

nego $\langle u^\circ, g \rangle$, gdzie g dowolna zadana funkcja, może być wyznaczana przy pomocy funkcjonału pomocniczego

$$R_1[u, w] = \langle u, g \rangle + \langle k, w \rangle - \langle u, D^+w \rangle, \quad (5)$$

przy czym błąd $|\langle u^\circ, g \rangle - R_1[u, w]|$ da się ściśle oszacować. Oszacowanie to jest proporcjonalne do $B \cdot \|u - u^\circ\| \cdot \|w - w^\circ\|$, gdzie B — pewna stała, zaś w° — rozwiązanie równania

$$g = D^+w^\circ. \quad (6)$$

Wymienioną metodę zastosowano w pracy [28] do analizy złącza falowodów prostokątnych, z których jeden jest całkowicie wypełniony poprzecznie namagnesowanym fer-rytem. Złącze takie było już uprzednio analizowane przez Lewina [42] metodą przybliżoną równania całkowego, nie pozwalającą na ocenę błędu wyznaczenia współczynnika odbicia. Wyniki pracy [28] pozwoliły oszacować ten błąd, który dla przybliżenia quasistatycznego pierwszego stopnia (bliższe wyjaśnienie tego terminu będzie podane w rozdz. 6) wynosi co do modułu mniej niż 0,09 (błąd bezwzględny), zaś dla przybliżenia drugiego stopnia wynosi co do modułu mniej niż 0,02. Do wyznaczenia współczynnika odbicia z błędem mniejszym co do modułu od 0,01 wystarczało w omawianej pracy stosowanie wektorów próbnych, otrzymanych drogą rozwiązywania układu od 3 do 8 liniowych równań algebraicznych.

Kończąc przegląd prac tej grupy można wskazać na omówioną już w podgrupie Ib pracę [20], w której podano funkcjonały umożliwiające obliczenie granic błędu wartości własnych pewnych prostszych problemów, oraz na częściowo tu przynależną pracę [16].

5. PRZEGLĄD PRAC GRUPY III

Rozpoczynając od metody poprzecznych przekrojów można wymienić pracę Keržencevej [30], gdzie wylicza się współczynniki odbicia fali od miejsca, w którym oś falowodu o jednorodnym i izotropowym wypełnieniu zmienia kierunek o mały kąt. Okazało się, że falę odbitą można w zastosowanym ujęciu interpretować jako wynik wtórnego przekształcenia fal pasożytniczych powstałych na złączu. Ten sam wynik uzyskano także przy użyciu tzw. metody małych niejednorodności omawianej w [2]. Wyliczenia przeprowadzono dla falowodów o stałym przekroju poprzecznym, a obliczenia liczbowe podano dla zgiętego falowodu kołowego. Ta sama autorka w pracy [31] rozszerza wyniki na przypadek rozciągłych niejednorodności falowodu.

W pracy [32] Tang rozważa złącze dwóch falowodów kołowych o wspólnej osi, lecz o różnym przekroju, połączonych obszarem przejściowym o zmiennym w sposób ciągły kołowym przekroju. Obszar złącza jest wypełniony ośrodkiem jednorodnym i izotropowym. Uwzględniając tylko kilka najsilniejszych sprzężeń uzyskano 4 sprzężone równania różniczkowe, które zapisano następnie w postaci równań całkowych Volterry drugiego rodzaju i rozwiązano przez iterację. Porównując ze znanym przypadkiem porównawczym otrzymano bardzo mały błąd względny (10^{-8}) już po zastosowaniu trzeciej iteracji, jednakże uogólnianie ważności tej oceny na inne przypadki byłoby całkowicie nieuzasadnione. Im większe nachylenie ścianek tym gorzej zbieżne stają się całki, aż w pewnym momencie zawodzi stosowanie metod iteracyjnych.

Można teraz powrócić do pracy [6] omawianej w rozdz. 3. Istotnym punktem rozważań jest w niej znajdowanie pola w obszarze falowodu płaskiego, którego dwie nierównoległe ścianki są umieszczone pod kątem 45° do siebie. Do analizy tego problemu zastosowano metodę poprzecznych przekrojów, która nie może zapewnić spełnienia żądanych przez autorów warunków granicznych na ściankach. W związku z tym wyprowadzone równania, w których w pewien sztuczny sposób te warunki uwzględniono należy uznać za niepoprawne.

Istotą metody poprzecznych przekrojów jest stosowanie rozwinięcia pola na szereg względem rodzajów falowodów cylindrycznych, co powoduje, że pola te nie spełniają warunków brzegowych dla falowodów o zmiennym przekroju. W pracach Bahara [33] i Bahara, Craina [34] stosuje się w takich przypadkach rozwinięcie na szereg względem rodzajów falowodów o ściankach lokalnie stycznych do falowodu badanego (w danych przypadkach są to falowody radialne). Dzięki takiemu rozwinięciu uzyskuje się automatyczne spełnienie warunków brzegowych. Na współczynniki rozkładu pola również dostaje się układ sprzężonych równań różniczkowych zwyczajnych. Dla pewnego złącza falowodów płaskich, o izotropowym i jednorodnym wypełnieniu, autorzy wykonali porównawcze obliczenia numeryczne stosując swoją metodę oraz metodę poprzecznych przekrojów [34]. Okazało się, że ta ostatnia prowadzi do znacznie większych sprzężeń pomiędzy poszczególnymi rodzajami fal (lub poszczególnymi równaniami różniczkowymi), niż metoda pierwsza. Pozwoliło to m. in., przy całkowaniu numerycznym równań metodą skończonego kroku, na otrzymanie wyników z dokładnością do trzech znaków już przy podziale obszaru całkowania na 50 podobszarów w przypadku pierwszej metody i na 500 podobszarów w przypadku drugiej. Z ogólnej analizy wynika przy tym, że w metodzie autorów współczynniki sprzężenia są proporcjonalne do krzywizny ścianek i nie mają osobliwości w pobliżu częstotliwości odcięcia, podczas gdy w drugiej — są proporcjonalne do nachylenia ścianek i występuje osobliwość.

Niezależnie od już wymienionych prac wydaje się właściwym omówienie w tym rozdziale pracy Brethertona [35] związanej z falowodami o własnościach wolno zmieniających się wzdłuż falowodu lub w czasie. W pracy stosuje się metodę WKB przy analizie ogólnego systemu liniowych równań opisujących fale w takich falowodach lub w nieograniczonym ośrodku z wolno zmieniającymi się parametrami. Układ równań nie musi być hiperboliczny (falowy charakter rozwiązania może być wymuszony przez odpowiednie warunki graniczne, jak w przypadku fal powierzchniowych na wodzie). Układ ten powinien jednak wynikać z pewnej zasady wariacyjnej. Jest ona na tyle ogólna, że dla zapewnienia istnienia i jednoznaczności rozwiązania wymagane jest zachodzenie dodatkowych naturalnych warunków, spełnionych przez większość regularnych problemów. W pracy omawia się także własności propagacyjne wzdłuż promieni.

6. PRZEGLĄD PRAC WYKORZYSTUJĄCYCH METODĘ RÓWNIANIA CAŁKOWEGO

Rozważmy złącze falowodów prostokątnych, w których obszar przejściowy redukuje się do wycinka płaszczyzny prostokątnej do osi falowodów. Na lewo i na prawo od tej płaszczyzny każdy z falowodów zachowuje jednakowy przekrój i wypełniający go ośrodek jest jednorodny w kierunku propagacji. W płaszczyźnie rozdzielającej może być umieszczo-

na przesłona. Składowe poprzeczne pola w płaszczyźnie rozdzielającej oba falowody można niezależnie wyrazić jako superpozycję składowych poprzecznych rodzajów własnych falowodów z lewej, bądź z prawej strony tej płaszczyzny. Przyrównując do siebie takie dwie superpozycje dla każdej ze składowych poprzecznych pola E i H otrzymuje się układ równań zależny od współczynników rozkładów pola. Można teraz wykorzystać odpowiednie relacje ortogonalności oraz zależność między składowymi poprzecznymi H_t pola H i E_t pola E poszczególnych rodzajów, wynoszącą przykładowo (w przypadku izotropowego i jednorodnego ośrodka. wypełniającego falowód)

$$H_t = \pm Y_e E_t, \quad Y_e = \frac{-jk_0}{\Gamma_{nm}} Y_0 (a_x a_y - a_y a_x), \quad (7)$$

gdzie a_x, a_y wersory układu kartezjańskiego w płaszczyźnie przekroju poprzecznego, $a_x a_y$ — diada, $Y_0 = \sqrt{\varepsilon/\mu}$, $\Gamma_{nm}^2 = (n\pi/a)^2 + (m\pi/b)^2 - k_0^2$, $k_0^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$, reszta oznaczeń standardowa (wykorzystano tu zależność dla rodzajów E_{nm}). Pozwalają one na wyrażenie tych współczynników przez składowe poprzeczne pola E na złączy. Podstawiając wyrażenia na współczynniki do wymienionego układu równań otrzymuje się formalnie równanie całkowe z jądrem o postaci nieskończonej sumy, np. typu

$$G(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma_{no}} \cos(nx) \cos(nx'). \quad (8)$$

W następnym kroku zastępuje się Γ_{no} (7) dla $n \geq N$ przez $n\pi/a$. Taka zmiana pozwala na wykonanie sumy w (8), czyli na wyrażenie pewnego przybliżenia funkcji $G(x, x')$ w zwartej postaci, która umożliwia analityczne rozwiązanie odpowiedniego równania całkowego. Przy $N = 2$ otrzymuje się tzw. przybliżenie quasistatyczne pierwszego stopnia, przy $N = 3$ drugiego itp. Wraz ze wzrostem N w istotny sposób rosną trudności związane z szukaniem analitycznego rozwiązania.

Przedstawiona metoda ma kilka wariantów i znalazła dość szerokie zastosowanie. W omawianym okresie ukazała się praca Zabołotikova [36] omawiająca problem falowodu prostokątnego z przesłoną i umieszczonym za nią szeregiem warstw izotropowych i jednorodnych o różniących się od siebie ε i μ . Podano w niej wyrażenia na współczynniki odbicia przy przybliżeniu quasistatycznym pierwszego, drugiego i trzeciego stopnia.

Lewin [37] przedstawia poprawione rozwiązanie pewnego dwuwymiarowego problemu rozważanego przez Gerosę [38]. Problem ten ma dość długą historię. Dotyczy on złącza dwóch falowodów prostokątnych o wspólnych tworzących, z których jeden jest całkowicie wypełniony poprzecznie namagnesowanym ferrytem. Analiza tego złącza prowadzi do nieskończonego układu liniowych równań algebraicznych. Jest to wynik tego, że w falowodzie z ferrytem zachodzą bardziej skomplikowane związki między polem E_t i H_t niż we wzorze (7).

Wymieniony układ równań został po raz pierwszy podany przez Van Tria [39] i Epstein [40], którzy jednak nie potrafili podać żadnej efektywnej metody jego rozwiązywania. Pierwszą udaną próbę podjęli Sharpe i Heim [41], którzy posłużyli się metodą równania całkowego i podali rozwiązanie dla pewnego zakresu parametrów ferrytu. Nieco później pokazano jednak, że część ich wyników należy uznać za błędną. Zwrócił na to uwagę Lewin podając jednocześnie rozwiązanie, które miało być ważne w dowolnym zakresie para-

metrów ferrytu [42]. Okazało się wtedy, że w dalszym ciągu zachowała się pewna niekonstytucja, wspólna dla obu prac. Chodziło mianowicie o to, że w zakresie parametrów tensora przenikalności magnetycznej ferrytu

$$\mu = \begin{vmatrix} \mu & -it_\mu & 0 \\ it_\mu & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{vmatrix}, \quad (9)$$

dla których

$$\mu_\perp \equiv (\mu^2 - t_\mu^2)/\mu < 0 \quad (10)$$

impedancja obwodu zastępczego, obliczona na podstawie uzyskanych wyników, zawiera niezerową część rzeczywistą. Sugeruje to istnienie strat, pomimo że z poczynionych założeń materiałowych wynika, iż w danym zakresie parametrów problem powinien być bezstratny. Rozwiązanie podane w pracy [42] zostało otrzymane metodą równania całkowego dla I i II stopnia quasistatycznego przybliżenia i było raczej jasne, że otrzymana rozbieżność nie wynika z poczynionych w równaniu przybliżeń.

W kolejnych pracach Lewin [43], [44], Gerosa i Ottawi [45], Barzilai i Gerosa [46] próbowali odnaleźć przyczynę tej rozbieżności. Nawiązywano m. in. do pewnej hipotetycznej fali powierzchniowej, którą Bresler [47] wprowadził aby uniknąć tzw. paradoksu termodynamicznego. Pokazał on mianowicie, że w przypadku istnienia cienkiej szczeliny między bezstratnym ferrytem i bezstratną ścianką falowodu, może w niej powstać fala powierzchniowa, która przenosi skończoną energię, nawet gdy grubość szczeliny dąży do zera. Wy tłumaczenie oparte na istnieniu takiej fali uznano jednak za niezadawalające, gdyż nawet przy dowolnie małych stratach w ferrycie fala, przy grubości szczeliny dążącej do zera, ma tłumienie dążące do nieskończoności.

Szukając innego wyjaśnienia wykazano teoretycznie [46] i doświadczalnie [45] istnienie fali powierzchniowej, propagującej się na styku ferryt-ścianka falowodu w przypadku, gdy przewodność tej ostatniej jest skończona. Jednakże obecność tej fali również nie wyjaśnia rozbieżności, wbrew wnioskowi podanym we wspomnianej już pracy [38]. Lewin [37] wykazał mianowicie, że zarówno przyczynę do impedancji obwodu zastępczego pochodzący od tej fali, jak i amplituda fali, są do zaniedbania przy dużej przewodności ścianek. Samą falę należy jednak uwzględnić w analizie, aby uniknąć zbyt silnej osobliwości pola magnetycznego na złączu, przy krawędzi ferryt-ścianka.

Według Lewina cały problem staje się poprawnie postawiony jeśli dopuścić straty w ferrycie. Można jednak pokazać, że przy małej stratności ferrytu utrzymuje się pewna sprzeczność, która nie pozwala uznać zagadnienia za ostatecznie wyjaśnione.

W pozornej zgodzie z wnioskami Lewina jest praca Gagné [48], w której pokazuje się, że gdy istnieją choćby minimalne straty w ferrycie, to nie powstaje tzw. paradoks termodynamiczny. Paradoks występuje w przypadku, gdy prostokątny falowód o doskonałe przewodzących ściankach jest częściowo wypełniony bezstratnym ferrytem. Jeśli ferryt ten ma wysokość równą wysokości falowodu i przylega do jednej tylko z dwóch ścianek falowodu, równoległych do kierunku stałej magnetyzacji ferrytu, to istnieje tylko jedna fala powierzchniowa niosąca energię. Może się ona przy tym propagować tylko w jednym kierunku [49], [50], [51], [52], [47]. W dodatku, w pewnym zakresie parametrów ferrytu nie istnieje żaden inny rodzaj mogący przenosić energię. Wszystko to sugeruje, że przy

dojściu fali powierzchniowej do poprzecznej ścianki doskonale przewodzącej energia elektromagnetyczna musi znikać, co jest w sprzeczności z założeniem nieistnienia strat.

W związku z omówionymi pracami pozostaje także komunikat Gardiola [53] i związana z nim polemika [54]. Pokazuje się tam na podstawie zależności Kramersa-Kroniga, że każdy ośrodek żyotropowy o tensorze przenikalności magnetycznej zależnym od częstości, musi być stratny.

W nawiązaniu do omówionego zagadnienia złącza falowodów z ferrytem można jeszcze wskazać na pracę [28], w której oblicza się metodami wariacyjnymi współczynniki odbicia przy $\mu_1 > 0$ (por. wzór (10)). Wykazano w niej ciekawy fakt, że dla nieskończonego układu liniowych równań algebraicznych ściśle opisującego problem bezstratny, aproksymowanego przez dowolnie małą liczbę pierwszych równań, otrzymuje się wyrażenie na impedancję zastępczą, która ma zawsze wartość czysto urojoną, nawet gdy znacznie różni się ona od prawdziwej. Oznacza to, że kryterium poprawności wyników numerycznych bazujące na sprawdzaniu zerowania się bilansu energetycznego w przypadku bezstratnym jest tutaj, a zatem może być także gdzie indziej, całkowicie zawodne.

7. PRACE POSŁUGUJĄCE SIĘ UOGÓLNIIONYMI METODAMI OPTYCZNYMI

Należy tu wymienić prace Yee, Felsena, Kellera [55], Hamida [56], Rudducka i Tsai [57], Felsena i Yee [58], dotyczące odbicia od otwartego końca pustego falowodu. Stosowano w nich rozmaite uogólnienia metod optycznych, typu geometrycznej teorii dyfrakcji, pozwalające na badanie propagacji fal elektromagnetycznych przez wyznaczanie drogi zwykłych i ugiętych promieni. Metody te dają asymptotyczne przybliżenia rozwiązań ścisłych i są tym dokładniejsze im mniejsza jest długość fali. Okazuje się jednak, że nawet w zakresie stosunkowo dużych długości fali dają one w praktyce dobre wyniki. W pracy [55] uzyskano np. błąd bezwzględny wyznaczenia modułu współczynnika odbicia od otwartego końca pustego falowodu, utworzonego z dwóch równoległych półpłaszczyzn, rzędu 0,02 przy $0,1 < a/\lambda < 0,46$, gdzie a — odstęp między półpłaszczyznami, λ — długość fali. Falą padającą była fala TEM. Dla fali TE_{01} otrzymano taki sam błąd (bezwzględny, maksymalny) przy $0,5 < a/\lambda < 0,86$.

Uogólnione metody optyczne stosuje się także w pracach Yee i Felsena [59] oraz Hamida [60] przy analizie nieciągłości w falowodach.

8. PRACE POSŁUGUJĄCE SIĘ INNYMI METODAMI

Można tu wymienić Moritę i Nakanishi [61], którzy analizowali falowód kołowy z przerwą o kształcie pełnego pierścienia. Zgodnie ze znaną regułą równoważności przerwę zastąpiono prądem magnetycznym. Prąd ten obliczano w pewnym przybliżeniu magneto-statycznym i uzyskana wartość może być uznana za dobre przybliżenie tylko wtedy, gdy szerokość szczeliny jest dużo mniejsza od długości fali. Zagadnienie to rozwiązano również na innej drodze stosując przybliżenie Bethego, które, jak się okazuje z porównania wyników, może być użyte i w tym przypadku, ale dla jeszcze węższych szczelin niż w metodzie poprzedniej. W pracy Garba i innych [62] rozważano szczelinę o szerokości d i dowolnej długości, wyciętą w płaskim fragmencie ekranu o grubości t , umieszczonego w obszarze

o dowolnej konfiguracji ograniczeń wypełnionym ośrodkiem jednorodnym i izotropowym. Stosując pewne uproszczenia pokazano, że szczelinę tę można zastąpić inną szczeliną, o szerokości d' , umieszczoną w cienkim ekranie zajmującym miejsce grubego. Wyrażenia na d' wyprowadzono dla dowolnej wartości stosunku t/d przy założeniu, że $\lambda \gg t$, $\lambda \gg d$, gdzie λ — długość fali.

Z kolei można tu wymienić pracę Bogdanova i Černjakova [63], omawiającą zagadnienie sprzężenia dwóch falowodów współosiowych przez małą aperturę wypełnioną bryłką ferrytową (ferrytowy rezonator). Apertura jest wycięta w przesłonie umieszczonej prostopadle do osi falowodów. Opierając się na wynikach innych prac, które określiły sposób promieniowania bryłki i powstające w niej straty, podano współczynnik przejścia dla fali o częstotliwości rezonansu ferromagnetycznego. Wyniki uzyskano na drodze stosowania trudnych do oszacowania przybliżeń.

Na zakończenie można jeszcze wskazać na pracę Gromovej i Kurušina [64], w której podano współczynniki przejścia i odbicia otrzymane dla złącza dwóch falowodów prostokątnych o wspólnych tworzących, z których jeden jest częściowo wypełniony ferrytem. Ścianka ferrytu nie dotykająca ścianek falowodu jest przy tym pokryta słojem przewodzącym. Wyniki miały być otrzymane metodą Wienera-Hopfa, wydaje się jednak, że musiała ona być zastosowana do jakiegoś równania opisującego problem w sposób przybliżony. Nie można tego sprawdzić ponieważ autorzy nie podają schematu obliczeń. Jak jednak wiadomo, metodę Wienera-Hopfa zastosowano z powodzeniem jedynie do przypadków typu asymetrycznej przesłony połówkowej w falowodzie prostokątnym, rozwidlenia takiego falowodu lub złącza falowodu o ściankach bezstratnych z falowodem o ściankach stratnych. Zawiodła ona (przy poszukiwaniu rozwiązań ścisłych) w przypadku przesłon niepołówkowych, zmian przekroju falowodów lub zmian ośrodka podczas przejścia przez złącze. Dlatego też wyniki pracy [64] należy traktować ze sceptycyzmem.

9. UWAGI KOŃCOWE

Rozdział ten jest głównie poświęcony uwagom dotyczącym zakresu stosowalności metod stanowiących podstawę klasyfikacji prac omówionych w referacie.

Zaczynając od metody zsyzywania warto zauważyć, że można ją z pożytkiem zastosować tylko w przypadku, gdy rozważany obszar można podzielić na raczej niewielką liczbę podobszarów, z których dla każdego znany jest układ zupełny rozwiązań równań Maxwella (chodzi tu o zupełność na wspólnych ograniczeniach podobszarów). Jest rzeczą jasną, że obecność ośrodków anizotropowych utrudnia znalezienie takich rozwiązań. Mogłoby się tu także okazać, że znajomość odpowiedniego układu zupełnego nie jest wystarczająca do poprawnego postawienia problemu zsyzywania (kwestia ta jest omówiona bliżej w tym rozdziale, w końcowej uwadze dotyczącej metody równania całkowego).

O ile chodzi o metody typu Ritza, to abstrahując od potrzeby dysponowania przy ich użyciu odpowiednio szybko działającymi maszynami liczącymi, należy stwierdzić, że mają one uniwersalny zakres zastosowań. Można ich używać w przypadku skomplikowanych obszarów niejednorodnych i anizotropowych. Ponadto, przy odpowiednim doborze funkcjonałów wyjściowych, można jako funkcji próbnych stosować funkcje nie spełniające warunków brzegowych (por. np. pracę [16]). Powoduje to jedynie dość znaczne zwiększenie

liczby równań, które należy rozwiązać, aby uzyskać zadaną dokładność. Niedogodnościami są wspomniane wymagania dotyczące mocy obliczeniowych używanych środków liczących oraz nieanalityczna forma uzyskiwanych wyników. Temu ostatniemu mankamentowi można by zaradzić, wtórnie dopasowując do wyników numerycznych odpowiednie funkcje od kilku zmiennych. Należy przewidywać wciąż rosnące zastosowanie tych metod.

Podobne uwagi stosują się do metod podgrupy Ic, z tą różnicą, że wymagają one na ogół jeszcze większych mocy obliczeniowych. Być może, że podana w pracy [22] metoda będzie tu korzystnym wyjątkiem.

W omówionych metodach błąd ocenia się zwykle na podstawie rozmaitego rodzaju porównań. Bada się np. różnice między rozwiązaniami uzyskiwanymi dla różnej liczby wziętych pod uwagę równań algebraicznych. Bada się także błąd w punktach szczególnych, w których znane jest ścisłe rozwiązanie lub wyniki eksperymentu. W przypadku problemu bezstratnego można badać, czy zachodzi przybliżone zerowanie się bilansu energetycznego. Jest rzeczą ważną, aby przy tego rodzaju ocenach błędu opierać się na kilku rozmaitych porównaniach. Można tu na poparcie tej tezy przytoczyć jeden ze wspomnianych już wyników pracy [28], w której uzyskano systematyczne zerowanie się bilansu energetycznego dla jawnie niepoprawnych wyników. Nie wchodziło przy tym w grę stosowanie metody, która z definicji zapewnia spełnianie takiego bilansu.

Wydaje się, że ogólnie zbyt mało zwraca się uwagi na dokonywanie ścisłej oceny błędu mimo, że często można by ją uzyskać kosztem niewielkiej dodatkowej pracy znając odpowiednie proste twierdzenia. Jest rzeczą oczywistą, że rozwiązanie przybliżone, dla którego jest znana ścisła i dostatecznie mała ocena błędu, nie różni się w praktyce niczym, pod względem zawartości informacyjnej, od rozwiązania ścisłego. Rozwiązanie przybliżone natomiast, które nie posiada takiej oceny, może mieć wartość wręcz dezinformacyjną.

Przechodząc do grupy metod wariacyjnych obliczania wartości funkcjonałów, należy jeszcze raz zwrócić uwagę na ich podstawową zaletę, którą jest otrzymywanie wyniku z błędem drugiego rzędu względem błędów przybliżonych rozwiązań odpowiednich problemów. W przypadku najprostszych problemów rozpraszania w obszarach o dostatecznej regularności, wypełnionych ośrodkami izotropowymi, bezstratnymi i kawałkami jednorodnymi, daje się często uzyskać dwa funkcjonały, z których jeden osiąga minimum, zaś drugi maksimum dla rozwiązań problemu. Te minimum i maksimum są wspólne i równe poszukiwanej wielkości. W takim przypadku otrzymuje się, na ogół bardzo małym kosztem obliczeniowym, korzystną ocenę błędu, która jest drugiego rzędu względem błędów przybliżonych rozwiązań. Przykładem są tutaj funkcjonały Schwingerowskie, zależne raz od pola elektrycznego, a raz od pola magnetycznego, wyprowadzone w celu obliczenia impedancji wejściowej pewnych typów złączy falowodów cylindrycznych [14].

Dla problemów nieco tylko bardziej skomplikowanych, takiego rodzaju pary funkcjonałów nie są na ogół znane. Dlatego też wydaje się pożyteczną metoda opisana w pracy [28], dająca możliwość ścisłej oceny błędu dla ogólnej klasy problemów liniowych, przy czym ocena ta jest także drugiego rzędu względem błędów przybliżonych rozwiązań (por. rozdz. 4). Można tu przy okazji zauważyć, że przez odpowiedni dobór równań wyznaczających rozwiązania przybliżone otrzymuje się sytuację, w której znajomość obu tych rozwiązań jest potrzebna jedynie do obliczenia korzystnej oceny błędu. Do wyznaczenia wartości funkcjonału pomocniczego wystarcza w tym przypadku tylko przybliżone roz-

wiązanie równania (1), ponieważ istnieje wtedy dogodna zależność między obu rozwiązaniami. Otrzymana wartość funkcjonu pomocniczego jest równa przybliżonej wartości funkcjonu wyjściowego ($\langle u^0, g \rangle$) obliczonej przez podstawienie do niego przybliżonego rozwiązania u na miejsce nieznanego u^0 . W takim ujęciu wspomniana metoda różni się od metody Ritza jedynie tym, że umożliwia podanie korzystniejszej oceny błędu.

Jeżeli chodzi o metody grupy III, to ich zastosowanie jest w zasadzie ograniczone tylko do analizy falowodów o prostszych przekrojach z możliwie jednorodnym wypełnieniem, gdyż w innym przypadku nie jest znana analityczna postać rodzajów falowodu porównawczego, potrzebna przy wyprowadzaniu równań. Metoda poprzecznych przekrojów nie zapewnia przy tym spełnienia warunków brzegowych w przypadku falowodów o zmiennym przekroju, co dodatkowo zmniejsza jej zakres zastosowań. Niedogodności tej nie posiada metoda falowodów stycznych omówiona w pracach [33], [34].

Metoda równania całkowego wydaje się być już bliską całkowitego wyeksploatowania. Jest to wynikiem jej ścisłego powiązania z rodzajami falowodu prostokątnego, co wybitnie ogranicza jej zakres. Jest ona dosyć dokładna (w przypadku opisanym w rozdz. 4 błąd bezwzględny modułu współczynnika odbicia wynosił 0,09 dla przybliżenia I stopnia i 0,02 dla przybliżenia II stopnia) i daje rozwiązania w postaci analitycznej.

W związku z otrzymanymi tą metodą wynikami dotyczącymi złącza falowodów prostokątnych z ferrytem można m. in. przypuszczać, że dla $\mu_{\perp} < 0$ (por. (10)) nie da się w sposób poprawny wyrazić pola elektromagnetycznego w pobliżu złącza przez odpowiedni nieskończony szereg zwykłych, dwuwymiarowych rodzajów własnych falowodu. Zachodziłoby to mimo, że składowe poprzeczne pola elektrycznego tych rodzajów stanowią układ zupełny, pozwalający wyrazić dowolne ciągłe pole wektorowe, które posiada składową tylko w kierunku wektora stałej magnetyzacji rozważanego falowodu z ferrytem i jest zmienne tylko w kierunku poprzecznym do tego wektora i do kierunku tworzących falowodu. Zupełność ta pozwalałaby jedynie na zapewnienie spełnienia warunków brzegowych, ale otrzymany szereg spełniający te warunki mógłby nie być dostatecznie regularny, aby można go było różniczkować wyraz po wyrazie. Mógłby on zatem nie być rozwiązaniem równań Maxwella.

Kończąc to omówienie na uogólnionych metodach optycznych można zauważyć, że znajdują one prawdopodobnie szereg użytecznych zastosowań — również w przypadku obecności ośrodków anizotropowych. Powinny one być najefektywniejsze w przypadku nieciągłości typu przesłoni i zmian przekroju oraz małych niejednorodności umiejscowionych w falowodzie. Pełną ocenę ich efektywności przy analizie złączy falowodów z małą liczbą propagujących się rodzajów będzie można jednak uzyskać dopiero po otrzymaniu rozwiązań dla dostatecznej liczby wzorcowych problemów.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. K. Bochenek, Metody analizy pól elektromagnetycznych, PWN, Warszawa-Wrocław 1961, str. 124.
2. B. Z. Kacnelenbaum, Teoria neregularnych volnovodov, Izd. AN SSSR, Moskwa 1961.
3. A. Wexler, Solution of Waveguide Discontinuities by Modal Analysis, IEEE Trans. MTT-15, 9, (67), 508 - 16.

4. J. Bach Andersen, B. Majborn, Semiconductor Rod in Waveguide-Field Distribution for Positive and Negative Conductivity, IEEE Trans. **MTT-16**, 3 (68), 194 - 6.
5. J. J. Campbell, Application of the Solutions of Certain Boundary Value Problems to Some Configurations of Parallel-Plate Waveguides, IEEE Trans. **MTT-16**, 3 (68), 165 - 76.
6. J. J. Campbell, W. R. Jones, Symmetrically Truncated Right — Angle Corners in Parallel-Plate and Rectangular Waveguides, IEEE Trans. **MTT-16**, 8 (68), 517 - 29.
7. V. G. Feoktistov, Rasčot poloskovogo Y-cirkulatora, Rad. Elektr., **13**, 7 (68), 1281—85.
8. W. W. Siekanowicz, W. A. Schilling, A New Type of Latching Switchable Ferrite Junction Circulator, IEEE Trans. **MTT-16**, 3 (68), 177 - 83.
9. C. G. Parsonson, S. R. Longley, J. B. Davies, The Theoretical Design of Broadband 3-Port Waveguide Circulators, IEEE Trans. **MTT-16**, 4 (68), 256 - 8.
10. A. K. Stoljarov, I. P. Tjukov, Rasčot električeskich parametrov voľnovodnyh Y-cirkulatorov, Rad. Elektr., **12**, 12 (67), 2123 - 31.
11. M. B. Hall, W. E. Little, A Directional Coupler with a Readily Calculable Coupling Ratio, IEEE Trans. **MTT-15**, 11 (67), 598 - 603.
12. T. D. Shockley, C. R. Haden, C. E. Lewis, Application of the Point-Matching Method in Determining the Reflection and Transmission Coefficients in Linearly Tapered Waveguides, IEEE Trans. **MTT-16**, 8 (68), 562 - 4.
13. R. H. Sheikh, M. W. Gunn, Wave Propagation in a Rectangular Waveguide Inhomogeneously Filled with Semiconductors, IEEE Trans. **MTT-16**, 2 (68), 117 - 21.
14. R. E. Collin, Prowadzenie fal elektromagnetycznych, WNT, Warszawa 1966.
15. N. Amitay, On the Scalar Product of Certain Circular and Cartesian Wave Functions, IEEE Trans. **MTT-16**, 4 (68), 265 - 6.
16. V. V. Nikolskij, Variacjonnyje metody dlja vnutrennyh zadač elektrodinamiki, Izd. „Nauka” GREML, Moskva 1967.
17. V. V. Nikolskij, D. I. Kornijenko, I. P. Kotik, Rasčot matricy rassejanija voľnovodnogo transformatora s ferritom, Rad. Elektr. **13**, 12 (68), 2172 - 8; **14**, 1 (69), 41 - 8.
18. A. G. Medoks, K teorii simmetričnogo voľnovodnogo Y-sočlenenija, Rad. Elektr., **13**, 1 (68), 136 - 9.
19. A. G. Medoks, K rasčotu voľnovodnogo Y-cirkulatora, Radiotechn. **9** (67), 30 - 5.
20. I. S. Beľuga, K rasčotu voľnovodov i rezonatorov metodami častičnyh oblastej (skalarnaja zadača), Rad. Elektr., **13**, 8 (68), 1357 - 64.
21. E. M. Vorobiev, Rassejanije elektromagnitnyh voľn v neregularnyh voľnovodach krugłogo poperečnogo sečenija na častotach bliskich k kritičeskim, Rad. Elektr., **12**, 10 (67), 1721 - 5.
22. P. L. Arlett, A. K. Bahrani, O. C. Zienkiewicz, Application of Finite Elements to the Solution of Helmholtz's Equation, Proc. IEE (London), **115**, 12 (68), 1762 - 6.
23. N. Amitay, V. Galindo, Application of a New Method for Approximate Solutions and Error Estimates to Waveguide Discontinuity and Phased Array Problems, Radio Sci., **3**, 8 (68), 830 - 43.
24. L. N. Gejvandov, I. B. Levinson, P. S. Fridberg, Rasčot elementov matricy rassejanija dwuchščelevykh voľnovodnyh sočlenenii (simmetričnyj slučaj), Rad. Elektr., **12**, 6 (67), 1067 - 73.
25. L. N. Gejvandov, I. B. Levinson, Variacjonnyj princip dlja matricy admitansov pri elektromagnitnoj svjazi obemov i metod sostavnykh ekvivalentnykh schem. Rad. Elektr., **13**, 7 (68), 1249 - 60.
26. R. Reitzig, Use of the Variation Principle to Determine the Effect of Small Discontinuities in Circular Waveguides (po niemiecku), Frequenz, **22**, 2 (68), 45 - 51.
27. M. Szałek, Error Estimates for Some Variational Methods Applicable to Scattering and Radiation Problems, Quart. Appl. Math., **27**, 4 (70), 473 - 9.
28. M. Szałek, Metoda wariacyjna dla liniowych procesów rozproszeniowych i jej zastosowanie w teorii falowodów. Rozprawa doktorska, IPPT PAN, 1968.
29. N. Marcuvitz, (red.), Waveguide Handbook, Mc Graw-Hill, New York, Toronto, London 1951, str. 243 - 246.

30. N. P. Kerženceva, Koeficient otaženija ot izloma osi w mnogovoľnovom voľnovode, Rad. Elektr., **12**, 8 (67), 1378 - 85.
31. N. P. Kerženceva, Koeficient otaženija ot izognutogo mnogovoľnovogo voľnovoda, Rad. Elektr., **13**, 6 (68), 977 - 82.
32. C. C. Tang, Forward and Backward Scattered Modes in Multimode Nonuniform Transitions, IEEE Trans. **MTT-16**, 8 (68), 494 - 502.
33. E. Bahar, Wave Scattering in Nonuniform Waveguides with Large Flare Angles and Near Cutoff, IEEE Trans. **MTT-16**, 8 (68), 503 - 10.
34. E. Bahar, G. Crain, Synthesis of Multimode Waveguide Transition Sections, Proc. IEE (London), **115**, 10 (68), 1395 - 7.
35. F. P. Bretherton, Propagation in Slowly Varying Waveguides, Proc. Roy. Soc. (G.B.) **A 302**, 1471 (68), 555 - 76.
36. J. P. Zaboľotikov, Opredelenije koeficienta otaženija pri padenii voľny H_{10} na nesimetričnuju induktivnuju diafragmu w prjamougolnom voľnovode s sistemoj radioprozračnych plastinok, Rad. Elektr., **12**, 6 (67), 996 - 1004.
37. L. Lewin, Generation and Effect of Surface Waves at a Waveguide-Ferrite Boundary, Proc. IEE (London), **115**, 7 (68), 895 - 7.
38. G. Gerosa, Solution of the Discontinuity Problem Between an Empty Rectangular Waveguide and the Same Waveguide Completely Filled with Transversely Magnetized Ferrite, Alta Frequenza, **36**, 8 (67), 732 - 5.
39. A. A. Van Trier, Guided Electromagnetic Waves in Anisotropic Media, Appl. Sci. Res. **3B**, 4 - 5 (53), 305 - 71.
40. P. S. Epstein, Theory of Wave Propagation in a Gyromagnetic Medium, Rev. Mod. Phys., **28**, 1 (56), 3 - 17.
41. C. B. Sharpe, D. S. Heim, A Ferrite Boundary-Value Problem in a Rectangular Waveguide, IRE Trans. **MTT-6**, 1 (58), 42 - 6.
42. L. Lewin, A Ferrite Boundary-Value Problem in a Rectangular Waveguide, Proc. IEE (London), **106B**, 30 (59), 559 - 63.
43. L. Lewin, The Part Played by Surface Waves on the Reflection at a Ferrite Boundary, Proc. IEE (London), **108C**, 14 (61), 359 - 61.
44. L. Lewin, The Use of Singular Integral Equations in the Solution of Waveguide Problems, w książce: L. Young, Advances in Microwaves, Vol. 1, Academic Press 1966.
45. G. Gerosa, C. M. Ottavi, Experimental Verification of the Theoretical Behaviour of Some Ferrite Structures, Electronics Letters, **2**, 2 (66), 132 - 3.
46. G. Barzilai, G. Gerosa, Rectangular Waveguides Loaded with Magnetized Ferrite, and the so-Called Thermodynamic Paradox, Proc. IEE (London), **113**, 2 (66), 285 - 8.
47. A. D. Bresler, On the TE_{n0} Modes of a Ferrite-Slab-Loaded Rectangular Waveguide and the Associated Thermodynamic Paradox, IRE Trans. **MTT-7**, 1 (60), 81 - 95.
48. R. R. Gagné, The Paradoxical Surface Wave (Crack Wave) in Ferrite-Filled Waveguides, IEEE Trans. **MTT-16**, 4 (68), 241 - 50.
49. B. Lax, K. J. Button, Theory of New Ferrite Modes in Rectangular Waveguide, J. Appl. Phys., **26**, 9 (55), 1184 - 5.
50. H. Seidel, Ferrite Slabs in Transverse Electric Mode Waveguide, J. Appl. Phys., **28**, 2 (57), 218 - 26.
51. G. Barzilai, G. Gerosa, Modes in Rectangular Guides Partially Filled with Transversely Magnetized Ferrite, IRE Trans. **AP-7**, 12 (59), S 471 - 74.
52. G. Barzilai, G. Gerosa, Modes in Rectangular Guides Loaded with a Transversely Magnetized Slab of Ferrite Away from the Side Walls, IRE Trans. **MTT-9**, 9 (61), 403.8.
53. F. E. Gardiol, On the Thermodynamic Paradox in Ferrite Loaded Waveguides, Proc. IEEE (USA), **55**, 9 (67), 1616 - 17.
54. I. Brown, F. E. Gardiol, Comment „On the Thermodynamic Paradox in Ferrite-Loaded Waveguides”, Proc. IEEE (USA), **56**, 4 (68), 740.

55. H. Y. Yee, L. B. Felsen, J. B. Keller, Ray Theory of Reflection from the Open End of a Waveguide, J. SIAM, **16**, 2 (68), 268 - 300.
56. M. A. Hamid, Reflection Coefficient at a Horn-Waveguide Junction, IEEE Trans. **AP-15**, 7 (67) 564 - 5.
57. R. C. Rudduck, L. L. Tsai, Aperture Reflection Coefficient of TEM and TE₀₁ Mode Parallel-Plate Waveguides, IEEE Trans. **AP-16**, 1 (68), 83 - 9.
58. L. B. Felsen, H. Y. Yee, Ray-Optical Techniques for Waveguide Discontinuities, IEEE Trans. **AP-16**, 2 (68), 268 - 9.
59. H. Y. Yee, L. B. Felsen, Ray-Optical Calculation of Scattering by Waveguide Discontinuities, V. Intern. Antennas and Propagation Symposium, Ann Arbor 1967 (New York, IEEE Inc., 1967) pp. 248 - 56.
60. M. A. Hamid, An Investigation of Sharp Discontinuities in a Rectangular Waveguide by Ray Theory, G-MTT International Microwave Symposium, Detroit 1968 (IEEE, Detroit 1968), pp. 39 - 40.
61. N. Morita, Y. Nakanishi, Circumferential Gap in a TE₀₁-Mode-Transmitting Multimode Circular Waveguide, IEEE Trans. **MTT-16**, 3 (68), 183 - 9.
62. H. L. Garb, I. B. Levinson, P. S. Fridberg, Učot toľščiny stenki w ščelewych zadačach elektrodinamiki, Rad. Elektr., **13**, 12 (68), 2152 - 61.
63. G. B. Bogdanov, A. G. Černjakov, Korotkozamknuty koaksjalnye voľnovody svjazannye šarovidnym ferritovym obrazcom, Rad. Elektr., **13**, 3 (68), 416 - 19.
64. L. I. Gromova, E. P. Kurušin, O raspredelenii énergii po tipam voľn v ferritovych ventiljach so smieščeniem poľja, Rad Elektr., **13**, 9 (68), 1716 - 18.

M. SZALEK

CURRENT APPLICATIONS OF THE THEORY OF CYLINDRICAL WAVEGUIDE JUNCTIONS

Summary

A review of a group of papers concerning the theory of cylindrical waveguide junctions is presented. The attention is paid mainly to the methods of analysis used and the question of the correctness of their application as well as to the accuracy of results obtained and the possibilities of extending the range of application of these methods to more general cases.

M. SZALEK

APPLICATIONS ACTUELLES DE LA THÉORIE DES JONCTIONS DES GUIDES D'ONDES CYLINDRIQUES

Résumé

On a fait la revue d'un groupe des travaux concernant la théorie des jonctions des guides d'ondes cylindriques. L'attention était concentrée sur les méthodes d'analyse, sur le problème de la correction de leur emploi, sur l'exactitude des résultats obtenus et sur les possibilités d'extension du domaine d'application de ces méthodes aux cas plus généraux.

M. SZALEK

AKTUELLE ANWENDUNGSWEISEN DER THEORIE FÜR
ZYLINDERWELLENLEITERVERBINDUNGEN

Zusammenfassung

Es wurde eine Übersicht über eine Anzahl von Bearbeitungen betreffs Theorie der Zylinderwellenleiterverbindungen vorgenommen. Vor allem wurden die gebräuchlichen Analysenmethoden, die Richtigkeit deren Anwendungsweise, erreichte Meßpräzision, sowie die Erweiterung der Anwendungsmöglichkeiten für diese Methoden überprüft.

М. ШАЛЕК

АКТУАЛЬНЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ СОЕДИНЕНИЙ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

Резюме

Произведен обзор группы работ, касающихся теории соединений цилиндрических волноводов. В основном, внимание сосредоточено на применяемых методах анализа, на вопросе правильности их применения, на достигнутой точности результатов, а также на возможностях расширения области применимости этих методов к более общим случаям.

M. Białko, Z. Wierzbicki: Surface States Charge of CdSe Films	161
Charge des états superficiels sur la surface d'une couche de SeCd	161
Ladung der Oberflächenzustände auf CdSe-Schichte	161
W. Gruszczyński, G. Mionskowski, H. Wierzb: Optimalization Method for the Noise Factor of Wideband Transistor Amplifier	169
Optimierungsmethode des Rauschfaktors eines Transistorbreitbandverstärkers	169
M. Białko, J. Roszkiewicz: Methods of Distributed RC Network Synthesis — Part 1 — Methods of Passive Network Synthesis	191
Les méthodes de synthèse des circuits RC à constantes distribuées	191
Syntheseverfahren für RC-Schaltungen mit verteilten Parametern — Teil I — Synthesenverfahren passiver RC-Schaltungen	191
M. Szalek: Current Applications of the Theory of Cylindrical Waveguide Junctions	211
Applications actuelles de la théorie des jonctions des guides d'ondes cylindriques	211
Aktuelle Anwendungsweisen der Theorie für Zylinderwellenleiterverbindungen	212

СОДЕРЖАНИЕ

З. Ковальски: Методы проверки гипотезы о нормальном распределении элементов составляющих малый объем	21
Т. Миссала: Обобщенная теория сельстнов, а также теория сельстна-трансформатора и анализ его погрешностей, вызванных неточностью обработки	73
Й. С. Зелиньски: Исследование внутренних перенапряжений в электроэнергетической сети 30 кв. с применением анализатора переходных процессов	90
З. Ковальски: Методы построения эконометрических моделей динамики и их применение в электроэнергетических системах	107
З. Целиньски: Электрические параметры магнитогидродинамического генератора типа Холла с неравномерными параметрами газа в направлении магнитного поля	123
В. Росиньски: Имплантация ионов в полупроводниковые материалы	149
М. Бялко, З. Вежбицки: Заряд поверхностных состояний плёнки	162
В. Грущиньски, Г. Мёнсковски, Х. Вежба: Метод оптимизации коэффициента шума транзисторного, широкополосного усилителя	169
М. Биалко, Й. Рошкевич: Методы синтеза схем с распределенными параметрами	192
М. Шалек: Актуальные применения теории соединений цилиндрических волноводов	212

Rozprawy Elektrotechniczne

Kwartalnik

WARUNKI PRENUMERATY CZASOPISMA

Cena prenumeraty rocznej	zł 160.—
„ „ półrocznej	zł 80.—

Instytucje państwowe, społeczne, zakłady pracy, szkoły itp. mogą zamawiać prenumeratę wyłącznie w miejscowych oddziałach i delegaturach „Ruch”.

Prenumeratorzy indywidualni mogą opłacać prenumeratę w urzędach pocztowych i u listonoszy, lub dokonywać wpłat na konto PKO nr 1-6-100020 — Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw „Ruch”, Warszawa, ul. Towarowa 28 (w terminie do 10 dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty).

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od od prenumeraty krajowej, przyjmuje Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych „Ruch”, Warszawa, ul. Wronia 23, konto PKO nr 1-6-100024.

Bieżące i archiwalne numery można nabywać lub zamawiać we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Warszawa, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

Sprzedaż egzemplarzy numerów zdezaktualizowanych, na uprzednie pisemne zamówienie, prowadzi Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw „Ruch”, Warszawa, ul. Towarowa 28.

Subscription orders can be sent directly to: Export and Import Enterprise „Ruch”, Warszawa 1, P. O. Box 154, sending remittance of 16\$ through the Bank Handlowy — Warszawa, Traugutta 7

KOMITET ELEKTROTECHNIKI
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XVII-ZESZYT 2

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1971

TREŚĆ

P. J. Nowacki, M. Kędzierski: Nowy układ mostkowy do pomiaru uchybu kąowego watomierzy elektrodynamicznych	215
W. J. Stepowicz: Właściwości stałoprądowe struktury czterowarstwowej o równomiernym rozkładzie koncentracji domieszek w poszczególnych obszarach	227
M. Białko, W. Sieńko: Synteza liniowych układów scalonych metodami przestrzeni stanów. Część 1: Wiadomości wstępne i synteza funkcji przenoszenia	235
W. Sieńko, M. Białko: Synteza liniowych układów scalonych metodami przestrzeni stanów. Część 2: Synteza admitancyjna	253
J. Łyskanowski: Wpływ źródła przełączającego na działanie tranzystorowego przekąznika czasowego z obwodem RC	269
J. Komisarczuk: Metoda linii ćwierćfalowej w zastosowaniu do pomiaru elementów przetłotowych w szerokim paśmie częstotliwości	281
J. Ząbrowski: Charakterystyki przejściowe układów logicznych z potencjałowym kodowaniem sygnałów	291
M. Skowrońska: Optymalizacja rozwiązań filtru elektrycznego w oparciu o teorię grafów i maszynową syntezę układów	317
P. Bublewicz, J. Kochman: Wybrane zagadnienia teorii traktów liniowych	365

CONTENTS — TABLE DES MATIÈRES — INHALT

P. J. Nowacki, M. Kędzierski: New Bridge Circuit to Measure Angle Error in Electrodynamic Wattmeters	225
Le nouveau circuit à pont pour mesurer l'erreur de l'angle des wattmetres électrodynamiques	225
Neue Brückenschaltung zur Bemessung des Fehlwinkels eines elektrodynamischen Wattmeters	226
W. J. Stepowicz: DC Properties of a Three-Junction Semiconductor Structure	233
Eigenschaften vierschichtiger Gleichstromstrukturen mit gleichmässiger Verteilung in einzelnen Zonen der Beimengungskonzentration	234
M. Białko, W. Sieńko: Application of State Space Methods to Synthesis of Linear Integrated Networks. Part 1: Introductory Information and Transfer Function Synthesis	251
Synthèse des circuits linéaires intégrés par des méthodes d'espace d'états. Partie 1: Introduction et synthèse des fonctions de transfert	252
Zustand-Variable-Methode der Synthese von integrierten Schaltungen. Teil 1: Einführung in die Problematik und Übergangsfunktionssynthese	252
W. Sieńko, M. Białko: Application of State Space Methods to Synthesis of Linear Integrated Networks. Part 2: Admittance Synthesis	267
Synthèse des circuits linéaires intégrés par des méthodes d'espace d'états. Partie 2: Synthèse par admittances	268
Zustand-Variable-Methode der Synthese von integrierten Schaltungen. Teil 2: Admittanz-Synthese	268
J. Łyskanowski: Influence of Switching Generator on Work of Transistor Time Relay with RC Circuits	280
Einfluss der Umschaltungsquelle auf die Arbeit eines Transistorzeitrelais mit RC-Glied	280
J. Komisarczuk: Quarter-Wave Method Used for Measurements of Two-Port Elements in a Wide Band	289

KOMITET ELEKTROTECHNIKI
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XVII·ZESZYT 2

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1971

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor Naczelny

PROF. DR WITOLD NOWICKI

Członkowie

PROF. TADEUSZ CHOLEWICKI, PROF. EUGENIUSZ JEZERSKI,
PROF. DR WITOLD ROSIŃSKI, PROF. DR STANISŁAW RYŻKO

Sekretarz

JANINA MATHEISEL

ADRES REDAKCJI

*Warszawa, Politechnika, Plac Jedności Robotniczej 1
Instytut Teleelektroniki, Gmach Elektroniki
pokój 472, tel. 21-007-232 oraz 25-09-10*

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

Warszawa, Miodowa 10

Nakład 640 (509+131)	Oddano do składania 6. II. 1971 r.
Ark. wyd. 15,0 ark. druk. 11,5	Podpisano do druku w maju 1971
Papier druk. sat. kl. III, 80 g, 70×100	Druk ukończono w czerwcu 1971
Zamówienie nr 205/71	Cena zł 40.— U-91

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

Nowy układ mostkowy do pomiaru uchybu kąтового watomierzy elektrodynamicznych

PAWEŁ JAN NOWACKI (WARSZAWA), MARIAN KĘDZIERSKI (WARSZAWA)

Instytut Elektrotechniki

Otrzymano 16.4.1970

W referacie przedstawiono analityczne związki, jakie zachodzą między uchybem pomiaru mocy i uchybem granicznym watomierza spowodowanym uchybem kątowym watomierza.

W oparciu o parametry watomierza autorzy wyprowadzili wzór na uchyb kątowy watomierza wprowadzając między innymi indukcyjność wzajemną między cewkami obwodu prądowego a cewką obwodu napięciowego. Wpływ indukcyjności wzajemnej okazał się dominujący wobec indukcyjności własnej obwodu napięciowego nawet dla watomierzy o wskaźniku świetlnym.

Dla potwierdzenia teoretycznych wywodów opracowano nowy mostek złożony z elementów R i C , zaopatrując go w gałąź pomocniczą Wagnera dla eliminacji sprzężeń doziemnych. Mostek umożliwia pomiar uchybu kąтового watomierza w granicach przesunięcia fazowego $-90^\circ \dots 0^\circ \dots +90^\circ$ i posiada dodatkowy układ dla dokładnego ustalenia przesunięcia fazowego 0° i -90° lub $+90^\circ$.

W końcowej części referatu podano wyniki pomiarów dokonanych powyższym mostkiem, które uzasadniają tezy wysunięte w części teoretycznej.

1. WSTĘP

W ostatnim dwudziestoleciu ukazało się kilka prac z dziedziny pomiarów małych przesunięć fazowych między prądem a napięciem. W miernictwie elektrycznym zainteresowania skupiły się na pomiarze uchybu kąтового watomierzy elektrodynamicznych (por. np. [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], i [9]). Uchyb pomiaru mocy i uchyb dodatkowy watomierza wiąże się ściśle z uchybem kątowym watomierza. W tej dziedzinie istnieje szereg niejasności. Konstruktorzy watomierzy traktowali dotychczas indukcyjność własną obwodu napięciowego jako główną przyczynę uchybu kąтового, która była rachunkowo uchwytana (zjawisko prądów wirowych w masach metalowych jak i pojemności szkodliwe są w praktyce trudne do uwzględnienia zarówno drogą teoretyczną jak i doświadczalną). Jak wykazały szczegółowe badania polskiego watomierza PD 1 oraz innych watomierzy, zjawisko indukcyjności wzajemnej między obwodem prądowym a napięciowym wywierać może znacznie większy wpływ na uchyb kątowy niż indukcyjność własna obwodu napięciowego. Wyprowadzono wzór na uchyb kątowy watomierza jako funkcję jego parametrów, które można określić drogą pomiarów.

Dla częściowego potwierdzenia teorii opracowano układ do pomiaru uchybu kąтового watomierza, pozwalający na pomiary w granicach zmian przesunięcia fazowego $-90^\circ \dots 0^\circ \dots +90^\circ$. Układ składa się z mostka prądu zmiennego zawierającego elementy R i C . Dla umożliwienia pomiaru małych wartości kąta fazowego między prądem cewki napięciowej i napięciem zastosowano gałąź pomocniczą Wagnera, która całkowicie eliminuje wpływ sprzężeń doziemnych. Nowy mostek zaopatrzono ponadto w układ do dokładnego ustawienia przesunięcia fazowego 0° oraz $\pm 90^\circ$, który opiera się na zasadzie kompensacyjnej. Wykonano szereg pomiarów układem mostkowym dla sprawdzenia wyprowadzonego wzoru na uchyb kątowy watomierza w zależności od jego parametrów. Pomiary potwierdziły słuszność teoretycznego rozumowania.

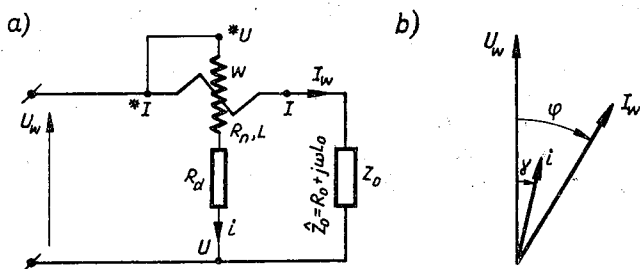
2. UCHYB KĄTOWY I JEGO WPŁYW NA DOKŁADNOŚĆ POMIARU MOCY

Na rys. 1a przedstawiono najczęściej stosowany sposób włączenia watomierza elektrodynamicznego, a na rys. 1b przynależny wykres wskazowy.

Moc wskazana przez watomierz wynosi:

$$P_w = kiI_w \cos(\varphi - \gamma) = k \frac{U_w I_w}{Z} \cos(\varphi - \gamma) = k \frac{U_w I_w}{R} \cos \gamma \cos(\varphi - \gamma), \quad (1)$$

gdzie $Z = (R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}$ oznacza oporność obwodu napięciowego.



Rys. 1. Pomiar mocy watomierzem (a) i wykres wskazowy (b)

Moc poprawna P_p , jaką powinien wskazywać watomierz wynosi:

$$P_p = kiI_w \cos \varphi = k \frac{U_w I_w}{R} \cos \varphi. \quad (2)$$

Uchyb bezwzględny pomiaru, wywołany uchybem kątowym watomierza, wynosi więc:

$$\Delta P_\gamma = P_w - P_p = k \frac{U_w I_w}{R} [\cos \gamma \cos(\varphi - \gamma) - \cos \varphi]. \quad (3)$$

Uchyb względny pomiaru w procentach można odnieść bądź do mocy poprawnej P_p , bądź też do mocy P_w wskazanej przez watomierz:

$$\delta P'_\gamma = \frac{\Delta P_\gamma}{P_p} \cdot 100 [\%], \quad (4)$$

lub

$$\delta P_{\gamma}'' = \frac{\Delta P_{\gamma}}{P} \cdot 100[\%]. \quad (5)$$

Ze wzoru (4) i (5) wynika, że w pewnych przypadkach zarówno moc poprawna P_p , jak i moc wskazana P_w mogą być równe zero; wówczas tak określone uchyby stają się nieoznaczone. Z tego względu celowe jest posługiwanie się bezwzględnym uchybem pomiaru wg wzoru (3) w całym zakresie pomiarów mocy lub też wprowadzenie uchybu względnego pomiaru w odniesieniu do mocy znamionowej P_n watomierza przy $\cos \varphi_n = 1$.

Określając moc znamionową P_n przez

$$P_n = \frac{k U_n I_n}{R}, \quad (6)$$

otrzymuje się z ilorazu wzorów (3) i (6)

$$\delta P_{\gamma} = \frac{\Delta P_{\gamma}}{P_n} \cdot 100 = \frac{U_w I_w}{U_n I_n} [\cos \gamma (\cos \varphi - \gamma) - \cos \varphi] \cdot 100[\%]. \quad (7)$$

Po drobnych przeróbkach wzór można przepisać w postaci:

$$\delta P_{\gamma} = \frac{U_w I_w}{U_n I_n} \sin \gamma \sin(\varphi - \gamma) \cdot 100[\%]. \quad (8)$$

Wartość względnego uchybu granicznego $\delta P_{\gamma g}$ wynika ze wzoru (8); jeżeli $U_w = U_n$, $I_w = I_n$, wówczas:

$$\delta P_{\gamma g} = \sin \gamma \sin(\varphi - \gamma) \cdot 100[\%]. \quad (9)$$

Obydwa uchyby, bezwzględny ΔP_{γ} ze wzoru (3) jak i względny graniczny $\delta P_{\gamma g}$ ze wzoru (9) posiadają określony sens matematyczny w zakresie kątów fazowych $-90^\circ \dots 0^\circ \dots +90^\circ$.

Na ogół $\varphi \gg \gamma$ i można w praktyce uprościć wzór (9) przyjmując, że

$$\sin \gamma \approx \gamma; \quad \sin(\varphi - \gamma) \approx \sin \varphi;$$

wówczas:

$$\delta P_{\gamma g} = 0,02908 \gamma \sin \varphi. \quad (10a)$$

Jeżeli $\varphi = 0^\circ$

$$\sin \gamma \approx \gamma; \quad \sin(\varphi - \gamma) = -\sin \gamma \approx -\gamma,$$

wtedy

$$\delta P_{\gamma g} = -(0,02908 \gamma)^2. \quad (10b)$$

We wzorach (10a) i (10b) γ oznacza uchyb kątowy w minutach oraz $\delta P_{\gamma g}$ jest uchybem granicznym watomierza w %.

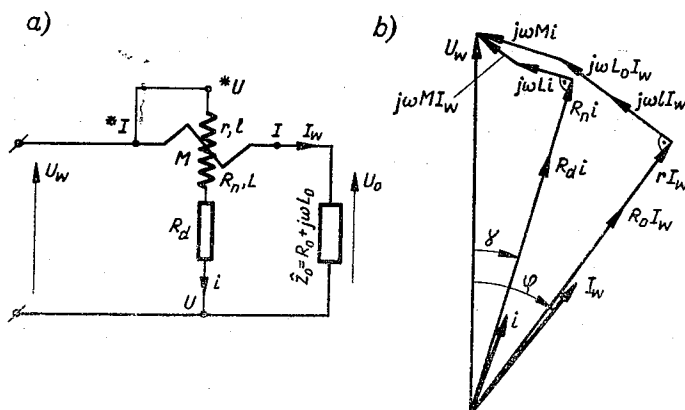
W literaturze spotykane są wzory w postaci wyrażeń (3) i (7), a także wyrażenia podobne do (10a) w jednej z publikacji firmowych [6], jednakże nie podano założeń, dla których ten wzór jest ważny.

3. UCHYB KĄTOWY WATOMIERZA JAKO FUNKCJA JEGO PARAMETRÓW

Na rys. 2a przedstawiono jeszcze raz układ połączeń watomierza elektrodynamicznego. Wprowadzamy dodatkowo współczynnik indukcyjności wzajemnej M między obwodem prądowym i napięciowym. Na rys. 2b podano wykres wskazowy układu z uwzględnieniem

dodatkowego napięcia $j\omega M\hat{I}_w$, wywołanego w cewce napięciowej watomierza przez prąd płynący w cewce prądowej. Równanie napięć obwodu napięciowego brzmi obecnie:

$$\hat{U}_w = (R + j\omega L)\hat{i} + j\omega M\hat{I}_w; \quad (11)$$



Rys. 2. Sposób włączenia watomierza (a) i wykres wskazowy (b)

kładając

$$\hat{U}_w = U_w e^{j0} = U_w; \quad \hat{i} = i e^{j\gamma}; \quad \hat{I}_w = I_w e^{j\varphi}; \quad \hat{Z} = (R + j\omega L) = \hat{Z} e^{j\beta},$$

gdzie

$$R = R_n + R_d \quad \text{a} \quad \beta = \arctg \frac{\omega L}{R},$$

otrzymujemy

$$\hat{U}_w = Z i e^{j(\beta+\gamma)} + j\omega M I_w e^{j\varphi}. \quad (12)$$

Dzieląc na części rzeczywiste i urojone, z równania (12) wynikają dwa równania:

$$Z \cos(\beta + \gamma) = U_w + \omega M I_w \sin \varphi,$$

$$Z \sin(\beta + \gamma) = -\omega M I_w \cos \varphi,$$

skąd:

$$\operatorname{tg}(\beta + \gamma) = -\frac{\omega M Y \cos \varphi}{1 + \omega M Y \sin \varphi}, \quad (13)$$

gdzie: $Y = \frac{I_w}{U_w}$

Z równania (13) wynika, że

$$\gamma = -\left[\arctg \frac{\omega M Y \cos \varphi}{1 + \omega M Y \sin \varphi} + \arctg \frac{\omega L}{R} \right], \quad (14)$$

lub w przybliżeniu

$$\gamma = -\left[\frac{\omega M Y \cos \varphi}{1 + \omega M Y \sin \varphi} + \frac{\omega L}{R} \right]. \quad (15)$$

Wzory (14) lub (15) określają uchyb kątowy γ watomierza w układzie podanym na rys. 2. Zakładając $\omega = 2\pi f$ widać, że pierwszy człon prawej strony równania jest funkcją M , Y i kąta fazowego φ , przy czym w ogólnym przypadku M jest funkcją odchylenia α cewki ruchomej. Drugi człon jest stały, gdyż zależy od L i R , tj. od indukcyjności własnej i oporności czynnej obwodu napięciowego watomierza.

Analityczne badanie wzoru (14) jest uciążliwe i nie wydaje się być celowe z uwagi na opuszczenie pojemności, jakie występują w watomierzu.

4. NOWY UKŁAD MOSTKOWY DO POMIARU UCHYBU KĄTOWEGO

Szereg firm wytwarza watomierze elektrodynamiczne seryjne i w ich konstrukcjach daje się zauważyć dążenie do zmniejszenia uchybów dodatkowych, zwłaszcza uchybu kąтового. Opracowane w ostatnich czasach układy do pomiaru uchybu kąтового watomierzy ([3], [4], [5], [9]) umożliwiają na ogół określenie uchybu kąтового w działkach podziałki lub procentach pełnego odchylenia. Układ firmy Tettex, typu 2510 [6], pozwala na określenie kąta uchybu w minutach tylko przy przesunięciu fazowym 0° i -90° . Większość układów opiera się na zasadzie kompensacyjnej [5], [6], [9], bądź też stosuje pewne modyfikacje mostków prądu zmiennego w celu uzyskania przesunięcia -90° [3], [4] między prądem a napięciem watomierza.

Powyższe układy pomiarowe posiadają sprzężenia pojemnościowe i upłynnościowe, które przy pomiarze małych wartości kąta uchybu mogą całkowicie zniekształcać wyniki.

Układy kompensacyjne wymagają stabilizowanych źródeł zasilania i trudno jest uwolnić się od pasożytniczych sił elektromotorycznych i sprzężeń doziemnych. Układy mostkowe nie wymagają stabilizacji źródła zasilania, a wpływ sprzężeń doziemnych można całkowicie usunąć przy pomocy gałęzi Wagnera.

Zasadę działania układu mostkowego do pomiaru uchybu kąтового watomierzy, zawierającego tylko elementy R i C (bez gałęzi Wagnera) przedstawia rys. 3a, a rys. 3b podaje wykres wskazowy obwodu napięciowego watomierza stanowiącego gałąź AD mostka z rys. 3a.

W przypadku gdy przez watomierz nie płynie prąd ($\hat{I}_w = 0$) układ z rys. 3a jest zwykłym mostkiem Maxwella-Wiena, który pozwala na określenie uchybu kąтового spowodowanego tylko indukcyjnością własną obwodu napięciowego. Wówczas:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\omega L}{R} = \omega C_3 R_3 \quad (16)$$

Oporność pozorną gałęzi AD wynosi:

$$\hat{Z} = R_7 + R_d + R_n + j\omega L \approx R + j\omega l, \quad (17)$$

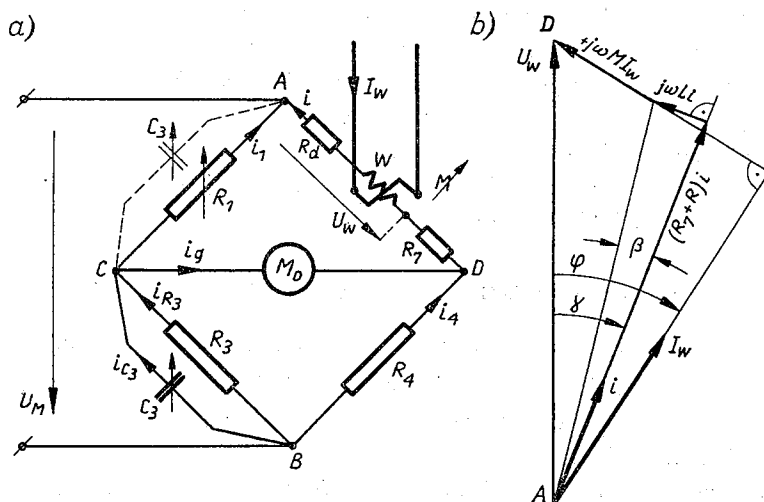
przy czym

$$R_7 \ll R_d \quad \text{oraz} \quad R_n \ll R_d,$$

gdzie R_n oznacza oporność czynną cewki napięciowej.

Z chwilą włączenia prądu I_w w obwodzie napięciowym wystąpi dodatkowe napięcie wywołane przez indukcyjność wzajemną, tak więc:

$$\hat{U}_w = (R + j\omega L)\hat{i} + j\omega M\hat{i}_w. \quad (18)$$



Rys. 3. Mostek do wyznaczania uchybu kątowego (a) i wykres wskazowy (b) gałęzi AD przy przepływie prądu I_w przez cewkę prądową

Jeżeli w przekątnej CD nie płynie prąd ($\hat{i}_g = 0$), wówczas dla zrównoważonego mostka można napisać:

$$\frac{\hat{U}_w}{\hat{i}} = \frac{U_w}{i} e^{j\gamma} = \frac{R_1 R_4}{R_3} (1 + j\omega C_3 R_3). \quad (19)$$

Uchyb kątowy watomierza wynosi więc:

$$\gamma = \arctg \omega C_3 R_3 \approx \omega C_3 R_3, \quad (20)$$

gdzie: γ — w radianach, C_3 w faradach, R_3 w omach a ω w radianach na sekundę.

Jeżeli $f = 50$ Hz, γ — w miliradianach, R_3 w omach i C_3 w μF , to wzór (20) przybierze postać:

$$\gamma = 0,314 C_3 R_3 [\text{mrad}]. \quad (21)$$

Jeśli określa się γ w minutach, R_3 w omach i C_3 w μF , można napisać:

$$\gamma = 1,08 C_3 R_3 [\text{min}]. \quad (22)$$

Wreszcie wyrażając γ w tysięcznych stopnia, R_3 w omach oraz C_3 w μF , otrzymuje się:

$$\gamma = 18 C_3 R_3. \quad (23)$$

W praktyce okazuje się korzystne dobranie odpowiedniej wartości R_3 tak, aby odczyt γ w dowolnej jednostce był określany na podstawie wskazań kondensatora C_3 .

Graniczny uchyb systematyczny w myśl równania (20) wynosi:

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = \frac{\Delta f}{f} + \frac{\Delta C_3}{C_3} + \frac{\Delta R_3}{R_3}. \quad (24)$$

Uchyb systematyczny jest mały z uwagi na bardzo małe uchyby systematyczne poszczególnych składowych.

W praktyce [10, 11] wyraża się średnią wartość momentu napędowego w ciągu jednego okresu watomierza przez wzór

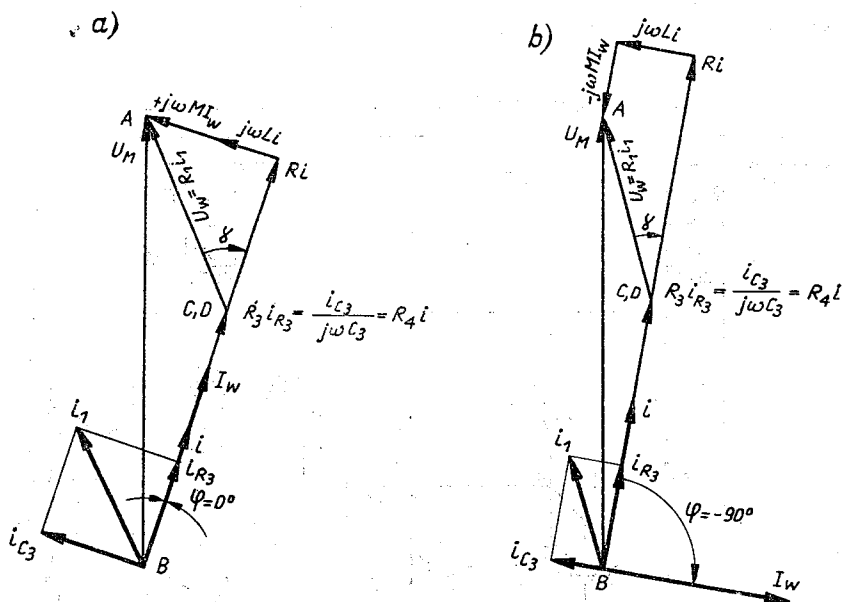
$$T = kiI_w \cos \angle(i, I_w). \quad (25)$$

Faktycznie należałoby uwzględnić strumień magnetyczny Φ_i i wówczas zamiast prądu I_w (I_w wyprzedza Φ_i o kąt ε)

$$T = k'i\Phi_i \cos \angle(i, \Phi_i). \quad (26)$$

Wzór (25) jest jednak wygodniejszy, gdyż prąd I_w jest fizycznie bardziej interesujący. Wobec zmienności indukcyjności wzajemnej M w zależności od kąta odchylenia cewki napięciowej watomierza otrzymujemy różne wartości uchybu kąтового, np. przy stałym napięciu U_w i prądzie I_w a zmiennym kącie φ . Nie wystarcza więc określenie uchybu kąтового dla $\varphi = 0^\circ$ oraz $\varphi = \pm 90^\circ$, lecz dla konstruktora ważny jest przebieg funkcji $\gamma = f(\varphi)$ przy stałych wartościach U_w , I_w i f .

Na rys. 4a i 4b przedstawiono wykres wskazowy zrównoważonego mostka do pomiaru uchybu kąтового dla przypadku $\varphi = 0^\circ$ oraz $\varphi = -90^\circ$. W wykresie dla $\varphi = -90^\circ$ na-

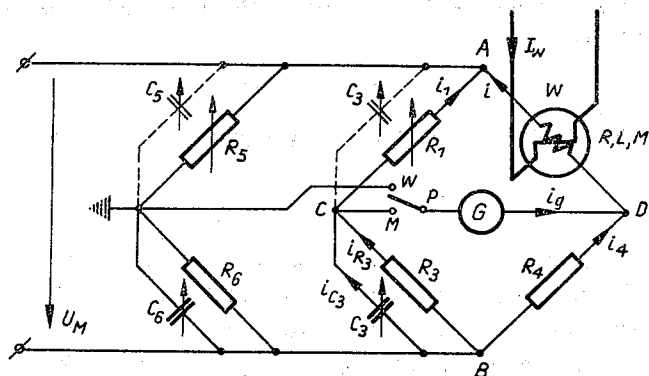


Rys. 4. Wykresy wskazowe układu mostkowego do pomiaru uchybu kąтового watomierzy dla $\varphi = 0^\circ$ (a) i $\varphi = -90^\circ$ (b)

leży zwrócić uwagę na znak wskazów $j\omega M \hat{I}_w$ i uwzględnić zmianę indukcyjności M , która jest funkcją odchylenia cewki napięciowej.

Schemat układu mostkowego do pomiaru uchybu kąтового watomierzy elektrodynamicznych, uzupełniony gałęzią Wagnera podaje rys. 5.

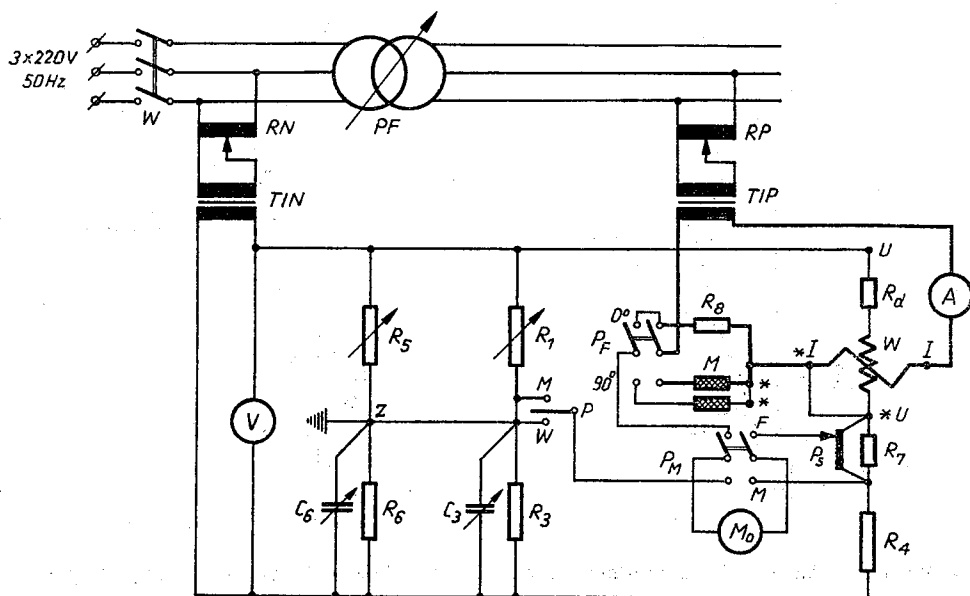
Na rys. 5 wskazano linią ciągłą sposób włączenia kondensatora C_3 i C_5 przy pomiarze ujemnych wartości kąta γ , a linia przerywana odnosi się do dodatnich wartości γ .



Rys. 5. Schemat układu mostka do pomiaru uchybu kątownego watomierzy z gałęzią Wagnera

Praktyczne rozwiązanie układu¹⁾ złożonego z elementów dostępnych prawie w każdym laboratorium podano na rys. 6.

Kilka słów należy poświęcić elementom układu i jego zestawieniu. Przesuwnik fazowy PF służący do regulacji przesunięcia między prądem I_w i napięciem U_w musi umożli-



Rys. 6. Układ mostka do pomiaru uchybu kątownego watomierza i dokładnego ustawienia przesunięcia fazowego $\varphi = 0^\circ$ i $\varphi = \pm 90^\circ$

wiać płynną regulację fazy i nie może powodować zmiany modułu napięcia przy zmianie fazy. Transformatory izolujące TIN i TIP (o skokowo zmienianej przekładni) posiadają ekranowane uzwojenia, które są uziemione we wspólnym punkcie Z.

¹⁾ Układ zastrzeżono patentem PRL 56263 z dn. 15.04.1969.

Jako wskaźnik stanu równowagi M_0 najlepiej pracuje galwanometr wibracyjny lub elektroniczny wskaźnik zasilany z baterii. Dla możliwości kompensacji spadku napięcia na oporniku R_8 lub indukcyjności M korzystne jest zbocznikowanie opornika R_7 precyzyjnym 10-zwojowym potencjometrem PS, np. firmy Beckman. Pożądane jest także stosowanie astatycznej indukcyjności wzajemnej dla uniknięcia wpływu obcych pól elektromagnetycznych.

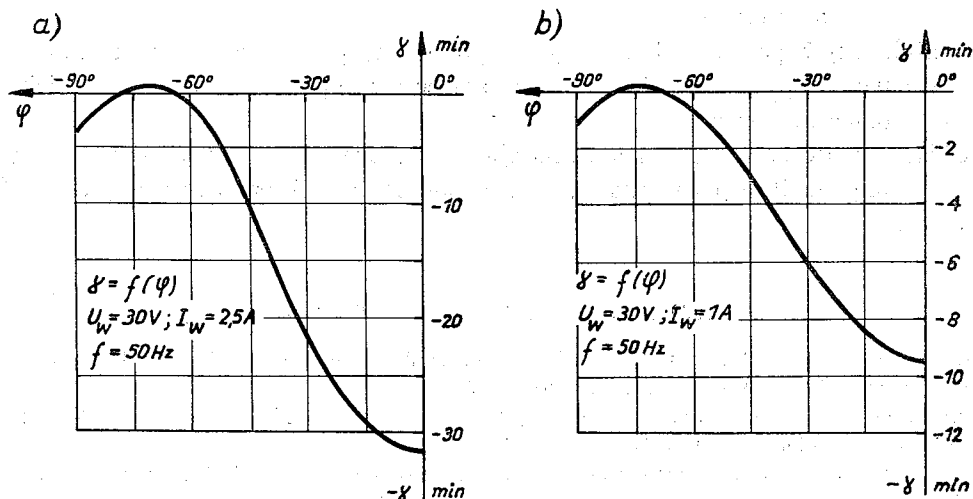
Układ mierzy uchyb kątowy watomierza, którego wartość odczytujemy w minutach z położenia gałek kondensatora C_3 , gdyż przy $f = 50$ Hz i $R_3 = 9,259\Omega$ kąt oblicza się ze wzoru

$$\gamma = 10C_3, \quad (27)$$

γ — w minutach, C_3 — w mikrofaradach.

Pewną niedogodnością jest konieczność kolejnego doprowadzenia do stanu równowagi mostka głównego i mostka pomocniczego, ale właśnie dzięki gałęzi Wagnera możemy być pewni wyników, które cechuje doskonała powtarzalność.

Przeprowadzono szereg pomiarów uchybu kąowego watomierzy, których układy obwodu napięciowego były znane. Watomierze, w których cewka napięciowa nie jest bocznikowana nadają się do bezpośrednich pomiarów. W przypadku bocznikowania trzeba wyniki korygować i do tej czynności niezbędne są dokładne dane obwodu napięciowego watomierza. Przebieg uchybu kąowego watomierza firmy Siemens-Halske (starszy typ), klasy 0,5 o zakresach 1,25/2,5/5 A, 30/90/300 V, który posiadał nie bocznikowany obwód napięciowy, przedstawia wykres podany na rys. 7a. Przebieg $\gamma = f(\varphi)$ dla $0 \leq \varphi \leq \leq +90^\circ$ jest mniej interesujący i odpowiada prawie lustrzanemu odbiciu przebiegu dla $-90^\circ \leq \varphi \leq 0^\circ$.



Rys. 7. Przebieg krzywej uchybu kąowego w funkcji przesunięcia fazowego

a — watomierz el.-dyn., Siemens-Halske klasy 0,5 (starszy typ), b — watomierz el.-dyn., ERA kl. 0,2 typ PD 1

Na rys. 7b podano przebieg $\gamma = f(\varphi)$ dla watomierza elektrodynamicznego firmy ERA (typ PD 1) o zakresach 0,5/1 A, 30/60/120 V w klasie 0,2, o wskaźniku świetlnym, którego wynik został odpowiednio skorygowany z uwagi na zbocznikowanie cewki napięciowej.

Układem mostkowym, przedstawionym na rys. 6, można dokonywać także i pomiarów przy dowolnych kombinacjach parametrów watomierza. Można także określić uchyb watomierza, np. w działkach podziałki lub procentach pełnego odchylenia nie korzystając z układu mostkowego. W tym celu, po dokładnym ustawieniu przesunięcia fazowego na $\varphi = \pm 90^\circ$, przy pomocy układu kompensacyjnego, wystarczy odczytać odchylenie wskaźnika watomierza od zera.

Opisany układ mostkowy, który umożliwia pomiar kąta uchybu watomierza w bardzo szerokich granicach zmian przesunięcia fazowego, nadaje się raczej do celów badawczych konstrukcji modelowych watomierza z uwagi na swą złożoność.

5. ZAKOŃCZENIE

Przy badaniu watomierzy różnych typów wykonano ciekawy eksperyment polegający na porównaniu przebiegu teoretycznego uchybu kąтового, określonego na podstawie wzoru (14) z przebiegiem otrzymanym na podstawie pomiarów dokonanych układem mostkowym. Stwierdzono rozbieżności między krzywymi, co należy przypisać niedostatecznemu ujęciu zjawisk fizycznych przez wzór teoretyczny.

Jak poprzednio wspomniano, wzór teoretyczny na uchyb watomierza nie zawiera pojemności szkodliwych, występujących w obu cewkach watomierza, jak również nie uwzględnia zmian indukcyjności wzajemnej. S. Butterworth [12] wprowadził pojęcie tzw. nieczystości (impurity), spowodowanej głównie pojemnościami i prądami wirowymi, występującymi w uzwojeniach. Pojęcie to można również rozszerzyć na zmienną indukcyjność wzajemną watomierza. We wzorze na uchyb kątowy γ pominięto także zjawisko prądów wirowych, które analitycznie jest bardzo trudne do ujęcia mimo wielu prób czynionych dotychczas w tym względzie.

Właśnie z tych powodów konieczny jest praktyczny pomiar uchybu kąтового, gdyż wzór teoretyczny opisuje zjawiska z pewnym koniecznym uproszczeniem a nawet niektóre zjawiska pomija całkowicie.

Układy oparte na zasadzie kompensacyjnej są bardzo trudne w realizacji, wymagają bardzo dobrej stabilizacji napięcia i prądu, a ponadto nie są pozbawione sprzężeń doziemnych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. H. Park, A. B. Lewis, Standard Electrodynamic Wattmeter and DC-AC Transfer Instrument, Journ. of NBS 1940, I, vol. 25, str. 546... 578.
2. O. Brune, I. W. Whittaker, Primary Standard Wattmeter NPL South Africa, Prec. Elect. Measurements, Phil. Lib, 1954, N. York.
3. L. Morren, Causes d'erreurs dans la mesure de la puissance, Revue „E”, 1958, vol. II, No. 6, str. 153... 165.
4. C. Vastrade, Contribution à l'étalonnage des wattmètres en courant alternatif. Revue „E”, 1961, vol. III, No. 6, str. 247... 251.
5. A. E. Linckh, Messung des Phasenfehlers von Leistungsmessern mittels Gegeninduktivität, ETZ A, 1952, str. 152... 158.
6. Firma Tettex — Zürich, Präzisions — Wechsel — Stromeinrichtung Type 2510, für die Prüfung von Strom-Spannungs- und Leistungsmessern, Instr. Obsluga 1961, 4 — 5355.

7. M. Kędzierski, Układy i metody wyznaczania uchybu kąowego watomierzy elektrodynamicznych zwłaszcza na mały $\cos \varphi$, Inst. Elektrotechniki, W-wa, Dok. Techn. Nr. 640/67.
8. Układ mostkowy do pomiaru uchybu kąowego watomierzy elektrodynamicznych, Patent PRL Nr. 56263, 11. 04. 1969 (29. 03. 1967).
- 205 Розправы электротехниче, Пл. рос. 8 1-2 сэт, 30 цип., 8 1-2 сэт, Домб. М 16, стр. 14, шп. 1 и
9. М. А. Быков, А. М. Любарская, Экспериментальное определение фазовых погрешностей ватметров высоких классов точности, Изм. Техника, 1966, II, стр. 52...55.
10. C. V. Drysdale, A. G. Jolley, Electrical Instruments, Chapman, London 1952.
11. F. K. Harris, Electrical Measurements, J. Wiley, N. York 1956.
12. S. Butterworth, Capacity and Eddy Current effects in Inductometer, Proc. Phys. Soc., Vol. 33, 1921, str. 312... 345.

P. J. NOWACKI, M. KĘDZIERSKI

NEW BRIDGE CIRCUIT TO MEASURE ANGLE ERROR IN ELECTRODYNAMIC WATTMETERS

Summary

The paper presents the analytical relations which occur between the power measurement error and the additional limit error of a wattmeter as a result of the phase angle error of the instrument.

On the basis of the parameters of the wattmeter, the authors derived a formula for the phase angle error, introducing, among other things, the mutual inductance between the coils of the current circuit and the voltage circuit coil. The influence of mutual inductance has proved to predominate over the self-inductance of the voltage circuit, even for spot reflecting wattmeters.

To verify the theoretical deductions, a new bridge was developed of R and C elements and fitted with a Wagner earth device to eliminate all earth capacitive effects. The bridge permits the phase angle error of a wattmeter to be measured over a range of phase displacements of $-90^\circ \dots +0^\circ \dots 90^\circ$ and has an additional circuit to establish exactly a phase displacement of 0° and -90° or $+90^\circ$.

The final part of the paper gives the results of measurements performed with this bridge which justify the theses advanced in the theoretical part.

P. J. NOWACKI, M. KĘDZIERSKI

LE NOUVEAU CIRCUIT À PONT POUR MESURER L'ERREUR DE L'ANGLE DES WATTMETRES ELECTRODYNAMIQUES

Résumé

Dans le rapport on a présenté les relations analitiques entre l'erreur de la mesure de puissance et l'erreur permmissible du wattmetre provoquée par l'erreur de l'angle du wattmetre. Partant des parametres du wattmetre les auteurs ont établi la formule de l'erreur de l'angle du wattmetre, introduisant l'inductance mutuelle entre les bobines du courant et la bobine de la tention. L'influence de l'inductance mutuelle s'est montrée prédominante envers de l'inductance propre même pour les wattmetres à index lumineux.

Pour confirmer les arguments théoriques on a élaboré un nouveau pont consistant d'elements R et C et possédant en outre une branche auxiliaire de Wagner pour l'elimination du couplage de la terre. Le pont courant alternatif permet la mesure de l'erreur de l'angle du wattmetre entre $-90^\circ \dots 0^\circ \dots +90^\circ$ de la décalage de phase et possède un circuit supplémentaire pour l'établissement précis de la décalage de phase 0° et -90° ou $+90^\circ$.

Dans la partie finale on a présenté les résultats des mesures effectuées à l'aide du pont. Ils confirment les thèses présentées dans la partie théorique.

P. J. NOWACKI, M. KĘDZIŃSKI

NEUE BRÜCKENSCHALTUNG ZUR BEMESSUNG DES FEHLWINKELS EINES ELEKTRODYNAMISCHEN WATTMETERS

Zusammenfassung

Im Artikel wurden die analytischen Beziehungen zwischen den auf Grund des Fehlwinkels des Wattmeters entstandenen Fehlern der Leistungsmessung und des Grenzfehlers des Wattmeters dargestellt.

In Anlehnung an die Parameter des Wattmeters haben die Verfasser auch eine Formel für den Fehlwinkel des Wattmeters abgeleitet, indem sie u.a. Gegeninduktivität zwischen den Stromkreisspulen und der Spannungskreissspule berücksichtigt haben.

Zwecks Begründung theoretischer Erwägungen wurde eine neue, aus Elementen R und C bestehende Meßbrücke bearbeitet, die eine Bemessung des Fehlwinkels zwischen $-90^\circ \dots 0^\circ \dots +90^\circ$ der Phasenverschiebung gestattet. Um die Erdkapazitätseinflüsse zu beseitigen, wurde die Meßbrücke auch mit einem Wagner'schen Hilfszweig ausgerüstet, und besitzt zuzüglich eine Kompensationsschaltung zwecks exakter Bestimmungsmöglichkeit der Phasenserschiebung von 0° und -90° bzw. $+90^\circ$.

Im letzten Teil des Artikels wurden die mit dieser Brücke durchgeführten Meßergebnisse angegeben, die die Richtigkeit der theoretischen Thesen bestätigen.

П. Я. НОВАЦКИ, М. КЕНДЗЕРСКИ

НОВАЯ МОСТОВАЯ СХЕМА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ УГЛОВОЙ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ ВАТТМЕТРОВ

Резюме

В докладе представлены аналитические зависимости между погрешностью измерения мощности и предельной погрешностью ваттметра, вызванной угловой погрешностью ваттметра.

На основе параметров ваттметра авторы вывели формулу угловой погрешности ваттметра, вводя также индуктивность между токовой цепью и цепью напряжения, влияние которой оказалось доминирующим над собственной индуктивностью цепи напряжения.

Для подтверждения такого подхода был создан новый мостик, состоящий из элементов R и C снабженный дополнительной цепью Ватнера для исключения соприжений с землей.

Мостик позволяет производить измерения угловой погрешности в пределах сдвига фаз $-90^\circ \dots 0^\circ \dots +90^\circ$ между током и напряжением ваттметра, а также имеет дополнительную схему для точного установления сдвига фазы на 0° и -90° либо $+90^\circ$.

В заключительной части представлены результаты измерений, произведенных указанным выше мостиком, которые подтверждают тезисы, выдвинутые в теоретической части.

Właściwości stałoprądowe struktury czterowarstwowej o równomiernym rozkładzie koncentracji domieszek w poszczególnych obszarach

WITOLD JERZY STEPOWICZ (GDAŃSK)

Instytut Technologii Elektronicznej Politechniki Gdańskiej

Otrzymano 17.3.1970

W pracy są opisane właściwości stałoprądowe struktury czterowarstwowej przez podanie charakterystyk prądowo-napięciowych, zwarciovych współczynników wzmocnienia prądowego i prądów zerowych (nasycenia) złącz. Przeprowadzona analiza dotyczy struktury typu *npnp* o równomiernym rozkładzie koncentracji domieszek w poszczególnych obszarach i o dowolnej polaryzacji złącz struktury. Przedstawiono przykład zastosowania przeprowadzonej analizy, a w zakończeniu podano uwagi o innych zastosowaniach tej analizy.

1. WSTĘP

Wśród elementów półprzewodnikowych stosowanych w elektronice przed wprowadzeniem układów scalonych struktury czterowarstwowe były głównie wykorzystywane jako przełączniki sterowane (tyrystory). Obecnie wytwarzanie elementów w scalonych układach półprzewodnikowych na podłożu aktywnym prowadzi często do powstania struktur wielowarstwowych (wielozłączowych). Można tu wymienić strukturę czterowarstwową typu *npnp* związaną z wytwarzaniem tranzystorów *nnp* na podłożu aktywnym typu *p* oraz strukturę wielozłączową nazywaną tranzystorem bocznym (lateral transistor) związaną z jedną z metod wytwarzania tranzystorów *pnp* w układach scalonych [1]. Do struktur wielozłączowych zalicza się także tranzystory wieloemiterowe stosowane w układach logicznych T^2L [1].

2. WYKAZ OZNACZEŃ I ZAŁOŻENIA

W pracy używane są następujące oznaczenia:

- p_e, n_e — koncentracje nadmiarowe dziur i elektronów
- p_n, n_p — koncentracje równowagowe dziur w materiale typu *n* i elektronów w materiale typu *p*
- L_p, L_n — długości drogi dyfuzji dziur i elektronów
- D_p, D_n — stałe dyfuzji dziur i elektronów

Drugi indeks przy powyższych symbolach oznacza obszar, do którego ten symbol odnosi się: *e*, *b*, *c*, *s* według rysunku 1.

$B = \exp\left(\frac{u}{U_T}\right) - 1$, wielkość tę interpretuje się jako względną koncentrację nośników nadmiarowych na złączu

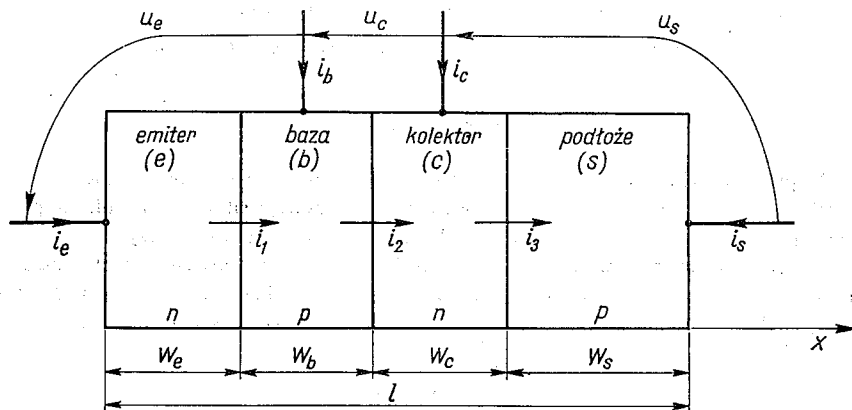
S — powierzchnia złącza.

Indeks przy tych symbolach oznacza, do którego złącza ten symbol odnosi się: e, b, c według rysunku nr 1.

U_T — potencjał termiczny

e — ładunek elektronu

w — szerokość obszaru (rys. 1)



Rys. 1. Struktura czterowarstwowa typu $npnp$

Charakterystyki prądowo-napięciowe struktury są wyprowadzone przy następujących założeniach:

a) rozkład koncentracji domieszek we wszystkich obszarach jest równomierny, obszary e, c są domieszkowane donorami, b, s — akceptorami (struktura $npnp$),

b) koncentracja nośników większościowych jest równa koncentracji domieszek,

c) z rozważań wyklucza się warstwy ładunku przestrzennego złącz. W ten sposób nie uwzględnia się wpływu na charakterystyki struktury zjawisk jonizacji lawinowej, rekombinacji i generacji w warstwach ładunku przestrzennego,

d) zależność nadmiarowych koncentracji nośników mniejszościowych od napięcia na złączu jest dana warunkami Boltzmanna,

e) rozpatruje się małe poziomy wstrzykiwania nośników nadmiarowych, dlatego prąd złącz jest prądem dyfuzyjnym. Ze względu na założenie „a” poszczególne obszary są ekwipotencjalne,

f) rozważa się model jednowymiarowy.

3. ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ CIĄGŁOŚCI W POSZCZEGÓLNYCH OBSZARACH I CHARAKTERYSTYKI PRĄDOWO-NAPIĘCIOWE STRUKTURY

Rozkłady koncentracji nadmiarowych nośników mniejszościowych w poszczególnych obszarach, konieczne do wyznaczenia prądów złącz, można otrzymać z rozwiązania równań ciągłości:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 p_e}{dx^2} - \frac{p_e}{L_p^2} &= 0 \quad \text{dla obszaru } e, c, \\ \frac{d^2 n_e}{dx^2} - \frac{n_e}{L_n^2} &= 0 \quad \text{dla obszaru } b, s. \end{aligned} \quad (1)$$

Warunki brzegowe, wynikające ze związków Boltzmanna, są następujące:

$$\begin{aligned} p_e(x_i) &= p_n(x_i) B_i, \\ n_e(x_i) &= n_p(x_i) B_i \end{aligned} \quad (2)$$

oraz

$$p_e(0) = n_e(l) = 0,$$

gdzie:

x_i — współrzędna i -tego złącza,

B_i — nadmiarowa koncentracja nośników mniejszościowych na złączu o współrzędnej x_i .

Po wyznaczeniu rozkładów nadmiarowych koncentracji nośników mniejszościowych w poszczególnych obszarach, tj. $n_e(x)$ i $p_e(x)$, prądy poszczególnych złącz są obliczane z zależności:

$$i(x_i) = i_n(x_i) + i_p(x_i) = f(B_e, B_c, B_s), \quad (3)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} i_n(x_i) &= S_i e D_n \left. \frac{dn_e}{dx} \right|_{x=x_i}, \\ i_p(x_i) &= -S_i e D_p \left. \frac{dp_e}{dx} \right|_{x=x_i}, \end{aligned} \quad (4)$$

S_i oznacza powierzchnię złącza o współrzędnej x_i .

Jeżeli, zgodnie z rysunkiem 1, oznaczymy prądy poszczególnych złącz przez i_1, i_2, i_3 , to charakterystyki prądowo-napięciowe struktury zapisuje się w postaci równania:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_e \\ B_c \\ B_s \end{bmatrix} \quad (5)$$

Zamiast prądów złącz można wprowadzić prądy zacisków struktury. Związki między prądami złącz a prądami zacisków, przy założeniu kierunku prądów jak na rysunku 1, są następujące:

$$\begin{aligned} i_e &= i_1, \\ i_b &= i_2 - i_1, \\ i_c &= i_3 - i_2, \\ i_s &= -i_3. \end{aligned} \quad (6)$$

W wielu zastosowaniach może być dogodniejsze użycie prądów złącz zamiast prądów zacisków struktury.

4. WSPÓŁCZYNNIKI A_{kl} STRUKTURY CZTEROWARSTWOWEJ O RÓWNOMIERNYM ROZKŁADZIE KONCENTRACJI DOMIESZEK W OBSZARACH

Obliczone wartości współczynników A_{kl} dla rozważanej struktury są następujące:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= -eS_e \left[\frac{D_{pe}p_{ne}}{L_{pe}} \operatorname{ctgh} \frac{w_e}{L_{pe}} + \frac{D_{nb}n_{pb}}{L_{nb}} \operatorname{ctgh} \frac{w_b}{L_{nb}} \right], \\
 A_{12} &= eS_e \left[\frac{D_{nb}n_{pb}}{L_{nb}} \operatorname{cossech} \frac{w_b}{L_{nb}} \right], \\
 A_{13} &= 0, \\
 A_{21} &= -A_{12}, \\
 A_{22} &= eS_c \left[\frac{D_{nb}n_{pb}}{L_{nb}} \operatorname{ctgh} \frac{w_b}{L_{nb}} + \frac{D_{pc}p_{nc}}{L_{pc}} \operatorname{ctgh} \frac{w_c}{L_{pc}} \right], \\
 A_{23} &= -eS_c \left[\frac{D_{pc}p_{nc}}{L_{pc}} \operatorname{cossech} \frac{w_c}{L_{pc}} \right], \\
 A_{31} &= A_{13} = 0, \\
 A_{32} &= -A_{23}, \\
 A_{33} &= -eS_s \left[\frac{D_{ns}n_{ps}}{L_{ns}} \operatorname{ctgh} \frac{w_s}{L_{ns}} + \frac{D_{pc}p_{nc}}{L_{pc}} \operatorname{ctgh} \frac{w_c}{L_{pc}} \right].
 \end{aligned} \tag{7}$$

Powyższe związki pozwalają stwierdzić, jaki wpływ mają rozmiary i parametry fizyczne struktury na współczynniki A_{kl} . Zachodzi równość $A_{kl} = -A_{lk}$, oprócz tego $A_{13} = A_{31} = 0$, co świadczy o tym, że składowa prądu emitowana przez złącze 1 i zbierana przez złącze 3 wynosi zero i odpowiednio żadna część prądu emitowanego przez złącze 3 nie jest zbierana przez złącze 1.

5. ZWARCIOWE WSPÓŁCZYNNIKI WZMOCNIENIA PRĄDOWEGO I PRĄDY ZEROWE STRUKTURY

Własności wzmacniające dowolnej struktury czterowarstwowej mogą być opisane przez podanie zwarciovych współczynników wzmocnienia prądowego zdefiniowanych następująco:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{i_2}{i_1} \bigg|_{\substack{B_s=0 \\ B_c=0}} = \frac{A_{21}}{A_{11}}, \\
 \alpha_r &= \frac{i_1}{i_2} \bigg|_{\substack{B_s=0 \\ B_c=0}} = \frac{A_{12}}{A_{22}}, \\
 \alpha_s &= \frac{i_3}{i_2} \bigg|_{\substack{B_e=0 \\ B_s=0}} = \frac{A_{32}}{A_{22}}, \\
 \alpha_{sr} &= \frac{i_2}{i_3} \bigg|_{\substack{B_e=0 \\ B_c=0}} = \frac{A_{23}}{A_{33}}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Jednocześnie można zdefiniować prądy zerowe złącz struktury (tj. prądy nasycenia złącz przy założeniu rozwarcia pozostałych złącz):

$$\begin{aligned}
 i_{eb0} &= i_1 \bigg|_{\substack{B_e=-1 \\ i_2=i_3=0}}, \\
 i_{cb0} &= i_2 \bigg|_{\substack{B_c=-1 \\ i_1=i_3=0}}, \\
 i_{cs0} &= i_3 \bigg|_{\substack{B_s=-1 \\ i_1=i_2=0}}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Podstawienie obliczonych wartości współczynników A_{kl} do podanych definicji współczynników wzmocnienia i prądów zerowych pozwala stwierdzić jaki wpływ na te wielkości mają rozmiary i parametry fizyczne struktury.

6. METODY POMIARU WSPÓŁCZYNNIKÓW A_{kl}

W celu określenia wszystkich współczynników A_{kl} wystarczy pomierzyć prądy zerowe oraz zwarciove współczynniki wzmocnienia prądowego α i α_s . Wynika to z równości $A_{kl} = -A_{lk}$. Jak widać z definicji prądów zerowych, ich pomiar jest prosty i bezpośredni. Informacje o współczynnikach wzmocnienia prądowego można uzyskać bezpośrednio przy pomiarze prądu i_{cb0} , bo wówczas:

$$\begin{aligned}
 B_e &= \frac{A_{12}}{A_{11}} = -\alpha, \\
 B_s &= \frac{A_{32}}{A_{33}} = -\alpha_{sr}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

A więc w celu wyznaczenia odpowiednich α wystarczy zmierzyć napięcie na pozostałych rozwartych złączach.

Inna metoda pomiaru [2] opiera się na wyznaczeniu współczynników A_{kl} , dla $k = 1$, ze znajomości dowolnego punktu na charakterystyce prądowo-napięciowej złącza przy pozostałych złączach zwartych, np.:

$$A_{11} = \frac{i_1}{B_e} \bigg|_{\substack{B_s=0 \\ B_c=0}}.$$

Natomiast współczynniki A_{kl} , dla $k \neq l$, określa się przez pomiary zwarciovych współczynników wzmocnienia prądowego poszczególnych złącz (według wzoru (8)). Wydaje się, że zaletą pierwszej metody jest przeprowadzanie pomiarów przy rozwarciu odpowiednich złącz, co praktycznie jest łatwiejsze do spełnienia niż zwarcie złącza. Wynika to stąd, że przy zwarcu mogą odgrywać istotną rolę oporności poszczególnych obszarów struktury.

7. PRZYKŁAD WYKORZYSTANIA PRZEPROWADZONEJ ANALIZY — WŁASNOŚCI WZMACNIAJĄCE TRANZYSTORA PASOŻYTNICZEGO W UKŁADACH SCALONYCH

Jak wspomniano we wstępie, wytwarzanie tranzystorów npn na podłożu aktywnym prowadzi do powstania struktury czterowarstwowej typu $nnpn$. Można w tak utworzonej strukturze wyróżnić dwa tranzystory: użyteczny nnp (składa się z obszarów e , b , c) oraz pasożytniczy pnp (składa się z obszarów b , c , s). Widać, że obszar, który jest bazą tranzystora nnp stanowi emiter tranzystora pnp , zaś kolektor tranzystora nnp — to baza pnp . Złącze 2 jest wspólne dla obu tranzystorów.

Zdefiniowane uprzednio współczynniki wzmocnienia α i α_r dotyczą tranzystora użytecznego, natomiast α_s i α_{sr} opisują tranzystor pasożytniczy.

Jeżeli złącze 2 jest spolaryzowane w kierunku przewodzenia ($B_c > 0$), zaś złącze 3 w kierunku zaporowym ($B_s = -1$), to tranzystor pasożytniczy pnp znajduje się w obszarze aktywnym pracy. Biorąc pod uwagę praktycznie spotykane rozmiary struktury można oszacować wartość współczynnika wzmocnienia tego tranzystora.

Jeżeli przyjmie się:

$$\begin{aligned} w_b &\simeq 3 \mu\text{m} & w_b &\ll L_{pb}, \\ w_c &\simeq 10 \mu\text{m} & L_{pc} &\simeq 30 \mu\text{m}, \\ D_{nb} &\simeq 0,5 D_{pc} & n_{pb}/p_{nc} &\simeq 0,1, \end{aligned}$$

to na podstawie wzorów (7) i (8), po podstawieniu wartości liczbowych, otrzymuje się:

$$\alpha_s = \frac{A_{32}}{A_{22}} = \frac{\text{sech} \frac{w_c}{L_{pc}}}{1 + \frac{D_{nb}}{D_{pc}} \frac{L_{pc}}{w_b} \frac{n_{pb}}{p_{nc}} \text{tgh} \frac{w_c}{L_{pc}}} \simeq 0,8. \quad (11)$$

W układach scalonych złącze 3 jest spolaryzowane w kierunku wstecznym ($B_s = -1$), ale złącze 2 może być, w układach impulsowych, spolaryzowane w kierunku przewodzenia ($B_c > 0$) i szczególnie wtedy należy liczyć się z wpływem tranzystora pasożytniczego na pracę układu. W układach liniowych $B_c = B_s = -1$ i tranzystor pnp znajduje się w obszarze odcięcia.

Podane obliczenia stanowią dobre przybliżenie rzeczywistości, ponieważ w układach scalonych obszary c i s są przeważnie obszarami o równomiernym rozkładzie koncentracji domieszek.

Ze wzoru (11) widać także, jak należy wykonać tranzystor *nnp* na podłożu aktywnym typu *p*, aby wpływ tranzystora pasożytniczego był możliwie mały. Istotną rolę odgrywa tu stosunek wielkości w_c/L_{pc} oraz n_{pb}/p_{nc} . Możliwe są także dodatkowe zabiegi technologiczne w celu zmniejszenia współczynnika α_s , jak np. dyfuzja złota.

8. ZAKOŃCZENIE

Celem przeprowadzonej analizy był opis właściwości stałoprądowych struktury czterowarstwowej przez podanie charakterystyk prądowo-napięciowych, zwarciovych współczynników wzmocnienia prądowego i prądów zerowych. Podano współczynniki A_{kl} dla struktury spełniającej założenia zawarte w rozdziale 2. Opisano metody pomiaru tych współczynników oraz podano przykład wykorzystania przeprowadzonej analizy do obliczenia współczynnika wzmocnienia prądowego tranzystora pasożytniczego *pnp* w strukturze czterowarstwowej układów scalonych na podłożu aktywnym.

Model struktury trójzłączowej może być łatwo uproszczony do tranzystora dwuzłączowego. Można też, w podobny sposób jak podano w niniejszej pracy, analizować struktury *n*-złączowe o dowolnym rozkładzie koncentracji domieszek w obszarach. Rozwiązanie równania ciągłości zawierającego zmianę koncentracji nośników mniejszościowych w czasie $\left(\frac{\partial n_e}{\partial t}, \frac{\partial p_e}{\partial t}\right)$ daje opis właściwości struktury dla przebiegów zmiennych [2]. Model struktury wielozłączowej może też być użyteczny przy analizie tranzystora bocznego [1, 2], przy analizie własności przełączających struktury czterowarstwowej i jej własności wzmacniających [3] (analogia do tetrody).

Dla struktur krzemowych zaniedbanie procesów generacji i rekombinacji w warstwach ładunku przestrzennego jest znacznym uproszczeniem. Możliwe jest uwzględnienie wpływu tych procesów na właściwości struktury na podstawie wyprowadzonych przez Saha i in. wyrażeń na prądy generacji i rekombinacji w warstwach przejściowych [3].

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. H. C. Lin, DC Analysis of Multiple Collector and Multiple Emitter Transistors in Integrated Structures, IEEE Journal of Solid-State Circuits, Vol. SC-4, nr 1, 1969.
2. D. K. Lynn, C. S. Meyer, D. J. Hamilton, Analysis and Design of Integrated Circuits, 1967, Mc Graw-Hill Book Co.
3. N. C. Voulgaris, E. S. Yang, Linear Operation of *pnpn* Tetrode, IEEE Trans. on El. Dev., ED-16, nr 5, 1969.

W. J. STEPOWICZ

DC PROPERTIES OF A THREE-JUNCTION SEMICONDUCTOR STRUCTURE

Summary

In this paper *dc* properties of a three-junction semiconductor structure are described on the basis of *dc* $V-I$ characteristics, short-circuit current gains and saturation currents of junctions. The analysis concerns the *nnp* structure with uniform impurity concentrations in all regions and with arbitrary junction voltages. An example of use of this analysis is given and some remarks on other adaptations of this analysis are enclosed at the end of the paper.

W. J. STEPOWICZ

EIGENSCHAFTEN VIER SCHICHTIGER GLEICHSTROMSTRUKTUREN MIT GLEICHMÄßIGER VERTEILUNG IN EINZELNEN ZONEN DER BEIMENGUNGSKONZENTRATION**Zusammenfassung**

In dem Artikel werden die Eigenschaften vierschichtiger Gleichstromstrukturen mittels Angabe der Stromspannungscharakteristiken, der Kurzschlußkoeffizienten von Stronverstärkung und von Nullströmen (Sättigung) der Verbindungen beschrieben. Die durchgeführte Analyse betrifft den Strukturtyp *npnp* mit gleichmäßiger Verteilung in einzelnen Zonen der Beimengungskonzentration und beliebiger Polarisation von Strukturverbindungen. Es wurde ein Anwendungsbeispiel für die bearbeitete Analyse gebracht, und abschließend wird auf weitere Anwendungsmöglichkeiten dieser Analyse hingewiesen.

В. В. СТЕПОВИЧ

**СВОЙСТВА ТРЁХПЕРЕХОДНОЙ СТРУКТУРЫ ПОЛУПРОВОДНИКОВ
ДЛЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА****Резюме**

В статье представлены вольт-амперные характеристики для постоянного тока, коэффициенты передачи токов и обратные токи переходов, описывающие свойства трёхпереходной структуры полупроводников.

Рассмотрена структура *npnp*-типа с равномерным распределением концентрации примесей во всех областях и с произвольной поляризацией переходов. Приведён пример применения вышеуказанного анализа, а в заключении даны замечания, касающиеся применения этого анализа для других элементов.

Synteza liniowych układów scalonych metodami przestrzeni stanów

Część 1: Wiadomości wstępne i synteza funkcji przenoszenia

MICHAŁ BIAŁKO (GDAŃSK), WIESŁAW SIENKO (GDAŃSK)

Instytut Technologii Elektronicznej Politechniki Gdańskiej

Otrzymano 13.4.1970

W artykule podany jest przegląd sposobów syntezy liniowych, mikroelektronicznych układów scalonych metodami przestrzeni stanów. Podano w sposób zwięzły podstawowe pojęcia i zależności dla metod przestrzeni stanów, a następnie omówiono synteze układów wielowejściowych o zadanych macierzach funkcji przenoszenia. Pokazano możliwość praktycznej realizacji syntezowanych struktur technologiami stosowanymi w półprzewodnikowych układach scalonych.

1. UWAGI WSTĘPNE

Przystępując do opisu metod syntezy układów scalonych, celowym jest przypomnienie kilku zasadniczych własności i ograniczeń nałożonych na te układy przez technologię ich wykonywania. Przede wszystkim klasa elementów podstawowych ograniczona jest do czterech typów elementów takich jak oporniki, tranzystory, kondensatory i linie RC o stałych rozłożonych. Największe trudności technologiczne sprawia otrzymanie kondensatorów i linii RC o dużych wartościach pojemności. W odróżnieniu od układów konwencjonalnych, w technice mikroelektronicznej pojawia się możliwość wprowadzenia dodatkowo klasy obwodów, jednorodnych technologicznie nazywanych elementami generującymi [8], wśród których największe znaczenie mają wzmacniacze operacyjne, różnicowe konwertery napięciowo-prądowe, żyratory oraz konwertery ujemno-impedancyjne [9]. Ze względu na duże trudności w dokonywaniu poprawek i zmian wartości elementów w układzie już wykonanym, synteza układów mikroelektronicznych powinna uwzględniać znacznie większe rozrzuty wartości elementów i prowadzić do struktur o małych czułościach na zmiany wartości elementów. Metody przestrzeni stanów dobrze znane i rozwinięte w nowoczesnej teorii systemów i teorii sterowania, znajdują szczególnie interesujące zastosowanie w syntezie układów mikroelektronicznych, ponieważ prowadzą do realizacji spełniających podstawowe wymagania i ograniczenia. Celem niniejszego artykułu jest pokazanie możliwości zastosowania metod przestrzeni stanów do syntezy liniowych układów scalonych o zadanych macierzach funkcji przenoszenia lub o zadanych macierzach admitancyjnych. Rozważania zostaną zawężone do klasy układów skończonych i stacjonarnych (niezmiennych w czasie).

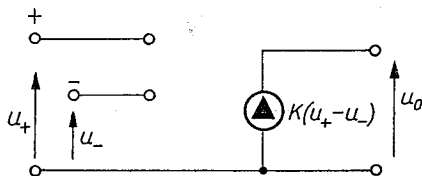
2. KRÓTKI OPIS WŁASNOŚCI NIEKTÓRYCH ELEMENTÓW GENERUJĄCYCH

a) Wzmacniacz operacyjny

Idealny wzmacniacz operacyjny jest elementem o dwóch wejściach, jednym wyjściu, nieskończenie dużej oporności wejściowej, zerowej oporności wyjściowej i nieskończenie dużym wzmocnieniu napięciowym K . Ze schematu zastępczego wzmacniacza pokazanego na rysunku 2.1. otrzymuje się równanie opisujące ten element [7]:

$$u_o = K(u_+ - u_-); \quad K \rightarrow \infty, \quad (2.1)$$

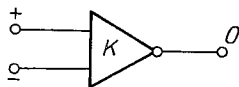
gdzie symbolem „+” jest oznaczone wejście nie odwracające fazy, a symbolem „-” wejście odwracające fazę.



Rys. 2.1. Schemat zastępczy wzmacniacza operacyjnego

Symbol graficzny wzmacniacza operacyjnego pokazany jest na rysunku 2.2.

W praktyce wzmacniacz operacyjny jest elementem nieidealnym o skończonych wartościach oporności wejściowej, wyjściowej i wzmocnienia. Współczynnik K jest monotonicznie



Rys. 2.2. Symbol graficzny wzmacniacza operacyjnego

malejącą funkcją częstotliwości z szybkością nie większą niż -12dB/okt . Należy podkreślić, że współczesne wzmacniacze operacyjne wykonane techniką mikroelektroniczną z dużym przybliżeniem można opisywać równaniem (2.1).

b) Żyrator

Żyrator jest czwórnikiem, którego macierz admitancyjna ma następującą postać [7]:

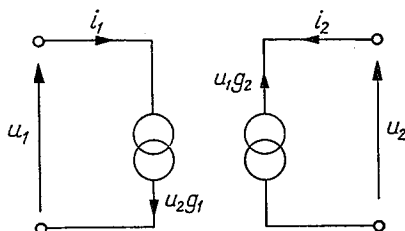
$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 & g_1 \\ -g_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

gdzie elementy g_1 i g_2 macierzy $\mathbf{Y}$ nazywane są przewodnościami żyracji.

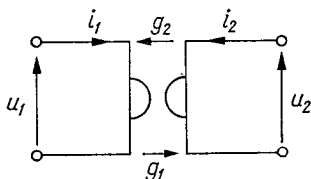
W przypadku gdy $g_1 = g_2$ żyrator staje się elementem pasywnym i bezstratnym. Ponieważ macierz $\mathbf{Y}$ żyratora daje się rozłożyć na sumę dwóch składowych:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 & g_1 \\ -g_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -g_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & g_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

ze związku (2.3) otrzymuje się wygodną reprezentację żyratora za pomocą dwóch prądowych źródeł sterowanych napięciem, co pokazane jest na rysunku 2.3. Symbol graficzny żyratora przedstawia rysunek 2.4. W odróżnieniu od wzmacniacza operacyjnego, praktycznie wykonany techniką scaloną żyrator nie jest elementem w tej chwili dostępnym powszechnie.



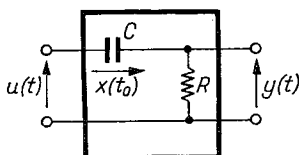
Rys. 2.3. Reprezentacja żyratora za pomocą źródeł sterowanych napięciem



Rys. 2.4. Symbol graficzny żyratora

3. PODSTAWOWE POJĘCIA ZWIĄZANE Z METODAMI PRZESTRZENI STANÓW

Podstawowe pojęcia metody przestrzeni stanów wprowadzone są w tym rozdziale w oparciu o prosty przykład obiektu złożonego z kondensatora i opornika, co jest pokazane na rysunku 3.1. Na wejście obiektu w chwili t_0 podany jest sygnał $u(t)$ będący wy-



Rys. 3.1. Reprezentacja graficzna badanego obiektu.

muszeniem, natomiast na wyjściu obiektu obserwowany jest sygnał $y(t)$ będący odpowiedzią obiektu na zadane wymuszenie. Z doświadczenia wiadomo, że sygnał na wyjściu nie jest jednoznacznie określony przy znajomości pobudzenia, ponieważ jego przebieg zależy dodatkowo od napięcia między okładkami kondensatora w chwili t_0 . Niech $x(t_0)$ oznacza napięcie na kondensatorze w chwili t_0 . Aby obserwowany w przedziale (t_0, t) sygnał na wyjściu był jednoznacznie określony przy znajomości sygnału wejściowego w tym przedziale, każdej parze (pobudzenie, odpowiedź) należy dodatkowo przyporządkować liczbę $x(t_0)$, nazywaną stanem układu w chwili t_0 .

W ogólnym przypadku dla opisu działania obiektu fizycznego wprowadza się pojęcie układu będącego modelem matematycznym rozważanego obiektu. Określenie układu można sprowadzić do określenia tzw. przestrzeni wymuszeń (pobudzeń) U , przestrzeni odpowiedzi Y oraz transformacji T określonej w przestrzeni U i przyjmującej wartości z przestrzeni Y .

W przypadku powyżej rozpatrywanego przykładu $u(t) \in U$ oraz $y(t) \in Y$, natomiast transformacja T określona jest związkami:

$$y(t) = T[u(t)], \quad (3.1)$$

gdzie:

$$T = \left[\frac{1}{RC} \int + 1 \right]^{-1}. \quad (3.2)$$

Dla układu posiadającego m -wejść i n -wyjść ($m \neq n$) zbiory U i Y są przestrzeniami wektorowymi:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

gdzie: $\mathbf{u}(t) \in U$ oraz $\mathbf{y}(t) \in Y$.

Jeżeli znane są wszystkie wymuszenia przyłożone do obiektu od chwili jego powstania (skonstruowania) do momentu obserwacji t_0 , to mówimy, że znana jest „historia” układu i wtedy odpowiedź na zadane wymuszenie można określić jednoznacznie przy znajomości transformacji T . Na ogół „historia” układu nie jest znana do chwili obserwacji t_0 . Aby istniała możliwość jednoznacznego określenia odpowiedzi $\mathbf{y}(t)$ dla $t \geq t_0$ przy zadanym pobudzeniu $\mathbf{u}(t)$, każdej parze $(\mathbf{u}, \mathbf{y})$ należy przyporządkować pewien parametr $\mathbf{x}(t)$, którego wartość w chwili t_0 jest określona (np. zmierzona) i taki, że jeśli $\mathbf{u}(t)$ jest znane dla $t \geq t_0$, to również $\mathbf{y}(t)$ jest określone jednoznacznie dla $t \geq t_0$. W dalszym ciągu $\mathbf{x}(t_0)$ nazywane będzie *stanem* układu w chwili t_0 . W rozważanym przykładzie jako stan układu wybrane zostało napięcie na kondensatorze. W ogólnym przypadku stan układu jest elementem przestrzeni wektorowej X nazywanej przestrzenią stanów. W każdej chwili t stan układu opisany jest za pomocą wektora o k składowych (w rozważanym przykładzie $k = 1$ i stan układu opisany był za pomocą liczb określających wielkość napięcia na kondensatorze w poszczególnych momentach czasu t). Posługując się interpretacją geometryczną można stwierdzić, że stanowi układu w chwili t_0 odpowiada określony punkt k -wymiarowej przestrzeni kartezjańskiej. Po przyłożeniu pobudzenia stan układu zmienia się po pewnej trajektorii, tzn. punkty na trajektorii odpowiadają stanom układu w różnych chwilach t .

Ponieważ przy znajomości stanu początkowego $\mathbf{x}(t_0)$ odpowiedź na zadane pobudzenie określona jest jednoznacznie, wobec tego istnieją transformacje $\mathbf{T}_1[.,.]$ i $\mathbf{T}_2[.,.]$, takie że:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}_1[\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t_0)], \quad (3.4)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{T}_2[\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t_0)], \quad \text{dla } t \geq t_0, \quad (3.5)$$

tzn. zarówno stan układu jak i odpowiedź układu w chwili t określona jest jednoznacznie przy znajomości stanu początkowego układu i pobudzenia w przedziale $[t_0, t)$.

Dla układów liniowych zależności (3.4) i (3.5) przybierają postać związków nazywanych reprezentacją kanoniczną układu [1], [2]:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (3.6)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (3.7)$$

Kształt reprezentacji kanonicznej związany jest z założeniem, że każdy liniowy układ można opisać za pomocą układu liniowych równań różniczkowych rzędu s ($s \geq 1$). Sprowadzając układ równań różniczkowych rzędu s do układu równań różniczkowych rzędu pierwszego otrzymuje się w rezultacie związki (3.6) i (3.7) [1].

Zbiór $R = \{A(t), B(t), C(t), D(t)\}$ macierzy $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ nosi nazwę realizacji układu. Przy założeniu stacjonarności układu macierze A , B , C , D są macierzami liczbowymi.

Następnym problemem jest wyrażenie macierzy funkcji przenoszenia $H(p)$ układu stacjonarnego przez realizację R układu. Ponieważ funkcja przenoszenia układu określona jest dla stanu zerowego, tzn. takiego, w którym odpowiedź układu $y = 0$ na pobudzenie $u = 0$. Zakładając, że stan początkowy $x(t_0)$ jest stanem zerowym układu i stosując transformację Laplace'a do równań (3.6) i (3.7) otrzymuje się [2]:

$$pX(p) = AX(p) + BU(p), \quad (3.8)$$

$$Y(p) = CX(p) + DU(p), \quad (3.9)$$

gdzie $X(p)$, $Y(p)$ i $U(p)$ są odpowiednio transformatami Laplace'a wektorów $x(t)$, $y(t)$ i $u(t)$.

Ponieważ odpowiedź $Y(p)$ jest równa:

$$Y(p) = H(p) \cdot U(p), \quad (3.10)$$

więc z równań (3.8) i (3.9) otrzymuje się związek macierzy funkcji przenoszenia z realizacją R układu stacjonarnego:

$$H(p) = D + C(pI_k - A)^{-1}B. \quad (3.11)$$

Macierz I_k jest macierzą jednostkową o wymiarze $k \times k$, gdzie k jest wymiarem wektora stanu.

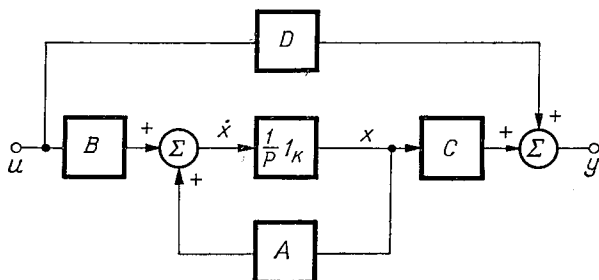
Równaniom (3.8) i (3.9) można przyporządkować schemat blokowy, który będzie modelem syntezy układu o zadanej macierzy funkcji przenoszenia. Schemat ten pokazany jest na rysunku 3.2, gdzie symbol $\frac{1}{p}$ odpowiada operatorowi całkowania.

Jak wynika ze schematu blokowego z rysunku 3.2 w układzie występuje k integratorów, z których każdy zawiera jedną pojemność. Liczba integratorów użytych do zrealizowania zadanej macierzy funkcji przenoszenia związana jest bezpośrednio z wymiarem wektora stanu. Dlatego też z praktycznego punktu widzenia ważny jest wybór wektora stanu o minimalnym wymiarze δ . Liczba δ nosi nazwę stopnia układu [4]. Realizacja R jest minimalna, jeżeli macierz A ma wymiar $\delta \times \delta$.

W dalszym ciągu warto zwrócić uwagę na pojęcie równoważności realizacji układu. Dwie realizacje $\hat{R} = \{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}\}$ i $R = \{A, B, C, D\}$ nazywane są równoważnymi, jeżeli odpowiednie macierze związane są relacjami:

$$\hat{A} = T^{-1}AT, \quad \hat{B} = T^{-1}B, \quad \hat{C} = CT, \quad \hat{D} = D \quad (3.12)$$

gdzie T jest dowolną liczbową macierzą nieosobliwą.



Rys. 3.2. Schemat blokowy układu opisanego równaniami stanu (3.3) i (3.4)

Jeżeli zachodzą związki (3.12.) to wówczas:

$$\hat{H}(p) = \hat{D} + \hat{C}(p\mathbf{1}_k - \hat{A})^{-1}\hat{B} = \hat{D} + CT(p\mathbf{1}_k - \hat{A})^{-1}T^{-1}B = D + C(p\mathbf{1}_k - A)^{-1}B = H(p) \quad (3.13)$$

Wynika stąd, że realizacje $\hat{R}$ i R odpowiadają układom opisanym tymi samymi macierzami funkcji przenoszenia.

Pojęcia wprowadzone w tym rozdziale można zilustrować w oparciu o rozważany na początku przykład obwodu RC . Przy oznaczeniach jak na rysunku 3.1 obwód RC opisany jest następującym równaniem różniczkowym:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{RC}y = \frac{du}{dt}. \quad (3.14)$$

Zakładając jako stan układu napięcie na kondensatorze otrzymuje się równania stanu:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{1}{RC}x - \frac{1}{RC}u, \\ y &= x + u; \end{aligned} \quad (3.15)$$

stąd realizacja minimalna R układu będzie:

$$R_{\min} = \left\{ \left[-\frac{1}{RC} \right], \left[-\frac{1}{RC} \right], [1], [1] \right\}. \quad (3.16)$$

Korzystając ze związków (3.11) otrzymuje się następującą funkcję przenoszenia:

$$H(p) = 1 - \left(p + \frac{1}{RC} \right)^{-1} \cdot \frac{1}{RC} = \frac{R}{R + \frac{1}{pC}}. \quad (3.17)$$

Realizacje nieminimalne (wymiar wektora stanu $k = 2$) układu posiadającego funkcję przenoszenia (3.17) są następujące:

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \alpha \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix}, [1, \gamma], [1] \right\}, \quad (3.18)$$

gdzie α, β, γ są dowolnymi stałymi.

Funkcja przenoszenia układu o realizacji (3.18) jest oczywiście równa:

$$H(p) = 1 + [1 \quad \gamma] \left(\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \alpha \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{R}{R + \frac{1}{pC}}. \quad (3.19)$$

4. WYZNACZANIE REALIZACJI MINIMALNEJ UKŁADU

Wyznaczenie realizacji minimalnej układu o zadanej macierzy funkcji przenoszenia jest pierwszym etapem syntezy tego układu. Etap ten jest szczególnie ważny z praktycznego punktu widzenia, pozwala bowiem na syntezę układu przy użyciu minimalnej liczby kondensatorów, a więc elementów, których wykonanie w technice scalonej sprawia najwięcej kłopotów. Dalsze rozważania prowadzone są przy założeniu, że zadana macierz o wymiarach $n \times m$ jest macierzą rzeczywistą — wymierną oraz analityczną w nieskończoności. Założenie analityczności w nieskończoności związane jest z tym, że równania stanu (3.8) i (3.9) opisują układ nie posiadający bieguna w nieskończoności. Założenie to jest potrzebne tylko przy syntezie admitancyjnej, gdyż w przypadku syntezy funkcji przenoszenia fizycznie realizowanej założenie to spełnione jest automatycznie.

Rozważenie ogólnego przypadku układu o m -wejściach i n -wyjściach poprzedzone zostanie przypadkiem szczególnym, chociaż spotykanym w praktyce bardzo często, czwórnik z zadaną skalarną funkcją przenoszenia $H(p)$:

$$H(p) = \frac{dp^r + d_r p^{r-1} + \dots + d_2 p + d_1}{p^s + a_s p^{s-1} + \dots + a_2 p + a_1}, \quad (4.1)$$

gdzie $r \leq s$ ze względu na założenie analityczności w nieskończoności.

Z równania (4.1) widać, że $H(p) = d$ dla $r = s$. Wiadomo, że zmienną zespoloną p , przy zerowych warunkach początkowych, można traktować jako operator różniczkowania $\frac{d}{dt}$. Wtedy, biorąc pod uwagę definicję funkcji $H(p)$, związek (4.1) można traktować jako równanie różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach:

$$(p^s + a_s p^{s-1} + \dots + a_2 p + a_1)y = (dp^r + d_r p^{r-1} + \dots + d_2 p + d_1)u, \quad (4.2)$$

gdzie:

$u = u(t)$ jest wymuszeniem,

$y = y(t)$ jest odpowiedzią na to wymuszenie.

Bez zmniejszania ogólności rozważań można założyć w dalszym ciągu $r = s$. Jest to przypadek najciekawszy, ponieważ wtedy $H(p) = d = \mathbf{D} \neq 0$ i schemat blokowy z rysunku 3.2 pozostaje pełny.

Dokonując zamiany zmiennych w równaniu różniczkowym (4.2)

$$y = x_1 + du, \quad (4.3)$$

otrzymuje się:

$$(p^{s-1} + a_s p^{s-2} + \dots + a_2) p x_1 + a_1 x_1 = [(d_s - a_s d) p^{s-1} + \dots + (d_1 - a_1 d)] u. \quad (4.4)$$

Dokonując dalszej zamiany zmiennych

$$p x_1 = x_2 + (d_s - a_s d) u \quad (4.5)$$

i wprowadzając (4.5) do równania (4.4) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} (p^{s-2} + a_s p^{s-3} + \dots + a_3) p x_2 + a_2 x_2 + a_1 x_1 = \\ = [\{(d_{s-1} - a_{s-1} d) - a_s (d_s - a_s d)\} p^{s-2} + \dots + \{(d_1 - a_1 d) - a_2 (d_s - a_s d)\}] u. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Kontynuując to postępowanie sprowadza się w rezultacie równanie różniczkowe rzędu s do układu s równań różniczkowych rzędu pierwszego:

$$\begin{aligned} p x_1 &= x_2 + (d_s - a_s d) u, \\ p x_2 &= x_3 + \{(d_{s-1} - a_{s-1} d) - a_s (d_s - a_s d)\} u, \\ &\vdots \\ p x_s &= -a_s x_s - a_{s-1} x_{s-1} - a_{s-2} x_{s-2} - \dots - a_2 x_2 - a_1 x_1 + b_s u, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$y = x_1 + du, \quad (4.8)$$

gdzie b_s jest kombinacją współczynników a_i i d_i .

Stosując zapis macierzowy, równania (4.7) i (4.8) mogą być przedstawione następująco:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{s-1} \\ \dot{x}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{s-1} & -a_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{s-1} \\ x_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_s - a_s d \\ \vdots \\ b_s \end{bmatrix} u, \quad (4.9)$$

$$y = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} + du.$$

Porównując równania (4.9) z równaniami (3.6) i (3.7) otrzymuje się realizację układu o zadanej skalarnej funkcji przenoszenia (4.1.)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{s-1} & -a_s \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} d_s - a_s d \\ \vdots \\ b_s \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{C} = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \quad \mathbf{D} = [d].$$

Inne metody wyznaczania macierzy $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ dla danej funkcji przenoszenia $H(p)$ znaleźć można w pracy [11].

Macierz $\mathbf{A}$ układu jest macierzą towarzyszącą¹⁾ [10] mianownika wymiernej funkcji przenoszenia (4.1), posiada więc wymiar $s \times s$. Ale ponieważ stopień $\delta[H(p)]$ funkcji $H(p)$ określający minimalną liczbę elementów dynamicznych potrzebnych do zrealizowania tej funkcji wynosi również s , wobec tego zgodnie z podaną w poprzednim rozdziale definicją, otrzymana realizacja (4.10) jest minimalna.

Wyznaczanie realizacji minimalnej w przypadku ogólnym macierzy funkcji przenoszenia jest znacznie bardziej skomplikowane rachunkowo. Dlatego też zostaną podane tylko końcowe związki, bez szczegółowych wyprowadzeń.

Realizacja minimalna układu zadaną macierzą $\mathbf{H}(p)$ ($n \times m$) wymiernych funkcji przenoszenia dana jest relacjami [2], [5]:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{1}_{\delta, rn} \mathbf{M} \Omega_n \mathbf{S}_r \mathbf{N} \tilde{\mathbf{I}}_{\delta, rm}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{1}_{\delta, rn} \mathbf{M} \mathbf{S}_r \tilde{\mathbf{I}}_{m, rm}, \\ \mathbf{C} &= \mathbf{1}_{n, rn} \mathbf{S}_r \mathbf{N} \tilde{\mathbf{I}}_{\delta, rm} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{H}(\infty), \end{aligned} \quad (4.11)$$

gdzie macierze $\mathbf{1}_{\delta, rn}$ i $\mathbf{1}_{\delta, rm}$ są przypadkami szczególnymi macierzy $\mathbf{1}_{\rho, \gamma}$, tzn. takiej macierzy, której pierwsze ρ kolumn tworzy macierz jednostkową ($\rho \times \rho$), a pozostałe $\gamma - \rho$ kolumn tworzy macierz złożoną z samych zer: $\mathbf{O}(\rho \times \gamma - \rho)$.

Dla przykładu macierz $\mathbf{1}_{2,3}$ jest następującą:

$$\mathbf{1}_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

stąd macierz transponowana macierzy $\mathbf{1}_{2,3}$:

$$\tilde{\mathbf{I}}_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

¹⁾ Macierzą towarzyszącą wielomianu $f(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0$ nazywa się macierz:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

oraz

$$\tilde{\mathbf{1}}_{2,3} \cdot \mathbf{1}_{2,3} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Macierz Ω_n jest uogólnioną macierzą towarzyszącą wielomianu [2] $g(p) = p^r + a_r p^{r-1} + \dots + a_2 p + a_1$ będącego najmniejszą wspólną wielokrotnością mianowników wszystkich elementów macierzy $\mathbf{H}(p)$:

$$\Omega_n = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbf{0}_n & \mathbf{1}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \\ \hline & & \mathbf{1}_n & \ddots & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_n \\ \hline -a_1 \mathbf{1}_n & -a_2 \mathbf{1}_n & -a_3 \mathbf{1}_n & \dots & -a_r \mathbf{1}_n \end{array} \right]. \quad (4.12)$$

Macierz Ω_n ma wymiar $rn \times rn$.

Macierz S_r jest uogólnioną $(rn \times rm)$ macierzą hankelowską utworzoną ze współczynników rozwinięcia macierzy $\mathbf{H}(p)$ w szereg wokół punktu $p = \infty$:

$$\mathbf{H}(p) = \sum_{i=-1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}_i}{p^{i+1}}, \quad (4.13)$$

$$S_r = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \dots & \mathbf{A}_{r-1} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{A}_r \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{A}_{r-1} & \mathbf{A}_r & \dots & \mathbf{A}_{2r-2} \end{array} \right]. \quad (4.14)$$

Macierze $\mathbf{M}$ i $\mathbf{N}$ są nieosobliwe i sprowadzają macierz S_r do postaci diagonalnej [10], tzn.

$$\mathbf{M} S_r \mathbf{N} = \tilde{\mathbf{1}}_{\delta, rn} \cdot \mathbf{1}_{\delta, rm}. \quad (4.15)$$

Można wykazać, że stopień układu δ równy jest rzędowi macierzy S_r [4], [2]:

$$\delta[\mathbf{H}(p)] = \text{rzęd } S_r. \quad (4.16)$$

Ze związków (4.11) można także korzystać w przypadku $m = n = 1$, tzn. w przypadku skalarnej funkcji przenoszenia. Jednak szybciej szukaną realizację można znaleźć stosując w tym wypadku związki (4.10).

5. SYNTEZA UKŁADU O ZADANEJ MACIERZY NAPIĘCIOWYCH FUNKCJI PRZENOSZENIA

Model syntezy metodami przestrzeni stanów określony jest schematem blokowym jak na rysunku 3.2.

Warto zauważyć pewne cechy tej struktury:

a) w związku z istnieniem sprzężenia zwrotnego poprzez blok opisany macierzą $\mathbf{A}$, dla zapewnienia stabilności wszystkie wartości własne²⁾ macierzy $\mathbf{A}$ muszą być ujemne [2],

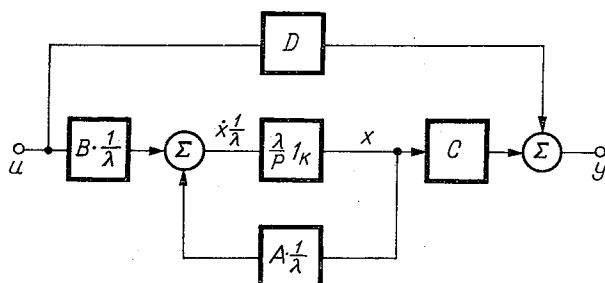
²⁾ Wartości własne macierzy $\mathbf{A}$ są to pierwiastki równania charakterystycznego macierzy $\mathbf{A}$, tzn. $\det(p\mathbf{1}_n - \mathbf{A}) = 0$.

b) w skład struktury wchodzi bloki trzech typów: sumatory, integratory i wzmacniacze opisane macierzami **A**, **B**, **C**, **D**, przy czym bloki sumujące i wzmacniające są układami o wielu wejściach i wyjściach, natomiast integratory są czwórnikami,

c) wszystkie integratory posiadają wzmocnienie³⁾ równe 1. Jest to często praktycznie niewygodne, w związku z tym równania stanu (3.6) i (3.7) można zmodyfikować wprowadzając wzmocnienie integratorów równe dowolnej stałej λ . Otrzymuje się wówczas [3]:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\mathbf{x}}}{\lambda} &= \frac{\mathbf{A}}{\lambda} \mathbf{x} + \frac{\mathbf{B}}{\lambda} \mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u}.\end{aligned}\quad (5.1)$$

Schemat blokowy układu będzie miał wtedy postać pokazaną na rysunku 5.1



Rys. 5.1. Schemat blokowy układu opisanego równaniami (5.1)

Jeżeli rozważania ograniczy się do syntezy układu o zadanych napięciowych funkcjach przenoszenia, wtedy składowe wektorów $\mathbf{u}$ i $\mathbf{y}$ są przebiegami napięcia odpowiednio na wejściu i wyjściu układu, a elementy macierzy **A**, **B**, **C**, **D** mają sens transmitancji napięciowych, gdyż wynikają ze związków pomiędzy napięciami w różnych punktach układu.

Z punktu widzenia praktycznego wykonania układu w technice scalonej, struktura realizowana powinna zawierać możliwie mało różnych typów elementów. Można pokazać, że bloki używane do syntezy układu metodą zmiennych stanu, a więc wzmacniacze, sumatory i integratory dają się zrealizować w oparciu o jeden element generujący, a mianowicie wzmacniacz operacyjny.

Rysunki 5.2 i 5.3 podają przykłady integratora i sumatora nadających się do wykonania w postaciach scalonych.

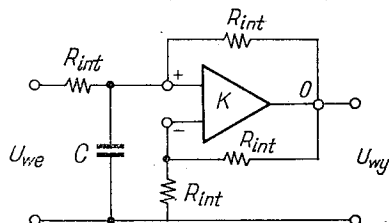
Funkcja przenoszenia integratora z rysunku 5.2 dana jest związkami:

$$\frac{U_{wy}}{U_{we}} = \frac{2}{R_{int} p C \left(1 + \frac{2}{K} \right) + \frac{4}{K}}; \quad (5.2)$$

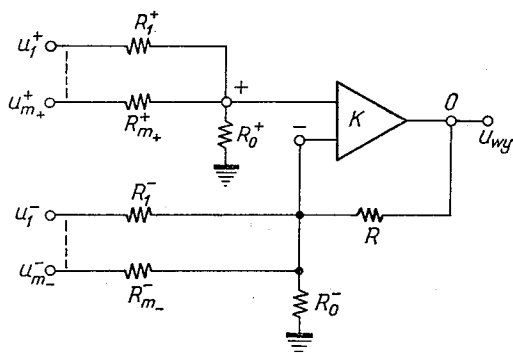
³⁾ Przez wzmocnienie integratora rozumie się stałą K w funkcji przenoszenia integratora: $H(p) = \frac{K}{p}$.

przy założeniu, że wzmacnienie użytego wzmacniacza K zmierza do nieskończoności otrzymuje się:

$$\frac{U_{wy}}{U_{we}} = \frac{2}{R_{int} p C}. \quad (5.3)$$



Rys. 5.2. Integrator



Rys. 5.3. Sumator

Relacja między napięciami na wejściach i napięciem na wyjściu sumatora z rysunku 5.3 ma postać następującą:

$$U_{wy} = \sum_{j=1}^{m_+} \frac{RG^- + 1}{G^+} G_j^+ u_j^+ - \sum_{j=1}^{m_-} RG_j^- u_j^-, \quad (5.4)$$

gdzie:

$$G^+ = \sum_{j=0}^{m_+} G_j^+, \quad G^- = \sum_{j=0}^{m_-} G_j^-$$

oraz

$$G_j^+ = \frac{1}{R_j^+}, \quad G_j^- = \frac{1}{R_j^-}.$$

Sumator na rysunku 5.3 jest przykładem układu, w którym połączono rolę sumatora i bloku wzmacniającego z rysunku 5.1.

Powyższe uwagi dotyczące syntezy układu o zadanych napięciowych funkcjach przenoszenia można przenieść na przypadek, kiedy wymagana jest realizacja innego typu funkcji przenoszenia niż napięciowe. W tym wypadku w zależności od typu funkcji przenoszenia należy na wejściu lub na wyjściu stosować konwertery prądowo-napięciowe lub napięciowo-prądowe [3]. Rolę konwertera prądowo-napięciowego spełnia opornik, a rolę konwertera napięciowo-prądowego spełnia generator prądowy sterowany napięciowo. Przykład takiego układu wygodnego do wykonania w technice scalonej podany jest w pracach [3], [9].

6. PRZYKŁAD SYNTEZY FUNKCJI PRZENOSZENIA METODĄ ZMIENNYCH STANU

Jako przykład przedstawiona jest procedura syntezy filtra dolnoprzepustowego o napięciowej funkcji przenoszenia danej wzorem:

$$\frac{U_2}{U_1} = H(p') = \frac{K'_0}{p'^2 + 2\zeta\omega_n p' + \omega_n^2}, \quad (6.1)$$

gdzie współczynnik ω_n jest tzw. częstotliwością naturalną, a współczynnik ζ nosi nazwę współczynnika tłumienia.

Rozpatrywana funkcja przenoszenia należy do klasy funkcji wymiernych rzeczywistych. Ze względu na stabilność układu ζ i ω_n z założenia są dodatnie.

Dokonując normalizacji częstotliwości określonej związkami:

$$p = \frac{p'}{\omega_n}, \quad (6.2)$$

otrzymuje się znormalizowaną postać zadanej funkcji przenoszenia filtra:

$$H(p) = \frac{K_0}{p^2 + 2\zeta p + 1}, \quad (6.3)$$

gdzie K_0 jest wzmocnieniem układu dla prądu stałego równym K'_0/ω_n^2 .

Należy zauważyć, że stopień $\delta[H(p)]$ funkcji $H(p)$ określający minimalną liczbę integratorów potrzebnych do realizacji tej funkcji wynosi dwa:

$$\delta[H(p)] = 2. \quad (6.4)$$

Korzystając z rozważań przedstawionych w rozdziale 4 można wyznaczyć realizację minimalną $R_{\min}$ układu podlegającego syntezie:

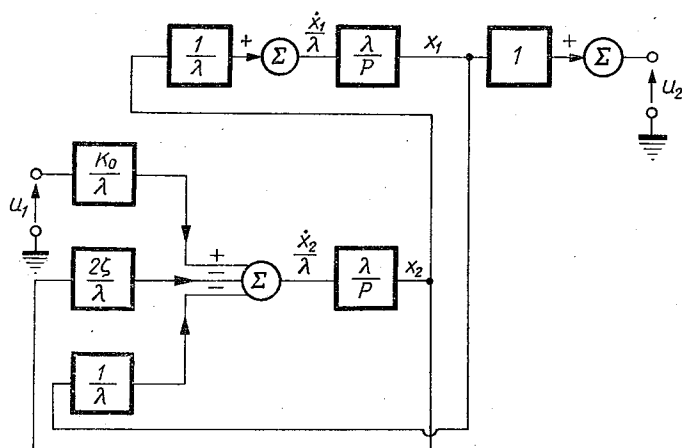
$$R_{\min} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\zeta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ K_0 \end{bmatrix}, [1 \ 0], [0] \right\}. \quad (6.5)$$

Zakładając, że $u_2 \equiv y$ i $u_1 \equiv u$ oraz biorąc pod uwagę związki (4.9) otrzymuje się równania stanu szukanego czwórnika:

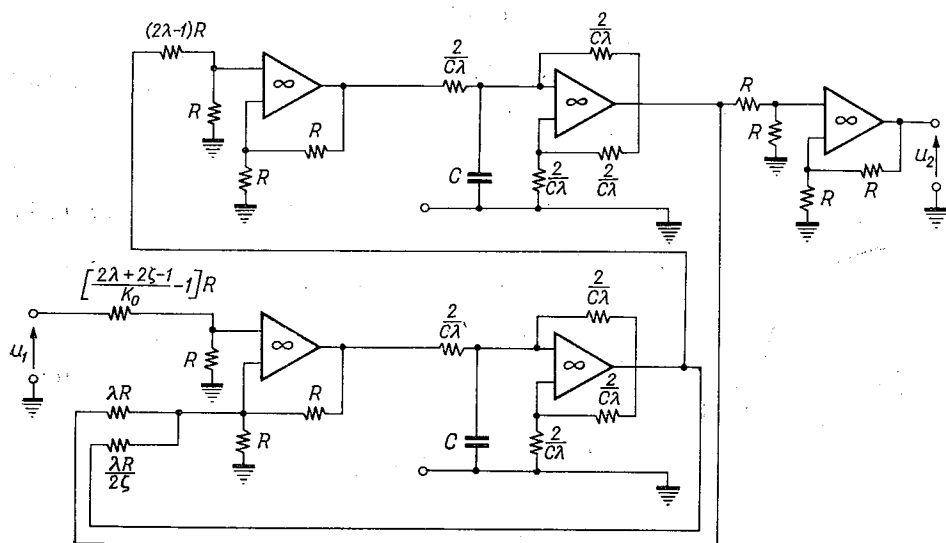
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_0 \end{bmatrix} u, \\ y &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]u. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Jak przedstawiono w rozdziale 5, struktura czwórnika określona jest schematem blokowym jak na rysunku 5.1. Stopień $\delta[H(p)]$ jest równy 2, więc konieczne są dwa integratory. Poza tym, ponieważ wygodniej jest, aby wzmocnienie integratorów było równe dowolnej stałej λ , więc zgodnie z równaniem (5.1) realizacja wynikająca z równania (6.5) będzie miała postać:

$$R_{\min} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda} \\ -\frac{1}{\lambda} & -\frac{2\zeta}{\lambda} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_0}{\lambda} \end{bmatrix}, [1 \ 0], [0] \right\}. \quad (6.7)$$



Rys. 6.1. Schemat blokowy filtra

Rys. 6.2. Struktura filtra o funkcji przenoszenia $H(p)$

Schemat blokowy układu o funkcji przenoszenia $H(p)$ zadanej równaniem (6.3) przedstawiony jest na rysunku 6.1. Każdy z bloków, których schematy są pokazane na rysunkach 5.2 i 5.3 jest praktycznie wykonalny — techniką scaloną. Ostateczna struktura szukanego filtra ma postać jak na rysunku 6.2.

Wyznaczenie wartości parametrów elementów wchodzących w skład podanej struktury oparte zostało na związkach (5.3) i (5.4). Dla przykładu, w celu określenia wartości oporności występujących w integratorach wykorzystano związek (5.3):

$$\frac{U_{wy}}{U_{we}} \Big|_{K|\infty} = \frac{2}{pR_{int}C} = \frac{\lambda}{p}. \quad (6.8)$$

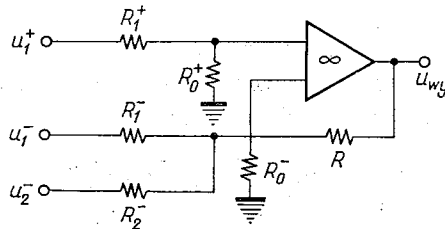
Stąd, przy założeniu, że wartość pojemności C jest z góry zadana otrzymuje się:

$$R_{int} = \frac{2}{C\lambda}. \quad (6.9)$$

Analogicznie dla wyznaczenia parametrów elementów wchodzących w skład bloku sumatora wykorzystano związek (5.4):

$$U_{wy} \Big|_{K|\infty} = \sum_{j=1}^{m_+} \frac{RG_j^- + 1}{G^+} G_j^+ u_j^+ - \sum_{j=1}^{m_-} RG_j^- u_j^-. \quad (6.10)$$

Dla przykładu obliczone są wartości elementów takiego bloku, pokazanego na rysunku 6.3, znajdującego się na wejściu filtra.



Rys. 6.3. Schemat sumatora znajdującego się na wejściu filtra

Jeżeli założyć się, że:

$$R_0^+ = R_0^- = R, \quad (6.11)$$

wówczas otrzyma się:

$$\begin{aligned} u_1^+ &\equiv u_1, \\ u_1^- &\equiv x_1, \\ u_2^- &\equiv x_2, \end{aligned} \quad (6.12)$$

a stąd:

$$u_{wy} = \frac{K_0}{\lambda} u_1^+ - \frac{1}{\lambda} u_1^- - \frac{2\zeta}{\lambda} u_2^- = \frac{RG^- + 1}{G^+} G_1^+ u_1^+ - RG_1^- u_1^- - RG_2^- u_2^- \quad (6.13)$$

gdzie:

$$G^- = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1^-} + \frac{1}{R_2^-},$$

$$G^+ = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1^+}.$$

Z powyższych zależności otrzymuje się układy równań:

$$\frac{K_0}{\lambda} = \frac{R \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1^-} + \frac{1}{R_2^-} \right) + 1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1^+}} \cdot \frac{1}{R_1^+},$$

$$\frac{1}{\lambda} = R \cdot \frac{1}{R_1^-}, \quad \text{stąd } R_1^- = \lambda R, \quad (6.14)$$

$$\frac{2\zeta}{\lambda} = R \cdot \frac{1}{R_2^-}, \quad \text{stąd } R_2^- = \frac{\lambda R}{2\zeta}$$

oraz

$$R_1^+ = \left(\frac{2\lambda + 2\zeta + 1}{K_0} - 1 \right) R.$$

Dla spełnienia fizycznej realizowalności oporników muszą być spełnione nierówności:

$$2\lambda - 1 \geq 0,$$

$$\left(\frac{2\lambda + 2\zeta + 1}{K_0} - 1 \right) \geq 0. \quad (6.15)$$

Praktyczne wartości współczynnika λ są rzędu 10^5 .

Wartości elementów podane na rysunku 6.2 określone są dla znormalizowanej funkcji przenoszenia. Dokonując denormalizacji otrzymuje się:

$$\frac{p}{\lambda} = \frac{p'}{\omega_n \lambda} = \frac{R_{\text{int}} C p'}{2\omega_n} = \frac{R_{\text{int}} C_1 p'}{2} = \frac{p'}{\lambda_1}. \quad (6.16)$$

Wybierając $C_1 = C$, otrzymuje się:

$$R_{\text{int}} = \frac{R_{\text{int}}}{\omega_n}. \quad (6.17)$$

Słuszność powyższych rozważań jest ważna przy założeniu odpowiedniej jakości wzmacniaczy operacyjnych użytych do syntezy. W przypadku wzmacniaczy operacyjnych odbiegających znacznie właściwościami od wzmacniaczy idealnych, należy dokonać odpowiedniej korekty układu.

7. UWAGI KOŃCOWE

Synteza liniowych, stacjonarnych układów metodami przestrzeni stanów dzieli się na dwa zasadnicze etapy. Przy założeniu, że zadana jest fizycznie realizowana macierz funkcji przenoszenia, ewentualnie zadana jest funkcja przenoszenia w przypadku czwórnika,

pierwszy etap sprowadza się do wyznaczenia zbioru macierzy **A**, **B**, **C**, **D** nazywanego realizacją układu tak, aby wymiar macierzy **A** był równy stopniowi układu. Drugi etap polega na wyznaczeniu parametrów elementów użytych do syntezy.

Struktura układu podlegającego syntezie określona jest schematem blokowym jak na rysunku 5.1. Zawiera ona elementy tylko dwóch typów: integratory i sumatory zbudowane na podstawie jednego elementu generującego — wzmacniacza operacyjnego. Użycie metod przestrzeni stanów do syntezy układów mikroelektronicznych wydaje się być uzasadnione z kilku względów:

- 1) pozwalają one na realizację układu przy użyciu minimalnej ilości kondensatorów,
- 2) konstrukcja układu oparta jest na wzmacniaczach operacyjnych,
- 3) uzyskiwane struktury są mało czułe na zmiany wartości parametrów elementów użytych do syntezy,
- 4) ze względu na operowanie wyłącznie macierzami liczbowymi istnieje duża dogodność stosowania maszyn cyfrowych.

Warunek dużych liczb oporników a szczególnie tranzystorów koniecznych do syntezy nie jest ograniczeniem w przypadku technologii stosowanej w półprzewodnikowych układach scalonych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. L. A. Zadeh, C. A. Desoer, Linear System Theory, Mc Graw-Hill Book Company, 1963.
2. R. W. Newcomb, Network Theory The State-Space Approach, Librare Universitaire Louvain, Louvain, 1968.
3. R. W. Newcomb, Active Integrated Circuit Synthesis, Prentice Hall, N. J. 1968.
4. R. W. Newcomb, Linear Multiport Synthesis, McGraw-Hill Book Company, 1966.
5. R. W. Newcomb, B. D. O. Anderson, State Variable Results for Minimal ..., Tech. Report N. 6558-14, Stanford University, 1966.
6. R. W. Newcomb, B. D. O. Anderson, Gyrator and State Variable Results for ..., Proceedings IREE Australia, May 1968.
7. S. K. Mitra, Recent Developments in Active Network Synthesis, S.S.C.T. 68. Praga, czerwiec 1968.
8. M. Białko, R. W. Newcomb, Integrated DVCCS Generation of All Finite Circuits, Seminarium w Stanford University, Maj, 1968.
9. M. Białko, Mikroelektronika, Warszawa, WKŁ 1969,
10. F. R. Gantmacher, Teorija matric, Gostiechizdat, 1953.
11. T. Kaczorek, Związek macierzy transmitancji operatorowych z opisem w przestrzeni stanów, Arch. Elektrotechn. t. XVIII, z. 4, 1969.

M. BIAŁKO, W. SIEŃKO

APPLICATION OF STATE SPACE METHODS TO SYNTHESIS OF LINEAR INTEGRATED NETWORKS

PART I INTRODUCTORY INFORMATION AND TRANSFER FUNCTION SYNTHESIS

Summary

In the paper a review of linear microelectronic integrated networks using state space synthesis methods is presented. Basis definitions and relationships for state space methods are given concisely. Multiport

network synthesis for given transfer function matrices is described as well. The possibilities of practical construction of synthesised structures by means of technological processes used in semiconductor integrated networks are shown.

M. BIAŁKO, W. SIENKO

SYNTHÈSE DES CIRCUITS LINÉAIRES INTÉGRÉS PAR DES MÉTHODES D'ESPACE D'ÉTATS

PARTIE 1: INTRODUCTION ET SYNTHÈSE DES FONCTIONS DE TRANSFERT

Résumé

L'article fait a revue des méthodes de synthèse des circuits linéaires microélectroniques intégrés avec l'application des méthodes d'espace d'états. Après une courte introduction qui présente des notions et relations fondamentales pour des méthodes d'espace d'états, on étudie la synthèse des circuits multi-entrées décrits par les matrices de fonctions de transfert. L'article présente la possibilité de réalisation pratique des structures synthétisées par des procédés technologiques appliqués dans des circuits intégrés à semi-conducteurs.

M. BIAŁKO, W. SIENKO

ZUSTAND-VARIABLE-METHODE DER SYNTHESE VON INTEGRIERTEN SCHALTUNGEN

TEIL 1: EINFÜHRUNG IN DIE PROBLEMATIK UND ÜBERGANSFUNKTIONSYNTHESE

Zusammenfassung

Im Artikel wurde eine Übersicht der Zustand-Variable-Methoden der Synthese von linearen mikroelektronischen integrierten Schaltungen dargestellt. In kurzer Form wurden Grundbegriffe und Formeln der Zustand-Variable-Methode angeführt; weiter wurde die Synthese von mehreingängigen Schaltungen mit vorbestimmten Übertragungsmatrixen besprochen. Man zeigte die Möglichkeit einer praktischen Realisation von synthetisierter Strukturen unter Anwendung von in integrierten Halbleiterschaltungen gebrauchter Technologien.

М. БЯЛКО, В. СЕНЬКО

СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СХЕМ МЕТОДОМ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ

ЧАСТЬ 1: ВВЕДЕНИЕ И СИНТЕЗ ФУНКЦИИ ПЕРЕДАЧИ

Резюме

В статье представлено резюме методов синтеза линейных микроэлектронных интегральных схем методом пространства состояний. Приведены основные понятия и соотношения метода пространства состояний, а также приведены методы синтеза многополюсных схем с данными матрицами функции передачи. Показаны возможности практического построения полученных схем с применением технологий полупроводниковых интегральных схем.

Synteza liniowych układów scalonych metodami przestrzeni stanów

Część 2: Synteza admitancyjna

WIESŁAW SIEŃKO (GDAŃSK), MICHAŁ BIAŁKO (GDAŃSK)

Instytut Technologii Elektronicznej Politechniki Gdańskiej

Otrzymano 13.4.1970

Artykuł jest przeglądem zastosowania metod przestrzeni stanów do syntezy admitancyjnej liniowych układów scalonych. Omówione zostały metody syntezy admitancyjnej układów pasywnych oraz aktywnych. Ze względu na konieczność użycia do realizacji układów dużej liczby żyratorów, rozważania mają znaczenie przede wszystkim teoretyczne.

1. UWAGI WSTĘPNE

Rozważania przeprowadzone w pierwszej części pracy dotyczyły syntezy układów o zadanej macierzy napięciowych funkcji przenoszenia. Metody przestrzeni stanów można wykorzystać także do syntezy układów o zadanej macierzy immitancji, tj. admitancji lub impedancji, jeżeli odpowiednio zinterpretuje się równania stanu. Należy jednak podkreślić, że w odróżnieniu od pierwszej części, rezultaty uzyskane w tej części pracy nie mogą w tej chwili znaleźć szerokiego zastosowania praktycznego ze względu na konieczność użycia znacznej liczby żyratorów, a więc elementów stosunkowo drogich i niedostępnych powszechnie. Dalsze rozważania przeprowadzone w tej pracy oparte są na twierdzeniu, że każdy liniowy, stacjonarny, skończony układ N posiadający macierz funkcji przenoszenia $H(p)$ ograniczoną w punkcie $p = \infty$, opisany jest następującymi równaniami stanu:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}\end{aligned}\tag{1.1}$$

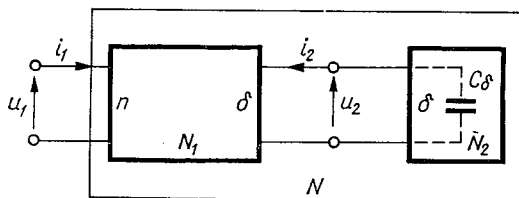
gdzie:

- $\mathbf{u}$ — wymuszenie,
- $\mathbf{y}$ — odpowiedź,
- $\mathbf{x}$ — stan układu.

2. WYZNACZENIE RÓWNAŃ STANU UKŁADU N -WEJŚCIOWEGO

Procedura syntezy immitancyjnej układu n -wejściowego sprowadza się do odwrócenia metod postępowania przy wyznaczaniu równań stanu układu. Opisany tutaj sposób wyznaczania równań stanu oparty jest na tzw. ekstrakcji elementów dynamicznych na zewnątrz układu [5, 2].

Niech będzie dany liniowy, stacjonarny, n -wejściowy układ N opisany macierzą admitycyjną $Y(p)$ o wymiarach $(n \times n)$. Ze względu na ograniczenia stawiane półprzewodnikowym układom scalonym można w dalszym ciągu założyć, że układ zbudowany jest z elementów dwóch typów: żyratorów i oporności (elementy niedynamiczne) oraz pojemności (elementy dynamiczne). Przy takim założeniu układ N można traktować jako kaskadowe połączenie dwóch podukładów N_1 i N_2 , przy czym układ N_1 jest $(n + \delta)$ -wejściowym układem zawierającym wszystkie elementy niedynamiczne, natomiast N_2 jest δ -wejściowym układem zawierającym wszystkie pojemności, gdzie δ jest liczbą pojemności w układzie N . Rozłożenie układu N na podukłady N_1 i N_2 pokazane jest na rysunku 2.1.



Rys. 2.1. Rozłożenie układu N na podukłady N_1 i N_2

Macierz C_δ reprezentuje na schemacie macierz diagonalną, której główną przekątną tworzą wartości pojemności kondensatorów występujących w układzie N .

Jeżeli podukład N_1 posiada macierz admitycji Y_c , to może być ona rozłożona na cztery podmacierze w następujący sposób:

$$Y_c = \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{Y_{11} \dots Y_{1n}}^n & \overbrace{Y_{1n+1} \dots Y_{1n+\delta}}^\delta \\ \hline \overbrace{Y_{n+1} \dots Y_{n+\delta}}^\delta & \overbrace{Y_{n+\delta+1} \dots Y_{n+\delta+\delta}}^\delta \end{array} \right]_{n+\delta} \quad (2.1)$$

Należy zwrócić uwagę, że ponieważ układ N jest stacjonarny z założenia, więc macierz admitycyjna Y_c podukładu N_1 jest macierzą liczbową o wymiarach $(n + \delta) \times (n + \delta)$.

Przy oznaczeniach wektorów prądów i napięć jak na rysunku 2.1 słuszne jest równanie:

$$\begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Ponieważ macierz pojemności C_δ jest macierzą diagonalną:

$$C_\delta = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & C_\delta \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

gdzie: C_i , $i = 1 \dots \delta$, są wartościami pojemności kondensatorów występujących w układzie N ,

oraz:

$$i_2(t) = -\frac{d[C_\delta \cdot u_2(t)]}{dt}, \quad (2.4)$$

więc z równań (2.2), (2.3) i (2.4) otrzymuje się:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_1(t) \\ -\frac{d[\mathbf{C}_\delta \mathbf{u}_2(t)]}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(t) \\ \mathbf{u}_2(t) \end{bmatrix}; \quad (2.5)$$

stąd:

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{C}_\delta \mathbf{u}_2)}{dt} &= -\mathbf{Y}_{22} \mathbf{u}_2(t) - \mathbf{Y}_{21} \mathbf{u}_1(t), \\ \mathbf{i}_1(t) &= \mathbf{Y}_{12} \mathbf{u}_2(t) + \mathbf{Y}_{11} \mathbf{u}_1(t). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Wybierając ładunek elektryczny na kondensatorach jako składowe wektora stanu układu, a więc:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}_\delta \mathbf{u}_2(t) \quad (2.7)$$

oraz zakładając, że w praktyce wygodniej jest, gdy $\mathbf{C}_\delta = \mathbf{C}_0 \mathbf{1}_\delta$, tzn. że wszystkie kondensatory mają tę samą pojemność C_0 , otrzymuje się następujące równania stanu układu N :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{x}} &= -\frac{1}{C_0} \mathbf{Y}_{22} \mathbf{x}(t) - \mathbf{Y}_{21} \mathbf{u}_1(t), \\ \mathbf{i}_1 &= \frac{1}{C_0} \mathbf{Y}_{12} \mathbf{x}(t) + \mathbf{Y}_{11} \mathbf{u}_1(t). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Zakładając, że wektor napięć $\mathbf{u}_1$ stanowi wymuszenie, a wektor prądów $\mathbf{i}_1$ stanowi odpowiedź układu i porównując równania (2.8) z ogólną postacią równań stanu (1.1), otrzymuje się realizację R układu N :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -\frac{1}{C_0} \mathbf{Y}_{22}, & \mathbf{B} &= -\mathbf{Y}_{21}, \\ \mathbf{C} &= \frac{1}{C_0} \mathbf{Y}_{12}, & \mathbf{D} &= \mathbf{Y}_{11}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Związki (2.9) będą stanowiły zasadniczy przedmiot dalszych rozważań.

3. SYNTEZA ADMITANCYJNA LINIOWYCH UKŁADÓW N -WEJŚCIOWYCH

Opis metod syntezy liniowych, stacjonarnych, skończonych układów n -wejściowych przedstawiony w tej części pracy będzie dotyczył dwóch przypadków — syntezy układów pasywnych i syntezy układów aktywnych, przy czym zarówno w jednym jak i drugim przypadku metody syntezy będą w zasadzie polegały na odwróceniu opisanych powyżej metod postępowania przy wyznaczaniu równań stanu.

a) Synteza admitancyjna układów pasywnych

Jak wiadomo, warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby rozważany układ był pasywny jest, aby jego macierz admitancyjna $\mathbf{Y}(p)$ była macierzą wymierną, dodatnio-rzeczywistą, tzn. aby spełniała warunki [2]:

1. $Y(p)$ jest holomorficzna w prawej półpłaszczyźnie ($\text{Re } p > 0$),
2. $Y(p^*) = Y^*(p)$ w prawej półpłaszczyźnie,
3. część hermitowska $Y_H(p)$, $2Y_H(p) = Y(p) + Y^+(p)$, jest nieujemnie określona w prawej półpłaszczyźnie, gdzie $Y^+(p)$ oznacza macierz stowarzyszoną macierzy $Y(p)$, tzn. macierz przedstawioną i sprzężoną: $Y^+(p) = \tilde{Y}^*(p)$.

Każdy układ pasywny daje się zrealizować za pomocą elementów pasywnych, a więc w przypadku układów scalonych za pomocą żyratorów, oporności i pojemności.

Niech w dalszym ciągu zadana będzie wymierna, dodatnio-rzeczywista macierz admittancji $Y_N(p)$ o wymiarze $(n \times n)$. Załóżmy, że należy dokonać syntezy układu opisanego macierzą $Y_N(p)$ używając przy tym minimalnej liczby kondensatorów. Wymaganie to ma duże znaczenie praktyczne, gdyż wykonanie kondensatora monolitycznego jest stosunkowo trudne, szczególnie gdy wartości wymaganych pojemności są duże. W związku z tym dokonujemy rozkładu macierzy $Y_N(p)$ na sumę dwóch składowych:

$$Y_N(p) = pC_\infty + Y(p) \quad (3.1)$$

Ponieważ macierz $Y(p)$ nie posiada bieguna w punkcie $p = \infty$, wobec tego do syntezy tej macierzy można wykorzystać metody przestrzeni stanów. Syntezę macierzy pC_∞ należy dokonać innymi metodami. Metody te zostaną podane w dalszej części pracy.

Odwracając podaną wyżej metodę postępowania przy wyznaczaniu równań stanu, w syntezie układu opisanego macierzą $Y(p)$ wyróżnić można cztery etapy:

1. Wyznaczenie realizacji minimalnej $R_{\min}$ układu, tzn. wyznaczenie zbioru macierzy A, B, C, D tak aby:

$$Y(p) = D + C(pI_k - A)^{-1}B \quad (3.2)$$

oraz

$$k = \delta = \delta[Y(p)],$$

gdzie $\delta[Y(p)]$ jest stopniem realizowanego układu. Realizację minimalną można znaleźć metodami jak w rozdz. 4 części I tej pracy, jeżeli założyć się, że $H(p)$ ma sens macierzy admittancji.

2. Wyznaczenie macierzy Y_c podukładu N_1 . Macierz Y_c wyznacza się ze związków (2.1) i (2.9) następująco:

$$Y_c = \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{D}^n & \overbrace{C_0 C}^\delta \\ \hline -B & -C_0 A \end{array} \right]_{\delta}^n, \quad (3.3)$$

gdzie stała C_0 jest równa pojemności kondensatorów użytych do syntezy. Ponieważ $Y(p)$ jest macierzą kwadratową o wymiarach $n \times n$, więc z równań (3.2) wynika, że Y_c jest macierzą kwadratową o wymiarach $(n + \delta) \times (n + \delta)$.

3. Synteza podukładu N_1 opisanego macierzą Y_c . Mimo tego, że $Y(p)$ jest z założenia macierzą wymierną, dodatnio-rzeczywistą, w ogólnym przypadku liczbową macierz Y_c może nie należeć do klasy macierzy dodatnio-rzeczywistych. Wobec tego dla jej realizacji koniecznym byłoby użycie zarówno elementów pasywnych jak i aktywnych, na przykład żyratorów i oporności ujemnych.

Uniknąć tego można znajdując taką realizację równoważną $\hat{R}_{\min} = \{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}\}$ dla wyznaczonej realizacji $R_{\min} = \{A, B, C, D\}$, aby macierz:

$$\hat{Y}_c = \begin{bmatrix} \hat{D} & C_0 \hat{C} \\ -\hat{B} & -C_0 \hat{A} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

należała do klasy macierzy dodatnio-rzeczywistych.

Należy zwrócić uwagę, że dwie realizacje $\hat{R}_{\min}$ oraz $R_{\min}$ nazywamy równoważnymi, jeżeli odpowiednie macierze spełniają związki:

$$\hat{A} = T^{-1}AT, \quad \hat{B} = T^{-1}B, \quad \hat{C} = CT, \quad \hat{D} = D, \quad (3.5)$$

przy czym T jest dowolną liczbową macierzą nieosobliwą.

4. Ostatni etap syntezy układu opisanego macierzą $Y(p)$ wymaga podłączenia do δ — wejść podukładu N_1 kondensatorów o pojemnościach równych stałej C_0 .

Z przeprowadzonych powyżej rozważań wynika, że zasadniczym problemem jest wyznaczenie takiej transformacji nieosobliwej T , aby podukład N_1 można było realizować tylko za pomocą elementów pasywnych. Rozwiązanie tego problemu oparte jest na następującym twierdzeniu [5, 7].

Niech $Y_0(p)$ będzie $n \times n$ macierzą, której elementy są funkcjami wymiernymi o rzeczywistych współczynnikach. Załóżmy także, że $Y_0(p)$ nie posiada biegunów w półpłaszczyźnie $\text{Re } p \geq 0$ oraz niech $R_{0\min} = \{A_0, B_0, C_0, D_0\}$ będzie realizacją minimalną macierzy $Y_0(p)$. Przy tych założeniach macierz $Y_0(p)$ jest dodatnio-rzeczywistą wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją macierze W_∞, L_0 oraz dodatnio określona, symetryczna macierz P_0 spełniające związki:

$$P_0 A_0 + \tilde{A}_0 P_0 = -\tilde{L}_0 L_0, \quad (3.6)$$

$$P_0 B_0 = \tilde{C}_0 - \tilde{L}_0 W_\infty, \quad (3.7)$$

$$\tilde{W}_\infty W_\infty = \tilde{D}_0 + D_0. \quad (3.8)$$

Konieczność tych równań można udowodnić w sposób bezpośredni, pokazując że macierz $Y_{0H}(p) = \frac{1}{2} [\tilde{Y}_0(p^*) + Y_0(p)]$ jest macierzą dodatnio określoną w prawej półpłaszczyźnie $\text{Re } p \geq 0$.

Dowód dostateczności wymaga wyznaczenia macierzy $\tilde{W}(p)$ spełniającej równanie:

$$Y_0(p) + \tilde{Y}_0(-p) = \tilde{W}(-p)W(p), \quad (3.9)$$

gdzie macierz $W(p)$ o wymiarach $r \times n$ jednocześnie z prawostronnie do niej odwrotną¹⁾ macierzą $W_r^{-1}(p)$ są holomorficzne w półpłaszczyźnie $\text{Re } p \geq 0$. Jeżeli macierz $W(p)$

¹⁾ Macierz $W_r^{-1}(p)$ spełnia związek: $W(p) \cdot W_r^{-1}(p) = 1_r$.

posiada powyższą własność, to można pokazać, że jej realizacja minimalna $R_{w\min}$ jest następująca:

$$R_{w\min} = \{A_0, B_0, L_0, W_\infty\}, \quad (3.10)$$

gdzie: $W_\infty = W(\infty)$.

Omówione wyżej twierdzenie jest także słuszne w przypadku, gdy badana macierz o wymiarach $n \times n$ jest macierzą admitancji układu bezstratnego, tzn. spełnia związek $Y_L(p) = -\tilde{Y}_L(-p)$ i posiada pojedyncze bieguny jedynie na osi $j\omega$. Załóżmy, że macierz $Y_L(p)$ jest macierzą admitancji układu bezstratnego, przy czym $Y_L(\infty) = 0$. Niech $R_{L\min} = \{A_L, B_L, C_L, 0\}$ będzie realizacją minimalną macierzy $Y_L(p)$. Przy tych założeniach $Y_L(p)$ jest dodatnio-rzeczywistą wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dodatnio określona, symetryczna macierz P_L taka, że spełnione są równania:

$$P_L A_L + \tilde{A}_L P_L = 0, \quad (3.11)$$

$$P_L B_L = \tilde{C}_L. \quad (3.12)$$

W konsekwencji, jeżeli dokona się rozkładu macierzy $Y(p)$ z równania (3.1) na sumę dwóch składowych:

$$Y(p) = Y_0(p) + Y_L(p) \quad (3.13)$$

takich, że ich własności są zgodne z wymaganymi w założeniach obydwu powyższych twierdzeń, to realizacja minimalna macierzy $Y(p)$ jest następująca:

$$R_{\min} = \{A, B, C, D\} = \left\{ \begin{bmatrix} A_L & 0 \\ 0 & A_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_L \\ B_0 \end{bmatrix}, [C_L, C_0], D_0 \right\}, \quad (3.14)$$

natomiast związki (3.6) do (3.12) przybierają ogólną postać:

$$PA + \tilde{A}P = -\tilde{L}L, \quad (3.15)$$

$$PB = \tilde{C} - \tilde{L}W_\infty, \quad (3.16)$$

$$\tilde{W}_\infty W_\infty = \tilde{D} + D, \quad (3.17)$$

gdzie:

$$P = \begin{bmatrix} P_L & 0 \\ 0 & P_0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad L = \begin{bmatrix} 0 \\ L_0 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Powracając do równania (3.4) można pokazać, że jeżeli transformacja nieosobliwa:

$$T = P^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.19)$$

gdzie $P^{-\frac{1}{2}}$ jest macierzą odwrotną do pierwiastka kwadratowego²⁾ z macierzy P , to macierz:

$$\hat{Y}_c = \left[\begin{array}{c|c} D & C_0 C P^{-\frac{1}{2}} \\ \hline \frac{1}{P^2} B & -C_0 P^2 A P^{-\frac{1}{2}} \end{array} \right] \quad (3.20)$$

²⁾ Ponieważ macierz P jest dodatnio określona, więc $P^{\frac{1}{2}} \cdot P^{\frac{1}{2}}$, gdzie $P^{\frac{1}{2}}$ jest pierwiastkiem kwadratowym macierzy P .

jest macierzą dodatnio-rzeczywistą, tzn. synteza podukładu N_1 wymaga użycia tylko elementów pasywnych. Z praktycznego punktu widzenia ważnym jest, aby do syntezy używać elementów konstrukcyjnych możliwych do wykonania w technice scalonej. Takimi elementami, które zostaną użyte w syntezie podukładu N_1 opisanego macierzą $\hat{\mathbf{Y}}_c$, są żyratory i oporniki. W związku z tym należy dokonać rozkładu macierzy $\hat{\mathbf{Y}}_c$ na macierz symetryczną i skośnie symetryczną [7]:

$$\hat{\mathbf{Y}}_c = \hat{\mathbf{Y}}_{c_{sy}} + \hat{\mathbf{Y}}_{c_{sk}} \quad (3.21)$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_{c_{sy}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{Y}}_c + \tilde{\hat{\mathbf{Y}}}_c) \quad \text{oraz} \quad \hat{\mathbf{Y}}_{c_{sk}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{Y}}_c - \tilde{\hat{\mathbf{Y}}}_c). \quad (3.22)$$

Syntezy macierzy $\hat{\mathbf{Y}}_{c_{sk}}$ można bezpośrednio dokonać za pomocą żyratorów o przewodnościach żyracji równych odpowiednio wartościom jej elementów. Analogicznie, syntezy macierzy $\hat{\mathbf{Y}}_{c_{sy}}$ można dokonać za pomocą żyratorów i dodatkowo oporności. W tym celu należy dokonać diagonalizacji macierzy $\hat{\mathbf{Y}}_{c_{sy}}$:

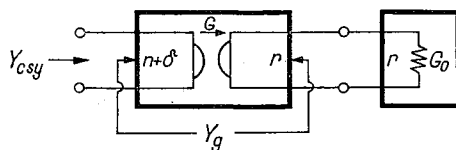
$$\hat{\mathbf{Y}}_{c_{sy}} = \mathbf{G}\mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{G}}, \quad (3.23)$$

gdzie $\mathbf{G}$ jest macierzą nieosobliwą, natomiast $\mathbf{R}_0$ jest macierzą diagonalną rzędu r . Wówczas macierz $\hat{\mathbf{Y}}_{c_{sy}}$ może być zrealizowana jako macierz kaskadowego połączenia dwóch podukładów opisanych odpowiednio macierzą skośnie symetryczną $\hat{\mathbf{Y}}_g$:

$$\mathbf{Y}_g = \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{\mathbf{0}}^{n+\delta} & \overbrace{\mathbf{G}}^r \\ \hline -\tilde{\mathbf{G}} & \mathbf{0} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \phantom{\mathbf{Y}_g} \\ \phantom{\mathbf{Y}_g} \end{array} \right\} \begin{array}{l} n+\delta \\ r \end{array} \quad (3.24)$$

oraz macierzą

$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{R}_0^{-1}. \quad (3.25)$$



Rys. 3.1. Układ realizujący macierz $\hat{\mathbf{Y}}_{c_{sy}}$

Schematycznie połączenie takich podukładów pokazane jest na rysunku 3.1. Możliwość takiej realizacji można pokazać korzystając z ogólnej zależności na macierz admittancji układów połączonych kaskadowo [2]:

$$\hat{\mathbf{Y}}_{c_{sy}} = \hat{\mathbf{Y}}_{11} - \hat{\mathbf{Y}}_{12}(\hat{\mathbf{Y}}_{22} + \mathbf{G}_0)^{-1}\hat{\mathbf{Y}}_{21} \quad (3.26)$$

Ponieważ w przypadku macierzy $\mathbf{Y}_g$ istnieją następujące zależności:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Y}}_{11} &= \hat{\mathbf{Y}}_{22} = \mathbf{0}, \\ \hat{\mathbf{Y}}_{12} &= \mathbf{G} \quad \text{oraz} \quad \hat{\mathbf{Y}}_{21} = -\tilde{\mathbf{G}}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

więc stąd:

$$\hat{Y}_{c_{sy}} = G G_0^{-1} \tilde{G} = G R_0 \tilde{G}.$$

Osobnego omówienia wymaga synteza macierzy pC_∞ z równania (3.1). Ponieważ macierz pC_∞ jest symetryczna, więc najbardziej ogólna metoda jej syntezy polega na zastosowaniu transformacji kongruentnej T_c [1,2]:

$$pC_\infty = T_c [p1_n] \tilde{T}_c. \quad (3.28)$$

Ze związku (3.28) wynika, że macierz pC_∞ można zrealizować jako kaskadowe połączenie idealnego transformatora o stosunkach uzwojeń równych elementom macierzy T_c oraz układu złożonego z n pojemności. Oczywiście w technice scalonej transformator należałoby zastąpić równoważnym układem złożonym z żyratorów.

Do syntezy macierzy pC_∞ można wykorzystać rozważania dotyczące syntezy macierzy $\hat{Y}_{c_{sy}}$. Wystarczy zauważyć, że:

$$pC_\infty = T_c \left[\frac{1}{p} 1_n \right]^{-1} \tilde{T}_c. \quad (3.29)$$

Porównując (3.29) z (3.26) i 3.27) widać, że macierz pC_∞ może być zrealizowana jako macierz kaskadowego połączenia podukładu opisanego skośnie symetryczną macierzą przewodności żyracji Y_g , gdzie

$$Y_g = \begin{bmatrix} 0 & T_c \\ -\tilde{T}_c & 0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

oraz podukładu złożonego z indukcyjności. W tym przypadku każdą indukcyjność należałoby zastąpić równoważnym elementem złożonym z żyratora obciążonego pojemnością.

b) Synteza admitancyjna układów aktywnych

Etapy syntezy admitancyjnej układów aktywnych, a więc opisanych macierzami wymiennymi nie należącymi do klasy dodatnich-rzeczywistych, są identyczne z przedstawionymi powyżej etapami syntezy admitancyjnej układów pasywnych. W przypadku układów aktywnych macierz Y_c nie może należeć do klasy dodatnich-rzeczywistych, w związku z tym do jej realizacji koniecznym jest użycie żyratorów (elementów pasywnych) oraz oporności ujemnych.

4. PRZYKŁAD SYNTEZY CZWÓRNIKA O ZADANEJ MACIERZY ADMITANCJI

Jako przykład przedstawiona jest procedura syntezy czwórnika o następującej macierzy admitancji:

$$Y_N(p') = \begin{bmatrix} 10^{-9}p' + \frac{2 \cdot 10^{-9}p'}{10^{-12}p'^2 + 1} + 2 \cdot 10^{-3} & \frac{10^{-9}p' - 10^{-3}}{10^{-9}p' + 10^{-3}} \\ 0 & \frac{10^{-12}p'^2 + 1}{2 \cdot 10^{-3}p'} + 2 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Założmy, że do syntezy należy użyć jednakowych kondensatorów o pojemności $C_0 = 10^{-9}\text{F}$. Dla uproszczenia strony obliczeniowej dokonuje się normalizacji częstotliwości i poziomu admitancji wprowadzając przekształcenia:

$$p = \frac{p'}{\omega_0}, \quad \text{gdzie } \omega_0 = 10^6 \quad (4.2)$$

oraz $Y_N(p') = R_0 \cdot Y_N(\omega_0 \cdot p), \quad \text{gdzie } R_0 = 10^3; \quad (4.3)$

stąd znormalizowana postać macierzy admitancji jest następująca:

$$Y_N(p) = \begin{bmatrix} p + \frac{2p}{p^2+1} + 2 & \frac{p-1}{p+1} \\ 0 & \frac{p^2+1}{2p} + 2 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Macierz $Y_N(p)$ należy do klasy macierzy wymiernych, dodatnio-rzeczywistych ponieważ [2]:

1. jest macierzą o elementach będących funkcjami wymiernymi,
2. nie posiada biegunów w prawej półpłaszczyźnie ($\text{Re } p > 0$),
3. bieguny na osi $j\omega$ są rzędu pierwszego: $p_1 = 0, p_2 = j, p_3 = -j, p_4 = \infty$,
4. macierze residuów dla biegunów na osi $j\omega$ są hermitowskie i dodatnio określone,
5. $Y_{NH}(j\omega)$ jest dodatnio określona dla wszystkich ω .

Zgodnie ze związkiem (3.1) i (3.13) dokonujemy rozkładu macierzy $Y_N(p)$ na sumę trzech składowych:

$$Y_N(p) = Y_L(p) + Y_0(p) + pC_\infty, \quad (4.5)$$

gdzie:

$$Y_L(p) = \begin{bmatrix} \frac{2p}{p^2+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2p} \end{bmatrix}, \quad Y_0(p) = \begin{bmatrix} 2 & \frac{p-1}{p+1} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad pC_\infty = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & \frac{p}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Następnym etapem jest wyznaczenie realizacji minimalnej $R_{L_{\min}} = \{A_L, B_L, C_L, 0\}$ oraz $R_{0_{\min}} = \{A_0, B_0, C_0, D_0\}$ odpowiednio dla macierzy $Y_L(p)$ oraz $Y_0(p)$ w oparciu o związki (4.11) podane w części 1 tej pracy:

$$\begin{aligned} A &= \mathbf{1}_{\delta, rn} \mathbf{M} \Omega_n \mathbf{S}_r \tilde{\mathbf{N}}_{\delta, rm}, & B &= \mathbf{1}_{\delta, rn} \mathbf{M} \mathbf{S}_r \tilde{\mathbf{1}}_{m, rm}, \\ C &= \mathbf{1}_{n, rn} \mathbf{S}_r \tilde{\mathbf{N}}_{\delta, rm}, & D &= Y(\infty). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Aby zilustrować sposób wykorzystania praktycznego związków (4.7), wyznaczenie realizacji $R_{0_{\min}}$ zostanie opisane szczegółowo.

Ponieważ macierz $Y_0(p)$ ma wymiar (2×2) , stąd w związkach (4.7) należy przyjąć $n = m = 2$:

$$Y_0(p) = \begin{bmatrix} 2 & \frac{p-1}{p+1} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $g(p) = p+1$, gdzie $g(p)$ jest najmniejszą wspólną wielokrotnością mianowników wszystkich elementów macierzy $Y_0(p)$, więc stąd mamy $r = 1$ oraz macierz towarzyszącą wielomianu $g(p)$:

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dokonajmy rozwinięcia macierzy $Y_0(p)$ w szereg wokół punktu $p = \infty$:

$$Y_0(p) = A_{-1} + \frac{1}{p} A_0 + \frac{1}{p^2} A_1 + \dots$$

Ale

$$Y_0(p) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{p} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots$$

stąd

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $r = 1$, więc uogólniona macierz hankelowska ma następującą postać:

$$S_1 = [A_0] = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rząd macierzy S_1 równy jest jedności, wobec tego minimalny wymiar wektora stanu δ równy jest też jedności.

Sprowadźmy macierz S_1 do postaci diagonalnej:

$$MS_1N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

stąd $M = 1_2$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

W ten sposób uzyskujemy wszystkie macierze występujące w związkach (4.7) konieczne do wyznaczenia realizacji minimalnej $R_{0_{\min}} = \{A_0, B_0, C_0, D_0\}$. Wykonując mnożenie odpowiednich macierzy otrzymuje się w rezultacie:

$$R_{0_{\min}} = \left\{ [-1], [0 \quad -2], \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}. \quad (4.8)$$

Postępując analogicznie można wyznaczyć realizację minimalną macierzy $Y_L(p)$:

$$R_{L_{\min}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}. \quad (4.9)$$

Wstawiając (4.8) i (4.9) do związku (3.14) uzyskuje się realizację minimalną macierzy $Y(p)$:

$$R_{\min} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}. \quad (4.10)$$

Można teraz zauważyć, że macierz Y_c utworzona zgodnie ze wzorem (3.3) dla $C_0 = C_n = 1$, gdzie C_n jest pojemnością znormalizowaną, nie należy do klasy dodatnich-rzeczywistych, wobec tego jest nierealizowalna za pomocą elementów pasywnych. Stąd, zgodnie z rozważaniami rozdziału trzeciego należy wyznaczyć odpowiednią transformację nieosobliwą T . W tym celu najpierw należy znaleźć ze związku (3.9) macierz $W(p)$ i jej realizację minimalną $R_{w\min}$.

Ponieważ:

$$\begin{aligned} Y_0(p) + \tilde{Y}_0(-p) &= \begin{bmatrix} 4 & \frac{p-1}{p+1} \\ \frac{p+1}{p-1} & 4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \frac{p+1}{2(p-1)} & \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{p+1}{p-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \frac{p-1}{2(p+1)} \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{p-1}{p+1} \end{bmatrix} = \tilde{W}(-p)W(p), \end{aligned}$$

więc:

$$W(p) = \begin{bmatrix} 2 & \frac{p-1}{2(p+1)} \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{p-1}{p+1} \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Macierz $W(p)$, a także prawostronnie do niej odwrotna macierz $W_r^{-1}(p)$ są holomorficzne w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} p \geq 0$.

Realizacja minimalna $R_{w\min} = \{A_0, B_0, L_0, W_\infty\}$ macierzy $W(p)$ jest następująca:

$$R_{w\min} = \left\{ [-1], [0 \ -2], \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{15}}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{2} \end{bmatrix} \right\}; \quad (4.12)$$

stąd:

$$L_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{15}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad W_\infty = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Korzystając z równania (3.6) wyznacza się macierz P_0 :

$$-2P_0 = -[4],$$

$$\text{stąd} \quad P_0 = [2] \quad (4.14)$$

$$\text{oraz} \quad P_0^{1/2} = [1/\sqrt{2}]. \quad (4.15)$$

Analogicznie, korzystając z równań (3.11) i (3.12) wyznacza się P_L :

$$P_L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

$$\text{stąd} \quad P_L^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

Biorąc pod uwagę związek (3.18) z (4.15) oraz (4.17) otrzymuje się:

$$T = P^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Stosując do realizacji minimalnej (4.10) wyznaczoną transformację (4.18) otrzymuje się realizację równoważną $\hat{R}_{\min}$ oraz zgodnie ze związkiem (3.20) macierz $\hat{Y}_c$:

$$\hat{Y}_c = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} \overbrace{2 \quad 1}^2 & \overbrace{\frac{2}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}}^4 \\ 0 \quad 2 & 0 \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \quad 0 \\ -\sqrt{2} \quad 0 & 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\ 0 \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 & -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 2\sqrt{2} & 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \end{array} \right] \quad (4.19)$$

Macierz $\hat{Y}_c$ jest realizowalna za pomocą elementów pasywnych. Ponieważ macierz $\hat{Y}_c$ ma wymiar (6×6) , więc podukład N_1 będzie posiadał 6 wejść, przy czym dwa pierwsze

będą stanowiły wejścia szukanego czwórnika, natomiast cztery pozostałe zostaną obciążone pojemnościami jednostkowymi.

Zgodnie z uwagami rozdziału trzeciego podukład N_1 zostanie zrealizowany za pomocą żyratorów i oporności. W związku z tym istnieje konieczność rozłożenia macierzy $\hat{Y}_c$ na składową symetryczną i skośnie symetryczną:

$$\hat{Y}_{c_{sk}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

oraz

$$\hat{Y}_{c_{sy}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{15}}{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Porównując (4.21) z (3.23) widzimy, że w naszym przypadku

$$R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

natomiast

$$G = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{15}}{4} \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

5. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawione powyżej metody syntezy admitancyjnej układów liniowych mają w chwili obecnej znaczenie raczej teoretyczne niż praktyczne, ze względu na konieczność używania znacznej liczby żyratorów (w rozważanym przykładzie do syntezy czwórnika trzeba było użyć 11 żyratorów).

Zastosowanie tych metod do syntezy układów scalonych jest uzasadnione z dwóch powodów:

1. pozwalają na realizację układów przy użyciu minimalnej liczby kondensatorów (a także oporników),

2. uzyskiwane struktury są mało czułe na zmiany parametrów elementów.

Ponieważ można mieć nadzieję, że w związku z szybkim rozwojem technologii żyrator w niedługim czasie stanie się elementem dostępnym powszechnie, wobec tego konieczność używania dużych ilości tych elementów przestanie być praktycznym ograniczeniem w stosowaniu tej metody syntezy.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. F. R. Gantmacher, Teorija matric, Gostiechizdat, 1953.
2. R. W. Newcomb, Linear Multiport Synthesis, McGraw-Hill Book Company, 1966.
3. R. Yarlagadde i Y. Tokad, Synthesis of LC Networks — A State Model Approach, Proc. of the IEE, Vol. 113, No 6, June 1966.
4. B. D. O. Anderson i R. W. Newcomb, Lossless N-port Synthesis via State-Space Techniques, Stanford Electronics Laboratories, Technical Report No 6558-8, April 1967.
5. B. D. O. Anderson i R. W. Newcomb, Impedance synthesis via State Space Techniques Proc. IEE, Vol. 115, No 7, July 1968.
6. R. W. Newcomb, Active Integrated Circuit Synthesis, Prentice Hall, N. J. 1968.
7. R. W. Newcomb, Network Theory the State-Space Approach, Librare Universitaire Louvain, Louvain, 1968.

W. SIENKO, M. BIAŁKO

APPLICATION OF STATE SPACE METHODS TO SYNTHESIS OF LINEAR INTEGRATED NETWORKS

PART 2: ADMITTANCE SYNTHESIS

Summary

In the paper a review of application of state space methods to admittance synthesis of linear integrated networks is presented. Passive and active admittance synthesis methods are given. Since for practical applications a large number of gyrators should be used, the considerations presented here are mainly of theoretical importance.

W. SIEŃKO, M. BIAŁKO

SYNTHÈSE DES CIRCUITS LINÉAIRES INTÉGRÉS PAR DES MÉTHODES D'ESPACE D'ÉTATS

PARTIE 2: SYNTHÈSE PAR ADMITTANCES

Résumé

L'article fait la revue de l'application des méthodes d'espace d'états à la synthèse par admittances des circuits linéaires intégrés. On y discute les méthodes de synthèse par admittances appliquées aux circuits passifs et actifs. Comme la réalisation des circuits exige un nombre élevé de gyrateurs, les considérations présentés ont d'abord l'importance théorique.

W. SIEŃKO, M. BIAŁKO

ZUSTAND-VARIABLE-METHODE DER SYNTHESE VON INTEGRIERTEN SCHALTUNGEN

TEIL 2: ADMITTANZ-SYNTHESE

Zusammenfassung

Der Artikel gibt eine Übersicht über die Anwendung der Zustand-Variable-Methode zur Admittanz-Synthese von linearen integrierten Schaltungen. Es wurden Methoden der Admittanz-Synthese für aktive und passive Schaltungen besprochen. Wegen der grossen Zahl der Gyrators, die zur Realisierung notwendig sind, sind die im Artikel angeführten Ergebnisse vor allem von theoretischer Bedeutung.

В. СЕНЬКО, М. БЯЛКО

СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СХЕМ МЕТОДОМ
ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ

ЧАСТЬ 2: СИНТЕЗ АДМИТАНЦИИ

Резюме

В статье дается обзор применения метода пространства состояний к синтезу адмитанции линейных интегральных схем. Представлены методы синтеза адмитанции пассивных и активных схем. Ввиду необходимости применения большего числа гираторов для практических целей, приведенные методы в основном являются теоретическими.

Wpływ źródła przełączającego na działanie tranzystorowego przekąznika czasowego z obwodem RC

JAN ŁYSKANOWSKI (WARSZAWA)

Instytut Elektrotechniki

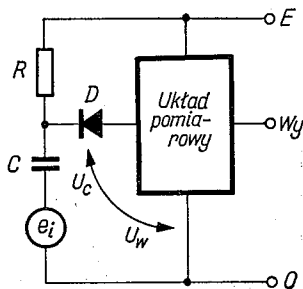
Otrzymano 13.5.1970

Dopuszczalna wartość rezystancji w obwodzie RC przekąznika czasowego, jest uwarunkowana głównie czułością układu pomiarowego. Zwiększenie tej wartości rezystancji pociąga za sobą konieczność włączenia szeregowo z pojemnością C źródła przełączającego.

W artykule przeprowadzono analizę czasu działania tranzystorowego przekąznika czasowego z uwzględnieniem wpływu źródła przełączającego o napięciu w kształcie impulsów prostokątnych i w kształcie części sinusoidy.

1. WSTĘP

Opóźnienie działania tranzystorowych przekązników czasowych może być zwiększone przez zwiększenie rezystancji R (rys. 1), przez którą następuje rozładowanie lub ładowanie kondensatora C . Ten sposób postępowania, co wykazano w szeregu publikacji [3, 4, 5, 7],



Rys. 1. Schemat ideowy przekąznika czasowego z obwodem RC

jest konstrukcyjnie znacznie wygodniejszy aniżeli zwiększenie pojemności C . Wykazano również, że graniczna wartość rezystancji R jest uwarunkowana głównie progiem czułości układu pomiarowego, którym może być np. przerzutnik dwustanowy. Aby warunek ten przestał obowiązywać, włącza się szeregowo z pojemnością C przełączające (impulsowe) źródło napięcia e_i . Do czasu gdy $E_c + E_i < E_w$ (przy czym E_c — napięcie na kondensatorze C , E_i — amplituda napięcia przełączającego, E_w — napięcie wyzwalaające przerzutnik), dioda D jest zatkana i źródło e_i nie powinno wpływać praktycznie na pracę układu. Gdy potencjał na anodzie diody zbliża się do wartości E_w , dioda zaczyna prze-

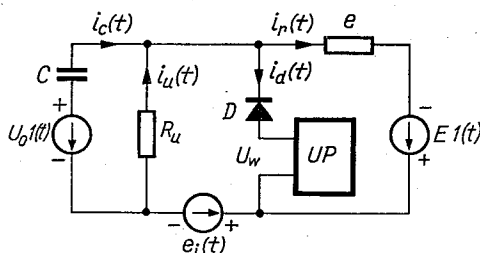
wodzić i kolejny impuls napięcia e_i powoduje przerzut przerzutnika do stanu „1”, który pozostaje w nim z uwagi na istniejące sprzężenia zwrotne.

W celu zapewnienia przerzutu dobiera się wartość napięcia e_i równą 1–2 V i mały współczynnik wypełnienia napięcia impulsowego. Jako źródła napięcia przełączającego e_i stosuje się najprostsze układy impulsowe lub układy formujące zasilane z sieci prądu przemiennego.

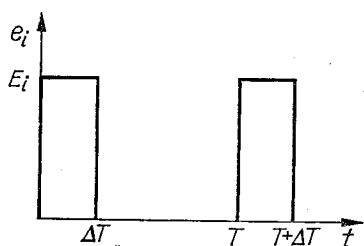
W artykule przeprowadzono analizę działania tranzystorowych przełączników czasowych z uwzględnieniem wpływu źródła przełączającego. Przeprowadzono również analizę wyprowadzonych wzorów.

2. OKREŚLENIE CZASU DZIAŁANIA PRZEKAŹNIKA CZASOWEGO ZE ŹRÓDŁEM PRZEŁĄCZAJĄCYM

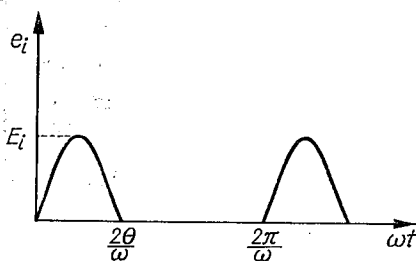
Wyrażenie na czas działania przełącznika czasowego z uwzględnieniem źródła przełączającego e_i wyprowadzono korzystając ze schematu zastępczego przełącznika czasowego z obwodem RC (rys. 2), przy czym założono, że rezystancja R jest większa od rezystancji granicznej.



Rys. 2. Schemat zastępczy tranzystorowego przełącznika czasowego z obwodem RC



Rys. 3. Przebieg napięcia impulsowego



Rys. 4. Przebieg napięcia prawie sinusoidalnego

Zagadnienie rozwiązano dla dwóch rodzajów źródła przełączającego:

1. Napięcie przełączające jest funkcją periodyczną o okresie $T = \frac{2\pi}{\omega}$ przedstawioną na rys. 3. W przedziale $0 < t < T$ przebieg tej funkcji można określić wzorem

$$e_i(t) = \begin{cases} E_i & \text{dla } 0 < t < \Delta T, \\ 0 & \text{dla } \Delta T < t < T. \end{cases} \quad (1)$$

Źródło o takim przebiegu napięcia nazwano dalej źródłem impulsowym.

II. Napięcie przełączające jest funkcją periodyczną o okresie $T = \frac{2\pi}{\omega}$ przedstawioną na rys. 4. W przedziale $0 < t < T$ przebieg tej funkcji można zapisać następująco

$$e_i(t) = \begin{cases} E_i \frac{\cos(\omega t - \Theta) - \cos \Theta}{1 - \cos \Theta} & \text{dla } 0 < t < \frac{2\Theta}{\omega}, \\ 0 & \text{dla } \frac{2\Theta}{\omega} < t < T. \end{cases} \quad (2)$$

Źródło o takim przebiegu napięcia nazwano dalej źródłem prawie sinusoidalnym.

Do określenia czasu działania t_d przekątnika czasowego konieczna była znajomość przebiegu napięcia na kondensatorze i prądu płynącego przez opornik R w funkcji czasu.

Napięcie na kondensatorze można wyznaczyć metodą superpozycji, jako różnicę napięć wynikających z działania napięcia zasilania E (rys. 2) przy założeniu, że $e_i = 0$, i z działania napięcia e_i przy założeniu, że $E = 0$.

Przypadek dla $e_i = 0$ był rozważany w literaturze [4], gdzie wyprowadzono

$$I_r^{(1)}(t) = \frac{E + U_0}{R} e^{-\alpha t} + \frac{E - I_d^{(1)} R_u}{R_u(\varepsilon + 1)} [1 - e^{-\alpha t}], \quad (3)$$

$$U_c^{(1)}(t) = E - I_r^{(1)} R = A - B e^{-\alpha t}, \quad (4)$$

przy czym:

indeks (1) określa wielkości obliczone przy $e_i = 0$,

I_r — prąd płynący przez rezystancję R ,

I_d — prąd wsteczny diody D ,

E — napięcie zasilania,

U_0 — napięcie początkowe na kondensatorze,

$$A = \frac{E + I_d^{(1)} R}{\varepsilon + 1},$$

$$B = \frac{E + U_0(\varepsilon + 1) + I_d^{(1)} R}{\varepsilon + 1},$$

$$\alpha = \frac{\varepsilon + 1}{RC},$$

$$\varepsilon = \frac{R}{R_u}.$$

2.1. Napięcie na kondensatorze zasilanym źródłem impulsowym

Wielkości obliczone dla tego przypadku oznaczono indeksem (2). Dla $0 < t < \Delta T$ obliczono przebieg prądu traktując go jako wywołany załączeniem na dany układ napięcia stałego E_i przy zerowym warunku początkowym.

Dla schematu zastępczego (rys. 1) przy uwzględnieniu, że $E = 0$, można ułożyć następujące równania operatorowe:

$$\frac{I_c^{(2)}(s)}{sC} + I_r^{(2)}(s)R = e_i(s), \quad (a)$$

$$I_c^{(2)}(s) + I_u^{(2)}(s) - I_d^{(2)}(s) = I_r^{(2)}(s), \quad (b) \quad (5)$$

$$I_u^{(2)}(s)R + I_u^{(2)}(s)R_u = e_i(s). \quad (c)$$

Z układu równań (5) obliczono $I_r^{(2)}(t)$, a następnie napięcie na kondensatorze w funkcji czasu

$$U_c^{(2)}(t) = E_i - I_r^{(2)}(t)R = E_{iz}[1 - e^{-\alpha t}], \quad (6)$$

przy czym

$$E_{iz} = \frac{E_i + I_d^{(2)}R}{\varepsilon + 1}.$$

Dla $\Delta T < t < T$ przebieg napięcia obliczono traktując go jako wywołany wyłączeniem układu spod napięcia w chwili, w której na kondensatorze było napięcie $U_c^{(2)}(\Delta T)$. Czyli

$$U_c^{(2)}(t) = U_c^{(2)}(\Delta T)e^{-\alpha(t-\Delta T)}. \quad (7)$$

Wartość napięcia $U_c^{(2)}(\Delta T)$ obliczono z otrzymanego poprzednio wzoru (6) kładąc w nim $t = \Delta T$. Otrzymamy

$$U_c^{(2)}(\Delta T) = E_{iz}[1 - e^{-\alpha \Delta T}]. \quad (8)$$

Podstawiając (8) do (7) otrzymamy

$$U_c^{(2)}(t) = E_{iz}[1 - e^{-\alpha \Delta T}]e^{-\alpha(t-\Delta T)}. \quad (9)$$

Ogólnie biorąc napięcie na początku dowolnego n -tego okresu impulsu, tzn. po upływie czasu $t = nT$, wyniesie

$$U_c^{(2)}(nT) = U_c^{(2)}[(n-1)T]e^{-\alpha(T-\Delta T)},$$

a więc

$$U_c^{(2)}(nT) = E_{iz}e^{-\alpha(T-\Delta T)}[1 - e^{-\alpha \Delta T}]\{1 + e^{-\alpha(T-\Delta T)}e^{-\alpha \Delta T} + [e^{-\alpha \Delta T}e^{-\alpha(T-\Delta T)}]^2 + \dots + [e^{-\alpha \Delta T}e^{-\alpha(T-\Delta T)}]^{n-1}\}; \quad (10)$$

ponieważ

$$e^{-\alpha \Delta T}e^{-\alpha(T-\Delta T)} = e^{-\alpha T},$$

otrzymamy

$$U_c^{(2)}(nT) = E_{iz}e^{-\alpha(T-\Delta T)}[1 + e^{-\alpha \Delta T}]\{1 + e^{-\alpha T} + [e^{-\alpha T}]^2 + \dots + [e^{-\alpha T}]^{n-1}\}. \quad (11)$$

Znajdując sumę szeregu

$$e^{-\alpha T} + [e^{-\alpha T}]^2 + \dots + [e^{-\alpha T}]^{n-1} = \frac{e^{-\alpha T}[1 - e^{-\alpha T(n-1)}]}{1 - e^{-\alpha T}} \quad (12)$$

i podstawiając do (10) otrzymamy

$$U_c^{(2)}(nT) = \frac{E_{iz} e^{-\alpha(T-\Delta T)} [1 - e^{-\alpha \Delta T}] [1 - e^{-\alpha n T}]}{1 - e^{-\alpha T}}. \quad (13)$$

2.2. Czas działania przekąznika czasowego z uwzględnieniem źródła impulsowego

Znając przebieg napięcia przy zasilaniu źródłem impulsowym określonym równaniem (13) obliczymy napięcie na kondensatorze przy uwzględnieniu w układzie obu źródeł: impulsowego i zasilania.

Z zasady superpozycji wynika, że napięcie na kondensatorze jest różnicą napięć $U_c^{(1)}(t)$ i $U_c^{(2)}(t)$, a więc

$$U_c(t) = A - B e^{-\alpha t} - \frac{E_{iz} e^{-\alpha(T-\Delta T)} [1 - e^{-\alpha \Delta T}] [1 - e^{-\alpha n T}]}{1 - e^{-\alpha T}}. \quad (14)$$

Zgodnie z założeniem, że rezystancja R jest większa od rezystancji granicznej, działanie przekąznika następuje w momentach nT . Wobec tego, zakładając, że dla czasu $t = t_d = nT$ dioda D zaczyna przewodzić, przy czym jej rezystancja wynosi zero, i że napięcie na kondensatorze wynosi $U_c = U_w - E_i$ oraz wykonując pewne przekształcenia, otrzymamy ze wzoru (14)

$$t_d = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{B - E_{iz} \frac{H}{N} M}{A - E_{iz} \frac{H}{N} M - (U_w - E_i)}, \quad (15)$$

przy czym

$$\begin{aligned} H &= 1 - e^{-\alpha \Delta T}, \\ N &= 1 - e^{-\alpha T}, \\ M &= e^{-\alpha(T-\Delta T)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Rozwińmy wyrażenia (16) na szereg Maclaurina i weźmy po dwa wyrazy tego szeregu, a mianowicie

$$\begin{aligned} H &\cong \alpha \Delta T, \\ N &\cong \alpha T, \\ M &\cong 1 - \alpha(T - \Delta T) \end{aligned}$$

i podstawmy do wyrażenia (15). W wyniku przekształceń otrzymamy

$$t_d = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{B - \frac{E_{iz}}{Q} [1 - \alpha(T - \Delta T)]}{A - \frac{E_{iz}}{Q} [1 - \alpha(T - \Delta T)] - (U_w - E_i)}, \quad (17)$$

przy czym

$$Q = \frac{T}{\Delta T}.$$

Podstawiając za A , B i E_{iz} odpowiednie wyrażenia i czyniąc przekształcenia, otrzymamy

$$t_d = \frac{RC}{\varepsilon + 1} \ln \frac{[E + U_0(\varepsilon + 1) + I_d^{(1)}R]Q - (I_d^{(2)}R + E_i)[1 - \alpha(T - \Delta T)]}{(E + I_d^{(1)}R)Q - (I_d^{(2)}R + E_i)[1 + \alpha(T - \Delta T)] - Q(\varepsilon + 1)(U_w - E_i)}. \quad (18)$$

2.3. Napięcie na kondensatorze zasilanym źródłem prądu sinusoidalnym

Dla czasu $0 < t < \frac{2\Theta}{\omega}$ obliczamy przebieg prądu traktując go jak poprzednio, jako wywołany załączeniem na dany układ napięcia określonego wzorem (2) przy zerowym warunku początkowym.

Dla schematu zastępczego (rys. 2) przy uwzględnieniu, że $E = 0$, mamy równania operatorowe określone wzorem (5), przy czym za e_i w tym wzorze należy podstawić

$$e_i(s) = \frac{E_i}{1 - \cos \Theta} \cdot \frac{s^2 \cos \Theta + s\omega \sin \Theta}{s^2 + \omega^2} - \frac{E_i \cos \Theta}{1 - \cos \Theta}. \quad (19)$$

Podstawiając

$$\frac{E_i}{1 - \cos \Theta} = U_i, \quad (20)$$

otrzymamy

$$e_i(s) = U_i \frac{s^2 \cos \Theta + s\omega \sin \Theta}{s^2 + \omega^2} - U_i \cos \Theta. \quad (21)$$

W wyniku rozwiązania równań (5) i (21) otrzymamy:

$$\begin{aligned} I_r^{(2)}(s) = & \frac{U_i}{R} \frac{s^2 \cos \Theta + s\omega \sin \Theta}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{s}{s + \alpha} - \frac{U_i \cos \Theta}{R} \cdot \frac{s}{s + \alpha} + \\ & + \frac{U_i}{CRR_u} \frac{s^2 \cos \Theta + s\omega \sin \Theta}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{s + \alpha} - \frac{U_i \cos \Theta - I_d^{(2)}R_u}{CRR_u} \cdot \frac{1}{s + \alpha}. \end{aligned} \quad (22)$$

Korzystając przy obliczaniu oryginału drugiego i czwartego składnika wyrażenia (22) z tablic operatorów, a przy obliczaniu pierwszego i trzeciego składnika z własności spłotu funkcji, a mianowicie, że

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)] = \frac{d}{dt} \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau = f_1(t)f_2(0) + \int_0^t f_1(t-\tau)f_2'(\tau)d\tau,$$

przy czym dla pierwszego składnika wzoru (22)

$$F_1(s) = \frac{s}{s + \alpha}, \quad F_2(s) = \frac{s^2 \cos \Theta + s\omega \sin \Theta}{s^2 + \omega^2},$$

natomiast dla drugiego składnika

$$F_1(s) = \frac{1}{s + \alpha}, \quad F_2(s) = \frac{s^2 \cos \Theta + s\omega \sin \Theta}{s^2 + \omega^2},$$

to po pewnych przekształceniach, dla $\omega \ll \alpha$, co zachodzi w układzie, otrzymamy

$$I_r^{(2)}(t) = -\frac{U_i \cos \Theta + I_d^{(2)} R}{R(\varepsilon + 1)} e^{-\alpha t} + \frac{U_i}{R} \cos(\omega t - \Theta) - \frac{U_i \varepsilon \cos \Theta - I_d^{(2)} R}{R(\varepsilon + 1)}. \quad (23)$$

Dla $\frac{2\Theta}{\omega} < t < \frac{2\pi}{\omega}$ przebieg napięcia obliczamy traktując go jako wywołany wyłączeniem układu spod napięcia w chwili, w której na kondensatorze było napięcie $U_c^{(2)}\left(\frac{2\Theta}{\omega}\right)$, czyli

$$U_c^{(2)}(t) = U_c^{(2)}\left(\frac{2\Theta}{\omega}\right) e^{-\alpha\left(t - \frac{2\Theta}{\omega}\right)}. \quad (24)$$

Wartość napięcia $U_c^{(2)}\left(\frac{2\Theta}{\omega}\right)$ obliczamy z różnicy $e_i(t) - I_R^{(2)}(t)R$, kładąc $t = \frac{2\Theta}{\omega}$

$$U_c^{(2)}\left(\frac{2\Theta}{\omega}\right) = D\left(1 - e^{-\alpha\frac{2\Theta}{\omega}}\right), \quad (25)$$

przy czym

$$D = \frac{-U_i \cos \Theta + I_d^{(2)} R}{\varepsilon + 1}.$$

Podstawiając (25) do (24), otrzymamy

$$U_c^{(2)}(t) = D\left(1 - e^{-\alpha\frac{2\Theta}{\omega}}\right) e^{-\alpha\left(t - \frac{2\Theta}{\omega}\right)}. \quad (26)$$

Napięcie na początku dowolnego n -tego okresu impulsu, tzn. po upływie czasu $t = n\frac{2\pi}{\omega}$ obliczamy w taki sam sposób jak poprzednio.

Otrzymujemy

$$U_c^{(2)}\left(n\frac{2\pi}{\omega}\right) = D\left(1 - e^{-\alpha\frac{2\Theta}{\omega}}\right) e^{-\alpha\frac{2\Theta}{\omega}\left(\frac{2\pi}{\omega} - \frac{2\Theta}{\omega}\right)} \left\{ 1 + e^{-\alpha\frac{2\Theta}{\omega}} e^{-\alpha\left(\frac{2\pi}{\omega} - \frac{2\Theta}{\omega}\right)} + \right. \\ \left. + \left[e^{-\alpha\frac{2\Theta}{\omega}} e^{-\alpha\left(\frac{2\pi}{\omega} - \frac{2\Theta}{\omega}\right)} \right]^2 + \dots + \left[e^{-\alpha\frac{2\Theta}{\omega}} e^{-\alpha\left(\frac{2\pi}{\omega} - \frac{2\Theta}{\omega}\right)} \right]^{n-1} \right\},$$

a stąd

$$U_c^{(2)}\left(n\frac{2\pi}{\omega}\right) = \frac{D\left(1 - e^{-\alpha\frac{2\Theta}{\omega}}\right) e^{-\alpha\left(\frac{2\pi}{\omega} - \frac{2\Theta}{\omega}\right)} \left[1 - e^{-\alpha n\frac{2\pi}{\omega}}\right]}{1 - e^{-\alpha\frac{2\pi}{\omega}}}. \quad (27)$$

2.4. Czas działania przekąźnika z uwzględnieniem źródła prawie sinusoidalnego

Znając przebieg napięcia przy zasilaniu układu źródłem impulsowym (równ. 27), obliczymy napięcie na kondensatorze przy uwzględnieniu w układzie obu źródeł: impulsowego i zasilania. Z zasady superpozycji wynika, że napięcie na kondensatorze jest różnicą napięć $U_c^{(1)}(t)$ i $U_c^{(2)}(t)$, a więc

$$U_c(t) = A - Be^{-\alpha t} - \frac{D \left(1 - e^{-\alpha \frac{2\theta}{\omega}}\right) e^{-\alpha \left(\frac{2\pi}{\omega} - \frac{2\theta}{\omega}\right)} \left[1 - e^{-\alpha n \frac{2\pi}{\omega}}\right]}{1 - e^{-\alpha \frac{2\pi}{\omega}}}. \quad (28)$$

Zakładając, że dla czasu $t = t_d = n \frac{2\pi}{\omega}$ napięcie na kondensatorze ma wartość $U_c(t) = U_w - E_i$ oraz wykonując pewne przekształcenia, ze wzoru (28) otrzymamy

$$t_d = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{B - D \frac{PW}{Z}}{A - D \frac{PW}{Z} - (U_w - E_i)}, \quad (29)$$

przy czym

$$P = 1 - e^{-\alpha \frac{2\theta}{\omega}},$$

$$W = e^{-\alpha \left(\frac{2\pi}{\omega} - \frac{2\theta}{\omega}\right)},$$

$$Z = 1 - e^{-\alpha \frac{2\pi}{\omega}}.$$

Biorąc dwa wyrazy z rozwinięcia na szereg Maclaurina wyrażeń P , W i Z , otrzymamy

$$P \cong \alpha \frac{2\theta}{\omega},$$

$$W \cong 1 - \alpha \left(\frac{2\pi}{\omega} - \frac{2\theta}{\omega}\right),$$

$$Z \cong \alpha \frac{2\pi}{\omega}.$$

Podstawiając za A , B i D odpowiednie wyrażenia i czyniąc pewne przekształcenia otrzymamy

$$t_d = \frac{RC}{\varepsilon + 1} \ln \frac{[E + U_0(\varepsilon + 1) + I_d^{(1)}R]Q - [I_d^{(2)}R - U_i \cos \theta] \left[1 - \alpha \left(\frac{2\pi}{\omega} - \frac{2\theta}{\omega}\right)\right]}{[E + I_d^{(1)}R]Q - [I_d^{(2)}R - U_i \cos \theta] \left[1 - \alpha \left(\frac{2\pi}{\omega} - \frac{2\theta}{\omega}\right)\right] - Q(\varepsilon + 1)(U_w - E_i)}, \quad (30)$$

przy czym

$$Q = \frac{\pi}{\Theta}.$$

3. OCENA WPŁYWU ŹRÓDŁA PRZEŁĄCZAJĄCEGO NA DZIAŁANIE PRZEKAŹNIKA CZASOWEGO

Czas działania tranzystorowego przekaźnika czasowego określony został wzorem (18) w przypadku źródła impulsowego i wzorem (30) w przypadku źródła prawie sinusoidalnego. W obu przypadkach czas działania przekaźnika jest zależny od amplitudy źródła przełączającego okresu tego napięcia i od współczynnika Q określającego stopień wypełnienia impulsów.

Źródła przełączające stosuje się zwykle w przekaźnikach czasowych o dużych czasach działania, dla których $\alpha = \frac{\varepsilon+1}{RC} \ll 1 \text{ s}^{-1}$. Zwykle przyjmuje się okres źródła przełączającego $T \ll 1 \text{ s}$. Dla tych dwóch warunków wyrażenia $1 - \alpha(T - \Delta T) \cong 1$ oraz $1 - \alpha \left(\frac{2\pi}{\omega} + \frac{2\Theta}{\omega} \right) \cong 1$.

Stąd wzory (18) i (30) znacznie się upraszczają i wynoszą w przypadku źródła impulsowego

$$t_d = \frac{RC}{\varepsilon+1} \ln \frac{[E + U_0(\varepsilon+1) + I_d^{(1)}R]Q - I_d^{(2)}R - E_i}{[E + I_d^{(1)}R]Q - I_d^{(2)}R - E_i - Q(\varepsilon+1)(U_w - E_i)} \quad (31)$$

i w przypadku źródła prawie sinusoidalnego

$$t_d = \frac{RC}{\varepsilon+1} \ln \frac{[E + U_0(\varepsilon+1) + I_d^{(1)}R]Q - I_d^{(2)}R + U_i \cos \Theta}{[E + I_d^{(1)}R]Q - I_d^{(2)}R + U_i \cos \Theta - Q(\varepsilon+1)(U_w - E_i)}. \quad (32)$$

Wpływ źródła przełączającego na działanie przekaźnika czasowego najwygodniej jest określić znajdując uchyb czasu działania

$$\delta_{E_i} = \frac{\Delta t_d}{t_d},$$

przy czym

$$\Delta t_d = \frac{\partial t_d}{\partial E_i} \Delta E_i.$$

Dla źródła impulsowego uchyb ten wynosi

$$\delta_{E_i} = \frac{L \cdot Q}{AB \ln \frac{A}{B}} \Delta E_i, \quad (33)$$

przy czym

$$\begin{aligned} L &= U_0 + U_w - Q(E + U_0 + I_d^{(1)}R) + R(I_d^{(1)} - I_d^{(2)}), \\ A &= [E + U_0(\varepsilon + 1) + I_d^{(1)}R]Q - I_d^{(2)}R - E_i, \\ B &= (E + I_d^{(1)}R)Q - I_d^{(2)}R - Q(\varepsilon + 1)(U_w - E_i). \end{aligned}$$

Uchyb δ_{E_i} można znacznie zmniejszyć przez dobór dostatecznie dużej wartości napięcia zasilania E .

Można więc stąd wyciągnąć wniosek, że wpływ źródła impulsowego na działanie przełącznika czasowego jest tym mniejszy, im napięcie zasilania jest większe.

Wniosek ten jest również słuszny i dla źródła prądu sinusoidalnego.

Określimy teraz wpływ współczynnika wypełnienia impulsów Q na działanie przełącznika czasowego.

Obliczmy uchyb czasu działania przełącznika $\delta_Q = \frac{\Delta t_d}{t_d}$,

przy czym

$$\Delta t_d = \frac{\partial t_d}{\partial Q} \Delta Q.$$

Dla źródła impulsowego uchyb ten wynosi

$$\delta_Q = - \frac{L}{AB \ln \frac{A}{B}} \Delta Q, \quad (34)$$

przy czym

$$\begin{aligned} L &= (U_w - E_i + U_0)(\varepsilon + 1)(I_d^{(2)}R + E_i), \\ A &= [E + U_0(\varepsilon + 1) + I_d^{(1)}R]Q - I_d^{(2)}R - E_i, \\ B &= (E + I_d^{(1)}R)Q - I_d^{(2)}R - E_i - Q(\varepsilon + 1)(U_w - E_i). \end{aligned}$$

Uchyb δ_Q można również zmniejszyć stosując źródło zasilania o dostatecznie dużej wartości napięcia E oraz stosując źródło impulsowe o dużej wartości współczynnika Q . Wniosek ten jest również słuszny i dla źródła prądu sinusoidalnego.

Współczynnik Q można uzyskać dostatecznie duży, wtedy w wyniku przekształceń wzorów (31, 32) czas działania przełącznika dla dwóch rodzajów źródeł przełączających jest określony wzorem

$$t_d = \frac{RC}{\varepsilon + 1} \ln \frac{E + U_0(\varepsilon + 1) + I_d^{(1)}R}{E + I_d^{(1)}R - (\varepsilon + 1)(U_w - E_i)}. \quad (35)$$

Źródło przełączające ma również wpływ na optymalny punkt pracy przełącznika czasowego, który jest scharakteryzowany następującą zależnością

$$k_{opt} = 0,632 - 0,368 k_0,$$

przy czym

$$k_{opt} = \frac{U_{w_{opt}}}{E},$$

$$k_0 = \frac{U_0}{E},$$

Zakładając w naszym przypadku, że $\varepsilon = 0$ i $I_d = 0$ oraz przekształcając wzór (35) otrzymamy

$$t_d = RC \ln \frac{1+k_o}{1-(k_w-k_i)}, \quad (36)$$

przy czym

$$k_w = \frac{U_w}{E},$$

$$k_i = \frac{E_i}{E}.$$

Optymalny punkt pracy otrzymamy, gdy

$$k_w - k_i = k_{opt},$$

a więc

$$k_w = 0,632 - 0,368k_o + k_i;$$

stąd

$$U_w = 0,632E - 0,368U_o + E_i. \quad (37)$$

W obu przypadkach uproszczone wzory wskazują, że wpływ źródła przełączającego na działanie przekaźnika czasowego zależy przede wszystkim od stosunku napięcia wysterowania układu pomiarowego do napięcia źródła zasilającego.

W zależności od sposobu sterowania układu z obwodem RC [1, 3, 5] uzyskuje się przekaźnik o działaniu opartym na ładowaniu kondensatora, lub o działaniu opartym na rozładowaniu kondensatora. W przypadku układu z ładowaniem kondensatora napięcie wysterowania układu pomiarowego jest zwykle duże (wynosi na ogół połowę napięcia zasilania) i znacznie większe od amplitudy napięcia źródła przełączającego. Dlatego wpływ źródła przełączającego jest w tym przypadku bardzo nieznaczny.

W przypadku układu z rozładowaniem kondensatora wpływ źródła przełączającego jest znacznie większy, ponieważ napięcie wysterowania układu pomiarowego jest zwykle bliskie zeru.

W obu przypadkach wpływ zmian napięcia źródła przełączającego można zmniejszyć przez stabilizowanie amplitudy napięcia tego źródła.

Przy wyprowadzaniu wzorów na czas działania przekaźnika zakładaliśmy, że napięcie na kondensatorze osiąga wartość $U_c(t) = U_w - E_i$ w czasie $t = t_d = nT$, przy czym n — liczba impulsów. Z zasady działania przekaźnika wynika, że przy braku źródła przełączającego przekaźnik nie działa. Ponieważ w przedziale czasu $\Delta T > t > T$ napięcie źródła przełączającego $E_i = 0$, to czas rzeczywisty działania przekaźnika t'_d będzie dłuższy o tę wartość. Tak więc źródło przełączające powoduje dodatkowy błąd $\Delta t_d = T - \Delta T$, co można zapisać następująco

$$t'_d = t_d + (T - \Delta T).$$

SPIS LITERATURY

1. G. V. Družinin, Rele vremeni, Izd. Energija, Moskva 1966.
2. E. P. F i g u r n o v, Uslovija obespečenija stabilnosti poluprovodnikovych rele vremeni s RC konturom, IVUZ Elektromechanika, 1967, nr. 12.

3. R. A. Lipman, Przekazniki tranzystorowe, WNT, Warszawa 1966.
4. J. Łyskanowski, Przekaznik czasowy tranzystorowy typu RTE-10 produkcji Zakładów Aparatury Elektrycznej REFA, Biul. Inf. IEL. 1968, nr. 4.
5. J. Łyskanowski, Tranzystorowy przekaznik czasowy z impulsowym wyzwaniem, Prace IEL, 1967, z. 25.
6. E. J. Malachovskij, Issledovanie stabilnosti rele vremeni s elektriceskim konturom RC , Elektricitstvo, 1965, nr. 8.
7. H. Mroczek, Tranzystorowe elementy opóźniające w bezstykowych układach sterowania, Prz. Elektrotechn. 1966, nr. 12.

J. ŁYSKANOWSKI

INFLUENCE OF SWITCHING GENERATOR ON WORK OF TRANSISTOR TIME RELAY WITH RC CIRCUIT

Summary

The permissible resistance value in the RC circuit of a time relay depends mostly on the sensitivity of the measuring circuit. An increase in the resistance value involves the necessity to add a switching generator in series with capacitance C .

The paper analyses the time of action of a transistor time relay taking into account the influence of a switching generator having voltage in the shape of square impulses and of a part of a sinusoid.

J. ŁYSKANOWSKI

EINFLUß DER UMSCHALTUNGSQUELLE AUF DIE ARBEIT EINES TRANSISTORZEITRELAIS MIT RC -GLIED

Zusammenfassung

Zulässiger Widerstandswert im RC -Glieder eines Zeitrelais wird vor allem durch die Empfindlichkeit des Meßgeräts bedingt. Ein Anwachsen des Widerstandswertes verursacht die Notwendigkeit, eine Umschaltungsquelle reihenweise mit Kapazität C einzuschalten.

In dem Artikel wurde eine Analyse der Einsatzzeit des Transistorzeitrelais unter Berücksichtigung des Einflusses einer Umschaltungsquelle mit Rechteckspannung, sowie Sinusteilspannung durchgeführt.

ВЛИЯНИЕ ИСТОЧНИКА ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ НА ДЕЙСТВИЕ ТРАНЗИСТОРНОГО РЕЛЕ ВРЕМЕНИ С КОНТУРОМ RC

Резюме

Допустимая величина сопротивления в системе RC реле времени обусловлена в основном чувствительностью измерительной системы. Увеличение этой величины сопротивления вызовет необходимость включения последовательно с ёмкостью C источника переключения.

В статье приведен анализ времени действия транзисторного реле времени с учетом влияния источника переключения с напряжением в виде прямоугольных импульсов и в виде части синусоиды.

Metoda linii ćwierćfalowej w zastosowaniu do pomiaru elementów przelotowych w szerokim paśmie częstotliwości

JAN KOMISARCZUK (GDAŃSK)

*Instytut Technologii Elektronicznej Politechniki Gdańskiej,
Zakład Technologii Mikrofalowej*

Otrzymano 13.4.1970

W pracy podano metodę pomiaru bardzo małych współczynników odbicia przelotowych elementów mikrofalowych w szerokim paśmie częstotliwości, przy czym dopuszcza się istnienie w układzie pomiarowym pomocniczych elementów mikrofalowych, których własne współczynniki odbicia są znacznie większe niż mierzone. Przeanalizowano wpływ poszczególnych elementów układu pomiarowego na wynik pomiaru. Analiza została przeprowadzona przy pomocy elementów macierzy rozproszenia S.

1. WPROWADZENIE

Pomiar współczynnika odbicia jest jednym z podstawowych pomiarów w zakresie mikrofal. Elementy układu pomiarowego (linia pomiarowa, przejścia, obciążenia itp.) posiadają własne współczynniki odbicia, które zmniejszają dokładność pomiaru lub wręcz uniemożliwiają jego przeprowadzenie, gdy mierzone odbicia są porównywalne z odbiciami wnoszonymi przez te elementy.

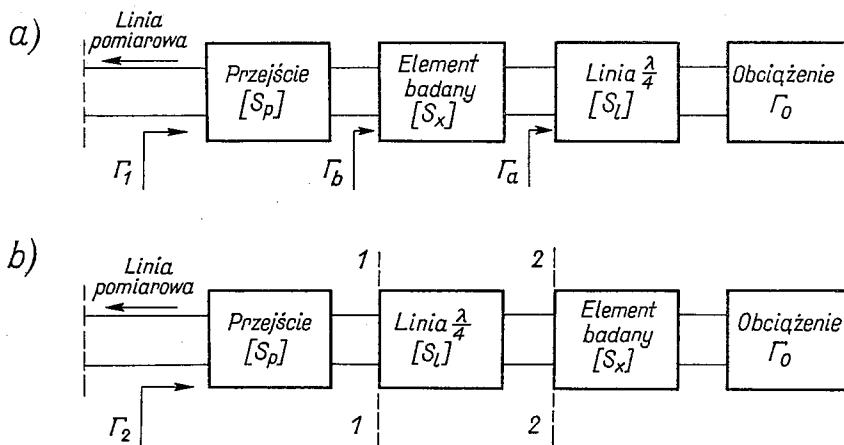
Metoda linii ćwierćfalowej pozwala mierzyć współczynniki odbicia badanych elementów nawet znacznie mniejsze od współczynników odbicia elementów pomocniczych. Nazwa metody wskazuje, że do pomiaru używa się ćwierćfalowego odcinka wzorcowej linii przesyłowej. Wynikałoby stąd, że ilość punktów pomiarowych w szerokim paśmie częstotliwości ogranicza się do kilku. Okazuje się jednak, że możliwe jest przeprowadzenie do-

wolnej ilości pomiarów w dość szerokim paśmie częstotliwości $\left(\frac{f_{\max}}{f_{\min}} = 3\right)$, przy użyciu tylko jednej linii ćwierćfalowej. Wykazali to autorzy w pracy [1], stosując metodę linii ćwierćfalowej do pomiaru impedancji wejściowej elementów mikrofalowych.

W niniejszej pracy proponowano zastosowanie tej metody do pomiaru własnego współczynnika odbicia elementów przelotowych bez konieczności użycia idealnego obciążenia. Inaczej mówiąc, możliwy jest dokładny pomiar elementów S_{11} i S_{22} macierzy rozproszenia danego elementu mikrofalowego. Nie narzuca się przy tym żadnych szczególnych wymagań na przebieg zmienności współczynników odbicia w funkcji częstotliwości elementów układu pomiarowego. Nie dopuszcza się jedynie zbyt dużych wartości ich modułów. Odpada więc konieczność kalibracji elementów w funkcji częstotliwości.

2. ZASADA POMIARU

Metoda polega na dwukrotnym pomiarze współczynnika odbicia przy pomocy linii pomiarowej w dwu układach różniących się między sobą miejscem włączenia linii ćwierćfalowej, jak to pokazano na rys. 1. Elementy układu pomiarowego zostały opisane ma-



Rys. 1. Układ pomiarowy do badania elementów przelotowych metodą linii ćwierćfalowej

cierzami rozproszenia, przy czym S_p oznacza macierz rozproszenia przejścia międzystandardowego lub końca linii pomiarowej, S_L — macierz rozproszenia linii ćwierćfalowej, S_x — macierz rozproszenia elementu badanego, a Γ_o przedstawia współczynnik odbicia obciążenia. Analiza zostanie przeprowadzona przy pewnych założeniach, które w praktycznych układach pomiarowych prawie zawsze są spełnione.

$$|S_{11}|^2 \ll 1, \quad |S_{22}|^2 \ll 1 \quad \text{ i } \quad |\Gamma_o|^2 \ll 1. \quad (1)$$

Założenia (1) dotyczą wszystkich elementów układu pomiarowego. Dla jasności wyprowadzenia wyrażenia końcowego tymczasowo zakłada się dodatkowo, iż linia ćwierćfalowa jest idealna, tzn.:

$$|S_{11}| = |S_{22}| = 0 \quad \text{ i } \quad |S_{12}| = 1. \quad (2)$$

Założenie (2) zostanie cofnięte w dalszej części pracy, poświęconej analizie błędów. Założenia (1) i (2) pozwalają na znaczne uproszczenie zapisu wyrażenia na współczynnik odbicia w dowolnym przekroju toru mikrofalowego. W układzie jak na rys.1a współczynnik odbicia Γ_a można zapisać

$$\Gamma_a = S_{11} + \frac{S_{12}^2 \Gamma_o}{1 - S_{22} \Gamma_o};$$

na mocy założeń (1) i (2) wyrażenie to sprowadzi się do postaci

$$\Gamma_a \approx S_{12}^2 \Gamma_o.$$

Podobnie zapisać można współczynnik odbicia Γ_b :

$$\Gamma_b \approx S_{11x} + S_{12x}^2 S_{12l}^2 \Gamma_o.$$

Współczynnik odbicia Γ_1 mierzony w linii pomiarowej można zapisać

$$\Gamma_1 \cong S_{11p} + S_{12p}^2 (S_{11x} + S_{12x}^2 S_{12l}^2 \Gamma_0). \quad (3)$$

Podobnie, postępując jak w układzie na rys. 1b, otrzymuje się wyrażenie na współczynnik odbicia Γ_2 mierzony w linii pomiarowej w drugim przypadku

$$\Gamma_2 \cong S_{11p} + S_{12p}^2 (S_{12l}^2 S_{11x} + S_{12x}^2 S_{12l}^2 \Gamma_0). \quad (4)$$

Tworząc obecnie różnicę $\Gamma_1 - \Gamma_2$ otrzymuje się

$$\Gamma_1 - \Gamma_2 = S_{12p}^2 (1 - S_{12l}^2) S_{11x}. \quad (5)$$

Wyrażenie $1 - S_{12l}^2$ można zapisać inaczej:

$$1 - S_{12l}^2 = 1 - e^{2j\beta l} = 1 + e^{2j\theta} = 2 \cos \theta \cdot e^{j\theta},$$

gdzie βl — długość elektryczna linii ćwierćfalowej

(przyjęto oznaczenie: $\beta l = \frac{\pi}{2} + \theta$).

Następnie zakładając, że przejście nie posiada zbyt dużych strat dyssypatywnych ($|S_{12p}|^2 \cong 1$) można zapisać wyrażenie na obliczenie modułu szukanej wielkości S_{11x}

$$|S_{11x}| = \frac{|\Gamma_1 - \Gamma_2|}{2 \cos \theta}, \quad (6)$$

Jak wynika z (6), w przypadku kiedy wystarcza znajomość jedynie modułu S_{11x} , obliczenia są proste i mogą być przeprowadzone bardzo szybko. Należy bowiem zauważyć, że do znalezienia wartości $|\Gamma_1 - \Gamma_2|$ wystarczy znaleźć różnicę położenia Δx odpowiednich minimów fali stojącej w linii pomiarowej oraz wartości współczynników fali stojącej z dwóch pomiarów. Posługując się następnie odpowiednio przygotowanym wykresem Smitha, na który nanosi się koła stałego Γ w najdogodniejszej skali, łatwo znaleźć szukaną wielkość. Przykład obliczenia $|\Gamma_1 - \Gamma_2|$ podano na rys. 2.

W celu wyznaczenia argumentu S_{11x} należy dokonać dwóch dodatkowych pomiarów po umieszczeniu zwarcia raz w płaszczyźnie 1—1, drugi raz w płaszczyźnie 2—2 układu pomiarowego z rys. 1.

Zakładając, że zwarcie jest idealne i posiada współczynnik odbicia $\Gamma = -1$, można zapisać, że w pierwszym przypadku po uwzględnieniu założeń (1) i (2)

$$\Gamma_{1z} \cong S_{11p} - S_{12p}^2,$$

a w drugim przypadku

$$\Gamma_{2z} \cong S_{11p} - S_{12p}^2 S_{12l}^2.$$

Tworząc różnicę $\Gamma_{2z} - \Gamma_{1z}$ otrzymuje się:

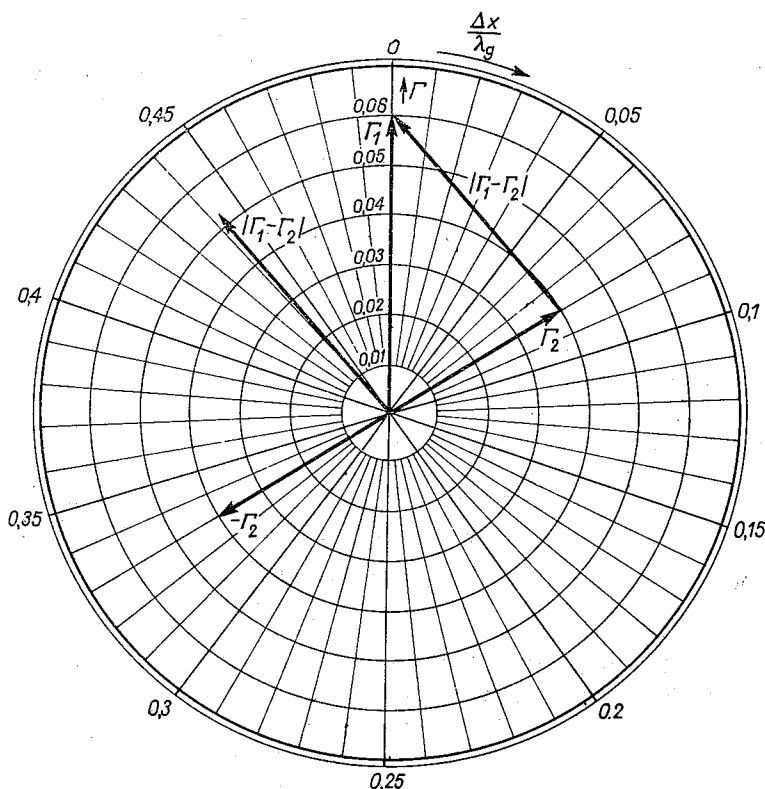
$$\Gamma_{2z} - \Gamma_{1z} = S_{12p}^2 (1 - S_{12l}^2) = S_{12p}^2 \cdot e^{j\theta} \cdot 2 \cos \theta,$$

skąd

$$\arg S_{12p}^2 + \theta = \arg(\Gamma_{2z} - \Gamma_{1z}) \quad (7)$$

Ostatecznie z (5) i (7) otrzymuje się:

$$\arg S_{11x} = \arg(\Gamma_1 - \Gamma_2) - \arg(\Gamma_{2z} - \Gamma_{1z}). \quad (8)$$



Rys. 2. Przykład obliczenia $|\Gamma_1 - \Gamma_2|$ przy pomocy wykresu kołowego

3. ANALIZA BŁĘDU

Wprowadzone poprzednio założenie, że linia ćwierćfalowa jest idealna, znacznie uprościło analizę, jednak wyprowadzone zależności obarczone są pewnym błędem. W celu określenia wpływu poszczególnych elementów układu pomiarowego na wynik, wyprowadzone zostaną dokładniejsze zależności.

Wyrażenie na współczynnik odbicia Γ_1 należy teraz zapisać następująco:

$$\Gamma_1 = S_{11p} + \frac{S_{12p}^2 \Gamma_b}{1 - S_{22p}^2 \Gamma_b}, \quad (9)$$

gdzie:

$$\Gamma_b = S_{11x} + \frac{S_{12x}^2 \Gamma_a}{1 - S_{22x}^2 \Gamma_a},$$

$$\Gamma_a = S_{11l} + \frac{S_{12l}^2 \Gamma_o}{1 - S_{22l}^2 \Gamma_o}.$$

Po uwzględnieniu założeń (1), które pozostają nadal w mocy, można wyrażenie (9) przedstawić w prostszej postaci korzystając z przybliżenia: $\frac{1}{1-x} \cong 1+x$. Przybliżenie to jest słuszne z błędem nie większym niż 1% dla wartości $|x| \leq 0,1$. Założenia (1) sprowadzają się więc do tego, by iloczyny współczynników odbicia $|S_{22}| \cdot |S_{11}|$ lub $|S_{22}| \cdot |\Gamma_o|$ były nie większe od 0,1.

Ze względu na rozbudowaną postać końcową wyrażeń, dalsze obliczenia przeprowadzone są w Dodatku.

Podobnie postępuje się przy zapisie wyrażenia na Γ_2 . W układzie pomiarowym zostały zamienione miejscami linia ćwierćfalowa i element badany, więc i w wyrażeniach na Γ_1 i Γ_2 indeksy l i x zamieniają się miejscami.

Z wyrażeń na Γ_1 i Γ_2 należy ostatecznie znaleźć wielkość $\frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2 \cos \Theta}$, która dotychczas uważana była za poszukiwaną wartość S_{11x} . Na podstawie tego wyrażenia można będzie oszacować błąd w określeniu modułu i argumentu S_{11x} , pochodzący od poszczególnych elementów układu pomiarowego, w tym również i linii ćwierćfalowej.

Wyrażenie na moduł S_{11x} ma teraz postać:

$$\begin{aligned} \frac{|\Gamma_1 - \Gamma_2|}{2 \cos \Theta} = & |S_{11x}| \cdot \left\{ 1 - (1 - |S_{12p}|^2) - \frac{1}{2} (1 - |S_{12l}|^2) \pm \varepsilon \operatorname{tg} \Theta \pm \frac{|S_{11l}| \cdot |1 - S_{12x}^2|}{2|S_{11x}| \cos \Theta} \pm \right. \\ & \left. \pm 2|S_{22p}|(|S_{11x}| \sin \Theta \pm |S_{12x}| |\Gamma_o|) \pm \frac{|\Gamma_o|^2 |S_{12x}|^2}{2|S_{11x}| \cos \Theta} (|S_{22x}| \pm |S_{22l}|) \pm \right. \\ & \left. \pm \frac{|S_{11l}| |S_{22p}|}{\cos \Theta} \left[1 \pm |S_{12x}|^2 \pm \frac{|1 - S_{12x}^2|}{|S_{11x}|} \left(|S_{12x}|^2 |\Gamma_o| \pm \frac{1}{2} |S_{11l}| \cdot |1 + S_{12x}^2| \right) \right] \right\}. \quad (10) \end{aligned}$$

Analizując wyrażenie (10) można stwierdzić, że największy błąd w określeniu modułu S_{11x} może pochodzić od współczynnika odbicia linii ćwierćfalowej $\left(\text{w wyrażeniu } \frac{|S_{11l}| \cdot |1 - S_{12x}^2|}{2|S_{11x}| \cos \Theta} \right)$. Stąd wynikają bardzo wysokie wymagania odnośnie wykonania linii $\frac{\lambda}{4}$. Również znaczny błąd może powstać w przypadku, gdy $|S_{22x}| \gg |S_{11x}|$, a obciążenie dopasowane nie jest zbyt dobre. Niezależnie od elementów układu pomiarowego, błąd wzrasta gwałtownie, gdy kąt $\Theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Stąd wynikają ograniczenia częstotliwościowe; jako granice pasma pomiarowego należy przyjąć te częstotliwości, dla których $|\Theta| = \frac{\pi}{4}$, co daje stosunek częstotliwości maksymalnej pasma do minimalnej $\frac{f_{\max}}{f_{\min}} = 3$.

Tę samą linię ćwierćfalową można wykorzystać jeszcze do pomiaru przy większych częstotliwościach, dla których dana linia będzie stanowić nieparzystą wielokrotność ćwierci fali. Pasma pracy wówczas zawęzi się.

Straty w przejściach $(1 - |S_{12p}|^2)$ i w linii ćwierćfalowej $(1 - |S_{12l}|^2)$ również wpływają na zwiększenie błędu i należy stosować elementy o jak najmniejszych stratach. Element badany natomiast może być silnie stratny; zmniejszy to nawet błąd pomiaru.

Jeżeli linia ćwierćfalowa wykonana jest bardzo starannie i można przyjąć, że $|S_{11l}| = |S_{22l}| \cong 0$ i $|S_{12l}| \cong 1$, wówczas wyrażenie (10) przyjmie postać:

$$\frac{|\Gamma_1 - \Gamma_2|}{2 \cos \Theta} \cong |S_{11x}| \left\{ 1 - (1 - |S_{12p}|^2) \pm \varepsilon \operatorname{tg} \Theta \pm \frac{|S_{22x}|}{2|S_{11x}|} \cdot |S_{12x}|^2 |\Gamma_o|^2 \pm \right. \\ \left. \pm 2|S_{22p}|(|S_{11x}| \sin \Theta \pm |S_{12x}|^2 |\Gamma_o|) \right\}. \quad (11)$$

Pełne wyrażenie pozwalające oszacować błąd w określeniu argumentu S_{11x} ma obecnie postać:

$$\arg(\Gamma_1 - \Gamma_2) - \arg(\Gamma_{2z} - \Gamma_{1z}) \cong \arg S_{11x} - \frac{1}{2} (1 - |S_{12l}|^2) \operatorname{tg} \Theta \pm \frac{|S_{11l}| |1 - S_{12x}^2|}{2|S_{11x}| \cos \Theta} \pm \\ \pm 2|S_{22p}| [(1 \pm |S_{11x}|) \sin \Theta \pm |S_{12x}|^2 |\Gamma_o|] \pm \\ \pm |S_{11l}| \left\{ 1 \pm \frac{|S_{22p}|}{\cos \Theta} \left[1 \pm |S_{12x}|^2 \pm \frac{|1 - S_{12x}^2|}{|S_{11x}|} (|S_{12x}|^2 |\Gamma_o| \pm \frac{1}{2} |S_{11l}| |1 + S_{12x}^2|) \right] \right\} \pm \\ \pm \frac{|\Gamma_o|^2 |S_{12x}|^2}{2|S_{11x}| \cos \Theta} (|S_{22x}| \pm |S_{22l}|). \quad (12)$$

Jak wynika z (12), również i w tym przypadku główny wpływ na dokładność pomiaru ma współczynnik odbicia linii ćwierćfalowej.

4. WNIOSKI

Opisana metoda eliminuje prawie całkowicie wpływ elementów układu pomiarowego na wynik pomiaru. Minimalna mierzona wartość współczynników odbicia ograniczona jest głównie wielkością współczynnika odbicia linii ćwierćfalowej. Przy precyzyjnym jej wykonaniu możliwy jest pomiar S_{11} lub S_{22} rzędu 0,01 i mniejszych z dokładnością 10%. Metoda może być z powodzeniem wykorzystana na przykład przy optymalizacji podpór dielektrycznych w liniach współosiowych. Oczywiście, metodę można stosować przy dowolnych przewodnicach falowych, gdy tylko istnieje możliwość wtrącenia do układu pomiarowego precyzyjnej linii ćwierćfalowej. Dużą zaletą metody jest to, że jedna linia ćwierćfalowa umożliwia dokonanie pomiarów w szerokim paśmie częstotliwości.

Dodatek

Wyrażenie na współczynnik odbicia Γ_1 mierzony w układzie jak na rys. 1a, po uwzględnieniu założeń (1) można zapisać:

$$\Gamma_1 = S_{11p} + \frac{S_{12p}^2 \Gamma_b}{1 - S_{22p} \Gamma_b} \cong S_{11p} + S_{12p}^2 \Gamma_b (1 + S_{22p} \Gamma_b),$$

gdzie

$$\Gamma_b = S_{11x} + \frac{S_{12x}^2 \Gamma_a}{1 - S_{22x} \Gamma_a} \cong S_{11x} + S_{12x}^2 \Gamma_a (1 + S_{22x} \Gamma_a) \quad (13)$$

a

$$\Gamma_a = S_{11l} + \frac{S_{12l}^2 \Gamma_o}{1 - S_{22l} \Gamma_o} \cong S_{11l} + S_{12l}^2 \Gamma_o (1 + S_{22l} \Gamma_o):$$

Po wykonaniu działań i pominięciu członów bardzo małych, tzn. takich, które zawierają współczynniki odbicia (S_{11} , S_{22} i Γ_o) w potęgę 4 i wyższej, można ostatecznie zapisać, że:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 = & S_{11} + S_{12p}^2(S_{11x} + S_{12x}^2 S_{11l} + S_{12x}^2 S_{12l}^2 \Gamma_o + S_{12x}^2 S_{12l}^2 S_{22l} \Gamma_o^2 + \\ & + S_{22p} S_{11x} + S_{22p} S_{12x}^2 S_{11l} + S_{22p} S_{12x}^2 S_{12l}^2 \Gamma_o^2 + 2S_{22p} S_{11x} S_{12x}^2 S_{11l} + \\ & + 2S_{22p} S_{11x} S_{12x}^2 S_{12l}^2 \Gamma_o + 2S_{22p} S_{12x}^2 S_{11l} S_{12l}^2 \Gamma_o). \end{aligned} \quad (14)$$

Podobnie zapisuje się wyrażenie na współczynnik odbicia Γ_2 mierzony w układzie jak na rys. 1b:

$$\begin{aligned} \Gamma_2 = & S_{11p} + S_{12p}^2(S_{11l} + S_{12l}^2 S_{11x} + S_{12l}^2 S_{12x}^2 \Gamma_o + S_{12x}^2 S_{12l}^2 S_{22x} \Gamma_o^2 + S_{22p} S_{11l} + S_{22p} S_{12l}^2 S_{11x} + \\ & + S_{22p} S_{12l}^2 S_{12x}^2 \Gamma_o^2 + 2S_{22p} S_{11x} S_{12l}^2 S_{11l} + 2S_{22p} S_{11l} S_{12l}^2 S_{12x}^2 \Gamma_o + 2S_{22p} S_{12l}^2 S_{11x} S_{12x}^2 \Gamma_o). \end{aligned} \quad (15)$$

Następnie tworząc różnicę $\Gamma_1 - \Gamma_2$ otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 - \Gamma_2 = & S_{12p}^2 \left\{ S_{11x}(1 - S_{12l}^2) - S_{11l}(1 - S_{12x}^2) + S_{11x} S_{22p}(1 - S_{12l}^2) [S_{11x}(1 + S_{12l}^2) + \right. \\ & + 2S_{12x}^2 \Gamma_o] - \Gamma_o^2 S_{12x}^2 S_{12l}^2 (S_{22x} - S_{22l}) - 2S_{11l} S_{22p} [S_{11x} S_{12l}^2 - S_{11x} S_{12x}^2 + \\ & \left. + S_{12x}^2 S_{12l}^2 \Gamma_o (1 - S_{12x}^2) + \frac{1}{2} S_{11l} (1 - S_{12x}^2)] \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Po wprowadzeniu dodatkowych oznaczeń:

$$1 - S_{12l}^2 = 1 - |S_{12l}|^2 e^{j2\beta l} \cong 2 \cos \Theta \cdot e^{j\Theta} \left\{ 1 + \left[j\varepsilon - \frac{1}{2} (1 - |S_{12l}|^2) \right] (1 + jt \cos \Theta) \right\},$$

lub $1 - S_{12l}^2 \cong 2 \cos \Theta e^{j\Theta}$, jeśli wyrażenie to mnożone jest przez małą wielkość, ($|S_{12l}|^2 \cong 1$) oraz:

$$1 - S_{12l}^4 \cong -j4e^{j2\Theta} \sin \Theta \cdot \cos \Theta \quad \text{ i } \quad S_{12p}^2 = \frac{S_{12p}^2}{|S_{12p}|^2} [1 - (1 - |S_{12p}|^2)],$$

gdzie:

$$\Theta = \beta l - \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

ε — błąd w określeniu długości elektrycznej linii ćwierćfalowej, wyrażenie na różnicę $\Gamma_1 - \Gamma_2$ można zapisać:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2 \cos \Theta} \cong & \frac{S_{12p}^2}{|S_{12p}|^2} e^{j\Theta} \cdot S_{11x} \left\{ 1 - (1 - |S_{12p}|^2) - \left[\frac{1}{2} (1 - |S_{12l}|^2) - j\varepsilon \right] (1 + jt \cos \Theta) + \right. \\ & - \frac{S_{11l}(1 - S_{12x}^2) \cdot e^{j\Theta}}{2S_{11x} \cos \Theta} - 2S_{22p} e^{j\Theta} (S_{12x}^2 \Gamma_o e^{j\Theta} + jS_{11x} \sin \Theta) + \\ & + \frac{S_{11l} S_{22p} e^{j\Theta}}{\cos \Theta} \left[1 + S_{12x}^2 e^{-j2\Theta} + \frac{1 - S_{12x}^2}{S_{11x}} \left(S_{12x}^2 \Gamma_o - \frac{S_{11l}}{2} (1 + S_{12x}^2) e^{-j2\Theta} \right) \right] + \\ & \left. + \frac{\Gamma_o^2 S_{12x}^2 e^{j\Theta}}{2S_{11x} \cos \Theta} \cdot (S_{22x} - S_{22l}) \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Stąd wyrażenie na moduł S_{11x} można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \frac{|\Gamma_1 - \Gamma_2|}{2 \cos \Theta} = & |S_{11x}| \cdot \left\{ 1 - (1 - |S_{12p}|^2) - \frac{1}{2} (1 - |S_{12l}|^2) \pm \varepsilon \tan \Theta \pm \frac{|S_{11l}| |1 - S_{12x}^2|}{2|S_{11x}| \cos \Theta} \pm \right. \\ & \pm 2|S_{22p}| (|S_{11x}| \sin \Theta \pm |S_{12x}|^2 |\Gamma_o|) \pm \frac{|\Gamma_o|^2 |S_{12x}|^2}{2|S_{11x}| \cos \Theta} (|S_{22x}| \pm |S_{22l}|) \pm \\ & \left. \pm \frac{|S_{11l}| |S_{22p}|}{\cos \Theta} \left[1 \pm |S_{12x}|^2 \pm \frac{|1 - S_{12x}^2|}{|S_{11x}|} \left(|S_{12x}|^2 |\Gamma_o| \pm \frac{1}{2} |S_{11l}| |1 + S_{12x}^2| \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Przy określaniu argumentu S_{11x} , przy dodatkowych pomiarach ze zwarciami, można otrzymać wyrażenia na Γ_{1z} i Γ_{2z} bardziej dokładne niż poprzednio:

$$\Gamma_{1z} = S_{11p} - \frac{S_{12p}^2}{1 + S_{22p}} \cong S_{11p} - S_{12p}^2(1 - S_{22p}),$$

$$\Gamma_{2z} = S_{11p} + \frac{S_{12p}^2 \Gamma_c}{1 - S_{22p} \Gamma_c} \cong S_{11p} + S_{12p}^2 \Gamma_c (1 + S_{22p} \Gamma_c),$$

gdzie:

$$\Gamma_c = S_{11l} - \frac{S_{12l}^2}{1 + S_{22l}} \cong S_{11l} - S_{12l}^2(1 - S_{22l}).$$

Po wstawieniu Γ_c do wyrażenia na Γ_{2z} i pominięciu członów bardzo małych, otrzymuje się:

$$\Gamma_{2z} \cong S_{11p} + S_{12p}^2(S_{11l} - S_{12l}^2 + S_{12l}^2 S_{22l} + S_{22p} S_{12l}^2).$$

Różnica $\Gamma_{2z} - \Gamma_{1z}$ pozwoli na znalezienie argumentu S_{11x}

$$\Gamma_{2z} - \Gamma_{1z} = S_{12p}^2[1 - S_{12l}^2 - S_{22p}(1 - S_{12l}^2) + S_{11l} + S_{12l}^2 S_{22l}].$$

Po wstawieniu poprzednio wprowadzonych oznaczeń, można zapisać:

$$\frac{\Gamma_{2z} - \Gamma_{1z}}{2 \cos \Theta} = S_{12p}^2 e^{j\Theta} [1 + j\varepsilon - \varepsilon \operatorname{tg} \Theta + 2j e^{j\Theta} S_{22p} \sin \Theta + \frac{S_{11l} e^{-j\Theta} - S_{22l} e^{j\Theta}}{2 \cos \Theta}].$$

Stąd

$$\arg(\Gamma_{2z} - \Gamma_{1z}) \cong \arg S_{12p}^2 + \Theta + \varepsilon \pm 2|S_{22p}| \sin \Theta \pm |S_{11l}|. \quad (19)$$

Argument S_{11x} znajduje się z wyrażenia (17):

$$\begin{aligned} \arg(\Gamma_1 - \Gamma_2) &\cong \arg S_{11x} + \arg S_{12p}^2 + \Theta + \varepsilon - \frac{1}{2}(1 - |S_{12l}|^2) \operatorname{tg} \Theta \pm \frac{|S_{11l}| |1 - S_{12x}^2|}{2|S_{11x}| \cos \Theta} \pm \\ &\pm 2|S_{22p}|(|S_{11x}| \sin \Theta \pm |S_{12x}|^2 |\Gamma_o|) \pm \frac{|\Gamma_o|^2 |S_{12x}|^2}{2|S_{11x}| \cos \Theta} (|S_{22x}| \pm |S_{22l}|) \pm \\ &\pm \frac{|S_{11l}| |S_{22p}|}{\cos \Theta} \left[1 \pm |S_{12x}| \pm \frac{|1 - S_{12x}^2|^4}{|S_{11x}|} \left(|S_{12x}|^2 |\Gamma_o| \pm \frac{1}{2} |S_{11l}| |1 + S_{12x}^2| \right) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Po wstawieniu wyrażenia (19) do (20) można ostatecznie zapisać:

$$\begin{aligned} \arg(\Gamma_1 - \Gamma_2) - \arg(\Gamma_{2z} - \Gamma_{1z}) &= \arg S_{11x} - \frac{1}{2}(1 - |S_{12l}|^2) \operatorname{tg} \Theta \pm \frac{|S_{11l}| |1 - S_{12x}^2|}{2|S_{11x}| \cos \Theta} \pm \\ &\pm 2|S_{22p}|[(1 \pm |S_{11x}|) \sin \Theta \pm |S_{12x}|^2 |\Gamma_o|] \pm |S_{11l}| \left\{ 1 \pm \frac{|S_{22p}|}{\cos \Theta} \left[1 \pm |S_{12x}|^2 \pm \right. \right. \\ &\left. \left. \pm \frac{|1 - S_{12x}^2|}{|S_{11x}|} \left(|S_{12x}|^2 |\Gamma_o| \pm \frac{1}{2} |S_{11l}| |1 + S_{12x}^2| \right) \right] \right\} \pm \frac{|\Gamma_o|^2 |S_{12x}|^2}{2|S_{11x}| \cos \Theta} (S_{22x} \pm S_{22l}). \end{aligned} \quad (21)$$

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W.E. Little, D.A. Ellerbruch and G.F. Engen. An Analysis of the Quarter-Wave Technique of Reducing the Errors in UHF and Microwave Impedance Measurement, IEEE Trans. on MTT, Vol. MTT-15, No 9, September 1967, pp. 504—507.

J. KOMISARCUK

QUARTER-WAVE METHOD USED FOR MEASUREMENTS OF TWO-PORT ELEMENTS IN A WIDE BAND

Summary

In this paper the method of the measurement of low reflection coefficient with the help of the quarter-wave section is presented. This method can be used to measure terminations or two-port elements in a wide band with one quarter-wave line only. The error analysis is given.

J. KOMISARCUK

LA MÉTHODE DE LA LIGNE LONGUEUR $\frac{\lambda}{4}$ APPLIQUÉE AUX MESURES DES ÉLÉMENTS AVEC DEUX ENTRÉES DANS LA LARGE BANDE DE FRÉQUENCE

Résumé

L'article présente la méthode de mesure des coefficients de réflexion avec une section de la ligne de longueur $\frac{\lambda}{4}$. Cette méthode peut être appliquée aux mesures des éléments avec une ou deux entrées dans la large bande de fréquence. L'analyse de l'erreur est donnée.

J. KOMISARCUK

METHODE DER VIERTELWELLENLINIE IN ANWENDUNG FÜR BEMESSUNGEN VON KAPAZITÄTSELEMENTEN IN EINEM BREITEN FREQUENZSTREIFEN

Zusammenfassung

In der Bearbeitung wurde die Bemessungsweise von sehr geringen Reflexionskoeffizienten mittels Viertelwellenlinie vorgetragen. Es wurde die Möglichkeit bewiesen, die Bemessungen in einem breiten Frequenzstreifen unter Anwendung nur einer Viertelwellenlinie durchzuführen. Die Methode scheidet fast vollständig den Reflexionseinfluß unvollkommener Elemente der Prüfschaltung aus. Man wies auf die Möglichkeit hin, diese Methode sowohl zu Bemessungen von Schlußelementen der Mikrowellenbahn (Belastungen), als auch von Kapazitätselementen anzuwenden. Im Weiteren wurde eine Fehleranalyse vorgenommen, die ergab, daß die Genauigkeit der Bemessungen vor allem von präziser Ausführung der Viertelwellenlinie abhängig ist.

Я. КОМИСАРЧУК

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЧЕТВЕРТЬВОЛНОВОЙ ЛИНИИ К ИЗМЕРЕНИЯМ ЧЕТЫРЁХПОЛЮСНИКОВ В ШИРОКОМ ДИАПАЗОНЕ ЧАСТОТ

Резюме

В статье представлен метод измерения малых коэффициентов отражения при использовании четвертьволнового отрезка линии.

Метод даёт возможным измерения двухполусников и четырёхполусников в широком диапазоне частот. Представлен анализ ошибок.

Charakterystyki przejściowe układów logicznych z potencjałowym kodowaniem sygnałów

JAN ZABRODZKI (WARSZAWA)

Instytut Maszyn Matematycznych Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 15.5.1970

W pracy omówiono pojęcia powierzchni charakterystycznych i charakterystyk przejściowych układów logicznych z potencjałowym kodowaniem sygnałów. Omówiono właściwości powierzchni charakterystycznych i parametry zewnętrzne układów logicznych związane z charakterystykami przejściowymi. Rozważono pracę układów logicznych w otwartych i zamkniętych łańcuchach. Podano schemat blokowy urządzenia, które w oparciu o znajomość charakterystyk przejściowych umożliwia łatwą i szybką kontrolę układów logicznych.

1. WSTĘP

Od układów cyfrowych wymaga się, żeby zapewniały:

- a) właściwą kwantyzację sygnałów logicznych,
- b) realizację odpowiednich funkcji logicznych,
- c) możliwość współpracy z innymi układami cyfrowymi.

To, czy i w jakim stopniu układ logiczny spełnia powyższe warunki można określić na podstawie znajomości parametrów zewnętrznych tego układu (bez wnikania w jego budowę wewnętrzną). Najważniejszymi spośród parametrów charakteryzujących układ logiczny są: funkcja logiczna spełniana przez układ, dopuszczalna liczba wejść układu logicznego (spływ logiczny), liczba układów, którymi dany układ logiczny może sterować (zysk logiczny, obciążalność logiczna, wzmocnienie logiczne), wartości potencjałów poziomów logicznych, szybkość działania, odporność na zakłócenia, wartości napięć zasilających, odporność na zmiany napięć zasilających i na zmiany wartości elementów, pobór mocy, zakres dopuszczalnych temperatur pracy, koszt układu.

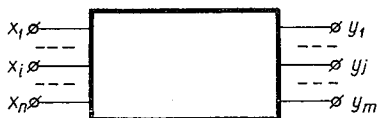
Wartości parametrów zewnętrznych układów logicznych są istotne dla konstruktora systemów i urządzeń cyfrowych, który w oparciu o ich znajomość może dokonać wyboru odpowiedniego dla niego zestawu układów logicznych produkowanych seryjnie oraz zaprojektować w sposób właściwy schemat połączeń logicznych w projektowanym urządzeniu.

W pracy omówiono powierzchnie charakterystyczne i charakterystyki przejściowe układów logicznych z potencjałowym kodowaniem sygnałów oraz związane z nimi parametry zewnętrzne układów logicznych. Rozważono pracę układów logicznych w otwartych

i zamkniętych łańcuchach. W ostatniej części pracy przedstawiono koncepcję urządzenia, które w oparciu o badanie charakterystyk przejściowych układu umożliwi łatwą i szybką kontrolę układów logicznych.

2. POWIERZCHNIE CHARAKTERYSTYCZNE I CHARAKTERYSTYKI PRZEJŚCIOWE UKŁADÓW LOGICZNYCH

W pracy rozważane są elektryczne układy logiczne, w których sygnały wejściowe x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ oraz sygnały wyjściowe y_l , $l = 1, 2, \dots, m$ są potencjałami elektrycznymi (rys. 1). Zakłada się, że omawiane układy logiczne spełniają osłabioną tezę o czasie pro-



Rys. 1. Elektryczny układ logiczny z potencjałowym kodowaniem sygnałów o n wejściach i m wyjściach

pagacji sygnału [1], tzn. że wartość chwilowa potencjału sygnału wyjściowego $y_l(t)$, $l = 1, 2, \dots, m$ zależy od wartości chwilowych potencjałów wejściowych $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ oraz od wartości chwilowych parametrów $b_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, k$, które charakteryzują elementy składowe układu, opisują własności źródeł zasilających i warunki pracy układu. Zakłada się, że dla każdego z m wyjść układu spełniona jest zależność

$$y_l(t) = F[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), b_1(t), b_2(t), \dots, b_k(t)], \quad (1)$$

gdzie $l = 1, 2, \dots, m$.

W dalszej części pracy rozważania są prowadzone dla jednego z wyjść układu, przy czym są one słuszne dla pozostałych wyjść.

Przyjmując, że parametry b_j , $j = 1, 2, \dots, k$ są ustalone, zależność (1) można zapisać w postaci

$$y(t) = S[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]. \quad (2)$$

Geometryczną interpretacją równania (2) jest hiperpowierzchnia w przestrzeni $(n+1)$ -wymiarowej. Ta hiperpowierzchnia będąca miejscem geometrycznym wartości chwilowych potencjałów sygnałów wyjściowych odpowiadających wszystkim możliwym pobudzeniom¹⁾ układu nazywana jest powierzchnią charakterystyczną układu [1].

Zależność wiążąca wartość chwilową potencjału wyjściowego układu z wartością chwilową potencjału jednego z wejść układu

$$y(t) = C[x_i(t)], \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

nazywana jest charakterystyką przejściową układu.

Geometrycznie charakterystykę przejściową interpretuje się jako dwuwymiarowy rzut, odpowiedniego dla danego pobudzenia przekroju powierzchni charakterystycznej n -wejściowego układu logicznego na płaszczyznę wyznaczoną przez osie współrzędnych y i x_i .

¹⁾ Zbiór wszystkich n wartości chwilowych potencjałów zacisków wejściowych nazywa się pobudzeniem n -wejściowego układu logicznego [1, 2, 3].

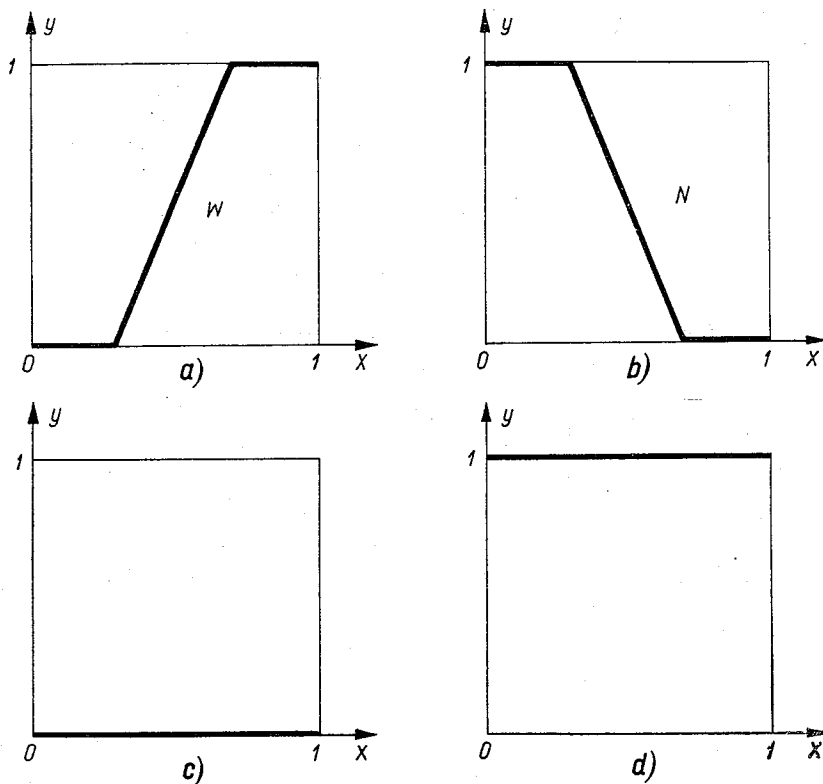
Kształt charakterystyki przejściowej ze względu na wejście x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ zależy od wartości potencjałów pozostałych zacisków wejściowych (niektóre z nich, bądź wszystkie, mogą być ustalone), a więc zależy od sposobu pobudzania układu.

Do badania powierzchni charakterystycznych za pomocą ich charakterystyk przejściowych dogodnie jest korzystać z tzw. pobudzeń charakterystycznych [2], tj. takich pobudzeń, dla których znajomość wartości chwilowej jednego z potencjałów wejściowych wystarcza do określenia wartości chwilowych potencjałów pozostałych wejść układu logicznego.

Zgodnie z twierdzeniem podanym w pracy [2] każdemu układowi logicznemu można przyporządkować równoważny mu układ unormowany, którego potencjały zaciskowe przyjmują unormowane wartości z przedziału „0”÷„1” („0” i „1” są to wartości odpowiadające potencjałom sygnałów logicznych, zadaną z góry dokładnością, w przedziałach czasu, gdy układ jest w stanie ustalonym). Dla zwięzłości, w dalszej części pracy, mówiąc o układzie logicznym będziemy rozumieli, że jest to układ unormowany.

2.1. Układy logiczne jednowejściowe

Powierzchnie charakterystyczne układów logicznych jednowejściowych są jednocześnie charakterystykami przejściowymi. Są dwa zasadnicze rodzaje charakterystyk przejściowych układów logicznych jednowejściowych: charakterystyki przejściowe typu **W**

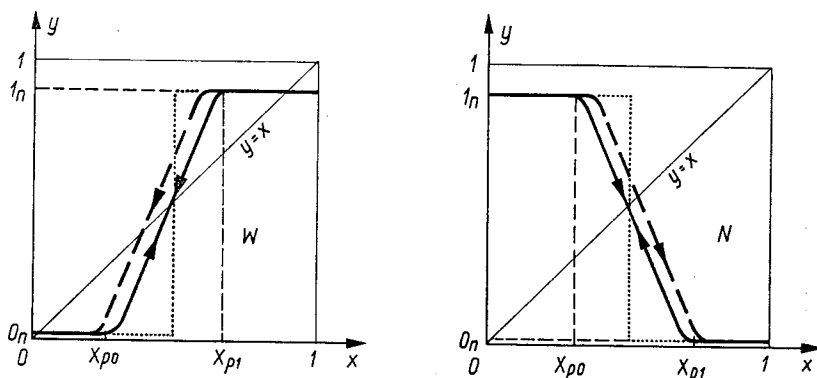


Rys. 2. Charakterystyki przejściowe jednowejściowych układów logicznych

(rys. 2a) dla układów wtórnikowych (wmacniaczy nie odwracających fazy) i charakterystyki przejściowe typu N (rys. 2b) dla układów negujących (wzmocniaczy odwracających fazę). Pokazane na rys. 2c, d charakterystyki typowe odpowiednio dla generatorów zera i jedynki są szczególnymi przypadkami charakterystyk typu W lub N (np. charakterystykę pokazaną na rys. 2c może mieć układ typu W , dla którego próg zera (patrz p. 2.2) jest równy „1”).

2.2. Charakterystyki przejściowe rzeczywistych układów logicznych

Charakterystyki przejściowe rzeczywistych układów logicznych różnią się od charakterystyk przejściowych pokazanych na rys. 2. Na rys. 3 pokazano przykładowe charakterystyki przejściowe typu W i N .



Rys. 3. Typowe charakterystyki rzeczywistych układów logicznych (dla małych częstotliwości — linie ciągłe, dla dużych częstotliwości — linie ciągłe i przerywane, linią kropkowaną zaznaczono charakterystykę idealnego przełącznika)

Rozważmy układ o charakterystyce przejściowej typu W (dla układu o charakterystyce przejściowej typu N rozumowanie jest analogiczne). Ze wzrostem napięcia wejściowego, napięcie wyjściowe nie zmienia się i ma wartość nominalną „0_n”, bliską wartości „0”. Po przekroczeniu pewnego napięcia x_{p0} (np. odpowiadającego napięciu, przy którym tranzystor zaczyna przewodzić) napięcie wyjściowe zaczyna rosnąć. Narasta ono do chwili gdy napięcie wyjściowe osiągnie wartość x_{p1} (np. odpowiadającą napięciu, przy którym tranzystor wchodzi w nasycenie). Dalszy wzrost napięcia wejściowego nie powoduje zmian wartości napięcia wyjściowego „1_n”, które na ogół różni się od wartości „1”.

Sytuacja jest odwrotna w przypadku zmniejszania napięcia wejściowego od wartości „1”. Dopóki nie zostanie osiągnięta wartość x_{p1} , poziom wyjściowy utrzymuje się na wartości 1_n, potem maleje do wartości 0_n, którą osiąga gdy sygnał wejściowy zmniejszy się do wartości x_{p0} .

Przy pewnej, dostatecznie dużej dla układu szybkości zmian napięcia wejściowego, odcinki charakterystyki przejściowej odpowiadające narastaniu i opadaniu impulsu wyjściowego mogą nie pokrywać się, na przykład ze względu na czas potrzebny dla prze-

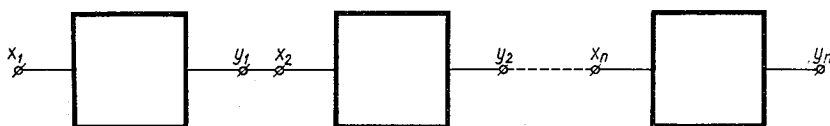
ładowania pojemności w układzie, i charakterystyka przejściowa „rozdwaja się” (linia przerywana na rys. 3).

Wartość napięcia x_{p0} określa maksymalną dopuszczalną wartość napięcia wejściowego, które nie spowoduje zmian napięcia wyjściowego 0_n (1_n dla układu typu N). Podobnie wartość napięcia x_{p1} określa minimalną, dla poziomu jedynki, dopuszczalną wartość napięcia wejściowego, która nie spowoduje zmiany napięcia wyjściowego 1_n (0_n dla układu typu N).

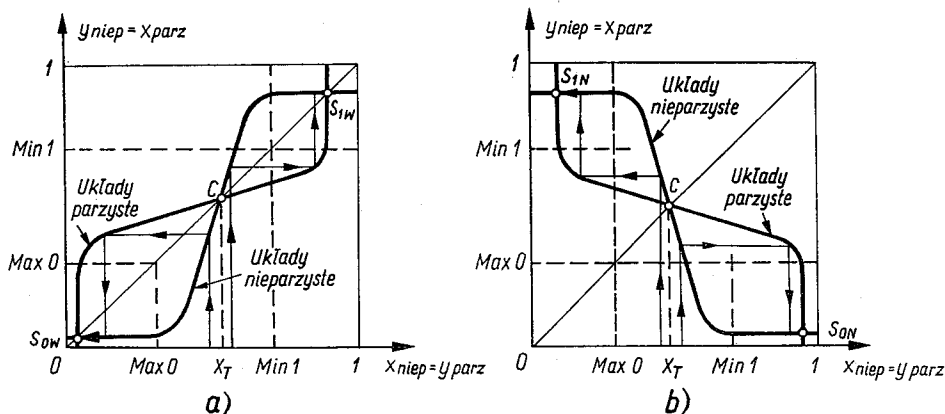
Nachylenie odcinka charakterystyki odpowiadającego narastaniu bądź opadaniu sygnału wyjściowego określa wzmocnienie układu logicznego. Teoretycznie ze względu na wielkości napięć x_{p0} i x_{p1} oraz ze względu na wielkość wzmocnienia optymalna byłaby charakterystyka przejściowa idealnego przekazywnika (rys. 3 — linia kropkowana).

2.3. Praca układu logicznego w otwartym łańcuchu

Założmy, że układ logiczny ma pracować w otwartym łańcuchu identycznych układów (rys. 4). Wyjście każdego układu jest dołączone do wejścia następnego układu.



Rys. 4. Otwarty łańcuch układów logicznych

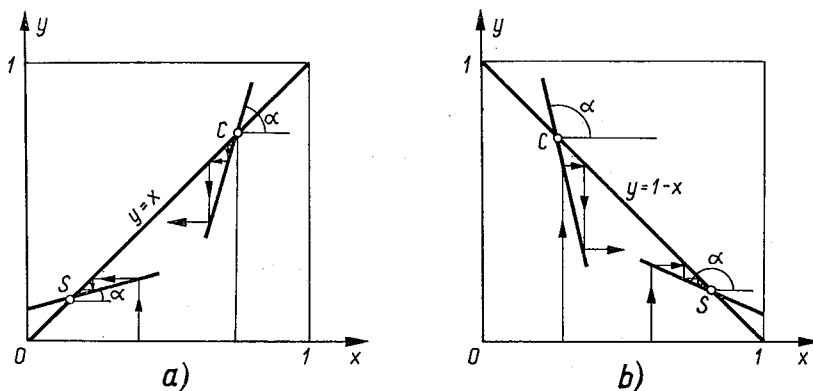


Rys. 5. Charakterystyki przejściowe układów logicznych połączonych w otwartym łańcuchu

Na rys. 5a pokazano jednocześnie charakterystyki przejściowe typu W wszystkich kolejnych układów nieparzystych i parzystych połączonych w długim łańcuchu otwartym, a na rys. 5b pokazano charakterystyki przejściowe typu N wszystkich kolejnych układów negujących połączonych w długim łańcuchu otwartym.

Jeżeli na wejściu długiego łańcucha układów wtórnikowych pojawi się potencjał o wartości mniejszej od wartości progowej ²⁾ x_T , to na wyjściu łańcucha ustali się potencjał o wartości odpowiadającej punktowi S_{0w} (zeru logicznemu). Jeżeli na wejściu łańcucha pojawi się potencjał o wartości większej od x_T , na wyjściu łańcucha ustali się potencjał odpowiadający punktowi S_{1w} (logicznej jedynce) (rys. 5a). Można powiedzieć, że punkty S_{0w} i S_{1w} są punktami stabilnymi układu o charakterystyce przejściowej typu W , natomiast punkt C jest punktem niestabilnym (minimalna zmiana sygnału wejściowego o wartości x_T spowoduje przejście do jednego ze stanów stabilnych: S_{0w} lub S_{1w}). W przypadku łańcucha otwartego złożonego z układów negujących, pojawienie się na jego wejściu potencjału o wartości mniejszej od x_T spowoduje ustalenie się na wyjściu łańcucha potencjału o wartości odpowiadającej punktowi S_{1N} (jedynce logicznej). Natomiast potencjał na wejściu łańcucha o wartości większej od x_T spowoduje pojawienie się na wyjściu łańcucha potencjału o wartości odpowiadającej punktowi S_{0N} (zeru logicznemu). Punkty S_{0N} i S_{1N} są punktami stabilnymi, a punkt C punktem niestabilnym dla układu negującego.

Pojęcie stabilności lub niestabilności punktu charakterystyki przejściowej wyjaśnia również rys. 6. Jeżeli w punkcie przecięcia się charakterystyki przejściowej typu W z linią



Rys. 6. Graficzne określenie punktów stabilności S i punktów niestabilności C dla charakterystyk przejściowych: a) typu W i b) typu N

jednostkowego wzmocnienia $y = x$ nachylenie α charakterystyki przejściowej jest mniejsze od 45° (czyli gdy w punkcie przecięcia jest spełniona zależność $\frac{dy}{dx} < 1$) punkt przecięcia odpowiada punktowi stabilnemu, natomiast jeżeli w punkcie przecięcia się charakterystyki przejściowej z linią $y = x$ nachylenie α charakterystyki jest większe od 45° (czyli gdy w punkcie przecięcia zachodzi zależność $\frac{dy}{dx} > 1$) punkt przecięcia odpowiada punktowi niestabilnemu (rys. 6a).

²⁾ Graficznie wartość x_T wyznacza się jako odcięta punktu przecięcia się charakterystyki przejściowej z linią jednostkowego wzmocnienia (rys. 5).

Dla układu negującego istotne jest przecięcie się charakterystyki przejściowej z linią $y = x - 1$ (rys. 6b). Jeżeli w punkcie przecięcia nachylenie α charakterystyki przejściowej jest większe od 135° (czyli gdy $\frac{dy}{dx} < 1$) punkt jest stabilny, jeżeli nachylenie jest mniejsze od 135° (czyli gdy $\frac{dy}{dx} > 1$) to punkt jest niestabilny.

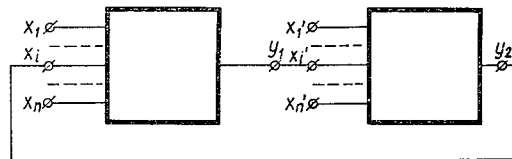
Warunkiem wystarczającym dla istnienia dwóch punktów stabilnych dla charakterystyki przejściowej układu logicznego przeznaczonego do pracy w odpowiednio długim łańcuchu złożonym z układów tego samego typu jest to, żeby charakterystyka przejściowa przecinała linię $y = x$ (dla układu wtórnikowego) lub linię $y = 1 - x$ (dla układu negującego) w trzech punktach. Jest to jednocześnie warunek konieczny w przypadku łączenia układów o identycznych charakterystykach [4]. Przy spełnieniu tego warunku poziom wyjściowy jest mniejszy od x_{p0} lub większy od x_{p1} .

Potencjał sygnału wyjściowego z otwartego łańcucha układów logicznych ustali się na wartości odpowiadającej punktowi stabilnemu, jeżeli sygnał wejściowy o potencjale $x < x_T$ lub $x > x_T$ przejdzie przez kilka kolejnych układów. Im większa jest liczba układów w łańcuchu tym wartość sygnału wejściowego może być bliższa wartości x_T . Stąd najniekorzystniejszy przypadek z punktu widzenia tolerancji potencjału wyjściowego występuje gdy łańcuch składa się tylko z jednego układu logicznego.

Pojedynczy układ logiczny musi zapewnić poprawne sterowanie podobnego układu. Potencjał 0_n sygnału wyjściowego z układu nie może być większy od wartości x_{p0} , a potencjał 1_n sygnału wyjściowego nie może być mniejszy od wartości x_{p1} (patrz rys. 3 i 5). Dlatego też wartości x_{p0} i x_{p1} nazywa się odpowiednio maksymalną wartością zera (Max 0) i minimalną wartością jedynki (Min 1).

2.4. Praca układu logicznego w łańcuchu zamkniętym

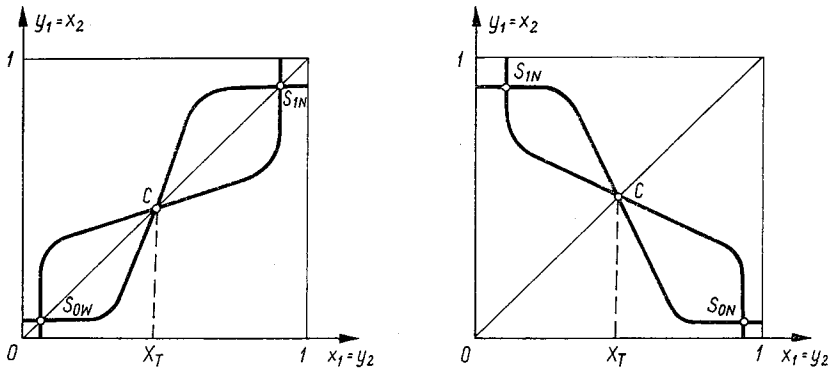
Rozważmy dwa układy tego samego typu (ogólnie parzystą liczbę układów) połączone tak, że wyjście jednego z nich jest jednocześnie jednym z wejść drugiego (rys. 7). Charakterystyki przejściowe obu układów znajdujących się w takim łańcuchu pokazane są



Rys. 7. Zamknięty łańcuch złożony z dwóch układów logicznych

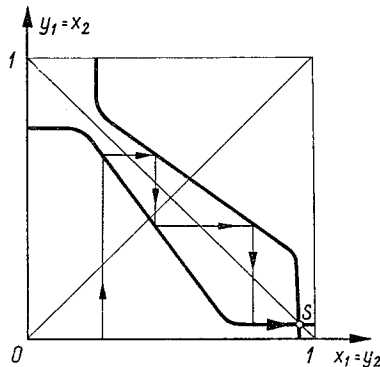
na rys. 8. Istnieją dwa stany stabilne oraz jeden stan niestabilny, a więc łańcuch zamknięty składający się z dwóch układów o charakterystykach jak na rys. 8 spełnia funkcję elementu pamięci³⁾. Zmianę stanu elementu pamiętającego można uzyskać pobudzając odpowiednio pozostałe wejścia jednego lub drugiego układu wchodzącego w skład łańcucha.

³⁾ W tym wypadku układ typu W nie może być zwykłym wtórnikiem emiterowym o wzmacnieniu jeden (charakterystyka przejściowa pokrywa się w przybliżeniu z linią $y = x$).



Rys. 8. Charakterystyki przejściowe dwóch układów logicznych połączonych w łańcuchu zamkniętym

W przypadku gdy charakterystyki przejściowe układów pracujących w łańcuchu zamkniętym mają kształt jak na rys. 9a (a więc spełniają warunki poprawnej pracy w łańcuchu otwartym) łańcuch zamknięty spełnia funkcję multiwibratora jednostabilnego (jest



Rys. 9. Charakterystyki przejściowe układu multiwibratora jednostabilnego

tylko jeden punkt stabilny S). Chwilowe wyprowadzenie układu ze stanu stabilnego można uzyskać przez odpowiednie pobudzenie wejść układów wchodzących w skład łańcucha (wejść nie wykorzystanych przy łączeniu w łańcuch). Układ po pewnym czasie wraca do stanu stabilnego (rys. 9a).

3. ODPORNOŚĆ UKŁADU LOGICZNEGO NA ZAKŁÓCENIA

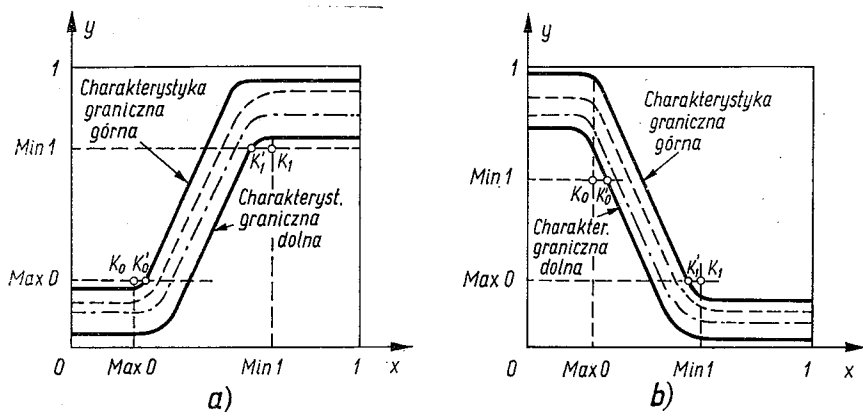
3.1. Rozrzut charakterystyk przejściowych

W rozdz. 2 założono, że wartości elementów rozważanych jednowejściowych (lub n -wejściowych przy ustalonych potencjałach na $n-1$ wejściach) układów logicznych mają wartości nominalne oraz że układy pracują w warunkach normalnych.

Chcąc uwzględnić fakt, że wartości elementów układu przy produkcji seryjnej mogą różnić się od nominalnych oraz to, że układ może pracować w różnych warunkach (wahania napięć zasilających, różne obciążenie układu, zmiany temperatury otoczenia itp.) trzeba rozpatrywać rodzinę charakterystyk przejściowych

$$\{y(t)\} = \{C[x(t), b_1(t), b_2(t), \dots, b_k(t)]\}. \quad (4)$$

Jeżeli parametry b_j , $j = 1, 2, \dots, k$ mogą się zmieniać w określonych granicach (tolerancje elementów układu, dopuszczalny przedział zmian temperatury), charakterystyki przejściowe układu muszą się zawierać również w pewnych granicach. Na rys. 10 pokazane



Rys. 10. Rodziny charakterystyk przejściowych

są przykładowe rodziny charakterystyk przejściowych, które zawarte są między granicznymi charakterystykami przejściowymi: górną i dolną.

Na rys. 10 zaznaczono punkty K_0 , K_1 , K'_0 , K'_1 . Punkty K_0 i K_1 wyznaczone są przez przecięcie odpowiednich prostych odpowiadających napięciom Max 0 i Min 1, natomiast punkty graniczne K'_0 i K'_1 powstają w wyniku przecięcia się poziomów wyjściowych Max 0 i Min 1 z odpowiednimi charakterystykami przejściowymi granicznymi.

3.2. Pojedynczy układ logiczny

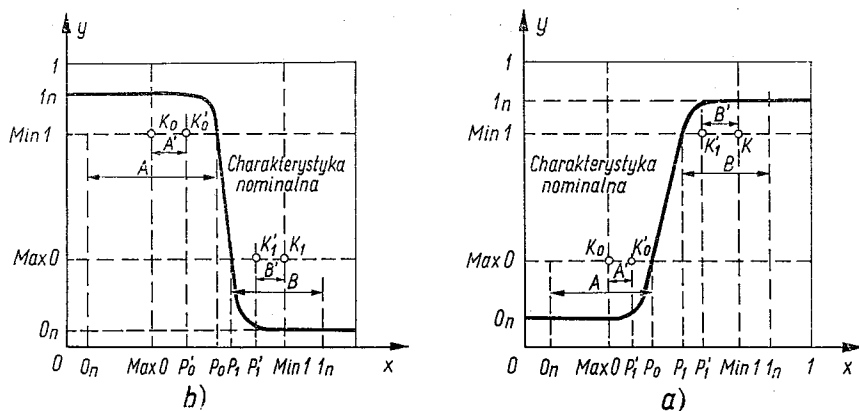
W punkcie 2.3 powiedziano, że jeżeli układ logiczny ma poprawnie sterować podobnym układem, to napięcie wyjściowe z układu musi być mniejsze od Max 0 lub większe od Min 1. Sygnał wyjściowy z układu będzie mniejszy od Max 0 (układ typu W) lub większy od Min 1 (układ typu N) dopóki wartość sygnału wejściowego będzie mniejsza od P_0 — tzw. progu zera (rys. 11). Podobnie sygnał wyjściowy z układu będzie większy od Min 1 (układ typu W) lub mniejszy od Max 0 (układ typu N), jeżeli wartość sygnału wejściowego będzie większa od P_1 — tzw. progu jedynki⁴⁾. Graficznie P_0 znajduje się jako odcięta punktu przecięcia poziomu Max 0 z charakterystyką przejściową nominalną dla układu typu W,

⁴⁾ Wartości Max 0, Min 1, P_0 i P_1 nazywa się czasami Max 0 wyjściowe, Min 1 wyjściowe, Max 0 wejściowe, Min 1 wejściowe [4, 5].

lub poziomu Min 1 z charakterystyką przejściową dla układu typu N . Podobnie wyznacza się P_1 (rys. 11).

Różnica

$$A = |P_0 - 0_n| \quad \text{oraz} \quad B = |P_1 - 1_n| \quad (5)$$



Rys. 11. Określenie progów i odporność na zakłócenie stałoprądowe dla pojedynczego układu logicznego

nazywana jest dalej nominalną stałoprądową odpornością na zakłócenia (stałoprądowym marginesem szumu) odpowiednio dla poziomu logicznego zera i dla poziomu logicznej jedynki.

Uwzględniając dopuszczalny rozrzut charakterystyk przejściowych, różnica

$$A' = |P'_0 - Max\ 0| \quad \text{i} \quad B' = |P'_1 - Min\ 1| \quad (6)$$

nazywana jest dalej stałoprądową odpornością na zakłócenia odpowiednio dla poziomu logicznego zera i dla poziomu logicznego 1 w najgorszym przypadku (wartości $Max\ 0$ i $Min\ 1$ są określone w odniesieniu do odpowiednich charakterystyk przejściowych granicznych).

Powyższe definicje stałoprądowych odporności na zakłócenia są zbyt pesymistyczne w przypadku gdy zakłócenie ma charakter krótkotrwały (np. pochodzi od sprzężeń indukcyjnych między przewodami, por. również pkt 3). Dlatego też niektórzy autorzy [9, 11] wprowadzają pojęcie zmiennoprądowej odporności na zakłócenia. Jest to maksymalna amplituda impulsów zakłócających, przy zadanym czasie trwania, które dodane do poziomu $Max\ 0$ lub $Min\ 1$ powodują powstanie na wyjściu układu logicznego impulsów o amplitudzie mniejszej lub równej amplitudzie impulsów zakłócających na wejściu układu.

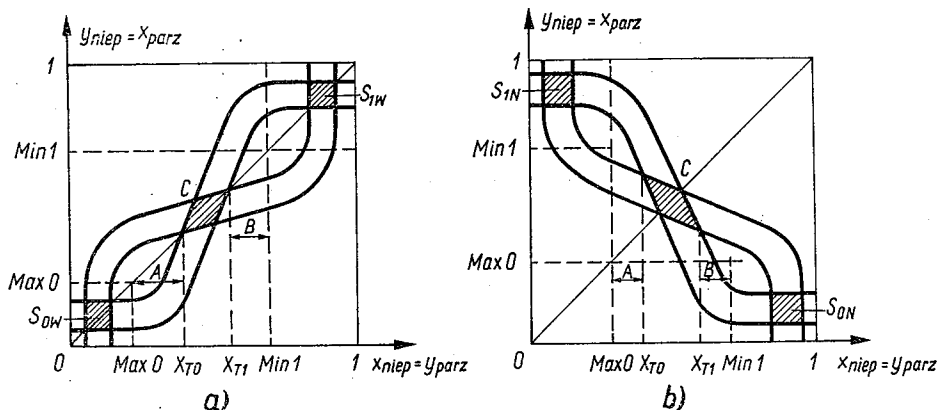
3.3. Otwarty łańcuch układów logicznych

Uwzględniając rozrzut charakterystyk przejściowych punkty stabilne oraz punkt niestabilny stają się odpowiednio obszarami stabilności oraz niestabilności (rys. 12).

Odporności na zakłócenia zmiennoprądowe otwartego łańcucha układów definiuje się jako różnice (rys. 12)

$$A = |x_{T0} - \text{Max } 0| \quad \text{ i } \quad B = |x_{T1} - \text{Min } 1|,$$

gdzie x_{T0} i x_{T1} są odpowiednio kresem dolnym i górnym obszaru niestabilności (ze względu na zmienną x).

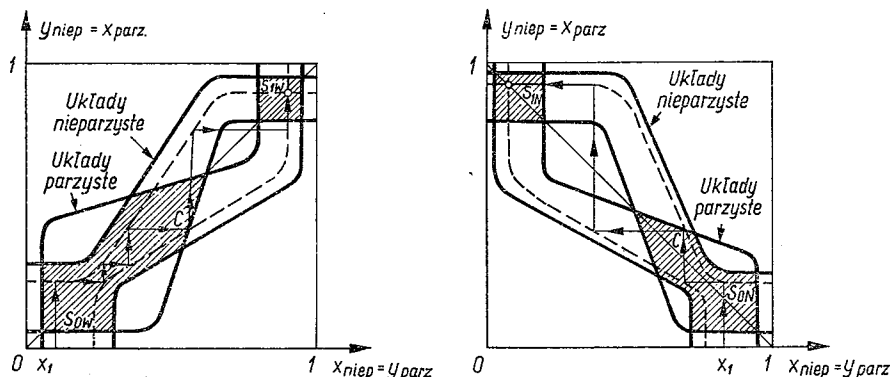


Rys. 12. Rozrzut charakterystyk przejściowych otwartego łańcucha układów logicznych

Otwarty łańcuch układów będzie pracował poprawnie, jeżeli spełnione będą warunki

$$x_{T0} > \text{Max } 0 \quad \text{ i } \quad x_{T1} < \text{Min } 1,$$

czyli wtedy gdy obszary stabilności będą rozłączne z obszarem niestabilności.



Rys. 13. Charakterystyki przejściowe łańcucha otwartego w przypadku gdy jeden z obszarów stabilnych łączy się z obszarem niestabilnym

W przypadku, gdyby np. obszary S_{OW} i C dla układu typu W , lub obszary S_{ON} i C dla układu typu N nie były rozłączne (rys. 13a, b), może się zdarzyć, że kolejne układy będą miały charakterystyki przejściowe o kształcie pokazanym na rys. 13 linią przerywaną (por. pkt 1.3). Wtedy niezależnie od wartości sygnału wejściowego na wyjściu odpo-

wiednio długiego łańcucha ustala się poziom logiczny jeden, a więc łańcuch spełnia rolę generatora jedynki (por. rys. 1d).

Jeżeli w łańcuchu otwartym mają współpracować układy typu W i N , musi być spełniony warunek, żeby odpowiednie sumy obszarów stabilności i niestabilności obu typów układów były rozłączone [9].

3.4. Zamknięty łańcuch układów logicznych

Uwzględniając rozrzut charakterystyk przejściowych układów logicznych pracujących w łańcuchu zamkniętym, punkty stabilne oraz punkt niestabilny stają się odpowiednimi obszarami stabilności i niestabilności. Dopóki obszary stabilne i obszary niestabilne są rozłączne, zamknięty łańcuch układów logicznych będzie spełniał rolę układu pamiętającego. W przypadku gdy jeden z obszarów stabilnych nie jest rozłączny z obszarem niestabilnym może się zdarzyć, że łańcuch zamknięty będzie się zachowywał jak multiwibrator jednostabilny.

Warunki poprawnej pracy układu logicznego w łańcuchu zamkniętym są takie same jak w łańcuchu otwartym.

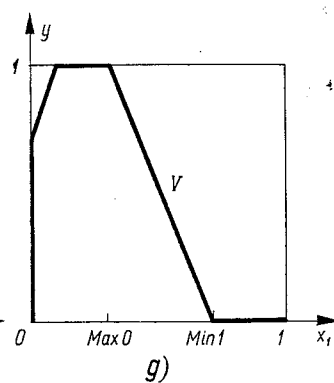
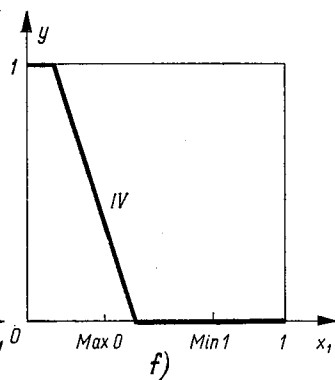
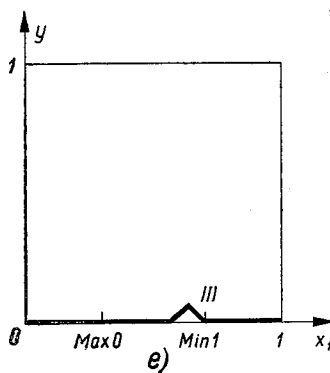
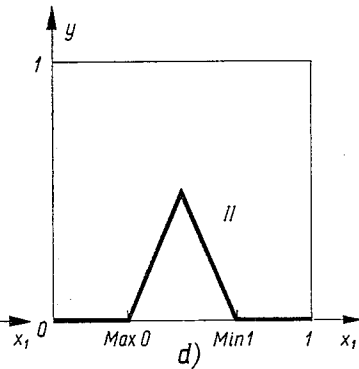
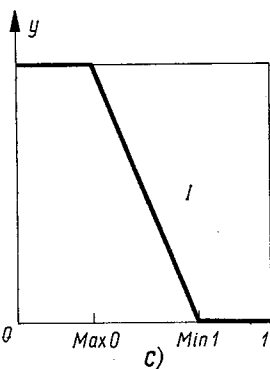
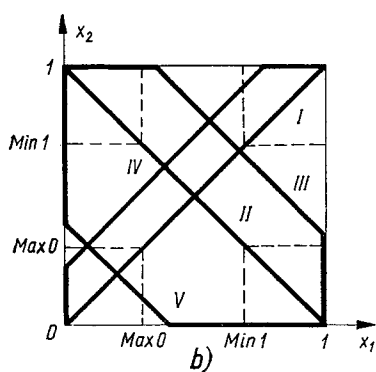
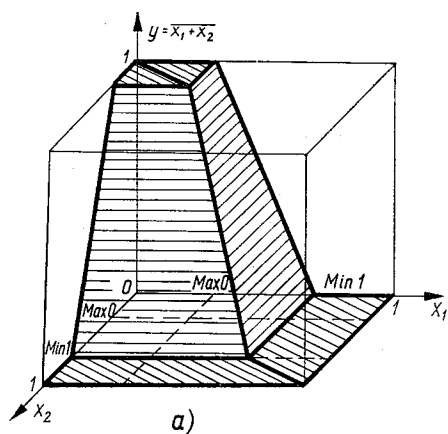
4. UKŁADY LOGICZNE DWUWEJŚCIOWE

W przypadku dwuwejściowych układów logicznych istnieje szesnaście różnych typów powierzchni charakterystycznych [1]. Na rysunkach 14a, 15a, 16a pokazane są przykładowe (idealne) powierzchnie charakterystyczne odpowiednio dla układów: negacji sumy, negacji iloczynu i różnicy symetrycznej.

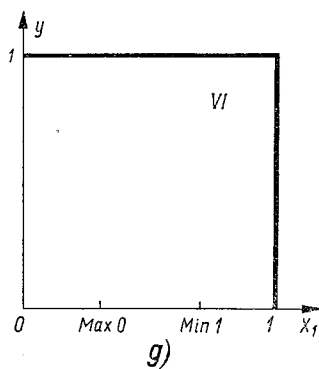
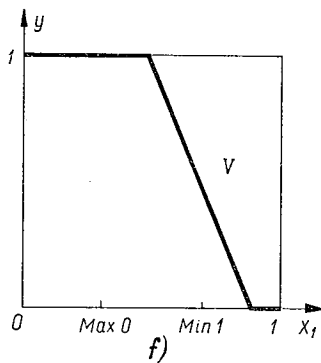
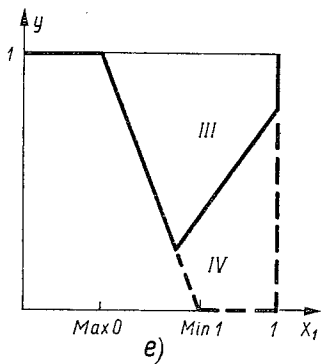
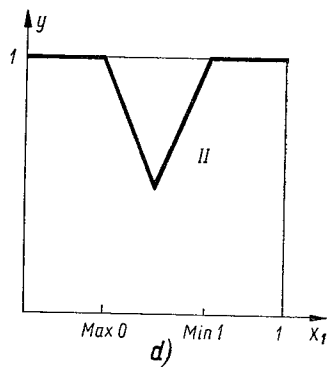
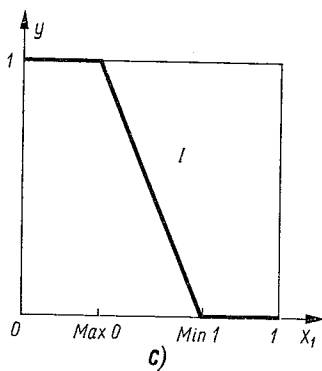
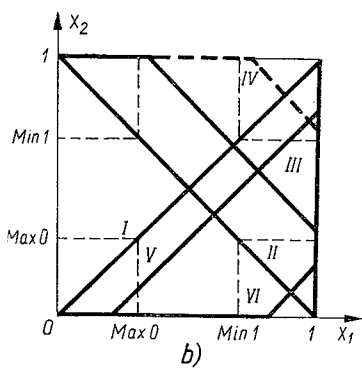
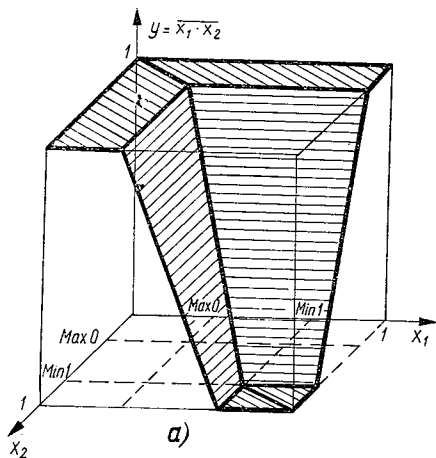
Na rysunkach 14c, d, e, f, g, 15c, d, e, f, g, 16c, d, e, f, g pokazane są charakterystyki przejściowe, względem wejścia x_1 , dla pobudzeń pokazanych na rysunkach 14b, 15b, 16b. Analizując te charakterystyki można zauważyć, że kształt charakterystyk przejściowych zależy od sposobu pobudzania układu (m.in. od synchronizmu zmian sygnałów wejściowych).

Przy nieodpowiednim, dla danego układu, synchronizmie zmian sygnałów wejściowych na wyjściu układu mogą pojawić się niepożądane zmiany potencjału wyjściowego (np. rysunki 14d, e, 15d, e, 16c, d, e), które w krańcowym wypadku mogą spowodować chwilowe pojawienie się na wyjściu układu niepożądanego sygnału logicznego (np. rysunki 14g, 15e, 16e), co może prowadzić do powstania w systemie cyfrowym efektu hazardu. Hazard ten może powstać wtedy, gdy układy logiczne sterujące dany układ logiczny mają niejednakowe czasy propagacji sygnału, bądź też różne są czasy narastania i opadania sygnałów wyjściowych z układów sterujących.

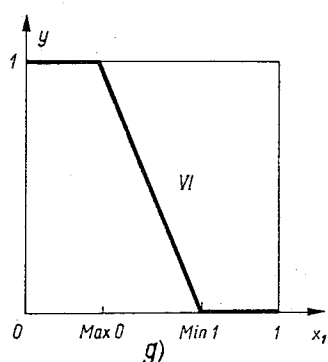
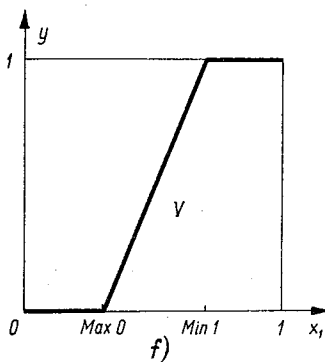
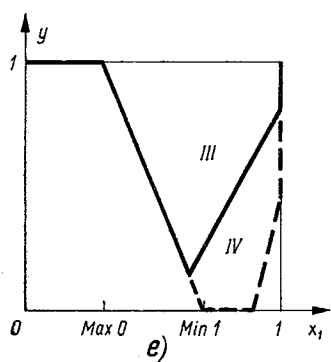
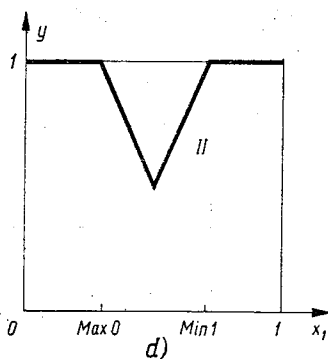
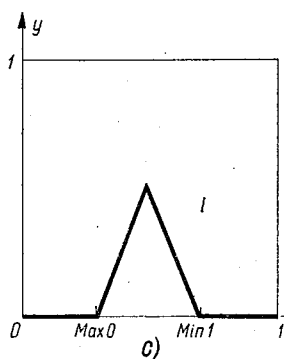
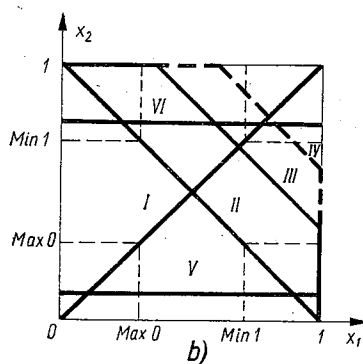
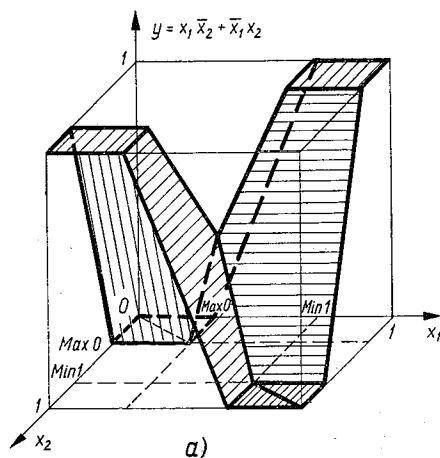
Analizując charakterystyki przejściowe pokazane na rysunkach 14, 15, 16 można zauważyć, że różne układy logiczne wymagają dla poprawnej pracy różnego rodzaju synchronizmu sygnałów wejściowych. Np. dla pobudzeń typu I (rysunki 14b, 15b, 16b) układy negacji sumy i negacji iloczynu zachowują się poprawnie (rys. 14c, 15c), podczas gdy układ różnicy symetrycznej generuje sygnały zakłócające (rys. 16c). Układ różnicy



Rys. 14. Powierzchnie charakterystyczne (a) układu negacji sumy oraz charakterystyki przejściowe (c, d, e, f, g) dla pobudzeń pokazanych na rys. b.



Rys. 15. Powierzchnie charakterystyczne (a) układu negacji iloczynu oraz charakterystyki przejściowe (c, d, e, f, g) dla pobudzeń pokazanych na rys. b.



Rys. 16. Powierzchnie charakterystyczne (a) układu różnicy symetrycznej oraz charakterystyki przejściowe (c, d, e, f, g) dla pobudzeń pokazanych na rys. b.

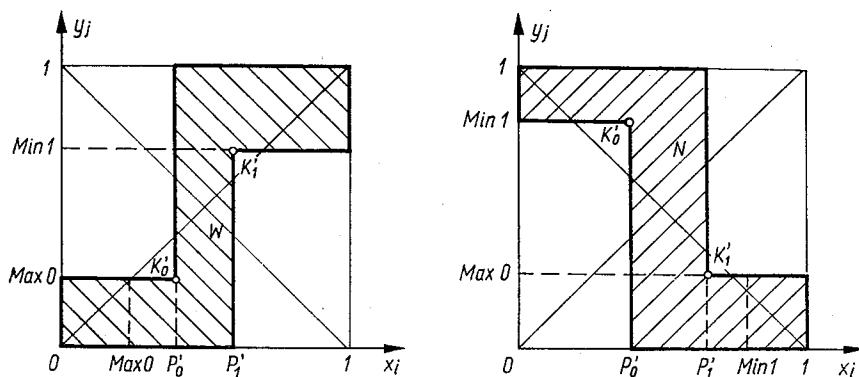
symetrycznej daje poprawny sygnał wyjściowy jedynie przy pełnym asynchronizmie sygnałów wejściowych (tzn. może zmieniać się wartość sygnału tylko na jednym wejściu, por. [1]).

Można zauważyć również, że w niektórych układach logicznych (np. NOR lub NAND) zakłócenia powstają jedynie dla jednego z poziomów logicznych (tzw. hazard w zerze lub hazard w jedynce). Są jednak układy logiczne, dla których zakłócenia mogą pojawiać się zarówno w zerze jak i w jedynce.

Omawiane zakłócenia są z reguły krótkotrwałe (w porównaniu z szybkością zmian sygnałów wejściowych), dlatego też można je traktować na równi z zakłóceniami zmiennoprądowymi (wynikającymi na przykład ze sprzężeń indukcyjnych), czyli rozpatrywać je jako jeden z rodzajów zakłóceń zmiennoprądowych. Dopuszczalny czas trwania i amplituda tych zakłóceń są więc określone dla układu logicznego przez jego odporność na zakłócenia zmiennoprądowe (patrz pkt 3.2).

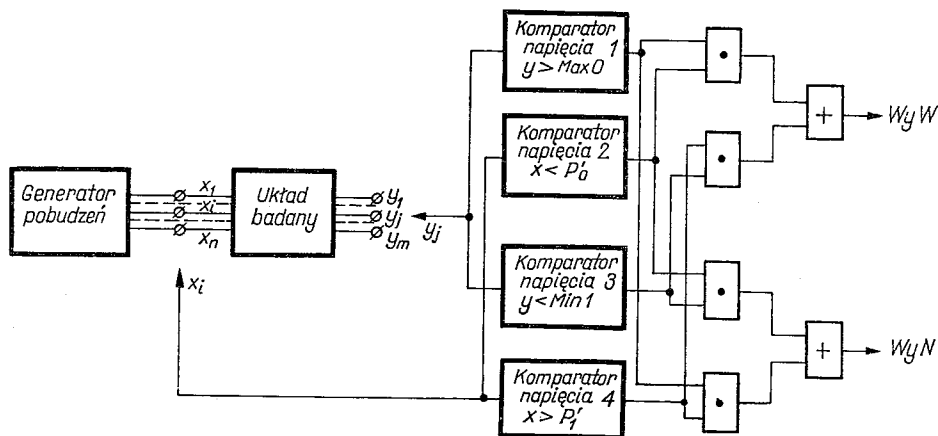
4. BADANIE CHARAKTERYSTYK PRZEJŚCIOWYCH UKŁADÓW LOGICZNYCH

W rozdz. 3 omówiony był wpływ rozrzutu charakterystyk przejściowych na pracę układu logicznego. Na to, by układ pracował poprawnie (w dopuszczalnych dla niego warunkach), jego charakterystyki przejściowe muszą zawierać się w pewnym obszarze dopuszczalnym. Do określenia tego obszaru wystarcza znajomość punktów granicznych K'_0 i K'_1 (lub wartości P'_0 i P'_1 oraz poziomów Max 0 i Min 1) [5]. Na rys. 17 pokazano przykładowe obszary poprawnej pracy (dopuszczalne) dla układów typu W i N.



Rys. 17. Obszary dopuszczalne z punktu widzenia funkcjonalnie poprawnej pracy układów typu W i N przy zadanych wielkościach Max 0, Min 1, P'_0 , P'_1 .

Z powyższego wynika praktyczna metoda kontrolowania parametrów zewnętrznych układu logicznego związanych z charakterystyką przejściową. Na rys. 18 pokazany jest schemat blokowy urządzenia pozwalającego stwierdzić, czy charakterystyka przejściowa układu logicznego znajduje się w obszarze dopuszczalnym, czy nie. Badany układ logiczny jest pobudzany przez odpowiedni generator pobudzeń. Granice obszaru dopuszczalnego dla danego układu logicznego są ustalone przez komparatory napięcia 1, 2, 3, 4 (odpowiednio Max 0, P'_0 , Min 1, P'_1) (pozostałe poziomy ograniczające obszar dopuszczalny są wyznaczone przez generator pobudzeń oraz przez sam układ badany). Na wyjściu



Rys. 18. Schemat blokowy urządzenia do sprawdzania czy charakterystyka przejściowa układu znajduje się w obszarze dopuszczalnym

$W(N)$ urządzenia pojawia się sygnał, gdy charakterystyka przejściowa układu logicznego nie leży całkowicie w obszarze dopuszczalnym, czyli w jednym z dwu wypadków: gdy $y_j > \text{Max } 0$ i $x_i < P'_0$ lub gdy $y_j < \text{Min } 1$ i $x_i > P'_1$ (dla układu typu N gdy $y_j < \text{Min } 1$ i $x_i < P'_0$ lub $y_j > \text{Max } 0$ i $x_i > P'_1$). Sprawdzenia nierówności dokonują odpowiednio komparatory napięcia 1, 2, 3, 4.

5. ZAKOŃCZENIE

Przedstawione w pracy zagadnienia związane ze znajomością powierzchni charakterystycznych i charakterystyk przejściowych uzasadniają celowość badania układów logicznych w oparciu o badanie ich charakterystyk przejściowych. Urządzenie opisane w części 4, pozwalające stwierdzić czy charakterystyka przejściowa badanego układu znajduje się w obszarze dopuszczalnym, umożliwia szybką kontrolę układu. Jeżeli charakterystyki przejściowe układu mieszczą się w obszarze dopuszczalnym, mamy gwarancję że układ badany działa poprawnie, że ma odpowiednie odporności na zakłócenia, że poziomy wyjściowe nie przekraczają dopuszczalnych wartości $\text{Max } 0$ lub $\text{Min } 1$.

Możliwość szybkiego stwierdzenia, czy układ logiczny jest sprawny ma duże znaczenie przy kontroli układów produkowanych seryjnie, przy badaniach niezawodnościowych, a także przy opracowywaniu nowych układów logicznych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. K. Bieńkowski, Miary jakości elektrycznych układów logicznych z potencjałowym kodowaniem sygnałów, Elektryka, Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej, nr 53, 1967.
2. K. Bieńkowski, J. Zabrodzki, Pobudzenia elektrycznych układów logicznych z potencjałowym kodowaniem sygnałów, Archiwum Automatyki i Telemechaniki, z. 3, 1969.
3. K. Bieńkowski, J. Zabrodzki, Urządzenie do badania charakterystyk przejściowych wielowejściowych elektrycznych układów logicznych z potencjałowym kodowaniem sygnałów (nie publikowane).

4. I. Gaszkowiec, N. Wasiliewa, Woprosy ustoicziwosti raboty zamknutykh (ili dlennykh) schem postrojennykh na niekatorykh tipach logiczeskich elementow, Awtomatika i Telemekhanika, nr 6, 1960.
5. N. Wasiliewa, W. Matorina, B. Pietruchin i inni, Oblasti wzaimoustoicziwych charakteristik logiczeskich elementow i woprosy ich projektirowania, Awtomatika i Telemekhanika, nr 6, 1965.
6. R. Damaye, Essais et mesures sur les circuits de logique industriels, Electronique Industrielle, nr 92, 93, 94, 96 i 97, 1966.
7. A. Lo, A Comprehensive View of Digital Integrated Electronic Circuits, Proc. of the IEEE, Dec., 1964.
8. G. Luecke, Noise Margins in Digital Integrated Circuits, Proc. of the IEEE, Dec., 1964.
9. W. Pierce, Predicting Signals Degeneration and Gate Compatibility in Logic Circuits, IEEE Trans. on EC, nr 3, 1963.
10. Philips Application Book, July, 1969.
11. E. Schmitt, Elektronische Schalter und Kippstufen mit Transistoren, R. Oldenburg Verlag, München, 1967.
12. M. Białko, Układy mikroelektroniczne, WKŁ, 1969.
13. D. Lynn, S. Mayer, Analysis and Design of Integrated Circuits, McGraw-Hill Book Co., NY, 1967.
14. N. Wasiliewa, Kriterii optimalnosti parametrov logiczeskich elementow iz uslowia połączenia najbolszoi ustoicziwosti, Awtomatika i Telemekhanika, nr 2, 1968.

J. ZABRODZKI

INPUT-OUTPUT CHARACTERISTICS OF LOGICAL CIRCUITS USING THE ELECTRICAL POTENTIALS FOR THE CODING OF SIGNALS

Summary

This paper deals with the conceptions of characteristic surfaces and input — output characteristics of logical circuits using electrical potentials for the coding of signals.

Properties of characteristic surfaces and the terminal parameters of logical circuits which are in relationship to input — output characteristics are discussed here.

Another conception discussed in the paper is the operation in open and closed chains of circuits.

The paper presents as well the block diagram of the device which makes it possible to check serial logical circuits easily and quickly.

J. ZABRODZKI

CARACTERISTIQUE DE TRANSFERT DES CIRCUITS LOGIQUES

Résumé

Dans l'article on décrit les notions des surfaces caractéristiques et celles des caractéristiques de transfert des circuits logiques. On discute les propriétés des surfaces caractéristiques et les liens des paramètres auxiliaires des circuits logiques avec des caractéristiques transitoires.

On décrit le fonctionnement des circuits logiques connectés en chaînes ouvertes ou fermées. On donne un schéma d'un dispositif qui, les caractéristiques de transfert étant connues, permet un contrôle facile et efficace des circuits logiques.

J. ZABRODZKI

ÜBERGANGSCHARAKTERISTIKEN LOGISCHER ANORDNUNGEN MIT SIGNALPOTENTIALKODIEREN

Zusammenfassung

In der Bearbeitung wurden die Begriffe der charakteristischen Flächen und der Übergangscharakteristiken logischer Anordnungen mit Signalpotentialkodieren erwägt, als auch die Eigenschaften der charakteristischen Flächen sowie äußerliche Parameter der im Zusammenhang mit Übergangscharakteristiken stehenden logischen Anordnungen. Es wurde weiter die Arbeit der logischen Anordnungen in offenen und Kranzketten erwägt. Auch ein Blockschema der Anlage wurde angegeben, das in Anlehnung an bekannte Übergangscharakteristiken eine leichte und schnelle Kontrolle logischer Anordnungen ermöglicht.

Я. ЗАБРОДЗКИ

ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ
С ПОТЕНЦИАЛЬНЫМ КОДОВАНИЕМ СИГНАЛОВ

Резюме

В работе рассматриваются понятия характеристических поверхностей и переходных характеристик логических схем с потенциальным кодированием сигналов. Обсуждаются свойства характеристических поверхностей и внешние параметры логических схем, связанные с передаточными характеристиками. Обсуждена работа логических схем в открытых и замкнутых цепях. Дается схемная диаграмма устройства, которое делает возможным легко и быстро проверять серийные логические системы.

Optymalizacja rozwiązań filtru elektrycznego w oparciu o teorię grafów i maszynową syntezę układów

MARIA SKOWROŃSKA (WARSZAWA)

Instytut Teleelektroniki Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 25.2.1970

Przedmiotem pracy jest opracowanie metodyki projektowania filtrów elektrycznych za pomocą maszyny cyfrowej, przy uwzględnieniu różnych warunków optymalizacyjnych. Ograniczono się do projektowania filtrów reaktancyjnych.

W pracy przeprowadzono analizę transmitancji w oparciu o algebrę liczb strukturalnych, w wyniku której określono dla dowolnego układu friltującego minimalną liczbę elementów indukcyjnych albo pojemnościowych realizujących zadaną funkcję. Uzyskano również zależności określające minimalną liczbę elementów występujących w czwórnikach reaktancyjnych realizujących transmitancję stopnia $\bar{m} + \bar{n}$. Wyniki rozumowań obejmujące układy reaktancyjne są zestawione w tablicach.

Następnie przedstawiono minimalną liczbę elementów reaktancyjnych w układach R , L , C , elementów indukcyjnych w układach R , L oraz pojemnościowych w układach R , C .

W zasadniczej części pracy, po rozpatrzeniu syntezy czwórników metodą liczb strukturalnych, podano sposób projektowania struktur charakteryzujących się minimalną liczbą elementów indukcyjnych bądź pojemnościowych przy możliwie najmniejszej liczbie elementów oraz zestawiono wyniki w tablicach. W celu otrzymania ostatecznych obliczeń projektowanych układów wykorzystano półautomatyczną maszynową technikę liczenia.

Podsumowanie wyników oraz perspektywy dalszych badań zamykają treść artykułu.

1. WPROWADZENIE

Zagadnienie projektowania filtrów elektrycznych jest niezbędną czynnością związaną z projektowaniem urządzeń teletransmisyjnych umożliwiających wielokrotne wykorzystanie dróg przesyłowych dla telekomunikacyjnych sygnałów elektrycznych. Filtry znajdują również szerokie zastosowanie poza teletransmisją, np. w urządzeniach pomiarowych, w radiotechnice i w fizyce.

Opracowanie projektu filtru elektrycznego można podzielić na cztery podstawowe etapy:

- 1) opracowanie warunków technicznych, określających zadane własności układu, wyrażone np. w postaci charakterystyk częstotliwościowych, w postaci gabarytów tych charakterystyk, częstotliwości granicznych oraz warunków optymalizacyjnych;

- 2) przeprowadzenie aproksymacji charakterystyk częstotliwościowych filtru za pomocą funkcji spełniających warunki fizycznej realizacji układu;

- 3) przeprowadzenie syntezy układu, tj. określenie struktury układu oraz wartości poszczególnych elementów układu;

4) opracowanie konstrukcyjne elementów oraz urządzenia filtrującego zgodnie z ustalonymi wymaganiami konstrukcyjnymi.

Można wyróżnić dwa odrębne podejścia stosowane przy projektowaniu filtrów elektrycznych, a mianowicie:

- 1) metodę projektowania filtrów w oparciu o parametry skuteczne (metodą syntezy),
- 2) metodę projektowania filtrów w oparciu o parametry falowe (metodą analizy).

Pierwsze podejście charakteryzuje się wieloma zaletami, gdyż np. pozwala uzyskać bardziej dokładne określenie charakterystyki tłumienności skutecznej, bardziej strome charakterystyki tłumienności w paśmie tłumieniowym oraz minimalną ilość elementów L , C .

Filtry elektryczne (bierne) z zasady realizuje się za pomocą czwórników reaktancyjnych, tzn. czwórników L , C .

Istnieje bardzo wiele metod syntezy czwórników L , C i w zasadzie każda z tych metod może być użyta w zagadnieniach projektowania filtrów elektrycznych. Najczęściej jednak stosowaną metodą jest metoda, w której korzystamy ze znanego związku Feldtkellera zachodzącego pomiędzy transmitancją skuteczną czwórnika reaktancyjnego a impedancją wejściową czwórnika. Metoda ta szczegółowo rozwinięta przez Darlingtona umożliwia sprowadzenie zagadnienia syntezy czwórnika reaktancyjnego do dużo prostszego zagadnienia, jakim jest synteza dwójnika elektrycznego [5] [8] [9] [11].

Inne metody syntezy tych czwórników polegają np. na wykorzystaniu istniejących zależności zachodzących między wielomianami charakterystycznymi $g(s)$ i $h(s)$ a immitancjami czwórnika w stanie jałowym i w stanie zwarcia [8] [11] [13], albo zależności zachodzących między elementami macierzy łańcuchowej a immitancjami pierwotnymi i wtórnymi czwórnika w stanie jałowym i w stanie zwarcia [8] [11] [20].

Sam proces realizacji układu polega na obliczeniu elementów według jednej z „receptowych” metod, dostosowanej do pewnej szczególnej struktury filtru. W przypadku, gdy metody te sprowadzają zagadnienie syntezy do syntezy dwójników, korzysta się tu np. ze znanych metod: Brunego, Badera, Darlingtona, Cauera, Mathieu. Struktury drabinkowe filtrów otrzymujemy np. przez rozwinięcie immitancji wejściowej filtru w stanie jałowym lub w stanie zwarcia metodą Badera ewentualnie metodą Brunego lub przez rozwiązanie równań Darlingtona wiążących elementy z residuami funkcji immitancji w stanie jałowym lub w stanie zwarcia.

W związku z podanymi powyżej metodami projektowania filtrów należy zwrócić uwagę na to, że stosując podane metody dostosowane do jednej szczególnej struktury eliminuje się inne równoważne układy, być może o korzystniejszych wartościach elementów. Należy również stwierdzić, że przy dotychczasowych metodach syntezy proces obliczeniowy jest bardzo skomplikowany, przy czym same obliczenia należy przeprowadzić z bardzo dużą dokładnością.

Zastosowanie maszyn liczących do projektowania filtrów elektrycznych pozwala na dostatecznie szybkie obliczenie filtrów. Przy pomocy maszyn zostały nawet opracowane pomocnicze tablice i obszerne katalogi podające w formie znormalizowanej schematy i wartości elementów filtrów o typowym przebiegu charakterystyki tłumienności skutecznej.

Jednak przy bardziej skomplikowanych filtrach (np. względna szerokość pasma rzędu 1%, 8÷10 biegunów tłumienności skutecznej, duża stromość charakterystyki częstotliwościowej, konieczność uwzględniania strat) przeprowadzenie obliczeń zarówno w procesie aproksymacji jak i w procesie syntezy z pojedynczą ośmiocyfrową dokładnością maszyny okazało się niewystarczające [13].

W związku z powyższym prowadzone są usilne prace mające na celu zmniejszenie ilości cyfr koniecznych do obliczenia. Opracowana np. przez Cz. Norka [13] metoda iloczynów pozwoliła na znaczne zmniejszenie wymaganej dokładności obliczeń i ośmiocyfrowa dokładność obliczeń przeprowadzanych według podanej metody okazała się wystarczająca.

Zagadnienia optymalizacyjne ważne ze względów ekonomicznych i wykonawczych omawiają np. H. Watanabe [20] [21], Sessa S. i Reed M. B. [18], A. Bers [7], O. Przesmycki [17], E. Kudrewicz [12]. Praca H. Watanabe jest specjalnie interesująca.

W pierwszej części tej pracy pt. „Synteza środkowoprzepustowych filtrów drabinkowych o minimalnej ilości elementów indukcyjnych lub pojemnościowych” autor omawia syntezę czwórników reaktancyjnych metodą Badera polegającą na syntezie czwórnika reaktancyjnego (stan jałowy ewentualnie stan zwarcia czwórnika o zadanej immitancji wejściowej). Sposób obliczenia elementów filtru stosowany przez autora polega na wydzieleniu z zadanej macierzy łańcuchowej czwórnika macierzy elementarnych, odpowiadających czwórnikom zwyrodniałym, zawierającym jedynie gałąź wzdłużną lub poprzeczną. Następnie autor dostosowuje podaną metodę do realizacji reaktancyjnych, pasmowych filtrów bez elementów ujemnych, jedynie z jednym idealnym transformatorem włączonym łańcuchowo w układ. Metoda ta jest szczególnie ważna, ponieważ pozwala na realizację filtrów bez cewek sprzężonych. W dalszej części pracy autor podaje sposób przeprowadzenia syntezy reaktancyjnych filtrów pasmowych nie zawierających większej ilości elementów indukcyjnych od ilości określonej następującym wzorem:

$$n_L = \frac{N+1}{2},$$

gdzie: n_L — ilość elementów indukcyjnych,

N — stopień obwodu¹⁾.

W roku 1960 zostaje opublikowana przez tego samego autora praca [21] pt. „Obwody o minimalnej ilości elementów indukcyjnych”. W pracy tej autor za pomocą środków topologicznych wyprowadza wzory określające minimalną ilość elementów indukcyjnych (albo pojemnościowych) przy parzystym i nieparzystym stopniu obwodu i formułuje warunki konieczne i wystarczające do realizacji układu o danej ilości cewek. Określona w ten sposób minimalna liczba elementów indukcyjnych w czwórniku z góry narzuca warunki dla wielomianu $f(s)$, a więc dla jednego z wielomianów charakterystycznych układu. Przy tego rodzaju podejściu autor nie otrzymuje jednak zależności określającej minimalną ilość elementów indukcyjnych przy parzystym stopniu obwodu N i parzystym wielomianie $f(s)$.

¹⁾ Stopień obwodu odpowiada najwyższej potędze równania charakterystycznego czwórnika, a tym samym najwyższej potędze wielomianu $g(s)$. Również najwyższa potęga występująca w jednej z funkcji wymiernych będących elementami macierzy łańcuchowej jest równa stopniowi obwodu.

W Polsce w 1963 r. O. Przesmycki [17] omówił metodę projektowania filtrów w oparciu o parametry falowe i w strukturach „zig — zag” Laurenta charakteryzujących się możliwie małą ilością elementów indukcyjnych.

Z kolei ostatnio E. Kudrewicz [12] sformułował warunki konieczne dla realizacji filtrów środkowoprzepustowych w układach mających przewagę elementów pojemnościowych.

Warunki te z góry narzucają wymagania co do rodzaju wielomianu charakterystycznego $f(s)$.

Ciekawym zagadnieniem z punktu widzenia teoretycznego, ważnym również ze względów ekonomicznych jest zagadnienie realizowalności czwórników przy minimalnej liczbie elementów reaktancyjnych.

S. Seshu i M. B. Reed w książce pt. „Linear Graphs and Electrical Networks” wydanej w 1961 r., opierając się o teorię grafów, określają minimalną liczbę elementów reaktancyjnych dwójnika oraz podają warunki konieczne i wystarczające dla struktur dwójnika, którego funkcja impedancji wejściowej jest stopnia $(m+n)$. Minimalna ilość elementów reaktancyjnych mianowicie wynosi:

$$\begin{aligned} n &= n_L + n_c && \text{jeśli } n > m, \\ m &= n_L + n_c && \text{jeśli } m > n, \end{aligned}$$

gdzie:

n — najwyższa potęga mianownika funkcji impedancji wejściowej

m — najwyższa potęga licznika funkcji impedancji wejściowej.

Należy stwierdzić, że powyższe zagadnienie jest rozpatrzone jedynie z punktu widzenia analizy układu, natomiast proces syntezy dwójnika przy zadanej funkcji impedancji stopnia $(n+m)$ i o minimalnej ilości elementów L, C nie został przez tych autorów omówiony.

Również A. Bers [7] podaje związek między stopniem swobody układu (stopniem równania charakterystycznego dwójnika) a ilością elementów reaktywnych L, C . Zależności te autor formułuje dla dowolnego rodzaju układów (sieci) RLC, LC, RL, RC . Z zależności tych wynikają również warunki konieczne i wystarczające dla struktur o minimalnej ilości elementów L, C .

W roku 1963 została opublikowana przez S. Bellerta [2] [3] praca pt. „Maszynowa synteza czwórników metodą liczb strukturalnych”. W pracy tej autor przedstawia w sposób ogólny metodę projektowania i obliczania elementów dowolnych struktur czwórnika R, L, C . Jak autor podaje, algebra liczb strukturalnych:

1) umożliwia zmniejszenie ilości operacji niezbędnych do rozwiązania zagadnień analizy układu w stosunku do powszechnie stosowanych metod opartych na rachunku macierzy lub teorii wyznaczników,

2) daje dużą ekonomię zapisu poszczególnych wzorów obliczeniowych,

3) nadaje się szczególnie do mechanizacji obliczeń za pomocą maszyny cyfrowej,

4) stanowi konsekwentnie pomyślany aparat matematyczny, dający szerokie podstawy do dalszego rozwoju i kryjący w sobie możliwości zastosowania poza teorią układów.

Z powyższych względów metoda liczb strukturalnych została w niniejszej pracy przyjęta jako podstawa do opracowania w sposób szczegółowy maszynowej syntezy filtrów z uwzględnieniem warunków optymalizacyjnych. Otrzymane wyniki upoważniają do twier-

zenia, że zaproponowana przez S. Bellerta metoda może być stosowana do projektowania filtrów reaktancyjnych, a w dalszej perspektywie również filtrów reaktancyjnych z uwzględnieniem stratności elementów.

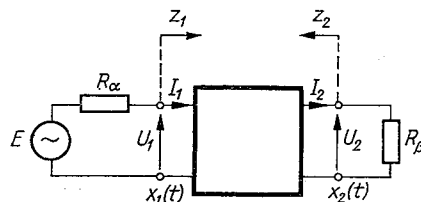
W pracy niniejszej ograniczono się do syntezy filtrów reaktancyjnych przy założeniu, że w syntezowanych układach nie występują indukcyjności ujemne względnie równoważne im indukcyjności sprzężone, z wyjątkiem ewentualnie idealnych transformatorów załączonych na wejściu i wyjściu projektowanego filtru i spełniających rolę dopasowników opornościowych. W obliczeniach przeprowadzonych za pomocą maszyny wyeliminowano też ujemne elementy R , C , które mogą być otrzymane w wyniku przeprowadzanej syntezy.

Jako główne zagadnienie optymalizacyjne przyjęto projektowanie układów o minimalnej liczbie elementów indukcyjnych. Poza tym określono układy dualne o możliwie najmniejszej liczbie elementów pojemnościowych oraz minimalnej liczbie elementów indukcyjnych albo pojemnościowych dla dowolnych układów R , L , C realizujących funkcję transmitancji danego stopnia. Uzyskano również zależności i podano możliwości rozwiązań układów reaktancyjnych o możliwie najmniejszej liczbie elementów występujących w czwórnikach realizujących funkcję transmitancji danego stopnia. Zagadnieniom tym poświęcone są rozdziały 2, 3, 4. Podrozdział 4.5 zawiera również przykładowe obliczenia filtrów za pomocą opracowanej metody. W rozdziale 5 podano podsumowanie uzyskanych wyników w pracy, wnioski i dalsze perspektywy badań.

2. FUNKCJA PRZENOSZENIA

2.1 Ogólna charakterystyka funkcji przenoszenia

Zdolność liniowego układu dynamicznego do przekazywania sygnału można scharakteryzować pewną funkcją częstotliwości zespolonej, którą nazywamy funkcją przenoszenia lub transmitancją. Rozróżniamy m.in. transmitancję operatorową i transmitancję widmową.



Rys. 1. Czwórnik między źródłem a odbiornikiem

Transmitancją operatorową układu dynamicznego (np. czwórnika) (rys. 1) nazywamy następującą funkcję zmiennej zespolonej s :

$$K(s) = \frac{\mathcal{L}\{x_2(t)\}}{\mathcal{L}\{x_1(t)\}} = \frac{x_2(s)}{x_1(s)}, \quad (2.1-1)$$

gdzie:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \text{ (przekształcenie Laplace'a),}$$

$x_2(t)$ — sygnał wyjściowy układu,

$x_1(t)$ — sygnał wejściowy układu.

Transmitancją widmową układu nazywamy następującą funkcję zmiennej urojonej $j\omega$:

$$K(j\omega) = \frac{\mathcal{F}\{x_2(t)\}}{\mathcal{F}\{x_1(t)\}}, \quad (2.1-2)$$

gdzie:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \text{ (przekształcenie Fouriera),}^{2)}$$

Własności transmisyjne czwórników określa się również za pomocą tamowności skutecznej, która spełnia następującą zależność:

$$\Gamma_s(s) = \ln \frac{E(s)}{2U_2(s)} \sqrt{\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}}, \quad (2.1-3)$$

gdzie:

E — SEM na wejściu czwórnika,

U_2 — napięcie na odbiorniku,

Z_1 — impedancja źródła,

Z_2 — impedancja odbiornika.

Odwrotność wielkości logarytmowanej we wzorze (2.1-3) nazywamy transmitancją skuteczną czwórnika. Dla przypadku rzeczywistych impedancji Z_1 i Z_2 transmitancja skuteczna wyraża się wzorem:

$$K_s(s) = \frac{2U_2(s)}{E(s)} \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\beta}}, \quad (2.1-4)$$

gdzie:

R_α — oporność źródła,

R_β — oporność odbiornika.

Zgodnie z powyższym, związek między tamownością skuteczną rozważanego czwórnika a jego transmitancją skuteczną ma postać następującą:

$$\Gamma_s(s) = \ln \frac{1}{K_s(s)} = -\ln K_s(s).$$

Natomiast związek zachodzący między transmitancją skuteczną a tłumiennością skuteczną czwórnika można określić następująco:

$$A_s(\omega) = -\ln |K_s(s)|_{s=j\omega}. \quad (2.1-5)$$

Wprowadzając oznaczenie $K(j\omega) = K_0(\omega)$ otrzymuje się:

$$A(\omega) = -\ln K_0(\omega), \quad (2.1-6)$$

²⁾ $\mathcal{L}\{x|t|\}$, $[\mathcal{F}\{x|t|\}]$ określa transformatę danej funkcji $x|t|$ tylko wtedy, gdy istnieją takie wartości $S_1(j\omega)$, dla których całka Laplace'a (Fouriera) funkcji $x(t)$ istnieje, czyli gdy istnieje taki niepusty zbiór wartości $S_1(j\omega)$, w którym całka Laplace'a (Fouriera) jest zbieżna.

Z definicji transmitancji skutecznej określonej wzorem (2.1-4) wynika, że jest ona równa iloczynowi transmitancji napięciowej $K_s = \frac{U_2(s)}{E(s)}$, pomnożonej przez stały czynnik $2\sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\beta}}$.

Własności transmitancji skutecznej czwórnika pracującego między opornościami rzeczywistymi są więc analogiczne do własności transmitancji operatorowej. Z drugiej strony wiemy, że transmitancja operatorowa liniowego układu o elementach skupionych jest wymierną funkcją zmiennej zespolonej o postaci:

$$K(s) = \frac{b_{\bar{m}}s^{\bar{m}} + b_{\bar{m}-1}s^{\bar{m}-1} + b_{\bar{m}-2}s^{\bar{m}-2} + \dots + b_0}{a_{\bar{n}}s^{\bar{n}} + a_{\bar{n}-1}s^{\bar{n}-1} + a_{\bar{n}-2}s^{\bar{n}-2} + \dots + a_0}, \quad (2.1-7)$$

gdzie:

$$\bar{n} = 1, 2, 3, \dots$$

$$\bar{m} = 0, 1, 2, \dots$$

$$\bar{m} \leq \bar{n}.$$

Dla układu stabilnego $K(s)$ jest funkcją analityczną w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s , to znaczy dla $R_e(s) > 0$. Wobec tego wszystkie jej bieguny leżą w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s .

Z kolei dla czwórników reaktancyjnych (czyli dla czwórników bezstratnych o rzeczywistych opornościach obciążenia) transmitancję operatorową i skuteczną można zapisać jako jedną z dwóch następujących funkcji wymiernych:

$$K(s) = \frac{b_{\bar{m}}s^{\bar{m}} + b_{\bar{m}-2}s^{\bar{m}-2} + \dots + b_0}{a_{\bar{n}}s^{\bar{n}} + a_{\bar{n}-1}s^{\bar{n}-1} + a_{\bar{n}-2}s^{\bar{n}-2} + \dots + a_0} = \frac{f(s)}{g(s)}, \quad (2.1-8)$$

gdzie:

$$\bar{m} = 0, 2, 4, 6 \dots; \quad \bar{m} \leq \bar{n},$$

lub

$$K(s) = \frac{b_{\bar{m}-1}s^{\bar{m}-1} + b_{\bar{m}-3}s^{\bar{m}-3} + \dots + b_1s}{a_{\bar{n}}s^{\bar{n}} + a_{\bar{n}-1}s^{\bar{n}-1} + a_{\bar{n}-2}s^{\bar{n}-2} + \dots + a_0} = \frac{f(s)}{g(s)}, \quad (2.1-9)$$

gdzie:

$$\bar{m} = 2, 4, 6 \dots; \quad \bar{m} \leq \bar{n}.$$

Z warunków fizycznej realizacji czwórnika wynika, że mianowniki obu funkcji są wielomianami Hurwitza o współczynnikach rzeczywistych. Jak wiadomo zera wielomianu Hurwitza leżą w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s . Wielomian licznika funkcji (2.1-8) jest parzystym wielomianem o współczynnikach rzeczywistych, a wielomian licznika funkcji (2.1-9) jest wielomianem nieparzystym o współczynnikach rzeczywistych. W obu tych funkcjach stopień wielomianu licznika nie może przewyższać stopnia wielomianu mianownika.

Biorąc pod uwagę, że współczynniki przy najniższych potęgach funkcji (2.1-8) i (2.1-9) mogą przyjmować wartości zerowe, transmitancję dla czwórników reaktancyjnych można napisać w następującej postaci ogólnej:

$$K(s) = \frac{b_{\bar{m}}s^{\bar{m}} + b_{\bar{m}-2}s^{\bar{m}-2} + \dots + b_{\bar{p}}s^{\bar{p}}}{a_{\bar{n}}s^{\bar{n}} + a_{\bar{n}-1}s^{\bar{n}-1} + a_{\bar{n}-2}s^{\bar{n}-2} + \dots + a_0} = \frac{f(s)}{g(s)}, \quad (2.1-10)$$

gdzie:

$$\bar{m} = 0, 1, 2, 3, 4 \dots,$$

$$\bar{n} = 1, 2, 3, 4 \dots,$$

$$\bar{m} \leq \bar{n},$$

$$\bar{p} = \begin{cases} 0, 2, 4, 6 \dots & \text{— w przypadku potęgi } \bar{m} \text{ — parzystej,} \\ 1, 3, 5, 7 \dots & \text{— w przypadku potęgi } \bar{m} \text{ — nieparzystej.} \end{cases}$$

2.2. Rodzaje transmitancji dla reaktancyjnych układów filtrujących

Przy założeniu, że w syntetyzowanych układach nie występują indukcyjności sprzężone względnie równoważne im układy z elementami ujemnymi, można określić następujące postacie transmitancji operatorowej albo skutecznej, z których otrzymujemy odpowiednie charakterystyki filtrujące.

1) *Transmitancje, z których otrzymujemy charakterystyki tłumienności filtrów dolnoprzepustowych* mają postać:

$$K(s) = \frac{b_{\bar{m}}s^{\bar{m}} + b_{\bar{m}-2}s^{\bar{m}-2} + \dots + b_0}{a_{\bar{n}}s^{\bar{n}} + a_{\bar{n}-1}s^{\bar{n}-1} + a_{\bar{n}-2}s^{\bar{n}-2} + \dots + a_0}, \quad (2.2-1)$$

gdzie:

$$\bar{m} = 0, 2, 4 \dots$$

$$\bar{n} = 1, 2, 3 \dots$$

oraz $\bar{m} < \bar{n}$.

Wielomian licznika jest więc wielomianem parzystym a stopień licznika jest niższy od stopnia mianownika. Wielomian mianownika jest wielomianem Hurwitza o współczynnikach rzeczywistych.

2) *Transmitancje, z których otrzymujemy charakterystyki filtrów środkowoprzepustowych* mają postać:

$$K(s) = \frac{s^{\bar{p}}(b_{\bar{m}}s^{\bar{m}-\bar{p}} + b_{\bar{m}-2}s^{\bar{m}-\bar{p}-2} + \dots + b_{\bar{p}})}{a_{\bar{n}}s^{\bar{n}} + a_{\bar{n}-1}s^{\bar{n}-1} + a_{\bar{n}-2}s^{\bar{n}-2} + \dots + a_0}, \quad (2.2-2)$$

gdzie:

$$\bar{m} = 1, 2, 3, 4 \dots,$$

$$\bar{n} = 1, 2, 3, 4 \dots,$$

$$\bar{p} = 1, 2, 3, 4 \dots,$$

oraz $\bar{m} < \bar{n}$.

Wielomian licznika jest więc wielomianem nieparzystym albo parzystym, przy czym dla wielomianu parzystego zawsze $b_0 = 0$. Stopień licznika jest niższy od stopnia mianownika. Wielomian mianownika jest wielomianem Hurwitza o współczynnikach rzeczywistych.

3) *Transmitancje, z których otrzymujemy charakterystyki tłumienności filtrów środkowozaporowych* mają postać:

$$K(s) = \frac{b_{\bar{m}}s^{\bar{m}} + b_{\bar{m}-2}s^{\bar{m}-2} + \dots + b_0}{a_{\bar{n}}s^{\bar{n}} + a_{\bar{n}-1}s^{\bar{n}-1} + a_{\bar{n}-2}s^{\bar{n}-2} + \dots + a_0}, \quad (2.2-3)$$

gdzie:

$$\bar{m} = 2, 4, 6 \dots,$$

$$\bar{n} = 1, 2, 3, 4 \dots,$$

$$\bar{p} = 0$$

oraz $\bar{m} = \bar{n}$.

Wielomian licznika powyższej funkcji jest wielomianem parzystym. Stopień licznika tej funkcji jest równy stopniowi mianownika. Wielomian mianownika jest wielomianem Hurwitza o współczynnikach rzeczywistych.

4) *Transmitancje, z których otrzymujemy charakterystykę tłumienności filtrów górno-przepustowych mają postać:*

$$K(s) = \frac{s^{\bar{p}}(b_{\bar{m}}s^{\bar{m}-\bar{p}} + b_{\bar{m}-2}s^{\bar{m}-\bar{p}-2} + \dots + b_{\bar{p}})}{a_{\bar{n}}s^{\bar{n}} + a_{\bar{n}-1}s^{\bar{n}-1} + a_{\bar{n}-2}s^{\bar{n}-2} + \dots + a_0}, \quad (2.2-4)$$

gdzie:

$$\bar{m} = 1, 2, 3, 4 \dots,$$

$$\bar{p} = 1, 2, 3, 4 \dots,$$

$$\bar{n} = 1, 2, 3, 4 \dots,$$

oraz $\bar{m} = \bar{n}$.

Wielomian licznika jest więc wielomianem nieparzystym albo parzystym, przy czym dla wielomianu parzystego zawsze $b_0 = 0$. Stopień licznika jest równy stopniowi mianownika. Wielomian mianownika jest wielomianem Hurwitza o współczynnikach rzeczywistych.

2.3. Funkcja przenoszenia w zastosowaniu do syntezy czwórników reaktancyjnych opartej o teorię liczb strukturalnych

W teletransmisji zagadnienie syntezy i analizy zazwyczaj przeprowadza się w oparciu o transmitancję skuteczną, ponieważ jest ona bezpośrednio związana z tłumiennością skuteczną badanego czwórnika. W związku z powyższym w dalszej części pracy za podstawę rozważań weźmiemy transmitancję skuteczną układu.

Zagadnienie syntezy czwórnika w oparciu o teorię liczb strukturalnych [2] [3] [4] [6] rozwiązuje się przekształcając transmitancję o postaci funkcji wymiernej określonej wzorem (2.1-10) do postaci standartowej. Można tego dokonać przez pomnożenie wielomianu licznika i mianownika funkcji (2.1-10) przy założeniu, że oba wielomiany są niepodzielne (tzn. względnie pierwsze) przez czynnik s^{-l} , gdzie l jest liczbą całkowitą. Otrzymujemy wówczas następującą funkcję:

$$K_s(s) = \frac{b_{\bar{m}}s^{\bar{m}-l} + b_{\bar{m}-2}s^{\bar{m}-2-l} + \dots + b_{\bar{p}}s^{\bar{p}-l}}{a_{\bar{n}}s^{\bar{n}-l} + a_{\bar{n}-1}s^{\bar{n}-1-l} + a_{\bar{n}-2}s^{\bar{n}-2-l} + \dots + a_0s^{-l}}, \quad (2.3-1)$$

gdzie:

$$\bar{m} = 0, 1, 2, 3, 4 \dots,$$

$$\bar{n} = 1, 2, 3, 4, 5 \dots,$$

$$\bar{p} = \begin{cases} 0, 2, 4, 6 \dots & \text{w przypadku potęgi } \bar{m} \text{ — parzystej,} \\ 1, 3, 5, 7 \dots & \text{w przypadku potęgi } \bar{m} \text{ — nieparzystej.} \end{cases}$$

Oznaczając przez ν najwyższą potęgę licznika, a przez μ najwyższą potęgę mianownika funkcji (2.3-1) otrzymamy następującą zależność:

$$K_s(s) = \frac{b_\nu s^\nu + b_{\nu-2} s^{\nu-2} + \dots + b_{\nu-\bar{m}+\bar{p}} s^{\nu-\bar{m}+\bar{p}}}{a_\mu s^\mu + a_{\mu-1} s^{\mu-1} + a_{\mu-2} s^{\mu-2} + \dots + a_{\mu-\bar{n}} s^{\mu-\bar{n}}} \quad (2.3-2)$$

gdzie:

$$\mu = \bar{n} - l, \quad (2.3-3)$$

$$\nu = \bar{m} - l. \quad (2.3-4)$$

Nietrudno zauważyć, że wartość powyższej funkcji nie zmieni się, jeżeli zarówno w liczniku jak i w mianowniku zostanie dopisana dowolna ilość wyrazów o kolejnych dodatnich albo ujemnych potęgach zmiennej s w taki sposób, aby funkcję (2.3-2) przekształcić do postaci symetrycznej:

$$K_s(s) = \frac{b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-3} s^{n-3} + \dots + b_i s^i + \dots + b_{-i} s^{-i} + \dots + b_{-(n-1)} s^{-(n-1)}}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 + \dots + a_{-(n-1)} s^{-(n-1)} + a_{-n} s^{-n}} \quad (2.3-5)$$

gdzie: n — najwyższa potęga danej funkcji.

Niektóre współczynniki funkcji (2.3-5) mogą oczywiście przyjmować wartości zerowe. Po wydzieleniu we wzorze (2.3-5) współczynników zerowych i niezerowych transmitancja wyrazi się następującą zależnością:

$$K_s(s) = \frac{os^{n-1} + os^{n-3} + \dots + b_\nu s + \dots + b_{\nu-\bar{m}+\bar{p}} s^{\nu-\bar{m}+\bar{p}} + \dots + os^{-(n-1)}}{os^n + os^{n-1} + \dots + a_\mu s^\mu + a_{\mu-1} s^{\mu-1} + \dots + a_{\mu-\bar{n}} s^{\mu-\bar{n}} + \dots + os^{-n}} \quad (2.3-6)$$

gdzie:

n — najwyższa potęga danej funkcji dodatnia i całkowita,

μ — najwyższa potęga mianownika o współczynniku niezerowym,

ν — najwyższa potęga licznika o współczynniku niezerowym,

przy czym dla dowolnej wartości l zachodzi związek:

$$n \geq |\mu|. \quad (2.3-7)$$

Dla postaci funkcji określonej wzorem (2.3-4) stopień licznika jest o jedność niższy od stopnia mianownika.

Z postaci transmitancji nietrudno wnioskować, że słuszna jest następująca zależność:

$$n \geq |l|,$$

gdzie jak wiadomo:

n — jest liczbą naturalną,

l — jest liczbą całkowitą,

przy czym:

$$1) \ n \geq \bar{n} - l$$

$$\text{dla } -\infty \leq l \leq E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right), \quad (2.3-8)$$

$$2) \ n \geq l$$

$$\text{dla } E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right) < l \leq +\infty,$$

gdzie $E(x)$ oznacza „całość z x ”.

Na podstawie powyższych zależności można sformułować następującą własność:

Własność 2.3-1. Dla symetrycznej postaci transmitancji suma wielkości n i l jest całkowita i co najmniej równa najwyższej potędze $\bar{n}$ wielomianu mianownika zadanej transmitancji. Różnica n i l jest całkowita i co najmniej równa zero.

Dowód

Wychodząc z zależności (2.3-8) możemy napisać:

$$n+l \geq \bar{n} \quad \text{oraz} \quad n-l \geq \bar{n}-2l;$$

ponieważ:

$$l \leq E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right),$$

więc:

$$n-l \geq E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right) \geq 0.$$

Z kolei z zależności (2.3-9) możemy napisać:

$$n-l \geq 0 \quad \text{oraz} \quad n+l \geq 2l;$$

ponieważ:

$$l \geq E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right) + 1 > E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right),$$

więc:

$$n+l \geq n+1.$$

Stąd $(n+l)$ i $(n-l)$ są liczbami całkowitymi, dodatnimi i mogą przyjmować wartości następujące:

$$n+l \geq \bar{n}+i, \quad (2.3-10)$$

gdzie $i = 0, 1, 2, 3,$

$$n-l \geq i \quad (2.3-11)$$

gdzie $i = 0, 1, 2, 3.$

W ten sposób uzasadniliśmy słuszność własności 2.3-1. Dla sumy i różnicy wielkości n i l można sformułować jeszcze własność następującą:

Własność 2.3-2.

Jeżeli licznik transmitancji (wielomian $f(s)$) jest wielomianem parzystym ($\bar{m}$ — parzyste), to suma $n+l$ i różnica $n-l$ wielkości n i l dotyczących transmitancji o postaci symetrycznej jest nieparzystą. Jeżeli licznik transmitancji jest wielomianem nieparzystym, to powyższa suma wielkości n i l jest parzystą.

Dowód

Najwyższą potęgę wyrazu niezerowego w liczniku funkcji (2.3-6) można zapisać w postaci wzoru:

$$v = (n-1)-2i; \quad i = 0, 1, \dots, (n-1). \quad (2.3-12)$$

Potęga ν spełnia również następującą zależność:

$$\nu = \bar{m} - l.$$

Podstawiając tę zależność do wzoru (2.3-12) otrzymujemy następujący związek:

$$\bar{m} = (n+l) - 2i - 1 = (n-l) + 2(l-i) - 1, \quad (2.3-13)$$

z którego wynika słuszność własności 2.3-2.

Z drugiej strony korzystając z teorii liczb strukturalnych [1] [2] [3] [4] [6], można transmitancję skuteczną dowolnego czwórnika biernego określić następującą zależnością:

$$K_z(s) = \frac{2 \operatorname{sim}_z \left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha}; \frac{\partial A^d}{\partial \beta} \right) \sqrt{z_\alpha z_\beta}}{\det_z A^d}, \quad (2.3-14)$$

gdzie dla czwórników reaktancyjnych $z_\alpha = R_\alpha$ i $z_\beta = R_\beta$.

Zgodnie z powyższym wzorem mianownik transmitancji jest funkcją wyznacznikową liczby strukturalnej A_d , której graf jest przeciwobrazem badanego czwórnika i którą określamy następująco:

$$\det_{z_{\alpha_{kl}} z_{\alpha_{kl}}^z} A^d = \det \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1x} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2x} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mx} \end{bmatrix} = \sum_{l=1}^{\lambda} \prod_{k=1}^m z_{\alpha_{kl}}. \quad (2.3-15)$$

Podstawiając na impedancje $z_{\alpha_{kl}}$ odpowiednie funkcje zależne od wartości elementów reaktancyjnych i rezystancyjnych nietrudno zauważyć, że funkcja (2.3-15) może zawierać zarówno dodatnie jak i ujemne potęgi zmiennej s , przy czym najwyższa i najniższa potęga zmiennej s może być co najwyżej równa m (np. jeżeli w każdym niezależnym obwodzie grafu znajduje się gałąź zawierająca element indukcyjny i gałąź zawierająca element pojemnościowy). Natomiast licznik tej funkcji jest funkcją jednoczesności określoną symbolem:

$$\operatorname{sim}_z \left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha}; \frac{\partial A^d}{\partial \beta} \right)$$

i pomnożoną przez czynnik $2\sqrt{z_\alpha z_\beta}$, a dla układów reaktancyjnych przez stały czynnik $2\sqrt{z_\alpha z_\beta}$.

Nietrudno zauważyć, że dla każdego układu biernego można przeprowadzić porównanie zadanej transmitancji przekształconej do postaci standartowej, symetrycznej określonej wzorem (2.3-6) z transmitancją obliczoną dla zaprojektowanego układu według zależności (2.3-14). Jak już było poprzednio zaznaczone wielomiany licznika i mianownika przekształconej funkcji muszą być niepodzielne (tzn. względnie pierwsze)³⁾. Jeżeli ponadto założymy, że ilość wierszy liczby strukturalnej dopełniającej, czyli liczba niezależnych ob-

³⁾ Wszędzie dalej przy porównywaniu ze sobą wymienionych dwóch funkcji wymiennych zakłada się milcząco, że wielomiany licznika i mianownika każdej z nich nie mają wspólnych dzielników.

wodów, równa się stopniowi transmitancji o postaci symetrycznej, co wyrazi się równaniem:

$$m = M = n, \quad (2.3-16)$$

to poszczególne współczynniki przy potęgach zmiennej s mianownika transmitancji dowolnego układu R, L, C można przedstawić w następującej postaci:

1) dla $n \geq j \geq 0$

$$a_j = \sum_{l=1}^{\lambda'} \prod_{k=0}^j L_{\mu_{kl}} \prod_{k=0}^{\tau} L_{\nu_{kl}} C_{\nu_{kl}}^{-1} \prod_{k=0}^{p_j} R_{kl}; \quad (2.3-17)$$

2) dla $0 \geq j \geq -n$

$$a_j = \sum_{l=1}^{\lambda'} \prod_{k=0}^{|j|} C_{\mu_{kl}}^{-1} \prod_{k=0}^{\tau} L_{\nu_{kl}} C_{\nu_{kl}}^{-1} \prod_{k=0}^{p_j} R_{kl}, \quad (2.3-18)$$

gdzie:

n — najwyższa potęga funkcji (2.3-5),

j — kolejna potęga wielomianu mianownika funkcji (2.3-14),

τ — ilość par elementów indukcyjnych i pojemnościowych,

p_j — ilość elementów rezystancyjnych w danym iloczynie,

λ — ilość iloczynów wyznacznika (2.3-15) o tej samej potędze j .

Można zauważyć, że dla wszystkich iloczynów będących składnikami sum określających współczynniki a_j według wzorów (2.3-17) i (2.3-18), a więc dla wszystkich iloczynów funkcji wyznacznikowej, zachodzi związek:

$$n = |j| + 2\tau + p_j, \quad (2.3-19)$$

przy czym wielkość τ jest wielkością całkowitą, dodatnią i może przyjmować następujące wartości:

$$0 \leq \tau \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Należy zaznaczyć, że wzory (2.3-17) oraz (2.3-18) są słuszne zarówno dla układów R, L, C , jak i dla układów reaktancyjnych, przy czym wielkość p_j dla układów reaktancyjnych może przyjmować jedną z trzech wartości:

$$p_j = 0; 1; 2.$$

Rozpatrzmy obecnie postać współczynników licznika funkcji transmitancji określonej równaniem (2.3-14). Dla układów reaktancyjnych impedancje wchodzące w skład funkcji jednoczesności są reaktancyjne, a więc poszczególne wyrazy licznika można przedstawić w następującej postaci:

1) dla $n-1 \geq i \geq 0$

$$b_i = 2 \sqrt{R_\alpha R_\beta} \sum_{l=1}^{\lambda''} \prod_{k=0}^i L_{\mu_{kl}} \prod_{k=0}^t L_{\nu_{kl}} C_{\nu_{kl}}^{-1}; \quad (2.3-20)$$

2) dla $0 \geq i \geq -(n-1)$

$$b_i = 2 \sqrt{R_\alpha R_\beta} \sum_{l=1}^{\lambda''} \prod_{k=0}^{|i|} C_{\mu_{kl}}^{-1} \prod_{k=0}^t L_{\nu_{kl}} C_{\nu_{kl}}^{-1}, \quad (2.3-21)$$

gdzie:

i — kolejna potęga wielomianu licznika funkcji (2.3-14),

t — liczba par elementów indukcyjnych i pojemnościowych,

λ'' — liczba iloczynów funkcji jednoczesności o tej samej potędze i .

Dla wszystkich iloczynów będących składnikami sum określających współczynniki b_i według wzorów (2.3-20) i (2.3-21), a więc dla wszystkich iloczynów funkcji jednoczesności zachodzi związek:

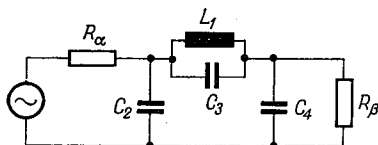
$$n = |i| + 2t + 1. \quad (2.3-22)$$

Aby sprawdzić poprawność powyższych wzorów oraz zapoznać się ze sposobem obliczeń metodą liczb strukturalnych, zanalizujemy niżej podany czwórnik reaktancyjny.

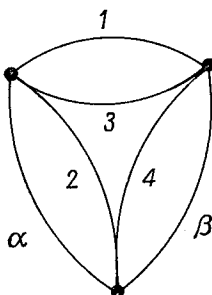
Przykład 2.3-1.

Dany jest czwórnik reaktancyjny, dla którego należy znaleźć transmitancję skuteczną.

Założmy, że schemat analizowanego czwornika wraz ze źródłem i obciążeniem można przedstawić według rysunku 2.



Rys. 2. Schemat czwornika między źródłem a odbiornikiem



Rys. 3. Graf czwornika

Graf tego czwornika jest wskazany na rysunku 3.

Dla powyższego grafu liczba strukturalna dopełniająca będzie miała postać:

$$A^d = [\alpha 2] [13] [234] [4\beta].$$

Zgodnie z definicją iloczynu liczb strukturalnych, w wyniku przeprowadzonego mnożenia otrzymujemy następującą liczbę strukturalną:

$$A^d = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 2 & 2 & 4 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & \beta & 4 & \beta & \beta & 4 & \beta & \beta & 4 & \beta & \beta & \beta \end{vmatrix}.$$

Wyznacznik wyżej podanej liczby strukturalnej dopełniającej jest następujący:

$$\det A^d = z_\alpha z_1 z_2 z_3 + z_\alpha z_1 z_2 z_\beta + z_\alpha z_1 z_3 z_4 + z_\alpha z_1 z_3 z_\beta + z_\alpha z_1 z_4 z_\beta + z_3 z_2 z_4 + \\ + z_\alpha z_3 z_2 z_\beta + z_\alpha z_3 z_4 z_\beta + z_2 z_1 z_3 z_4 + z_2 z_1 z_3 z_\beta + z_2 z_1 z_4 z_\beta + z_2 z_3 z_4 z_\beta.$$

Zgodnie z definicją funkcji jednoczesności otrzymamy:

$$\text{sim} \left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha}; \frac{\partial A^d}{\partial \beta} \right) = z_1 z_2 z_4 + z_3 z_2 z_4.$$

Impedancje poszczególnych gałęzi rozważanego czwórnika przyjmują wartości

$$z_\alpha = R_\alpha; \quad z_\beta = R_\beta; \quad z_1 = s l_1; \quad z_2 = s^{-1} C_2^{-1}; \\ z_3 = s^{-1} C_3^{-1}; \quad z_4 = s^{-1} C_4^{-1}.$$

Transmitancja skuteczna czwórnika biernego w symbolice algebry liczb strukturalnych jest określona wzorem (2.3-14). Podstawiając do tego wzoru obliczone funkcje oraz wartości impedancji poszczególnych gałęzi czwórnika, otrzymujemy:

$$K_s(s) = \frac{b_2 s^{-1} + b_0 s^{-3}}{a_3 s^0 + a_2 s^{-1} + a_1 s^{-2} + a_0 s^{-3}}.$$

Doprowadzając powyższą funkcję do postaci symetrycznej otrzymamy:

$$K_s(s) = \frac{os^3 + os + b_2 s^{-1} + b_0 s^{-3}}{os^4 + os^3 + os^2 + os^1 + a_3 s^0 + a_2 s^{-1} + a_1 s^{-2} + a_0 s^{-3} + os^{-4}},$$

gdzie:

$$b_2 = L_1 C_2^{-1} C_4^{-1} \sqrt{R_\alpha R_\beta}, \\ b_0 = C_2^{-1} C_3^{-1} C_4^{-1} \sqrt{R_\alpha R_\beta}, \\ a_3 = L_1 C_2^{-1} R_\alpha R_\beta + L_1 C_3^{-1} R_\alpha R_\beta + L_1 C_4^{-1} R_\alpha R_\beta, \\ a_2 = L_1 C_2^{-1} C_3^{-1} R_\alpha + L_1 C_3^{-1} C_4^{-1} R_\alpha + L_1 C_2^{-1} C_3^{-1} R_\beta + L_1 C_3^{-1} C_4^{-1} R_\beta, \\ a_1 = C_3^{-1} C_4^{-1} R_\alpha R_\beta + L_1 C_2^{-1} C_3^{-1} C_4^{-1}, \\ a_0 = C_2^{-1} C_3^{-1} C_4^{-1} R_\alpha + C_2^{-1} C_3^{-1} C_4^{-1} R_\beta.$$

Postać otrzymanych współczynników jest zgodna z ogólną postacią współczynników określoną wzorami (2.3-17), (2.3-18), (2.3-20), (2.3-21).

3. MINIMALNA LICZBA ELEMENTÓW REAKTANCYJNYCH UKŁADÓW REALIZUJĄCYCH FUNKCJĘ TRANSMITANCJI

3.1. Minimalna liczba elementów L , C układów reaktancyjnych

Z analizy przeprowadzonej w rozdziale 2.3 wynika, że jeżeli czwórnik realizuje daną transmitancję, to wystarczy by odpowiednie sumy iloczynów funkcji wyznacznikowej i funkcji jednoczesności liczby strukturalnej dopełniającej (wzory (2.3-17), (2.3-18), (2.3-20), (2.3-21) określały wyrazy niezerowe mianownika i licznika funkcji transmitancji o postaci symetrycznej. W związku z powyższym dla układów biernych możemy sformułować następującą własność:

Własność 3.1-1.

Liczba elementów indukcyjnych w czwórniku jest nie mniejsza od liczby elementów indukcyjnych występujących w tym iloczynie funkcji wyznacznikowej (liczby strukturalnej A^d), który odpowiada najwyższej potędze częstotliwości zespolonej s .

Liczba elementów pojemnościowych w czwórniku jest nie mniejsza od liczby elementów pojemnościowych występujących w tym iloczynie funkcji wyznacznikowej, który odpowiada najniższej potędze częstotliwości zespolonej s .

Dowód

Jest oczywiste, że liczba elementów indukcyjnych (pojemnościowych) występujących w czwórniku jest nie mniejsza od liczby tych elementów koniecznej i wystarczającej do uzyskania zadanego niezerowego wyrazu o najwyższej (o najniższej) potędze zmiennej s funkcji transmitancji o postaci symetrycznej.

Dla wielomianu mianownika najwyższa potęga wyrazu niezerowego (patrz wzór (2.3-6)) wynosi μ , a najniższa $-l = \mu - \bar{n}$. Natomiast dla wielomianu licznika najwyższa potęga wyrazu niezerowego wynosi ν , a najniższa wynosi $-l + \bar{p} = \nu - \bar{m} + \bar{p}$.

Dla układów biernych zawsze st. $f(s) \leq$ st. $g(s)$, a zatem można napisać następującą nierówność:

$$\bar{m} \geq \bar{n},$$

skąd z uwagi na wzory $\mu = \bar{n} - l$, $\nu = \bar{m} - l$ otrzymamy

$$\mu \geq \nu.$$

Ponadto z (2.3-6) otrzymamy:

$$p \geq 0.$$

Z tych nierówności wynika, że w dalszych rozważaniach dotyczących określenia liczby elementów można wziąć pod uwagę tylko wielomian mianownika transmitancji o postaci symetrycznej, ściślej jego wyrazy niezerowe, czyli iloczyny funkcji wyznacznikowej liczby strukturalnej A^d . Z kolei z definicji funkcji wyznacznikowej wynika, że uzyskanie wyrazów o najniższej i najwyższej potędze jest równoznaczne z uzyskaniem wszystkich kolejnych wyrazów mianownika transmitancji.

W związku z powyższym z postaci współczynników określonych wzorami (2.3-17) i (2.3-18) wynika słuszność własności (3.1).

W dalszym ciągu, w oparciu o wyprowadzone wzory w rozdziale 2.3 na współczynniki licznika i mianownika transmitancji o postaci symetrycznej, można określić liczbę elementów reaktancyjnych występujących w poszczególnych składnikach podanych wzorów, czyli w iloczynach funkcji wyznacznikowej i funkcji jednoczesności.

Własność 3.1-2.

Dla dowolnego układu biernego R, L, C liczba elementów indukcyjnych występujących w iloczynie o potęgze s^j funkcji wyznacznikowej wynosi $\frac{n+j-p_j}{2}$, a liczba elementów pojemnościowych wynosi $\frac{n-j-p_j}{2}$. Suma liczby elementów reaktancyjnych wynosi zatem $n-p_j$ w iloczynie o potęgze s^j .

Dowód

Liczba elementów indukcyjnych w każdym iloczynie będącym składnikiem sumy określającej współczynnik a we wzorach (2.3-17) i (2.3-18) wynosi:

1) dla $n \geq j \geq 0$

$$n_{L_j} = j + \tau, \quad (3.1-1)$$

gdzie n_{L_j} — liczba elementów indukcyjnych w iloczynie o potęgze s^j ;

2) dla $0 \geq j \geq -n$

$$n_{L_j} = \tau. \quad (3.1-2)$$

Ze wzoru (2.3-19) można obliczyć, że:

$$\tau = \frac{n - |j| - p_j}{2}. \quad (3.1-3)$$

Podstawiając zależność (3.1-3) do wzorów (3.1-1) albo do wzorów (3.1-2) otrzymujemy:

$$n_{L_j} = \frac{n + j - p_j}{2}, \quad (3.1-4)$$

gdzie $n \geq j \geq -n$.

Analogicznie ze wzorów (2.3-17) i (2.3-18) wynika, że liczba elementów pojemnościowych w każdym iloczynie będącym składnikiem sumy określającej współczynnik a_j wynosi:

1) dla $n \geq j \geq 0$

$$n_{C_j} = \tau, \quad (3.1-5)$$

gdzie n_{C_j} — liczba elementów pojemnościowych;

2) dla $0 \geq j \geq -n$

$$n_{C_j} = |j| + \tau. \quad (3.1-6)$$

Podstawiając zależność (3.1-3) do wzorów (3.1-5) i (3.1-6) otrzymujemy:

$$n_{C_j} = \frac{n - j - p_j}{2} \quad (3.1-7)$$

gdzie: $n \geq j \geq -n$.

Ze wzorów (3.1-4) i (3.1-7) wynika słuszność własności 3.1-1.

Własność 3.1-3.

Dla układu reaktancyjnego liczba elementów indukcyjnych występujących w iloczynie o potęgze s^i funkcji jednoczesności wynosi $\frac{n+i-1}{1}$, a liczba elementów pojemnościowych wynosi $\frac{n-i-1}{2}$ (suma jest równa $n-1$).

Dowód

Ze wzorów (2.3-20) i (2.3-21) wynika, że liczba elementów indukcyjnych w każdym iloczynie będącym składnikiem sumy określającej współczynnik b_i wynosi:

1) dla $n-1 \geq i \geq 0$

$$n_{L_i} = i + t, \quad (3.1-8)$$

2) dla $0 \geq i \geq -(n-1)$

$$n_{L_i} = t. \quad (3.1-9)$$

Ze wzoru (2.3-22) można obliczyć, że:

$$t = \frac{n - |i| - 1}{2}. \quad (3.1-10)$$

Podstawiając wartość t do wzorów (3.1-8) i (3.1-9) otrzymujemy:

$$n_{L_i} = \frac{n+i-1}{2}, \quad (3.1-11)$$

gdzie: $(n-1) \geq i \geq -(n-1)$.

Analogicznie ze wzorów (2.3-20) i (2.3-21) wynika, że liczba elementów pojemnościowych w każdym składniku sumy określającej współczynnik b_i wynosi

1) dla $(n-1) \geq i \geq 0$

$$n_{C_i} = t, \quad (3.1-12)$$

2) dla $0 \geq i \geq -n(n-1)$

$$n_{C_i} = i + t. \quad (3.1-13)$$

Podstawiając zależność (3.1-10) do wzorów (3.1-12) i (3.1-13) otrzymujemy:

$$n_{C_i} = \frac{n-i-1}{2}, \quad (3.1-14)$$

gdzie:

$$(n-1) \geq i \geq -(n-1).$$

Sumując zależność (3.1-11) i (3.1-14) możemy napisać:

$$n_{L_i} + n_{C_i} = n-1. \quad (3.1-15)$$

Wyprowadzone zależności (3.1-11) i (3.1-14) potwierdzają słuszność własności (3.1-3).

Na marginesie rozważań należy zaznaczyć, że w przypadku gdy współczynnik a_j lub b_i jest równy zero, to przynajmniej jeden z elementów reaktancyjnych albo rezystancyjnych w każdym iloczynie będącym składnikiem sumy określającej dany współczynnik musi być równy zero.

Twierdzenie 3.1-1.

Dla układów reaktancyjnych minimalna liczba elementów indukcyjnych $n_{L_{\min}}$ albo pojemnościowych $n_{C_{\min}}$, konieczna do zrealizowania zadanej wymiernej transmitancji stopnia $(\bar{m}+\bar{n})$, wyraża się następującymi zależnościami:

$$n_{L_{\min}} = n_{C_{\min}} = \begin{cases} E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right); & \bar{n} \text{ — nieparzyste,} \\ \frac{\bar{n}}{2}; & \bar{n} \text{ — parzyste, } \bar{m} \text{ — parzyste,} \\ \frac{\bar{n}}{2} - 1; & \bar{n} \text{ — parzyste, } \bar{m} \text{ — nieparzyste,} \end{cases}$$

gdzie:

$E(x)$ — całość z „ x ”,

$\bar{n}$ — stopień mianownika transmitancji,

$\bar{m}$ — stopień licznika transmitancji.

Dowód

Liczba elementów indukcyjnych oraz liczba elementów pojemnościowych występujących w każdym z iloczynów o potęgze s^j funkcji wyznacznikowej jest określona odpowiednio wzorami (3.1-4) i (3.1-7).

Podstawiając do wzoru (3.1-4) wartość $j = \mu$ (a więc największą wartość potęgi zmiennej s przy współczynniku niezerowym) otrzymujemy zgodnie z własnością 3.1-1 następującą liczbę elementów indukcyjnych konieczną i wystarczającą do określenia współczynnika a_μ :

$$n_{L_\mu} = \frac{n + \mu - p_\mu}{2}, \quad (3.1-16)$$

a ponieważ $\mu = \bar{n} - l$, zależność (3.1-16) możemy napisać w postaci:

$$n_{L_\mu} = \frac{\bar{n} + n - l - p_\mu}{2}. \quad (3.1-17)$$

Z kolei podstawiając do wzoru (3.1-7) wartość $j = \mu - \bar{n} = -l$ (a więc najmniejszą wartość potęgi zmiennej s przy współczynniku niezerowym), otrzymujemy następującą liczbę elementów pojemnościowych konieczną i wystarczającą do określenia współczynnika a_{-l} :

$$n_{c(-)} = \frac{n + \bar{n} - \mu - p_{-l}}{2}. \quad (3.1-18)$$

Ponieważ zaś $\bar{n} = \mu + l$, zatem zależność (3.1-18) możemy napisać w postaci:

$$n_{c(-l)} = \frac{n + l - p_{-l}}{2}. \quad (3.1-19)$$

Z zależności (3.1-17) i (3.1-19) wynika, że minimalną liczbę elementów indukcyjnych lub pojemnościowych osiągamy wówczas, gdy odpowiednio suma albo różnica wielkości n i l osiąga wartość najmniejszą, a wielkość p_j wartość największą.

Tablica 1

Minimalna liczba elementów indukcyjnych		Minimalna liczba elementów pojemnościowych	
$\bar{n}$ — nieparzyste,		$\bar{m}$ — parzyste	
$(n-l)_{\min} = 1,$	3.1-20	$(n+l)_{\min} = \bar{n},$	3.1-23
a więc		a więc	
$p_{\mu_{\max}} = 2;$	3.1-21	$p_{-l_{\max}} = 1;$	3.1-24
stąd:		stąd:	
$n_{L_{\min}} = E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right).$	3.1-22	$n_{c_{\min}} = E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right).$	3.1-25
$\bar{n}$ — nieparzyste		$\bar{m}$ — nieparzyste	
$(n-l)_{\min} = 0,$	3.1-26	$(n+l)_{\min} = \bar{n} + 1,$	3.1-29
a więc		a więc	
$p_{\mu_{\max}} = 1;$	3.1-27	$p_{-l_{\max}} = 2;$	3.1-30
stąd		stąd	
$n_{L_{\min}} = E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right).$	3.1-28	$n_{c_{\min}} = E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right).$	3.1-31
$\bar{n}$ — parzyste		$\bar{m}$ — parzyste	
$(n-l)_{\min} = 1,$	3.1-32	$(n+l)_{\min} = n + 1,$	3.1-35
a więc		a więc	
$p_{\mu_{\max}} = 1;$	3.1-33	$p_{-l_{\max}} = 2;$	3.1-36
stąd		stąd	
$n_{L_{\min}} = \frac{\bar{n}}{2}.$	3.1-34	$n_{c_{\min}} = \frac{\bar{n}}{2}.$	3.1-37
$\bar{n}$ — parzyste		$\bar{m}$ — nieparzyste	
$(n-l)_{\min} = 0,$	3.1-38	$(n+l)_{\min} = \bar{n},$	3.1-41
a więc		a więc	
$p_{\mu_{\max}} = 2;$	3.1-39	$p_{-l_{\max}} = 2;$	3.1-42
stąd		stąd	
$n_{L_{\min}} = \frac{\bar{n}}{2} - 1.$	3.1-40	$n_{c_{\min}} = \frac{\bar{n}}{2} - 1.$	3.1-43

Biorąc pod uwagę własność (2.3-1) i (2.3-2) oraz to, że dla układów reaktancyjnych wielkość p_j może przyjmować jedną z trzech wartości: 0, 1, 2, należy do wzorów (3.1-17) i (3.1-19) podstawić podaną w tablicy 1 dla każdego rodzaju transmitancji, wartość różnicy albo sumy wielkości n i l oraz wartość wielkości p_j , aby otrzymać minimalną liczbę elementów indukcyjnych lub pojemnościowych.

Ze wzorów (3.1-22), (3.1-25), (3.1-28), (3.1-31), (3.1-34), (3.1-37), (3.1-40) i (3.1-43) wynika słuszność twierdzenia 3.1-1.

3.2. Minimalna liczba elementów reaktancyjnych w układach R , L , C

Udowodnimy obecnie twierdzenie dotyczące możliwie najmniejszej liczby elementów reaktancyjnych w dowolnym układzie R , L , C .

Twierdzenie 3.2-1.

Dla układów R , L , C najmniejsza liczba elementów reaktancyjnych przy której może być zrealizowana transmitancja stopnia $(\bar{m} + \bar{n})$ równa jest najwyższej potędze $\bar{n}$ mianownika transmitancji.

Dowód

Dodając do siebie zależności (3.1-17) i (3.1-19) otrzymujemy, że:

$$n_{L_{\mu}} + n_{c_{-l}} = \frac{\bar{n} + 2n - (p_{\mu} + p_{-l})}{2}. \quad (3.2-1)$$

Zgodnie z własnością 3.1-1. z równania (3.2-1) wynika, że liczba elementów reaktancyjnych występujących w czwórniku R , L , C jest nie mniejsza od sumy elementów L i C określonych tym równaniem, tzn.:

$$n_{L_{\mu}} + n_{c_{-l}} = \frac{\bar{n} + 2n - (p_{\mu} + p_{-l})}{2}$$

Według zależności (2.3-19), dla każdego iloczynu będącego składnikiem sumy określającej współczynnik a_{μ} i dla każdego ilorazu będącego składnikiem sumy określającej współczynnik a_{-l} zachodzą następujące związki:

$$n = \mu + 2\tau_{\mu} + p_{\mu}, \quad (3.2-2)$$

oraz:

$$n = l + 2\tau_{-l} + p_{-l}. \quad (3.2-3)$$

Dodając do siebie równania (3.2-2) i (3.2-3) otrzymujemy zależność:

$$2n = \mu + l + 2(\tau_{\mu} + \tau_{-l}) + (p_{\mu} + p_{-l}). \quad (3.2-4)$$

Według wzoru (2.3-3) wiadomo, że

$$\mu + l = \bar{n}.$$

Podstawiając tę zależność do wzoru (3.2-4) możemy napisać równanie:

$$2n = \bar{n} + 2(\tau_{\mu} + \tau_{-l}) + (p_{\mu} + p_{-l}). \quad (3.2-5)$$

Podstawiając następnie zależność (3.2-5) do wzoru (3.2-1) otrzymujemy następujący związek:

$$n_L + n_c \geq \bar{n} + (\tau_\mu + \tau_{-l}). \quad (3.2-6)$$

Dla układów R, L, C , w których wyrazy funkcji wyznacznikowej o najwyższej potęgze zmiennej s , tzn. o potęgze μ , nie zawierają elementów pojemnościowych, a wyrazy o najniższej potęgze zmiennej s , tzn. o potęgze $(-l)$, nie zawierają elementów indukcyjnych, czyli gdy $\tau_\mu = 0$ i $\tau_{-l} = 0$, zależność (3.2-6) przyjmie postać:

$$n_L + n_c = \bar{n}. \quad (3.2-7)$$

Wzór (3.2-7) potwierdza słuszność twierdzenia (3.2-1).

Biorąc pod uwagę, że zależność (3.2-7) jest spełniona w przypadku $\tau_\mu = 0$ i $\tau_{-l} = 0$ możemy sformułować następujący wniosek:

Wniosek 3.2-1.

W układach R, L, C o minimalnej liczbie elementów reaktancyjnych muszą występować przeciwdrzewa nie zawierające elementów pojemnościowych oraz przeciwdrzewa nie zawierające elementów indukcyjnych.

3.3. Minimalna liczba elementów indukcyjnych w układach R, L oraz minimalna liczba elementów pojemnościowych w układach R, C

W układach R, L nie występują elementy pojemnościowe, a więc współczynniki przy potęgach ujemnych zmiennej s transmitancji o postaci standartowej, określonej równaniem (2.3-6) muszą być równe zero. W związku z tym, nietrudno zauważyć, że dla transmitancji realizowanej przez układy R, L wielkość l może przyjmować następujące wartości:

$$-\infty \leq l \leq 0. \quad (3.3-1)$$

Dla układów R, L możemy sformułować następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.3-1.

Minimalna liczba elementów indukcyjnych w układach R, L realizujących funkcję transmitancji stopnia $(\bar{m} + \bar{n})$ równa się $\bar{n}$.

Dowód

Podstawiając do wzoru (3.1-7), określającego liczbę elementów pojemnościowych w każdym iloczynie funkcji wyznacznikowej, wartość $n_{c_j} = 0$, otrzymujemy zależność:

$$\frac{n - j - p_j}{2} = 0, \quad (3.3-2)$$

a stąd:

$$n - p_j = j. \quad (3.3-3)$$

Podstawiając następnie tę zależność do wzoru (3.1-4), określającego liczbę elementów indukcyjnych w każdym iloczynie o potęgze s^j funkcji wyznacznikowej, otrzymujemy równanie:

$$n_{L_j} = j, \quad (3.3-4)$$

gdzie $0 \leq j \leq n$.

Wiadomo, że minimalna liczba indukcyjności jest określona przez liczbę indukcyjności konieczną i wystarczającą do uzyskania zadanego, niezerowego współczynnika przy najwyższej potęgze zmiennej s transmitancji o postaci symetrycznej.

Podstawiając więc wartość $j = \mu = \bar{n} - l$ do wzoru (3.3-4) możemy napisać następujące równanie:

$$n_{L_\mu} = n - l. \quad (3.3-5)$$

Biorąc pod uwagę zależność (3.3-1) nietrudno zauważyć, że minimalną liczbę elementów indukcyjnych otrzymamy dla wartości $l = 0$, a stąd ostateczny wzór przyjmie postać:

$$n_{L_{\min}} = \bar{n}. \quad (3.3-6)$$

W ten sposób udowodniliśmy twierdzenie 3.3-1.

Z kolei w układach R , C nie występują elementy indukcyjne, a więc współczynniki przy potęgach dodatnich zmiennej s transmitancji o postaci standartowej, określonej równaniem (2.3-6), muszą być równe zeru. W związku z tym wielkość l dla transmitancji realizowanej przez układy R , C może przyjmować następujące wartości:

$$\bar{n} \leq l \leq \infty. \quad (3.3-7)$$

Analogiczne twierdzenie jak dla układów R , L możemy sformułować dla układów R , C .

Twierdzenie 3.3-2.

Minimalna liczba elementów pojemnościowych w układach R , C realizujących transmitancję stopnia $\bar{m} + \bar{n}$ równa się $\bar{n}$. Dowód tego twierdzenia przeprowadza się analogicznie do dowodu twierdzenia 3.3-1 i jest podany w dodatku (p.1).

Z kolei dla układów R , L i układów R , C możemy sformułować następujący wniosek.

Własność 3.3-1.

Dla układów R , L o minimalnej liczbie elementów indukcyjnych i minimalnej liczbie obwodów oraz dla układów R , C o minimalnej liczbie elementów pojemnościowych i minimalnej liczbie obwodów, elementy reaktancyjne muszą się znajdować w przeciwdrzewach nie zawierających elementów rezystancyjnych. (Dowód tej własności jest załączony w dodatku (p.2)).

4. SYNTEZA CZWÓRNIKÓW PRZY ZAŁOŻONYCH WARUNKACH OPTYMALIZACYJNYCH

4.1. Synteza czwórników reaktancyjnych przy założeniu minimalnej liczby elementów indukcyjnych

Synteza czwórników za pomocą algebry liczb strukturalnych [2] [3] [4] [6] polega na rozwiązywaniu układu równań nieliniowych otrzymanych przez porównanie współczynników funkcji transmitancji przekształconej do postaci standardowej symetrycznej okre-

ślonej wzorem (2.3-6) z odpowiednimi współczynnikami przy tych samych potęgach zmiennej s funkcji obliczonej dla projektowanego układu według zależności (2.3-14).

Oczywiście, czwórnik można tak zaprojektować, aby jednakowe potęgi występowały tylko przy niezerowych współczynnikach porównywanych funkcji.

Liczba niezerowych współczynników funkcji o postaci symetrycznej określonej wzorem (2.3-6) jest równa liczbie współczynników zadanej funkcji transmitancji określonej wzorem (2.1-10). Stąd wynika, że liczba równań nieliniowych spełnia następującą zależność:

$$n_r = \frac{1}{2}(\bar{m} - \bar{p}) + \bar{n} + 2, \quad (4.1-1)$$

gdzie:

n_r — liczba równań nieliniowych,

$\bar{m}$ — stopień licznika zadanej funkcji transmitancji,

$\bar{n}$ — stopień mianownika zadanej funkcji transmitancji.

Jeżeli ułożone równania są niezależne, to liczba niewiadomych musi być równa albo większa od liczby równań, a stąd zgodnie ze wzorem (4.1-1) słuszna jest następująca nierówność:

$$n_{el} \geq \frac{1}{2}(\bar{m} - \bar{p}) + \bar{n} + 2, \quad (4.1-2)$$

gdzie: n_{el} — liczba elementów w czwórniku.

Na podstawie otrzymanej nierówności możemy sformułować własność:

Własność 4.1-1.

Liczba elementów w czwórniku reaktancyjnym realizującym zadaną funkcję transmitancji o współczynnikach niezależnych jest nie mniejsza od sumy wyrazów licznika i mianownika tej funkcji.

Dla przyjętej klasy układów reaktancyjnych liczba elementów rzeczywistych wynosi 2, a więc liczbę wszystkich elementów można wyrazić w postaci następującej sumy:

$$n_{el} = n_L + n_c + 2. \quad (4.1-3)$$

Uwzględniając we wzorze (4.1-3) minimalną liczbę elementów indukcyjnych określoną w podrozdziale 3.2, liczbę elementów pojemnościowych możemy obliczyć z równania:

$$n_c = n_{el} - n_{L_{\min}} - 2. \quad (4.1-4)$$

W dalszym ciągu zakładając, że liczba niewiadomych jest nie większa od liczby równań i podstawiając do wzoru (4.1-4) zależność (4.1-2) otrzymujemy równanie określające liczbę elementów pojemnościowych realizujących funkcję transmitancji o współczynnikach niezależnych:

$$n_c = \frac{1}{2}(\bar{m} - \bar{p}) + \bar{n} - n_{L_{\min}}. \quad (4.1-5)$$

Mając określoną liczbę elementów należy następnie określić strukturę układu realizującego zadaną funkcję transmitancji, a więc należy podać liczbę obwodów, liczbę gałęzi oraz liczbę węzłów.

Liczbę obwodów możemy obliczyć na podstawie równania (2.3-16). Według tego równania znalezienie stopnia funkcji o postaci symetrycznej jest równoważne z określeniem liczby obwodów ($M = n$).

Z analizy przeprowadzonej w podrozdziale 3.2 wynika, że przy założeniu minimalnej liczby elementów indukcyjnych musi być spełniona jedna z następujących zależności:

$$n-l=0,$$

albo

$$n-l=1.$$

Biorąc pod uwagę te zależności zauważamy, że dla maksymalnej albo dla minimalnej wartości l , wartość n osiąga też odpowiednio wartość maksymalną albo minimalną.

Nietrudno wykazać (patrz dodatek, p. 3), że dla układów o minimalnej liczbie elementów indukcyjnych słuszne są następujące zależności określające minimalny i maksymalny stopień funkcji o postaci symetrycznej, a tym samym maksymalną i minimalną liczbę obwodów układu:

$$n_{\max} = n_c, \quad (4.1-6)$$

$$n_{\min} = \bar{n} - n_{L_{\min}}, \quad (4.1-7)$$

dla parzystego wielomianu licznika transmitancji
oraz

$$n_{\max} = n_c + 1, \quad (4.1-8)$$

$$n_{\min} = \bar{n} - n_{L_{\min}} + 1, \quad (4.1-9)$$

dla nieparzystego wielomianu licznika transmitancji.

Nietrudno też zauważyć, że różnica między maksymalną a minimalną liczbą obwodów wyraża się następującym wzorem:

$$n_{\max} - n_{\min} = n_{L_{\min}} + n_c - \bar{n}. \quad (4.1-10)$$

W dalszym ciągu możemy napisać, że przy założeniu minimalnej liczby elementów indukcyjnych liczba niezależnych obwodów układu może być zawarta w granicach:

$$n_{\min} \leq n \leq n_{\max}. \quad (4.1-11)$$

W związku z powyższym udowodnimy następującą własność:

Własność 4.1-2.

W danym układzie zawierającym n obwodów niezależnych i minimalną liczbę elementów indukcyjnych, w przypadku gdy licznik funkcji transmitancji układu jest wielomianem nieparzystym — liczba elementów pojemnościowych jest nie mniejsza od liczby n , a w przypadku gdy licznik funkcji transmitancji jest wielomianem parzystym — liczba elementów pojemnościowych jest nie mniejsza od liczby $n-1$.

Dowód

Obliczmy liczbę elementów pojemnościowych występujących w iloczynie funkcji wyznacnikowej o najniższej potędze zmiennej s , tzn. o potędze $(-l)$.

Biorąc pod uwagę, że przy minimalnej liczbie elementów indukcyjnych musi być spełniona zależność $n = l$ albo $n = l+1$ i podstawiając do wzoru (3.1-7) $j = -l = -n$ albo $j = -l = -(n-1)$ otrzymujemy następujące równania:

$$n_{c-l} = n - \frac{p-l}{2} \quad (4.1-12)$$

dla nieparzystego licznika transmitancji
oraz

$$n_{c-l} = n - \frac{p-l+1}{2} \quad (4.1-13)$$

dla parzystego licznika transmitancji.

Uwzględniając w równaniu (4.1-12) wartość $p-l = 0$, a w równaniu (4.1-13) wartość $p-l = 1$ (patrz dodatek, p. 3) powyższe równania przyjmą postać:

$$n_{c-l} = n \quad (4.1-14)$$

dla nieparzystego wielomianu licznika transmitancji oraz

$$n_{c-l} = n-1 \quad (4.1-15)$$

dla parzystego wielomianu licznika transmitancji.

Z własności 3.1-1 oraz z zależności (4.1-14) i (4.1-15) wynika słuszność własności 4.1-2.

Należy zaznaczyć, że jeżeli liczba elementów pojemnościowych występujących w układzie jest mniejsza od liczby określonej wzorem (4.1-5), to równania nieliniowe otrzymane przez porównanie współczynników funkcji wymiernych muszą być zależne.

W dalszym ciągu, wychodząc z zależności (4.1-2), możemy określić liczbę gałęzi oraz liczbę węzłów układu. Bardzo wygodnym pod względem obliczeniowym i konstrukcyjnym jest założenie, że każda gałąź układu jest jednoelementowa. Jest oczywiste, że z gałęzi jednoelementowych możemy uzyskać dowolną kombinację połączeń szeregowych oraz równoległych. Można wtedy napisać:

$$b = n_{ei}, \quad (4.1-16)$$

gdzie:

b — liczba gałęzi,

n_{ei} — ogólna liczba elementów układu.

Podstawiając do równania (4.1-16) liczbę elementów układu określoną zależnością (4.1-3) otrzymujemy związek:

$$b = \frac{1}{2}(\bar{m} - \bar{p}) + \bar{n} + 2. \quad (4.1-17)$$

Według wzoru Eulera, dla dowolnego grafu lub multigrafu możemy napisać zależność:

$$b - w + 1 = M; \quad (4.1-18)$$

a ponieważ $M = n$, liczbę węzłów układu obliczamy według następującego równania:

$$w = b + 1 - n. \quad (4.1-19)$$

4.2. Synteza czwórników reaktancyjnych przy założeniu minimalnej liczby elementów pojemnościowych

Sposób przeprowadzenia syntezy układów o minimalnej liczbie elementów pojemnościowych jest analogiczny jak w przypadku syntezy układów o minimalnej liczbie elementów indukcyjnych. W dalszych więc rozważaniach ograniczymy się do podania zasadniczych wzorów, które ze względu na rodzaj przyjętej optymalizacji są różne od wzorów otrzymanych w podrozdziale 4.1.

Minimalna liczba elementów pojemnościowych występująca w układach realizujących funkcję transmitancji stopnia $(\bar{m} + \bar{n})$ została wyprowadzona w podrozdziale 3.2. Z kolei liczba elementów indukcyjnych układu o założonych warunkach optymalizacyjnych jest określona równaniem analogicznym do równania (4.1-3), a mianowicie:

$$n_{L_n} = \frac{1}{2} (\bar{m} - \bar{p}) + \bar{n} - n_{c_{\min}}. \quad (4.2-1)$$

Z analizy przeprowadzonej w podrozdziale 3.2 wynika, że przy założeniu minimalnej liczby elementów pojemnościowych musi być spełniona jedna z następujących zależności:

$$n + l = \bar{n}, \quad (4.2-2)$$

albo

$$n + l = \bar{n} + 1. \quad (4.2-3)$$

Z zależności tych wynika, że w przypadku maksymalnej wartości n , wielkość l osiąga wartość minimalną, i na odwrót.

Nietrudno wykazać (patrz dodatek, p.4), że dla układów o minimalnej liczbie elementów pojemnościowych słuszne są następujące zależności określające minimalny i maksymalny stopień funkcji o postaci symetrycznej, a tym samym maksymalną i minimalną liczbę obwodów układu:

$$n_{\max} = n_L, \quad (4.2-4)$$

$$n_{\min} = \bar{n} - n_{c_{\min}} \quad (4.2-5)$$

dla nieparzystego stopnia $(\bar{m} + \bar{n})$ transmitancji
oraz

$$n_{\max} = n_L + 1, \quad (4.2-6)$$

$$n_{\min} = \bar{n} - n_{c_{\min}} + 1 \quad (4.2-7)$$

dla parzystego stopnia $(m + n)$ transmitancji.

Na podstawie otrzymanych zależności łatwo zauważyć, że różnica między maksymalną a minimalną liczbą obwodów wyraża się następującym wzorem:

$$n_{\max} - n_{\min} = n_L + n_{c_{\min}} - \bar{n}. \quad (4.2-8)$$

W dalszym ciągu możemy stwierdzić, że liczba obwodów układu, przy założeniu minimalnej liczby elementów pojemnościowych, może być zawarta w granicach:

$$n_{\min} \leq n \leq n_{\max}. \quad (4.2-9)$$

Dla omawianych układów udowodnimy następującą własność:

Własność 4.2-1.

W danym układzie, zawierającym n obwodów niezależnych i minimalną liczbę elementów pojemnościowych, w przypadku gdy stopień $(\bar{m} + \bar{n})$ transmitancji jest nieparzysty — liczba elementów indukcyjnych jest nie mniejsza od liczby n , a w przypadku gdy stopień $(m + n)$ funkcji transmitancji jest parzysty — liczba elementów pojemnościowych jest nie mniejsza od liczby $n - 1$.

Dowód

Ze wzorów (4.2-2) i (4.2-3) wynika, że dla układów o minimalnej liczbie elementów pojemnościowych najwyższa potęga częstotliwości zespolonej s występująca w wyrazach funkcji wyznacznikowej liczby strukturalnej A^d spełnia jedną z następujących zależności:

$$j = \mu = \bar{n} - l = n \quad (4.2-10)$$

dla nieparzystego stopnia $(\bar{m} + \bar{n})$ transmitancji,
albo

$$j = \mu = \bar{n} - l = n - 1 \quad (4.2-11)$$

dla parzystego stopnia $(\bar{m} + \bar{n})$ transmitancji.

Uwzględniając zależności (4.2-10) i (4.2-11) we wzorze (2.3-19) oraz biorąc pod uwagę, że wielkość τ i p_μ są liczbami całkowitymi i dodatnimi otrzymujemy związki:

$$\tau = 0, \quad (4.2-12)$$

$$p_\mu = 0 \quad (4.2-13)$$

dla nieparzystego stopnia $(m + n)$ transmitancji
oraz

$$\tau = 0, \quad (4.2-14)$$

$$p_\mu = 0 \quad (4.2-15)$$

dla parzystego stopnia $(\bar{m} + \bar{n})$ transmitancji.

W dalszym ciągu, podstawiając do wzoru (3.1-4) zależności (4.2-10) i (4.2-13) albo (4.2-11) i (4.2-15), otrzymujemy liczbę elementów indukcyjnych występujących w tych wyrazach funkcji wyznacznikowej liczby strukturalnej A^d , które odpowiadają najwyższej potędze częstotliwości zespolonej s , a mianowicie:

$$n_{L_\mu}^1 = n \quad (4.2-16)$$

dla nieparzystego stopnia $(m + n)$ transmitancji
oraz

$$n_{L_\mu} = n + 1 \quad (4.2-17)$$

dla parzystego stopnia $(\bar{m} + \bar{n})$ transmitancji.

Z własności (3.1-1) oraz z zależności (4.2-16) i (4.2-17) wynika słuszność własności 4.2-1.

Podobnie jak w podrozdziale 4.1, należy zaznaczyć, że jeżeli liczba elementów indukcyjnych występujących w układzie jest mniejsza od liczby określonej wzorem (4.2-1), to równania nieliniowe otrzymane przez porównanie współczynników funkcji wymiernych muszą być zależne.

Dalszy sposób projektowania omówionych układów jest analogiczny jak w podrozdziale 4.1.

4.3. Synteza czwórników o minimalnej liczbie elementów reaktancyjnych

Zgodnie z twierdzeniem (3.2-1) w czwórnikach reaktancyjnych o minimalnej liczbie elementów L i C i przy założeniu jednoelementowych gałęzi układu, liczba b gałęzi jest równa liczbie elementów i spełnia następującą zależność:

$$b_{\min} = n_{el_{\min}} = \bar{n} + 2. \quad (4.3-1)$$

Wiadomo, że przy syntezie czwórników reaktancyjnych przeprowadzanej metodą Bellerta [1] [2] [3] [4] [6] najmniejsza liczba równań nieliniowych jest określona równaniem (4.1-1).

Na podstawie wzoru (4.3-1) oraz wzoru (4.1-1) możemy napisać następującą nierówność:

$$n_r \geq n_{el_{\min}}. \quad (4.3-2)$$

W oparciu o podaną nierówność słuszny jest następujący wniosek:

Wniosek 4.3-1.

Układy reaktancyjne o minimalnej liczbie elementów realizują transmitancję o współczynnikach zależnych.

Następnie, przeprowadzając syntezę przy założeniu minimalnej liczby elementów indukcyjnych albo minimalnej liczby elementów pojemnościowych, należy od prawej strony równania (4.3-1) odjąć dwa elementy opornościowe $n = 2$ oraz minimalną liczbę elementów indukcyjnych albo minimalną liczbę elementów pojemnościowych. Otrzymane wzory określają pozostałą liczbę elementów układu, tzn.:

$$n_c = \bar{n} - n_{L_{\min}}, \quad (4.3-3)$$

$$n_L = \bar{n} - n_{c_{\min}}. \quad (4.3-4)$$

Z podstawienia zależności (4.3-3) do wzoru (4.1-10) oraz zależności (4.3-4) do wzoru (4.2-8) wynika, że przy przyjętej optymalizacji zachodzi następujący związek:

$$n_{\max} = n_{\min}. \quad (4.3-5)$$

Z kolei, dla układów o minimalnej liczbie elementów indukcyjnych, na podstawie wzorów (4.1-14) i (4.1-15) możemy napisać równania:

$$n_{\min} = \bar{n} - n_{L_{\min}} = n_c \quad (4.3-6)$$

dla nieparzystego wielomianu licznika

oraz

$$n_{\min} = \bar{n} - n_{L_{\min}} + 1 = n_c + 1 \quad (4.3-7)$$

dla parzystego wielomianu licznika.

Analogicznie, dla układów o minimalnej liczbie elementów pojemnościowych, na podstawie wzorów (4.2-5) i (4.2-6) słuszne są następujące związki:

$$n_{\min} = \bar{n} - n_{c_{\min}} \quad (4.3-8)$$

dla nieparzystego stopnia $(m+n)$ transmitancji

oraz

$$n_{\min} = \bar{n} - n_{c_{\min}} + 1 \quad (4.3-9)$$

dla parzystego stopnia $(\bar{m} + \bar{n})$ transmitancji.

Mając określoną minimalną liczbę elementów układu oraz liczbę niezależnych obwodów, liczbę węzłów obliczamy według wzoru Eulera (4.1-19).

Dalszy sposób projektowania omówionych układów o minimalnej liczbie elementów reaktancyjnych jest analogiczny jak w podrozdziale 4.1.

4.4. Określenie struktury syntezyowanych układów

Na podstawie zależności otrzymanych w podrozdziałach 3.1, 4.1, 4.2, 4.3 podamy obecnie dwa twierdzenia dotyczące struktur realizujących zadaną transmitancję przy założonych warunkach optymalizacyjnych.

Twierdzenie 4.4-1.

Układy o minimalnej liczbie elementów indukcyjnych realizujące transmitancję stopnia $(\bar{m} + \bar{n})$ spełniają następujące własności strukturalne:

1) elementy indukcyjne w przypadku nieparzystego stopnia $(\bar{m} + \bar{n})$ znajdują się w przeciwdrzewach zawierających gałęzie źródła i obciążenia (tzn. gałęzie α i β), a w przypadku parzystego stopnia $(\bar{m} + \bar{n})$ znajdują się w przeciwdrzewach zawierających jedną z gałęzi: α lub β ;

2) elementy pojemnościowe w przypadku nieparzystego wielomianu licznika $f(s)$ transmitancji znajdują się w przeciwdrzewach nie zawierających ani gałęzi α ani gałęzi β , a w przypadku parzystego wielomianu licznika znajdującego się w przeciwdrzewach zawierających jedną z gałęzi: α lub β ;

3) w każdym niezależnym cyklu zawierającym gałęzie α i β maksymalna liczba elementów indukcyjnych $n_{L\alpha\beta}$ jest określona jako $E\left(\frac{\bar{n} - \bar{m}}{2}\right)$;

4) w każdym niezależnym cyklu zawierającym gałęzie α i β maksymalna liczba elementów pojemnościowych $n_{c\alpha\beta}$, w przypadku gdy liczba elementów pojemnościowych w układzie wynosi n , jest określona jako $E\left(\frac{\bar{p}}{2}\right) + 1$, a w przypadku gdy liczba elementów pojemnościowych w układzie wynosi $n-1$ jest określona jako $\frac{\bar{p}}{2}$;

5) liczba elementów indukcyjnych $n_{L_{sim}}$ występująca w każdym iloczynie funkcji jednoznaczności (nie występująca w żadnym niezależnym cyklu zawierającym gałęzie α i β) jest równa $E\left(\frac{\bar{p}}{2}\right)$;

6) liczba elementów pojemnościowych $n_{c_{sim}}$ występująca w każdym iloczynie funkcji jednoznaczności (nie występująca w żadnym niezależnym cyklu zawierającym gałęzie α i β) jest równa $n-1-E\left(\frac{\bar{m}}{2}\right)$;

7) suma prostych układów R rezonansu równoległego i prostych układów S rezonansu szeregowego musi być równa $\frac{1}{2}(\bar{m}-\bar{p})$.

Twierdzenie 4.4-2.

Układy o minimalnej liczbie elementów pojemnościowych realizujące transmitancję stopnia $(\bar{m}+\bar{n})$ spełniają następujące własności strukturalne:

1) elementy pojemnościowe w przypadku nieparzystego wielomianu licznika $f(s)$ transmitancji znajdują się w przeciwdrzewach zawierających gałęzie α i β , a w przypadku parzystego wielomianu licznika znajdują się w przeciwdrzewach zawierających jedną z gałęzi: α lub β ;

2) elementy indukcyjne w przypadku nieparzystego stopnia $(\bar{m}+\bar{n})$ znajdują się w przeciwdrzewach nie zawierających ani gałęzi α ani gałęzi β , a w przypadku parzystego stopnia $(\bar{m}+\bar{n})$ znajdują się w przeciwdrzewach zawierających jedną z gałęzi: α lub β ;

3) w każdym niezależnym cyklu zawierającym gałęzie α i β maksymalna liczba elementów pojemnościowych $n_{c\alpha\beta}$ jest określona jako $E\left(\frac{\bar{p}}{2}\right)$;

4) w każdym niezależnym cyklu zawierającym gałęzie α i β maksymalna liczba elementów indukcyjnych $n_{L\alpha\beta}$, w przypadku gdy liczba elementów indukcyjnych w układzie wynosi n , jest określona jako $E\left(\frac{\bar{n}-\bar{m}}{2}\right)+1$, a w przypadku gdy liczba elementów indukcyjnych w układzie wynosi $n-1$ jest określona jako $\frac{\bar{n}-\bar{m}}{2}$;

5) liczba elementów indukcyjnych $n_{L_{sim}}$ występująca w każdym iloczynie funkcji jednoznaczności (nie występująca w żadnym niezależnym cyklu zawierającym gałęzie α i β) jest równa $(n-1)-E\left(\frac{\bar{n}-\bar{p}}{2}\right)$;

6) liczba elementów pojemnościowych $n_{c_{sim}}$ występujących w każdym iloczynie funkcji jednoznaczności (nie występujących w żadnym niezależnym cyklu zawierającym gałęzie α i β) jest równa $E\left(\frac{\bar{n}-\bar{m}}{2}\right)$;

7) suma prostych układów R rezonansu równoległego i prostych układów S rezonansu szeregowego musi być równa $\frac{1}{2}(\bar{m}-\bar{p})$.

Dowody dotyczące twierdzenia 4.4-1 przeprowadzono łącznie z dowodami dotyczącymi twierdzenia 4.4-2 i załączono w dodatku p.5.

W oparciu o podane twierdzenia 4.4-1 i 4.4-2 w tablicach 2 i 3 zostały zestawione zależności, jakie muszą spełniać układy realizujące daną transmitancję przy założonych warunkach optymalizacyjnych.

Na podstawie twierdzeń 4.4-1 i 4.4-2 udowodnimy obecnie dwie własności.

Własność 4.4-1.

Przy założeniu minimalnej liczby elementów indukcyjnych transmitancja, której stopień wielomianu licznika jest równy stopniowi wielomianu mianownika (stopień funkcji $(\bar{m} + \bar{n})$ jest parzysty) może być zrealizowana tylko przez układ o minimalnej liczbie obwodów, przy czym liczba ta jest o jedność większa od liczby elementów indukcyjnych.

Dowód

Ze wzorów podanych w podrozdziale 4.1 oraz z zależności określających minimalną liczbę elementów indukcyjnych wynika, że dla parzystego stopnia $(\bar{m} + \bar{n})$ transmitancji minimalna liczba obwodów jest określona następującą zależnością:

$$n_{nm} = n_{L_{\min}} + 1. \quad (4.4-2)$$

Przypuśćmy jednak, że liczba obwodów jest większa od liczby minimalnej, a więc spełnia nierówność:

$$n > n_{L_{\min}} + 1. \quad (4.4-3)$$

Z twierdzenia 4.4-1 p. 3 wiadomo, że dla $\bar{m} + \bar{n}$ elementy indukcyjne nie występują w każdym cyklu zawierającym gałęzie α i β . Wynika stąd, że elementy te nie mogą być połączone szeregowo z elementami R_α i R_β . W związku z tym iloczyn funkcji wyznacnikowej, odpowiadające najwyższej potędze zmiennej niezależnej s , zawierają wszystkie elementy indukcyjne, określoną liczbę elementów pojemnościowych oraz elementy R_α i R_β .

Występowanie jednak w wyżej wymienionych iloczynach zarówno elementu R_α jak i R_β jest sprzeczne z twierdzeniem 4.4-1 p. 1 odnośnie parzystego stopnia funkcji transmitancji. Nietrudno jest więc zauważyć, że jedynie dla $n = n_{L_{\min}} + 1$ uzyskujemy spełnienie twierdzenia 4.4-1 p. 1 i p. 3.

Własność 4.4-2.

Przy założeniu minimalnej liczby elementów pojemnościowych, transmitancja o parzystym wielomianie licznika, którego najniższa potęga $\bar{p} = 0$, może być zrealizowana tylko przez układ o minimalnej liczbie obwodów, przy czym liczba ta jest o jedność większa od liczby elementów pojemnościowych.

Dowód powyższej własności przeprowadzamy analogicznie do dowodu własności 4.4-1, w oparciu o podane w podrozdziale 4.2 zależności określające minimalną liczbę obwodów oraz w oparciu o twierdzenie 4.4-2 p. 1 i p. 3.

W dalszym ciągu na podstawie twierdzeń 4.4-1 i 4.4-2 oraz własności 4.4-1 i 4.4-2 można stwierdzić, że w przypadku filtrów środkowozaporowych ($\bar{m} = \bar{n}$, $\bar{p} = 0$) — przy podanych warunkach optymalizacyjnych — zachodzą zależności:

1) dla filtrów zawierających minimum elementów indukcyjnych:

$$n_{L_{\min}} = \frac{\bar{n}}{2}, \quad n = n_{nm} = \frac{\bar{n}}{2} + 1, \quad n_c = n_{nm} - 1 = \frac{\bar{n}}{2};$$

2) dla filtrów zawierających minimum elementów pojemnościowych:

$$n_{c_{\min}} = \frac{\bar{n}}{2}, \quad n = n_{nm} = \frac{\bar{n}}{2} + 1, \quad n_L = n_{nm} - 1 = \frac{\bar{n}}{2}.$$

oraz ponadto dla obu typów filtrów wymienionych wyżej:

$$n_{R+S} = \frac{\bar{n}}{2}, \quad n_{L_{\alpha\beta}} = 0, \quad n_{c_{\alpha\beta}} = 0, \quad n_{L_{\text{sim}}} = 0, \quad n_{c_{\text{sim}}} = 0.$$

Z powyższego wyniku następujący wniosek:

Wniosek 4.4-1.

Filtry środkowozaporowe mogą być realizowane jedynie w układach o jednakowej minimalnej liczbie elementów indukcyjnych i pojemnościowych, dla których słuszna jest następująca zależność:

$$n_{L_{\min}} + n_{c_{\min}} = \bar{n}.$$

Dla tego przypadku określone współczynniki (określona ich liczba) transmitancji muszą być od siebie zależne, ponieważ liczba równań nieliniowych, w oparciu o które przeprowadzamy syntezę, jest większa od liczby elementów układu ($n_r > n_{el}$).

4.5. Sposób przeprowadzenia maszynowej syntezy czwórników

Zaprojektowanie czwórników według zależności podanych w podrozdziałach 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 pozwala na określenie następujących danych projektowanego układu:

- 1) liczby elementów równoważnej ilości gałęzi,
- 2) liczby elementów indukcyjnych,
- 3) liczby elementów pojemnościowych,
- 4) liczby elementów rezystancyjnych,
- 5) liczby niezależnych obwodów,
- 6) liczby węzłów,
- 7) szczegółowych własności strukturalnych w/g twierdzeń (4.4-1) i (4.4-2).

Na podstawie tych danych można — zgodnie z omówioną w pracach S. Bellerta [2], [3], [4], [6] maszynową syntezą czwórników — opracować odpowiedni algorytm obliczeniowy, umożliwiający generację za pomocą maszyny cyfrowej wszystkich możliwych liczb strukturalnych określających w sposób algebraiczny struktury czwórników o zadanych własnościach, których elementy zostaną w dalszym ciągu obliczone w sposób automatyczny przez maszynę.

⁴⁾ Wniosek wynika bezpośrednio z podanych zależności dla układów o założonych warunkach optymalizacyjnych, ale można go uogólnić dla dowolnych układów.

Zestawienie wzorów określających warunki konieczne do realizacji transmitancji

Wielkości charakterystyczne		Rodzaj transmitancji	$\bar{m}$ — potęga parzysta $\bar{n}$ — potęga nieparzysta
Minimalna liczba elementów indukcyjnych	$n_{L_{min}}$		$E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right)$
Najmniejsza liczba elementów pojemnościowych	$n_{c_{nm}}$		$E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right) + 1$
Największa liczba elementów pojemnościowych	$n_{c_{nw}}$		$E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right) + \frac{\bar{m} - \bar{p}}{2} + 1$
Najmniejsza liczba obwodów	n_{nm}		$n = n_c + 1$ $E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right) + 2$
Największa liczba obwodów	n_{nw}		$n = n_c + 1$ $E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right) + \frac{\bar{m} - \bar{p}}{2} + 2$
Liczba układów rezonansowych	n_{R+S}		$\frac{1}{2}(\bar{m} - \bar{p})$
Największa liczba elementów indukcyjnych w każdym cyklu zawierającym gałęzie α i β	$n_{L\alpha\beta}$		$E\left(\frac{\bar{n} - \bar{m}}{2}\right)$
Największa liczba elementów pojemnościowych w każdym cyklu zawierającym gałęzie α i β jeżeli $n_c = n - 1$ i jeżeli $n_c = n$	$n_{c\alpha\beta}$		$\frac{\bar{p}}{2}$
Liczba elementów indukcyjnych w każdym iloczynie funkcji jednoczesności	$n_{L_{sim}}$		$\frac{\bar{p}}{2}$
Liczba elementów pojemnościowych w każdym iloczynie funkcji jednoczesności	$n_{c_{sim}}$		$(n - 1) - \frac{\bar{m}}{2}$
Rozmieszczenie elementów indukcyjnych gdzie: α i β — elementy indukcyjne są w przeciwdrzewach zawierających gałęź α i β α albo β — elementy indukcyjne są w przeciwdrzewach zawierających gałęź α albo β ani α ani β — elementy indukcyjne są w przeciwdrzewach niezawierających gałęzi ani α ani β			α i β
Rozmieszczenie elementów pojemnościowych gdzie: α i β — elementy pojemnościowe są w przeciwdrzewach zawierających gałęź α i β α albo β — elementy pojemnościowe są w przeciwdrzewach zawierających gałęź α albo β ani α ani β — elementy pojemnościowe są w przeciwdrzewach niezawierających gałęzi ani α ani β			α albo β

Tablica 2

stopnia $(\bar{m} + \bar{n})$ przy założeniu minimalnej liczby elementów indukcyjnych

$\bar{m}$ — potęga nieparzysta $\bar{n}$ — potęga nieparzysta	$\bar{m}$ — potęga parzysta $\bar{n}$ — potęga parzysta	$\bar{m}$ — potęga nieparzysta $\bar{n}$ — potęga parzysta
$E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right)$	$\frac{\bar{n}}{2}$	$\frac{\bar{n}}{2} - 1$
$E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right) + 1$	$\frac{\bar{n}}{2}$	$\frac{\bar{n}}{2} + 1$
$E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right) + \frac{\bar{m} - \bar{p}}{2} + 1$	$\frac{\bar{n}}{2} + \frac{1}{2}(\bar{m} - \bar{p})$	$\frac{\bar{n}}{2} + \frac{1}{2}(\bar{m} - \bar{p}) + 1$
$n = n_c$ $E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right) + 1$	$n = n_c + 1$ $\frac{\bar{n}}{2} + 1$	$n = n_c$ $\frac{\bar{n}}{2} + 1$
$n = n_c$ $E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right) + \frac{\bar{m} - \bar{p}}{2} + 2$	$n = n_c + 1$ $\frac{\bar{n}}{2} + \frac{1}{2}(\bar{m} - \bar{p}) + 1$	$n = n_c$ $\frac{\bar{n}}{2} + \frac{1}{2}(\bar{m} - \bar{p}) + 1$
$\frac{1}{2}(\bar{m} - \bar{p})$	$\frac{1}{2}(\bar{m} - \bar{p})$	$\frac{1}{2}(\bar{m} - \bar{p})$
$\frac{\bar{n} - \bar{m}}{2}$	$\frac{\bar{n} - \bar{m}}{2}$	$E\left(\frac{\bar{n} - \bar{m}}{2}\right)$
$E\left(\frac{\bar{p}}{2}\right) + 1$	$\frac{\bar{p}}{2}$	$E\left(\frac{\bar{p}}{2}\right) + 1$
$E\left(\frac{\bar{p}}{2}\right)$	$\frac{\bar{p}}{2}$	$E\left(\frac{\bar{p}}{2}\right)$
$(n-1) - E\left(\frac{\bar{m}}{2}\right)$	$(n-1) - \frac{\bar{m}}{2}$	$(n-1) - E\left(\frac{\bar{m}}{2}\right)$
α albo β	α albo β	α i β
ani α ani β	α albo β	ani α ani β

Zestawienie wzorów określających warunki konieczne do realizacji transmitancji

Wielkości charakterystyczne		Rodzaj transmitancji	$\bar{m}$ — potęga parzysta $\bar{n}$ — ptega nieparzysta
Minimalna liczba elementów pojemnościowych	$n_{c_{\min}}$	$E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right)$	
Najmniejsza liczba elementów indukcyjnych	$n_{L_{\min}}$	$E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right)+1$	
Największa liczba elementów indukcyjnych	$n_{L_{\max}}$	$\frac{1}{2}(\bar{m}-\bar{p})+E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right)+1$	
Najmniejsza liczba obwodów	n_{nm}	$n=n_L$ $E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right)+1$	
Największa liczba obwodów	n_{nw}	$n=n_L$ $\frac{1}{2}(\bar{m}-\bar{p})+E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right)+1$	
Liczba układów rezonansowych	n_{R+S}	$\frac{1}{2}(\bar{m}-\bar{p})$	
Największa liczba elementów indukcyjnych w każdym cyklu zawierającym gałęzie α i β jeżeli $n_L=n-1$ i jeżeli $n_L=n$	$n_{L\alpha\beta}$	$E\left(\frac{(\bar{n}-\bar{m})}{2}\right)+1$	
Największa liczba elementów pojemnościowych w każdym cyklu zawierającym gałęzie α i β	$n_{c\alpha\beta}$	$\frac{\bar{p}}{2}$	
Liczba elementów indukcyjnych w każdym iloczynie funkcji jednoczesności	$n_{L_{\text{sim}}}$	$(n-1)-E\left(\frac{\bar{n}-\bar{p}}{2}\right)$	
Liczba elementów pojemnościowych w każdym iloczynie funkcji jednoczesności	$n_{c_{\text{sim}}}$	$E\left(\frac{\bar{n}-\bar{m}}{2}\right)$	
Rozmieszczenie elementów pojemnościowych, gdzie: α i β — elementy indukcyjne są w przeciwdrzewach zawierających gałąź α i β α albo β — elementy indukcyjne są w przeciwdrzewach zawierających gałąź α albo β ani α ani β — elementy indukcyjne są w przeciwdrzewach niezawierających gałęzi ani α ani β			α albo β
Rozmieszczenie elementów indukcyjnych, gdzie: α i β — elementy pojemnościowe są w przeciwdrzewach zawierających gałęzie α i β α albo β — elementy pojemnościowe są w przeciwdrzewach zawierających gałęzie α albo β ani α ani β — elementy pojemnościowe są w przeciwdrzewach niezawierających gałęzi ani α ani β			ani α ani β

Tablica 3

stopnia $(\bar{m} + \bar{n})$ przy założeniu minimalnej liczby elementów pojemnościowych

$\bar{m}$ — potęga nieparzysta $\bar{n}$ — potęga nieparzysta	$\bar{m}$ — potęga parzysta $\bar{n}$ — potęga parzysta	$\bar{m}$ — potęga nieparzysta $\bar{n}$ — potęga parzysta
$E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right)$	$\frac{\bar{n}}{2}$	$\frac{\bar{n}}{2} - 1$
$E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right) + 1$	$\frac{\bar{n}}{2}$	$\frac{\bar{n}}{2} + 1$
$\frac{1}{2}(\bar{m} - \bar{p}) + E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right) + 1$	$\frac{1}{2}(\bar{m} - \bar{p}) + \frac{\bar{n}}{2}$	$\frac{1}{2}(\bar{m} - \bar{p}) + \frac{\bar{n}}{1} + 1$
$n = n_L + 1$ $E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right) + 2$	$n = n_L + 1$ $\frac{\bar{n}}{2} + 1$	$n = n_L$ $\frac{\bar{n}}{2} + 1$
$n = n_L + 1$ $\frac{1}{2}(\bar{m} - \bar{p}) + E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right) + 2$	$n = n_L + 1$ $\frac{1}{2}(\bar{m} - \bar{p}) + \frac{\bar{n}}{2} + 1$	$n = n_L$ $\frac{1}{2}(\bar{m} - \bar{p}) + \frac{\bar{n}}{2} + 1$
$\frac{1}{2}(\bar{m} - \bar{p})$	$\frac{1}{2}(\bar{m} - \bar{p})$	$\frac{1}{1}(\bar{m} - \bar{p})$
$\frac{\bar{n} - \bar{m}}{2}$	$\frac{\bar{n} - \bar{m}}{2}$	$E\left(\frac{\bar{n} - \bar{m}}{2}\right) - 1$
$E\left(\frac{\bar{p}}{2}\right)$	$\frac{\bar{p}}{2}$	$E\left(\frac{\bar{p}}{2}\right)$
$(n - 1) - \frac{\bar{n} - \bar{p}}{2}$	$(\bar{n} - 1) - \frac{\bar{n} - \bar{p}}{2}$	$(n - 1) - E\left(\frac{\bar{n} - \bar{p}}{2}\right)$
$\frac{\bar{n} - \bar{m}}{2}$	$\frac{\bar{n} - \bar{m}}{2}$	$E\left(\frac{\bar{n} - \bar{m}}{2}\right)$
α i β	α albo β	α i β
α albo β	α albo β	ani α ani β

Ze względu jednak na skomplikowany proces maszynowej generacji liczb strukturalnych autor pracy ograniczył się do zastosowania półautomatycznej metody projektowania filtrów, którą można podzielić na dwa następujące etapy:

1) na podstawie zadanej transmitancji skutecznej czwórnika projektujemy zgodnie z zależnościami wyprowadzonymi w podrozdziałach 4.1 ÷ 4.4 strukturę czwórnika, a następnie obliczamy liczbę strukturalną grafu opisującego czwórnik oraz funkcję jednocześnie;

2) w oparciu o otrzymane wyniki wprowadzamy odpowiednie dane do programu podanego w [6, str. 267]. Szczegółowe obliczenia elementów polegające na rozwiązaniu układu równań nieliniowych są wykonywane za pomocą maszyny cyfrowej, według programu ułożonego przez mgr inż. E. Pieczkę. Program jest napisany w języku „Algol” i jest przeznaczony do liczenia na maszynie cyfrowej GIER.

W celu łatwiejszego określenia struktur syntezowanych układów można przy projektowaniu korzystać z zależności zestawionych w tablicach 2 i 3.

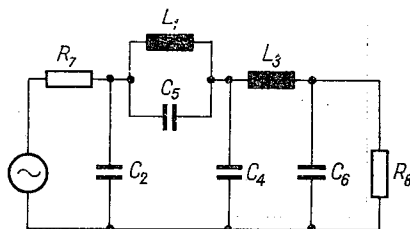
Z kolei w tablicach 4, 5, 6 i 7 podano przykłady struktur zaprojektowanych według zależności zestawionych w tablicach 2 i 3. Struktury te spełniają warunki konieczne do realizacji zadanej funkcji. Sprawdzeniem, czy dany układ spełnia również warunki wystarczające jest otrzymanie za pomocą maszyny cyfrowej rozwiązania układu równań nieliniowych w zakresie elementów dodatnich. Struktury nie dające rozwiązania w zakresie elementów dodatnich są automatycznie usuwane z procesu obliczeniowego.

Poniżej przedstawiono wyniki obliczeń trzech prostych filtrów reaktancyjnych zaprojektowanych na maszynie cyfrowej w oparciu o program podany w [6, str. 267]. Synteza tych filtrów była przeprowadzona według opisanego powyżej procesu obliczeniowego.

Przykład 4.5-1.

Zaprojektowano filtr o charakterystyce równofalistej, którego transmitancja skuteczna jest funkcją wymierną stopnia siódmego i ma postać:

$$K_s(s) = \frac{s^2 + 4}{7,9168s^5 + 14,159s^4 + 22,782s^3 + 20,365s^2 + 12,754s + 4} \quad (4.5-1)$$



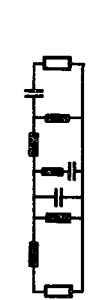
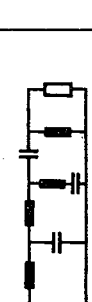
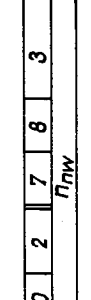
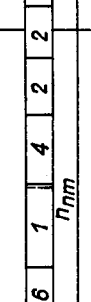
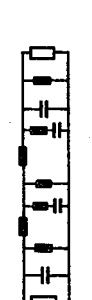
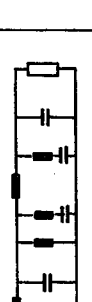
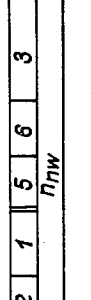
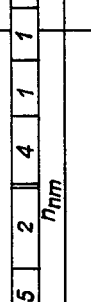
Rys. 4. Filtr reaktancyjny, którego transmitancja skuteczna jest określona wzorem (4.5-1)

Obliczenia filtru były przeprowadzone na maszynie cyfrowej GIER. Czas obliczeń wynosił ok. 6 min. W wyniku obliczeń otrzymano układ pokazany na rys. 4.

Za pomocą maszyny cyfrowej w wyniku 10 iteracji wyznaczono następujące wartości elementów:

$$L_1 = 1,154722 \text{ H}, \quad L_3 = 1,675625 \text{ H}, \quad C_2 = 1,112944 \text{ F}, \quad C_4 = 0,615818 \text{ F}, \\ C_5 = 4,6188886 \text{ F}, \quad C_6 = 1,11286 \text{ F}, \quad R_7 = 1\Omega, \quad R_8 = 1,13542 \Omega.$$

Tablica 5. Filtry środkowoprzepustowe ($\bar{m} < \bar{n}$, $\bar{p} \neq 0$)

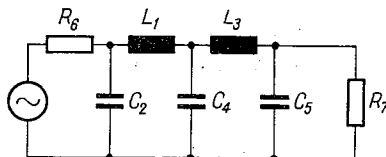
Minimum elementów indukcyjnych														Minimum elementów pojemnościowych													
η_{Cnm}	η_{nm}	η_{Csimnm}	η_{Lmin}	η_{R+S}	$\eta_{L\alpha\beta}$	$\eta_{C\alpha\beta}$	η_{Lsim}	η_{Cnw}	η_{nw}	η_{Lsimnw}	η_{Lnw}	η_{nw}	η_{Lsimnw}	η_{Lnw}	η_{nw}												
1	4	5	2	3	1	1	1	5	6	3																	
$\bar{m}=4, \bar{n}=7$ $p=2$																											
																											
2	5	5	2	4	2	2	1	0	7	7	3																
$\bar{m}=5, \bar{n}=9$ $p=1$																											
																											
3	4	5	1	4	1	1	2	2	5	6	3																
$\bar{m}=6, \bar{n}=8$ $p=4$																											
																											
4	11	11	1	9	8	0	2	1	19	19	9																
$\bar{m}=19, \bar{n}=20$ $p=3$																											
																											

Przykład 4.5-2.

Zaprojektowano filtr o charakterystyce optymalnie monotonicznej (Papoliusa), którego transmitancja skuteczna jest funkcją wymierną stopnia piątego i ma postać:

$$K_s(s) = \frac{0,224}{s^5 + 1,551s^4 + 2,203s^3 + 1,693s^2 + 0,898s + 0,224} \quad (4.5-2)$$

Obliczenia tego filtru były również przeprowadzone na maszynie cyfrowej GIER. Czas obliczeń wynosił ok. 24 minuty. Wartości elementów obliczono w wyniku 5 iteracji. Schemat filtru jest przedstawiony na rys. 5.



Rys. 5. Filtr reaktancyjny, którego transmitancja skuteczna jest określona wzorem (4.5-2)

Obliczone elementy mają następujące wartości:

$$\begin{aligned} L_1 = L_3 &= 1,466371 \text{ H}, & C_2 = C_5 &= 0,7479164 \text{ F}, \\ C_4 &= 0,4263531 \text{ F}, & R_6 = R_7 &= 0,9644312 \Omega. \end{aligned}$$

Przykład 4.5-3.

Zaprojektowano filtr o stratnych cewkach indukcyjnych, o charakterystyce maksymalnie płaskiej (Butterwortha), którego transmitancja skuteczna jest funkcją wymierną piątego stopnia i ma postać:

$$K_s(s) = \frac{0,914166}{s^5 + 3,2360s^4 + 5,236068s^3 + 5,236068s^2 + 3,236068s + 1} \quad (4.5-3)$$

Obliczenia tego filtru były przeprowadzane w dwu etapach. Najpierw obliczono filtr bezstratny o transmitancji

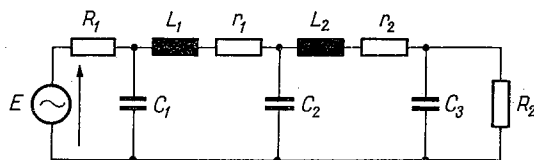
$$K_s^{(1)}(s) = \frac{1}{s^5 + 3,2360s^4 + 5,236068s^3 + 5,236068s^2 + 3,236068s + 1} \quad (4.5-4)$$

Obliczenia filtru bezstratnego przeprowadzono w wyniku 6 iteracji. Czas obliczeń wyniósł 3,6 minuty.

W drugim etapie uwzględniono stratności cewek indukcyjnych przyjmując za początkowe wartości elementów wartości uzyskane w pierwszym etapie liczenia. Czas obliczeń wynosił około 2 minut. W wyniku 3 iteracji wyznaczone zostały na maszynie GIER następujące wartości elementów filtru:

$$\begin{aligned} L_1 = L_2 &= 1,2595972 \text{ H}, \\ r_1 = r_2 &= 7,4542268 \cdot 10^{-2} \Omega, \\ C_1 = C_3 &= 1,2375818 \text{ F}, \\ C_2 &= 0,37590573 \text{ F}, \\ R_1 = R_2 &= 0,7939046 \Omega. \end{aligned}$$

Schemat obliczonego filtru jest przedstawiony na rys. 6.



Rys. 6. Filtr reaktancyjny, którego transmitancja skuteczna jest określona wzorem (4.5-4)

Przytoczone obliczenia dotyczyły filtrów o bardzo prostej strukturze. Jednak program liczenia filtrów podany w [6, str. 267] umożliwia przeprowadzenie obliczeń filtru w zasadzie o dowolnie skomplikowanej strukturze. Ograniczenia mogą być spowodowane jedynie pojemnością i szybkością działania maszyny cyfrowej.

5. PODSUMOWANIE UZYSKANYCH WYNIKÓW, WNIOSKI I PERSPEKTYWY DALSZYCH BADAŃ

Celem niniejszej pracy była metodyka projektowania filtrów elektrycznych za pomocą maszyny cyfrowej, w oparciu o teorię grafów, przy uwzględnieniu założonych warunków optymalizacyjnych.

W pracy starano się przede wszystkim o znalezienie związku pomiędzy własnościami topologicznymi układu a funkcją transmitancji realizowaną przez dany układ.

Podano ogólną, symetryczną postać funkcji transmitancji, która umożliwia w zasadzie dowolny wybór syntezowanych filtrów.

Następnie korzystając z algebry liczb strukturalnych określono współczynniki wielomianów licznika i mianownika zadanej transmitancji, w zależności od wartości elementów projektowanego układu. Podane związki pozwoliły na sformułowanie szeregu twierdzeń oraz własności układu w zależności od parametrów zadanej transmitancji o postaci symetrycznej. Z ważniejszych twierdzeń można wymienić: twierdzenie o minimalnej liczbie elementów indukcyjnych albo pojemnościowych dla układów reaktancyjnych, twierdzenie o minimalnej liczbie elementów reaktancyjnych w dowolnym układzie R, L, C , twierdzenie o minimalnej liczbie elementów indukcyjnych i minimalnej liczbie obwodów w układach R, C oraz twierdzenie o minimalnej liczbie elementów pojemnościowych i minimalnej liczbie obwodów w układach R, L .

W dalszej części pracy podano metodę syntezy układów reaktancyjnych przy założonych warunkach optymalizacyjnych. W wyniku wyprowadzonych twierdzeń i własności zostały zestawione w tablicach zależności umożliwiające projektantowi bezpośrednie obliczenie liczby elementów oraz określenie struktury filtrów w zależności od stopnia wielomianu licznika i mianownika zadanej funkcji transmitancji.

Powyższe tablice mogą być również wykorzystane w dotychczas stosowanych metodach syntezy, np. w metodzie Badera, polegającej na rozwinięciu immitancji wejściowej filtru w stanie jałowym lub w stanie zwarcia.

Wykonano również proste przykłady obliczeniowe, które potwierdziły słuszność podanej metody i wyprowadzonych wzorów. Obliczenia filtrów zostały wykonane na maszynie cyfrowej GIER.

Autor zamierza kontynuować badania w dziedzinie maszynowej syntezy filtrów elektrycznych w następujących kierunkach:

- 1) zastosowanie przy syntezie filtrów całkowicie automatycznego procesu obliczeń na maszynie cyfrowej;
- 2) opracowanie syntezy filtrów z uwzględnieniem straconości elementów;
- 3) opracowanie zagadnienia optymalizacji filtrów w oparciu o teorię grafów, pod względem czułości układu;
- 4) opracowanie metody syntezy w oparciu o algebrę liczb strukturalnych drugiego rzędu.

Opracowanie zagadnienia podanego w rozdziale 4 umożliwi przeprowadzenie syntezy skomplikowanych układów filtrujących przy wykorzystaniu maszyny o średniej pojemności.

Dodatek

UZUPEŁNIAJĄCE DOWODY I OKREŚLENIA

1. DOWÓD TWIERDZENIA 3.3-2 O MINIMALNEJ LICZBIE ELEMENTÓW POJEMNOŚCIOWYCH W UKŁADACH R, C

Podstawiając do wzoru (3.1-4), określającego liczbę elementów indukcyjnych w każdym wyrazie funkcji wyznacnikowej o potęgze j zmiennej niezależnej s , wartość $n_{Lj} = 0$ otrzymujemy zależność:

$$\frac{n+j-p_j}{2} = 0, \quad (1-1)$$

a stąd:

$$n-p_j = -j. \quad (1-2)$$

Podstawiając następnie tę zależność do wzoru (3.1-7), określającego liczbę elementów pojemnościowych w każdym wyrazie funkcji wyznacnikowej o potęgze j zmiennej niezależnej s , otrzymujemy równanie:

$$n_{Cj} = -j = |j|, \quad (1-3)$$

gdzie:

$$-n \leq j \leq 0.$$

Z kolei uwzględniając we wzorze (1-3) wartość $j = \mu - \bar{n}$ otrzymujemy liczbę elementów pojemnościowych, konieczną i wystarczającą do uzyskania zadanego niezerowego współczynnika przy najniższej potęgze $(-l)$ zmiennej s transmitancji o postaci symetrycznej:

$$n_{C-l} = -(\mu - \bar{n}) = l. \quad (1-4)$$

Biorąc pod uwagę, że najmniejsza wartość l dla układów RC równa się $\bar{n}$, otrzymujemy zależność:

$$n_{C_{\min}} = \bar{n}. \quad (1-5)$$

Zależność ta potwierdza słuszność twierdzenia 3.3-2.

2. DOWÓD WŁASNOŚCI 3.3-1 O ROZMIESZCZENIU ELEMENTÓW REAKTANCYJNYCH W UKŁADACH R, L i R, C

W przypadku układów R, L , przy założeniu minimalnej liczby elementów indukcyjnych $l = 0$, a więc przy założeniu również minimalnej liczby obwodów, z własności 2.3-1 i zależności 2.3-10 wynika następujący związek:

$$n_{\min} = \bar{n} \quad (2-1)$$

Z kolei w przypadku układów R, C przy założeniu minimalnej liczby elementów pojemnościowych $l = \bar{n}$, a więc przy założeniu również minimalnej liczby obwodów, na podstawie własności 2.3-1 i z zależności (2.3-11) możemy napisać analogiczny związek do związku podanego powyżej:

$$n_{\min} = \bar{n}. \quad (2-2)$$

Uwzględniając równanie (2-1) we wzorze (3.3-6) a równanie (2-2) we wzorze (1.1-5) otrzymujemy następujące zależności:
dla układów R, L

$$n_{L_{\min}} = n_{\min} = \bar{n} \quad (2-3)$$

oraz dla układów R, C

$$n_{C_{\min}} = n_{\min} = \bar{n}. \quad (2-4)$$

Zależności (2-3) i (2-4) potwierdzają słuszność wniosku 3.3-1.

3. OKREŚLENIE MAKSYMALNEJ I MINIMALNEJ LICZBY OBWODÓW DLA UKŁADÓW O MINIMALNEJ LICZBIE ELEMENTÓW INDUKCYJNYCH

Jak już było zaznaczone w rozdziale 4.1, przy założeniu minimalnej liczby elementów indukcyjnych, dla maksymalnej albo dla minimalnej wartości l , wartość n osiąga też odpowiednio wartość maksymalną albo minimalną.

Rozpatrzmy najpierw układy, w których wielkość n osiąga wartość maksymalną.

Biorąc pod uwagę własność 3.1-1 oraz wzór (3.1-7) możemy obliczyć najniższą potęgę $j = -l$ wielomianu mianownika funkcji transmitancji o postaci symetrycznej, jaką można uzyskać przy danej liczbie elementów pojemnościowych, według następującej zależności:

$$-l = n - 2n_c - p_{-l}. \quad (3-1)$$

W dalszym ciągu uwzględniając, że przy założeniu minimalnej liczby elementów indukcyjnych $n = l$ albo $n = l+1$, możemy napisać następujące równania:

$$n = n_c + \frac{p_{-l}}{2} \quad (3-2)$$

dla nieparzystego wielomianu licznika transmitancji oraz

$$n = n_c + \frac{p_{-l} + 1}{2} \quad (3-3)$$

dla parzystego wielomianu licznika transmitancji.

Z drugiej strony według równania 2.3-19 dla iloczynów funkcji wyznacznikowej o odpowiadających najniższej potędze zmiennej niezależnej s słuszna jest zależność:

$$n - l = 2\tau + p_{-l}. \quad (3-4)$$

Podstawiając do powyższego wzoru różnicę $n - l = 0$ albo różnicę $n - l = 1$, oraz biorąc pod uwagę, że wielkości τ i p_{-l} mogą przyjmować tylko wartości całkowite i dodatnie, otrzymujemy następujące wzory:

$$\tau = 0 \quad (3-5)$$

i

$$p_{-l} = 0 \quad (3-6)$$

dla nieparzystego wielomianu licznika transmitancji oraz

$$\tau = 0 \quad (3-7)$$

i

$$p_{-l} = 1 \quad (3-8)$$

dla parzystego wielomianu licznika funkcji transmitancji.

Podstawiając zależność (3-6) do wzoru (3-2) a zależność (3-8) do wzoru (3-3) możemy wyprowadzić niżej podane zależności:

$$n_{\max} = n_c, \quad (3-9)$$

dla nieparzystego wielomianu licznika transmitancji
oraz

$$n_{\max} = n_c + 1 \quad (3-10)$$

dla parzystego wielomianu licznika transmitancji.

Rozpatrzmy obecnie układy, dla których wielkości n osiągają wartości minimalne.

Z postaci symetrycznej transmitancji (wzór 2.3-6) wynika, że najwyższa potęga o współczynniku niezerowym wynosi μ . Na podstawie wzoru (2.3-17) oraz analizy przeprowadzonej w podrozdziale 3.1, nie trudno wykazać, że pomiędzy wielkościami μ i $n_{L\min}$ zachodzi związek:

$$\mu \leq n_{L\min}, \quad (3-11)$$

a ponieważ $\mu = \bar{n} - l$, to możemy napisać:

$$l \geq \bar{n} - n_{L\min}. \quad (3-12)$$

Z powyższej zależności wynika, że l osiąga wartość najmniejszą w przypadku spełnienia równości:

$$l_{\min} = \bar{n} - n_{L\min}. \quad (3-13)$$

Podstawiając do wzoru (3-13) wartość $l = n$, albo wartość $l = n - 1$ otrzymujemy następujące zależności:

$$n_{\min} = \bar{n} - n_{L\min} \quad (3-14)$$

dla nieparzystego wielomianu licznika
oraz:

$$n_{L\min} = \bar{n} - n_{L\min} + 1 \quad (3-15)$$

dla parzystego wielomianu licznika.

Zależności (3-9) i (3-10) określają, przy założeniu minimalnej liczby elementów indukcyjnych, maksymalną liczbę niezależnych obwodów układu, a zależności (3-14) i (3-15) minimalną liczbę niezależnych obwodów układu.

4. OKREŚLENIE MAKSYMALNEJ I MINIMALNEJ LICZBY OBWODÓW DLA UKŁADÓW O MINIMALNEJ LICZBIE ELEMENTÓW POJEMNOŚCIOWYCH

Zgodnie z zależnościami podanymi w podrozdziale 4.2, przy założeniu minimalnej liczby elementów pojemnościowych, w przypadku maksymalnej wartości η , wielkość l osiąga wartość minimalną, i na odwrót.

Rozpatrzmy najpierw układy, w których wielkość n osiąga wartość maksymalną.

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie jak w p. 3 dodatku łatwo możemy wykazać, że wielkość l osiąga wartość najmniejszą w przypadku spełniania zależności:

$$l_{\min} = \bar{n} - n_L. \quad (4-1)$$

Uwzględniając w powyższej zależności wielkość $l = \bar{n} - n$, albo wielkość $l = \bar{n} - n + 1$ otrzymujemy następujące równania:

$$n_{\max} = n_L \quad (4-2)$$

dla nieparzystego stopnia $(\bar{m} + \bar{n})$ transmitancji
oraz:

$$n_{\max} = n_L + 1 \quad (4-3)$$

dla parzystego stopnia $(m + n)$ funkcji transmitancji.

W dalszym ciągu rozpatrzmy układy, w których wielkość n osiąga wartość minimalną.

Biorąc pod uwagę zależność (2.3-18) nietrudno również wykazać, że przy danej liczbie elementów pojemnościowych maksymalną wartość ujemnej potęgi $(-l)$ zmiennej niezależnej s funkcji transmitancji o postaci symetrycznej możemy uzyskać w przypadku układów, dla których współczynnik a_{-l} jest określony tylko przez takie iloczyny, w których nie występują elementy indukcyjne.

W związku z powyższym podstawiając do wzoru (3.1-4) wielkość $j = -l$ oraz wielkość $n_{L(-l)} = 0$ otrzymujemy równanie:

$$n - l - p_{-l} = 0. \quad (4-4)$$

Uwzględniając w powyższym równaniu odpowiednie wartości $n+l$ oraz p_{-l} określone przy założeniu minimalnej liczby elementów pojemnościowych w tablicy 1 dla czterech rodzajów transmitancji, możemy napisać następującą zależność:

$$l_{\max} = n_{c_{\min}}. \quad (4-5)$$

a zatem:

$$n_{\min} = \bar{n} - n_{c_{\min}} \quad (4-6)$$

dla nieparzystego stopnia $(\bar{m} + \bar{n})$ transmitancji

oraz

$$n_{\min} = \bar{n} - n_{c_{\min}} + 1 \quad (4-7)$$

dla parzystego stopnia $(\bar{m} + \bar{n})$ funkcji transmitancji.

Wzory (4-2) i (4-3) określają, przy założeniu minimalnej liczby elementów pojemnościowych maksymalną liczbę niezależnych obwodów układu, a wzory (4-6) i (4-7) minimalną liczbę niezależnych obwodów układu.

5. DOWODY TWIERDZEŃ 4.4-1 I 4.4-2 DOTYCZĄCYCH STRUKTUR SYNTEZOWANYCH UKŁADÓW

5.1. Dowód twierdzenia 4.4-1 punkt 1 i punkt 2 oraz dowód twierdzenia 4.4-2 punkt 1 i punkt 2

Na podstawie twierdzenia 1 podanego w pracy [2], a dotyczącego obliczania liczby strukturalnej A i A^d oraz podanej definicji funkcji wyznacznikowej możemy zauważyć, że wszystkie elementy indukcyjne układu występują w sumie iloczynów funkcji wyznacznikowej odpowiadających najwyższej potędze zmiennej niezależnej s (wzór 2.3-17), natomiast wszystkie elementy pojemnościowe występują w sumie iloczynów funkcji wyznacznikowej, odpowiadających najniższej potędze zmiennej niezależnej s (wzór 2.3-18).

Aby udowodnić twierdzenie 4.1-1 punkty 1, 2 oraz twierdzenie 4.4-2 punkty 1, 2 należy określić liczbę elementów rezystancyjnych występujących w wyżej wymienionych iloczynach, które jak wiadomo, stanowią odpowiednie przeciwdrzewa grafu będącego obrazem liczby strukturalnej A^d .

Przy założeniu minimalnej liczby elementów indukcyjnych liczba elementów rezystancyjnych występująca w iloczynach odpowiadających najwyższej potędze μ zmiennej niezależnej s jest określona w tablicy 1 dla czterech rodzajów funkcji transmitancji odpowiednio wzorami (3.1-21), (3.1-27), (3.1-33) i (3.1-39).

Natomiast liczbę elementów rezystancyjnych występujących w iloczynach o najniższej potędze zmiennej niezależnej s możemy obliczyć analogicznie jak w dodatku, p. 3.

Według otrzymanych wyników w dodatku p. 3 wiadomo, że

$$p_{-l} = 0 \quad (5.1-1)$$

dla nieparzystego wielomianu licznika transmitancji

oraz

$$p_{-l} = 1 \quad (5.1-2)$$

dla parzystego wielomianu licznika funkcji transmitancji.

Wzory (3.1-21), (3.1-27), (3.1-33) i (3.1-39) oraz wzory (5.1-1) i (5.1-2) potwierdzają słuszność twierdzenia 4.4-1 w punktach 1 i 2.

Z kolei przy założeniu minimalnej liczby elementów pojemnościowych, liczba elementów rezystancyjnych występujących w iloczynach odpowiadających najniższej potędze (-1) zmiennej niezależnej s , jest określona w tablicy 1 dla czterech rodzajów funkcji transmitancji odpowiednio wzorami (3.1-24), (3.1-30), (3.1-36) i (3.1-42).

Natomiast liczbę elementów rezystancyjnych występujących w iloczynach o najwyższej potędze zmiennej niezależnej s możemy obliczyć podstawiając do wzoru (2.3-19) wielkość $|j| = \mu = \bar{n} - l$. Otrzymujemy następujące równanie:

$$n + l - \bar{n} = 2\tau + p_\mu. \quad (5-4)$$

Podstawiając do powyższego wzoru sumę $n + l = \bar{n}$ albo $n + l = -1$ oraz uwzględniając analogicznie jak poprzednio, że wielkości τ i p_μ mogą przyjmować tylko wartości całkowite i dodatnie, otrzymujemy następujące wzory:

$$p_\mu = 0 \quad (5-5)$$

dla nieparzystego stopnia $(\bar{m} + \bar{n})$ transmitancji
oraz:

$$p_\mu = 1 \quad (5-6)$$

dla parzystego stopnia $(m + n)$ transmitancji.

Wzory (3.1-24), (3.1-30), (3.1-36) i (3.1-42) oraz wzory (5.1-5) i (5.1-5) potwierdzają słuszność twierdzenia 4.4-2 w punktach 1 i 2.

5.2. Dowód twierdzenia 4.4-1 punkt 3 i punkt 4 oraz dowód twierdzenia 4.4-2 punkt 3 i punkt 4

Wiadomo, że każdy cykl układu zawierający gałęzie α i β otrzymujemy przez usunięcie z obrazu liczby strukturalnej A^d gałęzi określonych przez elementy jednego z kolejnych wyrazów funkcji jednoczesności.

Z drugiej strony na podstawie wzorów (2.3-30) i (2.3-31) nietrudno zauważyć, że liczba elementów indukcyjnych, występujących w wyrazach funkcji jednoczesności, jest nie mniejsza od liczby tych elementów występujących w jednym z wyrazów odpowiadających najwyższej potędze v zmiennej niezależnej s licznika transmitancji o postaci symetrycznej, a w przypadku elementów pojemnościowych — w jednym z wyrazów odpowiadających najniższej potędze $(v - \bar{m} + \bar{p})$ zmiennej niezależnej s .

Podstawiając więc do wzoru (3.1-11) wielkość $i = v = \bar{m} - l$, a do wzoru (3.1-14) wielkość $i = v - \bar{m} + \bar{p} = l + \bar{p}$ otrzymujemy związki określające najmniejszą liczbę elementów indukcyjnych n_{L_v} , albo najmniejszą liczbę elementów pojemnościowych $n_{c_{v - \bar{m} + \bar{p}}}$ występujących w wyrazach funkcji jednoczesności, wyrażone w następujący sposób:

$$n_{L_v} = \frac{\bar{m} + n - l - 1}{2}, \quad (5.2-1)$$

$$n_{c_{v - \bar{m} + \bar{p}}} = \frac{n + l - \bar{p} - 1}{2}. \quad (5.2-2)$$

Z powyższych rozważań wynika, że największą liczbę elementów indukcyjnych $n_{L_{\alpha\beta}}$ albo pojemnościowych $n_{c_{\alpha\beta}}$, występujących w każdym cyklu zawierającym gałęzie α i β , możemy obliczyć odejmując od ogólnej liczby elementów indukcyjnych albo pojemnościowych występujących w układzie liczbę tych elementów określonych wzorami (5.2-1) i (5.2-2).

Przy założeniu minimalnej liczby elementów indukcyjnych należy uwzględnić w podanych wzorach wartość $l = n$ albo wartość $l = n - 1$. W ten sposób otrzymaną liczbę elementów n_{L_v} należy odjąć od odpowiedniej minimalnej liczby elementów indukcyjnych podanej w tablicy 1, a liczbę elementów pojemnościowych $n_{c_{v - \bar{m} + \bar{p}}}$ należy odjąć od przyjętej zgodnie z własnością 4.1-2 liczby elementów pojemnościowych równej n albo $n - 1$.

Po wykonaniu prostych przekształceń otrzymujemy następujące zależności:

$$n_{L\alpha\beta} = n_{L_{\min}} - n_{L\nu} = E\left(\frac{\bar{n} - \bar{m}}{2}\right) \quad (5.2-3)$$

oraz

$$n_{c\alpha\beta} = n - n_{c\nu - \bar{m} + \bar{p}} = E\left(\frac{\bar{p}}{2}\right) + 1 \quad (5.2-4)$$

dla nieparzystego wielomianu licznika transmitancji

i

$$n_{c\alpha\beta} = n - 1 - n_{c\nu - \bar{m} + \bar{p}} = \frac{\bar{p}}{2}. \quad (5.2-5)$$

dla parzystego wielomianu licznika transmitancji.

Wzór (5.2-3) potwierdza słuszność twierdzenia 4.4-1 w punkcie 3, a wzory (5.2-3) i (5.2-4) potwierdzają słuszność twierdzenia 4.4-1 w punkcie 4.

Z kolei przy założeniu minimalnej liczby elementów pojemnościowych należy we wzorach (5.2-1) i (5.2-2) uwzględnić wartość $l = \bar{n} - n$ albo wartość $l = \bar{n} - n + 1$. W ten sposób otrzymaną liczbę elementów $n_{c\nu - \bar{m} + \bar{p}}$ należy odjąć od odpowiedniej minimalnej liczby elementów pojemnościowych podanej w tablicy 1, a liczbę elementów indukcyjnych $n_{L\nu}$ należy odjąć od przyjętej zgodnie z własnością 4.2-1 liczby elementów indukcyjnych równej n albo $n - 1$.

Po wykonaniu prostych przekształceń możemy napisać następujące zależności:

$$n_{c\alpha\beta} = n_{c_{\min}} - n_{c\nu - \bar{m} + \bar{p}} = E\left(\frac{\bar{p}}{2}\right) \quad (5.2-6)$$

oraz

$$n_{L\alpha\beta} = n - n_{L\nu - \bar{m} + \bar{p}} = E\left(\frac{\bar{n} - \bar{m}}{2}\right) + 1 \quad (5.2-7)$$

dla nieparzystego stopnia $(\bar{m} + \bar{n})$ transmitancji

i

$$n_{L\alpha\beta} = n - 1 - n_{L\nu - \bar{m} + \bar{p}} = \frac{\bar{n} - \bar{m}}{2} \quad (5.2-8)$$

dla parzystego stopnia $(\bar{m} + \bar{n})$ transmitancji.

Wzór (5.2-6) potwierdza słuszność twierdzenia 4.4-2 w punkcie 3, a wzory (5.2-7) i (5.2-8) potwierdzają słuszność twierdzenia 4.4-2 w punkcie 4.

5.3. Dowód twierdzenia 4.4-1 punkt 5 i punkt 6 oraz dowód twierdzenia 4.4-2 punkt 5 i punkt 6

Jest oczywiste, że liczba elementów indukcyjnych występujących w każdym wyrazie funkcji jednoczesności jest równa liczbie tych elementów występujących w jednym z wyrazów funkcji jednoczesności odpowiadających najniższej potędze $\nu - \bar{m} + \bar{p}$ zmiennej niezależnej s licznika transmitancji o postaci symetrycznej, a liczba elementów pojemnościowych — w jednym z wyrazów odpowiadających najwyższej potędze zmiennej niezależnej ν licznika transmitancji o postaci symetrycznej.

Podstawiając do wzoru (3.1-11) wartość $i = \nu - \bar{m} + \bar{p} = -l + \bar{p}$, a do wzoru (3.1-14) wartość $i = \nu = \bar{m} - l$ możemy napisać następujące wzory:

$$n_{L\nu - \bar{m} + \bar{p}} = \frac{n - l + \bar{p} - 1}{2} \quad (5.3-1)$$

i

$$n_{c\nu} = \frac{n + l - \bar{m} - 1}{2}. \quad (5.3-2)$$

Przy założeniu minimalnej liczby elementów indukcyjnych należy w podanych wzorach uwzględnić wielkość $l = n$ albo wielkość $l = n-1$.

Stąd otrzymujemy następujące zależności:

$$n_{L_{sim}} = n_{L_v - \bar{m} + \bar{p}} = E\left(\frac{\bar{p}}{2}\right) \quad (5.3-3)$$

oraz

$$n_{c_{sim}} = n_{c_v} = n-1 - E\left(\frac{\bar{m}}{2}\right). \quad (5.3-4)$$

Wzór (5.3-3) potwierdza słuszność twierdzenia 4.4-1 w punkcie 5, a wzór (5.3-4) — w punkcie 6.

Z kolei przy założeniu minimalnej liczby elementów pojemnościowych należy we wzorach (5.3-1) i (5.3-2) uwzględnić wielkość $l = \bar{n} - n$ lub wielkość $l = \bar{n} - n + 1$.

Stąd otrzymujemy następujące zależności:

$$n_{L_{sim}} = n_{L_v - \bar{m} + \bar{p}} = n-1 - E\left(\frac{\bar{n} - \bar{p}}{2}\right) \quad (5.3-5)$$

oraz

$$n_{c_{sim}} = n_{c_v} = E\left(\frac{\bar{n} - \bar{m}}{2}\right). \quad (5.3-6)$$

Wzór (5.3-5) potwierdza słuszność twierdzenia 4.4-2 w punkcie 5, a wzór (5.3-6) — w punkcie 6.

5.4 Dowód twierdzenia 4.4-1 punkt 7 oraz dowód twierdzenia 4.4-2 punkt 7

Korzystając ze wzorów (3.1-11) i (3.1-14) możemy wykazać, że dla układów reaktancyjnych połowa bezwzględnej wartości różnicy między dowolnymi potęgami zmiennej s odpowiadającymi danym wyrazom funkcji jednoczesności równa się różnicy między liczbą elementów indukcyjnych albo pojemnościowych występujących w tych wyrazach. Biorąc pod uwagę wyrazy o potęgach wzrastających, elementy pojemnościowe są zastępowane elementami indukcyjnymi, lub odwrotnie przy potęgach malejących.

Wiadomo również, że każdy obwód zawierający gałęzie α i β otrzymujemy przez usunięcie z obrazu liczby strukturalnej A^d gałęzi określonych przez elementy jednego z kolejnych wyrazów funkcji jednoczesności.

Zgodnie z powyższym najprostszym rozwiązaniem strukturalnym, przy którym przez usunięcie z obrazu liczby strukturalnej A^d gałęzi indukcyjnych zamiast pojemnościowych lub odwrotnie otrzymujemy zespół niezależnych obwodów zawierających gałęzie α i β , jest włączenie szeregowo w obwody zawierające gałęzie α i β prostych układów R — rezonansu równoległego albo równoległe prostych układów S — rezonansu szeregowego.

Ponieważ różnica pomiędzy najniższą a najwyższą potęgą zmiennej s licznika transmitancji wynosi $1/2 (\bar{m} \pm \bar{p})$, to suma prostych układów R rezonansu równoległego i prostych układów S rezonansu szeregowego występujących w układzie realizującym daną transmitancję jest równa $1/2 (\bar{m} - \bar{p})$.

W ten sposób wykazaliśmy słuszność twierdzenia 4.4-1 w punkcie 7 i twierdzenia 4.4-2 w punkcie 7.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. S. Bellert, Topological Analysis and Synthesis of Linear Systems, J. Franklin Inst. No. 6, 1962.
2. S. Bellert, Topological Considerations and Synthesis of Linear Networks by Means of the Method of Structural Numbers, Arch. Elektrot. 1963, z. 3.
3. S. Bellert, Computer Four — Pole Synthesis Based on the Method of Structural Numbers, Arch. Elektrot. 1964, z. 3.

4. S. Bellert, Topologiczna analiza i synteza układów liniowych, Zesz. Nauk. Pol. Warsz. Elektryka, nr 37, 1964.
5. S. Bellert, Zarys teorii syntezy liniowych układów elektrycznych, PWN, Warszawa 1964.
6. S. Bellert, H. Woźniacki, Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych, WNT, Warszawa 1968.
7. A. Bers, The Degrees of Freedom in RLC Networks, IRE Trans. Vol. CT-6, pp. 91–95, March 1959.
8. W. Cauer, Synthesis of Linear Communication Networks, New York 1958.
9. S. Darlington, Synthesis of Reactance Four — Poles with Prescribed Insertion Loss Characteristics, Journ. of Math. and Physics, September 1939.
10. B. P. Demidowicz, J. A. Maron, Metody numeryczne, Warszawa 1965.
11. E. A. Guillemin, Introductory Circuit Theory, New York 1953.
12. E. A. Guillemin, Synthesis of Passive Networks, New York 1957.
13. E. Kudrewicz, Struktury drabinkowych filtrów środkowoprzepustowych bez sprzężeń, Prace ITR, zeszyt 2, 1967.
14. Cz. Norek, Obliczenie darlingtonowskich filtrów L, C metodą iloczynów, Praca doktorska, Warszawa 1966.
15. W. Golde, Cz. Norek, S. Paszkowski, Zarys teorii aproksymacji i jej zastosowań w elektrotechnice, PWN, Warszawa — Wrocław 1958.
16. M. Piekarski, Synteza macierzy immitancji czwórników biernych o strukturze drabinkowej, Praca doktorska, Wrocław 1965.
17. O. Przesmycki, Filtry elektryczne, WK i Ł, Warszawa 1962.
18. O. Przesmycki, Półogniowa Zig — zag Laurenta dla środkowoprzepustowych filtrów częstotliwościowo — niesymetrycznych, Prace Zakładu Teorii Łączności IPPT PAN.
19. S. Seshu, M. B. Reed, Linear Graphs and Electrical Networks, London 1961.
20. M. Skowrońska, Optymalizacja rozwiązań filtru elektrycznego, praca doktorska wykonana w Katedrze Teletransmisji Przewodowej PW, Warszawa 1969.
21. O. F. Tuttle, Network Synthesis, New York 1958.
22. H. Watanabe, Synthesis of Band-Pass Ladder Network, IRE Trans., Vol. CT-5, pp. 256–264, December 1958.
23. H. Watanabe, On the Circuit with a Minimum Number of Coils, IRE Trans., March 1960.

M. SKOWROŃSKA

OPTIMIZATION OF SOLUTIONS OF WAVE FILTERS ON THE BASIS OF GRAPH THEORY AND OF COMPUTER SYSTEM SYNTHESIS

Summary

The object of the paper is to develop methods of designing wave filters, taking into account various optimization conditions, with the aid of a computer. The paper is limited to the design of reactive filters.

On the basis of structural number algebra, an analysis of transmittance has been carried out. Owing to this, the minimum number of inductance and capacitance elements having a given function has been defined for any filter system. Dependences have also been derived which define the minimum number of elements in reactance four-terminal networks which carry out the transmittance of degree $\overline{m} + \overline{n}$. The results of considerations covering reactance systems are presented in tables.

Then the minimum number of reactance elements in R, L, C systems, of inductance elements in R, L systems and of capacitance elements in RC systems is presented.

The essential part of the paper deals with the synthesis of four-terminal networks with the structural number method. Next the method is given of designing structures characterized by a minimum number of

induction or capacitance elements with the possibly lowest overall number of elements. In order to arrive at the final calculations of the systems being designed, the author employed a semiautomatic computer calculating technique.

The results are summed up and the prospects for further study discussed at the end of the paper.

M. SKOWROŃSKA

OPTIMALISIERUNG DER GESTALTUNG EINES ELEKTROFILTERS IN ANLEHNUNG AN DIE GRAPHENTHEORIE SOWIE MASCHINENSYNTHESE VON ANORDNUNGEN

Zusammenfassung

Inhalt des Artikels ist die Bearbeitung einer Projektierungsmethode von Elektrofiltern unter Anwendung von Rechenmaschinen und Berücksichtigung verschiedener Optimalisierungsbedingungen. Man beschränkte sich hierbei auf das Entwerfen von Reaktanzfiltern.

Es wurde hier in Anlehnung an die Algebra von Strukturzahlen eine Analyse der Übergangsfunktion durchgeführt, in deren Ergebnis man für beliebige Filteranordnung die Minimalzahl der Induktions- bzw. Volumenelemente bezeichnete, die die gewünschte Funktion realisieren. Es wurden auch Abhängigkeiten gewonnen, die die Minimalzahl der in Reaktanzvierpolen auftretenden und die Übergangsfunktion des Grades $\bar{m} + \bar{n}$ realisierenden Elemente bezeichnen. Die die Reaktanzanordnungen enthaltenden Erwägungsergebnisse wurden in Tabellen zusammengefaßt.

Im Weiteren wurde die Minimalzahl von Reaktanzelementen in Anordnungen R, L, C , von Induktions- elementen in Anordnungen R, L , sowie Volumenelemente in Anordnungen R, C dargestellt.

Im Hauptteil der Bearbeitung wurde — nach durchgeführter Analyse der Vierpolsynthese mittels Strukturzahlmethode — die Projektierungsweise von Strukturen angegeben, die durch eine Minimalzahl von Induktions- bzw. Volumenelementen bei möglichst geringer Elementenzahl charakterisiert wird. Die Ergebnisse wurden in Tabellen zusammengefaßt. Zur endgültigen Berechnung der projektierten Anordnungen wurde halbautomatische Rechentechnik angewandt.

Zusammenfassung der Ergebnisse sowie Angaben über weitere Versuchsperspektiven ergänzen den Inhalt des Artikels.

M. СКОВРОНЬСКА

ОПТИМАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ФИЛЬТРА НА ОСНОВАНИИ ТЕОРИИ ГРАФОВ И МАШИННОГО СИНТЕЗА СХЕМ

Резюме

Целью работы является обработка метода проектирования электрофильтров при помощи цифровой машины с учетом различных оптимизационных условий. В работе рассматривается проектирование только реактивных фильтров.

В работе на основании алгебры структурных чисел произведен анализ передаточной функции, в результате которого было определено для любой фильтрационной системы количество индуктивных или ёмкостных элементов, реализующих заданную функцию. Получены также зависимости, определяющие минимальное количество элементов выступающих в реактивных четырёхполюсниках, реализующих передаточную функцию степени $m + n$. Результаты рассуждений, охватывающие реактивные системы, сопоставлены в таблицах.

Представлено также минимальное количество реактивных элементов в системах $P(R), L(L), C(C)$, индуктивных элементов в системах $P(R), L(L)$, а также ёмкостных в системах $P(C), C(C)$.

В главной части работы после рассмотрения синтеза четырёхполосников методом структурных чисел представлен метод проектирования структур, характеризующихся минимальным количеством индуктивных или ёмкостных элементов при как можно малом количестве элементов, а результаты были сопоставлены в таблицах. С целью получения конечных расчётов проектированных систем была использована полуавтоматическая машинная счётная техника.

Суммирование результатов и перспективы дальнейших исследований представлены в конце работы.

Wybrane zagadnienia teorii traktów liniowych

PIOTR BUBLEWICZ, JAN KOCHMAN (WARSZAWA)

Instytut Teleelektroniki Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 13.4.1970

W artykule przedstawiono zagadnienia szumów termicznych i zniekształceń nieliniarnych występujących w traktach liniowych telefonicznych systemów wielokrotnych z modulacją amplitudy. Podane zależności umożliwiają obliczenie optymalnych parametrów traktów liniowych: wzmacniaczy liniowych (grupowych) i poziomu mocy użytecznej.

1. WPROWADZENIE

Traktem liniowym nazywamy zespół urządzeń zawartych między przełącznikami liniowymi urządzeń końcowych łącznie z torem kablowym (radiowym lub innego typu). Kablowy trakt liniowy składa się z toru kablowego, wzmacniaków przelotowych i wzmacniaków końcowych, kompensujących jego tłumienność.

Urządzenia traktu liniowego zniekształcają przechodzący przez nie sygnał i wprowadzają zakłócenia. Zakłóceniami nazywamy sygnały pojawiające się w układzie, nie związane liniową zależnością z sygnałem użytecznym.

Podstawowymi źródłami zakłóceń w przewodowych traktach liniowych są szumy torów i wzmacniaków, produkty nieliniarne wzmacniaków i przeniki.

W torach współosiowych, w których żyła zewnętrzna jest owinięta taśmą żelazną, już począwszy od 60 kHz tłumienność przeniku pomiędzy torami jest tak duża, że moc zakłóceń stąd wynikająca w porównaniu z zakłóceniami innego pochodzenia, jest do pominięcia.

W torach symetrycznych tłumienność przeniku maleje ze wzrostem częstotliwości. Zjawisko to ogranicza zakres częstotliwości, w jakim tor symetryczny może być wykorzystany, do około 0,5 MHz.

Dla zapewnienia odpowiedniej jakości transmisji CCITT zaleca, aby średnia wartość psfometrycznej mocy zakłóceń wprowadzonych przez trakt liniowy o długości 2500 km, w punkcie o zerowym poziomie względnym, w godzinie największego ruchu, nie przekraczała 7500 pW [1].

Przy projektowaniu parametrów traktu liniowego globalną moc zakłóceń rozlicza się na poszczególne źródła jak następuje:

— w przypadku kablowych torów symetrycznych przeznacza się po 2500 pW na każde źródło zakłóceń,

— w przypadku torów współosiowych 5000 pW przypada na szумы i 2500 pW na produkty nieliniarne.

Podany wyżej rozdział zakłóceń oparty jest na wieloletniej praktyce i studiach; umożliwia on uzyskanie wysokiej jakości parametrów traktu przy stosunkowo łatwych do spełnienia wymaganiach na jego elementy.

Aby szумы nie wnożyły zbyt dużych zakłóceń, minimalny poziom sygnału użytecznego nie może być mniejszy od pewnej określonej wartości. Wyższe częstotliwości pasma liniowego są bardziej tłumione, a tym samym w tym zakresie częstotliwości odstęp poziomu sygnału użytecznego od poziomu szumów jest mniejszy. Ze względu na zakłócenia wnoszone przez produkty nieliniarne, sygnał użyteczny nie może przekraczać pewnej maksymalnej wartości. Rozkład widmowy mocy produktów nieliniarnych jest nierównomierny, czyli znowu — podobnie jak w przypadku zakłóceń szumowych — różne kanały pasma liniowego będą różnie zakłócone.

Celem analizy zakłóceń w trakcie liniowym jest ustalenie takich wymagań na parametry traktu, aby sumaryczna moc zakłóceń była praktycznie jednakowa we wszystkich kanałach i nie przekraczała z góry założonej wartości.

W pracy będą przedstawione przede wszystkim zagadnienia związane z obliczaniem mocy zakłóceń dla systemów pracujących na torach współosiowych. Obliczenie zakłóceń w przypadku torów symetrycznych jest przedstawione w pracy [2].

2. SZUMY A POZIOM WEJŚCIOWY WZMACNIACZY

Szумы wnoszone przez trakt liniowy składają się z szumów ciepłych toru i szumów wzmacniacza. Bezwzględny poziom mocy szumów toru kablowego $p_{sz,t}$, w paśmie kanału telefonicznego o szerokości 3100 Hz, określa równanie:

$$p_{sz,t} = \frac{1}{2} \ln k T \Delta f = -15,95 \text{ Npm}, \quad (1)$$

gdzie:

k — stała Boltzmanna ($1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{K}$),

T — temperatura bezwzględna w $^\circ\text{K}$ (295°K),

Δf — pasmo kanału telefonicznego w Hz (3100 Hz).

Psofometryczny poziom szumów toru kablowego $p_{sz,t,p}$ wynosi więc:

$$p_{sz,t,p} = p_{sz,t} - \ln K = -16,24 \text{ Npm}, \quad (2)$$

gdzie K — współczynnik psofometryczny równy 0,75.

Szумы wzmacniacza określa się zwykle przy pomocy współczynnika szumów F , definowanego w sposób następujący:

$$F = \frac{\text{moc szumów na wyjściu wzmacniacza}}{\text{część mocy szumów na wyjściu wzmacniacza powodowana opornością źródła}}$$

W idealnym przypadku, gdy źródłem szumów jest jedynie oporność wejściowa wzmacniacza, współczynnik szumów wynosi 2 (przy dopasowaniu oporności toru do oporności wejściowej wzmacniacza). W praktyce, w poprawnie zaprojektowanym wzmacniaczu, bez trudności uzyskuje się wartość współczynnika szumów rzędu $3 \div 4$. Wartość współczyn-

nika szumu dla wzmacniaczy stosowanych w telefonicznych systemach wielokrotnych jest praktycznie stała w całym zakresie pasma częstotliwości liniowych.

Bezwzględny poziom mocy szumów odcinka wzmacniakowego, odniesiony do wejścia wzmacniacza — przy założeniu, że współczynnik szumów wzmacniacza $F = 4$ — wynosi zatem:

$$p_{sz, o, w} = p_{i, sz} + \frac{1}{2} \ln F = -15,25 \text{ Npm.} \quad (3)$$

Dopuszczalna moc szumów odcinka wzmacniakowego w paśmie kanału powinna spełniać następującą zależność:

$$\frac{1}{2} \ln P_{sz, o, w, p} \leq p_{sz, o, w, p} - p_{r, we}, \quad (4)$$

gdzie:

$P_{sz, o, w, p}$ — dopuszczalna, psfometryczna moc szumów odcinka wzmacniakowego w kanale, w punkcie o zerowym poziomie względnym,

$p_{sz, o, w, p}$ — psfometryczny poziom mocy szumów odcinka wzmacniakowego,

$p_{r, we}$ — względny poziom sygnału wejściowego.

Moce szumów poszczególnych odcinków wzmacniakowych dodają się arytmetycznie. Zatem dopuszczalną, psfometryczną moc szumów odcinka wzmacniakowego, w punkcie o zerowym poziomie względnym, można obliczyć z równania:

$$P_{sz, o, w, p} = \frac{P_{sz, i, o, p}}{n} = P_{sz, i, o, p} \frac{l}{L}, \quad (5)$$

gdzie:

$P_{sz, i, o, p}$ — dopuszczalna moc szumów łącza odniesienia w kanale, odniesiona do punktu o zerowym poziomie względnym,

L — długość łącza odniesienia (km),

l — długość odcinka wzmacniakowego (km),

n — ilość odcinków wzmacniakowych w łączy odniesienia.

Jeżeli weźmiemy pod uwagę, że poziom wejściowy wzmacniacza różni się od poziomu wyjściowego o tłumienność odcinka wzmacniakowego:

$$p_{r, we} = p_{r, wy} - \alpha \cdot l, \quad (6)$$

gdzie:

$p_{r, wy}$ — względny poziom wyjściowy,

α — tłumienność jednostkowa kabla dla najwyższej częstotliwości pasma liniowego,

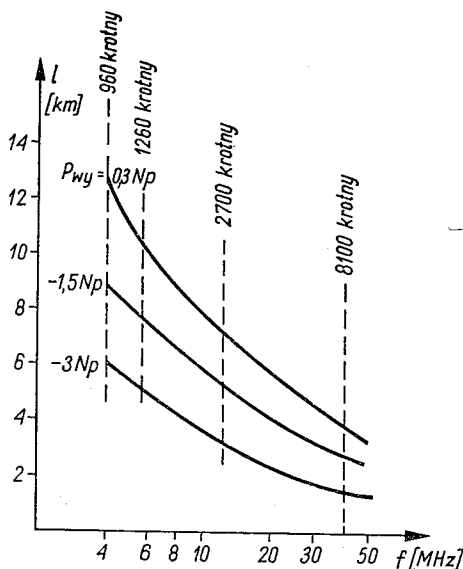
wówczas z zależności (4), wziętej ze znakiem równości, oraz z zależności (5) i (6) otrzymamy:

$$\frac{1}{2} \ln \left(P_{sz, i, o, p} \cdot \frac{l}{L} \right) = p_{sz, o, w, p} - p_{r, wy} + \alpha \cdot l,$$

lub inaczej:

$$\alpha \cdot l = \frac{1}{2} \ln l + p_{r,wy} + \frac{1}{2} \ln \frac{P_{sz,i,o,p}}{L} - p_{sz,o,w,p}. \quad (7)$$

Równanie (7) wiąże ze sobą cały szereg podstawowych parametrów traktu liniowego, takich jak: długość odcinków wzmacniakowych, względny poziom wyjściowy wzmacniacza, tłumienność jednostkową toru, dopuszczalną moc szumów dla całego łącza odniesienia i poziom szumów odcinka wzmacniakowego, odniesiony do wejścia wzmacniacza. Równanie to powinno być spełnione dla wszystkich kanałów, a w szczególności dla kanału, dla którego poziom mocy sygnału na wejściu wzmacniacza jest najniższy.



Rys. 1. Zależność długości odcinka wzmacniakowego od maksymalnej częstotliwości pasma liniowego. Parametr: poziom wyjściowy wzmacniacza. Warunki: $F = 4$; $P_{sp} = 2500$ pF; kabel współosiowy 2,9/9,5 mm

Na rys. 1 przedstawiono graficzną ilustrację zależności (7). Na wykresie przedstawiono zależność długości odcinka wzmacniakowego od maksymalnej częstotliwości pasma liniowego, dla różnego poziomu wyjściowego wzmacniacza.

3. MOC UŻYTECZNA I POZIOM WYJŚCIOWY WZMACNIACZY

Parametry elementu aktywnego pracującego w stopniu wyjściowym wzmacniacza, sposób rozwiązania zdalnego zasilania, względy ekonomiczne i cały szereg innych czynników określają maksymalną, praktycznie niezniekształconą moc wyjściową wzmacniacza. Moc ta, zwana mocą użyteczną wzmacniacza, jest określona jako taka moc wyjściowa sygnału sinusoidalnego, której dalsze zwiększenie przez podwyższenie poziomu sygnału

wejściowego o 0,1 Np (1 dB) powoduje wzrost bezwzględnego poziomu trzeciej harmonicznej sygnału o 2,3 Np (20 dB).

Nominalny poziom wyjściowy wzmacniacza powinien być niższy od poziomu mocy użytecznej i spełniać równanie:

$$p_{wy} = \frac{1}{2} \ln P_{uz} - \Delta p_{p,s} - \Delta p_{p,p} + 1,73 [\text{N}], \quad (8)$$

gdzie:

- P_{uz} — moc użyteczna wzmacniacza,
- $\Delta p_{p,s}$ — wielkość odstepu poziomu mocy szczytowej sygnału przesyłanego w danym systemie od poziomu średniej wartości mocy sygnału w kanale,
- $\Delta p_{p,p}$ — wielkość zapasu poziomu wyjściowego, uwzględniająca odchyłki tego poziomu od wartości nominalnej, wynikłe ze zmian temperatury pracy, niedokładności korekcji itd.; wielkość ta w systemach współosiowych jest zwykle równa 0,7 Np,
- 1,73 Np — średni poziom mocy sygnału telefonicznego w kanale, w punkcie o zerowym poziomie względnym.

Dla systemów o krotności $N \geq 240$, poziom mocy szczytowej sygnału jest o 1,4 ÷ 1,5 Np większy od poziomu sumy wartości średnich mocy wszystkich kanałów; stąd:

$$\Delta p_{p,s} = 1,4 + \frac{1}{2} \ln N, \quad N \geq 240.$$

Dla uzyskania równomiernego rozkładu zakłóceń (szumów i zniekształceń nieliniarnych) w paśmie liniowym systemu stosuje się wstępne nachylenia charakterystyki amplitudowej nadawanego sygnału, zwane preemfazą.

Dla kanałów położonych w górnym zakresie pasma systemu różnica między poziomem szumów odniesionym do wejścia wzmacniacza, a poziomem sygnału wejściowego jest najmniejsza. Dla uzyskania stałej różnicy poziomu szumów i sygnału wejściowego w całym paśmie należy obniżyć poziom nadawania w kanałach położonych w dolnym zakresie pasma liniowego. Z punktu widzenia szumów najkorzystniejszy rozkład poziomu nadawania — preemfaza — miałby przebieg pokrywający się z charakterystyką tłumienności odcinka kablowego.

Optymalny dobór charakterystyki preemfazy umożliwiałby równoczesna analiza szumów i produktów nieliniarnych pojedynczego odcinka wzmacniakowego i całego traktu.

Dzięki zastosowaniu preemfazy można uzyskać:

- zmniejszenie mocy zakłóceń wnoszonych przez trakt liniowy,
- zmniejszenie wymagań na szумы i tłumienność harmoniczných,
- zmniejszenie mocy użytecznej wzmacniacza.

W systemach współosiowych, dzięki zastosowaniu preemfazy uzyskuje się praktycznie kilkakrotne zmniejszenie mocy użytecznej wzmacniacza oraz parokrotnie mniejszą moc zakłóceń w stosunku do dopuszczalnej mocy, zalecanej przez CCITT.

Po uwzględnieniu preemfazy zależność (8) będzie miała następującą postać:

$$\begin{aligned} p_{wy} &= +1,7 + \frac{1}{2} \ln P_{uż} - 1,4 - \frac{1}{2} \ln N - 0,7 + \frac{1}{2} \ln K_{\Delta p} = \\ &= \frac{1}{2} \ln P_{uż} - 0,4 - \frac{1}{2} \ln N + \frac{1}{2} \ln K_{\Delta p} \end{aligned} \quad (9)$$

gdzie $K_{\Delta p}$ — współczynnik, określający zmniejszenie mocy szczytowej w wyniku zastosowania preemfazy.

Współczynnik ten jest równy:

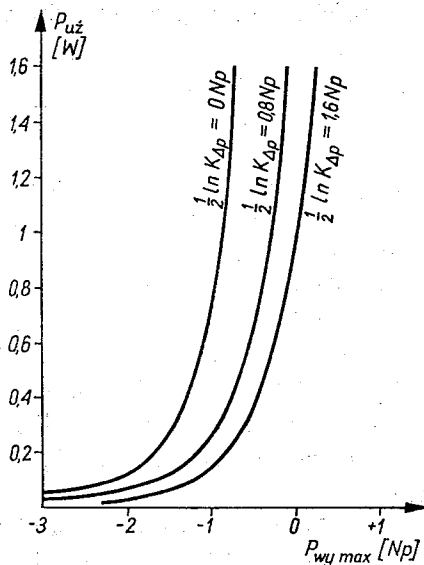
$$K_{\Delta p} = \frac{\sum_{i=1}^N e^{2p_{wyi}}}{N e^{2p_{wy, \max}}},$$

gdzie:

$p_{wy, i}$ — poziom wyjściowy w i -tym kanale,

$p_{wy, \max}$ — poziom wyjściowy kanału najwyżej położonego w paśmie liniowym sygnału.

Na rys. 2 przedstawiono zależność mocy użytecznej od poziomu wyjściowego najwyżej położonego kanału w paśmie liniowym systemu 2700-krotnego dla różnych wartości



Rys. 2. Zależność mocy użytecznej od poziomu wyjściowego najwyżej położonego kanału w paśmie liniowym, dla systemu o krotności 2700

preemfazy (różnicy pomiędzy poziomami wyjściowymi kanałów brzegowych pasma liniowego). Na podstawie wykresów podanych na tym rysunku można łatwo wyznaczyć wartość mocy użytecznej dla systemów o innej krotności, należy tylko odczytaną z wykresu wartość mocy użytecznej pomnożyć przez $N/2700$.

Z rys. 2 widać, że stosowanie mocy użytecznej większej od $100 \div 200$ mW dla systemu o krotności $N_k = 2700$ nie jest opłacalne, ponieważ dalszy wzrost mocy użytecznej daje niewielki wzrost poziomu wyjściowego, a tym samym niewielkie tylko wydłużenie odcięcia wzmacniakowego.

Dzięki zastosowaniu większego nachylenia charakterystyki preemfazy w górnym zakresie częstotliwości, a jednocześnie mniejszego nachylenia w dolnym zakresie pasma liniowego uzyskuje się bardziej równomierny wpływ wszystkich kanałów na moc szczytową sygnału zbiorczego [3]. Gdy natomiast zastosować bardziej liniową preemfazę, wtedy wpływ kanałów położonych w zakresie niskich częstotliwości pasma liniowego jest mniejszy. Zjawisko to, ograniczające wartość preemfazy, nie występuje przy odpowiednio ukształtowanej preemfazie nieliniowej stosowanej powszechnie w systemach wielokrotnych o dużej krotności.

4. PRODUKTY NIELINEARNE WZMACNIACZY I DODAWANIE SIĘ ICH W TRAKCIE LINIOWYM

4.1. Produkty nielinearne

W każdym wzmacniaczu sygnał wyjściowy jest pewną nieliniarną funkcją sygnału wejściowego. Zależność sygnału wyjściowego U_{wy} od wejściowego U_{we} można przedstawić w postaci szeregu potęgowego:

$$U_{wy} = a_1 U_{we} + a_2 U_{we}^2 + a_3 U_{we}^3 + \dots \quad (9)$$

Analiza układów nieliniarnych przy pomocy szeregu potęgowego jest łatwa i prosta, jeśli wystarczająco dobrą aproksymację charakterystyki nieliniarnej układu uzyskuje się przy pomocy kilku pierwszych wyrazów szeregu. W przypadku wzmacniaczy teletransmisyjnych wystarczająco dobrą dokładność daje uwzględnienie trzech pierwszych wyrazów. Niech napięcie wejściowe będzie sumą sinusoidalnych drgań o pulsacjach ω i amplitudach U :

$$U_{we} = \sum_{j=1}^n U_j \cos(\omega_j t + \varphi_j), \quad (10)$$

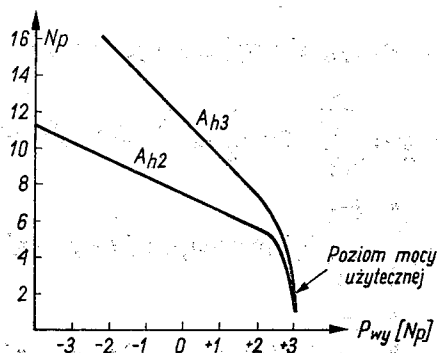
Wówczas składowa kwadratowa sygnału wyjściowego wzmacniacza będzie miała postać:

$$\begin{aligned} a_2 U_{we}^2 = & \frac{1}{2} a_2 \sum_{i=1}^n U_i^2 + \frac{1}{2} a_2 \sum_{i=1}^n U_i \cos(2\omega_i t + 2\varphi_i) + \\ & + a_2 \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{j-1} U_j U_i \cos[(\omega_j + \omega_i)t + \varphi_j + \varphi_i] + \\ & + a_2 \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} U_j U_i \cos[(\omega_j - \omega_i)t + \varphi_j - \varphi_i]. \end{aligned} \quad (11)$$

Natomiast składową sześcienną można przedstawić w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
 a_3 U_{we}^3 = & \frac{3}{4} a_3 \sum_{i=1}^n U_i^3 \cos(\omega_i t + \varphi_i) + \frac{1}{4} a_3 \sum_{i=1}^n U_i^3 \cos(3\omega_i t + 3\varphi_i) + \\
 & + \frac{3}{2} a_3 \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} U_j^2 U_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) + \frac{3}{2} a_3 \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} U_j U_i^2 \cos(\omega_j t + \varphi_j) + \\
 & + \frac{3}{4} a_3 \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} U_j^2 U_i \cos[(2\omega_j + \omega_i)t + 2\varphi_j + \varphi_i] + \\
 & + \frac{3}{4} a_3 \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} U_j U_i^2 \cos[(\omega_j + 2\omega_i)t + \varphi_j + 2\varphi_i] + \\
 & + \frac{3}{4} a_3 \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} U_j^2 U_i \cos[(2\omega_j - \omega_i)t + 2\varphi_j + \varphi_i] + \\
 & + \frac{3}{4} a_3 \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} U_j U_i^2 \cos[(\omega_j - 2\omega_i)t + \varphi_j - 2\varphi_i] + \\
 & + \frac{2}{3} a_3 \sum_{k=3}^n \sum_{j=2}^{k-1} \sum_{i=1}^{j-2} U_k U_j U_i \{ \cos[(\omega_k + \omega_j + \omega_i)t + \\
 & + \varphi_k + \varphi_j + \varphi_i] + \cos[(\omega_k + \omega_j - \omega_i)t + \varphi_k + \varphi_j - \varphi_i] + \\
 & + \cos[(\omega_k - \omega_j - \omega_i)t + \varphi_k - \varphi_j - \varphi_i] \}. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Z zależności (11) i (12) widać, jakiego typu oraz ile produktów występuje we wzmacniaczach, których charakterystykę amplitudową można aproksymować szeregiem (9).



Rys. 3. Zależność tłumienności harmonicznch drugiej i trzeciej od poziomu wyjściowego

Ponadto można zauważyć, że przy wzroście poziomu wejściowego o S neperów, tłumienność drugiej harmonicznej zmniejszy się również o S neperów, a tłumienność trzeciej harmonicznej o $2S$ neperów (rysunek 3).

Tablica 1

Własności produktów nieliniarnych wzmacniacza

Typ produktu	Amplituda produktu na wyjściu wzmacniacza	Poziom produktu w stosunku do poziomu harmonicznej tego samego rzędu	Rząd produktu
$2\omega_i$	$\frac{a_2}{2} U_i^2$		drugi
$\omega_i \pm \omega_j$	$a_2 U_i U_j$	0,7 Np wyższy od poziomu drugiej harmonicznej	
$3\omega_i$	$\frac{a_3}{4} U_i^3$		trzeci
$2\omega_i + \omega_j$ $2\omega_i - \omega_j$ $\omega_i - 2\omega_j$	$\frac{3}{4} a_3 U_i^2 U_j$	1,1 Np wyższy od poziomu trzeciej harmonicznej	
$\omega + \omega_j + \omega_k$ $\omega_i + \omega_j - \omega_k$ $\omega_i - \omega_j - \omega_k$	$\frac{3}{2} a_3 U_i U_j U_k$	1,8 Np wyższy od poziomu trzeciej harmonicznej	

Podstawowe typy produktów nieliniarnych wzmacniaczy oraz ich podstawowe własności przedstawiono w tablicy 1.

4.2. Sumowanie się produktów nieliniarnych w trakcie liniowym

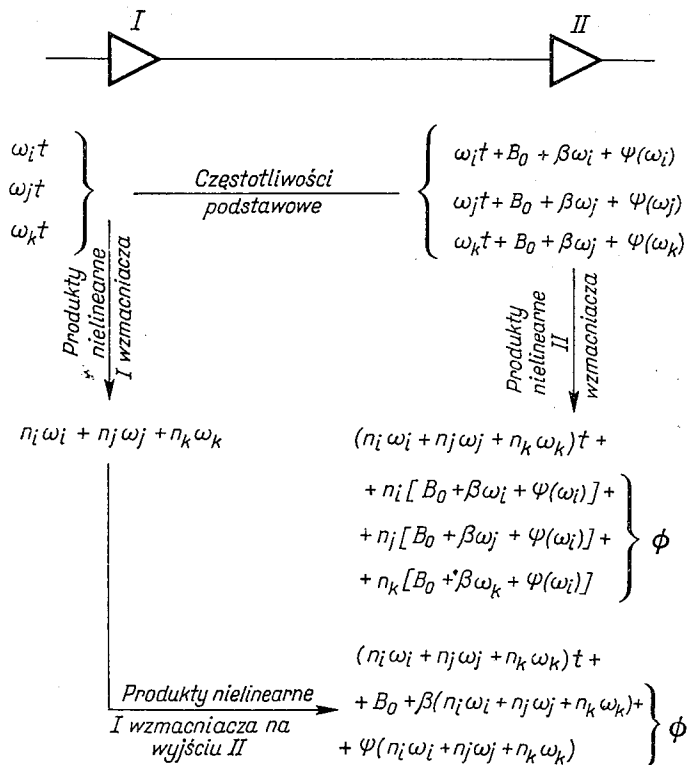
Rozpatrzmy sumowanie się produktów nieliniarnych dwu kolejnych wzmacniaków przelotowych. Na wejściu pierwszego podajemy trzy sygnały sinusoidalne o pulsacjach ω_c , ω_j , ω_k .

Na rysunku 4 przedstawiono częstotliwości i fazy produktów nieliniarnych pierwszego i drugiego wzmacniacza, na wyjściu drugiego wzmacniacza. Charakterystykę przesuwności fazowej B odcinka wzmacniakowego przedstawiono w postaci:

$$B = B_0 + \beta\omega + \psi(\omega). \quad (13)$$

Na wyjściu drugiego wzmacniacza sumują się produkty obu wzmacniaczy. O sposobie ich sumowania decyduje różnica faz Θ produktów obu wzmacniaczy, na wyjściu drugiego wzmacniacza:

$$\Theta = \phi_1 - \phi_2, \quad (14)$$



Rys. 4. Sumowanie się produktów nieliniarnych dwu wzmacniaczy traktu

gdzie:

$$\phi_1 = n_i[B_0 + \beta\omega_i + \psi(\omega_i)] + n_j[B_0 + \beta\omega_j + \psi(\omega_j)] + n_k[B_0 + \beta\omega_k + \psi(\omega_k)]$$

jest fazą produktów drugiego wzmacniacza na jego wyjściu,

$$\phi_2 = B_0 + \beta(n_i \omega_i + n_j \omega_j + n_k \omega_k) \psi(n_i \omega_i + n_j \omega_j + n_k \omega_k)$$

jest fazą produktów pierwszego wzmacniacza na wyjściu drugiego.

Różnicę faz produktów nieliniarnych dwu kolejnych wzmacniaczy podano w tablicy 2.

Tablica 2

Różnica faz produktów nieliniarnych dwu łańcuchowo połączonych wzmacniaczy, na wyjściu drugiego wzmacniacza

Typ produktu	$\Theta = \Phi_1 - \Phi_2$
$2\omega_i$	$B_0 + 2\psi(\omega_i) - \psi(2\omega_i)$
$\omega_i + \omega_j$	$B_0 + \psi(\omega_i) + \psi(\omega_j) + \psi(\omega_i + \omega_j)$
$\omega_i - \omega_j$	$-B_0 + \psi(\omega_i) - \psi(\omega_j) - \psi(\omega_i - \omega_j)$
$3\omega_i$	$2B_0 + 3\psi(\omega_i) - \psi(3\omega_i)$
$2\omega_i - \omega_j$	$2\psi(\omega_i) - \psi(\omega_j) - \psi(2\omega_i - \omega_j)$
$\omega_i + \omega_j - \omega_k$	$\psi(\omega_i) + \psi(\omega_j) - \psi(\omega_k) - \psi(\omega_i + \omega_j - \omega_k)$

Produkty nieliniowe typu $\omega_i + \omega_j - \omega_k$, $2\omega_i - \omega_j$ nie zawierają członu B_0 i różnica tych typów produktów osiąga wartość zerową przy liniowej charakterystyce fazowej odcinka wzmacniakowego. Oznacza to, że napięcia wymienionych produktów dodają się arytmetycznie, lub — jak mówimy — produkty te dodają się w trakcie liniowym napięciowo.

Produkty, których fazy zawierają człon B_0 , dodają się w trakcie liniowym bardziej przypadkowo.

W praktyce wystarczającą dokładność obliczeń uzyskuje się przyjmując, że w jednorodnym odcinku traktu liniowego produkty nieliniarne typu $\omega_i + \omega_j - \omega_k$ i $2\omega_i - \omega_j$ sumują się napięciowo, natomiast pozostałe — mocowo. Przez jednorodny odcinek traktu rozumiemy odcinek traktu, w którym nie jest stosowana żadna przemiana. Przyjmuje się, że wszystkie zakłócenia poszczególnych odcinków jednorodnych sumują się mocowo.

4.3. Rozkład gęstości mocy produktów nieliniarnych

4.3.1. Uwagi ogólne

Dla uproszczenia zapisu zależności związanych z obliczeniem rozkładu gęstości mocy produktów nieliniarnych wprowadzimy pojęcie współczynnika zawartości harmonicznych w punkcie, w którym moc sygnału sinusoidalnego użytego do pomiaru harmonicznych wynosi 1 mW.

Współczynniki te określamy w następujący sposób:

a) współczynnik zawartości drugiej harmonicznej

$$h_{20}^2 = \frac{P_{2i0}}{P_{i0}}, \quad P_{i0} = 1 \text{ mW}, \quad (15)$$

gdzie:

P_{2i0} — moc drugiej harmonicznej i -tej składowej sygnału użytecznego,

P_{i0} — moc i -tej składowej sygnału, równa 1 mW;

b) współczynnik zawartości trzeciej harmonicznej

$$h_{30}^2 = \frac{P_{3i0}}{P_{i0}}, \quad P_{i0} = 1 \text{ mW}, \quad (16)$$

gdzie P_{3i0} — moc trzeciej harmonicznej i -tej składowej sygnału użytecznego.

Współczynniki te nazwijmy względnymi współczynnikami zawartości harmonicznych. Dla uproszczenia analizy zakładamy, że wymienione współczynniki nie zależą od częstotliwości.

Korzystając z definicji względnego współczynnika zawartości harmonicznych i zależności (11), (12) możemy napisać następujące zależności na moc różnych produktów nieliniarnych dla dowolnej mocy sygnałów częstotliwości tworzących:

$$\begin{aligned} P_{2i} &= h_{20}^2 P_i^2, \\ P_{i \pm j} &= 4 h_{20}^2 P_i P_j, \\ P_{3i} &= h_{30}^2 P_i^3, \\ P_{2i \pm j} &= 9 h_{30}^2 P_i^2 P_j, \\ P_{k \pm j \pm i} &= 36 h_{30}^2 P_i P_j P_k. \end{aligned} \quad (17)$$

4.3.2. *Analityczne ujęcie sygnału zbiorczego*

Sygnał zbiorczy, występujący w trakcie liniowym telefonii wielokrotnej, składa się z sygnałów telefonicznych, telegrafii, radiofonii itd.; jest on sygnałem przypadkowym. Wymienione sygnały są stacjonarnymi, tzn. ich parametry statystyczne są stałe w czasie.

Obliczanie produktów nieliniarnych wzmacniaków przy analitycznie dokładnym ujęciu sygnału zbiorczego byłoby bardzo uciążliwe. Do tego celu stosowane są zasadniczo dwie aproksymacje sygnału zbiorczego:

a) przyjmuje się, że sygnał zbiorczy jest sygnałem przypadkowym. Aproksymuje się charakterystykę widmową mocy, a stąd wyznacza się charakterystykę czasową funkcją korelacji,

b) przyjmuje się, że sygnał zbiorczy jest sygnałem określonym, przy czym sygnały poszczególnych kanałów mają postać przebiegów sinusoidalnych. Dla systemów o większej krotności przyjmuje się widmo ciągłe sygnału określonego zawarte między częstotliwościami brzegowymi pasma liniowego.

W przypadku aproksymacji statystycznej sygnału można zastosować do analizy metody rachunku statystycznego, co upraszcza analizę i pozwala wyciągnąć bardziej ogólne wnioski. Natomiast zakładając sygnał o parametrach podanych w punkcie b, analiza jest bardziej przejrzysta.

4.3.3. *Analiza statystyczna rozkładów gęstości mocy produktów nieliniarnych*

Zgodnie ze wzorem (9), napięcie wyjściowe wzmacniacza można przedstawić następująco:

$$U_{wy} = S(t) + \varepsilon(t), \quad (18)$$

gdzie:

$S(t)$ — dowolna funkcja czasu, ujmująca sygnał użyteczny,

$$\varepsilon(t) = a_2 S^2(t) + a_3 S^3(t) \quad (19)$$

— funkcja ujmująca produkty nieliniarne wzmacniacza.

Przyjmując, że $S(t)$ jest stacjonarną funkcją przypadkową, $\varepsilon(t)$ będzie również taką samą funkcją.

Rozkład prawdopodobieństwa wartości chwilowych sygnału zbiorczego telefonii wielokrotnej o krotności powyżej kilkunastu jest normalny, a z uwagi na to, że sygnał zbiorczy jest stacjonarnym, parametry rozkładu są stałe w czasie. Widmo energetyczne sygnału $S(t)$ zawarte jest między brzegowymi częstotliwościami pasma liniowego.

Przyjmując oznaczenia:

$$\begin{aligned} S(t) &= x; & S(t+\tau) &= x_\tau; \\ \varepsilon(t) &= y(x); & \varepsilon(t+\tau) &= y(x_\tau); \end{aligned} \quad (20)$$

gęstość prawdopodobieństwa zmiennych przypadkowych x i x_τ można wyrazić następująco:

$$p(x, x_\tau) = \frac{1}{2\pi K_s(0) \sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{x^2 + x_\tau^2 - 2\rho x \cdot x_\tau}{2K_s(0)(1-\rho^2)}}, \quad (21)$$

gdzie:

$K_s(0)$ — składowa stała funkcji korelacji sygnału $S(t)$,

ϱ — współczynnik korelacji

$$\varrho = \frac{K_s(\tau)}{K_s(0)}$$

przy czym $K_s(\tau)$ — funkcja korelacji sygnału $S(t)$.

Korzystając z zależności (19), (20) i (21) funkcję korelacji $\varepsilon(t)$ przedstawić można następująco [4]:

$$\begin{aligned} K'_\varepsilon(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y(x)y(x_\tau)p(x,x_\tau)dx dy = \frac{1}{2K_s(0)\sqrt{1-\varrho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (a_2^2 x^2 x_\tau^2 + a_3^2 x^3 x_\tau^3 + \\ &+ a_2 a_3 x^2 x_\tau^3 + a_2 a_3 x^3 x_\tau^2) e^{-\frac{x^2 + x_\tau^2 - 2\varrho x x_\tau}{2K_s(0)(1-\varrho^2)}} dx dx_\tau = \\ &= a_2^2 K_s^2(0) + 2a_2^2 K_s^2(\tau) + 9a_3^2 K_s^2(0)K_s(\tau) + 6a_3^2 K_s^3(\tau). \end{aligned} \quad (22)$$

Właściwe zakłócenia wnosi drugi i czwarty wyraz wzoru (22), czyli

$$K(\tau) = 2a_2^2 K_s^2(\tau) + 6a_3^2 K_s^3(\tau). \quad (23)$$

Jak wynika ze wzoru (23), funkcja korelacji sygnału zakłóceń jest wyrażona za pomocą funkcji korelacji sygnału użytecznego. Jeżeli przyjmiemy określone widmo przypadkowego sygnału użytecznego, np.

$$W(f) = W_0 \text{ dla } f_1 < f < f_2$$

oraz

$$W(f) = 0 \text{ poza tym pasmem,}$$

wtedy korzystając ze wzoru na transformatę iloczynu dwóch funkcji i wzoru (24) otrzymamy [7]:

$$W_{\varepsilon 2}(f) = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} W(\sigma)W(f-\sigma)d\sigma \quad (24)$$

oraz

$$W_{\varepsilon 3}(f) = \frac{3a_3^2}{2a_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\varepsilon 2}(\sigma)W(f-\sigma)d\sigma. \quad (25)$$

Wzory (24) i (25) przedstawiają widmową gęstość mocy produktów drugiego i trzeciego rzędu. Rozwiązanie całek (24) i (25) przy założeniu płaskiego widma ciągłego sygnału użytecznego można znaleźć w literaturze [5].

4.3.4. Analiza rozkładu gęstości mocy produktów przy założeniu sygnału określonego

Do analizy rozkładu gęstości mocy produktów przyjmuje się, że widmo sygnału na wyjściu wzmacniaczy jest ciągłe i określone charakterystyką preemfazy. Obliczenie rozkładów mocy przeprowadza się w oparciu o wzory (17).

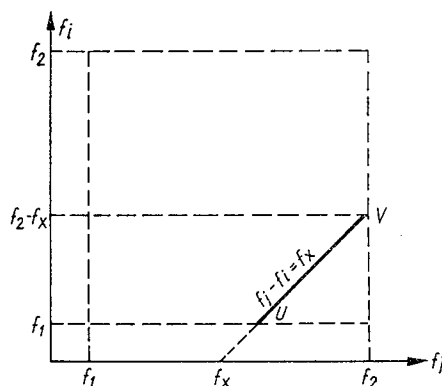
Dla przykładu, moc produktu typu $f_j - f_i$ wyraża się następująco:

$$P_{j-i} = 4h_{20}^2 P_i P_j. \quad (17)$$

Każda para składowych sygnału o częstotliwościach f_i i f_j , spełniających równanie:

$$f_j - f_i = f_x \quad (26)$$

utworzy produkt różnicowy o częstotliwości f_x . Moc produktów różnicowych o częstotliwości f_x jest sumą wszystkich składowych generowanych przez wszystkie pary o częstotliwościach f_i i f_j pasma liniowego. Wykreślamy w układzie współrzędnych f_i i f_j prostą spełniającą równanie (26), jak to przedstawiono na rys. 5. Z rysunku wynika, że wszystkie



Rys. 5. Wyznaczenie zakresu częstotliwości f_i należących do pasma użytecznego systemu, dających produkt różnicowy o częstotliwości f_x

częstotliwości f_i i f_j , odpowiadające odcinkowi UV tworzą produkty różnicowe o częstotliwości f_x , a sumę tych produktów można wyrazić następująco:

$$W_{j-i}(f_x) = 4h_{20}^2 \int_{f_1}^{f_2-f_x} W(f_x - f_i) W(f_i) df_i, \quad (27)$$

gdzie:

$W(f_i)$ — wartość funkcji rozkładu widmowej gęstości mocy dla częstotliwości f_i ,
 $W_{j-i}(f_x)$ — wartość funkcji rozkładu widmowej gęstości mocy produktów nieliniarnych typu $j-i$ dla częstotliwości f_x .

Analogicznie można wyznaczyć wzory do wyznaczania pozostałych produktów drugiego i trzeciego rzędu. Szczegółowe obliczenia przedstawiono w załączniku.

Porównując wzór (27) ze wzorem (24) można stwierdzić, że obliczenia rozkładów gęstości mocy produktów w obu przedstawionych przypadkach jest podobne, ponieważ podobna była aproksymacja sygnału. Szczegółowe obliczenia przy aproksymacji sygnału widmem ciągłym można przeprowadzić korzystając z zależności określającej widmo iloczynu dwóch funkcji lub korzystając z modelu geometrycznego. Przy bardziej złożonej aproksymacji korzystniejsza jest pierwsza metoda obliczeń.

Jak przedstawiono w części 4.2, produkty drugiego rzędu sumują się geometrycznie w trakcie liniowym. Produkty trzeciego rzędu sumują się zarówno geometrycznie jak

i asymetrycznie, zależnie od rodzaju produktów. Praktycznie, z uwagi na sposób sumowania się, na ilość i moc produktów wpadających do pasma liniowego, do ustalenia parametrów traktu bierze się pod uwagę produkty drugiego rzędu, zaś trzeciego rzędu — tylko produkty typu $f_i + f_i - f_k$.

4.3.5. Moc zakłóceń nieliniarnych w kanale telefonicznym

Korzystając ze wzorów (17) i (27)÷(60) można utworzyć zależności do obliczania mocy zakłóceń nieliniarnych w kanałach telefonicznych i określenie warunków na tłumienności harmonicznych wzmacniaczy liniowych.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\varrho(f) = \frac{W(f)}{W(f_2)} \leq 1 \quad \text{— charakterystyka preemfazy,} \quad (28)$$

$$\varrho_{sr} = \frac{\int_{f_1}^{f_2} \varrho(f) df}{f_2 - f_1} \quad \text{— średnia wartość charakterystyki preemfazy,} \quad (29)$$

$$P_c = \int_{f_1}^{f_2} W(f) df = W(f_2) \int_{f_1}^{f_2} \varrho(f) df \quad \text{— moc sygnału wszystkich kanałów,} \quad (30)$$

$$W_{sr} = \frac{\int_{f_1}^{f_2} W(f) df}{f_2 - f_1} \quad \text{— średnia wartość gęstości mocy sygnału,} \quad (31)$$

$$D(f) = \frac{\int_{f_1}^f W(f) df}{\int_{f_1}^{f_2} W(f) df} \quad \text{— funkcja rozkładu mocy sygnału w systemie,} \quad (32)$$

$$P(f_2) = W(f_2) \Delta' \psi \quad \text{— moc sygnału w kanale najwyższej położonym w paśmie liniowym,}$$

$$\Delta' f = 4000 \text{ Hz} \quad \text{— szerokość pasma zajmowanego przez kanał w paśmie liniowym systemu,}$$

$$\Delta f = 3100 \text{ Hz} \quad \text{— rzeczywista szerokość pasma kanału.}$$

Całkowitą moc sygnału we wszystkich kanałach systemu można wyrazić jako funkcję mocy sygnału w najwyższym kanale pasma liniowego, w następujący sposób:

$$\begin{aligned} P_c &= W(f_2) \int_{f_1}^{f_2} \varrho(f) df = W(f_2) \varrho_{sr} \cdot (f_2 - f_1) = \\ &= P(f_2) \varrho_{sr} \frac{f_2 - f_1}{\Delta' f} = P(f_2) \varrho_{sr} \cdot N, \end{aligned} \quad (33)$$

gdzie N — krotność systemu.

Ponieważ nie całe liniowe pasmo częstotliwości wykorzystuje się do transmisji, wyrażenie (33) należy pomnożyć przez stosunek wykorzystywanej części pasma do całego pasma liniowego systemu:

$$\frac{N\Delta f}{f_2 - f_1}.$$

Uwzględniając to, wzór (33) można zapisać w następujący sposób:

$$P_c = P(f_2)q_{sr} \cdot N \frac{N\Delta f}{f_2 - f_1}. \quad (34)$$

Przekształćmy obecnie zależność na gęstość mocy produktu, np. typu $f_i - f_j$, wzór (53) — uwzględniając wzór (34):

$$\begin{aligned} W_{i-i}(f_x) &= 4h_{20}^2 \int_{f_1}^{f_2 - f_x} W(f_x + f_i) W(f_i) df_i = \\ &= 4h_{20}^2 W^2(f_2) \int_{f_1}^{f_2 - f_x} q(f_x + f_i) q(f_i) df_i = \\ &= 4h_{20}^2 W(f_2) P_c \frac{\int_{f_1}^{f_2 - f_x} q(f_x + f_i) q(f_i) df_i}{\int_{f_1}^{f_2} q(f_i) df_i} = \\ &= 4h_{20}^2 W(f_2) P_c D_{j-i}(f_x), \end{aligned}$$

gdzie:

$$D_{i-j}(f_x) = \frac{\int_{f_1}^{f_2 - f_x} q(f_x + f_i) q(f_i) df_i}{\int_{f_1}^{f_2} q(f_i) df_i}.$$

Moc zakłóceń wnoszonych przez jeden odcinek wzmacniakowy w pasmo kanału telefonicznego produktem typu $f_j - f_i$ wynosi:

$$\begin{aligned} P_{j-i}(f_k) &= W_{j-i}(f_k) \Delta' f = 4h_{20}^2 W(f_2) P_c D_{j-i}(f_k) \Delta' f = 4h_{20}^2 P(f_2) P_c D_{j-i}(f_k) = \\ &= 4h_{20}^2 P^2(f_2) q_{sr} N \frac{N\Delta f}{f_2 - f_1} D_{j-i}(f_k) \end{aligned} \quad (35)$$

gdzie f_k — środkowa częstotliwość k -tego kanału.

W systemach teletransmisyjnych moc zakłóceń obliczamy zawsze w punkcie (łącza, kanału), w którym względny poziom sygnału jest równy zeru. W tym przypadku poziom ten wynosi:

$$p_{(j-i)0}(f_k) = \frac{1}{2} \ln P_{j-i}(f_k) - p_{r,wy}(f_k), \quad (36)$$

gdzie:

$p_{(j-i)0}(f_k)$ — poziom mocy zakłóceń typu $f_j - f_i$ w kanale, w punkcie o zerowym poziomie względnym,

$p_{r,wy}(f_k)$ — względny poziom sygnału na wyjściu wzmacniacza.

Korzystając ze wzoru (35) i biorąc pod uwagę, że

$$p_{r,wy}(f_2) = p_{r,wy}(f_1) + p,$$

gdzie p — średni poziom mocy sygnału w kanale telefonicznym, w punkcie o zerowym poziomie względnym ($p = -15$ dBm = $-1,73$ Npm), wyrażenie (35) można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} p_{(j-i)0}(f_k) = & 0,7 + \ln h_{20} + 2p_{r,wy}(f_2) + 2p + \frac{1}{2} \ln N + \frac{1}{2} \ln \varrho_{sr} + \frac{1}{2} \ln \frac{N\Delta f}{f_2 - f_1} + \\ & + \frac{1}{2} \ln D_{j-i}(f_k) - p_{r,wy}(f_k) \end{aligned}$$

(dla $N \geq 240$) (37)

Do obliczenia mocy zakłóceń typu $f_j - f_i$ wnoszonej przez cały trakt liniowy, należy otrzymaną wartość mocy zakłóceń jednego wzmacniaka pomnożyć przez liczbę wzmacniaków w trakcie $n = \frac{L}{I}$ (mocowe dodawanie się tych produktów). Dalej moc zakłóceń należy pomnożyć przez wielkość G wynikającą z szerokości pasma przepustowego kanału oraz ze współczynnika psfometrycznego kanału telefonicznego, czyli przez:

$$G = (0,75)^2 \frac{3100}{4000} = 0,44.$$

Ponadto wprowadzając oznaczenia:

$$A_{20} = -\ln h_{20}$$

oraz

$$p_{r,wy}(f_2) - p_{r,wy}(f_k) = -\frac{1}{2} \ln \varrho(f_k),$$

ostatecznie zależność (37) zapisujemy następująco:

$$\begin{aligned} p_{(j-i)0}(f_k) = & 0,7 + 2p - A_{20} + \frac{1}{2} \ln N + p_{r,wy}(f_2) + \frac{1}{2} \ln \varrho_{sr} + \\ & + \frac{1}{2} \ln \frac{N\Delta f}{f_2 - f_1} + \frac{1}{2} \ln M_{j-i}(f_k) + \frac{1}{2} \ln G + \frac{1}{2} \ln n. \end{aligned} \quad (38)$$

Wzór ten określa psfometryczny poziom mocy produktów nieliniarnych typu $f_j - f_i$ wnoszonych przez trakt liniowy do kanału w punkcie o zerowym poziomie względnym; przy tym

$$M_{j-i}(f_k) = \frac{D_{j-i}(f_k)}{\varrho(f_k)}.$$

Podobne wyrażenie można otrzymać na względny poziom mocy produktów sumacyjnych drugiego rzędu:

$$P_{(j+i)Op}(f_k) = 0,7 + 2p - A_{20} + \frac{1}{2} \ln N + p_{r,wy}(f_2) + \frac{1}{2} \ln \varrho_{sr} + \frac{1}{2} \ln \frac{N\Delta f}{f_2 - f_1} + \\ + \frac{1}{2} \ln M_{j+i}(f_k) + \frac{1}{2} \ln G + \frac{1}{2} \ln n, \quad (39)$$

gdzie:

$$M_{j+i}(f_k) = \frac{\int_{f_1}^{\frac{f_k}{2}} \varrho(f_k - f_i) \varrho(f) df}{\varrho(f_k) \int_{f_1}^{f_2} \varrho(f) df},$$

$$\text{dla } 2f_1 \leq f_k \leq f_1 + f_2.$$

Niżej przedstawimy sposób otrzymywania wzoru określającego moc produktów nieliniarnych typu $f_k + f_j - f_i$ w kanale telefonicznym.

Przekształćmy najpierw w odpowiedni sposób wzór na rozkład gęstości produktów tego typu w paśmie systemu (wzór 58):

$$W_{k+j-i}(f_x) = 36h_{30}^2 W^3(f_2) \left[\int_{f_1}^{f_2 - f_1 - f_x} \varrho(f_i) \int_{f_1}^{\frac{f_x + f_i}{2}} \varrho(f_j) \varrho(f_x + f_i - f_j) \times \right. \\ \left. \times df_j df_i + \int_{f_1 + f_2 - f_x}^{f_2} \varrho(f_i) \int_{f_x + f_1 - f_2}^{\frac{f_x + f_i}{2}} \varrho(f_j) \varrho(f_x + f_i - f_j) df_i df_j \right] = \\ = 36h_{30}^2 W(f_2) P_0^2 \cdot D_{k+i-i}, \quad \text{dla } f_1 \leq f_x \leq f_2, \quad (40)$$

gdzie:

$$D_{k+j-i} = \frac{\int_{f_1}^{f_2 + f_1 - f_x} \int_{f_1}^{\frac{f_x + f_i}{2}} \varrho(f_j) \varrho(f_x + f_i - f_j) df_j df_i}{\int_{f_1}^{f_2} [\varrho(f) df]^2} + \frac{\int_{f_1 + f_2 + f_x}^{f_2} \int_{f_1}^{\frac{f_x + f_i}{2}} \varrho(f_j) \varrho(f_x + f_i - f_j) df_j df_i}{\int_{f_1}^{f_2} [\varrho(f) df]^2}.$$

Moc zakłóceń wprowadzonych przez jeden wzmacniak będzie więc wynosić:

$$P_{k+j-i}(f_k) = W_{k+j-i}(f_k) \Delta f = 36h_{30}^2 P^3(f_2) \varrho_{sr}^2 N^2 \left(\frac{N\Delta f}{f_2 - f_1} \right)^2 D_{k+j-i}(f_k). \quad (41)$$

Psomometryczny poziom mocy zakłóceń trzeciego rzędu typu $f_k + f_j - f_i$ wnoszonych przez cały trakt do kanału telefonicznego można zatem obliczyć z zależności:

$$P_{(k+j-i)Op}(f_k) = 1,8 + 3p - A_{30} + \ln N + 2p_{r,wy}(f_2) + \ln \varrho_{sr} + \\ + \ln \frac{N\Delta f}{f_2 - f_1} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} M_{k+j-i}(f_k) + \frac{1}{2} \ln G + \frac{1}{2} \ln Z \left(\frac{L}{Z1} \right)^2, \quad (42)$$

gdzie:

$$M_{k+j-i}(f_k) = \frac{D_{k+j-i}(f_k)}{q(f_k)},$$

przy czym Z — liczba jednorodnych odcinków w trakcie liniowym.

W analogiczny sposób można otrzymać zależność na względny poziom mocy pozostałych zakłóceń trzeciego rzędu. Będą się one różniły od wyrażenia (42) tylko przebiegiem znormalizowanej funkcji rozkładu gęstości mocy produktów nieliniarnych i sposobem sumowania produktów w trakcie.

4.3.6. Znormalizowane funkcje rozkładu gęstości mocy produktów nieliniarnych w systemach bez preemfazy.

W tym przypadku widmowy rozkład mocy w paśmie liniowym systemu jest stały, czyli:

$$W(f) = W_0 = \text{const},$$

oraz

$$q(f) = \frac{W(f)}{W(f_2)} = 1.$$

Przy tym wzór na rozkład gęstości mocy produktu typu $f_j - f_i$ można zapisać następująco:

$$M_{j-i}(f_k) = \frac{\int_{f_1}^{f_2-f_k} q(f_k+f_i)q(f_i)df_i}{q(f_k) \int_{f_1}^{f_2} q(f_i)df_i} = \frac{\int_{f_1}^{f_2-f_k} df_i}{\int_{f_1}^{f_2} df_i} = 1 - \frac{f_k}{f_2-f_1}. \quad (43)$$

Podobnie można obliczyć wzory na rozkłady pozostałych produktów. Wyniki obliczeń przedstawiono poniżej:

$$M_{j+i}(f_k) = \frac{1}{2} \frac{f_k - 2f_i}{f_2 - f_1} \quad \text{w paśmie} \quad 2f_1 \leq f_k \leq f_2 + f_1, \quad (44)$$

$$M_{k-j-i}(f_k) = \frac{1}{4} \left(\frac{(f_2 - 2f_1 - f_k)^2}{f_2 - f_1} \right), \quad (45)$$

$$M_{k+j-i}(f_k) = \frac{1}{4} \frac{(f_2 - f_1)^2 - 2f_2f_1 + 2f_k(f_2 + f_1 - f_k)}{(f_2 - f_1)^2}, \quad (46)$$

$$M_{i+j+k}(f_k) = \frac{1}{2} \left(\frac{(f_k - 3f_1)^2}{f_2 - f_1} \right). \quad (47)$$

Jak nadmieniono wcześniej, praktycznie bierzemy pod uwagę tylko produkty drugiego rzędu i produkt typu $f_k + f_j - f_i$ trzeciego rzędu. Wprowadzając oznaczenia:

$$\Omega = \frac{f - f_1}{f_2 - f_1} \quad \text{oraz} \quad \gamma = \frac{f_2}{f_1},$$

wzory na rozkład tych produktów można przedstawić następująco:

$$M_{j-i}(\Omega_k) = 1 - \frac{1}{\gamma-1} - \Omega_k, \quad (48)$$

$$M_{j+i}(\Omega_k) = \frac{1}{2} \left(\Omega_k - \frac{1}{\gamma-1} \right), \quad (49)$$

przy czym

$$M_2(\Omega_k) = M_{j-i}(\Omega_k) + M_{j+i}(\Omega_k) = \frac{1}{2} \left(2 - \Omega_k - \frac{3}{\gamma-1} \right), \quad (50)$$

$$M_{k+j-i} = \frac{1}{4} (1 - 2\Omega_k - 2\Omega_k^2). \quad (51)$$

Na rysunkach 6÷9 przedstawiono przebiegi znormalizowanych funkcji rozkładu gęstości mocy produktów obliczone wyżej. Z rysunków tych wynika, że moc wszystkich produktów wpadających do pasma użytecznego, prócz produktu typu $f_k + f_j - f_i$, zależy od względnej szerokości tego pasma.

Z przeprowadzonej analizy wynika, że praktycznie zakłócenia wnoszą tylko niektóre produkty. W systemach o dużej krotności można pominąć zarówno niektóre produkty jak i harmoniczne. Ze względu jednak na pomiary, wymagania na tłumienność szkodliwych produktów określamy pośrednio, ustalając wymagania na tłumienność harmonicznych.

Dla przykładu obliczamy niżej wymagania na tłumienność drugiej i trzeciej harmonicznej gdy dopuszczalna moc produktów drugiego i trzeciego rzędu, w punkcie o zerowym poziomie względnym wynosi $P_{20} = P_{30} = 1000$ pW.

Obliczenia przeprowadzimy dla następujących danych systemu:

$l = 8$ km dla $N = 300$ (kabel małowymiarowy),

$l = 4$ km dla $N = 960$ (kabel małowymiarowy),

$l = 9,3$ km dla $N = 960$ (kabel normalnowymiarowy),

$l = 4,6$ km dla $N = 2700$ (kabel normalnowymiarowy).

Długość odcinka jednorodnego traktu wynosi 280 km.

Poziom mocy produktów drugiego rzędu zgodnie ze wzorami (38), (39) i (50) w punkcie o zerowym poziomie względnym wynosi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln P_{20} = \frac{1}{2} \ln 10^{-6} = 0,7 - A_{2k} + 2p + \frac{1}{2} \ln N + \frac{1}{2} \ln \frac{N \Delta f}{f_2 - f_1} + \\ + \frac{1}{2} \ln M_2(\Omega_k) + \frac{1}{2} \ln G + \frac{1}{2} \ln \frac{L}{l} \end{aligned}$$

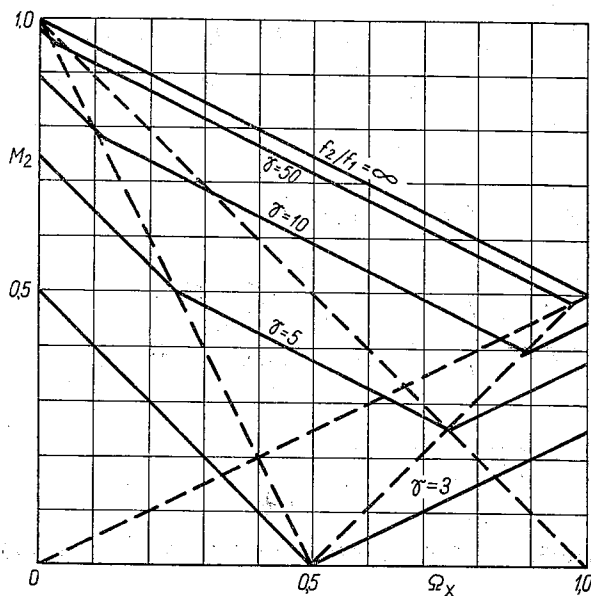
zaś trzeciego rzędu $f_k + f_j - f_i$ zgodnie ze wzorami (41) i (51) jest równy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln P_{30} = \frac{1}{2} \ln 10^{-6} = \frac{1}{2} \ln 24 - A_{3k} + \ln N + 3p + \frac{1}{2} \ln \frac{N \Delta f}{f_2 - f_1} + \\ + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} M_{k+j-i}(\Omega_k) + \frac{1}{2} \ln G + \frac{1}{2} \ln Z \left(\frac{L}{Zl} \right)^2, \end{aligned}$$

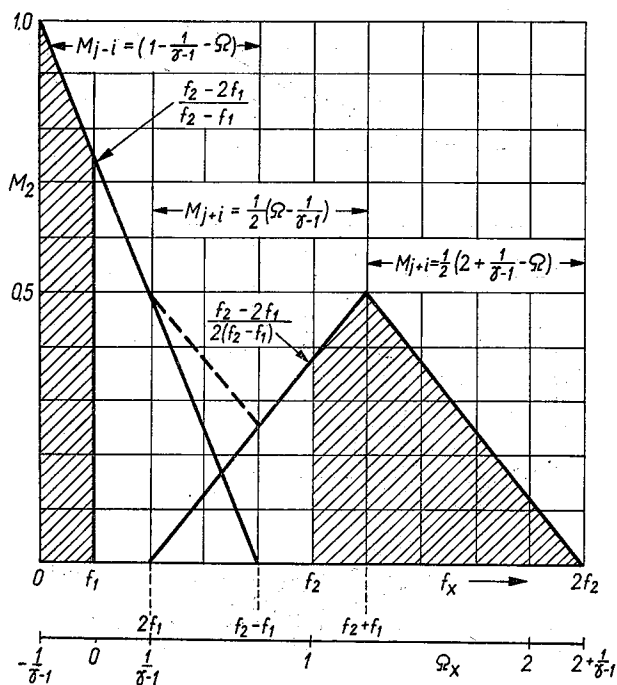
gdzie:

A_{3k}, A_{2k} — tłumienność trzeciej i drugiej harmonicznej przy poziomie znamionowym na wyjściu wzmacniaczy,

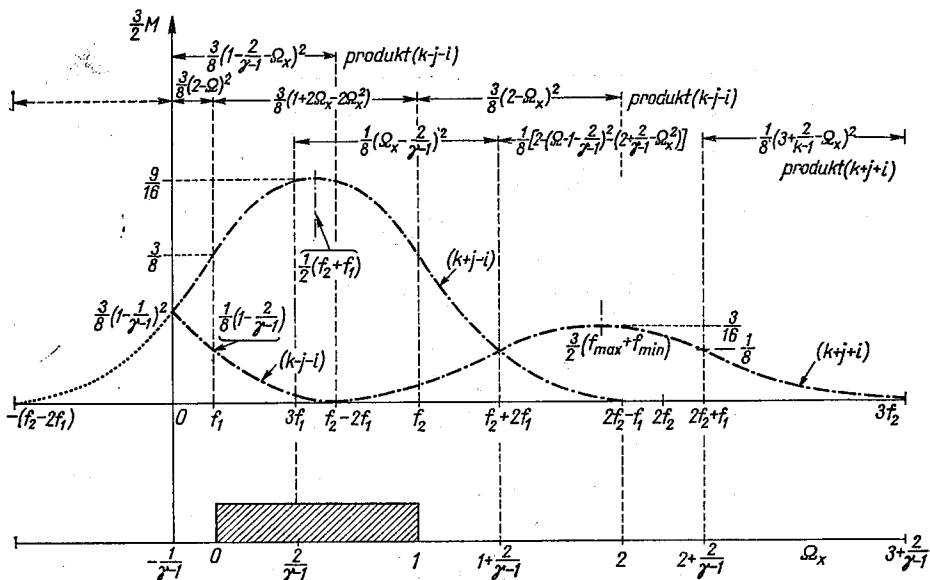
Z — ilość odcinków jednorodnych traktu.



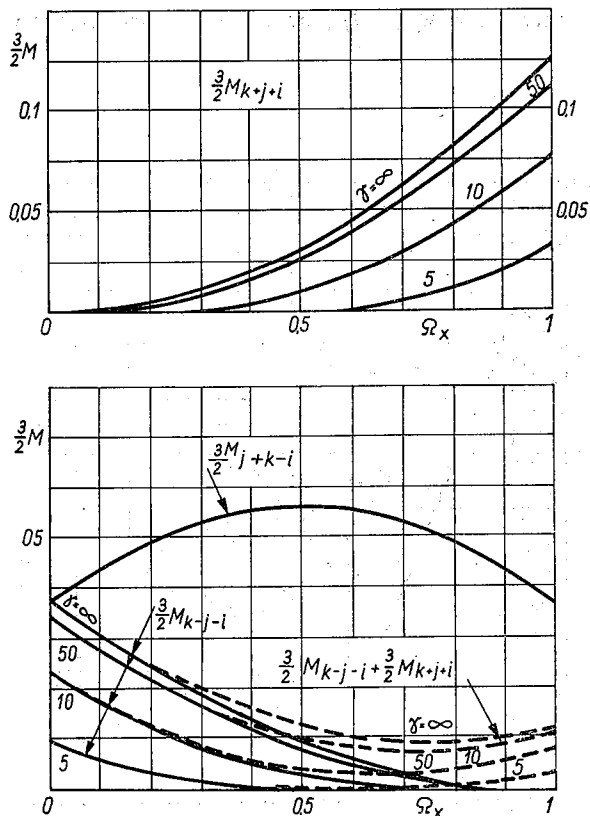
Rys. 6. Zależność $M_2 = M_{j+i} + M_{j-i}$ od znormalizowanej częstotliwości Ω_x



Rys. 7. Przebieg znormalizowany funkcji rozkładu produktów nieliniarnych drugiego rzędu



Rys. 8. Znormalizowane funkcje rozkładu produktów nieliniarnych trzeciego rzędu



Rys. 9. Znormalizowane funkcje rozkładu produktów nieliniarnych trzeciego rzędu w pasmie liniowym systemu

Tablica 3

Wartości elementów składowych zależności na poziom mocy produktów nieliniarnych

Wielk. System	Typ kabla współ- osiowego	$\frac{1}{2} \ln N$	$\ln N$	$\frac{1}{2} \ln G$	$\frac{1}{2} \ln \frac{L}{I}$	$\frac{1}{2} \ln Z \left(\frac{L}{ZI} \right)^2$	f_1	f_2
$N = 300$	mało- wymiarowy	2,852	5,704	-0,41	2,87	4,65	60	1300
$N = 960$	mało- wymiarowy	3,433	6,867	0,41	3,22	5,35	60	4028
$N = 960$	normalno- wymiarowy	3,433	6,867	-0,41	2,79	4,49	60	4028
$N = 2700$	normalno- wymiarowy	3,95	7,901	-0,41	3,15	5,2	300	12388

gdzie Z — ilość odcinków jednorodnych w trakcie równa

$$Z = \frac{2500 \text{ km}}{280 \text{ km}}$$

Tablica 4

Wartości tłumienności harmonicznych

System	Typ kabla współ- osiowego	1 km	f_1 kHz	f_2 kHz	A_{nk}	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$N = 300$	małowymia- rowy	8	60	1300	A_{2k} [Np] A_{3k}	9,45 12,77	9,41 12,91	9,35 12,96	9,28 12,96	9,20 12,91	9,11 12,77
$N = 960$	małowymia- rowy	4	60	4028	A_{2k} [Np] A_{3k}	10,43 14,63	10,38 14,77	10,33 14,83	10,26 14,83	10,18 14,77	10,08 14,63
$N = 960$	normalno- wymiarowy	9,3	60	4028	A_{2k} [Np] A_{3k}	9,96 13,78	9,91 13,92	9,86 13,98	9,79 13,98	9,71 13,92	9,61 13,78
$N = 2700$	normalno- wymiarowy	4,6	300	12388	A_{2k} [Np] A_{3k}	10,78 15,46	10,73 15,60	10,67 15,66	10,60 15,66	10,52 15,60	10,43 15,46

Z zależności tych obliczono wymaganą tłumienność harmonicznych. Wartości elementów powyższych zależności podane są w tablicy 3. Wartości współczynników M obliczamy z zależności (47), (48) i (49).

Otrzymane wartości tłumienności harmonicznych podane są w tablicy 4.

4.3.7. Wpływ preemfazy na rozkład mocy produktów nieliniarnych

Jak nadmieniono w części 3, stosując preemfazę o odpowiednio ukształtowanej charakterystyce, można uzyskać prawie równomierny rozkład mocy zakłóceń pochodzących od szumów i produktów w całym paśmie liniowym systemu — we wszystkich kanałach. W wyniku tego można zmniejszyć moc użyteczną wzmacniacza, a także złagodzić wymagania na tłumienność harmoniczną.

Przy obliczaniu szczytowej wartości mocy sygnału wszystkich kanałów na wyjściu wzmacniacza w systemie z preemfazą należy wziąć pod uwagę zmianę przebiegu charakterystyki mocy, wprowadzoną przez preemfazę.

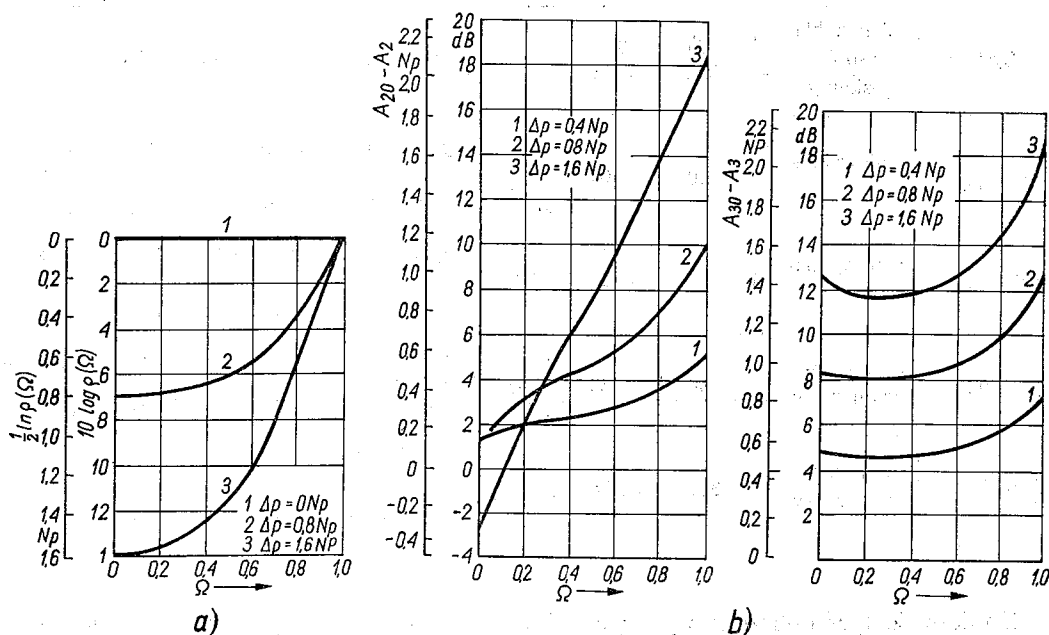
Ponieważ szумы wzmacniacza zależą od rozwiązania układu stopni wejściowych, a tłumienności harmoniczną — od częstotliwości, więc optymalną charakterystykę preemfazy można znaleźć dla konkretnego rozwiązania wzmacniacza liniowego.

W literaturze można spotkać różne ujęcia analityczne charakterystyki preemfazy. CCITiT zaleca m.in. następującą charakterystykę [1]:

$$A = 10 \lg \left[1 + \frac{a}{1 + \frac{b}{\left(\frac{f}{f_r} - \frac{f_r}{f} \right)^2}} \right] \text{ [dB]}, \quad (52)$$

gdzie: $a = 11,25$, $b = 1,56$, $f_r = 4,4 \text{ MHz}$.

Z równań (43), (44), (46) i (52) można obliczyć znormalizowane funkcje rozkładu gęstości mocy produktów nieliniarnych $M_2(\Omega_k)$ i $M_{k+j-i}(\Omega_k)$, a następnie — podobnie jak



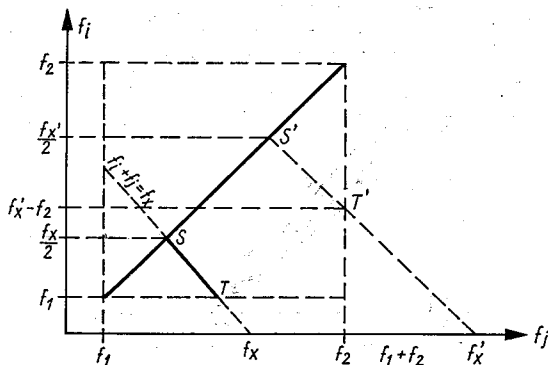
Rys. 10a) Charakterystyka preemfazy określonej zależnością (48) w funkcji częstotliwości znormalizowanej, b) Różnice między wymaganymi wartościami tłumienności harmonicznnych przy pracy bez preemfazy i z preemfazą określoną zależnością (52)

Z przedstawionych wykresów wynika, że począwszy od pewnej wartości preemfazy (między 0,8 a 1,6 N) zwiększa się moc zakłóceń produktów drugiego rzędu dla niskich częstotliwości ponad wartość uzyskiwaną przy pracy bez preemfazy. Wy tłumaczyć to można w ten sposób, że produkt różnicowy dwu sygnałów o wysokim poziomie wpada w kanał o niskim poziomie w zakresie niskich częstotliwości. Zatem zysk na wymaganiach dotyczących linearności wzmacniaczy przy zbyt dużej preemfazie nie ma praktycznego znaczenia. Tłumienność drugiej harmonicznej dla niskich częstotliwości musi być wtedy większa niż przy pracy bez preemfazy.

Załącznik

1. ROZKŁAD GĘSTOŚCI MOCY PRODUKTÓW TYPU $f_i + f_j$

Gęstość mocy produktów tego typu będzie różna od zera w zakresie częstotliwości od $2f_1$ do $2f_2$. Dla uniknięcia dwukrotnego brania pod uwagę tego samego produktu przyjmujemy, że częstotliwości f_i, f_j spełniają nierówność $f_j \geq f_i$. Założenie to umożliwia ustalenie wzajemnego uysytuowania względem siebie częstotliwości tworzących produkt uścymacyny $f_i + f_j$ i umożliwia uniknięcie dwukrotnego brania pod uwagę tego samego produktu (produkty $(f_i + f_j)$ i $(f_j + f_i)$ są tym samym produktem).



Rys. 11. Wyznaczenie zakresu częstotliwości f_j należących do pasma użytecznego systemu, dających produkt sumacyjny o częstotliwości f_x

Wykreślmy w układzie współrzędnych f_i, f_j prostą spełniającą równanie $f_x = f_i + f_j$, oraz prostą $f_i = f_j$, stanowiącą granicę obszaru, w którym $f_j \geq f_i$ (rys. 11). Przecięcie tych prostych ze sobą i z granicami pasma użytecznego systemu określa zakresy częstotliwości f_i i f_j , spełniających równanie $f_i + f_j = f_x$.

Z rysunku 11 wynika, że wszystkie częstotliwości f_i , będące współrzędnymi punktów należących do odcinka ST utworzą produkt sumacyjny $f_i + f_j$ o częstotliwości f_x . Zatem gęstość mocy produktu nie-
linieranego, sumacyjnego o częstotliwości f_x można wyrazić równaniem:

$$W_{i+j}(f_x) = 4h_{20}^2 \int_{f_1}^{\frac{f_x}{2}} W(f_x - f_i)W(f_i)df_i \quad (53)$$

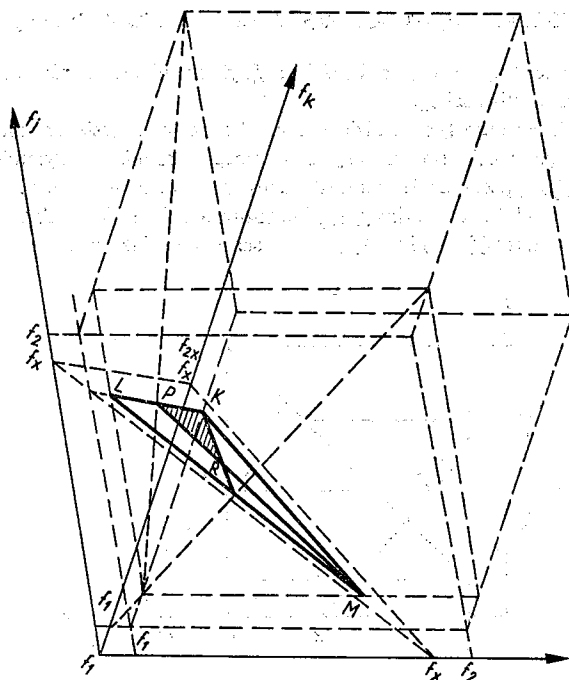
$$\text{jeśli } 2f_1 \leq f_x \leq f_1 + f_2$$

$$W_{i+j}(f_x) = 4h_{20}^2 \int_{f_x - f_2}^{\frac{f_x}{2}} W(f_x - f_i)W(f_i)df_i, \quad (54)$$

$$\text{jeśli } f_1 + f_2 \leq f_x \leq 2f_2.$$

2. ROZKŁAD GĘSTOŚCI MOCY PRODUKTÓW TYPU $f_i + f_j + f_k$

Wyznamy obszar częstotliwości f_i, f_j, f_k spełniających równanie $f_i + f_j + f_k = f_x$, przy warunku $f_k \geq f_j \geq f_i$. Nierówność ta umożliwia ustalenie wzajemnego usytuowania względem siebie częstotliwości f_i, f_j i f_k i pozwala na uniknięcie wielokrotnego brania pod uwagę tego samego produktu.



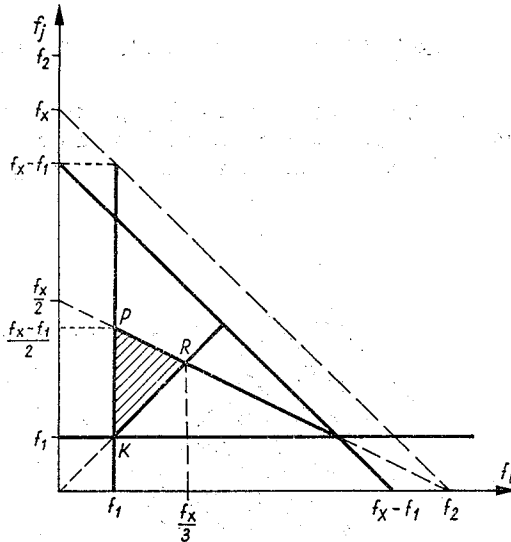
Rys. 12. Wyznaczenie obszaru, dla którego $f_i + f_j + f_k = f_x$; $f_k \geq f_j \geq f_i$ dla $3f_1 \leq f_x \leq 2f_1 + f_2$

Dla wyznaczenia poszukiwanego obszaru przeprowadzmy przez sześcian wyznaczany granicznymi częstotliwościami systemu w układzie współrzędnych f_i, f_j, f_k płaszczyznę spełniającą równanie $f_i + f_j + f_k = f_x$ (rys. 12).

Dla częstotliwości f_x zawartych w przedziale:

$$3f_1 \leq f_x \leq f_2 + 2f_1$$

przecięcie tego sześciangu płaszczyzną $f_i + f_j + f_k = f_x$ utworzy trójkąt KLM . Punkty, dla których spełniona jest nierówność $f_k \geq f_j \geq f_i$, leżą w zakreślanej części trójkąta. Jej brzegi są wyznaczone przez krawędzie przecięcia trójkąta KLM z płaszczyznami $f_i = f_j$ i $f_i = f_k$.



Rys. 13. Rzut trójkąta PRK na płaszczyznę f_i, f_j

Rzut interesującej nas części trójkąta KLM na płaszczyznę f_i, f_j przedstawia rys. 13. Dla każdej pary częstotliwości f_i i f_j , które są współrzędnymi punktu należącego do trójkąta KPR , można znaleźć taką częstotliwość f_k , że $f_k + f_j + f_i = f_x$, $f_k \geq f_j \geq f_i$, $3f_1 \leq f_x \leq f_2 + 2f_1$. Zatem gęstość mocy produktu typu $f_i + f_j + f_k$ o częstotliwości f_x wyniesie:

$$W_{i+j+k}(f_x) = 36h_{30}^2 \int_{f_1}^{\frac{f_x}{2}} W(f_i) \int_{f_i}^{\frac{f_x-f_i}{2}} W(f_j) W(f_x - f_i - f_j) df_j df_i, \quad (55)$$

$$\text{dla } 3f_1 \leq f_x \leq f_2 + 2f_1.$$

Dla innych zakresów częstotliwości f_x można w podobny sposób otrzymać następujące zależności:

$$W_{i+j+k}(f_x) = 36h_{30}^2 \left[\int_{f_1}^{\frac{f_x-f_2}{2}} W(f_i) \int_{f_x-f_i-f_2}^{\frac{f_x-f_i}{2}} W(f_j) W(f_x - f_j - f_i) df_j df_i + \right. \\ \left. + \int_{\frac{f_x-f_2}{2}}^{\frac{f_x}{3}} W(f_i) \int_{f_i}^{\frac{f_x-f_i}{2}} W(f_j) W(f_x - f_j - f_i) df_j df_i \right], \quad (56)$$

$$\text{dla } f_2 + 2f_1 \leq f_x \leq 2f_2 + f_1.$$

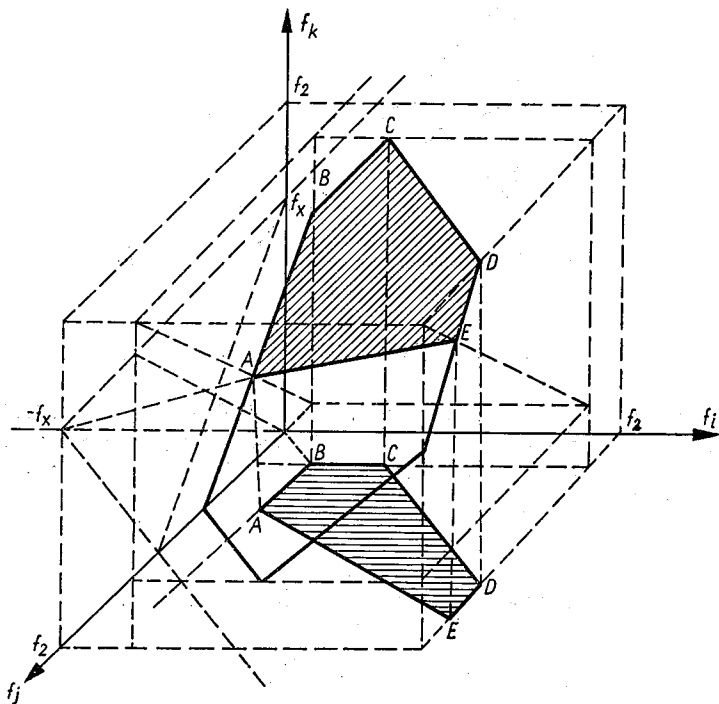
oraz

$$W_{i+j+k}(f_x) = 36h_{30}^2 \int_{f_x-2f_2}^{f_2} W(f_i) \int_{f_x+f_i-f_2}^{\frac{f_x-f_1}{2}} W(f_j) W(f_x-f_i-f_j) df_j df_i, \quad (57)$$

dla $2f_2+f_1 \leq f_x \leq 3f_2$.

3. ROZKŁAD GĘSTOŚCI MOCY PRODUKTÓW TYPU $f_k+f_j-f_i$

Założmy, że częstotliwości f_k i f_j spełniają nierówność $f_k \geq f_j$. Częstotliwości, spełniające warunek $f_k+f_j-f_i = f_x$ i $f_k \geq f_j$, można wyznaczyć w sposób przedstawiony na rys. 14. Wyznaczamy wielobok, będący przecięciem sześcianu określonego zakresem zmian częstotliwości f_i, f_j, f_k z płaszczyzną $f_i =$



Rys. 14. Wyznaczenie miejsca geometrycznego punktów spełniających warunki $f_k+f_j-f_i = f_x$; $f_k \geq f_j$; $f_1 \leq f_j \leq f_2$; $f_1 \leq f_k \leq f_2$; $f_1 \leq f_i \leq f_2$; $f_1 \leq f_x \leq f_2$

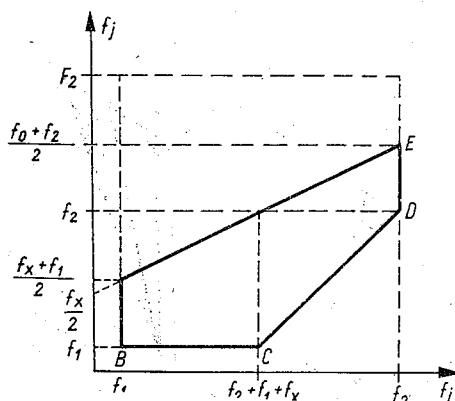
$f_k+f_j-f_x$. Kształt tego wieloboku będzie zależał od zakresu częstotliwości f_x . Następnie wyznaczamy krawędź przecięcia wieloboku z płaszczyzną $f_k = f_j$. Konstrukcja pokazana na rys. 15 dotyczy zakresu częstotliwości f_x , dla którego:

$$f_j \leq f_x \leq f_2.$$

Zauważmy, że współrzędne punktów należących do pięcioboku $ABCDE$ spełniają warunki $f_k+f_j-f_x = f_i$, $f_k \geq f_j$. Na rys. 15 przedstawiono rzut pięcioboku $ABCDE$ na płaszczyznę f_i i f_j .

Współrzędne punktów $ABCDE$ są następujące:

	f_1	f_j	f_k
A	f_1	$\frac{f_x+f_i}{2}$	$\frac{f_x+f_i}{2}$
B	f_1	f_1	f_x
C	$f_2-f_1-f_x$	f_1	f_2
D	f_2	f_x	f_2
E	f_2	$\frac{f_x+f_2}{2}$	$\frac{f_x+f_2}{2}$



Rys. 15. Rzut pięcioboku $ABCDE$ na płaszczyznę f_i, f_j

Zatem rozkład gęstości mocy produktów nieliniarnych typu $f_k+f_j-f_i$ można wyrazić równaniem:

$$W_{k+j-i}(f_x) = 36h_{30}^2 \left[\int_{f_1}^{f_2+f_1-f_x} W(f_i) \int_{f_1}^{\frac{f_x+f_i}{2}} W(f_j) W(f_x+f_i+f_j) df_j df_i + \right. \\ \left. + \int_{f_2+f_i-f_x}^{f_2} W(f_i) \int_{f_x+f_i-f_2}^{\frac{f_x+f_i}{2}} W(f_j) W(f_x+f_i-f_j) df_j df_i \right]. \quad (58)$$

Dla innych zakresów częstotliwości f_x otrzymujemy w podobny sposób następujące zależności:

$$W_{k+j-i}(f_x) = 36h_{30}^2 \int_{2f_i-f_x}^{f_2} W(f_i) \int_{f_1}^{\frac{f_x+f_i}{2}} W(f_j) W(f_x+f_i-f_j) df_j df_i, \quad (59) \\ \text{dla } 0 \leq f_x \leq f_1$$

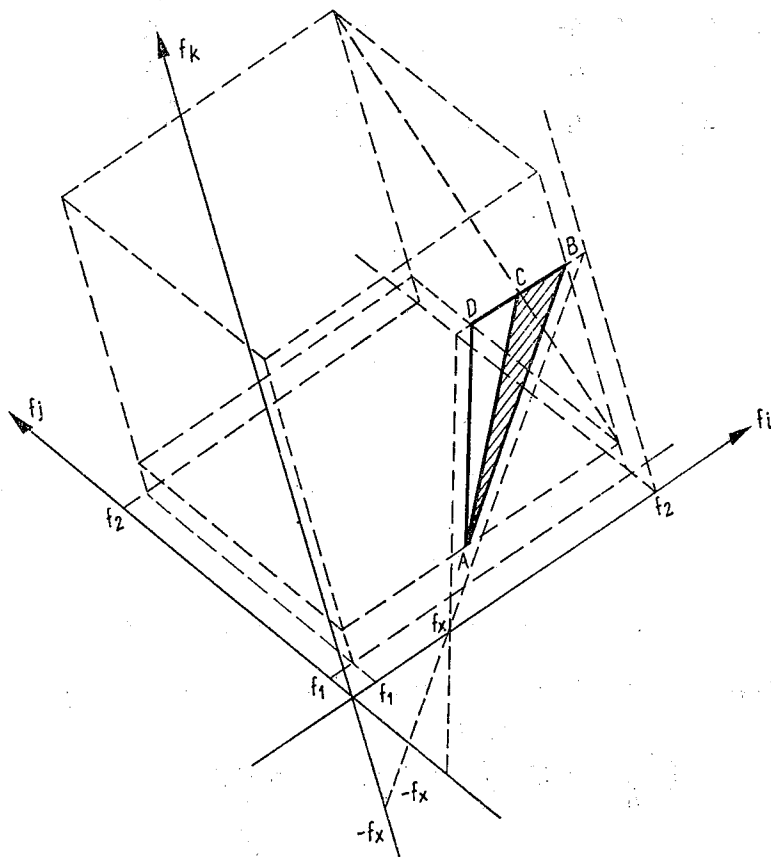
oraz

$$W_{k+j-i}(f_x) = 36h_{30}^2 \int_{f_1}^{2f_2-f_x} W(f_i) \int_{f_x+f_i-f_2}^{\frac{f_x+f_i}{2}} W(f_j) W(f_x+f_i-f_j) df_j df_i, \quad (60) \\ \text{dla } f_2 \leq f_x \leq 2f_2-f_1.$$

4. ROZKŁAD GĘSTOŚCI MOCY PRODUKTÓW TYPU $f_i - f_j - f_k$

Na rys. 16 przedstawiono płaszczyznę $f_k = f_x + f_j + f_i$ przecinającą sześcian, określający zakres zmian częstotliwości f_k, f_j, f_i . Punkty leżące na powierzchni przekroju (trójkąt ABD) będą spełniały równanie:

$$f_i - f_j - f_k = f_x.$$



Rys. 16. Wyznaczenie miejsca geometrycznego punktów posiadających następujące własności: $f_i - f_j - f_k = f_x$; $f_1 \leq f_i$; $f_j, f_k \leq f_2$ gdy $0 \leq f_x \leq f_2 - 2f_1$; $f_k \geq f_j$

Dla uniknięcia wielokrotnego brania pod uwagę tego samego produktu przyjmijmy, że $f_k \geq f_j$. Współrzędne punktów leżących na powierzchni trójkąta ABC , uzyskanego w wyniku przecięcia trójkąta ABD płaszczyzną $f_k = f_j$, mają następujące własności:

$$f_i - f_j - f_k = f_x,$$

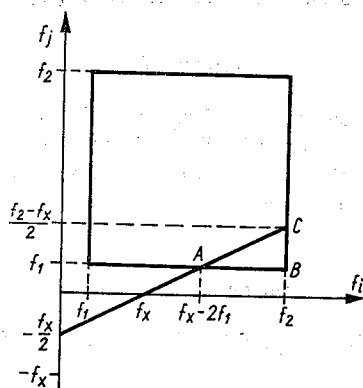
$$f_k \geq f_j,$$

$$f_1 \leq f_i, f_j, f_k \leq f_2.$$

Częstotliwości będące współrzędnymi punktów trójkąta ABC będą generować produkt typu $f_i - f_j - f_k$ o częstotliwości f_x .

Rzut trójkąta ABC na płaszczyznę f_i, f_j przedstawia rys. 17. Wierzchołki trójkąta mają następujące współrzędne:

	f_i	f_j	f_k
A	$f_x + 2f_i$	f_1	f_1
B	f_2	$\frac{f_2 - f_x}{2}$	$\frac{f_2 - f_x}{2}$
C	f_2	f_1	$f_2 - f_1 - f_x$



Rys. 17. Rzut trójkąta ABC z rys. 11 na płaszczyznę f_i, f_j

Rozkład gęstości mocy produktów typu $f_i - f_j - f_k$ można więc wyrazić równaniem:

$$W_{i-j-k}(f_x) = 36h_{30}^2 \int_{f_x+2f}^{f_2} W(f_i) \int_{f_1}^{\frac{f_x-f_i}{2}} W(f_j) W(f_i - f_x - f_j) df_j df_i. \quad (61)$$

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. CCITT, Księga błękitna, t. III, WKiŁ, 1969.
2. F. Błocki, Z. Skarbiński, Systemy wielokrotne w telekomunikacji, WNT, Warszawa 1962.
3. H. L. Bakker, The Output Power of Line Amplifiers in Carrier Telephony System Employing Pre-Emphasis, Philips Telecommunication Review, July 1965.
4. S. Janson, V. Stending, Some Problems Concerning Noise in Wide-Band Carrier Systems, Ericsson Technics, nr 1, 1960.
5. J. D. Faber, Raczot charakteristik mnogokanalnych sistem swiazi z tranzystornymi usitielami, Swiazizdat, Moskwa 1963.
6. E. Hölzler, D. Theirbach, Nachrichten-Übertragung, Grundlagen und Technik, Springer-Verlag, 1966.
7. N. W. Smirnow, Osnovy radioswiazzi na ultrakorotkich wołnach, Swiazizdat, 1957.
8. J. Osiowski, Zarys rachunku operatorowego, WNT, 1965.

P. BUBLEWICZ, J. KOCHMAN

SOME PROBLEMS OF MULTICHANNEL SYSTEMS

Summary

In the paper problems of thermal noise and nonlinear distortion in multichannel systems with amplitude modulation are presented. Derived results can be used for designing optimal parameters of line: gain and overload power of line amplifiers.

P. BUBLEWICZ, J. KOCHMAN

CERTAINES QUESTIONS DE LA THÉORIE DES VOIES DE TRANSMISSION

Résumé

L'article traite des problèmes concernant les bruits thermiques et la distortion nonlinéaire, qui se manifestent dans les voies de transmission de la téléphonie multiple à modulation d'amplitude. Les formules présentées permettent de calculer les paramètres optimaux des voies de transmission: le coefficient d'amplification et le niveau de la puissance utile.

P. BUBLEWICZ, J. KOCHMAN

GEWÄHLTE PROBLEME DER THEORIE DER ÜBERTRAGUNGSTRAKTE

Zusammenfassung

Im Artikel werden Probleme thermischen Rauschens und der nichtlinearen Verzerrungen dargestellt, die in Übertragungstrakten von Vielfachtelefoniesystemen mit Amplitudenmodulation auftreten.

Die abgeleiteten Beziehungen ermöglichen die Berechnung optimaler Parameter von Übertragungstrakten: der Verstärkung von Gruppenleitungsverstärker und des Nutzleistungspegels.

П. БУБЛЕВИЧ, Я. КОХМАН

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ТРАКТОВ ДАЛЬНОЙ СВЯЗИ

Резюме

В статье представлены проблемы термических шумов и нелинейных искажений, выступающих в трактах дальней связи с амплитудной модуляцией. Приведены формулы, которые дают возможность вычислять оптимальные параметры трактов дальней связи: коэффициенты усиления усилителей и уровень предельной мощности.

La méthode de la ligne longueur $\lambda/4$ appliquée aux mesures des éléments avec deux entrées dans la large bande de fréquence	289
Methode der Viertelwellenlinie in Anwendung für Bemessungen von Kapazitätselementen in einem breiten Frequenzstreifen	289
J. Z a b r o d z k i: Input-Output Characteristics of Logical Circuits using the Electrical Potentials for the Coding of Signals	308
Caractéristique de transfert des circuits logiques	308
Übergangscharakteristiken logischer Anordnungen mit Signalpotentialkodieren	309
M. S k o w r o ŋ s k a: Optimization of Solutions of Wave Filters on the Basis of Graph Theory and of Computer System Synthesis	362
Optimalisierung der Gestaltung eines Elektrofilters in Anlehnung an die Graphentheorie sowie Maschinensynthese von Anordnungen	363
P. B u b l e w i c z, J. K o c h m a n: Some Problems of Multichannel Systems	396
Certaines questions de la théorie des voies de transmission	396
Gewählte Probleme der Theorie der Übergangstrakte	396

СОДЕРЖАНИЕ

П. Я. Новацки, М. Кендзерски: Новая мостовая схема для измерения угловой погрешности измерения электродинамических ваттметров	226
В. Е. Стэпович: Свойства трёхпереходной структуры полупроводников для постоянного тока	234
М. Бялко, В. Сенько: Синтез линейных интегральных схем методом пространства состояний. Часть 1: Введение в синтез функции передачи	252
В. Сенько, М. Бялко: Синтез линейных интегральных схем методом пространства состояний. Часть 2: Синтез адмитанции	268
Я. Лыскановски: Влияние источника переключения на действие транзисторного реле времени с контуром $PQ (R, C)$	280
Я. Комисарчук: Применение метода четвертьволновой линии к измерениям четырёхполусников в широком диапазоне частот	289
Я. Жабродзки: Передаточные характеристики логических схем с потенциальным кодированием сигналов	309
М. Сковроньска: Оптимализация решения электрического фильтра на основании теории графов и машинного синтеза схем	363
П. Бублевич, Я. Кохман: Избранные вопросы теории трактов дальней связи	396

Rozprawy Elektrotechniczne

Kwartalnik

WARUNKI PRENUMERATY CZASOPISMA

Cena prenumeraty rocznej	zł 160.—
„ „ półrocznej	zł 80.—

Institucje państwowe, społeczne, zakłady pracy, szkoły itp. mogą zamawiać prenumeratę wyłącznie w miejscowych oddziałach i delegaturach „Ruch”.

Prenumeratorzy indywidualni mogą opłacać prenumeratę w urzędach pocztowych i u listonoszy, lub dokonywać wpłat na konto PKO nr 1-6-100020 — Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw „Ruch”, Warszawa, ul. Towarowa 28 (w terminie do 10 dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty).

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od od prenumeraty krajowej, przyjmuje Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych „Ruch”, Warszawa, ul. Wronia 23, konto PKO nr 1-6-100024.

Bieżące i archiwalne numery można nabywać lub zamawiać we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Warszawa, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

Sprzedaż egzemplarzy numerów zdeaktualizowanych, na uprzednie pisemne zamówienie, prowadzi Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw „Ruch”, Warszawa, ul. Towarowa 28.

Subscription orders can be sent directly to: Ars Polona — „Ruch”.
Warszawa 1, P. O. Box 154, sending remittance of 16\$ through the Bank
Handlowy — Warszawa, Traugutta 7

KOMITET ELEKTROTECHNIKI
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XVII·ZESZYT 3

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1971

Wytyczne dla autorów

Komitet Redakcyjny prosi autorów o ułatwienie prac redakcyjnych związanych z przygotowaniem do druku nadesłanych artykułów przez przestrzeganie następujących wytycznych przy przygotowaniu maszynopisu:

1. Prace powinny być napisane pismem maszynowym, na pojedynczych arkuszach formatu A4, jednostronnie, z podwójną interlinią (co drugi wiersz), z marginesem szerokości ok. 3,5 cm z lewej strony. Stronice numerowane. Artykuły należy nadsyłać w dwu egzemplarzach (oryginał i pierwsza kopia na papierze maszynowym).

2. Wzory i oznaczenia należy wpisywać ręcznie, czytelnie, używając jedynie liter łacińskich i greckich. Wskaźniki niżej liter i wykładniki potęg należy pisać szczególnie dokładnie i wyraźnie. Numery wzorów należy umieszczać z prawej strony.

3. Każda praca powinna być zaopatrzona w streszczenie w języku polskim objętości do jednej strony maszynopisu oraz w cztery streszczenia w językach angielskim, francuskim, niemieckim i rosyjskim, z których dwa (w dowolnych językach) mogą być dłuższe, np. objętości 1 strony na każde 20 stron tekstu, dwa zaś krótsze, objętości 10 — 15 wierszy maszynopisu. W razie niemożności nadesłania streszczeń w językach obcych autor dostarcza streszczenie w języku polskim, do każdego języka oddzielnie, podając niezbędną do wykonania tłumaczenia obcojęzyczną terminologię.

4. Rysunki, wykresy i zdjęcia należy wykonać na oddzielnych arkuszach z podaniem kolejnych numerów rysunków. W tekście i na marginesie, obok właściwego tekstu, należy podać jedynie odnośny numer rysunku. Natomiast pożądane jest zaopatrywanie rysunków w krótki podpis wyjaśniający również wtedy, gdy rysunek omówiony jest w tekście. Ostateczne wykonanie rysunku obowiązuje Redakcję.

5. Wszystkie rysunki, wykresy i zdjęcia należy nazywać w tekście rysunkami (skrót: rys.) i nie stosować takich określeń, jak figura, szkic, rycina, fotografia. U samego dołu rysunku (a przy fotografiach na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, napis pod rysunkiem, tytuł pracy i nazwisko autora.

6. Wszystkie tablice (unikać zbyt dużych), podobnie jak rysunki, należy wykonać na oddzielnych arkuszach i numerować kolejno liczbami arabskimi. U góry każdej tablicy podać tytuł (napis objaśniający). Wszelkie zestawienia należy nazywać tablicami (nie tabelami).

7. Po zakończeniu artykułu należy podać wykaz literatury, wymieniając w następującej kolejności: pierwsze litery imion, nazwisko autora, po czym po przecinku pełny tytuł dzieła lub artykułu, tytuł czasopisma, tom, numer zeszytu, rok i miejsce wydania oraz ewentualnie numer strony. Pozycje wykazu powinny być ponumerowane, w tekście — powołania na numer pozycji w nawiasach prostokątnych, na przykład [3].

8. Redakcji przysługuje prawo do przeprowadzenia korekty stylistycznej i do dostosowania oznaczeń oraz układu pracy do norm przyjętych w „Rozprawach”.

9. Autora obowiązuje korekta autorska, którą należy zwracać w ciągu trzech dni. W korekcie autorskiej nie mogą być wprowadzone żadne poprawki tekstu złożonego uprzednio w maszynopisie, które mogłyby spowodować konieczność przełamywania składu drukarskiego.

10. Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egzemplarzy odbitek jego pracy. Dodatkowe egzemplarze autor może zamówić w Redakcji na własny koszt przy przesyłaniu maszynopisu swej pracy.

11. Niezastosowanie się autora do powyższych wytycznych pociągnie za sobą potrącenia z honorarium autorskiego kosztów związanych z doprowadzeniem dostarczonych przez autora materiałów do wymaganej formy.

KOMITET ELEKTROTECHNIKI
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XVII·ZESZYT 3

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1971

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor Naczelny

PROF. DR WITOLD NOWICKI

Członkowie

PROF. TADEUSZ CHOLEWICKI, PROF. EUGENIUSZ JEZERSKI,
PROF. DR WITOLD ROSIŃSKI, PROF. DR STANISŁAW RYŻKO

Sekretarz

JANINA MATHEISEL

ADRES REDAKCJI

*Warszawa, Politechnika, Plac Jedności Robotniczej 1
Instytut Teleelektroniki, Gmach Elektroniki
pokój 472, tel. 21-007-232 oraz 25-09-10*

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

Warszawa, Miodowa 10

Nakład 630(510+120)	Oddano do składania 24.IV.1971
Ark. wyd. 16,5 ark. druk. 12,5	Podpisano do druku w sierpniu 1971 r.
Papier druk. sat. kl. III, 80g, 70×100	Druk ukończono w sierpniu 1971 r.
Zamówienie nr 624/71	Cena zł 40.— U-102

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

Zastosowanie nulatorów i noratorów do tworzenia równoważnych układów aktywnych

MICHAŁ BIAŁKO (GDAŃSK)

Instytut Technologii Elektronicznej Politechniki Gdańskiej

Otrzymano 29.4.1970

W pracy podano definicje i właściwości nulatorów i noratorów. Przedstawiono metody tworzenia równoważnych układów dla źródeł sterowanych. Zwrócono uwagę na możliwość powstawania dodatnich sprzężeń zwrotnych w układach zmodyfikowanych.

1. WPROWADZENIE

Elementy dwójnikowe nazywane nulatorami i noratorami zostały wprowadzone do rozważań w celu „skompletowania” lub inaczej uzupełnienia klasy elementów liniowych potrzebnych do reprezentacji wszystkich możliwych właściwości układów liniowych [1], [2]. Dwójniki te nazywane osobliwymi, zdegenerowanymi lub patologicznymi nie mogą być opisane przy pomocy znanych macierzy jak $[z]$, $[y]$, $[g]$, $[h]$, $[L]$ (łańcuchowa), $[S]$ (rozproszeniowa). Reprezentują one parametry lub właściwości niektórych układów, w przypadkach granicznych, kiedy parametry te nie dadzą się przedstawić za pomocą znanych dotychczas elementów układowych. Nulatory i noratory nie tylko mają znaczenie teoretyczne, lecz także znajdują praktyczne zastosowanie przy tworzeniu równoważnych liniowych układów aktywnych [3].

Nulator jest zdefiniowany przez zależności:

$$U = 0, I = 0, \quad (1)$$

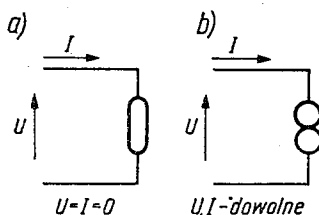
co oznacza, że jest to element, który jednocześnie stanowi zwarcie i rozwarcie. Jednakże warto tu podkreślić, że zwarcie dotyczy napięcia ($U = 0$), a rozwarcie — prądu ($I = 0$).

Drugi element osobliwy — norator — posiada takie właściwości, że napięcie U panujące na nim i prąd I , przepływający przez niego mogą być dowolne. Wartości napięcia i prądu są określane przez inne „normalne” elementy układu, w skład którego wchodzi norator.

Symboliczne przedstawienie nulatora i noratora pokazane jest na rysunku 1a i 1b (a — nulator, b — norator).

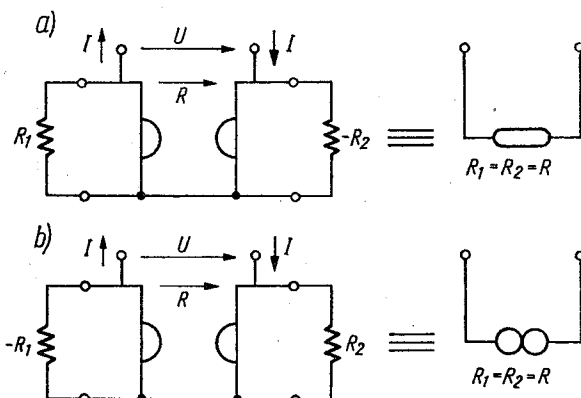
Nulator nie może w odosobnieniu reprezentować fizycznego układu. Podobnie jest z noratorem. Jednakże łączne występowanie par nulator-norator może reprezentować idealizowane układy fizyczne.

Układ, który w granicznym przypadku dla $R_1 = R_2 = R$ posiada właściwości nulatora, pokazany jest na rysunku 2a. Na rysunku 2b pokazany jest analogiczny układ mogący przedstawiać norator [2]. Są to modele teoretyczne. Układy z rysunku 2 składają się z żyratorów o oporności żyracji R włączonych w układach trójwejściowych cyrkulatorów,



Rys. 1. Symboliczne przedstawienie nulatora — a i noratora — b

w których dwa wejścia obciążone są: w układzie z rysunku 2a — opornością R_1 i ujemną opornością $-R_2$, a na rysunku 2b — opornością R_2 i ujemną opornością $-R_1$. Modele nulatora i noratora z rysunku 2 mają charakter teoretyczny.



Rys. 2. Teoretyczne schematy realizacji nulatora — a i noratora — b

W celu wyjaśnienia własności układów z rysunku 2 można rozpatrzyć impedancję $Z = \frac{U}{I}$. W ogólnym przypadku impedancja dwójnikowa układu z rysunku 2a wynosi:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{R^2 - R_1 R_2}{R_1 - R_2} \quad (2)$$

Z wyrażenia tego wynika, że wielkość $Z = \frac{U}{I}$ jest impedancją, z wyjątkiem przypadku gdy $R_1 = R_2 = R$. Należy podkreślić, że wartości graniczne impedancji $\lim Z$ mogą przyjmować wartości od zera do nieskończoności,

$R_1 \rightarrow R$
 $R_2 \rightarrow R$