

KOMITET ELEKTROTECHNIKI
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XVII • ZESZYT 1

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1971

TREŚĆ

Z. Kowalski: Metody weryfikacji hipotezy o normalnym rozkładzie elementów o małej liczności	3
T. Missala: Uogólniona teoria selsyna — Teoria selsyna transformatorowego i analiza jego błędów wynikających z niedokładności obróbki	23
J. S. Zieliński: Badanie przepięć wewnętrznych w sieci elektroenergetycznej 30 kV za pomocą analizatora stanów nieustalonych	75
Z. Kowalski: Zasady konstruowania ekonometrycznych modeli tendencji rozwojowych w zastosowaniu do systemów elektroenergetycznych	91
Z. N. Celiński: Parametry elektryczne generatora MHD typu Halla z własnościami gazu nierównomiernymi w kierunku pola magnetycznego	109
W. Rosiński: Implantacja jonów w materiałach półprzewodnikowych	125
M. Białko, Z. Wierzbicki: Ładunek stanów powierzchniowych warstw selenku kadmu	151
W. Gruszczyński, G. Mionskowski, H. Wierzbą: Metoda optymalizacji współczynnika szumu tranzystorowego wzmacniacza szerokopasmowego	163
M. Białko, J. Roszkiewicz: Metody syntezy układów RC o stałych rozłożonych — Część I — Metody syntezy układów pasywnych	171
M. Szalek: Aktualne zastosowania teorii złączy falowodów cylindrycznych	193

CONTENTS — TABLE DES MATIÈRES — INHALT

Z. Kowalski: Methods of Hypothesis Testing with Normal Distribution of Small Size Set Methoden für Hypothesenbestätigung über normale Zerlegung von Elementen geringen Umfangs	21
T. Missala: New Generalized Selsyns Theory — Theory of Transformer Selsyn and Analysis of Inaccuracy Causing by Improper Mechanical Works La théorie généralisée du selsyn — La théorie du selsyn transformateur et l'analyse de ses fautes résultant de l'inexactitude du traitement Verallgemeinerte Selsyn-Theorie — Theorie und Analyse der durch Bearbeitungsungenauigkeiten entstandenen Fehler des Transformatorselsyns	71
J. S. Zieliński: Investigation of Internal Overvoltages in Power Network of 30 kV with Application of the Transient Network Analyser Untersuchung innerer Überspannung des 30-kV elektroenergetischen Netzes mittels eines Analysators für undefinierte Zustände	89
Z. Kowalski: Principles of Building-up Econometric Trends for Power Systems Grundsätze für Konstruierung von ökonomischen Methoden für Entwicklungstendenzen hinsichtlich elektroenergetischer Systeme	106
Z. N. Celiński: Electrical Parameters in the Hall-Type Magnetohydrodynamic Generator with Gas Property Nonuniformities in the Direction of the Magnetic Field Les paramètres électriques du générateur MHD type Hall avec les propriétés du gaz inégaux dans le sens du champ magnétique Elektrische Parameter des MHD-Hall-Generators mit inhomogenen gasdynamischen Parametern in Richtung des Magnetfeldes	107
W. Rosiński: Ion Implantation in Semiconductor Materials Jonenimplantation in Halbleitermaterialien	109

KOMITET ELEKTROTECHNIKI
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

24

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

KWARTALNIK

SPIS TREŚCI DO TOMU XVII — 1971

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA

SPIS TREŚCI DO TOMU XVII

M. Białko: Zastosowanie nulatorów i noratorów do tworzenia równoważnych liniowych układów aktywnych	399
M. Białko, J. Roszkiewicz: Metody syntezy układów $\overline{RC}$ o stałych rozłożonych. Część I — Metody syntezy układów pasywnych	171
M. Białko, J. Roszkiewicz: Metody syntezy układów $\overline{RC}$ o stałych rozłożonych. Część II — Metody syntezy układów aktywnych	599
M. Białko, W. Sieńko: Synteza liniowych układów scalonych metodami przestrzeni stanów. Część I: Wiadomości wstępne i synteza funkcji przenoszenia	235
M. Białko, Z. Wierzbicki: Ładunek stanów powierzchniowych warstw selenku kadmu	151
P. Bublewicz, J. Kochman: Wybrane zagadnienia teorii traktów liniowych	365
Z. N. Celiński: Parametry elektryczne generatora MHD typu Halla z właściwościami gazu nierównomiernymi w kierunku pola magnetycznego	109
Ł. Gronau: Zarys problematyki przesuwu taśmy magnetycznej rejestratora cyfrowego	691
W. Gruszczyński, G. Mionskowski, H. Wierzba: Metoda optymalizacji współczynnika szumu tranzystorowego wzmacniacza szerokopasmowego	163
Z. Jasicki, Z. Kierzkowski, J. Gerwel: Problemy równowagi w rozbudowującym się układzie elektroenergetycznym	617
J. Komisarczuk: Metoda linii ćwierćfalowej w zastosowaniu do pomiaru elementów przelotowych w szerokim paśmie częstotliwości	281
Z. Kowalski: Metody weryfikacji hipotezy o normalnym rozkładzie elementów o małej liczności	3
Z. Kowalski: Zasady konstruowania ekonometrycznych modeli tendencji rozwojowych w zastosowaniu do systemów elektroenergetycznych	91
Z. Kowalski: Zasady konstruowania strukturalnych modeli ekonometrycznych systemów elektroenergetycznych na przykładzie fragmentu modelu systemu polskiego	447
M. Krawczyk: Układ automatycznej regulacji częstotliwości klistronu	541
A. Kusy: Struktura i własności rezystorów grubowarstwowych na bazie palladu i srebra	491
H. Lachowicz: Zjawiska magnetoelastyczne w cienkowarstwowych elementach pamięciowych	631
A. Lizon: Bezkontaktowe pomiary drgań	441
J. Łysakowski: Wpływ źródła przełączającego na działanie tranzystorowego przełącznika czasowego z obwodem RC	269
T. Missala: Uogólniona teoria selsyna — Teoria selsyna transformatorowego i analiza jego błędów wynikająca z niedokładności obróbki	23
P. J. Nowacki, M. Kędzierski: Nowy układ mostkowy do pomiaru uchybu kąтового watomierzy elektrodynamicznych	215
W. Rośniński: Implantacja jonów w materiałach półprzewodnikowych	125
M. Rydel: O pewnych statystycznych charakterystykach błędów transmisji binarnej	563
T. Schwartz: Wyznaczanie charakterystyk elektrycznych przewodów grzejnych pracujących w przedmuchu	475
W. Sieńko, M. Białko: Synteza liniowych układów scalonych metodami przestrzeni stanów. Część 2: Synteza admitancyjna	253
M. Skowrońska: Optymalizacja rozwiązań filtra elektrycznego w oparciu o teorię grafów i maszynową syntezę układów	311
W. J. Stepowicz: Właściwości stałoprądowe struktury czterowarstwowej o równomiernym rozkładzie koncentracji domieszek w poszczególnych obszarach	227

M. Szałek: Aktualne zastosowania teorii złączy falowodów cylindrycznych	193
S. Szpor: Prąd piorunowy i ochrona szybów	591
R. Vogel: Własności sprzęgaczy kierunkowych stosowanych w mikrofalowych układach scalonych	517
J. Zabrodzki: Charakterystyki przejściowe układów logicznych z potencjałowym kodowaniem sygnałów	291
K. Zakrzewski: Wpływ histerezy magnetycznej na podział i rozkład strat mocy w blachach ferromagnetycznych	431
A. Zdobych, M. Majewski: Przegląd metod analizy zjawisk zachodzących w diodach lawinowo-przelotowych	655
J. J. Zieliński: Uwagi o różnicach między ochroną odgromową szybów i budowli naziemnych	592
J. S. Zieliński: Badanie przepięć wewnętrznych w sieci elektroenergetycznej 30 kV za pomocą analizatora stanów nieustalonych	75

CONTENTS

M. Białko: Application of Nullators and Norators for Equivalent Linear Active Network Generation	399
M. Białko, J. Roszkiewicz: Methods of Distributed RC Network Synthesis. Part I — Methods of Passive Network Synthesis	171
M. Białko, J. Roszkiewicz: Methods of Distributed RC Network Synthesis. Part II — Methods of Active Network Synthesis	599
M. Białko, W. Sieńko: Application of State Space Methods to Synthesis of Linear Integrated Networks. Part I: Introductory Information and Transfer Function Synthesis	235
M. Białko, Z. Wierzbicki: Surface States Charge of CdSe Films	151
P. Bublewicz, J. Kochman: Some Problems of Multichannel Systems	365
Z. N. Celiński: Electrical Parameters in the Hall-Type Magnetohydrodynamic Generator with Gas Property Nonuniformities in the Direction of the Magnetic Field	109
Ł. Gronau: An Outline of Tape Transport Problems in Digital Recorder	691
W. Gruszczyński, G. Mionskowski, H. Wierzb: Optimization Method for the Noise Factor of Wideband Transistor Amplifier	163
Z. Jasicki, Z. Kierzkowski, J. Gerwel: Problems of Stability in a Developing Power System	617
J. Komisarczuk: Quarter-Wave Method Used for Measurements of Two-Port Elements in a Wide Band	281
Z. Kowalski: Methods of Hypothesis Testing with Normal Distribution of Small Size Set	3
Z. Kowalski: Principles of Building-up Econometric Trends for Power Systems	91
Z. Kowalski: Principles of Constructing Structural Econometric Models of Power Systems on the Basis of Part of the Polish System	447
M. Krawczyk: A Circuit of Automatic Frequency Control of Microwave Oscillators with Microwave Discriminator	541
A. Kusy: The Structure and Properties of Thick Film Resistors on the Basis of Palladium and Silver	491
H. Lachowicz: Magnetoelastic Effects in Thin Film Memory Elements	631
A. Lizon: Non-contacting Vibration Measurements	411
J. Łyskowski: Influence of Switching Generator on Work of Transistor Time Relay with RC Circuits	269
T. Missala: New Generalized Selsyns Theory — Theory of Transformer Selsyn and Analysis of Inaccuracy Causing by Improper Mechanical Works	23

P. J. Nowacki, M. Kędzierski: New Bridge Circuit to Measure Angle Error in Electrodynamic Wattmeters	215
W. Rosiński: Ion Implantation in Semiconductor Materials	125
M. Rydel: On Some Statistical Characteristics of Errors in Binary Transmission	563
T. Schwartz: Determination of Characteristics of Electric Resistance Wires Used in Draught	475
W. Sieńko, M. Białko: Application of State Space Methods to Synthesis of Linear Integrated Networks. Part 2: Admittance Synthesis	253
M. Skowrońska: Optimization of Solutions of Wave Filters on the Basis of Graph Theory and of Computer System Synthesis	311
W. J. Stepowicz: DC Properties of a Three-Junction Semiconductor Structure	227
M. Szałek: Current Applications of the Theory of Cylindrical Waveguide Junctions	193
R. Vogel: Properties of Directional Couplers Employed in Microwave Integrated Circuits	517
J. Zabrodzki: Input-Output Characteristics of Logical Circuits Using the Electrical Potentials for the Coding of Signals	291
K. Zakrzewski: Influence of Hysteresis on Power in Ferromagnetic Steels	431
A. Zdobych, M. Majewski: Survey of Methods of Analysis of Phenomena in IMPATT Diodes	655
J. S. Zieliński: Investigation of Internal Overvoltages in Power Network of 30 kV with Application of the Transient Network Analyser	75

TABLE DES MATIÈRES

M. Białko, J. Roszkiewicz: Les méthodes de synthèse des circuits RC à constantes distribuées	171
M. Białko, W. Sieńko: Synthèse des circuits linéaires intégrés par des méthodes d'espace d'états. Partie 1: Introduction et synthèse des fonctions de transfert	235
M. Białko, Z. Wierzbicki: Charge des états superficiels sur la surface d'une couche de $SeCd$	151
P. Bublewicz, J. Kochman: Certaines questions de la théorie des voies de transmission	365
Z. N. Celiński: Les paramètres électriques du générateur MHD type Hall avec les propriétés du gaz inégaux dans le sens du champ magnétique	109
Ł. Gronau: Esquisse des problèmes du transport de la bande magnétique de l'enregistreur digital	691
Z. Jasicki, Z. Kierzkowski, J. Gerwel: Problèmes de stabilité dans un système électrique se développant	617
J. Komisarczuk: La méthode de la ligne longueur $\lambda/4$ appliquée aux mesures des éléments avec deux entrées dans la large bande de fréquence	281
M. Krawczyk: Le circuit pour le contrôle automatique de fréquence des oscillateurs microondes avec le discriminateur microonde	541
A. Kusy: Structure et propriétés des résistors à grosse couche à base de palladium et d'argent	491
T. Missala: La théorie généralisée du selsyn — La théorie du selsyn transformateur et l'analyse de ses fautes résultant de l'inexactitude du traitement	23
P. J. Nowacki, M. Kędzierski: Le nouveau circuit à pont pour mesurer l'erreur de l'angle des wattmètres électrodynamiques	225
T. Schwartz: Manière de désigner les caractéristiques des conducteurs électriques chauffants refroidis par balayage	475
W. Sieńko, M. Białko: Synthèse des circuits linéaires intégrés par des méthodes d'espace d'états. Partie 2: Synthèse par admittances	253
M. Szałek: Applications actuelles de la théorie des jonctions des guides d'ondes cylindriques	193
R. Vogel: Les propriétés des couplers directifs appliqués dans les circuits intégrés à microondes	517

J. Zabrodzki: Caractéristique de transfert des circuits logiques	291
Z. Zakrzewski: Influence d'hystérésis sur la distribution des pertes dans les tôles ferro-magnétiques	431

INHALT

M. Białko: Anwendung von Nulatoren und Noratoren zur Bildung gleichwertiger aktiver Anordnungen	399
M. Białko, J. Roszkiewicz: Syntheseverfahren für RC-Schaltungen mit verteilten Parametern — Teil I — Synthesenverfahren passiver RC-Schaltungen	171
M. Białko, J. Roszkiewicz: Synthesemethoden von RC-Anordnungen bei zerlegten Konstanten. Teil II — Synthesemethode von aktiven Anordnungen	599
M. Białko, W. Sieńko: Zustand-Variable-Methode der Synthese von integrierten Schaltungen Teil 1: Einführung in die Problematik und Übergangsfunktionsynthese	235
M. Białko, Z. Wierzbicki: Ladung der Oberflächenzustände auf CdSe-Schichte	151
P. Bublewicz, J. Kochman: Gewählte Probleme der Theorie der Übergangstrakte	365
Z. N. Celiński: Elektrische Parameter des MHD-Hall-Generators mit inhomogenen gasdynamischen Parametern in Richtung des Magnetfeldes	109
Ł. Gronau: Beitrag zur Bandlaufproblematik eines digitalen Magnetbandgerätes	691
W. Gruszczyński, G. Mionskowski, H. Wierzba: Optimierungsmethode des Rauschfaktors eines Transistorbreitbandverstärkers	163
Z. Jasicki, Z. Kierzkowski, J. Gerwel: Gleichgewichtsprobleme in dem sich ausbauenden elektroenergetischen System	617
J. Komisarczuk: Methode der Viertelwellenlinie in Anwendung für Bemessungen von Kapazitätselementen in einem breiten Frequenzstreifen	281
Z. Kowalski: Methoden für Hypothesenbestätigung über normale Zerlegung von Elementen geringen Umfangs	3
Z. Kowalski: Grundsätze für Konstruierung von ökonomischen Methoden für Entwicklungstendenzen hinsichtlich elektroenergetischer Systeme	91
Z. Kowalski: Konstruktionsprinzipien für strukturelle ökonomische Modelle von elektroenergetischen Systemen anhang eines Fragments polnischen Systems	447
M. Krawczyk: Schaltung für automatische Frequenzregieung von Mikrowellenoszillatoren mit Mikrowellendiskriminator	541
A. Kusy: Struktur und Eigenschaften der Dickschichtwiderstände auf Palladium- und Silberbasis	491
H. Lachowicz: Magneto-elektrische Erscheinungen in dünn-schichtigen Gedächtniselementen	631
A. Lizoń: Kontaktlose Schwingungsbemessungen	411
J. Łyskanowski: Einfluss der Umschaltungsquelle auf die Arbeit eines Transistorzeitrelais mit RC-Glied	269
T. Missala: Verallgemeinerte Selsyn-Theorie und Analyse der durch Bearbeitungsungenauigkeiten entstandenen Fehler des Transformatorenselsyns	23
P. J. Nowacki, M. Kędzierski: Neue Brückenschaltung zur Bemessung des Fehlwinkels eines elektrodynamischen Wattmeters	215
W. Rośniński: Ionenimplantation in Halbleitermaterialien	125
M. Rydel: Beitrag zu einigen statistischen charakteristischen Fehlern binärer Transmission	563
T. Schwartz: Bestimmung von Charakteristiken der im Durchlassen arbeitenden elektrischen Heizleiter	475
W. Sieńko, M. Białko: Zustand-Variable-Methode der Synthese von integrierten Schaltungen. Teil 2; Admittanz-Synthese	253
M. Skowrońska: Optimalisierung der Gestaltung eines Elektrofilters in Anlehnung an die Graphentheorie sowie Maschinensynthese von Anordnungen	311
W. J. Stepowicz: Eigenschaften vierschichtiger Gleichstromstrukturen mit gleichmässiger Verteilung in einzelnen Zonen der Beimischungskonzentration	227

M. Szałek: Aktuelle Anwendungsweisen der Theorie für Zylinderwellenleiterverbindungen	193
R. Vogel: Eigenschaften der in verkoppelten Mikrowellenanordnungen angewandten Richtkopplerleitungen	517
J. Zabrodzki: Übergangscharakteristiken logischer Anordnungen mit Signalpotentialkodieren	291
K. Zakrzewski: Einfluss der Hysterese auf die Verteilung von Leitungsverlusten in den ferromagnetischen Blechen	431
A. Zdobych, M. Majewski: Übersicht über Analysemethoden der in Lavinendurchlaufdioden auftretenden Erscheinungen	655
J. S. Zieliński: Untersuchung innerer Überspannung des 30-kV elektroenergetischen Netzes mittels eines Analysators für undefinierte Zustände	75

СОДЕРЖАНИЕ

П. Бублевич, Я. Кохман: Избранные вопросы теории трактов дальней связи	365
М. Бялко: Применение нуляторов и нораторов для составления эквивалентных линейных активных схем	399
М. Бялко, З. Вежбицки: Заряд поверхностных состояний плёнки	151
М. Бялко, Я. Рошкевич: Методы синтеза схем с распределенными параметрами. Часть I. Методы синтеза пассивных схем	171
М. Бялко, Я. Рошкевич: Методы синтеза схем с распределенными параметрами. Часть II. Методы синтеза активных схем	599
М. Бялко, В. Сенько: Синтез линейных интегральных схем методом пространства состояний. Часть I. Введение в синтез функции передачи	235
Р. Вогель: Свойства направленных ответвителей, применяемых в микроволновых интегральных схемах	517
Л. Гронау: Общая характеристика проблематики протягивания магнитной ленты в устройстве для цифровой записи	691
В. Груциньски, Г. Мёнсковски, Х. Вежба: Метод оптимизации коэффициента шума транзисторного, широкополосного усилителя	163
Я. Жабродзки: Передаточные характеристики логических схем с потенциальным кодированием сигналов	291
К. Закшевски: Влияние гистерезиса на распределение потерь мощности в листовом ферромагнетике	431
А. Здобых, М. Маевски: Обзор метод анализа явлений, возникающих в лавинно-пролётных диодах	655
Й. С. Зелиньски: Исследование внутренних перенапряжений в электроэнергетической сети 30 кв. с применением анализатора переходных процессов	75
З. Ковальски: Методы построения эконометрических моделей динамики и их применение в электроэнергетических системах	91
З. Ковальски: Методы проверки гипотезы о нормальном распределении элементов составляющих малый объем	3
З. Ковальски: Основы построения структуральных эконометрических моделей электроэнергетических систем и их применение для польской системы	447
Я. Комисарчук: Применение метода четвертьволновой линии к измерениям четырёхполосников в широком диапазоне частот	281
М. Кравчик: Схема автоматической подстройки частоты клистронов с СВЧ дискриминатором	541
А. Кусы: Структура и свойства толстопленочных резисторов на основе палладия и серебра	491
Г. Ляхович: Магнитоупругие эффекты в тонкопленочных запоминающих элементах	411
А. Лизонь: Бесконтактные измерения колебаний	411

Я. Лыскановски: Влияние источника переключения на действие транзисторного реле времени с контуром $R\bar{C}$ (R, C)	269
Т. Миссала: Обобщенная теория сельстнов, а также теория сельстна-трансформатора и анализ его погрешностей, вызванных неточностью обработки	23
П. Я. Новацки, М. Кендзерски: Новая мостовая схема для измерения угловой погрешности измерения электродинамических ваттметров	215
В. Росиньски: Имплантация ионов в полупроводниковые материалы	125
М. Рыдель: Некоторые статистические характеристики ошибок в бинарных каналах	563
В. Сенько, М. Бялко: Синтез линейных интегральных схем методом пространства состояний. Часть 2. Синтез адмитации	253
М. Сковроньска: Оптимализация решения электрического фильтра на основании теории графов и машинного синтеза схем	311
В. Е. Стэпович: Свойства трёхпереходной структуры полупроводников для постоянного тока	227
З. Целиньски: Электрические параметры магнетогидродинамического генератора типа Холла с неравномерными параметрами газа в направлении магнитного поля	109
М. Шалек: Актуальные применения теории соединений цилиндрических волноводов	193
Т. Шварц: Определение характеристик электрических нагревательных проволок, работающих в протоке	475
З. Ясицки, З. Кежковски, Й. Гервель: Проблемы устойчивости развивающейся энергосистемы	617

KOMITET ELEKTROTECHNIKI
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XVII·ZESZYT 1

KWARTALNIK

PANSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1971

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor Naczelny

PROF. DR WITOLD NOWICKI

Członkowie

PROF. TADEUSZ CHOLEWICKI, PROF. EUGENIUSZ JEZERSKI,
PROF. DR WITOLD ROSIŃSKI, PROF. DR STANISŁAW RYŻKO

Sekretarz

JANINA MATHEISEL

ADRES REDAKCJI

*Warszawa, Politechnika, Plac Jedności Robotniczej 1
Instytut Teleelektroniki, Gmach Elektroniki
pokój 472, tel. 21-007-232 oraz 25-09-10*

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

Warszawa, Miodowa 10

Nakład 660 (530+130)	Oddano do składania 31. X. 1970 r.
Ark. wyd. 18,0 ark. druk. 13,25+1 wkł.	Podpisano do druku w lutym 1971
Papier druk. sat. kl. III, 80 g, 70×100	Druk ukończono w marcu 1971
Zamówienie nr 1832/70	Cena zł 40.— U-104

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

Metody weryfikacji hipotezy o normalnym rozkładzie elementów o małej liczności

ZBIGNIEW KOWALSKI (ŁÓDŹ)

Katedra Elektroenergetyki Politechniki Łódzkiej

Otrzymano 24.1.1970

W pracy przedstawiono praktyczny sposób weryfikacji hipotezy o normalnym rozkładzie zbioru elementów o niewielkiej liczbie, stanowiących tzw. małą próbkę. Sposób ten polega na równoczesnym zastosowaniu dwóch testów statystycznych, opartych na różnych sprawdzianach, a mianowicie testu Massey i testu Hellwiga.

Na podstawie prac Massey wyznaczono krytyczne wartości sprawdzianu testu tego autora, jako propozycje do praktycznego zastosowania w zagadnieniach elektrotechniki stosowanej. Zaproponowano również praktyczny sposób korzystania z testu Hellwiga.

Opisane sposoby weryfikacji hipotezy o normalnym rozkładzie zilustrowano przykładami obliczeniowymi. Ponadto podano ilościowe rezultaty badań obu wymienionymi testami w konkretnych praktycznych przypadkach.

W załączniku do pracy przedstawiono problem hipotez statystycznych i ich weryfikacji ze szczególnym uwzględnieniem praktycznych zagadnień elektrotechnicznych.

1. WSTĘP

W różnych dziedzinach elektrotechniki i elektroenergetyki coraz częściej spotykamy się z zagadnieniami charakteryzowania zbioru elementów (liczb) rozkładem prawdopodobieństwa. Zbiorami takimi mogą być błędy pomiarów, odchylenia (rozrzuty) przy opracowywaniu rezultatów pomiarów wielkości elektrycznych, jak np. spadków napięcia w sieciach itp. W celu zbadania danego zbioru elementów i porównania go z innym podobnym zbiorem wyznacza się szereg wielkości (wskaźników, statystyk) charakteryzujących ten zbiór, jak np. wartości średnie, odchylenia standardowe, wartości maksymalne itp. oraz rozkład prawdopodobieństwa.

Często zakłada się, że zbiór taki charakteryzuje się rozkładem normalnym. Rozkład normalny jest wygodny w zastosowaniach, a wiele twierdzeń z dziedziny opracowywania wyników badań eksperymentalnych opiera się na założeniu, że rozkład badanych elementów jest normalny.

W literaturze elektrotechnicznej spotykamy coraz częściej rozkłady elementów; podaje się je zwykle na rysunkach. Z wykreślonego przedstawienia rozkładu ocenia się często intuicyjnie typ rozkładu. Dotyczy to zwłaszcza przypadków, gdy liczba elementów zbioru jest mała. Wydaje się, że nie rozpowszechnione są dostatecznie w elektrotechnice metody ocen rozkładów i porównania ich ze znanymi rozkładami teoretycznymi, stosowane w sta-

tystyce i w teorii prawdopodobieństwa. Z drugiej strony metody te należy z dużą ostrożnością stosować w praktyce technicznej, uwzględniającej konkretne warunki.

W pracy niniejszej ograniczymy się do rozpatrzenia następującego problemu praktycznego. Dany jest zbiór badanych elementów stanowiących tzw. małą próbkę. Należy ocenić, czy rozkład elementów tego zbioru można uznać za w przybliżeniu normalny, inaczej: należy zweryfikować hipotezę, że rozkład badanych elementów jest w przybliżeniu rozkładem normalnym.

W statystyce od dość dawna znane są testy statystyczne do sprawdzania (weryfikacji) hipotezy H_0 o normalnym rozkładzie elementów, lecz w przypadku tzw. licznej próbki, tj. zawierającej więcej od na ogół $n = 20 \div 30$ elementów. Według np. [6] za liczną próbkę uważa się próbkę o liczbie elementów większej od 30.

Według [5] do sprawdzania hipotezy o normalnym rozkładzie zbioru elementów w przypadku licznej próbki można stosować następujące testy: test χ^2 , test λ Kołmogorowa-Smirnowa oraz test serii wraz z jego licznymi odmianami, jak test Walda-Wolfowitza i test Manna-Whitneya.

W praktyce elektrotechnicznej spotykamy często przypadki, gdy liczba elementów badanego zbioru $n < 30$. W oparciu o przestudiowaną literaturę w przypadku zbioru o małej liczbie elementów do weryfikacji hipotezy o normalnym rozkładzie odchyłeń mogą być wykorzystane w zasadzie dwa testy statystyczne, a mianowicie test Massey i test proponowany w 1965 r. przez prof. Z. Hellwiga.

Celem tej pracy jest przede wszystkim próba przedstawienia praktycznego sposobu stosowania testu Massey i testu Hellwiga oraz podanie wyników weryfikacji hipotezy o normalnym rozkładzie za pomocą obu tych testów w przypadku zbioru o małej liczności elementów.

Na tle tego zadania wydawało się celowe omówienie problemu hipotez statystycznych i ich weryfikacji ze szczególnym uwzględnieniem praktycznych aspektów stosowania testów statystycznych jako rzadko używanych metod (narzędzi) w bliżej autorowi znanych zagadnieniach elektrotechnicznych i elektroenergetycznych (załącznik).

Przedmiotem naszych rozważań jest ciąg liczb $\{a_j\}$: $a_1, a_2, \dots, a_n$, które nazwiemy elementami, uzyskanych w kolejnym doświadczeniu j ; $j = 1, 2, \dots, n$. Elementami a_j mogą być wartości określonych wielkości lub liczby niemianowane. Ciąg $\{a_j\}$ jest próbką n -elementową. Jest to rezultat badań. Na przykład elementami a_j mogą być wartości pomierzonej wielkości elektrycznej, błędy pomiarów tej wielkości, odchylenia od średniej wartości błędu, odchylenia (reszty) wartości mierzonych od wartości funkcji aproksymującej itp.

Zwykle istnieje szereg bezpośrednich lub pośrednich przyczyn, często przypadkowych, które determinują wartość elementu a_j uzyskaną w doświadczeniu. Przyczyny te są zależne znowu od przyczyn innych, niekiedy również od tej wielkości, na kształtowanie której same wpływają. W tym sensie wartości elementów a_j są przypadkowe (losowe, lecz nie wylosowane).

W innym przypadku wartości elementów a_j mogą być wylosowane ze zbioru (populacji generalnej). Wtedy elementy $a_1, a_2, \dots, a_n$ są rezultatem kolejnego losowania. Na podstawie własności ciągu (a_j) mamy wysuwać hipotezy dotyczące własności populacji generalnej (patrz załącznik).

Stawiamy hipotezę H_0 , że rozkład badanych elementów a jest w przybliżeniu rozkładem normalnym. Hipotezę alternatywną, stanowiącą zaprzeczenie hipotezy H_0 , jest hipoteza H_1 , że rozkład ten nie może być uznany za rozkład w przybliżeniu normalny.

Hipotezę H_0 zweryfikujemy za pomocą testów Massey i Hellwiga, opierając się na zasadach weryfikacji hipotez statystycznych, nakreślonych w załączniku do niniejszej pracy, pt. „Problem hipotez statystycznych i ich weryfikacja w zagadnieniach praktycznych”.

2. TEST MASSEY

Test F. J. Massey, zwany w [10] testem „Kolmogorow-Smirnow Two-Semle Statistic”, przedstawiony został w pracach [8] i [4] w 1950 r. oraz w [9] w 1951 r. Test ten jest pewną modyfikacją znanego testu Kołmogorowa-Smirnowa z 1939 r., opracowanego pełniej w 1944 r. i stabilizowanego w 1948 r. [2], [4], [9].

Jak podają L. N. Bolszew i N. N. Smirnow [2], powołując się na szereg źródeł, test Kołmogorowa-Smirnowa w przypadku próbek o względnie małej liczności ($n \leq 20$) jest przez licznych autorów stosowany niewłaściwie lub w sposób uproszczony. Dalsze uogólnienie testu Massey przedstawili w 1960 r. Z. W. Birnbaum i R. A. Hall [1].

Tablice do testu Massey podane są przez jego autora w [9] oraz w innym ujęciu w [1] (tabl. 2) i w [10]. W tablicach polskich [3] liczby zawarte w tabl. 18 (uproszczonej i niekompletnej) różnią się od odpowiednich liczb w oryginalnej tablicy Massey w [9].

Rozpatrzmy elementy a_j , gdy $j = 1, 2, \dots, n$, badanej próbki, będące liczbami dyskretnymi, uzyskanymi doświadczalnie w kolejnym niezależnym doświadczeniu $j = 1, 2, \dots, n$. Z ciągu $\{a_j\}: a_1, a_2, \dots, a_n$ tworzymy szereg $\{a_i\}: a_1, a_2, \dots, a_n$ w ten sposób uporządkowanych, dyskretnych, wzajemnie niezależnych wartości a_i , gdy $i = 1, 2, \dots, n$, że $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n$.

Weryfikować będziemy hipotezę podstawową H_0 , że rozkład elementów a_i (a_j) można uznać za w przybliżeniu normalny przy hipotezie alternatywnej H_1 , że rozkładu tego nie możemy uznać za w przybliżeniu normalny.

Oznaczmy przez $F(a)$ funkcję empirycznego rozkładu losowej wielkości a , zwaną dystrybuantą empiryczną.

Według np. [10] i [1]¹⁾

$$F(a_i) = P(a \leq a_i) = \begin{cases} 0 & \text{dla } a_i < a_1, \\ \frac{i}{n} & \text{dla } a_1 \leq a_i < a_n, \\ 1 & \text{dla } a_i \geq a_n. \end{cases} \quad (1)$$

¹⁾ Dystrybuantę empiryczną można również wyrazić następująco:

$$F(a_i) = P(a < a_i) = \begin{cases} 0 & \text{dla } a_i = a_1, \\ \frac{i-1}{n} & \text{dla } a_1 < a_i \leq a_n, \\ 1 & \text{dla } a_i > a_n. \end{cases} \quad (1b)$$

Odmienność (1) i (1b) wynika z różnych definicji $F(a_i)$. Według (1) $F(a_i) = P(a \leq a_i)$, a wg (1b) $F(a_i) = P(a < a_i)$.

Ten sam zapis możemy umownie przedstawić w sposób następujący:

$$F(a_i) = P(a \leq a_i) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i < 1, \\ \frac{i}{n}, & \text{gdy } i = 1, 2, \dots, n-1, \\ 1, & \text{gdy } i \geq n. \end{cases} \quad (1a)$$

$P(a \leq a_i)$ oznacza prawdopodobieństwo, że zmienne a , do których tu należą $a_1, a_2, \dots, a_n$, są mniejsze lub równe a_i .

Oznaczmy przez a_{ux} unormowaną zmienną losową o rozkładzie normalnym, przez $\phi(a_{ux}) = P(a_u \leq a_{ux})$ jej dystrybuantę. Wartość a_{ux} w punkcie $x = i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) równa się

$$a_{ui} = \frac{a_i - \bar{a}}{\sigma}, \quad (2)$$

gdzie

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i, \quad (3)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2}. \quad (4)$$

Przy założeniu, że rozkład elementów a_{ux} jest normalny, wartość dystrybuanty $\phi(a_{ux})$ w punkcie x równa się

$$\phi(a_{ux}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a_{ux}} e^{-\frac{1}{2}a_{ux}^2} da_{ux}. \quad (5)$$

Wartości dyskretne dystrybuanty teoretycznej $\phi(a_{ux})$ wyznaczonej przy wartościach dyskretnych $a_{u1}, a_{u2}, \dots, a_{un}$, obliczonych wg (2) w oparciu o dane doświadczalne $a_1, a_2, \dots, a_n$, przy założeniu, że rozkład zmiennej ciągłej a_{ux} jest normalny, równają się odpowiednio $\phi(a_{u1}), \phi(a_{u2}), \dots, \phi(a_{un})$. Wartości $\phi(a_{ui})$ przy zadanych wartościach a_{ui} są stabilizowane i powszechnie znane; $0 \leq \phi(a_{ux}) \leq 1$.

Wartości dystrybuanty empirycznej zmiennej a_{ui} zgodnie ze wzorem (1) równają się $F(a_{ui}) = P(a_u \leq a_{ui}) = \frac{i}{n}$, gdy $i = 1, 2, \dots, n$, przy czym $a_{u1} \leq a_{u2} \leq \dots \leq a_{un}$.

Test Massey umożliwia sprawdzenie hipotezy H'_0 , że nie występuje istotna bezwzględna różnica pomiędzy wartościami dystrybuanty empirycznej $F(a_{ui})$ i dystrybuanty teoretycznej $\phi(a_{ui})$ w każdym punkcie a_i , tj. że zachodzi równość

$$F(a_{ui}) = \phi(a_{ui}), \text{ gdy } i = 1, 2, \dots, n; \quad (6)$$

przy hipotezie alternatywnej H'_1 , że

$$d = |F(a_{ui}) - \phi(a_{ui})| > 0. \quad (7)$$

Zakładamy, że wysunięta na początku (w p. 1) hipoteza H_0 o normalnym w przybliżeniu rozkładzie odchyłań, odpowiada hipotezie H'_0 , tj. $H_0 \triangleq H'_0$ i podobnie $H_1 \triangleq H'_1$.

Sprawdzianem testu Massey jest największa różnica

$$d_s = \sup |F(a_{ui}) - \phi(a_{ui})| \quad (8)$$

spośród wszystkich różnic d występujących w badanej próbce.

Utwórzmy zbiór krytyczny K sprawdzianu d_s taki, że $d_s \geq d_g$, gdzie d_g — górna krytyczna wartość różnicy d_s . Przy założeniu, że hipoteza H_0 jest prawdziwa na poziomie α

$$P(d_s \in K/H_0) = \alpha. \quad (9)$$

Jeżeli $d_s < d_g$, nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 na poziomie α .

F. J. Massey podał wartości prawdopodobieństwa p takie, że $P(d_s \leq d_g) = p$ zakładając wartość $d_g = \frac{k}{n}$, gdzie $k = 1, 2, \dots, 12$, $n = 1, 2, \dots, 40$. Praktyczne korzystanie z tablic wg [9], jak też z tablic wg [1], podanych także w [10], str. 434 ÷ 436, jest uciążliwe. Skłoniło to nas do wykonania odpowiednich wykresów wg tabl. w [10] i odczytania z nich wartości $d_g \cdot n$ przy założonych poziomach istotności $\alpha = p = 0,05$ i $\alpha = 0,1$, a następnie obliczenie wartości granicznych d_g . Wyniki tych obliczeń przy $n = 8, 9, \dots, 30$ oraz $n = 32, 34, \dots, 40$ zestawiono w tabl. 1. Ze względu na uchyby związane z wymienionymi wykresami i odczytami, podane w tabl. 1 wartości traktować należy jako przybliżone.

Tablica 1
Krytyczne wartości różnic (d_g) między dystrybuantami empiryczną $F(a_{ui})$ i teoretyczną $\phi(a_{ui})$ na poziomie α do testu Massey
(Hipotezę H_0 przyjmuje się, gdy $d_s < d_g$)

n	α		n	α		n	α	
	0,05	0,1		0,05	0,1		0,05	0,1
8	0,140	0,163	17	0,124	0,142	26	0,108	0,121
9	0,134	0,158	18	0,122	0,138	27	0,107	0,120
10	0,130	0,156	19	0,120	0,136	28	0,105	0,118
11	0,129	0,155	20	0,117	0,133	29	0,104	0,116
12	0,128	0,154	21	0,115	0,131	30	0,102	0,114
13	0,128	0,153	22	0,113	0,129	32	0,099	0,111
14	0,128	0,151	23	0,112	0,128	34	0,097	0,110
15	0,127	0,148	24	0,110	0,126	36	0,094	0,108
16	0,126	0,144	25	0,109	0,124	38	0,092	0,106
						40	0,091	0,105

Przykład 1

Na podstawie znanego szeregu chronologicznego liczności elektroenergetycznych stacji średniego napięcia w polskim systemie elektroenergetycznym w latach 1950 ÷ 1966 został skonstruowany trend o postaci $Y_j = b_0 + b_1 j + b_2 j^2$, gdzie b_0, b_1 i b_2 — parametry, j — czas w latach; $j = 1, 2, \dots, 17$.²⁾

²⁾ Zwykle czas oznacza się literą t .

Wartości parametrów $b_0 = 24,844$ tys., $b_1 = -0,067$ tys./rok, $b_2 = 0,1655$ tys./rok² zostały wyznaczone metodą najmniejszych kwadratów względnych [12]. Odchylenia względne procentowe $a_j = \frac{y_j - Y_j}{y_j} 100$, odpowiadające kolejnym latom, podane są w tabl. 2 w kolumnie 2, przy czym y_j — wartość pomierzona.

Tablica 2

Przykładowe wyniki obliczeń przy zastosowaniu testu Massey do weryfikacji hipotezy o rozkładzie normalnym

$j(i)$	a_j	a_{uj}	a_{ui}	$F(a_{ui})$	$\phi(a_{ui})$	d
1	2	3	4	5	6	7
1	-2,40	-1,47	-1,92	0,059	0,027	0,032
2	1,46	0,87	-1,47	0,118	0,071	0,047
3	3,42	2,06	-1,06	0,176	0,145	0,031
4	-0,39	-0,26	-0,93	0,235	0,176	0,059
5	-1,72	-1,06	-0,62	0,294	0,268	0,026
6	-1,50	-0,93	-0,61	0,353	0,271	0,082
7	0,17	0,09	-0,26	0,412	0,397	0,005
8	1,19	0,70	-0,18	0,471	0,429	0,042
9	0,88	0,51	0,09	0,529	0,536	0,007
10	1,86	1,11	0,13	0,588	0,552	0,036
11	-0,28	-0,18	0,51	0,646	0,695	0,049
12	-0,98	-0,61	0,56	0,706	0,712	0,006
13	-3,14	-1,92	0,70	0,765	0,758	0,007
14	-0,99	-0,62	0,87	0,823	0,808	0,015
15	0,24	0,13	1,01	0,882	0,844	0,038
16	0,96	0,56	1,11	0,941	0,867	0,074
17	1,69	1,01	2,06	1,000	0,980	0,020

Należy zweryfikować hipotezę H_0 , że rozkład odchyłeń a_j można uznać za w przybliżeniu normalny, tj. że rozkład odchyłeń a_j nie różni się istotnie od rozkładu normalnego.

W kolumnie 3 w tabl. 2 podano wartości znormalizowanych odchyłeń względnych procentowych (a_{uj}), wyznaczonych wg (2) przy $j = i$, odpowiadających wartościom odchyłeń a_j , a w kolumnie 4 — wartości a_{uj} uporządkowane wg wartości rosnących, tj. a_{ui} . W rozpatrywanym przykładzie $\bar{a} \approx 0,03\%$, $\sigma = 1,65\%$. W kolejnych kolumnach tabl. 2 zawarte są wartości dystrybuanty empirycznej $F(a_{ui})$, wartości dystrybuanty teoretycznej $\phi(a_{ui})$ oraz wartości różnic d , obliczonych wg (7).

Wszystkie wartości podane są w tabl. 2 po zaokrągleniu.

Dla $n = 17$ graniczne wartości różnic d równają się (tabl. 1) $d_g = 0,124$ dla $\alpha = 0,05$ i $d_g = 0,142$ dla $\alpha = 0,1$.

Największa różnica między $F(a_{ui})$ i $\phi(a_{ui})$ równa się $d_s = 0,082$ (tabl. 2).

Ponieważ $d_s < d_g$, można przyjąć hipotezę H_0 na poziomie 0,05 lub 0,1, że rozkład wyżej wymienionych odchyłeń jest rozkładem w przybliżeniu normalnym.

3. TEST HELLWIGA

Odmienny sposób weryfikacji hipotezy H_0 o normalnym rozkładzie zmiennej losowej w przypadku małej próbki przedstawił w 1965 r. prof. Z. Hellwig [5]. Przykłady zastosowań tego testu podane są również w pracy [7]. Test ten proponujemy nazwać testem Hellwiga.

Koncepcja tego testu polega w zasadzie również na porównaniu wartości dystrybuanty $F(a_{ui})$ i $\phi(a_{ui})$, lecz w sposób odmienny od zastosowanego w teście Massey. Porównuje się tu mianowicie kolejne wartości $\phi(a_{ui})$ z hipotetycznymi wartościami $F(a_u)$ zawartymi w przedziale ograniczanym rzeczywistymi wartościami $F(a_{u,i-1})$ i $F(a_{ui})$, gdy $i = 1, 2, \dots, n$.

Gdy $F(a_{u,i-1}) \leq \phi(a_{ui}) < F(a_{ui})$, zakładamy, że dystrybuanty $\phi(a_{ui})$ i $F(a_{ui})$ nie różnią się istotnie w przedziale S_i : $[F(a_{u,i-1}), F(a_{ui})]$, który nazwał autor testu „całą”. Jeżeli natomiast $\phi(a_{ui}) \geq F(a_{ui})$ lub $\phi(a_{ui}) < F(a_{u,i-1})$, to przyjmujemy, że dystrybuanty $\phi(a_{ui})$ i $F(a_{ui})$ różnią się istotnie w tym przedziale.

Dziiąc odcinek dystrybucyjny $F(a_{ui})$ lub $\phi(a_{ui})$, zawarty między skrajnymi jej wartościami od 0 do 1 na osi rzędnej (we wspólnym układzie współrzędnych $[\phi(a_u), a_u]$ i $[F(a_u), a_u]$), na n równych części, otrzymuje się n przedziałów („cel”), których krańce, oznaczone kolejno przez $0, 1, \dots, n$, odpowiadają wartościom $F(a_{u,i-1}) = \frac{i-1}{n}$ i $F(a_{ui}) = \frac{1}{n}$, gdy $i = 1, 2, \dots, n$. Są to mianowicie przedziały:

$$\left. \begin{aligned} S_1, & \quad \text{ gdy } F(a_{u0}) = 0, & \text{ a } & \quad F(a_{u1}) = \frac{1}{n}, \\ S_2, & \quad \text{ gdy } F(a_{u1}) = \frac{1}{n}, & \text{ a } & \quad F(a_{u2}) = \frac{2}{n}, \\ & \dots\dots\dots & & \\ S_n, & \quad \text{ gdy } F(a_{u,n-1}) = \frac{n-1}{n}, & \text{ a } & \quad F(a_{un}) = 1. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Praktycznie $-5 \leq a_u \leq 5$. Oczywiście $\phi(a_{ui} = -5) \approx 0$, $\phi(a_{ui} = 5) \approx 1$.

Jeżeli w doświadczeniu zachodzi $F(a_{u,i-1}) \leq \phi(a_{ui}) < F(a_{ui})$, to przedział taki (przedział S_i) jest przedziałem pełnym („pełną celą”), a gdy $\phi(a_{ui}) \geq F(a_{ui})$ lub $\phi(a_{ui}) < F(a_{u,i-1})$, to przedział taki jest przedziałem pustym („pustą celą”).

W rozpatrywanym szeregu badanych elementów może być k przedziałów pustych i $n-k$ przedziałów pełnych.

Sprawdzianem testu Hellwiga jest liczba przedziałów pustych k .

Zbiór krytyczny K liczb przedziałów pustych obejmuje wg [5] dwa podzbiory — dolny K_d , gdy $k \leq k_d$ i górny K_g , gdy $k \geq k_g$, gdzie k_d i k_g — krytyczne (dolna i górna) wartości przedziałów pustych.

Według Z. Hellwiga hipotezą H'_o , że dystrybuanta $\phi(a_{ui})$ nie różni się istotnie od dystrybuanty $F(a_{ui})$ odrzuca się na poziomie α , gdy

$$1. P(k \leq k_d) \leq \alpha \quad (11a)$$

oraz gdy

$$2. P(k \geq k_a) \geq 1 - \alpha. \quad (11b)$$

Z tego wynika, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy $H_o \triangleq H'_o$ na poziomie α , gdy $k_d < k < k_g$.

Przypadek 1: (11a) oznacza, że hipotezę H_o odrzuca się z powodu „małego prawdopodobieństwa dużej zgodności ... rozkładów”.

Schemat (11a) budzić może wątpliwości w licznych praktycznych przypadkach. Stosując ten schemat musielibyśmy odrzucić hipotezę H_o w przypadku stwierdzonej doświadczalnie małej liczby przedziałów pustych.

W problematyce badań rozkładu odchyleń (reszt, składników losowych), w różnego rodzaju pomiarach technicznych, w zastosowaniach teorii regresji i korelacji w elektro-technice i elektroenergetyce, w ekonometrii i jej elektroenergetycznych zastosowaniach, w praktycznych zagadnieniach stochastycznych, w technice badań błędów, a zwłaszcza tam, gdzie dysponujemy ciągiem elementów a_i odnoszących się do całej badanej populacji, a nie do pojedynczej próbki utworzonej drogą losowania, odrzucenie hipotezy H_o , gdy $k < k_d$, nie może być umotywowane. Z tego powodu wydaje się nam, że w omawianych zagadnieniach, jeżeli tylko $k < k_g$, nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_o , że rozkład badanych elementów (wielkości) jest w przybliżeniu normalny.

W tablicy 3 podane są górne krytyczne wartości (k_g) liczb przedziałów pustych na poziomie α spisane z pracy Z. Hellwiga [5].

Tablica 3

Krytyczne wartości przedziałów pustych (k_g) na poziomie α do testu Hellwiga
(Hipotezę H_o przyjmuje się, gdy $k < k_g$)

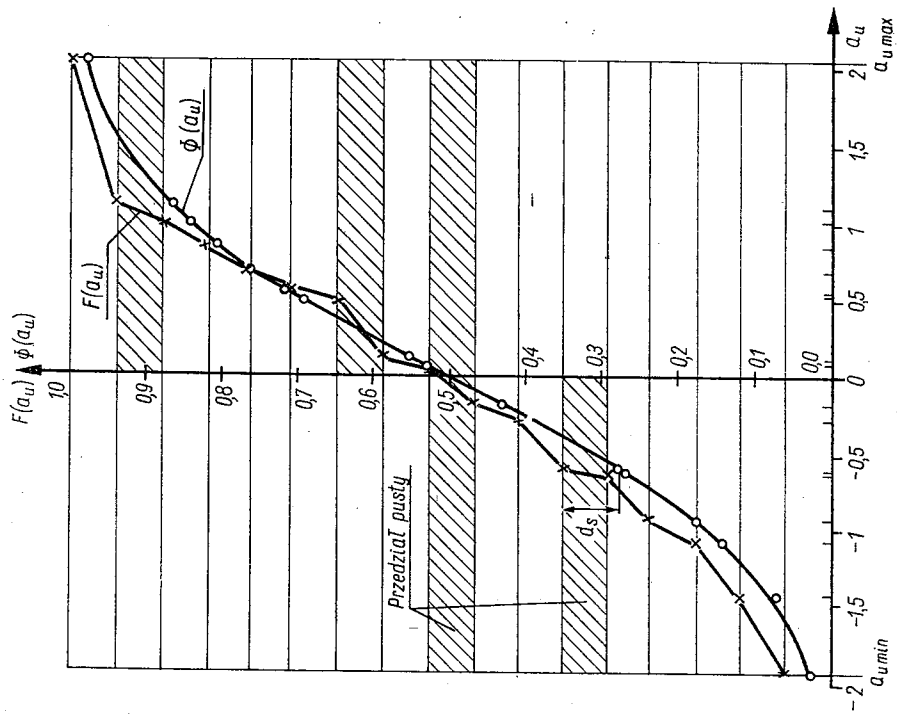
n	α		n	α		n	α	
	0,05	0,1		0,05	0,1		0,05	0,1
8	4	4	16	8	7	24	11	11
9	5	4	17	8	8	25	12	11
10	5	5	18	9	8	26	12	11
11	6	5	19	9	9	27	12	12
12	6	6	20	9	9	28	13	12
13	6	6	21	10	9	29	13	13
14	7	6	22	10	10	30	13	13
15	7	7	23	11	10			

W odniesieniu do przykładu 1 liczba cel pustych $k = 4$. Dla poziomu $\alpha = 0,05$ i $\alpha = 0,1$ $k_g = 8$. Ponieważ $k < k_g$, nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_o — podobnie jak przy zastosowaniu testu Massey.

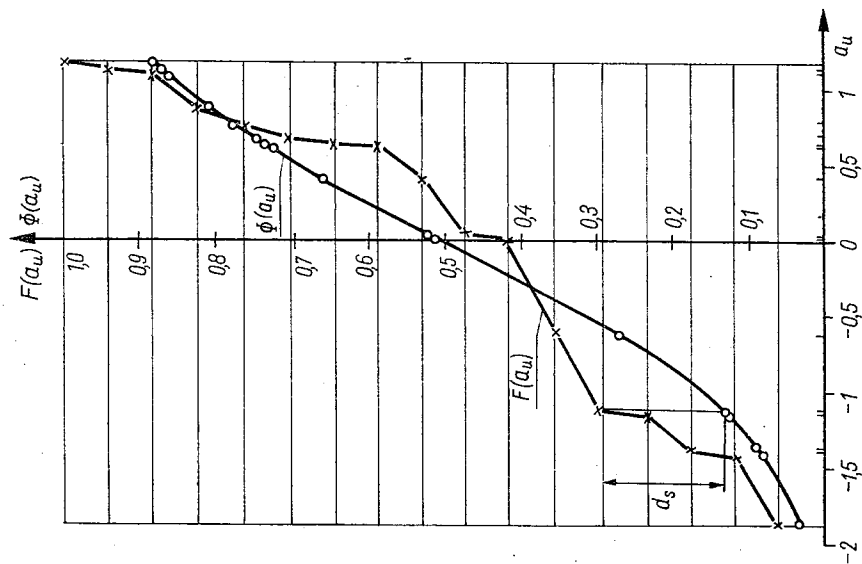
Na rys. 1 zilustrowano wykreślnie przebiegi $F(a_{ui})$ i $\phi(a_{ui})$ w odniesieniu do badanego przykładu 1, zaznaczono wartość $d_s \approx 0,08$ i przedziały puste.

Przykład 2

Został ustalony stochastyczny (ekonometryczny) model tendencji rozwojowej liczności drobnych odbiorców energii elektrycznej w polskim systemie elektroenergetycznym w latach 1950÷1966 o postaci $Y_j = 2,971 \cdot 1,068^{j-1}$ (mln. odb.), gdzie $j = 1, 2, \dots, 17$ — czas w latach. Parametry tego modelu zostały wyznaczone metodą najmniejszych kwadratów względnych.



Rys. 1. Wykreślna ilustracja do przykładu 1. weryfikacji hipotezy o normalnym rozkładzie testami Massey i Hellwiga



Rys. 2. Wykreślna ilustracja do przykładu 2. weryfikacji hipotezy o normalnym rozkładzie testami Massey i Hellwiga

Tablica 4

Przykładowe wyniki obliczeń przy stosowaniu testu Hellwiga do weryfikacji hipotezy o rozkładzie normalnym

$j(i)$	a_j	a_{uj}	a_{ui}	$F(a_{ui})$	Przedziały („cele”)	$\phi(a_{ui})$	Przedziały: puste (—) pełne (+)
1	2	3	4	5	6	7	8
0				0			
1	0,06	0,04	-1,87	0,059	1	0,031	+
2	-2,58	-1,12	-1,40	0,118	2	0,081	+
3	-2,61	-1,13	-1,37	0,176	3	0,084	—
4	1,41	0,63	-1,13	0,235	4	0,129	—
5	0,93	0,42	-1,12	0,294	5	0,131	—
6	1,55	0,69	-0,61	0,353	6	0,271	—
7	1,37	0,61	0,03	0,412	7	0,512	—
8	2,00	0,88	0,04	0,471	8	0,516	—
9	1,73	0,77	0,42	0,529	9	0,663	—
10	2,57	1,13	0,61	0,588	10	0,729	—
11	2,69	1,19	0,63	0,646	11	0,736	—
12	2,54	1,12	0,69	0,706	12	0,755	—
13	-3,17	-1,37	0,77	0,765	13	0,779	—
14	0,05	0,03	0,88	0,823	14	0,811	+
15	-1,43	-0,61	1,12	0,882	15	0,869	+
16	-3,24	-1,40	1,13	0,941	16	0,871	—
17	-4,30	-1,87	1,19	1,000	17	0,883	—

Zbadamy za pomocą testu Hellwiga czy rozkład odchyłeń względnych procentowych a_j , obliczonych w sposób podany w przykładzie 1, można przyjąć za w przybliżeniu normalny.

Wyniki obliczeń podane są w tabl. 4.

Wartości kolejnych odchyłeń a_j podane są w kolumnie 2.

Wyniki obliczeń a_{uj} zawarte są w kolumnie 3. W rozpatrywanym przypadku $\bar{a} = -0,02\%$, $\sigma = 2,29\%$. W kolumnie 4 podane są uporządkowane wg rosnących wartości a_{ui} , w kolumnie 5 — wartości $F(a_{ui})$, a w kolumnie 7 — wartości $\phi(a_{ui})$, spisane z tablic w [3] w zależności od a_{ui} . W kolumnie 8 tabl. 4 podano wyniki „porównania” $F(a_{ui})$ i $\phi(a_{ui})$ w kolejnych przedziałach.

Jak widać z tablicy 4, liczba przedziałów pustych $k = 13$. Ponieważ zachodzi $k > k_q = 8$ (tabl. 3), nie ma podstaw do przyjęcia hipotezy H_0 weryfikowanej testem Hellwiga

na poziomie $\alpha = 0,05$ i $\alpha = 0,1$, że rozkład badanych odchyleń jest w przybliżeniu normalny.

Weryfikując tę hipotezę testem Massey na poziomie $\alpha = 0,05$ i $\alpha = 0,1$ również nie możemy przyjąć tej hipotezy, ponieważ $d_s \approx 0,16 > d_g = 0,142$, gdy $\alpha = 0,1$ lub $d_s > 0,124$, gdy $\alpha = 0,05$.

Na rys. 2 przedstawiono przebiegi $F(a_{ui})$ i $\phi(a_{ui})$.

4. PORÓWNANIE WYNIKÓW STOSOWANIA TESTÓW MASSEY I HELLWIGA

Testy Massey i Hellwiga są testami różnymi, ich podstawą bowiem są różne statystyki. Nie należy więc oczekiwać zgodności wskazań obu testów w każdym przypadku. Prof. Z. Hellwig [5] nadmienia, że w badanych przez siebie przypadkach rezultaty weryfikacji hipotezy H_0 obu wymienionymi testami pokrywają się. Wynik ten możemy uznać za przypadkowy.

W ramach konstruowania modeli tendencji rozwojowych licznych zmiennych charakteryzujących polski system elektroenergetyczny zweryfikowaliśmy hipotezę H_0 o normalnym rozkładzie odchyleń (reszt) w 360 przypadkach stosując testy Massey i Hellwiga przy założeniu $\alpha = 0,1$, przy czym w przypadku testu Hellwiga odrzucaliśmy hipotezę H_0 , gdy $k \geq k_g$.

Wnioski z tych badań są następujące:

1. Tylko w 59,7% przypadków wskazania testów Massey i Hellwiga są zgodne (dodatnie — 21,3%, ujemne — 31,4%). W pozostałych (40,3%) przypadkach wskazania obu testów są różne (dodatnie testu Massey, ujemne testu Hellwiga lub przeciwnie — ujemne testu Massey, a dodatnie testu Hellwiga).

2. Dodatnie wskazania (przyjęcie hipotezy H_0) testu Massey wystąpiło w 42,2% przypadków, a dodatnie wskazania testu Hellwiga — w 48,1% badanych przypadków.

3. Tylko w 28,3% przypadków wskazania obu testów są dodatnie, tzn. że tylko w takiej liczbie przypadków można było uznać za w przybliżeniu normalny rozkład badanych odchyleń.

Utwierdza to nasze przeświadczenie, że przyjmowane często w praktyce założenie o normalnym rozkładzie odchyleń (reszt, składników losowych) nie jest potwierdzone w licznych praktycznych przypadkach.

W pracy niniejszej nie będziemy dokonywać porównania mocy obu testów, ani nie zamierzamy uzasadniać, który z nich jest lepszy. Podzielamy pogląd licznych autorów (patrz załącznik), że weryfikację hipotezy statystycznej należy przeprowadzać przy użyciu możliwie jak największej liczby testów. Celowe wydaje się więc sprawdzanie hipotezy H_0 o normalnym rozkładzie obu testami jednocześnie — Massey i Hellwiga. Praktycznie, o ile wykonane są obliczenia wstępne do jednego z tych testów [a_{ui} , $F(a_{ui})$ i $\phi(a_{ui})$], zastosowanie testu drugiego jest bardzo proste i szybko prowadzi do celu. Korzysta się ze wspólnej tablicy obliczeniowej, przy czym wygodnie jest kolejne uporządkowane wartości dystrybuanty $\phi(a_{ui})$ wpisać na oddzielny pasek papieru.

Wyżej podane rezultaty badań wydają się być silną motywacją za stosowaniem w praktyce obu testów jednocześnie. Dodatkowo wskazania obu wymienionych testów są motywacją za przyjęciem hipotezy o w przybliżeniu normalnym rozkładzie, natomiast ujemne wskazania obu testów lub jednego z nich są podstawą do odrzucenia tej hipotezy.

5. WNIOSKI

1. Testy statystyczne umożliwiające weryfikację hipotez statystycznych mogą stanowić umowne metody badań w licznych praktycznych dziedzinach elektrotechniki i elektroenergetyki.

2. Do sprawdzania hipotezy o normalnym rozkładzie zbioru elementów o tzw. małej liczności mogą być stosowane testy Massey i Hellwiga.

3. Przystosowany do praktycznych celów test Massey umożliwia w prosty sposób weryfikację hipotezy o w przybliżeniu normalnym rozkładzie elementów w przypadkach małej liczności próbek.

4. W licznych praktycznych przypadkach odrzucanie testem Hellwiga hipotezy o normalnym rozkładzie elementów w przypadku, gdy sprawdzian tego testu zawarty jest w krytycznym zbiorze małych liczb tego sprawdzianu ($k < k_a$), wydaje się być nieuzasadnione.

5. Celowe wydaje się jednoczesne stosowanie testów Massey i Hellwiga, opartych o różne sprawdziany i przyjmowanie hipotezy H_0 o normalnym rozkładzie elementów tylko w przypadkach, gdy wskazania obu tych testów są dodatnie.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Z. W. Birnbaum and R. A. Hall, Small Sample Distribution for Multisample Statistics of the Smirnow Type, *Annals of Mathematical Statistics*, 1960, s. 210.
2. L. N. Bolšev i N. V. Smirnov, *Tablice matematičeskoj statistiki*, Moskwa 1965, Akademija Nauk SSSR, „Nauka”.
3. Czechowski i inni, *Tablice statystyczne*, Warszawa 1957, PWN, Red. W. Sadowski.
4. D. A. Darling, The Kolmogorov-Smirnov, Cramer — von Mises Tests, *Annals of Mathematical Statistics*, 1957, s. 823.
5. Z. Hellwig, Test zgodności dla małej próbki, *Przegląd Statystyczny* 1965, z. 2.
6. Z. Hellwig, *Regresja liniowa i jej zastosowania w ekonomii*, Wyd. 3, PWE, Warszawa 1967.
7. Z. Hellwig i inni, *Zarys ekonometrii*, PWE, Warszawa 1967, Red. Z. Hellwig.
8. F. J. Massey, A Note of the Power of a Non-Parametric Test, *Annals of Mathematical Statistics*, 1950, s. 440.
9. F. J. Massey, The Distribution of the Maximum Deviation Between Two Sample Cumulative Step Function, *Annals of Mathematical Statistic*, 1951, s. 125.
10. D. B. Owen, *Handbook of Statistical Tables*, London 1962, Pergamon Press.
11. PKN, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, Terminy, określenia, symbole, PN-58/N-01051, W.N., Warszawa 1959.
12. Zb. Kowalski, Wyznaczanie parametrów funkcji aproksymacyjnych według kryterium najmniejszych kwadratów względnych, *Archiwum Elektrotechniki*, 1969, z. 3.

PROBLEM HIPOTEZ STATYSTYCZNYCH I ICH WERYFIKACJI W ZAGADNIENIACH PRAKTYCZNYCH

Ustalenie określonej własności ciągu elementów $\{a_j\}$ polega ogólnie na postawieniu hipotezy H_0 , że elementy te mają zadaną własność, lub — hipotezy alternatywnej H_1 , że odchylenia te własności tej nie wykazują. Hipotezy H_0 lub H_1 podlegają sprawdzeniu (weryfikacji) za pomocą testów statystycznych. Rezultatem sprawdzenia hipotezy w konkretnym przypadku jest przyjęcie lub odrzucenie hipotezy H_0 na założonym z góry poziomie istotności α .

Istnieje szereg prac teoretycznych dotyczących ogólnej teorii sprawdzania hipotez statystycznych, jak np. prace: J. Neymana i E. J. Pearsona (1928 ÷ 1938 r.), J. Neumana (1936 ÷ 1944 r.), E. Lemana [6] (1964 r.), H. Craméra [1] (1945 r., tłumaczenie polskie w 1958 r.), cytowana w wielu innych pracach; ostatnia praca J. Neymana [7] (1967 r.) itp.

Z prac autorów polskich zasługują na uwagę prace M. Fisz [3] (1958 r.), Z. Czerwińskiego [2] (1966 r., oryginał pracy z 1958 r.), E. Pleszczyńskiej i R. Zielińskiego [8] (1964 r.), E. Pleszczyńskiej [9] (1966 r.) i Z. Hellwiga [4] (1965 r.). Można wysunąć przypuszczenie na podstawie cytowanych prac z ostatnich 10 lat, że niektóre zagadnienia związane z weryfikacją hipotez stanowią same w sobie problematykę badań i dyskusji, co skłania nas do ostrożnego i krytycznego traktowania zagadnienia wysuwania i weryfikacji hipotez statystycznych w konkretnych praktycznych przypadkach w elektrotechnice i elektroenergetyce.

Hipotezę statystyczną wg polskiej normy [10] (1959 r.) nazywa się każde przypuszczenie dotyczące nieznanego wartości parametrów rozkładu populacji bądź nieznanego typu rozkładu populacji. M. Fisz [3] (1958 r.) hipotezą statystyczną nazywa każde przypuszczenie dotyczące nieznanego rozkładu zmiennej losowej. Autorzy pracy [5] (1967 r.) pod red. Z. Hellwiga pod pojęciem hipotezy statystycznej rozumieją „przypuszczenie dotyczące postaci rozkładu lub wartości parametrów rozkładu zmiennej losowej, sprawdzalne statystycznie, tzn. na podstawie danych otrzymanych w losowej próbie”.

Hipotezy statystyczne dzielą się na hipotezy parametryczne i hipotezy nieparametryczne.

Hipoteza określająca nieznaną wartość parametru zmiennej losowej jest hipotezą parametryczną. Hipoteza określająca postać rozkładu zmiennej losowej nazywa się hipotezą nieparametryczną [5].

Zgodnie z podanymi wyżej określeniami hipoteza jest przypuszczeniem dotyczącym własności zmiennej losowej w populacji generalnej, opartym na podstawie danych z próby losowej.

Wydaje się, że w licznych praktycznych zagadnieniach w elektrotechnice i elektroenergetyce występują przede wszystkim następujące przypadki powstania badanego ciągu elementów $\{a_j\}$:

1. w wyniku losowania z określonego zbioru (populacji generalnej),
2. w rezultacie pomiarów lub obliczeń w odniesieniu do jednego obiektu badanego lub niewielkiej liczby tych obiektów,
3. w wyniku badania całej populacji.

Przykłady:

Ad 1. W rejonie energetycznym istnieją kartoteki transformatorów charakteryzujących się mocą znamionową S_n . Ich liczba wynosi N . Dokonujemy próby losowej n kartotek. Moce znamionowe wylosowanych kolejno transformatorów równają się $S_{n1}, S_{n2}, \dots, S_{nn}$. Ciąg (S_{nj}) jest ciągiem wylosowanym. Na podstawie zbadanych właściwości tego ciągu, np. rozkładu mocy jednostkowej, wysuwamy przypuszczenie dotyczące rozkładu mocy jednostkowej transformatorów w Rejonie Energetycznym.

W tym przypadku populacją generalną jest zbiór transformatorów w badanym rejonie energetycznym.

Ad 2. Dokonano pomiarów czasów działań wybranego przełącznika danego typu. Ciąg uzyskanych z n pomiarów (w tych samych warunkach) czasów działań jest $\{t_j\}: t_1, t_2, \dots, t_n$. Określamy właściwości tego ciągu, a m.in. badamy rozkład czasów t_j . Będzie to rozkład dotyczący badanego przełącznika. Podobne pomiary możemy wykonać w odniesieniu do większej liczby przełączników tego typu. Możemy określić właściwości ciągu czasów działań dla badanej grupy przełączników. Jeżeli na podstawie tych badań wysuniemy hipotezę, że wszystkie istniejące przełączniki tego typu posiadają stwierdzone właściwości to populacją generalną będą wszystkie przełączniki; ściślej — szeregi czasowe $\{t_j\}$ wszystkich przełączników. W tym przypadku licznosc populacji generalnej N może być określona. Jeżeli natomiast hipotezę naszą odniesiemy do produkowanych w przyszłości przełączników, to populacja generalna może nie być określona lub może być określona w przybliżeniu.

Czasy $t_1, t_2, \dots, t_n$ uzyskane z pomiarów w omawianym doświadczeniu są również zmiennymi losowymi, ponieważ w innym doświadczeniu na tym samym obiekcie (przełączniku) uzyskamy ogólnie inne wartości czasów t_j lub inny ciąg tych wartości.

Ad 3. Za obiekt rozważań został przyjęty określony system elektroenergetyczny. W oparciu o wartości statystyczne (uzyskane drogą pomiarów i obliczeń) rocznego zużycia energii elektrycznej (A_t) przez wszystkich odbiorców zasilanych z systemu został skonstruowany stochastyczny model tendencji rozwojowej $Y_t = f(t)$. Przedmiotem naszych rozważań jest ciąg odchyleń $a_t, t = 1, 2, \dots, n$, jako różnic bezwzględnych lub względnych pomiędzy A_t i Y_t . Ponieważ zarówno A_t , jak i Y_t są zmiennymi losowymi, również elementy a_t są zmiennymi losowymi.

W tym przypadku ciąg $\{a_t\}: a_1, a_2, \dots, a_n$ stanowi całą badaną populację, o ile na podstawie wyników badań tego ciągu nie będziemy wysuwać hipotez na inne okresy czasu poza przedział, w odniesieniu do którego został model skonstruowany lub na inne systemy.

Z przytoczonych przykładów wynika, że zmienne a_j w próbie (doświadczeniu) są zmiennymi losowymi; jedno z nich powstają w wyniku losowania, drugie z nich nie powstają na skutek losowania, lecz kształtowane są pod wpływem czynników przypadkowych (losowych). Te ostatnie, o ile to będzie wskazane, nazywać będziemy zmiennymi losowymi przyczynowymi. Wymieniając zmienne losowe rozumiemy zmienne losowe niezależnie od przyczyn ich powstawania (losowanie czy zjawiska losowe).

Drugi wniosek wynikający z przytoczonych przykładów jest następujący. Znany z eksperymentu ciąg badanych elementów (zmiennych losowych) a_j pochodzi z populacji generalnej, możliwej lub niemożliwej do określenia, bądź sam stanowi taką populację.

We wszystkich rozpatrywanych przypadkach możemy ustalić właściwości ciągu badanych elementów (właściwości próbki). W pierwszych dwóch przypadkach na podstawie tych właściwości możemy wysunąć hipotezę, że właściwości te odnoszą się do całej populacji. W przypadku trzecim ustalone właściwości mogą być właściwościami całej populacji.

Te spostrzeżenia mogą być argumentami przeciwko mechanistycznemu stosowaniu testów statystycznych do weryfikacji hipotez statystycznych we wszystkich omawianych wyżej przypadkach.

Wysuwanie hipotez i ich weryfikacja są umowną metodą postępowania, prowadzącą do określania porównywalnych cech. Jest to metoda jeszcze rzadko wykorzystywana w elektrotechnice stosowanej.

Testem statystycznym wg [10] nazywa się przepis postępowania służący do sprawdzania (weryfikowania) hipotez statystycznych. Jest to przyjęta reguła nakazująca odrzucenie hipotezy H_0 lub przyjęcie hipotezy alternatywnej H_1 , gdy w wyniku eksperymentu sprawdzian hipotezy (d) przyjmie wartość z pewnego zbioru K , zwanego obszarem krytycznym, a pozwalająca na przyjęcie hipotezy H_0 lub odrzucenie hipotezy alternatywnej H_1 w przypadku przeciwnym.

Według [5] „do obszaru krytycznego zalicza się te wartości sprawdzianu, których wystąpienie, gdy weryfikowana hipoteza jest prawdziwa, jest mało prawdopodobne”.

Prawdopodobieństwo trafienia sprawdzianu (d) do obszaru krytycznego nazywa się poziomem istotności i wynosi założoną wartość α , gdy $0 < \alpha < 1$. Oznacza to praktycznie wg [10], że przy częstym stosowaniu tego samego testu do weryfikacji hipotezy H_0 na poziomie α , przeciętnie $\alpha' = 100 \alpha$ razy na 100 przypadków hipoteza H_0 zostanie błędnie odrzucona.

Jak można przypuszczać, nie ma jednoznacznych kryteriów wyboru wartości poziomu istotności α poza ogólnym określeniem, jak np. wg [5], że „wartość α dobierana jest w ten sposób, aby trafienie sprawdzianu (d) do obszaru krytycznego, gdy weryfikowana hipoteza jest prawdziwa, było zdarzeniem rzadkim”. Tablice liczbowe, odnoszące się do licznych testów statystycznych, opracowane są najczęściej w przypadkach, gdy α równa się: 0,005, 0,01, 0,025, 0,05 i 0,1 lub tylko w przypadkach niektórych tych liczb, jak np. 0,01, 0,05 i 0,1. W normie polskiej [10] podaje się, że „zwykle jako poziom istotności dobiera się prawdopodobieństwo $\alpha = 0,01$ lub 0,05”. Liczby te, a zwłaszcza 0,05 często przyjmowane są w przykładach stosowania testów statystycznych.

Sprawdzając hipotezę za pomocą testu — wg teorii Neymana — można popełnić dwa rodzaje błędów:

1. odrzucenie hipotezy prawdziwej H_0 ; jest to tzw. błąd I rodzaju,
2. odrzucenie hipotezy fałszywej (alternatywnej) H_1 ; jest to tzw. błąd II rodzaju.

Prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju, który równa się — *ex definitione* — poziomowi istotności, tj. wartości α , musi być małe, aby stanowiło podstawę przyjęcia hipotezy prawdziwej H_0 .

Prawdopodobieństwo popełnienia błędu II rodzaju, które oznaczymy przez β , musi być małe, np. $\beta = 0,05$, aby stanowiło podstawę do przyjęcia hipotezy fałszywej H_1 , tj. do odrzucenia hipotezy prawdziwej H_0 .

Niejednokrotnie istnieje kilka testów ($T_1, T_2, \dots, T_k$) do weryfikacji tej samej hipotezy H_0 . Powstaje wtedy problem wyboru testu lub testów. W tym przypadku, jeżeli testy te powodują takie same błędy I rodzaju, tj. $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = \alpha$, to wg H. Craméra [1], str. 504, ten test T_x należy uznać za lepszy, który daje większe błędy II rodzaju. Przy zadanym α wartość błędu II rodzaju (β) określa moc testu. Im β jest mniejsze przy $\alpha = \text{const}$, tym moc testu jest większa, tj. tym test jest mocniejszy. E. Pleszczyńska i R. Zieliński [8] (1964 r.) uzasadnili twierdzenie, że przy sprawdzaniu hipotezy H_0 o takich samych błędach I rodzaju, nie ma podstaw do odrzucenia tej hipotezy testem o większej mocy, gdy hipoteza ta została odrzucona testem mniejszej mocy.

Z powyższego wynika, że wartość błędu II rodzaju nie może być tak decydująca przy weryfikacji hipotezy, jak wartość błędu I rodzaju, a więc „dobroć” testu w sensie wyżej opisanym przez W. Craméra wydaje się być nieprzekonywująca.

Te wątpliwości były prawdopodobnie przyczyną wysunięcia koncepcji celowości sprawdzania hipotez statystycznych przy użyciu możliwie jak największej liczby istniejących testów, a zarazem stały się bodźcem do tworzenia nowych testów [1], [4]. Jak stwierdza M. Fisz w [3], str. 463, „przyjęcie hipotezy na podstawie jednego testu, gdy w rezultacie jego przeprowadzenia weryfikowana hipoteza nie zostaje odrzucona, nie jest dostatecznie uzasadnione”.

Według Z. Hellwiga [4] (1965 r.) „jeżeli żaden z testów $T_1, T_2, \dots, T_k$ nie dał podstawy do odrzucenia sprawdzanej hipotezy H_0 , to statystyczna motywacja przemawiająca za przyjęciem hipotezy jest silniejsza od odpowiedniej motywacji w przypadku gdy zastosowano tylko jeden test spośród wymienionych testów i wskazania dostarczone przez ten test nie dały podstaw do odrzucenia tej hipotezy”.

Zauważmy jeszcze, że wg M. Fisa [3] „... zagadnienie mocy testów zgodności jest jeszcze mało zbadane”.

Nie jest jednak, jak się wydaje, jednoznacznie rozstrzygnięty problem, czy hipotezę H_0 na poziomie α należy odrzucić w przypadku jej weryfikacji różnymi testami, gdy jeden z nich dał podstawę do odrzucenia hipotezy, a pozostałe — do jej przyjęcia. Wydaje się rozsądne przyjęcie tezy, że w takich przypadkach hipotezę na poziomie α należy odrzucić. Alternatywnym przypadkiem jest możliwość przyjęcia tej hipotezy, gdy większość testów na tym samym poziomie α nie daje podstawy do odrzucenia tej hipotezy.

Zgodnie z powyższym, jeżeli sprawdzamy hipotezę dwoma testami jak w niniejszej pracy, celowe jest przyjmowanie hipotezy H_0 tylko w przypadku, gdy wskazania obu testów są dodatnie, tj. gdy żaden z tych testów nie dał podstawy do odrzucenia hipotezy H_0 .

Logiczny schemat wnioskowania statystycznego dotyczącego przyjęcia hipotezy H_0 przy istnieniu jednej hipotezy konkurencyjnej (alternatywnej) H_1 wg Zb. Czerwińskiego [2] można przedstawić następująco:

1. należy odrzucić hipotezę H_0 , gdy został stwierdzony fakt mało prawdopodobny przy jej założeniu, tj. gdy

$$P(d \in K/H_0) = \alpha \quad (z.1)$$

(prawdopodobieństwo, że sprawdzian hipotezy d należy ($\in$) do zbioru krytycznego K , gdy hipoteza H_0 jest prawdziwa, równa się α);

2. wolno przyjąć hipotezę H_0 , gdy zaszedł fakt wysoce prawdopodobny przy założeniu tej hipotezy, tj. gdy

$$P(d \bar{\in} K/H_0) = 1 - \alpha, \quad (z.2)$$

przy czym $\bar{\in}$ oznacza nienależenie do zbioru krytycznego K ;

3. należy przyjąć hipotezę H_0 , gdy zachodzi (z.2) oraz gdy został stwierdzony fakt wysoce prawdopodobny przy założeniu hipotezy konkurencyjnej H_1 , tj. gdy

$$i \quad \left. \begin{aligned} P(d \bar{\in} K/H_0) &= 1 - \alpha \\ P(d \in K/H_1) &= 1 - \beta, \end{aligned} \right\} \quad (z.3)$$

gdzie β błąd II rodzaju, tj.

$$\beta = P(d \in K/H_1). \quad (z.4)$$

Błąd β , podobnie jak α , jest dowolnie małą liczbą; można przyjąć umownie $\beta = \alpha$.

Wydaje się, że w teorii hipotez statystycznych istnieje również problem, który ze względów praktycznych wymaga rozstrzygnięcia. Mianowicie zgodnie z poglądem H. Craméra, popieranym również przez niektórych statystyków, a ostatnio (1965 r.) wyrażonym również przez Z. Hellwiga w [4];

4. należy odrzucić sprawdzaną hipotezę H_0 przy założeniu, że jest prawdziwa, gdy na podstawie testu stwierdza się zbyt wielce prawdopodobny fakt spełnienia tej hipotezy, tj. gdy

$$P(d \in K'/H_0) > 1 - \alpha, \quad (z.5)$$

gdzie K' jest drugim pewnym zbiorem krytycznym, różnym od zbioru K .

Odrzucenie prawdziwej hipotezy H_0 , gdy zachodzi (z.5) wydaje się być w szeregu praktycznych przypadków trudne do zrozumienia. Intuicyjnie wydaje się, że tym bardziej hipotezę H_0 wolno przyjąć, gdy zachodzi (z.5), Z. Czerwiński w [2] pisząc o schematach wnioskowania stosowanych przy sprawdzaniu hipotez statystycznych na gruncie logiki kryterium (z.5) nie rozpatruje.

Ta okoliczność skłania nas do ostrożnego wyciągnięcia wniosków w przypadku pojawienia się schematu (z.5), a zarazem uzasadnia potrzebę wnikliwego badania i wyboru (tam, gdzie to jest możliwe) stosowanych testów do weryfikacji hipotez statystycznych w zagadnieniach elektrotechnicznych lub ogólnie — w praktyce technicznej.

W konkretnych problemach rozpatrywanych w niniejszej pracy musimy wybrać lub zaproponować logiczny schemat wnioskowania statystycznego w odniesieniu do weryfikacji hipotezy H_0 , że rozkład elementów a_j , tworzących próbkę jest w przybliżeniu normalny.

We wszystkich rozpatrywanych na początku załącznika trzech przypadkach dysponujemy jednym ciągiem elementów a_j , niezależnie od sposobu otrzymania tych elementów. Powstają warianty użyteczne:

1. zbadanie, czy rozkład elementów a_j można uznać za w przybliżeniu normalny, lub

2. zbadanie, czy na podstawie znanego ciągu elementów a_j możemy wyciągnąć wnioski (przypuszczenia) dotyczące rozkładu elementów całej populacji, którą ten ciąg umownie reprezentuje, jako ciąg wylosowany lub nie wylosowany.

W przypadku pierwszym zastosowanie statystycznej hipotezy H_0 stanowi umowny sposób oceny przybliżenia badanego rozkładu do teoretycznego rozkładu normalnego. Jeżeli tak, schemat logiczny (z.5) jest nieuzasadniony. Przyjęcie tego schematu prowadziłoby do wyciągnięcia fałszywego wniosku, że rozkład badanych elementów nie może być uznany za w przybliżeniu normalny, gdy w rzeczywistości jest w przybliżeniu normalny.

W przypadku tym korzystanie ze schematów logicznych (z.1), (z.2) i (z.3) jest celowe.

Przypadek drugi tym istotnym różni się od pierwszego, że wysuwamy przypuszczenie na podstawie przypadku pierwszego, że rozkład elementów w całej populacji jest taki sam

jak stwierdzamy w pojedynczej próbie, zawierającej n elementów. O ile stwierdzimy wysoce prawdopodobny fakt zgodności rozkładu w próbie z rozkładem normalnym, nie mamy żadnych podstaw, aby na tej podstawie wysunąć przypuszczenie, że w populacji generalnej jest odwrotnie, tj. że nie ma zgodności między rzeczywistym i naturalnym teoretycznym rozkładem elementów w populacji generalnej. Wobec tego wydaje się nam nieuzasadnione korzystanie w praktyce technicznej ze schematu logicznego (z.5) również w tym przypadku.

W zakończeniu cytujemy stwierdzenie znanego statystyka, Polaka z pochodzenia, J. Neymana [7], str. 242 (1967 r.), które wyraźnie charakteryzuje rozpatrywane zagadnienie hipotez statystycznych i ich weryfikacji:

„Testowanie hipotezy H_0 ¹⁾ prowadzi do jednego z dwóch możliwych wyników i albo ta hipoteza zostanie przyjęta, albo odrzucona. Oczywiście, zarówno jedno, jak i drugie poczynanie może być błędne. Hipoteza H_0 może być prawdziwa, a test ją odrzuci, albo odwrotnie, hipoteza H_0 może być fałszywa, wtedy hipoteza H_1 będąca zaprzeczeniem hipotezy H_0 jest prawdziwa, a test może jej nie odrzucić”.

W elektrotechnice coraz częściej zaczyna się traktować zjawiska jako takie, którym towarzyszy określone prawdopodobieństwo ich zaistnienia w konkretnych warunkach. Praktyczne ujmowanie takiego występowania zjawisk jest u nas jeszcze słabo rozpowszechnione. Prowadzi to do poważnych konsekwencji gospodarczych. Na przykład zamiast rozważyć dobór aparatury łączeniowo-rozdzielczej w systemach elektroenergetycznych do (m. in.) wartości prądu udarowego o założonym wielkim prawdopodobieństwie jego wystąpienia w konkretnych warunkach, aparaturę tę dobiera się do wartości prądu udarowego, którego prawdopodobieństwo wystąpienia jest znikomo małe.

W zagadnieniach probabilistycznego ujmowania zjawisk problem hipotez statystycznych będzie prawdopodobnie odgrywał ważną rolę.

LITERATURA CYTOWANA W ZAŁĄCZNIKU

1. H. Cramér, *Mathematical Methods of Statistics*, Stockholm 1945, Tłum. polskie: *Metody matematyczne w statystyce*, PWN, Warszawa 1958.
2. Zb. Czerwiński, O stosunku wnioskowania statystycznego do dedukcji i indukcji tradycyjnej, Rozdz. II pracy: *Logiczna teoria nauki*, PWN, Warszawa 1966.
3. M. Fiszer, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN, Wyd. 2, Warszawa 1958, Wyd. 3, 1967.
4. Z. Hellwig, Test zgodności dla małej próbki, *Przegląd Statystyczny* 1965, z. 2.
5. Z. Hellwig i inni, *Zarys ekonometrii*, PWE, Warszawa 1967.
6. E. Leman, *Proverka statističeskich gipotez*, „Nauka”, Moskwa 1964.
7. J. Neyman, Behawiorystyczny punkt widzenia na statystykę matematyczną, Rozdz. w pracy: *Problemy ekonomii, planowania i ekonometrii*, Red. E. Vielrose, Warszawa 1967.
8. E. Pleszczyńska i R. Zieliński, Uwagi o weryfikacji hipotez statystycznych testami różnej mocy, *Przegląd Statystyczny* 1964, z. 2.
9. E. Pleszczyńska, Liczność próbki przy zagwarantowanej rozdzielnosci hipotez, *Zastosowania Matematyki*, 1966, z. 4.
10. Polski Komitet Normalizacyjny, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, Terminy, określenia, symbole, PN-58/N-01051, W.N., Warszawa 1959.

¹⁾ W tekście oryginalnym w [7] H_0 oznacza się przez H , a H_1 przez $\bar{H}$. Takie oznaczenia są również stosowane w niektórych innych pracach statystycznych.

Z. KOWALSKI

METHODS OF HYPOTHESIS TESTING WITH NORMAL DISTRIBUTION
OF SMALL SIZE SET

Summary

In the paper a practical method of hypothesis testing with normal distribution of set representing a small sample is presented. This method is based on a simultaneous application of two statistical tests with different criteria i.e. Massey and Hellwig test.

The critical values of criterion of Massey test for practical use on applied electrical engineering are proposed. Some practical use of Hellwig test is described.

Design examples and quantitative analysis of various practical cases are given.

In the annex some questions of statistical hypothesis and their testing of selected electrical problems are presented.

Z. KOWALSKI

METHODEN FÜR HYPOTHESENBESTÄTIGUNG ÜBER NORMALE ZERLEGUNG
VON ELEMENTEN GERINGEN UMFANGS

Zusammenfassung

In dieser Bearbeitung wurde ein praktisches Verfahren für die Hypothesenbestätigung über normale Zerlegung einer Elementenkollekte bei kleiner Probe dargestellt.

Dieses Verfahren beruht auf gleichzeitiger Anwendung von zwei statistischen Testen, die sich auf verschiedene Kriterien stützen, u.zw. des Massey- und des Hellwig-Testes.

Auf Grund der Massey-Theorie wurden Grenzwerte für die Bestätigung der Teste dieses Autors erarbeitet, die einen Vorschlag für praktische Anwendung bei elektrotechnischen Problemen darstellen. Es wurde auch ein Vorschlag zur Anwendung des Hellwig-Testes gebracht.

Die beschriebenen Methoden für die Hypothesenbestätigung betreffs Normalzerlegung wurden durch Berechnungsbeispiele ergänzt. Außerdem wurden Mengenresultate für Versuche bei Anwendung beider obengenannten Teste in zahlreichen praktischen Fällen angeführt.

Im Anhang zur obiger Bearbeitung wurde das Problem von statistischen Hypothesen und deren Bestätigung mit besonderer Berücksichtigung praktischer Probleme der Elektrotechnik erörtert.

З. КОВАЛЬСКИ

МЕТОДЫ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗЫ О НОРМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЭЛЕМЕНТОВ
СОСТАВЛЯЮЩИХ МАЛЫЙ ОБЪЕМ

Резюме

Представлен практический метод проверки гипотезы о нормальном распределении множества элементов составляющих малый объем.

Этот метод основан на одновременном применении двух статистических критериев, базирующихся на различных признаках, т. е. критериев Мессе и Гельвига.

Базируя на трудах Мессе, автор определил критические значения его критерия, что дает возможность использовать их на практике в вопросах прикладной электротехники. Представлен тоже практический метод применения критерия Гельвига.

К представленным методам проверки гипотезы о нормальном распределении даются примеры расчетов. Кроме того, приводятся численные результаты исследования многочисленных практических случаев при помощи обоих вышеприведенных критериев.

В приложении к работе представлен вопрос статистических гипотез и их проверки, с особым учетом практических задач электротехники.

Uogólniona teoria selsyna

Teoria selsyna transformatorowego i analiza jego błędów wynikających z niedokładności obróbki

TADEUSZ MISSALA (WARSZAWA)

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów

Otrzymano 25.2.1970

Dotychczasowe opracowania teorii selsynów, zebrane i przedstawione syntetycznie w [1] i [2], rozpatrywały te maszyny jako elementy o parametrach skupionych. O ile założenie takie odniesione do uzwojeń nie wprowadza istotnych ograniczeń w teorii, to jednak odniesione do obwodu magnetycznego uniemożliwia przeprowadzenie dostatecznie wnikliwej analizy. Obwód magnetyczny jest bowiem typowym elementem anizotropowym; można zaobserwować zarówno różnice we własnościach magnetycznych materiału ferromagnetycznego, z którego jest on zbudowany, jak również we własnościach magnetycznych szczeliny powietrznej, wynikających ze zmienności jej wymiarów. Dla uwzględnienia anizotropowości obwodu magnetycznego konieczne jest rozpatrzenie selsyna jako elementu o parametrach rozłożonych.

Dla zrealizowania postawionego w tytule zadania przyjęto następującą drogę postępowania:

- opracowanie zarysu teorii uogólnionego selsyna, w której obwód magnetyczny i pewne obwody elektryczne będą traktowane jako obwody o stałych rozłożonych,
- opracowanie zarysu teorii selsyna transformatorowego, jako szczególnego przypadku teorii ogólnej,
- rozpatrzenie przypadku selsyna transformatorowego idealnego i symetrycznego, co pozwoli na porównanie nowoopracowanej teorii ze sprawdzoną już teorią podaną w [1] i [2],
- rozpatrzenie wpływu niedokładności obróbki mechanicznej: mimośrodowości, bicia i eliptyczności stojana oraz wirnika.

SPIS OZNACZEŃ

- A — parametr dla obliczeń mimośrodowości (wzór 3.30)
- A_e — parametr dla obliczeń eliptyczności (wzór 4.12)
- A_{egr} — graniczna wartość parametru A_e dla obliczeń eliptyczności (wzór 4.29)
- a — parametr obliczeniowy (wzór 2.49)
- a_1 — szerokość czołowej części wirnika kubkowego, wystającej poza pakiety
- B — parametr obliczeniowy (wzór 3.30)
- B_1 — parametr obliczeniowy (wzór 4.13)
- B_{1z} — indukcja w żelazie stojana

- B_{2z} — indukcja w żelazie wirnika
 B_δ — indukcja w szczelinie powietrznej
 D, D_1, D_2 — wyznaczniki używane przy rozwiązywaniu równań
 E_j — amplituda siły elektromotorycznej nadajnika, zasilającej j -te uzwojenie stojana odbiornika
 G_o — permeancja szczeliny powietrznej odniesiona do jednostki długości obwodu wewnętrznego wytoczenia stojana (1.6)
 G_1, G_2, G_3 — reluktancje, (wzory 2.32)
 $H_{1z}(x)$ — natężenie pola magnetycznego w żelazie stojana
 $H_{2z}(x)$ — natężenie pola magnetycznego w żelazie wirnika
 H_δ — natężenie pola magnetycznego w szczelinie powietrznej
 $i_{1j}; I_{1j}$ — prąd w j -tym uzwojeniu stojana
 $i_{2k}; I_{2k}$ — prąd w k -tym uzwojeniu wirnika
 i_p, I_p — prąd w wirniku kubkowym
 I_a, I_b, I_1 — prądy zastępcze w stojanie (wzory 2.33 i 2.46)
 j — jednostka urojona
 L_{oz} — indukcyjność rozproszeniowa poprzeczna (wzdłuż osi z), na jednostkę długości szczeliny w kierunku tworzącej, dla elementu obwodu kołowego o współrzędnej ξ
 L_{ox} — indukcyjność rozproszeniowa podłużna na jednostkę długości (wzdłuż obwodu) części wirnika wystających poza pakiety
 L_{r1j} — indukcyjność rozproszeniowa obwodu j -tej fazy stojana
 L_{rNj} — indukcyjność rozproszeniowa j -tej fazy stojana selsyna nadawczego
 L_{L1j} — indukcyjność linii włączonej w j -tą fazę
 L_{rr1j} — indukcyjność rozproszenia j -tej fazy selsyna transformatorowego
 L_{r2k} — indukcyjność rozproszeniowa k -tego uzwojenia wirnika
 L_{o2k} — indukcyjność obciążenia k -tego uzwojenia wirnika
 l — długość pakietu stojana
 m — liczba uzwojeń stojana
 n — liczba uzwojeń wirnika
 p — liczba par biegunów selsyna odbiorczego lub transformatorowego
 p_N — liczba par biegunów selsyna nadawczego
 q — współczynnik mimośrodowości (wzór 3.3)
 q_e — współczynnik eliptyczności (wzór 4.3)
 q_{gr} — graniczna wartość współczynnika mimośrodowości q , dla przypadku mimośrodowości i bicia (3.47)
 q_{egr} — graniczna wartość współczynnika eliptyczności q_e , dla przypadku eliptyczności stojana i wirnika (4.27)
 $R_{\mu o}$ — reluktancja obwodu magnetycznego, liczona na jednostkę długości jego obwodu (1.7)
 R_μ — reluktancja zastępcza (2.34)
 r_{1j} — rezystancja obwodu j -tej fazy stojana
 r_{N1j} — rezystancja uzwojenia j -tej fazy selsyna nadawczego
 r_{L1j} — rezystancja linii włączonej w j -tą fazę

- r_{tr1j} — rezystancja uzwojenia j -tej fazy selsyna transformatorowego
 r_{2k} — rezystancja k -tego uzwojenia wirnika
 r_{o2k} — rezystancja obciążenia k -tego uzwojenia wirnika
 r_{ox} — rezystancja podłużna, na jednostkę długości obwodu, części wirnika kubkowego wystających poza pakiety
 r_{oz} — rezystancja poprzeczna (wzdłuż osi z), na jednostkę długości szczeliny w kierunku tworzącej, dla elementu obwodu kołowego o współrzędnej ξ
 S_{1z} — przekrój żelaza stojana
 S_{2z} — przekrój żelaza wirnika
 t — czas
 $\underline{U}_{zj}$ — napięcie zastępcze w obwodzie j -tej fazy stojana (wzory 2.17)
 $\underline{U}_u$ — spadek napięcia magnetycznego w szczelinie powietrznej elementu o współrzędnej x
 U_{wy} — napięcie wyjściowe selsyna transformatorowego
 $U_{wy\infty}$ — j.w. przy rozwartym uzwojeniu wyjściowym
 $W_{1j}(x)$ — funkcja rozkładu przestrzennego j -tego uzwojenia stojana
 $W_{2k}(x)$ — funkcja rozkładu przestrzennego k -tego uzwojenia wirnika
 x — współrzędna liniowa, bieżąca, liczona wzdłuż obwodu wewnętrznego wykroju stojana
 $\underline{Y}_1$ — admitancja obwodów stojana (wzór 2.49)
 $\underline{Y}_2$ — admitancja obwodów wirnika (wzór 2.49)
 $\underline{Y}_o$ — współczynnik obliczeniowy (wzór 3.40)
 $\underline{Z}_{1j}$ — impedancja obwodu j -tej fazy stojana
 $\underline{Z}_{2k}$ — impedancja k -tego uzwojenia wirnika
 $\underline{Z}_{2kabc}$ — impedancja obciążenia k -tego uzwojenia wirnika
 z_{1j} — liczba zwojów j -tego uzwojenia stojana
 z_{2k} — liczba zwojów k -tego uzwojenia wirnika
 α — kąt obrotu osi magnetycznej pierwszego ($k = 1$) uzwojenia wirnika w stosunku do osi magnetycznej pierwszego ($j = 1$) uzwojenia stojana ($\alpha = p\alpha_m$)
 α_m — kąt obrotu wirnika z położenia zerowego
 β_{1j} — kąt określający położenie osi magnetycznej j -tego uzwojenia stojana w stosunku do osi magnetycznej uzwojenia $j = 1$, przyjętej jako oś podłużna maszyny
 β_{2k} — kąt określający położenie osi magnetycznej k -tego uzwojenia wirnika w stosunku do osi magnetycznej pierwszego uzwojenia stojana ($j = 1$)
 β_{Nj} — kąt określający położenie osi magnetycznej j -tego uzwojenia selsyna nadawczego w stosunku do osi pierwszego uzwojenia ($j = 1$) selsyna nadawczego
 γ_{2k} — kąt określający położenie osi magnetycznej k -tego uzwojenia wirnika w stosunku do osi magnetycznej pierwszego ($k = 1$) uzwojenia wirnika
 $\delta(x)$ — długość szczeliny powietrznej nierównomiernej, w danym punkcie o współrzędnej x

- δ_o — długość równomiernej szczeliny powietrznej
 δ_p — grubość ścianki wirnika kubkowego
 δ — kąt niezgodności łącza
 δU_{wy} — wartość względna napięcia błędu
 δU_{wyco} — jw. przy rozwartym uzwojeniu wyjściowym
 ΔU_{wy} — wartość bezwzględna napięcia błędu
 ΔU_{wyco} — jw. przy rozwartym uzwojeniu wyjściowym
 Δh — odległość osi mimośrodowych powierzchni stojana i wirnika
 η — kąt przesunięcia pomiędzy osią pierwszego uzwojenia stojana ($j = 1$) a geometryczną osią symetrii selsyna
 Δr — połowa różnicy pól eliptycznych przekroju zdeformowanego
 ϑ — kąt określający położenie osi magnetycznej wirnika selsyna nadawczego w stosunku do osi magnetycznej pierwszego uzwojenia jego stojana
 θ_{1j} — przepływ j -tego uzwojenia stojana
 θ_{2k} — przepływ k -tego uzwojenia wirnika
 θ_p — przepływ oddziaływania wirnika kubkowego
 μ_{1z} — przenikalność magnetyczna żelaza stojana
 μ_{2z} — przenikalność magnetyczna żelaza wirnika
 ξ — bieżąca współrzędna elementu schematu zastępczego wirnika kubkowego (traktowanego jako obwód o stałych rozłożonych), liczona od dowolnego punktu na jego powierzchni
 ρ_p — rezystywność materiału wirnika kubkowego
 τ — podziałka biegunowa selsyna odbiorczego
 τ_N — podziałka biegunowa selsyna nadawczego
 ϕ — wypadkowy strumień magnetyczny
 $\phi_1, \phi_2, \phi_{1k}, \phi_{2k}$ — ($k = 0, 1, \dots$) — składowe wypadkowego strumienia magnetycznego
 Ψ_{1j} — strumień główny skojarzony z j -tym uzwojeniem stojana
 Ψ_{2k} — strumień główny skojarzony z k -tym uzwojeniem wirnika

1. ZARYS TEORII UOGÓLNIONEGO SELSYNA

1.1. Ustalenie zmiennych i przedziałów ich zmienności

W rozważaniach przyjęto zmienne niezależne oraz określono przedziały ich zmienności według poniższego wyliczenia:

1° x — współrzędna liniowa, mierzona wzdłuż wewnętrznego obwodu stojana, przy czym:

$$0 \leq x \leq \pi D,$$

$$\text{a ponieważ: } \frac{\pi D}{2p} = \tau, \quad \text{to } 0 \leq x \leq 2p\tau;$$

2° α — kąt elektryczny określający położenie wirnika;

3° $\beta_{1j}, \beta_{2k}, \gamma_{2k}$ — kąty elektryczne, określające położenie poszczególnych uzwojeń;

4° ε — kąt bieżący punktu na obwodzie, odpowiadający współrzędnej x

$$\varepsilon = \frac{\pi}{\tau} x,$$

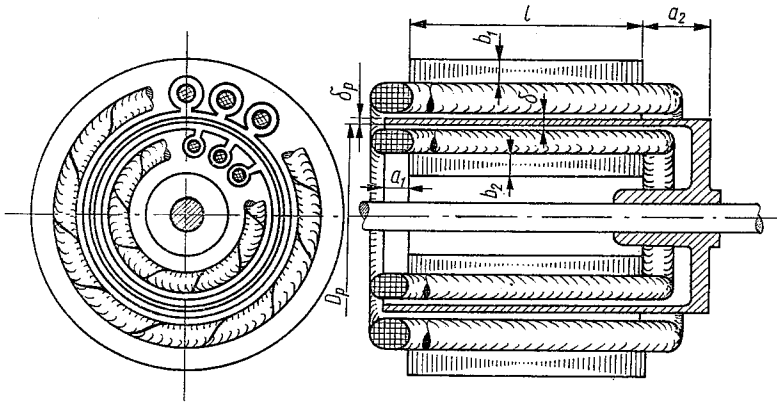
przy czym: $0 \leq \varepsilon \leq 2p\pi$;

5° liczba zwojów p -biegunowego uzwojenia selsyna jest z , liczba zwojów na jedną parę biegunów będzie więc:

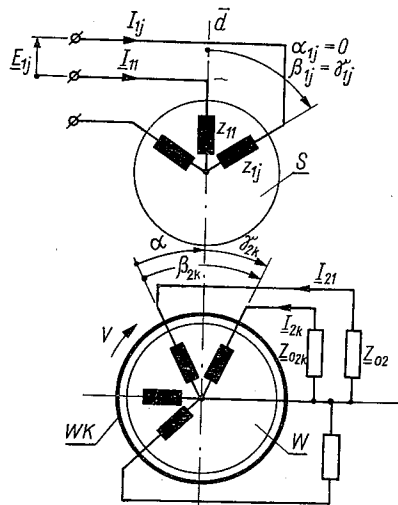
$$\frac{z}{p}.$$

1.2. Uwagi ogólne

Rozważony zostanie uogólniony przypadek selsyna odbiorczego, którego schemat konstrukcyjny przedstawiono na rys. 1.1., zaś schemat elektryczny na rys. 1.2.



Rys. 1.1. Schemat konstrukcyjny uogólnionego selsyna



Rys. 1.2. Schemat elektryczny uogólnionego selsyna

S — stojan, W — wirnik, WK — wirnik kubkowy

Przedstawiony przypadek obejmuje:

- 1° — selsyn nadawczy (obwód magnetyczny),
- 2° — selsyn odbiorczy,
- 3° — selsyn transformatorowy,
- 4° — selsyn różnicowy,
- 5° — selsyno-silnik (wg patentu D.V. Svečarnika [4]).

W rozważaniach wykorzystano metodę analizy wyłożoną przez Ju. M. Puliera [3].

Na stojanie selsyna znajduje się p -biegunowe uzwojenie zasilane z sieci prądu przemiennego. Jest to uzwojenie nawinięte m -fazowo, lecz zasilane układem napięć nie przesuniętych w czasie, a przesuniętych w przestrzeni. Liczby zwojów tych uzwojeń oznaczono przez z_{1j} .

Na wirniku znajdują się w ogólnym przypadku również n uzwojenia, przesunięte w przestrzeni co $\gamma_{2k} = \frac{360^\circ}{n}$ elektrycznych; ich liczby zwojów oznaczono przez z_{2k} . Są one obciążone impedancjami Z_{2k} . Kąt przesunięcia osi pierwszego uzwojenia stojana jest α , co jest równe kątowi obrotu wirnika z położenia zerowego.

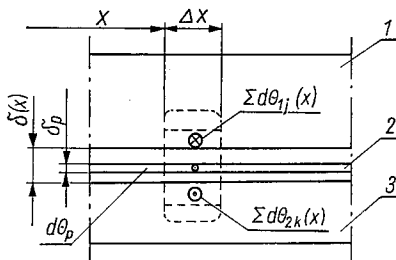
Wirnik kubkowy, cienkościenny, pełni rolę dodatkowego uzwojenia zwartego (wirnik ten występuje tylko przy selsyno-silnikach). W stanie ustalonym przepływy oddziaływania uzwojeń wirnika będą zależne od kąta jego położenia α .

Przez odpowiednie eliminowanie nie występujących uzwojeń, z uogólnionego selsyna można uzyskać przypadki wymienione wyżej.

1.3. R ó w n a n i a p o d s t a w o w e

1.3.1. Równania dla obwodu magnetycznego i wirnika kubkowego

Ponieważ uzwojenia stojana są zasilane napięciem sinusoidalnie zmiennym, to wszystkie nieznanne wielkości (np. strumień magnetyczny, spadki napięcia magnetycznego) będą okresowymi funkcjami zarówno czasu jak i zmiennej przestrzennej x .



Rys. 1.3. Wycinek obwodu magnetycznego uogólnionego selsyna. Rozkład przepływów:

1 — stojan, 2 — wirnik kubkowy, 3 — wirnik

Jeżeli rozważyć elementarny wycinek obwodu magnetycznego rozpatrywanego uogólnionego selsyna (rys. 1.3), to otrzyma się:

$$\oint H dl = d \left[\sum_{j=1}^m \theta_{1j} - \theta_p - \sum_{k=1}^n \theta_{2k} \right]. \quad (1.1)$$

Lewą stronę równania (1.1) można przedstawić w postaci sumy skończonej, a mianowicie jako:

$$\oint H dl = [H_{1z}(x) + H_{2z}(x)] \Delta x + [H_\delta(x) - H_\delta(x + \Delta x)] \delta(x) - H_\delta(x + \Delta x) \Delta \delta(x). \quad (1.2)$$

Przechodząc do granicy i pomijając nieskończenie małe rzędów wyższych niż pierwszy otrzymuje się:

$$\oint H dl = \left[H_{1z}(x) + H_{2z}(x) - \frac{dH_\delta}{dx} \delta(x) - H_\delta(x) \frac{d\delta(x)}{dx} \right] dx. \quad (1.3)$$

Można wprowadzić podstawienie:

$$\begin{cases} H_{1z}(x) = \frac{1}{\mu_{1z}} B_{1z} = \frac{1}{\mu_{1z} S_{1z}} \phi, \\ H_{2z}(x) = \frac{1}{\mu_{2z}} B_{2z} = \frac{1}{\mu_{2z} S_{2z}} \phi, \\ H_\delta(x) = \frac{1}{\mu_o} B_\delta = \frac{1}{\mu_o l} \frac{d\phi}{dx}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Po wprowadzeniu (1.4) do (1.3) i (1.1) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \frac{\delta(x)}{\mu_o l} \cdot \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{1}{\mu_o l} \frac{d\delta(x)}{dx} \cdot \frac{d\phi}{dx} - \left(\frac{1}{\mu_{1z} S_{1z}} + \frac{1}{\mu_{2z} S_{2z}} \right) \phi = \\ = -\frac{d}{dx} \left[\sum_{j=1}^m \theta_{1j} - \theta_p - \sum_{k=1}^n \theta_{2k} \right]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Dla uproszczenia zapisu wprowadzono oznaczenia:

$$\frac{\mu_o l}{\delta(x)} = G_o(x) \quad (1.6)$$

$$\frac{1}{\mu_{1z} S_{1z}} + \frac{1}{\mu_{2z} S_{2z}} = R_{\mu o} \quad (1.7)$$

$G_o(x)$ jest tu poprzeczną (promieniową) permeancją właściwą szczeliny powietrznej i w ogólnym przypadku zależy od x . R_μ jest zaś podłużną (liczoną po łuku podziałki biegunowej) reluktancją właściwą żelaza obwodu magnetycznego.

Równanie (1.5) po wprowadzeniu (1.6) i (1.7) przyjmuje postać:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{1}{\delta(x)} \cdot \frac{d\delta(x)}{dx} \cdot \frac{d\phi}{dx} - R_{\mu o} G_o(x) \phi = -G_o(x) \frac{d}{dx} \left[\sum_{j=1}^m \theta_{1j} - \theta_p - \sum_{k=1}^n \theta_{2k} \right]. \quad (1.8)$$

W przypadku równomiernej szczeliny powietrznej, tj. $\delta(x) = \delta_o = \text{const}$ a zatem i $G_o(x) = G_o = \text{const}$, otrzymuje się:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} - R_{\mu o} G_o \phi = -G_o \frac{d}{dx} \left[\sum_{j=1}^m \theta_{1j} - \theta_p - \sum_{k=1}^n \theta_{2k} \right]. \quad (1.9)$$

Ostatnie wprowadzone uproszczenie jest równoważne założeniu, że pole magnetyczne jest funkcją jedynie współrzędnej x , tj. odległości mierzonej wzdłuż obwodu szczeliny powietrznej.

Pozwala ono na przyjęcie założenia [3], że dla uogólnionego selsyna może być przyjęty schemat zastępczy zawierający dwa obwody o parametrach rozłożonych (rys. 1.4):

- obwód magnetyczny złożony z nieskończenie wielu członów elementarnych;
- obwód elektryczny, którego każda elementarna gałąź jest sprzężona z każdym elementarnym członem obwodu magnetycznego.

Istnienie rozłożonych przepływów uzwojeń: $\sum_{j=1}^m \theta_{1j}$ i $\sum_{k=1}^n \theta_{2k}$ uwzględniono w schemacie przez włączenie w każdy elementarny człon obwodu magnetycznego elementarnego przepływu wzbudzenia $\sum_{j=1}^m d\theta_{1j}$ i elementarnych przepływów wszystkich n uzwojeń wirnika $\sum_{k=1}^n d\theta_{2k}$ oraz przepływu oddziaływania wirnika kubkowego $d\theta_p$. Na podstawie schematu z rys. 4 można ułożyć dwa równania telegraficzne, prawdziwe dla każdego elementarnego członu obwodu magnetycznego:

$$\left. \begin{aligned} U_\mu G_o(x) &= -\frac{d\phi}{dx}, \\ \frac{dU_\mu}{dx} &= -\phi R_{\mu o} + \frac{d}{dx} \left[\sum_{j=1}^m \theta_{1j} - \theta_p - \sum_{k=1}^n \theta_{2k} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.9a)$$

Równanie (1.9) można otrzymać z (1.9a) przez wyrugowanie parametru U_μ .

Wzajemnie sprzężone elementarne obwody elektryczne i magnetyczne znajdują się oczywiście we wzajemnie prostopadłych płaszczyznach. Każdy elementarny obwód elektryczny wirnika kubkowego jest skojarzony z elementarnym zmiennym strumieniem magnetycznym $d\phi$, co z kolei pozwala przedstawić nitkę prądu wirnika kubkowego jako czynną linię kołową, z rozłożonymi wzdłuż jej długości elementarnymi źródłami SEM de_p , które są związane z elementarnymi strumieniami magnetycznymi ogólnie znaną zależnością:

$$de_p = -\frac{\partial}{\partial t} d\phi.$$

Dla prądów wirnika kubkowego otrzymuje się zależności (rys. 1.4):

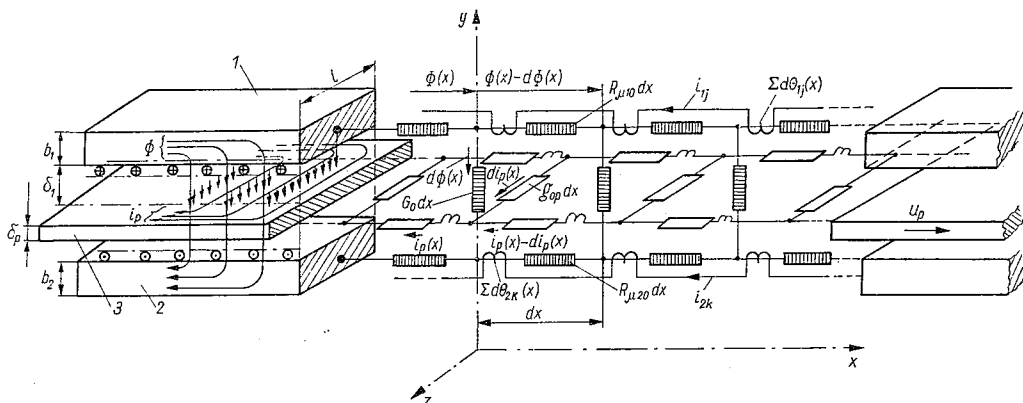
$$\left. \begin{aligned} U_p &= -\left(r_{oz} + L_{oz} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial i_p}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial U_p}{\partial \xi} &= \left(r_{ox} + L_{ox} \frac{\partial}{\partial t}\right) i_p - \frac{\partial e_p}{\partial \xi}. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Jeżeli przez x oznaczyć współrzędną punktu początkowego na obwodzie wirnika w układzie osi współrzędnych stojana, to przy jednostajnym obrocie wirnika z prędkością dx/dt współrzędne jego punktów względem układu osi współrzędnych stojana będą:

$$x = \frac{dx}{dt} t + \xi,$$

skąd:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt}.$$



Rys. 1.4. Schemat zastępczy uogólnionego selsyna:

1,2 — części ferromagnetyczne, 3 — wirnik kubkowy

Zgodnie z (1.1), na podstawie rys. 1 otrzymuje się:

$$r_{ox} = \frac{2\varrho_p}{a_1 \delta_p} = r_{op} \quad (1.11)$$

oraz

$$g_{oz} = \frac{\delta_p}{\varrho_o l} = g_{op}. \quad (1.12)$$

Przepływ prądu wirnika kubkowego:

$$\theta_p = i_p. \quad (1.13)$$

Indukcyjności L_{oz} i L_{ox} wynikają z istnienia strumieni rozproszenia związanych z prądem wirnika kubkowego, przy czym [3]:

- indukcyjność L_{oz} wynika z istnienia strumieni rozproszenia na długości wirnika znajdującej się pomiędzy pakietami; strumień ten można umownie nazwać strumieniem rozproszenia żłobkowego;
- indukcyjność L_{ox} wynika z istnienia strumieni rozproszenia dokoła połączeń czołowych, tj. tych części wirnika kubkowego, które znajdują się poza pakietami.

1.3.2. Równania dla uzwojeń stojana i wirnika

Na podstawie rys. 1.2 dla uzwojeń stojana i wirnika ważne są następujące równania:

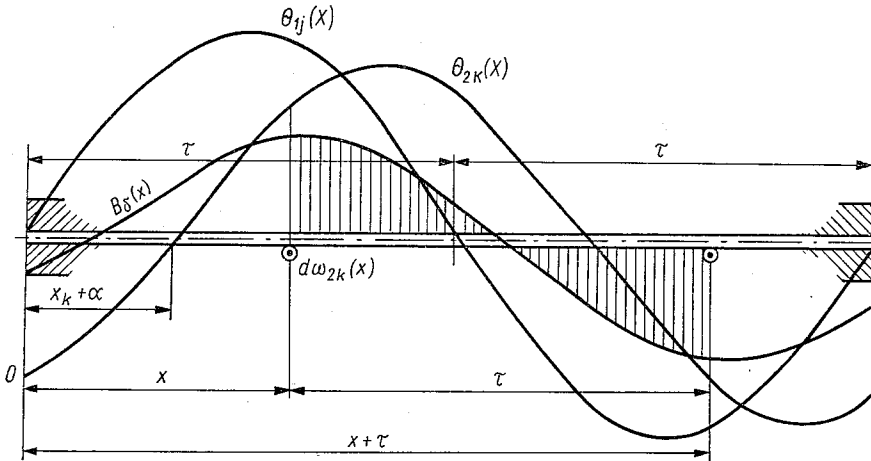
$$u_{j,j+1} = r_{1j} i_{1j} + L_{r1j} \frac{di_{1j}}{dt} + \frac{d\Psi_{1j}}{dt} - r_{1,j+1} i_{1,j+1} - L_{r1,j+1} \frac{di_{1,j+1}}{dt} - \frac{d\Psi_{1,j+1}}{dt};$$

$$j = 1, 2, \dots, m; \quad m+1 = 1, \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned}
 i_{2k}(r_{2k}+r_{o2k})+(L_{r2k}+L_{o2k})\frac{di_{2k}}{dt}-(r_{2,k+1}+r_{o2,k+1})i_{2,k+1}-(L_{r2,k+1}+L_{o2,k+1})\frac{di_{2,k+1}}{dt}= \\
 = -\frac{d\Psi_{2k}}{dt}+\frac{d\Psi_{2,k+1}}{dt}; \quad k=1,2,\dots,n; \quad n+1=1. \quad (1.15)
 \end{aligned}$$

Zgodnie ze schematem rozkładu strumieni i przepływów (rys. 1.5) strumienie skojarzone z uzwojeniami stojana są:

$$\Psi_{1j} = \int_{\beta_{1j}\frac{\tau}{\pi}}^{\tau+\beta_{1j}\frac{\tau}{\pi}} dW_{1j}(x) \int_x^{x+\tau} B_\delta dx, \quad (1.16)$$



Rys. 1.5. Schemat rozwinięty rozkładu pól i przepływów

a że

$$B_\delta = \frac{1}{l} \frac{d\phi}{dx}, \quad (1.17)$$

więc też:

$$\Psi_{1j} = \int_{\beta_{1j}\frac{\tau}{\pi}}^{\tau+\beta_{1j}\frac{\tau}{\pi}} dW_{1j}(x) [\phi]_x^{x+\tau} \quad (1.18)$$

oraz dla strumieni skojarzonych z uzwojeniami wirnika:

$$\Psi_{2k} = \int_{\beta_{2k}\frac{\tau}{\pi}}^{\tau+\beta_{2k}\frac{\tau}{\pi}} dW_{2k}(x) [\phi]_x^{x+\tau}. \quad (1.19)$$

Równania: (1.5), (1.10), (1.14), (1.15), (1.18) i (1.19) stanowią ogólny model matematyczny rozważanego selsyna. W przypadku stałej szczeliny powietrznej zamiast równania (1.5) obowiązuje równanie (1.9), przy czym należy pamiętać, że:

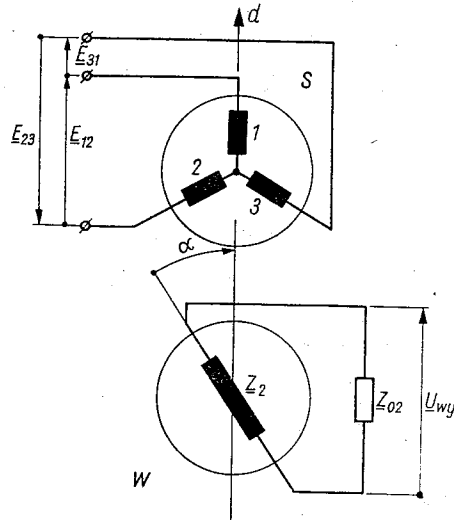
$$\phi R_{\mu o} = f(\phi). \quad (1.20)$$

2. SELSYN TRANSFORMATOROWY IDEALNY

2.1. Równania selsyna transformatorowego idealnego

Dla przypadku selsyna transformatorowego, którego schemat pokazano na rys. 2.1, ważne są następujące zależności:

$$\left. \begin{aligned} \delta_p &= 0 \text{ (nie ma wirnika kubkowego),} \\ m &= 3 \text{ (stożan ma 3 uzwojenia),} \\ n &= 1 \text{ (wirnik ma jedno uzwojenie),} \\ \beta_{11} &= 0, \quad \beta_{12} = \frac{2\pi}{3}, \quad \beta_{13} = \frac{4\pi}{3}, \\ \beta_{2k} &= \alpha, \quad \gamma_{2k} = 0, \quad k = 1 \dots n. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$



Rys. 2.1. Schemat elektryczny selsyna transformatorowego 1, 2, 3, uzwojenia fazowe stojana, S — stojan, W — wirnik

Idealny selsyn transformatorowy jest ponadto scharakteryzowany przez następujące założenia:

$$\mu_{1z} = \mu_{2z} = \mu = \text{const}; \quad \delta(x) = \delta_o = \text{const}. \quad (2.1a)$$

Wynikiem założeń (2.1a) są następujące zależności:

$$G_o(x) = \mu_o \frac{l}{\delta(x)} = G_o = \text{const}, \quad (2.2)$$

$$f(\phi) = \phi R_{\mu o}; \quad R_{\mu o} = \text{const}. \quad (2.3)$$

W założeniu, że rozważa się normalnie spotykane wykonania selsyna transformatorowego, dla przepływów i geometrycznego rozłożenia uzwojeń można przyjąć następujące zależności:

$$\theta_{1j}(x) = i_{1j} W_{1j}(x) = \frac{1}{p} i_{1j} \cdot z_{1j} \cos\left(\frac{\pi}{\tau} x - \beta_{1j}\right), \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

$$W_{1j}(x) = \frac{z_{1j}}{p} \cos\left(\frac{\pi}{\tau} x - \beta_{1j}\right); \quad (2.4a)$$

$$\theta_{2k}(x) = \theta_2(x) = i_2 W_2(x) = \frac{1}{p} i_2 z_2 \cos\left(\frac{\pi}{\tau} x - \alpha\right), \quad k = 1 \quad (2.5)$$

$$W_{2k}(x) = W_2(x) = \frac{z_{2k}}{p} \cos\left(\frac{\pi}{\tau} x - \alpha\right). \quad (2.5a)$$

Zależność (2.4) jest przybliżona; podaje ona pierwszą harmoniczną przestrzenną przepływu schodkowego.

Zakłada się, że siły elektromotoryczne indukowane w poszczególnych uzwojeniach selsyna nadawczego mają przebieg sinusoidalny w czasie i są kosinusoidalnymi funkcjami kąta określającego położenie wirnika selsyna nadawczego względem osi magnetycznej pierwszego uzwojenia stojana. Zgodnie z [2] jest więc:

$$e_j = E_j \sin \omega t \cos(\vartheta - \beta_{Nj}) = \underline{E}_j \cos(\vartheta - \beta_{Nj}). \quad (2.6)$$

Wprowadzenie wartości zespolonej siły elektromotorycznej fazowej wynika z założenia o rozpatrywaniu stanu ustalonego. Podobnie zostanie uczynione dla pozostałych wielkości sinusoidalnie zmiennych w czasie.

Siły elektromotoryczne skojarzone będą:

$$e_{j,j+1} = e_j - e_{j+1}. \quad (2.6a)$$

Po podstawieniu (2.1) ÷ (2.6) do równań (1.14), (1.15), (1.10) i (1.9) oraz po uwzględnieniu (1.18) i (1.19) otrzymuje się:

— dla obwodu magnetycznego

$$-\frac{1}{G_o} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + R_{\mu o} \phi = \frac{d}{dx} \left[\sum_{j=1}^3 I_{1j} \cdot z_{1j} \cos\left(\frac{\pi}{\tau} x - \beta_{1j}\right) - I_2 z_2 \cos\left(\frac{\pi}{\tau} x - \alpha\right) \right], \quad (2.7)$$

— dla obwodów elektrycznych

$$\underline{E}_j \cos(\vartheta - \beta_{Nj}) - \underline{E}_{j+1} \cos(\vartheta - \beta_{N,j+1}) = \underline{Z}_{1j} \underline{I}_{1j} - \underline{Z}_{1,j+1} \cdot \underline{I}_{1,j+1} + j\omega \underline{\Psi}_{1j} - j\omega \underline{\Psi}_{1,j+1}, \quad (2.8)$$

$$\underline{Z}_{1j} = (r_{Nj} + r_{L1j} + r_{r1j}) + j\omega (L_{rNj} + L_{L1j} + L_{r1j}) = r_1 + jX_1 \quad (2.8a)$$

$$j = 1, 2, 3, \quad j+1 = 1;$$

$$(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{o2}) \underline{I}_2 = -j\omega \underline{\Psi}_2, \quad (2.9)$$

$$\underline{Z}_2 = r_2 + j\omega L_2 = r_2 + j\omega X_2; \quad \underline{Z}_{o2} = r_{o2} + j\omega L_{o2} = r_{o2} + jX_{o2},$$

skąd bezpośrednio

$$\underline{I}_2 = -\frac{j\omega\underline{\Psi}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{o2}}, \quad (2.10)$$

Równanie (2.7), różniczkowe względem $\underline{\phi}$, będzie miało rozwiązanie ogólne o postaci:

$$\underline{\phi}_{og} = \sum_1^2 \underline{G}_i e^{\lambda_i x} + \underline{\phi}, \quad (2.11)$$

gdzie $\underline{\phi}$ — rozwiązanie szczególne określające stan ustalony.

Ponieważ wymuszenie jest sinusoidalną funkcją czasu i zmiennej przestrzennej, rozwiązanie szczególne będzie miało postać:

$$\underline{\phi} = \underline{\phi}_1 \sin \frac{\pi}{\tau} x + \underline{\phi}_2 \cos \frac{\pi}{\tau} x, \quad (2.12)$$

gdzie $\underline{\phi}_1$ i $\underline{\phi}_2$ — współczynniki niezależne od zmiennej przestrzennej x .

Podstawiając (2.12) do (1.18), przy uwzględnieniu (2.4), otrzymuje się:

$$\underline{\Psi}_{1j} = \frac{\pi}{p} z_{1j} (\underline{\phi}_1 \cos \beta_{1j} - \underline{\phi}_2 \sin \beta_{1j}). \quad (2.13)$$

Podstawiając (2.12) do (1.19), przy uwzględnieniu (2.5), otrzymuje się:

$$\underline{\Psi}_{2k} = \frac{\pi}{p} z_2 (\underline{\phi}_1 \cos \alpha - \underline{\phi}_2 \sin \alpha) = \underline{\Psi}_2. \quad (2.14)$$

Ze wzorów (2.14) i (2.10) wynika:

$$\underline{I}_2 = -\frac{j\omega\underline{\Psi}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{o2}} = -j\omega \frac{\pi}{p} \frac{z_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{o2}} (\underline{\phi}_1 \cos \alpha - \underline{\phi}_2 \sin \alpha). \quad (2.15)$$

W wyniku wprowadzenia (2.13) do (2.8) otrzymuje się układ równań:

$$\begin{aligned} \underline{E}_j \cos(\vartheta - \beta_{Nj}) - \underline{E}_{j+1} \cos(\vartheta - \beta_{N,j+1}) &= \underline{Z}_{1j} \underline{I}_{1j} - \underline{Z}_{1,j+1} \underline{I}_{1,j+1} + \\ &+ j\omega \frac{\pi}{p} z_{1j} (\underline{\phi}_1 \cos \beta_{1j} - \underline{\phi}_2 \sin \beta_{1j}) - j\omega \frac{\pi}{p} z_{1,j+1} (\underline{\phi}_1 \cos \beta_{1,j+1} + \underline{\phi}_2 \sin \beta_{1,j+1}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Do powyższych równań jest wygodnie wprowadzić następujące oznaczenia (wypisując wyrażenie dla $j = 1, 2, 3$ przy $\beta_{N1} = 0$; $\beta_{N2} = \frac{2\pi}{3}$; $\beta_{N3} = \frac{4\pi}{3}$):

$$\left\{ \begin{aligned} \underline{U}_{z1} &= \underline{E}_1 \cos \vartheta - j\omega \frac{\pi}{p} z_1 (\underline{\phi}_1 \cos 0 - \underline{\phi}_2 \sin 0), \\ \underline{U}_{z2} &= \underline{E}_2 \cos \left(\vartheta - \frac{2\pi}{3} \right) - j\omega \frac{\pi}{p} z_1 \left(\underline{\phi}_1 \cos \frac{2\pi}{3} - \underline{\phi}_2 \sin \frac{2\pi}{3} \right), \\ \underline{U}_{z3} &= \underline{E}_3 \cos \left(\vartheta - \frac{4\pi}{3} \right) - j\omega \frac{\pi}{p} z_1 \left(\underline{\phi}_1 \cos \frac{4\pi}{3} - \underline{\phi}_2 \sin \frac{4\pi}{3} \right). \end{aligned} \right. \quad (2.17)$$

Po wprowadzeniu wyrażeń liczbowych dla wartości funkcji trygonometrycznych, otrzymuje się:

$$\begin{cases} \underline{U}_{z1} = \underline{E} \cos \vartheta - j\omega \frac{\pi}{p} z_1 \underline{\phi}_1, \\ \underline{U}_{z2} = \underline{E}_2 \cos \left(\vartheta - \frac{2\pi}{3} \right) - j\omega \frac{\pi}{p} z_1 \left(-\frac{1}{2} \underline{\phi}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_2 \right), \\ \underline{U}_{z3} = \underline{E}_3 \cos \left(\vartheta - \frac{4\pi}{3} \right) - j\omega \frac{\pi}{p} z_1 \left(-\frac{1}{2} \underline{\phi}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_2 \right). \end{cases} \quad (2.17a)$$

Jak wynika z (2.17a) jest spełniony warunek:

$$\underline{U}_{z1} + \underline{U}_{z2} + \underline{U}_{z3} = 0. \quad (2.17b)$$

Po uwzględnieniu oznaczeń (2.17), wybraniu z układu równań (2.16) dwóch równań, np. dla $j = 1$ i $j = 2$ oraz dołączeniu równania wynikającego z I prawa Kirchhoffa:

$$\underline{I}_{11} + \underline{I}_{12} + \underline{I}_{13} = 0, \quad (2.18)$$

otrzymuje się następujący układ równań (zapis macierzowy):

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11}, & -\underline{Z}_{12}, & 0 \\ 0, & \underline{Z}_{12}, & -\underline{Z}_{13} \\ 1, & 1, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{11} \\ \underline{I}_{12} \\ \underline{I}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{z1} - \underline{U}_{z2} \\ \underline{U}_{z2} - \underline{U}_{z3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

który można zapisać w postaci równania operatorowego:

$$\underline{Z}\underline{I} = \underline{U}, \quad (2.19a)$$

gdzie:

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11}, & -\underline{Z}_{12}, & 0 \\ 0, & \underline{Z}_{12}, & -\underline{Z}_{13} \\ 1, & 1, & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{I} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{11} \\ \underline{I}_{12} \\ \underline{I}_{13} \end{bmatrix} \quad \underline{U} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{z1} - \underline{U}_{z2} \\ \underline{U}_{z2} - \underline{U}_{z3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.19b)$$

Macierz $\underline{Z}$ jest nieosobliwa, gdyż:

$$\det \underline{Z} = \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{13}\underline{Z}_{11} \neq 0. \quad (2.20)$$

Wobec tego rozwiązaniem równania (2.19a) jest:

$$\underline{I} = \underline{Z}^{-1}\underline{U}. \quad (2.21)$$

W rozwiniętej postaci rozwiązanie to będzie:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_{11} \\ \underline{I}_{12} \\ \underline{I}_{13} \end{bmatrix} = \frac{1}{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{13}\underline{Z}_{11}} \begin{bmatrix} \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13}; & \underline{Z}_{12}; & \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{13} \\ -\underline{Z}_{13}; & \underline{Z}_{11}; & \underline{Z}_{13}\underline{Z}_{11} \\ -\underline{Z}_{12}; & -\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12}; & \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{z1} - \underline{U}_{z2} \\ \underline{U}_{z2} - \underline{U}_{z3} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Wyrażenia dla prądów w postaci rozwiniętej będą:

$$\begin{cases} I_{11} = \frac{(\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13})\underline{U}_{z1} - \underline{Z}_{13}\underline{U}_{z2} - \underline{Z}_{12}\underline{U}_{z3}}{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{13}\underline{Z}_{11}}, \\ I_{12} = \frac{-\underline{Z}_{13}\underline{U}_{z1} + (\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{13})\underline{U}_{z2} - \underline{Z}_{11}\underline{U}_{z3}}{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{13}\underline{Z}_{11}}, \\ I_{13} = \frac{-\underline{Z}_{12}\underline{U}_{z1} - \underline{Z}_{11}\underline{U}_{z2} + (\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{12})\underline{U}_{z3}}{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{13}\underline{Z}_{11}}. \end{cases} \quad (2.22a)$$

Równania (2.15) oraz (2.22) pozwalają na określenie przepływów uzwojeń stojana i wirnika. Podstawiając mianowicie wymienione wyrażenia do wzorów (2.4) i (2.5) otrzymuje się po zsumowaniu:

$$\sum_{j=1}^3 \theta_{1j} = \frac{z_1}{P} \left[\left(I_{11} - \frac{1}{2}I_{12} - \frac{1}{2}I_{13} \right) \cos \frac{\pi}{\tau} x + \frac{\sqrt{3}}{2} (I_{12} - I_{13}) \right] \sin \frac{\pi}{\tau} x, \quad (2.23)$$

co po rozwinięciu daje:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \theta_{1j} = \frac{z_1}{P \underline{Z}_z^2} \left\{ \frac{3}{2} [(\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13})\underline{U}_{z1} - \underline{Z}_{13}\underline{U}_{z2} - \underline{Z}_{12}\underline{U}_{z3}] \cos \frac{\pi}{\tau} x + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{3}}{2} [(\underline{Z}_{12} - \underline{Z}_{13})\underline{U}_{z1} + (2\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{13})\underline{U}_{z2} - (2\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{12})\underline{U}_{z3}] \sin \frac{\pi}{\tau} x \right\}, \end{aligned} \quad (2.23a)$$

$$\theta_2 = -j\omega \frac{\pi}{p^2} \frac{z_2^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{02}} (\phi_1 \cos \alpha - \phi_2 \sin \alpha) \cos \left(\frac{\pi}{\tau} x - \alpha \right), \quad (2.24)$$

gdzie:

$$\underline{Z}_z^2 = \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{13}\underline{Z}_{11}. \quad (2.25)$$

2.2. Napięcie wyjściowe idealnego selsyna transformatorowego

2.2.1. Przypadek ogólny

Na podstawie rys. 2.1 jest:

$$\underline{U}_{wy} = \underline{Z}_{02} \underline{I}_2. \quad (2.26)$$

Po podstawieniu (2.15) do (2.26) otrzymuje się:

$$\underline{U}_{wy} = -j\omega \frac{\pi}{p} z_2 (\phi_1 \cos \alpha - \phi_2 \sin \alpha) \frac{\underline{Z}_{02}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{02}}. \quad (2.27)$$

W otrzymanym wyrażeniu nie są znane stałe całkowania ϕ_1 i ϕ_2 . Dla ich określenia konieczne jest rozwiązanie równania (2.7), z uwzględnieniem znalezionych wartości strumienia (2.12), przepływu stojana (2.23) i wirnika (2.24). Takie założenie odpowiada selsynowi o asymetrii uzwojeń stojana.

Po wykonaniu omówionych podstawień otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_o} \frac{\pi^2}{\tau^2} \left(\phi_1 \sin \frac{\pi}{\tau} x + \phi_2 \cos \frac{\pi}{\tau} x \right) + R_{\mu o} \left(\phi_1 \sin \frac{\pi}{\tau} x + \phi_2 \cos \frac{\pi}{\tau} x \right) = \\ = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{z_1}{p \underline{Z}_z^2} \left(\frac{3}{2} [(\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13}) \underline{U}_{z1} - \underline{Z}_{12} \underline{U}_{z2} - \underline{Z}_{13} \underline{U}_{z3}] \cos \frac{\pi}{\tau} x \right) + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{3}}{2} [(\underline{Z}_{12} - \underline{Z}_{13}) \underline{U}_{z1} + (2\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{13}) \underline{U}_{z2} - (2\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{12}) \underline{U}_{z3}] \sin \frac{\pi}{\tau} x + \right. \\ \left. + j\omega \frac{\pi}{p^2} z_2^2 \frac{\phi_1 \cos \alpha - \phi_2 \sin \alpha}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{02}} \cos \left(\frac{\pi}{\tau} x - \alpha \right) \right\}. \quad (2.28) \end{aligned}$$

Po wykonaniu różniczkowania i przyrównaniu współczynników przy odpowiednich funkcjach trygonometrycznych kąta $\frac{\pi}{\tau} x$, otrzymuje się układ równań:

$$\underline{G}_2 \phi_1 + (R_\mu - \underline{G}_3) \phi_2 = \frac{\pi}{p\tau} z_1 I_a, \quad (2.29)$$

$$(R_\mu - \underline{G}_1) \phi_1 + \underline{G}_2 \phi_2 = -\frac{\pi}{p\tau} z_1 I_b,$$

który można zapisać w postaci macierzowej:

$$\underline{\mathbf{G}} \underline{\Phi} = \frac{\pi}{p\tau} z_1 \underline{\mathbf{I}}, \quad (2.30)$$

$$\underline{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \underline{G}_2 & R_\mu - \underline{G}_3 \\ R_\mu - \underline{G}_1 & \underline{G}_2 \end{bmatrix}; \quad \underline{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}; \quad \underline{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

gdzie oznaczono:

$$\begin{cases} \underline{G}_1 = j \frac{1}{2} \omega \frac{\pi^2}{p^2 \tau} \left[\frac{9}{2} \frac{z_1^2}{\underline{Z}_z^2} \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} \right] - \frac{z_2^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{02}} (1 + \cos 2\alpha), \\ \underline{G}_2 = j \frac{1}{2} \omega \frac{\pi^2}{p^2 \tau} \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{z_1^2}{\underline{Z}_z^2} (\underline{Z}_{12} - \underline{Z}_{13}) - \frac{z_2^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{02}} \sin 2\alpha \right], \\ \underline{G}_3 = j \frac{1}{2} \omega \frac{\pi^2}{p^2 \tau} \left[\frac{3}{2} \frac{z_1^2}{\underline{Z}_z^2} (4\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13}) - \frac{z_2^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{02}} (1 - \cos 2\alpha) \right]; \end{cases} \quad (2.32)$$

$$\begin{cases} I_a = \frac{\sqrt{3}}{2\underline{Z}_z^2} \left[(\underline{Z}_{12} - \underline{Z}_{13}) \underline{E}_1 \cos \vartheta + (2\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{13}) \underline{E}_2 \cos \left(\vartheta - \frac{2\pi}{3} \right) + \right. \\ \left. - (2\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{12}) \underline{E}_3 \cos \left(\vartheta - \frac{4\pi}{3} \right) \right], \\ I_b = \frac{3}{2\underline{Z}_z^2} \left[(\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13}) \underline{E}_1 \cos \vartheta - \underline{Z}_{13} \underline{E}_2 \cos \left(\vartheta - \frac{2\pi}{3} \right) - \underline{Z}_{12} \underline{E}_3 \cos \left(\vartheta - \frac{4\pi}{3} \right) \right]; \end{cases} \quad (2.33)$$

$$R_\mu = \frac{1}{G_o} \frac{\pi^2}{\tau^2} + R_{\mu o} \quad (2.34)$$

oraz wykorzystano oznaczenie (2.25).

Rozwiązaniem równania (2.30) jest (macierz $\underline{\mathbf{G}}$ jest nieosobliwa):

$$\underline{\Phi} = \frac{\pi}{p\tau} z_1 \underline{\mathbf{G}}^{-1} \underline{\mathbf{I}}. \quad (2.35)$$

Rozwiązanie to ma następującą postać rozwiniętą:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{\pi}{p\tau} z_1 \frac{I_a \underline{G}_2 + I_b (R_\mu - \underline{G}_3)}{\det \underline{\mathbf{G}}}, \\ \phi_2 &= \frac{\pi}{p\tau} z_1 \frac{-I_b \underline{G}_2 - I_a (R_\mu - \underline{G}_1)}{\det \underline{\mathbf{G}}}, \\ \det \underline{\mathbf{G}} &= \underline{G}_2^2 - (R_\mu - \underline{G}_1)(R_\mu - \underline{G}_3) \neq 0, \end{aligned} \quad (2.36)$$

z czego po podstawieniu do (2.27) otrzymuje się:

$$\underline{U}_{wy} = -j\omega \frac{\pi^2}{p^2 \tau} z_1 z_2 \frac{\underline{Z}_{02}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{02}} \cdot \frac{[I_a \underline{G}_2 + I_b (R_\mu - \underline{G}_3)] \cos \alpha + [I_b \underline{G}_2 + I_a (R_\mu - \underline{G}_1)] \sin \alpha}{\det \underline{\mathbf{G}}}. \quad (2.37)$$

Otrzymane wyrażenie jest na tyle skomplikowane, że jego bezpośrednia analiza jest bardzo trudna. Z postaci wyrażenia na wyznacznik $\det \underline{\mathbf{G}}$ można jednakże wywnioskować, że występujące w nim funkcje $\cos 2\alpha$ i $\sin 2\alpha$ ulegną redukcji, a tym samym będzie on niezależny od kąta α . W liczniku wyrażenia pozostaną natomiast funkcje $\sin 2\alpha$ i $\cos 2\alpha$.

2.2.2. Przypadek uproszczony: zasilanie i uzwojenia są symetryczne

Przypadek ten jest opisany zależnościami:

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{13} = \underline{Z}_1 \quad (2.38)$$

$$\underline{E}_1 = \underline{E}_2 = \underline{E}_3 = \underline{E}. \quad (2.39)$$

Wprowadzając konsekwentnie powyższe zależności otrzymuje się:
— ze wzoru (2.17a)

$$\begin{aligned} \underline{U}_{z_1} &= \underline{E} \cos \vartheta - j\omega \frac{\pi}{p} z_1 \phi_1, \\ \underline{U}_{z_2} &= \underline{E} \cos \left(\vartheta - \frac{2\pi}{3} \right) - j\omega \frac{\pi}{p} z_1 \left(-\frac{1}{2} \phi_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \phi_2 \right), \\ \underline{U}_{z_3} &= \underline{E} \cos \left(\vartheta - \frac{4\pi}{3} \right) - j\omega \frac{\pi}{p} z_1 \left(-\frac{1}{2} \phi_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \phi_2 \right), \end{aligned} \quad (2.40)$$

Oczywiście jest spełniona zależność (2.17b):

$$\underline{U}_{z_1} + \underline{U}_{z_2} + \underline{U}_{z_3} = 0;$$

— ze wzoru (2.22a) dla prądów jest:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{11} &= \frac{\underline{U}_{z_1}}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{E} \cos \vartheta - j\omega \frac{\pi}{p} z_1 \underline{\phi}_1}{\underline{Z}_1}, \\ \underline{I}_{12} &= \frac{\underline{U}_{z_2}}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{E} \cos \left(\vartheta - \frac{2\pi}{3} \right) - j\omega \frac{\pi}{p} z_1 \left(-\frac{1}{2} \underline{\phi}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_2 \right)}{\underline{Z}_1}, \\ \underline{I}_{13} &= \frac{\underline{U}_{z_3}}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{E} \cos \left(\vartheta - \frac{4\pi}{3} \right) - j\omega \frac{\pi}{p} z_1 \left(-\frac{1}{2} \underline{\phi}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_2 \right)}{\underline{Z}_1}; \end{aligned} \quad (2.41)$$

— ze wzoru (2.23) dla przepływu uzwojenia stojana:

$$\sum_{j=1}^3 \theta_{1j} = \frac{z_1}{p} \left[\frac{3}{2} \underline{I}_{11} \cos \frac{\pi}{\tau} x + \frac{\sqrt{3}}{2} (\underline{I}_{12} - \underline{I}_{13}) \sin \frac{\pi}{\tau} x \right]; \quad (2.42)$$

— ze wzoru (2.25)

$$\underline{Z}_2^2 = 3\underline{Z}_1^2 \quad (2.43)$$

— ze wzorów (2.32) dla parametrów $\underline{G}$:

$$\begin{aligned} \underline{G}_1 &= j \frac{1}{2} \omega \frac{\pi^2}{p^2 \tau} \left[3 \frac{z_1^2}{\underline{Z}_1} - \frac{z_2^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{02}} (1 + \cos 2\alpha) \right], \\ \underline{G}_2 &= -j \frac{1}{2} \omega \frac{\pi^2}{p^2 \tau} \frac{z_2^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{02}} \sin 2\alpha, \\ \underline{G}_3 &= j \frac{1}{2} \omega \frac{\pi^2}{p^2 \tau} \left[3 \frac{z_1^2}{\underline{Z}_1} - \frac{z_2^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{02}} (1 - \cos 2\alpha) \right]; \end{aligned} \quad (2.44)$$

— ze wzorów (2.33) dla prądów zastępczych:

$$\begin{cases} \underline{I}_a = \frac{3}{2} \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1} \sin \vartheta = \underline{I}_1 \sin \vartheta, \\ \underline{I}_b = \frac{3}{2} \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1} \cos \vartheta = \underline{I}_1 \cos \vartheta, \end{cases} \quad (2.45)$$

gdzie

$$\underline{I}_1 = \frac{3}{2} \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1}; \quad (2.46)$$

— ze wzoru (2.36) dla wyznacznika charakterystycznego macierzy:

$$\det \underline{G} = \underline{G}_2^2 - (\underline{R}_\mu - \underline{G}_1)(\underline{R}_\mu^1 - \underline{G}_3), \quad (2.47)$$

co po podstawieniu wyrażeń (2.44) i rachunkach daje:

$$\det \underline{\mathbf{G}} = \left(\frac{1}{2} \omega \frac{\pi^2}{p^2 \tau} \right)^2 3 \frac{z_1^2}{\underline{Z}_1} \left(3 \frac{z_1^2}{\underline{Z}_1} - 2 \frac{z_2^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{02}} \right) - R_\mu^2 + \\ + j\omega \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{p^2 \tau} 2 \left(3 \frac{z_1^2}{\underline{Z}_1} - \frac{z_2^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{02}} \right) R_\mu. \quad (2.48)$$

Dla uzyskania przejrzystego zapisu wygodnie jest wprowadzić następujące oznaczenia:

$$a = \frac{1}{2} \omega \frac{\pi^2}{p^2 \tau}; \quad \underline{Y}_1 = \frac{z_1^2}{\underline{Z}_1}; \quad \underline{Y}_2 = \frac{z_2^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{02}}. \quad (2.49)$$

W wyniku otrzymuje się:

$$\det \underline{\mathbf{G}} = (3a\underline{Y}_1 + jR_\mu)(3a\underline{Y}_1 - 2a\underline{Y}_2 + jR_\mu). \quad (2.50)$$

Ze wzorów (2.36) i (2.37) po prostych rachunkach, zastosowaniu oznaczeń (2.46) i (2.49) i wprowadzeniu wyrażenia (2.50), otrzymuje się:

$$\underline{U}_{wy} = - \frac{2az_1 z_2 I_1}{3a\underline{Y}_1 - 2a\underline{Y}_2 + jR_\mu} \cdot \frac{\underline{Z}_{02}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{02}} \sin \delta, \quad (2.51)$$

przy czym oznaczono:

$$\delta^\circ = [90^\circ - (\vartheta^\circ - \alpha^\circ)]; \quad \delta = \left[\frac{\pi}{2} - (\vartheta - \alpha) \right]. \quad (2.52)$$

Wzór (2.51) ma postać ogólnie znaną z teorii selsynów i łączy transformatorowych [1], [2].

2.2.3. Przypadek stanu jałowego: praca na wzmacniacz o dużej impedancji wejściowej

Stan jałowy selsyna transformatorowego jest opisany następującymi zależnościami:

$$\lim \underline{Z}_{02} = \infty; \quad \underline{Y}_2 = 0; \quad \lim_{\underline{Z}_{02} \rightarrow \infty} \frac{\underline{Z}_{02}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{02}} = 1. \quad (2.53)$$

Wzory (2.44) otrzymują teraz postać:

$$\underline{G}_1 = \underline{G}_3 = j \frac{3}{2} \omega \frac{\pi^2}{p^2 \tau} \cdot \frac{z_1^2}{\underline{Z}_1} = j3a\underline{Y}_1; \quad \underline{G}_2 = 0, \quad (2.54)$$

a wzór (2.50) redukuje się do postaci:

$$\det \underline{\mathbf{G}} = (3a\underline{Y}_1 + jR_\mu)^2. \quad (2.55)$$

Dla napięcia wyjściowego uzyskuje się natomiast zależność:

$$\underline{U}_{wy\infty} = - \frac{2az_1 z_2 I_1}{3a\underline{Y}_1 + jR_\mu} \sin \delta. \quad (2.56)$$

2.2.4. Błąd charakterystyki napięcia wyjściowego wynikający ze skończonej wartości impedancji obciążenia

Wartość bezwzględna rozpatrywanego błędu będzie równa różnicy napięć przy obciążeniu ($Z_{02} < \infty$) i przy biegu jałowym ($Z_{02} = \infty$). Można ją obliczyć odejmując wyrażenia (2.51) i (2.56). Wówczas otrzymuje się:

$$\underline{U}_{wy} - \underline{U}_{wy\infty} = 2az_1z_2I_1 \left[\frac{1}{3a\underline{Y}_1 + jR_\mu} - \frac{1}{3a\underline{Y}_1 - 2a\underline{Y}_2 + jR_\mu} \cdot \frac{Z_{02}}{Z_2 + Z_{02}} \right] \sin \delta. \quad (2.57)$$

Wartość względna błędu jest równa jego wartości bezwzględnej odniesionej do wartości napięcia wyjściowego przy biegu jałowym (wielkość odwzorowywana). Ze wzoru (2.57) otrzymuje się:

$$\delta \underline{U}_{wy} = \frac{\underline{U}_{wy} - \underline{U}_{wy\infty}}{\underline{U}_{wy\infty}} = 1 - \frac{3a\underline{Y}_1 + jR_\mu}{3a\underline{Y}_1 - 2a\underline{Y}_2 + jR_\mu} \cdot \frac{Z_{02}}{Z_2 + Z_{02}}. \quad (2.58)$$

2.3. W n i o s k i

Rozważania przedstawione w rozdziałach 1 i 2 upoważniają do sformułowania następujących wniosków:

1° Ogólna teoria, przedstawiona w rozdziale 1, po wprowadzeniu założeń upraszczających (2.2), (2.3), (2.38) i (2.39) leżących u podstaw klasycznej teorii selsynów [1] i [2], daje wyniki (2.51), (2.56) zgodne z teorią klasyczną. Stanowi to dowód, że opracowana teoria ogólna jest prawidłowa.

2° Ze wzoru (2.37) wynika, że przy niesymetrycznych uzwojeniach (nie spełnione założenie (2.38)) w fali napięcia wyjściowego wystąpią parzyste harmoniczne kąta położenia wirnika. Wniosek ten jest zgodny z analizą oscylogramów fal napięć wyjściowych selsynów transformatorowych [5], co nie tylko potwierdza słuszność opracowanej teorii, lecz także wskazuje, że jest ona mocniejszym narzędziem analizy niż teoria klasyczna.

3° Przez pominięcie założenia upraszczającego (2.2) i wprowadzenie zależności analitycznej dla $\delta(x)$ można obliczyć zależność pomiędzy błędami obróbki mechanicznej i montażu, wywołującymi nierównomierności szczeliny powietrznej, a spowodowanym przez nie napięciem błędu selsyna transformatorowego.

4° Przez pominięcie założenia upraszczającego (2.3) i wprowadzenie zależności analitycznej dla $R_{\mu o}(x, \phi)$, można obliczyć zależność pomiędzy anizotropią części ferromagnetycznych obwodu magnetycznego (niejednakowe szerokości zębów, niejednorodność materiału) a spowodowanym przez nie napięciem błędu selsyna transformatorowego.

5° Przez pominięcie założenia (2.38) i wprowadzenie odpowiednich zależności dla impedancji uzwojeń, można obliczyć zależność pomiędzy asymetrią uzwojeń, a wywołanym przez nią napięciem błędu selsyna transformatorowego. Tu również mieści się analiza przypadku selsyna o biegunach wydutych.

6° Przez pominięcie założenia (2.4) i wprowadzenie dokładniejszego opisu fali przepływu (kilka wyrazów rozwinięcia na szereg trygonometryczny) można określić zależność napięcia błędu od wyższych harmoniczných przepływu schodkowego stojana.

7° Przez pominięcie założenia (2.5) i wprowadzenie innej, odpowiedniej zależności, można obliczyć zależność pomiędzy dowolnym, niesinusoidalnym rozkładem uzwojenia wirnika, a spowodowanym przez to napięciem błędu selsyna transformatorowego.

8° Przez pominięcie założenia (2.39) i wprowadzenie odpowiednich zależności analitycznych dla SEM selsyna nadawczego, można obliczyć zależność pomiędzy asymetrią SEM zasilających, a spowodowanym przez to napięciem błędu.

9° Przez zastąpienie założenia (2.6) zależnością analityczną uwzględniającą wyższe harmoniczne czasowe i przestrzenne występujące w fali napięcia wyjściowego selsyna nadawczego, można obliczyć zależność pomiędzy tymi harmonicznymi, a spowodowanym przez nie napięciem błędu.

Reasumując można stwierdzić, że przedstawiona teoria ogólna jest mocnym narzędziem dla analizy napięć błędów selsyna transformatorowego. Rozdziały 3 i 4 stanowią przykład zastosowania teorii do rozwiązywania zagadnienia podanego w p. 3° wniosków.

3. WPLYW MIMOŚRODOWOŚCI I BICIA PROMIENIOWEGO NA SYGNAŁ WYJŚCIOWY SELSYNA TRANSFORMATOROWEGO

3.1. Zależności ogólne

Jeżeli uwzględnić nierównomierność szczeliny powietrznej, to wówczas zależność (2.2) nie jest prawdziwa. Podobnie nie można posługiwać się wnioskami z równania (1.9). Zagadnienie zostanie rozwiązane według następującego planu postępowania:

- wprowadzenie zależności analitycznej dla nierównomiernej szczeliny powietrznej,
- wprowadzenie tej zależności do równania (1.8), opisującego przypadek całkowicie ogólny,
- rozwiązanie równania (1.8) przy zachowaniu wszystkich pozostałych założeń upraszczających, wprowadzonych w rozdziale 2, z wyjątkiem założenia (2.2),
- obliczenie napięcia błędu, przez odjęcie otrzymanego wyrażenia i wyrażenia (2.51) oraz (2.56)

Zestawienie przypadków błędów mechanicznych podano w tablicy 1.

3.1.1. Zależności analityczne dla $\delta(x)$, $G_o(x)$ i $R_\mu(x)$

Jak wynika z analizy podanej w załączniku 1 dla nierównomiernej szczeliny powietrznej, gdy nierównomierność jest wynikiem przesunięcia osi geometrycznych powierzchni stojana i wirnika, będących walcami kołowymi, można przyjąć wzór podany przez Puliera [3], zacytowany w tablicy 1:

$$\delta(x) = \delta_o - \Delta h \cos\left(\eta - \frac{\pi}{\tau} x\right), \quad (3.1)$$

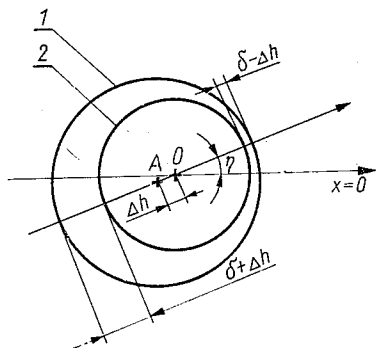
lub

$$\delta(x) = \delta_o \left[1 - \frac{\Delta h}{\delta_o} \cos\left(\eta - \frac{\pi}{\tau} x\right) \right]. \quad (3.1a)$$

Tablica 1

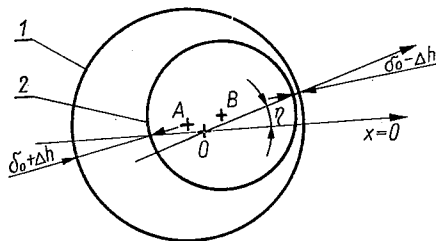
Przypadki błędów mechanicznych

Lp.	Rodzaj błędu	δ_x	η	Δh (Δr)	
1.	Przesunięcie osi wirnika względem osi stojana	$\delta_x = \delta_o \left[1 - q \cos \left(\eta - \frac{\pi}{\tau} x \right) \right]$ $q = \frac{\Delta h}{\delta_o}$	const	const	rys 3.1
2.	Bicie wirnika i przesunięcie osi jak 1	ditto	η_o	$a_1^2 + b_1^2 + 2a_1 b_1 \cos(\eta_o + a)$	rys 3.2
3.	Eliptyczność wewnętrznej średnicy pakietu stojana	$\delta_x = \delta_o \left[1 + q_e \cos \frac{2\pi}{\tau} x \right]$ $q_e = \frac{\Delta r}{\delta_o}$	0	const	rys 4.1
4.	Eliptyczność zewnętrznej średnicy pakietu wirnika	ditto	ditto	ditto	rys 4.2.



Rys. 3.1. Przypadek mimośrodkowości powierzchni stojana i wirnika:

1 — wewnętrzny obrys pakietu stojana, 2 — zewnętrzny obrys pakietu wirnika, O — oś obrotu wirnika i jego środek geometryczny, A — środek geometryczny przekroju stojana



Rys. 3.2. Przypadek ogólny bicia i mimośrodkowości:

1 — wewnętrzny obrys pakietu stojana, 2 — zewnętrzny obrys pakietu wirnika, O — oś obrotu wirnika, A — środek geometryczny przekroju stojana, B — środek geometryczny przekroju wirnika, $\overline{OA} = a$; $\overline{OB} = b$; $AB = \Delta h$

Ponieważ zachodzi zależność:

$$\Delta h \ll \delta_o, \quad (3.2)$$

wprowadza się współczynnik mimośrodkowości:

$$q = \frac{\Delta h}{\delta_o} < 1. \quad (3.3)$$

Wzór (3.1a) przyjmuje teraz postać:

$$\delta(x) = \delta_o \left[1 - q \cos \left(\eta - \frac{\pi}{\tau} x \right) \right]. \quad (3.4)$$

Po podstawieniu (3.4) do (1.6) i uwzględnieniu (2.2) otrzymuje się:

$$G_o(x) = \frac{G_o}{1 - q \cos\left(\eta - \frac{\pi}{\tau} x\right)}. \quad (3.5)$$

Po podstawieniu (3.5) do (2.34) otrzymuje się:

$$R_\mu(x) = \frac{\pi^2}{\tau^2} \frac{1}{G_o} \left[1 - q \cos\left(\eta - \frac{\pi}{\tau} x\right) \right] + R_{\mu o}. \quad (3.6)$$

Przy powyższych założeniach wzór (1.8) nadal zachowuje swą ważność, gdyż pole magnetyczne w szczelinie jest nadal funkcją jedynie zmiennej x .

3.1.2. Równanie podstawowe i jego rozwiązanie przy $q = \text{const}$ i $\eta = \text{const}$ (mimośrodowość)

Równanie (1.8) można zapisać w postaci dogodniejszej dla dalszych rachunków:

$$\frac{1}{G_o(x)} \cdot \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{1}{\delta(x) G_o(x)} \cdot \frac{d\delta(x)}{dx} \cdot \frac{d\phi}{dx} - R_{\mu o} \phi = - \frac{d}{dx} \left[\sum_{j=1}^3 \theta_{1j} - \theta_2 \right]. \quad (3.7)$$

W równaniu (3.7) uwzględniono następujące fakty:

- przy sinusoidalnym wymuszeniu, przepływy i strumień magnetyczny są w stanie ustalonym sinusoidalnymi funkcjami czasu i zmiennej liniowej (vide rozdz. 2),
- rozpatrywany selsyn jest selsynem transformatorowym, a więc obowiązują zależności (2.1).

Po podstawieniu (3.4) i (3.5) do (3.7) otrzymuje się:

$$\left[1 - q \cos\left(\eta - \frac{\pi}{\tau} x\right) \right] \frac{d^2 \phi}{dx^2} - q \frac{\pi}{\tau} \sin\left(\eta - \frac{\pi}{\tau} x\right) \frac{d\phi}{dx} - G_o R_{\mu o} \phi = - G_o \frac{d}{dx} \left[\sum_{j=1}^3 \theta_{1j} - \theta_2 \right]. \quad (3.8)$$

Otrzymane równanie różniczkowe zostanie, zgodnie z planem na początku p. 3.1, rozwiązane dla przypadku symetrycznego zasilania i symetrycznych uzwojeń. W oparciu o zależność (3.3) dla rozwiązania równania (3.8) przyjęto metodę współczynników nieoznaczonych, szczególnie dogodną dla celów niniejszej analizy. Zgodnie z teorią metody [8], rozwiązanie szczególne równania (3.8), określające stan ustalony, będzie miało postać:

$$\begin{aligned} \phi = \phi_{10} \sin \frac{\pi}{\tau} x + \phi_{20} \cos \frac{\pi}{\tau} x + \phi_{11} \sin \frac{\pi}{\tau} x + \phi_{21} \cos \frac{\pi}{\tau} x + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\phi_{1k} \sin k \frac{\pi}{\tau} x + \phi_{2k} \cos k \frac{\pi}{\tau} x \right) = \phi_o + \Delta \phi + \Delta_k \phi, \end{aligned} \quad (3.9)$$

gdzie:

ϕ_o — strumień magnetyczny w przypadku szczeliny równomiernej, zaś ϕ_{10} i ϕ_{20} — jego składowe,

$\Delta\phi$ — pierwsza harmoniczna przyrostu strumienia magnetycznego, wynikającego z nierównomierności szczeliny powietrznej, zaś ϕ_{11} i ϕ_{21} — jej składowe,

$\Delta_k\phi$ — suma strumieni wyższych harmonicznych wchodzących w skład przyrostu strumienia magnetycznego.

Dla strumieni skojarzonych z uzwojeniami stojana i wirnika, na podstawie zależności (3.9) (1.18) oraz (1.19), (2.1), (2.4a), i (2.5a) otrzymuje się:

— dla strumienia skojarzonego z uzwojeniami stojana:

$$\underline{\Psi}_{1j} = z_{1j} \frac{\pi}{p} [(\phi_{10} \cos \beta_{1j} - \phi_{20} \sin \beta_{1j}) + (\phi_{11} \cos \beta_{1j} - \phi_{21} \sin \beta_{1j})], \quad (3.10)$$

lub

$$\underline{\Psi}_{1j} = \underline{\Psi}_{1j0} + \Delta\underline{\Psi}_{1j}, \quad (3.10a)$$

gdzie:

$\underline{\Psi}_{1j0}$ — strumień skojarzony w przypadku szczeliny równomiernej (2.13),

$\Delta\underline{\Psi}_{1j}$ — przyrost strumienia skojarzonego wynikający z nierównomierności szczeliny powietrznej,

przy czym:

$$\Delta\underline{\Psi}_{1j} = z_{1j} \frac{\pi}{p} (\phi_{11} \cos \beta_{1j} - \phi_{21} \sin \beta_{1j}); \quad (3.10b)$$

— dla strumienia skojarzonego z uzwojeniem wirnika:

$$\underline{\Psi}_2 = z_2 \frac{\pi}{p} [(\phi_{10} \cos \alpha - \phi_{20} \sin \alpha) + (\phi_{11} \cos \alpha - \phi_{21} \sin \alpha)], \quad (3.11)$$

lub

$$\underline{\Psi}_2 = \underline{\Psi}_{20} + \Delta\underline{\Psi}_2, \quad (3.11a)$$

gdzie:

$\underline{\Psi}_{20}$ — jest strumieniem skojarzonym z uzwojeniem wirnika przy szczelinie równomiernej (2.14), zaś

$\Delta\underline{\Psi}_2$ — jest przyrostem strumienia skojarzonego, wynikającym z nierównomierności szczeliny powietrznej, przy czym:

$$\Delta\underline{\Psi}_2 = z_2 \frac{\pi}{p} (\phi_{11} \cos \alpha - \phi_{21} \sin \alpha). \quad (3.11b)$$

Na podstawie (2.10) i (3.11) jest

$$\underline{I}_2 = -j\omega \frac{\pi}{p} \frac{z_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{02}} [(\phi_{10} \cos \alpha - \phi_{20} \sin \alpha) + (\phi_{11} \cos \alpha - \phi_{21} \sin \alpha)], \quad (3.12)$$

lub

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{20} + \Delta\underline{I}_2, \quad (3.12a)$$

gdzie:

$\underline{I}_{20}$ — prąd wyjściowy w założeniu szczeliny równomiernej (2.15), zaś

$\Delta\underline{I}_2$ — przyrost prądu wyjściowego wynikający z nierównomierności szczeliny, przy czym:

$$\Delta\underline{I}_2 = -j\omega \frac{\pi}{p} \cdot \frac{z_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{02}} (\phi_{11} \cos \alpha - \phi_{21} \sin \alpha). \quad (3.12b)$$

W wyniku wprowadzenia (3.10) do (2.8) otrzymuje się układ równań:

$$\begin{aligned} \underline{E}_j \cos(\vartheta - \beta_{Nj}) - \underline{E}_{j+1} \cos(\vartheta - \beta_{N,j+1}) &= \underline{Z}_{1j} \underline{I}_{1j} - \underline{Z}_{1,j+1} \underline{I}_{1,j+1} + \\ &+ j\omega \frac{\pi}{p} z_{1j} [(\underline{\phi}_{10} \cos \beta_{1j} - \underline{\phi}_{20} \sin \beta_{1j}) + (\underline{\phi}_{11} \cos \beta_{1j} - \underline{\phi}_{21} \sin \beta_{1j})] + \\ &- j\omega \frac{\pi}{p} z_{1,j+1} [\underline{\phi}_{10} \cos \beta_{1,j+1} - \underline{\phi}_{20} \sin \beta_{1,j+1}) + (\underline{\phi}_{11} \cos \beta_{1,j+1} - \underline{\phi}_{21} \sin \beta_{1,j+1})], \\ &j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.13)$$

W dalszych rozważaniach założono, że uzwojenia stojana są symetryczne, tj. że są spełnione zależności (2.38) i (2.39) oraz $z_{1j} = z_1 = \text{const}$.

Do równań (3.13) wprowadza się, jak i w rozdz. 2, oznaczenia (wypisując wyrażnie dla $j = 1, 2, 3$ przy $\beta_{N1} = 0$, $\beta_{N2} = \frac{2\pi}{3}$, $\beta_{N3} = \frac{4\pi}{3}$ i wprowadzając wyrażenia liczbowe dla funkcji trygonometrycznych):

$$\begin{cases} \underline{U}_{z1} = \underline{U}_{z10} - \Delta \underline{U}_{z1}, \\ \underline{U}_{z2} = \underline{U}_{z20} - \Delta \underline{U}_{z2}, \\ \underline{U}_{z3} = \underline{U}_{z30} - \Delta \underline{U}_{z3}, \end{cases} \quad (3.14)$$

gdzie: $\underline{U}_{z10}$, $\underline{U}_{z20}$, $\underline{U}_{z30}$ — są napięciami odpowiadającymi szczelinie równomiernej, otrzymanymi ze wzorów (2.40) przez zastąpienie $\underline{\phi}_1$ i $\underline{\phi}_2$ strumieniami $\underline{\phi}_{10}$ i $\underline{\phi}_{20}$, a mianowicie:

$$\begin{cases} \underline{U}_{z10} = \underline{E} \cos \vartheta - j\omega \frac{\pi}{p} z_1 \underline{\phi}_{10}, \\ \underline{U}_{z20} = \underline{E} \cos \left(\vartheta - \frac{2\pi}{3} \right) - j\omega \frac{\pi}{p} z_1 \left(-\frac{1}{2} \underline{\phi}_{10} - \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_{20} \right), \\ \underline{U}_{z30} = \underline{E} \cos \left(\vartheta - \frac{4\pi}{3} \right) - j\omega \frac{\pi}{p} z_1 \left(-\frac{1}{2} \underline{\phi}_{10} + \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_{20} \right) \end{cases} \quad (3.14a)$$

oraz

$$\begin{cases} \Delta \underline{U}_{z1} = j\omega \frac{\pi}{p} z_1 \underline{\phi}_{11}, \\ \Delta \underline{U}_{z2} = j\omega \frac{\pi}{p} z_1 \left(-\frac{1}{2} \underline{\phi}_{11} - \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_{21} \right), \\ \Delta \underline{U}_{z3} = j\omega \frac{\pi}{p} z_1 \left(-\frac{1}{2} \underline{\phi}_{11} + \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_{21} \right). \end{cases} \quad (3.14b)$$

Jak widać z powyższych wzorów, spełniona jest zależność:

$$\underline{U}_{z1} + \underline{U}_{z2} + \underline{U}_{z3} = 0. \quad (3.14c)$$

Ze wzorów (2.41) dla prądów stojana otrzymuje się:

$$\begin{cases} \underline{I}_{11} = \underline{I}_{110} - \Delta \underline{I}_{11}, \\ \underline{I}_{12} = \underline{I}_{120} - \Delta \underline{I}_{12}, \\ \underline{I}_{13} = \underline{I}_{130} - \Delta \underline{I}_{13}, \end{cases} \quad (3.15)$$

gdzie: I_{110} , I_{120} , I_{130} — są prądami odpowiadającymi szczelinie równomiernej, otrzymanymi ze wzorów (2.41) przez podstawienie odpowiednich wartości (3.14a), co daje:

$$\left\{ \begin{aligned} I_{110} &= \frac{U_{z10}}{Z_1} = \frac{\underline{E} \cos \vartheta - j\omega \frac{\pi}{p} z_1 \underline{\phi}_{10}}{Z_1}, \\ I_{120} &= \frac{U_{z20}}{Z_1} = \frac{\underline{E} \cos \left(\vartheta - \frac{2\pi}{3} \right) - j\omega \frac{\pi}{p} z_1 \left(-\frac{1}{2} \underline{\phi}_{10} - \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_{20} \right)}{Z_1}, \\ I_{130} &= \frac{U_{z30}}{Z_1} = \frac{\underline{E} \cos \left(\vartheta - \frac{4\pi}{3} \right) - j\omega \frac{\pi}{p} z_1 \left(-\frac{1}{2} \underline{\phi}_{10} + \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_{20} \right)}{Z_1}, \end{aligned} \right. \quad (3.15a)$$

oraz:

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta I_{11} &= j\omega \frac{\pi}{p} \frac{z_1}{Z_1} \underline{\phi}_{11}, \\ \Delta I_{12} &= j\omega \frac{\pi}{p} \frac{z_1}{Z_1} \left(-\frac{1}{2} \underline{\phi}_{11} - \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_{21} \right), \\ \Delta I_{13} &= j\omega \frac{\pi}{p} \frac{z_1}{Z_1} \left(-\frac{1}{2} \underline{\phi}_{11} + \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_{21} \right). \end{aligned} \right. \quad (3.15b)$$

Ze wzorów (2.42) i (3.16) wynika:

$$\sum_{j=1}^3 \underline{\theta}_{1j} = \sum_{j=1}^3 \underline{\theta}_{1j0} - \Delta \underline{\theta}_1, \quad (3.16)$$

gdzie:

$\sum_{j=1}^3 \underline{\theta}_{1j0}$ — jest przepływem stojana dla przypadku szczeliny równomiernej, danym wzorem:

$$\sum_{j=1}^3 \underline{\theta}_{1j0} = \frac{z_1}{p} \left[\frac{3}{2} I_{110} \cos \frac{\pi}{\tau} x + \frac{\sqrt{3}}{2} (I_{120} - I_{130}) \sin \frac{\pi}{\tau} x \right], \quad (3.16a)$$

zaś

$\Delta \underline{\theta}_1$ — jest przyrostem przepływu wynikającym z nierównomiernej szczeliny, równym:

$$\Delta \underline{\theta}_1 = \frac{z_1}{p} \left[\frac{3}{2} \Delta I_{11} \cos \frac{\pi}{\tau} x + \frac{\sqrt{3}}{2} (\Delta I_{12} - \Delta I_{13}) \sin \frac{\pi}{\tau} x \right]. \quad (3.16b)$$

W postaci rozwiniętej, uzyskanej po wprowadzeniu (3.14b), przyrost przepływu będzie ($\underline{Y}_1$ według 2.49):

$$\Delta \underline{\theta}_1 = j \frac{3}{2} \omega \frac{\pi}{p^2} \underline{Y}_1 \left(\underline{\phi}_{11} \cos \frac{\pi}{\tau} x - \underline{\phi}_{21} \sin \frac{\pi}{\tau} x \right). \quad (3.16c)$$

Ze wzorów: (2.5) i (3.12a) wynika ($\underline{Y}_2$ według 2.49):

$$\underline{\theta}_2 = \underline{\theta}_{20} + \Delta \underline{\theta}_2, \quad (3.17)$$

gdzie przepływ wirnika w przypadku szczeliny równomiernej jest:

$$\underline{\theta}_{20} = -j\omega \frac{\pi}{p^2} \underline{Y}_2 (\underline{\phi}_{10} \cos \alpha - \underline{\phi}_{20} \sin \alpha) \cos \left(\frac{\pi}{\tau} x - \alpha \right), \quad (3.17a)$$

zaś przyrost przepływu wynikający z nierównomierności szczeliny jest:

$$\Delta \underline{\theta}_2 = -j\omega \frac{\pi}{p^2} \underline{Y}_2 (\underline{\phi}_{11} \cos \alpha - \underline{\phi}_{21} \sin \alpha) \cos \left(\frac{\pi}{\tau} x - \alpha \right). \quad (3.17b)$$

Ze wzorów (2.26) i (3.12a) wynika:

$$\underline{U}_{wy} = \underline{U}_{wy0} + \Delta \underline{U}_{wy} \quad (3.18)$$

gdzie:

$\underline{U}_{wy0}$, tj. napięcie wyjściowe dla przypadku szczeliny równomiernej będzie:

$$\underline{U}_{wy0} = -j\omega \frac{\pi}{p} z_2 \frac{\underline{Z}_{02}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{02}} (\underline{\phi}_{10} \cos \alpha - \underline{\phi}_{20} \sin \alpha), \quad (3.18a)$$

zaś $\Delta \underline{U}_{wy}$, tj. przyrost napięcia wynikający z nierównomierności szczeliny, a będący szukany błąd, będzie:

$$\Delta \underline{U}_{wy} = -j\omega \frac{\pi}{p} z_2 \frac{\underline{Z}_{02}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{02}} (\underline{\phi}_{11} \cos \alpha - \underline{\phi}_{21} \sin \alpha). \quad (3.18b)$$

Celem znalezienia składowych strumienia należy rozwiązać równanie (3.8) przy wprowadzeniu dotychczasowych ustaleń i wykorzystaniu wyrażeń (2.12) i (3.9) dla strumienia magnetycznego. Dla uproszczenia zapisu zostanie wykorzystane wprowadzone oznaczenie:

$$\underline{\phi} = \underline{\phi}_0 + (\Delta \underline{\phi} + \Delta_k \underline{\phi}), \quad (3.19)$$

gdzie:

$$\underline{\phi}_0 = \underline{\phi}_{10} \sin \frac{\pi}{\tau} x + \underline{\phi}_{20} \cos \frac{\pi}{\tau} x, \quad (3.19a)$$

$$\Delta \underline{\phi} = \underline{\phi}_{11} \sin \frac{\pi}{\tau} x + \underline{\phi}_{21} \cos \frac{\pi}{\tau} x, \quad (3.19b)$$

$$\Delta_k \underline{\phi} = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\underline{\phi}_{1k} \sin k \frac{\pi}{\tau} x + \underline{\phi}_{2k} \cos k \frac{\pi}{\tau} x \right). \quad (3.19c)$$

Po podstawieniu (3.19) do (3.8) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} & \left[1 - q \cos \left(\eta - \frac{\pi}{\tau} x \right) \right] \left[\frac{d^2 \underline{\phi}_0}{dx^2} + \frac{d^2 \Delta \underline{\phi}}{dx^2} + \frac{d^2 \Delta_k \underline{\phi}}{dx^2} \right] + \\ & - q \frac{\pi}{\tau} \sin \left(\eta - \frac{\pi}{\tau} x \right) \left[\frac{d \underline{\phi}_0}{dx} + \frac{d \Delta \underline{\phi}}{dx} + \frac{d \Delta_k \underline{\phi}}{dx} \right] + \\ & - G_o R_{\mu o} [\underline{\phi} + \Delta \underline{\phi} + \Delta_k \underline{\phi}] = -G_o \frac{d}{dx} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \underline{\theta}_{1j o} - \Delta \underline{\theta}_1 - \underline{\theta}_{20} - \Delta \underline{\theta}_2 \right]. \quad (3.20) \end{aligned}$$

Z równania tego wynikają następujące dwa równania różniczkowe:

$$\frac{d^2\phi_0}{dx^2} - G_o R_{\mu o} \phi_0 = -G_o \frac{d}{dx} \left(\sum_{j=1}^3 \theta_{1j0} - \theta_{20} \right), \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \left[1 - q \cos \left(\eta - \frac{\pi}{\tau} x \right) \right] \left(\frac{d^2 \Delta \phi}{dx^2} + \frac{d^2 \Delta_k \phi}{dx^2} \right) - q \frac{\pi}{\tau} \sin \left(\eta - \frac{\pi}{\tau} x \right) \left(\frac{d \Delta \phi}{dx} + \frac{d \Delta_k \phi}{dx} \right) + \\ - G_o R_{\mu o} (\Delta \phi + \Delta_k \phi) = G_o \frac{d}{dx} (\Delta \theta_1 + \Delta \theta_2) + \\ + q \left[\cos \left(\eta - \frac{\pi}{\tau} x \right) \frac{d^2 \phi_0}{dx^2} + \frac{\pi}{\tau} \sin \left(\eta - \frac{\pi}{\tau} x \right) \frac{d \phi_0}{dx} \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Równanie (3.21) jest równaniem (1.9), w którym wykonano podstawienia (2.1), (2.38) i (2.39). Jego rozwiązanie otrzymuje się z wyrażeń (2.36) przez wykonanie podstawień wskazanych wyżej i wprowadzenie oznaczeń (2.49). Proste rachunki prowadzą do następującego wyniku:

$$\phi_{10} = -j \frac{\pi}{p\tau} \frac{z_1 I_1}{\det \underline{\mathbf{G}}} [a \underline{Y}_2 \cos(\vartheta - 2\alpha) + (3a \underline{Y}_1 - a \underline{Y}_2 + j R_\mu) \cos \vartheta], \quad (3.23)$$

$$\phi_{20} = -j \frac{\pi}{p\tau} \frac{z_1 I_1}{\det \underline{\mathbf{G}}} [a \underline{Y}_2 \sin(\vartheta - 2\alpha) - (3a \underline{Y}_1 - a \underline{Y}_2 + j R_\mu) \sin \vartheta], \quad (3.24)$$

gdzie $\det \underline{\mathbf{G}}$ jest dane wzorem (2.47), a I_1 — wzorem (2.46).

Rozwiązanie równania (3.22) względem ϕ_{11} ; ϕ_{21} ; ϕ_{10} ; ϕ_{20} ($k = 1, 2 \dots n$) pozwoli określić przyrost strumienia magnetycznego wynikający z nierównomierności szczeliny powietrznej, a następnie również przyrost napięcia wyjściowego, stanowiący szukane napięcie błędu.

Przez wykorzystanie następujących zależności pomocniczych

$$\left\{ \begin{aligned} \sin \frac{\pi}{\tau} x \sum_{k=1}^{\infty} \sin k \frac{\pi}{\tau} x &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\cos(1-k) \frac{\pi}{\tau} x - \cos(1+k) \frac{\pi}{\tau} x \right], \\ \cos \frac{\pi}{\tau} x \sum_{k=1}^{\infty} \cos k \frac{\pi}{\tau} x &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\cos(1-k) \frac{\pi}{\tau} x + \cos(1+k) \frac{\pi}{\tau} x \right], \\ \sin \frac{\pi}{\tau} x \sum_{k=1}^{\infty} \cos k \frac{\pi}{\tau} x &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sin(1-k) \frac{\pi}{\tau} x + \sin(1+k) \frac{\pi}{\tau} x \right], \\ \cos \frac{\pi}{\tau} x \sum_{k=1}^{\infty} \sin k \frac{\pi}{\tau} x &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sin(k-1) \frac{\pi}{\tau} x + \sin(k+1) \frac{\pi}{\tau} x \right], \end{aligned} \right. \quad (3.25)$$

wprowadzenie wyrażeń (3.16c), (3.17b), (3.19b) i (3.19c) oraz uwzględnienie, że:

$$\begin{aligned} \cos\left(\eta - \frac{\pi}{\tau}x\right) \left(\underline{\phi}_{10} \sin \frac{\pi}{\tau}x + \underline{\phi}_{20} \cos \frac{\pi}{\tau}x\right) - \sin\left(\eta - \frac{\pi}{\tau}x\right) \left(\underline{\phi}_{10} \cos \frac{\pi}{\tau}x - \underline{\phi}_{20} \sin \frac{\pi}{\tau}x\right) = \\ = (\underline{\phi}_{10} \cos \eta + \underline{\phi}_{20} \sin \eta) \sin 2\frac{\pi}{\tau}x + (\underline{\phi}_{20} \cos \eta - \underline{\phi}_{10} \sin \eta) \cos 2\frac{\pi}{\tau}x, \end{aligned} \quad (3.26)$$

równanie (3.23) przyjmuje następującą postać dogodną dla dalszych obliczeń:

$$\begin{aligned} A \left[(\underline{\phi}_{11} \cos \eta + \underline{\phi}_{21} \sin \eta) \sin 2\frac{\pi}{\tau}x + (\underline{\phi}_{21} \cos \eta - \underline{\phi}_{11} \sin \eta) \cos 2\frac{\pi}{\tau}x \right] + \\ - \left(G_o R_\mu + 3 \frac{\pi^2}{\tau^2} \right) \left(\underline{\phi}_{12} \sin 2\frac{\pi}{\tau}x + \underline{\phi}_{22} \cos 2\frac{\pi}{\tau}x \right) + \\ + A \left[\underline{\phi}_{12} \sin \left(\eta + \frac{\pi}{\tau}x \right) - 3 \underline{\phi}_{13} \sin \left(\eta - 3\frac{\pi}{\tau}x \right) + \underline{\phi}_{22} \cos \left(\eta + \frac{\pi}{\tau}x \right) + \underline{\phi}_{23} \cos \left(\eta - 3\frac{\pi}{\tau}x \right) \right] = \\ = -A \left[(\underline{\phi}_{10} \cos \eta + \underline{\phi}_{20} \sin \eta) \sin 2\frac{\pi}{\tau}x + (\underline{\phi}_{20} \cos \eta - \underline{\phi}_{10} \sin \eta) \cos 2\frac{\pi}{\tau}x \right] + \\ + G_o (R_\mu - j3aY_1) \left(\underline{\phi}_{11} \sin \frac{\pi}{\tau}x + \underline{\phi}_{21} \cos \frac{\pi}{\tau}x \right) + \\ + jaY_2 G_o \left\{ [\underline{\phi}_{11}(1 + \cos 2\alpha) - \underline{\phi}_{21} \sin 2\alpha] \sin \frac{\pi}{\tau}x - [\underline{\phi}_{11} \sin 2\alpha - \underline{\phi}_{21}(1 - \cos 2\alpha)] \cos \frac{\pi}{\tau}x \right\}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Po pominięciu wyrazów zawierających trzecią harmoniczną przestrzenną (w prawej stronie równania brak takich wyrazów), wprowadzeniu oznaczeń (2.44) oraz uwzględnieniu, że:

$$\begin{aligned} \underline{\phi}_{12} \sin \left(\eta + \frac{\pi}{\tau}x \right) + \underline{\phi}_{22} \cos \left(\eta + \frac{\pi}{\tau}x \right) = (\underline{\phi}_{12} \sin \eta + \underline{\phi}_{22} \cos \eta) \cos \frac{\pi}{\tau}x + \\ + (\underline{\phi}_{12} \cos \eta - \underline{\phi}_{22} \sin \eta) \sin \frac{\pi}{\tau}x \end{aligned} \quad (3.28)$$

przez przyrównanie współczynników przy odpowiednich funkcjach trygonometrycznych kątów $\frac{\pi}{\tau}x$ i $2\frac{\pi}{\tau}x$, otrzymuje się następujący układ równań:

$$\begin{cases} G_o(R_\mu - \underline{G}_1)\underline{\phi}_{11} + G_o\underline{G}_2\underline{\phi}_{21} - A \cos \eta \underline{\phi}_{12} + A \sin \eta \underline{\phi}_{22} = 0, \\ G_o\underline{G}_2\underline{\phi}_{11} + G_o(R_\mu - \underline{G}_3)\underline{\phi}_{21} - A \sin \eta \underline{\phi}_{12} - A \cos \eta \underline{\phi}_{22} = 0, \\ A \cos \eta \underline{\phi}_{11} + A \sin \eta \underline{\phi}_{21} - B \underline{\phi}_{12} = -A(\underline{\phi}_{10} \cos \eta + \underline{\phi}_{20} \sin \eta), \\ -A \sin \eta \underline{\phi}_{11} + A \cos \eta \underline{\phi}_{21} - B \underline{\phi}_{22} = A(\underline{\phi}_{20} \cos \eta - \underline{\phi}_{10} \sin \eta). \end{cases} \quad (3.29)$$

W równaniach (3.27) i (3.28) wprowadzono dodatkowe oznaczenia:

$$A = q \frac{\pi^2}{\tau^2}, \quad (3.30)$$

$$B = G_o R_\mu + 3 \frac{\pi^2}{\tau^2} = G_o R_{\mu_o} + 4 \frac{\pi^2}{\tau^2}.$$

Rozwiązanie układu równań (3.29) względem niewiadomych ϕ_{11} i ϕ_{21} , gdyż tylko one występują w wyrażeniu dla napięcia błędu, daje następujące wyniki:

$$\phi_{11} = \frac{D_1}{D}, \quad \phi_{21} = \frac{D_2}{D}, \quad (3.31)$$

gdzie:

$$D_1 = [-A^4 + A^2 G_o B(R_\mu - \underline{G}_3)](\phi_{10} \cos 2\eta + \phi_{20} \sin 2\eta) + A^2 G_o G_2 B(\phi_{20} \cos 2\eta - \phi_{10} \sin 2\eta), \quad (3.32)$$

$$D_2 = [A^4 - A^2 G_o B(R_\mu - \underline{G}_1)](\phi_{20} \cos 2\eta - \phi_{10} \sin 2\eta) + A^2 G_o \underline{G}_2 B(\phi_{10} \cos 2\eta + \phi_{20} \sin 2\eta), \quad (3.33)$$

$$D = A^4 + A^2 G_o B(\underline{G}_1 + \underline{G}_3 - 2R_\mu) - G_o^2 B^2 \det \underline{G} \quad (3.34)$$

zaś $\det \underline{G}$ jest dane wzorami (2.47) lub (2.50).

3.2. Błąd napięcia wyjściowego przy $q = \text{const}$ (mimośrodowość)

3.2.1. Zależności ogólne

Wyrażenie dla napięcia błędu obciążonego selsyna otrzymuje się ze wzoru (3.18b) przez podstawienie wyrażeń (3.31), a następnie wyrażeń (3.32) do (3.34). Daje to:

$$\Delta \underline{U}_{wy} = -j\omega \frac{\pi}{p} z_2 \frac{D_1 \cos \alpha - D_2 \sin \alpha}{D} \cdot \frac{\underline{Z}_{02}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{02}}. \quad (3.35)$$

Dla uzyskania przejrzystego zapisu wyrażenia (2.35) wprowadzono następujące uproszczenie:

$$\underline{G}_3 = \underline{G}_1 = \underline{G}_x. \quad (3.36)$$

Wyrażenia te, jak widać ze wzorów (2.44) różnią się tylko znakiem przy funkcji $\cos 2\alpha$. Jako wynik podstawienia (3.32), (3.33), (3.36) do wyrażenia $D_1 \cos \alpha - D_2 \sin \alpha$, po prostych rachunkach otrzymuje się:

$$D_1 \cos \alpha - D_2 \sin \alpha = \frac{\pi}{pr} \frac{z_1 I_1}{\det \underline{G}} \{ [-A^4 + A^2 G_o B(R_\mu - \underline{G}_x)] [G_2 \sin(\vartheta - 2\eta - \alpha) + (R_\mu - \underline{G}_x) \cos(\vartheta + 2\eta + \alpha)] + A^2 G_o \underline{G}_2 B [-G_2 \cos(\vartheta - 2\eta + \alpha) - (R_\mu - \underline{G}_x) \sin(\vartheta + 2\eta - \alpha)] \}. \quad (3.37)$$

Przez podstawienie (3.37) i (3.34) do (3.35) otrzymuje się szukane wyrażenie dla napięcia błędu obciążonego selsyna.

W praktyce selsyn transformatorowy pracuje ze wzmacniaczem napięciowym o bardzo dużej impedancji wejściowej; pracę tę można traktować jako przypadek biegu jałowego. Uwzględniając odnoszące się do tego przypadku zależności, podane w p. 2.2.3., otrzymuje się kolejno, po prostych rachunkach:

$$\Delta U_{wy\infty} = -j\omega \frac{\pi}{p} z_2 \frac{(D_1 \cos \alpha - D_2 \sin \alpha)_{\infty}}{D_{\infty}}, \quad (3.38)$$

$$(D_1 \cos \alpha - D_2 \sin \alpha)_{\infty} = \frac{\pi}{p\tau} \frac{z_1 \underline{I}_1}{\underline{Y}_0} (jA^4 - A^2 G_o B \underline{Y}_o) \cos(\vartheta + 2\eta + \alpha), \quad (3.39)$$

przy czym oznaczono w celu uproszczenia zapisu:

$$\underline{Y}_o = 3a\underline{Y}_1 + jR_{\mu}, \quad (3.40)$$

($a\underline{Y}_1$ według wzoru 2.49, R_{μ} według wzoru 2.34)

$$D_{\infty} = A^4 + j2A^2 G_o B \underline{Y}_o - G_o^2 B^2 \underline{Y}_o^2 \quad (3.41)$$

i ostatecznie:

$$\Delta \underline{U}_{wy\infty} = -j \frac{2az_1 z_2 \underline{I}_1}{\underline{Y}_o} \cdot \frac{jA^4 - A^2 G_o B \underline{Y}_o}{A^4 + j2A^2 G_o B \underline{Y}_o - G_o^2 B^2 \underline{Y}_o^2} \cos(\vartheta + 2\eta + \alpha). \quad (3.42)$$

Należy zaznaczyć, że zależność (3.36) jest ściśle spełniona w przypadku biegu jałowego.

Jako względne napięcie błędu selsyna transformatorowego, znajdującego się w stanie pracy jałowej, określa się iloraz modułu amplitudy napięcia błędu, danego wzorem (3.42) przez nachylenie charakterystyki napięcia przy biegu jałowym, S_u danej wzorem (2.56):

$$\delta U_{wy\infty} = \frac{|\Delta U_{wy\infty \max}|}{|S_u|}. \quad (3.43)$$

Po podstawieniu (3.42) i (2.56) do (3.43) otrzymuje się:

$$\delta U_{wy\infty} = \left| \frac{jA^4 - A^2 G_o B \underline{Y}_o}{A^4 + j2A^2 G_o B \underline{Y}_o - G_o^2 B^2 \underline{Y}_o^2} \right|. \quad (3.44)$$

Jak wynika z podanego dalej przykładu liczbowego decydującym o wartości względnego napięcia błędu są wyrazy o najniższej potędze parametru A . Na podstawie tej uwagi otrzymuje się następujący wzór przybliżony:

$$\delta U_{wy\infty} = \frac{A^2}{G_o B |\underline{Y}_o|}. \quad (3.45)$$

3.2.2. Algorytm obliczeń

Dane:

- podziałka biegunowa τ ,
- długość pakietu l ,
- wysokość jarzma stojana h_{z1} i wirnika h_{z2} ,

- częstotliwość zasilania f ,
- liczba zwojów pierwotnych z_1 ,
- impedancja obwodu jednej fazy uzwojenia stojana $\underline{Z}_1$,
- długość szczeliny powietrznej δ_o ,
- liczba par biegunów p ,
- przenikalność magnetyczna względna żelaza μ'_z ,
- mimośrodowość szczeliny Δh .

Kolejność obliczeń:

wzór: 3.3 $q = \frac{\Delta h}{\delta_o},$

wzór: 3.30 $A = q \frac{\pi^2}{\tau^2}; \quad A^2; \quad A^4,$

wzór: 1.6 $G_o = \mu_o \frac{l}{\delta_o},$

wzór: 1.7 $R_{\mu o} \cong \frac{2}{\mu_o \mu'_z h_z l},$

wzór: 3.30 $B = G_o R_{\mu o} + 4 \frac{\pi^2}{\tau^2},$

wzór: 2.49 $a = \pi f \frac{\pi^2}{p^2 \tau}; \quad \underline{Y}_1 = \frac{z^2}{\underline{Z}_1},$

wzór: 2.34 $R_\mu = \frac{1}{G_o} \frac{\pi^2}{\tau^2} + R_{\mu o},$

wzór: 3.40 $\underline{Y}_o = 3a \underline{Y}_1 + j R_{\mu o},$
 $A^2 G_o B \underline{Y}_o$
 $j A^4 - A^2 G_o B \underline{Y}_o = L; \quad |L|$
 $G_o^2 B^2 \underline{Y}_o^2$
 $A^4 + j 2 A^2 G_o B \underline{Y}_o - G_o^2 B^2 \underline{Y}_o^2 = M; \quad |M|$

wzór: 3.44 $\delta U_{wyco} = \frac{|L|}{|M|}.$

3.2.3. Przykład liczbowy

D a n e (Jednostki SI) — dotyczą selsyna ST6, serii WAT [9]

$$\tau = 4,5 \cdot 10^{-2} \quad l = 6,35 \cdot 10^{-2}$$

$$h_z = 0,35 \cdot 10^{-2} \quad \delta_o = 2 \cdot 10^{-4}$$

$$f = 50 \quad p = 1$$

$$z_1 = 324 \quad \underline{Z}_1 = 240 + j20$$

$$\mu'_z = 6 \cdot 10^3 \quad \Delta h = 2 \cdot 10^{-5}$$

Obliczenia:

$$q = \frac{2 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{-4}} = 0,1 = 10^{-1}$$

$$A = 10^{-1} \frac{\pi^2}{4,5^2} 10^{+4} = 0,487 \cdot 10^{+3}$$

$$A^2 = 0,237 \cdot 10^6; \quad A^4 = 5,6 \cdot 10^{10}$$

$$G_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{6,35 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-4}} = 4 \cdot 10^{-4}$$

$$R_{\mu_o} = \frac{2}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 6 \cdot 10^3 \cdot 0,35 \cdot 10^{-2} \cdot 6,35 \cdot 10^{-2}} = 1,2 \cdot 10^6$$

$$B = 4 \cdot 10^{-4} \cdot 1,2 \cdot 10^6 + 4 \cdot 0,487 \cdot 10^4 = 2 \cdot 10^4$$

$$a = \pi \cdot 50 \frac{\pi^2}{4,5} \cdot 10^2 = 3,45 \cdot 10^4$$

$$R_{\mu} = \frac{10^4}{4} 0,487 \cdot 10^4 + 1,2 \cdot 10^6 = 13,35 \cdot 10^6$$

$$\underline{Y}_1 = \frac{3,24^2 \cdot 10^4}{240 + j20} = 434 - j36,2$$

$$\underline{Y}_o = 3 \cdot 3,45 \cdot 10^4 (434 - j36,2) + j13,35 \cdot 10^6 = (45 + j9,6) \cdot 10^6$$

$$A^2 G_o B \underline{Y}_o = 0,237 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^4 (45 + j9,6) 10^6 = (85,5 + j18,2) 10^{12}$$

$$L = jA^4 - A^2 G_o B_o \underline{Y}_o = j5,6 \cdot 10^{10} - (85,5 + j18,2) 10^{12} \cong -(85,5 + j18,2) 10^{12}$$

$$|L| = 87,4 \cdot 10^{12}$$

$$G_o^2 B^2 \underline{Y}_o^2 = 16 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^8 (45 + j9,6)^2 \cdot 10^{12} = (12,35 + j5,53) 10^{16}$$

$$M = A^4 + j2A^2 G_o B \underline{Y}_o - G_o^2 B^2 \underline{Y}_o^2 = 5,6 \cdot 10^{10} + j2(85,5 + j18,2) 10^{12} - (12,35 + j5,53) 10^{16} \cong \cong -(12,35 + j5,53) 10^{16}$$

$$|M| = 13,5 \cdot 10^{16}$$

i ostatecznie

$$\delta U_{wy\infty} = \frac{87,4 \cdot 10^{12}}{13,5 \cdot 10^{16}} \cong 6,5 \cdot 10^{-4}$$

3.3 Błąd napięcia wyjściowego w przypadku mimośrodowości i bicia ($q \neq \text{const}$)

Zależność analityczna dla szczeliny w omawianym przypadku została dokładnie omówiona w [3] i odpowiednie wzory znajdują się w wierszu 2 tablicy 1.

Odchyłkę szczeliny Δh można oszacować

$$\Delta h \leq a_1 + b_1, \quad (3.46)$$

gdzie:

a_1 — wartość bicia,

b_1 — wartość mimośrodowości.

Wówczas otrzymuje się:

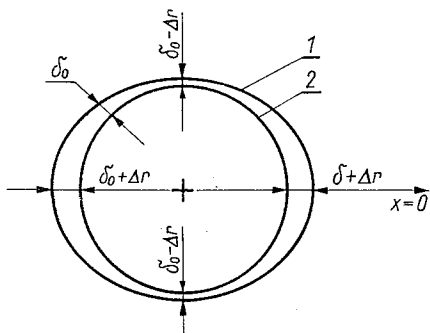
$$q_{gr} = \frac{a_1 + b_1}{\delta_o}. \quad (3.47)$$

Wstawiając q_{gr} do wzorów (3.44) i (3.45) otrzymuje się wartość żadanego napięcia błędu.

4. WPŁYW ELIPTYCZNOŚCI PAKIETÓW STOJANA I WIRNIKA NA SYGNAŁ WYJŚCIOWY SELSYNA TRANSFORMATOROWEGO

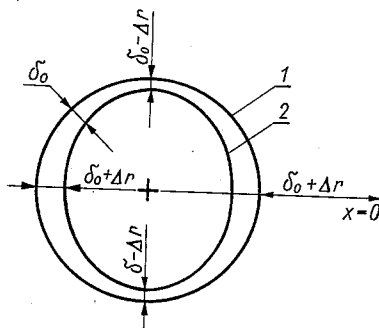
4.1. Zależności ogólne

Przedmiotem analizy w niniejszym rozdziale będzie wpływ błędu obróbki, polegającego na eliptyczności zewnętrznej powierzchni wirnika i wewnętrznej powierzchni wytoczenia stojana. Jak widać z rysunków 4.1 i 4.2, w przypadku gdy jedna z wymienionych powierz-



Rys. 4.1. Przypadek eliptyczności powierzchni wewnętrznej pakietu stojana

1 — obrys pakietu stojana, 2 — obrys pakietu wirnika



Rys. 4.2. Przypadek eliptyczności powierzchni zewnętrznej pakietu wirnika

1 — obrys pakietu stojana, 2 — obrys pakietu wirnika

chni będzie walcem kołowym, a druga walcem eliptycznym, wystąpi zdeformowanie szczeliny powietrznej; będzie ono w zasadzie niezależne od tego, która z dwu rozpatrywanych powierzchni będzie walcem eliptycznym. Toteż zostaną rozróżnione dwa przypadki:

— gdy jedna z rozpatrywanych powierzchni jest walcem eliptycznym, a druga walcem kołowym,

— gdy obie rozpatrywane powierzchnie są walcami eliptycznymi.

Postawione w tytule zagadnienie zostanie rozwiązane, podobnie jak to podano w rozdz. 3, według następującego planu:

- wprowadzenie zależności analitycznej dla nierównomiernej szczeliny powietrznej oraz dla jednostkowych permeancji szczeliny powietrznej i reluktancji rdzenia,
- wprowadzenie otrzymanych zależności do równania (1.8) i rozwiązanie go dla przypadku gdy tylko jedna z rozpatrywanych powierzchni jest walcem eliptycznym; przy rozwiązywaniu równania będą zachowane wszystkie założenia upraszczające, wprowadzone w rozdziale 2, z wyjątkiem założenia (2.2),

- obliczenie napięcia błędu dla przypadku gdy tylko jedna z rozpatrywanych powierzchni jest walcem eliptycznym,
- obliczenie napięcia błędu dla przypadku gdy obie rozpatrywane powierzchnie są walcami eliptycznymi.

4.1.1. Zależności analityczne dla $\delta(x)$, $G_o(x)$, $R_\mu(x)$

Dla przypadku gdy jedna z powierzchni (wewnętrzna powierzchnia wytoczenia pakietu stojana lub zewnętrzna powierzchnia pakietu wirnika) jest walcem eliptycznym, a druga kołowym, szczelina powietrzna przyjmuje w dwóch punktach na obwodzie wartości największe

$$\delta_{max} = \delta_o + \Delta r,$$

zaś w dwu punktach wartości najmniejsze

$$\delta_{min} = \delta_o - \Delta r,$$

gdzie Δr jest połową różnicy pól wielkiej i pól małej elipsy przekroju zdeformowanego.

Tak ukształtowaną szczelinę powietrzną można z dostateczną dokładnością opisać wzorem ([3] i tabl. 1. w. 3 i 4; oraz załączniki 2 i 3)

$$\delta(x) = \delta_o + \Delta r \cos 2 \frac{\pi}{\tau} x, \quad (4.1)$$

lub

$$\delta(x) = \delta_o \left(1 + \frac{\Delta r}{\delta_o} \cos 2 \frac{\pi}{\tau} x \right). \quad (4.1a)$$

Ponieważ zachodzi zależność

$$\Delta r \ll \delta_o, \quad (4.2)$$

wprowadza się współczynnik eliptyczności

$$q_e = \frac{\Delta r}{\delta_o} < 1. \quad (4.3)$$

Wzór (4.1a) przyjmie teraz postać:

$$\delta(x) = \delta_o \left(1 + q_e \cos 2 \frac{\pi}{\tau} x \right). \quad (4.4)$$

Po podstawieniu (4.4) do (1.6) i uwzględnieniu (2.2) otrzymuje się:

$$G_o(x) = \frac{G_o}{1 + q_e \cos 2 \frac{\pi}{\tau} x}. \quad (4.5)$$

Po podstawieniu (4.5) do (2.34) otrzymuje się:

$$R_\mu(x) = \frac{\pi^2}{\tau^2} \frac{1}{G_o} \left(1 + q_e \cos 2 \frac{\pi}{\tau} x \right) + R_{\mu_o} \quad (4.6)$$

Przy powyższych założeniach równanie (1.8) zachowuje ważność, gdyż pole magnetyczne w szczelinie jest nadal funkcją jedynie zmiennej x .

4.1.2. Równanie podstawowe i jego rozwiązanie

Po podstawieniu (4.4) i (4.5) do (3.7), stanowiącego przekształcone równanie (1.8), otrzymuje się:

$$\left(1 + q_e \cos 2 \frac{\pi}{\tau} x\right) \frac{d^2 \phi}{dx^2} - 2q_e \frac{\pi}{\tau} \sin 2 \frac{\pi}{\tau} x \frac{d\phi}{dx} - G_o R_{\mu o} \phi = -G_o \frac{d}{dx} \left[\sum_{j=1}^3 \theta_{1j} - \theta_2 \right]. \quad (4.7)$$

Powyższe równanie różniczkowe zostanie rozwiązane, zgodnie z podanym powyżej planem postępowania, dla przypadku symetrycznego zasilania i symetrycznych uzwojeń. Podobnie jak dla rozwiązania równania (3.8), przyjęto metodę współczynników nieoznaczonych, zakładając rozwiązanie dla stanu ustalonego w postaci (3.9), którą cytuje się dla przypomnienia:

$$\begin{aligned} \phi = & \phi_{10} \sin \frac{\pi}{\tau} x + \phi_{20} \cos \frac{\pi}{\tau} x + \phi_{11} \sin \frac{\pi}{\tau} x + \phi_{21} \cos \frac{\pi}{\tau} x + \\ & + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\phi_{1k} \sin k \frac{\pi}{\tau} x + \phi_{2k} \cos k \frac{\pi}{\tau} x \right) = \phi_o + \Delta \phi + \Delta_k \phi. \end{aligned} \quad (3.9)$$

W związku z przyjętą postacią rozwiązania, zachowuje ważność rozumowanie podane w p. 3.1.2, wzory od (3.10) do (3.19). Po podstawieniu (3.19) do (4.7) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \left(1 + q_e \cos 2 \frac{\pi}{\tau} x\right) \left(\frac{d^2 \phi_o}{dx^2} + \frac{d^2 \Delta \phi}{dx^2} + \frac{d^2 \Delta_k \phi}{dx^2} \right) + \\ - 2q_e \frac{\pi}{\tau} \sin 2 \frac{\pi}{\tau} x \left(\frac{d\phi_o}{dx} + \frac{d\Delta \phi}{dx} + \frac{d\Delta_k \phi}{dx} \right) + \\ - G_o R_{\mu o} (\phi_o + \Delta \phi + \Delta_k \phi) = -G_o \frac{d}{dx} \left[\sum_{j=1}^3 \theta_{1j} - \Delta \theta_1 - \theta_{20} - \Delta \theta_2 \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Z równania tego wynikają dwa równania różniczkowe; jedno z nich jest równaniem (3.21), które cytuje się dla przypomnienia:

$$\frac{d^2 \phi_o}{dx^2} - G_o R_{\mu o} \phi_o = -G_o \frac{d}{dx} \left[\sum_{j=1}^3 \theta_{1j} - \theta_{20} \right]. \quad (3.21)$$

Drugim z równań wynikających z (4.8) jest:

$$\begin{aligned} \left(1 + q_e \cos 2 \frac{\pi}{\tau} x\right) \left(\frac{d^2 \Delta \phi}{dx^2} + \frac{d^2 \Delta_k \phi}{dx^2} \right) - 2q_e \frac{\pi}{\tau} \sin 2 \frac{\pi}{\tau} x \left(\frac{d\Delta \phi}{dx} + \frac{d\Delta_k \phi}{dx} \right) + \\ - G_o R_{\mu o} (\Delta \phi + \Delta_k \phi) = G_o \frac{d}{dx} (\Delta \theta_1 + \Delta \theta_2) + \\ - q_e \left(\cos 2 \frac{\pi}{\tau} x \frac{d^2 \phi_o}{dx^2} - 2 \frac{\pi}{\tau} \sin 2 \frac{\pi}{\tau} x \frac{d\phi_o}{dx} \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Rozwiązanie równania (3.21) jest dane wzorami (3.23) i (3.24).

Rozwiązanie równania (4.9) otrzymuje się przez podstawienie doń wyrażenia (4.7), uwzględnienie zależności (3.25), wykonanie rachunków z jednoczesnym uproszczeniem według wzoru:

$$\begin{aligned} & \left(\underline{\phi}_{11} \sin \frac{\pi}{\tau} x + \underline{\phi}_{21} \cos \frac{\pi}{\tau} x \right) \cos 2 \frac{\pi}{\tau} x + 2 \left(\underline{\phi}_{11} \cos \frac{\pi}{\tau} x - \underline{\phi}_{21} \sin \frac{\pi}{\tau} x \right) \sin 2 \frac{\pi}{\tau} x = \\ & = \frac{1}{2} \underline{\phi}_{11} \sin \frac{\pi}{\tau} x - \frac{1}{2} \underline{\phi}_{21} \cos \frac{\pi}{\tau} x + \frac{3}{2} \underline{\phi}_{11} \sin 3 \frac{\pi}{\tau} x + \frac{3}{2} \underline{\phi}_{21} \cos 3 \frac{\pi}{\tau} x. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Po wykonaniu omówionych rachunków otrzymuje się:

$$\begin{aligned} & jG_o(3a\underline{Y}_1 + jR_\mu) \left(\underline{\phi}_{11} \sin \frac{\pi}{\tau} x + \underline{\phi}_{21} \cos \frac{\pi}{\tau} x \right) + \\ & - jG_o a \underline{Y}_2 \left\{ [\underline{\phi}_{11}(1 + \cos 2\alpha) - \underline{\phi}_{21} \sin 2\alpha] \sin \frac{\pi}{\tau} x + \right. \\ & \left. - [\underline{\phi}_{11} \sin 2\alpha - \underline{\phi}_{21}(1 - \cos 2\alpha)] \cos \frac{\pi}{\tau} x \right\} - q_e \frac{\pi^2}{\tau^2} \left(\frac{1}{2} \underline{\phi}_{11} \sin \frac{\pi}{\tau} x + \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \underline{\phi}_{21} \cos \frac{\pi}{\tau} x + \frac{3}{2} \underline{\phi}_{11} \sin 3 \frac{\pi}{\tau} x + \frac{3}{2} \underline{\phi}_{21} \cos 3 \frac{\pi}{\tau} x \right) + \\ & - q_e \frac{\pi^2}{\tau^2} \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} k^2 \left\{ \underline{\phi}_{1k} \left[\sin(k-2) \frac{\pi}{\tau} x + \sin(k+2) \frac{\pi}{\tau} x \right] + \right. \\ & \left. - \underline{\phi}_{2k} \left[\cos(k-2) \frac{\pi}{\tau} x + \cos(k+2) \frac{\pi}{\tau} x \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} q_e \frac{\pi^2}{\tau^2} \sum_{k=2}^{\infty} k \left\{ \underline{\phi}_{1k} \left[-\sin(k-2) \frac{\pi}{\tau} x + \sin(k+2) \frac{\pi}{\tau} x \right] - \right. \right. \\ & \left. \left. - \underline{\phi}_{2k} \left[\cos(k-2) \frac{\pi}{\tau} x - \cos(k+2) \frac{\pi}{\tau} x \right] \right\} + \right. \\ & \left. - \frac{\pi^2}{\tau^2} \sum_{k=2}^{\infty} k^2 \left(\underline{\phi}_{1k} \sin k \frac{\pi}{\tau} x + \underline{\phi}_{2k} \cos k \frac{\pi}{\tau} x \right) + \right. \\ & \left. - G_o R_{\mu o} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\underline{\phi}_{1k} \sin k \frac{\pi}{\tau} x + \underline{\phi}_{2k} \cos k \frac{\pi}{\tau} x \right) = \right. \\ & = q_e \frac{\pi^2}{\tau^2} \left(\frac{1}{2} \underline{\phi}_{10} \sin \frac{\pi}{\tau} x - \frac{1}{2} \underline{\phi}_{20} \cos \frac{\pi}{\tau} x + \frac{3}{2} \underline{\phi}_{10} \sin 3 \frac{\pi}{\tau} x + \frac{3}{2} \underline{\phi}_{20} \cos 3 \frac{\pi}{\tau} x \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ponieważ prawa strona równania zawiera tylko pierwsze i trzecie harmoniczne przestrzenne, w rozwinięciach szeregów należy ograniczyć się do wyrazu $k = 3$. Pomijając współczynniki przy 5-tej harmonicznej, wprowadzając oznaczenie według wzoru (2.44) oraz poniższe nowe oznaczenia:

$$A_e = q_e \frac{\pi^2}{\tau^2}, \quad (4.12)$$

$$B_1 = G_o R_{\mu_o} + 9 \frac{\pi^2}{\tau^2}; \quad (4.13)$$

po wykonaniu prostych rachunków otrzymuje się z równania (4.11) następujące równanie końcowe:

$$\begin{aligned} G_o \left\{ [(-R_\mu + \underline{G}_1) \underline{\phi}_{11} - \underline{G}_2 \underline{\phi}_{21}] \sin \frac{\pi}{\tau} x + [-\underline{G}_2 \underline{\phi}_{11} + (-R_\mu + \underline{G}_3) \underline{\phi}_{21}] \cos \frac{\pi}{\tau} x \right\} + \\ - \frac{1}{2} A_e \left(\underline{\phi}_{11} \sin \frac{\pi}{\tau} x - \underline{\phi}_{21} \cos \frac{\pi}{\tau} x + 3 \underline{\phi}_{11} \sin 3 \frac{\pi}{\tau} x + 3 \underline{\phi}_{21} \cos 3 \frac{\pi}{\tau} x \right) + \\ - 3 A_e \left(\underline{\phi}_{13} \sin \frac{\pi}{\tau} x + \underline{\phi}_{23} \cos \frac{\pi}{\tau} x \right) - B_1 \left(\underline{\phi}_{13} \sin 3 \frac{\pi}{\tau} x + \underline{\phi}_{23} \cos 3 \frac{\pi}{\tau} x \right) = \\ = \frac{1}{2} A_e \left(\underline{\phi}_{10} \sin \frac{\pi}{\tau} x - \underline{\phi}_{20} \cos \frac{\pi}{\tau} x + 3 \underline{\phi}_{10} \sin 3 \frac{\pi}{\tau} x + 3 \underline{\phi}_{20} \cos 3 \frac{\pi}{\tau} x \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Przez porównanie współczynników przy odpowiednich funkcjach trygonometrycznych tych samych kątów otrzymuje się następujący układ równań:

$$\begin{aligned} \left[G_o(-R_\mu + \underline{G}_1) - \frac{1}{2} A_e \right] \underline{\phi}_{11} - G_o \underline{G}_2 \underline{\phi}_{21} - 3 A_e \underline{\phi}_{13} &= \frac{1}{2} A_e \underline{\phi}_{10} \\ - G_o \underline{G}_2 \underline{\phi}_{11} + \left[G_o(-R_\mu + \underline{G}_3) + \frac{1}{2} A_e \right] \underline{\phi}_{21} - 3 A_e \underline{\phi}_{23} &= -\frac{1}{2} A_e \underline{\phi}_{20} \\ - \frac{3}{2} A_e \underline{\phi}_{11} - B_1 \underline{\phi}_{13} &= \frac{3}{2} A_e \underline{\phi}_{10} \\ - \frac{3}{2} A_e \underline{\phi}_{21} - B_1 \underline{\phi}_{23} &= \frac{3}{2} A_e \underline{\phi}_{20} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Rozwiązanie powyższego układu równań względem niewiadomych $\underline{\phi}_{11}$ i $\underline{\phi}_{21}$, gdyż tylko one występują w wyrażeniu dla napięcia błędu (3.18b), daje następujące wyniki:

$$\underline{\phi}_{11} = \frac{D_1}{D} \quad \text{ i } \quad \underline{\phi}_{21} = \frac{D_2}{D}, \quad (4.16)$$

gdzie:

$$D_1 = \left[-\frac{81}{4} A_e^4 + \frac{1}{4} A_e^2 B_1 + \frac{1}{2} G_o (A_e B_1^2 - 9 A_e^2 B_1) (-R_\mu + \underline{G}_3) \right] \underline{\phi}_{10} + \\ - \frac{1}{2} G_o \underline{G}_2 (A_e B_1^2 + 9 A_e^2 B_1) \underline{\phi}_{20}, \quad (4.17)$$

$$D_2 = \frac{1}{2} G_o \underline{G}_2 (A_e B_1^2 - 9 A_e^2 B_1) \underline{\phi}_{10} + \\ + \left[-\frac{81}{4} A_e^4 + \frac{1}{4} A_e^2 B_1^2 - \frac{1}{2} G_o (-R_\mu + \underline{G}_1) (A_e B_1^2 + 9 A_e^2 B_1) \right] \underline{\phi}_{20}, \quad (4.18)$$

$$D = \frac{81}{4} A_e^4 + \left[\frac{9}{2} B_1 G_o (\underline{G}_1 + \underline{G}_3 - 2 R_\mu) - \frac{1}{4} B_1^2 \right] A_e^2 + \\ + \frac{1}{2} B_1^2 G_o (\underline{G}_1 - \underline{G}_3) A_e - B_1^2 G_o^2 \det \underline{G}, \quad (4.19)$$

zaś $\det \underline{G}$ jest dane wzorami (2.47) lub (2.50)

4.2. Błąd napięcia wyjściowego przy eliptyczności jednej powierzchni

4.2.1. Zależności ogólne

Jeżeli do wzoru (3.35) podstawić na D_1 , D_2 i D wyrażenia (4.17), (4.18) i (4.19) otrzyma się zależność dla napięcia błędu wynikającego z faktu, że jedna z powierzchni: zewnętrzna pakietu wirnika lub wewnętrzna pakietu stojana jest walcem eliptycznym a nie kołowym. Po wprowadzeniu dodatkowego uproszczenia (3.36) i prostych rachunkach otrzymuje się:

$$D_1 \cos \alpha - D_2 \sin \alpha = \left[-\frac{81}{4} A_e^4 + \frac{1}{4} A_e^2 B_1^2 + \frac{9}{2} G_o A_e^2 B_1 (R_\mu - \underline{G}_x) \right] (\underline{\phi}_{10} \cos \alpha + \\ - \underline{\phi}_{20} \sin \alpha) + \frac{1}{2} G_o A_e B_1^2 (R_\mu - \underline{G}_x) (\underline{\phi}_{10} \cos \alpha + \underline{\phi}_{20} \sin \alpha) + \\ - \frac{1}{2} G_o \underline{G}_2 A_e B_1 [B_1 (\underline{\phi}_{10} \sin \alpha + \underline{\phi}_{20} \cos \alpha) - 9 A_e (\underline{\phi}_{10} \sin \alpha - \underline{\phi}_{20} \cos \alpha)], \quad (4.20)$$

$$D = \frac{81}{4} A_e^4 + \left[B_1 G_o (\underline{G}_x - R_\mu) - \frac{1}{4} B_1^2 \right] A_e^2 - B_1^2 G_o^2 \det \underline{G}. \quad (4.21)$$

Po podstawieniu (4.20) i (4.21) do (3.35) otrzymuje się szukane wyrażenie dla napięcia błędu selsyna obciążonego.

W praktyce selsyn transformatorowy współpracuje na ogół ze wzmacniaczem napięciowym o bardzo dużej impedancji wejściowej; pracę tę można traktować jako przypadek biegu jałowego.

Uwzględniając zależności podane w p. 2.2.3 odnoszące się do tego przypadku, oraz wprowadzając wyrażenia (3.23) i (3.24) i oznaczenie (3.40), po prostych rachunkach otrzymuje się:

$$(D_1 \cos \alpha - D_2 \sin \alpha)_\infty = -j \frac{\pi}{pr} \frac{z_1 I_1}{Y_o} \left[-\frac{81}{4} A_e^4 + \left(\frac{1}{4} B_1^2 - j \frac{9}{2} Y_o G_o B_1 \right) A_e^2 + \right. \\ \left. + j \frac{1}{2} Y_o G_o B_1^2 A_e \right] \cos(\vartheta - \alpha), \quad (4.22)$$

$$D_\infty = \frac{81}{4} A_e^4 + \left(j 9 B_1 G_o Y_o - \frac{1}{4} B_1^2 \right) A_e^2 - B_1^2 G_o^2 Y_o^2. \quad (4.23)$$

Po podstawieniu (4.22) i (4.23) do (3.38) otrzymuje się ostatecznie (a według wzoru 2.49):

$$\Delta U_{wy\infty} = -\frac{2az_1 z_2 I_1}{Y_o} \cdot \frac{-\frac{81}{4} A_e^4 + \left(\frac{1}{4} B_1^2 - j \frac{9}{2} Y_o G_o B_1 \right) A_e^2 + \frac{1}{2} Y_o G_o B_1^2 A_e}{\frac{81}{4} A_e^4 + \left(j 9 B_1 G_o Y_o - \frac{1}{4} B_1^2 \right) A_e^2 - B_1^2 G_o^2 Y_o^2} \cos(\vartheta - \alpha). \quad (4.24)$$

Przyjmując podane w p. 3.2.1 określenie względnego napięcia błędu, dla rozpatrywanego przypadku eliptyczności jednej powierzchni, otrzymuje się:

$$\delta U_{wy\infty} = \frac{\left| -\frac{81}{4} A_e^4 + \left(\frac{1}{4} B_1^2 - j \frac{9}{2} Y_o G_o B_1 \right) A_e^2 + \frac{1}{2} Y_o G_o B_1^2 A_e \right|}{\left| \frac{81}{4} A_e^4 + \left(j 9 B_1 G_o Y_o - \frac{1}{4} B_1^2 \right) A_e^2 - B_1^2 G_o^2 Y_o^2 \right|}. \quad (4.25)$$

Jak wynika z podanego dalej przykładu liczbowego, wyrazy $\frac{81}{4} A_e^4$ są pomijalnie małe w stosunku do pozostałych wyrazów licznika i mianownika. Nie wprowadza to jednakże istotnego uproszczenia do wzoru (4.25).

4.2.2. Algorytm obliczeń

d a n e:

- podziałka biegunowa τ
- długość pakietu l
- wysokość jarzma stojana h_{z1} i wirnika h_{z2}
- częstotliwość zasilania f
- liczba zwojów pierwotnych z_1
- impedancja obwodu jednej fazy uzwojenia stojana Z_1
- długość szczeliny powietrznej δ_o
- liczba par biegunów p
- przenikalność magnetyczna względna żelaza μ'_z
- połowa różnicy pól eliptyczności przekroju zdeformowanego Δr

Kolejność obliczeń:

$$\text{wzór 4.3} \quad q_e = \frac{\Delta r}{\delta}$$

$$\text{wzór 4.12} \quad A_e = q_e \frac{\pi^2}{\tau^2}; \quad A_e^2; \quad A_e^4$$

$$\text{wzór 1.6} \quad G_o = \mu_o \frac{l}{\delta_o}$$

$$\text{wzór 1.7} \quad R_{\mu o} \cong \frac{2}{\mu_o \mu'_z h_z l}$$

$$\text{wzór 4.13} \quad B_1 = G_o R_{\mu o} + 9 \frac{\pi^2}{\tau^2}; \quad B_1^2$$

$$\text{wzór 2.49} \quad a = \pi f \frac{\pi^2}{p^2 \tau}; \quad \underline{Y}_1 = \frac{z_1^2}{\underline{Z}_1}$$

$$\text{wzór 2.34} \quad R_\mu = \frac{1}{G_o} \frac{\pi^2}{\tau^2} + R_{\mu o}$$

$$\text{wzór 3.40} \quad \underline{Y}_o = 3a \underline{Y}_1 + j R_\mu$$

$$\left(\frac{1}{4} B_1^2 - j \frac{9}{2} \underline{Y}_o G_o B_1 \right) A_e^2$$

$$\frac{1}{2} \underline{Y}_o G_o B_1^2 A_e$$

$$- \frac{81}{4} A_e^4 + \left(\frac{1}{4} B_1^2 - j \frac{9}{2} \underline{Y}_o G_o B_1 \right) A_e^2 + \frac{1}{2} \underline{Y}_o G_o B_1^2 A_e = L$$

$$|L|$$

$$\left(j 9 B_1 G_o \underline{Y}_o - \frac{1}{4} B_1^2 \right) A_e^2$$

$$B_1^2 G_o^2 \underline{Y}_o^2$$

$$\frac{81}{4} A_e^4 + \left(j 9 B_1 G_o \underline{Y}_o - \frac{1}{4} B_1^2 \right) A_e^2 - B_1^2 G_o^2 \underline{Y}_o^2 = M$$

$$|M|$$

$$\text{wzór (4.25)} \quad \delta U_{wy\infty} = \frac{|L|}{|M|}$$

4.2.3. Przykład liczbowy

Dane (jednostki SI) dotyczą selsyna ST-6, serii WAT [9]

$$\begin{array}{ll} \tau = 4,5 \cdot 10^{-2} & l = 6,35 \cdot 10^{-2} \\ h_z = 0,35 \cdot 10^{-2} & \delta_o = 3 \cdot 10^{-4} \\ f = 50 & p = 1 \\ z_1 = 324 & \underline{Z}_1 = 240 + j20 \\ \mu'_z = 6 \cdot 10^3 & \Delta r = 2 \cdot 10^{-5} \end{array}$$

Obliczenia:

$$q_e = \frac{2 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{-4}} = 10^{-1}$$

$$A_e = 10^{-1} \frac{\pi^2}{4,5^2} 10^4 = 0,487 \cdot 10^3$$

$$A_e^2 = 0,237 \cdot 10^6 \quad A_e^4 = 5,6 \cdot 10^{10}$$

$$G_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{6,35 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-4}} = 4 \cdot 10^{-4}$$

$$R_{\mu o} = \frac{2}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 6 \cdot 10^3 \cdot 0,35 \cdot 10^{-2} \cdot 6,35 \cdot 10^{-2}} = 1,2 \cdot 10^6$$

$$B_1 = 4 \cdot 10^{-4} \cdot 1,2 \cdot 10^6 + 9 \cdot 0,487 \cdot 10^4 \cong 4,4 \cdot 10^4$$

$$B_1^2 = 19,36 \cdot 10^8$$

$$a = \pi \cdot 50 \frac{\pi^2}{4,5} 10^2 = 3,45 \cdot 10^4$$

$$\underline{Y}_1 = \frac{3,24^2 \cdot 10^4}{240 + j20} = 434 - j36,2$$

$$R_\mu = \frac{10^4}{4} 0,487 \cdot 10^4 + 1,2 \cdot 10^6 = 13,35 \cdot 10^6$$

$$\underline{Y}_o = 3 \cdot 3,45 \cdot 10^4 (434 - j36,2) + j13,35 \cdot 10^6 = (45 + j9,6) 10^6$$

$$\left(\frac{1}{4} B_1^2 - j \frac{9}{2} \underline{Y}_o G_o B_1 \right) A_e^2 = (4,84 + 7,6 - j35,6) 10^8 \cdot 0,237 \cdot 10^8 \cdot 10^{-2} = (2,95 - j8,44) 10^{14}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \underline{Y}_o G_o B_1^2 A_e &= \frac{1}{2} (45 + j9,6) 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 19,36 \cdot 10^8 \cdot 0,487 \cdot 10^4 \cdot 10^{-1} = \\ &= (84,5 + j18) \cdot 10^{14} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= -\frac{81}{4} A_e^4 + \left(\frac{1}{4} B_1^2 - j \frac{9}{2} \underline{Y}_o G_o B_1 \right) A_e^2 + \frac{1}{2} \underline{Y}_o G_o B_1^2 A_e = -1,13 \cdot 10^{12} + \\ &+ (2,95 - j8,44) \cdot 10^{14} + (84,5 + j18) 10^{14} = (87,44 + j9,56) 10^{14} \end{aligned}$$

$$|L| = 88 \cdot 10^{14}$$

$$\left(j9B_1G_oY_o - \frac{1}{4}B_1^2\right)A_e^2 = (-15,2 + j71,2 - 4,84)10^8 \cdot 0,237 \cdot 10^6 \cdot 10^{-2} = \\ = (4,74 + j16,88) \cdot 10^{14}$$

$$B_1^2G_o^2Y_o^2 = 19,36 \cdot 10^8 \cdot 16 \cdot 10^{-8}(19,33 + j8,64) \cdot 10^{14} = (60 + j26,7)10^{16}$$

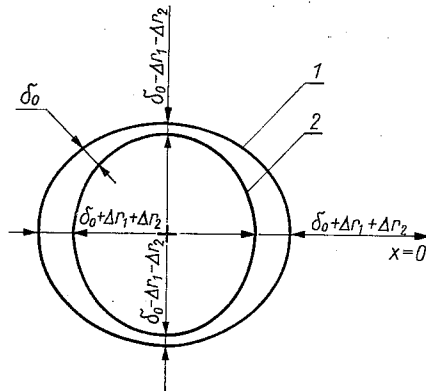
$$M = \frac{81}{4}A_e^4 + \left(j9B_1G_oY_o - \frac{1}{4}B_1^2\right)A_e^2 - B_1^2G_o^2Y_o^2 = 1,13 \cdot 10^{12} + \\ + (4,74 + j16,88 - 6000 - j2670)10^{14} = -(59,95 + j26,53)10^{16}$$

$$|M| = 65,5 \cdot 10^{16}$$

$$\delta U_{wy\infty} = \frac{88 \cdot 10^{14}}{65,5 \cdot 10^{16}} = 1,35 \cdot 10^{-2} = 1,35\%.$$

4.3. Błąd napięcia wyjściowego w przypadku eliptyczności obu powierzchni

Przypadek ten jest w ogólnym ujęciu dość skomplikowany. Dla celów praktyki wystarczy rozważenie przypadku granicznego, gdy występuje największa asymetria obwodu magnetycznego. Przypadek taki odpowiada nakładaniu się kierunków osi małej przekroju wewnętrznego walca eliptycznego i osi dużej przekroju zewnętrznego walca eliptycznego,



Rys. 4.3. Przypadek graniczny eliptyczności powierzchni stojana i wirnika

1 — wewnętrzny obrys pakietu stojana, 2 — zewnętrzny obrys pakietu wirnika

co przedstawiono na rys. 4.3. Jeżeli $2\Delta r_1$ jest różnicą pól walca zewnętrznego, zaś $2\Delta r_2$ — różnicą pól walca wewnętrznego, to szczelina powietrzna będzie:

$$\delta(x) = \delta_o + (\Delta r_1 + \Delta r_2) \cos 2 \frac{\pi}{\tau} x \quad (4.26)$$

Po wprowadzeniu granicznej wartości współczynnika eliptyczności:

$$q_{egr} = \frac{\Delta r_1 + \Delta r_2}{\delta_o} \quad (4.27)$$

otrzymuje się:

$$\delta(x) = \delta_o \left(1 + q_{egr} \cos 2 \frac{\pi}{\tau} x \right). \quad (4.28)$$

Dla otrzymania poszukiwanej wartości napięcia błędu należy obliczyć:

$$A_{egr} = q_{egr} \frac{\pi^2}{\tau^2} \quad (4.29)$$

oraz wstawić do (4.25) wyrażenie (4.29) na miejsce zmiennej A_e .

Załącznik 1

PRZESUNIĘCIE OSI WIRNIKA WZGLĘDEM STOJANA O ODCINEK Δh

D a n e: okręgi o promieniach: R i środkiem w punkcie $(0,0)$, oraz r i środkiem w punkcie (a, b) , przy czym $a^2 + b^2 = \Delta h^2$.

O b l i c z y ć:

$\delta = f(\vartheta)$, gdzie $\vartheta = \frac{\pi}{\tau} x$ — kąt bieżący liczony od osi rzędnych w kierunku ruchu wska-

zówek zegara,

$\delta = \varrho_1 - \varrho_2$ — różnica promieni wodzących,

θ — kątowa odległość osi 1 fazy (odniesienia) od osi symetrii geometrycznej.

R o z w i ą z a n i e.

$$\varrho_1 = R_1 \quad (1)$$

$$r^2 = \varrho_2^2 + \Delta h^2 - 2\Delta h\varrho_2 \cos \varphi; \quad \varphi = \angle(\varrho_2, \Delta h) \quad (2)$$

Przy czym jak wynika z rysunku 2 jest:

— dla kwadrantu I (rys. 2a):

$$\varphi = \theta - \vartheta; \quad \cos \varphi = \cos(\theta - \vartheta), \quad (3)$$

— dla kwadrantu II (rys. 2b):

$$\varphi = 2\pi + \theta - \vartheta; \quad \cos \varphi = \cos(\theta - \vartheta), \quad (4)$$

— dla kwadrantu III (rys. 2c):

$$\varphi = 2\pi + \theta - \vartheta; \quad \cos \varphi = \cos(\theta - \vartheta) \quad (5)$$

— dla kwadrantu IV (rys. 2d):

$$\varphi = \vartheta - \theta; \quad \cos \varphi = \cos(\theta - \vartheta), \quad (6)$$

a więc ostatecznie:

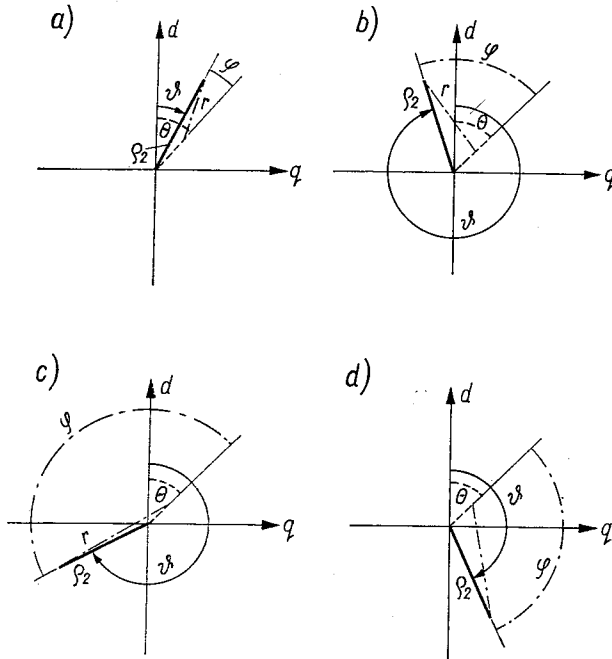
$$r^2 = \varrho_2^2 + \Delta h^2 - 2\Delta h\varrho_2 \cos(\theta - \vartheta) \quad (7)$$

oraz

$$\varrho_2 = \sqrt{r^2 - \Delta h^2 + 2\Delta h \varrho_2 \cos(\theta - \vartheta)}, \quad (8)$$

a tym samym:

$$\delta = \varrho_1 - \varrho_2 = R - \sqrt{r^2 - \Delta h^2 + 2\Delta h \varrho_2 \cos(\theta - \vartheta)}. \quad (9)$$



Rys. Z1—2. Analiza amplitud promienia wodzącego

Wyrażenie to jest niewygodne dla analizy ze względu na skomplikowaną postać. Zastosujemy przybliżenie:

$$r_2 - \varrho_2 = \varepsilon \leq \Delta h, \quad (10)$$

przy Δh rzędu 0,1 mm i r rzędu 15 mm, ε jest rzędu 6%.

Przyjmując $\varrho_2 = r$ w wyrażeniu podpierwiastkowym otrzymuje się

$$\delta = R - r \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta h}{r}\right)^2 + 2\frac{\Delta h}{r} \cos(\theta - \vartheta)} = R - r \sqrt{1 - x}, \quad (11)$$

gdzie $x = \left(\frac{\Delta h}{r}\right)^2 - 2\frac{\Delta h}{r} \cos(\theta - \vartheta)$;

$$\frac{\Delta h}{r} \leq 0,01; \quad \left(\frac{\Delta h}{r}\right)^2 \leq 10^{-4} |\cos(\theta - \vartheta)| \leq 1;$$

stąd

$$|x| \leq 0,02.$$

Stosując rozwinięcie:

$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \dots$$

otrzymuje się:

$$\delta(\vartheta) = R - r \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta h^2}{r^2} - 2 \frac{\Delta h}{r} \cos(\theta - \vartheta) \right) \right]. \quad (12)$$

Pulier [3] podaje wzór przybliżony (2.38):

$$\delta_p(\vartheta) = \delta_o - \Delta h \cos(\theta - \vartheta); \quad \delta_o = R - r \quad (13)$$

skąd:

$$\delta_p(\vartheta) - \delta(\vartheta) = R - r - \Delta h \cos(\theta - \vartheta) - R + r - \frac{1}{2} \frac{\Delta h^2}{r} + \Delta h \cos(\theta - \vartheta) = \Delta \delta(\vartheta),$$

czyli błąd przybliżenia podanego przez Puliera:

$$\Delta \delta(\vartheta) = -\frac{1}{2} \frac{\Delta h^2}{r}.$$

Oszacowanie liczbowe błędu jest:

$$\frac{\Delta \delta(\vartheta)}{\delta(\vartheta)} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta h^2}{r \delta(\vartheta)}.$$

gdzie $r = 15$, $\delta = 0,1$, $\Delta h = 0,02$:

$$\left| \frac{\Delta \delta(\vartheta)}{\delta(\vartheta)} \right| \leq + \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-4}}{15 \cdot 10^{-1}} = \frac{2}{15} 10^{-3} \leq 1,33 \dots 10^{-4}.$$

Błąd ten jest pomijalnie mały. Można więc posługiwać się wzorem Puliera.

Załącznik 2

ELIPTYCZNOŚĆ POWIERZCHNI STOJANA

Długość szczeliny powietrznej w przypadku gdy otwór stojana jest walcem eliptycznym, a zewnętrzna powierzchnia wirnika jest walcem kołowym i powierzchnie te są współosiowe (rys. 4.1) jest różnicą promieni wodzących elipsy i okręgu:

$$\delta(x) = \varrho_e - \varrho_o, \quad (1)$$

gdzie:

ϱ_e — promień wodzący elipsy,

ϱ — promień wodzący okręgu.

Promień wodzący okręgu jest równy jego promieniowi

$$\varrho = r,$$

natomiast promień wodzący elipsy może być obliczony z równań parametrycznych tej linii jako:

$$\varrho_e = \sqrt{U^2 + V^2}, \quad (3)$$

gdzie:

$$U = a \cos t; \quad V = b \sin t \quad (4)$$

a — półos duża elipsy,

b — półos mała elipsy,

t — amplituda, przy czym zgodnie ze stosowanym układem zmiennych

$$t = \frac{\pi}{\tau} x. \quad (5)$$

Jeżeli ponadto wprowadzić wielkość Δr równą połowie różnicy półosi elipsy

$$\Delta r = \frac{a-b}{2}, \quad (6)$$

promień teoretycznego walca kołowego R

$$R = \frac{a+b}{2} \quad (7)$$

oraz teoretyczną długość szczeliny równomiernej

$$\delta_o = R - r, \quad (8)$$

otrzymuje się

$$\varrho_e = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}; \quad (9)$$

$$a = R + \Delta r, \quad b = R - \Delta r. \quad (10)$$

Po podstawieniu (10) do (9) i wykonaniu rachunków dochodzi się do zależności:

$$\varrho_e = R \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta r}{R}\right)^2 + 2 \frac{\Delta r}{R} \cos 2t} \quad (11)$$

które można przedstawić jako

$$\varrho_e = R \sqrt{1 + p}, \quad (12)$$

gdzie

$$p = \left(\frac{\Delta r}{R}\right)^2 + 2 \frac{\Delta r}{R} \cos 2t; \quad |p| < 1. \quad (13)$$

Stosując znane wzory (8) dla rozwinięć na szeregi potęgowe, dochodzi się do zależności:

$$\varrho_e = R \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta r}{R}\right)^2 + \frac{\Delta r}{r} \cos 2t \right], \quad (14)$$

przy stosowaniu której popełnia się błąd nie przekraczający:

$$\Delta \varrho_e \leq \frac{1}{8} p^2, \quad (15)$$

skąd po podstawieniu (14) i (8) do (1) otrzymuje się:

$$\delta(x) = \delta_o + \Delta r \cos 2t + \frac{1}{2} \frac{\Delta r^2}{R}. \quad (16)$$

We wzorze (4.1) przyjęto:

$$\delta(x) = \delta_o + \Delta r \cos 2t, \quad (17)$$

popelniając, jak wynika z porównania (16) i (17), błąd dodatkowy o wartości:

$$\Delta_1 \delta(x) = \frac{1}{2} \frac{\Delta r^2}{R}. \quad (18)$$

Całkowity graniczny błąd przybliżenia (17) będzie więc:

$$\Delta \delta(x) = \Delta \varrho_e + \Delta_1 \delta(x). \quad (19)$$

Po podstawieniu (15), (13) i (18) do (19) i wykonaniu rachunków dochodzi się do wyrażenia:

$$\Delta \delta(x) \leq R \left(\frac{\Delta r}{R} \right)^2 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta r}{R} + \frac{1}{8} \left(\frac{\Delta r}{R} \right)^2 \right]. \quad (20)$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym można oszacować od góry sumą szeregu geometrycznego o ilorazie równym $\frac{1}{2} \frac{\Delta r}{R}$.

W wyniku tego otrzymuje się:

$$\Delta \delta(x) \leq R \left(\frac{\Delta r}{R} \right)^2 \quad (21)$$

Przykład

Dla $R = 20 \cdot 10^{-3}$; $\Delta r = 2 \cdot 10^{-5} = 20 \mu\text{m}$ jest

$$\Delta \delta(x) \leq 2 \cdot 10^{-8}.$$

Błąd względny w stosunku do Δr będzie

$$\frac{\Delta \delta(x)}{\Delta r} \leq 10^{-3},$$

zaś przy $\delta_o = 2 \cdot 10^{-4}$ jest

$$\frac{\Delta \delta(x)}{\delta_o} \leq 10^{-4}.$$

Załącznik 3

ELIPTYCZNOŚĆ POWIERZCHNI WIRNIKA

Długość szczeliny powietrznej w przypadku gdy otwór stojana jest walcem kołowym, a zewnętrzna powierzchnia wirnika jest walcem eliptycznym i powierzchnie te są współosiowe (rys. 4.2) jest różnicą promieni wodzących okręgu i elipsy:

$$\delta(x) = \varrho_o - \varrho_e; \quad (1)$$

oznaczenia jak w załączniku 2.

Teoretyczna długość szczeliny równomiernej będzie teraz:

$$\delta_o = r - R. \quad (2)$$

Po dokonaniu tych podstawień, ze wzorów (1) zał. 3, (2) i (14) zał. 2 otrzymuje się:

$$\delta(x) = \delta_0 - \Delta r \cos 2t - \frac{1}{2} \frac{\Delta r^2}{R}. \quad (3)$$

Jak widać z rys. (4.1) i (4.2) należy uwzględnić obrót elipsy o $\frac{\pi}{2}$, to znaczy wprowadzić parametr

$$t_1 = t - \frac{\pi}{2}, \quad (4)$$

a wówczas otrzymuje się ze wzoru (3)

$$\delta(x) = \delta_0 + \Delta r \cos 2t_1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta r^2}{R}. \quad (5)$$

Przyjęte wzorem (4.1) przybliżenie (wzór 17, zał. 2), będzie odchyłać się od wartości dokładnej (1) nie więcej niż o wartość podaną wzorem (21) w załączniku 2.

LITERATURA

1. J. Owczarek, Zarys współczesnej teorii selsynów nadawczo-odbiorczych. Rozprawy Elektrotechniczne, t. X, z. 4, 1964.
2. J. Owczarek, Zarys współczesnej teorii selsynów transformatorowych, Rozprawy Elektrotechniczne, t. XII, z. 1, 1966.
3. Ju. M. Pulier, Indukcionnyje elektromechaniceskije elementy wycislitielnych i distancjonno-slediaszczich sistem, Izd. Maszynostrojenie, Moskwa, 1964.
4. D. V. Sveczarnik, Selsyn — dwigatiel, Pat. ZSRR, Nr 128934.
5. J. E. Gibbison, F. B. Tuteur, Człony układów regulacji, WNT, Warszawa 1961.
6. P. J. Nowacki, Obliczanie nieliniowych obwodów elektrycznych i magnetycznych, PWN, Warszawa, 1959.
7. D. V. Sveczarnik, Distancjonnyje pieredaczi, Izd. „Energia”, 1966.
8. W. Pogorzelski, Analiza matematyczna, t. I, II, III.
9. T. Missala i J. Owczarek, Nowoczesna polska seria selsynów, Przegląd Elektrotechniczny XLIV, 1968, z. 10, s. 463.

T. MISSALA

NEW GENERALIZED SELSYNS THEORY

THEORY OF TRANSFORMER SELSYN AND ANALYSIS OF INACCURACY CAUSING BY IMPROPER MECHANICAL WORKS

Summary

Until now papers concerning selsyns theory, synthetically collected in monographs [1] and [2], considered these machines as components with concentrated parameters. This paper considers selsyns as components with distributed parameters, changing along inside stator perimeter.

Equations describing electric and magnetic circuits state of generalized selsyn are derived, as well as their application to transformer selsyn theory. After the general theory of this machine and the formula for its output tension were given, the work of unloaded selsyn was considered and formula describing the

selsyn inaccuracy, caused by the load, was derived. The given theory was applied to define the output tension inaccuracy of the transformer selsyn, caused by the eccentricity and ellipticity of stator and rotor outlines.

The formulas for loaded and unloaded selsyn were derived and also algorithms for calculations and numerical examples were given.

T. MISSALA

LA THÉORIE GÉNÉRALISÉE DU SELSYN

LA THÉORIE DU SELSYN TRANSFORMEUR ET L'ANALYSE DE SES FAUTES RÉSULTANT DE L'INEXACTITUDE DU TRAITEMENT

R é s u m é

Jusqu'ici, dans toutes les publications qui concernent les théories de selsyn et qui ont été rassemblées synthétiquement dans les articles [1], [2], on a considéré ces machines comme éléments de constants concentrés. Dans cette publication on les a traitées comme des éléments de constants dispersés changeant à long de circuit intérieur du contour de stator. On a établi les équations décrivant l'état des circuits électriques et magnétiques du selsyn généralisé et on a appliqué ces équations au selsyn transformeur.

Après avoir présenté la théorie générale de ce selsyn et après avoir établi la formule de tension de sortie, on a envisagé l'état du travail à vide du selsyn et on a déterminé la faute de tension de sortie résultant de la charge du selsyn. On s'est servi de cette théorie pour définir la tension de la faute du selsyn transformeur dans les cas de l'excentricité des contours du stator et du rotor, du battement du contour du rotor et de l'ellipticité des contours.

On a établi des formules pour le selsyn chargé et non chargé, on a présenté les algorithmes des calculs ainsi que des exemples numériques.

T. MISSALA

VERALLGEMEINERTE SELSYN-THEORIE

THEORIE UND ANALYSE DER DURCH BEARBEITUNGSUNGENAUIGKEITEN ENTSTANDENEN FEHLER DES TRANSFORMATORENSELSYNS

Z u s a m m e n f a s s u n g

In den bisherigen synthetischen Bearbeitungen der Selsyntheorie [1], [2] wurden diese Maschinen als Elemente mit konzentrierten Konstanten betrachtet. In diesem Artikel werden sie als Elemente mit verteilten, sich den inneren Statorumriss entlang verändernden Konstanten angesehen. Gleichungen von elektrischen und magnetischen Kreisen des verallgemeinerten Selsyns wurden abgeleitet und auf dieser Basis der Transformatorenselsyn erwogen. Nach Angabe der allgemeinen Theorie und Ableitung von Gleichungen seiner Ausgangsspannung wurde die Leerarbeit des Selsyns betrachtet, sowie der durch die Selsynbelastung bewirkte Fehler der Ausgangsspannung bestimmt.

Die angeführte Theorie zur Bestimmung der Fehlerspannung des Transformatorenselsyns bei Exzentrizität Stator- und Rotor-Umrisses und des Schlagens des Rotor-Umrisses sowie der Elliptizität der Umrisse ausgenutzt.

Es wurden Formeln für den belasteten und unbelasteten Selsyn abgeleitet, sowie Berechnungsalgorithmen und-beispiele angeführt.

Т. МИССАЛЯ

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРИЯ СЕЛЬСИНОВ

ТЕОРИЯ СЕЛЬСИНА-ТРАНСФОРМАТОРА И АНАЛИЗ ЕГО ПОГРЕШНОСТЕЙ,
ВЫЗВАННЫХ НЕТОЧНОСТЬЮ ОБРАБОТКИ

Резюме

Прежние разработки теории сельсинов, синтетически собранные в (1) и (2), рассматривали эти машины как элементы с постоянными сосредоточенными.

В настоящей работе они рассмотрены как элементы с постоянными распределенными, изменяющимися вдоль внутреннего контура статора.

Выведены уравнения, описывающие состояние электрических и магнитных контуров обобщенного сельсина, а также рассмотрен на этой основе сельсин-трансформатор. После представления общей теории этого сельсина и вывода формулы для его выходного напряжения, рассмотрено состояние холостого хода сельсина, а также определена погрешность выходного напряжения, возникающая от нагрузки сельсина.

Представленная теория была использована для определения напряжения погрешности сельсина-трансформатора для случая эксцентричности контуров статора и ротора, биения контура ротора и эллиптичности контуров.

Выведены формулы для сельсина с нагрузкой и без нагрузки, представлены алгоритмы расчетов, а также численные примеры.

Badanie przepięć wewnętrznych w sieci elektroenergetycznej 30 kV za pomocą analizatora stanów nieustalonych

JERZY STANISŁAW ZIELIŃSKI (ŁÓDŹ)

Katedra Wysokich Napięć Politechniki Łódzkiej

Otrzymano 20.11.1969

W artykule podano uzasadnienie wyboru metody badań, omówiono zasady uproszczeń sieci dla celów analizy przepięć, podano wyniki pomiarów na analizatorze stanów nieustalonych, rozważono dokładność uzyskanych wyników i podano wnioski dotyczące wpływu elementów układu elektroenergetycznego na wartości przepięć.

1. WSTĘP

Badania opisane w niniejszej pracy powstały w związku z analizą przepięć wewnętrznych występujących w sieci elektroenergetycznej 30kV dużego zakładu przemysłowego. Charakterystycznymi cechami tej sieci są: a) zasilanie z elektrociepłowni zakładowej oraz z sieci energetyki zawodowej, b) duża moc zainstalowanych odbiorników o silnie zróżnicowanym charakterze, c) wymagana wysoka pewność zasilania, d) duża zmienność konfiguracji sieci, e) stosowanie kompensacji prądów ziemnozwarciowych, f) występowanie awarii, którym towarzyszą przepięcia wewnętrzne.

Jak wiadomo (por. np. [10]) wśród metod analizy stanów nieustalonych w układach elektroenergetycznych rozróżniamy: a) metody obliczeniowe, b) metody modelowania matematycznego i fizycznego, c) metody bezpośrednich pomiarów w sieci elektroenergetycznej. Zastosowanie metod obliczeniowych do analizy przepięć w omawianej sieci elektroenergetycznej 30kV jest bardzo trudne z uwagi na jej rozległość i występowanie nieliniowych elementów w tej sieci. Bezpośrednie pomiary w sieci drogą specjalnych łączy mogły być wykonane tylko w ograniczonym zakresie z uwagi na wspomniane wymaganie wysokiej pewności zasilania, tak więc dla uzyskania pełniejszego obrazu zjawisk nieustalonych w badanej sieci należało wykonać badania modelowe.

Dokładna analiza modelu matematycznego badanej sieci, ustalonego z punktu widzenia możliwości odwzorowania go na maszynie analogowej, przeprowadzona podobnie jak w [9] wykazała, że w rozwiązaniu występują współczynniki przenoszenia rzędu 10^{-3} ; 10^3 (zmiana wartości współczynników podobieństwa może jedynie przesunąć rząd wspomnianych wartości nie zmieniając jednak długości przedziału zmienności wartości współczynników przenoszenia). Wykonywanie obliczeń w przypadku współczynników przeno-

szenia o wartościach zawartych w przedziale 10^{-3} do 10^3 stawia wysokie wymagania odnośnie jakości maszyny analogowej i praktycznie nie jest możliwe¹⁾.

W tej sytuacji zdecydowano się wykonać niezbędne obliczenia za pomocą analizatora stanów niustalonych. Warto jednak zwrócić uwagę na fakt występujący nader często w praktyce, że rozległość badanej sieci przekracza możliwości modelowania jej czy to na analizatorze stanów niustalonych, czy też na maszynie analogowej; pociąga to za sobą konieczność wprowadzenia uproszczeń w schemacie zastępczym badanej sieci. Przed przystąpieniem do opisu pomiarów wykonanych na analizatorze stanów niustalonych rozważmy sprawę ustalenia schematu zastępczego sieci, przyjętego za podstawę do dalszych rozważań.

2. USTALENIE SCHEMATU ZASTĘPCZEGO BADANEJ SIECI ELEKTROENERGETYCZNEJ

2.1. Schematy zastępcze elementów składowych sieci elektroenergetycznej

W ogólnym przypadku każdy element sieci można przedstawić w postaci czwórnika czynnego lub biernego, złożonego z rezystancji, indukcyjności, pojemności i upływności. Czwórnik taki ulega uproszczeniom w zależności od wpływu jaki wywiera on na kształtowanie się stanu niustalonego w rozważanym obwodzie. W [2] podane są schematy czwórników zastępujących elementy sieci stosowane w analizie stanów niustalonych; schematy te będą uproszczone w naszych rozważaniach.

Analiza awarii występujących w rozważanej sieci elektroenergetycznej 30 kV wskazuje, że o przebiegu awarii decydowały zjawiska zachodzące w krótkich odcinkach kablowych. Wynika stąd konieczność względnie dokładnego modelowania linii kablowych i możliwość uproszczonego modelowania pozostałych elementów sieci elektroenergetycznej.

W analizie przepięć wewnętrznych występujących w badanej sieci elektroenergetycznej zastosowano zatem następujące schematy zastępcze elementów:

- źródło napięcia — napięcie źródłowe połączone szeregowo z rezystancją i indukcyjnością, wartości rezystancji i indukcyjności są przy tym sumą odpowiednich wartości dla generatora i transformatora blokowego;
- odbiorniki — szeregowo połączona rezystancja i indukcyjność;
- odcinki linii kablowych — układ π utworzony z rezystancji, indukcyjności i pojemności (por. [3]).

2.2. Ogólne zasady uproszczenia sieci elektroenergetycznej stosowane w analizie przepięć wewnętrznych

Podstawową zasadą, której należy przestrzegać, jest jak najdokładniejsze przedstawienie w schemacie zastępczym sieci tego elementu, który w istotny sposób wpływa na

¹⁾ Wspomniana trudność, zdaniem autora, występuje jedynie w przypadku zastosowań maszyn analogowych do obliczeń przepięć wewnętrznych w sieciach średnich napięć, w których wartości pojemności linii są małe. W obliczeniach przepięć dla sieci najwyższych napięć trudność ta nie występuje tak ostro (por. np. [9]).

przebieg badanych zjawisk. Pozostałe elementy sieci modelujemy w sposób uproszczony, zgodnie z poniższymi rozważaniami.

W przypadku, w którym w rozważanej sieci istnieje kilka równolegle współpracujących źródeł napięcia, wprowadza się do rozważań zastępcze źródło, określone zgodnie z zasadą fali zastępczej [6] następująco:

$$e = \sum_{k=1}^n \alpha_{kx} U_{kx}, \quad (1)$$

gdzie

$$\alpha_{kx} = \frac{2Z_{eq}}{Z_k} = \frac{2Z_{(-k)}}{Z_k + Z_{(-k)}} \text{ — współczynnik przepuszczenia dla fali nadbiegającej} \\ \text{linią o oporze falowym } Z_k,$$

$Z_{(-k)} = Z_1 || Z_2 || \dots || Z_{k-1} || Z_{k+1} || Z_n$ — równoległe połączenie oporności falowych wszystkich linii oprócz linii Z_k ,

$Z_{eq} = Z_1 || Z_2 || \dots || Z_n$ — oporność falowa zastępczej linii, którą biegnie fala zastępcza.

Z zależności (1) wynika równanie w postaci operatorowej podane w [7], określające zastępcze źródło w przypadku dwóch różnych źródeł:

$$e(s) = \frac{e_1(s)Z_2(s) + e_2(s)Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} \quad (2)$$

włączone za impedancją zastępczą

$$Z(s) = \frac{Z_1(s)Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}. \quad (3)$$

Z zależności (2) i (3) wynika, że w przypadku dwóch jednakowych źródeł $e_1(s) = e_2(s)$ zastępcze źródło $e(s) = e_1(s)$. Podobny wniosek można wysnuć na podstawie zależności (1) dla większej liczby źródeł²⁾.

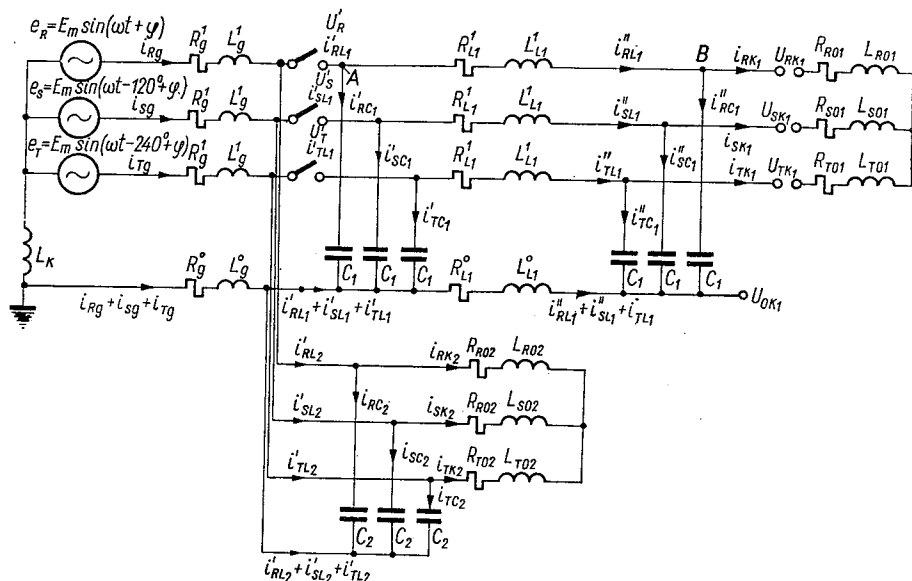
W przypadku linii, które nie są źródłem przepięcia, zastępujemy je również wypadkową impedancją operatorową, wynikającą złączenia odcinków linii.

2.3 Schemat zastępczy badanej sieci elektroenergetycznej

W oparciu o omówione wyżej zasady, ustalono schemat zastępczy sieci. Uwzględniono w nim w sposób przybliżony źródła napięcia oraz wszystkie linie zasilające odbiorniki, z wyjątkiem tej jednej linii, która wraz z przyłączonym do niej odbiornikiem decydowała o badanym stanie nie ustalonym. W ten sposób uzyskano schemat zastępczy sieci, przedstawiony na rys. 1. W schemacie zastępczym sieci z rys. 1 wartości impedancji w trzech przewodach fazowych równe są impedancjom zastępczym danych elementów dla składowej symetrycznej zgodnej (założono równość impedancji zastępczych dla składowych symetrycznych zgodnej i przeciwnej, co w rozważanych przypadkach nie wpływa w istotny

²⁾ Ze wzorów (2) i (3) wynikają zależności podane w literaturze, stosowane w uproszczeniach sieci elektroenergetycznych dla celów analizy stanów quasiustalonych i ustalonych.

sposób na wyniki), zaś impedancja w czwartym przewodzie równa jest $\frac{Z_0 - Z_1}{2}$. Zakres zmienności parametrów schematu zastępczego wynika z uwzględnienia różnych konfiguracji sieci rzeczywistej i obejmuje: 9 różnych sposobów zasilania, 11 sposobów zasilania



Rys. 1. Uproszczony schemat zastępczy badanej sieci elektroenergetycznej

odbiorników poprzez linie nie wpływające w istotny sposób na wartości przebiegów oraz 10 rodzajów tej linii zasilającej odbiornik, która określa przebieg przebiegu. Obliczone dla wyżej wymienionych konfiguracji sieci wypadkowe impedancje, po przeliczeniu (zgodnie z rozważaniami w punkcie 3.2) odwzorowano na analizatorze stanów nie ustalonych.

2.4. Obliczenia pomocnicze

Wykonywanie analizy przebiegów w oparciu o model matematyczny lub fizyczny sieci wymaga sprawdzenia wyników inną metodą, wymienioną we wstępie do niniejszych rozważań. Zazwyczaj będą to obliczenia wykonane dla szczególnie prostego przypadku badanej sieci, wykonane jedną ze znanych metod analitycznych (tylko w nielicznych przypadkach istnieje możliwość porównania z wynikami badań przebiegów w rzeczywistej sieci elektroenergetycznej). Podobnie też w przypadku omawianych pomiarów wykonano obliczenia kontrolne, przyjmując następujące założenia upraszczające:

a) w obliczeniach uwzględniamy jedynie zastępcze źródło napięcia i nie obciążoną linię kablową wpływającą na badany stan nie ustalony;

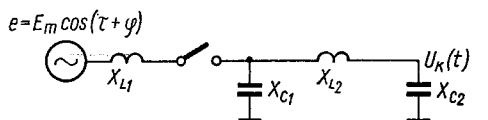
b) obliczenia przeprowadzono dla przypadku, w którym nie obciążona linia kablowa dołączona jest do źródła napięcia przemiennego w chwili, w której napięcie źródłowe fazy R przechodzi przez maksimum;

- c) wszystkie fazy linii dołączone zostają do źródła w tej samej chwili;
 d) wszystkie elementy badanego układu są liniowe, przy czym impedancja zastępcza dla składowej symetrycznej zgodnej równa się impedancji zastępczej dla składowej symetrycznej przeciwnej, $Z_1 = Z_2$;

e) źródło napięcia przedstawione jest jako napięcie źródłowe włączone szeregowo z indukcyjnością, zaś linia kablowa w postaci jednego elementu π .

Powyższe założenia umożliwiają zastosowanie w obliczeniach składowych α , β , 0 [4], przy czym w rozważanym przypadku wystąpią tylko składowe α i β . Tak więc zamiast układu trójfazowego możemy analizować zjawiska w dwóch układach jednofazowych (rys. 2) o różnych napięciach źródłowych:

$$e_\alpha = -je_\beta = -je_R. \quad (4)$$



Rys. 2. Jednofazowy schemat zastępczy będący podstawą do obliczeń przebiegów powstających przy dołączeniu linii do źródła napięcia

Zgodnie z [9] napięcie na końcu nie obciążonej jednofazowej linii dołączonej do źródła napięcia $e = E_m \cos(\omega t + \varphi)$ określone jest następującym równaniem:

$$u_k(t) = C \cos(\tau + \varphi) + \sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{\omega_1^2}} D \cos\left(\omega_1 \tau + \arctg \frac{\sin \varphi}{\omega_1 \cos \varphi}\right) + \sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{\omega_2^2}} G \cos\left(\omega_2 \tau + \arctg \frac{\sin \varphi}{\omega_2 \cos \varphi}\right), \quad (5)$$

gdzie:

$$\tau = \omega t,$$

$$A = \frac{2X_g + X_L}{X_g X_L b_C},$$

$$B = \frac{1}{X_g X_L b_C^2},$$

$$C = \frac{E_m B}{(\omega_1^2 - 1)(\omega_2^2 - 1)},$$

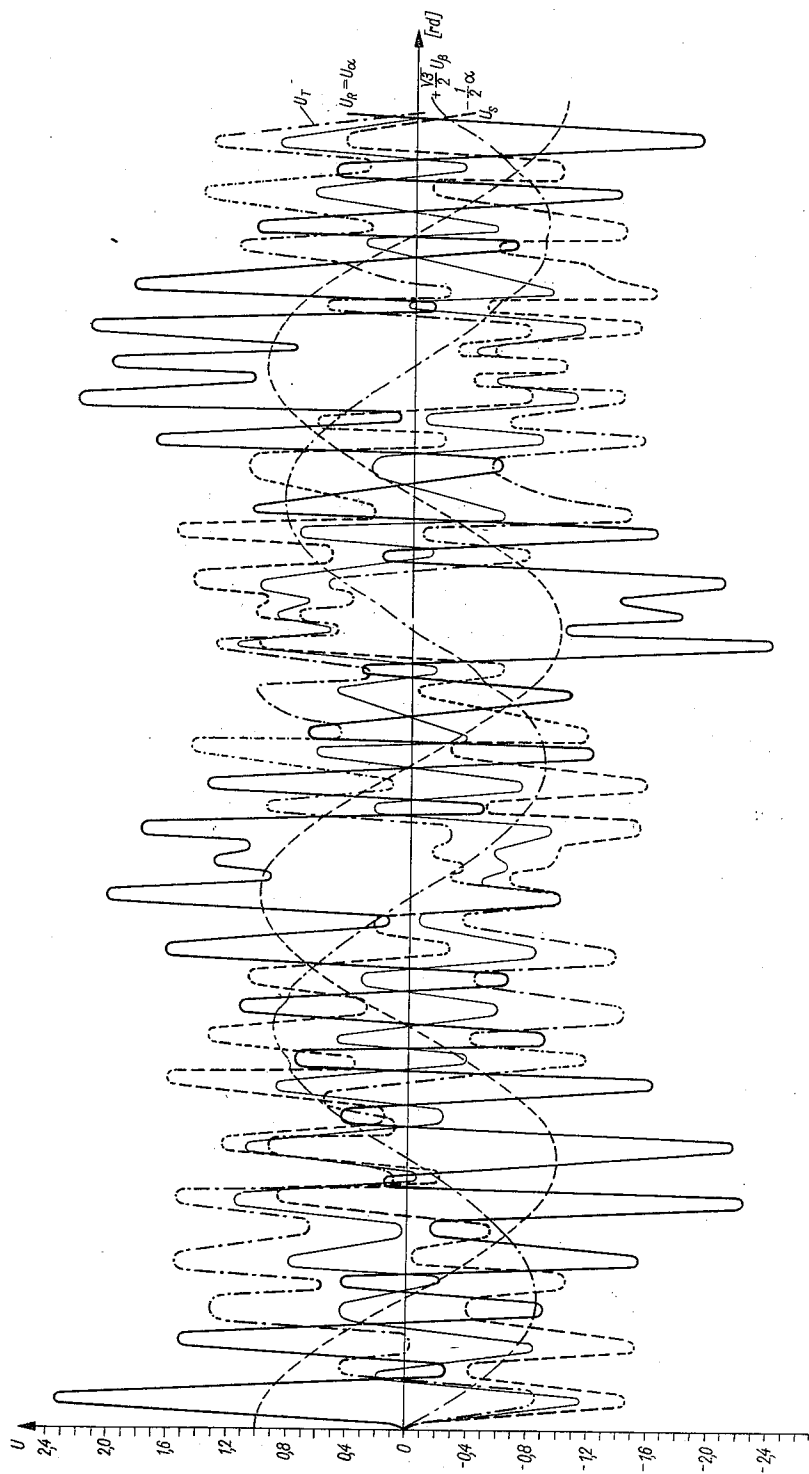
$$D = \frac{E_m B}{(1 - \omega_1^2)(\omega_2^2 - \omega_1^2)},$$

$$G = \frac{E_m B}{(1 - \omega_1^2)(\omega_1^2 - \omega_2^2)},$$

$$b_C = \frac{1}{X_C},$$

$$\omega_1 = \left| \sqrt{-\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}} \right|, \quad \omega_2 = \left| \sqrt{-\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}} \right|.$$

Stosując wzór (5) w obliczeniach dla składowej α należy podstawić $\varphi = 0$, zaś dla składowej β podstawić $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, wyniki zsumować zgodnie z równaniami określającymi składowe α , β , 0 (por. [4]).



Rys. 3. Wyniki obliczenia przepięć powstających w trzech fazach na końcu nie obciążonej linii dołączonej do źródła napięcia

Zgodnie z powyższymi uwagami wykonano obliczenie dla następujących parametrów układu rzeczywistego:

$$X_g = 1,13 \, \Omega, \quad X_L = 2,25 \, \Omega, \quad X_o = 7,920 \, \Omega.$$

Wyniki obliczeń przedstawiono wykreślnie na rys. 3, ponieważ ta postać wyników jest najwygodniejsza dla porównania z przebiegami mierzonych funkcji, rejestrowanych za pomocą oscylografów.

3. POMIARY PRZEBIEGÓW WYKONANE NA ANALIZATORZE STANÓW NIE USTALONYCH

3.1. Krótki opis techniczny analizatora stanów nie ustalonych

W badaniach użyto analizatora stanów nie ustalonych znajdujący się w Electrical Engineering Department, University of Strathclyde, Glasgow. Analizator ten należy do grupy modeli matematycznych o powtarzalnym przebiegu. Jednostki podstawowe w modelu mają następujące wartości:

częstotliwość 398 Hz,

napięcie 10 V,

prąd 50 mA.

Regulowaną powtarzalność przebiegów w zakresie 10 okresów częstotliwości 398 Hz uzyskano przez zastosowanie wyłączników elektrycznych i zasilanie modelu z układu wzmacniaczy generujących trzy napięcia zasilające.

W analizatorze tym linie modelowane są w układzie π , przy czym zgodnie z [8] charakterystyki elementu π w zakresie do 5 kHz wykazują dostateczną zgodność z charakterystykami modelowanego odcinka linii rzeczywistej. Dokładność elementów składowych modelu linii zawarta jest w granicach $\pm 1\%$.

3.2. Ustalenie parametrów sieci odwzorowanej na analizatorze

Wobec różnic w jednostkach podstawowych sieci rzeczywistej i modelu musimy przeliczyć wartości rezystancji, indukcyjności i pojemności występujących w schemacie zastępczym badanej sieci, na nowe wartości wynikające z jednostek podstawowych modelu.

Przyjmując dla rzeczywistej sieci napięcie podstawowe równe $\frac{30}{\sqrt{3}}$ kV i moc podstawową 100 MVA otrzymujemy jednostkę podstawową rezystancji równą $9 \, \Omega$, podczas gdy dla modelu wynosi ona $200 \, \Omega$. Wynika stąd, że rezystancja modelu zwiększa się 22,22-krotnie w stosunku do rezystancji sieci rzeczywistej.

Jeśli uwzględnimy ponadto różne częstotliwości w sieci rzeczywistej i w modelu, to indukcyjności modelu będą 2,79-krotnie większe od indukcyjności rzeczywistych, zaś po-

Tablica 1

Wartości rezystancji, indukcyjności i pojemności elementów modelu odtworzonego na analizatorze

Lp	Nazwa elementu modelowanego	wartości wielkości modelowanych					Uwagi
		R_g^1 [Ω]	L_g^1 [mH]	R_g^0 [Ω]	L_g^0 [mH]	—	
1	generator zastępczy	1,0	11,2	1,0	1,0 ÷ 1,8		1. Symbole występujące w tablicy odpowiadają symbolom na rys. 1
2		1,0	12,0	1,0	1,0 ÷ 1,8		
3		3,0	23,4	—	—		
4		3,0	20,8	2,0	5,6 ÷ 7,4		
5		2,0	10,0	—	—		
6		1,0	5,8	—	—		
		R_{L1}^1 [Ω]	L_{L1}^1 [mH]	R_{L1}^0 [Ω]	L_{L1}^0 [mH]	C_1 [pF]	
7	linia 1 łączona	2,0	20,0	2,0	0,4	1,350	2. Pojemność linii 2 stale dołączonej do źródła napięcia wynosi $2C_2 = 10^3$ [pF]
8		2,0	20,0	2,0	0,4	900	
9		3,0	25,6	3,0	0,8	470	
10		2,0	20,0	2,0	0,4	900	
11		2,0	0,4	2,0	0,4	900	
		$R_{R01} = R_{S01}$ [Ω]	$L_{R01} = L_{S01}$ [mH]	R_{T01} [Ω]	L_{T01} [mH]		
12	Odbiornik dołączony do linii 1	690	144	620	128		
13		1.100	236	1.000	212		
14		1.980	422	1.780	380		
		$R_{R02} = R_{S02}$ [Ω]	$L_{R02} = L_{S02}$ [mH]	R_{T02} [Ω]	L_{T02} [mH]	—	
15	Odbiornik dołączony do linii 2	100 ÷ 120	28 ÷ 40	90 ÷ 100	24 ÷ 36		
16		690	224	620	200		

jemności — $3,18 \times 10^{-3}$ -krotnie. Te dwa współczynniki wynikają z następujących prostych przeliczeń:

$$L_{modelu} = \frac{22,22 \times 2\pi \times 50 \times L_{rzecz}}{2\pi \times 398} = 2,79 L_{rzecz}, \quad (6)$$

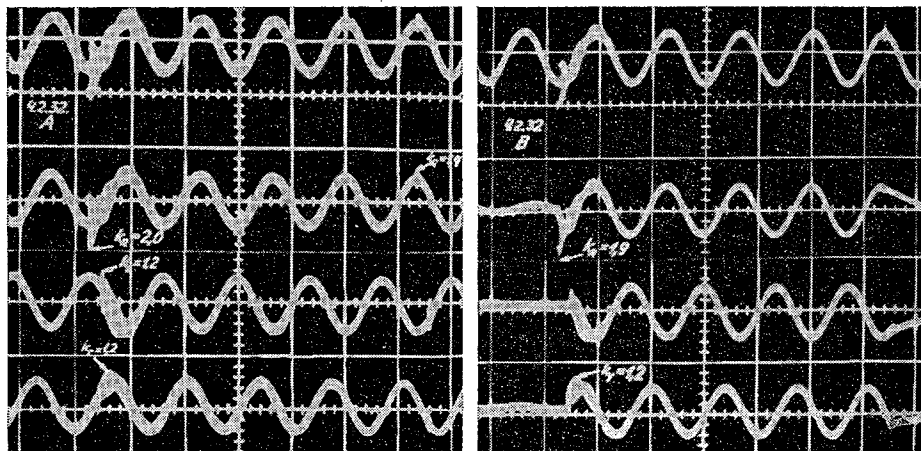
$$C_{modelu} = \frac{2\pi \times 50 \times C_{rzecz}}{22,22 \times 2\pi \times 398} = 3,18 \times 10^{-3} C_{rzecz}. \quad (7)$$

Zgodnie z powyższym w tablicy 1 zestawiono wartości rezystancji, indukcyjności i pojemności elementów modelu obliczone na podstawie wypadkowych odpowiednich wartości schematu zastępczego sieci rzeczywistej.

Wobec ograniczonego zakresu zmienności parametrów analizatora nie można było odwzorować np. indukcyjności i rezystancji zastępczej połączonych równolegle linii nie wpływających w istotny sposób na przebieg przebiegów, linie te modelowano tylko ich pojemnością C_2 (rys. 1). Z tych samych powodów wartości podane w tablicy 1 są zaokrąglone do wartości, które można było nastawić na analizatorze.

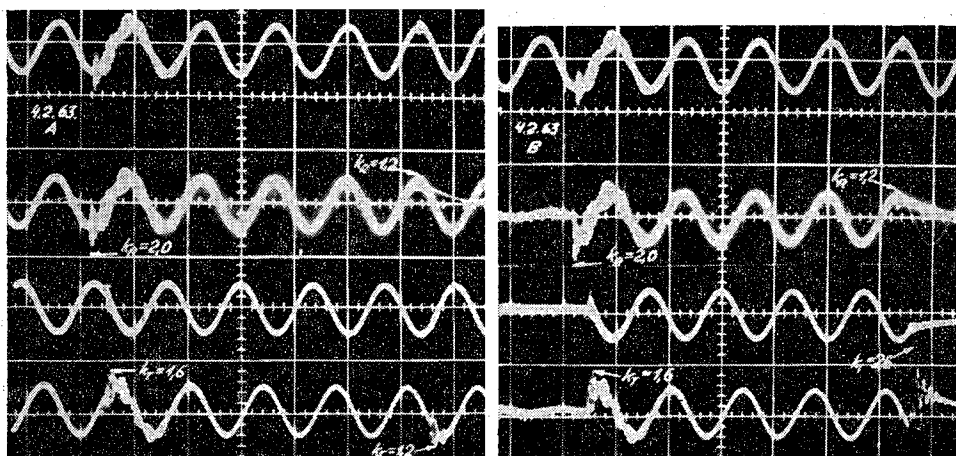
3.3. Zakres wykonywanych pomiarów i zestawienie wyników

Za pomocą analizatora stanów nie ustalonych wykonano badania przebiegów dla układu z rys. 1 symetrycznego oraz niesymetrycznego w przypadku łączów symetrycznych i asymetrycznych. Pomiary wykonywano za pomocą dwóch oscylografów katodowych (przy-

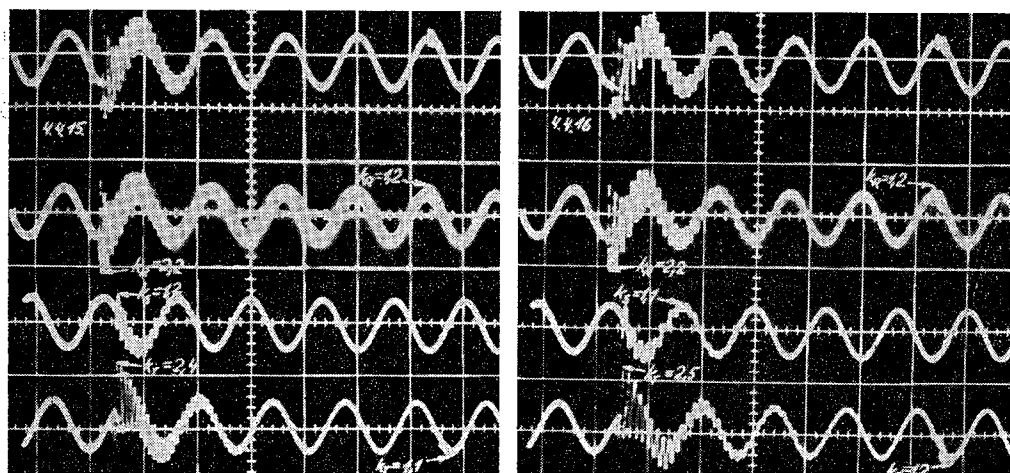


Rys. 4. Oscylogramy przebiegów powstających w punktach A i B sieci z rys. 1 przy dołączeniu i wyłączeniu nie obciążonej linii do nie obciążonego źródła napięcia (parametry generatora — pozycja 4, parametry linii — pozycja 11 tablicy 1). Pomiar na analizatorze. Uwaga: Na rysunkach 4, 5 i 6 nie opisany przebieg pierwszy od góry, przedstawia napięcie fazy R źródła przed wyłącznikiem

kłady oscylogramów podano na rysunkach 4, 5, 6), przy czym mierzono przebiegi napięć w punktach A i B dla trzech faz układu z rys. 1. Na podstawie oscylogramów określono wartości współczynników przebiegów fazowych jako stosunki maksymalnej wartości prze-



Rys. 5. Oscylogramy pręcię powstających w punktach A i B sieci z rys. 1 przy dołączeniu i wyłączeniu obciążonej linii do obciążonego źródła napięcia (parametry generatora — poz. 4, parametry linii łączącej — poz. 7, parametry odbiornika 1 — poz. 14, parametry odbiornika 2 — poz. 16 w tablicy 2). Pomiar na analizatorze



Rys. 6. Oscylogramy pręcię powstających przy dołączeniu i wyłączeniu baterii kondensatorów do obciążonego źródła. Pomiar na analizatorze — bateria o pojemności $0,05 \mu\text{F}/\text{fazę}$ (wartość modelowana, odbiornik 2 — poz. 33 tablicy 1)

pięcia nie ustalonego do maksymalnej wartości napięcia w stanie ustalonym. Zestawienie rodzaju wykonanych badań, ich ilość oraz wartości współczynników pręcię podano w tablicy 2.

3.4 Ocena dokładności wykonanych pomiarów

W wykonanych pomiarach istnieją trzy źródła błędów charakterystyczne dla wybranej metody badań, zasługujące na szersze omówienie.

1. Dokładność modelu matematycznego sieci elektroenergetycznej odwzorowywanej na

Zestawienie wartości współczynników przebieg występujących w badanej sieci elektroenergetycznej 30 kV

Lp	Rodzaj łączenia	wartości współczynników przebieg określane z pomiarów			
		w analizatorze		w sieci rzeczywistej	
		w warunkach symetrii	w warunkach asymetrii		
1	2	3	4	5	
1	Dołączenie nie obciążonej linii do nie obciążonego źródła	1,0 ÷ 2,4*	(8)	1,0 ÷ 2,5	(4)
2	Dołączenie nie obciążonej linii do obciążonego źródła	1,0 ÷ 1,9	(4)	1,0 ÷ 2,0	(1)
3	Dołączenie obciążonej linii do nie obciążonego źródła	1,0 ÷ 2,4	(12)	1,0 ÷ 2,9	(18)
4	Dołączenie obciążonej linii do obciążonego źródła	1,0 ÷ 2,1	(48)	1,0 ÷ 2,0	(12)
5	„ odbioru do nie obciążonego źródła	1,2 ÷ 2,2	(6)	1,2 ÷ 2,1	(1)
6	„ „ obciążonego źródła	1,0 ÷ 1,6	(10)	1,0 ÷ 2,6	(6)
7	Dołączenie nie obciążonej linii z jednofazowym zwarcieziem doziemnym do nie obciążonego źródła	—	—	1,6 ÷ 3,2	(3)
8	Dołączenie obciążonej linii z 1-fazowym zwarcieziem doziemnym do nie obciążonego źródła	—	—	1,4 ÷ 3,0	(4)
9	Dołączenie obciążonej linii z 1-fazowym zwarcieziem doziemnym do obciążonego źródła	—	—	1,4 ÷ 2,2	(6)
10	Dołączenie baterii kondensatorów do nie obciążonego źródła	1,6 ÷ 3,0	(10)	1,4 ÷ 3,2	(4)
11	Dołączenie baterii kondensatorów do obciążonego źródła	1,0 ÷ 2,5	(20)	1,0 ÷ 3,5	(12)
12	Dołączenie nie obciążonego transformatora do obciążonego źródła	—	—	—	—
13	Odcłázenie nie obciążonej linii od nie obciążonego źródła	1,0 ÷ 1,4	(8)	1,0 ÷ 1,6	(4)
14	Odcłázenie nie obciążonej linii od obciążonego źródła	1,0 ÷ 1,2	(4)	—	—
15	Odcłázenie obciążonej linii od nie obciążonego źródła	1,0 ÷ 6,0**	(12)	1,0 ÷ 5,0**	(18)
16	Odcłázenie obciążonej linii od obciążonego źródła	1,0 ÷ 5,2**	(48)	1,0 ÷ 4,6**	(12)
17	„ odbioru od nie obciążonego źródła	1,1 ÷ 1,9	(6)	1,1 ÷ 6,0**	(1)
18	„ „ obciążonego „	1,0 ÷ 1,6	(10)	1,0 ÷ 7,0**	(6)
19	„ nie obciążonej linii z 1-fazowym zwarcieziem doziemnym od nie obciążonego źródła	—	—	1,8 ÷ 2,4	(3)
20	Odcłázenie obciążonej linii z 1-fazowym zwarcieziem doziemnym od nie obciążonego źródła	—	—	1,8 ÷ 5,8**	(4)
21	Odcłázenie obciążonej linii z 1-fazowym zwarcieziem doziemnym od obciążonego źródła	—	—	1,0 ÷ 5,0**	(6)
22	Odcłázenie baterii kondensatorów od nie obciążonego źródła	1,0 ÷ 2,0	(10)	1,0 ÷ 1,4	(4)
23	Odcłázenie baterii kondensatorów od obciążonego źródła	1,0 ÷ 1,3	(20)	1,0 ÷ 1,6	(12)
24	Odcłázenie nie obciążonego transformatora od obciążonego źródła	—	—	—	—
25	Jednofazowe zwarcie z ziemią	—	—	—	—
					1,0
					1,0 ÷ 1,22***
					1,0 ÷ 1,86

U w a g i: Liczby w nawiasach określają ilość pomiarów.

* W wyniku obliczeń uzyskano współczynniki przebieg (dla jednej z rozważanych sieci) zawarte w granicach 1,6 ÷ 2,4.

** Wartości te obarczone są błędem wynikającym z niewłaściwej pracy analizatora przy wyłączaniu.

*** Wyłączenie transformatora po stronie 110 kV. Wyłączenie po stronie 30 kV nie daje rejestrowalnych przebiegów.

analizatorze stanów nie ustalonych. Na dokładność tę wpływają: poprawność modelu matematycznego schematu zastępczego każdego elementu rzeczywistej sieci oraz dokładność z jaką możemy określić parametry przyjętego modelu. Zgodnie z rozważaniami w punktach 2.1 ÷ 2.3 wybrano możliwie najprostsze schematy zastępcze poszczególnych elementów układu i wartości ich obliczono z ogólnie znanych ale przybliżonych wzorów. Wszystkie te przybliżenia mogą kompensować się wzajemnie przez to, że rzeczywisty układ złożony jest z dużej ilości elementów. Ponadto znaczenie tych przybliżonych wartości parametrów elementów zmniejsza się, na skutek poważnego uproszczenia sieci rzeczywistej do układu z rys. 1.

2. Dokładność analizatora stanów nie ustalonych. Jak podano w p. 3.1 analizator jest wysokoczęstotliwościowym, niskonapięciowym urządzeniem, w którym duży wpływ na wyniki pomiarów mają oporności przejścia, pojemności parazytujące i sprzężenia indukcyjne.

Zastosowanie w omawianym analizatorze układu wzmacniaczy modelującego trójfazowe źródło napięcia ma tę niedogodność, że umożliwia wykonanie badań tylko w układzie z bezimpedancyjnie uziemionym punktem gwiazdowym źródła. Powoduje to ograniczenie zakresu przeprowadzanych pomiarów dla rozważanej sieci jedynie do badań przepięć powstających przy symetrycznych łączeniach w symetrycznej sieci. Wykonanie pomiarów przepięć powstających w sieci niesymetrycznej podczas łączeń niesymetrycznych powoduje dodatkowe błędy w wynikach i może być jedynie źródłem informacji o charakterze jakościowym. Z tego powodu w tablicy 2 podano oddzielnie wyniki pomiarów wykonanych na analizatorze w warunkach symetrii i asymetrii. Należy również zauważyć, że w przypadku próby odwzorowania na wspomnianym analizatorze sieci z cewką Petersena można tę cewkę włączyć jedynie pomiędzy ziemię i rezystancję zastępczą źródła dla składowej zerowej (rys. 1), zaś pomiar napięć fazowych wykonywać w odniesieniu do punktu wspólnego cewki Petersena i rezystancji zastępczej źródła dla składowej zerowej. Okazało się, że w przypadku przepływu składowej symetrycznej zerowej prądu powstaje obwód bliski rezonansu, utworzony przez cewkę Petersena i pojemności parazytujące; drgania powstające w tym obwodzie zniekształcają również wyniki pomiarów.

Dodatkowym źródłem błędów jest model wyłącznika zbudowany z półprzewodników, które pod wpływem dostatecznie dużego napięcia powrotnego w czasie wyłączania zaczynają przewodzić, po czym znów wyłączają itd. wywołując drgania wysokiej częstotliwości powodujące w badanym modelu przepięcia o nierealnie dużym współczynniku przepięć. Ze względu na trudności w określeniu dokładnej wartości napięcia powrotnego, przy którym wyłączniki analizatora działają nieprawidłowo, w tablicy 2 podano również nierealnie duże współczynniki przepięć powstających przy wyłączaniu (oznaczono je **), gdyż dostarczają one jednak pewnej informacji o tym, że przepięcie było tak duże, że powodowało wielokrotne zapłony wyłącznika.

3. Dokładność pomiarów za pomocą oscylografów. W większości przypadków wartości współczynników przepięć określono na ekranach oscylografów, w pozostałych — na zdjęciach. Odczytane w ten sposób wartości współczynników przepięć mogą być obciążone błędem rzędu $\pm 10\%$. Ponadto pomiary w punktach *A* i *B* wykonywano niejednocześnie, w związku z czym wartości napięć w tych punktach mogą różnić się między sobą w pierwszym i drugim pomiarze.

Wymienione wyżej źródła błędów charakterystyczne dla wymienionej metody pomiaru są trudne do wyeliminowania, w związku z czym duże znaczenie ma sprawdzenie dokładności uzyskanych wyników.

W punkcie 2.4 wykonano obliczenia przepięć przy określonych tam założeniach upraszczających dla jednej z badanych na analizatorze sieci. Wartości współczynników przepięć powstających przy włączeniu nie obciążonej linii, a określonych tymi dwoma metodami, są następujące:

współczynnik przepięć w fazie	obliczenie	pomiar
R	2,4	2,2
S	1,62	1,1
T	1,55	1,2.

Tak więc wyniki obliczeń dają wartości współczynników przepięć większe od pomierzonych, co jest zrozumiałe, gdyż w obliczeniach nie uwzględniono tłumiącego wpływu rezystancji sieci.

Znacznie więcej informacji o dokładności wyników pomiarów przepięć na analizatorze dają wyniki pomiarów przepięć w sieci rzeczywistej zestawione również w tablicy 2. Porównanie wyników badań przepięć w sieci rzeczywistej z danymi z literatury [1], [5] (dotyczącymi tylko niektórych przypadków wymienionych w tablicy 2) pozwala stwierdzić, że wyniki pomiarów w tej sieci dają wartości leżące w środku przedziału wartości podanych we wspomnianych publikacjach. Porównanie wyników pomiarów na analizatorze z wynikami pomiarów w sieci rzeczywistej zgodnie z tablicą 2 wykazuje zbieżność tych wyników w przypadku pomiarów wykonanych na analizatorze w warunkach symetrii. Różnice w wartościach maksymalnych współczynników przepięć wynikać mogą nie tylko z wprowadzonych uproszczeń sieci rzeczywistej, lecz również stąd, że liczność zbiorów wartości współczynników przepięć pomierzonych na analizatorze jest większa od liczności zbiorów takich wartości określonych z pomiarów w sieci rzeczywistej, skąd w pierwszej grupie zbiorów mogą występować większe odchylenia od wartości średnich. Większe różnice występują jedynie pomiędzy maksymalnymi wartościami współczynników przepięć pomierzonych w sieci rzeczywistej i w warunkach asymetrii na analizatorze i są zrozumiałe na tle wyżej przeprowadzonej dyskusji na temat dokładności użytego w badaniach analizatora stanów nie ustalonych.

Z rozważań przeprowadzonych w niniejszym punkcie wynika, że rezultaty pomiarów wykonanych na analizatorze w warunkach symetrii są dostatecznie dokładne dla praktycznych rozważań, zaś wyniki pomiarów wykonanych na analizatorze w warunkach asymetrii, jako mniej dokładne, dostarczają jedynie informacji o charakterze jakościowym.

4. WNIOSKI Z BADAŃ PRZEPIĘĆ WEWNĘTRZNYCH ZA POMOCĄ ANALIZATORA STANÓW NIE USTALONYCH

Dokładna analiza wyników pomiarów umożliwiła wyróżnienie następujących czynników wpływających w istotny sposób na wartości przepięć występujących w badanej sieci.

1. W wyniku przeprowadzonych pomiarów stwierdzono istotny wpływ odbiorników na wartości przepięć wewnętrznych. Szczególne znaczenie dla obniżenia wartości przepięć

ma dołączenie do sieci zastępczego odbioru nr 2 (rys. 1), przedstawiającego sobą obciążenie danej sieci z wyjątkiem obciążenia dołączonego do linii będącej źródłem przepięć. Obciążenie badanej sieci jest przy tym tak duże, że zmiana jego w granicach wynikających z normalnej eksploatacji nie ma już istotnego wpływu na wartość przepięć, natomiast zmiana charakteru obciążenia z indukcyjnego na czysto czynne powoduje wyeliminowanie przepięć powstających przy wyłączaniu linii obciążonej tym odbiorem.

2. Uziemienie punktu gwiazdowego sieci przez cewkę Petersena powoduje zwiększenie przepięć w stosunku do sieci z bezoporowo uziemionym punktem gwiazdowym.

3. Niejednoczesność zamykania i otwierania styków wyłączników powoduje w pewnym zakresie kątów silne zwiększenie przepięć powstających w badanej sieci.

4. W przypadku łączenia niesymetrycznej gwiazdy baterii kondensatorów przepięcia mogą być znacznie większe od przepięć powstających przy łączeniu symetrycznej gwiazdy.

5. Zmienność parametrów badanej sieci w niektórych przypadkach zmieniała wartości współczynników przepięć w granicach $\pm 20\%$. Na podstawie przeprowadzonych pomiarów na analizatorze nie udało się stwierdzić istotnego wpływu na wartość przepięć w badanej sieci następujących czynników: pojemności C_2 (rys. 1), wartości pojemności baterii kondensatorów, wartości parametrów odbiornika nr 1 (rys. 1), asymetrii odbiorników oraz włączonych szeregowo zwarciovych dławików.

Pomiary wykazały, że stany nie ustalone powstające w badanej sieci trwają ułamki okresu napięcia wymuszającego i w świetle wyników badań opisanych w [11], [12] mogą być skutecznie ograniczane specjalnymi odgromnikami zaworowymi.

5. ZAKOŃCZENIE

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że analizator stanów nie ustalonych może dostarczyć wielu danych o praktycznym znaczeniu, pod warunkiem możliwości oszacowania dokładności wyników uzyskanych z pomiarów. Oszacowanie to najłatwiej jest przeprowadzić w przypadku, w którym posiadamy wartości badanych wielkości określone inną metodą. Wniosek ten oraz rozważania przeprowadzone w początkowej części niniejszej pracy uzasadniają potrzebę rozwijania wszystkich wymienionych we wstępie metod badań przepięć jako wzajemnie uzupełniających się i dających się stosować do badania określonych fragmentów dziedziny: stany nie ustalone w obwodach elektrycznych.

Autor pragnie tą drogą podziękować Mr. J. T. Pender (Senior Lecturer) oraz Mr. L. C. Campbell (Lecturer) z University of Strathclyde (Glasgow) za pomoc w przeprowadzeniu pomiarów na analizatorze.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. H. Baatz, W. Weste, H. Zaduk, Überspannungen beim Abschalten leerlaufender Transformatoren und Leitungen. ETZ-A, 7, 1955.
2. Z. Ciok, Laboratorium techniki łączenia, Wyd. Politechniki Warszawskiej, W-wa, 1965.
3. Z. Ciok, Modelowanie fizyczne linii długich, Rozprawy Elektrotechniczne, 3, 1966.
4. E. Clarke, Circuit Analysis in A-C Power Systems, N.Y., John Wiley & Sons, Inc., 1956.

5. A. F. B. Young, Some Researches on Current Chopping in High-Voltage Circuit Breakers, Proceedings of the IEE, vol. 100, part II, 1953.
6. M. W. Kostienko, Calculation and Simulation of Overvoltages in Systems of Substations with Successive Reflections of Waves Impinging from Line, Archiwum Elektrotechniki, 4, 1966.
7. M. L. Lewinsztein, Zastosowanie rachunku operatorowego do obliczania stanów nie ustalonych w obwodach trójfazowych, WNT, W-wa, 1967.
8. J. T. Pender, A Combined Steady-state and Transient a.c. Network Analyser, Inst. J. Elect. Engng. Educ., Vol. 6, 1968 (W. Brytania).
9. J. S. Zieliński, O obliczaniu przepięć wewnętrznych przy pomocy modeli matematycznych, Rozprawy Elektrotechniczne, 3, 1964.
10. J. S. Zieliński, O współczesnych metodach analizy przepięć wewnętrznych w układach elektroenergetycznych, Postępy TWN, 1965, z. 4.
11. J. S. Zieliński, O możliwościach ograniczenia przepięć ziemnozwarciowych w sieciach średnich napięć przy pomocy odgromników zaworowych, Zeszyty Naukowe P.Ł. Elektryka, 17, 1965.
12. J. S. Zieliński, Możliwości zastosowania odgromników zaworowych do ograniczenia przepięć ziemnozwarciowych w sieciach średnich napięć, Przegląd Elektrotechniczny, 4, 1969.

J. S. ZIELIŃSKI

INVESTIGATION OF INTERNAL OVERVOLTAGES IN POWER NETWORK OF 30 kV WITH APPLICATION OF THE TRANSIENT NETWORK ANALYSER

Summary

In the introduction of the paper some of the transient analysis methods are considered. Because of difficulties in the application of an analogue computer, a transient network analyser is used.

Principles of the simplification of power network in analysis of internal overvoltages are discussed. In Fig. 3 are demonstrated the results of calculations of internal overvoltages at the end of an unloaded line, connected to a sinusoidal voltage generator; the calculations are the basis for the verification of results of measuring by means of the transient network analyser.

Some of the technical data of the transient network analyser in the University of Strathclyde, Glasgow, are given. There are considered sources of errors in the results of investigations with the analyser. The accuracy of the results obtained with the help of the results of investigations in a real network and of the results of calculations is estimated.

In conclusion the influence of the individual parts of the network upon investigation on the value of internal overvoltages is considered.

J. S. ZIELIŃSKI

UNTERSUCHUNG INNERER ÜBERSPANNUNG DES 30-KV ELEKTROENERGETISCHEN NETZES MITTELS EINES ANALYSATORS FÜR UNDEFINIERT ZUSTÄNDE

Zusammenfassung

In der Einführung wurden Methoden zur Analyse von undefinierten Zuständen im elektroenergetischen Netz erwogen. Die Anwendung von Analogmaschinen zur Überspannungsanalyse im Mittelspannungsnetz stößt auf erhebliche Schwierigkeiten, weshalb für diese Untersuchungen der Analysator für undefinierte Zustände gewählt worden ist.

Es wurden Grundsätze einer bei der Analyse von inneren Überspannungen angewandten Vereinfachung besprochen. Abb. 3 zeigt die Berechnungsergebnisse von Überspannungen am Ende einer an einer

sinusoidalen Spannungsquelle angebrachten unbelasteten Linie; diese Berechnung ist zwecks Einschätzung der Genauigkeit der Bemessungsergebnisse mittels Analysator gemacht worden.

Man hat die grundsätzlichen technischen Daten des an der University of Strathclyde, Glasgow, befindlichen Analysators angeführt, und die Fehlerquellen der mit diesem Analysator ausgeführten Überspannungsbemessungen erwägt sowie die Genauigkeit erzielter Ergebnisse in Bezug auf Bemessungsergebnisse der Effektivanordnung und der Berechnungsergebnisse eingeschätzt.

Abschließend wurden Schlüsse über den Einfluß einzelner Netzteile auf den Wert innerer Überspannungen des untersuchten Netzes gezogen.

И. С. ЗЕЛИНСКИ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВНУТРЕННИХ ПЕРЕНАПРЯЖЕНИЙ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СЕТИ 30 КВ. С ПРИМЕНЕНИЕМ АНАЛИЗАТОРА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Р е з ю м е

Во введении рассмотрены методы анализа переходных процессов в электроэнергетических сетях. Из-за затруднений в применении аналоговых вычислительных машин применен анализатор переходных процессов.

Рассмотрены основы упрощения электроэнергетической сети применяемые для анализа внутренних перенапряжений. Приведены (рис. 3) результаты расчета перенапряжений на конце ненагруженной линии, подключенной к источнику синусоидального напряжения; этот расчет сделан для оценки точности результатов измерений на анализаторе.

Приведена краткая техническая характеристика анализатора находящегося в University of Strathclyde, Глазгоу. Рассмотрены источники ошибок в измерениях перенапряжений, проведенных анализатором и дана оценка точности полученных результатов на основе результатов измерений действительной схемы равно как результатов расчета.

В заключении даны выводы касающиеся влияния отдельных элементов сети на величину внутренних перенапряжений в исследуемой электроэнергетической сети.

Zasady konstruowania ekonometrycznych modeli tendencji rozwojowych w zastosowaniu do systemów elektroenergetycznych

ZBIGNIEW KOWALSKI (ŁÓDŹ)

Katedra Elektroenergetyki Politechniki Łódzkiej

Otrzymano 13.10.1969

Podano praktyczne sposoby konstruowania ekonometrycznych modeli tendencji rozwojowych zmiennych (wielkości lub wskaźników) charakteryzujących systemy elektroenergetyczne. Zaproponowano określenie trendu. Przedstawiono praktyczne metody sprawdzania przypadkowości i autokorelacji odchyleń od trendu. Podano sposób oceny istotności różnicy między różnymi funkcjami regresji. Stosując podane metody zbadano przykładowo szereg chronologiczny energii pobranej przez odbiorców z energetyki zawodowej w krajowym systemie elektroenergetycznym.

1. WSTĘP

Istnieje praktyczna potrzeba znajomości w przyszłości wielu wielkości i wskaźników charakteryzujących system elektroenergetyczny jako obiekt gospodarczo-technologiczny. Jednymi z ważniejszych sposobów przewidywania (predykcji) wartości tych zmiennych w niezbyt odległej przyszłości są, lub wydają się być, sposoby oparte na modelach ekonometrycznych, skonstruowanych na podstawie szeregów chronologicznych tych zmiennych i ewentualnie innych dodatkowych wiadomości.

Modele ekonometryczne, jako związki stochastyczne, przedstawiają z jednej strony analityczne kształtowanie się w czasie wymienionych wielkości lub wskaźników (ekonometryczne modele tendencji rozwojowych), z drugiej zaś mogą przedstawiać ich zmiany pod wpływem innych zmiennych ekonomicznych, technologicznych i pozaekonomicznych (strukturalne modele ekonometryczne).

Celem tej pracy jest podanie niektórych praktycznych zasad konstruowania i badania ekonometrycznych modeli tendencji rozwojowych i przykładu ich zastosowania w odniesieniu do szeregu chronologicznego zużycia energii elektrycznej przez odbiorców z dostaw energetyki zawodowej w polskim systemie elektroenergetycznym.

2. TREND JAKO EKONOMETRYCZNY MODEL TENDENCJI ROZWOJOWEJ

Niech $y_1, y_2, \dots, y_n$ będzie szeregiem chronologicznym utworzonym z wartości (wskaźników) y , odnoszących się do kolejnych jednostek czasu, np. do kolejnych lat. Wartości y_t , gdy $t = 1, 2, \dots, n$, nazywać będziemy wartościami statystycznymi. Mogą to być

wartości pomierzone, zsumowane na podstawie pomiarów, ustalone wg zasad statystycznych itp. Zakładać będziemy, że wartości te nie są obciążone błędami pomiarowymi lub obliczeniowymi, lub że błędów tych nie będziemy uwzględniać. Wartości y_t w przypadku systemów elektroenergetycznych dotyczą całego systemu lub jego części. Są to wartości zwykle zmieniające się w czasie w sposób skokowy (dyskretny), jako wartości losowe przyczynowe (nie wylosowane ze zbiorowości generalnych lub z tzw. urny) które kształtują się pod wpływem wielu czynników, również często o charakterze przypadkowym.

Szereg $y_1, y_2, \dots, y_n$ można aproksymować, wyrównać za pomocą ciągłej funkcji regresji $Y_t = f(t)$, gdzie Y_t — wartość tej funkcji w czasie t , różniącą się od wartości statystycznej y_t .

Różnice pomiędzy y_t i Y_t nazywają się odchyleniami lub resztami. Wyróżnimy tu

$$\text{— odchylenia bezwzględne } e_t^* = y_t - Y_t, \quad (1)$$

$$\text{— odchylenia względne procentowe } e_t = 100e_t^*/y_t, \quad (2)$$

$$\text{lub } e_t' = 100e_t^*/Y_t. \quad (2a)$$

Ze względów praktycznych operować będziemy odchyleniami względnymi e_t .

Odchylenia e_t i e_t^* , gdy $t = 1, 2, \dots, n$, tworzą również szeregi chronologiczne (ciągi) odpowiednio: $e_1, e_2, \dots, e_n$ i $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$.

Jedną z ważnych cech szeregu odchyłeń jest wg [12] stopień regresji

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t^2} \quad (\%). \quad (3)$$

Szereg $y_1, y_2, \dots, y_n$ można aproksymować za pomocą wielu funkcji regresji $Y_t = f(t)$. Nie każda z nich może być jednak uznana za trend.

Trendem szeregu chronologicznego $y_1, y_2, \dots, y_n$ nazywać będziemy funkcję regresji $Y_t = f(t)$, spełniającą następujące warunki:

- 1) odchylenia e_t lub e_t^* można uznać za przypadkowe,
- 2) stopień regresji (s) zawiera się w zadanym przedziale,
- 3) liczność szeregu chronologicznego (n) jest dostatecznie duża,
- 4) jest to funkcja z klasy prostych,
- 5) parametry funkcji wyznaczone są wg z góry przyjętego kryterium.

Warunki 1, 2 i 3 możemy uznać za warunki konieczne. Warunki 4 i 5 są warunkami dodatkowymi.

Funkcja regresji, spełniająca wymienione matematyczne warunki konieczne, jest trendem (ekonometrycznym modelem tendencji rozwojowej) asymptotycznym. Trend asymptotyczny, którego matematyczna postać może być wytłumaczona lub zinterpretowana przyczynowo, może być uznany za trend (model) przyczynowy. Zwykle istnieją poważne trudności w dostatecznie umotywowanym uzasadnieniu przebiegu w czasie rozpatrywanych wartości wielkości lub wskaźników, kształtujących się pod wpływem nieraz bardzo wielu przyczyn.

Warunek 1. Nie wnikając bliżej w zagadnienie, przypadkowość (losowość) odchyłeń można sprawdzić za pomocą odpowiednich testów statystycznych, jako umownych narzędzi badań eksperymentalnych. Znane są, np. [6], następujące zasadnicze testy przypadkowości odchyłeń: test serii, test znaków i test Pitmana. Test Pitmana jest uciążliwy w za-

stosowaniach. Testy serii i znaków wypróbowaaliśmy w kilkuset przypadkach. Test serii wydaje się być lepszy od testu znaków, ponieważ rezultaty jego stosowania wydają się być w praktyce bardziej przekonujące w porównaniu z testem znaków, a poza tym w badanych przypadkach rezultaty stosowania testów serii i znaków w zasadzie pokrywały się. Proponujemy więc przypadkowość odchyłeń sprawdzać za pomocą testu serii.

Stawia się hipotezę H_p , że odchylenia (ciąg odchyłeń) są przypadkowe. Hipotezę tę weryfikuje się testem serii na poziomie istotności α . W procesie badania szeregów chronologicznych wielkości i wskaźników charakteryzujących system elektroenergetyczny w oparciu o nasze koncepcje proponujemy przyjąć $\alpha = 0,1$.

Każdemu odchyleniu e_t lub e_t^* można przyporządkować znak plus (+), znak minus (−) lub zero (0). Tego ostatniego przypadku nie bierze się pod uwagę, ponieważ prawdopodobieństwo, że $e_t = 0$ lub że $e_t^* = 0$ równa się zero. Otrzymamy w ten sposób ciąg znaków odchyłeń (+) i (−), np. ++−+−−+−++. Kolejne tego samego rodzaju znaki stanowią serię. W szeregu znaków o n elementach można wyróżnić m serii.

Hipotezę H_p , że ciąg odchyłeń $e_1, e_2, \dots, e_n$ lub $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ jest przypadkowy, lub że odchylenia są przypadkowe, przyjmuje się na poziomie istotności α , gdy

$$m_d < m \leq m_g, \quad (4)$$

gdzie:

m_d — dolna krytyczna liczba serii na poziomie α ,

m_g — górna krytyczna liczba serii na poziomie α .

Wartości m_d i m_g podane są w tablicach statystycznych, np. [2], [1], [15]. W tabl. 1 zestawiono wartości m_d i m_g na poziomie $\alpha = 0,1$, spisane z tablic [15], w zależności od liczności badanego szeregu odchyłeń (n) i liczby rzadziej występujących znaków odchyłeń (n_1). Na przykład, gdy $n = 10$, a wszystkich znaków (+) jest 6, znaków (−) jest zaś 4, to $n_1 = 4$.

Jeżeli odchylenie jest bardzo małe, np. $e_t \leq 0,2\%$, można założyć $e_t = 0$. W tym przypadku przy stosowaniu testu serii liczba elementów badanego szeregu odchyłeń jest mniejsza od liczności rozpatrywanego szeregu chronologicznego $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Warunek $m > m_d$ nazwiemy minimalnym warunkiem przypadkowości odchyłeń i warunek ten proponujemy traktować jako konieczny warunek przypadkowości odchyłeń.

Jeżeli $m > m_g$, wskazywać to może na istnienie związków autokorelacyjnych lub innych szczególnych cech zbioru odchyłeń i nie może być podstawą odrzucenia funkcji regresji jako trendu, która ten warunek spełnia. W tym przypadku funkcja regresji może być bardzo dobrą aproksymatą, charakteryzującą się ponadto cenną właściwością zbioru odchyłeń, np. autokorelacją.

W konstrukcji trendu jako warunek przypadkowości odchyłeń rozumieć więc będziemy minimalny warunek przypadkowości i hipotezę H_p , że ciąg odchyłeń jest przypadkowy na poziomie istotności α , będziemy przyjmować, jeżeli

$$m > m_d. \quad (4a)$$

Warunek 2. Stopień regresji (s) nie może być zbyt duży. Gdy stopień ten jest duży, istnieją zbyt duże względne różnice pomiędzy wartościami y_t i odpowiadającymi im wartościami funkcji regresji Y_t . W tym przypadku inna funkcja regresji, spełniająca również warunki 1 i 3, może lepiej wyrównywać badany szereg.

Tablica 1

Dolne (m_d) i górne (m_g) krytyczne wartości liczb serii do testu serii na poziomie istotności $\alpha = 0,1$

n	n_1	m_d	m_g	n	n_1	m_d	m_g
8	3	2	7	16	2	2	5
	4	2	7		3	3	7
9	3	2	7		4	4	9
	4	2	8		5	4	11
10	2	2	5	17	6	5	11
	3	2	7		7	5	12
	4	3	8		8	5	12
	5	3	8		2	2	5
11	2	2	5	18	3	3	7
	3	2	7		4	4	9
	4	3	8		5	4	11
	5	3	9		6	5	12
12	2	2	5	19	7	5	13
	3	2	7		8	5	13
	4	3	9		2	2	5
	5	3	9		3	3	7
	6	3	10		4	4	9
					5	4	11
13	2	2	5	20	6	5	12
	3	3	7		7	6	13
	4	3	9		8	6	14
	5	3	10		9	6	14
	6	4	10		2	2	5
					3	3	7
14	2	2	5	15	4	4	9
	3	3	7		5	5	11
	4	3	9		6	5	12
	5	4	10		7	6	13
	6	4	11		8	6	14
	7	4	11		9	6	14
15	2	2	5	16	10	6	15
	3	3	7				
	4	3	9				
	5	4	10				
	6	4	11				
	7	4	12				

Można, w zależności od potrzeb, przyjąć skalę stopnia regresji. Na przykład, gdy $s \leq 1\%$ — regresja bardzo dobra, gdy $1\% < s \leq 2\%$ — regresja dobra, gdy $2\% < s \leq 5\%$ — regresja zadawalająca, gdy $s > 5\%$ — regresja niezadawalająca itp.

Warunek 3 oznacza, że liczność szeregu chronologicznego, aproksymowanego przez trend, nie może być mniejsza od pewnej liczności minimalnej n_{min} . Ta zaś uzależniona jest przede wszystkim od:

- a) warunków matematyczno-statystycznych,
- b) okresu prognoz.

Warunki matematyczno-statystyczne wynikają ze stosowalności metod obliczeniowych związanych z budową i badaniem ekonometrycznych modeli tendencji rozwojowych. Największa minimalna liczność n_{min} podyktowana jest praktyczną stosowalnością testu serii do badania odchyłań i równa się 10 na poziomie istotności $\alpha = 0,1$ oraz 14 na poziomie $\alpha = 0,05$.

Okres prognoz, przy założonych, spodziewanych błędach prognoz i zadaniem z góry prawdopodobieństwie przyjętego błędu prognozy, nie jest jednoznacznie określony. Jest on tym większy, im założone błędy prognozy są większe, a ich prawdopodobieństwo mniejsze. Można jedynie przypuszczać, że okres ten nie jest praktycznie większy, przeciętnie biorąc, od połowy okresu, w odniesieniu do którego był wyznaczony trend podstawowy. Jeżeli założyć, że okres prognoz nie jest przeciętnie praktycznie większy od 5 lat (przy założeniu dość wysokiego prawdopodobieństwa kilku procentowego błędu prognozy), to $n_{min} = 10$.

Zagadnienie wyznaczania horyzontu prognoz opartych na ekonometrycznych modelach tendencji rozwojowych i związany z tym problem wyboru liczności szeregów chronologicznych mogą być przedmiotem oddzielnych studiów, których podstawę muszą stanowić przede wszystkim badania eksperymentalne.

Warunek 4 jest praktycznym. Funkcje regresji nie powinny być skomplikowane z powodu trudności ich stosowania w metodach wyznaczania prognoz, ze względu na trudną lub praktycznie niemożliwą ich interpretację i często z powodu trudności związanych z wyznaczeniem parametrów tych funkcji.

W przypadku szeregów chronologicznych niecyklicznych, którymi tu się zajmujemy, do prostych rosnących funkcji regresji można zaliczyć przede wszystkim:

$$a) Y_t = a_{01} + a_{11}t, \text{ którą oznaczmy przez } F_1, \quad (5a)$$

$$b) Y_t = a_{02} + a_{12}t + a_{22}t^2 \text{ — funkcja } F_2, \quad (5b)$$

$$c) Y_t = ab^{t-1} \text{ — funkcja } F_4, \quad (5c)$$

$$d) Y_t = ct^d \text{ — funkcja } F_5 \quad (5d)$$

oraz ewentualnie wielomian trzeciego stopnia

$$e) Y_t = a_{03} + a_{13}t + a_{23}t^2 + a_{33}t^3 \text{ — funkcja } F_3. \quad (5e)$$

Warunek 5. Istnieje szereg metod wyznaczania parametrów funkcji regresji; są to przede wszystkim metody: graficzno-analityczna, przeciętnych, średniej ruchomej, np. [13], punktowa [6], najmniejszych kwadratów (bezwzględnych), np. [18], metody dekompozycyjne [8] i ogólna metoda iteracyjna [3]. Metody te są umowne. Najogólniejszą i najczęściej

stosowaną jest metoda najmniejszych kwadratów. Jednak w praktyce mogą być stosowane różne metody ze względu na ich specyficzne cechy. Metody te nie są równoważne. Wartości parametrów obliczone różnymi metodami na ogół różnią się. Różne są więc odchylenia e_t i e_t^* oraz ich właściwości. Funkcja regresji $Y_t = f(t)$, której parametry wyznaczone są metodą A, może nie spełniać dwóch pierwszych warunków trendu, gdy tymczasem ta sama funkcja, której parametry obliczone są metodą B, może te warunki spełniać. Zatem w określeniu trendu winna być podana metoda, wg której parametry tego trendu zostały wyznaczone.

W pracy niniejszej nie będziemy zajmować się metodami obliczania parametrów trendu. Nadmieniamy jednak o celowości stosowania iteracyjnej metody wyznaczania parametrów funkcji regresji transformowanych do funkcji liniowej, jak np. funkcji wykładniczej, która jest często stosowana przy aproksymacji szeregów chronologicznych zużycia lub produkcji energii elektrycznej w systemach elektroenergetycznych. Metoda ta opisana jest w pracach [9] i [10]. Wspomnimy również o nowej praktycznej metodzie obliczania parametrów ekonometrycznych modeli tendencji rozwojowych, podanej w [11] i [12], opartej na kryterium minimalnej sumy kwadratów odchylen względnych, nazwanej metodą najmniejszych kwadratów względnych.

Trend, jako ciągła funkcja regresji, przedstawia umowną tendencję rozwojową badanego szeregu chronologicznego w przedziale czasu wyznaczonym przez ten szereg. Trend jest więc ważną, zasadniczą cechą szeregu chronologicznego. Jednak wysuwanie hipotez dotyczących prognoz krótkookresowych może opierać się nie tylko na trendzie, lecz także na właściwościach odchylen e_t i e_t^* od trendu. Te cechy odchylen są lub mogą być wykorzystane przede wszystkim do korekcji prognoz opartych na trendzie.

Ciąg odchylen charakteryzuje się lub może charakteryzować się przede wszystkim:

a) stopniem regresji (s) — jw. lub innymi miarami rozrzutu y_t od Y_t , jak np. średnim odchyleniem kwadratowym

$$s^* = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t^{*2}}, \quad (6)$$

odchyleniem przeciętnym bezwzględnym

$$\theta^* = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |e_t^*|, \quad (7)$$

odchyleniem przeciętnym względnym

$$\theta = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |e_t|, \quad (8)$$

b) istotną autokorelacją odchylen e_t i e_t^* ,

c) rozkładem odchylen e_t i e_t^* .

Odchylenie średnie (arytmetyczne) bezwzględne

$$\bar{e}_t^* = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t^* \quad (9a)$$

nie jest właściwą miarą rozrzutu, ponieważ wg [13] w przypadku, gdy funkcja regresji $Y_t = f(t)$ zawiera wyraz wolny, a jej parametry wyznaczone są metodą najmniejszych kwadratów, teoretycznie $\bar{e}_t^* = 0$; praktycznie $\bar{e}_t^* \approx 0$ w zależności od dokładności przeprowadzonych obliczeń.

Odchylenie średnie względne

$$\bar{e}_t = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t \quad (9b)$$

również na ogół nie można uznać za dobrą miarę rozrzutu, gdyż w przypadku funkcji regresji z wyrazem wolnym praktycznie odchylenie $\bar{e}_t$ jest małą, trudno porównywalną liczbą.

3. AUTOKORELACJA ODCHYLEŃ

Autokorelacją odchyłeń e_t nazywamy funkcję regresji $E_t = f(e_{t-k})$ w postaci związku korelacyjnego pomiędzy odchyleniami e_t w roku t , a odchyleniami e_{t-k} w roku wcześniejszym $t-k$, gdy $t > k$, gdzie $k = 1, 2, \dots, K$ — rząd autokorelacji. E_t jest wartością funkcji regresji $f(e_{t-k})$ dla e_{t-k} , odpowiadającą odchyleniu e_t . Wartości E_t i e_t różnią się o odchylenie $\varepsilon_t = e_t - E_t$.

Miarą natężenia związku $E_t = f(e_{t-k})$ jest lub może być współczynnik autokorelacji rzędu k

$$\rho_k = \frac{\text{cov}(e_t, e_{t-k})}{\sqrt{\text{var } e_t \cdot \text{var } e_{t-k}}}, \quad (10)$$

gdzie

$$\text{cov}(e_t, e_{t-k}) = \frac{1}{n-k} \sum_{t=k+1}^n (e_t - \bar{e}_{kt})(e_{t-k} - \bar{e}_{k,t-k}), \quad (11a)$$

$$\text{var } e_t = \frac{1}{n-k} \sum_{t=k+1}^n (e_t - \bar{e}_{kt})^2, \quad (11b)$$

$$\text{var } e_{t-k} = \frac{1}{n-k} \sum_{t=k+1}^n (e_{t-k} - \bar{e}_{k,t-k})^2, \quad (11c)$$

przy czym

$$\bar{e}_{kt} = \frac{1}{n-k} \sum_{t=k+1}^n e_t, \quad (11d)$$

$$\bar{e}_{k,t-k} = \frac{1}{n-k} \sum_{t=k+1}^n e_{t-k}. \quad (11e)$$

Autokorelacyjna funkcja regresji $E_t = f(e_{t-k})$ może mieć różną postać. Praktycznie zakłada się często, np. [16], liniową postać tej funkcji, a mianowicie

$$E_t = \delta_{ko} + \delta_k e_{t-k}. \quad (12)$$

Stosując metodę najmniejszych kwadratów (bezwzględnych), parametry δ_{ko} i δ_k można wyznaczyć z zależności

$$\delta_k = \frac{\text{cov}(e_t, e_{t-k})}{\text{var } e_{t-k}}, \quad (13)$$

$$\delta_{ko} = \bar{e}_{kt} - \delta_k \bar{e}_{k, t-k}. \quad (14)$$

Wartość współczynnika autokorelacji $\rho_k = 0 \div 1$.

Istnieje problem podjęcia decyzji, czy autokorelację należy uznać za istotną, czy za nieistotną. Podjęcie takiej decyzji umożliwiają nam statystyczne testy autokorelacyjne, jako pewne obiektywne, umowne sposoby przyjęcia lub odrzucenia hipotezy H_a o nieistotności autokorelacji. Do sprawdzenia hipotezy H_a można stosować przede wszystkim test Durбина-Watsona (test DW) i test Fishera (test Fi). Istnieją również wg [16] i [17] testy Neumanna i Morana. Test Neumanna jest podobny do testu DW ; test Morana wydaje się być trudny do zastosowania.

Z testu DW korzysta się najczęściej do sprawdzania hipotezy H_a o nieistotności autokorelacji rzędu 1, tj. gdy $k = 1$. Sprawdzianem testu dla $k = 1$ jest tzw. statystyka

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2}. \quad (15)$$

W tabl. 2 podane są krytyczne dolne wartości sprawdzianu $d(d_g)$ na proponowanym poziomie istotności $\alpha = 0,05$, spisane dla $n \geq 15$ z tablic w [4], cz. II. Przybliżone wartości d_a dla $10 \leq n < 15$, gdzie n — liczność badanego szeregu, wyznaczyliśmy na podstawie ekstrapolacji krzywych $d_a = f(n)$.

Jeżeli $d \leq d_a$, brak podstaw do przyjęcia hipotezy H_a na poziomie α , tzn. że autokorelację rzędu 1 można uznać za istotną.

Test Fi umożliwia sprawdzenie hipotezy H_a o braku autokorelacji odchyłeń dowolnego rzędu k na podstawie sprawdzianu, którym jest krytyczna wartość współczynnika autokorelacji (ρ_g) rzędu k .

Jeżeli $|\rho_k| \geq \rho_g$, nie ma podstaw do przyjęcia hipotezy H_a o braku autokorelacji rzędu k na poziomie α , tj. można przyjąć, że autokorelacja rzędu k jest istotna.

W tabl. 2 zestawiono wartości krytyczne ρ_g na proponowanym poziomie $\alpha = 0,05$, spisane z pracy [19] i uzupełnione z tablic [1] i [15].

Zaleca się równoległe stosowanie obu testów: DW i Fi do weryfikacji hipotezy H_a o nieistotności autokorelacji rzędu 1. Hipotezę H_a przyjmujemy, gdy wskazania obu testów pokrywają się.

Celowe jest sprawdzenie istotności autokorelacji zarówno odchyłeń względnych (e_t), jak i bezwzględnych (e_t^*). W tym ostatnim przypadku stosuje się te same testy i metody wyznaczania współczynnika autokorelacji ρ_k^* oraz parametrów δ_k^* i δ_{ko}^* funkcji autokorela-

cyjnej $E_t^* = \delta_{ko}^* + \delta_k^* e_{t-k}^*$ jak w odniesieniu do autokorelacji odchyłeń względnych e_t , podstawiając we wzorach (10) ÷ (15) e_t^* i e_{t-k}^* zamiast e_t i e_{t-k} .

Zakładając istotność autokorelacji każdego rzędu k ,

$$E_t = \sum_{k=1}^k a_k e_{t-k}. \quad (16)$$

Tablica 2

Krytyczne wartości sprawdzianów na poziomie $\alpha = 0,05$ do autokorelacyjnego testu $DW(d_d)$ i testu $Fi(\varrho_g)$

n	d_d	ϱ_g	n	d_d	ϱ_g
8	.	0,707	15	1,08	0,514
9	.	0,666	16	1,10	0,497
10	0,92	0,632	17	1,13	0,482
11	0,95	0,602	18	1,16	0,468
12	0,98	0,576	19	1,18	0,456
13	1,02	0,553	20	1,20	0,444
14	1,05	0,532			

Parametry a_k , gdy $k = 1, 2, \dots, K$, można wyznaczyć metodą najmniejszych kwadratów. Odpowiednie zależności i opis programu maszynowego obliczania a_k zawarte są w pracy [11].

Stwierdzone związki autokorelacyjne w badanym szeregu odgrywają ważną rolę w autokorelacyjnych metodach predykcji (przewidywania).

4. SPRAWDZANIE ISTOTNOŚCI RÓŻNICY MIĘDZY TRENDAMI RÓŻNEJ POSTACI

W procesie poszukiwania trendu celowe jest rozpatrzenie kilku funkcji regresji, które mają spełniać — przy założonym kryterium aproksymacji — dwa pierwsze warunki trendu. Może również okazać się potrzebne zbadanie funkcji regresji, której parametry wyznaczone są różnymi metodami, np. metodami najmniejszych kwadratów bezwzględnych i względnych.

Niech $Y_{1t} = f_1(t)$ i $Y_{2t} = f_2(t)$ będą funkcjami regresji, spełniającymi wszystkie warunki trendu, tj. trendami.

Wyłania się problem podjęcia decyzji wyboru jednej z tych funkcji jako lepszej aproksymaty lub stwierdzenia, że aproksymaty te nie różnią się istotnie między sobą.

Przedstawimy praktyczny sposób sprawdzenia istotności różnicy między funkcją regresji $f_1(t)$, którą nazwiemy aproksymatą I i funkcją $f_2(t)$, którą nazwiemy aproksymatą II.

Za przeciętną miarę odchyłeń względnych y_t od Y_t przyjęliśmy w rozdz. 2 stopień regresji (s) (3). W przypadku aproksymaty I będzie to stopień regresji s_1 , a w przypadku aproksymaty II — s_2 .

Wartość stosunku $\frac{s_2}{s_1}$ może być miarą oceny różnicy między aproksymatami I i II.

Stawiamy hipotezę H_r , że ze względu na stopień regresji aproksymaty I i II nie różnią się istotnie.

Do sprawdzenia hipotezy H_r proponujemy dwa testy statystyczne, a mianowicie test G. W. Snedencora, zwany testem F [19] i nowszy (z 1963 roku) test H. L. Hartera [5], zwany testem F^* .

Sprawdzianem do testu F jest stosunek

$$F = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \approx \frac{s_2^2}{s_1^2}, \quad (17)$$

gdzie:

σ_1^2 i σ_2^2 — odpowiednie wariancje, przy czym $\sigma_2^2 > \sigma_1^2$ i odpowiednio $s_2^2 > s_1^2$,

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (e_{1t} - \bar{e}_1)^2, \quad (18a)$$

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (e_{2t} - \bar{e}_2)^2, \quad (18b)$$

przy czym:

e_{1t} , gdy $t = 1, 2, \dots, n$ — odchylenia względne procentowe w przypadku aproksymaty I,

e_{2t} — jw. lecz aproksymaty II,

$\bar{e}_1$ i $\bar{e}_2$ — odchylenia średnie wg (9b).

Krytyczne wartości F_g testu F na poziomie $\alpha = 0,1$, który praktycznie proponujemy, podane są w tabl. 3.

Tablica 3
Krytyczne wartości sprawdzianów na poziomie $\alpha = 0,1$
do testu $F(F_g)$ i testu $F^*(F_g^*)$

n	F_g	F_g^*	n	F_g
8	.	1,716	16	1,91
9	2,44	1,661	17	1,87
10	2,32	1,617	18	1,85
11	2,23	1,583	19	1,80
12	2,15	1,554	20	1,79
13	2,08	1,530		
14	2,02	1,509		
15	1,97	1,491		

Jeżeli $F < F_g$, nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_r na poziomie α , że aproksymaty I i II różnią się istotnie, tj. przyjmujemy hipotezę H_r , a gdy $F \geq F_g$ hipotezy tej nie możemy przyjąć, tj. możemy przyjąć hipotezę alternatywną H_r , że aproksymaty I i II różnią się istotnie.

Sprawdzianem testu F^* jest stosunek

$$F^* = \frac{r_2}{r_1}, \quad \text{gdy } r_2 > r_1, \quad (19)$$

gdzie:

r_2 — największa bezwzględna różnica pomiędzy odchyleniami względnymi w przybliżeniu aproksymaty II,

r_1 — jw. lecz aproksymaty I.

Krytyczne górne wartości F_g^* testu F^* na poziomie $\alpha = 0,1$, spisane z [1], podane są w tabl. 3 dla $n \leq 15$.

Jeżeli $F^* < F_g^*$, nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_r .

Zatem, gdy $n \leq 15$, hipotezę H_r o nieistotności różnic między dwoma aproksymatami proponujemy sprawdzać testami F i F^* , natomiast gdy $n > 15$ — tylko testem F .

Należy zaznaczyć, że testy F i F^* zostały opracowane przy założeniu, że rozkłady odchyleń e_{1t} i e_{2t} są normalne. Jeżeli okaże się, że rozkłady te nie mogą być przyjęte za normalne, co często w praktyce występuje, wskazanie testów musimy traktować za przybliżone.

Z braku miejsca nie podajemy praktycznych sposobów sprawdzenia normalnego rozkładu odchyleń. Nadmienimy tylko, że w przypadku ciągu odchyleń o małej liczbie elementów do sprawdzania hipotezy H_n , według której rozkład tych odchyleń można uznać (w przybliżeniu) za normalny, służą dwa testy: test F. Massey z 1951 r. [14] i test Z. Hellwiga z 1965 r. [7]. Testy te, stosowane równolegle, wypróbowaliśmy w kilkuset praktycznych przypadkach i dostosowaliśmy do praktycznych potrzeb [21].

Jeżeli wskazania testów wykażą, że porównywane trendy nie różnią się istotnie, mamy podstawę do wyboru trendu o prostszej postaci lub o postaci, którą możemy łatwiej zinterpretować.

Przykład 1. Jeżeli wielomiany drugiego i trzeciego stopnia jako trendy nie różnią się istotnie, wybieramy trend o postaci wielomianu drugiego stopnia, który jest funkcją prostszą.

Przykład 2. Jeżeli funkcje regresji $Y_{1t} = a_{01} + a_{11}t + a_{12}t^2$ oraz $Y_{2t} = ab^{t-1}$ nie różnią się istotnie, a przyczynowa analiza wzrostu badanej zmiennej wskazuje, że względne przyrosty tej zmiennej w czasie są stałe, celowy jest wybór funkcji wykładniczej.

Jeżeli stwierdzimy, że porównywane trendy różnią się istotnie, istnieje podstawa do wyboru trendu charakteryzującego się mniejszym stopniem regresji.

5. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Rozpatrzmy szereg chronologiczny utworzony z rocznych wartości energii elektrycznej pobranej przez odbiorców z energetyki zawodowej w polskim systemie elektroenergetycznym w latach 1950÷1966. Jest to szereg 17-letni ($n = 17$) o wartościach y_t zestawionych w tabl. 4.

W celu znalezienia trendu tego rosnącego szeregu zbadano funkcje regresji typu (5a)÷(5e). Do wyznaczania parametrów tych funkcji zastosowano metodę najmniejszych kwadratów względnych. Poniżej zestawiono obliczone za pomocą maszyny ODRA 1013 wartości tych parametrów w przypadku rozpatrywanych typów funkcji F_p , gdy $p = 1, \dots, 5$:

T a b l i c a 4

Wartości badanego szeregu chronologicznego (y_t) i funkcji regresji typu F_p , gdy $p = 1, \dots, 5$, (Y_t) w TWh oraz odchyłen względnych (e_t) w %

t	y_t	F_1		F_2		F_3		F_4		F_5	
		Y_t	e_t	Y_t	e_t	Y_t	e_t	Y_t	e_t	Y_t	e_t
1	5,051	4,2805	+15,25	4,999	+1,02	4,966	+1,68	5,474	-8,37	4,010	+20,61
2	5,878	5,7711	+1,82	5,942	-1,09	5,953	-1,28	6,177	-5,08	6,227	-5,94
3	6,884	7,2618	-5,49	6,988	-1,51	7,023	-2,02	6,969	-1,24	8,055	-17,02
4	8,038	8,7524	-8,89	8,138	-1,24	8,179	-1,75	7,864	+2,16	9,670	-20,30
5	9,404	10,2431	-8,92	9,391	+0,14	9,424	-0,22	8,874	+5,64	11,142	-18,48
6	11,273	11,7337	-4,09	10,748	+4,66	10,764	+4,52	10,013	+11,18	12,509	-10,96
7	12,625	13,2243	-4,75	12,208	+3,30	12,200	+3,36	11,298	+10,51	13,795	-9,27
8	13,666	14,7150	-7,68	13,722	-0,77	13,739	-0,53	12,748	+6,72	15,016	-9,88
9	15,235	16,2056	-6,37	15,439	-1,34	15,382	-0,96	14,385	+5,58	16,182	-6,22
10	16,839	17,6963	-6,09	17,210	-2,21	17,134	-1,75	16,231	+3,61	17,301	-2,57
11	18,811	19,1869	-1,10	19,085	-1,46	18,998	-0,99	18,315	+2,64	18,381	+2,29
12	21,156	20,6775	+2,26	21,063	+0,44	20,979	+0,84	20,666	+2,32	19,429	+8,18
13	23,238	22,1682	+4,69	23,145	+0,49	23,080	+0,76	23,318	-0,26	20,438	+12,13
14	24,789	23,6588	+4,56	25,330	-2,18	25,306	-2,08	26,312	-6,14	21,422	+13,58
15	27,286	25,1494	+7,83	27,619	-1,22	27,659	-1,37	29,689	-8,81	22,381	+17,97
16	30,266	26,6401	+11,98	30,012	+0,84	30,144	+0,40	33,500	-10,69	23,318	+22,96
17	33,430	28,1307	+15,85	32,508	+2,76	32,768	+1,99	37,801	-13,07	24,233	+27,51

$$\begin{aligned}
 F_1 : a_{01} &= 2,7899 \text{ TWh}, & a_{11} &= 1,4906 \text{ TWh/r}, \\
 F_2 : a_{02} &= 4,1605 \text{ TWh}, & a_{12} &= 0,7871 \text{ TWh/r}, & a_{22} &= 0,0518 \text{ TWh/r}^2 \\
 F_3 : a_{03} &= 4,0572 \text{ TWh}, & a_{13} &= 0,8708 \text{ TWh/r}, & a_{23} &= 0,0374 \text{ TWh/r}^2 \\
 & & & & a_{33} &= 0,0006 \text{ TWh/r}^3
 \end{aligned}$$

$$F_4 : a = 5,4739 \text{ TWh}, \quad b = 1,1284,$$

$$F_5 : c = 4,0100 \text{ TWh}, \quad d = 0,6181,$$

gdzie r — skrót słowa „rok”.

Wartości funkcji regresji $Y_t = f(t)$, gdy $t = 1, 2, \dots, 17$, znaki i wartości odchyień względnych procentowych e_t , obliczonych wg (2), podano w tabl. 4.

Hipotezę o przypadkowości odchyień sprawdzimy za pomocą testu serii.

W przypadku aproksymaty typu F_1 ciąg znaków odchyień jest następujący: $++---$
 $-----+++++$. Liczba serii $m = 3$. Liczba znaków rzadziej występujących $n_1 = 8$. W tabl. 1 dla $n = 17$ i $n_1 = 8$ znajdujemy wartości krytyczne: $m_d = 5$, $m_g = 13$. Ponieważ $m = 3 < m_d = 5$, tj. nie zachodzi (4a) ani (4), nie ma podstaw do przyjęcia hipotezy H_p , że odchylenia e_t i e_t^* w przypadku aproksymaty F_1 mają charakter przypadkowy.

W przypadku aproksymaty typu F_2 mamy: $m = 7$, $n_1 = 8$. Ponieważ $7 > 5$ ($5 < 7 < 13$), nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_p .

Postępując w podobny sposób w przypadku aproksymat F_3 , F_4 i F_5 , stwierdzamy, że hipoteza H_p o przypadkowości odchyień spełniona jest również w przypadku aproksymaty F_3 .

Zauważmy, że funkcja wykładnicza F_4 nie spełnia podstawowego warunku trendu wbrew często wysuwanym poglądom o wykładniczej postaci trendu zużycia energii elektrycznej przez odbiorców.

Wartości stopnia regresji, wyznaczone wg (3), wynoszą w przypadku poszczególnych aproksymat: $s_1 = 8,03\%$, $s_2 = 1,93\%$, $s_3 = 1,88\%$, $s_4 = 7,16\%$, $s_5 = 15,08\%$, przy czym s_1 odnosi się do F_1 itd.

Nadmienimy, że w przypadku zastosowania metody najmniejszych kwadratów (bezwzględnych), przeważnie stosowanej do wyznaczania parametrów funkcji regresji, $s_1 = 12,96\%$, $s_2 = 2,19\%$, $s_3 = 2,24\%$, $s_4 = 7,73\%$.

Z powyższego wynika, że — stosując proponowaną skalę ocen regresji — stopień regresji w przypadku aproksymat F_2 i F_3 jest dobry.

Wniosek 1. Funkcje regresji F_2 (wielomian stopnia 2) i F_3 (wielomian stopnia 3) mogą być przyjęte za symptyotyczny ekonometryczny model tendencji rozwojowej (trend) energii elektrycznej dostarczonej odbiorcom z energetyki zawodowej w polskim systemie elektroenergetycznym w latach 1950 ÷ 1966.

Zweryfikujemy hipotezę H_r , że regresje wg F_2 i F_3 nie różnią się między sobą istotnie, tj. że nie ma istotnej różnicy między trendami F_2 i F_3 .

Ponieważ $n = 17 > 15$, hipotezę tę sprawdzimy testem F .

Sprawdzian testu

$$F \approx \frac{s_2^2}{s_3^2} = \frac{1,93}{1,88} = 1,03^{1)}.$$

¹⁾ $F = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_3^2} = \frac{1,93}{1,88} = \frac{s_2^2}{s_3^2}$. Różnica między σ i s występuje na trzecim miejscu po przecinku.

W tabl. 3 dla $n = 17$ $F_g = 1,87$. Ponieważ $F < F_g$, nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_r , że aproksymaty F_2 i F_3 różnią się istotnie.

Wniosek 2. Ponieważ nie ma istotnej różnicy między trendami typu F_2 i F_3 ze względu na stopień regresji, zaś funkcja F_2 ma prostszą postać od funkcji F_3 , można przyjąć, że wielomian $Y_t = a_{02} + a_{12}t + a_{22}t^2$ przedstawia ekonometryczny model tendencji rozwojowej badanej wielkości w latach 1950 ÷ 1966.

Zbadamy czy istnieje istotna autokorelacja odchyleń bezwzględnych e_t^* i względnych e_t w przypadku przyjętego modelu F_2 .

Wartości odchyleń względnych w roku $t(x_i = e_t)$
w rozpatrywanym przy-

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1,02	-1,09	-1,51	-1,24	0,14	4,66	3,30
y_i	-1,24	0,14	4,66	3,30	-0,77	-1,34	-2,21

Zweryfikujemy hipotezę H_a o braku autokorelacji rzędów $k = 1, 2, 3, 4$ i 5.

Do weryfikacji hipotezy o braku autokorelacji rzędu 1 ($k = 1$) zastosujemy test DW oraz test Fi , a autokorelacji pozostałych rzędów — test Fi .

Obliczony wg (15) sprawdzian testu DW wynosi: w przypadku odchyleń względnych $d = 1,058$, a w przypadku odchyleń bezwzględnych $d^* = 0,969$. Według tabl. 2 krytyczna wartość tego sprawdzianu $d_a = 1,13$. Ponieważ $d < d_a$ i $d^* < d_a$, brak podstaw do przyjęcia hipotezy H_a , tj. istnieją podstawy do przyjęcia hipotezy alternatywnej $\bar{H}_a$, że autokorelacja rzędu 1 odchyleń względnych i bezwzględnych jest istotna. Współczynniki autokorelacji, obliczone wg (10), równają się: $\varrho_1 = 0,433$, $\varrho_1^* = 0,415$.

Wartości krytyczne ϱ_g testu Fi równają się (tabl. 2): $\varrho_g = 0,482$. Ponieważ $\varrho_1 < \varrho_g$ i $\varrho_1^* < \varrho_g$, są podstawy do przyjęcia hipotezy H_a , tj. do odrzucenia hipotezy $\bar{H}_a$. Ponieważ wskazania jednego z testów (testu DW) są ujemne (zaprzeczenie hipotezy H_a), nie mamy podstaw do przyjęcia hipotezy H_a , tj. przyjmujemy hipotezę alternatywną, że autokorelacja rzędu 1 odchyleń względnych i bezwzględnych jest istotna. W przypadku stosowania trzeciego testu do weryfikacji hipotezy H_a , a mianowicie testu von Neumanna otrzymujemy również ujemne jego wskazanie.

Współczynniki autokorelacji pozostałych rzędów równają się:

$$\begin{aligned} k = 2, \quad \varrho_2 &= -0,320, \quad \varrho_2^* = -0,443, \\ k = 3, \quad \varrho_3 &= -0,529, \quad \varrho_3^* = -0,504, \\ k = 4, \quad \varrho_4 &= -0,327, \quad \varrho_4^* = 0,008, \\ k = 5, \quad \varrho_5 &= 0,069, \quad \varrho_5^* = 0,133. \end{aligned}$$

Zgodnie ze wskazaniami testu Fi możemy przyjąć, że istotną jest również autokorelacja obu rodzajów odchyleń rzędu 3.

Skoro tak, wydaje się prawdopodobne istnienie autokorelacyjnej funkcji regresji o postaci (12), tj. $E_t = \delta_{k0} + \delta_k e_{t-k}$ i $E_t^* = \delta_{k0}^* + \delta_k^* e_{t-k}$.

Oznaczając $y_i = e_i$, $x_i = e_{i-k}$ w tab. 5 przykładowo zestawiono na podstawie danych w tabl. 4 szeregi wartości y_i i odpowiadające im wartości x_i , gdy $k = 3$.

Wyznaczone wg (13) i (14) wartości parametrów δ_{ko} i δ_k , gdy $k = 3$, równają się $\delta_k = -0,443$, $\delta_{ko} = 0,07\%$, a więc dla $k = 3$ $E_t = 0,07 - 0,443 e_{t-3}$.

Tworząc ciąg znaków odchyłeń $\varepsilon_t = e_t - E_t$ mamy 9 serii znaków; $n = 14$, $n_1 = 5$. Z tabl. 1: $m_d = 4$. Zatem funkcję autokorelacyjną $E_t = 0,07 - 0,443 e_{t-3}$, gdy $k = 3$, możemy uznać za funkcję regresji, w odniesieniu do której odchylenia ε_t mają charakter przypadkowy.

Tablica 5

oraz w roku $t-3$ ($y_i = e_{t-3}$), gdy $t = 4, 5, \dots, 17$
kładzie obliczeniowym

8	9	10	11	12	13	14
-0,77	-1,34	-2,21	-1,46	0,44	0,49	-2,18
-1,46	0,44	0,49	-2,18	-1,22	0,84	2,76

Wniosek 3. Istnieją podstawy do założenia, że badany trend o postaci $Y_t = a_{02} + a_{12}t + a_{22}t^2$ charakteryzuje się istotną autokorelacją odchyłeń względnych e_t i bezwzględnych e_t^* , rzędu 1 i 3, a funkcja liniowa typu (12) może być przyjęta za autokorelacyjną funkcję regresji.

W rozpatrywanym przykładzie badany był również rozkład odchyłeń bezwzględnych i względnych za pomocą testów Massey i Hellwiga.

Wniosek 4. Z tych badań wynika: rozkład badanych odchyłeń (względnych i bezwzględnych) nie może być uznany za rozkład normalny.

6. ZAKOŃCZENIE

Wydaje się, że przedstawione w pracy metody mogą być wykorzystane w praktyce do konstruowania i badania ekonometrycznych modeli tendencji rozwojowych (trendów) licznych wielkości i wskaźników charakteryzujących energetykę, system elektroenergetyczny i sieci elektroenergetyczne.

Metody te można stosować zarówno w odniesieniu do wielkości i wskaźników globalnych, dotyczących całego kraju, jak również w przypadku mniejszych jednostek gospodarczych, jak np. okręgowych zakładów energetycznych (ZEO) lub Zakładów Energetycznych.

W wyniku przeprowadzenia przykładowych badań szeregu chronologicznego energii elektrycznej pobranej przez odbiorców z energetyki zawodowej w polskim systemie elektroenergetycznym za pomocą proponowanych metod stwierdzono, że trendem tego szeregu w latach 1950÷1966 jest funkcja regresji o postaci $Y_t = a_{02} + a_{12}t + a_{22}t^2$, gdzie a_{k2} , gdy $k = 0, 1, 2$ — parametry, t — czas w latach. Trend ten charakteryzuje się autokorelacją odchyłeń względnych i bezwzględnych rzędów 1 i 3.

Skonstruowanie trendu oraz znajomość zasadniczych właściwości trendu i badanego szeregu chronologicznego stanowi istotny czynnik do ustalania ekonometrycznej prawidłowości rozwoju rozpatrywanej wielkości (wskaźnika) w czasie, ta zaś przede wszystkim

jest podstawą wyznaczania prognoz, a zwłaszcza krótkookresowych prognoz, spodziewanego błędu prognoz i prawdopodobieństwa błędu prognozy. Istnieje przy tym problem wyboru liczności szeregów chronologicznych.

Zagadnienia dotyczące metod prognoz krótkookresowych, opartych na ekonometrycznych modelach tendencji rozwojowych, są przedmiotem pracy [20]. Inne wspomniane problemy mogą być tematem oddzielnej publikacji.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. L. N. Bolšev i N. W. Smirnov, Tablice matematičeskoj statistiki, A. N. SSSR „Nauka”, Moskva 1965.
2. T. Czechowski i inni, Tablice statystyczne, PWN, Red. W. Sadowski, Warszawa 1957.
3. B. P. Demidowicz i inni, Metody numeryczne, Cz. II, PWN, Warszawa 1965.
4. J. Durbin and G. S. Watson, Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression, *Biometrika* 1950, str. 409÷438, cz. I, *Biometrika* 1951, str. 159÷178, cz. II.
5. H. L. Harter, Percentage Points of the Ratio of Two Rangors and Power of the Associated Test, *Biometrika* 1963, str. 187÷194.
6. Z. Hellwig, Regresja liniowa i jej zastosowanie w ekonomii, PWE, Warszawa 1967.
7. Z. Hellwig, Test zgodności dla małej próbki, *Przegląd Statystyczny*, 1965, z. 2.
8. Z. Hellwig, Aproksymacja stochastyczna PWE, Warszawa 1965.
9. Zb. Kowalski, Iteracyjna metoda wyznaczania parametrów niektórych funkcji regresji transformatorowych do funkcji liniowej, *Przegląd Statystyczny*, 1968, z. 3.
10. Zb. Kowalski, Wyznaczanie parametrów niektórych wzorów empirycznych w oparciu o kryterium najmniejszych kwadratów, *Pomiary, Automatyka i Kontrola*, 1968, z. 9.
11. Zb. Kowalski, Elementy teorii modeli ekonometrycznych systemów elektroenergetycznych i niektóre jej zastosowania w odniesieniu do systemu polskiego, Katedra Elektroenergetyki Politechniki Łódzkiej, 1968.
12. Zb. Kowalski, Wyznaczanie parametrów funkcji aproksymacyjnych według kryterium najmniejszych kwadratów względnych. *Archiwum Elektrotechniki*, 1969, z. 3.
13. O. Lange, Wstęp do ekonometrii, PWN, Warszawa 1965.
14. F. Massey, The Distribution of the Maximum Deviation Between Two Sample Cumulative Step Function, *The Annals of Mathematical Statistics* 1951.
15. D. B. Owen, *Handbook of Statistical Tables*, London — Paris 1962. Pergamon Press. Tłum. ros.: *Sbornik statičeskich tablic*, Vyčisl. Centr. A. N. SSSR, Moskva 1966.
16. Z. Pawłowski, Modele ekonometryczne równań opisowych, PWN, Warszawa 1963.
17. Z. Pawłowski, *Ekonometria*, PWN, Warszawa 1966.
18. W. Pieriegudow, Metoda najmniejszych kwadratów i jej zastosowanie, PWE, Warszawa 1967.
19. W. Volk, Statystyka stosowana dla inżynierów, WNT, Warszawa 1965.
20. Zb. Kowalski, Metody predykcji wielkości i wskaźników charakteryzujących systemy elektroenergetyczne oparte na ekonometrycznych modelach tendencji rozwojowych, *Rozprawy Elektrotechniczne* 1970, z. 3.
21. Zb. Kowalski, O testach do weryfikacji hipotezy o normalnym rozkładzie w przypadku próbki o małej liczności, *Przegląd Statystyczny* 1970, z. 2.

Z. KOWALSKI

PRINCIPLES OF BUILDING-UP ECONOMETRIC TRENDS FOR POWER SYSTEMS

Summary

Practical means of building-up econometric trends of variables (quantities or factors) characteristic of power systems has been given.

A definition of trend has been proposed. Practical methods of checking randomness and autocorrelation of deviations of the significance of difference between different trends has also been given.

As an example of the methods, described a time series of electrical power consumption in the polish power system has been investigated.

Z. KOWALSKI

GRUNDSÄTZE FÜR KONSTRUIERUNG VON ÖKONOMETRISCHEN METHODEN FÜR ENTWICKLUNGSTENDENZEN HINSICHTLICH ELEKTROENERGETISCHER SYSTEME

Z u s a m m e n f a s s u n g

Es wurden praktische Hinweise zur Konstruierung ökonometrischer Modelle für veränderliche Entwicklungstendenzen (Größen bzw. Anzeiger), die das elektroenergetische System charakterisieren, angeführt.

Trendbezeichnung wurde vorgenommen. Es wurden Prüfungsmethoden für Zufälligkeit und Autokorrelation bei Trendabweichungen praktisch dargestellt, sowie Einschätzungsmethoden der Unterschiedswesenheitlichkeit unter verschiedenen Modellen von Entwicklungstendenzen gebracht.

Unter Anwendung genannter Methoden wurde beispielsweise die chronologische Reihe der seitens der Verbraucher von Berufsenenergetik aus dem polnischen elektroenergetischen System entnommenen Elektroenergie untersucht.

З. КОВАЛЬСКИЙ

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Р е з ю м е

Автором представлены практические методы построения эконометрических моделей динамики переменных (величин и указателей) характеризующих электроэнергетические системы.

Предложено определение тренда. Представлены практические методы проверки случайности и автокорреляции отклонений от тренда. Дан метод оценки существенности разницы между различными моделями динамики.

С помощью вышеприведенных методов, в качестве примера был исследован временной ряд электроэнергии, расходуемой потребителями тока в польской электроэнергетической системе.

Electrical Parameters in the Hall-Type Magnetohydrodynamic Generator with Gas Property Nonuniformities in the Direction of the Magnetic Field

ZDZISŁAW N. CELIŃSKI (WARSZAWA)

*Institute of Nuclear Research, Świerk
Laboratory of Plasma Physics and Technology*

The article has been delivered on 3.6.1969

The effects of gas velocity and temperature distributions in the direction of a magnetic field on the electrical parameters of the Hall-type MHD generator were considered.

The nonuniform distribution of gas velocity leads to the formation of circulating currents in the x and y directions. The Ohmic losses increase slightly. The terminal values of the generator do not change sufficiently in comparison to the constant gas property generator. The internal resistance is practically unchanged; the terminal voltage and the generated power increase slightly.

The expressions for the electrical values were derived and a numerical example was calculated.

LIST OF SYMBOLS USED

- B — Magnetic induction
- E — Electrical field in laboratory system
- E^* — Electrical field in system moving with fluid
- G — Parameter defined by Eq. (35)
- I — Electrical current
- K — Load factor
- P — Electrical power
- P_m — Braking power
- Q — Ohmic losses
- R — Electrical resistance
- R_L — Load resistance
- U — Terminal voltage
- b — Width of generator channel
- h — Electrode separation
- j — Current density
- l — Length of generator channel
- p — Electrical power density
- p_m — Braking power density

- q — Ohmic loss density
- r — Electrical resistance of channel element
- u — Electrical voltage on channel element
- w — Local value of gas velocity
- β — Hall parameter
- ε — Parameters defined in Eq. (70) to (75)
- σ — Plasma conductivity
- η — Generator efficiency

Superscripts and subscripts

- l — Local values
- o, s — Values at open and short circuit respectively
- x, y — Values in the x and y directions respectively
- $**$ — Values in constant gas property generator
- $\langle \rangle$ — Averaged values

1. INTRODUCTION

The problem of the effects of the velocity and temperature profiles at the channel cross-section on the electrical parameters in MHD generator can be solved in a numerical way for specified distributions of the gas velocity and temperature. However, it is of interest to know what influence the gas parameter distributions have in y and z directions separately. The analysis was divided into two parts. In the first one, the nonuniformity of the gas parameters in the y directions (i.e., $\overline{wxB}$ direction) was considered and described in [1].

In this work was considered the effect of gas nonuniformity in the z direction (i.e., in the direction of the magnetic field).

Such an approach to the problem allows to separate the effects of the gas parameter distribution in the y and z directions. The assumed one-dimensional nonuniformity makes it possible to derive the analytical expressions which are valid for arbitrary distribution functions of w , σ , and β .

The following assumptions are made:

- a. Gasdynamical parameters in the z and x directions are constant.
- b. Flow of the plasma is steady i.e., all time derivatives are equal to zero.
- c. Electrical conductivity is a function of the local gas temperature and gas pressure only (thermal equilibrium between electrons and atoms is assumed).
- d. Local electrical parameters vary only in the y direction. The nonuniformities in the x direction due to the finite electrode length are neglected.
- e. Channel cross-section is constant.
- f. Applied magnetic field is uniform. An induced magnetic field is ignored (magnetic Reynold's number $R_m \ll 1$).
- g. Distributions of the gas parameters are independent of the load factor.
- h. Channel end effects are excluded.
- i. Gas pressure in the channel cross-section is constant.
- k. Ion slip is ignored.

2. TERMINAL VALUES

The electrical field is induced in the positive direction of the y axis when the directions of the vectors $\vec{w}$ and $\vec{B}$ are assumed as is shown in Fig. 1. The cross-sectional area of the channel may be divided into n layers along the z axis. Each layer of Δz in width can be considered as an elementary generator characterized by two two-terminal active networks. In one of them the electromotive force is directed along the y axis, in the other — along the x axis.

The equivalent circuit of the generator consists (Fig. 2) of two component systems: the first one for the j_y currents and the second one for the j_x currents. To each of the n parallel-connected elements in the first system is related one of the elements connected in parallel in the second system. In each element of the system for the j_y currents there occurs an additional electromotive force Δu_{yl} induced by the j_{xl} current.

The u_{y0l} , r_{yl} , r_{xl} , u_{xl} and Δu_{yl} (cf. [1]) can be expressed as

$$u_{y0l} = B w_l h \quad (1)$$

$$r_{yl} = \frac{1}{\sigma_l} \cdot \frac{h}{\Delta z \cdot l} \quad (2)$$

$$r_{xl} = \frac{1}{\sigma_l} \cdot \frac{l}{\Delta z \cdot h} \quad (3)$$

$$u_{xl} = \frac{l}{h} \beta_l r_{yl} I_{yl} \quad (4)$$

$$\Delta u_{yl} = \beta_l^2 r_{yl} I_{yl} - \frac{h}{l} \beta_l K U_{x0} \quad (5)$$

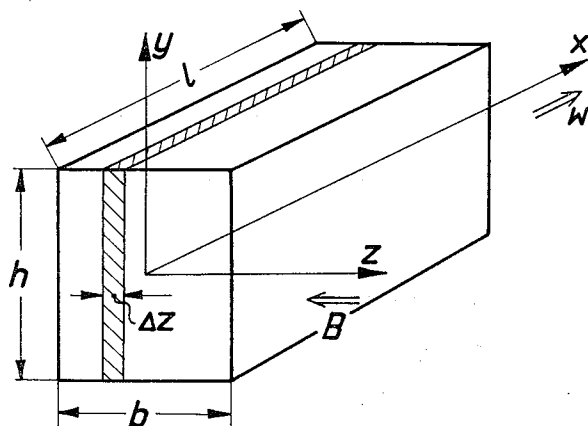


Fig. 1. Assumed coordinate system and nomenclature

where U_{x0} is the terminal voltage of the Hall generator at the open circuit and K is the load factor determined as

$$K = \frac{R_L}{R_L + R_x} \quad (6)$$

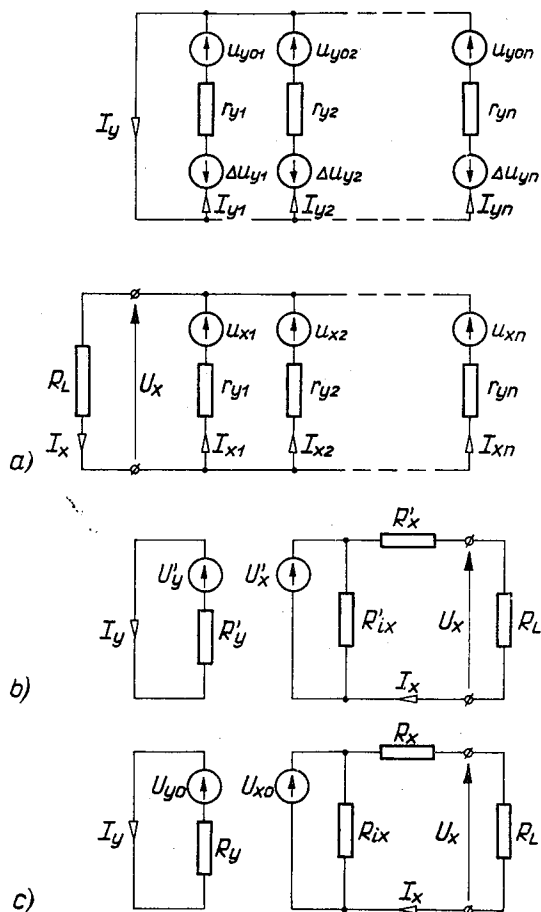


Fig. 2. Equivalent circuit of Hall-type MHD generator: a — detailed circuit; b, c — simplified circuits

The values of the elements in the simplified circuit in Fig. 2b may be calculated from Eqs. (1 ÷ 6)

$$U'_x = \frac{\sum_{i=1}^{l=n} \frac{u_{xi}}{r_{xi}}}{\sum_{i=1}^{l=n} \frac{1}{r_{xi}}} = \frac{l}{h} \frac{\sum_{i=1}^{l=n} \beta_i I_{yi}}{\sum_{i=1}^{l=n} \frac{1}{r_{yi}}} \quad (7)$$

$$U'_y = \frac{\sum_{i=1}^{l=n} \frac{u_{y0i} - \Delta u_{yi}}{r_{yi}}}{\sum_{i=1}^{l=n} \frac{1}{r_{yi}}} = \frac{\sum_{i=1}^{l=n} \frac{u_{y0i}}{r_{yi}}}{\sum_{i=1}^{l=n} \frac{1}{r_{yi}}} - \frac{\sum_{i=1}^{l=n} \left(\beta_i^2 I_{yi} - \beta_i \frac{\sum_{i=1}^{l=n} \beta_i I_{yi}}{\sum_{i=1}^{l=n} \frac{1}{r_{yi}}} \right)}{\sum_{i=1}^{l=n} \frac{1}{r_{yi}}} \quad (8)$$

$$R'_y = \frac{1}{\sum_{l=1}^{l=n} \frac{1}{r_{yl}}} \quad (9)$$

$$R'_x = \frac{1}{\sum_{l=1}^{l=n} \frac{1}{r_{xl}}} \quad (10)$$

It is inconvenient to use the equivalent circuit shown in Fig. 2b because the value of the electromotive force U'_x depends on the generator loading. Let us transform it to the other system in which the mutual couplings between both the x and y circuits will be considered by the appropriate choice of their internal resistances.

The open circuit voltage of the generator (Fig. 2c) is now

$$U_{xo} = \frac{\sum_{l=1}^{l=n} \frac{u_{xol}}{r_{xl}}}{\sum_{l=1}^{l=n} \frac{1}{r_{xl}}} = \frac{h}{l} \frac{\sum_{l=1}^{l=n} \beta_l I_{yol}}{\sum_{l=1}^{l=n} \frac{1}{r_{xl}}} \quad (11)$$

Kirchhoff's law used in the circuit from Fig. 2a yields

$$u_{yol} - \Delta u_{yl} - I_{yl} r_{yl} = 0. \quad (12)$$

From Eqs. (5), (11), and (12)

$$I_{yl} = \frac{u_{yol} + \beta_l K \frac{\sum_{l=1}^{l=n} \beta_l I_{yol}}{\sum_{l=1}^{l=n} \frac{1}{r_{yl}}}}{r_{yl}(1 + \beta_l^2)}. \quad (13)$$

The sum $\sum_{l=1}^{l=n} \beta_l I_{yol}$ can be calculated from Eq. (13) by substitution $K = 1$. Then Eqs. (11) and (13) take the forms

$$U_{xo} = \frac{l}{h} \frac{\sum_{l=1}^{l=n} \frac{\beta_l u_{yol}}{r_{yl}(1 + \beta_l^2)}}{\sum_{l=1}^{l=n} \frac{1}{r_{yl}(1 + \beta_l^2)}} \quad (14)$$

$$I_{yl} = \frac{u_{yol}}{r_{yl}(1 + \beta_l^2)} + K \frac{\beta_l}{r_{yl}(1 + \beta_l^2)} \cdot \frac{\sum_{l=1}^{l=n} \frac{\beta_l u_{yol}}{r_{yl}(1 + \beta_l^2)}}{\sum_{l=1}^{l=n} \frac{1}{r_{yl}(1 + \beta_l^2)}}. \quad (15)$$

The total current in the y circuit is

$$I_y = \sum_{l=1}^{l=n} I_{yl} = \sum_{l=1}^{l=n} u_{yol} \frac{1 + K\beta_l\beta_{ef}}{r_{yl}(1 + \beta_l^2)} \quad (16)$$

where

$$\beta_{ef} = \frac{\sum_{l=1}^{l=n} \beta_l \frac{1}{r_{yl}(1 + \beta_l^2)}}{\sum_{l=1}^{l=n} \frac{1}{r_{yl}(1 + \beta_l^2)}}. \quad (17)$$

The electromotive force U_{yo} in Fig. 2c may be determined as (cf. [2])

$$U_{yo} = \frac{\sum_{l=1}^{l=n} u_{yol} \frac{1 + \beta_l\beta_{ef}}{r_{yl}(1 + \beta_l^2)}}{\sum_{l=1}^{l=n} \frac{1 + \beta_l\beta_{ef}}{r_{yl}(1 + \beta_l^2)}}. \quad (18)$$

The internal resistance of the circuit y is now

$$R_y(K) = \frac{U_{yo}}{I_y(K)} = \frac{\sum_{l=1}^{l=n} u_{yol} \frac{1 + \beta_l\beta_{ef}}{r_{yl}(1 + \beta_l^2)}}{\sum_{l=1}^{l=n} u_{yol} \frac{1 + K\beta_l\beta_{ef}}{r_{yl}(1 + \beta_l^2)}} \cdot \frac{1}{\sum_{l=1}^{l=n} \frac{1 + \beta_l\beta_{ef}}{r_{yl}(1 + \beta_l^2)}}. \quad (19)$$

The internal resistance of the generator R_x can be calculated from the expression

$$R_x = \frac{U_{xo}}{I_{xs}} = \frac{1}{\sum_{l=1}^{l=n} \frac{1}{r_{xl}(1 + \beta_l^2)}} \quad (20)$$

where the short circuit current I_{xs} was determined from Eqs. (7), (15) and (10) as

$$I_{xs} = \frac{(U'_x)_{K=0}}{R'_x}. \quad (21)$$

The gas braking power is

$$P_m = P + Q_y + Q_x \quad (22)$$

where

$$P = R_L I_x^2 \quad (23)$$

$$Q_y = \sum_{l=1}^{l=n} r_{yl} I_{yl}^2 \quad (24)$$

$$Q_x = \sum_{l=1}^{l=n} r_{xl} I_{xl}^2. \quad (25)$$

The current in each element of the x circuit can be divided into two components. The first one (I_{xLl}) is related to the load current and the second one (I_{xcl}) to the circulating currents

$$I_{xl} = I_{xLl} + I_{xcl} = \frac{R'_x}{r_{xl}} I_x + \frac{u_{xl} - U'_x}{r_{xl}}. \quad (26)$$

Substituting Eq. (26) into (25) and taking into considerations that

$$\sum_{l=1}^{l=n} I_{xcl} = 0 \quad (27)$$

we can obtain

$$Q_x = Q_{xL} + Q_{xc} = I_x^2 R'_x + \sum_{l=1}^{l=n} u_{xc} I_{xcl} \quad (28)$$

With Eq. (26), the Ohmic losses due to the circulating currents are

$$Q_{xc} = \sum_{l=1}^{l=n} r_{yl} \beta_l^2 I_{yl}^2 - \frac{\left(\sum_{l=1}^{l=n} \beta_l I_{yl} \right)^2}{\sum_{l=1}^{l=n} \frac{1}{r_{yl}}} = \sum_{l=1}^{l=n} I_{yl} \Delta u_{yl} \quad (29)$$

$$Q_c = Q_y + Q_{xc} = \sum_{l=1}^{l=n} (1 + \beta_l^2) r_{yl} I_{yl}^2 - \frac{\left(\sum_{l=1}^{l=n} \beta_l I_{yl} \right)^2}{\sum_{l=1}^{l=n} \frac{1}{r_{yl}}}. \quad (30)$$

The Ohmic losses Q_c can be calculated by means of Eqs. (30) and (15)

The R_{ix} resistance in Fig. 2c may be expressed as

$$R_{ix}(K) = \frac{U_{xo}^2}{Q_c}. \quad (31)$$

The braking power may be also obtained in another way

$$P_m = \sum_{l=1}^{l=n} u_{yol} I_{yl} = \sum_{l=1}^{l=n} \frac{u_{yol}^2}{r_{yl}(1 + \beta_l^2)} + K \frac{\left(\sum_{l=1}^{l=n} \frac{\beta_l u_{yol}}{r_{yl}(1 + \beta_l^2)} \right)^2}{\sum_{l=1}^{l=n} \frac{1}{r_{yl}(1 + \beta_l^2)}}. \quad (32)$$

The output power is

$$P = K(1 - K) U_{xo} I_{xs} = K(1 - K) \frac{\left(\sum_{l=1}^{l=n} \frac{\beta_l u_{yol}}{r_{yl}(1 + \beta_l^2)} \right)^2}{\sum_{l=1}^{l=n} \frac{1}{r_{yl}(1 + \beta_l^2)}} \quad (33)$$

and the electrical efficiency

$$\eta = \frac{P}{P_m} = \frac{K(1 - K)}{G + K} \quad (34)$$

where G is equal to

$$G = \frac{\sum_{l=1}^{l=n} \frac{1}{r_{yl}(1+\beta_l^2)} \cdot \sum_{l=1}^{l=n} \frac{u_{yol}^2}{r_{yl}(1+\beta_l^2)}}{\left(\sum_{l=1}^{l=n} \frac{\beta_l u_{yol}}{r_{yl}(1+\beta_l^2)} \right)^2}. \quad (35)$$

The maximum efficiency η_m appears in the presence of the load factor K_η . Their magnitudes can be calculated from Eq. (34) as

$$K_\eta = G(\sqrt{1+1/G}-1) \quad (36)$$

$$\eta_m = 1-2K_\eta. \quad (37)$$

Table 1: Equations for terminal values of electrical parameters

$$U_{ox} = Bl \frac{\left\langle w\beta \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right\rangle}{\left\langle \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right\rangle} \quad (38)$$

$$R_x = \frac{l}{hb} \frac{1}{\left\langle \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right\rangle} \quad (39)$$

$$R_y = \frac{h}{bl} \frac{\left\langle w\sigma \frac{1+\beta\beta_{ef}}{1+\beta^2} \right\rangle}{\left\langle w\sigma \frac{1+K\beta\beta_{ef}}{1+\beta^2} \right\rangle} \cdot \frac{1}{\left\langle \sigma \frac{1+\beta\beta_{ef}}{1+\beta^2} \right\rangle} \quad (40)$$

$$\beta_{ef} = \frac{\left\langle \beta \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right\rangle}{\left\langle \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right\rangle} \quad (41)$$

$$I_y = Bh l \left\langle w\sigma \frac{1+K\beta\beta_{ef}}{1+\beta^2} \right\rangle \quad (42)$$

$$P_m = B^2 b h l \left[\left\langle w^2 \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right\rangle + K \frac{\left\langle w\beta \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right\rangle^2}{\left\langle \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right\rangle} \right] \quad (43)$$

$$P = B^2 b h l K (1-K) \frac{\left\langle w\beta \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right\rangle^2}{\left\langle \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right\rangle} \quad (44)$$

$$\eta = \frac{K(1-K)}{G+K} \quad (45)$$

$$G = \frac{\left\langle \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right\rangle \left\langle w^2 \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right\rangle}{\left\langle w\beta \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right\rangle^2} \quad (46)$$

In Table 1 the equations for terminal values of the generator expressed by means of the w , σ , and β distribution functions are put together.

3. LOCAL VALUES

The distribution of the current density j_y can be calculated from Eq. (15) as

$$j_y(z) = \frac{\sigma(z)}{1+\beta^2(z)} \left[Bw(z) + \beta(z)K \frac{U_{xo}}{l} \right] = \frac{1}{1+\beta^2(z)} B\sigma(z) \left[w(z) + K\beta^2(z) \frac{\langle w\sigma \rangle}{\langle \sigma \rangle} \right]. \quad (47)$$

In the special case, when $w = \text{const}$ and $\beta = \text{const}$

$$j_y(z) = \frac{1+K\beta^2}{1+\beta^2} Bw\sigma(z). \quad (48)$$

The distribution of the current density j_x may be calculated from Eq. (26) as

$$j_x(z) = j_{xL}(z) + j_{xc}(z) \quad (49)$$

where

$$j_{xL}(z) = B(1-K)\sigma(z) \frac{\langle w\sigma \frac{\beta}{1+\beta^2} \rangle}{\langle \sigma \rangle} \quad (50)$$

$$j_{xc}(z) = \beta(z)j_y(z) - \sigma(z) \frac{\langle \beta j_y \rangle}{\langle \sigma \rangle}. \quad (51)$$

At the open circuit conditions of the generator

$$j_{xo}(z) = j_{xc}(z) = \beta(z)j_{yo}(z) - \sigma(z) \frac{\langle \beta j_{yo} \rangle}{\langle \sigma \rangle}. \quad (52)$$

At the short circuit conditions of the generator

$$I_{xs} = \frac{h}{l} \sum_{l=1}^{l=n} \beta_l I_{ysl}. \quad (53)$$

By means of Eqs. (49), (50), (51), (53) and (47) it can be shown that

$$j_{xs}(z) = \beta(z)j_{ys}(z) = \frac{\beta(z)}{1+\beta^2(z)} Bw(z)\sigma(z). \quad (54)$$

The distributions of the braking power, the generated power and the Ohmic losses can be obtained from the expressions

$$p_m(z) = Bw(z)j_y(z) \quad (55)$$

$$p(z) = K \frac{U_{xo}}{l} j_x(z) \quad (56)$$

$$q(z) = \frac{1}{\sigma(z)} [j_y^2(z) + j_x^2(z)]. \quad (57)$$

4. SPECIAL CASE OF THE DISTRIBUTION FUNCTIONS: UNIFORM β

The Hall parameter varies slightly along the z axis due to the slight dependence on the gas temperature ($\sim T^{1/2}$). Therefore the assumption $\beta = \text{const}$ introduces no significant errors into the calculations. However, such an assumption strongly simplifies the expressions for the electrical parameters.

Eqs. (38) ÷ (46) are then simplified to the equations

$$U_{xo} = Bl\beta \frac{\langle w\sigma \rangle}{\langle \sigma \rangle} \quad (57)$$

$$R_x = \frac{l}{hb} \cdot \frac{1+\beta^2}{\langle \sigma \rangle} \quad (58)$$

$$R_y = \frac{h}{bl} \cdot \frac{1+\beta^2}{1+K\beta^2} \cdot \frac{1}{\langle \sigma \rangle} \quad (59)$$

$$\beta_{ef} = \beta \quad (60)$$

$$I_y = Bhl \frac{1+K\beta^2}{1+\beta^2} \langle w\sigma \rangle \quad (61)$$

$$P_m = B^2 bhl \frac{1}{1+\beta^2} \left[\langle w^2 \sigma \rangle + K\beta^2 \frac{\langle w\sigma \rangle^2}{\langle \sigma \rangle} \right] \quad (62)$$

$$P = B^2 bhl K(1-K) \frac{\beta^2}{1+\beta^2} \cdot \frac{\langle w\sigma \rangle^2}{\langle \sigma \rangle} \quad (63)$$

$$G = \frac{\langle \sigma \rangle \langle w^2 \sigma \rangle}{\beta^2 \langle w\sigma \rangle^2} \quad (64)$$

Equations expressing the distributions of the electrical parameters are simplified now to the form

$$j_{xL}(z) = B(1-K) \frac{\beta}{1+\beta^2} \cdot \frac{\langle w\sigma \rangle}{\langle \sigma \rangle} \sigma(z) \quad (65)$$

$$j_{xc}(z) = \beta \left[j_y(z) - \sigma(z) \frac{\langle j_y \rangle}{\langle \sigma \rangle} \right] = B \frac{\beta}{1+\beta^2} \sigma(z) \left[w(z) - \frac{\langle w\sigma \rangle}{\langle \sigma \rangle} \right] \quad (66)$$

$$j_x(z) = j_{xL}(z) + j_{xc}(z) = \frac{\beta}{1+\beta^2} B \sigma(z) \left[w(z) - K \frac{\langle w\sigma \rangle}{\langle \sigma \rangle} \right] \quad (67)$$

It should be noticed that in the case $\beta = \text{const}$, the circulating current distribution is independent of the generator loading.

When

$$K = 1, \quad j_x(z) = j_{xo}(z) = j_{xc}(z).$$

The Ohmic loss distribution can be calculated from Eqs. (56), (47), and (67) as

$$q(z) = q_s(z) + \frac{\beta^2}{1+\beta^2} B^2 K^2 \frac{\langle w\sigma \rangle^2}{\langle \sigma \rangle^2} \sigma(z) \quad (68)$$

where $q_s(z)$ is the Ohmic loss distribution at short circuit equal to

$$q_s(z) = \frac{1}{1+\beta^2} B^2 w^2(z) \sigma(z). \quad (69)$$

5. COMPARISON WITH A CONSTANT GAS PROPERTY GENERATOR

To determine the effect of the nonuniformity of the gas properties, let us consider two identical generators. In one of them, the gas properties w , σ , and β are nonuniformly distributed, in the other one, they are uniform and equal to the mean values of w , σ , and β in the first generator: $w^{**} = \langle w \rangle$, $\sigma^{**} = \langle \sigma \rangle$, $\beta^{**} = \langle \beta \rangle$.

The expressions of terminal values in the constant gas property generator are known [1]. With Eqs. (38)–(46) we calculate the ratios of the values of the electrical parameters in the first generator to those in the second one for the same load factor.

$$\varepsilon_u = \frac{U_x}{U_x^{**}} = \frac{\left\langle w\beta \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right\rangle}{\langle w \rangle \langle \beta \rangle \left\langle \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right\rangle} \quad (70)$$

$$\varepsilon_{rx} = \frac{R_x}{R_x^{**}} = \frac{\langle \sigma \rangle}{(1+\langle \beta \rangle^2) \left\langle \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right\rangle} \quad (71)$$

$$\varepsilon_{ry} = \frac{R_y}{R_y^{**}} = \frac{\left\langle w\sigma \frac{1+\beta\beta_{ef}}{1+\beta^2} \right\rangle}{\left\langle w\sigma \frac{1+K\beta\beta_{ef}}{1+\beta^2} \right\rangle} \cdot \frac{\langle \sigma \rangle}{\left\langle \sigma \frac{1+\beta\beta_{ef}}{1+\beta^2} \right\rangle} \cdot \frac{1+K\langle \beta \rangle^2}{1+\langle \beta \rangle^2} \quad (72)$$

$$\varepsilon_p = \frac{P}{P^{**}} = \frac{\left\langle w\beta \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right\rangle^2}{\left\langle \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right\rangle} \cdot \frac{1+\langle \beta \rangle^2}{\langle \beta \rangle^2 \langle w \rangle^2 \langle \sigma \rangle} \quad (73)$$

$$\varepsilon_{pm} = \frac{P_m}{P_m^{**}} = \left[\left\langle w^2 \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right\rangle + K \frac{\left\langle w\beta \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right\rangle^2}{\left\langle \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right\rangle} \right] \frac{1+\langle \beta \rangle^2}{1+K\langle \beta \rangle^2} \cdot \frac{1}{\langle w \rangle^2 \langle \sigma \rangle} \quad (74)$$

$$\varepsilon_\eta = \frac{\eta}{\eta^{**}} = \frac{1+K\langle \beta \rangle^2}{\frac{\left\langle \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right\rangle \left\langle w^2 \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right\rangle \langle \beta \rangle^2}{\left\langle w\beta \frac{\sigma}{1+\beta^2} \right\rangle^2} + K\langle \beta \rangle^2} \quad (75)$$

In the special case when $\beta = \text{const}$, Eqs. (70)–(75) are simplified to the expressions

$$\varepsilon'_u = \frac{\langle w\sigma \rangle}{\langle w \rangle \langle \sigma \rangle} \quad (76)$$

$$\varepsilon'_{rx} = \varepsilon'_{ry} = 1 \quad (77)$$

$$\varepsilon'_p = \frac{\langle w\sigma \rangle^2}{\langle w \rangle^2 \langle \sigma \rangle^2} \quad (78)$$

$$\varepsilon'_{pm} = \frac{\frac{\langle w^2 \sigma \rangle}{\langle w \rangle^2 \langle \sigma \rangle} + K\beta^2 \frac{\langle w \sigma \rangle^2}{\langle w \rangle^2 \langle \sigma \rangle^2}}{1 + K\beta^2} \quad (79)$$

$$\varepsilon'_\eta = \frac{1 + K\beta^2}{\frac{\langle \sigma \rangle \langle w^2 \sigma \rangle}{\langle w \sigma \rangle^2} + K\beta^2}. \quad (80)$$

6. NUMERICAL EXAMPLE

Let us determine the electrical parameters in the MHD Hall generator with combustion gases seeded with 1% potassium. The typical distribution of the gas velocity, gas conductivity, and Hall parameter are assumed and shown in Fig. 3. The gas conductivity and

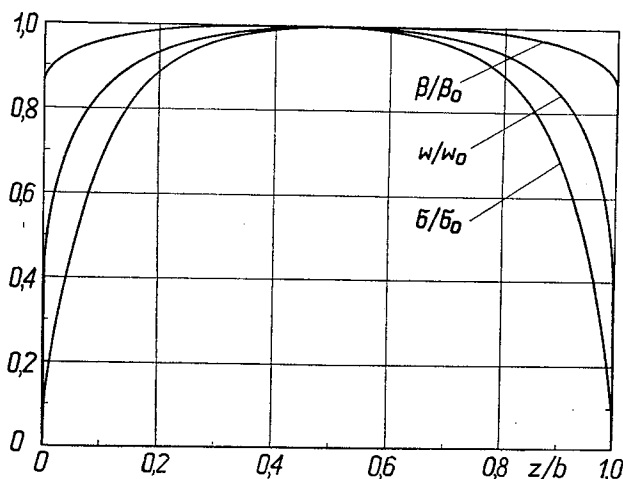


Fig. 3. Assumed distributions of w , σ , and β along the z axis

Hall parameter distributions are calculated on the basis of the temperature distribution measured in the small, experimental MHD generator with ceramic walls [3].

For assumed distributions of σ , β , and w we obtain

$$\varepsilon_u = 1.042; \quad \varepsilon_{rx} = 1.005; \quad \varepsilon_p = 1.08.$$

These values are practically independent of β value and only slightly dependent on the β distribution. When β is assumed to be uniform these values are

$$\varepsilon'_u = 1.035; \quad \varepsilon'_{rx} = 1.000; \quad \varepsilon'_p = 1.065.$$

Therefore in practical calculations the β distribution in the cross-sectional area of the channel can be neglected.

The comparison of the terminal voltage U_x , generated power P and braking power P_m in the generators with uniform and nonuniform distribution of w and σ is shown in Fig. 4. The effect of the gas nonuniformity is very small.

The magnitude of ε'_{pm} is equal to 1,079 for $K = 1$. When K increases up to 1, it decreases to 1,076 for $\beta = 1$ and to 1,071 for $\beta = 3$.

The ε'_η magnitude deviates less than 1% from 1 for all loading conditions and for the β values from 1 to 3.

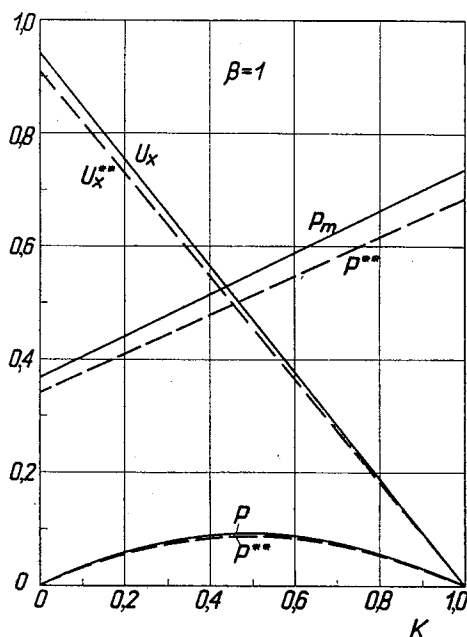


Fig. 4. Terminal voltage, braking power and generated power versus load factor

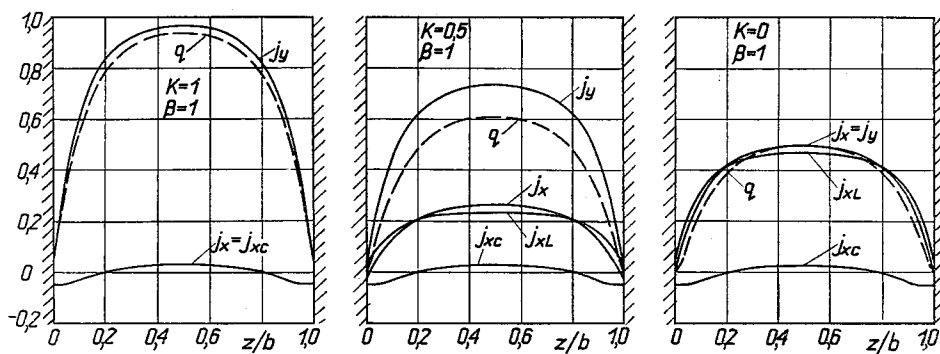


Fig. 5. Distributions of the current density and Ohmic losses between the opposite walls

The distribution curves of the j_x and j_y currents are shown in Fig. 5. The distributions were calculated with the assumption that the β value is equal to 1 and is uniform in the channel cross-section.

The distributions of the j_x current and of the generated power differs only by constant factor ($j_x(z) \sim p(z)$). It should be noticed that in a slightly loaded generator the power is generated in the bulk gas and it is lost in the vicinity of the walls. In these cases the current density j_x flows upstream in the wall boundary layers.

8. CONCLUSIONS

The nonuniformity of the gas parameters in the magnetic field direction gives only slight effects on the electrical parameters of the Hall generator.

The assumption of the uniform distribution of β gives a sufficient accuracy for practical calculations.

The current density can be divided into two components: the first one due to the load current and the second one due to the circulating currents. When β is assumed to be uniform, the second component is independent of the generator loading. Both components are proportional to the factor $\beta/(1+\beta^2)$.

The distribution of w and σ between the opposite insulating walls increases slightly the terminal voltage and the generated power. It is due to the high electrical resistance of the boundary layers which leads to the diminishing of the circulating currents.

The described method of calculations makes it possible to consider also the leakage currents through the insulating walls. In this case, additional elements with r_y equal to the wall resistance and with u_y and β equal to zero must be introduced into the equivalent circuit in Fig. 2.

ACKNOWLEDGEMENT — The author wishes to thank Mr. M. Plata for his help in the numerical calculations.

REFERENCES

- 1 Z. N. Celiński, Electrical Parameters in the Hall-Type MHD Generator with Gas Property Nonuniformities in the $\vec{w} \times \vec{B}$ Direction, Institute of Nuclear Research, report, 1969 (to be published).
- 2 Z. N. Celiński, Electrical Parameters in the Faraday-Type MHD Generator with Gas Property Nonuniformities in the Magnetic Field Direction, Institute of Nuclear Research, report, 1969 (to be published).
- 3 A. Sumida et al., An Experimental Study on Physical Properties of Combustion Gas, Proc. Int. Symp. „MHD Electrical Power Generation”, Salzburg, July 1966.

Z. N. CELIŃSKI

PARAMETRY ELEKTRYCZNE GENERATORA MHD TYPU HALLA Z WŁASNOŚCIAMI GAZU NIERÓWNOMIERNYMI W KIERUNKU POLA MAGNETYCZNEGO

Streszczenie

W pracy rozważono wpływ nierównomierności parametrów gazu w kierunku pola magnetycznego na parametry elektryczne generatora MHD typu Halla.

Nierównomierny rozkład prędkości w kierunku pola magnetycznego jest przyczyną powstania prądów wyrównawczych przepływających w kierunku osi x i y . Wzrastają wtedy straty mocy w generatorze. Nierównomierność parametrów gazu nie zmienia w sposób istotny wielkości elektrycznych na zaciskach

generatora. Oporność wewnętrzna generatora pozostaje praktycznie bez zmiany; wzrasta nieco napięcie i wytwarzana moc.

Wyprowadzono wzory pozwalające na obliczenia numeryczne. Rozważania zilustrowano przykładem liczbowym.

Z. N. CELIŃSKI

LES PARAMÈTRES ÉLECTRIQUES DU GÉNÉRATEUR MHD
TYPE HALL AVEC LES PROPRIÉTÉS DU GAZ INÉGAUX
DANS LE SENS DU CHAMP MAGNÉTIQUE

R e s u m é

On a considéré l'influence de l'inégalité des paramètres du gaz dans le sens du champ magnétique sur les paramètres électriques du générateur MHD type Hall.

La répartition inégale de la vitesse dans le sens du champ magnétique cause la formation des courants d'égalisation passant dans les sens x et y , ce qui fait augmenter les pertes de puissance du générateur. L'inégalité de paramètres du gaz ne change pas sensiblement les valeurs sur les bornes du générateur. La résistance propre du générateur reste pratiquement inchangée; augmentent légèrement la tension et la puissance.

On a défini les équations nécessaires pour les calculs numériques. Tout a été illustré par un exemple en chiffres.

Z. N. CELIŃSKI

ELEKTRISCHE PARAMETER DES MHD-HALL-GENERATORS
MIT INHOMOGENEN GASDYNAMISCHEN PARAMETERN
IN RICHTUNG DES MAGNETFELDES

Z u s a m m e n f a s s u n g

In dieser Arbeit wurde der Einfluss der Inhomogenität von gasdynamischen Parametern in Richtung des Magnetfeldes auf die elektrische Parameter des MHD-Hall-Generators analysiert. Die inhomogene Verteilung der Gasgeschwindigkeit in Richtung des Magnetfeldes hat die Entstehung von elektrischen Ausgleichsströmen in der Axenrichtung x und y und eine Vergrößerung der ohmschen Verluste zur Folge. Die Inhomogenität der gasdynamischen Parameter verändert die elektrischen Klemmgröße des Generators in wesentlicher Weise nicht.

Es wurden die numerische Berechnungen der Effekten ermöglichende Formeln ausgearbeitet. Die Analyse ist mit einem numerischen Beispiel illustriert worden.

З. ЦЕЛИНСКИ

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ГЕНЕРАТОРА
ТИПА ХОЛЛА С НЕРАВНОМЕРНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ГАЗА В НАПРАВЛЕНИИ
МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Р е з ю м е

В работе рассмотрено влияние неравномерностей параметров газа в направлении магнитного поля на электрические параметры МГД-генератора типа Холла.

Неравномерность скорости газа является причиной возникновения компенсационных токов, протекающих вдоль оси x и y . Возрастают тогда же потери мощности в генераторе. Неравномерность параметров газа в направлении магнитного поля не вызывает больших изменений электрических параметров генератора. Внутреннее сопротивление остаётся неизменным; немного возрастает напряжение и создаваемая генератором мощность. Рассуждения проиллюстрировано расчётами.

Implantacja jonów w materiałach półprzewodnikowych

WITOLD ROSIŃSKI (WARSZAWA)

Instytut Technologii Elektronowej PAN

Otrzymano 18.5.1970

Omówiono prawa i zależności rządzące procesem implantacji jonów w ciałach stałych, przedstawiono wyniki eksperymentalne uzyskane przy zastosowaniu tego procesu i przeprowadzono porównanie z wynikami prac teoretycznych. Opisano dwa rodzaje aparatury stosowanej przy implantowaniu jonów. Przeanalizowano w zakończeniu przydatność tej metody do wytwarzania elementów półprzewodnikowych takich jak tranzystory polowe MOS-FET, diody lawinowe, detektory cząstek i inne.

1. WSTĘP

Gdy ciało stałe poddane zostaje bombardowaniu przez wiązkę jonów o dużej energii, traci ono część swych atomów wskutek wybijania ich z powierzchni i zatrzymuje część padających na nie jonów. Proces ten nazywa się implantacją jonów i po raz pierwszy został zastosowany w przypadku półprzewodników przez Ohla [1] w 1952 r. w celu poprawienia właściwości krzemowych diod ostrzowych. W 1954 r. został zgłoszony przez Schockley'a patent dotyczący zastosowania tej metody do wytwarzania elementów półprzewodnikowych. Zawiera on daleko idące sugestie odnośnie zastosowania jej do wytwarzania elementów o bardzo subtelnej strukturze. Szereg propozycji zawartych w tym patencie nie został dotychczas zrealizowany. Pierwsze próby implantacji jonów boru do germanu przeprowadził Cussius [2] w 1955 r. Pierwsze elementy wykonano w 1961 r. na krzemie w postaci detektorów cząstek. Pierwsze publikowane prace nad implantacją jonów w materiałach $A^{\text{II}}-B^{\text{VI}}$ przypadają na rok 1967 [3].

W dalszej części referatu omówione zostaną:

- a) zasięg i rozkład implantowanych jonów,
- b) metody badania rozkładu implantowanych jonów,
- c) aparatura stosowana podczas implantacji jonów,
- d) wyniki eksperymentalne,
- e) zastosowanie implantacji jonów w półprzewodnikach.

2. ZASIĘG I ROZKŁAD IMPLANTOWANYCH JONÓW

Odległość, na którą przenika implantowany jon nazywa się jego zasięgiem i oznaczany jest przez R . Rzut tej drogi na kierunek padania jonu na ciała stałe nazywa się rzutem zasięgu i jest oznaczany przez R_p . Ze względu na zmienne warunki ruchu jonu w ciele

stałym, wynikające z przypadkowości zderzeń i wymiany energii z atomami sieci, każdy z jonów ma inny zasięg. W związku z tym mówi się o rozkładzie zasięgu, który określa się za pomocą średniej wartości zasięgu odpowiadającej maksimum koncentracji jonów oraz standartowej dewiacji tego zasięgu. Znajomość rozkładu zasięgu ma zasadnicze znaczenie dla wykorzystania implantacji jonów do wytwarzania określonych struktur półprzewodnikowych. Przy określaniu zasięgu konieczne jest rozpatrzenie dwóch odrębnych przypadków struktury ciał stałych, a mianowicie struktury amorficznej i krystalicznej.

W przypadku pierwszym rozkład implantowanych domieszek zależy przede wszystkim od energii, masy i liczby atomowej padających jonów oraz gęstości implantowanego materiału, jego temperatury oraz sposobu dozowania implantowanych jonów, ich ilości na jednostkę czasu oraz ogólnej ich ilości.

W przypadku drugim rozkład ten zależy również od orientacji kryształu, jak wskazuje na to rys. 2.3 oraz stanu powierzchni. Stan teoretyczny prac nad zasięgiem, jak wskażą przygotowane przykłady w przypadku struktury amorficznej, jest zadawalający, natomiast w przypadku struktury krystalicznej, w szczególności dobrze uporządkowanej, pozostawia wiele do życzenia; dotyczy to zwłaszcza przypadku tzw. „channelingu”, tj. przypadków implantacji wzdłuż kierunków krystalograficznych o małych indeksach, jak np. $\langle 110 \rangle$, $\langle 100 \rangle$ lub $\langle 111 \rangle$.

Pojęcie „channeling” stosowane jest w przypadku, gdy bombardujący jon porusza się pomiędzy płaszczyznami krystalograficznymi równoległe do nich.

2.1. Zasięg w przypadku struktury amorficznej

W odniesieniu do przypadku struktury amorficznej bezpostaciowej rozważania teoretyczne zostały przedstawione przez Lindharda, Scharffa i Schiotta [4]. Opierają się one na następującym równaniu różniczkowym:

$$-\frac{dE}{dx} = N[S_n(E) + S_e(E)], \quad (2.1)$$

gdzie:

- E — energia cząstki wzdłuż drogi x ,
- N — liczba atomów implantowanego półprzewodnika na cm^3 ,
- $S_n(E)$ — moc hamowania przez atom sieci półprzewodnika,
- $S_e(E)$ — moc hamowania elektronów.

Zasięg otrzymuje się z (2.1) przez całkowanie w postaci:

$$R = \frac{1}{N} \int_0^{E_0} \frac{dE}{S_n(E) + S_e(E)}. \quad (2.2)$$

Lindhard i in. przyjmują, że moc hamowania przez atom sieci w pierwszym przybliżeniu nie zależy od energii padającego jonu, że określa ją zależność

$$S_n(E) = 2,8 \cdot 10^{-15} \frac{Z_1 Z_2}{(Z_1^{2/3} + Z_2^{2/3})^{1/2}} \cdot \frac{M_1}{M_1 + M_2} \text{ eV} \cdot \text{cm}^2 \quad (2.3)$$

gdzie:

- Z_1, M_1 — liczba atomowa i masa padającego atomu,
- Z_2, M_2 — te same wielkości w odniesieniu do atomów sieci.

W celu określenia mocy hamowania przez elektrony przyjęto, że elektrony zachowują się jak swobodny gaz elektronowy i wobec powyższego zgodnie z [5] moc hamowania jest proporcjonalna do prędkości bombardujących atomów v w założeniu, że jest ona mniejsza od prędkości gazu wynikającej z energii Fermiego dla tego gazu. Wobec powyższego

$$S_e(E) = av = kE^{1/2}; \quad (2.4)$$

k dla amorficznej struktury ma wartość $0,2 \cdot 10^{-15} \text{ (eV)}^{1/2} \text{ cm}^2$.

Gdy energia atomu bombardującego jest mniejsza niż wartość E_k , przy którym $S_n = S_e$, to decydujące znaczenie ma hamowanie przez atomy. Dla przykładu w przypadku krzemu wartość E_k w eV dla boru wynosi 10 keV i dla fosforu 200 keV. Dla wartości $E > E_k$ zasięg w przypadku krzemu określa zależność

$$R = 20E^{1/2} \quad \text{\AA}. \quad (2.5)$$

Uszkodzenia sieciowe wskutek bombardowania powstają głównie w zakresie energii spełniających warunek $S_n \gg S_e$. Przy bombardowaniu dużymi energiami zachodzą one więc przy końcu drogi bombardującego atomu.

Obliczenia Lindharda i in. dotyczące wartości mocy hamowania przez atomy opierają się na rozważaniu zjawiska elastycznego rozpraszania dwóch cząstek w założeniu braku wzajemnego oddziaływania na siebie atomów sieci. Obliczenie mocy hamowania elektronowego jest dużo trudniejsze. Stosuje się tu dwa modele: model Lindharda i Winthera [5] — obliczenia oparte są wtedy na rozważaniu zjawiska hamowania przez swobodny gaz elektronowy — oraz model Firsova [6], który opiera się na analizie oddziaływania elektronowego powstającego, gdy atomy bombardujący i sieci zbliżają się do siebie. El-Hoshy i Gibbons [7] wprowadzając do zależności otrzymanych przez Firsova zredukowane wartości Z_1 i Z_2 , co uwzględni efekt ekranowania silnie związanych elektronów, uzyskali wyniki bardzo dobrze pokrywające się z wynikami doświadczalnymi Eisena [8].

Wyniki obu teorii obliczeń Gibbonsa oraz eksperymentu Eisena ilustruje rys. 2.1.

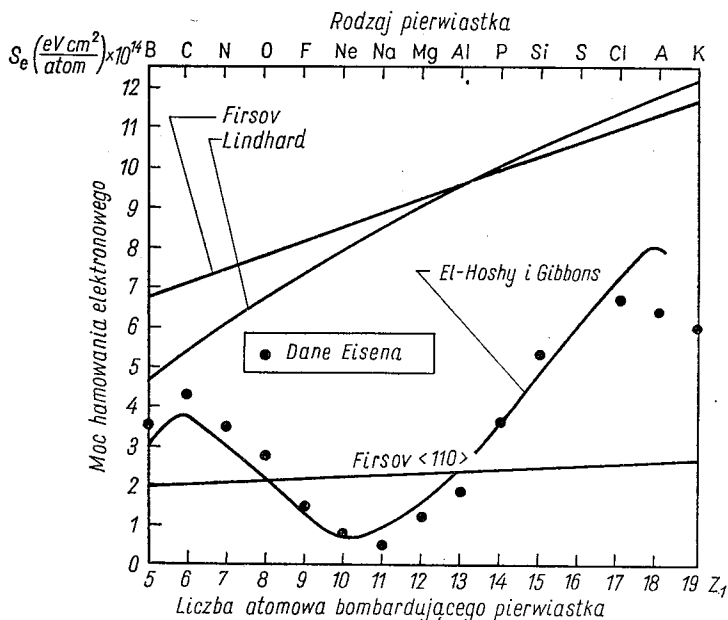
W praktyce mierzy się rzutowany zasięg R_p . Ponieważ nie wszystkie atomy bombardujące ulegają identycznemu rozpraszaniu, interesuje nas również rozkład gęstości tych atomów, położenia względem punktu, dla którego osiąga się maksymalną gęstość wprowadzanych atomów. W związku z tym konstruuje się gausowski jak się okazuje rozkład gęstości implantowanych jonów.

W celu obliczenia tego rozkładu wprowadza się pojęcie standartowej dewiacji ΔR_p spełniającej warunek, że dla punktów odległych od R_p (odpowiadającego maksymalnej gęstości jonów implantowanych) o $n\Delta R_p$ gęstość jonów maleje odpowiednio wg tablicy 1. Obliczenia R_p i ΔR_p przeprowadzone zostały przez Lindharda w pracy [5].

Jeśli oznaczyć przez $\bar{N}$ maksymalną gęstość implantowanych jonów, a całkowitą dawkę implantowanych jonów/cm² przez N , to uzyskuje się zależność

$$\bar{N} = \frac{0,4N}{\Delta R_p}. \quad (2.6)$$

Rozkład implantowanych jonów w amorficznej strukturze w funkcji położenia wzdłuż kierunku bombardowania otrzymać można posługując się tablicą 1 (rys. 2.2).

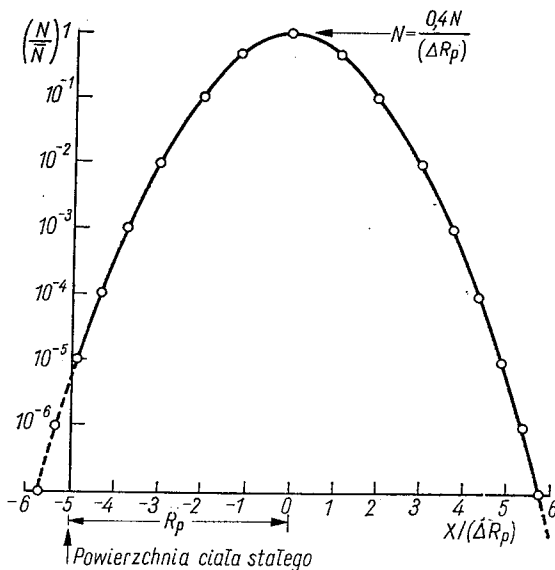


Rys. 2.1. Zależności mocy hamowania elektronowego dla różnych bombardujących pierwiastków od ich liczby atomowej

Rozkład implantowanych jonów względem punktu, dla którego $N = \bar{N}$

Tablica 1

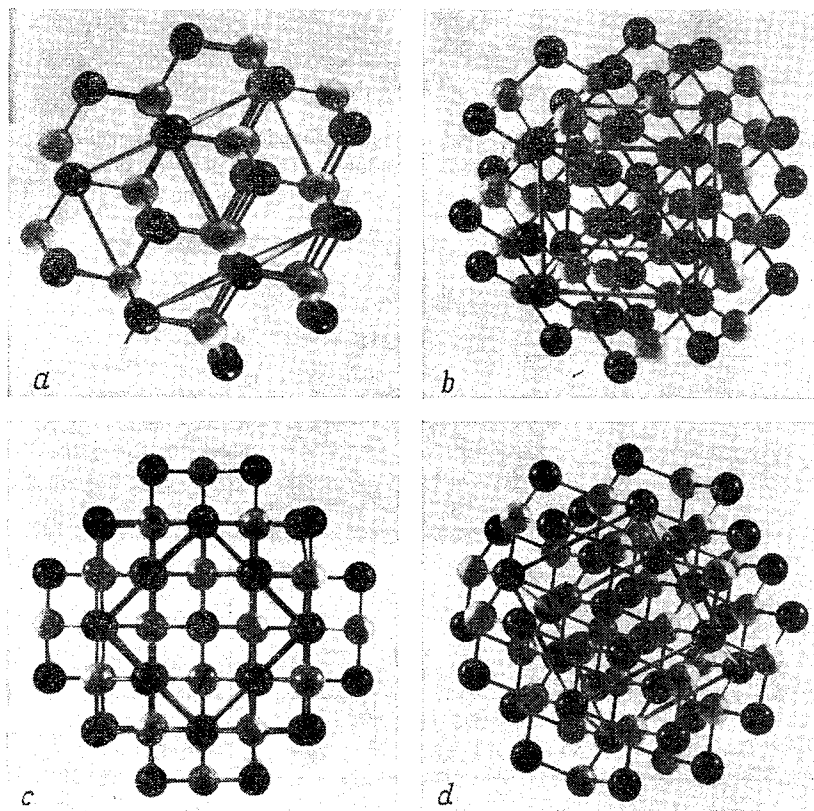
$N_x/N(R_p)$	0,5	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
x	$R_p \pm 1,2 \Delta R_p$	$R_p \pm 2 \Delta R_p$	$R_p \pm 3 \Delta R_p$	$R_p \pm 3,7 \Delta R_p$	$R_p \pm 4,2 \Delta R_p$	$R_p \pm 4,8 \Delta R_p$



Rys. 2.2. Gaussowski profil domieszek implantowanych w ciało stałe o amorficznej strukturze

2.2. Zasięg w przypadku struktury krystalicznej

Problemy powstające podczas implantacji jonów do materiałów o strukturze krystalicznej najlepiej ocenić rozpatrując strukturę sieci krystalicznej kryształu przedstawioną na rys. 2.3 dla czterech różnych kierunków osi krystalograficznych. W dwóch położeniach



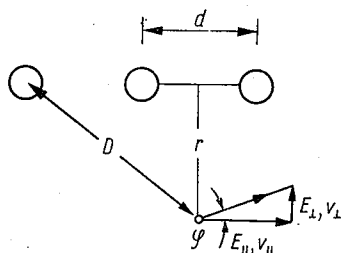
Rys. 2.3. Przykłady ustawienia kryształu w różnych kierunkach osi krystalograficznej względem kierunku implantacji:

a) $\langle 110 \rangle$, b) odchylenie osi $\langle 110 \rangle$ o 7° , c) $\langle 100 \rangle$, d) odchylenie osi $\langle 100 \rangle$ o 7°

osi krystalograficznej pokazanych na rys. 2.3 b i d oczekiwać można bardzo intensywnych zderzeń implantowanych atomów z atomami i elektronami kryształu, w pozostałych dwóch przypadkach przy zgodności kierunku bombardowania z osiami krystalograficznymi skuteczność hamowania przez atomy i elektrony sieci ulegnie znacznemu osłabieniu. To hamujące oddziaływanie jest więc zależne wtedy od kąta φ , pod którym jest nachylony kierunek ruchu jonu wchodzącego w kanał względem osi kanału (tj. osi krystalograficznej — rys. 2.4). Od tego kąta będzie zależęć częstość zderzeń, a więc i zasięg. Krytyczna wartość kąta φ określa się z zależności [9]

$$\varphi = \sqrt{\frac{Z_1 Z_2 q}{2\pi \epsilon_0 d \cdot E}} \quad (2.7)$$

Zależność kąta φ wg [9] podano w tablicy 2.



Rys. 2.4. Ilustracja charakterystycznych wielkości atomu poruszającego się pomiędzy płaszczyznami o tym samym kierunku krystalograficznym, $E_{\perp}$ i $E_{\parallel}$ składowe energii w poprzek kanału i równoległa do osi kanału, a $v_{\perp}$ i $v_{\parallel}$ odpowiednie prędkości atomu

Tablica 2

Kąt krytyczny F w funkcji rodzaju atomu implantowanego, jego energii i kierunku krystalograficznej osi kanału

Rodzaj jonu	E keV	kierunek kanału		
		$\langle 110 \rangle$	$\langle 111 \rangle$	$\langle 100 \rangle$
B	30	4,2	3,5	3,3
	50	3,7	3,2	2,9
N	30	4,5	3,8	3,5
	50	4,0	3,4	3,0
P	30	3,2	4,3	4,0
	50	4,5	3,8	3,5
As	30	5,0	5,0	4,5
	50	5,2	4,4	4,0

Należy podkreślić fakt, że w przypadku „channelingu” część jonów jest rozpraszana przez atomy znajdujące się na powierzchni kryształu, wskutek tego występują tu obok jonów poruszających się wzdłuż kanału jony, które wskutek zmiany kierunku ruchu przy zderzeniu na powierzchni zmieniły swój kierunek ruchu i podlegają prawu rozpraszania przez kryształ, jak gdyby on miał strukturę amorficzną. Ta część jonów wynosi

$$f \approx \pi r^2 N d \quad \text{cm}^{-2}, \quad (2.8)$$

gdy φ jest małe $r = d \cdot \varphi$

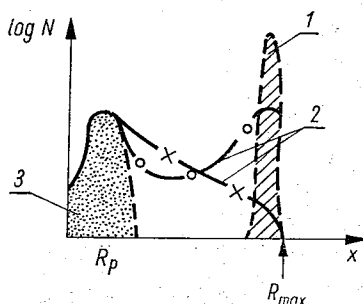
$$\text{i} \quad f = \pi \varphi^2 N d^3. \quad (2.9)$$

Wartość f przy $\varphi \approx 0$ jest na ogół mniejsza niż 0,1, r oznacza odległość zasięgu atomu na powierzchni rozpraszającego bombardujące jony. Zasięg części f jonów może być obliczony z podanych w p. 2.1 zależności. Maksymalny zasięg $R_{\max}$ dla pozostałych jonów nie może być dokładnie obliczony. Standartową dewiację ΔR można obliczyć z zależności

$$\Delta R \approx \sqrt{d \cdot R_{\max}}.$$

Z rozważań wpływu atomów powierzchni wynika, że efekt channelingu można bardzo silnie ograniczyć wytwarzając na powierzchni półprzewodnika warstwę tlenku lub azotku, która jako amorficzna powoduje, że znaczna większość jonów zostaje odchylona od pierwotnego kierunku wchodząc do półprzewodnika.

W wyniku równoczesnego działania atomów rozpraszanych na powierzchni oraz rozpraszanych w kanale rozkład implantowanej domieszki może mieć dwa maksima



Rys. 2.5. Profile rozkładu implantowanych domieszek o różnym stopniu zgodności osi kanału z kierunkiem ruchu implantowanych atomów

1 — część hamowania w kanale, 2 — profile zależne od stopnia kanałowania, 3 — część rozproszona w sposób przypadkowy

(rys. 2.5) o różnych względnych wartościach zależnych od wartości f i o dwóch standardowych dewiacjach ΔR_p i $\Delta R \sim \sqrt{d \cdot R_{max}}$.

Wartość R_{max} wyznacza się z zależności podanych przez Firsova [6], zaniedbując rozpraszanie na atomach sieci kryształu, tj. przyjmując zależność

$$\frac{dE}{dx} \approx S_e(E) = \frac{1}{d} F(Z_1 Z_2 \varphi) \cdot v, \quad (2.10)$$

gdzie:

$1/d$ — liczba atomów sieci na jednostkę długości kanału,

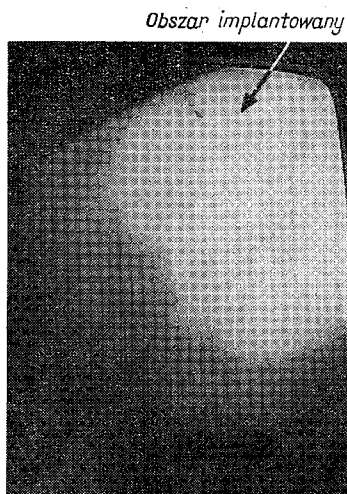
v — prędkość atomu implantowanego,

$F(Z_1 Z_2 \varphi)$ — pewna funkcja znaleziona przez Firsova.

3. METODY BADANIA ROZKŁADU, WŁAŚCIWOŚCI STRUKTURALNYCH I ELEKTRYCZNYCH IMPLANTOWANYCH WARSTW

Implantacja jonów wywołuje duże uszkodzenia sieci krystalicznej [10], która się temu procesowi poddaje. Uszkodzenia te powodują, że implantowana warstwa przyjmuje strukturę amorficzną, co obserwuje się przy użyciu metod rentgenowskich. Wygrzewanie [11] półprzewodnika w odpowiednio wysokiej temperaturze i przez odpowiedni przeciąg czasu, zależnie od rodzaju użytego jonu, przywraca porządek sieciowy. Dotychczasowe badania nie wykazują żadnego wyraźnego pogorszenia się właściwości strukturalnych i elektrycznych kryształu poddanego bombardowaniu jonami pod warunkiem zastosowania odpowiedniej obróbki cieplnej podczas i po implantacji. Potwierdzają to np. zdjęcia przedstawione na rys. 3.1, wykonane w podczerwieni przy użyciu promieniowania odbitego. Obróbka cieplna powoduje, że atomy implantowane przechodzą z pozycji

międzywęzłowych do węzłowych, z czym wiąże się zmiana przewodnictwa warstwy implantowanej, bowiem w przypadku pozycji międzywęzłowych implantowany atom jest na ogół neutralny, wskutek czego przewodność warstwy jest bardzo mała. Jak wykazują



Rys. 3.1. Zdjęcie implantowanej płytki krzemu wykonanej przy użyciu odbitego promieniowania podczerwonego

badania struktury implantowanej warstwy staje się ona wystarczająco uporządkowana po zastosowaniu obróbki cieplnej o właściwie wybranej temperaturze oraz czasie trwania. Np. w przypadku krzemu jak i większości półprzewodników wystarcza zastosowanie temperatur poniżej 900°C i czasów wygrzewania średnio ok. 15 minut.

Rozkład domieszek implantowanych badać można kilku sposobami, a mianowicie: za pomocą atomów znaczonych (izotopów), przez pomiar przewodności elektrycznej, przez pomiar położenia złącza $p-n$.

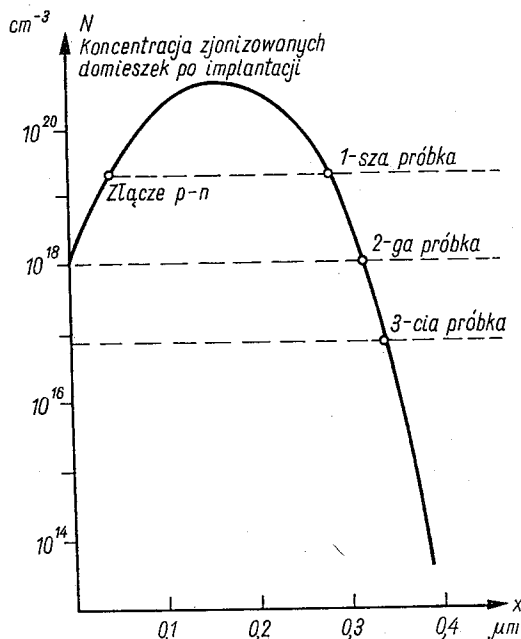
Metoda znaczonych atomów jest metodą absolutną, gdyż pozwala określić całkowitą koncentrację wprowadzonych atomów, tj. zjonizowanych i niezjonizowanych. Polega ona na pomiarze bądź radioaktywności usuwanego z warstwy materiału, bądź na pomiarze działania wszystkich pozostałych w warstwie izotopów. W tym celu usuwa się kolejno cienkie warstwy półprzewodnika przez trawienie lub polerowanie [12] wibracyjne. Metodę tę można stosować dzięki użyciu do implantacji radioaktywnych izotopów lub dzięki aktywacji domieszek przez bombardowanie neutronami po wykonaniu implantacji. Można ją użyć tylko w przypadku, gdy istnieją izotopy radioaktywne danego pierwiastka (bor i aluminium nie mogą więc być użyte).

Dwie następne metody pozwalają określić jedynie koncentrację zjonizowanych domieszek. Otrzymane przy ich użyciu rozkłady implantowanych atomów będą więc na ogół zależne od obróbki cieplnej.

W metodzie pomiaru koncentracji implantowanych jonów z przewodności elektrycznej i efektu Halla zdejmuje się kolejno warstewki o grubości kilkuset angstromów, mierzy przewodność pozostałej warstwy oraz stałą Halla. Pomiar jest możliwy jedynie w przypadku,

gdy typ przewodnictwa półprzewodnika jest różny od typu przewodnictwa warstwy implantowanej. Wykonanie prawidłowego pomiaru wymaga wykonania dobrych kontaktów o małej oporności i wyeliminowania efektów brzegowych. Stosować można również metodę Van der Pauwa. Ocenę stanu jonizacji można uzyskać przez porównanie całkowitej ilości domieszki z wartością całkowitej dawki implantowanych jonów.

Przy pomiarze rozkładu zjonizowanych implantowanych domieszek przez określenie położenia złącza $p-n$ za pomocą szlifu skośnego i chemicznego trawienia umieszcza się płytki półprzewodnika o różnych koncentracjach domieszek w komorze i przeprowadza



Rys. 3.2. Ilustracja wykorzystania metody określania rozkładu koncentracji implantowanych atomów za pomocą metody wyznaczania położenia złącza $p-n$ w płytkach półprzewodnika o różnej oporności właściwej

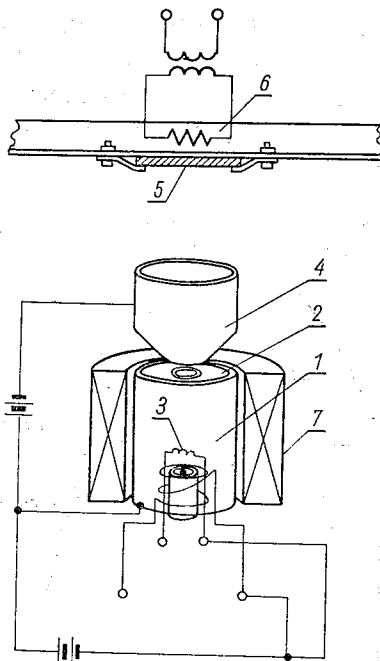
implantację. Wyznaczone położenia złącz $p-n$ określają rozkład jonów (rys. 3.2). Pomiary stają się jednakże trudne i mało dokładne po przekroczeniu koncentracji $2 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$.

4. APARATURA STOSOWANA PODCZAS IMPLANTACJI JONÓW

Aparatura stosowana do implantacji jonów musi posiadać następujące właściwości:

- wydajne źródło implantowanych jonów,
- możliwość podgrzewania implantowanej próbki,
- duży zakres zmian potencjału przyspieszającego,
- separację jonów wg ich masy,
- możliwość zmiany wielkości implantowanej powierzchni przez przesuw wiązki jonów,
- możliwość zmiany orientacji próbki względem wiązki jonów.

W zasadzie rozróżnia się dwa typy urządzeń. Pierwszy typ urządzenia, stosunkowo prostego (rys. 4.1) stosuje się przy implantowaniu bardzo czystych domieszek, drugi zaś (rys. 4.2) podczas implantacji domieszek niedostatecznie oczyszczonych.



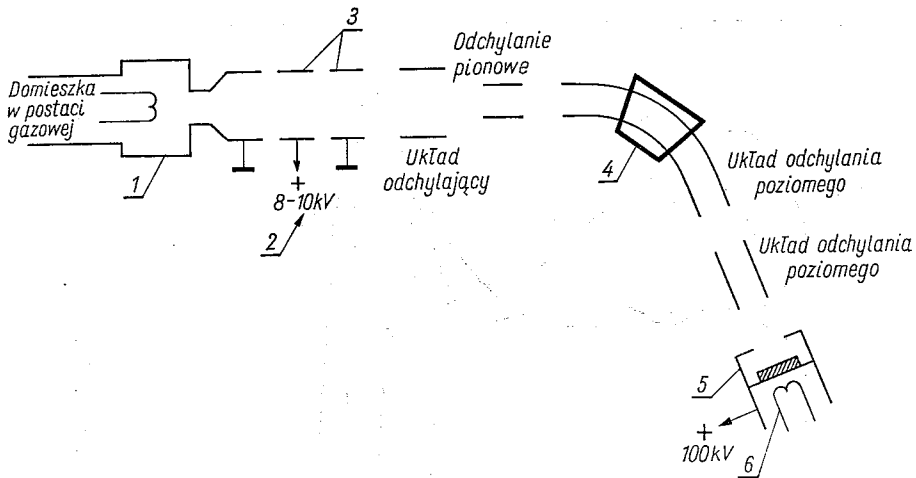
Rys. 4.1. Schemat prostego urządzenia do implantacji jonów:

1 — komora plazmowa, 2 — anoda komory plazmowej, 3 — włókno emitujące elektrony, 4 — ekstraktor, 5 — próbka, 6 — grzejnik, 7 — magnes

Schemat urządzenia pierwszego typu pracującego przy napięciach przyspieszających poniżej 20 keV przedstawiono na rys. 4.1 [13]. Jony metalu uzyskuje się w tzw. diodzie plazmowej (1) umieszczając w zagłębieniu anody odpowiedni metal. Anoda (2) jest podgrzewana za pomocą osobnego grzejnika, wskutek czego wytwarzają się pary metalu, które jonizowane są przez elektrony emitowane przez rozgrzane włókno (3) umieszczone naprzeciw zagłębienia anody (2). Magnetyczne pole zewnętrznej zwojownicy wywołuje ruch spiralny jonów wydłużając drogę jonizacji. Elektroda wyciągająca (4) na wyższym potencjale w stosunku do anody przyspiesza jony, które padają na implantowaną płytkę. Płytką (5) jest podgrzewana za pomocą osobnego grzejnika (6).

W przypadku drugim, gdy np. domieszkę uzyskuje się ze związku lub jest ona niedostatecznie czysta, stosuje się bardziej skomplikowane urządzenie [14], schematycznie przedstawione na rys. 4.2, w którym używa się separator jonów. Źródłem jonów jest jonizator typu opisanego przez Nielsena [15]. Pary pożądaných atomów wprowadza się do cylindrycznej anody (1) przy ciśnieniu niższym niż 10^{-3} Tr. Elektrony emitowane przez rozżarzone włókno poruszają się w skrzyżowanych polach magnetycznym i elektrycznym po spirali jonizując atomy metalu, które są wyciągane przez elektrodę ekstrakcyjną (2) znajdującą się na potencjale o ok. 10 kV wyższym niż anoda. Soczewka elektronowa (3)

zakończona otworem o $\varnothing$ 6 mm dostarcza wiązkę elektronów do (magnetycznego) separatora jonów (4) o polach do 10 tys. gausów rozdzielających jony odpowiednio do ich masy. Na wyjściu separatora znajduje się szczelina, która zatrzymuje niepożądane jony.



Rys. 4.2. Schemat złożonego implantatora jonów

1 — anoda, 2 — ekstraktor, 3 — układ tworzący soczewkę elektrostyczną, 4 — separator jonów, 5 — anoda końcowa, 6 — grzejnik

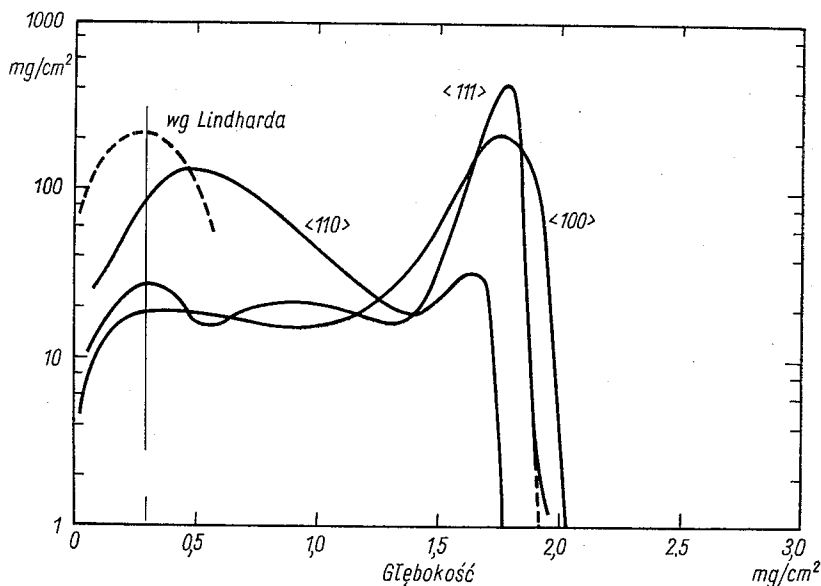
W ten sposób przez szczelinę przechodzą jony o określonym stosunku ładunku do masy i o energii 10 keV. Wiązka po przejściu przez szczelinę ma wymiary 6 na 18 mm i jest jednorodna. W końcowej komorze jony są przyspieszane przez anodę końcową (5), na której umieszcza się implantowaną płytkę znajdującą się na potencjale ok. 100 kV. Anoda jest wykonana ze stali nierdzewnej. Sprężyny wolframowe przytrzymują płytkę półprzewodnikową. Płytkę dzięki grzejnikowi (6) może być podgrzewana do 700°C. Temperatura jest kontrolowana przez termoparę. Płytkę ma zabezpieczenie zapobiegające powstawaniu łuku i emisji polowej pod wpływem silnych pól występujących w tej części urządzenia. W urządzeniu ponadto stosowane są płytki odchyłające pionowo i poziomo. Osiągane gęstości prądu końcowej anody wynoszą od 0,1 do 1 $\mu\text{A}/\text{cm}^2$ i mogą być utrzymywane przez nieograniczony przeciąg czasu. Typowe czasy implantacji wynoszą ok. 15 min., gdyż przy gęstości prądu 0,1 $\mu\text{A}/\text{cm}^2$ w tym czasie osiąga się w grubości warstwy ok. 0,5 μm koncentrację domieszki ok. 10^{19} atomów/ cm^3 . Oczywiście wyższe napięcia dające energie sięgające 2 ÷ 3 MeV są również stosowane, takie urządzenia opisano np. w pracy [16]. Urządzenie, w którym wbudowano orientometr służący do ustawiania kryształu opisano w pracach [17] i [18].

5. WYNIKI EKSPERYMENTALNE

Prace eksperymentalne prowadzone są w dwóch kierunkach, a mianowicie:

- a) w celu poznania mechanizmu implantacji i opanowania metod implantacji w odniesieniu do dowolnego ciała stałego,
- b) wykorzystania metod implantacji do budowy elementów półprzewodnikowych.

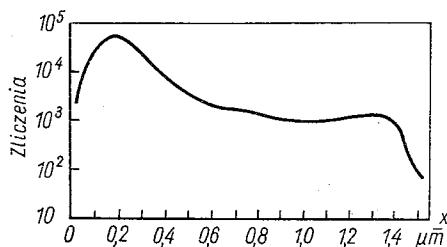
Oczywiście czytelnika będzie interesować przede wszystkim zgodność pomiędzy teoretycznym obliczeniem rozkładu implantowanych jonów oraz znalezionym doświadczalnie zarówno w materiałach amorficznych jak i krystalicznych. Rys. 5.1 do 5.5 ilustrują stopień



Rys. 5.1. Profile koncentracji implantowanych jonów potasu K^{42} w wolframie zorientowanym w kierunkach $\langle 100 \rangle$, $\langle 110 \rangle$, $\langle 111 \rangle$ uzyskane za pomocą metody zliczania

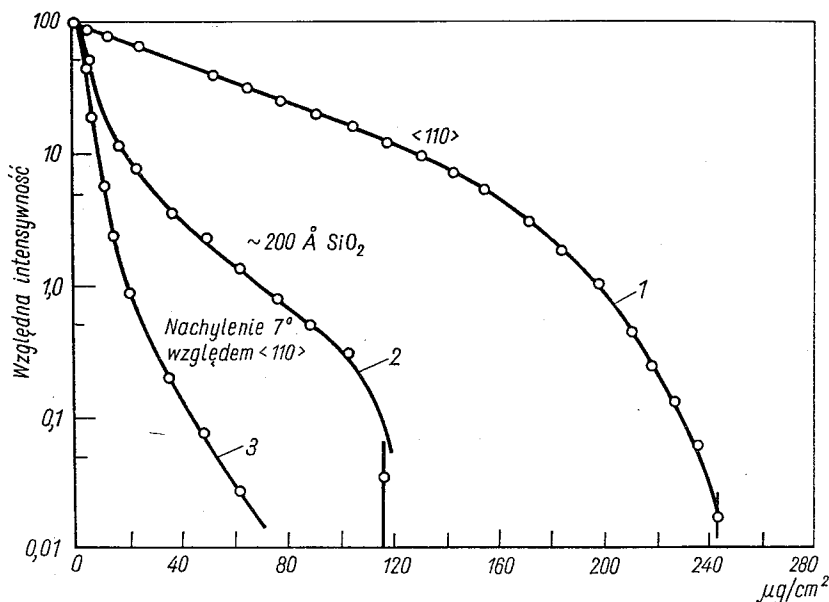
zgodności tych przebiegów [19]. Pokazano tu wpływ dokładnej orientacji kryształu na zasięg jonów, jego zależność od kierunku osi krystalograficznej oraz pochylenia osi krystalograficznej względem wiązki jonów. Na rys. 5.1 i rys. 5.2 można zauważyć rozkład jonów o dwóch minimach oraz gwałtowniejszym maleniu koncentracji na przedniej krawędzi, co potwierdza rozważania teoretyczne. W przypadku np. krzemu implantowanego izotopem fosforu P^{32} przy energii 110 keV orientacji $\langle 110 \rangle$ i dawce $1,5 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-2}$ uzyskano dwa maksima rozkładu. Jedno wynosi 200 Å przy przewidywanej teoretycznie głębokości 1355 Å, drugie zaś sięga 1,4 μm . Obliczona wartość R_{max} dla tego przypadku wynosi 1,5 μm . Rys. 5.3 pozwala porównać wpływ warstwy tlenkowej oraz nachylenia osi krystalograficznej względem wiązki jonów. Rys. 5.4 i 5.5 wykazują dużą zgodność obliczeń teoretycznych zasięgu z danymi pomiarowymi. Wyniki przedstawione na rys. 5.6 różnią się natomiast dość znacznie.

Odpowiedź na pytanie dotyczące zgodności zależności zasięgu jonów od ich energii (wzór 2.4) daje rys. 5.7 wzięty z pracy S. Roosilda i in. [20]. Dobrą zgodność uzyskano dla fosforu, pewne odchylenia obserwuje się natomiast dla azotu i boru. Wyniki uzyskano po uprzednim wygrzaniu próbek implantowanych borem i fosforem w temperaturze 700°C w ciągu 1 godz. oraz po wygrzewaniu w temperaturze 900°C przez 1 godz. w przypadku domieszki azotu. Badano także wpływ temperatury i czasu wygrzewania na koncentrację zjonizowanych domieszek implantacji. Dość obszerne badania tego zagadnienia były przeprowadzone ostatnio przez N. Johanssona i J. Meyera (patrz praca [21]). Badania



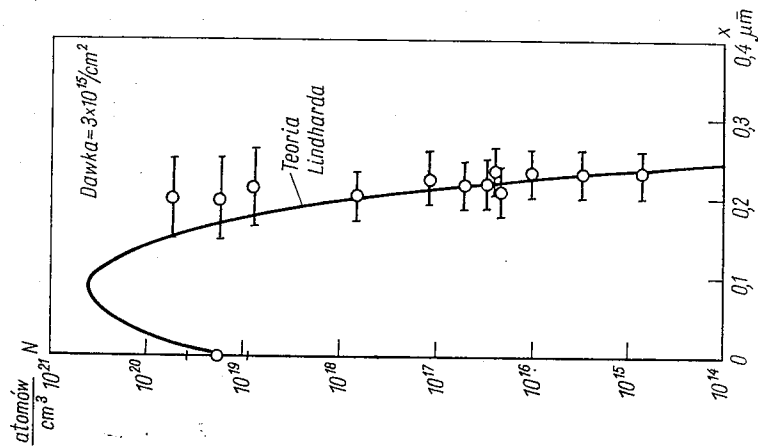
Rys. 5.2. Profile rozkładu domieszek fosforu P^{32} w krzemie implantowanym wzdłuż kierunku $\langle 110 \rangle$

przeprowadzono dla przypadku antymonu i galu w krzemie. Domieszki te implantowano przy napięciach odpowiednio 40 keV i 50 keV i temperaturach próbki 350°C i pokojowej. Badania wpływu obróbki przeprowadzone w temperaturach do 950°C przy czasach wygrzewania 15 min. wykazały, że natura warstwy amorficznej powstałej na krzemie podczas

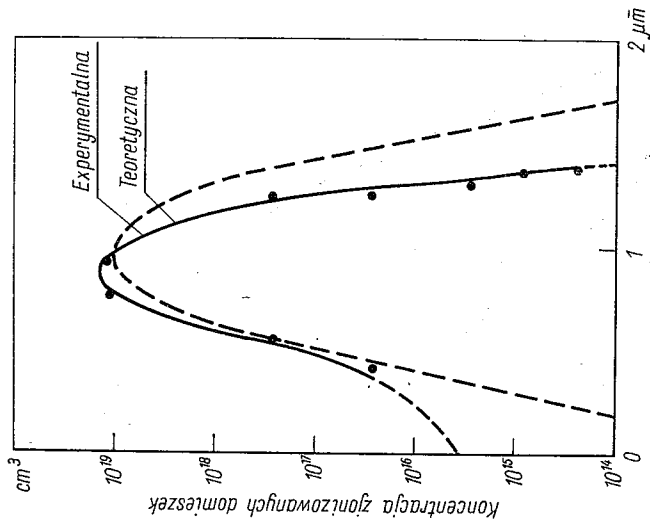


Rys. 5.3. Względna intensywność radiacji w funkcji głębokości dla krystalu półprzewodnika ustawionego tak, by kierunek osi $\langle 110 \rangle$ był zgodny z kierunkiem implantacji — 1 i 2 oraz dla tegoż kierunku odchyłonego o 7° —3. Dla przypadku 2 płytka była pokryta warstwą dwutlenku krzemu o grubości $200 \text{ \AA}$

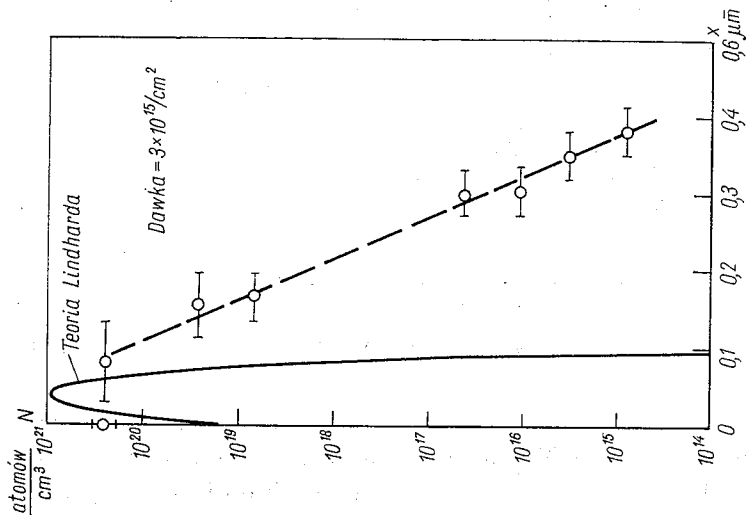
implantacji ma duży wpływ na przebieg procesu wygrzewania. Stwierdzono, że przy dawkach do 10^{14} cm^{-3} wystarczyła temperatura wygrzewania poniżej 300°C . Przy wybranych dawkach jonów tworzyła się amorficzna warstewka, która odzyskiwała strukturę monokrystaliczną przy temperaturach powyżej 600°C . Przy tym optymalna temperatura zależy od rodzaju użytego jonu. Ilość zjonizowanych jonów osiąga maksymalną wartość przy pewnej optymalnej temperaturze wygrzewania i zależy od temperatury podłoża podczas implantacji, np. w przypadku antymonu wynosi ona ok. 500°C . Przykłady wpływu tem-



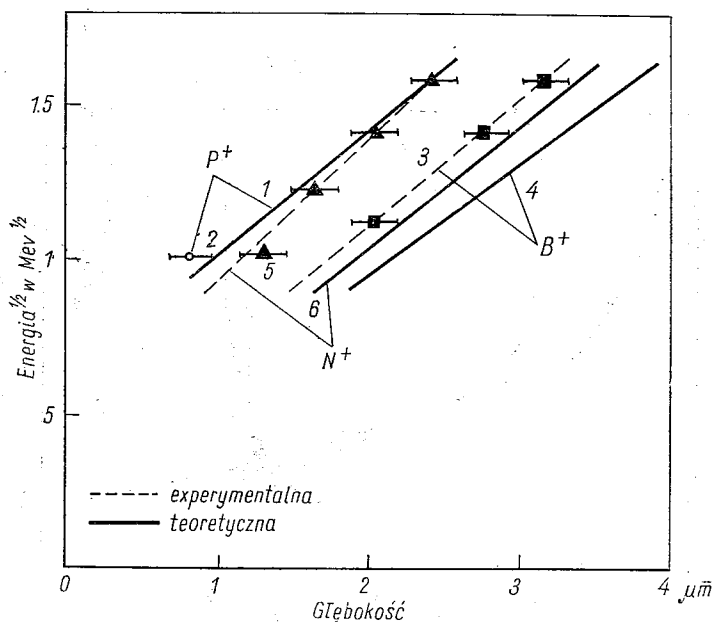
Rys. 5.4. Zależności na koncentrację implantowanych jonów azotu o energii 30 keV do krzemu uzyskane na drodze teoretycznej i doświadczalnej



Rys. 5.5. Zależność koncentracji implantowanych jonów boru o energii 30 keV do krzemu uzyskana na drodze teoretycznej i doświadczalnej



Rys. 5.6. Zależności koncentracji implantowanych jonów fosforu o energii 30 keV do krzemu uzyskana na drodze teoretycznej i doświadczalnej



Rys. 5.7. Zależność głębokości zasięgu jonów od ich energii:

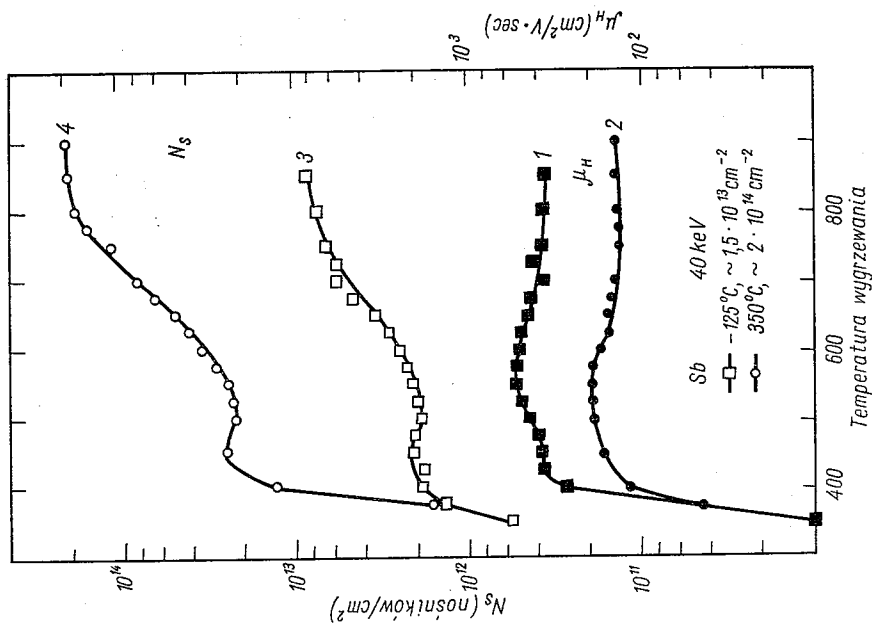
1 — krzywa doświadczalna i 2 — teoretyczna dla fosforu, 3 — krzywa doświadczalna i 4 — teoretyczna dla boru, 5 i 6 — odpowiednie krzywe dla azotu

peratury wygrzewania na koncentrację zjonizowanych domieszek oraz ruchliwość Halla pokazano dla jonów antymonu na rys. 5.8 i dla galu na rys. 5.9. Rysunki te ilustrują równocześnie wpływ temperatury płytki podczas implantacji. Ten wpływ temperatury płytki podczas implantacji jest widoczny także w przebiegu charakterystyki napięciowo-prądowej złącz wykonywanych przez implantację cynku do arsenku galu typu *n* (rys. 5.10) [22].

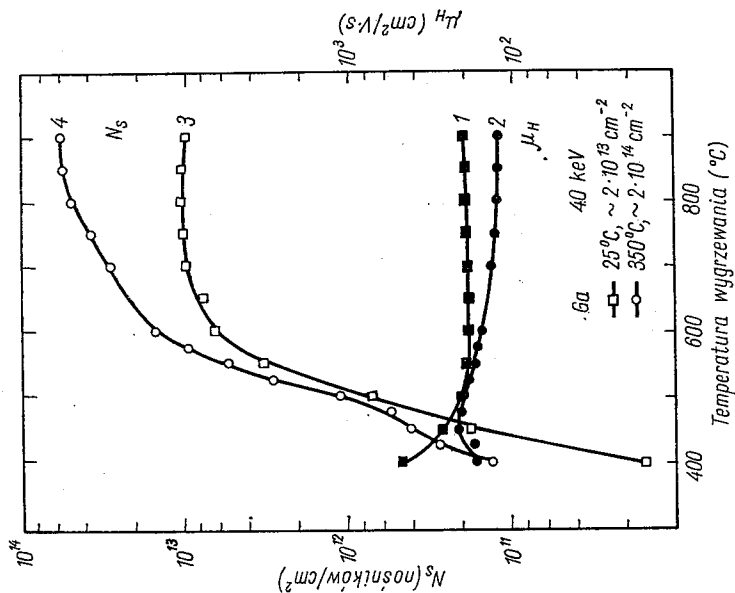
Tablica 3

Prądy nasycenia i napięcia przebicia diod krzemowych wytworzonych w procesie implantacji i po wygrzewaniu w 600°C przez 10 min

Nr egzemplarza	powierzchnia 10 ⁻⁴ cm ²	U_0 V przy 10 μ A	$I_{wsteczne}$ μ A przy 30 V
1A	1,67	90	7
2A		70	8
3A		80	7
4A		80	8
7A		70	7
1B	5,72	70	18
2B		50	20
3B		60	16
4B		60	19
7B		50	18

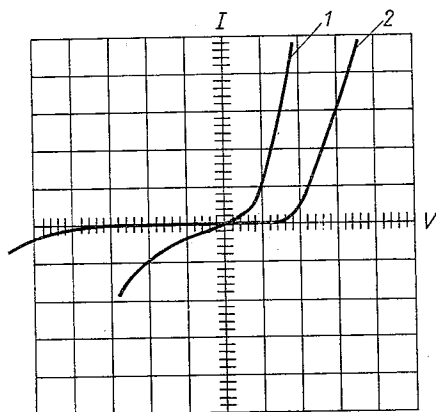


Rys. 5.8. Zależność ruchliwości Halla (1, 2) i koncentracji zjonizowanych donorów (3, 4) pochodzących od implantowanych jonów Sb od temperatury poimplantacyjnego wygrzewania przy temperaturze podłoża podczas implantacji -125°C (1 i 3) i 350°C (2 i 4)



Rys. 5.9. Zależność ruchliwości Halla (1 i 2) i koncentracji zjonizowanych akceptorów (3 i 4) pochodzących od implantowanych jonów Ga od temperatury poimplantacyjnego wygrzewania przy temperaturze podłoża podczas implantacji -125°C (1 i 3) i 350°C (2 i 4)

Metoda implantacji znajduje również szerokie zastosowanie przy wytwarzaniu pojedynczych złącz p - n oraz ostatnio tranzystorów typu MOS-FET, ze względu na możliwość uzyskania znacznie korzystniejszych parametrów elektrycznych. Charakterystyki złącz



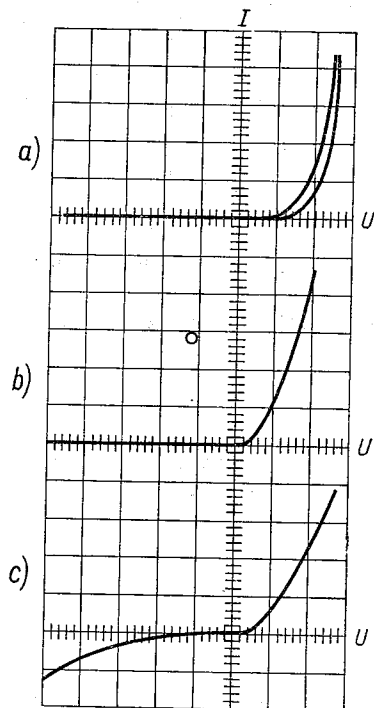
Rys. 5.10. Ilustracja wpływu temperatury podłoża podczas implantacji na charakterystykę napięciowo-prądową. Dioda wytworzona została z GaAs przez implantację cynku wykonaną w temperaturze podłoża 77°K — 1 i 300°K — 2. Skala napięć i prądów dla krzywej 1 — 0,5 V/cm i 1 V/cm dla krzywej 2. Skala prądów w obu przypadkach dla kierunku przewodzenia 0,02 mA/cm i 0,1 mA/cm dla kierunku zaporowego

p - n są bardzo korzystne, gdyż prądy nasycenia są na ogół bardzo małe przy dużych napięciach przebicia (patrz tablica 3). W przypadku częściowej jonizacji (tablica 2) opór szeregowy diody jest na ogół wyższy niż w przypadku diod wykonanych techniką dyfuzyjną. Szczególnie korzystna jest możliwość uzyskania złącz o dużych powierzchniach (2 cm^2) przy dużych napięciach przebicia i małych prądach nasycenia. Dotychczasowe doświadczenia zostały przeprowadzone z powodzeniem w przypadku krzemu, arsenku galu, w którym uzyskano m.in. półizolacyjne warstwy przez implantację chromu, węgla krzemu oraz CdS, ZnTe, CdSe i diamentu.

Związki $A^{\text{II}} - B^{\text{VI}}$ są typowym przykładem przydatności implantacji. Jak dotychczasowe doświadczenie pokazuje kryształy ZnTe, CdS, CdTe o dużej przewodności uzyskuje się wyłącznie o przewodnictwie typu p lub n [23], [24], [25]. Zarówno metoda wzrostu kryształu jak i metoda dyfuzji domieszek są tu nieprzydatne, jeśli chodzi o uzyskanie konwersji typu przewodnictwa. We wszystkich trzech wyżej wymienionych przypadkach uzyskano korzystne charakterystyki napięciowo-prądowe. Jednakże procedura termicznego wygrzewania, niezbędna dla usunięcia uszkodzeń implantacyjnych jest bardzo złożona, co wynika z czułości składu stechiometrycznego związków na działanie temperatury. Obróbka cieplna nie może być bowiem prowadzona w temperaturach, w których zachodzi wyraźna dysocjacja związku, a w zakresie zwykle stosowanych temperatur konieczne jest prowadzenie tego procesu w atmosferze par łatwiej dysocjującego pierwiastka.

Podane poniżej informacje dotyczące wytwarzania złącz p - n metodą implantacji jonów w przypadku związków ZnTe, CdS i CdTe pozwolą zorientować się na jakie problemy napotka eksperymentator stosujący implantację jonów w przypadku półprzewodników tej grupy.

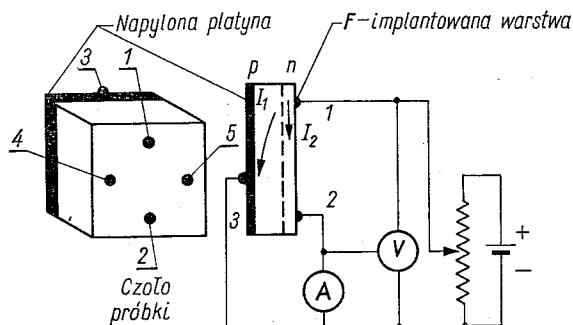
W przypadku ZnTe [23] stosowano kryształy o oporności właściwej ok. $15 \Omega\text{cm}$ o przewodnictwie typu *p*. Kryształy polerowano mechanicznie i trawiono chemicznie przez 20 s. we wrzącym H_3PO_2 . Implantowano fluor ze związku BF_3 stosując energię 400 keV w płytkę ZnTe o temperaturze 77°K . Maksymalna koncentracja jonów wynosiła 10^{14} do 10^{15}cm^{-3} , a zasięg $0,5 \mu\text{m}$ zgodnie z teorią Lindharda. Jony fluoru znajdujące się w położeniach międzywęzłowych po obróbce cieplnej zajmowały pozycje telluru. Wyrzewanie w temperaturze 550°C w atmosferze ZnTe i Te przez 2 do 5 godzin dawało optymalne wyniki, jak ilustruje to rys. 5.11. Wyrzewanie zbyt długie lub w zbyt wysokiej temperaturze powo-



Rys. 5.11 Charakterystyka $I(U)$ diod wykonanych z ZnTe przez implantację jonów fluoru: a) po wygrzewaniu przez 1 godz. w 500°C i przez 2 godz. w 550°C (skala $U - 5 \text{ V/cm}$, $I - 0,1 \text{ mA/cm}$), b) po wygrzewaniu w 550°C przez 5 godz. (skala $U - 0,2 \text{ V/cm}$, $I - 0,5 \text{ mA/cm}$), c) po wygrzewaniu w 550°C przez 30,5 godz. (skala $U - 0,5 \text{ V/cm}$, $I - 1 \text{ mA/cm}$) wygrzewanie w parach Te i ZnTe

dowało konwersję przewodnictwa typu *p*. Pomiaru typu przewodnictwa wykonywano za pomocą termosondy. Diody wykonane za pomocą tego procesu wykazywały efekt fotowoltaiczny przy pobudzaniu falą świetlną o długości $5500 \text{ \AA}$. Kontakty wykonano do podłoża przez napylenie katodowe platyny oraz nałożenia ultradźwiękami indu na warstwę implantowaną. Napięcie przebicia diody przekraczało 25 V przy oporności szeregowej ok. 100Ω . Oporność ta zależała od czasu wygrzewania. Pomiaru oporności właściwej i ruchliwości nośników ładunku implantowanej warstwy prowadzono w układzie przedstawionym na rys. 5.12. Kontakty 1, 2, 4 i 5 wykonane są z indu, zaś 3 z platyny. Przy pomiarze oporności właściwej używane są kontakty 1 i 2. Oporność tej warstwy ulegała

zmianom o kilka rzędów podczas zmiany temperatury wygrzewania i wynosiła $10^2 \Omega\text{cm}$ przy obróbce w 550°C przez 3 do 5 godzin, zaś ruchliwość Halla wynosiła od 180 do $540 \text{ cm}^2/\text{V.s}$. Największa koncentracja elektronów była o trzy rzędy niższa niż koncentracja implantowanych atomów.



Rys. 5.12. Układ stosowany do pomiaru oporności właściwej i ruchliwości Halla 1, 2, 3, 4 i 5 — kontakty metalowe

Badania mechanizmu rozkładu implantowanych jonów pomiędzy położeniem międzywęzłowym i węzłowym podczas obróbki cieplnej może być wykonana na podstawie pomiarów EPR (poniżej $4,2^\circ\text{K}$). Linie EPR pojawiają się prawdopodobnie przy przejściu fluoru do pozycji węzłowych. Autorzy pracy [23] uważają, że metoda ta powinna stać się bardzo ważnym narzędziem w tego rodzaju badaniach. W pracy [24] Anderson i in. zajmują się zagadnieniem konwersji silnie domieszkowanego CdS typu *n* przez wprowadzenie w procesie implantacji jonu fosforu podstawiającego po odpowiedniej obróbce cieplnej atomy siarki. Polerowane płytki monokryształu CdS trawiono przez 1 min. w 40°C w $0,5 \text{ M K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ i $16 \text{ N H}_2\text{SO}_4$.

Proces implantacji przeprowadzano na płytkach niepodgrzewanych przy próżni 10^{-6} Tr . Pary fosforu i siarki o składzie 1:1 jonizowano w komorze plazmowej. Prąd jonów o energii 50 keV wynosił przeciętnie $1,6 \mu\text{A}/\text{cm}^2$.

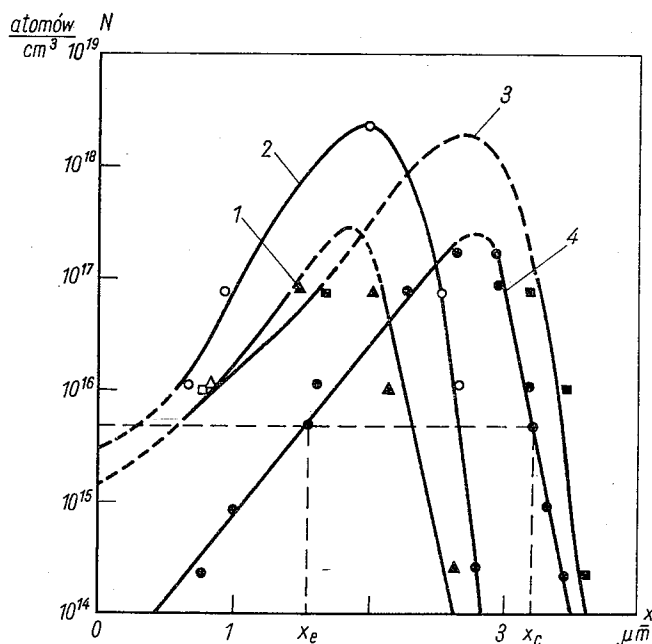
Zasięg jonów R_p wynosił ok. $500 \text{ \AA}$ przy $R_p = 7,6 \cdot 10^4 \text{ \AA}$ N_{max} wynosiło 10^{20} cm^{-2} . Wygrzewanie implantowanej płytki w parach siarki w obecności proszku CdS daje najlepsze wyniki przy $T \approx 450^\circ\text{C}$. Warstwy implantowane po tego rodzaju obróbce wykazywały ruchliwość Halla ok. $10 \text{ cm}^2/\text{V.s}$ przy $p = 1,6 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ i $\rho \sim 3 \cdot 10^4 \Omega\text{cm}$. Diody wykonane przy użyciu kontaktów ze złota do strony implantowanej i indu po stronie nieimplantowanej wykazywały silny fotoeft. Oporność szeregową wynosiła ok. $1,8 \text{ k}\Omega$ i diody dawały silną luminescencję koloru żółtego przy polaryzacji w kierunku przewodzenia (prąd ok. 10 mA). Wskutek istnienia poziomów pułapkowych diody wykazywały istnienie oporności ujemnej.

Na jakie trudności napotyka się przy implantacji jonów do niektórych związków wskazuje praca [25], w której podano opis implantacji jonów do cienkich warstw CdTe. Płytki CdTe o przewodnictwie typu *n* poddawano działaniu jonów arsenu o energii 400 keV . W temperaturach poniżej 525°C w celu uniknięcia niszczenia warstwy dwutlenku poddawano płytkę działaniu gęstości prądu jonów $0,5 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ w ciągu 15 min. przy dawce $3 \cdot 10^{15} \text{ jonów}/\text{cm}^2$. Po usunięciu warstwy dwutlenku płytkę wygrzewano w temperaturze

650°C w zamkniętej ampule zawierającej Cd i CdTe. Studzenie wykonywano szybko. Dzięki temu substrat zachowywał przewodnictwo typu *n*. Warstwa implantowana miała koncentrację dziur ok. 10^{13} cm^{-3} . Opór szeregowy diod uzyskanych z tego materiału wynosił 30Ω a $U_p \approx 40 \text{ V}$.

Kilka wymienionych wyżej przykładów wskazuje, na jakie trudności można napotkać w przypadku implantacji jonów wskutek konieczności stosowania obróbki cieplnej usuwającej uszkodzenia sieciowe. Nie jest to co prawda wadą tylko metody implantacji, gdyż podczas dyfuzji domieszki konieczne jest również stosowanie par jednego lub obu składników związku. Niewątpliwą zaletą implantacji jest możliwość precyzyjnego dawkowania domieszki oraz możliwość programowania profilu jej rozkładu, co w szeregu elementów półprzewodnikowych odgrywa zasadniczą rolę. Przytoczone poniżej przykłady zastosowań implantacji do wytwarzania struktur elementów półprzewodnikowych podkreśli niewątpliwie jej zalety.

Co się tyczy punktu b, tj. zastosowań implantacji do produkcji elementów półprzewodnikowych, to zauważa się coraz szersze zainteresowanie szeregu producentów tą metodą, ze względu na szereg wymienionych poniżej korzyści.

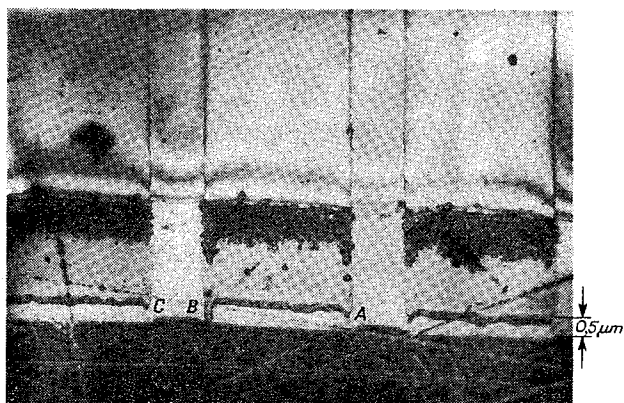


Rys. 5.13. Ilustracja typowego rozkładu domieszek po implantacji jonów fosforu do krzemu oraz gradientu koncentracji powstającego na złączach *p-n*

1 — 1,25 MeV 10^{13} jonów/cm³ 2 — 1,25 MeV $4 \cdot 10^{14}$ jonów/cm³, 3 — 2,0 MeV $4 \cdot 10^{14}$ jonów/cm³, 4 — 2,0 MeV 10^{15} jonów/cm³

Implantacja jonów zapewnia bardzo wysoką powtarzalność rozkładu domieszek oraz umożliwia dokładne programowanie tego rozkładu. Bardzo duży gradient domieszek na czole rozkładu (rys. 5.13) umożliwia w tranzystorze osiągnięcie minimalnego wnikania obszaru ładunku przestrzennego w obszar bazy od strony kolektora. Redukuje to bardzo

silnie efekt Early'ego. Pole wewnętrzne powstające w obszarze emitera lub w obszarze diody $p-n$ przy powierzchni (rys. 5.13) redukuje przepływ nośników ładunku ku powierzchni półprzewodnika zmieniając bardzo silnie składową powierzchniową prądu nasycenia. Zjawisko to wystąpiło bardzo ostro w przypadku krzemowych detektorów cząstek, w których osiągnięto bardzo wysokie napięcia przebicia przy bardzo małych prądach nasycenia (tablica 3 [26]). Bardzo ważną cechą tego procesu, oprócz wysokiej precyzji profilu, jest mała jego zależność od defektów strukturalnych, co umożliwia osiągnięcie szerokości bazy ok. $0,1 \mu\text{m}$, wielkości absolutnie nie osiągalnej za pomocą procesów dyfuzyjnych, wskutek dużych stałych dyfuzji po defektach. Rys. 5.14 pokazuje przykład



Rys. 5.14. Szlif przez złącze dyfuzyjne ilustrujący wpływ defektów w materiale (p. A, B i C)

wplywu nadmiernie dużej dyfuzji po dyslokacjach na profil złącza. Ze względu na niskie temperatury wygrzewania uszkodzeń poimplantacyjnych (poniżej 600°C) oraz krótkie czasy wygrzewania — ok. 15 min., zjawisko dyfuzji może być zaniedbane.

Procesy implantacyjne mogą być poza tym prowadzone po uprzednim zabezpieczeniu powierzchni półprzewodnika za pomocą warstwy tlenkowej oraz są wykonywane w próżni; separator jonów usuwa zanieczyszczenia z implantowanego pierwiastka, co łącznie gwarantuje bardzo dobrą czystość procesu implantacyjnego. Warstwa tlenkowa działając jako struktura amorficzna ogranicza zasięg w sposób przewidywany teorią Linharda i bardzo silnie, jako grubsza niż $1500 \text{ \AA}$, ogranicza efekt „channelingu”. Grubość jej musi być dodana do przewidywanej głębokości złącza $p-n$. W celu zapobieżenia implantacji jonów w obszarach, gdzie jest ona niepożądana, konieczne jest pokrycie półprzewodnika względnie warstwy tlenkowej napyłoną warstwą metalu, np. aluminium lub złota, które wykazują w zależności od rodzaju metalu co najmniej trzykrotną redukcję zasięgu (np. $1 \mu\text{m}$ — warstwa złota jest równoważna $3 \mu\text{m}$ półprzewodnika). Maskowanie można więc wykonać za pomocą metalowej maski [27] lub odpowiednio grubej warstwy tlenków. Najbardziej pożądanym oczywiście byłby sposób polegający na regulacji przekroju wiązki i przesuwaniu jej według zadanego programu. W chwili obecnej nie rozporządza się tego rodzaju aparaturą. Wstawienie dodatkowego działu jonowego o bardzo małych energiach jonów umożliwiłoby ponadto wytwarzanie ścieżek przewodzących i w przypadku użycia elektronów kontrolę właściwości elektrycznych implantowanych obszarów. Do pomyslenia

jest więc wielofunkcyjna aparatura umożliwiającą wysoki stopień automatyzacji procesów produkcyjnych.

Metoda ta została już wielokrotnie zastosowana do produkcji elementów różnego rodzaju, a mianowicie:

krzemowych detektorów cząstek [28],

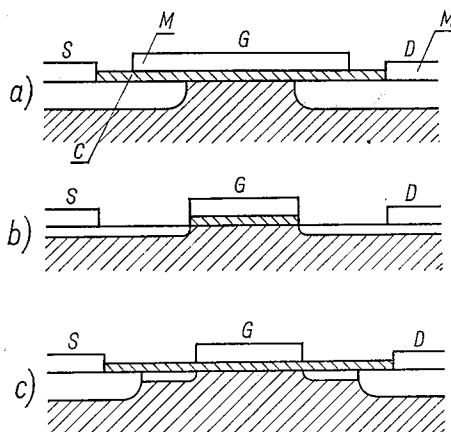
krzemowych baterii słonecznych [29],

diod lawinowych [30],

tranzystorów polowych typu MOS-FET [31].

Detektory cząstek wykonywano na krzemie o oporności ok. 1000 Ωcm . Średnica detektorów wynosiła ok. 12 mm przy głębokości złącza od 0,1 do 0,5 μm i warstwie pasywującej dwutlenku krzemu ok. 0,2 μm . Napięcie przebicia złącza wynosiło ok. 500 ÷ 700 V przy szerokości warstwy zaporowej ok. 1 mm. Charakterystyczną cechą są małe prądy nasycenia wskutek hamującego przepływ nośników ładunku ku powierzchni pola elektrycznego wywołanego przez duży gradient domieszek przy powierzchni diody.

Metoda ta zastosowana została do zautomatyzowanej produkcji krzemowych baterii słonecznych. Powierzchnia poszczególnych elementów wynosiła ok. 2 cm^2 . Powtarzalność parametrów elektrycznych elementów była bardzo wysoka, co zapewniało dużą ekonomicz-

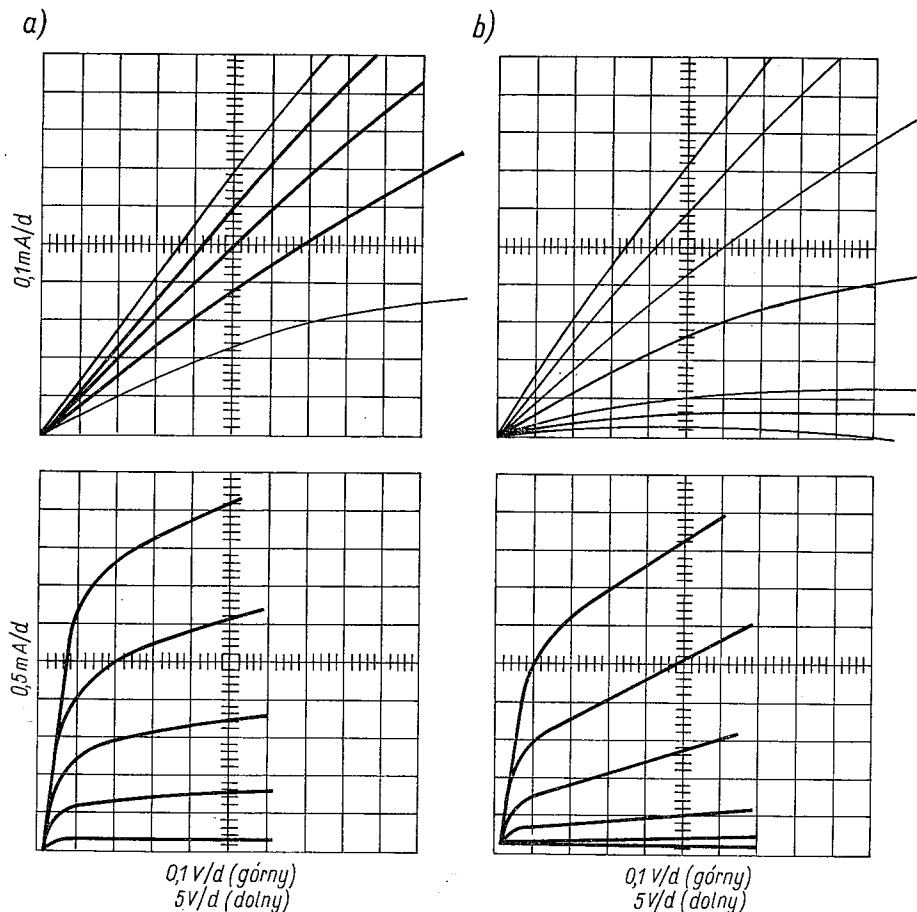


Rys. 5.15. Porównanie konstrukcji tranzystora MOS-FET: a) wykonanego tradycyjną metodą dyfuzji b) wykonanego metodą implantacji i c) metodą implantacji i dyfuzji.

S i D — elektrody źródła i drenu, G — elektroda bramki, M — metal, C — dwutlenek krzemu

ność produkcji. Dużą poprawę parametrów elektrycznych uzyskano w przypadku diod lawinowych o złączach wykonanych przez implantację boru do krzemu typu n . Duży gradient koncentracji na złączu umożliwia zwężenie obszaru lawinowej jonizacji, co wpływa korzystnie na zależności fazowe pomiędzy prądem i napięciem zmiennym na diodzie. Wskutek tego diody lawinowe otrzymane tym sposobem wyróżniały się dużą sprawnością energetyczną.

Do największych sukcesów tej metody zaliczyć należy jej zastosowanie do produkcji tranzystorów polowych typu MOS-FET [31]. Zapewnia ona bowiem optymalny układ geometryczny elektrod (rys. 5.15), dzięki czemu osiąga się minimalną oporność szeregową



Rys. 5.16. Charakterystyki napięciowo-prądowe tranzystorów polowych typu MOS-FET wykonanych, a) metodą implantacji i b) metodą dyfuzji

w obwodzie źródła, co umożliwia osiągnięcie maksymalnej wartości nachylenia charakterystyki $I_{\text{kanału}}$ (U_{bramki}) i maksymalnej częstotliwości granicznej. Przebieg charakterystyki $I_s(U_g)$ w obu przypadkach przedstawiono na rys. 5.16. Jak wskazuje na to przebieg charakterystyk, nachylenie tranzystorów wykonanych metodą implantacji ma większą wartość, a także i oporność wyjściowa jest większa.

6. ZAKOŃCZENIE

Krótki opis zasady implantacji jonów do ciała stałego, urządzenia, za pomocą którego się ją przeprowadza, oraz wyników doświadczalnych, wskazuje na bardzo duże możliwości jej zastosowań do celów badania właściwości materiałów oraz do produkcji elementów półprzewodnikowych. Niewątpliwie dalszy postęp w dziedzinie budowy implantatorów umożliwi wykorzystanie metody implantacji do produkcji znacznie szerszego asortymentu elementów półprzewodnikowych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. R. Ohl, Properties of Ionic Bombarded Silicon, *Bell. Syst. Tech. Jour.*, v. 31, s. 104÷122, 1952.
2. W. Cussius, Effects Produced by the Ionic Bombardement of Germanium, *Proc. Phys. Soc.*, (London), v. 68, s. 213, 1955.
3. L. Large, R. Bicknell, Ion Implantation Doping of Semiconductors, *Jour. Material Science* v. 2, s. 589, 1967.
4. J. Lindhard, M. Scharff, H. Schiott, Range Concepts and Heavy Ion Ranges, *Mat. Fys. Redd. Dan Vid Selsk.*, v. 33, s. 1÷39, 1963.
5. J. Lindhard, A. Winther, Stopping Power of Electron Gas and Equipartition Rule, *Mat. Fys. Medd. Dan Vid Selsk.*, v. 34, s. 1÷21, 1964.
6. O. Firsov, A Qualitative Interpretation of the Mean Electron Excitation Energy in Atomic Collisions, *Jour. Exper. Theoret. Phys. (ZSRR)*, v. 36, s. 1517÷1523, May 1959.
7. A. El-Hoshy, J. Gibbons, The Periodic Dependence of the Electronic Stopping Cross Section for Energetic Particles in Solids (to be published).
8. F. Eisen, Channeling of Medium Mass Ions Through Silicon, *Canadian Jour. of Physics*, v. 46, Nr 6, 1968.
9. J. Lindhard, Influence of Crystal Lattice on Motion of Energetic Charged Particles, *Mat. Fys. Medd. Dan Vid Selsk.*, v. 34, n. 14, 1965.
10. W. Cussius, Effects Produced by the Ionic Bombardment of Germanium, *Proc. Phys. Soc. London*, v. B68, s. 213, 1955.
11. G. Schwuttke, K. Braek, Annealing of High Energy Ion Implantation Damage in Single Crystal Silicon, *Trans. on Metallurgical Society of AIME*, March 1969.
12. J. Whitton, Ranges in Various Single Crystals, *Canad. Jour. Phys.*, v. 46, Nr 6, 1968.
13. G. Magnuson, C. Carlston, P. Mahoderan, A. Comeaux, High Efficiency Source of Metal Ions, *Rev. Sci. Instr.*, v. 36, February 1965.
14. J. Gibbons, Ion Implantation in Semiconductors — Part I Range Distribution Theory and Experiments. *Proc. IEEE*, March 1968.
15. K. Nielsen, The Development of Magnetic Ion Sources for an Electromagnetic Isotope Separator. *Nucl. Instr.*, v. 1, s. 289÷301, 1957.
16. E. Bogh, P. Dahl, K. Nielsen, A 600 keV Heavy Ion Accelerator with Magnet for Isotopic Separation and a Magnetic Analyzer. *Phys. Dept. Aarhus University Aarhus Denmark Internat. Report*, 1968.
17. J. Anderson, J. Davies, K. Nielsen, An Experimental Study of the Orientation Dependence of Yields in Monocrystalline Aluminium. *Nucl. Instr. and Methods*, v. 38, s. 210÷215, 1965.
18. E. Bogh, E. Uggerhoj, Experimental Investigation of Orientation Dependence of of Rutherford Scattering Yield in Single Crystals. *Nucl. Instr. and Methods*, v. 38, s. 216÷220, 1965.
19. L. Eriksson, J. Davies, P. Jespersgaard, Range Measurements in Oriented Tungsten Single Crystals (0,1÷1,0 MeV), Part I Electronic and Nuclear Stopping Powers, *Phys. Rev.* v. 161, s. 219, 1967.
20. S. Roosild, R. Dolan, B. Buchanan, Semiconductor Doping by High Energy — 1÷2,5 MeV Ion Implantation, *Jour. Electr. Soc.*, v. 115, n. 3, 1968.
21. N. Johansson, J. Mayer, Hall Effect Measurements on Sb and Ga Implanted Silicon Anneal-Behavior and Comparison with Other Species, *Solid State Electronics*, v. 13, n. 2, s. 123÷130, 1970.
22. J. Schroeder, H. Dieselman, Implantation into Gallium Arsenide. *Proc. IEEE*, n. 1, 1967.
23. S. Hou, K. Beck, J. Marley, Type Conversion and p-n Junction Formation in Ion-Implanted ZnTe, *Appl. Phys. Lett.*, v. 14, n. 5, 1 March 1969.
24. W. Anderson, J. Mitchell, Phosphorus Ion-Implanted CdS, *Appl. Phys. Lett.*, v. 12, n. 10, 15 May 1968.
25. J. Donnelly, M. Foyt, E. Hinhley, W. Lindley, J. Dimmock, Type Conversion and p-n Junctions in n CdTe Produced by Ion Implantation. *Appl. Phys. Lett.*, v. 12, n. 9, 1 May 1968.

26. K. Manchester, C. Sibley, G. Alton, Doping of Silicon by Ion Implantation, Nucl. Instr. and Methods, v. 38, s. 169÷174, 1965.
27. E. Lagfgaard, F. Martin, W. Gibson, Position Sensitive Semiconductor Particle Detector Fabricated by Ion Implantation, IEEE Trans. on Nuclear Science, v. 60, s. 24, 1968.
28. T. Burrill, W. King, S. Harrisom, P. Mc Nally, Ion Implantation as a Production Technique, IEEE Trans. Electron Dev., v. ED-14, n. 1, 1967.
29. Kalbitzer, R. Bader, H. Herrer, The Fabrication of High Quality Silicon Junctions Detector by Low Energy, Zeitschr. Phys. n. 213, s. 117, 27 April 1967.
30. A. Mankarios et alia, High Power Impatt Diode Utilizing Ion Implantation, IEEE International Device Meeting, 11÷20 October 1967.
31. R. Bower, H. Dill, K. Aubuchon, S. Thompson, MOSS Field Effect Transistors Formed by Gate Masked Ion Implantation, IEEE Trans. Electr. Dev., v. ED-15, n. 10, 1968.

W. ROSIŃSKI

ION IMPLANTATION IN SEMICONDUCTOR MATERIALS

Summary

Formulas and relations governing the process of ion implantation in solid bodies are described in the paper. The results of experiments arrived at when the process is applied are presented and compared with the results of theoretical papers. Two types of apparatus employed in ion implantation are described. Finally the usefulness of the method for manufacturing semiconductor elements such as field transistors MOS-FET, avalanche diodes, particles detectors and others is analysed.

W. ROSIŃSKI

JONENIMPLATATION IN HALBLEITERMATERIALEN

Zusammenfassung

Es wurden hier den Jonenimplatationsprozeß in festen Körpern regierende Regeln und Zusammenhänge besprochen, sowie die bei Anwendung dieses Prozesses erreichten experimentalen Ergebnisse vorgetragen, und Vergleiche mit den in theoretischen Bearbeitungen erzielten Ergebnissen gezogen. Weiterhin wurden zweierlei bei Jonenimplatation angewandte Apparaturen beschrieben. Zum Schluß wurde die Anwendbarkeit dieser Methode für die Herstellung von Halbleiterbauelementen, wie Feldtransistoren MOS-FET, Lawinendioden, Teildetektoren u.a. analysiert.

В. РОСИŃСКИ

ИМПЛАНТАЦИЯ ИОНОВ В ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Резюме

Рассматриваются законы и зависимости, управляющие процессом имплантации ионов в твердые тела, представлены экспериментальные данные, полученные при применении этого процесса. Проводится сравнение с результатами теоретических трудов. Описываются два типа аппаратуры, применяемой при имплантации ионов. В заключении проводится анализ пригодности этого метода для производства таких полупроводниковых элементов, как транзисторы полевые MOS-FET, лавинные диоды, детекторы частиц и др.

Ładunek stanów powierzchniowych warstw selenku kadmu

MICHAŁ BIAŁKO (GDAŃSK)

Instytut Technologii Elektronicznej Politechniki Gdańskiej

ZBIGNIEW WIERZBICKI (TORUŃ)

Przemysłowy Instytut Elektroniki, Oddział w Toruniu

Otrzymano 23.7.1969

W pracy przedstawiono sposób określenia gęstości ładunku stanów powierzchniowych na powierzchni warstwy selenku kadmu CdSe przy znanej wartości przyrostu przewodności powierzchniowej $\Delta\sigma$, gdy w obszarze przy powierzchni CdSe powstaje warstwa zubożona w nośniki większościowe ładunku. Podano także wykresy długości Debye'a oraz przewodności objętościowej warstwy CdSe w funkcji koncentracji donorów przy założeniu całkowitej ich jonizacji. Obliczeń dokonano w oparciu o teorię obszaru ładunku przestrzennego w półprzewodniku.

1. WSTĘP

Spośród półprzewodników używanych w polowych tranzystorach cienkowarstwowych najczęściej stosuje się związki typu $A_{II} B_{IV}$, a w szczególności CdSe. Podstawową wadą polowego tranzystora cienkowarstwowego jest niestabilność jego parametrów. Badania struktury polowych tranzystorów cienkowarstwowych zmierzają w kierunku określenia wpływu atmosfery i dielektryka na stabilność tranzystora. W znacznej mierze niestabilność parametrów tranzystora jest powodowana przez stany typu akceptorowego, znajdujące się na powierzchni granicznej półprzewodnik-dielektryk oraz wewnątrz warstwy dielektryka [1]. Stany te mogą być wytworzone przez atomy tlenu, które są jonizowane przez przyjęcie elektronów z pasma przewodnictwa półprzewodnika typu n .

Wiadomo, że oporność naparowanej warstwy CdSe po zakończeniu procesu naparowywania i utrzymywaniu jej w stałej temperaturze przy stałym ciśnieniu wzrasta [2, 3]. Taki wzrost oporności warstwy CdSe zgodny jest z modelem chemicznej adsorpcji tlenu na powierzchni CdSe [1]. Tlen zaadsorbowany chemicznie na powierzchni CdSe tworzy w pasmie energii zabronionych stany powierzchniowe typu akceptorowego, powodując wytworzenie się warstwy zubożonej w elektrony przy powierzchni CdSe. Wzrost oporności warstwy CdSe po naparowaniu wskazuje na istotny fakt, że na powierzchni CdSe bezpośrednio po jej naparowaniu istnieją już stany powierzchniowe związane z chemisorpcją tlenu. Chemisorbowany tlen na powierzchni półprzewodnika różni się od defektów struk-

turalnych powierzchni tylko tym, że cząstki tlenu mogą przechodzić z powierzchni w fazę gazową i wracać, podczas gdy biograficzne defekty powierzchni są niezmiennie w czasie.

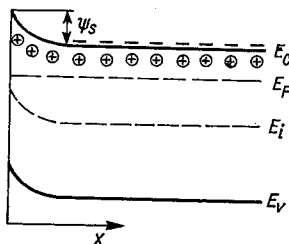
W literaturze opisano sposoby obliczania gęstości stanów powierzchniowych na powierzchni granicznej półprzewodnik-dielektryk na podstawie pomiaru wielkoczęstotliwościowej charakterystyki pojemnościowo-napięciowej struktury metal-dielektryk-półprzewodnik [4]÷[7], które można zastosować i do struktury CdSe-SiO_x. Jednak interesujące jest, jaka jest gęstość stanów powierzchniowych na powierzchni warstwy półprzewodnika przed pokryciem jej warstwą dielektryczną.

W niniejszej pracy opisano sposób określania gęstości stanów powierzchniowych na powierzchni półprzewodnika typu *n* na podstawie pomiaru jego przewodności objętościowej oraz powierzchniowej. Jakkolwiek tego rodzaju obliczeniom poświęcone jest wiele prac (szczególnie dla krzemu), to do tej pory nie ma w literaturze wzmianek o obliczeniu gęstości stanów powierzchniowych na niezabezpieczonej powierzchni warstwy CdSe. Poniżej zostaną przedstawione wyniki obliczeń, które pozwolą określić gęstość ładunku stanów powierzchniowych na powierzchni CdSe.

2. PRZEWODNOŚĆ POWIERZCHNIOWA

Niezerowa wartość potencjału powierzchniowego półprzewodnika powoduje wytworzenie się na jego powierzchni warstwy powierzchniowej — obszaru ładunku przestrzennego — której przewodność (w kierunku równoległym do powierzchni) różni się od przewodności objętościowej. W wyniku tego półprzewodnik składa się z dwu równoległych obszarów o różnej przewodności: obszaru związanego ze stałą objętościową koncentracją nośników oraz obszaru związanego z powierzchniową gęstością nośników zależną od wartości potencjału powierzchniowego.

Wykres pasmowy półprzewodnika typu *n* wraz z obszarem przypowierzchniowym przedstawiono schematycznie na rys. 1. Na idealnie czystej powierzchni półprzewodnika



Rys. 1. Wykres pasmowy półprzewodnika typu *n*
 + zjonizowane donory
 — elektrony

istnieją postulowane przez Tamma stany powierzchniowe, związane z nieciągłością sieci krystalicznej na powierzchni. Na rzeczywistej powierzchni, która styka się z gazami otaczającej atmosfery, a w szczególności, gdy półprzewodnik znajduje się w elektroujemnym środowisku, np. w atmosferze tlenu, następuje chemisorpcja tlenu na jego powierzchni. Elektrony z pasma przewodnictwa półprzewodnika przechodzą do atomów tlenu, które

stają się jonami powierzchniowymi. Zarówno skutek nieciągłości sieci krystalicznej, która powoduje powstanie niezneutralizowanych powierzchniowych ładunków, jak też wskutek chemisorpcji gazów otaczającej atmosfery, następuje zagięcie pasm energetycznych w obszarze przypowierzchniowym półprzewodnika. Wartość tego zagięcia na powierzchni liczona od dna pasma przewodnictwa w objętości nazywana jest potencjałem powierzchniowym półprzewodnika — Ψ_s .

Stany powierzchniowe mogą mieć charakter stanów akceptorowych lub też donorowych. Jeśli stany powierzchniowe mają charakter stanów donorowych (pasma zginają się w dół) to potencjał powierzchniowy Ψ_s jest dodatni ($\Psi_s > 0$) i w obszarze przypowierzchniowym półprzewodnika powstaje warstwa wzbogacona w nośniki większościowe. Jeśli stany powierzchniowe mają charakter stanów akceptorowych (pasma zginają się w górę), to potencjał powierzchniowy jest ujemny ($\Psi_s < 0$) i przy powierzchni półprzewodnika powstaje warstwa zubożona w nośniki większościowe. Przy dużych ujemnych wartościach potencjału powierzchniowego może powstać przy powierzchni półprzewodnika warstwa inwersyjna.

Jak wiadomo, przewodność powierzchniowa zależy od wartości potencjału powierzchniowego. Przyrost tej przewodności może być ogólnie zapisany:

$$\Delta\sigma = f_1(\Psi_s), \quad (1)$$

gdzie $\Delta\sigma$ jest przyrostem przewodności na powierzchni w odniesieniu do przewodności objętościowej półprzewodnika, tzn. przewodności, która by była mierzona, gdyby pasma energetyczne w półprzewodniku były proste aż do jego powierzchni. Z drugiej strony potencjał powierzchniowy jest funkcją ładunku w stanach powierzchniowych qN_0 , tzn.

$$\Psi_s = f_2(qN_0), \quad (2)$$

gdzie N_0 jest gęstością stanów powierzchniowych na jednostkę powierzchni półprzewodnika. Z równania (1) można znaleźć dla danej wartości $\Delta\sigma$ — wartość potencjału powierzchniowego Ψ_s , na podstawie którego z kolei można ze wzoru (2) wyznaczyć ładunek w stanach powierzchniowych.

3. OBLICZENIA ŁADUNKU W STANACH POWIERZCHNIOWYCH

W celu znalezienia równań (1) i (2) wykorzystamy do tego celu zależności dla obszaru ładunku przestrzennego w półprzewodniku [8, 9]. Rachunki przeprowadzimy w nieco zmodyfikowanej postaci. Zakładamy: a) półprzewodnik jest typu n , b) donory są całkowicie zjonizowane, c) koncentracja donorów N_D jest dostatecznie mała, tak że półprzewodnik jest niezdegenerowany i do elektronów oraz dziur stosuje się statystykę Boltzmann. Przy tych warunkach równanie ładunku w półprzewodniku przyjmuje postać:

$$q(x) = q[(p - p_0) - (n - n_0)], \quad (3)$$

gdzie:

$$p = p(x) \text{ i } n = n(x),$$

p_0, n_0 — koncentracje dziur i elektronów w objętości półprzewodnika w stanie równowagi,

q — ładunek elektronu,

x — współrzędna (rys. 1).

Znalezienie zależności (1) i (2) wymaga rozwiązania równania Poissona (dla przypadku jednowymiarowego):

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = -\frac{q}{\varepsilon_s}[(p-p_o)-(n-n_o)] \quad (4)$$

gdzie:

$$p = p_o \exp(-q\beta\Psi),$$

$$n = n_o \exp(q\beta\Psi),$$

ε_s — stała dielektryczna półprzewodnika,

Ψ — potencjał elektrostatyczny,

$$\beta = \frac{1}{kT},$$

T — temperatura w °K,

k — stała Boltzmanna.

Wykorzystujemy następujące warunki graniczne:

a) na powierzchni półprzewodnika potencjał elektrostatyczny równa się potencjałowi powierzchniowemu, tzn.

$$\Psi(0) = \Psi_s, \quad (5)$$

b) w objętości półprzewodnika potencjał jest równy zeru, tzn.

$$\Psi(\infty) = 0. \quad (6)$$

Warunek ten jest spełniony i dla cienkiej warstwy półprzewodnika, jeżeli w objętości półprzewodnikowej warstwy spełnione są warunki neutralności, tzn. grubość warstwy $d \gg \lambda_s$, gdzie λ_s jest długością Debye'a.

Podstawiając do równania (4) wielkości p , n oraz N_D , otrzymamy:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = -\frac{q}{\varepsilon_s}\{p_o[\exp(-q\beta\Psi)-1]-N_D[\exp(q\beta\Psi)-1]\}. \quad (7)$$

Po scałkowaniu otrzymujemy:

$$\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2 = \frac{2N_DkT}{\varepsilon_s}[G(\Psi)]^2, \quad (8)$$

gdzie:

$$G(\Psi) = \left\{ \exp(q\beta\Psi) - 1 - q\beta\Psi + \frac{P_o}{N_D} [\exp(q\beta\Psi) - 1 + q\beta N] \right\}^{1/2}. \quad (9)$$

Po wprowadzeniu długości Debye'a λ_s :

$$\lambda_s = \left[\frac{2kT\varepsilon_s}{q^2N_D} \right]^{1/2} \quad (10)$$

otrzymamy:

$$\frac{d\Psi}{dx} = \pm \frac{2}{\lambda_s} \frac{kT}{q} G(\Psi). \quad (11)$$

Na podstawie równania (11) znajdujemy powierzchniowe przyrosty elektronów i dziur Γ_n i Γ_p , zdefiniowane w [8]:

$$\Gamma_n = \int_0^\infty (n - n_o) dx = \int_0^\infty [N_D \exp(q\beta\Psi) - N_D] dx = -\frac{1}{2} \lambda_s \frac{q}{kT} N_D \int_0^{\Psi_s} \frac{\exp(q\beta\Psi) - 1}{\pm G(\Psi)} d\Psi,$$

$$\Gamma_p = \int_0^\infty (p - p_o) dx = \int_0^\infty [p_o \exp(-q\beta\Psi) - p_o] dx = -\frac{1}{2} \lambda_s \frac{q}{kT} p_o \int_0^{\Psi_s} \frac{\exp(-q\beta\Psi) - 1}{\pm G(\Psi)} d\Psi.$$
(12)

Przyrost przewodności powierzchniowej w odniesieniu do objętościowej wyraża się wzorem:

$$\Delta\sigma = \sigma_s - \sigma_o \approx q\mu_n(\Gamma_n + b\Gamma_p),$$
(13)

gdzie $b = \frac{\mu_p}{\mu_n}$, a przewodność objętościowa półprzewodnika σ_o jest:

$$\sigma_o = q(\mu_n n_o + \mu_p p_o),$$
(14)

gdzie μ_p , μ_n — odpowiednio ruchliwości dziur i elektronów.

W równaniu (13) nie uwzględniono poprawki Schrieffera [10] na zmianę ruchliwości nośników w obszarze ładunku przestrzennego, spowodowanej dodatkowym rozpraszaniem powierzchniowym nośników. Malenie ruchliwości nośników w obszarze przy powierzchni półprzewodnika jest spowodowane wg teorii Schrieffera dyfuzyjnym charakterem rozpraszania powierzchniowego nośników ładunku w studni potencjału przy powierzchni półprzewodnika o szerokości porównywalnej lub mniejszej od średniej drogi swobodnej nośników. Dla półprzewodników o szerokiej przerwie energetycznej (np. CdSe), na powierzchni których praktycznie występuje wyłącznie warstwa zubożona, można przyjąć, że efektywna ruchliwość nośników w warstwie zubożonej jest taka sama jak w objętości. Ostatecznie

$$\Delta\sigma = -\frac{1}{2} q\mu_n \lambda_s \frac{q}{kT} \int_0^{\Psi_s} \frac{N_D [\exp(q\beta\Psi) - 1] + b p_o [\exp(-q\beta\Psi) - 1]}{\pm G(\Psi)} d\Psi.$$
(15)

Dla $\Psi_s < 0$ należy w (15) uwzględniać znak minus.

Równanie (15) jest jawną postacią zależności (1). Znając zatem wartość przyrostu przewodności powierzchniowej $\Delta\sigma$, możemy określić wartość potencjału powierzchniowego Ψ_s .

W celu wyznaczenia zależności potencjału powierzchniowego Ψ_s od ładunku stanów powierzchniowych qN_o , znajdujemy natężenie pola elektrycznego E na powierzchni półprzewodnika E_s . Wykorzystując zależności:

$$E = -\frac{d\Psi}{dx} \quad \text{ i } \quad E_s = -\frac{d\Psi}{dx} \Big|_{\Psi=\Psi_s},$$
(16)

otrzymujemy na podstawie równania (11):

$$E_s = \frac{2}{\lambda} \frac{kT}{q} G(\Psi_s).$$
(17)

Całkowity ładunek Q_{sc} w obszarze ładunku przestrzennego można obliczyć z prawa Gaussa:

$$Q_{sc} = \varepsilon_s E_s. \quad (18)$$

W warunkach równowagi ładunek ten równa się ładunkowi w stanach powierzchniowych. Stąd otrzymuje się:

$$Q_{sc} = qN_o. \quad (19)$$

Uwzględniając równania (18) i (19) otrzymujemy:

$$N_o = \frac{2\varepsilon_s}{\lambda_s} \frac{kT}{q^2} G(\Psi_s). \quad (20)$$

Wzory (15) i (20) określają jednoznacznie ładunek w stanach powierzchniowych dla danej wartości $\Delta\sigma$.

Dla półprzewodnikowej warstwy CdSe, przy powierzchni której pod wpływem chemisorpcji wytwarza się warstwa zubożona, można dokonać przybliżenia, polegającego na założeniu, że w obszarze ładunku przestrzennego całkowicie brak ruchomych nośników ładunku (elektronów i dziur). Takie założenie stosuje się zwykle przy wyznaczaniu własności ładunku przestrzennego w złączu $p-n$ i daje ono dobrą zgodność obliczeń z pomiarami dla niektórych parametrów złącza, jak jego szerokość i pojemność, oraz zmienność pojemności w funkcji napięcia polaryzacji [11, 12]. Przyjmujemy więc:

$$|p-n| \ll |N_D - p_o|. \quad (21)$$

Przy tym założeniu wyrażenie dla $G(\Psi)$ przyjmuje postać:

$$G(\Psi) \approx \left[q\beta\Psi \left(1 - \frac{p_o}{N_D} \right) \right]^{1/2} \quad (22)$$

Zakładając dodatkowo $bp_o \ll N_D$ otrzymujemy przybliżone wyrażenia na przyrost przewodności powierzchniowej:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma &\approx -\frac{1}{2} q\mu_n \lambda_s \frac{q}{kT} \int_0^{\Psi_s} \frac{N_D}{\left[q\beta\Psi \left(1 - \frac{p_o}{N_D} \right) \right]^{1/2}} d\Psi = \\ &= -\frac{1}{2} q\mu_n \lambda_s N_D \left(1 - \frac{p_o}{N_D} \right)^{-1/2} \left(\frac{q}{kT} \Psi_s \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (23)$$

oraz gęstość stanów powierzchniowych:

$$N_D \approx \frac{2}{\lambda_s} \frac{\varepsilon_s}{q} \left[\frac{kT}{q} \Psi_s \left(1 - \frac{p_o}{N_D} \right) \right]^{1/2}. \quad (24)$$

Jeśli przyjmiemy ponadto, że $p_o \ll N_D$, co jest słuszne dla warstw CdSe stosowanych w połowych tranzystorach cienkowarstwowych, to ostatecznie otrzymamy:

$$\Delta\sigma \approx -\frac{1}{2} q\mu_n \lambda_s N_D \left(\frac{q}{kT} \Psi_s \right)^{1/2}, \quad (25)$$

$$N_o \approx \frac{2}{\lambda_s} \frac{\varepsilon_s}{q} \left(\frac{kT}{q} \Psi_s \right)^{1/2} \quad (26)$$

Powyższe wzory mogą być zastosowane do obliczania gęstości stanów powierzchniowych w zakresie wartości potencjałów powierzchniowych, dla których w obszarze przy powierzchni półprzewodnika wytworzy się warstwa zubożona w nośniki większościowe, tzn. musi być spełniony warunek

$$|q\Psi_s| < \frac{E_g}{2} - |q\Psi_F|, \quad (27)$$

gdzie:

E_g — szerokość pasma zabronionego w półprzewodniku,

Ψ_F — potencjał Fermiego liczony od dna pasma przewodnictwa, który zależy od koncentracji zjonizowanych donorów $\left(\Psi_F = -\frac{kT}{q} \ln \frac{N_C}{N_D}\right)$, a N_C jest gęstością stanów w pasmie przewodnictwa półprzewodnika).

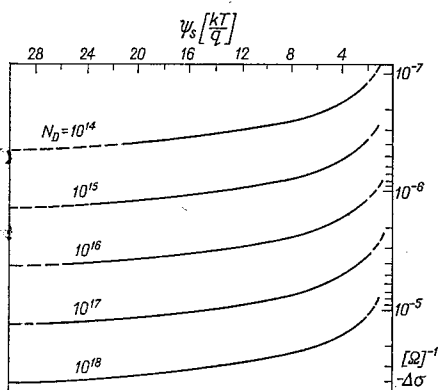
Z drugiej strony ograniczenie potencjału powierzchniowego wyniknie, jeśli przyjmiemy że $n \leq 0,1 n_o$; wtedy

$$n = n_o \exp(q\beta\Psi_s) \leq 0,1 n_o,$$

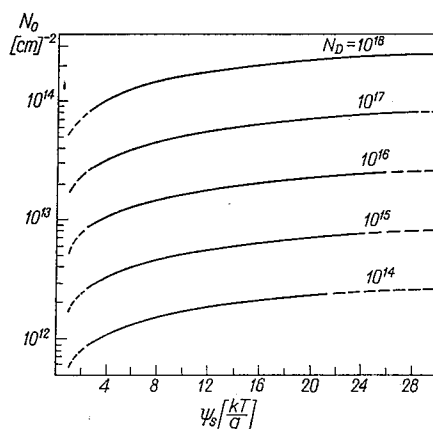
co daje

$$\Psi_s \geq 2,3 \frac{kT}{q}. \quad (28)$$

Na podstawie wzorów (25) i (26) można obliczyć gęstość stanów powierzchniowych na powierzchni CdSe, jeśli znamy podstawowe parametry fizyczne materiału, które powinny być określone z niezależnych pomiarów próbek otrzymanych w tych samych warunkach (podczas jednego cyklu naparowywania). Koncentrację donorów N_D oraz ruchliwość nośników większościowych można określić z pomiaru przewodności właściwej i stałej Halla. Stałą dielektryczną próbki CdSe można określić w układzie kondensatora o znanych rozmiarach, lub też przyjąć w przybliżeniu dla CdSe wartość $\epsilon_s = 10,5$ [13].

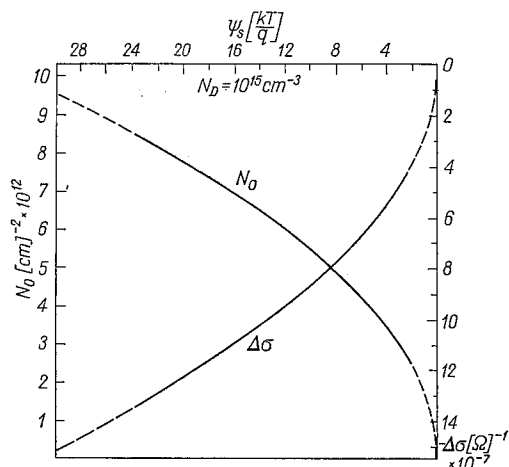


Rys. 2. Wykres przyrostu przewodności powierzchniowej $\Delta\sigma$ w funkcji potencjału powierzchniowego dla różnych wartości koncentracji donorów w CdSe

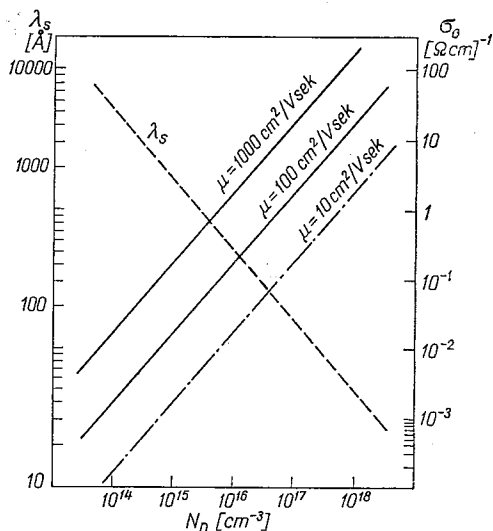


Rys. 3. Wykres koncentracji stanów powierzchniowych obsadzonych dla CdSe w funkcji potencjału powierzchniowego przy różnych wartościach koncentracji donorów w CdSe

Wyniki obliczeń wg wzorów (25) i (26) przedstawione są na rys. 2, 3, 4. Na rys. 2 pokazano wykres $\Delta\sigma = f_1(\Psi_s)$ dla warstwy CdSe przy różnych koncentracjach domieszek donorowych, a na rys. 3 — gęstość ładunku w stanach powierzchniowych przy różnej koncentracji donorów w warstwie CdSe. Na rys. 4 przedstawiono wartości N_o i $\Delta\sigma$ w funkcji



Rys. 4. Wykres koncentracji stanów powierzchniowych N_o oraz przyrostu przewodności powierzchniowej $\Delta\sigma$ dla CdSe w funkcji potencjału powierzchniowego przy koncentracji donorów $N_D = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$.



Rys. 5. Wykres przewodności objętościowej dla dwu wartości ruchliwości elektronów w CdSe oraz długości Debye'a w CdSe w funkcji koncentracji donorów

potencjału powierzchniowego dla CdSe o koncentracji donorów $N_D = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$. Rys. 5 pokazuje zależność długości Debye'a w CdSe dla różnych koncentracji donorów oraz przewodność objętościową w funkcji koncentracji donorów dla trzech wartości ruchliwości elektronów: $\mu = 1000 \text{ cm}^2/\text{V.s}$, $\mu = 100 \text{ cm}^2/\text{V.s}$ oraz $10 \text{ cm}^2/\text{V.s}$. Wszystkie wykresy odnoszą się do materiału znajdującego się w temperaturze 300°K .

Należy zaznaczyć, że powyższe wykresy N_o i $\Delta\sigma$ w funkcji potencjału powierzchniowego oraz wykresy λ_s i σ_o w funkcji koncentracji donorów w CdSe są słuszne jedynie przy spełnieniu założeń, które prowadzą do wzorów (25) i (26).

4. POMIAR PRZEWODNOŚCI POWIERZCHNIOWEJ I OBJĘTOŚCIOWEJ

W celu znalezienia gęstości stanów powierzchniowych na powierzchni CdSe niezbędne jest określenie wartości przyrostu przewodności powierzchniowej $\Delta\sigma$, którą definiuje się jako zmianę przewodności powierzchniowej wynikającą ze zmiany potencjału powierzchniowego od 0 do Ψ_s [14]. Dla danej próbki przyrost przewodności powierzchniowej jest określony wzorem

$$\Delta\sigma = \sigma_s - \sigma_o, \quad (29)$$

gdzie:

σ_s — przewodność powierzchniowa próbki przy wartości potencjału powierzchniowego równej Ψ_s ,

σ_o — przewodność objętościowa próbki równa przewodności powierzchniowej przy $\Psi_s = 0$.

Przewodność objętościową można obliczyć dla warstwy półprzewodnika, jeśli z obydwu jej stron wytworzymy warstwę zubożoną o jednakowej grubości. Wtedy próbka będzie się składać w kierunku równoległym do powierzchni z trzech obszarów: obszaru o przewodności objętościowej oraz dwu obszarów przypowierzchniowych o grubości d_o , których przewodność jest wiele mniejsza od przewodności objętościowej próbki. Mierzac całkowitą przewodność próbki przy różnych grubościach naparowanej warstwy dla tych samych grubości warstwy zubożonej z obydwu jej stron, można wyznaczyć objętościową przewodność ze wzoru

$$G \frac{l}{w} = \sigma_s (t - 2d_o), \quad (30)$$

gdzie:

G — pomierzona przewodność próbki,

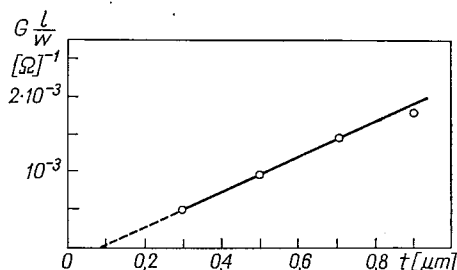
l — długość próbki,

w — szerokość próbki,

t — całkowita grubość próbki,

d_o — grubość warstwy zubożonej.

Wykres zależności $G \cdot l/w$ w funkcji t przedstawiono na rys. 6. Grubość warstwy zubożonej d_o otrzymuje się przedłużając krzywą przewodności próbki do przecięcia się z osią

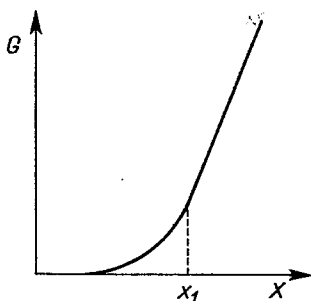


Rys. 6. Wykres mierzonej przewodności dla warstw CdSe o różnej grubości symetrycznie pokrytych warstwą SiO_x o jednakowej grubości [15]

odciętych. Znając wartość d_o dla danej próbki, można ze wzoru (30) obliczyć przewodność objętościową warstwy CdSe. Warstwę zubożoną z obydwu stron CdSe można uzyskać przez pokrycie jej warstwą SiO_x naparowywaną przy szczątkowym ciśnieniu tlenu $10^{-6} \div 10^{-5}$ Tora, przy niezbyt dużych szybkościach parowania, około 30 Å/s [15].

Inny sposób określania przewodności objętościowej CdSe opisano w [16]. W metodzie tej należy dokonywać jednoczesnego pomiaru grubości naparowywanej warstwy, np. przy pomocy rezonatora kwarcowego, oraz pomiaru jej przewodności. Przykładowo wykres zależności mierzonej przewodności warstwy w funkcji jej grubości, uzyskany na rejestra-

torze X—Y przez Ellisa [16], pokazano na rys. 7. Poczynając od grubości x_1 , mierzona przewodność warstwy G zaczyna wzrastać liniowo przy dalszym wzroście jej grubości. Wartość x_1 można traktować jako grubość warstwy zubożonej. Przewodność objętościową



Rys. 7. Wykres mierzonej przewodności warstwy CdSe w funkcji jej grubości [17]

σ_o można obliczyć z nachylenia dG/dx części liniowej krzywej $G = f(x)$. Przewodność powierzchniową σ_s możemy uzyskać naporowując warstwę CdSe o grubości równej grubości warstwy zubożonej i mierząc jej przewodność.

5. ZAKOŃCZENIE

Na podstawie wzorów (25) i (26) można obliczyć ładunek w stanach powierzchniowych na powierzchni CdSe. Pozwala to na porównanie ładunku stanów powierzchniowych na powierzchni CdSe przed i po naporowaniu na nią warstwy dielektryka, a tym samym określenie ilościowe wpływu dielektryka na zagięcie pasm energetycznych przy powierzchni CdSe.

Dokładniejsze obliczenia ładunku w stanach powierzchniowych na powierzchni CdSe można przeprowadzić przystosowując do tego celu wzory otrzymane w [7].

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. A. Gutierrez, H. L. Wilson, TFT Instability and Stabilization Techniques, Solid. St. Technol. **5**, 33, 1968.
2. H. L. Wilson, W. A. Gutierrez, Cadmium Selenide Thin Film Field Effect Transistors, J. Electrochem. Soc. **112**, 85, 1965.
3. I. Szczurek, W. Bała, Z. Wierzbicki, Przewodnictwo cienkich warstw CdSe, CdSe-SiO_x, Prace PIE — Artykuł w druku.
4. A. S. Grove, B. E. Deal, E. H. Snow, C. T. Sah, Investigation of Thermally Oxidized Silicon Surface Using Metal-Oxide-Semiconductor Structures, Solid St. Electron. **8**, 2, 145, 1965.
5. F. P. Heiman, G. Warfield, The Effect of Oxide Traps on the MOS Capacitance, IEEE Trans. ED-12, 167, 1965.
6. Z. Wierzbicki, Wyznaczanie koncentracji stanów powierzchniowych na powierzchni granicznej półprzewodnik-dielektryk na podstawie pomiaru charakterystyk C-V struktury M-D-P, Prace PIE — przedstawiono do opublikowania.
7. M. Białko, Z. Wierzbicki, Wyznaczanie koncentracji stanów powierzchniowych na powierzchni granicznej półprzewodnik-dielektryk metodą pomiaru pojemności struktury M-D-P z uwzględnieniem pułapek w warstwie półprzewodnika, Rozprawy Elektrotechn. — artykuł w druku.

8. G. G. B. Garset, W. H. Brattain, Physical Theory of Semiconductor Surfaces, Phys. Rev. **99**, 2, 376, 1955.
9. G. J. Pikus, Podstawy teorii przyrządów półprzewodnikowych, WKiŁ, Warszawa 1968.
10. J. R. Schrieffer, Effective Carriers Mobility in Surface Space Charge Layers, Phys. Rev. **97**, 641, 1955.
11. W. Shockley, Elektronen i dziury w półprzewodnikach, PWN, Warszawa 1956.
12. J. R. Hauser, M. A. Littlejohn, Approximations for Accumulation and Inversion Space-Charge Layers in Semiconductors, Solid. St. Electron. **11**, 667, 1968.
13. D. E. Brodie, La Combe, Some Dielectric and Electronic Properties of CdSe Films, Canad. J. Phys. **45**, 1353, 1967.
14. A. Many, Y. Golostein, N. B. Grover, Semiconductor Surfaces, North-Holland Publish. Comp. — Amsterdam 1965.
15. D. E. Brodie, G. Yeh, Hall Studies on Encapsulated CdSe Films, Canad. J. Phys. **96**, 18, 1993, 1968.
16. S. G. Ellis, On the Resistance of Cadmium Selenide Films, J. Phys. Chem. Solids, **29**, 1139, 1968.

M. BIAŁKO, Z. WIERZBICKI

SURFACE STATES CHARGE OF CdSe FILMS

Summary

In the work a method of determining the surface states charge at the CdSe film surface is described for the case when the depletion layer at the semiconductor surface exists and the increase of the surface conductance $\Delta\sigma$ is known.

The plots of Debye length and the bulk conductance of CdSe layer as a function of donor concentration are presented. The calculations are performed on the basis of space-charge theory for semiconductors, on the assumption that all donors are ionized.

M. BIAŁKO, Z. WIERZBICKI

CHARGE DES ÉTATS SUPERFICIELS SUR LA SURFACE D'UNE COUCHE DE SeCd

Résumé

On présente le moyen de déterminer la densité des charges d'états superficiels sur la surface d'une couche de SeCd quand la conductibilité superficielle $\Delta\sigma$ est connue et, aussi, quand une couche appauvrie des porteurs majorités des charges apparaît dans une région près de la surface de SeCd. Sont aussi présentés les diagrammes de longueur Debye et de conductibilité volumétrique d'une couche de SeCd en fonction de la concentration des donneurs, dans la supposition de leur ionisation totale. Les calculs ont été faits d'après la théorie de la région des charges spatiales dans les semiconducteurs.

M. BIAŁKO, Z. WIERZBICKI

LADUNG DER OBERFLÄCHENZUSTÄNDE AUF CdSe-SCHICHTE

Zusammenfassung

In dieser Bearbeitung wird die Methode zur Bestimmung von Ladungsdichte der Oberflächenzustände auf der CdSe-Schichte beim bekannten Zunahmewert der Oberflächenleitfähigkeit $\Delta\sigma$ vorgestellt und zwar im Falle, wenn im CdSe-Flächenraum eine ladungsmehrheitsarme Schichte entsteht. Die Berechnungen

wurden in Anlehnung an die Theorie des Raumladungsbereichs von Halbleitern angefertigt. Man hat auch Diagramme von Debyelängen und Raumleitfähigkeiten der CdSe-Schichte in der Donor-Konzentrationsfunktion unter Annahme totaler Ionisierung angeführt.

М. БЯЛКО, З. ВЕЖБИЦКИ

ЗАРЯД ПОВЕРХНОСТНЫХ СОСТОЯНИЙ ПЛЁНКИ

Р е з ю м е

В статье представлен метод расчёта заряда в поверхностных состояниях плёнки CdSe в случае, если известна избыточная поверхностная проводимость $\Delta\sigma$, когда при поверхности CdSe возникает область, объединённая носителями заряда. Кроме того даны графики длины Дебая и объёмной проводимости CdSe в зависимости от концентрации доноров, если они полностью ионизированы. Расчёты проведены на основе теории области пространственного заряда в полупроводнике.

Metoda optymalizacji współczynnika szumu tranzystorowego wzmacniacza szerokopasmowego

WALERIAN GRUSZCZYŃSKI, GERARD MIONSKOWSKI, HENRYK WIERZBA (GDAŃSK)

Instytut Technologii Elektronicznej Politechniki Gdańskiej

Otrzymano 28.1. 1970

Przedstawiona metoda optymalizacji współczynnika szumu tranzystorowego wzmacniacza dotyczy przypadku, gdy pierwszy stopień wzmacniający wzmacniacza sterowany jest napięciowo, tzn. oporność widziana przez bazę tranzystora jest mniejsza od oporności wejściowej tego stopnia. Przydatność tej metody przy projektowaniu wzmacniaczy potwierdzają wyniki pomiarów współczynnika szumu wykonanych wzmacniaczy.

1. WPROWADZENIE

W urządzeniach elektronicznych stosuje się często tranzystorowe wzmacniacze o małym współczynniku szumu F . Na ogół o wartości tego współczynnika decyduje pierwszy stopień wzmacniający wzmacniacza, a minimalną jego wartość można uzyskać przez wybór optymalnej wartości oporności wewnętrznej generatora. Warunek ten można łatwo spełnić we wzmacniaczach wąskopasmowych stosując na ich wejściu odpowiednie transformatory dopasowujące.

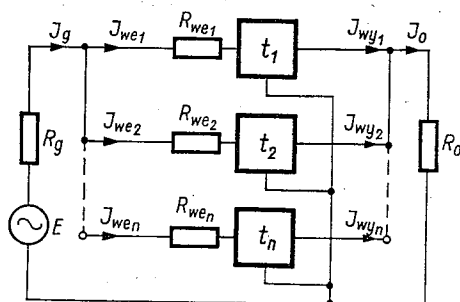
W przypadku wzmacniaczy szerokopasmowych, gdy zastosowanie transformatora nie jest możliwe a generator posiada ustaloną wartość oporności wyjściowej różną od optymalnej ze względu na minimalny współczynnik szumu — osiągnięcie małej wartości tego współczynnika staje się trudne, a nieraz i niemożliwe. W takim przypadku na ogół wybiera się taki typ tranzystora, który w danych warunkach posiada najmniejszą wartość współczynnika szumu.

W niniejszym opracowaniu podano metodę zmniejszenia poniżej wyżej wymienionej „minimalnej” wartości współczynnika szumu wzmacniacza, gdy oporność generatora jest mała w porównaniu z dynamiczną opornością wejściową wzmacniacza. W szczególnych przypadkach pozwala ona znacznie zmniejszyć współczynnik szumu wzmacniacza.

Zagadnienie to w formie uproszczonej było rozpatrywane przez E. A. Faulknera [1]. Niniejsze rozważania jednak mają charakter bardziej ogólny i dotyczą zarówno tranzystorów krzemowych jak i germanowych.

2. TEORETYCZNE ZAGADNIENIA OPISANEJ METODY

W metodzie tej w zakresie częstotliwości, w którym przeważa szum biały tranzystora wykorzystuje się efekt przypadkowości zjawiska takiego szumu, a więc braku korelacji między jego składowymi. W praktyce najczęściej oporność generatora jest znacznie mniejsza od oporności wejściowej pierwszego stopnia wzmacniacza. W takich przypadkach możemy traktować generator jako źródło napięciowe.



Rys. 1. Blokowy schemat połączeń n tranzystorów

Rozpatrzmy układ złożony z n tranzystorów t_n (rys. 1) połączonych dynamicznie równolegle na wejściu i wyjściu. Dla uproszczenia obliczeń zakładamy, że:

$$R_{we1} = R_{we2} = R_{we3} = R_{wen} = R_{we},$$

$$R_{wy1} = R_{wy2} = R_{wy3} = R_{wyn} = R_{wy},$$

$$K_{i1} = K_{i2} = K_{i3} = K_{in} = K_i,$$

gdzie: K_{i1} — wzmocnienie prądowe jednego tranzystora.

Wówczas:

$$I_{we1} = I_{we2} = I_{we3} = I_{wen} = I_{we}$$

oraz

$$I_{wy1} = I_{wy2} = I_{wy3} = I_{wyn} = I_{wy},$$

a stąd

$$I_{we} = \frac{E}{R_g + \frac{R_{we}}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{E}{R_{we} + n \cdot R_g}$$

oraz

$$I_0 = n \cdot I_{wy} = n \cdot K_i \cdot I_{we} = \frac{K_i \cdot E}{R_g + \frac{R_{we}}{n}}.$$

Moc sygnału wydzielona na oporniku R_0 wynosi:

$$P_{0\text{sygn}} = I_0^2 \cdot R_0 = \frac{K_i^2 \cdot E^2 \cdot R_0}{\left(R_g + \frac{R_{we}}{n}\right)^2}. \quad (1)$$

Dla $\frac{R_{we}}{n} \gg R_g$

$$P_{0sygn} = \frac{K_i^2 \cdot E^2 \cdot R_0}{R_{we}^2} \cdot n^2 = K \cdot E^2 \cdot n^2, \quad (2)$$

gdzie

$$K = \frac{K_i^2 \cdot R_0}{R_{we}^2}.$$

Z wyrażenia (2) wynika, że moc sygnału wydzielona w obciążeniu R_0 jest proporcjonalna do kwadratu liczby „ n ” tranzystorów połączonych równolegle.

W związku z brakiem korelacji pomiędzy składowymi szumu białego tranzystorów, moce szumów wniesione przez poszczególne tranzystory sumują się algebraicznie na obciążeniu R_0 . Przy założeniu, że moce te są równe dla wszystkich tranzystorów otrzymamy:

$$P_{0sz,tr} = n \cdot P'_{0sz,tr},$$

gdzie:

$P_{0sz,tr}$ — wydzielona na R_0 moc szumu białego wniesionego przez n tranzystorów,

$P'_{0sz,tr}$ — wydzielona na R_0 moc szumu białego wniesionego przez każdy z n tranzystorów w połączeniu równoległym.

Dla

$$\frac{(n-1)R_g}{R_{we}} \ll 1$$

można przyjąć, że wartości szumów wniesionych przez poszczególne tranzystory nie zależą od liczby n , czyli:

$$P_{0sz,tr} = n \cdot P'_{0sz,tr} = n \cdot P_{0sz,1tr}, \quad (3)$$

gdzie: $P_{0sz,1tr}$ — wydzielona na R_0 moc szumu białego wniesionego przez pojedynczy tranzystor ($n = 1$).

Stosunek sygnału do szumu wniesionego przez n tranzystorów wynosi na obciążeniu R_0 :

$$A_n = \frac{P_{0sygn}}{P_{0sz,tr}}. \quad (4)$$

Po podstawieniu wyrażen (1) i (3) do (4) otrzymamy:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\frac{E^2 \cdot K_i^2 \cdot R_0}{\left(R_g + \frac{R_{we}}{n}\right)^2}}{n \cdot P_{0sz,1tr}} = \frac{E^2 \cdot K_i^2 \cdot R_0}{(R_g + R_{we})^2 \cdot P_{0sz,1tr}} \cdot \frac{(R_g + R_{we})^2}{n \left(R_g + \frac{R_{we}}{n}\right)^2} = \\ &= A_1 \cdot \frac{n \left(1 + \frac{R_g}{R_{we}}\right)^2}{\left[1 + \frac{R_g}{R_{we}} + \frac{(n-1)R_g}{R_{we}}\right]^2}, \quad (5) \end{aligned}$$

gdzie:

$$A_1 = \frac{E^2 \cdot K_i^2 \cdot R_0}{(R_g + R_{we})^2 \cdot P_{osz, 1tr}}$$

oznacza stosunek sygnału do szumu dla pojedynczego tranzystora ($n = 1$).

Ponieważ wyrażenie (3) jest słuszne tylko dla

$$\frac{(n-1)R_g}{R_{we}} \ll 1,$$

więc wtedy

$$A_n \approx A_1 \cdot n. \quad (6)$$

Z wyrażenia (6) wynika, że odstęp A_n rośnie dla $\frac{(n-1)R_g}{R_{we}} \ll 1$ proporcjonalnie do wzrostu liczby n .

Współczynnik szumu wzmacniacza F wynosi wtedy:

$$F = \frac{P_{sz, gen} + P_{sz, n, tr}}{P_{sz, gen}} = 1 + \frac{P_{sz, 1tr}}{n \cdot P_{sz, gen}},$$

$$F_{[dB]} = 10 \lg F = 10 \lg \left(1 + \frac{P_{sz, 1tr}}{n \cdot P_{sz, gen}} \right) = 10 \lg \left(1 + \frac{F_1}{n} \right), \quad (7)$$

gdzie:

$P_{sz, gen}$ — tracona w obciążeniu R_0 moc szumu wniesionego przez generator sygnału,

$P_{sz, n, tr}$ — tracona w obciążeniu R_0 moc szumu wniesionego przez n tranzystorów,

$P_{sz, 1tr}$ — tracona w obciążeniu R_0 moc szumu wniesionego przez pojedynczy tranzystor ($n = 1$),

$$F_1 = \frac{P_{sz, 1tr}}{P_{sz, gen}} \quad [w/w].$$

Tablica 1

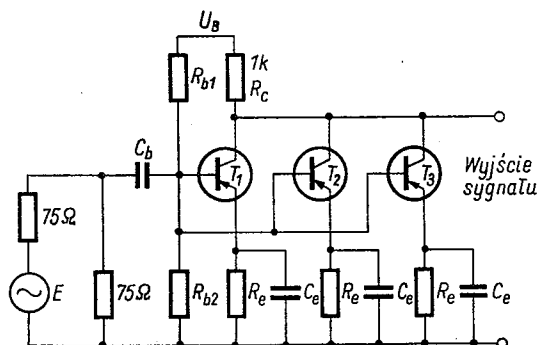
Wartości współczynnika szumu wzmacniacza (teoretycznie osiągalne)

Nr grupy tranzystorów	Liczba n tranzystorów łączonych równolegle	współczynnik szumu wzmacniacza [dB]
I	1	10
	2	7,4
	3	6
II	1	7
	2	4,8
	3	3,7
III	1	4
	2	2,4
	3	1,8

Wartości współczynnika szumu wzmacniacza, jakie można teoretycznie osiągnąć (przy stosowaniu tranzystorów o jednakowych wartościach parametrów h_{11} , h_{21} i F w danej grupie i spełnieniu założeń dla słuszności wyrażenia (6)) podane są w tablicy 1.

3. PRAKTYCZNE ZASTOSOWANIE OPISANEJ METODY

Przydatność opisanej metody sprawdzono przy projektowaniu szerokopasmowego wzmacniacza teletransmisyjnego stosując w pierwszym stopniu wzmacniającym tranzystory produkcji krajowej typu AF 426. Uproszczony fragment zastosowanego układu



Rys. 2. Uproszczony schemat ideowy pierwszego stopnia wzmacniacza pomiarowego

Tablica 2

Parametry tranzystorów AF 426 zastosowanych do pomiarów (wartości h_{11} zaokrąglono do jednego miejsca po przecinku, a h_{21} do wartości całkowitych)

Nr tranzystora	h_{11} [kΩ]	h_{21}	Współczynnik szumu tranz. w układzie jak na rys. 2 [dB]	Uwagi
1	1,7	65	8,7	warunki pom. $U_{CE} = 4 \text{ V}$ $I_C = 1 \text{ mA}$ $f = 30 \text{ kHz}$
2	1,5	56	8,7	
3	2,7	100	8,7	
4	1,0	35	10,0	
5	6,9	270	10,0	
6	1,6	65	10,2	
7	1,0	42	7,7	
8	3,1	130	9,2	
9	1,3	53	10,8	

wzmacniacza przedstawiono na rys. 2. Do pomiarów stosowano tranzystory AF 426 o parametrach podanych w tablicy 2.

Wyniki pomiarów współczynnika szumu F wzmacniacza w różnych wariantach stosowanych tranzystorów podane są w tablicy 3.

Tablica 3

Wyniki pomiarów współczynnika szumu F wzmacniacza w różnych wariantach stosowanych tranzystorów

Współczynnik szumu każdego tranzystora w grupie [dB]	Numery tranzysto- rów łączonych rów- nolegle	Pomierzony współczyn- nik szumu wzmac- niacza [dB]	Współczynnik szumu wzmac- niacza obliczony ze wzoru (6) [dB]
8,7	1, 2	6,5	6,7
	1, 3	6,7	6,7
	2, 3	7,1	6,7
	1, 2, 3	6,2	5,4
10	4, 5	7,8	7,4
	4, 6	7,2	7,4
	5, 6	7,7	7,4
	4, 5, 6	6,8	6,0
Nr tr. 7—7,7 dB	7, 8	6,5	—
	7, 9	7,6	—
Nr tr. 8—9,2 dB	8, 9	8,3	—
Nr tr. 9—10,8 dB	7, 8, 9	6,5	—

4. WNIOSKI

a) Wyniki pomiarów współczynnika szumu wzmacniacza potwierdzają praktyczną przydatność opisaney metody.

b) Najmniejszą wartość współczynnika szumu wzmacniacza osiąga się przy zbliżonych wartościach parametrów F , h_{11} i h_{21} dla poszczególnych tranzystorów.

c) Przy równych wartościach parametru F tranzystorów, a nierównych wartościach parametrów h_{11} i h_{21} osiąga się wyniki nieznacznie gorsze aniżeli wymienione w p. 4.b), lecz znacznie lepsze w stosunku do $n = 1$.

d) Niecelowe jest stosowanie tranzystorów o znacznie różniących się wartościach parametru F , ponieważ w takim przypadku korzyści wynikające ze stosowania opisaney metody są małe lub żadne.

Teoretyczne uogólnienie opisaney metody dla dowolnego stosunku $\frac{R_g}{R_{we}}$ oraz dowolnego n będzie przedmiotem dalszego opracowania.

W tej ogólnej teorii istnieje ekstremalna wartość $n_e = \frac{R_{we}}{R_g}$, przy której współczynnik szumu osiąga minimum. Jednakże, ze względu na płaski przebieg minimum tego współ-

czynnika w funkcji n , wartość n_e nie jest wartością optymalną z praktycznego punktu widzenia. Na przykład: w szczególnym przypadku, gdy $n_e = 20$ — dla $n = 3$ moc szumu wniesionego przez tranzystory jest 2,5 razy mniejsza w stosunku do pojedynczego tranzystora, natomiast dla $n = 20$ moc ta jest tylko 5,5 razy mniejsza.

Z praktycznego punktu widzenia optymalne n może więc być różne w różnych przypadkach mimo jednakowego n_e .

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. E. A. Faulkner, Optimum Design of Low-Noise Amplifiers, Electr. Lett. nr 11, 1966 r, str. 426—427.

W. GRUSZCZYŃSKI, G. MIONSKOWSKI, H. WIERZBA

OPTIMALIZATION METHOD FOR THE NOISE FACTOR OF WIDEBAND TRANSISTOR AMPLIFIER

Summary

The presented method of optimalization for the noise factor of the transistor amplifier concerns the case, when the first stage of amplifier is voltage controlled i.e. the resistance measured from the transistor base is smaller than the input resistance of this stage. The advantage of this designing method has been confirmed by the results of noise factor measurements for the amplifiers that have been made.

W. GRUSZCZYŃSKI, G. MIONSKOWSKI, H. WIERZBA

OPTIMIERUNGSMETHODE DES RAUSCHFAKTORS EINES TRANSISTORBREITBANDVERSTÄRKERS

Zusammenfassung

Die beschriebene Optimierungsmethode des Rauschfaktors eines Transistorbreitbandverstärkers betrifft den Fall, wenn die erste Stärkestufe des Verstärkers spannungsweise gesteuert wird, d.h. der Ausgangswiderstand des Senders hat einen kleineren Wert als der Eingangswiderstand dieser Stärkerstufe. Die angegebenen Messergebnisse des Rauschfaktors bei angefertigten Verstärkern bestätigen die praktische Anwendung dieser Methode.

В. ГРУЩИНСКИ, Г. МЁНСКОВСКИ, Х. ВЕЖБА

МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА ШУМА ТРАНЗИСТОРНОГО, ШИРОКОПОЛОСНОГО УСИЛИТЕЛЯ

Резюме

Превставленный метод оптимизации коэффициента шума транзисторного усилителя касается случая, когда первый усилительный каскад, управляемый по напряжению, то есть сопротивление, которое видит база транзистора, меньше входного сопротивления того каскада. Пригодность этого метода при проектировании усилителей подтверждают результаты измерений коэффициента шума изготовленных усилителей.

Metody syntezy układów $\overline{RC}$ o stałych rozłożonych

C z ę ś ć I

Metody syntezy układów pasywnych

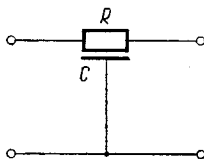
MICHAŁ BIAŁKO (GDAŃSK), JANUSZ ROSZKIEWICZ (GDAŃSK)

*Instytut Technologii Elektronicznej Politechniki Gdańskiej**Otrzymano 30.1.1970*

Artykuł stanowi przegląd nowoczesnych metod projektowania mikroelektronicznych filtrów z zastosowaniem linii $\overline{RC}$. Dokonano w nim próby wyboru i usystematyzowania możliwie korzystnych metod syntezy układów pasywnych oraz przedstawiono przykłady obliczeń i realizacji układowych.

1. WSTĘP

Specyfika syntezy układów scalonych wynika z technologii ich wytwarzania. Technologia mikroelektroniczna pozwala na wprowadzenie do realizacji praktycznych — układów RC o stałych rozłożonych. Podstawowa struktura, nazywana linią $\overline{RC}$, przedstawiona symbolicznie na rysunku 1, powstaje w wyniku scalenia elementów R i C . Układy RC

Rys. 1. Symbol jednorodnej linii $\overline{RC}$

o stałych rozłożonych mogą, między innymi, znaleźć zastosowanie w bezindukcyjnych filtrach pasmowych. Przy realizacji tych filtrów jako układów scalonych, wykorzystuje się metody syntezy układów RC lub LC o stałych skupionych. Synteza układów z zastosowaniem linii $\overline{RC}$, metodami układów o stałych skupionych, narzuca konieczność transformacji danej funkcji układu RC do funkcji wymiernej, przez odwzorowanie płaszczyzny częstotliwości zespolonych. Obrazem funkcji układu w odwzorowanej płaszczyźnie musi być realizowalna funkcja wymierna, opisująca układ o stałych skupionych. Realizowane elementy o stałych skupionych utożsamia się z odpowiednimi połączeniami linii $\overline{RC}$. Zastosowanie linii $\overline{RC}$, wspólnie z elementami o stałych skupionych poszerza klasę funkcji, które mogą być realizowane.

W części 1 niniejszej pracy przedstawione są właściwości wybranych metod syntezy układów pasywnych z zastosowaniem linii $\overline{RC}$. Wyboru metod dokonano kierując się względami przydatności praktycznej.

2. TRANSFORMACJE PŁASZCZYZNY CZĘSTOTLIWOŚCI ZESPOŁONYCH

Macierz impedancyjna jednorodnej linii $\overline{RC}$, której symbol jest przedstawiony na rys. 1, przyjmuje postać [1]:

$$[Z] = \sqrt{\frac{R}{sC}} \begin{bmatrix} \operatorname{cth} \sqrt{sRC} & \frac{1}{\operatorname{sh} \sqrt{sRC}} \\ \frac{1}{\operatorname{sh} \sqrt{sRC}} & \operatorname{cth} \sqrt{sRC} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

gdzie:

$R = r \cdot l$ — oporność całkowita linii $\overline{RC}$,

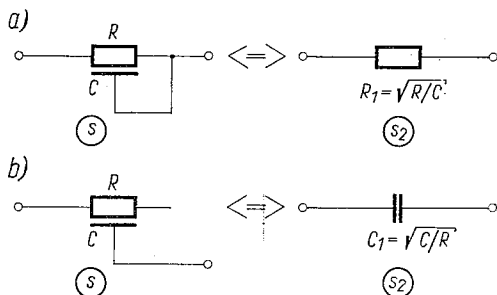
$C = c \cdot l$ — pojemność całkowita linii $\overline{RC}$,

l — długość linii $\overline{RC}$,

r, c — oporność i pojemność linii RC na jednostkę długości,

$s = \sigma + j\omega$ — częstotliwość zespolona.

Każda funkcja $F(s)$, opisująca właściwości układu złożonego z jednorodnych linii $\overline{RC}$ jest funkcją niewymierną zmiennej zespolonej s . Zastosowanie metod syntezy układów o stałych skupionych do realizacji takich funkcji wymaga wprowadzenia transformacji przekształcającej funkcję niewymierną na realizowalną funkcję wymierną. Prostota interpretacji oraz względy natury praktycznej preferują przedstawione transformacje.



Rys. 2. Ilustracja graficzna transformacji impedancji wejściowych jednorodnej linii $\overline{RC}$ z płaszczyzny s na płaszczyznę s_2 .

(a) — transformacja impedancji wejściowej zwartej na wyjściu linii $\overline{RC}$, (b) — transformacja impedancji wejściowej rozwartej na wyjściu linii $\overline{RC}$

a) Impedancje wejściowe linii $\overline{RC}$ zwartej i rozwartej na wyjściu przedstawione symbolicznie na rys. 2, otrzymuje się z równania (1) w formie wyrażen (2) i (3):

$$Z_z = \sqrt{\frac{R}{sC}} \operatorname{th} \sqrt{sRC}, \quad (2)$$

$$Z_r = \sqrt{\frac{R}{sC}} \operatorname{cth} \sqrt{sRC}. \quad (3)$$

Realizacja funkcji $F(s)$ w postaci układu RC o stałych rozłożonych, na bazie impedancji (2) i (3), metodami syntezy układów o stałych skupionych, wymaga zastosowania poniższych transformacji.

— Transformacja typu $\overline{RC}-\overline{LC}$:

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \sqrt{s} F(s) && \text{dla funkcji impedancji,} \\ F_1(s) &= \frac{1}{\sqrt{s}} F(s) && \text{dla funkcji admitancji,} \\ F_1(s) &= F(s) && \text{dla funkcji transmitancji} \end{aligned} \quad (4)$$

przekształca funkcję układu $\overline{RC}$ o stałych rozłożonych — $F(s)$, na funkcję — $F_1(s)$ opisującą na płaszczyźnie $\sqrt{s}$ układ $\overline{LC}$ o stałych rozłożonych.

— Transformacja typu:

$$s_1 = \tanh a \sqrt{s}, \quad \text{gdzie: } a = \sqrt{RC} \quad (5)$$

przekształca funkcję $F_1(s)$ na płaszczyznę s_1 . Funkcja $F_1(s_1)$ opisuje układ LC o stałych skupionych na płaszczyźnie s_1 .

— Transformacja typu $LC-RC$:

$$\begin{aligned} F_2(s_2) &= \frac{1}{s_1} F_1(s_1)|_{s_1^2 = s_2} && \text{— dla funkcji impedancji,} \\ F_2(s_2) &= s_1 F_1(s_1)|_{s_1^2 = s_2} && \text{— dla funkcji admitancji,} \\ F_2(s_2) &= F_1(s_1)|_{s_1^2 = s_2} && \text{— dla funkcji transmitancji,} \end{aligned} \quad (6)$$

przekształca funkcję układu $\overline{LC}$ o stałych skupionych — $F_1(s_1)$, na funkcję układu RC o stałych skupionych — $F_2(s_2)$ na płaszczyźnie s_2 .

Interpretację przedstawionych transformacji otrzymuje się w wyniku zastosowania przekształceń (4), (5) i (6) do wyrażeń (2) i (3). Przetransformowane impedancje wejściowe linii $\overline{RC}$ zwartej i rozwartej na wyjściu, opisują wyrażenia (7) i (8):

$$Z_{z2} = \sqrt{\frac{R}{C}}, \quad (7)$$

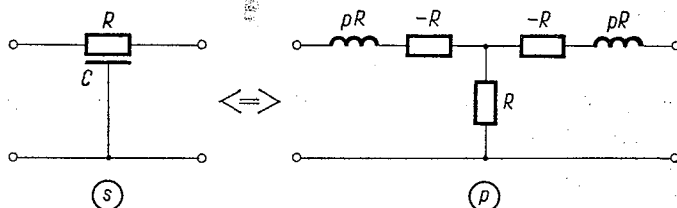
$$Z_{r2} = \frac{1}{s_2} \sqrt{\frac{R}{C}}. \quad (8)$$

Z wyrażeń (7) i (8) wynika, że elementy: oporność i pojemność na płaszczyźnie s_2 są odpowiednio równoważne impedancjom wejściowym zwartej i rozwartej na wyjściu linii $\overline{RC}$ w płaszczyźnie s . Na rys. 2 przedstawiona jest ilustracja graficzna otrzymanej transformacji. Realizacja funkcji $F(s)$ odbywa się przez realizację funkcji $F_2(s_2)$ na płaszczyźnie s_2 metodami syntezy układów o stałych skupionych. Otrzymywane elementy na płaszczyźnie s_2 utożsamia się z impedancjami wejściowymi, linii $\overline{RC}$ zwartej i rozwartej na wyjściu w płaszczyźnie s , dokonując tym samym transformacji odwrotnej. Transformacje (4), (5) i (6) przystosowują do bezpośredniej realizacji tylko te klasy funkcji, którym na płaszczyźnie s_2 odpowiadają funkcje $F_2(s_2)$, opisujące układy RC o stałych skupionych. Realizację pozostałych klas funkcji umożliwia aproksymacja przetransformowanej funkcji $F_2(s_2)$ zmodyfikowanymi funkcjami ortogonalnymi [2], których transformatory Laplace'a

są funkcjami wymiernymi z rzeczywistymi współczynnikami. Bieguny tych klas funkcji ortogonalnych są położone w lewej półpłaszczyźnie częstotliwości zespolonych na osi rzeczywistej. W wyniku aproksymacji powstaje funkcja $\bar{F}_2(s_2)$, opisująca układ RC o stałych skupionych.

b) Macierz impedancyjna jednorodnej linii $\overline{RC}$, opisana równaniem (1), może być odwzorowana na płaszczyznę funkcji wymiernych przez zastosowanie transformacji (9):

$$z(p) = \sqrt{sRC} \operatorname{sh} \sqrt{sRC} [z(s)] \Big|_{p=\operatorname{ch} \sqrt{sRC}} = R \begin{bmatrix} p & 1 \\ 1 & p \end{bmatrix}. \quad (9)$$



Rys. 3. Ilustracja graficzna transformacji jednorodnej linii $\overline{RC}$ na płaszczyznę p według wyrażenia (9)
(a) symbol jednorodnej linii $\overline{RC}$ na płaszczyźnie s , (b) — układ zastępczy jednorodnej linii $\overline{RC}$ na płaszczyźnie p

Na rysunku 3 przedstawiona jest ilustracja graficzna transformacji opisanej wyrażeniem (9). Z wyrażenia (9) wynika, że każda kompozycja układowa, złożona z jednorodnych linii $\overline{RC}$ o stałym współczynniku RC , zawiera w płaszczyźnie p parametry immitancyjne w formie funkcji wymiernych. Jeżeli wyrażenie (10) opisuje przetransformowaną funkcję

Tablica 1

Warunki fizycznej realizowalności funkcji impedancji złożonej z elementów linii RC na płaszczyźnie p

Bieguny i zera muszą być proste, leżeć na rzeczywistej osi płaszczyzny p i przeplatać się wzajemnie
Najbardziej dodatnie i najbardziej ujemne punkty osobliwe muszą być zerami
Bieguny i zera muszą być położone w zakresie: $\langle -1, +1 \rangle$

impedancji dwójnikowej, zgodnie z wyrażeniem (9), to musi ona spełniać warunki realizowalności fizycznej [5] podane w tablicy 1:

$$Z(p) = k \prod_{i=1}^{n+1} (p - z_i) / \prod_{i=1}^n (p - p_i), \quad k \geq 0. \quad (10)$$

3. SYNTEZA DWÓJNIKÓW

Synteza funkcji immitancji dwójników pasywnych, z zastosowaniem transformacji przedstawionych w punkcie 2, sprowadza się do trzech podstawowych metod realizacji. Metody: szeregowo-równoległa i kaskadowa, oparte na przekształceniach (4), (5) i (6), realizują funkcję immitancji, przyjmując jako element realizacji impedancje wejściowe linii $\overline{RC}$, zwartej i rozwrzanej na wyjściu. Zakres immitancji bezpośrednio realizowanych za pomocą tych metod ogranicza się do funkcji, które po transformacji są funkcjami układów RC o stałych skupionych. Metoda O'Shea oparta na transformacji (9) realizuje funkcje spełniające warunki fizycznej realizowalności podane w tablicy 1, wykorzystując jako elementy realizacji wszystkie możliwe kompozycje połączeń trójkońcówkowej linii $\overline{RC}$.

a) Synteza szeregowo-równoległa

Metoda realizuje wszystkie te funkcje immitancji, które można przedstawić w formie wyrażen (11) i (12)¹⁾:

$$z(s) = \frac{k_\infty}{\sqrt{s}} \operatorname{th} \sqrt{sRC} + \frac{k_0}{\sqrt{s} \operatorname{th} \sqrt{sRC}} + \sum_{i=1}^n \frac{k_i \operatorname{th} \sqrt{sRC}}{\sqrt{s} (\operatorname{th}^2 \sqrt{sRC} + \Omega_i^2)}, \quad (11)$$

$$y(s) = k_\infty \sqrt{s} \operatorname{th} \sqrt{sRC} + \frac{k_0 \sqrt{s}}{\operatorname{th} \sqrt{sRC}} + \sum_{i=1}^n \frac{k_i \sqrt{s} \operatorname{th} \sqrt{sRC}}{\operatorname{th}^2 \sqrt{sRC} + \Omega_i^2}, \quad (12)$$

gdzie:

k_i i Ω_i — stałe rzeczywiste,

$k_i \geq 0$,

$RC = \text{const.}$

Zastosowanie transformacji (4), (5) i (6) przekształca wyrażenia (11) i (12) na funkcje:

$$z_2(s_2) = k_\infty + \frac{k_0}{s_2} + \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s_2 + \Omega_i^2}, \quad (13)$$

$$y_2(s_2) = k_0 + k_\infty s_2 + \sum_{i=1}^n \frac{k_i s_2}{s_2 + \Omega_i^2}. \quad (14)$$

¹⁾ Funkcje typu (11) i (12) opisują immitancje dwójnikowe układów, złożonych z dowolnych połączeń impedancji wejściowych zwartej i rozwrzanej na wyjściu jednorodnej linii RC . Funkcje te można przedstawić jako stosunek dwóch „wielomianów wykładniczych” w formie wyrażenia:

$$\sqrt{s} z(s) = \frac{(e^{a\sqrt{s}} + 1)^{2(n-m)+1} \prod_{i=1}^m (e^{2a\sqrt{s}} + B_i e^{a\sqrt{s}} + 1)}{(e^{a\sqrt{s}} - 1) \prod_{i=1}^n (e^{2a\sqrt{s}} + A_i e^{a\sqrt{s}} + 1)}; \quad \operatorname{th} \sqrt{sRC} = \operatorname{th} \frac{a}{2} \sqrt{s} = \frac{e^{a\sqrt{s}} - 1}{e^{a\sqrt{s}} + 1},$$

gdzie: $A_i > B_i$, $|A_i| < 2$, $|B_i| < 2$, $m = n$ lub $m = n+1$, $a = 2\sqrt{RC}$.

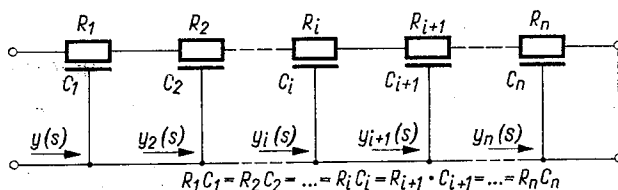
Metody aproksymacji funkcji realizowanej przez „wielomiany wykładnicze” typu przedstawionego w powyższym wyrażeniu przedstawił Wyndrum w [4]. Wykresy modułów tych wielomianów [4] dają praktyczne informacje o klasie funkcji reprezentowanych przez wyrażenia (11) i (12).

Funkcje $z_2(s_2)$ i $y_2(s_2)$ reprezentują impedancję i admitancję układu RC o stałych skupionych w płaszczyźnie s_2 . Realizacja tych funkcji oparta jest na kanonicznych formach Fostera i Cauera.

b) Synteza kaskadowa

Metoda polega na realizacji funkcji immitancji dwójnika w formie kaskady, złożonej z jednorodnych linii $\overline{RC}$. Na rys. 4 przedstawiony jest model realizacji. Admitancja wejściowa i -tej sekcji linii $\overline{RC}$, przedstawionej na rys. 4, przy założeniu, że jej obciążeniem jest admitancja wejściowa $i+1$ -ej sekcji wyraża się wzorem:

$$y_i(s) = \frac{1}{R_i} \frac{R_i y_{i+1}(s) + \sqrt{sRC} \operatorname{th} \sqrt{sRC}}{1 + \frac{R_i y_{i+1}(s) \operatorname{th} \sqrt{sRC}}{\sqrt{sRC}}} \quad (15)$$



Rys. 4. Model układu realizacji immitancji metodą kaskadową

W wyniku zastosowania transformacji (4) i (5) do funkcji opisanej wyrażeniem (15) otrzymuje się:

$$y_{1,i}(s_1) = \frac{1}{R_i} \frac{R_i y_{1,i+1}(s_1) + s_1 \sqrt{RC}}{1 + \frac{R_i y_{1,i+1}(s_1) \cdot s_1}{\sqrt{RC}}} \quad (16)$$

Z wyrażenia (16) wynika wyrażenie (17), opisujące admitancję wejściową $i+1$ -ej sekcji modelu przedstawionego na rys. 4:

$$y_{1,i+1}(s_1) = \frac{\sqrt{RC}}{R_i} \frac{y_{1,i}(s_1) - \frac{s_1 \sqrt{RC}}{R_i}}{\frac{\sqrt{RC}}{R_i} - s_1 y_{1,i}(s_1)} \quad (17)$$

Zgodnie z warunkiem realizowalności fizycznej funkcja $y_{1,i+1}(s_1)$ musi być dodatnio-rzeczywistą funkcją reaktancyjną stopnia niższego od $y_{1,i}(s_1)$. Spełnienie tego warunku zapewnia się przez właściwy wybór R_i .

Jeżeli $k > 0$ oraz $y(s)$ jest dodatnio-rzeczywistą funkcją zmiennej s , to zgodnie z twierdzeniem Richardsa [3] funkcja typu:

$$y_0(s) = \frac{ky(s) - sy(k)}{ky(k) - sy(s)} \quad (18)$$

jest również dodatnio-rzeczywistą funkcją zmiennej s .

Ponieważ $y_{1,i}(1) = \sqrt{RC}/R_i$, to dla $k = 1$ wyrażenia (17) i (18) posiadają tę samą formę. Wynika stąd, że przyjęcie R_i o wartości:

$$R_i = \frac{\sqrt{RC}}{y_{1,i}(1)} \quad (19)$$

powoduje, że funkcja $y_{1,i+1}(s_1)$ jest dodatnio-rzeczywistą. Wybór R_i zgodnie z warunkiem (19) zapewnia również to, że funkcja $y_{1,i+1}(s_1)$ jest stopnia niższego od funkcji $y_{1,i}(s_1)$. Reakcyjność funkcji $y_{1,i+1}(s_1)$ wynika bezpośrednio z wyrażenia (17), ponieważ $y_{1,i}(s_1)$ jest funkcją reakcyjną. Synteza kaskadowa realizuje te same klasy funkcji co synteza szeregowo-równoległa. Realizacja polega na kolejnym usuwaniu poszczególnych sekcji linii $\overline{RC}$ w modelu przedstawionym na rysunku 4.

c) Metoda syntezy O'Shea

Zastosowanie przekształcenia (9) względem fizycznie realizowanej funkcji impedancji dwójnika złożonego z jednorodnych linii $\overline{RC}$ transformuje tę funkcję na płaszczyznę nowej zmiennej zespolonej p . W wyniku powstaje wymierna funkcja $z(p)^2$, która zgodnie z warunkami podanymi w tablicy 1 przyjmuje postać:

$$z(p) = \frac{k(p-z_1)(p-z_2) \dots (p-z_{n+1})}{(p-p_1)(p-p_2) \dots (p-p_n)}, \quad (20)$$

gdzie: $k \geq 0$ i $-1 \leq z_1 < p_1 < z_2 < p_2, \dots, p_n < z_{n+1} \leq 1$.

Rozkładając funkcję $z(p)/(p^2-1)$ na ułamki proste otrzymuje się:

$$\frac{z(p)}{p^2-1} = \frac{k_1}{p-1} + \frac{k_2}{p+1} + \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{p-p_i}, \quad k_1 \geq 0 \text{ i } k_2 \geq 0. \quad (21)$$

Z wyrażenia (21) określa się:

$$z(p) = k_1(p+1) + k_2(p-1) + \sum_{i=1}^n \frac{h_i(p^2-1)}{p-p_i}. \quad (22)$$

W przypadku funkcji admitancji mamy:

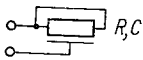
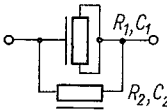
$$y(p) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{p-z_i}. \quad (23)$$

Realizację poszczególnych składników funkcji immitancji (22) i (23) zapewniają elementy przedstawione w tablicach 2 i 3.

²⁾ Funkcja typu (20) opisuje ogólną formę impedancji dwójnikowej układu złożonego z dowolnie połączonych impedancji trójkońcówkowej jednorodnej linii $\overline{RC}$ przetransformowaną na płaszczyznę p . Rhodes udowodnił w [6], że funkcję tę na płaszczyźnie s można sprowadzić do klas funkcji rozpatrywanych przez Wyndruma w [4].

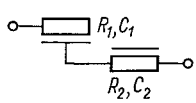
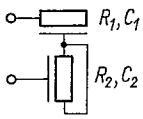
Tablica 2

Rodzaje funkcji impedancji dwójnikowych dla niektórych połączeń linii $\overline{RC}$

Typ impedancji	$z(p)$
	$\frac{R}{2}(p+1)$
	$2R(p-1)$
	$\frac{h_i(p^2-1)}{p-p_i}, \quad R_1 = \frac{4h_i}{1+p_i}, \quad R_2 = \frac{h_i}{1-p_i}$
$R_1 C_1 = R_2 C_2 = RC = \text{const}$	

Tablica 3

Rodzaje funkcji admitancji dwójnikowych dla niektórych połączeń linii $\overline{RC}$

Typ admitancji	$y(p)$	
	$\frac{a_i}{p-z_i}, \quad R_1 = \frac{1-z_i}{a_i}, \quad R_2 = \frac{z_i}{2a_i}$	$\begin{matrix} \infty \\ \searrow \\ 0 \end{matrix}$
	$\frac{a_i}{p-z_i}, \quad R_1 = \frac{1+z_i}{a_i}, \quad R_2 = \frac{-2z_i}{a_i}$	$\begin{matrix} \infty \\ \nearrow \\ 0 \end{matrix}$
$R_1 C_1 = R_2 C_2 = RC = \text{const}$		

Dla przykładu zostaną pokazane sposoby syntezy impedancji opisanymi metodami. Dokonać syntezy impedancji układu opisaną następującą funkcją:

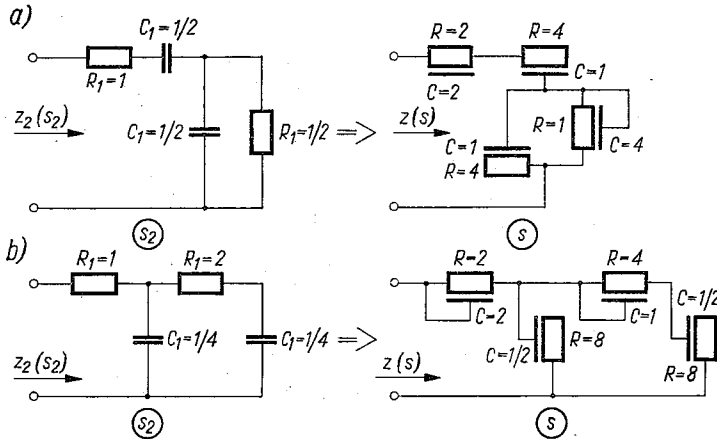
$$z(s) = \frac{\text{th} \sqrt{4s}}{\sqrt{s}} + \frac{2}{\sqrt{s} \text{th} \sqrt{4s}} + \frac{2 \text{th} \sqrt{4s}}{\sqrt{s} (\text{th}^2 \sqrt{4s} + 4)},$$

metodami: szeregowo-równoległą, kaskadową i O'Shea.

1) Metoda szeregowo-równoległa

Stosując transformacje funkcji impedancji $z(s)$ według wyrażeń (4), (5) i (6) przekształca się $z(s)$ do formy:

$$z_2(s_2) = 1 + \frac{2}{s_2} + \frac{2}{s_2 + 4}.$$



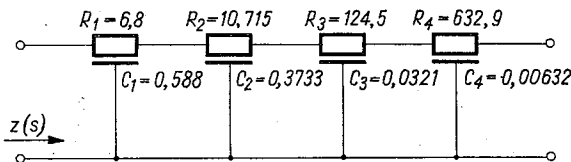
Rys. 5. Układy realizacji funkcji $z(s)$ do przykładu z punktu 3, metodą szeregowo-równoległą
(a) — realizacja pierwszą formą Foster, (b) — realizacja pierwszą formą Caiera

Funkcja $z_2(s_2)$ jest funkcją układu RC o stałych skupionych w płaszczyźnie s_2 . Realizacja $z_2(s_2)$ formami Foster i Caiera oraz transformacja na płaszczyznę s są przedstawione na rysunku 5.

2) Metoda kaskadowa

Transformacja funkcji $y(s) = \frac{1}{z(s)}$ według wyrażeń (4) i (5) przekształca $y(s)$ do postaci:

$$y_1(s_1) = \frac{s_1^3 + 4s_1}{s_1^4 + 8s_1^2 + 8}.$$



Rys. 6. Układ realizacji funkcji $z(s)$ do przykładu z punktu 3 metodą kaskadową. Wszystkie wartości elementów podane są w omach i faradach

Eliminacja kolejnych sekcji linii $\overline{RC}$, zgodnie z modelem pokazanym na rys. 4 oraz wyrażeniami (17) i (19) realizuje konfigurację przedstawioną na rys. 6.

3) Metoda O'Shea

Transformacja funkcji $z(s)$ według wyrażenia (9) przekształca tę funkcję do postaci:

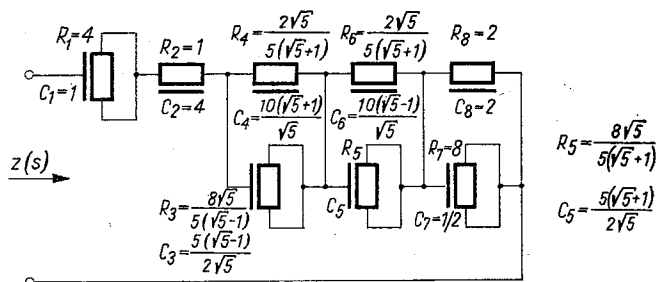
$$z(p) = 2(p+1) + 2(p-1) + \frac{2/5(p^2-1)}{p+1/5} + \frac{2/5(p^2-1)}{p-1/5}.$$

Zastosowanie typów impedancji linii $\overline{RC}$ podanych w tabelicy 2 realizuje układ przedstawiony na rysunku 7.

T a b l i c a 4

Porównanie właściwości poszczególnych metod syntezy funkcji imitacji dwójnikowych układów $\overline{RC}$ o stałych rozłożonych

Metoda syntezy	Klasy realizowanych funkcji	Liczba elementów realizacji	Liczba typów imitacji linii $\overline{RC}$	Typ realizowanej konfiguracji	Uwagi
Metoda szeregowo-równoległa	Funkcje imitacji typu (11) i (12)	minimalna	Dwa typy: impedancje wejściowe zwartej i rozwartej na wyjściu linii $\overline{RC}$ (rys. 2)	Typu T, π	Metoda wyróżniająca się prostotą interpretacji
Metoda kaskadowa	Funkcje imitacji typu (11) i (12)	minimalna	Jeden typ: linia $\overline{RC}$ w połączeniu jak na rys. 1	Kaskada	Jeżeli istnieje tylko możliwość realizacji tej metody, to jest ona preferowana w układach scalonych (prostota konfiguracji czyni ją łatwą do adaptacji technologicznej)
Metoda O'Shea	Funkcje spełniające warunki fizycznej realizowalności (patrz tabl. 1)	niemini-malna	Pięć typów imitacji linii $\overline{RC}$ (patrz tablica 2 i 3)	Szerogowo-równoległe łączenie typów imitacji linii $\overline{RC}$ podanych w tablicach 2 i 3	Ze względu na szeroką klasę realizowanych funkcji metoda bardziej ogólna od dwóch pozostałych. Ze względu na stopień skomplikowania układu realizacji trudna do adaptacji technologicznej.



Rys. 7. Układ realizacji funkcji $z(s)$ do przykładu z punktu 3, metodą O'Shea. Wszystkie wartości elementów podane są w omach i faradach

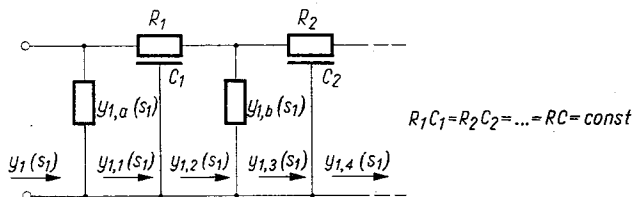
Na rysunkach 5, 6 i 7 przedstawione są układy, które otrzymuje się w wyniku realizacji jednej i tej samej funkcji impedancji dwójnika różnymi metodami. Porównanie właściwości poszczególnych metod syntezy jest przedstawione w tablicy 4.

4. SYNTEZA FUNKCJI PRZENOSZENIA

Synteza funkcji przenoszenia, oparta na transformacjach przedstawionych w punkcie 2 może być sprowadzona do dwóch zasadniczych metod realizacji.

a) Synteza kaskadowa

Zera transmisyjne kaskady jednorodnych linii $\overline{RC}$, występujące w płaszczyźnie s wyłącznie dla $s = \infty$, ograniczają możliwości kształtowania częstotliwościowej funkcji przenoszenia. Modyfikacja struktury przez wprowadzenie pomiędzy poszczególne sekcje kaskady elementów dwójnikowych umożliwia realizację zer transmisyjnych o skończonej wartości. Zmodyfikowany model syntezy kaskadowej po transformacjach według wyrażeń (4) i (5) jest przedstawiony na rysunku 8. Admitancje włączone równolegle do kaskady



Rys. 8. Model układu realizacji funkcji przenoszenia metodą kaskadową

muszą spełniać warunki transformacji (4) i (5). Synteza funkcji przenoszenia $k_1(s_1) = y_{1,21}(s_1)/y_{1,22}(s_1)$ polega na realizacji admittancji $y_{1,22}(s_1)$ przez kolejną eliminację zer transmisyjnych. Zapewnia to równoczesną realizację admittancji $y_{1,22}(s_1)$ i $y_{1,21}(s_1)$. Ze względu na reaktancyjny charakter funkcji $y_{1,1}(s_1)$, $y_{1,3}(s_1)$... w płaszczyźnie s_1 , jednorodne sekcje linii $\overline{RC}$ usuwa się z kaskady metodą podaną w punkcie 3.b. Metoda usuwania admittancji $y_{1,a}(s_1)$, $y_{1,b}(s_1)$ jest przedstawiona w punkcie 3.a. Jeżeli admittancja gałęzi równoległej jest usuwana z funkcji admittancji dla realizacji zera transmisyjnego,

to musi ona reprezentować całkowicie usuwalny biegun admitancji. Nie wszystkie admitancje równoległe mogą realizować zera transmisyjne, niektóre z nich dopiero w połączeniu z jednorodną linią $\overline{RC}$ będą wytwarzać właściwy biegun admitancji.

Zakładamy, że $y_1(s_1)$ ma biegun w nieskończoności. Eliminujemy sekcję, która częściowo realizuje $y_1(s_1)$ i i równocześnie zero transmisyjne dla $s_1 = \pm jQ$. Z wyrażen (17) i (19) dla $k = 1$ otrzymuje się:

$$y_{1,2}(s_1) = y_{1,1}(s_1) \frac{y_{1,1}(s_1) - s_1 y_{1,1}(1)}{y_{1,1}(1) - s_1 y_{1,1}(s_1)}, \quad (24)$$

$$y_{1,1}(1) = \sqrt{RC}/R_1. \quad (25)$$

Jeżeli admitancja równoległa $y_{1,b}(s_1)$ wytwarza zero transmisyjne $s_1 = \pm jQ$, to admitancja $y_{1,2}(s_1)$ musi mieć biegun dla $s_1 = \pm jQ$:

$$y_{1,1}(1) = jQ y_{1,1}(jQ). \quad (26)$$

Znak przy s_1 nie musi być uwzględniany, ponieważ admitancje są nieparzystymi funkcjami s_1 . Biegun $y_1(s_1)$ dla $s_1 = \infty$ realizowany jest przez admitancję $y_{1,a}(s_1)$, która jest admitancją wejściową rozwartej na wyjściu jednorodnej linii RC :

$$y_{1,a}(s_1) = \frac{\sqrt{RC}}{R_a} s_1. \quad (27)$$

Admitancja wejściowa kaskady $y_1(s_1)$ w modelu przedstawionym na rys. 8 ma postać:

$$y_1(s_1) = y_{1,a}(s_1) + y_{1,1}(s_1). \quad (28)$$

Stąd

$$\left. \begin{aligned} y_1(1) &= y_{1,a}(1) + y_{1,1}(1), \\ y_1(jQ) &= y_{1,a}(jQ) + y_{1,1}(jQ). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Z wyrażen (28) i (29) oraz (26) i (27) otrzymuje się wyrażenie określające R_a :

$$R_a = \frac{\sqrt{RC}(1+Q^2)}{y_1(1) - jQ y_1(jQ)}. \quad (30)$$

Wartość oporności R_a dla poszczególnych zer transmisyjnych $jQ_1, jQ_2, \dots$ musi być dodatnia. Residuum admitancji $y_1(s_1)$, R_0 , dla $s_1 = \infty$ musi spełniać warunek:

$$\frac{\sqrt{RC}}{R_a} \leq R_0. \quad (31)$$

Wyrażenie (31) jest warunkiem koniecznym realizowalności fizycznej admitancji $y_{1,1}(s_1)$. Opisana procedura odnosi się do admitancji, posiadających biegun w nieskończoności. Ponieważ rozpatrywane admitancje mają charakter reaktancyjny w płaszczyźnie s_1 , w nieskończoności będą one posiadały albo biegun albo zero. Jeżeli funkcje admitancji $y_1(s_1)$, $y_{1,2}(s_1), \dots$ nie posiadają bieguna w nieskończoności, to w celu usunięcia jednorodnej sekcji linii $\overline{RC}$ należy zastosować metodę opisaną w punkcie 3.b. Powstała w wyniku usunięcia tej sekcji admitancja będzie posiadała biegun w nieskończoności. Jeżeli $y_1(s_1)$ ma biegun w nieskończoności, wówczas $y_{1,1}(s_1)$ ma również biegun w nieskończoności.

Kolejne admitancje nie będą posiadały tutaj bieguna, biegun w nieskończoności wystąpi dopiero dla admitancji $y_{1,4}(s_1)$.

Przykład

Zrealizować następującą funkcję przenoszenia:

$$K_1(s_1) = \frac{(1-s_1^2)(s_1^2+39)}{(s_1^2+0.255)(s_1^2+4.355)},$$

gdzie:

$$y_{1,22}(s_1) = \frac{(s_1^2+0.255)(s_1^2+4.355)}{s_1(s_1^2+1)}, \quad -y_{1,21}(s_1) = \frac{(1-s_1^2)(s_1^2+39)}{s_1(s_1^2+1)}.$$

Wielomian wspólnego mianownika³⁾ dla funkcji $y_{1,22}(s_1)$ i $y_{1,21}(s_1)$ wybiera się w ten sposób aby jego pierwiastki leżały na osi urojonej płaszczyzny s_1 , były proste i przeplatały się z zerami funkcji $y_{1,22}(s_1)$. Dla uproszczenia przyjmuje się, że funkcja $K_1(s_1)$ reprezentuje funkcję przenoszenia układu złożonego z jednorodnych linii $\overline{RC}$ po transformacji według wyrażen (4) i (5) na płaszczyznę s_1 . Zakłada się znormalizowany względem 1 sek współczynnik $RC = 1$.

Oznaczamy: $y_{1,22}(s_1) = y_1(s_1)$. Zera dla $s_1 = 1$ są realizowane przez dwie kaskadowe sekcje linii $\overline{RC}$. Zero transmisyjne dla $s_1 = j\sqrt{39}$ realizuje się przez pojedynczą admitancję równoległą. Z wyrażenia (30) otrzymuje się wartość $R_a = 1,034$.

Sprawdzamy spełnienie warunku (31):

$$R_0 = \operatorname{res}_{s_1=\infty} y_{1,22}(s_1) = 1$$

oraz

$$\frac{\sqrt{RC}}{R_a} = \frac{1}{1,034} < R_0 = 1.$$

Ponieważ $R_a > 0$ oraz residuum admitancji równoległej w punkcie $s_1 = \infty$ jest mniejsze od residuum admitancji $y_{1,22}(s_1)$, możemy usunąć admitancję równoległą $y_{1,a}(s_1)$, przy

czym $y_{1,a}(s_1) = \frac{\sqrt{RC}}{R_a} s_1$. Usuwana admitancja równoległa reprezentuje admitancję wejściową rozwartej na wyjściu linii $\overline{RC}$ na płaszczyźnie s_1 :

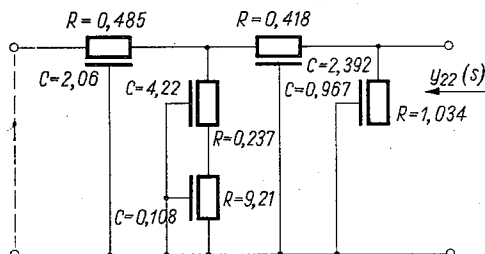
$$y_{1,1}(s_1) = y_1(s_1) - s_1/1,034 = 0,033(s_1^4 + 110,4s_1^2 + 33,63)/s_1(s_1^2 + 1).$$

Następnie z admitancji $y_{1,1}(s_1)$ usuwamy sekcję linii $\overline{RC}$, stosując wyrażenia (17) i (19):

$$R_1 = \frac{\sqrt{RC}}{y_{1,1}(1)} \quad \text{ i } \quad y_{1,2}(s_1) = \frac{2,06}{s_1} + \frac{169,05}{s_1+39} s_1.$$

³⁾ Wybór pierwiastków wielomianu wspólnego mianownika jest istotny nie tylko ze względu na fizyczną realizowalność układu. Wartości pierwiastków tego wielomianu mogą wpływać w sposób zasadniczy na ilość elementów potrzebnych do realizacji danej funkcji przenoszenia co jest istotne szczególnie w projektowaniu układów scalonych. Optymalny wybór tych pierwiastków zależy od charakteru realizowanej funkcji i powinien być przeprowadzony przez projektanta w każdym konkretnym przypadku realizacji.

Kolejno z admitancji $y_{1,2}(s_1)$ usuwamy admitancję równoległą $y_{1,b}(s_1) = \frac{169,05}{s_1 + 39} s_1$, która reprezentuje admitancję wejściową kaskadowo połączonych linii $\overline{RC}$ przy zwartym wyjściu drugiej linii na płaszczyźnie s_1 . Powstała w wyniku usunięcia admitancji $y_{1,b}(s_1)$

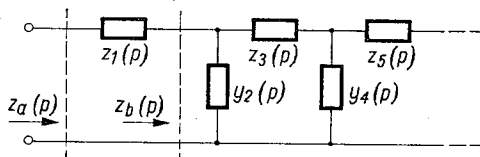


Rys. 9. Układ realizacji funkcji przenoszenia metodą kaskadową do przykładu z punktu 4. Wszystkie wartości elementów podane są w omach i faradach

admitancja $y_{1,3}(s_1) = \frac{2,06}{s_1}$ jest realizowana jako admitancja wejściowa zwartej na wyjściu jednorodnej linii $\overline{RC}$. Na rysunku 9 przedstawiony jest układ realizacji funkcji $K_1(s_1)$.

b) Metoda syntezy O'Shea

Funkcja przenoszenia układu pasywnego, złożonego z jednorodnych linii RC , przetransformowana na płaszczyznę p według wyrażenia (9) — $K(p) = \frac{z_{21}(p)}{z_{11}(p)}$, jest funkcją wymierną zmiennej p , posiada zera umieszczone na rzeczywistej osi płaszczyzny p w zakresie $\langle -\infty, +1 \rangle$ oraz proste bieguny położone na rzeczywistej osi p w zakresie $\langle -1, +1 \rangle$. Stopień licznika funkcji $K(p)$ jest nie wyższy od stopnia jej mianownika. Impedancje $z_{11}(p)$ i $z_{21}(p)$ muszą spełniać warunki podane w tabl. 1. Bieguny funkcji $z_{11}(p)$ muszą pokrywać się z biegunami funkcji $z_{21}(p)$, chociaż te ostatnie mogą być kasowane przez zera. Synteza funkcji przenoszenia $K(p)$ polega na realizacji funkcji $z_{11}(p)$ przez kolejną eliminację zer i biegunów funkcji $z_{11}(p)$ do zakresu $\langle -1, +1 \rangle$, realizacja zer transmisyjnych w zakresie



Rys. 10. Układ realizacji funkcji przenoszenia dla metody O'Shea. Realizacja zer transmisyjnych w zakresie $\langle -1, +1 \rangle$

$\langle -\infty, +1 \rangle$ musi być sprowadzona do dwóch różnych modeli — modelu realizacji w zakresie $\langle -\infty, -1 \rangle$ oraz modelu realizacji w zakresie $\langle -1, +1 \rangle$.

Na rysunku 10 przedstawiony jest układ realizujący zera transmisyjne w zakresie $\langle -1, +1 \rangle$. Jeżeli $z_1(p)$ lub $y_2(p)$ posiadają biegun dla $p = p_0$, który może być całkowicie

usunięty z funkcji impedancji lub admitancji, wówczas p_0 jest zerem transmisyjnym. W przypadku ogólnym, jeżeli bieguny i zera pozostającej admitancji nie będą pokrywać się z zerami transmisyjnymi, to należy zastosować metodę przesuwania zera przez częściowe usuwanie bieguna. Operacja może spowodować przesunięcie zer pozostającej impedancji lub admitancji w ten sposób, że jedno z nich pokryje się z zerem transmisyjnym. Impedancja widziana z jakiegokolwiek punktu na rys. 10 przyjmuje w przypadku ogólnym formę daną wzorem (22). Z wyrażenia (22) wynika, że impedancja może nie posiadać biegunów i zer w punktach odpowiadających żądanym zerom transmisyjnym. Częściowe usunięcie takich biegunów jak $k'_1(p+1)$, $k'_2(p-1)$, $h'_i(p^2-1)/(p-p_i)$, przy czym $k'_1 < k_1$, $k'_2 < k_2$, $h'_i < h_i$, może powodować, że powstała po usunięciu impedancja będzie posiadała zero w punkcie odpowiadającym zeru transmisyjnemu. Admitancja będzie wówczas posiadała biegun całkowicie usuwalny jako element bocznikujący, realizując tym samym zero transmisyjne.

Zakładamy, że $p = p_0$ jest zerem transmisyjnym realizowanym w impedancji $z_1(p)$, gdzie:

$$z_1(p) = z(p) - z'(p). \quad (32)$$

Funkcja $z'(p)$ reprezentuje impedancję usuwaną z funkcji $z(p)$. Jeżeli p_0 jest położone bliżej punktu -1 lub $+1$ od najbliższych tym punktom zer impedancji, w zakresie $\langle -1, +1 \rangle$, wówczas usuwamy częściowo lub całkowicie impedancje typu $k_1(p+1)$ lub $k_2(p-1)$. Jeżeli funkcja $z(p)$ nie posiada wyrazów typu $k_1(p+1)$ lub $k_2(p-1)$, to impedancja $z(p)$ ma zero dla $p = 1$ lub $p = -1$ i usunięcie bieguna w $p = 1$ lub $p = -1$ z funkcji admitancji daje impedancję zawierającą te wyrazy. W wyniku otrzymuje się zera transmisyjne dla $p = 1$ lub $p = -1$, które mogą być niepożądane.

Jeżeli p_0 jest położone pomiędzy dwoma biegunami impedancji $z(p)$, $p_i > p_0 > p_{i+1}$, to $h_i(p_0^2-1)/(p_0-p_i) > 0$ oraz $h_i(p_0^2-1)/(p_0-p_{i+1}) < 0$. W przypadku $z(p_0) > 0$ usuwamy częściowo biegun w $p = p_i$, przy czym musi być spełniony warunek $z(p_0) < < h_i(p_0^2-1)/(p_0-p_i)$ (w przeciwnym przypadku należy doprowadzić do jego spełnienia przez częściowe usunięcie jednego lub kilku biegunów). Jeżeli $z(p_0) < 0$, stosujemy analogiczną procedurę, tylko w odniesieniu do bieguna $p = p_{i+1}$. Istota postępowania z funkcją admitancji opisaną wyrażeniem (23) jest podobna.

Ograniczenia dotyczące położenia zer i biegunów funkcji immitancji na płaszczyźnie p nie dopuszczają możliwości przesunięcia zera poza zakres $\langle -1, +1 \rangle$. Uniemożliwia to zastosowanie układu przedstawionego na rys. 10 do realizacji zer transmisyjnych poza tym zakresem. W celu realizacji zer transmisyjnych w zakresie $\langle -\infty, -1 \rangle$ stosuje się bardziej złożony układ. Na rysunku 11 przedstawiony jest symbol i schemat zastępczy układu do realizacji zer transmisyjnych w zakresie $\langle -\infty, -1 \rangle$. W układzie tym zero transmisyjne jest realizowane przez zero impedancji bocznikującej $z_s(p) = R + pR_1$. Jeżeli $p = p_0$ jest zerem transmisyjnym, to:

$$z_s(p_0) = R + p_0R_1 = 0. \quad (33)$$

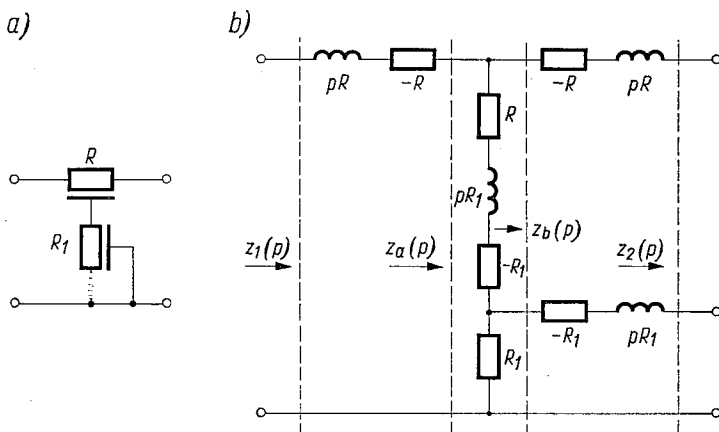
Ponieważ $p_0 \in \langle -\infty, -1 \rangle$, oporności R i R_1 są tego samego znaku.

Impedancja $z_a(p)$ musi mieć zero dla $p = p_0$. Wynika stąd, że:

$$z_a(p_0) = z_1(p_0) - R(p_0 - 1) = 0. \quad (34)$$

Z wyrażenia (34) otrzymuje się:

$$R = \frac{z_1(p_0)}{p-1}. \quad (35)$$



Rys. 11. Układ realizacji funkcji przenoszenia metodą O'Shea. Realizacja zer transmisyjnych w zakresie $\langle -\infty, -1 \rangle$

Admitancja $y_a(p) = \frac{1}{z_1(p) - R(p-1)}$ rozłożona na ułamki proste musi zawierać składnik $\frac{1/R_1}{p-p_0}$, reprezentujący admitancję bocznikującą. Residuum funkcji $y_a(p)$ dla $p = p_0$ musi być równe $\frac{1}{R_1}$:

$$\text{res}_{p=p_0} y_a(p) = \frac{1}{z_1(p)|_{p=p_0} - R} = \frac{1}{R_1}. \quad (36)$$

Stąd

$$R_1 = z'_1(p)|_{p=p_0} - R. \quad (37)$$

Podstawiając wyrażenia (33) i (35) do równania (37) otrzymuje się:

$$z'_1(p)|_{p=p_0} = \frac{z_1(p_0)}{p_0}. \quad (38)$$

Wyrażenie (38) określa warunek, który musi być spełniony przez impedancję $z_1(p)$. Spełnienie tego warunku zapewnia, że $R > 0$. Warunek (38) nie gwarantuje realizowalności fizycznej impedancji $z_2(p)$. Impedancja $z_b(p)$ jest fizycznie realizowalna, jeżeli funkcja impedancji $z_1(p)$ jest fizycznie realizowalna dla bieguna admitancji $y_a(p)$ w $p = p_0$, który jest usuwany przez impedancję bocznikującą $R + pR_1$. Powstająca w wyniku usunięcia z admitancji $y_a(p)$ bieguna w $p = p_0$, admitancja $y_b(p)$ posiada dodatnie residua i odpowiadające im bieguny położone w zakresie $\langle -1, 1 \rangle$. Jeżeli z impedancji $z_b(p) = \frac{1}{y_b(p)}$

usuniemy impedancję $pR - R$, to otrzymamy impedancję $z_2(p)$ i równocześnie przesuniemy zera impedancji $z_b(p)$ w kierunku wartości ujemnych. Dlatego, jeżeli najbardziej ujemne zero impedancji $z_b(p)$ nie przesunie się poza punkt -1 w kierunku wartości ujemnych, impedancja $z_2(p)$ będzie fizycznie realizowalna. Warunkiem, który gwarantuje, że najbardziej ujemne zero funkcji $z_b(p)$ nie przesunie się poza punkt -1 w kierunku wartości ujemnych, jest wyrażenie:

$$z_b(-1) \leq -2R. \quad (39)$$

Z rysunku 11 wynika, że:

$$\frac{1}{z_b - 1} = \frac{1}{z_a - 1} - \frac{1}{R - R_1}. \quad (40)$$

Podstawiając wyrażenia (33), (34) i (40) do (39) otrzymuje się:

$$z_1(-1) \leq \frac{4z_1(p_0)}{(p_0 - 1)^2}. \quad (41)$$

Spełnienie warunku (41) jest równoznaczne z fizyczną realizowalnością funkcji $z_2(p)$.

Warunki (38) i (41) można wyrazić w innej formie, biorąc pod uwagę wyrażenie (22), opisujące ogólną postać impedancji dwójnikowej na płaszczyźnie p . Różniczkując wyrażenie (22) i podstawiając je wraz ze swoją pochodną do warunku (38) otrzymuje się:

$$W = \frac{-k_1}{p_0} + \frac{k_2}{p_0} + \sum_{i=1}^n \frac{h_i(-p_0^2 p_i + 2p_0 - p_i)}{p_0(p_0 - p_i)^2} = 0. \quad (42)$$

Podstawiając wyrażenie (22) do wyrażenia (41) otrzymuje się:

$$k_2 \geq \frac{2k_1}{1 - p_0} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{p - p_i}. \quad (43)$$

Wyrażenia (42) i (43), odpowiadające warunkom (38) i (41), można połączyć w jeden warunek, podstawiając wyrażenie (42) do wyrażenia (43):

$$\frac{k_1(p_0 + 1)}{p_0 - 1} + \sum_{i=1}^n \frac{h_i p_0(p_0 p_i - 1)}{(p_0 - p_i)^2} \geq 0. \quad (44)$$

Warunki (42) i (43) mogą być spełnione dla każdej fizycznie realizowalnej funkcji impedancji. Jeżeli realizowalna fizycznie funkcja impedancji nie spełnia warunków (42) i (43), to należy częściowo usuwać z impedancji biegun dopóty, dopóki nie zostaną spełnione te relacje.

Realizacja zera transmisyjnego dla $p = -\infty$ wymaga wprowadzenia pewnych modyfikacji. Z równania (33) wynika, że dla $p_0 = -\infty$ oporność $R_1 = 0$, co wymaga zwarcia R_1 w układzie przedstawionym na rysunku 11.

Z równania (35) wynika, że jeżeli $p_0 \rightarrow -\infty$, to:

$$R = \lim_{p_0 \rightarrow -\infty} \frac{z_1(p_0)}{p_0 - 1} = \lim_{p_0 \rightarrow -\infty} \frac{z_1(p_0)}{p_0}. \quad (45)$$

Realizacja fizyczna wymaga spełnienia warunków (42) i (43). Wyrażenia (42) i (38) są sobie równoważne. Jeżeli $p_0 \rightarrow -\infty$ warunek (42) jest spełniony. Z wyrażenia (41) wynika, że jeżeli $p_0 \rightarrow -\infty$, to $z_1(-1) \leq 0$, co zapewnia spełnienie warunku (43).

Przykład

Dokonać syntezy następującej funkcji przenoszenia:

$$K(p) = \frac{z_{21}(p)}{z_{11}(p)} = \frac{(p-0,25)(p+10)}{p(p+0,5)}.$$

Funkcja $K(p)$ opisuje funkcję przenoszenia układu złożonego z jednorodnych linii RC po transformacji na płaszczyznę p według wyrażenia (9). Wszystkie linie $\overline{RC}$, wchodzące w skład układu, charakteryzuje stały współczynnik $RC = 1$, znormalizowany względem dowolnej stałej czasowej.

Wyboru wielomianu wspólnego podzielnika dla funkcji $z_{11}(p)$ i $z_{21}(p)$ dokonuje się biorąc pod uwagę warunki fizycznej realizowalności przedstawione w tablicy 1. Wybiera się wielomian wspólnego podzielnika $Q = p+0,25$. Impedancje $z_{11}(p)$ i $z_{21}(p)$ przyjmują postać:

$$z_{11}(p) = \frac{p(p+0,5)}{p+0,25} \quad \text{ i } \quad z_{21}(p) = \frac{(p-0,25)(p+10)}{p+0,25}.$$

Z powyższych wyrażeń wynika, że zera transmisyjne występują dla $p = -10$ i $p = 0,25$. Realizowalność zera dla $p = -10$ wymaga spełnienia przez funkcję $z_{11}(p)$ warunków (42) i (43). Rozkładając funkcję impedancji $z_{11}(p)$ na ułamki proste otrzymuje się postać identyczną z funkcją opisaną wyrażeniem (22):

$$z_{11}(p) = \frac{3}{5}(p+1) + \frac{1}{3}(p-1) + \frac{p^2-1}{15(p+0,25)}.$$

Identyfikując współczynniki powyższego wyrażenia z odpowiednimi współczynnikami wyrażenia (22) określa się: $k_1 = \frac{3}{5}$, $k_2 = \frac{1}{3}$, $h_1 = \frac{1}{15}$, $p_1 = -0,25$. W wyniku podstawienia, tych współczynników do wyrażeń (42) i (43) stwierdza się, że dla $p_0 = -10$ warunek (42) nie jest spełniony, ponieważ $W = 0,02630$. Z wyrażenia (42) wynika, że spełnienie warunku (42) jest możliwe, jeżeli z funkcji $z_{11}(p)$ usuniemy impedancję $z'_1 = 0,263(p+1)$:

$$z_1(p) = 0,337(p+1) + \frac{1}{3}(p-1) + \frac{1}{15} \frac{p^2-1}{p+0,25}.$$

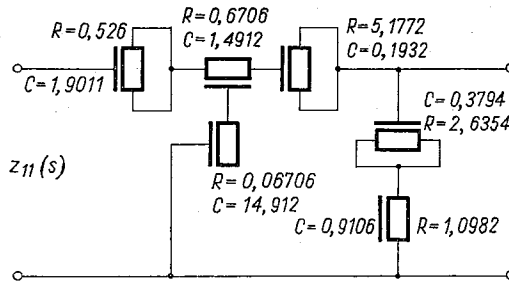
Impedancja $z_1(p)$ spełnia warunki określone przez wyrażenia (42) i (43).

Usunięta impedancja z'_1 jest realizowana w formie szeregowego elementu jako odpowiednie połączenie linii $\overline{RC}$, zgodnie z typem reprezentowanej linii $\overline{RC}$ (patrz tablica 2). Realizacja tej impedancji jest pokazana na rysunku 12. Zero transmisyjne dla $p = -10$ realizujemy w impedancji $z_1(p)$.

Z wyrażenia (35) obliczamy $R = 0,6706$ a następnie z wyrażenia (33) $R_1 = 0,06706$. Realizacja układowa tego zera, zgodna z modelem układu przedstawionym na rysunku 11, jest pokazana na rysunku 12.

Dalsza realizacja oparta jest o impedancję pozostającą po usunięciu realizującej zero transmisyjne dla $p = -10$. Impedancję tę oblicza się w oparciu o układ zastępczy przedstawiony na rysunku 11. Zgodnie z rysunkiem 11 oblicza się kolejno:

$$\begin{aligned} z_a(p) &= z_1(p) - R(p-1), \\ \frac{1}{z_b(p)} &= \frac{1}{z_a(p)} - \frac{1}{pR_1 + R}, \\ z_2(p) &= z_b(p) - R(p-1). \end{aligned}$$



Rys. 12. Układ realizacji funkcji przenoszenia metodą O'Shea do przykładu z punktu 4

W wyniku obliczeń otrzymujemy impedancję $z_2(p)$ w postaci:

$$z_2(p) = 6,1026p + 1,7101.$$

Realizujemy zero transmisyjne dla $p = 0,25$ w impedancji $z_2(p)$ metodą przesuwania zera. Obliczamy:

$$z_2(0,25) = 3,2357.$$

Usuwamy z impedancji taki wyraz $k_1(p+1)$, aby pozostająca impedancja miała zero dla $p = 0,25$. Wynika stąd, że:

$$k_1(0,25+1) = 3,2357;$$

$$k_1 = 2,5886.$$

Impedancja $2,5886(p+1)$ usuwana z impedancji $z_2(p)$ jest realizowana na rysunku 12, jako szeregowy element reprezentujący odpowiedni typ impedancji linii RC , zgodnie z tabelą 2:

$$z_3(p) = z_2(p) - 2,5886(p+1).$$

W wyniku podstawienia otrzymuje się:

$$z_3(p) = 3,514p - 0,8786 = 1,3177(p+1) + 2,1963(p-1).$$

Ponieważ impedancja $z_3(p)$ realizuje zero transymisyjne, w układzie na rysunku 12 reprezentuje ona impedancję bocznikującą, stanowiącą szeregowe połączenie dwóch typów impedancji linii RC podanych w tabelcy 2.

Układ przedstawiony na rysunku 12 realizuje funkcję przenoszenia $K(p)$.

W wyniku przeprowadzonych rozważań nasuwają się następujące wnioski. Synteza funkcji przenoszenia metodą kaskadową opiera się na realizacji funkcji admitancji dwójnikowej — przetransformowanej na płaszczyznę s_1 według wyrażeń (4) i (5) — przez kolejną eliminację zer transmisyjnych.

Metoda O'Shea syntezuje funkcję przenoszenia realizując impedancję dwójnikową — przetransformowaną według wyrażenia (9) na płaszczyznę p — przez kolejną eliminację zer transmisyjnych.

W celu porównania tych metod można adaptować wyniki przedstawione w tablicy 4, ponieważ obydwie metody realizują funkcje przenoszenia przez realizację immitancji dwójnikowych. Metoda O'Shea realizuje zera transmisyjne w zakresie $\langle -\infty, +1 \rangle$, natomiast zakres realizacji zer transmisyjnych w metodzie kaskadowej ogranicza się do zakresu $\langle -1, +1 \rangle$. Zakresy te porównuje się przez przetransformowanie na płaszczyznę p z płaszczyzny s_1 zer transmisyjnych realizowanych w metodzie kaskadowej.

5. PODSUMOWANIE

Adaptacja syntezy układów o stałych skupionych do realizacji funkcji układu złożonego z jednorodnych linii $\overline{RC}$ wymaga zastosowania transformacji płaszczyzny częstotliwości zespolonych. Transformacja polega na przekształceniu funkcji układu o stałych rozłożonych w funkcję wymierną — realizowalną na płaszczyźnie nowej zmiennej zespolonej. W punkcie 2 niniejszej pracy przedstawiono usystematyzowane rodzaje transformacji, które znajdują zastosowanie w syntezie jednorodnych układów $\overline{RC}$ o stałych rozłożonych — metodami syntezy układów RC lub LC o stałych skupionych. W syntezie układów pasywnych z zastosowaniem jednorodnej linii $\overline{RC}$ przedstawione transformacje przystosowują do bezpośredniej realizacji funkcje, które mogą być aproksymowane przez wyrażenia (11), (12) lub (20).

Aproksymacja jest jednym z podstawowych problemów syntezy układów $\overline{RC}$ o stałych rozłożonych. Radykalne rozwiązanie tego problemu pozwoliłoby na pełniejsze wykorzystanie właściwości struktur $\overline{RC}$ o stałych rozłożonych. W punktach 3 i 4 niniejszej pracy przedstawione są wybrane metody syntezy układów pasywnych. Metody bazują na transformacjach płaszczyzny częstotliwości zespolonych przedstawionych w punkcie 2. Porównanie właściwości tych metod z punktu widzenia ich zastosowania w układach scalonych podano w tablicy 4.

Tendencje rozwojowe układów RC o stałych rozłożonych zmierzają w kierunku struktur niejednorodnych i wielowarstwowych. Należy spodziewać się, że wspólna synteza tych struktur i elementów o stałych skupionych doprowadzi do znacznego poszerzenia klas funkcji, które mogą być realizowane.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. P. M. Chirlian, Integrated and Active Network Analysis and Synthesis, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1967.
2. Suleyman S. Penbeci, Samuel C. Lee, Synthesis of Distributed RC Networks by Means of Orthogonal Functions, Proceedings of the International Symposium on Network Theory, Belgrad, Sept. 1968.

3. P. I. Richards, A Special Class of Functions with Positive Real Part in a Half Plane, Duke Math. Jour., vol. 14, part 7.
4. R. W. Wyndrum, Jr., The Exact Synthesis of Distributed RC Networks, Technical Report 400-76, Laboratory for Electroscience Research, New York, May 1963.
5. R. P. O'Shea, Synthesis Using Distributed RC Networks, International Convention Record, vol. 13, part 7, 1965.
6. J. D. Rhodes, Transfer Function Realizability of Grounded URC Networks, IEEE Trans. on Circuit Theory, Vol. CT-14, June 1967.

M. BIAŁKO, J. ROSZKIEWICZ

METHODS OF DISTRIBUTED RC NETWORK SYNTHESIS

Part 1

METHODS OF PASSIVE NETWORK SYNTHESIS

Summary

In the paper a review of modern methods of microelectronic filter design using RC lines is presented. Attempts to choose the most profitable synthesis methods of passive networks are made. Some examples of circuit calculations and realizations are included.

M. BIAŁKO, J. ROSZKIEWICZ

LES MÉTHODES DE SYNTHÈSE DES CIRCUITS RC À CONSTATES DISTRIBUÉES

Partie 1

LES MÉTHODES DE SYNTHÈSE DES CIRCUITS PASSIFS

Résumé

L'article donne la revue des méthodes modernes du calcul des filtres microélectroniques avec l'application des lignes RC. On y présente un essai de choix et de systématisation des méthodes utiles de synthèse des circuits passifs ainsi que les exemples des calculs et des réalisations.

M. BIAŁKO, J. ROSZKIEWICZ

SYNTHESEVERFAHREN FÜR RC-SCHALTUNGEN MIT VERTEILTEN PARAMETERN

Teil I

SYNTHESEVERFAHREN PASSIVER RC-SCHALTUNGEN

Zusammenfassung

In vorliegender Bearbeitung wird eine Übersicht über moderne Methoden für die Auflösung mikroelektronischer RC-Glieder mit verteilten Parametern angegeben. Es wurde eine Probe der Wahl und des Einordnens von bestmöglichen Methoden einer Synthese passiver Schaltungen vorgenommen, und einige Beispiele für Rechenverfahren sowie Schaltungsrealisation wurden angeführt.

М. БИАЛКО, Й. РОШКЕВИЧ

МЕТОДЫ СИНТЕЗА СХЕМ RC С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Часть I

МЕТОДЫ СИНТЕЗА ПАССИВНЫХ СХЕМ

Резюме

В статье рассматриваются современные методы проектирования микроэлектронных фильтров с применением схем RC с распределенными параметрами. Сделана попытка выбора и систематизации возможно полезных методов синтеза пассивных схем, а также представлены примеры расчета реализации схем.

Aktualne zastosowania teorii złączy falowodów cylindrycznych

MAREK SZALEK (WARSZAWA)

*Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Zakład Teorii Fal Elektromagnetycznych*

Otrzymano 2.2.1970

Dokonano przeglądu grupy prac dotyczących teorii złączy falowodów cylindrycznych. Uwagę skupiono głównie na używanych metodach analizy, kwestii poprawności ich użycia, osiągniętej dokładności wyników oraz na możliwościach rozszerzenia zakresu stosowalności tych metod na ogólniejsze przypadki.

1. WSTĘP

Celem przedstawionego opracowania jest dokonanie krótkiego przeglądu grupy prac dotyczących złączy falowodów cylindrycznych. Omówione prace zostały w przeważającej większości opublikowane w latach 1967 i 1968. Zainteresowanie autora skupiało się głównie wokół użytych metod analizy i ich skuteczności. Zwrócono tu więc m. in. uwagę na osiągniętą dokładność wyników, poprawność zastosowania metod oraz możliwość rozszerzenia zakresu ich stosowalności na ogólniejsze przypadki. W szczególności chodziło o przypadki, gdy w złączu znajdują się ośrodki anizotropowe. Z punktu widzenia tego rodzaju zainteresowań omawiana grupa prac jest dostatecznie obszerna, aby można ją było uznać za reprezentatywną w stosunku do ogółu prac z tego zakresu z ostatnich kilku lat.

W przeglądzie omówiono prace zajmujące się złączami, w których obszar przejściowy pomiędzy poszczególnymi falowodami cylindrycznymi może być dowolnego kształtu i mieć średnicę rzędu wielu długości fali. Zarówno złącza jak i falowody musiały być w zasadzie całkowicie ograniczone ściankami doskonale przewodzącymi i mogły zawierać ośrodki anizotropowe. Z omawianej klasy wyłączono, poza nielicznymi wyjątkami, te prace, które analizują sprzężenia przez otwory boczne w ściankach falowodów. Nie uwzględniało się również prac traktujących o falowodach periodycznych, które skądinąd można uważać za ciąg powtarzających się złączy. Tak samo zostały odrzucone prace zajmujące się złączami falowodów o fali TEM z tym, że spoza określonej wyżej klasy do przeglądu zostało włączonych kilka prac dotyczących cyrkulatorów typu Y z doprowadzeniami paskowymi.

W przeglądzie uwzględniono wszystkie prace z omawianego zakresu opublikowane w roku 1968 w pismach: „Radiotechnika i Elektronika”, „Proceedings of the IEE” oraz „IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques”, jak również osiągalne dla autora prace z tego zakresu wymienione w roczniku 1968, „Electrical and Electronics

Abstracts". Spoza okresu 1967-68 uwzględniono prace analizujące złącza dwóch falowodów prostokątnych o wspólnych tworzących, z których jeden jest wypełniony poprzecznie namagnesowanym ferrytem, oraz prace omawiające tzw. paradoks termodynamiczny, związany w pewien sposób z tą analizą. Wzięto tutaj pod uwagę wszystkie ważniejsze pozycje jakie ukazały się dotychczas w literaturze.

Praca została podzielona na 9 rozdziałów. Rozdział 2 poświęcono na ogólne scharakteryzowanie najważniejszych metod analizy złączy falowodów cylindrycznych. W rozdziałach 3÷8 omawia się kolejno prace pogrupowane zgodnie z kryteriami podanymi na końcu rozdziału 2. Ogólne wnioski, dotyczące głównie zakresu stosowalności metod, podano w rozdziale 9.

2. STOSOWANE METODY ANALIZY

W związku z założeniami tego przeglądu, najdogodniejszym sposobem klasyfikacji omawianych dalej prac będzie ich podział według użytych metod analizy. Dlatego jest celowym dokonanie w tym miejscu szkicowego przeglądu najważniejszych metod analizy złączy falowodów cylindrycznych.

Należy tu przede wszystkim zauważyć, że liniowe zagadnienia rozpraszania fal elektromagnetycznych na złączach falowodowych w rzadkich tylko przypadkach mogą być opisane równaniami dającymi się ściśle rozwiązać przy pomocy znanych metod. Poza kilku trywialnymi przypadkami, większość dotychczas znanych ścisłych rozwiązań uzyskano stosując technikę transformacji całkowych (metoda Wienera-Hopfa i analogiczne). Metody te dają się jednak zużytkować tylko przy rozpatrywaniu najprostszych zagadnień (por. uwagę na końcu rozdz. 8).

O ile chodzi o używane metody przybliżone, to zwraca uwagę ich duża różnorodność. Jest ona dodatkowym dowodem wąskiego zakresu stosowalności zasadniczej części tych metod.

Dla potrzeb dalszych rozważań można dokonać następującego podziału metod przybliżonych.

I. *Metody, których celem jest doprowadzenie do układu liniowych równań algebraicznych rozwiązywanych na ogół numerycznie.* Układy takie można wyprowadzić na kilku drogach:

a) Przyrównując do siebie składowe styczne pola elektrycznego i magnetycznego na granicy dwóch obszarów w przypadku, gdy w każdym obszarze można pola te wyrazić w postaci nieskończonej sumy znanych rozwiązań własnych równań Maxwella, spełniających odpowiednie warunki brzegowe (metoda zszywania).

b) Formułując analogicznie jak w metodzie Ritza odpowiedni funkcjonal zależny od pewnej klasy funkcji próbnych, który staje się stacjonarny po podstawieniu funkcji będącej rozwiązaniem rozważanego problemu. Układ równań algebraicznych uzyskuje się żądając stacjonarności funkcjonału przy wariacji pewnej liczby parametrów, po podstawieniu jako funkcji próbnej odpowiednio dobranej funkcji liniowo zależnej od tych parametrów. Należy tu zauważyć, że podana metoda jest w zasadzie równoważna metodzie Galerkina.

c) Stosując metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych, jak np. metodę równań różnicowych.

II. *Metody wariacyjne poszukiwania przybliżonej wartości funkcjonałów.* W podanych wyżej metodach typu I otrzymuje się przybliżony rozkład całego pola w pobliżu niejednorodności. W zagadnieniach rozpraszania fal elektromagnetycznych na złączach jest się jednak na ogół zainteresowanym w znalezieniu wartości kilku tylko funkcjonałów rozkładu pola, którymi są współczynniki przejścia i odbicia. Wartości tych można poszukiwać konstruując pomocnicze funkcjonały o własnościach stacjonarnych, które w punkcie stacjonarności dokładnie równają się poszukiwanym współczynnikom.

Te pomocnicze funkcjonały $R[x, y]$ zależą w ogólnym przypadku od dwóch funkcji x, y i ich punkt stacjonarności jest wyznaczony przez rozwiązanie dwóch różnych równań liniowych. Znajomość funkcjonału pomocniczego pozwala zatem na wyznaczenie współczynników przejścia i odbicia z błędem drugiego rzędu względem błędów przybliżonych rozwiązań wymienionych równań liniowych. Jedno z tych równań jest przy tym równoważne pierwotnemu równaniu określającemu pole elektromagnetyczne w badanym obszarze. W szczególnych przypadkach oba równania liniowe są identyczne i wtedy można m. in. stosować dobrze znane wyrażenia wariacyjne typu Schwingerowskiego (por. np. [1]).

Można tu zauważyć, że omówione funkcjonały pomocnicze o właściwościach stacjonarnych mogą być jednocześnie wykorzystane w metodach typu Ib.

III. *Metody doprowadzające do układu liniowych równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu.* W metodach tych wyraża się składowe pola, poprzeczne względem kierunku propagacji, przez sumę składowych poprzecznych poszczególnych rodzajów pola w falowodzie porównawczym o takim samym przekroju, ale o większej regularności w kierunku prostopadłym. Współczynniki rozłożenia względem rodzajów spełniają wtedy wspomniany układ równań różniczkowych. Należy tu zaliczyć metodę poprzecznych przekrojów (por. np. [2]), którą można stosować raczej tylko do falowodów o wolno zmieniającym się przekroju, m. in. dlatego, ponieważ nie zapewnia ona spełnienia warunku znikania składowej stycznej pola E na ściankach falowodu o zmiennym przekroju. Inna metoda, która jest dużo skuteczniejsza w przypadkach kiedy da się ją zastosować, będzie omówiona w związku z pewnymi pracami Bahara.

IV. *Metoda doprowadzająca do osobliwych równań całkowych rozwiązywalnych analitycznie.* Jest ona w istotny sposób związana ze złączami falowodów prostokątnych, chociaż wydaje się, że istnieje pewna możliwość zastosowania jej podstawowej idei do analizy złączy innych falowodów o wybranych formach. Omówi się ją nieco dokładniej w rozdz. 6.

V. *Uogólnione metody optyczne.* Wyznacza się w nich pole elektromagnetyczne stosując uogólnienia optyki geometrycznej.

VI. *Inne, jak metoda przybliżenia statycznego przydatna w przypadku małych niejednorodności, związana z nią metoda odwzorowań konferennych, czy metody perturbacyjne.* Mają one bardzo ograniczone zastosowanie. W omawianych pracach napotyka się tylko na pierwszą z tych metod w związku ze sprzężeniami przez małe lub wąskie apertury.

Podany wyżej podział metod posłużył jako punkt wyjścia do podziału prac omawianych w dalszych rozdziałach. Podstawą zaklasyfikowania tych prac do poszczególnych grup była przynależność zastosowanych metod analizy do odpowiednich metod ogólnych. Numeracja grup odpowiada podanej numeracji metod.

3. PRZEGLĄD PRAC GRUPY I

I. a) Podgrupa ta jest jedną z najliczniej reprezentowanych. Wexler [3] propaguje metodę zszywania pola wyrażonego w postaci sumy rodzajów pól poszczególnych falowodów złącza, podkreślając prostotę metody i fakt, że słaba zbieżność równań nie jest kłopotliwa w dobie szybkich maszyn liczących. Przedstawia ogólną analizę schodkowych złącz wielokrotnych, z poprzecznie jednorodnym, izotropowym wypełnieniem. Podaje także wyniki obliczeń dla rozwidlenia falowodu prostokątnego, dla którego jest również znane ścisłe rozwiązanie. Uwzględniając 10 rodzajów otrzymał błąd mniejszy niż 1%, zaś przy 40 rodzajach błąd spadł poniżej 0,05%.

Bach Andersen [4] rozważa dwuwymiarowy problem rozpraszania na walcu niejednorodnym osiowo, w którego środku może znajdować się plazma, umieszczonym w falowodzie prostokątnym prostopadle do jednej ze ścianek. Pole zszywano z rodzajów cylindrycznych i prostopadłościennych. Stosując eksperyment obliczeniowy uzyskano sugestię, że przy uwzględnieniu 18 rodzajów błąd był mniejszy od 1%. Obliczono pewne przypadki rezonansu (maksymalnego wzmocnienia fali) występujące w przypadku $\text{Im } \epsilon < 0$, przy izotropowym problemie z niemagnetycznymi ośrodkami. W konkluzji autor stwierdza, że można otrzymać silny rezonans przy zastosowaniu jednorodnych, izotropowych i niemagnetycznych kołowo-walcowych trzpieni z zespolonym ϵ , dla którego $\text{Im } \epsilon < 0$.

Campbell [5] rozważał pewien problem dwuwymiarowy, którego wyniki dają się bezpośrednio zastosować (przez odpowiednią formalną zmianę długości fali) w przypadku falowodu prostokątnego o jednorodnym, izotropowym wypełnieniu, zakończonego z jednej strony przez dwie płaskie ścianki. Są one umieszczone względem siebie pod kątem 90° . Każda z nich jest przy tym umieszczona pod kątem 90° do dwóch przeciwległych ścianek falowodu i pod kątem 45° do dwóch pozostałych ścianek. Obie ścianki ograniczające mają jednakową powierzchnię i mogą być doskonałymi przewodnikami elektrycznymi lub magnetycznymi. Znajomość rozpraszania pola na takim zakończeniu pozwala na analizę bardziej skomplikowanych złączy, jak np. złącza czterech skrzyżowanych falowodów prostokątnych lub zdeformowanego zgięcia falowodów. Liczono 2, 12 i 20 równań. Różnica między wynikami dla 12 i 20 równań była mniejsza niż 1%. Między 2 i 12 równaniami — około 5%.

W pracy [6] Campbell i Jones rozważali uogólnienie problemu poprzedniej pracy na przypadek, gdy ścianki ograniczające mają różną powierzchnię. Połączono tam metodę zszywania i metodę poprzecznych przekrojów, przy czym zastosowanie tej ostatniej budzi istotne zastrzeżenia. Praca ta zostanie jeszcze omówiona w rozdz. 5.

W pracach Feoktistova [7] oraz Siekanowicza i Schillinga [8] rozważa się cyrkulator paskowy typu Y z walcowym rdzeniem ferrytowym poprzecznie namagnesowanym, który w przypadku drugiej z tych prac składa się z mniejszego rdzenia i otaczającego go pierścienia o przeciwnej magnetyzacji. Problem jest dwuwymiarowy. Pole w cyrkulatorze zszywa się w standartowy sposób z rodzajów cylindrycznych (składowa E_z na obwodzie pierścienia wynosi np.

$$E_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n I_n(\kappa_{\perp} r) e^{in\varphi} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n N_n(\kappa_{\perp} r) e^{in\varphi},$$

gdzie:

r — współrzędna radialna obwodu pierścienia,
 $\kappa_{\perp}$ — parametr związany z własnościami ferrytu,
 a_n, b_n — powiązane ze sobą stałe,
 oś z jest zwrócona w kierunku stałej magnetyzacji). Pole to zszywa się następnie z polem TEM falowodów paskowych przy upraszczającym założeniu, że jest ono stałe w przekrojach poprzecznych tych falowodów i znika poza ich obrębem. W pracy [7] uzyskano zgodność wyliczeń z eksperymentem w granicach 40%.

W pracy Parsonsona i innych [9] rozpatrzono podobny do poprzedniego problem, z tym że doprowadzenia są falowodami prostokątnymi, a rdzeń składa się współosiowo z przewodzącego środka, pierścienia ferrytowego i pierścienia dielektrycznego. Wybrano taką skomplikowaną strukturę, aby mieć do dyspozycji jak największą liczbę parametrów przy dopasowywaniu szerokopasmowości. Obliczenia przeprowadzono jak w pracach [7] i [8] przy założeniu, że w falowodach nie powstają rodzaje zanikające. Błąd odcinkami częstotliwości przekracza 50%, ale wyniki dość dobrze oddają szerokość pasma, co autorom wystarcza.

W związku z cyrkulatorami można wspomnieć o pracy Stoljarova i Tjukova [10], w której, korzystając z danego przybliżonego rozwiązania dla cyrkulatorów Y określającego ich charakterystyki w zależności od parametrów konstrukcyjnych, podaje się obliczenia dla problemu odwrotnego (tzn. znajdowania parametrów konstrukcyjnych w zależności od zadanych charakterystyk).

Hall i Little [11] rozważają problem sprzężenia dwóch falowodów prostokątnych poprzez przewodzący fragment wspólnej, bocznej ścianki, mający grubość około 4 razy większą od grubości warstwy naskórkowej. W analizie uwzględniono tylko rodzaje propagujące się (po jednym podstawowym w każdym falowodzie). Zszywane jedynie składowe magnetyczne pola. Dzięki dostatecznie dużym własnościom tłumienia apertury sprzęgającej otrzymano bardzo dobrą zgodność z doświadczeniem (około 0,1%).

Shockley i inni [12] rozważają złącze dwóch falowodów prostokątnych o różnej wysokości, połączonych fragmentem falowodu radialnego. Zszywają rodzaje przez żądanie zgodności pola w wybranych punktach. Autorzy stwierdzają otrzymanie dobrej zgodności z doświadczeniem, ale nie podają ile równań uwzględniono i w jakich punktach zszywano. Wypełnienie falowodów było jednorodne i izotropowe.

W grupie tej można jeszcze wskazać na dwie prace mające charakter pomocniczy z punktu widzenia analizy złączy. W pracy Sheikh'a i Gunna [13] porównano ściśle wyniki dla stałej propagacji w falowodzie prostokątnym zawierającym warstwę półprzewodnika, z wynikami przybliżenia perturbacyjnego oraz metody Rayleigha-Ritza (por. np. [14]). Wykazano stosunkowo poważniejszą rozbieżność wyników w przypadku dużej przenikalności dielektrycznej warstwy (do 5% dla 2-modowego przybliżenia w metodzie R.-R.). W pracy Amitay [15] podano wartości całek $\langle \phi, \Psi \rangle = \iint \phi \Psi dS$, gdzie całkuje się po aperturze kołowego falowodu współosiowego o jednorodnym, izotropowym wypełnieniu, promieniującego w przestrzeń przez szparę kołową. Funkcje Ψ przedstawiają fale płaskie, ϕ — są rodzajami falowodu. Znajomość tych całek jest pożyteczna w przypadku analizy złącza podanego falowodu z falowodem prostokątnym.

I. b) Należy tu przede wszystkim odnotować książkę Nikolskiego [16], będącą m. in. podsumowaniem wyników wielu wcześniejszych prac autora. Ten sam autor i inni w pracach [17] donoszą o opracowaniu programu na maszynę cyfrową, umożliwiającego rozpatrywanie trójwymiarowego problemu rozpraszania fal elektromagnetycznych na żyrotropowej niejednorodności dowolnego kształtu umieszczonej w falowodzie prostokątnym i namagnesowanej podłużnie lub poprzecznie względem kierunku jego tworzących. Oparto się na metodzie Galerkina. Liczba uwzględnianych liniowych równań algebraicznych dochodzi do 108. Czas liczenia jednego wariantu wynosi $8 \div 30$ minut na maszynie M-20. Ocenę błędu uzyskano przez porównanie ze znanym ścisłym rozwiązaniem dla dielektrycznej wkładki. Przy 20 równaniach o rzeczywistych współczynnikach błąd nie przekraczał 3,5%.

Medoks [18] podaje pewien algorytm obliczeń dla jednorodnego izotropowego złącza typu Y, bez strat. Problem jest dwuwymiarowy. Podstawę algorytmu stanowi metoda wariacyjna podana w jednej z prac Nikolskiego. W rozważaniach wykorzystano funkcje własne rezonatora trójkątnego podane w pracy [19].

Beługa [20] podaje kilka funkcjonałów, dla których znalezienie punktów stacjonarnych jest równoważne rozwiązaniu równania Helmholtza z odpowiednimi warunkami brzegowymi. Funkcję próbną można przyjmować w postaci superpozycji funkcji próbnych dla dowolnie wybranych podobszarów, przy czym może ona być nieciągła na granicy tych podobszarów, gdyż w punkcie stacjonarności staje się automatycznie ciągłą.

W danym przypadku jako funkcję próbną przyjęto superpozycję rozwiązań równania Helmholtza dla poszczególnych podobszarów, co znacznie uprościło postać funkcjonałów. Stały się one tutaj „odpowiedzialne” jedynie za zapewnianie ciągłości rozwiązania na brzegach podobszarów. Funkcjonały dają się zastosować tylko w przypadku ośrodka izotropowego, jednorodnego i bezstratnego, ale istnieją możliwości uogólnienia na ośrodki obszarami jednorodnymi i anizotropowymi. W pewnych przypadkach niektóre z podanych funkcjonałów umożliwiają podanie granic błędu na wartości własne.

Vorobiev [21] bada metodą Ritza, w oparciu o pewien funkcjonał o własnościach stacjonarnych, propagację rodzajów w pobliżu częstotliwości krytycznej w zgiętym falowodzie o jednakowym przekroju poprzecznym. Ośrodek wypełniający falowód jest jednorodny i izotropowy, zaś minimalny promień krzywizny dużo mniejszy od długości fali. Wstępną klasę funkcji próbnych konstruuje się metodami optyki geometrycznej.

I. c) W podgrupie tej można umieścić jedynie pracę Arletta, Bahraniego i Zienkiewicza [22], która zresztą równie dobrze pasuje do podgrupy b. Autorzy reklamują pewną metodę rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych, nazwaną przez nich metodą skończonych elementów (objętości w przypadku 3-wymiarowym i powierzchni w 2-wymiarowym). Ma ona dawać takie same rezultaty jak metoda skończonych różnic przy około 10 razy mniejszej ilości punktów próbnych (stosunek ten wynika z podanych w pracy tablic). Metoda polega na podziale obszaru na podobszary, np. czworościenne. W rogach tych czworościanów zadaje się dowolne próbne wartości funkcji. Funkcja wewnątrz czworościanu jest liniową kombinacją współrzędnych tak dobraną, aby w rogach pokrywała się z zadanymi wartościami. Taką funkcję, o pochodnych ciągłych obszarami, podstawia się do funkcjonału ekstremalnego, którego równanie Eulera jest równaniem Helmholtza. Metodę przypuszczalnie dałoby się po uogólnieniu zastosować do rozwiązywania równań

Maxwella z tensorowymi przenikalnościami, jednakże kosztem istotnego zwiększenia ilości obliczeń. Zamiast funkcjonału ekstremalnego trzeba by wtedy prawdopodobnie stosować funkcjonał stacjonarny.

Kończąc przegląd prac grupy I wydaje się celowym zwrócić uwagi na pracę Amitay i Galindo [23] omawiającą pewien aspekt ogólnego problemu znajdowania oceny błędu dla przybliżonych rozwiązań u_N równań liniowych typu

$$k = Du^\circ, \quad (1)$$

gdzie: k — znana funkcja (ogólnie — element przestrzeni Hilberta), D — dany operator liniowy. Funkcja u_N spełnia równanie

$$k = D_N u_N, \quad (2)$$

gdzie D_N jest operatorem przybliżającym operator D i może być uważany za macierz stopnia (N, N) . Autorzy zwracają uwagę, że ścisła ocena błędu wynosząca

$$\begin{aligned} \|u_N - u^\circ\| &\leq \|L_N u_N\| / (1 - \|L_N\|), \\ \|L_N\| &< 1, \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie: $L_N = D_N^{-1}(D - D_N)$, $\|L\|$ — norma L , jest często daleko mniej korzystna od wartości błędu, jaką można uzyskać szacując szybkość zanikania początkowych członów szeregu Neumanna

$$u^\circ = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j L_N^j u_N, \quad (4)$$

wyznaczającego ściśle rozwiązanie równania (1) oraz, że jest ona o wiele bardziej pracochłonna.

Należy tu ogólnie zauważyć, że można próbować wykorzystania oceny (3) na drodze podstawienia do niej oszacowania od góry normy macierzy L . Znane najprostsze metody znajdowania takiego oszacowania wymagają mniej więcej tyle czasu, co obliczenie jednego wyrazu szeregu (4). Jeżeli takie oszacowanie jest zbyt duże na to, aby otrzymana wartość dała się zastosować w (3), to można szukać dokładniejszych oszacowań, które są już rzeczywiście bardzo pracochłonne. Oczywiście zawsze można dokonać niezależnego oszacowania przez rozważenie prędkości malenia początkowych wyrazów szeregu (4). Na tej drodze otrzyma się na ogół ocenę błędu lepszą od oceny (3) obliczonej w najkorzystniejszym przypadku, gdy znana jest dokładna wartość $\|L\|$. Ocena ta może być jednak całkowicie niepoprawna.

Na zakończenie zauważmy jeszcze, że dla każdego $z = \|L_N\|$ ocenę błędu (3) można wyrazić w postaci

$$\Delta u = \|u_N - u^\circ\| = az / (1 - z), \quad (3')$$

gdzie a — odpowiedni współczynnik.

Każdy funkcjonał liniowy od u (wyrażający np. współczynnik odbicia) daje wartość błędu, spowodowaną użyciem przybliżonego rozwiązania u_N , proporcjonalną do Δu . Można pokazać, że stosując metody wariacyjne i oszacowania pracy [27] omówionej

w rozdz. 4, otrzymuje się w danym przypadku, przy dokładnie takiej samej pracochłonności, ocenę błędu równą

$$\frac{caz^2}{1-z}, \quad (3'')$$

a więc o wiele korzystniejszą dla małych z od oceny (3'). Współczynnik c nie zależy przy tym od z .

4. PRZEGLĄD PRAC GRUPY II

Rozpoczynając od metody wariacyjnej Schwingera i jej bezpośrednich uogólnień napotyka się na pracę Gejvandova i innych [24]. Podano w niej wyrażenie na macierz rozpraszania dla wąskoszczelinowych złączy falowodów prostokątnych, uzyskane przez zastosowanie funkcjonału Schwingera w związku z pewnym równaniem całkowym, opisującym w sposób przybliżony pole w danych konfiguracjach falowodowych. Ci sami autorzy podali uogólnione wyrażenia stacjonarne typu Schwingerowskiego na składowe macierzy admitancji dla złącza falowodów cylindrycznych, o dowolnym kształcie obszaru przejściowego [25]. Przy wyprowadzaniu korzystano z pewnych równań całkowych, jakie można uzyskać dysponując tensorową funkcją Greena dla danego obszaru. Metoda umożliwia przedstawienie odpowiednich schematów zastępczych dla złożonych układów rezonatorowo-falowodowych. Użyteczność podanych wzorów wydaje się jednak być bardzo małą, chociażby ze względu na występowanie w nich wspomnianej funkcji Greena, której znalezienie jest na ogół zadaniem znacznie bardziej skomplikowanym niż obliczenie macierzy impedancji, np. metodami grupy I.

Poza wymienionymi pracami można tu jeszcze wskazać na pracę Reitziga [26]. Obliczył on m. in. standartowe złącze dwóch falowodów kołowych o różnym przekroju, wypełnionych ośrodkiem jednorodnym i izotropowym, oraz falowód kołowy z osiowo symetryczną cienką przesłoną o kształcie pierścienia dotykającego ścianek, przy czym promień e apertury mało się różni od promienia b falowodu. Stosując przybliżenie jednomodowe (rodzaj H_{11}) autor otrzymał w przypadku drugiego z tych problemów dokładność wyznaczenia modułu współczynnika odbicia od 0,01 ($e/b = 0,93$) do 0,05 ($e/b = 0,85$). Można tu przy okazji zauważyć, że wyniki dla tego samego problemu przy małej średnicy apertury są podane u Marcuvitza [29], gdzie otrzymano je przy pomocy pewnego równania całkowego.

Metody Schwingera można stosować tylko do rozwiązań niejednorodnych równań liniowych z operatorem samosprzężonym, jaki występuje na ogół w przypadku rozważania problemów z ośrodkiem izotropowym. Istnieją jednak metody wariacyjne dla równań z operatorem niesamosprzężonym, często występującym przy rozważaniu problemów z ośrodkiem anizotropowym. Funkcjonały stacjonarne zależą w takim przypadku od dwóch funkcji próbnych. W pracy [27] rozważa się problem wyznaczania błędu otrzymywanego przy stosowaniu takich funkcjonałów. Okazuje się, że można podać ogólną metodę ścisłego oszacowywania popełnionego błędu, która daje ocenę drugiego rzędu względem błędów przybliżonych rozwiązań. Wychodząc z równania (1), gdzie $D \neq D^+$ (D^+ oznacza operator hermitowsko sprzężony do D), pokazuje się tam, że wartość funkcjonału iloczynu skalar-