,206	3,367
	c_{42}	Mm/TWh	0,240	0,525	0,478	-0,641	1,007	0,446	-0,540	-0,317	0,020
	c_{43}	Mm/TWh	0,451	0,358	0,317	0,733	0,856	0,545	0,255	0,222	-0,245

Parametry złożonych równań ekonometrycznych najwygodniej jest szacować podwójną metodą najmniejszych kwadratów, wypróbowaną z pozytywnym rezultatem w przypadku fragmentu modelu ekonometrycznego polskiego systemu elektroenergetycznego.

W oparciu o przykłady zastosowania metody ograniczonej informacji do obliczania parametrów złożonych równań modeli ekonometrycznych, można przypuszczać, że metoda ta nie znajdzie obecnie szerszego zastosowania przy konstruowaniu modeli ekonometrycznych systemów elektroenergetycznych. U podstaw tej metody leży założenie, że rozkład odchyłeń wartości statystycznych y_{it} od odpowiadających im wartości funkcji regresji Y_{it} jest normalny. Przekonaliśmy się praktycznie, badając kilkadziesiąt przypadków odnoszących się do równań ekonometrycznych polskiego systemu elektroenergetycznego, że w przybliżeniu normalny rozkład odchyłeń występuje nieczęsto.

Przed przystąpieniem do obliczania parametrów równań ekonometrycznych nie znamy z góry rozkładu odchyłeń, ani innych ich właściwości. Stąd sugestia, aby jednak stosować możliwie jak najwięcej równoległych metod obliczania parametrów tego typu równań. Dopiero rezultaty badań właściwości tych równań, zwłaszcza właściwości odchyłeń (względnych i bezwzględnych) mogą przesądzić o praktycznym stosowaniu metod obliczeniowych w podobnych przypadkach.

Traktując równania ekonometryczne systemów elektroenergetycznych jako wielowymiarowe aproksymaty stochastyczne, stanowiące jednostronne zależności zmiennych objaśnianych od zmiennych objaśniających — niezależnie od charakteru tych zmiennych (endogeniczne czy egzogeniczne) — nie widać przeszkód, aby do wyznaczania parametrów tych równań stosować najpierw metodę najmniejszych kwadratów (względnych lub bezwzględnych) niezależnie od struktury całego modelu ekonometrycznego. W kolejności można zastosować podwójną metodę najmniejszych kwadratów, a następnie ewentualnie metodę ograniczonej informacji.

Skonstruowany fragment modelu ekonometrycznego polskiego systemu elektroenergetycznego może być przedmiotem badań i podstawą wyznaczania prognoz krótkookresowych.

Obliczenia związane z konstruowaniem i badaniem modeli ekonometrycznych systemów elektroenergetycznych wymagają stosowania maszyn cyfrowych.

Podane w pracy metody ekonometryczne mogą być wykorzystane w innych dziedzinach elektrotechniki w zakresie wyznaczania parametrów wielowymiarowych funkcji aproksymacyjnych.

Załącznik

WYZNACZANIE PARAMETRÓW RÓWNAŃ 1 I 2 STRUKTURALNEGO MODELU EKONOMETRYCZNEGO I (52)

1. Równanie 1 — o postaci $Y_{1t} = b_{11}x_{1t} + b_{12}x_{2t}$

1.1. Metoda ograniczonej informacji

Równanie 1 modelu (52) pisze się w postaci (16), tj.

$$a_{11}y_{1t} + b_{11}x_{1t} + b_{12}x_{2t} + \varepsilon_{1t} = 0,$$

przy czym $a_{11} = -1$.

Macierze (20) mają postać (przy $K_1 = 2$, $K = 3$, $N_1 = 1$):

$$\mathbf{M}_{xx}^* = [M_{x_k x_l}]_{k,l=1,2,3}^{k=1,2,3} = \begin{bmatrix} M_{x_1 x_1} & M_{x_1 x_2} & M_{x_1 x_3} \\ M_{x_2 x_1} & M_{x_2 x_2} & M_{x_2 x_3} \\ M_{x_3 x_1} & M_{x_3 x_2} & M_{x_3 x_3} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$\mathbf{M}_{yx}^* = [M_{y_i x_k}]_{k=1,2,3}^{i=1} = [M_{y_1 x_1}, M_{y_1 x_2}, M_{y_1 x_3}],$$

$$\mathbf{M}_{xx} = [M_{x_k x_l}]_{k,l=1,2}^{k=1,2} = \begin{bmatrix} M_{x_1 x_1} & M_{x_1 x_2} \\ M_{x_2 x_1} & M_{x_2 x_2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{yy} = [M_{y_i} M_{y_j}]_{j=1}^{i=1} = M_{y_1 y_1},$$

$$\mathbf{M}_{yx} = [M_{y_i x_k}]_{k=1,2}^{i=1} = [M_{y_1 x_1}, M_{y_1 x_2}].$$

Elementy tych macierzy, zgodnie z (18), równają się:

$$M_{x_1 x_1} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_{1t} x_{1t} - \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_{1t} \right) \cdot \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_{1t},$$

$$M_{x_1 x_2} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_{1t} x_{2t} - \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_{1t} \right) \cdot \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_{2t},$$

.....

$$M_{y_1 x_1} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_{1t} x_{1t} - \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_{1t} \right) \cdot \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_{1t}$$

.....

itp.

Macierz $\mathbf{Q}$ przedstawimy w postaci

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{S} - \mathbf{R}]^{-1} [\mathbf{M}_{yy} - \mathbf{S}],$$

gdzie:

$$\mathbf{S} = \mathbf{M}_{yx}^* \mathbf{M}_{xx}^{*-1} \mathbf{M}_{yx}^{\square} = [M_{y_1 x_1}, M_{y_1 x_2}, M_{y_1 x_3}] \begin{bmatrix} M_{x_1 x_1} & M_{x_1 x_2} & M_{x_1 x_3} \\ M_{x_2 x_1} & M_{x_2 x_2} & M_{x_2 x_3} \\ M_{x_3 x_1} & M_{x_3 x_2} & M_{x_3 x_3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M_{y_1 x_1} \\ M_{y_1 x_2} \\ M_{y_1 x_3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{M}_{yx} \mathbf{M}_{xx}^{-1} \mathbf{M}_{yx}^{\square} = [M_{y_1 x_1}, M_{y_1 x_2}] \begin{bmatrix} M_{x_1 x_1} & M_{x_1 x_2} \\ M_{x_2 x_1} & M_{x_2 x_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M_{y_1 x_1} \\ M_{y_1 x_2} \end{bmatrix}.$$

Odwracanie macierzy $\mathbf{M}_{xx}^*$ najlepiej jest przeprowadzić za pomocą maszyny cyfrowej wg jednego z dostępnych programów bibliotecznych.

Macierze $\mathbf{S}$ i $\mathbf{R}$ są 1-elementowe. W rezultacie obliczeń otrzymuje się $\mathbf{S} = s$, $\mathbf{R} = r$.

Zatem $\mathbf{Q} = (s-r)^{-1} (M_{y_1 y_1} - s) = q$.

Macierz jednostkowa $\mathbf{I}$ w równaniu (21a) równa się

$$\mathbf{I} = [1]^1 = 1.$$

Równanie charakterystyczne (23) ma postać

$$\det[\mathbf{Q} - \lambda \mathbf{I}] = q - \lambda = 0,$$

a więc pierwiastek charakterystyczny $\lambda = q$.

W (21a) $\mathbf{a}_1^{\square} = [a_{1i}]_{i=1}^{\square} = a_{11} = -1.$

Według (21b), tj. $b_1^{\square} + M_{xx}^{-1} M_{yx}^{\square} a_1^{\square} = 0$,

$$\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} M_{x_1 x_1} & M_{x_1 x_2} \\ M_{x_2 x_1} & M_{x_2 x_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M_{y_1 x_1} \\ M_{y_1 x_2} \end{bmatrix} a_{11}. \quad (2)$$

Z równania (2) parametry b_{11} i b_{12} oblicza się dalej w sposób elementarny.

1.2. Podwójna metoda najmniejszych kwadratów

Rozpatrywane równanie modelu pisze się w postaci (28), tj.

$$Y_{1t} = b_{11} x_{1t} + b_{12} x_{2t}.$$

Parametry tego równania oblicza się z równania (29), w którym

$$y_1 = [y_{1t}]_{t=1,2,\dots,n} = [y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}],$$

$$x_1 = [x_{kt}]_{t=1,2,\dots,n}^{k=1,2} = \begin{bmatrix} x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n} \\ x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n} \end{bmatrix},$$

$$x = [x_{kt}]_{t=1,2,\dots,n}^{k=1,2,3} = \begin{bmatrix} x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n} \\ x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n} \\ x_{31}, x_{32}, \dots, x_{3n} \end{bmatrix},$$

$a_{1\neq} = [a_{1i}]$ — nie występuje w (29); można założyć $a_{1\neq} = 0$,

$b_1 = [b_{1k}]_{k=1,2}$

$y_{\neq} = [y_{it}]$ — nie występuje w (29). Można założyć formalnie $y_{\neq} = 0$.

Macierz g (30) nie występuje w (29). Można założyć formalnie

$$g = 0.$$

Równanie macierzowe (29) ma więc postać

$$\begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix} y_1^{\square} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_1 x_1^{\square} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b_1^{\square} \end{bmatrix}$$

lub (31), tj.

$$x_1 y_1^{\square} = x_1 x_1^{\square} b_1^{\square},$$

a w szczególności

$$\begin{bmatrix} x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n} \\ x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n} \\ \vdots \\ y_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n} \\ x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n} \\ \vdots \\ x_{1n}, x_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}, x_{21} \\ x_{12}, x_{22} \\ \vdots \\ x_{1n}, x_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{bmatrix}.$$

Parametry b_{11} i b_{12} oblicza się z ostatniego z powyższych równań.

2. Równanie 2 — o postaci $Y_{2t} = a_{21} y_{1t}$

2.1. Metoda ograniczonej informacji

Model I napiszemy w postaci:

$$\begin{aligned} 1. & Y'_{1t} = a'_{12} y'_1 \\ 2. & Y'_{2t} = b'_{21} x_{1t} + b'_{22} x_{2t} \\ 3. & Y_{3t} = a'_{32} y'_{2t} + b_{33} x_{3t} \\ 4. & Y_{4t} = a_{43} y_{3t}, \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie: $a'_{12} = a_{21}$, $b'_{21} = b_{12}$, $b'_{22} = b_{12}$, $a'_{32} = a_{31}$, $y'_{1t} = y_{2t}$, $y'_{2t} = y_{1t}$.

W ten sposób równanie 2 modelu I przekształcone zostało na równanie 1 modelu przekształconego (3).

Równanie to napiszemy w postaci $a'_{11}y'_{1t} + a'_{12}y'_{2t} + \varepsilon'_{1t} = 0$,

gdzie $a'_{11} = -1$.

W takim razie macierze (20) równają się ($K_1 = 0, K = 3, N_1 = 2$):

M_{xx}^* — jak macierz (1) w p. 1.1,

$$M_{xx} = [0], \quad M_{yx} = [0],$$

$$M_{yx}^* = \begin{bmatrix} M_{y_1'x_1}, & M_{y_1'x_2}, & M_{y_1'x_3} \\ M_{y_2'x_1}, & M_{y_2'x_2}, & M_{y_2'x_3} \end{bmatrix},$$

$$M_{yy} = \begin{bmatrix} M_{y_1'y_1}, & M_{y_1'y_2} \\ M_{y_2'y_1}, & M_{y_2'y_2} \end{bmatrix}.$$

W rezultacie obliczeń macierzy S w sposób jak w p. 1.1, otrzymuje się

$$S = \begin{bmatrix} s_{11}, & s_{12} \\ s_{21}, & s_{22} \end{bmatrix},$$

gdzie $s_{\alpha\beta}$ — elementy macierzy S.

Macierz R nie występuje; formalnie $R = \begin{bmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{bmatrix}$. Zatem $Q = S^{-1}[M_{yy} - S] = \begin{bmatrix} q_{11}, & q_{12} \\ q_{21}, & q_{22} \end{bmatrix}$, gdzie

$q_{\alpha\beta}$ — elementy macierzy Q.

Macierz jednostkowa $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Równanie charakterystyczne (23) ma postać

$$\det \left[\begin{bmatrix} q_{11}, & q_{12} \\ q_{21}, & q_{22} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] = \det \begin{bmatrix} q_{11} - \lambda, & q_{12} \\ q_{21}, & q_{22} - \lambda \end{bmatrix} = 0,$$

tj.

$$(q_{11} - \lambda)(q_{22} - \lambda) - q_{12}q_{21} = 0. \quad (4)$$

Równanie (4) jest równaniem kwadratowym względem λ . Jeden z większych pierwiastków rzeczywistych (λ_1) tego równania jest pierwiastkiem charakterystycznym tego równania.

Równanie (21a) jest więc następujące

$$\begin{bmatrix} q_{11} - \lambda_1, & q_{12} \\ q_{21}, & q_{22} - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_{11} \\ a'_{12} \end{bmatrix} = 0, \quad \text{przy czym } a'_{11} = -1,$$

tj.

$$-(q_{11} - \lambda_1) + q_{12}a'_{12} = 0,$$

lub

$$-q_{21} + (q_{22} - \lambda_1)a'_{12} = 0;$$

stad

$$a'_{12} = a_{21} = \frac{q_{21}}{q_{22} - \lambda_1},$$

lub

$$a'_{12} = \frac{q_{11} - \lambda_1}{q_{12}}.$$

2.2. Podwójna metoda najmniejszych kwadratów

Model Ia piszemy — jak poprzednio — w postaci (3). Równanie 1 modelu (3) odpowiada równaniu 1 modelu Ia.

Według tej metody parametr a'_{12} wyznaczymy wg (29), w którym

$$y_1 = [y'_{1t}]_{t=1,2,\dots,n} = [y'_{11}, y'_{12}, \dots, y'_{1n}],$$

$$y_{\neq} = [y'_{it}]_{t=1,2,\dots,n}^i = [y'_{21}, y'_{22}, \dots, y'_{2n}].$$

$$x_1 = [0] \text{ — nie występuje,}$$

$$x = [x_{kt}]_{t=1,2,\dots,n}^{k=1,2,3} \text{ — jak w p. 1.2.}$$

$$a_{1\neq} = [a_{1i}]_{i=2} = a'_{12},$$

$$b_1 = [0] \text{ — nie występuje.}$$

Macierz g (30) równa się

$$g = y_{\neq}^{\square} - x^{\square} (xx^{\square})^{-1} xy_{\neq}^{\square} = \begin{bmatrix} y'_{21} \\ y'_{22} \\ \vdots \\ y'_{2n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & x_{3n} \end{bmatrix} (xx^{\square})^{-1} x \begin{bmatrix} y'_{21} \\ y'_{22} \\ \vdots \\ y'_{2n} \end{bmatrix}.$$

Po wykonaniu działań [po uprzednim odwróceniu kwadratowej macierzy $(xx^{\square})$ stopnia 3] otrzymujemy w rezultacie macierz $g = [g_{11}, g_{12}, \dots, g_{1n}]$.

Równanie (30) ma postać

$$[y_{\neq} - g^{\square}] y_1^{\square} = [y_{\neq}^{\square} y_1^{\square} - g^{\square} g] a'_{12},$$

a po wykonaniu działań $p = qa'_{12}$, stąd $a'_{12} = a_{21} = \frac{p}{q}$.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. T. W. Anderson and H. Rubin, Estimation of Parameters of a Single Equation in a Complete System of Stochastic Equations, *Annals of Mathematical Statistics* 1949.
2. R. L. Basmann, A Generalized Classical Method of Linear Estimation of Coefficients in a Structural Equation, *Econometrica* 1957.
3. A. Batczak, O pewnej metodzie odwracania macierzy stosowanej przy estymacji parametrów równań modeli ekonometrycznych, *Przegląd Statystyczny* 1964, z. 1.
4. W. Bukietyński, Niektóre teoretyczne problemy statystycznej analizy popytu, Wrocław 1963, rozprawa doktorska.
5. Z. Czerwiński, O interpretacji równań ekonometrycznych, *Przegląd Statystyczny* 1966, z. 3.
6. F. Greybill, An Introduction to Linear Statistical Models, N. York 1961, Mc Graw-Hill.
7. Z. Hellwig, Aproksymacja stochastyczna, Warszawa 1965, PWE.
8. T. C. Koopmans (editor), Statistical Inference in Dynamic Economic Models, N. York 1950, J. Wiley, Cowles Commission Monograph Nr 10.
9. Z. Kowalski, Wyznaczanie parametrów funkcji aproksymacyjnych według kryterium najmniejszych kwadratów względnych, *Archiwum Elektrotechniki* 1969, z. 3.
10. J. Łukasiewicz, M. Warmus, Metody numeryczne i graficzne, Cz. I, Warszawa 1956, PWN.
11. Z. Pawłowski, Modele ekonometryczne równań opisowych, Warszawa 1963, PWN.
12. Z. Pawłowski, *Ekonometria*, Warszawa 1966, PWN.
13. H. Theil, Estimation of Parameters of Econometric Models, *Proceedings of the 28th Session of ISI*, 1953.

14. W. L. Zaguskin, Przegląd metod numerycznych rozwiązywania równań, Warszawa 1965, PWN.
15. Z. Kowalski, Elementy teorii modeli ekonometrycznych systemów elektroenergetycznych i niektóre jej zastosowania w odniesieniu do systemu polskiego, Łódź 1968, Katedra Elektroenergetyki Politechniki Łódzkiej.

Z. KOWALSKI

METHODS OF CALCULATING STRUCTURAL ECONOMETRIC POWER SYSTEM MODELS

Summary

The methods of calculating equations parameters of structural econometric (stochastic) power system models are discussed. These equations present relations between essential and selected magnitudes which are typical for the whole system or its part.

The particular steps of designing and testing of econometric models are mentioned.

The various methods of analytical calculating of the models are presented, especially: the least square method, the relative least square method, maximum likelihood limited information method and the repeated least square method.

The calculating procedure of equations parameters of a reduced model is given as a conversion of the original model.

An example of a simplified econometric model of the Polish power system in the years 1950—1966 was designed. It includes the equations in which dependent and independent variables are: number of higher voltage (110 kV) power system stations, range of higher voltage power lines, number of high voltage (≤ 30 kV) power system stations, range of high voltage power lines, range of low voltage power lines, number of small consumers, electric energy consumption by small consumers and all others.

Examples of calculation of equations parameters are given for the original model as well as for the reduced one.

Z. KOWALSKI

BERECHNUNGSMETHODEN FÜR PARAMETER VON KONOMETRISCHEN STRUKTURMODELLEN ELEKTROENERGETISCHER SYSTEME

Zusammenfassung

In dem Aufsatz wurden Berechnungsmethoden für Parameter von konometrischen (stochastischen) Strukturmodellen elektroenergetischer Systeme berechnet. Diese Modelle umfassen stochastische Beziehungen zwischen grundsätzlichen gewählten elektroenergetischen Systeme bezeichnenden Variablen.

Es wurden aufeinander folgende Etappen der Konstruierung und Untersuchung dieser konometrischen Modelle genannt.

Analytische Berechnungsmethoden für Parametergleichungen dieser Modelle wurden hierin angeführt. Im Einzelnen wurden folgende Methoden beschrieben: kleinster Quadrate, kleinster relativer Quadrate, beschränkter Information und die Doppelmethode kleinster Quadrate.

Es wurde die Berechnungsweise für Parametergleichungen eines reduzierten konometrischen Modells gebracht.

Man konstruierte beispielsweise ein vereinfachter konometrisches Strukturmodell, dass das polnische elektroenergetische System der Jahre 1950—1966 betrifft und Gleichungen mit folgenden Variablen umfasst: Umfang elektroenergetischer Hoch- (110 kV) und Mittelspannungsstationen, Streckweite elektroenergetischer Hoch-, Mittel- und Tiefspannungsleitungen, Einzelverbraucherzahl von Elektroenergie

Elektroenergieverbrauch seitens Einzelpfängerverbraucher, sowie Elektroenergieverbrauch seitens aller Verbraucher von Berufsenergie im polnischen elektroenergetischen System.

Es wurden Bestimmungsbeispiele für Parametergleichungen dieses Modells, sowie Parameterberechnungsergebnisse des Original- und vereinfachten Modells angeführt.

З. КОВАЛЬСКИ

МЕТОДЫ РАСЧЁТА ПАРАМЕТРОВ СТРУКТУРНЫХ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

В работе представлены методы расчёта параметров структурных эконометрических (стохастических) моделей электроэнергетических систем. Эти модели охватывают уравнения, представляющие стохастические зависимости между основными, выбранными переменными, характеризующими электроэнергетическую систему.

Перечислены очередные этапы конструирования и исследования эконометрических моделей.

Представлены аналитические методы расчёта параметров уравнений этих моделей. Особенно подробно описаны методы: наименьших квадратов, наименьших относительных квадратов, неполной информации и метод двойных наименьших квадратов.

Представлен также метод расчёта параметров уравнений преобразованной эконометрической модели.

Сконструировано для примера упрощённую структурную эконометрическую модель, относящуюся к польской электроэнергетической системе, касающуюся 1950—1966 гг., охватывающую уравнения, в которых выступают следующие переменные: количество электроэнергетических подстанций высокого (110 кВ) и среднего напряжения, длина электроэнергетических линий высокого, среднего и низкого напряжения, количество мелких потребителей электроэнергии, потребление электроэнергии мелкими потребителями и потребление электроэнергии всеми потребителями, питающимися из польской энергосистемы.

Представлены примеры определения параметров уравнений этой модели, а также результаты расчетов параметров оригинальной и преобразованной модели.

Wpływ osiowej nierównomierności w rozmieszczeniu strat na nagrzewanie się uzwojeń transformatorów przy zwarciu ruchowym

MACIEJ KOZŁOWSKI (ŁÓDŹ)

Instytut Elektrotechniki, Oddział w Łodzi, Zakład Transformatorów

Otrzymano 29.10.1969

W dużych transformatorach nierównomierne rozmieszczenie strat w uzwojeniach, warunkowane strumieniem rozproszenia, stwarza niebezpieczeństwo wystąpienia lokalnych przegrzań. W pracy analizuje się wpływ tej nierównomierności na przebieg nagrzewania się uzwojeń przy zwarciu ruchowym z uwzględnieniem ich przewodności cieplnej i — w konsekwencji — na dopuszczalny czas trwania zwarcia. Rozważania i wnioski oparte są na wynikach obliczeń, przeprowadzonych dla typowych uzwojeń transformatorów średniej i dużej mocy.

1. WPROWADZENIE

Nierównomierny rozkład strat dodatkowych w uzwojeniach, szczególnie wywołanych poprzeczną składową strumienia rozproszenia, może prowadzić do wystąpienia lokalnych przegrzań. W wielkich transformatorach o mocy znamionowej rzędu kilkuset megawoltamperów, ze względu na dużą koncentrację przepływu w stosunkowo małej przestrzeni, niebezpieczeństwo to jest szczególnie wielkie. Przy projektowaniu takich jednostek należy więc zwrócić na ten problem specjalną uwagę.

W pracy [4] podano metodę obliczania rozkładu strat dodatkowych w uzwojeniach transformatorów od poprzecznej składowej strumienia rozproszenia oraz sposób oceny podatności uzwojeń na tworzenie się w nich tych strat. W pracach [5] i [6] bazując na [4], wprowadzono pojęcie i uzyskano wzór na wskaźnik możliwości wystąpienia lokalnych przegrzań w uzwojeniach przy pracy ciągłej, który pozwala to niebezpieczeństwo ocenić szybko, lecz w przybliżony sposób. Dokładniejsza analiza tego problemu wymaga uwzględnienia, oprócz nierównomiernego rozkładu strat i zróżnicowania warunków chłodzenia poszczególnych części uzwojeń, także ich wypadkowej przewodności cieplnej — przede wszystkim w kierunku osiowym — zależnej od rodzaju uzwojenia. Wzory służące do obliczania tych przewodności podaje praca [7].

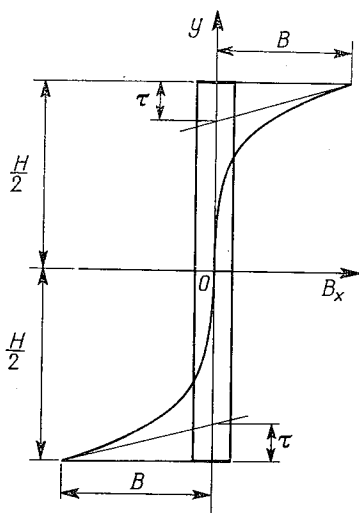
Szczególnie duże przetężenia występują w uzwojeniach transformatorów przy zwarciach ruchowych. Wyznaczenie w tych warunkach rozkładów temperatur w uzwojeniach z uwzględnieniem ich przewodności cieplnej i nierównomiernego rozmieszczenia strat w kierunku osiowym umożliwiające zależności uzyskane w pracy [8]. W niniejszym opracowaniu wykorzystano je do wykonania obliczeń dla kilku różnych uzwojeń produkowanych transfor-

matorów i do oceny na tej podstawie wpływu obu wymienionych czynników na proces nagrzewania się uzwojeń transformatorowych przy zwarcu. Sformułowanie praktycznych wniosków z tego rozeznania jest celem niniejszej pracy.

2. ZALEŻNOŚCI WYJŚCIOWE I PARAMETRY ROZPATRYWANYCH UZWOJEŃ

Do rozważań przyjęto, że rozkład przestrzenny składowej poprzecznej indukcji B_x w obszarze uzwojenia jest określony zależnością (rys. 1):

$$B_x = B \left(e^{-\frac{H-2y}{2\tau}} - e^{-\frac{H+2y}{2\tau}} \right) = 2Be^{-\frac{H}{2\tau}} \operatorname{sh} \frac{y}{\tau}, \quad (1)$$



Rys. 1. Rozkład przestrzenny poprzecznej składowej indukcji wzdłuż wysokości uzwojenia przyjęty do obliczeń

która z punktu widzenia zamierzonej analizy zjawisk przy zwarcu odwzorowuje rozkłady rzeczywiste w zadawalający sposób $\left(\tau \ll \frac{1}{3} H \right)$.

Przy rozkładzie B_x ujętym wzorem (1) przyrost temperatury „uzwojenie — olej” $\vartheta(y, t)$ w czasie trwania zwarcia t jest przedstawiony przez zależność otrzymaną w pracy [8]:

$$\vartheta(y, t) = \vartheta_0 + \frac{q_0}{c\gamma} t \left[1 + 2 \frac{\mu}{q_0} B^2 e^{-\frac{H}{\tau}} \left\{ \Psi_0(y, t) \cdot \frac{\tau}{H} \operatorname{sh} \frac{H}{\tau} + \left[\varphi(t) \operatorname{ch} \frac{2y}{\tau} - 1 \right] \right\} \right], \quad (2)$$

w której

$$\Psi_0(y, t) = 1 - \left\{ \varphi(t) + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^k \cos \left(2\pi k \frac{y}{H} \right) \cdot \Phi_{k1}(t) \right] \right\}, \quad (3)$$

$$\Phi_{k1}(t) = e^{\frac{4}{\tau^2} \frac{\lambda}{c\gamma} t} \cdot \frac{1 - e^{-\left[\frac{4}{\tau^2} + \left(\frac{2\pi k}{H}\right)^2\right] \frac{\lambda}{c\gamma} t}}{\left[\frac{4}{\tau^2} + \left(\frac{2\pi k}{H}\right)^2\right] \frac{\lambda}{c\gamma} t} - \frac{1 - e^{-\left(\frac{2\pi k}{H}\right)^2 \frac{\lambda}{c\gamma} t}}{\left(\frac{2\pi k}{H}\right)^2 \frac{\lambda}{c\gamma} t}, \quad (4)$$

$$\varphi(t) = \frac{e^{\frac{4}{\tau^2} \frac{\lambda}{c\gamma} t} - 1}{\frac{4}{\tau^2} \frac{\lambda}{c\gamma} t}, \quad (5)$$

$$q = q_0 + \mu B_x^2 = \varepsilon_0 J^2 k_y + \frac{\pi^2}{6} \frac{\varepsilon}{\rho} (fh)^2 B_x^2. \quad (6)$$

W ostatnim zespole wzorów: q oznacza stratę mocy na jednostkę objętości uzwojenia, J — skuteczną wartość gęstości prądu, ρ — rezystywność materiału przewodowego, odpowiadającą średniej arytmetycznej ze średnich temperatur uzwojenia w chwili powstania i odłączenia zwarcia [8], [11], ε — współczynnik wypełnienia przekroju uzwojenia metalem, $k_y = 1 + \kappa_y$ — średni współczynnik strat wypadkowych w uzwojeniu od pola podłużnego, h — wymiar osiowy niez izolowanego przewodu, f — częstotliwość, ϑ_0 — przyrost temperatury uzwojenia względem oleju przed zwarcie, przyjęty za stały wzdłuż wysokości uzwojenia, $c\gamma$ — wypadkowy iloczyn ciepła właściwego i masy właściwej dla przestrzeni wypełnionej przez uzwojenie [8], λ — wypadkową przewodność cieplną uzwojenia w kierunku osiowym [7].

Zależność (2) uwzględnia wpływ λ na $\vartheta(y, t)$. Przewodzenie ciepła w uzwojeniu wyrównuje rozkład temperatury w porównaniu z rozkładem strat. Efekty tego zjawiska można ilościowo ująć wprowadzonym w pracy [8] współczynnikiem wyrównania przestrzennego rozkładu temperatury w uzwojeniu K , zdefiniowanym przez wzór:

$$K(y, t) = \frac{\vartheta(y, t) - \vartheta_0}{\vartheta_{\lambda=0}(y, t) - \vartheta_0} = \frac{\Delta\vartheta(y, t)}{\Delta\vartheta_{\lambda=0}(y, t)}. \quad (7)$$

w którym

$$\vartheta_{\lambda=0}(y, t) = \vartheta_0 + \frac{q}{c\gamma} t \quad (8)$$

oznacza przyrost temperatury „uzwojenie — olej” przy braku przewodzenia ciepła ($\lambda = 0$); rozkład $\vartheta_{\lambda=0}(y, t)$ w obszarze uzwojenia odpowiada rozkładowi strat. Oczywiście

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} K(y, t) = 1. \quad (9)$$

Przy rozkładzie B_x według zależności (1)

$$K(y, t) = \frac{1 + 2 \frac{\mu}{q_0} B^2 e^{-\frac{H}{\tau}} \left\{ \Psi_0(y, t) \cdot \frac{\tau}{H} \operatorname{sh} \frac{H}{\tau} + \left[\varphi(t) \operatorname{ch} \frac{2y}{\tau} - 1 \right] \right\}}{1 + 2 \frac{\mu}{q_0} B^2 e^{-\frac{H}{\tau}} \left(\operatorname{ch} \frac{2y}{\tau} - 1 \right)}. \quad (10)$$

Parametry uzwojeń przyjętych do rozważań zestawiono w tablicy 1. Uzwojenie I cechuje dość duży wskaźnik τ_m podatności na tworzenie się w nim strat dodatkowych od pola

poprzecznego [4], [6] i duża przewodność wzdłużna λ , uzwojenie II — często spotykane wartości τ_{vn} i λ , które można uznać za przeciętne [7], uzwojenie III — mały wskaźnik τ_{vn} i niewielka przewodność λ . Tablica 1 wyczerpuje możliwości korelacji między parametrami uzwojeń (istnienie np. uzwojenia o małym wskaźniku τ_{vn} i dużej λ nie jest możliwe), co upoważnia do uogólniania wniosków z obliczeń, wykonanych dla uzwojeń z tablicy 1.

Tablica 1

Parametry rozpatrywanych uzwojeń

uzwojenie	I	II	III
rodzaj uzwojenia	śrubowe pojedyncze	śrubowe pojedyncze	cewkowe z przepleceniami wg Engl. El. Co.
moc [MVA]	> 100	> 50	> 10
τ_{vn} [1/T ²]	107	87	40
q_o [W/m ³]	$11,6 \cdot 10^6$	$12,5 \cdot 10^6$	$3,25 \cdot 10^6$
μ [m/Ωs ²]	$27,3 \cdot 10^6$	$17,8 \cdot 10^6$	$2,5 \cdot 10^6$
λ [W/mdeg]	0,775	0,580	0,360
$c\gamma$ [Ws/m ³ deg]	$2,51 \cdot 10^6$	$2,57 \cdot 10^6$	$1,77 \cdot 10^6$

3. WPLYW PRZEWODNOŚCI CIEPLNEJ NA NAGRZEWANIE SIĘ UZWOJEŃ PRZY ZWARCIU

Aby rozróżnić wpływ przewodzenia ciepła na proces nagrzewania się uzwojeń przy zwarciu ruchowym, obliczono przy pomocy maszyny cyfrowej¹⁾, według podanych wzorów, dla uzwojeń z tabl. 1 przyrosty temperatur $\vartheta(y, t)$ i współczynniki $K(y, t)$ przy $B = 0,5$; 1; 1,5T i $\tau/H = 1/27$; 1/9; 1/3. Jak można było oczekiwać, największy wpływ przewodzenia ciepła na rozkład $\vartheta(y, t)$ wystąpił w uzwojeniu I. Wartości współczynnika K , zebrane w tablicach 2 i 3, ilustrują go w przejrzysty sposób. Wynika z nich, że wpływ przewodzenia ciepła rośnie wraz z nierównomiernością rozkładu strat i czasem trwania zwarcia. Liczby zestawione w tablicach 2 i 3 jednocześnie dowodzą, że przy spotykanych czasach trwania zwarcia omawiany wpływ można zaniedbać, przyjmując

$$K(y, t) \approx 1; \quad \vartheta(y, t) \approx \vartheta_{\lambda=0}(y, t). \quad (11)$$

Rezultat analizy wykazuje więc jednoznacznie, że przy zwarciu ruchowym nie można oczekiwać wyrównywania rozkładu przyrostów temperatur „uzwojenie — olej” wskutek przewodzenia ciepła wewnątrz uzwojenia w porównaniu z rozkładem strat, co jest wnioskiem istotnym dla praktyki. Rozkłady te można — z uwzględnieniem skali — utożsamiać.

¹⁾ Program obliczeń opracował dr S. Apanasewicz (IEL/OŁ).

Tablica 2

Wartości współczynnika K wyrównania przestrzennego rozkładu temperatury w uzwojeniu I w funkcji miejsca (ν/H) i czasu trwania zwarcia (t) przy $\tau/H = 1/9$ i różnych wartościach maksymalnych poprzecznej składowej indukcji (B)

B [T]	ν/H	t [s]							
		1	3	6	10	15	30	60	
0,5	0	1	1	1	1	1	1	1	
	2/16	1	1	1	1	1	1	1	
	4/16	1	1	1	1	1	1	1	
	5/16	1	1	1	1	1	1	1	
	6/16	1	1	1	1	1	1	1	
	7/16	1	1	1	1	1	1	1,001	
	8/16	1	0,999	0,999	0,998	0,997	0,994	0,989	
	0	1	1	1	1	1	1	1	
1,0	2/16	1	1	1	1	1	1	1	
	4/16	1	1	1	1	1	1	1	
	5/16	1	1	1	1	1	1	1	
	6/16	1	1	1	1	1	1	1,001	
	7/16	1	1	1	1	1,001	1,001	1,002	
	8/16	0,999	0,999	0,998	0,996	0,995	0,989	0,980	
	0	1	1	1	1	1	1	1	
	2/16	1	1	1	1	1	1	1	
1,5	4/16	1	1	1	1	1	1	1	
	5/16	1	1	1	1	1	1	1	
	6/16	1	1	1	1	1	1,001	1,002	
	7/16	1	1	1	1,001	1,001	1,002	1,003	
	8/16	0,999	0,999	0,997	0,996	0,993	0,987	0,976	
	0	1	1	1	1	1	1	1	
	2/16	1	1	1	1	1	1	1	
	4/16	1	1	1	1	1	1	1	

Tablica 3

Wartości współczynnika K wyrównania przestrzennego rozkładu temperatury w uzwojeniu I w funkcji miejsca (ν/H) i czasu trwania zwarcia (t) przy $B = 1$ [T] i różnych stosunkach τ/H

τ/H	ν/H	t [s]							
		1	3	6	10	15	30	60	
1/27	0	1	1	1	1	1	1	1	
	2/16	1	1	1	1	1	1	1	
	4/16	1	1	1	1	1	1	1	
	5/16	1	1	1	1	1	1	1	
	6/16	1	1	1	1	1,001	1,001	1,002	
	7/16	1	1	1,001	1,002	1,002	1,004	1,008	
	8/16	0,999	0,997	0,994	0,990	0,985	0,971	0,945	
	0	1	1	1	1	1	1	1	
1/9	2/16	1	1	1	1	1	1	1	
	4/16	1	1	1	1	1	1	1	
	5/16	1	1	1	1	1	1	1	
	6/16	1	1	1	1	1	1	1,001	
	7/16	1	1	1	1	1,001	1,001	1,002	
	8/16	0,999	0,999	0,998	0,996	0,995	0,989	0,980	
	0	1	1	1	1	1	1	1	
	2/16	1	1	1	1	1	1	1	
1/3	4/16	1	1	1	1	1	1	1	
	5/16	1	1	1	1	1	1	1	
	6/16	1	1	1	1	1	1	1	
	7/16	1	1	1	1	1	1	1	
	8/16	1	1	0,999	0,999	0,998	0,996	0,993	
	0	1	1	1	1	1	1	1	
	2/16	1	1	1	1	1	1	1	
	4/16	1	1	1	1	1	1	1	

4. WSPÓŁCZYNNIK NIERÓWNOMIERNOŚCI ROZKŁADU TEMPERATURY

Współczynnikiem nierównomierności rozkładu temperatury nazwiemy stosunek przyrostów temperatur „uzwojenie — olej” w wyróżnionym miejscu i w środku uzwojenia. Przy zwarciu ruchowym, w myśl poprzednich stwierdzeń, k_n jest równy stosunkowi gęstości strat w wymienionych miejscach, w rozważanym przypadku będzie więc równy

$$k_n = \frac{q}{q_o} = 1 + \frac{\mu}{q_o} B_x^2, \quad (12)$$

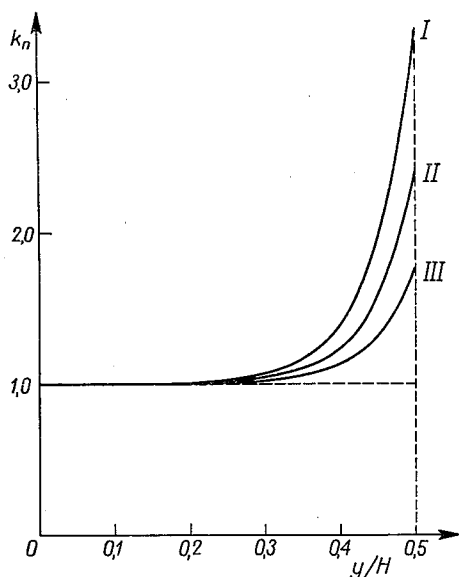
co przy założonym rozkładzie B_x prowadzi do związku:

$$k_n = 1 + 4 \frac{\mu}{q_o} B^2 e^{-\frac{H}{\tau}} \operatorname{sh}^2 \frac{y}{\tau}. \quad (13)$$

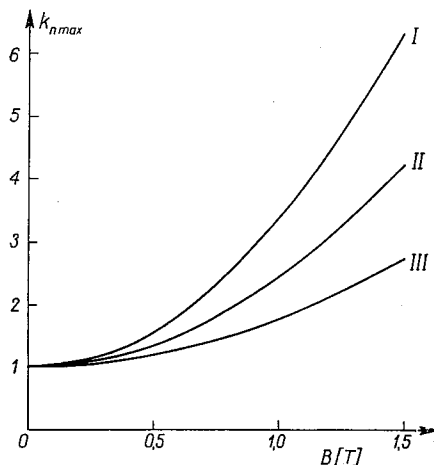
Na rysunku 2 przedstawiono krzywe zmian k_n wzdłuż wysokości rozpatrywanych uzwojeń, obliczone według wzoru (13), a na rys. 3 — największe wartości omawianego współczynnika

$$k_{nmax} = 1 + \frac{\mu}{q_o} B^2 \quad (14)$$

w funkcji B ; dotyczą one cewek skrajnych.



Rys. 2. Współczynnik k_n nierównomierności rozkładu temperatury wzdłuż wysokości uzwojeń I, II i III przy $B = 1\text{T}$ oraz $\tau/H = 1/9$



Rys. 3. Współczynnik nierównomierności rozkładu temperatury dla skrajnych cewek uzwojeń I, II i III w funkcji składowej poprzecznej indukcji B na krańcach uzwojeń

Przedstawione krzywe pozwalają ocenić wpływ konstrukcji uzwojenia na rozkład temperatur przy zwarciu. Wskazują one na konieczność przeanalizowania nagrzewania się uzwojeń przy zwarciach z uwzględnieniem nierównomiernego rozkładu strat.

5. NAGRZEWANIE SIĘ UZWOJEŃ PRZY ZWARCIU

Wzrost przyrostu temperatury „uzwojenie — olej” przy zwarcu ponad wartość początkową ϑ_o , wobec akumulowania w uzwojeniu całego wydzielanego w nim ciepła i braku wpływu przewodnictwa, ujmuje proste wyrażenie, wynikające bezpośrednio ze wzorów (8) i (12):

$$\Delta\vartheta(y, t) = \vartheta(y, t) - \vartheta_o = \frac{q}{c\gamma} t = \frac{q_o}{c\gamma} k_n t. \quad (15)$$

Dla cewek krańcowych, nagrzewanych najsilniej:

$$\Delta\vartheta_k = \frac{q_o}{c\gamma} k_{nmax} t. \quad (16)$$

Wzrost rozpatrywanego zazwyczaj [1], [3], [9], [10], [11], [12] średniego przyrostu temperatury „uzwojenie — olej” przy zwarcu można wyrazić zależnością:

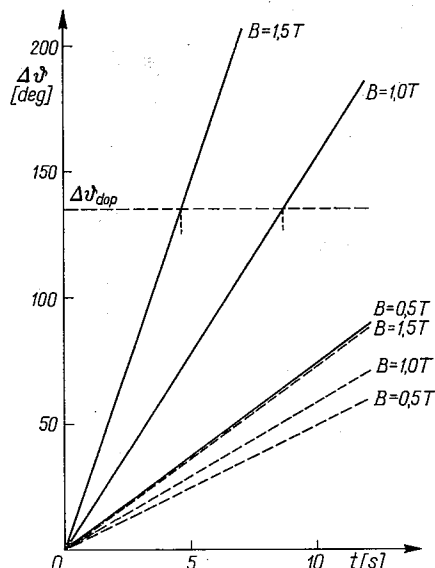
$$\Delta\vartheta_{sr} = \frac{q_{sr}}{c\gamma} t = \frac{q_o}{c\gamma} k_{sr} t, \quad (17)$$

w której

$$q_{sr} = \frac{1}{H} \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} q dy = q_o \frac{1}{H} \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} k_n dy = q_o k_{sr} \quad (18)$$

oznacza średnią gęstość strat w uzwojeniu. Uwzględniając związek (13) otrzymuje się:

$$k_{sr} = 1 + 2 \frac{\mu}{q_o} B^2 e^{-\frac{H}{\tau}} \left(\frac{\tau}{H} \operatorname{sh} \frac{H}{\tau} - 1 \right). \quad (19)$$



Rys. 4. Przyrost $\Delta\vartheta$ temperatury uzwojenia I od chwili wystąpienia zwarcia przy różnych wartościach składowej poprzecznej indukcji B na krańcach uzwojenia. Linie ciągłe — przyrosty temperatur cewek skrajnych, przerywane — przyrosty średnie temperatury uzwojenia przy $\tau/H = 1/9$

Szybkość narastania $\Delta\vartheta$ jest proporcjonalna do przestrzennej gęstości strat w rozpatrywanym obszarze uzwojenia. Ma się ona do szybkości narastania średniego przyrostu temperatury „uzwojenie — olej” jak $q : q_{sr} = k_n : k_{sr}$. Krzywe na rys. 4 pozwalają ocenić na przykładzie uzwojenia I wielkości różnic między przyrostami temperatur cewek skrajnych i średnimi przyrostami temperatur uzwojeń, jakie mogą wystąpić przy zwarciu.

6. DOPUSZCZALNY CZAS TRWANIA ZWARCIA

Przepisy PN-69/E-06040 ograniczają temperaturę osiąganą przy zwarciu przez miedziane uzwojenia transformatorów olejowych do 250°C. Za początkową temperaturę uzwojenia zaleca się przyjmować sumę najwyższej temperatury otoczenia (40°C) i dopuszczalnego przyrostu temperatury uzwojenia (65°C), wyznaczonego sposobem oporowym. Zalecony w przepisach sposób sprawdzenia nagrzewania się uzwojeń przy zwarciu pozwala wnioskować, że nie biorą one pod uwagę faktu nierównomiernego nagrzewania się uzwojeń i dopuszczają osiąganie 250°C przez ich temperaturę średnią. Oznaczałoby to, że ze względów cieplnych czas trwania zwarcia ogranicza warunek:

$$\Delta\vartheta_{sr} \leq 145 \text{ deg.} \quad (20)$$

Czas trwania stanu nieustalonego przy zwarciu dużych transformatorów — jak łatwo obliczyć — jest rzędu 150 ms. W tak krótkim okresie czasu temperatura uzwojeń wzrośnie bardzo nieznacznie, co widać z rys. 4. Przy zwarciu ustalonym napięcia mechaniczne uzwojeń w transformatorach o mocy 16 MVA i większych maleją do 40—30% wartości występującej przy udarze prądowym. Ponieważ spadek wytrzymałości mechanicznej przewodów miedzianych, stosowanych w jednostkach tej wielkości, przy wzroście temperatury od 105°C do 250°C jest znacznie mniejszy [2], z przedstawionych faktów wynika, że ograniczenie temperatury uzwojeń przy zwarciu do 250°C nie może być warunkowane względami mechanicznymi, przynajmniej w tutaj rozpatrywanym zakresie mocy. Temperaturę ogranicza się zatem z uwagi na jej szkodliwy wpływ na izolację uzwojeń; pogląd ten potwierdza dopuszczana przez przepisy [11] temperatura 350°C dla uzwojeń miedzianych transformatorów suchych o klasie izolacji B lub wyższej. O dopuszczalnym ze względów cieplnych czasie trwania zwarcia powinna zatem decydować nie średnia, lecz najwyższa temperatura uzwojenia. Wychodząc z 250°C i przyjmując różnicę między średnią i maksymalną temperaturą oleju za równą 10 deg, otrzymuje się zmodyfikowaną postać warunku ograniczającego czas trwania zwarcia:

$$\Delta\vartheta_k \leq 135 \text{ deg.} \quad (21)$$

Porównując warunki (20) i (21) uzyskuje się dla krotności χ zmniejszenia dopuszczalnego czasu trwania zwarcia po uwzględnieniu nierównomiernego nagrzewania się uzwojeń wyrażenie:

$$\chi = \frac{135}{145} \cdot \frac{k_{sr}}{k_{nmax}}. \quad (22)$$

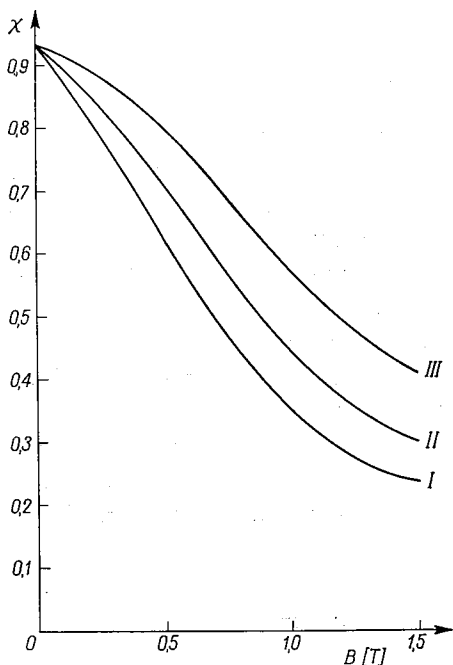
Krzywe na rys. 5 wykazują, że zmniejszenie dopuszczalnego czasu trwania zwarcia wskutek nierównomiernego rozkładu strat w uzwojeniu jest znaczne. Wartość bezwzględna

t_{dop} tego czasu obliczoną ze wzoru:

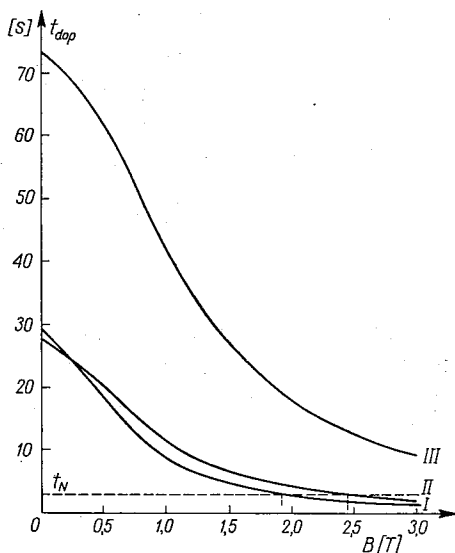
$$t_{dop} = 135 \frac{c\gamma}{q_0 k_{nmax}} \quad (23)$$

dla rozpatrywanych uzwojeń, przedstawiają krzywe na rys. 6. Otrzymane czasy t_{dop} są stosunkowo duże. Przepisy niemieckie przy dopuszczalnym przyroście temperatury $\Delta\vartheta_{sr} = 115$ deg przewidują dla uzwojeń miedzianych o znamionowej gęstości prądu 3,6 A/mm² w zależności od napięcia zwarcia:

$$u_z = 12\% \quad - \quad t_{dop} = 16s; \quad u_z = 13\% \quad - \quad t_{dop} = 19s.$$



Rys. 5. Krotność χ zmniejszenia dopuszczalnego czasu trwania zwarcia przy uwzględnieniu nierównomiernego rozkładu strat w uzwojeniu I, II oraz III w funkcji B przy $\tau/H = 1/9$



Rys. 6. Dopuszczalne czasy trwania zwarcia z punktu widzenia nagrzewania się elementów uzwojeń I, II i III, znajdujących się w polu magnetycznym o składowej poprzecznej indukcji B

Przeliczając te czasy na dopuszczalny przyrost temperatury 135 deg i gęstości prądów 2—3 A/mm², stosowane obecnie w dużych transformatorach, otrzymuje się dla t_{dop} :

j_n :	2	2,5	3	A/mm ²
$u_z = 12\%$:	61	39	27	s
$u_z = 13\%$:	72	46	32	s

a więc wartości zbliżone do wynikających z rys. 6 dla $B = 0$ (równomierny rozkład strat w uzwojeniu).

Przepisy polskie [11] ograniczają dopuszczalny czas trwania zwarcia do $t_N = 3s$, zezwalając na ustalenie czasów dłuższych dla jednostek o mocach nie mniejszych od

10 MVA. Z rys. 6 wynika, że można oczekiwać uzyskania przez górne cewki krańcowe w ciągu 3s trwania zwarcia przyrostu temperatury $\Delta\theta_k = 135$ deg przy wartościach składowych poprzecznych indukcji w tym obszarze wynoszących ok. 2 T. We właściwie skonstruowanych, nierozbudowanych układach uzwojeń wartości te nie przekraczają zwykle 1 T. Oznacza to, że w takich układach nie należy obawiać się przegrzania uzwojeń przy trzysekundowym zwarcu. Przy dłuższych czasach trwania zwarcia, szczególnie — jak wynika z rys. 6 — powyżej 8 s, istnieje niebezpieczeństwo przegrzania krańcowych cewek. Jego realność powinna być sprawdzana rachunkowo z uwzględnieniem nierównomiernego rozmieszczenia strat w uzwojeniach.

7. PODSUMOWANIE

Wyniki przeprowadzonej analizy można podsumować następująco:

- 1) Przy czasach trwania zwarcia ruchowego praktycznie wchodzących w rachubę można pomijać wpływ przewodności cieplnej uzwojeń na rozkład temperatur.
- 2) Przyrost temperatury „uzwojenie — olej” wywołany prądem zwarciovym jest proporcjonalny do gęstości przestrzennej strat w rozpatrywanych punktach uzwojenia.
- 3) Uwzględnienie nierównomiernego rozmieszczenia strat w uzwojeniach prowadzi do znacznego skrócenia dopuszczalnego czasu trwania zwarcia.
- 4) W nierozbudowanych układach o poprawnej konstrukcji można nie obawiać się przegrzania uzwojeń przy ograniczeniu czasu trwania zwarcia do 3 s.
- 5) Przy czasach trwania zwarcia powyżej 8 s należy się poważnie liczyć z niebezpieczeństwem przegrzania krańcowych cewek uzwojeń. Przy ustalaniu jego realności niezbędne jest uwzględnianie nierównomiernego rozmieszczenia strat w uzwojeniach.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. G. Gotter, Erwärmung und Kühlung elektrischer Maschinen, Springer Verlag, Berlin — Heidelberg 1954.
2. J. Grabowski, Zmiany własności mechanicznych drutów nawojowych w wyniku operacji produkcyjnych i warunków eksploatacji transformatorów olejowych, Zagadnienia Wybrane Instytutu Elektrotechniki, Warszawa 1969.
3. E. Jezierski, Transformatory. Podstawy Teoretyczne, WNT, Warszawa 1963.
4. M. Kozłowski, Straty dodatkowe w uzwojeniach transformatorów od poprzecznej składowej strumienia rozproszenia, Rozprawy Elektrotechniczne 1967, nr 4, s. 681.
5. M. Kozłowski, Graniczna obciążalność trwała transformatora z rozdzielonymi uzwojeniami przy nierównomiernym obciążeniu uzwojeń, Rozprawy Elektrotechniczne, 1968, nr 3, s. 467.
6. M. Kozłowski, Zjawiska elektromagnetyczne oraz zagadnienia obliczeniowe i eksploatacyjne w trójfazowych transformatorach z rozdzielonymi uzwojeniami, Instytut Elektrotechniki, Łódź 1968.
7. M. Kozłowski, Przewodności cieplne uzwojeń transformatorów w kierunku osiowym, Rozprawy Elektrotechniczne, 1970, nr 1.
8. M. Kozłowski, Rozkład temperatury w uzwojeniu transformatora przy zwarcu ruchowym z uwzględnieniem osiowej nierównomierności w rozmieszczeniu strat, Archiwum Elektrotechniki 1969, nr 4.
9. R. Küchler, Die Transformatoren, Springer Verlag, Berlin — Heidelberg 1956.

10. W. Pełczewski, Zagadnienia cieplne w maszynach elektrycznych, PWT, Warszawa 1956.
11. PN-69/E-06040, Transformatory. Ogólne wymagania i badania.
12. VDE 0532/1.59, Regeln für Transformatoren.

M. KOZŁOWSKI

INFLUENCE OF AXIAL NONUNIFORMITY IN LOSSES' COLLOCATION ON HEATING OF WINDINGS OF TRANSFORMERS AT SERVICE SHORT CIRCUIT

Summary

Nonuniform collocation of losses in the windings, dependent upon the leakage flux, creates the danger of local overheatings in large transformers.

In the paper, the influence of this nonuniformity on the course of heating of the windings at a service short circuit — their thermal conductivity being taken into account, and in consequence on the permissible duration of the short-circuit is analysed. The discussion and the conclusions are based on the results of calculations carried out for the typical windings of medium and high capacity transformers.

M. KOZŁOWSKI

EINFLUSS UNGLEICHMÄSSIGER VERTEILUNG DER VERLUSTE IN AXIALER RICHTUNG AUF DIE ERWÄRMUNG DER TRANSFORMATOREN Wicklungen BEIM KURZSCHLUSS

Zusammenfassung

Ungleichmässige Verteilung der durch Streuflusswirkung hervorgerufenen Wicklungsverluste bei Grosstransformatoren, droht mit lokalen Überwärmungen.

Der Aufsatz enthält eine Analyse des zeitlichen Verlaufs der Wicklungsübertemperatur beim Kurzschluss unter Berücksichtigung der Wicklungswärmeleitfähigkeit und ungleichmässiger Verteilung der Verluste in axialer Richtung und demzufolge zulässiger Kurzschlussdauer. Den Überlegungen und Folgerungen liegen Berechnungsergebnisse für typische Wicklungen von Transformatoren mittlerer und grosser Leistung zugrunde.

М. КОЗЛОВСКИ

ВЛИЯНИЕ ОСЕВОЙ НЕРАВНОМЕРНОСТИ В РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОТЕРЬ НА НАГРЕВ ОБМОТОК ТРАНСФОРМАТОРА ПРИ КОРОТКОМ ЗАМЫКАНИИ

Резюме

В больших трансформаторах неравномерное распределение потерь в обмотках, обусловленное потоком рассеяния, создаёт угрозу появления местных перегревов.

В данной работе представлен анализ влияния этой неравномерности на характер нагрева обмоток в случае короткого замыкания с учетом их тепловой проводимости и в итоге — на допустимое время существования короткого замыкания. Рассуждения и заключения основаны на данных расчёта, сделанных для типичных обмоток трансформаторов средних и больших мощностей.

Wpływ nasycenia na maksymalny moment silnika asynchronicznego w stanie hamowania dynamicznego

EUGENIUSZ ZAWALICH (GDAŃSK)

Politechnika Gdańska, Instytut Elektrotechniki Morskiej i Przemysłowej, Zakład Maszyn i Napędów Elektrycznych

Otrzymano 29.1.1969

W oparciu o asynchroniczną teorię hamowania dynamicznego silnika asynchronicznego wykazano, że maksymalny moment hamujący występuje przy zmiennym nasyceniu obwodu magnetycznego maszyny praktycznie w każdym przypadku wzbudzenia. Kryterium występowania momentu maksymalnego różni się od takiego kryterium przy normalnej pracy silnikowej.

Aproksymując charakterystykę reaktancyjną $X_\mu = f(I_\mu)$ silnika do funkcji wykładniczej i przeprowadzając prostą analizę matematyczną uzyskano wzór (46) pozwalający wyznaczyć krytyczny prąd magnesujący, który jest podstawą do obliczenia maksymalnego momentu hamującego dla dowolnej wartości prądu wzbudzenia w uzwojeniu stojana.

Podane wyniki doświadczalne są zgodne z obliczeniami analitycznymi.

1. WSTĘP

Podstawą do analizy stanu hamowania dynamicznego silnika asynchronicznego pierścieniowego może być teoria maszyn synchronicznych [2] albo indukcyjnych [3], [4]. W przypadku maszyny nienasyconej model synchroniczny stanowi lepsze przybliżenie do maszyny realnej, a w przypadku maszyny nasyconej model asynchroniczny umożliwia prostsze rozwiązanie wielu zagadnień. Model ostatni przyjęto za punkt wyjścia do dalszych rozważań.

W schemacie zastępczym silnika asynchronicznego przyjmuje się stałą reaktancję magnesowania, praktycznie stałą wartość prądu magnesującego i zależny od obciążenia prąd pobierany z sieci. W asynchronicznym schemacie zastępczym dla stanu hamowania dynamicznego należy przyjąć zmienną reaktancję magnesowania, zmienną wartość prądu magnesującego oraz stałą wartość prądu płynącego z umyślonej sieci trójfazowej. Prąd ostatni pod względem magnetycznym jest równoważny prądowi płynącemu ze źródła napięcia stałego przy odpowiednim połączeniu uzwojenia stojana [4], [5].

Zmiana prądu magnesującego wywołuje zmienne nasycenie obwodu magnetycznego maszyny. Stopień nasycenia zależy od wartości prądu równoważnego i od prędkości kątowej wirnika.

W tych warunkach nie można wykorzystać metody stosowanej w analizie normalnego stanu pracy silnikowej. Nie ma podstaw do sporządzania klasycznego wykresu kołowego

i do posługiwania się wzorem Klossa. Inne jest również kryterium występowania momentu maksymalnego. W analizie stanu hamowania zamiast poślizgu jako zmienną niezależną przyjmuje się prąd magnesujący. W obliczeniach analitycznych należy posługiwać się charakterystyką magnesowania lub charakterystyką reaktancyjną silnika [4], [7]. Kolejność obliczeń jest więc nieodwracalna.

W y k a z w a ż n i e j s z y c h o z n a c z e ń

- M — moment obrotowy w Nm,
- ω — prędkość kątowna w rad/s,
- ω_1 — prędkość kątowna synchroniczna,
- I_1 — prąd równoważny, tj. wartość skuteczna prądu fazowego, który w uzwojeniu trójfazowym wytwarza SMM o amplitudzie równej amplitudzie SMM wytworzonej prądem stałym płynącym przez odpowiednio połączone uzwojenie stojana [5], [7],
- $\nu = \frac{\omega}{\omega_1}$ — względna prędkość kątowna wirnika odniesiona do prędkości synchronicznej,
- I'_2 — prąd fazowy w obwodzie wirnika sprowadzony do obwodu stojana,
- I_μ — prąd magnesujący, który wytwarza rzeczywiste pole magnetyczne w szczelinie powietrznej,
- i'_2 — względny prąd fazowy wirnika odniesiony do prądu równoważnego I_1 ,
- i_μ — względny prąd magnesujący odniesiony do prądu równoważnego I_1 ,
- R'_2 — rezystancja w obwodzie wirnika odniesiona do obwodu stojana,
- r — rezystancja zastępcza w obwodzie wirnika odniesiona do stojana i zależna od względnej prędkości ν $\left(r = \frac{R'_2}{\nu}\right)$,
- X'_2 — reaktancja rozproszona w obwodzie wirnika sprowadzona do obwodu stojana,
- X_μ — reaktancja obwodu magnesującego (reaktancja magnesująca),
- $X = X_\mu + X'_2$ — reaktancja zwarcia w stanie hamowania dynamicznego,
- m_1 — względny moment obrotowy silnika odniesiony do kwadratu prądu równoważnego,
- $E_1 = E'_2$ — podstawowa harmoniczna SEM indukowanej w otwartym obwodzie wirnika przy prędkości synchronicznej i przy określonym prądzie stałym przepływającym w odpowiednio połączonym uzwojeniu stojana nie wytwarzającym 3-ej harmonicznej pola.

2. PODSTAWY ASYNCHRONICZNEJ TEORII HAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Na rys. 1 podany jest schemat zastępczy maszyny asynchronicznej w stanie hamowania dynamicznego. Gałąź z reaktancją X_μ jest nieliniowa i nie uwzględnia strat w stali. Ze źródła zasilania płynie prąd równoważny o stałej wartości skutecznej.

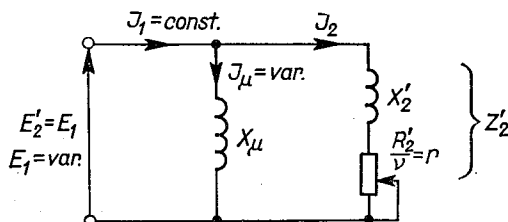
Ze schematu wynikają następujące zależności:

$$\hat{I}_\mu = \hat{I}_1 \frac{\hat{Z}'_2}{\hat{Z}'_2 + \hat{Z}_\mu}, \quad (1)$$

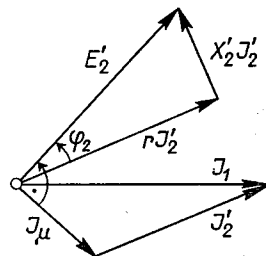
$$\hat{I}'_2 = \hat{I}_1 \frac{\hat{Z}'_\mu}{\hat{Z}'_2 + \hat{Z}_\mu}, \quad (2)$$

$$\hat{E}'_2 = \hat{I}_\mu \hat{Z}_\mu, \quad (3)$$

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_\mu + \hat{I}'_2. \quad (4)$$



Rys. 1. Schemat zastępczy asynchronicznego modelu hamowania dynamicznego



Rys. 2. Wykres wektorowy silnika w stanie hamowania dynamicznego

Przyjmując zgodnie z wykresem wektorowym na rys. 2 $I'_1 = I_1 e^{j0} = I_1$, uwzględniając relację

$$\hat{Z}'_2 = \frac{R'_2}{v} + jX'_2 = r + jX'_2, \quad (5)$$

$$\hat{Z}_\mu = jX_\mu \quad (6)$$

$$X = X_\mu + X'_2 \quad (7)$$

oraz przyjmując względne prądy

$$i_\mu = \frac{I_\mu}{I_1}; \quad i'_2 = \frac{I'_2}{I_1} \quad (8)$$

dokonyje się przekształcenia wzorów (1), (2) i (4) do następującej postaci:

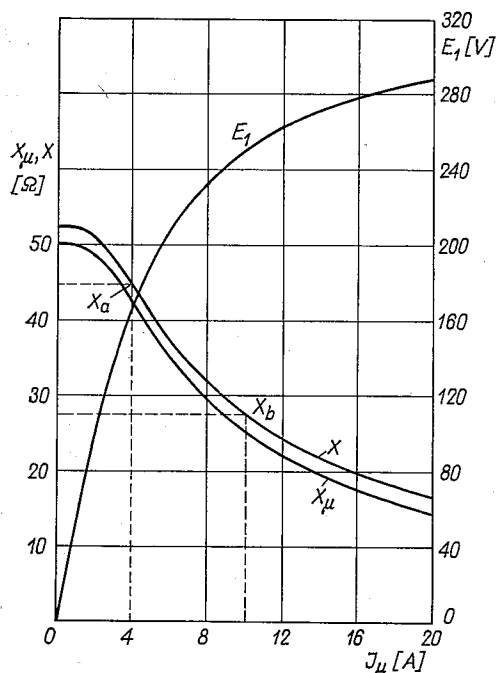
$$i_\mu = \frac{\sqrt{r^2 + (X'_2)^2}}{\sqrt{r^2 + X^2}}, \quad (9)$$

$$i'_2 = \frac{X_\mu}{\sqrt{r^2 + X^2}}, \quad (10)$$

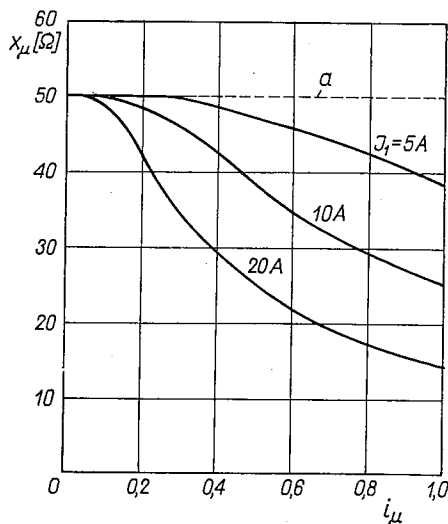
$$\hat{i}_\mu + \hat{i}'_2 = 1. \quad (11)$$

W przypadku stałej wartości X prądy określone wzorami (9) i (10) stają się funkcją tylko prędkości względnej v . W rzeczywistej maszynie nasyconej reaktancja magnesująca jest nieliniową funkcją prądu magnesującego i nie ma możliwości analitycznego wyznaczenia rozptyłu prądów dla określonej z góry wartości prędkości względnej.

W tych warunkach zagadnienie należy postawić w formie odwróconej. Za zmienną niezależną zamiast ν przyjmuje się prąd magnesujący wyrażony w wartościach bezwzględnych (I_μ) lub w wartościach względnych (i_μ). Każdej wartości prądu magnesującego odpowiada jednoznacznie określona wartość reaktancji z krzywej $X_\mu = f(I_\mu)$, którą wyznacza się z charakterystyki stanu jałowego silnika $E_1 = f(I_\mu)$ (rys. 3 i 4).



Rys. 3. Charakterystyka magnesowania oraz charakterystyka reaktancyjna silnika asynchronicznego typu SZUD 66c (4,8 kW)



Rys. 4. Względne charakterystyki reaktancyjne silnika asynchronicznego typu SZUD 66c (4,8 kW)
 α — stan nienasycony

Przyjęcie nowej zmiennej niezależnej wymaga przekształcenia wzoru (9) względem rezystancji zastępczej wirnika

$$r^2 = \frac{(Xi_\mu)^2 - (X'_2)^2}{1 - i_\mu^2}, \quad (12)$$

co umożliwia doprowadzenie wzoru (10) do postaci

$$(i'_2)^2 = \frac{1 - i_\mu^2}{\beta}, \quad (13)$$

gdzie

$$\beta = 1 + \frac{2X'_2}{X_\mu}. \quad (14)$$

Wyrażeniu (13) można nadać jeszcze inną formę

$$\frac{i_{\mu}^2}{1} + \frac{(i_2')^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{\beta}}\right)^2} = 1, \quad (15)$$

która przedstawia elipsę o małej osi $b = \sqrt{\frac{1}{\beta}}$ i o dużej osi $a = 1$.

Pomijając w pierwszym przybliżeniu reaktancję rozproszenia X_2' otrzymuje się $b = 1$, co oznacza, że elipsa przechodzi w okrąg przy dowolnym stopniu nasycenia. W tym przypadku nie ma przesunięcia fazowego w obwodzie wirnika i prąd wtórny jest w kwadraturze z prądem magnesującym (rys. 2). O ile miejscem geometrycznym końca wskazów prądu wirnika jest okrąg, o tyle miejscem geometrycznym końca wskazów E_2' jest krzywa odbiegająca od okręgu, co zatracą praktyczne znaczenie takich wykresów kołowych.

Moment elektromagnetyczny w stanie hamowania dynamicznego silnika w odniesieniu do kwadratu prądu równoważnego wyznacza się ze schematu zastępczego

$$m_1 = \frac{M}{I_1^2} = \frac{3}{\omega_1} r (i_2')^2, \quad (16)$$

zaś prędkość względną dla zadanej rezystancji w obwodzie wirnika — ze wzoru

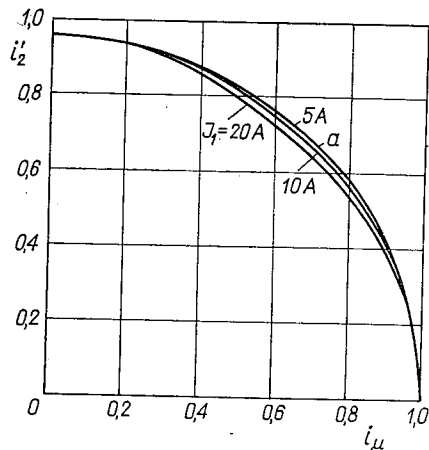
$$v = \frac{R_2'}{r}. \quad (17)$$

Posługując się powyższymi wzorami wykonano obliczenia dla silnika typu SZUD 66c o następujących danych znamionowych: $P = 4,8 \text{ kW}$, $n = 955 \text{ obr./min.}$, $U_1 = 220/380 \text{ V}$, $I_1 = 19,8/11,4 \text{ A}$, $\cos \varphi = 0,77$, $U_2 = 125 \text{ V}$, $I_2 = 26 \text{ A}$. Na podstawie pomiarów wyznaczono reaktancję wirnika $X_2' = 2,3 \Omega$ oraz charakterystykę magnesowania $E_1 = f(I_{\mu})$, z której obliczono zgodnie ze wzorem (3) charakterystykę reaktancyjną dla bezwzględnej wartości $X_{\mu} = f(I_{\mu})$ (rys. 3) oraz dla względnej wartości $X_{\mu} = f(i_{\mu})$ (rys. 4) prądu magnesującego.

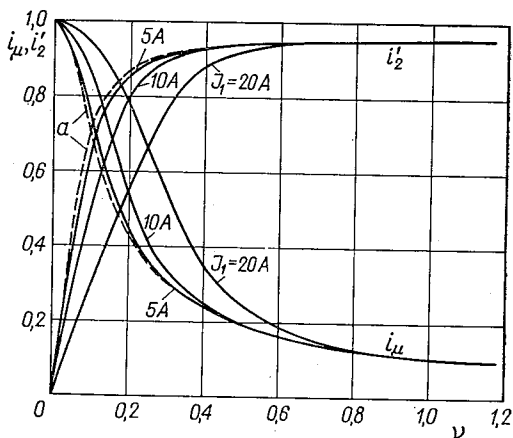
Na podstawie wzorów (12), (13) i (16) wyznaczono $i_2' = f(i_{\mu})$ oraz $m_1 = f(i_{\mu})$ dla kilku wartości prądu równoważnego (rys. 5 i 7). Następnie dla przyjętej dowolnie całkowitej rezystancji (łącznie z dodatkową) w obwodzie wirnika $R_2' = 5 \Omega$ wyznaczono ze wzoru (17) względną prędkość kątową, co pozwoliło wyznaczyć charakterystyki prądowe $i_2' = f(v)$, $i_{\mu} = f(v)$ oraz charakterystykę mechaniczną $m_1 = f(v)$ (rys. 6 i 8). Dla porównania podano również charakterystyki dla stanu nienasyconego maszyny.

Z podanych wykresów jasno wynika, że moment maksymalny występuje tylko w przedziale zmiennego nasycenia maszyny. W odróżnieniu od normalnego stanu pracy silnikowej ze wzrostem nasycenia i przy stałej rezystancji wirnika maleje względny moment maksymalny, a jednocześnie narasta odpowiadająca mu prędkość krytyczna. Na stopień nasycenia ma wpływ nie tylko prędkość kątowa (rys. 8), lecz również prąd równoważny (rys. 4).

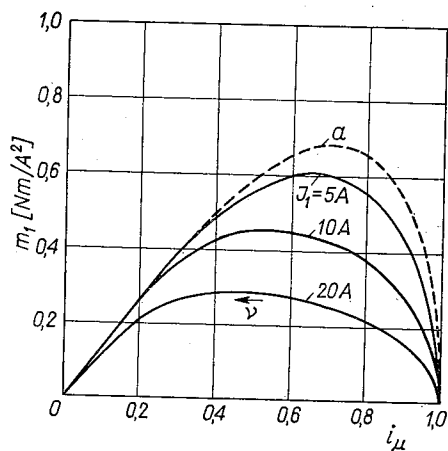
W praktyce dźwigowej hamowanie dynamiczne ma zastosowanie przy niskich prędkościach dostawczych, gdzie należy się liczyć z dużym stopniem nasycenia i to tym większym, im większy jest prąd równoważny. Przy prądzie równoważnym większym od prądu znamionowego moment maksymalny skutek nasycenia może zmniejszyć się do 50÷60% w odniesieniu do stanu nienasyconego. Wniosek taki wynika z rys. 8.



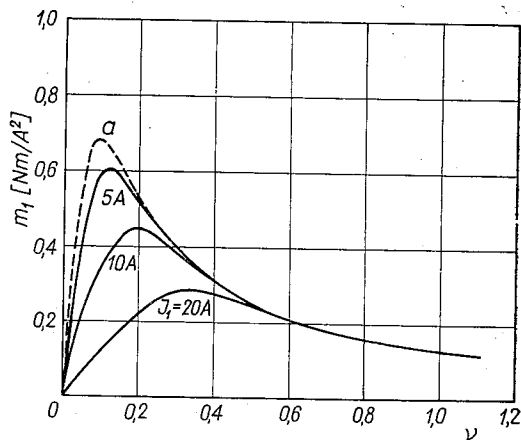
Rys. 5. Zależność prądu względnego w wirniku od prądu magnesującego w stanie hamowania dynamicznego, a — stan nienasycony



Rys. 6. Zależność prądu wirnika i prądu magnesującego od prędkości względnej przy zmiennym stopniu nasycenia i przy rezystancji wirnika $R'_2 = 5\Omega$, a — stan nienasycony



Rys. 7. Zależność względnego momentu od prądu magnesującego przy zmiennym stopniu nasycenia, a — stan nienasycony



Rys. 8. Zależność względnego momentu od prędkości względnej przy zmiennym stopniu nasycenia i przy rezystancji wirnika $R'_2 = 5\Omega$, a — stan nienasycony

W tych warunkach znane z klasycznej teorii silników asynchronicznych kryterium występowania momentu maksymalnego i prędkości krytycznej w zastosowaniu do hamowania dynamicznego prowadzi do poważnych rozbieżności między wynikami doświadczalnymi i obliczeniowymi.

3. KRYTERIUM STULNIKOWA

Przy niskich prędkościach kątowych reaktancja wirnika jest względnie mała w porównaniu do rezystancji zastępczej i z dużym przybliżeniem można przyjąć, że prąd wirnika jest prądem czynnym ($\cos \varphi_2 \cong 1$). Na podstawie schematu zastępczego na rys. 1 moment

elektromagnetyczny przy hamowaniu dynamicznym można wyrazić wzorem

$$M = \frac{3}{\omega_1} E'_2 I'_2 = \frac{3}{\omega_1} E_1 I'_2. \quad (18)$$

Traktując E_1 oraz I'_2 jako funkcje prądu magnesującego szuka się ekstremum iloczynu tych funkcji

$$\frac{dM}{dI_\mu} = \frac{3}{\omega_1} \left(I'_2 \frac{dE_1}{dI_\mu} + E_1 \frac{dI'_2}{dI_\mu} \right) = 0. \quad (19)$$

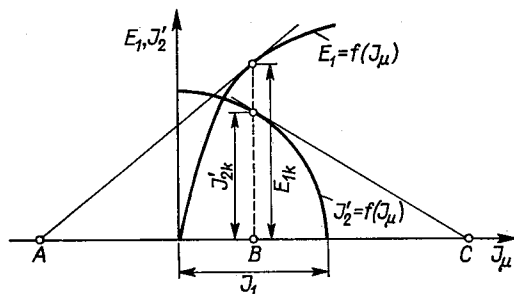
Oznaczając przez E_{1k} , I'_{2k} , $I_{\mu k}$ krytyczne wartości odpowiadające momentowi maksymalnemu i przekształcając odpowiednio równanie (19) otrzymuje się podstawowe kryterium Stulnikowa

$$\frac{E_{1k}}{\left(\frac{dE_1}{dI_\mu} \right)_{I_\mu=I_{\mu k}}} = - \frac{I'_{2k}}{\left(\frac{dI'_2}{dI_\mu} \right)_{I_\mu=I_{\mu k}}}. \quad (20)$$

Stosunek funkcji do swej pochodnej przedstawia podstyczną w danym punkcie. Funkcja $E_1 = f(I_\mu)$ jest charakterystyką magnesowania silnika, zaś funkcja $I'_2 = f(I_\mu)$ przy $X'_2 = 0$ przedstawia okrąg o promieniu I_1 (wzór 15).

Zatem moment maksymalny przy zmiennym nasyceniu występuje przy takiej wartości prądu magnesującego, przy której zachodzi równość podstycznych rozpatrywanych funkcji. Na rys. 9 odpowiada to równości odcinków AB i BC .

Do wyznaczenia punktów krytycznych można zastosować metodę wykreślną albo drogą kolejnych przybliżeń, albo według konstrukcji opracowanej przez Stulnikowa. Wadą



Rys. 9. Graficzne przedstawienie kryterium Stulnikowa

tej metody jest brak ogólnego rozwiązania. Dla każdej wartości prądu równoważnego konstrukcja graficzna musi być powtórzona, przyjmując z góry szacunkowy przedział występowania wartości krytycznej prądu magnesującego $0,5 < i_{\mu k} < 0,7$, przy czym wartość wyższa odpowiada stanowi nienasyconemu [3].

4. METODA APROKSYMACYJNA

Moment elektromagnetyczny przy hamowaniu dynamicznym określony wzorem (16) można przedstawić jako funkcję prądu magnesującego. W tym celu wprowadza się do wzoru wyrażenie (13) oraz wyrażenie (12) w uproszczonej formie

$$r = \frac{X i_\mu}{\sqrt{1 - i_\mu^2}}. \quad (21)$$

Uproszczenie wynika z założenia, że $(Xi_\mu)^2 \gg X_2'^2$. Doświadczenie wskazuje, że prąd magnesujący odpowiadający momentowi maksymalnemu nie przekracza przedziału $0,3 < i_{\mu k} < 0,7$ [3], w którym powyższy warunek jest spełniony. W wyniku przekształcenia wzór (16) przyjmuje postać

$$m_1 = \frac{3}{\omega_1} \frac{1}{\beta} Xi_\mu \sqrt{1 - i_\mu^2}. \quad (22)$$

Występujące we wzorze wyrażenie β , określone relacją (14) zmienia się nieznacznie ze zmianą prądu i_μ i z tej przyczyny przyjęto uważać je za stały parametr. Wobec tego o wartości krytycznej $i_{\mu k}$, której odpowiada maksymalny moment m_{1k} , decyduje funkcja

$$f(i_\mu) = Xi_\mu \sqrt{1 - i_\mu^2}, \quad (23)$$

gdzie $X = f(i_\mu)$ jest charakterystyką reaktancyjną przesuniętą o stałą wartość reaktancji wirnika X_2' (rys. 3). Przebieg tej charakterystyki można aproksymować do przebiegu funkcji zastępczej. Postanowiono wprowadzić tu funkcję wykładniczą określoną wzorem

$$X = X_a e^{-B_\mu(I_\mu - I_{\mu a})}, \quad (24)$$

który po podstawieniu $b_\mu = B_\mu I_1$ sprowadza się do postaci

$$X = X_a e^{-b_\mu(i_\mu - i_{\mu a})}. \quad (25)$$

Współczynnik B_μ można wyznaczyć z dwóch obranych punktów na charakterystyce reaktancyjnej w przedziale największego nachylenia. Wprowadzając współrzędne tych punktów do wzoru (24) i dokonując przekształcenia uzyskuje się wyrażenie

$$B_\mu = \frac{\ln \frac{X_a}{X_b}}{I_{\mu b} - I_{\mu a}}, \quad (26)$$

w którym przyjęto oznaczenia zgodnie z rys. 3.

Rozpatrywana funkcja (23) po uwzględnieniu (25) sprowadza się do postaci

$$f(i_\mu) = X_a i_\mu \sqrt{1 - i_\mu^2} e^{-b_\mu(i_\mu - i_{\mu a})}, \quad (27)$$

która stanowi iloczyn trzech składowych funkcji jednej zmiennej. Po wyznaczeniu pochodnej funkcji (27), przyrównaniu jej do zera i po dokonaniu prostych przekształceń algebraicznych (załącznik 1), uzyskuje się równanie trzeciego stopnia

$$i_\mu^3 - \frac{2}{b_\mu} i_\mu^2 - i_\mu + \frac{1}{b_\mu} = 0, \quad (28)$$

które przez wprowadzenie oznaczeń

$$A = \frac{2}{b_\mu}, \quad B = 1, \quad C = \frac{1}{b_\mu} \quad (29)$$

przekształca się do równania

$$i_\mu^3 - Ai_\mu^2 - Bi_\mu + C = 0. \quad (30)$$

Istnieje możliwość rozwiązania równania (30) metodą wykreślną lub analityczną. W tym drugim przypadku wykorzystuje się wzory Cardano po uprzednim sprowadzeniu do równania rozwiązującego [1]

$$y + py + q = 0, \quad (31)$$

które otrzymuje się z równania (30) po podstawieniu

$$i_\mu = y + \frac{A}{3}. \quad (32)$$

W wyniku przekształcenia (załącznik 2) dochodzi się do współczynników o następującej postaci:

$$p = -\frac{A^2}{3} - B = -\frac{A^2 + 3}{3}, \quad (33)$$

$$q = -\frac{2A^3}{27} - \frac{AB}{3} + \frac{A}{2} = -\frac{2A^3 - 4,5A}{27}. \quad (34)$$

Wyróżnikiem równania (31) jest wyrażenie

$$\Delta = 4D = 4 \left[\left(\frac{q}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{3} \right)^3 \right]. \quad (35)$$

Pierwiastki zależą od znaku wyróżnika. Można dowieść (załącznik 3), że dla każdej wartości parametru A wyróżnik przyjmuje zawsze wartość ujemną. Występuje tu więc tzw. „casus inreducibilis” [1], dla którego pierwiastki równania (31) są rzeczywiste i określone wzorami:

$$y_1 = G \cos \frac{\vartheta}{3}, \quad (36a)$$

$$y_2 = G \cos \left(\frac{\vartheta}{3} + 120^\circ \right), \quad (36b)$$

$$y_3 = G \cos \left(\frac{\vartheta}{3} + 240^\circ \right), \quad (36c)$$

gdzie

$$G = 2 \sqrt{-\frac{p}{3}} = \frac{2}{3} \sqrt{A^2 + 3}, \quad (37)$$

$$\cos \vartheta = -\frac{q}{2 \left(\frac{G}{2} \right)^3} = \frac{A(A^2 - 2,25)}{(\sqrt{A^2 + 3})^3}. \quad (38)$$

Spośród trzech pierwiastków (36) należy wybrać taki, który odpowiada warunkowi

$$0 < i_{\mu k} < 1, \quad (39)$$

czyli zgodnie z (32)

$$0 < y_k + \frac{A}{3} < 1. \quad (40)$$

Podstawiając $y_k = y_1$ i uwzględniając (36a) oraz (37) dochodzi się do dwóch nierówności jednocześnie

$$\cos \frac{\vartheta}{3} > N_0 \quad \text{oraz} \quad \cos \frac{\vartheta}{3} < N_1, \quad (41)$$

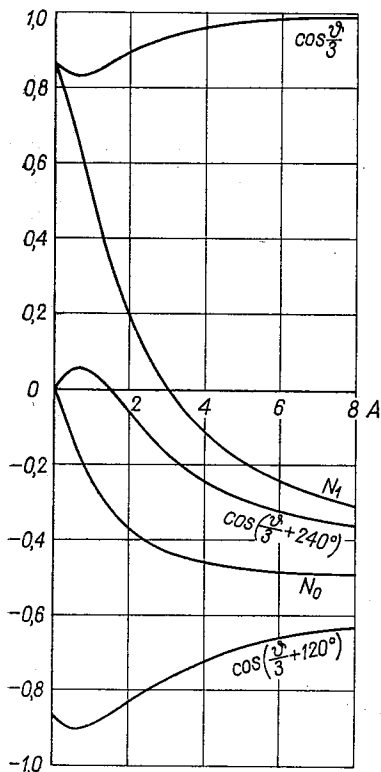
gdzie

$$N_0 = \frac{-A}{2\sqrt{A^2+3}}, \quad N_1 = \frac{3-A}{2\sqrt{A^2+3}}. \quad (42)$$

Podobne nierówności można wyprowadzić dla pozostałych dwóch pierwiastków

$$\cos\left(\frac{\vartheta}{3} + 120^\circ\right) > N_0 \quad \text{oraz} \quad \cos\left(\frac{\vartheta}{3} + 120^\circ\right) < N_1, \quad (43)$$

$$\cos\left(\frac{\vartheta}{3} + 240^\circ\right) > N_0 \quad \text{oraz} \quad \cos\left(\frac{\vartheta}{3} + 240^\circ\right) < N_1. \quad (44)$$



Rys. 10. Graficzne rozwiązanie nierówności (41), (43) i (44)

Obie strony nierówności (41), (43) i (44) można traktować jako funkcje parametru A , co potwierdzają zależności (38) i (42). Wykreślne przedstawienie tych funkcji na rys. 10 umożliwia rozwiązanie rozpatrywanych nierówności. Wyniki rozwiązania podano w tablicy 1.

Tablica 1

Zestawienie wyników rozwiązania nierówności (41), (43) i (44)

Lp	Granica dolna		Granica górna	
1	$N_0 < \cos \frac{\vartheta}{3}$	spełniona	$\cos \frac{\vartheta}{3} < N_1$	sprzeczna
2	$N_0 < \cos \left(\frac{\vartheta}{3} + 120^\circ \right)$	sprzeczna	$\cos \left(\frac{\vartheta}{3} + 120^\circ \right) < N_1$	spełniona
3	$N_0 < \cos \left(\frac{\vartheta}{3} + 240^\circ \right)$	spełniona	$\cos \left(\frac{\vartheta}{3} + 240^\circ \right) < N_1$	spełniona

Zgodnie z warunkiem (39) należy wybrać tylko ten pierwiastek, dla którego odpowiednia para nierówności jest jednocześnie spełniona. Z tablicy 1 wynika, że wymaganiom takim odpowiada tylko trzecia para nierówności. Zatem rozwiązaniem równania (30) jest wzór

$$i_{\mu k} = \frac{A}{3} + G \cos \left(\frac{\vartheta}{3} + 240^\circ \right), \quad (45)$$

który po uproszczeniu przyjmuje postać

$$i_{\mu k} = \frac{A}{3} + G \sin \left(\frac{\vartheta}{3} - 30^\circ \right), \quad (46)$$

przy czym z poprzednich rozważań wiadomo, że

$$\begin{aligned} G &= \frac{2}{3} \sqrt{A^2 + 3}, \\ \cos \vartheta &= \frac{A(A^2 - 2,25)}{(\sqrt{A^2 + 3})^3}, \\ A &= \frac{2}{b_\mu} = \frac{2}{B_\mu I_1}. \end{aligned} \quad (47)$$

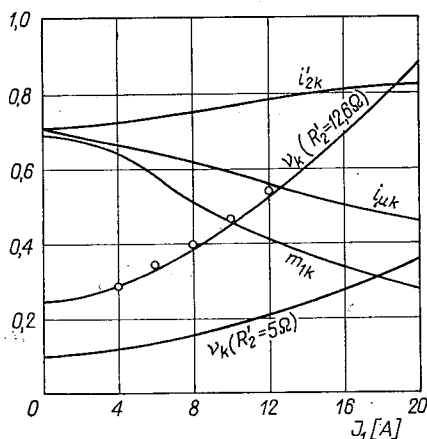
Dla dowolnej wartości prądu równoważnego I_1 , w oparciu o charakterystykę reaktancyjną silnika istnieje możliwość analitycznego wyznaczenia ze wzoru (46) wartości krytycznej prądu magnesującego $i_{\mu k}$, któremu odpowiada krytyczna wartość reaktancji X_k oraz moment maksymalny określony wzorem (22). W przedstawionej metodzie istnieje możliwość uwzględnienia reaktancji rozproszenia X'_2 , co prowadzi do zwiększenia dokładności obliczeń.

5. WYNIKI OBLICZENIOWE I DOŚWIADCZALNE

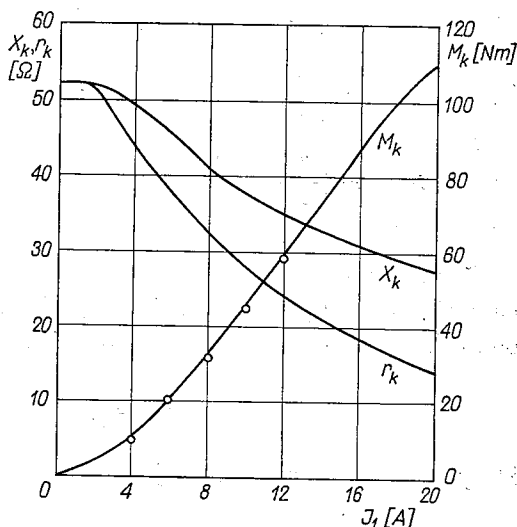
Korzystając z charakterystyki reaktancyjnej omawianego w p. 2 silnika pierścieniowego wykonano obliczenie momentu maksymalnego metodą aproksymacyjną.

Na charakterystyce (rys. 3) przyjęto dwa punkty w przedziale największego nachylenia X_a (44,8; 4) oraz X_b (27,5; 10) i wyznaczono współczynnik B_μ ze wzoru (26). Dla szeregu

wartości prądu równoważnego określono ze wzoru (47) parametr A , na podstawie którego obliczono wyrażenie G (wzór 37) oraz $\cos \vartheta$ (38), a następnie krytyczną wartość prądu magnesującego $i_{\mu k}$ ze wzoru (46). Wartość ta jest podstawą do wyznaczenia z charakterystyki reaktancyjnej krytycznej wartości X_k , β_k , które po podstawieniu do wzoru (22) pozwalają



Rys. 11. Zależność wielkości krytycznych od prądu równoważnego, o — wartości zmierzone



Rys. 12. Zależność momentu maksymalnego oraz odpowiadających mu rezystancji i reaktancji wirnika od prądu równoważnego, o — wartości zmierzone

obliczyć względny moment maksymalny m_{1k} . Bezwzględną wartość momentu maksymalnego M_k uzyskuje się mnożąc wartość względną przez kwadrat prądu równoważnego. Względną prędkość krytyczną dla określonej rezystancji wirnika R'_2 wyznaczono ze wzoru (17) po uprzednim wyliczeniu rezystancji zastępczej r_k ze wzoru (21). Wyniki obliczeń podano wykreślić na rys. 11 i 12.

Jednocześnie na tychże rysunkach naniesiono wyniki pomiarów wykonane dla tego silnika w warunkach laboratoryjnych. Prędkość obrotową mierzono ręcznym tachometrem, zaś moment obrotowy mierzono na drodze pośredniej przy pomocy wycechowanej maszyny prądu stałego. Aby uzyskać możliwość wyznaczania punktów charakterystyki mechanicznej w części niestatecznej zastosowano układ trójmaszynowy, w którym wycechowany silnik prądu stałego zasilany był z oddzielnej prądnicy o regulowanym napięciu [6].

Z wykresu podanego na rys. 11 wynika, że przy stałej rezystancji w obwodzie wirnika moment maksymalny nie występuje przy jednakowej wartości prędkości kątowej. Prędkość krytyczna jest tym większa, im większy jest prąd równoważny, przy czym zależność ta nie jest liniowa.

W stanie nienasyconym moment maksymalny występuje w chwili zrównania się wartości prądu magnesującego i prądu wirnika. Ze wzrostem nasycenia różnice w tych wartościach narastają, przy czym prąd magnesujący maleje ($i_{\mu k} < 0,7$), a prąd wirnika wzrasta ($i'_{2k} > 0,7$).

Analogiczne zjawisko można zaobserwować w odniesieniu do krytycznych wartości reaktancji zwarciowej X_k i rezystancji zastępczej r_k (rys. 12). W stanie nienasyconym krytyczne wartości są sobie równe, tzn. $X_k = r_k$. Ze wzrostem nasycenia rezystancja zastępcza maleje szybciej niż reaktancja zwarciowa, przy czym powstaje między nimi coraz większa różnica.

Względna wartość momentu maksymalnego maleje ze wzrostem prądu równoważnego. Oznacza to, że zwiększanie prądu stałego w stojanie wywołuje coraz to mniej skuteczne hamowanie w wyniku wzrastającego nasycenia. Bezwzględna wartość momentu maksymalnego w stanie nienasyconym zmienia się z kwadratem prądu równoważnego I_1 , jednakże w stanie nasyconym zależność ta przechodzi w linię prostą, a nawet odbiega od niej przy nadmiernym wzbudzeniu.

6. WNIOSKI

Kryterium występowania momentu maksymalnego przy normalnej pracy silnikowej maszyny asynchronicznej nie może być stosowana w analizie stanu hamowania dynamicznego z powodu występowania zmiennego nasycenia obwodu magnetycznego.

Kryterium Stulnikowa uwzględnia nasycenie i daje podstawę do metody wykreślnej, lecz pomija reaktancję rozproszenia wirnika.

Aproksymacja charakterystyki reaktancyjnej do funkcji wykładniczej w przedziale największej zmiany nasycenia pozwala wyznaczyć moment maksymalny oraz odpowiadające mu wartości krytyczne prądów, reaktancji i rezystancji w stanie hamowania dynamicznego na drodze analitycznej z uwzględnieniem reaktancji rozproszenia wirnika.

Wyprowadzone wzory na krytyczną wartość prądu magnesującego są potwierdzeniem przyjętej na wstępie tezy i nie dają żadnych podstaw wprowadzenia analogii formalnej stanu pracy silnikowej do stanu hamowania dynamicznego maszyny asynchronicznej.

Duża zgodność wyników doświadczalnych z wynikami analitycznymi przy stosowaniu metody aproksymacji pozwala wnioskować, że metoda ta jest słuszna i możliwa do praktycznego zastosowania.

Załącznik 1

Wyprowadzenie równania (28) przebiega następująco:

Dla funkcji

$$f(i_\mu) = X_a i_\mu \sqrt{1-i_\mu^2} e^{-b_\mu(i_\mu-i_{\mu a})}$$

określa się warunek występowania ekstremum

$$\frac{df(i_\mu)}{di_\mu} = X_a \left[\sqrt{1-i_\mu^2} e^{-b_\mu(i_\mu-i_{\mu a})} - \frac{2i_\mu^2}{2\sqrt{1-i_\mu^2}} e^{-b_\mu(i_\mu-i_{\mu a})} - b_\mu i_\mu \sqrt{1-i_\mu^2} e^{-b_\mu(i_\mu-i_{\mu a})} \right] = 0$$

$$\frac{df(i_\mu)}{di_\mu} = X_a e^{-b_\mu(i_\mu-i_{\mu a})} \left[\sqrt{1-i_\mu^2} - \frac{i_\mu^2}{\sqrt{1-i_\mu^2}} - b_\mu i_\mu \sqrt{1-i_\mu^2} \right] = 0;$$

stąd

$$\sqrt{1-i_\mu^2} - \frac{i_\mu^2}{\sqrt{1-i_\mu^2}} - b_\mu i_\mu \sqrt{1-i_\mu^2} = 0.$$

Jeżeli $i_\mu \neq 0$, to

$$-b_\mu i_\mu (1 - i_\mu^2) + 1 - i_\mu^2 - i_\mu^2 = 0,$$

$$b_\mu i_\mu^3 - 2i_\mu^2 - b_\mu i_\mu + 1 = 0,$$

$$i_\mu^3 - \frac{2}{b_\mu} i_\mu^2 - i_\mu + \frac{1}{b_\mu} = 0.$$

Załącznik 2

Sprawdzenie równania (30) do równania rozwiązującego.

Zakłada się

$$i_\mu = y + \frac{A}{3},$$

i podstawia się do (30)

$$\left(y + \frac{A}{3}\right)^3 - A\left(y + \frac{A}{3}\right)^2 - B\left(y + \frac{A}{3}\right) + \frac{A}{2} = 0,$$

$$y^3 + 3\frac{A}{3}y^2 + 3\frac{A^2}{3^2}y + \frac{A^3}{27} - A\left(y^2 + 2\frac{A}{3}y + \frac{A^2}{3^2}\right) - By - \frac{AB}{3} + \frac{A}{2} = 0,$$

$$y^3 + (A - A)y^2 + \left(\frac{A^2}{3} - \frac{2}{3}A^2 - B\right)y + \left(\frac{A^3}{27} - \frac{A^3}{9} - \frac{AB}{3} + \frac{A}{2}\right) = 0;$$

stąd wynika

$$y^3 + py + q = 0,$$

gdzie

$$p = -\frac{A^2}{3} - B = -\frac{A^2 + 3}{3}, \quad (B = 1),$$

$$q = -\frac{2A^3}{27} - \frac{A}{3} + \frac{A}{2} = \frac{-2A^3 + 4,5A}{27}.$$

Załącznik 3

Badanie znaku wyróżnika (35):

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{-2A^3 + \frac{9}{2}A}{2 \cdot 27}\right)^2 - \left(\frac{A^2 + 3}{3 \cdot 3}\right)^3,$$

$$D = \left(\frac{-4A^3 + 9A}{2^2 \cdot 27}\right)^2 - \left(\frac{A^2 + 3}{3 \cdot 3}\right)^3,$$

$$D = \frac{16A^6 - 72A^4 + 81A^2}{3^6 \cdot 2^4} - \frac{A^6 + 9A^4 + 27A^2 + 27}{3^6},$$

$$D = -\frac{216A^4 + 351A^2 + 432}{3^6 \cdot 2^4};$$

$$D < 0.$$

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. Mostkowski, M. Stark, Elementy algebry wyższej, PWN, Warszawa 1958.
2. H. Weissheimer, Die Asynchronmaschine mit Gleichstrom erregt als Bremse, Archiv für Elektrotechnik, nr 8, 1934.
3. W. I. Stulnikow, Rasczet maksimalnogo momenta i kriticzeskogo skolzenija pri dinamiczeskom tormożenii asinchronnych dwigatelej, Elektricitestwo, nr 9, 1955.
4. O. I. Butler, The Effekt of Magnetic Saturation on the D. C. Dynamic Braking Characteristics of A. C. Motors. The Proc. of the Institution of Electrical Engineers, Part C, vol. 104, nr 5, s. 185, 1957.
5. E. Kosonocki, J. Manitius, L. Szklarski, W. Szwiertnia, Napędy elektryczne maszyn wyciągowych, cz. II, PWN, Kraków 1957.
6. W. P. Andrejew, Ju. A. Sabinin, Osnovy elektropriwoda, Gosenergoizdat, Moskwa 1963.
7. S. N. Wieszeniewskij, Charakteristiki dwigatelej w elektropriwode, Izdatielstwo „Energiia”, Moskwa 1966.
8. Praca zbiorowa: Technika napędu elektrycznego, t. I, WNT, 1968.

E. ZAWALICH

THE INFLUENCE OF MAGNETIC SATURATION ON THE MAXIMUM TORQUE OF ASYNCHRONOUS MOTORS AT THE DYNAMIC BRAKING CONDITION

Summary

On the grounds of the asynchronous theory of dynamic braking it has been proved that the maximum torque occurs at the variable magnetic saturation in practical cases of d.c. excitation in a stator. The criterion of the maximum torque occurrence in a saturated machine differs essentially from the criterion at normal motor operation. Graphical methods of determining the maximum torque are complicated [2], [3] and the attempts to apply an analytical method are not numerous [4].

An approximation of the reactance curve $X_\mu = f(I_\mu)$ to the exponential function has been applied in this article and the braking torque depending on one variable independent has been presented.

As a result of further analysis an algebraic equation of third degree relative to the magnetizing current has been obtained. As the solution of the equation the formula (46) may be considered. It permits to determine a breakdown magnetizing current which is the basis for the calculation of the maximum braking torque from the dependences that are generally known [6], [7], [8].

At the end the results of analytical and experimental calculations are given and correspondent conclusions are drawn.

E. ZAWALICH

INFLUENCE DE LA SATURATION MAGNÉTIQUE SUR LE COUPLE MAXIMAL DE FREINAGE D'UN MOTEUR ASYNCHRONE EN FREINAGE PAR INJECTION DE COURANT CONTINU

Résumé

Le couple maximal de freinage est atteint dans un moteur saturé en freinage par injection de courant continu dans des conditions essentiellement différentes de celles que l'on rencontre en cas de fonctionnement normal du moteur. Les méthodes graphiques de détermination du couple maximal sont compliquées [2], [3], mais les tentatives d'application d'une méthode analytique sont restées très peu nombreuses [4].

Dans le présent article on prend comme approximation de la courbe caractéristique de la réactance inductive du moteur $X_\mu = f(I_\mu)$ une fonction exponentielle et l'on donne la valeur du couple de freinage en fonction d'une seule variable indépendante. Au terme de l'analyse on obtient une équation algébrique du troisième degré en I_μ . La solution de l'équation est l'expression (46), qui permet de déterminer le courant

magnétisant critique, lequel sert de base au calcul du couple maximal de freinage à partir des formules généralement connues [6], [7], [8] pour une valeur quelconque du courant d'excitation dans le stator.

On donne en terminant les résultats des calculs analytiques et expérimentaux et on en tire les conclusions correspondantes.

E. ZAWALICH

DER EINFLUSS DER MAGNETISCHEN SÄTTIGUNG AUF DAS BREMSKIPPMOMENT BEI DER GLEICHSTROMBREMSUNG DES ASYNCHRONMOTORS

Zusammenfassung

Das Kriterium des Auftretens des Bremskippmoments bei der Sättigung des Motors im Stande des Gleichstrombremsung unterscheidet sich grundsätzlich vom Kriterium beim normalen Motorbetrieb. Graphische Methoden der Bezeichnung des Bremskippmoments sind kompliziert [2, 3] und die Proben der Anwendung der analytischen Methode sind nicht zahlreich [4].

In dieser Arbeit wurde eine Approximation der Reaktanzkennlinien des Motors $X_\mu = f(I_\mu)$ zur e -Funktion angewandt und das Bremsmoment abhängig von einer variablen Unveränderlichen vorgestellt.

Im Ergebnis der durchgeführten Analyse wurde eine algebraische Gleichung dritten Grades mit Rücksicht auf Magnetisierungsstrom erhalten. Als Lösung der Gleichung gilt die Formel (46), die der Grund zur Berechnung des Bremskippmoments von allgemein bekannten Abhängigkeiten [6, 7, 8] für beliebigen Wert des Ständererregungsstroms ist.

Endlich wurden die Ergebnisse der analytischen und experimentellen Berechnungen gegeben und entsprechende Schlüsse gezogen.

Э. ЗАВАЛИХ

ВЛИЯНИЕ НАСЫЩЕНИЯ НА МАКСИМАЛЬНЫЙ МОМЕНТ АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ В РЕЖИМЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ТОРМОЖЕНИЯ

Резюме

На основе асинхронной теории режима динамического торможения асинхронной машины показано, что максимальный момент торможения находится при изменяющей степени насыщения магнитной цепи. Это наблюдается практически при довольноном значении тока возбуждения в статоре выше, чем ток холостого хода двигателя. Критерий достижения максимального значения момента отличается значительно от критерия при нормальном двигательном режиме. Аналитическое определение максимального момента в насыщенной машине невозможно без учета дополнительной предпосылки [4].

В работе было введено приближение реактанционной характеристики $X_\mu = f(I_\mu)$ двигателя к показательной функции, что позволило представить выражение тормозного момента в виде зависимости от одной переменной, которая является намагничивающим током. Подробный анализ позволяет получить алгебраическое уравнение третьего порядка относительно I_μ . Решением того уравнения является формула (46), из которой можно вычислить критический намагничивающий ток для произвольного значения постоянного тока возбуждения в статоре (эквивалентного тока).

Далее пользуясь общеизвестными формулами [6, 7, 8] можно найти значение максимального момента и других критических величин.

Излагаемый метод позволяет учесть влияние реактанции ротора на максимальный момент торможения.

Представленные экспериментальные результаты (рис. 11, 12) сходны с результатами аналитического расчёта.

Wyznaczanie koncentracji stanów powierzchniowych na powierzchni granicznej półprzewodnik-dielektryk metodą pomiaru pojemności struktury M-D-P z uwzględnieniem pułapek w warstwie półprzewodnika

MICHAŁ BIAŁKO (GDAŃSK)

Katedra Układów Elektronicznych Politechniki Gdańskiej

ZBIGNIEW WIERZBICKI (TORUŃ)

Przemysłowy Instytut Elektroniki, Oddział w Toruniu

Otrzymano 25.5.1969

W pracy otrzymano wzory, które mogą być stosowane do obliczania koncentracji stanów powierzchniowych na powierzchni granicznej półprzewodnik-dielektryk w strukturze M-D-P z uwzględnieniem pułapek w warstwie półprzewodnika. W szczególności wzory te mogą być użyte do wyznaczania koncentracji stanów powierzchniowych na powierzchni granicznej struktur CdSe-SiO_x stosowanych w polowych tranzystorach cienkowarstwowych.

1. WSTĘP

Badania cienkich warstw półprzewodnikowych związków $A_{II}B_{VI}$ (CdSe , CdS , HgS itd.), a zwłaszcza ich własności elektrycznych, rozwijają się coraz bardziej ze względu na zastosowanie tych warstw w mikroelektronicznych elementach czynnych [1, 2]. Z powodu względnie małej koncentracji stanów powierzchniowych na powierzchni dielektryk-półprzewodnik typu $A_{II}B_{VI}$, co jest jednym z czynników zapewniających efektywną modulację przewodności kanału przy pomocy napięcia bramki, możliwe jest wykorzystanie tych warstw w polowych tranzystorach cienkowarstwowych. Stany powierzchniowe mają wpływ na niemalże wszystkie parametry i charakterystyki polowych tranzystorów, ponieważ ich obecność powoduje zagięcie pasm energetycznych przy powierzchni półprzewodnika, a tym samym zmianę koncentracji nośników. Wiedza o stanach powierzchniowych i ich oddziaływaniu na zagięcie pasm energetycznych przy powierzchni granicznej półprzewodnik-dielektryk ma duże znaczenie dla dokładnej interpretacji eksperymentalnych charakterystyk polowych tranzystorów cienkowarstwowych, a także własności objętościowych warstwy półprzewodnikowej.

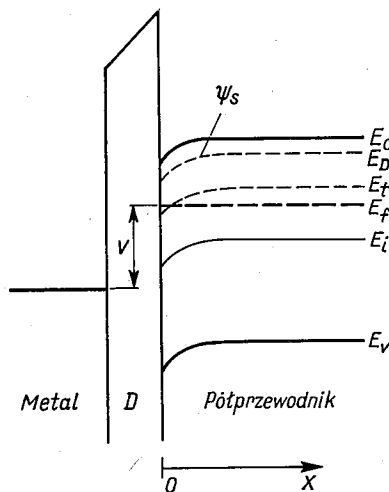
Podstawową metodą badania stanów powierzchniowych jest metoda pomiaru charakterystyk C-V struktury metal-dielektryk-półprzewodnik [3, 4, 5]. Istniejąca teoria wyznaczania koncentracji stanów powierzchniowych i ich rozkładu energetycznego [6, 7] pozwala określić koncentrację stanów powierzchniowych na powierzchni granicznej dielektryk-półprzewodnik dla takich półprzewodników jak Si i Ge w postaci monokrystalicznej.

W tego rodzaju półprzewodnikach koncentracja pułapek jest zwykle tak mała ($N_t = 10^8 \div 10^{11} \text{ cm}^{-3}$), że nie wpływa na koncentrację nośników większościowych. Z drugiej strony wiadomo, że w półprzewodnikach typu $A_{III}B_{VI}$ koncentracja pułapek N_t może dochodzić do $10^{14} \div 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, a w warstwach polikrystalicznych otrzymanych metodą termicznego naparowywania w próżni może być o kilka rzędów większa. Wobec tego wpływu pułapkowania nośników nie można zaniedbywać, ponieważ procesy pułapkowania mogą określać własności elementów czynnych skonstruowanych z zastosowaniem takich warstw [8, 9]. W szczególności do obliczania koncentracji stanów powierzchniowych na powierzchni dielektryk-półprzewodnik struktury M-D-P, w której półprzewodnik stanowi warstwa CdSe lub CdS, powinny być użyte wzory, które uwzględniałyby obecność pułapek w warstwie półprzewodnika. Wzory takie są podane w niniejszej pracy.

2. OKREŚLANIE KONCENTRACJI STANÓW POWIERZCHNIOWYCH NA POWIERZCHNI GRANICZNEJ DIELEKTRYK-PÓŁPRZEWODNIK METODĄ POMIARU POJEMNOŚCI STRUKTURY M-D-P Z UWZGLĘDNIENIEM PUŁAPEK W WARSTWIE PÓŁPRZEWODNIKA

F. P. Heiman i G. Warfield [6] wyprowadzili wzory, na podstawie których można obliczyć koncentrację stanów powierzchniowych i ich rozkład energetyczny w pasmie zabronionym półprzewodnika typu p bez pułapek. Poniżej zostaną wyprowadzone wzory z uwzględnieniem pułapek w warstwie półprzewodnika o koncentracji N_t , tworzących w pasmie zabronionym półprzewodnika typu n poniżej poziomu donorów, lokalny poziom o energii E_i .

Będziemy rozpatrywać strukturę M-D-P, zakładając analogiczny jej wykres pasmowy jak w [6, 7, 10], co pokazane jest na rysunku 1. Ponadto zakładamy [6, 7, 10], że: a) die-



Rys. 1. Wykres pasmowy struktury M-D-P (schematycznie)

lektryk jest doskonałym izolatorem, b) kontaktowa różnica potencjałów pomiędzy metalem i półprzewodnikiem równa się zero, c) przy zerowej wartości napięcia polaryzacji w warunkach równowagi termicznej pasma w półprzewodniku przy powierzchni są proste

(tzn. nie ma wypadkowego ładunku w stanach powierzchniowych), d) donory są całkowicie zjonizowane, e) koncentracja donorów jest dostatecznie mała, tak że półprzewodnik jest niezdegenerowany i do elektronów i dziur stosuje się statystykę Boltzmann'a.

Wyrażenie określające rozkład ładunku w półprzewodniku typu n z pułapkami ma postać:

$$\varrho(x) = q[(p-p_o)-(n+n_t-N_D)], \quad (1)$$

gdzie:

p — $p(x)$, $n = n(x)$ i $n_t = n_t(x)$,

N_D — koncentracja donorów,

p_o, n_o — koncentracje dziur i elektronów w objętości półprzewodnika,

n_t — koncentracja elektronów w pułapkach,

q — ładunek elektronu,

x — współrzędna, przy czym $x = 0$ na powierzchni granicznej dielektryk-półprzewodnik i x narasta w głąb objętości półprzewodnika.

Według Lamperta [11] wyrażenie określające rozkład pułapek zajętych przez elektrony ma następującą postać:

$$n_t(x) = n(x)N_t[n(x)+N]^{-1}, \quad (2)$$

gdzie N — stała równa koncentracji elektronów w pasmie przewodnictwa przy pokryciu się poziomu Fermiego i poziomu pułapek E_t w półprzewodniku: $N = N_c \exp(-E_t/kT)$, przy czym N_c — wypadkowa gęstość stanów w pasmie przewodnictwa półprzewodnika.

Procedura obliczania gęstości stanów powierzchniowych wymaga znalezienia wyrażenia określającego ładunek Q_{sc} w warstwie ładunku przestrzennego półprzewodnika oraz wyrażenia określającego $dV_{sc}/d\Psi_s$ w funkcji potencjału powierzchniowego [6]. V_{sc} jest zastępczym napięciem ładunku przestrzennego w półprzewodniku, a Ψ_s — potencjałem powierzchniowym charakteryzującym zagięcie pasm przy powierzchni półprzewodnika, które zależy od wartości napięcia bramki — V . Wyrażenia te znajduje się z rozwiązania równania Poissona:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = -\frac{q}{\epsilon_s}[(p-p_o)-(n+n_t-N_D)], \quad (3)$$

gdzie:

$p = p_o \exp(-q\beta\Psi)$,

$n = n_o \exp(q\beta\Psi)$,

ϵ_s — przenikalność dielektryczna półprzewodnika,

Ψ — potencjał elektrostatyczny,

$\beta = \frac{1}{kT}$,

T — temperatura w $^{\circ}\text{K}$,

k — stała Boltzmann'a.

W objętości półprzewodnika, czyli dla $x \rightarrow \infty$, potencjał i pole elektryczne są równe zeru, tzn.

$$\Psi(\infty) = 0 \quad \text{ i } \quad \left(\frac{d\Psi}{dx}\right)_{\infty} = 0. \quad (4)$$

Warunki te są spełnione i dla cienkiej warstwy półprzewodnika, jeśli w objętości półprzewodnikowej warstwy spełnione są warunki neutralności, tzn. dla warstw o grubości $x_0 \gg \lambda_s$, gdzie λ_s jest długością Debye'a¹⁾.

Dla półprzewodników z małą koncentracją pułapek wartość n_t można zaniedbać i przyjąć $n_o = N_D$. W przypadku znacznej koncentracji pułapek w półprzewodniku [11]:

$$n_o = \Theta N_D, \quad (5)$$

gdzie współczynnik pułapkowania $\Theta = N/N_t$ może być kilka rzędów mniejszy od jedności.

Pułapkowanie nośników przez pułapki powoduje zmniejszenie koncentracji elektronów w pasmie przewodnictwa (przy potencjale powierzchniowym $\Psi_s = 0$) dokładnie Θ razy. Podstawiając wielkości n, p, n_t, n_o do (3) oraz uwzględniając $N = \Theta N_t$ otrzymujemy:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = -\frac{q}{\varepsilon_s} \{p_o[-\exp(q\beta\Psi)-1] - \Theta N_D \exp(q\beta\Psi) + \\ - N_D N_t \exp(q\beta\Psi)[N_D \exp(q\beta\Psi) + N_t]^{-1} + N_D\}. \quad (6)$$

Po wymnożeniu przez $\frac{d\Psi}{dx}$ i scałkowaniu otrzymamy

$$\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2 = \frac{2N_D kT}{\varepsilon_s} \left\{ \Theta [\exp(q\beta\Psi) - 1] - q\beta\Psi + \frac{p_o}{N_D} [\exp(-q\beta\Psi) - 1 + q\beta\Psi] + \right. \\ \left. + \frac{N_t}{N_D} \ln \frac{\frac{N_D}{N_t} \exp(q\beta\Psi) + 1}{\frac{N_D}{N_t} + 1} \right\} \quad (7)$$

Z warunków granicznych (4) wynika, że stała całkowania w (7) jest równa zeru.

W celu określenia zastępczego ładunku V_{sc} należy najpierw określić zależność ładunku Q_{sc} w obszarze ładunku przestrzennego w półprzewodniku od potencjału powierzchniowego półprzewodnika. Wartość ładunku Q_{sc} otrzymuje się z prawa Gaussa:

$$Q_{sc} = \varepsilon_s E_s, \quad (8)$$

gdzie pole elektryczne E_s na powierzchni półprzewodnika

$$E_s = -\frac{d\Psi}{dx} \Big|_{\Psi=\Psi_s}. \quad (9)$$

Na podstawie (7) i (9) otrzymujemy

$$Q_{sc} = \pm \varepsilon_s \left(\frac{2N_D kT}{\varepsilon_s} \right)^{1/2} G(\Psi_s), \quad (10)$$

¹⁾ Dla warstwy o grubości porównywalnej lub mniejszej od długości Debye'a w celu dokonania analogicznych obliczeń należy rozpatrywać strukturę symetryczną M-D-P-D-M. Wtedy w punkcie $x_0/2$ otrzymamy $\Psi = \Psi_o$ i $(d\Psi/dx)_{x_0/2} = 0$, co spowoduje wprowadzenie dodatkowego parametru Ψ_o oraz przybliżonych metod rozwiązywania dla różnych wartości Ψ_o [12].

gdzie

$$G(\Psi_s) = \left\{ \Theta [\exp(q\beta\Psi_s) - 1] - q\beta\Psi_s + \frac{p_o}{N_D} [\exp(-q\beta\Psi_s) - 1 + q\beta\Psi_s] + \right. \\ \left. + \frac{N_t}{N_D} \ln \frac{\frac{N_D}{N_t} \exp(q\beta\Psi_s) + 1}{\frac{N_D}{N_t} + 1} \right\}^{1/2}. \quad (11)$$

Wprowadzając promień Debye'a

$$\lambda_s = \left(\frac{2kT\varepsilon_s}{q^2 N_D} \right)^{1/2} \quad (12)$$

otrzymamy

$$Q_{sc} = \pm 2\varepsilon_s \frac{kT}{q} \lambda_s G(\Psi_s). \quad (13)$$

Wyznaczamy zastępcze napięcie V_{sc} ładunku Q_{sc} :

$$V_{sc} = \frac{Q_{sc}}{C_D} = \pm 2 \frac{kT}{q} \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_D} \frac{W_D}{\lambda_s} G(\Psi_s), \quad (14)$$

gdzie:

$C_D = \frac{\varepsilon_D}{W_D}$ — pojemność warstwy dielektrycznej na jednostkę powierzchni,

ε_D — przenikalność dielektryczna warstwy dielektrycznej,

W_D — grubość warstwy dielektrycznej.

Różniczkowanie (14) daje:

$$\frac{dV_{sc}}{d\Psi_s} = \pm \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_D} \frac{W_D}{\lambda_s} \times \\ \times \left\{ \frac{\Theta \exp(q\beta\Psi_s) - 1 + \frac{p_o}{N_D} [\exp(-q\beta\Psi_s) - 1] + \exp(q\beta\Psi_s) \left[\frac{N_D}{N_t} \exp(q\beta\Psi_s) + 1 \right]^{-1}}{G(\Psi_s)} \right\}. \quad (15)$$

Równania (14) i (15) różnią się od analogicznych równań otrzymanych w [6] postacią funkcji $G(\Psi_s)$ i jej pochodnej. Gdy w półprzewodniku nie ma pułapek, to $\Theta \rightarrow 1$, $N_t \rightarrow 0$ i funkcja $G(\Psi_s)$ zmierza do funkcji identycznej jak w [6].

Procedura wyznaczania koncentracji stanów powierzchniowych powinna przebiegać następująco:

1. Znajdujemy wielkoczęstotliwościową charakterystykę C - V struktury M-D-P, tzn. dla każdej wartości napięcia polaryzacji V otrzymujemy daną wartość pojemności — C ;
2. Obliczamy wartości $dV_{sc}/d\Psi_s$ dla każdej wartości pojemności C , a tym samym dla każdej wartości napięcia polaryzacji — V . Wartości $dV_{sc}/d\Psi_s$ dla danej wartości pojemności struktury M-D-P można obliczyć z następującego wzoru [6, 7, 10]:

$$\frac{C}{C_D} = \frac{dV_{sc}/d\Psi_s}{1 + dV_{sc}/d\Psi_s}. \quad (16)$$

3. Wyznaczamy Ψ_s dla każdej wartości napięcia polaryzacji ze wzoru (15). Aby wyznaczyć wartości potencjału powierzchniowego odpowiadające danym wartościom napięcia polaryzacji, należy znać przedtem przenikalność dielektryczną półprzewodnika ϵ_s i dielektryka ϵ_D , a także koncentrację donorów N_D i pułapek N_t oraz wartość θ i koncentrację nośników mniejszościowych p_o . Wartości te należy wyznaczyć na podstawie oddzielnych pomiarów z wyjątkiem koncentracji nośników mniejszościowych p_o , której określenie jest trudne. We wzorze (15) zakłada się taką wartość p_o , aby przy pomocy wzorów (15) i (16) można było otrzymać krzywą $C-V$, dla której wartość pojemności minimalnej i maksymalnej byłaby zgodna z minimalną i maksymalną wartością pojemności krzywej $C-V$ pomierzonej doświadczalnie. Otrzymana w ten sposób krzywa $C-V$ jest tzw. krzywą teoretyczną struktury M-D-P przy założeniu braku stanów powierzchniowych.

4. Znając Ψ_s dla każdej wartości napięcia polaryzacji V , ze wzoru (14) można znaleźć wartości V_{sc} dla każdej wartości napięcia polaryzacji.

5. Znając wartości V, Ψ_s, V_{sc} można obliczyć zastępcze napięcie ładunku stanów powierzchniowych V_{ss} dla każdej wartości potencjału powierzchniowego Ψ_s . Napięcie to obliczamy ze wzoru [6, 7, 10]

$$V = \Psi_s + V_{ss} + V_{sc}. \quad (17)$$

6. Wykreślamy funkcję $V_{ss} = f(\Psi_s)$.

7. Znajdujemy nachylenie krzywej $V_{ss} = f(\Psi_s)$:

$$\frac{dV_{ss}}{d\Psi_s} = \frac{1}{C_D} \frac{dQ_{ss}}{d\Psi_s} = \frac{q}{C_D} \frac{dN_{ss}}{d\Psi_s} = \frac{q}{C_D} \eta_{ss}, \quad (18)$$

gdzie:

$V_{ss} = \frac{Q_{ss}}{C_D}$ (Q_{ss} jest ładunkiem stanów powierzchniowych w jednostkach C/cm²),

$N_{ss} = \frac{Q_{ss}}{q}$ jest gęstością stanów powierzchniowych w jednostkach cm⁻², a

η_{ss} jest gęstością stanów powierzchniowych w jednostkach cm⁻² eV⁻¹.

Dla określenia gęstości stanów powierzchniowych w funkcji potencjału powierzchniowego należy dokonać obliczeń dla wielu wartości napięcia polaryzacji. Obliczenia można ułatwić wykorzystując do tego celu matematyczną maszynę cyfrową.

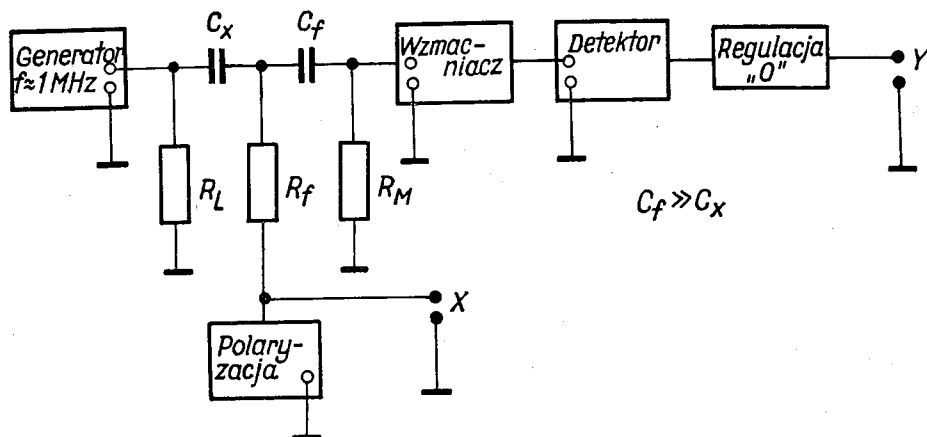
3. POMIAR POJEMNOŚCI STRUKTURY M-D-P

Procedura obliczania koncentracji stanów powierzchniowych wymaga znalezienia wielkoczęstotliwościowej charakterystyki $C-V$ struktury M-D-P.

Doświadczalną wielkoczęstotliwościową charakterystykę $C-V$ struktury M-D-P można bardzo łatwo otrzymać poprzez pomiar pojemności małym sygnałem dla różnych wartości napięcia polaryzacji, przy pomocy mostka do pomiaru pojemności. Jest to metoda pomiaru „punkt po punkcie”, która — jak wiadomo — jest bardzo dokładna, lecz uciążliwa i pracochłonna, a przy często zdarzającej się histerezie charakterystyki $C-V$ sprawia wiele trudności.

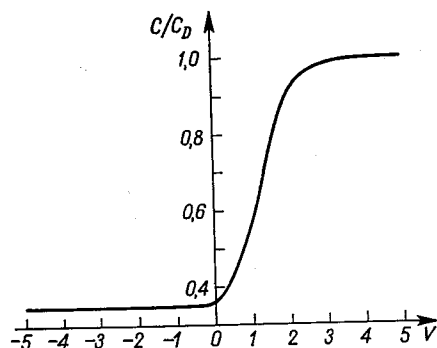
Bardzo korzystna jest znana metoda pomiaru pojemności oparta na pomiarze spadku napięcia na małej oporności wzorcowej połączonej szeregowo z badaną pojemnością [13, 10].

Typowy schemat blokowy miernika charakterystyk $C-V$ jest przedstawiony na rys. 2. Napięcie polaryzacji jest przykładane poprzez filtr R_f , C_f do mierzonej pojemności C_x . R_L jest opornością wyjściową generatora sygnału w.cz. o niewielkiej amplitudzie (np. $f = 1$ MHz, $U = 10$ mV), R_M — jest opornością pomiarową. Napięcie z oporności pomiarowej R_M , którą zazwyczaj stanowi oporność wejściowa tranzystorowego stopnia



Rys. 2. Schemat blokowy miernika charakterystyk $C-V$

wzmacniacza w układzie ze wspólną bazą, podlega wzmocnieniu a następnie detekcji. Wzmacniacz tranzystorowy sygnału jest bardzo prosty, natomiast detektor — ze względu na wymaganą liniową charakterystykę — wykonuje się zwykle na dwu dobranych diodach Zenera o bardzo małej pojemności (np. diody Zenera typu 1N714). Regulator zera służy do skompensowania średniej wartości napięcia szumów pojawiających się na wyjściu miernika. Miernik pozwala na polaryzowanie badanej pojemności napięciem stałym oraz napięciem trójkątnym, co umożliwia dokonanie zapisu charakterystyki $C-V$ bezpośrednio na rejestratorze $X-Y$ lub też dokonywanie pomiarów punkt po punkcie, jeśli na wyjściu przyrządu podłączymy woltomierz lampowy.



Rys. 3. Typowa charakterystyka $C-V$ struktury $\text{Al-SiO}_x\text{-CdSe-Au}$

Typowa charakterystyka $C-V$ struktury $\text{Al-SiO}_x\text{-CdSe-Au}$ pomierzona przy pomocy sygnału pomiarowego o częstotliwości $f = 1,5$ MHz oraz amplitudzie $U = 10$ mV jest przedstawiona na rys. 3. Charakterystyka przedstawia zależność stosunku pojemności

C struktury M-D-P do pojemności dielektryka C_D od napięcia polaryzacji — V . C_D jest pojemnością maksymalną struktury M-D-P. Dwuznaczność charakterystyki $C-V$ powodowaną jej histerezą ominięto poprzez dokonanie pomiaru dla jednego kierunku zmian napięcia polaryzacji.

Uchyb pomiaru pojemności przy pomocy opisanego miernika jest mniejszy od 5%.

4. OGRANICZENIA I BŁĘDY METODY

Błędy jakimi jest obarczona metoda określania koncentracji ładunku powierzchniowego wynikają w głównej mierze z faktu, że mierzymy pojemność struktury M-D-P, która jest szeregowym połączeniem pojemności półprzewodnika i pojemności dielektryka. W wyniku pomiarów otrzymujemy wartości pojemności dielektryka C_D oraz pojemność całkowitą C struktury M-D-P. Z tego powodu błędy przy pomiarze pojemności w funkcji napięcia polaryzacji uwidacznia się w obliczonej wartości pojemności półprzewodnika, która zawiera informację o koncentracji ładunku stanów powierzchniowych poprzez zastępcze napięcie ładunku w stanach powierzchniowych oraz w obszarze ładunku przestrzennego w półprzewodniku. Błąd obliczonej wartości pojemności stanów powierzchniowych C_{ss} (a tym samym wartości V_{ss}) jest spowodowany niedokładnością wyznaczenia zależności potencjału powierzchniowego od napięcia polaryzacji, a błąd obliczonej wartości pojemności obszaru ładunku przestrzennego w półprzewodniku C_{sc} wynika z niedokładności określenia koncentracji donorów [7] oraz pułapek w półprzewodniku.

Pojemność półprzewodnika [7] wyraża się wzorem:

$$C_s = C_{sc} + C_{ss} = \frac{C_D \cdot C}{C_D + C}, \quad (19)$$

gdzie

$$C_{sc} = \frac{dQ_{sc}}{d\psi_s} \quad \text{ i } \quad C_{ss} = \frac{dQ_{ss}}{d\psi_s}.$$

Wprowadzając znormalizowaną pojemność $C_n = C/C_D$ otrzymamy

$$C_n = \frac{C_s}{C_s + C_D}. \quad (20)$$

Różniczka zupełna C_n ma postać:

$$dC_n = (C_D dC_s - C_s dC_D) \cdot (C_s + C_D)^{-2}. \quad (21)$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\frac{dC_s}{C_s} = \frac{dC_D}{C_D} + \frac{1}{1 - C_n} \frac{dC_n}{C_n}. \quad (22)$$

Błąd względny pojemności C_n wynika z błędów, którymi jest obarczony pomiar C i C_D :

$$\frac{dC_n}{C_n} = \frac{dC}{C} - \frac{dC_D}{C_D}. \quad (23)$$

Podstawiając (23) do (22) otrzymamy:

$$\frac{dC_s}{C_s} = \frac{1}{1-C_n} \frac{dC}{C} - \frac{C_n}{1-C_n} \frac{dC_D}{C_D}. \quad (24)$$

Jeżeli przy pomiarach występują tylko błędy systematyczne, wtedy dla wartości C_n bliskich jedności możemy przyjąć $dC \approx dC_D$, a więc:

$$\frac{dC_s}{C_s} = (1+C_n) \frac{dC}{C}. \quad (25)$$

Z (25) wynika, że maksymalny błąd względny pojemności półprzewodnika nie będzie przewyższał dwukrotnej wartości błędu względnego mierzonej pojemności struktury M-D-P. Powyższy rezultat otrzymany w [14] świadczy, że opisana metoda jest przydatna do badania stanów powierzchniowych struktur M-D-P nawet wtedy, gdy zmiany pojemności struktury M-D-P w funkcji napięcia polaryzacji nie są duże.

Procedura określania ładunku stanów powierzchniowych wymaga korzystania ze wzoru (15) w celu wyznaczenia wartości potencjału powierzchniowego Ψ_s dla każdej wartości napięcia, polaryzacji. Wymaga to znajomości takich parametrów półprzewodnika jak N_D , p_o , N_i i θ . W celu określenia tych wielkości niezbędne jest dokonanie dodatkowych pomiarów dla warstwy półprzewodnikowej otrzymanej i znajdującej się w identycznych warunkach co badana struktura M-D-P. Koncentrację donorów można określić na podstawie pomiarów stałej Halla. Natomiast — jak już wspomniano — nie potrzeba wyznaczać wartości p_o , ponieważ wiadomo, że decyduje ona o wartości pojemności minimalnej struktury M-D-P [7]. Dlatego też wartość p_o zakłada się tak, aby przy pomocy wzorów (15) i (16) można było otrzymać krzywą $C-V$, dla której wartość pojemności minimalnej jest identyczna z minimalną wartością pojemności otrzymanej z pomiarów krzywej $C-V$ struktury M-D-P.

Wartości N_i oraz θ można określić za pomocą metody prądów termostymulowanych [15, 16] lub też metodą termostymulowanego rozładowania kondensatora [17]. Szczególnie korzystne wydaje się zastosowanie metody termostymulowanego rozładowania kondensatora, ponieważ badana próbka ma postać struktury M-D-P, której warstwa półprzewodnika stanowi jedną z okładek kondensatora. Obydwie metody pozwalają także określić poziom energetyczny pułapek E_t w warstwie półprzewodnikowej, co pozwala obliczyć współczynnik pułapkowania θ .

Dodatkową trudność w określaniu koncentracji ładunku stanów powierzchniowych sprawia histereza charakterystyk $C-V$ struktury M-D-P, która powoduje dwuznaczność wyników. Jednak nawet w przypadku charakterystyk $C-V$ z histerezą, obliczenia ładunku stanów powierzchniowych dla obu kierunków zmian napięcia polaryzacji pozwalają wnioskować o wpływie pola elektrycznego na rozkład i koncentrację ładunków przy powierzchni granicznej półprzewodnik-dielektryk, a tym samym uzyskać dodatkowe wiadomości o pochodzeniu histerezy charakterystyk $C-V$ struktury M-D-P.

Zagadnienie określania ładunku stanów powierzchniowych w strukturach metal-izolator-półprzewodnik ma pierwszorzędne znaczenie praktyczne dla projektowania i technologii polowych tranzystorów cienkowarstwowych. Określenie ładunku stanów powierzch-

niowych w strukturach M-D-P stosowanych w polowych tranzystorach cienkowarstwowych być może pozwoli lepiej poznać mechanizm powodujący niestabilność ich parametrów.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. H. Borkan, P.K. Weimer, An Analysis of the Characteristics of Insulated Gate Thin-Film Transistors, *RCA Rev.* **24**, 2, 153, 1962.
2. H.L. Wilson, W.A. Gutierrez, Cadmium Selenide Thin Film Field Effect Transistors, *J. Electrochem. Soc.* **112**, 1, 85, 1965.
3. L. M. Terman, An Investigation of Surface States at a Silicon/Silicon Oxide Interface Employing Metal-Oxide-Silicon Diodes, *Solid St. Electron.* **5**, 285, 1962.
4. K. Lehovec, A. Slobodskoy, J.L. Sprague, Field Effect — Capacitance Annalysis of Surface States on Silicon, *Phys. Stat. Sol.* **3**, 447, 1963.
5. R. Lindner, Semiconductor Surface Varactor, *Bell. Sys. Tech. J.*, **3**, 803, 1962.
6. F.P. Heiman, G. Warfield, The Effects of Oxide Traps on the MOS Capacitance, *IEEE Trans. ED-12*, 167, 1965.
7. K.H. Zaininger, G. Warfield, Limitations of the MOS Capacitance Method for the Determination of Semiconductor Surface Properties, *IEEE Trans. ED-12*, 179, 1965.
8. J.S. Riabinkin, Tieoria effiekta polia w półuprówodnikach s ciontrami prilipania, *Radiotiech. Elektron.* **10**, 2, 313, 1965.
9. A.G. Zdan, M.I. Jelinson, M.E. Czugunowa, Wlijanie łowuszek i tokow utieczki na charaktieristiki plionocznych poliewych triodow, *Radiotiech. Elektron.* **13**, 6, 1055, 1968.
10. Z. Wierzbicki, Wyznaczanie koncentracji stanów powierzchniowych na powierzchni granicznej półprzewodnik-dielektryk na podstawie pomiaru charakterystyk C-V struktury M-D-P, *Prace PIE — przedstawiono do opublikowania.*
11. M. A. Lampert, Simplified Theory of Space-Charge-Limited Currents in an Insulator with Traps, *Phys. Rev.* **103**, 6, 1968, 1956.
12. Ł. S. Gasanow, Effiekt pola w tonkich słojach półuprówodników, *Fiz. Tiech. Polupr.* **1**, 6, 809, 1967.
13. K.H. Zaininger, Automatic Display of MIS Capacitance vs Bias Characteristics, *RCA Rev.* **27**, 347, 1966.
14. Lile, Juhasz, On the Error Associated with the MIS Method of Capacitance Measurement of Surface State Density, *Proc. IEEE*, **2**, 189, 1968.
15. K.H. Nicholas, J. Woods, The Evaluation of Electron Trapping Parameters from Conductivity Glow Curves in Cadmium Sulphide, *Brit. J. Appl. Phys.* **15**, 7, 783, 1964.
16. A.G. Zhdan, V.B. Sandomirskij, A.D. Ozheredov, Investigation of Trapping Centre Parameters by Termostimulated Capacitor Discharge, *Solid St. Electron* **11**, 505, 1968.

M. BIAŁKO, Z. WIERZBICKI

DETERMINATION OF SURFACE STATES CONCENTRATION AT THE INSULATOR-SEMICONDUCTOR INTERFACE CONSIDERING INFLUENCE OF TRAPS, USING MIS CAPACITANCE MEASURING METHOD

Summary

Formulae describing the surface states density at the insulator-semiconductor interface of the MIS structure with the influence of traps taken into account are presented. The formulae derived may be applied particularly for the calculation of surface states density of thin film structures CdSe—SiO_x used in thin film transistors.

M. BIAŁKO, Z. WIERZBICKI

DÉTERMINATION DE LA CONCENTRATION DES ÉTATS SUPERFICIELS SUR LA SURFACE DE JONCTION SEMICONDUCTEUR-DIÉLECTRIQUE PAR LA MÉTHODE DE MESURAGE DE LA CAPACITÉ DE LA STRUCTURE M-D-S EN TENANT COMPTE DES PIÈGES DANS LA COUCHE DU SEMICONDUCTEUR

R e s u m é

On a obtenu des formules qui peuvent être utilisées pour calculer la concentration des états superficiels sur l'interface du semiconducteur et du diélectrique dans une structure M-D-S en tenant compte des pièges dans la couche du semiconducteur. En particulier ces formules peuvent être utilisées pour déterminer la concentration des états superficiels sur l'interface des structures $\text{SeCd}-\text{O}_x\text{Si}$, appliquées dans les transistors à effet de champ pour les couches minces.

M. BIAŁKO, Z. WIERZBICKI

BESTIMMUNG DER KONZENTRATION VON OBERFLÄCHENZUSTÄNDEN AUF GRENZFLÄCHE HALBLEITER-DIELEKTRIK UNTER ANWENDUNG DER M-D-H KAPAZITÄTSMETHODE UND BERÜCKSICHTIGUNG VON FALLEN IN DER HALBLEITERSCHICHTE

Z u s a m m e n f a s s u n g

In dieser Bearbeitung wurden Muster erhalten, die zur Berechnungen der Konzentration von Oberflächenzuständen auf der Grenzfläche Halbleiter-Dielektrik in der M-D-H-Struktur bei Berücksichtigung von Fallen in der Halbleiterschichte angewandt werden können. Besonders können die Muster zur Bestimmung der Konzentration von Grenzflächenzuständen der $\text{CdSe}-\text{SiO}_x$ -Struktur benutzt werden, die in dünn-schichtigen Feldeffekttransistoren zur Anwendung kommen.

М. БЯЛКО, З. ВЕЖБИЦКИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ СОСТОЯНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ИЗОЛЯТОР-ПОЛУПРОВОДНИК МЕТОДОМ ИЗМЕРЕНИЯ ЁМКОСТИ СИСТЕМЫ М—Д—П С УЧЁТОМ ЛОВУШЕК В ПЛЁНКЕ ПОЛУПРОВОДНИКА

Р е з ю м е

В работе даны формулы, которые могут быть применены в расчёте концентрации поверхностных состояний на поверхности раздела изолятор-полупроводник, с учётом ловушек в полупроводниковой плёнке. Эти формулы могут быть применены для определения заряда поверхностных состояний на поверхности раздела системы $\text{CdSe}-\text{SiO}_x$, которая применяется в тонкоплёночных полевых транзисторах.

Electrical Parameters in the Hall-Type Magnetohydrodynamic Generator with Gas Property Nonuniformities in the $\vec{w} \times \vec{B}$ Direction

ZDZISŁAW N. CELIŃSKI (WARSZAWA)

Institute of Nuclear Research, Świerk, Laboratory of Plasma Physics and Technology

The article has been delivered on 3.6.1969

The effects of gas velocity and temperature distributions in the $\vec{w} \times \vec{B}$ direction on the electrical parameters of the Hall-type MHD generator were considered.

When gas properties vary in the $\vec{w} \times \vec{B}$ direction, then occur Hall circulating currents flowing along the channel axis. These currents deteriorate the electrical performance of the generator. The decrease of the electrical values may be considerable especially in the case when the applied magnetic field is high. Expressions for the electrical values in the generator with nonuniform gas were derived and the numerical example was calculated.

List of symbols used

- A — Parameter defined by Eq. (22)
- B — Magnetic induction
- E — Electrical field in laboratory system
- E^* — Electrical field in system moving with fluid
- I — Electrical current
- K — Load factor
- P — Electrical power
- P_m — Braking power
- Q — Ohmic losses
- R — Electrical resistance
- R_L — External electrical resistance
- U — Terminal voltage
- b — Width of generator channel
- h — Electrode separation
- j — Current density
- l — Length of generator channel
- p — Electrical power density
- p_m — Braking power density
- q — Ohmic loss density
- r — Electrical resistance of channel element
- u — Electrical voltage on channel element
- w — Local value of gas velocity

- λ — Parameter defined in Eq. (72)
- β — Hall parameter
- γ — Parameters defined in Eqs. (71) to (78)
- σ — Plasma conductivity
- φ — Electrical potential
- η — Generator efficiency
- θ — Inclination angle of the current line

Superscripts and subscripts

- k — Local values
- o — Values at open circuit
- s — Values at short circuit
- 0 — Values at channel center
- x, y — Values in the x and y directions respectively
- $**$ — Values in constant gas property generator
- $\langle \rangle$ — Averaged values

1. INTRODUCTION

The simple theory of the Hall generator [1] assumes that all gasdynamical parameters in the generator channel are constant. In the real conditions of the generator operation, however, the gasdynamical parameters are functions of the space coordinates x, y, z and of time.

The problem of the nonuniform gas parameters in the MHD generator channels was considered in several works [2, 3, 4, 5, 6, 7]. However, only in one study, that performed by Rosa [2], the Hall generator is considered. Rosa investigated a simple one-dimensional, two-conductivity model of plasma with parallel gas layers. The gas velocity and Hall parameter were assumed to be constant. Although the assumed type of nonuniformity was rather unrealistic, some interesting conclusions were formulated.

In this work a different method of analysis was used. The channel volume was divided into a great number of the elements. Each gas element in the channel was substituted by an elementary generator under full consideration of the Hall effect. This method of analysis makes it possible to approach closely the actual distributions of the gas parameters. Using this method, not only terminal values of the generator can be calculated but also the distributions of the electrical values in the channel.

The analysis of the effects of the temperature and velocity distributions in the cross-sectional area of the channel on the generator parameters was divided into two parts. In the first one, the nonuniformity of gas parameters in the y direction (i.e., $\bar{w}x\bar{B}$ direction) was considered. The gas nonuniformity in the z direction (i.e., the direction of the magnetic field) was considered in the second part. Such an approach to the problem allows to separate the effects of the gas parameter distributions in the y and z directions.

In this work, the first problem is investigated. The gas parameters vary only in the $\bar{w}x\bar{B}$ direction. The aim of this work is to answer to the problem how large is the effect of the given distribution functions of σ, β , and w on the electrical parameters. In the nume-

rical example, the typical conductivity, velocity, and Hall parameter distributions are assumed.

The following assumptions are taken into considerations:

- Gasdynamical parameters in the z and x directions are constant.
- Flow of the plasma is steady, i.e. all time derivatives are equal to zero.
- Electrical conductivity is a function of the local gas temperature and gas pressure only (thermal equilibrium between electrons and atoms is assumed).
- Local electrical parameters vary only in the y direction. The nonuniformities in the x direction due to the finite electrode length are neglected.
- Channel cross-section is constant.
- Applied magnetic field is uniform. An induced magnetic field is ignored (magnetic Reynold's number $Rm \ll 1$).
- Distributions of the gas parameters are independent of the load factor.
- Channel end effects are excluded.
- Gas pressure in the channel cross-section is constant.
- Ion slip is ignored.

2. CIRCULATING CURRENTS

Ohm's law in the ionized gas may be written as

$$\bar{j} = \sigma \bar{E}^* - \beta \left(\bar{j} \times \frac{\bar{B}}{B} \right), \quad (1)$$

where

$$\bar{E}^* = \bar{E} + \bar{w} \times \bar{B}. \quad (2)$$

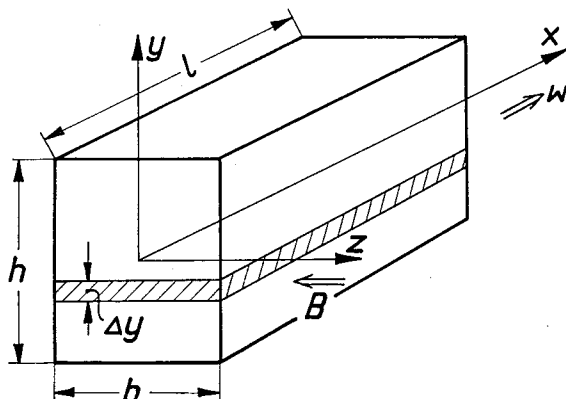


Fig. 1. Assumed coordinate system and nomenclature

Eq. (1) for the assumed $\bar{w}$ and $\bar{B}$ directions (Fig. 1) may be exhibited in the scalar form

$$E_x^* = (j_x - \beta j_y) / \sigma, \quad (3)$$

$$E_y^* = (\beta j_x + j_y) / \sigma. \quad (4)$$

The Hall field induced in plasma is determined by the local values β , σ and j_y . In the considered case β and σ values are nonuniformly distributed along the y axis. It results in the nonuniform distribution of the induced Hall field in the y direction.

The currents j_{xc} averaging the induced Hall fields in the channel cross-section appear at the open circuit of the Hall generator. These currents may have locally different values and signs depending on the local values of the induced Hall field.

The total current flowing along the x axis is equal to the load current and can be calculated as the integral over the cross-sectional area of the channel

$$\int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-h/2}^{+h/2} j_x dy dz = I_x. \quad (5)$$

The j_x currents induce in turn, the Hall fields in the y direction. It is equivalent to the decreasing or increasing of the local potential drop due to the j_y currents. This change of the local potential drop may be calculated from Eqs. (3) and (4) in the form (cf. [8])

$$\Delta E_y^* = \frac{1}{\sigma} \beta^2 j_y - \beta E_x. \quad (6)$$

E_x in Eq. (6) denotes the Hall field averaged in the cross-sectional area of the channel in accordance with the equation

$$E_x = KE_{xo} = K \frac{\int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-h/2}^{+h/2} \beta(z, y) j_y(z, y) dy dz}{\int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma(z, y) dy dz} \quad (7)$$

where K is the load factor of the Hall generator.

3. TERMINAL VALUES

The electric field is induced in the positive direction of the y axis when the directions of the vectors $\vec{w}$ and $\vec{B}$ are assumed as is shown in Fig. 1. The cross-sectional area of the channel may be divided into m layers along the y axis. Each layer of Δy in height can be considered as an elementary generator characterized by two two-terminal active networks. In one of them the electromotive force is directed along the y axis, in the other — along the x axis. The two systems — the first having m such elements connected in series and the second having m elements connected in parallel, shown in Fig. 2a, form the equivalent circuit of the Hall generator.

The u_{yok} , r_{yk} and r_{xk} can be expressed as

$$u_{yok} = Bw_k \Delta y \quad (8)$$

$$r_{yk} = \frac{1}{\sigma_k} \cdot \frac{\Delta y}{bl} \quad (9)$$

$$r_{xk} = \frac{1}{\sigma_k} \cdot \frac{l}{b \Delta y}. \quad (10)$$

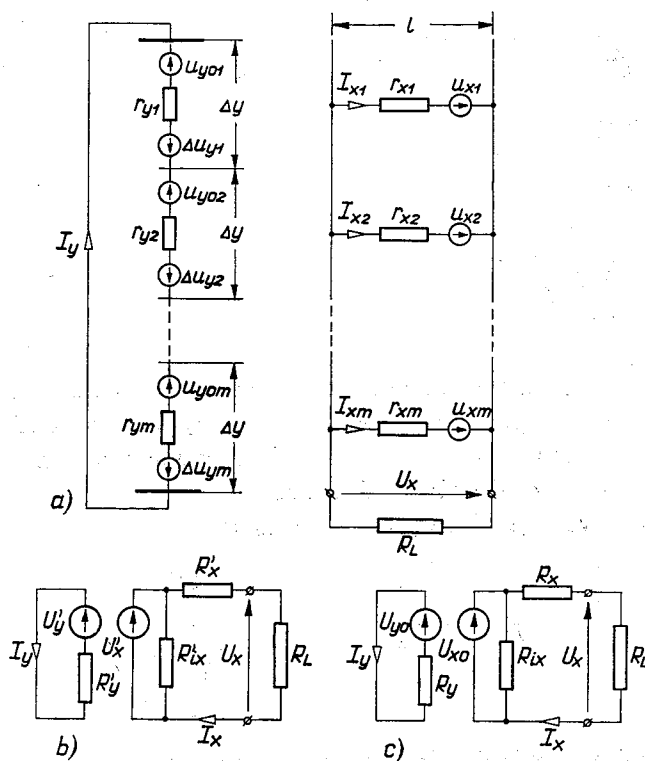


Fig. 2. Equivalent circuit of Hall-type MHD generator. a — detailed circuit; b, c — simplified circuits

From Eqs. (3) and (6)

$$u_{xk} = \beta_k r_{yk} I_y \frac{l}{\Delta y} \quad (11)$$

$$\Delta u_{yk} = \beta_k^2 r_{yk} I_y - \beta_k \frac{\Delta y}{l} K U_{xo} \quad (12)$$

where U_{xo} is the terminal voltage of the Hall generator at the open circuit and K is the load factor determined as

$$K = \frac{U_x}{U_{xo}} = \frac{R_L}{R_L + R_x}. \quad (13)$$

The values of the elements in the simplified circuit in Fig. 2b may be calculated from Eqs. (8÷13)

$$U'_x = \frac{\sum_{k=1}^{k=m} \frac{u_{xk}}{r_{xk}}}{\sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{r_{xk}}} = \frac{l}{\Delta y} I_y \frac{\sum_{k=1}^{k=m} \beta_k}{\sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{r_{yk}}} \quad (14)$$

$$U'_y = \sum_{k=1}^{k=m} (u_{yok} - \Delta u_{yk}) = \sum_{k=1}^{k=m} u_{yok} - I_y \sum_{k=1}^{k=m} \beta_k^2 r_{yk} + K U_{xo} \frac{\Delta y}{l} \sum_{k=1}^{k=m} \beta_k \quad (15)$$

$$R'_y = \sum_{k=1}^{k=m} r_{yk} \quad (16)$$

$$R'_x = \frac{1}{\sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{r_{xk}}} \quad (17)$$

It is inconvenient to use the equivalent circuit shown in Fig. 2b because the values of the electromotive forces depend on the generator loading. Let us transform it to the other system in which the mutual couplings between both x and y circuits will be considered by an appropriate choice of their internal resistances.

The open circuit voltage of the generator is now

$$U_{xo} = (U'_x)_{K=1} = \frac{l}{\Delta y} I_{yo} \frac{\sum_{k=1}^{k=m} \beta_k}{\sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{r_{yk}}} \quad (18)$$

The electromotive force in the circuit for the j_y currents is

$$U_{yo} = \sum_{k=1}^{k=m} u_{yok} \quad (19)$$

Using the Kirchhoff's law in the circuit from Fig. 2a and Eqs. (12) and (18) we can calculate

$$I_y = \frac{\sum_{k=1}^{k=m} u_{yok} + K I_{yo} \frac{(\sum_{k=1}^{k=m} \beta_k)^2}{\sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{r_{yk}}}}{\sum_{k=1}^{k=m} (1 + \beta_k^2) r_{yk}} \quad (20)$$

The I_{yo} magnitude may be determined from Eq. (20) substituting $K = 1$, then $I_y = I_{yo}$ and

$$I_{yo} = \frac{\sum_{k=1}^{k=m} u_{yok}}{(1 + A) \sum_{k=1}^{k=m} r_{yk}} \quad (21)$$

where A parameter was determined in [8] in the form

$$A = \frac{\sum_{k=1}^{k=m} \beta_k^2 r_{yk} \cdot \sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{r_{yk}} - \left(\sum_{k=1}^{k=m} \beta_k \right)^2}{\sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{r_{yk}} \cdot \sum_{k=1}^{k=m} r_{yk}}. \quad (22)$$

Substitution of Eq. (21) into (20) and (18) yields

$$I_y = \frac{\sum_{k=1}^{k=m} u_{yok} + K \frac{\sum_{k=1}^{k=m} u_{yok}}{(1+A) \sum_{k=1}^{k=m} r_{yk}} \cdot \frac{\left(\sum_{k=1}^{k=m} \beta_k \right)^2}{\sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{r_{yk}}}}{\sum_{k=1}^{k=m} (1+\beta_k^2) r_{yk}} \quad (23)$$

$$U_{xo} = \frac{l}{\Delta y} \frac{1}{1+A} \frac{\sum_{k=1}^{k=m} u_{yok} \sum_{k=1}^{k=m} \beta_k}{\sum_{k=1}^{k=m} r_{yk} \sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{r_{yk}}}. \quad (24)$$

With Eqs. (23) and (19) the R_y resistance can be exhibited as

$$R_y = \frac{U_{yo}}{I_y} = \frac{\sum_{k=1}^{k=m} (1+\beta_k^2) r_{yk}}{1+K \frac{\left(\sum_{k=1}^{k=m} \beta_k \right)^2}{(1+A) \sum_{k=1}^{k=m} r_{yk} \sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{r_{yk}}}}. \quad (25)$$

It is dependent on the generator loading and is equal:

when $K \rightarrow 0$, $R_y \rightarrow \sum_{k=1}^{k=m} (1+\beta_k^2) r_{yk}$,

when $K \rightarrow 1$, $R_y \rightarrow (1+A) \sum_{k=1}^{k=m} r_{yk}$.

The internal resistance of the generator R_x can be calculated from the expression

$$R_x = \frac{U_{xo}}{I_{xs}} = \frac{1}{1+A} \frac{\sum_{k=1}^{k=m} (1+\beta_k^2) r_{xk}}{\sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{r_{xk}} \cdot \sum_{k=1}^{k=m} r_{xk}} = \frac{1}{1+A} \left(1 + \frac{\sum_{k=1}^{k=m} \beta_k^2 r_{xk}}{\sum_{k=1}^{k=m} r_{xk}} \right) \frac{1}{\sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{r_{xk}}} \quad (26)$$

where the short circuit current I_{xs} was determined from Eqs. (14), (20) and (17) as

$$I_{xs} = \frac{(U'_x)_{K=0}}{R'_x}. \quad (27)$$

The gas braking power is

$$P_m = P + Q_y + Q_x \quad (28)$$

where

$$P = R_L \cdot I_x^2 \quad (29)$$

$$Q_y = I_y^2 \sum_{k=1}^{k=m} r_{yk} \quad (30)$$

$$Q_x = \sum_{k=1}^{k=m} I_{xk}^2 r_{xk}. \quad (31)$$

The current in each element in the x circuit can be divided into two components. The first (I_{xLk}) is related to the load current and the second (I_{xck}) — to the circulating currents:

$$I_{xk} = I_{xLk} + I_{xck} = \frac{R'_x}{r_{xk}} I_x + \frac{u_{xk} - U'_x}{r_{xk}}. \quad (32)$$

Substituting Eq. (32) into Eq. (31) and taking into consideration that

$$\sum_{k=1}^{k=m} I_{xck} = 0 \quad (33)$$

we can obtain

$$Q_x = Q_{xL} + Q_{xc} = I_x^2 R'_x + \sum_{k=1}^{k=m} u_{xk} \cdot I_{xck}. \quad (34)$$

Using Eqs. (11), (14) and (22) the Ohmic losses due to the circulating currents Q_{xc} can be expressed as

$$Q_{xc} = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{(u_{xk})^2}{r_{xk}} - U'_x \sum_{k=1}^{k=m} \frac{u_{xk}}{r_{xk}} = I_y^2 A \sum_{k=1}^{k=m} r_{yk}. \quad (35)$$

The load current can be exhibited with Eqs. (24) and (26) as

$$I_x = \sum_{k=1}^{k=m} I_{xk} = \sum_{k=1}^{k=m} I_{xLk} = \frac{l}{\Delta y} \frac{\sum_{k=1}^{k=m} u_{yok} \sum_{k=1}^{k=m} \beta_k}{\sum_{k=1}^{k=m} (1 + \beta_k^2) r_{xk}} (1 - K). \quad (36)$$

Using Eqs. (30), (34), (35), (36) and (23) the Ohmic losses may be calculated from the expression

$$Q = Q_y + Q_x = \frac{\left(\sum_{k=1}^{k=m} u_{yok}\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^{k=m} (1 + \beta_k^2) r_{yk}\right)^2 \sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{r_{yk}}} \left[\left(\sum_{k=1}^{k=m} \beta_k\right)^2 (1-K)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\left(\sum_{k=1}^{k=m} (1 + \beta_k^2) r_{yk} \sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{r_{yk}} - (1-K) \left(\sum_{k=1}^{k=m} \beta_k\right)^2\right)^2}{(1+A) \sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{r_{yk}} \sum_{k=1}^{k=m} r_{yk}} \right]. \quad (37)$$

At the open circuit conditions $P = 0$, $Q_{xL} = 0$ and

$$P_m = Q = Q_y + Q_{xc} = I_{yo}^2 (1+A) \sum_{k=1}^{k=m} r_{yk}. \quad (38)$$

The Ohmic losses due to circulating currents have the highest value at the open circuit and the lowest one at the short circuit.

The R'_{ix} and R_{ix} resistances in Fig. 2b and 2c can be calculated from Eqs. (14), (24) and (35) as

$$R'_{ix} = \frac{(U'_x)^2}{Q_{xc}} = R'_x \frac{1}{A} \frac{\left(\sum_{k=1}^{k=m} \beta_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{r_{xk}} \sum_{k=1}^{k=m} r_{xk}} = R'_x \frac{1}{A} \frac{\langle \beta \rangle^2}{\langle \sigma \rangle \langle \frac{1}{\sigma} \rangle} \quad (39)$$

$$R_{ix}(K) = \frac{U_{x0}^2}{Q_{xc}}. \quad (40)$$

The gas braking power may be also expressed in the other form

$$P_m = \sum_{k=1}^{k=m} u_{yok} \cdot I_y = I_y U_{yo} = \frac{U_{yo}^2}{R_y} \quad (41)$$

$$P_m = \frac{\left(\sum_{k=1}^{k=m} u_{yok}\right)^2}{\sum_{k=1}^{k=m} (1 + \beta_k^2) r_{yk}} \left(1 + K \frac{\left(\sum_{k=1}^{k=m} \beta_k\right)^2}{(1+A) \sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{r_{yk}} \sum_{k=1}^{k=m} r_{yk}} \right). \quad (42)$$

At the short circuit ($K = 0$)

$$P_{ms} = \frac{U_{yo}^2}{R_{ys}} \frac{\left(\sum_{k=1}^{k=m} u_{yok}\right)^2}{\sum_{k=1}^{k=m} (1+\beta_k^2) r_{yk}}. \quad (43)$$

At the open circuit ($K = 1$)

$$P_{mo} = \frac{U_{yo}^2}{R_{yo}} \frac{\left(\sum_{k=1}^{k=m} u_{yok}\right)^2}{(1+A) \sum_{k=1}^{k=m} r_{yk}}. \quad (44)$$

The electrical power produced in the generator is

$$P = K(1-K) U_{xo} I_{xs} = K(1-K) \frac{\left(\sum_{k=1}^{k=m} \beta_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{k=m} (1+\beta_k^2) r_{yk}} \cdot \frac{1}{1+A} \cdot \frac{\left(\sum_{k=1}^{k=m} u_{yk}\right)^2}{\sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{r_{yk}} \sum_{k=1}^{k=m} r_{yk}}. \quad (45)$$

The electrical efficiency is

$$\eta = \frac{P}{P_m} = K(1-K) \frac{\left(\sum_{k=1}^{k=m} \beta_k\right)^2}{(1+A) \sum_{k=1}^{k=m} r_{xk} \sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{r_{xk}} + K \left(\sum_{k=1}^{k=m} \beta_k\right)^2}. \quad (46)$$

The maximum efficiency η_m appears in the presence of the load factor K_η . Their magnitude can be calculated from Eq. (46) as

$$K_\eta = \frac{\sqrt{1 + \frac{\langle \beta \rangle^2}{(1+A) \left\langle \frac{1}{\sigma} \right\rangle \langle \sigma \rangle}} - 1}{\frac{\langle \beta \rangle^2}{(1+A) \left\langle \frac{1}{\sigma} \right\rangle \langle \sigma \rangle}}$$

$$\eta_m = 1 - 2K_\eta.$$

The expression for K_η is the same form as in the uniform gas generator [9] — in this case, however, the mean value of β is decreased by the factor $\left[(1+A) \left\langle \frac{1}{\sigma} \right\rangle \langle \sigma \rangle \right]^{0.5}$.

In Table 1 the equations for terminal values of the generator expressed by means of the w , σ , and β distribution functions are put together.

Table 1

Equations for terminal values of electrical parameters

$$U_{xo} = \langle \beta \rangle B \langle w \rangle l \frac{1}{(1+A) \left\langle \frac{1}{\sigma} \right\rangle \langle \sigma \rangle} \quad (47)$$

$$R_x = \frac{l}{hb} \cdot \frac{1}{\langle \sigma \rangle} \cdot \frac{1}{1+A} \left(1 + \frac{\left\langle \frac{\beta^2}{\sigma} \right\rangle}{\left\langle \frac{1}{\sigma} \right\rangle} \right) \quad (48)$$

$$R_y = \frac{h}{bl} \left\langle \frac{1+\beta^2}{\sigma} \right\rangle \frac{\langle \sigma \rangle \left\langle \frac{1+\beta^2}{\sigma} \right\rangle - \langle \beta \rangle^2}{\langle \sigma \rangle \left\langle \frac{1+\beta^2}{\sigma} \right\rangle - (1-K) \langle \beta \rangle^2} \quad (49)$$

$$I_y = Bbl \frac{\langle w \rangle}{\left\langle \frac{1+\beta^2}{\sigma} \right\rangle} \left(1 + K \frac{\langle \beta \rangle^2}{(1+A) \left\langle \frac{1}{\sigma} \right\rangle \langle \sigma \rangle} \right) \quad (50)$$

$$P_m = B^2 bhl \frac{\langle w \rangle^2}{\left\langle \frac{1+\beta^2}{\sigma} \right\rangle} \left(1 + K \frac{\langle \beta \rangle^2}{(1+A) \left\langle \frac{1}{\sigma} \right\rangle \langle \sigma \rangle} \right) \quad (51)$$

$$P = B^2 bhl K (1-K) \frac{\langle w \rangle^2 \langle \beta \rangle^2}{\left\langle \frac{1+\beta^2}{\sigma} \right\rangle} \cdot \frac{1}{(1+A) \left\langle \frac{1}{\sigma} \right\rangle \langle \sigma \rangle} \quad (52)$$

$$Q = B^2 hbl \frac{\langle w \rangle^2}{\left\langle \frac{1+\beta^2}{\sigma} \right\rangle^2 \langle \sigma \rangle} \left[\langle \beta \rangle^2 (1-K)^2 + \frac{\left(\left\langle \frac{1+\beta^2}{\sigma} \right\rangle \langle \sigma \rangle - (1-K) \langle \beta \rangle^2 \right)^2}{\left\langle \frac{1+\beta^2}{\sigma} \right\rangle \langle \sigma \rangle - \langle \beta \rangle^2} \right] \quad (53)$$

$$\eta = K(1-K) \frac{\langle \beta \rangle^2}{(1+A) \left\langle \frac{1}{\sigma} \right\rangle \langle \sigma \rangle + K \langle \beta \rangle^2} \quad (54)$$

$$A = \frac{\left\langle \frac{\beta^2}{\sigma} \right\rangle \langle \sigma \rangle - \langle \beta \rangle^2}{\left\langle \frac{1}{\sigma} \right\rangle \langle \sigma \rangle} \quad (55)$$

4. LOCAL VALUES

The distribution of the current density j_x can be calculated from Eq. (32)

$$j_x(y) = j_{xc}(y) + j_{xL}(y) = j_y \left[\beta(y) + \sigma(y) \frac{\langle \beta \rangle}{\langle \sigma \rangle} \right] + \sigma(y) \frac{\langle j_x \rangle}{\langle \sigma \rangle}. \quad (56)$$

The first term in Eq. (56) related to the circulating currents is load dependent because of the dependence $j_y(K)$. The circulating currents have the highest value at the open circuit conditions of the generator. When the distribution functions of σ and β differ only by the constant factor (i.e., $\sigma(y)/\beta(y) = \text{const}$) then j_{xc} is equal to zero.

Using Eqs. (36) and (50) we can transform Eq. (56) to the form

$$j_x(y) = B \frac{\langle w \rangle}{\left\langle \frac{1+\beta^2}{\sigma} \right\rangle} \left[1 + K \frac{\langle \beta \rangle^2}{(1+A) \left\langle \frac{1}{\sigma} \right\rangle \langle \sigma \rangle} \right] \left((\beta(y) - \sigma(y)) \frac{\langle \beta \rangle}{\langle \sigma \rangle} \right) + B \sigma(y) \frac{\langle w \rangle \langle \beta \rangle}{\left\langle \frac{1+\beta^2}{\sigma} \right\rangle \langle \sigma \rangle} (1-K). \quad (57)$$

The change of the direction of the current density j_x in a slightly loaded generator indicates that in one part of the channel the electrical energy is generated, in the other part it is lost. It should be noticed that for $K \cong 1$ the electrical energy is generated in the channel elements having low electrical conductivity and lying in the vicinity of the electrodes.

Kirchoff's law applied to the k -th element yields

$$u_{yk} = u_{yok} - I_y(1+\beta_k^2)r_{yk} + \beta_k \frac{\Delta y}{l} K U_{xo}. \quad (58)$$

The electric field distribution between the opposite electrodes may be calculated from Eqs. (58), (23) and (24) in the form

$$E_y(y) = B \left[w(y) - \frac{\langle w \rangle}{\left\langle \frac{1+\beta^2}{\sigma} \right\rangle} \left(1 + K \frac{\langle \beta \rangle^2}{(1+A) \left\langle \frac{1}{\sigma} \right\rangle \langle \sigma \rangle} \right) \frac{1+\beta^2(y)}{\sigma(y)} + K \frac{\langle w \rangle \langle \beta \rangle}{(1+A) \left\langle \frac{1}{\sigma} \right\rangle \langle \sigma \rangle} \beta(y) \right]. \quad (59)$$

The potential distribution may be calculated from Eq. (59) by means of the equation

$$\varphi(y) = \int_{-h/2}^y E_y(y) dy + \varphi_{-h/2}. \quad (60)$$

The distribution of the braking power, the generated power and the Ohmic losses can be obtained from the equations

$$p_m(y) = j_y w(y) B \quad (61)$$

$$p(y) = E_x j_x(y) \quad (62)$$

$$q(y) = \frac{1}{\sigma(y)} (j_y^2 + j_x^2(y)). \quad (63)$$

5. COMPARISON WITH A CONSTANT GAS PROPERTY GENERATOR

To determine the effect of the nonuniformity of the gas properties, let us consider two identical generators. In one of them, the gas properties w , σ and β are nonuniformly distributed; in the other one, they are uniform and equal to the mean values of w , σ and β in the first generator: $w^{**} = \langle w \rangle$, $\sigma^{**} = \langle \sigma \rangle$, $\beta^{**} = \langle \beta \rangle$.

The expressions of terminal values in the constant gas property generator are known [9] and may be written as

$$U_x^{**} = K \langle \beta \rangle B \langle w \rangle l \quad (64)$$

$$R_x^{**} = (1 + \langle \beta \rangle^2) \frac{1}{bh} \frac{1}{\langle \sigma \rangle} \quad (65)$$

$$R_y^{**} = \frac{1 + \langle \beta \rangle^2}{1 + K \langle \beta \rangle^2} \frac{h}{bl} \frac{1}{\langle \sigma \rangle} \quad (66)$$

$$P^{**} = \frac{\langle \beta \rangle^2}{1 + \langle \beta \rangle^2} K(1 - K) B^2 \langle w \rangle^2 \langle \sigma \rangle bhl \quad (67)$$

$$P_m^{**} = \frac{1 + K \langle \beta \rangle^2}{1 + \langle \beta \rangle^2} B^2 \langle w \rangle^2 \langle \sigma \rangle bhl \quad (68)$$

$$Q^{**} = \frac{1 + K^2 \langle \beta \rangle^2}{1 + \langle \beta \rangle^2} B^2 \langle w \rangle^2 \langle \sigma \rangle bhl \quad (69)$$

$$\eta^{**} = K(1 - K) \frac{\langle \beta \rangle^2}{1 + K \langle \beta \rangle^2} \quad (70)$$

The ratios of the values of the electrical parameters in the first generator to those in the second one for the same load factor are determined by means of Eqs. (47÷54) and (64÷70)

$$\gamma_{ux} = \frac{U_x}{U_x^{**}} = \frac{1}{\lambda} \quad (71)$$

where

$$\lambda = (1 + A) \left\langle \frac{1}{\sigma} \right\rangle \langle \sigma \rangle \quad (72)$$

$$\gamma_{rx} = \frac{R_x}{R_x^{**}} = \frac{1}{1 + A} \cdot \frac{\left\langle \frac{1 + \beta^2}{\sigma} \right\rangle}{\left\langle \frac{1}{\sigma} \right\rangle} \cdot \frac{1}{1 + \langle \beta \rangle^2} \quad (73)$$

$$\gamma_{ry} = \frac{R_y}{R_y^{**}} = \langle \sigma \rangle \left\langle \frac{1 + \beta^2}{\sigma} \right\rangle \frac{\langle \sigma \rangle \left\langle \frac{1 + \beta^2}{\sigma} \right\rangle - \langle \beta \rangle^2}{\langle \sigma \rangle \left\langle \frac{1 + \beta^2}{\sigma} \right\rangle - (1 - K) \langle \beta \rangle^2} \cdot \frac{1 + K \langle \beta \rangle^2}{1 + \langle \beta \rangle^2} \quad (74)$$

The γ_{ry} magnitude is load dependent.

When

$$K = 1, \quad \gamma_{ry} = \langle \sigma \rangle \left\langle \frac{1 + \beta^2}{\sigma} \right\rangle - \langle \beta \rangle^2$$

$$K = 0, \quad \gamma_{ry} = \frac{\langle \sigma \rangle + \left\langle \frac{1 + \beta^2}{\sigma} \right\rangle}{1 + \langle \beta \rangle^2}$$

$$\gamma_p = \frac{P}{P^{**}} = \frac{\gamma_{ux}^2}{\gamma_{rx}} = \frac{1 + \langle \beta \rangle^2}{\left\langle \frac{1 + \beta^2}{\sigma} \right\rangle \langle \sigma \rangle} \cdot \frac{1}{\lambda} \quad (75)$$

$$\gamma_{pm} = \frac{P_m}{P_m^{**}} = \frac{1 + \langle \beta \rangle^2}{\left\langle \frac{1 + \beta^2}{\sigma} \right\rangle \langle \sigma \rangle} \cdot \frac{1 + K \frac{\langle \beta \rangle^2}{\lambda}}{1 + K \langle \beta \rangle^2} \quad (76)$$

The γ_{pm} magnitude is load dependent. The effects of the gas parameter nonuniformities are higher in a slightly loaded generator. When

$$K = 1, \quad \gamma_{pm} = \frac{1 + \frac{\langle \beta \rangle^2}{\lambda}}{\left\langle \frac{1 + \beta^2}{\sigma} \right\rangle \langle \sigma \rangle}$$

$$K = 0, \quad \gamma_{pm} = \frac{1 + \langle \beta \rangle^2}{\left\langle \frac{1 + \beta^2}{\sigma} \right\rangle \langle \sigma \rangle}$$

$$\gamma_q = \frac{Q}{Q^{**}} = \frac{1 + \langle \beta \rangle^2}{1 + K^2 \langle \beta \rangle^2} \cdot \frac{1}{\left\langle \frac{1 + \beta^2}{\sigma} \right\rangle^2 \langle \sigma \rangle^2} \left[\langle \beta \rangle^2 (1 - K)^2 + \frac{\left(\left\langle \frac{1 + \beta^2}{\sigma} \right\rangle \langle \sigma \rangle - (1 - K) \langle \beta \rangle^2 \right)^2}{\left\langle \frac{1 + \beta^2}{\sigma} \right\rangle \langle \sigma \rangle - \langle \beta \rangle^2} \right] \quad (77)$$

$$\gamma_\eta = \frac{\eta}{\eta^{**}} \frac{1 + K \langle \beta \rangle^2}{\lambda + K \langle \beta \rangle^2} \quad (78)$$

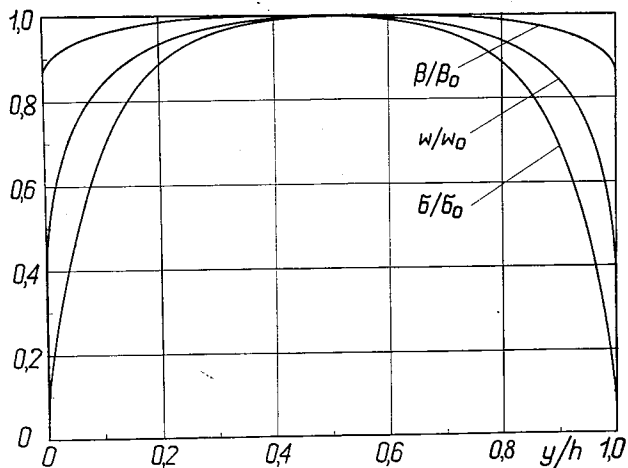
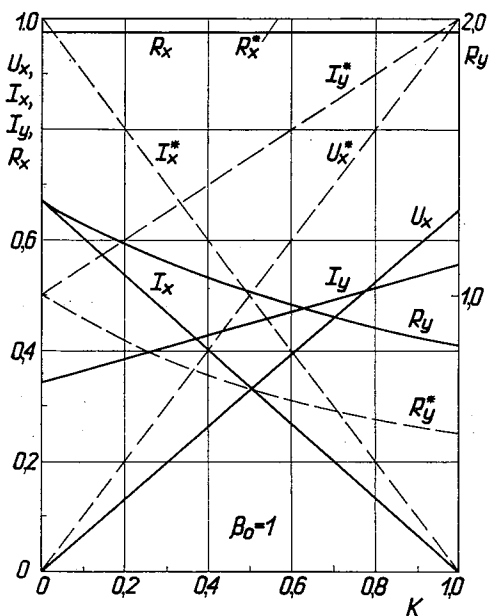
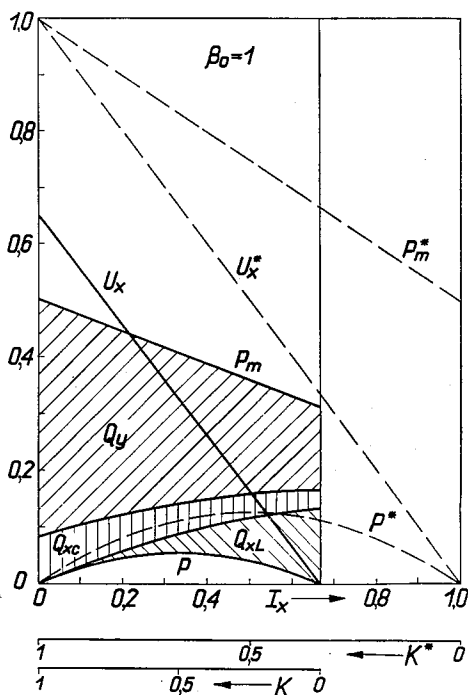
Eqs. (72 ÷ 78) show that the γ magnitudes are dependent not only on the form of the β distribution functions but also on the absolute value of β .

It should be noticed that all γ magnitudes are independent of the velocity distribution.

6. NUMERICAL CALCULATIONS

Let us determine the electrical parameters in the MHD Hall generator with combustion gases seeded with 1% potassium. The typical distribution of the gas velocity, gas conductivity, and Hall parameter are assumed and shown in Fig. 3. The gas conductivity and Hall parameter distributions are calculated on the basis of the temperature distribution measured in the small, experimental MHD generator with ceramic walls [10].

The results of calculations are shown in Figs. 4 to 13.

Fig. 3. Assumed distributions of w , σ and β along the y axisFig. 4. Current, voltage, and internal resistance versus load factor for $\beta_0 = 1$ Fig. 5. Power characteristics versus load current for $\beta_0 = 1$

For assumed distributions of σ and β , we obtain

$$\langle \sigma \rangle \left\langle \frac{1}{\sigma} \right\rangle = 1,14$$

$$A = 0,0922\beta_0^2$$

$$\lambda = 1,14 + 0,105\beta_0^2.$$

The current, the voltage and the internal resistance versus load factor for $\beta_0 = 1$ are shown in Fig. 4. Their values are related to the values in the case when the gas parameters are uniform in the cross-sectional area of the channel and are equal to their values at the channel axis (they are marked with the asterisk in Fig. 4.). Large decrease of the I_y should be noticed.

The power characteristics versus load current are shown in Fig. 5. The strong decrease of the generated power should be noticed.

The open circuit voltage U_{x0} , the short circuit current I_{xs} and the maximum generated power P_{max} are shown versus B in Fig. 6. For comparison the same values U_{x0}^{**} , I_{xs}^{**} and P_{max}^{**} in the case of constant gas parameters are also shown.

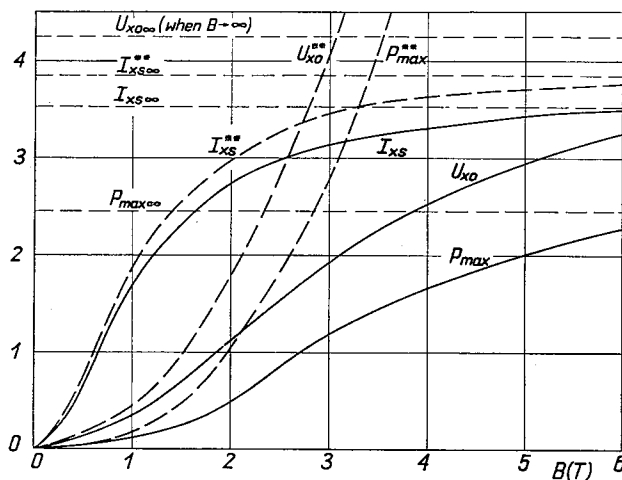


Fig. 6. Open circuit voltage, short circuit current, and maximum generated power as a functions of magnetic field

The open circuit voltage U_{x0} and maximum generated power P_{max} are strongly influenced by the gas nonuniformity. The increase of their values with increasing B is much slighter than in the case of uniform gas. They approach asymptotically the values $U_{x0\infty}$ and $P_{max\infty}$ determined by the σ and β distributions as

$$U_{x0\infty} = \frac{1}{\mu_{e0}} \frac{\left\langle \frac{\beta}{\beta_0} \right\rangle \langle w \rangle}{\left\langle \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)^2 \frac{1}{\sigma} \right\rangle \langle \sigma \rangle - \left\langle \frac{\beta}{\beta_0} \right\rangle^2}$$

$$P_{max\infty} = \frac{bhl}{\mu_{e0}^2} \frac{\left\langle \frac{\beta}{\beta_0} \right\rangle^2 \langle w \rangle^2}{\left\langle \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)^2 \frac{1}{\sigma} \right\rangle \left[\left\langle \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)^2 \frac{1}{\sigma} \right\rangle \langle \sigma \rangle - \left\langle \frac{\beta}{\beta_0} \right\rangle^2 \right]}.$$

The μ_{e0} magnitude in Fig. 6 was assumed to be equal to 1.

The electrical efficiency of the generator versus load factor and the generated power versus efficiency are shown in Figs. 7 and 8. The gas nonuniformity introduces a much larger decrease in the maximum power produced in the generator than in the generator efficiency.

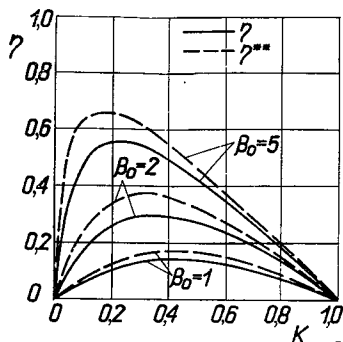


Fig. 7. Electrical efficiency of the generator versus load factor

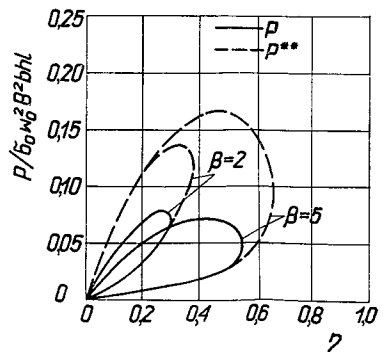


Fig. 8. Generated electrical power versus electrical efficiency

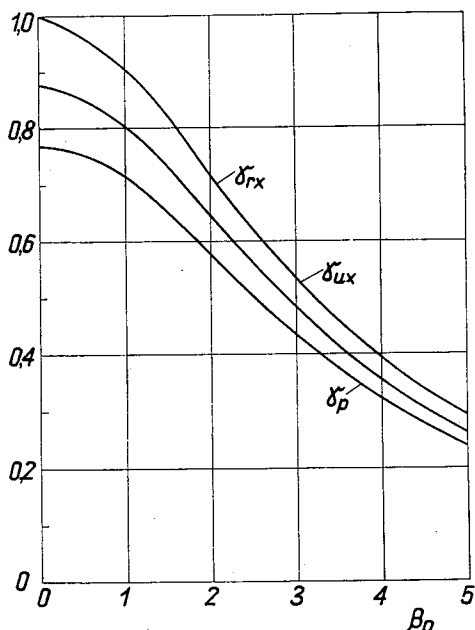


Fig. 9. Factors γ_{rx} , γ_{ux} and γ_p as functions of β_0

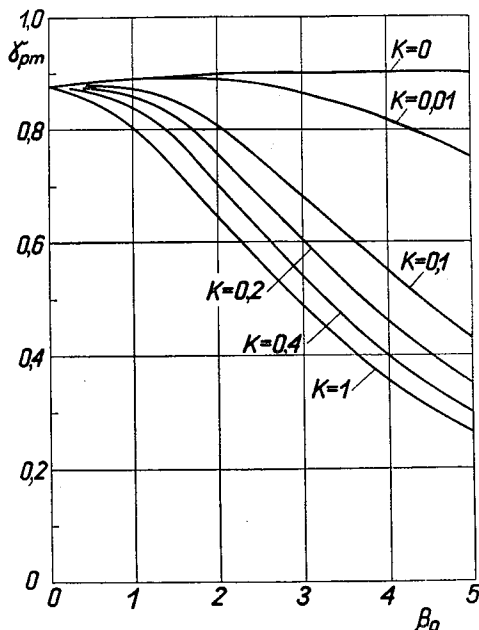


Fig. 10. Factor γ_{pm} versus β_0 with load factor as a parameter

The expressions specified in Eqs. (71), (73), (75), (76), and (78) versus β_0 and load factor K are shown in Figs. 9, 10, and 11. The decrease of the internal resistance of the generator due to the gas nonuniformity is to be noticed.

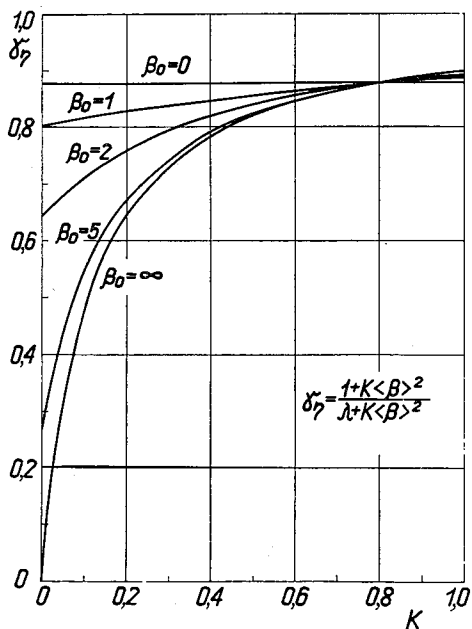


Fig. 11. Factor γ_η versus K and Hall parameter

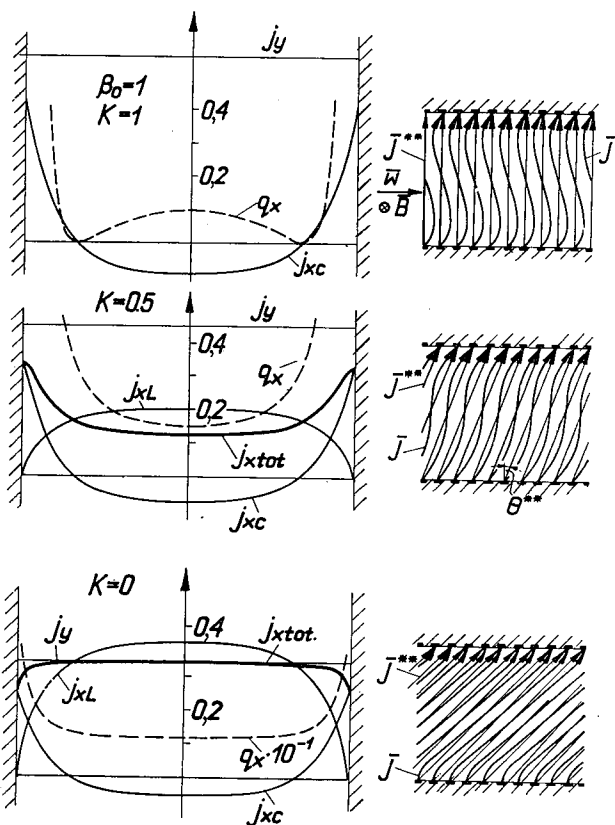


Fig. 12. Distributions of the current density and Ohmic losses between the opposite electrodes

Fig. 12 shows the distributions of the current density and Ohmic losses between the opposite electrodes. The current density was divided into two components j_y and $j_{x,tot}$. The total current density in the x direction is the sum of the current density j_{xL} due to the generator loading and j_{xc} due to the Hall circulating currents. When $K = 0$, the smooth distribution of $j_{x,tot}$ should be noticed. In this case $j_{x,tot}(y) \sim \beta(y)$; it can be shown from Eq. (57).

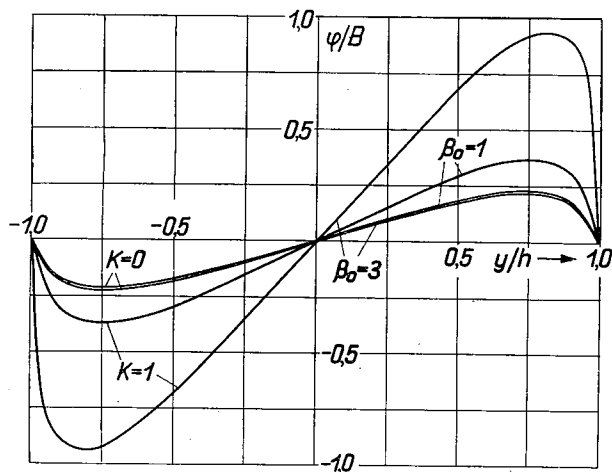
When $K \rightarrow 0$

$$j_x(y) \rightarrow B \frac{\langle w \rangle}{\left\langle \frac{1+\beta^2}{\sigma} \right\rangle} \beta(y).$$

The current lines deformed due to the Hall circulating currents are also shown in this figure. The inclination angle θ of the current line may be determined as

$$\theta^{**} = \arctg \frac{j_x^{**}}{j_y^{**}} = \arctg \langle \beta \rangle \frac{1-K}{1+K\langle \beta \rangle^2} = \text{const}$$

$$\theta(y) = \arctg \frac{j_x(y)}{j_y} = \arctg \left[\beta(y) - \sigma(y) \frac{\langle \beta \rangle}{\langle \sigma \rangle} \left(1 - \frac{1-K}{1+K \frac{\langle \beta \rangle^2}{\lambda}} \right) \right].$$



No circulating currents will be flowing when the distribution functions of σ and β differ by the constant factor only i.e., $\sigma(y)/\beta(y) = \text{const}$. In this case the nonuniformity effects are considerably reduced.

The assumption of the constant gas parameters along the channel axis is rather pessimistic. The considered effects of the nonuniformities decrease when the variation of the gas parameters along the channel axis is taken into account.

Acknowledgement. The author wishes to thank Mr. M. Plata for his help in the numerical calculations.

REFERENCES

1. L. P. Harris, I. D. Cobine, The Significance of the Hall Effect in Three MHD Generator Configurations, Am. Soc. Mech. Eng., 60 — Wa-329, 1960.
2. J. R. Rosa, Hall and Ion — Slip Effects in a Nonuniform Gas, The Physics of Fluids, Vol. 5, No. 9, September 1959.
3. A. Bekarian, Z. Croitoru, Heterogeneities et instabilités dans les générateurs MHD, Proc. Int. Symp. „MHD Electrical Power Generation”, Paris, July 1964.
4. K. G. Reseck et al., MHD Generator Performance Prediction Including Two-Dimensional Effects and Wall Leakage, Proc. Int. Symp. „MHD Electrical Power Generation”, Salzburg, July 1966.
5. A. E. Sheindlin et al., Experimental Investigation of the Influence of Boundary Layers and Certain Other Effects on the Characteristics of an MHD Generator, Proc. Int. Symp. „MHD Electrical Power Generation”, Warsaw, July 1968.
6. Z. Celiński, Space Charge in the MHD Generator Channel. Arch. Elektr., Nr. 1, 1969.
7. Z. Celiński, Circulating Currents in the MHD Generator Channel, Institute of Nuclear Research, Report No. 955/XVIII/PP, Warsaw 1968.
8. Z. Celiński, Equivalent Circuits of the Faraday-Type MHD Generator with the Gas Property Nonuniformities in the Electric Field Direction, Arch. Elektr. No. 3, 1969 (to be published).
9. Z. Celiński, Electrical Parameters of the DC MHD Generator with Various Electrical Connections of Electrodes, Rozprawy Elektrotechniczne, No. 1, 1968 (in Polish).
10. A. Sumida et al., An Experimental Study on Physical Properties of Combustion Gas, Proc. Int. Symp. „MHD Electrical Power Generation”, Salzburg, July 1966.

Z. N. CELIŃSKI

PARAMETRY ELEKTRYCZNE GENERATORA MHD TYPU HALLA Z WŁASNOŚCIAMI GAZU NIERÓWNOMIERNYMI W KIERUNKU $\vec{w} \times \vec{B}$.

Streszczenie

W pracy rozważono wpływ nierównomierności parametrów gazu w kierunku $\vec{w} \times \vec{B}$ na parametry elektryczne generatora MHD typu Halla.

Gdy własności gazu zmieniają się w kierunku $\vec{w} \times \vec{B}$, powstają prądy wyrównawcze płynące wzdłuż kanału. Ich obecność pogarsza parametry elektryczne generatora. To pogorszenie może być znaczne przy zastosowaniu silnych pól magnetycznych. Wprowadzono wzory pozwalające na obliczenia numeryczne.

Rozważania zilustrowano przykładem liczbowym.

Z. N. CELIŃSKI

LES PARAMÈTRES ÉLECTRIQUES DU GÉNÉRATEUR MHD TYPE HALL AVEC
LES PROPRIÉTÉS DU GAZ DANS LE SENS $\vec{w} \times \vec{B}$

Résumé

On a considéré l'influence de l'inégalité des paramètres du gaz dans le sens $\vec{w} \times \vec{B}$ sur les paramètres électriques du générateur MHD type Hall.

Le changement des propriétés du gaz dans le sens $\vec{w} \times \vec{B}$, produit la formation des courants d'égalisation passant au long du canal. Leur présence diminue les paramètres électriques du générateur. Cette diminution peut être plus importante quand on utilise les champs magnétiques forts.

On a défini les équations nécessaires pour les calculs numériques. Tout a été illustré par un exemple en chiffres.

Z. N. CELIŃSKI

ELEKTRISCHE PARAMETER DES MHD-HALL-GENERATORS MIT INHOMOGENEN
GASDYNAMISCHEN PARAMETERN IN RICHTUNG DES INDUZIERTEN, ELEKTRISCHEN
FELDES

Zusammenfassung

In der Arbeit wurde der Einfluss der Inhomogenität von gasdynamischen Parametern in Richtung $\vec{w} \times \vec{B}$ auf die elektrische Parameter im MHD-Hall-Generator analysiert. Wenn die gasdynamischen Parameter in Richtung $\vec{w} \times \vec{B}$ variieren, entstehen längs des Kanals Ausgleichströme, wodurch die elektrischen Parameter des Generators reduziert werden. Bei Anwendung hoher magnetischer Feldstärken können die Parameterwerte stark abnehmen.

Es wurden die numerische Berechnungen von Effekten ermöglichende Formeln ausgearbeitet. Die Analyse wurde mit einem numerischen Beispiel illustriert.

З. Н. ЦЕЛИŃСКИ

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ГЕНЕРАТОРА
ТИПА ХОЛЛА С НЕРАВНОМЕРНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ГАЗА В НАПРАВЛЕНИИ $\vec{w} \times \vec{B}$

Резюме

В работе рассмотрено влияние неравномерностей параметров газа в направлении $\vec{w} \times \vec{B}$ на электрические параметры МГД — генератора типа Холла.

Если свойства газа изменяются в направлении $\vec{w} \times \vec{B}$ то вдоль оси возникают сильные компенсационные токи. Они ухудшают работу генератора. Понижение электрических параметров генератора может быть сильным особенно при применении больших магнитных полей. Рассуждения проиллюстрировано расчётами.

Przegląd stanu badań szumów $1/f$ w półprzewodnikach i diodach półprzewodnikowych

ANDRZEJ ZAKLIKIEWICZ (WARSZAWA)

Instytut Technologii Elektronowej PAN

Otrzymano 11.6.1969

Dokonano przeglądu obecnego stanu wiedzy o szumach $1/f$ w półprzewodnikach i diodach półprzewodnikowych. Przedstawiono najpierw dawniejsze badania nad szumami $1/f$, które doprowadzają do stwierdzenia, że szумы te są głównie, jeśli nie całkowicie, zjawiskiem powierzchniowym. Podano następnie dwa modele najlepiej charakteryzujące szумы $1/f$. Jest to model związany z powolnymi stanami powierzchniowymi oraz model związany z dyfuzją atomów zanieczyszczeń. Obszernie zrelacjonowano doświadczenia Mc Rae i Levinsteina przeprowadzone w 1960 roku, dostarczające dodatkowych informacji do wyświetlenia mechanizmu szumów $1/f$. W końcowej części pracy podano wyniki badań teoretycznych i doświadczalnych nad szumami $1/f$ w diodach półprzewodnikowych.

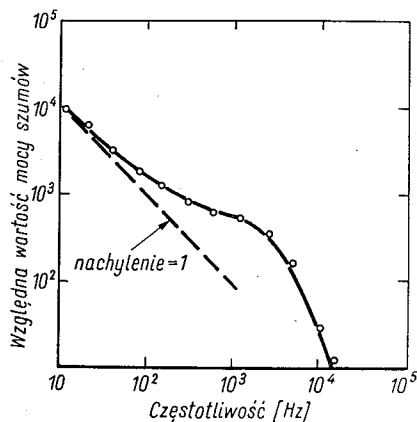
1. WSTĘP

W warunkach równowagi termicznej dowolny element oporowy o oporności R , niezależnie od jego wewnętrznej struktury, wykazuje na swoich zaciskach w dowolnym przedziale częstotliwości aż do zakresu podczerwieni napięcie fluktuacji, którego średni kwadrat wartości skutecznej równy jest $4kTR\Delta f$, gdzie k — stała Boltzmanna, T — temperatura w $^{\circ}\text{K}$, Δf — skuteczna szerokość pasma częstotliwości.

Przepływ prądu stałego przez element oporowy powoduje wzrost szumów wywołany pojawieniem się szumów śrutowych, które w przypadku elementów półprzewodnikowych dzielą się na szумы generacyjno-rekombinacyjne i dyfuzyjne. Szумы śrutowe posiadają tzw. białe widmo aż do częstotliwości równej odwrotności pewnego charakterystycznego czasu (np. czasu przelotu w lampach elektronowych lub czasu życia nośników w półprzewodniku). Powyżej tej częstotliwości moc szumów gwałtownie maleje.

W przeciwieństwie do tego typu widma wiele elementów i przyrządów, przez które przepływa prąd stały wykazuje moc szumów, która w przybliżeniu podlega prawu $1/f^n$ przy $n \cong 1$. Tego typu widmo zaobserwowano najpierw w lampach elektronowych, gdzie jest ono znane pod nazwą szumów migotania (flicker noise). Występuje ono również w takich przyrządach jak mikrofony węglowe, oporniki (szum kontaktowy), cienkie warstwy metalowe, diody i tranzystory warstwowe, a nawet w monokryształach półprzewodnika. Tłumaczono, że szумы tego typu, zwane ogólnie szumami $1/f$, wynikają z fluktuacji oporności, ponieważ średni kwadrat napięcia tych szumów wzrasta w przybliżeniu proporcjonalnie z kwadratem prądu stałego przepływającego przez dany element.

Na rys. 1 pokazano typowe widmo szumów dla wytrawionej próbki germanowej. Przy bardzo małych częstotliwościach szумы typu $1/f$ stanowią główną składową tego widma, ale poczynając od częstotliwości około 200 Hz zaczynają dominować szумы śrutowe, które gwałtownie maleją przy częstotliwości równej w przybliżeniu odwrotności



Rys. 1. Widmo szumów wytrawionej próbki germanowej

czasu życia nośników mniejszościowych, równej w tym przypadku około 50 μ sek. Na jeszcze wyższych częstotliwościach praktycznie istnieją tylko szумы termiczne.

Ogólnie biorąc prawo $1/f$ obowiązuje w bardzo szerokim zakresie częstotliwości i temperatur. Chociaż pasmo częstotliwości, w którym to prawo jest słuszne nie może być nieskończone, gdyż całkowita moc musi być wielkością skończoną, to jednak nie zaobserwowano punktów ograniczających to pasmo ani od strony małych, ani od strony dużych częstotliwości. W przypadku oporników węglowych i próbek germanowych nie zauważono poważnego odchylenia od prawa $1/f^n$ w dół aż do częstotliwości $2,5 \cdot 10^{-4}$ Hz, natomiast w przypadku diod ostrzowych szумы $1/f$ obserwowano w dół do częstotliwości $6 \cdot 10^{-5}$ Hz. Dolna granica w obu przypadkach została określona możliwościami pomiarowymi. Z drugiej strony pasma częstotliwości granica widma szumów $1/f$ jest maskowana poziomem szumów termicznych lub śrutowych. Częstotliwość, przy której to zachodzi, jest bardzo różna. Np. w przypadku oporników węglowych i diod ostrzowych składowa szumów typu $1/f$ jest dominująca aż do częstotliwości przekraczającej 1 MHz. Przy pomiarach szumów oporników węglowych w funkcji temperatury w granicach od 290°K do 4,7°K stwierdzono nie tylko, że szумы $1/f$ istnieją nawet w temperaturze ciekłego helu ale również, że ich wielkość zmienia się nie więcej niż 10-krotnie w tak szerokim zakresie temperatur. Zaobserwowano również istnienie szumów $1/f$ w próbkach germanowych przy temperaturze 77°K.

Doświadczenie pokazuje, że nie ma pewności co do tego, czy szумы $1/f$ w półprzewodnikach są związane głównie z nośnikami większościowymi czy też mniejszościowymi. Montgomery stwierdził, że pole magnetyczne oddziałuje na amplitudę szumów w sposób, który odpowiada zmianie czasu życia nośników mniejszościowych oraz że napięcia szumów pomierzone na dwóch sąsiednich odcinkach przewodu półprzewodnikowego są skorelo-

wane z czasem opóźnienia w przybliżeniu równym czasowi przelotu nośników mniejszościowych. Jednak przy tych doświadczeniach Montgomery nie oddzielał szumów śrutowych od szumów 1/f. Kiedy eksperymenty zostały powtórzone tak, że tylko szumy 1/f były mierzone, niemożliwe stało się potwierdzenie poprzednich doświadczeń z polem magnetycznym. Stwierdzono ponowne istnienie efektu korelacji, ale w nowych warunkach niemożliwe było pomierzenie czasu opóźnienia. Z drugiej strony Bess na podstawie pomiarów szumów i napięcia przy efekcie Halla jako funkcji kątowej orientacji próbki doszedł do wniosku, że szumy 1/f są związane głównie z fluktuacją w koncentracji nośników większościowych.

Montgomery sugerował również, że zjawiska powierzchniowe są źródłem szumów 1/f w próbkach z monokryształu germanowego. Późniejsze doświadczenia potwierdzają z dużym prawdopodobieństwem, że szumy 1/f są głównie, jeśli nie całkowicie, zjawiskiem powierzchniowym. Zaobserwowano np., że przy zmianie atmosfery powietrza z suchej na wilgotną następuje zmiana poziomu szumów 1/f rzędu kilku dB. Podobnie obserwowano szumy 1/f w złączach *p-n*. Umieszczenie złącza *p-n* w parze wodnej powoduje wzrost szumów 1/f o kilka rzędów wielkości. Istnieje też bardzo wyraźny wpływ obróbki powierzchniowej w diodach ostrzowych lub warstwowych na wielkość tego rodzaju szumów.

Podobieństwo szumów 1/f w różnych przyrządach pozwala sądzić, że istnieje wspólny ich mechanizm. Trudno jednak dać zadowalające wytłumaczenie tych szumów w jednym chociażby typie przyrządów. Zasadniczą trudnością jest to, że widmo szumów 1/f, w przeciwieństwie do widma szumów śrutowych, nie wydaje się być związane z żadnym elementarnym procesem.

Uważano jednak, że widmo 1/f może być otrzymane przez superpozycję widm szumów śrutowych typu $\tau/[1+(\omega\tau)^2]$ z funkcją rozkładu stałych czasu τ proporcjonalną do $1/\tau$. Ponieważ prawo 1/f może obowiązywać na przestrzeni wielu dekad częstotliwości, wymagane jest aby rozkład $1/\tau$ stałych czasu pokrywał odpowiednio szerokie pasmo.

Przypuśćmy, że stała czasu wynika z procesu związanego z energią aktywacji, takiego jak adsorpcja — desorpcja jonów lub dyfuzja jonów. W ten sposób τ przyjmuje postać $\tau_0 \exp(E/kT)$, gdzie E — jest energią aktywacji. Równomierny rozkład energii pomiędzy E_1 i E_2 będzie zatem odpowiadał rozkładowi $1/\tau$ dla τ pomiędzy $\tau_1 = \tau_0 \exp(E_1/kT)$ i $\tau_2 = \tau_0 \exp(E_2/kT)$. Jeśli zatem szum jest wytwarzany przez dużą liczbę niezależnych procesów, z których każdy daje widmo szumów śrutowych o postaci $\tau/[1+(\omega\tau)^2]$ przy τ rozłożonym jak opisano wyżej, całkowite widmo mocy szumów będzie

$$G(\omega) \doteq \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau/\tau \right]^{-1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (1/\tau) [\tau/(1+(\omega\tau)^2)] d\tau. \quad (1)$$

Jeśli w rozważanym paśmie częstotliwości $\omega\tau_1 \ll 1 \ll \omega\tau_2$, wtedy

$$G(\omega) \doteq (kT/\omega)/(E_2 - E_1). \quad (2)$$

W rezultacie otrzymujemy widmo 1/f, którego amplituda jest liniowo zależna od T , jeśli tylko $E_1 \ll kT \ln(1/\omega\tau_0) \ll E_2$ w rozważanym zakresie temperatur i częstotliwości. Jednak przy procesach jonowych zachodzących w bardzo niskich temperaturach pierwsza część tej nierówności nie może być spełniona. Parametr τ_0 jest odwrotnością częstotliwości granicznej tych procesów („jumping frequency”), która jest rzędu 10^{13} Hz. Aby więc

wyprowadzona zależność (2) mogła być słuszna dla występującego w niektórych przyrządach zakresu szumów $1/f$ aż do częstotliwości 1 MHz, wartość E_1 powinna być dużo mniejsza od 0,09 eV. W przypadku szumów $1/f$ oporników węglowych i ZnO stwierdzonych w temperaturze ciekłego helu powyżej częstotliwości 10 kHz powinien być spełniony warunek $E_1 \ll 0,007$ eV. Ponieważ ta ostatnia wartość jest dużo mniejsza od energii aktywacji dla procesów dyfuzji objętościowej lub powierzchniowej oraz procesów adsorpcji-desorpcji wydaje się, że tego rodzaju wyjaśnianie zjawiska szumów $1/f$ trzeba odrzucić.

Proponowano więc kilka wyłącznie elektronowych mechanizmów dla wyjaśnienia szumów $1/f$. Przeszkodą był tutaj fakt, że czas życia nośników jest zbyt krótki dla otrzymania widma szumów $1/f$ na tak małych częstotliwościach, jak to stwierdzono eksperymentalnie. Nie ma również doświadczalnego stwierdzenia rozkładu czasu życia nośników. Jedynym elektronowym zjawiskiem, które posiada czas trwania odpowiedni dla szumów $1/f$ jest pułapkowanie. Czas pułapkowania w półprzewodniku jest rzędu godzin i dni. Stwierdzono, że jeżeli pułapki posiadają równomierny rozkład energii w odpowiednio szerokim paśmie, wtedy w sposób podany poprzednio można otrzymać widmo $1/f$. Z drugiej strony wiadomo jednak, że istnieją dwie stałe czasu odpowiadające zajmowaniu i zwalnianiu pułapek. Poza tym bardziej szczegółowa analiza wykazuje, że jeżeli przez założenie wykładniczego rozkładu energii otrzymamy przy pewnej temperaturze widmo $1/f$, to przy innej temperaturze będziemy mieli widmo odmiennego charakteru.

2. MODEL SZUMÓW $1/f$ ZWIĄZANY Z POWOLNYMI STANAMI POWIERZCHNIOWYMI

Jak to stwierdzono eksperymentalnie, na powierzchni półprzewodnika istnieją szybko działające centra rekombinacji powierzchniowej. Oprócz nich istnieją także powolne stany powierzchniowe o stałej czasu rzędu sekund i minut. Przypuszcza się, że szybkie stany rekombinacyjne są umieszczone na granicy pomiędzy półprzewodnikiem a zewnętrzną warstwą tlenków, podczas gdy stany powolne leżą na zewnątrz warstwy tlenków lub też w samej warstwie. Pokazane zostanie w jaki sposób fluktuacja ilości ładunku tych powolnych stanów ma związek z szumami typu $1/f$. W tym celu dzielimy całą rozważaną powierzchnię półprzewodnika na małe obszary i śledzimy w jaki sposób koncentracja dziur i elektronów zmienia się w funkcji czasu w każdym oddzielnym obszarze. Interesują nas tylko długookresowe zmiany koncentracji ładunku występujące wtedy, gdy wędrujące nośniki zostają uchwyczone w pułapki powierzchniowe i pozostają tam przez długi czas w postaci zlokalizowanego nieruchomego ładunku. Niezależnie od tego czy pułapkowanym nośnikiem jest elektron czy też dziura, przewodność obszaru zmieni się o wielkość odpowiadającą utracie lub zyskowi jednego nośnika większościowego na czas trwania pułapkowania. Zjawisko to prowadzi do powstawania widma $1/f$, jeśli tylko: a) każdy obszar daje bezpośrednio widmo $1/f$ lub b) każdy obszar daje widmo szumów śrutowych o charakterze $\tau/[1+(\omega\tau)^2]$, gdzie τ jest średnim czasem, w którym nośnik pozostaje swobodny w sąsiedztwie pułapki i rozkład τ na powierzchni zmienia się jak $1/\tau$.

Doświadczenie z polem elektrycznym potwierdza, że rozkład statycznych czasu powierzchniowych stanów powolnych jest odpowiedni dla powstania widma szumów typu $1/f$. Przyłożenie pola elektrycznego do powierzchni półprzewodnika powoduje zmianę jej przewodności, która następnie powraca stopniowo do swojej pierwotnej wartości w czasie

rzędu sekund lub minut, pomimo utrzymywania pola elektrycznego na stałym poziomie. Charakter powrotu przewodności do pierwotnej wartości nie jest wykładniczy, jeśli przyłożone pole elektryczne jest tak małe, że zmienia potencjał powierzchniowy mniej niż kT/q . Zjawiska przy tak małym polu nie odpowiadają procesom nieliniowym, ponieważ podwojenie wartości przyłożonego pola powoduje podwojenie zmiany przewodności; odwrócenie polaryzacji pola odwraca znak przewodności nie zmieniając współczynnika powrotu, a przyłożenie pola sinusoidalnego powoduje sinusoidalną zmianę przewodności o tej samej częstotliwości, bez występowania harmonicznych. W celu przeanalizowania tych doświadczeń należy podzielić powierzchnię na małe obszary tak, jak to się robi przy dyskusji szumów $1/f$. Jeśli wielkość tych obszarów jest rzędu kwadratów z bokami o długości Debye ($10^{-5} \times 10^{-5}$ cm), wtedy przewodności poszczególnych obszarów zmieniają się niezależnie jedna od drugiej. Zmiana przewodności odpowiadająca i -temu obszarowi powinna być proporcjonalna do $\exp(-t/\tau_i)$, gdzie τ_i jest średnim czasem pozostawania poza pułapką nośnika zaindukowanego w i -tym obszarze. Zjawisko powracania do stanu pierwotnego w warunkach przyłożonego pola elektrycznego daje się wytłumaczyć jeśli przyjmujemy, że stała czasu zmienia się od obszaru do obszaru wg funkcji rozkładu proporcjonalnej do $1/\tau$. Dla uzyskania zgodności z danymi doświadczalnymi konieczne jest aby w wielu przypadkach rozkład $1/\tau$ rozciągał się w zakresie od milisekund aż do 100 sek, a być może i dalej.

Mc Whorter [1] dochodzi do wzoru określającego kształt widma i wielkość szumów $1/f$ przy założeniu wspomnianego rozkładu stałych czasu $1/\tau$ dla powolnych stanów powierzchniowych. Stwierdza on, że każdy i -ty obszar powierzchni o rozmiarach Debye daje widmo szumów śrutowych tak, jak gdyby swobodne nośniki większościowe wewnątrz tego obszaru zachowywały się jak niezależne cząsteczki, każda z takim samym czasem życia τ jak to określono przy doświadczeniach z polem elektrycznym. Dla pewnej efektywnej liczby elektronów N_o i efektywnej ilości dziur P_o uczestniczących w pułapkowaniu na powierzchni S i -tego obszaru otrzymamy widmo

$$G(\omega) = S(N_o + P_o) \{4\tau_i / [1 + (\omega\tau_i)^2]\}. \quad (3)$$

Wielkość N_o jest równa $kT(n_o - n_{so})qE_{so}$, gdzie n_o i n_{so} są odpowiednio koncentracjami elektronów w objętości i na powierzchni dla stanu równowagi, natomiast E_{so} jest wewnętrznym polem elektrycznym przy powierzchni w stanie równowagi. Jeżeli nie ma obszaru ładunku przestrzennego przy powierzchni i $E_{so} = 0$, wtedy

$$N_o = n_o \{kT\varepsilon_o / [q^2(n_o + p_o)]\}^{1/2} = L_D \cdot n_o, \quad (4)$$

gdzie:

$L_D = [kT\varepsilon_o / q^2(n_o + p_o)]^{1/2}$ jest długością Debye,

ε_o — przenikalność elektryczna próżni,

ε — stała dielektryczna i

q — ładunek elektronu.

Podobną zależność otrzymamy dla P_o .

Przyłożenie napięcia stałego U_o do próbki o długości l powoduje pułapkowanie nośników i zmianę prądu o wielkość $q\mu_{FE}U_o/l^2$, gdzie μ_{FE} jest efektywną ruchliwością pomierzoną przy doświadczeniu z polem elektrycznym na dużych częstotliwościach. Dodając składowe szumów z poszczególnych obszarów, przy założeniu rozkładu $1/\tau$ dla τ w gra-

nicach od dolnej wartości τ_1 do wartości górnej τ_2 , otrzymamy rozkład widmowy fluktuacji prądu

$$G_1(\omega) = \frac{4lc}{\ln(\tau_1/\tau_2)} \left(\frac{q\mu_{FE}U_o}{l^2} \right)^2 \left(\frac{N_o + P_o}{\omega} \right) (\operatorname{tg}^{-1}\omega\tau_2 - \operatorname{tg}^{-1}\omega\tau_1), \quad (5)$$

gdzie c jest obwodem próbki w kształcie odcinka drutu.

W zakresie częstotliwości, w którym $\omega\tau_2 \ll 1 \ll \omega\tau_1$, mamy

$$G_1(\omega) \cong \{lc/[\ln(\tau_2/\tau_1)]\} (q\mu_{FE}U_o/l^2)^2 (N_o + P_o)/f. \quad (6)$$

Wzór ten określa kształt widma i wielkość szumów $1/f$.

Rozkład stałych czasu typu $1/\tau$ Mc Whorter tłumaczy w następujący sposób. Istnieje duża bariera potencjału pomiędzy stanami powolnymi i powierzchnią półprzewodnika. Pułapki powierzchniowe nie znajdują się w płaszczyźnie pomiędzy półprzewodnikiem i tlenkiem, lecz w samej warstwie tlenku lub na jej powierzchni. Pułapki te wynikają z niedoskonałości w warstwie tlenku lub, co jest bardziej prawdopodobne, z jonów adsorbowanych na powierzchni tlenku. Przenoszenie nośnika z wnętrza półprzewodnika do pułapki poprzez barierę powoduje zmianę wysokości tej bariery od obszaru do obszaru, co może dać rozkład $1/\tau$ stałych czasu.

Biorąc pod uwagę słabą zależność mocy szumów $1/f$ od temperatury, przenoszenie nośników przez barierę potencjału można tłumaczyć nie emisją termiczną lecz tunelowaniem. W tym przypadku odpowiedni rozkład stałych czasu może występować przy jednostajnym rozkładzie wysokości barier, gdyż τ jest określone zależnością $\tau = A \exp(Bw)$, gdzie w jest wysokością bariery, natomiast A i B są to stałe. Taki jednostajny rozkład wysokości barier istnieje wtedy, gdy pułapki są równomiernie rozmieszczone w całej warstwie tlenku.

3. MODEL SZUMÓW $1/f$ ZWIĄZANY Z DYFUZJĄ ATOMÓW ZANIECZYSZCZEŃ

Wg Bessa [2] szumy $1/f$ powstają wskutek dyfuzji atomów zanieczyszczeń z centrów emisyjnych na powierzchni półprzewodnika. Centra emisyjne są rozrzucone w sposób przypadkowy na powierzchni półprzewodnika. Mogą one emitować i absorbować dużą ilość atomów zanieczyszczeń. Z kolei atomy zanieczyszczeń, tak długo, jak długo pozostają na powierzchni półprzewodnika, działają jak pułapki dla elektronów i dziur. Typowym zjawiskiem szumowym jest emisja atomu zanieczyszczeń z centrum emisyjnego i jego dyfuzja po powierzchni. Zjawisko to trwa dotąd, dopóki atom zanieczyszczeń nie zostanie wychwycony przez swoje własne lub sąsiednie centrum. W ciągu czasu τ dyfuzji po powierzchni atom zanieczyszczeń, dzięki swojej właściwości pułapkowania, unieruchamia elektron lub dziurę. Powoduje to zmianę przewodności próbki i wynikającą stąd zmianę prądu w przypadku przyłożenia do próbki napięcia stałego. Przypadkowy rozkład czasów tych zjawisk powoduje szumy $1/f$.

Oczywiste jest, że musi istnieć szeroki zakres czasów pułapkowania τ . Funkcja rozkładu tych czasów $g(\tau)$ określa postać widma szumów, które ma kształt $1/f^n$ (n bliskie lecz niekoniecznie równe jedności) w szerokim zakresie częstotliwości. Wykładnik potęgi n jest określony przez rozmiary atomowej siatki przestrzennej a i odległość wychwyty λ_c atomu

zanieczyszczeń przez centrum emisyjne. Istnieje zależność $n = 2 - \lambda_c/(\pi a)$. Zakres częstotliwości, w którym obowiązuje prawo 1/f jest określony powierzchniową gęstością centrów emisyjnych M_c . Stosunek górnej f_h i dolnej f_l częstotliwości tego zakresu jest określony wzorem

$$f_h/f_l = [\pi(2-n)a^2M_c]^{-1}. \quad (7)$$

Jak to stwierdzono pomiarowo, szумы 1/f mogą występować w danym przyrządzie w zakresie częstotliwości równym około $8\frac{1}{2}$ dekad. W celu wyjaśnienia występowania szumów 1/f w tak dużym zakresie częstotliwości ($f_h/f_l \cong 3 \cdot 10^8$), M_c powinno mieć wartość około $10^6/\text{cm}^2$. Z drugiej strony, w celu wytłumaczenia poziomu obserwowanych szumów, średnia powierzchniowa gęstość pułapek (tj. średnia liczba atomów zanieczyszczeń wędrujących w centymetrze kwadratowym powierzchni) musi być rzędu $10^{11}/\text{cm}^2$. Oznacza to, że z każdym centrum emisyjnym związane jest 10^5 atomów zanieczyszczeń. Aby wykładnik potęgi n był bliski jedności, odległość wychwytu λ_c musi mieć wartość około πa . Ponadto prawdopodobne jest, że λ_c^2 jest powierzchnią centrum emisyjnego, która wobec powyższego ma wartość w granicach od $4a^2$ do $10a^2$.

Najnowsze badania Jantscha [3] z lat 1967—1968 doprowadziły do stworzenia modelu szumów 1/f podobnego do modelu Bessa. Szумы 1/f przypisuje się tam modulacji rekombinacji powierzchniowej. Modulacja ta jest następstwem dryftu jonów wody znajdujących się w aktywnych centrach rozmieszczonych w płaszczyźnie pomiędzy półprzewodnikiem a warstwą tlenków.

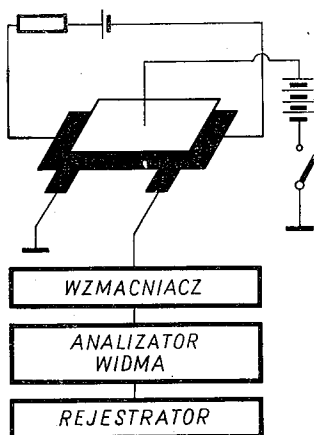
Przedstawione modele szumów 1/f Mc Whortera i Bessa podają jako źródło tych szumów zjawiska powierzchniowe. Różnice w tych teoriach zawierają się w interpretacji powstawania rozkładu stałych czasu odpowiedzialnego za szумы 1/f. W obecnym stanie wiedzy nie można powiązać tych szumów z żadnym elementarnym procesem. Przedstawione teorie muszą pozostawać w sferze domniemania.

4. DOŚWIADCZALNE BADANIE SZUMÓW 1/f

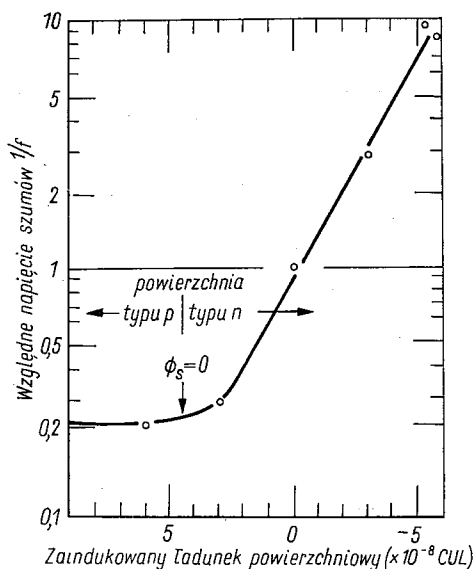
Mac Rae i Levinstein [4] przeprowadzili szereg doświadczeń mających wyjaśnić zjawisko szumów 1/f. Badali oni szумы w cienkich ($100 \mu\text{m}$) płytkach germanowych domieszkowanych złotem, w zależności od wartości stałego pola elektrycznego prostopadłego do powierzchni półprzewodnika, od temperatury oraz od rodzaju i ciśnienia gazu otaczającego półprzewodnik.

W układzie pomiarowym na rys. 2 przedstawiono przykładowo napięcie stałe pomiędzy płytką metalową umieszczoną równolegle do powierzchni półprzewodnika oraz próbką półprzewodnikową. Zmiana tego napięcia powoduje zmianę potencjału powierzchniowego Φ_s półprzewodnika. Otrzymane zależności szumów od ładunku indukowanego na powierzchni półprzewodnika w przypadku germanu typu p i typu n pokazują rysunki 3 i 4. Nie obserwuje się zmiany wielkości szumów 1/f przy zmianie potencjału powierzchniowego w takich granicach, że powierzchnia pozostaje tego samego typu co i objętość półprzewodnika. Dopiero wytworzenie warstwy inwersyjnej daje silny wzrost szumów. Niezmiennosc szumów 1/f z potencjałem powierzchniowym dla powierzchniowej warstwy akumulacyjnej i duży wzrost szumów 1/f towarzyszący wzrostowi potencjału powierzch-

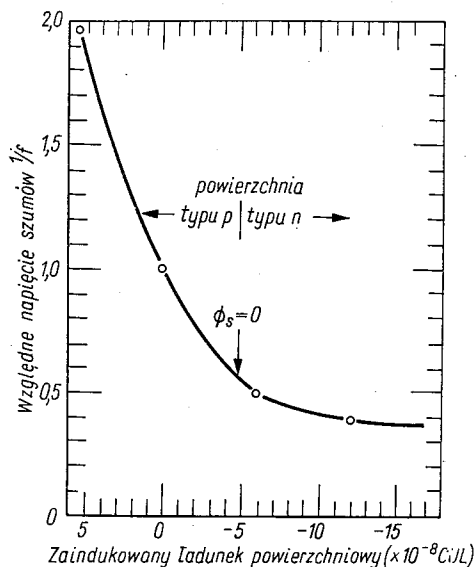
niowego dla warstwy inwersyjnej wskazują na to, że wymiana ładunku pomiędzy objętością półprzewodnika i powolnymi stanami powierzchniowymi nie jest głównym zjawiskiem określającym szumy $1/f$, jak również, że szumy te nie są związane z ruchliwością powierzchniową.



Rys. 2. Układ pomiarowy



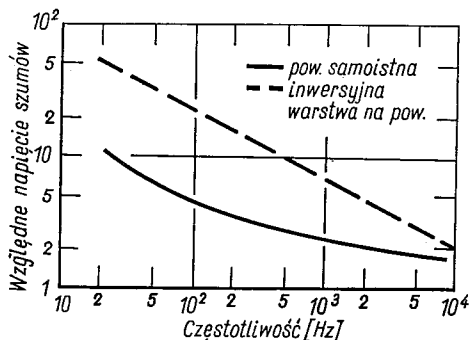
Rys. 3. Zależność szumów $1/f$ od zaindukowanego ładunku powierzchniowego dla germanu typu p



Rys. 4. Zależność szumów $1/f$ od zaindukowanego ładunku powierzchniowego dla germanu typu n

Na rys. 5 pokazano jak zmienia się częstotliwościowe widmo szumów w przypadku wytworzenia warstwy inwersyjnej na powierzchni germanu typu p. W przypadku powierzchni samoistnej obserwujemy występowanie szumów $1/f$ oraz szumów generacyjno-rekombinacyjnych, natomiast po wytworzeniu powierzchniowej warstwy inwersyjnej dominują szumy $1/f$, tworząc charakterystykę o nachyleniu 1,1 w skali podwójnie logaryt-

micznej. Należy sądzić, że pomiary powyższe były wykonywane po jakimś dostatecznie długim czasie od chwili przyłożenia napięcia stałego indukującego ładunek powierzchniowy, chociaż Mac Rae i Levinstein nie podają tego. Wytworzenie obszaru ładunku prze-



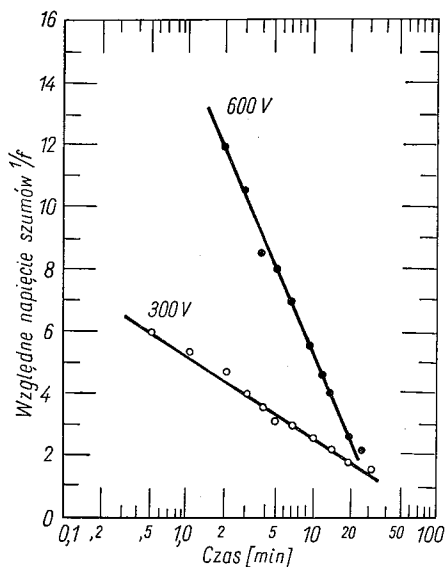
Rys. 5. Widmo szumów dla germanu typu p , którego przewodność powierzchniowa była najpierw samoistna a następnie odwrócona

strzennego, przez przyłożenie napięcia stałego, powoduje początkową zmianę przewodności próbki półprzewodnikowej. Występuje też początkowa zmiana szumów $1/f$, jeśli tylko na powierzchni półprzewodnika istnieje warstwa inwersyjna. Po tych początkowych zmianach zarówno przewodność jak i szumy $1/f$ powracają powoli do swych pierwotnych wartości. Odpowiedzialna za to zjawisko jest wymiana ładunku do powierzchniowych stanów powolnych poprzez warstwę tlenków na powierzchni półprzewodnika. Jak podaje Mc Whorter, aby szumy miały charakter $1/f$, powrót przewodności i szumów do ich pierwotnej wartości w obszarach powierzchni o rozmiarach Debye'a powinien przebiegać wg prawa $\exp(-t/\tau)$, a rozkład stałych czasu dla poszczególnych obszarów powinien być jak $1/\tau$. Powrót zarówno przewodności jak i szumów dla całej powierzchni przebiegałby wtedy wg krzywej logarytmicznej.

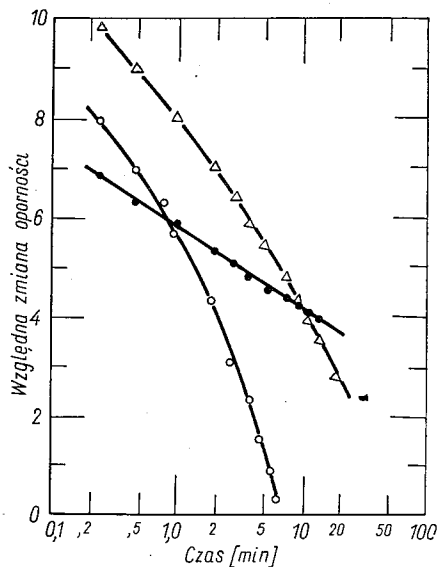
Pomiary wykazują, że szumy powracają zawsze wg zależności logarytmicznej (rys. 6) niezależnie od warunków powierzchniowych, natomiast powrót przewodności w zależności od warunków powierzchniowych (atmosfery otaczającej półprzewodnik) może mieć charakter logarytmiczny, wykładniczy albo pośredni między tymi dwoma (rys. 7). Dla próbki umieszczonej w próżni 10^{-6} mm Hg uzyskano logarytmiczną krzywą powrotu, natomiast dla próbki znajdującej się w atmosferze amoniaku powrót odbywał się wg krzywej wykładniczej. Zazwyczaj powrót przewodności do wartości pierwotnej ma charakter pośredni między logarytmicznym a wykładniczym. Ta niezgodność doświadczeń z teorią Mc Whortera wskazuje na to, że rozkład stałych czasu powolnych stanów powierzchniowych nie może być jedynym wytłumaczeniem zjawiska szumów $1/f$. Przypuszcza się, że niejednorodność wysokości powierzchniowej bariery potencjału może być równoczesną przyczyną szumów $1/f$.

Obniżenie temperatury powoduje wydłużenie czasu powrotu. Nie zaobserwowano np. zmniejszenia się poziomu szumów $1/f$ w okresie kilku godzin od chwili przyłożenia napięcia stałego do próbki w temperaturze 78°K .

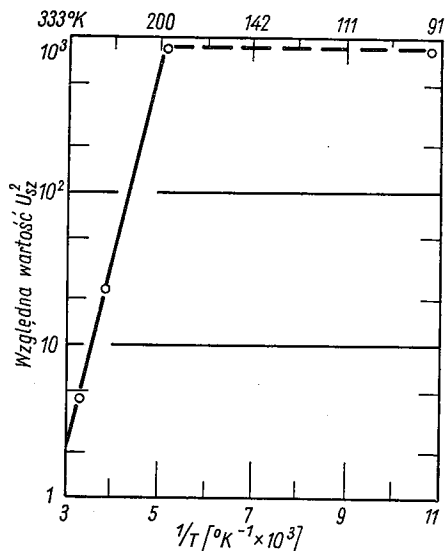
Ze względu na to, że wielkość szumów $1/f$ wydaje się być niezależna od temperatury, podczas gdy stała czasu powolnych stanów powierzchniowych zależy od temperatury,



Rys. 6. Charakterystyki powrotu szumów $1/f$ do ich pierwotnej wartości, po przyłożeniu napięcia stałego prostopadłe do powierzchni



Rys. 7. Charakterystyki powrotu oporności dla próbki: $\Delta-\Delta$ w powietrzu, $o-o$ w NH_3 , $\bullet-\bullet$ w próżni

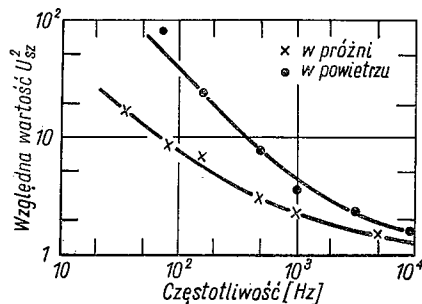


Rys. 8. Temperaturowa zależność szumów $1/f$, związana z warstwą inwersyjną w germanie typu p

kwestionowano znaczenie powierzchniowych stanów powolnych dla wyjaśnienia mechanizmu szumów $1/f$. Mac Rae i Levinstein przebadali więc szumy $1/f$ związane zarówno z warstwą inwersyjną jak i akumulacyjną w funkcji temperatury. Okazuje się, że szumy $1/f$ związane z warstwą akumulacyjną są niezależne od temperatury, podczas gdy związane z warstwą inwersyjną są od niej zależne. Na rys. 8 pokazana jest ta zależność w przypadku

germanu typu p z wytworzoną na powierzchni warstwą inwersyjną. Dla temperatury T w granicach 300°K do 200°K zarówno dla półprzewodnika typu p jak i typu n obowiązuje zależność $U_{sz}^2 = A \exp(-E/kT)$, gdzie A jest stałą, natomiast $E \cong 0,25 \text{ eV}$. W celu uzyskania warstwy inwersyjnej przy niskich temperaturach konieczne jest wytworzenie stałego pola elektrycznego prostopadłego do powierzchni półprzewodnika. Samoistnie warstwa inwersyjna przy niskich temperaturach nie występuje, nawet gdy istnieje ona w temperaturze pokojowej. Toteż przy poprzednich pomiarach badano temperaturową zależność szumów $1/f$ związanych z warstwą akumulacyjną i stąd wzięły się wspomniane wyżej zastrzeżenia.

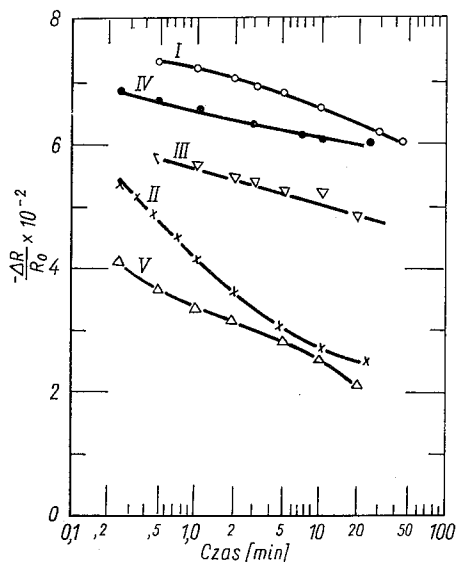
Zależności szumów $1/f$ od otaczającej atmosfery przedstawione są na rys. 9, 10, 11. Rys. 9 przedstawia częstotliwościowe widmo szumów dla niemal samoistnego germanu typu p przy temperaturze pokojowej umieszczonego w atmosferze powietrza (górna



Rys. 9. Częstotliwościowe widmo szumów dla próbki germanowej typu p , o rezystywności $30 \Omega \text{ cm}$, grubości $150 \mu\text{m}$, w temperaturze 300°K

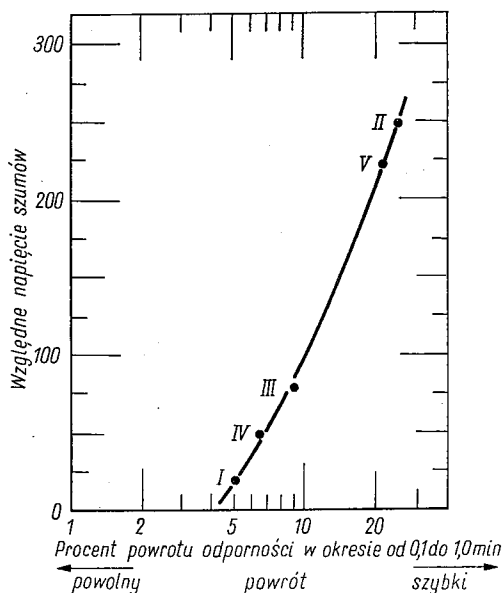
krzywa) i w próżni (dolna krzywa). Jak widać, widma te obejmują szумы $1/f$ oraz szумы generacyjno-rekombinacyjne. Na rys. 10 przedstawiono charakterystyki powrotu oporności próbki półprzewodnikowej z samoistną warstwą powierzchniową przy zmianie warunków otoczenia. Zmiany tej dokonywano w kolejności oznaczonej na rysunku rzymskimi cyframi. Najpowolniejszy powrót następuje dla próbki umieszczonej w próżni 10^{-6} mm Hg przez okres kilku dni, natomiast najszybszy dla próbki znajdującej się w powietrzu. Rys. 11 przedstawia szумы związane z poszczególnymi krzywymi na rys. 10 w funkcji procentowej zmiany oporności zachodzącej w czasie od 0,1 min. do 1,0 min. od chwili przyłożenia napięcia stałego. Szумы $1/f$ wzrastają przy zmniejszaniu się czasu powrotu lub przy wzroście gęstości powolnych stanów powierzchniowych.

Przeprowadzone badania wskazują na decydujące znaczenie powierzchni półprzewodnika dla określenia właściwości szumów $1/f$. Duży wzrost szumów przy inwersji przewodności powierzchniowej i silna zależność temperaturowa szumów w przypadku wytworzenia warstwy inwersyjnej przez przyłożenie pola elektrycznego prostopadłego do powierzchni wnoszą dodatkowe informacje dla wyjaśnienia mechanizmu szumów $1/f$. Brak dodatkowych szumów $1/f$ w przypadku przyłożenia napięcia prostopadle do powierzchni półprzewodnika przy równoczesnym występowaniu powierzchniowej warstwy akumulacyjnej wyklucza znaczenie wymiany ładunku pomiędzy objętością półprzewodnika i powolnymi stanami powierzchniowymi jako źródła szumów $1/f$. W końcu logarytmiczny



Rys. 10. Charakterystyki powrotu oporności dla warunków otoczenia zmieniających wg następującego cyklu:

I, próżnia 10^{-6} mm Hg przez 3 dni; II, powietrze; III, bezpośrednio po wytworzeniu próżni; IV, próżnia 10^{-6} mm Hg przez jeden dzień; V, powietrze



Rys. 11. Zależność szumów $1/f$ od stałej czasu powolnych stanów powierzchniowych

charakter powrotu szumów potwierdza możliwość rozkładu stałych czasu powolnych stanów powierzchniowych odpowiedniego do wytworzenia widma szumów $1/f$, choć charakterystyki powrotu przewodności wskazują, że nie jest to jedyne wytłumaczenie zjawiska tych szumów.

5. SZUMY $1/f$ W DIODACH PÓŁPRZEWODNIKOWYCH

Rozpatrzmy tutaj źródła szumów w diodach półprzewodnikowych występujące w zakresie małych częstotliwości. Źródła te przedstawione zostaną na schematach zastępczych diody spolaryzowanej w kierunku przewodzenia i w kierunku zaporowym. Zgodnie z Fongerem [5] dioda rozpatrywana będzie jako część tranzystora. Dla polaryzacji w kierunku przewodzenia będzie to obszar emiter-baza tranzystora, dla diody spolaryzowanej zaporowo będzie to złącze kolektor-baza. Zastosowane zostaną oznaczenia jak w przypadku tranzystora.

W złączach półprzewodnikowych w zakresie małych częstotliwości istnieją trzy rodzaje szumów: szумы białe, szумы powierzchniowe $1/f$ i szумы upływności typu $1/f$.

5.1. Szумы białe

Są to szумы dobrze znane teoretycznie. Pochodzą one z przypadkowych procesów w siatce atomowej, które to procesy określają takie makroskopowe wielkości, jak współczynnik dyfuzji, czas życia nośników czy szybkość rekombinacji powierzchniowej. Na

rys. 12(a) i 13(a) przedstawiono schematy zastępcze diod spolaryzowanych w kierunku przewodzenia i zaporowym, słuszne dla małych częstotliwości. Dla diody spolaryzowanej w kierunku przewodzenia wartości elementów wchodzących w skład schematu zastępczego są określone zależnościami

$$r_{b'e} = \frac{kT}{q(I_e + I_{eo})} \quad (8)$$

oraz

$$r_{bb'} = R_{bb'} + I_b \frac{\partial R_{bb'}}{\partial I_b}, \quad (9)$$

gdzie:

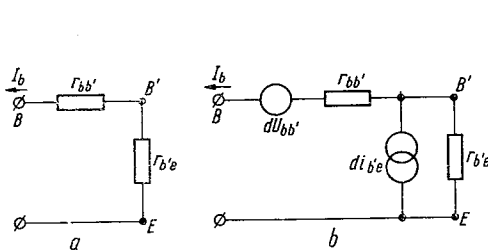
$r_{b'e}$, $r_{bb'}$ — oporności dla prądu zmiennego,

$R_{bb'}$ — oporność dla prądu stałego,

q — ładunek elektronu,

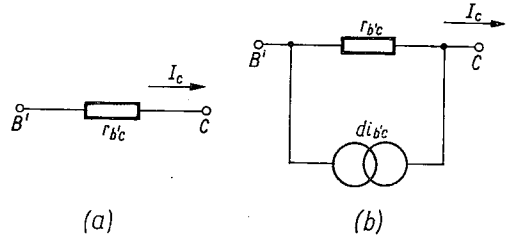
I_{eo} — prąd nasycenia emitera.

Dla diody spolaryzowanej w kierunku zaporowym (rys. 13(a)) oporność $r_{b'c}$ jest wielkością określoną empirycznie.



Rys. 12. Schematy zastępcze diody spolaryzowanej w kierunku przewodzenia:

a) dla prądów zmiennych sinusoidalnych b) dla szumów



Rys. 13. Schematy zastępcze diody spolaryzowanej w kierunku zaporowym:

a) dla prądów zmiennych sinusoidalnych b) dla szumów

Źródła szumów białych przedstawione są na rys. 12(b) dla diody spolaryzowanej w kierunku przewodzenia oraz na rys. 13(b) w przypadku diody spolaryzowanej zaporowo. Mamy tam zależności:

$$\overline{di_{b'e}^2} = 2q(I_e + 2I_{eo})\Delta f, \quad (10)$$

$$\overline{du_{bb'}^2} = 4kTR_{bb'}\Delta f \quad (11)$$

oraz

$$\overline{di_{b'c}^2} = 2qI_c\Delta f. \quad (12)$$

5.2. Szumy powierzchniowe 1/f

Fonger przyjmuje, że szumy te wynikają z modulacji prędkości rekombinacji powierzchniowej na skutek termicznych fluktuacji powierzchniowej bariery potencjału. Można jednak założyć stałość prędkości rekombinacji powierzchniowej s oraz istnienie

szumowej generacji powierzchniowej par nadmiarowych, w warunkach przepływu przez diodę prądu stałego.

Źródła szumów powierzchniowych uwidocznione na rys. 12(b) i 13(b) opisywane są teraz innymi zależnościami. W przypadku diody spolaryzowanej w kierunku przewodzenia sumy te reprezentowane są przez generator prądowy

$$di_{b'e} = qW_e dg \quad (13)$$

oraz generator napięciowy

$$du_{bb'} = I_b \left(\frac{\partial R_{bb'}}{\partial I_b} qW_e + m \right) dg. \quad (14)$$

Natomiast szumy powierzchniowe diody spolaryzowanej zaporowo przedstawione są przy pomocy jednego tylko generatora prądowego

$$di_{b'e} = qW_e dg. \quad (15)$$

Fizyczne uzasadnienie wzorów (13), (14), i (15) oraz oznaczenia w nich występujące są następujące: $dg^2/\Delta f$ jest gęstością widmową par dziura-elektron generowanych na jednostkę powierzchni złącza, związaną z gęstością par nadmiarowych ($p-p_n$) dla przepływającego prądu stałego oraz ze współczynnikiem widmowej gęstości szumów $\Psi(f)$ następującą zależnością

$$dg^2 = (p-p_n)^2 \Psi(f) df. \quad (16)$$

Generator $di_{b'e}$ wynika ze zjawiska dysocjacji par dg do emitera. W_e jest prawdopodobieństwem, że dg par osiągnie emiter. Generator $di_{b'e}$ wynika z dysocjacji par dg do kolektora. Wyrażenie m we wzorze na $du_{bb'}$, określa bezpośrednią modulację przewodności bazy przez dg par. Wyrażenie $\partial R_{bb'}/\partial I_b$ pochodzi z pośredniej modulacji przewodności bazy.

Nie podaje się nawet zjawiskowego wytłumaczenia współczynnika $\Psi(f)$. Przyjmuje się, że Ψ zmienia się jak $1/f$, a jego wielkość jest różna dla różnych egzemplarzy diod i względnie mało zależna od p (nieco maleje ze wzrostem p).

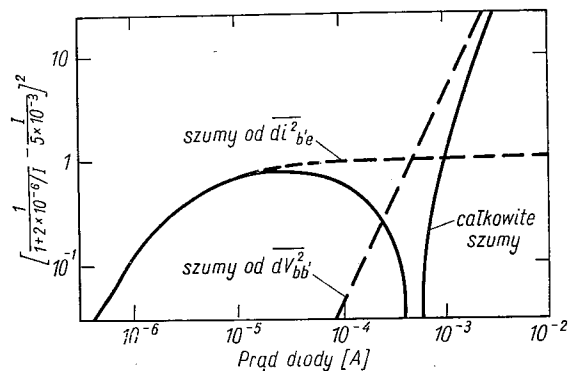
Przedstawione generatory szumów i opisujące je wzory odnoszą się do punktowych źródeł par. W celu otrzymania wyrażeń na całkowite sumy powierzchniowe diody należy przeprowadzić sumowanie szumów reprezentowanych przez te źródła, zakładając, że są one nieskorelowane. Dla przykładu, generator wynikający z sumowania źródeł $di_{b'e}$ będzie miał widmo

$$\sum \bar{di}_{b'e}^2 = \sum q^2 W_e^2 dg^2 = q^2 \Psi(f) df \int_A dA W_e^2 (p-p_n)^2, \quad (17)$$

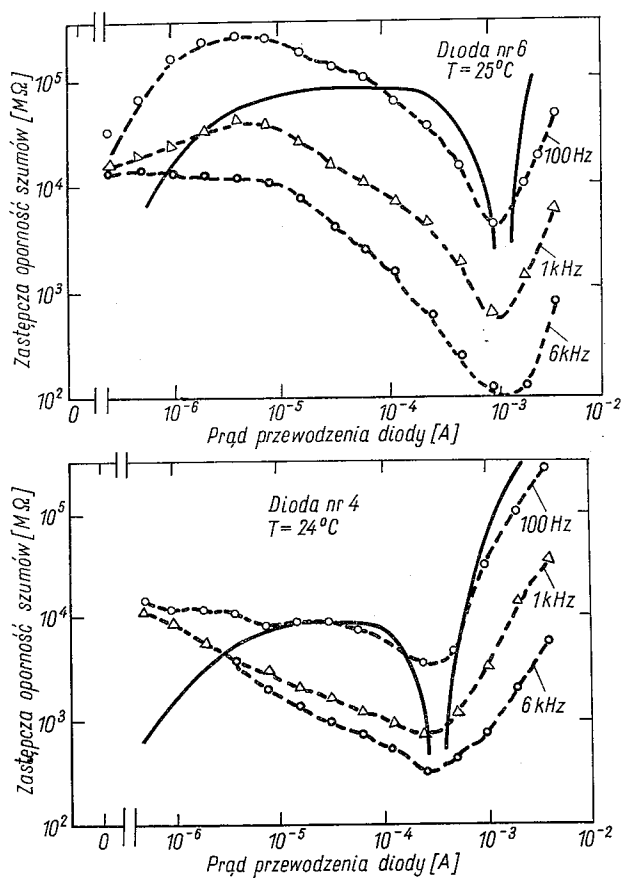
gdzie A jest powierzchnią rekombinacji, na której wartość p_n odbiega od p .

Ponieważ szumy powierzchniowe zależą silnie od gęstości par nadmiarowych, zatem powinny one być dużo większe dla diody spolaryzowanej w kierunku przewodzenia niż dla spolaryzowanej zaporowo. Istnieje również silna zależność tych szumów od wielkości prądu przepływającego przez diodę.

Fonger wychodząc ze wzorów na $di_{b'e}$ oraz $du_{bb'}$, pomijając wyrażenie m oraz zakładając pełną korelację między tymi dwoma źródłami, dochodzi do wzoru określającego



Rys. 14. Przewidywana zależność szumów powierzchniowych od prądu przewodzenia diody



Rys. 15. Pomierzone wartości zastępczej oporności szumów w funkcji prądu przewodzenia dwóch diod

równoważną oporność szumów powierzchniowych diody spolaryzowanej w kierunku przewodzenia:

$$R_{eq(s)} = \frac{1}{4\pi s^2} \frac{kT}{q^2} \left[\frac{1}{(1+I_{eo}/I_e)} + \frac{qI_b}{kT} I_b \frac{\partial R_{bb'}}{\partial I_b} \right]^2 \frac{(R_c - R_e + R_c L)}{(R_c^2 - R_e^2 + 4R_c L)^2} \Psi(f); \quad (18)$$

L jest tutaj drogą dyfuzji, wszystkie wyrazy R są opornościami dla prądu stałego.

W równaniu (18) zależność równoważnej oporności szumów powierzchniowych $R_{eq(s)}$ od prądu przepływającego przez diodę jest określona wyrażeniem w nawiasach kwadratowych. Pierwsza część tego wyrażenia pochodzi od źródeł prądowych $di_{b'e}$, natomiast druga część od źródeł napięciowych $du_{bb'}$. Badano diody, dla których wyrażenie w nawiasach kwadratowych przyjmuje następującą wielkość

$$\left[\frac{1}{1+2 \times 10^{-6}/I_b} - \frac{I_b}{5 \times 10^{-3}} \right]^2. \quad (18a)$$

Zależność tę w funkcji prądu przepływającego przez diodę przedstawiono na rys. 14. Pierwsze wyrażenie pochodzące od $di_{b'e}$ dominuje przy małych wartościach prądu przewodzenia, drugie wyrażenie od $du_{bb'}$ dominuje przy dużych prądach przewodzenia. Na rys. 14 liniami przerywanymi oznaczono składowe szumy pochodzące od $di_{b'e}$ oraz $du_{bb'}$ oddzielnie, natomiast linia ciągła przedstawia całkowite szumy powierzchniowe.

Pomierzono szumy diod w funkcji prądu stałego przepływającego przez diodę w kierunku przewodzenia przy trzech częstotliwościach: 100 Hz, 1000 Hz i 6000 Hz. Wyniki pomiarów dwóch diod przedstawione na rys. 15 dają potwierdzenie przyjętego modelu szumów powierzchniowych i wynikającego z niego wzoru obliczeniowego (wzór 18). Liniami ciągłymi oznaczono teoretyczne wartości szumów, natomiast liniami przerywanymi — szumy pomierzone.

5.3. Szumy upływności typu $1/f$

W diodach spolaryzowanych w kierunku zaporowym oprócz prądu nasycenia pojawia się dodatkowo prąd upływności. Występowaniu tego prądu towarzyszy gwałtowny wzrost szumów, którym daje się nazwę szumów upływności.

Szumy upływności są przedstawione na schemacie zastępczym (rys. 13(b)) w postaci źródła prądowego

$$\overline{di_{b'e}^2} = 4kTG_{eqL}(f)df; \quad (19)$$

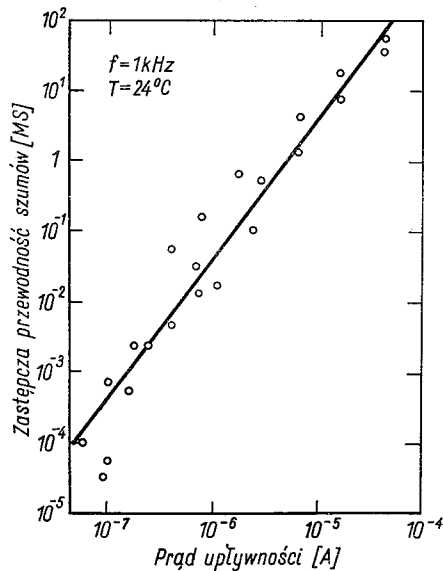
G_{eqL} jest tutaj równoważną przewodnością szumów upływności ustaloną doświadczalnie. Zmienia się ona jak $1/f$ i silnie zależy od prądu upływności

$$G_{eqL}(f) = 4 \times 10^{13} I_L^2 / f, \quad (20)$$

gdzie I_L jest prądem upływności.

Prąd upływności nie jest prostą funkcją napięcia wstecznego. Zależy on od poprzednich wartości napięć polaryzujących diodę. Istnieje też zależność prądu upływności od temperatury. Prąd ten wzrasta ze wzrostem temperatury.

Na rys. 16 przedstawiono zależność równoważnej przewodności szumów upływności w funkcji prądu upływności, wziętą jako średnią z pomiaru sześciu sztuk diod przy częstotliwości 1 kHz w temperaturze 24°C . Stąd wyznaczono wartość G_{eqL} określoną równaniem



Rys. 16. Szumy upływności jako funkcja prądu upływności sześciu diod spolaryzowanych wstecznie

(20). Trzeba jeszcze dodać, że nie ma dotychczas żadnego zjawiskowego nawet wytłumaczenia szumów upływności.

Wyniki własnych badań autora nad szumami typu $1/f$ przedstawione zostały w pracach [6], [7] i [8].

Na zakończenie autor pragnie podziękować prof. dr inż. Witoldowi Rosińskiemu i dr inż. Edwardowi Stolarskiemu za owocną dyskusję nad przedstawionym tutaj materiałem.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Mc Whorter, $1/f$ Noise and Germanium Surface Properties, Semiconductor Surface Physics by Kingston, 1957.
2. L. Bess, Study of $1/f$ Noise in Semiconductor Filaments, The Physical Review, vol. 103, No 1, 1956, 73—82.
3. O. Jäntschi, A Theory of $1/f$ Noise at Semiconductor Surfaces, Solid State Electronics, vol. 11, No 2, 1968, 267—272.
4. Mac Rae, Levinstein, Surface — Dependent $1/f$ Noise in Germanium, The Physical Review, vol. 119, No 1, 1960, 62—69.
5. W. Fonger, A Determination of $1/f$ Noise Sources in Semiconductor Diodes and Triodes, Transistors I, RCA, 1956.
6. A. Zaklikiewicz, Pomiar szumów w opornikach, Przegląd Elektroniki, t. 8, z. 11, 1967, 559—566.

7. A. Zaklikiewicz, Pewne wyniki pomiarów własności szumowych w zakresie małych częstotliwości diod metal-półprzewodnik z barierą Schottky'ego, *Archiwum Elektrotechniki*, t. 17, z. 1, 1968, 215—219.
8. A. Zaklikiewicz, Badanie szumów $1/f$ diod z barierą Schottky'ego w zakresie dużych prądów przewodzenia, *Archiwum Elektrotechniki*, t. 18, z. 2, 1969, 413—415.

A. ZAKLIKIEWICZ

REVIEW OF INVESTIGATIONS ON $1/f$ NOISE IN SEMICONDUCTORS AND SEMICONDUCTOR DIODES

Summary

The review of today's knowledge of $1/f$ noise in semiconductors and semiconductor diodes have been performed. First, the earlier investigations on $1/f$ noise were presented. They suggest that $1/f$ noise is mainly, or may be completely, a surface phenomenon. Next, two models characterising $1/f$ noise have been presented. They are: model based on the effect of slow surface states and model based on the diffusion of impurity atoms. Mc Rae and Levinstein's experiments performed in 1960, giving the additional information for understanding the $1/f$ noise mechanism have been widely described. The end part of this paper contains results of the theoretical and experimental investigations on $1/f$ noise in semiconductor diodes.

A. ZAKLIKIEWICZ

ÜBERSICHT ÜBER DEN UNTERSUCHUNGSZUSTAND VON $1/f$ -GERÄUSCHEN IN HALBLEITERN UND HALBLEITERDIODEN

Zusammenfassung

Es wurde eine Übersicht über den aktuellen wissenschaftlichen Zustand betreff $1/f$ -Geräusche von Halbleitern und Halbleiterdioden gemacht. Eingangs befaßte man sich mit älteren Untersuchungen von $1/f$ -Geräuschen, die zur Feststellung führen, dass diese Geräusche hauptsächlich falls nicht vollkommen eine Oberflächenerscheinung sind. Weiterhin wurden zwei die $1/f$ -Geräusche charakterisierenden Modelle angeführt. Es sind dies: das mit langsamen Oberflächenzuständen zusammenhängende und das mit Atomdiffusion bei Verunreinigungen zusammenhängende Modell. Es wurden eingehend Experimente von Ms Rae und Levinstein aus dem Jahre 1960 berichtet, die zuzügliche Auskunft zur Klärung des Mechanismus von $1/f$ -Geräuschen erblicken lassen. Am Ende des Aufsatzes wurden Ergebnisse theoretischer und experimentaler Untersuchungen auf dem Gebiet der $1/f$ -Geräusche in Halbleiterdioden erörtert.

A. ЗАКЛИКЕВИЧ

ОБЗОР СОСТОЯНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ ШУМОВ $1/f$ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ И ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ДИОДАХ

Резюме

Произведён обзор существующего состояния знаний о шумах $1/f$ в полупроводниках и полупроводниковых диодах. Сначала представлены давние исследования шумов $1/f$, которые приводят к утверждению, что это шумы в основном, если не полностью, являются поверхностным явлением. Затем представлено 2 (две) модели, лучшие всего характеризующие шумы $1/f$. Одна модель связана с медленными состояниями поверхностей, а другая — с диффузией атомов загрязнений. Довольно широко обсуждены опыты McRae и Levinsteina, проведенные в 1960 г., дающие дополнительные информации, объясняющие механизм шумов $1/f$. В конце работы представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований шумов $1/f$ в полупроводниковых диодах.

Metoda wyznaczania tolerancji pewnych impedancji dwójników

JERZY J. WŁODEK (WARSZAWA)

Zakład Doświadczalny Budowy Aparatury Naukowej PAN UNIPAN, Warszawa

Otrzymano 29.4.1969

W pracy omawia się rodzaje krzywych na płaszczyźnie liczb zespolonych Gaussa, które opisują impedancje dwójników pracujących w zadanym paśmie częstotliwości. W oparciu o wzór Taylora podano metodę obliczania tolerancji impedancji linearnych biernych dwójników opisanych tymi krzywymi.

Ogólnie biorąc, rozwiązanie konstrukcyjne układu elektrycznego jest tylko wtedy celowe i poprawne, jeśli układ obok spełnienia określonych parametrów funkcjonalnych jest technologiczny, tzn. zapewnia łatwy montaż i kontrolę oraz jest najtańszy zarówno w wykonaniu jak i w eksploatacji. Dlatego przy racjonalnym projektowaniu ziarnistego układu elektrycznego należy poddać krytycznej analizie rodzaje i jakość stosowanych dwójników oraz wykonawstwo podzespółów, z których ma być utworzony układ, sposób ich montażu, konfiguracją układu i warunki eksploatacyjne. Również niezbędną czynnością, stanowiącą wstęp do przygotowania konkretnego układu do produkcji jest umiejętny wybór rodzajów tolerancji i wartości numerycznych odchyłek impedancji dwójników [5], obwodów scalonych, a nieraz i podzespółów bezpośrednio ze sobą łączonych. Niekiedy przyjmuje się jako zasadę, że w metodach, za pomocą których dokonuje się wyboru wartości numerycznej odchyłki, celowe jest uzupełnić je również szczegółową analizą intensywności uszkodzeń impedancji dwójników układu w zależności od warunków eksploatacji i przedziału czasu od uruchomienia do momentu kasacji urządzenia elektrycznego, bez względu na to czy zmontowane jest z układów zwykłych, czy z układów o samozmieniającym się strojeniu lub o samozmieniającej się strukturze [1].

W urządzeniach pracujących w ciężkich warunkach eksploatacji dominującą rolę odgrywają uszkodzenia losowe, spowodowane zmianą wartości numerycznej impedancji wykraczającą poza przedział tolerancji w sposób natychmiastowy i nieprzewidziany, natomiast w urządzeniach pracujących w warunkach laboratoryjnych i wykonanych starannie z elementów o wysokiej jakości, pojawiają się przede wszystkim uszkodzenia parametryczne, a więc powstałe wskutek zużycia i starzenia impedancji, niekoniecznie w wyniku efektywnego czasu pracy urządzenia.

Impedancja dwójnika linearnego biernego pracującego w paśmie częstotliwości $[f_p, f_k]$ wyrażona jest funkcją zespoloną [3] zmiennej rzeczywistej $\omega = 2\pi f$ w postaci

$$Z(\omega) = R(\omega) + jX(\omega). \quad (1)$$

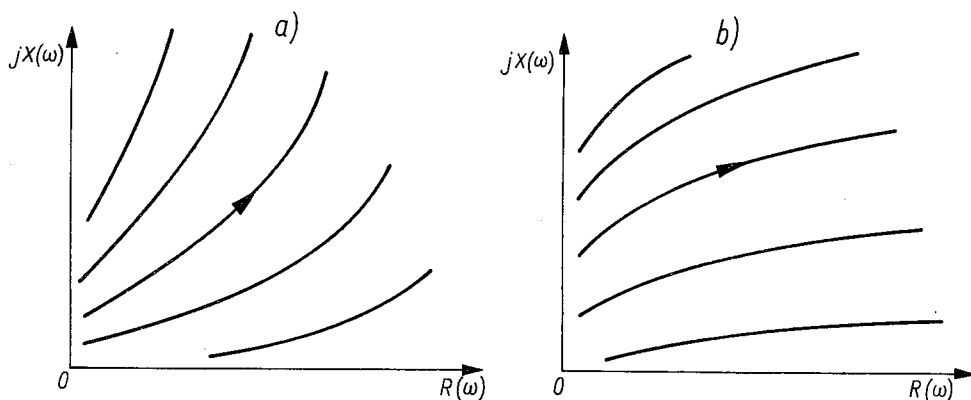
Wprowadźmy zastrzeżenie, że funkcja (1) będzie opisywała wyłącznie takie impedancje dwójników, których reaktancja w pewnym przedziale domkniętym $[\omega_p, \omega_k]$ ma charakter albo indukcyjny albo pojemnościowy. Opisane tą funkcją wektory $Z(\omega)$ odkładane są tylko w prawej półpłaszczyźnie liczb zespolonych Gaussa. Wektor $Z(\omega)$ tworzy z dodatnią półosią rzeczywistą kąt

$$\varphi = \arctg \frac{X(\omega)}{R(\omega)}.$$

Za dodatni zwrot obiegu argumentu φ przyjęto zwrot przeciwny do ruchu wskazówek zegara.

Zbiór punktów określony równaniem (1) nazywamy hodografem wektora $Z(\omega)$. Dodatnim kierunkiem hodografu (1) jest ten kierunek, w którym porusza się punkt $(R(\omega), X(\omega))$ hodografu przy jednoczesnym wzroście parametru ω i modułu rezystancji $R(\omega)$.

Jeśli w każdym punkcie przedziału $[\omega_p, \omega_k]$ pochodne rzędu pierwszego rezystancji $R(\omega)$ i reaktancji $X(\omega)$ są ciągłe i jednocześnie przyjmują analogiczne znaki, tzn. $R^{(1)}(\omega) > 0$ i $X^{(1)}(\omega) > 0$ lub $R^{(1)}(\omega) < 0$ i $X^{(1)}(\omega) < 0$, to łuk hodografu nazywamy analogodem



Rys. 1. Rodzina analogodów wklęsłych (a) i wypukłych (b); strzałką oznaczono kierunek dodatni

(rys. 1). Gdy dla każdego $\omega \in [\omega_p, \omega_k]$ pochodne rzędu pierwszego rezystancji $R(\omega)$ i reaktancji $X(\omega)$ będą ciągłe i będą miały równocześnie odmienne znaki, tzn. $R^{(1)}(\omega) > 0$ i $X^{(1)}(\omega) < 0$ lub $R^{(1)}(\omega) < 0$ i $X^{(1)}(\omega) > 0$, to łuk hodografu nazwiemy antagohodem (rys. 2).

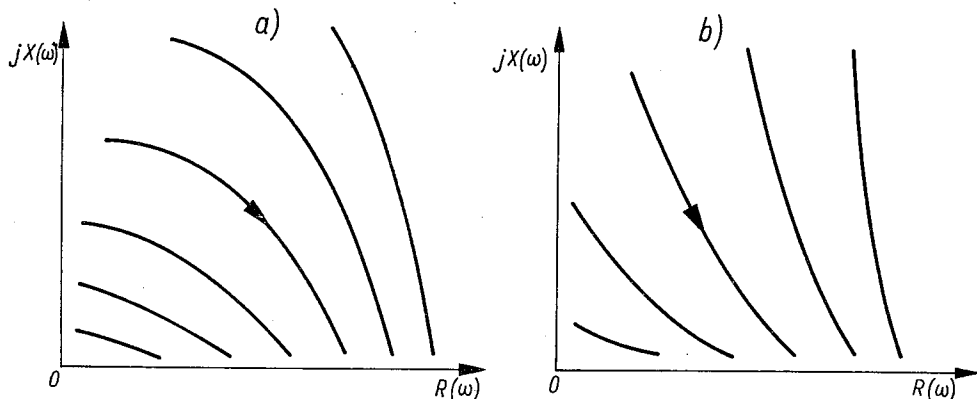
Założmy obecnie, że hodograf (1) ma dla $\omega_l \in [\omega_p, \omega_k]$ ciągłą pochodną rzędu drugiego. Jeżeli hodograf wektora dla pewnego otoczenia punktu $(R(\omega_l), X(\omega_l))$ położony jest powyżej stycznej do hodografu w punkcie $Z(\omega_l)$, tzn. $Z^{(2)}(\omega_l) > 0$, to hodograf nazywamy wklęsłym. Analogicznie, jeśli hodograf (1) dla pewnego otoczenia punktu $(R(\omega_l), X(\omega_l))$ położony jest poniżej stycznej do hodografu w punkcie $Z(\omega_l)$, czyli $Z^{(2)}(\omega_l) < 0$, to hodograf nazywamy wypukłym.

Nie ulega wątpliwości, że wartości numeryczne, pomierzone z jednakową dokładnością [6] dla ustalonego parametru ω_l , impedancji losowych $Z(\omega)$ wykonanych seryjnie z zachowaniem tej samej technologii, będą na płaszczyźnie liczb zespolonych Gaussa rozrzucone

[7] w pewnym sąsiedztwie wartości nominalnej $Z_N(\omega)$, założonej z góry przed przystąpieniem do opracowań konstrukcyjnych i technologicznych wykonawstwa konkretnej impedancji. Miarą rozrzutu punktów końcowych reprezentujących impedancje losowe jest wektor tolerancji

$$\Delta Z = \Delta R + j\Delta X,$$

którego moduł równy jest przekątnej pola rozrzutu a posteriori. Wektor ΔZ posiada taką orientację na płaszczyźnie liczb zespolonych Gaussa, że zawsze jego



Rys. 2. Rodzina antagohodów wypukłych (a) i wklęsłych (b); strzałką oznaczono kierunek dodatni

koniec skierowany jest w kierunku wzrastających wartości bezwzględnych rezystancji $R(\omega)$ i reaktancji $X(\omega)$. Z łatwością możemy obliczyć wartość średnią arytmetyczną pomierzonych wartości numerycznych impedancji losowych całej partii seryjnie wyprodukowanych impedancji za pomocą wzoru

$$\bar{Z}(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} Z_i(\omega).$$

Wartość nominalna $Z_N(\omega)$ powiązana jest z wartością średnią $\bar{Z}(\omega)$ następującą relacją

$$\bar{Z} = Z_N + \varepsilon,$$

gdzie wektor

$$\varepsilon = \varepsilon_R + j\varepsilon_X$$

jest miarą przemieszczenia prostokątnego pola rozrzutu.

Posługując się wyżej wysłowionymi symbolami będziemy w stanie zanotować impedancję tolerowaną prostokątnie [5]

$$Z(\omega) = Z_N(\omega) \Big|_{\varepsilon - \frac{1}{2} \Delta Z}^{\varepsilon + \frac{1}{2} \Delta Z}.$$

Oczywiście z tolerowaniem modułu wektora reprezentującego impedancję dwójnika integralnie wiąże się tolerowanie argumentu tegoż wektora

$$\varphi(\omega) = \varphi_N(\omega) \Big|_{-\Delta\varphi}^{+\Delta\varphi},$$

gdzie odchyłki górna $+\Delta\varphi$ i dolna $-\Delta\varphi$ wyraża się wzorem

$$+\Delta\varphi = +\operatorname{arctg} \frac{\left(\frac{1}{2}\Delta X + \varepsilon_x\right)R_N(\omega)}{R_N^2(\omega) + \left(X_N(\omega) + \frac{1}{2}\Delta X + \varepsilon_x\right)X_N(\omega)},$$

$$-\Delta\varphi = -\operatorname{arctg} \frac{\left(\frac{1}{2}\Delta X - \varepsilon_x\right)R_N(\omega)}{R_N^2(\omega) + \left(X_N(\omega) - \frac{1}{2}\Delta X + \varepsilon_x\right)X_N(\omega)}.$$

Jeżeli przy analizowaniu wpływu losowo działających czynników zakłócających pracę impedancji dwójnika ustalimy, że rozkład pojawienia się pewnych wartości losowych zarówno rezystancji $R(\omega)$ jak i reaktancji $X(\omega)$ jest rozkładem jednostajnym lub trójkątnym [2], to na podstawie tych danych będziemy mogli utworzyć prostokątne pole rozrzutu a priori.

Tolerancje impedancji dwójników ΔZ powinny być optymalnie dobrane, by odchyłki parametrów elektrycznych całego otwartego układu elektrycznego powstałe na skutek rozrzutu wartości numerycznych parametrów elektrycznych poszczególnych impedancji dwójników oraz spowodowane takimi oddziaływaniami zakłócającymi jak zmiana pola elektromagnetycznego, zmiana warunków klimatycznych i zmiana na skutek starzenia lub korozji, nie przekroczyły granic zapewniających poprawne działanie układu w dostatecznie długim czasie.

Z formalnego punktu widzenia powyższe zagadnienie, dla pewnych impedancji dwójników opisanych wielomianami stopnia q , możemy rozpatrywać w następujący sposób. Przypuśćmy, że impedancja dwójnika $Z_s(\omega)$ pracującego na ustalonej z góry częstotliwości jest poddana l -temu oddziaływaniu zakłócającemu, to na podstawie eksperymentu jesteśmy w stanie wyznaczyć dowolnie mały przyrost wartości częstotliwości $\Delta_l\omega = \omega_l - \omega$, gdzie $\omega_l < \omega$ lub $\omega_l > \omega$, przy którym następuje skompensowanie skutków l -tego oddziaływania zakłócającego.

Wprowadźmy założenie, że funkcja opisująca impedancję dwójnika ziarnistego $Z_s(\omega)$ określona jest w otoczeniu punktu ω , tzn. w pewnym przedziale $\Delta_l\omega = \omega_l - \omega$ posiada pochodne do $(q-1)$ -szego rzędu, które są ciągle wewnątrz i na końcach przedziału $\Delta_l\omega$ i że q -ta pochodna istnieje wewnątrz przedziału $\Delta_l\omega$. Można jeszcze przypomnieć, że przy powyższych założeniach, pochodna funkcji $Z_s(\omega)$ przybiera w każdym punkcie przedziału $\Delta_l\omega$ albo wartości dodatnie albo ujemne, a tym samym pochodna rzędu pierwszego $Z_s^{(1)}(\omega)$ nie może być równa zero, oraz że zarówno lewostronna jak i prawostronna pochodna funkcji ciągłej są sobie równe.

Obecnie weźmy do rozważań np. impedancję dwójnika $Z_s(\omega)$ przeznaczonego do pracy w zadanym pasmie częstotliwości, którego obrazem geometrycznym na płaszczyźnie liczb zespolonych Gaussa jest dodatnio skierowany analog. Stosując wzór Taylora, możemy przyrost w kierunku dodatnim $\Delta_l/Z_s(\omega)$ wartości dodatnio skierowanego analogu, pojawiający się pod wpływem l -tego oddziaływania zakłócającego, przedstawić

w postaci wielomianu uporządkowanego według potęg przyrostu $\Delta_l \omega = \omega_l - \omega$, gdzie $\omega_l > \omega$

$$+ \Delta_l Z_s(\omega) = \frac{1}{1!} Z_s^{(1)}(\omega + \Delta_l \omega)(\Delta_l \omega) + \frac{1}{2!} Z_s^{(2)}(\omega + \Delta_l \omega)(\Delta_l \omega)^2 + \\ + \dots + \frac{1}{(q-1)!} Z_s^{(q-1)}(\omega + \Delta_l \omega)(\Delta_l \omega)^{q-1} + S_{sl}, \quad (2)$$

przy czym reszta szeregu potęgowego

$$S_{sl} = \frac{1}{q!} Z_s^{(q)}(\omega + \Theta \Delta_l \omega)(\Delta_l \omega)^q, \quad (3)$$

gdzie liczba Θ spełnia nierówność $0 < \Theta < 1$. Jeśli przyrost $\Delta_l \omega = \omega_l - \omega$, gdzie $\omega_l < \omega$, czyli gdy ω_l jest początkiem, a ω jest końcem przedziału $\Delta_l \omega$, to zmiana wartości analogodu w kierunku ujemnym będzie opisana wzorem

$$- \Delta_l Z_s(\omega) = \frac{1}{1!} Z_s^{(1)}(\omega + \Delta_l \omega)(\Delta_l \omega) - \frac{1}{2!} Z_s^{(2)}(\omega + \Delta_l \omega)(\Delta_l \omega)^2 + \\ + \dots + \frac{(-1)^q}{(q-1)!} Z_s^{(q-1)}(\omega + \Delta_l \omega)(\Delta_l \omega)^{q-1} + S_{sl}, \quad (4)$$

gdzie

$$S_{sl} = \frac{(-1)^{q+1}}{q!} Z_s^{(q)}(\omega + \Theta \Delta_l \omega)(\Delta_l \omega)^q. \quad (5)$$

Przejdźmy z kolei do wyznaczenia wzorów, które ujmowałyby wpływ n niezależnych oddziaływań zakłócających na impedancję dwójnika $Z_s(\omega)$. Korzystając ze wzoru (2) mamy zatem dla odchyłki górnej

$$+ \Delta Z_s = \sum_{l=1}^{l=n} \left[\frac{1}{1!} Z_s^{(1)}(\omega + \Delta_l \omega)(\Delta_l \omega) + \frac{1}{2!} Z_s^{(2)}(\omega + \Delta_l \omega)(\Delta_l \omega)^2 + \right. \\ \left. + \dots + \frac{1}{(q-1)!} Z_s^{(q-1)}(\omega + \Delta_l \omega)(\Delta_l \omega)^{q-1} + S_{sl} \right],$$

gdzie reszta szeregu S_{sl} wyrażona jest wzorem (3), natomiast na mocy wzoru (4) dla odchyłki dolnej otrzymujemy

$$- \Delta Z_s = \sum_{l=1}^{l=n} \left[\frac{1}{1!} Z_s^{(1)}(\omega + \Delta_l \omega)(\Delta_l \omega) - \frac{1}{2!} Z_s^{(2)}(\omega + \Delta_l \omega)(\Delta_l \omega)^2 + \right. \\ \left. + \dots + \frac{1}{(q-1)!} Z_s^{(q-1)}(\omega + \Delta_l \omega)(\Delta_l \omega)^{q-1} + S_{sl} \right],$$

przy czym reszta S_{sl} przedstawiona jest wzorem (5).

Wykonując analogiczne rachunki jak w przypadku impedancji dwójników, których obrazem geometrycznym jest skierowany dodatnio analogod, dla impedancji dwójnika reprezentowanego na płaszczyźnie liczb zespolonych Gaussa w postaci skierowanego

ujemnie analogodu i dla przyrostu $\Delta_l \omega = \omega_l - \omega$, gdzie $\omega_l < \omega$, wzór na odchyłkę górną przybiera postać

$$+\Delta Z_s = \sum_{l=1}^{l=n} \left[\frac{1}{1!} Z_s^{(1)}(\omega + \Delta_l \omega)(\Delta_l \omega) - \frac{1}{2!} Z_s^{(2)}(\omega + \Delta_l \omega)(\Delta_l \omega)^2 + \right. \\ \left. + \dots + \frac{(-1)^q}{(q-1)!} Z_s^{(q-1)}(\omega + \Delta_l \omega)(\Delta_l \omega)^{q-1} + S_{sl} \right],$$

gdzie reszta szeregu S_{sl} jest określona wzorem (5), a następnie dla przyrostu $\Delta_l \omega = \omega_l - \omega$, gdzie $\omega_l > \omega$, wzór na odchyłkę dolną zapisujemy w postaci

$$-\Delta Z_s = \sum_{l=1}^{l=n} \left[\frac{1}{1!} Z_s^{(1)}(\omega + \Delta_l \omega)(\Delta_l \omega) + \frac{1}{2!} Z_s^{(2)}(\omega + \Delta_l \omega)(\Delta_l \omega)^2 + \right. \\ \left. + \dots + \frac{1}{(q-1)!} Z_s^{(q-1)}(\omega + \Delta_l \omega)(\Delta_l \omega)^{q-1} + S_{sl} \right],$$

gdzie S_{sl} wyrażona jest wzorem (3).

Ustalmy jeszcze, że dla impedancji dwójników opisanych skierowanymi dodatnio antagohodami i dla przyrostu $\Delta_l \omega = \omega_l - \omega$, gdzie $\omega_l > \omega$, stosuje się wzór określający wartość numeryczną odchyłki górnej

$$+\Delta Z_s = \sum_{l=1}^{l=n} \left[\frac{1}{1!} (R_s^{(1)}(\omega + \Delta_l \omega) - X_s^{(1)}(\omega + \Delta_l \omega))(\Delta_l \omega) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2!} (R_s^{(2)}(\omega + \Delta_l \omega) - X_s^{(2)}(\omega + \Delta_l \omega))(\Delta_l \omega)^2 + \right. \\ \left. + \dots + \frac{1}{(q-1)!} (R_s^{(q-1)}(\omega + \Delta_l \omega) - X_s^{(q-1)}(\omega + \Delta_l \omega))(\Delta_l \omega)^{q-1} + S_{sl} \right],$$

gdzie

$$S_{sl} = \frac{1}{q!} (R_s^{(q)}(\omega + \Theta \Delta_l \omega) - X_s^{(q)}(\omega + \Theta \Delta_l \omega))(\Delta_l \omega)^q,$$

a dla przyrostu $\Delta_l \omega = \omega_l - \omega$, gdzie $\omega_l < \omega$, wprowadza się wzór na odchyłkę dolną

$$-\Delta Z_s = \sum_{l=1}^{l=n} \left[\frac{1}{1!} (R_s^{(1)}(\omega + \Delta_l \omega) - X_s^{(1)}(\omega + \Delta_l \omega))(\Delta_l \omega) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2!} (R_s^{(2)}(\omega + \Delta_l \omega) - X_s^{(2)}(\omega + \Delta_l \omega))(\Delta_l \omega)^2 + \right. \\ \left. + \dots + \frac{(-1)^q}{(q-1)!} (R_s^{(q-1)}(\omega + \Delta_l \omega) - X_s^{(q-1)}(\omega + \Delta_l \omega))(\Delta_l \omega)^{q-1} + S_{sl} \right],$$

gdzie

$$S_{st} = \frac{(-1)^{q+1}}{q!} (R_s^{(q)}(\omega + \Theta \Delta_1 \omega) - X_s^{(q)}(\omega + \Theta \Delta_1 \omega)) (\Delta_1 \omega)^q.$$

W praktyce dość często znajdowanie optymalnych wartości numerycznych odchylek i rodzajów prostokątnego tolerowania impedancji dwójników polega na przeanalizowaniu różnych możliwych wariantów rozwiązań i wyborze spośród nich rozwiązania najlepszego. Poszukiwanie najlepszego rozwiązania musi opierać się na logicznie wydedukowanych argumentach, wynikających z kryteriów ekonomicznie uzasadnionej opłacalności wykonawstwa urządzenia [4]. W tym celu tworzy się funkcje, które ujmują zależność określonych parametrów elektrycznych całego układu lub poszczególnych jego impedancji od wartości numerycznych odchylek.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. G. Iwachnienko, *Cybernetyka techniczna*, PWN, Warszawa 1962.
2. J. F. C. Kingman, S. J. Taylor, *Introduction to Measure and Probability*, Cambridge University Press, London 1966.
3. F. Leja, *Funkcje zespolone*, PWN, Warszawa 1967.
4. A. Plucińska, Niezawodność złożonego układu przy uwzględnieniu cen poszczególnych elementów układu, *Zastosowania Matematyki*, t. IX, z. 2, 1967, str. 123—134.
5. J. J. Włodek, Tolerowanie unormowanych impedancji dwójników obwodu zastępczego pewnych nieciągłości przewodnic falowych, *Archiwum Elektrotechniki*, t. XVI, z. 3, 1967, str. 641—655.
6. A. N. Zajdel, *Elementarna ocena błędów pomiaru*, PWN, Warszawa 1967.
7. L. Zubrzycka, O rozmieszczeniu punktów próbkowych na płaszczyźnie, *Zastosowania Matematyki*, t. V, z. 2, 1960, str. 161—171.

J. J. WŁODEK

METHOD OF DETERMINING TOLERANCE OF CERTAIN IMPEDANCE OF TWO-TERMINAL NETWORKS

Summary

In the paper has been discussed the family of curves on complex number plane which describe impedance of two-terminal networks working in a predetermine frequency band. The analytic method is shown, in which the Taylor formula is utilized to calculate the tolerance of impedance in the linear passive two-terminal networks described by these curves.

J. J. WŁODEK

TOLERANZBESTIMMUNGSMETHODE MANCHER ZWEIPOLIMPEDANZ

Zusammenfassung

Im Aufsatz werden Arten von Kurven auf Grund gaussischer komplexer Zahlen behandelt, die die im gegebenen Frequenzband arbeitenden Zweipolimpedanzen bezeichnen. In Anlehnung an die Taylor Formel wurde eine Methode zur Toleranzbestimmung der Impedanz von durch diese Kurven bezeichnete lineare Passivzweipole bearbeitet.

Е. И. ВЛОДЕК

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДОПУСКОВ НЕКОТОРЫХ ИМПЕДАНСОВ ДВУХПОЛЮСНИКОВ

Р е з ю м е

В работе рассмотрены виды кривых на комплексной плоскости, которые изображают импедансы двухполосников, работающих в заданной полосе частот. Из формулы Тэйлора выведены методы для расчёта допусков импедансов линейных пассивных двухполосников, определённых этими кривыми.

Falowe grafy przepływowe układów torów i czwórników elektrycznych

MIECZYSLAW RYDEL (WARSZAWA)

Katedra Teletransmisji Przewodowej Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 26.9.1969

Zdefiniowane poprzednio dla toru pojęcie falowego grafu przepływowego rozszerzono na układy złożone z torów i czwórników. Skonstruowano i przeanalizowano falowe grafy przepływowe dla toru i czwórnika pracujących pomiędzy generatorem a obciążeniem. Przekutowano parametry robocze czwórnika w warunkach pracy i uzyskano graf pozwalający szybko określać takie parametry. Wprowadzono pojęcie złącza elektrycznego i określono parametry elektryczne takich złączy. Wprowadzenie tego pojęcia pozwoliło podać metodę konstruowania w sposób jednoznaczny falowych grafów przepływowych układów złożonych, mogących zawierać dowolną liczbę generatorów, torów, czwórników i odbiorników. Uzyskane jednorodne grafy falowe mają strukturę blokową, taką samą jak schemat blokowy układu i pozwalają rozpatrywać układy złożone operując tylko wielkościami jednego rodzaju np. tylko napięciami. Skonstruowano i omówiono graf toru łańcuchowego i uniwersalnego połączenia równoległego dwóch czwórników. Podano przykłady obliczeniowe.

Ważniejsze oznaczenia

- D_0 — wyznacznik grafu
- E, I — napięcie jałowe (siła elektromotoryczna), prąd zwarciov (wydajność prądowa) generatora
- I', I'' — fale prądowe generatorów torów i czwórników: docelowe, powrotne
- I_I, I_{II} — falowe prądowe złącza: wchodzące, wychodzące
- K_s, K_w, K_u — transmitancje: skuteczna, wtrąceniowa, napięciowa
- l — długość toru
- n_z, n_{ij} — przekładnie: złącza, impedancyjna
- p — przekładnia impedancyjna czwórnika
- p_{ij}, s_{ij} — współczynniki przejścia od impedancji Z_i do impedancji Z_j : napięciowy, prądowy
- q_i, r_i — współczynniki odbicia „widziane” od strony impedancji Z_i : napięciowy, prądowy
- Q_e, Q_i — współczynniki echa: własnego, obcego
- T — transmitancja drogi w grafie
- U', U'' — fale napięciowe generatorów torów i czwórników: docelowe, powrotne
- U_I, U_{II} — fale napięciowe złącza: wchodzące, wychodzące
- W — impedancja wejściowa
- $Y = Z^{-1}$ — admitancja
- Z_a, Z_b — impedancje: generatora, obciążenia

Z_c, Z'_c, Z''_c — impedancje falowe: toru, pierwotna czwórnik, wtórna czwórnik

γ, I', I'' — tamowności falowe: jednostkowa toru, pierwotna czwórnik, wtórna czwórnik.

1. WPROWADZENIE

Pojęcie falowego grafu przepływowego zostało zdefiniowane dla toru przewodowego [4], przy czym cechą charakterystyczną takiego grafu jest to, że węzły grafu reprezentują napięciowe i prądowe fale docelowe i powrotne w torze. Tor — z punktu widzenia jego zacisków skrajnych — jest czwornikiem. Definiując odpowiednio pojęcie fal docelowych i powrotnych na zaciskach czwórnik można więc pojęcie falowego grafu przepływowego zastosować do dowolnych czworników o określonych parametrach falowych, a również do układów złożonych z czworników i torów wraz z odpowiednimi źródłami i odbiornikami sygnałów.

Falowymi grafami przepływowymi układów torów i czworników linearnych będziemy nazywali grafy przepływowe spełniające następujące warunki:

1° Węzły grafu reprezentują napięciowe i prądowe fale docelowe, powrotne i wypadkowe w torach i na zaciskach czworników, przy czym węzły reprezentujące fale wypadkowe są węzłami pochłaniającymi.¹⁾

2° Transmitancje krawędzi grafu są bądź transmitancjami lub immitancjami falowymi torów lub czworników, bądź miejscowymi współczynnikami odbicia lub przejścia.

3° Kierunki przepływu sygnałów w grafie są zgodne z kierunkami przepływu sygnałów w układzie.

4° Graf zawiera dwa wyodrębnione jednorodne podgrafy: napięciowy — charakteryzujący propagację fal napięciowych w układzie i prądowy — charakteryzujący propagację fal prądowych.

2. TORY I CZWÓRNIKI W WARUNKACH PRACY

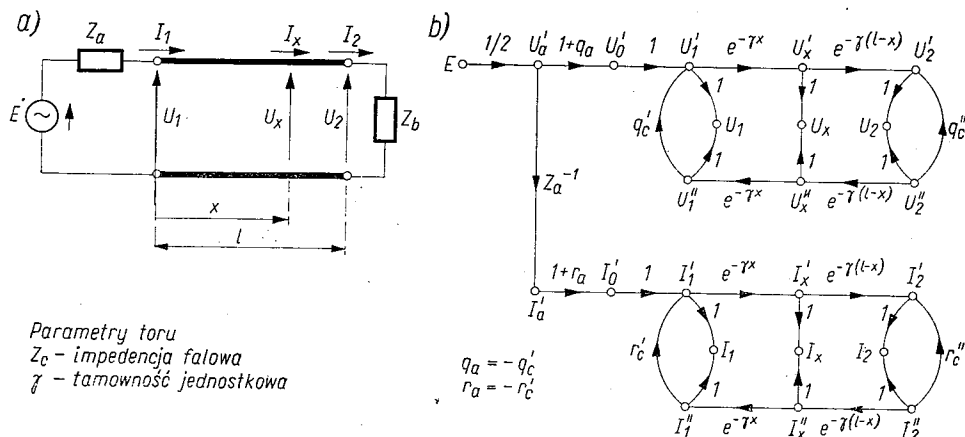
2.1. Tor w warunkach pracy

Na rys. 1a pokazano tor jednorodny o impedancji falowej Z_c i tamowności jednostkowej γ , pracujący pomiędzy generatorem o sile elektromotorycznej E i impedancji wewnętrznej Z_a oraz odbiornikiem o impedancji Z_b . Na rys. 1b pokazano falowy graf przepływowy tego u. Punktem wyjścia do konstrukcji tego grafu są podstawowe zależności [4] dotyczące toru, generatora i odbiornika:

$$\left. \begin{aligned} U'_x &= U'_1 e^{-\gamma x} = \frac{U_1 + Z_c I_1}{2} e^{-\gamma x} \quad (a), & U''_x &= U''_1 e^{\gamma x} = \frac{U_1 - I_1 Z_c}{2} e^{\gamma x} \quad (b), \\ I'_x &= I'_1 e^{-\gamma x} = \frac{U_1 + Z_c I_1}{2 Z_c} e^{-\gamma x} \quad (c), & I''_x &= I''_1 e^{\gamma x} = -\frac{U_1 - Z_c I_1}{2 Z_c} e^{\gamma x} \quad (d), \\ U_x &= U'_x + U''_x \quad (e), & U_1 &= U'_1 + U''_1 \quad (f), & U_2 &= U'_2 + U''_2 \quad (g), \\ I_x &= I'_x + I''_x \quad (h), & I_1 &= I'_1 + I''_1 \quad (i), & I_2 &= I'_2 + I''_2 \quad (j), \\ U_1 &= E - Z_a I_1 \quad (k), & I_2 &= \frac{U_2}{Z_b} \quad (l). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

¹⁾ Ten ostatni warunek jest warunkiem uzupełniającym do definicji podanej w pracy [3].

W powyższych równaniach symbole napięć i prądów oznakowane jedną kreską oznaczają odpowiednie fale docelowe, natomiast symbole oznakowane dwiema kreskami — fale powrotne.



Rys. 1. Tor w warunkach pracy (a) i jego falowy graf przepływowy (b)

Oznaczając współczynniki odbicia napięciowe:

$$q_c' = \frac{Z_a - Z_c}{Z_a + Z_c} \quad (a), \quad q_c'' = \frac{Z_b - Z_c}{Z_b + Z_c} \quad (b)$$

i prądowe:

$$r_c' = \frac{Z_c - Z_a}{Z_a + Z_c} \quad (c), \quad r_c'' = \frac{Z_c - Z_b}{Z_b + Z_c} \quad (d)$$

można na podstawie powyższych zależności napisać pewien układ równań [3], którego reprezentacją graficzną jest falowy graf przepływowy pokazany na rys. 1b.

Warto zwrócić uwagę na interpretację fizyczną niektórych wielkości występujących w tym grafie. Mianowicie:

Wielkość $U_a' = \frac{E}{2}$ można interpretować jako napięcie fali docelowej wychodzącej z generatora. Napięcie to jest równe napięciu wyjściowemu generatora w stanie dopasowania falowego.

Wielkość $I_a' = \frac{E}{2Z_a}$ można interpretować jako prąd fali docelowej wychodzącej z generatora. Prąd ten jest równy prądowi wyjściowemu generatora w stanie dopasowania falowego i równy $I_a' = \frac{I}{2}$, gdzie $I = \frac{E}{Z_a}$ jest prądem zastępczego źródła prądowego.

Współczynniki napięciowe q_c' i q_c'' oraz prądowe r_c' i r_c'' są współczynnikami odbicia dla fal nadchodzących od strony toru, wobec czego współczynniki

$$q_a = -q_c' = \frac{Z_c - Z_a}{Z_a + Z_c} \quad (a), \quad r_a = -r_c' = \frac{Z_a - Z_c}{Z_a + Z_c} \quad (b) \quad (3)$$

można traktować odpowiednio jako napięciowy i prądowy współczynnik odbicia dla fal wychodzących z generatora. Fale te przy przejściu z generatora na wejściu toru ulegają spiętrzeniu: napięciowa ze współczynnikiem przejścia $p_{ac} = 1 + q_a$, a prądowa ze współczynnikiem przejścia $s_{ac} = 1 + r_a$. Wynika stąd interpretacja wielkości U'_0 jako napięcia fali docelowej pierwotnej na początku toru, tj. napięcia jakie by występowało na wejściu toru, gdyby tor na wyjściu był falowo dopasowany (widać to z grafu). Analogicznie można interpretować wielkość I'_0 .

Zjawisko spiętrzenia fal występuje również na wyjściu toru, bowiem (rys. 1b)

$$U_2 = U'_2(1 + q'_c), \quad I_2 = I'_2(1 + r'_c),$$

wobec czego współczynniki przejścia: napięciowy i prądowy pomiędzy torem a obciążeniem są odpowiednio równe: $p_{cb} = 1 + q'_c$ oraz $s_{cb} = 1 + r'_c$.

Powyższe spostrzeżenia będą przydatne przy konstruowaniu falowych grafów przepływowych układów złożonych.

2.2. Czwórnik w warunkach pracy

Na rys. 2a pokazano czwórnik w warunkach pracy. Oznaczając:
 I', I'' — odpowiednio pierwotna i wtórna tamowność falowa czwornika,
 Z', Z'' — odpowiednio pierwotna i wtórna impedancja falowa czwornika,
 równania czwornika można napisać w postaci [1]

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{p} \frac{e^{I'} + e^{-I''}}{2} U_2 + \sqrt{Z'_c \cdot Z''_c} \cdot \frac{e^{I'} - e^{-I''}}{2} I_2, & (a) \\ I_1 &= \frac{1}{\sqrt{Z'_c \cdot Z''_c}} \frac{e^{I'} - e^{-I''}}{2} U_2 + p \frac{e^{I'} + e^{-I''}}{2} I_2, & (b) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

gdzie
$$p = \sqrt{\frac{Z''_c}{Z'_c}}. \quad (5)$$

Przekształcając równania (4) można znaleźć, że

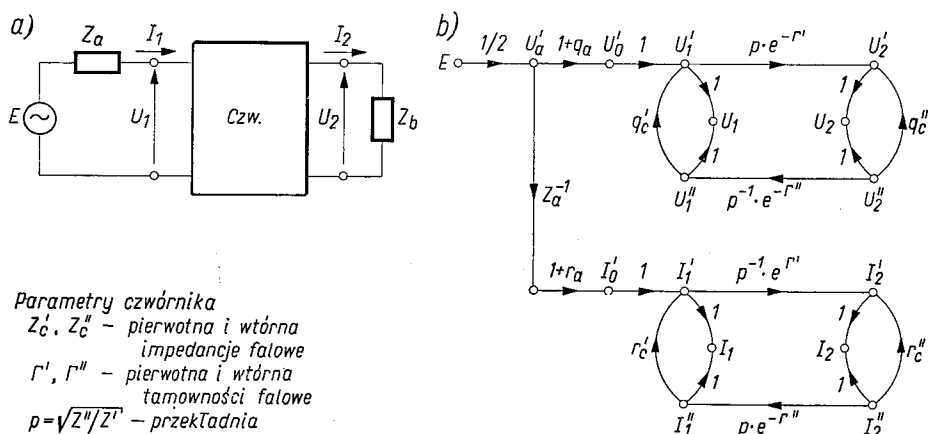
$$\left. \begin{aligned} U_2 &= \frac{U_1 + Z'_c I_1}{2} p \cdot e^{-I'} + \frac{U_1 - Z'_c I_1}{2} p \cdot e^{I''}, & (a) \\ I_2 &= \frac{U_1 + Z'_c I_1}{2Z'_c} p^{-1} \cdot e^{-I'} - \frac{U_1 - Z'_c I_1}{2Z'_c} p^{-1} \cdot e^{I''}. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Wprowadzimy oznaczenia:

$$\left. \begin{aligned} U'_1 &= \frac{U_1 + Z'_c I_1}{2}, & (a) & \quad U''_1 = \frac{U_1 - Z'_c I_1}{2}, & (b) \\ I'_1 &= \frac{U_1 + Z'_c I_1}{2Z'_c}, & (c) & \quad I''_1 = -\frac{U_1 - Z'_c I_1}{2Z'_c}, & (d) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

oraz

$$\left. \begin{aligned} U'_2 &= U'_1 \cdot p \cdot e^{-I'}, & (a) & \quad U''_2 = U''_1 \cdot p \cdot e^{I''}, & (b) \\ I'_2 &= I'_1 \cdot p^{-1} \cdot e^{-I'}, & (c) & \quad I''_2 = I''_1 \cdot p^{-1} \cdot e^{I''}. & (d) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$



Rys. 2. Czwórnik w warunkach pracy (a) i jego falowy graf przepływowy (b)

Porównując te wzory z odpowiednimi wzorami spośród wzorów (1) — przy $x = 0$ i przy $x = l$ — przekonujemy się, że wielkości $U'_1, U''_1, U'_2, U''_2, I'_1, I''_1, I'_2, I''_2$ mogą być uważane za odpowiednie fale docelowe (symbole z jedną kreską) i powrotne (symbole z dwiema kreskami) na odpowiednich zaciskach czwórnika.

Na podstawie równań (6), (7) i (8), biorąc pod uwagę równanie źródła i odbiornika (1k) i (1l), można po odpowiednich przekształceniach napisać układ równań:

$$\left. \begin{aligned}
 U'_2 &= U'_1 \cdot p \cdot e^{-r''}, & (a) \quad I'_2 &= I'_1 \cdot p^{-1} \cdot e^{-r''}, & (b) \\
 U''_2 &= q''_c U'_2, & (c) \quad I''_2 &= r''_c \cdot I'_2, & (d) \\
 U'_1 &= U'_2 \cdot p^{-1} \cdot e^{-r''}, & (e) \quad I'_1 &= I''_2 \cdot p \cdot e^{-r''}, & (f) \\
 U'_1 &= U'_0 + q'_c \cdot U'_1, & (g) \quad I'_1 &= I'_0 + r'_c I'_1, & (h) \\
 U'_0 &= \frac{E}{2} (1 + q_a) = U'_a (1 + q_a), & (i) \quad I'_0 &= \frac{U'_0}{Z'_c} = \frac{U'_a}{Z_a} (1 + r_a), & (j) \\
 U_1 &= U'_1 + U''_1, & (k) \quad I_1 &= I'_1 + I''_1, & (l) \\
 U_2 &= U'_2 + U''_2, & (m) \quad I_2 &= I'_2 + I''_2, & (n)
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

gdzie

$$q'_c = -q_a = -r'_c = r_a = \frac{Z_a - Z'_c}{Z_a + Z'_c}, \quad (a) \quad q''_c = -r''_c = \frac{Z_b - Z''_c}{Z_b + Z''_c}, \quad (b) \quad (10)$$

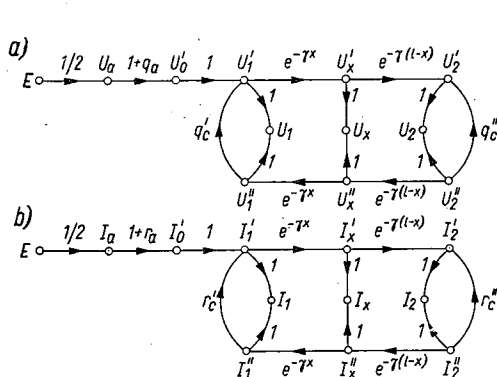
są współczynnikami odbicia: napięciowymi — oznaczonymi symbolami q i prądowymi — oznaczonymi symbolami r . Indeksy „c” dotyczą współczynników odbicia dla fal nadcho- dzających od strony czwórnika (Z_c), natomiast indeksy „a” dotyczą współczynników odbicia dla fal nadcho- dzających od strony generatora (Z_a).

Na podstawie układu równań (9) można narysować graf przedstawiony na rys. 2b. Interpretacja fizyczna niektórych wielkości występujących w tym grafie jest taka sama jak interpretacja fizyczna odpowiednich wielkości występujących w grafie toru (rys. 1b).

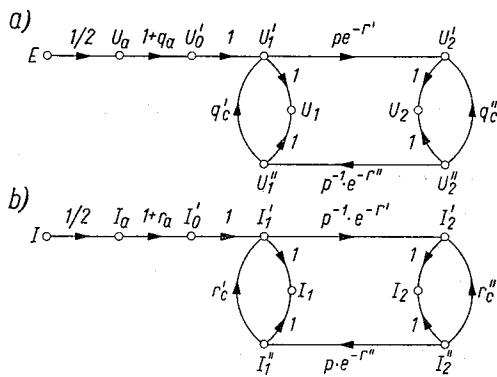
2.3. Rozkłady falowych grafów przepływowych na podgrafy

Falowe grafy przepływowe toru (rys. 1b) i czwórnika (rys. 2b) można rozłożyć na szereg podgrafów; w dalszym ciągu te podgrafy będziemy nazywali grafami dodając odpowiednie przymiotniki wyjaśniające.

Przede wszystkim, wprowadzając do falowych grafów z rysunków 1b i 2b dodatkowy węzeł $I = \frac{E}{Z_a}$ prądu zwarciovego generatora (zastępcze źródło prądowe), można jednorodne podgrafy potraktować niezależnie, uzyskując dzięki temu jednorodne falowe grafy przepływowe toru (rys. 3) i czwórnika (rys. 4), napięciowe (rys. 3a i rys. 4a) i prądowe



Rys. 3. Jednorodne falowe grafy przepływowe toru (rys. 1a): (a) napięciowy, (b) prądowy



Rys. 4. Jednorodne falowe grafy przepływowe czwórnika (rys. 2a): (a) napięciowy, (b) prądowy

(rys. 3b i rys. 4b). Grafy napięciowe mają identyczną strukturę jak grafy prądowe, przy czym istnieje ścisła odpowiedniość pomiędzy odpowiednimi węzłami i krawędziami grafów napięciowych i prądowych.

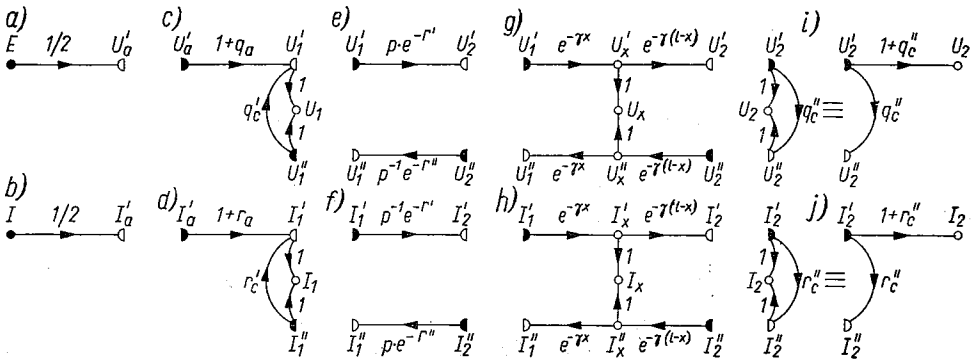
Rozszczepiając odpowiednie węzły grafów falowych można uzyskać elementarne falowe grafy przepływowe pokazane na rys. 5, a mianowicie:

1) grafy źródła: napięciowy (rys. 5a) i prądowy (rys. 5b) charakteryzujące związki pomiędzy odpowiednimi falami wychodzącymi z generatora a jego napięciem stanu jałowego (siła elektromotoryczna E) lub jego prądem zwarciovym (wydajność prądowa I),

2) grafy czwórnika (rys. 5e i rys. 5f) oraz toru (rys. 5g i rys. 5h) obrazujące prawa propagacji — w obydwu kierunkach — fal prądowych i napięciowych poprzez czwórnik i tor,

3) grafy obrazujące prawa rozproszenia fal prądowych i napięciowych na styku generator-czwórnika (rys. 5c i rys. 5d) i na styku czwórnika-odbiornika (rys. 5i i rys. 5j). W dalszych rozważaniach będziemy mówić, że rozproszenie fal ma miejsce w złączu pracującym pomiędzy odpowiednimi impedancjami falowymi (impedancje generatora i odbiornika można traktować jako impedancje falowe).

Sklejając odpowiednio półwęzły grafów elementarnych można konstruować grafy układów nieco bardziej złożonych niż rozpatrywane wyżej.



UWAGA: zaczerpniono węzły i półwęzły źródłowe w danym grafie

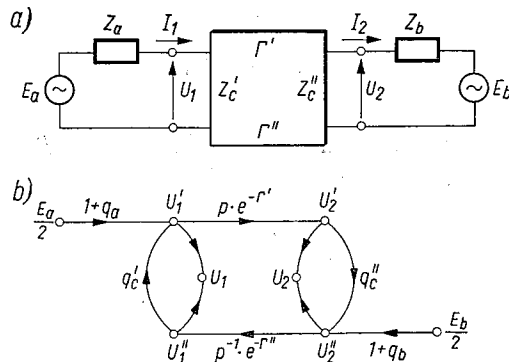
Rys. 5. Elementarne falowe grafy przepływowe napięciowe i prądowe: (a), (b) — źródła, (c), (d) — złącza: generator-czwórnik (tor), (e), (f) — czwórnik, (g), (h) — toru, (i), (j) — złącza: czwórnik (tor) — odbiornik

Przykład 1. Należy skonstruować napięciowy falowy graf przepływowy czwórnika obustronnie zasilanego (rys. 6a) i obliczyć napięcie na zaciskach pierwotnych czwórnika.

W oparciu o powyższe rozważania można narysować od razu graf przedstawiony na rys. 6b, na podstawie którego — stosując regułę Masona — można natychmiast napisać

$$U_1 = \frac{\frac{E_a}{2}(1-q'_c)[1+q''_c e^{-(r'+r'')}] + \frac{E_b}{2}(1-q'_c)(1+q'_c) \cdot p^{-1} \cdot e^{-r''}}{1-q'_c \cdot q''_c \cdot e^{-(r'+r'')}} \quad (2)$$

gdzie q'_c i q''_c określone są wzorami (2).



Rys. 6. Czwórnik obustronnie zasilany (a) i jego napięciowy falowy graf przepływowy (b)

2.4. Transmitancje i impedancje czwórnika

Przy pomocy wielkości występujących w falowych grafach przepływowych można zdefiniować szereg wielkości roboczych charakteryzujących czwórnik i tory w warunkach pracy (rys. 1a i 2a). Ponieważ graf przepływowy stanowi siatkę zależności pomiędzy zmien-

nymi, przeto na jego podstawie łatwo można odczytywać wzory dotyczące poszczególnych wielkości, a także związki pomiędzy tymi wielkościami. Ważniejszymi wielkościami roboczymi są:

a) Transmitancje: napięciowa i prądowa określone wzorami

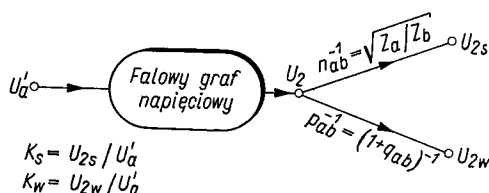
$$K_u = \frac{U_2}{U_1}, \quad (a) \quad K_i = \frac{I_2}{I_1}. \quad (b) \quad (11)$$

b) Transmitancja skuteczna²⁾

$$K_s = \sqrt{\frac{U_2 \cdot I_2}{U'_a \cdot I'_a}} = \frac{U_2}{U'_a} \cdot \sqrt{\frac{Z_a}{Z_b}} = \frac{I_2}{I'_a} \cdot \sqrt{\frac{Z_b}{Z_a}}; \quad (12)$$

oznaczając

$$U_{2s} = U_2 \cdot n_{ab}^{-1}, \quad (a) \quad n_{ab} = \sqrt{\frac{Z_b}{Z_a}}, \quad (b) \quad (13)$$



Rys. 7. Graf przepływowy do wyznaczania transmitancji skutecznej K_s i wtrąceniowej K_w

można transmitancję skuteczną określać wzorem

$$K_s = \frac{U_{2s}}{U'_a}, \quad (14)$$

co oznacza dołączenie do grafu dodatkowego węzła U_{2s} (rys. 7).

c) Transmitancja wtrąceniowa³⁾

$$K_w = \frac{U_2}{U'_a} \cdot \frac{Z_a + Z_b}{2Z_b}. \quad (15)$$

Łatwo sprawdzić, że

$$K_w = \frac{U_{2w}}{U'_a}, \quad (a) \quad U_{2w} = U_2(1+q_{ab})^{-1}, \quad (b) \quad q_{ab} = \frac{Z_b - Z_a}{Z_b + Z_a}. \quad (c) \quad (16)$$

Określenie transmitancji wtrąceniowej wzorem (16a) oznacza dołączenie do grafu dodatkowego węzła U_{2w} (rys. 7).

²⁾ Odwrotność tej wielkości w mierze logarytmicznej jest tamownością skuteczną [1].

³⁾ Odwrotność tej wielkości w mierze logarytmicznej jest tamownością wtrąceniową [1].

d) Impedancja wejściowa

$$W_1 = \frac{U_1}{I_1}. \quad (17)$$

e) Współczynnik echa własnego

$$Q_e = \frac{U_1 - U'_0}{U'_0} = \frac{U_1}{U'_0} - 1. \quad (18)$$

f) Współczynnik echa obcego

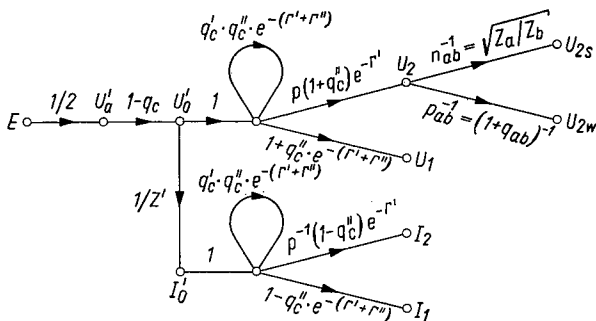
$$Q_t = \frac{U_2 - U_{2g}}{U_{2a}} = \frac{U_2}{U_{2a}} - 1, \quad (19)$$

gdzie U_{2g} jest napięciem głównym na wyjściu układu i można je określić wzorem: $U_{2g} = T_{02} \cdot U'_0$. Wielkość T_{02} jest transmitancją otwartej drogi od węzła U'_0 do węzła U_2 , jedynej dla czwórnika, toru i jak się później przekonamy dla łańcucha czwórników. Wobec tego, że

$$\frac{U_2}{U'_0} = \frac{T_{02}}{D_0},$$

gdzie D_0 jest wyznacznikiem falowego grafu napięciowego, znajdujemy

$$Q_t = \frac{1-D_0}{D_0}. \quad (20)$$



Rys. 8. Graf przepływowy do wyznaczania parametrów roboczych czwórnika

Warto zwrócić uwagę na ciekawy fakt, że współczynnik echa obcego wyznacza się jednoznacznie przy pomocy wyznacznika falowego grafu napięciowego.

Dla umożliwienia łatwiejszego wyznaczania wymienionych wielkości przedstawiono na rys. 8 graf przepływowy czwórnika, wynikający z grafu przedstawionego na rys. 2b i uzupełniony węzłami U_{2s} i U_{2w} .

Przykład 2. Należy znaleźć transmitancję napięciową K_u , skuteczną K_s i współczynnik echa obcego czwórnika pracującego w układzie jak na rys. 2a.

Na podstawie rys. 8 znajdujemy natychmiast:

$$\text{wyznacznik grafu } D_0 = 1 - q'_c \cdot q''_c e^{-(T' + T'')},$$

$$\text{transmitancję skuteczną } K_s = \frac{U_{2s}}{U_a} = \frac{(1 - q'_c) \cdot p \cdot e^{-T'} (1 + q''_c)}{1 - q'_c q''_c e^{-(T' + T'')}} n_{ab}^{-1},$$

$$\text{transmitancję napięciową } K_u = \frac{U_2}{U_1} = \frac{p \cdot e^{-T'} (1 + q''_c)}{1 + q'_c \cdot e^{-(T' + T'')}},$$

$$\text{oraz — na podstawie wzoru (20) — współczynnik echa obcego } Q_t = \frac{q'_c \cdot q''_c e^{-(T' + T'')}}{1 - q'_c \cdot q''_c e^{-(T' + T'')}}.$$

3. UKŁADY ZŁOŻONE

3.1. Złącza elektryczne

Rozważania przeprowadzone w p. 2.3 nasuwają myśl, aby prawa rozproszenia fal w miejscach połączeń układów o różnych impedancjach falowych przypisać złączom. Podamy określenie: elektrycznym złączem n -dzielny (rys. 9a) będziemy nazywali skupiony układ elektryczny o n parach zacisków (n otworach) pracujący pomiędzy określonymi impedancjami falowymi układów dołączonych do każdej z par zacisków, przy czym jako impedancje falowe rozumiemy tu również impedancje wewnętrzne generatorów i impedancje skupionych dwójników obciążeń⁴⁾.

Właściwości elektryczne złącza są określone, jeżeli określone są współczynniki falowe, tj. współczynniki odbić (napięciowy q_i i prądowy r_i) od każdej (i -tej) z par zacisków i współczynniki przejść (napięciowy p_{ij} i prądowy s_{ij}) od dowolnej (i -tej) pary zacisków do każdej (j -tej) z pozostałych par zacisków. Jeżeli U_{iI} , I_{iI} oznaczają fale (odpowiednio napięciową i prądową) wchodzące do i -tej pary zacisków złącza, a U_{iII} , I_{iII} oznaczają fale wychodzące z j -tej pary zacisków złącza, to w przypadku, gdy fale doprowadzone są tylko do i -tej pary zacisków, współczynniki falowe wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned} q_i &= \frac{U_{iII}}{U_{iI}} \bigg|_{\substack{U_{kI}=0 \\ k \neq i}}, & (a) \quad r_i &= \frac{I_{iII}}{I_{iI}} \bigg|_{\substack{I_{kI}=0 \\ k \neq i}}, & (b) \quad p_{ij} &= \frac{U_{jII}}{U_{iI}} \bigg|_{\substack{U_{kI}=0 \\ k \neq i}}, & (c) \\ s_{ij} &= \frac{I_{jII}}{I_{iI}} \bigg|_{\substack{I_{kI}=0 \\ k \neq i}}. & (d) \end{aligned} \quad (21)$$

W przypadku ogólnym fale wychodzące ze złącza, pochodzące od fal wchodzących do wszystkich par zacisków złącza, sumują się, co można wyrazić wzorami

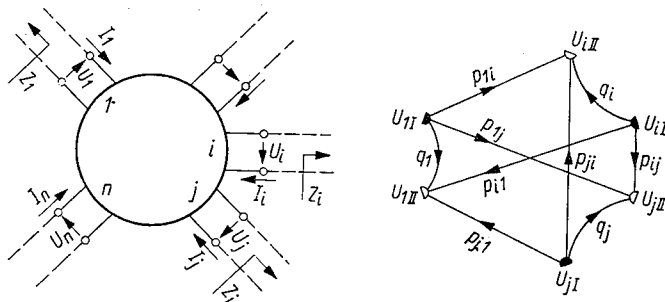
$$\begin{aligned} U_{iII} &= q_i U_{iI} + \sum_{\substack{k \\ k \neq i}} p_{ki} \cdot U_{kI}, & (a) \\ I_{iII} &= r_i I_{iI} + \sum_{\substack{k \\ k \neq i}} s_{ki} \cdot I_{kI}. & (b) \end{aligned} \quad (22)$$

⁴⁾ Stosownie do powyższej definicji każdy czwórnik skupiony można traktować jako złącze. Jeżeli jednak właściwości czwornika zadane są w postaci jego parametrów falowych, to traktowanie czwornika jako złącza jest niecelowe i znacznie komplikuje uzyskiwane wzory.

Oczywiście napięcie U_i i prąd I_{iI} wypadkowe na zaciskach złącza wyrażają się sumami

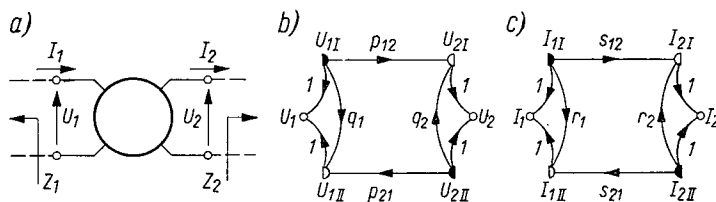
$$U_i = U_{iI} + U_{iII}, \quad (a) \quad I_i = I_{iI} + I_{iII}. \quad (b) \quad (23)$$

Na rys. 9 pokazano schemat złącza, jakim będziemy się posługiwać w dalszym ciągu oraz falowy napięciowy graf przepływowy złącza wynikający z równań (22a) i (23a). Falowy graf prądowy ma strukturę identyczną, z tym że występują w nim odpowiednie wielkości prądowe.



Rys. 9. Ogólny schemat złącza elektrycznego n -dzielnego (a) i jego falowy napięciowy graf przepływowy (b)

Na rys. 10 pokazano falowe grafy i schemat złącza dwudzielnego-łańcuchowego, dla którego zmieniono sposób strzałkowania prądów i napięć na bardziej odpowiedni dla połączeń łańcuchowych.



Rys. 10. Złącze łańcuchowe (a) i jego falowe jednorodne grafy przepływowe (b) i (c)

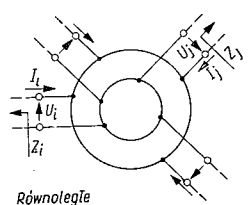
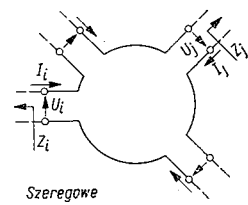
W tablicy 1 zestawiono schematy i wzory dotyczące współczynników falowych dla podstawowych złączy: równoległego i szeregowego. Wzory te można wyprowadzić na zasadzie definicji (21), przy uwzględnieniu zależności.

$$\frac{U_{iI}}{I_{iI}} = \frac{U_{iII}}{-I_{iII}} = Z_i. \quad (24)$$

Tablica 2 zawiera odpowiednie zestawienie dla najprostszych złączy dwudzielnych-łańcuchowych.

Tablica 1

Najprostsze złącza wielodzielne

Schemat	Współczynniki falowe
 Równoległe	$q_i = \frac{2Y_i}{\sum_k Y_k} - 1 \quad (a), \quad r_i = -q_i = 1 - \frac{2Y_i}{\sum_k Y_k} \quad (b),$ $p_{ij} = 1 + q_i = \frac{2Y_i}{\sum_k Y_k} \quad (c), \quad s_{ij} = -p_{ij} \frac{Y_j}{Y_i} = -\frac{2Y_j}{\sum_k Y_k} \quad (d)$ $Y_k = \frac{1}{Z_k}$
 Szeregowe	$q_i = 1 - \frac{2Z_i}{\sum_k Z_k} \quad (e), \quad r_i = -q_i = \frac{2Z_i}{\sum_k Z_k} - 1 \quad (f),$ $p_{ij} = -s_{ij} \frac{Z_j}{Z_i} = -\frac{2Z_j}{\sum_k Z_k} \quad (g), \quad s_{ij} = 1 + r_i = \frac{2Z_i}{\sum_k Z_k} \quad (h).$
$\sum_k Y_k$ — suma wszystkich admitancji falowych przylegających do złącza, $\sum_k Z_k$ — suma wszystkich impedancji falowych przylegających do złącza.	

3.2. Zasady budowy i własności falowych grafów przepływowych układów złożonych

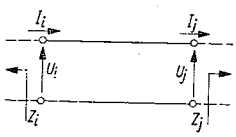
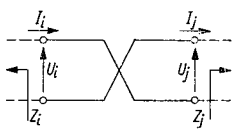
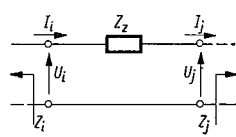
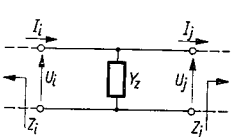
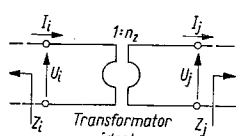
Dysponując elementarnymi falowymi grafami czwórników, torów, złączy, generatorów i obciążeń można konstruować grafy układów złożonych z takich elementów. Postępowanie przy konstruowaniu grafów sprowadza się do identyfikacji fal docelowych i powrotnych czwórników, torów i generatorów z odpowiednimi falami wchodzącymi i wychodzącymi złączy⁵⁾.

Budowa jednorodnego falowego grafu przepływowego układu złożonego została pokazana na rys. 11, na którym, dla lepszego uwidocznienia blokowej struktury grafu, grafy elementarne połączone krawędziami o transmitancjach jednostkowych i zachowano oznaczenia (zaczernienie) półwęzłów źródłowych w grafach elementarnych. Na rys. 11 pokazano jedynie graf napięciowy. Struktura grafu prądowego jest identyczna. Graf prądowy można otrzymać z grafu napięciowego przez proste zastąpienie w tym ostatnim symboli wielkości napięciowych odpowiednimi symbolami wielkości prądowych.

⁵⁾ Uwaga na strzałki napięć i prądów.

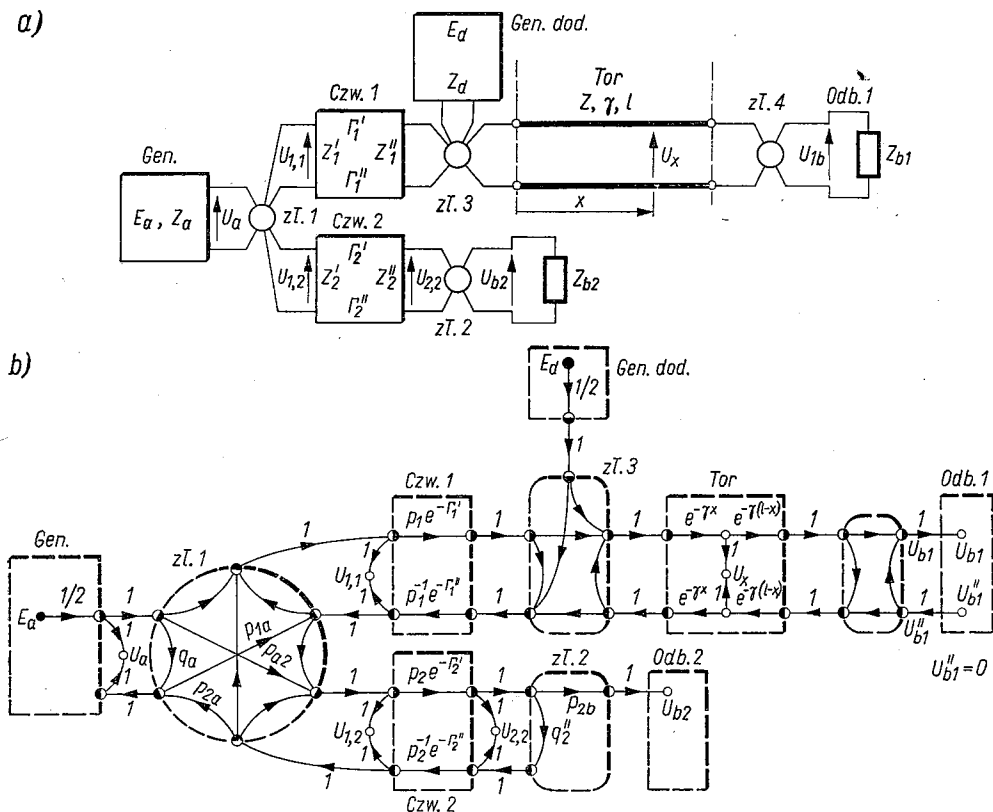
Tablica 2

Proste złącza łańcuchowe

Schemat	Współczynniki falowe			
	$q_i = \frac{Z_j - Z_i}{Z_j + Z_i}$ (a),	$r_i = -q_i = \frac{Z_i - Z_j}{Z_j + Z_i}$ (b),		
	$p_{ij} = 1 + q_i = \frac{2Z_j}{Z_i + Z_j}$ (c),	$s_{ij} = 1 + r_i = \frac{2Z_i}{Z_i + Z_j}$ (d),		
	$q_i = \frac{Z_j - Z_i}{Z_j + Z_i}$ (e),	$r_i = -q_i = \frac{Z_i - Z_j}{Z_i + Z_j}$ (f),		
	$p_{ij} = -(1 + q_i) = -\frac{2Z_j}{Z_i + Z_j}$ (g),	$s_{ij} = -(1 + r_i) = -\frac{2Z_i}{Z_i + Z_j}$ (h),		
	$q_i = 1 - \frac{2Z_i}{Z_i + Z_j + Z_z}$ (i),	$r_i = -q_i = \frac{2Z_i}{Z_i + Z_j + Z_z} - 1$ (j),		
	$p_{ij} = \frac{2Z_j}{Z_i + Z_j + Z_z}$ (k),	$s_{ij} = 1 + r_i = \frac{2Z_i}{Z_i + Z_j + Z_z}$ (l),		
	$q_i = \frac{2Y_i}{Y_i + Y_j + Y_z} - 1$ (m),	$r_i = -q_i = 1 - \frac{2Y_i}{Y_i + Y_j + Y_z}$ (n),		
	$p_{ij} = 1 + q_i = \frac{2Y_i}{Y_i + Y_j + Y_z}$ (o),	$s_{ij} = \frac{2Y_j}{Y_i + Y_j + Y_z}$ (p),		
	$q_i = \frac{Z_j - n_z^2 Z_i}{Z_j + n_z^2 Z_i}$ (q),	$r_i = -q_i$ (r),		
	$p_{ij} = (1 + q_i) \cdot n_z = \frac{2Z_j n_z}{Z_j + n_z^2 Z_i}$ (s),	$s_{ij} = (1 + r_i) \cdot n_z^{-1}$ (t),		
	$q_j = \frac{n^2 Z_i - Z_j}{Z_j + n_z^2 Z_i} = -q_i$ (u),	$r_j = -q_j$ (v),		
	$p_{ji} = (1 + q_j) \cdot n_z^{-1} = s_{ij}$ (x),	$s_{ji} = (1 + r_j) \cdot n_z = p_{ij}$ (y),		

Należy zwrócić uwagę na następujące własności jednorodnych falowych grafów przepływowych:

1° Blokowa struktura jednorodnego grafu falowego układu jest identyczna jak struktura schematu blokowego tego układu.



Rys. 11. Układ złożony (a) i budowa jego jednorodnego falowego grafu przepływowego (b)

2° Dołączenie do układu dodatkowego elementu (generatora, obciążenia itp.) powoduje w układzie zmianę rodzaju złącza, do którego ten element został dołączony, a w grafie — modyfikację grafu elementarnego tego złącza i tylko tego złącza, nie wpływając na pozostałą część grafu (por. rys. 11, złącze 3).

Własność 2° wynika z własności 1° oraz z własności dwukierunkowości elementarnych grafów falowych torów i czwórników i własności wielokierunkowości grafów złączy. Własności tej nie mają na ogół grafy przepływowe oparte na konwencjonalnych macierzach czwórników.

W praktyce, przy konstruowaniu falowych grafów przepływowych dla celów obliczeniowych, aby uniknąć nadmiernie skomplikowanych struktur grafów, można stosować następujące zasady:

1° Pomijać krawędzie o jednostkowych transmitancjach łączące półwęzły grafów elementarnych.

2° Pomijać węzły pochłaniające, które odpowiadają wielkościom nie interesującym nas w danym zagadnieniu. Pominiecie tych węzłów pociąga za sobą eliminację wszystkich krawędzi do nich dochodzących. Na przykład (rys. 11b) pominiecie węzłów U_a , a następnie węzła U_a'' w grafie złącza 1 prowadzi do eliminacji krawędzi q_a, q_{1a}, p_{2a} oraz odpowiednich 3 krawędzi o transmitancjach jednostkowych i graf złącza 1 przybierze strukturę grafu złącza 3.

3° Pomijać wszystkie węzły źródłowe, a więc i krawędzie z nich wychodzące, które odpowiadają wielkościom tożsamościowo równym zeru.

Np. (rys. 11b) eliminacja węzła $U_{b1}' = 0$ powoduje, że graf złącza 4 przybierze strukturę grafu złącza 2.

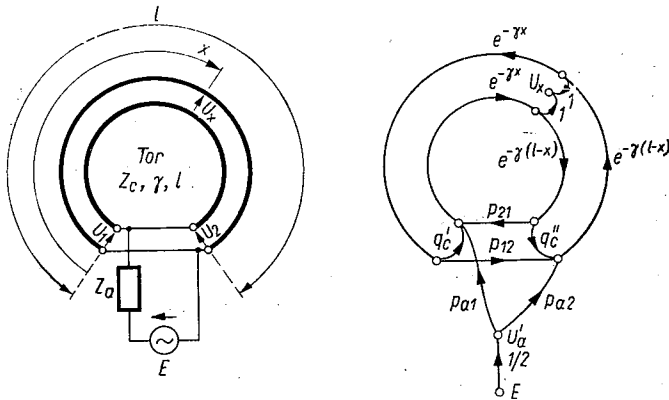
Przykład 3. Należy wyznaczyć napięcie U_x w torze wygiętym pokazanym na rys. 12a.

Dla tego układu konstruujemy napięciowy falowy graf przepływowy pokazany na rys. 12b. W grafie tym (tablica 1, złącze równoległe):

$$q_c' = q_c'' = q = \frac{2Y}{2Y + Y_a} - 1 = -\frac{Y_a}{2Y + Y_a},$$

$$p_{12} = p_{21} = p = 1 + q = \frac{2Y}{2Y + Y_a},$$

$$p_{a1} = p_{a2} = p_a = \frac{2Y_a}{2Y + Y_a}.$$



Rys. 12. Układ do przykładu 3 (a) i jego napięciowy falowy graf przepływowy (b)

Na zasadzie grafu (rys. 12b) możemy napisać

$$\begin{aligned} \frac{U_x}{U_a} &= \frac{U_x}{E} = \\ &= \frac{p_{a1} \cdot e^{-\gamma x} (1 - p_{12} e^{-\gamma l}) + p_{a2} \cdot q_c' \cdot e^{-\gamma l} \cdot e^{-\gamma x} + p_{a2} e^{-\gamma(l-x)} (1 - p_{21} e^{-\gamma l}) + p_{a1} \cdot q_c'' \cdot e^{-\gamma l} \cdot e^{-\gamma(l-x)}}{1 - p_{12} e^{-\gamma l} - p_{21} e^{-\gamma l} + p_{12} \cdot p_{21} \cdot e^{-2\gamma l} - q_c' \cdot q_c'' \cdot e^{-2\gamma l}}, \end{aligned}$$

skąd, biorąc pod uwagę, że

$$p^2 - q^2 = p + q, \quad \text{bowiem} \quad p - q = 1,$$

znajdujemy

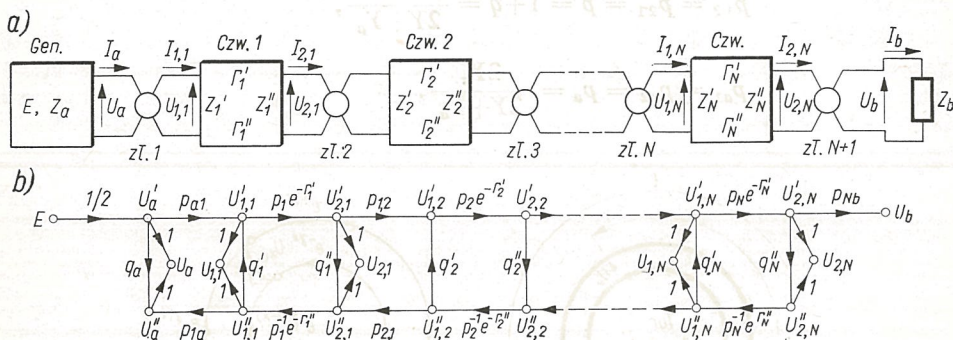
$$\frac{U_x}{E} = \frac{p_a(1 - e^{-\gamma l}) \cdot [e^{-\gamma x} + e^{-\gamma(l-x)}]}{1 - 2p \cdot e^{-\gamma l} + (p+q)e^{-2\gamma l}}.$$

3.3. Przypadki szczególne połączeń czwórników

3.3.1. Tor łańcuchowy

Torem łańcuchowym będziemy nazywać łańcuch skończony N czwórników (torów), o określonych parametrach falowych, połączonych za pomocą złączy łańcuchowych (rys. 13a).

Napięciowy falowy graf przepływowy toru łańcuchowego pokazano na rys. 13b. Warto zwrócić uwagę na prostotę struktury tego grafu (drabinka). W grafie występuje



Rys. 13. Tor łańcuchowy (a) i jego napięciowy falowy graf przepływowy (b)

jedyna otwarta droga (docelowa) od węzła źródłowego E lub (U'_a) do węzła odbiorczego U_b lub ($U'_{2,N}$) i jedyna otwarta droga (powrotna) od węzła $U'_{2,N}$ do węzła U'_a . Pętle grafu odpowiadają wielokrotnym odbiciom w torze. Prostota grafu pozwala rozwiązywać pewne zadania dotyczące torów łańcuchowych bez rysowania odrębnego grafu.

Przykład 4. Należy wyznaczyć napięcie na obciążeniu U_b oraz współczynnik echa obcego Q_t dla toru łańcuchowego przedstawionego na rys. 14.

Na podstawie tablicy 2 znajdujemy współczynniki falowe (oznaczenia jak na rys. 13b):

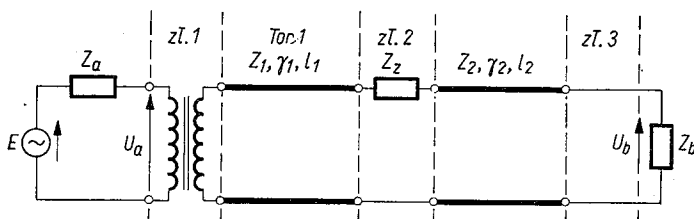
$$\begin{aligned} p_{a1} &= \frac{2Z_1 \cdot n_z}{Z_1 + n^2 Z_a}, & q'_1 &= \frac{n_z^2 \cdot Z_a - Z_1}{Z_1 + n^2 Z_a}, & q'_{1'} &= 1 - \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2 + Z_z}, \\ p_{12} &= \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_z}, & q'_2 &= 1 - \frac{2Z_a}{Z_1 + Z_2 + Z_z}, & p_{21} &= \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2 + Z_z}, \\ q'_{2'} &= \frac{Z_b - Z_2}{Z_b + Z_2}, & p_{2b} &= 1 + q'_{2'} = \frac{2Z_b}{Z_b + Z_2}. \end{aligned}$$

Wyznacznik grafu (rys. 13b):

$$D_0 = 1 - q'_1 \cdot q'_1' \cdot e^{-2\gamma_1 l_1} - q'_2 \cdot q'_2' \cdot e^{-2\gamma_2 l_2} - q'_1 \cdot q'_2' \cdot p_{12} \cdot p_{21} \cdot e^{-2(\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2)} + \\ + q'_1 \cdot q'_1' \cdot q'_2 \cdot q'_2' \cdot e^{-2(\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2)}.$$

Transmitancja drogi od U'_a do U_b

$$T_{ab} = p_{a1} \cdot p_{12} \cdot p_{2b} \cdot e^{-(\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2)}.$$



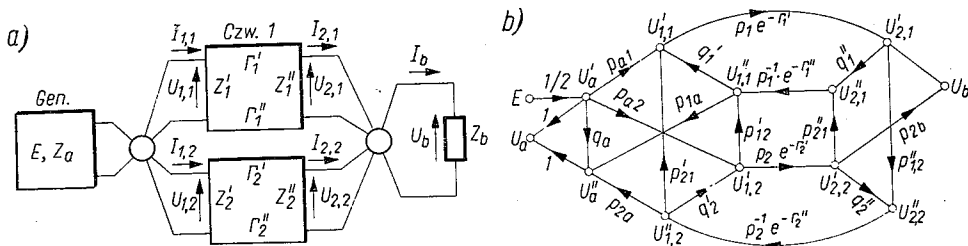
Rys. 14. Przykład toru łańcuchowego.

Wobec tego

$$U_b = \frac{E}{2} \frac{T_{a,b}}{D_0} \quad \text{oraz} \quad Q_i = \frac{1 - D_0}{D_0} \quad (\text{por. wzór (20)}).$$

3.3.2. Uogólniony układ równoległy

Uogólniony układ równoległy dwóch czwórników (rys. 15a) obejmuje, w zależności od rodzaju złączy, między innymi: połączenie równoległe, połączenie szeregowe, połączenie szeregowo-równoległe i połączenie równoległo-szeregowe dwóch czwórników. Napięciowy falowy graf przepływowy tego układu przedstawiono na rys. 15b.



Rys. 15. Uogólniony układ równoległy czwórników (a) i jego napięciowy falowy graf przepływowy (b)

Przykład 5. Należy obliczyć wzmocnienie skuteczne K_s dla układu przedstawionego na rys. 16a. Dane są impedancje: wejściowa Z'_2 , wyjściowa Z''_2 i współczynnik wzmocnienia K' określony w warunkach dopasowania. Oprócz tego dane są impedancje falowe Z'_1 i Z''_1 oraz transmitancje falowe β' i β'' układu sprzęgającego.

Przyjmując w grafie przedstawionym na rys. 15b:

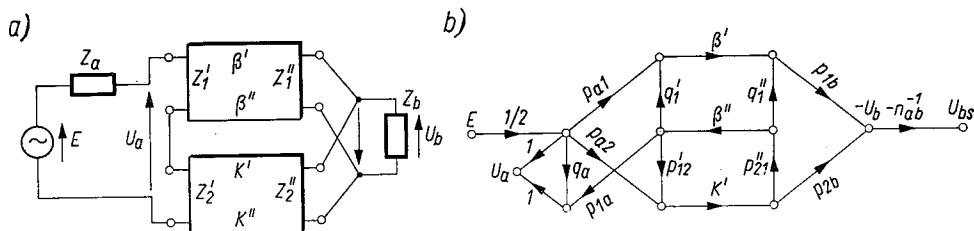
$$p_2 e^{-\Gamma'_2} = K'; \quad p_2^{-1} \cdot e^{-\Gamma'_2} = 0; \quad p_1 \cdot e^{-\Gamma'_1} = \beta',$$

$$p_1^{-1} \cdot e^{-\Gamma'_1} = \beta''$$

i eliminując odpowiednie węzły otrzymamy graf przedstawiony na rys. 16b. Graf ten uzupełniono transmitancją $n_{ab}^{-1} = \sqrt{\frac{Z_a}{Z_b}}$ (por. rys. 7) dla określenia transmitancji skutecznej.

Na podstawie grafu znajdujemy:

$$K_s = -n_{ab}^{-1} \frac{p_{a2} p_{2b} K' \cdot (1 - q_1' q_1'' \beta' \beta'') + p_{a1} \cdot p_{1b} \beta' (1 - p_{12}' p_{21}' K' \cdot \beta'')}{1 - p_{12}' \cdot p_{21}' K' \cdot \beta'' - q_1' \cdot q_1'' \cdot \beta' \cdot \beta''}.$$



Rys. 16. Układ unilateralnego wzmacniacza z bilateralnym sprzężeniem zwrotnym (a) i jego falowy napięciowy graf przepływowy (b)

Wielkości $p_{a1}, p_{a2}, p_{1a}, p_{12}', q_1'$ można obliczyć na podstawie wzorów (e) i (g) tablicy 1, a wielkości $q_1'', p_{21}', p_{1b}, p_{2b}$ — na podstawie wzorów (a) i (c) tejże tablicy. Kierunki strzałek w układzie (rys. 16a) zostały dobrane zgodnie ze sposobem zastrzałkowania napięć przyjętym w tablicy 1.

4. ZAKOŃCZENIE

Przedstawiona metoda falowych grafów przepływowych może być przydatna przy znajdowaniu wielu zależności dotyczących złożonych układów, szczególnie wtedy, gdy parametry poszczególnych ogniw zadane są w postaci parametrów falowych. Metoda ta jest więc szczególnie odpowiednia do badania układów zawierających tory elektryczne, filtry projektowane na zasadzie parametrów falowych itp. Oprócz tego metoda ta nadaje się do badania współpracy poszczególnych ogniw w układzie złożonym, do badania wpływu wzajemnych niedopasowań ogniw układu na charakterystyki wynikowe układu itp. Cechą charakterystyczną falowych grafów przepływowych jest to, iż pozwalają one traktować układy złożone z ogniw zarówno bilateralnych jak i unilateralnych operując wielkościami jednego rodzaju, np. tylko napięciami lub tylko prądami. Jednorodne grafy falowe, mające blokową strukturę identyczną jak struktura schematu blokowego układu, dobrze obrazują zjawiska zachodzące w układzie, co może być pomocne w dydaktyce. Uzyskiwane wzory (zawierające współczynniki odbić, przejść oraz transmitancje falowe) mają pewną znormalizowaną postać, co może być korzystne w pewnych zastosowaniach.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. E. Kowalczyk, O. Przesmycki, Technika teletransmisji, WKiŁ, Warszawa 1966.
2. L. Robichaud, M. Boisvert, J. Robert, Grafy przepływu sygnałów (tłum. z franc.), PWN, Warszawa 1968.

3. S. J. Mason, H. J. Zimmermann, Electronic Circuits, Signals and Systems, New York — London 1960 (tłum. ros. Izd. Inostr. Lit., Moskwa 1963).
4. M. Rydel, Falowe grafy przepływowe torów przewodowych, Archiwum Elektrotechniki, nr 4, 1969.

M. RYDEL

WAVE SIGNAL FLOW GRAPHS OF LINEAR ELECTRICAL SYSTEMS

Summary

The concept of wave signal flow graphs is shown to be applicable for analysis of linear electrical systems composed of transmission lines and lumped wave two-ports.

Wave signal flow graphs are constructed for a single line and for a single two-port fed from a source and terminated with a load impedance. Input impedance, insertion loss etc. of a two-port are discussed, and a graph is constructed for immediate evaluation of appropriate formulae. The concept of electrical junction is introduced as a lumped n -port associating image impedances of the adherent lines, wave two-ports, sources and loads. Tables of parameters of some simple junctions are given. A general and unique method of construction of wave signal flow graphs of complex systems is shown. The obtained uniform wave signal flow graphs have the same „block structure” as the original block diagrams of the systems. Such a uniform graph describes the behaviour of the system composed of bilateral two-ports and lines in terms of voltages (or currents) only. Special cases such as cascade connection of n two-ports and generalized parallel connection of two-ports are considered. Examples are given.

M. RYDEL

WELLENSTRÖMUNGSDIAGRAMM FÜR LEITUNGEN UND ELEKTRISCHE VIERPOLE

Zusammenfassung

Der bereits früher definierten Begriff für Wellenströmungsgraf wurde auf Leitungs- und Vierpolsysteme bezogen. Man konstruierte und analysierte das zwischen Generator und Belastung arbeitende Leitungs-wellenströmungsdiagramm. Man diskutierte Parameter und Vierpole in Arbeitsverhältnissen und erzielte ein Diagramm, das schnell solche Parameter bezeichnen lässt. Es wurde der Begriff einer Elektroverbindung eingeführt und die Elektroparameter solcher Verbindungen bezeichnet. Die Einführung dieses Begriffs ermöglichte eine eindeutige Konstruktionsmethode für Wellenströmungsdiagramme bei vielfältigen Systemen anzugeben, die beliebige Anzahl von Generatoren, Leitungen, Vierpolen und Empfänger umfassen. Die erzielten homogenen Wellendiagramme haben eine dem Blocksystemschemata gleiche Blockstruktur und lassen Vielsysteme mittels nur einartiger Grösse, z. B. nur der Spannung, analysieren. Man konstruierte und analysierte ein Kettenleitungsdiagramm, sowie ein Diagramm für eine universale Parallelverbindung zweier Vierpole. Es wurden Berechnungsbeispiele angeführt.

М. РЫДЕЛЬ

ВОЛНОВЫЕ НАПРАВЛЕННЫЕ ГРАФЫ СИСТЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЛИНИЙ И ЧЕТЫРЁХПОЛЮСНИКОВ

Резюме

Сформулированное до этого для электрической линии понятие волнового направленного графа распространено на системы, содержащие электрические линии и четырёхполюсники. Были сконструированы и проанализированы волновые направленные графы для электрической линии и че-

тырёхполосника, работающих между генератором и нагрузкой. Были обсуждены рабочие параметры четырёхполосника в условиях работы и получены графы, дающие возможность быстро определить такие параметры. Введено понятие электрического соединения и определены электрические параметры таких соединений. Введение этого понятия дало возможность представить метод конструирования однозначным методом волновых направленных графов сложных систем, содержащих любое число генераторов, систем, четырёхполосников и приёмников. Получаемые однородные волновые графы имеют структурную схему, такую же, как Блок-схема системы, и позволяют рассматривать сложные системы, оперируя только величинами одного рода, например только напряжениями. Сконструировано и обсуждено граф каскадного соединения и универсального параллельного соединения двух четырёхполосников. Даны также расчётные примеры.

Wpływ odbicia fal elektromagnetycznych od powierzchni ziemi na dokładność pomiaru prędkości metodą dopplerowską

ANDRZEJ LIZOŃ (WARSZAWA)

Katedra Radiolokacji Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 24.1.1969

W pracy omówiono wpływ odbicia fal elektromagnetycznych od powierzchni ziemi na dokładność pomiaru prędkości wykorzystującego zjawisko Dopplera. Zakładając lustrzane odbicie przeprowadzono analizę zjawisk występujących przy jednokierunkowej i dwukierunkowej transmisji fali elektromagnetycznej między badanym obiektem i punktem odniesienia. W obu przypadkach wyznaczono zależności określające chwilowe zmiany częstotliwości wypadkowego sygnału odbieranego w porównaniu do częstotliwości sygnału odbieranego bez występowania fali odbitej. Obliczono także maksymalne błędy pomiaru częstotliwości dopplerowskiej w zależności od czasu pomiaru tej częstotliwości. Zamieszczone przykłady wskazują, że przy małych częstotliwościach dopplerowskich względny błąd pomiaru może sięgać nawet 1%, zwykle jest on jednak znacznie mniejszy.

1. WSTĘP

Prędkość poruszającego się obiektu mierzy się często wykorzystując zjawisko Dopplera występujące na falach radiowych. W tym celu można wykorzystać jednokierunkową transmisję fali elektromagnetycznej umieszczając na poruszającym się obiekcie nadajnik wysyłający sygnał o dokładnie znanej częstotliwości i odbierając ten sygnał w punkcie odniesienia. Można też wykorzystać dwukierunkową transmisję fali elektromagnetycznej z punktu odniesienia do obiektu i ponownie do punktu odniesienia. W punkcie odniesienia umieszcza się wówczas nadajnik i odbiornik, sygnał wysłany z nadajnika dochodzi do obiektu, odbija się od niego lub jest przez niego retransmitowany i wraca do odbiornika. W obu przypadkach różnica częstotliwości sygnału wysłanego i odebranego, zwana częstotliwością dopplerowską sygnału odbieranego, jest miarą prędkości promieniowej obiektu względem punktu odniesienia.

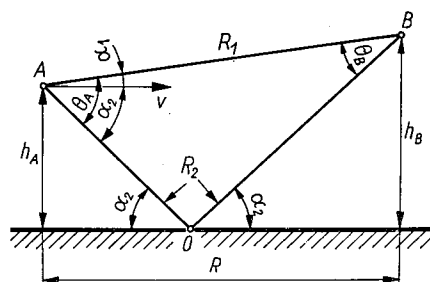
Przy pomiarze prędkości metodą dopplerowską zakłada się, że fala elektromagnetyczna rozchodzi się między obiektem i punktem odniesienia bezpośrednio wzdłuż najkrótszej drogi. Często jednak przy pomiarach w pobliżu powierzchni ziemi fale elektromagnetyczne rozchodzą się nie tylko bezpośrednio, lecz także w wyniku odbicia od powierzchni ziemi. Kierunki rozchodzenia się fali bezpośrednio i odbitej różnią się wówczas między sobą. Różne są zatem częstotliwości sygnałów odbieranych bezpośrednio i w wyniku odbicia od powierzchni ziemi. Wypadkowy sygnał odbierany będący sumą sygnału bezpośredniego i odbitego posiada częstotliwość nieco inną niż częstotliwość sygnału bezpo-

średniego. Odchyłka częstotliwości sygnału wypadkowego od częstotliwości sygnału bezpośredniego jest miarą błędu, jaki popełnia się przy pomiarze prędkości nie uwzględniając sygnału odbitego.

W pracy niniejszej przedstawiono zjawiska występujące przy dwutorowym rozchodzeniu się fal elektromagnetycznych oraz analizę błędu powstającego w wyniku nieuwzględniania fali odbitej. Analizę tę przeprowadzono dla jednokierunkowej transmisji fali elektromagnetycznej między obiektem i punktem odniesienia oraz także dla transmisji dwukierunkowej. Założono przy tym lustrzane odbicie fal od powierzchni ziemi.

2. JEDNOKIERUNKOWA TRANSMISJA FALI ELEKTROMAGNETYCZNEJ

Zjawiska występujące przy przesyłaniu fali elektromagnetycznej w jednym kierunku można rozpatrzeć na podstawie rys. 1. Na rysunku tym w punkcie A znajduje się nadajnik, w punkcie B — odbiornik. Antena nadajnika umieszczona na wysokości h_A nad po-



Rys. 1. Rozchodzenie się fal elektromagnetycznych nad płaską powierzchnią ziemi przy transmisji jednokierunkowej

wierzchnią ziemi posiada charakterystykę kierunkową w płaszczyźnie pionowej $f(\theta_A)$, antena odbiornika umieszczona na wysokości h_B — charakterystykę kierunkową w płaszczyźnie pionowej $f(\theta_B)$. Charakterystyki te określone są jako natężenie pola elektrycznego w funkcji współrzędnej kątowej. Kierunki maksymalnego natężenia pola poszczególnych anten wyznaczone są przez prostą łączącą punkty A i B . Fala elektromagnetyczna wysłana z nadajnika dochodzi do odbiornika dwiema drogami: bezpośrednio wzdłuż drogi AB oraz w wyniku odbicia od powierzchni ziemi w punkcie O wzdłuż drogi AO i OB . Długość drogi AB oznaczono przez R_1 , długość drogi $AO + OB$ przez R_2 , odległość poziomą między punktami A i B przez R . Założono ponadto, że powierzchnia ziemi jest płaska i gładka oraz że jeden z punktów porusza się względem drugiego poziomo ze stałą prędkością v znacznie mniejszą od prędkości rozchodzenia się fal elektromagnetycznych.

Analizę zjawiska można przedstawić w uproszczeniu w sposób następujący. Jeśli przyjąć, że sygnał nadajnika ma postać

$$u_n = U_n \sin \Omega_n t, \quad (1)$$

to do odbiornika dochodzi sygnał bezpośredni

$$u_1 = U_B \sin \Omega_n (t - t_1) \quad (2)$$

oraz sygnał odbity

$$u_2 = U_B \varrho f(\Theta_A) f(\Theta_B) \sin[\Omega_n(t-t_2) - \varphi], \quad (3)$$

gdzie:

- ϱ — moduł współczynnika odbicia powierzchni ziemi,
- φ — argument współczynnika odbicia powierzchni ziemi,
- t_1 — czas opóźnienia sygnału bezpośredniego,
- t_2 — czas opóźnienia sygnału odbitego.

Opóźnienia te równe są

$$t_1 = \frac{R_1}{c} = \frac{\sqrt{R^2 + (h_B - h_A)^2}}{c},$$

$$t_2 = \frac{R_2}{c} = \frac{\sqrt{R^2 + (h_B + h_A)^2}}{c},$$

gdzie c oznacza prędkość rozchodzenia się fal elektromagnetycznych.

W wyniku zbliżania się nadajnika do odbiornika opóźnienia te ulegają zmianie. Dla sygnału bezpośredniego wynosi ono

$$t_1 = \frac{R_{1o}}{c} - \frac{dR_1}{c} t = \frac{R_{1o}}{c} - \frac{1}{c} \frac{R(t) \frac{dR(t)}{dt}}{\sqrt{R^2(t) + (h_B - h_A)^2}} t = \frac{R_{1o}}{c} - \frac{v}{c} \cos \alpha_1(t) t. \quad (4)$$

Podstawiając zależność (4) do (2) otrzymuje się wyrażenie określające sygnał bezpośredni w punkcie B

$$u_1 = U_B \sin[(\Omega_n + \Omega_{d_1}(t))t - \psi_1], \quad (5)$$

gdzie:

$$\Omega_{d_1}(t) = \Omega_n \frac{v}{c} \cos \alpha_1(t), \quad (6)$$

$$\psi_1 = \Omega_n \frac{R_{1o}}{c}.$$

Analogicznie otrzymuje się wyrażenie na sygnał odbity w punkcie B

$$u_2 = U_B \varrho f(\Theta_A) f(\Theta_B) \sin[(\Omega_n + \Omega_{d_2}(t))t - \psi_2 - \varphi], \quad (7)$$

gdzie:

$$\Omega_{d_2}(t) = \Omega_n \frac{v}{c} \cos \alpha_2(t) = \Omega_n \frac{v}{c} \frac{R(t)}{\sqrt{R^2(t) + (h_B + h_A)^2}}, \quad (8)$$

$$\psi_2 = \Omega_n \frac{R_{2o}}{c}.$$

Z porównania wyrażeń (5) i (7) wynika, że częstotliwości dopplerowskie obu sygnałów różnią się między sobą i ulegają w czasie zmianie. Dla uproszczenia dalszych rozważań przyjęto, że częstotliwości dopplerowskie obu sygnałów w rozpatrywanym zakresie czasu są stałe. Oznacza to, że założono

$$\cos \alpha_1(t) = \text{const}$$

$$\cos \alpha_2(t) = \text{const},$$

co można przyjąć, jeśli $h_B + h_A \ll R$ oraz jeśli w rozpatrywanym zakresie czasu

$$R(t) = R_0 - vt \simeq R_0,$$

czyli gdy zmiany odległości są nieznaczne. Otrzymuje się wówczas

$$u_1 = U_B \sin[(\Omega_n + \Omega_{d_1})t - \psi_1], \quad (9)$$

$$u_2 = U_B \varrho f(\Theta_A) f(\Theta_B) \sin[(\Omega_n + \Omega_{d_2})t - \psi_2 - \varphi]. \quad (10)$$

Sygnał odbierany w punkcie B jest sumą składowych (9) i (10). Częstotliwość chwilową tego sygnału można wyznaczyć sprowadzając sumę sygnałów składowych do wyrażenia (por. Dodatek 1)

$$u_{OB} = u_1 + u_2 = U_{OB} \sin[(\Omega_n + \Omega_{d_1}^*)t + \psi_B]$$

zawierającego częstotliwość sygnału bezpośredniego. Równa jest ona wówczas

$$F_B = \frac{1}{2\pi} \left(\Omega_n + \Omega_{d_1} + \frac{d\psi_B}{dt} \right),$$

a chwilowa odchyłka od częstotliwości sygnału bezpośredniego (por. Dodatek 1)

$$\Delta F_{dB} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\psi_B}{dt} = (F_{d_2} - F_{d_1}) \frac{K^2 + K \cos[(\Omega_{d_2} - \Omega_{d_1})t + \psi_1 - \psi_2 - \varphi]}{1 + K^2 + 2K \cos[(\Omega_{d_2} - \Omega_{d_1})t + \psi_1 - \psi_2 - \varphi]},$$

gdzie:

$$K = \varrho f(\Theta_A) f(\Theta_B), \quad (11)$$

$$F_{d_1} = \frac{1}{2\pi} \Omega_{d_1}, \quad (12)$$

$$F_{d_2} = \frac{1}{2\pi} \Omega_{d_2}. \quad (13)$$

Względna wartość tej odchyłki odniesiona do częstotliwości dopplerowskiej sygnału bezpośredniego wynosi

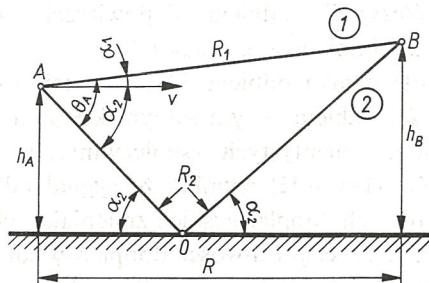
$$\frac{\Delta F_{dB}}{F_{d_1}} = \frac{F_{d_2} - F_{d_1}}{F_{d_1}} \frac{K^2 + K \cos[(\Omega_{d_2} - \Omega_{d_1})t + \psi_1 - \psi_2 - \varphi]}{1 + K^2 + 2K \cos[(\Omega_{d_2} - \Omega_{d_1})t + \psi_1 - \psi_2 - \varphi]}. \quad (14)$$

Właściwości tej zależności omówione zostaną w rozdziale 4.

3. DWUKIERUNKOWA TRANSMISJA FALI ELEKTROMAGNETYCZNEJ

Zjawiska występujące przy dwukierunkowym przesyłaniu fali elektromagnetycznej wyglądają nieco inaczej. Można je przedstawić na podstawie rys. 2. Na rysunku tym w punkcie A znajduje się nadajnik i odbiornik, w punkcie B — punktowy obiekt odbijający. Wspólna antena nadajnika i odbiornika umieszczona na wysokości h_A nad powierzchnią ziemi posiada charakterystykę kierunkową w płaszczyźnie pionowej $f(\Theta_A)$. Kierunek maksymalnego natężenia pola elektrycznego tej anteny wyznaczony jest przez prostą AB . Obiekt odbijający umieszczony jest na wysokości h_B nad powierzchnią ziemi. Fala elektromagnetyczna wysłana z nadajnika dochodzi do obiektu odbijającego dwiema drogami: bezpośrednio wzdłuż drogi AB oraz w wyniku odbicia od powierzchni ziemi

w punkcie O wzdłuż drogi AO i OB . Każda z tych fal odbita od obiektu wraca do odbiornika również dwiema drogami: bezpośrednio oraz po odbiciu od powierzchni ziemi. Sygnał odbierany jest sumą wszystkich składowych dochodzących do punktu A .



Rys. 2. Rozchodzenie się fal elektromagnetycznych nad płaską powierzchnią ziemi przy transmisji dwukierunkowej

Podobnie jak poprzednio założono, że powierzchnia ziemi jest płaska i gładka oraz że jeden z punktów porusza się względem drugiego poziomo ze stałą prędkością v znacznie mniejszą od prędkości rozchodzenia się fal elektromagnetycznych.

Analizę zjawiska można przedstawić w uproszczeniu w sposób następujący. Jeśli przyjąć, że sygnał nadajnika ma postać określoną zależnością (1), do punktu B dochodzi sygnał bezpośredni

$$u_1 = U_B \sin[(\Omega_n + \Omega_{d_1}(t))t - \psi_1] \quad (15)$$

oraz sygnał odbity

$$u_2 = U_B \varrho f(\Theta_A) \sin[(\Omega_n + \Omega_{d_2}(t))t - \psi_2 - \varphi]. \quad (16)$$

W wyniku odbicia sygnału u_1 od obiektu do odbiornika wraca sygnał bezpośredni

$$u_{11} = U_A \varrho_{11} \sin[(\Omega_n + \Omega_{d_1}(t))(t - t_1) - \psi_1 - \varphi_{11}] \quad (17)$$

oraz sygnał odbity

$$u_{12} = U_A \varrho \varrho_{12} f(\Theta_A) \sin[(\Omega_n + \Omega_{d_1}(t))(t - t_2) - \psi_1 - \varphi - \varphi_{12}], \quad (18)$$

gdzie:

ϱ_{11} — moduł współczynnika odbicia od powierzchni obiektu przy padaniu fali z kierunku 1 i odbiciu w tym samym kierunku,

ϱ_{12} — moduł współczynnika odbicia od powierzchni obiektu przy padaniu fali z kierunku 1 i odbiciu w kierunku 2,

$\varphi_{11}, \varphi_{12}$ — odpowiednie argumenty tych współczynników.

Podstawiając (4) do (17) po przekształceniach identycznych jak dla wyrażenia (2) oraz uwzględniając, że $\Omega_{d_1} \ll \Omega_n$ otrzymuje się

$$u_{11} = U_A \varrho_{11} \sin[(\Omega_n + 2\Omega_{d_1}(t))t - 2\psi_1 - \varphi_{11}] \quad (19)$$

oraz analogicznie

$$u_{12} = U_A \varrho \varrho_{12} f(\Theta_A) \sin[(\Omega_n + \Omega_{d_1}(t) + \Omega_{d_2}(t))t - \psi_1 - \psi_2 - \varphi - \varphi_{12}]. \quad (20)$$

Podobnie w wyniku odbicia sygnału u_2 od obiektu do odbiornika wraca sygnał bezpośredni

$$u_{21} = U_A \varrho \varrho_{21} f(\Theta_A) \sin[(\Omega_n + \Omega_{d_1}(t) + \Omega_{d_2}(t))t - \psi_1 - \psi_2 - \varphi - \varphi_{21}] \quad (21)$$

oraz sygnał odbity

$$u_{22} = U_A \varrho^2 \varrho_{22} f^2(\Theta_A) \sin[(\Omega_n + 2\Omega_{d_2}(t))t - 2\psi_2 - 2\varphi - \varphi_{22}], \quad (22)$$

gdzie analogicznie:

ϱ_{21} — moduł współczynnika odbicia od powierzchni obiektu przy padaniu fali z kierunku 2 i odbiciu w kierunku 1,

ϱ_{22} — moduł współczynnika odbicia od powierzchni obiektu przy padaniu fali z kierunku 2 i odbiciu w tym samym kierunku,

$\varphi_{21}, \varphi_{22}$ — odpowiednie argumenty tych współczynników.

Z porównania zależności (19) ÷ (22) wynika, że sygnał odbierany zawiera składowe o trzech różnych częstotliwościach dopplerowskich zmieniających się w czasie. Jeśli przyjąć dodatkowo dla uproszczenia, że częstotliwości dopplerowskie tych składowych w rozpatrywanym zakresie czasu są stałe, otrzyma się dla nich następujące wyrażenia:

$$u_{11} = U_A \varrho_{11} \sin[(\Omega_n + 2\Omega_{d_1})t - 2\psi_1 - \varphi_{11}], \quad (23)$$

$$u_{22} = U_A \varrho^2 \cdot \varrho_{22} f^2(\Theta_A) \sin[(\Omega_n + 2\Omega_{d_2})t - 2\psi_2 - 2\varphi - \varphi_{22}], \quad (24)$$

$$u_{12} + u_{21} = U_A \varrho A f(\Theta_A) \sin[(\Omega_n + \Omega_{d_1} + \Omega_{d_2})t - \psi_1 - \psi_2 - \varphi - \varphi_3], \quad (25)$$

gdzie:

$$A = \sqrt{\varrho_{12}^2 + \varrho_{21}^2 + 2\varrho_{12}\varrho_{21}\cos(\varphi_{12} - \varphi_{21})},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{\varrho_{12} \sin \varphi_{12} + \varrho_{21} \sin \varphi_{21}}{\varrho_{12} \cos \varphi_{12} + \varrho_{21} \cos \varphi_{21}}.$$

Sygnał odbierany jest sumą składowych (23) ÷ (25). Częstotliwość chwilową tego sygnału można wyznaczyć sprowadzając sumę tych składowych do postaci (por. Dodatek 1)

$$u_{0A} = u_{11} + u_{12} + u_{21} + u_{22} = U_{0A} \sin[(\Omega_n + \Omega_{d_1} + \Omega_{d_2})t + \psi_A].$$

Częstotliwość chwilowa tego przebiegu równa jest

$$F_A = \frac{1}{2\pi} \left(\Omega_n + \Omega_{d_1} + \Omega_{d_2} + \frac{d\psi_A}{dt} \right).$$

Chwilową odchyłkę częstotliwości

$$\Delta F'_{d_A} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\psi_A}{dt}$$

można wyznaczyć korzystając z zależności (52). Wówczas

$$\omega_{r_1} = (\Omega_n + 2\Omega_{d_1}) - (\Omega_n + \Omega_{d_1} + \Omega_{d_2}) = \Omega_{d_1} - \Omega_{d_2},$$

$$\omega_{r_2} = (\Omega_n + 2\Omega_{d_2}) - (\Omega_n + \Omega_{d_1} + \Omega_{d_2}) = \Omega_{d_2} - \Omega_{d_1} = -\omega_{r_1},$$

$$\omega_{r_1} - \omega_{r_2} = 2\omega_{r_1},$$

$$\omega_{r_1} + \omega_{r_2} = 0,$$

$$K_1 = \frac{\varrho_{11}}{A \varrho f(\Theta_A)},$$

$$K_2 = \frac{\varrho \varrho_{22} f(\Theta_A)}{A},$$

natomiast

$$\Delta F'_{dA} = \frac{\omega_{r1}}{2\pi} \frac{K_1^2 - K_2^2 + B \cos(\omega_{r1}t - \psi_1 + \psi_2 + \varphi + \psi_4)}{1 + K_1^2 + K_2^2 + 2K_1 K_2 \cos(2\omega_{r1}t - 2\psi_1 + 2\psi_2 + 2\varphi - \varphi_{11} + \varphi_{22}) + D \cos(\omega_{r1}t - \psi_1 + \psi_2 + \varphi + \psi_5)}, \quad (26)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - 2K_1 K_2 \cos(\varphi_{11} + \varphi_{22} - 2\psi_3)}, \\ D &= 2\sqrt{K_1^2 + K_2^2 + 2K_1 K_2 \cos(\varphi_{11} + \varphi_{22} - 2\psi_3)}, \\ \operatorname{tg} \psi_4 &= \frac{K_1 \sin(\psi_3 - \varphi_{11}) - K_2 \sin(\varphi_{22} - \psi_3)}{K_1 \cos(\psi_3 - \varphi_{11}) - K_2 \cos(\varphi_{22} - \psi_3)}, \\ \operatorname{tg} \psi_5 &= \frac{K_1 \sin(\psi_3 - \varphi_{11}) + K_2 \sin(\varphi_{22} - \psi_3)}{K_1 \cos(\psi_3 - \varphi_{11}) + K_2 \cos(\varphi_{22} - \psi_3)}. \end{aligned}$$

Analiza wyrażenia (26) jest dość złożona i nie daje bezpośrednio użytecznych wyników głównie ze względu na konieczność znajomości współczynników odbicia fal elektromagnetycznych od obiektu odbijającego. Jeśli jednak założyć, że współczynniki odbicia od obiektu są jednakowe

$$\begin{aligned} \varrho_{11} &= \varrho_{12} = \varrho_{21} = \varrho_{22}, \\ \varphi_{11} &= \varphi_{12} = \varphi_{21} = \varphi_{22}, \end{aligned}$$

wówczas wyrażenie (26) znacznie się upraszcza. Uzyskuje się bowiem

$$\begin{aligned} A &= 2\varrho_{12}, \\ K_1 &= \frac{1}{2\varrho f(\Theta_A)} = \frac{1}{2K}, \\ K_2 &= \frac{\varrho f(\Theta_A)}{2} = \frac{K}{2}, \\ \psi_3 &= \varphi_{12}, \\ \psi_4 &= \psi_5 = 0, \\ B &= K_1 - K_2 = \frac{1 - K^2}{2K}, \\ D &= 2(K_1 + K_2) = \frac{1 + K^2}{K} \end{aligned}$$

oraz

$$\Delta F'_{dA} = (F_{d1} - F_{d2}) \frac{1 - K^2}{1 + K^2 + 2K \cos[(\Omega_{d2} - \Omega_{d1})t + \psi_1 - \psi_2 - \varphi]}.$$

Można teraz wyznaczyć odchyłkę częstotliwości chwilowej sygnału odbieranego od częstotliwości sygnału bezpośredniego u_{11} . Wynosi ona

$$\Delta F_{dA} = (F_{d2} - F_{d1}) - \Delta F'_{dA} = 2(F_{d2} - F_{d1}) \frac{K^2 + K \cos[(\Omega_{d2} - \Omega_{d1})t + \psi_1 - \psi_2 - \varphi]}{1 + K^2 + 2K \cos[(\Omega_{d2} - \Omega_{d1})t + \psi_1 - \psi_2 - \varphi]}.$$

Względna wartość tej odchyłki odniesiona do częstotliwości dopplerowskiej sygnału bezpośredniego u_{11} równa jest

$$\frac{\Delta F_{d_A}}{2F_{d_1}} = \frac{F_{d_2} - F_{d_1}}{F_{d_1}} \frac{K^2 + K \cos[(\Omega_{d_2} - \Omega_{d_1})t + \psi_1 - \psi_2 - \varphi]}{1 + K^2 + 2K \cos[(\Omega_{d_2} - \Omega_{d_1})t + \psi_1 - \psi_2 - \varphi]}. \quad (27)$$

Wyrażenie to jest identyczne z wyrażeniem (14) uzyskanym przy jednokierunkowej transmisji fali elektromagnetycznej. Właściwości tego wyrażenia omówione zostaną poniżej.

4. OCENA BŁĘDU POMIARU CZĘSTOTLIWOŚCI DOPPLEROWSKIEJ

Jak wynika z powyższych rozważań, w wyniku odbioru nie tylko sygnału bezpośredniego, lecz także sygnału odbitego uzyskuje się sygnał wypadkowy, którego częstotliwość chwilowa różni się nieco od częstotliwości sygnału bezpośredniego. Względna odchyłka tej częstotliwości odniesiona do częstotliwości dopplerowskiej F_d sygnału bezpośredniego jest jednakowa przy transmisji fali elektromagnetycznej jednokierunkowej i dwukierunkowej (o ile współczynniki odbicia od powierzchni obiektu są jednakowe). Wyraża się ona zależnością

$$\frac{\Delta F_d}{F_d} = \frac{F_{d_2} - F_{d_1}}{F_{d_1}} \frac{K^2 + K \cos[(\Omega_{d_2} - \Omega_{d_1})t + \psi_1 - \psi_2 - \varphi]}{1 + K^2 + 2K \cos[(\Omega_{d_2} - \Omega_{d_1})t + \psi_1 - \psi_2 - \varphi]}, \quad (28)$$

gdzie dla transmisji jednokierunkowej

$$K = \varrho f(\Theta_A) f(\Theta_B), \quad (29)$$

natomiast dla transmisji dwukierunkowej

$$K = \varrho f(\Theta_A). \quad (30)$$

Odchyłka ta może wprowadzać błąd pomiaru częstotliwości dopplerowskiej sygnału bezpośredniego, a przez to błąd pomiaru prędkości obiektu. Błąd ten zależy głównie od wartości współczynnika K określającego udział sygnału odbitego od powierzchni ziemi w wypadkowym sygnale odbieranym. Wartość tego współczynnika zawarta jest w granicach

$$0 \leq K < 1.$$

Dla $K = 0$ sygnał odbity nie występuje. Odchyłka częstotliwości jest wówczas równa zeru, częstotliwość sygnału odbieranego równa jest natomiast częstotliwości sygnału bezpośredniego.

Dla $K = 1$ sygnał odbity w punkcie odbioru posiada amplitudę równą amplitudzie sygnału bezpośredniego. W rzeczywistych warunkach pomiarowych przypadek ten jednak nie występuje i nie będzie w dalszej części rozpatrywany.

Dla $0 < K < 1$ częstotliwość sygnału wypadkowego określona jest zależnością

$$F_d + \Delta F_d.$$

Częstotliwość ta, jak wynika z wyrażenia (28), zmienia się w czasie okresowo z okresem

$$T = \frac{1}{|F_{d_2} - F_{d_1}|}. \quad (31)$$

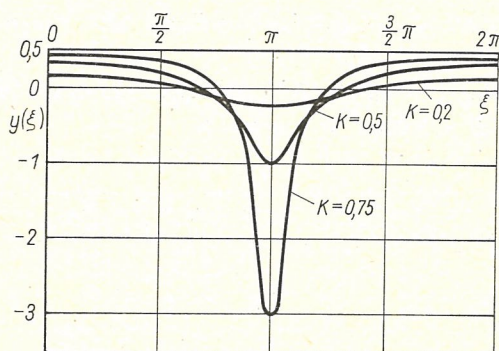
Zmiany te odbywają się wokół średniej wartości równej częstotliwości sygnału bezpośredniego (por. Dodatek 2). Chwilową wartość odchyłki częstotliwości łatwo można określić pomijając w wyrażeniu (28) zależności fazowe. Wówczas względną odchyłkę częstotliwości można wyrazić jako

$$\frac{\Delta F_d}{F_d} = \frac{F_{d_2} - F_{d_1}}{F_{d_1}} y(\xi), \quad (32)$$

gdzie

$$y(\xi) = \frac{K^2 + K \cos \xi}{1 + K^2 + 2K \cos \xi}. \quad (33)$$

Wykres funkcji $y(\xi)$ w zakresie jednego okresu dla różnych wartości współczynnika K pokazany jest na rys. 3.



Rys. 3. Wykres funkcji $y(\xi)$ w zakresie jednego okresu

Tablica 1

Zależność funkcji $|y(\xi)|_{\max}$ od współczynnika K

K	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$ y(\xi) _{\max}$	0,11	0,25	0,43	0,67	1,0	1,5

0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
2,33	4,0	9,0	19,0	99,0

Maksymalna wartość bezwzględna tej funkcji wynosi (por. Dodatek 2)

$$|y(\xi)|_{\max} = \frac{K}{1-K}. \quad (34)$$

Zależność funkcji $|y(\xi)|_{\max}$ od współczynnika K podana została w tablicy 1.

Maksymalny względny błąd chwilowej częstotliwości dopplerowskiej wynosi zatem

$$\left| \frac{\Delta F_d}{F_d} \right|_{\max} = \frac{|F_{d_2} - F_{d_1}|}{F_{d_1}} |y(\xi)|_{\max} \quad (35)$$

i rośnie wraz ze wzrostem $|y(\xi)|_{\max}$ w miarę wzrostu współczynnika K . Może on osiągać znaczne wartości dla $K \rightarrow 1$.

Błąd pomiaru częstotliwości dopplerowskiej zależy od czasu pomiaru tej częstotliwości. Jeśli czas ten jest mniejszy od okresu zmian odchyłki częstotliwości dopplerowskiej, wówczas maksymalny błąd pomiaru wynosi

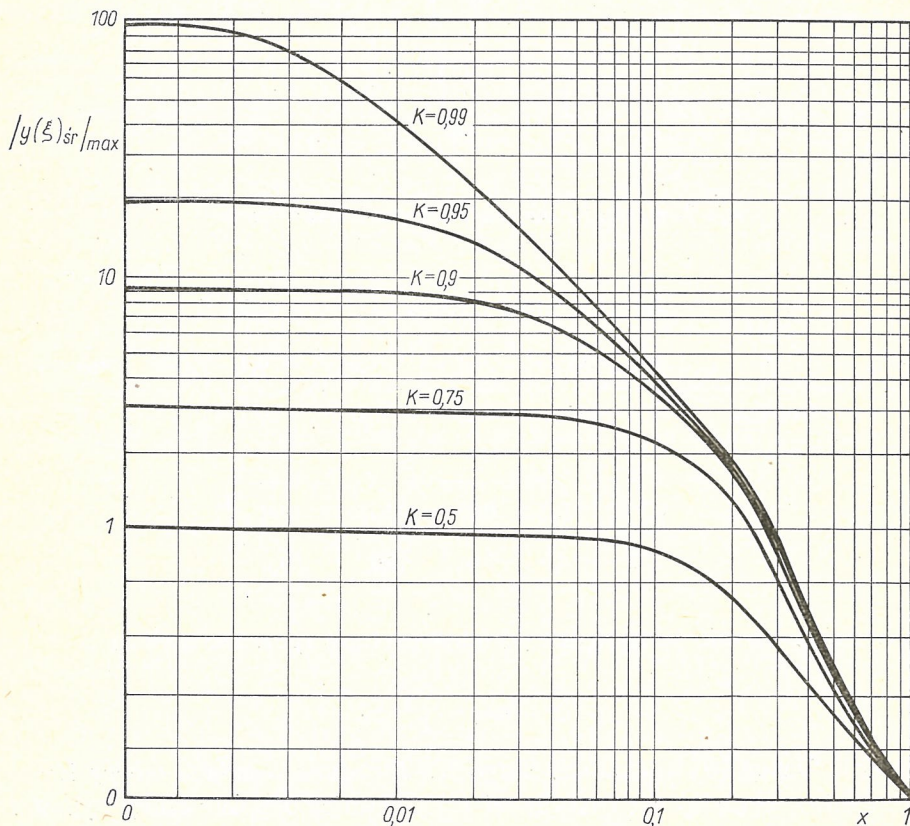
$$\left| \frac{\Delta F_{d_{sr}}}{F_d} \right|_{\max} = \frac{|F_{d_2} - F_{d_1}|}{F_{d_1}} |y(\xi)_{sr}|_{\max}, \quad (36)$$

gdzie (por. Dodatek 2):

$$|y(\xi)_{sr}|_{\max} = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{\pi x} \arctg \left(\frac{1-K}{1+K} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} x \right) \right| \quad 0 < x < 1, \quad (37)$$

x — względny czas pomiaru częstotliwości określony jako stosunek czasu pomiaru do okresu zmian odchyłki częstotliwości ΔF_d .

Wykresy funkcji $|y(\xi)_{sr}|_{\max}$ w zależności od względnego czasu uśredniania dla różnych wartości współczynnika K pokazane są na rys. 4.

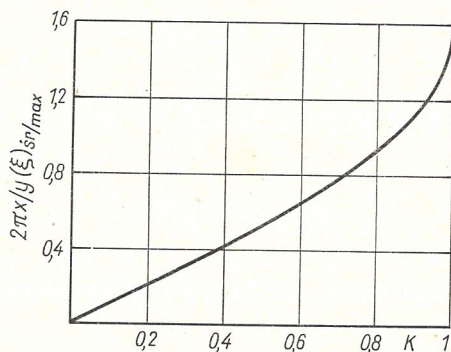


Rys. 4. Wykresy maksymalnej wartości bezwzględnej uśrednionej funkcji $y(\xi)$ dla czasu uśredniania mniejszego od okresu funkcji $y(\xi)$

Jeśli czas pomiaru jest większy od okresu zmian odchyłki częstotliwości, błąd pomiaru jest mniejszy. Średnia bowiem wartość odchyłki przypadająca na okres jej zmian równa jest zeru (por. Dodatek 2). Maksymalny błąd pomiaru częstotliwości można wówczas określić również z zależności (36), uwzględniając jednak, że (por. Dodatek 2)

$$|y(\xi)_{sr}|_{max} = \frac{1}{2\pi x} \left| \frac{1}{2} \arccos(-K) - \arctg \sqrt{\frac{1-K}{1+K}} \right|, \quad x > 1. \quad (38)$$

Wykres funkcji $2\pi x |y(\xi)_{sr}|_{max}$ dla $x > 1$ w zależności od wartości współczynnika K pokazany jest na rys. 5.



Rys. 5. Wykres maksymalnej wartości bezwzględnej uśrednionej funkcji $y(\xi)$ dla czasu uśredniania większego od okresu funkcji $y(\xi)$

5. DYSKUSJA OTRZYMANYCH WYNIKÓW

W praktycznych zastosowaniach najważniejszy jest przypadek, gdy $0 < K < 1$. Częstotliwość wypadkowego sygnału zmienia się wówczas okresowo wokół częstotliwości sygnału bezpośredniego. Chwilowe odchylenie tej częstotliwości od częstotliwości sygnału bezpośredniego proporcjonalne jest do różnicy częstotliwości dopplerowskich sygnału bezpośredniego i odbitego, zależy też znacznie od wartości współczynnika K [por. zależność (32)]. W miarę zbliżania się współczynnika K do jedności maksymalne odchylenia częstotliwości wypadkowego sygnału odbieranego szybko rosną [por. zależności (35) i (34)].

Maksymalny błąd pomiaru częstotliwości dopplerowskiej wypadkowego sygnału odbieranego jest proporcjonalny do różnicy częstotliwości dopplerowskich sygnału bezpośredniego i odbitego, zależy także od wartości współczynnika K oraz od czasu pomiaru tej częstotliwości odniesionego do okresu jej zmian [por. zależność (36)]. Błąd ten rośnie w miarę zbliżania się współczynnika K do jedności. Błąd ten rośnie także w miarę skracania czasu pomiaru częstotliwości; w granicznym przypadku osiąga wartość równą maksymalnemu chwilowemu odchyleniu częstotliwości sygnału odbieranego od częstotliwości sygnału bezpośredniego.

Maksymalny błąd pomiaru częstotliwości dopplerowskiej przy zwiększaniu się różnicy częstotliwości sygnału bezpośredniego i odbitego i stałym czasie pomiaru może rosnąć lub maleć. Przy wzroście bowiem różnicy tych częstotliwości rosną proporcjonalnie wahania częstotliwości sygnału odbieranego, maleje jednak ich okres i uśrednianie tych wahań

jest skuteczniejsze. Charakter zmiany tego błędu zależy wówczas od tego, która zależność przeważa.

Różnica częstotliwości sygnału bezpośredniego i odbitego zależy od usytuowania punktu odniesienia i obiektu badanego względem siebie i względem powierzchni ziemi. Dla sytuacji geometrycznej pokazanej na rys. 1 lub 2 korzystając z wyrażień (12), (13), (6) i (8) otrzymuje się

$$F_{d_2} - F_{d_1} = F_{d_0}(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) = 2F_{d_0} \sin \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}, \quad (39)$$

gdzie

$$F_{d_0} = \frac{\Omega_n}{2\pi} \frac{v}{c}.$$

Przyjmując, że zwykle $h_A \ll R$, $h_B \ll R$, czyli że $\alpha_1 \ll 1$, $\alpha_2 \ll 1$, zależność (39) przyjmuje postać

$$F_{d_2} - F_{d_1} \cong -\frac{2h_A h_B}{R^2} F_{d_0}. \quad (40)$$

Wówczas okres zmian częstotliwości sygnału odbieranego wynosi

$$T = \frac{1}{|F_{d_2} - F_{d_1}|} = \frac{1}{F_{d_0}} \frac{R^2}{2h_A h_B}, \quad (41)$$

natomiast względne odchylenie częstotliwości tego sygnału

$$\frac{\Delta F_d}{F_d} \cong -\frac{2h_A h_B}{R^2} y(\xi) \quad (42)$$

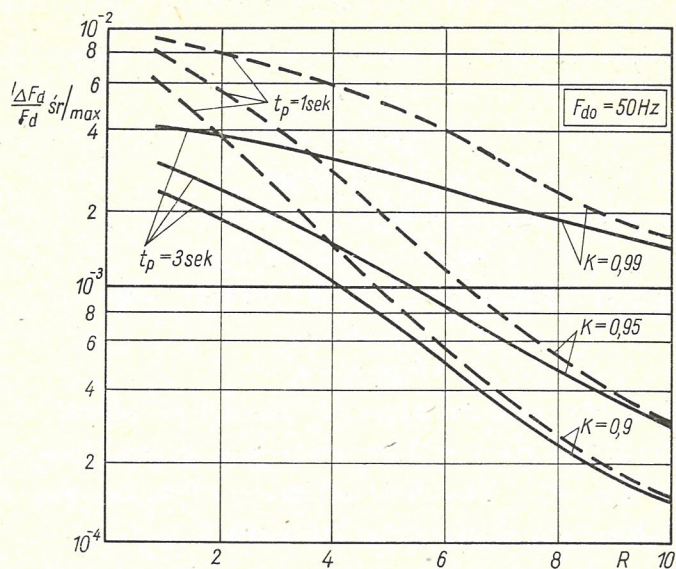
oraz maksymalny względny błąd pomiaru częstotliwości dopplerowskiej

$$\left| \frac{\Delta F_{d_{sr}}}{F_d} \right|_{\max} = \frac{2h_A h_B}{R^2} |y(\xi)_{sr}|_{\max}. \quad (43)$$

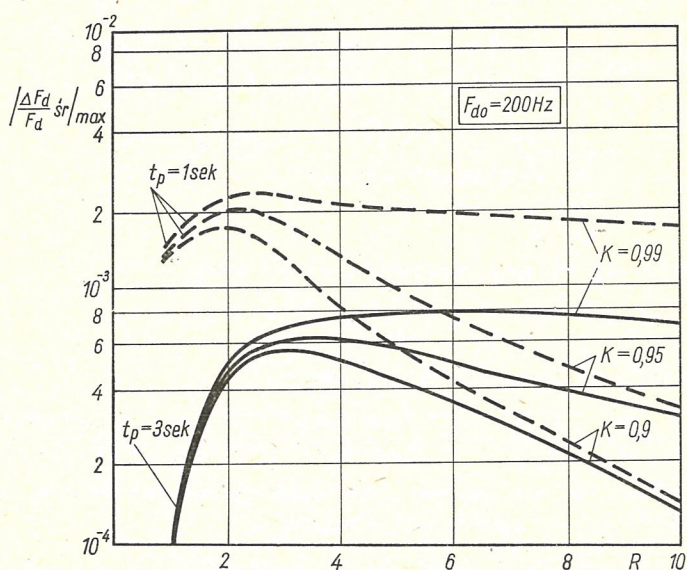
Z zależności (41) wynika, że dla danej sytuacji geometrycznej okres wahań częstotliwości wypadkowego sygnału odbieranego jest tym większy, im mniejsza jest mierzona częstotliwość dopplerowska. Oznacza to, że maksymalny błąd względny pomiaru częstotliwości dopplerowskiej przy stałym czasie pomiaru rośnie w miarę zmniejszania się mierzonej częstotliwości dopplerowskiej.

Dla przykładu obliczono maksymalne względne wartości błędu pomiaru częstotliwości występujące dla $h_A = 20$ m, $h_B = 40$ m, $R = 1 \div 10$ km, czasu pomiaru częstotliwości $t_p = 1$ sek i $t_p = 3$ sek. Obliczenia przeprowadzono dla częstotliwości dopplerowskiej F_{d_0} (występującej przy jednokierunkowej transmisji fali elektromagnetycznej) równej 50 Hz i 200 Hz oraz dla kilku wartości współczynnika K bliskich jedności. Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 6 i 7.

Z rysunków tych wynika, że przy małych częstotliwościach dopplerowskich maksymalny względny błąd pomiaru tej częstotliwości może sięgać nawet 1%, zwykle jest jednak znacznie mniejszy.



Rys. 6. Wykresy maksymalnych wartości błędu pomiaru częstotliwości dopplerowskiej w funkcji odległości między obiektem badanym i punktem odniesienia dla $h_A = 20 \text{ m}$ i $h_B = 40 \text{ m}$



Rys. 7. Wykresy maksymalnych wartości błędu pomiaru częstotliwości dopplerowskiej w funkcji odległości między obiektem badanym i punktem odniesienia dla $h_A = 20 \text{ m}$ i $h_B = 40 \text{ m}$

CZĘSTOTLIWOŚĆ CHWILOWA SUMY TRZECH PRZEBIEGÓW SINUSOIDALNYCH

Częstotliwość chwilową sumy trzech przebiegów sinusoidalnych o różnych częstotliwościach

$$u_1 = U_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \quad (44)$$

$$u_2 = U_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (45)$$

$$u_3 = U_3 \sin(\omega_3 t + \varphi_3) \quad (46)$$

można wyznaczyć sprowadzając sumę tych przebiegów do postaci

$$u = u_1 + u_2 + u_3 = U \sin(\omega_3 t + \varphi). \quad (47)$$

Wartość kąta φ łatwo obliczyć podstawiając do wyrażeń (44) ÷ (46) oznaczenia

$$\omega_{r_1} = \omega_1 - \omega_3,$$

$$\omega_{r_2} = \omega_2 - \omega_3$$

i korzystając z prostych zależności trygonometrycznych. Otrzymuje się wówczas

$$u_1 = U_1 \sin[(\omega_3 + \omega_{r_1})t + \varphi_1] = U_1 [\sin \omega_3 t \cos(\omega_{r_1} t + \varphi_1) + \cos \omega_3 t \sin(\omega_{r_1} t + \varphi_1)], \quad (48)$$

$$u_2 = U_2 \sin[(\omega_3 + \omega_{r_2})t + \varphi_2] = U_2 [\sin \omega_3 t \cos(\omega_{r_2} t + \varphi_2) + \cos \omega_3 t \sin(\omega_{r_2} t + \varphi_2)], \quad (49)$$

$$u_3 = U_3 \sin(\omega_3 t + \varphi_3) = U_3 (\sin \omega_3 t \cos \varphi + \cos \omega_3 t \sin \varphi) \quad (50)$$

oraz analogicznie

$$u = U \sin(\omega_3 t + \varphi) = U (\sin \omega_3 t \cos \varphi + \cos \omega_3 t \sin \varphi). \quad (51)$$

Z zależności (47) i (48) ÷ (51) wynika, że spełnione jest tożsamościowo

$$U \sin \varphi = U_1 \sin(\omega_{r_1} t + \varphi_1) + U_2 \sin(\omega_{r_2} t + \varphi_2) + U_3 \sin \varphi_3$$

oraz

$$U \cos \varphi = U_1 \cos(\omega_{r_1} t + \varphi_1) + U_2 \cos(\omega_{r_2} t + \varphi_2) + U_3 \cos \varphi_3.$$

Stąd otrzymuje się

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_1 \sin(\omega_{r_1} t + \varphi_1) + U_2 \sin(\omega_{r_2} t + \varphi_2) + U_3 \sin \varphi_3}{U_1 \cos(\omega_{r_1} t + \varphi_1) + U_2 \cos(\omega_{r_2} t + \varphi_2) + U_3 \cos \varphi_3},$$

lub

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{K_1 \sin(\omega_{r_1} t + \varphi_1) + K_2 \sin(\omega_{r_2} t + \varphi_2) + \sin \varphi_3}{K_1 \cos(\omega_{r_1} t + \varphi_1) + K_2 \cos(\omega_{r_2} t + \varphi_2) + \cos \varphi_3},$$

$$\text{gdzie: } K_1 = \frac{U_1}{U_3}, \quad K_2 = \frac{U_2}{U_3}.$$

Częstotliwość chwilowa przebiegu wypadkowego równa jest zatem

$$f = \frac{1}{2\pi} \left(\omega_3 + \frac{d\varphi}{dt} \right).$$

Dla wyznaczenia jej wystarczy obliczyć odchyłkę częstotliwości

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{K_1 \sin(\omega_{r_1} t + \varphi_1) + K_2 \sin(\omega_{r_2} t + \varphi_2) + \sin \varphi_3}{K_1 \cos(\omega_{r_1} t + \varphi_1) + K_2 \cos(\omega_{r_2} t + \varphi_2) + \cos \varphi_3}.$$

Po zróżniczkowaniu i wprowadzeniu prostych przekształceń trygonometrycznych wyrażenie określające wartość tej odchyłki przyjmuje ostatecznie następującą postać

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{K_1^2 \omega_{r_1} + K_2^2 \omega_{r_2} + K_1 K_2 (\omega_{r_1} + \omega_{r_2}) \cos[(\omega_{r_1} - \omega_{r_2})t + \varphi_1 - \varphi_2] + K_1 \omega_{r_1} \cos(\omega_{r_1} t + \varphi_1 - \varphi_3) + K_2 \omega_{r_2} \cos(\omega_{r_2} t + \varphi_2 - \varphi_3)}{1 + K_1^2 + K_2^2 + 2K_1 K_2 \cos[(\omega_{r_1} - \omega_{r_2})t + \varphi_1 - \varphi_2] + 2K_1 \cos(\omega_{r_1} t + \varphi_1 - \varphi_3) + 2K_2 \cos(\omega_{r_2} t + \varphi_2 - \varphi_3)} \quad (52)$$

W przypadku tylko dwóch składowych u_1 i u_2

$$K_2 = 0$$

i wówczas wyrażenie na Δf przyjmuje postać

$$\Delta f = \frac{K_1 \omega_{r1}}{2\pi} \frac{K_1 + \cos(\omega_{r1} t + \varphi_1 - \varphi_3)}{1 + K_1^2 + 2K_1 \cos(\omega_{r1} t + \varphi_1 - \varphi_3)}, \quad (53)$$

Dodatek 2

WŁAŚCIWOŚCI FUNKCJI $y(\xi)$

Funkcja $y(\xi)$ określona jest zależnością

$$y(\xi) = \frac{K^2 + K \cos \xi}{1 + K^2 + 2K \cos \xi}, \quad (54)$$

gdzie $0 < K < 1$. Funkcja ta jest okresowa z okresem $\xi = 2\pi$. Wykres tej funkcji w zakresie jednego okresu pokazany jest na rys. 3 dla kilku wartości K .

Funkcja $y(\xi)$ w zakresie jednego okresu osiąga maksimum

$$y(\xi)_{\max} = \frac{K}{1+K} \quad (55)$$

dla $\xi = 2\pi n$, $n = 0, 1$
oraz minimum

$$y(\xi)_{\min} = -\frac{K}{1-K} \quad (56)$$

dla $\xi = \pi$.

Maksimum modułu tej funkcji wynosi

$$|y(\xi)|_{\max} = \frac{K}{1-K} \quad (57)$$

i występuje dla $\xi = \pi$.

Funkcja przyjmuje wartość zerową dla $\cos \xi = -K$, tzn. dla

$$\xi = \arccos(-K). \quad (58)$$

Średnią wartość funkcji $y(\xi)$ można wyznaczyć z zależności

$$y(\xi)_{sr} = \frac{1}{2\Delta\xi} \int_{\xi_0 - \Delta\xi}^{\xi_0 + \Delta\xi} y(\xi) d\xi = \frac{K^2}{2\Delta\xi} \int_{\xi_0 - \Delta\xi}^{\xi_0 + \Delta\xi} \frac{d\xi}{1 + K^2 + 2K \cos \xi} + \frac{K}{2\Delta\xi} \int_{\xi_0 - \Delta\xi}^{\xi_0 + \Delta\xi} \frac{\cos \xi d\xi}{1 + K^2 + 2K \cos \xi}.$$

Ponieważ [1]

$$\int \frac{d\xi}{b + c \cos \xi} = \frac{2}{\sqrt{b^2 - c^2}} \arctg \frac{b - c}{\sqrt{b^2 - c^2}} \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \quad \text{dla } b^2 > c^2,$$

$$\int \frac{\cos \xi d\xi}{b + c \cos \xi} = \frac{\xi}{c} - \frac{b}{c} \int \frac{d\xi}{b + c \cos \xi} \quad \text{dla } c \neq 0,$$

przyjmując $b = 1 + K^2$, $c = 2K$, otrzymuje się

$$\begin{aligned} y(\xi)_{sr} &= \frac{1}{2\Delta\xi} \left(\frac{\xi}{2} - \arctg \frac{1-K}{1+K} \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \right) \Big|_{\xi_0 - \Delta\xi}^{\xi_0 + \Delta\xi} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\Delta\xi} \left[\arctg \left(\frac{1-K}{1+K} \operatorname{tg} \frac{\xi_0 + \Delta\xi}{2} \right) - \arctg \left(\frac{1-K}{1+K} \operatorname{tg} \frac{\xi_0 - \Delta\xi}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (59)$$

Jeśli zakres uśredniania jest nie większy od okresu funkcji $y(\xi)$, maksimum wartości bezwzględnej wyrażenia (59) występuje dla $\xi_0 = \pi$ (por. rys. 3) i wynosi

$$|y(\xi)_{sr}|_{max} = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi x} \left\{ \arctg \left[\frac{1-K}{1+K} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} x \right) \right] - \arctg \left[\frac{1-K}{1+K} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} x \right) \right] \right\} \right|, \quad (60)$$

gdzie $x = \frac{2\Delta\xi}{2\pi}$, $0 \leq x \leq 1$

i określa względny zakres uśredniania odniesiony do okresu funkcji $y(\xi)$. Wyrażenie (60) można przekształcić uwzględniając, że

$$\begin{aligned} \arctg \left[\frac{1-K}{1+K} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} x \right) \right] &= \pi - \arctg \left[\frac{1-K}{1+K} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} x \right] \\ \arctg \left[\frac{1-K}{1+K} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} x \right) \right] &= \arctg \left[\frac{1-K}{1+K} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} x \right]. \end{aligned}$$

Uzyskuje się wówczas

$$|y(\xi)_{sr}|_{max} = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{\pi x} \arctg \left(\frac{1-K}{1+K} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} x \right) \right|. \quad (61)$$

Jeśli zakres uśredniania równy jest okresowi funkcji $y(\xi)$, $x = 1$ i wówczas

$$y(\xi)_{sr} = 0. \quad (62)$$

Dla zakresu uśredniania większego od okresu funkcji $y(\xi)$

$$2\Delta\xi = 2\pi n + \Delta\xi',$$

gdzie n oznacza liczbę całkowitą, natomiast $\Delta\xi' < 2\pi$.

Wówczas

$$y(\xi)_{sr} = \frac{1}{2\Delta\xi} \int_{\xi_0 - \Delta\xi}^{\xi_0 + \Delta\xi} y(\xi) d\xi = \frac{1}{2\Delta\xi} \int_{\xi_0 - \Delta\xi}^{\xi_0 - \Delta\xi + 2\pi n} y(\xi) d\xi + \frac{1}{2\Delta\xi} \int_{\xi_0 - \Delta\xi + 2\pi n}^{\xi_0 + \Delta\xi} y(\xi) d\xi. \quad (63)$$

Pierwsza całka w wyrażeniu (63) równa jest zeru. Wartość bezwzględna drugiej całki osiąga maksimum dla

$$\xi_0 - \Delta\xi + 2\pi n = 0 \quad \text{i} \quad \xi_0 + \Delta\xi = \arccos(-K),$$

lub dla

$$\xi_0 - \Delta\xi + 2\pi n = \arccos(-K) \quad \text{i} \quad \xi_0 + \Delta\xi = \pi.$$

Wynika to z właściwości funkcji $y(\xi)$ (por. rys. 3) oraz z zależności (58) i (62). Przyjmując zatem, że

$$|y(\xi)_{sr}|_{max} = \frac{1}{2\Delta\xi} \int_0^{\arccos(-K)} y(\xi) d\xi \quad (64)$$

oraz uwzględniając, że

$$x = \frac{2\Delta\xi}{2\pi}, \quad x > 1,$$

otrzymuje się z zależności (64)

$$\begin{aligned} |y(\xi)_{sr}|_{max} &= \frac{1}{2\pi x} \left[\frac{\xi}{2} - \arctg \left(\frac{1-K}{1+K} \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \right) \right]_0^{\arccos(-K)} = \\ &= \frac{1}{2\pi x} \left[\frac{\xi}{2} - \arctg \left(\frac{1-K}{1+K} \sqrt{\frac{1-\cos \xi}{1+\cos \xi}} \right) \right]_0^{\arccos(-K)} = \\ &= \frac{1}{2\pi x} \left[\frac{1}{2} \arccos(-K) - \arctg \sqrt{\frac{1-K}{1+K}} \right]. \end{aligned} \quad (65)$$

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. I. N. Bronsztejn, K. A. Siemiendiajew, Poradnik encyklopedyczny — matematyka, Warszawa 1959, PWN.

A. LIZOŃ

THE INFLUENCE OF THE GROUND REFLECTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES ON
THE ACCURACY OF VELOCITY MEASUREMENT USING DOPPLER EFFECT

Summary

The paper discusses the influence of the ground reflection of electromagnetic waves on the accuracy of velocity measurement using Doppler effect. The ground reflection is considered on the basis of image theory. The phenomena at single and double direction transmission of electromagnetic waves between the examined object and the reference point were analysed. As a result of this analysis, formulas were obtained, which determine instantaneous frequency deviation of received resultant signal from the frequency of the received signal without the reflected wave.

Maximal errors of Doppler frequency measurement as a function of the measurement interval of this frequency were determined. It has been shown that in some cases, especially with small Doppler frequencies, relative error of measurement may amount even to 1%, but is usually considerably smaller.

A. LIZOŃ

EINFLUSS DER REFLEXION ELEKTROMAGNETISCHER WELLEN VON DER ERDFLÄCHE
AUF DIE GENAUIGKEIT DER GESCHWINDIGKEITSBEMESSUNG MITTELS DOPPLERISCHEN
METHODE

Zusammenfassung

In diesem Aufsatz wird der Einfluss der Reflexion elektromagnetischer Wellen von der Erdoberfläche auf die Genauigkeit der Geschwindigkeitsbemessung mittels Doppler-Effekt behandelt. Der Analyse der bei einfach bzw. doppelt gerichteten Transmission von elektromagnetischen Wellen zwischen dem untersuchten Objekt und dem Bezugspunkt auftretenden Erscheinungen wurde der Spiegelreflex zu Grunde gelegt. In beiden Fällen wurden Beziehungen festgehalten, die augenblickliche Frequenzänderungen des resultierenden Signals im Vergleich zur Frequenz des ohne Auftreten der Reflexionswelle erhaltenen Signals bezeichnen. Es wurde auch der Grenzfehler dopplerischer Frequenzbemessung in Abhängigkeit von der Messzeit dieser Frequenz berechnet. Auch wurden Beispiele genannt, die darauf hindeuten, dass bei geringen dopplerischen Frequenzen relativer Messfehler sogar bis 1% reichen kann, gewöhnlich ist er jedoch bedeutend kleiner.

A. ЛИЗОНЬ

ВЛИЯНИЕ ОТРАЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ОТ ЗЕМЛИ
НА ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ СКОРОСТИ ПО МЕТОДУ ИСПОЛЗУЮЩЕМУ
ЭФФЕКТ ДОПPLЕРА

Резюме

В работе изложено влияние отражения электромагнитных волн от поверхности земли на точность измерения скорости, использующего эффект Доплера. При этом предположено зеркальное отражение волн от земли. Проанализированы явления, выступающие при передачи электромаг-

нитной волны в одном и двух направлениях между исследованным объектом и точкой отнесения. В результате проведенного анализа получены зависимости, определяющие мгновенное отклонение частоты результирующего приёмного сигнала относительно частоты приёмного сигнала без отраженной волны. Вычислены тоже макисмальные погрешности измерения доплеровской частоты в зависимости от интервала времени измерения этой частоты. Доказано, что в некоторых случаях, особенно при малых доплеровских частотах, относительная погрешность может быть даже 1%, однако обычно она значительно меньшая.

TREŚĆ

A. Ligaszewski: Analiza dokładności wskazań mierników dobroci.	555
M. Rzepecka, S. Stuchły: Układy mikrofalowe do pomiaru grubości blachy	575
Z. Kowalski: Metody obliczania parametrów strukturalnych modeli ekonometrycznych systemów elektroenergetycznych	587
M. Kozłowski: Wpływ osiowej nierównomierności w rozmieszczeniu strat na nagrzewanie się uzwojeń transformatorów przy zwarciu ruchowym.	611
E. Zawalich: Wpływ nasycenia na maksymalny moment silnika asynchronicznego w stanie hamowania dynamicznego	623
M. Białko, Z. Wierzbicki: Wyznaczanie koncentracji stanów powierzchniowych na powierzchni granicznej półprzewodnik-dielektryk metodą pomiaru pojemności struktury M-D-P z uwzględnieniem pułapek w warstwie półprzewodnika	633
Z. Celiński: Parametry elektryczne generatora magneto hydrodynamicznego typu Halla z własnościami gazu nierównomiernymi w kierunku $\vec{w} \times \vec{B}$	651
A. Zaklikiewicz: Przegląd stanu badań szumów $1/f$ w półprzewodnikach i diodach półprzewodnikowych	673
J. J. Włodek: Metoda wyznaczania tolerancji pewnych impedancji dwójników	691
M. Rydel: Falowe grafy przepływowe układów torów i czwórników elektrycznych	699
A. Lizon: Wpływ odbicia fal elektromagnetycznych od powierzchni ziemi na dokładność pomiaru prędkości metodą dopplerowską	719

CONTENTS — TABLE DES MATIÈRES — INHALT

A. Ligaszewski: Analysis of the Accuracy of Circuit-Magnification Meter Indications	573
L'analyse de la précision des Indications des Q -metres	574
Analyse der Messgenauigkeit für die Q -Meter	574
M. Rzepecka, S. Stuchły: Microwave Circuits for Metal Sheet Thickness Measurement	586
Z. Kowalski: Methods of Calculating Structural Econometric Power System Models	608
Errechnungsmethoden für Parameter von ekonometrischen Strukturmodellen elektroenergetischer Systeme	608
M. Kozłowski: Influence of Axial Nonuniformity in Losses' Collocation on Heating of Windings of Transformers at Service Short Circuit	621
Einfluss ungleichmässiger Verteilung der Verluste in axialer Richtung auf die Erwärmung der Transformatorwicklungen beim Kurzschluss	621
E. Zawalich: The Influence of Magnetic Saturation on the Maximum Torque of Asynchronous Motors at the Dynamic Braking Condition	637
Influence de la saturation magnétique sur le couple maximal de freinage d'un moteur asynchrone en freinage par injection de courant continu	637
Der Einfluss der magnetischen Sättigung auf das Bremskippmoment bei der Gleichstrombremsung des Asynchronmotors	638
M. Białko, Z. Wierzbicki: Determination of Surface State Concentration at the Insulator-Semiconductor Interface Considering Influence of Traps, Using Mis Capacitance Measuring Method.	648
Détermination de la concentration des états superficiels sur la surface de jonction semiconducteur-diélectrique par la méthode de mesurage de la capacité de la structure M-D-S en tenant compte des pièges dans la couche du semiconducteur	649

Bestimmung der Konzentration von Oberflächenzuständen auf Grenzfläche Halbleiter-Dielektrik unter Anwendung der M-D-H Kapazitätsmethode und Berücksichtigung von Fallen in der Halbleiterschichte	649
Z. Celiński: Electrical Parameters in the Hall-Type Magnetohydrodynamic Generator with Gas Property Nonuniformities in the $\vec{w} \times \vec{B}$ Direction	670
Les paramètres électriques du générateur MHD type Hall avec les propriétés du gaz dans le sens $\vec{w} \times \vec{B}$	671
Elektrische Parameter des MHD-Hall-Generators mit inhomogenen gasdynamischen Parametern in Richtung des induzierten, elektrischen Feldes	671
A. Zaklikiewicz: Review of Investigations on $1/f$ Noise in Semiconductors and Semiconductor Diodes	690
Übersicht über den Untersuchungszustand von $1/f$ -Geräuschen in Halbleitern und Halbleiterdioden	690
J. J. Włodek: Method of Determining Tolerance of Certain Impedances of Two-Terminal Networks	697
Toleranzbestimmungsmethode mancher Zweipolimpedanz	697
M. Rydel: Wave Signal Flow Graphs of Linear Electrical Systems	717
Wellenströmungsdiagramm für Leitungen und elektrische Vierpole	717
A. Lizon: The Influence of the Ground Reflection of Electromagnetic Waves on the Accuracy of Velocity Measurement Using Doppler Effect	735
Einfluss der Reflexion elektromagnetischer Wellen von der Erdoberfläche auf die Genauigkeit der Geschwindigkeitsbemessung mittels dopplerischen Methode	735

СОДЕРЖАНИЕ

A. Лигашевски: Анализ точности показаний измерителей добротности	574
М. Жепецка, С. Стухли: Микроволновые схемы измерения толщины листового металла	586
З. Ковальски: Методы расчёта параметров структурных моделей эконометрических электроэнергетических систем	609
М. Козловски: Влияние осевой неравномерности в распределении потерь на нагрев обмоток трансформатора при коротком замыкании	621
Э. Завалих: Влияние насыщения на максимальный момент асинхронного двигателя в режиме динамического торможения	638
М. Бялко, З. Вежбицки: Определение концентрации поверхностных состояний на поверхности раздела изолятор-полупроводник методом измерения ёмкости системы М-Д-П с учётом ловушек в плёнке полупроводника	649
З. Целиньски: Электрические параметры магнитогидродинамического генератора типа Холла с неравномерными параметрами газа в направлении $\vec{w} \times \vec{B}$	671
A. Закликевич: Обзор состояния исследований шумов $1/f$ в полупроводниках и полупроводниковых диодах	690
Е. Влодек: Метод определения допусков некоторых импедансов двухполюсников	
М. Рыдель: Волновые направленные графы систем электрических линий и четырёхполюсников	717
A. Лизонь: Влияние отражения электромагнитных волн от земли на точность измерения скорости по методу использующему эффект Доплера	735

Archiwum Automatyki I Telemechaniki

INSTYTUT AUTOMATYKI PAN

Kwartalnik. Prenumerata roczna 112 zł. Redakcja: Warszawa, ul. Krajowej Rady Narodowej 55, pok. 101, tel. 20-62-21, w. 150 lub 131.

*

Ogłasza prace oryginalne z zakresu teorii automatycznej regulacji, ogólnej teorii układów sterowania oraz elementów i układów automatyki i telemechaniki; podaje również bieżące wiadomości naukowo-organizacyjne i bibliograficzne.

Czasopismo przeznaczone dla pracowników naukowych, studentów oraz inżynierów-praktyków. Streszczenia artykułów oryginalnych w językach rosyjskim i angielskim.

